Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

ESTIMATIVAS *A PRIORI* PARA PROBLEMAS ELÍPTICOS VIA DESIGUALDADE DE HARDY-SOBOLEV

Jose Miguel Mendoza Aranda

Orientador: *Francisco Odair de Paiva*

São Carlos
Janeiro de 2014

ESTIMATIVAS *A PRIORI* PARA PROBLEMAS ELÍPTICOS VIA DESIGUALDADE DE HARDY-SOBOLEV

Jose Miguel Mendoza Aranda

Orientador: *Francisco Odair de Paiva*

Dissertação apresentada ao PPG-M da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Orientação: Prof Dr. Francisco Odair de Paiva.

São Carlos
Janeiro de 2014

Autor

Orientador

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

M539ep

Mendoza Aranda, Jose Miguel.
Estimativas *a priori* para problemas elípticos via desigualdade de Hardy-Sobolev / Jose Miguel Mendoza Aranda. -- São Carlos : UFSCar, 2014.
34 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2014.

1. Análise matemática. 2. Equações diferenciais elípticas. 3. Estimativas da solução. 4. Existência de soluções. I. Título.

CDD: 515 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva
DM- UFSCar

Prof. Dr. Gustavo Madeira
DM- UFSCar

Prof. Dr. Olivaine Santana De Queiroz
ICMC- USP

Agradecimentos

À Deus, pela vida paz e saúde.
Aos meus pais, Tomas Mendoza Pariona e Maria Aranda García, pela vida, educação e o amor recebido.
Ao professor Francisco Odair de Paiva, pela orientação, pelos ensinamentos e pelas horas dedicadas a este trabalho.
Ao programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, pela oportunidade da realização deste trabalho.
À CNPq, pelo auxilio financeiro.

Abstract

In this thesis we study a priori bounds for positive solutions of a class of nonlinear elliptic equations. More precisely, we establish a priori bounds for positive solutions of the problem:

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & g(x,u,Du) & , \quad x \in \Omega \\ u & = & 0 & , \quad x \in \partial\Omega \end{array}\right\}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, is a bounded smooth domain.
The technique used in this work was developed by Brezis and Turner ([BT]).
We also provide existence of priori bounds of positive solutions for semilinear elliptic systems and polyharmonic problems.

In this work, the main tool used is the Hardy-Sobolev inequality to estimate the L^∞-norm of positive solutions.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a obtenção de estimativas a priori de soluções positivas para um tipo de equações elípticas não lineares. Mais especificamente, garantimos a existência de estimativas a priori de soluções positivas para o problema:

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & g(x,u,Du) & , \quad x \in \Omega \\ u & = & 0 & , \quad x \in \partial\Omega \end{array}\right\}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um aberto limitado com fronteira suave.
A técnica utilizada neste trabalho é devido a Brezis Turner ([BT]).
Também garantimos a existência de estimativas a priori de soluções positivas para sistemas elípticos semilineares e problemas de tipo poliharmônico.

A ferramenta principal utilizada para estimar as soluções positivas nas normas L^∞ é a desigualdade de Hardy-Sobolev.

Sumário

1 Introdução **6**

2 A Desigualdade de Hardy-Sobolev **9**

3 Estimativa a priori de uma classe de Problemas Elípticos Superlineares **15**

4 Estimativa a priori para soluções positivas de Sistemas Elípticos Semilineares usando a desigualdade de Hardy-Sobolev **21**

4.1 Desigualdades de Hardy-Sobolev. 21

4.2 Estimativas a Priori para Soluções Positivas do Sistema (4.1) 25

4.3 Estimativas a Priori para Soluções Positivas do Problema Poliharmônico 4.2 30

Capítulo 1

Introdução

Estimativas a priori de soluções positivas na norma de L^∞ é de fundamental importância para resultados de existência de soluções de problemas elípticos superlineares especialmente quando o problema em consideração não é do tipo variacional.

Um método para demonstrar a existência de estimativas a priori de soluções positivas de equações escalares elípticas de segunda ordem foi proposto em 1977 por Brézis e Turner ([BT]). Tal método combina as desigualdades de Hardy e Sobolev via interpolação e é muito poderoso, ainda quando o problema em consideração não é do tipo variacional.

Mais especificamente, no artigo de Brézis e Turner ([BT]) se demonstra a existência de estimativas a priori para um problema elíptico, a qual pode ser usada para demonstrar a existência de uma solução positiva do problema de tipo elíptico superlinear:

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta u &=& g(x,u,Du) & , \quad x \in \Omega \\ u &=& 0 & , \quad x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto, limitado e suave de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ e g é uma função não negativa que, com respeito à variável u, satisfaz as seguintes três condições de crescimento (utilizados por Brézis e Turner ([BT]) para demonstrar a existência de uma solução positiva do problema 1.1): Se λ_1 é o primeiro autovalor de $-\Delta$, $u^{-1}g(x,u,p)$ tem que ser menor do que λ_1 para u perto do zero e maior do que λ_1 para u perto do ∞; e se $\beta = \frac{N+1}{N-1}$, $u^{-\beta}g(x,u,p)$ tende a zero quando $u \to +\infty$. (Por exemplo $g = u^\gamma$, $1 < \gamma < \beta$ satisfaz as três condições).

O objetivo desta dissertação é usar o mesmo método de Brézis e Turner para encontrar estimativas a priori para soluções positivas de sistemas elípticos semilineares e problemas poliharmônicos, e tal resultado foi feito no trabalho de Clément, Figueiredo e Mitidieri ([CFM]).

Este trabalho é organizado como segue.
No Capítulo 2, enunciamos e demonstramos a desigualdade de Hardy-Sobolev como na tese de Kavian ([K]), a qual afirma que combinando as desigualdades de Hardy e de Sobolev via interpolação, se tem uma desigualdade que é valida para $1 < p < N$; mais ainda Kavian demonstra que o resultado é valido para o caso em que $p = N$ usando um argumento mais complicado que para o caso $1 < p < N$.
No Capítulo 3 usamos a desigualdade de Hardy-Sobolev (para o caso em que $p = 2$ e $N \geq 2$) para demonstrar a existência de estimativas a priori do problema (1.1), como foi feito no artigo de Brézis e Turner ([BT]).
Finalmente no capítulo 4 aplicamos o mesmo método usado por Brézis e Turner para encontrar estimativas a priori do sistema:

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f(x,u,v,Du,Dv) & , \text{ em } \Omega \subset \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v & = & g(x,u,v,Du,Dv) & , \text{ em } \Omega \subset \mathbb{R}^N, \\ u & = & v = 0 & , \text{ sobre } \partial\Omega. \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

e para equações do tipo poliharmônicas com $m > 1$:

$$\left.\begin{array}{rcll} (-\Delta)^m u & = & h(x,u,\Delta u,...,\Delta^{m-1}u) & , \text{ em } \Omega \subset \mathbb{R}^N, \\ u & = & \Delta u = ... = \Delta^{m-1}u = 0 & , \text{ sobre } \partial\Omega. \end{array}\right\} \tag{1.3}$$

em que Ω é um domínio aberto, limitado e suave de $\mathbb{R}^N$ com $N \geq 3$ e f, g e h são funções dadas (que especificaremos adiante), seguindo o trabalho de Clément, Figueiredo e Mitidieri ([CFM]).

Assim podemos ver que o método de Brézis e Turner é muito poderoso para encontrar estimativas a priori para os problemas mencionados anteriormente. Mas também pode ser usado para encontrar estimativas a priori para os seguintes dois problemas:

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & \lambda_1 u + (u^+)^p + f(x) & , \text{ em } \Omega, \\ u & = & 0 & , \text{ sobre } \partial\Omega. \end{array}\right\} \tag{1.4}$$

em que Ω é limitado aberto e suave em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $1 < p < \frac{N+1}{N-1}$, λ_1 é o primeiro autovalor de $-\Delta$ e $f \not\equiv 0$ é uma função tal que $f \in L^r(\Omega)$ para algum $r > N$ e $\int_\Omega f\varphi_1 < 0$ (estudado por Cuesta, Figueiredo e Srikanth no artigo ([CFS])).
E também o problema (estudado por Kannan e Otega no artigo ([KO]))

$$\left.\begin{array}{rcll} \Delta u + \lambda_1 u + g(x,u) & = & f(x) & , \text{ em } \Omega, \\ u & = & 0 & , \text{ sobre } \partial\Omega. \end{array}\right\} \tag{1.5}$$

em que Ω é aberto limitado e com fronteira suave de $\mathbb{R}^N$ com $N \geq 2$ e λ_1 é o primeiro autovalor de $-\Delta$ e a função não linear $g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes condições:

- g é localmente Lipschitziana em u (uniformemente em x) e α-Hölder continua em x.
- $\lim\limits_{|u|\to\infty} g(x,u) = \infty$, uniformemente em $x \in \Omega$.
- $\lim\limits_{u\to-\infty} [g(x,u) + \lambda_1 u] = \infty$, uniformemente em $x \in \Omega$.
- Existem $\gamma, \beta \in L^\infty(\Omega)$ com $\gamma, \beta \geq 0$ tais que

$$|g(x,u)| \leq \gamma(x)u^\sigma + \beta(x),$$

para $x \in \Omega$ e $u \leq 0$, em que $\sigma < \frac{N+1}{N-1}$.

