UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Teorema de Holonomia Normal

Sergio Julio Chion Aguirre

Dissertação apresentada ao PPG-M da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Guillermo A. Lobos Villagra

São Carlos - SP
2013

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

	Chion Aguirre, Sergio Julio.
C539th	Teorema de holonomia normal / Sergio Julio Chion Aguirre. -- São Carlos : UFSCar, 2013.
	72 f.
	Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2013.
	1. Geometria. 2. Holonomia normal. 3. Subvariedades. 4. Transporte paralelo. I. Título.
	CDD: 516 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra
DM – UFSCar

Prof. Dr. Dirk Töben
DM – UFSCar

Prof. Dr. Martha Patrícia Dussan Angulo
IME – USP

Para meus pais, por seu apoio em todo momento,
pois sempre acreditaram em mim.
Para meu irmão, pelas inumeráveis vezes que me
ajudou com os documentos importantes que precisava.
Sem eles este sonho não seria realidade.

Agradecimentos

Depois de ver como os diferentes arquivos em formato LaTeX feitos durante estes dois anos de mestrado, em princípio desconexos, combinam-se para formar a primeira versão desta dissertação, sinto júbilo ao ver refletido em um documento o conhecimento adquirido durante uma fase da vida. Faz-me refletir sobre como foi possível fazer tremenda façanha, e sem dúvida alguma, pensar sobre todas as pessoas que contribuíram com este trabalho.

O temor de mudanças é inerente ao ser humano, e este medo pelo incerto tende a ser uma barreira que impede a tomada de decisões apropriadas. Neste sentido, desejo agradecer as pessoas que me motivaram a vir ao Brasil a estudar matemática: Dr. Julio Alcántara Bode, Dr. Carlos Véliz Capuñay, a minha mãe, Luz Elena Aguirre Chávez, e a meu pai, Dr. Sergio Julio Chion Chacón. A principio, duvidava se este seria o caminho certo a seguir, foram os conselhos recebidos que motivaram a minha vinda. Hoje posso ver que essa foi a melhor decisão.

Na minha chegada a São Carlos, Brasil, não somente encontrei uma universidade onde aprofundar meus conhecimentos de matemática adquiridos durante a graduação, também encontrei uma segunda família. Por isso, quero agradecer a todos os professores que tive nestes dois anos. O conhecimento adquirido com eles foi importante, mas, ainda mais importante, foi o apoio incondicional que eles me deram. Também desejo agradecer a todos meus companheiros, tanto aos que culminaram esta viagem como aos que tiveram que sair antes. Pensava que estes dois anos de mestrado seriam solitários, não poderia estar mais errado. Sem eles, Brasil não teria sido o mesmo.

Agradeço ao Dr. Prof. Guillermo Antonio Lobos Villagra, meu orientador. Graças a seus comentários em aula, sempre generalizando os conceitos apresentados na disciplina de Curvas e Superfícies para variedades riemannianas, adquiri interesse pela área de geometria. Também por sua disponibilidade a toda hora, para tirar qualquer dúvida que eu tivesse sobre o trabalho. Lembro dos vários dias que tivemos que ficar no Departamento de Matemática até tarde da noite para poder avançar no presente trabalho. Ao Dr. Prof Alexandre Paiva Barreto e ao Dr. Prof. Luiz Roberto Hartmann Junior pelas sugestões valiosas e paciência que tiveram durante a qualifição de mestrado. Ao Dr. Dirk Töben e a Dra. Martha Dussan Angulo pelas recomendações e correções feitas na defesa. Por último, a todos meus amigos que contribuíram a corrigir o português deste texto.

Resumo

Neste trabalho, vamos introduzir os conceitos de holonomia normal e holonomia normal restrita de uma subvariedade riemanniana, os quais são subgrupos das matrizes ortogonais que se realizam a partir de fazer translação paralela dos vetores normais, ao longo de lazos e lazos simplemente conexos respectivamente, usando a conexão normal. Vamos ver que a holonomia normal restrita é um subgrupo de Lie das matrizes ortogonais.

Com o auxílio do Teorema de Ambrose-Singer, que relaciona o conceito de curvatura com holonomia normal restrita, vamos provar o Teorema Normal de Holonomia, análogo extrínseco do teorema de Rham-Berger algébrico.

Abstract

In this work we will introduce the concept of normal holonomy and restricted normal holonomy of a riemannian submanifold. They are subgroups of the orthogonal matrices that are realized from parallel translating normal vectors, along loops and null-homotopic loops respectively, using the normal connection. We will proof that the restricted normal holonomy is a Lie subgroup of the orthogonal matrices.

With the aid of the Ambrose-Singer Theorem, which relates the concept of curvature with restricted normal holonomy, we will prove the Normal Holonomy Theorem which is the extrinsic analogue of the algebraic de Rham-Berger's Theorem.

Conteúdo

Introdução

Resultados importantes são obtidos no estudo da holonomia intrínseca em variedades riemannianas: o Teorema da descomposição de Rham e o Teorema de Holonomia de Berger ([1] Cap. 4.2). O primeiro afirma que uma variedade riemanniana M é localmente irredutível em torno de p se, e somente se, seu grupo de holonomia local age irredutivelmente em T_pM. O Teorema de Berger afirma que se M é irredutível em torno de p e nao é localmente simétrico, então o grupo de holonomia restrito $\mathrm{Hol}_p^0(M)$ age transitivamente na esfera unitária em T_pM. Em particular, temos o seguinte resultado: para todo $p \in M$, existe (a menos de ordenação) uma decomposição ortogonal $T_pM = V_0 \oplus \cdots \oplus V_k$ de T_pM em subespaços $V_1, \cdots, V_k$ $\mathrm{Hol}_p^0(M)$-invariantes, e subgrupos normais $G_0, \cdots, G_k$ de $\mathrm{Hol}_p^0(M)$ tal que

(i) $\mathrm{Hol}_p^0 = G_0 \times \cdots \times G_k$ (produto direto).

(ii) G_i age trivialmente em V_j se $i \neq j$.

(iii) $G_0 = \{1\}$ e, se $i \geq 1$, G_i age transtitivamente na esfera unitária em T_pM, ou age irredutivelmente em V_i como a representação isotrópica de um espaço simétrico simples riemanniano.

Este resultado é chamado de Teorema algébrico de de Rham-Berger, algo surpreendente é que, para a conexão normal em uma subvariedade de um espaço forma canônico, o Teorema algébrico de de Rham-Berger vale em uma versão mais simples.

Teorema 0.1 (Teorema Normal de Holonomia [6]). *Seja M uma subvariedade conexa de um espaço forma canônico Q_c^N. Seja $p \in M$ e seja Φ^* o grupo de holonomia normal restrito em p. Então Φ^* é compacto, e existe uma unica (a menos de ordenação) decomposição ortogonal.*

$$N_fM(p) = V_0 \oplus \cdots \oplus V_k$$

do espaço normal $N_f M(p)$ *em subespaços* Φ^**-invariantes e existem subgrupos normais* $\Phi_0, \cdots, \Phi_k$ *de* Φ^* *tal que*

(i) $\Phi^* = \Phi_0 \times \cdots \times \Phi_k$ *(produto direto).*

(ii) Φ_i *age trivialmente em* V_j *se* $i \neq j$.

(iii) $\Phi_0 = \{1\}$ *e, se* $i \geq 1$, Φ_i *age irredutivelmente em* V_i *como a representação isotrópica de um espaço riemanniano simétrico irredutível.*

Esta analogia é a motivação do presente trabalho: Vamos provar o Teorema de Holonomia Normal.

No primeiro capítulo vamos dar os ingredientes necessários para definir holonomia. Afim de fazer isso, precisamos de um fibrado vetorial E dotado de uma métrica g e uma conexão ∇, que seja compatível com essa métrica, para que possamos diferenciar seções do fibrado. No caso específico de uma variedade riemanniana, podemos definir a holonomia riemanniana ou também chamada holonomia intrínseca usando o fibrado tangente e a conexão de Levi-Civita.

No segundo capítulo, trabalharemos com subvariedades e derivaremos as equações básicas para elas. Vamos definir o fibrado normal, com a métrica induzida pelo espaço ambiente, e uma conexão neste fibrado, chamada conexão normal que é compatível com a métrica induzida. Assim, como no segundo capítulo, podemos definir holonomia, desta vez chamada holonomia normal ou holonomia extrínseca, já que estamos usando o espaço ambiente para definí-lo.

No capítulo três, vamos provar que o grupo restrito de holonomia normal Φ_p^* no ponto $p \in M$ é na verdade um subgrupo de Lie de $O(N_f M(p))$. Para isso, precisamos trabalhar com algumas propriedades do mapa exponencial do grupo de Lie, sendo que as ideias deste capítulo provém do artigo [2].

No último capítulo, provaremos o resultado desejado: o Teorema de Holonomia Normal. Para fazê-lo seguiremos os artigos [7], [6] e o livro [1]. A ideia básica da demonstração é que o algebra de Lie $\mathfrak{g}$ do grupo de holonomia normal restrito Φ^* é gerado por tensores curvatura algébricos, isto é, tensores lineares que satisfazen todas as identidades algébricas do tensor curvatura.

Capítulo 1

Holonomia intrínseca

Neste capítulo definiremos que é o grupo de holonomía riemanniana ou holonomia intrinseca num ponto p de uma variedade riemanniana M. Queremos derivar seções no fibrado de uma variedade com respeito a um campo tangente, para isso, definimos o que é uma conexão num fibrado vetorial de uma variedade. Veremos que o conceito de conexão é na verdade um conceito local.

Com a mesma ideia de conexão, na segunda seção introduzimos um operador chamado derivada covariante, o qual, deriva seções do fibrado definidos ao longo de uma curva, na direção tangente da curva.

Na terceira seção, devido ao teorema de equações diferenciáveis ordinárias, obtemos o transporte paralelo de um vetor no fibrado. Se a conexão é compatível com a métrica do fibrado, implica que o transporte paralelo é uma isometria entre espaços vetoriais, sendo esta a ideia principal do capítulo.

Na última parte, fazemos uso do trabalho feito nas seções anteriores e definimos holonomia riemanniana e holonomia riemanniana restrita, num ponto da variedade. Concluiremos que tais grupos são subgrupos das matrizes ortogonais do espaço tangente nesse ponto o qual contém informação local sobre a variedade.

1.1 Conexões

Sejam $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial sobre uma variedade diferenciável M e

$$\Gamma(E) = \{f : M \to E : f \text{ diferenciável e } \pi \circ f = \mathrm{Id}\}$$

denote o espaço de seções diferenciáveis de E. Uma **conexão** em E é uma aplicação

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$

dada por $(X, \xi) \mapsto \nabla_X \xi$ com $X \in \Gamma(TM)$ e $\xi \in \Gamma(E)$, que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $(X, \xi) \mapsto \nabla_X \xi$ é $C^\infty(M)$-linear em $\Gamma(TM)$:

$$\nabla_{fX+gY}\xi = f\nabla_X \xi + g\nabla_Y \xi,$$

   para todo f, $g \in C^\infty(M)$, $X, Y \in \Gamma(TM)$ e $\xi \in \Gamma(E)$.

2. $\nabla_X \xi$ é $\mathbb{R}$-linear em $\Gamma(E)$:

$$\nabla_X(a\xi + b\eta) = a\nabla_X \xi + b\nabla_X \eta,$$

   para todo a, $b \in \mathbb{R}$, $X \in \Gamma(TM)$ e $\xi, \eta \in \Gamma(E)$.

3. ∇ satisfaz a seguinte regra de produto:

$$\nabla_X(f\xi) = f\nabla_X \xi + (Xf)\xi,$$

   para todo $f \in C^\infty(M)$, $X \in \Gamma(TM)$ e $\xi \in \Gamma(E)$.

$\nabla_X \xi$ é chamada **derivada covariante** de ξ no sentido de X.

Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial com conexão ∇. Dizemos que uma seção $\xi \in \Gamma(E)$ é **paralela** quando $\nabla_X \xi = 0$ para todo $X \in \Gamma(TM)$. Um subfibrado vetorial F de E é chamado **paralelo** se para toda seção η de F e todo $X \in \Gamma(TM)$, temos que $\nabla_X \eta$ é uma seção de F.

Uma **métrica riemanniana** g num fibrado vetorial $\pi : E \to M$ é uma aplicação

$$g : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to C^\infty(M),$$

bilinear sobre o anel $C^\infty(M)$ de funções diferenciáveis que é simétrica e positivo definida. Um fibrado vetorial $\pi : E \to M$ munido de uma métrica riemanniana é chamado **fibrado vetorial riemanniano**. A ação de g sobre as seções ξ e η será denotada por $\langle \xi, \eta \rangle$.

Considere um fibrado vetorial riemanniano $\pi : E \to M$. Uma conexão ∇ é dita **compatível** com a métrica g se

$$\nabla_X \langle \xi, \eta \rangle = \langle \nabla_X \xi, \eta \rangle + \langle \xi, \nabla_X \eta \rangle \,,$$

para todo $X \in \Gamma(TM)$ e ξ, $\eta \in \Gamma(E)$, onde $\nabla_X \langle \xi, \eta \rangle$ denota a $X \langle \xi, \eta \rangle$.

O **tensor de curvatura** de um fibrado vetorial $\pi : E \to M$, com uma conexão ∇, é uma aplicação

$$R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$

definida por

$$R(X, Y)\xi = \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X,Y]}\xi.$$

Lema 1.1. *Se ∇ é uma conexão num fibrado vetorial $\pi : E \to M$, $X \in \Gamma(TM)$, $\xi \in \Gamma(E)$ e $p \in M$, então $\nabla_X \xi|_p$ depende somente dos valores de X e ξ numa vizinhança arbitrariamente pequena de p. Em outras palavras, se $X = \tilde{X}$ e $\xi = \tilde{\xi}$ em alguma vizinhança U de p, então $\nabla_X \xi|_p = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{\xi}|_p$.*

Demonstração. Primeiro provaremos que se $\xi = \tilde{\xi}$ em U, então $\nabla_X \xi|_p = \nabla_X \tilde{\xi}|_p$. Seja $\eta = \xi - \tilde{\xi}$, como $\xi = \tilde{\xi}$ em U, segue que $\eta = 0$ nesta vizinhança. Considere uma função $\varphi \in C^\infty(M)$ com suporte contido em U e tal que $\varphi(p) = 1$. Logo, $\varphi\eta = 0$, pois se $q \in U$ então $\eta|_q = 0$, e se $q \notin U$, então $q \notin \operatorname{supp} \varphi$, assim $\varphi(q) = 0$. Por isso temos que $\nabla_X(\varphi\eta) = \nabla_X(0 \cdot \varphi\eta) = 0 \cdot \nabla_X(\varphi\eta) = 0$. Mas pela regra do produto $0 = \nabla_X(\varphi\eta) = (X\varphi)\eta + \varphi\nabla_X\eta$. Calculando em p, tem-se $0 = 0 + \nabla_X \eta|_p$, logo $\nabla_X(\xi - \tilde{\xi})|_p = 0$. Pela linearidade obtém-se o resultado procurado.

Agora vamos provar que se $X = \tilde{X}$ em U, então $\nabla_X \xi|_p = \nabla_{\tilde{X}} \xi|_p$. A prova é semelhante ao caso anterior. Seja $Y = X - \tilde{X}$, como $X = \tilde{X}$ em U, implica que $Y = 0$ nesta vizinhança. Considere uma função $\varphi \in C^\infty(M)$ com suporte contido em U e tal que $\varphi(p) = 1$. Assim, $\varphi Y = 0$, pois se $q \in U$ então $Y|_q = 0$, e se $q \notin U$, temos que $q \notin \operatorname{supp} \varphi$, logo $\varphi(q) = 0$. Portanto, $\nabla_{\varphi Y}\xi = \nabla_{0 \cdot \varphi Y}\xi = 0 \cdot \nabla_{\varphi Y}\xi = 0$. Como $0 = \nabla_{\varphi Y}\xi = \varphi\nabla_Y\xi$, calculando em p, segue que $\nabla_{X - \tilde{X}}\xi|_p = 0$, o resultado segue pela linearidade em X.

A demonstração do lema já esta pronta, pois

$$\nabla_X \xi|_p - \nabla_{\tilde{X}} \tilde{\xi}|_p = \nabla_X \xi|_p - \nabla_X \tilde{\xi}|_p + \nabla_X \tilde{\xi}|_p - \nabla_{\tilde{X}} \tilde{\xi}|_p.$$

O resultado segue das afirmações anteriores. $\square$

O lema anterior fala que a conexão é um objeto local. O seguinte resultado reforça, o lema anterior.

Lema 1.2. $\nabla_X \xi|_p$ *só depende dos valores de* ξ *em uma vizinhança arbitrariamente pequena de* p*, e do valor de* X *em* p*.*

Demonstração. Pela linearidade em X de ∇, basta provar que $\nabla_X \xi|_p = 0$ sempre que $X_p = 0$. Para isto, escolha uma vizinhança coordenada U contendo p. Em coordenadas locais, $X = \sum_{i=1}^n X^i \partial_i$, com $X^i(p) = 0$, pois $X_p = 0$. Então para quaisquer $\xi \in \Gamma(E)$,

$$\nabla_X \xi|_p = \nabla_{\sum_{i=1}^n X^i \partial_i} \xi|_p = \sum_{i=1}^n X^i(p) \nabla_{\partial_i} \xi|_p = 0,$$

onde a primeira das igualdades segue do lema anterior, estendendo o campo $\sum_{i=1}^n X^i \partial_i \in \Gamma(TU)$ a toda a variedade. $\square$

A partir de agora, escreveremos $\nabla_{X_p} \xi$ para denotar $\nabla_X \xi|_p$.

1.2 Derivada covariante

Seja E um fibrado vetorial sobre M uma variedade diferencial. Uma **seção suave** ξ **ao longo de uma curva suave** $\gamma : I \to M$ é uma aplicação diferenciável $\xi : I \to E$ tal que $\xi(t) \in E_{\gamma(t)}$ para todo $t \in I$. O conjunto de seções suaves ao longo de γ será denotado por $\Gamma(\gamma)$. Dizemos que ξ é **extensível** se existe uma seção $\widetilde{\xi}$ do fibrado E tal que $\xi(t) = \widetilde{\xi}(\gamma(t)) \in E_{\gamma(t)}$.

Por exemplo, se consideramos E como sendo TM, então uma seção ao longo de uma curva $\gamma : I \to M$ é $\dot{\gamma} : I \to TM$, os vetores velocidade.

Lema 1.3. *Sejam* ∇ *uma conexão em* M *sobre o fibrado vectorial* E *e* $\gamma : I \to M$*, uma curva suave. Então* ∇ *determina um único operador*

$$D_t : \Gamma(\gamma) \to \Gamma(\gamma)$$

o qual satisfaz as seguintes propriedades:

(a) Linearidade sobre $\mathbb{R}$*:*

$$D_t(a\xi + b\eta) = aD_t\xi + bD_t\eta \quad a,b \in \mathbb{R},\ \xi, \eta \in \Gamma(\gamma).$$

(b) Regra do produto:

$$D_t(f\xi) = \dot{f}\xi + fD_t\xi \quad \textit{para } f \in C^\infty(I),\ \xi \in \Gamma(\gamma).$$

(c) Se ξ é estendível, então para qualquer extensão $\widetilde{\xi}$ de ξ,

$$D_t\xi(t) = \nabla_{\dot\gamma(t)}\widetilde{\xi}.$$

*Para qualquer $\xi \in \Gamma(\gamma)$, $D_t\xi$ é chamada **derivada covariante** de ξ ao longo de γ.*

Demonstração. Como no caso das conexões, provaremos que $D_t\xi(t_0)$ depende somente dos valores de ξ num intervalo aberto de t_0. Pela linearidade do operador D_t basta mostrar que $D_t\xi(t_0) = 0$ caso ξ se anule numa vizinhança de t_0. Para isso, considere uma função suave $\varphi : I \to M$ tal que $\varphi(t_0) = 1$ e supp $\varphi \subset J$, onde J é o intervalo onde ξ se anula. Como $\varphi\xi = 0$, temos

$$0 = D_t(\varphi\xi)(t_0) = \dot\varphi(t_0)\xi(t_0) + \varphi(t_0)D_t\xi(t_0) = D_t\xi(t_0).$$

Considerando referenciais coordenados $\{E_1, \cdots, E_k\}$, $\{\partial_1, \cdots, \partial_n\}$ de E e TM respectivamente, em torno do ponto $\gamma(t_0)$, temos que $\xi(t) = \sum_{i=1}^k \xi^i(t)(E_i \circ \gamma)(t)$. Como $E_i \circ \gamma$ é estendível por E_i, segue que

$$\begin{aligned}
D_t\xi(t_0) &= D_t\left(\sum_{i=1}^k \xi^i(E_i\circ\gamma)\right)(t_0)\\
&= \sum_{i=1}^k \left(\dot\xi^i(t_0)E_i(\gamma(t_0)) + \xi^i(t_0)D_t(E_i\circ\gamma)(t_0)\right)\\
&= \sum_{i=1}^k \left(\dot\xi^i(t_0)E_i(\gamma(t_0)) + \xi^i(t_0)\nabla_{\dot\gamma(t_0)}E_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^k \left(\dot\xi^i(t_0)E_i(\gamma(t_0)) + \xi^i(t_0)\sum_{j=1}^n \left(\dot\gamma^j(t_0)\nabla_{\partial_j(\gamma(t_0))}E_i\right)\right)\\
&= \sum_{i=1}^k \left(\dot\xi^i(t_0)E_i(\gamma(t_0)) + \sum_{j=1}^n \left(\xi^i(t_0)\dot\gamma^j(t_0)\sum_{r=1}^k \left(\Gamma^r_{ji}(\gamma(t_0))E_r(\gamma(t_0))\right)\right)\right)\\
&= \sum_{r=1}^k \left(\dot\xi^r(t_0) + \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^k \left(\xi^j(t_0)\dot\gamma^i(t_0)\Gamma^r_{ij}(\gamma(t_0))\right)\right)E_r(\gamma(t_0)). \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

onde $\nabla_{\partial_i(\gamma(t_0))}E_j = \sum_{r=1}^k \Gamma_{ij}^r(\gamma(t_0))E_r(\gamma(t_0))$. Então, se existe $D_t\xi$, este deve ser único.

