UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Efeito Aharonov-Bohm sem interação com a fronteira do solenóide

Renan Gambale Romano

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Efeito Aharonov-Bohm sem interação com a fronteira do solenóide

Renan Gambale Romano
Orientador: Prof. Dr. César Rogério de Oliveira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Universidade Federal de São Carlos
16 de Julho de 2013

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

R759ea

Romano, Renan Gambale.
Efeito Aharonov-Bohm sem interação com a fronteira do solenóide / Renan Gambale Romano. -- São Carlos : UFSCar, 2013.
41 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2013.

1. Física matemática. 2. Campos magnéticos. 3. Confinamento quântico. I. Título.

CDD: 530.15 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. César Rogério de Oliveira
DM – UFSCar

Prof. Dr. Marciano Pereira
UEPG

Prof. Dr. Marcus Vinícius de Araújo Lima
DM – UFSCar

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela vida que me deu.

À minha família pela confiança e força que me deram durante todos os anos da minha vida, em especial pela excelente educação que me deram, sem a qual eu não poderia ter entrado em uma faculdade.

Aos amigos do departamento e meus vizinhos, os quais tornaram a vida nessa cidade muito mais agradável.

Ao meu orientador, pela confiança que depositou em mim para a execução desse projeto.

À FAPESP pelo apoio financeiro.

Resumo

Um dos grandes problemas na modelagem matemática do efeito Aharonov-Bohm é a interação do elétron com a fronteira do solenóide. Tal interação se traduz em condições de contorno nessa fronteira, o que causa grande ambiguidade, pois em princípio não é clara qual a escolha mais adequada. Em mecânica quântica essas condições de fronteira se traduzem em extensões auto-adjuntas do operador de Schrödinger do problema.

Por outro lado, trabalhos recentes têm demonstrado que é possível confinar partículas quânticas a regiões determinadas de $\mathbb{R}^n$ com o uso de campos magnéticos suficientemente intensos nas fronteiras dessas regiões. Matematicamente isso corresponde a operadores de Schrödinger essencialmente auto-adjuntos, o que significa a isenção de interação da partícula com a fronteira.

Neste trabalho pretendemos combinar as duas situações mencionadas acima para estudar o efeito Aharonov-Bohm no plano, adicionando então campos magnéticos e potenciais externos que sejam suficientemente intensos na fronteira do solenóide de modo que o operador de Schrödinger associado seja essencialmente auto-adjunto.

Abstract

One of the biggest problem in the mathematical modeling of the Aharonov-Bohm Effect is the interaction between the electron and the solenoid border. Such interaction translates into boundary conditions on that border, which causes great ambiguity because in principle it is not clear what the most appropriate choice. In quantum mechanics this conditions represent self-adjoint extensions of the Schrödinger operator of the problem.

On the other hand, recent works has demostrated that it is possible to confine quantum particles in certain regions of $\mathbb{R}^n$ with magnetic fields sufficientily intense near the border of that region. Mathematically this corresponds to essentially self-adjoint Schrödinger operators, which means exemption from the particle interation with the solenoid border

In this work we intend to combine the two situations mentions above to study the Aharonov-Bohm effect in the plane, adding then external magnetic fields and potentials that are suffiently intense in the solenoid border so that the related Schrödinger operator is essentially self-adjoint.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

1.1 O efeito Aharonov-Bohm

No eletromagnetismo clássico, os potenciais magnéticos são entidades puramente matemáticas, não estando associados à nenhum observável físico, pois todas as equações de movimento podem ser reduzidas aos campos magnéticos apenas. A mecânica quântica, porém, está fundamentada no formalismo Hamiltoniano, e por isso há propostas de que os potenciais, antes apenas ferramentas de cálculo, agora desempenham um papel fundamental, o qual ainda não é muito bem compreendido teoricamente. Em 1959 os físicos Aharonov e Bohm propuseram experimentos envolvendo interferência com elétrons nos quais um efeito apenas dos potenciais poderia ser diretamente observado através do deslocamento das franjas de interferência. Isto indica que os potenciais poderiam sim ter um significado físico.

O Efeito Aharonov-Bohm (efeito AB) trata de um dos aspectos fundamentais da mecânica quântica e, apesar de pouco mais de 50 anos já terem se passado desde o artigo original de Aharonov e Bohm [1], o efeito AB é algo ainda do interesse de parte da comunidade de físicos, matemáticos e pesquisadores de áreas correlatas. Mesmo assim, ainda não se chegou a uma conclusão unânime sobre o real significado físico atribuído ao potencial magnético vetorial, o que revela seu caráter misterioso e intrigante. A principal pergunta que motiva o estudo do efeito AB é: O que ocorre com uma partícula quântica quando esta se move numa região onde o campo magnético é nulo, mas o potencial magnético gerando esse campo não é?

Como é comum na literatura, o termo "efeito AB" será usado num sentido amplo, ou seja, a propriedades relacionadas a operadores similares àquele proposto originalmente em 1959. Exatamente ao que nos referimos deve estar claro em cada contexto. Entretanto, o cenário mais considerado e tradicional para o efeito AB é como segue:

Dado um solenóide cilíndrico $\mathcal{S}$ (no espaço $\mathbb{R}^3$ ou restrito no plano $\mathbb{R}^2$ devido à simetria do problema) de comprimento infinito e raio $a > 0$, centrado na origem e eixo na direção z, carregando uma corrente elétrica estacionária, existe um campo magnético constante $\mathbf{B}_{\mathrm{AB}} = (0, 0, B)$ confinado em $\mathcal{S}^\circ$, o interior de $\mathcal{S}$, e anulando-se em sua região exterior $\mathcal{S}'$. O solenóide é considerado impermeável (impenetrável), no sentido que o movimento de uma partícula sem spin (de massa $m = 1/2$ e carga elétrica q) fora do solenóide não tem contato com seu interior, particularmente com o campo magnético $\mathbf{B}_{\mathrm{AB}}$.

Se $\mathbf{A}_{\mathrm{AB}}$ é um potencial vetorial gerando este campo magnético, isto é, $\mathbf{B}_{\mathrm{AB}} = \partial\times\ \mathbf{A}_{\mathrm{AB}}$, sendo ∂ o símbolo para o vetor gradiente ∇, o operador hamiltoniano usual descrevendo o movimento quântico na região exterior $\mathcal{S}'$ (região esta desprovida de campo magnético) desta partícula carregada é dado por (com $\hbar = 1$)

$$H_{\mathrm{AB}} = \left(-i\partial - \frac{q}{c}\mathbf{A}_{\mathrm{AB}}\right)^2,$$

com condições de contorno apropriadas na fronteira, isto é, o domínio de H_{AB} deve dizer como essa partícula interage com a fronteira do solenóide. Efeitos observáveis, que são consequências de diferenças de fase na função de onda em função de $\mathbf{A}_{\mathrm{AB}}$, são previstos e confirmados em muitos experimentos, apesar da partícula estar confinada em $\mathcal{S}'$, uma região desprovida de qualquer campo magnético (ver os artigos originais [1, 2, 3] e [9, 13, 17, 18, 19, 22] para descrições detalhadas e uma longa lista de referências adicionais).

Desde que o potencial magnético não é assumido ser (identicamente) nulo na região exterior $\mathcal{S}'$, a interpretação em [1, 2, 3], e seguida por uma enorme quantidade de artigos, é que $\mathbf{A}_{\mathrm{AB}}$ (e não o campo magnético $\mathbf{B}_{\mathrm{AB}}$) desempenha um papel proeminente em mecânica quântica, de modo que estes efeitos mensuráveis seriam causados exclusivamente por $\mathbf{A}_{\mathrm{AB}}$, e não exatamente pelo campo magnético $\mathbf{B}_{\mathrm{AB}}$. Desde então, isto tem sido chamado de o efeito Aharonov-Bohm (apesar de tal questão ter sido considerada anteriormente [8, 10] e ele está diretamente relacionado com a aceitação de H_{AB} acima como o modelo quântico de tal situação, particularmente, a presença do potencial magnético no hamiltoniano).

Com vários experimentos realizados (particularmente os de Tonomura e colaboradores [18]), o foco atual do efeito AB não é o resultado experimental, mas sim a descrição e interpretação teóricas. Aqui defendemos que a matemática deve ter um papel de destaque, particularmente para se evitar que conclusões sejam obtidas de pressupostos baseados apenas na intuição e, às vezes, em pontos de vista pessoais, pois a questão é de fato tão delicada quanto interessante.

O conjunto das extensões auto-adjuntas do hamiltoniano inicial descreve todas as possibilidades de modelos quânticos de determinada situação. No caso específico aqui estudado, a partícula quântica não pode entrar no solenóide (pois não queremos que ela tenha contato com o campo magnético não-nulo) mas interage com ele. As condições de contorno que classificam as extensões auto-adjuntas são as fisicamente possíveis do ponto de vista da mecânica quântica [6], ou seja, aquelas que descrevem essa interação com a superfície do solenóide e isso gera certo grau de ambiguidade na escolha da condição de fronteira. É exatamente essa ambiguidade que queremos eliminar nesta dissertação de mestrado, pois vamos propor uma situação em que o solenóide torna-se "naturalmente" excluído da região em que a partícula se movimenta.

Notamos que existe uma proposta de mecanismo puramente teórico de seleção das extensões mais "realistas" em $2D$ e $3D$, no qual a extensão com condições de Dirichlet na fronteira do solenóide é selecionada [7, 13].

1.2 Confinamento de Partículas Quânticas

A forma padrão de se restringir o movimento de uma partícula quântica a uma região Ω do plano, ou de $\mathbb{R}^n$ em geral, é através de condições de fronteira em $\partial\Omega$. De certo ponto de vista, embora usual, essa restrição seria através de "força bruta", e exatamente qual a condição de fronteira a ser utilizada nem sempre é uma questão simples de ser respondida. Em mecânica quântica as condições de fronteira devem ser escolhidas de modo que o operador energia, ou seja, o operador de Schrödinger correspondente, seja auto-adjunto [6].

Trabalhos recentes [5, 15, 16] têm proposto um mecanismo de confinamento através de potenciais adicionais V e, sob certas condições sobre tais potenciais, o confinamento seria o ideal, pois eliminaria a necessidade de condições de fronteira. Em mecânica clássica uma barreira de potencial próxima à fronteira $\partial\Omega$ confina partículas com energias menores que certo valor, enquanto uma barreira infinita realmente confina completamente as partículas; contudo, devido à possibilidade de tunelamento, em mecânica quântica a questão torna-se mais complicada, e em geral não basta apenas uma barreira de intensidade infinita.

Nos trabalhos que acabamos de citar aparecem condições sobre a razão de divergência de potenciais V, ao se aproximarem da fronteira da região, para que os operadores quânticos relevantes (ou seja, o laplaciano) sejam essencialmente auto-adjuntos (ou seja, para que possuam uma única extensão auto-adjunta), o que significa que as partículas "não percebem" a fronteira e a dinâmica fica completamente determinada por V, já que não há necessidade de condições de contorno; em outras palavras, sob certos potenciais há um confinamento ideal do movimento quântico a regiões pré-selecionadas.

Usando principalmente resultados de [5, 15], no trabalho [16] os autores estudam o confinamento de partículas quânticas a um disco D em $\mathbb{R}^2$ através de campos magnéticos $\mathbf{B}_{\text{conf}}(x)$, e mostram que o operador de Schrödinger associado é essencialmente auto-adjunto se

$$|\mathbf{B}_{\text{conf}}(x)| \geq \frac{C}{\text{dist }(x, \partial D)^2}, \quad C \geq \sqrt{3}/2,$$

para todo $x \in D$ numa vizinhança qualquer fixada da fronteira, em que $\text{dist}\,(x, \partial D)$ denota a distância do ponto x à fronteira de D. Nesse mesmo trabalho são também consideradas partículas com spin 1/2 e o operador de Pauli. Outras referências e uma revisão de resultados anteriores sobre confinamentos via potenciais similares podem ser encontradas nos trabalhos [4, 12].

1.3 Proposta

Há duas questões teóricas importantes relacionadas ao efeito AB que pretendemos investigar com uma nova abordagem, as quais mencionamos a seguir.

