UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

FIBRADOS, CLASSES DE STIEFEL-WHITNEY E RESULTADOS DE NÃO IMERSÃO

CAIO CARLEVARO INFORZATO

São Carlos - SP

Setembro de 2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

FIBRADOS, CLASSES DE STIEFEL-WHITNEY E RESULTADOS DE NÃO IMERSÃO

CAIO CARLEVARO INFORZATO

Dissertação apresentada ao PPGM da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientação: Profa. Dra. Adriana Ramos.

São Carlos - SP

Setembro de 2012

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

	Inforzato, Caio Carlevaro.
I43fc	Fibrados, classes de Stiefel-Whitney e resultados de não imersão / Caio Carlevaro Inforzato. -- São Carlos : UFSCar, 2012.
	63 f.
	Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2012.
	1. Topologia. 2. Fibrados vetoriais. 3. Classes de Stiefel-Whitney. 4. Variedades diferenciáveis. I. Título.
	CDD: 514 (20ª)

Banca Examinadora:

Adriana Ramos.

Profa. Dra. Adriana Ramos
DM - UFSCar

Pedro Luiz Queiroz Pergher

Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher
DM - UFSCar

Denise

Profa. Dra. Denise de Mattos
ICMC - USP

Agradecimentos

À minha família;

À minha orientadora Profa. Dra. Adriana Ramos, pelo incentivo e pela grande ajuda no desenvolvimento desta dissertação;

Ao programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos e seus professores, pelos ensinamentos e pela oportunidade de realizar este trabalho;

À CAPES e ao "Programa de Apoio ao Plano de Reestruturação e Expansão das Universidades Federais", REUNI, pelo apoio financeiro.

Resumo

Apresentamos um estudo introdutório de Variedades Suaves, Fibrados e Classes de Stiefel-Whitney (de fibrados vetorias reais).

Explicamos que, dada uma certa variedade suave m-dimensional, as classes de Stiefel-Whitney do seu fibrado tangente podem ser usadas para garantir que tal variedade não imerge (suavemente) em certos espaços Euclidianos $\mathbb{R}^j$. Nesse sentido, consideramos a variedade Grassmanniana $G_{2,n}$, variedade dos 2-subespaços de $\mathbb{R}^{n+2}$, e realizamos um estudo detalhado do seguinte teorema de não imersão, provado por V. Oproiu [Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 1977]:

"Seja $n > 1$ um natural e considere $s = 2^r$ tal que $s \leq 2n < 2s$. Se $n \neq s - 1$, então $G_{2,n}$ não imerge em $\mathbb{R}^{2s-3}$; se $n = s - 1$, então $G_{2,n}$ não imerge em $\mathbb{R}^{3s-3}$."

Abstract

We present an introductory study of smooth manifolds, bundles and Stiefel-Whitney classes (of real vector bundles).

We explained that, given a certain smooth m-dimensional manifold, the Stiefel-Whitney classes of its tangent bundle can be used to ensure that such a manifold does not immerse (smoothly) in certain Euclidean spaces $\mathbb{R}^j$. In this sense, we consider the Grassmann manifold $G_{2,n}$ of the 2-subspaces of $\mathbb{R}^{n+2}$, and we carry out a detailed study of the following non-immersion theorem, proved by V. Oproiu [Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 1977]:

"Let $n > 1$ be a natural number and consider $s = 2^r$ such that $s \leq 2n < 2s$. If $n = s - 1$, then $G_{2,n}$ does not immerse in $\mathbb{R}^{2s-3}$; if $n = s - 1$, then $G_{2,n}$ does not immerse in $\mathbb{R}^{3s-3}$."

Sumário

Introdução

Nesta dissertação realizamos, essencialmente, um estudo introdutório sobre duas teorias "sofisticadas"e "modernas": *fibrados* e *classes de Stiefel-Whitney.*

Além de seu valor intrínseco, essas duas teorias já estão consolidadas, pela literatura, como ferramentas úteis na abordagem de problemas diversos em Geometria e Topologia.

Em particular, abordamos, neste trabalho, a estratégia de utilizar classes de Stiefel-Whitney nos chamados *"resultados de não imersão"*. Tais resultados estão inseridos no contexto do teorema clássico de imersão de Whitney:

Teorema. *Se M é uma variedade diferenciável suave de dimensão $n > 1$, então existe uma imersão $\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$. [12]*

Observe que, se uma variedade pode ser imersa no espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$, então ela pode ser imersa em $\mathbb{R}^j$ para todo $j > m$.

Neste ponto, cabe a pergunta: dada uma variedade fechada M^n, n-dimensional, específica, ela pode ser imersa em $\mathbb{R}^{n+k}$ com $k < n-1$?

O enunciado da questão acima é puramente geométrico; no entanto, como pretendemos explicar ao longo deste trabalho, uma resposta *negativa* pode ser garantida ao investigarmos certo elemento do anel de Cohomologia (com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$) da variedade M^n considerada; tal elemento especial é a classe de Stiefel-Whitney do fibrado tangente de M^n.

Como exemplo canônico, na Seção 3.2, utilizaremos essa estratégia para mostrar que $M^n = \mathbb{RP}^{2^r}$ (espaço projetivo real de dimensão $n = 2^r$) não pode ser imerso em $\mathbb{R}^{n+k}$ com $k < n-1$; ou seja, para esta variedade fechada específica, a codimensão de imersão garantida pelo Teorema de Whitney é a melhor possível.

Seguindo essa linha, Oproiu provou em [14] resultados de não imersão para as variedades Grassmannianas $M^{2n} = G_{2,n}$ (espaço dos 2-subespaços de $\mathbb{R}^{n+2}$). Mais precisamente, ele provou o seguinte

Teorema. *Seja $n > 1$ um natural e considere $s = 2^r$ tal que $s \leq 2n < 2s$. Então:*

1. *$G_{2,n}$ não imerge em $\mathbb{R}^{2s-3}$, para $n \neq s-1$;*

2. *$G_{2,s-1}$ não imerge em $\mathbb{R}^{3s-3}$.*

Nosso principal objetivo, neste trabalho, é desenvolver os requisitos necessários para apresentar um estudo detalhado da demonstração do teorema acima.

Observe que: para o caso particular $n = 2^r$, esse teorema garante que $G_{2,n}$ não imerge em $\mathbb{R}^{2n-3}$; daí, pelo teorema de imersão de Whitney, o problema de imersão só continua "aberto"para $\mathbb{R}^{2n-2}$.

A seguir, indicamos o modo com que esta dissertação está organizada.

No capítulo 1, Preliminares, reunimos conceitos e resultados de Cohomologia singular (e celular) básicos para o que segue; além disso, desenvolvemos um estudo introdutório sobre variedades suaves.

O capítulo 2, Fibrados, é dedicado ao conceito de Fibrado em um enfoque mais amplo, conforme Steenrood [8], e, em especial, ao conceito de Fibrado Vetorial (real).

No terceiro e último capítulo, intitulado "Classes de Stiefel-Whitney e resultados de não imersão", definimos axiomaticamente classes de Stiefel-Whitney e discorremos sobre alguns resultados relevantes. Apresentamos, em seguida, alguns resultados conhecidos sobre o anel de Cohomologia de $G_{2,n}$, conforme [15] (em termos dos *cociclos de Schubert*). Finalmente, na Seção 3.4, realizamos nosso principal estudo: a demonstração do teorema de Oproiu enunciado anteriormente.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo estabelecemos notações, definições e resultados elementares para a compreensão dos capítulos que seguem. Admitimos que o leitor tenha familiaridade com tópicos básicos de Topologia Geral e de Topologia Algébrica (em especial com Homologia e Cohomologia Singulares). Nesse contexto, usamos e indicamos [7], [4] e [6] como principais referências.

1.1 Variedades Suaves

Definição 1.1.1. *Um espaço topológico X é dito ser uma **variedade topológica de dimensão** n se X é um espaço de Hausdorff com base enumerável e **localmente n-Euclidiano**, isto é, para cada $p \in X$ existe uma vizinhança U de p homeomarfa a um aberto de $\mathbb{R}^n$.*

Lema 1.1.2. *Seja X uma variedade topológica de dimensão n. Então X é localmente conexo, localmente compacto, regular e metrizável.*

Dem.: Sejam $p \in X$, U uma vizinhança de p homeomorfa a U' (aberto de $\mathbb{R}^n$) e $\phi : U \longrightarrow U'$ homeomorfismo. Então dado V uma vizinhança de p temos que existe um aberto W, com $\overline{W} \subset U \cap V$, e $\phi(W) = B_\epsilon(\phi(p))$ (bola aberta centrada em $\phi(p)$ de raio ϵ) com $\phi(\overline{W}) = \overline{B_\epsilon(\phi(p))} \subset U'$.

Assim, W é conexo e $\overline{W}$ é compacto e, portanto, X é localmente compacto e localmente conexo. Como X é de Hausdorff, segue que também é regular. Assim, pelo Teorema de metrização de Urysohn, concluímos que X é metrizável. ∎

Sabemos que todo espaço métrico é paracompacto (Teorema de Stone); assim, pelo Lema anterior, toda variedade topológica é um espaço paracompacto.

Exemplo 1.1.3. *Todo subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ é uma variedade topológica de dimensão n.*

Exemplo 1.1.4. *Seja $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, a* ***esfera n-dimensional****. Então S^n é uma variedade topológica n-dimensional. De fato: S^n é um espaço de Hausdorff com base enumerável e, além disso, todo ponto $p \in S^n$ pertence a um dos conjuntos*

$$H_i^+ = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n; x_i > 0\}$$

$$H_i^- = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n; x_i < 0\},$$

$i \in 1, \ldots, n+1$. Mas cada um desses conjuntos é homeomorfo à bola aberta centrada em 0 e raio 1, $B_1(0)$ de $\mathbb{R}^n$ (basta considerar $\phi_i^\pm : H_i^\pm \longrightarrow B_1(0)$, dada por $\phi_i^\pm(x) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_{n+1})$). Logo S^n é localmente n-Euclidiano.

Definição 1.1.5. *Seja X um espaço topológico. Um atlas C^∞ de dimensão $n \in \mathbb{N}$ para X é uma coleção $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ de* ***cartas****, isto é, pares da forma (U_α, ϕ_α) com $U_\alpha \subset X$ aberto de X e $\phi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \phi_\alpha(U_\alpha)$ homeomorfismo sobre um aberto $\phi_\alpha(U_\alpha)$ de $\mathbb{R}^n$, tal que:*

1. *A coleção $\{U_\alpha\}$ cobre X;*

2. *Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ então $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ é um difeomorfismo de classe C^∞ (isto é, as cartas são* ***C^∞-compatíveis****).*

Um atlas $\mathcal{A}$ é **maximal** se toda carta (U_α, ϕ_α) de X que é C^∞-compatível com qualquer carta de $\mathcal{A}$ está em $\mathcal{A}$.

Lema 1.1.6. *Seja X um espaço topológico e $\mathcal{A}$ um atlas C^∞ de dimensão $n \in \mathbb{N}$ para X. Então existe um único atlas maximal $\mathcal{A}'$ para X que contém $\mathcal{A}$.*

Dem.: Basta considerar $\mathcal{A}'= \{(U,\phi); (U,\phi)$ é uma carta C^∞-compatível com todas as cartas de $\mathcal{A}$ $\}$. É fácil verificar que $\mathcal{A}'$ é atlas maximal de X e comtém $\mathcal{A}$.

■

Definição 1.1.7. *Uma **variedade diferenciável suave n-dimensional** ou, simplesmente, uma **variedade diferenciável n-dimensional** $(M, \mathcal{A})$ é um par formado por um espaço topológico Hausdorff com base enumerável M e $\mathcal{A}$ um atlas maximal C^∞ de dimensão n.*

*Se, além disso, M é compacto então M é chamado de **variedade fechada**.*

Denotaremos por M^n uma variedade diferenciável suave $(M, \mathcal{A})$ de dimensão n.

Como toda variedade diferenciável $(M, \mathcal{A})$ é também variedade topológica, segue, pelo Lema 1.1.2, que M é localmente compacto, localmente conexo e metrizável (e portanto paracompacto).

Exemplo 1.1.8. *O espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ é uma variedade diferenciável de dimensão n, pois é claramente Hausdorff, possui base enumerável e o atlas maximal considerado é o que contém o atlas $\{id_{\mathbb{R}^n}\}$. De forma geral, qualquer subconjunto aberto A de $\mathbb{R}^n$ é uma variedade diferenciável de dimensão n, quando consideramos o atlas maximal que contém $\{i : A \longrightarrow \mathbb{R}^n\}$, onde i é a função inclusão.*

Exemplo 1.1.9. *Sejam as funções $\phi_i^\pm : H_i^\pm \longrightarrow B_1(0)$ como no* Exemplo 1.1.4. *Então $\{\phi_i^\pm : H_i^\pm \longrightarrow B_1(0)\}$ é um atlas C^∞ para S^n e assim S^n possui estrutura de variedade diferenciável n-dimensional.*

Exemplo 1.1.10. *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Vamos definir um atlas de dimensão $m + n$ no espaço produto $M \times N$, considerando a coleção de todos os homeomorfismos da forma $x \times y : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$, com (x, U) e (y, V)*

cartas de M e N respectivamente, definidos por $(x \times y)(z, w) = (x(z), y(w))$. Como $(x_1 \times y_1) \circ (x \times y)^{-1} = (x_1 \circ x^{-1}) \times (y_1 \circ y^{-1})$, segue que tal coleção é atlas para $M \times N$ e este espaço é variedade diferenciável de dimensão $m + n$.

Podemos generalizar tal resultado considerando r variedades $V_1^{n_1}, \ldots, V_r^{n_r}$ e obtemos, analogamente, uma estrutura de variedade diferenciável para $V_1 \times \ldots \times V_r$, com dimensão $n_1 + \ldots + n_r$

1.1.1 Funções diferenciáveis e Plano Tangente

Definição 1.1.11. *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis e $f : M \longrightarrow N$ função de M em N. Então f é* ***diferenciável em*** *$p_0 \in M$, se existem uma carta (U, x) de M e (U', y) carta de N tais que: $p_0 \in U$, $f(U) \subset U'$ e $y \circ f \circ x^{-1}$ é diferenciável de classe C^∞ em $x(p_0)$.*

Se f é diferenciável em todos os pontos de M, então dizemos que f é ***diferenciável****.*

Se para cada $p \in M$ existem (U, x) e (U', y) cartas de M e N respectivamente, tais que $y \circ f \circ x^{-1}$ é diferenciável e de classe $C^k, 1 \leq k \leq \infty$, então f é dita ser uma ***função de classe*** *C^k.*

A aplicação $y \circ f \circ x^{-1}$, definida acima, é a **expressão de f nas coordenadas x e y**, e será denotada por $f_{x,y}$.

Neste trabalho, ao falarmos "função diferenciável" fica subentendido ser diferenciável de classe C^∞.

Sejam X variedade de dimensão n e $p \in X$. Considere $C_p = \{f : J \longrightarrow X; J$ é intervalo aberto de $\mathbb{R}$, $0 \in J$ e f é diferenciável em 0 com $f(0) = p\}$. Considere uma carta (U, x) de X, $p \in U$. Então para toda curva $f \in C_p$, existe um aberto $J' \subset J$ tal que $f(J') \subset U$ e $x \circ f|_{J'}$ é uma curva diferenciável em 0. Além disso $(x \circ f|_{J'})'(0)$ não depende de J', assim denotaremos tal curva, simplesmente por $x \circ f$.

Definimos uma relação de equivalência em C_p dada por: $f \sim g$ se, somente se, $(x \circ f)'(0) = (x \circ g)'(0)$, para certa carta (U, x) de X. É facil ver que, isto implica

$(y \circ f)'(0) = (y \circ g)'(0)$, para toda carta (V, y) de X e portanto $\sim$ é uma relação de equivalência. O espaço quociente $C_p/_{\sim}$ é o **plano tangente** de X passando por p, e será denotado por T_pX.

Para cada (U, x) carta de X, $p \in U$, a função $\Psi_U : T_pX \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\Psi_U([f]) = (x \circ f)'(0)$ está bem definida, é bijetora e assim T_pX tem naturalmente uma estrutura de espaço vetorial de dimensão n e Ψ_U é um isomorfismo. As operações de adição e multiplicação por escalar são dadas respectivamente por:

- $[f] + [g] = \Psi_U^{-1}(\Psi_U([f]) + \Psi_U([g])), \forall f, g \in C_p$;
- $\alpha\,[f] = \Psi_U^{-1}(\alpha\Psi_U([f])), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f \in C_p$.

As operações definidas acima independem da escolha da carta (U, x).