Capítulo 2

A Desigualdade de Hardy-Sobolev

Neste capítulo vamos a demonstrar a Desigualdade de Hardy-Sobolev. Para enunciar o resultado principal vamos supor que $N \geq 2$ e que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um subconjunto aberto e limitado com a sua fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1.
Para cada $x \in \overline{\Omega}$ denotamos por $\delta(x) = d(x, \partial\Omega)$, a distância de x à fronteira $\partial\Omega$.
Se $1 < p < +\infty$, denotamos por $p' = \frac{p}{p-1}$ o seu conjugado, $1' = +\infty$ e $+\infty' = 1$.
Se $1 \leq p < N$, denotamos por $p_* = \frac{Np}{N-p}$ o seu conjugado de Sobolev.
Denotamos por $\mathbb{R}^N_+$ o conjunto $\mathbb{R}^N_+ = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N / \, x_N > 0\}$.

Neste trabalho C denotará uma constante que não depende de u. E como primeiro resultado vamos lembrar a Desigualdade de Nirenberg-Sobolev e a Desigualdade básica de Hardy enunciando os dois Lemas seguintes.

Lema 2.1 (Desigualdade de Nirenberg-Sobolev). *Se $1 \leq p < N$ então para toda função $u \in C^1_c(\Omega)$ se tem que*

$$\|u\|_{L^{p_*}}(\Omega) \leq \frac{p(N-1)}{2N(N-p)}.\|Du\|_{L^p(\Omega)}. \tag{2.1}$$

Demonstração. Para a demonstração ver [N] (p. 1-48). □

Lema 2.2 (Desigualdade básica de Hardy). *Seja $g \in L^p(0, +\infty)$, $1 < p < \infty$ e se*

$$G(x) = \frac{1}{x}.\int_0^x g(t)dt, \qquad \forall x > 0,$$

então

$$\|G\|_{L^p(0,+\infty)} \leq p'.\|g\|_{L^p(0,+\infty)}. \tag{2.2}$$

Demonstração. Para a demonstração ver [F] pag. 195. □

O seguinte resultado é uma generalização da desigualdade anterior e é enunciado num comentário no trabalho de Kavian [K].

Lema 2.3 (Desigualdade de Hardy-Sobolev)**.** *Se Ω é limitado, aberto e de classe C^1, e $1 < p < \infty$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,*

$$\left\| \frac{u}{\delta} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C. \|Du\|_{L^p(\Omega)} . \tag{2.3}$$

Demonstração. Basta demonstrar este resultado para $u \in C_c^1(\Omega)$, pois $C_c^1(\Omega)$ é denso em $W_0^{1,p}(\Omega)$. E como Ω é de classe C^1 e limitado podemos pegar mapas locais e o resultado se reduz ao caso em que $\Omega = \mathbb{R}_+^N$. Por isso mostraremos o resultado para este caso, onde $\delta(x) = x_N$ e temos que

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{u}{\delta} \right\|_{L^p\left(\mathbb{R}_+^N\right)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^{+\infty} \left| \frac{u(x', x_N)}{x_N} \right|^p dx_N dx' \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^{+\infty} \left| \frac{1}{x_N} . \int_0^{x_N} \frac{\partial u(x', t)}{\partial t} dt \right|^p dx_N dx' \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} (p')^p . \int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial u(x', x_N)}{\partial x_N} \right|^p dx_N dx' \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq p' . \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}_+^N)},
\end{aligned}$$

onde para a primeira desigualdade usamos o Lema 2.2, e assim fica demostrado o resultado. □

Finalmente enunciaremos e demonstraremos o resultado principal deste capítulo que foi feito por Kavian em [K].

Teorema 2.4. *Seja $1 < p \leq N$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{(1-\tau)}{N}$, $0 < \tau \leq 1$.*
Então existe uma constante $C(\tau, p)$ tal que $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, se tem

$$\left\| \frac{u}{\delta^\tau} \right\|_{L^q(\Omega)} \leq C(\tau, p) \|Du\|_{L^p(\Omega)}. \tag{2.4}$$

Demonstração. Faremos em dois casos de acordo com p e vamos supor que $\tau < 1$, porque se $\tau = 1$ o resultado segue do Lema 2.3.

Caso 1 : $1 < p < N$

Como $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{(1-\tau)}{N}$, então

$$\frac{\tau . q}{p} + \frac{(1-\tau).q}{p*} = 1$$

e assim
$$\frac{1}{\left(\frac{p}{\tau.q}\right)}+\frac{1}{\left(\frac{p*}{(1-\tau).q}\right)}=1$$
.

Aplicando a desigualdade de Hölder e os Lemas 2.1 e 2.3, obtemos

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{u}{\delta^\tau}\right\|^q_{L^q(\Omega)} &= \int_\Omega \left|\frac{u}{\delta^\tau}\right|^q dx\\
&= \int_\Omega \left|\frac{u}{\delta}\right|^{\tau.q}.|u|^{q.(1-\tau)}dx\\
&\leq \left(\int_\Omega \left(\left|\frac{u}{\delta}\right|^{\tau.q}\right)^{\frac{p}{\tau.q}} dx\right)^{\frac{\tau.q}{p}}.\left(\int_\Omega \left(|u|^{q.(1-\tau)}\right)^{\frac{p*}{q.(1-\tau)}} dx\right)^{\frac{q.(1-\tau)}{p*}}\\
&= \left(\int_\Omega \left|\frac{u}{\delta}\right|^{p} dx\right)^{\frac{\tau.q}{p}}.\left(\int_\Omega |u|^{p*}dx\right)^{\frac{q.(1-\tau)}{p*}}\\
&= \left\|\frac{u}{\delta}\right\|^{\tau.q}_{L^p(\Omega)}.\|u\|^{(1-\tau).q}_{L^{p*}(\Omega)}\\
&\leq C.\|Du\|^{\tau.q}_{L^p(\Omega)}.\|Du\|^{(1-\tau).q}_{L^p(\Omega)}\\
&= C.\|Du\|^q_{L^p(\Omega)},
\end{aligned}$$

e assim o resultado fica demostrado, onde se $\Omega=\mathbb{R}^N_+$, se tem que a constante C é dada por $C=\left(\frac{p.(N-1)}{2.N.(N-p)}.\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{q}}$, a qual diverge para $+\infty$, quando p se aproxima a N. Por isso faremos o caso $p=N$ por separado.

Caso 2 : $p=N$

Como no lema anterior é suficiente mostrar que se $u\in C^1_c(\mathbb{R}^N_+)$ e $\delta(x)=x_N$, $\Omega=\mathbb{R}^N_+$, então
$$\left\|\frac{u}{\delta^\tau}\right\|_{L^{\frac{N}{\tau}}(\Omega)}\leq C.\|Du\|_{L^N(\Omega)}$$
.

Primeiro vamos provar que para $q>N'$, onde $N'=\dfrac{N}{N-1}$, se tem que

$$\int_\Omega \frac{|u|^q}{\delta^N}dx\leq C(q,N).\|Du\|^{N'}_{L^N(\Omega)}.\left(\int_\Omega \frac{|u|^{q-N'}}{\delta^N}dx\right). \tag{2.5}$$

De fato, se define $\varphi=\dfrac{|u|^{\frac{q}{N'}}}{\delta^{N-1}}$ o qual pertence a $C^1_c(\Omega)$, pois u pertence a $C^1_c(\Omega)$ e $\frac{1}{\delta}$ pertence a $C^1(\Omega)$.

