Extensões de Soluções Homogêneas de uma Classe de Operadores Diferencias Parciais Reais de Ordem Um [1]

Camila Pires Cremasco Gabriel

Orientador: José Ruidival Soares dos Santos Filho

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar, como parte dos requisitos para a obtenção do título de "Mestre em Ciências na Área de Matemática" .

São Carlos

Março de 2005

[1] Este trabalho teve suporte financeiro da CAPES

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

G118es

Gabriel, Camila Pires Cremasco.
Extensões de soluções homogêneas de uma classe de operadores diferenciais parciais reais de ordem um / Camila Pires Cremasco Gabriel. -- São Carlos : UFSCar, 2005.
75 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2005.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Operadores diferenciais parciais. 3. Extensão de soluções homogêneas. I. Título.

CDD: 515.353 (20ª)

Orientador

Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho

____
Prof. Dr. Cezar Issao Kondo

____
Prof. Dr. Evandro Raimundo da Silva

Ofereço

Ao meu marido,
Beto.

As minhas irmãs,
Caroline e Karine.

Aos meus pais,
Wilson e Clélia.

Às minhas avós,
Ruth e Delminda.

A minha nova família,
Roberto, Delfina e Leonardo.

Às minhas novas avós,
Luzinete e Nadyr.

Agradecimentos

À Deus por cada minuto da minha vida.

Ao professor Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho pela dedicação, responsabilidade e determinação com que orientou este trabalho. A sua humildade, paciência, tolerância e sabedoria fizeram com que as barreiras quase intransponíveis que enfrentei pudessem ser superadas.

Aos meus pais Wilson Cremasco e Clélia Maria Pires Cremasco pelo incentivo, paciência e por nunca desistirem de acreditar em mim. Sem este apoio a realização deste trabalho não seria possível.

Às minhas irmãs Caroline e Karine pela amizade.

Às minhas avós Delminda e Ruth pelas orações e confiança.

Ao amigo e professor Dr. Paulo Leandro Dattori pela amizade e apoio nos momentos mais difíceis da realização de minha pós-graduação.

Aos amigos Ana Claudia Pereira, Elisandra, Gustavo, Eliza, Silvino, Nádia e Hemerson pela preciosa amizade e apoio nos momentos difíceis.

Aos professores Dr. Cezar Issao Kondo, Dr. João Carlos Vieira Sampaio e Dra. Vera Lúcia Carbone pela grande amizade e apoio.

À querida Dra. Celeste Corral Tacaci Neves Baptista pela ajuda e por estar presente nos momentos difíceis de minha vida.

Ao meu marido pela dedicação, atenção, paciência, respeito e por ser nesses últimos sete anos ser meu porto seguro.

À minha nova família, Roberto Gabriel, Delfina, Leonardo, Nadyr e Luzinete que me acolheram como filha sempre me apoiando e aconselhando. Em especial ao Roberto e Delfina que desde a graduação sempre me protegeram e guiaram meus passos.

Aos colegas de curso, professores e funcionários da UFSCar. De modo especial, agradeço à Célia e Irma e a todos que de alguma maneira contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

Nesta dissertação, baseado em técnica devida a Lars Hörmander, demonstraremos dois teoremas de extensão para $\mathbb{R}^n$ de soluções homogêneas em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ do operador diferencial parcial $L = \sum \lambda_i x_i \partial_{x_i} - a$, $\lambda_i > 0$, $\forall_i$.

Abstract

In this dissertation, based on owed technique Lars Hörmander, will demonstrate two extension theorems for $\mathbb{R}^n$ of homogeneous solutions in $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ of the partial differential operator $L = \sum \lambda_i x_i \partial_{x_i} - a,\ \lambda_i > 0,\ \forall_i$.

Sumário

Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar resultados sobre extensões para $\mathbb{R}^n$ de soluções homogêneas de $L_{\lambda,a} = \sum \lambda_i x_i \partial_{x_i} - a$ em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Nós provaremos inicialmente como se estende para $\mathbb{R}^n$ soluções homogêneas de $L = \sum x_i \partial_{x_i} - a$ em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, segundo L. Hörmander.

Para isto, no primeiro capítulo, apresentaremos algumas notações, definições e resultados que serão utilizadas nesta dissertação, em particular descrevemos a topologia $\mathcal{D}'(\Omega)$ e algumas operações básicas deste espaço.

No segundo capítulo, definiremos distribuições homogêneas em $\mathbb{R}$, no processo de motiva-la apresentaremos alguns exemplos. A seguir estenderemos tal definição para $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ e $\mathbb{R}^n$. Demonstraremos também alguns lemas que serão úteis a seguir.

Nos terceiro e quarto capítulos, enunciaremos e demonstraremos teoremas de extensão para $\mathbb{R}^n$ de distribuições homogêneas em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

No quinto capítulo, nós estabelecemos um análago ao Lema 2.3.3 para solução homogêneas em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ de $L = \sum \lambda_i x_i \partial_{x_i} - a$. Descrevendo portanto três formas equivalentes para definir soluções homogêneas em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ desta classe de operadores.

Nos sexto e sétimo capítulos, estenderemos para $\mathbb{R}^n$ soluções homogêneas em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ de uma classe de operadores lineares de ordem um com coeficientes lineares, cuja a origem é o único ponto singular.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introdução

Neste capítulo introduziremos algumas notações e resultados gerais. Na seção 1.3 introduzimos a noção de distribuição e na seção 1.4, enunciaremos alguns teoremas básicos da teoria de distribuições.

1.2 Notações

Consideramos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ como as variáveis no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ de dimensão $n \geq 1$ e $\mathbb{N}^n$ como o conjunto de todas as n-uplas $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ com $\alpha_j \in \mathbb{N}$, para cada $j = 1, \cdots, n$. O suporte de uma função contínua $f(x)$ é o fecho do conjunto $\{x : f(x) \neq 0\}$, que denotamos por $S(f)$. Se Ω é um conjunto aberto denotamos $K \subset\subset \Omega$ quando $K \subset \Omega$ é um compacto. Denotamos também $\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$, sendo $\partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}$. Os monômios em x de expoente α serão denotados por $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

1.3 Distribuições no $\mathbb{R}^n$

Sejam $C^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f$ infinitamente diferenciáveis $\}$ e $C_c^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) \mid S(f) \subset\subset \Omega\}$. A topologia de $C^\infty(\Omega)$ é definida através de uma família de semi-normas indexadas por $K \subset\subset \Omega$ e $j \in \mathbb{N}$ e é dada por:

$$p_{K,j}(\varphi) = \sup_{x\in K} \sum_{|\alpha|\leq j} |\partial^\alpha \varphi|(x).$$

Dado um aberto não vazio Ω de $\mathbb{R}^n$, definimos um espaço vetorial $C_c^\infty(\Omega)$ como sendo o espaço das funções $C^\infty(\Omega)$ cujo suporte é compacto. Uma base para a topologia de $C^\infty(\Omega)$ é dada por:

$$B_{\varepsilon,\, p_{K,j}}(f) = \{g \in \mathbb{C}^\infty(\Omega) \mid p_{K,j}(f-g) < \varepsilon\},$$

com $f \in C^\infty(\Omega)$. Denotaremos $\mathcal{D}(\Omega)$ o espaço $C_c^\infty(\Omega)$ munido da topologia dada pelas semi-normas:

$$p_\rho(\varphi) = \sum_\alpha \sup_{x\in\Omega} |\rho_\alpha \partial^\alpha \varphi(x)| \ ,$$

com $\rho = (\rho_\alpha)_{\alpha\in N^n}$ tal que $\rho_\alpha \in C(\Omega)$, $\forall\alpha$, e $\{S(\rho_\alpha)\}_{\alpha\in N^n}$ sendo uma família localmente finita; isto é, $\forall\ K \subset\subset \Omega$, $\{\alpha \in N^n, S(\rho_\alpha) \cap K \neq \varnothing\}$ é finito. Definimos $\mathcal{D}'(\Omega)$ como o espaço dos funcionais lineares contínuos de $\mathcal{D}(\Omega)$, ou seja, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é linear e se existe p_ρ tal que $|u(\phi)| \leq p_\rho(\phi)$.

Definição 1.3.1. Uma sequência $\{\phi_j\}$ de funções $C_c^\infty(\Omega)$ converge a zero em $C_c^\infty(\Omega)$ se

(i) existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $S(\phi_j) \subseteq K,\ j = 1, 2, ...;$ e

(ii) para todo inteiro não negativo m, as derivadas de ordem m das funções ϕ_j convergem uniformemente a zero quando $j \to \infty$.

Um funcional linear u em $\mathcal{D}(\Omega)$ é sequencialmente contínuo se $u(\phi_j) \to 0$ quando $\{\phi_j\}$ converge a zero em $C_c^\infty(\Omega)$. Este funcional linear u é chamado de distribuição em Ω e denotamos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o conjunto de todas distribuições em Ω. Por vezes, é conveniente escrever $< u, \phi >$ em vez de $u(\phi)$.

Proposição 1.3.1. *Seja $u : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ um funcional linear. Então u é uma distribuição se, e somente se, para cada compacto $K \subset \Omega$, existe constantes C e $m > 0$ inteiro dependentes de K.*

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |\partial^\alpha \varphi|, \quad \varphi \in C_c^\infty(K). \tag{1.3.1}$$

Além disso, (1.3.1) *ocorre se, e somente se, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demonstração:

($\Leftarrow$) Se $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$ e $S(\phi_j) \subseteq K_0$, $j = 1, 2, ...$, então podemos tomar a desigualdade (1.3.1) com $K = K_0$, e como as derivadas de ϕ_j até ordem a zero uniformemente em qualquer compacto, então $\sum_{|\alpha| \leq m} \sup |\partial^\alpha \phi_j| \to 0$. Portanto, $< u, \phi_j > \to 0$.

($\Rightarrow$) Suponhamos que u não satisfaça (1.3.1). Assim, para $C = n$, existe $\varphi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que

$$r_n = |\langle u,\ \varphi_n \rangle| > n \sum_{|\alpha| \leq n} \sup |D^\alpha \varphi_n|, \quad S(\varphi_n) \subseteq K.$$

Desta forma, para $\psi_n = \frac{\varphi_n}{r_n} \in \mathbb{C}_c^\infty(\Omega)$, temos que

$$\sum_{|\alpha| \leq n} \sup |D^\alpha \psi_n| < \frac{1}{n}, \quad |\langle u,\ \psi_n \rangle| = 1, \quad S(\psi_n) \subseteq K,$$

isto é, $\psi_n \to 0$ em $\mathbb{C}_c^\infty(\Omega)$ e $\langle u,\ \psi_n \rangle \not\to 0$, contradizendo a hipótese. ■

Definição 1.3.2. A ordem de uma distribuição u é o menor valor de m de maneira que a desigualdade (1.3.1) seja satisfeita para todo K. Se não existir m finito que satisfaça a desigualdade citada para todo K, dizemos que u possui ordem infinita.

Definição 1.3.3. Se f é uma função complexa Lebesgue mensurável definida num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que, para todo compacto $K \subset \Omega$, temos: $\int_K |f|\ dx < \infty$ dizemos que f é localmente integrável e escrevemos $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Definição 1.3.4. Chamamos de suporte de $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, que denotamos por $S(u)$, o complemento em Ω do conjunto $\{x \in \Omega;\ \text{ existe vizinhança aberta } U_x \subset \Omega \text{ de forma que } u|_{C_c^\infty(U_x)} = 0\}$.

Exemplo 1.3.1. Se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, então T_f é uma distribuição dada por:

$$\langle T_f,\ \phi\rangle = \int f\phi dx, \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

De fato, T_f é um funcional linear e sua linearidade é garantida por:

$$\langle T_f,\ \phi_1 + \lambda\phi_2\rangle = \int f(\phi_1 + \lambda\phi_2)dx = \int f\phi_1 dx\ + \lambda \int f\phi_2 dx, \quad \phi_1,\ \phi_2 \in C_c^\infty(\Omega),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Agora, pela Proposição 1.3.1, T_f é uma distribuição, visto que:

$$| < T_f, \phi > | = \left| \int_{S(\phi)} f\phi\ dx \right| \leq \int_{S(\phi)} |f\phi| dx \leq S_{t\in\Omega}|\phi(t)| \int_{S(\phi)} |f|\ dx < \infty$$

e tomando $m = 0$ e $C = \int_{S(\phi)} |f|\ dx < \infty$

Exemplo 1.3.2. Se $\Omega = \mathbb{R}^n$, a distribuições δ que denominamos "delta de Dirac", é dada por $\langle \delta,\ \phi\rangle = \phi(0)$, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. De fato, δ é um funcional linear e sua linearidade é garantida por:

$$\langle \delta,\ \phi_1 + \lambda\phi_2\rangle = (\phi_1 + \lambda\phi_2)(0) = \phi_1(0) + \lambda\phi_2(0) = \langle \delta,\ \phi_1\rangle + \lambda\langle \delta,\ \phi_2\rangle.$$

Agora, pela Proposição 1.3.1, δ é uma distribuição, visto que se $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_j \to 0$, então $< \delta, \phi_j >= \phi_j(0) \to 0$.

A soma e o produto por escalares se define de maneira óbvia. Se $u_1,\ u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, definimos para $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \langle u_1 + u_2, \phi\rangle &= \langle u_1, \phi\rangle + \langle u_2, \phi\rangle, \\ \langle \lambda u_1, \phi\rangle &= \lambda\langle u_1, \phi\rangle. \end{aligned}$$

Se u é uma função contínua tal que $\partial_k u$ está definida e é contínua, obtemos por integração por partes

$$\int (\partial_k u)\phi = -\int u(\partial_k\phi), \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Se f é uma função contínua, então:

$$\int (fu)\phi = \int u(f\phi), \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega),$$

em que $f\phi$ é uma função teste se $f \in C^\infty$.

As definições a seguir estende as igualdades acima para distribuições.

Definição 1.3.5. (Derivação)

Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definimos a derivação de u com relação a x_j como

$$\langle \partial_j u, \phi \rangle = -\langle u, \partial_j \phi \rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{1.3.2}$$

Iterando (1.3.2), podemos definir $\partial^\alpha u$ para qualquer multi-índice α e obter

$$\langle \partial^\alpha u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \phi \rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Observamos que $\partial^\alpha u$ é uma distribuição em $\mathbb{R}$. De fato, sua linearidade é garantida por:

$$\begin{aligned} < \partial^\alpha u, \phi_1 + \lambda \phi_2 > &= (-1)^{|\alpha|} < u, \partial^\alpha(\phi_1 + \lambda \phi_2) > \\ &= (-1)^{|\alpha|} < u, \partial^\alpha \phi_1 + \lambda \partial^\alpha \phi_2 > \\ &= (-1)^{|\alpha|} < u, \partial^\alpha \phi_1 > + (-1)^{|\alpha|} \lambda < u, \partial^\alpha \phi_2 > \end{aligned}$$

E dada $\phi_j \to 0$. Notemos que $\partial^\alpha \phi_j \to 0$. Daí, temos $< \partial^\alpha u, \phi_j >= (-1)^{|\alpha|} < u, \partial^\alpha u \phi_j > \to 0$.

Exemplo 1.3.3. A função $H(x) = 1$ para $x > 0$, $H(x) = 0$ para $x \leq 0$, em $\mathbb{R}^n$ é chamada função de Heaviside, e sua derivada é por definição

$$H'(\phi) = -H(\phi') = -\int_0^\infty \phi'(x)dx = \phi(0),$$

daí $H' = \delta$ = delta de Dirac do Exemplo 1.3.2

Definição 1.3.6. (Produto por uma função $C^\infty(\Omega)$) Se $f \in C^\infty(\Omega)$ e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definimos a "multiplicação de u por f" como

$$\langle fu, \phi \rangle = \langle u, f\phi \rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{1.3.3}$$

Observamos que fu é uma distribuição em Ω.

Exemplo 1.3.4. Se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\langle f\delta, \phi\rangle = \langle \delta, f\phi\rangle = f(0)\phi(0) = f(0)\langle \delta, \phi\rangle = \langle f(0)\delta, \phi\rangle,$$

o que significa que $f\delta = f(0)\delta$ e só o valor de f em $x = 0$ é relevante. Analogamente,

$$\langle f\delta', \phi\rangle = \langle \delta', f\phi\rangle = -\langle \delta, (f\phi)'\rangle = -\langle \delta, f\phi' + f'\phi\rangle = \langle f(0)\delta' - f'(0)\delta, \phi\rangle$$

ou seja, $f\delta' = f(0)\delta' - f'(0)\delta$. Resultados análogos podem ser obtidos para derivadas de qualquer ordem de δ.

Definição 1.3.7. Denota-se por $\mathcal{E}'(\Omega)$ o subespaço de $\mathcal{D}'(\Omega)$ das distribuições com suporte compacto.

1.4 Alguns Resultados da Teoria das Distribuições

Lema 1.4.1. *Toda função $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ define uma distribuição de ordem zero.*

Demonstração:

Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Dado $K \subset\subset \mathbb{R}$ existe c_K tal que $| < f, \phi > | \leq c_k ||\phi||_{\infty,K}$ para todo $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, com $S(\phi) \subset K$. De fato,

$$| < f, \phi > | = \left| \int_{\mathbb{R}} f\phi dx \right| \leq \int_K |f\phi|\, dx = \sup_K |\phi| \int_K |f| dx = c_K \parallel \phi \parallel_{\infty,K},$$

com $c_K = \int_K |f| dx$. ■

Teorema 1.4.2. *Seja $K \subset \Omega$ um conjunto compacto. Então existe uma função $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ e $\varphi = 1$ numa vizinhança de K.*

Demonstração:

Seja $\delta = d(K,\ \Omega^c)$, $\delta > 0$, pois é a distância entre um compacto e um fechado disjunto. Consideremos $\epsilon,\ \epsilon_1 > 0$ tais que $\epsilon < \epsilon_1 < \epsilon + \epsilon_1 < \delta$ e seja χ a função característica de $K_1 = K + \{x \in \Omega;\ |x| \leq \epsilon_1\}$. Tomemos

$$\varrho(x) = \int \chi(x - \epsilon y)\phi(y) dy = \epsilon^{-n} \int \chi(y)\phi(\frac{x-y}{\epsilon}) dy,$$

em que $\phi \in C_c^\infty$ tal que $\int \phi dx = 1$, $\phi \geq 0$, e $S(\phi) \subseteq \{x : |x| \leq 1\}$ vale. $\varrho \in C_c^\infty$, pois $S(\varrho) \subseteq K_1 + \{x;\ |x| \leq \epsilon\} \subseteq K + \{x;\ |x| \leq \epsilon + \epsilon_1\} \subseteq \Omega$. Se $d(x,\ K) < \epsilon_1 - \epsilon$, segue que para qualquer $y \in \mathbb{R}^n$, com $|y| \leq 1$, $\ x - \epsilon y \in K_1$. Conseqüentemente,

$$\varrho(x) = \int \chi(x - \epsilon y)\phi(y)dy = \int_{|y|\leq 1} \chi(x - \epsilon y)\phi(y)dy = \int_{|y|\leq 1} \phi(y)dy = 1.$$

Portanto $\varrho \equiv 1$ numa vizinhança de K. ∎

Teorema 1.4.3. *Sejam Ω e Ψ subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Se existe $K \subset\subset \Psi$ tal que $\varphi(x, y) = 0$ quando $x \notin K$, então a aplicação $y \mapsto \langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle$ pertence a $C^\infty(\Psi)$ e*

$$\partial_y^\alpha \langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle = \langle u, \partial_y^\alpha \varphi(\cdot, y)\rangle,$$

para todo multi-índice α.

Demonstração:

Provemos inicialmente que $y \mapsto \varphi(x, y)$ é contínua. Fixe y arbitrário e tome uma seqüência $y_j \to y$ qualquer. Para facilitar a compreensão, escrevamos $\psi_j(x) = \varphi(x, y_j)$ e $\psi(x) = \varphi(x, y)$ (y está fixado, de modo que ψ_j e ψ são funções de x). A linearidade e a continuidade de u implicam que é suficiente provarmos que $\psi_j \to \psi$ em $C_0^\infty(\Omega)$. Como $\varphi(x, y) = 0$ quando $x \notin K$, o suporte de cada ψ_j está contido em K.

O teorema do valor médio garante que, para cada j, existe um número real $0 < \theta_j < 1$ para o qual vale

$$\begin{aligned} |\psi_j(x) - \psi(x)| &= |\varphi(x, y_j) - \varphi(x, y)| \\ &= |\nabla_y \varphi(x, y + \theta_j(y - y_j)) \cdot (y - y_j)| \\ &\leq |\nabla_y \varphi(x, y + \theta_j(y - y_j))|\ |y - y_j|. \end{aligned}$$

Como $y_j \to y$, os pontos y_j estão contidos em uma bola $\overline{B_R(y)}$, e, como $0 < \theta_j < 1$, obtemos que os pontos $y + \theta_j(y - y_j)$ estão contidos em $\overline{B_R(y)}$. Escrevendo $B = \overline{B_R(y)}$ temos

$$\begin{aligned} |\psi_j(x) - \psi(x)| &\leq \sup_{z\in B} |\nabla_y \varphi(x, z)|\ |y - y_j| \\ &\leq \sup_{z\in B, x\in K} |\nabla_y \varphi(x, z)|\ |y - y_j|. \end{aligned}$$

Isso implica que $\psi_j \to \psi$ uniformemente. Mas o argumento acima vale para uma função φ arbitrária, logo vale também para $\partial_x^\alpha \varphi$, qualquer que seja o multi-índice α. Portanto, $\psi_j \to \psi$ em $C_0^\infty(\Omega)$ e, daí, $\langle u, \varphi(\cdot, y_j)\rangle$ converge para $\langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle$. Como a seqüência $\{y_j\}$ é arbitrária, $y \mapsto \langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle$ é contínua.