Suponha $f : M^m \longrightarrow N^n$ diferenciável e $p \in M$. Sejam (U, x) e (V, y) cartas de M^m e N^n respectivamente, tais que $f(U) \subset V$. Então o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "f'(p)"] \arrow[d, "\Psi_U"'] & T_{f(p)}N \arrow[d, "\Psi_V"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "f'_{x,y}(x(p))"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

De fato: para todo $[\lambda] \in T_pM$, temos que:

$$\Psi_V \circ f'(p)([\lambda]) = \Psi_V([f \circ \lambda]) = (y \circ f \circ \lambda)'(0) =$$

$$= (f_{x,y} \circ (x \circ \lambda))'(0) = f'_{x,y}(x(p)) \circ \Psi_U([\lambda]).$$

Definição 1.1.12. *Se $f : M \longrightarrow N$ é uma função diferenciável, então para cada $p \in M$, $f'(p) : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$, dada por $f'(p)\,[g] = [f \circ g]$, é a* ***transformação derivada*** *de f no ponto p. Tal aplicação está bem definida e é linear.*

Se $f'(p)$ é injetora para todo p em M, então f é dita ser uma ***imersão****, e se, além disso, f é um homeomorfismo sobre a imagem, então f é chamada de* ***mergulho****.*

Como o diagrama anterior comuta, temos que se f é uma imersão então $f'_{x,y}(x(p))$ é injetora, para todo $p \in U \subset M$, (U, x) carta de M, (V, y) carta de N, tais que $f(U) \subset V$.

Os dois principais resultados que enunciaremos neste capítulo são os famosos teoremas de imersão e mergulho de Whitney:

Teorema 1.1.13 (Teorema de imersão de Whitney.)**.** *Se M é uma variedade diferenciável suave de dimensão $n > 1$, então existe uma imersão $\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$.*

Teorema 1.1.14 (Teorema de mergulho de Whitney.)**.** *Se M é uma variedade diferenciável suave de dimensão n, então existe um mergulho $\psi : M \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$.*

Para a demonstração destes teoremas vide [12].

Uma **superfície de dimensão** n é um subespaço topológico S de $\mathbb{R}^m$ $(n \leq m)$ tal que para todo ponto $p \in S$ existe uma vizinhaça V de p e um homeomorfismo diferenciável $\gamma : U \longrightarrow V$, de U aberto de $\mathbb{R}^n$, de tal forma que a transformação derivada $\gamma'(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é injetora para todo $x \in U$.

Pelo Teorema de Mergulho de Whitney, temos que toda variedade X^n é mergulhada em $\mathbb{R}^{2n+1}$. Considere f um tal mergulho. Então X e $f(X)$ são homeomorfos e $f(X)$ é uma superfície de dimensão n, pois dado $p \in f(X)$, escolha (U, ϕ) carta de X de tal forma que $p \in f(U)$ ($f(U)$ é aberto em $f(X)$, pois f é homeomorfismo sobre a imagem), então $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow f(U)$ é diferenciável e $(f \circ \phi)'(w)$ é injetora para todo $w \in \phi(U)$, pois f é imersão.

Portanto, toda variedade pode ser identificada com uma superfície de mesma dimensão.

Nosso objetivo será estudar certas variedades (as Grassmannianas $G_{1,n}$ e $G_{2,n}$), que serão apresentadas na subseção seguinte, e encontrar condições necessárias para a imersão destas variedades em $\mathbb{R}^m$.

1.1.2 As variedades Grassmannianas $G_{k,n}$

Seja $G_{k,n}$ o conjunto de todos os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^{k+n}$ de dimensão k. Vamos definir uma estrutura diferenciável de tal forma que $G_{k,n}$ seja uma variedade fechada de dimensão kn, que são chamadas de **variedades Grassmannianas** $G_{k,n}$. Para isto, vamos utilizar o

Teorema 1.1.15. *Considere X um conjunto. Suponha que exista uma coleção $A = \{(U_i, \phi_i), i \in J\}$, $U_i \subset X$ e $\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ funções injetoras, tais que :*

1. *$\phi_i(U_i)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, para todo $i \in J$;*
2. *$\bigcup\limits_{i \in J} U_i = X$;*
3. *Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então $\phi_i(U_i \cap U_j)$ e $\phi_j(U_i \cap U_j)$ são abertos de $\mathbb{R}^n$, tais que $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$ é um difeomorfismo de classe C^∞.*

Então, existe uma única topologia para X tal que A é um atlas de dimensão n. Tal topologia é Hausdorff se, e somente se, para todo U_i e U_j, não disjuntos, não existe uma sequência de pontos (z_n), em $\phi_i(U_i \cap U_j)$, com $z_n \to z \in \phi_i(U_i - U_j)$ e $\phi_j \circ \phi_i^{-1}(z_n) \to z' \in \phi_j(U_j - U_i)$.

Dem.: Defina $\tau = \{A \subset X; \phi_i(A \cap U_i)$ é aberto em $\mathbb{R}^n, \forall i \in J\}$. É facil ver que τ é topologia para X.

Seja U_i subconjunto de X. Então, para todo $j \in J$, temos que $\phi_j(U_j \cap U_i)$ é aberto de $\mathbb{R}^n$, assim cada U_i é um aberto de (X, τ). Além disso, se $A \subset U_i$ é aberto, então $\phi_i(A) = \phi_i(A \cap U_i)$ é aberto de $\phi_i(U_i)$, logo ϕ_i é aplicação aberta.

Se $C \subset \mathbb{R}^n$ é aberto então, $\phi_j(\phi_i^{-1}(C) \cap U_j) = (\phi_j \circ \phi_i^{-1}(C)) \cap \phi_j(U_j)$, para todo $j \in J$, desse modo ϕ_i é contínua. Logo, A é um atlas de dimensão n para X.

Suponha que exista outra topologia para X, τ' de tal modo que A é um atlas para X. Então cada U_i pertence a τ' e se $U \in \tau'$ então $U \cap U_i \in \tau'$ e $\phi_i(U \cap U_i)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, assim $\tau' \subset \tau$.

Suponha que $A \subset X$, $\phi_i(A \cap U_i)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ para todo $j \in J$. Então, como $A = \bigcup_j \phi^{-1}(\phi(A \cap U_j))$, segue que $\tau \subset \tau'$, e portanto tal topologia é única.
Para o restante da demonstração vide $[1, p.115]$. ■

Para cada $Y \in G_{k,n}$, k-subespaço de $\mathbb{R}^{n+k}$, associamos uma certa matriz $M \in M_{n+k,k}(\mathbb{R})$, tal que as colunas desta matriz formam uma base para Y. Esta matriz M é chamada de **matriz de coordenadas homogêneas** de Y.

Sabemos que qualquer outra matriz $M' \in M_{n+k,k}(\mathbb{R})$ nestas condições é da forma $M' = MA$, com $A \in GL_k(\mathbb{R})$ (grupo das matrizes reais inversíveis de ordem k).

Dado um subconjunto $\alpha \subset \{1, 2, \ldots, n+k\}, \alpha = \{i_1 < i_2 < \ldots < i_k\}$, denotaremos por $\alpha(M)$ a matriz de ordem k formada pelas linhas $i_1, i_2, \ldots, i_k$ de M e pelas colunas de M.

Indicamos por α^* o complementar de α com relação a $\{1, 2, \ldots, n+k\}$.

Verifica-se que $\alpha(YA) = \alpha(Y)A$ e $\alpha^*(YA) = \alpha^*(Y)A$, para toda matriz $Y \in M_{n+k,k}(\mathbb{R})$ e toda matriz A inversível de ordem k.

Para cada $\alpha \subset \{1, 2, \ldots, n+k\}$, definimos o conjunto $U_\alpha \in G_{n,k}$, formado pelos subespaços H, tais que $p_\alpha : \mathbb{R}^{n+k} \longrightarrow [e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}]$, projeção ortogonal sobre $[e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}]$ leva H sobre a imagem. Isto equivale a dizer que $\alpha(Y)$ é inversível.

Definiremos bijeções $x_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^{nk}$, para cada $\alpha = \{i_1 < i_2 < \ldots < i_k\}$. Identificamos $\mathbb{R}^{kn}$ com $M_{n,k}(\mathbb{R})$. Pomos $x_\alpha(H) = \alpha^*(Y\alpha(Y)^{-1}), \forall H \in U_\alpha$ e Y matriz de coordenadas homogeneas de H. Tal função está bem definida, pois se $Y' = YA$, então $\alpha^*(YA\alpha(YA)^{-1}) = \alpha^*(Y)AA^{-1}\alpha(Y)^{-1} = x_\alpha(H)$.

Também temos que x_α é bijetora. Dado $H \in M_{n,k}(\mathbb{R})$, defina $M \in M_{n+k,k}(\mathbb{R})$, tal que $\alpha(M) = Id_k$ e $\alpha^*(M) = H$, então Y, gerado pelas colunas de M é elemento de U_α e $x_\alpha(Y) = H$, e portanto x_α é sobrejetora.

Se $X, Y \in G_{k,n}$, então sempre podemos escolher matrizes M e N que representam Y e X respectivamente, tais que $\alpha(M) = \alpha(N) = Id_k$ e $x_\alpha(Y) = x_\alpha(X) \Rightarrow$

$\alpha^*(M) = \alpha^*(N)$. Logo $M = N$ e $X = Y$.

Sabemos também que $\{U_\alpha\}$ cobre X, pois todo $Y \in G_{k,n}$ tem matriz de coordenadas homogeneas H com posto r. Assim, existe $\alpha \subset \{1, 2, \ldots, n+k\}$, $\alpha(H)$ é invertível.

Agora suponha α, β subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n+k\}$, U_α e U_β não disjuntos. As aplicações $\bar{\alpha} : M_{n,k}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{n+k,k}(\mathbb{R})$ tal que $\alpha^*(\bar{\alpha}(W)) = W$ e $\alpha(\bar{\alpha}(W)) = Id$, e $\beta : M_{n+k,k}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_k(\mathbb{R}), W \mapsto \beta(W)$ são contínuas. Verifica-se que
$x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) = (\beta \circ \bar{\alpha})^{-1}(GL_k)$, logo é aberto em $\mathbb{R}^{nk}$. Além disso

$$x_\beta \circ x_\alpha^{-1}(W) = \beta^*(\bar{\alpha}(W))\beta(\bar{\alpha}(W))^{-1},$$

o que mostra que as funções coordenadas de $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$ são polinômios e, portanto, são de classe C^∞.

Assim, pelo teorema anterior, existe uma topologia para $G_{k,n}$ tal que $\{(U_\alpha \, x_\alpha)\}$ é atlas C^∞. Tal topologia tem base enumerável, pois cada U_α tem base enumerável e existem apenas um número finito destes abertos U_α. Também temos que $G_{k,n}$ é Hausdorff, pois se $\alpha \neq \beta$ e (W_i) é uma sequência em $x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ (considerado como subconjunto de $M_{n,k}(\mathbb{R})$), com $W_i \longrightarrow W$, $W \in x_\alpha(U_\alpha - U_\beta)$, então $\beta(\bar{\alpha}(W))$ não é inversível e, desse modo, $[\beta(\bar{\alpha}(W_i))]^{-1}$ não pode convergir, e $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}(W_i)$ diverge. Assim, se considerarmos o atlas maximal que contém $\{(U_\alpha \, x_\alpha)\}$, segue que $G_{k,n}$ é variedade diferenciável de dimensão kn.

Para ver que $G_{k,n}$ é compacto, considere $V_k(\mathbb{R}^{n+k})$, o cojunto das matrizes $(n+k) \times k$ cuja as colunas são linearmente independentes, e $\psi : V_k(\mathbb{R}^{n+k}) \longrightarrow G_{k,n}$ tal que $\psi(H)$ é o subespaço gerado pelas colunas de H. Provemos que ψ é contínua. Para cada $\alpha = \{i_1 < i_2 < \ldots < i_k\} \subset \{1, \ldots, n+k\}$, denotamos por V_α o conjunto $\psi^{-1}(U_\alpha)$ formado por todas as matrizes $Y \in V_k(\mathbb{R}^{n+k})$, tais que $\alpha(Y)$ é invertível. Como $\alpha : V_k(\mathbb{R}^{n+k}) \longrightarrow M_k(\mathbb{R})$ é contínua e o conjunto das matrizes inversíveis é aberto, segue que V_α é aberto.

Portanto, para provar a continuidade da função ψ, basta provar que $\psi|_{V_\alpha}$: $V_\alpha \longrightarrow U_\alpha$ é contínua para todo $\alpha = \{i_1 < i_2 < \ldots < i_k\} \subset \{1, \ldots, n+k\}$. Mas

$x_\alpha \circ \psi|_{V_\alpha}(Y) = \alpha^*\alpha(Y)^{-1}$ para todo $Y \in V_\alpha$. Assim, $x_\alpha \circ \psi|_{V_\alpha}$ é contínua, o que implica na continuidade de $\psi|_{V_\alpha}$, pois x_α é homeomorfismo.

Considere F, o conjunto de todas as matrizes de $V_k(\mathbb{R}^{n+k})$ em que suas colunas formam um conjunto ortonormal. Então F é compacto, pois se considerarmos o homeomorfismo:

$$\Phi : M_{(k+n),k}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{k(k+n)},$$

dado por $\Phi([c_1, \ldots, c_k]) = (c_1, \ldots, c_k)$, onde $[c_1, \ldots, c_k]$ denota a matriz cuja as colunas são $c_1, \ldots, c_k$.Temos que $\Phi(F)$ é fechado e limitado pois $\|(c_1, \ldots, c_k)\| \leq k$ para toda matriz $[c_1, \ldots, c_k] \in F$. Portanto F é compacto e como todo subespaço em $G_{k,n}$ possui base ortonormal, segue que $G_{k,n} = \psi(F)$ e assim é compacto.

Note que, quando $k = 1$, $G_{1,n} = \mathbb{RP}^n$ é o n-**espaço projetivo real**.

1.2 Cohomologia com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$

Lembramos que o **anel de cohomologia singular** de um espaço topológico B, com coeficientes no anel $\mathbb{Z}_2$ dos inteiros módulo 2, é o anel graduado

$$H^*(B) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} H^i(B),$$

a soma direta dos $\mathbb{Z}_2$-módulos de cohomologia (singular) de B, $H^i(B)$, munido do produto *cup* e com unidade $1 \in H^0(B)$. Os elementos de $H^*(B)$ são da forma

$$w = w_0 + w_1 + \ldots + w_n,$$

com $w_i \in H^i(B)$.

Se $x \in H^i(B)$ e $y \in H^j(B)$, então o produto *cup* de x e y será denotado por $xy \in H^{i+j}(B)$.

Se $f : B \longrightarrow B'$ é uma função contínua entre dois espaços topológicos B e B', então, para cada inteiro $n \geq 0$, o **homomorfismo induzido em cohomologia** é denotado por $f_n^* : H^n(B') \longrightarrow H^n(B)$. Tais homomorfismos definem um homomorfismo de anéis $f^* : H^*(B') \longrightarrow H^*(B)$ dado por:

$$f^*(w_0 + w_1 + \ldots + w_n) = f_0^*(w_0) + f_1^*(w_1) + \ldots + f_n^*(w_n),$$

com $f^*(1) = 1$.

Observe que, para qualquer espaço topológico X, $H^*(X)$ é um anel comutativo, pois:
se $x \in H^i(X, \mathbb{Z}_2)$ e $y \in H^j(X, \mathbb{Z}_2)$, então

$$xy = (-1)^{i+j} yx = yx.$$

Além disso, temos o seguinte

Lema 1.2.1. *Todo elemento $w \in H^*(B)$ com $w_0 = 1$ tem inverso multiplicativo. Denotaremos tal elemento por $\overline{w}$, isto é: $w\overline{w} = \overline{w}w = 1$.*

Dem.: Considere $\bar{w}_0 = 1$, $\bar{w}_1 = w_1$ e defina recursivamente $\bar{w}$, por:

$$\bar{w}_n = \sum_{i=1}^{n-1} (w_i \bar{w}_{n-i}) + w_n, \ n > 1.$$

Então $\bar{w} \in H^*(B, \mathbb{Z}_2)$, $(w\bar{w})_0 = 1$ e $(w\bar{w})_1 = w_1 + w_1 = 0$. Se $n > 1$ então

$$(w\bar{w})_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} (w_j \bar{w}_{n+1-j}) + \bar{w}_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} (w_j \bar{w}_{n+1-j}) + w_{n+1} + \bar{w}_{n+1} =$$
$$= \bar{w}_{n+1} + \bar{w}_{n+1} = 0.$$

Assim $(w\bar{w})_i = 0 \ \forall i \geq 1$. Logo $\overline{w}w = 1$. ∎

Como consequência desse Lema, obtemos que o subconjunto de $H^*(B)$ formado por elementos $w \in H^*(B)$ tais que $w_0 = 1$, munido do produto *cup*, é um grupo abeliano.

