

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Karen Regina Panzarin

**Recobrimentos Ramificados entre Superfícies e
Dessins d'Enfants**

São Carlos - SP
2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Recobrimentos Ramificados entre Superfícies e
Dessins d'Enfants**

Karen Regina Panzarin
Orientador: Prof. Dr. Daniel Ventrúscolo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

São Carlos - SP
2012

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

P199rr

Panzarin, Karen Regina.

Recobrimentos ramificados entre superfícies e dessins
d'enfants / Karen Regina Panzarin. -- São Carlos : UFSCar,
2012.

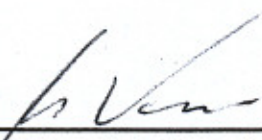
54 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São
Carlos, 2012.

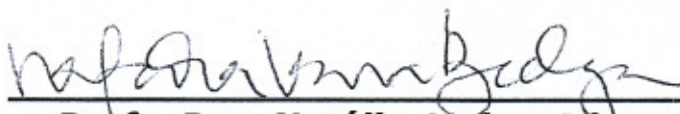
1. Topologia. 2. Recobrimento ramificado. 3. Superfícies
(Matemática). I. Título.

CDD: 514 (20^a)

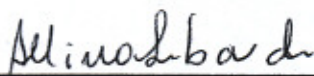
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Daniel Vendruscolo
DM - UFSCar



Profa. Dra. Natália Andrea Viana Bedoya
DM - UFSCar



Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi
IGCE - UNESP

Agradecimentos

Em primeiro lugar à Deus, pois sem Ele, nada disso teria sido possível.

À minha família que sempre me ajudou e me apoiou em meus momentos de desespero, por acreditarem em mim e nunca me deixarem desistir de meus sonhos; em especial, minha mãe e avó por todas as orações, e ao Leandro por se dispor a me ajudar com as figuras, por todo carinho, paciência e dedicação.

Ao professor Daniel Vendruscolo por ter aceitado me orientar.

À professora Alice Kimie Miwa Libardi por ter me preparado e por me ajudar sempre que necessitei.

Aos meus poucos, mas sinceros, amigos que estiveram comigo nesta batalha.

Por fim, à todos que já passaram por minha vida e que de alguma maneira contribuíram para que eu chegasse onde estou e concluísse mais uma etapa.

Resumo

Considere duas superfícies fechadas, conexas, X e Y , inteiros $n \geq 0$ e $d \geq 2$, e para $i = 1, \dots, n$ uma partição $(d_{ij})_{j=1, \dots, m_i}$ de d . A 5-upla $(X, Y, n, d, (d_{ij}))$ é o dado de ramificação de um candidato a recobrimento ramificado.

Em muitos trabalhos discute-se quando um dado de ramificação pode ser realizado por um recobrimento ramificado $f : X \rightarrow Y$ de grau d , com n pontos de ramificação e graus locais na pré-imagem dos pontos de ramificação dados por d_{ij} .

Hurwitz estabeleceu uma equivalência algébrica para este problema geométrico, esta equivalência tem sido utilizada para tratar do tema. Neste trabalho apresentamos a definição de dessin d'enfant, um grafo na superfície X , relacionado com um recobrimento ramificado e utilizamos esta ferramenta para obter condições que estabelecem quando um dado de ramificação é excepcional (não pode ser realizado). Abordamos também uma versão alternativa para a definição de dessin d'enfant, mais completa.

Abstract

Given closed connected surfaces X and Y , integers $n \geq 0$ and $d \geq 2$, and for $i = 1, \dots, n$ partitions $(d_{ij})_{j=1, \dots, m_i}$ of d . The 5-tuple $(X, Y, n, d, (d_{ij}))$ is called the branch datum of a candidate branched covering.

Many works discuss when a given branch datum can be realized by a branched covering $f : X \rightarrow Y$ of degree d , with n branching points and local degree in the pre-images of branching points given by d_{ij} .

Hurwitz has established an algebraic equivalence to this geometric problem, this equivalence has been used to treat the subject. In this dissertation we define dessin d'enfant, a graph on the surface X , related to a branched covering and use this tool to obtain conditions for a given branch datum be exceptional (i.e. can not be realized). We also define an alternative and more explicit version for the definition of dessin d'enfant.

Sumário

Agradecimentos	iii
Resumo	iv
Abstract	v
Introdução	vii
1 Pré-requisitos	1
1.1 Recobrimentos Ramificados	1
1.2 Problema de Existência de Hurwitz	4
1.3 <i>Dessins d'Enfants</i>	5
2 De Dessins d'Enfants para Permutações e Vice-Versa	8
3 Exceções via Dessin d'Enfant	18
Referências Bibliográficas	53

Introdução

Considere duas superfícies fechadas, conexas, X e Y , inteiros $n \geq 0$ e $d \geq 2$, e para $i = 1, \dots, n$ uma partição $(d_{ij})_{j=1, \dots, m_i}$ de d . A 5-upla $(X, Y, n, d, (d_{ij}))$ é o dado de ramificação de um candidato a recobrimento ramificado. Para a existência de tal recobrimento, existem algumas condições necessárias em termos de $\chi(X), \chi(Y)$, orientabilidade, grau total e grau local dos pontos de ramificação.

O Problema de Existência de Hurwitz é um problema clássico que questiona quando essas condições também são suficientes. Existem várias maneiras equivalentes de se formular esse problema bem como várias técnicas desenvolvidas, com o passar do tempo, para tentar solucioná-lo. O único caso que ainda permanece em aberto é quando Y é a esfera e é neste caso também que aparecem as exceções.

Hurwitz reformulou o problema em termos de permutações e esta é a ferramenta clássica para a abordagem do mesmo. Uma outra técnica recentemente abordada por [7], é a noção de dessin d'enfant. Ela foi introduzida dentro do estudo de aplicações algébricas entre superfícies Riemannianas e remonta à Grothendieck. Essa é uma técnica que não havia sido empregada diretamente antes pra resolver o problema em si.

Neste trabalho apresentamos a definição de dessin d'enfant e nos utilizamos desta ferramenta para obter condições que estabelecem quando um dado de ramificação é excepcional (não pode ser realizado). Abordamos também uma versão alternativa para a definição de dessin d'enfant, mais completa.

O desenvolvimento dos capítulos deste trabalho é feita do seguinte modo:

No primeiro capítulo apresentamos as definições básicas, notações e exemplos

das ferramentas que utilizaremos.

O capítulo 2 é composto de resultados previamente conhecidos e que são encontrados em [2] e [5]. Em [4] o autor também trabalha com resultados semelhantes. Em particular, é neste capítulo que aparece o Teorema de Hurwitz.

Por fim, no capítulo 3 apresentamos resultados baseados em [7] e [3] que fornecem condições para dizer quando um dado compatível é realizável por algum recobrimento ramificado. Outros trabalhos que tratam de realizabilidade de recobrimentos ramificados são [1], [8] e [9].

Capítulo 1

Pré-requisitos

Neste capítulo apresentamos as definições básicas, notações e exemplos das ferramentas que utilizaremos durante todo o trabalho.

1.1 Recobrimentos Ramificados

Definição 1.1.1. *Um recobrimento é uma aplicação $f : X \rightarrow Y$, onde X e Y são espaços topológicos, f é sobrejetora e, para cada $p \in Y$, existe uma vizinhança aberta de p , $U_p \subset Y$, tal que $f^{-1}(U_p)$ pode ser escrita como união disjunta de conjuntos abertos $V_\alpha \subset X$ e a restrição de f à V_α é um homeomorfismo de V_α em U_p .*

X é chamado de espaço de recobrimento e Y de espaço base.

Exemplo 1.1.2.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$$

$$t \mapsto e^{2\pi it}$$

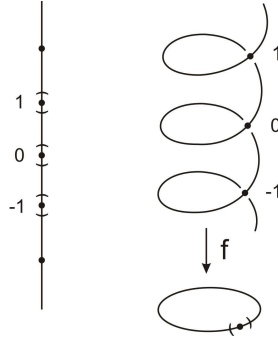


Figura 1.1: Recobrimento tendo como espaço de recobrimento a reta real, \mathbb{R} , e como espaço base a esfera, S^1 ; observe que cada $p \in S^1$ possui infinitas pré-imagens.

Neste trabalho, sempre que nos referirmos a um recobrimento $f : X \rightarrow Y$, faremos uso da Definição 1.1.1 colocando X e Y como sendo superfícies fechadas (isto é, compactas e sem bordo) e conexas.

Exemplo 1.1.3. $f : T \rightarrow K$

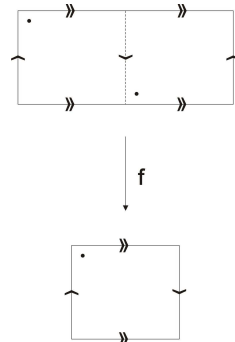


Figura 1.2: Recobrimento tendo como espaço de recobrimento o toro, T , e como espaço base a garrafa de Klein, K ; observe que cada $p \in K$ possui duas pré-imagens.

Definição 1.1.4. Um recobrimento ramificado é uma aplicação $f : X \rightarrow Y$, onde X e Y são superfícies fechadas conexas, tal que, para cada $x \in X$, existe um aberto

U_x com $x \in U_x$ de modo que a restrição de f a U_x se comporta localmente como a aplicação $\mathbb{C} \ni z \mapsto z^k \in \mathbb{C}$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$.

Exemplo 1.1.5. Seja $f : S^2 \rightarrow S^2$ e considere a esfera S^2 centrada na origem $0 \in \mathbb{R}^3$. Geometricamente, podemos descrever f como a aplicação que associa cada curva que dá uma volta num círculo da S^2 de altura no ponto $(0, 0, t)$, $t \in (-1, 1)$, a uma curva que dá três voltas no mesmo círculo da S^2 .

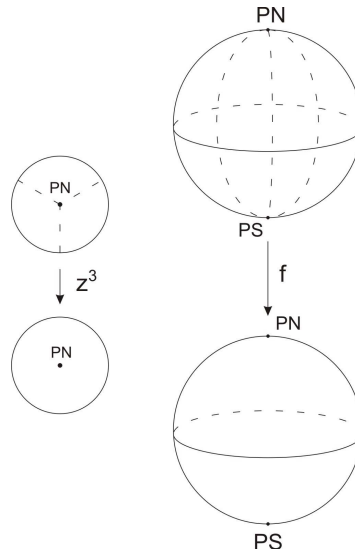


Figura 1.3: Recobrimento ramificado tendo como espaço de recobrimento e espaço base a esfera, S^2 .

Observemos que a aplicação $f : S^2 \rightarrow S^2$ do exemplo 1.1.5 é um recobrimento ramificado pois os pólos, PN e PS , não possuem três pré-imagens como todos os outros pontos da esfera. Se considerarmos $f : S^2 \setminus \{PN, PS\} \rightarrow S^2 \setminus \{PN, PS\}$ teremos um recobrimento não-ramificado.

Definição 1.1.6. Considere $k \in \mathbb{Z}$ como na Definição 1.1.4. Se $x \in X$ é tal que $k > 1$, dizemos que $f(x)$ é um ponto de ramificação e o inteiro k é o grau local do recobrimento.

Notemos que cada $x \in f^{-1}(x_j)$, onde x_j é ponto de ramificação, é isolado. Deste modo, cada ponto de ramificação também é isolado e temos um número finito,

que denotaremos por n , de tais pontos.

Definição 1.1.7. *Consideremos o conjunto $R = \{x_i \in Y; x_i \text{ é ponto de ramificação}\}$. $f' = f|_{X \setminus f^{-1}(R)}: X \setminus f^{-1}(R) \rightarrow Y \setminus R$ é um recobrimento e o número de pré-imagens é constante e finito, denotado por d e chamado grau do recobrimento.*

Com essa definição, vemos que o Exemplo 1.1.3 é um recobrimento de grau 2 e o Exemplo 1.1.5 é um recobrimento de grau 3.

Definição 1.1.8. *Se o i -ésimo ponto de ramificação em Y possui m_i pré-imagens, os graus locais $(d_{ij})_{j=1, \dots, m_i}$ desse ponto nos dão uma partição de d , com $d_{ij} \geq 1$ e $\sum_{j=1}^{m_i} d_{ij} = d$.*

Definição 1.1.9. *Suponhamos dados as superfícies fechadas conexas X e Y , inteiros $n \geq 0$ e $d \geq 2$ e, para $i = 1, \dots, n$, uma partição $(d_{ij})_{j=1, \dots, m_i}$ de d . A 5-upla $(X, Y, n, d, (d_{ij}))$ será chamada dado de ramificação ou dado de recobrimento de um candidato a recobrimento ramificado.*

Para tal dado, sempre associaremos o inteiro $\tilde{n} = m_1 + \dots + m_n$.

Exemplo 1.1.10. $(T, \mathbb{RP}^2, 5, 8, (4, 4); (3, 1, 4); (5, 3); (2, 2, 2, 2); (2, 3, 3))$ é um dado de ramificação de um candidato à recobrimento ramificado do toro, T , no plano projetivo, \mathbb{RP}^2 , que possui $n = 5$ pontos de ramificação, grau $d = 8$ e $\tilde{n} = 2 + 3 + 2 + 4 + 3$.

1.2 Problema de Existência de Hurwitz

A seguir apresentamos uma definição que nos diz quando um dado de ramificação é compatível. A maioria dos itens desta definição decorrem do fato de que se tirarmos os pontos de ramificação e suas respectivas pré-imagens de um recobrimento ramificado, o resultado ainda será um recobrimento, porém não-ramificado.

Definição 1.2.1. *Um dado de ramificação é compatível se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (1) $\chi(X) - \tilde{n} = d \cdot (\chi(Y) - n)$;
- (2) $n \cdot d - \tilde{n}$ é par;
- (3) Se Y é orientável, então X é também orientável;
- (4) Se Y é não-orientável e d é ímpar, então X é também não-orientável;
- (5) Se Y é não-orientável mas X é orientável, então cada partição $(d_{ij})_{j=1, \dots, m_i}$ de d refina a partição $(d/2, d/2)$. (Note que d é par pela condição (4).)

Definição 1.2.2. Um dado $(X, Y, n, d, (d_{ij}))$ é realizável se existir um recobrimento ramificado tendo-o como dado de ramificação.

Definição 1.2.3. Um dado de ramificação é excepcional se ele for compatível, mas não for realizável por nenhum recobrimento ramificado.

Surge assim, uma questão: quando um dado de ramificação compatível é realizável por algum recobrimento ramificado?

Essa pergunta é conhecida como o *Problema de Existência de Hurwitz*. Existem várias maneiras equivalentes de se formular esse problema bem como várias técnicas desenvolvidas, com o passar do tempo, para tentar solucioná-lo. A ferramenta clássica foi o próprio Hurwitz quem introduziu, reformulando algebricamente um problema geométrico em termos de permutações.

No capítulo 3 apresentaremos alguns resultados que respondem geometricamente à essa questão para certos casos específicos.

1.3 Dessins d'Enfants

Definição 1.3.1. Um dessin d'enfant em uma superfície fechada conexa X é um grafo $D \subset X$ onde:

- (1) Para algum $n \geq 3$, o conjunto de vértices de D se decompõe como $V_1 \sqcup \dots \sqcup V_{n-1}$ e o conjunto de arestas de D se decompõe como $E_1 \sqcup \dots \sqcup E_{n-2}$;

- (2) Para $i = 1, \dots, n - 2$ cada aresta em E_i une um vértice de V_i a um de V_{i+1} ;
- (3) Para $i = 2, \dots, n - 2$, cada vértice de V_i possui grau par e ao redor dele se encontram, alternadamente, arestas de E_{i-1} e arestas de E_i ;
- (4) $X \setminus D$ consiste de discos abertos.

Definição 1.3.2. O comprimento dos discos em $X \setminus D$ é o número de arestas que delimitam a fronteira dos discos (com multiplicidade).

Exemplo 1.3.3. .