A prova de que $y \mapsto \langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle$ é de classe $C^\infty(\Sigma)$ será feita por indução sobre $|\alpha|$. Tome um multi-índice α tal que $|\alpha| = 1$, suponha $\alpha = e_i$. Tome uma seqüência $\{h_j\}$ arbitrária tal que $h_j \to 0$ e $h_j \neq 0, \forall j \in \mathbb{N}$. A linearidade de u implica que o quociente de Newton pode ser escrito como:

$$\frac{\langle u, \varphi(\cdot, y + h_j e_i)\rangle - \langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle}{h_j} - \left\langle u, \frac{\partial}{\partial y_i}\varphi(\cdot, y)\right\rangle = \left\langle u, \frac{\varphi(\cdot, y + h_j e_i) - \varphi(\cdot, y)}{h_j} - \frac{\partial}{\partial y_i}\varphi(\cdot, y)\right\rangle,$$

e, sua continuidade implica que, para provarmos que $y \mapsto \langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle$ possui derivada de primeira ordem na direção de e_i, é suficiente provarmos que $\frac{1}{h_j}\{\varphi(\cdot, y + h_j e_i) - \varphi(\cdot, y)\} - \frac{\partial}{\partial y_i}\varphi(\cdot, y) \to 0$ em $C_0^\infty(\Omega)$. Novamente para facilitar a compreensão, escreveremos

$$\psi_j(x) = \frac{\varphi(x, y + h_i e_j) - \varphi(x, y)}{h_i} \quad \text{e} \quad \psi(x) = \frac{\partial}{\partial y_i}\varphi(x, y).$$

Em primeiro lugar note que $S(\psi_j) \subset K, \forall j \in \mathbb{N}$. Nas estimativas que seguem, os números reais θ_j, τ_j são tais que $0 < \theta_j, \tau_j < 1$ e sua existência é garantida pelo teorema do valor médio.

$$\begin{aligned}
|\psi_j(x) - \psi(x)| &= \left|\frac{\varphi(x, y + h_j e_i) - \varphi(x, y)}{h_j} - \frac{\partial}{\partial y_j}\varphi(x, y)\right| \\
&= \left|\frac{\partial}{\partial y_i}\varphi(x, y + \theta_j h_j e_i) - \frac{\partial}{\partial y_i}\varphi(x, y)\right| \\
&= \left|\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\varphi(x, y + \tau_j \theta_j h_j e_i)\right| |\theta_j h_j e_i| \\
&\leq \left|\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\varphi(x, y + \tau_j \theta_j h_j e_i)\right| |h_j| \\
&\leq \sup_{z \in [y, h_j e_i], x \in K} \left|\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\varphi(x, z)\right| |h_j|,
\end{aligned}$$

sendo que $[y, h_j e_i]$ denota o segmento cujas extremidades são y e $h_j e_i$. Para os índices i tais que $|h_i| < 1$ temos:

$$|\psi_i(x) - \psi(x)| \quad \leq \quad \sup_{z\in[y,e_i],x\in K} \left|\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\varphi(x,z)\right||h_j|.$$

Isso prova que $\psi_j \to \psi$ uniformemente em K. Desde que a estimativa acima vale para qualquer função φ, vale para $\partial_x^\beta \varphi$, para todo multi-índice β. Portanto, $\psi_j \to \psi$ em $C_0^\infty(\Omega)$ e daí,

$$\frac{\langle u, \varphi(\cdot, y + h_j e_i)\rangle - \langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle}{h_j} \to \left\langle u, \frac{\partial}{\partial y_i}\varphi(\cdot, y)\right\rangle.$$

Desde que a seqüência $\{h_j\}$ é arbitrária, $y \mapsto \langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle$ possui derivada de primeira ordem na direção de e_i e vale $\frac{\partial}{\partial y_i}\langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle = \langle u, \frac{\partial}{\partial y_i}\varphi(\cdot, y)\rangle$. A prova de que $y \mapsto \frac{\partial}{\partial y_{ij}}\langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle$ é contínua é análoga à de que $y \mapsto \langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle$ é contínua. O fato de que a direção e_i é arbitrária, implica que $y \mapsto \langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle$ é de classe C^1.

Suponha que $y \mapsto \langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle$ é de classe C^k e que

$$\partial_y^\gamma \langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle = \langle u, \partial_y^\gamma \varphi(\cdot, y)\rangle,$$

para qualquer multi-índice γ de módulo k, e provemos que isso implica que $y \mapsto \langle u, \varphi(\cdot, y)\rangle$ é de classe C^{k+1}. Tome um multi-índice α tal que $|\alpha| = k + 1$, podemos supor que $\alpha = \gamma + e_j$, $|\gamma| = k$. Aplicando a argumentação do caso $k = 1$ com $\partial_x^\gamma \varphi$ no lugar de φ, obtemos o resultado desejado. ■

Observação 1.4.4. - *$\sum b_\alpha \partial^\alpha \delta = 0 \Leftrightarrow b_\alpha = 0$ para todo α. De fato, se $b_\alpha = 0$, $\forall \alpha$ evidentemente $\sum b_\alpha \partial^\alpha \delta = 0$. Reciprocamente, para qualquer α_0 fixados,*

$$\begin{aligned}
0 = \left\langle \sum b_\alpha \partial^\alpha \delta, x^{\alpha_0} \right\rangle &= \langle b_{\alpha_0} \partial^{\alpha_0} \delta, x^{\alpha_0} \rangle \\
&= (-1)^{|\alpha_0|} \langle b_{\alpha_0} \delta, \partial^{\alpha_0}(x^{\alpha_0}) \rangle \\
&= (-1)^{|\alpha_0|} \langle b_\alpha \delta, \alpha_0! \partial^{\alpha_0} x^{\alpha_0} \rangle \\
&= (-1)^{|\alpha_0|} b_{\alpha_0} \alpha_0! \langle \delta, \partial^{\alpha_0} x^{\alpha_0} \rangle \\
&= (-1)^{|\alpha_0|} b_{\alpha_0} \alpha_0!
\end{aligned}$$

e portanto $b_{\alpha_0} = 0$.

Teorema 1.4.5. *Se u_j é uma seqüência em $\mathcal{D}'(X)$ e*

$$u(\phi) = \lim_{j\to\infty} u_j(\phi), \tag{1.4.1}$$

para toda $\phi \in \mathbb{C}_c^\infty(X)$, então $u \in \mathcal{D}'(X)$. Assim $u_j \to u$ quando $j \to \infty$. Além disso, (1.3.1) *é válida para toda u_j com constantes C e K independentes de j, e $u_j(\phi_j) \to u(\phi)$ quando $\phi_j \to \phi$ em $\mathbb{C}_c^\infty(X)$.*

Demonstração:

Este resultado pode ser encontrado em [H], página 38. ■

Teorema 1.4.6. *Seja $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Existe um único funcional linear $\tilde{u} : C^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que*
(i) $\tilde{u}(\phi) = u(\phi)$ para todo $\phi \in C^\infty(\Omega)$; e
(ii) $\tilde{u}(\phi) = 0$ se $\phi \in C^\infty$ e $S(\phi) \cap S(u) = \varnothing$.

Demonstração:
(Unicidade) Suponhamos que existem dois funcionais $\tilde{u}_1$ e $\tilde{u}_2$ satisfazendo (i) e (ii) e seja $\psi \in \mathbb{C}(\Omega)$ igual a 1 numa vizinhança de $S(u)$. Se $\phi \in C^\infty(\Omega)$, então $\phi = \phi\psi + (1-\psi)\phi = \phi_1 + \phi_2$, em que $\phi_1 = \phi\psi \in \mathcal{C}(\Omega)$ e $\phi_2 = (1-\psi)\phi$ com $S(\phi_2) \cap S(u) = \varnothing$, pois $S(1-\psi) \cap S(u) = \varnothing$. Assim

$$\tilde{u}_1(\phi) = \tilde{u}_1(\phi_1) + \tilde{u}_1(\phi_2) = u(\phi_1) = \tilde{u}_2(\phi_1) = \tilde{u}_2(\phi_1) + \tilde{u}_2(\phi_2) = \tilde{u}_2(\phi),$$

portanto $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2$.

(Existência) Seja $\phi \in C^\infty(\Omega)$ e defina

$$\langle \tilde{u},\ \phi\rangle = \langle u, \phi_0\rangle,$$

em que $\phi = \phi_0 + \phi_1$ é qualquer decomposição de ϕ com $\phi_0 \in \mathcal{C}(\Omega)$ e $S(\phi_1) \cap S(u) = \varnothing$. Se $\phi = \phi_0' + \phi_1'$ é outra decomposição, temos que $\phi_0 - \phi_0' = \phi_1 - \phi_1'$ e segue que $S(\phi_0 - \phi_0') \cap S(u) = \varnothing$. Como $\phi_0 - \phi_0'$ está suportada num aberto em que u se anula então $u(\phi_0 - \phi_0') = 0$, ou seja $\langle u,\ \phi_0\rangle = \langle u,\ \phi_0'\rangle$ e a definição de $\tilde{u}$ resulta independente da decomposição. Logo existe $\tilde{u}$ satisfazendo (i) e (ii). ■

Teorema 1.4.7. *Se u é uma distribuição de ordem k com suporte igual a $\{y\}$, então u tem a forma*

$$u(\phi) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha \phi(y), \phi \in C^k.$$

Demonstração:

Este resultado pode ser encontrado em [H], página 46. ■

Teorema 1.4.8. *Se u é uma função no conjunto aberto $X \subset \mathbb{R}^n$, com $u \in C^1(X \backslash \{x_0\})$ para algum $x_0 \in X$, e se a função v que é igual a u' para $x \neq x_0$ é integrável numa vizinhança numa vizinhança de x_0, então o limite*

$$u(x_0 \pm 0) = \lim_{x \to x_0 \pm 0} u(x)$$

existe e

$$u' = v + (u(x_0 + 0) - u(x_0 - 0))\delta_{x_0}.$$

Demonstração:

Este resultado pode ser encontrado em [H], página 56. ■

Capítulo 2

Distribuições Homogêneas em Espaços Euclidianos

2.1 Introdução

Na seção 2.2, motivamos a definição de distribuições homogêneas em $\mathbb{R}$ e descrevemos todas elas. Na seção 2.3, estendemos a definição de distribuições homogêneas de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}^n$, apresentando três formas equivalentes de defini-las quando $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$. Além disso apresentaremos alguns resultados que serão utilizados nos capítulos seguintes.

2.2 Distribuições Homogêneas em $\mathbb{R}$

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$. Dizemos que uma função real f em $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ é homogênea de grau λ se $f(tx) = t^\lambda f(x)$ para $t > 0$, ou analogamente, se

$$f(x) = \begin{cases} x^\lambda f(1), & \text{se } x > 0 \\ (-x)^\lambda f(-1), & \text{se } x < 0 \end{cases} .$$

Consideremos as funções $f_+(x) = f(1)x_+^\lambda$ e $f_-(x) = f(-1)x_-^\lambda$, com

$$x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}, \qquad x_-^\lambda = \begin{cases} 0, & \text{se } x > 0 \\ (-x)^\lambda, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Uma função homogênea de grau λ também pode ser escrita da maneira $f(x) = \bar{c_1}f_+(x) + \bar{c_2}f_-(x)$, para todo $\bar{c_1}, \bar{c_2} \in \mathbb{R}$, ou equivalentemente, $f(x) = c_1x_+^\lambda + c_2x_-^\lambda$.

Observação 2.2.1. *Como $x_+^\lambda(-x) = x_-^\lambda(x)$, para qualquer $x \neq 0$, vamos estudar a função x_+^λ, e resultados análogos são obtidos por x_-^λ.*

Para $a \in \mathbb{C}$, definimos x_+^a por

$$x_+^a = \begin{cases} x^a & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

com

$$x^a = e^{a\ log(x)} = e^{\mathrm{Re}(a)\mathrm{log}x + i\mathrm{Im}(a)\mathrm{log}x} = x^{\mathrm{Re}(a)}e^{i\mathrm{Im}(a)\mathrm{log}x} = x^{\mathrm{Re}(a)}\left[\cos\left(\mathrm{Im}(a)\mathrm{log}x\right) + i\mathrm{sen}(\mathrm{Im}(a)\mathrm{log}x)\right].$$

Vamos estender tal função para uma função localmente integrável em $\mathbb{R}$. Para isto, devemos considerar $Re\ (a) > -1$, e tomar

$$x_+^a = \begin{cases} x^a & se\ x > 0 \\ 0 & se\ x \leq 0 \end{cases}.$$

Logo, $K = [a, b]$, temos:

$$\int_K |x_+^a|dx = \int_{K\cap(0,\infty)} |x^{Re(a)}||e^{iIm(a)log\ x}|dx = \int_{K\cap(0,\infty)} |x^{Re(a)}|dx = \int_{K\cap(0,\infty)} x^{Re(a)} < \infty$$

Observamos pelo Lema 1.4.1 podemos concluir que x_+^a define uma distribuição.
É claro que;

$$x.x_+^a = x_+^{a+1} \quad \text{se } \mathrm{Re}\ (a) > -1, \tag{2.2.1}$$

e pelo Teorema 1.4.8, podemos concluir que,

$$\frac{d}{dx}x_+^a = ax_+^{a-1} \tag{2.2.2}$$

Combinando 2.2.1 com 2.2.2 observemos que

$$x\frac{d}{dx}x_+^a = ax_+^a$$

x_+^a é uma solução homogênea de $(x\frac{d}{dx}-a)$ em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. Pelo teorema de existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias temos que qualquer solução de $x\frac{d}{dx}-a$ em $\mathbb{R}_+$ é múltiplo de x_+^a, analogamente para $\mathbb{R}_-$. Podemos observar que qualquer distribuição em $\mathbb{R}$ que seja solução homogênea de $P = x\frac{d}{dx} - a$ é combinação linear de x_-^a e x_+^a.
Nosso próximo objetivo é estender esta análise para todo $a \in \mathbb{C}$, ou seja queremos estender a definição de x_+^a para todo $a \in \mathbb{C}$, de forma que as propriedades (2.2.2) e (2.2.1) sejam preservadas. Porém isto não é possível para todo $a \in \mathbb{C}$. Basta notar que, para $a = 0$, temos que o lado esquerdo de (2.2.2) é $H' = \delta$ e o lado direito é nulo.
Para $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e $Re(a) > -1$ a seguinte função é analítica

$$a \mapsto I_a(\phi) =< x_+^a,\ \phi >= \int_0^\infty x^a\phi(x)dx. \tag{2.2.3}$$

De fato, pois a diferencial de tal função é dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{da}[I_a(\phi)] &= \frac{d}{da}\int_0^\infty [x^a\phi(x)]dx \\
&= \int_0^\infty \frac{d}{da}[x^a\phi(x)]dx \\
&= \int_0^\infty \frac{d}{da}[e^{logx^a}\phi(x)]dx \\
&= \int_0^\infty \frac{d}{da}[e^{a.logx}\phi(x)]dx \\
&= \int_0^\infty logx.\ e^{a\ logx}\phi(x)dx \\
&= \int_0^\infty x^a\ logx\ \phi(x)dx.
\end{aligned}$$

Se $Re\ (a) > 0$, por (2.2.2) podemos concluir que:

$$I_a(\phi') = -aI_{a-1}(\phi) \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}). \tag{2.2.4}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
< x_+^a, \phi' > &= \int_0^\infty x^a \phi'(x) dx \\
&= -\int_0^\infty a x^{a-1} \phi(x) dx \\
&= -a \int_0^\infty x^{a-1} \phi(x) dx \\
&= -a < x_+^{a-1},\ \phi > .
\end{aligned}$$

Observe que por (2.2.4) diz que podemos calcular I_{a-1} a partir de I_a

Se $Re\ (a) > -1$ e $k > 0$ for um inteiro, podemos mostrar que:

$$I_a(\phi) = (-1)^k \frac{I_{a+k}(\phi^{(k)})}{(a+1)...(a+k)}.$$

De fato, por indução em k, observe primeiramente que de (2.2.3), mostraremos que a igualdade acima, vale para $k = 1$.

$$\begin{aligned}
\frac{(-1) I_{a+1}(\phi^{(1)})}{(a+1)} &= \frac{(-1)}{(a+1)} < x^{a+1}, \phi^{(1)} > \\
&= \frac{(-1)}{(a+1)} (-1) < \frac{d}{dx} x^{a+1}, \phi > \\
&= \frac{1}{(a+1)} (a+1) < x^a, \phi > \\
&= I_a(\phi)
\end{aligned}$$

Suponhamos que valha para k, isto é,

$$I_a(\phi) = (-1)^k \frac{I_{a+k}(\phi^{(k)})}{(a+1)...(a+k)}.$$

Provaremos que vale para $k+1$,

$$\frac{(-1)^{k+1}}{(a+1)...(a+k)(a+k+1)} I_{a+k+1}(\phi^{(k+1)}) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^{k+1}}{(a+1)...(a+k)(a+k+1)} \left\langle x^{a+k+1}, \phi^{(k+1)} \right\rangle \\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{(a+1)...(a+k)(a+k+1)} (-1)^{k+1} \left\langle \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} x^{a+k+1}, \phi \right\rangle \\
&= \frac{(-1)^{k+1}(a+k+1)}{(a+1)...(a+k)(a+k+1)} (-1)^{k+1} \left\langle \frac{d^{k}}{dx^{k}} x^{a+k-1}, \phi \right\rangle \\
&= \frac{(-1)^{k}}{(a+1)...(a+k)} \left\langle x^{a+k}, \phi^{(k)} \right\rangle \\
&= I_a(\phi).
\end{aligned}
$$

Para $Re(a) > -1$, com k inteiro positivo, temos

$$
I_a(\phi) = (-1)^k \frac{I_{a+k}(\phi^{(k)})}{(a+1)...(a+k)}. \tag{2.2.5}
$$

O lado direito é analítico para $Re\ (a) > -k-1$, exceto para os pólos simples $-1, -2, ..., -k$. Se a não é um inteiro negativo podemos, neste caso, definir $I_a(\phi)$ por continuidade analítica com respeito a a, ou equivalentemente por (2.2.5), para $Re\ (a) > -1-k$. Por (2.2.5), I_a define uma distribuição de ordem menor ou igual que k, pois

$$
\begin{aligned}
|I_a(\phi)| &= \left| \frac{(-1)^k}{(a+1)...(a+k)} \right| |I_{a+k}(\phi^{(k)})| \\
&= c_k |I_{a+k}(\phi^{(k)})| \\
&= c_k | < x_+^{a+k}, (\phi^{(k)}) > | \\
&\leq c_k\ c\ \sup |\phi^{(k)}| \\
&\leq C \sum_{j=0}^{k} \sup |\phi^{(j)}|,
\end{aligned}
$$

para todo $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ com $S(\phi) \subset K \subset\subset \mathbb{R}$,

Denotaremos a distribuição I_a por x_+^a. Em $a = -k$, o resíduo da função $a \mapsto I_a(\phi)$ é

$$
\lim_{a \to -k} (a+k) I_a(\phi) = \frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}.
$$

pois,

$$
\begin{aligned}
\lim_{a\to -k}(a+k)I_a(\phi) &= \lim_{a\to -k}(a+k)(-1)^k\frac{I_{a+k}(\phi^{(k)})}{(a+1)...(a+k)}\\
&= (-1)^k\frac{I_0(\phi^{(k)})}{(1-k)...(-1)}\\
&= \frac{\int_0^\infty \phi^{(k)}(x)dx}{(k-1)!}\\
&= \frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}.
\end{aligned}
$$

Assim

$$
(a+k)x_+^a \to (-1)^{k-1}\frac{\delta_0^{(k-1)}}{(k-1)!}, \quad \text{quando} \quad a\to -k, \tag{2.2.6}
$$

Subtraindo a parte singular, obtemos, quando $a+k=\epsilon\to 0$, que

$$
\lim_{\epsilon\to 0}\left\{I_a(\phi)-\frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!\epsilon}\right\} = \lim_{\epsilon\to 0}\left\{(-1)^k\frac{I_\epsilon(\phi^{(k)})}{(a+1)...(a+k)}-\frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!\epsilon}\right\} =
$$

$$
= \lim_{\epsilon\to 0}\left\{(-1)^k\frac{\int_0^\infty x^\epsilon\phi^{(k)}(x)dx}{(\epsilon+1-k)...(\epsilon-1)\epsilon}+\frac{\phi^{(k-1)}(0)}{\epsilon}\left[\frac{1}{(k-1-\epsilon)...(1-\epsilon)}-\frac{1}{(k-1)!}\right]-\right.
$$

$$
\left.-\frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1-\epsilon)...(1-\epsilon)\epsilon}\right\} =
$$

$$
= \lim_{\epsilon\to 0}\left\{(-1)^k\frac{\int_0^\infty(x^\epsilon-1)\phi^{(k)}(x)dx}{(\epsilon+1-k)...(\epsilon-1)\epsilon}+\frac{\phi^{(k-1)}(0)}{\epsilon}\left[\frac{(k-1)!-(k-1-\epsilon)...(1-\epsilon)}{(k-1)!(k-1-\epsilon)...(1-\epsilon)}\right]\right\} =
$$

$$
= \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\frac{\int_0^\infty x^\epsilon\log(x)\phi^{(k)}(x)dx}{(-\epsilon)[(k-1-\epsilon)...(1-\epsilon)]-(k-1-\epsilon)...(1-\epsilon)}+\right.
$$

$$
\left.+\phi^{(k-1)}(0)\left[\frac{(k-1-\epsilon)...(2-k)+...+(k-2-\epsilon)...(1-\epsilon)}{(k-1)![\epsilon((k-1-\epsilon)...(1-\epsilon))+(k-1-\epsilon)...(1-\epsilon)]}\right]\right\} =
$$

$$
= \frac{\int_0^\infty\log(x)\phi^{(k)}(x)dx}{-(k-1)...(1)}+\frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}\left[\frac{(k-1)...2+(k-1)...3.1+...+(k-2)!}{(k-1)!}\right] =
$$

$$
= -\frac{\int_0^\infty\log(x)\phi^{(k)}(x)dx}{(k-1)!}+\frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j}.
$$

Desta forma, podemos definir:

$$< x_+^{-k},\ \phi >= -\frac{\int_0^\infty \log(x)\phi^{(k)}(x)dx}{(k-1)!} + \frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j}. \tag{2.2.7}$$

Quando $a = -k$, a ordem de I_a é k. De fato, pelo Lema 1.4.1, a função $\log x$ define uma distribuição de ordem zero. Daí temos que a primeira parcela de (2.2.7) possui ordem k. E a segunda parcela de (2.2.7) possui ordem $k-1$. Pela definição de ordem de uma distribuição, temos que k é a ordem de (2.2.7).

