UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ESTABILIDADE DE “STANDING WAVES”

ALISSON DARÓS SANTOS

São Carlos-SP
13 de Março de 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ESTABILIDADE DE “STANDING WAVES”

ALISSON DARÓS SANTOS
Orientadora: LYNNYNGS KELLY ARRUDA SARAIVA DE PAIVA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

São Carlos-SP
13 de Março de 2014

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

	Santos, Alisson Daros.
S237es	Estabilidade de “Standing waves” / Alisson Daros Santos. -- São Carlos : UFSCar, 2014.
	82 p.
	Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2014.
	1. Hilbert, Espaço de. 2. Schrödinger, Equação de. 3. Standing waves. 4. Estabilidade orbital. I. Título.
	CDD: 515.733 (20ª)

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Lynnyngs Kelly Arruda Saraiva de Paiva
DM- UFSCar

Prof. Dr.Cezar Issao Kondo
DM- UFSCar

Profa. Dra. Ilma Aparecida Marques da Silva
CMCC/UFABC

... nessa vida, a única coisa que não pode ser retirada de nós, é o conhecimento que adquirimos e levamos conosco.

Dalvin A. B. dos Santos (meu velho pai).

... com força de vontade e persistência podemos superar todas as dificuldades, até mesmo as encontradas na busca pelo conhecimento.

Dirce I. D. Santos (minha amada mãe).

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por me dar a força necessária para superar as dificuldades e obstáculos encontrados até este momento.

À minha família, pelo amor e incentivo, e em especial a Vanessa Karine Schneider, minha namorada, pelas palavras de carinho dadas nos momentos mais difíceis.

À professora Lynnyngs, pela excelente orientação e dedicação depositada neste trabalho.

Aos professores Bidel, Márcio, Maurício e Taísa, por me incentivarem a seguir meus estudos após a graduação.

Aos colegas e amigos do DM, por estes dois anos de convívio. Em especial, meus agradecimentos à Danilo, Ederson, Fernanda, Francisco, Igor, Marlon, Miguel, Osmar, Renan e Thales.

Aos demais contribuintes e, à CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Estudamos, neste trabalho, a estabilidade orbital de soluções especiais do tipo “standing wave” para sistemas hamiltonianos em um espaço de Hilbert real e invariante sob a ação de específico grupo de isometrias em tal espaço. A estabilidade investigada para este perfil de soluções considera perturbações ocorrentes na condição inicial pré-fixada. Inicialmente, abordamos a técnica abstratamente para a obtenção da estabilidade orbital e, posteriormente, apresentamos uma aplicação do método discutido.

Abstract

This work is concerned with the orbital stability of special solutions called "standing waves" for Hamiltonian systems in a real and invariant Hilbert space under the action of a specific group of isometries in such space. The stability investigated is orbital in the usual sense for a dynamical system and is with respect to perturbations of the initial condition. Initially we approach the problem in an abstract manner and then we show an application of the discussed method.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, apresentamos um método recente, desenvolvido por C. A. Stuart [18], para a obtenção de estabilidade orbital de soluções do tipo "standing wave" para sistemas hamiltonianos de primeira ordem e da forma

$$Ju^{'}(t) = \nabla \mathcal{H}(u(t)),$$

em um espaço de Hilbert X infinito-dimensional. Aqui, consideramos o funcional hamiltoniano $\mathcal{H} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e invariante sob a ação do grupo $\Gamma = \{e^{tA} \mid t \in \mathbb{R}\}$ de isometrias, em que o operador limitado $A : X \longrightarrow X$ é anti-simétrico e comuta com o operador $J \in \mathcal{B}(X, X)$, ou seja, $AJ = JA$. Além disso, exigimos que $J^2 = -I$ e que $\langle \mathcal{H}^{'}(v), Av \rangle = 0, \ \forall v \in X$. O grupo Γ tem a propriedade de preservar a forma simplética, a saber, $\omega(e^{tA}v, e^{tA}z) = \omega(v, z), \ \forall v, z \in X$ e $t \in \mathbb{R}$, sendo ω uma forma bilinear de $X \times X$ em $\mathbb{R}$.

Uma "standing wave" é uma solução da forma $u(t) = e^{\lambda tA}\xi$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\xi \in X$ tais que $\lambda JA\xi = \nabla \mathcal{H}(\xi)$. Estudamos a estabilidade destas soluções relativamente a perturbações do dado inicial $u(0) = \xi$. Utilizamos técnicas variacionais para a obtenção de tais soluções, ou seja, como consequência da Γ-invariância de $\mathcal{H}$, observamos que $u(t) = e^{\lambda tA}\xi$ é uma "standing wave" se, e somente se, o par (λ, ξ) satisfaz a equação estacionária

$$\mathcal{H}^{'}(\xi) - \lambda Q(\xi) = 0,$$

em que $Q(v) = \frac{1}{2}(JAv, v)$, sendo $(.,.)$ produto interno no espaço de Hilbert H que, juntamente com X, integra uma tripla variacional, isto é, satisfaz a relação $X \subset H = H^* \subset X^*$ em que as inclusões são densas e contínuas, X^* e H^* denotam, respectivamente, o espaço dual de X e H, e H está identificado com o seu dual via isomorfismo de Riesz. De outro modo, $u(t)$ é uma "satanding wave" se, e somente se, é ponto crítico do hamiltoniano aumentado $G_\lambda : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por $G_\lambda(v) = \mathcal{H}(v) - \lambda Q(v), \ \forall v \in X$.

Para qualquer $v \in X$,

$$\Theta(v) = \{e^{tA}v \mid t \in \mathbb{R}\}$$

corresponde a órbita de v sob a ação do grupo de isometrias Γ. Se $\xi_\lambda \in X$ é um ponto crítico de G_λ e $\Theta(\xi_\lambda)$ é sua órbita, então $u_\lambda(t) = e^{\lambda t A}\xi_\lambda$, solução do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\mathcal{T}u) &= & J^*\mathcal{H}'(u) \\ u(0) &= & u_0 \ , \end{cases} \tag{1}$$

em que $\mathcal{T}$ denota o isomorfismo de Riesz de X com o seu dual X^*, é orbitalmente estável se $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tal que para toda condição inicial $\xi \in X$ com $||\xi_\lambda - \xi||_X < \delta$, o PVI acima, com condição inicial ξ, tem uma única solução maximal $u(t)$, isto é, definida $\forall t \geq 0$ e tal que

$$d(u(t), \Theta(\xi_\lambda)) = inf\{||u(t) - e^{\theta A}\xi_\lambda||_X | \ \theta \in \mathbb{R}\} < \varepsilon \ ,$$

em que $||.||_X$ denota a norma induzida pelo produto interno em X. A estabilidade orbital de uma "standing wave" requer, portanto, que o PVI (1) seja globalmente bem colocado em uma vizinhança desta solução, isto é, $\forall\xi \in X$, existam $b_+, b_- > 0$ e uma única função $u \in C((-b_-, b_+), X)$ com $\mathcal{T}u \in C^1((-b_-, b_+), X^*)$ tal que $u(0) = \xi$ e $\frac{d}{dt}(\mathcal{T}u(t)) = J^*\mathcal{H}'(u(t))$ é satisfeita em $(-b_-, b_+)$ e exista uma vizinhança aberta Ω de ξ em X tal que $b_+(u_0) = \infty$, $\forall u_0 \in \Omega$, em que $(-b_-(\xi), b_+(\xi))$ denota o intervalo maximal de existência da solução com condição inicial ξ. Obtemos esta estabilidade, através da construção de uma função de Lyapunov $V : \Theta(\xi)_\rho \longrightarrow \mathbb{R}$, em que $\Theta(\xi)_\rho = \{v \in X | \ d(v, \Theta(\xi)) < \rho\} = \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} B_\rho(T(\theta)\xi)$.

Juntamente com o exposto acima, supondo $\lambda A\xi_\lambda \neq 0$ para a garantia de existência de soluções não estacionárias para o PVI (1), a "standing wave" $u_\lambda(t) = e^{\lambda t A}\xi_\lambda$, gerada por ξ_λ, tem órbita estável desde que: $\exists\delta > 0$ tal que,

$$\langle D^2_{vv}G_\lambda(\xi_\lambda)z, z\rangle \geq \delta||z||^2_X \ , \ \forall z \in \{A\xi_\lambda, R^{-1}B\xi_\lambda\}^\perp \ , \tag{2}$$

em que $\{A\xi_\lambda, R^{-1}B\xi_\lambda\}^\perp = \{z \in X \ ; \ \langle z, A\xi_\lambda\rangle_X = \langle z, R^{-1}B\xi_\lambda\rangle_X = 0\}$.

Afim de garantirmos condições suficientes para a hipótese (2) deste método de estabilidade, utilizamos um importante resultado de representação, a saber, o Primeiro Teorema de Representação em Kato [15], que garante a existência de um operador auto-adjunto que é fundamental para o desenvolvimento deste trabalho.

Encerramos, apresentando uma aplicação do método à equação diferencial parcial não-linear de Schrödinger. Outros importantes métodos para a obtenção de estabilidade orbital podem ser consultados em [3], [11], [12] e [20]. Todos esses outros métodos possuem como hipótese fundamental, a condição de Vahkitov-Kolokolov

$$\frac{d}{d\lambda}Q(\xi_\lambda) < 0,$$

para a qual necessita-se de estarmos com a "standing wave" mergulhada em uma família suave no parâmetro λ, diferentemente do exposto aqui.

Assim como o critério de G-S-S não se aplica a KdV, o método que discutimos aqui igualmente não inclui esta equação, já que, neste caso, $J = \partial_x$ não é limitado. A demonstração da estabilidade para solitons desta equação está provada em [4] e para ondas viajantes periódicas em [2].

O texto também apresenta um apêndice onde citamos alguns resultados sobre a teoria dos operadores adjuntos e o conceito de forma quadrática utilizado neste trabalho, bem como resultados da teoria espectral de tais operadores.

Notação

$f(.) = \langle f, . \rangle$	
$X,\ H$	Espaços de Hilbert
X^*	Dual topológico de X
X^{**}	Bidual topológico de X
$(.,.)$	Produto interno em H
$\langle .,. \rangle_X$	Produto interno em X
$\langle .,. \rangle_*$	Produto interno em X^*
$\|\|.\|\|$	Norma em H
$\|\|.\|\|_X$	Norma em X
$\|\|.\|\|_*$	Norma em X^*
$\|\|.\|\|_p$	Norma em L^p
$\mathrm{Re}\{\lambda\}$	Parte real de $\lambda \in \mathbb{C}$
$\mathrm{Im}\{\lambda\}$	Parte imaginária de $\lambda \in \mathbb{C}$
$D(L)$	Domínio do operador L
$Im(L)$	Imagem do operador L
$G(T)$	Gráfico do operador T
$\mathcal{L}(X, Y)$	Espaço dos operadores lineares de X em Y
$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$	
$\mathcal{B}(X, Y)$	Espaço dos operadores lineares e contínuos de X em Y
$\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X, X)$	
$C(X, Y)$	Espaço das funções contínuas de X em Y
$C^1(X, Y)$	Espaço das funções de X em $Y,$ com derivada de 1º ordem contínua
$C^2(X, Y)$	Espaço das funções de X em $Y,$ com derivada de 2º ordem contínua

I_X	Operador identidade em X
Γ	Grupo de isometrias
S^T	Adjunto de Hilbert de S
R	Isomorfismo (isométrico) de Riesz em X
$\mathcal{T}$	Operador de X em X^* definido por $\langle \mathcal{T}u, v\rangle = (u, v)$
$\mathcal{J}$	Injeção canônica de X em X^*
L^*	Operador dual de X^* em X^*, definido por $L^* = RL^TR^{-1}$

$$|L| = |L|_{\mathcal{B}(X,Y)} = \sup_{\substack{x\in X \\ ||x||_X\leq 1}} ||L(x)||_Y$$

CAPÍTULO 1

Preliminares

O objetivo central deste capítulo é estabelecer alguns resultados básicos, bem como notações, que utilizaremos no decorrer deste trabalho.

1.1 Elementos de Análise Funcional

Apresentamos, nesta seção, alguns resultados acerca da teoria de Análise Funcional, enquanto ferramentas ao estudo das equações diferenciais parciais (EDP's). Começaremos considerando $(X, ||\cdot||_X)$ e $(Y, ||\cdot||_Y)$ espaços vetoriais normados e T uma aplicação de X em Y. Desta forma, dizemos que T é uma *isometria*, se

$$||T(x)||_Y = ||x||_X\,,\ \forall x \in X.$$

Também, T será dita *antilinear*, se $\forall x, y \in X$ e $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ tivermos,

$$T(x + \alpha y) = T(x) + \bar{\alpha}T(y).$$

Com estes conceitos devidamente estabelecidos, podemos enunciar um resultado importante em espaços de Hilbert, a saber:

Teorema 1.1.1 (Representação de Riesz)**.** *Sejam $(H, (.,.))$ um espaço de Hilbert e H^* seu dual. A aplicação $R_H : H \longrightarrow H^*$, $R_H(u) = f_u$, para cada $u \in H$, dada por*

$$\langle R_H(u), v\rangle_{H^*,H} = f_u(v) = (u, v)\,,\ \forall v \in H,$$

é uma isometria antilinear e sobrejetora em H^*.

Demonstração. Veja [16], Teorema 19.1, página 135. □

Agora, vamos considerar E_1 e E_2 espaços vetoriais normados sobre o corpo dos números reais e definir o *gráfico de um operador linear* $T : D(T) \subset E_1 \longrightarrow E_2$ como sendo o subespaço vetorial $G(T) = \{(x, T(x)) \mid x \in E_1\}$ de $E_1 \times E_2$. Consequentemente, diremos que $T : E_1 \longrightarrow E_2$ é um *operador fechado* se para toda sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ convergente, digamos $x_n \to x \in E_1$, com $\{T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E_2$ também convergente, $T(x_n) \to y$, tivermos $x \in D(T)$ e $y = T(x)$. Em outras palavras, T será fechado se $G(T)$ for um subespaço vetorial fechado de $E_1 \times E_2$.

Neste contexto, podemos enunciar um teorema que estabelece uma relação entre a continuidade do operador T e o seu gráfico.

Teorema 1.1.2 (Teorema do Gráfico Fechado)**.** *Suponha que E_1 e E_2 são espaços de Banach. Se $T : E_1 \longrightarrow E_2$ é um operador linear, então T é contínuo se, e somente se, T é fechado.*

Demonstração. Veja [16], Teorema 9.9, página 64. □

A seguir, vejamos o Teorema de Hahn-Banach na sua forma analítica e geométrica, bem como algumas de suas aplicações que constituem importantes resultados da Análise Funcional. Para maiores detalhes sobre o assunto, sugerimos a leitura de [6] e [16].

Teorema 1.1.3 (Forma analítica do teorema de Hahn-Banach)**.** *Sejam E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz:*

(*i*) $p(\lambda x) = \lambda p(x),\ \forall x \in E$ *e* $\forall \lambda > 0$;

(*ii*) $p(x + y) \le p(x) + p(y),\ \forall x, y \in E$.

Além disso, considere $G \subset E$ um subespaço vetorial e $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear tal que $g(x) \le p(x),\ \forall x \in G$. Então existe um funcional $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, extensão linear de g, tal que $f(x) \le p(x),\ \forall x \in E$.

Demonstração. Veja [6], Teorema 1.1, página 1. □

Considerando $(E, ||.||)$ um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$ e $(E^*, ||.||_{E^*})$ seu dual topológico, isto é, $E^* = \{f : E \longrightarrow \mathbb{R} \mid f$ é linear e contínuo$\}$, em que

$$||f||_{E^*} = \sup_{\substack{x\in E \\ ||x||\le 1}} |f(x)|,$$

apresentamos algumas aplicações importantes do teorema de Hahn-Banach na forma analítica.

Corolário 1.1.1. *Sejam $G \subset E$ um subespaço vetorial e $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo. Então $\exists f \in E^*$ extensão linear de g, tal que*

$$||f||_{E^*} = \sup_{\substack{x \in G \\ ||x|| \leq 1}} |g(x)| = ||g||_{G^*}.$$

Demonstração. Veja [6], Corolário 1.2, página 3. □

Corolário 1.1.2. *Para cada $x_0 \in E$, $\exists f_0 \in E^*$ tal que*

$$||f_0||_{E^*} = ||x_0|| \quad e \quad f_0(x_0) = ||x_0||^2.$$

Demonstração. Veja [6], Corolário 1.3, página 3. □

Corolário 1.1.3. *Para cada $x \in E$, temos*

$$||x|| = \sup_{\substack{f \in E^* \\ ||f||_{E^*} \leq 1}} |f(x)| = \max_{\substack{f \in E^* \\ ||f||_{E^*} \leq 1}} |f(x)|.$$

Demonstração. Veja [6], Corolário 1.4, página 4. □

Agora, com o objetivo de estabelecer as formas geométricas de Hahn-Banach, dizemos que um *hiperplano afim* é um subconjunto P de E da forma $P = \{x \in E \mid f(x) = \alpha\}$, em que f é um funcional linear não nulo em E e $\alpha \in \mathbb{R}$ uma constante dada. Em geral, escrevemos $P = [f = \alpha]$ e dizemos que $f = \alpha$ *é a equação de* P.

Além disso, tomando A e B como subconjuntos de E, dizemos que o hiperplano $P = [f = \alpha]$ *separa* A *e* B se

$$f(x) \leq \alpha, \ \forall x \in A \ \text{ e } \ f(x) \geq \alpha, \ \forall x \in B,$$

e ainda, se existir uma constante $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon, \ \forall x \in A \ \text{ e } \ f(x) \geq \alpha + \varepsilon, \ \forall x \in B,$$

dizemos que $P = [f = \alpha]$ *separa* A *e* B *estritamente* ou *de modo estrito.* Cabe observar que se o hiperplano $P = [f = \alpha]$ separa A e B de modo estrito ele também separa A e B. Daí, temos:

Teorema 1.1.4 (1ª Forma geométrica do teorema de Hahn-Banach)**.** *Sejam $A \subset E$ e $B \subset E$ não vazios, convexos e tais que $A \cap B = \emptyset$. Suponhamos que um deles é aberto. Então existe um hiperplano fechado que separa A e B.*

Demonstração. Veja [6], Teorema 1.6, página 5. □

Teorema 1.1.5 (2ª Forma geométrica do teorema de Hahn-Banach)**.** *Sejam $A \subset E$ e $B \subset E$ não vazios, convexos e tais que $A \cap B = \emptyset$. Suponhamos que A é fechado e B é compacto. Então existe um hiperplano fechado que separa extritamente A e B.*

Demonstração. Veja [6], Teorema 1.7, página 7. □

Por fim, como aplicação da segunda forma geométrica de Hahn-Banach, apresentamos um resultado que estabelece um método eficiente para verificarmos se um subespaço é denso em E.