Primeiramente é a questão da blindagem do solenóide, de modo que a partícula não penetra em seu interior e, assim, não tenha contato direto com o campo magnético (o qual é restrito ao interior $\mathcal{S}^\circ$). Normalmente isso ou é simplesmente assumido válido (principalmente na literatura em física), ou são impostas explicitamente condições de fronteira sobre $\mathcal{S}$. No entanto, isto não evita a interação da partícula com essa fronteira, o que cria certo grau de ambiguidade (como já discutido).

A segunda questão trata da aceitação na literatura da ação H_{AB} acima, com o aparecimento explícito de $\mathbf{A}_{\text{AB}}$ não-nulo fora do solenóide impermeável, embora nessa região exterior $\mathcal{S}'$ tenha-se $\mathbf{B}_{\text{AB}} = \partial \times \mathbf{A}_{\text{AB}} = 0$; na literatura isto é baseado principalmente em uma aplicação do teorema de Stokes em uma região multiplamente conexa.

Entretanto, este argumento apresenta dificuldades matemáticas e físicas que devem ser justificadas cuidadosamente; isto porque a aplicação do teorema de Stokes a uma curva fechada em torno do solenóide envolve a passagem a uma integral sobre uma área que penetra numa região que é considerada impenetrável! Neste caso, a integral de linha de $\mathbf{A}_{\mathrm{AB}}$ em torno do solenóide será, pelo teorema de Stokes, igual à integral de área de $\mathbf{B}_{\mathrm{AB}}$ sobre a região interior à curva. A questão é, se o solenóide é considerado impenetrável, devemos incluir a região $\mathcal{S}^{\circ}$ nessa integral? Ou seja, a aceitação de H_{AB} envolve uma escolha explícita que precisa de uma explicação: sendo $\mathcal{S}$ impermeável, por que o potencial vetorial magnético $\mathbf{A}_{\mathrm{AB}}$ não é nulo fora do solenóide (ou, de outra forma, por que ele escaparia do interior $\mathcal{S}^{\circ}$)? Se a integral de área inclui a região $\mathcal{S}^{\circ}$, então $\mathbf{A}_{\mathrm{AB}}$ resulta não-nulo, mas se tal região não inclui $\mathcal{S}^{\circ}$, então o teorema de Stokes não será útil para uma decisão a respeito.

Uma possível abordagem da segunda dessas questões poderia ser considerada se a fronteira do solenóide fosse permeável, garantindo a aplicabilidade do teorema de Stokes e então da presença de $\mathbf{A}_{\mathrm{AB}}$ não nulo na expressão de H_{AB}; mas isso levaria ao contato direto da partícula com o campo magnético em $\mathcal{S}^{\circ}$, o que fugiria completamente do efeito AB. Para a primeira questão acima, poderia não ocorrer a necessidade de condições de fronteira se o solenóide e seu interior fossem, de alguma maneira, excluídos do movimento da partícula.

Então propomos considerar o solenóide com fronteira permeável mas blindado por campos magnéticos $\mathbf{B}_{\mathrm{conf}}$ e/ou potenciais escalares V, divergindo na fronteira $\partial\mathcal{S}$, que supostamente levariam a operadores H_{AB} essencialmente auto-adjuntos. Sendo $\mathbf{A}_{\mathrm{conf}}$ um potencial magnético gerando $\mathbf{B}_{\mathrm{conf}}$, a ação do operador ficaria então

$$H_{\mathrm{AB}} = \left(-i\partial - \frac{q}{c}\left(\mathbf{A}_{\mathrm{AB}} + \mathbf{A}_{\mathrm{conf}}\right)\right)^2 + V,$$

com a seguinte condição de divergência próximo da fronteira

$$\left|\mathbf{B}_{\mathrm{conf}}(x)\right| + V(x) \geq \frac{1}{d(x)^2},$$

sendo $d(x)$ a distância de x até a fronteira $\partial\mathcal{S}$.

Assim, teríamos ambas as questões respondidas, pois consideramos o solenóide com fronteira permeável, o que nos permite aplicar o teorema de Stokes para obter $\mathbf{A}_{\mathrm{AB}}$ não nulo em $\mathcal{S}'$, mas ainda excluindo a fronteira de $\mathcal{S}$ do movimento da partícula (o que caracteriza o efeito AB), visto que H_{AB} possui uma única extensão auto-adjunta sem a necessidade de adicionar condições de fronteira.

Para conseguir isso, seguimos a seguinte estratégia para expor os resultados necessários, com as devidas adaptações para o nosso caso:

No capítulo 2, apresentamos as definições necessárias de campos magnéticos e potenciais magnéticos em abertos de $\mathbb{R}^n$, incluindo os operadores de Schrödinger relevantes nas devidas regiões de $\mathbb{R}^n$.

No capítulo 3, apresentamos um estudo do artigo original de Nenciu & Nenciu [15] sobre confinamento de partículas quânticas a regiões limitadas com fronteira de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ via potenciais escalares. A técnica usada pelos autores citados será usada, com algumas modificações, no capítulo 4 para o nosso caso particular, que consta de um operador de Schrödinger com campo magnético numa região ilimitada de $\mathbb{R}^2$.

No capítulo 4, vamos estender alguns dos resultados apresentados no capítulo anterior para o caso com fronteira compacta. Este capítulo está baseado no artigo original de Colin de Verdière & Truc [5], que também fazem uso da técnica citada no parágrafo anterior. As devidas modificações nos argumentos estão presentes e comentadas no decorrer do texto.

No capítulo 5, descreveremos detalhadamente o efeito AB, considerando o solenóide em $\mathbb{R}^2$ com o potencial magnético de Aharonov-Bohm, adicionando a este campos magnéticos e potenciais escalares para se produzir o confinamento na região exterior. Mostraremos também como aplicar os resultados obtidos nos capítulos anteriores para a nossa situação particular.

Capítulo

2

Operadores de Schrödinger

Aqui, vamos apresentar as definições mais importantes para nosso objetivo. Cabe notar que na literatura os campos (e potenciais) magnéticos são grandezas vetoriais, geralmente tratados em $\mathbb{R}^3$, os quais são descritos usando um sistema de coordenadas fixado. A relação entre o potencial e o campo, neste caso, é que o segundo é o rotacional do primeiro. Em $\mathbb{R}^n$, porém, a melhor extensão deste conceito se dá por meio do uso de formas diferenciais, na qual a derivada exterior de formas faz o papel do rotacional em $\mathbb{R}^3$.

Definição 2.1. Um *potencial magnético* $\mathbf{A}$ em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é uma 1-forma suave $\mathbf{A} : \Omega \longrightarrow \mathcal{A}_1(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$\mathbf{A}(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\, dx_j, \tag{2.1}$$

sendo $a_j \in C^\infty(\Omega)$ funções reais, ditas *coordenadas* de $\mathbf{A}$, $\{dx_j\}_{j=1}^n$ é a base dual de uma base ortonormal do espaço tangente em x e $\mathcal{A}_1(\mathbb{R}^n) = (\mathbb{R}^n)^*$ é o conjunto das transformações 1-lineares alternadas em $\mathbb{R}^n$. A norma pontual $|\mathbf{A}(x)|$ é dada pela norma euclidiana, ou seja

$$|\mathbf{A}(x)|^2 = \sum_{j=1}^{n} |a_j(x)|^2,$$

para todo $x \in \Omega$.

Definição 2.2. Um *campo magnético* $\mathbf{B}$ em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é uma 2-forma tal que $\mathbf{B} = d\mathbf{A}$ (derivada exterior de formas) para algum potencial magnético $\mathbf{A}$, ou seja,

$$\mathbf{B}(x) = \sum_{1 \le i < j \le n} b_{ij}(x)\, dx_i \wedge dx_j, \tag{2.2}$$

sendo

$$b_{ij} = \partial_i a_j - \partial_j a_i$$

e $dx_i \wedge dx_j$ o *produto exterior* entre as transformações lineares dx_i e dx_j.

Seja $\mathbf{B}$ um campo magnético em Ω. Para cada $x \in \Omega$, existe uma base ortonormal $\{x_i, y_i, z_j\}_{1 \leq i,j \leq k, 1 \leq j \leq s}$ de $\mathbb{R}^n$, $k \leq n$, com $2k + s = n$ tal que

$$\mathbf{B}(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i(x)\, dx_i \wedge dy_i, \tag{2.3}$$

sendo $c_1(x) \geq c_2(x) \geq \ldots \geq c_k(x) \geq 0$ (ver seção 2.3 de [14]).

Definição 2.3. Dado um campo magnético $\mathbf{B}$, usaremos a seguinte notação, de acordo com a Definição 2.2,

$$\mathbf{B}(x) = b_{12}(x)\, dx_1 \wedge dx_2 + b_{34}(x)\, dx_3 \wedge dx_4 + \ldots + b_{2\overline{n}-1,2\overline{n}}(x)\, dx_{2\overline{n}-1} \wedge dx_{2\overline{n}}, \tag{2.4}$$

sendo $\overline{n}$ o maior inteiro menor que $n/2$ e $b_{12}(x) \geq b_{34}(x) \geq \ldots \geq 0$. Definimos então a *norma espectral* de $\mathbf{B}(x)$ por

$$|\mathbf{B}(x)|_{\mathrm{sp}} = \sum_{j=1}^{\overline{n}} b_{2j-1,2j}(x). \tag{2.5}$$

Vamos observar aqui que a escolha da norma espectral de um campo magnético é apenas um atalho para facilitar os cálculos. De fato, $|.|_{\mathrm{sp}}$ está definida em $\mathcal{A}_2(\mathbb{R}^n)$, ou seja, o conjunto das transformações bilineares alternadas em $\mathbb{R}^n$, o qual é um espaço vetorial de dimensão finita em que todas as normas são equivalentes.

Consideraremos também, para o caso $n \geq 3$, a direção de $\mathbf{B}$ em x, a qual é definida pela 2-forma $\mathbf{n}(x) = \sum_{j<k} n_{jk}(x)\, dx_j \wedge dx_k$, sendo

$$n_{jk}(x) = \frac{b_{jk}(x)}{|\mathbf{B}(x)|_{\mathrm{sp}}}, \tag{2.6}$$

quando $\mathbf{B}(x) \neq 0$.

Definição 2.4. Dado um campo magnético $\mathbf{B}$, consideraremos o seguinte operador

$$\nabla_j = \partial_j - i a_j,$$

sendo i a unidade imaginária e $\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} a_j dx_j$ um potencial magnético qualquer fixado para $\mathbf{B}$ em um aberto Ω. Definimos o operador de Schrödinger inicial com campo magnético $\mathbf{B} = d\mathbf{A}$ e potencial escalar real $V \in L^{\infty}_{\text{loc}}(\Omega)$ por

$$H_A^V = -\sum_{j=1}^{n} \nabla_j^2 + V, \tag{2.7}$$

com domínio $\operatorname{dom} H_A^V = C_0^{\infty}(\Omega)$.

Consideraremos também a forma sesquilinear dada por

$$h_A^V(u,v) = \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \nabla_j u \overline{\nabla_j v} + \int_{\Omega} V u \overline{v}, \tag{2.8}$$

definida para todos $u, v \in \mathcal{H}^1(\Omega)$. Denotaremos a forma quadrática $h_A^V(u,u)$ simplesmente por $h_A^V(u)$.

Definição 2.5. Para o caso em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado com fronteira C^2 e codimensão 1, consideraremos o seguinte operador de Schrödinger inicial

$$H^V = -\Delta + V, \tag{2.9}$$

com domínio $\operatorname{dom} H^V = C_0^{\infty}(\Omega)$, sendo $V \in L^{\infty}_{\text{loc}}(\Omega)$ um potencial escalar real. Considere também a forma sesquilinear

$$h^V(u,v) = \int_{\Omega} \partial u \cdot \overline{\partial v} + \int_{\Omega} V u \overline{v}, \tag{2.10}$$

definida para todo $u, v \in \mathcal{H}^1(\Omega)$, sendo ∂u o gradiente de u.

