UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Índice de Yang e Teoremas Generalizados

Willer Daniel da Silva Costa

São Carlos - SP
Julho de 2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Índice de Yang e Teoremas Generalizados

Willer Daniel da Silva Costa
Orientadora: Profa. Dra. Adriana Ramos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

São Carlos - SP
Julho de 2011

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

	Costa, Willer Daniel da Silva.
C837iy	Índice de Yang e teoremas generalizados / Willer Daniel da Silva Costa. -- São Carlos : UFSCar, 2011.
	80 f.
	Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2011.
	1. Teoria de homologia. 2. Índice. 3. Homologia de Cech-Smith. 4. Teorema de Borsuk-Ulam. 5. T-espaços. I. Título.
	CDD: 514.23 (20ª)

Banca Examinadora:

Adriana Ramos.

Profa. Dra. Adriana Ramos
DM - UFSCar

Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher
DM - UFSCar

Profa. Dra. Denise de Mattos
ICMC - USP

Dedico aos meus pais

Lia Regina e

Ademir (*in memorian*)

"Der Zweck dieser Arbeit ist, folgende drei Sätze zu beweisen:

Satz I. Jede antipodentreue Abbildung von S_n ist wesentlich.

Satz II. Ist $f \in R^{nS_n}$ (d. h. bildet f die Sphäre S_n auf einen Teil von R^n ab), so gibt es einen derartigen Punkt $p \in S_n$, dass $f(p) = f(p^*)$ ist.

Satz III. Sind $A_0, A_1, \ldots, A_n$ in sich kompakte Mengen von denen keine zwei antipodische Punkte der Sphäre S_n enthält, so enthält die Summe $\sum_{i=1}^{n} A_i$ die Sphäre S_n nicht."

Karol Borsuk

Agradecimentos

A Deus por iluminar meu caminho.

À Profa. Adriana Ramos, pela orientação, apoio e pela grande amiga que se revelou durante este trabalho.

À minha mãe Lia Regina, minha avó Rita e minha grande amiga e companheira Patrícia Desideri.

Aos amigos Mateus Moreira, Mateus Guimarães, Mauro Ciarallo, Northon Canevari, Rafael Moreira, Sergio Ura, Silvestre Monteiro; aos amigos do alojamento 22 e do basquete na praça de esportes - Rio Pomba.

Aos professores, funcionários e colegas do DMA-UFV e do DM-UFSCar, por contribuírem para minha formação e pelo incentivo.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Aos meus familiares e a todos que, direta ou indiretamente, participaram, de uma forma ou de outra, do desenvolvimento deste trabalho.

Resumo

Trabalhamos com T-*espaços* $(X;T)$, em que X é um espaço compacto e Hausdorff e $T : X \to X$ é uma involução contínua sem pontos fixos. Considerando a esfera S^n com a aplicação antipodal, destacamos três teoremas clássicos relativos ao T-espaço $(S^n;A)$: teorema de Borsuk-Ulam, teorema de Kakutani-Yamabe-Yujobô e teorema de Dyson.

Esta dissertação consiste em um estudo detalhado do artigo de C. T. Yang (Annals of Math. 60, no. 2 (1954), 262-282) em que o autor introduz um conceito de *índice* e apresenta, em certo sentido homológico, generalizações dos três teoremas citados acima, considerando T-espaços quaisquer.

Além das generalizações em si, construímos exemplos de cálculo de índice de alguns T-espaços e, ainda, exploramos um conceito de ortogonalidade em T-espaços.

Abstract

We work with *T-spaces* $(X;T)$, where X is a Hausdorff compact space and $T : X \to X$ is a continuous involution without fixed points. Considering the sphere S^n with the antipodal map, we highlight three classical theorems relating to the T-space $S^n; A)$: Borsuk-Ulam's theorem, Kakutani-Yamabe-Yujobô's theorem and Dyson's theorem.

This dissertation consists of a detailed study of the article fo C. T. Yang (Annals of Math. 60, no. 2 (1954), 262-282) where the author introduces a concept of the *index* and presents, in a sense homological, generalizations of the three theorems cited above, considering any T-space.

Beyond the generalizations itself, we build examples of the index calculation of some T-spaces and, still, we explore a concept of orthogonality in T-spaces.

Sumário

Introdução

Os objetos básicos deste trabalho são os pares $(X;T)$, em que X é um espaço Hausdorff compacto e $T : X \to X$ é uma involução, em X, contínua *sem* pontos fixos (ou seja: para todo $x \in X$, $T(T(x)) = x$ e $T(x) \neq x$). Denominamos tais objetos por T-espaços.

Como exemplo canônico de T-espaço, consideramos, para cada número natural n, a esfera

$$S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

junto com a aplicação antipodal $A : S^n \to S^n$, dada por $A(x) = -x$. Sobre os T-espaços $(S^n; A)$ destacamos três teoremas clássicos:

Teorema de Borsuk-Ulam. *Seja $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Então existe $x \in S^n$, tal que $f(x) = f(A(x))$.*

Teorema de Kakutani-Yamabe-Yujobô. *Seja $f : S^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existem $n+1$ pontos $x_1, \ldots, x_{n+1} \in S^n$ tais que $f(x_1) = \ldots = f(x_{n+1})$ e $x_1, \ldots, x_{n+1}$ são mutuamente ortogonais.*

Teorema de Dyson. *Seja $f : S^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existem dois pontos $x_1, x_2 \in S^2$ tais que $f(x_1) = f(x_2) = f(A(x_1)) = f(A(x_2))$ e x_1, x_2 são ortogonais.*

No artigo [2] de C.T. Yang, o autor obteve generalizações dos três teoremas acima. *Grosso modo*, considerando T-espaços $(X;T)$ arbitrários, C.T. Yang (em [2]) apresentou uma homologia para $(X;T)$, a qual se referiu como *Homologia de Čech-*

Smith, e introduziu, para cada natural p, o homomorfismo índice $\nu : H_p(X;T) \to \mathbb{Z}_2$, definido no p-ésimo grupo de homologia de $(X;T)$, com valores no grupo $\mathbb{Z}_2$ de ordem 2. Desse modo, ele definiu o índice de $(X;T)$ sendo o (único) natural m tal que $\nu(H_m(X;T)) = \mathbb{Z}_2$ e $\nu(H_{m+1}(X;T)) = 0$.

Visto que $(S^n; A)$ é um T-espaço de índice n, o teorema a seguir (obtido em [2]) é uma generalização do Teorema de Borsuk-Ulam.

Teorema. *Se $(X;T)$ é um T-espaço de índice n, então, para cada $f : X \to \mathbb{R}^n$ contínua, existe $x \in X$ tal que $f(x) = f(T(x))$.*

Quanto ao Teorema de Kakutani-Yamabe-Yujobô (com o devido respeito, abreviaremos para "Teorema K-Y-Y"), Yang propôs uma extensão do conceito de ortogonalidade em um T-espaço qualquer. Mais precisamente, considerando o produto interno usual $\langle , \rangle : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ restrito a $S^n \times S^n$, os conjuntos

$$E = \{(x,y) \in S^n \times S^n : \langle x, y\rangle \geq 0\},$$

$$F = \{(x,y) \in S^n \times S^n : \langle x, y\rangle \leq 0\};$$

são fechados tais que:

(i) $E \cup F = S^n \times S^n$;

(ii) $(x,y) \in E \Leftrightarrow (y,x) \in E \Leftrightarrow (x, T(y)) \in F \Leftrightarrow (T(x), y) \in F$;

(iii) $D = \{(x,x) : x \in S^n\} \subset E - F$.

Além disso, dados $x, y \in S^n$ quaisquer, temos: x e y são ortogonais se, e somente se, $(x,y) \in E \cap F$.

Nesse sentido, Yang obteve a seguinte generalização do Teorema K-Y-Y:

Teorema. *Seja $(X;T)$ um T-espaço de índice n e sejam E,F subespaços fechados de $X^2 = X \times X$ tais que:*

- $E \cup F = X^2$
- $(x,y) \in E \Leftrightarrow (y,x) \in E \Leftrightarrow (T(x), y) \in F \Leftrightarrow (x, T(y)) \in F$.

- $D = \{(x,x) : x \in X\} \subset E - F$.

Então, para toda função $f : X \to \mathbb{R}$ *contínua, existem* $n+1$ *pontos* $x_1, \ldots, x_{n+1}$ *de* X *tais que* $f(x_i) = f(x_j)$*, para todo* $i, j = 1, \ldots, n+1$*, e* $(x_i, x_j) \in E \cap F$ *para* $i \neq j$*.*

Finalmente, combinando os dois teoremas anteriores, Yang provou uma generalização do Teorema de Dyson:

Teorema. *Seja* $(X;T)$ *um* T*-espaço de índice* n *e sejam* E,F *subespaços fechados de* X^2 *tais que:*

- $E \cup F = X^2$
- $(x,y) \in E \Leftrightarrow (y,x) \in E \Leftrightarrow (T(x),y) \in F \Leftrightarrow (x,T(y)) \in F$.
- $D = \{(x,x) : x \in X\} \subset E - F$.

Então, para qualquer função contínua $f : X \to \mathbb{R}$*, existem* n *pontos* $x_1, \ldots, x_n \in X$ *tais que* $f(x_1) = f(T(x_1)) = \ldots = f(x_n) = f(T(x_n))$ *e* $(x_i, x_j) \in E \cap F$ *para* $i \neq j$ $i, j = 1, \ldots, n$*.*

Esta dissertação consiste em um estudo detalhado do referido artigo de Yang.

O primeiro capítulo é dedicado a conceitos e resultados preliminares, necessários para a compreensão dos argumentos contidos em [2]. Consideramos que alguns desses resultados não são "básicos", no contexto de um primeiro estudo em Topologia Algébrica; no entanto, como todos eles podem ser encontrados em livros clássicos (usamos [1], de Eilenberg e Steenrod, como principal referência), optamos por omitir demonstrações.

No segundo capítulo, introduzimos, conforme [2], a Homologia de Čech-Smith, o índice de um T-espaço e suas principais propriedades. No final desse capítulo, visando maior compreensão, construímos alguns exemplos de cálculo de índice.

O capítulo 3 trata da generalização do Teorema de Borsuk-Ulam. Além disso, são apresentadas várias propriedades (topológicas) que são satisfeitas por $(S^n; A)$ e que se estendem para todo T-espaço de índice n.

No capítulo 4, que consideramos ser o mais técnico, é apresentada a versão do Teorema K-Y-Y para θ-espaços simpliciais, em espaços euclidianos. Tal versão pode ser vista como um lema para a generalização feita no capítulo seguinte, pois, em certo sentido, a homologia de $\check{C}$ech-Smith é uma aproximação simplicial.

Introduzimos o quinto capítulo procurando explorar o conceito de ortogonalidade em um T-espaço qualquer (veja seção 5.1). Finalmente, estudamos as demonstrações dos outros dois teoremas generalizados: de Kakutani-Yamabe-Yujobô e de Dyson.

Vale mencionar que os conceitos, argumentos e resultados desenvolvidos por Yang, estudados nesta dissertação, foram publicados em 1954 e, desde então, tem sido referência para diversos trabalhos relevantes; veja, por exemplo: [3], [8], [9], [10] e [11].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo reunimos conceitos, ferramentas e resultados, necessários para o estudo e compreensão dos capítulos que seguem. O conteúdo das cinco primeiras seções está detalhado em livros-textos de Topologia Algébrica; citamos [7], [5] e [1] como principais referências.

1.1 Complexos Simpliciais e Aplicações Simpliciais

Definição 1.1. Um conjunto $\{a_0, \ldots, a_p\}$, contido no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, é dito *geometricamente independente* se, para quaisquer escalares reais t_i, as equações $\sum_{i=0}^{p} t_i = 0$ e $\sum_{i=0}^{p} t_i a_i = 0$ implicam em $t_0 = \ldots = t_p = 0$.

Seja $\{a_0, \ldots, a_p\} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto geometricamente independente. Definimos o *p-simplexo* $\sigma = [a_0, \ldots, a_p]$, determinado por $a_0, \ldots, a_p$, sendo o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ tais que $x = \sum_{i=0}^{p} t_i a_i$, $\sum_{i=0}^{p} t_i = 1$ e cada $t_i \geq 0$; os pontos $a_0, \ldots, a_p$ são chamados de *vértices* de σ. Um p-simplexo é dito ser um simplexo de *dimensão*

p. Todo simplexo determinado por um subconjunto de $\{a_0, \ldots, a_p\}$ é chamado de *face* de σ.

Definição 1.2. Um *complexo simplicial* K em $\mathbb{R}^n$ é uma coleção de simplexos de $\mathbb{R}^n$ satisfazendo:

1. Toda face de um simplexo de K está em K.
2. A interseção de quaisquer dois simplexos de K é uma face de ambos.

Em nosso trabalho, consideraremos apenas **complexos simpliciais finitos**.

Definição 1.3. Se K é um complexo simplicial e $L \subset K$ satisfaz as condições para ser um complexo simplicial, então diremos que L é um *subcomplexo* de K. Chamamos de *p-esqueleto* de K, denotado por $K^{(p)}$, o subcomplexo de K formado por todos os simplexos de K com dimensão no máximo igual a p. Se $\sigma \in K^{(0)}$, então diremos que σ é um *vértice* de K. A *dimensão* de K é a maior dimensão dentre as dimensões de todos os seus simplexos.

Definição 1.4. Seja K um complexo simplicial em $\mathbb{R}^n$. Consideremos a união dos simplexos de K. Este subconjunto de $\mathbb{R}^n$, munido da topologia descrita abaixo, é chamado de *espaço subjacente* (ou *poliedro*) de K e o denotaremos por $|K|$.

Considera-se a topologia em $|K|$ definida do seguinte modo: um conjunto A é fechado em $|K|$ se, e somente se, $A \cap \sigma$ é fechado em σ, para todo simplexo σ de K. Como, neste trabalho, K será sempre finito, temos que esta topologia coincide com a topologia de subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Neste ponto, cabe observar alguns fatos que serão úteis no contexto da homologia de *Čech*. Dado um complexo simplicial finito K, temos: $|K|$ é Hausdorff e compacto; se L é um subcomplexo de K, então $|L|$ é um subespaço fechado de $|K|$.

Definição 1.5. *Sejam K e L dois complexos e seja $f : K^{(0)} \to L^{(0)}$ uma aplicação. Se, para todo conjunto de vértices $\{v_0, \ldots, v_n\}$ de K que determinam um simplexo de K, os pontos $f(v_0), \ldots, f(v_n)$ são vértices de um simplexo de L, então a função* *f pode ser estendida à função contínua* $g : |K| \to |L|$ *dada por* $g\left(\sum_{i=1}^{n} t_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} t_i f(v_i)$.

Tal função g é chamada de *aplicação simplicial* induzida pela aplicação de vértices f. Por questão de simplificação, diremos que $g : K \to L$ é uma aplicação simplicial.

Definição 1.6. Seja K um complexo simplicial e s um simplexo de K com vértices $v_0, \ldots, v_p$. O *baricentro* de s, b_s, é o ponto de s definido por

$$b_s = \frac{1}{p+1}v_0 + \ldots + \frac{1}{p+1}v_p.$$

Definição 1.7. A *primeira subdivisão baricêntrica* de um complexo simplicial K é um complexo simplicial denotado por $sd\ K$, definido como segue: seus vértices são os baricentros dos simplexos de K; para cada sequência $s_0, \ldots, s_q$ de simplexos de K tais que s_i é uma face de s_{i+1}, a sequência dos baricentros correspondente é o conjunto de vértices de um simplexo de $sd\ K$; apenas simplexos obtidos dessa maneira são simplexos de $sd\ K$.

Como $sd\ K$ é um complexo simplicial, podemos obter sua primeira subdivisão baricêntrica, que é denotada por $sd^2\ K$, e seguindo esse procedimento obtemos $sd^n K$ em geral. Se L é um subcomplexo de K, $sd^n(L)$ é um subcomplexo de $sd^n(K)$.

Definição 1.8. Seja K um complexo simplicial. Se $\{v_0, \ldots, v_p\}$ são os vértices de um simplexo σ de K, o interior de σ é definido do seguinte modo: $\text{int}\ \sigma = \left\{\sum_{i=1}^{p} t_i v_i \in \sigma \ : \ \sum_{i=1}^{p} t_i = 1 \text{ e cada } t_i > 0\right\}$. Para cada vértice v de K, a *estrela aberta* de v é o subconjunto aberto $st(v)$ de K obtido pela união dos interiores de todos simplexos de K que têm v como vértice.

Definição 1.9. Seja L um subcomplexo de K. O conjunto aberto $N(L) = \cup st(\sigma)$, onde a união é estendida para todo vértice σ de L, é chamada *vizinhança regular* de L em K.

Definição 1.10. Seja L um subcomplexo de K. A *k-ésima vizinhança regular* $N^k(L)$ de L é a imagem em K da vizinhança regular $N(sd^kL)$, *de* $sd^k(L)$ *em* $sd^k(K)$, *sob a aplicação natural* $sd^kK \to K$.

Teorema 1.11. *Se L é um subcomplexo de K, então $|L|$ é um retrato por deformação forte do fecho de $N^2(L)$. Mais especificamente, a homotopia $h : \overline{N^2(L)} \times I \to \overline{N^2(L)}$ dada por $h(x,t) = th(x,1) + (1-t)(x)$ é tal que, para todo $t \in I$, $h(x,t) = x$, para todo $x \in |L|$.*

Dem.: Vide [1], página 72.

Definição 1.12. Um *complexo simplicial abstrato* é uma coleção $\mathcal{F}$ de conjuntos não-vazios e finitos tal que: se $A \in \mathcal{F}$, então todo subconjunto de A é um elemento de $\mathcal{F}$. Cada elemento A de $\mathcal{F}$ é dito um *simplexo* de $\mathcal{F}$; se $A \in \mathcal{F}$ é um conjunto com exatamente $p+1$ elementos, então A é um *p-simplexo* de $\mathcal{F}$; cada subconjunto não-vazio de A é dito uma *face* de A. O *conjunto de vértices* V de $\mathcal{F}$ é o conjunto de todos os elementos de $\mathcal{F}$ que são conjuntos unitários.

Dizemos que dois complexos abstratos $\mathcal{F}$ e $\mathcal{T}$ são *isomorfos* se existe uma aplicação $f : \mathcal{F} \to \mathcal{T}$ bijetiva de tal maneira que f aplica o conjunto de vértices de $\mathcal{F}$ no conjunto de vértices de $\mathcal{T}$ e "$\{a_0, \ldots, a_n\} \in \mathcal{F}$ se, e somente se, $\{f(a_0), \ldots, f(a_n)\} \in \mathcal{T}$".

Definição 1.13. Sejam K um complexo simplicial e V o conjunto de vértices de K. Seja $\mathcal{K}$ a coleção de todos subconjuntos $\{a_0, \ldots, a_n\}$ de V tais que os vértices $a_0, \ldots, a_n$ determinam um simplexo de K. A coleção $\mathcal{K}$ é chamada *esquema de vértices* de K.

A coleção $\mathcal{K}$ acima é um exemplo de complexo simplicial abstrato importante devido ao seguinte resultado: todo complexo simplicial abstrato é isomorfo ao esquema de vértices de um complexo simplicial K.

Definição 1.14. Se um complexo abstrato $\mathcal{F}$ é isomorfo ao esquema de vértices do complexo simplicial K, dizemos que K é a *realização geométrica* de $\mathcal{F}$.

1.2 Homologia Simplicial

Dado um complexo simplicial K, definiremos um complexo de cadeias e uma homologia associados a K. Sempre usaremos o grupo aditivo dos inteiros módulo 2, $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, como o grupo de coeficientes.

Definição 1.15. Seja K um complexo simplicial. Uma *p-cadeia* em K é uma função c do conjunto dos p-simplexos de K em $\mathbb{Z}_2$ tal que $c \neq 0$ para um número finito de p-simplexos de K.

Como tratamos só de complexos simpliciais finitos, a condição $c \neq 0$ para um número finito de p-simplexos é redundante.

Dado um complexo simplicial K, denotamos por $S_p(K)$ o conjunto formado pelas p-cadeias de K. Seja $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ o conjunto dos p-simplexos de K. Para cada p-cadeia c, denotamos $c = \sum_{i=1}^{n} a_i\sigma_i$, em que $c(\sigma_i) = a_i$. Definimos em $S_p(K)$ a operação $+$ do seguinte modo: dados $c = \sum_{i=1}^{n} a_i\sigma_i$ e $d = \sum_{i=1}^{n} b_i\sigma_i \in S_p(K)$, então $c + d = \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\sigma_i$. Se $c^{-1}(\{1\}) = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_t}\}$, denotamos simplesmente $c = \sum_{j=1}^{t} \sigma_{i_j}$. Sempre consideraremos $S_p(K)$ munido de tal operação, a qual lhe dá estrutura de grupo ($\mathbb{Z}_2$-módulo). Se $p > \dim K$, definimos $S_p(K)$ sendo o grupo trivial.

Definição 1.16. Seja σ um simplexo. Uma *cadeia elementar* c correspondente a σ é a cadeia tal que $c(\sigma) = 1$ e $c(\varphi) = 0$, para todo simplexo $\varphi \neq \sigma$.

Usaremos o mesmo símbolo para denotar tanto o simplexo quanto a cadeia elementar correspondente a esse simplexo.

Proposição 1.17. *O conjunto das p-cadeias elementares formam uma base para $S_p(K)$.*

Definição 1.18. Definimos o *operador bordo*, $\partial_p : S_p(K) \to S_{p-1}(K)$, da seguinte maneira: se $\sigma = [v_0, \ldots, v_p] \in S_p(K)$ é uma cadeia elementar, então

$$\partial_p(\sigma) = \partial([v_0, \ldots, v_p]) = \sum_{i=0}^{p} [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p]$$

e estendemos linearmente para todo elemento de $S_p(K)$. O kernel do homomorfismo ∂_p é denotado por $Z_p(K)$ e um elemento de $Z_p(K)$ é chamado de *p-ciclo*. A imagem de ∂_{p+1} é denotada por $B_p(K)$ e um elemento de $B_p(K)$ é chamado de *p-bordo*. Temos que

$$\cdots \longrightarrow S_{p+1}(K) \xrightarrow{\partial} S_p(K) \xrightarrow{\partial} S_{p-1}(K) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

é um complexo de cadeias. Então, definimos $H_p(K) = \dfrac{Z_p(K)}{B_p(K)}$ como o *p-ésimo grupo de homologia de K*.

Definição 1.19. Diremos que duas cadeias c e c', em $S_p(K)$, são *homólogas* se $c + c' = \partial(d)$, para algum $d \in S_{p+1}(K)$.

Definição 1.20. Para cada elemento $c = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i$ de $S_0(K)$, com σ_i's cadeias elementares, definimos o *índice* de c, $In(c)$, como $\sum_{i=1}^{n} \overline{1} = \overline{n}$ *em* $\mathbb{Z}_2$.

Temos que $In : S_0(K) \to \mathbb{Z}_2$ é um homomorfismo e $In \circ \partial = 0$.

Seja $f : K \to L$ uma aplicação simplicial. Então, f define uma aplicação de cadeias $f_\# : S_p(K) \to S_p(L)$ dada da seguinte forma: para cada cadeia elementar $\sigma = [v_0, \ldots, v_p] \in S_p(K)$,

$$f_\#([v_0, \ldots, v_p]) = \begin{cases} [f(v_0), \ldots, f(v_p)] & \text{se } \; f(v_0), \ldots, f(v_p) \text{ são distintos 2-2,} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e estendemos linearmente para toda cadeia $c \in S_p(K)$. O homomorfismo $f_\#$ induz o homomorfismo $f_* : H_p(K) \to H_p(L)$ dado por $f_*(c + B_p(K)) = f_\#(c) + B_p(L)$.

Definição 1.21. Sejam $f, g : K \to L$ aplicações simpliciais. Suponhamos que, para cada p, temos um homomorfismo $D_p : S_p(K) \to S_{p+1}(L)$ satisfazendo a equação $\partial D_p + D_{p-1}\partial = g_\# - f_\#$. Então, $D_\# = \{D_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ é dita uma *homotopia de cadeias* entre $f_\#$ e $g_\#$.

Teorema 1.22. *Se existe uma homotopia de cadeias entre $f_\#$ e $g_\#$, então os homomorfismos induzidos f_* e g_* são iguais.*

Definição 1.23. Sejam $f, g : K \to L$ duas aplicações simpliciais. Se, para cada simplexo $\sigma = \{v_0, \ldots, v_p\}$ de K, os pontos $f(v_0), \ldots, f(v_p), g(v_0), \ldots, g(v_p)$ determinam um simplexo φ de L, então f e g são ditas *adjacentes*.

Teorema 1.24. *Se $f, g : K \to L$ são aplicações simpliciais adjacentes, então existe uma homotopia de cadeias entre $f_\#$ e $g_\#$.*

Dem.: Vide [7] página 67.

Teorema 1.25. *Seja K um complexo simplicial. Considere K_0, K_1 subcomplexos de K tais que $K = K_0 \cup K_1$. Seja $A = K_0 \cap K_1$. Então existe uma sequência exata*

$$\cdots \longrightarrow H_p(A) \xrightarrow{(i_*, j_*)} H_p(K_0) \oplus H_p(K_1) \xrightarrow{k_* + l_*} H_p(K) \longrightarrow H_{p-1}(A) \longrightarrow \cdots,$$

em que $(i_*, j_*)(\sigma) = (i_*(\sigma), j_*(\sigma))$ e $(k_* + l_*)(\alpha, \beta) = k_*(\alpha) + l_*(\beta)$, sendo i_*, j_*, k_*, l_* as induzidas das inclusões.

A sequência do teorema acima é chamada *sequência de Mayer-Vietoris de* (K_0, K_1).

1.3 Homologia Relativa

Se K_0 é um subcomplexo de K, então $S_p(K_0)$ é um subgrupo de $S_p(K)$. Chamaremos o grupo quociente $\dfrac{S_p(K)}{S_p(K_0)}$ de *grupo das cadeias relativas de K módulo K_0* e o denotaremos por $S_p(K, K_0)$. O operador bordo $\partial : S_p(K_0) \to S_{p-1}(K_0)$ é a restrição do operador bordo em $S_p(K)$; este homomorfismo induz um homomorfimo $S_p(K, K_0) \to S_{p-1}(K, K_0)$ que também será denotado por ∂. Sejam: $Z_p(K, K_0) = \ker \partial$, $B_p(K, K_0) = \mathrm{Im}\ \partial$ e $H_p(K, K_0) = \dfrac{Z_p(K, K_0)}{B_p(K, K_0)}$. Estes grupos são chamados de *grupo dos p-ciclos relativos*, *grupo dos p-bordos relativos* e *grupo da p-ésima homologia relativa*, respectivamente.

Sejam K,L complexos e K_0,L_0 subcomplexos de K e L, respectivamente. Se $f : K \to L$ é uma aplicação simplicial que leva cada simplexo de K_0 em um simplexo de L_0, então diremos que $f : (K, K_0) \to (L, L_0)$ é uma *aplicação simplicial.*

Assim como na homologia simplicial, temos um homomorfismo induzido pela aplicação simplicial $f : (K, K_0) \to (L, L_0)$, $f_* : H_p(K, K_0) \to H_p(L, L_0)$, dado por

$$f_*(c + B_p(K, K_0)) = f_\#(c) + B_p(L, L_0).$$

Teorema 1.26. *(Teorema da Excisão). Sejam K um complexo e K_0 um subcomplexo de K. Seja U um aberto contido em $|K_0|$ tal que $|K| - U$ é o poliedro de um subcomplexo L de K. Seja L_0 um subcomplexo de K cujo poliedro é $|K_0| - U$. Então, a aplicação inclusão induz um isomorfismo entre $H_p(L, L_0)$ e $H_p(K, K_0)$ (vide [7], pag.51).*

Definição 1.27. Sejam $f, g : (K, K_0) \to (L, L_0)$ duas aplicações simpliciais. Diremos que f e g são *adjacentes* como aplicações de pares se para cada $\sigma = [v_0, \ldots, v_p]$ pertencente a K, os pontos $f(v_0), \ldots, f(v_p), g(v_0), \ldots, g(v_p)$ determinam um simplexo de L e, além disso, se $\sigma \in K_0$, então estes pontos determinam um simplexo de L_0.

Teorema 1.28. *Sejam $f, g : (K, K_0) \to (L, L_0)$ aplicações adjacentes de pares. Então, existe um homomorfismo $D_p : S_p(K, K_0) \to S_{p+1}(L, L_0)$, para todo p, tal que*

$$\partial D_p + D_{p-1}\partial = g_\# - f_\#.$$

Como uma consequência desse resultado, temos que os homomorfismos induzidos f_* e g_* são iguais.

