

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Fernanda Scabio Gonçalves

Grafos Eulerianos e Identidades Polinomiais na
Álgebra $M_n(K)$

São Carlos - SP
AGOSTO DE 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Grafos Eulerianos e Identidades Polinomiais na
Álgebra $M_n(K)$**

Fernanda Scabio Gonçalves
Orientador: Prof Dr. Humberto Luiz Talpo
BOLSISTA CAPES

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Matemática da UFSCar
como parte dos requisitos para a obtenção
do título de Mestre em Matemática.

São Carlos - SP
AGOSTO DE 2013

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

G635ge Gonçalves, Fernanda Scabio.
 Grafos eulerianos e identidades polinomiais na álgebra
 $M_n(K)$ / Fernanda Scabio Gonçalves. -- São Carlos :
UFSCar, 2013.
 81 f.

 Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São
Carlos, 2013.

 1. Álgebra. 2. Identidades polinomiais. 3. Matrizes
(Matemática). 4. Grafos eulerianos. I. Título.

CDD: 512 (20^a)

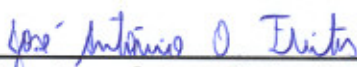
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Humberto Luiz Talpo
DM – UFSCar



Prof. Dr. Dimas José Gonçalves
DM – UFSCar



Prof. Dr. José Antônio Oliveira de Freitas
UnB

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus pela vida e pelas inúmeras bênçãos recebidas.

Aos meus pais Adriano e Margarete, meu irmão Victor e meu namorado Hélio, pelo apoio, incentivo e compreensão.

A meu orientador, Prof. Humberto Luiz Talpo, pela paciência e dedicação.

A todos os meus amigos matemáticos, pela convivência tão agradável e pelas horas de estudo.

A meus amigos não matemáticos, que, mesmo não entendendo muito bem o que estudo, sempre foram pacientes e me encorajavam nos momentos de dificuldade.

Aos professores do Departamento de Matemática, pelos ensinamentos e por despertar em mim o desejo de continuar estudando Matemática.

Por fim, agradeço à CAPES e ao “Programa de Apoio ao Plano de Reestruturação e Expansão das Universidades Federais”, REUNI, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho apresentamos algumas aplicações de Teoria de Grafos em problemas envolvendo identidades polinomiais para a álgebra das matrizes $M_n(K)$. Uma breve apresentação de PI-teoria e de alguns conceitos de Teoria de Grafos, como a definição de grafos eulerianos, que são os elementos básicos desta abordagem, foram apresentadas para tornar o texto autocontido. São explicitadas duas demonstrações distintas do Teorema de Amitsur-Levitzki, a de Razmyslov e uma decorrente do Teorema de Swan - um resultado importante a respeito de grafos eulerianos. Por fim, um resultado semelhante ao Teorema de Amitsur-Levitzki para matrizes anti-simétricas é demonstrado utilizando elementos de Teoria de Grafos. Ressaltamos que o entendimento da técnica utilizada torna possível a simplificação de diversos resultados e tem se mostrado uma importante ferramenta no estudo de PI-álgebras.

Palavras-chave: Identidades polinomiais. Álgebra das matrizes. Grafos eulerianos.

Abstract

In this work we present some applications of graph theory in problems involving polynomial identities for the algebra $M_n(K)$. A brief presentation of PI-theory and some concepts of graph theory, such as the definition of Eulerian graphs, which are the basic elements of this work, were presented to make the text self-contained. We show two different proofs of the Amitsur-Levitzki theorem, the proof of Razmyslov and other due to Swan's theorem - an important result on Eulerian graphs. Finally, a similar result of the Amitsur-Levitzki's theorem for skew-symmetric matrices is proved using elements of graph theory. We emphasize that the understanding of the technique makes it possible to simplify many results and has been an important tool in the study of PI-algebras.

Keywords: Polynomial identities. Matrix algebra. Eulerian graphs.

Sumário

Introdução	11
1 Álgebras com Identidades Polinomiais	13
1.1 Propriedades Básicas de Álgebras	13
1.2 Identidades Polinomiais	18
1.3 Polinômios Multi-homogêneos e Multilineares	22
1.4 Polinômios Próprios	28
1.5 O Teorema de Amitsur-Levitzki	29
2 Grafos Eulerianos	38
2.1 Teoria de Grafos	38
2.2 O Teorema de Swan	44
3 Aplicações da Teoria de Grafos à PI-álgebra	54
3.1 O Teorema de Amitsur-Levitzki	55
3.2 Identidades Polinomiais para Matrizes Antissimétricas	57
Referências Bibliográficas	80

Introdução

O estudo das *álgebras com identidades polinomiais* (ou *PI-álgebras*) é algo considerado recente na história da matemática. Teve início na década de 40, com a publicação de alguns trabalhos de matemáticos como Jacobson, Kaplansky e Levitzki, mas se intensificou por volta de 1950, quando foi provado o Teorema de Amitsur-Levitzki, que garante a existência de uma identidade polinomial de grau $2n$ para a álgebra das matrizes $n \times n$ sobre um corpo K . Este resultado possui diversas demonstrações, baseadas em técnicas distintas. A demonstração original é baseada em argumentos combinatórios e, posteriormente, surgiram outras versões, como as de Razmyslov ([10]) e de Rosset ([11]), que utilizam argumentos algébricos.

Entretanto, estas demonstrações são trabalhosas, apesar de envolverem conceitos elementares. Na tentativa de simplificá-las, Swan ([13]) encontrou, em 1963, uma demonstração bastante clara utilizando Teoria de Grafos. A grande vantagem desta técnica é que argumentos algébricos mais elaborados podem ser vistos como conceitos geométricos básicos, apenas identificando o grafo adequado ao problema. Desde então, a Teoria de Grafos vem sendo uma importante ferramenta no estudo de identidades polinomias para matrizes.

Este trabalho tem como objetivo estudar a aplicação de Teoria de Grafos à PI-álgebras. A fim de ilustrar a importância desta abordagem, o primeiro capítulo traz a demonstração de Razmyslov para o Teorema de Amitsur-Levitzki, e algumas observações importantes acerca deste resultado. Também é feita uma breve exposição de alguns conceitos básicos de PI-teoria.

No segundo capítulo definimos os elementos de Teoria de Grafos utilizados ao longo do texto, e demonstramos detalhadamente o famoso Teorema de Swan. Por

fim, o último capítulo é dedicado às aplicações da Teoria de Grafos à identidades polinomiais de matrizes, que inclui a demonstração do Teorema de Amitsur-Levitzki feita por Swan ([13] e [14]), e de um resultado semelhante para matrizes antissimétricas, devida à Hutchinson ([7]).

Capítulo 1

Álgebras com Identidades

Polinomiais

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos e resultados básicos a respeito de identidades polinomiais, tendo como referências os livros de Drensky [3] e Giambruno e Zaicev [5], e as notas do minicurso “Introdução às PI-álgebras”, ministrado por Brandão [2] durante o Verão de 2013, na Universidade Federal de São Carlos.

Grande parte do que abordamos nesta primeira etapa do trabalho não é utilizada nos capítulos seguintes. No entanto, são conteúdos clássicos e optamos por incluí-los para possíveis consultas.

1.1 Propriedades Básicas de Álgebras

Esta primeira seção introduz o objeto básico deste estudo: álgebras sobre um corpo K e suas propriedades. Veremos diversos exemplos clássicos de álgebras, como a álgebra tensorial e a de Grassmann.

Definição 1.1.1. *Seja K um corpo e A um espaço vetorial sobre K . Dizemos que A é uma álgebra (ou K -álgebra) se está definida uma operação binária $*$: $A \times A \rightarrow A$, chamada de multiplicação, tal que para quaisquer $a, b, c \in A$ e qualquer $\lambda \in K$*

$$(a + b) * c = a * c + b * c,$$

$$a * (b + c) = a * b + a * c,$$

$$\lambda(a * b) = (\lambda a) * b = a * (\lambda b).$$

Neste texto, denotaremos $a * b$ por ab para simplificar a notação. O produto $a_1 a_2 a_3$ é definido por $(a_1 a_2) a_3$ e, indutivamente, $a_1 a_2 \cdots a_n$ é o produto $(a_1 a_2 \cdots a_{n-1}) a_n$. Dizemos que um subconjunto β é uma base da álgebra A se é base de A como espaço vetorial e a dimensão de A é sua dimensão como espaço vetorial. Se a álgebra A for um espaço vetorial de dimensão finita sobre K , dizemos que A é uma álgebra de dimensão finita. Em geral, os resultados de álgebra linear para espaços vetoriais também são válidos para álgebras.

Observemos que se a álgebra A possui base $\{e_i; i \in I\}$, então a multiplicação em A é obtida a partir da multiplicação dos elementos da base:

$$e_i * e_j = \sum_{k \in I} \alpha_{ij}^k e_k, \alpha_{ij}^k \in K$$

onde, para i e j fixados, apenas um número finito de α_{ij}^k são não nulos. Por outro lado, dados uma base arbitrária $\{e_i; i \in I\}$ do espaço vetorial A e um conjunto de elementos $\alpha_{ij}^k \in K$ tais que, para i e j fixados, apenas um número finito de α_{ij}^k são não nulos, podemos definir a multiplicação em A por

$$\left(\sum_{i \in I} \xi_i e_i \right) * \left(\sum_{j \in I} \eta_j e_j \right) = \sum_{i, j \in I} \xi_i \eta_j (e_i * e_j), \quad e_i * e_j = \sum_{k \in I} \alpha_{ij}^k e_k.$$

A álgebra A é *associativa* se $(ab)c = a(bc)$ para quaisquer $a, b, c \in A$, e é *comutativa* se $ab = ba$ para quaisquer $a, b \in A$. Dizemos ainda que A é *unitária* se a multiplicação possuir elemento neutro, isto é, se existe elemento $1_A \in A$ tal que $1_A a = a 1_A = a$ para qualquer elemento $a \in A$.

Quando a álgebra A satisfaz as condições $a^2 = aa = 0$ e $(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$ (identidade de Jacobi), A é chamada de *álgebra de Lie*. Se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que o produto de quaisquer $n + 1$ elementos de A (com qualquer disposição de parênteses) é igual a zero, A é *nilpotente*. Neste caso, o menor n que satisfaz esta condição é dito *índice de nilpotência* de A . Para o caso de existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$ para qualquer $a \in A$, dizemos que A é um *álgebra nil de índice limitado*.

Exemplo 1.1.2. *O espaço dos polinômios em n variáveis comutativas, denotado por $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$, é uma K -álgebra associativa, comutativa e unitária, com relação ao produto usual de polinômios.*

Exemplo 1.1.3. O espaço das matrizes $n \times n$ com coeficientes em K , denotado por $M_n(K)$, é uma K -álgebra associativa e unitária, com relação ao produto usual de matrizes. Notemos que esta álgebra não é comutativa. Nesta álgebra, destacamos as matrizes unitárias E_{ij} , para $1 \leq i, j \leq n$, onde E_{ij} é a matriz cuja única entrada não nula é 1 na i -ésima linha e j -ésima coluna. Estas matrizes formam uma base para $M_n(K)$, onde $\dim M_n(K) = n^2$.

De maneira geral, pode-se verificar que o espaço vetorial $M_n(A)$, o espaço das matrizes $n \times n$ sobre uma álgebra A , é uma álgebra com as operações usuais de matrizes.

Exemplo 1.1.4 (Álgebra de Grassmann). Seja V um espaço vetorial com base ordenada $\{e_1, e_2, \dots\}$. Definimos a álgebra de Grassmann (ou álgebra exterior) de V , denotada por $E = E(V)$, como sendo a álgebra com base

$$\{1_E, e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k, k \geq 1\}$$

e com produto definido pela relação

$$e_i e_i = 0 \text{ e } e_i e_j = -e_j e_i.$$

É conveniente escrever $E = E^{(0)} \oplus E^{(1)}$, onde

$$E^{(0)} = \langle e_{i_1} \dots e_{i_{2k}} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_{2k}, k \geq 0 \rangle,$$

$$E^{(1)} = \langle e_{i_1} \dots e_{i_{2k+1}} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_{2k+1}, k \geq 0 \rangle.$$

Como $e_i e_j = -e_j e_i$, temos que

$$(e_{i_1} \dots e_{i_r})(e_{j_1} \dots e_{j_s}) = (-1)^{rs}(e_{j_1} \dots e_{j_s})(e_{i_1} \dots e_{i_r})$$

para quaisquer $r, s \in \mathbb{N}$. Logo, $ax = xa$ para quaisquer elementos $a \in E^{(0)}$ e $x \in E$, e $bc = -cb$ para quaisquer elementos $b, c \in E^{(1)}$. Com o mesmo argumento, é fácil verificar que $E^{(0)}E^{(0)} + E^{(1)}E^{(1)} \subseteq E^{(0)}$ e $E^{(0)}E^{(1)} + E^{(1)}E^{(0)} \subseteq E^{(1)}$.

Exemplo 1.1.5 (Álgebra Tensorial). Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita sobre um mesmo corpo K . O produto tensorial entre V e W , $V \otimes W$, é o espaço vetorial das aplicações bilineares

$$f : V^* \times W^* \longrightarrow K.$$

Dados $v \in V$ e $w \in W$, o produto tensorial $v \otimes w$ é o funcional bilinear cujo valor em $(\alpha, \beta) \in V^* \times W^*$ é dado por

$$(v \otimes w)(\alpha, \beta) = \alpha(v) \cdot \beta(w).$$

De maneira geral, se V_1, V_2, \dots, V_s são espaços vetoriais sobre um mesmo corpo K , o produto tensorial $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_s$ é o espaço das aplicações multilineares definidas em $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_s^*$

$$f : V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_s^* \longrightarrow K$$

tal que

$$(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_s)(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = \alpha_1(v_1) \cdot \alpha_2(v_2) \cdot \dots \cdot \alpha_s(v_s).$$

Quando os fatores de um produto tensorial são todos iguais, denotamos o produto de s cópias de V por $\bigotimes^s V$ ou $V^{\otimes s}$. A soma desses produtos define o espaço

$$\mathcal{T}(V) = \sum_{s \geq 0} V^{\otimes s},$$

onde $V^{\otimes 0} = K$ e $V^{\otimes 1} = V$. Com o produto tensorial, $\mathcal{T}(V)$ é uma álgebra associativa com unidade.

Sejam \mathcal{B} uma classe de álgebras e $A \in \mathcal{B}$ uma álgebra gerada por um conjunto X . Dizemos que A é livremente gerada por X na classe \mathcal{B} se, para qualquer álgebra $B \in \mathcal{B}$, toda aplicação $X \rightarrow B$ pode ser estendida a um homomorfismo $A \rightarrow B$.

Exemplo 1.1.6. Para qualquer conjunto X , a álgebra polinomial $K[X]$ é livre na classe de todas as álgebras associativas comutativas unitárias.

O conceito de álgebra generaliza as noções de espaços vetoriais e de anéis. Assim, também podemos considerar subálgebras e ideais de uma álgebra, conforme a definição a seguir.

Definição 1.1.7. O subespaço S da álgebra A é uma subálgebra se é fechado em relação à multiplicação, isto é, se para quaisquer $s_1, s_2 \in S$, $s_1 * s_2 \in S$. A subálgebra I é chamada de ideal à esquerda de A se $A * I \subseteq I$, isto é, se $a * i \in I$ para todo $a \in A, i \in I$. Analogamente, definimos ideal à direita e ideal bilateral, geralmente chamado apenas de ideal.

Exemplo 1.1.8. *O subespaço das matrizes triangulares superior, $U_n(K)$, é uma subálgebra de $M_n(K)$.*

Também de maneira análoga às demais estruturas algébricas, definimos homomorfismos entre K -álgebras, como segue.

Definição 1.1.9. *O homomorfismo de espaços vetoriais $\phi : A \rightarrow B$ das álgebras A, B é um homomorfismo (de álgebras) se $\phi(a * b) = \phi(a) * \phi(b)$. Analogamente, introduzimos os conceitos de isomorfismo, automorfismo, endomorfismo, etc.*

Os resultados usuais referentes a homomorfismos de espaços vetoriais, grupos e anéis continuam válidos para homomorfismos de álgebras. Por exemplo, sendo A uma álgebra e I um ideal de A , definimos a *álgebra quociente de A por I* , onde o produto é dado por $(a + I)(b + I) = ab + I$, para $a, b \in A$. Também temos o Teorema do Isomorfismo, enunciado a seguir.

Teorema 1.1.10. *Seja $\phi : A \rightarrow B$ um homomorfismo de álgebras. Então o núcleo de ϕ*

$$\ker(\phi) = \{a \in A \mid \phi(a) = 0\}$$

é um ideal bilateral de A e a álgebra quociente $A/\ker \phi$ é isomorfa à imagem $\text{Im}(\phi) = \{\phi(a) \mid a \in A\}$.

O exemplo a seguir mostra como obter uma álgebra com unidade a partir de uma álgebra A dada. Esta construção é chamada de *adjunção formal da unidade a A* .

Exemplo 1.1.11. *Seja A uma álgebra e consideremos o espaço vetorial*

$$K \oplus A = \{(\lambda, a) \mid \lambda \in K, a \in A\}.$$

Definindo em $K \oplus A$ a multiplicação

$$(\lambda_1, a_1)(\lambda_2, a_2) = (\lambda_1\lambda_2, \lambda_1a_2 + \lambda_2a_1 + a_1a_2),$$

temos que $K \oplus A$ é uma álgebra associativa com unidade, onde $1_{K \oplus A} = (1, 0)$.

A partir de agora, **todas as álgebras serão consideradas associativas**. Em toda álgebra A com unidade, identificamos $\lambda 1_A$ com λ para todo $\lambda \in K$ e K é considerado o subespaço vetorial de A gerado por K .

Definição 1.1.12. O comutador de comprimento n , com $n > 1$, é definido indutivamente como

$$[a_1, a_2] = a_1 a_2 - a_2 a_1,$$

$$[a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = [[a_1, \dots, a_{n-1}], a_n].$$

É claro que $[a, b] = 0$ se, e somente se, $ab = ba$. Em particular $[a, a] = 0$. Utilizando apenas a definição de comutador, verificamos facilmente que, para quaisquer $a, b, c \in A$, vale

$$[ab, c] = a [b, c] + [a, c] b.$$

De maneira mais geral, usando indução finita e a igualdade acima, mostra-se que

$$[a_1 \dots a_n, c] = \sum_{i=1}^n a_1 \dots a_{i-1} [a_i, c] a_{i+1} \dots a_n.$$

Também é fácil verificar que

$$[a, b, c] + [b, c, a] + [c, a, b] = 0$$

para quaisquer $a, b, c \in A$. Assim, ao considerarmos a multiplicação no anel A definida por

$$\begin{aligned} [\ , \] : A \times A &\longrightarrow A \\ (a, b) &\longmapsto [a, b] = ab - ba \end{aligned}$$

temos que $(A, [\ , \])$ é uma álgebra de Lie.

1.2 Identidades Polinomiais

Fixemos um conjunto infinito (enumerável) $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, cujos elementos serão chamados de *variáveis*. Uma *palavra* em X é uma sequência $x_{i_1} \dots x_{i_n}$ finita

de elementos de X , onde n é o *tamanho* da palavra e, caso $n = 0$, temos a *palavra vazia* denotada por 1.

Seja K um corpo e denotemos por $S(X)$ o conjunto de todas as palavras em X , inclusive a palavra vazia 1. Tais palavras são chamadas de *monômios* e o produto de dois monômios é dado por justaposição. Duas palavras $x_{i_1} \dots x_{i_n}$ e $x_{j_1} \dots x_{j_m}$ são iguais se $n = m$ e $i_k = j_k$ para $k = 1, \dots, n$. Definimos $K \langle X \rangle$ como sendo o K -espaço vetorial com base $S(X)$, isto é, é o conjunto dos polinômios com coeficientes em K e variáveis não comutativas $x_i \in X$. $K \langle X \rangle$ é uma álgebra, chamada de *álgebra associativa livre, livremente gerada por X sobre K* . Se $f \in K \langle X \rangle$, escrevemos $f(x_1, \dots, x_n)$ para indicar que $x_1, \dots, x_n \in X$ são as únicas variáveis que aparecem em f .