Capítulo

3

Confinamento quântico em abertos limitados com fronteira suave

Para evitarmos a necessidade de condições de fronteira para o operador de Aharonov-Bohm H_{AB} (diretamente relacionado com a blindagem do solenóide), iremos adicionar um campo magnético externo $\mathbf{B}_{\text{conf}}$ e um potencial escalar real V que garantam o confinamento da partícula à região $\mathcal{S}'$, de tal forma que essa não vê a fronteira $\partial\mathcal{S}'$. Essa propriedade de confinamento é obtida em mecânica quântica quando o operador de Schrödinger associado ao problema é essencialmente auto-adjunto, ou seja, possui uma única extensão auto-adjunta.

Em [15], Nenciu & Nenciu propõem um mecanismo teórico para o confinamento em regiões limitadas e com fronteira suficientemente suave. Neste capítulo, estudaremos este método de confinamento em sua forma original, o que nos guiará, juntamente com o artigo de Colin de Verdière & Truc [5], para a nossa proposta para o efeito AB.

Notamos aqui as diferenças entre o trabalho original [15] e a nossa proposta para o efeito AB. Particularmente, a presença do potencial magnético de Aharonov-Bohm no operador de Schrödinger não nos permite usar a mesma desigualdade de Hardy que os autores citados usam para obter uma estimativa para a forma sesquilinear. Para contornar isso, usamos [5] (mais detalhes no capítulo 4). Ainda, pela natureza do efeito AB, a região de ação do operador de Schrödinger, ou seja, o exterior do solenóide $\mathcal{S}'$, não é limitada, embora possua fronteira suave. Estas constituem nos principais pontos desta dissertação de mestrado, em que adaptações convenientes em relação a [5] e [15] foram necessárias.

3.1 Estimativas tipo Agmon

Neste capítulo, a menos dos Lemas 3.2 e 3.3 e das definições, consideraremos sempre $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado com fronteira de classe C^2 e codimensão 1 e o operador (2.9) juntamente com a forma sesquilinear (2.10).

Lema 3.1. *A função distância até a fronteira $d : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) = \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|$$

é Lipschitz e diferenciável qtp. Ainda, existe $d_\Omega > 0$ de modo que se $d(x) < d_\Omega$, então d é duas vezes diferenciável em x e vale a desigualdade

$$|\partial d(x)| \leq 1.$$

Este lema pode ser econtrado nos trabalhos [5, 15].

Definição 3.1. Seja H um operador linear hermitiano definido em $C_0^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Dizemos que uma distribuição ψ em Ω é *solução fraca* da equação $H\psi = \lambda\psi$, para um $\lambda \in \mathbb{R}$, quando $\psi \in \mathcal{H}^2_{\text{loc}}(\Omega)$ e

$$\langle \psi, (H - \lambda I) u \rangle = 0, \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Note que nossa definição de solução fraca é um pouco mais restritiva do que aquela apresentada no artigo original [15], mas suficiente para nosso propósito. Em geral pede-se que $\psi \in \mathcal{H}^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

No que segue, denotaremos por $[T, S] = TS - ST$ o comutador de T com S.

Lema 3.2. *Seja Ω um aberto qualquer e considere o operador* (2.7) *e uma função $f \in C_0^\infty(\Omega)$. Vale a seguinte igualdade*

$$\left[f, \left[f, H_A^V\right]\right] \psi = -2 \left|\partial f\right|^2 \psi \tag{3.1}$$

sempre que $\psi \in \mathcal{H}^2_{\text{loc}}(\Omega)$.

Demonstração. Note que a expressão da esquerda faz sentido, visto que $f\psi \in \mathcal{H}^2_0(\Omega)$, sendo $\mathcal{H}^2_0(\Omega)$ o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na topologia de $\mathcal{H}^2(\Omega)$.

Vamos verificar primeiramente que

$$\left[\nabla_j^2, f\right] = \nabla_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \nabla_j. \tag{3.2}$$

Com efeito, desenvolvendo o lado esquerdo, temos

$$\begin{aligned}
\left[\nabla_j^2, f\right] \psi &= \nabla_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i a_j \right) (f \psi) - f \nabla_j^2 \psi \\
&= \nabla_j \left[\frac{\partial f}{\partial x_j} \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x_j} f - i a_j f \psi \right] - f \nabla_j^2 \psi \\
&= \nabla_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \psi \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i a_j \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j} f - i a_j f \psi \right) - f \nabla_j^2 \psi.
\end{aligned}$$

Continuando com as duas últimas parcelas da soma, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j^2} f + \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_j} - i a_j \psi \frac{\partial f}{\partial x_j} - i f \frac{\partial}{\partial x_j} (a_j \psi) - i a_j \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j} f - i a_j f \psi \right) - f \nabla_j^2 \psi \\
&\quad = \frac{\partial f}{\partial x_j} \nabla_j \psi + f \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j^2} - i \frac{\partial}{\partial x_j} (a_j \psi) - i a_j \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j} - i a_j \psi \right) - \nabla_j^2 \psi \right] \\
&\quad = \frac{\partial f}{\partial x_j} \nabla_j \psi
\end{aligned}$$

como queríamos. Agora, com um cálculo direto, usando o fato de que operadores de multiplicação sempre comutam com f e a igualdade (3.2), temos

$$\begin{aligned}
\left[f, \left[f, H_A^V\right]\right] \psi &= \left[f, \left[f, -\sum_{j=1}^{n} \nabla_j^2 + V \right] \right] \psi = \sum_{j=1}^{n} \left[f, \left[\nabla_j^2, f \right] \right] \psi \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left[f, \nabla_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \nabla_j \right] \psi \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left[f, \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i a_j \right) \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i a_j \right) \right] \psi \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left[f, \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \psi.
\end{aligned}$$

Continuando o desenvolvimento, temos

$$
\begin{aligned}
\left[f,\left[f,H_A^V\right]\right]\psi &= \sum_{j=1}^{n}\left(f\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\psi + f\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_j} + f\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^2\psi - f\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\psi\right) + \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n}\left(-f\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^2\psi - f\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right) \\
&= -2\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^2\psi = -2\left|\partial f\right|^2\psi,
\end{aligned}
$$

sempre que $\psi \in \mathcal{H}^2_{\text{loc}}(\Omega)$, como queríamos demonstrar. $\square$

Lema 3.3. *Considere Ω aberto qualquer, o operador* (2.7) *e a forma sesquilinear* (2.8). *Seja ψ solução fraca de $H_A^V\psi = \lambda\psi$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ fixado, e f função real Lipschitz com suporte compacto em Ω. Nestas condições*

$$
\left(h_A^V - \lambda\right)(f\psi) = \left\langle \psi, \left|\partial f\right|^2\psi\right\rangle. \tag{3.3}
$$

Demonstração. Basta mostrar o caso em que $f \in C_0^\infty(\Omega)$ e usar a densidade de $C_0^\infty(\Omega)$ em $\mathcal{H}_0^1(\Omega) \ni f\psi$. Usando integração por partes, temos

$$
\left(h_A^V - \lambda\right)(f\psi, u) = \left\langle f\psi, H_A^V u\right\rangle - \langle f\psi, \lambda u\rangle = \left\langle \psi, f\left(H_A^V u\right)\right\rangle - \langle \psi, \lambda(fu)\rangle,
$$

sempre que $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Como ψ é solução fraca de $H_A^V\psi = \lambda\psi$ e $fu \in C_0^\infty$, segue que

$$
\begin{aligned}
\left\langle \psi, f\left(H_A^V u\right)\right\rangle - \langle \psi, \lambda(fu)\rangle = \left\langle \psi, f\left(H_A^V u\right)\right\rangle - \left\langle \psi, H_A^V(fu)\right\rangle &= \left\langle \psi, \left[f, H_A^V\right]u\right\rangle \\
&= \left\langle u, \left[H_A^V, f\right]\psi\right\rangle
\end{aligned}
$$

e portanto

$$
\left(h_A^V - \lambda\right)(f\psi, u) = \left\langle u, \left[H_A^V, f\right]\psi\right\rangle.
$$

Como $f\psi \in \mathcal{H}_0^2(\Omega)$ e $C_0^\infty(\Omega)$ é denso na topologia deste, ou seja, podemos aproximar a função $f\psi$, junto com suas derivadas, podemos por $f\psi$ no lugar de u

na igualdade acima e obter

$$
\begin{aligned}
\left(h_A^V - \lambda\right)(f\psi) &= \left\langle f\psi, \left[H_A^V, f\right]\psi\right\rangle \\
&= \left\langle \psi, f\left[H_A^V, f\right]\psi\right\rangle \\
&= Re\left\langle \psi, f\left[H_A^V, f\right]\psi\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left(\left\langle \psi, f\left[H_A^V, f\right]\psi\right\rangle + \overline{\langle \psi, f\left[H_A^V, f\right]\psi\rangle}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left\langle \psi, f\left[H_A^V, f\right]\psi\right\rangle + \left\langle f\left[H_A^V, f\right]\psi, \psi\right\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left\langle \psi, f\left[H_A^V, f\right]\psi\right\rangle + \left\langle \psi, \left[f, H_A^V\right]f\psi\right\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left\langle \psi, f\left[H_A^V, f\right]\psi\right\rangle - \left\langle \psi, \left[H_A^V, f\right]f\psi\right\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\langle \psi, \left[f, \left[H_A^V, f\right]\right]\psi\right\rangle .
\end{aligned}
$$

Usando o Lema 3.2 podemos concluir o resultado. □

Definição 3.2. No que segue, usaremos a seguinte notação

$$\Omega_\rho = \{x \in \Omega; d(x) > \rho\},$$

sendo $\rho > 0$ tomado de forma que $\Omega_\rho \neq \emptyset$.

Teorema 3.1. *Seja ψ uma solução fraca da equação $H^V\psi = \lambda\psi$ e $g \in C^1(\Omega)$ função real para a qual existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$\left\langle u, \left(H^V - \lambda I\right)u\right\rangle - \int_\Omega |u(x)|^2 |\partial g(x)|^2 dx \geq c\|u\|^2, \tag{3.4}$$

para todo $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Então existe uma constante $K = K(c) < \infty$, independente de ρ de forma que

$$\int_{\Omega_{2\rho}} \left|e^{g(x)}\psi(x)\right|^2 dx \leq \frac{K}{\rho}\int_{\Omega_\rho \setminus \Omega_{2\rho}} \left(\frac{1}{\rho} + |\partial g(x)|\right)\left|e^{g(x)}\psi(x)\right|^2 dx. \tag{3.5}$$

Demonstração. Considere a função

$$f(x) = e^{g(x)}\phi(x),$$

em que g é a função da hipótese e $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ é a função dada por

$$\phi(x) = k(d(x)),$$

sendo d a função distância até a fronteira e k de classe C^∞ é qualquer com a propriedade

$$k_\rho(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \rho \\ 1, & t \ge 2\rho \end{cases}$$

com $\frac{d}{dt}k_\rho(t) \le \frac{K_1}{\rho}$ para um K_1 independente de ρ. Note que para $\rho < \frac{d_\Omega}{2}$ (Lema 3.1) vale

$$|\partial\phi(x)| = \left|k_\rho'(d(x))\right| |\partial d(x)| \le \frac{K_1}{\rho}. \tag{3.6}$$

Então

$$\begin{aligned} |\partial f(x)|^2 &= \left(e^{g(x)}\partial g(x)\phi(x) + e^{g(x)}\partial\phi(x)\right)^2 \\ &= e^{2g(x)}\partial g(x)^2\phi(x)^2 + 2e^{2g(x)}\partial g(x)\phi(x)\partial\phi(x) + e^{2g(x)}\partial\phi(x)^2 \\ &= f^2|\partial g|^2 + m, \end{aligned} \tag{3.7}$$

sendo

$$m = 2e^{2g}\phi\partial g.\partial\phi + e^{2g}|\partial\phi|^2.$$

Uma estimativa direta nos leva a

$$\begin{aligned} |\langle\psi, m\psi\rangle| &\le \langle\psi, |m|\psi\rangle \\ &= \int_\Omega |\psi|^2\left(2e^{2g}\phi|\partial g||\partial\phi| + e^{2g}|\partial\phi|^2\right)dx \\ &\le \frac{K_1}{\rho}\int_{\Omega_\rho\backslash\Omega_{2\rho}} |\psi e^g|^2\left(2|\partial g| + \frac{K_1}{\rho}\right)dx. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Usando a densidade de $C_0^\infty(\Omega)$ no conjunto $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$, podemos usar a hipótese (3.4) para a função $f\psi$, obtendo assim

$$\left(h^V - \lambda\right)(f\psi) - \left\langle f\psi, |\partial g|^2 f\psi\right\rangle \ge c\|f\psi\|^2. \tag{3.9}$$