A relação (2.2.1), ou equivalentemente,

$$\langle x_+^a,\ x\phi\ \rangle = \langle x_+^{a+1},\ \phi\ \rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \tag{2.2.8}$$

é valida para todo $a \in \mathbb{C}$. De fato, como é válida quando $Re\ a > -1$, segue por continuação analítica quando a não é um inteiro negativo. Além disso, o valor da igualdade quando $a = -k$ é obtido fazendo $a \to -k$ após subtrair um termo $\dfrac{c}{a+k}$, o qual deve ser o mesmo em ambos os lados.

Também de (2.2.2) segue que a não é um inteiro negativo ou zero. Se k é um inteiro não-negativo então de (2.2.6) temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to -k}\left\{\frac{d}{dx}x_+^a\ + kx_+^{a-1}\right\} &= \lim_{a\to -k}(a+k)x_+^{a-1}\\
&= \lim_{a\to -k-1}(a+k+1)x_+^a\\
&= (-1)^k\frac{\delta_0^{(k)}}{a+k},
\end{aligned}$$

e assim eliminando termos da forma $\dfrac{c\delta_0^{(k)}}{a+k}$ os quais devem cancelar-se, obtemos

$$\frac{d}{dx}x_+^{-k} = -kx_+^{-k-1} + (-1)^k\frac{\delta_0^{(k)}}{k!}. \tag{2.2.9}$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{d}{dx}x_+^{-k},\ \phi \right\rangle &= -\langle x_+^{-k},\ \phi' \rangle \\
&= \frac{1}{(k-1)!}\left[\int_0^\infty \log(x)\phi^{(k-1)}(x)dx - \phi^{(k+1)}(0)\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j}\right] \\
&= \frac{k}{k!}\left[\int_0^\infty \log(x)\phi^{(k-1)}(x)dx - \phi^{(k)}(0)\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} + \phi^{(k)}(0)\right] \\
&= \left\langle -kx_+^{k-1} + (-1)^k\frac{\delta_0^{(k)}}{k!}, \phi \right\rangle.
\end{aligned}
$$

A noção de homogeneidade para distribuições é facilmente motivada pela função x_+^a, se $Re\ (a) > -1$. Isto significa que para $t > 0$,

$$
\langle x_+^a,\ \phi\rangle = \int_0^\infty x^a\phi(x)dx = t^a\int_0^\infty x^a\phi(tx)tdx = t^a\langle x_+^a,\ \phi_t\rangle,
$$

sendo $\phi_t(x) = t\phi(tx)$. Se a não é um inteiro negativo, a extensão analítica contínua em ambos os lados nos fornece:

$$
\langle x_+^a,\ \phi\rangle = t^a\langle x_+^a,\ \phi_t\rangle, \quad \text{se}\ \ \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).
$$

Daí, a propriedade acima sugere adotarmos a seguinte definição para distribuições homogêneas em $\mathbb{R}$.

Definição 2.2.1. Dado $a \in \mathbb{C}$, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ é homogênea de grau a se:

$$
\langle u,\ \phi\rangle = t^a\langle u,\ \phi_t\rangle, \tag{2.2.10}
$$

com $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e $\phi_t(x) = t\phi(tx)$.

Se $a = -k$, obtemos de (2.2.7) que:

$$
\begin{aligned}
t^{-k}\langle x_+^{-k},\ \phi_t\rangle &= t^{-k}\left[-\frac{1}{(k-1)!}\int_0^\infty \log(x)t^k\phi^{(k)}(tx)d(tx) + t^k\frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j}\right] \\
&= -\frac{1}{(k-1)!}\int_0^\infty \log(\frac{y}{t})\phi^{(k)}(y)dy + \frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j} \\
&= \langle x_+^{-k},\ \phi\rangle + \frac{\log t}{(k-1)!}\int_0^\infty \phi^{(k)}(y)dy.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\langle x_+^{-k},\ \phi\rangle = t^{-k}\langle x_+^{-k},\ \phi_t\rangle + \log t\frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} \tag{2.2.11}$$

e assim, a homogeneidade é perdida em $\mathbb{R}$.

Além de x_+^a, podemos fazer uso de x_-^a para $Re(a) > -1$, definida por: $x_+^a = \begin{cases} 0 & se \;\; x > 0 \\ |x|^a & se \;\; x < 0 \end{cases}$
Esta é uma reflexão de x_+^a com a origem, isto é,

$$\langle x_-^a,\ \phi\rangle = \langle x_+^a,\ \ \check{\phi}\ \rangle,$$

sendo $\check{\phi}(x) = \phi(-x)$. Todos os resultados sobre x_+^a, para a complexo arbitrário, são análogos x_-^a.

Em suma, demonstramos a seguinte proposição:

Proposição 2.2.2. *Dada $a \in \mathbb{C}$.*

(1) Se $\mathrm{Re}(a) > -1$, então existem funções x_+^a e x_-^a em $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ homogêneas de grau a.

(2) A aplicação $a \mapsto x_+^a$ e $a \mapsto x_-^a$ se estendem analiticamente para $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$, definindo distribuições homogêneas de grau a.

(3) Para $a \in Z_-$ é possível estender as aplicações do item (2), no entanto x_+^{-k} e x_-^{-k}, $k \in Z_+$, não são homogêneas.

2.3 Distribuições Homogêneas em $\mathbb{R}^n$

Nosso próximo objetivo é definir distribuições homogêneas em $\mathbb{R}^n$. Seja $\phi_t(x) = t^n\phi(tx)$, com $x \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$.

Definição 2.3.1. Dado $a \in \mathbb{C}$, uma distribuição u em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ é dita ser homogênea de grau a se,

$$< u, \phi >= t^a < u, \phi_t >,\ \forall\ \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}) \ \text{ e } \ t > 0.$$

Analogamente, se u é uma distribuição em $\mathbb{R}^n$ e

$$< u, \phi >= t^a < u, \phi_t >, \ \forall \ \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \ \text{ e } \ t > 0,$$

diz-se u é dita homogênea de grau a.

Observação 2.3.1. *Seja $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ uma função homogênea de grau a, isto é $u(tx) = t^a u(x)$ para $x \neq 0$ e $t > 0$, então u é uma distribuição homogênea de grau a.*

$$\begin{aligned} < u, \phi_t > &= \int u(x) t^n \phi(tx) dx \\ &= t^n \int u(x) \phi(tx) dx \\ &= t^{n-a} \int u(tx) \phi(tx) dx. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = tx$, obtemos,

$$\begin{aligned} &= t^{-a} \int u(y) \phi(y) dy \\ &= t^{-a} < u, \phi > . \end{aligned}$$

O que conclui a afirmação.

Lema 2.3.2. *Existe uma função $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ tal que*

$$\int_0^\infty \frac{\psi(tx)}{t} dt = 1, \quad \textit{com} \ \ x \neq 0 \tag{2.3.1}$$

Demonstração:

Provemos inicialmente o caso para $n = 1$. Seja $\psi_1 \in C_c^\infty(0, \infty)$ tal que $\int \psi_1 \neq 0$. Assim, temos que:

$$\int_0^\infty \frac{\psi_1(tx)}{t} dt = \int_0^\infty \frac{\psi_1(s)}{s} ds = \lambda$$

Tomemos $\psi_2(x) = \dfrac{1}{\lambda} \ \psi_1(x)$ para $x > 0$. Desta forma,

$$\int_0^\infty \frac{\psi_2(tx)}{t} dt = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} \frac{\psi_1(tx)}{t} dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \frac{\psi_1(tx)}{t} dt = 1.$$

Tomemos $\psi_2(x) = \psi_2(-x)$, $x < 0$. Logo,

$$\int_0^\infty \frac{\psi_2(tx)}{t}dt = \int_0^\infty \frac{\psi_2(-tx)}{t}dt = \int_0^\infty \frac{\psi_2(t(-x))}{t}dt = 1.$$

Assim, a função $\tilde{\psi} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ dada por:

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi_2(x), & \text{se} \quad x > 0 \\ \psi_2(-x), & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

satisfaz as condições deste lema para $n = 1$.

Provemos agora o caso geral ($n > 1$). Tomemos $\psi(x) = \psi_2(|x|)$. Portanto,

$$\int_0^\infty \frac{\psi(tx)}{t}dt = \int_0^\infty \frac{\psi_2(|tx|)}{t}dt = \int_0^\infty \frac{\psi_2(ty)}{t}dt = 1,$$

com $x \neq 0$. ■

Agora expressaremos a noção de homogeneidade de duas maneiras alternativas.

Lema 2.3.3. *Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, são equivalentes:*

(a) $$< u, \phi >= t^a < u, \phi_t >, \ \forall \ \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \qquad (2.3.2)$$

(b) $$(a+n) < u, \phi > + < u, L\phi >= 0, \quad se \quad L = \sum x_i \partial_i \quad e \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \qquad (2.3.3)$$

(c) $$< u, \psi >= 0, \quad se \quad \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \quad e \quad \int_0^\infty r^{a+n-1}\psi(rw)dr = 0 \ \forall \ w \in S^{n-1} \qquad (2.3.4)$$

Demonstração:

Mostraremos que $(a) \Rightarrow (b)$, diferenciando (a) em relação a t, usando o Teorema 1.4.3 daí seguirá que, $(a+n) < u, \phi > + < u, L\phi >= 0$, onde $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ e $L = \sum x_i \partial_i$ é um campo radial. De fato,

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{d}{dt}(< u, \phi >) &= \frac{d}{dt}(t^a < u, \phi_t >) \\
&= \frac{d}{dt}(t^a < u(x), t^n \phi(tx) >) \\
&= \left\langle u(x), \frac{d}{dt}(t^{a+n}\phi(tx)) \right\rangle, \quad \text{pelo Teorema 1.4.3} \\
&= \left\langle u, (a+n)t^{a+n-1}\phi(tx) + t^{a+n}\frac{d}{dt}(\phi(tx)) \right\rangle \\
&= (a+n)t^{a-1} < u, t^n\phi(tx) > + t^{a+n} \left\langle u, \frac{d}{dt}(\phi(tx)) \right\rangle \\
&= (a+n)t^{a-1} < u, t^n\phi(tx) > + t^{a-1} \left\langle u, t^n \sum t x_j (\partial_{x_j}\phi)(tx) \right\rangle \\
&= (a+n)t^{a-1} < u, \phi_t(x) > + t^{a-1} \left\langle u, \left(\sum x_j (\partial_{x_j}\phi)\right)_t (x) \right\rangle \text{ homogeneidade de } u \\
&= (a+n)t^{-1} < u, \phi > + t^{-1} \left\langle u, \sum x_j (\partial_{x_j}\phi) \right\rangle \forall\ t \\
&= (a+n) < u, \phi > + < u, \sum x_j (\partial_{x_j}\phi) > \\
&= (a+n) < u, \phi > + < u, L\phi > .
\end{aligned}
$$

Para demonstrar que $(b) \Rightarrow (c)$ primeiro observemos que a integral $f(x) = \int_0^\infty r^{a+n-1}\psi(rx)dr$

define função homogênea de grau $-n-a$, pois

$$\begin{aligned}
f(tx) = \int_0^\infty r^{a+n-1}\psi(rtx)dr &= \int_0^\infty \left(\frac{s}{t}\right)^{a+n-1}\psi(sx)\frac{ds}{t} \\
&= t^{-a-n}\int_0^\infty s^{a+n-1}\psi(sx)ds \\
&= t^{-a-n}f(x)
\end{aligned}$$

Para provar está equivalência basta verificar que a equação $(a+n)\phi + L\phi = \psi$, tem solução $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$.

Em coordenadas esféricas tal equação diferencial pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^{a+n}\phi(rw)) = r^{a+n-1}\psi(rw), \quad \text{com } |w| = 1$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}(r^{a+n}\phi(rw)) &= (a+n)r^{a+n-1}\phi(rw) + r^{a+n}\left(\frac{\partial}{\partial r}\phi(rw)\right) \\
&= (a+n)r^{a+n-1}\phi(rw) + r^{a+n-1}\sum rw_j(\partial_j\phi)(rw) \\
&= r^{a+n-1}[(a+n)\phi(rw) + (L\phi)(rw)] \\
&= r^{a+n-1}\psi(rw).
\end{aligned}$$

Mostraremos agora que dado ψ satisfazendo $\int_0^\infty r^{a+n-1}\psi(rw)dr = 0$, então existe $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, tal que $\partial_r(r^{a+n}\phi(rw)) = r^{a+n-1}\psi(rw)$. Suponhamos que tal ϕ exista logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}(r^{a+n}\phi(rw)) = r^{a+n-1}\psi(rw) \Rightarrow \\
r^{a+n}\phi(rw) = \int_0^r s^{a+n-1}\psi(sw)ds,
\end{aligned}$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo e se $0 \notin S(\phi)$;

$$\phi(rw) = r^{-a-n}\int_0^r s^{a+n-1}\psi(sw)ds$$

tomemos $x = rw$, onde $x \leq 0$, $\phi(x) = \phi\left(|x|\frac{x}{|x|}\right) = |x|^{-a+n}\int_0^{|x|} s^{a+n-1}\psi\left(s\frac{x}{|x|}\right)ds$. Assim definindo ϕ, vê-se que evidentemente, $\phi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$.

Mostraremos que $S(\phi) \subset\subset \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. Temos $S(\psi) \subset\subset \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ isto é, existe $R > 1$ tal que $S(\psi) \subset \mathcal{A}\left(0, \frac{1}{R}, R\right) = \{x;\ \frac{1}{R} \leq |x| \leq R\}$.

Se $|x| \leq \frac{1}{R}$ então, $\phi(x) = |x|^{-a-n}\int_0^{|x|} s^{a+n-1}\underbrace{\psi\left(s\frac{x}{|x|}\right)}_{=0}ds = 0$.

Se $|x| \geq R$ então,

$$\begin{aligned}\phi(x) &= |x|^{-a-n}\int_0^{|x|} s^{a+n-1}\psi\left(s\frac{x}{|x|}\right)ds \\ &= |x|^{-a-n}\int_0^{|x|} s^{a+n-1}\psi\left(s\frac{x}{|x|}\right)ds = 0, \text{ por hipótese .}\end{aligned}$$

Portanto $S(\phi) \subset \mathcal{A}\left(0, \frac{1}{R}, R\right)$, isto é $S(\phi) \subset\subset \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$.

Logo $< u, \psi > = < u, (a+n)\phi + L\phi > = (a+n) < u, \phi > + < u, L\phi > = 0$, por (b).

Mostraremos agora, $(c) \Rightarrow (a)$, seja $\psi(y) = \phi(y) - t^{a+n}\phi(ty)$, com $\phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ temos que $\psi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$. E $\int_0^{\infty} r^{a+n-1}\psi(rx)dr = 0$, para mostrar isto basta tomar $\phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, fixar $x \neq 0$, daí

$$\int_0^{\infty} r^{a+n-1}(\phi(rx) - t^{a+n}\phi(rtx))dr =$$

$$\langle r_+^{a+n-1},\ \phi(rx)\rangle - t^{a+n}\langle r_+^{a+n-1},\ \phi(rtx)\rangle =$$

usando definição de homogeneidade de r_+^{a+n-1} em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, temos:

$$t^{a+n-1}\langle r_+^{a+n-1},\ t\phi(trx)\rangle - t^{a+n}\langle r_+^{a+n-1},\ \phi(trx)\rangle =$$

$$t^{a+n-1}\langle r_+^{a+n-1},\ t\phi(trx)\rangle - t^{a+n-1}\langle r_+^{a+n-1},\ t\phi(trx)\rangle = 0,$$

segue $< u, \psi > = 0$, ou seja, vale (a).

Observação 2.3.4. ***(i)*** *Observemos que*

$$\langle u,\ L\phi\rangle = \sum_{j=1}^{n}\langle x_j u,\ \partial_j\phi\rangle = -\sum_{j=1}^{n}\langle\partial_j(x_j u),\ \phi\rangle = -\sum_{j=1}^{n}\langle u,\ \phi\rangle - \sum_{j=1}^{n}\langle x_j\partial_j u,\ \phi\rangle,$$

portanto,

$$\langle u,\ L\phi\rangle = -\langle Lu,\ \phi\rangle - n\langle u,\ \phi\rangle.$$

Assim podemos escrever (2.3.3) *na forma*

$$Lu = au \tag{2.3.5}$$

como distribuição tal igualdade tal é conhecida com Identidade de Euler.

(ii) *Se ψ é uma função C^∞ homogênea em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ de grau b em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ (ver Observação 2.3.1) e u é uma distribuição de grau a em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, então ψu é homogênea de grau $a+b$ em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. De fato:*

$$\begin{aligned} \langle \psi u,\ \phi\rangle &= \langle u,\ \psi\phi\rangle \\ &= t^a\langle u,\ (\psi\phi)_t\rangle \\ &= t^{a+n}\langle u,\ (\psi\phi)(tx)\rangle \\ &= t^{a+n}\langle u, t^b\psi(x)\phi(tx)\rangle \\ &= t^{a+b}\langle u,\ \psi\phi_t\rangle \\ &= t^{a+b}\langle \psi u,\ \phi_t\rangle. \end{aligned}$$

(iii) *Notemos que $L\partial_j u = \partial_j(\lambda u) - \partial_j u = (a-1)\partial_j u$, onde a última igualdade segue de 2.3.5. Concluímos então que a diferenciação diminui uma unidade o grau de homogeniedade.*

Lema 2.3.5. *O operador $R_a : C_c^\infty(K) \to C^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ definido por*

$$(R_a\phi)(x) =< t_+^{a+n-1}, \phi(tx) >,\ 0 \neq x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.3.6}$$

$K \subset\subset \mathbb{R}^n$, é contínuo.

Demonstração:

Primeiramente provemos que R_a está bem definida, ou seja, para $\phi \in C_c^\infty(K)$, temos que $R_a\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$. Como o conceito de diferenciabilidade é local, basta mostrar que, para cada $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, existe uma vizinhança V_x de x tal que $R_a\phi \in C^\infty(V_x)$. Seja $R > 0$ tal que

$S(\phi) \subset B_R(0)$. Seja $x_0 \neq 0$ e tomemos $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mid t_0 \mid > \frac{R}{|x_0|}$. Definimos $m_{t_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, por $x \mapsto t_0 x$. Pela linearidade de m_{t_0}, temos que $m_{t_0} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Assim podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $|t_0 x| > R$ para todo $x \in B_\delta(x_0)$. Logo, para $x \in B_\delta(x_0)$, e $t \in \mathbb{R}$ tal que $|t| > |t_0|$, temos que $\phi(tx) = 0$, pois $|tx| > R$. Tomemos $u = t^{a+n-1} \in \mathcal{D}'(X)$, com $X = \mathbb{R}$; $\psi(t,x) = \phi(tx) \in C^\infty(\mathbb{R} \times Y)$, com $Y = B_\delta(x_0)$ e $K = \left[\frac{-2R}{|x_0|}, \frac{2R}{|x_0|}\right]$. Pelo Teorema 1.4.3, é $C^\infty(B_\delta(x_0))$.

