UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Semigrupos Gerados pelo p-Laplaciano e um estudo do limite $p \to \infty$ [1]

Elard Juárez Hurtado

UFSCar - São Carlos
02 de Mayo 2012

[1]Este trabalho teve suporte financeiro da CAPES

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Semigrupos Gerados pelo p-Laplaciano e um estudo do limite $p \to \infty$ [2]

Elard Juárez Hurtado

Orientadoras: *Prof. Dra. Cláudia Buttarello Gentile Moussa e*
Prof. Dra. Karina Schiabel Silva

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

UFSCar - São Carlos
02 de Mayo 2012

[2]Este trabalho teve suporte financeiro da CAPES

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

J91sg

Juárez Hurtado, Elard.
Semigrupos gerados pelo p-Laplaciano e um estudo do limite $p \to \infty$ / Elard Juárez Hurtado. -- São Carlos : UFSCar, 2012.
76 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2012.

1. Semigrupos. 2. P-laplaciano. 3. Monge-Kantorovich, Teoria de. 4. Operadores monótonos. I. Título.

CDD: 512.2 (20ª)

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Cláudia Buttarello Gentile Moussa

DM - UFSCar

Maria do Carmo Carbinatto

Profa. Dra. Maria do Carmo Carbinatto

ICMC - USP

Rodrigo S. Rodrigues

Prof. Dr. Rodrigo da Silva Rodrigues

DM - UFSCar

Ainda que eu falasse as línguas dos homens e dos anjos, e não tivesse amor, seria como o metal que soa ou como o sino que tine. E ainda que tivesse o dom de profecia, e conhecesse todos os mistérios e toda a ciência, e ainda que tivesse toda a fé, de maneira tal que transportasse os montes, e não tivesse amor, nada seria. E ainda que distribuísse toda a minha fortuna para sustento dos pobres, e ainda que entregasse o meu corpo para ser queimado, e não tivesse amor, nada disso me aproveitaria.
O amor é sofredor, é benigno; o amor não é invejoso; o amor não trata com leviandade, não se ensoberbece.
Não se porta com indecência, não busca os seus interesses, não se irrita, não suspeita mal;
Não folga com a injustiça, mas folga com a verdade;
Tudo sofre, tudo crê, tudo espera, tudo suporta.
O amor nunca falha; mas havendo profecias, serão aniquiladas; havendo línguas, cessarão; havendo ciência, desaparecerá;
Porque, em parte, conhecemos, e em parte profetizamos;
Mas, quando vier o que é perfeito, então o que o é em parte será aniquilado.
Quando eu era menino, falava como menino, sentia como menino, discorria como menino, mas, logo que cheguei a ser homem, acabei com as coisas de menino.
Porque agora vemos por espelho em enigma, mas então veremos face a face; agora conheço em parte, mas então conhecerei como também sou conhecido.
Agora, pois, permanecem a fé, a esperança e o amor, estes três, mas o maior destes é o amor.

1 Corintios 13.1-13

Agradecimentos

Gostaria primeiro agradecer a Deus que me ilumina em todos os momentos durante da minha vida.
Também um agradecimento especial a meus pais Silvia e Hugo por motivarem em todo momento, para os meus estudos, pelo seu amor, paciência e apoio, a meus irmãos Silvia, Hugo, Nelida, Percy, Ronald, por seus conselhos e encorajamento, obrigado por sempre.

E como não posso esquecer todos os meus professores que tive na Universidade Nacional Mayor de San Marcos en especial aos professores Roxana lopez, Alfonso Perez, Pedro Contreras, Eugenio Cabanillas.
Também agradeço a este belo país e a Universidade Federal de São Carlos, em particular ao Departamento de Matemática que contribuíram para minha formação, especialmente aos professores Cesar Issao Kondo, Edivaldo Lopes dos Santos, João Nivaldo Tomazella, José Ruidival Soares dos Santos Filho, Rafael Augusto dos Santos Kapp
Agradeço aos membros da banca examinadora, professores Rodrigo da Silva, Maria do Carmo por seus conselhos e correções para poder enriquecer o trabalho.
E como esquecer a professora Cláudia Buttarello Gentile Moussa orientadora e amiga, pela confiança, disponibilidade que sempre me proporcionou durante a realização deste trabalho e contribuir para meu crescimento pessoal e científico.
A professora Karina Schiabel Silva por sua disponibilidade e gentileza nos momentos difíceis, sempre seu trato cordial e amistoso.
A meus amigos que fiz durante minha estadia em São Carlos, Elizabeth, Patricia, Norbil, Manuel, José, Nancy, Julio Pon, Eduard, Nathali, Katherine, Roxana, Napoleón, Luis.
A CAPES pelo apoio financiero.

Mais uma vez a todos vocês muito obrigado!!!

Resumo

Neste trabalho, nós estudamos o problema:

$$
\begin{cases} \partial_t u_p - \Delta_p u_p = 0, & (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u_p(0,x) = g(x), & \{t=0\} \times \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{1}
$$

$\infty > p \geq d+1$, no caso em que o dado inicial $u_p(0,x) = g(x)$ é Lipschitz contínuo, não negativo e com suporte compacto. As soluções deste problema fornecem um modelo rudimentar para o "colapso de pilhas de areia com uma configuração inicialmente instável". Tomando o limite de u_p quando $p \to \infty$ obtemos uma solução para o problema de transferência de massa "instantânea" governado pela Teoria de Monge-Kantorovich.

Como exemplo de aplicação estudamos o caso $d = 1$, para o qual obtemos soluções explícitas.

Palavras-chave: p-laplaciano, Teoria de Monge-Kantorovich, Operadores Monótonos.

Abstract

We study the problem:

$$\begin{cases} \partial_t u_p - \Delta_p u_p = 0, & (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \\ u_p(0,x) = g(x), & \{t=0\}\times\mathbb{R}^d \end{cases} \tag{2}$$

$\infty > p \geq d+1$, where the initial data $u_p(0,x) = g(x)$ are Lipschitz continuous, non-negative and it have compact support. Solutions of this problem provide a simplistic model for " collapse of an initially unstable sandpile". We regard the limit u_p when $p \to \infty$ as a solution for instantaneous mass transfer problem governed by Monge-Kantorovich theory.

We study the case d = 1 for which we obtain explicit solutions.

Keywords: p-laplacian, Monge-Kantorovich Theory, Monotone operator theory.

Sumário

0.1 Introdução

O tema deste trabalho é o limite em p, quando p tende a infinito, do semigrupo gerado pelo operador maximal monónotono p-laplaciano num espaço de funções contínuas e com suporte compacto em $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Parte do interesse no problema justifica-se pelos cuidados que tal limite merece, uma vez que, se o parâmetro p é o que varia, já não é mais possível apelar para os métodos de compacidade usualmente associados a esta classe de problemas, os quais se apoiam na imersão compacta de $W_0^{1,p}$ em L^2. Além disso, de acordo com [12], tal limite provê uma solução de um modelo que descreve de forma rudimentar, com base na teoria de transferência de massa de Monge- Kantorovich, a dinâmica do desmoronamento de uma pilha de areia com configuração inicialmente instável.

Abaixo apresentamos uma breve introdução acerca da construção da solução do problema de Monge-Kantorovich de transferência de massa . Seja $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável com suporte compacto, escreveremos $f = f^+ - f^-$, onde f^+ é a densidade de massa que queremos transportar , com o menor custo, para preencher uma escavação (ou densidade de massa) f^-, supondo-se uma condição que chamamos de "condição de balanço de massa", descrita por

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^+ \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f^- \, dy. \tag{3}$$

O problema de Monge consiste basicamente em encontrar a "melhor maneira" de se transportar uma distribuição de massa na outra, o que se traduz em determinar, entre os mapeamentos que transferem a medida $\mu^+ = f^+ \, dx$ para $\mu^- = f^- \, dy$, aquele que minimiza o trabalho total da transferência. Assim, se $r : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é uma aplicação suave e injetiva, preservando orientação, o que se requer é que r transfira μ^+ em μ^-, ou seja

$$f^+(x) = f^-(r(x))|\det \mathrm{D}r(x)|, \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{4}$$

Nós denotaremos por $\mathscr{A}$ a classe admissível de funções suaves, injetivas r satisfazendo (4). Procuramos um plano de transferência de massa $s \in \mathscr{A}$ que seja ótimo no seguinte sentido:

$$I[s] = \min_{r \in \mathscr{A}} I[r],$$

onde

$$I[r] = \int_{\mathbb{R}^d} |x - r(x)| f^+(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} |x - r(x)| d\mu^+.$$

Essa é uma forma do problema de Monge, "deblais" e "remblais", que data do início de 1780. A interpretação física é que nos é dada uma pilha de areia (o "deblais"), com densidade de massa f^+, que desejamos transportar para uma escavação (o "remblais"), com densidade de massa f^-. Para um transporte r, a condição (4) é a conservação de massa. Além disso, como cada partí cula do solo se move uma distância $|x - r(x)|$, podemos interpretar $I[r]$ como o trabalho total envolvido. Consequentemente, estamos procurando uma maneira de reorganizar $\mu^+ = f^+ dx$

para $\mu^- = f^- dy$, com o mínimo de trabalho.

Monge considerou que o plano de transporte $s(x)$ deve ser determinado por um potencial u. Através de argumentos heurísticos geométricos, verificou que se um plano ideal s existe, então existe uma função potencial escalar u tal que

$$\frac{s(x)-x}{|s(x)-x|} = -\nabla u(x) \quad x \in supp(f^+)$$

Na década de 40 do século passado, Kantorovich reformulou o problema de Monge, introduzindo um problema de maximização dual, que comentamos brevemente no Apêncice deste trabalho. Nesta nova abordagem, a questão se reduz a determinar um potencial $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ maximizando

$$\mathscr{K}(u) = \int_{\mathbb{R}^d} u(f^+ - f^-)dz \tag{5}$$

entre todas as funções satisfazendo

$$|\nabla u| \leq 1 \quad \text{q.t.p. } em \ \mathbb{R}^d. \tag{6}$$

É neste ponto que o problema de transferência ótima tangencia uma teoria envolvendo subdiferenciais. Veja que uma função u sujeita a condição (6) maximiza a expressão (5) se e somente se

$$f^+ - f^- \in \partial I_\infty[u]$$

ou equivalentemente,

$$I_\infty[\xi] - I_\infty[u] \geq \int_{\mathbb{R}^d} (f^+ - f^-)(\xi - u)dz, \quad \forall\, \xi \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

onde $\partial I_\infty[u]$ denota a subdiferencial da função convexa

$$I_\infty[w] = \begin{cases} 0, & w \in K, \\ \infty, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

com $K = \{w \in L^2(\mathbb{R}^d) : |\nabla w| \leq 1 \text{ q.t.p}\}$.

De fato, $f^+ - f^- \in \partial I_\infty[u]$ se e somente se $I_\infty(\xi) - I_\infty(u) \geq \langle f^+ - f^-, \xi - u\rangle$ para todo $\xi \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Agora notemos que basta considerarmos $\xi \in K$ pois caso contrário $I_\infty(\xi) = \infty$ e a desigualdade segue trivialmente. Então

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f^+ - f^-)(\xi - u)\; dz \leq 0, \quad \forall \xi \in K \Longleftrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} (f^+ - f^-)\xi \; dz \leq \int_{\mathbb{R}^d} (f^+ - f^-)u \; dz, \quad \forall \xi \in K.$$

Portanto u é um maximizador de $\mathscr{K}(\cdot)$ em (5) se e somente se $f^+ - f^- \in \partial I_\infty[u]$.

Neste trabalho, descrevemos parcialmente o que foi feito em [12], onde os autores apresentam uma estratégia para construir uma aplicação de transporte ótimo, envolvendo soluções de equações diferenciais homogênenas governadas pelo p-laplaciano, conforme descreveremos suscintamente abaixo.

A questão matemática é entender o comportamento da solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \partial_t u_p - \Delta_p u_p = 0, & (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \\ u_p(0,x) = g(x), & \{t=0\}\times\mathbb{R}^d \end{cases} \tag{7}$$

onde $-\Delta_p u_p = -div(|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p)$ é o operador p-laplaciano e ∇u_p denota o gradiente de u_p com relação as variáveis $x = (x_1,\, x_2, \cdots, x_d)$. O termo $|\nabla u_p|^{p-2}$ é entendido como um coeficiente de difusão não linear, que é grande na região $\{|\nabla u_p| > 1+\delta\}$ (para qualquer $\delta > 0$) e é pequeno na região $\{|\nabla u_p| < 1-\delta\}$.

Assumiremos que a função inicial $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ tem suporte compacto, é não negativa e Lipschitz contínua, com

$$\|\nabla g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = L > 1. \tag{8}$$

Tal função g deverá representar nas aplicações a configuração inicial de uma pilha de areia que desmorona. A condição em ∇g está relacionada com a instabilidade inicial da pilha, já que é razoável esperarmos que para tempos muito pequenos, $\|\nabla u_p\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} > 1$, o que garantiria uma rápida movimentação de u_p. Mais especificiamente, esperamos que existam para p grande e tempos pequenos $t > 0$, certas regiões de difusão muito rápida, dentro do qual a solução u_p muda rapidamente, diminuindo assim $|\nabla u_p|$.

A existência e unicidade da solução é estabelecida a diferença de [12], por meio da Teoria de Operadores Monótonos.

Na verdade, provaremos que para cada tempo $t > 0$,

$$u_p(t,\cdot) \longrightarrow u(\cdot) \text{ uniformemente quando } p \longrightarrow \infty, \tag{9}$$

onde u é independente do tempo t e satisfaz

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq 1. \tag{10}$$

Nosso propósito é entender a transformação

$$g \longrightarrow u \tag{11}$$

Assim, estudamos um problema de equações diferenciais parciais de difusão "rápida/lenta", que será interpretado como uma modelagem do colapso de uma pilha de areia de uma configuração inicialmente instável.

Uma vez que $u_p(t,\cdot) \to u$ quando $p \to \infty$ para cada tempo fixo $t > 0$, assumimos a existência de uma curta camada inicial no tempo durante a qual existe um vai-e-vem de transferência de massa e, redimensionando essa camada, introduzimos uma nova função

$$v_p(t,x) = t u_p\left(\frac{t^{p-1}}{p-1}, x\right) \tag{12}$$

$(x \in \mathbb{R}^d, t > 0)$.
Nós deduzimos que $v_p \to v$ quando $p \to \infty$, sendo v a solução da equação de evolução não autônoma

$$\begin{cases} \dfrac{v}{t} - v_t \in \partial I_\infty[v], & (\tau,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ \qquad\qquad v = h, & \{t = \tau\} \times \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{13}$$

onde $\tau = L^{-1}$ e $h = \tau g$.
Da transformação acima, resulta que

$$u = v(\cdot, 1). \tag{14}$$

O texto a seguir está estruturado da seguinte forma: no Capítulo 1 enunciamos diversos resultados de Análise Funcional, Espaços de Sobolev e de Teoria de Operadores Monótonos. No Capítulo 2 estudamos a existência e unicidade de solução da equação parabólica não linear via a Teoria de Operadores Monótonos. No Capítulo 3 obtemos estimativas uniformes independentes de p e descrevemos o limite de u_p, com $p \to \infty$. Finalmente no Capítulo 4, nós abordamos esse problema para o caso $d = 1$, e demonstramos que, se a altura inicial g consiste de vários cones com inclinação $L > 1$, então, u igualmente consiste de cones com inclinação 1. Para demonstrar isso, construiremos explicitamente a solução de (13) sob a forma de cones que se deslocam, cuja altura e centro da base mudam. Anexamos ao final um pequeno apêndice, no qual discorremos muito brevemente sobre a teoria de Monge e a teoria dual de Kantorovich.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos as definições e principais resultados do Análise Funcional que serão usados para compreender os capítulos seguintes. Para mais referências o leitor poderá consultar [4], [25], [5].

1.1 Topologia Fraca e Fraca *

Nesta seção E é um espaço de Banach. Denotaremos por E' o espaço dual topológico de E, e seja $f \in E'$. Denotamos por $\varphi_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ a aplicação definida por $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$. Quando f percorre E' obtemos uma família $\{\varphi_f\}_{f \in E'}$ de aplicações de E em $\mathbb{R}$.

Definição 1.1.1. A topologia fraca em E denotada por $\sigma(E, E')$ é a topologia menos fina em E que torna contínua todas as aplicações $\{\varphi_f\}_{f \in E'}$.

Proposição 1.1.2. *([4, Proposição III.3, p.35]) A topologia fraca $\sigma(E, E')$ é separada.*

Observação 1.1.3. Dada uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em E, denotaremos por $x_n \rightharpoonup x$ a convergência de x_n a x na topologia fraca $\sigma(E, E')$. No caso de convergência forte usaremos a notação, $x_n \longrightarrow x$.

Teorema 1.1.4. *Seja E um espaço de Banach reflexivo. Seja $K \subset E$ um subconjunto convexo, fechado e limitado. Então K é compacto na topologia fraca $\sigma(E, E')$.*

Proposição 1.1.5. *([4, Proposição III.5, p.35]) Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em E. Então:*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(E, E') \Leftrightarrow \langle f, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle \ , \forall\, f \in E'$.

(ii) Se $x_n \longrightarrow x$ fortemente em E, então $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em E.

(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em E, então $\|x_n\|$ é limitada e $\|x\| \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} \|x_n\|$.

(iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em E e se $f_n \longrightarrow f$ fortemente em E' (i.e., $\|f_n - f\|_{E'} \longrightarrow 0$), então $\langle f_n, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle$.

Vamos definir agora uma topologia em E': a topologia fraca $*$ denotada por $\sigma(E', E)$. Para cada $x \in E$ consideramos a aplicação $\varphi_x : E' \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f \mapsto \varphi_x(f) = \langle f, x\rangle$. Quando x percorre E obtém-se uma família aplicações $\{\varphi_x\}_x$ de E' em $\mathbb{R}$.

Definição 1.1.6. A topologia fraca $*$ $\sigma(E', E)$ é a topologia menos fina em E' que faz contínuas a todas as aplicações $\{\varphi_x\}_{x\in E}$.

Observação 1.1.7. Dada uma sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em E' denotaremos com $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ a convergência de f_n a f na topologia fraca $*$, $\sigma(E', E)$.

Proposição 1.1.8. *([4, Proposição III.12, p.40]) Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E'. Então:*

(i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E',\, E) \Leftrightarrow \langle f_n, x\rangle \longrightarrow \langle f,\, x\rangle\ \forall x \in E$.

(ii) Se $f_n \longrightarrow f$, *então* $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(E',\, E'')$. *Se* $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(E',\, E'')$, *então* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E',\, E)$.

(iii) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E',\, E)$ *então* $\|f_n\|$ *é limitado e* $\|f\| \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} \|f_n\|$.

(iv) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E',\, E)$ *e se* $x_n \longrightarrow x$ *fortemente em* E, *então* $\langle f_n,\, x_n\rangle \longrightarrow \langle f,\, x\rangle$.

Teorema 1.1.9. *([4, Teorema III.27, p.50]) Seja E um espaço de Banach reflexivo e seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E. Então existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge na topologia $\sigma(E, E')$.*

A recíproca do teorema anterior é também válida. Mais exatamente tem-se

Teorema 1.1.10. *(Eberlein-Smulian) ([4, Teorema III.28, p.50]) Seja E um espaço de Banach tal que toda sequência limitada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente na topologia $\sigma(E, E')$. Então E é reflexivo.*

Teorema 1.1.11. *(Banach-Alaoglu-Bourbaki)([4, Teorema III.15, P.42]) Seja E um espaço de Banach separável e E' seu espaço dual topológico. Então o conjunto $B_{E'} = \{f \in E' : \|f\| \leq 1\}$ é compacto na topologia fraca $*$ $\sigma(E', E)$.*

1.2 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Em todo o que segue, Ω é um domínio não vazio de $\mathbb{R}^d$.

Definição 1.2.1. Para $p \in [1, \infty[$, dizemos que $f \in L^p(\Omega)$ se f é mensurável e $|f|^p$ é integrável. Munimos este espaço da norma seguinte:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dizemos que $f \in L^\infty(\Omega)$ se f é mensurável e $\exists C \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ q.t.p em Ω. O espaço $L^\infty(\Omega)$ é munido da norma seguinte:

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C : |f(x)| \leq C \text{ q.t.p em } \Omega\}.$$

O espaço $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$ é um espaço de Banach e além disso é um espaço de Hilbert se $p = 2$.

Reflexividade, Separabilidade e Dualidade de $L^p(\Omega)$

Observação 1.2.2. Seja $1 \leq p \leq \infty$; denotaremos por p' o expoente conjugado de p, i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Na seguinte tabela resumimos algumas das principais propriedades dos espaços $L^p(\Omega)$ de acordo com a variável p.

	Reflexivo	Separável	Espaço Dual
$L^p,\ 1 < p < \infty$	SIM	SIM	$L^{p'}$
L^1	NÃO	SIM	L^∞
L^∞	NÃO	NÃO	Contém estritamente a L^1

Teorema 1.2.3. *(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) ([4, Teorema IV.2, p.54]) Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções de $L^1(\Omega)$. Suponhamos que:*

(a) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ q.t.p em Ω,

(b) Existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que para cada n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p em Ω.
Então $f \in L^1(\Omega)$ e $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \longrightarrow 0$.

Lema 1.2.4. *(Lema de Fatou) ([4, Lema IV.1, p.55]) Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ tal que:*

(1) Para cada n, $f_n(x) \geq 0$ q.t.p em Ω.

(2) $\sup_n \int f_n < \infty$. Para cada $x \in \Omega$ defina-se $f(x) = \lim \inf_{n\to\infty} f_n(x)$. Então $f \in L^1(\Omega)$, $\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n$.

Proposição 1.2.5. *(Desigualdade de Minkowski) ([1, 2.8, p.25]) Sejam $1 \leq p < \infty$, e $f, g \in L^p(\Omega)$, então*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Proposição 1.2.6. *(Desigualdade de Hölder[1]) ([4, Proposição IV.6 p.56]) Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ e temos a desigualdade*

$$\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

[1]Ernst Hölder matemático alemão, 1901-1990. Ele trabalhou em Leipzig, e em Johannes Gutenberg-Universitat, Mainz, Alemanha.

Proposição 1.2.7. *(Teorema de Representação de Riesz[2]) ([4, Proposição IV.11, p.61]) Sejam* $1 < p < \infty$, $\varphi \in (L^{p'}(\Omega))'$ *com* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. *Então existe uma única* $u \in L^{p'}(\Omega)$, *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx \quad \forall\, v \in L^p(\Omega) \ e \ \|u\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|v\|_{(L^p(\Omega))'}.$$

Quando $p = \infty$, temos:

Proposição 1.2.8. *([4, Proposição IV.14, p.63]) Seja* $\varphi \in (L^1(\Omega))'$. *Então existe uma única* $u \in L^\infty(\Omega)$, *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)\, dx \quad \forall\, v \in L^1(\Omega) \ e \ \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'}.$$

Teorema 1.2.9. *(Egoroff)([4, Teorema IV.28 p.75]) Suponhamos que* $|\Omega| < \infty$. *Seja* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüencia de funções mensuráveis de* Ω *em* $\mathbb{R}$ *tal que*

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \quad q.t.p. \quad em \quad \Omega \quad (com \quad |f(x)| < \infty \quad q.t.p).$$

Então

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists\ A \subset \Omega \ mensurável \quad tal \quad que$$

$$|\Omega \backslash A| < \epsilon \quad e \quad f_n \longrightarrow f \quad uniformemente \quad em \quad A.$$

Definição 1.2.10. Uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitz[3] contínua se

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|$$

para alguma constante $C > 0$ e para todo $x, y \in \Omega$. Escrevemos

$$Lip[u] := \sup_{x,y\in\Omega_{x\neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|}.$$

Definição 1.2.11. Seja X um espaço de Banach, com norma $\|\cdot\|$, dizemos que uma função $f : [0, T] \longrightarrow X$ é absolutamente contínua se para todo $\epsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que para toda sequência de intervalos $I_i =]\alpha_i, \beta_i[\subset [0, T]$ $(i = 1, \ldots, n)$ dois a dois disjuntos $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\beta_i - \alpha_i) \leq \eta$ implica que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\|f(\alpha_i) - f(\beta_i)\| < \epsilon$.

Teorema 1.2.12. *([3, Teorema 3.1, p.10]) Seja* X *um espaço de Banach reflexivo. Então toda*

[2]Foi F. Riesz quem introduziu os espaços L^p para $1 \leq p \leq \infty$.