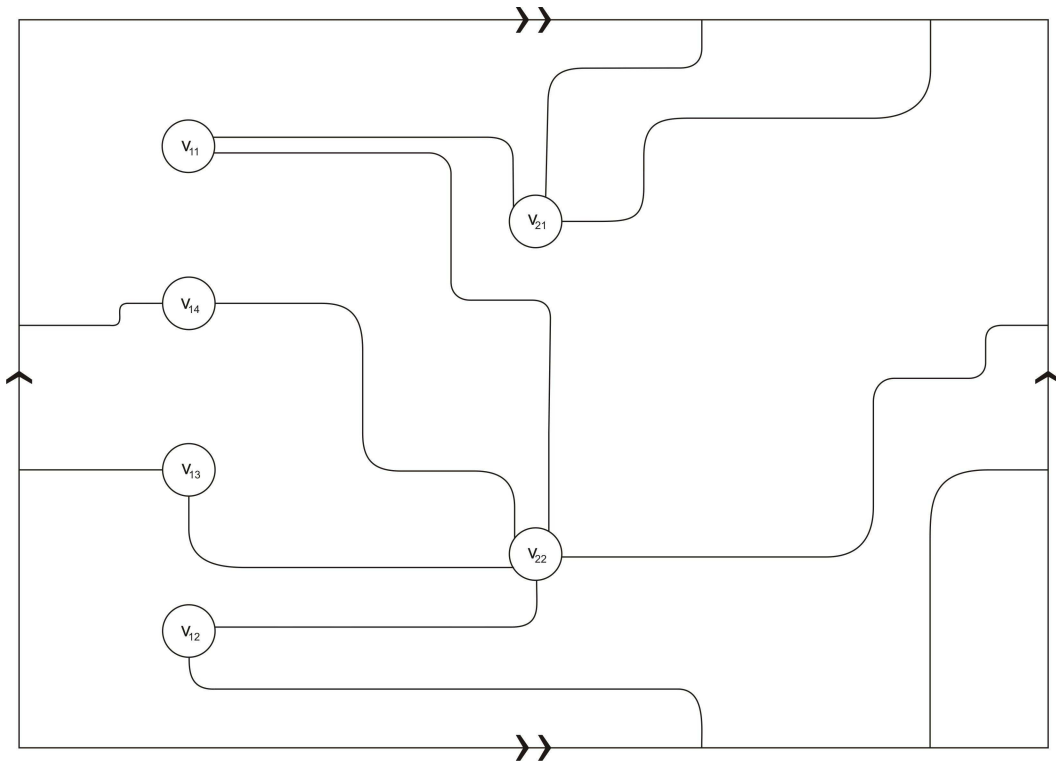


Figura 1.4: Dessin d'enfant no toro. (Este dessin d'enfant será, mais adiante, associado ao dado de ramificação $(T, S^2, 3, 8, (2, 2, 2, 2), (3, 5), (5, 3))$).

Definição 1.3.4. Um dessin d'enfant completo em uma superfície fechada conexa X é um grafo $D \subset X$, onde:

- (1) Para algum $n \geq 3$, o conjunto de vértices de D se decompõe como $V_1 \sqcup \dots \sqcup V_n$ e o conjunto de arestas de D se decompõe como $E_1 \sqcup \dots \sqcup E_{n-1}$;
- (2) Para $i = 1, \dots, n - 1$ cada aresta em E_i une um vértice de V_i a um de V_{i+1} ;
- (3) Para $i = 2, \dots, n - 1$, cada vértice de V_i possui grau par e ao redor dele se encontram, alternadamente, arestas de E_{i-1} e arestas de E_i ;
- (4) $X \setminus D$ consiste de discos abertos.

Exemplo 1.3.5. .

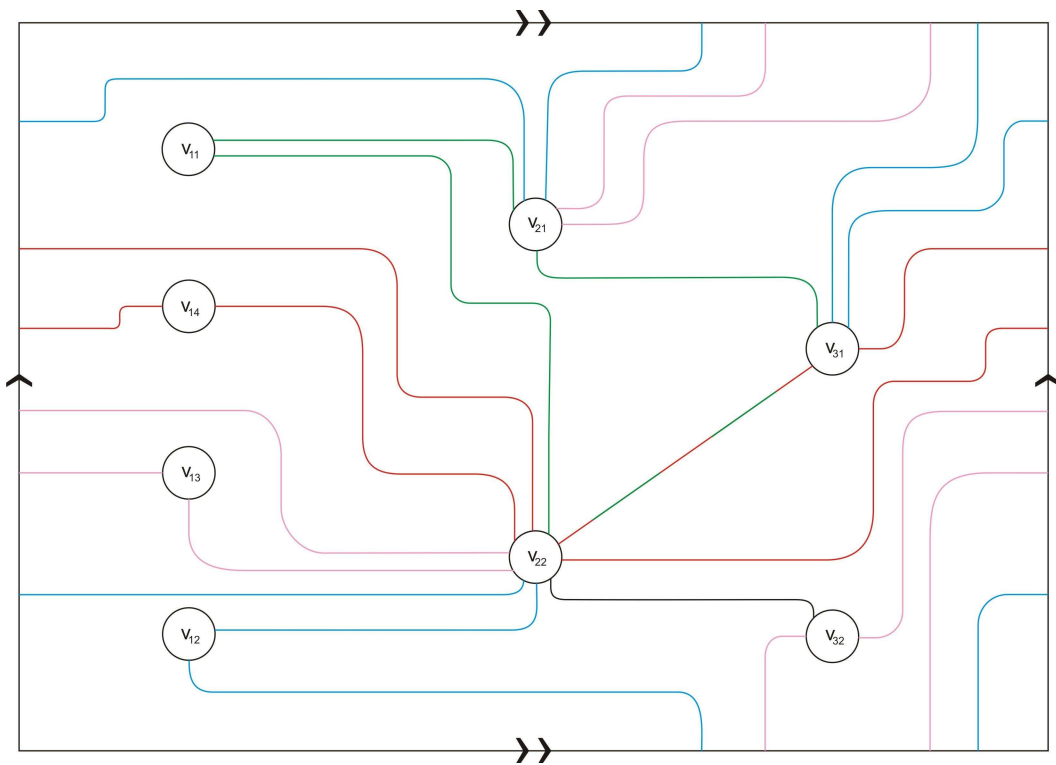


Figura 1.5: Desenho d'enfant completo no toro. (Este desenho d'enfant completo também será, mais adiante, associado ao dado de ramificação $(T, S^2, 3, 8, (2, 2, 2, 2), (3, 5), (5, 3))$).

Capítulo 2

De Dessins d'Enfants para Permutações e Vice-Versa

Neste capítulo introduzimos alguns resultados básicos que são demonstrados em [2] e [5]. Como concentramos nosso trabalho em dessins d'enfants, optamos por não demonstrá-los.

Seja $(X, Y, n, d, (d_{ij}))$ um dado de ramificação de um recobrimento ramificado f , onde $Y = \tilde{Y} \cup B$ é uma superfície conexa e localmente conexa por caminhos (logo conexa por caminhos), \tilde{Y} é uma superfície sem bordo e as componentes conexas de B , o bordo de Y , são homeomorfas a S^1 ou a \mathbb{R} ; X é uma superfície não necessariamente conexa; $R = \{x_i \in Y; x_i \text{ é ponto de ramificação}\}$, $\hat{Y} = Y \setminus R$, $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_i$. Considere V_{x_i} uma vizinhança de x_i tal que f restrita às componentes conexas de $f^{-1}(V_{x_i})$ é do tipo $z \mapsto z^{d_{ij}}$; $\hat{V}_{x_i} = V_{x_i} \setminus R$.

Seja $\hat{z} \in \hat{Y}$. Como \hat{Y} é conexo por caminhos, existe um caminho v_i que une \hat{z} a \hat{x}_i , onde $\hat{x}_i \in \hat{V}_{x_i}$. Seja α_{x_i} um laço em \hat{V}_{x_i} com ponto base \hat{x}_i e considere $\{v_i^*\}$ a classe de homotopia do caminho $v_i^* = v_i \cdot \alpha_{x_i} \cdot v_i^{-1}$. Considere também $\{w_q^*\}$ a classe de homotopia do caminho $w_q^* = w_q \cdot \{C^q\} \cdot w_q^{-1}$, onde w_q é um caminho em \hat{Y} e é tal que $w_q(0) = \hat{z}$, $w_q(1) = \hat{x}_q$ ($\hat{x}_q \in C^q \in B$, C^q componente conexa de B homeomorfa à S^1), e para todo $t \in (0, 1)$ temos $w_q(t) \in \tilde{Y}$.

Com as notações acima, temos:

Teorema 2.0.6 (Hurwitz). ¹ *Um dado de ramificação $(X, Y, n, d, (d_{ij}))$ é realizável se, e somente se, é possível definir o homomorfismo*

$$\begin{aligned} \Psi : \pi_1(\hat{Y}, \hat{z}) &\rightarrow S_d \\ \{v_i^*\} &\mapsto \sigma_{x_i} \\ \{w_q^*\} &\mapsto \lambda_q \end{aligned}$$

onde o conjunto dos comprimentos dos ciclos dados pela decomposição única das permutações σ_{x_i} e λ_q decrevem a ramificação sobre x_i e C^q , respectivamente.

Mais ainda, X é conexo se, e somente se, a ação que corresponde a Ψ é transitiva.

Observação 2.0.7. *Dado um dessin d'enfant D , com notação como na definição 1.3.1, correspondendo à realização de um dado de ramificação $(X, S^2, n, d, (d_{ij}))$, podemos construir permutações correspondendo à mesma realização, como segue:*

- *Enumere as arestas de E_i como $e_i^{(1)}, \dots, e_i^{(d)}$, começando de um modo arbitrário para E_1 e de modo que para $i \geq 2$, ao redor de cada vértice de V_i , cada aresta $e_i^{(k)}$ é seguida pela aresta $e_{i-1}^{(k)}$ com o mesmo número k ;*
- *Para $i \leq n - 2$ e $k \in \{1, \dots, d\}$ selecione o vértice de V_i no qual $e_i^{(k)}$ está ligado e defina $\tau_i(k)$ como sendo h tal que o próximo $e_i^{(*)}$ ao redor do vértice é $e_i^{(h)}$;*
- *Para $k \in \{1, \dots, d\}$ selecione o vértice de V_{n-1} no qual $e_{n-2}^{(k)}$ está ligado e defina $\tau_{n-1}(k)$ como sendo h tal que o próximo $e_{n-2}^{(*)}$ ao redor do vértice é $e_{n-2}^{(h)}$.*

Lembremos que X está orientada e observemos que os seguintes fatos sobre a aresta $e_i^{(h)}$ são necessários para definir $\tau_i(k)$: para $i = 1$, esta aresta vem logo depois de $e_i^{(k)}$, enquanto que para $i = 2, \dots, n - 2$, existe a aresta $e_{i-1}^{(k)}$ situada entre elas. Observemos também que a aresta $e_{n-2}^{(h)}$ quando usada na definição de $\tau_{n-1}(k)$ novamente vem logo depois da $e_{n-2}^{(k)}$.

¹Ver [2] e [5]

Para descrever a correspondência oposta, dados $\tau_1, \dots, \tau_{n-1} \in S_d$, construímos um grafo $D(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$ com vértices $V_1 \sqcup \dots \sqcup V_{n-1}$, onde V_i é o conjunto dos ciclos de τ_i , e para $i = 1, \dots, n-2$ e $k = 1, \dots, d$ uma aresta $e_i^{(k)}$ une os ciclos de τ_i e τ_{i+1} o qual contém k . Observe que $D(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$ é conexo se, e somente se, $\langle \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \rangle$ é transitivo. Deste modo, usaremos as permutações para construir laços que garantem a conexidade do grafo. Estes laços são construídos da seguinte maneira:

Começamos com algum vértice de V_1 e seguimos o caminho $e_1^{(k)}, \dots, e_{n-2}^{(k)}$. Tendo assim chegado a um vértice de V_{n-1} , nós seguimos o caminho:

$$e_{n-2}^{(\tau_{n-1}^{-1}(k))}, e_{n-3}^{(\tau_{n-2}^{-1}\tau_{n-1}^{-1}(k))}, \dots, e_2^{(\tau_3^{-1}\dots\tau_{n-1}^{-1}(k))}, e_1^{(\tau_2^{-1}\tau_3^{-1}\dots\tau_{n-1}^{-1}(k))}$$

o qual nos leva a um vértice de V_1 . De lá, nós procedemos do mesmo modo começando de $e_1^{(\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}\tau_3^{-1}\dots\tau_{n-1}^{-1}(k))}$ até encontrarmos a aresta $e_1^{(k)}$ novamente.

Deste modo, temos que, dados $\tau_1, \dots, \tau_{n-1} \in S_d$ correspondendo à uma realização de um dado de ramificação $(X, S^2, n, d, (d_{ij}))$, o espaço obtido de $D(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$ anexando discos aos ciclos distintos descritos anteriormente é X , e $D(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \subset X$ é um dessin d'enfant correspondente à mesma realização do dado de ramificação.

Observemos que colocando n no lugar de $n-1$ no procedimento acima, construímos o grafo $D(\tau_1, \dots, \tau_n) \subset X$ o qual é o dessin d'enfant completo correspondente à mesma realização do dado de ramificação.

Exemplo 2.0.8. Construção do recobrimento ramificado, do dessin d'enfant e do dessin d'enfant completo dadas as permutações:

$$\tau_1 = (12)(34)(56)(78)$$

$$\tau_2 = (135)(27468)$$

$$\tau_3 = (16327)(485).$$

Para começar, temos que:

$$V_1 = \{(12), (34), (56), (78)\} = \{v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}\}$$

$$V_2 = \{(135), (27468)\} = \{v_{21}, v_{22}\}$$

$$V_3 = \{(16327)(485)\} = \{v_{31}, v_{32}\}$$

Apenas olhando para esses conjuntos, podemos dizer que $d = 8$, $n = 3$, $(d_{1j})_{j=1,\dots,4} = (2, 2, 2, 2)$, $(d_{2j})_{j=1,2} = (3, 5)$ e $(d_{3j})_{j=1,2} = (5, 3)$.

Vamos agora construir as arestas $e_i^{(k)}$. Devemos observar que na construção do dessin d'enfant completo aparece um conjunto de arestas a mais se compararmos com a construção do dessin d'enfant clássico.

Faremos primeiramente o grafo $D(\tau_1, \tau_2)$ e em seguida o grafo $D(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$.

O conjunto de arestas do primeiro grafo é $E_1 = \{e_1^{(1)}, e_1^{(2)}, e_1^{(3)}, e_1^{(4)}, e_1^{(5)}, e_1^{(6)}, e_1^{(7)}, e_1^{(8)}\}$, onde:

- $e_1^{(1)}$ une os ciclos $(12) \in \tau_1$ e $(135) \in \tau_2$;
- $e_1^{(2)}$ une os ciclos $(12) \in \tau_1$ e $(27468) \in \tau_2$;
- $e_1^{(3)}$ une os ciclos $(34) \in \tau_1$ e $(135) \in \tau_2$;
- $e_1^{(4)}$ une os ciclos $(34) \in \tau_1$ e $(27468) \in \tau_2$;
- $e_1^{(5)}$ une os ciclos $(56) \in \tau_1$ e $(135) \in \tau_2$;
- $e_1^{(6)}$ une os ciclos $(56) \in \tau_1$ e $(27468) \in \tau_2$;
- $e_1^{(7)}$ une os ciclos $(78) \in \tau_1$ e $(27468) \in \tau_2$;
- $e_1^{(8)}$ une os ciclos $(78) \in \tau_1$ e $(27468) \in \tau_2$.

Os laços do grafo $D(\tau_1, \tau_2)$ é construído como segue:

Começamos com o vértice $v_{11} \in V_1$ e seguimos o caminho $e_1^{(1)}$ o qual nos leva ao vértice $v_{21} \in V_2$. Desse vértice, nós seguimos o caminho $e_1^{(\tau_2^{-1}(1))} = e_1^{(5)}$ o qual nos leva ao vértice $v_{13} \in V_1$. Devemos agora seguir o caminho $e_1^{(\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}(1))} = e_1^{(6)}$ que nos leva ao vértice $v_{22} \in V_2$ e seguir por $e_1^{(\tau_2^{-1}(6))} = e_1^{(4)}$ chegando em $v_{12} \in V_1$. Seguimos agora por $e_1^{(\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}(6))} = e_1^{(3)}$ que nos leva a $v_{21} \in V_2$; passamos novamente por $e_1^{(\tau_2^{-1}(3))} = e_1^{(1)}$ chegando em $v_{11} \in V_1$ e seguimos por $e_1^{(\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}(3))} = e_1^{(2)}$ que nos leva a $v_{22} \in V_2$ e por $e_1^{(\tau_2^{-1}(2))} = e_1^{(8)}$ chegando em $v_{14} \in V_1$. Daqui seguimos pelo caminho $e_1^{(\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}(2))} = e_1^{(7)}$ que chega em $v_{22} \in V_2$ e, por último, seguimos $e_1^{(\tau_2^{-1}(7))} = e_1^{(2)}$ que finalmente completa o laço chegando em $v_{11} \in V_1$, já que o próximo caminho seria $e_1^{(\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}(7))} = e_1^{(1)}$.