Para mostrarmos que R_a é um operador contínuo basta verificarmos que dados $\epsilon > 0$ e $j' \in Z_+$ existem $C > 0$ e $j \in Z$ tal que se $q_{j'}(R_a\phi_n) \leq C p_j(\phi_n)$, sendo $p_j(\phi) = \sum_{|\alpha| \leq j} \|\partial^\alpha \phi\|_\infty$ norma em $C_c^\infty(K)$ e $q_{j'}(\phi) = \sum_{|\alpha| \leq j'} \| \partial^\alpha \phi \|_{\infty, K_{j'}}$ as semi-normas de $C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, com $K_{j'} \subset\subset \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tal que $K_{j'} \subset K^\circ_{j'+1}$ e $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_{j'} = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Sem perda de generalidade, tomemos $K_{j'} = \{x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}; \frac{1}{j'} \leq \|x\| \leq j'\}$. Ora,

$$
\begin{aligned}
q_{j'}(R_a\phi_n) = q_{j'}(\langle t_+^{a+n-1}, \phi_n(tx)\rangle) &= \sum_{|\alpha| \leq j'} \|\partial^\alpha(\langle t_+^{a+n-1}, \phi_n(tx)\rangle)\|_{\infty, K_{j'}} \\
&= \sum_{|\alpha| \leq j'} \| \langle t_+^{a+n-1}, \partial^\alpha(\phi_n(tx))\rangle \|_{\infty, K_{j'}} \qquad (2.3.7)
\end{aligned}
$$

Para cada α, fixo, temos:

$$
\begin{aligned}
\| \langle t_+^{a+n-1}, \partial_x^\alpha(\phi_n(tx))\rangle \|_{\infty, K_{j'}} &= sup_{K_{j'}} | \langle t_+^{a+n-1}, \partial_x^\alpha(\phi_n(tx))\rangle | \\
&\leq \sup_{K_{j'}} | \langle t_+^{a+n-1}, t^{|\alpha|}(\partial^\alpha \phi_n)(tx)\rangle | \\
&\leq \sup_{K_{j'}} C \sum_{l=0}^{k_a} \sup_t \left| \frac{d^l}{dt^l}((\partial^\alpha \phi)(tx)))\right|. \qquad (2.3.8)
\end{aligned}
$$

pois $t_+^{a+n-1+|\alpha|}$ é uma distribuição de ordem $k_a = k$ e $t \mapsto \partial^\alpha \phi(tx) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, para todo

$x \in K_{j'}$. De (2.3.8), temos que:

$$\begin{aligned}
\sup_{K_{j'}} C \sum_{l=0}^{k_a} \sup_t \left| \frac{d^l}{dt^l}(\partial^\alpha \phi(tx))) \right| &= \sup_{K_{j'}} \sum_{l=0}^{K_a} C \sup_t \left| \sum_{|\beta| \leq l} c_\beta x^\beta (\partial^{\alpha+\beta}\phi)(tx) \right| \\
&\leq \sup_{K_{j'}} C k_a \sup_t \sum_{|\beta| \leq k_a} \left| c_\beta x^\beta (\partial^{\alpha+\beta}\phi)(tx) \right|
\end{aligned}$$

Note que $\sup\limits_{K_{j'}} . \sup\limits_{t} = max\{\sup\limits_{K_{j'}} \sup\limits_{t \geq 1}, \ \sup\limits_{K_{j'}} . \sup\limits_{0<t<1}\}$. Separaremos agora nosso problema em dois casos.

1º Caso - Consideremos, $\sup_{K_{j'}} \sup_t \left| \sum c_\beta x^\beta (\partial^{\alpha+\beta}\phi)(tx) \right| = \sup_{K_{j'}} \sup_{t \geq 1} \left| \sum c_\beta x^\beta (\partial^{\alpha+\beta}\phi)(tx) \right|$
Tomando $tx = y$, temos:

$$\begin{aligned}
\sup_{K_{j'}} \sup_{t \geq 1} \left| \sum c_\beta x^\beta (\partial^{\alpha+\beta}\phi)(tx) \right| &= \sup_{\frac{1}{j'} \leq |y|} \sup_{t \geq 1} \left| \frac{1}{t^{|\beta|}} . y^\beta (\partial^{\alpha+\beta}\phi)(y) \right| \\
&\leq \sup_{\frac{1}{j'} \leq |y|} \left| y^\beta (\partial^{\alpha+\beta}\phi)(y) \right| .
\end{aligned}$$

De (2.3.7), e do fato que $|y^\beta| \leq |y|^\beta \leq j'^{|\beta|}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
q_{j'}(R_a \phi_n) &\leq \sum_{|\alpha| \leq j'} \sum_{|\beta| \leq k_a} |j'|^{|\beta|} \sup_{\frac{1}{j'} \leq |y|} \left| (\partial^{\alpha+\beta}\phi_n)(y) \right| \\
&\leq j'^{k_a} \sum_{|\gamma| \leq j' + k_a} \|\partial^\gamma \phi_n\|_{\infty, K} \\
&= |j'|^{k_a} p_j(\phi_n),
\end{aligned}$$

sendo $j = j' + k_a$.

2º Caso - $\sup_{K_{j'}} \sup_t \left| \sum c_\beta x^\beta (\partial^{\alpha+\beta}\phi)(tx) \right| = \sup_{K_{j'}} \sup\limits_{0<t\leq 1} \left| \sum c_\beta x^\beta (\partial^{\alpha+\beta}\phi)(tx) \right|$

$$\begin{aligned}
\sup_{K_{j'}} sup_{0<t<1} |x^\beta (\partial^{\alpha+\beta}\phi)(tx)| &\leq \sup_{K_{j'}} \sup_{0<t<1} |x^\beta| . \sup_{K_{j'}} sup_{0<t<1} (\partial^{\alpha+\beta}\phi)(tx)| \\
&\leq (j')^{|\beta|} . \sup_{B_{j'}(0)} |\partial^{\alpha+\beta}\phi(y)| \\
&\leq (j')^{|\beta|} . \sup_{K \subset \mathbb{R}^n} |\partial^{\alpha+\beta}\phi(y)|
\end{aligned}$$

De (2.3.7), e do fato de que $|y^\beta| \leq \|y\|^{|\beta|} \leq j'^{|\beta|}$, obtemos:

$$\begin{aligned} q_{j'}(R_a\phi_n) &\leq \sum_{|\alpha|\leq j'}\sum_{|\beta|\leq k_a} |j'|^{|\beta|} \sup_{\frac{1}{j'}\leq|y|} \left|(\partial^{\alpha+\beta}\phi)(y)\right| \\ &\leq j'^{k_a} \sum_{|\gamma|\leq j'+k_a} \|\partial^\gamma\phi\|_{\infty,K} \\ &\leq j'^{|\beta|}.p_{j'+k_a}(\phi) \\ &= |j'|^{k_a} p_j(\phi), \end{aligned}$$

sendo $j = j' + k_a$.

Capítulo 3

Extensões para $\mathbb{R}^n$ de Distribuições Homogêneas em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ - Parte I

3.1 Introdução

Na seção 3.2 introduziremos o significado de extensões de distribuições e mostraremos que mesmo no caso $n = 1$, nem toda distribuição possui extensão. No caso de distribuições homogêneas de grau a, quando a não é um inteiro $\leq -n$, mostraremos que elas podem ser estendidas para $\mathbb{R}^n$, mantendo a homogeneidade.

3.2 Extensões quando a ordem não pertencer a $\mathbb{Z}_-$

Definição 3.2.1. Sejam $u \in \mathcal{D}'(X)$ e $X \subset Y$. Dizemos que $v \in \mathcal{D}'(Y)$ é uma extensão de u se $< v, \phi >= \; < u, \phi >$ para $\phi \in C_c^\infty(X)$

Exemplo 3.2.1. Se $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$ for escolhido suficientemente grande, temos que $u = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \delta_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ porém não admite extensão para $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. De fato, provaremos este fato em 5 etapas.

(1) Tome $\varphi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ com $\varphi_0 \geq 0$ tal que $S(\phi_0) \subset [1, 3]$ e $\varphi_0(2) = 1$

(2) Para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Considere ψ_n difeomorfismo da reta tal que $\psi_n(s) = 0$, $\psi_n(\frac{1}{n}) = 2$ e $\psi_n(s) = s$ se $s \geq 3$.

(3) Tome $\varphi_n = \varphi_0 \circ \psi_n$. Afirmamos que $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R} \backslash \{0\})$, pois $S(\varphi_n) \subset (0,3]$ e $\varphi_n \geq 0$. Tome $p_K(\varphi_n) = \sum_{j=0}^{n} ||\varphi_n^{(j)}||_\infty$. E daí $\lambda_n > np_n(\varphi_n)$.

(4) Afirmamos agora que u não admite extensão para $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. De fato, suponhamos que u admitesse extensão para $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $K = [0,3]$. Logo, existe $C > 0$ e $j \in \mathbb{N}$ tal que $|u(\varphi_n)| \leq Cp_{j_0}(\varphi_n)$. Porém como $\varphi_n \geq 0$, temos que $|u(\varphi_n)| \geq \lambda_n$ o que implica que $\lambda_n \leq Cp_{j_0}(\varphi_n)$. Mas como j_0 é fixo, então para $n \geq j_0$ temos que $\lambda_n \leq Cp_n(\varphi_n) \Rightarrow C > n$, para $n >> 1$, o que consiste numa contradição. Portanto nestas condições u não admite extensão.

(5) Se $\tilde{u}$ fosse extensão de u em $\mathbb{R}$ então dado $K = [0,3]$ existiria $C > 0$ e j tal que $|u(\varphi_n)| \leq p_j(\varphi_n)$ para todo n.

No próximo resultado estenderemos para $\mathbb{R}^n$ distribuições homogêneas de grau a em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, quando a é um não inteiro negativo.

Teorema 3.2.1. *Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ é homogênea de grau a, e a é um não inteiro $\leq -n$, então u tem uma única extensão $\dot{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ também homogênea de grau a. Além disso, se P é um polinômio homogêneo, então $(Pu)^{\cdot} = P\dot{u}$, e se $a \neq 1 - n$, então $\dot{\partial_j u} = \partial_j \dot{u}$. Temos também que o operador $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \ni u \mapsto \dot{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é contínuo.*

Demonstração:

(Unicidade) Mostraremos a unicidade da extensão de u. Sejam $\dot{u}, \tilde{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ distribuições homogêneas de grau a e extensões de $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$. Como $\dot{u}|_{\mathbb{R}^n \backslash \{0\}} = \tilde{u}|_{\mathbb{R}^n \backslash \{0\}} = u$, então para todo $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ temos que: $(\tilde{u} - \dot{u})(\phi) = \tilde{u}(\phi) - \dot{u}(\phi) = u(\phi) - u(\phi) = 0 \;\; \forall \; \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$.

Suponhamos que $S(\dot{u} - \tilde{u}) = \{0\}$. Logo pelo Teorema 1.4.7, $\dot{u} - \tilde{u}$ é uma combinação linear de derivadas de δ_0, ou seja existem c_α tais que $\tilde{u} = \dot{u} + \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha \delta_0^\alpha$.

Notemos que

$$v = \dot{u} - \tilde{u} = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha \partial^a \delta_0 = \sum_{j=0}^{k} \underbrace{\left(\sum_{|\alpha|=j} c_\alpha \partial^\alpha \delta_0 \right)}_{u_j}.$$

Mostraremos que $c_\alpha = 0, \ \forall \alpha$. Fixado α_0 com $|\alpha_0| \leq k$, tomemos $\phi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, onde $\phi_0 \equiv 1$ numa vizinhança de zero. E daí $\phi(x) = x^{\alpha_0} \phi_0(x)$, como v é homogênea de grau a, temos que:

$$< v, \phi >= t^a < v, \phi_t >= t^a \left\langle \sum_{j=0}^{k} \left(\sum_{|\alpha|=j} c_\alpha \partial^\alpha \delta \right), \phi_t \right\rangle = t^a \left\langle \sum_{j=0}^{k} t^{n+j} \sum_{|\alpha|=j} c_\alpha \partial^\alpha \delta, \phi \right\rangle$$

Logo, $< v, \phi >= t^a t^{n+|\alpha_0|}(-1)^{|\alpha_0|} c_{\alpha_0}$, mas $< v, \phi >= (-1)^{|\alpha_0|} c_{\alpha_0}$.

Daí, $a + n + \mid \alpha_0 \mid \ = \ 0 \Rightarrow a \ = \ -n - \mid \alpha_0 \mid$. Contradizendo a hipótese sobre a. Assim $c_\alpha = 0, \ \ \forall \ \alpha$. Logo, $\dot{u} = \tilde{u}$.

Observe que $\partial^\alpha \delta_0$ é homogênea de grau $-n - |\alpha|$. De fato,

$$\begin{aligned}
\langle \partial^\alpha \delta_0, \phi_t \rangle &= \langle (\partial^\alpha \delta_0), t^n \phi(tx) \rangle \\
&= t^n \langle (\partial^\alpha \delta_0), \phi(tx) \rangle \\
&= t^n (-1)^{|\alpha|} \left\langle \delta_0(x), t^{|\alpha|} (\partial^\alpha \phi)(tx) \right\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|} t^{n+|\alpha|} \langle \delta_0(x), (\partial^\alpha \phi)(tx) \rangle \\
&= t^{n+|\alpha|} (-1)^{|\alpha|} \langle \delta_0, \partial^\alpha \phi \rangle \\
&= t^{n+|\alpha|} \langle \partial^\alpha \delta_0, \phi \rangle .
\end{aligned}$$

Logo,

$$< \partial^\alpha \delta_0, \phi >= t^{-n-|\alpha|} < \partial^\alpha \delta_0, \phi_t >, \ \forall \ \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \ \text{ e } \ t > 0.$$

(Existência) A demonstração da existência da extensão será feita em 5 passos.

(Passo 1) Se u é uma função em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, então em coordenadas esféricas podemos escrever

$$< u, \phi >= \int_{|w|=1} \int_0^\infty u(w) r^{a+n-1} \phi(rw) dr dw$$

Isto sugere que, para $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ arbitrário, é natural considerar $(R_a\phi)(x) =< t_+^{a+n-1}, \phi(tx) >$ com $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$, como dado no Lema 2.3.5, o qual também afirma que R_a uma aplicação contínua de $C_c^\infty(K)$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ para $K \subset\subset \mathbb{R}^n$.
Observemos que como x_+^a é homogênea de grau a, segue que $R_a\phi$ é uma função homogênea de grau $-n-a$. De fato,

$$
\begin{aligned}
(R_a\phi)(lx) &= < t_+^{a+n-1}, \phi(tlx) > \\
&= l^{-1}l < t_+^{a+n-1}, \phi(tlx) > \\
&= l^{-1} < t_+^{a+n-1}, l\phi(tlx) > \\
&= l^{-1} < t_+^{a+n-1}, l\psi_x(tl) > \quad \text{com} \quad \psi_x(s) = \phi(sx) \\
&= l^{-1} < t_+^{a+n-1}, (\psi_x)_l(t) > \quad \text{usando a homogeneidade de } t_+^{a+n-1}\text{, temos} \\
&= l^{-1}l^{-a-n+1} < t_+^{a+n-1}, \psi_x(t) > \\
&= l^{-1}l^{-a-n+1} < t_+^{a+n-1}, \phi(tx) > \\
&= l^{-a-n} < t_+^{a+n-1}, \phi(tx) > \\
&= l^{-a-n}(R_a\phi)(x).
\end{aligned}
$$

(Passo 2) Agora tomemos $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ como no Lema 2.3.2, ou seja, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\psi(tx)}{t} = 1$ com $x \neq 0$. Observemos que, $\psi R_a\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ e que $R_a(\psi R_a\phi)(x) = (R_a\phi)(x)$. De fato,

$$
\begin{aligned}
R_a(\psi R_a\phi)(x) &= < t_+^{a+n-1}, (\psi R_a\phi)(tx) > \\
&= \int_0^\infty t_+^{a+n-1}\psi(tx)R_a\phi(tx)dt \\
&= \int_0^\infty t_+^{a+n-1}\psi(tx)t^{-a-n}R_a\phi(x)dt \\
&= (R_a\phi)(x)\int_0^\infty \frac{\psi(xt)}{t}dt \\
&= (R_a\phi)(x).
\end{aligned}
$$

Mostraremos que, dado u satisfazendo as hipóteses deste teorema, temos por (2.3.4) que

$< u, \psi R_a \phi >$ independe da escolha de ψ. De fato, dados, $\psi_1, \psi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, temos:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty r^{a+n-1}(\psi_1 - \psi_2)(rx) R_a\phi(rx) dr &= \int_0^\infty r^{a+n-1}(\psi_1 - \psi_2)(rx) R_a\phi(x) r^{-a-n} dr \\ &= R_a\phi(x) \int_0^\infty r^{-1}(\psi_1 - \psi_2)(rx) dr = 0.\end{aligned}$$

Donde podemos concluir, $< u, \psi_1 R_a\phi - \psi_2 R_a\phi >= 0 \Rightarrow < u, \psi_1 R_a\phi >=< u, \psi_2 R_a\phi >$.

(Passo 3) Também é valido que $< u, \psi R_a\phi >=< u, \phi >$, se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$. De fato,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty r^{a+n-1}(\psi R_a\phi - \phi)(rx) dr &= \int_0^\infty r^{a+n-1}\psi R_a\phi(rx) dr - \int_0^\infty r^{a+n-1}\phi(rx) dr, \quad \text{pelo Passo 2, temos;} \\ &= R_a\phi(x) - R_a\phi(x) = 0.\end{aligned}$$

(Passo 4) Do passo 3 é natural definir $\dot{u}$ como:

$$< \dot{u}, \phi >=< u, \psi R_a\phi > \tag{3.2.1}$$

para todo $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Mostraremos que $\dot{u}$ é uma distribuição que estende u para $\mathbb{R}^n$. Com efeito, se K é um compacto de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tal que $S(\psi) \subset Int(K)$, então

$$\begin{aligned}| < \dot{u}, \phi > | &= | < u, \psi R_a\phi > | \\ &\leq C \sum_{|\alpha| \leq k} ||\partial^\alpha(\psi R_a\phi)|| \quad \text{pois} \quad u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \\ &= C_1 \sum_{|\alpha+\beta| \leq k} ||(\partial^\beta\psi) R_a(\partial^\alpha\phi)|| \\ &= C_1 \sum_{|\alpha+\beta| \leq k} ||(\partial^\beta\psi)|| \; ||R_a(\partial^\alpha\phi)||_{\infty,K} \\ &\leq C_2 \sum_{|\alpha| \leq k} ||R_a(\partial^\alpha\phi)||_{\infty,K} \\ &\leq C_3 \sum_{|\alpha| \leq k} p_j(\partial^\alpha\phi) \quad \text{pelo Lema 2.3.5} \\ &\leq C_3 p_{j'}(\phi) \quad \text{para} \quad j' = j+1\end{aligned}$$

E mais pelo Passo 3 temos que $< \dot{u}, \phi > = < u, \psi R_a \phi > = < u, \phi >$ para $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$

(Passo 5) Mostraremos que a extensão $\dot{u}$ de u é homogênea de grau a. Para isso, observemos primeiramente que:

$$\begin{aligned}
(R_a \phi_r)(x) &= < t_+^{a+n-1}, r^n \phi(rtx) > \\
&= r^n < t_+^{a+n-1}, \phi(rtx) > \\
&= r^n r^{-1} < t_+^{a+n-1}, r\phi(rtx) > \\
&= r^n r^{-1} < t_+^{a+n-1}, r\psi(rt) > \\
&= r^n r^{-1} < t_+^{a+n-1}, \psi_r(rt) > \\
&= r^{n-1} r^{-a-n+1} < t_+^{a+n-1}, \psi(t) > \\
&= r^{-a} < t_+^{a+n-1}, \phi(tx) > \\
&= r^{-a} R_a \phi(x).
\end{aligned}$$

Daí, pela igualdade (2.2.10) segue que:

$$< \dot{u}, \phi_t > = < u, \psi R_a \phi_t > = t^{-a} < u, \psi R_a \phi > = t^{-a} < \dot{u}, \phi >$$

ou seja, $< \dot{u}, \phi_t > = t^{-a} < \dot{u}, \phi >$. Logo $\dot{u}$ é homogênea de grau a.

(Passo 6) O operador dado por:

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

$$u \mapsto \dot{u}$$

é contínuo. De fato, dado $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ seja u_n uma seqüência em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ tal que $u_n \to u$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$. Devemos provar que $\dot{u}_n \to \dot{u}$. De fato, $\lim_{j \to \infty} < (\dot{u}_j - \dot{u}), \phi > = \lim_{j \to \infty} < (u_j - u), \psi R_a \phi > = 0, \ \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, o que prova a contínuidade do operador acima.

(Polinômio Homogêneo) Finalmente se $P(x)$ é um polinômio homogêneo, então mostraremos que o grau de $(Pu)^{\cdot} = P\dot{u}$ é $(a +$ grau $P)$ e que $(Pu)^{\cdot} = P\dot{u}$. De fato, pelos resultados já provados neste teorema podemos garantir que existe uma extensão homogênea $(Pu)^{\cdot}$ de Pu. Seja $m =$ grau de P, daí

$$\begin{aligned} < Pu, \phi > &= < u, P\phi > \\ &= t^a < u, (P\phi)_t > \\ &= t^a < u, t^n (P\phi)(tx) > \\ &= t^a < u, t^n t^m P(x)\phi(tx) > \\ &= t^{a+m} < Pu, t^n \phi) > \\ &= t^{a+m} < Pu, (\phi)_t > . \end{aligned}$$

Assim, temos que o grau de Pu é $a+m$. Como o grau de $\dot{u}$ coincide com o grau da extensão de u, então o grau de $(\dot{Pu}) = P\dot{u}$ é igual a $a+m$.
Observamos que $P\dot{u}$ é uma extensão de Pu. De fato, para $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, temos que:

$$< P\dot{u}, \phi > = < \dot{u}, P\phi > = < u, P\phi > = < Pu, \phi > .$$

Como $(Pu)^{\cdot}$ é uma extensão de Pu, então $S((Pu)^{\cdot} - P\dot{u}) \subseteq \{0\}$ e, analogamente como mostrado no início desta demostração, obtemos que $(Pu)^{\cdot} = P\dot{u}$. Também analogamente segue que $(\partial_j u)^{\cdot} = \partial_j \dot{u}$.
Abaixo, segue alguns cálculos adicionais que julgamos serem pertinentes à demostração sobre as extensões dadas acima.