Usando o lema anterior, com $A = 0$

$$\begin{aligned}\left(h^V - \lambda\right)(f\psi) - \left\langle f\psi, |\partial g|^2 f\psi\right\rangle &= \left\langle \psi, |\partial f|^2 \psi\right\rangle - \left\langle f\psi, |\partial g|^2 f\psi\right\rangle \\ &= \left\langle \psi, |\partial f|^2 \psi - |\partial g|^2 f^2\psi\right\rangle \\ &= \langle \psi, m\psi\rangle,\end{aligned}$$

e obtemos, juntando (3.8), (3.9) e a igualdade acima, que

$$\frac{K_1}{\rho}\int_{\Omega_\rho\setminus\Omega_{2\rho}} |\psi e^g|^2 \left(2\,|\partial g| + \frac{K_1}{\rho}\right) dx \geq |\langle \psi, m\psi\rangle| \geq c\int_\Omega |f\psi|^2\, dx,$$

a qual nos leva à desigualdade procurada. □

Definição 3.3 (Condição (Σ))**.** Diremos que uma função $G : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a condição (Σ) se é de classe C^1 e satisfaz as seguintes propriedades:

$(\Sigma 1)$. Existe $d_0 > 0$, $d_0 \leq d_\Omega$ (lema 3.1) tal que

$$0 \leq G'(t) \leq \frac{1}{t},\ \forall t \in (0, d_0)$$
$$G'(t) = 0,\ \forall t \geq d_0.$$

$(\Sigma 2)$. Para todo $\rho_0 \leq \dfrac{d_0}{2}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} e^{-2G\left(2^{-n}\rho_0\right)} = \infty.$$

Teorema 3.2 (Agmon)**.** *Assuma que exista $\lambda \in \mathbb{R}$ e $c > 0$ de forma que*

$$\left\langle u, \left(H^V - \lambda I\right) u\right\rangle - \int_\Omega |\partial g(x)|^2 |u(x)|^2\, dx \geq c\,\|u\|^2, \tag{3.10}$$

para todo $u \in C_0^\infty(\Omega)$, sendo $g(x) = G(d(x))$ para alguma função G satisfazendo a propriedade (Σ). Nestas condições, se $\psi \in L^2(\Omega)$ é uma solução fraca de $H^V\psi = \lambda\psi$, então $\psi = 0$.

Demonstração. Seja $d_0 > 0$ a constante da função G da condição $(\Sigma 1)$. Fixe $0 < \rho_0 \leq \dfrac{d_0}{2}$, e seja $\rho > 0$ tal que $2\rho \leq \rho_0$. Então defina a função

$$G_\rho(t) = G(t) - G(\rho)$$

e

$$g_\rho(x) = G_\rho(d(x)).$$

Note que para todo $x \in \Omega$ vale

$$\partial g_\rho(x) = G'_\rho(d(x))\,\partial d(x) = G'(d(x))\,\partial d(x).$$

Isto, junto com a condição $(\Sigma 1)$ para G e o fato de que $|\partial d(x)| \leq 1$ para $d(x) < d_\Omega$, implica que

$$|\partial g_\rho(x)| \leq \frac{1}{d(x)}, \quad x \in \Omega \setminus \Omega_{d_0/2}. \tag{3.11}$$

Por outro lado, para $x \in \Omega_{\rho_0}$ temos $\rho_0 \leq d(x)$, e como G_ρ é crescente,

$$g_\rho(x) = G_\rho(d(x)) \geq G_\rho(\rho_0) = G(\rho_0) - G(\rho), \tag{3.12}$$

e

$$e^{2g_\rho(x)} \geq e^{2G(\rho_0)}e^{-2G(\rho)}, \ \forall x \in \Omega_{\rho_0}.$$

Portanto

$$e^{2G(\rho_0)}e^{-2G(\rho)} \int_{\Omega_{\rho_0}} |\psi(x)|^2\,dx \leq \int_{\Omega_{\rho_0}} \left|e^{g_\rho(x)}\psi(x)\right|^2 dx \leq \int_{\Omega_{2\rho}} \left|e^{g_\rho(x)}\psi(x)\right|^2 dx, \tag{3.13}$$

onde usamos o fato de que $2\rho \leq \rho_0$, donde $\Omega_{\rho_0} \subset \Omega_{2\rho}$. Agora, note que $\partial g_\rho = \partial g$, pois $g_\rho(x) = g(x) - G(\rho)$ e portanto, g_ρ satisfaz a hipótese (3.10) com os mesmos c e λ que g. Em particular, podemos aplicar o teorema anterior, usando (3.5) para obter

$$\int_{\Omega_{2\rho}} \left|e^{g_\rho(x)}\psi(x)\right|^2 dx \leq \frac{K(c)}{\rho} \int_{\Omega_\rho \setminus \Omega_{2\rho}} \left(\frac{1}{\rho} + |\partial g_\rho(x)|\right) \left|e^{g_\rho(x)}\psi(x)\right|^2 dx. \tag{3.14}$$

Note agora que, para $x \in \Omega_\rho \setminus \Omega_{2\rho}$,

$$g_\rho(x) \leq G_\rho(2\rho) = G(2\rho) - G(\rho) = \int_\rho^{2\rho} G'(t)\,dt \leq \int_\rho^{2\rho} \frac{1}{t}dt = \ln 2. \tag{3.15}$$

Como $0 < \rho < 2\rho < \rho_0 \leq \dfrac{d_0}{2}$, segue que $\Omega_\rho \setminus \Omega_{2\rho} \subset \Omega \setminus \Omega_{d_0/2}$ e usando (3.11) e (3.15) em (3.14), obtemos

$$\frac{K(c)}{\rho}\int_{\Omega_\rho\setminus\Omega_{2\rho}}\left(\frac{1}{\rho}+|\partial g_\rho(x)|\right)\left|e^{g_\rho(x)}\psi(x)\right|^2 dx \le \frac{\hat{K}(c)}{\rho^2}\int_{\Omega_\rho\setminus\Omega_{2\rho}}|\psi(x)|^2 dx. \quad (3.16)$$

Juntando (3.16) com (3.14) e (3.12), obtemos

$$K_2(c,\rho_0)\,\rho^2 e^{-2G(\rho)}\int_{\Omega_{\rho_0}}|\psi(x)|^2 dx \le \int_{\Omega_\rho\setminus\Omega_{2\rho}}|\psi(x)|^2 dx. \quad (3.17)$$

Agora, seja $k\ge 1$ inteiro e $\rho_k=\dfrac{1}{2^k}\rho_0$. Então $2\rho_k=\rho_{k-1}$ e temos

$$\bigcup_{k=1}^{M}\left(\Omega_{\rho_k}\setminus\Omega_{2\rho_k}\right)=\bigcup_{k=1}^{M}\left(\Omega_{\rho_k}\setminus\Omega_{\rho_{k-1}}\right)=\Omega_{\rho_M}\setminus\Omega_{\rho_0}\subset\Omega.$$

Usando a desigualdade (3.17) sucessivamente com $\rho=\rho_k$, $1\le k\le M$ e somando, obtemos

$$\rho_0^2K_2(c,\rho_0)\left(\sum_{n=1}^{M}4^{-n}e^{-2G\left(2^{-n}\rho_0\right)}\right)\int_{\Omega_{\rho_0}}|\psi(x)|^2 dx\le\int_{\Omega}|\psi(x)|^2 dx<\infty.$$

Mas pela condição ($\Sigma 2$), a série acima diverge, de forma que encontramos

$$\int_{\Omega_{\rho_0}}|\psi(x)|^2 dx=0.$$

Como a igualdade acima vale para todo $\rho_0>0$ concluímos que $\|\psi\|=0$, como queríamos demonstrar. □

3.2 Confinamento ideal

O seguinte teorema é de fundamental importância para obtermos uma boa estimativa para a forma quadrática h^V, o que irá garantir, juntamente com o critério fundamental (Teorema A.3) e o Teorema 3.2, que o operador H^V é essencialmente auto-adjunto sob uma determinada condição de crescimento para o potencial perto da fronteira. Note que o objetivo dos autores é conseguir uma estimativa de crescimento para o potencial que seja a melhor possível e por isso a desigualdade de Hardy é importante. Não estamos interessados em crescimento ótimo e por isso não necessitamos buscar uma desigualdade de Hardy com campo magnético. Observe que a razão ótima de crescimento para o caso magnético é sugerido em [5] e demonstrada para o caso $n = 2$ em [16]. O caso geral $n \geq 3$ ainda está em aberto.

Teorema 3.3 (Desigualdade de Hardy)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, aberto limitado com fronteira de classe C^2 e codimensão 1. Existe uma constante $A \in \mathbb{R}$ de tal forma que*

$$\frac{1}{4}\int_\Omega \frac{|u(x)|^2}{d(x)^2} dx \leq \int_\Omega |\partial u(x)|^2 \, dx + A \|u\| , \tag{3.18}$$

para todo $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Essa particular versão da desigualdade de Hardy pode ser encontrada, juntamente com referências à demonstração, no artigo original [15] (ver também [21]).

Teorema 3.4. *Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira de classe C^2 e codimensão 1 e o operador de Schrödinger*

$$H^V = -\Delta + V, \tag{3.19}$$

com $V \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e domínio $\operatorname{dom} H = C_0^\infty(\Omega)$. Assuma que exista uma função G satisfazendo (Σ) de tal forma que

$$V = V_1 + V_2 \tag{3.20}$$

e

$$V_1(x) + \frac{1}{4}.\frac{1}{d(x)^2} \geq G'(d(x))^2 , \quad V_2 \in L^\infty(\Omega) . \tag{3.21}$$

Então o operador H^V é essencialmente auto-adjunto.

Demonstração. Do critério fundamental para operadores essencialmente auto-adjuntos (Teorema A.3), da estimativa tipo Agmon (Teorema 3.2) e do Teorema de Regularidade para equações elipticas (Teorema A.5), concluímos que basta mostrar a existência de um $\lambda \in (-\infty, 0)$, um $c > 0$ e uma função $g(x) = G(d(x))$, com G satisfazendo (Σ) de tal forma que

$$\left\langle u, \left(H^V - \lambda I\right) u \right\rangle - \int_\Omega |\partial g(x)|^2 |u(x)|^2 \, dx \geq c \|u\| ,$$

para todo $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Lembrando que sobre as hipóteses do teorema, $V = V_1 + V_2$ com $V_2 \in L^\infty(\Omega)$ e

$$V_1(x) \geq G'(d(x))^2 - \frac{1}{4}.\frac{1}{d(x)^2},$$

para alguma função G satisfazendo a condição (Σ). Usando exatamente essa função G para definir g e aplicando a desigualdade de Hardy, obtemos para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\left\langle u, \left(H^V - \lambda I\right) u\right\rangle - \int_\Omega |\partial g|^2 |u|^2 \\
&\quad = \int_\Omega \left(|\partial u|^2 + (V_1 + V_2)|u|^2 - \lambda |u|^2\right) dx - \int_\Omega |\partial g|^2 |u|^2 \, dx \\
&\quad \geq \int_\Omega \left(\frac{1}{4}\frac{1}{d(x)^2} - A + (V_1 + V_2)|u|^2 - \lambda |u|^2\right) dx - \int_\Omega G'(d(x))^2 |u|^2 \, dx \\
&\quad \geq \int_\Omega \left(V_1(x) - G'(d(x))^2 + \frac{1}{4d(x)^2}\right).|u(x)|^2 \, dx \\
&\qquad + \left(-\|V_2\|_{L^\infty} - A - \lambda\right)\|u\|^2 \\
&\quad \geq \left(-\|V_2\|_{L^\infty} - A - \lambda\right)\|u\|^2.
\end{aligned}$$

Usamos acima o fato de que $|\partial g(x)|^2 \leq G'(d(x))^2$ e a hipótese (3.21). Escolhemos $\lambda = -\|V_2\|_\infty - A - 1$, o qual nos dá a desigualdade procurada com $c = 1$. □

Corolário 3.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado com fronteira C^2 e codimensão 1. Suponha que*

$$V(x) \geq \frac{3}{4}\frac{1}{d(x)^2},$$

para x suficientemente próximo de $\partial\Omega$. Então o operador H^V é essencialmente auto-adjunto.