Além disso, como $\dfrac{q}{N'}-1>0$ se tem que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=\frac{q}{N'}.\varphi.|u|^{-2}.u.\frac{\partial u}{\partial x_i}+|u|^{\frac{q}{N'}}.\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\delta^{N-1}}\right)\in C^0_c(\Omega).$$

E assim $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, agora aplicando o Lema 2.1 a φ com $p = 1$ e $1^* = N'$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^{N'}(\Omega)} &\leq \frac{1}{2N}.\|D\varphi\|_{L^1(\Omega)} \\ &= \frac{1}{2N}.\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\right| dx, \qquad i = 1,2,...,N. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Mas da definição de φ, se tem que

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\right| dx \leq C(q,N).\int_\Omega \frac{|u|^{\frac{q}{N'}-1}}{\delta^{N-1}}.\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| dx + \int_\Omega |u|^{\frac{q}{N'}}.\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\delta^{N-1}}\right)\right| dx,$$

Onde se $i < N$

$$\int_\Omega |u|^{\frac{q}{N'}}.\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\delta^{N-1}}\right)\right| dx = 0,$$

se $i = N$

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u|^{\frac{q}{N'}}.\left|\frac{\partial}{\partial x_N}\left(\frac{1}{x_N^{N-1}}\right)\right| dx &= \int_\Omega |u|^{\frac{q}{N'}}.\frac{N-1}{x_N^N} dx \\ &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_N}\left(|u|^{\frac{q}{N'}}\right).\frac{1}{\delta^{N-1}} dx \\ &\leq \int_\Omega \frac{|u|^{\frac{q}{N'}-1}}{\delta^{N-1}}.\left|\frac{\partial u}{\partial x_N}\right| dx. \end{aligned}$$

Agora usando estas estimativas em (2.6), temos que

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^{N'}(\Omega)} &\leq \frac{C(q,N)}{2N}.\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \frac{|u|^{\frac{q}{N'}-1}}{\delta^{N-1}}.\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| dx + \int_\Omega \frac{|u|^{\frac{q}{N'}-1}}{\delta^{N-1}}.\left|\frac{\partial u}{\partial x_N}\right| dx \\ \left(\int_\Omega \frac{|u|^q}{\delta^N} dx\right)^{\frac{1}{N'}} &\leq C(q,N).\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \frac{|u|^{\frac{q}{N'}-1}}{\delta^{N-1}}.\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| dx \\ &\leq C(q,N).\sum_{i=1}^{N}\left(\int_\Omega \frac{|u|^{q-N'}}{\delta^N} dx\right)^{\frac{1}{N'}}.\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^N dx\right)^{\frac{1}{N}} \\ &\leq C(q,N).\|Du\|_{L^N(\Omega)}.\left(\int_\Omega \frac{|u|^{q-N'}}{\delta^N} dx\right)^{\frac{1}{N'}}, \end{aligned}$$

onde para a terceira desigualdade usamos a desigualdade de Hölder; e assim (2.5) fica demonstrado.
Agora fazendo $d\mu = \dfrac{1}{\delta^N}dx$, temos que $\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f.\frac{1}{\delta^N}dx$, para qualquer função $f - \mu$ integrável. E vamos denotar por $q = \frac{N}{\tau}$ e $q_0 = N + N'$, para assim considerar dois casos ao respeito de q e q_0:

i) Se $q \geq q_0$, então definindo $r = q - N'$, temos que $q \geq r \geq N$ e portanto existe um $\alpha \in [0,1]$ tal que $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\alpha}{q} + \dfrac{(1-\alpha)}{N}$, e aplicando a desigualdade de Hölder, temos que

$$\|u\|_{L^r(\mu)} \leq \|u\|^{\alpha}_{L^q(\mu)}.\|u\|^{1-\alpha}_{L^N(\mu)}. \tag{2.7}$$

E pelo Lema 2.3, temos que

$$\|u\|_{L^N(\mu)} = \left\|\frac{u}{\delta}\right\|_{L^N(\Omega)} \leq N'.\|Du\|_{L^N(\Omega)}. \tag{2.8}$$

Agora aplicamos o resultado (2.5) para $q = \frac{N}{\tau} > N'$, lembrando que $d\mu = \dfrac{1}{\delta^N}$, e logo usando (2.7) e (2.8), se tem que

$$\begin{aligned}
\|u\|^q_{L^q(\mu)} &\leq C(q,N).\|Du\|^{N'}_{L^N(\Omega)}.\|u\|^r_{L^r(\mu)} \\
&\leq C(q,N).\|Du\|^{N'}_{L^N(\Omega)}.\|u\|^{r.\alpha}_{L^q(\mu)}.\|u\|^{r.(1-\alpha)}_{L^N(\mu)} \\
&\leq C(q,N).\|Du\|^{N'}_{L^N(\Omega)}.\|u\|^{r.\alpha}_{L^q(\mu)}.(N')^{r.(1-\alpha)}.\|Du\|^{r.(1-\alpha)}_{L^N(\Omega)} \\
&= C(q,N).\|Du\|^{N'+r.(1-\alpha)}_{L^N(\Omega)}.\|u\|^{r.\alpha}_{L^q(\mu)}.
\end{aligned}$$

E assim, temos que

$$\|u\|^{q-r\alpha}_{L^q(\mu)} \leq C(q,N).\|Du\|^{N'+r.(1-\alpha)}_{L^N(\Omega)}, \tag{2.9}$$

mas como $q = N' + r$, então $q - r\alpha = N' + r(1-\alpha)$. Substituindo em (2.9) e cancelando exponentes, temos que

$$\|u\|_{L^q(\mu)} \leq C(\tau,N).\|Du\|_{L^N(\Omega)}. \tag{2.10}$$

Notemos que

$$\|u\|_{L^q(\mu)} = \left(\int_\Omega \frac{|u|^q}{\delta^N}dx\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_\Omega \left|\frac{u}{\delta^\tau}\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} = \left\|\frac{u}{\delta^\tau}\right\|_{L^q(\Omega)}, \tag{2.11}$$

para finalmente substituindo 2.11 em 2.10, temos

$$\left\|\frac{u}{\delta^\tau}\right\|_{L^{\frac{N}{\tau}}(\Omega)} \leq C(\tau,N).\|Du\|_{L^N(\Omega)},$$

com o qual fica demonstrado o teorema para este caso.

ii) Se $q \leq q_0$, então $N \leq q \leq q_0$, e assim existe $\lambda \in [0,1]$ tal que $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{N} + \frac{1-\lambda}{q_0}$, e por Hölder, temos que

$$\|u\|_{L^q(\mu)} \leq \|u\|^{\lambda}_{L^N(\mu)}.\|u\|^{1-\lambda}_{L^{q_0}(\mu)}. \tag{2.12}$$

Agora aplicando 2.5, para $q_0 = N + N' > N'$, e o Lema 2.3 se tem

$$\begin{aligned}
\|u\|^{q_0}_{L^{q_0}(\mu)} &\leq C(q_0, N).\|Du\|^{N'}_{L^N(\Omega)}.\left(\int_\Omega \frac{|u|^N}{\delta^N}dx\right) \\
&= C(q_0, N).\|Du\|^{N'}_{L^N(\Omega)}.\left\|\frac{u}{\delta}\right\|^N_{L^N(\Omega)} \\
&\leq C.\|Du\|^{N'}_{L^N(\Omega)}.\|Du\|^N_{L^N(\Omega)} \\
&= C.\|Du\|^{N'+N}_{L^N(\Omega)},
\end{aligned}$$

e como $q_0 = N' + N$, temos

$$\|u\|_{L^{q_0}(\mu)} \leq C.\|Du\|_{L^N(\Omega)}, \tag{2.13}$$

Finalmente substituindo 2.8 e 2.13 em 2.12

$$\|u\|_{L^q(\mu)} \leq C(\tau, N)\|Du\|^\lambda_{L^N(\mu)}.\|Du\|^{1-\lambda}_{L^{q_0}(\mu)} = C(\tau, N).\|Du\|_{L^N(\mu)},$$

e por 2.11, se tem que

$$\left\|\frac{u}{\delta^\tau}\right\|_{L^{\frac{N}{\tau}}(\Omega)} \leq C(\tau, N).\|Du\|_{L^N(\Omega)},$$

com o qual o resultado é demonstrado para este último caso e assim o Teorema fica demonstrado.

□

Capítulo 3

Estimativa a priori de uma classe de Problemas Elípticos Superlineares

Neste capítulo usaremos a desigualdade de Hardy-Sobolev para encontrar uma estimativa a priori para soluções de um problema elíptico. E este resultado é utilizado no artigo de Brezis e Turner para estudar a existência de uma solução positiva do problema de tipo elíptico superlinear (O qual não faremos neste trabalho):

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & g(x,u) & , \quad x \in \Omega \\ u & = & 0 & , \quad x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{3.1}$$

onde g é uma função não negativa e com respeito à variável u satisfaz as seguintes três condições de crescimento: Se λ_1 é o primeiro autovalor de $-\Delta$, $u^{-1}g(x,u)$ tem que ser menor do que λ_1 para u perto do zero e maior do que λ_1 para u perto do ∞; e se $\beta = \frac{N+1}{N-1}$, $u^{-\beta}g(x,u)$ tende a zero quando $u \to +\infty$. (Por exemplo $g = u^\gamma$, $1 < \gamma < \beta$ satisfaz as três condições).

Para enunciar o teorema principal deste capítulo continuamos supondo que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1.

Vamos usar a desigualdade de Hardy-Sobolev para o caso $p = 2$ (pois $p = 2 \leq N$) , isto é, existe uma constante $C(\tau)$ tal que para toda $v \in H_0^1(\Omega)$ e $0 < \tau \leq 1$

$$\left\| \frac{v}{\delta^\tau} \right\|_{L^q(\Omega)} \leq C(\tau).\|Dv\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{(1-\tau)}{N}. \tag{3.2}$$

Finalmente vamos denotar por φ a primeira autofunção que satisfaz

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta\varphi & = & \lambda_1\varphi & , \quad x \in \Omega \\ \varphi & = & 0 & , \quad x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{3.3}$$

onde λ_1 é o menor autovalor de $-\Delta$ e φ é normalizado tal que $\|\varphi\|_{L^1(\Omega)} = 1$.