Para os nossos propósitos, vale lembrar a estrutura do anel de cohomologia $H^*(\mathbb{RP}^n, \mathbb{Z}_2)$ (vide [7]):

$$H^i(\mathbb{RP}^n, \mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & se\ 0 \leq i \leq n \\ 0, & se\ i > n \end{cases}$$

Denotando por a o elemento não nulo de $H^1(\mathbb{RP}^n, \mathbb{Z}_2)$ temos que $a^i = a \ldots a$ (produto *cup* de i fatores iguais a a) é o elemento não nulo de $H^i(\mathbb{RP}^n, \mathbb{Z}_2)$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Sendo M^n variedade conexa, sabemos que: $H^n(M^n, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ e $H^i(M^n, \mathbb{Z}_2) \cong 0$ se $i > n$ (vide [4]).

Agora, faremos uma breve recordação sobre Homologia e Cohomologia celular com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$.

Uma n-**célula aberta** e é um espaço topológico homeomorfo a bola aberta $B^n(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| < 1\}$, para certo inteiro $n \geq 0$.

Um **C-W complexo** é um par $(X, \{e_\alpha\})$, formado por um espaço topológico X e uma coleção $\{e_\alpha\}$ de células abertas contidas em X tal que:

1. $\bigcup e_\alpha = X$;

2. Para cada α, existe uma função contínua $f_\alpha : D^n(0,1) \longrightarrow X$, ($D^n(0,1)$ é o fecho de $B^n(0,1)$ em $\mathbb{R}^n$), tal que a restrição $f_\alpha|_{B^n(0,1)}$ é homeomorfismo sobre a imagem e_α, n-célula, e $f(S^{n-1})$ está contido em uma união finita de r-células com $r < n$;

3. Se $F \subset X$ e $F \cap \overline{e_\alpha}$ é fechado em e_α, para cada e_α, então, F é fechado em X.

Denotaremos por X^n a união de todas as r-células de e_α com $r \leq n$; X^n é o n-**esqueleto** do C-W complexo X.

Dado C-W complexo X, associamos um complexo de cadeias, denotado por $C_*(X)$:

$$\ldots \longrightarrow C_i(X) \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1}(X) \xrightarrow{\partial_{i-1}} C_{i-2}(X) \longrightarrow \ldots$$

onde $C_i(X) = H_i(X^i, X^{i-1})$ para todo $i \geq 0$ e $C_i(X) = 0$ se $i < 0$. Os elementos de $C_i(X)$ são chamados de **cadeias em X**.

O homomorfismo ∂_i é definido pela composição dos homomorfismos já conhecidos

$$H_i(X^i, X^{i-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{i-1}(X^{i-1}) \xrightarrow{\pi_*} H_{i-1}(X^{i-1}, X^{i-2})$$

onde π_* é o homomorfismo induzido de $\pi : X^{i-1} \longrightarrow (X^{i-1}, X^{i-2})$ dado por $\pi(x) = x$ e ∂_* é o **homomorfismo conectante** definido de tal forma que

$$\ldots \longrightarrow H_i(X^i) \xrightarrow{\pi_*} H_i(X^i, X^{i-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{i-1}(X^{i-1}) \xrightarrow{\pi_*} H_{i-1}(X^{i-1}, X^{i-2}) \longrightarrow \ldots$$

é sequência exata.

O complexo de cadeias $C_*(X)$ é chamado de **complexo de cadeias celular** do C-W complexo X.

É conhecido que $C_n(X) \approx \bigoplus_{e_\alpha \in N} H_i(e_\alpha, e_\alpha - p_\alpha) \approx \bigoplus_{e_\alpha \in N} \mathbb{Z}_2$, onde cada p_α é ponto de cada célula e_α e N é o conjunto de todas as n-células de X (vide [2] página 261).

Assim, $C_n(X)$ é um $\mathbb{Z}_2$-espaço vetorial de dimensão igual à cardinalidade de N e cada célula e_α pode ser identificada como uma cadeia de X $(e'_j)_{j \in N}$ com $e'_j = e_\alpha$ se $j = e_\alpha$ e $e'_j = 0$ para $j \neq e_\alpha$.

O n-ésimo $\mathbb{Z}_2$-módulo de homologia do complexo de cadeias $C_*(X)$ é definido por $H_{c,n}(X) = Z_n/B_n$, onde $Z_n = ker(\partial_n)$ (o núcleo de ∂_n) é o módulo dos **ciclos de** X e $B^n = Im(\partial_{n+1})$ (a imagem de ∂_{n+1}). O módulo $H_{c,n}(X)$ é a n-**ésima homologia celular de** X

Definimos $C^n(X) = C_n(X)^*$, espaço dual de $C_n(X) = H_i(X^i, X^{i-1})$. Obtemos, então, um complexo de cocadeias, denotado por $C^*(X)$:

$$\ldots \longrightarrow C^i(X) \xrightarrow{\delta^i} C^{i+1}(X) \xrightarrow{\delta^{i+1}} C^{i+2}(X) \longrightarrow \ldots$$

onde δ^i é o homomorfismo dual de ∂_i, isto é, $\delta^i(f) = f \circ \partial_{i+1}$.

O complexo de cocadeias $C^*(X)$ é chamado de **complexo de cocadeias celular de** X e os elementos de $C^i(X)$ são chamados de **cocadeias de** X**.**

O n-ésimo $\mathbb{Z}_2$-módulo de cohomologia do complexo de cocadeias $C^*(X)$ é definido por $H^n_c(X) = Z^n/B^n$, onde $Z^n = ker(\delta^n)$ (o núcleo de δ^n) é o módulo dos **cociclos de** X e $B^n = Im(\delta^{n-1})$ (a imagem de δ^{n-1}).O módulo $H^n_c(X)$ é a n-**ésima cohomologia celular de** X.

Para relacionar homologia (resp., cohomologia) celular com homologia (resp., cohomologia) singular, fazemos uso do

Teorema 1.2.2. *Seja X um C-W complexo. O n-ésimo $\mathbb{Z}_2$-módulo de homologia do complexo $C_*(X)$ é isomorfo à n-ésima homologia (singular) de X, $H_n(X)$. Analogamente, $H_c^n(X)$ é isomorfo à n-ésima cohomologia (singular) de X, $H^n(X)$.*

Dem.: [2] página 263.

Capítulo 2

Fibrados

Neste capítulo apresentaremos a definição de fibrado e suas principais propriedades.

Definição 2.0.3. *Um **fibrado** $\eta = (E, B, p, F)$ é formado por:*

1. *três espaços topológicos: E (**espaço total**), B (**espaço base**) e F (**espaço fibra**);*

2. *uma função contínua e sobrejetiva $p : E \longrightarrow B$;*

*tais que: existe uma cobertura de abertos de B, $\{U_i\}_{i\in J}$, onde cada U_i é um **aberto localmente trivial do fibrado** η, isto é, existe um homeomorfismo $\psi_i : p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times F$ de tal forma que o diagrama abaixo é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_i) \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[d, "p"'] & U_i \times F \arrow[dl, "\pi_1"] \\ U_i & \end{tikzcd}$$

ou seja: $\pi_1 \circ \psi_i(x) = p(x), \forall x \in p^{-1}(U_i)$, com $\pi_1 : U_i \times F \longrightarrow U_i$ sendo a projeção usual na primeira coordenada.

Sejam $\eta = (E, B, p, F)$ um fibrado, $\{U_j\}_{j\in J}$ uma cobertura de abertos localmente triviais de η com homeomorfismos $\psi_i : p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times F$ e $\psi_j : p^{-1}(U_j) \longrightarrow$

$U_j \times F$ tais que $\pi_1 \circ \psi_i(x) = p(x)$, para todo $x \in p^{-1}(U_i)$ e $\pi_1 \circ \psi_j(x') = p(x')$, para todo $x' \in p^{-1}(U_j)$, como na definição acima.

Então, como $p^{-1}(U_i \cap U_j) = p^{-1}(U_i) \cap p^{-1}(U_j)$ e utilizando as propriedades de ψ_i e ψ_j segue que $\psi_i(p^{-1}(U_i \cap U_j)) = (U_i \cap U_j) \times F$ e $\psi_j(p^{-1}(U_i \cap U_j)) = (U_i \cap U_j) \times F$. Além disso, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
(U_i \cap U_j) \times F \arrow[r, "\psi_i^{-1}"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & p^{-1}(U_i \cap U_j) \arrow[r, "\psi_j"] \arrow[d, "p"] & (U_i \cap U_j) \times F \arrow[dl, "\pi_1"] \\
& U_i \cap U_j &
\end{tikzcd}$$

De fato: $\pi_1(\psi_j(x)) = p(x)$, para todo $x \in p^{-1}(U_i \cap U_j)$ e, dado $z \in (U_i \cap U_j) \times F$, temos $p \circ \psi_i^{-1}(z) = \pi_1(\psi_i(\psi_i^{-1}(z))) = \pi_1(z)$. Assim $\pi_1(\psi_j \circ \psi_i^{-1}(z)) = \pi_1 \circ \psi_j \circ \psi_i^{-1}(z) = \pi_1(z), \forall z \in (U_i \cap U_j) \times F$. Então $\psi_j \circ \psi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times F \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times F$ é da forma $\psi_j \circ \psi_i^{-1}(x, y) = (x, g_{ji}(x)(y))$ para certa função g_{ij}.

Para cada $x \in U_i \cap U_j$ defina $p_x : F \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times F$ dada por $p_x(y) = (x, y)$, função contínua. Temos então:

$$g_{ji}(x) = \pi_2 \circ \psi_j \circ \psi_i^{-1} \circ p_x$$

Proposição 2.0.4. *Sejam $\eta = (E, B, p, F)$ um fibrado, $\{U_j\}_{j \in J}$ uma cobertura formada por abertos localmente triviais de η. Então:*

1. $g_{ii}(x) = id_F, \forall x \in U_i$ *e* $i \in J$;

2. $g_{ij}(x) = g_{ji}(x)^{-1}, \forall x \in U_i \cap U_j$;

3. $g_{ij}(x) \circ g_{jk}(x) = g_{ik}(x), \forall x \in U_i \cap U_j \cap U_k$.

Dem.:

1. Temos $g_{ii}(x)(y) = \pi_2 \circ \psi_i \psi_i^{-1} \circ p_x(y) = y, \forall y \in F$. [1]

[1] Em alguns trechos, por simplicidade de notação e sem risco de confusão, omitiremos o sinal de composição usual de funções.

2. $(g_{ij}(x) \circ g_{ji}(x))(y) = \pi_2 \circ \psi_i \psi_j^{-1} \circ p_x \pi_2 \circ \psi_j \psi_i^{-1} \circ p_x(y)$
$= \pi_2 \circ \psi_i \psi_j^{-1} \circ p_x \pi_2(\psi_j \psi_i^{-1}(x, y)) = y.$

   Analogamente temos $(g_{ji}(x) \circ g_{ij}(x))(y) = y$. Logo $g_{ij}(x) = g_{ji}(x)^{-1}$.

3. Sejam U_i, U_j, U_k e $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$. Então: $(g_{ij}(x) \circ g_{jk}(x))(y) = (\pi_2 \circ \psi_i \psi_j^{-1} \circ p_x) \circ (\pi_2 \circ \psi_j \psi_k^{-1} \circ p_x)(y) = \pi_2 \circ \psi_i \psi_j^{-1} \circ p_x \pi_2(\psi_j \psi_k^{-1}(x, y)) = \pi_2 \circ \psi_i \psi_j^{-1} \circ \psi_j \psi_k^{-1}(x, y) = g_{ik}(x)(y)$.

■

2.1 Fibrado coordenada

Lembramos que um **grupo topológico** (G, τ) é um par formado por um grupo G e uma topologia τ para G tal que as aplicações $(x, y) \mapsto xy$ e $x \mapsto x^{-1}$ são contínuas.

Sejam G um grupo topológico e F um espaço topológico. Uma **ação** $\Phi : G \times F \longrightarrow F$ é uma função contínua, tal que, para todo $f \in F$, e $g, h \in G$ tem-se:

$$\Phi(e_G, f) = f \text{ } (e_G \text{ é o elemento neutro em} G);$$

$$\Phi(g, \Phi(h, f)) = \Phi(gh, f)).$$

Se $\overline{\Phi} : G \longrightarrow H(F)$, ($H(F)$ conjunto dos homeomorfismos de F), $\overline{\Phi}(g) = \Phi_g$, é injetora (onde $\Phi_g : F \longrightarrow F$ é definida por $\Phi_g(f) = \Phi(g, f)$), dizemos que é uma **ação efetiva** de G em F.

Definição 2.1.1. *Sejam E, B, F espaços topológicos e $\Phi : G \times F \longrightarrow F$ uma ação. Um fibrado coordenada $\eta = (E, B, p, F, \Phi, G, \{U_i, \phi_i\}_i)$ é formado por:*

1. *Uma função contínua $p : E \longrightarrow B$ sobrejetora chamada de **função projeção**;*

2. *Uma ação $\Phi : G \times F \longrightarrow F$ efetiva;*

3. *Uma família $\{U_i, \psi_i\}_i$, formada por abertos U_i de B, com $\{U_i\}_i$ cobertura aberta de B, e homeomorfismos $\psi_i : p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times F$, tais que o diagrama abaixo é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_i) \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[d, "p"'] & U_i \times F \arrow[dl, "\pi_1"] \\ U_i & \end{tikzcd}$$

Além disso, para todo par (U_i, U_j) de abertos, tais que $U_i \cap V_j \neq \emptyset$, e para todo $x \in U_i \cap U_j$, temos que o homeomorfismo $\pi_2 \circ \Phi_x \circ \Phi_x^{-1} \circ p_x$ pertence a $\overline{\Phi}(G)$.

Cada par (U_i, ψ_i) como no item 3 da definição acima é chamado de ***sistema de coordenadas local do fibrado*** *η.*

Para cada par (i, j) de índices, tais que $U_i \cap V_j \neq \emptyset$, as funções $g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow G$ definidas de tal forma que $g_{ij}(x)$ é o único elemento em G tal que

$$\pi_2 \circ \psi_j \circ \psi_i^{-1} \circ p_x(y) = \Phi(g_{ij}(x), y), \forall y \in F,$$

são contínuas. Tais funções são chamadas de ***funções de transição****.*

Dado um fibrado ξ, denotamos por $E(\xi)$ e $B(\xi)$ os espaços total e base, respectivamente, do fibrado ξ e p_ξ sua função projeção.

Definição 2.1.2. *Sejam η e ξ dois fibrados com o mesmo espaço base B, mesma fibra F, mesmo grupo topológico G e mesma ação efetiva Φ. Então, dizemos que tais fibrados são* ***equivalentes*** *se existe um homeomorfismo $f : E(\eta) \longrightarrow E(\xi)$ tal que:*

1. $p_\xi \circ f = p_\eta$;

2. *Dados (U_i, ψ_i) e (V_j, α_j) sistemas locais do fibrados η e ξ, respectivamente, tais que $U_i \cap V_j$ é não vazio, temos que o homeomorfismo $\pi_2 \circ \Psi_i \circ f \circ \alpha_j^{-1} \circ p_x$ pertence à $\overline{\Phi}(G)$.*

2.1.1 Construção de fibrados a partir das funções de transição

Dado um fibrado η com sistemas de coordenadas locais $\{U_i\}_{i\in J}$. Construímos as funções $g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow H(F)$, para cada par $(i,j) \in J^2$, tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, satisfazendo as propriedades:

- $g_{ii}(x) = id_F, \forall i \in J, \forall x \in U_i$;
- $g_{ij}(x) \circ g_{jk}(x) = g_{ik}(x), \forall i,j,k \in J, \forall x \in U_i \cap U_j \cap U_k$.