Teorema 1.29. *Sejam K um complexo simplicial e K_0 um subcomplexo de K. Então, existe uma sequência exata longa*

$$\cdots \longrightarrow H_p(K_0) \xrightarrow{i_*} H_p(K, K_0) \xrightarrow{\pi_*} H_p(K) \xrightarrow{\Delta} H_{p-1}(K_0) \longrightarrow \cdots$$

onde $i : K_0 \to K$ e $\pi : (K, \emptyset) \to (K, K_0)$ são inclusões e Δ é um homomorfismo chamado homomorfismo conectante.

Definição 1.30. Sejam X um espaço topológico e A um subespaço de X. Uma *triangularização* do par (X, A) é um par simplicial (K, K_0) e um homeomorfismo $h : (|K|, |K_0|) \to (X, A)$. Se existe uma triangularização, dizemos que o par (X, A) é um *par triangularizável*. Se $A = \emptyset$, então dizemos que X é um *espaço triangularizável*.

Seja (X, A) um par triangularizável. Definimos uma homologia simplicial $H_p(X, A)$ deste par como segue. Considere a coleção de todas as triangularizações de (X, A), essas são da forma: $h_\alpha : (|K_\alpha|, |C_\alpha|) \to (X, A)$, onde C_α é um subcomplexo de K_α.

Para um p fixado, considere a união disjunta dos grupos $H_p(K_\alpha, C_\alpha)$, $\bigcup_\alpha H_p(K_\alpha, C_\alpha) \times \{\alpha\}$, e tome a seguinte relação de equivalência em $\bigcup_\alpha H_p(K_\alpha, C_\alpha) \times \{\alpha\}$: se $(x, \alpha) \in H_p(K_\alpha, C_\alpha) \times \{\alpha\}$ e $(y, \beta) \in H_p(K_\beta, C_\beta) \times \{\beta\}$, então

$$(x, \alpha) \cong (y, \beta) \Leftrightarrow (h_\beta^{-1} \circ h_\alpha)_*(x) = y.$$

Denotamos por $H_p(X, A)$ o conjunto das classes de equivalências. A aplicação $H_p(K_\alpha, C_\alpha) \to H_p(X, A)$ que leva cada elemento em sua classe de equivalência é bijetora. Fazemos $H_p(X, A)$ ser um grupo determinando que esta aplicação seja um isomorfismo (independente das escolhas de α).

A homologia simplicial sobre a classe de espaços triangularizáveis satisfaz os axiomas de "teoria de homologia", no sentido de satisfazer os axiomas de Eilenberg-Steenrod (vide [1]).

Para encerrarmos esta seção, faremos um breve comentário sobre categorias e funtores.

Definição 1.31. Uma *categoria* $\mathcal{C}$ consiste de:

1. uma classe de *objetos*;

2. para cada par ordenado (X, Y) de objetos de $\mathcal{C}$, um conjunto $hom(X, Y)$ de *morfismos* f;

3. uma função, chamada *composição de morfismos*,

$$hom(X, Y) \times hom(Y, Z) \to hom(X, Z),$$

a qual é definida para toda terna (X, Y, Z) de $\mathcal{C}$.

A imagem do par (f, g) pela operação composição é denotada por $f \circ g$. As seguintes propriedades devem ser satisfeitas:

- Se $f \in hom(W, X)$, $g \in hom(X, Y)$ e $h \in hom(X, Y)$, então $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

- Se X é um objeto de $\mathcal{C}$, então existe um elemento $1_X \in hom(X, X)$ tal que $1_X \circ f = f$ e $g \circ 1_X = g$, para todo $f \in hom(W, X)$ e para todo $g \in hom(X, Y)$, onde W e Y são objetos arbitrários.

Observamos que os complexos simplicias e as aplicações simpliciais formam uma categoria.

Definição 1.32. Um *funtor* (covariante) G de uma categoria $\mathcal{C}$ em uma categoria $\mathcal{D}$ é uma função que associa a cada objeto $X \in \mathcal{C}$ um objeto $G(X) \in \mathcal{D}$, e a cada morfismo $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$, um morfismo $G(f) : G(X) \to G(Y)$ de $\mathcal{D}$, satisfazendo as seguintes condições:

- $G(1_X) = 1_{G(X)}$ para todo objeto X de $\mathcal{C}$;

- $G(g \circ f) = G(g) \circ G(f)$.

Como exemplo de funtor, temos a correspondência $K \to S_*(K)$ e $f \to f_\#$. Este é um funtor da categoria dos complexos simpliciais e aplicações simpliciais na categoria de complexos de cadeias e aplicações de cadeias. Naturalmente, estabelecer "bons" funtores entre categorias algébricas e topológicas é uma das ideias centrais da Topologia Algébrica.

1.4 Sistemas Inversos

Definição 1.33. Dizemos que uma relação $<$ em um conjunto $M \neq \emptyset$ é de *quase-ordem* se possui as propriedades reflexiva e transitiva; isto é, para todo $\alpha \in M$, $\alpha < \alpha$, e para quaisquer α, β, $\gamma \in M$ tais que $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$, temos $\alpha < \gamma$. Um conjunto M é dito *direcionado* se é um conjunto quase-ordenado e, dados α, $\beta \in M$, existe $\gamma \in M$ com α, $\beta < \gamma$. Uma *aplicação* $\phi : M \to N$ *entre conjuntos direcionados* é uma função que preserva a quase-ordem (isto é, se $\alpha < \beta$ em M então $\phi(\alpha) < \phi(\beta)$ em N).

Definição 1.34. Um *sistema inverso* de grupos (ou módulos) $\{X, \pi\}_M$ sobre um conjunto direcionado M é uma função que associa a cada $\alpha \in M$, um grupo (ou módulo) X_α e a cada par $\alpha, \beta \in M$, com $\alpha < \beta$, um homomorfismo $\pi_{\alpha\beta} : X_\beta \to X_\alpha$ satisfazendo:

- $\pi_{\alpha\alpha} = Id$, para todo $\alpha \in M$;
- $\pi_{\alpha\beta} \circ \pi_{\beta\gamma} = \pi_{\alpha\gamma}$, se $\alpha < \beta < \gamma$.

As aplicações $\pi_{\alpha\beta}$ são chamadas *projeções* do sistema.

Definição 1.35. Sejam $\{X, \pi\}_M$, $\{X', \pi'\}_{M'}$ sistemas inversos de grupos sobre M e M', respectivamente. Uma *aplicação entre sistemas inversos*, $\Phi : \{X, \pi\}_M \to \{X', \pi'\}_{M'}$, consiste de uma aplicação $\varphi : M' \to M$ e, para cada $\alpha' \in M'$, um homomorfismo $\varphi_{\alpha'} : X_{\varphi(\alpha')} \to X'_{\alpha'}$ tal que: se $\alpha, \beta \in M'$ com $\alpha' < \beta'$, então o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd}
X_{\varphi(\beta')} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi"'] & X_{\varphi(\alpha')} \arrow[d, "\varphi"] \\
X'_{\beta'} \arrow[r, "\pi'"] & X'_{\alpha'}
\end{tikzcd}$$

Definição 1.36. Seja $\{X, \pi\}$ um sistema inverso de grupos sobre um conjunto direcionado M. O *limite inverso* X_∞ de $\{X, \pi\}$ é o subgrupo de $\prod_{\alpha \in M} X_\alpha$ (produto direto de grupos) consistindo de todas as funções $x = \{x_\alpha\}$ tais que: para quaisquer $\alpha, \beta \in M$ com $\alpha < \beta$, temos $\pi_{\alpha\beta}(x_\beta) = x_\alpha$.

Definição 1.37. Seja $\Phi : \{X, \pi\} \to \{X', \pi'\}$ uma aplicação entre sistemas inversos de grupos. O *limite inverso* Φ_∞ de Φ é a aplicação $\Phi_\infty : X_\infty \to X'_\infty$ definida da seguinte maneira: se $x \in X_\infty$ e $\alpha \in M'$, seja $x'_\alpha = \Phi_\alpha(x_{\varphi(\alpha)})$. Se $\alpha < \beta$ em M', segue da comutatividade do diagrama da definição 1.35, que $\pi'_{\alpha\beta}(x'_\beta) = x_\alpha$; além disso, $x' = \{x'_\alpha\}$ é um elemento de X'_∞. Definimos, então, $\Phi_\infty(x) = x'$.

A aplicação Φ_∞ definida acima é um homomorfismo.

Definição 1.38. Um *sistema inverso de sequências*, $\{S, \pi\}_M$, é uma função que associa cada α pertecente a um conjunto direcionado M uma sequência $S_{\alpha *} = \{S_{\alpha,p}, \varphi_{\alpha,p}\}_{p \in \mathbb{N}}$ de grupos e homomorfismos $\varphi_{\alpha,p} : S_{\alpha,p} \to S_{\alpha,p-1}$ e, para cada $\alpha, \beta \in M$ com $\alpha < \beta$, associa uma função $\pi_{\alpha\beta} : S_{\beta *} \to S_{\alpha *}$ tal que: $\pi_{\alpha\alpha} = Id$; se $\alpha < \beta < \gamma$, então $\pi_{\alpha\beta} \circ \pi_{\beta\gamma} = \pi_{\alpha\gamma}$; sempre que $\alpha < \beta$, o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd}
S_{\beta,p} \arrow[r, "\pi_{\alpha\beta,p}"] \arrow[d, "\varphi_{\beta,p}"'] & S_{\alpha,p} \arrow[d, "\varphi_{\alpha,p-1}"] \\
S_{\beta,p-1} \arrow[r, "\pi_{\alpha\beta,p-1}"] & S_{\alpha,p-1}
\end{tikzcd}$$

Para cada p fixado, os grupos e homomorfismos $\{S_{\alpha,p}, \pi_{\alpha\beta,p}\}$ formam um sistema inverso, e seu limite será denotado por $\{S_{\infty,p}\}$. Ainda para p fixado, considerando a aplicação identidade em M, os homomorfismos $\{\varphi_{\alpha,p}\}$ formam uma aplicação de sistemas inversos $\Phi_p : \{S_{\alpha,p}, \pi_{\alpha\beta,p}\} \to \{S_{\alpha,p-1}, \pi_{\alpha\beta,p-1}\}$, o limite de Φ_p será denotado por $\Phi_{\infty,p}$. A sequênca assim obtida é chamada de *limite inverso* do sistema $\{S, \pi\}$ e é denotada por $S_{\infty *} = \{S_{\infty,p}, \phi_{\infty,p}\}_{p \in \mathbb{N}}$.

Teorema 1.39. *Se cada sequência de uma sistema inverso de sequências é um complexo de cadeias então seu limite é um complexo de cadeias.*

Dem.: Vide [1], página 224.

Teorema 1.40. *Seja $\{S, \pi\}$ um sistema inverso de sequêncas exatas sobre M, onde todos os grupos e homomorfismos pertecem à categoria dos grupos compactos (ou pertecem à categoria dos espaços vetoriais sobre um corpo F fixado). Então a sequência limite $S_{\infty *}$ de $\{S, \pi\}$ é também exata.*

Dem.: Vide [1], página 226.

1.5 Homologia de $\check{C}$ech

Conforme é verificado em [1], existem restrições para que a homologia de $\check{C}$ech satisfaça os axiomas de Eilenberg-Steenrod; no entanto, tais axiomas são válidos para espaços compactos e $\mathbb{Z}_2$ como grupo de coeficientes.

Definição 1.41. Seja $\mathcal{A}$ uma coleção de subconjuntos de um conjunto X. Definimos o *nervo* de $\mathcal{A}$ como sendo o complexo simplicial abstrato cujos vértices são os elementos de $\mathcal{A}$ e os simplexos são as subcoleções finitas $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de $\mathcal{A}$ tais que $A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \emptyset$.

Até o final desta seção, estaremos considerando pares de espaços topológicos (X, A) com X espaço compacto, Hausdorff e $A \subset X$ fechado.

Definição 1.42. Sejam $f : (X, A) \to (Y, B)$ uma aplicação de pares e $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ uma cobertura de (Y, B), isto é, $\beta_1 = \{V_1, \ldots, V_k\}$ é uma cobertura de Y e $\beta_2 = \{V_1^B, \ldots, V_l^B\}$ é uma cobertura de B, com cada V_j^B sendo um elemento de β_1. Definimos $f^{-1}(\beta)$ a cobertura α de (X, A) obtida da seguinte forma: se $V_j \in \beta_1$, então tome $U_j = f^{-1}(V_j)$; assim, $\alpha_1 = \{U_j, j = 1, \ldots, k\}$ é uma cobertura de X. Analogamente, tome $U_j^A = f^{-1}(V_j^B)$; então, $\alpha_2 = \{U_1^A, \ldots, U_l^A\}$ é uma cobertura de A. Daí, consideramos $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Se f é contínua e β é uma cobertura aberta, então $f^{-1}(\beta)$ é uma cobertura aberta de X.

A seguir, enunciaremos alguns resultados que são necessários para a construção da homologia de $\check{C}$ech.

Proposição 1.43. *Sejam* $f : (X, A) \to (Y, B)$ *uma aplicação de pares,* β *uma cobertura de* (Y, B) *e* $\alpha = f^{-1}(\beta)$*. Então, o nervo de* α*,* X_α*, é um subcomplexo do nervo de* β*,* Y_β*, e* A_α *é um subcomplexo de* B_β*.*

Definição 1.44. Sejam $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ e $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ coberturas de (X, A). Diremos que β é um *refinamento* de α se todo elemento de β_1 (respectivamente β_2) está contido em algum elemento de α_1 (respectivamente α_2).

Definição 1.45. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas coleções de subconjuntos de um espaço X tais que $\mathcal{B}$ refina $\mathcal{A}$. Defina uma aplicação $p : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ com $p(B_i) = A_j$, onde $A_j \in \mathcal{A}$ é tal que $B_i \subset A_j$. Esta aplicação induz uma aplicação simplicial $p : X_\mathcal{B} \to X_\mathcal{A}$. Tal aplicação simplicial p é denominada uma *projeção.*

Proposição 1.46. *A relação "*$\alpha < \beta \Leftrightarrow \beta$ *refina* α*" é uma relação de quase-ordem.*

Proposição 1.47. *Seja* Λ *o conjunto de todas as coberturas abertas finitas de* (X, A)*.* Λ *com a relação* $<$ *acima é um conjunto direcionado.*

Proposição 1.48. *Se* α*,* β *são duas coberturas abertas do par* (X, A)*, com* $\alpha < \beta$*, então quaisquer duas projeções* $p, p' : (X_\beta, A_\beta) \to (X_\alpha, A_\alpha)$ *são aplicações adjacentes.*

Corolário 1.49. *O homomorfismo* $H_p(X_\beta, A_\beta) \to H_p(X_\alpha, A_\alpha)$*, induzido por uma projeção* $(X_\beta, A_\beta) \to (X_\alpha, A_\alpha)$*, independe da escolha da projeção.*

Agora estamos aptos para definir a homologia de Čech para um par (X, A) (onde X é compacto e Hausdorff e $A \subset X$ é fechado).

Definição 1.50. Seja Λ o conjunto de todas coberturas abertas e finitas de (X, A). Para cada $\alpha \in \Lambda$, seja (X_α, A_α) o nervo de α. Para cada α, $\beta \in \Lambda$ com $\alpha < \beta$, seja $\pi_{\alpha\beta *} : H_p(X_\beta, A_\beta) \to H_p(X_\alpha, A_\alpha)$ o homomorfismo induzido por qualquer projeção $(X_\beta, A_\beta) \to (X_\alpha, A_\alpha)$. A coleção $\{H_p(X_\alpha, A_\alpha), \pi_{\alpha\beta *}\}_\Lambda$ é chamada o *p-ésimo sistema da homologia de Čech* de (X, A).

Teorema 1.51. *A coleção* $\{H_p(X_\alpha, A_\alpha), \pi_{\alpha\beta*}\}_\Lambda$ *é um sistema inverso de grupos ($\mathbb{Z}_2$-módulos) sobre o conjunto direcionado* Λ.

Dem.: Vide [1], página 237.

Definição 1.52. O limite inverso do sistema $\{H_p(X_\alpha, A_\alpha), \pi_{\alpha\beta*}\}_\Lambda$ é denotado por $\check{H}_p(X, A)$ e é chamado de *p-ésimo grupo de homologia de Čech de* (X, A).

Teorema 1.53. *Sejam* $f : (X, A) \to (Y, B)$ *contínua e* Λ, Γ *os conjuntos das coberturas abertas de* (X, A) *e* (Y, B)*, respectivamente. Seja* $f^{-1} : \Gamma \to \Lambda$ *a aplicação associada a essas coberturas. Considere a aplicação inclusão* $i_\alpha : (X_{\alpha'}, A_{\alpha'}) \to (Y_\alpha, B_\alpha)$*, onde* $f^{-1}(\alpha) = \alpha'$*. Então, para todo* $\alpha \in \Gamma$*, o homomorfismo induzido* $i_{\alpha*} : H_p(X_{\alpha'}, A_{\alpha'}) \to H_p(Y_\alpha, B_\alpha)$ *junto com* f^{-1} *formam uma aplicação* $\Phi(f)$ *entre os sistemas* $\{H_p(X_{\alpha'}, A_{\alpha'}), \pi_{\alpha'\beta'*}\}_\Lambda$ *e* $\{H_p(Y_\alpha, B_\alpha), \pi_{\alpha\beta*}\}_\Gamma$.

Definição 1.54. O limite da aplicação

$$\Phi(f) : \{H_p(X_{\alpha'}, A_{\alpha'}), \pi_{\alpha'\beta'*}\}_\Lambda \to \{H_p(Y_\alpha, B_\alpha), \pi_{\alpha\beta*}\}_\Gamma,$$

denotado por $f_* : H_p(X, A) \to H_p(Y, B)$, é chamado de *homomorfismo induzido* por f.

Sejam (X, A) um par triangularizável e (h, K, K_0) uma triangularização de (X, A). Existe um isomorfismo natural entre $H_p(K, K_0)$ e $\check{H}_p(X, A)$ (vide [1] pág. 250).

Teorema 1.55. *Seja* X *um espaço compacto. Considere* X_0, X_1 *subespaços fechados de* X *tais que* $X = X_0 \cup X_1$*. Seja* $A = X_0 \cap X_1$*. Como na homologia simplicial, a sequência de Mayer-Vietoris*

$$\cdots \longrightarrow \check{H}_p(A) \longrightarrow \check{H}_p(X_0) \oplus \check{H}_p(X_1) \longrightarrow \check{H}_p(X) \longrightarrow \check{H}_{p-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

é exata. (Vide [1], páginas 39 e 257.)

1.6 Redes

O conteúdo desta seção está detalhado em [4] e insere-se no contexto de Topologia Geral. Os conceitos e resultados que enunciamos aqui são usados no desenvolvimento do capítulo 5.

Definição 1.56. Seja X um espaço topológico. Uma *rede* em X é uma coleção $S = \{S_n, n \in M\} \subset X$ indexada em um conjunto direcionado M; isto é, S é a imagem de uma função $f : M \to X$.

Diremos que uma rede S em X está *eventualmente* em um subconjunto A de X, se existe um elemento $m \in M$ tal que: para todo $n \in M$, com $n > m$, temos $S_n \in A$.

Definição 1.57. Uma rede S em X *converge* para um ponto $s \in X$ se S está eventualmente em cada vizinhança de s.

Uma rede pode ter vários pontos de convergência. O seguinte teorema nos dá condições para que a convergência, caso exista, seja única.

Teorema 1.58. *Seja X um espaço topológico. Então: X é um espaço de Hausdorff se, e somente se, cada rede em X converge para no máximo um ponto.*

Definição 1.59. Uma rede $\{T_m, m \in N\}$ é uma *sub-rede* de uma rede $\{S_n, n \in M\}$ se exite uma função $F : N \to M$ tal que:

- $T_i = S_{F(i)}$ para todo $i \in N$.
- Para cada $m \in M$, existe um $n \in N$ com a seguinte propriedade: se $p \geq n$, então $F(p) \geq m$.

Teorema 1.60. *Se X é um espaço compacto, então toda rede em X admite uma sub-rede convergente em X.*

Teorema 1.61. *Sejam X e Y espaços topológicos. Se $f : X \to Y$ é uma função contínua em um ponto x então: para cada rede S em X convergente para x, a rede T, definida por $T_i = f(S_i)$, converge para $f(x)$.*

Capítulo 2

A Homologia de $\check{C}$ech-Smith e o Índice de Yang

Iniciaremos este capítulo apresentando os T-espaços e os T-espaços simpliciais, que são os objetos básicos do nosso trabalho. Exibiremos a construção de uma homologia para T-espaços, definiremos o índice de um T-espaço (segundo Yang [2]) e apresentaremos alguns exemplos de cálculo de índice.

Definição 2.1. Chamamos de *T-espaço* todo par da forma $(X;T)$, onde X é um espaço Hausdorff compacto e $T : X \to X$ é uma involução em X (isto é, $T^2 = T \circ T = Id_X$) contínua **sem pontos fixos**. Considere um T-espaço $(X;T)$; para cada $x \in X$, chamamos o conjunto $\{x, T(x)\}$ de *par de involução*. Um *T-par* é uma terna $(X, A; T)$, em que $(X;T)$ é um T-espaço e $A \subseteq X$ é fechado e T-invariante (isto é, $T(A) \subseteq A$).

Na definição de T-par acima, observe que, como T é involução, $T(A) \subseteq A$ implica $A \subseteq T(A)$. Logo, um conjunto A ser T-invariante significa $T(A) = A$. Observe ainda que, como $A \subseteq X$ é fechado e X é compacto, A é compacto. Assim, se $(X, A; T)$ é um T-par então $(A; T|_A)$ é um T-espaço (aqui $T|_A : A \to A$ é dada pela restrição de $T : X \to X$ ao subespaço A, ou seja, $T|_A(x) = T(x)$).

Sejam $(X, A; T)$ um T-par e I o intervalo fechado $[0, 1]$. Logo, $X \times I$ é Hausdorff compacto, $A \times I \subseteq X \times I$ é fechado e a função $T \times Id : X \times I \to X \times I$, dada por $(T \times Id)(x, \alpha) = (T(x), \alpha)$, é uma involução contínua sem pontos fixos. Assim, a terna $(X \times I, A \times I; T \times Id)$ é um T-par e será denotado por $(X, A; T) \times I$. Se $(Y, B; S)$ e $(X, A; T)$ são T-pares com Y sendo um subespaço de X, $B \subseteq A$ e $T|_Y = S$, então denotaremos $(Y, B; S) \subseteq (X, A; T)$.

Sejam $(X, A; T)$ e $(Y, B; S)$ T-pares. Uma *aplicação f entre T-pares* é uma função $f : X \to Y$ contínua com $f(A) \subseteq B$ (isto é, $f : (X, A) \to (Y, B)$ é uma aplicação de pares) tal que $f \circ T = S \circ f$.

Com T-par e aplicação entre T-pares bem definidos, podemos definir, de modo natural, conceitos topológicos como: homotopia, retração, retrato por deformação etc. Definiremos alguns como exemplos.

Definição 2.2. Sejam $f, g : (X, A; T) \to (Y, B; S)$ aplicações de T-pares. Uma *homotopia* entre f e g é uma aplicação de T-pares $H : (X, A; T) \times I \to (Y, B; S)$ tal que $H : X \times I \to Y$ é uma homotopia entre f e g. Se existe uma homotopia entre f e g dizemos que f e g são *homotópicas*.

Definição 2.3. Sejam $(X, A; T)$ e $(Y, B; S) \subseteq (X, A; T)$ T-pares. Uma aplicação de T-pares $r : (X, A; T) \to (Y, B; S)$ é uma *retração* se $r|_{(Y,B;S)} = Id_{(Y,B;S)}$; isto é, sendo $i : (Y, B; S) \to (X, A; T)$ a aplicação inclusão temos $r \circ i = Id_{(Y,B;S)}$. Se existe uma retração r, dizemos que $(Y, B; S)$ é um *retrato* de $(X, A; T)$. Se além disso, $i \circ r$ é uma aplicação de T-pares homotópica a $Id_{(X,A;T)}$ dizemos que $(Y, B; S)$ é um *retrato por deformação* de $(X, A; T)$.

2.1 Homologia de T-pares Simpliciais

Definição 2.4. Um T-par $(K, A; T)$ é chamado de *T-par simplicial* se K é um complexo simplicial, A é um subcomplexo de K, e T é uma aplicação simplicial. No caso em que $A = \emptyset$, dizemos que $(X, \emptyset; T) = (X; T)$ é um T-espaço simplicial.

Em várias situações, para simplificar as notações e os argumentos (quando não houver risco de confusão) usaremos o mesmo símbolo para denotar um complexo simplicial e seu espaço subjacente. Observe que se $(X, A; T)$ é um T-par simplicial, a involução T permuta os simplexos de X. Mais precisamente, temos que:

1. Se σ é um simplexo de X, de dimensão p, então $T(\sigma)$ é um simplexo de X de dimensão p. Isso segue direto do fato de T ser uma aplicação simplicial e uma bijeção.

2. Para cada simplexo σ de X, $\sigma \cap T(\sigma) = \emptyset$. De fato, se $\sigma \cap T(\sigma) = \lambda \neq \emptyset$, então λ é um simplexo de X T-invariante. Assim, $T : \lambda \to \lambda$ seria uma função contínua, sem pontos fixos, no simplexo λ, o que sabemos ser absurdo.

Vamos agora construir a homologia de T-pares simpliciais. Durante toda esta seção $(X, A; T)$ será um T-par simplicial qualquer. Vale lembrar que sempre usamos $\mathbb{Z}_2$ como o grupo de coeficientes.

Como $T : (X, A) \to (X, A)$ é uma aplicaçao simplicial, T define uma aplicação de cadeias $T_\# : S_*(X, A) \to S_*(X, A)$. Uma p-cadeia c é dita T-invariante , ou simplesmente uma (T, p)-cadeia, se $T_\#(c) = c$.

Denotamos por $C_p(X, A; T)$ o conjunto $\{c \in S_p(X, A) : T_\#(c) = c\}$.

Observamos que $C_p(X, A; T)$ é um subgrupo de $S_p(X, A)$. De fato: temos $0 \in C_p(X, A; T)$; se $c, d \in C_p(X, A; T)$, então, $T_\#(c + d) = T_\#(c) + T_\#(d) = c + d$ e, portanto, $c + d \in C_p(X, A; T)$.

Daremos outra caracterização para os elementos de $C_p(X, A; T)$ que nos será bastante útil.

Proposição 2.5. *Para cada $c \in S_p(X, A)$ tem-se: $c \in C_p(X, A; T)$ se, e somente se, existe $d \in S_p(X, A)$ tal que $c = d + T_\#(d)$.*

Dem.: ($\Leftarrow$) Seja $c = d + T_\#(d)$. Logo $T_\#(c) = T_\#(d + T_\#(d)) = T_\#(d) + T^2_\#(d) \overset{(*)}{=} T_\#(d) + d = c$ (Em (*) usamos o fato de que $T_\#$ é também uma involução, pois $Id = Id_\# = (T^2)_\# = (T_\#)^2$).

($\Rightarrow$) Seja $c \in C_p(X, A; T)$; então $T_\#(c) = c$. Se $c = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i + S_p(A)$, com cada $\sigma_i \notin S_p(A)$ sendo uma cadeia elementar, então $n = 2k, k \in \mathbb{N}$, pois caso contrário teríamos $T(\sigma_j) = \sigma_j$ para algum $1 \leq j \leq n$. Com isto temos que $c = \sigma_1 + S_p(A) + ... + \sigma_{2k} + S_p(A)$. Portanto, $T_\#(c) = T_\#(\sigma_1 + S_p(A)) + ... + T_\#(\sigma_{2k} + S_p(A))$ e, daí, $\sigma_i + S_p(A) = T_\#(\sigma_j + S_p(A))$ para algum $j \neq i$. Reindexando se necessário, considere os conjuntos $\{\sigma_1 + S_p(A), T(\sigma_1) + S_p(A)\}, \ldots, \{\sigma_k + S_p(A), T(\sigma_k) + S_p(A)\}$, que formam uma partição de $\{\sigma_1 + S_p(A), \ldots, \sigma_n + S_p(A)\}$. Tomando $d = \sigma_1 + S_p(A) + ... + \sigma_k + S_p(A)$, temos $d + T_\#(d) = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i + S_p(A) + \sum_{i=1}^{k} T(\sigma_i) + S_p(A) = c$. $\square$

Notamos que $\partial(C_p(X, A; T)) \subset C_{p-1}(X, A; T)$ pois, para todo $c \in C_p(X, A; T)$, $T_\#(\partial c) = \partial(T_\#(c)) = \partial c$. Assim,

$$... \longrightarrow C_{p+1}(X, A; T) \xrightarrow{\partial} C_p(X, A; T) \xrightarrow{\partial} C_{p-1}(X, A; T) \to ...$$

é um complexo de cadeias. Denotamos:

$Z_p(X, A; T) = \{c \in C_p(X, A; T), \partial c = 0\}$

$B_p(X, A; T) = \partial(C_{p+1}(X, A; T))$

$H_p(X, A; T) = \dfrac{Z_p(X, A; T)}{B_p(X, A; T)}$.