Corolário 1.1.4. *Seja $F \subset E$ um subespaço vetorial tal que $\overline{F} \neq E$. Então, $\exists f \in E^*$ com $f \neq 0$ de modo que $f(x) = 0$, $\forall x \in F$.*

Demonstração. Veja [6], Corolário 1.8, página 8. □

1.2 Cálculo em espaços de Banach

Nesta seção, apresentamos alguns resultados do Cálculo em espaços de Banach, relacionados aos conceitos de diferenciabilidade e integrabilidade que são fundamentais em nosso trabalho.

Considerendo $(X, ||.||_X)$ e $(Y, ||.||_Y)$ espaços de Banach, $t \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathcal{L}(X)$, definimos a *exponencial do operador tA* como o elemento e^{tA} dado por

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}. \tag{1.1}$$

Proposição 1.2.1. *Dados operadores A, $B \in \mathcal{L}(X)$ e $t \in \mathbb{R}$ temos as seguintes propriedades:*

(1º) *$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} \Leftrightarrow AB = BA$; em particular, $e^{-A}e^{A} = e^{A-A} = e^{A}e^{-A} = e^0 = I_X$, o que implica que e^A é sempre um isomorfismo (sobrejetor) de X;*

(2º) *$AB = BA \Rightarrow e^{At}B = Be^{At}$; em particular, todo operador A comuta com sua exponencial e^A;*

(3º) *$(e^{tA})^T = e^{tA^T}$, em que $(e^{tA})^T$ e A^T denotam os operadores adjuntos de Hilbert (veja Apêndice) de e^{tA} e A, respectivamente;*

Demonstração. Itens (1º) e (2º) veja [14], Proposição 6.2.2, página 112.

Para demonstrar o item (3º) considere $u, v \in X$. Então,

$$\begin{aligned}
\left\langle e^{tA}u, v\right\rangle_X &= \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k u}{k!}, v \right\rangle_X = \lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{k=0}^{n} \frac{(tA)^k u}{k!}, v \right\rangle_X \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \left\langle A^k u, v\right\rangle_X = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \left\langle u, (A^T)^k v\right\rangle_X \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\langle u, \sum_{k=0}^{n} \frac{(tA^T)^k v}{k!} \right\rangle_X = \left\langle u, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA^T)^k v}{k!} \right\rangle_X \\
&= \left\langle u, e^{tA^T} v\right\rangle_X .
\end{aligned}$$

□

duas definições naturais são as de derivada Fréchet e Gateaux,

Agora, passamos a ver algumas definições e resultados de diferenciabilidade em espaços de Banach como, por exemplo, duas definições naturais que são as de derivada segundo Fréchet e Gateaux, por estenderem os conceitos do cálculo de diferenciabilidade e de derivada direcional, respectivamente. Consideramos $f : U \longrightarrow Y$, em que $U \subset X$ é um aberto, e $x \in U$. Assim, dizemos que f *é Fréchet-diferenciável em* x se existe um elemento $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ tal que se

$$r(x, h) = f(x + h) - f(x) - Ah, \tag{1.2}$$

então

$$\frac{1}{||h||_X} ||r(x, h)||_Y \longrightarrow 0, \text{ quando } h \to 0. \tag{1.3}$$

Quando isso ocorrer, A será chamado de *derivada de Fréchet de* f *em* x, e será denotado por $A = f'(x) = Df(x)$. Além disso, diremos que f *é Fréchet-diferenciável*, quando f for Fréchet-diferenciável em x, $\forall x \in X$. Observamos que a notação para esta derivada se dará das duas formas apresentadas acima, sendo que o uso de uma ou de outra dependerá da capacidade das mesmas em facilitar a compreensão dos cálculos que estiverem sendo abordados. Sendo assim, um resultado que comumente vale, quando tratamos de uma aplicação diferenciável, é o seguinte:

Proposição 1.2.2. *Se f é Fréchet-diferenciável em x, então $Df(x)$ é única e f é contínua em x.*

Demonstração. Veja [1], Proposição 7.1, página 192. □

A definição de derivada de Gateaux, embora mais fraca que a de Fréchet, demonstra ser, na prática, mais útil que a primeira para muitos dos cálculos que faremos neste trabalho. Com efeito, esta última nos fornece um candidato a derivada de Fréchet, que em todas as situações aqui presentes coincidirá com a mesma, devido sempre estarmos nas condições da Proposição 1.2.4. Neste contexto, supondo $f : X \longrightarrow Y$, dizemos que f *é Gateaux-diferenciável em* x *na direção* $h \in X$ se existe $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ tal que

$$\frac{1}{t}\,||f(x+th) - f(x) - tAh||_Y \longrightarrow 0, \text{ quando } t \to 0,$$

e a *derivada de Gateaux* será denotada por $A = D_h f(x)$. Além disso, dizemos que f *é Gateaux-diferenciável em* x se é Gateaux-diferenciável em x na direção $h \in X$, e será dita *Gateaux-diferenciável* quando for Gateaux-diferenciável em x, $\forall x \in X$.

Como se vê facilmente, temos válido o seguinte resultado,

Proposição 1.2.3. *Se f é Fréchet-diferenciável, então f é Gateaux-diferenciável.*

Demonstração. Veja [1], Proposição 7.2, página 194. □

Outros resultados clássicos do Cálculo que também são válidos são os seguintes,

Teorema 1.2.1 (Regra da Cadeia)**.** *Sejam X, Y e Z espaços de Banach, $U \subset X$ aberto, $V \subset Y$ aberto, $f : U \longrightarrow Y$ e $g : V \longrightarrow Z$. Seja $x \in U$ e $y = f(x) \in V$. Suponha g Fréchet-diferenciável em y e f Gateaux-diferenciável (respectivamente, Fréchet-diferenciável) em x. Então $g \circ f$ é Gateaux-diferenciável (respectivamente, Fréchet-diferenciável) em x e*

$$D(g \circ f)(x) = Dg(y) \circ Df(x).$$

Demonstração. Veja [1], Teorema 7.3, página 194. □

Teorema 1.2.2 (Desigualdade do Valor Médio)**.** *Sejam X e Y espaços vetoriais (sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) normados, $U \subset X$ um aberto e $a, b \in U$ tais que o segmento que os une $[a, b] := \{a + t(b - a) \mid t \in [0, 1] \in \mathbb{R}\}$ está contido em U. Além disso, considere $f : U \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua em $[a, b]$ e Fréchet-diferenciável em $(a, b) := \{a + t(b - a) \mid t \in (0, 1) \in \mathbb{R}\}$. Então vale a desigualdade do valor médio:*

$$||f(b) - f(a)||_Y \leq \sup_{x \in (a,b)} |f^{'}(x)|\, ||b - a||_X$$

Demonstração. Veja [13], Teorema 2.1.2, página 69. □

Corolário 1.2.1. *Sejam X e Y espaços vetoriais (sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) normados, $U \subset X$ um aberto conexo e $f : U \longrightarrow Y$ uma aplicação Fréchet-diferenciável tal que $f^{'}(x) = 0$, $\forall x \in U$. Então f é constante em U.*

Demonstração. Veja [13], Corolário 2.1.3, página 71. □

Teorema 1.2.3 (Fórmula de Taylor)**.** *Sejam X, Y espaços de Banach, $U \subset X$ aberto e suponha $f : U \longrightarrow Y$ com n derivadas em U. Então para h pequeno,*

$$f(\xi + h) = f(\xi) = Df(\xi)h + \frac{1}{2}D^2 f(\xi)(h, h) + ... + \frac{1}{n!}D^n f(\xi)(h, ..., h) + r_n(\xi, h)$$

e

$$\frac{||r_n(\xi, h)||_Y}{||h||_X^n} \longrightarrow 0, \text{ quando } h \longrightarrow 0.$$

Demonstração. Ver [1], Teorema 7.22, página 210. □

Vale lembrar, que a igualdade no Teorema 1.2.2 nem sempre se verifica, como observamos através do exemplo abaixo.

Exemplo 1.2.1. Considere $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Então, por um lado, temos que

$$f(2\pi) - f(0) = (1, 0) - (1, 0) = (0, 0).$$

Já por outro,

$$f^{'}(t) = (-\sin(t), \cos(t)) \neq (0, 0), \ \forall t \in [0, 2\pi],$$

o que implica que não existe $c \in [0, 2\pi]$ tal que $0 = f(2\pi) - f(0)$ seja igual a $f^{'}(c).(2\pi - 0)$.

Além desses resultados, podemos estabelecer uma espécie de recíproca para a Proposição 1.2.3, a saber,

Proposição 1.2.4. *Sejam X e Y espaços de Banach e suponha que existe $D_h f(x)$ para todo x em uma vizinhança $U \subset X$ de um ponto $a \in X$. Se a aplicação $x \in X \longmapsto D_h f(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$ é contínua em a, então f é Fréchet-diferenciável no ponto a e $\langle Df(a), h\rangle = D_h f(a)$.*

Demonstração. Veja [8], Proposição 3.2.15, página 123. □

Agora, vamos considerar $E = X \oplus Y$ um espaço vetorial normado real que possa ser escrito como *soma direta* de dois outros, X e Y. Com isso queremos dizer que E é isomorfo (como espaço vetorial normado real) ao espaço produto $X \times Y$. Cada elemento $v \in E$ é escrito de maneira única como $v = (x, y)$ em que $x \in X$ e $y \in Y$. Também, a partir de agora, $U \subset E$ designará um aberto e Z um outro espaço vetorial normado.

Com isso, dada uma aplicação (não necessariamente contínua) $f : U \subset (X \oplus Y) \longrightarrow Z$, as *derivadas parciais* (se existirem) *de f em* $(a, b) \in U$ fixado, são aplicações lineares, $\partial_1 f(a, b) : X \longrightarrow Z$ e $\partial_2 f(a, b) : Y \longrightarrow Z$ tais que:

$$\begin{cases} f(a + h, b) = f(a, b) + \partial_1 f(a, b).h + r_1(h), \text{ com } \displaystyle\lim_{||h||_X \to 0} \frac{||r_1(h)||_Z}{||h||_X} = 0; \\ f(a, b + k) = f(a, b) + \partial_2 f(a, b).k + r_2(k), \text{ com } \displaystyle\lim_{||k||_Y \to 0} \frac{||r_2(k)||_Z}{||k||_Y} = 0. \end{cases}$$

Podemos observar, que uma derivada parcial pode ser vista como uma família de derivadas. Por exemplo, fixado $b \in Y$ tal que exista $(a, b) \in U$, considere $V_b := \{x \in X \mid (x, b) \in U\}$. Então para todo $x \in V_b$, $\partial_1 f(x, b) = g_b^{'}(x)$, onde $g_b : V_b \subset X \longrightarrow Z$ é dada por

$$g_b(x) := f(x, b).$$

Isso é importante, pois significa que todos os teoremas de derivada, como a regra da cadeia (Teorema 1.2.1), podem ser aplicados às derivadas parciais de f via g_b. Isso também implica na unicidade de $\partial_1 f(a,b)$. Além disso, valem os seguintes resultados:

Proposição 1.2.5. *Suponha que $f : U \longrightarrow Z$ seja diferenciável. Então,*

$$f'(x,y) \cdot (h,k) = \partial_1 f(x,y) \cdot h + \partial_2 f(x,y) \cdot k.$$

Demonstração. Veja [13], Observação 2.2.3, página 78. □

Teorema 1.2.4. *Seja $f : U \subset X \oplus Y \longrightarrow Z$ uma aplicação entre espaços vetoriais normados reais (ou complexos). Então,*

$$f \in C^1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{existem e são contínuas as aplicações}$$
$$\begin{array}{rcl} \partial_1 f : U \longrightarrow \mathcal{L}(X,Z) & & \partial_1 f : U \longrightarrow \mathcal{L}(Y,Z) \\ (a,b) \longmapsto \partial_1 f(a,b) & e & (a,b) \longmapsto \partial_2 f(a,b). \end{array}$$

Demonstração. Veja [13], Teorema 2.2.4, página 78. □

Por fim, apresentamos o Teorema Fundamental do Cálculo em espaços de Banach, em duas versões.

Teorema 1.2.5 (I - Teorema Fundamental do Cálculo)**.** *Seja $f : [a,b] \longrightarrow E$, E um espaço de Banach, f contínua. Se $F(x) := \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$, então $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.*

Demonstração. Veja [13], Proposição 4.1.1, página 107. □

Teorema 1.2.6 (II - Teorema Fundamental do Cálculo)**.** *Seja $F : [a,b] \longrightarrow E$, E espaço de Banach, e seja $f : [a,b] \longrightarrow E$ contínua tal que F é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), com $F'(t) = f(t)$, $\forall t \in (a,b)$. Então,*

$$F(b) = F(a) + \int_a^b f(t)\ dt.$$

Demonstração. Veja [13], Teorema 4.1.2, página 107. □

1.3 Mais ferramentas de EDP's

Nesta seção, definimos o espaços L^p e $W^{1,p}$, $1 \leq p \leq \infty$, bem como algumas de suas propriedades. Para tal, apresentamos inicialmente, alguns fatos da Teoria da Medida que se farão necessários para as definições que desejamos estabelecer. Sendo assim, consideramos $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ um *espaço mensurável*, isto é, Ω um conjunto e,

(i) $\mathcal{M}$ é uma *σ-álgebra* em Ω, isto é, $\mathcal{M}$ é uma coleção de subconjuntos de Ω tal que:

(a) $\emptyset \in \mathcal{M}$;

(b) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$;

(c) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ sempre que $A_n \in \mathcal{M}\ \forall n$.

(ii) μ é uma *medida*, isto é, $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty]$ satisfazendo

(a) $\mu(\emptyset) = 0$;

(b) $\displaystyle\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ sempre que $\{A_n\}$ for uma família enumerável disjunta de elementos de $\mathcal{M}$.

Os elementos de $\mathcal{M}$ são chamados de *conjuntos mensuráveis*. Nós vamos supor também, mesmo que não seja essencial, que

(iii) Ω é *σ-finito*, isto é, existe uma família $\{\Omega_n\}$ em $\mathcal{M}$ tal que $\Omega = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ e $\mu(\Omega_n) < \infty$ $\forall n$.

Portanto, denotamos por $L^1(\Omega, \mu)$, ou simplesmente $L^1(\Omega)$ (ou ainda, L^1), o *espaço das funções integráveis de Ω em $\mathbb{R}$*. Escreveremos $\int f$, ou $\int_\Omega f\ d\mu$, e usaremos a notação

$$||f||_{L^1} = ||f||_1 = \int_\Omega |f|\ d\mu = \int |f|.$$

Como de costume, identificando duas funções que coincidem *q.t.p. (em quase todo ponto)*, seguem alguns fatos bastante relevantes:

Teorema 1.3.1 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções em L^1 que satisfaz:*

(a) *$f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω;*

(b) *existe uma função $g \in L^1$ tal que para todo n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p. em Ω.*

Então, $f \in L^1$ e $||f_n - f||_1 \to 0$

Demonstração. Veja [9], Teorema 2.24, página 54. □

Agora, se $(\Omega_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ são dois espaços mensuráveis σ-finitos, podemos definir, de uma maneira padrão, a estrutura do espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ sobre o produto cartesiano $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, a fim de obtermos os seguintes teoremas:

Teorema 1.3.2 (Tonelli)**.** *Seja $F(x, y) : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável satisfazendo,*

(a) $\displaystyle\int_{\Omega_2} |F(x,y)|\ d\mu_2 < \infty$ *q.t.p. em* $x \in \Omega_1$*;*

(b) $\displaystyle\int_{\Omega_1} d\mu_1 \int_{\Omega_2} |F(x,y)|\ d\mu_2 < \infty$.

Então $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Demonstração. Veja [9], Teorema 2.37, página 67. □

Teorema 1.3.3 (Fubini)**.** *Assuma que* $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$*. Então para q.t.p.* $x \in \Omega_1$*,* $F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2)$ *e* $\int_{\Omega_2} F(x,y)\ d\mu_2 \ \in L^1_x(\Omega_1)$*. Similarmente, para q.t.p.* $y \in \Omega_2$*,* $F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1)$ *e* $\int_{\Omega_1} F(x,y)\ d\mu_1 \ \in L^1_y(\Omega_2)$*. Além disso,*

$$\int_{\Omega_1} d\mu_1 \int_{\Omega_2} F(x,y)\ d\mu_2 = \int_{\Omega_2} d\mu_2 \int_{\Omega_1} F(x,y)\ d\mu_1 = \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x,y)\ d\mu_1 d\mu_2.$$

Demonstração. Veja [9], Teorema 2.37, página 67. □

Finalmente, sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e $p \in \mathbb{R}$ com $1 < p < \infty$. Então definimos

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\},$$

com a norma

$$||f||_{L^p(\Omega)} = ||f||_p = \left[\int_\Omega |f(x)|^p\ d\mu\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Além disso, denotamos

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} f \text{ é mensurável e existe uma constante } C \\ \text{tal que } |f(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega \end{array} \right\},$$

com a norma

$$||f||_{L^\infty(\Omega)} = ||f||_\infty = \inf\{C \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\}$$

Agora, vejamos duas desigualdades que são constantemente utilizadas no contexto dos espaços L^p's.