Teorema 2.1.3. *Dados: B e F espaços topológicos, $\{U_i\}_{i\in J}$ cobertura aberta de B, G um grupo topológico, Φ uma ação efetiva de G em F e, para cada par $(i,j) \in J^2$ com $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow G$ funções contínuas tais que $g_{ik}(x) \circ g_{kj}(x) = g_{ij}(x), \forall x \in U_i \cap U_j \cap U_k$. Então, existe um fibrado $\eta = (E, B, p, F, \Phi, G, \{U_i, \phi_i\}_i)$, de tal forma que suas funções de transição são g_{ik}.*

Dem.: Considere $E' = \bigsqcup_{i\in J} U_i \times F$ a união disjunta da família de espaços topológicos $\{U_i \times F\}$. A topologia de E' é formada por conjuntos O tais que $p_j^{-1}(O)$ é aberto para todo $j \in J$, com $p_j^{-1} : U_j \times F \longrightarrow E'$ definida por $p_j(x) = (x,j)$. Em E', defina a seguinte relação: $((x,y),i) \sim ((x',y'),j) \Leftrightarrow x = x'$ e $g_{ji}(x)y = y'$. Tal relação é de equivalencia, de fato: Temos que $((x,y),i) \sim ((x,y),i)$, pois $g_{ii}(x)y = y$. Além disso, se $((x,y),i) \sim ((x',y'),j)$ então $x' = x, g_{ji}(x)y = y'$. Assim: $g_{ij}(x)g_{ji}(x)y = g_{ij}(x)y \Rightarrow g_{ij}(x)y' = y$. Logo, $((x',y'),j) \sim ((x,y),i)$.

Também temos que: se $((x,y),i) \sim ((x',y'),j)$ e $((x',y'),j) \sim ((z,w),k)$, então $x = x'$, $g_{ji}(x)y = y', x' = z$ e $g_{kj}(x)y' = w$. Logo $x = z$ e $g_{ki}(x)y = g_{kj}(x)(g_{ji}(x)y) = g_{kj}(x)y' = w$. Portanto $((x,y),i) \sim ((z,w),k)$.

Defina $E = E'/\sim$, espaço quociente, e considere $q : E' \longrightarrow E$, função contínua dada por $q((x,y),i) = [((x,y),i)]$. O espaço E será o espaço total do fibrado e a função projeção p é definida por $p([((x,y),i)]) = x$. Tal aplicação é bem definida, pois se $[((x,y),i)] = [((x',y),j)]$ então $x = x'$ e além disso p é contínua. De fato:

sabemos que p é contínua se, e somente se, $p \circ q : E' \longrightarrow B$ é continua. E tal aplicação é contínua se, e somente se, $p \circ q \circ p_j$ é contínua.

Como $p \circ q \circ p_j(x, y) = x$ segue que p é contínua. Para cada $j \in J$, defina $\Psi_j : U_j \times F \longrightarrow E$, defina por $\Psi_j(x, y) = [((x, y), j)]$. Ψ_j é contínua pois $\Psi_j = q \circ p_j$. Além disso $\Psi_j(U_j \times F) = p^{-1}(U_j)$. De fato: se $[((x, y), i)] \in \Psi_j(U_j \times F)$ então $[((x, y), i)] = \Psi_j(u, f)$, $u \in U_j$ e $f \in F$.

Assim

$$[((x, y), i)] = [((u, f), j)] ,$$

$$p([((x, y), i)]) = x = u \in U_j .$$

Logo $[((x, y), i)] \in p^{-1}(U_j)$.

Se $z \in p^{-1}(U_j)$ então $z = [((x', y'), k)]$ com $p(z) = x' \in U_j$. Assim $x \in U_k \cap U_j$ e $(x', g_j k(x')y) \in U_j \times F$ com $\Psi_j(x', g_{jk}(x')y') = [((x', g_{jk}(x')y'), j)] = z$. Ψ_j é injetora, pois se $\Psi_j(x, y) = \Psi_j(x', y')$ com $x', x \in U_i$ e $y, y' \in F$. Então $[((x, y), j)] = [((x', y'), j)]$ e assim $x = x'$ e $g_{ji}(x)y = y'$, donde obtemos $y = y'$, e $(x, y) = (x', y')$.

Portanto Ψ_j é uma aplicação contínua e bijetora sobre $p^{-1}(U_j)$. É fácil verificar que Ψ_j é uma aplicação aberta e portanto um homeomorfismo.

Também temos que $p \circ \Psi_j(x, y) = p([((x, y), i)]) = x = \pi_1(x, y)$ logo $p = \pi_1 \circ \Psi_j^{-1}$. Assim, cada (U_j, Ψ_j^{-1}) é um sistema de coordenadas local.

Resta mostrar que as aplicações de transição deste fibrado são as g_{ij}.

Dados $x \in U_i \cap U_j$. Seja $\pi_2 \circ \psi_i \circ \psi_j^{-1} \circ p_x$.

Vamos provar que $\pi_2 \circ \psi_i \circ \psi_j^{-1} \circ p_x(y) = g_{ij}(x)y, \forall y \in F$. De fato, $\pi_2 \circ \psi_i \circ \psi_j^{-1} \circ p_x(y) = \pi_2 \circ \psi_i \circ \psi_j^{-1}(x, y) = \pi_2 \circ \psi_i([((x, y), j)])$. Mas $x \in U_i \cap U_j$ e $[((x, y), j)] = [((x, g_{ij}(x)y), i)]$.

Assim $\pi_2 \circ \psi_i([((x, y), j)]) = \pi_2 \circ \psi_i([((x, g_{ij}(x)y), i)]) = g_{ij}(x)y, \forall y \in F$.

■

Lema 2.1.4. *Dados dois fibrados (E, p, B, F, G) e (E', p', B, F, G) com a mesma ação efetiva $\Phi : F \times G \longrightarrow G$ e com coberturas localmente triviais $\{U_i\}_{i \in J}$ e $\{U'_j\}_{j \in J'}$*

respectivamente e com funções de transição $\{g_{ik}\}$ *e* $\{g'_{jl}\}$. *Então, tais fibrados são equivalentes se, e somente se, existem funções contínuas* $H_{ji} : U_i \cap U'_j \longrightarrow G$ *tais que:*

- $H_{ji}(x) = H_{jk}(x)g_{ki}(x), \forall i,k \in J, \forall j \in J'$ *e* $\forall x \in U_i \cap U'_j \cap U_k$;
- $H_{lm}(x) = H_{lp}(x)g_{pm}(x), \forall l,p \in J', \forall m \in J$ *e* $\forall x \in U'_l \cap U_m \cap U'_p$.

Dem.: [8] páginas 11 e 12. ■

Lema 2.1.5. *Dados dois fibrados* $(E,p,B,F,G,\{U_i\}_{i\in J})$ *e* $(E',p',B,F,G,\{U_i\}_{i\in J})$ *com a mesma ação efetiva* $\Phi : F \times G \longrightarrow G$. *Sejam* $\{g_{ik}\}$ *e* $\{g'_{jl}\}$*as respectivas funções de transição. Então, tais fibrados são equivalentes se, e somente se, existem funções contínuas* $\lambda_j : U_j \longrightarrow G$*, de tal modo que:*

$$g_{ij}(x) = \lambda_i^{-1}(x)g'_{ij}(x)\lambda_j(x), \forall x \in U_i \cap U_j.$$

Dem.: Suponha que os fibrados sejam equivalentes. Então, pelo lema anterior, temos que existem funções contínuas $H_{ij} : U_I \cap U_j \longrightarrow G$, para cada $(i,j) \in J^2$, tal que:

$$H_{ij}(x) = H_{ik}(x)g_{kj}(x), \forall x \in U_i \cap U_j \cap U_k$$

e

$$H_{lm}(x) = g'_{lp}(x)H_{pm}(x), \forall x \in U_l \cap U_m \cap U_p.$$

Defina $\lambda_j : U_j \longrightarrow G$ dada por $\lambda_j(x) = H_{jj}(x)^{-1}$. Então $\lambda_i(x)^{-1}g_{ij}(x)\lambda_j(x) = H_{ii}(x)g_{ij}(x)H_{jj}(x)^{-1} = H_{ij}(x)H_{jj}(x)^{-1} = g'_{jj}(x)H_{jj}(x)H_{jj}(x)^{-1} = g'_{ij}(x)$, para todo $x \in U_i \cap U_j$. Reciprocamente, se existe $\lambda_j : V_j \longrightarrow G$ contínua, defina $H_{ij}(x) = \lambda_i(x)g_{ij}(x)$. Então

$$H_{ij}(x)g_{jk}(x) = \lambda_i(x)g_{ij}(x)g_{jk}(x) = H_{ik}(x)$$

$$g'_{lp}(x)H_{pm}(x) = H_{lp}(x)\lambda_p(x)g_{pm}(x) = H_{lm}(x).$$

■

Corolário 2.1.6. *Sejam fibrados como no Lema acima com* $g_{ij}(x) = g'_{ij}(x), \forall x \in U_i \cap U_j$ *(isto é, com as mesmas funções de transição), então tais fibrados são equivalentes.*

Dem.: Basta tomar $\lambda_j : U_j \longrightarrow G$, dada por $\lambda_j(x) = e_G$. ■

Assim, o fibrado construído no Teorema 2.1.3 é único, a menos de equivalência.

Exemplo 2.1.7. *Se* $X = U_1 \cup U_2$, *A e B abertos de espaço X, não disjuntos. Então dada uma função contínua* $g_{12} : U_1 \cap U_2 \longrightarrow G$, *definimos* $g_{11}(x) = g_{22}(x) = e_G$ *e* $g_{21}(x) = g_{12}(x)^{-1}$ *e desse modo, obtemos um único fibrado, a menos de equivalencia, com as funções de transição* $\{g_{11}, g_{12}, g_{21}, g_{22}\}$.

Dados um fibrado η, com $p : E \longrightarrow B$, e uma função contínua $f : X \longrightarrow B$. Construiremos um fibrado sobre X a partir deste fibrado e desta função contínua. Para isso, definimos as funções de transição a patir da cobertura aberta $W_i = f^{-1}(U_i)$ com $\{U_i\}$ cobertura formada por abertos localmente triviais de η.

Considere $g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow G$ as funções de transição do fibrado η. Defina $b_{ij} : W_i \cap W_j \longrightarrow G$ dada por $b_{ij}(x) = g_{ij} \circ f(x)$. Dado $x \in W_i \cap W_j \cap W_k$ então $b_{ij}(x)b_{jk}(x) = g_{ij} \circ f(x)g_{jk} \circ f(x) = g_{ik}(f(x)) = b_{ik}(x)$. Assim, existe um fibrado (único), cujas funções de transição são b_{ij}.

Definição 2.1.8. *O fibrado coordenada acima construído chama-se* ***pull back de*** η ***com respeito à*** f *e será denotado por* $f^!\eta$.

2.2 Fibrados Vetoriais

Nesta seção, apresentaremos as principais propriedades de fibrados vetoriais.

Definição 2.2.1. *Sejam E, B espaços topológicos. Um* ***fibrado vetorial*** *(real),* ξ, *de dimensão n com espaço total E e espaço base B é formado por:*

1. *Uma função contínua e sobrejetora* $p : E \longrightarrow B$, *chamada de* ***função projeção do fibrado****;*

2. *Uma estrutura de espaço vetorial real em $p^{-1}(x)$, para cada $x \in B$. O espaço vetorial $p^{-1}(x)$ é chamado de fibra em x do fibrado ξ.*

Além disso, para cada $x \in B$, existem $U \subset B$, vizinhança aberta de x, e $\psi : U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow p^{-1}(U)$ tais que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} U \times \mathbb{R}^n \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & p^{-1}(U) \arrow[d, "p"] \\ & U \end{tikzcd}$$

A função $\Psi_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow p^{-1}(U)$ dada por $\Psi_x(y) = \psi(x, y)$ é um isomorfismo entre os espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$ e $p^{-1}(x)$, para cada $x \in U$.

Assim, como na definição de fibrado coordenada, o par (U, ψ) satisfazendo tal propriedade é chamado de **sistema de coordenadas local do fibrado** ξ. Temos que o espaço $p^{-1}(x)$ é sempre um espaço vetorial de dimensão n e será denotado por $F_x(\xi)$.

Observamos, a seguir, como a definição de fibrado vetorial está relacionada com a definição de fibrado coordenada.

Seja $\eta = (E, p, B, G, \mathbb{R}^n, \Phi, \{U_i, \phi_i\}_{i \in J})$ um fibrado coordenada com fibra $\mathbb{R}^n$, grupo topológico G formado por todos os isomorfismos lineares de $\mathbb{R}^n$, com a operação de composição, topologia usual (topologia proveniente da norma de isomorfismos lineares) e ação efetiva $\Phi : G \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $\Phi(f, v) = f(v)$ (a transformação evaluação).

Então, $p^{-1}(x)$ tem uma estrutura de espaço vetorial real; de fato: sejam U_i e $\phi_i : p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$ com x em U_i. A aplicação de $\pi_{2_x} \circ \phi_{i_x} : p^{-1}(x) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, com $\pi_{2_x} : \{x\} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $\pi_{2_x}(x, y) = y$, é bijetiva.

Assim, existe uma única estrutura de espaço vetorial no conjunto $p^{-1}(x)$ de tal modo que $\pi_{2_x} \circ \phi_{i_x}$ é isomorfismo. Tal estrutura não depende da escolha do sistema de coordenadas (U_i, ϕ_i), pois se (U_j, ϕ_j) é outro sistema de coordenadas local, tal que $x \in U_j$ então como $\pi_{2_x} \circ \phi_{i_x} \circ \phi_{j_x} \circ p_x$ é isomorfismo de $\mathbb{R}^n$, vide o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd}
(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \arrow[r, "\phi_j^{-1}"] & p^{-1}(U_i \cap U_j) \arrow[r, "\phi_i"] & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "\pi_2"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[u, "p_x"] & & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

temos que para todo $z, w \in p^{-1}(x)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(\pi_{2_x} \circ \ \phi_{j_x}) \circ (\pi_{2_x} \circ \ \phi_{j_x})^{-1}(\pi_{2_x}\phi_{j_x}(p) + \pi_{2_x}\phi_{j_x}(p)) =$$

$$= \pi_{2_x}\phi_{i_x}\phi_{j_x}p_x(\pi_{2_x}\phi_{j_x}(p) + \pi_{2_x}\phi_{j_x}(p)) = \pi_{2_x}\phi_{i_x}(p) + \pi_{2_x}\phi_{i_x}(p)$$

e

$$(\pi_{2_x} \circ \ \phi_{j_x}) \circ (\pi_{2_x} \circ \ \phi_{j_x})^{-1}(\alpha(\pi_{2_x}\phi_{j_x}(p))) = \alpha(\pi_{2_x}\phi_{j_x}(p)).$$

Portanto $(\pi_{2_x} \circ \ \phi_{j_x})^{-1}(\pi_{2_x}\phi_{j_x}(p) + \pi_{2_x}\phi_{j_x}(p)) = (\pi_{2_x} \circ \ \phi_{i_x})^{-1}(\pi_{2_x}\phi_{j_x}(p) + \pi_{2_x}\phi_{j_x}(p))$ e $(\pi_{2_x} \circ \ \phi_{j_x})^{-1}(\alpha(\pi_{2_x}\phi_{i_x}(p))) = (\pi_{2_x} \circ \ \phi_{j_x})^{-1}(\alpha(\pi_{2_x}\phi_{j_x}(p)))$.

Temos também que o diagrama abaixo é comutativo, e $\phi_{i_x}^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é isomorfismo.

$$\begin{tikzcd}
U \times \mathbb{R}^n \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & p^{-1}(U) \arrow[d, "p"] \\
& U
\end{tikzcd}$$

Assim (U_i, ϕ_i^{-1}) é um sistema de coordenadas local para o fibrado sobre B com espaço total E e função projeção p. Logo, o fibrado η é um fibrado vetorial.

Reciprocamente, se ϵ é fibrado vetorial sobre B com função projeção p, podemos escolher uma família $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in J}$ de pares formados por abertos U_i de B e homeomorfismos $\phi_i : P^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$, de tal forma que

$$\epsilon' = (E, p, B, G, \mathbb{R}^n, \Phi, \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in J})$$

é um fibrado coordenada com G, grupo topolólogico formado pelos isomorfismos lineares de $\mathbb{R}^n$, fibra $\mathbb{R}^n$ e ação efetiva Φ a transformação evaluação.

Definição 2.2.2. *Dados dois fibrados vetoriais ϵ e η com mesmo espaço base B. Dizemos que ϵ e η são **fibrados isomorfos**, e denotamos por $\epsilon \cong \eta$, se existe um homeomorfismo*

$$h : E(\epsilon) \longrightarrow E(\eta)$$

tal que $h(F_b(\epsilon)) \subset F_b(\eta)$ e $h|_{F_b(\epsilon)} : F_b(\epsilon) \longrightarrow F_b(\eta)$ é isomorfismo, para cada $b \in B$.

Definição 2.2.3. *O fibrado vetorial ϵ é dito ser **trivial**, se é possível escolher como sistema de coordenadas local o par (B, h), onde B é o espaço base de ϵ e*

$$h : B \times \mathbb{R}^n \longrightarrow p^{-1}(B)$$

é homeomorfismo.