Temos, portanto, o laço $L_1 : v_{11} - v_{21} - v_{13} - v_{22} - v_{12} - v_{21} - v_{11} - v_{22} - v_{14} - v_{22} - v_{11}$.

Procedendo do mesmo modo como feito acima para os vértices $v_{12}, v_{13}, v_{14} \in V_1$ obtemos, respectivamente, os laços:

$$L_2 : v_{12} - v_{21} - v_{11} - v_{22} - v_{14} - v_{22} - v_{11} - v_{21} - v_{13} - v_{22} - v_{12},$$

$$L_3 : v_{13} - v_{21} - v_{12} - v_{22} - v_{14} - v_{22} - v_{13},$$

$$L_4 : v_{14} - v_{22} - v_{11} - v_{21} - v_{13} - v_{22} - v_{12} - v_{21} - v_{11} - v_{22} - v_{14}.$$

Como L_1, L_2 e L_4 correspondem ao mesmo laço, consideramos apenas um deles, digamos L_1 .

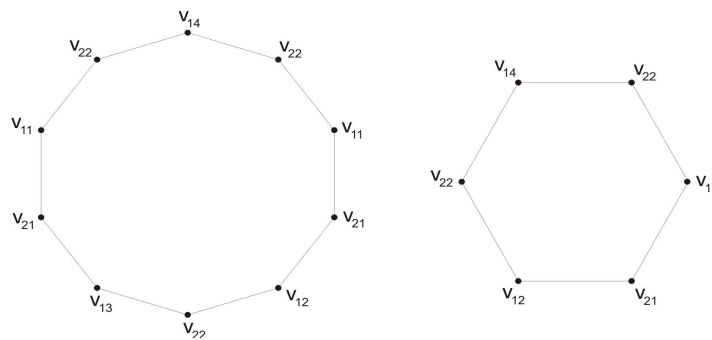


Figura 2.1: Laços L_1 e L_3 que tornam o grafo conexo visto como polígonos.

Como existem arestas em comum a ambos os laços, podemos identificar as arestas $v_{22} \xleftrightarrow{e_1^{(7)}} v_{14} \xleftrightarrow{e_1^{(8)}} v_{22}$, e obtemos:

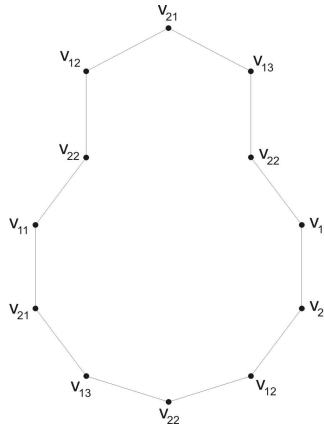


Figura 2.2: Polígono correspondente aos laços L_1 e L_3 depois da primeira identificação das arestas.

Identificando as arestas $v_{22} \xleftrightarrow{e_1^{(4)}} v_{12} \xleftrightarrow{e_1^{(3)}} v_{21}$ obtemos o cilindro:

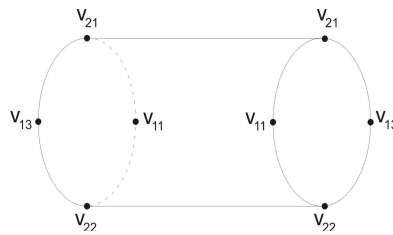


Figura 2.3: Polígono correspondente aos laços L_1 e L_3 depois da segunda identificação das arestas.

Por fim, identificamos as arestas $v_{22} \xleftrightarrow{e_1^{(2)}} v_{11} \xleftrightarrow{e_1^{(1)}} v_{21} \xleftrightarrow{e_1^{(5)}} v_{13} \xleftrightarrow{e_1^{(6)}} v_{22}$ e obtemos o toro.

Deste modo, obtemos que o espaço de recobrimento é o toro. Fazendo o cálculo de compatibilidade, obtemos que $\chi(Y) = 2$ e, portanto, o espaço base é a esfera S^2 .

Para termos uma idéia geométrica, vamos desenhar os laços no toro.

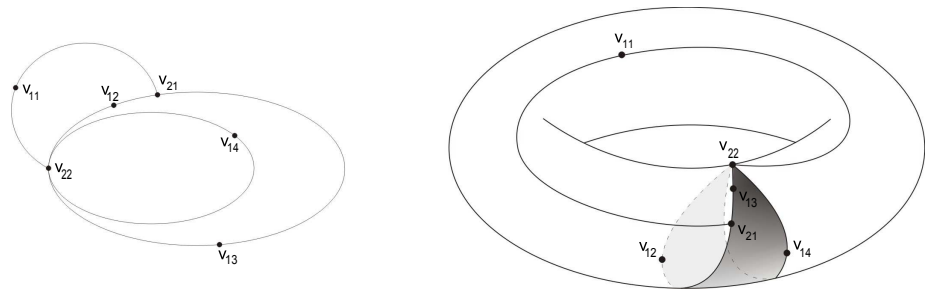


Figura 2.4: No desenho da esquerda temos uma outra representação dos dois laços L_1 e L_3 ; no desenho da direita, quando colocados no toro.

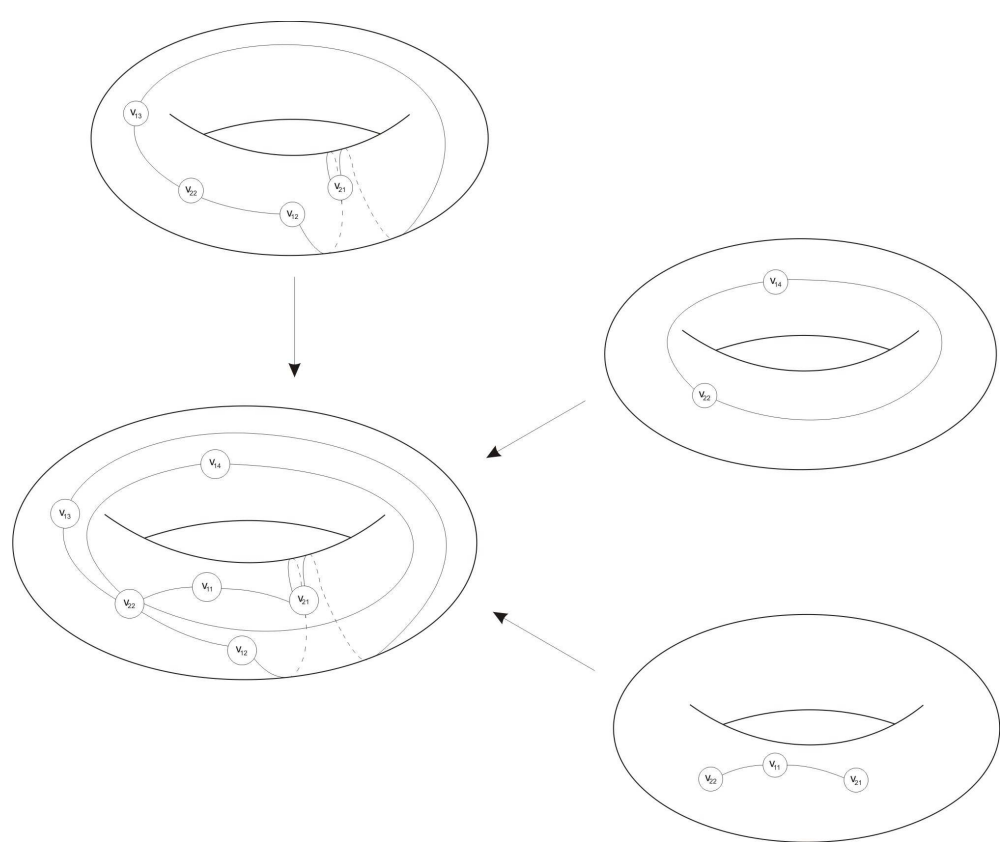


Figura 2.5: Desmembramento dos laços L_1 e L_3 .

Por fim, obtemos o dessin d'enfant clássico:

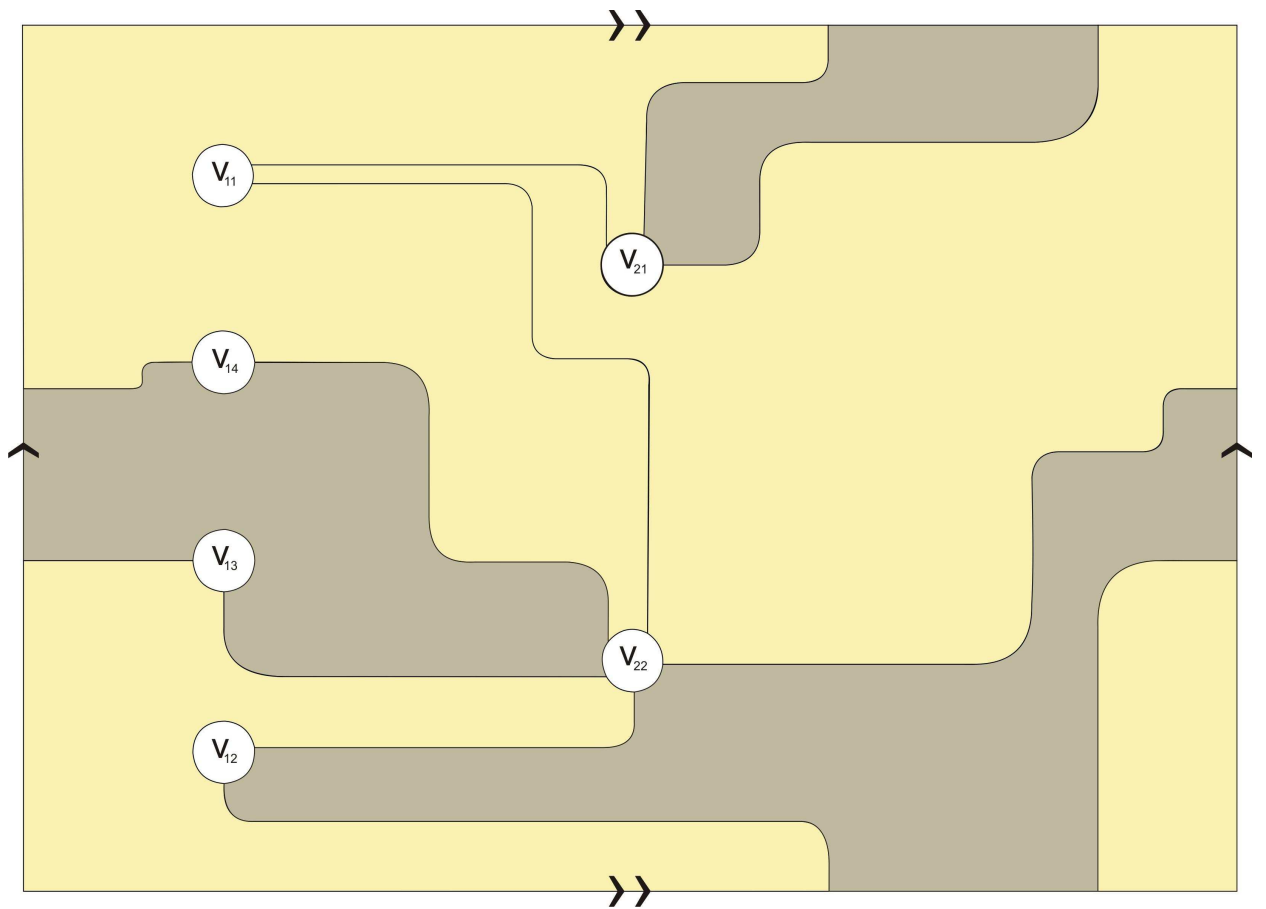


Figura 2.6: Dessin d'enfant ressaltando suas duas componentes conexas.

Para o dessin d'enfant completo, temos dois conjuntos de arestas

$$E_1 = \{e_1^{(1)}, e_1^{(2)}, e_1^{(3)}, e_1^{(4)}, e_1^{(5)}, e_1^{(6)}, e_1^{(7)}, e_1^{(8)}\} \text{ e } E_2 = \{e_2^{(1)}, e_2^{(2)}, e_2^{(3)}, e_2^{(4)}, e_2^{(5)}, e_2^{(6)}, e_2^{(7)}, e_2^{(8)}\},$$

onde:

$$e_2^{(1)} \text{ une os ciclos } (135) \in \tau_2 \text{ e } (16327) \in \tau_3;$$

$$e_2^{(2)} \text{ une os ciclos } (27468) \in \tau_2 \text{ e } (16327) \in \tau_3;$$

$$e_2^{(3)} \text{ une os ciclos } (135) \in \tau_2 \text{ e } (16327) \in \tau_3;$$

$$e_2^{(4)} \text{ une os ciclos } (27468) \in \tau_2 \text{ e } (485) \in \tau_3;$$

$$e_2^{(5)} \text{ une os ciclos } (135) \in \tau_2 \text{ e } (485) \in \tau_3;$$

$$e_2^{(6)} \text{ une os ciclos } (27468) \in \tau_2 \text{ e } (16327) \in \tau_3;$$

$$e_2^{(7)} \text{ une os ciclos } (27468) \in \tau_2 \text{ e } (16327) \in \tau_3;$$

$$e_2^{(8)} \text{ une os ciclos } (27468) \in \tau_2 \text{ e } (485) \in \tau_3.$$

e o conjunto E_1 é o mesmo utilizado na construção anterior.

Construindo os laços do grafo $D(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ de modo análogo ao feito anteriormente, obteremos os laços:

$$l_1 = v_{11} - v_{21} - v_{31} - v_{22} - v_{11},$$

$$l_2 = v_{12} - v_{21} - v_{31} - v_{22} - v_{12},$$

$$l_3 = v_{13} - v_{21} - v_{32} - v_{22} - v_{13},$$

$$l_4 = v_{14} - v_{22} - v_{31} - v_{22} - v_{14}.$$

O dessin d'enfant completo é então:

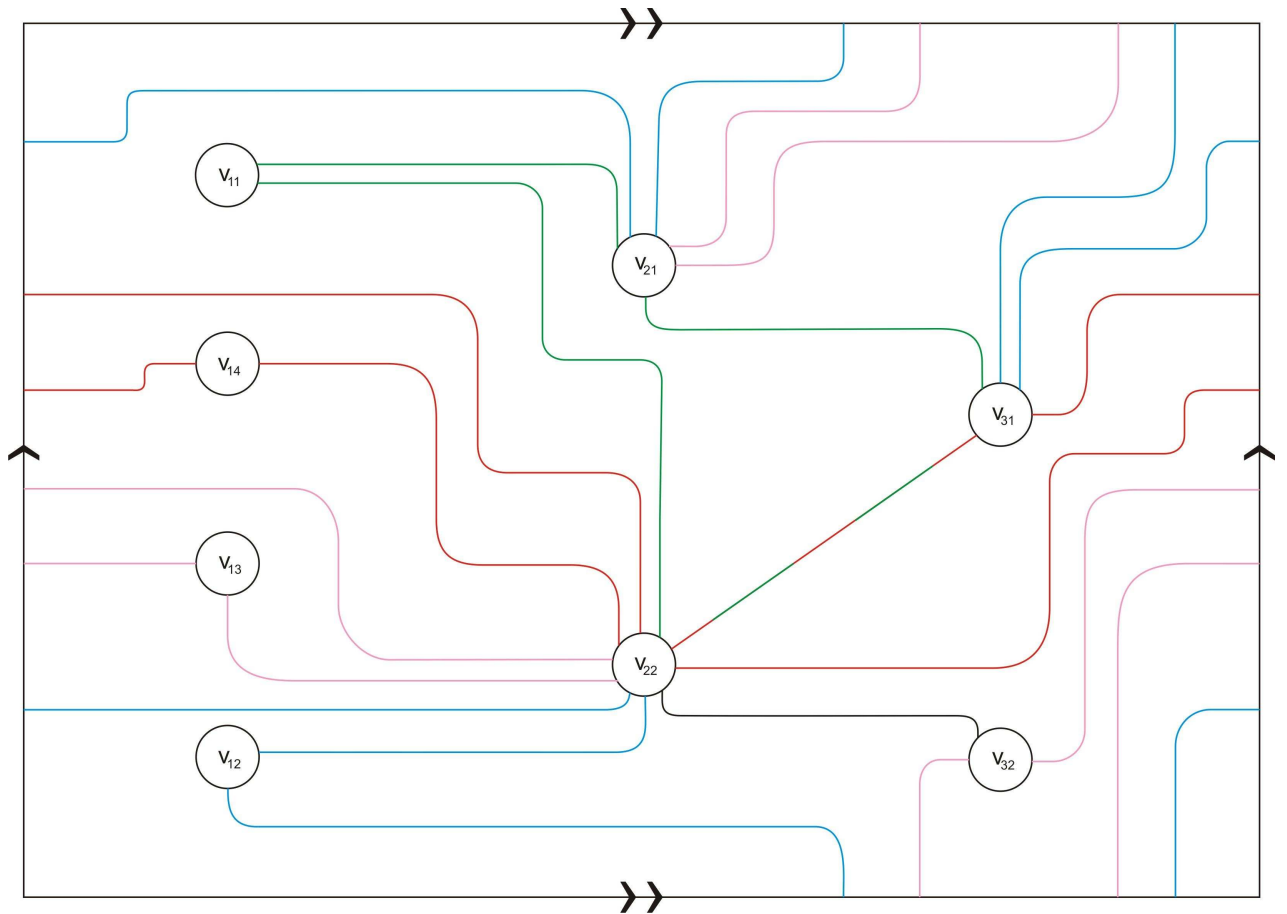


Figura 2.7: Dessin d'enfant completo ressaltando os laços que o tornam conexo.