Para demonstrar a existência, basta definir o operador D_t pela formula (1.1) em um aberto coordenado U de M tal que $\pi_{TM}^{-1}(U)$ e $\pi_E^{-1}(U)$ sejam abertos coordenados de TM e E respectivamente. O operador assim definido satisfaz linearidade pois

$$\begin{aligned}
D_t(a\xi + b\eta)(t_0) &= \sum_{r=1}^k \Big(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \big((a\xi^j + b\eta^j)(t_0)\dot\gamma^i(t_0)\Gamma_{ij}^r(\gamma(t_0))\big) + \\
&\quad (a\dot\xi^r + b\dot\eta)(t_0)\Big) E_r(\gamma(t_0)) \\
&= a\sum_{r=1}^k \left(\dot\xi^r(t_0) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \big(\xi^j(t_0)\dot\gamma^i(t_0)\Gamma_{ij}^r(\gamma(t_0))\big) \right) E_r(\gamma(t_0)) + \\
&\quad b\sum_{r=1}^k \left(\dot\eta^r(t_0) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \big(\eta^j(t_0)\dot\gamma^i(t_0)\Gamma_{ij}^r(\gamma(t_0))\big) \right) E_r(\gamma(t_0)) \\
&= aD_t\xi(t_0) + bD_t(\eta(t_0)).
\end{aligned}$$

Também satisfaz a regra do produto,

$$\begin{aligned}
D_t(f\xi)(t_0) &= \sum_{r=1}^k \Big(f(t_0)\dot\xi^r(t_0) + \dot f(t_0)\xi^r(t_0) + \\
&\quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \big(f(t_0)\xi^j(t_0)\dot\gamma^i(t_0)\Gamma_{ij}^r(\gamma(t_0))\big)\Big) E_r(\gamma(t_0)) \\
&= f(t_0)\sum_{r=1}^k \left(\dot\xi^r(t_0) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \big(\xi^j(t_0)\dot\gamma^i(t_0)\Gamma_{ij}^r(\gamma(t_0))\big) \right) E_r(\gamma(t_0)) + \\
&\quad \dot f(t_0)\xi(t_0) \\
&= f(t_0)D_t\xi(t_0) + \dot f(t_0)\xi(t_0).
\end{aligned}$$

Por último, também satisfaz a propriedade de extensão, pois se existe $\tilde\xi \in \Gamma(E)$ tal que $\xi(t_0) = \tilde\xi(\gamma(t_0))$, segue-se que

$$\begin{aligned}
\nabla_{\dot\gamma(t_0)}\tilde\xi &= \sum_{r=1}^k \nabla_{\dot\gamma(t_0)}\tilde\xi^r E_r \\
&= \sum_{r=1}^k \Big(\dot\gamma(t_0)(\tilde\xi^r)E_r(\gamma(t_0)) + \tilde\xi^r(\gamma(t_0))\nabla_{\dot\gamma(t_0)}E_r \Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\dot\gamma(t_0)}\tilde\xi &= \sum_{r=1}^{k}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}(\tilde\xi^r\circ\gamma)(t)E_r(\gamma(t_0)) + \sum_{i=1}^{n}\left(\dot\gamma^i(t_0)\xi^r(t_0)\nabla_{\partial_i(\gamma(t_0))}E_r\right)\right)\\
&= \sum_{r=1}^{k}\left(\dot\xi^r(t_0)E_r(\gamma(t_0)) + \sum_{i=1}^{n}\left(\dot\gamma^i(t_0)\xi^r(t_0)\sum_{j=1}^{k}\Gamma_{ir}^{j}(\gamma(t_0))E_j(\gamma(t_0))\right)\right)\\
&= \sum_{r=1}^{k}\left(\dot\xi^r(t_0) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\xi^j(t_0)\dot\gamma^i(t_0)\Gamma_{ij}^{r}(\gamma(t_0))\right)E_r(\gamma(t_0))\\
&= D_t\xi(t_0).
\end{aligned}$$

Assim o operador D_t esta definido em cartas que cobrem a variedade, o qual esta bem definido, pois pela unicidade, na interseção dessas cartas coordenadas as definições coincidem. Logo pode-se estender o operador D_t a toda a variedade. Claramente, esse operador satisfaz as três propriedades. □

Corolario 1.4. *Sejam M uma variedade suave com fibrado vetorial E e conexão ∇, e $\gamma : I \to M$ uma curva suave com $t_0 \in I$. Sejam ξ e $\eta \in \Gamma(E)$ tal que $\xi\circ\gamma = \eta\circ\gamma$ numa vizinhança de t_0. Então $\nabla_{\gamma'(t_0)}\xi = \nabla_{\gamma'(t_0)}\eta$.*

Demonstração. Considere as seções ao longo da curva γ, $\xi\circ\gamma$ e $\eta\circ\gamma$ com extensão óbvia ξ e η respectivamente. Como essas seções ao longo de γ, são iguais numa vizinhança de t_0, temos

$$\nabla_{\gamma'(t_0)}\xi = D_t(\xi\circ\gamma)(t_0) = D_t(\eta\circ\gamma)(t_0) = \nabla_{\gamma'(t_0)}\eta.$$

□

1.3 Transporte paralelo

Seja M uma variedade diferenciável com conexão ∇ sobre o fibrado E. Uma seção suave ξ ao longo de uma curva suave $\gamma : I \to M$ é **paralela** ao longo de γ, com respeito a ∇, se $D_t\xi = 0$. Algo fundamental é que qualquer vetor em $E_{\gamma(t_0)}$ pode ser estendido a uma seção suave paralela ao longo da curva γ, isto decorre do seguinte teorema de equações diferenciais ordinárias que só enunciaremos.

Teorema 1.5 (Existência e Unicidade para Equações Diferenciais Ordinárias Lineares ([8], Teorema 4.12)**.** *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, e para $1 \leq j, r, \leq k$ seja $A_j^r : I \to \mathbb{R}$*

funções diferenciáveis arbitrárias. Então o problema linear com valor inicial:

$$\dot{V}^r(t) = \sum_{j=1}^{k} A_j^r(t) V^j(t),$$

$$V^r(t_0) = B^r \tag{1.2}$$

tem uma única solução em todo o intervalo I, para qualquer $t_0 \in I$ e qualquer vetor inicial $(B^1, \cdots, B^k) \in \mathbb{R}^k$.

Teorema 1.6 (Translação Paralela)**.** *Sejam $\gamma : I \to M$ uma curva suave com $t_0 \in I$ e $\xi_0 \in E_{\gamma(t_0)}$. Então existe uma unica seção suave paralela ξ ao longo de γ tal que $\xi(t_0) = \xi_0$.*

Demonstração. Suponha que $\gamma(I)$ está contida numa carta coordenada U tal que $\pi_E^{-1}(U)$ seja uma carta coordenada do fibrado. Pela formula local da derivada covariante (1.1), temos que se ξ é uma seção paralela ao longo de γ então

$$\dot{\xi}^r(t) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \xi^j(t)\dot{\gamma}^i(t)\Gamma_{ij}^r(\gamma(t)). \tag{1.3}$$

Logo, pelo teorema de EDO, tomando $A_j^r(t) = -\sum_{i=1}^{n} \dot{\gamma}^i(t)\Gamma_{ij}^r(\gamma(t))$, implica que existe uma única solução ξ definida em I com condição inicial $\xi(t_0) = \xi_0$.

Agora, suponha que $\gamma(I)$ não é coberto por uma unica carta. Seja β o supremo de todos os $t \geq t_0$ tal que existe um único transporte paralelo no intervalo $[t_0, t]$, pela continuidade de γ, existe $t > t_0$ tal que $\gamma([t_0, t])$ está contido em uma carta coordenada para t próximo de t_0, logo pelo feito no parágrafo anterior, $\beta > t_0$. Assim, segue que existe uma única seção suave paralela $\xi : [t_0, \beta) \to E$.

Se $\beta \in I$, considere uma carta coordenada U, com $\pi_E^{-1}(U)$ carta coordenada do fibrado, centrada no $\gamma(\beta)$ tal que $\gamma(\beta - \delta, \beta] \subset U$. De novo, pelo Teorema 1.5, existe uma seção suave paralela $\tilde{\xi} : (\beta - \delta, \beta] \to E$ ao longo de $\gamma|_{(\beta-\delta,\beta]}$, tal que $\tilde{\xi}(\beta - \frac{\delta}{2}) = \xi(\beta - \frac{\delta}{2})$. Pela unicidade, ξ e $\tilde{\xi}$ devem coincidir no domínio comun e portanto consideramos ξ definido em $[t_0, \beta]$.

Se existe $t > \beta$ tal que $t \in I$, pela conexidade do intervalo I, existe $\delta > 0$ tal que $(\beta - \delta, \beta + \delta) \subset I$, tal que $\gamma(\beta - \delta, \beta + \delta)$ esta contido numa só carta. Então existe seção suave paralela $\widetilde{\xi}$ em $(\beta - \delta, \beta + \delta)$ tal que $\widetilde{\xi}(\beta) = \xi(\beta)$. Pela unicidade, $\widetilde{\xi} = \xi$ em seu domínio comum, logo ξ pode ser estendido para valores maiores que β. Isso é uma contradição. Assim, a seção suave paralela ξ ao longo da curva γ esta definida em todo o intervalo I. □

Graças a este resultado, se pode definir um operador chamado **transporte paralelo**

$$P_\gamma : E_{\gamma(t_0)} \to E_{\gamma(t_1)},$$

dado por $P_\gamma \xi_{t_0} = \xi(t_1)$, onde ξ é a seção suave paralela de ξ_{t_0} e $\gamma : [t_0, t_1] \to M$ é uma curva suave. Pela linearidade de D_t, P_γ é uma transformação linear. Também é um isomorfismo, pois tem como inversa a $P_{\gamma^{-1}}$ onde γ^{-1} denota a curva γ percorrida no sentido contrário. Pode-se considerar γ como diferenciável por partes, e fazer o transporte paralelo em cada intervalo onde a curva é diferenciavel.

Lema 1.7. *O transporte paralelo é independiente da parametrização de γ.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha que a curva $\gamma : [a, b] \to M$ é diferenciável, caso contrário, pode-se trabalhar em cada seção diferenciável da curva. Seja $\alpha : [c, d] \to [a, b]$ uma reparametrização do intervalo $[a, b]$ com $\alpha(c) = a$ e $\alpha(d) = b$. Basta mostrar a seguinte igualdade

$$P_{\gamma\circ\alpha} = P_\gamma.$$

Seja $\xi_a \in E_{\gamma(a)}$ um vetor na fibra $\gamma(a)$, com seção paralela ξ ao longo de γ. Em coordenadas locais temos que para todo $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} 0 &= D_t^\gamma \xi(t) \\ &= \sum_{i=1}^{k} D_t^\gamma \xi^i (E_i \circ \gamma)(t) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left(\dot{\xi}^i(t) E_i(\gamma(t)) + \sum_{r=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \xi^i(t) \dot{\gamma}^j(t) \Gamma_{ji}^r(\gamma(t)) E_r(\gamma(t)) \right), \end{aligned}$$

onde $\xi = \sum_{i=1}^k \xi^i (E_i \circ \gamma)$.

Considere a seguinte seção $\xi \circ \alpha$ ao longo de $\gamma \circ \alpha$. Em coordenadas locais temos que $\xi \circ \alpha = \sum_{r=1}^k (\xi^i \circ \alpha)(E_i \circ \gamma \circ \alpha)$. Assim,

$$D_t^{\gamma\circ\alpha}(\xi \circ \alpha)(t) = \sum_{r=1}^{k} D_t^{\gamma\circ\alpha}(\xi^r \circ \alpha)(E_r \circ \gamma \circ \alpha)(t)$$

$$
\begin{aligned}
D_t^{\gamma\circ\alpha}(\xi\circ\alpha)(t) &= \sum_{r=1}^{k}\Big(\dot{\xi}^r(\alpha(t))\dot{\alpha}(t)E_r(\gamma(\alpha(t))) + \\
&\quad \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\xi^i(\alpha(t))\dot{\gamma}^j(\alpha(t))\dot{\alpha}(t)\Gamma_{ji}^{r}(\gamma(\alpha(t))E_r(\gamma(\alpha(t)))\Big) \\
&= \dot{\alpha}(t)\sum_{r=1}^{k}\Big(\dot{\xi}^r(\alpha(t))E_r(\gamma(\alpha(t))) + \\
&\quad \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\xi^i(\alpha(t))\dot{\gamma}^j(\alpha(t))\Gamma_{ji}^{k}(\gamma(\alpha(t))E_k(\gamma(\alpha(t)))\Big) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

é uma seção paralela ao longo de $\gamma\circ\alpha$. Portanto,

$$P_\gamma\xi_a = \xi(b) = \xi\circ\alpha(d) = P_{\gamma\circ\alpha}\xi_a.$$

□

O seguinte resultado é vital para poder definir holonomia, pois afirma que o transporte paralelo é uma isometria quando a conexão é compatível com a métrica.

Lema 1.8. *Seja M uma variedade, com fibrado vetorial riemanniano $\pi : E \to M$, e conexão ∇. Então temos as seguintes equivalências*

(a) ∇ é compatível com a métrica g.

(b) Se ξ e η, são seções paralelas ao longo de qualquer curva γ, então

$$\frac{d}{dt}\langle\xi,\eta\rangle = \langle D_t\xi,\eta\rangle + \langle\xi,D_t\eta\rangle.$$

(c) Se ξ e η são seções paralelas ao longo de γ, então $\langle\xi,\eta\rangle$ é uma constante.

(d) A translação paralela $P_\gamma : E_{\gamma(t_0)} \to E_{\gamma(t_1)}$ é uma isometria para qualquer γ.

Demonstração. $(a\to b)$ Seja $\{E_1,\cdots,E_k\}$ um referencial local em torno de $\gamma(t_0)$. Assim, pode-se escrever $\xi(t) = \sum_{i=1}^k \xi^i(t) E_i(\gamma(t))$ e $\eta(t) = \sum_{j=1}^k \eta^j(t) E_j(\gamma(t))$. Logo,

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \langle \xi, \eta \rangle &= \sum_{i,j=1}^k \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \left(\xi^i(t)\eta^j(t) g_{ij}(\gamma(t))\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^k \Big(\dot{\xi}^i(t_0)\eta^j(t_0) g_{ij}(\gamma(t_0)) + \xi^i(t_0)\dot{\eta}^j(t_0) g_{ij}(\gamma(t_0)) + \\
&\quad \xi^i(t_0)\eta^j(t_0)\dot{\gamma}(t_0)(g_{ij})\Big).
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
& \langle D_t\xi(t_0), \eta(t_0)\rangle + \langle \xi(t_0), D_t\eta(t_0)\rangle \\
= & \sum_{i,j=1}^k \left(\left\langle D_t\xi^i(E_i \circ \gamma)(t_0), \eta^j(t_0)E_j(\gamma(t_0))\right\rangle + \left\langle \xi^i(t_0)E_i(\gamma(t_0)), D_t\eta^j(E_j\circ\gamma)(t_0)\right\rangle\right) \\
= & \sum_{i,j=1}^k (\dot{\xi}^i(t_0)\eta^j(t_0)\langle E_i, E_j\rangle_{\gamma(t_0)} + \xi^i(t_0)\eta^j(t_0)\langle D_t(E_i\circ\gamma)(t_0), E_j(\gamma(t_0))\rangle + \\
& \xi^i(t_0)\dot{\eta}^j(t_0)\langle E_i, E_j\rangle_{\gamma(t_0)} + \xi^i(t_0)\eta^j(t_0)\langle E_i(\gamma(t_0)), D_t(E_j\circ\gamma)(t_0)\rangle) \\
= & \sum_{i,j=1}^k (\dot{\xi}^i(t_0)\eta^j(t_0)\langle E_i, E_j\rangle_{\gamma(t_0)} + \xi^i(t_0)\eta^j(t_0)\left\langle \nabla_{\dot{\gamma}(t_0)}E_i, E_j(\gamma(t_0))\right\rangle + \\
& \xi^i(t_0)\dot{\eta}^j(t_0)\langle E_i, E_j\rangle_{\gamma(t_0)} + \xi^i(t_0)\eta^j(t_0)\left\langle E_i(\gamma(t_0)), \nabla_{\dot{\gamma}(t_0)}E_j\right\rangle) \\
= & \sum_{i,j=1}^k (\dot{\xi}^i(t_0)\eta^j(t_0)g_{ij}(\gamma(t_0)) + \xi^i(t_0)\dot{\eta}^j(t_0)g_{ij}(\gamma(t_0)) + \\
& \xi^i(t_0)\eta^j(t_0)\dot{\gamma}(t_0)(g_{ij}),
\end{aligned}$$

sendo que a última igualdade faz uso da hipótese. Portanto, obtemos a igualdade.

$(b \to c)$ Trivial, pois $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\langle \xi, \eta\rangle$ é zero.

$(c \to d)$ Temos que mostrar que $\langle \xi(t_0), \eta(t_0)\rangle = \langle P_\gamma(\xi(t_0)), P_\gamma(\eta(t_0))\rangle = \langle \xi(t_1), \eta(t_1)\rangle$, onde ξ e η são as extensões a campos paralelos ao longo de γ de $\xi(t_0)$ e $\eta(t_0)$ respectivamente. Pela hipótese, $\langle \xi, \eta\rangle$ é constante, logo $\langle \xi(t_0), \eta(t_0)\rangle = \langle \xi(t_1), \eta(t_1)\rangle$.

$(d \to a)$ Basta mostrar que

$$X_p\left\langle \widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}\right\rangle = \left\langle \nabla_{X_p}\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}_p\right\rangle + \left\langle \widetilde{\xi}_p, \nabla_{X_p}\widetilde{\eta}\right\rangle.$$

Seja $\gamma : I \to M$ uma curva tal que $\gamma(0) = p$, e $\dot{\gamma}(0) = X_p$. Denotaremos por ξ e η as seções induzidas ao longo de γ, das seções $\widetilde{\xi}$ e $\widetilde{\eta}$. Considere, um referencial ortonormal $\{e_1, \cdots, e_k\}$ em p, e seja $\{E_1, \cdots, E_k\}$ as extensões paralelas desses vetores ao longo de γ. Pela hipótese, para cada $t \in I$, temos que $\{E_1(t), \cdots, E_k(t)\}$ é ortonormal. Assim

$$\tilde{\xi} \circ \gamma(t) = \sum_{i=1}^{k} \xi^i(t) E_i(t)$$

e

$$\tilde{\eta} \circ \gamma(t) = \sum_{j=1}^{k} \eta^j(t) E_j(t).$$

Por um lado temos,

$$\begin{aligned} X_p \left\langle \widetilde{\xi}, \widetilde{\eta} \right\rangle &= \dot{\gamma}(0) \left\langle \widetilde{\xi}, \widetilde{\eta} \right\rangle \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \xi(t), \eta(t) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left(\dot{\xi}^i(0) \eta^i(0) + \xi^i(0) \dot{\eta}^i(0) \right). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left\langle \nabla_{X_p} \widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}_p \right\rangle + \left\langle \widetilde{\xi}_p, \nabla_{X_p} \widetilde{\eta}_p \right\rangle &= \left\langle \nabla_{\dot{\gamma}(0)} \widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}_p \right\rangle + \left\langle \widetilde{\xi}_p, \nabla_{\dot{\gamma}(0)} \widetilde{\eta} \right\rangle \\ &= \langle D_t \xi(0), \eta(0) \rangle + \langle \xi(0), D_t \eta(0) \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{k} \left(\dot{\xi}^i(0) E_i(0) + \xi^i(0) D_t E_i(0) \right), \sum_{j=1}^{k} \eta^j(0) E_j(0) \right\rangle \\ &+ \left\langle \sum_{i=1}^{k} \xi^i(0) E_i(0), \sum_{j=1}^{k} \left(\dot{\eta}^j(0) E_j(0) + \eta^j(0) D_t E_j(0) \right) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left(\dot{\xi}^i(0) \eta^i(0) + \xi^i(0) \dot{\eta}^i(0) \right). \end{aligned}$$

Assim as duas expressoes são iguais. □

1.4 Holonomia intrínseca

Seja M uma variedade riemanniana com conexão Levi-Civita ∇. Dada uma curva diferenciável por partes $\gamma : [a,b] \to M$, tem-se que existe uma isometria

$$P_\gamma : T_{\gamma(a)}M \to T_{\gamma(b)}M,$$

entre espaços tangentes.

Agora, fixemos um ponto $p \in M$ e denotemos por $\Omega_p M$ o conjunto de laços diferenciáveis por partes com ponto base em p. Se $\gamma, \sigma \in \Omega_p M$, então defina

$$\sigma * \gamma(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{1.4}$$

a composição de caminhos, ou seja, primeiro percorre-se o laço γ, e logo percorre-se σ os dois trajetos ao dobro de velocidade. Também defina $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$, em outras palavras, percorre-se em sentido contrário o laço γ.

Temos o seguinte mapa
$$P : \Omega_p M \to O(T_p M),$$

dado por $P(\gamma) = P_\gamma$, onde pelo Lema 1.7, satisfaz $P_{\sigma * \gamma} = P_\sigma \circ P_\gamma$. Também temos que $P_{\gamma^{-1}} = (P_\gamma)^{-1}$ pela observação feita antes do Lema 1.7. Temos que $P_{\tilde{p}} = \mathrm{Id}$ onde $\tilde{p}$ é a curva constante em p. Defina

$$\mathrm{Hol}_p(M) = \{P_\gamma : \gamma \in \Omega_p M\},$$

então segue o seguinte teoema

Teorema 1.9. $\mathrm{Hol}_p(M)$ *é um subgrupo de* $O(T_p M)$ *chamado* ***grupo de holonomia riemanniano em*** p.

Demonstração. Como os elementos de $\mathrm{Hol}_p(M)$ são transformações lineares isométricas, é claro que $\mathrm{Hol}_p(M)$ é um subconjunto de $O(T_p M)$, o qual, não é vazio, pois $\mathrm{id} \in \mathrm{Hol}_p(M)$. Como $P_\sigma \circ P_\gamma = P_{\sigma*\gamma}$ e $(P_\gamma)^{-1} = P_{\gamma^{-1}}$, implica que tanto o produto como a inversa são algebricamente fechado, logo $\mathrm{Hol}_p(M)$ é um subgrupo. $\square$

Se $p, q \in M$ estão na mesma componente conexa, então existe uma curva suave por partes $\gamma : I \to M$ tal que $\gamma(0) = q$ e $\gamma(1) = p$. Considere $F : \mathrm{Hol}_p(M) \to \mathrm{Hol}_q(M)$

definida por $F(P_\alpha) = P_{\gamma^{-1}*\alpha*\gamma}$. F é um homomorfismo de grupos pois

$$\begin{aligned}
F(P_{\alpha_1} \circ P_{\alpha_2}) &= F(P_{\alpha_1 * \alpha_2}) \\
&= P_{\gamma^{-1}*\alpha_1*\alpha_2*\gamma} \\
&= P_{\gamma^{-1}} \circ P_{\alpha_1} \circ P_{\alpha_2} \circ P_\gamma \\
&= P_{\gamma^{-1}} \circ P_{\alpha_1} \circ P_\gamma \circ P_{\gamma^{-1}} \circ P_{\alpha_2} \circ P_\gamma \\
&= P_{\gamma^{-1}*\alpha_1*\gamma} \circ P_{\gamma^{-1}*\alpha_2*\gamma} \\
&= F(P_{\alpha_1}) \circ F(P_{\alpha_2}).
\end{aligned}$$

Sua inversa é dada por $G : \mathrm{Hol}_q(M) \to \mathrm{Hol}_p(M)$ definida como $G(P_\beta) = P_{\gamma*\beta*\gamma^{-1}}$. Logo, os grupos de holonomia em pontos da mesma componente conexa são isomorfos. Assim, se M é conexo, denotaremos por $\mathrm{Hol}(M)$ o grupo de holonomia riemanniano, pois os distintos grupos de holonomia são isomorfos.