Proposição 1.3.1 (Desigualdade de Young)**.** *Dados* $a, b \geq 0$*,* $p > 1$ *e* $q > 1$ *tais que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*, temos*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Demonstração. Veja [6], Demonstração do Teorema 4.6, página 92. □

Teorema 1.3.4 (Desigualdade de Hölder)**.** *Seja* $1 < p < \infty$ *tal que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*. Se* f *e* g *são funções mensuráveis em* Ω*, então*

$$||fg||_1 \leq ||f||_p \, ||g||_q \, .$$

Demonstração. Veja [6], Teorema 4.6, página 92. □

Ainda no contexto dos espaços L^p's, denotando $C_c(\mathbb{R}^N)$ como o espaço das funções contínuas com suporte compacto, isto é,

$$C_c(\mathbb{R}^N) = \{f \in C(\mathbb{R}^N) \mid f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^N \backslash K, \text{ em que } K \text{ é compacto}\},$$

obtemos o seguinte teorema de densidade:

Teorema 1.3.5. *O espaço* $C_c(\mathbb{R}^N)$ *é denso em* $L^p(\mathbb{R}^N)$ *para* $1 \leq p < \infty$*.*

Demonstração. Veja [6], Teorema 4.12, página 97. □

Finalizando o que havíamos nos proposto a destacar nesta seção, definimos o *espaço de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ por

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) | \quad \begin{array}{l} \exists g_1, g_2, \cdots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tal que} \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \ \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \ \forall i = 1, 2, \cdots, N \end{array} \right\},$$

em que $H^1(\Omega)$ será denotado pelo espaço $W^{1,2}(\Omega)$.

Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ definimos $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$ e escrevemos

$$\nabla u = grad \ u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é equipado com a norma

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} = ||u||_p + \sum_{i=1}^{N} \left|\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|\right|_p,$$

ou, equivalentemente,

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(||u||_p^p + \sum_{i=1}^{N} \left|\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|\right|_p^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

se $1 < p < \infty$.

Além disso, no espaço $H^1(\Omega)$ definimos o seguinte produto escalar

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i},$$

com norma associada

$$||u||_{H^1(\Omega)} = \left(||u||_2^2 + \sum_{i=1}^{N} \left|\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|\right|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

equivalente a norma definida em $W^{1,2}(\Omega)$.

Agora, para obtermos algumas propriedades referentes ao espaço de Sobolev, consideramos E um espaço de Banach e $\mathcal{J} : E \longrightarrow E^{**}$ a *injeção canônica de E em E^{**}* definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : X &\longrightarrow X^{**} \\ x &\longmapsto \mathcal{J}x : \ X^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad f \ \longmapsto \langle \mathcal{J}x, f \rangle = \langle f, x \rangle . \end{aligned} \tag{1.4}$$

Note que $\mathcal{J}$ é linear e contínua pois, dados $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos que $\forall f \in X^*$ vale

$$\langle \mathcal{J}(x+\lambda y), f \rangle = \langle f, x+\lambda y \rangle = \langle f, x \rangle + \lambda \langle f, y \rangle = \langle \mathcal{J}x, f \rangle + \lambda \langle \mathcal{J}y, f \rangle = \langle \mathcal{J}x + \lambda \mathcal{J}y, f \rangle , \tag{1.5}$$

e, pelo Corolário (1.1.3),

$$||\mathcal{J}x||_{E^{**}} = \sup_{\substack{f \in E^* \\ ||f||_{E^*} \le 1}} | \langle \mathcal{J}x, f \rangle | = \sup_{\substack{f \in E^* \\ ||f||_{E^*} \le 1}} | \langle f, x \rangle | = ||x||_E \tag{1.6}$$

Desta forma, dizemos que o espaço E é *reflexivo* se a aplicação $\mathcal{J}$ é sobrejetiva, isto é, $\mathcal{J}(E) = E^{**}$.

A partir disso, segue que:

Proposição 1.3.2. *Todo espaço de Hilbert é um espaço reflexivo.*

Demonstração. Veja [6], página 137. □

Além disso, chamamos E de *separável* se existe um subconjunto $D \subset E$ enumerável e denso.

Daí seguem os seguintes resultados:

Proposição 1.3.3. *$W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach para cada $1 \le p \le \infty$. $W^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$, e é separável para $1 \le p < \infty$. $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável.*

Demonstração. Veja [6], Proposição 9.1, página 264. □

Teorema 1.3.6 (Friedrichs)**.** *Seja $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leq p < \infty$. Então existe uma sequência $\{u_n\}$ de $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } L^p(\mathbb{R}^N), \tag{1.7}$$

e

$$\nabla u_n \longrightarrow \nabla u \text{ em } L^p(\mathbb{R}^N). \tag{1.8}$$

Demonstração. Veja [6], Teorema 9.2, página 265. □

1.4 Conceitos adicionais e resultados auxiliares

Nesta seção, definimos um sistema hamiltoniano de modo a abranger como casos particulares algumas equações diferenciais parciais de evolução, tais como a equação de Schrödinger. Tal sistema consiste de equações em um espaço de Hilbert que são invariantes sob a ação de um grupo de isometrias. "Standing waves"são soluções destas equações, para as quais investigamos estabilidade do tipo orbital relativamente a perturbações do dado inicial. Finalizamos discutindo a boa colocação do PVI (1.12) para sistemas hamiltonianos.

1.4.1 Tripla Variacional

Sejam $(H, (.,.))$ e $(X, \langle ., . \rangle_X)$ espaços de Hilbert reais, cujos duais são H^* e X^*, com $||.||$ e $||.||_X$ suas respectivas normas induzidas.

Definição 1.4.1. Diz-se que H e X fazem parte de uma tripla variacional quando, identificando H com H^* via seu isomorfismo de Riesz (Teorema 1.1.1), tivermos

$$X \subset H = H^* \subset X^*,$$

em que as inclusões são densas e contínuas.

De agora em diante, supomos que X e H fazem parte de uma tripla variacional, sendo as normas $||.||$ e $||.||_X$ equivalentes em X.

Notação 1.4.1. Denotaremos a dualidade entre X^* e X por

$$\langle f, u \rangle_{X^*,X} = f(u), \ \forall f \in X^* \text{ e } u \in X.$$

Além disso, o isomorfismo (isométrico) de Riesz em X (Teorema 1.1.1) será denotado por R, em que

$$\begin{aligned} R : X &\longrightarrow X^* \\ u &\longmapsto Ru : X \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad v \longmapsto \langle Ru, v \rangle = \langle u, v \rangle_X . \end{aligned}$$

Exemplo 1.4.1. Se $(X, \langle ., . \rangle_X)$ é um espaço de Hilbert de dimensão finita, obtemos uma tripla variacional com $H = X$ e $R = I_X$.

Exemplo 1.4.2. Com a notação usual de espaço de Sobolev, $H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N) \subset H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ formam uma tripla variacional com $R = -\Delta + 1$, já que $\langle u, v \rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} uv \, dx = \langle -\Delta u + u, v \rangle$.

Proposição 1.4.1. *$(X^*, \langle ., . \rangle_*)$, com norma induzida denotada por $||.||_*$, é um espaço de Hilbert real, sendo*

$$\langle f, g \rangle_* = \left\langle R^{-1} f, R^{-1} g \right\rangle_X \quad \forall f, g \in X^*.$$

Demonstração. Primeiramente, vamos verificar que a aplicação $\langle ., . \rangle_* : X^* \times X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ é um produto interno.

Note que $\langle ., . \rangle_*$ está bem definido pois $\langle ., . \rangle_X$ é bem definido e R é um isomorfismo. Além disso $\forall f, g, h \in X^*$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ valem:

(1º) $\langle f, f \rangle_* = \langle R^{-1} f, R^{-1} f \rangle_X \geq 0$, pois $\langle ., . \rangle_X$ é um produto interno.

(2º) $\langle f, f \rangle_* = 0 \Leftrightarrow \langle R^{-1} f, R^{-1} f \rangle_X = 0 \Leftrightarrow R^{-1} f = 0 \Leftrightarrow f = 0$, pois R é isomorfismo.

(3º) $\langle f, g \rangle_* = \langle R^{-1} f, R^{-1} g \rangle_X = \langle R^{-1} g, R^{-1} f \rangle_X = \langle g, f \rangle_*$.

(4º)
$$\begin{aligned} \langle f + g, h \rangle_* = \langle R^{-1}(f + g), R^{-1} h \rangle_X &= \langle R^{-1} f + R^{-1} g, R^{-1} h \rangle_X \\ &= \langle R^{-1} f, R^{-1} h \rangle_X + \langle R^{-1} g, R^{-1} h \rangle_X \\ &= \langle f, h \rangle_* + \langle g, h \rangle_* \ . \end{aligned}$$

(5º)
$$\begin{aligned} \langle \lambda f, g \rangle_* = \langle R^{-1}(\lambda f), R^{-1}(g) \rangle_X &= \langle \lambda R^{-1}(f), R^{-1}(g) \rangle_X \\ &= \lambda \langle R^{-1}(f), R^{-1}(g) \rangle_X \\ &= \lambda \langle f, g \rangle_* \ . \end{aligned}$$

Portanto, $\langle ., . \rangle_*$ é um produto interno.

Agora, verificaremos que $(X, \langle ., . \rangle_X)$ é um espaço de Hilbert. Para tanto, note que $\forall f \in X^*$ vale

$$||f||_* = (\langle f, f \rangle_*)^{1/2} = (\left\langle R^{-1} f, R^{-1} f \right\rangle_X)^{1/2} = \left|\left| R^{-1} f \right|\right|_X, \tag{1.9}$$

e considere $\{f_n\}_{n \in \mathbb{R}}$ uma sequência de Cauchy em X^*.

Por (1.9), como $\{f_n\}_{n \in \mathbb{R}}$ é Cauchy em X^*, temos que $\{R^{-1} f_n\}_{n \in \mathbb{R}}$ é uma sequência de Cauchy em X, que é um espaço de Hilbert. Então $\exists \xi \in X$ tal que

$$R^{-1} f_n \longrightarrow \xi \ , \ \text{quando } n \longrightarrow \infty.$$

Seja $f = R(\xi)$.

Logo,

$$\begin{aligned} ||f_n - f||_* = ||R^{-1}(f_n - f)||_X &= ||R^{-1}f_n - R^{-1}f||_X \\ &= ||R^{-1}F_n - \xi||_X \longrightarrow 0 \text{ , quando } n \longrightarrow \infty \text{ .} \end{aligned}$$

Portanto, $f_n \longrightarrow f$ em X^* quando $n \longrightarrow \infty$ e assim X^* é um espaço de Hilbert.

$\square$

Definição 1.4.2. Para cada $L \in \mathcal{B}(X)$, definimos o operador dual $L^* : X^* \longrightarrow X^*$ por $L^* = RL^TR^{-1}$, em que $L^T : X \longrightarrow X$ representa o adjunto de Hilbert (veja Apêndice) do operador L.

Note que L^* está bem definido e é linear, pois é composição de operadores lineares bem definidos. Além disso, $L^* \in \mathcal{B}(X^*)$ já que $\forall f \in X^*$ temos

$$\begin{aligned} ||L^*(f)||_* &= \left|\left|RL^TR^{-1}(f)\right|\right|_* = \left|\left|R^{-1}(RL^TR^{-1})f\right|\right|_X \\ &= \left|\left|L^TR^{-1}(f)\right|\right|_X \leq |L^T|_{\mathcal{B}(X)} \; ||R^{-1}(f)||_X \text{ , pois } \mathrm{L^T} \in \mathcal{B}(\mathrm{X}) \\ &= \left|L^T\right|_{\mathcal{B}(X)} \; ||f||_* \,. \end{aligned}$$

Proposição 1.4.2. *Existe uma inclusão natural* $\mathcal{T} \in \mathcal{B}(X, X^*)$ *tal que*

$$\langle \mathcal{T}u, v\rangle = (u, v) \text{ , } \forall u, v \in X.$$

Demonstração. Pelo Teorema 1.1.1 (de Riesz), $\exists\ \mathcal{T} \in \mathcal{L}(X, X^*)$ inversível e tal que

$$\langle \mathcal{T}u, v\rangle = (u, v) \text{ , } \forall u, v \in X.$$

Além disso, como $||.||$ e $||.||_X$ são equivalentes em X, existe uma constante $C > 0$ para a qual

$$||u|| \leq C\, ||u||_X \quad \forall u \in X. \tag{1.10}$$

Assim, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e (1.10), juntamente com as definições dos operadores R e $\mathcal{T}$, temos que $\forall u \in X$

$$\begin{aligned} ||\mathcal{T}u||_*^2 &= ||R^{-1}\mathcal{T}u||_X^2 = \langle R^{-1}\mathcal{T}u, R^{-1}\mathcal{T}u\rangle_X = \langle \mathcal{T}u, R^{-1}\mathcal{T}u\rangle \\ &= (u, R^{-1}\mathcal{T}u) \leq ||u|| \;\; ||R^{-1}\mathcal{T}u|| \leq C^2\, ||u||_X \;\; ||R^{-1}\mathcal{T}u||_X \\ &= C^2\, ||u||_X \;\; ||\mathcal{T}u||_* \,. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Agora, se $u = 0$ em X, obviamente $||\mathcal{T}u||_* = ||u||_X$.

Por outro lado, se $u \neq 0$ em X, então $||\mathcal{T}u||_* \neq 0$, pois $\mathcal{T}$ é injetivo, e pelo que vimos em (1.11), concluímos que

$$||\mathcal{T}u||_* \leq C^2\, ||u||_X \,.$$

Logo, $\mathcal{T}$ é contínuo. □

Observação 1.4.1. Durante o transcorrer deste trabalho usaremos, sem maiores preocupações e justificativas, a seguinte relação entre os dois produtos escalares em X

$$(u,v) = \langle \mathcal{T}u, v\rangle = \left\langle R^{-1}\mathcal{T}u, v\right\rangle_X, \ \forall u, v \in X.$$

Além disso, em alguns momentos, será mais conveniente denotarmos $S = R^{-1}\mathcal{T}$. Dessa forma, obtemos que $S \in \mathcal{B}(X,X)$, $S^T = S$ e $\langle Su, u\rangle_X > 0 \ \ \forall u \in X\backslash\{0\}$, pois $\forall u, v \in X$

$$||Su||_X = \left|\left|R^{-1}\mathcal{T}u\right|\right|_X = ||\mathcal{T}u||_* \leq C^2\, ||u||_X\,,$$

$$\langle Su, v\rangle_X = \langle R^{-1}\mathcal{T}u, v\rangle_X = (u,v) = (v,u) = \langle R^{-1}\mathcal{T}v, u\rangle_X = \langle u, R^{-1}\mathcal{T}v\rangle_X = \langle u, Sv\rangle_X\,,$$

e

$$\langle Su, u\rangle_X = \left\langle R^{-1}\mathcal{T}u, u\right\rangle_X = \langle \mathcal{T}u, u\rangle = (u,u)\,.$$

Exemplo 1.4.3. No exemplo (1.4.2), temos que $S = (-\Delta + 1)^{-1}$.

Isto será usado mais tarde quando tratarmos da equação de Schrödinger.

1.4.2 Sistema Hamiltoniano

Sejam J e $\mathcal{H}$ satisfazendo

$$(H1)\ J \in \mathcal{B}(X,X) \text{ com } J^T = J^{-1} = -J \text{ e } \mathcal{H} \in C^2(X,\mathbb{R}).$$

Um problema de valor inicial (PVI) do tipo

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt}(\mathcal{T}u) & = & J^*\mathcal{H}'(u) \\ u(0) & = & u_0\ \ , \end{array}\right. \tag{1.12}$$

com $u_0 \in X$, $J^* : X^* \longrightarrow X^*$ operador dual de J como na definição 1.4.2 e $\mathcal{H}'(\xi) \in X^*$ denotando a derivada de Fréchet de $\mathcal{H}$ em $\xi \in X$, define um *sistema hamiltoniano* em $(X, \langle .,.\rangle_X)$. Neste caso, $\mathcal{H}$ será chamado de *operador hamiltoniano*.

Além disso, uma *solução do PVI* (1.12) é uma função definida em um intervalo $[0,b)$ para algum $b > 0$ tal que

$$u \in C([0,b), X) \text{ e } \mathcal{T}u \in C^1((0,b), X^*),$$

com $u(0) = u_0 \in X$ e verificando

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{T}u(t)) \ = J^*\mathcal{H}'(u(t)), \tag{1.13}$$

$\forall t \in (0, b)$.

1.4.3 Invariância do Hamiltoniano

Nesta seção, observaremos a invariância do operador $\mathcal{H}$ sob a ação de um grupo gerado a partir de um operador A com as seguintes propriedades

$$(H2)\ A \in \mathcal{B}(X) \text{ com } A^T = -A \text{ e tal que } AJ = JA \text{ e } \left\langle \mathcal{H}^{'}(v), Av \right\rangle = 0 \ \ \forall v \in X,$$

em que J é como em (H1).

Primeiramente, denotando $\Gamma = \{T(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$, em que $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{B}(X)$ é definido por

$$T(\theta) = e^{\theta A}, \tag{1.14}$$

temos, diretamente da Proposição 1.2.1 e de $(H2)$, que

$$T^{'}(\theta) = AT(\theta) = T(\theta)A,\ T(\theta)^{-1} = T(\theta)^T = T(-\theta) \text{ e } T(\theta)J = JT(\theta), \tag{1.15}$$

Portanto, obtemos que Γ é um grupo de isometrias com a operação usual de composição, pois T satisfaz a Proposição (1.2.1) e $\forall u \in X$,

$$||T(\theta)u||_X^2 = \left|\left|e^{\theta A}u\right|\right|_X^2 = \left\langle e^{\theta A}u, e^{\theta A}u\right\rangle_X = \left\langle u, e^{-\theta A}e^{\theta A}u\right\rangle_X = \langle u, u\rangle_X = ||u||_X^2 \,.$$

Decorre disto a seguinte definição:

Definição 1.4.3. Uma função $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ é dita uma quantidade Γ-invariante se

$$F(T(\theta)v) = F(T(0)v) = F(v), \forall \theta \in \mathbb{R} \text{ e } \forall v \in X.$$

Agora, definindo uma *forma simplética* em $X \times X$ por $\omega_X(\xi, \eta) = \langle J\xi, \eta\rangle_X$, $\forall \xi, \eta \in X$, temos que $\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$\omega_X(T(\theta)\xi, T(\theta)\eta) = \langle JT(\theta)\xi, T(\theta)\eta\rangle_X = \langle T(\theta)J\xi, T(\theta)\eta\rangle_X = \langle J\xi, \eta\rangle_X = \omega_X(\xi, \eta),$$

mostrando que ω_X é preservada pelo grupo Γ.