Do principio de máximo (Lema de Hopf ([GT])) segue que φ pode ser escolhido tal que $\varphi(x) > 0$ e $\varphi(x) \geq C.\delta(x)$ em Ω para uma constante $C > 0$.

Com estas considerações enunciaremos o teorema principal deste capítulo sobre a estimativas a priori, a qual foi feito no artigo de Brezis e Turner ([BT]).

Teorema 3.1. *Seja $f(x,u)$ uma função continua não negativa sobre $\overline{\Omega} \times [0,+\infty)$, $N \geq 3$ e satisfaz:*

(i) $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \frac{f(x,u)}{u} > \lambda_1$ *uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$*

(ii) $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \frac{f(x,u)}{u^\beta} = 0$ *uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$, $\beta = \frac{N+1}{N-1}$.*

Então existe uma constante $K > 0$, tal que se $u \in H_0^1(\Omega)$ é não negativa e satisfaz

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f(x,u) + t.\varphi & , \quad x \in \Omega \\ u & = & 0 & , \quad x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{3.4}$$

se tem $u \in L^\infty$ e $\|u\|_{L^\infty} \leq K$, onde $K > 0$ é independente de $t \geq 0$ e de u.

Demonstração. Primeiro provaremos dois Lemas:

Lema 3.2. *Suponhamos que f satisfaz a hipótese (i) do Teorema 3.1. Então existe uma constante K_1 tal que se u satisfaz (3.4) para um $t \geq 0$, temos que $t \leq K_1$, $\displaystyle\int_\Omega \delta(x).f(x,u)dx \leq K_1$ e $\int_\Omega u.\varphi\, dx \leq K_1$.*

Demonstração. De (i), temos que se $m = \displaystyle\lim_{u\to+\infty} \frac{f(x,u)}{u}$, como $m > \lambda_1$, existe k tal que $m > k > \lambda_1$ e se tomamos $\epsilon = m - k$, existe u_0 tal que se $u > u_0$, $\left|\dfrac{f(x,u)}{u} - m\right| < m - k$, e assim $f(x,u) > u.k$, $\forall u > u_0$. E como $f(x,u) - k.u$ é continua, então existe uma constante $C < 0$, tal que $\forall u \in [0,u_0]$, $\forall x \in \overline{\Omega}$, $f(x,u) - k.u \geq C$.
E assim temos que existe uma constante $C > 0$, tal que

$$f(x,u) \geq k.u - C, \qquad \forall u \geq 0, \quad \forall x \in \Omega. \tag{3.5}$$

Agora se $u(x)$ é solução de (3.4), multiplicamos por φ em (3.4), integramos e aplicamos

(3.5) para obter

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (-\Delta u)\varphi\, dx &= \int_\Omega f(x,u)\varphi\, dx + \int_\Omega t\varphi^2\, dx \\
\int_\Omega u(-\Delta \varphi)\, dx &= \int_\Omega f(x,u)\varphi\, dx + t\int_\Omega \varphi^2\, dx \\
\lambda_1 \int_\Omega u\varphi\, dx &= \int_\Omega f(x,u)\varphi\, dx + t\int_\Omega \varphi^2\, dx \\
&\geq k\int_\Omega u\varphi\, dx - C\int_\Omega \varphi\, dx + t\int_\Omega \varphi^2\, dx \\
&= k\int_\Omega u\varphi\, dx - C + t\int_\Omega \varphi^2\, dx.
\end{aligned}$$

E assim

$$C \geq (k-\lambda_1)\int_\Omega u\varphi\, dx + t\int_\Omega \varphi^2\, dx, \tag{3.6}$$

e como ambos termos do lado direito de (3.6) são não negativos, $(k-\lambda_1) > 0$ e $\displaystyle\int_\Omega \varphi^2\, dx > 0$, temos uma cota superior para t e $\int_\Omega u\varphi\, dx$.
E limitando $\int_\Omega u\varphi\, dx$ em

$$\lambda_1 \int_\Omega u\varphi\, dx = \int_\Omega f(x,u)\varphi\, dx + \int_\Omega t\varphi^2\, dx,$$

temos uma cota superior para $\int_\Omega f(x,u)\varphi\, dx$; mas como $\varphi \geq C.\delta(x)$ e a $f(x,u)$ é não negativa, obtemos uma cota também para $\int_\Omega f(x,u)\delta\, dx$. E assim existe uma cota K_1, tal que $t \leq K_1$ e $\displaystyle\int_\Omega \delta(x)f(x,u)dx \leq K_1$

□

Lema 3.3. *Com as hipóteses do teorema, existe uma constante $K_2 > 0$ tal que $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq K_2$, para toda solução não negativa $u(x)$ de (3.4).*

Demonstração. Multiplicando (3.4) por u e integrando, temos que

$$\int_\Omega |Du|^2 = \int_\Omega (-\Delta u)u\, dx = \int_\Omega f(x,u)u\, dx + t\int_\Omega \varphi u\, dx.$$

Pelo lema anterior t e $\displaystyle\int_\Omega \varphi u\, dx$ são limitados por uma constante. E assim temos que

$$\|Du\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |Du|^2 \leq \int_\Omega f(x,u)u\, dx + C. \tag{3.7}$$

Com a finalidade de limitar $\|Du\|^2_{L^2(\Omega)}$, vamos limitar $\int_\Omega f(x,u).u\, dx$. E para isso seja α tal que $0 < \alpha < 1$, aplicando a Desigualdade de Hölder com os exponentes $\frac{1}{\alpha}$ e $\frac{1}{1-\alpha}$ e usando o Lema (3.2) obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(x,u).u\,dx &= \int_\Omega (\delta.f)^\alpha.(f^{1-\alpha}.\frac{u}{\delta^\alpha})\,dx \\
&\leq \left(\int_\Omega \delta(x).f(x,u)\,dx\right)^\alpha.\left(\int_\Omega \left(f^{1-\alpha}.\frac{u}{\delta^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\,dx\right)^{1-\alpha} \\
&\leq K_1^\alpha.\left(\int_\Omega f.\frac{u^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\delta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\,dx\right)^{1-\alpha}. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Mas da hipóteses (ii) do teorema, para cada $\epsilon > 0$ existe uma constante $C_\epsilon > 0$ tal que $f(x,u) \leq \epsilon.u^\beta + C_\epsilon$. Aplicando esta desigualdade em (3.8) obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(x,u).u\,dx &\leq K_1^\alpha\left(\epsilon\int_\Omega \frac{u^{\beta+\frac{1}{1-\alpha}}}{\delta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\,dx + C_\epsilon\int_\Omega \frac{u^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\delta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\,dx\right)^{1-\alpha} \\
&\leq K_1^\alpha.2^{1-\alpha}\left(\epsilon\int_\Omega \frac{u^{\beta+\frac{1}{1-\alpha}}}{\delta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\,dx\right)^{1-\alpha} + \left(C_\epsilon\int_\Omega \frac{u^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\delta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\,dx\right)^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

E assim temos que para cada $\epsilon > 0$ podemos encontrar um $C_\epsilon > 0$ tal que

$$\int_\Omega f(x,u).u\,dx \leq \epsilon.\left(\int_\Omega \frac{u^{\beta+\frac{1}{1-\alpha}}}{\delta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\,dx\right)^{1-\alpha} + C_\epsilon.\left(\int_\Omega \frac{u^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\delta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\,dx\right)^{1-\alpha}. \qquad (3.9)$$

Escolhendo $\alpha = \frac{2}{N+1}$ temos que $0 < \alpha < 1$. Da definição de β segue que $\beta + \dfrac{1}{1-\alpha} = \dfrac{2}{1-\alpha}$ e substituindo em (3.9) o valor de α temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(x,u).u\,dx &\leq \epsilon.\left(\int_\Omega \frac{u^{\frac{2}{1-\alpha}}}{\delta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\,dx\right)^{1-\alpha} + C_\epsilon.\left(\int_\Omega \frac{u^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\delta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\,dx\right)^{1-\alpha} \\
&= \epsilon.\left\|\frac{u}{\delta^{\frac{\alpha}{2}}}\right\|^2_{L^{\frac{2}{1-\alpha}}} + C_\epsilon.\left\|\frac{u}{\delta^\alpha}\right\|_{L^{\frac{1}{1-\alpha}}}. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Agora vamos aplicar a desigualdade (3.2) com $\tau = \frac{\alpha}{2}$ e $\tau = \alpha$ e assim obter

$$\left\|\frac{u}{\delta^{\frac{\alpha}{2}}}\right\|_{L^q(\Omega)} \leq C.\|Du\|_{L^2(\Omega)} \qquad \text{onde} \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1-\frac{\alpha}{2}}{N}, \qquad (3.11)$$

isto é $q = \frac{2}{1-\alpha}$.
E

$$\left\|\frac{u}{\delta^\alpha}\right\|_{L^r(\Omega)} \leq C.\|Du\|_{L^2(\Omega)} \qquad \text{onde} \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1-\alpha}{N},$$

e das definições de α e r, vemos que $\dfrac{1}{1-\alpha} = \dfrac{N+1}{N-1}$ e $r = \dfrac{2N(N+1)}{N^2-N+2}$. E assim temos que $\dfrac{1}{1-\alpha} \leq r$ e portanto

$$\left\| \frac{u}{\delta^\alpha} \right\|_{L^{\frac{1}{1-\alpha}}} \leq C.\|Du\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.12}$$