Para $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos que:

$$\begin{aligned} < (Pu)^{\cdot}, \phi > &= t^{a+m} < (Pu)^{\cdot}, \phi_t > \\ &= t^{a+m} < Pu, \psi \mathbb{R}_a \phi_t > \\ &= t^{a+m} < Pu, \psi t^{-a} R_a \phi > \\ &= < u, t^m P \psi R_a \phi > \\ &= < u, \psi R_a (P\phi) > \\ &= < \dot{u}, P\phi > \\ &= < P\dot{u}, \phi > . \end{aligned}$$

Lembremos que $< u, t^m P\psi R_a\phi > = < u, \psi R_a(P\phi) >$. De fato,

$$\begin{aligned}
< u, t^m P\psi R_a\phi > &= \int u(x)\psi(x)t^m P(x)R_a\phi(x)dx \\
&= \int u(x)\psi(x)t^m P(x)\int t^{a+n-1}\phi(tx)dtdx \\
&= \int u(x)\psi(x)\int t^{a+n-1}t^m P(x)\phi(tx)dtdx \\
&= \int u(x)\psi(x)\int t^{a+n-1}P(xt)\phi(tx)dtdx \\
&= \int u(x)\psi(x)R_a(P\phi)dx \\
&= < u, \psi R_a(P\phi) >
\end{aligned}$$

Mostraremos que o grau de $(\partial_j u)^{\cdot}$ é $a-1$ e $(\partial_j u)^{\cdot} = \partial_j \dot{u}$. De fato, pelos resultados já provados neste teorema podemos garantir que existe uma extensão homogênea $(\partial_j u)^{\cdot}$ de $\partial_j u$.

$$\begin{aligned}
< \partial_j u, \phi > &= (-1) < u, \partial_j\phi > \\
&= (-1)t^a < u, (\partial_j\phi)_t > \\
&= (-1)t^a < u, t^n(\partial_j\phi)(tx) > \\
&= (-1)t^{a+n} < u,\ (\partial_j\phi)(tx) > \\
&= (-1)t^{a+n-1} < u,\ t(\partial_j\phi)(tx) > \\
&= (-1)t^{a-1+n} < u,\ \partial_j(\phi(tx)) > \\
&= (-1)t^{a-1} < u,\ t^n\partial_j(\phi(tx)) > \\
&= (-1)t^{a-1} < u,\ \partial_j(t^n\phi(tx)) > \\
&= (-1)t^{a-1} < u,\ \partial_j(\phi_t) > \\
&= t^{a-1} < \partial_j u,\ \phi_t >
\end{aligned}$$

donde concluímos que o grau de $\partial_j u$ é $a-1$.

Observemos que o resultado acima estende a proposição 2.2.2 item (2).

Capítulo 4

Extensões para $\mathbb{R}^n$ de distribuições Homogêneas em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ - Parte II

4.1 Introdução

Como vimos no Capítulo 2, para $n = 1$ uma distribuição homogêneas em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ nem sempre admite extensão homogêneas para $\mathbb{R}$, no entanto tal extensão não é homogênea. Na próxima seção estenderemos tal fenômeno para $n > 1$.

4.2 Extensões quando a ordem pertencer a $\mathbb{Z}_-$

O próximo mostra como se estende para $\mathbb{R}^n$ distribuições homogêneas de grau a em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, quando a é um inteiro negativo.

Teorema 4.2.1. *Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ é homogênea de grau inteiro $a = -n-k \leq -n$, então:*

(1) u tem uma extensão $\dot{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo, para $t > 0$

$$< \dot{u}, \phi >= t^{-k-n} < \dot{u}, \phi_t > + \log t \sum_{|\alpha|=k} < u, x^\alpha \psi > \frac{\partial^\alpha \phi(0)}{\alpha!}. \tag{4.2.1}$$

(2) Duas quaisquer extensões de u satisfazendo (4.2.1) *diferem por uma combinação linear de derivadas de ordem k de δ_0.*

(3) Uma extensão homogênea existe se, e somente se,

$$< u, x^\alpha \psi >= 0 \tag{4.2.2}$$

para $|\alpha| = k$. Mostramos que (4.2.2) *independe de ψ.*

(4) Uma escolha consistente de extensão pode ser feita de forma tal que $(Pu)^{\cdot} = P\dot{u}$ para todo polinômio P homogêneo.

(5) u tem paridade oposta a k, isto é, $< u, \phi >= (-1)^{k+1} < u, \phi(-x) >$, se e somente se

$$< u, \phi >= (\text{sgnt}) t^a < u, \phi_t >, \ t \neq 0 \tag{4.2.3}$$

com $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ vale.

(6) Se u satisfaz (4.2.3) *e u é homogênea de grau a, então* (4.2.2) *vale. E mais existe uma única extensão $\dot{u}$ satisfazendo* (4.2.3) *para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Além disso $\dot{u}$ é dada por*

$$\langle \dot{u}, \phi \rangle = \Sigma \left(\frac{< \underline{t}^{-k-1}, \phi(t.) >}{2} u \right), \tag{4.2.4}$$

sendo $\underline{t}^{-k} = \frac{(t+i0)^{-k}+(t-i0)^{-k}}{2} = t_+^{-k} + (-1)^k \ t_-^{-k}$

Demonstração:

Demostração de (1)

Motivada pela relação (3.2.1) definimos uma extensão $\dot{u}$ de u por $< \dot{u}, \psi R_a \phi >$. Primeiramente vejamos que,

$$R_{-n-k} \ \phi(x) \ = \ t^{-n-k} \ R_{-n-k}\phi_t(x) + logt \sum_{|\alpha|=k} x^\alpha \psi \frac{\partial^\alpha \phi(0)}{\alpha!}.$$

$$
\begin{aligned}
R_{-n-k}\ \phi_t(x) &= < r_+^{-k-1}, t^n \phi(trx) > \\
&= t^n < r_+^{-k-1}, \phi(trx) > \\
&= t^{-1} t^n < r_+^{-k-1}, t\ \phi(trx) > \\
&= t^{-1} t^n < r_+^{-k-1}, t\ \phi(trx) > \\
&= t^{n-1} < r_+^{-k-1}, t\ \psi(ts) > \\
&= t^{n-1} < r_+^{-k-1}, \psi_t(s) > \\
&= t^{n-1} t^{k+1} \left(< r_+^{-k-1}, \psi(s) > - logt\ \frac{\partial_r^k \psi(s)}{k!} \bigg|_{r=0} \right) \\
&= t^{n+k} \left(< r_+^{-k-1}, \phi(rx) > - logt\ \frac{\partial_r^k \phi(rx)}{k!} \bigg|_{r=0} \right) \\
&= t^{n+k} (R_{-n-k} \phi(x) - logt \Phi_k(x)).
\end{aligned}
$$

aqui Φ é a parte homogênea de grau k na expansão de Taylor de ϕ. Assim,

$$
\begin{aligned}
< \dot{u}, \phi > &= \left\langle u, t^{-n-k} \psi \left[R_{-n-k} \phi_t + logt \sum_{|\alpha|=k} x^\alpha \frac{\partial^\alpha \phi(0)}{\alpha!} \right] \right\rangle \\
&= t^{-k-n} < u, \psi R_{-n-k} \phi_t > + logt \left\langle u, \sum_{|\alpha|=k} x^\alpha \psi \frac{\partial^\alpha \phi(0)}{\alpha!} \right\rangle \\
&= t^{-k-n} < \dot{u}, \phi_t > + logt \sum_{|\alpha|=k} \left\langle u, x^\alpha \psi \frac{\partial^\alpha \phi(0)}{\alpha!} \right\rangle \\
&= t^{-k-n} < \dot{u}, \phi_t > + logt \sum_{|\alpha|=k} \langle u, x^\alpha \psi \rangle \frac{\partial^\alpha \phi(0)}{\alpha!}.
\end{aligned}
$$

Observação: (4.2.1) é análogo a (2.2.11). Além disso tal extensão pode depender da escolha da ψ.

Demostração de (2)

Pelo Lema 1.4.7, qualquer outra extensão de u é da forma $U = \dot{u} + \sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0$.

Substituindo $\dot{u}$ por $U - \sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0$ em (4.2.1) o termo do logaritmo não muda.

Mas introduz-se um outro termo, a saber:

$$\sum_{|\alpha|\leq l}(1-t^{|\alpha|-k})a_\alpha\partial^\alpha\delta_0, . \tag{4.2.5}$$

De fato, temos:

$$\left\langle U-\sum_{|\alpha|\leq l}a_\alpha\partial^\alpha\delta_0,\phi\right\rangle = t^{-k-n}\left\langle U-\sum_{|\alpha|\leq l}a_\alpha\partial^\alpha\delta_0,\phi_t\right\rangle + logt\sum_{|\alpha|=k}\langle u,x^\alpha\psi\rangle\frac{\partial^\alpha\phi(0)}{\alpha!}.$$

Mas,

$$\begin{aligned}
-\left\langle\sum a_\alpha\partial^\alpha\delta_0,\phi_t\right\rangle &= -\left\langle\sum a_\alpha\partial^\alpha\delta_0,t^n\phi(tx)\right\rangle\\
&= -\sum a_\alpha(-1)^{|\alpha|}\left\langle\delta_0,t^{n+|\alpha|}(\partial^\alpha\phi)(tx)\right\rangle\\
&= -\sum a_\alpha t^{n+|\alpha|}\left\langle\partial^\alpha\delta_0,\phi\right\rangle.
\end{aligned}$$

Daí:

$$\langle U,\phi\rangle = t^{-n-k}\langle U,\phi_t\rangle + \left\langle\sum(1-t^{|\alpha|-k})a_\alpha\partial^\alpha\delta_0,\phi\right\rangle + logt\sum\langle u,x^\alpha\psi\rangle\frac{\partial^a\phi(0)}{\alpha!}.$$

Se $|\alpha|\neq k$ e $a_\alpha=0$ então $(1-t^{|\alpha|-k})a_\alpha=0,\ \forall\ t>0$.

Demostração de (3)

Claramente existe uma extensão homogênea se, e somente se

$$<u,x^\alpha\psi>=0 \ \text{ quando } \ |\alpha|=k$$

Pois se $<u,x^\alpha\psi>=0$ o último termo de (4.2.1) se anula logo tal extensão é homogênea. Reciprocamente, se $\dot{u}$ é homogênea e como $log\ t\neq 0$, temos que $\sum\langle u,x^\alpha\psi\rangle\frac{\partial^a\phi(0)}{\alpha!}=0,\ \forall\phi$. Assim, $<u,x^\alpha\psi>=0$.

Afirmação: Reescreveremos (4.2.2) como $\Sigma(x^\alpha u)=0$ quando $|\alpha|+\text{grau } u=-n$.

Observe que se v é homogênea de grau $-n$ em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, então temos que $<v,\psi>$ independe da escolha de ψ.

De fato, dados $\psi_1, \psi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$

$$\int_0^\infty r^{a+n-1}(\psi_1 - \psi_2)(rx)dr = \int_0^\infty r^{-1}(\psi_1 - \psi_2)(rx)dr \equiv 0.$$

Pelo Lema 2.3.3 temos que $< v, (\psi_1 - \psi_2) >= 0$.

Observemos que (4.2.2), $x^\alpha u$ é homogênea de grau $-n$. De fato,

$$\begin{aligned}
< x^\alpha u, \psi > &= < u, x^\alpha \psi >, \quad \text{por (2.3.2);} \\
&= t^a < u, (x^\alpha \psi)_t > \\
&= t^{a+n} < u, (tx)^\alpha \psi(tx) > \\
&= t^{a+n} < u, t^{|\alpha|} x^\alpha \psi(tx) > \\
&= t^{a+n+|\alpha|} < u, x^\alpha \psi(tx) >, \ |\alpha| = k = -n - a \\
&= < x^\alpha u, \psi(tx) > \\
&= t^{-n} < x^\alpha u, t^n \psi(tx) > \\
&= t^{-n} < x^\alpha u, \psi_t > .
\end{aligned}$$

Tomemos $v = x^\alpha u$ e reescreveremos a igualdade (4.2.2), da seguinte forma:

$$\Sigma(x^\alpha u) = 0 \quad \text{quando} \quad |\alpha| + \text{grau } u = -n, \tag{4.2.6}$$

onde $S(v) =< v, \psi >$ para uma ψ fixa.

Também reescrevermos (4.2.1) como

$$< \dot{u}, \phi >= t^{-k-n} < \dot{u}, \phi_t > +logt \sum_{|\alpha|=k} S(x^\alpha u) \frac{\partial^\alpha \phi(0)}{\alpha!}. \tag{4.2.7}$$

Se v é uma função contínua podemos introduzir coordenadas polares temos:

$$\begin{aligned}
\Sigma(v) &= < v, \psi > \\
&= \int_0^\infty v(x)\psi(x)dx \\
&= \int_0^\infty \int_{|w|=1} v(rw)\psi(wr)r^n dw \frac{dr}{r}, \quad \text{usando homogeneidade de v} \\
&= \int_0^\infty \int_{|w|=1} r^{-n} v(w)\psi(wr)r^n dw \frac{dr}{r}, \quad \text{usando Fubini} \\
&= \int_{|w|=1} \underbrace{\int_0^\infty \psi(wr)\frac{dr}{r}}_{=1} v(w)dw \\
&= \int_{|w|=1} v(w)dw.
\end{aligned}$$

Assim, $\Sigma(v)$ é a integral de v sobre a esfera unitária.

Observação: Notemos que, se u é homogênea de grau a, e a não é inteiro menor ou igual que $-n$, então (3.2.1) pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned}
< \dot{u}, \phi > &= < u, \psi R_a \phi > \\
&= < (R_a\phi)u, \psi > \\
&= \Sigma((R_a\phi)u) \\
&= \Sigma(< t_+^{a+n-1}u, \phi(t.) >), \text{ onde } \ \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)
\end{aligned}$$

pois, $(R_a\phi)u$ é então homogênea de grau $a - n - a = -n$.

Entretanto quando $a = -n - k$ é inteiro $\leq -n$ então (3.2.1) depende da escolha de ψ.

Demostração de (4)

Se P é um polinômio homogêneo de grau m, fixada $\dot{u}$ uma tal extensão temos que $(Pu)^{\cdot} = P\dot{u}$. De fato,

$$< P\dot{u}, \phi > = < \dot{u}, P\phi > = < u, \psi R_{-n-k} P\phi >$$

Mas,

$$\begin{aligned} R_{-n-k}P\phi &= < t_+^{-k-1}, P(tx)\phi(tx) > \\ &= < t_+^{-k-1+m}P(x), \phi(tx) > \\ &= P(x) < t_+^{m-k-1}, \phi(tx) > \\ &= PR_{m-n-k}\phi. \end{aligned}$$

Daí,

$$< P\dot{u}, \phi >=< u, \psi PR_{-n-k+m}\phi >=< Pu, \psi R_{-n-k+m}\phi >=< (Pu)^{\cdot}, \phi >$$

Demonstração de (5)

Suponhamos que u tenha paridade oposta. Se $t > 0$, (4.2.3) é valida, pois $< u, \phi >= t^a < u, \phi_t >$. Agora se $t < 0$, também concluímos que (4.2.3) é válida, pois:

$$\begin{aligned} < u, \phi > &= (-t)^a < u, \phi_{-t} > \\ &= (-t)^a < u, (-t)^n\phi(-tx) > \\ &= (-t)^{a+n} < u, \phi(-tx) > \\ &= (-t)^{a+n}(-1)^{k+1} < u, \phi(tx) > \\ &= (-t)^n(-t)^a(-1)^{1-a-n} < u, \phi(tx) > \\ &= (-t)^n(-t)^a(-1)^{1-a}(-1)^{-n} < u, \phi(tx) > \\ &= (-t)^n(-t)^a(-1)^{1-a}(-1)^n < u, \phi(tx) > \\ &= (-t)^a(-1)^{1-a}t^n < u, \phi(tx) > \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-t)^a(-1)^{1-a} < u, t^n\phi(tx) > \\
&= (-t)^a(-1)^{1-a} < u, \phi_t > \\
&= (-t)^a(-1)^1(-1)^{-a} < u, \phi_t > \\
&= (-t)^a(-1)(-1)^a < u, \phi_t > \\
&= (-1)t^a < u, \phi_t > \\
&= (\mathrm{sgn} t)t^a < u, \phi_t > .
\end{aligned}
$$

Reciprocamente (4.2.3) é valida. Será suficiente tomar $t = -1$,

$$
\begin{aligned}
< u, \phi > &= (\mathrm{sgn} t)t^a < u, \phi_t > \\
&= (-1)(-1)^a < u, \phi_{-1} > \\
&= (-1)(-1)^a < u, (-1)^n\phi(-x) > \\
&= (-1)(-1)^{a+n} < u, \phi(-x) > \\
&= (-1)^{-k+1} < u, \phi(-x) > \\
&= (-1)^{k+1} < u, \phi(-x) > .
\end{aligned}
$$

Observação : Se u é uma função então (4.2.3) para $t = -1$, nos dá que $u(x) = (-1)^{k+1}u(-x)$.

$$
\begin{aligned}
< u, \phi > &= [(sgn\ t)]t^a < u, \phi_t > \\
&= [(sgn\ t)]t^a \int u(x)t^n\phi(tx)dx \\
&= (-1)(-1)^a \int u(x)(-1)^n\phi(-x)dx \\
&= (-1)^{a+n+1} \int u(x)\phi(-x)dx \\
&= (-1)^{(-k-n)+n+1} \int u(-x)\phi(x)dx \\
&= (-1)^{-k+1} \int u(-x)\phi(x)dx \\
&= (-1)^{k+1} < u(-x), \phi(x) > .
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Demonstração de (6)

A igualdade (4.2.3) sempre implica em (4.2.2). De fato, se ψ é par, ou seja $\psi(x) = \psi(-x)$ e se $\phi(x) = x^\alpha \psi(x)$, com $|\alpha| = k$ e ψ satisfazendo (2.3.1), então para $t = -1$, temos,

$$\begin{aligned} < u, \phi > &= (-1)(-1)^a < u, \phi_{-1} > \\ &= (-1)(-1)^a < u, (-1)^n \phi(-x) > \\ &= (-1)(-1)^a < u, (-1)^n (-x)^\alpha \psi(-x) > \\ &= (-1)(-1)^a < u, (-1)^{n+|\alpha|} x^\alpha \psi(x) > \\ &= (-1)(-1)^a < u, (-1)^{n+k} \phi(x) > \\ &= (-1)(-1)^a < u, (-1)^{-a} \phi(x) > \\ &= (-1) < u, \phi > . \end{aligned}$$

Portanto $< u, \phi >= 0$. Logo u possui uma extensão homogênea, pois $< u, x^\alpha \psi >= 0$. Mostraremos que existe uma uma única extensão homogênea $\dot{u}$ satisfazendo (4.2.3) para $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e é, dada por:

$$< \dot{u}, \phi >= \Sigma \left(\frac{< \underline{t}^{a+n-1}, \phi(t.) >}{2} u \right), \ \forall \ \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Primeiramente, mostraremos a unicidade de tal extensão homogênea $\dot{u}$. Notemos que

$$< \partial^\alpha \delta, \phi >= t^{-n-k} < \partial^\alpha \delta, \phi_t >,$$

para todo $t \neq 0$, onde $|\alpha| = k$. De fato,

$$\begin{aligned} t^{-k-n} < \partial^\alpha \delta, \phi_t > &= t^{-k-n} < \partial^\alpha \delta, t^n \phi(tx) > \\ &= t^{-k} < \partial^\alpha \delta, \phi(tx) > \\ &= t^{-k} (-1)^{|\alpha|} < \delta, \partial^\alpha (\phi(tx)) > \\ &= t^{-k} (-1)^{|\alpha|} < \delta, t^{|\alpha|} (\partial^\alpha \phi)(tx) > \\ &= (-1)^{|\alpha|} (\partial^\alpha \phi)(0) \\ &= (-1)^{|\alpha|} < \delta, \partial^\alpha \phi > \\ &= < \partial^\alpha \delta, \phi > . \end{aligned}$$

Pela igualdade acima, segue que:

$$\begin{aligned} < U - \dot{u}, \phi > &= t^{-k-n} < U - \dot{u}, \phi_t > \\ &= t^{-n-k} < \sum a_\alpha \partial^\alpha \delta, \phi_t > \\ &= \sum a_\alpha t^{-n-k} < \partial^\alpha \delta, \phi_t > \\ &= \sum a_\alpha < \partial^\alpha \delta, \phi > . \end{aligned}$$

para $t > 0$. Também temos, para $t < 0$ que:

$$\begin{aligned} < U - \dot{u}, \phi > &= (sgn\ t) t^{-k-n} < U - \dot{u}, \phi_t > \\ &= (sgn\ t) t^{-k} < \sum a_\alpha \partial^\alpha \delta, \phi(tx) > \\ &= (sgn\ t) \sum a_\alpha t^{-k} (-1)^{|\alpha|} < \delta, \partial^\alpha(\phi(tx)) > \\ &= (sgn\ t) \sum a_\alpha t^{-k} (-1)^{|\alpha|} < \delta, t^{|\alpha|} (\partial^\alpha \phi)(tx) > \\ &= (sgn\ t) \sum a_\alpha (-1)^{|\alpha|} (\partial^\alpha \phi)(0) \\ &= (sgn\ t) \sum a_\alpha (-1)^{|\alpha|} < \delta, \partial^\alpha \phi > \\ &= (sgn\ t) \sum a_\alpha < \partial^\alpha \delta, \phi > . \end{aligned}$$

Daí, como $U - \dot{u} = \sum a_\alpha \partial^\alpha \delta$ e $U - \dot{u} = -\sum a_\alpha \partial^\alpha \delta$, então $\sum a_\alpha \partial^\alpha \delta = 0$ o que mostra pela observação do Lema 1.4.7 que $a_\alpha = 0$.

Agora mostraremos a existência.