Se consideramos laços em p homotópicos a uma constante e diferenciáveis por partes, pelos mesmos argumentos utilizados, obtemos um subgrupo de $O(T_pM)$ chamado o Grupo de Holonomia Normal Restrito em p e denotado por $\mathrm{Hol}_p^*(M)$. Se γ e λ são laços em p diferenciáveis por partes tal que λ é homotópico a uma constante, então $P_{\gamma^{-1}} \circ P_\lambda \circ P_\gamma = P_{\gamma^{-1}*\lambda*\gamma} \in \mathrm{Hol}_p^*(M)$ pois $\gamma^{-1} * \lambda * \gamma$ é homotópico a uma constante. Assim, $\mathrm{Hol}_p^*(M)$ é um subgrupo normal de $\mathrm{Hol}_p(M)$.

Capítulo 2

Subvariedades e holonomia normal

Na primeira seção, vamos introduzir as definições com as quais trabalharemos no resto do capítulo. Em particular, a noção de fibrado normal será de vital importância. Na segunda seção, deduziremos as equações fundamentais das subvariedades, as quais, seráo usadas no capítulo 4 para a demonstração do Teorema de Holonomia Normal. Por fim, na última seção introduziremos o conceito de grupo de holonomía normal e grupo de holonomía normal restrito.

2.1 Definições básicas

Primeiro vamos lembrar algumas definições, aproveitaremos ao mesmo tempo para fixar a notação.

Sejam M^n e $\widetilde{M}^{n+p}$ variedades diferenciáveis. Dada uma aplicação $f : M \to \widetilde{M}$ diferenciável, dizemos que f é uma **imersão** se $f_* : T_pM \to T_{f(p)}\widetilde{M}$ tem grau n, ou seja, f_* é injetora, para todo ponto $p \in M$.

Uma imersão injetora $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+p}$ entre variedades riemannianas, com metricas $\langle\, , \,\rangle_M$ $\langle\, , \,\rangle_{\widetilde{M}}$ respectivamente, é uma **isometria** se

$$\langle X, Y\rangle_M = \langle f_*X, f_*Y\rangle_{\widetilde{M}}\,. \tag{2.1}$$

No caso em que somente $\widetilde{M}$ seja uma variedade riemanniana, pode-se dotar M com uma métrica riemanniana mediante à formula (2.1); com esta métrica, f torna-se uma isometria.

Sejam $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial e $f : N \to M$ um mapa diferenciável. Então

$\widetilde{\pi} : f^*E \to N$, onde

$$f^*E = \{(p, \xi) : p \in N,\ \xi \in E_{f(p)}\},$$

definido por $\widetilde{\pi}(p, \xi) = p$, é o **fibrado vetorial induzido** por f em N.

Dada uma isometria $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+p}$, temos o fibrado vetorial induzido $f^*T\widetilde{M}$ sobre M que tem como fibra em p a $T_{f(p)}\widetilde{M}$. A imagem da diferencial do espaço tangente em p $f_*(T_pM)$ é um subespaço vetorial de $T_{f(p)}\widetilde{M}$. Logo,

$$T_{f(p)}\widetilde{M} = f_*T_pM \oplus N_fM(p),$$

onde $N_fM(p) := (f^*T_pM)^{\perp}$, chamado **espaço normal** em p. A união disjunta de todos estes espaços normais em p

$$N_fM = \bigsqcup_{p \in M} N_fM(p),$$

é o **fibrado normal** de M por f.

A conexão Levi-Civita em $\widetilde{M}$ induz uma única conexão $\widehat{\nabla}$ em $f^*T\widetilde{M}$ tal que

$$\widehat{\nabla}_X(Z \circ f) = \widetilde{\nabla}_{f_*X}Z,$$

para todo $X \in T_pM$, onde $p \in M$, e $Z \in T\widetilde{M}$. Por abuso de notação se identifica $\widetilde{\nabla}$ e $\widehat{\nabla}$, assim no que se segue escreveremos $\widetilde{\nabla}$ para as duas conexões, o contexto identificará qual delas estamos usando.

Sejam $X, Y \in \Gamma(TM)$, decomponha

$$\widetilde{\nabla}_X f_*Y = (\widetilde{\nabla}_X f_*Y)^T + (\widetilde{\nabla}_X f_*Y)^{\perp},$$

com respeito a descomposição ortogonal $T_{f(p)}\widetilde{M} = f_*T_pM \oplus N_fM(p)$. Se pode verificar que

$$\nabla_XY = f^{-1}(\widetilde{\nabla}_X f_*Y)^T,$$

é uma conexão simétrica compatível com a métrica, logo deve coincidir com a conexão Levi-Civita de M, pois uma conexão com essas características é única.

2.2 As equações básicas de subvariedades

Sejam M^n e $\widetilde{M}^{n+p}$ variedades riemanniana e seja $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+p}$ uma imersão isométrica. Temos $\pi : N_f M \to M$ o fibrado normal sobre M induzido pela f. Denotaremos as seções suaves de M em $N_f M$, por $\Gamma(N_f M)$. Como f é uma imersão pode-se considerar a $f(M)$ como uma subvariedade imersa de $\widetilde{M}$. Há uma identificação entre $(M, \langle\, ,\, \rangle_M, f^*\widetilde{\nabla})$, e $(f(M), \langle\, ,\, \rangle_{f(M)}, \widetilde{\nabla})$, logo sem perda de generalidade, tomemos f como aplicação inclusão.

Logo, pelo feito na seção anterior, se $X, Y \in \Gamma(TM)$ são campos tangentes, temos que

$$\widetilde{\nabla}_X Y = (\widetilde{\nabla}_X Y)^\top + (\widetilde{\nabla}_X Y)^\perp.$$

Segue da unicidade da conexão Levi-Civita que $(\widetilde{\nabla})^\top$ é a conexão Levi-Civita em M. Denotaremos essa conexão por ∇, logo, obtemos a **fórmula de Gauss**,

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y), \tag{2.2}$$

a qual define uma aplicação $\alpha : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(N_f M)$ chamada a **segunda forma fundamental de** f . Concluímos imediatamente pelas propiedades da conexão Levi-Civita $\widetilde{\nabla}$ e ∇ em $\widetilde{M}$ e M respectivamente, que α é simetrica e bilinear no anel $C^\infty(M)$ de funções diferenciáveis em M. Em particular, para qualquer ponto $p \in M$ e campos vetoriais $X, Y \in \Gamma(TM)$, a aplicação $\alpha_p : T_pM \times T_pM \to N_f M(p)$, dada por $\alpha_p(X, Y) = \alpha(X, Y)(p)$, depende somente dos valores de X e Y em p.

Considere campos vetoriais $X \in \Gamma(TM)$ e $\xi \in \Gamma(N_f M)$, e denote por $A_\xi X$ a componente tangencial de $-(\widetilde{\nabla}_X \xi)$,

$$A_\xi X = -(\widetilde{\nabla}_X \xi)^\top.$$

Para todo $Y \in \Gamma(TM)$ segue que

$$0 = X \langle \xi, Y \rangle = \left\langle \widetilde{\nabla}_X \xi, Y \right\rangle + \left\langle \xi, \widetilde{\nabla}_X Y \right\rangle = \left\langle (\widetilde{\nabla}_X \xi)^\top, Y \right\rangle + \langle \xi, \alpha(X, Y) \rangle,$$

onde a última igualdade segue pela fórmula de Gauss (2.2). Logo,

$$\langle A_\xi X, Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle.$$

Em particular, a aplicação $A : \Gamma(TM) \times \Gamma(N_f M) \to \Gamma(TM)$ dada por $A(X, \xi) = A_\xi X$ é bilinear sobre $C^\infty(M)$ e também simétrico, isto é $\langle A_\xi X, Y \rangle = \langle X, A_\xi Y \rangle$, para todo

$X, Y \in (M)$. A aplicação A_ξ é chamada de **operador forma**.

Vamos ver na seção seguinte que a componente normal de $\widetilde{\nabla}_X \xi$, a qual denotamos por $\nabla^\perp_X \xi$, define uma conexão compatível com a métrica no fibrado normal $N_f M$. Dizemos que $\nabla^\perp$ é a **conexão normal** de f, e obtemos a **formula de Weingarten**,

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi \tag{2.3}$$

Agora, utilizando as formulas de Gaus e Weingarten, obtemos as equações básicas para uma imersão isométrica, as equações de Gauss, Codazzi e Ricci. Seja $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, então

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y Z &= \widetilde{\nabla}_X \nabla_Y Z + \widetilde{\nabla}_X \alpha(Y, Z) \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + \alpha(X, \nabla_Y Z) - A_{\alpha(Y,Z)} X + \nabla^\perp_X \alpha(Y, Z). \end{aligned}$$

Da mesma maneira,

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_Y \widetilde{\nabla}_X Z &= \widetilde{\nabla}_Y \nabla_X Z + \widetilde{\nabla}_Y \alpha(X, Z) \\ &= \nabla_Y \nabla_X Z + \alpha(Y, \nabla_X Z) - A_{\alpha(X,Z)} Y + \nabla^\perp_Y \alpha(X, Z). \end{aligned}$$

Também, pela fórmula de Gauss

$$\widetilde{\nabla}_{[X,Y]} Z = \nabla_{[X,Y]} Z + \alpha([X, Y], Z).$$

Assim, temos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + \alpha(X, \nabla_Y Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z) - \alpha([X, Y], Z) \\ &\quad - A_{\alpha(Y,Z)} X + A_{\alpha(X,Z)} Y + \nabla^\perp_X \alpha(Y, Z) - \nabla^\perp_Y \alpha(X, Z). \end{aligned}$$

Tomando produto interno com $W \in \Gamma(TM)$ na equação acima, obtemos a **equação de Gauss**:

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W\rangle &= \left\langle \widetilde{R}(X, Y)Z, W \right\rangle + \left\langle A_{\alpha(Y,Z)} X, W \right\rangle - \left\langle A_{\alpha(X,Z)} Y, W \right\rangle \\ &= \left\langle \widetilde{R}(X, Y)Z, W \right\rangle + \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z)\rangle - \langle \alpha(Y, W), \alpha(X, Z)\rangle, \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde R e $\widetilde{R}$ são os tensores de curvatura de M e $\widetilde{M}$ respectivamente.

Por outro lado, tomando as componentes normais de $\widetilde{R}(X,Y)Z$, obtemos a **equação de Codazzi**:

$$\begin{aligned}(\widetilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} &= (R(X,Y)Z + \alpha(X,\nabla_Y Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z) - \alpha([X,Y],Z) \\ &\quad - A_{\alpha(Y,Z)}X + A_{\alpha(X,Z)}Y + \nabla^{\perp}_X \alpha(Y,Z) - \nabla^{\perp}_Y \alpha(X,Z))^{\perp} \quad (2.5) \\ &= \alpha(X,\nabla_Y Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z) \quad (2.6) \\ &\quad -\alpha([X,Y],Z) + \nabla^{\perp}_X \alpha(Y,Z) - \nabla^{\perp}_Y \alpha(X,Z) \\ &= (\nabla^{\perp}_X \alpha)(Y,Z) - (\nabla^{\perp}_Y \alpha)(X,Z), \quad (2.7)\end{aligned}$$

onde por definição

$$(\nabla^{\perp}_X \alpha)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X \alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z).$$

Seja $R^{\perp}$ o **tensor de curvatura no fibrado normal** $N_f M$, isso é,

$$R^{\perp}(X,Y)\xi = \nabla^{\perp}_X \nabla^{\perp}_Y \xi - \nabla^{\perp}_Y \nabla^{\perp}_X \xi - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi$$

para todo $X, Y \in \Gamma(TM)$ e $\xi \in \Gamma(N_f M)$. Daí resulta das fórmulas de Gauss (2.2) e Weingarten (2.3) que a componente normal de $\widetilde{R}(X,Y)\xi$ satisfaz a **equação de Ricci**:

$$\begin{aligned}(\widetilde{R}(X,Y)\xi)^{\perp} &= (\widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y \xi - \widetilde{\nabla}_Y \widetilde{\nabla}_X \xi - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]}\xi)^{\perp} \\ &= (\widetilde{\nabla}_X \nabla^{\perp}_Y \xi - \widetilde{\nabla}_X A_\xi Y - \widetilde{\nabla}_Y \nabla^{\perp}_X \xi + \widetilde{\nabla}_Y A_\xi X - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi + A_\xi [X,Y])^{\perp} \\ &= (\nabla^{\perp}_X \nabla^{\perp}_Y \xi - A_{\nabla^{\perp}_Y \xi} X - \nabla_X A_\xi Y - \alpha(X, A_\xi Y) - \nabla^{\perp}_Y \nabla^{\perp}_X \xi + A_{\nabla^{\perp}_X \xi} Y \\ &\quad + \nabla_Y A_\xi X + \alpha(Y, A_\xi X) - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi + A_\xi [X,Y])^{\perp} \\ &= R^{\perp}(X,Y)\xi - \alpha(X, A_\xi Y) + \alpha(Y, A_\xi X). \quad (2.8)\end{aligned}$$

Também se tem que a equação de Ricci pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\left\langle \widetilde{R}(X,Y)\xi, \eta \right\rangle &= \left\langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta \right\rangle - \langle \alpha(X, A_\xi Y), \eta \rangle + \langle \alpha(Y, A_\xi X), \eta \rangle \\ &= \left\langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta \right\rangle - \langle A_\eta X, A_\xi Y \rangle + \langle A_\eta Y, A_\xi X \rangle \\ &= \left\langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta \right\rangle - \langle A_\xi A_\eta X, Y \rangle + \langle Y, A_\eta A_\xi X \rangle \\ &= \left\langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta \right\rangle - \langle [A_\xi, A_\eta] X, Y \rangle, \quad (2.9)\end{aligned}$$

onde $X, Y \in \Gamma(TM)$, $\xi, \eta \in \Gamma(N_f M)$, e $[A_\xi, A_\eta] = A_\xi A\eta - A_\eta A_\xi$. Similarmente, a equação de Codazzi pode ser escrita como

$$\begin{aligned}(\widetilde{R}(X,Y)\xi)^T &= -A_{\nabla^\perp_Y\xi}X - \nabla_X A_\xi Y + A_{\nabla^\perp_X\xi}Y + \nabla_Y A_\xi X + A_\xi[X,Y] \\ &= (\nabla_Y A)(X,\xi) - (\nabla_X A)(Y,\xi), \end{aligned} \tag{2.10}$$

onde por definição

$$(\nabla_Y A)(X,\xi) = \nabla_Y A_\xi X - A_{\nabla^\perp_Y\xi}X - A_\xi \nabla_Y X.$$

Agora vamos escrever as equações de uma imersão isométrica $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+p}_c$ onde de agora em adiante $\widetilde{M}_c$ denota uma variedade com curvatura constante c. Neste caso o tensor de curvatura $\widetilde{R}$ de $\widetilde{M}$ é dado por

$$\widetilde{R}(X,Y) = c(X \wedge Y)$$

para todo $X, Y \in \Gamma(T\widetilde{M})$, onde para todo $Z \in \Gamma(T\widetilde{M})$,

$$(X \wedge Y)Z = \langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y.$$

Então, para $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ e $\xi, \eta \in \Gamma(N_f M)$, as equações de Gauss, Codazzi e Ricci são respectivamente:

(i)

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = c\,\langle (X\wedge Y)Z, W\rangle + \langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z)\rangle - \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W)\rangle\,, \tag{2.11}$$

(ii)

$$(\nabla^\perp_X \alpha)(Y,Z) = (\nabla^\perp_Y \alpha)(X,Z), \tag{2.12}$$

ou equivalentemente, olhando a equação de Codazzi tangencial,

$$(\nabla_X A)(Y,\xi) = (\nabla_Y A)(X,\xi), \tag{2.13}$$

(iii)

$$R^\perp(X,Y)\xi = \alpha(X, A_\xi Y) - \alpha(A_\xi X, Y), \tag{2.14}$$

ou equivalentemente,

$$\left\langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\right\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle\,. \tag{2.15}$$

Observe que segue de (iii) que se $R_p^{\perp} = 0$, se, e somente se, existe uma base ortogonal para T_pM que diagonaliza todos A_ξ com $\xi \in T_pM^{\perp}$, pois esses operadores comutam.

2.3 Holonomia normal

Seja $\widetilde{M}^{n+p}$ uma variedade riemanniana com conexão Levi-Civita $\widetilde{\nabla}$ e seja $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+p}$ uma imersão isométrica. Temos $\pi : N_fM \to M$ o fibrado normal sobre M induzido pela f e a conexão normal definida na secção anterior. Mostraremos agora, que $\nabla^{\perp}$

$$\nabla^{\perp} : \Gamma(TM) \times \Gamma(N_fM) \to \Gamma(N_fM)$$

definido por

$$\nabla^{\perp}_X \xi = (\widetilde{\nabla}_X \xi)^{\perp},$$

é uma conexão compatível com a métrica induzida.

Como

$$\nabla^{\perp}_{fX+gY}\xi = (\widetilde{\nabla}_{fX+gY}\xi)^{\perp} = (f\widetilde{\nabla}_X\xi + g\widetilde{\nabla}_Y\xi)^{\perp} = f\nabla^{\perp}_X\xi + g\nabla^{\perp}_Y\xi,$$

segue que $\nabla^{\perp}$ é $C^{\infty}(M)$ linear sobre $\Gamma(TM)$. Também é $\mathbb{R}$ linear sobre $\Gamma(N_fM)$, já que

$$\nabla^{\perp}_X(a\xi + b\eta) = \left(\widetilde{\nabla}_X(a\xi + b\eta)\right)^{\perp} = (a\widetilde{\nabla}_X\xi + b\widetilde{\nabla}_X\eta)^{\perp} = a\nabla^{\perp}_X\xi + \nabla^{\perp}_X\eta.$$

Por ultimo, satisfaz a regra do produto:

$$\nabla^{\perp}_X f\xi = (\widetilde{\nabla}_X f\xi)^{\perp} = \left((Xf)\xi + f\widetilde{\nabla}_X\xi\right)^{\perp} = (Xf)\xi + f\nabla^{\perp}_X\xi.$$

Logo, $\nabla^{\perp}$ é uma conexão.

Esta conexão normal é compatível com a métrica induzida no fibrado normal pois,

$$\begin{aligned} X\langle \xi, \eta \rangle &= \left\langle \widetilde{\nabla}_X \xi, \eta \right\rangle + \left\langle \xi, \widetilde{\nabla}_X \eta \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla^{\perp}_X \xi, \eta \right\rangle + \left\langle \xi, \nabla^{\perp}_X \eta \right\rangle. \end{aligned}$$

Assim, pelo trabalhado no Capítulo 1, dada uma curva diferenciável por partes $\gamma : [a, b] \to M$, tem-se que existe uma isometria

$$P_\gamma : N_f M(\gamma(a)) \to N_f M(\gamma(b)),$$

entre espaços normais.

Talvez fosse melhor denotar o transporte paralelo normal por $P^{\perp}_{\gamma}$, pois pode-se confundir com o transporte paralelo tangencial. No caso em que se necessite distinguir qual transporte paralelo esta sendo usando, vamos utilizar esta notacão.

Temos o seguinte mapa

$$P : \Omega_p M \to O(N_f M(p)),$$

dado por $P(\gamma) = P_\gamma$, onde pelo Lema 1.7, satisfaz $P_{\sigma * \gamma} = P_\sigma \circ P_\gamma$. Também tem-se que $P_{\gamma^{-1}} = (P_\gamma)^{-1}$ pela observação feita antes do Lema 1.7, e que $P_{\tilde{p}} = \mathrm{Id}$, com Id operador identidade, onde $\tilde{p}$ é a curva constante em p. Defina

$$\Phi_p(M) = \{P_\gamma : \gamma \in \Omega_p M\},$$

então usando argumentos análogos ao da seção 1.4, pode-se concluir

Teorema 2.1. *$\Phi_p(M)$ é um subgrupo de $O(N_f M(p))$ chamado* ***grupo de holonomia normal*** *p.*

Os grupos de holonomia em pontos da mesma componente conexa são isomorfos. Assim, se M é conexo, denotaremos por $\Phi(M)$ o grupo de holonomia normal, pois os distintos grupos de holonomia são isomorfos.

Se consideramos laços em p homotópicos a uma constante e diferenciáveis por partes, obtemos um subgrupo de $O(N_f M(p))$ chamado o Grupo de Holonomia Normal Restrito em p e denotado por $\Phi^*_p(M)$. Temos que Φ^*_p é um subgrupo normal de Φ_p.

Capítulo 3

Grupo de holonomia normal restrito Φ^*

Neste capítulo, demonstraremos que o grupo de holonomia normal restrito Φ_p^* é, na verdade, um subgrupo de Lie das matrizes ortogonais $O(N_f M(p))$. Para atingir nosso objetivo, na primeira seção mostraremos que todo subgrupo conexo por caminhos de um grupo de Lie é um subgrupo de Lie. Na última seção, aplicaremos tal teorema ao subgrupo Φ_p^*.

3.1 Subgrupo conexo por caminhos de um grupo de Lie

Sejam G um grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ sua algebra de Lie e denotemos por e o elemento identidade do grupo. Quando conveniente identificaremos a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ com T_eG. O objetivo da presente seção é demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *Seja A um subgrupo conexo por caminhos de G. Então A é um subgrupo de Lie de G.*

A prova deste teorema foi feita por M. Kuranishi e H. Yamabe em forma independente. A prova do primeiro, nunca foi publicada e a prova do segundo esta em [9]. Para atingir nosso objetivo seguiremos o artigo [2] e o capítulo 9 do livro [5].