Concluimos assim, que o dado de ramificação possui a forma:

$$(T, S^2, 3, 8, (2, 2, 2, 2), (3, 5), (5, 3)).$$

Capítulo 3

Exceções via Dessin d'Enfant

Neste capítulo apresentamos resultados baseados em [3] e [7] que fornecem condições para dizer quando um dado compatível é realizável por algum recobrimento ramificado.

Proposição 3.0.9. *Um dado de ramificação $(X, S^2, n, d, (d_{ij}))$ é realizável se, e somente se, existe um dessin d'enfant $D \subset X$ com o conjunto de vértices decomposto como V_1, \dots, V_{n-1} tal que:*

- (i) *Para $i = 1$ e $i = n - 1$, os vértices em V_i possuem grau $(d_{ij})_{j=1, \dots, m_i}$;*
- (ii) *Para $i = 2, \dots, n - 2$, $n > 3$, os vértices em V_i possuem grau $(2d_{ij})_{j=1, \dots, m_i}$;*
- (iii) *Os discos em $X \setminus D$ possuem comprimento $(2(n - 2)d_{nj})_{j=1, \dots, m_n}$.*

Dem.:

Para a primeira implicação, suponhamos que exista um recobrimento ramificado $f : X \rightarrow S^2$ com pontos de ramificação x_1, \dots, x_n que realiza o dado $(X, S^2, n, d, (d_{ij}))$, e vamos construir um dessin d'enfant $D \subset X$ que satisfaça (i), (ii) e (iii).

Para $i = 1, \dots, n - 2$ escolha um arco simples α_i que une x_i a x_{i+1} . Suponha que os α_i 's se encontram apenas em suas extremidades e que não passam por x_n .

Considere $\alpha = \bigcup_{i=1}^{n-2} \alpha_i$.

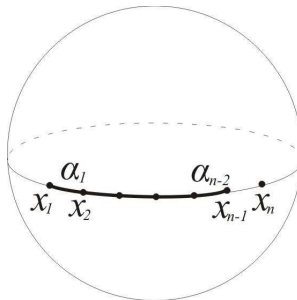


Figura 3.1: Construção da curva α .

Defina $D = f^{-1}(\alpha)$ e coloque $V_i = f^{-1}(x_i)$ e $E_i = f^{-1}(\alpha_i)$.

Observemos que pelo modo que D foi construído, as condições (1), (2), (3) da definição de dessin d'enfant e os itens (i) e (ii) da proposição estão satisfeitos. Deste modo, falta apenas provarmos os dois fatos sobre as componentes de $X \setminus D$.

$S^2 \setminus \alpha$ é um disco aberto e, ao restringirmos f a qualquer componente de $X \setminus D$, teremos um recobrimento sobre esse disco com um único ponto de ramificação, o x_n . Tal recobrimento é sempre modelado no recobrimento $z \mapsto z^{d_{nj}}$ do disco unitário aberto nele mesmo. Assim, as componentes de $X \setminus D$ são discos abertos e a condição (4) da definição de dessin d'enfant está satisfeita.

Para ser mais preciso, existe um desses discos para cada elemento de $f^{-1}(x_n)$ e o j -ésimo possui o comprimento desejado: $(2(n-2)d_{nj})_{j=1, \dots, m_n}$.

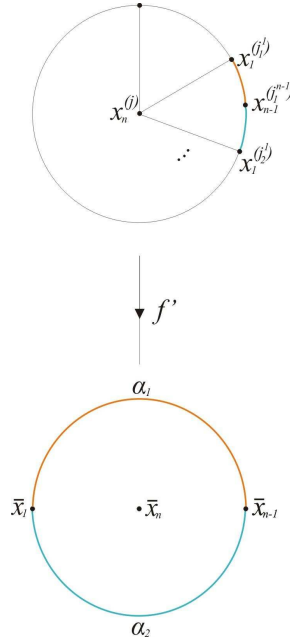


Figura 3.2: j -ésimo disco de comprimento $(2(n-2)d_{nj})_{j=1,\dots,m_n}$.

Para a recíproca, suponhamos dados S^2 como superfície base e $D \subset X$ o dessin d'enfant com o conjunto de vértices decomposto como V_1, \dots, V_{n-1} satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii).

Observemos que com essas informações conseguimos obter o dado $(X, S^2, n, d, (d_{ij}))$; para mostrar que é realizável, vamos construir um recobrimento ramificado $f : X \rightarrow S^2$ que tenha este dado como dado de ramificação.

Escolha n pontos distintos x_1, \dots, x_n na esfera e $n-2$ arcos simples $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}$ tal que α_i une x_i a x_{i+1} e de modo que se encontrem apenas em seus extremos e não passem por x_n .

Denotemos:

$$V_i = \{x_i^{(j)} \in X; j = 1, \dots, m_i\}, i = 1, \dots, n-1.$$

$$E_i = \{\gamma_{i,j}^l : [0, 1] \rightarrow X; \gamma_{i,j}^l(0) = x_i^{(j)} \text{ e } \gamma_{i,j}^l(1) = x_{i+1}^{(l)}, \text{ com } j = 1, \dots, m_i, l = 1, \dots, m_{i+1}\}, i = 1, \dots, n-2.$$

$$\alpha = \bigcup_{i=1}^{n-2} \alpha_i.$$

Definamos $f : D \rightarrow S^2$ colocando $f(x_i^{(j)}) = x_i, j = 1, \dots, m_i, i = 1, \dots, n-1$

e $f(\gamma_{i,j}^l(t)) = \alpha_i(t)$, $i = 1, \dots, n-2$, $j = 1, \dots, m_i$, $l = 1, \dots, m_{i+1}$.

Resta definir f em $X \setminus D$.

Notemos que $X \setminus D$ consiste, a menos de homeomorfismo, de m_n discos abertos C_j , $j = 1, \dots, m_n$.

Vamos então definir f em cada C_j , $j = 1, \dots, m_n$.

Observemos que $S^2 \setminus \alpha$ é homeomorfo a um disco aberto U cuja fronteira é composta pelas curvas α_i 's e que as fronteiras dos discos abertos C_j são compostas pelas curvas $\gamma_{i,j}^l$.

Assim, existe uma aplicação $\Psi : D^2 \rightarrow S^2$ com $\Psi|_{\mathring{D}^2} : \mathring{D}^2 \rightarrow U$ homeomorfismo de modo que, a correspondência contrária de Ψ seria “cortar” a esfera S^2 em α abrindo-a num disco cuja fronteira são duas cópias de α : α_1 e α_2 . Ou seja, Ψ identifica α_1 e α_2 “fechando” o disco em α e transformando-o na esfera.

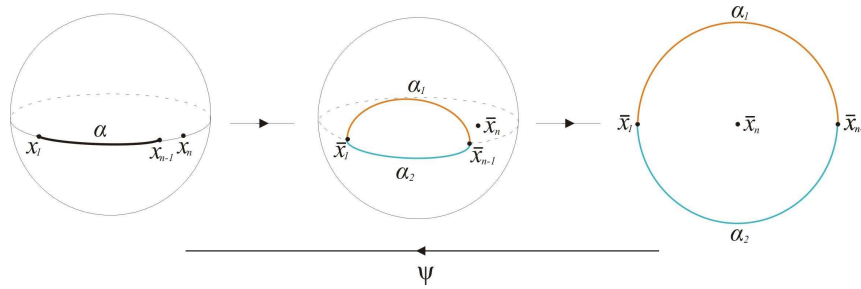


Figura 3.3: Descrição geométrica da aplicação Ψ .

Vamos olhar o que acontece nas fronteiras das componentes de $X \setminus D$, ou seja, a menos de homeomorfismo, nas fronteiras dos discos C_j 's.

Para manter a conexidade do grafo, a fronteira de C_j , para cada $j = 1, \dots, m_n$, deve conter pontos das pré-imagens de todos os pontos de ramificação, exceto x_n , pois os pontos $x_n^{(j)}$ de $f^{-1}(x_n)$ estarão no interior de C_j .

Vamos definir $f' : C_j \rightarrow D^2$ de modo que, para cada arco da fronteira de C_j que se inicia em um vértice de V_1 e termina no vértice de V_{n-1} (o primeiro que aparece depois de V_1), seu correspondente pela f' seja α_1 ; e o arco seguinte que se inicia nesse mesmo vértice de V_{n-1} e termina no próximo vértice V_1 tenha como

correspondente, pela f' , o arco α_2 .

Lembremos que existem d_{nj} de ambos os arcos citados.

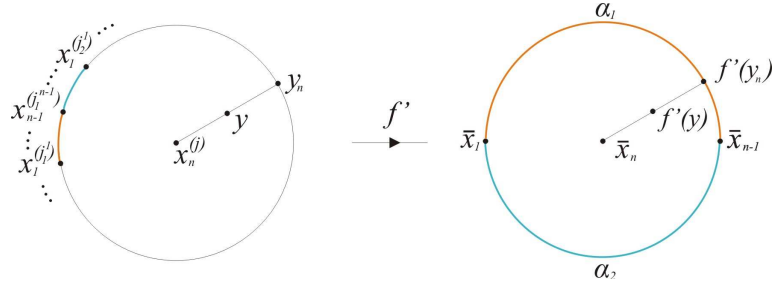


Figura 3.4: Descrição geométrica da aplicação f' .

Vamos exigir também que $f'(x_n^{(j)}) = \bar{x}_n \in \mathring{D}^2$ com $\Psi(\bar{x}_n) = x_n$.

Deste modo, resta definir f' nos pontos de $\mathring{C}_j \setminus \{x_n^{(j)}\}$.

Dado $y \in \mathring{C}_j \setminus \{x_n^{(j)}\}$, como C_j é estrelado, podemos parametrizar o segmento de reta que começa em $x_n^{(j)} \in C_j$, passa por y e termina em $\gamma_{i,j}^l(t_1) = y_n \in \partial C_j$, para algum $t_1 \in [0, 1]$. Assim, $y = (1 - t_y)x_n^{(j)} + t_y y_n$, para algum $t_y \in [0, 1]$.

Defina $f'(y) = (1 - t_y)\bar{x}_n + t_y f'(y_n)$. (Observemos que $f'(y_n)$ já está definido já que $y_n \in \partial C_j$).

Portanto, podemos definir $f : C_j \rightarrow S^2$ colocando $f = \Psi \circ f'$.

Como C_j é arbitrário, f está bem definida em cada C_j e, portanto, em $X \setminus D$.

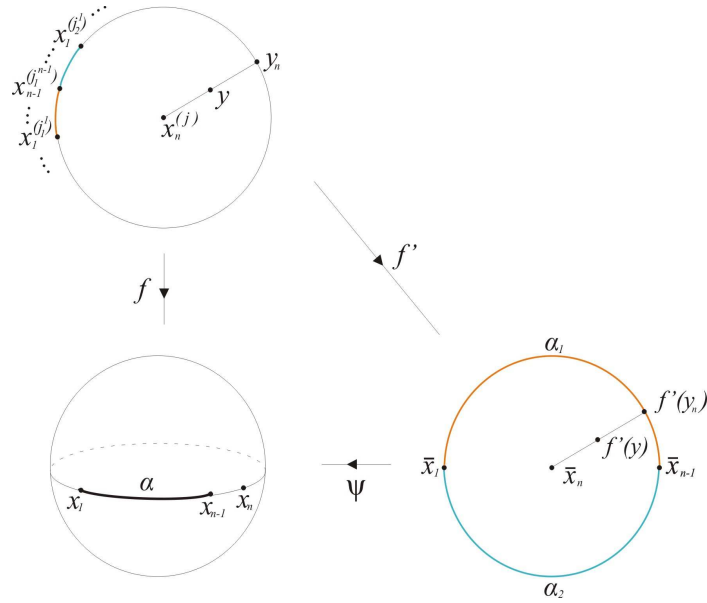


Figura 3.5: Descrição geométrica da aplicação $f = \Psi \circ f'$.

■

Como uma consequência da demonstração da proposição anterior, podemos enunciar o seguinte

Corolário 3.0.10. *A cada realização de um dado de ramificação $(X, S^2, n, d, (d_{ij}))$ corresponde um dessin d'enfant $D \subset X$.*

Se usarmos a Definição 1.3.4 ao invés da Definição 1.3.1 na proposição acima, teremos o seguinte resultado:

Proposição 3.0.9.' *As realizações de um dado de ramificação $(X, S^2, n, d, (d_{ij}))$ correspondem aos dessins d'enfants $D \subset X$ com o conjunto de vértices decomposto como V_1, \dots, V_n tal que:*

- (i) *Para $i = 1$ e $i = n$, os vértices em V_i possuem grau $(d_{ij})_{j=1, \dots, m_i}$;*
- (ii) *Para $i = 2, \dots, n - 1$, os vértices em V_i possuem grau $(2d_{ij})_{j=1, \dots, m_i}$;*
- (iii) *Os discos em $X \setminus D$ possuem comprimento constante $2(n - 1)$.*

O corolário seguinte é uma consequência direta do Teorema 2.0.6.

Corolário 3.0.11. *As realizações de um dado de ramificação $(X, S^2, n, d, (d_{ij}))$ correspondem às escolhas de $\tau_i = \Psi(v_i)$ em S_d para $i = 1, \dots, n-1$ tal que $\langle \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \rangle$ é transitivo e, colocando $\tau_n = \tau_{n-1}^{-1} \cdots \tau_1^{-1}$, a classe de conjugação de τ_i é dada por $(d_{ij})_{j=1, \dots, m_i}$, onde $i = 1, \dots, n$.*

Proposição 3.0.12. *Um dado de ramificação $\mathcal{D} = (S^2, Y, 3, d, (x, d-x), (2, \dots, 2), (2, \dots, 2))$, com d par, é realizável se, e somente se, $x = \frac{d}{2}$.*

Dem.:

Suponhamos que \mathcal{D} seja realizável. Então $(S^2, Y, 3, d, (2, \dots, 2), (2, \dots, 2), (x, d-x))$ é também realizável e, pela Proposição 3.0.9, ele corresponde a um dessin d'enfant $D \subset S^2$ com o conjunto de vértices decomposto como $V_1 \sqcup V_2$ tal que os vértices em V_1 possuem grau 2 e os vértices em V_2 possuem grau x e $d-x$.

Na demonstração da Proposição 3.0.9, vemos que devemos ter o vértice de grau x em uma componente de $S^2 \setminus D$ e o outro vértice, de grau $d-x$, em outra componente. Como todas as componentes devem conter um elemento da pré-imagem de x_3 , concluímos que temos apenas duas componentes, o que mostra que D é uma curva simples fechada imersa em S^2 e portanto, os discos em $S^2 \setminus D$ possuem mesmo comprimento, ou seja, $2(3-2)x = 2(3-2)(d-x)$, logo, $x = d-x$ e, assim, $x = \frac{d}{2}$.