[3]Rudolf Otto Sigismund Lipshitz, matemático alemão, 1832-1903. Ele trabalhou em Breslau (então na Alemanha, agora Wroclaw, Polônia) e em Bonn, Alemanha.

função $x : [a, b] \longrightarrow X$ absolutamente contínua é diferenciável q.t.p em $[a, b]$ e

$$x(t) = x(a) + \int_a^t \frac{d}{ds}x(s)\, ds, \quad \forall t \in [a, b]$$

onde $dx/dt : [a, b] \longrightarrow X$ é a derivada de x,i.e.,

$$\frac{d}{dt}x(t) = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{x(t+\epsilon) - x(t)}{\epsilon}$$

Definição 1.2.13. Seja $\mathscr{F}$ uma coleção de funções complexas em um espaço métrico com métrica ρ.
Dizemos que $\mathscr{F}$ é equicontinua se para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ qualquer que seja $f \in \mathscr{F}$ e para todo par $x, y \in X$ com $\rho(x, y) < \delta$. (Em particular, todo $f \in \mathscr{F}$ é então uniformemente contínuo).
Dizemos que $\mathscr{F}$ é pontualmente limitada se para todo $x \in X$ existe $M(x) < \infty$ tal que $|f(x)| < M(x)$ para todo $f \in \mathscr{F}$.

Teorema 1.2.14. *(Arzela[4]-Ascoli[5])[19, Teorema 11.28, p.279] Suponha que $\mathscr{F}$ é uma coleção pontualmente limitada e equicontínua de funções complexas em um espaço métrico X, e que X contém um subconjunto enumerável E. Toda $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathscr{F}$ tem uma subsequência que converge uniformemente em todo subconjunto compacto de X.*

Porém este resultado pode ser modificado da seguinte maneira, de fato a versão mais útil para obter resultados. Pelo teorema anterior obtemos o seguinte

Corolário 1.2.15. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ e $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^l$, uma sequência de funções contínuas em Ω (não precisam ser limitadas) equicontínua e pontualmente limitada. Então existe uma subsequência de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente em cada subconjunto compacto de Ω. Ou seja, existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ e uma função contínua $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^l$ tal que, para cada compacto $E \subset \Omega$, $\{f_{n_k}\} \longrightarrow f$ em $\mathscr{C}(E, \mathbb{R}^l)$.*

1.3 Funções Teste

Definição 1.3.1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aberto. Se $G \subset \mathbb{R}^d$ não vazio, denotaremos por $\overline{G}$ o fecho de G em $\mathbb{R}^d$. Escreveremos $G \subset\subset \mathbb{R}^d$ se $\overline{G} \subset \Omega$ é compacto (isto é, fechado e limitado) subconjunto de $\mathbb{R}^d$.

Definição 1.3.2. Seja $u : \Omega \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função contínua, onde Ω é um aberto, definimos o suporte de u como o conjunto

$$supp(u) = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}^{\Omega}.$$

[4]Cesare Arzelá , matemático italiano, 1847-1912. Ele trabalhou em Palermo, e em Bolonha, Itália.
[5]Giulio Ascoli, matemático italiano, 1843-1896. Ele trabalhou em Milano (Milão) Itália.

Diremos que u tem suporte compacto em Ω se $supp(u) \subset\subset \Omega$.

Ou seja o suporte da função u é o menor subconjunto fechado de Ω tal que $u \equiv 0$ em seu complementar.

Definição 1.3.3. $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ é o espaço vetorial das funções contínuas e infinitamente diferenciáveis em Ω, com suporte compacto em Ω.

$$\mathscr{C}_0^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; u \in \mathscr{C}^\infty(\Omega) \text{ e } supp(u) \text{ é compacto em } \Omega\}$$

Exemplo 1.3.4. Dados $x_0 \in \mathbb{R}^d$, e $r > 0$, denotaremos por $B_r(x_0)$ a bola aberta de centro x_0 e raio r, isto é, $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^d; \|x - x_0\| < r\}$. Se $B_r(x_0) \subset \Omega$, define-se $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{r^2}{\|x - x_0\|^2 - r^2}\right) & se \quad \|x - x_0\| < r, \\ 0 & se \quad \|x - x_0\| \geq r. \end{cases} \tag{1.1}$$

Neste exemplo, verifica-se que $supp(\varphi) = \overline{B_r(x_0)}$ é um compacto e que $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ é não vazio.

1.3.1 Distribuições

Nesta seção apresentamos uma breve revisão de alguns conceitos que serão necessários no desenvolvimento do trabalho.

Definição 1.3.5. Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^d$. Uma sequência $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

i) Existe um conjunto compacto $K \subset\subset \Omega$ tal que $supp(\varphi_j - \varphi) \subset K$ para todo $j = 1, 2, \ldots$, e

ii) $D^\alpha \varphi_j \longrightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α.

O espaço vetorial $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ munido da noção de convergência definida acima, será representado por $\mathscr{D}(\Omega)$ e denominado *espaço das funções testes*, para mais detalhes o leitor pode consultar [15, capítulo 9, p.259].

Observação 1.3.6. Sendo Ω limitado, obtém-se $\mathscr{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, $\forall p$ tal que $1 \leq p < \infty$, com imersão contínua e densa.

Definição 1.3.7. (Distribuição). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um aberto. O espaço dual $\mathscr{D}'(\Omega)$ de $\mathscr{D}(\Omega)$ é chamado espaço de *distribuições* sobre Ω. Ou seja, denomina-se uma *distribuição* a toda forma linear $T : \mathscr{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua com respeito a topologia de $\mathscr{D}(\Omega)$.

$$\mathscr{D}'(\Omega) = \{T : \mathscr{C}_0^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}; T \text{ é linear e contínua}\}.$$

Isto significa que T satisfaz as seguintes condições:

i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$, $\forall \varphi, \psi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ii) T é contínua, isto é, se $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_j \longrightarrow \varphi$ quando $j \longrightarrow \infty$ em $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$, então $T(\varphi_j) \longrightarrow T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$.

O valor da distribuição T na função teste φ será representado por $\langle T, \varphi\rangle$.

Definição 1.3.8. (Limite de Distribuição) Diremos que a sequência $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge para T em $\mathscr{D}'(\Omega)$, quando a sequência $\{\langle T_j, \varphi\rangle\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$ para toda $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, i.e,

$$\lim_{j\longrightarrow\infty} \langle T_j, \varphi\rangle = \langle T_j, \varphi\rangle, \ \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

As distribuições que aparecem com mais freqüência são aquelas definidas a partir de funções localmente integráveis.

Definição 1.3.9. Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função Lebesgue mensurável, dizemos que u é localmente integrável em Ω, quando u é Lebesgue integrável em todo compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$. Em símbolos tem-se

$$u \in L^1_{loc}(\Omega) \Leftrightarrow \int_K |u(x)|dx < \infty \quad para \quad todo \quad compacto \quad K \subset \Omega$$

Proposição 1.3.10. *(Lema de Du Bois Raymond)([16], Proposição 1, p.8) Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *então* $T_u = 0$, *se e somente se,* $u = 0$ *quase sempre em* Ω.

Exemplo 1.3.11. Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e definamos $T_u : \mathscr{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx$$

Nestas condições T_u é uma distribuição sobre Ω. De fato, não é difícil mostrar a linearidade de T_u, pois segue da linearidade da integral. Resta mostrar que T_u é contínua.
Seja uma sequência $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de funções testes sobre Ω convergindo em $\mathscr{D}(\Omega)$ para uma função teste φ, então

$$\begin{aligned} |\langle T_u, \varphi_j\rangle - \langle T_u, \varphi\rangle| = |\langle T_u, \varphi_j - \varphi\rangle| &= \left|\int_\Omega u(x)(\varphi_j - \varphi)(x)dx\right| \\ &\leq \int_\Omega |u(x)(\varphi_j - \varphi)(x)|dx \\ &\leq \sup_K |\varphi_j - \varphi| \int_\Omega |u(x)|dx \to 0. \end{aligned}$$

pois $supp(\varphi_j - \varphi) \subset K$ para algum compacto $K \subset \Omega$ e $\varphi_j \longrightarrow \varphi$ uniformemente em K. A distribuição T_u assim definida é chamada de distribuição "gerada pela função localmente integrável u" e, usando o Lema de Du Bois Raymond, tem-se que T_u é unicamente determinada por u, no seguinte sentido: $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω. Neste sentido identificamos u com a distribuição T_u e o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ das funções localmente integráveis pode ser visto como parte do espaço das distribuições $\mathscr{D}'(\Omega)$. Com essa noção de convergência, $\mathscr{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial topológico e tem-se as seguintes cadeias de imersões contínuas e densas.

$$\mathscr{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{D}'(\Omega) \quad \text{para} \quad 1 \leq p < \infty.$$

Definição 1.3.12. (Derivação em $\mathscr{D}'(\Omega)$) Dada uma distribuição T em $\mathscr{D}'(\Omega)$ e dado um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, definimos $|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$. Define-se a *derivada distribucional* de ordem α de T como sendo a forma linear e contínua $D^\alpha T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi\rangle \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Segue da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Assim as funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições.

Teorema 1.3.13. *Seja $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência tal que $T_j \longrightarrow T$ em $\mathscr{D}'(\Omega)$. Então para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ fixo, temos que $D^\alpha T_j \longrightarrow D^\alpha T$.*

Demonstração. Para toda função $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ temos

$$\langle D^\alpha T_j, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T_j, D^\alpha\varphi\rangle \longrightarrow (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha\varphi\rangle = \langle D^\alpha T, \varphi\rangle.$$

□

1.4 Abertos Regulares

Dado $x \in \mathbb{R}^d$ escrevemos $x = (x', x_d)$ com $x' = (x_1, \cdots, x_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}$, $|x'| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d-1} x_i^2}$. Denotemos por

$$\mathbb{R}^d_+ = \{x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^d : x_d > 0\} \qquad \mathbb{Q} = \{x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^d : |x'| < 1 \text{ e } |x_d| < 1\},$$

$$\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^d_+$$

e

$$\mathbb{Q}_0 = \{x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^d : |x'| < 1 \text{ e } x_d = 0\}.$$

Definição 1.4.1. ([4, Definiçao IX.6, p.181]) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um subconjunto aberto. Dizemos que Ω é de classe $C^m, m \geq 1$ se, para todo $x \in \Gamma = \partial\Omega$, existe uma vizinhança U de x e uma aplicação bijetiva

$$H : \mathbb{Q} \longrightarrow U \text{ tal que } H \in C^m(\overline{\mathbb{Q}}),\ H^{-1} \in C^m(\overline{U}),\ H(\mathbb{Q}_+) = U \cap \Omega,\ H(\mathbb{Q}_0) = U \cap \Gamma.$$

Dizemos que Ω é de classe C^∞ se é de classe C^m para todo m.

1.5 Espaços de Sobolev

Se $u \in L^p(\Omega)$ sabemos que u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, mas não é verdade, em geral, que $D^\alpha u$ seja uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Quando $D^\alpha u$ é definida por uma função de $L^p(\Omega)$ define-se um novo espaço denominado espaço de Sobolev.

Definição 1.5.1. Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^d$. Seja $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então o espaço de Sobolev, denotado por $W^{m,p}(\Omega)$ é definido como

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : \, D^\alpha f \in L^p(\Omega), \; \forall \, \alpha \in \mathbb{N}^n; \, |\alpha| \leq m\}.$$

Onde $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ é o multi-índice com $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ e $D^\alpha f = D^{\alpha_1}_{x_1} D^{\alpha_2}_{x_2} \cdot \cdots D^{\alpha_n}_{x_n} f$. Por convenção, $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. Nesta definição, as derivadas parciais de f são no sentido das distribuições. Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ define-se a norma de u por:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} \sup ess_{x \in \Omega} |D^\alpha u|.$$

Proposição 1.5.2. *([4, Proposição IX.1, p.150]) O espaço de Sobolev*[6] *$W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach, para $1 \leq p \leq \infty$. $W^{m,p}(\Omega)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável para $1 \leq p < \infty$.*

1.6 O Espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$

Definição 1.6.1. Seja $1 \leq p < \infty$. Denotamos por $W_0^{m,p}(\Omega)$ o fecho de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, ou seja

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$$

O espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ munido da norma induzida por $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach sepáravel.

Observação 1.6.2. ([4, Nota 18, p.171]) Como $\mathscr{C}_0^1(\mathbb{R}^d)$ é denso em $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, tem-se

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^d) = W^{1,p}(\mathbb{R}^d).$$

[6] Sergei L'vovich Sobolev, matemático russo, 1908-1989. Ele trabalhou em Leningrado, em Moscou, e em Novosibirsk, na Rússia.

Lema 1.6.3. *([4, Lema IX.5, p.171]) Seja $u \in W^{1,p}(\Omega), 1 \leq p < \infty$, com supp$(u)$ compacto incluído em Ω, então $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Proposição 1.6.4. *([4, Propoposição.2, p.172]) Suponhamos que Ω é de classe C^1. Seja $u \in L^p(\Omega)$ com $1 < p < \infty$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. As seguintes propriedades são equivalentes.*

(i) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

(ii) Existe uma constante C tal que

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in \mathscr{C}_0^1(\mathbb{R}^d) \quad \forall i = 1, 2, \ldots, d.$$

(iii) A função

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & em\ \Omega \\ 0, & em\ \Omega^c \end{cases}$$

pertence a $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Neste caso $\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i} = \widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_i}}$.

Corolário 1.6.5. *(Desigualdade de Poincaré[7]) ([4, Corolário IX.19, p 174]) Suponha que Ω é um aberto limitado de $\mathbb{R}^d$. Então existe uma constante $C(\Omega, p) > 0$ tal que*

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega,\, p) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$. Em particular a expressão $\| \nabla u \|_{L^p(\Omega)}$ é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$, que é equivalente à norma $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Assim temos a norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \equiv \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Teorema 1.6.6. *(Rellich - Kondrachov) ([4, Teorema IX.16, p 169]) Suponhamos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aberto limitado de classe C^1. Tem-se:*

(a) Se $p < d$ então, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, p^*[$ onde $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{d}$,

(b) Se $p = d$ então, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, \infty[$,

(c) Se $p > d$ então, $W^{1,p}(\Omega) \subset \mathscr{C}(\overline{\Omega})$,
com injeções compactas.

Em particular segue do Teorema de Rellich[8] - Kondrachov[9] que $W^{1,p}(\Omega)$ está compactamente imerso em $L^p(\Omega)$ para todo p. Denotaremos por $W^{-m,q}(\Omega)$ o espaço dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p <$

[7]Jules Henri Poincaré, matemático francês, 1854-1912. Ele trabalhou em Paris, France. No Institut Henri Poincaré (IHP), dedicado à matemática e física teórica, parte do Université Paris VI (Pierre et Marie Curie), Paris, France.

[8]Franz Rellich, matemático alemão, 1906-1955. Ele trabalhou na Georg- August-Universitat, Göttingen, na Alemanha.

[9]Vladimir Iosifovich Kondrasov, matemático russo 1909-1971

∞ e q satisfazendo a relação $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

• Se o aberto $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ é limitado temos:

$$W_0^{1,p}(\Omega)\subseteq L^2(\Omega)\subseteq W^{-1,q}(\Omega)\quad se\quad \frac{2d}{d+2}\leq p<\infty,$$

com imersões contínuas e densas.

• Se o aberto $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ não é limitado temos

$$W_0^{1,p}(\Omega)\subseteq L^2(\Omega)\subseteq W^{-1,q}(\Omega)\quad se\quad \frac{2d}{d+2}\leq p\leq 2.$$

Teorema 1.6.7. *(Caracterização de $W^{1,\infty}(\Omega)$) ([10, Teorema 4, sec 5.8, p 279]) Seja $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ um aberto limitado, com $\partial\Omega$ de classe C^1. Então $u:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ é Lipschitz contínua se e somente se $u\in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$.*

Definição 1.6.8. (Tripla de Gelfand[10] - Hilbert) Nós chamaremos uma Tripla de Evolução "$V\subseteq H\subseteq V'$" se verifica-se:

(i) V é um espaço real, separável, reflexivo.

(ii) H é um espaço de Hilbert, separável real.

(iii) A imersão $V\subseteq H$ é contínua , i.e., $\parallel v\parallel_H\leq C\parallel v\parallel_V$, $\forall\, v\in V$ e V é denso em H.

Seja Ω uma região limitada de $\mathbb{R}^d$ com $d\geq 1$, $V=W_0^{m,p}(\Omega)$, $H=L^2(\Omega)$ com $2\leq p<\infty$ e $m\geq 1$. Então $V\subseteq H\subseteq V'$ é uma tripla de evolução.

Teorema 1.6.9. *(Fórmula Generalizada de Green)([7], Teorema 3.43, p.138) Seja Ω um aberto de classe C^1 em $\mathbb{R}^d$. Sejam U em $W^{1,p}(\Omega)$, e $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$. Então :*

$$\int_\Omega \nabla U(x)\varphi(x)\,dx+\int_\Omega U(x)div\,\varphi(x)\,dx=\int_{\partial\Omega}\gamma_0 U(s)\varphi(s)\overrightarrow{n}(s)\,d\sigma(s),$$

onde $d\sigma$ é a densidade superficial em $\partial\Omega$ e $\overrightarrow{n}$ é a normal exterior unitária a $\partial\Omega$, os termos $\nabla U(x)\varphi(x)$ e $\varphi(s)\overrightarrow{n}(s)$ sao produtos escalares de vetores em $\mathbb{R}^d$ e a divergência de φ é definida por $div\,\varphi(x)=\sum_{i=1}^d\partial_i(\varphi_i)(x)$.

1.7 Funções com valores em um espaço de Banach

Seja I um intervalo, (finito ou infinito) em $\mathbb{R}$. Descreveremos a integral para funções que tomam valores em um espaço de Banach E e com domínio I. Para mais detalhes o leitor pode consultar [17], [24].

Começamos com a definição de integral de Bochner. Seja $\mathscr{M}$ a classe de todos os conjuntos Lebesgue mensuráveis em I, e denotemos a medida de Lebesgue de $A\in\mathscr{M}$ por $m(A)$.

[10]Izrail Moiseevic Gelfand, nascido na Rússia matemático, nascido em 1913. ele recebeu o Prêmio Wolf em 1978. Ele trabalhou em Moscou, na Rússia e na Rutgers University, Piscataway, NJ.

Definição 1.7.1. Uma função $s : I \longrightarrow E$ é chamada função simples se existe um número enumerável de conjuntos $A_n \in \mathscr{M}(n = 1, 2, \ldots)$ mutuamente disjuntos tais que $I = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ e s é constante em cada A_n.

Definição 1.7.2. Dada a função $s : I \longrightarrow E$:

(i) Se existe uma sequência de funções simples $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $s(t) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} s_n(t)$ q.t.p $t \in I$, então diremos que $s(t)$ é fortemente mensurável. Conseqüentemente, uma função simples é fortemente mensurável.

(ii) Dado $s : I \longrightarrow E$, se $s'(s(t))$ é uma função real ou complexa mensurável para toda $s' \in E'$ (espaço dual de E), então dizemos que s é fracamente mensurável.

Segue da definição que se $s(t)$ é fortemente mensurável, então s é fracamente mensurável e $\|s(t)\|$ é uma função real mensurável.

Teorema 1.7.3. *Seja E um espaço de Banach separável. Então, uma condição necessária e suficiente para $s : I \longrightarrow E$ ser fortemente mensurável é que s seja fracamente mensurável.*

Observação 1.7.4. A combinação linear de funções fortemente mensuráveis é fortemente mensurável, e o limite fraco de uma sequência de funções fortemente mensuráveis é mensurável.

Definição 1.7.5. Seja $s : I \longrightarrow E$ uma função simples. Então pela definição existe uma sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ e uma sequência de conjuntos mensuráveis mutuamente disjuntos A_n tais que $s(t) = s_n$ $(t \in A_n)$ e $I = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Se $\|s(t)\|$ é Lebesgue integrável em I, dizemos que s é Bochner integrável em I e definimos a integral de Bochner por

$$\int_I s(t)dm = \sum_{n=1}^{\infty} s_n m(A_n).$$

Definição 1.7.6. Seja $s : I \longrightarrow E$. Se existir uma sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funções simples Bochner integráveis em I tal que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} s_n(t) = s(t) \text{ q.t.p t}$$

e

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_I \|s_n(t) - s(t)\| dm = 0,$$

então dizemos que s é Bochner integrável em I. Definimos a integral de Bochner de s por

$$\int_I s(t)dm = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_I s_n(t)dm.$$

Teorema 1.7.7. *Uma condição necessária e suficiente para $s : I \longrightarrow E$ ser Bochner integrável em I é s ser fortemente mensurável e também $\|s(t)\|$ ser Lebesgue integrável em I.*

Denotamos o conjunto de todas as funções Bochner integráveis em I por $L^1(I; E)$. Os seguintes items valem como no caso Lebesgue integrável:

(i) $\left\|\int_I s(t)\,dm\right\| \leq \int_I \|s(t)\|\,dm$.

(ii) Se $s_i \in L^1(I;E)$ e $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), com $i = 1, 2, \ldots$, então $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i s_i \in L^1(I;E)$ e

$$\int_I \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i s_i(t)\,dm = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i \int_I s_i(t)\,dm.$$

(iii) (Teorema Convergência Dominada) Seja $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $L^1(I;E)$. Suponha que:

a. $s_n(t) \longrightarrow s(t)$ q.t.p I,

b. Existe uma função Lebesgue integrável g tal que para cada n, $\|s_n(t)\| \leq g(t)$ q.t.p em I. Então $s \in L^1(I;E)$ e $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_I s_n(t)dm = \int_I s(t)dm$.

(iv) Definimos $\|s\|_{L^1(I;E)} = \int_I \|s(t)\|\,dm$ para $s \in L^1(I;E)$. Então, $L^1(I;E)$ é um espaço de Banach com norma $\|s\|_{L^1(I;E)}$.

(v) Seja $s \in L^1(I;E)$; então para t q.t.p em I,

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|s(\tau) - s(t)\|\,d\tau = 0$$

e logo

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} s(\tau)\,d\tau = s(t)$$

1.8 O Espaço $L^p(I;E)$

Definição 1.8.1. Seja E espaço de Banach, I intervalo de $\mathbb{R}$ e $p \in [1,\infty]$. Denotaremos por $L^p(I;E)$ o conjunto de (classes de equivalência de) funções mensuráveis $f : I \longrightarrow E$ tais que $t \mapsto \|f(t)\|_E$ pertence a $L^p(I)$. Para $f \in L^p(I;E)$, definimos a norma

$$\|f\|_{L^p(I;E)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_I \|f\|_E^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}, & se\ p < \infty; \\ supess_{t\in I}\|f\|_E, & se\ p = \infty. \end{cases}$$

Teorema 1.8.2. *([8, Teorema 8.20.5, p.607]) Se $1 \leq p < \infty$ e se E é reflexivo ou se E' é separável, onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, então $(L^p(I;E))' \equiv L^{p'}(I;E')$. Além disso, se $1 < p < \infty$ e se E é reflexivo, então $L^p(I;E)$ é reflexivo.*

Definição 1.8.3. Denotemos por $\mathscr{C}(I;E)$ o conjunto de funções contínuas limitadas de I em E,

$$\mathscr{C}(I;E) = \{f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E; f \text{ contínua limitada }\}$$

munido da seguinte norma

$$\|f\|_{\mathscr{C}(I;E)} = \sup_{t\in I} \|f(t)\|_E.$$

Lema 1.8.4. *([21, Lema 3.1, p.118]) Seja $F : G \times (0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e suponhamos que $F(\cdot,t) \in L^1(G)$ para $t \in [0,T]$, $F(x,\cdot)$ é absolutamente contínua q.t.p $x \in G$ e $\partial_t F \in L^1(G \times (0,T))$. Então a função $t \longmapsto \int_G F(t,x)\,dx$ é absolutamente contínua e*

$$\frac{d}{dt}\int_G F(t,x)\,dx = \int_G \partial_t F(t,x)\,dx.$$

Demonstração. Pelo Teorema de Fubini temos

$$\int_0^t \left(\int_G \partial_t F(x,\tau)\,dx\right) d\tau = \int_G \left(\int_0^t \partial_t F(x,\tau)\,d\tau\right) dx = \int_G (F(t,x) - F(x,0))\,dx$$

e assim o resultado segue imediatamente. $\square$

1.9 Distribuições Vetoriais

Definição 1.9.1. ([13, Definição 1.4.25, p.10]) Seja E um espaço de Banach, I intervalo de $\mathbb{R}$. Denotaremos por $\mathscr{D}'(I;E)$ o espaço linear de funções contínuas de $\mathscr{D}(I)$ com valores em E, denominado espaço das distribuições vetoriais sobre I com valores em E:

$$\mathscr{D}'(I;E) = \{T : \mathscr{D}(I) \longrightarrow E, T \text{ linear contínua }\}$$

isto significa que T satisfaz as seguintes condições:

(i) A função $\varphi \in \mathscr{D}(I) \mapsto \langle T,\varphi\rangle_{\mathscr{D}'(I;E),\mathscr{D}(I)}$ é linear,

(ii) Para toda sequência $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}(I)$ tal que $\varphi_j \longrightarrow \varphi$ em $\mathscr{D}(I)$, então $\langle T,\varphi_j\rangle \longrightarrow \langle T,\varphi\rangle$ em E.