Definição 3.2. *Seja A um subgrupo de G conexo por caminhos. Então um elemento $X \in \mathfrak{g}$ é dito **acessível por A** se para qualquer vizinhança U de e existe uma curva contínua $\alpha : [0,1] \to G$, com imagem contida em A tal que $\alpha(0) = e$, e $\alpha(t) \in \exp(tX) \cdot U$ para $0 \leq t \leq 1$. Denotaremos por $\mathfrak{h}$ o conjunto de todos os elementos acesiveis por A.*

Observação 3.3. *Seja $X \in \mathfrak{h}$, toda vizinhança V de $\exp(X)$, é da forma*

$$V = \exp(X) \cdot \exp(-X) \cdot V = \exp(X) \cdot U,$$

com $U = \exp(-X) \cdot V$ *vizinhança de* e. *Como* X *é acessível por* H, *temos que existe curva* $\alpha : [0,1] \to G$, *contínua, com imagem contida em* A, $\alpha(0) = e$ *e* $\alpha(t) \in \exp(tX) \cdot U$. *Logo,* $\alpha(1) \in \exp(X) \cdot U = V$, *e portanto,* $\exp(X) \in \bar{A}$.

Precisamos de uma noção de convergência e continuidade uniforme em grupos de Lie.

Definição 3.4. *Sejam* (X, d) *um espaço métrico,* G *um grupo topológico, e* $f : X \to G$ *uma função contínua. Dizemos que* f *é* ***uniformemente contínua*** *se para toda vizinhança* $U \subset G$ *da identidade, existe* $\delta > 0$ *tal que se* $d(x, y) < \delta$, *então*

$$f(y) \in f(x) \cdot U.$$

Sejam $K \subset G$, (X, d) *um espaço métrico e* $f : K \to X$ *uma função contínua. Dizemos que* f *é* ***uniformemente contínua*** *se para todo* $\epsilon > 0$, *existe uma vizinhança* $U \subset G$ *da identidade tal que se* $x, y \in K$ *com* $y \in x \cdot U$, *então*

$$d(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Vejamos agora quais funções são uniformemente contínuas.

Lema 3.5. *Sejam* (X, d) *um espaço metrico compacto,* G *um grupo topológico, e* $f : X \to G$ *uma função contínua. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(a) f *é uniformemente contínua.*

(b) Se $\gamma_n : [0,1] \to X$ *é uma sequência de curvas convergindo uniformemente a* $\gamma : [0,1] \to X$, *então para toda vizinhança* $U \subset G$ *da identidade, existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$f(\gamma_n(t)) \in f(\gamma(t)) \cdot U,$$

para todo $t \in [0,1]$ *e* $n \geq N$.

(c) Seja $K \subset G$ *um compacto e* (X, d) *um espaço métrico não necessariamente compacto. Então cada função contínua* $g : K \to X$ *é uniformemente contínua.*

Demonstração. (a) Seja $U \subset G$ uma vizinhança de e. É fato que

$$m : G \times G \to G$$

$$(g,h) \mapsto g^{-1} \cdot h$$

é contínua e que $m(e,e) = e$. Logo, existe W vizinhança de (e,e) tal que $m(W) \subset U$. Assim, existe W_1, W_2, vizinhanças de e tal que $W_1 \times W_2 \subset W$. Defina $V = W_1 \cap W_2$. Se $g \in V^{-1}$ e $h \in V$, então $(g^{-1}, h) \in W$. Portanto, $g \cdot h \in U$. Conclusão, existe vizinhança V de e tal que $V^{-1} \cdot V \subset U$.

Dado $x \in X$, temos que $f(x) \cdot V$ é vizinhança de $f(x)$. Pela continuidade de f, existe $\delta_x > 0$ tal que se $d(x,y) < \delta_x$, então $f(y) \in f(x) \cdot V$. Como

$$\bigcup_{x \in X} B\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right) = X,$$

e X é compacto, existe uma cobertura finita

$$B\left(x_1, \frac{\delta_{x_1}}{2}\right) \cup \cdots \cup B\left(x_k, \frac{\delta_{x_k}}{2}\right) = X.$$

Defina $\delta = \min\{\frac{\delta_{x_i}}{2} : i = 1, \cdots, k\}$. Seja $x, y \in X$ tal que $d(x,y) < \delta$. Então, existe $i \in \mathbb{N}$, com $1 \leq i \leq k$, tal que $x \in B(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2})$, ou seja, $d(x, x_i) < \frac{\delta_{x_i}}{2}$. Também temos que

$$d(y, x_i) \leq d(y,x) + d(x, x_i) \leq \delta + \frac{\delta_{x_i}}{2} \leq \delta_{x_i}.$$

Assim $f(x), f(y) \in f(x_i) \cdot V$. Logo, $f(x)^{-1} \cdot f(y) \in V^{-1} \cdot f(x_i)^{-1} \cdot f(x_i) \cdot V \subset U$. Segue o resultado.

(b) Dado U vizinhança de e, temos por (a), que existe $\delta > 0$ tal que se $d(x,y) < \delta$, então $f(y) \in f(x) \cdot U$. Pela convergência uniforme, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que se $n \geq N$, logo $d(\gamma_n(t), \gamma(t)) < \delta$ para todo $t \in [0,1]$. Assim $f(\gamma_n(t)) \in f(\gamma(t)) \cdot U$.

(c) Fixado $\epsilon > 0$, pela continuidade de $f : K \to X$, para cada $x \in K$, existe vizinhança W_x de x tal que $f(K \cap W_x) \subset B(f(x), \frac{\epsilon}{2})$. Defina $U_x = x^{-1} \cdot W_x$, vizinhança de e. Assim, temos que $f(K \cap x \cdot U_x) \subset B(f(x), \frac{\epsilon}{2})$.

Para cada $x \in X$, tome uma vizinhança V_x de e tal que $V_x \cdot V_x \subset U_x$ (a existência desta vizinhança pode-ser demonstrada com a mesma técnica usada no primero parágrafo da prova do item (a)). Temos que

$$K \subset \bigcup_{x \in K} x \cdot V_x,$$

logo $K \subset x_1 \cdot V_{x_1} \cup \cdots \cup x_r \cdot V_{x_r}$. Defina $U = \cap_{i=1}^r V_{x_i}$, seja $x, y \in K$ com $y \in x \cdot U$. Então

$$x \in x_i \cdot V_{x_i} \subset (x_i \cdot V_{x_i}) \cdot V_{x_i} \subset x_i \cdot U_{x_i},$$

pois, $x_i \cdot V_{x_i}$ é uma vizinhança de x_i. Como

$$y \in x \cdot U \subset x_i \cdot V_{x_i} \cdot U \subset x_i \cdot V_{x_i} \cdot V_{x_i} \subset x_i \cdot U_{x_i},$$

temos que $f(x), f(y) \in B(f(x_i), \frac{\epsilon}{2})$. Usando desigualdade triangular segue o resultado. $\square$

Observação 3.6. *Seja $W \subset \mathfrak{g}$ uma vizinhança em torno do origem, na qual* exp *é um difeomorfismo, denotemos por $U = \exp(W)$ sua imagem pela aplicação* exp. *Considere uma curva diferenciável $\gamma : [0,1] \to G$, com $\gamma(0) = e$, $\gamma'(0) = X$; com imagem contida no aberto U. Assim a curva $\beta : [0,1] \to \mathfrak{g}$*

$$\beta(t) = \exp^{-1} \circ \gamma(t),$$

está definida com $\beta(0) = 0$. Considere a sequência de curvas

$$\beta_n(t) = n\beta\left(\frac{t}{n}\right) = \int_0^t \beta'\left(\frac{s}{n}\right) ds, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Temos que $|\beta_n(t) - tX| = |\int_0^t(\beta'(\frac{s}{n}) - \beta'(0))ds| \leq |\beta'(\frac{s}{n}) - \beta'(0)|$, assim β_n converge uniformemente a $\beta(t) = tX$. Pelo Lema 3.5 item (a), segue que $\exp|_U$ *é uniformemente contínua em cada compacto que contém Im(β). Assim, pelo Lema 3.5 item (b), tem-se que a sequência de curvas*

$$\gamma_n(t) = \exp \circ \beta_n(t) = \gamma\left(\frac{t}{n}\right)^n,$$

tem a propriedade de que para toda vizinhança U da identidade, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma_n(t) \in \exp(tX) \cdot U$, para $n \geq N$ e $t \in [0,1]$.

Observação 3.7. *Se A é um subgrupo de G e Im$(\gamma) \subset A$, então Im$(\gamma_n) \subset A$, pois $\gamma_n(t) = \gamma(\frac{t}{n})^n$. Assim $\gamma'(0) = X \in \mathfrak{h}$ já que $\gamma_n(t) \in \exp(tX) \cdot U$, para $n \geq N$ e $t \in [0,1]$.*

Vamos dividir a prova do Teorema 3.1 em três partes. Primeiro, mostraremos que $\mathfrak{h}$ é um subalgebra de $\mathfrak{g}$. Como a cada subalgebra $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ corresponde um único subgrupo de

Lie conexo H de G tal que H é variedade integral da distribução dada por $\mathfrak{h}$, na segunda parte, mostraremos que $A \subset H$. Na última parte mostraremos que $A = H$, logo fica demonstrado o Teorema 3.1. $\square$

3.1.1 O conjunto de elementos acesíveis por A é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$

Primeiro, mostraremos que $\mathfrak{h}$ é fechado pela multiplicação por escalar. Dividiremos essa prova em vários passos.

Lema 3.8. *Se $X \in \mathfrak{h}$, então para todo $0 \leq s \leq 1$, temos que $sX \in \mathfrak{h}$.*

Demonstração. No caso em que $s = 0$ é trivial, pois para toda vizinhança U da identidade, basta tomar a curva $\alpha(t) = e$. A curva claramente é contínua e esta contida em A. Como $\alpha(0) = e$ e $e = \alpha(t) \in U = \exp(t \cdot 0) \cdot U$, temos que 0 é acessível por A.

No caso geral, seja U uma vizinhança de e. Como X é acessível por A, existe uma curva contínua $\alpha(t)$ contida em A, tal que $\alpha(0) = e$ e $\alpha(t) \in \exp(tX) \cdot U$, para $0 \leq t \leq 1$. Defina $\beta : [0, 1] \to G$ por $\beta(t) = \alpha(st)$, curva contínua, contida em A, e que passa pela identidade no tempo 0. Como $0 \leq st \leq 1$, temos que $\beta(t) = \alpha(st) \in \exp(stX) \cdot U = \exp(tsX) \cdot U$, logo sX é acessível por A. $\square$

Seja U uma vizinhança de e. Defina a aplicação $F : \mathbb{R} \times G \to G$ por

$$F(t, g) = \exp(tX) \cdot g \cdot \exp(-tX).$$

Esta aplicação é diferenciável, logo contínua. Observe que $F(t, e) = e$, logo para cada t fixo, existe $U_t \subset \mathbb{R}$, $V_t \subset G$, vizinhanças de t e e respectivamente tal que $F(U_t \times V_t) \subset U$. Como $[0, 1] \subset \cup_{t\in[0,1]} U_t$, segue que existem numeros reais $t_1, \cdots, t_r$ tais que

$$[0, 1] \subset U_{t_1} \cup \cdots \cup U_{t_r}.$$

Defina $V = V_{t_1} \cap \cdots \cap V_{t_r}$, vizinhança da identidade. Assim, se $t \in [0, 1]$ e $g \in V$, temos que $(t, g) \in U_{t_i} \times V_{t_i}$ para algum $i \in \mathbb{N}$, com $1 \leq i \leq r$. Portanto, concluímos que $F(t, g) = \exp(tX) \cdot g \cdot \exp(-tX) \subset U$, ou seja,

$$\exp(tX) \cdot V \cdot \exp(-tX) \subset U, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Assim, dada vizinhança U de e, temos que existe V vizinhança de e com a propriedade $\exp(tX)\cdot V\cdot\exp(-tX)\subset U$ para $0\le t\le 1$. Ainda mais, como a operação inversão é um difeomorfismo, posso considerar uma vizinhança V que satisfaz a anterior condição com $V=V^{-1}$, onde $V^{-1}=\{v^{-1}\in G : v\in V\}$, pois basta trocar V por $V\cap V^{-1}$.

Lema 3.9. *Se $X\in\mathfrak{h}$, então $-X\in\mathfrak{h}$.*

Demonstração. Seja U uma vizinhança de e, e considere V vizinhança de e com as propriedades acima. Como X é acessível por A, existe $\alpha:[0,1]\to G$ curva contínua, com $\alpha(t)\in\exp(tX)\cdot V$, com ponto inicial a identidade e imagem contida em A. Defina $\beta(t)=\alpha(t)^{-1}$, logo $\beta(t)=\alpha(t)^{-1}\in V^{-1}\cdot\exp(-tX)=V\cdot\exp(-tX)\subset\exp(-tX)\cdot U$. Assim $-X\in\mathfrak{h}$. □

Agora considere $k\in\mathbb{N}$ e U uma vizinhança da identidade. Mostraremos que existe V vizinhança de e tal que se

$$a_1\in\exp(t_1X)\cdot V,\cdots,a_k\in\exp(t_kX)\cdot V\quad\text{com } 0\le t_i\le 1,$$

então $a_1\cdot a_2\cdots a_k\in\exp\left((t_1+t_2+\cdots+t_k)X\right)\cdot U$.

Seja

$$F:\mathbb{R}^k\times G^k\to G$$

$$(t_1,\cdots,t_k,g_1,\cdots g_k)\mapsto\left(\exp((t_1+\cdots+t_k)X)\right)^{-1}\cdot\exp(t_1X)\cdot g_1\cdots\exp(t_kX)\cdot g_k.$$

É uma aplicação diferenciável, pois é composição de funções suaves, portanto, a função $F:\mathbb{R}^k\times G^k\to G$ é contínua. Observe que $F(t_1,\cdots,t_k,e,\cdots,e)=e$. Pela continuidade, fixado $(t_1,\cdots t_k)\in[0,1]^k$, existe $U_{t_1,\cdots,t_k}$ e $V_{t_1,\cdots,t_k}$ vizinhanças de $(t_1,\cdots,t_k)$ e $(e,\cdots,e)$ respectivamente, tal que $F(U_{t_1,\cdots,t_k}\times V_{t_1,\cdots,t_k})\subset U$. Como

$$[0,1]^k\subset\bigcup_{(t_1,\cdots,t_k)\in[0,1]^k}U_{t_1,\cdots,t_k},$$

pela compacidade do cubo unitario, existe cobertura finita

$$[0,1]^k\subset U_{t_{1_1},\cdots,t_{k_1}}\cup\cdots\cup U_{t_{1_r},\cdots,t_{k_r}}.$$

Defina $W=\cap_{i=1}^{r}V_{t_{1_i},\cdots,t_{k_i}}$ vizinhança de $(e,\cdots,e)$, e seja $V\subset G$ vizinhança da identidade tal que $V^k\subset W$ (produto cartesiano). Se $(g_1,\cdots,g_k)\in V^k$, então para qualquer

$(t_1, \cdots, t_k) \in [0,1]^k$, temos que existe um $i \in \mathbb{N}$, com $1 \leq i \leq r$, tal que $(t_1, \cdots, t_k) \in U_{t_{1_i}, \cdots t_{k_i}}$. Como $(g_1, \cdots, , g_k) \in V^k \subset W$, segue que $(g_1, \cdots, g_k) \in V_{t_{1_i}, \cdots t_{k_i}}$, logo,

$$F(t_1, \cdots, t_k, g_1, \cdots, g_k) = \exp((t_1 + \cdots + t_k)X)^{-1} \cdot \exp(t_1 X) \cdot g_1 \cdots \exp(t_k X) \cdot g_k \in U.$$

Portanto,

$$\exp(t_1 X) \cdot V \cdot \exp(t_2 X) \cdot V \cdots \exp(t_k X) \cdot V \in \exp((t_1 + \cdots + t_k)X \cdot U,$$

para todo $0 \leq t_i \leq 1$. Segue o resultado.

Observe que com a vizinhança V da identidade encontrada acima, se $\tilde{k} \in \mathbb{N}$, $\tilde{k} \leq k$, e

$$a_1 \in \exp(t_1 X)V, \cdots a_{\tilde{k}} \in \exp(t_{\tilde{k}} X)V \quad \text{com}\, 0 \leq t_i \leq 1,$$

então $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{\tilde{k}} \in \exp((t_1 + \cdots + t_{\tilde{k}})X)U$, pois basta definir $a_{\tilde{k}+1} = \cdots = a_k = e \in \exp(0 \cdot X)V$. Logo $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{\tilde{k}} = a_1 \cdot a_2 \cdots a_{\tilde{k}} \cdot e \cdots e \in \exp((t_1 + \cdots + t_{\tilde{k}} + 0 \cdots 0)X) \cdot U$.

Lema 3.10. *Seja $k \in \mathbb{N}$ e $X \in \mathfrak{h}$. Então $kX \in \mathfrak{h}$.*

Demonstração. Seja U uma vizinhança de e, e considere a vizinhança V com a propriedade que se

$$a_1 \in \exp(t_1 X) \cdot V, \cdots, a_k \in \exp(t_k X) \cdot V \quad \text{com}\, 0 \leq t_i \leq 1,$$

então $a_1 \cdot a_2 \cdots a_k \in \exp((t_1 + \cdots + t_k)X) \cdot U$.

Como X é acessível por A, existe uma curva contínua $\beta(t)$ com imagem contida em A, tal que $\beta(0) = e$ e $\beta(t) \in \exp(tX) \cdot V$, com $0 \leq t \leq 1$. Defina $\gamma(t) = \beta(1)^{[kt]}\beta(kt - [kt])$, onde $[kt]$ é a função maior inteiro. É claro que a curva esta em A, pois β esta em A, e que $\gamma(0) = e$. Mostraremos que essa curva é contínua, para isso, basta demonstrar que se m é um número natural,

$$\lim_{t \to \frac{m}{k}^-} \gamma(t) = \gamma\left(\frac{m}{k}\right),$$

onde o limite é tomado pela esquerda, pois os pontos de descontinuidade de $[kt]$ são os números inteiros, quando estes são atingidos pela esquerda. Temos que,

$$\lim_{t \to \frac{m}{k}^-} \gamma(t) = \lim_{t \to \frac{m}{k}^-} \beta(1)^{[kt]}\beta(kt - [kt]) = \beta(1)^{m-1}\beta(1) = \beta(1)^m = \beta(1)^m\beta(0) = \gamma\left(\frac{m}{k}\right),$$

logo γ é contínua.

Assim,

$$\gamma(t) \in (\exp(X) \cdot V)^{[kt]} \cdot \exp((kt - [kt])X \cdot)V \subset \exp(([kt] + kt - [kt])X) \cdot U = \exp(tkX) \cdot U,$$

e $kX \in \mathfrak{h}$. □

Corolario 3.11. *Sejam $r \in \mathbb{R}$ e $X \in \mathfrak{h}$. Então $rX \in \mathfrak{h}$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.9, basta mostrar para r positivo. Considere números $s \in [0,1]$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $r = sk$. Existem, pois $\lim_{k\to\infty} \frac{r}{k} = 0$. Logo $rX = skX$, e pelos Lemas 3.9 3.10, chegamos a conclusão procurada. □

Agora, mostraremos que $\mathfrak{h}$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$. Dado $X, Y \in \mathfrak{h}$, temos que provar que $X + Y \in \mathfrak{h}$. Pelo Corolario 3.11 basta provar para X, Y estão pertos da origem quanto fosse necessário. Antes da prova de nossa afirmação, precisamos de dois lemas técnicos, usando tal suposição em sua demonstração.

Lema 3.12. *Seja V uma vizinhança da identidade. Então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\left(\exp\left(\frac{tX}{k}\right) \cdot \exp\left(\frac{tY}{k}\right)\right)^k \in \exp(t(X+Y)) \cdot V.$$

Demonstração. Sejam $\gamma : [0,1] \to G$ definida por $\gamma(t) = \exp(tX) \cdot \exp(tY)$, uma vizinhança $W' \subset \mathfrak{g}$ do origem onde exp é um difeomorfismo, e $W = \exp(W') \subset G$ sua imagem pela exp. Tem-se que $\gamma(0) = e$ e pela suposição que X e Y estão pertos da origem como fosse necessário, $\gamma(t) \subset W$. Ainda mais, como a ação de $m_* : T_eG \times T_eG \to T_eG$ é dada por $m_*(X,Y) = X + Y$, temos que $\gamma'(0) = X + Y$. Assim, pelas observações feitas na Observação 3.6, dada vizinhança V da identidade, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para todo $0 \le t \le 1$ e $n > N$,

$$\gamma\left(\frac{t}{n}\right)^n = \left(\exp\left(\frac{tX}{n}\right) \cdot \exp\left(\frac{tY}{n}\right)\right)^n \in \exp(t(X+Y)) \cdot V.$$

□

Lema 3.13. *Seja V uma vizinhança da identidade. Então, existe W vizinhança da identidade tal que se $a \in \exp(\frac{tX}{k}) \cdot W$ e $b \in \exp(\frac{tY}{k}) \cdot W$, $0 \le t \le 1$, então*

$$(ab)^k \in \left(\exp\left(\frac{tX}{k}\right) \cdot \exp\left(\frac{tY}{k}\right)\right)^k \cdot V.$$

Demonstração. Seja $F : \mathbb{R} \times G^2 \to G$ definida por

$$F(t, g, h) = \left(\exp\left(\frac{tX}{k}\right) \cdot \exp\left(\frac{tY}{k}\right)\right)^{-k} \cdot \left(\exp\left(\frac{tX}{k}\right) \cdot g \cdot \left(\frac{tY}{k}\right) \cdot h\right)^{k},$$

função suave, logo contínua. Observe que $F(t, e, e) = e$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, para todo t fixo, existe $U_t \subset \mathbb{R}$, $V_t \subset G$, $V'_t \subset G$ vizinhanças de t, e e e respectivamente, tal que $F(U_t \times V_t \times V'_t) \subset V$. Como

$$[0, 1] \subset \bigcup_{t \in [0,1]} U_t,$$

pela compacidade do intervalo fechado, existe cobertura finita. Assim temos

$$U_{t_1} \cup \cdots \cup U_{t_r} \supset [0, 1].$$

Defina $W = \bigcap_{i=1}^{r} V_{t_i} \cap V'_{t_i}$. Assim, se $t \in [0, 1]$, e $g, h \in W$, então existe $i \in \mathbb{N}$, com $1 \leq i \leq r$, tal que $t \in U_{t_i}$, $g \in V_{t_i}$ e $h \in V'_{t_i}$. Assim,

$$F(t, g, h) = \left(\exp\left(\frac{tX}{k}\right) \cdot \exp\left(\frac{tY}{k}\right)\right)^{-k} \cdot \left(\exp\left(\frac{tX}{k}\right) \cdot g \cdot \left(\frac{tY}{k}\right) \cdot h\right)^{k} \in V.$$

Portanto,

$$\left(\exp\left(\frac{tX}{k}\right) \cdot W \cdot \left(\frac{tY}{k}\right) \cdot W\right)^{k} \subset \left(\exp\left(\frac{tX}{k}\right) \cdot \exp\left(\frac{tY}{k}\right)\right)^{k} \cdot V,$$

logo o resultado segue. □

Corolario 3.14. *$\mathfrak{h}$ é um subespaço de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração. Seja U uma vizinhança da identidade. Como em um grupo de Lie a aplicação multiplicação é diferenciável, temos que existe V vizinhança de e tal que $V^2 \subset U$. Considere $k \in \mathbb{N}$ e W vizinhança da identidade, dados pelos Lemas 3.12 e 3.13.