Reciprocamente, suponhamos que $x = \frac{d}{2}$ e mostremos que $\mathcal{D} = (S^2, Y, 3, d, (d/2, d/2), (2, \dots, 2), (2, \dots, 2))$ é realizável. Para isso, vamos construir um dessin d'enfant, D , que corresponda à realização desse dado de ramificação.

Consideremos o dado $(S^2, Y, 3, d, (2, \dots, 2), (2, \dots, 2), (d/2, d/2))$ e observemos que, sendo $(2, \dots, 2), (2, \dots, 2), (d/2, d/2)$ partições de d , teremos $m_1 = k = m_2$, para algum $k \in \mathbb{Z}$ e $d_{1j} = 2 = d_{2j}$ para todo $j = 1, \dots, m_1$. Portanto, o único dessin que corresponde à essas características é o ilustrado na figura 3.6, onde os pontos ilustrados na primeira fileira correspondem a pré-imagem de x_1 e os da segunda fileira a de x_2 .

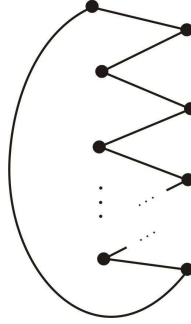


Figura 3.6: Dessin d'enfant que realiza o dado $(S^2, Y, 3, d, (2, \dots, 2), (2, \dots, 2), (d/2, d/2))$.

Observe que D satisfaz todas as propriedades da Definição 1.3.1 e da Proposição 3.0.9. Além disso, ressaltamos o fato de ter duas componentes conexas como exigido pela partição $\left(\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right)$ e o comprimento dos discos em $S^2 \setminus D$ ser $2k = d = 2(3 - 2)\frac{d}{2}$.

Portanto, \mathcal{D} é realizável. ■

Proposição 3.0.13. *Seja $(X, S^2, 3, d, (2, \dots, 2), (5, 3, 2, \dots, 2), (d_{3j})_{j=1, \dots, m_3})$ um dado de ramificação compatível com $d \geq 8$ par.*

- *Se $X = T$, o toro, e $m_3 = 2$, então o dado é realizável se, e somente se, $(d_{31}, d_{32}) \neq (d/2, d/2)$.*
- *Se $X = S^2$ e $m_3 = 4$, então o dado é realizável se, e somente se, $(d_{3j})_{j=1, \dots, 4} \neq \left(k, k, \frac{d}{2} - k, \frac{d}{2} - k\right)$ para algum $k > 0$, ou $(d_{3j})_{j=1, \dots, 4} \neq (d/2, d/6, d/6, d/6)$ para d múltiplo de 6.*

Dem.:

Primeiramente faremos uso de algumas observações.

Um dessin d'enfant clássico D correspondendo às duas primeiras partições do dado de ramificação da hipótese visto como um grafo abstrato, é homeomorfo a um

dos grafos A e B mostrados na figura 3.7, com os dois vértices visíveis pertencentes a V_2 .

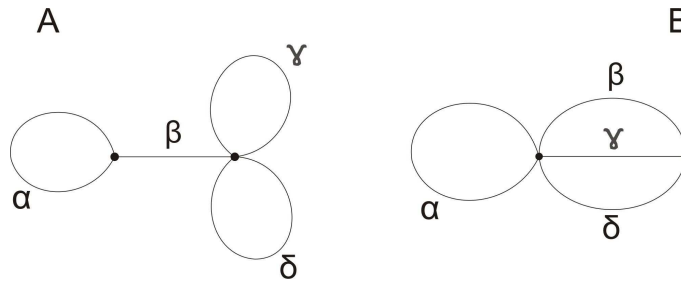
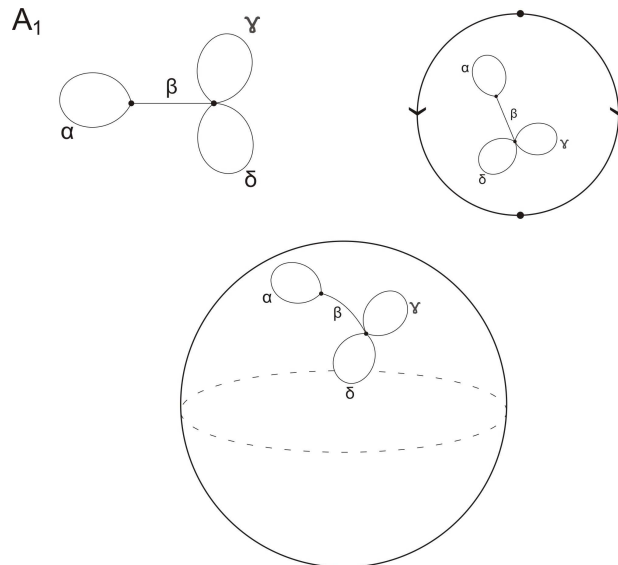


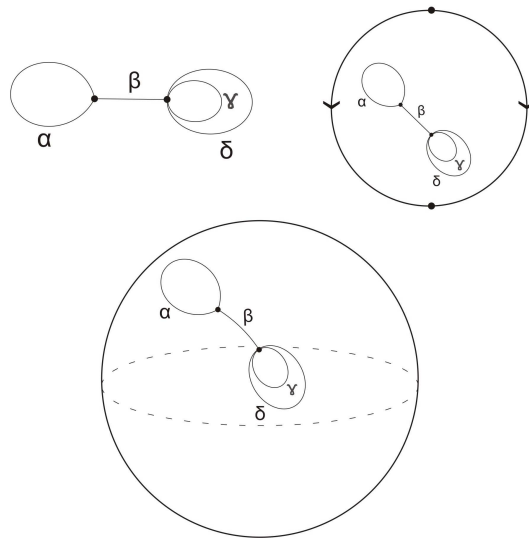
Figura 3.7: Os dois grafos com vértices de graus 5 e 3.

Para obter D devemos então inserir em cada aresta de A ou B um número ímpar de vértices pertencentes a V_1 e V_2 alternadamente. Com um leve abuso de notação, suponhamos que adicionamos $2\alpha + 1$ vértices em α , depois $2\beta + 1$ em β , e assim por diante. Usando o fato que V_1 possui $d/2$ vértices, vemos que $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{d}{2} - 4$, e esta é a única restrição sobre α, β, γ e δ .

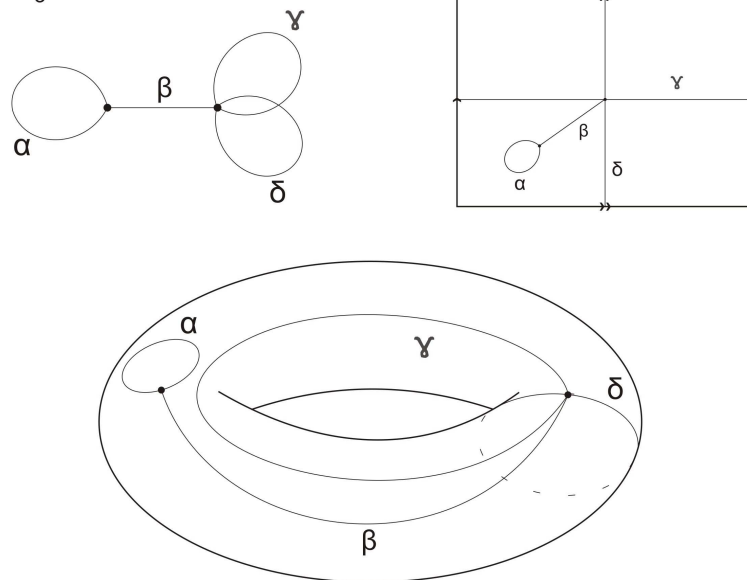
A menos de simetria, as possíveis opções de A e B para superfícies orientáveis com bordo são as descritas nas figuras abaixo.



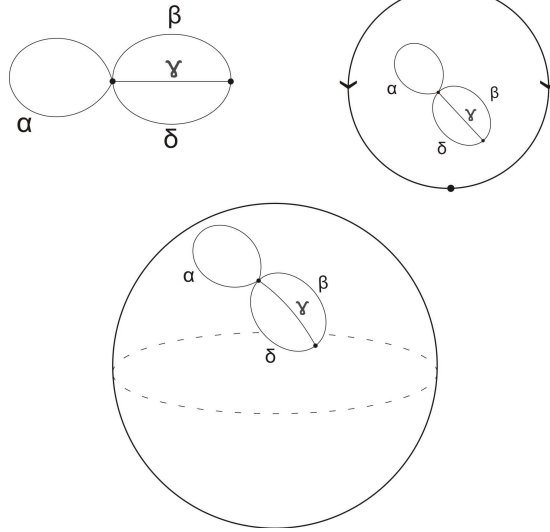
A_2



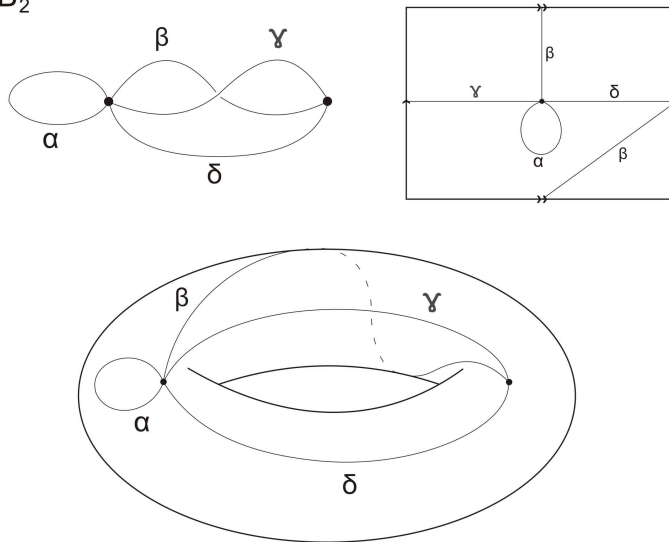
A_3



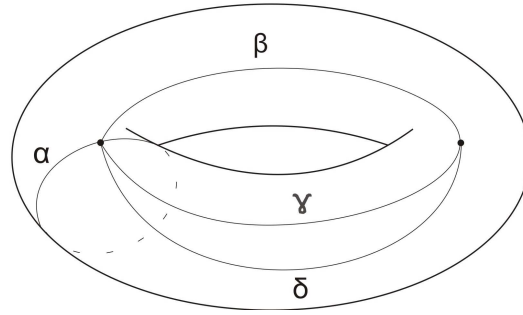
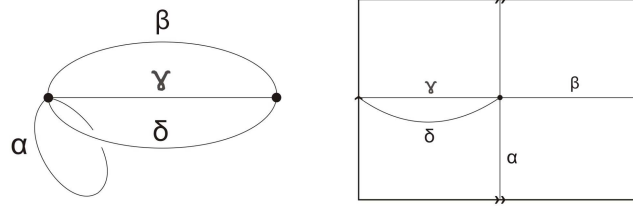
B₁



B₂



B_3



B_4

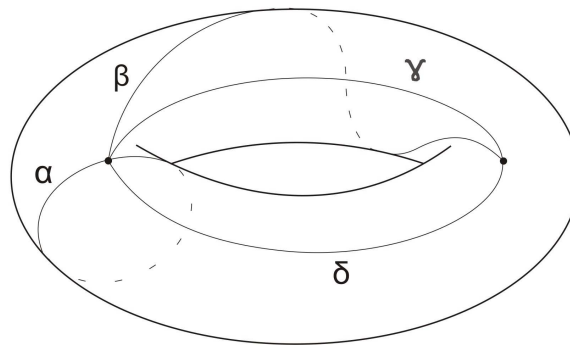
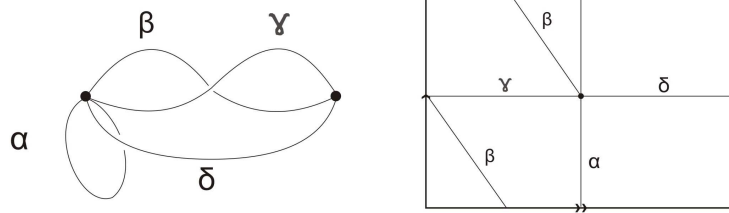


Figura 3.8: Possibilidades para A e B .

As superfícies fechadas X associadas e os respectivos semi-comprimentos dos discos são os seguintes:

$$A_1 : S^2, (\alpha + 1, \gamma + 1, \delta + 1, \alpha + 2\beta + \gamma + \delta + 5)$$

$$A_2 : S^2, (\alpha + 1, \gamma + 1, \gamma + \delta + 2, \alpha + 2\beta + \delta + 4)$$

$$A_3 : T, (\alpha + 1, \alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta + 7)$$

$$B_1 : S^2, (\alpha + 1, \beta + \gamma + 2, \gamma + \delta + 2, \alpha + \beta + \delta + 3)$$

$$B_2 : T, (\alpha + 1, \alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta + 7)$$

$$B_3 : T, (\beta + \gamma + 2, 2\alpha + \beta + \gamma + 2\delta + 6)$$

$$B_4 : T, (\alpha + \beta + \gamma + 3, \alpha + \beta + \gamma + 2\delta + 5).$$

Vamos então determinar todos os valores possíveis que podem ser realizados pelos A_i 's e B_i 's quando α, β, γ e δ variam nos inteiros não-negativos sob a restrição $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{d}{2} - 4$.

Começando a demonstração com $X = T$, consideraremos os casos A_3, B_2, B_3 e B_4 .

Suponhamos que $(d/2, d/2)$ seja realizável. Assim,

- Se $(\alpha + 1, \alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta + 7) = (d/2, d/2)$, então $2\beta + 2\gamma + 2\delta + 6 + d/2 = d/2 \Rightarrow \beta + \gamma + \delta + 3 = 0 \Rightarrow \beta + \gamma + \delta = -3$ o que não pode acontecer já que $\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}_+$.
- Se $(\beta + \gamma + 2, 2\alpha + \beta + \gamma + 2\delta + 6) = (d/2, d/2)$, então $2\alpha + 2\delta + 4 = 0 \Rightarrow \alpha + \delta = -2$.
Absurdo!
- Se $(\alpha + \beta + \gamma + 3, \alpha + \beta + \gamma + 2\delta + 5) = (d/2, d/2)$, então $2\delta + 2 = 0 \Rightarrow \delta = -1$.
Absurdo!

Portanto, $(d_{31}, d_{32}) \neq (d/2, d/2)$.

Para a recíproca, tomando $1 \leq k \leq \frac{d}{2} - 3$, temos que $(\frac{d}{2} + k, \frac{d}{2} - k)$ é realizável usando B_4 com $\alpha = \frac{d}{2} - 3 - k$, $\beta = \gamma = 0$ e $\delta = k - 1$.

Além disso, $(d - 1, 1)$ é realizável usando A_3 com $\alpha = d - 2$, $\beta = \gamma = 0$ e $\delta = \frac{d}{2} - 4$ e $(d - 2, 2)$ é realizável usando B_3 com $\alpha = \frac{d}{2} - 4$ e $\beta = \gamma = \delta = 0$.

Como essas partições cobrem todas as possibilidades para $(d_{31}, d_{32}) \neq (d/2, d/2)$, temos que o dado é realizável. E o primeiro item está terminado.

Para $X = S^2$, vamos começar com o caso B_1 .

Vamos denotar os elementos de $(d_{3j})_{j=1,\dots,4}$ (não necessariamente na mesma ordem) por $x, y, z, w = d - x - y - z$ e resolver o sistema abaixo nas incógnitas α, β, γ e δ :

$$\begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \beta + \gamma + 2 \\ z = \gamma + \delta + 2 \\ w = \alpha + \beta + \delta + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x - 1 \\ \beta = d/2 - x - z - 1 \\ \gamma = x + y + z - 1 - d/2 \\ \delta = d/2 - x - y - 1. \end{cases}$$

Esse sistema possui solução se, e somente se, α, β, γ e δ são todos não-negativos, ou seja, se

$$(*) \begin{cases} x + y \leq d/2 - 1 \\ x + z \leq d/2 - 1 \\ x + y + z \geq d/2 + 1. \end{cases}$$

Logo, um dado de ramificação com $X = S^2$ é realizável usando o caso B_1 se, e somente se, é possível extrair de $(d_{3j})_{j=1,\dots,4}$ inteiros x, y, z satisfazendo (*).