Definição 2.6. Os elementos de $Z_p(X, A; T)$, $B_p(X, A; T)$, $H_p(X, A; T)$ são chamados de (T, p) - *ciclos*, (T, p) - *bordos* e (T, p)-*classes de homologia* de $(X, A; T)$, respectivamente.

Proposição 2.7. *Seja $f : (X, A; T) \to (Y, B; S)$ uma aplicação simplicial de T-pares simpliciais. Então, f induz um homomorfismo f_* nos (T, p)-grupos de homologia: $f_* : H_p(X, A; T) \to H_p(Y, B; S)$ é dado por $f_*(c + B_p(X, A; T)) = f_\#(c) + B_p(Y, B; S)$.*

Dem.: Primeiramente, notamos que: se $c \in C_p(X, A; T)$, $f_\#(c) = f_\#(T_\#(c)) = T_\#(f_\#(c))$, então $f_\#(c) \in C_p(Y, B; S)$; ou seja, $f_\#(C_p(X, A; T)) \subset C_p(Y, B; S)$. Portanto, f define uma aplicação de cadeias $f_\# : C_p(X, A; T) \to C_p(Y, B; S)$ e, consequentemente, f induz o homomorfismo $f_* : H_p(X, A; T) \to H_p(Y, B; S)$ dado por $f_*(c + B_p(X, A; T)) = f_\#(c) + B_p(Y, B; S)$. $\square$

Como na homologia simplicial, temos um homomorfismo conectante
$\Delta : H_p(X, A; T) \to H_{p-1}(A; T)$, dado por:

$$\Delta(c + B_p(X, A; T)) = \partial(c) + B_{p-1}(A; T).$$

Definição 2.8. Seja u um vértice de X. Definimos a *estrela* de u, sendo união $St_u = \bigcup_{i=1}^{n} \sigma_i$, onde $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ é o conjunto de todos os simplexos σ de X tais que $u \in \sigma$. Se $St_u \cap St_{T(u)} = \emptyset$ então dizemos que $(X, A; T)$ é um T-par simplicial *próprio.*

Seja $(X, A; T)$ um T-par simplicial próprio e considere $X' = \dfrac{X}{T}, A' = \dfrac{A}{T}$ definidos como segue. Em $X^{(0)}$ definimos a seguinte relação de equivalência:

$$v \approx w \Leftrightarrow v = w \text{ ou } v = T(w).$$

Para cada simplexo $\sigma \in X$, definimos $\overline{\sigma} = [\overline{v_{i_1}}, \ldots, \overline{v_{i_t}}]$, onde $\overline{v_{i_1}}, \ldots, \overline{v_{i_t}}$ são as classes de equivalência dos vértices de σ. Observe que $\overline{\sigma} = \overline{T(\sigma)}$.

Defina $X' = \{\overline{\sigma} : \sigma \in X\}$. Vamos verificar que X' é um complexo simplicial.

Seja s uma face de $\overline{\sigma} \in X'$; então os elementos de s são classes de equivalência de vértices de σ. Considerando a face t de σ determinada por tais vértices, temos $s = \overline{t}$. Sejam $\overline{\sigma_i}, \overline{\sigma_j}$ simplexos de X' tais que $\overline{\sigma_i} \cap \overline{\sigma_j} \neq \emptyset$. Então uma das situações abaixo ocorre:

- $\sigma_i \cap \sigma_j \neq \emptyset$ e $T(\sigma_i) \cap T(\sigma_j) \neq \emptyset$
- $\sigma_i \cap T(\sigma_j) \neq \emptyset$ e $T(\sigma_i) \cap \sigma_j \neq \emptyset$

Supondo $\sigma_i \cap \sigma_j \neq \emptyset$, seja v um vértice de $\sigma_i \cap \sigma_j$. Como $T(\sigma_i), T(\sigma_j) \subset St_{T(v)}$, temos $\sigma_i \cap T(\sigma_j) = \emptyset$ e $\sigma_j \cap T(\sigma_i) = \emptyset$. Afirmamos que $\overline{\sigma_i \cap \sigma_j} = \overline{\sigma_i} \cap \overline{\sigma_j}$. De fato, se $\overline{x} \in \overline{\sigma_i} \cap \overline{\sigma_j}$, então $x \in \sigma_i \cap \sigma_j$ ou $T(x) \in \sigma_i \cap \sigma_j$ e, portanto, $\overline{x} \in \overline{\sigma_i \cap \sigma_j}$. A outra inclusão é imediata.

Como $\alpha = \sigma_i \cap \sigma_j$ é um simplexo de X temos que $\overline{\alpha}$ é um simplexo de X', assim $\overline{\sigma_i} \cap \overline{\sigma_j}$ é um simplexo de X'.

Supondo $\sigma_i \cap T(\sigma_j) \neq \emptyset$, analogamente mostramos que $\overline{\sigma_i} \cap \overline{T(\sigma_j)} = \overline{\sigma_i \cap T(\sigma_j)}$. Como $\alpha = \sigma_i \cap T(\sigma_j)$ é um simplexo de X temos que $\overline{\alpha}$ é um simplexo de X'; assim $\overline{\sigma_i} \cap \overline{T(\sigma_j)}$ é um simplexo de X'. Mostramos então que X' é um complexo simplicial e, repetindo a construção para A', temos que (X', A') é um par simplicial.

Observe que $\gamma : (X, A) \to (X', A')$, dada por $\gamma(\sigma) = \overline{\sigma}$, é uma aplicação simplicial; então γ define uma aplicação de cadeias $\overline{\gamma} : S_p(X, A) \to S_p(X', A')$. Defina

$$\gamma_{\#} : C_p(X, A; T) \to S_p(X', A');$$

dada por $\gamma_{\#}(d + T\#(d)) = \overline{\gamma}(d)$. Vamos verificar que $\gamma_{\#}$ está bem definida. Seja $c \in C_p(X, A; T)$, $c = d + T_{\#}(d)$ e $c = d' + T_{\#}(d')$; $d = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i + S_p(A)$ e $d' = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\sigma}_i + S_p(A)$, onde σ_i, $\tilde{\sigma}_i$ são simplexos de X que não estão em A e $\tilde{\sigma}_i = \sigma_i$ ou $\tilde{\sigma}_i = T(\sigma_i)$. Assim, $\gamma(\sigma_i) = \gamma(\tilde{\sigma}_i)$ e então, $\overline{(\gamma)}(d) = \overline{(\gamma)}(d')$.

Afirmação: $\gamma_{\#}$ é uma aplicação de cadeias. De fato, sejam $d + T_{\#}(d), c + T_{\#}(c) \in C_p(X, A; T)$. Logo, $\gamma_{\#}(d + T_{\#}(d) + c + T_{\#}(c)) = \gamma_{\#}(d + c + T_{\#}(d) + T_{\#}(c)) = \gamma_{\#}(d + c + T_{\#}(d + c)) = \overline{\gamma}(d + c) = \overline{\gamma}(d) + \overline{\gamma}(c) = \gamma_{\#}(d + T_{\#}(d)) + \gamma_{\#}(c + T_{\#}(c))$, daí $\gamma_{\#}$ é um homomorfismo.

Se $\overline{\partial} : S_p(X', A') \to S_{p-1}(X', A')$ é o operador bordo então resta mostrar que $\overline{\partial} \circ \gamma_{\#} = \gamma_{\#} \circ \partial$, isto é, o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd} C_p(X, A; T) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\gamma_{\#}"'] & C_{p-1}(X, A; T) \arrow[d, "\gamma_{\#}"] \\ S_p(X', A') \arrow[r, "\overline{\partial}"] & S_{p-1}(X', A') \end{tikzcd}$$

Seja $d + T_{\#}(d) \in C_p(X, A; T)$,

$$\gamma_{\#} \circ \partial(d + T_{\#}(d)) = \gamma_{\#}(\partial(d) + \partial(T_{\#}(d))) = \gamma_{\#}(\partial(d) + T_{\#}(\partial(d))) = \bar{\gamma}(\partial(d)).$$

Como $\overline{\gamma} : S_*(X, A) \to S_*(X', A')$ é uma aplicação de cadeias então,

$$\overline{\gamma}(\partial(d)) = \partial(\overline{\gamma}(d)) = \partial(\gamma_\#(d + T_\#(d)) = \partial \circ \gamma_\#(d + T_\#(d)).$$

Logo, $\gamma_\#$ é uma aplicação de cadeias. Com isso temos que $\gamma_\#$ induz um homomorfismo $\gamma_\sim : H_p(X, A; T) \to H_p(X', A')$.

Proposição 2.9. *$\gamma_\sim : H_p(X, A; T) \to H_p(X', A')$ é um isomorfismo e comuta com f_* e Δ.*

Dem.: Seja $\sum_{i=1}^{n} \overline{\sigma}_i + S_p(A')$ um elemento qualquer de $S_p(X', A')$ (com cada σ_i sendo uma cadeia elementar de $S_p(X')$). Considere $c = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i + T_\#(\sigma_i) + S_p(A) \in C_p(X, A; T)$. Então $\gamma_\#(c) = \overline{\gamma}\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i + S_p(A)\right) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\sigma_i} + S_p(A')$; portanto $\gamma_\#$ é sobrejetora. Agora seja $c = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i + T_\#(\sigma_i) + S_p(A)$ tal que $\gamma_\#(c) = 0$; então $\sum_{i=1}^{n} \overline{\sigma_i} + S_p(A') = 0$, o que implica $\sum_{i=1}^{n} \overline{\sigma_i} \in S_p(A')$ e, daí, $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i \in S_p(A)$. Desse modo, mostramos que $\gamma_\#$ é isomorfismo e, então, concluímos que $\gamma_\sim$ é um isomorfismo.

Agora queremos verificar que $\gamma'_\sim \circ f_* = \overline{f}_* \circ \gamma_\sim$, onde $\gamma'_\sim : H_p(Y, B; T) \to H_p(Y', B')$ é o isomorfismo dado pela proposição para o T-par $(Y, B; S)$ e $\overline{f}_* : H_p(X', A') \to H_p(Y', B')$ é o homomorfismo induzido por $\overline{f} : (X', A') \to (Y', B')$, dada por $\overline{f}(\overline{x}) = \overline{f(x)}$ ($\overline{f}$ está bem definida pois $f \circ T = S \circ f$).

Primeiro, notamos que $\overline{f}_\# \circ \gamma_\# = \gamma'_\# \circ f_\#$. De fato, se $c \in C_p(X, A; T)$, então $\bar{f}_\# \circ \gamma_\#(c + T_\#(c)) = \bar{f}_\#(\bar{\gamma}(c))$. Se $c = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i + S_p(A)$, então $\overline{\gamma(c)} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\sigma_i} + S_p(A')$. Assim,

$$\overline{f}_\#(\overline{\gamma}_\#(c)) = \overline{f}_\#(\sum_{i=1}^{n} \overline{\sigma_i} + S_p(A')) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \overline{f(\sigma_i)} + S_p(B') = \overline{\gamma}(f_\#(c)) =$$

$$= \gamma_\#(f_\#(c + T_\#(c))).$$

Agora, seja $c + T_\#(c) + B_p(X, A; T) \in H_p(X, A; T)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\overline{f}_* \circ \gamma_\sim(c + T_\#(c) + B_p(X, A; T)) &= \overline{f}_*(\gamma_\#(c + T_\#(c) + B_p(X', A')) = \\
&= \overline{f}_\#(c + T_\#(c)) + B_p(Y', B')) = \\
&= \gamma'_\#(f_\#(c + T_\#(c))) + B_p(Y', B') = \\
&= \gamma'_\# \circ f_*(c + T_\#(c) + B_p(X, A; T)).
\end{aligned}$$

Resta verificar que $\gamma_\sim$ comuta com Δ. Seja $c + B_p(X, A; T)$, $c \in Z_p(X, A; T)$ com $c = d + T_\#(d)$ e $d \in S_p(X, A)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\gamma_\sim(\Delta(c + B_p(X, A; T))) &= \gamma_\sim(\partial(c) + B_{p-1}(A; T)) = \gamma_\#(\partial(c)) + B_{p-1}(A') = \\
&= \gamma_\#(\partial(d) + T_\#(\partial(d))) + B_{p-1}(A') = \\
&= \overline{\gamma}(\partial(d)) + B_{p-1}(A') = \partial(\overline{\gamma}(d)) + B_{p-1}(A')
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Delta(\gamma_\sim(c + B_p(X, A; T))) &= \Delta(\gamma_\sim(d + T_\#(d) + B_p(X, A; T)) = \\
&= \Delta(\gamma_\#(d + T_\#(d)) + B_p(X', A')) = \\
&= \Delta(\overline{\gamma}(d) + B_p(X', A') = \partial(\overline{\gamma}(d) + B_{p-1}(A').
\end{aligned}$$

Portanto, $\gamma_\sim$ comuta Δ. $\square$

2.2 Homologia de T-pares Quaisquer

De forma análoga à construção da Homologia de Čech, a partir da Homologia simplicial, construiremos a Homologia (de Čech-Smith) de T-pares quaisquer, a partir da Homologia de T-pares simpliciais.

Seja $(X, A; T)$ um T-par arbitrário.

Uma *cobertura* de $(X, A; T)$ é um par $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ tal que:

- λ_1 é uma cobertura aberta finita de X;
- $\lambda_2 \subset \lambda_1$ é uma cobertura de A;

- Se um aberto $U \in \lambda_i$ então $T(U) \in \lambda_i$, $i = 1, 2$;
- $St_U \cap St_{T(U)} = \emptyset$ para todo $U \in \lambda_i$, onde $St_U = \bigcup U_i$, considerando todos $U_i \in \lambda_1$ com $U_i \cap U \neq \emptyset$.

Denote por $(X_\lambda, A_\lambda; T)$ a realização geométrica do nervo da cobertura λ. Note que $(X_\lambda, A_\lambda; T)$ é um T-par simplicial próprio. Seja

$$\Lambda = \{\lambda : \lambda \textit{ uma cobertura de } (X, A; T)\}.$$

Proposição 2.10. *Todo T-par $(X, A; T)$ admite uma cobertura.*

Dem.: Seja $x \in X$. Como $x \neq T(x)$ e X é Hausdorff, existem U, V abertos com $x \in U$, $T(x) \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Pela normalidade de X, podemos, ainda, tomar abertos U', V' tais que: $x \in U' \subset \overline{U'} \subset U$ e $T(x) \in V' \subset \overline{V'} \subset V$. Sejam $V_x = V' \cap T(U')$ e $U_x = T(V_x)$. Assim, para cada $x \in X$, temos abertos U_x e V_x tais que $x \in U_x$, $T(x) \in V_x$, $V_x = T(U_x)$ e $\overline{U_x} \cap \overline{V_x} = \emptyset$.

Cubra o espaço X com os abertos U_x e $T(U_x)$. Como X é compacto, essa cobertura admite uma subcobertura finita $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$, acrescentando as imagens destes abertos temos que $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}, T(U_{x_1}), \ldots, T(U_{x_n})\}$ é uma cobertura finita e aberta de X. Denote U_{x_i} por U_i e $\lambda' = \{U_1, \ldots, U_n, T(U_1), \ldots, T(U_n)\}$.

Se $St_U \cap St_{T(U)} = \emptyset$ para todo $U \in \lambda'$, então temos a cobertura desejada. Se $St_U \cap St_{T(U)} \neq \emptyset$ para algum U, então procedemos da forma a seguir: seja $V \in \lambda'$ com $V \in St_U \cap St_{T(U)}$ para algum $U \in \lambda'$; então $V \cap U \neq \emptyset$ e $V \cap T(U) \neq \emptyset$. Como $\overline{U} \cap \overline{T(U)} = \emptyset$, existem vizinhanças W_U, $W_{T(U)}$ de U e $T(U)$, respectivamente, tais que $U \subset \overline{U} \subset W_U$, $T(U) \subset \overline{T(U)} \subset W_{T(U)}$ e $W_U \cap W_{T(U)} = \emptyset$. Considere $V_1 = V \cap W_U$, $V_3 = V \cap W_{T(U)}$, $V_2 = (\overline{U} \cup \overline{T(U)})^c \cap V$. Observe que $V \subset V_1 \cup V_2 \cup V_3$ e, ainda, $V_1 \cap U \neq \emptyset$, mas $V_1 \cap T(U) = (V \cap W_U) \cap T(U) \subset (V \cap W_U) \cap W_{T(U)} = \emptyset$. Portanto $V_1 \cap T(U) = \emptyset$. Como $V_3 \cap T(U) \neq \emptyset$, de mesma maneira, verificamos que $V_3 \cap U = \emptyset$ e temos que $V_2 \cap U = \emptyset$ e $V_2 \cap T(U) = \emptyset$. Logo, "dividimos"o aberto V em três abertos V_1, V_2, V_3 com $V_i \notin St_U \cap St_{T(U)}$ para todo $i = 1, 2, 3$. Para todo par de abertos $U_i, T(U_i)$ com $V \in St_{U_i} \cap St_{T(U_i)}$ refaça o processo acima: "divida" V em V_1^i, V_2^i, V_3^i como feito anteriormente. Como λ' é finita, existe uma quantidade finita de abertos $U_1, \ldots, U_k, T(U_1), \ldots, T(U_k)$ com $V \in St_{U_i} \cap St_{T(U_i)}$, logo existirão V_1^i, V_2^i, V_3^i, $i = 1, 2, \ldots, k$ tais que $V \subset V_1^i \cup V_2^i \cup V_3^i$ para todo i e $V_j^i \notin St_{U_i} \cap St_{T(U_i)}$.

Agora tome um aberto, e somente um, V_j^i de cada "divisão" de V e faça a interseção desses abertos. Fazendo todas as combinações possíveis com os abertos V_j^i temos 3^k abertos que serão denotados por A_j. Logo, $V \subset \bigcup_{j=1}^{3^k} A_j$ e $A_j \notin St_{U_i} \cap St_{T(U_i)}$ para todo $i = 1, \ldots, k$ e para todo $j = 1, \ldots, 3^k$.

Finalmente, substitua V por $A_1, \ldots, A_{3^k}$, de forma correspondente, suas imagens; refazendo este processo para todo aberto V tal que $V \in St_{U_i} \cap St_{T(U_i)}$ para algum $U_i \in \lambda'$ temos a cobertura desejada. $\square$

Consideramos a seguinte relação $<$ em Λ: $\lambda < \mu \Leftrightarrow \mu \; refina \; \lambda$.

Vamos verificar que Λ com $<$ é um conjunto direcionado. Temos $\alpha < \alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$. Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$ com $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$, se $\alpha < \beta$ então para todo $U \in \alpha_i$, existe $V \in \beta_i$ tal que $U \subset V$ e $\beta < \gamma$, logo para todo $V \in \beta_i$, existe $W \in \gamma_i$ tal que $V \subset W$. Daí, para todo $U \in \alpha_i$, existe $W \in \gamma_i$ tal que $U \subset W$, portanto $\alpha < \gamma$. Considere $\delta_i = \{U \cap V, U \in \alpha_i \text{ e } V \in \beta_i\}$ e tome $\delta = (\delta_1, \delta_2)$. Se $W \in \delta_i$, então $W = U_j \cap V_k$, com $U_j \in \alpha_i$ e $V_k \in \beta_i$. Logo, $T(W) = T(U_j \cap V_k) = T(U_j) \cap T(V_k)$, como $T(U_j) \in \alpha_i$ e $T(V_k) \in \beta_i$, daí $T(W) \in \delta_i$. Seja $St_W = \bigcup_{t=1}^{s} W_t$ e $St_{T(W)} = \bigcup_{t=1}^{s} T(W_t)$. Como $St_W \cap St_{T(W)} \subset St_{U_j} \cap St_{T(U_j)} = \emptyset$, concluímos que $\delta \in \Lambda$, δ refina ambas α e β, logo δ é um limitante superior de α e β. Portanto Λ com $<$ é um conjunto direcionado.

Para cada $\lambda \in \Lambda$. Considere $(X_\lambda, A_\lambda; T)$ o nervo de λ. Note que T é uma aplicação bem definida pois: $U \in \lambda$ se, e somente se, $T(U) \in \lambda$. Se $\lambda < \mu$, defina $\pi_{\lambda\mu} : (X_\mu, A_\mu; T) \to (X_\lambda, A_\lambda; T)$ uma projeção, que não é única. Mas sabemos que se $\pi_{\lambda\mu}, \pi'_{\lambda\mu} : (X_\mu, A_\mu; T) \to (X_\lambda, A_\lambda; T)$ são projeções, então são adjacentes e, portanto, induzem o mesmo homomorfismo nas homologias. Com isso temos que $\pi_{\lambda\mu *} : H_p(X_\mu, A_\mu; T) \to H_p(X_\lambda, A_\lambda; T)$ independente da projeção escolhida.

Observamos que $\{H_p(X_\lambda, A_\lambda; T), \pi_{\lambda\mu *}\}$ forma um sistema inverso sobre Λ. De fato, resta mostrar que $\pi_{\lambda\lambda *} = Id$ e se $\lambda, \mu, \gamma \in \Lambda$ com $\lambda < \mu < \gamma$, então $\pi_{\lambda\mu *} \circ \pi_{\mu\gamma *} = \pi_{\lambda\gamma *}$. Aqui $Id : H_p(X_\lambda, A_\lambda; T) \to H_p(X_\lambda, A_\lambda; T)$ é a função identidade.

$\pi_{\lambda\lambda *} = Id$ pois a função $id : (X_\lambda, A_\lambda; T) \to (X_\lambda, A_\lambda; T)$ é uma projeção e $\pi_{\lambda\lambda *} = id_* = Id$

Como $\pi_{\lambda\mu} \circ \pi_{\mu\gamma}$ é uma projeção, isto é, $\pi_{\lambda\mu} \circ \pi_{\mu\gamma} = \pi_{\lambda\gamma}$, então $\pi_{\lambda\mu *} \circ \pi_{\mu\gamma *} = \pi_{\lambda\gamma *}$; logo $\{H_p(X_\lambda, A_\lambda; T), \pi_{\lambda\mu *}\}$ forma um sistema inverso e seu grupo limite é o *p-ésimo grupo de T-homologia* de $(X, A; T)$ e será denotado por $H_p(X, A; T)$.

Temos que uma aplicação $f : (X, A; T) \to (Y, B; T)$ de T-pares induz um homomorfismo $f_* : H_p(X, A; T) \to H_p(Y, B; T)$ e, para cada T-par $(X, A; T)$, existe um homomorfismo conectante $\Delta : H_p(X, A; T) \to H_{p-1}(A; T)$.

Dado um T-par $(X, A; T)$, denote por (X', A') o par obtido da identificação de todo ponto de X com sua imagem pela T, como foi feito anteriormente. Considerando em X' a topologia quociente, seja $\check{H}_p(X', A')$ a p-ésima homologia de Čech de (X', A'). Então, para todo T-par $(X, A; T)$, temos um isomorfismo $\gamma_\sim : H_p(X, A; T) \to \check{H}_p(X', A')$ comutativo com f_* e Δ.

Seja S^n a n-esfera e $A : S^n \to S^n$ a aplicação antipodal, logo $(S^n; A)$ é um T-par e através do isomorfismo citado acima podemos calcular sua homologia: $H_p(S^n; A)$ é isomorfo a $\check{H}_p(\frac{S^n}{A}) = \check{H}_p(\mathbb{R}P^n) \cong H_p(\mathbb{R}P^n)$, onde $\mathbb{R}P^n$ é o espaço projetivo n-dimensional; logo, $H_p(S^n; A) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & se \quad 0 \leq p \leq n \\ 0 & se \quad p > n. \end{cases}$

Observação 2.11. Assim como nas homologias de Čech e simplicial usuais, para um T-par $(X, A; T)$, sendo uma triangularização do T-par simplicial $(K, L; T)$, também temos um isomorfismo entre $H_p(X, A; T)$ e $H_p(K, L; T)$, para todo p.

2.3 Homomorfismo Índice de T-Espaços Simpliciais

Seja $(X;T)$ um T-espaço simplicial.

Primeiramente, vamos definir o homomorfismo $\nu : Z_0(X;T) \to \mathbb{Z}_2$: se $z = c + T_\#(c) \in Z_0(X;T)$, com $c = \sum_{i=1}^{n} \phi_i$, (sendo cada ϕ_i uma cadeia elementar), então $\nu(z) = In(c) = \overline{n} \in \mathbb{Z}_2$ (vide 1.20). Verifiquemos que ν está bem definida e que $\nu(B_0(X;T)) = 0$.

Seja $z = c' + T_\#(c') = c + T_\#(c) \in Z_0(X;T)$. Então,

$$\nu(c + T_\#(c)) + \nu(c' + T_\#(c')) = In(c) + In(c') = In(c + c').$$

Mas, $c + c'$ é uma $(T,0)$-cadeia; logo, existe $d = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i \in S_0(X)$ tal que

$$c + c' = d + T_\#(d) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i + \sum_{i=1}^{k} T_\#(\varphi_i),$$

e $In(c + c') = \overline{2k} = \overline{0}$. Portanto,

$$\nu(c + T_\#(c)) = \nu(c' + T_\#(c')).$$

Se $z \in B_0(X;T)$, então $z = \partial(d + T_\#(d))$. Logo,

$$\nu(z) = \nu(\partial(d + T_\#(d)) = In(\partial(d)) = 0.$$

Para $p > 0$, definimos $\nu : Z_p(X;T) \to \mathbb{Z}_2$ por recorrência sobre p: se $z = c + T_\#(c) \in Z_p(X;T)$, então $\nu(z) = \nu(\partial(c))$. Obervamos que $\partial(c) \in Z_{p-1}(X;T)$, pois $0 = \partial(z) = \partial(c) + T_\#(\partial(c))$ implica $T_\#(\partial(c)) = \partial(c)$. Vamos verificar, por indução sobre p, que ν está bem definida, é um homomorfismo e $\nu(B_p(X;T)) = 0$.

Seja $z \in Z_p(X;T)$ com $z = c + T_\#(c) = c' + T_\#(c')$; então $c + c' = T_\#(c + c')$, ou seja, $c + c' \in C_p(X;T)$ e $\partial(c + c') \in B_{p-1}(X;T)$. Agora, $\nu(c + T_\#(c)) + \nu(c' + T_\#(c')) = \nu(\partial(c)) + \nu(\partial(c')) = \nu(\partial(c + c')) = 0$. Assim,

$$\nu(c + T_\#(c)) = \nu(c' + T_\#(c')).$$

Além disso, se $c + T_\#(c)$ e $d + T_\#(d) \in C_p(X;T)$, então

$$\nu(c + T_\#(c) + d + T_\#(d)) = \nu(\partial(c + d)) = \nu(\partial(c + d)) =$$

$$= \nu(\partial(c) + \partial(d)) = \nu(\partial(c)) + \nu(\partial(d)) =$$

$$= \nu(c + T_\#(c)) + \nu(d + T_\#(d));$$

logo, ν é um homomorfismo, como queríamos. Finalmente, se $z \in B_p(X;T)$, existe $d + T_\#(d) \in C_{p+1}(X;T)$ tal que $z = \partial(d + T_\#(d))$. Daí, $\nu(z) = \nu(\partial(d + T_\#(d)) = \nu(\partial(\partial(d))) = \nu(0) = 0$ e, portanto,

$$\nu(B_p(X;T)) = 0.$$

Agora estamos aptos para definir o homomorfismo índice.

Definição 2.12. Definimos o homomorfismo índice $\nu : H_p(X;T) \to \mathbb{Z}_2$ por

$$\nu(\alpha + B_p(X;T)) = \nu(\alpha).$$

Tal homomorfismo é bem definido pois $\nu(B_p(X;T)) = 0$.

Proposição 2.13. *Se $f : (X;T) \to (Y;S)$ é uma aplicação simplicial, então $\nu(f_*(\sigma)) = \nu(\sigma)$, para qualquer $\sigma \in H_p(X;T)$.*

Dem.: Basta mostrarmos que, para $z \in Z_p(X;T)$, $\nu(f_\#(z)) = \nu(z)$. Note que: se $z = c + T_\#(c)$, então

$$f_\#(z) = f_\#(c + T_\#(c)) = f_\#(c) + f_\#(T_\#(c)) = f_\#(c) + S_\# f_\#(c).$$

Mostremos por indução sobre p.