Exemplo 2.2.4. *O fibrado trivial com espaço total $B \times \mathbb{R}^n$, sobre B, com função projeção $\pi : B \times \mathbb{R}^n \longrightarrow B$ dada por $\pi(b, x) = b$ e com estrutura de espaço vetorial em cada fibra $\pi^{-1}(b) = \{(b, x)/x \in \mathbb{R}^n\}$, definida por:*

1. $(b, x) + (b, y) := (b, x + y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$;

2. $\alpha(b, x) := (b, \alpha x), \forall x \in \mathbb{R}^n$ *e* $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$.

será denotado por ϵ^n_B.

Suponha que ϵ seja um fibrado trivial n-dimensional sobre B. Então existe um homeomorfismo $\phi : B \times \mathbb{R}^n \longrightarrow E(\epsilon)$, tal que para cada $b \in B$ a correspondência $(b, x) \mapsto \phi(b, x)$ é isomorfismo entre os espaços $\{b\} \times \mathbb{R}^n$ com as operações definidas no exemplo acima, e $F_b(\epsilon)$. Logo $\epsilon \cong \epsilon^n_B$.

Reciprocamente, temos que se $\epsilon \cong \epsilon^n_B$, com ϵ fibrado n-dimensional sobre B, então existe um homeomorfismo $\phi : B \times \mathbb{R}^n \longrightarrow E(\epsilon)$, tal que para todo $b \in B$, a correspondência $x \mapsto \phi(b, x)$ é isomorfismo entre $\mathbb{R}^n$ e $F_b(\epsilon)$ e portanto ϵ é trivial.

Assim temos o seguinte

Lema 2.2.5. *Seja ϵ um fibrado n-dimensional sobre B. Então ϵ é trivial se, e somente se, $\epsilon \cong \epsilon^n_B$.*

Considere X uma variedade diferenciável C^∞ de dimensão n, com atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in J}$.

Para cada par $(i, j) \in J^2$ tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, defina a função contínua $g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow G$, G grupo dos isomorfismos de $\mathbb{R}^n$, definida por $g_{ij}(x) = D(\phi_i \circ \phi_j^{-1})(\phi_j(x))$ onde $D(\phi_i \circ \phi_j^{-1})(\phi_j(x))$ é a transformação derivada de $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ em $\phi_j(x)$

Temos então que se $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$, então:

$$g_{ij}(x)g_{jk}(x) = D(\phi_i \circ \phi_j^{-1})(\phi_j(x)) \circ D(\phi_j \circ \phi_k^{-1})(\phi_k(x)) =$$

$$= D(\phi_i \circ \phi_j^{-1} \circ \phi_j \circ \phi_k^{-1})(\phi_k(x)) = D(\phi_i \circ \phi_k^{-1})(\phi_k(x)) = g_{ik}(x).$$

Assim, pelo Teorema 2.1.3, existe um fibrado coordenada com funções de transição g_{ij} e com espaço base X. Como visto anteriormente, tal fibrado pode ser considerado como fibrao vetorial n-dimensional sobre X, chamado de **fibrado tangente de** X, e será denotado por $\tau(X)$.

2.3 O fibrado canônico sobre $G_{k,n}$

Considere $E = \{(X, v) \in G_{k,n} \times \mathbb{R}^{n+k} \ |v \in X\}$ subespaço topológico de $G_{k,n} \times \mathbb{R}^{n+k}$, a função $\pi : E \longrightarrow G_{k,n}$, dada por $\pi(X, v) = X$ e com estrutura de espaço vetorial definida em $\pi^{-1}(X) = \{(X, v) \ |v \in X\}$ da seguinte forma: dados $v, w \in X$ e $t \in \mathbb{R}$

$$(X, v) + (X, w) = (X, v + w);$$

$$t(X, v) = (X, tv).$$

Para cada $X_0 \in G_{k,n}$, considere U, vizinhança aberta de X em $G_{k,n}$, formado por todos os subespaços Y, k-dimensionais de $\mathbb{R}^{n+k}$, tais que $Y \cap X_0^{\perp} = 0$ (espaço nulo).

Defina $T(Y) : X_0 \longrightarrow X_0^{\perp}$, transformação linear tal que para todo $x \in X_0$, $T(Y)x$ é o único vetor de $X_0^{\perp}$ de tal forma que $T(Y)x + x \in Y$, $T(Y)$ está bem definida pois $\mathbb{R}^{n+k} = X_0^{\perp} \oplus Y$

Seja $h : U \times X_0 \longrightarrow \pi^{-1}(U)$, definida por $h(Y, x) = (Y, T(Y)x + x)$. Temos que h é bijetiva, com $h^{-1} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times X_0$, $h^{-1}(Y, p(y))$, onde $p : \mathbb{R}^{n+k} \longrightarrow X_0^{\perp}$ é a projeção ortogonal sobre $X_0^{\perp}$.

Tanto h como h^{-1} são contínuas e portanto h é homeomorfismo. Se escolhermos um isomorfismo linear de $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow X_0$ então (U, h'), $h' : U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow U \times X_0$, definida por $h'(u, v) = (u, f(v))$ é um sistema de coordenadas local para o fibrado vetorial k-dimensional sobre $G_{k,n}$ com espaço total E e função projeção π, chamado de **fibrado canônico sobre** $G_{k,n}$ e será denotado por $\gamma^k(\mathbb{R}^{n+k})$.

Um fibrado vetorial de dimensão 1 é chamado de **fibrado linha**, assim $\gamma^1(\mathbb{R}^{n+1})$ é o **fibrado linha canônico sobre** $\mathbb{RP}^n$.

Definição 2.3.1. *Uma **seção cruzada** de um fibrado vetorial ϵ sobre B é uma função contínua $s : B \longrightarrow E(\epsilon)$, tal que $s(b) \in F_b(\epsilon)$ para todo $b \in B$, isto é, o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "id_B"'] & E(\epsilon) \arrow[d, "p"] \\ & B \end{tikzcd}$$

*Uma **seção cruzada é não nula** se, para todo $b \in B$, $s(b)$ é um vetor não nulo de $F_b(\epsilon)$.*

Definição 2.3.2. *Se $s_1, \ldots, s_n$ são seções cruzadas de ξ, tais que $s_1(b), \ldots, s_n(b)$ são linearmentes independentes para todo $b \in B$, B espaço base de ξ, então dizemos que $s_1, \ldots, s_n$ são **seções cruzadas linearmente independentes em todo lugar**, ou simplesmente, **l.i.**.*

Lema 2.3.3. *Sejam ξ e η fibrados vetoriais sobre B e $f : E(\xi) \longrightarrow E(\eta)$ uma função contínua tal que $f|_{F_b(\xi)} : F_b(\xi) \longrightarrow F_b(\eta)$ é isomorfismo para todo $b \in B$. Então f é homeomorfismo e $\xi \cong \eta$.*

Dem.: Dado $b_0 \in B$, escolha sistemas de coordenadas locais (U, g) de ξ e (V, h) de η, tais que $b_0 \in U \cap V$.

Vamos mostrar que a função $h^{-1} \circ f \circ g : (U \cap V) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ é homeomorfismo. Assim, como h^{-1} e g são homeomorfismos, segue que f também é.

Por hipótese, a função $v \mapsto h^{-1} \circ f \circ g(b, y)$ para cada $b \in U \cap V$ fixo, é isomorfismo linear de $\mathbb{R}^n$. Seja $A = [A_{ij}(b)]$ a matriz inversível desta transformação linear relativamente à base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Desse modo $h^{-1} \circ f \circ g(b, (x_1, \ldots, x_n)) = (b, (y_1, \ldots, y_n))$ com $y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(b) x_j$

A função que associa a cada $b \in B$ o número real $A_{ij}(b)$, para cada par (i, j), é contínua.

Seja $[A_{ij}^{-1}(b)]$ a matriz inversa de A. Temos então que

$$g^{-1} \circ f^{-1} \circ h(b, (y_1, \dots, y_n)) = (b, (x_1, \dots, x_n))$$

com

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^{-1}(b) y_j.$$

Como a inversão de matrizes é contínua, segue que $g^{-1} \circ f^{-1} \circ h$ é contínua. Logo $h^{-1} \circ f \circ g$. ■

Definição 2.3.4. *Um **fibrado vetorial Euclidiano** ξ é um fibrado vetorial munido de uma função contínua $\mu : E(\xi) \longrightarrow \mathbb{R}$, chamada de **métrica Euclidiana** tal que $\mu|_{F_b(\xi)} : F_b(\xi) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma transformação positiva definida e quadrática; isto é, para todo $v \in F_b(\xi)$, temos $\mu(v) = \sum_{i=1}^{m} L_i(v) L_i'(v)$, para certos funcionais lineares L_i e L_i' definidos em $F_b(\xi)$ e $\dfrac{\mu(2w) - 2\mu(w)}{2} > 0$, para todo $w \neq 0$ em $F_b(\xi)$.*

Desse modo, $v.w = \dfrac{\mu(v + w) - \mu(v) - \mu(w)}{2}$ define um produto interno em cada fibra $F_b(\xi)$.

É possível mostrar que todo fibrado vetorial sobre um espaço paracompacto possui uma métrica Euclidiana (vide [12]).

Exemplo 2.3.5. *O fibrado trivial ϵ_B^n tem métrica Euclidiana definida por:*

$$\mu(b, x) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2,$$

para todo $(b, x) \in B \times \mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.3.6. *O fibrado tangente $\tau(X)$ de uma variedade diferenciável X é um fibrado Euclidiano, pois X é paracompacto.*

Lema 2.3.7. *Sejam ξ fibrado Euclidiano e η fibrado vetorial equivalente a ξ. Então η também é Euclidiano.*

Dem.: Se $\eta \cong \xi$ então existe um homeomorfismo $\psi : E(\eta) \longrightarrow E(\xi)$, tal que $\psi|_{F_b(\eta)} : F_b(\eta) \longrightarrow F_b(\xi)$ é isomorfismo para todo $b \in B$, espaço base dos fibrados η e ξ.

Seja $\mu : E(\xi) \longrightarrow \mathbb{R}$ a métrica Euclidiana de ξ. Então $\mu \circ \psi : E(\eta) \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $\mu \circ \psi|_{F_b(\eta)}$ é quadrática definida e positiva pois $\psi|_{F_b(\eta)}$ é linear e $\mu|_{F_b(\xi)}$ é quadrática definida e positiva.

Portanto $\Psi = \mu \circ \psi$ é métrica Euclidiana para η e (η, Ψ) é fibrado Euclidiano.

■

2.4 O Pull-Back e a Soma de Whitney

Seja ξ um fibrado vetorial sobre B com função projeção $\pi : E(\xi) \longrightarrow B$. Considere $\bar{B} \subset B$ subespaço de B e $\bar{E} = \pi^{-1}(\bar{B})$.

Então, $\pi|_{\bar{E}} : \bar{E} \longrightarrow \bar{B}$ é contínua e assim obtemos um novo fibrado vetotrial de mesma dimensão que ξ, com espaço base $\bar{B}$, função projeção $\pi|_{\bar{E}}$ e com fibra $F_b(\xi)$. Tal fibrado é chamado de **fibrado restrição de ξ sobre $\bar{B}$** e será denotado por $\xi|_{\bar{B}}$.

Observe que se (U, ϕ) é um sistema de coordenadas local de ξ, então $(U \cap \bar{B}, \bar{\phi})$, com $\bar{\phi} : (U \cap \bar{B}) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \pi^{-1}|_{\bar{B}}(U \cap \bar{B})$ é um sistema de coordenadas local para $\xi|_{\bar{B}}$.

Considere ξ fibrado vetorial, de dimensão n, sobre B e $f : B' \longrightarrow B$ uma função contínua. Sejam $E = \{(b, e) \in B' \times E(\xi) | f(b) = p_\xi(e)\}$ e $p : E \longrightarrow B$ dada por $p(b, e) = b$.

Então se $\bar{f} : E \longrightarrow E(\xi)$ é definida por $\bar{f}(b, e) = e$, segue que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "p"'] & E(\xi) \arrow[d, "p_\xi"] \\ B' \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Defina em $F_b(\xi)$ as operações:

1. $(b, e) + (b, f) = (b, e + f)$, $\forall f, e \in F_{f(b)}(\xi)$;

2. $\alpha(b, e) = (b, \alpha e)$, $\forall e \in F_{f(b)}(\xi)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se (U, ϕ) é um sistema de coordenadas local para ξ, então considere $(\bar{U}, \bar{\phi})$ tal que $\bar{U} = f^{-1}(U)$ e $\bar{\phi} : \bar{U} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow p^{-1}(\bar{U})$ é dada por $\bar{\phi}(b, x) = (b, h(f(b), x))$. Temos que $\bar{\phi}$ é homeomorfismo e, desse modo, obtemos um novo fibrado vetorial, de dimensão n, com espaço total E sobre B, com função projeção p e $p^{-1}(b)$ espaço vetorial (cujas operações são definidas em 1. e 2. acima).

Os pares $(\bar{U}, \bar{\phi})$ formam, assim, um sistema de coordenadas local para este fibrado. Tal fibrado é chamado de o **pull-back de ξ com relação a f**, e será denotado por $f^!(\xi)$.

Observe que $\bar{f} : E \longrightarrow E(\xi)$ leva cada fibra $F_b(f^!(\xi))$ isomorficamente em $F_{f(b)}(\xi)$. Assim $\bar{f}$ é aplicação de fibrados (veja definição abaixo).

Definição 2.4.1. *Uma **aplicação de fibrados** é uma função contínua $f : E(\eta) \longrightarrow E(\xi)$, onde η e ξ são fibrados vetoriais sobre B e B' respectivamente, tal que para cada $b \in B$, existe $b' \in B'$, único, com $f(F_b(\eta)) = F_{b'}(\xi)$ e $f|_{F_b(\eta)} : F_b(\eta) \longrightarrow F_{b'}(\xi)$ é isomorfismo.*

Dada uma aplicação de fibrados $f : E(\eta) \longrightarrow E(\xi)$ existe uma única aplicação $\bar{f} : \bar{B} \longrightarrow B'$, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} E(\eta) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_\eta"'] & E(\xi) \arrow[d, "p_\xi"] \\ B \arrow[r, "\bar{f}"'] & B' \end{tikzcd}$$

Basta definir $\bar{f}(b) = b'$ tal que $f(F_b(\eta)) = F_{b'}(\xi)$.

Assim, dado $x \in E(\eta)$, temos que $x \in F_{p_\eta(x)}(\eta)$ e $f(F_{p_\eta(x)}(\eta)) = F_{b'}(\xi)$, para certo $b' \in B'$. Então $\bar{f} \circ p_\eta(x) = \bar{f}(p_\eta(x)) = b'$. Mas $f(x) \in F_{b'}(\xi)$, assim $p_\xi(f(x)) = b'$; logo $\bar{f} \circ p_\eta(x) = p_\xi(f(x))$.

Se h é uma aplicação $h : B \longrightarrow B'$ tal que

$$\begin{tikzcd} E(\eta) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_\eta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E(\xi) \arrow[d, "p_\xi"] \\ B \arrow[r, "h"'] & B' \end{tikzcd}$$

então dados $b \in B$ e $0 \in F_b(\eta)$ (o vetor nulo), temos que

$$h(b) = h(p_\eta(0)) = p_\xi(f(0)) = b'$$

donde $f(F_b(\eta)) = F_{b'}(\xi)$.

Assim $h = \bar{f}$, provando a unicidade de $\bar{f}$.

A aplicação descrita acima, $\bar{f}$, é dita ser **coberta pela aplicação de fibrado** f, ou dizemos que f **cobre** $\bar{f}$.

Proposição 2.4.2. *Seja ξ um fibrado vetorial. Então p_ξ, a aplicação projeção de ξ, é aberta.*

Dem.: Seja (U, ϕ) um sistema de coordenadas local de ξ. É suficiente mostrar que $p_\xi : p_\xi^{-1}(U) \longrightarrow U$ é aberta.

Temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} U \times \mathbb{R}^n \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & p^{-1}(U) \arrow[d, "p_\xi"] \\ & U \end{tikzcd}$$

Então se $A \subset p^{-1}(U)$ é aberto, segue que $\phi^{-1}(A)$ e $\pi_1(\phi^{-1}(A))$ são abertos pois ϕ é homeomorfismo e π_1 é aplicação aberta.