Finalmente usamos as desigualdades (3.11) e (3.12) em (3.10) para obter

$$\int_\Omega f(x,u).u\,dx \leq \epsilon C\|Du\|^2_{L^2(\Omega)} + C_\epsilon\|Du\|_{L^2(\Omega)},$$

e assim junto com a desigualdade (3.7)

$$\|Du\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon C\|Du\|^2_{L^2(\Omega)} + C_\epsilon\|Du\|_{L^2(\Omega)} + C,$$

escolhendo ϵ suficientemente pequeno e aplicando a desigualdade de Young com ϵ concluímos que para alguma constante $C > 0$, se tem

$$\|Du\|_{L^2(\Omega)} \leq C.$$

O resultado deste Lema segue da desigualdade anterior e da desigualdade de Poincaré. $\square$

Prova do Teorema 3.1: Suponhamos que $u \in L^\infty(\Omega)$, e como é solução de (3.4) se tem que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C.\|f(x,u) + t.\varphi\|_{L^p(\Omega)} + C.\|u\|_{H^1(\Omega)}, \qquad \forall p > \frac{N}{2}.$$

(ver [ADN]).
E assim usando os Lemas 3.2 e 3.3

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C.\|f(x,u)\|_{L^p(\Omega)} + K_1.\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} + C.K_2$$

Denotando por C uma constante geral independente de u e usando que para $\epsilon > 0$ existe uma constante $C_\epsilon > 0$ tal que $f(x,u) \leq \epsilon.u^\beta + C_\epsilon$ temos que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \epsilon.\|u^\beta\|_{L^p(\Omega)} + C_\epsilon \\
&= \epsilon.\left(\int_\Omega u^p.u^{(\beta-1).p}\right)^{\frac{1}{p}} + C_\epsilon \\
&\leq \epsilon.\|u\|_{L^\infty(\Omega)}.\left(\int_\Omega u^{(\beta-1).p}\right)^{\frac{1}{(\beta-1).p}.(\beta-1)} + C_\epsilon \\
&= \epsilon.\|u\|_{L^\infty(\Omega)}.\|u\|^{\beta-1}_{L^{(\beta-1).p}(\Omega)} + C_\epsilon
\end{aligned}$$

Além disso como $N \geq 3$ e $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ da definição de β segue que $N(\beta-1) < 2^*$, de modo que existe um $p > 1$ tal que $N < p < \dfrac{2^*}{(\beta-1)}$.
Escolhendo este p na desigualdade anterior, observando que $(\beta-1).p < 2^*$ e aplicando os

Lemas 2.1 e 3.3 se tem

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \epsilon.\|u\|_{L^\infty(\Omega)}.\|u\|^{\beta-1}_{L^{2^*}(\Omega)} + C_\epsilon \\
&\leq \epsilon.C.\|u\|_{L^\infty(\Omega)}.\|Du\|^{\beta-1}_{L^2(\Omega)} + C_\epsilon \\
&\leq \epsilon.C.K_1^{\beta-1}.\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + C_\epsilon
\end{aligned}$$

Finalmente fazendo ϵ suficientemente pequeno, temos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C,$$

e assim fica demonstrado o teorema.

Finalmente o fato de que $u \in L^\infty$ pode ser facilmente obtida de um argumento de bootstrap, e assim fica demonstrado o resultado principal deste Capítulo. $\square$

Capítulo 4

Estimativa a priori para soluções positivas de Sistemas Elípticos Semilineares usando a desigualdade de Hardy-Sobolev

O objetivo de este capítulo é estabelecer estimativas a priori para soluções positivas de sistemas do tipo:

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta u &=& f(x,u,v,Du,Dv) & , \quad \text{em } \Omega \subset \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v &=& g(x,u,v,Du,Dv) & , \quad \text{em } \Omega \subset \mathbb{R}^N, \\ u &=& v = 0 & , \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{array}\right\} \tag{4.1}$$

e para equações do tipo poliharmônicas com $m > 1$:

$$\left.\begin{array}{rcll} (-\Delta)^m u &=& h(x,u,\Delta u,...,\Delta^{m-1}u) & , \quad \text{em } \Omega \subset \mathbb{R}^N, \\ u &=& \Delta u = ... = \Delta^{m-1}u = 0 & , \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{array}\right\} \tag{4.2}$$

onde $(-\Delta)^m$ é a composição do $(-\Delta)$ com ele mesmo m vezes.

4.1 Desigualdades de Hardy-Sobolev.

Seja Ω um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^N$ com $N \geq 3$ e φ a autofunção principal de $(-\Delta; H_0^1(\Omega))$, normalizada por $\displaystyle\int_\Omega \varphi\, dx{=}1$, com seu correspondente autovalor $\lambda_1 > 0$. Como sempre usaremos C para denotar uma constante que independe de u.

Do Lema 2.3 e do fato que existe uma constante $C > 0$ tal que $\varphi \geq C.\delta(x)$, temos que

$$\left\| \frac{u}{\varphi} \right\|_{L^q(\Omega)} \leq C.\|Du\|_{L^q(\Omega)}, \qquad \forall q > 1 \text{ e } \forall u \in W_0^{1,q}(\Omega), \tag{4.3}$$

em que a constante $C > 0$ depende só de N e q.

Os resultados deste Capítulo foram obtidos no trabalho de Clément, de Figueiredo e Mitidieri [CFM]. Agora vamos usar (4.3) para estabelecer a seguinte desigualdade de interpolação. No que segue, vamos fazer a convenção de que $\dfrac{1}{0} = \infty$.

Lema 4.1. *Seja $r_0 \in (1, +\infty]$, $r_1 \in [1, +\infty)$ e $u \in L^{r_0}(\Omega) \cap W_0^{1,r_1}$. Então para cada $\tau \in [0, 1]$ temos que*

$$\frac{u}{\varphi^\tau} \in L^r(\Omega),$$

onde

$$\frac{1}{r} = (1-\tau)\frac{1}{r_0} + \frac{\tau}{r_1}. \tag{4.4}$$

Além disso,

$$\left\| \frac{u}{\varphi^\tau} \right\|_{L^r(\Omega)} \leq C\|u\|^{1-\tau}_{L^{r_0}(\Omega)} \|u\|^{\tau}_{W_0^{1,r_1}}, \tag{4.5}$$

onde a constante $C > 0$ depende só de τ, r_0 e r_1.

Demonstração. A desigualdade é trivial se $\tau = 0$ e se $\tau = 1$ a desigualdade se reduz a (4.3).

Vamos supor que $\tau \in (0, 1)$. Temos que

$$\left\| \frac{u}{\varphi^\tau} \right\|^r_{L^r(\Omega)} = \int_\Omega |u|^r \varphi^{-\tau r} dx = \int_\Omega |u|^{\tau r} \varphi^{-\tau r} |u|^{(1-\tau)r}, \tag{4.6}$$

então se $r_0 < \infty$, por (4.4) podemos aplicar a desigualdade de Hölder com $p = \dfrac{r_1}{r\tau}$ e $p' = \dfrac{r_0}{(1-\tau)r}$ em (4.6) e assim

$$\left\| \frac{u}{\varphi^\tau} \right\|^r_{L^r(\Omega)} \leq \left(\int_\Omega (|u|\varphi^{-1})^{r_1} dx \right)^{\frac{\tau r}{r_1}} \left(\int_\Omega |u|^{r_0} dx \right)^{\frac{r(1-\tau)}{r_0}} = \left\| \frac{u}{\varphi} \right\|^{r\tau}_{L^{r_1}(\Omega)} \|u\|^{r(1-\tau)}_{L^{r_0}(\Omega)}. \tag{4.7}$$

Das desigualdades (4.3) e (4.7) se tem que

$$\left\| \frac{u}{\varphi^\tau} \right\|^r_{L^r(\Omega)} \leq C\|Du\|^{r\tau}_{L^{r_1}(\Omega)} \|u\|^{r(1-\tau)}_{L^{r_0}(\Omega)}. \tag{4.8}$$

E o resultado em (4.5) segue de (4.8).

Se $r_0 = +\infty$, (4.6) implica que

$$\left\| \frac{u}{\varphi^\tau} \right\|^r_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^{(1-\tau)r}_{L^\infty(\Omega)} \left(\int_\Omega \left| \frac{u}{\varphi} \right|^{\tau r} dx \right), \tag{4.9}$$

e usando de novo a desigualdade (4.3) em (4.9) obtemos (4.5). □

.

Usando o Lema anterior enunciaremos e demonstraremos um resultado que será usado na demonstração do teorema sobre estimativas a priori para o sistema (4.1).