Além disso, $T(-\theta)^* = [T(\theta)^*]^{-1}$ $\forall \theta \in \mathbb{R}$, pois

$$\begin{aligned}
[T(\theta)^*]^{-1} &= (RT(\theta)^T R^{-1})^{-1} = (RT(-\theta)R^{-1})^{-1} \\
&= RT(-\theta)^{-1}R^{-1} = RT(\theta)R^{-1} \\
&= T(-\theta)^* \ \forall \theta \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

então dizemos que $F^{'}$ é uma quantidade Γ-equivariante se

$$F^{'}(T(\theta)v) = T(-\theta)^{*}F^{'}(v)\ \forall\theta \in \mathbb{R} \text{ e } \forall v \in X, \tag{1.16}$$

em que $F^{'}(v)$ denota a derivada de Fréchet de F em v.

A partir dessas definições, temos os seguintes resultados:

Proposição 1.4.3. *Se F é uma quantidade Γ-invariante, então $F^{'}$ é uma quantidade Γ-equivariante.*

Demonstração. Pela Γ-invariância de F, temos que $\forall\theta \in \mathbb{R}$ e $\forall v, w \in X$,

$$\begin{aligned}
\langle F^{'}(v), w\rangle &= \langle F^{'}(T(\theta)v), T(\theta)w\rangle = \langle R^{-1}F^{'}(T(\theta)v), T(\theta)w\rangle_X \\
&= \langle T(\theta)^T R^{-1}F^{'}(T(\theta)v), w\rangle_X = \langle RT(\theta)^T R^{-1}F^{'}(T(\theta)v), w\rangle \\
&= \langle T(\theta)^{*}F^{'}(T(\theta)v), w\rangle.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\langle R^{-1}F^{'}(v), w\rangle_X = \langle R^{-1}T(\theta)^{*}F^{'}(T(\theta)v), w\rangle_X$$

$$\Rightarrow \langle R^{-1}F^{'}(v) - R^{-1}T(\theta)^{*}F^{'}(T(\theta)v), w\rangle_X = 0,\ \forall v, w \in X \text{ e } \forall\theta \in X.$$

Em particular, se $w = R^{-1}F^{'}(v) - R^{-1}T(\theta)^{*}F^{'}(T(\theta)v)$, obtemos que

$$\begin{aligned}
&\left|\left|R^{-1}(F^{'}(v) - T(\theta)^{*}F^{'}(T(\theta)v))\right|\right|_X^2 = 0,\ \forall v \in X \\
\Leftrightarrow\ & R^{-1}(F^{'}(v) - T(\theta)^{*}F^{'}(T(\theta)v)) = 0,\ \forall v \in X \\
\Rightarrow\ & F^{'}(v) - T(\theta)^{*}F^{'}(T(\theta)v) = 0,\ \forall v \in X \text{ e } \forall\theta \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

pois R^{-1} é injetivo. □

Proposição 1.4.4. *$F \in C^1(X, \mathbb{R})$ é uma quantidade Γ-invariante se, e somente se, $\langle F^{'}(v), Av\rangle = 0,\ \forall v \in X$.*

Demonstração. Se F é Γ-invariante, então

$$0 = \frac{d}{d\theta}(F(v)) = \frac{d}{d\theta}(F(T(\theta)v)) = \langle D_u F(T(\theta)v), AT(\theta)v\rangle\ \forall\theta \in \mathbb{R} \text{ e } v \in X.$$

Em particular, tomando $\theta = 0$ obtemos que $\langle D_u F(v), Av\rangle = 0\ \forall v \in X$, ou seja, $\left\langle F^{'}(v), Av\right\rangle = 0\ \forall v \in X$.

Reciprocamente, pelo Teorema 1.2.6 (II - Teorema Fundamental do Cálculo), temos que

$$
\begin{aligned}
F(T(\theta)v) - F(T(0)v) &= \int_0^\theta \frac{d}{d\rho}(F(T(\rho)v))\ d\rho = \int_0^\theta \langle D_u F(T(\rho)v), AT(\rho)v\rangle\ d\rho \\
&= \int_0^\theta \left\langle F'(w), Aw \right\rangle\ d\rho,\ \text{com } w = T(\rho)v \\
&= \int_0^\theta 0\ d\rho \\
&= 0\ \forall\theta \in \mathbb{R} \text{ e } v \in X.
\end{aligned}
$$

Logo, $F(T(\theta)v) = F(T(0)v) = F(v),\ \forall\theta \in \mathbb{R}$ e $\forall v \in X$. □

Observação 1.4.2. Diretamente da Proposição 1.4.4 obtemos que $\mathcal{H}$ é Γ-invariante, pois $\mathcal{H}$ satisfaz a hipótese $(H2)$.

Se, ainda, assumimos que A é anti-simétrico, ou seja, que

$$(H3)\ \ (Av, w) = -(v, Aw), \forall v, w \in X,$$

obtemos os seguintes resultados:

Corolário 1.4.1.

(i) *Se* $\langle w, Aw\rangle_X = 0\ \forall w \in X$, *então* $||.||_X^2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *é* Γ*-invariante.*

(ii) $||.||^2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma quantidade* Γ*-invariante e, em particular,* Γ *age isometricamente em* X*, com relação a norma* $||.||$.

Demonstração.

(i) Para $\theta \in \mathbb{R}$ *e* $v \in X$, temos, a partir do Teorema 1.2.6 (II - Teorema Fundamental do Cálculo), que

$$
\begin{aligned}
||T(\theta)v||_X^2 - ||T(0)v||_X^2 &= \int_0^\theta \frac{d}{d\rho}\, ||T(\rho)v||_X^2\ d\rho = \int_0^\theta \frac{d}{d\rho}\, \langle T(\rho)v, T(\rho)v\rangle_X\ d\rho \\
&= \int_0^\theta \left\langle T'(\rho)v, T(\rho)v\right\rangle_X + \left\langle T(\rho)v, T'(\rho)v\right\rangle_X\ d\rho \\
&= 2\int_0^\theta \langle T(\rho)v, AT(\rho)v\rangle_X\ d\rho \\
&= 0,\ \text{por hipótese.}
\end{aligned}
$$

Logo, $||.||_X^2$ é Γ-invariante.

(ii) Decorre do item (i), pois A satisfaz $(H3)$.

□

Além disso, com a suposição $(H3)$, obtemos que $(T(\theta)v,w) = (v, T(-\theta)w),\ \forall\theta \in \mathbb{R}$ e $\forall v, w \in X$. De fato, de $(H3)$ temos que $\forall v, w \in X$ vale

$$\begin{aligned}(Av,w) = -(v,Aw) \Leftrightarrow \langle SAv, w\rangle_X &= -\langle Sv, Aw\rangle_X = \langle Sv, -Aw\rangle_X = \langle Sv, A^T w\rangle_X \\ &= \langle ASv, w\rangle_X,\end{aligned}$$

donde conclui-se que $SA = AS$. Daí, pela Proposição 1.2.1 item (2º), da comutatividade de S com A e de (1.15), temos

$$\begin{aligned}(T(\theta)v,w) &= \langle ST(\theta)v, w\rangle_X = \langle T(\theta)Sv, w\rangle_X = \langle Sv, T(-\theta)w\rangle_X \\ &= (v, T(-\theta)w),\ \forall v, w \in X.\end{aligned}$$

Consequência esta que será usada no decorrer deste trabalho.

Observação 1.4.3. Claramente, $(H2)$ e $(H3)$ são satisfeitas se considerarmos $A = 0$, mas assim $T(\theta) = I_X\ \forall\theta \in \mathbb{R}$ e, como veremos mais a frente, neste caso a "standing wave" associada a T será uma solução estacionária do PVI (1.12), caso este que não estaremos interessados. Isto é, nos interessa um hamiltoniano $\mathcal{H}$ invariante sob a ação de um grupo não-trivial de isometrias $\Gamma = \{T(\theta)|\ \theta \in \mathbb{R}\}$, para o qual $\exists\ A \neq 0$ satisfazendo $(H2)$ e $(H3)$.

1.4.4 Existência de solução do tipo standing wave

Nesta seção, procuramos garantir a existência de soluções do tipo "standing wave" para o sistema hamiltoniano (1.12). Dessa forma, podemos, posteriormente, estudar a estabilidade orbital destas mesmas soluções.

Assumindo as hipóteses $(H1)$ e $(H2)$ podemos definir o seguinte conceito:

Definição 1.4.4. Uma "standing wave" é uma solução do PVI (1.12) da forma

$$u(t) = T(\lambda t)\xi\ \forall t \in \mathbb{R},\ \textit{para algum}\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } \xi \in X. \tag{1.17}$$

Neste caso, ξ é o valor inicial.

Supondo agora que J é anti-simétrico, ou seja, que se verifica

$$(H4)\ \ (Jv,w) = -(v,Jw)\,,\ \forall v, w \in X,$$

tem-se que:

Proposição 1.4.5. *Seja $B = J^*A^*\mathcal{T} \in \mathcal{B}(X, X^*)$ e defina $Q : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por*

$$Q(v) = \frac{1}{2}\langle Bv, v\rangle\,,\ \forall v \in X.$$

Então valem as seguintes propriedades:

(i) *B é simétrico, no sentido de que $\langle Bv, w\rangle = \langle Bw, v\rangle \; \forall v, w \in X$.*

(ii) *$B = \mathcal{T}JA$.*

(iii) *$Q^{'} = B$ e Q é uma quantidade Γ-invariante.*

Demonstração.

(i) Primeiramente, note que pelas propriedades de J e pelas relações entre os produtos internos em X, temos $\forall v, w \in X$,

$$\begin{aligned}
\langle Bv, w\rangle &= \langle J^*A^*\mathcal{T}v, w\rangle = \langle R^{-1}J^*A^*\mathcal{T}v, w\rangle_X = \langle J^T R^{-1}A^*\mathcal{T}v, w\rangle_X \\
&= \langle R^{-1}A^*\mathcal{T}v, Jw\rangle_X = \langle A^*\mathcal{T}v, Jw\rangle = \left\langle RA^T R^{-1}\mathcal{T}v, Jw\right\rangle \\
&= \left\langle A^T R^{-1}\mathcal{T}v, Jw\right\rangle_X = \langle R^{-1}\mathcal{T}v, AJw\rangle_X \\
&= (v, AJw).
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Ainda, como valem $(H3)$ e $(H4)$,

$$(v, AJw) = -(Av, Jw) = (JAv, w). \tag{1.19}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle Bv, w\rangle &= (v, AJw) \;\; \text{por (1.18)} \\
&= (JAv, w) \;\; \text{por (1.19)} \\
&= (AJv, w) = (w, AJv) \\
&= \langle Bw, v\rangle \;\; \text{por (1.18)}.
\end{aligned}$$

(ii) De (1.18) e (1.19), juntamente com a relação entre os produtos internos em X, vemos que

$$\langle Bv, w\rangle = (JAv, w), \;\; \forall v, w \in X. \tag{1.20}$$

Assim, $\forall v, w \in X$,

$$\begin{aligned}
\langle Bv, w\rangle = (JAv, w) = \langle \mathcal{T}JAv, w\rangle \;\; &\Rightarrow \;\; \langle R^{-1}Bv, w\rangle_X = \langle R^{-1}\mathcal{T}JAv, w\rangle_X \\
&\Rightarrow \;\; \langle R^{-1}Bv - R^{-1}\mathcal{T}JAv, w\rangle_X = 0.
\end{aligned}$$

Em particular, para $w = R^{-1}Bv - R^{-1}\mathcal{T}JAv$, obtemos que

$$\left|\left|R^{-1}Bv - R^{-1}\mathcal{T}JAv\right|\right|_X = 0, \;\; \forall v \in X.$$

Portanto, $R^{-1}B = R^{-1}\mathcal{T}JA$ e, consequentemente, $B = \mathcal{T}JA$, pois R é injetivo.

(iii) De fato, note que $\forall v \in X$,

$$Q(v) = \frac{1}{2}\langle Bv, v\rangle = \frac{1}{2}\langle \mathcal{T}JAv, v\rangle = \frac{1}{2}(JAv, v). \tag{1.21}$$

Então, como Q é Gateaux diferenciável e $D_vQ(u) = \langle Bu, v\rangle$, pois $\forall u, v \in X$

$$\lim_{t\to 0}\frac{Q(u+tv)-Q(u)}{t}$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{(JA(u+tv), u+tv)-(JAu,u)}{t}, \text{ por } (1.21)$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{(JAu+tJAv, u+tv)-(JAu,u)}{t} = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{t\,(JAu,v)+t\,(JAv,u)+t^2\,(JAv,v)}{t}$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}(JAu,v)+(JAv,u)+t\,(JAv,v) = \frac{1}{2}[(JAu,v)+(JAv,u)]$$
$$= \frac{1}{2}[\langle Bu,v\rangle+\langle Bv,u\rangle], \text{ por } (1.20)$$
$$= \frac{1}{2}[\langle Bu,v\rangle+\langle Bu,v\rangle], \text{ pelo item } (i)$$
$$= \langle Bu,v\rangle$$

e, também, a aplicação $u \longmapsto D_v(u)$ é contínua, já que B é contínuo, temos pela Proposição 1.2.4 que Q é Fréchet diferenciável e $\left\langle Q^{'}(u), v\right\rangle = \langle Bu, v\rangle$, ou seja, $Q^{'} = B$.

Além disso, pelo que acabamos de ver e por $(H4)$, obtemos que $\forall v \in X$,

$$\langle Q^{'}(v), Av\rangle = \langle Bv, Av\rangle = (JAv, Av) = 0. \tag{1.22}$$

Daí, segue da Proposição 1.4.4 que Q é Γ-invariante. □

Investigamos, agora, as soluções "standing waves" variacionalmete, a saber, examinando os pontos críticos do funcional dado pela definição a seguir.

Definição 1.4.5. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos o argumento hamiltoniano $G_\lambda : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$G_\lambda(v) = \mathcal{H}(v) - \lambda Q(v),\ \forall v \in X.$$

Observamos que as propriedades abaixo, nos ajudam a obter o que desejamos.

Observação 1.4.4. $[J^*]^{-1} = -J^*$, pois

$$\begin{aligned} J^*(-J^*) &= (RJ^TR^{-1})(-RJ^TR^{-1}) = (RJ^TR^{-1})(RJR^{-1}) \\ &= (RJ^{-1}R^{-1})(RJR^{-1}) = (RJR^{-1})^{-1}(RJR^{-1}) \\ &= I_X\ , \end{aligned}$$

e da mesma forma $(-J^*)J^* = I_X$.

Observação 1.4.5. $T(-\theta)^*J^* = J^*T(-\theta)^*$, pois como vale (1.15) temos que

$$\begin{aligned} T(-\theta)^*J^* &= (RT(-\theta)^TR^{-1})(RJ^TR^{-1}) = (RT(\theta)R^{-1})(R(-J)R^{-1}) = RT(\theta)(-J)R^{-1} \\ &= R(-J)T(\theta)R^{-1} = RJ^TT(-\theta)^TR^{-1} = (RJ^TR^{-1})(RT(-\theta)^TR^{-1}) \\ &= J^*T(-\theta)^*. \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos o que segue:

Teorema 1.4.1. *$u(t) = T(\lambda t)\xi$ é uma solução do tipo "standing wave" do PVI (1.12) se, e somente se, ξ é ponto crítico de G_λ.*

Demonstração. Note que para $u(t) = T(\lambda t)\xi$ temos que $u \in C^1(\mathbb{R}, X)$, pois pela regra da cadeia (Teorema 1.2.1) temos que

$$\frac{d}{dt}(u(t)) = \frac{d}{dt}(T(\lambda t)\xi) = \left(\frac{d}{dt}T(\lambda t)\right)\xi = \lambda A T(\lambda t)\xi = \lambda A u(t). \tag{1.23}$$

Além disso, como $\mathcal{T} \in \mathcal{B}(X, X^*)$, vemos que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{T}(u(t)) = \mathcal{T}^{'}(u(t))\frac{d}{dt}u(t) = \mathcal{T}\frac{d}{dt}u(t), \tag{1.24}$$

e, consequentemente,

$$\mathcal{T}(u(t)) \in C^1(\mathbb{R}, X).$$

Daí, por (1.23) e (1.24), temos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{T}(u(t)) = \mathcal{T}\frac{d}{dt}u(t) = \mathcal{T}\lambda A T(\lambda t)\xi = \lambda\mathcal{T}T(\lambda t)A\xi. \tag{1.25}$$

Agora, de (1.25) e das propriedades observadas em (1.15), vemos que, $\forall v \in X$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d}{dt}\mathcal{T}(u(t)), v \right\rangle &= \langle \lambda\mathcal{T}T(\lambda t)A\xi, v\rangle = \lambda\,\langle \mathcal{T}T(\lambda t)A\xi, v\rangle = \lambda\,(T(\lambda t)A\xi, v) \\
&= \lambda(A\xi, T(-\lambda t)v) = -\lambda(\xi, AT(-\lambda t)v) = -\lambda\langle \mathcal{T}\xi, AT(-\lambda t)v\rangle \\
&= -\lambda\langle R^{-1}\mathcal{T}\xi, AT(-\lambda t)v\rangle_X = -\lambda\langle A^T R^{-1}\mathcal{T}\xi, T(-\lambda t)v\rangle_X \\
&= -\lambda\langle A^*\mathcal{T}\xi, T(-\lambda t)v\rangle = -\lambda\langle R^{-1}A^*\mathcal{T}\xi, T(-\lambda t)v\rangle_X \\
&= -\lambda\langle T(-\lambda t)^T R^{-1}A^*\mathcal{T}\xi, v\rangle_X \\
&= -\lambda\langle T(-\lambda t)^* A^*\mathcal{T}\xi, v\rangle\ ,
\end{aligned}$$

e, portanto

$$\frac{d}{dt}\mathcal{T}(u(t)) = -\lambda T(-\lambda t)^* A^*\mathcal{T}\xi\ . \tag{1.26}$$