Para $p = 0$, temos o seguinte: se $z = c + T_\#(c)$, com $c = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \phi_i \in S_0(X)$, sendo cada ϕ_i uma cadeia elementar, então $\nu(z) = In(c) = \overline{k}$ e $f_\#(c) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} f(\phi_i)$, logo

$$\nu(f_\#(z)) = In(f_\#(c)) = \overline{k} = \nu(z).$$

Suponhamos que, para todo $z \in Z_{p-1}(X;T)$ $(p > 1)$, $\nu(z) = \nu(f_{\#}(z))$. Se $z = c + T_{\#}(c)$, então $\nu(z) = \nu(\partial(c))$ e $\nu(f_{\#}(z)) = \nu(\partial(f_{\#}(c))) = \nu(f_{\#}(\partial(c)))$. Como $\partial(c) \in Z_{p-1}(X;T)$ temos, por hipótese de indução, que

$$\nu(\partial(c)) = \nu(f_{\#}(\partial(c))).$$

Então, $\nu(z) = \nu(f_{\#}(z))$ e, portanto,

$$\nu(\sigma) = \nu(f_*(\sigma)),$$

para todo $\sigma \in H_p(X;T)$. □

2.4 Homomorfismo Índice de T-Espaços Quaisquer

Seja $(X;T)$ um T-espaço arbitrário.

Consideremos a família $\sigma = \{\sigma_\lambda\} \in H_p(X;T)$ e $\Lambda = \{\lambda : \lambda$ cobertura de $(X;T)\}$. Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ e tome $\mu \in \Lambda$ com λ_1, $\lambda_2 < \mu$. Então, pela proposição 2.13,

$$\nu(\sigma_\mu) = \nu(\pi_{\lambda_1\mu*}(\sigma_\mu)) = \nu(\sigma_{\lambda_1}) \text{ e } \nu(\sigma_\mu) = \nu(\pi_{\lambda_2\mu*}(\sigma_\mu)) = \nu(\sigma_{\lambda_2}).$$

Logo, $\nu(\lambda_1) = \nu(\lambda_2)$ e, portanto, $\nu(\sigma_\lambda)$ independe da escolha de λ.

Definição 2.14. Seja $(X;T)$ um T-espaço arbitrário. Definimos o homomorfismo índice $\nu : H_p(X;T) \to \mathbb{Z}_2$ por

$$\nu(\sigma) = \nu(\sigma_\lambda),$$

considerando $\lambda \in \Lambda = \{\lambda : \lambda \text{ cobertura de } (X;T)\}$ arbitrário.

Proposição 2.15. *Seja $f : (X;T) \to (Y;S)$ uma aplicação de T-espaços. Então, $\nu(f_*(\sigma)) = \nu(\sigma)$, para qualquer $\sigma \in H_p(X;T)$.*

Dem.: Seja $\sigma = \{\sigma_\lambda\} \in H_p(X;T)$. Temos que f induz um homomorfismo $f_* : H_p(X;T) \to H_p(Y;S)$. Se $f^{-1}(\lambda') = \lambda$ (conforme 1.42), então $f_{\lambda'*}(\sigma_\lambda) = \sigma_{\lambda'}$, onde $f_{\lambda'*} : H_p(X_\lambda;T) \to H_p(Y_{\lambda'};S)$ é o homomorfismo definido na seção 1. Pela proposição 2.13, $\nu(f_{\lambda'*}(\sigma_\lambda)) = \nu(\sigma_{\lambda'})$ e, por definição, $\nu(\sigma) = \nu(\sigma_\lambda)$. Logo, $\nu(\sigma) = \nu(f_*(\sigma))$. $\square$

O lema a seguir será de grande importância para a generalização do teorema de Borsuk-Ulam, feita no próximo capítulo.

Lema 2.16. *Sejam $(X;T)$ um T-espaço, F um subespaço fechado de X, tal que $F \cup T(F) = X$ e $A = F \cap T(F)$. Então, para $p > 0$, existe um homomorfismo*

$$\Delta : H_p(X;T) \to H_{p-1}(A;T)$$

tal que $\nu(\sigma) = \nu(\Delta(\sigma))$, para todo $\sigma \in H_p(X;T)$.

Dem.: Observe que A é fechado e T-invariante. Inicialmente, assumimos que $(X, A;T)$ é um T-par **simplicial**. Seja $\sigma \in H_p(X;T)$ e consideremos um representante da classe σ, $z = c + T_\#(c)$, com $c \in S_p(F)$. Então, temos $\partial z = \partial c + \partial T_\#(c)$. Mas, $\partial z = 0$, o que resulta em $\partial c = T_\#(\partial c)$. Logo, $\partial c \in Z_{p-1}(X;T)$ e ainda, $\partial c \in C_{p-1}(A;T)$. Portanto, $\partial c \in Z_{p-1}(A;T)$. Definimos então $\Delta : H_p(X;T) \to H_{p-1}(A;T)$ por

$$\Delta(z + B_p(X;T)) = \partial c + B_{p-1}(A;T).$$

Mostraremos que Δ é bem definida. Para tal, é suficiente verificarmos que a aplicação $\tilde{\Delta} : Z_p(X;T) \to H_{p-1}(A;T)$, dada por

$$\tilde{\Delta}(z) = \partial c + B_{p-1}(A;T),$$

é bem definida, é um homomorfismo e $B_p(X;T) \subset \ker(\tilde{\Delta})$.

Seja $z = c + T_\#(c) = c' + T_\#(c') \in Z_p(X;T)$ com $c, c' \in S_p(F)$. Precisamos mostrar que $\partial(c) + B_{p-1}(A;T) = \partial(c') + B_{p-1}(A;T)$. Para isso, basta notar que, $c + c' = T_\#(c + c')$ com $c + c' \in S_p(F)$ e, portanto, $\partial(c + c') \in B_{p-1}(A;T)$.

Agora mostraremos que $\tilde{\Delta}$ é um homomorfismo. Sejam $z = c + T_\#(c)$ e $z' = d + T_\#(d)$ elementos de $Z_p(X;T)$, com $c, d \in S_p(F)$. Temos que

$$z + z' = c + T_\#(c) + d + T_\#(d) = c + d + T_\#(c + d).$$

Então, pela definição de $\tilde{\Delta}$, temos

$$\tilde{\Delta}(z+z') = \partial(c+d)+B_{p-1}(A;T) = \partial c+B_{p-1}(A;T)+\partial d+B_{p-1}(A;T) = \tilde{\Delta}(z)+\tilde{\Delta}(z').$$

Tomemos $z \in B_p(X;T)$ qualquer. Logo, existe $z' \in C_{p+1}(X;T)$ tal que $\partial z' = z$. Se $z' = d + T_\#(d)$ com $d \in S_{p+1}(F)$, então

$$\partial z' = \partial d + \partial T_\#(d) = \partial d + T_\#(\partial d)$$

e, usando a definição de $\tilde{\Delta}$,

$$\tilde{\Delta}(z) = \tilde{\Delta}(\partial z') = \partial(\partial d) + B_{p-1}(A;T) = 0,$$

o que implica $z \in \text{Ker}\ (\tilde{\Delta})$. Logo, $B_{p-1}(X;T) \subset \text{Ker}\ (\tilde{\Delta})$.

Concluímos então que $\Delta : H_p(X;T) \to H_{p-1}(A;T)$ é um homomorfismo bem definido. Seja $\sigma \in H_p(X;T)$, $\sigma = z + B_p(X;T)$, $z = c + T_\#(c)$, com $c \in S_p(F)$; então, pelas definições de Δ e ν, temos:

$$\nu(\sigma) = \nu(z) = \nu(\partial c) = \nu(\Delta(\sigma)).$$

Logo, $\nu(\sigma) = \nu(\Delta(\sigma))$ para todo $\sigma \in H_p(X;T)$.

Finalmente, consideramos $(X, A; T)$ um T-par arbitrário. Considere $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$ o conjunto das coberturas de $(X, A; T)$. Então $\{H_p(X_\lambda;T), \pi_{\lambda\mu *}\}_{\lambda,\mu\in\Lambda_1}$, $\{H_{p-1}(A_\lambda;T), \pi_{\lambda\mu *}\}_{\lambda,\mu\in\Lambda_2}$ são sistemas inversos sobre Λ_1 e Λ_2, respectivamente, para todo p. Afirmamos que, para cada p, a inclusão $i : \Lambda_2 \to \Lambda_1$ e $\Delta_\lambda : H_p(X_\lambda;T) \to H_{p-1}(A_\lambda;T)$ (definidos como Δ do caso simplicial) é uma aplicação entre esses sistemas. De fato, sejam $\lambda, \mu \in \Lambda_2$ com $\lambda < \mu$. Se $\sigma = c + T_\#(c) + B_p(X_\mu, ;T) \in H_p(X_\mu, ;T)$, com $c \in S_p(F)$, então $\Delta_\mu(\sigma) = \partial(c) + B_{p-1}(A_\mu;T)$. Logo,

$$\pi_{\lambda\mu *} \circ \Delta_\mu(\sigma) = \pi_{\lambda\mu *}(\partial(c) + B_{p-1}(A_\mu;T)) =$$

$$= \pi_{\lambda\mu \#}(\partial(c)) + B_{p-1}(A_\lambda;T) =$$

$$= \partial(\pi_{\lambda\mu \#}(c)) + B_{p-1}(A_\lambda;T).$$

Por outro lado,

$$\Delta_\lambda \circ \pi_{\lambda\mu *}(\sigma) = \Delta_\lambda(\pi_{\lambda\mu *}(c + T_\#(c) + B_p(X_\mu; T))) =$$

$$= \Delta_\lambda(\pi_{\lambda\mu\#}(c + T_\#(c)) + B_p(X_\lambda; T)) =$$

$$= \Delta_\lambda(\pi_{\lambda\mu\#}(c) + \pi_{\lambda\mu\#}(T_\#(c)) + B_p(X_\lambda; T)) =$$

$$= \Delta_\lambda(\pi_{\lambda\mu\#}(c) + T_\#(\pi_{\lambda\mu\#}(c)) + B_p(X_\lambda; T)) =$$

$$= \partial(\pi_{\lambda\mu\#}(c)) + B_{p-1}(A_\lambda; T).$$

Portanto, temos uma aplicação

$$\{H_p(X_\lambda; T), \pi_{\lambda\mu *}\}_{\lambda,\mu\in\Lambda} \to \{H_{p-1}(A_\lambda; T), \pi_{\lambda\mu *}\}_{\lambda,\mu\in\Lambda}$$

entre sistema inversos e sua função limite é a função $\Delta : H_p(X; T) \to H_{p-1}(A; T)$ desejada: para cada $\{\sigma_\lambda\} \in H_p(X; T)$, $\nu(\Delta(\{\sigma_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_1})) = \nu(\{\Delta_\lambda(\sigma_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda_2}) = \nu(\Delta_{\overline{\lambda}}(\sigma_{\overline{\lambda}})) = \nu(\sigma_{\overline{\lambda}}) = \nu(\{\sigma_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$, onde $\overline{\lambda}$ é um elemento qualquer de $\Lambda_2 \subset \Lambda_1$. $\square$

Observação 2.17. *Uma consequência imediata do lema anterior é: se* $\nu(H_n(X; T)) = \mathbb{Z}_2$ *($n > 0$), então* $\nu(H_p(X; T)) = \mathbb{Z}_2$*, para cada p com* $0 \leq p \leq n$*.*

De fato, basta tomarmos $F = X$; logo, $T(F) = X$ e $A = X$. Seja $\sigma \in H_n(X; T)$. Assim, se $\Delta : H_n(X; T) \to H_{n-1}(X; T)$ é o homomorfismo dado pelo lema 2.16 e $\nu(\sigma) = 1$, então $\nu(\Delta(\sigma)) = 1$. Recursivamente, temos que $\nu(H_p(X; T)) = \mathbb{Z}_2$, para todo $0 \leq p \leq n$.

2.5 Índice de Yang

A seguinte proposição nos dá a motivação para definirmos o índice (de Yang) de $(X; T)$.

Proposição 2.18. *Para qualquer T-espaço $(X;T)$, $X \neq \emptyset$, existe um inteiro n tal que*

$$\nu(H_p(X;T)) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{se} \quad 0 \leq p \leq n, \\ 0, & \text{se} \quad p > n. \end{cases}$$

Dem.: Primeiro, mostraremos que $\nu(H_0(X;T)) = \mathbb{Z}_2$. Seja $x \in X$ e considere o subconjunto $X^0 = \{x, T(x)\} \subset X$; o qual é compacto e T-invariante. Assim obtemos o T-espaço $(X^0;T)$. Considere a 0-cadeia $x + T_\#(x) \in C_0(X^0;T) = Z_0(X^0;T)$; logo $\nu(x + T_\#(x)) = In(x) = 1$. Agora considere a aplicação $i : (X^0;T) \to (X;T)$; i é uma aplicação de T-espaços e, portanto, induz um homomorfismo $i_* : H_0(X^0;T) \to H_0(X;T)$. Se $\sigma = x + T_\#(x) + B_0(X;T) \in H_0(X^0;T)$, então $1 = \nu(\sigma) = \nu(i_*(\sigma))$ (vide prop. 2.15). Portanto, existe um elemento $i_*(\sigma) \in H_0(X;T)$ com $\nu(i_*(\sigma)) \neq 0$. Logo, $\nu(H_0(X;T)) = \mathbb{Z}_2$. Pela observação 2.17, resta provarmos que $\nu(H_p(X;T)) = 0$, para algum p.

Seja λ uma cobertura de $(X;T)$ e suponha que a dimensão de X_λ seja $p-1$. Assim, $H_p(X_\lambda;T) = 0$. Tomemos $\sigma \in H_p(X;T)$ qualquer, $\sigma = \{\sigma_\lambda\}$. Como $\nu(\sigma) = \nu(\sigma_\lambda) = 0$, $\nu(H_p(X;T)) = 0$, para tal p. □

Definição 2.19. O inteiro n, dado pela proposição 2.18, é definido como *índice* de $(X;T)$.

Proposição 2.20. *Se existe $f : (X;T) \to (Y;S)$ aplicação de T-espaços, então índice de $(Y;S) \geq$ índice $(X;T)$.*

Dem.: Se $f : (X;T) \to (Y;S)$ é uma aplicação de T-pares, então f induz um homomorfismo $f_* : H_p(X;T) \to H_p(Y;S)$ (para todo $p \in \mathbb{N}$). Se o índice de $(X;T)$ é n, então existe $\sigma \in H_n(X;T)$, com $\nu(\sigma) \neq 0$. Como $0 \neq \nu(\sigma) = \nu(f_*(\sigma))$, pela proposição 2.15, $\nu(H_n(Y;S)) \neq 0$ e, portanto, índice de $(Y;S) \geq n$. □

Proposição 2.21. $\nu : H_p(S^n;A) \to \mathbb{Z}_2$ *é um isomorfismo para* $p = 0, 1, 2, \ldots, n$

Dem.: Sabemos que $H_p(S^n; A) \cong \mathbb{Z}_2$, para $p = 0, 1, \ldots, n$, e pela proposição 2.18, basta mostrarmos que $\nu(H_n(S^n; A)) = \mathbb{Z}_2$. Faremos isso usando processo de indução sobre n.

Para $n = 0$, o resultado segue da demonstração da proposição 2.18.

Suponhamos $n > 0$ e $\nu(H_{n-1}(S^{n-1}; A)) = \mathbb{Z}_2$. Seja

$$F = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} \geq 0\}.$$

Então, $A(F) = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n$ tal que $x_{n+1} \leq 0\}$ e

$$F \cap A(F) = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \text{ tal que } x_{n+1} = 0\} \cong S^{n-1}.$$

Afirmação: $\Delta : H_n(S^n; A) \to H_{n-1}(S^{n-1}; A)$, construído no lema 2.16 é um isomorfismo.

De fato, como S^n é triangularizável então as homologias simpliciais e a de $\check{C}$ech-Smith coincidem, portanto consideraremos o caso simplicial.

Vamos mostrar que $\Delta : (S^n; A) \to (S^{n-1}; A)$ é um isomorfismo e, para isso, é suficiente verificarmos que a aplicação $\tilde{\Delta} : Z_n(S^n; A) \to H_{n-1}(S^{n-1}; A)$, definida na demonstração do lema 2.16, é sobrejetora.

Seja $\sigma \in H_{n-1}(S^{n-1}; A)$ e d um representante da classe σ,

$$d = \sum_{i=1}^{s} \phi_i,$$

com $\phi_i = [\phi_0^{(i)}, \ldots, \phi_{n-1}^{(i)}]$, $1 \leq i \leq s$; consideremos o n-simplexo

$$\phi_i' = [\phi_0^{(i)}, \ldots, \phi_{n-1}^{(i)}, N],$$

onde N é o pólo norte da esfera S^n. Agora, seja $d' \in C_n(S^n; A)$,

$$d' = \sum_{i=1}^{s} \phi_i' + A_\# \left(\sum_{i=1}^{s} \phi_i' \right).$$

Temos que

$$\partial d' = \sum_{i=1}^{s} \partial \phi_i' + A_\# \left(\sum_{i=1}^{s} \partial \phi_i' \right) = d + d = 0.$$

Logo, $d' \in Z_n(S^n; A)$. Além disso,

$$\tilde{\Delta}(d') = \partial\left(\sum_{i=1}^{s} \phi_i'\right) + B_{n-1}(S^{n-1}; A) = d + B_{n-1}(S^{n-1}; A) = \sigma.$$

Portanto, $\tilde{\Delta}'$ é sobrejetora e, com isso, temos Δ é um isomorfismo.

Pela hipótese de indução, temos que existe $\alpha \in H_{n-1}(S^{n-1}; A)$ tal que $\nu(\alpha) \neq 0$. Como Δ é um isomorfismo, existe $\alpha' \in H_n(S^n; A)$ com $\Delta(\alpha') = \alpha$. Assim,

$$\nu(\alpha') = \nu(\Delta(\alpha')) = \nu(\alpha) \neq 0$$

e, portanto, $\nu(H_n(S^n; A)) = \mathbb{Z}_2$. $\square$

Corolário 2.22. *$(S^n; T)$ possui índice n.*

Corolário 2.23. *Seja $\sigma \in H_p(X; T)$. Então, $\nu(\sigma) \neq 0$ se, e somente se, $f_*(\sigma) \neq 0$, para toda aplicação $f : (X; T) \to (Y; S)$.*

Dem.: ($\Rightarrow$) Se $\nu(\sigma) \neq 0$ então, para qualquer $f : (X; T) \to (Y; S)$,

$$\nu(f_*(\sigma)) = \nu(\sigma) \neq 0.$$

Logo, como ν é um homomorfismo, $f_*(\sigma) \neq 0$;

($\Leftarrow$) Suponha $\nu(\sigma) = 0$. Sejam $\{U_0, \ldots, U_n\}$ uma cobertura aberta de X com $U_i \cap T(U_i) = \emptyset$ para todo $i = 0, \ldots, n$. Vamos construir $2n + 2$ funções contínuas, $f_0, \ldots, f_n, g_0, \ldots, g_n : X \to \mathbb{R}$, que satisfaçam, para todo $i = 0, 1, \ldots, n$, as seguintes propriedades:

1. $g_i = f_i \circ T$;
2. $f_i(x) = 0$, para todo $x \in X - U_i$;
3. $0 \leq f_i \leq 1$;
4. $f_0^2 + \ldots + f_n^2 + g_0^2 + \ldots + g_n^2 = 1$.

Como $\{U_0, \ldots, U_n\}$ é uma cobertura de X então, pela partição da unidade, existem $n+1$ funções contínuas $\phi_0, \ldots, \phi_n : X \to [0,1]$ com $\phi_i(X - U_i) = \{0\}$, $0 \leq i \leq n$, e $\sum_{i=0}^{n} \phi_i = 1$. Defina, para $0 \leq i \leq n$,

$$f_i = \frac{\sqrt{2\phi_i}}{2}.$$

Assim,

$$\sum_{i=0}^{n} f_i^2 = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\sqrt{2\phi_i}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n} \phi_i\right) = \frac{1}{2}.$$

Como $g_i = f_i \circ T$,

$$f_0^2 + ... + f_n^2 + g_0^2 + ... + g_n^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Notemos que, para cada $i = 0, 1, \ldots, n$, se $f_i(x) \neq 0$, então $g_i(x) = 0$. Logo,

$$\sqrt{(f_0(x) - g_0(x))^2 + \ldots + (f_n(x) - g_n(x))^2} =$$

$$= \sqrt{f_0^2(x) - 2f_0(x)g_0(x) + g_0^2(x) + \ldots + f_n^2(x) - 2f_n(x)g_n(x) + g_n^2(x)} =$$

$$= \sqrt{f_0^2(x) + \ldots + f_n^2(x) + g_0^2(x) + \ldots + g_n^2(x)} = \sqrt{1} = 1.$$

Considerando tais f_i's e g_i's, definimos

$$f(x) = (f_0(x) - g_0(x), \ldots, f_n(x) - g_n(x)).$$

Pelo que foi verificado acima, $f(X) \subset S^n$. Mostremos que f é uma aplicação entre os T-espaços $(X;T)$ e $(S^n;A)$. De fato,

$$f(T(x)) = (f_0(T(x)) - g_0(T(x)), \ldots, f_n(T(x)) - g_n(T(x))) = A(f(x)).$$

Assim, $f : (X;T) \to (S^n;A)$ é uma aplicação de T-pares e temos o homomorfismo induzido $f_* : H_p(X;T) \to H_p(S^n;A)$. Se $p > n$, então $f_*(\sigma) = 0$ pois $H_p(S^n;A) = 0$. Se $p \leq n$, como $0 = \nu(\sigma) = \nu(f_*(\sigma))$ e $\nu : H_p(S^n;T) \to \mathbb{Z}_2$ é um isomorfismo, então $f_*(\sigma) = 0$. $\square$

Consequência do corolário 2.23: O índice é o maior número inteiro n tal que $f_*(H_n(X;T)) \neq 0$, para toda $f : (X;T) \to (Y;S)$.

De fato, seja n o índice de $(X;T)$. Então, para cada $0 \leq p \leq n$, $\nu(H_n(X;T)) = \mathbb{Z}_2$ e, portanto, existe $\sigma \in H_p(X;T)$ tal que $\nu(\sigma) \neq 0$. Pelo corolário 2.23, segue que $f_*(\sigma) \neq 0$, para qualquer $f_* : H_p(X;T) \to H_p(Y;S)$ (sendo $(Y;S)$ um T-espaço arbitrário). Por sua vez, para cada $p > n$, $\nu(\sigma) = 0$, para todo $\sigma \in H_p(X;T)$, e considerando a função $f : (X;T) \to (S^n;A)$ construída na demonstração do corolário 2.23 temos $f_*(H_n(X;T)) = 0$. $\square$

Encerraremos este capítulo, apresentando alguns exemplos de cálculo de índice.

Exemplo 1: Seja $(X;T)$ um T-espaço de índice n. Para qualquer espaço Y compacto e Hausdorff, considere o espaço $X \times Y$ com a involução $T \times Id : X \times Y \to X \times Y$, dada por $(T \times Id)(x,y) = (T(x), y)$. Como $X \times Y$ é Hausdorff compacto e $T \times Id$ é uma involução contínua e sem pontos fixos, $(X \times Y, T \times Id)$ é um T-espaço. Verificaremos que $(X \times Y; T \times Id)$ também possui índice n.

Seja $i : X \to X \times Y$, dada por $i(x) = (x, y_0)$; $y_0 \in Y$ fixado. Como i é contínua e $i(T(x)) = (T(x), y_0) = (T \times Id)((x, y_0)) = (T \times Id) \circ i(x)$, i é uma aplicação de T-pares; logo, pela proposição 2.20, índice de $(X \times Y; T \times Id) \geq n$.

Seja $\pi : X \times Y \to X$ a projeção na primeira coordenada. π é contínua e $\pi(T \times Id((x,y)) = \pi(T(x), y) = T(x) = T(\pi((x,y)))$; logo π é uma aplicação de T-pares e, pela proposição 2.20 novamente, $n \geq$ índice de $(X \times Y; T \times Id)$. Portanto, o índice de $(X;T)$ é igual ao índice de $(X \times Y; T \times Id)$, como queríamos.

Exemplo 2: Como um caso particular do exemplo acima, temos o seguinte exemplo: seja $X = S^1 \times S^0$ (X é a união disjunta de dois círculos) e considere a involução $A \times Id$, em X: $(A \times Id)(x,y) = (A(x), y)$. Logo, $(X; A \times Id)$ é um T-espaço e, pelo exemplo acima, possui mesmo índice de $(S^1; A)$ que é igual a 1. Ou seja, o índice de $(X; A \times Id)$ é 1. Agora considere o mesmo espaço X com a seguinte involução:

$(Id \times A)(x, y) = (x, A(y))$. Assim, $(X; Id \times A)$ também é um T-espaço e, pelo exemplo acima novamente, índice de $(X; Id \times A)$ = índice de $(S^0; A) = 0$.

Este exemplo mostra a relevância da involução para o valor do índice, isto é, destaca que o índice depende tanto do espaço quanto da involução que o acompanha.

Exemplo 3: Calcularemos o índice do toro $T^2 \subset \mathbb{R}^3$ com a aplicação "antipodal" A. Considere a aplicação inclusão $i : (S^1; A) \to (T^2; A)$; i é uma aplicação de T-espaços, portanto, índice de $(T^2; A) \geq$ índice de $(S^1; A) = 1$. Vamos verificar que o índice de $(T^2; A)$ é 1.

Suponha que índice de $(T^2; A) > 1$. Então, existe um elemento $\sigma_0 \in H_2(T^2; A)$ tal que $\nu(\sigma_0) \neq 0$. Considere $S^1 \approx S \subset T^2$ de tal forma que $S \cap A(S) = \emptyset$. Seja $F \subset T^2$ um fechado com fronteira $S \cup A(S)$, $T^2 = F \cup A(F)$ e $F \cap A(F) = S \cup A(S)$. Pelo lema 2.16, existe um homomorfismo $\Delta : H_2(T^2; A) \to H_1(S \cup A(S); A)$ com $\nu(\sigma) = \nu(\Delta(\sigma))$ para todo $\sigma \in H_2(T^2; A)$. Daí, $\nu(\Delta(\sigma_0)) \in H_1(S \cup A(S); A)$ e $\nu(\Delta(\sigma_0)) \neq 0$. Absurdo, pois índice de $(S \cup A(S); A) = 0$. Logo, concluímos que índice de $(T^2; A) = 1$.

Exemplo 4: Calcularemos o índice do bitoro com a involução "antipodal". Considere a figura abaixo que representa uma triangularização do bitoro X:

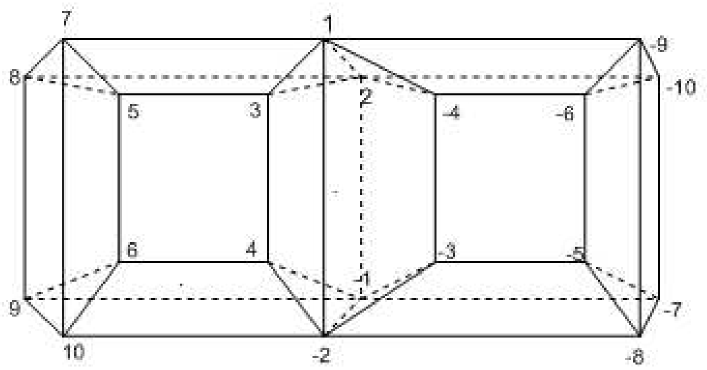

Figura 2.1: Bitoro triangularizado.

Cada ponto marcado na figura é um vértice de X. Considere a aplicação simplicial $T : X \to X$, dada por $T(i) = -i$ para cada i vértice de X e, daí, estendida linearmente para todo X.

Seja $A = [1,8,7] \cup [1,8,2] \cup [8,3,2] \cup [8,3,5] \cup [1,5,7] \cup [1,5,3] \cup [9,5,8] \cup [9,5,6] \cup [8,10,7] \cap [8,10,9] \cup [7,6,10] \cup [7,6,5] \cup [-1,10,9] \cup [-1,10,-2] \cup [-1,6,4] \cup [-1,6,9] \cup [4,10,6] \cup [4,10,-2] \cup [1,4,3] \cup [1,4,-2] \cup [2,4,3] \cup [2,4,-1]$. Daí $(-A) = \bigcup_{[a,b,c]\in A} [-a,-b,-c]$. Portanto, $X = A \cup (-A)$.