Lembrando que $a + n = -k$, calculemos,

$$\begin{aligned} < \underline{t}^{-k-1}, \phi(t.) > &= < t_+^{-k-1}, \phi(t.) > + (-1)^{-k-1} < t_-^{-k-1}, \phi(t.) > \\ &= < t_+^{-k-1}, \phi(t.) > + (-1)^{k+1} < t_+^{-k-1}, \phi(-t.) > \\ &= < t_+^{-k-1}, \phi(t.) > + (-1)^{k-1} < t_+^{-k-1}, \phi(-t.) > . \end{aligned}$$

Se U é uma extensão de u definida em (3.2.1), então por (4.2.4) obtemos que

$$2 < \dot{u}, \phi > = < U, \phi > + (-1)^{n+k-1} < U, \phi_{-1} >, \qquad (4.2.8)$$

com $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. De fato,

$$\begin{aligned}
2 < \dot{u}, \phi > &= \Sigma(< \underline{t}^{-k-1}, \phi(t.) > u) \\
&= \Sigma(< t_+^{-k-1}, \phi(t.) + (-1)^{k-1}\phi(-t.) > u) \\
&= \Sigma(< t_+^{-k-1}, \phi(t.) > u) + (-1)^{k-1}S(< t_+^{-k-1}, \phi(-t.) > u) \\
&= \Sigma(R_{-n-k}\phi u) + (-1)^{k-1}S(R_{-n-k}\phi u) \\
&= < u, \psi R_{-n-k}\phi(.) > +(-1)^{k-1} < u, \psi R_{-n-k}\phi(-.) > \\
&= < U, \phi(.) > +(-1)^{k-1} < U, \phi(-.) > \\
&= < U, \phi(.) > +(-1)^{n+k-1} < U, \phi_{-1}(.) > .
\end{aligned}$$

Afirmação : (4.2.4) define uma distribuição em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Como U é uma distribuição, então em (4.2.8) $\dot{u}$ define uma distribuição.

Afirmação: $\dot{u}$ é extensão de u e satisfaz (4.2.3).

Se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, e vale (4.2.3) então o lado direito da equação (4.2.8) é igual à $2 < U, \phi >$, pois:

$$\begin{aligned}
2 < \dot{u}, \phi > &= < U, \phi > +(-1)^{n+k-1} \left[(-1)(-1)^{-n-k} < U, \phi >\right] \\
&= < U, \phi > +(-1)^{n+k-1}(-1)^{-n-k+1} < U, \phi > \\
&= 2 < U, \phi > .
\end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que $\dot{u} = U$ em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.
Finalmente concluímos que $< \dot{u}, \phi >= (sgnt)t^a < \dot{u}, \phi_t >$ para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, ou seja $\dot{u}$ satisfaz (4.2.3). De fato, para $t = -1$, temos:

$$2 < \dot{u}, \phi_{-1} >=< U, \phi_{-1} > +(-1)^{k+n-1} < U, \phi >= 2.(-1)^{k+n-1} < \dot{u}, \phi >$$

Donde podemos concluir que:

$$< \dot{u}, \phi >= (-1)(-1)^a < U, \phi_{-1} >$$

■

Capítulo 5

Soluções Homogêneas em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ do Operador $L = \sum \lambda_i x_i \partial_{x_i} - a$

5.1 Introdução

Neste capítulo, nós estabelecemos um análogo ao Lema 2.3.3 para solução homogêneas em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ de $L = \sum \lambda_i x_i \partial_{x_i} - a$. Descrevendo portanto três formas equivalentes para definir soluções homogêneas em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ desta classe de operadores. Na seção 5.2 estudaremos o caso $L = x_1 \partial_{x_1} + \mu x_2 \partial_{x_2} - a$ e na seção 5.3 o caso geral.

5.2 Operador $L = x_1 \partial_{x_1} + \mu x_2 \partial_{x_2} - a$ com $\mu > 0$

Consideraremos o operador $L = x_1 \partial_{x_1} + \mu x_2 \partial_{x_2}$, com $\mu > 0$ e $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Vamos motivar a extensão do Lema 2.3.3, para o caso $\mu > 1$. Seja

$$u = x_{1_+}^{a_1} x_{2_+}^{a_2}$$

com $Re\ (a_1),\ Re\ (a_2) \notin \mathbb{Z}_-$.

Observemos inicialmente que, para todo $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned} < u, L\phi > &= < L^t u, \phi > \\ &= < (-x_1\partial_{x_1} - \mu x_2\partial_{x_2} - 1 - \mu)u, \phi > \\ &= < (-a_1 - \mu a_2 - 1 - \mu)u, \phi > . \end{aligned}$$

Portanto as escolhas naturais para as condições expressas no Lema 2.3.3, serão :

$$(b') \quad [(a_1 + \mu a_2) + (1 + \mu)] < u, \phi > + < u, L\phi >= 0.$$

Novamente comparando com (b) escolheremos

$$a = a_1 + \mu a_2$$

como sendo o grau de homogeneidade de u, com $\lambda = (1, \mu)$. Com as homotetias $H^t_{(\lambda_1,\lambda_2)}(x_1, x_2) = (t^{\lambda_1}x_1, t^{\lambda_2}x_2)$ e $H^t_\gamma(s) = t^\gamma s$, definimos

$$\phi_{t,\lambda}(x_1, x_2) = H^t_{\lambda_1+\lambda_2}(\phi(H^t_{(\lambda_1,\lambda_2)}(x_1, x_2))) = t^{\lambda_1+\lambda_2}\phi(t^{\lambda_1}x_1, t^{\lambda_2}x_2)$$

propomos então que (a) será substituído por $< u, \phi >= t^a < u, \phi_{t,\lambda} >$. Com estas escolhas, temos:

Lema 5.2.1. *Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2\backslash\{0\})$ e $a \in \mathbb{C}$ e $\lambda = (1, \mu)$, são equivalentes:*

(a') $< u, \phi >= t^a < u, \phi_{t,\lambda} >$, *com* $\phi_{t,\lambda}(x) = t^{1+\mu}\phi(tx_1, t^\mu x_2)$ *e* $\mu > 0 \ \ \forall \ \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2\backslash\{0\})$

(b') $[a + (1 + \mu)] < u, \phi > + < u, L\phi >= 0, \ \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2\backslash\{0\})$

(c') $< u, \psi >= 0$, *se* $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2\backslash\{0\})$ *e* $\int_0^\infty r^{a+(1+\mu)-1}\psi(rx_1, r^\mu x_2)dr = 0$

Demonstração:

Mostraremos que $(a') \Rightarrow (b')$, diferenciando (a') em relação a t, usando o Teorema 1.4.3

daí seguirá que, $[a+(1+\mu)] < u, \phi > + < u, L\phi >= 0,\ \ \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\})$. De fato,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}(< u(x_1,x_2), \phi(x_1,x_2) >) \\
&= \frac{d}{dt}(t^a < u(x_1,x_2), \phi_{t,\lambda}(x_1,x_2) >) \\
&= \frac{d}{dt}(t^a < u(x_1,x_2), t^{1+\mu}\phi(tx_1, t^\mu x_2) >) \\
&= < u(x_1,x_2), [t^{[a+(1+\mu)]}\phi(tx_1,t^\mu x_2)]' >, \quad \text{pelo Teorema 1.4.3} \\
&= < u, [a+(1+\mu)]t^{[a+(1+\mu)]-1}\phi(tx_1,t^\mu x_2) \\
&+ t^{[a+(1+\mu)]}[t^{-1}tx_1(\partial_{x_1}\phi)(tx_1,t^\mu x_2) + \mu t^{\mu-1}x_2(\partial_{x_2}\phi)(tx_1,t^\mu x_2)] > \\
&= [a+(1+\mu)]t^{a-1}\left\langle u, t^{1+\mu}\phi(tx_1,t^\mu x_2)\right\rangle \\
&+ t^{a-1}\left\langle u, t^{(1+\mu)}[tx_1(\partial_{x_1}\phi)(tx_1,t^\mu x_2) + \mu t^\mu x_2(\partial_{x_2}\phi)(tx_1,t^\mu x_2)]\right\rangle \\
&= [a+(1+\mu)]t^{a-1}\langle u, \phi_{t,\lambda}(x_1,x_2)\rangle + t^{a-1}\langle u, [x_1(\partial_{x_1}\phi) + \mu x_2(\partial_{x_2}\phi)]_t\,(x_1,x_2)\rangle \\
&= [a+(1+\mu)]\langle u, \phi\rangle + \langle u, L\phi\rangle
\end{aligned}$$

Agora $(b') \Rightarrow (c')$, para provar esta implicação basta verificar que a equação $[a+(1+\mu)]\phi + L\phi = \psi$, tem solução $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\})$.

Tal equação diferencial pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^{a+(1+\mu)}\phi(rx_1, r^\mu x_2)) = r^{a+(1+\mu)-1}\psi((rx_1, r^\mu x_2)).$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}(r^{[a+(1+\mu)]}\phi(rx_1,r^\mu x_2)) &= [a+(1+\mu)]r^{[a+(1+\mu)]-1}\phi(rx_1,r^\mu x_2) \\
&+ r^{[a+(1+\mu)]}([\phi(rx_1,r^\mu x_2)]') \\
&= [a+(1+\mu)]r^{[a+(1+\mu)]-1}\phi(rx_1,r^\mu x_2) \\
&+ r^{[a+(1+\mu)]-1}rx_1(\partial_{x_1}\phi)(rx_1,r^\mu x_2) + \mu r^\mu x_2(\partial_{x_2}\phi)(rx_1,r^\mu x_2) \\
&= r^{[a+(1+\mu)]-1}[a+(1+\mu)]\phi(rx_1,r^\mu x_2) \\
&+ r^{[a+(1+\mu)]-1}(L\phi)(rx_1,r^\mu x_2) \\
&= r^{[a+(1+\mu)]-1}\psi(rx_1,r^\mu x_2)
\end{aligned}$$

Mostraremos agora que dado ψ satisfazendo $\int_0^\infty r^{[a+(1+\mu)]-1}\psi(rx_1, r^\mu x_2)dr = 0$, então existe $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2\backslash\{0\})$, tal que $\partial_r(r^{[a+(1+\mu)]}\phi(rx_1, r^\mu x_2)) = r^{[a+(1+\mu)]-1}\psi(rx_1, r^\mu x_2)$. Suponhamos que tal ϕ exista. Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}(r^{[a+(1+\mu)]}\phi(rx_1, r^\mu x_2)) &= r^{[a+(1+\mu)]-1}\psi(rx_1, r^\mu x_2) \Rightarrow \\
r^{[a+(1+\mu)]}\phi(rx_1, r^\mu x_2) &= \int_0^r s^{[a+(1+\mu)]-1}\psi(sx_1, s^\mu x_2)ds \Rightarrow \\
\phi(rx_1, r^\mu x_2) &= r^{-[a+(1+\mu)]}\int_0^r s^{[a+(1+\mu)]-1}\psi(sx_1, s^\mu x_2)ds
\end{aligned}$$

Assim definindo ϕ, pode-se evidentemente ver que $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2\backslash\{0\})$.
Mostraremos que $S(\phi) \subset\subset \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$. Seja $r = 1$, logo $\phi(x) = \int_0^1 s^{a+<\lambda,e>-1}\psi(x_1, x_2)ds$. Temos que $S(\psi) \subset\subset \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ isto é, existe $R > 1$ tal que $S(\psi) \subset \mathcal{A}\left(0, \frac{1}{R}, R\right) = \{x : \frac{1}{R} \leq |x| \leq R\}$. Se $|x| \leq \frac{1}{R}$ então, $\phi(x) = \int_0^1 s^{[a+(1+\mu)]-1}\underbrace{\psi(x_1, x_2)}_{=0}ds = 0$. Se $|x| \geq R$ então, $\phi(x) = \int_0^1 s^{[a+(1+\mu)]-1}\psi(x_1, x_2)ds = 0$. Portanto $S(\phi) \subset \mathcal{A}\left(0, \frac{1}{R}, R\right)$, isto é, $S(\phi) \subset\subset \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$.
Logo $< u, \psi >=< u, [a+(1+\mu)]\phi + L\phi >= [a+(1+\mu)] < u, \phi > + < u, L\phi >= 0$, por (b').
Mostraremos agora que $(c') \Rightarrow (a')$. Seja $\psi(y_1, y_2) = \phi(y_1, y_2) - t^a[H^t_{(1,\mu)}\phi(H^t_{(1,\mu)})]$, com $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2\backslash\{0\})$. Desta forma, temos que $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2\backslash\{0\})$. E mais, $\int_0^\infty r^{a-1}\psi(rx_1, r^\mu x_2)dr = 0$. Para mostrar isto basta tomar $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2\backslash\{0\})$ e, para $x \neq 0$ fixo, temos que:

$$\int_0^\infty r^{[a+(1+\mu)]-1}(\phi(rx_1, r^\mu x_2) - t^a[H^t_{(1,\mu)}\phi(H^t_{(1,\mu)})]dr =$$

$$\int_0^\infty r^{[a+(1+\mu)]-1}(\phi(rx_1, r^\mu x_2) - t^a t^{1+\mu}\phi((tr)x_1, (tr)^\mu x_2)dr =$$

$$\langle r_+^{[a+(1+\mu)]-1},\ \phi(rx_1, r^\mu x_2)\rangle - t^a\langle r_+^{[a+(1+\mu)]-1},\ t^{1+\mu}\phi((tr)x_1, (tr)^\mu x_2)\rangle =$$

$$\langle r_+^{[a+(1+\mu)]-1},\ \phi(rx_1, r^\mu x_2)\rangle - t^{a+1+\mu}\langle r_+^{[a+(1+\mu)]-1},\ \phi((tr)x_1, (tr)^\mu x_2)\rangle =$$

$$t^{a+(1+\mu)-1}\langle r_+^{[a+(1+\mu)]-1},\ t\phi(trx_1, (tr)^\mu x_2)\rangle - t^{a+(1+\mu)-1}\langle r_+^{[a+(1+\mu)]-1},\ t\phi((tr)x_1, (tr)^\mu x_2)\rangle = 0$$

Daí, por hipótese, segue $< u, \psi >= 0$, ou seja, vale (a').

Lema 5.2.2. *Existe uma* $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ *tal que*

$$\int_0^\infty \frac{\psi(H_\lambda^t(x))}{t}dt = 1, \quad com \;\; x \neq 0 \;\; e \;\; \lambda_i > 0 \tag{5.2.1}$$

Demonstração:

De fato, tomemos $n = 1$, segue análogo ao caso em $\lambda = (1, 1, ..., 1)$, ou seja ao Lema 2.3.2 Para $n > 1$, tome $\psi(x) = \psi_2(p_\lambda(x))$, sendo $p_\lambda(x) = \sqrt{(x_1)^{\frac{2}{\lambda_1}} + (x_2)^{\frac{2}{\lambda_2}} + ... + (x_n)^{\frac{2}{\lambda_n}}}$ com ψ_2 como no Lema 2.3.2.

$$\int_0^\infty \frac{\psi(H_\lambda^t(x))}{t}dt = \int_0^\infty \frac{\psi_2(p_\lambda(H_\lambda^t(x)))dt}{t} = \int_0^\infty \frac{\psi_2(tp_\lambda(x))}{t}dt = \int_0^\infty \frac{\psi_2(t.y)}{t}dt = 1,$$

com $x \neq 0$. ■

Daqui em diante, consideraremos as homotetias $H_\lambda^t(x) = (t^{\lambda_1}x_1, ..., t^{\lambda_n}x_n)$ e $H_\gamma^t(s) = t^\gamma s$. Definimos

$$\phi_{t,\lambda}(x) = H_\lambda^t(\phi(H_\lambda^t(x))) = t^{(\sum_{i=1}^n \lambda_i)}\phi(t^{\lambda_1}x_1, ..., t^{\lambda_n}x_n),$$

com $x \in \mathbb{R}^n$.

Definição 5.2.1. Uma função em $\mathbb{R}^n$ é dita λ - homogênea de grau $m \in \mathbb{R}$ se $f(H_\lambda^t(x)) = t^m f(x)$.

5.3 Operador $L = \sum \lambda_i \; x_i \partial_{x_i} - a$ com $\lambda_i > 0$ para todo i

Nosso próximo resultado descreveremos três formas equivalentes para definir soluções homogêneas em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ desta classe de operadores, com $< \lambda, e >= \sum \lambda_i$.

Lema 5.3.1. *Seja* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$. *São equivalentes:*

(a) $< u, \phi >= t^a < u, \phi_{t,\lambda} >, \; \forall \; \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$.

(b) $[a+ < \lambda, e >] < u, \phi > + < u, L\phi >= 0, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$.

(c) $< u, \psi >= 0, \;\; se \;\; \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}) \;\; e \;\; \int_0^\infty r^{a+<\lambda,e>-1}\psi(H_\lambda^r(x))dr = 0$.

Demonstração:

Mostraremos que $(a) \Rightarrow (b)$, diferenciando (a) em relação a t, usando o Teorema 1.4.3 daí seguirá (b). De fato,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}(< u(x), \phi(x) >) \\
&= \frac{d}{dt}(t^a < u(x), \phi_{t,\lambda}(x) >) \\
&= \frac{d}{dt}(t^a < u(x), H^t_{<\lambda,e>}\phi(H^t_\lambda(x)) >) \\
&= \left\langle u(x), [t^{[a+<\lambda,e>]}\phi(H^t_\lambda(x))]' \right\rangle, \quad \text{pelo Teorema 1.4.3} \\
&= < u, [a+ < \lambda, e >]t^{[a+<\lambda,e>]-1}\phi(H^t_\lambda(x)) + t^{[a+\sum \lambda_i]}[< \lambda, e > t^{<\lambda,e>-1}(\partial_{x_i}\phi)(H^t_\lambda(x))] > \\
&= [a+ < \lambda, e >]t^{a-1}\left\langle u, t^{<\lambda,e>}\phi(H^t_\lambda(x))\right\rangle + t^{a-1}\left\langle u, t^{<\lambda,e>}[\sum t^{\lambda_i}x_i(\partial_{x_i}\phi)(H^t_\lambda(x))]\right\rangle \\
&= [a+ < \lambda, e >]t^{a-1}\langle u, \phi_{t,\lambda}(x)\rangle + t^{a-1}\left\langle u, \left[\sum \lambda_i x_i(\partial_{x_i}\phi)\right]_{t,\lambda}(x)\right\rangle \\
&= [a + \sum \lambda_i]\langle u, \phi\rangle + \langle u, L\phi\rangle .
\end{aligned}$$

Mostremos que $(b) \Rightarrow (c)$. Para provar esta implicação, basta verificar que a equação

$$[a+ < e, \lambda >]\phi + L\phi = \psi$$

tem solução $\phi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$.

Tal equação diferencial pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{a+<e,\lambda>}\phi(H^r_\lambda(x))\right) = r^{a+<e,\lambda>-1}\psi(H^r_\lambda(x)).$$

Com efeito,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}(r^{[a+<e,\lambda>]}(\phi(H_\lambda^r(x))) &= [a+<e,\lambda>]r^{[a+<e,\lambda>]-1}(\phi(H_\lambda^r(x)))\\
&+ r^{[a+<e,\lambda>]}\frac{\partial}{\partial r}(\phi(H_\lambda^r(x)))\\
&= [a+<e,\lambda>]r^{[a+<e,\lambda>]-1}\phi(H_\lambda^r(x))\\
&+ r^{[a+<e,\lambda>]}\sum \lambda_i r^{\lambda_i-1}x_i(\partial_{x_i}\phi)(H_\lambda^r(x))\\
&= [a+<e,\lambda>]r^{[a+<e,\lambda>]-1}\phi(H_\lambda^r(x))\\
&+ r^{[a+<e,\lambda>]-1}\sum \lambda_i r^{\lambda_i}x_i(\partial_{x_i}\phi)(H_\lambda^r(x))\\
&= r^{[a+<e,\lambda>]-1}[a+<e,\lambda>]\phi(H_\lambda^r(x))\\
&+ r^{[a+<e,\lambda>]-1}(L\phi)(H_\lambda^r(x))\\
&= r^{[a+<e,\lambda>]-1}\psi(H_\lambda^r(x))
\end{aligned}
$$

Mostraremos agora que dado ψ satisfazendo $\int_0^\infty r^{[a+<\lambda,e>]-1}\psi(H_\lambda^r(x)) = 0$, então existe $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$, tal que $\partial_r(r^{[a+<\lambda,e>]}\phi(H_\lambda^r(x)) = r^{[a+<\lambda,e>]-1}\psi(H_\lambda^r(x))$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{[a+<\lambda,e>]}\phi(H_\lambda^r(x)\right) &= r^{[a+<\lambda,e>]-1}\psi(H_\lambda^r(w)) \Rightarrow\\
r^{[a+<\lambda,e>]}\phi(H_\lambda^r(x)) &= \int_0^r s^{[a+<\lambda,e>]-1}\psi(H_\lambda^s(x))ds\\
\phi(H_\lambda^r(x)) &= r^{-[a+(1+\mu)]}\int_0^r s^{[a+(1+\mu)]-1}\psi(H_\lambda^s(x))ds
\end{aligned}
$$

Assim definindo ϕ, vê-se que evidentemente, $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$.
Mostraremos que $S(\phi) \subset\subset \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. Seja $r = 1$, logo $\phi(H_\lambda^1(x)) = \int_0^1 s^{[a+(1+\mu)]-1}\psi(x)ds$. Temos $S(\psi) \subset\subset \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ isto é, existe $R > 1$ tal que $S(\psi) \subset \mathcal{A}\left(0, \frac{1}{R}, R\right) = \{x : \frac{1}{R} \le |x| \le R\}$. Se $|x| \le \frac{1}{R}$ então, $\phi(x) = \int_0^1 s^{[a+<\lambda,e>]-1}\underbrace{\psi(x)}_{=0}ds = 0$. Agora, se $|x| \ge R$ então, $\phi(x) = \int_0^1 s^{[a+(1+\mu)]-1}\psi(x)ds = 0$. Portanto $S(\phi) \subset \mathcal{A}\left(0, \frac{1}{R}, R\right)$, isto é $S(\phi) \subset\subset \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$.
Logo , por (b),

$$
<u,\psi> = <u,[a+<\lambda,e>]\phi + L\phi> = [a+<\lambda,e>] <u,\phi> + <u,L\phi> = 0.
$$

Mostraremos agora, $(c) \Rightarrow (a)$, seja $\psi(y) = \phi(y) - t^{a+<\lambda,e>}\phi(H_\lambda^t(y))$, com $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$, temos que $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$. E mais, $\int_0^\infty r^{a-1}\psi(H_\lambda^r(x))dr = 0$. Para isto basta tomar

$\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e, fixando $x \neq 0$, temos que

$$\int_0^\infty r^{[a+<\lambda,e>]-1}\phi(H_\lambda^r(x)) - t^a t^{<\lambda,e>}\phi(H_\lambda^{tr}(x))dr =$$

$$\langle r_+^{[a+<\lambda,e>]-1},\ \phi(H_\lambda^r(x))\rangle - t^{a+<\lambda,e>}\langle r_+^{[a+<\lambda,e>]-1},\ \phi(H_\lambda^{(tr)}(x))\rangle =$$

$$t^{[a+<\lambda,e>]-1}\langle r_+^{[a+<\lambda,e>]-1},\ t\phi(H_\lambda^{(tr)}(x))\rangle - t^{a+<\lambda,e>}\langle r_+^{[a+<\lambda,e>]-1},\ \phi(H_\lambda^{(tr)}(x))\rangle =$$

$$t^{[a+<\lambda,e>]-1}\langle r_+^{[a+<\lambda,e>]-1},\ t\phi(H_\lambda^{(tr)}(x))\rangle - t^{a+<\lambda,e>-1}\langle r_+^{[a+<\lambda,e>]-1},\ t\phi(H_\lambda^{(tr)}(x))\rangle = 0,$$

daí por hipótese, segue $< u, \psi >= 0$, ou seja, vale (a). Completando assim a demostração do lema. ■

Corolário 5.3.2. *O operador* $R_{a,\lambda} : C_c^\infty(K) \to C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ *definido por*

$$(R_{a,\lambda}\phi)(x) =< t_+^{a+<\lambda,e>-1}, \phi(H_\lambda^t(x)) >,\ 0 \neq x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.3.1}$$

Demonstração:

A continuidade de $R_{a,\lambda}$ segue analogamente ao Lema 2.3.5. ■

Capítulo 6

Extensões para $\mathbb{R}^n$ de Soluções Homogêneas de $L_{\lambda,a} = \sum \lambda_i x_i \partial_{x_i} - a$ em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ - Parte I

6.1 Introdução

Neste capítulo mostraremos que sob certas condições em a e λ, soluções homogêneas de $L_{\lambda,a}$ em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ se estendem para uma solução em $\mathbb{R}^n$. Tal resultado estende o Teorema 3.2.1 do Capítulo 3.