Sejam $X, Y \in \mathfrak{h}$, logo $\frac{X}{k}, \frac{Y}{k} \in \mathfrak{h}$. Assim, estes elementos são acessíveis por A. Logo existem curvas contínuas α, β com imagem contida em A tal que $\alpha(0) = \beta(0) = e$ e

$$\alpha(t) \in \exp\left(\frac{tX}{k}\right) \cdot W, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\beta(t) \in \exp\left(\frac{tY}{k}\right) \cdot W, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Defina a curva $\gamma(t) = (\alpha(t)\beta(t))^k$. É claro que é uma curva contínua, contida em A e que no tempo 0 passa pela identidade. Como

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &\in \left(\exp\left(\frac{tX}{k}\right) \cdot W \cdot \exp\left(\frac{tY}{k}\right) \cdot W\right)^k \\
&\subset \left(\exp\left(\frac{tX}{k}\right) \cdot \exp\left(\frac{tY}{k}\right)\right)^k \cdot V \\
&\subset \exp(t(X+Y)) \cdot V^2 \\
&\subset \exp(t(X+Y)) \cdot U,
\end{aligned}$$

segue que $X+Y$ é acessível por A, e por tanto $X+Y \in \mathfrak{h}$. □

Agora, mostraremos que $\mathfrak{h}$ é um subalgebra de $\mathfrak{g}$.

Lema 3.15. *Sejam $X, Y \in \mathfrak{h}$. Então $[X,Y] \in \mathfrak{h}$.*

Demonstração. Primeiro provaremos que se $h \in A$ e $X \in \mathfrak{h}$, então $\mathrm{Ad}(h)X \in \mathfrak{h}$. Seja U vizinhança de e. Pela continuidade do homomorfismo conjugação $c_h : G \to G$, definido por $c_h(g) = h \cdot g \cdot h^{-1}$, temos que existe U_h vizinhança de e tal que $c_h(U_h) \subset U$. Como X é acessível por A, existe uma curva $\gamma : [0,1] \to G$, com imagem contida em A, $\gamma(0) = e$ e $\gamma(t) \in \exp(tX) \cdot U_h$ para todo $t \in [0,1]$. Então,

$$c_h(\gamma(t)) \in c_h(\exp(tX) \cdot U_h) = c_h(\exp(tX)) \cdot c_h(U_h) \subset \exp(t\mathrm{Ad}(h)X) \cdot U,$$

onde a ultima inclusão, segue do fato que $(c_h)_*X = \mathrm{Ad}(h)X$, logo $c_h(\exp(tX))$ é a curva integral que pasa pela identidade do campo $\mathrm{Ad}(h)X$.

Defina $N = \{g \in G : \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{h} = \mathfrak{h}\}$. Observe que N não é vazio, pois $\mathrm{Ad}(e) = \mathrm{Id}$. Se $g, h \in N$, segue que

$$\mathrm{Ad}(g \cdot h)\mathfrak{h} = \mathrm{Ad}(g) \circ \mathrm{Ad}(h)\mathfrak{h} = \mathfrak{h},$$

assim $g \cdot h \in N$. Já que $\mathrm{Ad}(g^{-1}) = (\mathrm{Ad}(g))^{-1}$, implica que se $g \in N$, então $g^{-1} \in N$. Portanto, N é um subgrupo de G. Se $g \in \bar{N}$, $\{g_k\}$ uma sequência em N convergindo a g, e $X \in \mathfrak{h}$, como Ad é suave, segue que $\mathrm{Ad}(g)X = \lim_{k\to\infty} \mathrm{Ad}(g_k)X \in \mathfrak{h}$. Assim, $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$. Em visto que $\mathrm{Ad}(g)$ é um automorfismo de álgebra de Lie, obtemos $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$. Portanto, $g \in N$, e N é fechado.

Dado que $\mathrm{Ad}(h)X \in \mathfrak{h}$ para $h \in A$ e $X \in \mathfrak{h}$ e $\mathrm{Ad}(h)$ é um automorfismo de álgebras de Lie, segue que A é um subgrupo de N. Como N é fechado, pela Observação 3.3, temos que $\exp_G(\mathfrak{h}) \subset \bar{A} \subset N$, onde $\bar{A}$ é o fecho de A. Por definição de N, segue que $(\exp_{GL(\mathfrak{g})}(t \cdot \mathrm{ad}X))Y = \mathrm{Ad}(\exp_G(tX))Y \in \mathfrak{h}$. Tomando as derivadas no tempo 0, concluimos $[X,Y] \in \mathfrak{h}$. $\square$

3.1.2 O subgrupo conexo de Lie H gerado por $\mathfrak{h}$ contém A

Considere agora H o subgrupo conexo de Lie, correspondente a $\mathfrak{h}$. Mostraremos que $H \supset A$.

Seja $\mathfrak{B} = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ uma base de $\mathfrak{g}$. Dada essa base, temos um produto interno natural em $\mathfrak{g}$ dado por

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{n} b_j X_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Como $\mathfrak{g}$ está dotado de um produto interno, temos que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{v},$$

onde $\mathfrak{v}$ é o complemento ortogonal de $\mathfrak{h}$.

Defina $V_m = \{\exp X : X \in \mathfrak{g} \text{ } e \text{ } m||X|| < 1\}$, com $m \in \mathbb{N}$. Como a aplicação exp é um difeomorfismo em torno de alguma vizinhança U da identidade, para m suficentemente grande os V_m são abertos em G. Sem perda de generalidade, pode-se supor que todos os V_m são abertos e que $V_1 \subset U$, pois caso contrário basta modificar a base $\mathfrak{B}$ multiplicando, por algum escalar adequado.

Lema 3.16. *Defina $\phi : \mathfrak{g} \to G$ por*

$$\phi(X+Y) = \exp X \cdot \exp Y, \quad X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{v}.$$

Então ϕ é um difeomorfismo em alguma vizihança da origem.

Demonstração. Seja $\{X_1, \cdots, X_k, \cdots, X_n\}$ uma base de $\mathfrak{g}$ com $\{X_1, \cdots, X_k\}$ uma base para $\mathfrak{h}$. Escolha a carta natural $\mathrm{x} : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}^n$ dada por $\mathrm{x}(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = (a_1, \cdots, a_n)$. Mostrar que

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{k} a_i X_i\right) \exp\left(\sum_{i=k+1}^{n} a_i X_i\right)$$

é um difeomorfismo em torno da origem é equivalente a mostrar que

$$\psi(a_1, \cdots, a_n) = \phi \circ \mathrm{x}^{-1}(a_1, \cdots, a_n) = \exp\left(\sum_{i=1}^{k} a_i X_i\right) \cdot \exp\left(\sum_{i=k+1}^{n} a_i X_i\right)$$

é um difeomorfismo em torno do 0. Como $\psi_* \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_0 = X_i$, temos o resultado procurado. $\square$

Assim, juntamente com o resultado anterior, pode-se supor que para todo $m \in \mathbb{N}$ e $a \in V_m$, que $a = \exp X \cdot \exp Y$ com $X \in \mathfrak{h}$ e $Y \in \mathfrak{v}$, pois caso contrário pode-se trabalhar em $W_m = V_m \cap \phi(W)$, sendo W a vizinhança onde ϕ é um difeomorfismo. Seja A_m a componente conexa por caminhos que contém a identidade do subespaço topologico $V_m \cap A$.

Lema 3.17. *Sejam A um grupo topológico conexo por caminhos, e U uma vizinhança da identidade em A. Então, V a componente conexa por caminhos de U que contem a identidade gera A.*

Demonstração. Defina $V^n = \{v_1 \cdot v_2 \cdots v_n : v_i \in V\}$. É claro que V^1 é aberto, pois é igual a V. Provaremos, por indução que V^n é aberto. Portanto, suponha que V^n é aberto. Como a translação à direita

$$R_a : G \to G$$

$$b \mapsto ab,$$

é um difeomorfismo, implica que $R_a(V^n) = V^n \cdot a$ é aberto. Logo $V^{n+1} = \cup_{a \in V} V^n \cdot a$ é aberto.

Seja $W = \cup_{i=1}^{\infty} V^n$. É aberto, pois cada V^n é aberto. Mostraremos, que W também é fechado. Seja $g \in \bar{W}$, como $g \in g \cdot V^{-1}$ aberto, temos que existe $h \in W \cap g \cdot V^{-1}$. Assim, $h \in V^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e $h = g \cdot v^{-1}$. Logo $v_1 \cdot u_2 \cdots v_n = g \cdot v^{-1}$, e portanto $g \in V^{n+1} \subset W$.

Como A é conexo por caminhos, temos A conexo. Logo $W = A$, ou seja, V gera A. $\square$

Assim, pelo lema acima, para provar que $H \supset A$ é suficente mostrar que algum A_m está contido em H.

Lema 3.18. *O subgrupo A de G está contido no subgrupo conexo de Lie gerado por $\mathfrak{h}$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que nehum A_m está contido em H. Logo, para cada $m \in \mathbb{N}$, pode-se encontrar um $a_m \in A_m$, tal que $a_m \notin H$. Assim,

$$a_m = \exp(X_m) \cdot \exp(Y_m), \quad X_m \in \mathfrak{h}, \quad 0 \neq Y_m \in \mathfrak{v},$$

pois se $Y_m = 0$, então $a_m = \exp(X_m) \in H$.

Como $\{Y_m/||Y_m||\}_{m=1}^{\infty}$, é uma sequência de vetores na esfera unitária, temos que existe uma subsequência convergente, que sem perda de generalidade, suponha-se a mesma sequência. Logo $\lim_{m\to\infty} Y_m/||Y_m|| = Y \in \mathfrak{v}$. Definindo os numeros reais, $p_m = 1/||Y_m||$, temos que $\lim_{m\to\infty} p_m Y_m = Y$.

Seja $Z \subset G$ uma vizinhança de e, como a aplicação $F : G \to G$, definida por $F(g) = a_m^{-1} \cdot g \cdot a_m$ é diferenciável e $F(e) = e$, existe Z' vizinhança da identidade tal que $F(Z') \subset Z$. Assim, $a_m^{-1} \cdot Z' \cdot a_m \subset Z$ e portanto, $Z' \cdot a_m \subset a_m \cdot Z$. Sem perda de generalidade, suponha que $Z' \subset V_m$. Como X_m é acessível por A, temos que existe uma curva contínua γ_m contida em A tal que $\gamma_m(0) = e$ e $\gamma_m(t) \in \exp(-tX_m) \cdot Z'$ para $0 \leq t \leq 1$. Como A_m é conexo por caminhos, tome uma curva contínua δ_m em A_m tal que $\delta_m(0) = e$ e $\delta_m(1) = a_m$. Defina $\beta_m(t) = \gamma_m(t)\delta_m(t)$. Então $\beta_m(0) = e$ e

$$\beta_m(1) = \gamma_m(1)\delta_m(1) \in \exp(-X_m) \cdot Z' \cdot a_m \subset \exp(-X_m) \cdot a_m \cdot Z = \exp(Y_m) \cdot Z, \quad (3.1)$$

pois segue de que $a_m = \exp(X_m) \cdot \exp(Y_m)$. Também temos que

$$\beta_m(t) \in \exp(-tX_m) \cdot Z' \cdot A_m \subset V_m \cdot Z' \cdot A_m,$$

pois $\exp(-tX_m) \in V_m$ $(m||X_m|| < 1)$ para $t \in [0, 1]$. Como $Z' \subset V_m$ e $A_m \subset V_m$, resulta que $V_m \cdot Z' \cdot A_m \subset V_m^3$. Logo

$$\beta_m(t) \in \exp(-tX_m) \cdot Z' \cdot A_m \subset V_m \cdot Z' \cdot A_m \subset V_m^3.$$

Como Z é uma vizinhança arbitrária de e, pela equação (3.1) tomando Z tão pequenho quanto fosse necessário, pode-se supor que $\beta_m(1) = \exp(Z_m)$, $p_m^2||Y_m - Z_m|| < 1$, e $m||Z_m|| < 1$. Logo, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe uma curva β_m em $A \cap V_m^3$ tal que $\beta_m(0) = e$, $\beta_m(1) = \exp Z_m$ e $\lim_{m\to\infty} p_m Z_m = Y$. Defina uma curva α_m em A por

$$\alpha_m(t) = \beta_m(1)^{[tp_m]} \beta_m(tp_m - [tp_m]), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Pelos mesmos argumentos usados para provar que se $X \in \mathfrak{h}$ então $kX \in \mathfrak{h}$, segue que α_m é contínua e $\alpha_m(0) = e$. Segue que

$$\begin{aligned}
\alpha_m(t) &= \beta_m(1)^{[tp_m]}\beta_m(tp_m - [tp_m]) \\
&= (\exp Z_m)^{[tp_m]}\beta_m(tp_m - [tp_m]) \\
&= \exp([tp_m]Z_m)\beta_m(tp_m - [tp_m]) \\
&= (\exp(tp_m Z_m)\exp(([tp_m] - tp_m)Z_m)\beta_m(tp_m - [tp_m]) \\
&\in (\exp(tp_m Z_m) \cdot V_m \cdot V_m^3 \\
&= (\exp(tp_m Z_m) \cdot V_m^4,
\end{aligned}$$

onde o penúltimo passe se deve a que $m||Z_m|| < 1$ e que $|tp_m - [tp_m]| \leq 1$.

Agora, provemos que $Y \in \mathfrak{h}$. Seja U uma vizinhança da identidade. Pode-se encontrar um $k \in \mathbb{N}$ tal que $V_k^5 \subset U$. Como $tp_m Z_m \to tY$ uniformemente para $0 \leq t \leq 1$ temos pelo Lema 3.5 item (b) que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que tal que $\exp(tp_n Z_n) \in \exp(tY)V_k$ para todo $n \geq N$. Logo,

$$\alpha_n(t) \in \exp(tp_n Z_n) \cdot V_n^4 \subset \exp(tY) \cdot V_k^5 \subset \exp(tY) \cdot U,$$

uma contradição, pois $Y \in \mathfrak{o}$ e $||Y|| = 1$. □

3.1.3 O subgrupo A de G é igual al subgrupo conexo de Lie gerado por $\mathfrak{h}$

Para provar este resultado, necessitamos um resultado que faz uso de métodos de Topologia Algébrica, especificamente o Teorema de Ponto Fixo de Brower.

Lema 3.19. *Sejam I o intervalo $[-1, 1]$ e k um número natural. Seja $f : I^k \to \mathbb{R}^k$ uma função contínua tal que $||f(x) - x|| \leq \frac{1}{2}$, para todo $x \in I^k$. Então $f(I^k)$ contém a origem, e ainda mais, a origem é um ponto interior.*

Demonstração. Seja $a \in B(0, \frac{1}{2})$ e defina $g : I^k \to \mathbb{R}^k$ por $g(x) = x - f(x) + a$. Como $||g(x)|| \leq ||x - f(x)|| + ||a|| \leq 1$, temos que a imagem de g está contida em I^k. Logo, pelo Teorema do ponto fixo de Brower (I^k é homeomorfo ao disco k-dimensional), g tem um ponto fixo x_0. Assim, $f(x_0) = a$. Portanto, $B(0, \frac{1}{2}) \subset f(I^r)$, e fica demonstrado o resultado. □

Lema 3.20. *O subgrupo A de G é igual ao subgrupo conexo de Lie gerado por $\mathfrak{h}$.*

Demonstração. Seja $\{X_1, X_2, \cdots X_k\}$ uma base para $\mathfrak{h}$ e defina a aplicação $\phi : \mathbb{R}^k \to H$ por

$$\phi(t_1, t_2, \cdots, t_k) = \exp(t_1X_1) \cdot \exp(t_2X_2) \cdots \exp(t_kX_k).$$

Como $\phi_* \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_0 = X_i$, segue que existe uma vizinhança $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^k$ da origem, onde ϕ é um difeomorfismo e defina $V = \phi(\tilde{V})$. Sem perda de generalidade, asuma que $(-2,2)^k \subset [-2,2]^k \subset \tilde{V}$, pois basta só multiplicar a base por um escalar adequado para obter tal afirmação.

Afirmamos que existe W_1 vizinhança de e tal que $\phi([-1,1]^k) \cdot W_1 \subset V$. Defina

$$F : \mathbb{R}^k \times G \to G$$

$$F(t_1, \cdots, t_k, g) = \phi(t_1, \cdots, t_k) \cdot g.$$

É uma aplicação diferenciável, logo contínua. Observe que $F([-1,1]^k \times \{e\}) \in V$. Logo para $(t_1, \cdots, t_k) \in [-1,1]^k$, existem $U_{t_1,\cdots,t_k}$ e $V_{t_1,\cdots,t_k}$ vizinhanças de $(t_1, \cdots, t_k)$ e e respectivamente, tal que $F(U_{t_1,\cdots,t_k} \times V_{t_1,\cdots,t_k}) \subset V$. Como o cubo $[-1,1]^k$ é compacto, e $[0,1]^k \subset \cup_{(t_1,\cdots,t_k)\in[0,1]^k} U_{t_1,\cdots,t_k}$, temos que existe cobertura finita,

$$[0,1]^k \subset U_{t_1^1,\cdots,t_k^1} \cup \cdots \cup U_{t_1^r,\cdots,t_k^r}.$$

Defina $W_1 = \cap_{i=1}^r V_{t_1^i,\cdots,t_k^i}$. Se $(t_1, \cdots, t_k) \in [0,1]^k$ e $g \in V$, então $(t_1, \cdots, t_k, g) \in U_{t_1^i,\cdots,t_k^i} \times V_{t_1^i,\cdots,t_k^i}$ para algúm $i \in \mathbb{N}$ com $1 \leq i \leq r$. Portanto, $\phi(t_1, \cdots, t_k) \cdot g \in V$. Segue a afirmação.

Nossa segunda afirmação, é que existe uma vizinhança W_2 da identidade tal que se $s \in (-2,2)^k$, $t \in [-1,1]^k$ e $\phi(s) \in \phi(t) \cdot W_2$, então $||s - t|| \leq \frac{1}{2}$. Basta aplicar o Lema 3.5 com a função $\phi^{-1} : \phi([-2,2]^k) \to \mathbb{R}^k$, com $K = \phi([-2,2]^k)$, $\epsilon = \frac{1}{2}$ e $U = W_2$. Definimos $W = W_1 \cap W_2$ vizinhança de e, logo pelo feito anteriormente temos que

$$\exp(t_1X_1) \cdot \exp(t_2X_2) \cdot \cdots \cdot \exp(t_kX_k) \cdot W \subset V \quad -1 \leq t_i \leq 1,$$

e se

$$\exp(s_1X_1) \cdot \exp(s_2X_2) \cdot \cdots \cdot \exp(s_kX_k) \in \exp(t_1X_1) \cdot \exp(t_2X_2) \cdot \cdots \cdot \exp(t_kX_k) \cdot W,$$

para $-1 \leq t_i \leq 1$, então $(s_1 - t_1)^2 + \cdots + (s_k - t_k)^2 \leq \frac{1}{4}$.

Agora tome (aproveitando novamente a compacidade de $[-1,1]^k$), uma vizinhança Z da identidade tal que

$$\exp(t_1X_1)\cdot Z\cdot\exp(t_2X_2)\cdot Z\cdot\cdots\cdot\exp(t_kX_k)\cdot Z \subset \exp(t_1X_1)\cdot\exp(t_2X_2)\cdot\cdots\cdot\exp(t_kX_k)\cdot W.$$

Como $X_i \in \mathfrak{h}$, existem curvas contínuas $\alpha_i : [0,1] \to G$ com imagem contida em A, tal que $\alpha_i(0) = e$ e $\alpha_i(t) \in \exp(tX_i)\cdot Z$, para $0 \leq t \leq 1$ e $r = 1, 2, \cdots k$. Logo,

$$\begin{aligned} \alpha_1(t)\cdot\alpha_2(t)\cdots\alpha_k(t) &\in \exp(tX_1)\cdot Z\cdot\exp(tX_2)\cdot Z\cdot\cdots\cdot\exp(tX_k)\cdot Z \\ &\subset \exp(t_1X_1)\cdot\exp(t_2X_2)\cdot\cdots\cdot\exp(t_kX_k)\cdot W \\ &\subset V, \end{aligned}$$

para $-1 \leq t \leq 1$. Assim,

$$\alpha_1(t)\cdots\alpha_k(t) = \exp(f_1(t)X_1)\cdots\exp(f_k(t)X_k),$$

com $f_i : [-1,1] \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Defina a função contínua $f : [-1,1]^k \to \mathbb{R}^k$ por $f(t) = (f_1(t), \cdots, f_k(t))$. Como,

$$\begin{aligned} \exp(f_1(t)X_1)\cdots\exp(f_k(t)X_k) &= \alpha_1(t)\cdots\alpha_k(t) \\ &\subset \exp(tX_1)\cdot Z\cdot\exp(tX_2)\cdot Z\cdot\cdots\cdot\exp(tX_k)\cdot Z \\ &\subset \exp(t_1X_1)\cdot\exp(t_2X_2)\cdot\cdots\cdot\exp(t_kX_k)\cdot W, \end{aligned}$$

temos que $||t - f(t)|| \leq \frac{1}{2}$. Portanto, pelo Lema 3.19 o conjunto

$$\{\alpha_1(t_1)\cdot\cdots\cdot\alpha_k(t) : (t_1, t_2\cdots, t_k) \in [-1,1]^k\} \subset A,$$

contém uma vizinhança de e em H. Pelo Lema 3.17, segue que $H \subset A$.

□

3.2 Aplicação ao grupo normal restrito de holonomia

O objetivo da presente seção é demonstrar o resultado mais importante deste capítulo: o subgrupo de holonomia normal restrita Φ_p^* é um subgrupo de Lie de $O(N_fM(p))$. Antes de provar esse resultado precisamos de algumas definições e um teorema que só enunciaremos.

Definição 3.21. *Seja M uma variedade e $\mathfrak{U}$ uma cobertura por abertos de M. Dizemos que um laço $\tau : [0,1] \to M$, com $\tau(0) = p$ é um **$\mathfrak{U}$-laço** se existem curva $\mu : [0,1] \to M$, com $\mu(0) = p$ e $\mu(1) = q$, laço $\gamma : [0,1] \to M$, com $\gamma(0) = q$, $\gamma([0,1]) \subset U \in \mathfrak{U}$ tal que $\tau = \mu^{-1} * \gamma * \mu$.*

*Sejam τ e τ' duas curvas em M. Dizemos que τ e τ' são **equivalentes** se τ' pode ser obtida de τ mediante uma troca finita de seções da curva τ da forma $\mu^{-1} * \mu$ por uma curva constante ou vice-versa.*

Observação 3.22. *Sejam τ e τ' duas curvas diferenciáveis por partes, equivalentes. Pelo Lema 1.7, temos que o transporte paralelo de ambas as curvas coincidem, ou seja, $P_\tau = P_{\tau'}$.*

Teorema 3.23 (Lema de Factorização)**.** *Seja $\mathfrak{U}$ uma cobertura aberta de M.*

(a) Qualquer laço homotópico a uma constante é equivalente a um produto finito de $\mathfrak{U}$-laços.