Corolário 4.2. *Seja $u \in W_0^{1,s}(\Omega) \cap W^{2,s}$, onde $1 < s < +\infty$. Além disso suponhamos que*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{s} - \frac{(2-\tau)}{N} \quad se \quad s < \frac{N}{2} \tag{4.10}$$

ou

$$\frac{1}{r} > \frac{\tau}{N} \qquad se \quad s = \frac{N}{2} \tag{4.11}$$

ou

$$\frac{1}{r} = \tau(\frac{1}{s} - \frac{1}{N}) \qquad se \quad \frac{N}{2} < s < N \tag{4.12}$$

ou

$$\forall r > 1, \quad \forall \tau \in [0,1] \; se \quad N \leq s. \tag{4.13}$$

Então existe uma constante $C = C(\tau, s, N)$ tal que

$$\left\| \frac{u}{\varphi^\tau} \right\|_{L^r(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{2,s}} \; . \tag{4.14}$$

Demonstração. Faremos a demostração por casos

(a) Seja $s < \dfrac{N}{2}$, tomemos r_0 e r_1 tal que

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{N} \quad \text{e} \quad \frac{1}{r_0} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{N}. \tag{4.15}$$

Então das Imersões de Sobolev ([B] pag. 285)

$$W^{2,s}(\Omega) \subset W^{1,r_1}(\Omega)$$

e

$$W^{2,s} \subset L^{r_0}(\Omega).$$

Aplicando o Lema 4.1 com r_0 e r_1 como em (4.15), temos a desigualdade (4.14).

(b) Seja $s = \dfrac{N}{2}$ e r_1 como em (4.15). Então $W^{2,s}(\Omega) \subset W^{1,N}(\Omega)$ e aplicando a imersão de Sobolev temos que para qualquer p tal que $1 < p < \infty$

$$W^{2,s}(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

E assim escolhendo $r_0 > 1$, o resultado segue do Lema 4.1.

(c) Seja s tal que $\frac{N}{2} < s < N$. Neste caso temos que

$$W^{2,s}(\Omega) \subset W^{1,r_1}(\Omega),$$

e

$$W^{2,s}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega}),$$

em que $r_1 = \frac{Ns}{N-s}$.
E usando o Lema 4.1 com este r_1 e $r_0 = \infty$ segue o resultado.

(d) (i) Seja $N < s$. Pela Imersão de Sobolev, temos que para algum $\alpha > 0$

$$W^{2,s}(\Omega) \subset C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Como consequência

$$W^{2,s}(\Omega) \subset W^{1,r_1}(\overline{\Omega}) \text{ para qualquer } r_1 > 1.$$

Da aplicação do Lema 4.1 com este arbitrário r_1 e $r_0 = \infty$ concluímos o resultado.

(ii) Seja $s = N$, temos que

$$W^{2,s}(\Omega) \subset W^{1,r_1}(\Omega) \text{ para qualquer } r_1 > 1,$$

e

$$W^{2,s}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega}).$$

O resultado segue aplicando o Lema 4.1 com $\frac{1}{r} = \frac{\tau}{r_1}$. Observamos que se $\tau > 0$ podemos escolher qualquer $r > 1$ e se $\tau = 0$ a desigualdade 4.14 é trivial.

□

Usando o mesmo método de demonstração como no Corolário anterior obtemos o seguinte resultado, o qual será usado para demonstrar o Teorema de existência de estimativas a priori do Problema Poliharmônico (4.2).

Corolário 4.3. *Seja* $u \in W_0^{1,s}(\Omega) \cap W_0^{2m,s}(\Omega)$, *onde* $1 < s < \infty$, $m \geq 1$ *e* $\tau \in [0,1]$. *Além disso suponhamos que*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{s} - \frac{(2m-\tau)}{N} \quad se \quad s < \frac{N}{2m} \tag{4.16}$$

ou

$$\frac{1}{r} > \frac{\tau}{N} \qquad se \quad s = \frac{N}{2m} \tag{4.17}$$

ou

$$\frac{1}{r} = \tau(\frac{1}{s} - \frac{1}{N}) \qquad se \quad \frac{N}{2m} < s < N \tag{4.18}$$

ou

$$\forall r > 1, \quad \forall \tau \in [0,1] \; se \quad N \leq s. \tag{4.19}$$

Então existe uma constante $C = C(\tau, s, N)$ *tal que*

$$\left\| \frac{u}{\varphi^\tau} \right\|_{L^r(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{2m,s}} \ . \tag{4.20}$$

4.2 Estimativas a Priori para Soluções Positivas do Sistema (4.1)

Nesta seção estudaremos a existência de estimativas a priori de soluções positivas do sistema elíptico 4.1 onde Ω é um domínio limitado suave de $\mathbb{R}^N$ com $N \geq 3$. Assumiremos também que as funções não lineares f e g satisfazem:

(f_1) $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é contínua.

(f_2)

$$\liminf_{t \to +\infty} \frac{f(x,s,t,\xi,\eta)}{t} > \lambda_1 \text{ uniformemente em } (x,s,\xi,\eta) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N.$$

(f_3) Existe $p \geq 1$ e $\sigma \geq 0$ tal que

$$|f(x,s,t,\xi,\eta)| \leq C(|t|^p + |s|^{p\sigma}) + 1,$$

para qualquer $(x,s,t,\xi,\eta) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

Similarmente assumimos que

(g_1) $g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é contínua.

(g_2)

$$\liminf_{t \to +\infty} \frac{g(x,s,t,\xi,\eta)}{s} > \lambda_1 \text{ uniformemente em } (x,t,\xi,\eta) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N.$$

(g_3) Existe $q \geq 1$ e $\sigma' \geq 0$ tal que

$$|g(x,s,t,\xi,\eta)| \leq C(|s|^q + |t|^{q\sigma'}) + 1,$$

para qualquer $(x, s, t, \xi, \eta) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

O resultado principal deste capítulo é o seguinte teorema, o qual diz que sob algumas condições sobre p, existe uma estimativa a priori do sistema (4.1).

Teorema 4.4. *Seja Ω um domínio limitado e suave de $\mathbb{R}^N$ com $N \geq 4$. Assumamos que se cumprem as condições (f_1), (f_2), (f_3), (g_1), (g_2), (g_3) e que*

$$\frac{1}{p+1} + \frac{N-1}{N+1}.\frac{1}{q+1} > \frac{N-1}{N+1}, \tag{4.21}$$

$$\frac{1}{p+1}.\frac{N-1}{N+1} + \frac{1}{q+1} > \frac{N-1}{N+1}, \tag{4.22}$$

e

$$\sigma = \frac{L}{\max(L, K)} \quad , \quad \sigma' = \frac{K}{\max(L, K)} \tag{4.23}$$

onde também supomos que

$$K := \frac{p}{p+1} - \frac{2}{N} > 0 \quad e \quad L := \frac{q}{q+1} - \frac{2}{N} > 0.$$

Seja (u, v) uma solução positiva de (4.1). Então existe uma constante $C > 0$ independente de (u, v) tal que

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C, \ \|v\|_{L^\infty} \leq C. \tag{4.24}$$

Demonstração. Vamos fazer a prova em três passos. No primeiro passo provaremos que f e g são uniformemente limitados em $L^1_{loc}(\Omega)$. No segundo passo obtemos uma estimativa uniforme das componentes da solução (u, v) respectivamente em $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ e $W^{2,\frac{q+1}{q}}(\Omega)$. Finalmente no último passo aplicamos o processo de bootstrap.

(i) Sejam l_f e l_g tal que

$$\lambda_1 < l_f < \liminf_{t \to \infty} \frac{f(x, s, t, \xi, \eta)}{t}$$

e

$$\lambda_1 < l_g < \liminf_{s \to \infty} \frac{g(x, s, t, \xi, \eta)}{s}.$$

Das hipóteses (f_1), (f_2), (g_1) e (g_2) segue que existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $s, t \geq 0$ e $(x, \xi, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ temos que

$$f(x, s, t, \xi, \eta) \geq l_f t - C, \tag{4.25}$$

e

$$g(x, s, t, \xi, \eta) \geq l_g s - C. \tag{4.26}$$

Multiplicando as equações em (4.1) por φ e integrando, obtemos

$$\int_\Omega -\Delta u\varphi dx = \int_\Omega f\varphi dx,$$

e

$$\int_\Omega -\Delta v\varphi dx = \int_\Omega g\varphi dx,$$

e assim aplicando (4.25) e (4.26) segue que

$$\lambda_1 \int_\Omega u\,\varphi\,dx = \int_\Omega f\,\varphi\,dx \geq l_f \int_\Omega v\,\varphi\,dx - C\int_\Omega \varphi\,dx, \tag{4.27}$$

$$\lambda_1 \int_\Omega v\,\varphi\,dx = \int_\Omega g\,\varphi\,dx \geq l_g \int_\Omega u\,\varphi\,dx - C\int_\Omega \varphi\,dx, \tag{4.28}$$

e então somando (4.27) e (4.28) obtemos que

$$2C \geq (l_f - \lambda_1)\int_\Omega v\,\varphi\,dx + (l_g - \lambda_1)\int_\Omega u\,\varphi\,dx$$

e assim (para alguma constante $c > 0$)

$$\int_\Omega u\,\varphi\,dx \leq\, C,\ \int_\Omega v\,\varphi\,dx \leq C, \tag{4.29}$$

o qual implica por (4.27), (4.28), (4.29) e da continuidade das funções f e g que

$$\int_\Omega f\,\varphi\,dx \leq\, C,\ \int_\Omega g\,\varphi\,dx \leq C$$

e assim $|f|$ e $|g|$ são uniformemente limitados em $L^1_{loc}(\Omega)$.