Como $p_\xi(U) = \phi(\pi_1(A))$ temos que $p_\xi : p_\xi^{-1}(U) \longrightarrow U$ é aberta. ■

Corolário 2.4.3. *Se $\bar{f}$ é coberta por uma aplicação de fibrados $f : E(\eta) \longrightarrow E(\xi)$, então $\bar{f}$ é contínua.*

Dem.: Basta notar que

$$\bar{f}(A) = p_\eta(f^{-1}(p_\xi^{-1}(A)))$$

para todo conjunto aberto $A \subset B'$, B' espaço base de ξ. ∎

Lema 2.4.4. *Seja $\bar{f} : B(\eta) \longrightarrow B(\xi)$ uma aplicação contínua coberta pela aplicação de fibrados $f : E(\eta) \longrightarrow E(\xi)$. Então, $\eta \cong \bar{f}^!(\xi)$.*

Dem.: Defina $\phi : E(\eta) \longrightarrow E(\bar{f}^!(\xi))$, dada por $\phi(x) = (p_\eta(x), f(x))$, função contínua.

Se $x \in F_b(\eta)$, então

$$\phi(x) = (p_\eta(x), f(x)) = (b, f(x)) \in F_b(\bar{f}^!(\xi)).$$

Além disso, se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x, y \in F_b(\eta)$, então

$$\phi(\alpha x+y) = (b, f(\alpha x+y)) = (b, \alpha f(x)+f(y)) = (b, \alpha f(x))+(b, f(y)) = \alpha\phi(x)+\phi(y).$$

Como $f|_{F_b(\eta)} : F_b(\eta) \longrightarrow F_b(\xi)$ é isomorfismo, segue que $\phi|_{F_b(\eta)}$ também é isomorfismo entre as fibras $F_b(\eta)$ e $F_b(\bar{f}^!(\xi))$.

Assim pelo Lema 2.3.3, $\eta \cong \bar{f}^!(\xi)$. ∎

Sejam η_1 e η_2, dois fibrados vetoriais sobre B_1 e B_2 respectivamente.

O **fibrado produto cartesiano** $\eta_1 \times \eta_2$ é formado pelo espaço total $E(\eta_1 \times \eta_2) = E(\eta_1) \times E(\eta_2)$, com espaço base $B_1 \times B_2$ e função projeção:

$$p : E(\eta_1 \times \eta_2) \longrightarrow B_1 \times B_2$$

dada por $p(x, y) = (p_{\eta_1}(x), p_{\eta_2}(y))$.

Cada fibra $p^{-1}(b_1, b_2) = F_{b_1}(\eta_1) \times F_{b_2}(\eta_2)$ tem as seguintes operações de espaço veotorial real:

1. $(v, w) + (v', w') := (v + v', w + w')$, $\forall (v, w), (v', w') \in F_{b_1}(\eta_1) \times F_{b_2}(\eta_2)$;

2. $\alpha(v, w) := (\alpha v, \alpha w)$,$\forall (v, w) \in F_{b_1}(\eta_1) \times F_{b_2}(\eta_2)$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Assim, a fibra $p^{-1}(b_1, b_2)$ é a soma direta $F_{b_1}(\eta_1) \oplus F_{b_2}(\eta_2)$ dos espaços vetoriais $F_{b_1}(\eta_1)$ e $F_{b_2}(\eta_2)$.

Se (U, ϕ) e (V, ψ) são sistemas de coordenadas locais de η_1 e η_2 respectivamente, então $(U \times V, \phi \times \psi)$, onde $\phi \times \psi : (U \times V) \times \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow p^{-1}(U \times V)$ é definida por

$$\phi \times \psi((a,b),v) = (\phi(a,(v_1,\ldots,v_n)), \psi(b,(v_{n+1},\ldots,v_{n+m})))$$

é um sistema de coordenadas local para $\eta_1 \times \eta_2$.

Definição 2.4.5. *Considere ξ e η dois fibrados vetoriais sobre B. Seja $d : B \longrightarrow B \times B$, a aplicação diagonal $d(b) = (b,b)$.*

*O **fibrado pull-back** $d^!(\xi \times \eta)$ sobre B é chamado de **soma de Whitney** de ξ e η e será denotado por $\xi \oplus \eta$.*

Note que cada fibra $F_b(\xi \oplus \eta)$ é isomorfa à soma direta $F_b(\xi) \oplus F_b(\eta)$.

Além disso, o espaço total da soma de Whitney $\xi \oplus \eta$ é o conjunto

$$E(\xi \oplus \eta) = \{(b,(v,w)) | (v,w) \in F_b(\xi) \oplus F_b(\eta)\}$$

e sua função projeção $p : E \longrightarrow B$ é dada por $p(b,(v,w)) = b$.

2.5 O fibrado normal de uma imersão

Definição 2.5.1. *Dizemos que o fibrado ξ é **subfibrado** de η e denotamos por $\xi \subset \eta$, se:*

1. *ξ e η têm o mesmo espaço base B;*
2. *$E(\xi) \subset E(\eta)$;*
3. *Para todo $b \in B$, temos $F_b(\xi)$ é subespaço de $F_b(\eta)$.*

Lema 2.5.2. *Sejam $s_1,\ldots,s_n$ seções cruzadas de um fibrado ξ e $\alpha_1,\ldots,\alpha_n : B \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas. Então a função $c : B \longrightarrow E(\xi)$ dada por $c(b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(b)s_i(b)$ é contínua.*

Além disso, $m : \mathbb{R} \times E(\xi) \longrightarrow E(\xi)$, dada por $m(r,x) = rx$ também é contínua. (rx é a multiplicação por escalar de r por x em $F_{p_\xi(x)}(\xi)$)

Dem.: Sejam $b_0 \in B$ e (U, h) um sistema de coordenadas local de ξ com $b_0 \in U$ e $h : U \times \mathbb{R}^m \longrightarrow p_\xi^{-1}(U)$ e $h^{-1}(b) = (b, h_2^{-1}(b))$.Então

$$c(b) = h(b, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(b) h_2^{-1}(s_i(b)))$$

e

$$m(r, b) = h(b, r h_2^{-1}(b))$$

para todo $b \in U$ e todo $r \in \mathbb{R}$.

Assim $c|_U$ e $m|_{\mathbb{R}\times U}$ são contínuas, donde segue o resultado. ∎

Corolário 2.5.3. *Se s, v são seções cruzadas de um fibrado Euclidiano ξ com métrica Euclidiana μ então $\alpha : E(\xi) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por*

$$\alpha(x) = s(x).v(x) = \frac{\mu(s(x) + v(x)) - \mu(s(x)) - \mu(v(x))}{2}$$

é contínua.

Seja ξ_B^n, fibrado trivial n-dimensional sobre B, com $E(\xi_B^n) = B \times \mathbb{R}^n$ e função projeção $p(b, x) = b$.

Defina para cada $i = 1, \ldots, n$, a aplicação $s_i : B \longrightarrow B \times \mathbb{R}^n$ dada por $s_i(b) = (b, e_i)$ (e_i é o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$). Claramente, $s_1, \ldots, s_n$ são seções cruzadas linearmente independentes de ξ_B^n.

Consequentemente, todo fibrado trivial n-dimensional admite n seções cruzadas linearmente independentes. Como todo fibrado trivial é Euclidiano, dadas $s_1, \ldots, s_n$ seções cruzadas l.i, podemos aplicar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt em $\{s_1(b), \ldots, s_n(b)\}$ para cade b, obtendo uma nova sequência de seções cruzadas $s'_1, \ldots, s'_n$ de tal forma que $\{s'_1(b), \ldots, s'_n(b)\}$ é conjunto ortogonal, para todo b. Neste caso, dizemos que $s'_1, \ldots, s'_n$ são **seções cruzadas ortogonais**.

Lema 2.5.4. *Se ξ_1 e ξ_2 são subfibrados de η, tal que $F_b(\eta) = F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)$, então $\eta \cong \xi_1 \oplus \xi_2$.*

Dem.: Defina $\phi : E(\xi_1 \oplus \xi_2) \longrightarrow E(\eta)$ dada por $\phi(b,(v,w)) = v + w$ função contínua tal que $\phi|_{F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)}$ é isomorfismo entre as fibras passando por b de $\xi_1 \oplus \xi_2$ e η. Pelo Lema 2.3.3 segue o resultado. ■

Seja η um fibrado Euclidiano n-dimensional sobre B e $\xi \subset \eta$ subfibrado m-dimensional de η.

Construiremos um novo fibrado, denotado por $\xi^{\perp}$, chamado de **complemento ortogonal de ξ em η** de tal forma que $\xi \oplus \xi^{\perp} \cong \eta$.

Para isto, considere $E(\xi^{\perp}) = \bigcup_{b \in B} F_b(\xi^{\perp})$, onde cada $F_b(\xi^{\perp})$ é o subespaço de $F_b(\eta)$ formado pelos vetores $w \in F_b(\eta)$, tais que $w.v = 0$, para todo $v \in F_b(\xi)$, isto é, $F_b(\xi^{\perp})$ é o complemento ortogonal do subespaço $F_b(\xi)$. A função projeção de $\xi^{\perp}$ é $p_{\xi}|_E$, assim as fibras de $\xi^{\perp}$ são exatamente o espaço complemento ortogonal de $F_b(\xi)$, logo tal fibrado tem dimensão $n - m$. Para mostrar a existência dos sistemas de coordenadas locais temos o seguinte

Teorema 2.5.5. *Para cada $b_0 \in B$ exitem V vizinhança aberta de b_0 e*

$$h : V \times \mathbb{R}^{n-m} \longrightarrow p_{\eta}^{-1}(V)$$

homeomorfismo.

Dem.: Seja $b_0 \in B$. Escolha um aberto A de B tal que $b_0 \in A$, $\xi|_A$ e $\eta|_A$ sejam fibrados triviais.

Considere $s_1, \dots, s_m$ seções cruzadas ortogonais de $\xi|_A$ e $v_1, \dots, v_n$ seções cruzadas ortogonais de $\eta|_A$. Seja

$$A = [s_i(b_0).v_j(b_0)]_{ij}.$$

Então as linhas de A, $L_i = (s_i(b_0).v_j(b_0))_j$ são linearmente independentes, pois $\alpha_1, \dots \alpha_m \in \mathbb{R}$ e $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i = 0$ então obtemos que

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i(b_0)\Big).v_j = 0$$

para todo j, o que implica em $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i(b_0) = 0$ e assim $\alpha_1, \ldots \alpha_m = 0$, já que $s_1(b_0), \ldots, s_m(b_0)$ são l.i.

Desse modo A tem posto m, e podemos reenumerar, se necessário, as seções cruzadas v_j, de tal forma que as m primeiras colunas de A sejam l.i.

Como cada componente de $A(b)$, $s_i(b).v_j(b)$ é contínua em b, segue que existe $V \subset A$, aberto, tal que $b_0 \in V$ e para todo $b \in V$ as m primeiras colunas de $A(b)$ são l.i.

Assim $s_1(b), \ldots s_m(b), v_{m+1}(b), \ldots, v_n(b)$ são n vetores linearmente independentes para todo $b \in V$, pois caso contrário, existe b' tal que as m linhas da submatriz de $A(b')$ formada pelas linhas de $A(b')$ e pelas m primeiras colunas de $A(b')$, seriam linearmente dependentes o que não é possível pois suas m colunas são l.i. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para os vetores $s_1(b), \ldots s_m(b), v_{m+1}(b), \ldots, v_n(b)$ para cada b, obtemos uma nova sequência de seções cruzadas ortogonais $s_1, \ldots s_m, v'_{m+1}, \ldots, v'_n$.

Defina $h : V \times \mathbb{R}^{n-m} \longrightarrow p_\eta^{-1}(V)$ por

$$h(b, x) = x_1 v'_{m+1}(b), \ldots, x_{n-m} v'_n(b)$$

com inversa dada por

$$h^{-1}(e) = \big(p_\eta(e), (e.v'_{m+1}(p_\eta(e)), \ldots, e.v'_n(p_\eta(e)))\big)$$

ambas funções contínuas em vista do Lema 2.5.2. ∎

Sejam $f : M^m \longrightarrow N^n$ uma imersão entre duas variedades diferenciáveis M^m e N^n, e $\tau(M)$ e $\tau(N)$ os respectivos fibrados tangentes.

Usando o fato de que $f'(p)$ é injetora, para todo $p \in M$, podemos considerar cada fibra $F_b(\tau(M))$ como um subespaço de $F_b(f^!(\tau(N)))$ de tal modo que o fibrado tangente de M se realiza como subfibrado do pull-back do fibrado tangente de N por f. Como $f^!(\tau(N))$ é Euclidiano, pois M é paracompacto, podemos definir o complemento ortogonal de $\tau(M)$ em $f^!(\tau(N))$. Tal fibrado é chamado de **o fibrado normal da imersão f** e será denotado por ν_f.

Note que $\tau(M) \oplus \nu_f \cong f^!(\tau(N))$.

Capítulo 3

Classes de Stiefel-Whitney e resultados de não imersão

Iniciaremos este capítulo apresentando, axiomaticamente, as **classes de Stiefel-Whitney** dos fibrados vetoriais sobre espaços base paracompactos.

3.1 Classes de Stiefel-Whitney

Para cada fibrado vetorial ξ sobre um espaço base paracompacto B, existe um único elemento em $H^*(B)$ (anel de cohomologia singular de B com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$) denotado por $W(\xi)$, chamado de **classe total de Stiefel-Whitney do fibrado** ξ, satisfazendo as seguintes quatro propriedades:

1. Se ξ é um fibrado vetorial de dimensão n, então

   $$W(\xi) = w_0(\xi) + w_1(\xi) + \ldots + w_n(\xi) \in H^*(B),$$

   com $w_0 = 1$, unidade do anel de cohomologia $H^*(B)$ e $w_i(\xi) = 0$, $\forall i > n$. Cada $w_i(\xi)$ é chamado de **classe de Stiefel-Whitney de grau** i.

2. Seja $\bar{f} : B_1 \longrightarrow B_2$ uma aplicação contínua coberta pela aplicação de fibrados $f : E(\xi) \longrightarrow E(\eta)$, ξ e η fibrados vetoriais sobre B_1 e B_2 respectivamente.

Então:

$$W(\xi) = \bar{f}^*(W(\eta)).$$

3. Se ξ e η são fibrados vetoriais com mesmo espaço base, então:

$$W(\xi \oplus \eta) = W(\xi)W(\eta).$$

4. A classe total de Stiefel-Whitney do fibrado linha canônico γ_1^1 sobre $\mathbb{RP}^1 = G_{1,1}$ é $W(\gamma_1^1) = 1 + a$, onde a é o elemento não nulo de $H^1(\mathbb{RP}^1)$.

Vejamos algumas consequências de tal definição.

Lema 3.1.1. *Se $\xi \cong \eta$ então $W(\xi) = W(\eta)$.*

Dem.: Sejam $\xi : E(\xi) \xrightarrow{p} B$ e $\eta : E(\eta) \xrightarrow{p'} B$. Se $\xi \cong \eta$ então existe um homeomorfismo $f : E(\xi) \longrightarrow E(\eta)$ tal que o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{tikzcd} E(\xi) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & E(\eta) \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "id_B"'] & B \end{tikzcd}$$

Assim, pelo Axioma 2, temos que $W(\xi) = id^*(W(\eta)) = W(\eta)$. ■

Lema 3.1.2. *Se $\bar{f} : B_1 \longrightarrow B$ é uma função contínua e η é um fibrado sobre B então:*

$$W(f^!(\eta)) = \bar{f}^*(W(\eta)).$$

Dem.: Defina $\pi : E(\bar{f}^!(\eta)) \longrightarrow E(\eta)$, por $\pi(b, x) = b$. Então π é uma aplicação de fibrados, e temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} E(f^!(\eta)) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "p"'] & E(\eta) \arrow[d, "p_\eta"] \\ B_1 \arrow[r, "\bar{f}"'] & B \end{tikzcd}$$

Assim $\bar{f}$ é coberta por π e pelo axioma 2. obtemos $W(f^!(\eta)) = \bar{f}^*(W(\eta))$. ■

Lema 3.1.3. *Se ϵ é o fibrado trivial sobre B, então $W(\epsilon) = 1$.*

Dem.: Vamos mostrar que $W(\epsilon_B^n) = 1$.

Considere o fibrado $\alpha : \{0\} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi_1} \{0\}$ o fibrado trivial de dimensão n com espaço base $\{0\}$.

Defina $c : B \longrightarrow \{0\}$, função constante. Então $c^!(\alpha) = \eta$, assim

$$W(\eta) = W(c^!(\alpha)) = c^*(W(\alpha)).$$

Mas como $W(\alpha) \in H^*(\{0\}) = \mathbb{Z}_2$ e $W(\alpha) \neq 0$, segue que $W(\eta) = 1$. ■

A classe total de Stiefel-Withney de qualquer fibrado vetorial ξ é inversível (no anel $H^*(B(\xi))$). O elemento inverso de $W(\xi)$ será chamado de **a classe dual de Stiefel-Whitney** de ξ e será denotado por $\overline{W}(\xi)$.