Ainda, como $\mathcal{H}^{'}$ é uma quantidade Γ-equivariante e $T(-\theta)^* J^* = J^* T(-\theta)^*$, obtemos:

$$J^*\mathcal{H}^{'}(u(t)) = J^*\mathcal{H}^{'}(T(\lambda t)\xi) = J^*T(-\lambda t)^*\mathcal{H}^{'}(\xi) = T(-\lambda t)^* J^*\mathcal{H}^{'}(\xi)\ . \tag{1.27}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{T}(u(t)) = J^*\mathcal{H}^{'}(u(t)) &\Leftrightarrow -\lambda T(-\lambda t)^* A^*\mathcal{T}\xi = J^*\mathcal{H}^{'}(u(t)) \text{ por } (1.26)\\
&\Leftrightarrow -\lambda A^*\mathcal{T}\xi = [T(-\lambda t)^*]^{-1} J^*\mathcal{H}^{'}(u(t))\\
&\Leftrightarrow -\lambda A^*\mathcal{T}\xi = [T(-\lambda t)^*]^{-1} T(-\lambda t)^* J^*\mathcal{H}^{'}(\xi) \text{ por } (1.27)\\
&\Leftrightarrow -\lambda A^*\mathcal{T}\xi = J^*\mathcal{H}^{'}(\xi)\\
&\Leftrightarrow \lambda J^* A^*\mathcal{T}\xi = \mathcal{H}^{'}(\xi),\ \text{pois } [J^*]^{-1} = -J^*\\
&\Leftrightarrow \lambda B(\xi) = \mathcal{H}^{'}(\xi),\ \text{pois } B = J^* A^*\mathcal{T}\\
&\Leftrightarrow G^{'}_{\lambda}(\xi) = 0\ .
\end{aligned}$$

□

Por fim, fechando esta seção, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.4.6. *Se ξ é um ponto crítico de G_λ, então $T(\theta)\xi$ também o é, $\forall\theta\in\mathbb{R}$.*

Demonstração. Como $\forall v \in X$,

$$\langle G^{'}_{\lambda}(v), Av\rangle = \langle \mathcal{H}^{'}(v) - \lambda Q^{'}(v), Av\rangle = \langle \mathcal{H}^{'}(v), Av\rangle - \lambda\langle Q^{'}(v), Av\rangle = 0,$$

temos, pela Proposição (1.4.4), que G_λ é uma quantidade Γ-invariante e, consequentemente, pela Proposição (1.4.3), obtemos que $G^{'}_{\lambda}$ é uma quantidade Γ-equivariante, ou seja,

$$G^{'}_{\lambda}(T(\theta)\xi) = T(-\theta)^* G^{'}_{\lambda}(\xi),\ \forall\theta\in\mathbb{R}. \tag{1.28}$$

Logo, como ξ é um ponto crítico de G_λ e $T(-\theta)^*$ é linear para todo $\theta\in\mathbb{R}$, vemos, de (1.28), que

$$G^{'}_{\lambda}(T(\theta)\xi) = 0,\ \forall\theta\in\mathbb{R},$$

ou seja, $T(\theta)\xi$ é ponto crítico de G_λ, $\forall\theta\in\mathbb{R}$. □

1.4.5 Órbita

Apresentamos, a seguir, o conceito de órbita, analogamente ao do estudo de sistemas dinâmicos.

Definição 1.4.6. Para cada $v \in X$, o conjunto $\Theta(v) = \{T(\theta)v|\ \theta\in\mathbb{R}\}$ representa a órbita de v sob a ação do grupo $\Gamma = \{T(\theta)|\ \theta\in\mathbb{R}\}$.

A partir daí, segue que:

Proposição 1.4.7. *Para cada $v \in X$, $\Theta(v)$ é um conjunto limitado em X, de modo que*

$$\Theta(v) = \{v\} \Leftrightarrow Av = 0,\ \forall v\in X.$$

Demonstração. Primeiramente, $\Theta(v)$ é claramente limitado, pois

$$||T(\theta)v||_X = ||v||_X,\ \forall\theta \in \mathbb{R}.$$

Agora, se $v = 0$ em X, então a equivalência é trivialmente verificada.

Assim, se $v \neq 0$ e $Av = 0$ então, pelo Teorema 1.2.6 (II - Teorema Fundamental do Cálculo), vemos que

$$T(\theta)v - T(0)v = \int_0^\theta T^{'}(\rho)v\ d\rho = \int_0^\theta AT(\rho)v\ d\rho = \int_0^\theta T(\rho)Av\ d\rho = 0,$$

e, portanto, $T(\theta) = T(0) = I_X\ \forall\theta \in \mathbb{R}$, ou seja, $\Theta(v) = \{T(\theta)v \mid \theta \in \mathbb{R}\} = \{v\}$.

Por outro lado, se $v \neq 0$ e $\Theta(v) = \{v\}$, então

$$T(\theta)v = v,\ \forall\theta \in \mathbb{R} \Rightarrow T^{'}(\theta)v = 0 \Rightarrow AT(\theta)v = 0 \Rightarrow T(\theta)Av = 0 \Rightarrow Av = 0,$$

já que $T(\theta)$ é injetiva para cada $\theta \in \mathbb{R}$. □

Agora, denominamos a equação $G^{'}_\lambda(v) = 0$, dada pela definição 1.4.5 na seção anterior, por *equação estacionária*. De modo que, se ξ satisfaz esta equação, ξ será dita uma *solução estacionária*.

Com isso, podemos compreender o seguinte resultado:

Teorema 1.4.2. *A "standing wave" $u(t) = T(\lambda t)\xi$ é uma solução estacionária se, e somente se, $\lambda A\xi = 0$.*

Demonstração. De fato, primeiramente, note que, pelo Teorema 1.4.1, vale

$$u(t) \text{ é uma "standing wave"} \Leftrightarrow G^{'}_\lambda(\xi) = 0. \tag{1.29}$$

Agora, como $u(t) = T(\lambda t)\xi\ \forall t \in \mathbb{R}$, então por (1.15) obtemos que $u^{'}(t) = T(\lambda t)\lambda A\xi\ \forall t \in \mathbb{R}$. Assim, como, para cada $t \in \mathbb{R}$, $T(\lambda t)$ é injetor, obtemos que

$$\lambda A\xi = 0 \Leftrightarrow u^{'}(t) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.30}$$

Logo, pelo Corolário 1.2.1, vemos que $u^{'}(t) = 0\ \forall t \in \mathbb{R}$ se, e somente se, u é constante. Dessa forma,

$$u^{'}(t) = 0\ \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow u(t) = u(0) = \xi\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.31}$$

Portanto, de (1.29) e (1.31), obtemos que

$$u^{'}(t) = 0\ \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow G^{'}_\lambda(u(t)) = 0\ \forall t \in \mathbb{R},$$

ou seja, $u'(t) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $u(t)$ é solução estacionária. Consequentemente, de (1.30), o resultado segue. $\square$

Por fim, com o intuito de estabelecer o Lema 1.4.1, que será usado na demonstração do Teorema 2.1.1, definimos o conjunto

$$\Theta(\xi)_\rho = \{v \in X|\ d(v, \Theta(\xi)) < \rho\} = \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} B_\rho(T(\theta)\xi), \tag{1.32}$$

e enunciamos a seguinte proposição:

Proposição 1.4.8. *Para cada $\xi \in X$ e $\rho > 0$ considere o conjunto $\Theta(\xi)_\rho$ definido em (1.32). Então,*

$$B_\rho(T(\theta)\xi) = T(\theta)B_\rho(\xi)\ \forall \theta \in \mathbb{R} \quad e \quad \Theta(\xi)_\rho = \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} T(\theta)B_\rho(\xi).$$

Além disso, $T(\theta)\Theta(\xi)_\rho = \Theta(\xi)_\rho$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Primeiramente, da segunda relação em (1.15) temos que $\forall \eta \in X$ vale:

$$\langle \eta, \eta \rangle_X - 2\langle \eta, T(\theta)\xi \rangle_X + \langle T(\theta)\xi, T(\theta)\xi \rangle_X = \langle T(-\theta)\eta, T(-\theta)\eta \rangle_X - 2\langle T(-\theta)\eta, \xi \rangle_X + \langle \xi, \xi \rangle_X$$

$$\Rightarrow ||\eta - T(\theta)\xi||_X = ||T(-\theta)\eta - \xi||_X\ ,\ \forall \theta \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \eta \in X. \tag{1.33}$$

Assim, $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} v \in B_\rho(T(\theta)\xi) &\Rightarrow ||T(-\theta)v - \xi||_X = ||v - T(\theta)\xi||_X < \rho \\ &\Rightarrow T(-\theta)v \in B_\rho(\xi) \Rightarrow T(\theta)T(-\theta)v \in T(\theta)B_\rho(\xi) \\ &\Rightarrow v \in T(\theta)B_\rho(\xi), \end{aligned}$$

ou seja, $B_\rho(T(\theta)\xi) \subset T(\theta)B_\rho(\xi)$ $\forall \theta \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, de (1.33), obtemos que $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} w \in T(\theta)B_\rho(\xi) &\Rightarrow T(-\theta)w \in B_\rho(\xi) \Rightarrow ||w - T(\theta)\xi||_X = ||T(-\theta)w - \xi||_X < \rho \\ &\Rightarrow w \in B_\rho(T(\theta)\xi), \end{aligned}$$

de modo que $T(\theta)B_\rho(\xi) \subset B_\rho(T(\theta)\xi)$.

Desta forma, $B_\rho(T(\theta)\xi) = T(\theta)B_\rho(\xi)$ $\forall \theta \in \mathbb{R}$ e, consequentemente,

$$\Theta(\xi)_\rho = \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} B_\rho(T(\theta)\xi) = \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} T(\theta)B_\rho(\xi). \tag{1.34}$$

Além disso, se $z \in T(\theta)\Theta(\xi)_\rho$, então existe $v \in \Theta(\xi)_\rho$ para o qual $z = T(\theta)v$. Mas de (1.34), temos que se $v \in \Theta(\xi)_\rho$, então existe algum $\theta_1 \in \mathbb{R}$ tal que $v = T(\theta_1)w$, com $w \in B_\rho(\xi)$.

Assim,

$$z = T(\theta)v = T(\theta)T(\theta_1)w = T(\theta + \theta_1)w \in \bigcup_{\theta\in\mathbb{R}} T(\theta)B_\rho(\xi) = \Theta(\xi)_\rho,$$

ou seja, $T(\theta)\Theta(\xi)_\rho \subset \Theta(\xi)_\rho$.

Por outro lado, se $z \in \Theta(\xi)_\rho$ temos, por (1.33), que $z \in T(\theta_1)B_\rho(\xi)$ para algum $\theta_1 \in \mathbb{R}$. Então existe $w \in B_\rho(\xi)$ tal que $z = T(\theta_1)w$.

Dessa forma, $w = T(\theta)T(-\theta)w \in T(\theta)T(-\theta)B_\rho(\xi)$.

Daí, como $T(\theta_1 - \theta)B_\rho(\xi) = B_\rho(T(\theta_1 - \theta)\xi)$, obtemos que $z = T(\theta_1)T(\theta)T(-\theta)w = T(\theta)T(\theta_1 - \theta)w$ e, portanto,

$$z \in T(\theta)B_\rho(T(\theta_1 - \theta)\xi) \subset T(\theta)\left(\bigcup_{\theta\in\mathbb{R}} B_\rho(T(\theta)\xi)\right) = T(\theta)\Theta(\xi)_\rho,$$

ou seja, $\Theta(\xi)_\rho \subset T(\theta)\Theta(\xi)_\rho$.

Portanto, $T(\theta)\Theta(\xi)_\rho = \Theta(\xi)_\rho,\ \forall\theta \in \mathbb{R}$. □

Com isso, podemos demonstrar o próximo resultado.

Lema 1.4.1. *Suponha que $A\xi \neq 0$. Então $\exists r(\xi) > 0$ tal que para cada $\rho \in (0, r(\xi))$ e para cada $v \in \Theta(\xi)_\rho$, $\exists\theta_1 \in \mathbb{R}$ tal que*

$$||v - T(\theta_1)\xi||_X < \rho \quad e \quad \langle v - T(\theta_1), AT(\theta_1)\xi\rangle_X = 0.$$

Demonstração. Como $A\xi \neq 0$ então, pela proposição 1.4.7, $\Theta(\xi) \neq \{\xi\}$, ou seja, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $T(\theta)\xi \neq \xi = T(0)\xi$. Mas, se $T(\theta)\xi \neq \xi$, como $T(-\theta)$ é injetivo, também temos

$$\xi = T(0)\xi = T(-\theta + \theta)\xi = T(-\theta)T(\theta)\xi \neq T(-\theta)\xi.$$

Tome $\alpha = |\theta|$. Assim, $\exists\alpha > 0$ tal que

$$T(\alpha)\xi \neq T(0)\xi = \xi \;\text{ e }\; T(-\alpha)\xi \neq T(0)\xi = \xi.$$

Seja $r(\xi) = \dfrac{1}{2}min\{||\xi - T(\alpha)\xi||_X\ ,\ ||\xi - T(-\alpha)\xi||_X\}$.

Agora, para cada $\rho \in (0, r(\xi))$ e $v \in \Theta(\xi)_\rho$, $\exists\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $T(\theta_0)\xi \in B_\rho(v)$, pois pela Proposição 1.4.8 e a equação (1.33),

$$\begin{aligned} v \in \Theta(\xi)_\rho &\Rightarrow v = T(\theta_0)w\ ;\ w \in B_\rho(\xi),\ \text{para algum } \theta_0 \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow ||T(-\theta_0)T(\theta_0)w - \xi||_X = ||w - \xi||_X < \rho \\ &\Rightarrow ||T(\theta_0)w - T(\theta_0)\xi||_X < \rho \\ &\Rightarrow ||v - T(\theta_0)\xi||_X < \rho\ . \end{aligned}$$

Então, de (1.33), temos que

$$\begin{aligned} ||v - T(\theta_0 \pm \alpha)\xi||_X &= ||[T(\theta_0)\xi - T(\theta_0 \pm \alpha)\xi] - [T(\theta_0)\xi - v]||_X \\ &\geq ||T(\theta_0)\xi - T(\theta_0 \pm \alpha)\xi||_X - ||T(\theta_0)\xi - v||_X \\ &= ||\xi - T(-\theta_0)T(\theta_0 \pm \alpha)\xi||_X - ||T(\theta_0)\xi - v||_X \\ &= ||\xi - T(-\theta_0 + \theta_0 \pm \alpha)\xi||_X - ||T(\theta_0)\xi - v||_X \\ &= ||\xi - T(\pm\alpha)\xi||_X - ||T(\theta_0)\xi - v||_X \\ &\geq 2r(\xi) - \rho \\ &> 2\rho - \rho \\ &= \rho\ . \end{aligned} \tag{1.35}$$

Daí, como T é contínuo, considere $(p,q) \subset \mathbb{R}$ o intervalo maximal contendo θ_0 tal que $T(\theta)\xi \in B_\rho(v),\ \forall \theta \in (p,q)$. Então, de (1.35), temos que

$$\theta_0 - \alpha < p < \theta_0 < q < \theta_0 + \alpha$$

e,

$$||v - T(p)\xi||_X = ||v - T(q)\xi||_X = \rho. \tag{1.36}$$

Agora, defina $f(\theta) = ||v - T(\theta)\xi||_X^2,\ \forall \theta \in \mathbb{R}$.

Então claramente $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e assim $\exists \theta_1 \in [p,q]$ tal que

$$f(\theta_1) = min\{f(\theta)\ ;\ p \leq \theta \leq\ q\}\ \leq\ f(\theta_0) = ||v - T(\theta_0)\xi||_X^2\ <\ \rho^2. \tag{1.37}$$

Note que $f^{'}(\theta_1) = 0$, pois f é uma função quadrática com valor mínimo assumido em θ_1. Além disso, $\theta_1 \in (p,q)$, pois do contrário, se $\theta_1 \notin (p,q)$ temos que $\theta_1 = p$ ou $\theta_1 = q$, o que significa, por (1.36), que

$$||v - T(\theta_1)\xi||_X = \rho \Rightarrow f(\theta_1) = \rho^2,$$

e isso é uma contradição com (1.37).

Logo, $||v - T(\theta_1)\xi||_X = f(\theta_1) < \rho$ e

$$\begin{aligned} 0 = f^{'}(\theta_1) &= (\langle v - T(\theta_1)\xi, v - T(\theta_1)\xi\rangle_X)^{'} \\ &= \langle -T^{'}(\theta_1)\xi, v - T(\theta_1)\xi\rangle_X + \langle v - T(\theta_1)\xi, -T^{'}(\theta_1)\xi\rangle_X \\ &= -2\langle v - T(\theta_1)\xi, AT(\theta_1)\xi\rangle_X, \end{aligned}$$

concluindo a demonstração. □

1.4.6 Boa Colocação

Para o método de estabilidade que vamos discutir, precisamos que o PVI (1.12) seja *globalmente bem colocado* numa vizinhança da solução do tipo "standing wave" (1.17). Vejamos a seguir, alguns comentários sobre isso em nosso contexto.

Definição 1.4.7. Assumindo as hipóteses $(H1)-(H4)$, dizemos que o PVI (1.12) é localmente bem colocado quando a seguinte condição é satisfeita:

$$\begin{array}{l} \forall \xi \in X, \text{ existem } b_+, b_- > 0 \text{ e uma única função } u \in C((-b_-, b_+), X) \text{ com} \\ \mathcal{T}u \in C^1((-b_-, b_+), X^*) \text{ tal que } u(0) = \xi \text{ e (1.13) é satisfeita em } (-b_-, b_+). \end{array} \tag{1.38}$$

Além disso, exigimos que $\mathcal{H}$ e Q sejam quantidades conservadas no tempo, isto é,

$$\mathcal{H}(u(t)) = \mathcal{H}(u(0)) \ \text{ e } \ Q(u(t)) = Q(u(0)), \quad \forall t \in (-b_-, b_+).$$

Quando (1.38) for satisfeita, denotaremos $(-b_-(\xi), b_+(\xi))$ como o intervalo maximal de existência da solução com condição inicial ξ.