A álgebra $K \langle X \rangle$ é definida, a menos de isomorfismos, pela seguinte propriedade universal: dada uma K -álgebra associativa A , qualquer aplicação $h : X \rightarrow A$, com $h(x_i) = a_i$, pode ser estendida de forma única a um homomorfismo de álgebras $\phi_h : K \langle X \rangle \rightarrow A$, tal que $\phi_h(x_{i_1} \dots x_{i_n}) = a_{i_1} \dots a_{i_n}$. No caso de A ser unitária, temos também a condição $\phi_h(1) = 1_A$. Assim, se $f = f(x_1, \dots, x_n) \in K \langle X \rangle$, denotamos por $f(a_1, \dots, a_n)$ a imagem de f por ϕ_h , ou seja, basta substituir x_i por a_i em f .

Definição 1.2.1. *Seja $f = f(x_1, \dots, x_n) \in K \langle X \rangle$ e seja A uma álgebra (associativa). Dizemos que f é uma identidade polinomial para A se*

$$f(a_1, \dots, a_n) = 0, \text{ para todos } a_1, \dots, a_n \in A,$$

que denotaremos por $f(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$.

Se a álgebra A satisfaz uma identidade polinomial não trivial f , dizemos que A é uma álgebra com identidade polinomial ou PI-álgebra.

É interessante observar que se $f = f(x_1, \dots, x_n) \in K \langle X \rangle$ é uma identidade polinomial, então f tem termo constante nulo. Além disso, f é uma identidade polinomial de A se, e somente se, f pertence aos núcleos de todos os homomorfismos de $K \langle X \rangle$ em A .

Vejam alguns exemplos de identidades polinomiais.

Exemplo 1.2.2. Se A é uma álgebra comutativa, então o polinômio $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$ é uma identidade polinomial de A .

Exemplo 1.2.3. Qualquer álgebra nilpotente é uma PI-álgebra. Com efeito, se $A^n = 0$ para algum $n \geq 1$, então o polinômio $x_1 \dots x_n$ é uma identidade polinomial de A .

Exemplo 1.2.4. Se A é uma álgebra nil de índice limitado, digamos n , então o polinômio x^n é uma identidade polinomial de A .

Exemplo 1.2.5. Seja $U_n(K)$ a álgebra das matrizes triangulares superior com coeficientes em K . $U_n(K)$ é uma PI-álgebra, pois satisfaz a identidade

$$[x_1, x_2] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}] \equiv 0.$$

De fato, o comutador de quaisquer duas matrizes triangulares superior é uma matriz triangular superior com diagonal nula, que é uma matriz nilpotente de índice n .

Exemplo 1.2.6. A álgebra $M_2(K)$ satisfaz a identidade $[[x_1, x_2]^2, x_3] \equiv 0$, chamada de identidade de Hall. Com efeito, basta notarmos que, se $a \in M_2(K)$, seu polinômio característico é $x^2 - \text{tr}(a)x + \det(a)$, onde $\text{tr}(a)$ é o traço de a e $\det(a)$ seu determinante. Então, no caso de a ser um comutador, temos $\text{tr}(a) = 0$ e $a^2 + \det(a) \cdot I_2 = 0$, de onde $a^2 = -\det(a) \cdot I_2$. Logo a^2 é uma matriz escalar, que comuta com qualquer outra matriz.

Exemplo 1.2.7. O polinômio $[x_1, x_2, x_3]$ é uma identidade polinomial da álgebra de Grassmann E . Basta observar que $[a, b] \in E^{(0)}$ para quaisquer $a, b \in E$, logo comuta com qualquer elemento de E .

Consideremos o polinômio

$$s_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)},$$

onde S_n é o grupo simétrico sobre n elementos e $(-1)^\sigma$ é o sinal de σ . Este polinômio é chamado de *polinômio standard de grau n* .

Exemplo 1.2.8. Em 1950, Amitsur e Levitzki provaram que $s_{2n}(x_1, \dots, x_{2n})$ é uma identidade polinomial da álgebra $M_n(K)$. Este resultado é conhecido como Teorema de Amitsur-Levitzki, que será abordado com maiores detalhes adiante.

Tendo em vista os exemplos acima, seria possível pensar que as álgebras “mais conhecidas” são PI-álgebras. Entretanto, é fácil ver que a álgebra $K\langle X \rangle$ não possui identidades polinomiais não nulas.

Dada uma álgebra A , denotamos por $T(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais de A . É claro que A é PI-álgebra se $T(A) \neq \{0\}$. Se A_1 e A_2 são álgebras, dizemos que A_1 e A_2 são *PI-equivalentes* se $T(A_1) = T(A_2)$. Álgebras isomorfas são sempre PI-equivalentes, mas a recíproca não é verdadeira.

O conjunto $T(A)$ é um ideal de $K\langle X \rangle$ e, além disso, se $f = f(x_1, \dots, x_n)$ é um polinômio em $T(A)$, e g_1, \dots, g_n são polinômios arbitrários em $K\langle X \rangle$, segue que $f(g_1, \dots, g_n) \in T(A)$.

Denotamos o conjunto de todos os endomorfismos de $K\langle X \rangle$ por $End\ K\langle X \rangle$. Como qualquer elemento de $End\ K\langle X \rangle$ é determinado pela aplicação $x \mapsto g$, $x \in X, g \in K\langle X \rangle$, segue que $T(A)$ é um ideal invariante sob todos os endomorfismos de $K\langle X \rangle$. Os ideais com esta propriedade são chamados de T -ideais.

Definição 1.2.9. Dizemos que um ideal I de $K\langle X \rangle$ é um T -ideal se $\varphi(I) \subseteq I$ para todo $\varphi \in End\ K\langle X \rangle$, ou equivalentemente, se $f(g_1, \dots, g_n) \in I$ para quaisquer $f(x_1, \dots, x_n) \in I$ e $g_1, \dots, g_n \in K\langle X \rangle$.

Assim $T(A)$ é um T -ideal de $K\langle X \rangle$. Na verdade, todo T -ideal de $K\langle X \rangle$ é o conjunto de identidades polinomiais de alguma álgebra. De fato, se I é um T -ideal, temos que $I = T\left(\frac{K\langle X \rangle}{I}\right)$.

A intersecção de uma família qualquer de T -ideais é ainda um T -ideal. Dessa forma, dado um subconjunto S qualquer de $K\langle X \rangle$, definimos o T -ideal gerado por S , usualmente denotado por $\langle S \rangle^T$, como sendo a intersecção de todos os T -ideais de $K\langle X \rangle$ que contêm S . Então $\langle S \rangle^T$ é o menor T -ideal de $K\langle X \rangle$ contendo S e, se $f \in \langle S \rangle^T$, dizemos que f é *consequência* de S .

Se A é uma álgebra e $S \subseteq T(A)$ é tal que $T(A) = \langle S \rangle^T$, dizemos que S é uma *base das identidades* de A . O estudo da existência de base finita para as

identidades das álgebras associativas sobre corpos de característica zero é conhecida como *problema de Specht*. Em 1987, Kemer deu uma resposta positiva para este problema, mas seu trabalho não mostra como determinar uma tal base finita e portanto não resolve o problema da descrição das identidades de uma álgebra. Esta questão continua em aberto até hoje, tendo sido resolvido apenas para algumas álgebras em particular. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.2.10. *Se A é uma álgebra comutativa e unitária qualquer e K é um corpo infinito, então $T(A) = \langle [x_1, x_2] \rangle^T$. Dizemos então que todas as identidades de A são consequências do polinômio $[x_1, x_2]$.*

Este exemplo nos garante a existência de álgebras PI-equivalentes que não são isomorfas.

Exemplo 1.2.11. *Se K é um corpo infinito de característica diferente de 2, então $T(E) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$, onde E é a álgebra de Grassmann. (ver [2], Exemplo 4.0.40)*

Exemplo 1.2.12. *Em 1981 Drensky ([4]) mostrou que as identidades polinomiais*

$$s_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv 0, [[x_1, x_2]^2, x_3] \equiv 0$$

formam uma base minimal para as identidades polinomiais de $M_2(K)$.

Exemplo 1.2.13. *Considere a álgebra $E \otimes E$, onde E é a álgebra de Grassmann. Os polinômios*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = [[x_1, x_2], [x_3, x_4], x_5] \text{ e } g(x_1, x_2) = [[x_1, x_2]^2, x_1]$$

são identidades polinomiais de $E \otimes E$. Em 1982, Popov ([9]) mostrou que, em característica 0, estes dois polinômios formam uma base para as identidades de $E \otimes E$.

1.3 Polinômios Multi-homôneos e Multilineares

Nesta seção generalizamos conceitos básicos a respeito de polinômios, como grau e linearidade. Veremos também que, quando o corpo base K é infinito, o estudo de identidades polinomiais de uma dada álgebra pode ser reduzida ao estudo de polinômios homogêneos ou multilineares.

Definição 1.3.1. *Sejam $u \in K\langle X \rangle$ um monômio, $f \in K\langle X \rangle$ um polinômio e $x_i \in X$. Definimos:*

- (a) *O grau de u em x_i , denotado por $\deg_{x_i} u$, como sendo o número de ocorrências de x_i em u .*
- (b) *O grau de f em x_i , denotado por $\deg_{x_i} f$, como sendo o maior grau em x_i de algum monômio de f .*

Dizemos que um polinômio $f \in K\langle X \rangle$ é *homogêneo em x_i* se todos os seus monômios têm o mesmo grau em x_i . O polinômio f é dito *multi-homogêneo* quando é homogêneo em todas as variáveis. Se $u = u(x_1, \dots, x_n)$ é um monômio de $K\langle X \rangle$, definimos o *multigrado* de u como sendo a n -upla (a_1, \dots, a_n) onde $a_i = \deg_{x_i} u$. Para $f \in K\langle X \rangle$, a *componente multi-homogênea* de f é a soma de todos os monômios de f com um dado multigrado. Assim, f é multi-homogêneo se, e somente se, possui uma única componente multi-homogênea. É claro que se $f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$ é homogêneo de grau k em x_i e $\lambda \in K$, temos

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \lambda^k f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Em particular, se f é *linear* em x_i , isto é, homogêneo de grau 1 em x_i , temos

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_m y_m, x_{i+1}, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^m \lambda_j f(x_1, \dots, x_{i-1}, y_j, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Quando $f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$ é multi-homogêneo com multigrado $(1, \dots, 1)$, ou melhor, em cada monômio cada variável tem grau exatamente 1, dizemos que f é *multilinear*. Neste caso, f é da forma

$$\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}, \text{ com } \alpha_\sigma \in K.$$

Denotamos por P_n o subespaço de todos os polinômios multilineares de $K\langle X \rangle$ nas variáveis x_1, x_2, \dots, x_n . É fácil ver que o conjunto $\{x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$ é uma base de P_n e assim $\dim_K P_n = n!$.

Consideremos agora $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_n$, A uma K -álgebra e β um conjunto gerador de A , como espaço vetorial. Dados $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$, observemos que $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ é uma combinação linear de elementos da forma $f(e_1, e_2, \dots, e_n)$,

onde $e_1, e_2, \dots, e_n \in \beta$. Com isso, podemos concluir que $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é uma identidade polinomial de A se, e somente se, $f(e_1, e_2, \dots, e_n) = 0$ para quaisquer $e_1, e_2, \dots, e_n \in \beta$. Em outras palavras, para verificar se um polinômio multilinear f é uma identidade polinomial de A , basta verificar se f se anula quando avaliado em elementos geradores de A .

Este argumento nos permite mostrar que toda álgebra de dimensão finita é uma PI-álgebra. Com efeito, se A é uma álgebra com $\dim A < n$, então $s_n = 0$ é uma identidade polinomial de A . Na verdade, como a identidade standard é um polinômio multilinear, basta verificar que $s_n = 0$ para os elementos da base de A . Como $\dim A < n$, é necessário que $x_i = x_j$ para algum $i \neq j$. Com isso, os termos de $s_n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n)$ se anulam dois a dois. Para cada $\sigma \in S_n$, existe $\tau \in S_n$ obtida a partir de σ permutando as “posições” de x_i . É claro que σ e τ tem sinais opostos e, assim, cada termo $(-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(i)} \dots x_{\sigma(i)} \dots x_{\sigma(n)}$, é anulado por $(-1)^\tau x_{\tau(1)} \dots x_{\tau(i)} \dots x_{\tau(i)} \dots x_{\tau(n)}$. Logo, $s_n = 0$. O exemplo abaixo ilustra esta situação.

Exemplo 1.3.2. *Considere $n = 3$ e $\dim A = 2$, com base $\{a, b\}$. Temos*

$$\begin{aligned} S_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2x_3 + (-1)^{(132)}x_3x_1x_2 + (-1)^{(123)}x_2x_3x_1 \\ &+ (-1)^{(13)}x_3x_2x_1 + (-1)^{(23)}x_1x_3x_2 + (-1)^{(12)}x_2x_1x_3 \\ S_3(a, b, c) &= aba + aab + baa - aba - aab - baa = 0. \end{aligned}$$

Recordemos que uma identidade polinomial $f \equiv 0$ é consequência de $\langle S \rangle^T$ se $f \in \langle S \rangle^T$. Dois conjuntos de identidades polinomiais que geram o mesmo T -ideal são ditos *equivalentes*.

Teorema 1.3.3. *Sejam I um T -ideal de $K\langle X \rangle$ e $f(x_1, \dots, x_n) \in I$. Se K é infinito, então cada componente multi-homogênea de f pertence a I . Consequentemente, I é gerado por seus polinômios multi-homogêneos.*

Demonstração: Suponhamos $m = \deg_{x_1} f$. Para cada $i = 0, 1, \dots, n$, tomemos $f_i(x_1, \dots, x_n)$ como sendo a soma de todos os monômios que têm grau i em x_1 , ou seja, f_i é a componente homogênea de grau i em x_1 . Temos então $f = \sum_{i=0}^m f_i$.

Seja $V = \langle f \rangle^T$ o T -ideal de $K \langle X \rangle$ gerado por f . Como K é infinito, podemos escolher $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ todos distintos. Sendo V um T -ideal, temos

$$g_j = f(\lambda_j x_1, x_2, \dots, x_n) = f_0 + \lambda_j f_1 + \dots + \lambda_j^m f_m \in V,$$

para cada $j = 0, 1, \dots, m$.

Considerando estas equações como um sistema linear com variáveis f_i , $i = 0, 1, \dots, m$, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & \cdots & \lambda_0^m \\ 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}.$$

Como I é um T -ideal, garantimos que $g_j \in I$, para $j = 0, 1, \dots, m$. Além disso, a primeira matriz acima é a matriz de Vandermonde, cujo determinante é $\prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$. Logo, tal matriz é invertível, de onde obtemos que $f_0, f_1, \dots, f_m \in I$.

Agora, para cada $i = 0, 1, \dots, m$ e cada $t = 0, 1, 2, \dots$, tomemos f_{it} como sendo a componente homogênea em f_i de grau t em x_2 . Usando os mesmos argumentos acima, concluimos que $f_{it} \in I$. Repetindo o processo para cada variável, temos a primeira afirmação. Por fim, observamos que f é a soma de suas componentes multi-homogêneas e, portanto, I é gerado por seus polinômios multi-homogêneos. ■

Na prova do teorema abaixo utilizamos o *processo de multilinearização*.

Teorema 1.3.4. *Se a álgebra A satisfaz uma identidade polinomial de grau k , então satisfaz uma identidade multilinear de grau $\leq k$. Em outras palavras, toda PI-álgebra satisfaz alguma identidade multilinear não nula.*

Demonstração: Seja $f(x_1, \dots, x_n) \in K \langle X \rangle$ uma identidade polinomial de A . Se cada variável x_i satisfaz $\deg_{x_i} f \leq 1$, podemos renomear as variáveis (eventualmente, identificando algumas delas com 0), obtendo uma identidade polinomial multilinear como desejado.

Suponhamos então que alguma variável, digamos x_1 , satisfaz $m = \deg_{x_1} f > 1$. Tomemos y_1 e y_2 variáveis de X distintas de x_1, \dots, x_n , e consideramos um novo polinômio em $n + 1$ variáveis, dado por

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2, x_2, \dots, x_n) &= f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_n) \\ &- f(y_1, x_2, \dots, x_n) \\ &- f(y_2, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Este polinômio ainda é uma identidade polinomial de A . Basta verificar que é não nulo. Suponhamos que $g = 0$. Como qualquer aplicação $X \rightarrow X$ pode ser estendida a um endomorfismo de $K\langle X \rangle$, substituindo y_1 e y_2 por x_1 em g , ainda obtemos uma identidade polinomial, ou seja

$$g(x_1, x_1, x_2, \dots, x_n) = f(2x_1, x_2, \dots, x_n) - 2f(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Como $f = f_0 + f_1 + \dots + f_m$, onde f_i é a soma dos monômios de grau i em x_1 , temos

$$f_i(2x_1, x_2, \dots, x_n) = 2^i f_i(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Assim,

$$f_0 + 2f_1 + \dots + 2^m f_m = 2(f_0 + f_1 + \dots + f_m)$$

e

$$f_0 = (2^2 - 2)f_2 + \dots + (2^m - 2)f_m,$$

contradizendo $m = \deg_{x_1} f > 1$.

Então, como $\deg_{y_1} g = m - 1$, podemos repetir este processo até que o polinômio resultante seja linear em x_1 . Se tal polinômio não for multilinear, com, digamos, $\deg_{x_2} = d \geq 2$, aplicamos o processo para x_2 , obtendo um polinômio linear em x_1 e x_2 . Procedendo desta maneira para todas as variáveis, obtemos uma identidade polinomial multilinear de A . ■

Este método de multilinearização tem uma importante consequência, apresentada no teorema a seguir.

Teorema 1.3.5. *Se $\text{char}K = 0$, todo polinômio não nulo $f \in K\langle X \rangle$ é equivalente a um conjunto finito de polinômios multilineares.*

Demonstração: Como K é infinito, pelo Teorema 1.3.3, f é equivalente ao conjunto de suas componentes multi-homogêneas. Assim, podemos assumir que $f = f(x_1, \dots, x_n)$ é multi-homogêneo.

Aplicaremos o processo de multilinearização a f . Se $\deg_{x_1} f = m > 1$, escrevemos

$$f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^m f_i(y_1, y_2, x_2, \dots, x_n),$$

onde f_i é a componente homogênea de grau i em y_1 . Então todos os polinômios $f_i = f_i(y_1, y_2, x_2, \dots, x_n)$ são consequências de f . Como $\deg_{y_j} f_i < m$ para $i = 1, \dots, d-1$ e $j = 1, 2$, podemos repetir os argumentos e obter um conjunto de polinômios multilineares que são consequências de f .

Como $\deg_{y_1} f_i = i$, $\deg_{y_2} f_i = m - i$ e $\deg_{x_k} f_i = \deg_{x_k} f$, para $k = 2, \dots, n$, temos:

$$\begin{aligned} f_0(y_1, y_1, x_2, \dots, x_n) &= f(y_1, x_2, \dots, x_n), \\ f_1(y_1, y_1, x_2, \dots, x_n) &= mf(y_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ f_{m-1}(y_1, y_1, x_2, \dots, x_n) &= mf(y_1, x_2, \dots, x_n), \\ f_m(y_1, y_1, x_2, \dots, x_n) &= f(y_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Assim

$$f_i(y_1, y_1, x_2, \dots, x_m) = \binom{m}{i} f(y_1, x_2, \dots, x_m),$$

e os coeficientes binomiais são não nulos, pois $\text{char}K = 0$. Logo, estas identidades multilineares são equivalentes a f . ■

O corolário abaixo segue diretamente do teorema.

Corolário 1.3.6. *Se I é um T -ideal de $K\langle X \rangle$ e $\text{char}K = 0$, então I é gerado por seus polinômios multilineares.*

Com estes resultados podemos garantir que todo T -ideal é gerado por seus polinômios multilineares quando o corpo base tem característica zero, e por seus

polinômios multi-homogêneos quando o corpo base é infinito. Esta redução é importante quando trabalhamos com PI-álgebras, uma vez que simplifica o estudo dos T -ideais.

1.4 Polinômios Próprios

Sendo $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, denotamos por $\text{Com}(X)$ o conjunto

$$\{[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}] \mid k \geq 2, x_{i_j} \in X\},$$

onde 1 é o produto de um conjunto vazio de comutadores. Seja $B(X)$ a subálgebra de $K\langle X \rangle$ gerada por $\text{Com}(X)$. Os polinômios $f \in B(X)$ são chamados de *polinômios próprios*.