(ii) Tomando a norma $L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ da primeira equação de (4.1) obtemos

$$\int_\Omega |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}\,dx = \int_\Omega |f|^{\frac{p+1}{p}}\,dx = \int_\Omega |f|^\alpha\,\varphi^\alpha\,|f|^{1-\alpha+\frac{1}{p}}\,\varphi^{-\alpha}\,dx \tag{4.30}$$

em que $0 < \alpha < 1$ é um parâmetro a ser tomado. Usando a desigualdade de Hölder em (4.30) obtemos que

$$\int_\Omega |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}\,dx \leq \left(\int_\Omega |f|\,\varphi\,dx\right)^\alpha \left(\int_\Omega |f|^{1+\frac{1}{p}\frac{1}{1-\alpha}}\,\varphi^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\,dx\right)^{1-\alpha}. \tag{4.31}$$

Usando a hipóteses (f_3) podemos estimar a segunda integral de (4.31) por I_1+I_2+C, onde

$$I_1 = \int_\Omega |v|^{p+\frac{1}{1-\alpha}}\varphi^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\,dx \tag{4.32}$$

e

$$I_2 = \int_\Omega |u|^{\sigma(p+\frac{1}{1-\alpha})}\varphi^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\, dx. \tag{4.33}$$

Agora para estimar (4.32) e (4.33) usamos a primeira parte do Corolário 4.2 (com $s = \frac{q+1}{q}$ e notando que da definição de L se tem $s < \frac{N}{2}$) como segue. Para I_1 escolhemos r e τ tal que

$$r = p + \frac{1}{1-\alpha}, \;\; r\tau = \frac{\alpha}{1-\alpha}, \;\; \frac{1}{r} = \frac{q}{q+1} - \frac{2-\tau}{N}. \tag{4.34}$$

Estas equações determinam α. De fato, fazendo contas

$$\alpha = \frac{N(1-L-pL)}{1+N-pLN}. \tag{4.35}$$

E de (4.21) e (4.22) segue que $\alpha > 0$. Usando o fato que $L > 0$ também temos que $\alpha < 1$. Da segunda equação de (4.34) segue que $\tau > 0$ e o fato que $\tau < 1$ segue imediatamente da sua expressão

$$\tau = \frac{N(1-L-pL)}{1+p+N}. \tag{4.36}$$

Então usando o Corolário 4.2 obtemos

$$I_1 \leq C\|v\|^r_{W^{2,\frac{q+1}{q}}}, \tag{4.37}$$

e por (4.35) temos que

$$r(1-\alpha) = p(1-\alpha) + 1 = p(1 - \frac{N(1-L-pL)}{1+N-pLN}) + 1, \tag{4.38}$$

e por (4.21) concluímos que

$$\theta_1 := r(1-\alpha) < \frac{q+1}{q}. \tag{4.39}$$

Agora vamos estimar I_2. Escolhendo $\overline{r}$ e $\overline{\tau}$ tal que

$$\sigma(p + \frac{1}{1-\alpha}) = \overline{r} \tag{4.40}$$

e

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = \overline{r}\,\overline{\tau}. \tag{4.41}$$

Do fato que $\sigma = \dfrac{L}{\max(L,K)}$ e da definição de α, segue que $\overline{r} > 1$. Agora usando

(4.21) e (4.22) temos que

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} < 1. \tag{4.42}$$

Com o qual usando (4.40) e (4.41) se segue que

$$0 < \overline{\tau} < 1. \tag{4.43}$$

Seguindo definimos s por

$$\frac{1}{\overline{r}} = \frac{s}{s+1} - \frac{2-\overline{\tau}}{N} \tag{4.44}$$

Assim

$$\frac{s}{s+1} = \frac{1}{\overline{r}} + \frac{2-\overline{\tau}}{N} = \frac{1}{\sigma}(\frac{1}{r} - \frac{\tau}{N}) + \frac{2}{N} = \frac{1}{\sigma}L + \frac{2}{N} = \max(L,K) + \frac{2}{N}, \tag{4.45}$$

e então $s = \max(p,q)$.

Agora aplicamos de novo o Corolário 4.2 e obtemos que

$$I_2 \leq C\|u\|^{\overline{r}}_{W^{2,\frac{s+1}{s}}}, \tag{4.46}$$

e por (4.39)

$$\overline{r}(1-\alpha) = \sigma(p(1-\alpha)+1) < \sigma(\frac{q+1}{q}). \tag{4.47}$$

Mas como

$$\sigma(\frac{q+1}{q}) \leq \frac{p+1}{p},$$

concluímos que

$$\theta_2 := \overline{r}(1-\alpha) < \frac{p+1}{p}. \tag{4.48}$$

E do fato que $s = \max(p,q)$ segue que $\frac{s+1}{s} = \min(\frac{p+1}{p}, \frac{q+1}{q})$.

Agora usando o passo 1, (4.37) e (4.46) em (4.31) temos que

$$\int_\Omega |\Delta u|^{\frac{p+1}{p}}\, dx \leq C(\|v\|^{\theta_1}_{W^{2,\frac{q+1}{q}}} + \|u\|^{\theta_2}_{W^{2,\frac{p+1}{p}}} + 1). \tag{4.49}$$

Analogamente se tem que

$$\int_\Omega |\Delta v|^{\frac{q+1}{q}}\, dx \leq C(\|u\|^{\theta_3}_{W^{2,\frac{p+1}{p}}} + \|v\|^{\theta_4}_{W^{2,\frac{q+1}{q}}} + 1), \tag{4.50}$$

em que $\theta_3 < \frac{p+1}{p}$ e $\theta_4 < \frac{q+1}{q}$.

Agora vamos usar a desigualdade de Calderon-Zygmund que é um resultado da teoria de regularidade em Equações Diferenciais Elípticas e pode ser encontrada no livro [GT]:

$$\|u\|_{W^{2,t}} \leq C\|\Delta u\|_{L^t}, \tag{4.51}$$

para toda $u \in W_0^{1,t}(\Omega) \cap W^{2,t}(\Omega)$, com $t > 1$.

E assim obtemos que

$$\|u\|_{W^{2,\frac{p+1}{p}}}^{\frac{p+1}{p}} \leq C(\|u\|_{W^{2,\frac{p+1}{p}}}^{\frac{p+1}{p}\gamma_1} + \|v\|_{W^{2,\frac{q+1}{q}}}^{\frac{q+1}{q}\gamma_2} + 1), \tag{4.52}$$

$$\|v\|_{W^{2,\frac{q+1}{q}}}^{\frac{q+1}{q}} \leq C(\|u\|_{W^{2,\frac{p+1}{p}}}^{\frac{p+1}{p}\gamma_3} + \|v\|_{W^{2,\frac{q+1}{q}}}^{\frac{q+1}{q}\gamma_4} + 1), \tag{4.53}$$

em que $0 < \gamma_i < 1$, $i = 1, ..., 4$. Assim aplicando a desigualdade de Cauchy com epsilon nos termos com γ_i concluimos que

$$\|u\|_{W^{2,\frac{p+1}{p}}} \leq C \ , \ \|v\|_{W^{2,\frac{q+1}{q}}} \leq C. \tag{4.54}$$

(iii) Finalmente utilizando o processo de bootstrap, fica demonstrado o teorema.

□

4.3 Estimativas a Priori para Soluções Positivas do Problema Poliharmônico 4.2

Nesta seção demonstraremos a existência de estimativas a priori de soluções positivas do problema poliharmônico (4.2) onde Ω é um domínio aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave e $N > 2m + \sqrt{2m + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$ e $m > 1$.

Assumiremos também que h satisfaz:

(h_1) $h : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é contínua.

(h_2)

$$\liminf_{s \to +\infty} \frac{h(x, s, t_1, ..., t_{m-1})}{s} > \lambda_1^m,$$

uniformemente em $(x, t_1, ..., t_{m-1}) \in \Omega \times \mathbb{R}^{m-1}$.

(h_3) Existe $p > 1$ e $C > 0$ tal que

$$|h(x, s, t_1, ..., t_{m-1})| \leq C(1 + |s|^p),$$

para qualquer $(x, s, t_1, ..., t_{m-1}) \in \Omega \times \mathbb{R}^m$.

Vamos demonstrar o resultado principal desta seção.