Definição 1.9.2. Uma sequência $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}'(I;E)$ converge no sentido das distribuições para $T \in \mathscr{D}'(I;E)$ se, para todo $\varphi \in \mathscr{D}(I)$, se cumpre:

$$\langle T_j,\varphi\rangle_{\mathscr{D}'(I;E),\mathscr{D}(I)} \longrightarrow \langle T,\varphi\rangle_{\mathscr{D}'(I;E),\mathscr{D}(I)} \quad em \quad E.$$

Definição 1.9.3. ([13, Definição 1.4.29, p.10]) A derivada de uma distribuição $T \in \mathscr{D}'(I;E)$ é a distribuição $T' \in \mathscr{D}'(I;E)$ definida por $\langle T',\varphi\rangle_{\mathscr{D}'(I;E),\mathscr{D}(I)} = -\langle T,\varphi'\rangle_{\mathscr{D}'(I;E),\mathscr{D}(I)}$.

1.10 Operadores Maximais Monótonos em Espaços de Hilbert

1.11 Introdução

A Teoria de Operadores Monótonos tem muitas aplicações em várias áreas da matemática, por exemplo, as Equações Diferencias Parciais e a Teoria de Otimização. Nesta seção introduziremos os principais elementos desta teoria e seguiremos o livro de H. Brezis, [5].
Seja M um conjunto dotado de uma relação de ordem $\preceq$. Seja N subconjunto de M.

Definição 1.11.1. Dizemos que um subconjunto $N \subset M$ é totalmente ordenado se $\forall\ a, b \in N$ vale ao menos, uma das duas relações seguintes:

$$a \preceq b \quad ou \quad b \preceq a.$$

Definição 1.11.2. Dizemos que $c \in M$ é uma cota superior de N se $\forall\ a \in N$, $a \preceq c$.

Definição 1.11.3. Dizemos que o elemento $m \in M$ é um elemento maximal de M se $x \in M$ e $m \preceq x$, implica necessariamente $m = x$.

Definição 1.11.4. Dizemos que o conjunto M é indutivo se todo subconjunto totalmente ordenado de M admite uma cota superior.

Lema 1.11.5. *(Kuratowski-Zorn[11]) Todo conjunto ordenado, indutivo e não vazio admite um elemento maximal.*

Definição 1.11.6. Dizemos que uma função $\varphi : H \longrightarrow (-\infty, \infty]$ é semicontínua inferiormente (s.c.i), se $\forall x \in H$ tem-se

$$\varphi(x) \leq \liminf_{y \longrightarrow x} \varphi(y).$$

1.12 Operadores Monótonos

Definição 1.12.1. Seja H um espaço de Hilbert[12] sobre $\mathbb{R}$ munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Um operador multívoco A em H, é uma aplicação $A : H \longrightarrow \mathscr{P}(H)$. O domínio de A é o conjunto $D(A) = \{x \in H : Ax \neq \emptyset\}$ e a imagem de A é o conjunto $R(A) = \bigcup\limits_{x \in H} Ax$.
Identificaremos A com seu gráfico em $H \times H$, isto é, $A = \{(x, y) : y \in Ax\}$. O operador A^{-1} é aquele cujo gráfico é simétrico ao de A, isto é, $y \in A^{-1}x \Leftrightarrow x \in Ay$. Evidentemente $R(A) = D(A^{-1})$. Se para todo $x \in H$ o conjunto Ax contém no máximo um elemento, dizemos que A é unívoco.

[11] Max August ZORN, matemático alemão, 1906-1993. Ele trabalhou em UCLA (Universidade da Califórnia em Los Angeles), Los Angeles, CA, e na Universidade de Indiana, Bloomington.

[12] David Hilbert, matemático alemão, 1862-1943. Ele trabalhou na Königsberg (então na Alemanha, atualmente Kaliningrado, Rússia) e no Göotingen na Alemanha. O espaço de Hilbert termo cunhado por seu aluno Von Neumann, quando trabalhada na fundação matemática da mecânica quântica

O conjunto dos operadores de H é parcialmente ordenado pela inclusão dos gráficos: $A \subset B$ se e somente se para todo $x \in H$ $Ax \subset Bx$.

Definição 1.12.2. Dizemos que um operador A em H é monótono se para todo x_1, $x_2 \in D(A)$, dados $y_1 \in Ax_1$ e $y_2 \in Ax_2$, $\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0$.

Proposição 1.12.3. *O conjunto de operadores monótonos é indutivo e não vazio, por relação de inclusão de gráficos.*

Demonstração. i) Seja $Z = \{A_i\}_{i \in I}$ um subconjunto totalmente ordenado de operadores monótonos. Provemos que $A = \cup_{i \in I} A_i$ é um operador monótono. Sejam

$$y_1 \in Ax_1 \Longrightarrow y_1 \in A_i x_1, \quad para \quad algum \quad i \in I,$$

$$y_2 \in Ax_2 \Longrightarrow y_2 \in A_j x_2, \quad para \quad algum \quad j \in I.$$

Como Z é totalmente ordenado, $A_i \subset A_j$ (por exemplo), logo:

$$y_1 \in A_j x_1 \qquad y_2 \in A_j x_2.$$

Portanto, $\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0$ pois A_j é monótono. Evidentemente, A é um majorante de Z.
ii) Z é não vazio, pois o operador identidade é monótono. De fato,

$$y_1 \in Ix_1 \Longrightarrow y_1 = x_1,$$

$$y_2 \in Ix_2 \Longrightarrow y_2 = x_2,$$

portanto, $\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle = \|x_1 - x_2\|^2 \geq 0$. □

Exemplo 1.12.4. Seja φ uma função convexa e própria sobre H, ou seja, uma aplicação de H em $]-\infty, \infty]$, tal que $\varphi \not\equiv +\infty$ e

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y),$$

para todo $x, y \in H$ e para todo $t \in (0, 1)$. O domínio da função $\varphi, D(\varphi)$, é dado por $D(\varphi) = \{x \in H : \varphi(x) < \infty\}$. A subdiferencial $\partial\varphi$ de φ, definida por

$$y \in \partial\varphi(x) \;\Leftrightarrow\; \varphi(\xi) \geq \varphi(x) + \langle y, \xi - x \rangle, \text{ para todo } \xi \in H.$$

Se $\partial\varphi$ é subdiferencial de uma função convexa φ, dados $y_1 \in \partial\varphi(x_1)$ e $y_2 \in \partial\varphi(x_2)$, então

$$\varphi(x_1) \geq \varphi(x_2) + \langle y_2, x_1 - x_2 \rangle$$

$$\varphi(x_2) \geq \varphi(x_1) + \langle y_1, x_2 - x_1 \rangle$$

somando as desigualdades temos que,

$$\langle y_2 - y_1, x_2 - x_1\rangle \geq 0,$$

portanto $\partial\varphi$ é um operador monótono em H.

Observação 1.12.5. Note que $\partial\varphi$ é um operador multívoco, em relação a $H\times H$, e evidentemente $D(\partial\varphi) \subset D(\varphi)$.

Proposição 1.12.6. *Se $u \in H$ é tal que $\varphi(u) = \inf_{v\in H}\varphi(v)$, então $0 \in \partial\varphi(u)$, e reciprocamente.*

Demonstração. $\varphi(u) = \inf_{v\in H}\varphi(v)$ se e somente se $\varphi(u) \leq \varphi(\xi)$, $\forall\xi \in H$ e por, conseguinte,

$$\varphi(\xi) - \varphi(u) \geq 0, \forall\xi \in H,$$
$$\varphi(\xi) - \varphi(u) \geq \langle 0, \xi - u\rangle = 0, \forall\xi \in H,$$

logo $0 \in \partial\varphi(u)$. □

Exemplo 1.12.7. Seja H um espaço de Hilbert real e $C \subseteq H$ um conjunto não vazio, fechado, convexo, definimos a função indicatriz de C

$$I_\infty(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \in C, \\ \infty, \text{ se } x \in H \setminus C. \end{cases}$$

É claro que a função indicatriz é convexa se somente se C é convexo. Por suporte funcional para C no ponto x entendemos um funcional x' em H tal que

$$\langle x', y - x\rangle_H \leq 0, \forall y \in C. \tag{1.2}$$

A equação

$$\langle x', y - x\rangle_H = 0, y \in H, \tag{1.3}$$

descreve um hiperplano fechado P em H passando por x. Assim, a relação (1.2) significa que o conjunto C encontra-se em um lado do hiperplano P. De acordo com a definição de subdiferencial, obtemos:

$$\partial I_\infty(x) = \begin{cases} \{x' \in H : \langle x', y - x\rangle \leq 0, \forall\, y \in C\}, & \text{se} \quad x \in C, \\ \emptyset, & \text{se} \quad x \in H \setminus C \end{cases}$$

e $D(\partial I_\infty) = C$.
De fato, seja $x \in C$, se temos $y \in C$, essa desigualdade é nada mais do que (1.2). Por outro lado, se $x \in H \setminus C$, então $I_\infty(x) = \infty$ e, portanto, $\partial I_\infty(x) = \emptyset$ pela definição. E temos as seguintes

implicações:

$$\begin{cases} x \in C \Rightarrow 0 \in \partial I_\infty(x), \\ x \in int\, C \Rightarrow \partial I_\infty(x) = \{0\}. \end{cases} \tag{1.4}$$

De fato, para $x \in C$ a desigualdade $\langle x', y - x\rangle \leq 0, \forall y \in H$ é cumprida quando $x' = 0$. Se $x \in intC$, então segue-se que $x' \in \partial I_\infty(x)$, e que $x' = 0$. Como $x \in intC$ há um $r \in \mathbb{R}^+$ e $B_r(x) \subset C$. Assim, temos para todos $w \in H$ com $\|w\| = 1$, que $y := x + \frac{r}{2}w \in C$. A partir de (1.2) segue então

$$0 \leq \langle x', x - (x + \frac{r}{2}w)\rangle = -\frac{r}{2}\langle x', w\rangle.$$

Substituímos w por$-w$ obtemos $0 \leq \frac{r}{2}\langle x', w\rangle$. Segue-se que $0 = \langle x', w\rangle$ para todo $w \in H$ com $\|w\| = 1$ e, portanto, $x' = 0$.

Definição 1.12.8. O operador monótono A de H é maximal monótono se ele não está propriamente contido em qualquer outro operador monótono de H. Em outras palavras, A é maximal monótono se e somente se A é monótono e, se $(x, y) \in H \times H$ for tal que

$$\langle y - \eta,\, x - \xi\rangle \geq 0$$

para todo $(\xi, \eta) \in A$, então $(x, y) \in A$.

Exemplo 1.12.9. Todo operador monótono hemicontínuo é maximal monótono.
Lembremos que um operador $A : H \longrightarrow H$ é hemicontínuo se $D(A) = H$, unívoco, e $\forall x, \xi \in H$

$$A(x + t\xi) \longrightarrow Ax \quad quando \quad t \longrightarrow 0.$$

De fato, seja $(x, y) \in H \times H$ tal que :

$$\langle A\xi - y, \xi - x\rangle \geq 0 \ ,\forall \xi \in D(A) = H$$

Então :

$$\forall \xi \in H, \forall t \in (0, 1), \langle A[x + t(y - Ax)] - y, x + t(y - Ax) - x\rangle \geq 0.$$

obtemos que

$$\langle A[x + t(y - Ax)] - y, y - Ax\rangle \geq 0,$$

como A é hemicontínuo, tomando limite quando $t \longrightarrow 0$: $\langle Ax - y, y - Ax\rangle \geq 0$.
Portanto $y = Ax$.

Lema 1.12.10. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona crescente contínua, então f é maximal monótona.*

Demonstração. Seja $(u, u^*) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e suponha que para todo $v \in \mathbb{R}$

$$(u^* - f(v))(u - v) \geq 0,$$

temos que mostrar que $u^* = f(u)$, $u \in \mathbb{R} = D(f)$. Para $u > v$ temos que $u^* - f(u) \geq 0$, ou seja $u^* \geq f(v)$. Escolhemos agora $v = u_n$, uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $u_n \uparrow u$, pela continuidade de f temos $u^* \geq f(u)$. Para $u < v$ segue-se $u^* \leq f(v)$, escolhemos a sequência $w = u_n$, $u_n \downarrow u$, pela continuidade $u^* \geq f(u)$, i.e, $u^* = f(u)$. $\square$

Para um contra exemplo, considere a função monótona crescente descontínua

$$f(x) = \begin{cases} x,\ x \leq 0, \\ x+1,\ x > 0, \end{cases}$$

f não é maximal monótona. Para provar isso, escolhemos $(u, u^*) = (0, 1/2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e mostramos que vale para todo $v \in \mathbb{R}$, $-(\frac{1}{2} - f(v))v \geq 0$. No caso $v > 0$, temos $-(\frac{1}{2}-(v+1))v = (v+\frac{1}{2}) \geq 0$, e no caso $v \leq 0$ temos $(v - \frac{1}{2})v \geq 0$ mas $f(0) = 0 \neq 1/2$.

Uma importante caracterização de operadores maximais monótonos é a seguinte proposição:

Proposição 1.12.11. *([5, Propoposição 2.2, p.23]) Seja A um operador de H. As seguintes propriedades são equivalentes:*

1. *A é maximal monótono.*
2. *A é monótono e $R(I + A) = H$.*
3. *Para todo $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)^{-1}$ é uma contração definida sobre todo H.*

Exemplo 1.12.12. ([5, Exemplo 2.3.3, p.25]) Seja φ uma função convexa e própria sobre H. Se φ é semi-contínua inferiormente então $\partial\varphi$ é maximal monótona.

Exemplo 1.12.13. [5, Exemplo 2.3.7, p.26] Seja V um espaço de Banach reflexivo e V' seu espaço dual com $V \subseteq H \subseteq V'$ injeções contínuas é densas. Seja $A : V \longrightarrow V'$ um operador unívoco definido em todo V, hemicontínuo é coercivo. Então o operador A_H, realização de A a H definido por

$$D(A_H) = \{v \in V : Av \in H\}$$

e $A_H = A$ é um operador maximal monótono em H.

Exemplo 1.12.14. Seja $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona. Então é contínua, exceto em um número enumerável de pontos. Seja $F^-(x) = \lim_{y\longrightarrow x^-} F(y)$, $\quad F^+(x) = \lim_{y\longrightarrow x^+} F(y)$, assim $F^+ = F^-$ q.t.p em $dom(F)$. Definimos então

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} F^-(s)\,ds = \int_{x_0}^{x} F^+(s)\,ds, \tag{1.5}$$

onde $x_0 \in dom(F) \subset dom(\varphi) \subset \mathbb{R}$. Então a subdiferencial é caracterizada por

$$y \in \partial\varphi(x) \Leftrightarrow y(\xi - x) \leq \int_{x}^{\xi} F^-(s)\,ds \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Para ver isto, note primeiro que se $y \leq F^+(x)$ então $x \leq \xi$ implica $y(\xi - x) \leq \int_x^\xi F^+(s)\, ds$, e se $y \geq F^-(x)$ então $\xi \leq x$ implica $\int_\xi^x F^-(s)\, ds \leq y(x-\xi)$, o qual implica o acima.
Por isso, $y \in [F^-(x), F^+(x)]$ implica $y \in \partial\varphi(x)$. Reciprocamente, desde que F^- é contínua a esquerda e F^+ é contínua a direita, assim

$$\partial\varphi(x) = [F^-(x), F^+(x)] \quad x \in \mathbb{R}.$$

Proposição 1.12.15. *([5, Proposição 2.11, p.39]). Seja φ uma função s.c.i., própria. Seja $A = \partial\varphi$, então $D(A) \subset D(\varphi) \subset \overline{D(\varphi)} = \overline{D(A)}$.*

Definição 1.12.16. Seja $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ onde U é um aberto de um espaço de Banach X. O funcional φ é Gâteaux-diferenciável em $u \in U$ se existe $f \in X'$, tal que para todo $h \in X$,

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\varphi(u+th) - \varphi(u) - \langle f, th\rangle}{t} = 0.$$

Se o limite existe, ele é único e a derivada de Gâteaux em u será denotada $\varphi'(u)$, dada por

$$\langle \varphi'(u), h\rangle := \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t}[\varphi(u+th) - \varphi(u)].$$

O funcional φ tem derivada de Fréchet $f \in X'$ em u e

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{\|h\|}[\varphi(u+th) - \varphi(u) - \langle f, h\rangle] = 0.$$

O funcional $\varphi \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ se φ possui derivada de Fréchet e esta é contínua em U.

Exemplo 1.12.17. Mostremos que a função

$$\begin{aligned} J :& W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & u \mapsto \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u(x)|^p \, dx \end{aligned}$$

é Gâteaux-diferenciável com:

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

De fato, seja $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |t| < 1$ e $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Definimos a função :

$$\begin{aligned} \varphi :& [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \varphi(s) = \frac{1}{p}|\nabla u + s \cdot t\nabla v|^p. \end{aligned}$$

Note que, pela Regra da Cadeia, temos

$$\varphi'(s) = |\nabla u + s \cdot t \nabla v|^{p-2}(\nabla u + s \cdot t\nabla v)t\nabla v.$$

Como φ é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$, então pelo Teorema do Valor Médio existe $\theta \in (0,1)$ tal que:

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)$$

i,e.,

$$\frac{1}{p}|\nabla u + t\nabla v|^p - \frac{1}{p}|\nabla u|^p = t|\nabla u + \theta t\nabla v|^{p-2}(\nabla u + \theta t\nabla v)\nabla v.$$

Assim,

$$\frac{1}{t}\left(\frac{1}{p}|\nabla u + t\nabla v|^p - \frac{1}{p}|\nabla u|^p\right) = |\nabla u + \theta t\nabla v|^{p-2}(\nabla u + \theta t\nabla v)\nabla v.$$

Logo,

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{1}{t}\left(\frac{1}{p}|\nabla u + t\nabla v|^p - \frac{1}{p}|\nabla u|^p\right) = |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v. \quad q.t.p \quad em \quad \Omega.$$

e

$$\left|\frac{1}{t}\left(\frac{1}{p}|\nabla u + t\nabla v|^p - \frac{1}{p}|\nabla u|^p\right)\right| \leq \left(|\nabla u| + |\nabla v|\right)^{p-1}|\nabla v|,$$

onde $\left(|\nabla u| + |\nabla v|\right)^{p-1}|\nabla v| \in L^1(\Omega)$. Pelo Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\int_\Omega \frac{1}{t}\left(\frac{1}{p}|\nabla u + t\nabla v|^p - \frac{1}{p}|\nabla u|^p\right)dx = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v\, dx.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} J'(u)(v) &= \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{J(u+tv) - J(u)}{t} \\ &= \lim_{t\longrightarrow 0}\int_\Omega \frac{1}{t}\left(\frac{1}{p}|\nabla u + t\nabla v|^p - \frac{1}{p}|\nabla u|^p\right)dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v\, dx. \end{aligned}$$

i.e.,

$$J'(u)(v) = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v\, dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1.6}$$

Proposição 1.12.18. *Seja $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional no espaço de Hilbert H. Então:*

(a) Se f é convexa e se é Gâteaux-diferenciável em u então

$$\partial f(u) = \{f'(u)\}. \tag{1.7}$$

(b) Inversamente, se $\partial f : H \longrightarrow H' \cong H$ é unívoco e hemicontínuo, então f é Gâteaux-diferenciável em H e (1.7) é valido para todo $u \in H$.

Demonstração. (a) Seja $h \in H$. Definimos $\varphi(t) = f(u+th)$, $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função convexa, devido a convexidade de f, $\forall \tau \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}\varphi((1-\tau)t+\tau s) &= f(((1-\tau)+\tau)u+(1-\tau)th+\tau sh)\\ &\leq (1-\tau)f(u+th)+\tau f(u+sh)=(1-\tau)\varphi(t)+\tau\varphi(s)\end{aligned}$$

como f é Gâteaux diferenciável , $\varphi'(0)$ existe. Pela convexidade de φ, temos

$$\varphi'(0)=\lim_{t\longrightarrow 0^+}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\leq \lim_{t\longrightarrow 0^+}\frac{t\varphi(1)+(1-t)\varphi(0)-\varphi(0)}{t}=\varphi(1)-\varphi(0),$$

usando a definição de f ser Gâteaux diferenciável, isto é $\forall h \in H$

$$f(u+h)-f(u)\geq \langle f'(u),\, h\rangle,\, \forall\, h\in H,$$

isto é, $f'(u)\in \partial f(u)$.
Reciprocamente, se $u^*\in\partial f(u)$, então

$$f(u+th)-f(u)\geq \langle u^*,\, th\rangle,\, \forall\, th\in H,\, t>0,$$

que podemos reescrever como

$$\frac{f(u+th)-f(u)}{t}\geq \langle u^*,h\rangle \;\; \forall h\in H$$

tomando $t\longrightarrow 0^+$

$$\langle f'(u),\, h\rangle\geq\langle u^*,\, h\rangle,\, \forall\, h\in H.$$

Substituimos h por $-h$, e demonstramos que $u^*=f'(u)$. Segue-se $\partial f(u)=\{f'(u)\}$.
(b) Seja $t>0$ e $h\in H$

$$\begin{aligned}f(u+th)-f(u)&\geq\langle\partial f(u),\, th\rangle,\\ f(u)-f(u+th)&\geq -\langle\partial f(u+th),\, th\rangle.\end{aligned}$$

Obtemos

$$\begin{aligned}\langle\partial f(u),\, h\rangle &\leq \liminf_{t\to 0}\frac{f(u+th)-f(u)}{t}\\ &\leq \limsup_{t\to 0}\frac{f(u+th)-f(u)}{t}\\ &\leq \langle\partial f(u),h\rangle,\end{aligned}$$

para todo $h\in H$, i.e., $f'(u)=\partial f(u)$. □

1.13 O Operador não linear p-Laplaciano

Nesta seção, apresentaremos um operador muito importante no estudo de equações de evolução, que surge em numerosos domínios em ciências experimentais: problemas não lineares de reação-difusão, dinâmica de populações, fluidos não newtonianos, glaciologia, etc.

Se V é um espaço de Banach reflexivo, V' o seu espaço dual, e H um espaço de Hilbert, com $V \subseteq H \subseteq V'$ imersões contínuas e densas, $A : V \longrightarrow V'$ é um operador monótono, unívoco, definido em todo V, hemicontínuo e coercivo, então o operador

$$\begin{aligned} D(A_H) &= \{u \in V : Au \in H\}, \\ A_H(u) &= A(u), \ u \in D(A_H). \end{aligned}$$

é maximal monótono em H, exemplo 1.12.13. Com este resultado é possível mostrar que, quando multiplicado por (-1), o operador p-laplaciano, é maximal monótono em $L^2(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ é um domínio limitado com fronteira suave, $p > 2$.
Consideremos $V = W_0^{1,p}(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, $p > 2$. Então V é um espaço de Banach reflexivo, com espaço dual $V' = W^{-1,q}(\Omega)$ onde p, q satisfazem $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
Agora definimos o operador p-laplaciano.
Consideremos o operador A definido em $W_0^{1,p}(\Omega)$ que a cada elemento de $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ associa o elemento de $W^{-1,q}(\Omega)$ dado por,

$$Au = -\Delta_p u = -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = -\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

O operador p-laplaciano é tal que a sua realização A_H, $H = L^2(\Omega)$ é maximal monótona em $L^2(\Omega)$. Neste texto vamos denotar por $-\Delta_p$ o operador A_H.
O operador $-\Delta_p u$ esta bem definido, para cada $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} -\Delta_p u(v) &= \int_\Omega -\Delta_p u \cdot v\, dx \\ &= \int_\Omega -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \cdot v\, dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v\, dx \\ &\leq \left| \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v\, dx \right| \\ &\leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}|\nabla u||\nabla v|\, dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-1}|\nabla v|\, dx \\ &\leq \left(\int_\Omega (|\nabla u|^{p-1})^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1}\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

e como $|\nabla u|, |\nabla v| \in L^p(\Omega)$, segue-se que $-\Delta_p u(v) < \infty$. Portanto $-\Delta_p u$ está bem definido.