O resultado a seguir garante que os elementos de X e de $B(X)$ formam uma base para $K\langle X \rangle$. A demonstração deste fato pode ser encontrada em [3, pág. 42].

Teorema 1.4.1. *Se $f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$, então existem polinômios $w_a(x_1, \dots, x_n) \in B(X)$, onde $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$, tais que*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_a x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} w_a(x_1, \dots, x_n).$$

Isto significa que, dado um polinômio qualquer, podemos escrevê-lo na forma apresentada no teorema, utilizando as propriedades do comutador. Vejamos um exemplo.

Exemplo 1.4.2. *Considere o polinômio $f(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_1^2 x_3$. Como $ab = ba + [a, b]$ e $[ab, c] = [a, c]b + a[b, c]$, temos*

$$\begin{aligned} x_2 x_1^2 x_3 &= x_1^2 x_2 x_3 + [x_2, x_1^2] x_3 \\ &= x_1^2 x_2 x_3 + [x_2, x_1] x_1 x_3 + x_1 [x_2, x_1] x_3. \end{aligned}$$

Agora, notemos que

$$\begin{aligned} [x_2, x_1] x_1 x_3 &= x_1 [x_2, x_1] x_3 + [x_2, x_1, x_1] x_3 \\ &= x_1 x_3 [x_2, x_1] + x_1 [x_2, x_1, x_3] + x_3 [x_2, x_1, x_1] + [x_2, x_1, x_1, x_3] \end{aligned}$$

e

$$x_1 [x_2, x_1] x_3 = x_1 x_3 [x_2, x_1] + x_1 [x_2, x_1, x_3].$$

Então

$$\begin{aligned} x_2 x_1^2 x_3 &= x_1^2 x_2 x_3 + 2x_1 x_3 [x_2, x_1] + 2x_1 [x_2, x_1, x_3] \\ &+ x_3 [x_2, x_1, x_1] + [x_2, x_1, x_1, x_3] \end{aligned}$$

Observemos que, considerando $a_1 = \dots = a_n = 0$ no Teorema 1.4.1, temos uma base para $B(X)$.

O teorema abaixo garante que as identidades polinomiais de uma K -álgebra, com K infinito, são consequências das identidades próprias. Em particular, se $\text{char}K = 0$, então as identidades polinomiais de uma K -álgebra são consequências das identidades multilineares próprias.

Teorema 1.4.3. *Se K é um corpo infinito e I é um ideal de $K\langle X \rangle$, então*

$$I = \langle I \cap B(X) \rangle^T,$$

ou seja, I é gerado (como T -ideal) por seus polinômios próprios.

Esta demonstração também pode ser encontrada em [3], na seção 4.3.

1.5 O Teorema de Amitsur-Levitzki

Para finalizar o primeiro capítulo, abordaremos com maiores detalhes o Teorema de Amitsur-Levitzki.

Consideremos $s_n(x_1, \dots, x_n)$, o polinômio standard de grau n . Observemos que o polinômio standard de grau $n + 1$ é consequência do polinômio standard de grau n , ou seja, se s_n é uma identidade polinomial para uma álgebra A , s_{n+1} também é. Com efeito, basta ver que

$$s_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} x_i s_n(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1}),$$

onde \widehat{x}_i significa que x_i não está na expressão.

Recordemos também que, se A é uma álgebra finitamente gerada com $\dim A < n$, então $s_n = 0$ é uma identidade polinomial para A . Em particular, a dimensão de $M_n(K)$ é n^2 , então esta álgebra satisfaz qualquer identidade standard de grau $m \geq n^2 + 1$. Entretanto, este não é o grau mínimo para que um polinômio standard seja identidade polinomial de $M_n(K)$. Amitsur e Levitzki mostraram, em 1950, que o polinômio standard de grau $2n$ é uma identidade polinomial para a álgebra das matrizes $n \times n$ sobre um corpo K . Tal resultado é conhecido como Teorema de Amitsur-Levitzki.

Teorema 1.5.1 (Teorema de Amitsur-Levitzki). *A álgebra das matrizes $M_n(K)$ satisfaz a identidade standard de grau $2n$*

$$s_{2n}(x_1, \dots, x_{2n}) = 0.$$

A demonstração original deste resultado é baseada em argumentos combinatórios e, em [3], são encontrada mais duas demonstrações distintas, de Razmyslov e de Rosset, ambas utilizando argumentos algébricos. Neste texto, apresentaremos apenas a demonstração de Razmyslov, com o objetivo de compará-la à demonstração utilizando o teorema de Swan, que veremos no próximo capítulo, mas antes são necessárias algumas considerações.

Notemos que a validade do Teorema de Amitsur-Levitzki para $M_n(\mathbb{Q})$ implica a validade do resultado para $M_n(K)$, com K um corpo qualquer. De fato, sejam A_1, \dots, A_{2n} matrizes em $M_n(K)$. Podemos escrevê-las como

$$A_k = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij}^{(k)} E_{ij},$$

onde E_{ij} são matrizes elementares (possuem 0 em todas as entradas, exceto na posição (i, j) , que tem valor 1), e $\lambda_{ij}^{(k)} \in K$. Dessa forma, como a identidade standard é um polinômio multilinear, temos que $s_{2n}(A_1, \dots, A_{2n})$ é uma combinação linear de $s_{2n}(E_{i_1 j_1}, \dots, E_{i_{2n} j_{2n}})$. Cada termo $s_{2n}(E_{i_1 j_1}, \dots, E_{i_{2n} j_{2n}})$ é igual a 0, uma vez que assumimos a validade do teorema para $M_n(\mathbb{Q})$, e portanto, $s_{2n}(A_1, \dots, A_{2n}) = 0$.

O resultado a seguir utiliza o processo de multilinearização para garantir que o grau da identidade standard no Teorema de Amitsur-Levitzki é mínimo.

Proposição 1.5.2. *A álgebra $M_n(K)$ não satisfaz uma identidade polinomial de grau menor que $2n$.*

Demonstração: Seja $f(x_1, \dots, x_k)$ uma identidade polinomial em $M_n(K)$ de grau $k < 2n$. Pelo Teorema 1.3.4, podemos assumir que $f(x_1, \dots, x_k)$ é multilinear, e pode ser escrito como

$$f(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\sigma \in S_k} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(k)}$$

com $\alpha_\sigma \in K$.

Vejam que $\alpha_\sigma = 0$, para qualquer $\sigma \in S_k$, e logo $f(x_1, \dots, x_k)$ é o polinômio nulo. Consideremos as matrizes $E_{11}, E_{12}, E_{22}, E_{23}, \dots, E_{pq}$, onde $p = q$ se k é ímpar, e $p = q - 1$ se k é par.

Como o produto de matrizes elementares satisfaz

$$E_{ij}E_{hk} = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq h \\ E_{ik}, & \text{se } j = h \end{cases},$$

temos que

$$f(E_{11}, E_{12}, E_{22}, E_{23}, \dots, E_{pq}) = \alpha_\epsilon E_{1q},$$

onde ϵ é a permutação identidade de S_k . Logo $\alpha_\epsilon = 0$.

Para qualquer $\sigma \in S_k$, existe $\sigma^{-1} \in S_k$ tal que $\sigma \circ \sigma^{-1} = \epsilon$. Consideremos

$$f(x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(k)}).$$

Fazendo as substituições

$$\begin{aligned} x_{\sigma^{-1}(1)} &\mapsto E_{11}, \\ x_{\sigma^{-1}(2)} &\mapsto E_{12}, \\ x_{\sigma^{-1}(3)} &\mapsto E_{22}, \\ &\vdots \\ x_{\sigma^{-1}(k)} &\mapsto E_{pq}, \end{aligned}$$

obtemos $\alpha_\sigma E_{1q}$, de onde concluímos que $\alpha_\sigma = 0$ para qualquer $\sigma \in S_k$. ■

O próximo resultado garante que, a menos de multiplicação por constantes, não existe outra identidade multilinear de grau $2n$ em $M_n(K)$ diferente da identidade standard.

Proposição 1.5.3. *Se $f(x_1, \dots, x_{2n})$ é uma identidade polinomial multilinear de grau $2n$ em $M_n(K)$, então*

$$f(x_1, \dots, x_{2n}) = \alpha_{S_{2n}}(x_1, \dots, x_{2n}), \alpha \in K.$$

Demonstração: Como $f(x_1, \dots, x_{2n})$ é uma identidade polinomial multilinear, podemos escrevê-la como

$$f(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} \alpha_{\sigma} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(2n)}.$$

Escolhendo as matrizes elementares $E_{11}, E_{12}, E_{22}, E_{23}, \dots, E_{k-1,k}, E_{kk}$, temos

$$0 = f(E_{11}, E_{11}, E_{12}, E_{22}, E_{23}, \dots, E_{k-1,k}, E_{kk}) = (\alpha_{\epsilon} + \alpha_{(12)}) E_{1k},$$

de onde $\alpha_{\epsilon} + \alpha_{(12)} = 0$.

Notemos que a matriz E_{11} ocupa as posições 1 e 2. Dessa forma, os únicos termos não nulos são os termos referentes à permutação identidade e a transposição (12). De maneira geral, seja $\sigma \in S_{2n}$ e τ a permutação resultante de uma transposição de dois elementos consecutivos aplicada a σ . Se τ permuta j e $j+1$, devemos considerar as matrizes $E_{11}, E_{12}, E_{22}, \dots, E_{ii}, E_{ii}, \dots, E_{kk}$, onde E_{ii} aparece nas posições j e $j+1$. Consideremos

$$f(x_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(1))}, x_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(2))}, \dots, x_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(j))}, x_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(j+1))}, \dots, x_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(k))}).$$

As substituições

$$\begin{aligned} x_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(1))} &\mapsto E_{11}, \\ x_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(2))} &\mapsto E_{12}, \\ x_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(3))} &\mapsto E_{22}, \\ &\vdots \\ x_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(j))} &\mapsto E_{ii}, \\ x_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(j+1))} &\mapsto E_{ii}, \\ &\vdots \\ x_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(2n))} &\mapsto E_{kk}, \end{aligned}$$

nos garantem que $0 = (\alpha_\sigma + \alpha_\tau) E_{1k}$, e $\alpha_\sigma + \alpha_\tau = 0$. Utilizando o mesmo raciocínio para τ , obtemos $\alpha_\tau + \alpha_\gamma = 0$, onde γ é uma permutação obtida de τ a partir da transposição de dois elementos consecutivos.

Como $\alpha_\sigma = -\alpha_\tau = \alpha_\gamma$, podemos concluir que os coeficientes de f assumem o mesmo valor em módulo, apenas acompanhados do sinal da permutação associada. Com isso $\alpha_\sigma = (-1)^\sigma \alpha$, com $\alpha \in K$ e, portanto,

$$f(x_1, \dots, x_{2n}) = \alpha \sum_{\sigma \in S_{2n}} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(2n)} = \alpha s_{2n}(x_1, \dots, x_{2n}).$$

■

As proposições acima e o Teorema de Amitsur-Levitzki garantem que, a menos de uma constante multiplicativa, a identidade standard é a única identidade polinomial multilinear de grau $2n$ de $M_n(K)$, e este grau é o menor possível.

O lema a seguir é um resultado técnico utilizado na demonstração de Razmyslov do Teorema de Amitsur-Levitzki, e, para sua demonstração, são necessárias algumas considerações.

Dizemos que um polinômio $f(x_1, \dots, x_n)$ é simétrico se $f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$, onde σ é uma permutação qualquer de (x_1, \dots, x_n) . Em particular, o *polinômio simétrico elementar* de grau q em n variáveis, denotado por $e_q(x_1, \dots, x_n)$, é definido por

$$e_q(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } q = 0; \\ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_q \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_q} & , \text{ se } q \in \{1, \dots, n\}; \\ 0 & , \text{ se } q > n. \end{cases}$$

O polinômio $p_q(x_1, \dots, x_n) = x_1^q + \dots + x_n^q$ é chamado de *soma de potências* de grau q em n variáveis. Os polinômios e_q e p_q em n variáveis se relacionam de acordo com as expressões

$$p_q - p_{q-1}e_1 + p_{q-2}e_2 - \dots + (-1)^{q-1}p_1e_{q-1} + (-1)^q q e_q = 0,$$

se $q \leq n$, e

$$p_q - p_{q-1}e_1 + p_{q-2}e_2 - \dots + (-1)^{n-1}p_{q-n+1}e_{n-1} + (-1)^n p_{q-n}e_n = 0,$$

para $k > n$, conhecidas como *identidades de Newton*. Para mais informações sobre polinômios simétricos, sugerimos [5], seção 1.6.

Lema 1.5.4. *Sejam $A \in M_n(K)$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ seus autovalores. Definindo $e_q(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ como o polinômio simétrico elementar de grau q em $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, então*

$$A^n + \sum_{q=1}^n (-1)^q e_q(\alpha_1, \dots, \alpha_n) A^{n-q} = 0,$$

e

$$\text{tr}(A^q) = \alpha_1^q + \dots + \alpha_n^q.$$

Demonstração: Escrevendo a matriz A em sua forma normal de Jordan J_A , temos que seus autovalores aparecem na diagonal principal e com valor 1 em algumas posições logo abaixo da diagonal principal. O polinômio característico de J_A é dado por

$$p_{J_A}(\lambda) = \det(\lambda I_n - J_A) = (\lambda - \alpha_1) \dots (\lambda - \alpha_n).$$

Pelo Teorema de Cayley-Hamilton,

$$0 = p_A(A) = p_{J_A}(A) = (A - \alpha_1 \cdot I_n) \dots (A - \alpha_n \cdot I_n),$$

já que A e J_A são matrizes semelhantes e possuem o mesmo polinômio característico. Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= A^n - A^{n-1}(\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \\ &+ A^{n-2}(\alpha_1\alpha_2 + \dots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \dots + \alpha_2\alpha_n \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n) \\ &+ \dots + (-1)^n A^0(\alpha_1 \dots \alpha_n). \end{aligned}$$

Como $e_q(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é o polinômio simétrico elementar de grau q , podemos escrever

$$p_{J_A} = A^n + \sum_{q=1}^n (-1)^q e_q(\alpha_1, \dots, \alpha_n) A^{n-q} = 0.$$

Por fim, como matrizes semelhantes possuem o mesmo traço, temos que

$$\text{tr}(A^q) = \text{tr}(J_A^q) = \alpha_1^q + \dots + \alpha_n^q.$$

■

Vejamos, finalmente, uma demonstração do famoso Teorema de Amitsur-Levitzki.

Demonstração: [Teorema de Amitsur-Levitzki, [3]]

Como foi observado anteriormente, podemos considerar $K = \mathbb{Q}$. Consideremos os polinômios

$$p_q(\xi_1, \dots, \xi_n) = \xi_1^q + \dots + \xi_n^q.$$

Sabemos que, para $q \leq n$, vale

$$p_q - e_1 p_{q-1} + e_2 p_{q-2} - \dots + (-1)^{q-1} e_{q-1} p_1 + (-1)^q q e_q = 0, \quad (1.1)$$

onde e_q é o polinômio simétrico elementar de grau q . Esta expressão nos permite escrever $e_q(\xi_1, \dots, \xi_n)$ em função de polinômios $p_q(\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Verificaremos a validade do resultado para o caso $n = 2$. O argumento é o mesmo para o caso geral, apenas com maiores dificuldades técnicas.

Sejam $A \in M_2(\mathbb{Q})$ e ξ_1, ξ_2 seus autovalores. Como $\text{tr}(A) = \xi_1 + \xi_2 = e_1(\xi_1, \xi_2)$ e $\det(A) = \xi_1 \xi_2 = e_2(\xi_1, \xi_2)$, o Teorema de Cayley-Hamilton nos garante que

$$A^2 - e_1(\xi_1, \xi_2) A + e_2(\xi_1, \xi_2) I_2 = 0, \quad (1.2)$$

onde I_2 é a matriz identidade de ordem 2×2 .

Utilizando a expressão (1.1), temos $e_1(\xi_1, \xi_2) = p_1(\xi_1, \xi_2)$ e

$$\begin{aligned} e_2(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{2} (e_1(\xi_1, \xi_2) p_1(\xi_1, \xi_2) - p_2(\xi_1, \xi_2)) \\ &= \frac{1}{2} (p_1^2(\xi_1, \xi_2) - p_2(\xi_1, \xi_2)), \end{aligned}$$

e então (1.2) fica

$$A^2 - \text{tr}(A)A + \frac{1}{2} (\text{tr}^2(A) - \text{tr}(A^2)) I_2 = 0.$$

Assim $f(x) = x^2 - \text{tr}(x)x + \frac{1}{2} (\text{tr}^2(x) - \text{tr}(x^2)) I_2$ é uma identidade polinomial em $M_2(K)$. Aplicando o processo de linearização, obtemos

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2) &= y_1 y_2 + y_2 y_1 - (\text{tr}(y_1) y_2 + \text{tr}(y_2) y_1) \\ &+ \frac{1}{2} [\text{tr}(y_1) \text{tr}(y_2) + \text{tr}(y_2) \text{tr}(y_1) - \text{tr}(y_1 y_2 + y_2 y_1)] I_2 \end{aligned}$$

e, como $\text{tr}(y_1)\text{tr}(y_2) = \text{tr}(y_2)\text{tr}(y_1)$ e $\text{tr}(y_1y_2) = \text{tr}(y_2y_1)$, concluímos que $M_2(\mathbb{Q})$ satisfaz a identidade polinomial multilinear

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2) &= y_1y_2 + y_2y_1 - (\text{tr}(y_1)y_2 + \text{tr}(y_2)y_1) \\ &+ [\text{tr}(y_1)\text{tr}(y_2) - \text{tr}(y_1y_2)] I_2 \end{aligned}$$

Substituindo $y_1 = x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}$ e $y_2 = x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}$, e tomando a soma alternante em $\sigma \in S_4$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma f(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}) &= 2 \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}) \quad (1.3) \\ &+ \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma [(\text{tr}(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}) \text{tr}(x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)})) \\ &- \text{tr}(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)})] I_2 \\ &- \text{tr}(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}) x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)} \\ &- \text{tr}(x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}) x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \text{tr}(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}) &= \text{tr}(x_{\sigma(2)}x_{\sigma(1)}), \\ \text{tr}(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}) &= \text{tr}(x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}x_{\sigma(1)}), \end{aligned}$$

e também em cada um dos pares

$$\begin{aligned} (x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}) &\text{ e } (x_{\sigma(2)}x_{\sigma(1)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}), \\ (x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}) &\text{ e } (x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}x_{\sigma(1)}) \end{aligned}$$

as permutações possuem sinais diferentes, então

- $\sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma \text{tr}(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}) x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)} = 0$, pois

$$\text{tr}(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}) x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)} = \text{tr}(x_{\sigma(2)}x_{\sigma(1)}) x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}.$$

Analogamente, $\text{tr}(x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}) x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} = 0$.

- $\sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma \text{tr}(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}) \text{tr}(x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}) = 0$, pois

$$\text{tr}(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}) \text{tr}(x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}) = \text{tr}(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}) \text{tr}(x_{\sigma(4)}x_{\sigma(3)}).$$

- $\sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma \text{tr} (x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)}) = 0$, pois $\text{tr} (x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)})$ tem o mesmo valor para qualquer permutação de $x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}$.

Logo, os termos envolvendo o traço da matriz são todos nulos em (1.3) e, portanto,

$$2s_4 = 2 \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)}),$$

de onde

$$s_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv 0$$

em $M_2(\mathbb{Q})$. ■

É evidente a dificuldade técnica que esta demonstração envolve, mesmo para o caso $n = 2$. Em [13], Swan apresentou uma demonstração bastante simples para o Teorema de Amitsur-Levitzki, utilizando Teoria de Grafos, que trataremos no próximo capítulo.

Capítulo 2

Grafos Eulerianos

2.1 Teoria de Grafos

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos e resultados da Teoria de Grafos, necessários para compreensão dos trabalhos de Swan ([13] e [14]) e de Hutchinson ([7]), tendo como referência principal o livro de Bondy e Murty ([1]).