6.2 Extensões de Soluções Homogêneas quando a ordem não pertencer a $\mathbb{Z}_-$

O próximo resultado estende o Teorema 3.2.1 do Capítulo 3. Neste capítulo consideraremos a um não inteiro negativo.

Teorema 6.2.1. *Se* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ *é solução de* $Lu = au$, *e* a *não é um inteiro* $\leq - < \lambda, e >$, *então* u *têm uma única extensão* $\dot{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *a qual satisfaz* $L\dot{u} = a\dot{u}$, *sendo* $L = \sum \lambda_i x_i \partial_{x_i}$.

Demonstração:

(Unicidade) Mostraremos a unicidade da extensão de u. Sejam $\dot{u}, \tilde{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ distribuições que satisfazem $L\dot{u} = a\dot{u}$ e $L\tilde{u} = a\tilde{u}$ e são extensões de $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$. Como $\dot{u}|_{\mathbb{R}^n \backslash \{0\}} = \tilde{u}|_{\mathbb{R}^n \backslash \{0\}} = u$, então para todo $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ temos que: $(\tilde{u} - \dot{u})(\phi) = \tilde{u}(\phi) - \dot{u}(\phi) = u(\phi) - u(\phi) = 0 \ \ \forall \ \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$.

Suponhamos que $S(\dot{u} - \tilde{u}) = \{0\}$. Logo pelo Teorema 1.4.7, $\dot{u} - \tilde{u}$ é uma combinação linear de derivadas de δ_0, ou seja existem c_α tais que $\tilde{u} = \dot{u} + \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha \delta_0^\alpha$.

Notemos que

$$v = \dot{u} - \tilde{u} = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha \partial^a \delta_0 = \sum_{j=0}^{k} \underbrace{\left(\sum_{|\alpha| = j} c_\alpha \partial^\alpha \delta_0 \right)}_{u_j}.$$

Com o mesmo processo do Teorema 3.2.1 mostra-se que $c_\alpha = 0, \ \forall \alpha$. Logo, $\dot{u} = \tilde{u}$.

Observemos que pela regra da cadeia temos que $\partial^\alpha (\phi \circ H_\lambda^t(x)) = t^{<\alpha, \lambda>} (\partial^\alpha \phi)(H_\lambda^t(x))$.
Notemos que $\partial^\alpha \delta_0$ é homogênea de grau $- \langle \lambda, e \rangle - < \alpha, \lambda >$. De fato,

$$\begin{aligned}
\langle \partial^\alpha \delta_0, \phi_{t_\lambda} \rangle &= \left\langle (\partial^\alpha \delta_0), t^{\langle \lambda, e \rangle} \phi(H_\lambda^t(x)) \right\rangle \\
&= t^{\langle \lambda, e \rangle} \left\langle (\partial^\alpha \delta_0), \phi(H_\lambda^t(x)) \right\rangle \\
&= t^{\langle \lambda, e \rangle} (-1)^{|\alpha|} \left\langle \delta_0(x), \partial^\alpha (\phi(H_\lambda^t(x)) \right\rangle \\
&= t^{\langle \lambda, e \rangle} (-1)^{|\alpha|} \left\langle \delta_0(x), t^{<a, \lambda>} (\partial^\alpha \phi)(H_\lambda^t(x)) \right\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|} t^{\langle \lambda, e \rangle + <a, \lambda>} \left\langle \delta_0(x), (\partial^\alpha \phi)(H_\lambda^t(x)) \right\rangle \\
&= t^{\langle \lambda, e \rangle + <\alpha, \lambda>} (-1)^{|\alpha|} \langle \delta_0, \partial^\alpha \phi \rangle \\
&= t^{\langle \lambda, e \rangle + <\alpha, \lambda>} \langle \partial^\alpha \delta_0, \phi \rangle .
\end{aligned}$$

Logo, $< \partial^\alpha \delta_0, \phi >= t^{-\langle \lambda, e \rangle - <a, \lambda>} < \partial^\alpha \delta_0, \phi_t >, \ \forall \ \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \ $ e $\ t > 0$.

(Existência) Dividiremos a existência da extensão de u em 5 passos.

(Passo 1) Se u é uma função em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ então, podemos escrever

$$< u, \phi >= \int_{|w|=1} \int_0^\infty u(w) r^{a+\langle \lambda, e\rangle -1} \phi(H_\lambda^r(w)) dr dw$$

Como a não é um inteiro negativo $\leq - < \lambda, e >$, isto sugere, que para $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ arbitrário, podemos considerar:

$$(R_{a,\lambda}\phi)(x) = \left\langle t_+^{a+\langle \lambda, e\rangle -1}, \phi(H_\lambda^t(x)) \right\rangle, \text{ com } 0 \neq x \in \mathbb{R}^n,$$

a qual podemos afirmar que $R_{a,\lambda}$ é um operador contínuo de $C_c^\infty(K)$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ para todo $K \subset\subset \mathbb{R}^n$.

Observemos que como $t_+^{a+<\lambda,e>-1}$ é homogênea de grau $a+ < \lambda, e > -1$, segue que $R_{a,\lambda}\phi$ é uma função homogênea de grau $-a - \langle \lambda, e \rangle$. De fato,

$$\begin{aligned}
(R_{a,\lambda}\phi)(H_\lambda^l(x)) &= \left\langle t_+^{a+\langle \lambda, e\rangle -1}, \phi(H_\lambda^{tl}(x)) \right\rangle \\
&= ll^{-1} \left\langle t_+^{a+\langle \lambda, e\rangle -1}, \phi(H_\lambda^{tl}(x)) \right\rangle \\
&= l^{-1} \left\langle t_+^{a+\langle \lambda, e\rangle -1}, l\phi(H_\lambda^{tl}(x)) \right\rangle \quad \text{com } \psi_x^\lambda(tl) = \phi(H_\lambda^{tl}(x)) \\
&= l^{-1} \left\langle t_+^{a+\langle \lambda, e\rangle -1}, l\psi_x^\lambda(tl) \right\rangle \\
&= l^{-1} \left\langle t_+^{a+\langle \lambda, e\rangle -1}, (\psi_x^\lambda)_l(t) \right\rangle \\
&= l^{-1} l^{-a-\langle \lambda, e\rangle +1} \left\langle t_+^{a+\langle \lambda, e\rangle -1}, \psi_x^\lambda(t) \right\rangle \quad \text{usando homogeneidade de } t_+^{a+\langle \lambda, e\rangle -1} \\
&= l^{-a-\langle \lambda, e\rangle} \left\langle t_+^{a+\langle \lambda, e\rangle -1}, \phi(H_\lambda^t(x)) \right\rangle \\
&= l^{-a-\langle \lambda, e\rangle} (R_{a,\lambda}\phi)(x).
\end{aligned}$$

(Passo 2) Agora tomemos $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ como no Lema 5.2.2. Observemos que, $\psi R_{a,\lambda}\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ e $R_{a,\lambda}(\psi(R_{a,\lambda}\phi)(x)) = (R_{a,\lambda}\phi)(x)$. De fato,

$$\begin{aligned} R_{a,\lambda}(\psi(R_{a,\lambda}\phi)(x)) &= \left\langle t_+^{a+\langle\lambda,e\rangle-1}, (\psi R_{a,\lambda}\phi)(H^t_{\langle\lambda,e\rangle}(x))\right\rangle \\ &= \int_0^\infty t_+^{a+\langle\lambda,e\rangle-1}\psi(H^t_\lambda(x))R_{a,\lambda}\phi(H^t_\lambda(x))dt \\ &= \int_0^\infty t_+^{a+\langle\lambda,e\rangle-1}\psi(H^t_\lambda(x))t^{-a-\langle\lambda,e\rangle}(R_{a,\lambda}\phi)(x)dt \\ &= (R_{a,\lambda}\phi)(x)\int_0^\infty \frac{\psi(H^t_\lambda(x))}{t}dt \\ &= (R_{a,\lambda}\phi)(x). \end{aligned}$$

Mostraremos que dado u homogênea de grau a(não inteiro negativo $\leq -<\lambda, e>$) satisfazendo as hipóteses do teorema, teremos pelo item (c) do Lema 5.3.1 que $\langle u, \psi R_{a,\lambda}\phi\rangle$ é sempre independente da escolha de ψ. De fato, dados, $\psi_1, \psi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r^{a+\langle\lambda,e\rangle-1}(\psi_1-\psi_2)(H^r_\lambda(x))R_{a,\lambda}\phi(H^r_\lambda(x))dr &= \int_0^\infty r^{a+\langle\lambda,e\rangle-1}(\psi_1-\psi_2)(H^r_\lambda(x))R_{a,\lambda}\phi(x)r^{-a-\langle\lambda,e\rangle}dr \\ &= R_{a,\lambda}\phi(x)\int_0^\infty r^{-1}(\psi_1-\psi_2)(H^r_\lambda(x))dr. \end{aligned}$$

Portanto, $\langle u, \psi_1 R_{a,\lambda}\phi - \psi_2 R_{a,\lambda}\phi\rangle = 0 \Rightarrow \langle u, \psi_1 R_{a,\lambda}\phi\rangle = \left\langle u, \psi_2 R_{\langle a,\lambda\rangle}\phi\right\rangle$.

(Passo 3) Também é válido que $\langle u, \psi R_{a,\lambda}\phi\rangle = \langle u, \phi\rangle$, se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$. De fato, pelo passo 2, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r^{a+\langle e,\lambda\rangle-1}(\psi R_{a,\lambda}\phi-\phi)(H^r_\lambda(x))dr &= \int_0^\infty r^{a+\langle e,\lambda\rangle-1}\psi R_{a,\lambda}\phi(H^r_\lambda(x))dr \\ &- \int_0^\infty r^{a+\langle e,\lambda\rangle-1}\phi(H^r_\lambda(x))dr \\ &= R_{a,\lambda}\phi(x) - R_{a,\lambda}\phi(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

O que mostra a afirmação.

(Passo 4) Do passo 3 é natural definir $\dot{u}$ como:

$$\langle \dot{u}, \phi\rangle = \langle u, \psi R_{a,\lambda}\phi\rangle \qquad (6.2.1)$$

para todo $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, sendo $\dot{u}$ uma distribuição em $\mathbb{R}^n$ que estende a u. De fato, $\dot{u}$ é a extensão de u, pois para $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, temos $< \dot{u}, \phi > \, = \, < u, \psi R_{a,\lambda}\phi > = < u, \phi >$. E mais, $\dot{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, se K é um compacto de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tal que $S(\psi) \subset Int(K)$, então:

$$
\begin{aligned}
| < \dot{u}, \phi > | &= | < u, \psi R_{a,\lambda}\phi > | \\
&\leq C \sum_{|\alpha| \leq k} ||\partial^\alpha(\psi R_{a,\lambda}\phi)||_{\infty,K} \\
&= C_1 \sum_{|\gamma+\beta| \leq k} ||(\partial^\beta\psi) R_{a,\lambda}(\partial^\gamma\phi)||_{\infty,K} \\
&= C_1 \sum_{|\gamma+\beta| \leq k} ||(\partial^\beta\psi)||_{\infty,K} \; ||R_{a,\lambda}(\partial^\gamma\phi)||_{\infty,K} \\
&\leq C_2 \sum_{|\gamma| \leq k} ||R_{a,\lambda}(\partial^\gamma\phi)||_\infty \\
&\leq C_3 p_j(\partial^\alpha\phi) \\
&\leq C_3 p_{j'}(\phi) \;\; \text{para} \;\; j = j' + |\alpha|.
\end{aligned}
$$

(Passo 5) Mostraremos que a extensão de $\dot{u}$ de u é homogênea de grau a não inteiro. Para isso observemos primeiramente que:

$$
\begin{aligned}
(R_{a,\lambda}\phi_{r,\lambda})(x) &= < t_+^{a+\langle\lambda,e\rangle-1}, \phi_{r,\lambda}(H_\lambda^t(x)) > \\
&= < t_+^{a+\langle\lambda,e\rangle-1}, r^{\langle\lambda,e\rangle}\phi(H_\lambda^{rt}(x)) > \\
&= r^{\langle\lambda,e\rangle} < t_+^{a+\langle\lambda,e\rangle-1}, \phi(H_\lambda^{rt}(x)) > \\
&= r^{\langle\lambda,e\rangle} r^{-1} < t_+^{a+\langle\lambda,e\rangle-1}, r\phi(H_\lambda^{rt}(x)) > \\
&= r^{\langle\lambda,e\rangle} r^{-1} < t_+^{a+\langle\lambda,e\rangle-1}, r\varphi_x^\lambda(rt) > \\
&= r^{\langle\lambda,e\rangle} r^{-1} < t_+^{a+\langle\lambda,e\rangle-1}, (\varphi_x^\lambda)_r(t) > \\
&= r^{\langle\lambda,e\rangle} r^{-a-\langle\lambda,e\rangle+1} < t_+^{a+\langle\lambda,e\rangle-1}, \varphi_x^\lambda(t) > \\
&= r^{-a} < t_+^{a+\langle\lambda,e\rangle-1}, \phi(H_\lambda^t(x)) > \\
&= r^{-a} R_{a,\lambda}\phi(x).
\end{aligned}
$$

Daí, pela igualdade (2.2.10) segue que:

$$< \dot{u}, \phi_t >=< u, \psi R_{a,\lambda}\phi_{t,\lambda} >= t^{-a} < u, \psi R_{a,\lambda}\phi >= t^{-a} < \dot{u}, \phi >,$$

ou seja, $< \dot{u}, \phi_{t,\lambda} >= t^{-a} < \dot{u}, \phi >$.

(Passo 6) - (Polinômio Homogêneo) Finalmente se $P(x)$ é um polinômio homogêneo, ou seja $P(H^t_\lambda(x)) = t^m P(x)$, então mostraremos que o grau de $(Pu)^{\cdot} = P\dot{u}$ é ($a +$ grau P) e que $(Pu)^{\cdot} = P\dot{u}$. De fato, pelos resultados já provados neste teorema podemos garantir que existe uma extensão homogênea $(Pu)^{\cdot}$ de Pu. Seja $m =$ grau de P. Daí

$$\begin{aligned}
< Pu, \phi > &= < u, P\phi > \\
&= t^a < u, (P\phi)_{t,\lambda} > \\
&= t^a < u, t^{<\lambda,e>}(P\phi)(H^t_\lambda(x)) > \\
&= t^a < u, t^{<\lambda,e>} t^m P(x)\phi(H^t_\lambda(x)) \\
&= t^{a+m} < Pu, t^{<\lambda,e>}\phi > \\
&= t^{a+m} < Pu, \phi_{t,\lambda} > .
\end{aligned}$$

Assim, temos que o grau de Pu é $a+m$. Como o grau de $\dot{u}$ coincide com o grau da extensão de u, então o grau de $(\dot{Pu}) = P\dot{u}$ é igual a $a + m$.
Observamos que $P\dot{u}$ é uma extensão de Pu. De fato, para $\phi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, temos que:

$$< P\dot{u}, \phi >=< \dot{u}, P\phi >=< u, P\phi >=< Pu, \phi > .$$

Como $(Pu)^{\cdot}$ é uma extensão de Pu, então $S((Pu)^{\cdot} - P\dot{u}) \subseteq \{0\}$ e, analogamente como mostrado no início desta demonstração, obtemos que $(Pu)^{\cdot} = P\dot{u}$. Também analogamente segue que $(\partial_j u)^{\cdot} = \partial_j \dot{u}$. ■

Capítulo 7

Extensões para $\mathbb{R}^n$ de Soluções Homogêneas de $L_{\lambda,a} = \sum \lambda_i x_i \partial_{x_i} - a$ em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ - Parte II

7.1 Introdução

Neste capítulo, queremos caracterizar extensões de soluções homogêneas de distribuições de grau $a < - < \lambda, e >$. Apresentaremos condições necessárias e suficientes para a, λ excluídos no Capítulo anterior para uma solução homogênea de $L_{\lambda,a}$ em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ se estende para um solução homogênea em $\mathbb{R}^n$. Tal resultado é análogo ao Teorema 4.2.1.

7.2 Extensões de Soluções Homogênas quando a ordem pertence a $\mathbb{Z}_-$

O próximo resultado estende o Teorema 4.2.1 do Capítulo 4. Neste capítulo consideraremos a um inteiro negativo.

Teorema 7.2.1. *Se* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ *satisfaz* $Lu = au$, *com inteiro* $a = -<\lambda, e> -k \leq -<\lambda, e>$, *então:*

(1) u *tem uma extensão* $\dot{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *satisfazendo*

$$< \dot{u}, \phi >= t^{-k-<\lambda,e>} < \dot{u}, \phi_{t,\lambda} > + \log\, t \sum_{|\alpha|=k} < u, x^{\alpha}\psi > \frac{\partial^{\alpha}\phi(0)}{\alpha!}, \qquad (7.2.1)$$

para $t > 0$.

(2) Duas quaisquer extensões de u *satisfazendo* (7.2.1) *diferem por uma combinação linear de derivadas de ordem* k *de* δ_0.

(3) Uma extensão que satisfaz $L\dot{u} = a\dot{u}$ *existe se, e somente se,*

$$< u, x^{\alpha}\psi >= 0 \qquad (7.2.2)$$

para $< \lambda, \alpha >= k$. *Mostramos que* (7.2.2) *independe de* ψ.

(4) Uma escolha consistente de extensão pode ser feita de forma tal que $(Pu)^{\cdot} = P\dot{u}$ *para todo polinômio* P λ*-homogêneo.*

(5) u *tem paridade oposta a* k, *isto é,* $< u, \phi >= (-1)^{k+1} < u, \phi(H_{\lambda}^{(-1)}(x)) >$ *se, e somente se*

$$< u, \phi >= (\text{sgn}t)t^{a} < u, \phi_{t,\lambda} > \qquad (7.2.3)$$

para $\phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ *e* $t \neq 0$.