(b) Se o laço é suave por partes, então cada $\mathfrak{U}$-laço no produto pode ser escolhido da forma $\mu^{-1} * \gamma * \mu$, onde μ é uma curva suave por partes e γ é um laço suave.

Demonstração. A prova deste resultado pode ser vista no Apendice 7 de [3]. □

Teorema 3.24. *Sejam M^n uma variedade riemanniana e $f : M^n \to \tilde{M}^N$ uma imersão isométrica, $\pi : N_f M \to M$ o fibrado normal sobre M induzido pela f e $\nabla^\perp$ a conexão normal e $p \in M$. Considere Φ_p^* o grupo holonomia normal restrita em p. Então Φ_p^* é um subgrupo de Lie das matrizes $O(N_f M(p))$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.1 demonstrado no capítulo anterior, basta provar que Φ_p^* é conexo por caminhos. Para atingir tal objetivo, vamos mostrar que para todo elemento $P_\tau \in \Phi_p^*$, com τ um laço suave por partes, homotópico a uma constante, existe uma curva contínua $\beta : [0,1] \to O(N_f M(p))$, com imagem contida em Φ_p^*, tal que $\beta(0) = P_\tau$ e $\beta(1) = \mathrm{Id}$.

Primeiro, suponha que τ é suave e está contida em uma carta (V, φ) centrada em $p \in M$ tal que a imagem de V por φ seja uma bola aberta em $\mathbb{R}^n$. Em coordenadas locais, temos que $\varphi \circ \tau(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$. Considere a função $F : [0,1] \times [0,1] \to V$ definida por

$$F(t,s) = ((1-s)x_1(t), \cdots, (1-s)x_n(t)).$$

Observe que $F(t,0) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$, $F(t,1) = 0$, e que $F_s(t) = F(t,s)$ com s fixo, é uma curva suave. Geometricamente, o que faz tal função é contrair o laço $\varphi \circ \tau$ a origem.

Defina $G(t,s) = \varphi^{-1} \circ F(t,s)$. Segue que $G(t,0) = \tau(t)$ e $G(t,1) = p$. Temos que $G_s(t) = G(t,s)$ são laços suaves, homotópicos a uma constante. Pelo sistema de equações diferencias de primeira ordem (1.3), a solução do transporte paralelo vai depender contínuamente do parâmetro da curva G_s. Portanto, $P_{G_s} \in \Phi_p^*$ vai ser continuo como função de $s \in [0,1]$. Assim, temos um caminho P_{G_s} com $P_{G_0} = P_\tau$ e $P_{G_1} = \mathrm{Id}$, pois $G_1(t) = p$ é o caminho constante.

No caso geral, seja $\mathfrak{U} = \{V \subset M$:V bolas coordenadas de M $\}$. Pelo Teorema 3.23 temos que τ é equivalente a $(\tau_k^{-1} * \mu_k * \tau_k) * \cdots * (\tau_1^{-1} * \mu_1 * \tau_1)$, onde $\tau_i : [0,1] \to M$ é um curva suave por partes, que começa em p e termina em q_i, e $\mu_i : [0,1] \to M$ é um laço suave em q_i que está contido em uma bola coordenada $U \in \mathfrak{U}$. Pelo feito no caso específico, para cada laço μ_i, temos que existem laços $G_s^i : [0,1] \to M$ homotopicamente nulos, tal que $G_0^i = \mu$ e $G_1^i = q_i$. Este laço gera uma curva contínua $P_{G_s^i} : [0,1] \to \Phi_{q_i}^*$, tal que $P_{G_0^i} = P_{\mu_i}$ e $P_{G_1^i} = \mathrm{Id}$.

Defina o laço $\alpha_s = (\tau_k^{-1} * G_s^k * \tau_k) * \cdots * (\tau_1^{-1} * G_s^1 * \tau_1)$. Temos que cada $\tau_j^{-1} * G_s^j * \tau_j$ é homotópico a uma constante, pois G_s^j é homotopicamente nulo. Portanto, α_s é homotópico a uma constante. Assim,

$$P_{\alpha_s} = P_{\tau_k^{-1}} \circ P_{G_s^k} \circ P_{\tau_k} \circ \cdots \circ P_{\tau_1^{-1}} \circ P_{G_s^1} \circ P_{\tau_1},$$

onde a dependência de s é contínua, pois cada $P_{G_s^k} : [0,1] \to \Phi_{q_i}^*$ são contínuas. Pela Observação 3.22, temos que $P_{\alpha_0} = P_\tau$ e $P_{\alpha_1} = \mathrm{Id}$. Assim, $P_{\alpha_s} : [0,1] \to \Phi_p^*$ une τ com a identidade, logo o resultado segue.

$\square$

Capítulo 4

Teorema de holonomia normal

Neste capítulo provaremos o Teorema de Holonomia Normal seguindo as ideias de [1], [6] e [7]. Na primeira seção, listaremos algumas definições e enunciaremos um lema que é de vital importância para a demonstração do teorema. Na seguinte seção, definiremos um tensor de curvatura algébrico que fornecerá a mesma informação que o tensor de curvatura. Por fim, na última seção provamos o Teorema de Holonomia Normal.

4.1 Definições

Sejam $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ o espaço euclidiano n-dimensional e $\mathcal{P}$ o espaço de tensores do tipo $(1,3)$ em V. Se $P \in \mathcal{P}$, então identificamos tal tensor com a aplicação bilinear

$$P : V \times V \to \mathrm{End}(V),$$

$$(x, y) \mapsto P_{x,y}.$$

Definição 4.1. *Um tensor $R \in \mathcal{P}$ é chamado* ***tensor de curvatura algébrico*** *se*

(i) $R_{x,y} = -R_{y,x}$.

(ii) $\langle R_{x,y}z, w \rangle = -\langle R_{x,y}w, z \rangle$.

(iii) $\langle R_{x,y}z, w \rangle = \langle R_{z,w}x, y \rangle$.

(iv) $R_{x,y}z + R_{y,z}x + R_{z,x}y = 0$.

A **curvatura escalar** de um tensor de curvatura algébrico R é definido por

$$k(R) = 2\sum_{i<j} \left\langle R_{e_i,e_j} e_j, e_i \right\rangle,$$

onde $\{e_1, \cdots, e_n\}$ é uma base ortonormal de V.

Observe que pela definição de tensor de curvatura algébrico, temos

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^{n} \left\langle R_{e_i,e_j} e_i, e_j \right\rangle &= -\sum_{i<j} \left\langle R_{e_i,e_j} e_i, e_j \right\rangle - \sum_{i<j} \left\langle R_{e_j,e_i} e_j, e_i \right\rangle \\ &= \sum_{i<j} \left\langle R_{e_i,e_j} e_j, e_i \right\rangle + \sum_{i<j} \left\langle R_{e_i,e_j} e_j, e_i \right\rangle \\ &= 2k(R). \end{aligned}$$

Para demonstrar o Teorema de Holonomia Normal na última seção, precisamos de um lema que enunciaremos. Mas antes precisamos introduzir duas definições.

Definição 4.2. *Seja R um tensor de curvatura algébrico em V. Um subgrupo compacto G das matrizes ortogonais $O(V)$ do espaço V é chamado de **grupo de holonomia** de R se $R_{x,y} \in \mathfrak{g}$ para $x, y \in V$, onde $\mathfrak{g}$ denota o álgebra de Lie de G.*

Definição 4.3. *A tripla $[V, R, G]$ onde V é um espaço euclidiano, R um tensor de curvatura algébrico em V e G um grupo de holonomia conexo de R é chamada de **sistema de holonomia** . Em particular, se a ação de G em V é irredutível, o sistema de holonomia $[V, R, G]$ é chamado **irredutível** .*

Lema 4.4. *Sejam G um subgrupo de Lie conexo de $SO(V)$ agindo irredutívelmente sobre V, e R um tensor de curvatura algébrico em V tal que $R_{x,y} \in \mathfrak{g}$ para todo $x, y \in V$. Se $k(R) \neq 0$, então G é compacto, $[V, R, G]$ é um sistema de holonomia irredutível, e G age em V como uma s-representação.*

Demonstração. A prova pode ser encontrada em [1] Pag. 115. □

4.2 Curvatura normal

Seja M^n uma variedade riemanniana conexa e seja $f : M^n \to Q_c^N$ uma imersão isométrica, onde Q_c^N é um espaço forma canônico. Seja $\pi : N_f M \to M$ o fibrado normal sobre M

induzido pela f. Por abuso de notação, denotaremos a métrica riemanniana em Q_c^n e a métrica natural em N_fM por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Denotaremos as seções suaves de M em N_fM, por $\Gamma(N_fM)$.

Seja $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ um referencial ortonormal arbitrário, numa vizinhança U de $p \in M$, do fibrado tangente TM. Definimos

$$\mathcal{R}^\perp : \Gamma(N_fU) \times \Gamma(N_fU) \times \Gamma(N_fU) \to \Gamma(N_fU)$$

por

$$\mathcal{R}^\perp(\xi, \eta)\nu = \sum_{i=1}^{n} R^\perp(A_\xi(e_i), A_\eta(e_i))\nu,$$

onde $R^\perp$ é o tensor curvatura normal induzida pela conexão normal $\nabla^\perp$ e A é o operador forma.

Proposição 4.5. *A definição de $\mathcal{R}^\perp$ é independente da escolha do referencial ortonomal de TM.*

Demonstração. Sejam $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ e $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ dois referenciais ortonormais de TM. Temos que $f_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$, onde os $a_{ij} : U \to \mathbb{R}$ são funções suaves, e a matriz $A(p) = [a_{ij}(p)]_{i,j=1,\cdots,n}$ é ortogonal para cada $p \in U$. Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} R^\perp(A_\xi(f_j), A_\eta(f_j))\nu &= \sum_{j=1}^{n} R^\perp\left(A_\xi\left(\sum_{r=1}^{n} a_{rj}e_r\right), A_\eta\left(\sum_{s=1}^{n} a_{sj}e_s\right)\right)\nu \\
&= \sum_{j=1}^{n} R^\perp\left(\sum_{r=1}^{n} a_{rj}A_\xi(e_r), \sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_\eta(e_s)\right)\nu \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{rj}a_{sj}R^\perp(A_\xi(e_r), A_\eta(e_s))\nu \\
&= \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{rj}a_{sj}R^\perp(A_\xi(e_r), A_\eta(e_s))\nu \\
&= \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \delta_r^s R^\perp(A_\xi(e_r), A_\eta(e_s))\nu \\
&= \sum_{r=1}^{n} R^\perp(A_\xi(e_r), A_\eta(e_r))\nu.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{R}^\perp$ é independente da escolha do referencial ortonormal. $\square$

Devido à última proposição, pode-se definir

$$\mathcal{R}^{\perp} : \Gamma(N_fM) \times \Gamma(N_fM) \times \Gamma(N_fM) \to \Gamma(N_fM),$$

pois basta definir tal aplicação em cartas coordenadas, na interseção de duas cartas, temos unicidade da definição. Vejamos agora que essa aplicação é, na verdade, um tensor. Mas, antes lembremos um resultado sobre seções de tensores:

Proposição 4.6. *Qualquer seção K do fibrado de tensores covariantes de ordem r e contravariante de ordem 1 (fibrado de tipo $(1, r)$), ou seja, $K \in \Gamma(\mathcal{T}_1^r(N_fM))$, define uma aplicação r-linear*

$$\tilde{K} : \Gamma(N_fM) \times \cdots \times \Gamma(N_fM) \to \Gamma(N_fM)$$

$$\tilde{K}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r)(p) = K(p)(\xi_1(p), \xi_2(p), \cdots, \xi_r(p))$$

tal que

$$\tilde{K}(f_1\xi_1, f_2\xi_2, \cdots, f_r\xi_r) = f_1 f_2 \cdots f_r \tilde{K}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r),$$

para $f_i \in C^{\infty}(M)$ e $\xi_j \in \Gamma(N_fM)$. Em outras palavras, $\tilde{K}$ é $C^{\infty}(M)$ r-linear.

Reciprocamente, qualquer aplicação

$$T : \Gamma(N_fM) \times \cdots \times \Gamma(N_fM) \to \Gamma(N_fM),$$

$C^{\infty}(M)$ r-linear, define uma aplicação $K \in \Gamma(\mathcal{T}_1^r(N_fM))$ tal que $\tilde{K} = T$.

Demonstração. A prova pode ser encontrada em [3] página 26. □

Logo, para provar que $\mathcal{R}^{\perp}$ é uma seção do fibrado tensorial, basta mostrar que $\mathcal{R}^{\perp}$ é $C^{\infty}(M)$ 3-linear. Mas $R^{\perp}$ e A são seções de fibrados tensoriais, portanto $C^{\infty}(M)$ multilineares.

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{\perp}(f_1\xi, f_2\eta)f_3\nu &= \sum_{i=1}^{n} R^{\perp}(A_{f_1\xi}(e_i), A_{f_2\eta}(e_i))f_3\nu \\
&= \sum_{i=1}^{n} R^{\perp}(f_1A_{\xi}(e_i), f_2A_{\eta}(e_i))f_3\nu \\
&= f_1f_2f_3 \sum_{i=1}^{n} R^{\perp}(A_{\xi}(e_i), A_{\eta}(e_i))\nu \\
&= f_1f_2f_3\mathcal{R}^{\perp}(\xi, \eta)\nu
\end{aligned}$$

Logo $\mathcal{R}^{\perp}$ é $C^{\infty}(M)$ 3-linear e portanto seção do fibrado tensorial.

Seja V um espaço Euclidiano, denotaremos por $\mathcal{A}(V)$ o espaço vetorial dos operadores anti-autoadjuntos de V, ou seja, $\langle Av, w\rangle = -\langle v, Aw\rangle$ para todo $v, w \in V$. Defina a função

$$(\cdot,\cdot) : \mathcal{A}(V) \times \mathcal{A}(V) \to \mathbb{R}$$

por

$$(A, B) \mapsto -\mathrm{tr}(A \circ B).$$

Vejamos que esta função é um produto interno. De fato, $(\cdot,\cdot)$ é

1. simétrica, pois $\mathrm{tr}(A \circ B) = \mathrm{tr}(B \circ A)$.

2. bilinear, pois temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
(A_1 + A_2, B) &= -\mathrm{tr}((A_1 + A_2) \circ B) \\
&= -\mathrm{tr}((A_1 \circ B) + (A_2 \circ B)) \\
&= -\mathrm{tr}(A_1 \circ B) - \mathrm{tr}(A_2 \circ B) \\
&= (A_1, B) + (A_2, B)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(rA, B) &= -\mathrm{tr}(rA \circ B) \\
&= -\mathrm{tr}(r(A \circ B)) \\
&= -r\mathrm{tr}(A \circ B) \\
&= r(A, B).
\end{aligned}$$

3. positiva definida, já que

$$(A, A) = -\mathrm{tr}(A \circ A) = -\sum_{i=1}^{n} \langle (A \circ A)e_i, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle Ae_i, Ae_i\rangle .$$

Lema 4.7. *Para todo $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in \Gamma(N_f M)$, então o seguinte é valido:*

(i) $\mathcal{R}^{\perp}(\xi_1, \xi_2) = -\mathcal{R}^{\perp}(\xi_2, \xi_1)$,

(ii) $\mathcal{R}^{\perp}(\xi_1, \xi_2)\xi_3 + \mathcal{R}^{\perp}(\xi_2, \xi_3)\xi_1 + \mathcal{R}^{\perp}(\xi_3, \xi_1)\xi_2 = 0$,

(iii) $\left\langle \mathcal{R}^\perp(\xi_1,\xi_2)\xi_3,\xi_4\right\rangle = -\left\langle \xi_3,\mathcal{R}^\perp(\xi_1,\xi_2)\xi_4\right\rangle$,

(iv) $\left\langle \mathcal{R}^\perp(\xi_1,\xi_2)\xi_3,\xi_4\right\rangle = \left\langle \mathcal{R}^\perp(\xi_3,\xi_4)\xi_1,\xi_2\right\rangle = -\frac{1}{2}([A_{\xi_1},A_{\xi_2}],[A_{\xi_3},A_{\xi_4}])$,

onde $[A_{\xi_i},A_{\xi_j}] = A_{\xi_i}\circ A_{\xi_j} - A_{\xi_j}\circ A_{\xi_i}$

Demonstração. Observe que no item (iv) a última igualdade é o produto interno definido no espaço dos operadores anti-autoadjuntos. Para que esse produto tenha sentido, $[A_\xi, A_\eta]$ deve ser anti-autoadjunto, para quaisquer $\xi,\eta\in\Gamma(N_fM)$. Esse fato é verdadeiro pois,

$$\begin{aligned}
\langle [A_\xi,A_\eta]X,Y\rangle &= \langle (A_\xi\circ A_\eta)X,Y\rangle - \langle (A_\eta\circ A_\xi)X,Y\rangle\\
&= \langle X,(A_\eta\circ A_\xi)Y\rangle - \langle X,(A_\xi\circ A_\eta)Y\rangle\\
&= -\langle X,[A_\xi,A_\eta]Y\rangle .
\end{aligned}$$

Lembremos que a equação de Ricci em espaços ambiente de curvatura constante (2.15) é dada por

$$\left\langle R^\perp(X,Y)\xi,\eta\right\rangle = \langle [A_\xi,A_\eta]X,Y\rangle .$$

Logo, temos a seguinte caracterização da ação da aplicação $\mathcal{R}^\perp$,

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{R}^\perp(\xi_1,\xi_2)\xi_3,\xi_4\right\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n R^\perp(A_{\xi_1}e_i,A_{\xi_2}e_i)\xi_3,\xi_4\right\rangle\\
&= \sum_{i=1}^n \langle [A_{\xi_3},A_{\xi_4}](A_{\xi_1}e_i),A_{\xi_2}e_i\rangle\\
&= \sum_{i=1}^n \langle A_{\xi_2}\circ[A_{\xi_3},A_{\xi_4}]\circ A_{\xi_1}(e_i),e_i\rangle\\
&= \operatorname{tr}(A_{\xi_2}\circ[A_{\xi_3},A_{\xi_4}]\circ A_{\xi_1}),
\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde a segunda igualdade decorre da equação de Ricci e a terceira é devido ao fato do operador forma ser autoadjunto. Assim,

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{R}^\perp(\xi_1,\xi_2)\xi_3,\xi_4\right\rangle &= \operatorname{tr}(A_{\xi_2}\circ[A_{\xi_3},A_{\xi_4}]\circ A_{\xi_1})\\
&= \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A_{\xi_2}\circ[A_{\xi_3},A_{\xi_4}]\circ A_{\xi_1}) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}((A_{\xi_2}\circ[A_{\xi_3},A_{\xi_4}]\circ A_{\xi_1})^T)\\
&= \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A_{\xi_1}\circ A_{\xi_2}\circ[A_{\xi_3},A_{\xi_4}]) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A_{\xi_1}^T\circ[A_{\xi_3},A_{\xi_4}]^T\circ A_{\xi_2}^T)
\end{aligned}$$

$$\left\langle \mathcal{R}^{\perp}(\xi_1,\xi_2)\xi_3,\xi_4\right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_{\xi_1}\circ A_{\xi_2}\circ[A_{\xi_3},A_{\xi_4}]) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_{\xi_1}\circ(-[A_{\xi_3},A_{\xi_4}])\circ A_{\xi_2}),$$

onde na segunda igualdade usamos $\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$ e $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(A^T)$. A última igualdade é válida, pois o operador forma é autoadjunto. Assim, segue que

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{R}^{\perp}(\xi_1,\xi_2)\xi_3,\xi_4\right\rangle &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_{\xi_1}\circ A_{\xi_2}\circ[A_{\xi_3},A_{\xi_4}]) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_{\xi_1}\circ(-[A_{\xi_3},A_{\xi_4}])\circ A_{\xi_2})\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_{\xi_1}\circ A_{\xi_2}\circ[A_{\xi_3},A_{\xi_4}]) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_{\xi_1}\circ[A_{\xi_3},A_{\xi_4}]\circ A_{\xi_2})\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_{\xi_1}\circ A_{\xi_2}\circ[A_{\xi_3},A_{\xi_4}]) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_{\xi_2}\circ A_{\xi_1}\circ[A_{\xi_3},A_{\xi_4}])\\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(A_{\xi_1}\circ A_{\xi_2}\circ[A_{\xi_3},A_{\xi_4}]) - (A_{\xi_2}\circ A_{\xi_1}\circ[A_{\xi_3},A_{\xi_4}])\right)\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{tr}([A_{\xi_1},A_{\xi_2}]\circ[A_{\xi_3},A_{\xi_4}]),
\end{aligned}$$

para quaisquer $\xi_i \in \Gamma(N_fM)$.

Como $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$, temos que

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{R}^{\perp}(\xi_1,\xi_2)\xi_3,\xi_4\right\rangle &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}([A_{\xi_1},A_{\xi_2}]\circ[A_{\xi_3},A_{\xi_4}])\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{tr}([A_{\xi_3},A_{\xi_4}]\circ[A_{\xi_1},A_{\xi_2}])\\
&= \left\langle \mathcal{R}^{\perp}(\xi_3,\xi_4)\xi_1,\xi_2\right\rangle,
\end{aligned}$$

e

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}([A_{\xi_1},A_{\xi_2}]\circ[A_{\xi_3},A_{\xi_4}]) = -\frac{1}{2}([A_{\xi_1},A_{\xi_2}],[A_{\xi_3},A_{\xi_4}]).$$

Logo, o último item é verdadeiro.

O item (iii) também decorre de nossa caracterização do tensor $\mathcal{R}$ ou do item (iv):

$$\left\langle \mathcal{R}^{\perp}(\xi_1,\xi_2)\xi_3,\xi_4\right\rangle = -\frac{1}{2}([A_{\xi_1},A_{\xi_2}],[A_{\xi_3},A_{\xi_4}]) = \frac{1}{2}([A_{\xi_1},A_{\xi_2}],[A_{\xi_4},A_{\xi_3}]) = -\left\langle \mathcal{R}^{\perp}(\xi_1,\xi_2)\xi_4,\xi_3\right\rangle.$$

Em particular, para $\xi,\eta \in \Gamma(N_fM)$ fixo, pode se falar que $\mathcal{R}^{\perp}(\xi,\eta)$ é anti-autoadjunto.