Denotaremos por l o maior dos d_{3j} 's e provaremos os seguintes fatos:

Afirmção 1: *Se $l \geq d/2$, então o dado de ramificação não pode ser realizado usando B_1 .*

Afirmção 2: *Se $l < d/2$, então o dado de ramificação pode ser realizado usando B_1 se, e somente se, $(d_{3j})_{j=1,\dots,4}$ não tem a forma $(k, k, \frac{d}{2} - k, \frac{d}{2} - k)$.*

Afirmção 3: *Se $l \geq d/2$, então o dado de ramificação pode ser realizado usando A_1 ou A_2 se, e somente se, $(d_{3j})_{j=1,\dots,4}$ não tem a forma $(d/2, d/6, d/6, d/6)$.*

Afirmção 4: *Nenhum dado de ramificação com $(d_{3j})_{j=1,\dots,4}$ da forma $(k, k, \frac{d}{2} - k, \frac{d}{2} - k)$ pode ser realizado usando A_1 ou A_2 .*

Observemos que as afirmações (1) e (3) provam a proposição para $X = S^2$ para o caso da partição $(d/2, d/6, d/6, d/6)$ e $l \geq d/2$, e as afirmações (2) e (4) provam para o caso da partição $(k, k, \frac{d}{2} - k, \frac{d}{2} - k)$ e $l < d/2$ e, portanto, a demonstração do caso $X = S^2$ estará completa.

Pois bem,

Demonstração da Afirmação 1: Não podemos escolher x, y ou z como sendo l pois, caso contrário, uma das duas primeiras condições em (*) seriam violadas. Portanto $w = l$ e assim, $x + y + z = d - l \leq d - d/2 = d/2$, o que contradiz a última condição em (*).

Demonstração da Afirmação 2: Claramente não podemos extrair de $(k, k, \frac{d}{2} - k, \frac{d}{2} - k)$ inteiros x, y, z satisfazendo (*).

Para a recíproca, escolha x, y, z e w em ordem crescente, isto é,

$$x \leq y \leq z \leq w = l = d - x - y - z < d/2.$$

Logo, $d - x - y - z < d/2$ implica em $x + y + z > d/2$, ou seja, $x + y + z \geq d/2 + 1$ o que implica na última condição de (*).

Como $y \leq z$, temos que a segunda condição em (*) implica na primeira. Se a segunda condição é violada, ou seja, se $x + z > d/2 - 1$, então $x + z \geq d/2$.

Além disso, de $z < l < d/2$ obtemos $z < d/2$ e então existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $z = d/2 - t$ e existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $l = d/2 - s$.

Também, substituindo os valores de z e l em $x + y + z + l = d$, obtemos $x + y = t + s$.

Assim,

$$x + z \geq \frac{d}{2} \Rightarrow x + \frac{d}{2} - t \geq \frac{d}{2} \Rightarrow x \geq t$$

$$t + y \leq x + y = t + s \Rightarrow y \leq s$$

$$z \leq l \Rightarrow \frac{d}{2} - t \leq \frac{d}{2} - s \Rightarrow t \geq s.$$

Esses fatos implicam que $x \leq y \leq s \leq t \leq x$. Chamando de k o valor comum, temos que (x, y, z, w) possui a forma $(k, k, \frac{d}{2} - k, \frac{d}{2} - k)$, o que encerra a demonstração da segunda afirmação.

Demonstração da Afirmação 3: Novamente vamos denotar os d_{3j} 's por x, y, z, w e escolhê-los em ordem crescente, isto é,

$$x \leq y \leq z < w = l = d - x - y - z.$$

Sendo $l \geq d/2$, temos que $d - x - y - z = l \geq d/2$ implica em $x + y + z \leq d - d/2 = d/2$.

Se queremos realizar o dado usando A_1 , forçamos a seguinte escolha, a menos de simetria:

$$\begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \gamma + 1 \\ z = \delta + 1 \\ w = \alpha + 2\beta + \gamma + \delta + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x - 1 \\ \beta = d/2 - x - y - z - 1 \\ \gamma = y - 1 \\ \delta = z - 1. \end{cases}$$

Essa solução é aceitável, exceto se $x + y + z = d/2$.

Logo, se A_1 realizar o dado para $l \geq d/2$, então devemos ter $(d_{3j})_{j=1,\dots,4} \neq (d/2, x, y, z)$.

Como A_1 não realiza o dado para o caso $x + y + z = d/2$, vamos então tentar realizar usando A_2 . Nesse caso nós temos que $x + y + z = d/2$ implica que $l = d/2$ e, portanto, $x + y + z = l$, ou seja, $x \leq y \leq z < l = x + y + z$.

Primeiramente resolvemos:

$$\begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \gamma + 1 \\ z = \gamma + \delta + 2 \\ x + y + z = \alpha + 2\beta + \delta + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x - 1 \\ \beta = y - 1 \\ \gamma = y - 1 \\ \delta = z - y - 1. \end{cases}$$

Cuja solução é aceitável somente se $z > y$.

Trabalharemos agora com o caso $x \leq y = z < l = x + 2y$ usando A_2 .

Teremos então que

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \alpha + 1 \\ x = \gamma + 1 \\ y = \gamma + \delta + 2 \\ x + 2y = \alpha + 2\beta + \delta + 4 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = y - 1 \\ \beta = x - 1 \\ \gamma = x - 1 \\ \delta = y - x - 1. \end{array} \right.$$

Cuja solução é aceitável somente para $y > x$.

Logo, realizando o dado de ramificação com A_1 ou A_2 , devemos ter $x < y \leq z < l$ ou $x \leq y < z < l$ e, portanto, $(d_{3j})_{j=1,\dots,4} \neq (d/2, d/6, d/6, d/6)$.

Reciprocamente, se $(d_{3j})_{j=1,\dots,4} = (d/2, d/6, d/6, d/6)$, então o dado de ramificação não pode ser realizado utilizando A_1 nem A_2 pois não satisfaz os sistemas.

Demonstração da Afirmação 4: Vamos começar usando A_2 .

Como $\gamma + 1 < \gamma + \delta + 2$ e $\alpha + 1 < \alpha + 2\beta + \delta + 4$, só há uma tentativa a ser feita:

$$\left\{ \begin{array}{l} k = \alpha + 1 \\ k = \gamma + 1 \\ d/2 - k = \gamma + \delta + 2 \\ d/2 - k = \alpha + 2\beta + \delta + 4 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = k - 1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = k - 1 \\ \delta = d/2 - 2k - 1 \end{array} \right.$$

a qual não é aceitável já que β deve ser um inteiro não-negativo.

Vamos então tentar usar A_1 . A menos de simetria, novamente existe apenas um caso:

$$\left\{ \begin{array}{l} k = \alpha + 1 \\ k = \gamma + 1 \\ d/2 - k = \delta + 1 \\ d/2 - k = \alpha + 2\beta + \gamma + \delta + 5 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = k - 1 \\ \beta = -k - 1 \\ \gamma = k - 1 \\ \delta = d/2 - k - 1 \end{array} \right.$$

o qual também não é aceitável pelo mesmo motivo anterior.

Isso encerra a demonstração da afirmação 4 e, portanto, a demonstração da proposição. ■

Proposição 3.0.14. *Seja $(S^2, S^2, 3, d, (d_{ij}))$ um dado de ramificação compatível com d par e $(d_{1j}) = (2, \dots, 2)$. Se $(d_{2j}) = (3, 3, 2, \dots, 2)$ ou $(d_{2j}) = (3, 2, \dots, 2, 1)$, então o dado é realizável se, e somente se, $d_{31} \neq d/2$.*

Dem.:

Suponhamos, primeiramente, que $(d_{2j}) = (3, 3, 2, \dots, 2)$.

Um dessin d'enfant clássico D correspondendo às duas primeiras partições do dado de ramificação da hipótese visto como um grafo abstrato, é homeomorfo a um dos grafos A e B mostrados na figura 3.9, com os dois vértices visíveis pertencentes a V_2 .

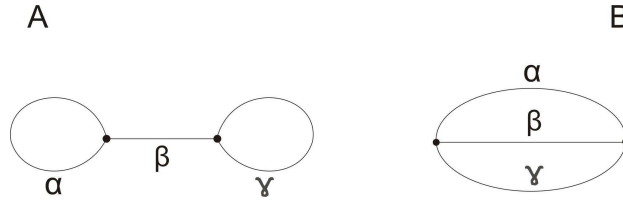


Figura 3.9: Os dois grafos com vértices de grau 3.

Para obter D , devemos inserir em cada aresta de A ou B um número ímpar de vértices pertencentes a V_1 e V_2 alternadamente. Com um leve abuso de notação, suponha que adicionamos $2\alpha + 1$ vértices em α , depois $2\beta + 1$ vértices em β e por fim, $2\gamma + 1$ vértices em γ .

Usando o fato que V_1 possui $d/2$ vértices, vemos que $\alpha+1+\beta+1+\gamma+1 = d/2$, ou seja, $\alpha + \beta + \gamma = d/2 - 3$ e esta é a única restrição sobre α, β e γ .

Os semi-comprimentos dos discos associados a A e B são:

$$A : (\alpha + 1, \gamma + 1, \alpha + 2\beta + \gamma + 4)$$

$$B : (\alpha + \beta + 2, \alpha + \gamma + 2, \beta + \gamma + 2).$$

Vamos exigir que α, β e γ variem nos inteiros não-negativos sob a restrição $\alpha + \beta + \gamma = d/2 - 3$.

Suponhamos que $d_{31} = d/2$.

Considerando A ,

Se $d_{31} = \alpha + 1 = d/2$, ou seja, $\alpha = d/2 - 1$ então:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma + \beta + 4 &= \frac{d}{2} - 3 + \beta + 4 \\ \frac{d}{2} - 1 + \beta + \gamma + \beta + 4 &= \frac{d}{2} + \beta + 1 \\ \beta + \gamma + 3 &= 1 \\ \beta + \gamma &= -2 \end{aligned}$$

cuja solução não é aceitável, pois $\beta, \gamma \in \mathbb{Z}_+$.

Se $d_{31} = \gamma + 1 = d/2$, ou seja, $\gamma = d/2 - 1$ então:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma + \beta + 4 &= \frac{d}{2} - 3 + \beta + 4 \\ \alpha + \beta + \frac{d}{2} - 1 + \beta + 4 &= \frac{d}{2} + \beta + 1 \\ \alpha + \beta + 3 &= 1 \\ \alpha + \beta &= -2 \end{aligned}$$

cuja solução não é aceitável, pois $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$.

Se $d_{31} = \alpha + 2\beta + \gamma + 4 = d/2$, ou seja, $\alpha + \beta + \gamma = d/2 - \beta - 4$ então:

$$\begin{aligned} \frac{d}{2} - 3 &= \alpha + \beta + \gamma = \frac{d}{2} - \beta - 4 \\ \beta &= -4 + 3 = -1 \end{aligned}$$

cuja solução não é aceitável, pois $\beta \in \mathbb{Z}_+$.

Considerando agora B ,

Se $d_{31} = \alpha + \beta + 2 = d/2$, ou seja, $\alpha = d/2 - \beta - 2$ então:

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + 2 &= \frac{d}{2} \\ \alpha + \beta + \gamma + 2 &= \frac{d}{2} + \gamma \\ \frac{d}{2} - 3 + 2 &= \frac{d}{2} + \gamma \\ \gamma &= -1\end{aligned}$$

cuja solução não é aceitável, pois $\gamma \in \mathbb{Z}_+$.

Se $d_{31} = \alpha + \gamma + 2 = d/2$, então:

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma + 2 &= \frac{d}{2} + \beta \\ \frac{d}{2} - 3 + 2 &= \frac{d}{2} + \beta \\ \beta &= -1\end{aligned}$$

cuja solução não é aceitável, pois $\beta \in \mathbb{Z}_+$.

Se $d_{31} = \beta + \gamma + 2 = d/2$, então:

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma + 2 &= \frac{d}{2} + \alpha \\ \frac{d}{2} - 3 + 2 &= \frac{d}{2} + \alpha \\ \alpha &= -1\end{aligned}$$

cuja solução não é aceitável, pois $\alpha \in \mathbb{Z}_+$.

Logo, o dado não é realizável com $(d_{2j}) = (3, 3, 2, \dots, 2)$.

Para a recíproca, observemos primeiramente que, como $(d_{2j}) = (3, 3, 2, \dots, 2)$, então $d \geq 8$.

Trabalharemos primeiro com o caso $A : (\alpha + 1, \gamma + 1, \alpha + 2\beta + \gamma + 4)$.

Vamos denotar os elementos de $(d_{3j})_{j=1, \dots, 3}$ (não necessariamente na mesma ordem) por $x, y, z = d - x - y$ e resolver o sistema abaixo nas incógnitas α, β e γ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \alpha + 1 \\ y = \gamma + 1 \\ z = \alpha + 2\beta + \gamma + 4 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = x - 1 \\ \beta = d/2 - x - y - 1 \\ \gamma = y - 1 \end{array} \right.$$

Esse sistema possui solução se, e somente se, α, β e γ são todos não-negativos, ou seja, se

$$(*) \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \\ x + y \leq d/2 - 1. \end{cases}$$

Logo, o dado de ramificação é realizável usando o caso A se, e somente se, é possível extrair de $(d_{3j})_{j=1,\dots,3}$ inteiros x, y satisfazendo (*).

Observemos que:

Se $x = d/2$, então $y \leq \frac{d}{2} - 1 - \frac{d}{2} = -1$ o que contraria $y \geq 1$.

Se $y = d/2$, então $x \leq \frac{d}{2} - 1 - \frac{d}{2} = -1$ o que contraria $x \geq 1$.

Se $z = d/2$, então $x + y = d - z = d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}$ o que contraria $x + y \leq \frac{d}{2} - 1$.

Assim, $(d_{31}) \neq d/2$.

Procedendo do mesmo modo para o caso $B : (\alpha + \beta + 2, \alpha + \gamma + 2, \beta + \gamma + 2)$, obtemos:

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta + 2 \\ y = \alpha + \gamma + 2 \\ z = \beta + \gamma + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x + y - d/2 - 1 \\ \beta = d/2 - y - 1 \\ \gamma = d/2 - x - 1 \end{cases}$$

Esse sistema possui solução se, e somente se, α, β e γ são todos não-negativos, ou seja, se

$$(*) \quad \begin{cases} x \leq d/2 - 1 \\ y \leq d/2 - 1 \\ x + y \geq d/2 + 1. \end{cases}$$

Logo, o dado de ramificação é realizável usando o caso B se, e somente se, é possível extrair de $(d_{3j})_{j=1,\dots,3}$ inteiros x, y satisfazendo (*).

Observe que a primeira e segunda condições de (*) implicam em $x \neq d/2$ e $y \neq d/2$, respectivamente.

Agora, se $z = d/2$, então $x + y = d - z = d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}$ contrariando a terceira condição de (*).

Portanto $d_{31} \neq d/2$ e a demonstração para o caso $(d_{2j}) = (3, 3, 2, \dots, 2)$ está terminada.

Vamos supor agora, que $(d_{2j}) = (3, 2, \dots, 2, 1)$.

Um dessin d'enfant clássico D correspondendo às duas primeiras partições do dado de ramificação da hipótese visto como um grafo abstrato, é homeomorfo ao grafo A mostrado na figura 3.10, com os dois vértices visíveis pertencentes a V_2 .

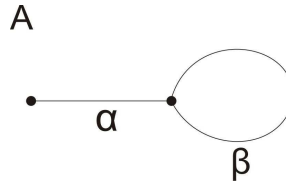


Figura 3.10: Grafo com vértices de graus 1 e 3.

Para obter D , devemos inserir em cada aresta de A um número ímpar de vértices pertencentes a V_1 e V_2 alternadamente. Com um leve abuso de notação, suponha que adicionamos $2\alpha + 1$ vértices em α e $2\beta + 1$ vértices em β .

Usando o fato que V_1 possui $d/2$ vértices, vemos que $\alpha + \beta = d/2 - 2$ e esta é a única restrição sobre α e β .

Os semi-comprimentos dos discos associados a A são $(\beta + 1, 2\alpha + \beta + 3)$.

Suponhamos que $d_{31} = d/2$.