Demonstração. Basta colocar $G(t) = \ln(t)$ e $V_2 = 0$ no teorema acima para obtemos o resultado. □

Proposição 3.1. *Considere $\Omega = (0,1)$. Suponha que exista $\varepsilon > 0$ tal que*

$$V(x) \leq \left(\frac{3}{4} - \varepsilon\right) x^{-2},$$

para x próximo de 0. Então o operador H^V não é essencialmente auto-adjunto.

Demonstração. Ver Teorema X.10 de [20] □

Capítulo

4

Confinamento quântico em abertos com fronteira compacta

Neste capítulo, seguiremos como referência o artigo de Colin de Verdière & Truc [5] sobre confinamento via campo magnético em abertos com fronteira compacta, com a pequena diferença de que adicionaremos o potencial escalar real V ao operador de Schrödinger. Vemos que a adição do potencial escalar real pode ser feita (sem prejudicar a técnica usada) porque este comuta com qualquer outro operador de multiplicação.

Uma das semelhanças fundamentais entre [5] e [15] é uma estimativa para o gradiente da função distância até a fronteira d, mais precisamente

$$|\partial d\,(x)| \leq 1.$$

Esta é válida no primeiro artigo porque a fronteira é suficientemente regular (de classe C^2). No caso do segundo, é exigido apenas que a fronteira seja compacta. Para contornar esse problema, os autores do segundo artigo alteram a métrica convenientemente. Claro que isso muda a noção usual de compacidade em $\mathbb{R}^n$, o que pode dificultar um pouco. Mas note que para o caso particular do efeito AB, a fronteira do solenóide em $\mathbb{R}^2$ é uma circunferência, que é de classe C^∞. Assim, vamos verificar que de fato, em $\mathbb{R}^2$, para o caso específico do efeito AB, podemos usar a métrica usual.

Cabe observar ainda que na proposta de Nenciu & Nenciu é necessário que o aberto Ω seja limitado e a fronteira $\partial\Omega$ seja de classe C^2 para se usar a desigualdade de Hardy como uma estimativa para a forma quadrática. Como Colin de Verdière & Truc observam, porém, a técnica usada pelos autores apenas necessita do fato de que a função distância até a fronteira d cumpra $|\partial d\,(x)| \leq 1$. O fato de Ω

ser limitado não é importante, pois apenas a compacidade da fronteira é usada. Ainda, a desigualdade de Hardy pode ser substituída por uma mais fraca para o caso magnético.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo. Denote por d_R a métrica Riemanniana dada por

$$d_R(x, y) = \inf_{\gamma \in \Gamma_{x,y}} \|\gamma\|,$$

sendo $\|\gamma\|$ o comprimento de γ e $\Gamma_{x,y}$ o conjunto das curvas suaves $\gamma : [0,1] \longrightarrow \Omega$ satisfazendo $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$.

Denote por $\left(\hat{\Omega}, \hat{d_R}\right)$ o completamento métrico de (Ω, d_R) e $\Omega_\infty = \hat{\Omega} \setminus \Omega$ a fronteira métrica de Ω. Diremos que Ω é *regular* quando Ω_∞ é compacto. Quando este for o caso, consideraremos a aplicação distância até a fronteira métrica Ω_∞ dada por $D : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$D(x) = \inf_{y \in \Omega_\infty} \hat{d_R}(x, y).$$

Vamos construir aqui um exemplo para ilustrar uma diferença entre esta métrica e a usual. Em $\mathbb{R}^2$, considere o vetor unitário $x_0 = (1, 0)$ e a sequência de vetores

$$x_n = \left(1, \frac{(-1)^n}{n}\right),$$

convergindo para x_0 de tal forma que x_{2n} está no semiplano superior e x_{2n-1} está no semiplano inferior. Vamos denotar por $\mathbf{x}_n$, $n \geq 0$, o segmento de reta que liga 0 à x_n e X o conjunto

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{x}_n.$$

Tome $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus X$. Então Ω é aberto e conexo, pois X é fechado, pois $\mathbf{x}_0$ é um segmento cujos pontos são pontos de acumulação da sequência de conjuntos $\mathbf{x}_n$. Note que $\overline{\Omega} = \mathbb{R}^2$ e que $\partial\Omega = X$, o qual é compacto. Porém, ao tomarmos o completamento de (Ω, d_R), teremos $\left(\hat{\Omega}, \hat{d}_R\right)$ sendo

$$\hat{\Omega} = \left(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{x}_0\right) \cup \{(0,0), (1,0)\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0); 0 < x < 1\},$$

pois com relação à métrica d_R, não existe sequência de Cauchy em Ω convergindo para os pontos do interior do segmento $\mathbf{x}_0$ (ou seja, a menos dos extremos). Assim, temos que

$$\Omega_\infty = (X \setminus \mathbf{x}_0) \cup \{(0,0), (1,0)\},$$

o qual não é compacto. Portanto, mesmo que a fronteira usual $\partial\Omega$ seja compacta, a fronteira métrica Ω_∞ pode não ser (embora Ω_∞ ser compacto implica que $\partial\Omega$ é compacto [5]).

Lema 4.1. *A função D definida acima é 1-Lipschitz e diferenciável q.t.p. em Ω. Ainda, em todo ponto $x \in \Omega$ de diferenciabilidade de D, temos a desigualdade*

$$|\partial D(x)| \leq 1.$$

Este lema pode ser encontrado em [5].

Definição 4.1. Uma aplicação $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ é dita *regular na fronteira* quando Ω é regular, ou seja, Ω_∞ é compacto, e f se estende continuamente para $\hat{\Omega}$.

Teorema 4.1. *Assuma que existam constantes $\lambda \in \mathbb{R}$, $c > 0$ e $r > 0$ tais que*

$$\left\langle u, \left(H_A^V - \lambda I\right) u\right\rangle - \int_{\{x\in\Omega; D(x)<r\}} \frac{|u(x)|^2}{D(x)^2} dx \geq c\, \|u\|, \tag{4.1}$$

para todo $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Nestas condições, se $\psi \in L^2(\Omega)$ é solução fraca de $H_A^V\psi = \lambda\psi$, então $\psi = 0$. O mesmo resultado vale se usarmos, no lugar de D, a distância usual d até a fronteira $\partial\Omega$.

Demonstração. Faremos a demonstração para o caso em que $r = 1$, sem perda de generalidade. Seja F dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ 0 \leq x \leq \rho \\ 2(x-\rho), \ \rho \leq x \leq 2\rho \\ x, \ 2\rho \leq 1 \\ 1, \ 1 \leq x \leq R \\ (R-x)+1, \ R \leq x \leq R+1 \\ 0, \ x \geq R+1 \end{cases}.$$

Definimos $f(x) = F(D(x))$ para todo $x \in \Omega$. Então f é Lipschitz e o produto $f\psi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, pois f é derivável q.t.p. com derivada em $L^2(\Omega)$ e $\psi \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2(\Omega)$. Logo vale a hipótese (4.1) para $u = f\psi$ por argumentos de densidade, pois $C_0^\infty(\Omega) \sqsubseteq \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, de onde segue, usando (3.3) que

$$
\begin{aligned}
c\left\|f\psi\right\|^2 &\leq \left\langle \psi, \left|\partial f\right|^2 \psi\right\rangle - \int_{D(x)\leq 1} \frac{\left|f\left(x\right)\psi\left(x\right)\right|^2}{D\left(x\right)^2}dx \\
&= \int \left|\psi\left(x\right)^2\right| \left|F'\left(D\left(x\right)\right)\right|^2 \left|\partial D\left(x\right)\right|^2 - \int_{D(x)\leq 1} \frac{\left|f\left(x\right)\psi\left(x\right)\right|^2}{D\left(x\right)^2}dx \\
&\leq \int \left|\psi\left(x\right)\right|^2 F'\left(D\left(x\right)\right)^2 dx - \int_{D(x)\leq 1} \frac{\left|f\left(x\right)\right|^2\left|\psi\left(x\right)\right|^2}{D\left(x\right)^2}dx \\
&\leq 4\int_{\rho\leq D(x)\leq 2\rho} \left|\psi\right|^2 + \int_{2\rho\leq D(x)\leq 1} \left|\psi\right|^2 + \int_{R\leq D(x)\leq R+1} \left|\psi\right|^2 - \int_{2\rho\leq D(x)\leq 1} \frac{\left|f\right|^2\left|\psi\right|^2}{D\left(x\right)^2}dx \\
&= 4\int_{\rho\leq D(x)\leq 2\rho} \left|\psi\left(x\right)\right|^2 dx + \int_{R\leq D(x)\leq R+1} \left|\psi\left(x\right)\right|^2 dx.
\end{aligned}
$$

Fazendo $\rho \to 0$ e $R \to \infty$, usamos o teorema da convergência dominada junto com o fato de que $\psi \in L^2\left(\Omega\right)$ para concluir que $\psi = 0$. $\square$

Teorema 4.2. *Vale a seguinte desigualdade:*

$$
h_A^V\left(u\right) \geq \left|\left\langle b_{12}u, u\right\rangle\right| + \ldots + \left|\left\langle b_{2\overline{n}-1,2\overline{n}}u, u\right\rangle\right| + \int_\Omega V\left|u\right|^2, \tag{4.2}
$$

para todo $u \in C_0^\infty\left(\Omega\right)$, sendo $\overline{n}$ o maior inteiro menor ou igual a $n/2$.

Demonstração. Note primeiramente que

$$
\begin{aligned}
\left[\nabla_i, \nabla_j\right]u &= \left(\partial_i - ia_i\right)\left(\partial_j - ia_j\right)u - \left(\partial_j - ia_j\right)\left(\partial_i - ia_i\right)u \\
&= \left(\partial_i - ia_i\right)\left(\partial_j u - ia_j u\right) - \left(\partial_j - ia_j\right)\left(\partial_i u - ia_i u\right) \\
&= \partial_i\partial_j u - iu\partial_i a_j - ia_j\partial_i u - ia_i\partial_j u - a_i a_j u - \partial_j\partial_i u + iu\partial_j a_i \\
&\quad + ia_i\partial_j u + ia_j\partial_i u + a_j a_i u \\
&= -iu\left(\partial_i a_j - \partial_j a_i\right) = -iub_{ij},
\end{aligned}
$$

de onde segue que

$$
\begin{aligned}
\left|\left\langle b_{ij}u, u\right\rangle\right| &= \left|\left\langle\left[\nabla_i, \nabla_j\right]u, u\right\rangle\right| \\
&\leq \left|\left\langle\nabla_i\nabla_j u, u\right\rangle\right| + \left|\left\langle\nabla_j\nabla_i u, u\right\rangle\right| \\
&= 2\left|\left\langle\nabla_i u, \nabla_j u\right\rangle\right| \\
&\leq \int_\Omega \left(\left|\nabla_i u\right|^2 + \left|\nabla_j u\right|^2\right)dx,
\end{aligned}
$$

para $i < j$ quaisquer. Assim, somando termo a termo, obtemos

$$|\langle b_{12}u, u\rangle| + \ldots + |\langle b_{2\overline{n}-1,2\overline{n}}u, u\rangle| \leq h_A^V(u) - \langle Vu, u\rangle\,,$$

como queríamos. □

Lema 4.2. *Seja $\{J_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ uma coleção de funções reais satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) $J_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, *para todo* $\alpha \in \Lambda$;

(ii) A coleção dos suportes $\{suppJ_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *é localmente finita;*

(iii) $\sum_{\alpha\in\Lambda} |J_\alpha(x)|^2 = 1$, *para todo* $x \in \Omega$.