Calcularemos o índice de $(X;T)$ pela definição de ν. Considere $\varphi = \sum_{\sigma\in A} \sigma$. Observe que $\varphi + T_{\#}(\varphi) \in Z_2(X;T)$, pois ,

$$\partial\varphi = [1,2] + [2,-1] + [-1,-2] + [1,-2];$$

daí,

$$[1,2] + [2,-1] + T_{\#}([1,2] + [2,-1]) = T_{\#}(\partial\varphi).$$

Se $\Psi = [1,2] + [2,-1]$ então $\partial\varphi = \Psi + T_{\#}(\Psi)$. Logo,

$$\partial\Psi = [1] + [-1] = [1] + T_{\#}([1]).$$

Usando a definição do homomorfismo índice temos $\nu([1]) = 1$. Portanto,

$$\nu(\varphi + T_{\#}(\varphi)) = \nu(\partial\varphi) = \nu(\partial\Psi) = \nu(1) = 1.$$

Desse modo, mostramos que existe um elemento σ em $H_2(X;T)$ com $\nu(\sigma) \neq 0$. Como $H_p(X;T) = 0$ para $p > 2$, concluímos que o índice de $(X;T)$ é 2.

Capítulo 3

O Teorema de Borsuk-Ulam Generalizado

O teorema de Borsuk-Ulam diz que: "para cada função contínua $f : S^n \to \mathbb{R}^n$, existe um par de pontos antipodais que possuem a mesma imagem, isto é, existe $x \in S^n$ com $f(x) = f(-x)$".

Usando o conceito de índice definido no capítulo anterior (e lembrando que o índice de $(S^n; A)$ é n), a generalização apresentada neste capítulo será no seguinte sentido: "se $(X; T)$ é um T-espaço de índice n, então, para cada função contínua $f : X \to \mathbb{R}^n$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = f(T(x))$". Também apresentaremos outras versões equivalentes à generalização feita.

Teorema 3.1. *Seja $(X; T)$ um T-espaço de índice n e seja $f : X \to \mathbb{R}^k$, $0 \leq k \leq n$. Então $X_k = \{x : \ x \in X, \ f(x) = f(T(x))\}$ é T-invariante, compacto e $(X_k; T)$ é de índice $\geq n - k$.*

Dem.: O caso $n = 0$ é trivial, pois $\mathbb{R}^0 = \{ponto\}$ e, portanto, f é constante. Note que cada $X_k \subset X$ é compacto (pois é fechado) e X_k é T-invariante pois: se $x \in X_k$ então $f(x) = f(T(x))$; logo $f(T^2(x)) = f(T(x))$ e com isso $T(x) \in X_k$.

Seja $f : X \to \mathbb{R}^k$, $f = (f_1, ..., f_k)$, com cada $f_i : X \to \mathbb{R}$ contínua. Considere

$X_0 = X$ e, para cada $1 \leq j \leq k$, defina

$$X_j = \{x : x \in X,\ f_i(x) = f_i(T(x)),\ i = 1, 2, ..., j\}$$

e

$$F_j = \{x :\ x \in X_{j-1},\ f_j(x) \leq f_j(T(x))\}.$$

Temos que F_j é fechado em X_{j-1} e, como $T(F_j) = \{y : \exists\ x \in F_j$ tal que $T(x) = y\} = \{y : y \in X_{j-1}$ tal que $f_j(T(y)) \leq f_j(y)\}$, $X_{j-1} = F_j \cup T(F_j)$ e $X_j = F_j \cap T(F_j)$.

Pelo lema 2.16, temos $\Delta : H_n(X_0; T) \to H_{n-1}(X_1; T)$ homomorfismo tal que, para todo $\sigma \in H_n(X_0; T)$, $\nu(\sigma) = \nu(\Delta(\sigma))$. Como $(X; T)$ tem índice $n > 0$, existe $\alpha \in H_n(X_0; T)$ com $\nu(\alpha) \neq 0$; logo $\nu(\Delta(\alpha)) \neq 0$. Assim, índice de $(X_1; T) \geq n - 1$. Suponha que para $1 < r < k$ existe um elemento $\sigma \in H_{n-r}(X_r; T)$ com $\nu(\sigma) \neq 0$. Como $\nu(\Delta(\sigma)) = \nu(\sigma) \neq 0$, onde $\Delta : H_{n-r}(X_r; T) \to H_{n-(r+1)}(X_{r+1}; T)$ é o homomorfismo do lema 2.16, concluímos que índice de $(X_{r+1}; T) \geq n - (r + 1)$. Portanto, pelo processo de indução finita, mostramos que índice de $(X_k; T) \geq n - k$. $\square$

Corolário 3.2. *Se $(X; T)$ é um T-espaço de índice n, então, para cada $f : X \to \mathbb{R}^n$ contínua, existe $x \in X$ tal que $f(x) = f(T(x))$.*

Dem.: Pelo teorema anterior temos que $X_n = \{x \in X : f(x) = f(T(x))\}$ é T-invariante, compacto e de índice $\geq n - n = 0$; ou seja, $\nu(H_0(X_n; T)) = \mathbb{Z}_2$. Daí, $H_0(X_n; T) \neq 0$, logo $X_n \neq \emptyset$ e, portanto, existe $x \in X$ tal que $f(x) = f(T(x))$.

Corolário 3.3. *Para cada $f : S^n \to \mathbb{R}^k$ $(0 \leq k \leq n)$, o T-espaço $(\{x \in S^n :\ f(x) = f(A(x))\}; A)$ tem índice $\geq n - k$, onde A é a aplicação antipodal.*

Ambos os corolários acima generalizam o teorema de Borsuk-Ulam.

O lema a seguir nos dá outras propriedades satisfeitas por $(S^n; A)$ e que também são válidas para todos T-espaços de índice n.

Lema 3.4. *Seja $(X;T)$ um T-espaço. As seguintes condições são equivalentes:*

(1) *Toda $f : X \to \mathbb{R}^n$ contínua leva algum par de involução em um único ponto.*

(2) *Não existe aplicação $f : (X;T) \to (S^{n-1};A)$.*

(3) *Sejam $F_1, \ldots, F_{n+1} \subset X$ fechados. Se $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n+1}(F_i \cup T(F_i)) = X$, mas nenhum dos F_i's possui um par de involução, então $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n+1} F_i \neq \emptyset$*

(4) *Se $F_1, \ldots, F_n \subset X$ são fechados e $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n}(F_i \cup T(F_i)) = X$ então ao menos um dos F_i's contém um par de involução.*

Dem.: ((1) $\Rightarrow$ (2)) Suponha que exista $f : (X;T) \to (S^{n-1};A)$. Se $i : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ é a aplicação inclusão; então $i(f(x)) \neq i(A(f(x)))$. Como f é uma aplicação de T-pares, $f(T(x)) = A(f(x)) = -f(x)$. Logo $i \circ f(T(x)) \neq i \circ f(x)$ para todo $x \in X$.
((2) $\Rightarrow$ (3)) Sejam $F_1, \ldots, F_{n+1} \subset X$ tais que $F_i \cap T(F_i) = \emptyset$ e $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n+1}(F_i \cup T(F_i)) = X$ e suponha que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n+1} F_i = \emptyset$. Vamos verificar que existem abertos $U_1, ..., U_{n+1}$ tais que $F_i \subset U_i \subset \overline{U}_i \subset X - T(U_i)$ e $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n+1} \overline{U_i} = \emptyset$.

Como $F_i \cap T(F_i) = \emptyset$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n+1$, pela normalidade de X, existem abertos A_i e B_i tais que $F_i \subset A_i$, $T(F_i) \subset B_i$ e $A_i \cap B_i = \emptyset$. Podemos tomar A_i e B_i de tal sorte que $B_i = T(A_i)$.

Pela suposição de que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n+1} F_i = \emptyset$, isto é, $F_i \cap \left(\bigcap_{i \neq j} F_j\right) = \emptyset$ e, usando a normalidade novamente, obtemos abertos C_i's de tal maneira que $F_i \subset C_i$ e $C_i \cap \left(\bigcap_{i \neq j} F_j\right) = \emptyset$ para todo i. Tome $V_i = C_i \cap A_i$, isto é, V_i é um aberto tal que $F_i \subset V_i$ e $V_i \cap \left(\bigcap_{i \neq j} F_j\right) = \emptyset$. Considere $B_i = T(V_i)$.

Tome $U_1 \subset V_1$ um aberto com $F_1 \subset U_1$ e $\overline{U}_1 \subset V_1$; então U_1 é um aberto tal que $F_1 \subset U_1$ e $\overline{U_1} \cap F_2 \cap \ldots \cap F_{n+1} = \emptyset$. Como $F_2 \cap (\overline{U_1} \cap F_3 \cap \ldots \cap F_{n+1}) =$

$\emptyset$, existe um aberto D_2 com $F_2 \subset D_2$ e $D_2 \cap \overline{U}_1 \cap F_3 \cap \ldots \cap F_{n+1} = \emptyset$. Tome $E_2 = D_2 \cap V_2$ e considere $U_2 \subset E_2$ um aberto com $F_2 \subset U_2$ e $\overline{U}_2 \subset E_2$. Logo $\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 \cap F_3 \cap \ldots \cap F_{n+1} = \emptyset$. Suponha, por indução, que existem abertos $U_1, \ldots, U_k$ tais que $\overline{U}_1 \cap \ldots \cap \overline{U}_k \cap F_{k+1} \cap \cdots \cap F_{n+1} = \emptyset$. Tome D_{k+1} um aberto com $F_{k+1} \subset D_{k+1}$ e $D_{k+1} \cap \overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 \cap \ldots \cap \overline{U}_k \cap F_{k+2} \cap \ldots \cap F_{n+1} = \emptyset$, e considere $E_{k+1} = D_{k+1} \cap V_{k+1}$. Considere $U_{k+1} \subset E_{k+1}$ um aberto tal que $F_{k+1} \subset U_{k+1}$ e $\overline{U}_{k+1} \subset E_{k+1}$. Logo, temos $F_i \subset U_i$ para $i = 1, 2, \ldots, k+1$ e $\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 \cap \ldots \cap \overline{U_{k+1}} \cap F_{k+2} \cap \ldots \cap F_{n+1} = \emptyset$. Portanto, existem $U_1, \ldots, U_{n+1}$ abertos tais que $F_i \subset U_i$ e $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n+1} \overline{U}_i = \emptyset$.

Para cada $i = 1, \ldots, n+1$, considere $f_i : X \to I = [0,1]$ com $f_i(F_i) = \{1\}$, $f_i(X - U_i) = 0$ e denote $g_i = \dfrac{(f_i - f_i \circ T)}{\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (f_j - f_j \circ T)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$. Então $g = (g_1, \ldots, g_{n+1})$ é uma aplicação entre os T-pares $(X; T)$ e $(S^n; A)$. De fato, primeiramente note que, para todo $x \in X$, $\sqrt{g_1(x)^2 + \ldots + g_{n+1}(x)^2} = \sqrt{\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{(f_i - f_i \circ T)^2(x)}{(f_j - f_j \circ T)^2(x)}} = \sqrt{1} = 1$; então $g(X) \subset S^n$. Ainda temos, para cada $i = 1, \ldots, n+1$,

$$g_i(T(x)) = \frac{f_i(T(x)) - f_i(x)}{\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} (f_j(T(x)) - f_j(x))^2\right)^{\frac{1}{2}}} = A\left(\frac{f_i(x) - f_i(T(x))}{\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} (f_i(x) - f_i(T(x))^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right) = A(g_i(x)),$$

e, então $g \circ T = A \circ g$; logo g é uma aplicação de T-pares. Como $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n+1} \overline{U}_i = \emptyset$, temos, para cada $x \in X$, $x \in X - U_i$ para algum i. Logo, $f_i(x) = 0$ e $g_i(x) \leq 0$. Por isso $a = (\alpha, \ldots, \alpha)$ com $\alpha = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ é tal que $a \notin g(X)$ e $a \in S^n$. Considere $S^{n-1} = S^n \cap \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1};\ x_{n+1} = 0\}$. Note que $-a \notin g(X)$, pois se isso ocorresse existiria $y \in X$ tal que $g(y) = -a$, $A(g(y)) = a$ e, com isso, $g(T(y)) = a$, o que implicaria $a \in g(X)$; que é uma contradição.

Logo, $a, -a \notin g(X)$. A menos de rotação, tome $a = N$ (pólo norte da S^n) e $-a = S$ (pólo sul da S^n). Seja $h : S^n - \{a, -a\} \to S^{n-1}$ dada por $h((x_1, \ldots, x_{n+1})) =$

$\dfrac{(x_1,\dots,x_n,0)}{||(x_1,\dots,x_n,0)||}$. Tome $h\circ g : X \to S^{n-1}$ e seja $x \in X$. Portanto,

$$h(g(T(x))) = \frac{(g_1(T(x)),\dots,g_n(T(x)),0)}{||(g_1(T(x)),\dots,g_n(T(x)),0)||} = \frac{(-g_1(x),\dots,-g_n(x),0)}{||(-g_1(x),\dots,-g_n(x),0)||} = A(h(g(x))),$$

com isso, $h\circ g$ é uma aplicação de T-pares.

((3) $\Rightarrow$ (4)) Assuma (3). Sejam $F_1,\dots,F_n \subset X$ fechados tais que $\bigcup_{i=1}^{n}(F_i \cup T(F_i)) = X$. Se F_i não possui um par de involução, para todo $i = 1,2,\dots,n$, então $F_1,\dots,F_n,T(F_n)$ satisfaz (3). Logo $F_1\cap\ldots\cap F_n\cap T(F_n) \neq \emptyset$. Então $F_n \cap T(F_n) \neq \emptyset$ e, daí, existe $x \in X$ tal que $x, T(x) \in F_n$, o que é uma contradição.

((4) $\Rightarrow$ (1)) Suponha que exista $f : X \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) \neq f(T(x))$ para todo $x \in X$. Considere $f = (f_1,\dots,f_n)$. Defina $\alpha = \inf_{x\in X}\max_{1\le i\le n}|f_i(x) - f_i(T(x))|$. Como $f(x) \neq f(T(x))$ para todo $x \in X$, $|f_i(x) - f_i(T(x))| \neq 0$ para algum i; logo $\max|f_i(x) - f_i(T(x))| \neq 0$. Como X é compacto, existe $x_0 \in X$ tal que $\alpha = |f_i(x_0) - f_i(T(x_0)|$; logo $\alpha \neq 0$. Seja $F_i = \{x \in X : f_i(x) - f_i(T(x)) \geq \frac{\alpha}{2}\}$. Note que F_i é fechado. Vamos mostrar que $F_i \cap T(F_i) = \emptyset$ e $\bigcup_{i=1}^{n}(F_i \cup T(F_i)) = X$. Se $y \in F_i \cap T(F_i)$, então $f_i(y) - f_i(T(y)) \geq \frac{\alpha}{2}$ e existe $x \in F_i$ tal que $y = T(x)$. Logo, $f_i(T(x)) - f_i(T^2(x)) \geq \frac{\alpha}{2}$; daí $f_i(T(x)) - f_i(x) \geq \frac{\alpha}{2}$, o que implica $f_i(x) - f_i(T(x)) \leq -\frac{\alpha}{2}$ (absurdo). Portanto, $F_i \cap T(F_i) = \emptyset$.

Observe que $T(F_i) = \{x \in X : f_i(T(x)) - f_i(x) \leq -\frac{\alpha}{2}\}$. Agora, seja $x \in X$. Como $f(x) \neq f(T(x))$ para todo $x \in X$, existe i tal que $|f_i(x) - f_i(T(x))| \geq \alpha$. Se $f_i(x) - f_i(T(x)) > 0$ então $f_i(x) - f_i(T(x)) \geq \frac{\alpha}{2}$. Logo $x \in F_i$; se $f_i(x) - f_i(T(x)) < 0$ então $f_i(x) - f_i(T(x)) \geq -\frac{\alpha}{2}$. Logo, $x \in T(F_i)$. Portanto, $\bigcup_{i=1}^{n}(F_i \cup T(F_i)) = X$. $\square$

Lema 3.5. *As condições do lema anterior também são equivalentes às seguintes condições:*

(5) *Se $f : X \to S^n$ é contínua e, para todo $x \in X$, $f(x) \neq f(T(x))$, então f é sobrejetora.*

(6) *Se* $X = \bigcup_{i=1}^{n+2} F_i$ *com cada* F_i *fechado e* $\bigcap_{i=1}^{n+2} F_i = 0$ *e para todo* $x \in F_i$, $f(x) \neq f(T(x))$ *para todo* $i = 1, 2, \ldots, n+2$, *então qualquer interseção de* $n+1$ $F_i's$ *é diferente de vazia.*

(7) *Se* $X = \bigcup_{i=1}^{n+2} F_i$, *com cada* F_i *fechado, então ao menos um dos* $F_i's$ *possui um par de involução.*

Dem.: ((1) $\Rightarrow$ (5)) Assuma (1). Suponha que exista $f : X \to S^n$ contínua, com $f(x) \neq f(T(x))$ para todo $x \in X$ e que f não é sobrejetora. Então, existe $y \in S^n$ tal que para todo $x \in X$, $f(x) \neq y$. Tome $f : X \to S^n - \{y\}$ e seja $h : S^n - \{y\} \to \mathbb{R}^n$ a projeção estereográfica; $h \circ f : X \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua e se $x \in X$, então $f(x) \neq f(T(x))$. Logo $h(f(x)) \neq h(f(T(x)))$, o que contradiz (1).
((5) $\Rightarrow$ (2)) Assuma (5). Suponha que exista $f : (X;T) \to (S^n; A)$ e considere $i : S^{n-1} \to S^n$ a aplicação inclusão. Então $i \circ f$ é uma aplicação de X em S^n. Observe que $f(T(x)) = -f(x) \neq f(x)$ e $i \circ f$ não é sobrejetora, o que contradiz (5).
((3) $\Rightarrow$ (6)) Assuma (3). Suponha que existem $F_1, \ldots, F_{n+2}$ fechados, tais que $\bigcup_{i=1}^{n+2} F_i = X$, $F_i \cap T(F_i) = \emptyset$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n+2$ com $\bigcap_{i=1}^{n+1} F_i = \emptyset$ (podemos reordenar os $F_i's$ para ficar de tal forma). Como $\bigcap_{i=1}^{n+1} F_i = \emptyset$, então por (3) existe $1 \leq i_0 \leq n+1$ tal que $F_{i_0} \cap T(F_{i_0}) \neq \emptyset$ ou $\bigcup_{i=1}^{n+1}(F_i \cap T(F_i)) \neq X$. Mas $F_i \cap T(F_i) = \emptyset$ para todo $i = 1, \ldots, n+1$; logo $\bigcup_{i=1}^{n+1}(F_i \cap T(F_i)) \neq X$. Portanto, existe $x \in X$ tal que $x \notin F_i \cup T(F_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n+1$; o que implica $x \in F_{n+2}$. Como $F_i \cup T(F_i)$ é T-invariante, $T(x) \notin F_i \cup T(F_i)$ para $i = 1, \ldots, n+1$; $T(x) \in F_{n+2}$, com isso $F_{n+2} \cap T(F_{n+2}) \neq \emptyset$, o que contradiz a hipótese.
((6) $\Rightarrow$ (7)) Suponha que $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} F_i$ e $F_i \cap T(F_i) = \emptyset$, então $T(F_1) \cap (\bigcap_{i=1}^{n+1} F_i) = \emptyset$ e $X = T(F_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{n+1} F_i)$. Daí, $T(F_1) \cap F_1 \cap \ldots \cap F_n \neq \emptyset$, logo $T(F_1) \cap F_1 \neq \emptyset$.

((7) $\Rightarrow$ (4)) Suponha que existem $F_1, \ldots, F_n$ fechados tais que $X = \bigcup_{i=1}^{n}(F_i \cup T(F_i))$. Para todo $i = 1, \ldots, n$, considere um aberto U_i tal que $F_i \subset U_i$ e $\overline{U}_i \cap T(\overline{U}_i) = \emptyset$. Seja $G_i = \overline{U}_i$, $i = 1, \ldots, n$ e $G_{n+1} = \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i^c\right)$. Observe que G_i é fechado para todo $i = 1, \ldots, n+1$. Vamos verificar que $\bigcup_{i=1}^{n+1} G_i = X$ e $G_i \cap T(G_i) = \emptyset$ para todo $i = 1, \ldots, n+1$. De fato, seja $x \in X$ e $x \notin \overline{U}_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, daí $x \in \overline{U}_i^c \subset U_i^c$ para todo i; então $x \in \bigcap_{i=1}^{n+1} U_i^c$ e, portanto, $\bigcup G_i = X$. Agora, como $\overline{U_i} \cap T(\overline{U}_i) = \emptyset$ para todo $i = 1, \ldots, n$ resta mostrar que $G_{n+1} \cap T(G_{n+1}) = \emptyset$.

$$G_{n+1} \cap T(G_{n+1}) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i^c\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} T(U_i^c)\right) =$$

$$= \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right)^c \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} T(U_i)\right)^c = \left(\bigcup_{i=1}^{n}(U_i \cup T(U_i))\right)^c.$$

Como $\bigcup_{i=1}^{n}(U_i \cup T(U_i)) = X$, $\left(\bigcup_{i=1}^{n}(U_i \cup T(U_i))\right)^c = \emptyset$. Portanto $G_i \cap T(G_i) = \emptyset$ para todo i. $\square$

Teorema 3.6. *Seja $(X;T)$ um T-espaço de índice n. Então $(X;T)$ possui as propriedades $(1)-(7)$ dos dois lemas anteriores.*

Dem.: Pelo teorema 3.1, $(X;T)$ possui a propriedade (1). $\square$

Capítulo 4

Generalização do Teorema K-Y-Y em um Espaço Euclidiano

O Teorema de Kakutani-Yamabe-Yujobô (Teorema K-Y-Y) diz que: "se $f : S^n \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então existem $n+1$ pontos, que são vetores mutuamente ortogonais, com a mesma imagem pela f".

Para compreender a generalização que apresentaremos desse teorema, convém, inicialmente, estabelecer algumas notações e nomenclaturas. Durante todo este capítulo estaremos sempre em um espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$.

Definição 4.1. Um k-plano A é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ com $\dim A = k$. Dado um (k-1)-plano $B \subset A$, diremos que B separa o k-plano A em dois *k-semiplanos*.

Denotaremos também por A a *aplicação simetria* em relação ao k-plano A. Se $a \notin A$ denotamos por Aa o $(k+1)$-plano determinado por A e a, e por $\vec{Aa}$ o $(k+1)$-semiplano em Aa que possui fronteira A e $a \in \vec{Aa}$.

Diremos que um T-espaço $(X; \theta)$ é um *θ-espaço em* $\mathbb{R}^m$ se X é um compacto de $\mathbb{R}^m$ e θ é a aplicação simetria em relação ao k-plano θ.

Definição 4.2. Sejam A um k-plano e B um s-plano interceptando-se em um t-plano C com $t < \min(k, s)$. A e B são ditos *ortogonais em* C se existem $k+s-t$

retas $r_1, \ldots, r_{k+s-t}$ mutuamente ortogonais tais que: $r_1, \ldots, r_k$ estão contidas em A e $r_{k+1-t}, \ldots, r_{k+s-t}$ estão contidas em B. Se $k = s = t + 1$ e as retas r_1 e r_{k+s-t} interceptam-se em um ângulo θ, então diremos que A e B interceptam-se em um ângulo θ.

Neste capítulo será dada uma generalização do Teorema K-Y-Y no seguinte sentido:

Teorema 4.3. *Seja $(X;\theta)$ um θ-espaço em $\mathbb{R}^m$ de índice n e seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existem $n+1$ pontos $x_1, \ldots, x_{n+1} \in X$ tais que $f(x_1) = = \ldots = f(x_{n+1})$ e os $(t+1)$-planos $\theta x_1, \ldots, \theta x_{n+1}$ são mutuamente ortogonais em θ.*

Observe que o caso particular $(S^n; A)$ (visto como um θ-espaço em $\mathbb{R}^{n+1}$, com θ sendo o 0-plano) é o Teorema K-Y-Y clássico.

4.1 Preliminares Técnicos

Vamos introduzir algumas notações, construir uma função especial e apresentar alguns resultados que nos serão bastante úteis na próxima seção.

Sejam θ um t-plano fixado em $\mathbb{R}^m$ $(t \leq m-2)$ e $\overline{ab}$ um segmento de reta tal que $\theta a \neq \theta b$ (logo $\theta \cap \overline{ab} = \emptyset$).

Os planos $\mathbf{A_c^{m-1}}$: Para cada $c \in \overline{ab}$, obteremos um $(m-1)$-plano A_c^{m-1} contendo θ e ortogonal a θc em θ.

Considere $\{v_1, \ldots, v_t\}$ uma base ortonormal de θ (denotaremos $\theta = [v_1, \ldots, v_t]$) e v_a, v_b tais que: $\{v_1, \ldots, v_t, v_a\}$ é uma base ortogonal de θa, com $a = v_a + \sum_{i=1}^{t} \alpha_i v_i$, e $\{v_1, \ldots, v_t.v_b\}$ é uma base ortogonal de θb, com $b = v_b + \sum_{i=1}^{t} \beta_i v_i$, $(\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R})$.

Note que v_a, v_b são linearmente independentes, pois $\theta a \neq \theta b$.

Para cada $c \in \overline{ab}$, existe único $s \in I$ tal que $c = sb + (1-s)a$, daí $\theta c \subset \theta ab$ e, como $c \notin \theta$, considerando $v_c = sv_b + (1-s)v_a$, temos que $\{v_1, \ldots, v_t, v_c\}$ é uma base ortogonal de θc com $c = v_c + \sum_{i=1}^{t} \gamma_i v_i$ ($\gamma_i \in \mathbb{R}$).

Observe que existe um homeomorfismo natural $h : I \to I$ tal que: se $v_c = sv_b + (1-s)v_a$, então o ângulo (convexo) entre v_c e v_a é $h(s)\beta$, sendo β o ângulo entre v_a e v_b.

Considere $u_a = \dfrac{v_a}{||v_a||}$, $\tilde{v_a} = v_b - \langle v_a, v_b\rangle u_a = v_b - ||v_b||(\cos\beta)u_a$ e $\tilde{u_a} = \dfrac{\tilde{v_a}}{||\tilde{v_a}||}$.

Assim, $\{u_a, \tilde{u_a}\}$ é uma base ortonormal de $[v_a, v_b]$ e, para cada $c = sb+(1-s)a$ ($s \in I$), consideraremos:

$$u_c = \cos(h(s)\beta)u_a + \text{sen}(h(s)\beta)\tilde{u_a},$$

$$\tilde{u_c} = -\text{sen}(h(s)\beta)u_a + \cos(f(h(s)\beta)\tilde{u_a}.$$

Daí, $\{v_1, \ldots, v_t, u_c\}$ é uma base ortonormal de θc e $\{v_1, \ldots, v_t, u_c, \tilde{u_c}\}$ é uma base ortonormal de θab.

Logo, existem $w_{t+1}, \ldots, w_{m-2} \in \mathbb{R}^m$ tais que, para cada $c \in \overline{ab}$,

$$\{v_1, \ldots, v_t, u_c, \tilde{u_c}, w_{t+1}, \ldots, w_{m-2}\}$$

é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^m$.

Portanto, o $(m-1)$-plano gerado por $\{v_1, \ldots, v_t, w_{t+1}, \ldots, w_{m-2}, \tilde{u_c}\}$ é o plano A_c^{m-1} desejado.

Note que A_c^{m-1}, $c = sb + (1-s)a$, $s \in I$, é obtido pela rotação do plano A_a^{m-1} em torno do plano $[v_1, \ldots, v_t, w_{t+1}, \ldots, w_{m-2}] = A_a^{m-1} \cap A_b^{m-1}$ com ângulo de $h(s)\beta$.

Notação: *Denotaremos por* $Q = \bigcup_{c \in \overline{ab}} A_c^{m-1} = \bigcup_{s \in I} A_{c(s)}^{m-1}$, *onde* $c(s)$ *indica* $c \in \overline{ab}$ *com* $c = h^{-1}(s)b + (1 - h^{-1}(s))a$ *(considerando o homeomorfismo* h *definido anteriormente). Denotaremos* $A^{m-2} = A_a^{m-1} \cap A_b^{m-1}$.

Considere $\varphi : A_a^{m-1} \times I \to Q$ definida por

$$\varphi(v, s) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{t} a_i v_i + \sum_{j=t+1}^{m-2} a_j w_j + k\tilde{u}_a, s\right) = \sum_{i=1}^{t} a_i v_i + \sum_{t+1}^{m-2} a_j w_j + k\tilde{u}_{c(s)}$$

(ou seja: $(v, s) \mapsto proj_{A^{m-2}}(v) + proj_{\tilde{u}_a}(v)(-\text{sen}(s\beta)u_a + \cos(s\beta)\tilde{u}_a))$.