Observação 1.4.6. Se $u \in C^1((-b_-, b_+), X)$, se tratando do caso em que $dim X < \infty$, então $\frac{d}{dt}(\mathcal{T}u) = \mathcal{T}u'$ e, também,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{H}(u(t)) &= \left\langle \mathcal{H}'(u(t)), u'(t) \right\rangle = -\left\langle J^* \frac{d}{dt}(\mathcal{T}u), u'(t) \right\rangle = -\left\langle \mathcal{T}u'(t), Ju'(t) \right\rangle \\ &= -\big(u'(t), Ju'(t)\big) = 0, \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Q(u(t)) &= \left\langle Q'(u(t)), u'(t) \right\rangle = \left\langle Bu(t), u'(t) \right\rangle = \left\langle J^* A^* \mathcal{T}u(t), u'(t) \right\rangle \\ &= \left\langle \mathcal{T}u(t), AJu'(t) \right\rangle = \big(u(t), AJu'(t)\big) = \big(JAu(t), u'(t)\big) \\ &= \left\langle \mathcal{T}u'(t), JAu(t) \right\rangle = \left\langle J^* \mathcal{H}'(u(t)), JAu(t) \right\rangle = \left\langle \mathcal{H}'(u(t)), J^2 Au(t) \right\rangle \\ &= -\left\langle \mathcal{H}'(u(t)), Au(t) \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

mostrando que a conservação de $\mathcal{H}$ e Q ao longo de trajetórias é uma consequência das hipóteses de invariância. Em particular, quando $dim X < \infty$, a boa colocação local (1.38) segue das hipóteses $(H1)-(H4)$ e do teorema clássico de Picard para o problema $Ju'(t) = \nabla \mathcal{H}(u(t))$.

Definição 1.4.8. Dizemos que o PVI (1.12) é globalmente bem colocado em $\xi \in X$ quando a seguinte condição é satisfeita:

$$\begin{array}{c} \text{(1.38) é verificada e existe uma vizinhança aberta} \\ \Omega \text{ de } \xi \text{ em } X \text{ tal que } b_+(u_0) = \infty, \ \forall u_0 \in \Omega. \end{array} \tag{1.39}$$

Obsevamos que as quantidades conservadas, $\mathcal{H}$ e Q, podem ajudar a garantir que o PVI (1.12) esteja globalmente bem-colocado. É nesta linha de raciocínio que introduzimos, a partir de $c, d \in \mathbb{R}$ pré-fixados, a seguinte *condição de compacidade*:

$$\begin{array}{l} \mathcal{H}' : X \longrightarrow X^* \text{ é limitado em subconjuntos limitados de } X \text{ e} \\ \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que, para cada } h \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \text{ e } q \in (d-\varepsilon, d+\varepsilon), \\ \qquad \{v \in X \mid \mathcal{H}(v) = h\} \cap \{v \in X \mid Q(v) = q\} \\ \text{é um subconjunto compacto de } X. \end{array} \tag{1.40}$$

Em particular, se *dim* $X < \infty$, então a condição de compacidade dada acima é satisfeita, desde que o conjunto

$$\{v \in X \mid \mathcal{H}(v) = h\} \cap \{v \in X \mid Q(v) = q\}$$

seja limitado para todo h perto de c e para todo q perto de d pois, como os operadores $\mathcal{H}$ e Q são contínuos, este conjunto já é fechado.

Assim, podemos apresentar o seguinte resultado:

Teorema 1.4.3. *Suponha que a condição (1.38) seja satisfeita e que $\xi \in X$ é tal que a condição de compacidade (1.40) se verifica para $\mathcal{H}(\xi)$ e $Q(\xi)$. Então, a condição (1.39) é válida.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ dado pela condição (1.40) em $\mathcal{H}(\xi)$ e $Q(\xi)$. Então, como $\mathcal{H}$ e Q são contínuos, temos que $\exists \delta > 0$ tal que $\forall v \in B(\xi, \delta)$,

$$|\mathcal{H}(v) - \mathcal{H}(\xi)| < \varepsilon \;\text{ e }\; |Q(v) - Q(\xi)| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\mathcal{H}(v) \in (\mathcal{H}(\xi) - \varepsilon, \mathcal{H}(\xi) + \varepsilon) \;\text{ e }\; Q(v) \in (Q(\xi) - \varepsilon, Q(\xi) + \varepsilon),\; \forall v \in B(\xi, \delta). \tag{1.41}$$

Afirmamos que, $\forall u_0 \in B(\xi, \delta)$, $b_+(u_0) = \infty$. De fato, para provar esta afirmação, vamos considerar $u_0 \in B(\xi, \delta)$ e uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, b_+(u_0))$ tal que $t_n \longrightarrow b_+(u_0)$ quando $n \longrightarrow \infty$.

Assim, como vale (1.38), temos que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{H}(u(t_n)) = \mathcal{H}(u_0) \;\text{ e }\; Q(u(t_n)) = Q(u_0). \tag{1.42}$$

Daí, segue, de (1.41) e da hipótese de compacidade (1.40) em $\mathcal{H}(\xi)$ e $Q(\xi)$, que

$$\{v \in X \mid \mathcal{H}(v) = \mathcal{H}(u_0)\} \cap \{v \in X \mid Q(v) = Q(u_0)\}$$

é um subconjunto compacto em X.

Então, como $u(t_n)$ satisfaz (1.42) $\forall n \in \mathbb{N}$, obtemos que

$$u(t_n) \in \{v \in X \mid \mathcal{H}(v) = \mathcal{H}(u_0)\} \cap \{v \in X \mid Q(v) = Q(u_0)\}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

e, portanto, $\exists \ \{u(t_{n_k})\}$ subsequência convergente de $\{u(t_n)\}$, digamos $u(t_{n_k}) \longrightarrow w \in X$ quando $k \longrightarrow \infty$.

Além disso, o conjunto $\{||u(t)||_X \mid 0 \leq t < b_+(u_0)\}$ é limitado, pois para cada sequência $\{t_n\}$ tal que $0 \leq t_n < b_+(u_0)$, teremos $\{u(t_n)\}$ satisfazendo (1.42) e portanto, pelo que vimos acima, $\{u(t_n)\}$ possuirá subsequência convergente, ou seja, $\{||u(t)||_X \mid 0 \leq t < b_+(u_0)\}$ será compacto em X ou, em particular, limitado.

Assim, obtemos que $\{||\mathcal{H}^{'}(u(t))||_{X^*} \mid 0 \leq t < b_+(u_0)\}$ é um conjunto limitado pois, pela hipótese (1.40), $\mathcal{H}^{'}$ é limitado em subconjuntos limitados de X.

Para concluir a afirmação, vamos supor, por absurdo, que $b_+(u_0) < \infty$.

Sendo assim, note que, para $0 \leq s < t < b_+(u_0)$ temos, do II-Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 1.2.6) e da primeira identidade do PVI (1.12), que

$$\mathcal{T}u(t) - \mathcal{T}u(s) = \int_s^t \frac{d}{dt}\mathcal{T}u(\rho)\ d\rho = \int_s^t J^*\mathcal{H}^{'}(u(\rho))\ d\rho, \tag{1.43}$$

e, assim, de (1.43) temos que

$$\mathcal{T}w - \mathcal{T}u(s) = \lim_{t_{n_k} \to b_+(u_0)} \mathcal{T}u(t_{n_k}) - \mathcal{T}u(s) = \lim_{t_{n_k} \to b_+(u_0)} \int_s^{t_{n_k}} J^*\mathcal{H}^{'}(u(\rho))\ d\rho. \tag{1.44}$$

Mas,

$$\left|\left|\int_s^{t_{n_k}} J^*\mathcal{H}^{'}(u(\rho))\ d\rho\right|\right|_{X^*} \leq \int_s^{t_{n_k}} \left|\left|J^*\mathcal{H}^{'}(u(\rho))\right|\right|_{X^*}\ d\rho$$

$$\leq \int_s^{t_{n_k}} ||J^*||_{X^*} \left|\left|\mathcal{H}^{'}(u(\rho))\right|\right|_{X^*}\ d\rho \ \leq \ ||J^*||_{X^*} \left(\sup_{0 \leq \tau < b_+(u_0)} \left|\left|\mathcal{H}^{'}(u(\tau))\right|\right|_{X^*}\right) \int_s^{t_{n_k}} \ d\rho$$

$$= ||J^*||_{X^*} \left(\sup_{0 \leq \tau < b_+(u_0)} \left|\left|\mathcal{H}^{'}(u(\tau))\right|\right|_{X^*}\right) |t_{n_k} - s|,$$

e, portanto de (1.44), fazendo $t_{n_k} \longrightarrow b_+(u_0)$ na desigualdade acima, obtemos que

$$||\mathcal{T}w - \mathcal{T}u(s)||_{X^*} \leq ||J^*||_{X^*} \left(\sup_{0 \leq \tau < b_+(u_0)} \left|\left|\mathcal{H}^{'}(u(\tau))\right|\right|_{X^*}\right) |b_+(u_0) - s|,$$

mostrando que

$$||\mathcal{T}w - \mathcal{T}u(s)||_{X^*} \longrightarrow 0, \text{ quando } s \longrightarrow b_+(u_0). \tag{1.45}$$

Na verdade, podemos dizer que $||w - u(s)||_X \longrightarrow 0$ quando $s \longrightarrow b_+(u_0)$. Caso contrário, existiria $\eta > 0$ e uma sequência $\{s_n\} \subset (0, b_+(u_0))$ tal que $s_n \longrightarrow b_+(u_0)$

e $||w - u(s_n)||_X \geq \eta$ $\forall n \in \mathbb{N}$, teríamos, como anteriormente observado, a condição de compacidade em $\mathcal{H}(\xi)$ e $Q(\xi)$ implicando que existe $z \in X$ e uma subsequência $\{s_{n_k}\}$ de $\{s_n\}$ tal que $u(s_{n_k}) \longrightarrow z$ em X. Além disso, também teríamos, de (1.45), que $\mathcal{T}u(s_{n_k}) \longrightarrow \mathcal{T}w$ em X^* e, assim, $\mathcal{T}w = \mathcal{T}z$. Daí, devido a injetividade de $\mathcal{T}$, obteríamos $w = z$. Dessa forma, $||w - u(s_{n_k})||_X \longrightarrow ||w - z||_X = 0$, o que contradiria o fato de termos $||w - u(s_{n_k})||_X \geq \eta$. Assim, $||w - u(s)||_X \longrightarrow 0$ quando $s \longrightarrow b_+(u_0)$.

Agora, pela independência da primeira equação no PVI (1.12), segue da hipótese (1.38) em $w \in X$ que existe uma única função $\phi \in C((-c_-, c_+), X)$ com $\mathcal{T}\phi \in C^1((-c_-, c_+), X^*)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\mathcal{T}\phi(t)) & = & J^*\mathcal{H}'(\phi(t)) \text{ para } t \in (-c_-, c_+) \\ \phi(b_+(u_0)) & = & w, \end{cases} \tag{1.46}$$

em que $c_- = -b_-(w) + b_+(u_0)$ e $c_+ = b_+(w) + b_+(u_0)$.

Considere a função $\varphi : (-b_-(u_0), c_+) \longrightarrow X$ definida por

$$\varphi(t) = \begin{cases} u(t), & \text{para } t \in (-b_-(u_0), b_+(u_0)) \\ \phi(t), & \text{para } t \in [b_+(u_0), b_+(w) + b_+(u_0)) \end{cases} \tag{1.47}$$

Pela definição de φ, temos que $\varphi \in C((-b_-(u_0), b_+(w) + b_+(u_0)), X)$, pois para $t \in (-b_-(u_0), b_+(u_0))$, $\varphi(t) = u(t)$ que é contínua e, para $t \in [b_+(u_0), b_+(w) + b_+(u_0))$, $\varphi(t) = \phi(t)$ que também é contínua. Além disso,

$$\lim_{t \to b_+(u_0)^-} \varphi(t) = \lim_{t \to b_+(u_0)^-} u(t) = w = \phi(b_+(u_0)) = \lim_{t \to b_+(u_0)^+} \phi(t) = \lim_{t \to b_+(u_0)^+} \varphi(t).$$

Logo, $\forall s \in (-b_-(u_0), b_+(u_0))$ obtemos, a partir de (1.44), que

$$\mathcal{T}w - \mathcal{T}\varphi(s) = \mathcal{T}w - \mathcal{T}u(s) = \int_s^{b_+(w)} J^*\mathcal{H}^{'}(u(\rho))\, d\rho = \int_s^{b_+(w)} J^*\mathcal{H}^{'}(\varphi(\rho))\, d\rho,$$

e $\forall s \in (b_+(u_0), b_+(w) + b_+(u_0))$,

$$\mathcal{T}w - \mathcal{T}\varphi(s) = \mathcal{T}w - \mathcal{T}\phi(s) = -\int_{b_+(w)}^{s} J^*\mathcal{H}^{'}(\phi(\rho))\, d\rho = -\int_{b_+(w)}^{s} J^*\mathcal{H}^{'}(\varphi(\rho))\, d\rho.$$

Disto, segue, pelo II-Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 1.2.6), que $\mathcal{T}\varphi \in C^1((-b_-(u_0), b_+(w) + b_+(u_0)), X^*)$ com

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{T}\varphi(t)) = J^*\mathcal{H}'(\varphi(t)),\ \forall t \in (-b_-(u_0), b_+(w) + b_+(u_0)).$$

Também, temos que $\varphi(b_+(u_0)) = \phi(b_+(u_0)) = w$.

Isso implica, pela unicidade de ϕ, que $-c_- \leq -b_-(u_0)$ e que $\phi(t) = \varphi(t)$, $\forall t \in (-b_-(u_0), b_+(w) + b_+(u_0))$.

Portanto, $\varphi \in C((-b_-(u_0), b_+(w) + b_+(u_0)), X)$, com $\mathcal{T}\varphi \in C^1((-b_-(u_0), b_+(w) + b_+(u_0)), X^*)$ e tal que

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\mathcal{T}\varphi(t)) &= J^*\mathcal{H}'(\varphi(t)) \text{ para } t \in (-b_-(u_0), b_+(w) + b_+(u_0)) \\ \varphi(0) &= u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.48}$$

sendo $b_+(w) > 0$.

Ora, mas isso contradiz a maximalidade do intervalo $(-b_-(u_0), b_+(u_0))$ para a solução $u(t)$ com condição inicial $u(0) = u_0$, logo, $b_+(u_0) = \infty$. □

1.4.7 Consequências da Γ-invariância

Como G_λ é uma quantidade Γ-invariante, temos que $G_\lambda(T(\theta)v) = G_\lambda(v)$ $\forall v \in X$ e $\forall \theta \in \mathbb{R}$. Então, pelo Teorema 1.2.1 (Regra da Cadeia), temos que $\forall w \in X$,

$$\langle D_u G_\lambda(T(\theta)v), T(\theta)w\rangle = \langle D_u G_\lambda(v), w\rangle . \tag{1.49}$$

Em particular, tomando $w = Av$ em (1.49), obtemos que

$$\begin{aligned} \left\langle D_u G_\lambda(T(\theta)v), T'(\theta)v\right\rangle &= \langle D_u G_\lambda(T(\theta)v), T(\theta)Av\rangle \\ &= \langle D_u G_\lambda(v), Av\rangle \\ &= 0, \text{ por } (H2) \text{ e } (1.22). \end{aligned} \tag{1.50}$$

Além disso, aplicando novamente o Teorema 1.2.1 em (1.49), vemos que $\forall z, w \in X$

$$\left\langle D^2_{uu} G_\lambda(T(\theta)v)T(\theta)z, T(\theta)w\right\rangle = \left\langle D^2_{uu} G_\lambda(v)z, w\right\rangle , \tag{1.51}$$

então, tomando $z = Av$ concluímos que $\forall w \in X$,

$$\begin{aligned} &\left\langle D^2_{uu} G_\lambda(T(\theta)v)T'(\theta)v, T(\theta)w\right\rangle + \left\langle D_u G_\lambda(T(\theta)v), T'(\theta)w\right\rangle \\ &= \langle D^2_{uu} G_\lambda(T(\theta)v)T(\theta)Av, T(\theta)w\rangle + \left\langle D_u G_\lambda(T(\theta)v), T'(\theta)w\right\rangle \\ &= \langle D^2_{uu} G_\lambda(v)Av, w\rangle + \left\langle D_u G_\lambda(T(\theta)v), T'(\theta)w\right\rangle , \text{ por } (1.51) \\ &= \langle D^2_{uu} G_\lambda(v)Av, w\rangle + \langle D_u G_\lambda(T(\theta)v), T(\theta)Aw\rangle \\ &= \langle D^2_{uu} G_\lambda(v)Av, w\rangle + \langle D_u G_\lambda(v), Aw\rangle , \text{ por } (1.49). \end{aligned}$$

Agora, como G'_λ é uma quantidade Γ-invariante, temos, pela proposição 1.4.4, que $\langle D_u G_\lambda(v), Av\rangle = 0$, então obtemos que

$$\left\langle D^2_{uu} G_\lambda(T(\theta)v)T'(\theta)v, T(\theta)w\right\rangle + \left\langle D_u G_\lambda(T(\theta)v), T'(\theta)w\right\rangle = 0, \tag{1.52}$$

mostrando que $\forall v \in X$ e $\theta \in \mathbb{R}$,

(i) $D_uG_\lambda(T(\theta)v) = T(-\theta)^* D_uG_\lambda(v)$;
De fato, como $\forall w \in X$ temos que

$$\begin{aligned}
\langle T(-\theta)^* D_uG_\lambda(v), w\rangle &= \left\langle T(\theta)R^{-1}D_uG_\lambda(v), w\right\rangle_X = \left\langle R^{-1}D_uG_\lambda(v), T(-\theta)w\right\rangle_X \\
&= \langle D_uG_\lambda(v), T(-\theta)w\rangle = \langle D_uG_\lambda(T(-\theta)T(\theta)v), T(-\theta)w\rangle \\
&= \langle D_uG_\lambda(T(\theta)v), w\rangle, \text{ por (1.49)},
\end{aligned}$$

e o resultado segue.

(ii) $D^2_{uu}G_\lambda(T(\theta)v)T(\theta) = T(-\theta)^* D^2_{uu}G_\lambda(v)$;
Com efeito, como $\forall z, w \in X$ vale

$$\begin{aligned}
\left\langle T(-\theta)^* D^2_{uu}G_\lambda(v)z, w\right\rangle &= \left\langle T(\theta)R^{-1}D^2_{uu}G_\lambda(v)z, w\right\rangle_X = \left\langle R^{-1}D^2_{uu}G_\lambda(v)z, T(-\theta)w\right\rangle_X \\
&= \left\langle D^2_{uu}G_\lambda(v)z, T(-\theta)w\right\rangle \\
&= \left\langle D^2_{uu}G_\lambda(T(\theta)v)T(\theta)z, T(\theta)T(-\theta)w\right\rangle, \text{ por (1.51)} \\
&= \left\langle D^2_{uu}G_\lambda(T(\theta)v)T(\theta)z, w\right\rangle,
\end{aligned}$$

e o item (ii) se verifica.