Lema 3.1.4. *Seja γ_n^1 o fibrado linha canônico sobre $\mathbb{RP}^n$. Então $W(\gamma_n^1) = 1 + a$, com $a \neq 0$, $a \in H^1(\mathbb{RP}^n)$.*

Dem.: Considere a função $j : \mathbb{RP}^1 \longrightarrow \mathbb{RP}^n$, dado por $j([x]) = i([x])$, onde $x \in \mathbb{R}^2$ vetor não nulo e $i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $i(x, y) = (x, y, 0)$. Temos que $i([x])$ é uma reta passando por 0 em $\mathbb{R}^{n+1}$, pois i é uma transfomação linear injetiva e $[x]$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$ unidimensional.

Defina $f : E(\gamma^1) \longrightarrow E(\gamma_n^1)$ por $f(X, v) = (j(X), i(v))$. Assim temos que f é aplicação de fibrados e cobre j, pois

$$\begin{tikzcd} E(\gamma^1) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_{\gamma^1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E(\gamma_n^1) \arrow[d, "p_{\gamma_n^1}"] \\ \mathbb{RP}^1 \arrow[r, "j"'] & \mathbb{RP}^n \end{tikzcd}$$

Portanto $W(\gamma^1) = W(j^!(\gamma_n^1)) = j^*(W(\gamma_n^1))$. e assim $w_1(\gamma^1) = j^*(w_1(\gamma_n^1)) \neq 0$.

Logo $W(\gamma_n^1) = 1 + a$. ■

Observação 3.1.5. *Seja $\mathbb{R}^\infty$ o espaço vetorial formado por todas as sequências*

$$x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$$

de números reais tais que: existe um número inteiro $k \geq 0$ com $x_i = 0$ para todo $i \geq k$.

Dado um inteiro $n \geq 1$ o subespaço de $\mathbb{R}^\infty$ formado por todas as sequências

$$x = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$$

é isomorfo a $\mathbb{R}^n$, e desse modo podemos identificar $\mathbb{R}^n$ com tal subespaço e assim $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^\infty$.

Considere $G_n(\mathbb{R}^\infty)$, o conjunto de todos os subespaços n-dimensionais de $\mathbb{R}^\infty$. É fácil ver que $G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \subset G_n(\mathbb{R}^\infty)$ para todo $k \geq 1$.

Em $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ defina a topologia formada por todos os subconjuntos Y de $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ tais que $Y \cap G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ é aberto em $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ para todo k. O espaço $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ é chamado de ***espaço de Grassmann infinito****.*

É possível construir um fibrado vetorial sobre $G_n(\mathbb{R}^\infty)$, chamado de ***fibrado universal****, denotado por γ^n, com espaço total $E(\gamma^n) = \{(Y, v) \in G_n(\mathbb{R}^\infty) \times \mathbb{R}^\infty | v \in Y\}$ com função projeção $\pi : E(\gamma^n) \longrightarrow G_n(\mathbb{R}^\infty)$ dada por $\pi(Y, v) = Y$ e cujas fibras $\pi^{-1}(v)$ possuem estrutura de espaço vetorial herdadas de Y.*

Teorema 3.1.6. *Para cada fibrado vetorial n-dimensional η sobre um espaço paracompacto B, existe*

$$f : B \longrightarrow G_n(\mathbb{R}^\infty),$$

aplicação contínua com $f^!(\gamma^n) \cong \eta$.

Se $f, g : B \longrightarrow G_n(\mathbb{R}^\infty)$ são cobertas por uma aplicação de fibrados de $E(\eta)$ em $E(\gamma^n)$ então $f^!(\gamma^n) \cong g^!(\gamma^n)$.

A demonstração deste ***"Teorema de classificação"*** *pode ser vista em [2]. Com este Teorema é possível "definir"as classes de Stiefel-Whitney conforme feito em [12].*

3.2 Resultados de não imersão

Sejam M^n uma variedade e $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ uma imersão. Então, $\nu_f \oplus \tau(X) \cong \epsilon^{n+k}$ (fibrado trivial), pois o fibrado tangente de $\mathbb{R}^{n+k}$ é trivial. Assim $\overline{W}(\tau(M)) = W(\nu_f)$, donde $\bar{w}_i(\tau(M)) = 0\ \forall i > k$. Desse modo, para mostrar que uma determinada variedade M^n **não** imerge em $\mathbb{R}^{n+k}$, para certo $k \geq 0$, basta mostrar que $\bar{w}_j(\tau(M)) \neq 0$ para certo $j > k$.

Esta técnica para decidir se M^n não imerge em $\mathbb{R}^{n+k}$ será utilizada com frequência nos próximos resultados.

Teorema 3.2.1. *Sejam τ o fibrado tangente de $\mathbb{RP}^n = G_{1,n}$, ϵ^1 o fibrado linha trivial sobre $\mathbb{RP}^n$ e γ_n^1 o fibrado linha canônico sobre $\mathbb{RP}^n$. Então:*

$$\tau \oplus \epsilon^1 \cong (n+1)\gamma_n^1$$

Dem.: [2] página 45

Corolário 3.2.2. $W(\tau) = (1+a)^{n+1}$

Dem.: Temos $\tau \oplus \epsilon^1 \cong (n+1)\gamma_n^1$, o que implica em

$$W(\tau \oplus \epsilon^1) = W((n+1)\gamma_n^1) \Rightarrow W(\tau) \oplus W(\epsilon^1) = W(\gamma_n^1)^{n+1} \Rightarrow W(\tau) = (1+a)^{n+1}.$$

■

Teorema 3.2.3. *Se $\mathbb{RP}^{2^r}$, $r \geq 0$, pode ser imerso em $\mathbb{R}^{2^r+k}$, para certo k, então $k \geq 2^r - 1$.*

Dem.: Seja ν_f o fibrado normal da imersão $f : \mathbb{RP}^{2^r} \longrightarrow \mathbb{R}^{2^r+k}$.

Como $\tau(\mathbb{R}^{2^r+k})$ é trivial, segue que $\nu_f \oplus \tau(\mathbb{RP}^{2^r}) \cong \epsilon^{n+k}$ (fibrado trivial). Assim $\overline{W}(\tau(\mathbb{RP}^{2^r})) = W(\nu_f)$. Além disso

$$W(\mathbb{RP}^{2^r}) = (1+a)^{2^r+1} = (1+a)^{2^r}(1+a) =$$

$$= (1+a^{2^r})(1+a) = 1 + a + a^{2^r} + a^{2^r+1} = 1 + a + a^{2^r}.$$

Assim $\overline{W}(\tau(\mathbb{RP}^{2^r})) = 1 + a + \ldots + a^{2^r-1}$, pois $(1 + a + \ldots + a^{2^r-1})(1 + a + a^{2^r}) = 1$.

Como a dimensão do fibrado ν_f é k, $W(\nu_f) = 1 + a + \ldots + a^{2^r-1}$ e $a^i \neq 0$, $\forall i = 1, \ldots, 2^r - 1$, segue que devemos ter $k \geq 2^r - 1$. ■

O Teorema acima nos diz que $\mathbb{RP}^{2^r}$ não pode imergir em $\mathbb{R}^{2^r+k}$ para $0 \leq k < 2^r - 1$. Por sua vez, Whitney mostrou que toda variedade suave com dimensão n maior que 1 pode ser imersa em $\mathbb{R}^{2n+1}$. Logo $2^{r+1} - 1$ é a menor dimensão m, tal que $\mathbb{RP}^{2^r}$ imerge em $\mathbb{R}^m$.

3.3 Sobre $H^*(G_{k,n})$

Nesta seção, reunimos alguns resultados sobre o anel de cohomologia da variedade Grassmaniana $G_{k,n}$ com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$ utilizando os **símbolos de Schubert** (vide [10]).

Defina, para cada $i = 1, \ldots, n + k$, o subespaço $R^i = [e_1, \ldots, e_i] \subset \mathbb{R}^{n+k}$, onde $\{e_1, \ldots, e_{n+k}\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^{n+k}$.

Dada uma sequência de números inteiros

$$0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_k \leq n,$$

considere o conjunto $C(a_1, \ldots, a_k) = \{X \in G_{k,n} | \dim(X \cap R^{a_i+i}) \geq i, \forall i = 1, \ldots, k\}$.

O conjunto $C(a_1, \ldots, a_k) \backslash \partial C(a_1, \ldots, a_k)$ forma uma célula aberta de dimensão $\sum_{i=1}^{k} a_i$ em $G_{k,n}$ (vide [2] para maiores detalhes). Munido da coleção dessas células, $G_{k,n}$ é um C-W complexo.

Além disso, toda cadeia em $G_{k,n}$ (com tal estrutura celular) é homóloga a uma combinação linear dessas células, quando consideradas como cadeias, que serão denotadas por $[a_1, \ldots, a_k]$, isto é, dada qualquer cadeia $c \in C_p(G_{k,n})$ temos $c - \sum[a_1, \ldots, a_k] = \partial(c')$ para certa cadeia c'.

Tais cadeias são chamadas de **cadeias de Schubert**.

Denotaremos por $(a_1, \ldots, a_k)$ a cocadeia tal que:

$$(a_1, \ldots, a_k)[a_1, \ldots, a_k] = 1$$

e

$$(a_1, \ldots, a_k)[x_1, \ldots, x_k] = 0,$$

para toda cadeia $[x_1, \ldots, x_k] \neq [a_1, \ldots, a_k]$.

Como mencionado em [10], Ehresmann provou que as cadeias de Schubert (cocadias de Schubert) são ciclos (cociclos). Deste resultado segue que o conjunto de todos os cociclos de Schubert $(a_1, \ldots, a_k)$, $0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_k \leq n$ forma uma base para o $\mathbb{Z}_2$-espaço vetorial $H_c^s(G_{k,n}, \mathbb{Z}_2)$, com $s = \sum_{i=1}^{k} a_i$. Usando certo isomorfismo de $H_c^s(G_{k,n}, \mathbb{Z}_2)$ e $H^s(G_{k,n}, \mathbb{Z}_2)$, fazemos a identificação de $H_c^s(G_{k,n}, \mathbb{Z}_2)$ com $H^s(G_{k,n}, \mathbb{Z}_2)$ e usamos a mesma notação para os cociclos de Schubert.

S.S. Chern determinou, em [10] e [11], a seguinte fórmula de multiplicação dos cociclos de Schubert no anel de cohomologia $H^*(G_{k,n}, \mathbb{Z}_2)$:

$$(a_1, \ldots, a_k)(0, \ldots, 0, h) = \sum (b_1, \ldots, b_k),$$

onde $\sum (b_1, \ldots, b_k)$ é a soma de todos os cociclos de Schubert da forma $(b_1, \ldots, b_k)$ tais que:

$$0 \leq b_1 \leq \ldots \leq b_k \leq n$$

$$a_i \leq b_i \leq a_{i+1}, \forall i = 1, \ldots, k, \text{ onde } a_{k+1} = n.$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i + h = \sum_{i=1}^{k} b_i.$$

Chern também observou que, sendo $w_1, \ldots, w_k$ as classes de Stiefel-Whitney do fibrado canônico sobre $G_{k,n}$, tem-se

$$w_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1, \ldots, 1}_{i}), 1 \leq i \leq k \text{ e } \bar{w}_i = (0, \ldots, 0, i).$$

Se a sequência de inteiros $a_1, \ldots, a_k$ não satisfaz a relação $0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_k \leq n$, então convencionamos que $(a_1, \ldots, a_k)$ representará 0 no anel de cohomologia $H^*(G_{k,n}, \mathbb{Z}_2)$.

3.4 Resultados de não imersão de $G_{2,n}$

Conforme anunciamos na Introdução, apresentaremos um estudo detalhado de um resultado provado por V. Oproiu em [14]:

Teorema 3.4.1. *Seja $n > 1$ um natural e considere $s = 2^r$ tal que $s \leq 2n < 2s$. Então:*

1. *$G_{2,n}$ não imerge em $\mathbb{R}^{2s-3}$, para $n \neq s-1$;*
2. *$G_{2,s-1}$ não imerge em $\mathbb{R}^{3s-3}$.*

Lema 3.4.2. $(a_1, \ldots, a_k) = \det[(0, \ldots, 0, a_i + i - j)]_{ij}$, $1 \leq i, j \leq k$.

Dem.: Provemos o caso $k = 2$ (o caso geral pode ser feito por indução em k).

$$(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} (0, a_1) & (0, a_1 - 1) \\ (0, a_2 + 1) & (0, a_2) \end{vmatrix}$$

Se $a_1 - 1 < 0$ ou $a_2 > n$ então $a_1 = 0$ ou $a_2 = n$. Assim

$$\begin{vmatrix} (0, a_1) & (0, a_1 - 1) \\ (0, a_2 + 1) & (0, a_2) \end{vmatrix} = (0, a_1)(0, a_2).$$

Caso $a_1 = 0$, temos $(0, a_1)(0, a_2) = (0, 0)(0, a_2) = (0, a_2) = (a_1, a_2)$.

Caso $a_2 = n$ então $(0, a_1)(0, a_2) = \displaystyle\sum_{\substack{0 \leq b \leq a_1 \\ k + a_1 - b \leq n}} (b, k + a_1 - b) = (a_1, n) = (a_1, a_2)$.

Logo, a fórmula é válida para os casos particulares $a_1 = 0$ e $a_2 = n$.

Para os outros casos temos:

$$\begin{vmatrix} (0, a_1) & (0, a_1 - 1) \\ (0, a_2 + 1) & (0, a_2) \end{vmatrix} = (0, a_1)(0, a_2) - (0, a_1 - 1)(0, a_2 + 1) =$$

$$\sum_{0 \leq b \leq a_1} (b, a_1 + a_2 - b) - \sum_{0 \leq b \leq a_1 - 1} (b, a_1 + a_2 - b) = (a_1, a_2).$$

Logo

$$(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} (0, a_1) & (0, a_1 - 1) \\ (0, a_2 + 1) & (0, a_2) \end{vmatrix}.$$

$\blacksquare$

De agora em diante, γ denotará o fibrado canônico 2-dimensional sobre $G_{2,n}$, τ denotará o fibrado tangente $\tau(G_{2,n})$ e $W(\gamma) = 1 + w_1 + w_2$.

Lema 3.4.3. *Para todo $h \geq 0$, temos:*

1. $w_2^h = (1,1)^h = (h,h)$;
2. $w_1^h = (0,1)^h = \displaystyle\sum_{0 \leq 2i \leq h} \binom{h+1}{i} (i, h-i)$;
3. $\bar{w}_h = \displaystyle\sum_{0 \leq 2k \leq h} \binom{h-k}{k} w_2^k w_1^{h-2k}$.

Dem.: Demonstraremos os dois primeiros itens usando indução em h.

1. Para $h = 0$, $w_2^0 = 1 = \bar{w}_0 = (0,0)$.

   Suponha que $w_2^h = (1,1)^h = (h,h)$. Então

   $$w_2^{h+1} = (1,1)(h,h) = \begin{vmatrix} (0,1) & (0,0) \\ (0,2) & (0,1) \end{vmatrix} (h,h) =$$

   $(0,1)^2(h,h) - (0,2)(h,h) = (h+1,h+1) + (h,h+2) - (h,h+2) = (h+1,h+1)$.

   Portanto $w_2^h = (1,1)^h = (h,h)$.

2. Para $h = 0$, $w_1^h = (0,1)^h = \displaystyle\sum_{0 \leq 2i \leq h} \binom{h+1}{i} (i, h-i) = (0,0) = 1 = w_1^0$.

   Suponha que $w_1^h = (0,1)^h = \displaystyle\sum_{0 \leq 2i \leq h} \binom{h+1}{i} (i, h-i)$.

   Como $(0,1)(i, h-i) = \displaystyle\sum_{0 \leq b \leq h-1} (b, b-i)$, temos

   $$w_1^{h+1} = (0,1) w_1^h = \sum_{0 \leq 2i \leq h} \binom{h+1}{i} (0,1)(i, h-i).$$

   Mas, pela fórmula de multiplicação $(0,1)(i, h-i) = (i, n+1-i) + (i+1, n-i)$.