Se $d_{31} = \beta + 1 = d/2$, ou seja, $\beta = d/2 - 1$ então:

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta + 3 &= \alpha + \frac{d}{2} - 2 + 3 \\ 2\alpha + \frac{d}{2} - 1 + 3 &= \alpha + \frac{d}{2} + 1 \\ \alpha &= -1 \end{aligned}$$

cuja solução não é aceitável, pois $\alpha \in \mathbb{Z}_+$.

Se $d_{31} = 2\alpha + \beta + 3 = d/2$, ou seja, $\beta = d/2 - 3 - 2\alpha$ então:

$$\begin{aligned}\beta + 1 &= \frac{d}{2} - 3 - 2\alpha + 1 \\ \alpha + \beta + 1 &= \frac{d}{2} - 2 - \alpha \\ \frac{d}{2} - 2 + 1 &= \frac{d}{2} - 2 - \alpha \\ \alpha &= -1\end{aligned}$$

cuja solução não é aceitável, pois $\alpha \in \mathbb{Z}_+$.

Logo, o dado não é realizável com $(d_{2j}) = (3, 2, \dots, 2, 1)$.

Para a recíproca, observemos primeiramente que, como $(d_{2j}) = (3, 2, \dots, 2, 1)$, então $d \geq 6$.

$(d/2, d/2)$ não pode ser realizado usando A pois, caso contrário, teríamos $\alpha = -1$. O que não pode acontecer.

Tomando $1 \leq k \leq d/2 - 1$, temos que $(d/2 - k, d/2 + k)$ é realizável por A com $\alpha = k - 1$ e $\beta = d/2 - 1 - k$ e estas partições cobrem todas as possibilidades para (d_{31}, d_{32}) . Como por hipótese o dado de ramificação é realizável, provamos que $d_{31} \neq d/2$. ■

Lema 3.0.15. *Suponha que $d = kh$ com $k, h \geq 2$. Sejam $(s_j)_{j=1, \dots, p}$, $(t_j)_{j=1, \dots, q}$ partições de h com $p, q \geq 2$ e $p + q \geq h + 2$. Então para todo $1 \leq r < (p + q - h)$, se $n = p + q - r - h + 2$, o seguinte dado de ramificação é excepcional:*

$$(S^2, S^2, n, d, (ks_1, \dots, ks_p), (kt_1, \dots, kt_q), (h + r, 1, \dots, 1), (2, 1, \dots, 1), \dots, (2, 1, \dots, 1)).$$

Dem.:

Para mostrarmos que o dado de ramificação é excepcional, devemos mostrar que ele é compatível, mas não é realizável.

Começaremos mostrando que o dado é compatível e, para isso, vamos mostrar que satisfaz as cinco condições da definição:

$$(1) \chi(S^2) - \tilde{n} = d.(\chi(S^2) - n)$$

De fato, temos que $\chi(S^2) = 2$, $d = kh$ e $n = p + q - r - h + 2$.

Para calcularmos \tilde{n} , vamos precisar saber quantos elementos cada partição (d_{ij}) possui.

Observemos que o número de 1's da terceira partição é $d - (h + r)$ e da quarta partição em diante é $d - 2$. Além disso, observemos que temos $(n - 3)$ partições da forma $(2, 1, \dots, 1)$.

Portanto,

$$\begin{aligned}\tilde{n} &= p + q + d - (h + r) + 1 + (n - 3)(d - 2 + 1) \\ &= p + q + kh - h - r + 1 + (n - 3)(kh - 1) \\ &= p + q + kh - h - r + 1 + kh(p + q - r - h + 2) - p - q + r + h - 2 - 3kh + 3 \\ &= kh(p + q - r - h) + 2.\end{aligned}$$

E, assim,

$$\begin{aligned}d \cdot (\chi(S^2) - n) &= kh(2 - (p + q - r - h + 2)) \\ &= 2kh - kh(p + q - r - h + 2) \\ &= -kh(p + q - r - h) \\ &= 2 - kh(p + q - r - h) - 2 \\ &= 2 - (kh(p + q - r - h) + 2) \\ &= \chi(S^2) - \tilde{n}.\end{aligned}$$

(2) $n \cdot d - \tilde{n}$ é par.

De fato,

$$\begin{aligned}n \cdot d - \tilde{n} &= (p + q - r - h + 2)kh - kh(p + q - r - h) - 2 = 2kh - 2 = 2(kh - 1) = \\ &= 2(d - 1).\end{aligned}$$

(3) Se Y é orientável, então X também é orientável.

Claramente satisfeito já que $X = Y = S^2$.

As condições (4) e (5) não se aplicam, já que $Y = S^2$ é orientável.

Temos, portanto, que o dado é compatível.

Mostraremos agora que o dado não é realizável, e o faremos por indução em n .

Primeiramente, observemos que $n = p + q - r - h + 2 > p + q - (p + q - h) - h + 2 = 2$, logo a base da indução é $n = 3$. Além disso, quando $n = 3$, o dado não contém as partições da forma $(2, 1, \dots, 1)$.

Para demonstrarmos o lema para o caso $n = 3$, faremos uma indução sobre h .

Se $h = 2$, então temos $p = q = 2$ e $(t_1, t_2) = (s_1, s_2) = (1, 1)$. Além disso, como $1 \leq r < (p + q - h)$, então $1 \leq r < 2$, ou seja, $r = 1$. Logo ficamos com o dado da forma $(S^2, S^2, 3, 2k, (k, k), (k, k), (3, 1, \dots, 1))$ onde aparecem $(2k - 3)$ 1's na terceira partição.

Suponhamos que exista uma realização f deste dado e consideremos o dessin d'enfant D associado à essa realização construído como na demonstração da Proposição 3.0.9.

Como as duas primeiras partições são iguais, as pré-imagens do primeiro e do segundo pontos de ramificação, as quais denotaremos por x_{11}, x_{12}, x_{21} e x_{22} , têm grau k cada uma e, sendo D conexo, temos que as arestas que começam em x_{11} devem terminar em ambos x_{21} e x_{22} , pois, caso contrário, o grafo se torna desconexo. O mesmo ocorre com o vértice x_{12} .

Assim, existe um disco de $X \setminus D$ cuja fronteira é formada por: uma aresta que sai de x_{11} e chega em x_{21} ; uma aresta que sai de x_{11} e chega em x_{22} ; uma aresta que sai de x_{12} e chega em x_{21} ; e uma aresta que sai de x_{12} e chega em x_{22} ; o que nos dá um disco de comprimento 4. Como pela demonstração da Proposição 3.0.9 devemos ter um vértice de V_3 em cada disco, existe pelo menos um ponto da pré-imagem do terceiro ponto de ramificação com grau 2, o que é um absurdo.

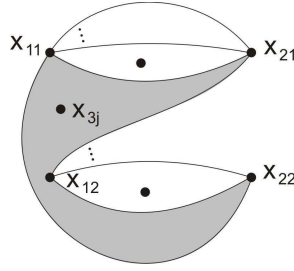


Figura 3.11: Grafo destacando o disco de comprimento 4 contendo um ponto da pré-imagem do terceiro ponto de ramificação com grau 2.

Portanto, para $n = 3$ e $h = 2$, o dado não é realizável.

Se $h \geq 3$, então temos dois casos:

- (i) Uma das partições $(s_j)_{j=1,\dots,p}$ e $(t_j)_{j=1,\dots,q}$ possui a forma $(1, 1, \dots, 1)$.
- (ii) Nenhuma das duas partições possuem a forma $(1, 1, \dots, 1)$.

A afirmação abaixo irá provar que, para $n = 3$ e o caso (i) acima, o dado é excepcional.

Notemos que, nesse caso, temos $1 \leq r < p + q - h = p + h - h = p$, ou seja, $1 \leq r < p$ e, portanto, $1 \leq r \leq p - 1$.

Afirmção: *Suponha que $k, h \geq 2$. Seja $(s_j)_{j=1,\dots,p}$ uma partição de h com $p \geq 2$. Então o dado de ramificação $(S^2, S^2, 3, kh, (ks_1, \dots, ks_p), (k, \dots, k), (h+p-1, 1, \dots, 1))$ é excepcional.*

De fato, primeiramente observemos que o número de 1's da terceira partição é $kh - h - p + 1 = (k - 1)h - p + 1$.

Tomemos $\tau_1, \tau_2 \in S_{kh}$ arbitrários com estruturas cíclicas (ks_1, \dots, ks_p) e (k, \dots, k) tal que $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ seja transitivo e consideremos o grafo $D(\tau_1, \tau_2)$ associado à essas permutações.

Se τ_1, τ_2 realizam o dado de ramificação, então $\tau_1 \cdot \tau_2$ possui $(k - 1)h - p + 1$ pontos fixos. Mais que isso, cada ponto fixo está contido numa componente conexa de $D(\tau_1, \tau_2)$ a qual é delimitada por dois vértices e um par de arestas unindo esses vértices.

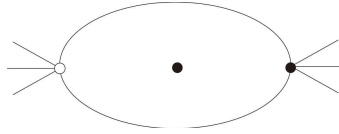


Figura 3.12: Componente conexa de $D(\tau_1, \tau_2)$ contendo um ponto fixo, delimitada por dois vértices e um par de arestas.

Dados dois vértices, vamos denotar por \mathcal{E} o conjunto de todas as arestas que unem esses dois vértices.

Observe que o conjunto \mathcal{E} pode ter uma aresta e, para cada par de vértices, o conjunto \mathcal{E} é alterado.

Denotaremos por $\#\mathcal{E}$ o número de arestas que \mathcal{E} possui. Vamos ilustrar:

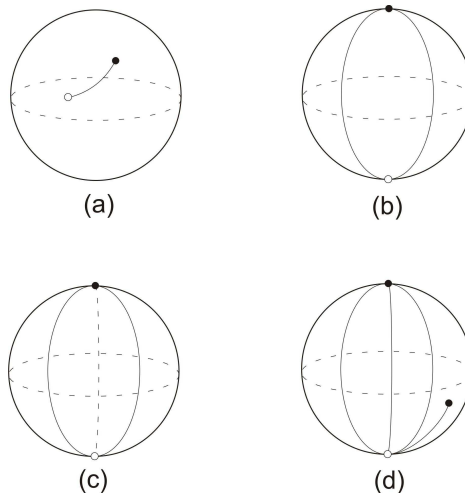


Figura 3.13:

Em (a) temos $\#\mathcal{E} = 1$ e nenhum ponto fixo; em (b) temos $\#\mathcal{E} = 2$ e dois pontos fixos, em (c) temos $\#\mathcal{E} = 3$ e três pontos fixos e em (d) temos dois conjuntos $\mathcal{E}'s$, um com $\#\mathcal{E} = 1$ e nenhum ponto fixo e outro com $\#\mathcal{E} = 3$ e três pontos fixos.

Assim, vemos que cada conjunto \mathcal{E} dá origem a no máximo $\#\mathcal{E}$ pontos fixos de $\tau_1 \cdot \tau_2$, e todos os pontos fixos aparecem desse modo.

O caso $\#\mathcal{E}$ pontos fixos, na verdade, ocorre somente se τ_1 e τ_2 contém ciclos que são inversos um do outro, o que contraria a hipótese da afirmação pois, nesse caso,

devemos ter $p = 1$ (Já que $p > 1$ daria contradição no grau local correspondente à terceira partição).

Logo, cada conjunto \mathcal{E} contribui com, no máximo, $(\#\mathcal{E} - 1)$ pontos fixos.

Concluimos assim, que o número total de pontos fixos do grafo é, no máximo, a soma das cardinalidades de todos os conjuntos \mathcal{E} , o qual nos dá $d = kh$, menos o número de conjuntos \mathcal{E} não-vazios.

Vamos estimar, agora, o número de conjuntos \mathcal{E} .

Por definição de $D(\tau_1, \tau_2)$, o conjunto de vértices se decompõe como $V_1 \sqcup V_2$, onde V_1 consiste de p vértices de grau ks_1, \dots, ks_p e V_2 consiste de h vértices de grau k . Isso implica que no j -ésimo vértice de V_1 temos, no mínimo, s_j conjuntos \mathcal{E} unidos à ele. Mas, se existirem exatamente s_j conjuntos \mathcal{E} ligados à esse vértice, então estaremos desconectando o grafo $D(\tau_1, \tau_2)$, o que nos obriga, para manter a conexidade, a termos $p = 1$ e este caso é desconsiderado. Portanto existem, no mínimo, $s_j + 1$ conjuntos \mathcal{E} unidos ao j -ésimo vértice de V_1 e assim, existe um total de, no mínimo, $\sum_{j=1}^p (s_j + 1) = h + p$ conjuntos \mathcal{E} .

Pelo que fizemos no parágrafo anterior, obtemos que $\tau_1 \cdot \tau_2$ possui, no máximo, $kh - (h + p) = (k - 1)h - p$ pontos fixos. Mas isso implica que τ_1, τ_2 não podem realizar o dado de ramificação, pois, como já dissemos anteriormente, para que τ_1, τ_2 realizassem o dado deveríamos ter $(k - 1)h - p + 1$ pontos fixos.

Isso encerra a demonstração da afirmação.

Voltando ao lema, lembremos que ainda falta considerar item (ii) no caso $h \geq 3$ e $n = 3$.

Assim, consideraremos agora que nenhuma das partições de h possui a forma $(1, 1, \dots, 1)$, ou seja, ambas as partições $(s_j)_{j=1, \dots, p}$ e $(t_j)_{j=1, \dots, q}$ contém pelo menos uma entrada maior do que 1, o que nos dá $p, q \leq h - 1$ e, considerando que $p + q \geq h + 2$, temos:

$$p \geq h + 2 - q \geq h + 2 - (h - 1) = 3$$

$$q \geq h + 2 - p \geq h + 2 - (h - 1) = 3.$$

Suponhamos que um dado como nas hipóteses do lema (e sob as hipóteses que estamos considerando agora) seja realizável e consideremos o dessin d'enfant D construído como na demonstração da Proposição 3.0.9.

Afirmção: D contém vértices v e u tal que todas as arestas de D incidentes em v unem v a u .

De fato, observemos que $S^2 \setminus D$ consiste de alguns polígonos de dois lados e um polígono de $2(p+q-1)$ lados, pois $(d_{nj})_{j=1, \dots, m_n} = (d_{3j})_{j=1, \dots, m_3} = (h+r, 1, \dots, 1)$ e, como $3 = n = p+q-r-h+2$ implica em $r = p+q-h-1$, temos que $h+r = h+p+q-h-1 = p+q-1$.

Logo, o comprimento dos discos de $S^2 \setminus D$ é $(2(3-2)d_{3j})_{j=1, \dots, m_3}$, ou seja, $(2d_{3j})_{j=1, \dots, m_3}$ o que nos dá m_3-1 polígonos de dois lados e um polígono de $2(p+q-1)$ lados correspondente ao d_{31} .

Comprimindo sucessivamente cada polígono de dois lados em uma única aresta (como na figura abaixo), obtemos um grafo \overline{D} mergulhado em S^2 com os mesmos vértices de D , cujo complemento consiste de um único disco. Como \overline{D} é uma árvore e não um ponto, ele contém vértices de grau 1, e qualquer um desses vértices é o vértice v que tem unido à ele o vértice u e estes possuem a propriedade desejada.

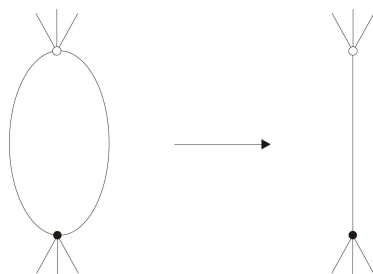


Figura 3.14: Passagem de D para \overline{D} .

Considere agora o grafo D' obtido de D deletando v e todas as arestas incidentes nele.

D' ainda é um dessin d'enfant, pois, como tiramos um vértice de algum V_i , $i = 1, 2$ e não o conjunto V_i todo e tiramos algumas arestas de E_1 e não o conjunto todo (lembrando que ainda temos $n = 3$), a condição (1) da definição não se altera. O mesmo acontece com a condição (2) pois as arestas restantes já cumpriam essa condição em D . Além disso, tendo apenas um conjunto de arestas, a condição (3) permanece sendo satisfeita e, por fim, $S^2 \setminus D'$ ainda consiste de discos abertos.