Para mostrar a igualdade do item (i), so basta mostrar que

$$\left\langle \mathcal{R}^{\perp}(\xi_1,\xi_2)\xi,\eta\right\rangle = -\left\langle \mathcal{R}^{\perp}(\xi_2,\xi_1),\xi,\eta\right\rangle.$$

Mas isso é verdadeiro pois, pelo item (iv):

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{R}^{\perp}(\xi_1,\xi_2)\xi,\eta\right\rangle &= \frac{1}{2}([A_{\xi_1},A_{\xi_2}],[A_\xi,A_\eta]) \\ &= -\frac{1}{2}([A_{\xi_2},A_{\xi_1}],[A_\xi,A_\eta]) \\ &= -\left\langle \mathcal{R}^{\perp}(\xi_2,\xi_1)\xi,\eta\right\rangle.\end{aligned}$$

Para o item (ii), devemos mostrar que

$$\left\langle \mathcal{R}^{\perp}(\xi_1,\xi_2)\xi_3,\eta\right\rangle + \left\langle \mathcal{R}^{\perp}(\xi_2,\xi_3)\xi_1,\eta\right\rangle + \left\langle \mathcal{R}^{\perp}(\xi_3,\xi_1)\xi_2,\eta\right\rangle = 0$$

para qualquer $\eta \in \Gamma(N_f M)$. Pela equação (4.1), temos que

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{R}^{\perp}(\xi_1,\xi_2)\xi_3,\xi_4\right\rangle &= \operatorname{tr}(A_{\xi_2}\circ[A_{\xi_3},A_{\xi_4}]\circ A_{\xi_1}) \\ &= \operatorname{tr}(A_{\xi_2}\circ A_{\xi_3}\circ A_{\xi_4}\circ A_{\xi_1}) - \operatorname{tr}(A_{\xi_2}\circ A_{\xi_4}\circ A_{\xi_3}\circ A_{\xi_1}) \\ &= \operatorname{tr}(A_{\xi_1}\circ A_{\xi_2}\circ A_{\xi_3}\circ A_{\xi_4}) - \operatorname{tr}(A_{\xi_3}\circ A_{\xi_1}\circ A_{\xi_2}\circ A_{\xi_4}).\end{aligned}$$

Logo,

$$\left\langle \mathcal{R}^{\perp}(\xi_1,\xi_2)\xi_3,\eta\right\rangle + \left\langle \mathcal{R}^{\perp}(\xi_2,\xi_3)\xi_1,\eta\right\rangle + \left\langle \mathcal{R}^{\perp}(\xi_3,\xi_1)\xi_2,\eta\right\rangle =$$

$$\operatorname{tr}(A_{\xi_1}\circ A_{\xi_2}\circ A_{\xi_3}\circ A_\eta) - \operatorname{tr}(A_{\xi_3}\circ A_{\xi_1}\circ A_{\xi_2}\circ A_\eta) + \operatorname{tr}(A_{\xi_2}\circ A_{\xi_3}\circ A_{\xi_1}\circ A_\eta) -$$

$$\operatorname{tr}(A_{\xi_1}\circ A_{\xi_2}\circ A_{\xi_3}\circ A_\eta) + \operatorname{tr}(A_{\xi_3}\circ A_{\xi_1}\circ A_{\xi_2}\circ A_\eta) - \operatorname{tr}(A_{\xi_2}\circ A_{\xi_3}\circ A_{\xi_1}\circ A_\eta) = 0.$$

□

Observação 4.8. *A seção do fibrado tensorial $\mathcal{R}^{\perp}$ define em cada ponto p da variedade M um tensor de tipo* $(1,3)$

$$\mathcal{R}^{\perp}_p : N_f M(p) \times N_f M(p) \times N_f M(p) \to N_f M(p)$$

dado por $\mathcal{R}^{\perp}_p(\xi,\eta)\nu = \mathcal{R}^{\perp}(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\tilde{\nu}(p)$, onde $\tilde{\xi},\tilde{\eta}$ e $\tilde{\nu} \in \Gamma(N_f M)$ são seções do fibrado normal com $\tilde{\xi}(p) = \xi$, $\tilde{\eta}(p) = \eta$ e $\tilde{\nu}(p) = \nu$. Pelo Lema 4.7, $\mathcal{R}^{\perp}_p$ é um tensor de curvatura algébrico em $N_f M(p)$.

Corolario 4.9. *$R^{\perp} = 0$ se, e somente se, $\mathcal{R}^{\perp} = 0$.*

Demonstração. Se $R^\perp = 0$, então pela definição do tensor,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^\perp(\xi_1,\xi_2)\xi_3 &= \sum_{i=1}^{n} R^\perp(A_{\xi_1}X_i, A_{\xi_2}X_i)\xi_3 \\ &= 0.\end{aligned}$$

No outro sentido, se $\mathcal{R}^\perp = 0$, e usando Lema 4.7 item (d), segue que

$$0 = \left\langle \mathcal{R}^\perp(\xi_1,\xi_2)\xi_3, \xi_4 \right\rangle = -\frac{1}{2}([A_{\xi_1}, A_{\xi_2}], [A_{\xi_3}, A_{\xi_4}]),$$

para quaisquer $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in \Gamma(N_f M)$. Em particular, para $\xi_3 = \xi_1$ e $\xi_4 = \xi_2$, temos que

$$0 = ([A_{\xi_1}, A_{\xi_2}], [A_{\xi_1}, A_{\xi_2}]) = \|[A_{\xi_1}, A_{\xi_2}]\|^2 .$$

Assim, $[A_{\xi_1}, A_{\xi_2}] = 0$, para qualquer $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma(N_f M)$. Em outras palavras, os operadores forma comutam. Pela equação de Ricci em espaço ambiente com curvatura constante (2.15),

$$\left\langle R^\perp(X,Y)\xi, \eta \right\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y \rangle ,$$

temos que $R^\perp = 0$. □

Devido à proposição 4.6 definimos uma aplicação

$$\mathcal{R}_p^\perp : \wedge^2(N_f M(p)) \to \mathcal{A}(N_f M(p))$$

por

$$\mathcal{R}_p^\perp(\xi \wedge \eta) = \mathcal{R}^\perp(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})(p),$$

onde $\tilde{\xi}$ e $\tilde{\eta} \in N_f M$ são extensões suaves de ξ e η. Devido ao lema 4.7, esta aplicação esta bem definida, pois

$$\mathcal{R}_p^\perp(\xi \wedge \eta) = \mathcal{R}_p^\perp(\xi, \eta) = -\mathcal{R}_p^\perp(\eta, \xi) = -\mathcal{R}_p^\perp(\eta \wedge \xi) = \mathcal{R}_p^\perp(-\eta \wedge \xi).$$

Similarmente pode-se definir $R_p^\perp : \wedge^2(T_p M) \to \mathcal{A}(N_f M(p))$ por

$$R_p^\perp(X \wedge Y) = R_p^\perp(X, Y).$$

Também definimos $h_p^{-1} : \wedge^2(T_pM) \to \mathcal{A}(T_pM)$, como

$$\left\langle h_p^{-1}(x \wedge y)u, v \right\rangle = \langle x, u\rangle \langle y, v\rangle - \langle x, v\rangle \langle y, u\rangle$$

Note que estamos definindo a aplicação num conjunto que gera $\wedge^2(T_pM)$, e portanto ela se estende a todo o espaço. Observe que ela está bem definida, visto que

$$\left\langle h_p^{-1}(x \wedge y)v, u \right\rangle = \langle x, v\rangle \langle y, u\rangle - \langle x, u\rangle \langle y, v\rangle = -\left\langle h_p^{-1}(x \wedge y)u, v \right\rangle,$$

ou seja, $h_p^{-1}(x \wedge y)$ é uma alternada.

Lema 4.10. *$h_p^{-1} : \wedge^2(T_pM) \to \mathcal{A}(T_pM)$ é um isomorfismo e sua inversa é dada por $h_p(A) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \langle Ae_i, e_j\rangle e_i \wedge e_j$, onde $\{e_i\}$ é uma base ortonormal de T_pM.*

Demonstração. So basta mostrar que h_p é a inversa de h_p^{-1}.

$$\begin{aligned}
\left\langle (h_p^{-1} \circ h_p(A))(e_r), e_s \right\rangle &= \left\langle h_p^{-1}\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j} \langle Ae_i, e_j\rangle e_i \wedge e_j\right) e_r, e_s \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j} \langle Ae_i, e_j\rangle \left\langle h_p^{-1}(e_i \wedge e_j)e_r, e_s \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j} \langle Ae_i, e_j\rangle \{\langle e_i, e_r\rangle \langle e_j, e_s\rangle - \langle e_i, e_s\rangle \langle e_j, e_r\rangle\} \\
&= \frac{1}{2}(\langle Ae_r, e_s\rangle - \langle Ae_s, e_r\rangle) \\
&= \langle Ae_r, e_s\rangle .
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
h_p \circ h_p^{-1}(x \wedge y) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} \left\langle h_p^{-1}(x \wedge y)e_i, e_j \right\rangle e_i \wedge e_j \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j} (\langle x, e_i\rangle \langle y, e_j\rangle - \langle x, e_j\rangle \langle y, e_i\rangle) e_i \wedge e_j \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j}(x_iy_j - x_jy_i)e_i \wedge e_j \\
&= \frac{1}{2}(x \wedge y - y \wedge x) \\
&= x \wedge y,
\end{aligned}$$

onde, $x = \sum_i x_i e_i$ e $y = \sum_j y_j e_j$. $\square$

Considere agora

$$\wedge^2(N_f M(p)) \xrightarrow{L_p} \mathcal{A}(T_p M) \xrightarrow{h_p} \wedge^2(T_p M) \xrightarrow{R_p^\perp} \mathcal{A}(N_f M(p)),$$

onde, $L_p(\xi \wedge \eta) = [A_\xi, A_\eta]$.

Antes de continuar, vamos enunciar um lema técnico sobre outra forma de calcular o traço de uma composta de transformações lineares alternadas.

Lema 4.11. *Sejam $A, B \in \mathcal{A}(V)$, onde V é um espaço vetorial munido de produto interno. Então*

$$tr(A \circ B) = -\sum_{s,t} \langle Ae_s, e_t \rangle \langle Be_s, e_t \rangle ,$$

onde $\{e_i\}$ é uma base ortonormal do espaço.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A \circ B) &= \sum_s (A \circ B)_{ss} \\ &= \sum_s \sum_t (A)_{st} (B)_{ts} \\ &= \sum_s \sum_t \langle e_s, Ae_t \rangle \langle e_t, Be_s \rangle \\ &= -\sum_{s,j} \langle Ae_s, e_t \rangle \langle Be_s, e_t \rangle \end{aligned}$$

$\square$

Lema 4.12. $\mathcal{R}_p^\perp = -R_p^\perp \circ h_p \circ L_p$.

Demonstração. Basta mostrar que $\left\langle \mathcal{R}_p^\perp(\xi \wedge \eta)u, v \right\rangle = -\left\langle R_p^\perp \circ h_p \circ L_p(\xi \wedge \eta)u, v \right\rangle$ com $\xi, \eta, u, v \in N_f M(p)$. Observe que $R_p^\perp \circ h_p \circ L_p(\xi \wedge \eta) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \langle [A_\xi, A_\eta] e_i, e_j \rangle R_p^\perp(e_i, e_j)$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\left\langle R_p^\perp \circ h_p \circ L_p(\xi \wedge \eta)u, v \right\rangle &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} \langle [A_\xi, A_\eta]e_i, e_j\rangle \left\langle R_p^\perp(e_i, e_j)u, v\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j} \langle [A_\xi, A_\eta]e_i, e_j\rangle \langle [A_u, A_v]e_i, e_j\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}([A_\xi, A_\eta] \circ [A_u, A_v]) \\
&= -\left\langle \mathcal{R}_p^\perp(\xi, \eta)u, v\right\rangle,
\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade decorre da equação de Ricci em espaços de curvatura constante (2.15) e a última igualdade segue do Lema (4.7). Logo, o resultado segue por linearidade.

□

Com a ajuda do isomorfismo h_p, dotamos a $\wedge^2(T_pM)$ de um produto interno definido por:

$$((v, w)) = (h_p^{-1}(v), h_p^{-1}(w)) = -\mathrm{tr}(h_p^{-1}(v) \circ h_p^{-1}(w)).$$

Lema 4.13. $\ker R_p^\perp = (h_p \circ L_p(\wedge^2(N_f M(p))))^\perp$.

Demonstração. Sejam $\{e_i\}$ uma base ortonormal de T_pM e $u = \sum_{k<l} a_{kl} e_k \wedge e_l \in \wedge^2(T_pM)$. Se $\xi, \eta \in N_fM(p)$ são arbitrários, então

$$\begin{aligned}
\left\langle R_p^\perp(u)\xi, \eta\right\rangle &= \sum_{k<l} a_{kl} \left\langle R_p^\perp(e_k, e_l)\xi, \eta\right\rangle \\
&= \sum_{k<l} a_{kl} \langle [A_\xi, A_\eta]e_k, e_l\rangle .
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
((u, h_p \circ L_p(\xi \wedge \eta))) &= -\mathrm{tr}(h_p^{-1}(u) \circ L_p(\xi \wedge \eta)) \\
&= \sum_{s,t} \left\langle h_p^{-1}(u)e_s, e_t\right\rangle \langle L_p(\xi \wedge \eta)e_s, e_t\rangle \\
&= \sum_{s,t} \left\langle h_p^{-1}(u)e_s, e_t\right\rangle \langle [A_\eta, A_\xi]e_s, e_t\rangle \\
&= \sum_{s,t} \left(\sum_{k<l} a_{kl} \left(\langle e_k, e_s\rangle \langle e_l, e_t\rangle - \langle e_k, e_t\rangle \langle e_l, e_s\rangle\right)\right) \langle [A_\eta, A_\xi]e_s, e_t\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((u, h_p \circ L_p(\xi \wedge \eta))) &= \sum_{k<l} (a_{kl} \langle [A_\eta, A_\xi] e_k, e_l \rangle - a_{kl} \langle [A_\eta, A_\xi] e_l, e_k \rangle) \\ &= 2 \sum_{k<l} a_{kl} \langle [A_\eta, A_\xi] e_k, e_l \rangle .\end{aligned}$$

Logo,

$$\left\langle R_p^\perp(u)\xi, \eta \right\rangle = \frac{1}{2}((u, h_p \circ L_p(\xi \wedge \eta))).$$

Se $u \in \ker R_p^\perp$, então

$$0 = \left\langle R_p^\perp(u)\xi, \eta \right\rangle = \frac{1}{2}((u, h_p \circ L_p(\xi \wedge \eta))),$$

para quaisquer $\xi, \eta \in N_f M(p)$. Assim, $u \in (h_p \circ L_p(\wedge^2(N_f M(p))))^\perp$.

No outro sentido, se $u \in (h_p \circ L_p(\wedge^2(N_f M(p))))^\perp$, então

$$0 = \frac{1}{2}(u, h_p \circ L_p(\xi \wedge \eta)) = \left\langle R_p^\perp(u)\xi, \eta \right\rangle$$

para quaisquer $\xi, \eta \in N_f M(p)$. Logo, $R_p^\perp(u) = 0$ e obtemos o resultado. □

Corolario 4.14. *Para todo $p \in M$, o espaço linear dos endomorfismos anti-autoadjuntos de $N_p M$ gerado por*

$$\left\{ R_p^\perp(X, Y) : X, Y \in T_p M \right\}$$

coincide com o espaço gerado por

$$\left\{ \mathcal{R}_p^\perp(\xi, \eta) : \xi, \eta \in N_p M \right\}.$$

Demonstração. Pelo Lema 4.12, resulta claramente que $\mathrm{Im}\mathcal{R}_p^\perp \leq \mathrm{Im} R_p^\perp$.

No outro sentido, provaremos que $R_p^\perp(X \wedge Y) \in \mathrm{Im}\ \mathcal{R}_p^\perp$. Sem perda de generalidade, suponha que $R_p^\perp(X \wedge Y) \neq 0$. Logo pelo Lema 4.13, temos que $X \wedge Y \in h_p \circ L_p(\wedge^2(N_f M(p)))$. Portanto, existe $\sum_i \xi_i \wedge \eta_i$ tal que $h_p \circ L_p(\sum_i \xi_i \wedge \eta_i) = X \wedge Y$. Assim

$$R_p^\perp(X \wedge Y) = -R_p^\perp \circ h_p \circ L_p \left(\sum_i \xi_i \wedge \eta_i \right) = \mathcal{R}_p^\perp \left(- \sum_i \xi_i \wedge \eta_i \right).$$

□

4.3 Teorema de holonomia normal

Nesta seção precisamos aplicar o Teorema de Ambrose-Singer.

Teorema 4.15 (Teorema de Ambrose-Singer [1] Pg. 105)**.** *Seja M^n uma subvariedade conexa de um espaço forma canônico $\tilde{M}^N$. Considere Φ_p^* o grupo de Lie de holonomia normal restrita em p e $\mathfrak{g}_p$ sua álgebra de Lie. Então $\mathfrak{g}_p$ é um subespaço vetorial dos $End(N_fM(p))$ gerado pelos elementos de $End(N_fM(p))$ da forma*

$$P_\gamma^\perp[R_q^\perp(P_\gamma^{-1}(v) \wedge P_\gamma^{-1}(w))](P_\gamma^\perp)^{-1},$$

onde $\gamma : [0,1] \to M$ é uma curva suave por partes com $q \in M$ arbitrário, $\gamma(0) = q$ e $\gamma(1) = p$, $P_\gamma : T_qM \to T_pM$ é a translação paralela tangencial, $P_\gamma^\perp : N_fM(q) \to N_fM(p)$ é a translação paralela normal e $v, w \in N_fM(p)$ são arbitrários.

Assuma que o espaço ambiente é um espaço forma canônico. Seja $p \in M$ um ponto fixado na variedade, e seja $\gamma : [0,1] \to M$ uma curva diferenciável por partes tal que $\gamma(1) = p$. Denote por $\gamma^*(\mathcal{R}^\perp)$ o tensor de tipo $(1,3)$ em $N_fM(p)$ definido por

$$\gamma^*(\mathcal{R}^\perp)(v,w)z = P_\gamma(\mathcal{R}_q^\perp(P_\gamma^{-1}(v), P_\gamma^{-1}(w))P_\gamma^{-1}(z)),$$

onde $\gamma(0) = q, \quad v, w, z \in N_fM(p)$ e P_γ denota o transporte paralelo ao longo de γ mediante a conexão normal.

Denote por $\mathcal{S}$ o subespaço vetorial dos tensores do tipo $(1,3)$ de $N_fM(p)$, gerado por $\gamma^*(\mathcal{R}^\perp)$, onde γ percorre todas as curvas diferenciáveis por partes que terminam em p.

Como o espaço gerado por $\{R_p^\perp(X,Y) : X, Y \in T_pM\}$ coincide com o espaço gerado por $\{\mathcal{R}_p^\perp(X,Y) : X, Y \in T_pM\}$ (corolário 4.14), aplicando o Teorema de Ambrose-Singer 4.15, temos que a álgebra de Lie $\mathfrak{g}_p$ do grupo de holonomia restrita Φ_p^* coincide com o subespaço gerado por o conjunto $\{S(u,v) : S \in \mathcal{S}, u, v \in N_fM(p)\}$.

Lema 4.16. *Se $S \in \mathcal{S}$, então:*

(i) $S(u,v) = -S(v,u)$,

(ii) $S(u,v)w + S(v,w)u + S(w,u)v = 0$,

(iii) $\langle S(u,v)w, z\rangle = -\langle w, S(u,v)z\rangle$,

(iv) $\langle S(u,v)w, z\rangle = \langle S(w,z)u, v\rangle$.

Demonstração. (i) Temos que mostrar que $S(u,v)w = -S(v,u)w$.

$$\begin{aligned}
S(u,v)w &= \sum_{i=1}^{k} a_i \gamma_i^*(\mathcal{R}^\perp)(u,v)w \\
&= \sum_{i=1}^{k} a_i P_{\gamma_i}(\mathcal{R}_q^\perp(P_{\gamma_i}^{-1}(u), P_{\gamma_i}^{-1}(v))P_{\gamma_i}^{-1}(w)) \\
&= -\sum_{i=1}^{k} a_i P_{\gamma_i}(\mathcal{R}_q^\perp(P_{\gamma_i}^{-1}(v), P_{\gamma_i}^{-1}(u))P_{\gamma_i}^{-1}(w)) \\
&= -\sum_{i=1}^{k} a_i \gamma_i^*(\mathcal{R}^\perp)(v,u)w \\
&= -S(v,u)w,
\end{aligned}$$

onde a segunda e quarta igualdades são por definição, e a terceira igualdade resulta do Lema 4.7 item (i).

(ii) Temos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}
S(u,v)w + S(v,w)u + S(w,u)v &= \sum_{i=1}^{k} \big(a_i \gamma_i^*(\mathcal{R}_q^\perp)(u,v)w + a_i \gamma_i^*(\mathcal{R}_q^\perp)(v,v)w \\
&\quad + a_i \gamma_i^*(\mathcal{R}_q^\perp)(u,v)w\big) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \Big(a_i P_{\gamma_i}(\mathcal{R}_q^\perp(P_{\gamma_i}^{-1}(u), P_{\gamma_i}^{-1}(v))P_{\gamma_i}^{-1}(w)) + \\
&\quad a_i P_{\gamma_i}(\mathcal{R}_q^\perp(P_{\gamma_i}^{-1}(v), P_{\gamma_i}^{-1}(w))P_{\gamma_i}^{-1}(u)) + \\
&\quad a_i P_{\gamma_i}(\mathcal{R}_q^\perp(P_{\gamma_i}^{-1}(w), P_{\gamma_i}^{-1}(u))P_{\gamma_i}^{-1}(v))\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{k} a_i P_{\gamma_i}(0) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade decorre do Lema 4.7 item (ii) e do fato de P_{γ_i} ser uma transformação linear.