   Então

$$\sum_{0\leq 2i\leq h}\binom{h+1}{i}(0,1)(i,h-i)=\sum_{0\leq 2i\leq h}\binom{h+1}{i}((i,n+1-i)+(i+1,n-i))=$$

$$=\sum_{0\leq 2i\leq h}\binom{h+1}{i}(i,n+1-i)+\sum_{0\leq 2i\leq h-1}\binom{h+1}{i}(i+1,n-i)=$$

$$=\sum_{0\leq 2i\leq h}\binom{h+1}{i}(i,n+1-i)+\sum_{2\leq 2i\leq h+1}\binom{h+1}{i-1}(i,n+1-i)=$$

$$=\sum_{0\leq 2i\leq h+1}\binom{h+2}{i}(i,n+1-i).$$

Logo $w_1^h=(0,1)^h=\sum_{0\leq 2i\leq h}\binom{h+1}{i}(i,h-i)$, $\forall h\geq 0$.

3. Para $h=0$, temos $\sum_{0\leq 2k\leq h}\binom{h-k}{k}w_2^k w_1^{h-2k}=w_2^0w_1^0=1$.

   Suponha $\bar{w}_{h-1}=\sum_{0\leq 2k\leq h-1}\binom{h-1-k}{k}w_2^k w_1^{h-1-2k}$ e
   $\bar{w}_h=\sum_{0\leq 2k\leq h}\binom{h-k}{k}w_2^k w_1^{h-2k}$, $h\geq 1$.

   Pelo Lema 1.2.1, obtemos que

$$\bar{w}_{h+1}=w_1\bar{w}_h+w_2\bar{w}_{h-1}=$$

$$=\sum_{0\leq 2k\leq h}\binom{h-k}{k}w_2^k w_1^{h-2k+1}+\sum_{0\leq 2k\leq h-1}\binom{h-1-k}{k}w_2^{k+1}w_1^{h-1-2k}=$$

$$=\sum_{0\leq 2k\leq h}\binom{h-k}{k}w_2^k w_1^{h-2k+1}+\sum_{2\leq 2k\leq h+1}\binom{h-k}{k-1}w_2^k w_1^{h-2k+1}=$$

$$=\sum_{0\leq 2k\leq h+1}\binom{h+1-k}{k}w_2^k w_1^{h+1-2k}.$$

   Portanto vale $\bar{w}_h=\sum_{0\leq 2k\leq h}\binom{h-k}{k}w_2^k w_1^{h-2k}$.

■

Observação 3.4.4. *Sejam ξ e η dois fibrados vetoriais sobre B. O* ***fibrado dual de*** *η, denotado por η^*, tem como espaço total a união disjunta $E = \bigsqcup_{b\in B} F_b(\eta)^*$, onde $F_b(\eta)^*$ é o dual do espaço vetorial $F_b(\eta)$, sua função projeção é $p : E \longrightarrow B$ dada por $p(b,x) = b$ e cada fibra $p^{-1}(b) = F_b(\eta)^*$ (vista como espaço vetorial).*

A topologia em E e a construção de um sistema de coordenadas local para η^* pode ser vista em [2].

Analogamente o ***fibrado produto tensorial*** *$\xi \otimes \eta$ é um fibrado no qual $E(\xi \otimes \eta) = \bigsqcup_{b\in B} \big(F_b(\xi) \otimes F_b(\eta)\big)$ e $p : E \longrightarrow B$ dada por $p(b,x) = b$ sua função projeção. Também é possível definir uma topologia em $E(\xi \otimes \eta)$ e construir um sistema de coordenadas local para $\xi \otimes \eta$, vide [2].*

O fibrado tangente $\tau(G_{2,n})$ pode ser obtido através dos fibrados γ e γ^* a partir da fórmula

$$\tau \oplus (\gamma \otimes \gamma^*) = (2+n)\gamma,$$

demonstrada em [9],[15] e [13].

Desta fórmula obtemos que $W(\tau)W(\gamma\otimes\gamma^*) = W(\gamma)^{n+2}$, donde, usando o fato de que $W(\gamma\otimes\gamma^*) = (1+w_1)^2$ chegamos a equação

$$W(\tau)(1+w_1)^2 = (1+w_1+w_2)^{n+2}.$$

Seja r o inteiro tal que $2^r \leq 2n < 2^{r+1}$. Então

$$(1+w_1+w_2)^{2^{r+1}} = 1 + w_1^{2^{r+1}} + w_2^{2^{r+1}} = 1$$

pois $w_1^{2^{r+1}} \in H^{2^{r+1}}(G_{2,n},\mathbb{Z}_2) = 0$ e $w_2^{2^{r+1}} \in H^{2^{r+2}}(G_{2,n},\mathbb{Z}_2) = 0$. Também temos:

$$W(\tau)(1+w_1)^2 = (1+w_1+w_2)^{n+2} \Rightarrow W(\tau)(1+w_1)^2(1+w_1+w_2)^{2^{r+1}-n-2} = 1.$$

Assim $\overline{W}(\tau) = (1+w_1)^2(1+w_1+w_2)^{2^{r+1}-n-2}$.

Neste ponto, convém enunciar o **Teorema de Lucas:** *Sejam $n = \sum_{i=0}^{r} n_i 2^i$ e $m = \sum_{j=0}^{s} m_j 2^j$ dois números inteiros positivos com $0 \leq n_i, m_j \leq 1$. Então $\binom{n}{m}$ é impar se, e somente se, $\{b_j 2^j \mid j = 0,\ldots,s\} \subset \{a_i 2^i \mid i = 0,\ldots,r\}$.*

Assim, temos pelo Lema 3.4.3 que:

$$\bar{w}_{s-1} = \sum_{0 \leq 2k \leq s-1} \binom{s-1-k}{k} w_2^k w_1^{s-1-2k} = w_1^{s-1},$$

pois pelo Teorema de Lucas $\binom{s-1-i}{i} = \binom{2^r-1-i}{i} = \binom{1+\ldots+2^{r-1}-i}{i} = 0$, já que nenhum termo da expansão diádica de i ocorre em $1+\ldots+2^{r-1}-i$ para $0 < i < s-1$.

Além disso $w_1^s = \sum_{0 \leq 2i \leq h} \binom{s+1}{i}(i, h-i) = (0,s)+(1,s-1)$, pois $\binom{2^r+1}{i} = 0$ para $0 < i < s$.

3.5 Demonstração do Teorema 3.4.1

Suponha que $2^{r-1} \leq n < s-1$ e $p = s-n$. Então $1 < p \leq 2^{r-1}$ e $n = s-p$.

Das seções anteriores obtemos que:

$$\overline{W}(G_{2,n}) = (1+w_1)^2(1+w_1+w_2)^{2s-n-2} = (1+w_1)^2(1+w_1+w_2)^{p+s-2} =$$

$$= (1+w_1)^2(1+w_1+w_2)^{p-2}(1+w_1+w_2)^s.$$

De acordo com Lema 3.4.3 $w_1^s = (0,s)$ e $w_2^s = (1,s-1)$. Como $n < s-1$, segue que $w_1^s = w_2^s = 0$ e $(1+w_1+w_2)^s = 1$, donde

$$\overline{W}(G_{2,n}) = (1+w_1)^2(1+w_1+w_2)^{p-2}.$$

Mas

$$\overline{W}(G_{2,n}) = (1+w_1)^2((1+w_1)+w_2)^{p-2} = \sum_{j=0}^{p-2} \binom{p-2}{j} (1+w_1)^{j+2} w_2^{p-2-j} =$$

$$\sum_{j=0}^{p-2} \left[\binom{p-2}{j} \Big(\sum_{i=0}^{2+j} \binom{2+j}{i} w_1^i w_2^{p-2-j} \Big) \right] = \sum_{j=0}^{p-2} \sum_{i=0}^{2+j} \binom{p-2}{j} \binom{2+j}{i} w_1^i w_2^{p-2-j}.$$

O termo $\bar{w}_{2p-2}(G_{2,n})$ aparece no somatório acima quando $2p-4-2j+i = 2p-2$, isto é $i = 2(j+1)$, mas como $0 \leq i \leq 2+j$, segue que $j = 0$ e $i = 2$.

Assim $w_{2p-2}(G_{2,n}) = \binom{p-2}{0}\binom{2}{2} w_1^2 w_2^{p-2} = w_1^2 w_2^{p-2} = (0,1)^2(p-2,p-2)$.

Pelas fórmulas de multiplicação dos cociclos de Schubert temos

$$(0,1)^2(p-2,p-2) = (0,1)((0,1)(p-2,p-2)) =$$

$$= (0,1)(p-2,p-1) = (p-1,p-1) + (p-2,p) \neq 0,$$

pois $0 \leq p-1 \leq 2^{r-1} \leq n$. Portanto, $G_{2,n}$ não pode imergir em $\mathbb{R}^{2n+2p-3} = \mathbb{R}^{2s-3}$ o que mostra o item 1.

Suponha $n = s-1$. Então

$$\overline{W}(G_{2,n}) = \overline{W}(G_{2,s-1}) = (1+w_1)^2(1+w_1+w_2)^{s-1} =$$

$$= (1+w_1)^2 \sum_{h=0}^{s-1} \binom{s-1}{h}(1+w_1)^h w_2^{s-1-h}.$$

Pelo Teorema de Lucas, temos $\binom{s-1}{h} = \binom{2^r-1}{h} \equiv 1(mod\ 2)$, para todo $0 \leq h \leq s-1$, assim, segue que

$$(1+w_1)^2 \sum_{h=0}^{s-1} \binom{s-1}{h}(1+w_1)^h w_2^{s-1-h} = \sum_{h=0}^{s-1}(1+w_1)^{h+2} w_2^{s-1-h} =$$

$$= \sum_{h=0}^{s-1}\sum_{j=0}^{h+2} \binom{h+2}{j} w_1^j w_2^{s-1-h} = \sum_{i=0}^{s-1}\sum_{j=0}^{s+1-i} \binom{s+1-i}{j} w_1^j w_2^i.$$

Para cada $0 \leq i \leq s-1$, o termo homogêneo $w_1^j w_2^i$ do somatório

$$\sum_{j=0}^{s+1-i} \binom{s+1-i}{j} w_1^j w_2^i$$

atinge grau k ($0 \leq k \leq 2n = 2(s-1)$) quando $j = k-2i$, mas como $j \geq 0$, devemos ter que $0 \leq i \leq \frac{k}{2}$.

Assim temos:

$$\bar{w}_k(G_{2,s-1}) = \sum_{0 \leq 2i \leq k} \binom{s+1-i}{k-2i} w_1^{k-2i} w_2^i,$$

onde, por convenção, $\binom{s+1-i}{k-2i} = 0$ se $k-2i > s+1-i$.

Em particular, para $k = s$, temos

$$\bar{w}_s(G_{2,s-1}) = \sum_{0\leq 2i\leq s} \binom{s+1-i}{s-2i} w_1^{s-2i} w_2^i.$$

Como $\binom{s+1-i}{s-2i} = \binom{s+1-i}{s+1-i-(i+1)} = \binom{s+1-i}{i+1}$, segue que

$$\bar{w}_s(G_{2,s-1}) = \sum_{0\leq 2i\leq s} \binom{s+1-i}{i+1} w_1^{s-2i} w_2^i = w_1^s + \sum_{2\leq 2i\leq s} \binom{s+1-i}{i+1} w_1^{s-2i} w_2^i =$$

$$= (0,s) + (1,s-1) + \sum_{2\leq 2i\leq s} \binom{s+1-i}{i+1} w_1^{s-2i} w_2^i =$$

$$= (1,s-1) + \binom{s}{2} w_1^{s-2} w_2 + \sum_{2\leq i\leq \frac{s}{2}} \binom{s+1-i}{i+1} w_1^{s-2i} w_2^i =$$

$$= (1,s-1) + \sum_{2\leq i\leq \frac{s}{2}} \binom{s+1-i}{i+1} w_1^{s-2i} w_2^i,$$

pois $\binom{s}{2} = 0$ (já que devemos ter $s > 2$) e $(0,s) = 0$, pois $n = s-1 < s$.

Observe que $(1, s-1) \neq 0$ e pelas fórmulas de multiplicação, os elementos $w_1^{s-2i} w_2^i = w_1^{s-2i}(i,i)$ (para $1 < i \leq \frac{s}{2}$) é uma soma, onde só pode ocorrer termos da forma$(j, s-j)$ com $j > 1$. Assim $\bar{w}_s \neq 0$.

Portanto, $G_{2,s-1}$ não pode imergir em $\mathbb{R}^{2s-2+s-1} = \mathbb{R}^{3s-3}$, o que mostra o item 2. ■

Observação 3.5.1. *O resultado obtido no item 2 do Teorema 3.4.1 é o melhor possível utilizando apenas as Classes de Stiefel-Whitney, isto é* $\bar{w}_k(G_{2,s-1}) = 0$, *para todo* $s < k \leq 2(s-1) = 2n$.

Suponha $k > s = 2^r$ *com* $k = s+1+p$, *para certo* p, *tal que* $0 \leq p \leq s-3$. *Então*

$$\bar{w}_k(G_{2,s-1}) = \sum_{0\leq 2i\leq k} \binom{s+1-i}{k-2i} w_1^{k-2i} w_2^i$$

$$= \sum_{0\leq 2i\leq s+1+p} \binom{s+1-i}{s+1+p-2i} w_1^{s+1+p-2i} w_2^i$$

$$= \sum_{2p\leq 2i\leq s+1+p} \binom{s+1-i}{s+1+p-2i} w_1^{s+1+p-2i} w_2^i$$

pois, se $2i < 2p$ *segue que* $\binom{s+1-i}{s+1+p-2i} = 0$. *Assim*

$$\begin{aligned}
\bar{w}_k(G_{2,s-1}) &= \sum_{2p \leq 2i \leq s+1+p} \binom{s+1-i}{i-p} w_1^{s+1+p-2i} w_2^i \\
&= \sum_{0 \leq 2i \leq s+1-p} \binom{s+1-p-i}{i} w_1^{s+1-p-2i} w_2^{p+i} \\
&= w_2^p \sum_{0 \leq 2i \leq s+1-p} \binom{s+1-p-i}{i} w_1^{s+1-p-2i} w_2^i \\
&= w_2^p \bar{w}_{s+1-p} = (p,p)(0,s+1-p) = 0
\end{aligned}$$

pois $(p,p)(0,s+1-p) = (p,s+1) = 0$*, já que, neste caso,* $s+1 > n$.

Observação 3.5.2. *É possível mostrar que se* X *é uma variedade fechada de dimensão* n *e* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ *é um mergulho então a classe de Stiefel-Whitney de grau* k *do fibrado normal do mergulho* f*,* $w_k(\nu_f)$*, é zero, vide [2].*

Assim, pelo fato de que $\bar{w}_{2p-2}(G_{2,n}) \neq 0$ *e* $\bar{w}_s(G_{2,s-1}) \neq 0$ *e* $G_{2,n}$ *é variedade fechada de dimensão* $2n$*, segue que* $G_{2,n}$ *não mergulha em* $\mathbb{R}^{2n+2p-2} = \mathbb{R}^{2s-2}$ *e* $G_{2,s-1}$ *não mergulha em* $\mathbb{R}^{2s-2+s} = \mathbb{R}^{3s-2}$.

Referências Bibliográficas

[1] E. L. Lima, *Variedades Diferenciáveis*, IMPA, Rio de Janeiro (2007).

[2] J. W. Milnor, J. D. Stasheff, *Characteristic Class*, Annals Of Mathematics Studies, Princeton University Press, New Jersey (1974).

[3] J. Korbaš, *Some Partial formulae for Stiefel-Whitney classes of Grassmannians*, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 36(1986), No. 4, 535-540.

[4] M. J. Greenberg, *Lectures on Algebraic Topology*, Northeastern University, New York (1967).

[5] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, University Of Oxford (1969).

[6] J.R. Munkres, *Elements of algebraic topology*, The Benjamin/ Cummings Publishing Company, Inc., California (1984).

[7] J.R. Munkres, *Topology: a first course*, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., (1975).

[8] N. Steenrod, *The Topology Of Fibre Bundles*, Princeton University, New Jersey (1951).

[9] S. G. Hoggar, *A non-embedding result for complex Grassmann manifolds*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 17 (1970-1971), 149-153.

[10] S. S. Chern, *On The Multiplication In The Characteristic Ring Of A Sphere Bundle*, Annals of Mathematics, Vol. 49, No. 2(1948).

[11] S. S. Chern, *Topics in differential geometry*, Mimeographed notes (Institute for Advanced Study, Princeton, 1951).

[12] H. Osborn, *Vector Bundles*, Academic Press, New York (1982).

[13] I. R. Porteous, *Topological geometry* (Van Nostrand, 1969).

[14] V. Oproiu, *Some non-embedding theorems for the Grassmann manifolds $G_{2,n}$ and $G_{3,n}$*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (1977), 177-185.

[15] W. C. Hsiang e R. H. Szczarba, *On the tangent bundle of a Grassmann manifold*, Amer. J. Math. 86 (1964), 698-704.

[16] W. M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, New York San Francisco London (1975).