Um grafo G é uma tripla ordenada $(V(G), E(G), \psi_G)$, que consiste em um conjunto $V(G)$ não vazio de pontos, chamado de *vértices*, um conjunto (disjunto de $V(G)$) de segmentos $E(G)$, chamados de *arestas*, e uma *função de incidência* ψ_G , que associa cada aresta de G a um par de vértices (não necessariamente distintos) de G . No caso de grafos *direcionados*, a função de incidência associa cada aresta a um par ordenado de vértices, não necessariamente distintos. Nas definições a seguir, o termo grafo é utilizado para se referir a grafos direcionados e não direcionados.

Um grafo H é *subgrafo* de G (denotado por $H \subseteq G$) se $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ e ψ_H é uma restrição de ψ_G a $E(H)$. Todo grafo pode ser representado por um diagrama, onde cada vértice é indicado por um ponto e cada aresta se torna um segmento ligando os pontos que representam seus extremos. Se o grafo é direcionado, os segmentos são orientados e, por isso, alguns textos utilizam *grafos orientados* ao invés de grafos direcionados. É claro que não existe uma única forma de representar um grafo, já que a posição dos pontos que representam os vértices e a maneira de traçar os segmentos representando as arestas não interferem nas pro-

priedades do grafo. O exemplo a seguir exhibe um grafo não direcionado G com uma de suas possíveis representações, e um grafo direcionado H , obtido ao escolhermos uma orientação em G .

Exemplo 2.1.1. $G = (V(G), E(G), \psi_G)$, onde

$$V(G) = \{P_1, P_2, P_3, P_4\},$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

e

$$\psi_G(e_1) = P_1P_2, \psi_G(e_2) = P_2P_3, \psi_G(e_3) = P_3P_4,$$

$$\psi_G(e_4) = P_4P_1, \psi_G(e_5) = P_1P_3, \psi_G(e_6) = P_2P_4$$

é um grafo.

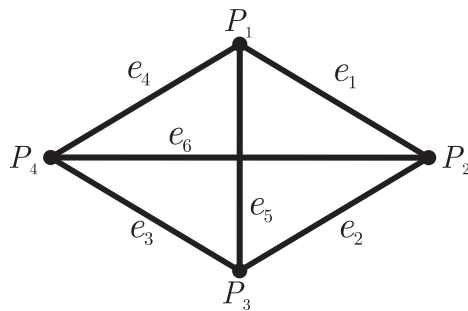


Figura 2.1: Grafo não direcionado G

Consideremos agora H , onde $V(H) = V(G)$ e $E(H) = E(G)$, mas ψ_H associa cada aresta e_k a um par ordenado (P_i, P_j) de vértices.

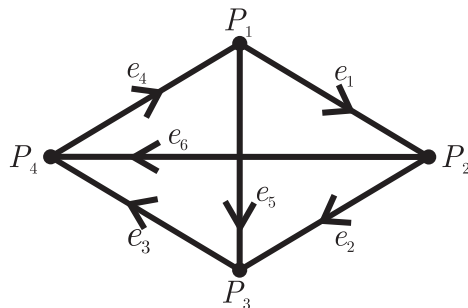


Figura 2.2: Grafo direcionado H

Notemos que, em ambos os diagramas acima, as arestas e_5 e e_6 se cruzam em um ponto que não é um vértice. Os grafos representados por diagramas nos quais as arestas se cruzam apenas em vértices são chamados de *planares*. Se e é uma aresta e P e Q são vértices tais que $\psi_G(e) = PQ$, dizemos que e *liga* P e Q , e P e Q são os *extremos* de e . Dizemos também que os extremos de uma aresta são *incidentes* à aresta, e vice-versa. Dois vértices incidentes à uma mesma aresta são chamados de *adjacentes*, assim como duas arestas incidentes a um mesmo vértice.

Observemos que não excluimos a possibilidade de existir uma aresta ligando um vértice a ele mesmo. Tal aresta é chamada de *loop*. Também é possível que dois vértices estejam ligados por mais de uma aresta. Grafos que não possuem loops e nos quais dois vértices são ligados por uma única aresta são chamados de *simples*.

Seja V o número de vértices e E o número total de arestas de G . Neste texto vamos considerar apenas grafos *finitos*, ou seja, quando V e E são finitos. Um grafo que contém apenas um vértice é chamado de *trivial*. Se P é um vértice qualquer de G , definimos o *grau* de P como sendo o total de arestas que iniciam ou terminam em P . Uma aresta que liga P a si mesmo é contada duas vezes. Especificamente para o caso de grafos direcionados, definimos o *fluxo* de P como o número de arestas começando em P menos o número de arestas que terminam em P .

Um *caminho* em G é uma sequência não nula $\omega = P_0e_1P_1e_2 \dots e_kP_k$, cujos termos são, alternadamente, vértices e arestas, tais que os extremos de e_i são P_{i-1} e P_i , para $1 \leq i \leq k$. Dizemos que ω é um caminho de P_0 a P_k , chamados de *ponto inicial* e *ponto final* de ω , respectivamente. O inteiro k é o *comprimento* de ω . Geralmente omitimos os vértices ao escrever um caminho, escrevendo apenas $\omega = e_1e_2 \dots e_k$.

Dois vértices P e Q estão *conectados* se existe um caminho ω de P a Q em G . Definimos uma relação de equivalência em $V(G)$, considerando que P e Q estão na mesma classe se, e somente se, P e Q estão conectados. Então existe uma partição de $V(G)$ em conjuntos V_1, \dots, V_r , e os subgrafos G_1, \dots, G_r são as *componentes* de G . Se G possui apenas uma componente, dizemos que G é *conexo*, caso contrário, G é *desconexo*.

A partir de agora, assumimos que nenhum vértice de G tem grau 0 e que **um**

caminho em G é uma sequência de arestas distintas. Na demonstração do Teorema de Amitsur-Levitzki a partir de Teoria de Grafos é considerado um tipo especial de caminho, chamado de *caminho euleriano*.

Definição 2.1.2. *Se P e Q são vértices de G , um caminho euleriano de P a Q consiste em uma enumeração e_1, \dots, e_E de todas as arestas de G de tal forma que*

- (a) e_1 começa em P .
- (b) e_E termina em Q .
- (c) Para $1 \leq i < E$, o ponto inicial de e_{i+1} é o ponto final de e_i .

Intuitivamente, um caminho euleriano é uma forma de percorrer o grafo, de P a Q , passando por todas as arestas exatamente uma vez, respeitando a orientação. Um grafo que possui um caminho euleriano é chamado de *grafo euleriano*.

A proposição abaixo exibe uma condição necessária e suficiente para que um grafo conexo seja euleriano.

Proposição 2.1.3. *Seja G um grafo conexo não trivial. Denotando por P e Q o ponto inicial e final, respectivamente, de um caminho euleriano em G , temos:*

(a) *G é euleriano com $P = Q$ se, e somente se, todo vértice de G tem grau par. Nestas condições, qualquer ponto de G pode ser tomado como ponto inicial e final de um caminho euleriano.*

(b) *G é euleriano com $P \neq Q$ se, e somente se, P e Q são os únicos vértices de G que possuem grau ímpar. Nestas condições, qualquer caminho euleriano em G deve começar em P (respec. Q) e terminar em Q (respec. P).*

Demonstração: (a) Seja G um grafo euleriano com caminho euleriano ω , no qual $P = Q$. Tomemos U um vértice arbitrário de G . Se U não é ponto inicial de ω (e logo, também não é ponto final), cada vez que U aparece em ω contamos duas arestas: uma para “chegar” e outra para “sair” de U . No caso de U ser ponto inicial de ω , contamos uma aresta ao “sair” de U pela primeira vez, e outra ao “chegar” a U pela última vez, enquanto todas as outras ocorrências de U em ω contribui com valor 2 ao grau de U . Portanto, em ambas as situações, U tem grau par.

Por outro lado, suponhamos G um grafo conexo não trivial, no qual todo vértice tem grau par. Faremos por indução sobre o número de arestas E . Para $E = 2$ e

$E = 3$, as únicas possibilidades para que G satisfaça as hipóteses do teorema é se G tiver as seguintes representações

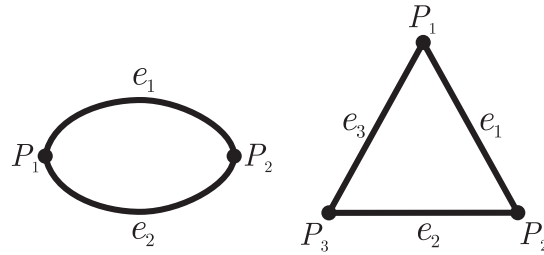


Figura 2.3: Casos $E = 2$ e $E = 3$

Em ambos os caso, G será euleriano. Assumimos então que todo grafo conexo não trivial contendo apenas vértices de grau par e com menos de E arestas ($E \geq 4$) é euleriano.

Seja G um grafo conexo não trivial com E arestas. Para um vértice W em G , consideremos ω um caminho euleriano de W a W . Tal caminho euleriano sempre existe em G , uma vez que se ω_0 é um caminho qualquer de W a U , com $W \neq U$, então necessariamente um número ímpar de arestas de G incidentes a U estão presentes em ω_0 . Haveria, assim, ao menos uma aresta incidente a U de tal forma que o caminho ω_0 poderia ser estendido a um caminho ω_1 , também começando em W e com mais arestas que o anterior. Caso ω_1 não termine em W , o mesmo argumento nos permite estendê-lo a um novo caminho. Procedendo desta forma, obtemos o caminho ω de W a W como desejado.

Se ω contém toda aresta de G , é um caminho euleriano e, portanto, G é euleriano. Caso contrário, existem arestas de G que não estão em ω , e o grafo G' , obtido a partir de G removendo as arestas presentes em ω e qualquer vértice isolado resultante, é não trivial. Todos os vértices de G' tem grau par e cada uma de suas componentes (conexas) é um grafo não trivial com menos de E arestas, logo é euleriano.

Como G é conexo, toda componente H_i' de G' contém um vértice W_i que também está em ω . Então podemos considerar em G o caminho euleriano $\bar{\omega}$, que é o caminho ω acrescentado do caminho euleriano de cada componente H_i no ponto

W_i , em uma das vezes que W_i ocorre em ω . Em outras palavras, ao percorrer ω , incluímos o caminho euleriano de H_i na primeira ocorrência do ponto W_i . Este caminho resultante $\bar{\omega}$ é euleriano em G .

(b) Supondo G euleriano, podemos aplicar o mesmo raciocínio do item acima para concluir que apenas P e Q possuem grau ímpar.

Assumimos que G é um grafo conexo não trivial, no qual apenas dois vértices, U e W , tenham grau ímpar. Se G não contém a aresta e que liga U e W , então o grafo $G + \{e\}$ é euleriano, uma vez que todos os vértices passam a ter grau par. Assim, existe um caminho euleriano de U a U , no qual a última aresta percorrida é e . Removendo esta aresta, temos um caminho euleriano de U a W e, portanto, G é euleriano.

Se G possui aresta ligando U a W , podemos adicionar um novo vértice Z e duas arestas e e e' , que ligam U a Z e W a Z , respectivamente. Este novo grafo H é euleriano, já que todo vértice possui grau par, e então existe um caminho euleriano de U a U no qual as últimas arestas percorridas são e e e' . Removendo estas arestas, obtemos um caminho euleriano em G de U a W . Logo, G é euleriano. ■

Há um resultado semelhante para grafos direcionados, que exhibe condições necessárias para a existência de caminhos eulerianos nestes grafos.

Proposição 2.1.4. *Seja G um grafo não trivial e P, Q vértices de G . Se existe um caminho euleriano de P a Q , então:*

- (a) G é conexo.
- (b) Todo vértice diferente de P e Q tem fluxo 0.
- (c) Se $P = Q$, então P tem fluxo 0.
- (d) Se $P \neq Q$, então P tem fluxo +1 e Q tem fluxo -1.

Demonstração: A validade de (a) é óbvia, pois se G não fosse conexo, não existiria caminho de P a Q passando por todas as arestas de G . Para verificar o item (b), basta notar que, como um caminho euleriano de P a Q percorre cada aresta exatamente uma vez, toda vez que “chegamos” a um ponto M (diferente de P e Q) por uma aresta, devemos “sair” de M por uma aresta distinta. Logo, M

possui um número par de arestas incidentes a ele, onde metade delas começa em M e a outra metade termina em M , ou seja, o fluxo de M é 0. O mesmo raciocínio pode ser aplicado ao item (c): se $P = Q$, toda vez que o caminho euleriano passa por este ponto, “saímos” por uma aresta e “chegamos” por outra distinta, inclusive na primeira e na última aresta percorridas. Por fim, para o item (d), se $P \neq Q$, “saímos” de P uma vez a mais do que “chegamos” a ele, e, para Q , acontece o oposto. ■

Notemos que se um grafo G possui um caminho euleriano de P a Q , com $P \neq Q$, então P e Q são unicamente determinados. Caso contrário, podemos escolher qualquer vértice como ponto inicial P do caminho euleriano em G .

Um importante resultado relacionando grafos e aplicações em álgebra é o Teorema de Swan, para o qual dedicamos a próxima seção.

2.2 O Teorema de Swan

Seja G um grafo direcionado e fixemos uma ordenação e_1, \dots, e_E arbitrária das arestas de G . Para cada $\sigma \in S_E$, a sequência $\omega = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(E)})$ define uma *permutação das arestas* de G . O sinal de ω , denotado por $\text{sign}(\omega)$, é o sinal da permutação associada σ . É claro que nem toda permutação nas arestas é um caminho euleriano, mesmo que o grafo seja euleriano. Entretanto, é possível garantir que, em um grafo G satisfazendo $E \geq 2V$, se existe um caminho euleriano em G , existe outro caminho euleriano com sinal oposto.

Teorema 2.2.1 (Teorema de Swan). *Seja G um grafo com V vértices e E arestas, satisfazendo $E \geq 2V$, e fixe P e Q vértices arbitrários de G , não necessariamente distintos. Então o número de caminhos eulerianos ω de P a Q com $\text{sign}(\omega) = +1$ é igual ao número de caminhos eulerianos ω de P a Q com $\text{sign}(\omega) = -1$.*

Antes da demonstração deste resultado, são necessárias algumas observações. Considere G um grafo nas condições do teorema anterior. Então:

1. Se duas arestas e e e' de G possuem o mesmo ponto inicial e o mesmo ponto final, então o teorema é válido para G . Basta considerar que, dado um caminho

euleriano ω , podemos definir um caminho euleriano ω' apenas permutando e e e' . É claro que $\text{sign}(\omega) = -\text{sign}(\omega')$.

2. O teorema é trivialmente satisfeito se G não é conexo, já que não existiria nenhum caminho euleriano em G .
3. Se o teorema é verdadeiro para o caso onde $E = 2V$, então é verdadeiro para o caso $E > 2V$. De fato, se G é um grafo com $E > 2V$, podemos acrescentar $k = E - 2V$ novos vértices e arestas (como na figura abaixo), obtendo um novo grafo G' .

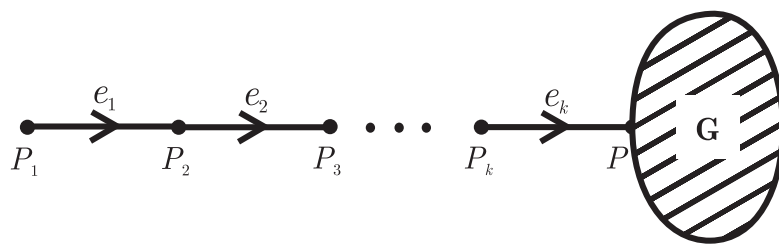


Figura 2.4: Grafo G' (Observação 3)

Este novo grafo G' possui $E' = E + E - 2V = 2(E - V)$ arestas e $V' = V + E - 2V = E - V$ vértices, ou seja, $E' = 2V'$. Da maneira como os vértices e as arestas foram acrescentados, só há uma maneira de percorrer de P_1 a P . Assim, para um vértice Q arbitrário em G , existe uma correspondência biunívoca entre os caminhos eulerianos de P_1 a Q em G' e os caminhos eulerianos de P a Q em G . Além disso, esta correspondência preserva o sinal de um caminho euleriano, garantindo a validade do teorema para G .

4. Se o teorema é válido para o caso onde $E = 2V$ e todos os vértices tem fluxo 0, então o teorema é válido no caso geral. Como visto anteriormente, para que G tenha um caminho euleriano, só há duas possibilidades: $P = Q$ e todo vértice de G possui fluxo 0; ou $P \neq Q$, com fluxo de P igual a +1 e fluxo de Q igual a -1. Suponhamos então que $P \neq Q$ em G , e definimos um novo grafo G' acrescentando um vértice R e duas arestas a G , conforme a figura.

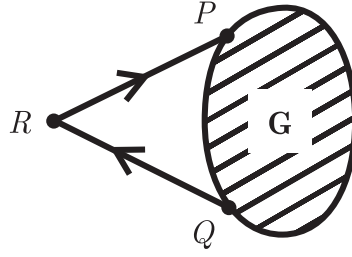


Figura 2.5: Grafo G' (Observação 4)

O grafo G' também satisfaz $E = 2V$ e qualquer um de seus vértices tem fluxo 0, logo o teorema é verdadeiro para G' . Existe uma correspondência biunívoca entre os caminhos eulerianos de P a Q em G e os caminhos eulerianos de R a R em G' . Novamente, esta correspondência preserva o sinal de um caminho euleriano, e assim, o teorema também é válido para G .

De acordo com as observações anteriores, é suficiente demonstrar o teorema para o caso em que G é conexo, satisfaz $E = 2V$ e todos os seus vértices possuem fluxo 0. Procederemos por indução sobre o número de vértices V . Para o caso em que $V = 1$, o teorema é trivial pela observação 1 acima. Assumimos então que $V > 1$ e que o teorema é válido para todo grafo orientado H nas condições do teorema e com $E(H) < E(G)$. Nestas condições, temos o seguinte lema.

Lema 2.2.2. *Se G possui um vértice X de grau 2 tal que as duas arestas e e e' incidentes a X , ligam P a X e X a P , respectivamente, então o teorema é válido para G .*

Demonstração: Seja G' o grafo orientado obtido a partir de G ao eliminarmos o vértice X e as arestas e e e' . Pela hipótese de indução, o teorema é válido para G' . Qualquer caminho euleriano ω em G' é da forma $\pi_1\pi_2\dots\pi_n$, onde π_i é um caminho começando e terminando em P , mas que não passa por P em nenhum outro momento. Assim, é claro que n é o número de arestas de ω que partem de P . Como um caminho euleriano percorre todas as arestas de G , n é o mesmo para todo caminho euleriano em G .

Denotemos por λ o caminho ee' de P a P em G . Todos os possíveis caminhos eulerianos em G são da forma $\lambda\pi_1\dots\pi_n$, $\pi_1\lambda\dots\pi_n$, \dots , $\pi_1\dots\pi_n\lambda$, onde $\pi_1\dots\pi_n$

é um caminho euleriano em G' . Logo, para cada caminho euleriano em G' , temos $n + 1$ caminhos eulerianos em G .

Podemos escolher uma ordenação das arestas na qual e e e' são as últimas e, com isso, $\text{sign}(\pi_1 \dots \pi_n \lambda) = \text{sign}(\pi_1 \dots \pi_n)$. Como λ é um caminho composto por duas arestas, sempre temos

$$\text{sign}(\pi_1 \dots \pi_i \lambda \pi_{i+1} \dots \pi_n) = \text{sign}(\pi_1 \dots \pi_n \lambda).$$

Então, denotando por ω os caminhos eulerianos em G e por ω' os caminhos eulerianos em G' , temos

$$\sum \text{sign}(\omega) = (n + 1) \sum \text{sign}(\omega') = 0.$$

■

Demonstração: [Teorema de Swan] Como observado anteriormente, assumimos $V > 1$ e que o teorema é válido para grafos com menos arestas que G . Temos três casos:

Caso 1: G possui um vértice de grau 4 e 3 arestas incidentes (ou seja, uma aresta é um loop). A figura abaixo ilustra a configuração de G .