Teorema 4.5. *Seja Ω um domínio aberto, limitado e suave de $\mathbb{R}^N$ com $N > 2m + \sqrt{2m + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$ e $m > 1$. Assumamos que se cumprem as condições (h_1), (h_2) e (h_3) e que*

$$\frac{2m}{N-2m} < p < \frac{N+1}{N-2m+1}. \tag{4.55}$$

Seja u uma solução positiva de (4.2). Então existe uma constante $C > 0$ independente de u tal que

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C. \tag{4.56}$$

Demonstração. Primeiro note que a condição $N > 2m + \sqrt{2m + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$, implica que $\frac{2m}{N-2m} < \frac{N+1}{N-2m+1}$ e com isto a condição (4.55) tem sentido.

Agora como na prova do teorema (4.4), faremos três passos.

(i) Seja l_h tal que

$$\lambda_1^m < l_h < \liminf_{s\to\infty} \frac{h(x, s, t_1, ..., t_{m-1})}{s}$$

Das hipóteses (h_1) e (h_2) se segue que existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $s \geq 0$ e $(x, t_1, ..., t_{m-1}) \in \Omega \times \mathbb{R}^{m-1}$ temos que

$$h(x, s, t_1, ..., t_{m-1}) \geq l_h s - C. \tag{4.57}$$

Multiplicando a equação em (4.2) por φ e integrando, obtemos

$$\int_\Omega (-\Delta u)^m \varphi dx = \int_\Omega h\varphi dx. \tag{4.58}$$

Aplicando (4.57) e a igualdade

$$(\lambda_1)^m \int_\Omega u\,\varphi\,dx = \int_\Omega u\,(-\Delta)^m \varphi\,dx = \int_\Omega (-\Delta)^m u\,\varphi\,dx$$

na equação (4.58), temos que

$$(\lambda_1)^m \int_\Omega u\,\varphi\,dx = \int_\Omega h\,\varphi\,dx \geq l_h \int_\Omega u\,\varphi\,dx - C\int_\Omega \varphi\,dx,$$

e assim

$$\int_\Omega u\,\varphi\,dx \leq C,$$

a qual implica que

$$\int_\Omega |h|\,\varphi\,dx \leq C. \tag{4.59}$$

(ii) Tomando a norma $L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ na equação (4.2), obtemos

$$\int_{\Omega} |\Delta^m u|^{\frac{p+1}{p}}\, dx = \int_{\Omega} |h|^{\frac{p+1}{p}}\, dx = \int_{A} |h|^{\frac{p+1}{p}}\, dx + \int_{B} |h|^{\frac{p+1}{p}}\, dx, \tag{4.60}$$

onde

$$A = \{x \in \Omega : u(x) < 1\}$$

e

$$B = \{x \in \Omega : u(x) \geq 1\}.$$

Usando a condição (h_3) temos que

$$\int_{A} |h|^{\frac{p+1}{p}}\, dx \leq C.$$

E a integral

$$\int_{B} |h|^{\frac{p+1}{p}}\, dx = \int_{B} |h|^{\alpha}\varphi^{\alpha}|h|^{1-\alpha+\frac{1}{p}}\varphi^{-\alpha}\, dx$$

em que $0 < \alpha < 1$ é um parâmetro a ser escolhido depois. Substituindo estos resultados na equação (4.60) se tem que

$$\int_{\Omega} |\Delta^m u|^{\frac{p+1}{p}}\, dx \leq C + \int_{B} |h|^{\alpha}\varphi^{\alpha}|h|^{1-\alpha+\frac{1}{p}}\varphi^{-\alpha}\, dx, \tag{4.61}$$

Usando um resultado de regularidade elíptica (ver [ADN])

$$\|u\|^{\frac{p+1}{p}}_{W^{2m,\frac{p+1}{p}}} \leq C. \int_{\Omega} |\Delta^m u|^{\frac{p+1}{p}}\, dx,$$

junto com (4.61) e usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\|u\|^{\frac{p+1}{p}}_{W^{2m,\frac{p+1}{p}}} \leq C + C.(\int_{B} |h|\varphi\, dx)^{\alpha}(\int_{B} |h|^{1+\frac{1}{p}\frac{1}{1-\alpha}}\varphi^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\, dx)^{1-\alpha}. \tag{4.62}$$

Pela hipóteses (h_3) se tem que para $x \in B$ e $(t_1, ..., t_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$

$$|h(x, u(x), t_1, ..., t_{m-1})| \leq C(1 + u(x)^p) \leq Cu(x)^p.$$

Aplicando esta desigualdade para poder estimar a segunda integral de (4.62), segue que esta integral pode estimada por I, onde

$$I = \int_{\Omega} |u|^{p+\frac{1}{1-\alpha}}\varphi^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\, dx.$$

Para estimar esta integral vamos aplicar o Corolário 4.3 com a condição (4.16). Para isto pegamos $s = \dfrac{p+1}{p}$ e notamos que a primeira desigualdade na condição (4.55) implica que $s < \dfrac{N}{2m}$. E assim definimos $L > 0$ por

$$L = \frac{p}{p+1} - \frac{2m}{N}. \tag{4.63}$$

E

$$p + \frac{1}{1-\alpha} = r, \ \ \frac{\alpha}{1-\alpha} = r\tau, \ \ \frac{1}{r} = \frac{p}{p+1} - \frac{2m-\tau}{N}. \tag{4.64}$$

Com estas equações podemos determinar as constantes α, τ e r:

$$\alpha = \frac{N - NL - pNL}{1 + N - pNL}, \ \tau = \frac{N - NL - pNL}{1 + N + p}, \ r = \frac{1 + N + p}{1 + NL}. \tag{4.65}$$

Vamos verificar que de fato $0 < \alpha < 1$, $0 < \tau < 1$ e $r > 1$.

Claramente $1 + NL > 0$ e $1 + N + p > 0$.

Afirmamos que $1 + N - NLp > 0$, ou equivalentemente que $1 + N > NLp$. Pela condição (4.55), é suficiente verificar que $1 + N > \dfrac{NL(N+1)}{N - 2m + 1}$, a qual é verdadeira usando a definição de L.

Para verificar que $1 - L - Lp > 0$, notamos que é equivalente a verificar que $p < \dfrac{N+2m}{N-2m}$. Mas podemos verificar que $\dfrac{N+1}{N-2m+1} < \dfrac{N+2m}{N-2m}$, e assim pela condição em (4.55), temos que $p < \dfrac{N+2m}{N-2m}$.

Assim temos que $\alpha, \tau > 0$. E é fácil verificar que $\alpha, \tau < 1$ e de (4.64) segue que $r > 1$.

Agora aplicando o Corolário (4.4) estimamos I, como segue:

$$I \leq C.\|u\|^{r}_{W^{2m,\frac{p+1}{p}}}. \tag{4.66}$$

Observamos que $\theta = r(1-\alpha) = p(1-\alpha) + 1$ por (4.64) e usando a condição (4.55) segue que $\theta < \dfrac{p+1}{p}$.

Usando (4.59), (4.62) e (4.66) temos que

$$\|u\|^{\frac{p+1}{p}}_{W^{2m,\frac{p+1}{p}}} \leq C(\|u\|^{\theta}_{W^{2m,\frac{p+1}{p}}} + 1). \tag{4.67}$$

Como $\theta < \dfrac{p+1}{p}$ podemos usar a desigualdade de Young com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno para obter que

$$\|u\|_{W^{2m,\frac{p+1}{p}}} \leq C. \tag{4.68}$$

(iii) Neste passo usamos um argumento de bootstrap como no teorema (4.5).

Isto completa a prova do Teorema.

$\square$

Referências Bibliográficas

[ADN] Agmon, S.; Douglis, A.; Nirenberg, L. *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions.* I, Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959), 623-727.

[B] Brézis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer Science Business Media, 2011.

[BT] Brézis, H.; Turner, R. *On a Class of Superlinear Elliptic Problems.* Comm. Partial Diff. Equations, 2, (1977) 601-614.

[CFM] Clément, Ph.; de Figueiredo, D. G.; Mitidieri, E. *A priori estimates for positive solutions of semilinear elliptic systems via Hardy-Sobolev inequalities.* Nonlinear partial differential equations, Pitman Res. Notes Math. Ser. 343, (1996) 73-91.

[CFS] Cuesta, M.; de Figueiredo, D. G.; Srikanth, P. N. *On a resonant-superlinear elliptic problem.* Calc. Var. 17, 221-233 (2003).

[F] Folland, G. B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* Wiley-Interscience Publication, 1999.

[GT] Gilbarg, D; Trudinger, N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Vol. 224 of the Grundlehren der mathematischen Wissenschaften (2001).

[K] Kavian, O. *Inegalité de Hardy-Sobolev et Application.* Thèse de Doctorat de 3^{eme} cycle, Université de Paris VI, (1978).

[KO] Kannan, R.; Otega, R. *Superlinear elliptic boundary value problems.* Czechoslovak Math. J. 37(112) (1987), no. 3, 386-399.

[N] Nirenberg, L. *On Elliptic Partial Differential Equations.* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa. 13, 1959, p. 1-48.