Lema 1.13.1. *(Desigualdade de Tartar) (Lema 4.4, p. 13, [6]). Seja $p \geq 2$. Então para todo*

$a, b \in \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$ temos

$$\langle |a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b,\, a-b\rangle \geq \gamma_0 |a-b|^p,$$

onde γ_0 é positivo e depende apenas de p e de d.
Se $1 < p < 2$ então para todo $a, b \in \mathbb{R}^d$ temos

$$\langle |a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b, a-b\rangle \leq \gamma_1 |a-b|^p,$$

onde γ_1 depende apenas de p e de d.

1.14 Propriedades do Operador p-laplaciano

Agora vejamos outras importantes propriedades acerca do operador p-laplaciano:

(1) **$-\Delta_p$ é limitado**

Mostramos que se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então $-\Delta_p u \in W^{-1,q}(\Omega)$. De fato, ja que $-\triangle_p u$ está bem definido, para cada u, então falta mostrar que $-\triangle_p u$ é linear e limitado. A linearidade segue-se da definição de $-\Delta_p u$ e por propriedades da integral. Agora provemos que $-\Delta_p u$ é limitado.

$$\begin{aligned}
\|-\Delta_p u\|_{W^{-1,q}(\Omega)} &= \sup_{v \in W_0^{1,p}(\Omega),\, \|v\| \leq 1} |\langle -\Delta_p u,\, v\rangle_{W^{-1,q}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)}| \\
&= \sup_{v \in W_0^{1,p}(\Omega), \|v\| \leq 1} |-\Delta_p u(v)| \\
&\leq \sup_{v \in W_0^{1,p}(\Omega), \|v\| \leq 1} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} \\
&= \sup_{v \in W_0^{1,p}(\Omega), \|v\| \leq 1} \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\
&\leq \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1}.
\end{aligned}$$

Portanto $-\Delta_p u$ é limitado.

(2) **$-\Delta_p$ é Monótono**

De fato, $\forall\, u,\, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e pela Desigualdade de Tartar:

$$\begin{aligned}
\langle -\Delta_p u - (-\Delta_p v),\, u - v\rangle &= -\langle div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v),\, u-v\rangle \\
&= \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)(\nabla u - \nabla v)\, dx \\
&= \int_\Omega \langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v, \nabla u - \nabla v\rangle\, dx \\
&\geq \gamma_0 \int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^p\, dx = \gamma_0 \|\nabla u - \nabla v\|_{L^p(\Omega)}^p \geq 0
\end{aligned}$$

dai segue, que o operador p-laplaciano é monótono

(3) $-\Delta_p$ **é Hemicontínuo.**
Observe que o operador p-laplaciano pode-se escrever como:

$$Au = -\Delta_p u = -\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = -\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_i} g_i(\nabla u)$$

onde

$$\begin{aligned} g = (g_1, \ldots, g_n) : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ \zeta &\mapsto |\zeta|^{p-2}\zeta \\ g_i(\zeta) = |\zeta|^{p-2}\zeta_i. \end{aligned}$$

Agora mostremos que o operador p-laplaciano é hemicontínuo, dados $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, isto é

$$A((1-t)u + tv) \longrightarrow Au$$

quando $t \longrightarrow 0$. De fato

$$A((1-t)u+tv) = -\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_i} g_i(|\nabla((1-t)u+tv)|) \longrightarrow -\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_i} g_i(|\nabla u|)$$

quando $t \longrightarrow 0$, o que acontece pelo seguinte fato, para $i = 1, \ldots, d$ e $\zeta \in \mathbb{R}^d$ temos

$$\frac{\partial g_i}{\partial \zeta_i} = (p-2)|\zeta|^{p-4}\zeta_i\zeta_i,$$

e $\partial g_i(\zeta)$ é contínua, e portanto como o operador é hemicontínuo como conseqüência do exemplo 1.12.9 o operador p-laplaciano é maximal monótono em $L^2(\Omega)$.

(4) $-\Delta_p$ **é Coercivo**
É dizer, $\displaystyle\lim_{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \longrightarrow \infty} \frac{\langle -\Delta_p u, u\rangle}{\|u\|} = \infty.$
Com efeito,

$$\begin{aligned} \langle -\Delta_p u, u\rangle &= \int_\Omega -div(|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x))\, dx \\ &= \int_\Omega (|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x))\nabla u(x)\, dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u(x)|^p\, dx = \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Agora, pela Desigualdade de Poincaré, $\exists C > 0$ tal que

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \geq C\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

Logo,

$$\lim_{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\longrightarrow\infty}\frac{\langle -\Delta_p u, u\rangle}{\|u\|} = \lim_{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\longrightarrow\infty}\frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|} \geq \lim_{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\longrightarrow\infty}\frac{C^p\|u\|^p}{\|u\|} = \infty.$$

Portanto $-\Delta_p$ é coercivo.

(5) <u>$-\Delta_p$ **é do tipo subdiferencial,**$-\Delta_p u = \partial\varphi(u)$.</u>
Definimos

$$\varphi:\ L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{\infty\}$$

$$\varphi(u) = \begin{cases} \frac{1}{p}\parallel \nabla u \parallel_{L^p(\Omega)}^p, & u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \infty, & L^2(\Omega)\backslash W_0^{1,p}(\Omega) \end{cases}$$

φ é uma aplicação convexa s.c.i, própria, mostremos que $\partial\varphi(u)$ é maximal monótono em $L^2(\Omega)$ como conseqüência do exemplo 1.12.12. De fato, a convexidade de φ segue da convexidade de $\|\nabla u\|^p$, assim basta provar a convexidade de $\|\nabla u\|^p$.
Com efeito a função s^p, $s>0$ é convexa e o operador gradiente é linear,

$$\begin{aligned}\|\nabla(tu+(1-t)v)\|^p &\leq (t\|\nabla u\| + (1-t)\|\nabla v\|)^p \\ &\leq t\|\nabla u\|^p + (1-t)\|\nabla v\|^p \\ &\leq t\|\nabla u\|^p + (1-t)\|\nabla v\|^p.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\varphi(tu+(1-t)v) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla(tu+(1-t)v)|^p\,dx \tag{1.8}$$

$$\leq \frac{1}{p}\left[t\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx + (1-t)\int_\Omega |\nabla v|^p\,dx\right] \tag{1.9}$$

$$= t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v). \tag{1.10}$$

Assim φ é convexa.
Note que se u ou v não pertencem a $W_0^{1,p}(\Omega)$ então o resultado é trivial.
Também $\varphi \not\equiv \infty$, pois como $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ então $|\nabla u| \in L^p(\Omega)$.
Logo

$$\varphi(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p = \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p < \infty.$$

Portanto φ é própria. Agora vejamos que φ é s.c.i em $L^2(\Omega)$, i.e., $\varphi(u) \leq \liminf_{n\to\infty}\varphi(u_n)$ sempre que $u_n \longrightarrow u$ em $L^2(\Omega)$. De fato, seja $u_n \longrightarrow u$ em $L^2(\Omega)$. Se $\liminf_{n\to\infty}\varphi(u_n) = +\infty$ o resultado é trivial. Se $\liminf_{n\to\infty}\varphi(u_n) = \alpha < \infty$, então existe uma subseqüência $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ satisfazendo $\lim_{k\to\infty}\varphi(u_{n_k}) = \alpha$, i.e., $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{p}\|u_{n_k}\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p = \alpha$. Logo $\|u_{n_k}\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ é uma sequência limitada, e como $W_0^{1,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo pelo Teorema de Eberlein-

Smullian existe uma subsequência $\{u_{n_{k_j}}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{n_{k_j}} \rightharpoonup v$ para algum $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Como $p > 2$, deve ser igual a u, pois $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ contínuamente, e então pela unicidade do limite segue-se que $u = v$. Portanto $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ e pela definição de φ, $\varphi(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(u_n)$ então φ é s.c.i. Com o qual concluímos que $\partial\varphi$ é maximal monótono em $L^2(\Omega)$.

Agora provemos um resultado muito importante para os parágrafos seguintes, verifiquemos que o operador p-laplaciano é do tipo subdiferencial isto é, $-\Delta_p u = \partial\varphi(u)$. Pelo exemplo 1.12.12, como ambos são maximais monótonos basta provar só uma das inclusões.

Mostremos que $-\Delta_p u \subset \partial\varphi(u)$.

Seja $u \in D(-\Delta_p |_H)$ e $v = -\Delta_p u$, então

$$\begin{aligned}
\langle v, \xi - u\rangle &= \langle -\Delta_p u, \xi - u\rangle \\
&= \int_\Omega -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)(\xi - u)\, dx \\
&= \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u)(\nabla\xi - \nabla u) dx \\
&= \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla\xi dx - \int_\Omega |\nabla u|^p\, dx.
\end{aligned}$$

então, usando a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\langle -\Delta_p u, \xi - u\rangle + \int_\Omega |\nabla u|^p\, dx &= \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla\xi\, dx \\
&\leq \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx + \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla\xi|^p\, dx.
\end{aligned}$$

logo

$$\langle -\Delta_p u,\, \xi - u\rangle + \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx \leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla\xi|^p\, dx,$$

logo,

$$\langle v,\, \xi - u\rangle + \varphi(u) \leq \varphi(\xi),\ \ \forall\, \xi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Agora, no caso $\xi \in L^2(\Omega)\backslash W_0^{1,p}(\Omega)$ então $\varphi(\xi) = \infty$ o resultado segue. Assim,

$$\langle v,\, \xi - u\rangle + \varphi(u) \leq \varphi(\xi),\ \ \forall\, \xi \in L^2(\Omega),$$

portanto $v \in \partial\varphi(u)$.

Como $-\Delta_p$ e $\partial\varphi$ são maximais monótonos segue que $-\Delta_p = \partial\varphi$.

(5) **O Fecho de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$**

$$\overline{W_0^{1,p}(\Omega)}^{L^2(\Omega)} = L^2(\Omega).$$

Pela densidade de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$,

$$\overline{\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)} = L^2(\Omega),$$

e temos as seguintes imersões contínuas e densas no sentido topológico e algébrico.

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathscr{C}_0^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega),$$

tomando o fecho na topologia de $L^2(\Omega)$,

$$L^2(\Omega) = \overline{\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)}^{L^2(\Omega)} \subset \overline{W_0^{1,p}(\Omega)}^{L^2(\Omega)} \subset L^2(\Omega).$$

portanto,

$$\overline{W_0^{1,p}(\Omega)}^{L^2(\Omega)} = L^2(\Omega).$$

Por outro lado, o operador p-laplaciano é densamente definido. De fato, como

$$D(-\Delta_p) \subset W_0^{1,p}(\Omega) \subset \overline{D(-\Delta_p)},$$

tomando fecho na topologia $L^2(\Omega)$, então

$$\overline{D(-\Delta_p)} = L^2(\Omega).$$

•$\underline{\langle -\Delta u(t),\, u_t(t)\rangle = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^p}$

De fato

$$\begin{aligned}
&\langle(-\Delta_p u(t), u_t), \theta\rangle \\
&= \int_0^\tau (-div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u), u_t)\theta(t)\,dt \\
&= \int_0^\tau \int_\Omega \frac{1}{p}\frac{d}{dt}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla u)\theta(t)\,dt\,dx \\
&= \frac{1}{p}\left\{\int_\Omega |\nabla u| \cdot\theta(t)\Big|_{t=0}^{t=\tau} - \int_0^t |\nabla u|^p\,\theta'(t)\,dt\right\} \\
&= -\frac{1}{p}\int_0^\tau \int_\Omega |\nabla u|^p\,\theta'(t)\,dt \\
&= \frac{1}{p}\langle\frac{d}{dt}|\nabla u|^p, \theta\rangle
\end{aligned}$$

onde $\frac{d}{dt}$ é a derivada distribucional em $D'(0,\tau)$, para cada $\theta \in D(0,\tau)$.

1.15 Equações de Evolução Associadas a Operadores Monótonos

Seja H um espaço de Hilbert, e A um operador maximal monótono definido em H, nesta seção consideraremos o problema de valor inicial;

$$\left\{\begin{array}{r} \frac{du}{dt} + Au \ni 0, \\ u(0) = x, \end{array}\right. \tag{1.11}$$

onde $x \in \mathscr{D}(A)$ e $A \subset H \times H$ é possivelmente multívoco.

Seja $T > 0$. Dizemos que a aplicação $u : [0,T] \longrightarrow H$ é uma solução do P.V.I (1.11) se satisfaz a seguintes condições:

(i) $u \in \mathscr{C}([0,T];H)$ e $u(0) = x$.

(ii) u é Lipschitz contínua em $[0,T]$.

(iii) A equação (1.11) é satisfeita q.t.p em $[0,T]$, i.e., existe $v(t) \in A$ q.t.p e $du/dt + v = 0$.

Observação 1.15.1. Em um espaço de Hilbert (de fato em um espaço de Banach reflexivo mais geralmente) a condição (ii) implica que u é absolutamente contínuo conforme o Teorema 3.1, [3] e portanto u é diferenciável q.t.p e u é a integral de sua derivada.

Proposição 1.15.2. *([18, Proposição 5.1]) Seja A um operador monótono. Então o P.V.I*

$$\left\{\begin{array}{r} \frac{du}{dt} + Au \ni 0, \\ u(0) = x, \end{array}\right. \tag{1.12}$$

tem no máximo uma solução.

Demonstração. Sejam u, v duas soluções tais que $u(0) = x$ e $v(0) = y$.
Então existem $\eta(t) \in A(t)$ e $\zeta(t) \in A(t)$ tal que

$$\frac{du}{dt} + \eta = 0 \quad \frac{du}{dt} + \zeta = 0 \quad q.t.p \quad em \quad [0,\infty).$$

Fazendo a diferença, temos

$$\frac{du}{dt} - \frac{dv}{dt} + \eta - \zeta = 0. \tag{1.13}$$

Fazendo o produto interno em (1.13) com $u - v$, e usando a bilinearidade do produto interno

$$\left\langle \frac{du}{dt} - \frac{dv}{dt}, u - v \right\rangle + \langle \eta - \zeta, u - v \rangle = 0, \quad q.t.p \quad em \quad [0,\infty).$$

Como A é monótono e $\eta(t) \in A(t)$ e $\zeta(t) \in A(t)$, então

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u - v\|^2 \leq 0, \quad q.t.p \quad em \quad [0,\infty).$$

Integrando de 0 a t, temos

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \|x - y\|. \tag{1.14}$$

Assim, se $x = y$, então $u(t) = v(t)$ para qualquer $t \geq 0$. Portanto, se A é monótono, temos que o problema tem no máximo uma solução. $\square$

Corolário 1.15.3. *([18, Corolario 5.2]) Seja A um operador monótono. Suponha u solução do (1.12). Então a aplicação* $t \mapsto \|\frac{du}{dt}\|$ *é não crescente.*

Teorema 1.15.4. *([18, Teorema 5.4]) Seja A um operador monótono. Dado* $T > 0$, *para cada* $x \in \mathscr{D}(A)$

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au \ni 0, \\ \quad u(0) = x, \end{cases} \tag{1.15}$$

tem uma solução em $[0, T]$.

1.16 O Semigrupo Gerado por um Conjunto Maximal Monótono

Definição 1.16.1. Seja C um subconjunto fechado de um espaço de Hilbert H. Um semigrupo contínuo de contrações em C é uma família $\{S(t) : t \geq 0\}$ de aplicações de C em C com as propriedades:

(i) $S(0)x = x$, $\forall x \in C$.

(ii) $S(t + s)x = S(t)S(s)x$, $\forall t, s > 0$, $\forall x \in C$.

(iii) Para todo $x \in C$, a função $t \mapsto S(t)x$ é contínua em $[0; \infty)$.

(iv) $\|S(t)x - S(t)y\| \leq \|x - y\|$, $\forall t \geq 0$, $\forall x, y \in C$.
Mais geralmente, se em vez de (iv) temos

(v) $\|S(t)x - S(t)y\| \leq e^{wt}\|x - y\|$, $\forall t \geq 0$, $\forall x, y \in C$. Dizemos que $S(t)$ é um semigrupo contínuo w-quase-contrativo em C.

Seja A maximal monótono e $x \in \mathscr{D}(A)$ pelo Teorema 1.15.4, existe uma solução $u \in \mathscr{C}([0, T]; H)$ do P.V.I

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au \ni 0 \\ \quad u(0) = x, \end{cases} \tag{1.16}$$

Podemos definir uma familia de aplicações em $\mathscr{D}(A)$ definindo:

$$S(t)x = u(t), \quad para \quad cada \quad t \geq 0,$$

onde u é solução do P.V.I (1.16). A unicidade da solução de (1.16), pela Proposição 1.15.2, afirma que esta família de aplicações forma um semigrupo, e esta é contínua desde que $u \in \mathscr{C}([0,T];H)$. De (1.14) temos que,

$$\|S(t)x - S(t)y\| \leq \|u(t) - v(t)\| \leq \|x - y\|, \tag{1.17}$$

assim $\{S(t) : t \geq 0\}$ forma um semigrupo de contrações em $\mathscr{D}(A)$. Podemos estender o semi-grupo de contrações a $\overline{\mathscr{D}(A)}$ (a qual é convexa)[13]. Se $x \in \overline{\mathscr{D}(A)} \backslash \mathscr{D}(A)$, então existe uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}(A)$ tal que $x_n \longrightarrow x$ em H. Definimos,

$$S(t)x = \lim_{n\longrightarrow\infty} S(t)x_n,$$

este limite existe desde que $\{S(t)x_n : t \geq 0\}$ forma uma sequência de Cauchy:

$$\|S(t)x_n - S(t)x_m\| \leq \|x_n - x_m\|,$$

e como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy pois é convergente, segue-se que $\{S(t)x_n : t \geq 0\}$ forma uma sequência de Cauchy. Note que quando estendemos a todo $\overline{\mathscr{D}(A)}$, o semigrupo e ainda contínuo em t, e é um semigrupo de contrações. Concluímos: Que para todo conjunto maximal monótono A, em um espaço de Hilbert H, existe um semi-grupo $\{S(t) : t \geq 0\}$ contrações definidos em $\overline{\mathscr{D}(A)}$: Dizemos que o semi-grupo $\{S(t) : t \geq 0\}$ é gerado por $-A$.

Teorema 1.16.2. *([5, Teorema 3.1, p.54]). Seja A um operador maximal monótono unívoco em H. Para todo $u_0 \in \mathscr{D}(A)$, existe uma função $u : [0,\infty[\longrightarrow H$, única, tal que*

(i) $u(t) \in \mathscr{D}(A)$ *para todo* $t > 0$.

(ii) $u(t)$ *é Lipschitz em* $[0,\infty[$, *i.e.* $\frac{du}{dt} \in L^\infty(0,+\infty;H)$ *(no sentido das distribuições) e* $\|\frac{du}{dt}\|_{L^\infty(0,+\infty;H)} \leq |Au_0|$.

(iii) $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0$ *(i.e* $-\frac{du}{dt}(t) = Au(t)$ *q.t.p em* $]0,\infty[$).

(iv) $u(0) = u_0$.

(v) u *admite em todo* $t \in [0,\infty[$ *derivada a direita e* $\frac{d^+u}{dt}(t) + Au(t) = 0$ *para todo* $t \in [0,\infty[$.

(vi) A função $t \mapsto Au(t)$ *é contínua a direita e a função* $t \mapsto |Au(t)|$ *é decrescente.*

Efeito Regularizante

O seguinte resultado, é conhecido como efeito regularizante, foi obtido por H. Brezis em 1971.

Teorema 1.16.3. *([5, Teorema 3.2, p.57]) Seja φ uma função convexa s.c.i própria em H, seja $A = \partial\varphi$ operador unívoco e seja $S(t)$ o semigrupo gerado por $-A$ em $\overline{\mathscr{D}(A)}$. Então $S(t)u_0 \in \mathscr{D}(A)$*

[13] Teorema(Minty-Rockafellar) 2.2,[5]

para todo $u_0 \in \overline{\mathscr{D}(A)}$ *e todo* $t > 0$. *Ou seja, para todo* $u_0 \in \overline{\mathscr{D}(A)}$, *existe uma única função* $u \in \mathscr{C}([0, +\infty[; H)$ *tal que* $u(0) = u_0$.

(i) $u(t) \in \mathscr{D}(A)$, *para todo* $t > 0$.

(ii) $u(t)$ *é Lipschitz em* $[\delta, \infty[$.

(iii) u *admite* $t > 0$ *uma derivada a direita e*

$$\frac{d^+}{dt}u(t) + Au(t) = 0, \quad \forall\ t > 0.$$

1.17 Resolução da Equação $\frac{du}{dt} + Au \ni f, u(0) = u_0$

Definição 1.17.1. ([5, Definição 3.1, p.64]) Seja A um operador de H e $f \in L^1(0, T; H)$. Uma solução forte da equação $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$ é toda função $u \in \mathscr{C}([0, T]; H)$, absolutamente contínua em todo compacto de $(0, T)$ verificando: $u(t) \in \mathscr{D}(A)$ e $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$ q.t.p $t \in (0, T)$. Dizemos que $u \in \mathscr{C}([0, T]; H)$, é uma solução fraca da equação $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$ se existem sequências $f_n \in L^1(0, T; H)$ e $u_n \in \mathscr{C}([0, T]; H)$ tal que u_n é solução forte da equação $\dfrac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$, $f_n \longrightarrow f$ em $L^1(0, T; H)$ e $u_n \longrightarrow u$ uniformemente em $[0, T]$.

Teorema 1.17.2. *([5, Teorema 3.4, p.65]) Seja* A *um operador maximal monótono de* H. *Para todo* $f \in L^1(0, T; H)$ *e todo* $u_0 \in \overline{\mathscr{D}(A)}$, *existe uma única solução fraca* u *da equação* $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$ *tal que* $u(0) = u_0$.

Caso $A = \partial\varphi$

No caso particular quando A é a subdiferencial de uma função convexa, as soluções fracas da equação $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ são de fato soluções fortes desde que $f \in L^2(0, T; H)$.

Teorema 1.17.3. *([4, Teorema 3.6, p.72]) Seja* $f \in L^2(0, T; H)$, *então toda solução de equação* $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$ *é uma solução forte e* $\sqrt{t}\dfrac{du}{dt}(t) \in L^2(0, T; H)$. *Além disso, se o dado inicial,* $u_0 \in D(\varphi)$, *então* $\dfrac{du}{dt} \in L^2(0, T; H)$.

1.18 Teoremas de Existência para Equações Diferenciais Ordinárias

Nesta seção, para as demonstrações o leitor pode consultar [20]. Seja E um espaço de Banach. Devido ao Teorema Fundamental do Cálculo, qualquer equação da forma $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$; $x(t_0) = x_0$, com $f : D \longrightarrow E$, contínua no aberto $D \subset \mathbb{R} \times E$ tem uma correspondente equação integral, isto é, φ é solução do problema de Cauchy

$$(1.18) \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} &= f(t,x), \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

definida em certo intervalo $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$, se e somente se o gráfico de φ está contido no domínio de f e

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\, ds, \; \forall t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha].$$

Teorema 1.18.1. *(Ascoli-Peano)([14, Teorema 1.1, p.14]) Seja $(t_0, x_0) \in D$ e sejam $a > 0$ e $b > 0$ tal que $\mathfrak{C} = \{|t-t_0| \le a, \|x-x_0\| \le b\}$ está incluído em D. Denotemos*

$$M = \sup_{(t,x)\in\mathfrak{C}} \|f(t,x)\|_E \quad e \quad \alpha = min(a, \frac{b}{M}),$$

então existe (ao menos) uma solução φ do problema de Cauchy (1.18) no intervalo $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$.

Definição 1.18.2. (Solução maximal) Dada uma EDO $\dot{x} = f(t,x)$, uma solução $\varphi : J \longrightarrow E$ é dita maximal se para toda solução $\psi : J_1 \longrightarrow E$ com $J_1 \supset J$ e $\psi|_J = \varphi$, tem-se $J_1 = J$. Nesse caso, J é dito intervalo maximal de φ.