Note que φ é contínua e sobrejetora e $\varphi : (A_a^{m-1} - A^{m-2}) \times I \to Q - A^{m-2}$ é bijetora.

Construção de λ: Seja B^{m-1} um $(m-1)$-plano qualquer e $\Phi \subset B^{m-1}$ um t-plano. Seja $\lambda_0 : B^{m-1} \to A_a^{m-1}$ um isometria linear sobrejetora com $\lambda_0(\Phi) = \theta$ e denote $B^{m-2} = \lambda_0^{-1}(A^{m-2})$.

Defina $\lambda : B^{m-1} \times I \to Q$ da seguinte forma: $\lambda(u, s) = \varphi(\lambda_0(u), s)$.

$$\begin{tikzcd}
B^{m-1} \times I \arrow[r, "\lambda_0 \times Id"] \arrow[dr, "\lambda"'] & A_a^{m-1} \times I \arrow[d, "\varphi"] \\
& Q
\end{tikzcd}$$

Note que, se $u \in B^{m-2}$, então $\lambda(u, s) = \varphi(\lambda_0(u, s)) = \lambda_0(u)$.

Geometricamente, podemos dar a seguinte interpretação para a função λ. Observe que se c pertence ao segmento $\overline{ab}$, então A_c^{m-1} rotaciona em torno de A^{m-2} à medida que c varia. Daí, cada ponto $x \in A_c^{m-1} - A^{m-2}$ traça um arco circular $\widehat{x_a x_b}$ com pontos terminais x_a e x_b em A_a^{m-1} e A_b^{m-1}, respectivamente. Então observe que se: $u \in B^{m-2}$, $\lambda(u, s) = \lambda_0(u)$; se $u \in B^{m-1} - B^{m-2}$, considerando $x_a = \lambda_0(u)$, existe um arco circular $\widehat{x_a x_b}$, com $x_b \in A_b^{m-1}$, tendo sua interseção com $A_{c(s)}^{m-1}$ igual a $\lambda(u, s)$.

Considere $B^{m-1} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^m$, o $(t+1)$-plano $\theta \times \mathbb{R}$, e $B^{m-1} \times I \subset B^{m-1} \times \mathbb{R}$. Vamos verificar que λ leva pontos simétricos em relação a $\Phi \times \mathbb{R}$ em pontos simétricos em relação a θ. De fato, considere $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_t, w_{t+1}, \ldots, w_{m-2}, \tilde{u}_a, u_a\}$ a base ortonormal de $\mathbb{R}^m$ obtida na construção de A_a^{m-1} e seja $e \notin B^{m-1}$ tal que

$$\mathcal{B}' = \{\lambda_0^{-1}(v_1), \ldots, \lambda_0^{-1}(v_t), \lambda_0^{-1}(w_{t+1}), \ldots, \lambda_0^{-1}(w_{m-2}), \lambda_0^{-1}(\tilde{u}_a), e\}$$

é uma base ortonormal de $B^{m-1} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^m$. Assim, $\{\lambda_0^{-1}(v_1), \ldots, \lambda_0^{-1}(v_t)\}$ é uma base ortonormal para Φ. Logo, $\Phi \times \mathbb{R} = [\lambda_0^{-1}(v_1), \ldots, \lambda_0^{-1}(v_t), e]$.

Seja $u = (a_1, \ldots, a_{m-2}, k, s)_{\mathcal{B}'} \in B^{m-1} \times \mathbb{R}$. Então,

$$(\Phi \times \mathbb{R})(u) = (a_1, \ldots, a_t, -a_{t+1}, \ldots, -a_{m-2}, -k, s)_{\mathcal{B}'}.$$

Portanto,

$$\lambda((\Phi \times \mathbb{R})(u)) = \lambda((a_1, \ldots, a_t, -a_{t+1}, \ldots, -a_{m-2}, -k, s)_{\mathcal{B}'}) =$$

$$= (a_1, \ldots, a_t, -a_{t+1}, \ldots, -a_{m-2}, -k\cos(s\beta), k\text{sen}(s\beta))_{\mathcal{B}} =$$

$$= \theta(a_1, \ldots, a_t, a_{t+1}, \ldots, a_{m-2}, k\cos(s\beta), -k\text{sen}(s\beta)_{\mathcal{B}}) =$$

$$= \theta(\lambda(a_1, \ldots, a_t, \ldots, a_{m-2}, k, s)_{\mathcal{B}'}) = \theta(\lambda(u)).$$

Assim, mostramos que λ leva pontos simétricos em relação a $\Phi \times \mathbb{R}$ em pontos simétricos em relação a θ, como queríamos.

Proposição 4.4. *Seja $(X;\theta)$ um θ-espaço simplicial em Q e seja $E = X \cap A^{m-2}$. Denote $Y = \lambda^{-1}(X)$ e $F = \lambda^{-1}(E)$. Então, $\lambda' : (Y, F; \Phi \times \mathbb{R}) \to (X, E; \theta)$, definida por λ, induz um isomorfismo de $H_p(Y, F; \Phi \times \mathbb{R})$ em $H_p(X, E; \theta)$.*

Dem.: Seja $M = \overline{N^2(E)}$ (fecho da segunda vizinhança regular de E em X) e seja $N = \lambda^{-1}(M)$; portanto, existe uma retração por deformação forte $g : (M;\theta) \times I \to (M;\theta)$ de M em E tal que $g(x,t) = tg_1(x) + (1-t)x$, onde $g_1(x) = g(x,1)$ (vide 1.11). Por isso $h : (N; \Phi \times \mathbb{R}) \times I \to (N; \Phi \times \mathbb{R})$ definida por $h((u,\alpha),t) = t\lambda_0^{-1}(g_1(\lambda(u,\alpha))) + (1-t)(u,\alpha)$ é uma retração por deformação forte de N em F. De fato, primeiramente mostraremos que $\lambda_0^{-1}(g_1(\lambda(u,\alpha)))$ é uma retração de N em F. Tome $(u,\alpha) \in F$; então $\lambda(u,\alpha) = u' \in E$. Como $g_1(x)$ é uma retração de M em E, temos que $g_1(u') = u'$. Logo, $\lambda_0^{-1}(u') = (u,\alpha)$ e, portanto, $\lambda_0^{-1}(g_1(\lambda(u,\alpha))$ é uma retração de N em F. Pela sua definição, h já é uma homotopia entre id_N e $h_1(u,\alpha) \circ i$, onde $h_1(u,\alpha) = h((u,\alpha),1)$. Agora, tome $t_0 \in I$ e $(u,\alpha) \in F$; então, $h((u,\alpha),t_0) = t_0\lambda^{-1}(g_1(\lambda(u,\alpha))) + (1-t_0)(u,\alpha) = t_0(u,\alpha) - t_0(u,\alpha) + (u,\alpha) = (u,\alpha)$. Daí h é uma retação por deformação forte. Portanto, $H_p(X, E;\theta) \cong H_p(X, M;\theta)$ e $H_p(Y, F; \Phi \times \mathbb{R}) \cong H_p(Y, N; \Phi \times \mathbb{R})$.

Seja U um aberto θ-invariante tal que $E \subset U \subset \overline{U} \subset N^2(E)$ e seja $V = \lambda^{-1}(U)$ ($\overline{V}$ contido no interior de N). Logo, pelo axioma da excisão, temos

$H_p(X-U, M-U;\theta) \cong H_p(X, M;\theta)$ e $H_p(Y-V, N-V; \Phi \times \mathbb{R}) \cong H_p(Y, N; \Phi \times \mathbb{R})$.

Mais ainda, a aplicação $(Y-V, N-V; \Phi \times \mathbb{R}) \to (X-U, M-U; \theta)$ definida por λ é um homeomorfismo; logo temos um isomorfismo entre $H_p(Y-V, N-V; \Phi \times \mathbb{R})$ e $H_p(X-U, M-U; \theta)$. Combinando esses resultados temos que $H_p(Y, F; \Phi \times \mathbb{R}) \cong H_p(X, E; \theta)$. Resta verificar que λ'_* é este isomorfismo. Considere o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} H_p(Y,F;\Phi\times\mathbb{R}) \arrow[r, "i_*"'] & H_p(Y,M;\Phi\times\mathbb{R}) \arrow[r, shift left] & H_p(Y-V,M-V;\Phi\times\mathbb{R}) \arrow[l, shift left, "l_*"] \arrow[d, "\lambda|_*"] \\ H_p(X,E;\theta) \arrow[r, "j_*"] & H_p(X,N;\theta) \arrow[r, shift left] & H_p(X-U,N-U;\theta) \arrow[l, shift left, "k_*"] \end{tikzcd}$$

onde i_*, j_*, l_*, k_* são os homomorfismos induzidos pelas inclusões que determinam os isomorfismos citados acima. Seja $c \in H_p(Y, F; \Phi \times \mathbb{R})$ então $i_*(c) = c \in H_p(Y, M; \Phi \times \mathbb{R})$; como l_* é um isomorfismo, então existe $c' \in H_p(Y-V, M-V; \Phi \times \mathbb{R})$. Logo $c' = c$ e, daí, $c \in H_p(Y-V, M-V; \Phi \times \mathbb{R})$. Portanto $\lambda|_*(c) \in H_p(X-U, N-U; \theta)$, o que acarreta $k_*(\lambda|_*(c)) = \lambda|_*(c)$, e como j_* é um isomorfismo, existe um $d \in H_p(X, E; \theta)$ tal que $j_*(d) = \lambda|_*(c)$. Concluímos, então, que $d = \lambda|_*(c)$. Assim, o isomorfismo encontrado é realmente λ'_*. $\square$

Notação: *Para cada $\alpha \in I$, denote $Y_\alpha = Y \cap (B^{m-1} \times \{\alpha\})$, $X_\alpha = X \cap A^{m-1}_{c(\alpha)} = \lambda(Y_\alpha)$ e seja $\lambda_\alpha : Y_\alpha \to X_\alpha$ definida por λ.*

Então, cada λ_α é uma isometria linear sobrejetora; logo λ_α é um homeomorfismo e, ainda, $\lambda_\alpha \circ (\Phi \times \mathbb{R}) = \theta \circ \lambda_\alpha$.

Notação: Se $i : (X, A; T) \to (Y, B; T)$ é a aplicação inclusão, então para cada $\sigma \in H_p(X, A; T)$ escreveremos $\sigma|(Y, B)$ em vez de $i_*(\sigma)$.

Lema 4.5. *Nas condições da proposição anterior, se E é de dimensão $\leq p-1$, então, para $\sigma_0 \in H_p(X_0, \theta)$ e $\sigma_1 \in H_p(X_1; \theta)$ com $\sigma_0|X = \sigma_1|X$, temos $(\lambda_{0*}^{-1}(\sigma_0))|Y = (\lambda_{1*}^{-1}(\sigma_1))|Y$.*

Dem.: Considere o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd}
H_p(F;\Phi\times\mathbb{R}) \arrow[rr] \arrow[ddd, "\lambda'''_*"] & & H_p(Y;\Phi\times\mathbb{R}) \arrow[rr] \arrow[ddd, "\lambda''_\#"] & & H_p(Y,F;\Phi\times\mathbb{R}) \arrow[ddd, "\lambda'_*"] \\
& H_p(Y_0;\Phi\times\mathbb{R}) \arrow[ur] \arrow[d, "\lambda_{0*}"'] & & H_p(Y_1;\Phi\times\mathbb{R}) \arrow[ul] \arrow[d, "\lambda_{1*}"] & \\
& H_p(X_0;\theta) \arrow[dr] & & H_p(X_1;\theta) \arrow[dl] & \\
H_p(E;\theta) \arrow[rr] & & H_p(X;\theta) \arrow[rr] & & H_p(X,E;\theta)
\end{tikzcd}$$

onde os homomorfismos são os induzidos por inclusões ou por aplicações definidas por λ como feito anteriormente.

Como E tem dimensão $\leq p-1$, temos $H_p(E;\theta) = 0$; com isso, concluímos que a aplicação $H_p(X;\theta) \to H_p(X,E;\theta)$ é injetora. Seja $h : (F;\Phi\times\mathbb{R}) \to (E\times I;\theta\times Id)$ definida por $h(u,t) = (\lambda_0(u),t)$; então h é um homeomorfismo entre $(F;\Phi\times\mathbb{R})$ e $(E\times I;\theta\times Id)$. Como $(E;\theta)$ e $(E\times I;\theta\times Id)$ tem o mesmo tipo de homotopia, $(E;\theta)$ tem o mesmo tipo de homotopia de $(F;\Phi\times\mathbb{R})$; então $H_p(F;\Phi\times\mathbb{R}) \cong H_p(X;\theta) = 0$. De maneira análoga, concluímos que a aplicação $H_p(Y,\Phi\times\mathbb{R}) \to H_p(Y,F;\Phi\times\mathbb{R})$ é injetora. Pela proposição anterior, λ'_* é um isomorfismo e, observando que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
H_p(Y;\Phi\times\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda''_*"'] & H_p(Y,F;\Phi\times\mathbb{R}) \arrow[d, "\lambda'_*"] \\
H_p(X;\theta) \arrow[r] & H_p(X,E;\theta)
\end{tikzcd}$$

comuta, mostraremos que λ''_* é injetora. De fato, sejam $i_* : H_p(X;\theta) \to H_p(X,E;\theta)$, $j_* : H_p(Y,\Phi\times\mathbb{R}) \to H_p(Y,F;\Phi\times\mathbb{R})$ as aplicações do diagrama. Sejam $\alpha,\beta \in H_p(Y,\Phi\times\mathbb{R})$ tais que $\lambda''_*(\alpha) = \lambda''_*(\beta)$; logo $i_*(\lambda''(\alpha)) = i_*(\lambda''_*(\beta))$ e, portanto, $\lambda'_*(j_*(\alpha)) = \lambda'_*(j_*(\beta))$. Assim $\alpha = \beta$, pois ambas λ'_* e j_* são injetoras.

Pela comutatividade dos diagramas

$$\begin{tikzcd}
H_p(Y_0;\Phi\times\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{0*}"'] & H_p(Y;\Phi\times\mathbb{R}) \arrow[d, "\lambda''_*"] \\
H_p(E;\theta) \arrow[r] & H_p(X;\theta)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} H_p(Y_1;\Phi\times\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{1*}"'] & H_p(Y;\Phi\times\mathbb{R}) \arrow[d, "\lambda''_*"] \\ H_p(X_1;\theta) \arrow[r] & H_p(X;\theta) \end{tikzcd}$$

temos $\lambda''_*((\lambda_{0*}^{-1}(\sigma_0))|Y) = \sigma_0|X$ e $\lambda''_*((\lambda_1^{-1}(\sigma_1)|Y)) = \sigma_1|X$. Logo, $\lambda''_*((\lambda_{0*}^{-1}(\sigma_0))|Y - (\lambda_{1*}^{-1}(\sigma_1)|Y)) = \lambda''_*((\lambda_{0*}^{-1}(\sigma_0))|Y) - \lambda''_*((\lambda_{1*}^{-1}(\sigma_1)|Y)) = \sigma_0|X - \sigma_1|X = 0$ (a última igualdade segue da hipótese). Portanto, $\lambda_{0*}^{-1}(\sigma_0)|Y - \lambda_{1*}^{-1}(\sigma_1)|Y = 0$; ou seja, $\lambda_{0*}^{-1}(\sigma_0|Y) = \lambda_{1*}^{-1}(\sigma_1)|Y$. □

Proposição 4.6. *Sejam $\Phi \subset \mathbb{R}^m$ um plano e $(X;\theta)$ um θ-espaço em $\mathbb{R}^m$. Cada aplicação $f : X \to \mathbb{R}^m$ com $f \circ \theta = \Phi \circ f$ possui uma extensão $\overline{f} : \mathbb{R}^m - \theta \to \mathbb{R}^m$*

Dem.: Primeiro observe que, como $\theta : X \to X$ não possui pontos fixos, $X \cap \theta = \emptyset$. A extensão de f será construída por indução.

Seja $\theta = A^t \subset A^{t+1} \subset \ldots \subset A^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ uma sequência de planos em que a dimensão de A^k é k.

Seja H^{k+1} um $(k+1)$-semiplano contido em A^{k+1} e com fronteira igual a A^k.

Vamos estender f para uma função $f_{t+1} : X \cup (A^{t+1} - \theta) \to \mathbb{R}^m$. Considere $f'_t : (X \cap H^{t+1}) \cup (A^t - \theta) \to \mathbb{R}^m$ definida pela f, isto é, se $f = (f^1, \ldots, f^m)$ com cada $f^i : X \to \mathbb{R}$, então $f'_t = (f'^1_t, \ldots, f'^m_t)$, onde cada $f'^i_t : X \cap H^{t+1} \to \mathbb{R}$ é dada por $f'^i_t(x) = f^i(x)$

Observe que, como X é compacto, $X \cap H^{t+1} = X \cap (H^{t+1} - \theta)$ é fechado em $H^{t+1} - \theta$. Portanto, pelo teorema de extensão de Tietze, cada f'^i_t possui uma extensão contínua $g^i_t : H^{t+1} - \theta \to \mathbb{R}$. Assim, $g_t = (g^1_t, \ldots, g^n_t)$ é uma extensão contínua de f'_t.

Defina $f_{t+1} : X \cup (A^{t+1} - \theta) \to \mathbb{R}^m$ do seguinte modo:

$$f_{t+1}(x) = \begin{cases} f(x), & se \quad x \in X \\ g_t(x), & se \quad x \in H^{t+1} - \theta \\ \Phi(g_t(\theta(x))), & se \quad x \in \theta(H^{t+1}) - \theta \end{cases}$$

Notamos que f_{t+1} é contínua, pois o é em cada componente conexa de $X \cup (A^{t+1} - \theta)$, e que para todo $x \in X \cup (A^t - \theta)$, $f_{t+1}(\theta(x)) = \Phi(f_{t+1}(x))$. De fato:

se $x \in X$, por hipótese, temos que $f_{t+1}(\theta(x)) = \Phi(f_{t+1}(x))$; se $x \in H^{t+1} - \theta$, então $f_{t+1}(\theta(x)) = \Phi(g_t(\theta(\theta(x)))) = \Phi(g_t(x)) = \Phi(f_{t+1}(x))$; finalmente, se $x \in \theta(H^{t+1}) - \theta$ temos $f_t(\theta(x)) = g_{t+1}(\theta(x)) = \Phi(\Phi(g_t(\theta(x)))) = \Phi(f_{t+1}(x))$ como queríamos.

Suponha f estendida a uma função $f_k : X \cup (A^k - \theta) \to \mathbb{R}^m$. De maneira análoga ao que fizemos anteriormente, obtemos $f_{k+1} : X \cup (A^k - \theta) \to \mathbb{R}^m$ com:

$$f_{k+1}(x) = \begin{cases} f(x), & se \quad x \in X \\ g_k(x), & se \quad x \in H^{k+1} - \theta \\ \Phi(g_k(\theta(x))), & se \quad x \in \theta(H^{k+1}) - \theta \end{cases}$$

Observe que f_{k+1} é contínua em cada parte. Como $H^{k+1} - \theta$ e $\theta(H^{k+1}) - \theta$ são fechados e f_{k+1} está bem definida em $(H^{k+1} - \theta) \cap (\theta(H^{k+1}) - \theta)$, pelo lema da colagem, f_{k+1} é contínua e analogamente mostramos que $f_{k+1} \circ \theta = \Phi \circ f_{k+1}$.

Assim, pelo processo de indução finita, construímos $\overline{f} : \mathbb{R}^m - \theta \to \mathbb{R}^m$ extensão contínua de f com $\overline{f} \circ \theta = \Phi \circ \overline{f}$. □

4.2 Demonstração do Teorema 4.3

Lema 4.7. *Seja $(X;\theta)$ um θ-espaço de $\mathbb{R}^m$ de índice n e seja f uma função de X em $\mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in X$, $f(x) = f(\theta(x))$. Então existem $n+1$ pontos $x_1, \ldots, x_{n+1}$ de X tais que $f(x_1) = \ldots = f(x_{n+1}) = f(\theta(x_1)) = \ldots = f(\theta(x_{n+1}))$ e os $n+1$ $(t+1)$-planos $\theta x_1, \ldots, \theta x_{n+1}$ são mutuamente ortogonais em θ.*

Dem.: Para $n = 0$, o lema é trivial, pois estamos sob a hipótese $X \neq \emptyset$. Vamos proceder por indução, isto é, assumimos o lema válido para $n-1$ $(n > 0)$.

Com o intuito de maior clareza no encadeamento dos argumentos, dividiremos a demonstração em etapas.

Etapa 1: Afirmamos que é suficiente mostrar o lema sob as hipóteses de que X é conexo, n-dimensional e $(X;\theta)$ é simplicial.

De fato: seja $(X;\theta)$ um θ-espaço de $\mathbb{R}^m$ de índice n. Para $\epsilon > 0$ (ϵ suficientemente pequeno), considere $U = \{x \in \mathbb{R}^m : d(x, X) < \epsilon\}$. Seja (X_ϵ, θ) um θ-espaço simplicial tal que $X \subset X_\epsilon \subset U$. Como $(X;\theta)$ é de índice n, existe $\sigma \in H_n(X;\theta)$ tal que $\nu(\sigma) \neq 0$.

Considere agora a aplicação inclusão $i : (X;\theta) \to (X_\epsilon;\theta)$ e a induzida $i_* : H_p(X;\theta) \to H_p(X_\epsilon;\theta)$. Seja $z \in Z_n(X_\epsilon;\theta)$ um representante da classe $\sigma|X_\epsilon$. Pelo proposição 2.15, temos $\nu(z) \neq 0$.

Escrevendo $z = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i$ com cada σ_i sendo um n-simplexo, considere $\overline{z} = \bigcup_{i=1}^{k} \sigma_i$. Podemos escrever $\overline{z}$ como união das suas componentes conexas, isto é, $\overline{z} = \bigcup_{i=1}^{s} \overline{z_i}$ onde cada $\overline{z_i}$ é uma componente conexa de $\overline{z}$. Como θ é uma involução contínua e $\theta(\overline{z}) = \overline{z}$, temos, para cada i, $\theta(\overline{z_i}) = \overline{z_j}$, para algum j; daí podemos escrever $\overline{z} = \left(\bigcup_{i=1}^{k} \overline{z_i}\right) \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{k} \theta(\overline{z_i})\right)$, onde cada $\overline{z_i}$ é uma componente conexa de $\overline{z}$ (e consequentemente, $\theta(\overline{z_i})$ também o é). Suponha que $\overline{z_i} \cap \theta(\overline{z_i}) = \emptyset$ para todo i; como $z = \sum_{i=1}^{k} z_i + \sum_{i=1}^{k} \theta_\#(z_i)$, temos $0 = \partial z = \partial\left(\sum_{i=1}^{k} z_i\right) + \partial\left(\sum_{i=1}^{k} \theta_\#(z_i)\right)$ e, então, $\partial z_i = 0$, para todo i, pois $\overline{\partial z_i}$ está na mesma componente conexa de $\overline{z_i}$. Desse modo, concluímos que $\nu(z) = \nu\left(\sum_{i=1}^{k} z_i + \sum_{i=1}^{k} \theta_\#(z_i)\right) = \nu\left(\partial\left(\sum_{i=1}^{k} z_i\right)\right) = 0$, o que contraria a hipótese $\nu(z) \neq 0$. Logo, pelo menos uma componente conexa de $\overline{z}$ é θ-invariante. Podemos então escrever o (θ, n)-ciclo z da forma $z = \sum_{i=1}^{u} z_i + \theta_\#(z_i) + \sum_{j=1}^{v} z'_j$; onde $\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_u}, \theta(\overline{z_1}), \ldots, \theta(\overline{z_u}), \overline{z'_1}, \ldots, \overline{z'_v}$ são as componentes conexas de $\overline{z}$. Desse modo, $0 \neq \nu(z) = \sum_{i=1}^{u} \nu(z_i + \theta_\#(z_i)) + \sum_{j=1}^{v} \nu(z'_j) = \sum_{i=1}^{u} \nu(\partial(z_i)) + \sum_{j=1}^{v} \nu(z'_j) = \sum_{j=1}^{v} \nu(z'_j)$. Portanto existe $\overline{z'_j}$ conexo, n-dimensional, com $(z'_j;\theta)$ é de índice n. Assim, por nossa hipótese, temos $n+1$ pontos $x_1(\epsilon), \ldots, x_{n+1}(\epsilon)$ em $\overline{z_i} \subset \overline{z} \subset X_\epsilon$ tais que $f(x_1(\epsilon)) = \ldots = f(x_{n+1}(\epsilon)) = f(\theta(x_1(\epsilon))) = \ldots = f(\theta(x_{n+1}(\epsilon)))$, e os $(t+1)$-planos $\theta x_1(\epsilon), \ldots, \theta x_{n+1}(\epsilon)$ são mutuamente ortogonais em θ.

Agora, tome $\{\epsilon_k\}$ uma sequência de números reais com $\epsilon_k \to 0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, considere $U_k = \{x \in \mathbb{R}^m : d(x, X) < \epsilon_k\}$ e $(X_{\epsilon_k};\theta)$ um complexo simplicial de tal forma que $(X;\theta) \subset (X_{\epsilon_k};\theta)$ e $X \subset X_{\epsilon_k} \subset U_k$ (como feito anteriormente). Logo, para cada $k \in \mathbb{N}$, existem $x_1(\epsilon_k), \ldots, x_{n+1}(\epsilon_k) \in (X_{\epsilon_k};\theta)$ tais que $f(x_1(\epsilon_k)) = \ldots = f(x_n(\epsilon_k)) = f(\theta(x_1(\epsilon_k))) = \ldots = f(\theta(x_{n+1}(\epsilon_k)))$ e $\theta x_1(\epsilon_k), \ldots, \theta x_{n+1}(\epsilon_k)$ são mutuamente ortogonais em θ. Como $\epsilon_k \to 0$ as sequências $\{x_1(\epsilon_k)\}, \ldots, \{x_{n+1}(\epsilon_k)\}$ convergem e $x_i(\epsilon_k) \to x_i$ com $d(x_i, X) = 0$. Como X é compacto, logo é fechado, $x_i \in X$ para todo $i = 1, \ldots, n+1$.

Além disso, f e θ são contínuas, temos: $f(x_i(\epsilon_k)) \to f(x_i)$, $f(\theta(x_i(\epsilon_k))) \to f(\theta(x_i))$ para todo $i = 1, \ldots, n+1$. Mas $f(x_i(\epsilon_k)) = f(x_j(\epsilon_k))$ para todo $i, j = 1, \ldots, n+1$. Portanto, $f(x_i) = f(x_j) = f(\theta(x_i)) = f(\theta(x_j))$ para todo $i, j = 1, \ldots, n+1$.

Sendo o produto interno $\langle , \rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $(x_i(\epsilon_k), x_j(\epsilon_k)) \to (x_i, x_j)$, temos também

$$\langle x_i(\epsilon_k), x_j(\epsilon_k) \rangle \to \langle x_i, x_j \rangle.$$

Mas $\langle x_i(\epsilon_k), x_j(\epsilon_k) \rangle = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, $\langle x_i, x_j \rangle = 0$. Como as escolhas de i, j foram arbitrárias, $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ para quaisquer i, j. Logo, $x_1, \ldots, x_{n+1}$ são os pontos desejados e assim provamos a afirmação.

Resta então provar o lema para X conexo, n-dimensional e $(X;\theta)$ um θ-espaço simplicial.

Etapa 2. Consideramos pontos a', b' em X tais que $f(a') = \max\{f(x) : x \in X\}$ e $f(b') = \min\{f(x) : x \in X\}$. Tais pontos existem visto que X é compacto e f é contínua.

Seja $L = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{a_{i-1}a_i}$ a poligonal em X ligando os pontos a' e b' ($a_0 = a'$ e $a_k = b'$). Para cada $c \in L$ considere A_c^{m-1} o $(m-1)$-plano contendo θ e ortogonal a θc em θ, conforme seção anterior. Iremos abreviar $A_{a_i}^{m-1}$ para A_i^{m-1}, $i = 0, \ldots, k$.