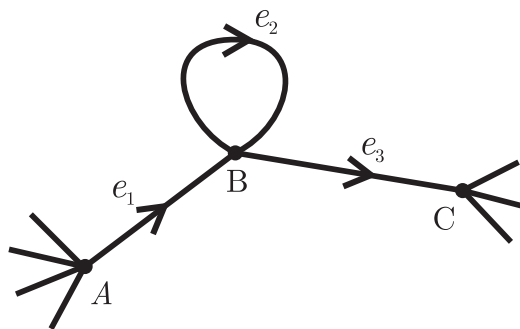


Figura 2.6: Configuração de G (Caso 1)

Se $P = B$, todo caminho euleriano ω deve começar ou terminar com e_2 . Obtemos um novo caminho ω' ao mover e_2 para o fim ou início (respectivamente) de ω e, obviamente, $\text{sign}(\omega) = -\text{sign}(\omega')$.

Se $P \neq B$, definimos um novo grafo G' ao considerar uma nova aresta e ligando A a C , no lugar do caminho $e_1 B e_2 B e_3$.

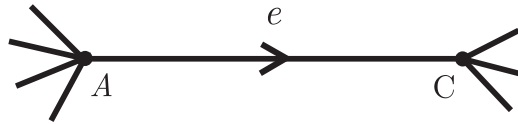


Figura 2.7: Grafo G' (Caso 1)

Como G' tem menos arestas que G , o teorema é válido para G' . A substituição de $e_1Be_2Be_3$ por e não interfere nos caminhos eulerianos, uma vez que só existe uma possibilidade de ir de A a C em G . Assim, existe uma correspondência biunívoca e que preserva sinais entre os caminhos eulerianos de P a P em G e em G' . Logo o resultado também vale para G .

Este é o único caso em que utilizamos a hipótese de indução. Os próximos casos serão reduzidos a este.

Caso 2: G tem um vértice de grau 2.

Como $E > V$, não é possível que todo vértice tenha grau 2. Ainda mais, como G é conexo e todo vértice tem fluxo 0, G contém a configuração abaixo, onde A é um vértice com ordem maior que 2.

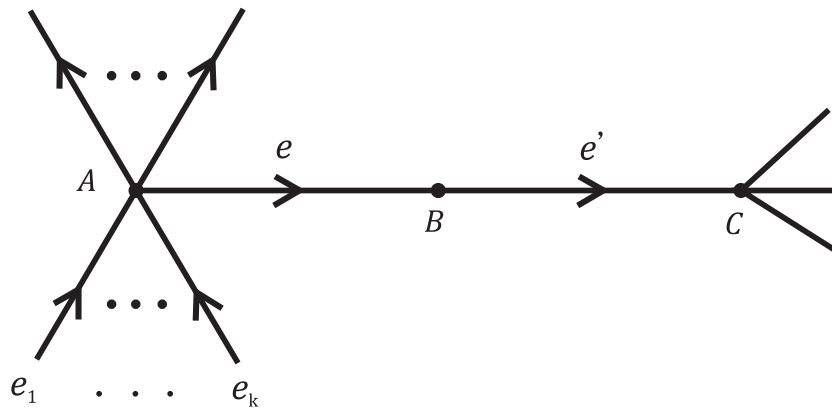


Figura 2.8: Configuração de G (Caso 2)

Se $P \neq A$ e $P \neq B$, definimos, para cada aresta e_i , $i = 1, \dots, k$, terminando em A , um novo grafo G_i a partir das transformações indicadas na figura abaixo. A parte não exibida de G permanece inalterada, mantendo G conexo.

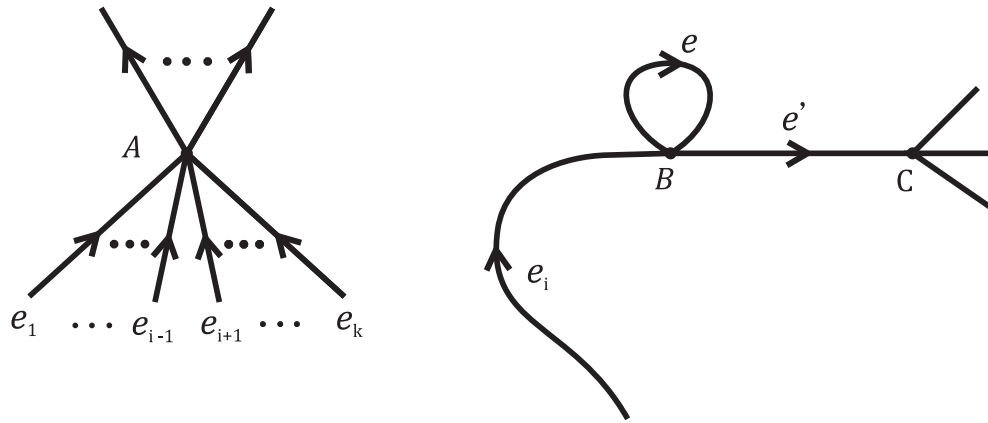


Figura 2.9: Grafo G_i (Caso 2, $P \neq A$ e $P \neq B$)

Considerando os caminhos eulerianos em G , percebemos que, em todos eles, a aresta e é precedida por algum e_i . Assim, todo caminho euleriano em G também é euleriano em algum G_i , mas não em G_j , se $i \neq j$. Por outro lado, um caminho euleriano em qualquer G_i , é euleriano em G . Esta correspondência também preserva os sinais entre os caminhos eulerianos de G e os de G_i . Cada G_i satisfaz a condição do Caso 1 e, portanto, o resultado está satisfeito.

Para $P = A$ e $A \neq C$, podemos aplicar o argumento anterior, apenas considerando B e C no lugar de B e A . Para cada e_i começando em C , definimos o grafo G'_i como na figura abaixo. Novamente, a parte não exibida de G permanece inalterada.

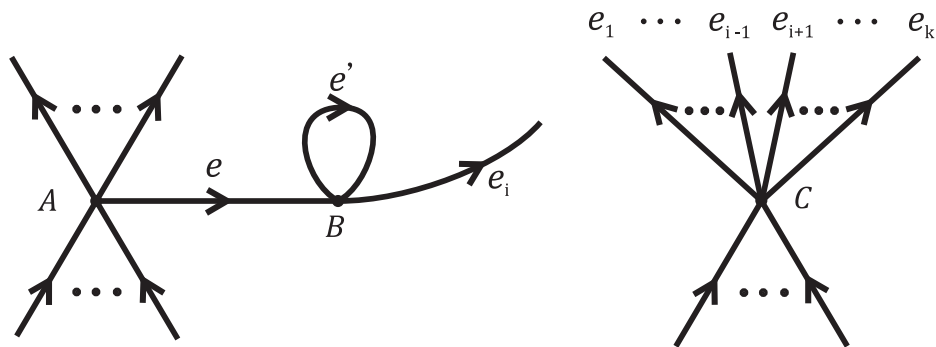


Figura 2.10: Grafo G'_i (Caso 2, $P = A$ e $A \neq C$)

Em qualquer caminho euleriano de G , e' precede e_i , para algum i . Consequentemente, este caminho também é euleriano em algum G'_i . Além disso, dado um caminho euleriano em algum G'_i , também será euleriano em G . Cada G'_i satisfaz o Caso 1, logo o teorema vale para G'_i . Pela bijeção existente entre os caminhos

eulerianos de G e G'_i , concluímos que o teorema é verdadeiro para G .

Quando $P = A = C$, aplicamos o Lema 2.2.2 com $X = B$, e então o teorema também vale para este caso.

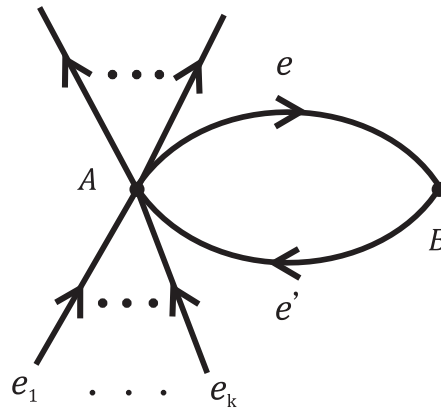


Figura 2.11: Grafo G (Caso 3, $P = A = C$)

Suponhamos agora $P = B$ e considere G_i , $i = 1, \dots, k$, os grafos construídos como na Figura 2.9. Definimos U como o conjunto dos caminhos eulerianos em G começando em A , U' o conjunto de tais caminhos que começam com e , e U_i o conjunto de caminhos eulerianos em G_i começando em A . Como vimos anteriormente, $U = U' \dot{\cup} U_i$, uma união disjunta. Mostramos acima que o teorema é válido se $P = A$, ou seja, é verdadeiro em U . Também temos a validade do resultado para U_i , pois vale para G_i . Então $\sum \text{sign}(\omega') = 0$, onde ω' são os elementos de U' . Mas existe uma correspondência biunívoca entre U' e o conjunto dos caminhos eulerianos começando em B , dada por $ee'e_1 \dots e_n \leftrightarrow e'e_1 \dots e_n e$. Como $n = E - 2$ é par, $\text{sign}(ee'e_1 \dots e_n) = -\text{sign}(e'e_1 \dots e_n e)$, e a bijeção reverte o sinal dos caminhos eulerianos, levando positivos em negativos, e negativos em positivos. Portanto, o teorema é válido para este caso.

Caso 3: Caso 1 e Caso 2 não se aplicam.

O grau de cada vértice é par, pois tem fluxo 0, e G não possui nenhum vértice de grau 2. Logo, o grau de cada vértice deve ser no mínimo 4. Como $E = 2V$ e cada aresta é incidente a dois vértices, temos que cada vértice tem, em média, grau $2(E/V) = 4$. Assim, se existir um vértice com, digamos, grau 6, deverá existir um vértice com grau 2. Mas, como assumimos que o Caso 2 não se aplica, não existe

vértice de grau 2 em G . Dessa forma, cada vértice tem grau 4, e G possui a seguinte configuração.

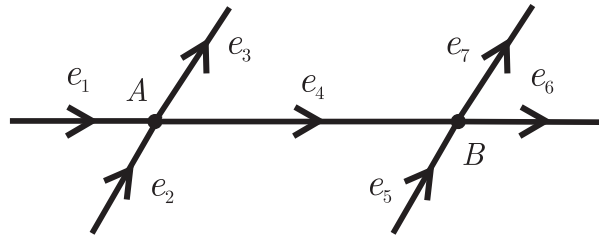


Figura 2.12: Configuração de G - Caso 3

Se $P \neq A$ e $P \neq B$, consideramos os grafos G_1 e G_2 abaixo.

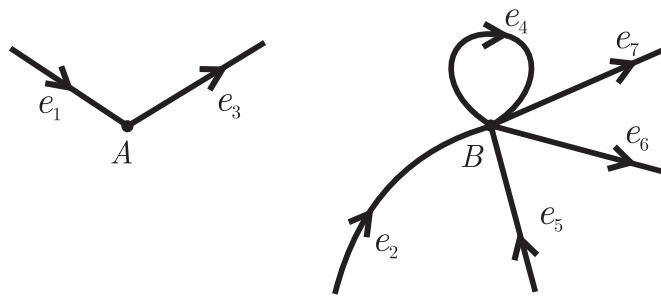


Figura 2.13: Grafo G_1

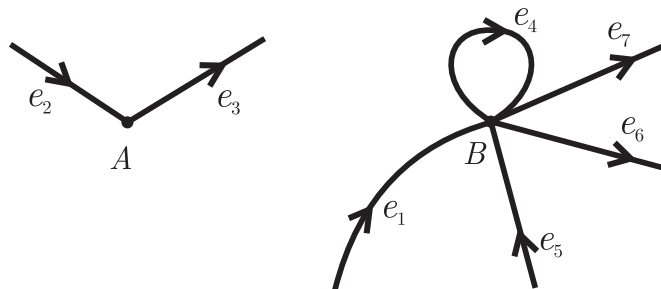


Figura 2.14: Grafo G_2

Ambos os grafos satisfazem o Caso 2, uma vez que A possui grau 2. Então o teorema é válido para G_1 e G_2 .

Para cada caminho euleriano ω em G temos exatamente duas possibilidades:

(i) Se ω possui a sequência e_1e_3 (logo, possui e_2e_4), então ω é um caminho euleriano em G_1 .

(ii) Se ω possui a sequência e_2e_3 (consequentemente, possui e_1e_4), então também é um caminho euleriano em G_2 .

Entretanto, podemos ter caminhos eulerianos em G_1 e G_2 , que não são eulerianos em G . Em G_1 , tais caminhos possuem as sequências e_2e_6 ou e_2e_7 . Aqueles que possuem a primeira sequência, também possuem $e_5e_4e_7$, enquanto os que possuem a segunda, também possuem $e_5e_4e_6$. Da mesma forma, os caminhos eulerianos em G_2 que não são eulerianos em G são os que possuem e_1e_6 ou e_1e_7 , e portanto, possuem $e_5e_4e_7$ ou $e_5e_4e_6$, respectivamente.

Os caminhos eulerianos em G_1 ou G_2 que possuem a sequência $e_5e_4e_6$, são os caminhos eulerianos do grafo G_7 abaixo, enquanto os que possuem $e_5e_4e_7$, são os caminhos eulerianos de G_6 .

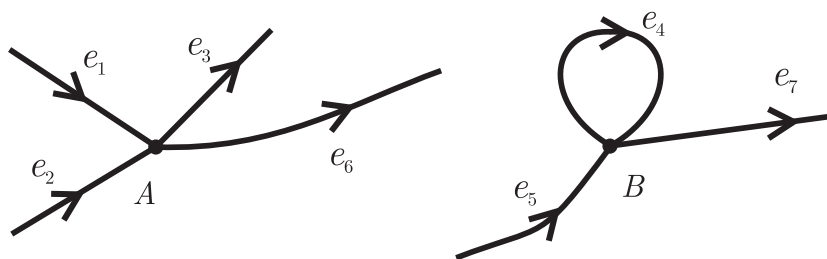


Figura 2.15: Grafo G_6

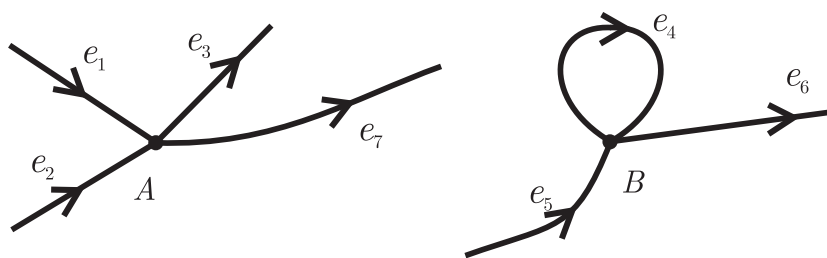


Figura 2.16: Grafo G_7

Assim, os caminhos eulerianos de G_i ($i = 1, 2$) são os caminhos eulerianos em G ou em algum G_j ($j = 6, 7$). Como o caso 1 se aplica a G_6 e G_7 , e o caso 2 se aplica a G_1 e G_2 , o teorema é válido para G .

Observemos que, se P é o ponto inicial de um caminho euleriano de tal forma que existe uma aresta e em G não incidente a P , podemos considerar e como a

aresta e_4 da Figura 2.12. Então teremos pontos A e B distintos de P , que é o caso acima.

Por fim, suponhamos que toda aresta de G é incidente a P . Sejam P, A_1, \dots, A_n os vértices de G . Então $E = 2V = 2n + 2$. Cada A_i tem fluxo 0, logo deve estar ligado a P por, no mínimo, duas arestas, totalizando $2n$ arestas. Como $E = 2n + 2$, temos duas possibilidades para as arestas restantes: são loops em P ou ambas ligam P a um mesmo A_i .

A observação 1 garante a validade do teorema para o caso em que as arestas são loops, e, para o caso em que ambas ligam P a um mesmo A_i , basta considerar o Lema 2.2.2 com $X = A_j$, para algum $j \neq i$.

■

Capítulo 3

Aplicações da Teoria de Grafos à PI-álgebra

Como vimos no primeiro capítulo, vários problemas abordados em PI-álgebra são tratados olhando para os elementos da base. No caso de matrizes, as matrizes elementares formam uma base e a multiplicação de matrizes elementares pode ser interpretada utilizando grafos, facilitando cálculos envolvendo tais matrizes. Para qualquer conjunto de matrizes elementares

$$M = \{E_{ij} \mid (i, j) \in I\} \subset M_n(K)$$

definimos um grafo direcionado $G = G(M)$ com conjunto de vértices $V(G) = \{1, \dots, n\}$ e o conjunto (com possível repetição de elementos) de arestas $E(G) = \{(i, j) \mid (i, j) \in I\}$. Um produto de matrizes elementares $E_{i_1 j_1} \dots E_{i_q j_q}$ é não nulo se, e somente se, as arestas $(i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k)$ formam um caminho no grafo G . Vejamos o seguinte exemplo

Exemplo 3.0.3. *Consideremos $n = 4$ e $M = \{E_{11}, E_{11}, E_{13}, E_{14}, E_{21}, E_{32}\}$. O grafo $G = G(M)$ possui 4 vértices e 6 arestas, cada uma correspondendo ao par (i, j) , onde i, j se referem à matriz E_{ij} . A Figura 3.1 representa o grafo G assim obtido.*

Denotando por α e β as duas arestas referentes a E_{11} , todos os caminhos eulerianos em G são

$$1 \xrightarrow{\alpha} 1 \xrightarrow{\beta} 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4,$$

$$\begin{aligned}
& 1 \xrightarrow{\alpha} 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \xrightarrow{\beta} 1 \rightarrow 4, \\
& 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \xrightarrow{\alpha} 1 \xrightarrow{\beta} 1 \rightarrow 4, \\
& 1 \xrightarrow{\beta} 1 \xrightarrow{\alpha} 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4, \\
& 1 \xrightarrow{\beta} 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \xrightarrow{\alpha} 1 \rightarrow 4, \\
& 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \xrightarrow{\beta} 1 \xrightarrow{\alpha} 1 \rightarrow 4.
\end{aligned}$$

Os produtos correspondentes a estes caminhos são os únicos não nulos, dentre todos os produtos possíveis das matrizes $\{E_{11}, E_{11}, E_{13}, E_{14}, E_{21}, E_{32}\}$.

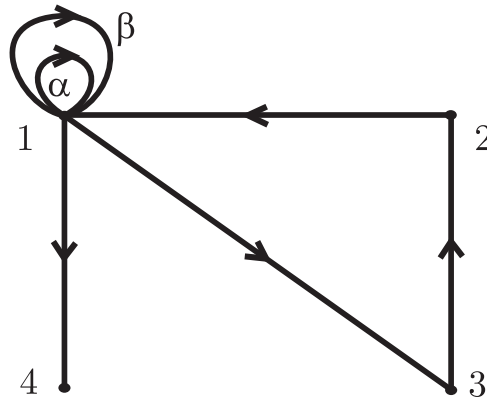


Figura 3.1: Representação gráfica da multiplicação de matrizes elementares

Esta interpretação gráfica para produtos de matrizes elementares justifica a utilização de Teoria de Grafos em problemas de PI-teoria que envolvem identidades polinomiais multilineares na álgebra de matrizes. Essencialmente, basta construir um grafo adequado ao problema algébrico para reduzi-lo a uma questão de Teoria de Grafos.

3.1 O Teorema de Amitsur-Levitzki

Veremos agora como Swan ([13] e [14]) empregou a técnica envolvendo grafos para obter uma demonstração mais simples do Teorema 1.5.1.

Demonstração: [Teorema de Amitsur-Levitzki, [13]] Conforme observado anteriormente, a identidade standard é um polinômio multilinear e, assim, basta

verificar que $s_{2n} = 0$ quando avaliado em elementos da base de $M_n(K)$. Consideremos como base de $M_n(K)$ o conjunto formado pelas n^2 matrizes elementares E_{11}, \dots, E_{nn} . É claro que cada matriz $A \in M_n(K)$ se escreve como combinação linear destas matrizes.

Já vimos também que a identidade standard avaliada em elementos repetidos sempre é igual a 0. Dessa forma, mostraremos que $s_{2n}(A_1, \dots, A_{2n}) = 0$ para quaisquer matrizes elementares A_1, \dots, A_{2n} distintas.

Dadas as matrizes elementares A_1, \dots, A_{2n} , todas distintas, construímos um grafo G como segue. G possui n vértices P_1, \dots, P_n e uma aresta e_k para cada matriz elementar A_k onde, se $A_k = E_{ij}$, a aresta e_k tem P_i como ponto inicial e P_j como ponto final. Pela construção, G satisfaz $E = 2V$ e, então, podemos aplicar o Teorema de Swan.