Proposição 1.18.3. *Suponha E um espaço de Banach com dimensão finita. Seja $f : D \subset \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ contínua e limitada no aberto D. Se $I = (\omega_+, \omega_-)$ é o intervalo maximal, e ω_+ (respectivamente ω_-) é finito, então existe $\lim_{t\longrightarrow\omega_+} \varphi$ (respectivamente $\lim_{t\longrightarrow\omega_-} \varphi$)*

Demonstração. Suponha sem perda de generalidade que $\omega_+ < \infty$. Então, $\forall s, t \in (\omega_+, \omega_-)$ temos,

$$\|\varphi(t) - \varphi(s)\| = \left\| \int_s^t f(u, \varphi(u))\, du \right\| \le M \cdot |t-s|,$$

onde $\|f\| \le M$ em D. Portanto, se $t_j \longrightarrow \omega_+$, temos $\|\varphi(t_j) - \varphi(t_m)\| < M|t_j - t_m| \longrightarrow 0$, quando $j, m \longrightarrow \infty$, logo $\{\varphi(t_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy; como t_j é arbitrário segue-se que existe $\lim_{t\longrightarrow\omega_+} \varphi$. □

Teorema 1.18.4. *Seja f contínua num aberto D de $\mathbb{R}\times E$. Se φ é uma solução maxima única de $x' = f(t,x)$ definida em (ω_-, ω_+), então a aplicação $g(t) = (t, \varphi(t))$ tende a ∂D quando $t \to \omega_\pm$. Isto é, para todo compacto $K \subset D$ existe uma vizinhança V de $\omega_\pm$ tal que $g(t) \notin K$ para $t \in V$.*

Corolário 1.18.5. *Se D' é limitado e $D = (c,d) \times D'$, então $\omega_+ = d$ ou $\varphi(t) \to \partial D'$ quando $t \to \omega_+$ e ou $\omega_- = c$ ou $\varphi(t) \to \partial D'$ quando $t \to \omega_-$.*

Capítulo

2

Existência de Soluções

2.1 Introdução

Este capítulo, é dedicado a obtenção dos resultados de existência, unicidade e dependência contínua da equação parabólica não degenerada.

$$
\begin{cases} \partial_t u_p(t,x) - \Delta_p u(t,x) = 0 & (0,\infty)\times\Omega \\ u_p(0,x) = g(x) & \{t=0\}\times\Omega. \end{cases} \tag{2.1}
$$

$d+1 \leq p < \infty$. A demonstração da existência da solução do problema (2.1) será feita pelo argumento introduzido por Brezis, [5].

2.2 Existência e Unicidade da Solução

Neste capítulo, as seguintes hipóteses sobre a função g são consideradas:

(H1) $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ não negativa, Lipschitz contínua, com suporte compacto.

(H2) $\|\nabla g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = L > 1$.

Observação 2.2.1. Pela hipótese $(H1)$, g tem suporte compacto $K = supp(g)$. Assim, seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aberto, convexo e limitado com fronteira suave tal que $K \subset\subset \Omega$. Como g é Lipschitz contínua então pelo Teorema 1.6.7 temos que $g \in W^{1,\infty}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$ e pelo Lema 1.6.3, como Ω é regular, temos que $g \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 2.2.2. *Seja $T > 0$ un número real arbitrário. Assumindo $(H1), (H2)$, se $g = u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então existe uma única solução forte $u_p : Q \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q = (0,T)\times\Omega$, de (2.1) satisfazendo:*

(i) $u_p \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap \mathscr{C}([0,T]; L^2(\Omega))$.

(ii) $\partial_t u_p \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

(iii) $u_p(t) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *q.t.p* $t \in (0,T)$ *e:*

$$\partial_t u_p - \Delta_p u_p = 0 \quad em \quad L^2(\Omega), \quad q.t.p \quad t \in (0,T).$$

(iv) $u_{p,0} = u_p(0) = g(x)$.

Demonstração. **Unicidade:**
Sejam u_p, v_p soluções fortes de (2.1). Então $w_p(t) := u_p(t) - v_p(t)$ satisfaz

$$\partial_t w_p(t) - \Delta_p u_p(t) - (-\Delta_p v_p(t)) = 0 \text{ q.t.p } t \in (0,T). \tag{2.2}$$

multiplicando (2.2) por $w_p(t)$ e usando a monoticidade do operador p-laplaciano, temos

$$\frac{1}{2}|w_p(t)|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}|w_p(0)|^2_{L^2(\Omega)} = 0 \text{ para todo } t \in [0,T], \tag{2.3}$$

e como $w_p(0) = 0$ de (2.3) a unicidade segue.
Existência:

Observação 2.2.3. Ao longo de toda esta seção quando não houver risco de confusão fixaremos p e assim escreveremos indistintamente $u_{p,n} = u_n$.

A verificação da existência será feita em três etapas.

1) **Aproximação:**
Primeiro consideremos a aproximação do problema em $H = L^2(\Omega)$ para o problema de Cauchy. Como $g \in W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) = \overline{\mathscr{D}(\partial\varphi)}$, então existe uma sequência $g_n = u_{0n}$ em $\mathscr{D}(\partial\varphi)$ tal que $u_{0n} \xrightarrow{L^2(\Omega)} u_0 = g \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Consideremos o problema de Cauchy, para p fixo:

$$\begin{cases} \partial_t u_n(t) - \Delta_p u_n(t) = 0, & L^2(\Omega), 0 < t < T, \\ u_n(0) = g_n = u_{0n} & t = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

A existência e unicidade da solução u_n forte do problema (2.4), é garantida pelo Teorema 1.17.3. A fim de investigar a convergência de u_n, precisamos de algumas estimativas.

2) **Estimativas uniformes:**
Com a observação feita no início desta seção, multipliquemos (2.4) por $u_n(t)$, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \langle -\Delta_p u_n(t), u_n(t)\rangle_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} = 0$$

q.t.p. $t \in (0,T)$, e como $-\Delta_p u_n(t) = \partial\varphi(u_n(t))$ e $0 \in D(\varphi)$, pela definição de subdiferencial, temos que

$$\varphi(u_n(t)) \leq \langle -\Delta_p u_n(t), u_n(t)\rangle_{L^2(\Omega)} + \varphi(0)$$

então

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \varphi(u_n(t)) \leq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \langle -\Delta_p u_n(t),\, u_n(t)\rangle_{L^2(\Omega)} + \varphi(0) = 0,$$

q.t.p. $t \in (0,T)$. Integrando de 0 a T,

$$\|u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \varphi(u_n(t))\,dt \leq \|u_n(0)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

mas $\{\|u_n(0)\|_{L^2(\Omega)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitado pois $u_n(0) \longrightarrow u_0$ em $L^2(\Omega)$. Então deduzimos

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C,$$

onde C é uma constante independente de t e $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } \mathscr{C}(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.5}$$

$$\{\varphi(u_n(\cdot))\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^1(0,T). \tag{2.6}$$

3) **Convergência de u_n:**
Sejam $(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ e consideremos os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} \partial_t u_n(t) - \Delta_p u_n(t) = 0, & L^2(\Omega), 0 < t < T, \\ u_n(0) = g_n = u_{0n} & t = 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\begin{cases} \partial_t u_m(t) - \Delta_p u_m(t) = 0, & L^2(\Omega), 0 < t < T, \\ u_m(0) = g_m = u_{0m} & t = 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

Multiplicando (2.7) - (2.8) por $u_n - u_m$ e usando que o operador p-laplaciano é monótono, temos

$$\langle \partial_t u_n - \partial_t u_m, u_n - u_m\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \Delta_p u_n - (-\Delta_p u_n), u_n - u_m\rangle_{L^2(\Omega)} = 0,$$

como

$$\langle \partial_t u_n(t), u_n(t)\rangle_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel u_n(t) \parallel^2_{L^2(\Omega)}$$

e pela Desigualdade de Tartar que existe uma constante γ_0 tal que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n - u_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \gamma_0\|\nabla u_n - \nabla u_m\|^p_{L^p(\Omega)} \\ \leq \langle \partial_t u_n - \partial_t u_m, u_n - u_m\rangle_{L^2(\Omega)} + \\ \langle \Delta_p u_n - \Delta_p u_n, u_n - u_m\rangle_{L^2(\Omega)} = 0\end{aligned}$$

Integrando de 0 a t temos

$$\|u_n - u_m\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\gamma_0 \int_0^t \|\nabla u_n(\tau) - \nabla u_m(\tau)\|^p_{L^p(\Omega)}\, d\tau \leq \|g_n - g_m\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Como $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente em $L^2(\Omega)$, portanto de Cauchy, fazendo $n, m \longrightarrow \infty$, $\|g_n - g_m\|^2_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0$.

Assim temos que

(2.9) $\{u_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\Omega), \forall t \in (0, T)$

e $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathscr{C}([0, T]; L^2(\Omega))$. Portanto existe $u_p \in \mathscr{C}([0, T]; L^2(\Omega))$ tal que $u_n \longrightarrow u_p$ em $\mathscr{C}([0, T]; L^2(\Omega))$.

Além disso, temos que,

(2.10) $\{\nabla u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(0, T; L^p(\Omega))$,

• $\{\partial_t u_n\}$ **é limitado em** $L^2(0, T; L^2(\Omega))$

Multiplicando a equação (2.4) por $\partial_t u_n$ e como $\langle \partial_t u_n(t), -\Delta_p u_n(t)\rangle_{L^2(\Omega)} = \partial_t \varphi(u_n(t))$, temos:

$$\|\partial_t u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \partial_t \varphi(u_n) = 0 \quad q.t.p. \quad t \in (0, T)$$

integrando de 0 a t, $t \in [0, T]$, e como $u_0 \in W^{1,p}_0(\Omega)$

$$\begin{aligned}\int_0^t \|\partial_t u_n(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau = \varphi(u_0) - \varphi(u_n(t)) &= \frac{1}{p}\|\nabla u_0\|^p_{L^p(\Omega)} - \frac{1}{p}\|\nabla u_n(t)\|^p_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{p}\|\nabla u_0\|^p_{L^p(\Omega)} < C\end{aligned}$$

onde C é uma constante independente de t e n portanto $\{\partial_t u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Em resumo, para todo $T > 0$, para cada $t \in [0, T]$, temos:

(2.11) $\{u_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $L^2(\Omega)$,

(2.12) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathscr{C}([0, T]; L^2(\Omega))$,

$$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ é de Cauchy em } L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)), \tag{2.13}$$

$$\{\partial_t u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.14}$$

Como, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ é de Cauchy, existe w tal que $u_n \overset{L^p(0,T;W_0^p(\Omega))}{\longrightarrow} w$ na topologia forte de $L^p(0,T;W_0^p(\Omega))$. Em particular

$$u_n \overset{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))}{\rightharpoonup} w. \tag{2.15}$$

Por outro lado de (2.14) segue que existe uma subsequência de $\{\partial_t u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, a qual será denotada por , $\{\partial_t u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\partial_t u_n \overset{L^2(0,T;L^2(\Omega))}{\rightharpoonup} \psi. \tag{2.16}$$

Mostraremos que $w = u_p$ e $\psi = \partial_t u_p$.
A convergência (2.15) significa que :

$$\langle u_n, v\rangle_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))\times L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))} \longrightarrow \langle w, v\rangle_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))\times L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))},$$

para todo $v \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$. Portanto, qualquer que seja $v \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$

$$\int_0^T \langle u_n(t), v(t)\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)\times W_0^{-1,p'}(\Omega)}\, dt \longrightarrow \int_0^T \langle w(t), v(t)\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)\times W_0^{-1,p'}(\Omega)}\, dt.$$

Agora vejamos que $u_n \rightharpoonup u_p$ na topologia fraca de $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$: Por (2.15) temos que

$$u_n \overset{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))}{\rightharpoonup} w. \tag{2.17}$$

Pela imersão $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \subset L^2(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, resulta que

$$u_n \overset{L^2(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))}{\rightharpoonup} w \quad .$$

Sabemos que $u_n \overset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} u_p$ em $\mathscr{C}([0,T];L^2(\Omega))$. Como $\mathscr{C}([0,T];L^2(\Omega)) \subset L^2(0,T;L^2(\Omega))$ então $u_n \longrightarrow u_p$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Em particular, $u_n \rightharpoonup u_p$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Além disso temos as imersões,

$$L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \subset L^2(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)).$$

Logo, para $v \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$

$$\int_\Omega u_n(x)v(x)dx \longrightarrow \int_\Omega w(x)v(x)dx, \forall v \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

e como $u_n \rightharpoonup u_p$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, pela unicidade do limite temos que $u_p = w$.
Por outro lado por (1.1.5), temos

$$\|u_p\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} \|u_n\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} \leq C.$$

Logo

$$u_p \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)). \tag{2.18}$$

A convergência (2.16) significa que :

$$\langle \partial_t u_n, v\rangle_{L^2(0,T;L^2(\Omega))\times L^2(0,T;L^2(\Omega))} \longrightarrow \langle \psi, v\rangle_{L^2(0,T;L^2(\Omega))\times L^2(0,T;L^2(\Omega))}$$

para todo $v \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Portanto,

$$\int_0^T \langle \partial_t u_n(t), v(t)\rangle_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)}\, dt \longrightarrow \int_0^T \langle \psi(t), v(t)\rangle_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)}\, dt.$$

A seguir mostraremos que $\psi = \partial u_p$. Com efeito, como $u_n \rightharpoonup u_p$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q)$, $(Q = (0,T)\times\Omega)$ tem-se que

$$\langle u_n, v\rangle_{L^2(Q)} \longrightarrow \langle u_p, v\rangle_{L^2(Q)}, \quad \forall v \in L^2(Q).$$

Portanto, qualquer que seja $v \in L^2(Q)$,

$$\int_Q u_n(t,x)\, v(t,x)\, dt\, dx \longrightarrow \int_Q u_p(t,x)\, v(t,x)\, dt\, dx, \quad \forall v \in L^2(Q). \tag{2.19}$$

Como, $L^2(Q) \subset \mathscr{D}'(Q)$, dado $v \in L^2(Q)$ definimos a distribuição T_v dada por

$$\langle T_v, \eta\rangle = \int_Q v(t,x)\eta(t,x)\, dx\, dt, \quad \forall \eta \in D(Q),$$

daí, de (2.19) temos

$$\langle T_{u_n}, \eta\rangle = \int_Q u_n\eta\, dt\, dx \longrightarrow \int_Q u_p\eta\, dt\, dx = \langle T_{u_p}, \eta\rangle \quad \forall \eta \in D(Q).$$

Portanto, $T_{u_n} \longrightarrow T_{u_p}$. Pela continuidade da derivação em $\mathscr{D}(Q)$, temos que $T_{\partial_t u_n} \longrightarrow T_{\partial_t u_p}$. Analogamente, temos que $T_{\partial_t u_n} \longrightarrow T_\psi$, pela unicidade do limite temos que, $T_{\partial_t u_p} = T_\psi$. Logo pelo Lema de Du Bois Raymond 1.3.10, que $\partial_t u_p = \psi$.

Para completar a prova do Teorema, é suficiente mostrar que $\partial_t u_p(t) = \Delta_p u_p(t)$ q.t.p. $t \in (0,T)$.
Sejam $[v,h] \in \partial\varphi = -\Delta_p$.
Multiplicamos a equação (2.4) por $u_n(t) - v$, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t) - v\|^2_{L^2(\Omega)} + \langle -\Delta_p u_n, u_n(t) - v\rangle_{L^2(\Omega)} = 0, \quad q.t.p. \quad t \in (0,T).$$

integrando em (s,t), $0 \le s \le t \le T$, e usando a monoticidade do operador p-laplaciano, temos

$$\frac{1}{2}(\|u_n(t) - v\|^2_{L^2(\Omega)} - |u_n(s) - v|^2_{L^2(\Omega)}) \le \int_s^t \langle -h, u_n(\tau) - v\rangle_{L^2(\Omega)}\, d\tau$$

$\forall s,t \in [0,T], s < t$, equivalentemente podemos escrever,

$$\frac{1}{2}\langle u_n(t) - u_n(s), u_n(t) + u_n(s) - 2v\rangle_{L^2(\Omega)} \le \int_s^t \langle -h, u_n(\tau) - v\rangle_{L^2(\Omega)}\, d\tau \tag{2.20}$$

para todo $s,t \in [0,T], \quad s < t$. Como, $\langle u - w,\, w\rangle_{L^2(\Omega)} \le \dfrac{\langle u - w,\, u + w\rangle_{L^2(\Omega)}}{2}$, nosso caso tomamos: $u = u_n(t)/2 - v,\ w = u_n(t)/2 + u_n(s) - v$, e deduzimos

$$\left\langle \frac{u_n(t) - u_n(s)}{t - s},\, u_n(s) - v \right\rangle \le \frac{1}{t-s}\int_s^t \langle -h,\, u_n(\tau) - v\rangle\, d\tau,\ \ \forall\, s,\, t \in [0,T],$$

quando $n \longrightarrow \infty,\ u_n \longrightarrow u_p$ em $C([0,T]; L^2(\Omega))$ e $u_n \rightharpoonup u_p$ em $L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$

$$\left\langle \frac{u_p(t) - u_p(s)}{t - s},\, u_p(s) - v \right\rangle \le \frac{1}{t-s}\int_s^t \langle -h, u_p(\tau) - v\rangle\, d\tau, \quad \forall s,t \in [0,T], s < t,$$

fazendo $s \longrightarrow t$,

$$\langle \partial_t u_p(t) + h,\, u_p(t) - v\rangle \le 0 \text{ q.t.p } t \in (0,T).$$

Assim pela arbitrariedade de $[v,h] \in \partial\varphi$ e como $\partial\varphi$ é maximal monótono, então $u_p(t) \in D(\partial\varphi)$ e $\partial_t u_p(t) = -\partial\varphi(u_p(t)) = \Delta_p u_p(t)$ q.t.p $(0,T)$, portanto o problema está bem posto. □

Observação 2.2.4. Podemos estender a solução a todo $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{cases} \partial_t u_p - \Delta_p u_p = 0,\ (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u_p(0,x) = g(x),\ x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{2.21}$$

$d + 1 \le p < \infty$, onde g satisfaz as mesmas condições (H1, H2) e $\|\nabla g\| = L > 1$.

Definimos a prolongação de u_p e denotamos por $\widetilde{u}_p$:

$$\widetilde{u}_p(x) = \begin{cases} u_p(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega, \end{cases}$$

$\widetilde{u}_p$ claramente é solução do problema (2.21) no sentido do Teorema 2.2.2, então pela proposição 1.6.4 $\widetilde{u}_p(t) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e

$$\|\widetilde{u}_p\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^d)} = \|u_p\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^d)} = \|u_p\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}$$

e assim por (2.21) segue-se $\widetilde{u}_p \in L^p(0,T;W^{1,p}(\mathbb{R}^d))$.

• $\partial_t \widetilde{u}_p \in L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))$.

De fato $\|\partial_t \widetilde{u}_p\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} = \|\partial_t u_p\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \liminf\limits_{n\longrightarrow\infty} \|\partial_t u_n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} < \infty$.

Assim temos a solução do problema 2.21.

Dependência Contínua

Como $u_{p,0} \in \overline{D(-\Delta_p)}$, tal que $u_{0n} \longrightarrow u_{p,0}$ em $H = L^2(\Omega)$, e como sabemos u_n é solução forte da equação

$$(CPn)\begin{cases} \partial_t u_n(t) - \Delta_p u_n(t) = 0, & L^2(\Omega), 0 < t < T, \\ u_n(0) = g_n = u_{0n} & t = 0, \end{cases} \tag{2.22}$$

lembre-se que ao fazer a diferença $(Cpn) - (Cpm)$ e utilizando a monoticidade do operador p-laplaciano

$$\|u_n(t) - u_m(t)\| \leq \|u_{0n} - u_{0m}\|, \;\; \forall t \in [0,T].$$

Assim, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, convergindo uniformemente a função contínua $u_p \in \mathscr{C}([0,T],H)$, em particular $u_n(0) \longrightarrow u_p(0)$, portanto pela unicidade do limite, segue-se que $u_{p,0} = u_p(0)$.

Observação 2.2.5. De agora em adiante denotaremos indistintamente por u_p ou $\widetilde{u}_p$ pelo processo de prolongação feito.

Capítulo

3

Estimativas Uniformes

3.1 Introdução

Consideremos o problema

$$\begin{cases} \partial_t u_p - \Delta_p u_p = 0, \ (0,\infty)\times\Omega \\ u_p(0,x) = g(x), \ x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{3.1}$$

$d+1 \leq p < \infty$, onde g satisfaz as mesmas condições do Capítulo 2 (H1, H2) e $\|\nabla g\|_{L^\infty(\Omega)} = L > 1$.

No capítulo anterior demonstramos a existência e unicidade da solução da equação parabólica não degenerada (3.1), via a Teoria de Operadores Monótonos. Nosso interesse é entender o que acontece com (3.1) quando $p \longrightarrow \infty$, para sequências de funções $\{u_p\}_{p\geq d+1}$. Isto é motivado pelos trabalhos de [9] e [2]. Então precisamos obter estimativas uniformes independentes de p para a sequência de funções $\{u_p\}_{p\geq d+1}$. Começamos com o seguinte resultado.

Lema 3.1.1. *Seja u_p a solução de (3.1). Então temos que*

(i) Dado $T > 0$, para todo $d+1 \leq p < \infty$, existe uma constante $C > 0$ independente de p tal que:

a) $\displaystyle\int_0^T \int_\Omega |\nabla u_p|^p dx\, d\tau \leq C,$

b) $\displaystyle\sup_{[0,T]\times\Omega} |u_p| \leq C,$

c) $\|\nabla u_p\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C.$

(ii) Existe um raio $R > 0$ tal que

$$supp(u_p) \cap ([0,T]\times\mathbb{R}^d) \subset [0,T]\times B(0,R),$$

para $d+1 \leq p < \infty$.

(iii) Existe uma constante $C > 0$ independente de p tal que

$$|\partial_t u_p(t,x)| \leq \frac{C}{(p-2)t} \ \ q.t.p. \ (t,x) \in (0,\infty) \times \Omega.$$

Demonstração (i)

a) Multipliquemos a equação (3.1) por u_p, e integremos de 0 a T. Então,

$$\int_0^T \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\|u_p\|^2_{L^2(\Omega)}\, d\tau + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_p|^p_{L^p(\Omega)}\, dx\, d\tau = 0.$$

logo,

$$\frac{1}{2}\|u_p(T,x)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_p|^p\, dx\, d\tau = \frac{1}{2}\|g\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Portanto segue das hipóteses de (3.1) que existe uma constante $C > 0$ independente de p tal que $\int_0^T \int_\Omega |\nabla u_p|^p\, dx\, d\tau \leq C$.