Vamos assumir que $A_{i-1}^{m-1} \cap A_i^{m-1}$ intercepta X em um complexo simplicial de dimensão $\leq n-2$ e, então, mostraremos que existem n pontos $x_1, \ldots, x_n$ de X e um ponto x_{n+1} de L que satisfazem o desejado. Caso não tenhamos que $A_{i-1}^{m-1} \cap A_i^{m-1}$

intercepta X em um conjunto de dimensão $\leq n-2$, tomamos uma poligonal $L' = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{b_{i-1}b_i}$ em $\mathbb{R}^m$ (não necessariamente em X) tal que cada b_i está em uma vizinhança de a_i e cada $B_{i-1}^{m-1} \cap B_i^{m-1}$ intercepta X em um conjunto de dimensão $\leq n-2$, (onde B_i^{m-1} é o $(m-1)$-plano contendo θ e ortogonal a θb_i em θ). Como no primeiro caso, obtemos n pontos $y_1, \ldots, y_n$ de X e um ponto y_{n+1} de L' tais que $f(y_1) = \ldots = f(y_n) = f(y_{n+1})$ e os $(t+1)$-planos $\theta y_1, \ldots, \theta y_n, \theta y_{n+1}$ são mutuamente ortogonais em θ. Daí usando um processo limite conseguimos o resultado desejado.

Etapa 3. Construiremos uma função $\Lambda : A_0^{m-1} \times [0,k] \to \mathbb{R}^m$ por indução; para isso, usaremos a função λ definida na seção anterior.

Tome $\Lambda : A_0^{m-1} \times \{0\} \to \mathbb{R}^m$, $\Lambda(u,0) = u$, e considere $\Lambda_0 : A_0^{m-1} \to \mathbb{R}^m$ como $\Lambda_0(u) = \Lambda(u,0)$. Então, definimos $\Lambda : A_0^{m-1} \times [0,1] \to \mathbb{R}^m$ como sendo λ da seção anterior, considerando $a := a_0$, $b := a_1$ e $\lambda_0 := \Lambda_0$. Assim, temos $\Lambda_1(A_0^{m-1}) = A_1^{m-1}$, onde $\Lambda_1(u) = \Lambda(u,1)$.

Agora suponha que tenhamos definida $\Lambda : A_0^{m-1} \times [0, i-1] \to \mathbb{R}^m$, com $\Lambda_{i-1}(A_0^{m-1}) = A_{i-1}^{m-1}$. Considere λ da seção anterior fazendo $a := a_{i-1}$, $b := a_i$, $[0,1] := [i-1, i]$, $\lambda_0 := \Lambda_{i-1}$ e, assim, definimos $\Lambda : A_0^{m-1} \times [0,i] \to \mathbb{R}^m$.

Observe que:

- A função $[0,k] \to L$, $\alpha \mapsto c(\alpha)$, é um homeomorfismo tal que $c(i) = a_i$; $i = 1, \ldots, k$
- Para cada $\alpha \in [0,k]$, Λ define uma isometria linear de $A_0^{m-1} \times \{\alpha\}$ em $A_{c(\alpha)}^{m-1}$.

Etapa 4. Considere os conjuntos

$$Y = \Lambda^{-1}(X), \quad Y_i = Y \cap (A_0^{m-1} \times \{i\}), \quad Y_{i-1,i} = Y \cap (A_0^{m-1} \times [i-1, i]);$$

$$X_i = X \cap A_{c(i)}^{m-1}, \quad X_{i-1,i} = \bigcup_{i-1 \leq \alpha \leq i} (X \cap A_{c(\alpha)}^{m-1}).$$

Afirmamos que $\Lambda(Y_i) = X_i$ e $\Lambda(Y_{i-1,i}) = X_{i-1,i}$.

De fato, vamos verificar que $\Lambda(Y_i) \subset X_i$. Se $y \in \Lambda(Y_i)$, então existe $x \in Y_i$ tal que $\Lambda(x) = y$. Como $x \in Y$ e $x \in A_0^{m-1} \times \{i\}$, $\Lambda(x) \in X$ e $\Lambda(A_0^{m-1} \times \{i\})$, temos $y \in X \cap A_{c(i)}^{m-1} = X_i$; logo $\Lambda(Y_i) \subset X_i$. Agora verificaremos que $X_i \subset \Lambda(Y_i)$. Seja $y \in X_i$; logo $y \in X \cap A_{c(i)}^{m-1}$. Como $\Lambda : A_0^{m-1} \times \{i\} \to A_{c(i)}^{m-1}$ é um homeomorfismo, existe único $x \in A_0^{m-1}$ tal que $\Lambda(x) = y$ e, ainda, $x \in Y$ pois $x \in \Lambda^{-1}(y) \subset \Lambda^{-1}(X) = Y$. Daí, $x \in Y \cap A_0^{m-1}$ e, portanto, $y \in \Lambda(Y \cap A_0^{m-1})$. Logo $X_i \subset \Lambda(Y_i)$ e concluímos que $\Lambda(Y_i) = X_i$. A outra igualdade segue de maneira análoga.

Com isso, Λ define uma aplicação (que também será denominada por Λ) $\Lambda : (Y; \theta \times \mathbb{R}) \to (X; \theta)$ e cada $\Lambda_i : (Y_i; \theta \times \mathbb{R}) \to (X_i; \theta)$ é um homeomorfismo.

Etapa 5. Para cada $i \in \{0, \ldots, k\}$, seja $\mathcal{B}_i = \{v_1, \ldots, v_t, w_{t+1}, \ldots, w_{m-2}, \tilde{u}_{a_i}, u_{a_i}\}$ a base ortonormal de $\mathbb{R}^m$ obtida na seção anterior. Note que A_i^{m-1} divide $\mathbb{R}^m$ em dois m-semiplanos, H_i^+ e H_i^-; em que $H_i^+ = \{w \in \mathbb{R}^m : \langle w, u_{a_i} \rangle \geq 0\}$ e $H_i^- = \{w \in \mathbb{R}^m : \langle w, u_{a_i} \rangle \leq 0\}$. Considere $Q_{i-1,i} = \bigcup_{i-1 \leq \alpha \leq i} A_{c(\alpha)}^{m-1}$.

Afirmamos que $Q_{i-1,i} = (H_{i-1}^+ \cap H_i^-) \cup (H_{i-1}^- \cap H_i^+)$.

De fato: seja $v \in Q_{i-1,i}$. Então $v \in A_{c(\bar{\alpha})}^{m-1}$ para algum $\bar{\alpha} \in [0,1]$ e, portanto,

$$\langle v, u_{a_{i-1}} \rangle = \langle k_1 v_1 + \ldots + k_t v_t + k_{t+1} w_{t+1} + \ldots + k_{m-2} w_{m-2} + k_{m-1} \tilde{v}_{c(\bar{\alpha})}, v_{u_{i-1}} \rangle =$$

$$= \langle k_1 v_1, u_{a_{i-1}} \rangle + \ldots + \langle k_t v_t, u_{a_{i-1}} \rangle + \langle k_{t+1} w_{t+1}, u_{a_{i-1}} \rangle + \ldots + \langle k_{m-2} w_{m-2}, u_{a_{i-1}} \rangle + \langle k_{m-1} \tilde{u}_{c(\bar{\alpha})} \rangle =$$

$$= k_{m-1} \langle \tilde{u}_{c(\bar{\alpha})}, u_{a_{i-1}} \rangle.$$

Como $\tilde{u}_{c(\bar{\alpha})} = -\text{sen}(h(s)\beta) u_a + \cos(h(s)\beta) \tilde{u}_a$,

$$k_{m-1} \langle \tilde{u}_{c(\bar{\alpha})}, u_{a_{i-1}} \rangle = k_{m-1} \langle -\text{sen}(h(s)\beta) v_a + \cos(h(s)\beta) \tilde{u}_a, u_a \rangle = -k_{m-1} \text{sen}(h(s)\beta)$$

e, analogamente, temos $\langle v, u_{a_i} \rangle = k_{m-1} \text{sen}((1-h(s))\beta)$. Logo $\langle v, u_{a_i} \rangle \langle v, u_{a_{i-1}} \rangle = -t^2 \text{sen}(h(s)\beta) \text{sen}((1-h(s))\beta) \leq 0$. Desse modo, concluímos que $v \in (H_{i-1}^+ \cap H_i^-) \cup (H_{i-1}^- \cap H_i^+)$.

Para provar a inclusão contrária, tome $v \in (H_{i-1}^+ \cap H_i^-) \cup (H_{i-1}^- \cap H_i^+)$ qualquer; então $\langle v, u_{a_{i-1}} \rangle \langle v, u_{a_i} \rangle \leq 0$. Vamos mostrar que existe $\overline{\alpha} \in [i-1, i]$ tal que $\langle v, u_{c(\alpha)} \rangle = 0$. Considere $g : [i-1, i] \to \mathbb{R}$ dada por $g(\alpha) = \langle v, u_{c(\alpha)} \rangle$. Observe que g é contínua com:

$g(i-i) = \langle v, u_{a_{i-1}} \rangle$, $g(i) = \langle v, u_{a_i} \rangle$. Como $g(i-1) \leq 0 \leq g(i)$ ou $g(i) \leq 0 \leq g(i-1)$, Assim, existe $\overline{\alpha} \in [i-1, i]$ tal que $g(\overline{\alpha}) = 0$. Portanto, $\langle v, u_{c(\overline{\alpha})} \rangle = 0$, o que implica $v \in A^{m-1}_{c(\overline{\alpha})}$.

Denotamos: $X_i^+ = X \cap H_i^+$ e $X_i^- = X \cap H_i^-$, para cada $i = 0, \ldots, k$. Observamos que $X_{i-1,i} = (X_{i-1}^+ \cap X_i^-) \cup (X_{i-1}^- \cap X_i^+)$, pois:

$$X_{i-1,i} = \bigcup_{i-1 \leq \alpha \leq i} (X \cap A^{m-1}_{c(\alpha)}) = X \cap Q_{i-1,i} =$$

$$= (X \cap H_{i-1}^+ \cap H_i^-) \cup (X \cap H_{i-1}^- \cap H_i^+) =$$

$$= (X \cap H_{i-1}^+ \cap X \cap H_i^-) \cup (X \cap H_{i-1}^- \cap X \cap H_i^+) =$$

$$= (X_{i-1}^+ \cap X_i^-) \cup (X_{i-1}^- \cap X_i^+).$$

Como $(X; \theta)$ é de índice n, existe $\sigma \in H_n(X; \theta)$ com $\nu(\sigma) \neq 0$. Agora note que $X_i = X_i^+ \cap X_i^-$, $X = X_i^+ \cup X_i^-$ e X_i é θ-invariante. Considere então o homomorfismo $\Delta_i : H_n(X; \theta) \to H_{n-1}(X_i; \theta)$ dado pelo lema 2.16 e seja $\sigma_i = \Delta_i(\sigma)$.

Etapa 6: Provaremos que, para cada $i = 0, \ldots, k$, $\sigma_{i-1}|X_{i-1,i} = \sigma_i|X_{i-1,i}$.

Como $X = (X_{i-1}^- \cap X_i^-) \cup (X_{i-1}^+ \cap X_i^+) \cup (X_{i-1}^- \cap X_i^+) \cup (X_{i-1}^- \cap X_i^-)$ podemos tomar um (θ, n)-ciclo z, representante da classe σ, e escrevê-lo da forma $z = c_1 + c_2 + c_3 + c_4$, onde c_1, c_2, c_3, c_4 são n-cadeias em $X_{i-1}^- \cap X_i^-$, $X_{i-1}^+ \cap X_i^+$, $X_{i-1}^- \cap X_i^+$, $X_{i-1}^+ \cap X_i^-$, respectivamente; assim, pela forma com que o ciclo z foi decomposto, temos que $\theta_\#(c_1) = c_2$ e $\theta_\#(c_3) = c_4$.

Note que $X_{i-1}^- = (X_{i-1}^- \cap X_i^-) \cup (X_{i-1}^- \cap X_i^+)$ e $X_{i-1}^+ = (X_{i-1}^+ \cap X_i^+) \cup (X_{i-1}^+ \cap X_i^-)$. Escrevendo $z = d + \theta_\#(d)$, com $d = c_1 + c_3 \in S_n(X_{i-1}^-)$, $\theta_\#(d) = c_2 + c_4$ e, portanto, $\partial(c_1 + c_3)$ é um representante da classe σ_{i-1} (vide definição de σ_i). Usando o mesmo argumento obtemos que $\partial(c_1 + c_4)$ é um representante da classe σ_i. Assim, $c_3 + c_4$ é uma (θ, n)-cadeia de $X_{i-1,i}$ com $\partial(c_3 + c_4) = \partial(c_1 + c_3 + c_1 + c_4) = \partial(c_1 + c_3) + \partial(c_1 + c_4)$. Desse modo, temos que os $(n-1)$-ciclos, $\partial(c_1 + c_3)$ e $\partial(c_1 + c_4)$ são θ-homólogos. Portanto $\sigma_{i-1}|X_{i-1,i} = \sigma_i|X_{i-1,i}$.

Considere $\Lambda_{i*} : H_n(Y_{i*}; \theta \times \mathbb{R}) \to H_{n-1}(X_{i*}; \theta)$ e seja $e_i = \Lambda_{i*}^{-1}(\sigma), i = 1, \ldots, k$. Como $\sigma_{i-1}|X_{i-1,i} = \sigma_i|X_{i-1,i}$, segue do lema 4.5, que $e_{i-1}|Y_{i-1,i} = e_i|Y_{i-1,i}$, para $i = 1, \ldots, k$ e então $e_{i-1}|Y = e_i|Y$. Portanto, $e_0|Y = e_k|Y$.

Etapa 7. Seja $g : Y \to \mathbb{R}$ definida por $g(u, \alpha) = f(\Lambda(u, \alpha)) - f(c(\alpha))$ e sejam
$Y^+ = \{y \in Y : g(y) \geq 0\}$,
$Y^- = \{y \in Y : g(y) \leq 0\}$,
$\tilde{Y} = Y^+ \cap Y^- = \{y \in Y : g(y) = 0\}$.
Mostraremos que:

1. Para todo $(u, \alpha) \in Y$, $g(u, \alpha) = g((\theta \times \mathbb{R})(u, \alpha))$.

2. $Y^+, Y^-, \tilde{Y}$ são $(\theta \times \mathbb{R})$-invariantes.

3. $Y_0 \subset Y^-$ e $Y_k \subset Y^+$.

De fato:

1. Se $(u, \alpha) \in Y$, então $g((\theta \times \mathbb{R})(u, \alpha)) = f(\lambda((\theta \times \mathbb{R})(u, \alpha))) - f(c(\alpha)) = f(\theta(\lambda(u, \alpha))) - f(c(\alpha))$. Como $\lambda(u, \alpha) \in X$, $f(\theta(\lambda(u, \alpha))) = f(\lambda(u, \alpha))$. Logo, $g((\theta \times \mathbb{R})(u, \alpha)) = f(\lambda(u, \alpha)) - f(c(\alpha)) = g(u, \alpha)$.

2. Segue de 1.

3. $Y_0 = Y \cap (A_0^{m-1} \times \{0\}) = Y \cap (A_a^{m-1} \times \{0\})$. Como $f(a) = \sup\limits_{x \in X} f(x)$ e $c(0) = a'$, para todo $(u, \alpha) \in Y_0$, temos $g(u, \alpha) = f(\lambda(u, \alpha)) - f(c(\alpha)) = f(\lambda(u, \alpha)) \leq 0$. Logo, $Y_0 \subset Y^-$. Analogamente, mostramos que $Y_k \subset Y^+$.

Etapa 8. Considere a sequência de Mayer-Vietoris
$\ldots \longrightarrow H_{n-1}(\tilde{Y}; \theta \times \mathbb{R}) \longrightarrow H_{n-1}(Y^-; \theta \times \mathbb{R}) \times H_{n-1}(Y^+; \theta \times \mathbb{R}) \longrightarrow H_{n-1}(Y; \theta \times \mathbb{R}) \longrightarrow \ldots$

Mostraremos que existe $e \in H_{n-1}(\tilde{Y}; \theta \times \mathbb{R})$ com $e|Y^- = e_0|Y^-$ e $e|Y^+ = e_k|Y^+$.

Sejam $(i_*, j_*) : H_n(\tilde{Y}, \theta \times \mathbb{R}) \to H_n(Y^-; \theta \times \mathbb{R}) \times H_n(Y^+; \theta \times \mathbb{R})$, $k_* + l_* : H_n(Y^-; \theta \times \mathbb{R}) \times H_n(Y^+; \theta \times \mathbb{R}) \to H_n(Y; \theta \times \mathbb{R})$ os homomorfismos da sequência de Mayer-Vietoris. Como $e_0|Y = e_k|Y$ então o par $(e_0, e_k) \in Ker(k_* + l_*)$. Como esta sequência é exata, existe um elemento $e \in H_{n-1}(\tilde{Y}; \theta \times \mathbb{R})$ tal que $(i_*(e), j_*(e)) = (e_0|Y, e_k|Y)$. Logo $e = e_0|Y$ e $e = e_k|Y$.

Seja $l : \tilde{Y} \to \mathbb{R}$ definida por $l(u, \alpha) = \alpha$. Logo $l(u, \alpha) = l(\theta \times \mathbb{R}(u, \alpha))$ para todo $(u, \alpha) \in \tilde{Y}$. Como $e \in H_{n-1}(\tilde{Y}; \theta \times \mathbb{R})$ e $\nu(e) = \nu(e|Y^-) = \nu(e_0|Y^-) = \nu(e_0) = \nu(\lambda_{0*}^{-1}(\sigma_0)) = \nu(\sigma_0) = \nu(\sigma) \neq 0$, $(\tilde{Y}; \theta \times \mathbb{R})$ é um $\theta \times \mathbb{R}$- espaço de índice $\geq n - 1$. Logo, pela hipótese de indução, existem n pontos $y_1, \ldots, y_n$ de $\tilde{Y}$ tais que $l(y_1), \ldots, l(y_n) = \delta$ e os $(t+2)$-planos $(\theta \times \mathbb{R})y_1, \ldots, (\theta \times \mathbb{R})y_n$ são mutuamente ortogonais em $\theta \times \mathbb{R}$.

Sejam $x_i = \Lambda(y_i)$, $i = 1, \ldots, n$ e $x_{n+1} = c(\delta)$. Como $y_i \in \tilde{Y} \cap (A_0^{m-1} \times \{\delta\})$ para todo $i = 1, \ldots, n$ então $g(y_i) = 0$ (vide etapa 7). Logo $f(x_i) - f(x_{n+1}) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, ou seja, $f(x_1), \ldots, f(x_{n+1})$. Mais ainda, como $(\theta \times \{\delta\})y_1, \ldots, (\theta \times \{\delta\})y_n$ são mutuamente ortogonais em $\theta \times \{\delta\}$ e $\Lambda : A_0^{m-1} \times \{\delta\} \to A_{c(\delta)}^{m-1}$ preserva ângulos, $\theta x_1, \ldots, \theta x_n$ são mutamente ortogonais em θ. Por construção, θx_{n+1} também é ortogonal a $A_{c(\delta)}^{m-1}$ em θ e, como $\theta x_i \subset A_{c(\delta)}^{m-1}$ para todo $i = 1, \ldots, n$, temos que $\theta x_1, \ldots, \theta x_{n+1}$ são mutuamente ortogonais em θ. Desse modo, encerramos a demonstração do lema. $\square$

Voltemos então ao Teorema 4.3, enunciado no início deste capítulo.

Teorema 4.3. *Seja $(X; \theta)$ um θ-espaço em $\mathbb{R}^m$ de índice n e seja f uma função $f : X \to \mathbb{R}$ contínua. Então existem $n + 1$ pontos $x_1, \ldots, x_{n+1} \in X$ tais que $f(x_1) = \ldots = f(x_{n+1})$ e os $(t+1)$-planos $\theta x_1, \ldots, \theta x_{n+1}$ são mutuamente ortogonais em θ.*

Dem.: Considere $g : X \to \mathbb{R}$, $g(x) = max\{f(x), f(\theta(x))\}$. Note que g é contínua e que, para todo $x \in X$, $g(x) = g(\theta(x))$. Assim, pelo lema anterior, existem $y_1, \ldots, y_{n+1} \in X$ tais que $g(y_1) = \ldots = g(y_{n+1}) = g(\theta(y_1)) = \ldots = g(\theta(y_{n+1}))$ e $\theta y_1, \ldots, \theta y_{n+1}$ são mutuamente ortogonais. Logo, existem $x_1, \ldots, x_{n+1} \in X$ ($x_i = y_i$

ou $x_i = \theta(y_i))$, tais que, para todo $i = 1, \ldots, n+1$, $f(x_1) = \ldots = f(x_{n+1})$ e $\theta x_1, \ldots, \theta x_{n+1}$ são mutuamente ortogonais. $\square$

Capítulo 5

Teoremas Generalizados

Neste último capítulo, conforme anunciamos na Introdução, estudaremos as generalizações dos teoremas de Kakutani-Yamabe-Yujobô e de Dyson, para T-espaços quaisquer.

5.1 Ortogonalidade em T-Espaços

Seja $(X;T) = (S^n;A)$. Considere, então, em $X^2 = X \times X$, os seguintes conjuntos:

$$E = \{(x,y) \in X^2 : \langle x,y \rangle \geq 0\},$$

$$F = \{(x,y) \in X^2 : \langle x,y \rangle \leq 0\}.$$

(em que $\langle , \rangle$ denota o produto interno usual).

Conforme já observamos, E e F são subconjuntos fechados de X^2 com as seguintes propriedades:

(i) $E \cup F = X^2$;

(ii) $(x,y) \in E \Leftrightarrow (y,x) \in E \Leftrightarrow (x,T(y)) \in F \Leftrightarrow (T(x),y) \in F$;

(iii) $D = \{(x, x) : x \in X\} \subset E - F$.

Além disso, dados $x, y \in X$ quaisquer, temos: x e y são ortogonais se, e somente se, $(x, y) \in E \cap F$.

Com isso em mente, apresentamos uma certa generalização do "conceito de ortogonalidade" para um T-espaço qualquer:

Definição 5.1. Seja $(X; T)$ um T-espaço e sejam E, F subespaços fechados de $X^2 = X \times X$ tais que:

(i) $E \cup F = X^2$;

(ii) $(x, y) \in E \Leftrightarrow (y, x) \in E \Leftrightarrow (x, T(y)) \in F \Leftrightarrow (T(x), y) \in F$;

(iii) $D = \{(x, x) : x \in X\} \subset E - F$.

Dados x, y pontos quaisquer de X, diremos que x e y são T-(E, F)-*ortogonais* se, e somente se, $(x, y) \in E \cap F$.

Nesse contexto, o teorema a seguir, cuja demonstração é o principal objetivo deste capítulo, pode ser visto como uma generalização do Teorema K-Y-Y.

Teorema 5.2. *Seja $(X; T)$ um T-espaço de índice n e sejam E,F subespaços fechados de X^2 tais que:*

- $E \cup F = X^2$
- $(x, y) \in E \Leftrightarrow (y, x) \in E \Leftrightarrow (T(x), y) \in F \Leftrightarrow (x, T(y)) \in F$.
- $D = \{(x, x) : x \in X\} \subset E - F$.

Então, para toda função $f : X \to \mathbb{R}$ contínua, existem $n + 1$ pontos $x_1, \ldots, x_{n+1}$ de X tais que $f(x_i) = f(x_j)$, para todo $i, j = 1, \ldots, n + 1$, e $(x_i, x_j) \in E \cap F$ para $i \neq j$ (em outras palavras, $x_1, \ldots, x_{n+1}$ são mutuamente T-(E, F)-ortogonais).

Nesse ponto, cabe a pergunta: qualquer T-espaço $(X; T)$ admite fechados E, F satisfazendo as condições da definição 5.1? A resposta é dada pela proposição a seguir.

Proposição 5.3. *Seja $(X;T)$ um T-espaço qualquer. Então, existem E, F subespaços fechados de X satisfazendo as condições* **(i),(ii),(iii)** *da definição 5.1.*

Dem.: Considere as seguintes involuções em X^2: $h_1 = T \times Id : X^2 \to X^2$, dada por $h_1((x,y)) = (T(x), y)$, e $h_2 = Id \times T : X^2 \to X^2$, dada por $h_2((x,y)) = (x, T(y))$. Observe que cada h_i é contínua e não possui pontos fixos.

Suponha que $(x,x) \in D \cap h_1(D)$; logo, $h_1((x,x)) = (y,y)$, daí $(T(x), x) = (y,y)$ e, portanto, $T(x) = y = x$, contradizendo nossa hipótese de $(X;T)$ ser um T-espaço. Assim, $D \cap h_1(D) = \emptyset$ (analogamente, mostra-se que $h_2(D) \cap D = \emptyset$).

Como D e $h_i(D)$ são fechados disjuntos e X^2 é um espaço normal, existem abertos $V_1, V_2, W \subset X^2$ tais que $D \subset W$, $h_i(D) \subset V_i$ e $W \cap V_i = \emptyset$ $(i = 1,2)$. Considere $U' = W \cap h_1(V_1) \cap h_2(V_2)$. Seja $U = twist(U') \cap U'$. Desse modo, o aberto $U \subset X^2$ foi construído de tal forma que: $D \subset U$, $h_i(U) \cap U = \emptyset$ $(i = 1,2)$ e U é $twist$-invariante.

Defina $E = (h_1(U) \cup h_2(U))^c$ e $F = h_1(E) \cup h_2(E)$. Note que E e F são fechados. Vamos verificar que E e F satisfazem todas as propriedades desejadas.

Seja $(x,y) \in X^2$ com $(x,y) \notin E$. Então, $(x,y) \in h_1(U)$ ou $(x,y) \in h_2(U)$. Como $U \subset E$, $(x,y) \in h_1(E) \cup h_2(E)$. Portanto, $(x,y) \in F$. Desse modo, verificamos que $X^2 = E \cup F$.

Seja $(x,y) \in E$ e suponha que $(y,x) \notin E$. Então $(y,x) \in F = h_1(E) \cup h_2(E)$. Sem perda de generalidade, supomos que $(y,x) \in h_1(U)$; logo existe $(a,b) \in U$ com $h_1((a,b)) = (y,x)$, isto é, $(y,x) = (T(a), b)$, o que implica $T(a) = y$ e $x = b$. Então, temos $(a,x) \in U$. Como U é twist-invariante, $(x,a) \in U$. Daí, $h_2((x,a)) = (x, T(a)) = (x,y)$ e, portanto, $(x,y) \in h_2(U)$, o que contradiz a hipótese $(x,y) \in E$. Desse modo, mostramos que: $(x,y) \in E \Leftrightarrow (y,x) \in E$.

Se $(x,y) \in E$, então $(x, T(y)) = h_1((x,y)) \in F$; da mesma maneira vemos que se $(x,y) \in E$, então $(T(x), y) \in F$. Agora, suponha que $(x, T(y)) \in F$. Então $(x,y) \in E$ ou $(T(x), T(y)) \in E$. Se $(x,y) \in E$ nada há a fazer. Se $(T(x), T(y)) \in E$, então $(T(x), y) \notin U$ e $(x, T(y)) \notin U$; daí, como $(T(x), y) = h_1((x,y))$ e $(x, T(y)) = h_2((x,y))$, temos $h_1((x,y)), h_2((x,y)) \notin U$, de onde segue que $(x,y) \in E$. Desse modo mostramos que $(x,y) \in E \Leftrightarrow (x,T(y)) \in F \Leftrightarrow (T(x),y) \in F$.

Suponha que exista $(x,x) \in D \cap F$. Então, existe $(a,b) \in E$ tal que $h_1((a,b)) = (x,x)$ ou $h_2((a,b)) = (x,x)$. Daí, $(T(a),b) = (x,x)$ ou $(a,T(b)) = (x,x)$. Se $(T(a),b) = (x,x)$, então $T(a) = b$, com $(a,T(a)) \in E$ e, então, $h_1((a,T(a)) = (T(a),T(a)) \notin U$, contradizendo o fato de que $(T(a),T(a)) \in D \subset U$. Portanto, concluímos que $D \cap F = \emptyset$, como queríamos. $\square$

Outra pergunta natural é a seguinte: considerando um T-espaço $(X;T)$ qualquer e $E, F \subset X$, nas condições da definição 5.1, sempre teremos $E \cap F \neq \emptyset$ (ou seja, sempre existirão pontos T-(E,F)-ortogonais)? Um exemplo simples mostra que, em geral, a resposta é negativa. Basta considerar $(S^0;A)$, $E = \{(1,1),(-1,-1)\}$, $F = \{(1,-1),(-1,1)\} \subset S^0 \times S^0$. No entanto, se $(X;T)$ possui índice maior do que zero, mostraremos que a resposta a essa pergunta é sempre afirmativa.

Proposição 5.4. *Seja $(X;T)$ um T-espaço de índice $n \geq 1$. Então, para quaisquer fechados $E, F \subset X$, nas condições da definição 5.1, tem-se $E \cap F \neq \emptyset$.*

Dem.: Observe que isso é um corolário do teorema 5.2. Apresentaremos uma outra demonstração aqui, usando argumentos mais elementares.

Conforme vimos no exemplo 1, pag. 44, temos: índice de $(X \times X; T \times Id) =$ índice de $(X;T) = n \geq 1$.