Observemos que se tirarmos um vértice de V_1 , passamos a ter $p' = p - 1$ vértices ou, se tirarmos um vértice de V_2 , passamos a ter $q' = q - 1$ vértices. De qualquer modo, passamos a ter $3 = n = p' + q' - r - h + 2 = (p + q - r - h + 2) - 1 = p + q - r - h + 1$, ou seja, $r = p + q - h - 2$ e $h + r = p + q - 2$. Assim, continuamos tendo $m_3 - 1$ polígonos de dois lados e passamos a ter um polígono de $2(p + q - 2)$ lados em $S^2 \setminus D'$.

Sem perda de generalidade, vamos assumir que $v \in V_2$ e $u \in V_1$. Se o grau de v em D é kt_a e o de u é ks_b , então o grau de u em D' é $k(s_b - t_a)$ e esse número é positivo pois, caso contrário, para que o grafo não fique desconexo, devemos ter $p = q = 1$ que é um caso desconsiderado. Assim, D' realiza um dado de ramificação como nas hipóteses, com $n = 3$, $k' = k$, $h' = h - t_a$, $p' = p$, $q' = q - 1$, uma partição (s'_j) de h' obtida de (s_j) substituindo s_b por $s_b - t_a$ e reordenando, e a outra partição (t'_j) de h' obtida de (t_j) tirando t_a .

Resta ainda mostrar que $k', p', q' \geq 2$ e $p' + q' \geq h' + 2$.

Como $k' = k$ e $p' = p$, temos que $k', p' \geq 2$.

Como $q \geq 3$ e $q' = q - 1$, então $q' = q - 1 \geq 3 - 1 = 2$.

Observemos que, do mesmo modo que obtemos $p, q \leq h - 1$, também temos $p', q' \leq h' - 1$ e, assim, $h' \geq q' + 1 \geq 2 + 1 = 3$.

Agora, $h' = h - t_a \leq h - 1$, ou seja, $h \geq h' + 1$ e $p + q \geq h + 2$. Assim, $p' + q' = p + q - 1 \geq h + 2 - 1 = h + 1 \geq h' + 2$.

Logo obtemos um dessin d'enfant D' que realiza o dado com $h' = h - t_a < h$ e isso contraria a hipótese indutiva sobre h .

Portanto, o caso $n = 3$ está terminado.

Suponhamos agora que $n \geq 4$. Logo a última partição possui a forma $(2, 1, \dots, 1)$.

Além disso, $n = p + q - r - h + 2 \geq 4 \Rightarrow p + q - h \geq r + 2 \geq 1 + 2 = 3$, e como $p, q \leq h$, temos $p \geq 3 - q + h \geq 3 - h + h = 3$ e, do mesmo modo, $q \geq 3$.

Vamos supor, por absurdo, que o dado seja realizável por uma aplicação f . Seja y_i o ponto de ramificação correspondendo à i -ésima partição e consideremos o dessin d'enfant D construído como na demonstração da Proposição 3.0.9 com $x_{n-2} = y_2$, $x_{n-1} = y_n$ e $x_n = y_1$ (os outros x_j 's correspondem aos demais y_j 's e não importa a ordem).

Em particular, D contém $f^{-1}(\alpha_{n-2} \cup \alpha_{n-3})$, onde α_{n-2} e α_{n-3} unem y_n a y_2 e y_2 a algum outro y_j , respectivamente. Lembremos que $V_i = f^{-1}(x_i)$, assim, $V_{n-1} = f^{-1}(y_n)$ e $V_{n-2} = f^{-1}(y_2)$. Considerando os graus, concluímos que existem apenas duas possibilidades para $f^{-1}(\alpha_{n-2} \cup \alpha'_{n-3})$, onde α'_{n-3} é a metade de α_{n-3} incidente em y_2 . Essas possibilidades estão mostradas na figura 3.15, onde os elementos de V_{n-1} são representados como os pontos pretos e os de V_{n-2} são representados como os pontos brancos.

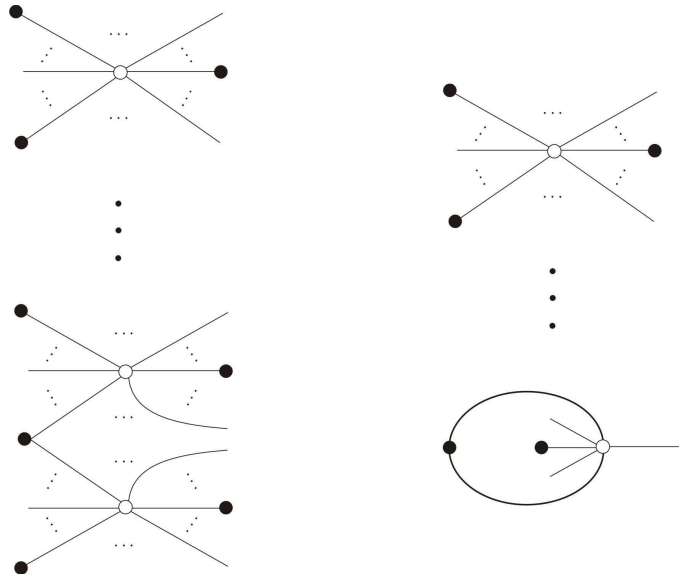


Figura 3.15: As duas possibilidades de $f^{-1}(\alpha_{n-2} \cup \alpha'_{n-3})$.

Sejam $e_{n-2}^{(i)}$ e $e_{n-2}^{(j)}$ as arestas com ponto final no vértice preto de grau 2.

Suponhamos que estamos no caso mostrado à esquerda na figura 3.15, isto é, que $e_{n-2}^{(i)}$ e $e_{n-2}^{(j)}$ sejam incidentes em dois vértices brancos distintos, o qual denotaremos por v' e v'' . Então, removemos todos os vértices pretos de grau 1 junto com as respectivas arestas adjacentes, e contraímos o conjunto $e_{n-2}^{(i)} \cup e_{n-2}^{(j)}$ em um ponto, o qual passa a ser um novo ponto branco, v''' . Isso nos dá um novo dessin d'enfant D' (pois, como tiramos todos os pontos pretos, ou seja, o conjunto V_{n-1} , ainda ficamos com $V_1 \sqcup \dots \sqcup V_{n-2}$ e $E_1 \sqcup \dots \sqcup E_{n-3}$ e, tendo agora $n - 1$ no lugar de n , isso não altera as condições da definição de dessin d'enfant) e podemos analisar qual dado ele realiza.

Com a renomeação feita, passamos do dado inicial:

$$(S^2, S^2, n, d, (ks_1, \dots, ks_p), (kt_1, \dots, kt_q), (h+r, 1, \dots, 1), (2, 1, \dots, 1), \dots, (2, 1, \dots, 1))$$

para o dado:

$$(S^2, S^2, n, d, (h+r, 1, \dots, 1), (2, 1, \dots, 1), \dots, (2, 1, \dots, 1), (kt_1, \dots, kt_q), (2, 1, \dots, 1), (ks_1, \dots, ks_p)).$$

Observemos que como v' e v'' foram contraídos num único ponto v''' , temos que este último tem como grau a soma dos graus de v' e v'' . Assim, se v' possui grau kt_i e v'' possui grau kt_j , então v''' possui grau $k(t_i + t_j)$. Além disso, o número de vértices em V_{n-2} é decrescido em 1.

Logo, o novo dado, depois de feitas as alterações e renomeando $i = 1$ e $j = 2$, será:

$$(S^2, S^2, n-1, d, (h+r, 1, \dots, 1), (2, 1, \dots, 1), \dots, (2, 1, \dots, 1), (k(t_1+t_2), kt_3, \dots, kt_q), (ks_1, \dots, ks_p)).$$

Agora, vamos calcular o comprimento dos discos desse novo dessin:

Sabemos que os discos do dessin original, D , tinham comprimentos $(2(n-2)d_{nj})_{j=1, \dots, m_n}$. A alteração feita foi retirar o conjunto V_{n-1} e E_{n-2} e, como todas as arestas do conjunto E_{n-2} eram terminais (exceto as duas que foram comprimidas num ponto branco), vemos que tiramos $2ks_j$ arestas (contando multiplicidade) desses discos, logo, os novos discos terão comprimento $(2(n-2)ks_j) - 2ks_j = 2(n-3)ks_j$.

Assim, temos um dessin d'enfant D' que realiza o dado (a menos de reordenação)

$$(S^2, S^2, n-1, d, (ks_1, \dots, ks_p), (k(t_1+t_2), kt_3, \dots, kt_q), (h+r, 1, \dots, 1), (2, 1, \dots, 1), \dots, (2, 1, \dots, 1))$$

que tem a mesma forma do dado do enunciado, só que com $n - 1$ no lugar de n . Logo, temos uma contradição da hipótese indutiva.

Vamos considerar agora o caso do lado direito da figura 3.15. Lembrando que o dado inicial depois da renomeação feita é

$$(S^2, S^2, n, d, \underbrace{(h+r, 1, \dots, 1)}_{V_1}, \underbrace{(2, 1, \dots, 1)}_{V_2}, \dots, \underbrace{(2, 1, \dots, 1)}_{V_{n-3}}, \underbrace{(kt_1, \dots, kt_q)}_{V_{n-2}}, \underbrace{(2, 1, \dots, 1)}_{V_{n-1}}, \underbrace{(ks_1, \dots, ks_p)}_{V_n}),$$

vamos remover V_{n-1} e todas as arestas incidentes aos seus vértices.

Observemos que como temos um vértice de V_n em cada componente conexa do dessin d'enfant de grau ks_i , quando retiramos o conjunto V_{n-1} e suas arestas incidentes, temos que dois discos são mesclados num só e, assim, temos a contração de dois dos vértices de V_n num único ponto, que passa a ter grau $ks_i + ks_j$. E o novo dado fica (colocando $i = 1$ e $j = 2$):

$$(S^2, S^2, n-1, d, (h+r, 1, \dots, 1), (2, 1, \dots, 1), \dots, (2, 1, \dots, 1), (kt_1, \dots, kt_q), (k(s_1+s_2), ks_3, \dots, ks_p)).$$

O novo disco, depois de contraídos os vértices de V_n , terá comprimento $2(n-3)(k(s_i + s_j))$, pois houve a união das componentes conexas do dessin e a remoção das arestas incidentes em V_{n-1} , ou seja, $2(n-2)ks_i + 2(n-2)ks_j - 2ks_i - 2ks_j = 2(n-3)ks_i + 2(n-3)ks_j = 2(n-3)k(s_i + s_j)$.

Logo, temos um dessin d'enfant que realiza o dado

$$(S^2, S^2, n-1, d, (k(s_1+s_2), ks_3, \dots, ks_p), (kt_1, \dots, kt_q), (h+r, 1, \dots, 1), (2, 1, \dots, 1), \dots, (2, 1, \dots, 1))$$

(a menos de reordenação). O que, novamente, contraria a hipótese indutiva.

Portanto, o lema está provado para todos os casos. ■

Teorema 3.0.16. *Suponha que d e todos os d_{ij} para $i = 1, 2$ são múltiplos de algum k com $1 < k < d$. Se o dado de ramificação $(S^2, S^2, n, d, (d_{ij}))$ é realizável, então $d_{ij} \leq d/k$ para $i = 3, \dots, n$ e para todo j .*

Dem.:

Vamos assumir que $n \geq 3$, caso contrário, o teorema é vazio.

Afirmção: $m_1, m_2 \geq 2$.

De fato, suponhamos que $d_{11} = d$, todos os d_{2j} 's são múltiplos de k , e $d_{31} > d/k$.

Então $m_1 = 1$, $m_2 \leq d/k$, $m_3 \leq d - \frac{d}{k}$ e $m_i \leq d - 1$ para $i \geq 4$.

Define-se Fórmula de Riemann-Hurwitz à igualdade $\nu(\mathcal{D}) = d \cdot \chi(Y) - \chi(X)$.¹

Temos que $\nu(\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^n (d - m_i) = nd - (m_1 + m_2 + \dots + m_n)$, assim, pela Fórmula de Riemann-Hurwitz, $dn - (m_1 + m_2 + \dots + m_n) = d \cdot 2 - 2$, ou seja, $m_1 + m_2 + \dots + m_n = dn - 2d + 2 = d(n - 2) + 2$.

Portanto, $(n - 2)d + 2 = m_1 + m_2 + \dots + m_n \leq 1 + \frac{d}{k} + (d - \frac{d}{k}) + (n - 3)(d - 1)$ implica que $n \leq 2$. Temos então um absurdo!

Suponhamos agora que exista um dado realizável da forma

$$(S^2, S^2, n, d, (ks_1, \dots, ks_p), (kt_1, \dots, kt_q), (d/k + r, d_{32}, \dots, d_{3m_3}), (d_{ij})_{j=1, \dots, m_i})$$

com $r \geq 1$ e $p, q \geq 2$.

Pelo Corolário 3.0.11 podemos encontrar permutações τ_1, \dots, τ_n tal que a estrutura cíclica de τ_i é dada pela i -ésima partição e $\tau_1 \tau_2 \dots \tau_n = 1$.

Obviamente, podemos escrever τ_3 como o produto de um ciclo τ_3' de comprimento $d/k + r$ e uma permutação τ_3'' de estrutura cíclica $(1, \dots, 1, d_{32}, \dots, d_{3m_3})$.

Observemos que $\tau_1 \dots \tau_n$ pode ser obtido como o produto de $\sum_{i=1}^n (d - m_i)$ transposições, e usando a Fórmula de Riemann-Hurwitz, temos que $\sum_{i=1}^n (d - m_i) = \nu(\mathcal{D}) = 2(d - 1)$. Assim, $\tau_3'' \tau_4 \dots \tau_n$ pode ser obtido como o produto de

$$(d_{32} + \dots + d_{3m_3} - (m_3 - 1)) + \sum_{i=4}^n (d - m_i) = 2(d - 1) - (d - p) - (d - q) - \left(\frac{d}{k} + r - 1\right) = p + q - r - \frac{d}{k} - 1$$

¹Define-se *defeito do recobrimento* como $\nu(\mathcal{D}) = \sum \nu((d_{ij}))$, onde $\mathcal{D} = \{(d_{ij})\}$ e $\nu((d_{ij}))$ é o defeito do ponto x_i e representa a quantidade de pontos que fazem falta na pré-imagem de x_i para que não seja imagem de um ponto de ramificação, ou seja, se x_k não é um ponto de ramificação, então $\nu((d_{kj})) = 0$, pois $(d_{kj}) = (1, \dots, 1)$.

transposições.

A coleção dessas transposições junto com as permutações τ_1, τ_2, τ_3' nos dá a realização do dado

$$(S^2, S^2, p + q - r - d/k + 2, d, (ks_1, \dots, ks_p), (kt_1, \dots, kt_q), (d/k + r, 1, \dots, 1), \\ (2, 1, \dots, 1), \dots, (2, 1, \dots, 1)),$$

o qual não é realizável pelo Lema 3.0.15.

Portanto $d_{ij} \leq d/k$, para $i = 3, \dots, n$ e para todo j . ■

Referências Bibliográficas

- [1] Barański, K. *On realizability of branched coverings of the sphere*, Topology and its Applications 116 (2001) 279-291.
- [2] Bedoya, N.A.V. *Revestimentos ramificados sobre superfícies compactas*, Dissertação de Mestrado IME-USP (2004).
- [3] Edmonds, A.L.; Kulkarni, R.S.; Stong, R.E. *Realizability of branched coverings of surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 282 (1984) 773 - 790.
- [4] Ezell, C.L. *Branch point structure of covering maps onto nonorientable surfaces*, trans. Amer. Math. Soc. 243 (1978) 123-133.
- [5] Husemoller, D.H. *Ramified coverings of Riemann surfaces*, Duke Math. J. 29 (1962) 167 - 174.
- [6] Lando, S.K.; Zvonkin, A.K. *Graphs on surfaces and their applications*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences 141, Springer, Berlin (2004).
- [7] Pervova, E.; Petronio, C. *On the existence of branched coverings between surfaces with prescribed branch data, I*, Alg. Geom. Topology 6 (2006) 1957 - 1985.
- [8] Pervova, E.; Petronio, C. *On the existence of branched coverings between surfaces with prescribed branch data, II*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications Vol. 17, No. 7 (2008) 787-816.

- [9] Zheng, H. *Realizability of branched coverings of S^2* , *Topology and its Applications* 153 (2006) 2124-2134.