Contração do Semigrupo gerado pelo p-Laplaciano

Para a próxima estimativa primeiro provaremos que o fluxo gerado pelo p-laplaciano é uma contração em todos os espaços $L^q(\Omega)$, $q > 2$. Para ver isto, seja a função

$$\begin{aligned} \beta : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longrightarrow |x|^q \end{aligned}$$

$$\beta'(x) = q|x|^{q-2}x, \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} \beta''(x) &= q(|x|^{q-2} \cdot x)' = q[(|x|^{q-2})'x + |x|^{q-2}] \\ &= q[(q-2)|x|^{q-4}x \cdot x + |x|^{q-2}] \\ &= q(q-2)|x|^{q-4}x^2 + |x|^{q-2} > 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Considere, agora, dois dados inicias g e $\widetilde{g}$ e as respectivas soluções u_p e v_p do problema (3.1). Pela Regra da Cadeia, e pelo Teorema generalizado de Green,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\int_\Omega \beta(u_p - v_p)dx &= \int_\Omega \beta'(u_p - v_p)(u_p - v_p)_\tau dx \\ &= \int_\Omega \beta'(u_p - v_p)(-\Delta_p u_p - (-\Delta_p v_p))dx \\ &= \int_\Omega \beta'(u_p - v_p) div(|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p - |\nabla v_p|^{p-2}\nabla v_p)dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} (|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p - |\nabla v_p|^{p-2}\nabla v_p)(\beta'(u_p - v_p))'dx \\ &= -\int_\Omega \beta''(u_p - v_p)(|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p - |\nabla v_p|^{p-2}\nabla v_p)(\nabla u_p - \nabla v_p)dx \end{aligned}$$

por outro lado pela Desigualdade de Tartar, temos:

$$(|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p - |\nabla v_p|^{p-2}\nabla v_p)(\nabla u_p - \nabla v_p) \geq \gamma_0 |\nabla u_p - \nabla v_p|^p$$

como $\beta'' > 0$, segue-se que

$$\beta''(u_p - v_p)(|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p - |\nabla v_p|^{p-2}\nabla v_p)(\nabla u_p - \nabla v_p) \geq \beta''(u_p - v_p)\gamma_0 |\nabla u_p - \nabla v_p|^p$$

de onde segue-se

$$\int_\Omega -\beta''(u_p - v_p)(|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p - |\nabla v_p|^{p-2}\nabla v_p)(\nabla u_p - \nabla v_p)dx \leq$$
$$\leq -\gamma_0 \int_\Omega \beta''(u_p - v_p)|\nabla u_p - \nabla v_p|^p dx \leq 0$$

portanto

$$\frac{d}{d\tau}\int_\Omega |u_p(\tau, x) - v_p(\tau, x)|^q dx \leq 0.$$

Integrando de 0 a t;

$$\int_0^t \left(\frac{d}{d\tau}\int_\Omega |u_p(\tau, x) - v_p(\tau, x)|^q dx\right) d\tau \leq 0,$$

$$\int_\Omega |u_p(t, x) - v_p(t, x)|^q dx \leq \int_\Omega |u_p(x, 0) - v_p(x, 0)|^q dx.$$

Portanto

$$\|u_p(t, \cdot) - v_p(t, \cdot)\|_{L^q(\Omega)} \leq \|g - \widetilde{g}\|_{L^q(\Omega)}$$

e portanto,

$$\|u_p(t, \cdot) - v_p(t, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|g - \widetilde{g}\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{3.4}$$

b) Em (3.4), tomamos $v_p(t, x) = 0$, então

$$\|u_p(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$$

portanto

$$\sup_{[0,T]\times\Omega} |u_p| \leq C.$$

c) Agora vejamos a estimativa que precisamos $\|\nabla u_p\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$.
Como a solução é uma contração na norma do sup[1], e g a função inicial é Lipschitz contínua,

[1]Isto segue do fato que se uma função $f : \Lambda \longrightarrow E$ é contínua e limitada, do aberto Λ no espaço de Banach E então $\|f\|_{L^\infty(\Lambda;E)} = \|f\|_{C(\Lambda;E)}$ neste caso $\Lambda = \mathbb{R}^d, E = \mathbb{R}$

temos

$$|u(t,x+he_i)-u(t,x)|\le|g(x+he_i)-g(x)|\le C|h|$$

onde e_i é o vetor unitário canônico de $\mathbb{R}^d$, fazendo $h\longrightarrow 0$,

$$\left|\frac{\partial u_p}{\partial x_i}\right|< C,\ i=1,\dots,d$$

então

$$\|\nabla u_p\|_{L^\infty(\Omega)}\le C.$$

(ii) Segue-se diretamente do fato de g ter suporte compacto incluído em Ω (efeito regularizante Teorema 1.16.3), que existe $R>0$ tal que

$$supp(u_p)\subset[0,T]\times B(0,R).$$

(iii) Seja $\lambda>1$ e definamos $\widetilde{u}_p(t,x)=\lambda^{\frac{1}{p-2}}u_p(\lambda t,x)$, $(x\in\Omega, t>0)$, então $\widetilde{u}_p(t,x)$ é a única solução da equação

$$\left\{\begin{aligned}\widetilde{u}_p(t,x)-\Delta_p\widetilde{u}_p(t,x)=&\ \ 0,\quad q.t.p.\quad(0,\infty)\times\Omega,\\ \widetilde{u}_p(0,x)=&\ \ \widetilde{g},\quad q.t.p.\quad\{t=0\}\times\Omega.\end{aligned}\right.\tag{3.5}$$

Como o semigrupo gerado pelo p-laplaciano é uma contração (3.4) na norma do sup, temos

$$\|u_p(t,\cdot)-\widetilde{u}_p(t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}\le\|g-\widetilde{g}\|_{L^\infty(\Omega)}$$

para cada $t>0$. Em particular

$$\left|\lambda^{\frac{1}{p-2}}u_p(\lambda t,x)-u_p(t,x)\right|\le\left|\lambda^{\frac{1}{p-2}}-1\right|\|g\|_{L^\infty(\Omega)}\tag{3.6}$$

para todo $t>0$ e x q.t.p em Ω. Dividindo (3.6) por $\lambda-1$ e passando ao limite $\lambda\longrightarrow 1^+$

$$\left|\frac{\lambda^{\frac{1}{p-2}}u(\lambda t,x)-u(\lambda t,x)}{\lambda-1}+\frac{u(\lambda t,x)-u(t,x)}{\lambda-1}\right|\le\frac{\left|1-\lambda^{\frac{1}{p-2}}\right|}{1-\lambda}\|g\|_{L^\infty(\Omega)}$$

e, como $\partial_t u_p(t,x)$ é contínua com respeito ao tempo

$$\left|\frac{1}{p-2}u(t,x)+t\partial_t u(t,x)\right|\le\frac{\|g\|_{L^\infty(\Omega)}}{p-2}$$

então,

$$|\partial_t u_p(t,x)|\le\frac{C}{(p-2)t}.$$

Observação 3.1.2. Quando não houver risco de confusão, pelo Lema 3.1.1 (ii), escreveremos $L^r(0,T;\mathbb{R}^d)$ por $L^r(0,T;\Omega)$, onde $d+1\le r<\infty$.

3.2 O Limite Quando $p \longrightarrow \infty$

Pelas estimativas obtidas no Lema 3.1.1, e pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, existe uma subsequência de $\{u_p\}_{p\geq d+1}$ a qual será denotada por $\{u_p\}_{p\geq d+1}$ e uma função Lipschitz u tal que

$$u_p \longrightarrow u \quad \text{uniformemente em subconjuntos compactos de } (0,T)\times\mathbb{R}^d, \tag{3.7}$$

$$\nabla u_p \overset{*}{\rightharpoonup} \nabla u \quad L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d), \tag{3.8}$$

$$\partial_t u_p \overset{*}{\rightharpoonup} \partial_t u \quad L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d). \tag{3.9}$$

• $\underline{u_p \longrightarrow u \quad \text{uniformemente em subconjuntos compactos de } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d}$

De fato, pelas estimativas obtidas do Lema 3.1.1, temos que $\{u_p\}_{p\geq d+1}$ é uniformemente limitada em $\mathscr{C}([0,T];\overline{\Omega})$, e $\{u_p\}_{p\geq d+1}$ é uma sequência de funções equicontínuas. De fato, dado $\delta > 0$ para $\delta \leq t \leq T$, $\exists M > 0$ tal que

$$|du_p(t,x)| = |\partial_t u_p(t,x)| + |\partial_1 u_p(t,x)| + \cdots + |\partial_d u_p(t,x)| < M,$$

onde $M = dC + \frac{C}{(p-2)\delta}$, e pela desigualdade do Valor Médio, temos

$$|u_p(t,x) - u_p(t',x')| \leq M|(t,x)-(t',x')|, \quad \forall (t,x),(t',x') \in [\delta,T]\times\overline{\Omega}, \tag{3.10}$$

portanto $\{u_p\}_{p\geq d+1}$ é uma sequência de funções equicontínuas, e como $\{u_p\}_{p\geq d+1}$ é uniformemente limitada, então pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, existe uma subsequência de $\{u_p\}_{p\geq d+1}$ a qual será denotada por $\{u_p\}$ e uma função contínua u (Lipschitz contínua, isto se obtém tomando limite $p \longrightarrow \infty$ em (3.10), tal que $u_p \longrightarrow u$ uniformemente em cada compacto de $(0,T)\times\mathbb{R}^d$.

•$\underline{\partial_t u_p \overset{*}{\rightharpoonup} \partial_t u \quad \text{em } L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d)}$

De fato, pela estimativa (3.1.1), segue-se pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, que $\partial_t u_p \overset{*}{\rightharpoonup} \xi$ em $L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d)$, será mostrado que $\xi = \partial_t u$.

Como $\partial_t u_p \overset{*}{\rightharpoonup} \partial_t u$ em $L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d)$, então $\partial_t u_p \longrightarrow \xi$ em $\mathscr{D}'((0,T)\times\mathbb{R}^d)$, por outro lado como $u_p \longrightarrow u$ em $\mathscr{C}([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ então $\partial_t u_p \longrightarrow \partial_t u$ em $\mathscr{D}'((0,T)\times\mathbb{R}^d)$, pela unicidade do limite segue $\partial_t u = \xi$.

• $\underline{\nabla u_p \overset{*}{\rightharpoonup} \nabla u \quad \text{em } [L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d)]^d}$

De fato, pela estimativa (3.1.1), segue-se pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, que $\nabla u_p \overset{*}{\rightharpoonup} \nu$ em $[L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d)]^d$, será mostrado que $\nu = \nabla u$.

Como $\nabla u_p \overset{*}{\rightharpoonup} \nu$ em $[L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d)]^d$, então $\nabla u_p \longrightarrow \nu$ em $[\mathscr{D}'((0,T)\times\mathbb{R}^d)]^d$. Por outro lado como $u_p \longrightarrow u$ em $\mathscr{C}([0,T]\times\mathbb{R}^d)$, então $u_p \longrightarrow u$ em $\mathscr{D}'((0,T)\times\mathbb{R}^d)$ portanto $\nabla u_p \longrightarrow \nabla u$ em $[\mathscr{D}'((0,T)\times\mathbb{R}^d)]^d$, pela unicidade do limite segue $\nabla u = \nu$.

Observação 3.2.1. Note que da segunda convergência acima, $\partial_t u_p \overset{*}{\rightharpoonup} \partial_t u$ e como $\{\partial_t u_p\}_{j\in\mathbb{N}}$ em

$L^\infty(0,T;\mathbb{R}^d)$ e limitado, $\|\partial_t u\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R}^d)} \leq \liminf_{p\to\infty} \|\partial_t u_p\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{R}^d)} = 0$, então, $\partial_t u(t,x) = 0$, portanto u é independente da variável temporal t, isto é $u(t,x) = u(x)$.

Lema 3.2.2. *Temos a seguinte estimativa tipo gradiente,* $\|\nabla u\|_{L^\infty([0,T];\mathbb{R}^d)} \leq 1$.

Demonstração. Pelo Lema 3.1.1, temos

$$\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_p|^p \, dt \, dx\right)^{1/p} \leq C^{1/p},$$

onde $C > 0$ é uma constante independente de p. Fixado $\eta > 0$, definimos o conjunto

$$A_\eta = \{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d : |\nabla u_p(t,x)| \geq 1 + \eta\},$$

então

$$\begin{aligned}|A_\eta|(1+\eta) &= \int\int_{A_\eta} (1+\eta) dt dx \leq \liminf_{p\longrightarrow\infty} \int\int_{A_\eta} |\nabla u_p(t,x)| dt dx \\ &\overset{\text{Desigualdade de Hölder}}{\leq} \liminf_{p\longrightarrow\infty} |A_\eta|^{\frac{pj-1}{p}} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_p(t,x)|^p \, dt \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \liminf_{p\longrightarrow\infty} |A_\eta| C^{\frac{1}{p}} = |A_\eta|\end{aligned}$$

então,

$$\eta |A_\eta| \leq 0$$

portanto $|A_\eta| = 0$ então $|\nabla u(t,x)| \leq 1 \quad q.t.p \ [0,T] \times \mathbb{R}^d$

□

Desde que $u_p = g$ em $t = 0$, há claramente uma camada inicial, ao longo do tempo u_p muda de estar perto de g a estar perto de $u \neq g$. Precisamos uma estimativa que aproxime o comprimento desta camada.

Lema 3.2.3. .

(i) Seja $0 \leq t_p \leq \frac{C'}{L^p}$ *para alguma constante fixada* $C' > 0$*. Então*

$$u_p(t_p, \cdot) \longrightarrow g \quad uniformemente \quad quando \quad p \longrightarrow \infty. \tag{3.11}$$

Além disso,

(ii)

$$u_p(\frac{1}{p-1}, \cdot) \longrightarrow u \qquad uniformemente \quad quando \quad p \longrightarrow \infty. \tag{3.12}$$

Demonstração. (i) Multiplicamos a equação (3.1) por $\partial_t u_p$ e integrando de 0 a t_p temos :

$$\int_0^{t_p} \|\partial_t u_p(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt + \frac{1}{p}\|\nabla u_p(t)\|^p_{L^p(\Omega)} = \frac{1}{p}\|\nabla g\|^p_{L^p(\Omega)} \tag{3.13}$$

lembre-se que Ω é um domínio suave e limitado dentro do qual está contido o suporte de g e, conseqüentemente, o suporte de u_p, segue-se que

$$\int_0^{t_p} \|\partial_t u_p\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt \leq \frac{1}{p}\|\nabla g\|^p_{L^p(\Omega)} \tag{3.14}$$

Assim, existe $K > 0$ tal que

$$\int_0^{t_p}\int_\Omega |\partial_t u_p(t,x)|\, dt\, dx \leq K t_p^{1/2}\frac{1}{p^{1/2}}\|\nabla g\|^{p/2}_{L^\infty(\Omega)} \leq K\frac{t_p^{1/2}L^{p/2}}{p^{1/2}}$$

onde $\|\nabla g\|_{L^\infty(\Omega)} = L > 1$ e desde que $t_p \leq \frac{C'}{L^p}$, finalmente temos a estimativa

$$\int_0^{t_p}\int_\Omega |\partial_t u_p(t,x)|\, dt\, dx \leq \frac{\widetilde{C}}{p^{1/2}}. \tag{3.15}$$

Portanto, como

$$u_p(t_p,x) - g(x) = \int_0^{t_p} \partial_t u_p(t,x) dt \leq \int_0^{t_p} |\partial_t u_p(t,x)|\, dt,$$

por (3.15)

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u_p(t_p,x) - g(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^d}\int_0^{t_p} |\partial_t u_p(t,x)|\, dt\, dx \leq \frac{\widetilde{C}}{p^{1/2}}.$$

então $u_p(t_p,\cdot) \longrightarrow g$ em $L^1(\mathbb{R}^d)$ quando $p \longrightarrow \infty$, então $u_p(t_p,\cdot) \longrightarrow g$ q.t.p. x. Pelo Teorema de Egoroff, dado $\epsilon > 0$, existe um subconjunto mensurável $E \subset \Omega$, com $|E| < \frac{\epsilon}{3C}$ tal que

$$\sup_{x\in E^c} |u_p(t_p,x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Seja $x \in \Omega$ qualquer. Existe $\widetilde{x} \in E^c$ tal que $|x - \widetilde{x}| \leq \frac{\epsilon}{3C}$. Além disso, como $\{\nabla u_p\}_{p\geq d+1}$ é uniformemente limitado por $C > 0$, então

$$|u_p(t_p,x_1) - u_p(t_p,x_2)| \leq C|x_1 - x_2|. \tag{3.16}$$

Assim,

$$|u_p(t_p,x) - g(x)| \leq |u_p(t_p,x) - u_p(t_p,\widetilde{x})| + |u_p(t_p,\widetilde{x}) - g(\widetilde{x})| + |g(\widetilde{x}) - g(x)| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}.$$

Assim concluímos que

$$u_p(t_p, x) \longrightarrow g(x), \quad p \longrightarrow \infty \quad uniformemente \quad em \quad \Omega.$$

(ii) Por (3.7) sabemos que $u_p(1,x) \longrightarrow u(x)$ uniformemente quando $p \to \infty$, pelo Lema 3.1.1, (iii) segue que

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{p-1}}^{1} |\partial_t u_p(t)|\, dt &\leq \int_{\frac{1}{p-1}}^{1} \frac{C}{(p-2)t} dt \\ &= \frac{C}{p-2}\left(\ln 1 - \ln\left(\frac{1}{p-1}\right)\right) \\ &= \frac{C}{p-2}\ln(p-1) \longrightarrow 0, p \longrightarrow \infty.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Assim

$$\left| u_p(1) - u_p\left(\frac{1}{p-1}\right)\right| \leq \int_{\frac{1}{p-1}}^{1} |\partial_t u_p(t)|\, dt,$$

e como $u_p(1,x) \longrightarrow u(x)$ uniformemente, o resultado segue.

□

3.3 Reescalamento

Nesta seção definimos a função,

$$v_p(t,x) = t u_p(\frac{t^{p-1}}{p-1}, x), \quad (x \in \mathbb{R}^d, 0 \leq t \leq 1) \quad para \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{3.18}$$

De acordo com o Lema 3.2.3 , se fixamos

$$\tau = \frac{1}{L}, (L = \|\nabla g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} > 1)$$

então

(3.19)

$$v_p(\tau, x) = \frac{1}{L} u_p(\frac{1}{(p-1)L^{p-1}}, x) \longrightarrow \frac{1}{L} g(x) := h(x), \quad uniformemente \quad em \quad \mathbb{R}^d, \quad p \to \infty.$$

Além disso,

$$v_p(1,x) = u_p(\frac{1}{p-1}, x) \longrightarrow u(x) \quad uniformemente \quad em \quad \mathbb{R}^d, \quad p \to \infty. \tag{3.20}$$

Note que a função $v_p(t,x)$ é solução do problema,

$$\partial_t v_p - \Delta_p v_p(t,x) = \frac{v_p}{t} \text{ em } (\tau, 1) \times \mathbb{R}^d.$$

Se definimos

$$f(t) := u_p(\frac{t^{p-1}}{p-1}, x)$$

o problema

$$\begin{cases} \partial_t w - \Delta_p w = f(t) \text{ em } (\tau, 1) \times \mathbb{R}^d \\ w(0) = \frac{1}{L} u_p(\frac{1}{(p-1)L^{p-1}}, x)(\in D(-\Delta_p) \subset W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega)), \end{cases}$$

tem uma única solução, pelo Teorema 1.16.2, portanto, $w = v_p$. Assim v_p resolve a equação de evolução

$$\begin{cases} \partial_t v_p - \Delta_p v_p = \dfrac{v_p}{t} \text{ em } (\tau, 1) \times \mathbb{R}^d \\ v_p(\tau) = \dfrac{1}{L} u_p(\dfrac{1}{(p-1)L^{p-1}}, x), \end{cases} \tag{3.21}$$

o problema de evolução (3.21), pode interpretar-se como

$$\begin{cases} \frac{v_p}{t} - \partial_t v_p = \partial \varphi_p[v_p], \tau \leq t \leq 1 \\ v_p(\tau) = \frac{1}{L} u_p(\frac{1}{(p-1)L^{p-1}}, x), \end{cases} \tag{3.22}$$

onde

$$\varphi_p[v] = \begin{cases} \dfrac{1}{p} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v|^p, \quad v \in L^2(\mathbb{R}^d), |\nabla v| \in L^p(\mathbb{R}^d) \\ \qquad +\infty, \quad \text{caso contrário}, \end{cases} \tag{3.23}$$

como consequência do Lema 3.1.1, obtemos as seguintes estimativas:

Estimativa A

$$\begin{aligned} \sup_{[\tau,1]\times\mathbb{R}^n} |v_p| &= \sup_{[\tau,1]\times\mathbb{R}^n} \left| t u_p \left(\frac{t^{p-1}}{p-1}, x \right) \right| \\ &\leq \sup_{[\tau,1]\times\mathbb{R}^n} \left| u_p \left(\frac{t^{p-1}}{p-1}, x \right) \right| \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Estimativa B

$$\begin{aligned} \sup_{[\tau,1]\times\mathbb{R}^n} |\partial_t v_p| &= \sup_{[\tau,1]\times\mathbb{R}^n} \left| u_p \left(\frac{t^{p-1}}{p-1}, x \right) + t^{p-1} \partial_t u_p \left(\frac{t^{p-1}}{p-1}, x \right) \right| \\ &\leq \sup_{[\tau,1]\times\mathbb{R}^n} \left| u_p \left(\frac{t^{p-1}}{p-1}, x \right) \right| + \sup_{[\tau,1]\times\mathbb{R}^n} \left| t^{p-1} \partial_t u_p \left(\frac{t^{p-1}}{p-1}, x \right) \right| \\ &\leq C''. \end{aligned}$$

onde $C'' = C + \frac{C}{(p-2)}$.

Estimativa C

$$
\begin{aligned}
\sup_{[\tau,1]\times\mathbb{R}^n} |\nabla v_p| &= \sup_{[\tau,1]\times\mathbb{R}^n} \left|\nabla\left(tu_p\left(\frac{t^{p-1}}{p-1},x\right)\right)\right| \\
&= \sup_{[\tau,1]\times\mathbb{R}^n} \left|t\nabla u_p\left(\frac{t^{p-1}}{p-1},x\right)\right| \\
&\leq \sup_{[\tau,1]\times\mathbb{R}^n} \left|\nabla u_p\left(\frac{t^{p-1}}{p-1},x\right)\right| \\
&\leq C.
\end{aligned}
$$

Pelas estimativas obtidas, passando a uma subsequência, se for necessário, seguindo o mesmo processo anterior feito para $\{v_p\}$ obtemos,

$$v_p(t,x) \longrightarrow v(t,x) \text{ uniformemente } [\tau,1]\times\mathbb{R}^n$$

Observação 3.3.1. Com as estimativas A,B,C conseguimos uma estimativa tipo gradiente $\|\nabla v\|_{L^\infty(\tau,1;\mathbb{R}^d)} \leq 1$. De fato, pela estimativa C, segue que

$$\left(\int_\tau^1\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v_p|^p\,dx\,dt\right)^{1/p} \leq C^{1/p}$$

onde $C>0$ constante independente de p. Fixado $\nu>0$, definimos o conjunto

$$Z_\nu = \{(t,x)\in[\tau,1]\times\mathbb{R}^d : |\nabla v_p(t,x)| \geq 1+\nu\}$$

então

$$
\begin{aligned}
|Z_\nu|(1+\nu) = \int\int_{Z_\nu} (1+\nu)\,dt\,dx &\leq \liminf_{p\longrightarrow\infty} \int\int_{Z_\nu} |\nabla v_p(t,x)|dtdx \\
&\overset{\text{Desigualdade de Hölder}}{\leq} \liminf_{p\longrightarrow\infty} |Z_\nu|^{\frac{pj-1}{p}} \left(\int_\tau^1\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v_p(t,x)|^p\,dt\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \liminf_{p\longrightarrow\infty} |Z_\nu| C^{\frac{1}{p}} = |Z_\nu|
\end{aligned}
$$

temos,

$$\nu|Z_\nu| \leq 0$$

portanto $|Z_\nu| = 0$ então $|\nabla v(t,x)| \leq 1 \quad q.t.p.\ [\tau,1]\times\mathbb{R}^d$.

A função limite v satisfaz o problema de evolução,

$$
\begin{cases}
\dfrac{v}{t} - \partial_t v \in \partial I_\infty[v] & ,\tau \leq t \leq 1 \\
v = h & ,t=\tau
\end{cases}
\tag{3.24}
$$

onde h tem suporte compacto, $\partial I_\infty[\cdot]$ é entendida como a subdiferencial da função indicatriz

$$I_\infty[v] = \begin{cases} 0 & v \in K, \\ \infty & v \notin K, \end{cases}$$

do conjunto $K = \{v \in L^2(\mathbb{R}^d) : |\nabla v| \leq 1, q.t.p.\ \mathbb{R}^d\} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$. Como $v(\tau) \in D(\partial I_\infty(K)) \subset \overline{D(\partial I_\infty(K))}$, pelo Teorema 1.17.2, o problema de evolução (3.24) tem uma única solução fraca v que de fato é forte conforme ao Teorema 1.17.3.

Observação 3.3.2. Interpretamos a inclusão diferencial (3.24), de acordo com a definição

$$I_\infty[\xi] \geq I_\infty[v] + \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{v(t,x)}{t} - \partial_t v(t,x) \right) (\xi - v(t,x))\, dx$$

para cada $\xi \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Agora, verifiquemos que a função v, satisfaz a equação de evolução (3.24).
Note que, se $\xi \in K^c$ então $I_\infty[\xi] = +\infty$ e o resultado segue. Se $\xi \in K$, então

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{v_p}{t} - \partial_t v_p, \xi - v_p \right\rangle &= \langle -\Delta_p v_p, \xi - v_p \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v_p|^{p-2} \nabla v_p (\nabla \xi - \nabla v_p)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v_p|^{p-2} \nabla v_p \nabla \xi\, dx - \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v_p|^p\, dx \\
&\leq \left(\frac{1}{p'} - 1 \right) \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v_p|^p\, dx + \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \xi|^p\, dx \quad com\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \\
&\leq \frac{C}{p} + \frac{1}{p}\ .
\end{aligned}$$

Portanto, segue das estimativas de $\{v_p\}$, que $\partial_t v_p \rightharpoonup \partial_t v$ em $L^2(\tau, 1; L^2(\mathbb{R}^d))$ e tomando $p \to \infty$ na desigualdade de acima, temos

$$\left\langle \frac{v}{t} - \partial_t v, \xi - v \right\rangle \leq 0.$$

então $\frac{v}{t} - \partial_t v \in \partial I_\infty[v]$, e como

$$v_p(\tau, x) = \frac{1}{L} u_p \left(\frac{1}{(p-1)L^{p-1}}, x \right) \xrightarrow{p\to\infty} v(\tau) = h(x)$$

portanto v é solução do problema de evolução (3.24).