Então

$$H_A^V = \sum_{\alpha\in\Lambda} J_\alpha H_A^V J_\alpha - \sum_{\alpha\in\Lambda} |\partial J_\alpha|^2\,. \tag{4.3}$$

Demonstração. Primeiramente, note que as funções J_α definem operadores de multiplicação em $C_0^\infty(\Omega)$ tomando valores em $L^2(\Omega)$. Por definição, as funções J_α são todas de classe C^∞. Para cada $\alpha \in \Lambda$ vale o seguinte

$$\begin{aligned}\left[\nabla_j^2, J_\alpha\right] &= \nabla_j^2 J_\alpha - \nabla_j J_\alpha \nabla_j + \nabla_j J_\alpha \nabla_j - J_\alpha \nabla_j^2 \\ &= \nabla_j(\nabla_j J_\alpha - J_\alpha \nabla_j) + (\nabla_j J_\alpha - J_\alpha \nabla_j)\nabla_j \\ &= \nabla_j[\nabla_j, J_\alpha] + [\nabla_j, J_\alpha]\nabla_j.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Ainda, para funções $u \in C_0^\infty(\Omega)$, vale

$$\begin{aligned}[\nabla_j, J_\alpha]u &= \left[\frac{\partial}{\partial x_j} - ia_j, J_\alpha\right]u = \left[\frac{\partial}{\partial x_j}, J_\alpha\right]u = \frac{\partial}{\partial x_j}(J_\alpha u) - J_\alpha\frac{\partial}{\partial x_j}u \\ &= \frac{\partial J_\alpha}{\partial x_j}u + J_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_j} - J_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial J_\alpha}{\partial x_j}u,\end{aligned}$$

de forma que a igualdade (4.4) fica com a forma

$$\left[\nabla_j^2, J_\alpha\right] = \nabla_j\frac{\partial J_\alpha}{\partial x_j} + \frac{\partial J_\alpha}{\partial x_j}\nabla_j. \tag{4.5}$$

Vamos agora calcular $\left[J_\alpha, \left[J_\alpha, H_A^V\right]\right]$ em funções $u \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$
\begin{aligned}
\left[J_\alpha, \left[J_\alpha, H_A^V\right]\right] u &= \left[J_\alpha, \left[J_\alpha, -\sum_{j=1}^n \nabla_j^2 + V\right]\right] u \\
&= \sum_{j=1}^n \left[J_\alpha, \left[\nabla_j^2, J_\alpha\right]\right] u \\
&= \sum_{j=1}^n \left[J_\alpha, \nabla_j \frac{\partial J_\alpha}{\partial x_j} + \frac{\partial J_\alpha}{\partial x_j} \nabla_j\right] u \\
&= \sum_{j=1}^n \left[J_\alpha, \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i a_j\right) \frac{\partial J_\alpha}{\partial x_j} + \frac{\partial J_\alpha}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i a_j\right)\right] u,
\end{aligned}
$$

e, continuando

$$
\begin{aligned}
\left[J_\alpha, \left[J_\alpha, H_A^V\right]\right] u &= \sum_{j=1}^n \left[J_\alpha, \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial J_\alpha}{\partial x_j} + \frac{\partial J_\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j}\right] u \\
&= \sum_{j=1}^n \left(J_\alpha \frac{\partial^2 J_\alpha}{\partial x_j^2} u + J_\alpha \frac{\partial J_\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} + J_\alpha \frac{\partial J_\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial J_\alpha}{\partial x_j}\right)^2 u\right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \left(-J_\alpha \frac{\partial^2 J_\alpha}{\partial x_j^2} u - J_\alpha \frac{\partial J_\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial J_\alpha}{\partial x_j}\right)^2 u - J_\alpha \frac{\partial J_\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \\
&= -2 \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial J_\alpha}{\partial x_j}\right)^2 u = -2 \left|\partial J_\alpha\right|^2 u.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\left[J_\alpha, \left[J_\alpha, H_A^V\right]\right] &= \left[J_\alpha, J_\alpha H_A^V - H_A^V J_\alpha\right] \\
&= J_\alpha^2 H_A^V - J_\alpha H_A^V J_\alpha - J_\alpha H_A^V J_\alpha + H_A^V J_\alpha^2.
\end{aligned}
$$

Somando em α as duas igualdades acima, obtemos que

$$
2H_A^V - \sum_{\alpha\in\Lambda} 2 J_\alpha H_A^V J_\alpha = -\sum_{\alpha\in\Lambda} 2 \left|\partial J_\alpha\right|^2,
$$

como queríamos. □

Lema 4.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto regular e $x_0 \in \Omega_\infty$. Suponha que $V \geq 0$, que $\mathbf{B}(x)$ não se anula para x perto de x_0 e que a direção de $\mathbf{B}$ é regular perto de x_0, ou seja, se estende continuamente para x_0. Seja $\mathbf{A}$ um potencial magnético local para $\mathbf{B}$ em*

x_0, ou seja, $\mathbf{B} = d\mathbf{A}$ numa vizinhança de x_0. Então para todo $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança U de x_0 tal que

$$h_A^V(u) \geq (1-\varepsilon)\int_{U\cap\Omega}\Big(|\mathbf{B}(x)|_{\mathrm{sp}} + V\Big)|u(x)|^2\,dx,$$

para todo $u \in C_0^\infty(U\cap\Omega)$. Note que tal desigualdade continua válida para qualquer vizinhança $U' \subset U$ de x_0.

Demonstração. Como a direção $\mathbf{n}$ de $\mathbf{B}$ se estende continuamente para x_0, denotaremos por $n(x_0)$ o valor dessa extensão em x_0. Podemos então obter base ortonormal $(dx_i)_{i=1,\ldots,n}$ e $n_{12}(x_0) \geq n_{34}(x_0) \geq \ldots \geq 0$ de forma que

$$n(x_0) = n_{12}(x_0)\,dx_1\wedge dx_2 + n_{34}(x_0)\,dx_3\wedge dx_4 + \ldots, \tag{4.6}$$

com $\sum_k n_{2k-1,2k}(x_0) = 1$. Pela continuidade em x_0, existe um aberto $U \ni x_0$ de tal forma que

$$|n(x) - n(x_0)|_{\mathrm{Euclid}} \leq \varepsilon\sqrt{\frac{2}{d(d-1)}},\quad \forall x \in U\cap\Omega. \tag{4.7}$$

Podemos supor que $\mathbf{B}$ não se anula em $U\cap\Omega$, de forma que a direção n está definida para todo $x \in U\cap\Omega$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} h_A^V(u) &\geq |\langle b_{12}u,u\rangle| + \ldots + |\langle b_{2\overline{n}-1,\overline{n}}u,u\rangle| + \int_{U\cap\Omega} V|u|^2 \\ &\geq \left|\int_{U\cap\Omega} n_{12}(x)\,|B(x)|_{\mathrm{sp}}\,|u(x)|^2\right| + \ldots + \int_{U\cap\Omega} V|u|^2 \\ &\geq \left|\int_{U\cap\Omega}\left(n_{12}(x) + \ldots + n_{2\overline{n}-1,2\overline{n}}(x)\right)|B(x)|_{\mathrm{sp}}\,|u(x)|^2\right| + \int_{U\cap\Omega} V|u|^2. \end{aligned}$$

Agora, note que para $x \in U\cap\Omega$, (4.7) implica que

$$n_{12}(x) + \ldots + n_{2\overline{n}-1,2\overline{n}}(x) \geq 1-\varepsilon,$$

pois a norma euclidiana não depende da base ortonormal adotada. □

Teorema 4.3 (Caso $n = 2$)**.** *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ seja um aberto regular (ou seja, com fronteira métrica compacta), cuja fronteira métrica possua um número finito de componentes conexas, e que o campo magnético $\mathbf{B}$ não se anula perto de $\partial\Omega$. Então* *existem $R > 0$ e uma constante $C_R > 0$ tal que, para todo $u \in C_0^\infty(\Omega)$, vale*

$$h_A^V(u) \geq \int_{\{x\in\Omega; D(x)<R\}} \left(|\mathbf{B}|_{\mathrm{sp}} + V\right) |u|^2 \, dx - C_R \|u\|^2,$$

sendo $V \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ não-negativo.

Demonstração. Note primeiramente que, para $n = 2$, tem-se $\mathbf{A}(x) = a_1(x)\, dx_1 + a_2(x)\, dx_2$ de forma que $\mathbf{B}(x) = b_{12}(x)\, dx_1 \wedge dx_2$ possui apenas uma coordenada e $|\mathbf{B}(x)|_{\mathrm{sp}} = |b_{12}(x)|$. Como $\mathbf{B}$ não se anula perto da fronteira, o sinal de b_{12} não muda perto de cada componente conexa de $\partial\Omega$, as quais são compactos disjuntos. Seja $\partial\Omega = A_1 \cup A_2$ de tal forma que $b_{12} > 0$ perto de A_1 e $b_{12} < 0$ perto de A_2. Tome $R > 0$ suficientemente pequeno de forma que b_{12} não muda de sinal nos abertos disjuntos $\Omega_1 = \{x \in \Omega; D(x, A_1) < R\}$ e $\Omega_2 = \{x \in \Omega; D(x, A_2) < R\}$. Assim, podemos escrever

$$\Omega = \bigcup_{l=1}^{3} \Omega_l,$$

sendo Ω_3 um aberto disjunto da fronteira $\partial\Omega$. Tome funções ϕ_l de modo que

- $\phi_l \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$;
- $\operatorname{supp} \phi_l \subset \overline{\Omega_l}$ para $l = 1, 2$;
- $\sum_{l=1}^{3} (\phi_l(x))^2 = 1$, para todo $x \in \Omega$;
- $\sum_{l=1}^{3} |d\phi_l|^2 = C_R < \infty$ em Ω.

Note que tais funções podem ser tomadas dependendo apenas do conjunto Ω e da constante R. Usando (4.3), temos que

$$\begin{aligned} h_A^V(u) &= \sum_{l=1}^{3} h_A^V(\phi_l u) - \int_\Omega \left(\sum_{l=1}^{3} |d\phi_l|^2\right) |u|^2 \, dx \\ &\geq \sum_{l=1}^{2} h_A^V(\phi_l u) - \int_\Omega \left(\sum_{l=1}^{3} |d\phi_l|^2\right) |u|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Mas $h_A^V(\phi_l u) \geq |\langle b_{12}\phi_l u, \phi_l u\rangle| + \langle V\phi_l u, \phi_l u\rangle$ por (4.2), donde

$$
\begin{aligned}
h_A^V(u) &\geq \sum_{l=1}^{2}\left(\left|\int_{\Omega_l} b_{12}|\phi_l|^2|u|^2\right| + \int_{\Omega_l} V|\phi_l|^2|u|^2\right) - \int_\Omega \left(\sum_{l=1}^{3}|d\phi_l|^2\right)|u|^2\,dx \\
&= \sum_{l=1}^{2}\left(\int_{\Omega_l}(|b_{12}|+V)|\phi_l|^2|u|^2\right) - C_R\|u\|^2 \\
&= \int_{\{x\in\Omega; D(x)<R\}}\left(|\mathbf{B}|_{sp}+V\right)|u|^2 - C_R\|u\|^2,
\end{aligned}
$$

para todo $u \in C_0^\infty(\Omega)$, como queríamos demonstrar. □

Teorema 4.4 (Caso $n > 2$)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto regular, ou seja, com fronteira métrica $\Omega_\infty \subset B(0,R)$ compacta, com $n > 2$. Assuma que $\mathbf{B} = d\mathbf{A}$ não se anula perto de Ω_∞ e que $n_{jk}(x)$ é regular perto de Ω_∞, ou seja, se estende continuamente para Ω_∞. Então para todo $\varepsilon > 0$, existem $R > 0$ e $C_R > 0$ tal que, para todo $u \in C_0^\infty(\Omega)$ vale:*

$$
h_A^V(u) \geq (1-\varepsilon)\int_{\{x\in\Omega; D(x)<R\}}\left(|\mathbf{B}|_{\mathrm{sp}}+V\right)|u|^2\,dx - C_R\int_\Omega |u|^2\,dx, \tag{4.8}
$$

sendo $V \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ não negativo.