A multiplicação de matrizes elementares, utilizando grafos, nos garante que um produto $A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(2n)}$ tem entrada (i, j) não nula se, e somente se, a sequência correspondente de arestas $e_{\sigma(1)} \dots e_{\sigma(2n)}$ é um caminho euleriano de P_i a P_j . Neste caso, a entrada (i, j) é 1.

Cada termo $(-1)^\sigma A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(2n)}$ da identidade standard calculada em A_1, \dots, A_{2n} corresponde ao caminho $e_{\sigma(1)} \dots e_{\sigma(2n)}$ acompanhado de seu sinal. Alguns desses termos podem ser nulos, caso não representem um caminho euleriano. Se $e_{\sigma(1)} \dots e_{\sigma(2n)}$ for um caminho euleriano de P_i a P_j , o Teorema de Swan garante que existe um caminho euleriano de P_i a P_j com sinal oposto. Logo, os termos não nulos de $s_{2n}(A_1, \dots, A_{2n})$ ocorrem aos pares e com sinais opostos, garantindo que $s_{2n}(A_1, \dots, A_{2n}) = 0$. ■

O exemplo a seguir ilustra a construção do grafo G feita na demonstração.

Exemplo 3.1.1. *Consideremos o caso em que $n = 3$ e tomemos as matrizes elementares $E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{31}, E_{33}$. O grafo G obtido tem a representação indicada na Figura 3.2.*

Notemos que todos os vértices de G tem grau par. Assim, um caminho euleriano em G tem ponto inicial igual ao ponto final, podendo ser qualquer um dos vértices. Analisando as orientações das arestas, percebemos que os únicos caminhos

eulerianos são

- De P_1 a P_1 , temos $e_1e_2e_4e_3e_6e_5$, $e_1e_3e_6e_5e_2e_4$ e $e_2e_4e_1e_3e_6e_5$ com sinal positivo; e $e_2e_4e_3e_6e_5e_1$, $e_3e_6e_5e_1e_2e_4$ e $e_3e_6e_5e_2e_4e_1$ com sinal negativo.
- De P_2 a P_2 , temos $e_4e_1e_3e_6e_5e_2$ com sinal negativo; e $e_4e_3e_6e_5e_1e_2$ com sinal positivo.
- De P_3 a P_3 , temos $e_6e_5e_2e_4e_1e_3$ e $e_6e_5e_1e_2e_4e_3$ com sinal positivo; e $e_5e_2e_4e_1e_3e_6$ e $e_5e_1e_2e_4e_3e_6$ com sinal negativo.

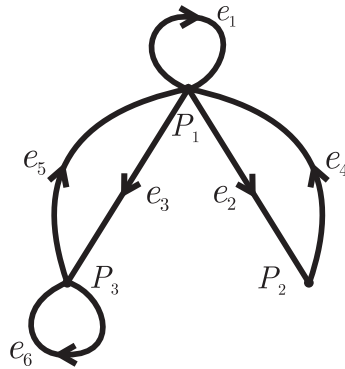


Figura 3.2: Grafo G

Portanto, $s_6(E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{31}, E_{33}) = 0$.

3.2 Identidades Polinomiais para Matrizes Antissimétricas

Como vimos, o polinômio standard de grau $2n$ é a identidade polinomial multilinear de menor grau para a álgebra $M_n(K)$. Em particular, as matrizes antissimétricas também satisfazem o Teorema de Amitsur-Levitzki. Entretanto, Kostant [8] utilizou cohomologia para demonstrar que as matrizes antissimétricas de ordem n sobre os complexos satisfazem a identidade standard de grau $2n - 2$ se n é par. Posteriormente, Hutchinson [7] utilizou teoria de grafos para demonstrar que o resultado de Kostant para matrizes antissimétricas sobre um corpo K , com $\text{char}K = 0$, é

verdadeiro para qualquer n e que $2n - 2$ é o menor grau possível. Especificamente, temos os seguintes resultados:

Teorema 3.2.1. *Se A_1, \dots, A_m são matrizes antissimétricas em $M_n(K)$ e $m \geq 2n - 2$, então $s_m(A_1, \dots, A_m) = 0$.*

Teorema 3.2.2. *Se $m < 2n - 2$, então existem m matrizes antissimétricas A_1, \dots, A_m em $M_n(K)$, tais que $s_m(A_1, \dots, A_m) \neq 0$.*

Vamos agora estudar esta interessante aplicação de Teoria de Grafos. Consideremos K um corpo de característica 0. Como Swan [13] fez para o Teorema de Amitsur-Levitzki, temos que encontrar uma interpretação gráfica apropriada para o problema e mostrar que o resultado vale para tal grafo. Destacamos que, para provar o Teorema 3.2.1, basta verificarmos para uma base de matrizes antissimétricas, uma vez que a identidade standard é multilinear. Escolhemos como base as matrizes antissimétricas cujas entradas são todas nulas, exceto por duas: a_{ij} e a_{ji} , com valores ± 1 . Então, dado um conjunto com m matrizes da base, construímos um grafo direcionado com n vértices P_1, \dots, P_n , e m arestas e_1, \dots, e_m , onde uma aresta e_k é direcionada do vértice P_i para o vértice P_j para cada matriz elementar A_k no conjunto dado satisfazendo $a_{ij} = +1$. Mais adiante daremos um exemplo desta construção (Exemplo 3.2.5).

Analogamente, para provar o Teorema 3.2.2, exibiremos um grafo adequado, com n vértices e m arestas e, a partir dele, construímos m matrizes de ordem n que não satisfazem a identidade standard de grau m .

A partir de agora, os resultados considerados envolverão, em alguns momentos, grafos parcialmente direcionados, isto é, grafos nos quais nem todas as arestas possuem orientação. Dessa forma, serão necessárias novas definições a respeito de Teoria de Grafos, complementando as apresentadas no Capítulo 2. A mais importante delas é a definição seguinte.

Definição 3.2.3. *Um E-caminho em um grafo direcionado ou parcialmente direcionado G é um caminho em G que percorre cada aresta de G exatamente uma vez, podendo percorrê-las em qualquer sentido, independente da orientação.*

Quando consideramos grafos direcionados (ou parcialmente direcionados), um caminho euleriano difere de um E-caminho apenas em um aspecto: enquanto o primeiro percorre cada aresta respeitando sua orientação, o segundo pode percorrer uma aresta no sentido contrário à de sua orientação. No caso de grafos não direcionados, não há diferença entre estes conceitos.

Se o E-caminho é fechado, isto é, o ponto inicial e final coincidem, o denominamos *E-circuito*. Enquanto o sinal de um caminho euleriano é o sinal da permutação associada, o *sinal de um E-caminho* em um grafo direcionado (ou parcialmente direcionado) é dado pelo produto $\text{sign}(\sigma) \cdot (-1)^z$, onde σ é a permutação associada das arestas e $(-1)^z$ é o *coeficiente de orientação* do E-caminho, no qual z é o número de arestas percorridas no sentido oposto ao de sua orientação.

Um E-caminho é positivo se seu sinal é $+1$. Analogamente, um E-caminho é negativo se seu sinal é -1 . Dizemos que um conjunto de caminhos *se cancela* se existe o mesmo número de caminhos positivos e negativos no conjunto.

Dois conjuntos de caminhos são *isomorfos* se existe uma correspondência biunívoca entre os caminhos e que respeite o sinal, no seguinte sentido: os caminhos correspondentes tem sempre o mesmo sinal, ou sempre o sinal oposto. No primeiro caso, a correspondência preserva o sinal, e, no segundo, altera. Frequentemente, para demonstrar que um dado conjunto S de caminhos se cancela, mostramos que S é isomorfo a um conjunto S' de caminhos que se cancela.

Definição 3.2.4. *Um vértice V de um grafo direcionado ou parcialmente direcionado é chamado de vértice nulo se o conjunto de todos os E-caminhos começando em V se cancela. Dizemos que G é um grafo nulo se todos os seus vértices são nulos.*

Para obtermos a interpretação gráfica do problema original envolvendo matrizes, basta observarmos que se A_1, \dots, A_m são elementos da base (como definida anteriormente) das matrizes antissimétricas de ordem n , então a matriz resultante $s_m(A_1, \dots, A_m)$ tem como entrada a_{ij} o número de E-caminhos positivos indo do vértice P_i a P_j em G , menos o número de E-caminhos negativos de P_i a P_j . Esta situação é ilustrada no exemplo abaixo.

Exemplo 3.2.5. Consideremos $n = m = 3$. Sejam

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos o seguinte grafo G :

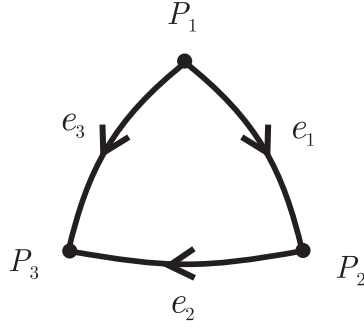


Figura 3.3: Grafo G .

Notemos que existem exatamente seis E -circuitos no grafo acima. Cada entrada de $s_3(A_1, A_2, A_3) = \sum_{\sigma \in S_3} A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} A_{\sigma(3)}$ é associado aos E -circuitos da seguinte maneira:

- Existem dois E -circuitos em P_1 : $e_1 e_2 e_3$ e $e_3 e_2 e_1$, ambos com sinal -1 . Assim, o elemento a_{11} de $s_3(A_1, A_2, A_3)$ é -2 .
- Os dois E -circuitos em P_2 são $e_2 e_1 e_3$ e $e_1 e_3 e_2$, ambos com sinal -1 . O elemento a_{22} de $s_3(A_1, A_2, A_3)$ é -2 .
- Os E -circuitos em P_3 são $e_3 e_1 e_2$ e $e_2 e_1 e_3$, ambos com sinal -1 . Logo, também temos -2 na entrada a_{33} de $s_3(A_1, A_2, A_3)$.

As demais entradas são nulas, uma vez que não existem outros E -caminhos em G . Ao calcular $s_3(A_1, A_2, A_3)$, vemos que cada termo do somatório representa um E -caminho de P_i a P_j , com $a_{ij} = \pm 1$: o sinal que acompanha 1 é o coeficiente de orientação do E -caminho. Além disso, cada termo é multiplicado pelo sinal da permutação correspondente, garantindo que cada entrada a_{ij} da matriz resultante é o número de caminhos positivos menos o número de caminhos negativos de P_i a P_j .

Considerando esta interpretação, podemos reescrever os Teoremas 3.2.1 e 3.2.2 como os resultados abaixo, respectivamente.

Teorema 3.2.6. *Se G é um grafo direcionado com n vértices e m arestas, e se $m \geq 2n - 2$, então G é nulo.*

Teorema 3.2.7. *Dado $n \geq 2$ e $m < 2n - 2$, existe um grafo direcionado com n vértices e m arestas que não é nulo.*

As seguintes observações simplificam as demonstrações destes teoremas. Tomemos G um grafo direcionado ou parcialmente direcionado, com n vértices e m arestas.

1. Se o grafo G não possui 0 ou 2 vértices de grau ímpar (isto é, o grafo não orientado G não é euleriano), então G é trivialmente nulo, uma vez que não existem E -caminhos em G .
2. Se G é nulo com um rotulamento de suas m arestas, então é nulo com qualquer rotulamento de arestas.
3. Se G é nulo com uma dada orientação de suas arestas, então é nulo com qualquer orientação das arestas, desde que arestas direcionadas continuem direcionadas, e as não direcionadas, permaneçam não direcionadas.
4. Se G contém dois vértices que são unidos por duas ou mais arestas direcionadas, ou por duas ou mais arestas não direcionadas, G é nulo. Em ambos os casos, é fácil ver que apenas o sinal da permutação associada interfere no sinal do novo E -caminho, obtido ao permutar tais arestas.
5. Se $m \geq 2n$, G é nulo, pois satisfaz o Teorema de Swan 2.2.1.
6. Se G contém exatamente dois vértices de grau ímpar, então G é nulo se, e somente se, um desses vértices é nulo. É claro que se G é nulo, todos os seus vértices são nulos. Por outro lado, se V e W são os vértices de grau ímpar de G , então todo E -caminho começa em V e termina em W , ou o contrário. O conjunto de todos os E -caminhos começando em V é isomorfo ao conjunto

de todos os E-caminhos começando em W , onde esse isomorfismo leva um E-caminho ω no caminho inverso ω^{-1} , definido como o caminho ω percorrido de “trás para frente”. Assim, W também é nulo e, portanto, G é grafo nulo.

A definição a seguir introduz uma importante classe de grafos, que será o objeto principal dos resultados apresentados deste momento em diante.

Definição 3.2.8. *Definimos $C(n, m, p)$ como sendo o conjunto de todos os grafos G direcionados ou parcialmente direcionados com n vértices e m arestas, das quais exatamente p arestas são não orientadas, e que satisfazem*

- (a) G é conexo e contém exatamente 0 ou 2 vértices de grau ímpar;
- (b) G pode conter arestas múltiplas;
- (c) G pode conter loops não orientados, mas não loops orientados.

Notemos que qualquer grafo $H \notin C(n, m, p)$ para quaisquer valores n, m e p é automaticamente nulo, pois H não satisfaz a condição (a), ou seja, H não é euleriano (Proposição 2.1.3).

No caso de um grafo $G \in C(n, m, p)$ possuir apenas vértices de grau par, definimos uma relação de equivalência nos E-circuitos em um dado vértice V de G como segue. Sejam C e C' dois circuitos distintos em V , onde as permutações associadas a cada um deles são (e_1, e_2, \dots, e_m) e $(e'_1, e'_2, \dots, e'_m)$, respectivamente. Então C e C' estão na mesma classe de equivalências se, e somente se,

$$(e'_1, e'_2, \dots, e'_m) = (e_i, \dots, e_m, e_1, \dots, e_{i-1})$$

para algum $i \in \{2, 3, \dots, m\}$. Tais classes de equivalência serão chamadas de *classes de rotação* dos E-circuitos em V .

Exemplo 3.2.9. *Considere o grafo não direcionado H abaixo:*

Os E-caminhos

$$e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8e_9e_{10} \text{ e } e_6e_7e_8e_9e_{10}e_1e_2e_3e_4e_5$$

são E-circuitos em V , e estão na mesma classe de rotação. Entretanto, o E-circuito $e_1e_8e_5e_6e_2e_9e_3e_7e_4e_{10}$ não está nessa classe.

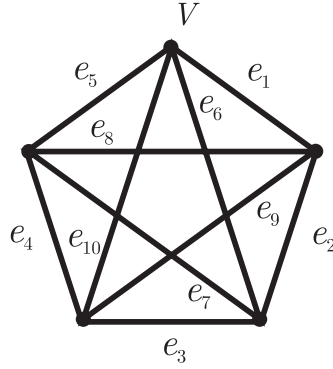


Figura 3.4: Grafo não direcionado H .

Para as demonstrações dos Teoremas 3.2.6 e 3.2.7, serão necessárias algumas definições e diversos lemas, cujas demonstrações são bastante técnicas e podem ser encontradas em [7].

Lema 3.2.10. *Se $G \in C(n, m, p)$, onde m é ímpar e todo vértice de G tem grau par, então um vértice V de G é nulo se, e somente se, as classes de rotações de E -circuitos em V possuem um conjunto de representantes, um de cada classe de rotação, que se cancela.*

Lema 3.2.11. *Se todos os vértices de $G \in C(n, m, p)$ são de grau par e se m é um inteiro ímpar, então G é nulo se, e somente se, G possui ao menos um vértice nulo.*

Estes dois primeiros lemas serão utilizados com bastante frequência ao longo das demonstrações. Para o terceiro lema, é necessário introduzir algumas notações.

Dados $G \in C(n, m, p)$, V um vértice de G e (e_i, e_j, e_k) uma tripla ordenada de arestas de G com e_i adjacente a e_j e e_j adjacente a e_k , definimos $S(e_i, e_j, e_k, V)$, $i < k$, como sendo o conjunto de todos os E -caminhos em G começando em V e que são da forma

$$p_1 e_i e_j e_k p_2 \text{ ou } p_3 e_k e_j e_i p_4,$$

onde $p_i, i = 1, \dots, 4$ são caminhos em G , podendo ter comprimento 0.

Supondo que e_i liga os vértices S_i e S_j , e_j liga S_j e S_k e e_k liga S_k a S_l , consideramos $G(e_i, e_j, e_k) = G - \{e_i, e_j, e_k\} + \{f\}$, onde f é uma aresta ligando S_i a S_l e é

- orientada, se um número par dentre as arestas $\{e_i, e_j, e_k\}$ são orientadas;

- não orientada, se um número ímpar dentre as arestas $\{e_i, e_j, e_k\}$ são orientadas.

Se $S_i = S_l$ e um número ímpar dentre as arestas $\{e_i, e_j, e_k\}$ são orientadas, definimos $S'(e_i, e_j, e_k, V)$, $i < k$, como os caminhos de $S(e_i, e_j, e_k, V)$ da forma $p_1 e_i e_j e_k p_2$, com $i < k$.

Esta linguagem é utilizada apenas no resultado abaixo.

Lema 3.2.12. *Dado $G \in C(n, m, p)$ e um conjunto não vazio de caminhos $S(e_i, e_j, e_k, V)$ em G , temos:*

(a) *Se $S_i = S_l$ e um número par dentre as arestas $\{e_i, e_j, e_k\}$ são orientadas, os caminhos de $S(e_i, e_j, e_k, V)$ se cancelam.*

(b) *Caso contrário, se $S_i = S_l$, os caminhos de $S(e_i, e_j, e_k, V)$ se cancelam se, e somente se, os caminhos de $S'(e_i, e_j, e_k, V)$ se cancelam. Além disso, existe um isomorfismo entre $S'(e_i, e_j, e_k, V)$ e o conjunto de todos os E -caminhos que começam no vértice V em $G(e_i, e_j, e_k)$.*

(c) *Se $S_i \neq S_l$, existe um isomorfismo entre $S(e_i, e_j, e_k, V)$ e o conjunto de todos os E -caminhos que começam no vértice V em $G(e_i, e_j, e_k)$.*

Demonstração: Observemos inicialmente que se $S_i = S_l$, os caminhos de $S(e_i, e_j, e_k, V)$ podem ser considerados aos pares, associando $p_1 e_i e_j e_k p_2$ e $p_1 e_k e_j e_i p_2$.

(a) Se um número par das arestas $\{e_i, e_j, e_k\}$ são orientadas, $p_1 e_i e_j e_k p_2$ e $p_1 e_k e_j e_i p_2$ têm sinais opostos. Neste caso, $S(e_i, e_j, e_k, V)$ é a união destes pares e, assim, se cancela.

(b) Se $S_i = S_l$ e um número ímpar das arestas $\{e_i, e_j, e_k\}$ são orientadas, então os caminhos associados acima possuem o mesmo sinal. Dessa forma $S(e_i, e_j, e_k, V)$ se cancela se, e somente se, $S'(e_i, e_j, e_k, V)$ se cancela.

Temos que $G(e_i, e_j, e_k) = G - \{e_i, e_j, e_k\} + \{f\}$, onde f é um loop não orientado no vértice S_i . Então existe uma correspondência entre $S'(e_i, e_j, e_k, V)$ e os E -caminhos em V de $G(e_i, e_j, e_k)$. Afirmamos que os caminhos correspondentes sempre têm o mesmo sinal ou sempre têm sinais opostos. A observação 2 nos permite rotular as arestas de tal forma que e_j é a aresta h , com $h \in \{1, \dots, m\}$, e_k é a aresta $h+1$, e f recebe o rótulo de e_i . Consideremos dois caminhos correspondentes

$Q_1 = p_1 e_i e_j e_k p_2$, $i < k$, e $Q_2 = p_1 f p_2$, onde f é um loop. Os sinais das permutações correspondentes são iguais, e os coeficientes de orientação são sempre iguais ou são sempre opostos. Assim, $S'(e_i, e_j, e_k, V)$ e $G(e_i, e_j, e_k)$ são isomorfos.

(c) Se $S_i \neq S_l$, $G(e_i, e_j, e_k) = G - \{e_i, e_j, e_k\} + \{f\}$, onde f é uma aresta (não um loop) entre S_i e S_l . Então existe uma correspondência um a um entre $S(e_i, e_j, e_k, V)$ e o conjunto de todos os E-caminhos em V de $G(e_i, e_j, e_k)$, obtida ao associarmos $P = p_1 e_i e_j e_k p_2$ ($i < k$) a $P' = p_1 f p_2$, e $Q = p_3 e_k e_j e_i p_4$ a $Q' = p_3 f p_4$ em $G(e_i, e_j, e_k)$.