Por (3.20), $v_p(1,x) = u_p\left(\frac{1}{p-1}, x\right) \longrightarrow u(x)$. Então $u(x) = v(1,x)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Consequentemente, para calcular o perfil do desmoronamento primeiro devemos definir $\tau = L^{-1}$, $h = \tau g$, logo resolvendo (3.24) podemos concluir que $u = v(1, \cdot)$. Desde que uma solução de (3.24) é única, concluímos que de fato $v(t,x) = \lim_{p\to\infty} tu_p\left(\frac{t^{p-1}}{p-1}, x\right)$ $(x \in \mathbb{R}^d$ e $\tau \le t \le 1)$. Em particular

$$\begin{aligned} v(1,x) = u(x) &= \lim_{p\to\infty} u_p\left(\frac{1}{p-1}, x\right) \\ &= \lim_{p\to\infty} u_p(x) \end{aligned}$$

existe para cada $t > 0$. Podemos reinterpretar (3.24) pelo estabelecimento

$$w(t,x) = \frac{1}{t}v(t,x) = \lim_{p\to\infty} u_p\left(\frac{t^{p-1}}{p-1}, x\right), x \in \mathbb{R}^d, \tau \le t \le 1, \tag{3.25}$$

então,

$$\begin{cases} -w_t \in \partial I_t[w] & ,\tau \le t \le 1, \\ w = g & ,t = \tau, \end{cases} \tag{3.26}$$

onde $I_t[w] = \begin{cases} 0 & w \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad |\nabla w| \le \frac{1}{t} \text{ q.t.p.} \\ \infty & \text{outro caso.} \end{cases}$

A evolução (3.26) é o fluxo em $L^2(\mathbb{R}^d)$ governado pela subdiferencial da função indicador do conjunto convexo

$$K_t = \{w \in L^2(\mathbb{R}^d) \,:\, |\nabla w| \le \frac{1}{t} \text{ q.t.p}\}.$$

3.4 Interpretação do Problema Transferência de Massa de Monge-Kantorovich

Pretendemos na seção a seguir resolver explicitamente o modelo para o desmoronamento de u no caso $d = 1$. A idéia principal será a de interpretar a equação de evolução (3.24) como um problema de transferência de massa de Monge-Kantorovich para quase todo $t \ge \tau$. Lembrando a Teoria de Monge-Kantorovich [11][Capítulo 2, p.16], notamos que a inclusão

$$\frac{v(t,\cdot)}{t} - \partial_t v(t,\cdot) \in \partial I_\infty[v(t,\cdot)] \tag{3.27}$$

significa que $v(t,\cdot)$ é o potencial de Monge-Kantorovich correspondente para o problema de mover otimamente a massa $\mu^+ = \frac{v(t,x)}{t}dx$ para $\mu^- = \partial_t v(t,y)dy$. Nesta interpretação, a areia desmorona "*instantaneamente*" na direção $-\nabla v$, de tal maneira que a taxa de aumento da altura $\partial_t v$, satisfaz as relações de balanço de massa com respeito ao $\frac{v}{t}$. Estas relações de balanço por sua vez podem ser utilizadas para calcular $\partial_t v$ explicitamente em determinadas situações.

Capítulo 4

APLICAÇÃO

Neste capítulo trataremos uma aplicação da teoria desenvolvida anteriormente. Estamos interessados no colapso de uma pilha de areia instável. Ou seja consideramos uma pilha de areia com uma configuração inicial instável. Uma pergunta natural é qual o estado final de repouso da pilha de areia depois de varias avalanches.

Nós tornaremos explícitos os resultados anteriores para $d = 1$. Em particular obteremos um sistema acoplado de E.D.O., cuja solução permite calcular o desmoronamento u, assumindo que o dado inicial ou configuração inicial g tem a forma explicita

$$g(x) = \max\{0, w_1 - L|x - d_1|, w_2 - L|x - d_2|, ..., w_m - L|x - d_m|\}, (x \in \mathbb{R}) \tag{4.1}$$

onde $L > 1$ e $w_k, d_k \in \mathbb{R}$, $w_k > 0, 1 \leq k \leq m$.

Assim tomaremos g como o contorno superior da união de m cones (triângulos isósceles) onde cada cone representa uma pilha de areia. O k-ésimo cone tem sua base centrado em d_k com altura w_k e inclinação $\pm L$.

Explicitaremos uma solução do problema de evolução

$$\begin{cases} \frac{v}{t} - v_t \in \partial I_\infty[v], (\tau \leq t \leq 1), \\ v = h, \end{cases} \tag{4.2}$$

onde $\tau = L^{-1}, h = \tau g$.

Observe primeiramente que

$$h(x) = \max\{0, z_1 - |x - d_1|, z_2 - |x - d_2|, \ldots, z_m - |x - d_m|\}, \ (x \in \mathbb{R}), \tag{4.3}$$

para

$$z_k = \frac{w_k}{L}, \ (1 \leq k \leq m). \tag{4.4}$$

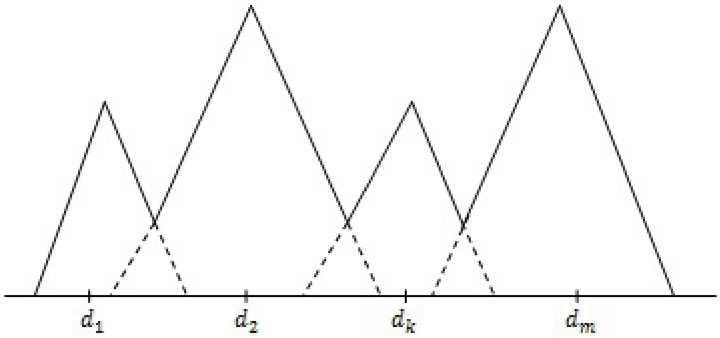

Figura 4.1: Configuração inicial g; inclinação = $\pm L$

Motivados pelo trabalho [9], nossa hipótese é que a solução v tem a forma

$$v(t,x) = \max\{0, z_1(t) - |x - d_1(t)|, z_2(t) - |x - d_2(t)|, \ldots, z_m(t) - |x - d_m(t)|\}, \tag{4.5}$$

para $x \in \mathbb{R}$ e $\tau \leq t \leq 1$, onde as alturas $z_k(t)$ e os centros de base $d_k(t)$ serão determinados. Fisicamente isto significa que ao longo do desmoronamento, a configuração das pilhas de areia continuará sendo na forma do contorno de uma reunião de cones isósceles com inclinação ± 1.

Determinação da E.D.O para as alturas

Fixemos o tempo $\tau \leq t \leq 1$, e para $1 \leq k \leq m$, definimos o conjunto $D_k(t)$:

$$D_k(t) = \{x \in \mathbb{R} : z_k(t) - |x - d_k(t)| > \max_{\substack{1 \leq l \leq m \\ l \neq k}} \{0, z_l(t) - |x - d_l(t)|\}.$$

$D_k(t) \neq \emptyset$ se e somente se $z_k - z_l > -|d_k - d_l|$, além disso o conjunto $D_k(t)$ é um intervalo em $\mathbb{R}$ (pois as z_k, d_k, x sao continuas) sobre o qual o k-ésimo triângulo determina $v(\cdot, t)$. Subdividiremos $D_k(t)$ nos intervalos a esquerda e a direita de $d_k(t)$:

$$\begin{cases} D_k^-(t) = D_k(t) \cap (-\infty, d_k(t)], \\ D_k^+(t) = D_k(t) \cap [d_k(t), +\infty). \end{cases} \tag{4.6}$$

Em seguida invocamos a relação detalhada do balanço de massa da Teoria de Monge-Kantorovich, transportando $\frac{v(t,x)}{t}$ para $v_t(t,x)$ em $D_k^{\pm}(t)$:

$$\begin{cases} \int_{D_k^-(t)} \frac{v(t,x)}{t} - v_t(t,x)dx = 0, \\ \int_{D_k^+(t)} \frac{v(t,x)}{t} - v_t(t,x)dx = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Como v tem a forma (4.5), temos

$$v(t,x) = z_k(t) - |x - d_k(t)|, \text{ em } D_k^{\pm}(t), \tag{4.8}$$

de onde segue diretamente que

$$v_t(t,x) = \begin{cases} \dot{z}_k(t) - \dot{d}_k(t), & D_k^-(t), \\ \dot{z}_k(t) + \dot{d}_k(t), & D_k^+(t). \end{cases} \tag{4.9}$$

onde " $\cdot$ " denota a derivada com respeito a t. Portanto por (4.7) para $D_k^+(t)$ implica que

$$\int_{D_k^+(t)} \left[\frac{z_k(t) - x + d_k(t)}{t} - \dot{z}_k(t) - \dot{d}_k(t) \right] dx = 0,$$

então,

$$\frac{1}{t} \int_{D_k^+(t)} z_k(t) - |x - d_k(t)|\, dx = (\dot{z}_k(t) + \dot{d}_k(t))|D_k^+(t)|, \tag{4.10}$$

analogamente, para $D_k^-(t)$ temos

$$\frac{1}{t} \int_{D_k^-(t)} z_k - |x - d_k(t)|\, dx = (\dot{z}_k(t) - \dot{d}_k(t))|D_k^-(t)|, \tag{4.11}$$

em resumo,

$$\begin{cases} \frac{1}{t} \int_{D_k^+(t)} z_k(t) - |x - d_k(t)|\, dx = (\dot{z}_k(t) + \dot{d}_k(t))|D_k^+(t)|, \\ \frac{1}{t} \int_{D_k^-(t)} z_k(t) - |x - d_k(t)|\, dx = (\dot{z}_k(t) - \dot{d}_k(t))|D_k^-(t)|. \end{cases} \tag{4.12}$$

Assim, por (4.10) e (4.11), temos

$$\begin{cases} \frac{1}{t}(z_k(t) - \frac{1}{2}|D_k^-(t)|) = (\dot{z}_k(t) - \dot{d}_k(t)), \\ \frac{1}{t}(z_k(t) - \frac{1}{2}|D_k^+(t)|) = (\dot{z}_k(t) + \dot{d}_k(t)). \end{cases} \tag{4.13}$$

e assim somando e subtraindo respectivamente, obtemos o sistemas acoplado de E.D.O.

$$\begin{cases} \dot{z}_k(t) = & \dfrac{z_k(t)}{t} - \dfrac{1}{4t}(|D_k^-(t)| + |D_k^+(t)|), \\ \dot{d}_k(t) = & \dfrac{1}{4t}(|D_k^-(t)| - |D_k^+(t)|). \end{cases} \tag{4.14}$$

para $1 \leq k \leq m, \tau \leq t \leq 1$, com condições iniciais

$$z_k(\tau) = z_k, d_k(\tau) = d_k, \quad (1 \leq k \leq m) \tag{4.15}$$

onde $z_k = \frac{w_k}{L}$.

Interpretação da E.D.O

A equação (4.14) descreve um sistema acoplado de E.D.O., para $z(t) = (z_1(t), ..., z_m(t))$, $d(t) = (d_1(t), ..., d_m(t))$. O acoplamento da E.D.O., se dá através dos termos $|D_k^{\pm}(t)|$. Para mostrar com maior claridade, introduziremos a Função Área, definida por:

$$W(z_1,...,z_m,d_1,...,d_m)=\int_{\mathbb{R}}\max\{0,z_1-|x-d_1|,...,z_m-|x-d_m|\}dx. \tag{4.16}$$

Observe que para $1\leq k\leq m$

$$W_{z_k}(z_1,...,z_m,d_1,...,d_m)=|D_k(t)|=|D_k^+(t)|+|D_k^-(t)| \tag{4.17}$$

e

$$W_{d_k}(z_1,...,z_m,d_1,...,d_m)=|D_k^+|-|D_k^-|. \tag{4.18}$$

De fato, observe que

$$W_{d_k}(z_1,...,z_m,d_1,...,d_m)=\int_{D_1}z_1(t)-|x-d_1(t)|\,dx+\ldots+\int_{D_k}z_k(t)-|x-d_k(t)|\,dx+\ldots+\int_{D_m}z_m(t)-|x-d_m(t)|\,dx,$$

então,

$$\begin{aligned}\frac{\partial W(z_1,\ldots,z_m,d_1,\ldots,d_m)}{\partial d_k}&=\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}}\frac{z_k-|x-(d_k+h)|-z_k+|x-d_k|}{h}\,dx\\&=\lim_{h\to 0}\left[\int_{D_k^+}\frac{z_k-x+d_k+h-z_k+x-d_k}{h}\,dx\right.\\&\left.+\int_{D_k^-}\frac{z_k+x-d_k-h-z_k-x+d_k}{h}\,dx\right]=|D_k^+|-|D_k^-|,\end{aligned} \tag{4.19}$$

então,

$$W_{d_k}(z_1,\ldots,z_n,d_1,\ldots,d_n)=|D_k^+|-|D_k^-|, \tag{4.20}$$

analogamente,

$$W_{z_k}(z_1,\ldots,z_n,d_1,\ldots,d_n)=|D_k^+|+|D_k^-|$$

e daí podemos reescrever (4.14) como o sistema,

$$\begin{cases}\dot{z}_k(t)=\dfrac{z_k(t)}{t} & -\dfrac{1}{4t}W_{z_k}(z_1,...,z_m,d_1,...,d_m),\\ \dot{d}_k(t)= & -\dfrac{1}{4t}W_{d_k}(z_1,...,z_m,d_1,...,d_m).\end{cases} \tag{4.21}$$

para $1 \leq k \leq m, \tau \leq t \leq 1$. Em particular pela Regra da Cadeia temos,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}W(z_1(t),...,z_m(t),d_1(t),...,d_m(t)) =& \sum_{k=1}^{m} W_{z_k}\dot{z}_k + W_{d_k}\dot{d}_k \\
=& \sum_{k=1}^{m}(|D_k^+(t)| + |D_k^-(t)|)(\frac{z_k(t)}{t} - \frac{1}{4t}(|D_k^+(t)| + |D_k^-|(t))) \\
& + (|D_k^+(t)| - |D_k^-(t)|)(\frac{1}{4t}(|D_k^-(t)| - |D_k^+(t)|)) \\
=& \frac{z_k}{t}(|D_k^+(t)| + |D_k^-(t)|) - \frac{1}{4t}(|D_k^+(t)|^2 + 2|D_k^+(t)||D_k^-(t)| + |D_k^-(t)|^2) \\
& - \frac{1}{4t}(|D_k^+(t)|^2 - 2|D_k^+(t)||D_k^-(t)| + |D_k^-(t)|^2) \\
=& \frac{z_k}{t}(|D_k^+(t)| + |D_k^-|(t)) - \frac{1}{4t}(2|D_k^+(t)|^2 + 2|D_k^-(t)|^2) \\
=& \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{m}(|D_k^+(t)|z_k(t) - \frac{|D_k^+(t)|^2}{2}) + (|D_k^-(t)|z_k(t) - \frac{|D_k^-(t)|^2}{2}) \\
=& \frac{1}{t}W(z_1(t),..,z_m(t),d_1(t),..,d_m(t)),
\end{aligned}
$$

por (4.5), concluímos

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} v(t,x)dx = \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} v(t,x)dx$$

e assim $w = \frac{v}{t}$ satisfaz a condição de conservação de massa

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}} w(t,x)\,dx\right) = 0.$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}} w(t,x)\,dx\right) &= \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt}\frac{v(t,x)}{t}\,dx\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{v'}{t} - \frac{v}{t^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} \left(v' - \frac{v}{t}\right) dx = 0.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}} w(t,x)dx\right) = 0.$$

Note também a seguinte interpretação física da E.D.O. (4.14). Consideremos um típico cone com $|D_k^+(t)| > |D_k^-(t)|$, como na figura 4.2.

Portanto a altura aumenta mais rápido a esquerda, (figura 4.3) isto é consistente com a segunda equação (4.14).

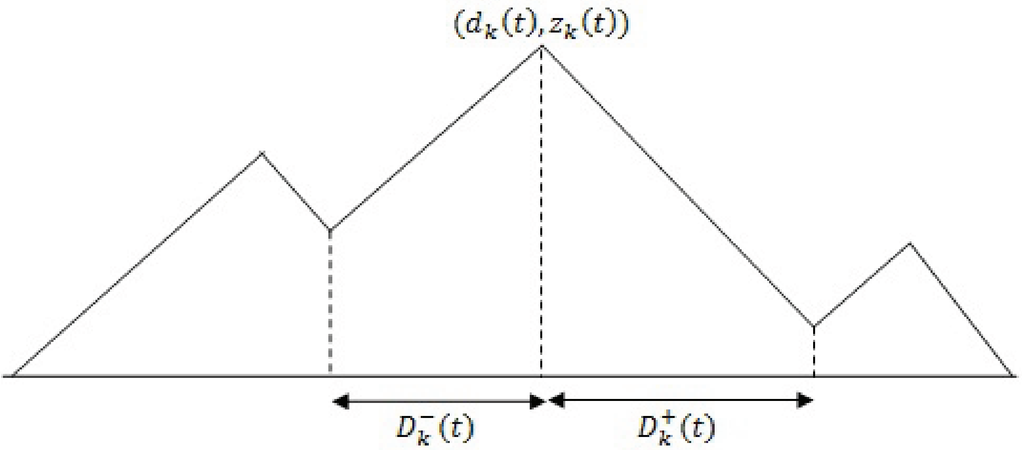

Figura 4.2: Gráfico de $v(t, \cdot)$, pendente $= \pm 1$

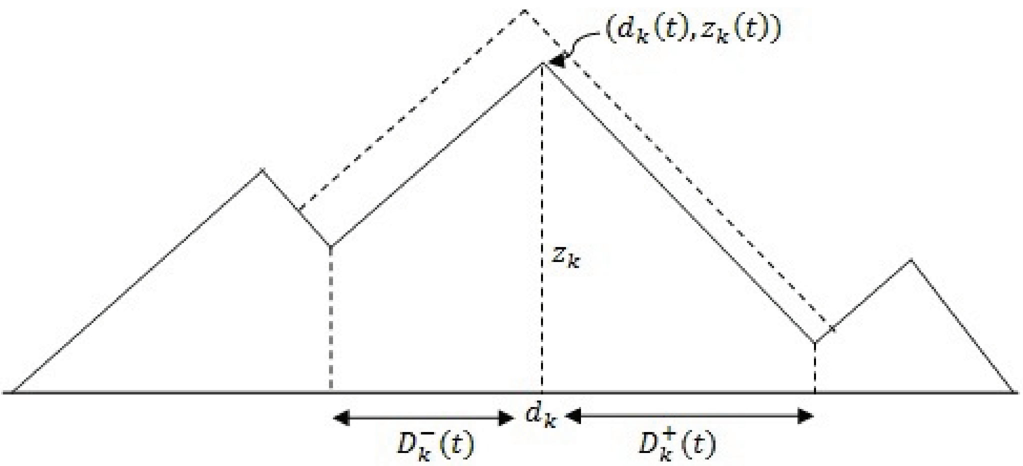

Figura 4.3:

Resolvendo a E.D.O.

Para resolver a E D.O., primeiro provemos que as aplicações :

$$\begin{aligned} \psi_k : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (z, d) &\mapsto W_{z_k}(z, d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_k : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (z, d) &\mapsto W_{d_k}(z, d) \end{aligned}$$

são contínuas no conjunto

$$\Omega = \{(z, d) \in \mathbb{R}^{2m} : z_k > 0, |z_k - z_l| < |d_k - d_l|, 1 \leq k, l \leq m \leq, l \neq k\}$$

Ω é o conjunto das alturas e pontos centralizado tais que cada ponto está exposto. Consequen-

temente, o dado inicial $(z, d) \in \Omega$, o problema de valor inicial (4.14)-(4.15) tem pelo menos uma solução.
Verifiquemos a continuidade da função ψ_k.
Seja $(z_0, d_0) \in \Omega$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|(h, r)| < \delta$, então

$$\begin{aligned} |\psi_k(z_0 + h, d_0 + r) - \psi_k(z_0, d_0)| &= |W_{z_k}(z_0 + h, d_0 + r) - W_{z_k}(z_0, d_0)| \\ &= |\tau_{(h,r)}(D_k^+(t))| + |\tau_{(h,r)}(D_k^-(t))| - (|D_k^+(t)| + |D_k^-(t)|) < \epsilon. \end{aligned}$$

onde $\tau_{(h,r)}$ é a transformação translação, i.e.,

$$\lim_{(h,r)\longrightarrow(0,0)} \psi_k(z_0 + h, d_0 + r) = \psi_k(z_0, d_0).$$

portanto ψ_k é contínua em Ω. Analogamente, obtemos a continuidade φ_k. Lembremos que o sistema (4.14)-(4.15) equivale ao sistema acoplado.

$$\text{(4.22)} \qquad \begin{cases} \dot{z}_k(t) = \dfrac{z_k(t)}{t} & -\dfrac{1}{4t} W_{z_k}(z_1, ..., z_m, d_1, ..., d_m) \\ \dot{d}_k(t) = & -\dfrac{1}{4t} W_{d_k}(z_1, ..., z_m, d_1, ..., d_m). \end{cases}$$

$$\text{(4.23)} \qquad z_k(\tau) = z_k, d_k(\tau) = d_k, \quad (1 \le k \le m)$$

onde $z_k = \frac{w_k}{L}$.
Reescrevemos a equação (4.22) em forma matricial, para dar a forma de um problema de Cauchy, denote-se:

$$X(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \\ d_1(t) \\ \vdots \\ d_m(t) \end{pmatrix}; \quad \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{z}_m(t) \\ \dot{d}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{d}_m(t) \end{pmatrix};$$

$$F(t,X) = \begin{pmatrix} \frac{z_1(t)}{t} - \frac{1}{4t}W_{z_1} \\ \frac{z_2(t)}{t} - \frac{1}{4t}W_{z_2} \\ \vdots \\ \frac{z_k(t)}{t} - \frac{1}{4t}W_{z_m} \\ -\frac{1}{4t}W_{d_1} \\ \vdots \\ -\frac{1}{4t}W_{d_m} \end{pmatrix}; \quad X(\tau) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \\ d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix};$$

com $\tau = L^{-1}$, $z_k = \frac{w_k}{L}$, $k = 1, \dots, m$.

$$\text{(4.24)} \qquad \begin{cases} \dot{X}(t) = F(t,X) \\ X(\tau) = X_0. \end{cases}$$

onde $F : [\tau, 1] \times \mathbb{R}^{2m} \longrightarrow \mathbb{R}^{2m}$.
A função F é contínua pois se provou que as aplicações ψ_k e φ_k são contínuas, $k = 1, \dots, m$ no conjunto aberto Ω, conclui-se, assim, que o problema de Cauchy satisfaz as condições do Teorema de Peano 1.18.1 o P.V.I (4.24) tem pelo menos uma solução $(z(t), d(t))$ existindo em um intervalo maximal $[\tau, t^*)$, onde $\tau = L^{-1}$. Então temos os seguintes casos :

(i) $t^* > 1$ nossa solução existe em $[\tau, 1]$ conforme exigido.

(ii) $\tau < t^* < 1$. Como a parte direita de (4.14) é limitado, então

existem os seguintes limites

$$\lim_{t \to t^{*-}} z(t) = z^* = (z_1^*, \dots, z_m^*)$$

$$\lim_{t \to t^{*-}} d(t) = d^* = (d_1^*, \dots, d_m^*)$$

Claramente pela Proposição 1.18.3, $(z^*, d^*) \in \partial\Omega$.