Argumentaremos por redução ao absurdo.

Suponha $E \cap F = \emptyset$. Usaremos o lema 3.4, considerando o T-espaço $(X \times X; T \times Id)$.

Considere $F_1 = (Id \times T)(E)$ e $F_2 = \ldots = F_{n+1} = E$. Temos $(T \times Id)(F_1) = (T \times T)(E)$ e $(T \times Id)(F_i) = (T \times Id)(E)$, para todo $i = 2, \ldots, n+1$. Além disso, como $F = (T \times Id)(E) \cup (Id \times T)(E)$, $\bigcup_{i=1}^{n+1} F_i \cup (T \times Id)(F_i) \supset E \cup (T \times Id)(E) \cup (Id \times T)(E) = E \cup F = X^2$. Ou seja, teríamos: $X^2 = \bigcup_{i=1}^{n+1} F_i \cup (T \times Id)(F_i)$ com $\bigcap_{i=1}^{n+1} F_i = (Id \times T)(E) \cap E \subset F \cap E = \emptyset$. Então, como $E \cap (T \times Id)(E) \subset F \cap E = \emptyset$, segue do item **(3)** do lema 3.4, que F_1 possui um par de involução. Seja $(x, y) \in F_1 \cap (T \times Id)(F_1) = (Id \times T)(E) \cap (T \times T)(E)$. Então: $(x, y) = (T(a), T(b))$ com $(a, b) \in E$; daí, $(T(a), b) \in F$. Por outro lado, $(x, y) = (T(a), T(b)) \in (Id \times T)(E)$ implica que $(T(a), b) \in E$. Desse modo, chegamos a um absurdo, pois supomos $E \cap F = \emptyset$. $\square$

5.2 Demonstração do Teorema 5.2

Sejam $(X; T)$ um T-espaço de índice n e E,F subespaços fechados de X^2 tais que:

- $E \cup F = X^2$
- $(x, y) \in E \Leftrightarrow (y, x) \in E \Leftrightarrow (T(x), y) \in F \Leftrightarrow (x, T(y)) \in F$.
- $D = \{(x, x) : x \in X\} \subset E - F$.

Sendo $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua qualquer, precisamos mostrar que existem $n+1$ pontos $x_1, \ldots, x_{n+1}$ de X tais que: $f(x_i) = f(x_j)$, para todo $i, j = 1, \ldots, n+1$, e $(x_i, x_j) \in E \cap F$ para $i \neq j$.

Optamos por dividir a demonstração em etapas como no capítulo anterior.

Etapa 1. Vamos mostrar que existe um aberto G tal que $E \cap F \subset G \subset X^2 - D$ e, para qualquer $(x, y) \in G$, $(y, x), (T(x), y), (x, T(y)) \in G$.

Primeiro observamos que, se $(x, y) \in E \cap F$, então

$$(y, x), (T(x), y), (x, T(y)), (y, T(x)), (T(y), x), (T(x), T(y)), (T(y), x) \in E \cap F.$$

De fato:

- $(x, y) \in E \cap F \Rightarrow (x, y) \in E$ e $(x, y) \in F \Rightarrow (T(x), y) \in F$ e $(T(x), y) \in E \Rightarrow (T(x), y) \in E \cap F$.
- $(x, y) \in E \cap F \Rightarrow (y, x) \in E$ e $(T(x), y) \in E \Rightarrow (y, T(x)) \in F$ e $(y, T(x)) \in E \Rightarrow (y, T(x)) \in E \cap F$.

- $(x,y) \in E \cap F \Rightarrow (y,x) \in E$ e $(T(y),x) \in E \Rightarrow (y,x) \in E$ e $(y,x) \in F \Rightarrow (y,x) \in E \cap F$.

- $(x,y) \in E \cap F \Rightarrow (y,T(x)) \in F$ e $(T(x),T(y)) \in F \Rightarrow (T(y),T(x)) \in E$ e $(T(x),T(y)) \in F \Rightarrow (T(x),T(y)) \in E$ e $(T(x),T(y)) \in F \Rightarrow (T(x),T(y)) \in E \cap F$.

- $(x,y) \in E \cap F \Rightarrow (y,T(x)) \in E$ e $(T(y),T(x)) \in E \Rightarrow (T(y),T(x)) \in F$ e $(T(y),T(x)) \in F \Rightarrow (T(y),T(x)) \in E \cap F$.

- $(x,y) \in E \cap F \Rightarrow (T(x),T(y)) \in F$ e $(x,T(y)) \in E \Rightarrow (x,T(y)) \in E$ e $(x,T(y)) \in F \Rightarrow (x,T(y)) \in E \cap F$.

- $(x,y) \in E \cap F \Rightarrow (x,T(y)) \in E$ e $(T(y),x) \in F \Rightarrow (T(y),x) \in E$ e $(T(y),x) \in F \Rightarrow (T(y),x) \in E \cap F$.

Como $(E \cap F) \cap D = \emptyset$, existe um aberto U tal que $E \cap F \subset U \subset X^2 - D$. Considere os seguintes abertos:
$U_1 = \{(y,x) : (x,y) \in U\}$
$U_2 = \{(x,T(y)) : (x,y) \in U\}$
$U_3 = \{(T(x),y) : (x,y) \in U\}$
$U_4 = \{(T(y),x) : (x,y) \in U\}$
$U_5 = \{(y,T(x)) : (x,y) \in U\}$
$U_6 = \{(T(x),T(y)) : (x,y) \in U\}$
$U_7 = \{(T(y),T(x)) : (x,y) \in U\}$.

Observe que cada aberto U_i pode ser visto como a imagem de U por uma das seguintes involuções sobre X^2: $h_1(x,y) = (y,x)$, $h_2(x,y) = (T(x),y)$ e $h_3(x,y) = (x,T(y))$, ou como imagem de U das composições destas mesmas.

Como $E \cap F$ é invariante por cada involução h_i, também é invariante por cada composição da forma $h_i \circ h_j$, logo $E \cap F \subset U_i$ para cada i. Daí, $E \cap F \subset U \cap (\bigcap_{i=1}^{7} U_i)$.

Seja $G = U \cap (\bigcap_{i=1}^{7} U_i)$. Logo, $E \cap F \subset G \subset X^2 - D$; se $(x, y) \in G$, então $h_i(h_j(x, y)) \in G$, daí $(x, T(y)), (y, x), (T(x), y) \in G$, como queríamos.

Etapa 2. Seja $\mathcal{G}$ a coleção de todos os abertos G nas condições da etapa 1. Observe que $\mathcal{G}$ é um conjunto direcionado com a relação de inclusão. Vamos verificar que $\bigcap_{G \in \mathcal{G}} \overline{G} = E \cap F$.

Denotemos $H = \bigcap_{G \in \mathcal{G}} \overline{G}$. A inclusão $E \cap F \subset H$ é trivial. Suponha que exista $x \in H$, com $x \notin E \cap F$. Considere um aberto V tal que $E \cap F \subset V \subset \overline{V} \subset X^2 - D$ com $x \notin \overline{V}$. Usando o procedimento feito na etapa 1, para o aberto V, obtemos um aberto $W \in \mathcal{G}$ com $x \notin \overline{W}$, o que é absurdo. Logo $H = E \cap F$.

Para as etapas 3,4 e 5 a seguir, sejam $G \in \mathcal{G}$ e $k \in \mathbb{N}^*$ fixados.

Etapa 3. Construiremos uma certa cobertura $\lambda = \{W_1, \ldots, W_p, T(W_1), \ldots, T(W_p)\}$ de $(X; T)$ que terá propriedades convenientes.

Para cada $x \in X$, e cada $y \in X$, o par (x, y) pertence a $E - F, F - E$ ou $E \cap F$ (lembrando que $E \cup F = X^2$); logo, existem vizinhanças $U(x, y), V(x, y)$ de x, y, respectivamente, tais que $U(x, y) \times V(x, y)$ está contido em $E - F, F - E$ ou G.

Para cada $x \in X$, considere a coleção $\{V(x, y) : y \in X\}$. Essa coleção é uma cobertura aberta de X, logo admite uma subcobertura finita,

$$\mathcal{V}_x = \{V(x, y_j) : j = 1, \ldots, t(x)\}.$$

Defina $U(x) = \bigcap_{j=1}^{t(x)} U(x, y_j)$. Então $\{U(x) : x \in X\}$ é uma cobertura aberta de X, logo também admite uma subcobertura finita,

$$\mathcal{U} = \{U(x_i) : i = 1, \ldots, s\}.$$

Considere as coberturas $\mathcal{U}, \mathcal{V}_{x_1}, \ldots, \mathcal{V}_{x_s}$. Vamos construir uma cobertura λ de $(X; T)$ tal que:

1. λ seja um *refinamento-estrela* de $\mathcal{U}, \mathcal{V}_{x_1}, \ldots, \mathcal{V}_{x_s}$ (um refinamento-estrela γ de uma cobertura β é um refinamento de β, em que, para cada $W \in \gamma$, $St_W \subset V$, para algum $V \in \beta$);

2. se $W', W'' \in \lambda$ com $W' \cap W'' \neq \emptyset$, então, para quaisquer $x' \in W'$, $x'' \in W''$, $|f(x') - f(x'')| < \dfrac{1}{k}$.

Seja λ' um refinamento de $\mathcal{U}, \mathcal{V}_{x_1}, \ldots, \mathcal{V}_{x_s}$ e suponha que para algum $W \in \lambda'$, St_W não está contida em algum membro de uma das coberturas $\mathcal{U}, \mathcal{V}_{x_1}, \ldots, \mathcal{V}_{x_s}$. Como λ' é um refinamento de $\mathcal{U}, \mathcal{V}_{x_1}, \ldots, \mathcal{V}_{x_s}$, W está contido em algum membro A_t de cada cobertura $\mathcal{U}, \mathcal{V}_{x_1}, \ldots, \mathcal{V}_{x_s}$. Seja $V \in St_W$ tal que $V \not\subset A_t$. Considere $V' = V \cap A_t$ e $V'' = V \cap \overline{W}^c$, daí substitua V por V', V'', e de forma correspondente, suas imagens, e repetindo este processo para todo aberto $V \in St_W$ tal que $V \not\subset A_t$ temos que $St_W \subset A_t$. Refazendo este processo sempre que necessário temos que λ' é um refinamento-estrela de $\mathcal{U}, \mathcal{V}_{x_1}, \ldots, \mathcal{V}_{x_s}$.

Para cada $x \in X$, seja $y = f(x)$ e considere $f^{-1}(B(y, \frac{1}{4k}))$. Como f é contínua, $f^{-1}(B(y, \frac{1}{4k}))$ é um aberto em X. Assim, a coleção $\{f^{-1}(B(y, \frac{1}{4k})) : y = f(x), x \in X\}$ é uma cobertura aberta de X, logo admite uma subcobertura finita $\lambda'' = \{f^{-1}(B(y_i, \frac{1}{4k})), i = 1, \ldots, t\}$. Seja $\lambda''' = \{U \cap V, U \in \lambda', V \in \lambda''\}$. Então, λ''' é um refinamento-estrela de $\mathcal{U}, \mathcal{V}_{x_1}, \ldots, \mathcal{V}_{x_s}$. Além disso, se $W', W'' \in \lambda'''$ com $W' \cap W'' \neq \emptyset$, para quaisquer $x' \in W'$ e $x'' \in W''$, temos $f(x') \in B(y_i, \frac{1}{4k})$ e $f(x'') \in B(y_j, \frac{1}{4k})$ com $B(y_i, \frac{1}{4k}) \cap B(y_j, \frac{1}{4k}) \neq \emptyset$; logo, $|f(x') - f(x'')| < \dfrac{1}{k}$.

Considere $\lambda = \{W_1, \ldots, W_p, T(W_1), \ldots, T(W_p)\}$ o refinamento de λ''' obtido da forma descrita no capítulo 2 (pag.25).

Observação 5.5. *Sejam $W', W'' \in \lambda$ e W'^*, W''^* suas respectivas estrelas, então $W'^* \times W''^* \subset E - F, F - E$ ou G. De fato, pela construção, $W'^* \subset U(x_i)$ para algum i, com isso, para este i, $W''^* \subset V(x_i, y_j)$ para algum j.*

Etapa 4. Considere $\{W_1, \ldots, W_p\} \subset X_\lambda^{(0)}$. Daremos uma realização geométrica de X_λ em $\mathbb{R}^p$ de tal forma que:

1. $h \circ T = \theta \circ h$, onde h é o isomorfismo no qual se dá a realização geométrica e θ é a "aplicação simetria em relação a origem θ".

2. $h(W_\alpha) = (x_{\alpha 1}, \ldots, x_{\alpha p})$, com $x_{\alpha\alpha+1} = \ldots = x_{\alpha p} = 0$; $\alpha = 1, \ldots, p$.

3. $h(W_1), \ldots, h(W_p)$ são linearmente independentes.

4. Para quaisquer α, $\beta = 1, \ldots, p$, com $\alpha \neq \beta$, $\langle h(W_\alpha), h(W_\beta) \rangle = e_{\alpha,\beta}$, onde $e_{\alpha,\beta} = 1, 0$ ou -1 de acordo com $W_\alpha \times W_\beta$ esteja contido em $E - F, G$ ou $F - E$, respectivamente.

Vamos definir $h : X_\lambda \to \mathbb{R}^p$ por recorrência e provar, por indução, que h satisfaz $(2), (3), (4)$.

Definimos $h(W_1) = (1, 0, \ldots, 0)$ e $h(W_2) = (e_{21}, 1, 0 \ldots, 0)$. Note que $h(W_1)$ satisfaz $(2), (3)$ e (4). Suponha (hipótese de indução) $h(W_\alpha)$ definida para $\alpha = 1, \ldots, r$, com $r < p$, satisfazendo $(2), (3), (4)$. Considere o sistema abaixo (nas incógnitas $u_1, \ldots, u_r$):

$$\begin{cases} x_{11}u_1 = e_{r+1,1} \\ x_{21}u_1 + x_{22}u_2 = e_{r+1,2} \\ \vdots \\ x_{r1}u_1 + \ldots + x_{rr}u_r = e_{r+1,r}. \end{cases}$$

Pela hipótese de indução (3), este sistema possui solução única, digamos $(\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_r})$. Definimos então $h(W_{r+1}) = (\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_r}, 1, 0, \ldots, 0)$. Portanto, $h(W_1), \ldots, h(W_{r+1})$ satisfazem $(2), (3), (4)$. Assim, por indução, definimos $h(W_1), \ldots, h(W_p)$ satisfazendo $(2), (3), (4)$. Para satisfazer (1) basta definirmos $h(T(W_\alpha)) = -h(W_\alpha)$.

Desse modo, identificamos $(X_\lambda; T)$ com o θ-espaço simplicial $(X_\lambda; \theta)$ em $\mathbb{R}^p$ (θ sendo a origem). Denotamos $W_{\alpha+1} = T(W_\alpha)$, para todo $\alpha = 1, \ldots, p$, e $a_\beta = h(W_\beta)$, para todo $\beta = 1, \ldots, 2p$; temos $X_\lambda^{(0)} = \{a_1, \ldots, a_{2p}\} \subset \mathbb{R}^p$ com $-a_i = a_{p+i}$.

Etapa 5. Para cada $\alpha = 1, \ldots, 2p$, tome $b_\alpha \in W_\alpha$. Defina uma função contínua $g : X_\lambda \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de tal forma que $g(a_\alpha) = f(b_\alpha)$, para todo $\alpha = 1, \ldots, 2p$, e g é linear em todo simplexo de X_λ.

Como $(X; T)$ é de índice n, então $(X_\lambda; T)$ é de índice $\geq n$. Logo, pelo teorema 4.3, existem $n+1$ pontos $y_1, \ldots, y_{n+1} \in X_\lambda$ tais que $g(y_1) = \ldots = g(y_{n+1})$ e as retas $\theta y_1, \ldots, \theta y_{n+1}$ são mutuamente ortogonais.

Para cada $i = 1, \ldots, n+1$, tome um vértice $a_{\alpha(i)}$ do simplexo σ_i de menor dimensão que contém y_i, e denote $c_i = b_{\alpha(i)}$. Então, para $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n+1$, temos:

1. $|f(c_i) - f(c_j)| < \dfrac{2}{k}$.
2. $(c_i, c_j) \in G$.
3. $|g(y_i) - f(c_i)| < \dfrac{1}{k}$.

De fato, para provar (1), assuma (3). Então,

$$|f(c_i) - f(c_j)| = |f(c_i) - g(y_i) + g(y_j) - f(c_j)| \leq$$

$$\leq |f(c_i) - g(y_i)| + |g(y_j) - f(c_j)| < \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k}.$$

Para provar (3), seja $y_i = \sum_{j=1}^{s} t_j a_j$ (reordenando os vértices de σ_i se preciso) com $\sum_{j=1}^{s} t_j = 1$. Então $g(y_i) = \sum_{j=1}^{s} t_j f(b_j)$. Como $a_{\alpha(i)}$ e a_j $(j = 1, \ldots, s)$ são vértices de um mesmo simplexo, temos que $W_{\alpha(i)} \cap W_j \neq \emptyset$ (para todo $j = 1, \ldots, s$) e $b_{\alpha(i)} = c_i \in W_{\alpha(i)}$, $b_j \in W_j$. Logo, pela forma com que construímos λ (vide etapa 3) temos $|f(b_j) - f(c_i)| < \dfrac{1}{k}$, para todo j. Portanto,

$$|g(y_i) - f(c_i)| = \left| \sum_{j=1}^{s} t_j f(b_j) - f(c_i) \right| =$$

$$= \left| \sum_{j=1}^{s} t_j f(b_j) - \sum_{j=1}^{s} t_j f(c_i) \right| =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} t_j |f(b_j) - f(c_i)| < \sum_{j=1}^{s} t_j \frac{1}{k} = \frac{1}{k}.$$

Para provar (2), considere um par (c_i, c_j). Sejam $a_{\alpha 1}, \ldots, a_{\alpha s}$ os vértices de σ_i e $a_{\beta 1}, \ldots, a_{\beta t}$ os vértices de σ_j. Suponha que, para cada $a_{\alpha i}$, $\langle a_{\alpha i}, a_{\beta j}\rangle$ é sempre positivo ou sempre negativo para todo $a_{\beta j}$, $j = 1, \ldots, t$. Se $\langle a_{\alpha i}, a_{\beta j}\rangle > 0$ para todos i, j, então $\langle y_i, y_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{r} t_i a_{\alpha i}, \sum_{j=1}^{t} l_j a_{\beta j}\rangle > 0$, mas $\langle y_i, y_j\rangle = 0$. Do mesmo modo vemos que não podemos ter $\langle a_{\alpha i}, a_{\beta j}\rangle < 0$ para todos i, j. Portanto, existem a_α, a_γ vértices de σ_i e a_β vértice de σ_j tais que $\langle a_\alpha, a_\beta\rangle \geq 0$ e $\langle a_\gamma, a_\beta\rangle \leq 0$.

Logo, $W_\alpha \times W_\beta \not\subset F - E$ e $W_\gamma \times W_\beta \not\subset E - F$. Daí, como $c_i \in W_\alpha^* \cap W_\gamma^*$ e $c_j \in W_\beta^*$, segue da observação 5.5 que $(c_i, c_j) \in W_\alpha^* \times W_\beta^* \subset G$.

Etapa 6. Finalmente, usaremos o que foi desenvolvido nas etapas anteriores para concluir a demonstração do teorema 5.2. Considere $(c_1, \ldots, c_{n+1})$ como um ponto de X^{n+1}, com cada c_i definido na etapa 2. Observe que cada c_i é dependente da escolha de G e k, por isso denotaremos esse ponto por $x(G,k) = (c_1(G,k), \ldots, c_{n+1}(G,k))$.

Seja $\mathcal{H} = \{(G,k) : G \in \mathcal{G} \text{ e } k \in \mathbb{N}^*\}$ e considere a seguinte relação $\succ$ em $\mathcal{H}$: $(G', k') \succ (G, k)$ se, e somente se, $G' \subseteq G$ e $k' \geq k$.

Notemos que $\mathcal{H}$ com $\succ$ é um conjunto direcionado. De fato: $(G,k) \succ (G,k)$ para todo $(G,k) \in \mathcal{H}$; se $(G,k), (G',k'), (G'',k'') \in \mathcal{H}$ com $(G,k) \succ (G',k')$ e $(G',k') \succ (G'',k'')$ então $G \subseteq G'$ e $G' \subseteq G''$, logo, $G \subseteq G''$, e ainda, $k' \geq k$ e $k'' \geq k'$, daí $k'' \geq k$"; se $(G,k), (G',k') \in \mathcal{H}$, tome $G'' = G' \cap G$ e $k'' = \max\{k, k'\}$, logo $(G'', k'') \succ (G,k)$ e $(G'',k'') \succ (G',k')$.

Considere a rede $\{x(G,k)\}_{(G,k)\in\mathcal{H}}$ (veja seção 1.6). Como X^{n+1} é compacto, a rede $\{x(G,k)\}_{(G,k)\in\mathcal{H}}$ possui uma sub-rede convergente $\{x(G,k)\}_{(G,k)\in\mathcal{H}'}$ em X^{n+1}; isto é, existe um ponto $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in X^{n+1}$ satisfazendo: para toda vizinhança U de x, existe um elemento $(G,k) \in \mathcal{H}'$ tal que, $x(G',k') \in U$, para todo $(G',k') \in \mathcal{H}'$ com $(G',k') \succ (G,k)$.

Vamos verificar que $(x_i, x_j) \in E \cap F$ para $i \neq j$. Suponha que $(x_i, x_j) \notin E \cap F$. Então existe um $G_1 \in \mathcal{G}$ e uma vizinhança U de $(x_i, x_j) \in U$, com $G_1 \cap U = \emptyset$, pois $E \cap F = \bigcap_{G \in \mathcal{G}} \overline{G}$ pela etapa 2. Como $\{(c_i(G,k), c_j(G,k))\}_{(G,k)\in\mathcal{H}'}$ converge para (x_i, x_j), existe $(G', k') \in \mathcal{H}'$ tal que: se $(G,k) \in \mathcal{H}'$ e $(G,k) \succ (G',k')$, então $(c_i(G,k), c_j(G,k)) \in U$. Considere $G_2 \in \mathcal{G}$ e $k \in \mathbb{N}^*$ tais que $G_2 \subset G_1$, $(G_2, k_2) \succ (G', k')$ e $(G_2, k_2) \in \mathcal{H}'$. Logo, temos

$$(c_i(G_2, k_2), c_j(G_2, k_2)) \in U.$$

Mas para quaisquer $(G,k) \in \mathcal{H}$, temos $(c_i(G_2,k_2), c_j(G_2,k_2)) \in G_2 \subset G_1$ (veja (2) da etapa 4), o que contraria o fato de que $G_1 \cap U = \emptyset$.

Agora vamos mostrar que $f(x_i) = f(x_j)$. Para cada (G,k), temos:

$$|f(x_i) - f(x_j)| =$$

$$= |f(x_i) - f(c_i(G,k)) + f(c_i(G,k) - f(c_j(G,k)) + f(c_j(G,k) - f(x_j)| \leq$$

$$\leq |f(x_i) - f(c_i(G,k))| + |f(c_i(G,k)) - f(c_j(G,k))| + |f(c_j(G,k)) - f(x_j)|.$$

Como a rede $\{f(c_i(G,k))\}_{(G,k)\in\mathcal{H}'}$ converge para $f(x_i)$, dado um $\epsilon > 0$ arbitrário, existe $(G',k') \in \mathcal{H}'$ tal que para todo $(G,k) \succ (G',k')$, $|f(c_i(G,k)) - f(x_i)| < \epsilon$. Pelo mesmo argumento, existe $(G'', k'') \in \mathcal{H}$ tal que para todo $(G,k) \succ (G'',k'')$ temos $|f(c_j(G,k)) - f(x_j)| < \epsilon$. Considere $(G_1, k_1) \succ (G',k'), (G'',k'')$, daí,

$$|f(x_i) - f(x_j)| \leq$$

$$\leq |f(x_i) - f(c_i(G_1,k_1))| + |f(c_i(G_1,k_1)) - f(c_j(G_1,k_1))| +$$
$$+ |f(c_j(G_1,k_1)) - f(x_j)| < 2\epsilon + \frac{2}{k}.$$

Pela arbitrariedade de ϵ e k, concluímos que $|f(x_i) - f(x_j)| = 0$. Desse modo, mostramos que $f(x_i) = f(x_j)$ para quaisquer $i, j = 1, \ldots n+1$, $i \neq j$, encerrando a demonstração do Teorema 5.2.

5.3 Generalização do Teorema de Dyson

Combinando os teoremas 5.2 e 3.1 provaremos o

Teorema 5.6. *Sob as hipóteses do teorema 5.2, se $f : X \to \mathbb{R}^k$ $(k \leq n)$ e $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, então existem $r = n - k + 1$ pontos $x_1, \ldots, x_r \in X$ tais que:*

- $f(x_i) = f(T(x_i))$, $i = 1, \ldots, r$
- $g \circ f(x_1) = \ldots = g \circ f(x_r)$
- $(x_i, x_j) \in E \cap F$ *para* $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, r$.

Dem.: Seja $A = \{x : x \in X, f(x) = f(T(x))\}$; então por 3.1, temos que A é T-invariante, compacto e $(A; T)$ é de índice $\geq n - k$. Observe que, se $(x, y) \in A^2$, então $(y, x), (T(x), y), (x, T(y)) \in A^2$.

Seja $E' = E \cap A^2$ e $F' = F \cap A^2$. Considere $h = g \circ f : A \to \mathbb{R}$, logo h é uma função contínua e $E', F' \subset A^2$ são fechados tais que satisfazem as hipóteses do teorema 5.2, logo existem $x_1, \ldots, x_r \in A \subset X$ tais que $f(x_i) = f(T(x_i))$, $h(x_1) = \cdots = h(x_r)$ e $(x_i, x_j) \in E' \cap F'$, logo $(x_i, x_j) \in E \cap F$. $\square$

Se $k = 1$ e g é a função identidade, então o teorema 5.6 se reduz ao

Teorema 5.7. *Seja $(X; T)$ um T-espaço de índice n e sejam E,F subespaços fechados de X^2 tais que:*

- $E \cup F = X^2$
- $(x, y) \in E \Leftrightarrow (y, x) \in E \Leftrightarrow (T(x), y) \in F \Leftrightarrow (x, T(y)) \in F$.
- $D = \{(x, x) : x \in X\} \subset E - F$.

Então, para qualquer função contínua $f : X \to \mathbb{R}$, existem n pontos $x_1, \ldots, x_n \in X$ tais que $f(x_1) = f(T(x_1)) = \ldots = f(x_n) = f(T(x_n))$ e $(x_i, x_j) \in E \cap F$ para $i \neq j$ $i, j = 1, \ldots, n$.

Corolário 5.8. *Para toda função $f : S^n \to \mathbb{R}$ contínua, existem n pontos $x_1, \ldots, x_n \in S^n$ tais que $\langle x_i, x_j \rangle = 0$, $i, j = 1, \ldots, n$ $(i \neq j)$ e $f(x_1) = f(-x_1) = \ldots = f(x_n) = f(-x_n)$.*

Em particular, para $n = 2$, o corolário acima é o Teorema de Dyson como enunciado na Introdução.

Referências Bibliográficas

[1] Eilenberg, S., Steenrod, N. *Foundations of Algebraic Topology* Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1952)

[2] Yang, C. T. *On theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yujobô and Dyson I*, Annals of Math. 60, no. 2 (1954), 262-282.

[3] Yang, C. T. *On theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yujobô and Dyson II*, Annals of Math. 62, no. 2 (1955), 271-283.

[4] Kelley, J.L. *General Topology*, Springer, New York (1955)

[5] Vick, J. W. *Homology Theory: an introduction to algebraic topology*, Academic Press, Inc., New York (1973).

[6] Munkres, J. R. *Topology: a first course*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1975).

[7] Munkres, J. R. *Elements of Algebraic Topology*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., California (1984).

[8] Pergher, P. L. Q., Mattos, D., Santos, E. L. *The Borsuk-Ulam theorem for general spaces*, Arch. Math. (Basel) 81, no. 1 (2003), 96-102.

[9] Matousek, J. *Using the Borsuk-Ulam Theorem*, Springer (2003)

[10] Pergher, P. L. Q. *A $\mathbb{Z}_p$-index Homomorphism for $\mathbb{Z}_p$ spaces* Houston Journal of Mathematics Volume 31, Number 2, Pages 305-314 - (2005)

[11] Crabb M.C., Jaworowski J. *Theorems of Kakutani and Dyson revisited* J. fixed point theory appl. no. 5 (2009), 227-236