Por outro lado, dado um E-caminho $P' = p f p'$ em $G(e_i, e_j, e_k)$, obtemos um elemento $P = p e_i e_j e_k p'$ de $S(e_i, e_j, e_k, V)$ se f é percorrida no sentido de S_i a S_l . No caso de f ser percorrida no sentido contrário, obtemos um elemento $Q = p e_k e_j e_i p'$. Afirmamos que essa correspondência respeita o sinal, ou seja, os pares de elementos associados P e P' , e Q e Q' tem sempre o mesmo sinal, ou sempre sinal oposto.

Novamente, podemos assumir que e_j é rotulada com h , $h \in \{1, \dots, m\}$, que e_k tem o rótulo $h + 1$ e que f recebe o rótulo de e_i . Assim, as permutações correspondentes a P e P' têm sinais iguais, enquanto as correspondentes a Q e Q' têm sinais opostos. Se os coeficientes de orientação de P e P' são iguais, então os coeficientes de orientação de Q e Q' são diferentes. Para verificar este fato, basta considerar as possíveis orientações das arestas e_i, e_j, e_k e f , de acordo com o que foi definido previamente, e analisar os trechos onde tais arestas aparecem em P, P', Q e Q' . Neste caso, a correspondência preserva os sinais dos caminhos.

Se os coeficientes de orientação de P e P' são diferentes, o mesmo argumento garante que os coeficientes de orientação de Q e Q' são iguais e, neste caso, a correspondência inverte os sinais dos caminhos. Logo, existe um isomorfismo entre $S(e_i, e_j, e_k, V)$ e o conjunto de todos os E-caminhos começando em V de $G(e_i, e_j, e_k)$. ■

Teorema 3.2.13. *Se $G \in C(n, 2n - 1, i)$, $i = 0, 1$, então G é nulo.*

Demonstração: Suponhamos G não nulo. Definimos

$$S(m) = \{G \in C(m, 2m - 1, i), i = 0, 1 \mid G \text{ é não nulo}\}$$

e seja $n = \min \{m \mid S(m) \neq \emptyset\}$. Um elemento de $S(n)$ será chamado de grafo minimal.

Notemos que $n > 2$, uma vez que qualquer grafo em $C(2, 3, i), i = 0, 1$, tem arestas múltiplas e, portanto, é nulo, de acordo com a observação 4. Vamos analisar as propriedades dos grafos minimais, isto é, dos grafos em $S(n)$, e mostraremos que $S(n)$ é vazio.

Sabemos que um grafo minimal possui 0 ou 2 vértices de grau ímpar. Se G é um grafo minimal no qual todo vértice tem grau par, existe um vértice V em G com grau 2, pois temos $2n - 1$ arestas. Sejam e e e' as duas arestas incidentes a V , com e ligando V a A e e' ligando V a B (A e B são vértices não necessariamente distintos). Consideremos um novo grafo $G' = G - \{e, e', V\}$. Se $A = B$, todos os vértices de G' possuem grau par, caso contrário, existem dois vértices de grau ímpar. Como $G' \in C(n - 1, 2n - 3, i), i = 0, 1$, é nulo pela minimalidade de n .

É fácil ver que existe um isomorfismo entre o conjunto de todos os E-circuitos em G que começam em V e o conjunto formado pela união de todos os E-caminhos em G' que começam em A e os que começam em B . Como G' é nulo, A e B são vértices nulos, e, portanto, V é vértice nulo de G . Como o número de arestas de G é ímpar e todos os seus vértices tem grau par, o Lema 3.2.11 garante que G é nulo. Dessa forma, nenhum grafo minimal pode ter todos os seus vértices com grau par.

Podemos então supor que se $G \in S(n)$, G tem dois vértices, V e W , de grau ímpar. É claro que G está em uma das quatro categorias, onde $\rho(Z)$ denota o grau do vértice Z .

$$\text{I. } \min \{\rho(V), \rho(W)\} = 1.$$

$$\text{II. } \min \{\rho(V), \rho(W)\} = 3.$$

III. $\min \{\rho(V), \rho(W)\} \geq 5$ e, se n é ímpar, $G \in C(n, 2n - 1, 1)$, ou se n é par, $G \in C(n, 2n - 1, 0)$.

IV. $\min \{\rho(V), \rho(W)\} \geq 5$ e, se n é ímpar, $G \in C(n, 2n - 1, 0)$, ou se n é par, $G \in C(n, 2n - 1, 1)$.

Para mostrar que $S(n) = \emptyset$, verificaremos que não existe grafo minimal em nenhuma dessas categorias.

Caso I. Suponhamos que $\rho(V) = 1$ e que e é a aresta ligando V a um vértice Y . Considerando o grafo $G' = G - \{V, e\}$, temos $G' \in C(n-1, 2n-2, i), i = 0, 1$, que é nulo pela observação 5. Existe um isomorfismo entre o conjunto de todos os E-caminhos em G começando em V e o conjunto de todos os E-caminhos em G' começando em Y e, assim, V é vértice nulo de G . Pela observação 6, G é nulo. Portanto, não existe grafo minimal com vértice de grau 1.

Caso II. Vejamos que nenhum grafo minimal tem vértice com grau 3. Suponhamos que $\rho(V) = 3$ e seja W o outro vértice de grau ímpar em G . Para que V tenha grau 3, existem 2 ou 3 arestas distintas incidentes a V . Se $G \in C(n, 2n-1, 1)$, podemos ter um loop l em V e uma aresta e , ligando V a um vértice Y . Neste caso, consideramos $G' = G - \{V, e, l\}$, e como $G' \in C(n-1, 2n-3, 0)$, G' é nulo pela minimalidade de n . Existe um isomorfismo entre o conjunto de todos os E-caminhos em G começando em V e o conjunto de todos os E-caminhos em G' começando em Y . Como Y é vértice nulo de G' , temos que V é vértice nulo de G e, pelo Lema 3.2.11, G é nulo.

Se existem 3 arestas distintas e_1, e_2, e_3 incidentes a V , então e_i liga V a um vértice S_i , com S_1, S_2, S_3 não necessariamente distintos. Tomemos $G' = G + \{l\}$, onde l é um loop em V . Assim $G' \in C(n, 2n, i), i = 1, 2$ e, pela observação 5, G' é nulo.

O conjunto de todos os E-caminhos de V a W em G' é uma união disjunta de dois conjuntos P_1 e P_2 , onde P_1 é o conjunto de todos os caminhos de V a W em G' da forma $le_i p_1 e_j e_k p_2$, e P_2 é o conjunto de todos os caminhos da forma $e_i p_3 e_j l e_k p_4$, com (i, j, k) uma permutação de $\{1, 2, 3\}$ e $p_i, i = 1, \dots, 4$, caminhos em G , podendo ter comprimento 0.

Vejamos que P_2 se cancela. Temos que

$$P_2 = S(e_1, l, e_2, V) \cup S(e_1, l, e_3, V) \cup S(e_2, l, e_3, V)$$

e, para que P_2 se cancele, mostraremos que cada um desses três conjuntos se cancelam. Consideraremos apenas o conjunto $S(e_1, l, e_2, V)$, já que para os demais, a demonstração é exatamente a mesma.

Pelo Lema 3.2.12, se $S_1 = S_2$ e e_1 e e_2 são orientadas, então os caminhos

de $S(e_1, l, e_2, V)$ se cancelam. Se $S_1 = S_2$ e apenas uma das arestas e_1, e_2 são orientadas, consideramos $S'(e_1, l, e_2, V)$. Pelo item (b) do Lema 3.2.12, existe um isomorfismo entre $S'(e_1, l, e_2, V)$ e o conjunto de todos os E-caminhos de V a W em $G(e_1, l, e_2)$. É claro que $G(e_1, l, e_2) \in C(n, 2n - 2, i), i = 0, 1$, e que V é vértice de grau 1 em $G(e_1, l, e_2)$. Definindo um novo grafo $\tilde{G} = G(e_1, l, e_2) - \{V, e_3\}$, temos $\tilde{G} \in C(n - 1, 2n - 3, i), i = 0, 1$, que é nulo pela minimalidade de n . Entretanto, existe um isomorfismo entre os E-caminhos em \tilde{G} e os E-caminhos de V a W em $G(e_1, l, e_2)$, e $G(e_1, l, e_2)$ também é nulo. Logo $S'(e_1, l, e_2, V)$ se cancela e, pelo item (b) do Lema 3.2.12, $S(e_1, l, e_2, V)$ se cancela.

Caso $S_1 \neq S_2$, consideramos $S(e_1, l, e_2, V)$. Pelo item (c) do Lema 3.2.12, $S(e_1, l, e_2, V)$ é isomorfo ao conjunto de todos o E-caminhos começando em V de $G(e_1, l, e_2)$. Com a mesma construção acima, concluimos que $G(e_1, l, e_2)$ é nulo, e, portanto, $S(e_1, l, e_2, V)$ se cancela.

Com estes argumentos, também verificamos que $S(e_1, l, e_3, V)$ e $S(e_2, l, e_3, V)$ se cancelam. Assim, P_2 se cancela. Observemos agora que existe um isomorfismo entre P_1 e o conjunto de todos os E-caminhos de V a W em G . Como $G' = P_1 \dot{\cup} P_2$ e P_2 se cancelam, P_1 também se cancela. Como V é um vértice nulo de G , a observação 6 nos garante que G é grafo nulo.

Caso III. Suponhamos G um grafo minimal e que $G \in C(n, 2n - 1, 1)$ se n é ímpar, ou $G \in C(n, 2n - 1, 0)$ se n é par. Sejam V e W os dois vértices de G com grau ímpar e $\rho(V) = k$. Definimos um novo grafo $G' = G + \{e, l\}$, onde e é uma aresta orientada de W a V e l é um loop (não orientado) em V , como na figura abaixo.

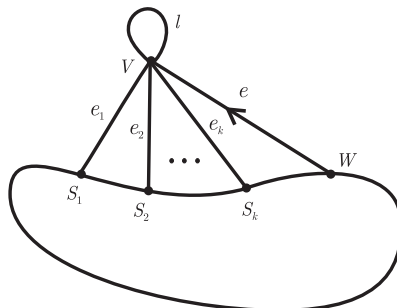


Figura 3.5: Grafo G' .

É claro que $G' \in C(n, 2n + 1, 1)$ se n é par, e $G' \in C(n, 2n + 1, 2)$ se n é ímpar. Em ambos os casos, G' é nulo pela observação 5. Em particular, W é um vértice nulo de G' .

O conjunto dos E-circuitos em W é a união disjunta de dois conjuntos C_1 e C_2 , onde C_1 é o conjunto de todos o E-circuitos nos quais temos as sequências le ou el , e C_2 é o conjunto dos E-circuitos nos quais e e l não são adjacentes.

Vejamos que o conjunto C_2 se cancela. Os E-circuitos em C_2 são da forma $p_1ep_2e_i!e_jp_3$ ou $p_4e_ie_jp_5ep_6$, onde $p_i, i = 1, \dots, 6$ são caminhos em G' , e e_i e e_j são arestas distintas, diferentes de e , e incidentes a V . Dessa forma, podemos escrever

$$C_2 = \cup_{i,j \in \{1, \dots, k\}, i < j} S(e_i, l, e_j, W).$$

Seja $G'(e_i, l, e_j) = G' - \{e_i, l, e_j\} + \{f\}$, conforme definimos anteriormente. Segundo o Lema 3.2.12, cada um dos conjuntos $S(e_i, l, e_j, W)$ se cancela ou é isomorfo ao conjunto de todos os E-circuitos em $G'(e_i, l, e_j)$ que começam em W . Afirmamos que $G'(e_i, l, e_j) \in C(n, 2n - 1, i), i = 0, 1$. De fato, se n é par, l é a única aresta não orientada de G' , e assim, f será uma aresta orientada. Neste caso, $G'(e_i, l, e_j) \in C(n, 2n + 1, 0)$. Se n é ímpar, uma segunda aresta, diferente de l , é não orientada em G' . Se e_i ou e_j for não orientada, f é não orientada. Com isso, f será a única aresta não orientada de $G'(e_i, l, e_j)$. Caso contrário, sendo e_i e e_j arestas orientadas, f também é orientada e, portanto, $G'(e_i, l, e_j)$ terá apenas uma aresta não orientada, ou seja, $G'(e_i, l, e_j) \in C(n, 2n + 1, 1)$.

Além disso, todos os vértices de $G'(e_i, l, e_j)$ têm grau par, uma vez que l é loop em V , e_i e e_j são incidentes a um mesmo vértice, e a aresta f liga S_i a S_j . Então $G'(e_i, l, e_j)$ não é grafo minimal e, portanto, é nulo. Logo, os caminhos em cada $S(e_i, l, e_j, W)$ se cancelam e, conseqüentemente, C_2 se cancela.

Como G' é nulo e C_2 se cancela, C_1 também se cancela. Considerando as classes de rotação de C_1 , o Lema 3.2.10 nos garante que o conjunto R de representantes das classes de rotação se cancela. Podemos escolher R como sendo o conjunto dos E-circuitos em W da forma elp ou ple , onde p é um E-caminho de V a W em G .

Os elementos de R podem ser considerados aos “pares”, associando elp com o circuito inverso $p^{-1}le$. É interessante notar que tais caminhos possuem o mesmo

sinal. Com efeito, se n é par, G' possui apenas uma aresta não orientada. Então, para inverter elp , percorremos $m - 1 = 2n$ arestas no sentido oposto, e assim, o coeficiente de orientação de $p^{-1}le$ é $+1$. Além disso, ao inverter elp (que tem $2n + 1$ arestas), ocorrem n mudanças de sinal da permutação associada. Como n é par, o sinal da permutação associada à $p^{-1}le$ permanece o mesmo. Logo, elp e $p^{-1}le$ são E-caminhos com sinais iguais.

Quando n é ímpar, as n mudanças de sinal na permutação garantem que o sinal da permutação associada a $p^{-1}le$ é alterado. Mas, para inverter elp , percorremos um número ímpar de arestas no sentido oposto. Com isso, o coeficiente de orientação é -1 . Logo, o sinal do caminho permanece o mesmo depois da inversão.

Como R se cancela e elp e $p^{-1}le$ tem o mesmo sinal, podemos garantir que o subconjunto S_e de P , formado pelos E-circuitos que começam com el , também se cancela. Entretanto, existe um isomorfismo entre S_e e o conjunto de todos os E-caminhos de V a W em G . Com isso, V é um vértice nulo em G e a observação 6 nos garante que G é nulo. Portanto, nenhum grafo minimal satisfaz as condições do Caso III.

Caso IV. Finalmente, suponhamos que G seja um grafo minimal com as condições dadas, e sejam U e Y seus vértices de grau ímpar. Definimos um novo grafo $G' = G + \{e, e', A\}$, onde A é um novo vértice, e é uma aresta orientada de A a U , e e' é uma aresta orientada de Y a A . Dessa forma, $G' \in C(n + 1, 2n + 1, i)$, $i = 0, 1$, e todos os seus vértices têm grau par.

Desejamos mostrar que G' é nulo. Com isso, A é vértice nulo de G' . Os E-circuitos em A em G' podem ser considerados aos pares, associando epe' a seu inverso $e'p^{-1}e$. De forma análoga ao que foi feito no Caso III, temos que epe' e $e'p^{-1}e$ tem o mesmo sinal. Destacamos que esta é a passagem que motiva a classificação dos Casos III e IV de acordo com n .

Então, se A é um vértice nulo de G' , o conjunto S_e dos E-circuitos em A que começam com e se cancela. O isomorfismo existente entre S_e e o conjunto dos E-caminhos de U a Y em G nos garante que U é um vértice nulo de G , e assim, G é nulo pela observação 6.

Como G' tem um número ímpar de arestas, é suficiente verificar que algum

vértice é nulo (Lema 3.2.11). Se G' tem um vértice Z de grau 2, com arestas e e e' ligando Z a um outro vértice P , então G' é nulo. Com efeito, se considerarmos $\tilde{G} = G' - \{e, e', Z\}$, temos um grafo com todos os vértices de grau par. Daí \tilde{G} é nulo, pois $\tilde{G} \in C(n, 2n - 1, i), i = 0, 1$, e Z é um vértice nulo de G' . O isomorfismo entre os E-circuitos em Z no grafo G' e o conjunto dos E-circuitos em P no grafo \tilde{G} garante que Z é um vértice nulo em G' . Pelo Lema 3.2.11, G' é nulo.

Assumimos então que G' não possui um vértice Z como descrito acima. Vamos aplicar o seguinte lema ao grafo G' .

Lema 3.2.14. *Se G é um grafo com n vértices e $2n - 1$ arestas, todas de grau par, então G contém dois vértices adjacentes de grau 2 ou contém um vértice de grau $2d$, $d > 1$, que é adjacente a pelo menos $2d - 3$ vértices de grau 2.*

Se G' possui dois vértices adjacentes de grau 2, vamos chamá-los de B e V . Caso contrário, consideremos X como sendo o conjunto dos vértices de G' tais que $Z \in X$ se, e somente se, Z é adjacente a pelo menos $2d - 3$ vértices de grau 2, quando $\rho(Z) = 2d$. Seja $V \in X$ um vértice tal que $\rho(V) = \min \{\rho(Z_i), Z_i \in X\}$, e tomemos B um vértice de grau 2, adjacente a V . Podemos assumir que B é adjacente a V e W , com $V \neq W$, pois, caso contrário, G' seria nulo.

Sejam e e e' as arestas que ligam B a V e B a W . O novo grafo $G'' = G' - \{e, e', B\}$ é tal que $G'' \in C(n, 2n - 1, i), i = 0, 1$. Vamos mostrar que os E-caminhos de V a W em G'' se cancelam. Com isso, G'' é um grafo nulo pela observação 6, já que V e W têm grau ímpar em G' . Mas o isomorfismo existente entre os E-circuitos em B no grafo G' e os E-caminhos de V a W em G'' nos garante que B é um vértice nulo de G' . Daí, pelo Lema 3.2.11, G' é nulo.

Consideremos os E-caminhos de V a W em G'' . Como observamos, V tem grau ímpar em G'' . Se $\rho(V) = 1$ ou 3 em G'' , os Casos I e II garantem que G'' é nulo, ou seja, não é grafo minimal. Caso contrário, $\rho(V) = 2d - 1$ em G'' , com $d \geq 3$, e existem no mínimo $2d - 4$ vértices de grau 2 adjacentes a V em G'' , já que B não é vértice de G'' . Assim, o grafo G'' tem a configuração mostrada na figura abaixo.

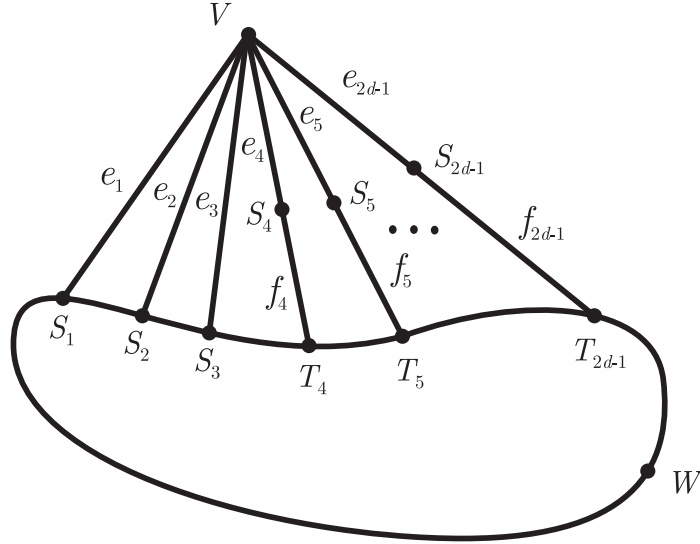


Figura 3.6: Grafo G''

Notemos que alguns vértices, diferentes de $S_i, i = 4, \dots, 2d - 1$, podem coincidir, mas é necessário que $T_j \neq V, j = 4, \dots, 2d - 1$. Da forma como escolhemos V, B e G' , S_i e S_j não são adjacentes para $i, j = 4, \dots, 2d - 1$. Além disso, $\rho(T_i) \geq 5, i = 4, \dots, 2d - 1$. Na verdade, se $T_i \neq W, \rho(T_i) \geq 6$.