(iii) $D^2_{uu}G_\lambda(v)Av = -A^* D_uG_\lambda(v)$;
De fato, note que $\forall w \in X$

$$\begin{aligned}
\langle -A^* D_uG_\lambda(v), w\rangle &= \left\langle RAR^{-1}D_uG_\lambda(v), w\right\rangle = \left\langle AR^{-1}D_uG_\lambda(v), w\right\rangle_X \\
&= \left\langle R^{-1}D_uG_\lambda(v), -Aw\right\rangle_X = -\langle D_uG_\lambda(v), Aw\rangle \\
&= -\langle D_uG_\lambda(T(\theta)T(-\theta)v), AT(\theta)T(-\theta)w\rangle \\
&= -\left\langle D_uG_\lambda(T(\theta)T(-\theta)v), T'(\theta)T(-\theta)w\right\rangle \\
&= \left\langle D^2_{uu}G_\lambda(T(\theta)T(-\theta)v)T'(\theta)T(-\theta)v, T(\theta)T(-\theta)w\right\rangle, \text{ por (1.52)} \\
&= \left\langle D^2_{uu}G_\lambda(T(\theta)T(-\theta)v)AT(\theta)T(-\theta)v, T(\theta)T(-\theta)w\right\rangle \\
&= \left\langle D^2_{uu}G_\lambda(v)Av, w\right\rangle,
\end{aligned}$$

ou seja, vale (iii).

Observação 1.4.7. A partir do item (iii) acima, podemos observar que sempre que $A\xi_\lambda \neq 0$ teremos ξ_λ como um ponto crítico degenerado de G_λ, já que neste caso, $D_uG_\lambda(\xi_\lambda) = 0$ implica que $D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)A\xi_\lambda = 0$.

1.5 Resumo da estrutura abordada

Para fazer um breve resumo da estrutura abordada até este momento, vamos considerar o seguinte exemplo em dimensão finita: seja $X = \mathbb{R}^{2N}$ com o produto escalar usual $\langle .,. \rangle$ e o sistema

$$Ju^{'}(t) = \nabla \mathcal{H}(u(t)), \tag{1.53}$$

em que $J = -J^T = -J^{-1}$ é uma matriz real $2N \times 2N$ e $\mathcal{H} \in C^2(X, \mathbb{R})$.

Então,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}(u(t)) = \left\langle \nabla \mathcal{H}(u(t)), u^{'}(t) \right\rangle = \left\langle Ju^{'}(t), u^{'}(t) \right\rangle = 0,$$

mostrando que $\mathcal{H}(u(t))$ é independente de t sempre que u for uma solução de (1.53).

Sendo $\Gamma = \{T(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ um grupo de isometrias em $\mathbb{R}^{2N}$ com gerador infinitesimal $A = T^{'}(0)$ em que $T(\theta) = e^{\theta A}$ e $T^{'}(\theta) = AT(\theta)$ $\forall \theta \in \mathbb{R}$, obtemos que

$$A^T = -A \ \text{ e } \ T(\theta)^T = T(\theta)^{-1} = T(-\theta),$$

e a invariância de $\mathcal{H}$ com respeito ao grupo de isometrias Γ é dada por

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}(T(\theta)\xi) = \mathcal{H}(\xi), \ \forall \theta \in \mathbb{R} \text{ e } \xi \in \mathbb{R}^{2N} \\ \Leftrightarrow \ & \langle A\xi, \nabla \mathcal{H}(\xi) \rangle = 0, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^{2N}. \end{aligned}$$

Para a forma simplética ω definida por $\omega(\xi, \eta) = \langle J\xi, \eta \rangle$ temos que $\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^{2N}$ e $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \omega\left(T(\theta)\xi, T(\theta)\eta\right) = \omega\left(\xi, \eta\right) \ & \Leftrightarrow \ \langle JT(\theta)\xi, T(\theta)\eta \rangle = \langle J\xi, \eta \rangle \\ & \Leftrightarrow \ \left\langle T(\theta)^T JT(\theta)\xi, \eta \right\rangle = \langle J\xi, \eta \rangle \\ & \Leftrightarrow \ T(\theta)^T JT(\theta) = J \\ & \Leftrightarrow \ JT(\theta) = T(\theta)J, \end{aligned} \tag{1.54}$$

pois, como já sabemos, $T(\theta)^T = T(\theta)^{-1}$ $\forall \theta \in \mathbb{R}$.

Daí, derivando com relação ao parâmetro $\theta \in \mathbb{R}$, obtemos que $JAT(\theta) = AT(\theta)J$ e, então, fazendo $\theta = 0$, concluímos que $\forall \xi, \eta \in R^{2N}$,

$$\omega\left(T(\theta)\xi, T(\theta)\eta\right) = \omega\left(\xi, \eta\right) \Leftrightarrow JA = AJ,$$

já que, reciprocamente, se $JA = AJ$ então, pela Proposição 1.2.1, $JT(\theta) = T(\theta)J$ $\forall \theta \in \mathbb{R}$ e, assim, (1.54) se verifica.

Além disso, como visto na Proposição 1.4.3, a Γ-invariância de $\mathcal{H}$ implica que $\nabla \mathcal{H}$ é Γ-equivariante, isto é, satisfaz

$$\nabla \mathcal{H}(T(\theta)\xi) = T(\theta)\nabla \mathcal{H}(\xi), \ \forall \theta \in \mathbb{R} \text{ e } \xi \in \mathbb{R}^{2N}.$$

Agora, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ fixado, definindo $u(t) = T(\lambda t)v(t)$ segue, da Γ-equivariância de $\nabla \mathcal{H}$, que u satisfaz (1.53) se, e somente se, v satisfaz

$$Jv^{'}(t) = \nabla \mathcal{H}(v(t)) - \lambda JAv(t). \tag{1.55}$$

De fato, se $u(t) = T(\lambda t)v(t)$, então, derivando com relação a $t \in \mathbb{R}$, temos que

$$u^{'}(t) = \lambda AT(\lambda t)v(t) + T(\lambda t)v^{'}(t),$$

e, portanto,

$$Ju^{'}(t) = \lambda JAT(\lambda t)v(t) + JT(\lambda t)v^{'}(t), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Então, como u satisfaz (1.53), obtemos que

$$\nabla \mathcal{H}(u(t)) = \lambda JAT(\lambda t)v(t) + JT(\lambda t)v^{'}(t), \ \forall t \in \mathbb{R},$$

ou ainda, pela equivariância de $\nabla \mathcal{H}$, concluímos que

$$\begin{aligned} \nabla \mathcal{H}(v(t)) &= T(-\lambda t)\nabla \mathcal{H}(u(t)) = \lambda T(-\lambda t)JAT(\lambda t)v(t) + T(-\lambda t)JT(\lambda t)v^{'}(t) \\ &= \lambda JAT(-\lambda t)T(\lambda t)v(t) + JT(-\lambda t)T(\lambda t)v^{'}(t) \\ &= \lambda JAv(t) + Jv^{'}(t), \ \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se v satisfaz (1.55), temos da Γ-equivariância de $\nabla \mathcal{H}$ que $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \nabla \mathcal{H}(u(t)) &= \nabla \mathcal{H}(T(\lambda t)v(t)) = T(\lambda t)\nabla \mathcal{H}(v(t)) = \lambda T(\lambda t)JAv(t) + T(\lambda t)Jv^{'}(t) \\ &= J\lambda AT(\lambda t)v(t) + JT(\lambda t)v^{'}(t) = J[\lambda AT(\lambda t)v(t) + T(\lambda t)v^{'}(t)] \\ &= Ju^{'}(t), \end{aligned}$$

mostrando a equivalência em (1.55).

Desde que $(JA)^T = J^T A^T = AJ = JA$, vemos que (1.55) é um sistema Hamiltoniano com argumento Hamiltoniano dado por

$$G_\lambda(\xi) = \mathcal{H}(\xi) - \lambda Q(\xi), \text{ sendo } Q(\xi) = \frac{1}{2}\left\langle JA\xi, \xi\right\rangle = \frac{1}{2}\omega\left(A\xi, \xi\right).$$

Se $u(t)$ é uma solução de (1.53), então $\mathcal{H}(u(t))$ e $G_\lambda(v(t))$ são ambos independentes de t. Mas pela Γ-invariância de $\mathcal{H}$,

$$G_\lambda(v(t)) = \mathcal{H}(T(-\lambda t)u(t)) - \lambda Q(v(t)) = \mathcal{H}(u(t)) - \lambda Q(v(t)),$$

de modo que $\lambda Q(v(t))$ também é independente de t. Com isso em mente, definindo $B = JA = AJ$ reescrevemos $Q(\xi)$ como $\frac{1}{2}\left\langle B\xi, \xi\right\rangle$ e, então $B^T = B$, já que pela Proposição

1.4.5 B é simétrico. Assim, para alguma solução u de (1.53),

$$\frac{d}{dt}Q(u) = \left\langle Bu, u' \right\rangle = \left\langle JAu, J^{-1}\nabla\mathcal{H}(u) \right\rangle = -\left\langle Au, \nabla\mathcal{H}(u) \right\rangle = 0,$$

enquanto que, para algum $\xi \in \mathbb{R}^{2N}$,

$$\frac{d}{d\theta}Q(T(\theta)\xi) = \left\langle BT(\theta)\xi, T'(\theta)\xi \right\rangle = \left\langle JAT(\theta)\xi, AT(\theta)\xi \right\rangle = 0,$$

mostrando que, como $\mathcal{H}$, Q também é uma quantidade Γ-invariante conservada para (1.53).

Se $v(t) \equiv \xi$ é uma solução estacionária de (1.55) para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, obtemos um tipo especial de solução do sistema Hamiltoniano (1.53) tendo a forma

$$u(t) = T(\lambda t)\xi \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } \xi \in X. \tag{1.56}$$

Soluções deste tipo são as referidas "standing waves", terminologia esta que é comumente adotada no contexto da equação não-linear de Schrödinger. Para $X = \mathbb{R}^{2N}$, elas são funções periódicas ou quase-periódicas em t, mas podem existir soluções periódicas ou quase-periódicas que não são da forma (1.56). Trabalhamos com o fato de que $u(t) = T(\lambda t)\xi$ satisfaz o sistema Hamiltoniano (1.53) se, e somente se,

$$\nabla\mathcal{H}(\xi) = \lambda B\xi, \tag{1.57}$$

e, soluções $\xi \in X$ da equação estacionária (1.57) ocorrem em pontos críticos do funcional $G_\lambda(\xi) = \mathcal{H}(\xi) - \lambda Q(\xi)$.

CAPÍTULO 2

Estabilidade Orbital - Teoria

2.1 Técnica para obtenção de estabilidade orbital

Nesta seção, apresentaremos o resultado principal deste trabalho, a saber, o Teorema 2.1.1, um método para obtenção de estabilidade orbital de soluções do tipo "standing wave" para o sistema hamiltoniano (1.12) satisfazendo as hipóteses $(H1)-(H4)$, abaixo novamente relacionadas. Começaremos exibindo a forma na qual a estabilidade será interpretada e, em seguida, as hipóteses $(1)-(3)$, necessárias para o enunciado do referido teorema.

Definição 2.1.1. Dizemos que a "standing wave" $u_\lambda(t) = T(\lambda t)\xi_\lambda$ do sistema (1.12), com condição inicial ξ_λ, tem órbita estável se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que para toda condição inicial $\xi \in X$ com $||\xi_\lambda - \xi||_X < \delta$, o PVI (1.12), com condição inicial ξ, tem uma única solução maximal $u(t)$, isto é, definida $\forall t \geq 0$, tal que

$$d(u(t), \Theta(\xi_\lambda)) = inf\{||u(t) - T(\theta)\xi_\lambda||_X |\ \theta \in \mathbb{R}\} < \varepsilon\ .$$

Hipótese 1 (Configuração do Sistema Hamiltoniano)
Suponha que os espaços de Hilbert reais $(H, (.,.))$ e $(X, \langle .,. \rangle_X)$ integram uma tripla variacional, sendo as normas $||.||$ e $||.||_X$ equivalentes em X, e que valem os seguintes itens:

$(H1)$ $\exists J \in \mathcal{B}(X)$, com $J^T = J^{-1} = -J$ e $\mathcal{H} \in C^2(X, \mathbb{R})$;

$(H2)$ $\exists A \in \mathcal{B}(X)$, com $A^T = -A$ e tal que

$$AJ = JA \text{ e } \langle \mathcal{H}'(v), Av \rangle = 0\ \forall v \in X,$$

em que $\mathcal{H}'(\xi) \in X^*$ denota a derivada de Fréchet de $\mathcal{H}$ em $\xi \in X$;

$(H3)$ $(Av, w) = -(v, Aw), \forall v, w \in X$;

$(H4)$ $(Jv, w) = -(v, Jw), \forall v, w \in X$.

Hipótese 2 (Existência de "standing wave" não estacionária)
Suponha que $(\lambda, \xi_\lambda) \in \mathbb{R} \times X$ é tal que:

$$D_v G_\lambda(\xi_\lambda) = 0 \ , \ \text{com } \lambda A \xi_\lambda \neq 0.$$

Hipótese 3 (Boa colocação do problema)
Suponha que o PVI (1.12), com condição inicial ξ_λ, esteja globalmente bem colocado em ξ_λ, isto é, satisfaça a seguinte condição:

$$\begin{gathered}\text{(1.38) é verificada e existe uma vizinhança aberta} \\ \Omega \text{ de } \xi_\lambda \text{ em } X \text{ tal que } b_+(u_0) = \infty, \ \forall u_0 \in \Omega.\end{gathered}$$

Teorema 2.1.1. *Considere as hipóteses* $(1) - (3)$. *Então a "standing wave"* $u_\lambda(t) = T(\lambda t)\xi_\lambda$, *gerada por* ξ_λ, *tem órbita estável desde que:* $\exists \delta > 0$ *tal que,*

$$\langle D^2_{vv} G_\lambda(\xi_\lambda) z, z \rangle \geq \delta ||z||_X^2 \ , \ \forall z \in \{A\xi_\lambda, R^{-1}B\xi_\lambda\}^\perp \ , \tag{2.1}$$

em que $\{A\xi_\lambda, R^{-1}B\xi_\lambda\}^\perp = \{z \in X \ ; \ \langle z, A\xi_\lambda \rangle_X = \langle z, R^{-1}B\xi_\lambda \rangle_X = 0\}$.

O roteiro que seguiremos para a demonstração deste resultado será o seguinte: primeiramente garantiremos que nas hipóteses do teorema, a órbita $\Theta(\xi_\lambda)$ possui uma função de Lyapunov Γ-invariante associada e, posteriormente, veremos que, neste caso, ela é estável.

Definição 2.1.2. Uma função de Lyapunov Γ-invariante para a órbita $\Theta(\xi)$ é uma função $V : \Theta(\xi)_\rho \longrightarrow \mathbb{R}$ tendo as seguintes propriedades:

(a) $\exists \rho > 0$ tal que $V \in C^2(\Theta(\xi)_\rho, \mathbb{R})$, com

$$V(\eta) = 0 \text{ e } V'(\eta) = 0, \ \forall \eta \in \Theta(\xi);$$

(b) $\exists C > 0$ tal que

$$V(\eta) \geq C d(\eta, \Theta(\xi))^2, \ \forall \eta \in \Theta(\xi)_\rho \ ;$$

(c) $\langle V'(\eta), A\eta \rangle = 0, \ \forall \eta \in \Theta(\xi)_\rho$;

(d) $V(u(t)) = V(u_0), \ \forall t \in [0, b_+(u_0))$ e $\forall u_0 \in \Theta(\xi)_\rho$, em que u é a solução maximal do PVI (1.12), com condição inicial u_0.

Note que, no item (a) da deninição acima, não há problemas em considerar $\eta \in \Theta(\xi)$ pois neste caso $\eta = T(\theta)\xi \in T(\theta)\Theta(\xi)_\rho$ para algum $\theta \in \mathbb{R}$ e, pela Proposição 1.4.8, como $T(\theta)\Theta(\xi)_\rho = \Theta(\xi)_\rho$, obtemos que $\eta \in \Theta(\xi)_\rho$. Além disso, faz sentido denominarmos V como uma função de Lyapunov Γ-invariante, e não apenas como uma função de Lyapunov pois, pela Proposição 1.4.4 e a condição (c),

$$V(T(\theta)\eta) = V(\eta),\ \forall \eta \in \Theta(\xi)_\rho,$$

mostrando que, em seu domínio, V é invariante sob a ação do grupo de isometrias Γ.

Voltando para a demonstração do Teorema 2.1.1, considere as hipóteses (1) e (2) para o par $(\lambda, \xi_\lambda) \in \mathbb{R} \times X$ e defina $V : X \longrightarrow \mathbb{R}$ como segue: seja

$$g = G_\lambda(\xi_\lambda) \text{ e } q = Q(\xi_\lambda),$$

e então defina

$$V(\eta) = G_\lambda(\eta) - g + K[Q(\eta) - q]^2,\ \forall \eta \in X \text{ e algum } K \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Mostraremos que, para K suficientemente grande, V é uma função de Lyapunov Γ-invariante para a órbita $\Theta(\xi_\lambda)$ desde que valha a hipótese (2.1). Para tanto, precisaremos dos seguintes resultados:

Lema 2.1.1. *Suponha que as hipóteses* $(1)-(2)$ *e* (2.1) *sejam satisfeitas. Então existem* δ_1 *e* K *positivos, tais que*

$$\left\langle R^{-1}D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)v, v\right\rangle_X + 2K\left\langle R^{-1}B\xi_\lambda, v\right\rangle_X^2 \geq \delta_1 \left|\left|v\right|\right|_X^2,\ \forall v \in \{A\xi_\lambda\}^\perp,$$

em que $\{A\xi_\lambda\}^\perp = \{v \in X|\ \langle v, A\xi_\lambda\rangle_X = 0\}$.