Demonstração. Como Ω_∞ é compacto, podemos escolher uma cobertura $U_l, l = 1,\ldots,N$ de Ω_∞ de acordo com o Lema 4.3. Ainda, podemos tomar essa cobertura de tal forma que $\bigcup_l U_l \cap \Omega = \{x \in \Omega; D(x) < R\}$, para algum R suficientemente pequeno. Tome funções não negativas $\phi_l, l = 0,1,\ldots,N$, dependendo apenas de Ω e R, de tal forma que

- $\phi_l \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;
- $\operatorname{supp}\phi_l \subset U_l$;
- $\sum_l \phi_l^2 = 1$ em Ω;
- $\sum_l |d\phi_l|^2 \leq C_R$ em Ω.

Usando o Lema 4.2 e o Lema 4.3, temos que

$$\begin{aligned}
h_A^V(u) &= \sum_{l=0}^{N} h(\phi_l u) - \int_\Omega \left(\sum_{l=0}^{N} |d\phi_l|^2\right) |u|^2\, dx \\
&\geq \sum_{l=1}^{N} h(\phi_l u) - \int_\Omega \left(\sum_{l=0}^{N} |d\phi_l|^2\right) |u|^2\, dx \\
&\geq \sum_{l=1}^{N} (1-\varepsilon) \int_{U_l} \left(|B|_{\mathrm{sp}} + V\right) |\phi|^2\, dx - C_R \|u\|^2 \\
&= (1-\varepsilon) \int_{\{x\in\Omega; D(x)<R\}} \left(|B|_{\mathrm{sp}} + V\right) |\phi|^2\, dx - C_R \|u\|^2 .
\end{aligned}$$

Isto termina a demonstração. □

Teorema 4.5 (Caso $n = 2$)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto regular cuja fronteira possua um número finito de componentes conexas. Se vale a desigualdade*

$$|\mathbf{B}(x)|_{\mathrm{sp}} + V(x) \geq \frac{1}{D(x)^2}, \tag{4.9}$$

para todo x numa vizinhança de $\partial\Omega$, então o operador H_A^V é essencialmente auto-adjunto.

Demonstração. Usando o critério fundamental, o Teorema de Regularidade A.5, juntamente com o Teorema 4.1, basta mostrar que existem constantes $c, r > 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ de tal forma que a desigualdade (4.1) se verifica para todo $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Pelo Teorema 4.3, juntamente com a hipótese (4.9), temos que existem $R > 0$ e $C_R > 0$ de modo que, para todo $u \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$h_A^V(u) \geq \int_{\{x\in\Omega; D(x)<R\}} \frac{|u(x)|^2}{D(x)^2} dx - C_R \|u\|^2 .$$

Basta tomar $\lambda = -C_R - 1$ e obtemos (4.1) com $c = 1$ e $r = R$, de forma que o operador H_A^V é essencialmente auto-adjunto. □

Teorema 4.6 (caso $n > 2$)**.** *Suponha que o campo magnético $\mathbf{B}$ não se anula numa vizinhança da fronteira métrica Ω_∞ e que a direção $\mathbf{n}$ de $\mathbf{B}$ é regular, ou seja, se estende continuamente para Ω_∞. Suponha que existe $\eta > 0$ tal que*

$$|\mathbf{B}(x)|_{\mathrm{sp}} + V(x) \geq (1+\eta) \frac{1}{D(x)^2},$$

para todo x numa vizinhança de Ω_∞, então o operador H_A^V é essencialmente auto-adjunto.

Demonstração. Como no caso anterior, basta mostrar que existem constantes $\lambda \in \mathbb{R}$ e $c, r > 0$ tais que (4.1) se verifica para todo $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Tome $\varepsilon > 0$ de tal forma que $\dfrac{1}{1-\varepsilon} = 1 + \eta$. Pela desigualdade (4.8), juntamente com a hipótese, temos que existem constantes $R > 0$ e $C_R > 0$, dependentes de ε, tais que

$$h_A^V(u) \geq \int_{\{x\in\Omega; D(x)<R\}} \frac{|u(x)|^2}{D(x)^2} dx - C_R \int_\Omega |u|^2 \, dx.$$

E novamente obtemos o resultado com $\lambda = -C_R - 1$, $c = 1$ e $r = R$. $\square$

Capítulo

5

Efeito AB sem interação com a fronteira do solenóide

Como mencionado na Introdução, o objetivo deste capítulo é responder as duas questões propostas que estão relacionadas à blindagem do solenóide e a justificativa para a aparição do potencial magnético não-nulo fora do solenóide. Lembramos que esta última está baseada na aplicação do teorema de Stokes a uma região multiplamente conexa e considerada impenetrável, e que a blindagem do solenóide geralmente é assumida de alguma maneira válida ou são apresentadas condições de contorno na fronteira $\partial\mathcal{S}$, o que causa grande ambiguidade.

O que faremos aqui é usar os resultados apresentados nos capítulos anteriores para propor uma situação em que o solenóide é considerado permeável, o que permite a aplicação do teorema de Stokes, mas com a presença de um potencial escalar adicional V e um campo magnético $\mathbf{B}_{\text{conf}}$, com pelo menos um deles divergindo na fronteira $\partial\mathcal{S}$ de maneira adequada, de tal forma que a dinâmica fique completamente determinada sem a necessidade de condições de fronteira; em outras palavras, de tal forma que o operador de Schrödinger associado possua uma única extensão auto-adjunta.

Considere então um solenóide cilíndrico $\mathcal{S}$ em $\mathbb{R}^3$, de comprimento infinito e de raio $a > 0$, portando uma corrente elétrica estacionária, centrado na origem e eixo na direção z. Devido à simetria do problema, vamos considerar $\mathcal{S}$ restrito ao plano $\mathbb{R}^2$ de forma que $\mathcal{S}$ seja a circunferência de raio a centrada na origem. O campo magnético gerado é constante (não-nulo) na região interior $\mathcal{S}^\circ$ e nulo na região exterior $\mathcal{S}'$. Denotaremos $\mathbf{B}_{\text{AB}}(x) = (0, 0, B)$ sempre que $x \in \mathcal{S}$.

Denote por $\mathbf{A}_{\text{AB}}$ um potencial magnético definido em $\mathcal{S}'$ gerando esse campo magnético. Podemos tomar por exemplo a escolha padrão

$$\mathbf{A}_{\mathrm{AB}}(x,y) = \frac{\Phi}{2\pi}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}\right), \quad x^2+y^2 > a,$$

sendo Φ uma constante que depende apenas do campo magnético $\mathbf{B}_{\mathrm{AB}}$, chamada de fluxo magnético. No nosso caso, $\Phi = B\pi a^2$.

Temos então

$$\mathbf{B}_{\mathrm{AB}} = \partial \times \mathbf{A}_{\mathrm{AB}}.$$

Considere agora uma parametrização γ_ε da circunferência $(1+\varepsilon)\,\partial\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$, sendo $\varepsilon > 0$ qualquer. Denotando por $\operatorname{int}\gamma_\varepsilon$ a região interior à curva γ_ε, o teorema de Stokes nos garante que

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \mathbf{A}_{\mathrm{AB}}\, ds = \int_{\operatorname{int}\gamma_\varepsilon} \mathbf{B}_{\mathrm{AB}}\, dx = \int_{\mathcal{S}^\circ} \mathbf{B}_{\mathrm{AB}}\, dx = \Phi \neq 0,$$

o que nos permite concluir que o potencial magnético $\mathbf{A}_{\mathrm{AB}}$ é não-nulo em $\mathcal{S}'$. Além do potencial magnético, vamos considerar um potencial escalar $V \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathcal{S}')$ positivo e um campo magnético $\mathbf{B}_{\mathrm{conf}}$ ambos definidos na região exterior $\mathcal{S}'$ de tal forma que

$$|\mathbf{B}_{\mathrm{conf}}(x)| + V(x) \geq \frac{1}{d(x)^2}, \quad d(x) = \inf_{y\in\partial\mathcal{S}} |x-y|, \tag{5.1}$$

para todo $x \in \mathcal{S}'$ numa vizinhança qualquer da fronteira $\partial\mathcal{S}$. Nessas condições, sendo $\mathbf{A}_{\mathrm{conf}}$ um potencial magnético para $\mathbf{B}_{\mathrm{conf}}$, propomos tomar o operador de Schrödinger inicial em $\mathcal{S}'$, com as constantes convenientemente escolhidas, como sendo

$$H = -\left(\partial - i\left(\mathbf{A}_{\mathrm{AB}} + \mathbf{A}_{\mathrm{conf}}\right)\right)^2 + V, \tag{5.2}$$

com domínio $\operatorname{dom} H = C^\infty_0(\mathcal{S}')$.

Com o operador de Schrödinger assim definido, abordamos a primeira questão proposta na introdução de forma mais consistente, uma vez que o potencial magnético $\mathbf{A}_{\mathrm{AB}}$ resulta não-nulo na região exterior devido ao teorema de Stokes, o qual pode ser aplicado nesta situação, pois não precisamos definir o que queremos dizer por impermeabilidade do solenóide, ou seja, é permitido ao potencial magnético “escapar” do interior $\mathcal{S}^\circ$ do solenóide.

Agora, devemos verificar que o operador H determina completamente a dinâmica do nosso problema sem qualquer necessidade de condições de fronteira, ou seja, que H possui uma única extensão auto-adjunta. Devemos levar alguns fatores em consideração antes de aplicar o Teorema 4.5. A função distância até a fronteira, presente na desigualdade acima citada, não é a mesma que a presente na hipótese do Teorema 4.5. Mas note que o fato importante na demonstração desse teorema é que vale a desigualdade $|\partial d\,(x)| \leq 1$, a qual é válida na nossa situação devido ao Lema 3.1, visto que a fronteira de $\mathcal{S}$ é de classe C^{∞}.

Assim, a condição de crescimento do potencial escalar V imposta em (5.1) (note que o campo magnético referente à $\mathbf{A}_{\mathrm{AB}}$ é nulo na região $\mathcal{S}'$ de forma que não entra na desigualdade) garante o confinamento da partícula quântica à região exterior $\mathcal{S}'$, pois de acordo com o Teorema 4.5, o operador H possui uma única extensão auto-adjunta e portanto a dinâmica está completamente determinada sem necessidade de impor condições de fronteira. Como em $\mathcal{S}'$ o campo magnético $\mathbf{B}_{\mathrm{AB}}$ é nulo, a aparição de $\mathbf{A}_{\mathrm{AB}}$ não-nulo no operador (5.2) caracteriza o efeito AB no contexto que estamos considerando.

Apêndice

$\mathcal{A}$

Teoria de operadores

O objetivo deste apêndice é apresentar alguns resultados clássicos de teoria de operadores lineares em espaços de Hilbert, especialmente a demonstração do critério fundamental para operadores essencialmente auto-adjuntos (Teorema A.3).

Denotaremos por $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert qualquer.