Os E-caminhos de V a W em G'' podem ser divididos em $2d - 1$ conjuntos disjuntos Q_i , onde Q_i é o conjunto dos E-caminhos que começam com e_i . Consideremos primeiramente $Q_i, i \geq 4$. Definimos $G_i = G'' - \{S_i, e_i, f_i\}$ e tomemos R_i como sendo o conjunto de todos os E-caminhos de T_i a W (inclui se $T_i = W$) em G_i . Como $G_i \in C(n - 1, 2n - 3, i), i = 0, 1, G_i$ é nulo pela minimalidade de n . Então os E-caminhos de R_i se cancelam e, pelo isomorfismo existente entre R_i e Q_i , os caminhos em Q_i também se cancelam, para $i = 4, \dots, 2d - 1$.

Seja $Q = \cup_{i=1}^3 Q_i$. Todo elemento q de $Q_i, i \leq 3$, particiona o conjunto de índices $\{1, 2, \dots, 2d - 1\} - \{i\}$ em pares não ordenados, onde j e k formam um par se, e somente se, $q = p_1 e_j e_k p_2$ ou $q = p_3 e_k e_j p_4$, onde $p_i, i = 1, \dots, 4$ são subcaminhos de q . Definimos como sendo uma partição *Tipo I* a partição de $\{1, 2, \dots, 2d - 1\}$ em $d - 1$ pares de elementos e um conjunto unitário $\{j\}$, tal que $j \leq 3$ e os dois elementos $\{1, 2, 3\} - \{j\}$ não formam um par. No caso em que os dois elementos $\{1, 2, 3\} - \{j\}$ formam um par, dizemos que a partição é *Tipo II*.

Dessa forma, a cada $q \in Q$ associamos uma partição Tipo I ou Tipo II, e

$Q = Q(I) \dot{\cup} Q(II)$, onde $Q(I)$ é o conjunto dos caminhos em Q associados à uma partição de $\{1, 2, \dots, 2d - 1\}$ do Tipo I, e $Q(II)$ é o conjunto dos que são associados à uma partição de $\{1, 2, \dots, 2d - 1\}$ do Tipo II. Por exemplo, se $q \in Q$ começa com a aresta e_1 , então $q \in Q(I)$ se q não percorre e_2 e e_3 consecutivamente. Caso isso ocorra, temos que $q \in Q(II)$.

Observemos os seguintes lemas, cujas demonstrações são extremamente técnicas e podem ser encontradas em [7].

Lema 3.2.15. *Seja $H \in C(n, 2n, i)$, $i = 0, 1$, com dois vértices de grau ímpar, V e W , tais que o grau de V é $2d - 1 \geq 5$ e V é adjacente a pelo menos $2d - 4$ vértices de grau 2 não adjacentes. Suponha que cada um desses vértices de grau 2 é adjacente a um outro vértice diferente de V . Então o conjunto de todos os E-caminhos em H que induzem uma partição do Tipo I em $\{1, 2, \dots, 2d - 1\}$ se cancela.*

Lema 3.2.16. *Seja $H \in C(n, 2n - 1, i)$, $i = 0, 1$, satisfazendo as mesmas hipóteses do Lema 3.2.15. Então o conjunto de todos os E-caminhos em H que induzem uma partição do Tipo II em $\{1, 2, \dots, 2d - 1\}$ se cancela.*

Tais resultados garantem que $Q(I)$ e $Q(II)$ se cancelam, e, conseqüentemente, Q se cancela. Então os E-caminhos de V a W em G'' se cancelam, V é um vértice nulo de G'' e, pela observação 6, G'' é um grafo nulo. Com isso, B é um vértice nulo de G' , e G' é nulo. Logo A é vértice nulo de G e G é um grafo nulo.

Finalmente, temos que as 4 possíveis categorias de grafos minimais são vazias e $S(n) = \emptyset$, uma contradição. Portanto, o teorema é verdadeiro. ■

Apesar da trabalhosa demonstração do resultado acima, a validade do Teorema 3.2.6 segue do próximo teorema.

Teorema 3.2.17. *Se $G \in C(n, 2n - 2, 0)$, então G é nulo.*

Demonstração: Suponhamos, primeiramente, que todos os vértices de G tenham grau par. Vamos mostrar que todo vértice de G é nulo. Seja V um vértice arbitrário de G , e $G' = G + \{l\}$ um novo grafo, onde l é um loop em V . É claro que $G' \in C(n, 2n - 1, 1)$ e é nulo pelo Teorema 3.2.13.

Consideremos as classes de rotação dos E-circuitos em V no grafo G' , e seja R o conjunto dos representantes de classe, onde tais representantes são E-caminhos começando pelo loop l . Pelo Lema 3.2.10, R se cancela. Existe um isomorfismo entre R e o conjunto de todos os E-circuitos em V no grafo G . Daí V é vértice nulo de G e G é um grafo nulo.

Suponhamos agora que G tem dois vértices, V e W , de grau ímpar. Seja $G' = G + \{e\}$, onde e é uma aresta orientada de W a V . Temos $G' \in C(n, 2n - 1, 0)$, que é nulo pelo teorema anterior. O conjunto dos E-circuitos em W que começam ou terminam com e formam um conjunto R de representantes das classes de rotação, e, pelo Lema 3.2.10, R se cancela. Podemos escrever $R = C_1 \dot{\cup} C_2$, onde C_1 é o conjunto dos E-circuitos em W que começam com e , e C_2 é o conjunto dos que terminam com a aresta e . De acordo com a observação 2, podemos ordenar as arestas de G' de tal forma que e seja a última delas. Então existe uma correspondência biunívoca e que preserva o sinal dos E-caminhos entre C_1 e o conjunto S_{VW} de todos os E-caminhos de V a W em G . Também existe uma correspondência biunívoca e que inverte o sinal (pois a aresta e é percorrida no sentido oposto ao de sua orientação) dos E-caminhos entre C_2 e o conjunto S_{WV} de todos os E-caminhos de W a V em G .

Denotando por $-S_{WV}$ o conjunto S_{WV} com todos os seus elementos com sinal oposto ao seu sinal como E-caminho de W a V , temos que $S_{VW} \dot{\cup} -S_{WV}$ é isomorfo a R , e assim, se cancela.

Para que G seja nulo, temos que verificar que S_{VW} e S_{WV} se cancelam. Tome-mos então $G' = G + \{e\}$, onde e é uma aresta não orientada ligando V e W . Neste caso, $G' \in C(n, 2n - 1, 1)$ e é nulo pelo Teorema 3.2.13. Como acima, consideramos os E-circuitos em W no grafo G' , e observamos que existe uma correspondência biunívoca e que preserva sinal entre os caminhos de C_1 e os caminhos de S_{VW} , e também entre C_2 e S_{WV} . Logo $S_{VW} \dot{\cup} S_{WV}$ é um conjunto de E-caminhos que se cancelam. Com isso, S_{VW} e S_{WV} se cancelam e G é nulo. ■

Pela observação 5, para demonstrar o Teorema 3.2.6, é suficiente verificar que $G \in C(n, m, 0)$ é nulo para $m = 2n - 2$ ou $m = 2n - 1$. Assim, os Teoremas 3.2.13 e 3.2.17 nos garantem que o Teorema 3.2.6 é verdadeiro.

Vamos agora nos dedicar à demonstração do Teorema 3.2.7. Para isto, vamos exibir grafos não nulos que satisfazem as condições do teorema.

Teorema 3.2.18. *Dados $n \geq 2$ e $m = 2n - 3$, existe um grafo direcionado com n vértices e m arestas que não é nulo.*

Demonstração: Consideremos o grafo H representado pela figura abaixo.

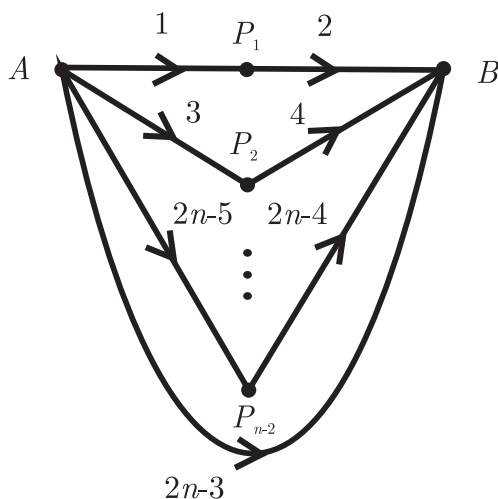


Figura 3.7: Grafo H .

Para que H não seja nulo, vamos mostrar que A é um vértice não nulo. Observando a figura, percebemos que existem $n - 1$ trilhas (isto é, caminhos onde não há repetição de vértices) de A a B , sendo que $n - 2$ delas têm comprimento 2 e uma tem comprimento 1. Assim, existem $(n - 1)!$ E-caminhos em H que começam em A . Se n é ímpar, tais E-caminhos também terminam em A , mas se n é par, os E-caminhos terminam em B .

Vamos nos referir à aresta $2n - 3$ da Figura 3.7 por e . Seja p um E-caminho começando em A . O coeficiente de orientação de p é $+1$ se, e somente se, a aresta e é percorrida de A a B por p . Isso ocorre porque as demais trilhas têm comprimento 2, com ambas as arestas orientadas de A a B , então percorrer tais trilhas no sentido opostos à orientação das arestas não interfere no coeficiente de orientação. Também destacamos que, se $\sigma \in S_m$ é a permutação associada a p , então $\text{sign}(\sigma) = (-1)^x$, onde x é o número de caminhos de comprimento 2 em p percorridos de B a A .

Tal fato também é justificado pelas trilhas de comprimento 2 com as duas arestas orientadas de A a B : da forma como “enumeramos” as arestas de H , sempre que uma dessas trilhas é percorrida no sentido de B a A , temos uma transposição. Além disso, a ordem em que as trilhas de comprimento 2 aparecem em p não interfere no sinal da permutação, pois cada uma destas trilhas é formada por um par de arestas.

Denotemos por S o conjunto de todos os E-caminhos em H que começam em A . Veremos que todos os elementos de S são positivos se $n \equiv 1$ ou 2 (módulo 4) e todos são negativos se $n \equiv 0$ ou 3 (módulo 4). Seja S_1 o conjunto de todos os E-caminhos em S que percorrem e de A a B , e S_2 o conjunto dos que percorrem e de B a A . Com esta notação, o coeficiente de orientação de um E-caminho p é $+1$ se, e somente se, $p \in S_1$. Então, para saber se p é positivo ou negativo, precisamos analisar o sinal da permutação associada a p , denotada por σ .

Se n é par, os elementos de S terminam em B . Assim, em um E-caminho p , temos $\frac{n-2}{2} + 1 = \frac{n}{2}$ trilhas de A a B , e $\frac{n-2}{2}$ de B a A . Para os caminhos em S_1 , $\frac{n-2}{2}$ trilhas de comprimento 2 são percorridas de B para A , e assim, o sinal da permutação associada a $p \in S_1$ é

$$(-1)^{\frac{n-2}{2}} = \begin{cases} -1 & \text{se } n \equiv 0 \text{ (módulo 4),} \\ +1 & \text{se } n \equiv 2 \text{ (módulo 4).} \end{cases}$$

Para os caminhos em S_2 , como e é percorrido de B a A , temos $\frac{n-2}{2} - 1 = \frac{n-4}{2}$ trilhas de comprimento 2 que são percorridas de B para A . Daí, o sinal da permutação associada a $p \in S_2$ é

$$(-1)^{\frac{n-4}{2}} = \begin{cases} +1 & \text{se } n \equiv 0 \text{ (módulo 4),} \\ -1 & \text{se } n \equiv 2 \text{ (módulo 4).} \end{cases}$$

Agora, para determinar o sinal do caminho $p \in S$, devemos considerar seu coeficiente de orientação: $+1$ se $p \in S_1$, e -1 se $p \in S_2$. Portanto, os E-caminhos de S têm sinal

$$\begin{cases} -1 & \text{se } n \equiv 0 \text{ (módulo 4),} \\ +1 & \text{se } n \equiv 2 \text{ (módulo 4).} \end{cases}$$

Quando n é ímpar, os E-caminhos em S são circuitos em A . Assim, temos $\frac{n-1}{2}$ trilhas percorridas de A a B , e também $\frac{n-1}{2}$ percorridas no sentido inverso. Assim, para os caminhos em S_1 , o sinal da permutação associada é

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} = \begin{cases} +1 & \text{se } n \equiv 1 \text{ (módulo 4),} \\ -1 & \text{se } n \equiv 3 \text{ (módulo 4).} \end{cases}$$

Como o coeficiente de orientação de $p \in S_1$ é sempre $+1$, temos que p é um E-caminho positivo se $n \equiv 1$ (módulo 4), e negativo se $n \equiv 3$ (módulo 4).

Para os caminhos em S_2 , temos $\frac{n-1}{2} - 1 = \frac{n-3}{2}$ trilhas de comprimento 2 percorridas de B a A , já que e também é percorrida neste sentido. Logo, o sinal da permutação associada a $p \in S_2$ é

$$(-1)^{\frac{n-3}{2}} = \begin{cases} -1 & \text{se } n \equiv 1 \text{ (módulo 4),} \\ +1 & \text{se } n \equiv 3 \text{ (módulo 4).} \end{cases}$$

Multiplicando por -1 , que é o coeficiente de orientação dos E-caminhos em S_2 , o sinal de $p \in S_2$ é

$$\begin{cases} +1 & \text{se } n \equiv 1 \text{ (módulo 4),} \\ -1 & \text{se } n \equiv 3 \text{ (módulo 4).} \end{cases}$$

Portanto, independente do valor de n , todos os E-caminhos começando em A possuem o mesmo sinal, e A não pode ser vértice nulo. ■

Para que a demonstração do Teorema 3.2.7 esteja completa, vamos utilizar o grafo H da Figura 3.7 afim de obter grafos não nulos com n vértices e $m < 2n - 3$ arestas.

Consideremos o grafo conexo direcionado com k arestas e $k + 1$ vértices, com um vértice Y de grau 1 e fluxo -1 , e um vértice Z de grau 1 e fluxo $+1$, e os outros $k - 1$ vértices são de grau 2 e fluxo 0. Tal grafo é chamado de *k-cadeia de Y a Z*.

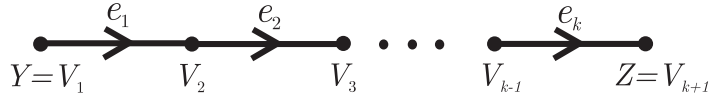


Figura 3.8: k -cadeia de Y a Z .

O seguinte resultado é óbvio.

Lema 3.2.19. *Sejam G um grafo direcionado e V um vértice de G . Consideremos G' como sendo o grafo direcionado obtido ao adicionarmos uma k -cadeia direcionada de Y a V . Então Y não é vértice nulo se, e somente se, V não é vértice nulo de G .*

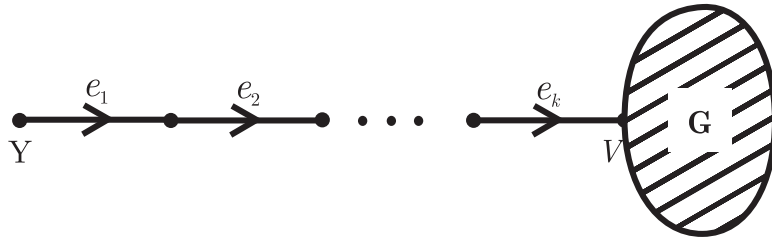


Figura 3.9: Grafo G' .

Teorema 3.2.20. *Dados $n \geq 2$ e $m < 2n - 3$, existe um grafo direcionado com n vértices e m arestas que não é nulo.*

Demonstração: Notemos que $m > n - 1$, pois do contrário teríamos um grafo desconexo que não pertence a $C(n, m, p)$ ou com vértice de grau 1, que não é nulo. Nestas condições, podemos construir um grafo G como o da Figura 3.7, com $n' = m + 3 - n$ vértices e $m' = 2m + 3 - 2n$ arestas. É claro que $n' > 2$ e $m' = 2n' - 3$, e A não é vértice nulo de G (Teorema 3.2.18). Se adicionarmos uma k -cadeia direcionada de Y a A , com $k = 2n - m - 3$, obtemos um novo grafo G' com n vértices e m arestas. Pelo Lema 3.2.19, o vértice Y não é vértice nulo de G' . ■

Os Teoremas 3.2.18 e 3.2.20 garantem que o Teorema 3.2.7 é verdadeiro e, consequentemente, o Teorema 3.2.2 também é. De fato, dados n e $m < 2n - 2$, podemos descrever um conjunto de m matrizes antissimétricas de ordem n , $\{A_1, \dots, A_m\}$, para as quais $s_m(A_1, \dots, A_m) \neq 0$. Mais especificamente, dados n e m , construímos o

grafo G apropriado de acordo com os Teoremas 3.2.18 e 3.2.20, inclusive as mesmas ordenações das m arestas. Assim, para cada aresta $e_k, k = 1, \dots, m$, que é orientada do vértice P_i a P_j , definimos a matriz A_k como sendo a matriz com entradas $a_{ij} = +1, a_{ji} = -1$ e 0 nas demais posições. Para tais matrizes, $s_m(A_1, \dots, A_m) \neq 0$.

Portanto, o grau $2n$ da identidade standard no Teorema de Amitsur-Levitzki pode ser reduzido para $2n - 2$ no caso das matrizes antissimétricas.

Para finalizar, destacamos que a utilização de Teoria de Grafos em problemas de PI-teoria é uma importante ferramenta no estudo de PI-álgebras, pois reduz argumentos algébricos bastante elaborados a estudo de grafos, que podem se tornar algo mais simples. Esta abordagem foi utilizada em diversos trabalhos, como no de Révész e Szigeti [12], publicado em 1995, e em uma publicação bastante recente de Haile e Natapov [6], de 2012.

Referências Bibliográficas

- [1] BONDY, J.A.; MURTY, U.S.R. **Graph Theory with Applications**. New York: Elsevier Science Publisher Co. Inc., 1982.
- [2] BRANDÃO JR, A.P. **Introduções às PI-álgebras**. Minicurso apresentado durante o Programa de Verão do Departamento de Matemática/UFSCar. São Carlos, 2013.
- [3] DRENSKY, V. **Free Algebras and PI-Algebras**. Singapore: Springer-Verlag, 1999.
- [4] DRENSKY, V. **A minimal basis for the identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0**. Algebra and Logic, v.30, p.188-194, 1981.
- [5] GIAMBRUNO, A.; ZAICEV, M. **Polynomial Identities and Asymptotic Methods**. Amer. Math. Soc., v. 122 , 2005.
- [6] HAILE, D.; NATAPOV, M. **A Graph Theoretic Approach to Graded Identities for Matrices**. Journal of Algebra, v. 365, p. 147-162, 2012.
- [7] HUTCHINSON, J. **Eulerian Graphs and Identities for Skew-Symmetric Matrices**. Can. J. Math, v.27, n.3, p. 590-609, 1975.
- [8] KOSTANT, B. **A theorem of Frobenius, a theorem of Amitsur-Levitzki, and cohomology theory**. J. Math. Mech., v.7, p. 237-264, 1958.
- [9] POPOV, A. **Identities of the tensor square of a Grassmann algebra**. Algebra and Logic, v. 21, p. 296-316, 1982.

- [10] RAZMYSLOV, Yu.P. **Trace identities of full matrix algebras over a field of characteristic zero** (Russo), *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* v. 38, p. 723-756, 1974. Translation: *Math. USSR, Izv.* v.8, p. 727-760, 1974.
- [11] ROSSET, S. **A new proof of the Amitsur-Levitzki identity**. *Israel J. Math.*, v.23, p. 187-188, 1976.
- [12] RÉVESZG,G.; SZIGETI,J. **Eulerian Trace Identities**. *Discrete Mathematics*, v.147, p.313-319, 1995.
- [13] SWAN, R.G. **An application of graph theory to algebra**. *Proc. Amer. Math. Soc.* 14 (1963), 367-373.
- [14] SWAN, R.G. **Correction to “an application of graph theory to algebra”**. *Proc. Amer. Math. Soc.* 21 (1969), 379-380.