(iii) Como a translação paralela P_{γ_i} é uma isometria temos

$$\langle S(u,v)w, z\rangle = \sum_{i=1}^{k} a_i \left\langle \gamma_i^*(\mathcal{R}^\perp)(u,v)w, z\right\rangle$$

$$
\begin{aligned}
\langle S(u,v)w,z\rangle &= \sum_{i=1}^{k} a_i \left\langle P_{\gamma_i}(\mathcal{R}_q^{\perp}(P_{\gamma_i}^{-1}(u),P_{\gamma_i}^{-1}(v))P_{\gamma_i}^{-1}(w)),z\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{k} a_i \left\langle \mathcal{R}_q^{\perp}(P_{\gamma_i}^{-1}(u),P_{\gamma_i}^{-1}(v))P_{\gamma_i}^{-1}(w),P_{\gamma_i}^{-1}(z)\right\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{k} a_i \left\langle P_{\gamma_i}^{-1}(w),\mathcal{R}_q^{\perp}(P_{\gamma_i}^{-1}(u),P_{\gamma_i}^{-1}(v))P_{\gamma_i}^{-1}(z)\right\rangle,
\end{aligned}
$$

onde a ultima igualdade decorre Lema 4.7 item (iii). Segue que,

$$
\begin{aligned}
\langle S(u,v)w,z\rangle &= -\sum_{i=1}^{k} a_i \left\langle w,P_{\gamma_i}(\mathcal{R}_q^{\perp}(P_{\gamma_i}^{-1}(u),P_{\gamma_i}^{-1}(v))P_{\gamma_i}^{-1}(z))\right\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{k} a_i \left\langle w,\gamma_i^*(\mathcal{R}^{\perp})(u,v)z\right\rangle \\
&= -\left\langle w,S(u,v)z\right\rangle.
\end{aligned}
$$

(iv) Por último,

$$
\begin{aligned}
\langle S(u,v)w,z\rangle &= \sum_{i=1}^{k} \left\langle a_i\gamma_i^*(\mathcal{R}^{\perp})(u,v)w,z\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{k} a_i \left\langle P_{\gamma_i}(\mathcal{R}_q^{\perp}(P_{\gamma_i}^{-1}(u),P_{\gamma_i}^{-1}(v))P_{\gamma_i}^{-1}(w)),z\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{k} a_i \left\langle \mathcal{R}_q^{\perp}(P_{\gamma_i}^{-1}(u),P_{\gamma_i}^{-1}(v))P_{\gamma_i}^{-1}(w),P_{\gamma_i}^{-1}(z)\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left\langle \mathcal{R}_q^{\perp}(P_{\gamma_i}^{-1}(w),P_{\gamma_i}^{-1}(z))P_{\gamma_i}^{-1}(u),P_{\gamma_i}^{-1}(v)\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left\langle P_{\gamma_i}(\mathcal{R}_q^{\perp}(P_{\gamma_i}^{-1}(w),P_{\gamma_i}^{-1}(z)))P_{\gamma_i}^{-1}(u),v\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left\langle \gamma_i^*(\mathcal{R}^{\perp})(w,z)u,v\right\rangle \\
&= \langle S(w,z)u,v\rangle.
\end{aligned}
$$

onde na terceira igualdade usamos o fato de que P_{γ_i} ser isometria e na quarta igualdade o item (iv) do Lema 4.7. $\square$

Observação 4.17. *Todo $S \in \mathcal{S}$ é um tensor curvatura algébrico de $N_fM(p)$.*

Seja $p \in M$ um ponto arbitrário da variedade, então o grupo restrito de holonomia Φ_p^* age no espaço normal $N_fM(p)$. Defina $V_0 \subset N_fM(p)$ como o conjunto de vetores onde Φ_p^* age trivialmente, ou seja, se $\phi \in \Phi_p^*$ e $\xi \in V_0$, então $\phi(\xi) = \xi$. Pela linearidade dos elementos de Φ_p^*, temos que V_0 é um subespaço de $N_fM(p)$. Logo, segue que

$$N_fM(p) = V_0 \oplus V_0^{\perp}.$$

Sejam $\xi \in V_0$ e $\eta \in V_0^{\perp}$ arbitrários e $\phi \in \Phi_p^*$, em particular ϕ é uma isometria, então

$$\langle \xi, \phi(\eta) \rangle = \left\langle \phi^{-1}(\xi), \eta \right\rangle = \langle \xi, \eta \rangle = 0.$$

Assim, tanto V_0 e $V_0^{\perp}$ são invariantes por elementos de Φ_p^*.

Se $V_0^{\perp}$ é irredutível, ou seja, os únicos espaços invariantes por todos os elementos de Φ_p^* são os triviais, então defina $V_1 = V_0^{\perp}$. Caso contrário, existe $V_1 \subset V_0^{\perp}$ não trivial, tal que todo elemento $\phi \in \Phi_p^*$, deixa V_1 invariante, ou seja, $\phi(V_1) \subset V_1$. Mostraremos que o complemento ortogonal de V_1 em $V_0^{\perp}$ é também invariante por todo elemento da holonomia normal restrita. Temos que $V_0^{\perp} = V_1 \oplus V_1^{\perp}$, então considere $\xi \in V_1^{\perp}$, $\eta \in V_1$ arbitrarios e $\phi \in \Phi_p^*$. Como

$$\langle \eta, \phi(\xi) \rangle = \left\langle \phi^{-1}(\eta), \xi \right\rangle = 0,$$

pois $\phi^{-1} \in \Phi_p^*$ e V_1 é invariante. Logo $\phi(\xi) \in V_1^{\perp}$, mostrando nossa afirmação.

Assim, como $N_fM(p)$ tem dimensão finita, conseguimos uma decomposição

$$N_fM(p) = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

em subespaços invariantes por Φ_p^* tal que Φ_p^* age trivialmente em V_0 e os espaços V_i são irredutíveis pela ação de Φ_p^*

Lema 4.18. *V_r é um subespaço de $N_fM(p)$ com dimensão maior do que um para $r \in \mathbb{N}$, com $1 \leq r \leq k$.*

Demonstração. Por absurdo, suponha que exista um subespaço V_r com dimensão um (o caso de dimensão zero não pode ocorrer). Fazendo uma reordenação de índices, suponha que $r = 1$. Como o espaço tem dimensão um, existe vetor unitario v_1 base para V_1. Já que $v_1 \notin V_0$, o subespaço onde o grupo de Holonomia restrita Φ^* age trivialmente, existe $P_\gamma \in \Phi^*$ tal que $P_\gamma(v_1) = -v_1$, pois V_1 é subespaço invariante de dimensão um e P_γ é uma isometria.

Decomponha o espaço $N_f M(p)$ da seguinte forma:

$$N_f M(p) = V_1 \oplus (V_1)^\perp.$$

Considere uma base de $N_f M(p)$ da forma $\{v_1, v_2, \cdots v_k\}$, onde k é a dimensão do espaço normal.

Como Φ^* é conexo por caminhos, na base a acima, existe uma curva contínua que une a matriz que representa P_γ com a matriz Id, ou seja, existe funções continuas $\alpha_{ij} : [0,1] \to \mathbb{R}$ tais que $P_\gamma = [\alpha_{ij}(0)]$ e $\mathrm{Id} = [\alpha_{ij}(1)]$. Em particular, $\alpha_{11}(0) = -1$ e $\alpha_{11}(1) = 1$. Como a função é contínua, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $\alpha_{11}(t_0) = 0$. Temos que $[\alpha_{ij}(t_0)] \in \Phi^*$, logo $[\alpha_{ij}(t_0)]v_1 = \sum_{i=2}^k b_i v_i \neq 0$, ou seja, V_1 não é invariante por Φ^*, contradição. □

Sabemos que Φ_p^* é um subgrupo de Lie de $O(N_f M(p))$ (Teorema 3.24) e portanto, $\mathfrak{g}_p$ é um subálgebra de $\mathfrak{o}(N_f M(p))$. Também temos que os espaços V_i são irredutíveis pela ação de Φ_p^*. Ainda mais, pode-se afirmar que

Lema 4.19. *Os espaços V_i são invariantes pela ação de $\mathfrak{g}_p$, ou seja, para todo $A \in \mathfrak{g}_p$, implica que $A(V_i) \subset V_i$.*

Demonstração. Seja $v \in V_i$ e considere a curva $\alpha(t) : \mathbb{R} \to \Phi_p^*$ definida por $\alpha(t) = \exp(tA)$. Por propriedades da exponencial temos que $\alpha(0) = \mathrm{Id}$ e $\alpha'(0) = A$. Então

$$\begin{aligned} A(v) &= \alpha'(0)(v) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\alpha(h)(v) - v \right). \end{aligned}$$

Como $\alpha(h) \in \Phi_p^*$, temos que $\alpha(h)(v) - v \in V_i$. Como V_i é um subespaço vetorial, logo fechado, $A(v) \in V_i$. □

Se $u \in N_f M(p)$, então denote por u_i a projeção ortogonal de u no espaço V_i. Logo, $u = \sum_{i=1}^k u_i$ com $u_i \in V_i$.

Lema 4.20. *Seja $x, y \in N_f M(p)$ e $S \in \mathcal{S}$. Então*

(i) $S(x_i, y_j) = 0$ *se* $i \neq j$.

(ii) $S(x,y) = \sum_{i=1}^{k} S(x_i, y_i)$.

(iii) $S(x_i, v_i)V_j = \{0\}$ *se* $i \neq j$.

(iv) $S(x_i, y_i)V_i \subset V_i$.

Demonstração. (i) Se $i \neq j$ e $u, v \in N_f M(p)$. Temos por lema 4.16 que

$$\langle S(x_i, y_j)u, v\rangle = \langle S(u, v)x_i, y_j\rangle = 0,$$

pois $S(u,v) \in \mathfrak{g}_p$, e pelo lema 4.19, $\mathfrak{g}_p$ deixa V_i invariante. Assim, $S(u,v)x_i \in V_i$ e $y_j \in V_j$ sendo os espaços ortogonais o item (i) segue.

(ii) $S(x,y) = S(\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{j=1}^{n} y_j) = \sum_{i,j=1}^{n} S(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{n} S(x_i, y_i)$, onde a ultima igualdade segue pelo item (i).

(iii): Se $v_j \in V_j$, então

$$S(x_i, y_i)v_j = -S(y_i, v_j)x_i - S(v_j, x_i)y_i = 0,$$

pelo Lema 4.16 item(ii) e o item (i) do presente Lema, provamos (iii).

(iv): Como $S(u,v) \in \mathfrak{g}_p$ e $\mathfrak{g}_p$ deixa V_i invariante, segue o resultado. □

Seja $\mathfrak{g}_p^i$ o subespaço vetorial de $\mathfrak{g}_p$ gerado pelas $S(x_i, y_i)$, $S \in \mathcal{S}$ e $x_i, y_i \in V_i$. Pelo lema acima obtemos o seguinte resultado:

Lema 4.21. *(i)* $\mathfrak{g}_p^0 = \{0\}$ *e* $\mathfrak{g}_p^i$ *é um ideal de* $\mathfrak{g}_p$*, para* $i = 0, 1 \cdots, k$.

(ii) $\mathfrak{g}_p = \mathfrak{g}_p^1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_p^k$, *com* $[\mathfrak{g}_p^i, \mathfrak{g}_p^j] = \{0\}$ *se* $i \neq j$.

(iii) $\mathfrak{g}_p^i V_i = V_i$ *para* $i = 1, 2, \cdots, k$.

(iv) $\mathfrak{g}_p^i V_j = \{0\}$ *se* $i \neq j$.

(v) $\mathfrak{g}_p^i$ *age irredutívelmente em* V_i*, para* $i = 1, 2, \cdots, k$.

Demonstração. (i) Basta mostrar que $S(x_0, y_0) = 0$ para $S \in \mathcal{S}$. Pelo lema 4.20, temos que $S(x_0, y_0)z_i = 0$ para $i = 1, 2, \cdots k$. Como $S(x_0, y_0) \in \mathfrak{g}$, temos que existe $\alpha : \mathbb{R} \to \Phi_p^*$, tal que $\alpha(0) = \mathrm{Id}$ e $\alpha'(0) = S(x_0, y_0)$. Logo

$$S(x_0, y_0)z_0 = \alpha'(0)(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\alpha(h)z_0 - z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(z_0 - z_0) = 0,$$

onde $\alpha(h)z_0 = z_0$ pois $\alpha(h) \in \Phi_p^*$ age trivialmente em V_0.

Para provar que $\mathfrak{g}_p^i$ é um ideal, basta provar que $[S(x,y), S(u_i,v_i)] \in \mathfrak{g}_p^i$. Temos que

$$\begin{aligned}
[S(x,y), S(u_i,v_i)] &= S(x,y) \circ S(u_i,v_i) - S(u_i,v_i) \circ S(x,y) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \left(S(x_j,y_j) \circ S(u_i,v_i) - S(u_i,v_i) \circ S(x_j,y_j) \right).
\end{aligned}$$

Pelo Lema 4.20 item (iii) e (iv), segue que $S(x_j,y_j) \circ S(u_i,v_i) = 0$ se $i \neq j$. Portanto,

$$[S(x,y), S(u_i,v_i)] = S(x_i,y_i) \circ S(u_i,v_i) - S(u_i,v_i) \circ S(x_i,y_i). \tag{4.2}$$

Como $[S(x,y), S(u_i,v_i)] \in \mathfrak{g}_p$, deve ser da forma $\sum_{r=1}^{l} S(x^r,y^r) = \sum_{r=1}^{l}\sum_{j=1}^{k} S(x_j^r,y_j^r)$. Mas aplicando em elementos arbitrários de V_j com i diferente de j e por (4.2) obtemos que $\sum_{r=1}^{l} S(x_j^r,y_j^r) = 0$. Portanto, $[S(x,y), S(u_i,v_i)] = \sum_{r=1}^{l} S(x_i^r,y_i^r) \in \mathfrak{g}_p^i$. Como resultado imediato, já que os $\mathfrak{g}_p^i$ são ideais, temos que também são álgebras de Lie.

(ii) Seja $\phi \in \mathfrak{g}$, então $\phi = \sum_{r=1}^{l} S_r(x^r,y^r)$, onde $S_r \in \mathcal{S}$, $x^r, y^r \in N_fM(p)$. Pelo item (ii) do Lema 4.20 temos que

$$\phi = \sum_{r=1}^{l}\sum_{i=0}^{k} S_r(x_i^r,y_i^r) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{r=1}^{l} S_r(x_i^r,y_i^r) \in \mathfrak{g}_p^1 + \cdots + \mathfrak{g}_p^k,$$

onde a segunda igualdade decorre do item (i) ($\mathfrak{g}_p^0 = \{0\}$). Logo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_p^1 + \cdots + \mathfrak{g}_p^k$.

Se $\sum_{r=1}^{l} S_r(x_{i_r},y_{i_r}) = \sum_{r=1}^{m} S_r(x_{j_r},y_{j_r})$ com $x_{i_r}, y_{i_r} \in V_i$, $x_{j_r}, y_{j_r} \in V_j$, $i \neq j$ e $S \in \mathcal{S}$, então avaliando em $z_i \in V_i$ arbitrário e pelo item (iii) do lema 4.20, temos que $\sum_{r=1}^{l} S_r(x_{i_r},y_{i_r}) = 0$. Assim $\mathfrak{g}_\mathfrak{i} \cap \mathfrak{g}_\mathfrak{j} = \{0\}$ e $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_p^1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_p^k$.

Para mostrar que $[\mathfrak{g}_p^i, \mathfrak{g}_p^j] = \{0\}$, pela linearidade do colchete, basta mostrar que $[S_1(u_i,v_i), S_2(x_j,y_j)] = 0$. Mas

$$[S_1(u_i,v_i), S_2(x_j,y_j)] = S_1(u_i,v_i)S_2(x_j,y_j) - S_2(x_j,y_j)S_1(u_i,v_i).$$

Avaliando em $z_r \in V_r$, com r distinto de i e j, pelo item (iii) do lema 4.20, temos que $[S_1(u_i,v_i), S_2(x_j,y_j)]V_r = 0$. Avaliando em $z_i \in V_i$ e como $S_1(u_i,v_i)$ e $S_2(x_j,y_j) \in \mathfrak{g}$ deixa invariantes os espaços V_r e novamente pelo item (iii) do lema 4.20, temos que

$$S_1(u_i,v_i)S_2(x_j,y_j)z_i - S_2(x_j,y_j)S_1(u_i,v_i)z_i = 0 - S_2(x_j,y_j)z_i' = 0.$$

Assim, $[\mathfrak{g}_p^i, \mathfrak{g}_p^j] = \{0\}$.

(iii) Pelo item (iv) do Lema 4.20 temos que $\mathfrak{g}_p^i V_i \subset V_i$. No item (v) mostraremos a igualdade.

(iv) Seja $\sum_{r=1}^l S_r(x_{i_r}, y_{i_r}) \in \mathfrak{g}_p^i$, com $S \in \mathcal{S}, x_{i_r}, y_{i_r} \in V_i$. Logo

$$\left(\sum_{r=1}^{l} S_r(x_{i_r}, y_{i_r})\right) z_j = \sum_{r=1}^{l} S_r(x_{i_r}, y_{i_r}) z_j = 0,$$

pelo item (iii) do lema 4.20.

(v) Suponha que existe $W \subset V_i$ tal que $\mathfrak{g}_p^i W \subset W$. Então, pelo item (iii) segue que $\mathfrak{g}_p W \subset W$. Seja $U \subset \mathfrak{g}_p$ uma vizinhança da origem, onde $\exp : \mathfrak{g}_p \to \Phi_p^*$ é um difeomorfismo. Temos que $\exp(U)$ é um aberto em Φ_p^* e que todo elemento $\exp(X) \in \exp(U)$ com $X \in \mathfrak{g}_p$ age invariantemente em W, pois

$$\exp(X)\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k \xi}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k \xi}{k!} \in W,$$

pois $\sum_{k=0}^n \frac{X^k\xi}{k!} \in W$, já que X age invariantemente em W. Como $\exp(U)$ gera Φ_p^* (Lema 3.17), temos que Φ_p^* deixa invariante W, pois dado $\phi \in \Phi_p^*$ temos que $\phi(\xi) = \phi_r \circ \cdots \circ \phi_1(\xi)$ onde $\phi_i \in \exp(U)$, portanto $\phi_i(W) \subset W$. Portanto, $W = \{0\}$ ou $W = V_i$.

Agora mostremos a igualdade do item (iii). Se existe $v_i \in V_i$ não nulo, tal que para nenhum $A \in \mathfrak{g}_p^i$ temos que $A(w_i) = v_i$ para todo $w_i \in V_i$, então $A(w_i) \notin \mathbb{R}v_i - \{0\}$ para todo $w_i \in V_i$, onde $\mathbb{R}v_i$ é o subespaço $\{\alpha v_i : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Em particular, $\mathfrak{g}_p^i V_i \subset (\mathbb{R}v_i)^\perp$, onde o complemento ortogonal é tomado em V_i, uma contradição pelo feito acima. $\square$

Teorema 4.22. *Seja M^n uma variedade riemanniana e seja $f : M^n \to Q_c^N$ uma imersão isométrica, onde Q_c^N é um espaco forma canônico com curvatura constante c. Sejam $p \in M$ e Φ_p^* o grupo de holonomia normal restrito em p da conexão normal $\nabla^\perp$. Então Φ_p^* é compacto, existe uma unica decomposição ortogonal (a menos de ordenação) do espaço normal $N_f M(p) = V_0 \oplus \cdots \oplus V_k$, em subespaços invariantes por Φ_p^*, e existem $\Phi_0, \cdots, \Phi_k$ subgrupos normais de Lie de Φ_p^* tal que:*

(i) $\Phi_p^* = \Phi_0 \times \cdots \Phi_k$.

(ii) Φ_i *age trivialmente em* V_j *se* $i \neq j$.

(iii) $\Phi_0 = \{1\}$ *e se* $i \geq 1$, Φ_i *age irredutívelmente em* V_i *como a representação isotrópica de um espaço riemanniano simétrico e irredutível.*

Demonstração. Visto que $\mathfrak{g}_p^i$ é um ideal de $\mathfrak{g}_p$, temos que em particular é uma subálgebra de Lie. Logo, existe um único subgrupo de Lie conexo Φ_i de Φ_p^* com álgebra de Lie $\mathfrak{g}_p^i$. Como Φ_p^* é conexo, e $\mathfrak{g}_p^i$ é um ideal, os Φ_i são subgrupos normais (Teorema 20.19 de [4]). Pelo Lema 4.21, temos que $\Phi_p^* = \Phi_0 \times \cdots \Phi_k$, onde o produto é direto, Φ_i age trivialmente em V_j se $i \neq j$, e que Φ_i age irredutívelmente em V_i, com $i \geq 1$. A existência está demonstrado.

Suponha que existe outra descomposição de $N_f M(p) = W_0 \oplus + \cdots \oplus W_r$ e de $\Phi_p^* = \Phi_0' \times \cdots \Phi_r'$ com as propriedades descritas no teorema. Por (iii), $\Phi_0 = \Phi_0'$ e $V_0 = W_0$. Como $W_1 \neq \emptyset$, existe $j \in \mathbb{N}$ com $1 \leq j \leq k$, tal que $W_1 \cap V_j \neq \emptyset$. Assim, $W_1 \cap V_j \leq V_j$ e este subespaço é invariante por Φ_j. Por Lema 4.20 item (v) temos que $W_1 = V_j$. Sem perda de generalidade, assuma $j = 1$. O mesmo argumento aplica-se para os demais W_i, com $1 \leq i \leq r$. Como nenhum W_i ou V_i é igual ao conjunto vazio, para $i \geq 1$, devemos ter $k = r$. Por propriedades (ii) e (iii), basta provar que $\Phi_i = \Phi_i'$ em V_i para $1 \leq i \leq k$. Mas para $v \in V_i$ temos que $\Phi_i(v) = \Phi_p^*(v) = \Phi_i'(v)$. Logo a unicidade segue.

Como qualquer subgrupo de Lie conexo das transformações ortogonais de um espaço vetorial que age irreduzívelmente em ele tem que ser compacto (Apendice 5 de [3]), segue que Φ_i é compacto, e portanto, Φ_p^* é compacto.

Para $i \geq 1$, escolha $S_i \in \mathcal{S}$ com S_i não nulo em V_i^3 (existe pelo Lema 4.21 item (iii)). A tripla $[V_i, S_i, \Phi_i]$ é um sistema de holonomia irredutível. Por Lema 4.7 item (iv), S_i tem curvatura escalar não nula, logo pode-se aplicar o Lema 4.4 o que termina a prova. $\square$

Bibliografia

[1] Sergio; Olmos Carlos; Berdt, Jurgen; Console. *Submanifolds and Holonomy.* Chapman and Hall/CRC, 2003.

[2] Morinuki Goto. On an arcwise connected subgroup of a lie group. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 20(1):157–162, Jan., 1969.

[3] Katsumi; Kobayashi, Shoshichi; Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*, volume 1. Wiley-Interscience, 1996.

[4] John Lee. *Introduction to Smooth Manifolds.* Springer, 2012.

[5] Karl-Hermann Need. *Structure and Geometry of Lie Groups.* Springer, 2011.

[6] Carlos Olmos. The normal holonomy group. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 110(3):813–818, 1990.

[7] James Simons. On the transitivity of holonomy systems. *Annals of Mathematics*, 76(2):213–234, September, 1962.

[8] Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature. *Lee, John;.* Springer, 1997.

[9] Hidehiko; Yamabe. On an arcwise connected subgroup of a lie group. *Osaka Mathematical Journal*, 2(1), March 1950.

Índice