Definição A.1. Seja $T : \operatorname{dom} T \subset \mathcal{H} :\longrightarrow \mathcal{H}$ um operador linear qualquer. Dizemos que T é *hermitiano* quando

$$\langle \xi, T\eta \rangle = \langle T\xi, \eta \rangle, \forall \xi, \eta \in \operatorname{dom} T$$

e $\operatorname{dom} T \sqsubseteq \mathcal{H}$, ou seja, $\operatorname{dom} T$ é um subespaço denso de $\mathcal{H}$. Quando T cumpre essa última condição, dizemos que T está *densamente definido*. Dizemos também que um operador hermitiano T é *não-negativo*, quando

$$\langle u, Tu \rangle \geq 0, \forall u \in \operatorname{dom} T.$$

Definição A.2. Ao operador linear T densamente definido em $\mathcal{H}$, associamos o operador T^*, dito *adjunto* de T, com domínio

$$\operatorname{dom} T^* = \{\eta \in \mathcal{H}; \exists \zeta \in \mathcal{H} \text{ tq } \langle \eta, T\xi \rangle = \langle \zeta, \xi \rangle, \forall \xi \in \operatorname{dom} T\}$$

e ação

$$T^*\eta = \zeta.$$

Dizemos que T é *auto-adjunto* quando $T = T^*$, ou seja, quando $\operatorname{dom} T = \operatorname{dom} T^*$ e $Tu = T^*u, \forall u \in \operatorname{dom} T$, e que T é *essencialmente auto-adjunto* quando possui uma única extensão auto-adjunta em $\mathcal{H}$. Mais precisamente, T é essencialmente auto-adjunto quando existe um único operador auto-adjunto $S : \operatorname{dom} S \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$

tal que

$$\operatorname{dom} T \subset \operatorname{dom} S \quad \text{e} \quad Tu = Su, \forall u \in \operatorname{dom} T.$$

Definição A.3. Sendo T um operador linear qualquer, definimos o conjunto

$$\operatorname{graf} T = \{(\xi, T\xi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}; \xi \in \operatorname{dom} T\},$$

dito o *gráfico* de T. Dizemos que T é *fechado* se $\operatorname{graf} T$ é um conjunto fechado de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

Note que T é fechado se, e somente se, vale a propriedade: Se (ξ_n) é uma sequência em $\operatorname{dom} T$ tal que $\xi_n \to \xi \in \mathcal{H}$ e $T\xi_n \to \eta \in \mathcal{H}$, então $\xi \in \operatorname{dom} T$ e $T\xi = \eta$.

Definição A.4. Se $\overline{\operatorname{graf} T}$ é o gráfico de uma extensão linear $\overline{T}$ de T, então dizemos que T é *fechável* e que $\overline{T}$ é o fecho de T.

Teorema A.1. *Seja T um operador hermitiano. Então*

1. *T^* é uma extensão linear de todas as extensões hermitianas de T;*

2. *T é essencialmente auto-adjunto se, e somente se, T^* é auto-adjunto e, nesse caso, $T^* = \overline{T}$.*

Demonstração. Ver capítulo 2 de [6]. □

Lema A.1. *Se T é linear e densamente definido, então T^* é um operador fechado.*

Demonstração. Ver capítulo 2 de [6]. □

Teorema A.2. *Suponha que T é hermitiano e que exista $z \in \mathbb{C}$ de tal forma que*

$$\operatorname{img}(T - zI) = \operatorname{img}(T - \overline{z}I) = \mathcal{H}.$$

Então T é auto-adjunto.

Demonstração. Seja $v \in \operatorname{dom} T^*$ qualquer e $T^*v = w$. Como $\operatorname{img}(T - \overline{z}I) = \mathcal{H}$, existe $u \in \operatorname{dom} T$ com $(T - \overline{z}I)\,u = w - \overline{z}v$. Agora,

$$\begin{aligned}
\langle v, (T - zI)\,\varphi \rangle &= \langle v, T\varphi \rangle - \langle v, z\varphi \rangle \\
&= \langle T^*v, \varphi \rangle - \langle \overline{z}v, \varphi \rangle \\
&= \langle w - \overline{z}v, \varphi \rangle \\
&= \langle (T - \overline{z}I)\,u, \varphi \rangle \\
&= \langle u, (T - zI)\,\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \operatorname{dom} T.
\end{aligned}$$

Usamos o fato de que $u, \varphi \in \operatorname{dom} T$ e T é hermitiano. Como $\operatorname{img}(T - zI) = \mathcal{H}$, segue que $u = v$ e portanto $\operatorname{dom} T^* \subset \operatorname{dom} T$, donde T é auto-adjunto. $\square$

Lema A.2. *Seja $T : \operatorname{dom} T \sqsubseteq \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ um operador linear qualquer. Temos*

$$\mathrm{N}(T^*) = \operatorname{img}(T)^{\perp}. \tag{A.1}$$

Demonstração. Temos diretamente que

$$v \in \operatorname{img}(T)^{\perp} \Leftrightarrow \langle v, Tu \rangle = 0 = \langle 0, u \rangle, \forall u \in \operatorname{dom} T,$$

o que significa, por definição, que $v \in \operatorname{dom} T^*$ e $T^* v = 0$, ou seja, $v \in \mathrm{N}(T^*)$. $\square$

Teorema A.3 (Critério fundamental)**.** *Seja T um operador hermitiano não-negativo. Suponha que exista $\lambda \in (-\infty, 0)$ de tal forma que uma das condições abaixo é satisfeita*

- $\overline{\operatorname{img}(T - \lambda I)} = \mathcal{H}$*;*
- $\mathrm{N}(T^* - \lambda I) = \{0\}$*.*

Então T é essencialmente auto-adjunto.

Demonstração. Note primeiramente que a igualdade (A.1) mostra que as duas condições são equivalentes. Ainda, sendo T não negativo e hermitiano, temos que $\overline{T}$ é não-negativo e hermitiano. Para $\eta = -\lambda > 0$, temos que

$$\begin{aligned} \eta \|u\|^2 &\leq \langle u, \overline{T} u \rangle + \eta \|u\|^2 \\ &= \langle u, \left(\overline{T} + \eta I\right) u \rangle \\ &\leq \|u\| \left\| \left(\overline{T} + \eta I\right) u \right\| \end{aligned}$$

e segue que $\mathrm{N}\left(\overline{T} + \eta I\right) = \{0\}$ e existe $\left(\overline{T} + \eta I\right)^{-1}$. Ainda, a desigualdade acima implica, fazendo $v = \left(\overline{T} + \eta I\right) u \neq 0$, que

$$\left\| \left(\overline{T} + \eta I\right)^{-1} v \right\| \leq \eta^{-1} \|v\|$$

ou seja, o operador $\left(\overline{T} + \eta I\right)^{-1}$ é limitado e fechado de forma que seu domínio $\operatorname{img}\left(\overline{T} + \eta I\right)$ é fechado. Como $\operatorname{img}(T + \eta I) \subset \operatorname{img}\left(\overline{T} + \eta I\right)$, segue da hipótese que $\operatorname{img}\left(\overline{T} + \eta I\right) = \mathcal{H}$ e então $\overline{T}$ é auto-adjunto. Logo, T é essencialmente auto-adjunto. $\square$

Vamos terminar apresentando um teorema de regularidade de soluções para operadores elípticos.

Teorema A.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto qualquer, e $P = P(x, D)$ um operador elíptico em Ω de ordem $m > 0$, com coeficientes constantes na parte principal e C^∞ nas demais. Para todo $s \in \mathbb{Z}$, $s \geq 0$ e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vale*

$$Pu \in \mathcal{H}^s_{\text{loc}}(\Omega) \Longleftrightarrow u \in \mathcal{H}^{s+m}_{\text{loc}}(\Omega).$$

Demonstração. Ver 6.4 de [11]. □

Teorema A.5 (Regularidade)**.** *Seja Ω um aberto qualquer. Suponha que $\psi \in L^2(\Omega)$ cumpre*

$$\left\langle \psi, \left(H^V_A - \lambda I\right) u \right\rangle = 0, \quad \forall u \in C^\infty_0(\Omega), \tag{A.2}$$

para algum λ real. Então ψ é uma solução fraca de $H^V_A \psi = \lambda \psi$, ou seja, $\psi \in \mathcal{H}^2_{\text{loc}}(\Omega)$ e vale (A.2)*.*

Demonstração. Da hipótese, segue que

$$\left\langle \left(-\sum_{j=1}^{n} \nabla_j^2 - \lambda I \right) \psi, u \right\rangle = \langle -V\psi, u \rangle,$$

para todo $u \in C^\infty_0(\Omega)$. Isso mostra a igualdade no sentido das distribuições

$$\left(-\sum_{j=1}^{n} \nabla_j^2 - \lambda I \right) \psi = -V\psi.$$

Como $-V\psi \in L^2_{\text{loc}}(\Omega) = \mathcal{H}^0_{\text{loc}}(\Omega)$ e o operador da esquerda é elíptico com coeficientes constantes na parte principal (ordem 2) e C^∞ nas demais, segue do teorema anterior que $\psi \in \mathcal{H}^2_{\text{loc}}$, como queríamos demonstrar. □

Bibliografia

[1] Aharonov, Y. e Bohm, D.: Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.* **115**, 485-491 (1959).

[2] Aharonov, Y. e Bohm, D.: Remarks on the possibility of quantum electrodynamics without potentials. *Phys. Rev.* **125**, 2192 (1962).

[3] Aharonov, Y. e Bohm, D.: *Further discussion of the role of electromagnetic potentials in the quantum theory. Phys. Rev.* **130**, 1625 (1963).

[4] Brusentsev, A. G.: Selfadjointness of elliptic differential operators in $L^2(G)$, and correction potentials. *Trans. Moscow Math. Soc.* **65** 31-61 (2004)

[5] Colin de Verdière, Y. e Truc, F.: Confining quantum particles with a purely magnetic field, Annales de l'Institut Fourier, **60**, 2333-2356 (2010).

[6] de Oliveira, C. R.: *Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics.* Basel: Birkhäuser, 2008.

[7] de Oliveira, C. R. e Pereira, M.: Mathematical justification of the Aharonov-Bohm hamiltonian, *J. Stat. Phys.* **133**, 1175-1184 (2008).

[8] Ehrenberg, W. e Siday, R. E.: The refractive index in electron optics and the principles of dynamics, *Proc. Phys. Soc. London, Sect. B* **62**, 8-21 (1949).

[9] Eskin, G.: Inverse boundary value problems and the Aharonov-Bohm effect, *Inverse Problems* **19**, 49-62 (2003).

[10] Franz, W.: Elektroneninterferenzen im Magnetfeld, *Verh. Dtsch. Phys. Ges.* **2** 65 (1939).

[11] Grubb, G.: *Distributions and Operators.* Basel: Springer, 2009.

[12] H. Kalf, H., Schminke, U.-V., Walter, J. e Wüst, R.: On the spectral theory of Schrödinger and Dirac operators with strongly singular potentials, in *Lecture Notes in Mathematics* **448**, 182-226 (1975).

[13] Magni, C. e Valz-Gris, F.: Can elementary quantum mechanics explain the Aharonov- Bohm effect?, *J. Math. Phys.* **36**, 177-186 (1995).

[14] Mohamed, A. e Raikov, G.D.: On the spectral theory of the Schrödinger operator with electromagnetic potential, *Pseudo-differential calculus and mathematical physics*, 298-390, Math. Top. **5**, Akademie Verlag, Berlin, 1994.

[15] Nenciu, G. e Nenciu, I.: On confining potentials and essential self-adjointness for Schrödinger operators on bounded domains in $\mathbb{R}^n$, *Ann. H. Poincaré* **10**, 377-394 (2009).

[16] Nenciu, G. e Nenciu, I.: Remarks on essential self-adjointness for magnetic Schrödinger and Pauli operators on bounded domains in $\mathbb{R}^2$, *Lett. Math. Phys.* **98**, 207-223 (2011) [math-ph] 16 Mar 2010.

[17] Olariu, S. e Popesku, I. I.: The quantum effects of electromanetic fluxes, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 339-436 (1985).

[18] Peshkin, M. e Tonomura, A.: *The Aharonov-Bohm Effect. LNP340.* Berlim: Springer-Verlag, 1989.

[19] Ruijsenaars, S. N. M.: The Aharonov-Bohm effect and scattering theory, *Ann. Phys.* **146**, 1-34 (1983).

[20] Simon, B. e Reed, M.: *Methods of Modern Mathematical Physics II.* Basel: Academic Press, INC. 1975.

[21] Wang, Z.Q. e Zhu, M.: Hardy inequalities with boundary terms, *Electronic Journal of Differential Equation* **43**, 1-8 (2003).

[22] Weder, R.: The Aharonov-Bohm effect and time-dependent inverse scattering theory, *Inverse Problems* **18**, 1041-1056 (2002).