(6) Se u *satisfaz* (7.2.3) *e* $Lu = au$, *então* (7.2.2) *vale. E mais existe uma única extensão* $\dot{u}$ *satisfazendo* (7.2.3) *para toda* $\phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. *Além disso* $\dot{u}$ *é dada por*

$$\langle \dot{u}, \phi \rangle = \Sigma \left(\frac{< \underline{t}^{-k-1}, \phi(H_{\lambda}^{t}(.)) >}{2} u \right), \qquad (7.2.4)$$

sendo $\underline{t}^{-k} = \frac{(t+i0)^{-k} + (t-i0)^{-k}}{2} = t_{+}^{-k} + (-1)^{k}\, t_{-}^{-k}$

Demonstração de (1)

Motivada pela relação (6.2.1) definimos uma extensão $\dot{u}$ de u por $< \dot{u}, \psi R_{a,\lambda}\phi >$. Primeiramente vejamos que,

$$R_{-<\lambda,e>-k,\lambda}\ \phi(x) \ = \ t^{-<\lambda,e>-k}\ R_{-<\lambda,e>-k,\lambda}\phi_{t,\lambda}(x) + logt\sum_{|\alpha|=k} x^\alpha\psi\frac{\partial^\alpha\phi(0)}{\alpha!}.$$

$$\begin{aligned}
R_{-<\lambda,e>-k,\lambda}\phi_{t,\lambda}(x) &= < r_+^{-k-1}, H^t_{<\lambda,e>}\phi(H_\lambda^{(tr)}(x)) > \\
&= t^{<\lambda,e>} < r_+^{-k-1}, \phi(H_\lambda^{(tr)}(x)) > \\
&= t^{-1}t^{<\lambda,e>} < r_+^{-k-1}, t\ \phi(H_\lambda^{(tr)}(x)) > \\
&= t^{-1}t^{<\lambda,e>} < r_+^{-k-1}, t\ \phi(H_\lambda^{(tr)}(x)) > \\
&= t^{<\lambda,e>-1} < r_+^{-k-1}, t\ \varphi_x^\lambda(ts) > \\
&= t^{<\lambda,e>-1} < r_+^{-k-1}, (\varphi_x^\lambda)_t(s) > \\
&= t^{<\lambda,e>-1}t^{k+1}\left(< r_+^{-k-1}, (\varphi_x^\lambda)(s) > -logt\ \frac{\partial_r^k(\varphi_x^\lambda)(s)}{k!}\bigg|_{r=0}\right) \\
&= t^{<\lambda,e>+k}\left(< r_+^{-k-1}, \phi(H_\lambda^t(x)) > -logt\ \frac{\partial_r^k\phi(H_\lambda^t)}{k!}\bigg|_{r=0}\right) \\
&= t^{<\lambda,e>+k}(R_{-<\lambda,e>-k,\lambda}\phi(x)) - logt\Phi_k(x).
\end{aligned}$$

aqui Φ é a parte homogênea de grau k na expansão de Taylor de ϕ. Assim,

$$\begin{aligned}
< \dot{u}, \phi > &= \left\langle u, t^{-<\lambda,e>-k}\psi\left[\ R_{-<\lambda,e>-k,\lambda}\phi_{t,\lambda} + logt\sum_{|\alpha|=k} x^\alpha\frac{\partial^\alpha\phi(0)}{\alpha!}\right]\right\rangle \\
&= t^{-<\lambda,e>-k} < u, \psi R_{-<\lambda,e>-k,\lambda}\phi_{t,\lambda} > + logt\left\langle u, \sum_{|\alpha|=k} x^\alpha\psi\frac{\partial^\alpha\phi(0)}{\alpha!}\right\rangle \\
&= t^{-k-<\lambda,e>} < \dot{u}, \phi_{t,\lambda} > + logt\sum_{|\alpha|=k}\left\langle u, x^\alpha\psi\frac{\partial^\alpha\phi(0)}{\alpha!}\right\rangle \\
&= t^{-<\lambda,e>-n} < \dot{u}, \phi_{t,\lambda} > + logt\sum_{|\alpha|=k}\langle u, x^\alpha\psi\rangle\ \frac{\partial^\alpha\phi(0)}{\alpha!}.
\end{aligned}$$

Observação: (7.2.1) é análogo a (2.2.11). Além disso tal extensão pode depender da escolha da ψ.

Demonstração de (2)

Pelo Lema 1.4.7, qualquer outra extensão de u é da forma $U = \dot{u} + \sum\limits_{|\alpha|\leq l} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0$.

Substituindo $\dot{u}$ por $U - \sum\limits_{|\alpha|\leq l} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0$ em (7.2.1) o termo do logaritmo não muda, mas introduz-se um outro termo, à saber:

$$\sum_{|\alpha|\leq l} (1 - t^{<\alpha,\lambda>-k}) a_\alpha \partial^\alpha \delta_0. \tag{7.2.5}$$

De fato, temos:

$$\left\langle U - \sum_{|\alpha|\leq l} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0, \phi \right\rangle = t^{-k-<\lambda,e>} \left\langle U - \sum_{|\alpha|\leq l} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0, \phi_{t,\lambda} \right\rangle + logt \sum_{|\alpha|=k} \langle u, x^\alpha \psi \rangle \frac{\partial^\alpha \phi(0)}{\alpha!}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} -\left\langle \sum a_\alpha \partial^\alpha \delta_0, \phi_{t,\lambda} \right\rangle &= -\left\langle \sum a_\alpha \partial^\alpha \delta_0, H^t_{<\lambda,e>}(H^t_\lambda(x)) \right\rangle \\ &= -\sum a_\alpha (-1)^{|\alpha|} \left\langle \delta_0, t^{<\lambda,e>+<\alpha,\lambda>} (\partial^\alpha \phi)(H^t_\lambda(x)) \right\rangle \\ &= -\sum a_\alpha t^{<e,\lambda>+<\alpha,\lambda>} \left\langle \partial^\alpha \delta_0, \phi(H^t_\lambda(x)) \right\rangle. \end{aligned}$$

Daí,

$$\langle U, \phi \rangle = t^{-<\lambda,e>-k} \langle U, \phi_{t,\lambda} \rangle + \left\langle \sum (1 - t^{-<\alpha,\lambda>-k}) a_\alpha \partial^\alpha \delta_0, \phi \right\rangle + logt \sum \langle u, x^\alpha \psi \rangle \frac{\partial^\alpha \phi(0)}{\alpha!}.$$

Demonstração de (3)

Claramente existe uma extensão homogênea se, e somente se,

$$< u, x^\alpha \psi >= 0 \;\; \text{quando,} \quad < \alpha, \lambda >= k$$

Pois se $< u, x^\alpha \psi >= 0$ o último termo de (4.2.1) se anula logo tal extensão é homogênea. Reciprocamente, se $\dot{u}$ é homogênea e como $log\ t \neq 0$, temos que $\sum \langle u, x^\alpha \psi \rangle \frac{\partial^a \phi(0)}{\alpha!} = 0, \ \forall \phi$. Assim, $< u, x^\alpha \psi >= 0$.

Afirmação: Reescreveremos (4.2.2) como $\Sigma(x^\alpha u) = 0$ quando $< \alpha, \lambda > +$grau $u = - < \lambda, e >$.

Observe que se v é homogênea de grau $- < \lambda, e >$ em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, então temos que $< v, \psi >$ independe da escolha de ψ. De fato, dados $\psi_1, \psi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, temos que

$$\int_0^\infty r^{a+<\lambda,e>-1}(\psi_1 - \psi_2)(H_\lambda^r(x))dr = \int_0^\infty r^{-1}(\psi_1 - \psi_2)(H_t^r(x))dr \equiv 0$$

Assim pelo Lema 2.3.3 $< v, (\psi_1 - \psi_2) >= 0$.
Observemos que (4.2.2), $x^\alpha u$ é homogênea de grau $- < \lambda, e >$. De fato,

$$\begin{aligned}
< x^\alpha u, \psi > &= < u, x^\alpha \psi >, \quad \text{por (2.3.2);} \\
&= t^a < u, (x^\alpha \psi)_{t,\lambda} > \\
&= t^{a+<\lambda,e>} < u, (H_\lambda^t(x))^\alpha \psi(H_\lambda^t(x)) > \\
&= t^{a+<\lambda,e>} < u, t^{<\lambda,\alpha>} x^\alpha \psi(H_\lambda^t(x)) > \\
&= t^{a+<\lambda,e>+<\lambda,\alpha>} < u, x^\alpha \psi(H_\lambda^t(x)) >, \ < \lambda, \alpha >= - < \lambda, e > -a \\
&= < x^\alpha u, \psi(H_\lambda^t(x)) > \\
&= t^{-<\lambda,e>} < x^\alpha u, t^{<\lambda,e>} \psi(H_\lambda^t(x)) > \\
&= t^{-<\lambda,e>} < x^\alpha u, \psi_{t,\lambda} > .
\end{aligned}$$

Tomemos $v = x^\alpha u$ e reescreveremos a igualdade (4.2.2), da seguinte forma:

$$\Sigma(x^\alpha u) = 0 \ \text{ quando } \ < \lambda, \alpha > +\text{grau } u = - < \lambda, e >, \tag{7.2.6}$$

onde $S(v) =< v, \psi >$ para uma ψ fixa.
Também reescrevermos (4.2.1) como

$$< \dot{u}, \phi >= t^{-k-<\lambda,e>} < \dot{u}, \phi_{t,\lambda} > +logt \sum_{|\alpha|=k} S(x^\alpha u) \frac{\partial^\alpha \phi(0)}{\alpha!}. \tag{7.2.7}$$

Observação: Notemos que, se u é homogênea de grau a, e a não é inteiro menor ou igual que $-n$, então (6.2.1), pode ser escrito na forma,

$$\begin{aligned}
< \dot{u}, \phi > &= < u, \psi R_{a,\lambda}\phi > \\
&= < (R_{a,\lambda}\phi)u, \psi > \\
&= \Sigma((R_{a,\lambda}\phi)u) \\
&= \Sigma(< t_+^{a+<\lambda,e>-1}u, \phi(t.) >), \text{ onde } \ \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),
\end{aligned}$$

pois, $(R_{a,\lambda}\phi)u$ é então homogênea de grau $a- < \lambda, e > -a = - < \lambda, e >$.

Entretanto quando $a = - < \lambda, e > -k$ é inteiro $\leq - < \lambda, e >$ então (6.2.1), depende da escolha de ψ.

Demonstração de (4)

Se P é um polinômio homogêneo de grau m, fixada $\dot{u}$ uma tal extensão temos que; $(Pu)^{\cdot} = P\dot{u}$. De fato,

$$< P\dot{u}, \phi >=< \dot{u}, P\phi >=< u, \psi R_{-<\lambda,e>-k}P\phi >$$

Mas,

$$\begin{aligned}
R_{-<\lambda,e>-k}P\phi &= < t_+^{-k-1}, P(H_\lambda^t(x))\phi(H_\lambda^t(x)) > \\
&= < t_+^{-k-1+m}P(x), \phi(H_\lambda^t(x)) > \\
&= P(x) < t_+^{m-k-1}, \phi(H_\lambda^t(x)) > \\
&= PR_{m-<\lambda,e>-k}\phi.
\end{aligned}$$

Daí,

$$< P\dot{u}, \phi >=< u, \psi PR_{-<\lambda,e>-k+m}\phi >=< Pu, \psi R_{-<\lambda,e>-k+m}\phi >=< (Pu)^{\cdot}, \phi > .$$

Demonstração de (5)

Suponhamos que u tenha paridade oposta. Se $t > 0$, (7.2.3) é válida, pois $< u, \phi >= t^a < u, \phi_{t,\lambda} >$. Agora se $t < 0$, também concluímos que (7.2.3) é válida, pois

$$
\begin{aligned}
< u, \phi > &= (-t)^a < u, \phi_{(-t),\lambda} > \\
&= (-t)^a < u, (-t)^{<\lambda,e>} \phi(H^{(-t)_\lambda}(x)) > \\
&= (-t)^{a+<\lambda,e>} < u, \phi(H_\lambda^{(-t)}(x)) > \\
&= (-t)^{a+<\lambda,e>}(-1)^{k+1} < u, \phi(H_\lambda^{(t)}(x)) > \\
&= (-t)^{<\lambda,e>}(-t)^a(-1)^{1-a-<\lambda,e>} < u, \phi(H_\lambda^{(t)}(x)) > \\
&= (-t)^{<\lambda,e>}(-t)^a(-1)^{1-a}(-1)^{-<\lambda,e>} < u, \phi(H_\lambda^{(t)}(x)) > \\
&= (-t)^{<\lambda,e>}(-t)^a(-1)^{1-a}(-1)^{<\lambda,e>} < u, \phi(H_\lambda^{(t)}(x)) > \\
&= (-t)^a(-1)^{1-a} t^{<\lambda,e>} < u, \phi(H_\lambda^{(t)}(x)) > \\
&= (-t)^a(-1)^{1-a} < u, t^{<\lambda,e>} \phi(H_\lambda^{(t)}(x)) > \\
&= (-t)^a(-1)^{1-a} < u, \phi_{t,\lambda} > \\
&= (-t)^a(-1)^1(-1)^{-a} < u, \phi_{t,\lambda} > \\
&= (-t)^a(-1)(-1)^a < u, \phi_{t,\lambda} > \\
&= (-1)t^a < u, \phi_{t,\lambda} > \\
&= (\mathrm{sgn} t)t^a < u, \phi_{t,\lambda} > .
\end{aligned}
$$

Reciprocamente, se (7.2.3) é válida, é suficiente tomar $t = -1$, e desta forma temos que:

$$
\begin{aligned}
< u, \phi > &= (\mathrm{sgn} t)t^a < u, \phi_{t,\lambda} > \\
&= (-1)(-1)^a < u, \phi_{-1,\lambda} > \\
&= (-1)(-1)^a < u, (-1)^n \phi(H_t^{(-1)}(x)) > \\
&= (-1)(-1)^{a+<\lambda,e>} < u, \phi(H_t^{(-1)}(x)) > \\
&= (-1)^{-k+1} < u, \phi(H_t^{(-1)}(x)) > \\
&= (-1)^{k+1} < u, \phi(H_t^{(-1)}(x)) > .
\end{aligned}
$$

Demonstração de (6)

A igualdade (7.2.3) sempre implica em (7.2.2). De fato, se ψ é par, ou seja $\psi(H^1_\lambda(x)) = \psi(H^{-1}_\lambda(x))$ e se $\phi(x) = x^\alpha \psi(x)$, com $|\alpha| = k$ e ψ satisfazendo (5.2.1), então para $t = -1$, temos,

$$\begin{aligned}
< u, \phi > &= (-1)(-1)^a < u, \phi_{-1_\lambda} > \\
&= (-1)(-1)^a < u, (-1)^{<\lambda,e>} \phi(H^{-1}_\lambda(x)) > \\
&= (-1)(-1)^a < u, (-1)^{<\lambda,e>} [(-x)^\alpha \psi](H^{-1}_\lambda(x)) > \\
&= (-1)(-1)^a < u, (-1)^{<\lambda,e>+<\lambda,\alpha>} x^\alpha \psi(x) > \\
&= (-1)(-1)^a < u, (-1)^{<\lambda,e>+k} \phi(x) > \\
&= (-1)(-1)^a < u, (-1)^{-a} \phi(x) > \\
&= (-1) < u, \phi > .
\end{aligned}$$

Portanto $< u, \phi >= 0$. Logo u possui uma extensão homogênea, pois $< u, x^\alpha \psi >= 0$. Mostraremos que existe uma uma única extensão homogênea $\dot{u}$ satisfazendo (7.2.3) para $\phi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ e é, dada por:

$$< \dot{u}, \phi >= \Sigma \left(\frac{< \underline{t}^{a+<\lambda,e>-1}, \phi(H^t_\lambda(.)) >}{2} u \right), \ \forall \ \phi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n).$$

Primeiramente, mostraremos a unicidade de tal extensão homogênea $\dot{u}$. Notemos que

$$< \partial^\alpha \delta, \phi >= t^{-<\lambda,e>-k} < \partial^\alpha \delta, \phi_{t,\lambda} >,$$

para todo $t \neq 0$, onde $< \lambda, \alpha >= k$. De fato,

$$
\begin{aligned}
t^{-k-<\lambda,e>} < \partial^\alpha \delta, \phi_{t,\lambda} > &= t^{-k-<\lambda,e>} < \partial^\alpha \delta, t^{<\lambda,e>} \phi(H_\lambda^t(x)) > \\
&= t^{-k} < \partial^\alpha \delta, \phi(H_\lambda^t(x)) > \\
&= t^{-k}(-1)^{|\alpha|} < \delta, \partial^\alpha(\phi(H_\lambda^t(x))) > \\
&= t^{-k}(-1)^{|\alpha|} < \delta, t^{<\lambda,\alpha>}(\partial^\alpha \phi)(tx) > \\
&= (-1)^{|\alpha|}(\partial^\alpha \phi)(0) \\
&= (-1)^{|\alpha|} < \delta, \partial^\alpha \phi > \\
&= < \partial^\alpha \delta, \phi > .
\end{aligned}
$$

De (7.2.5) e pela igualdade acima, segue que:

$$
\begin{aligned}
< U - \dot{u}, \phi > &= t^{-<\lambda,e>-k} < U - \dot{u}, \phi_{t,\lambda} > \\
&= t^{-<\lambda,e>-k} < \sum a_\alpha \partial^\alpha \delta, \phi_{t,\lambda} > \\
&= \sum a_\alpha t^{-<\lambda,e>-k} < \partial^\alpha \delta, \phi_{t,\lambda} > \\
&= \sum a_\alpha < \partial^\alpha \delta, \phi > .
\end{aligned}
$$

para $t > 0$. Também temos, para $t < 0$ que:

$$
\begin{aligned}
< U - \dot{u}, \phi > &= (sgn\ t) t^{-k-<\lambda,e>} < U - \dot{u}, \phi_{t,\lambda} > \\
&= (sgn\ t) t^{-k} < \sum a_\alpha \partial^\alpha \delta, \phi(H_\lambda^t(x)) > \\
&= (sgn\ t) \sum a_\alpha t^{-k}(-1)^{|\alpha|} < \delta, \partial^\alpha(\phi(H_\lambda^t(x))) > \\
&= (sgn\ t) \sum a_\alpha t^{-k}(-1)^{|\alpha|} < \delta, t^{<\lambda,\alpha>}(\partial^\alpha \phi)(H_\lambda^t(x)) > \\
&= (sgn\ t) \sum a_\alpha (-1)^{|\alpha|}(\partial^\alpha \phi)(0) \\
&= (sgn\ t) \sum a_\alpha (-1)^{|\alpha|} < \delta, \partial^\alpha \phi > \\
&= (sgn\ t) \sum a_\alpha < \partial^\alpha \delta, \phi > .
\end{aligned}
$$

Daí, como $U - \dot{u} = \sum a_\alpha \partial^\alpha \delta$ e $U - \dot{u} = -\sum a_\alpha \partial^\alpha \delta$, então $\sum a_\alpha \partial^\alpha \delta = 0$ o que mostra pela observação do Lema 1.4.7 que $a_\alpha = 0$.

Agora mostraremos a existência.

Lembrando que $a+ < \lambda, e >= -k$, calculemos,

$$\begin{aligned}
< \underline{t}^{-k-1}, \phi(H_\lambda^t(.)) > &= < t_+^{-k-1}, \phi(t.) > +(-1)^{-k-1} < t_-^{-k-1}, \phi(H_\lambda^t(.)) > \\
&= < t_+^{-k-1}, \phi(H_\lambda^t(.)) > +(-1)^{k+1} < t_+^{-k-1}, \phi(H_\lambda^{(-t)}(.)) > \\
&= < t_+^{-k-1}, \phi(H_\lambda^t(.)) > +(-1)^{k-1} < t_+^{-k-1}, \phi(H_\lambda^{(-t)}(.)) > .
\end{aligned}$$

Se U é uma extensão de u definida em (3.2.1), então por (7.2.4) obtemos que

$$2 < \dot{u}, \phi >=< U, \phi > +(-1)^{<\lambda,e>+k-1} < U, \phi_{-1_\lambda} >, \tag{7.2.8}$$

com $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. De fato,

$$\begin{aligned}
2 < \dot{u}, \phi > &= \Sigma(< \underline{t}^{-k-1}, \phi(H_\lambda^t(.)) > u) \\
&= \Sigma(< t_+^{-k-1}, \phi(H_\lambda^t(.)) + (-1)^{k-1}\phi(H_\lambda^{(-t)}(.)) > u) \\
&= \Sigma(< t_+^{-k-1}, \phi(H_\lambda^t(.)) > u) + (-1)^{k-1}S(< t_+^{-k-1}, \phi(H_\lambda^{(-t)}(.)) > u) \\
&= \Sigma(R_{-<\lambda,e>-k,\lambda}\phi u) + (-1)^{k-1}S(R_{-<\lambda,e>-k,\lambda}\phi u) \\
&= < u, \psi R_{-<\lambda,e>-k,\lambda}\phi(.) > +(-1)^{k-1} < u, \psi R_{-<\lambda,e>-k,\lambda}\phi(-.) > \\
&= < U, \phi(.) > +(-1)^{k-1} < U, \phi(-.) > \\
&= < U, \phi(.) > +(-1)^{<\lambda,e>+k-1} < U, \phi_{(-1),\lambda}(.) > .
\end{aligned}$$

Como U é uma distribuição, então em (7.2.8) $\dot{u}$ define uma distribuição.

Afirmação: $\dot{u}$ é extensão de u e satisfaz (7.2.3).

Se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$, e vale (7.2.3) então o lado direito da equação (7.2.8) é igual à $2 < U, \phi >$, pois:

$$\begin{aligned}
2 < \dot{u}, \phi > &= < U, \phi > +(-1)^{<\lambda,e>+k-1} \left[(-1)(-1)^{-<\lambda,e>-k} < U, \phi >\right] \\
&= < U, \phi > +(-1)^{<\lambda,e>+k-1}(-1)^{-<\lambda,e>-k+1} < U, \phi > \\
&= 2 < U, \phi > .
\end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que $\dot{u} = U$ em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Finalmente concluímos que $< \dot{u}, \phi >= (sgnt)t^a < \dot{u}, \phi_{t,\lambda} >$ para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, ou seja, $\dot{u}$ satisfaz (4.2.3). De fato, para $t = -1$, temos:

$$2 < \dot{u}, \phi_{(-1),\lambda} >=< U, \phi_{(-1),\lambda} > +(-1)^{k+<\lambda,e>-1} < U, \phi >= 2.(-1)^{k+<\lambda,e>-1} < \dot{u}, \phi >$$

Donde podemos concluir que:

$$< \dot{u}, \phi >= (-1)(-1)^a < U, \phi_{(-1),\lambda} > .$$

■

Referências Bibliográficas

[J] Hounie, J., **Teoria Elementar das Distribuições**, 12° Col. Bras. Mat.,IMPA , Rio de Janeiro, 1979.

[H] Hörmander, L., **The Analysis of Linear Partial Differential Operators I**, Vol. 1, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[R] Rudin, W. , **Real and Complex Analysis**, Tata McGraw-Hill Publishing Company Ltd., New Delhi, 1979.