Agora como $tan(\alpha) = 1$ (fig. 4.4), então $z_k(t) \geq |D_k^{\pm}(t)|$, por (4.14) seguimos que $\dot{z}_k(t) \geq 0$, para $1 \leq k \leq m$. Em conseqüência temos

$$\text{(4.25)} \qquad |z_k^* - z_l^*| = d_k^* - d_l^* > 0$$

pelo menos para um par de índices $k, l \in \{1, 2.., m\}$, $k \neq l$. Isto ocorre se um de os cones cresce sobre outro (fig. 4.5). Nossa intenção é reiniciar a E.D.O., dissociando os índices correspondentes aos triângulos menores, i.e., se

$$z_k^* - z_l^* = d_k^* - d_l^* > 0,$$

como no desenho (fig. 4.5), se elimina o índice l. Caso contrário

$$z_l^* - z_k^* = d_l^* - d_k^* > 0,$$

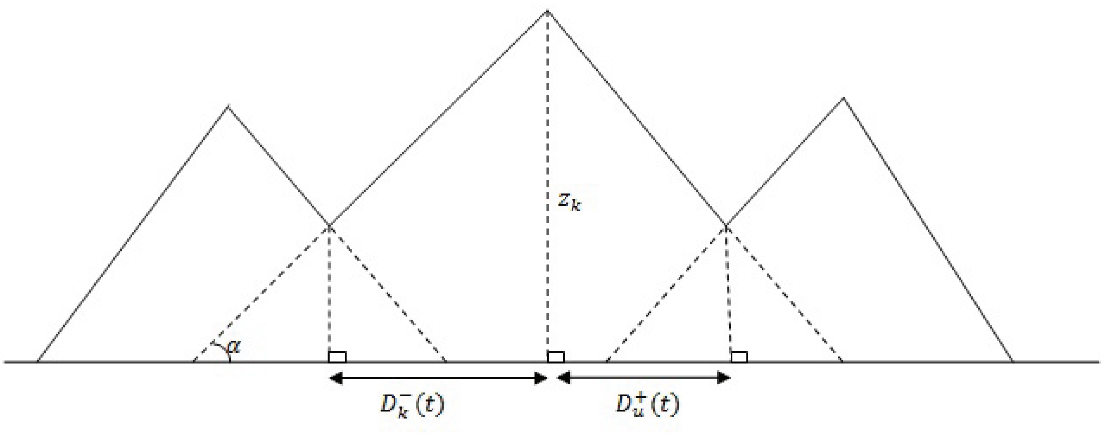

Figura 4.4:

eliminamos o índice k. Consideremos todos os pares k, l satisfazendo (4.25) e, como acabamos de descrever, eliminamos os índices correspondentes aos triângulos pequenos. Para voltar a indexar os índices, obtém-se um número inteiro $m^* < m$ de modo que $(z^*, d^*) \in \Omega^*$, onde Ω^* é o conjunto de pontos

$$\Omega^* = \{ (z,d) = (z_1, ...z_{m^*}, d_1, ...d_{m^*}) \in \mathbb{R}^{2m^*} : z_k > 0, |z_k^* - z_l^*| < |d_k^* - d_l^*|, (k, l = 1, ..m^*), k \neq l\}$$

Assim consideremos a E.D.O.

$$(4.26) \qquad \begin{cases} \dot{z}_k(t) = & \dfrac{z_k(t)}{t} - \dfrac{1}{4t}(|D_k^-(t)| + |D_k^+(t)|) \\ \dot{d}_k(t) = & -\dfrac{1}{4t}(|D_k^-(t)| - |D_k^+(t)|). \end{cases}$$

$1 \leq k \leq m^*$ e

$$(4.27) \qquad \begin{cases} \dot{z}_k(t) & = & \frac{z_k(t)}{t} \\ \dot{d}_k(t) & = & 0 \ (m^* < k \leq m). \end{cases}$$

$$(4.28) \qquad \begin{cases} z_k(t^*) & = & z^* \\ d_k(t^*) & = & d^*. \end{cases}$$

para $t^* \leq t \leq 1$. Novamente pelo Teorema de Peano como no caso anterior, este sistema tem uma solução válida para algum intervalo maximal $[t^*, t^{**})$.
Se $t^{**} > 1$ paramos o processo; caso contrário, continuamos com o mesmo processo de acima. Depois de finitas repetições desse processo chegamos a uma solução existente no intervalo de tempo integral $[\tau, 1]$.

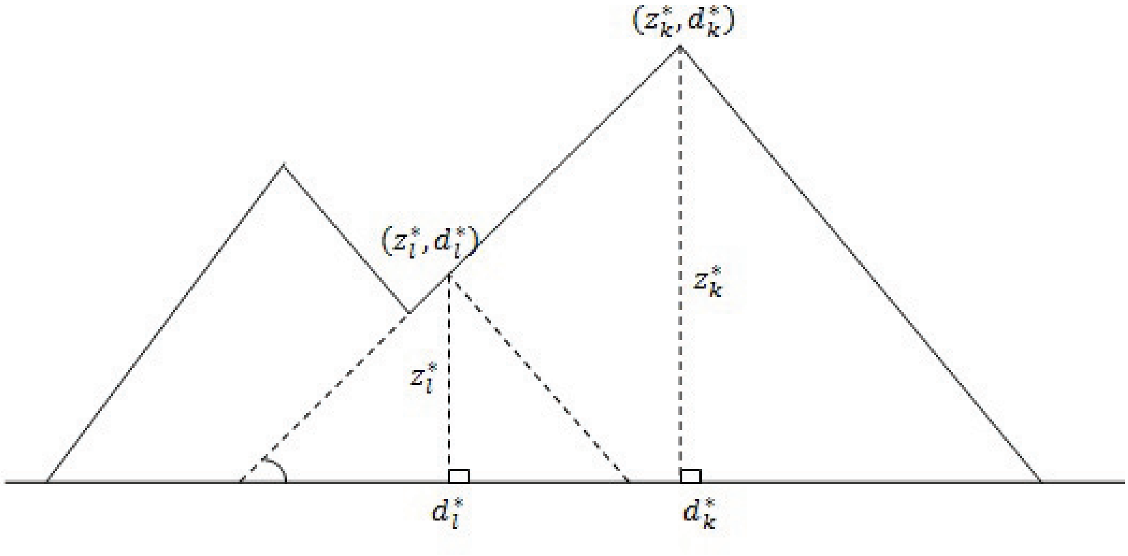

Figura 4.5: .

Verificação e Unicidade

Fica por demonstrar que

$$v(t,x) = \max\{0, z_1(t) - |x - d_1(t)|, ..., z_m(t) - |x - d_m(t)|\} \tag{4.29}$$

para $x \in \mathbb{R}, \tau \leq t \leq 1$, satisfaz:

$$\begin{cases} \frac{v}{t} - v_t \in \partial I_\infty[v], & \tau \leq t \leq 1 \\ v = h, & t = \tau. \end{cases} \tag{4.30}$$

Para verificar (4.30) temos que demonstrar para $q.t.p$ $\tau \leq t \leq 1$ e para cada $w \in L^2(\mathbb{R})$ que

$$I_\infty[v(t,\cdot)] + \left\langle \frac{v(t,\cdot)}{t} - v_t(t,\cdot), w - v(t,\cdot) \right\rangle \leq I_\infty[w] \tag{4.31}$$

onde o produto interno é tomado em $L^2(\mathbb{R})$.

• Se $I_\infty[w] = \infty$, o resultado segue, e assim podemos supor

$$|w_x| \leq 1 \quad q.t.p.\ em\ \mathbb{R}$$

como $|v_x| \leq 1$ q.t.p. em $\mathbb{R}$, $I_\infty[v] = 0$ e assim por (4.31), temos

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{v(t,x)}{t} - v_t(t,x) \right) (w(x) - v(t,x))\, dx \leq 0. \tag{4.32}$$

Escrevemos,

$$(v)_{D_k^\pm(t)} = \fint_{D_k^\pm(t)} v(t,x)\,dx = \frac{1}{|D_k^\pm(t)|}\int_{D_k^\pm(t)} v(t,x)\,dx \quad (k = 1,2,\ldots,m)$$

denota a função média de $v(\cdot,t)$ sobre $D_k^\pm(t)$. Então pelo sistema

$$\tag{4.33} \begin{cases} \dot{z}_k(t) = & \dfrac{z_k(t)}{t} - \dfrac{1}{4t}(|D_k^-(t)| + |D_k^+(t)|) \\ \dot{d}_k(t) = & \qquad -\dfrac{1}{4t}(|D_k^-(t)| - |D_k^+(t)|). \end{cases}$$

$$\tag{4.34} v_t(t,x) = \begin{cases} \dot{z}_k(t) + \dot{d}_k(t), & D_k^+(t) \\ \dot{z}_k(t) - \dot{d}_k(t), & D_k^-(t). \end{cases}$$

$1 \le k \le m$, $\tau \le t \le 1$.
Afirmamos que,

$$\int_{D_k^+(t)} \left(\frac{v(t,x)}{t} - v_t(t,x)\right)(w(x) - v(t,x))\,dx = \frac{1}{t}\int_{D_k^+(t)} (v(t,x) - (v)_{D_k^+(t)})(w(x) - v(t,x))\,dx$$

De fato,

$$\tag{4.35} \begin{aligned} &\int_{D_k^+(t)} \left(\frac{z_k(t)}{t} - \frac{(x - d_k(t))}{t} - \left[\frac{z_k(t)}{t} - \frac{1}{2t}|D_k^+(t)|\right]\right)(w(x) - v(t,x))\,dx = \\ &= \frac{1}{t}\int_{D_k^+(t)} \left(z_k(t) - (x - d_k(t)) - \left[z_k(t) - \frac{1}{2}|D_k^+(t)|\right]\right)(w(x) - v(t,x))\,dx \\ &= \frac{1}{t}\left(\int_{D_k^+(t)} v(t,x)\,dx - \int_{D_k^+(t)} z_k(t)\,dx - \frac{1}{2}|D_k^+(t)|\right)(w(x) - v(t,x))\,dx \\ &= \frac{1}{t}\left(\int_{D_k^+(t)} v(t,x) - z_k(t)|D_k^+(t)| - \frac{1}{2}|D_k^+(t)|^2\right)(w(x) - v(t,x))\,dx \\ &= \frac{1}{t}\left(\int_{D_k^+(t)} v(t,x)\,dx - \frac{1}{|D_k^+(t)|}\int_{D_k^+(t)} v(t,x)\,dx\right)(w(x) - v(t,x))\,dx \end{aligned}$$

Analogamente temos o mesmo resultado para $D_k^-(t)$.
Agora reescrevemos (4.32), $t \ge \tau > 0$
(4.36)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{v(t,x)}{t} - v_t(t,x)\right)(w(x) - v(t,x))\,dx = \frac{1}{t}\Bigg(&\sum_{k=1}^m \int_{D_k^+(t)} (v(t,x) - (v)_{D_k^+(t)})(w(x) - v(t,x))\,dx \\ &+ \sum_{k=1}^m \int_{D_k^-(t)} (v(t,x) - (v)_{D_k^-(t)})(w(x) - v(t,x))\,dx\Bigg) \le 0 \end{aligned}$$

as somas são tomadas quando $|D_k^{\pm}(t)| \neq 0$.
Verifica-se (4.36), ao mostrar que cada termo da soma é não positivo. Basta portanto para mostrar

$$\int_{D_k^{\pm}(t)} (v - (v)_{D_k^{\pm}(t)}) w \, dx \leq \int_{D_k^{\pm}(t)} (v - (v)_{D_k^{\pm}(t)})^2 \, dx \tag{4.37}$$

para cada k. Tomando o sinal $+$, podemos assumir $D_k^{+}(t) = [0, 2l], v(t,x) - (v)_{D_k^{+}(t)} = l - x$ pois, $v = z_k - x$, $(v) = \frac{1}{2l}\int_0^{2l}(z_k - x)\, dx = z_k - l$, então

$$D_k^{\pm} = [0, 2l], v - (v)_{D_k^{+}(t)} = z_k - x - z_k + l = l - x \tag{4.38}$$

então, como $|w_x| \leq 1$ q.t.p., calculamos,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2l} (l - x) w \, dx &= \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) w|_0^{2l} - \int_0^{2l} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) w_x \, dx \\
&= l(2l) - \frac{4l^2}{2} - \int_0^{2l} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) w_x \, dx \\
&\leq \int_0^{2l} \left| lx - \frac{x^2}{2} \right| dx = \int_0^{2l} (l - x)^2 = \frac{2l^3}{3}.
\end{aligned}$$

Lembrando a notação (4.38), vemos que (4.37) é provado para o sinal $+$. A prova para o sinal $-$ é similar. Em consequencia, temos verificado (4.32) e assim mostramos que v definida por (4.29) resolve a equação (4.30). Finalmente, tenha em conta que qualquer solução $(z(t), d(t))$ da E.D.O. é gerada através de uma solução de (4.30). Como (4.30) tem uma única solução, deduzimos que (4.14), tem solução única também.

Capítulo

5

Apêndice

O problema de Monge de transporte ótimo consiste em transportar uma quantidade de massa de um estado inicial x, a um estado final y com um custo de transporte dado por uma função custo mensurável $c(x, y)$ em $X \times Y$. O objetivo é realizar o transporte com o menor custo possível. O problema de Kantorovich, é um poco mais simples, a diferença entre o problema do Monge e Kantorovich, é que no primeiro a massa não pode ser dividida, isso é, a massa em estado inicial é transportada para um mesmo estado final, no caso do problema de Kantorovich não existe restrição a respeito da divisão da massa. É por isso que o problema de Kantorovich é considerado como uma versão relaxada do problema original de Monge, o problema de Monge é um caso particular do problema de Kantorovich.

Formulação do Problema de Transporte Ótimo

Assumindo que temos uma pilha de areia e um buraco de mesmo volume onde ela será colocada, e considerando a massa da pilha igual a 1 modelamos ambos com duas medidas de probabilidade μ, ν, definidas sobre os espaços de medida X e Y, respectivamente. Se A e B são subconjuntos mensuráveis de X e Y, então $\mu[A]$ é a medida da quantidade da areia em A, e $\nu[B]$ é a quantidade colocada em B.

Como para mover a areia é necessário trabalho, o qual é modelado através de uma função de custo c definida sobre $X \times Y$, $c(x, y)$ será o custo de transportar uma unidade de massa do lugar x ao lugar y. Assumimos que c é mensurável e não negativa. Assim, é possível que $c(x, y) = \infty$, e assim c deverá ser considerada uma aplicação de $X \times Y$ a $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Agora, nós procuramos transportar a areia de um lugar para outro a um custo mínimo ou (um plano de transporte). Assim, modelamos este transporte como uma medida de probabilidade π sobre o espaço $X \times Y$, $d\pi(x, y)$ mede a quantidade de massa transferida de x a y, e é possível que alguma massa localizada no ponto x seja colocada em diferentes destinos y. Para que um plano de transferencia $\pi \in P(X \times Y)$ fazer sentido, é necessário que a massa total que sai de x seja igual à massa total que pode ser extraída de x, isso é, $d\mu(x)$, e que a massa total transferida a

y coincida com a massa total que pode ser colocada em y, com $d\nu(y)$, isto significa

$$\int_Y d\pi(x,y) = d\mu(x) \qquad e \qquad \int_X d\pi(x,y) = d\nu(y).$$

Mais rigorosamente, requeremos que

$$\pi[A \times Y] = \mu[A] \text{ e } \pi[X \times B] = \nu[B] \tag{5.1}$$

para todos os subconjuntos mensuráveis A de X e B de Y. As medidas de probabilidade π que satisfazem (5.1), diz-se que têm marginais μ e ν, e serão as que realizam o transporte procurado. O conjunto destas medidas de probabilidade com marginais μ e ν será denotado por $\Pi(\mu,\nu)$, ou seja,

$$\Pi(\mu,\nu) = \{\pi \in P(X \times Y);\ \text{tal que (5.1) vale para todos subconjuntos mensuráveis } A, B\}.$$

O problema de Monge consiste em minimizar a função custo de transporte total:

$$I[\pi] = \int_{X\times Y} c(x,y)d\pi(x,y)$$

onde $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$. O custo total de transporte ótimo é:

$$\Upsilon_c(\mu,\nu) = \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} I[\pi]$$

conhecido como o problema de transporte ótimo de Kantorovich. Quando existir uma probabilidade em $\Pi(\nu,\mu)$ que satisfaz $I[\pi] = \Upsilon_c(\mu,\nu)$, tal probabilidade será denominada um plano de transporte ótimo. Então, neste problema é procurada uma medida de probabilidade π tal que o transporte de A a B seja feito a um custo mínimo. Uma expressão equivalente a (5.1), com $\varphi \in L^1(\mu)$ e $\psi \in L^1(\nu)$ representa o espaço de funções mensuráveis que são integráveis com respeito a medida μ será

$$\int_{X\times Y} [\varphi(x) + \psi(y)]d\pi(x,y) = \int_X \varphi(x)d\mu(x) + \int_Y \psi(y)d\nu(y). \tag{5.2}$$

Se considerarmos o caso particular no qual a cada x corresponde uma única y, definimos uma aplicação $T : X \longrightarrow Y$ tal que $T(x) = y$, então

$$d\pi(x,y) = d\pi_T(x,y) = d\mu(x)\delta_{[y=T(x)]},$$

e se ζ é uma função não negativa mensurável sobre $X \times Y$, tem-se

$$\int_{X\times Y} \zeta(x,y)d\pi_T(x,y) = \int_X \zeta(x,T(x))d\mu(x). \tag{5.3}$$

Em particular, o custo total do transporte associado é

$$I[\pi_T] = \int_X c(x, T(x))d\mu(x).$$

Para que $\pi_T \in \Pi(\mu, \nu)$, π_T deve verificar (5.2). Mas, de (5.3), com $\zeta(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$, tem-se

$$\int_X [\varphi(x) + \psi \circ T(x)]d\mu(x) = \int_X \varphi(x)d\mu(x) + \int_Y \psi(y)d\nu(y),$$

então

$$\int_X (\psi \circ T)d\mu = \int_Y \psi d\nu, \tag{5.4}$$

onde $\psi \in L^1(\nu)$. Se $B \subset Y$ é mensurável e $\psi = \chi_B$, tem-se

$$\int_{T^{-1}(B)} (\chi \circ T)(y)d\mu(y) = \int_B \chi_B(y)d\nu(y)$$

e como

$$\int_X \chi_B(T(x))d\mu(x) = \int_X \chi_{T^{-1}(B)}(x)d\mu(x) = \mu(T^{-1}(B)),$$

então

$$\mu(T^{-1}(B)) = \nu(B). \tag{5.5}$$

Quando T verifica (5.4) ou (5.5), dizemos que T transporta μ em ν. Equivalentemente $\Pi(\mu, \nu)$ é caracterizado pela condição,

$$\text{para todo subconjunto mensurável } B \subset Y, \nu(B) = \mu[T^{-1}(B)]$$

diremos que ν é a imagem mensurável de μ por T, ou que T transporta μ para ν e escrevemos $T\sharp\mu = \nu$.

5.1 Dualidade de Kantorovich

No contexto do transporte ótimo de massa, que foi introduzido por Kantorovich em 1942, ele estava preocupado no caso particular quando a função custo é uma distância: $c(x, y) = d(x, y)$, mas na realidade o Teorema de Dualidade tem generalidade considerável, como em espaços topológicos ou inclusive não topológicos, mas não entraremos em mais detalhes acerca disto, para mais detalhes o leitor pode consultar [23].

Teorema 5.1.1. *(Dualidade de Kantorovich)[23, Teorema 1.3 p.19]. Sejam X e Y espaços Polish (espaço métrico completo separável), $\mu \in P(X)$ e $\nu \in P(Y)$, e seja $c : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ uma função custo semicontínua inferiormente.*

Quando $\pi \in P(X \times Y)$ *e* $(\varphi, \psi) \in L^1(d\mu) \times L^1(d\nu)$*, definimos*

$$I[\pi] = \int_{X\times Y} c(x,y)\, d\pi(x,y), \quad e \quad J(\varphi,\psi) = \int_X \varphi\, d\mu + \int_Y \psi\, d\nu.$$

Definimos $\Pi(\mu,\nu)$ *como o conjunto de todas as medidas de probabilidade Borel* π *em* $X \times Y$ *tal que para todos subconjuntos mensuráveis* $A \subset X$ *e* $B \subset Y$*,*

$$\pi[A \times Y] = \mu[A], \quad \pi[X \times B] = \nu[B],$$

e defina $\phi_c = \{(\varphi,\psi) \in L^1(d\mu)\times L^1(d\nu) : \varphi(x)+\psi(x) \le c(x,y) \quad d\mu \quad q.t.p. \quad x, \quad d\nu \quad q.t.p. \quad y\}$ *então*

$$\inf_{\Pi(\mu,\nu)} I[\pi] = \sup_{\phi_c} J(\varphi,\psi). \tag{5.6}$$

Além disso, o ínfimo no lado esquerdo de (5.6) é atingido.

Proposição 5.1.2. *Sob as mesma hipóteses do Teorema anterior*

$$\sup_{\phi_c \cap C_b} J(\varphi,\psi) \le \sup_{\phi_c \cap L^1} J(\varphi,\psi) \le \inf_{\Pi(\mu,\nu)} I[\pi] \tag{5.7}$$

onde C_b *é o conjunto de funções contínuas limitadas.*

Demonstração. A desigualdade da izquerda de (5.7) é trivial pois $C_b \times C_b \subset L^1(d\mu) \times L^1(d\nu)$. So falta provar a segunda desigualdade.
Sejam $(\varphi,\psi) \in \phi_c \cap L^1$, e seja $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$. Então por definição de Π,

$$J(\varphi,\psi) = \int_X \varphi\, d\mu + \int_Y \psi\, d\nu = \int_{X\times Y} [\varphi(x)+\psi(y)]\, d\pi(x,y)$$

A desigualdade

$$\varphi(x) + \psi(x) \le c(x,y) \tag{5.8}$$

vale $d\pi(x,y)$ q.t.p. $X \times Y$. De fato, sejam N_X e N_Y conjuntos mensuraveis tais que $\mu[N_X] = 0$ e $\nu[N_Y] = 0$ e a desigualdade (5.8) vale para todo $(x,y) \in N_X^c \times N_Y^c$. Como π tem marginais μ e ν, podemos escrever $\pi[N_X \times Y] = \mu[N_X] = 0$, $\pi[X \times N_Y] = \nu[N_Y] = 0$, e daí

$$\pi[(N_X^c \times N_Y^c)^c] \le \pi[N_X \times Y] + \pi[X \times N_Y] = 0.$$

Logo $\varphi(x) + \psi(y) \le c(x,y) \;\; d\pi$ q.t.p. $X \times Y$, em consequencia,

$$J(\varphi,\psi) = \int_{X\times Y} [\varphi(x)+\psi(y)] d\pi \le \int_{X\times Y} c(x,y) d\pi(x,y) = I[\pi].$$

Então, tomando supremo

$$\sup_{\phi_c \cap L^1} J(\varphi, \psi) \leq I[\pi], \forall \pi \in \Pi(\mu, \nu).$$

Portanto,

$$\sup_{\phi_c \cap L^1} J(\varphi, \psi) \leq \inf_{\Pi(\mu,\nu)} I[\pi].$$

□

Referências Bibliográficas

[1] Adams, R.A., Fournier, J. F. *Sobolev spaces.* Amsterdam: Academic Press, Boston 2005.

[2] Bhattacharya.T, DiBenedetto, E., Manfredi, J. *Limits as $p \to \infty$ and Related Extremal Problems.* Rend. Sem Mat. Univ. Poi. Torino Fascicolo Speciale 1989 Nonlinear PDE's.

[3] Barbu, V. *Analysis and Control of Nonlinear Infinite Dimensional Systems.* Boston : Academic Press, Inc, 1991.

[4] Brezis, H. *Análisis Funcional.* Alianza Universidad, Madrid: Alianza, 1984.

[5] Brezis, H. *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert.* Amsterdam : North-Holland Pub. 1973. Trans. Amer. Maths. Soc. 252 (1979), 99-113.

[6] DiBenedetto, E. *Degenerate Parabolic Equation.* New York : Springer-Verlag, 1993.

[7] Demengel, F. *Espaces Fonctionelles,* EDP Sciences/CNRS 2007.

[8] Edwards, R. E. *Functional Analysis: Theory and Applications.* New York : Holt, Rinehart and Winston, 1965.

[9] Evans, L. C., Aronsson, G., Wu, Y. *Fast/Slow Diffusion and Growing Sandpiles,* Journal of Diferential Equations 131, 304-335 (1996).

[10] Evans, L.C. *Partial Diferential Equations.* Providence, R.I. : American Mathematical Society, 1998.

[11] Evans, L. C., Gangbo, W. *Differential Equations Methods for the Monge-Kantorevich Mass Transfer Problem.* Providence, RI : American Mathematical Society, 1999.

[12] Evans, L.C; Feldman; Gariepy, R. F. *Fast/slow diffusion and collapsing sandpiles.* J. Differential Equations 137 (1997), no.1, 166-209.

[13] Haraux, A. *An Introduction to Semilinear Evolution Equations,* Clarendon Press-Oxford, 1998.

[14] Jack, H, K. *Ordinary Differential Equations,* New York: Wiley-Interscience, 1969, Pure and Applied Mathematics. A Series of Texts and Monographs.

[15] Leoni, G. *A First Course in Sobolev Spaces,* Providence, R.I. American Mathematical Society, 2009.

[16] Medeiros, L. A., Rivera, P. H. *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais,* Textos de Metodos Matematicos Nro 9, 1975.

[17] Miyadera, I. *Nonlinear Semigroups.* Providence: American Mathematical Society, 1992.

[18] Pazy, A. *Semi-groups of Nonlinear Contractions and their Asymptotic Behaviour,* Nonlinear Analysis and Mechanics: Heriort-Watt Symposium. London, 1979.

[19] Rudin, W. *Real and Complex analysis,* McGraw-Hill : China Machine Press, 1987.

[20] Sotomayor, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinarias,* Rio de Janeiro : Impa, 1979.

[21] Showalter, R. E. *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Pifferential Equations.* Providence, RI : American Mathematical Society, c1997.

[22] Villani, C. *Topics in Optimal Transportation,* Providence, RI : American Mathematical Society, 2003.

[23] Villani, C. *Optimal Transport: Old and New.* Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009.

[24] Yosida, K. *Functional Analysis.* Berlin : Springer, 1995.

[25] Zeidler, E. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, II/A,* New York Springer-Verlag 1985.