Demonstração. Primeiramente vejamos que

$$\langle R^{-1}B\xi_\lambda, A\xi_\lambda\rangle_X = \langle R^{-1}\mathcal{T}JA\xi_\lambda, A\xi_\lambda\rangle_X = (JA\xi_\lambda, A\xi_\lambda) = 0, \tag{2.3}$$

pois vale $(H4)$.

Assim, para $v \in \{A\xi_\lambda\}^\perp$ defina

$$z = v - \alpha w, \tag{2.4}$$

em que $w = \dfrac{R^{-1}B\xi_\lambda}{||R^{-1}B\xi_\lambda||_X}$ e $\alpha = \langle v, w\rangle_X$.

Note que, de (2.4) obtemos que $z \in \{A\xi_\lambda, R^{-1}B\xi_\lambda\}^\perp$, pois como $w \in \{A\xi_\lambda\}^\perp$ (por (2.3)), e por hipótese $v \in \{A\xi_\lambda\}^\perp$, temos que $z \in \{A\xi_\lambda\}^\perp$, e

$$\begin{aligned}
\langle z, R^{-1}B\xi_\lambda\rangle_X &= \langle v, R^{-1}B\xi_\lambda\rangle_X - \alpha\langle w, R^{-1}B\xi_\lambda\rangle_X \\
&= \langle v, R^{-1}B\xi_\lambda\rangle_X - \frac{\alpha}{||R^{-1}B\xi_\lambda||_X}\langle R^{-1}B\xi_\lambda, R^{-1}B\xi_\lambda\rangle_X \\
&= \langle v, R^{-1}B\xi_\lambda\rangle_X - \frac{\langle v, R^{-1}B\xi_\lambda\rangle_X}{||R^{-1}B\xi_\lambda||_X^2}\left\langle R^{-1}B\xi_\lambda, R^{-1}B\xi_\lambda\right\rangle_X \\
&= \langle v, R^{-1}B\xi_\lambda\rangle_X - \langle v, R^{-1}B\xi_\lambda\rangle_X \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Agora, considerando $S_\lambda = R^{-1}D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)$ e assumindo, por hora, que S_λ é auto-adjunto (veja a Observação 2.2.1), temos que

$$\begin{aligned}
\langle S_\lambda v, v\rangle_X &= \langle S_\lambda(z+\alpha w), (z+\alpha w)\rangle_X \\
&= \alpha^2\langle S_\lambda w, w\rangle_X + 2\alpha\langle S_\lambda w, z\rangle_X + \langle S_\lambda z, z\rangle_X \\
&\geq \alpha^2\langle S_\lambda w, w\rangle_X + 2\alpha\langle S_\lambda w, z\rangle_X + \delta\,||z||_X^2\,, \text{ por (2.1)} \\
&= \alpha^2\langle S_\lambda w, w\rangle_X + 2\,\langle S_\lambda w, \alpha z\rangle_X + \delta\,||z||_X^2 \\
&\geq \alpha^2\langle S_\lambda w, w\rangle_X - 2|\,\langle S_\lambda w, \alpha z\rangle_X\,| + \delta\,||z||_X^2 \\
&\geq \alpha^2\langle S_\lambda w, w\rangle_X - 2\,||\alpha z||_X\,||S_\lambda w||_X + \delta\,||z||_X^2\,, \text{ por Cauchy-Schwarz} \\
&= \alpha^2\langle S_\lambda w, w\rangle_X - 2|\alpha|\,||z||_X\,||S_\lambda w||_X + \delta\,||z||_X^2 \\
&= \alpha^2\langle S_\lambda w, w\rangle_X - \left[\delta^{\frac{1}{2}}\,||z||_X\right]\left[|\alpha|\frac{2}{\delta^{\frac{1}{2}}}\,||S_\lambda w||_X\right] + \delta\,||z||_X^2\,.
\end{aligned}$$

Mas, da Desigualdade de Young (Teorema 1.3.1), vemos que:

$$\langle S_\lambda v, v\rangle_X \geq \alpha^2\langle S_\lambda w, w\rangle_X - \left[\frac{\delta}{2}||z||_X^2 + \frac{2\alpha^2}{\delta}||S_\lambda w||_X^2\right] + \delta||z||_X^2\,. \tag{2.6}$$

Denotando $\beta = ||R^{-1}B\xi_\lambda||_X$, obtemos, de (2.5), que

$$\begin{aligned}
\langle R^{-1}B\xi_\lambda, v\rangle_X &= \langle R^{-1}B\xi_\lambda, z\rangle_X + \alpha\,\langle R^{-1}B\xi_\lambda, w\rangle_X \\
&= \alpha\langle R^{-1}B\xi_\lambda, w\rangle_X = \frac{\alpha}{\beta}\langle R^{-1}B\xi_\lambda, R^{-1}B\xi_\lambda\rangle_X \\
&= \alpha\beta,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

e também, escolhendo $K > 0$ tal que

$$\langle S_\lambda w, w\rangle_X - \frac{2}{\delta}||S_\lambda w||_X^2 + 2K\beta^2 \geq \frac{\delta}{2}\,, \tag{2.8}$$

temos que

$$\begin{aligned}\langle S_\lambda v, v\rangle_X + 2K\langle R^{-1}B\xi_\lambda, v\rangle_X^2 &\geq \alpha^2\langle S_\lambda w, w\rangle_X - \left[\frac{\delta}{2}||z||_X^2 + \frac{2\alpha^2}{\delta}||S_\lambda w||_X^2\right] \\ &+ \delta||z||_X^2 + 2K\alpha^2\beta^2, \text{ por (2.6) e (2.7)} \\ &= \alpha^2\left[\langle S_\lambda w, w\rangle_X - \frac{2}{\delta}||S_\lambda w||_X^2 + 2K\beta^2\right] + \frac{\delta}{2}||z||_X^2 \quad (2.9) \\ &\geq \alpha^2\frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2}||z||_X^2\ , \text{ por (2.8)} \\ &= \frac{\delta}{2}[\alpha^2 + ||z||_X^2]\end{aligned}$$

Por fim, como

$$\begin{aligned}||v||_X^2 &= \langle v, v\rangle_X = \langle z + \alpha w, z + \alpha w\rangle_X = \alpha^2\langle w, w\rangle_X + 2\alpha\langle w, z\rangle_X + \langle z, z\rangle_X \\ &= \alpha^2||w||_X^2 + ||z||_X^2\ , \text{ pois } z \in \{R^{-1}B\xi_\lambda\}^\perp \\ &= \alpha^2 + ||z||_X^2\ , \text{ pois } ||w||_X = 1,\end{aligned}$$

o resultado segue de (2.9) com $\delta_1 = \dfrac{\delta}{2} > 0$. □

Lema 2.1.2. *Suponha que as hipóteses* (1) − (2) *e* (2.1) *sejam satisfeitas. Se* $V \in C^2(X,\mathbb{R})$, *então* $\exists r(\xi_\lambda) > 0$ *tal que vale o Lema 1.4.1 e* $\exists\rho \in (0, \frac{r(\xi_\lambda)}{2})$ *para o qual*

$$V(\eta) = V(\xi_\lambda) + \langle V'(\xi_\lambda), \eta - \xi_\lambda\rangle + \frac{1}{2}\langle V''(\xi_\lambda)[\eta - \xi_\lambda], \eta - \xi_\lambda\rangle + r_1(\eta),$$

em que $|r_1(\eta)| \leq \dfrac{1}{4}\delta_1\,||\eta - \xi_\lambda||_X^2\ ,\ \forall\eta \in B_\rho(\xi_\lambda)$ *e a existência de* δ_1 *é garantida no Lema 2.1.1.*

Demonstração. Como $A\xi_\lambda \neq 0$ temos que $\exists r(\xi_\lambda) > 0$ para o qual vale o Lema 1.4.1.

Além disso, como $V \in C^2(X,\mathbb{R})$, usando a Fórmula de Taylor (Teorema 1.2.3) temos que:

$$V(\xi_\lambda + h) = V(\xi_\lambda) + \langle V'(\xi_\lambda), h\rangle + \frac{1}{2}\langle V''(\xi_\lambda)h, h\rangle + r_2(\xi_\lambda, h),$$

com $\dfrac{|r_2(\xi_\lambda, h)|}{||h||_X^2} \longrightarrow 0$ quando $h \longrightarrow 0$ em X.

Portanto, dado $\varepsilon = \dfrac{\delta_1}{4}$, obtemos que $\exists\rho > 0$ tal que

$$||h||_X < \rho \Rightarrow |r_2(\xi_\lambda, h)| \leq \frac{\delta_1}{4}\,||h||_X^2\,. \tag{2.10}$$

Note que, se $\rho \notin (0, \frac{r(\xi_\lambda)}{2})$ então podemos tomá-lo suficientemente pequeno para que tenhamos ρ no aberto $(0, \frac{r(\xi_\lambda)}{2})$ com a equação (2.10) ainda válida.

Logo, tomando $\eta = \xi_\lambda + h$ obtemos que $\exists \rho \in (0, \frac{r(\xi_\lambda)}{2})$ para o qual

$$V(\eta) = V(\xi_\lambda) + \left\langle V'(\xi_\lambda), \eta - \xi_\lambda \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle V''(\xi_\lambda)[\eta - \xi_\lambda], \eta - \xi_\lambda \right\rangle + r_2(\xi_\lambda, \eta - \xi_\lambda), \quad (2.11)$$

com $||\eta - \xi_\lambda||_X < \rho$ e $|r_2(\xi_\lambda, \eta - \xi_\lambda)| \leq \dfrac{\delta_1}{4}||\eta - \xi_\lambda||_X^2$.

Definindo, $r_1(\eta) = r_2(\xi_\lambda, \eta - \xi_\lambda)$ o resultado segue de (2.11).

$\square$

Finalmente, o teorema abaixo mostra que (2.2) é uma função de Lyapunov Γ-invariante.

Teorema 2.1.2. *Suponha que as hipóteses* $(1) - (3)$ *e* (2.1) *sejam satisfeitas. Então existem* $K > 0$ *e* $\rho > 0$ *tais que a função* V *definida em* (2.2) *é uma função de Lyapunov* Γ*-invariante para a órbita* $\Theta(\xi_\lambda)$ *em* $\Theta(\xi_\lambda)_\rho$.

Demonstração. Primeiramente, pelas hipóteses assumidas neste teorema, temos que valem os Lemas 2.1.1 e 2.1.2. Dessa forma,

(1º) V satisfaz a propriedade (c);
De fato, $\forall \eta \in \Theta(\xi_\lambda)_\rho$,

$$\begin{aligned}\left\langle V'(\eta), A\eta \right\rangle &= \left\langle G'_\lambda(\eta) + 2K[Q(\eta) - q]Q'(\eta), A\eta \right\rangle \\ &= \left\langle G'_\lambda(\eta), A\eta \right\rangle + 2K[Q(\eta) - q]\left\langle Q'(\eta), A\eta \right\rangle \\ &= 0,\end{aligned}$$

pois G_λ e Q são quantidades Γ-invariantes.

Em particular, V é uma quantidade Γ-invariante em $\Theta(\xi_\lambda)_\rho$.

(2º) V satisfaz a propriedade (d);
Com efeito, $\forall u_0 \in \Theta(\xi_\lambda)_\rho$ e $\forall t \in [0, b_+(u_0))$, em que $u(t) = T(\lambda t)u_0$ é a solução maximal do PVI (1.12), com condição inicial u_0, temos

$$\begin{aligned}V(T(\lambda t)u_0) &= G_\lambda(T(\lambda t)u_0) - g + K[Q(T(\lambda t)u_0) - q]^2 \\ &= G_\lambda(u_0) - g + K[Q(u_0) - q]^2, \text{ pela } \Gamma\text{-invariância de } G_\lambda \text{ e } Q \\ &= V(u_0).\end{aligned}$$

(3º) V satisfaz a propriedade (a);
De fato, diretamente da definição de V segue que $V(\xi_\lambda) = 0$.
Agora, $V \in C^2(X, \mathbb{R})$ pois $G_\lambda, Q \in C^2(X, \mathbb{R})$. Além disso, $\forall v, \eta \in X$,

$$\langle V'(\eta), v\rangle = \langle D_u G_\lambda(\eta), v\rangle + 2K[Q(\eta) - q]\langle Q'(\eta), v\rangle. \quad (2.12)$$

Logo, como vale a hipótese (2), obtemos de (2.12) que $\forall v \in X$ e $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\left\langle V'(T(\theta)\xi_\lambda), v\right\rangle &= \langle D_u G_\lambda(T(\theta)\xi_\lambda), v\rangle + 2K[Q(T(\theta)\xi_\lambda) - q]\left\langle Q'(T(\theta)\xi_\lambda), v\right\rangle \\
&= 2K[Q(T(\theta)\xi_\lambda) - q]\left\langle Q'(T(\theta)\xi_\lambda), v\right\rangle, \text{ pela Proposição 1.4.6} \\
&= 2K[Q(\xi_\lambda) - q]\left\langle Q'(T(\theta)\xi_\lambda), v\right\rangle, \text{ pela } \Gamma\text{-invariância de } Q \\
&= 0,
\end{aligned}$$

e, portanto, $V'(\eta) = 0\ \forall \eta \in \Theta(\xi_\lambda)$.

(4º) V satisfaz a propriedade (b).
Com efeito, $\forall \eta, v \in X$,

$$\langle V''(\eta)v, v\rangle = \langle D^2_{uu}G_\lambda(\eta)v, v\rangle + 2K[Q(\eta) - q]\langle Q''(\eta)v, v\rangle + 2K\langle Q'(\eta), v\rangle^2. \quad (2.13)$$

Em particular, aplicando (2.13) em $\xi_\lambda \in X$, obtemos que $\forall v \in X$,

$$\begin{aligned}
\langle V''(\xi_\lambda)v, v\rangle &= \langle D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)v, v\rangle + 2K\langle Q'(\xi_\lambda), v\rangle^2 \\
&= \langle D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)v, v\rangle + 2K\langle B(\xi_\lambda), v\rangle^2 \\
&= \langle R^{-1}D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)v, v\rangle_X + 2K\langle R^{-1}B(\xi_\lambda), v\rangle_X^2 \\
&= \langle S_\lambda v, v\rangle_X + 2K\langle R^{-1}B\xi_\lambda, v\rangle_X^2.
\end{aligned}$$

Agora, pelo Lema 2.1.1, $\exists \delta_1 > 0$ tal que

$$\langle V''(\xi_\lambda)v, v\rangle \geq \delta_1 \|v\|_X^2, \ \forall v \in \{A\xi_\lambda\}^\perp. \quad (2.14)$$

Além disso, como $V \in C^2(X, \mathbb{R})$, temos pelo Lema 2.1.2 que existe $r(\xi_\lambda) > 0$ para o qual vale o Lema 1.4.1 e existe $\rho \in (0, \frac{r(\xi_\lambda)}{2})$ tal que

$$V(\eta) = V(\xi_\lambda) + \langle V'(\xi_\lambda), \eta - \xi_\lambda\rangle + \frac{1}{2}\langle V''(\xi_\lambda)[\eta - \xi_\lambda], \eta - \xi_\lambda\rangle + r_1(\eta), \quad (2.15)$$

em que $|r_1(\eta)| \leq \frac{1}{4}\delta_1\|\eta - \xi_\lambda\|_X^2$, $\forall \eta \in B_\rho(\xi_\lambda)$.
Mas $V(\xi_\lambda) = 0$ e $\langle V'(\xi_\lambda), \eta - \xi_\lambda\rangle_X = 0\ \forall \eta \in X$. Então $\forall \eta \in B_\rho(\xi_\lambda)$ tal que $\langle \eta - \xi_\lambda, A\xi_\lambda\rangle_X = 0$, segue de (2.15) que

$$\begin{aligned}
V(\eta) &= \frac{1}{2}\langle V''(\xi_\lambda)[\eta - \xi_\lambda], \eta - \xi_\lambda\rangle + r_1(\eta) \geq \frac{1}{2}\delta_1\|\eta - \xi_\lambda\|_X^2 + r_1(\eta), \text{ por (2.14)} \\
&\geq \frac{1}{2}\delta_1\|\eta - \xi_\lambda\|_X^2 - \frac{1}{4}\delta_1\|\eta - \xi_\lambda\|_X^2, \text{ por (2.15)} \\
&= \frac{1}{4}\delta_1\|\eta - \xi_\lambda\|_X^2 \qquad (2.16) \\
&\geq \frac{1}{4}\delta_1 d(\eta, \Theta(\xi_\lambda))^2.
\end{aligned}$$

Agora, considere $v \in \Theta(\xi_\lambda)_\rho$. Pelo Lema 2.1, existe $\theta_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$||v - T(\theta_1)\xi_\lambda||_X < \rho \ \text{ e } \ \langle v - T(\theta_1)\xi_\lambda, AT(\theta_1)\xi_\lambda\rangle_X = 0. \tag{2.17}$$

Defina $\eta = T(-\theta_1)v$. Então, de (2.17), vemos que

$$||\eta - \xi_\lambda|| = ||T(-\theta_1)v - \xi_\lambda||_X = ||v - T(\theta_1)\xi_\lambda||_X < \rho,$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \eta - \xi_\lambda, A\xi_\lambda\rangle_X &= \langle T(-\theta_1)v - \xi_\lambda, A\xi_\lambda\rangle_X = \langle T(-\theta_1)v - T(-\theta_1)T(\theta_1)\xi_\lambda, A\xi_\lambda\rangle_X \\
&= \langle v - T(\theta_1)\xi_\lambda, T(\theta_1)A\xi_\lambda\rangle_X = \langle v - T(\theta_1)\xi_\lambda, AT(\theta_1)\xi_\lambda\rangle_X \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dessa forma, por (2.16) e do fato de V ser uma quantidade Γ-invariante, concluímos que

$$\begin{aligned}
V(v) = V(\eta) &\geq \frac{1}{4}\delta_1 d(\eta, \Theta(\xi_\lambda))^2 = \frac{1}{4}\delta_1\left[\inf_{\theta\in\mathbb{R}} ||\eta - T(\theta - \theta_1)\xi_\lambda||_X\right]^2 \\
&= \frac{1}{4}\delta_1\left[\inf_{\theta\in\mathbb{R}} ||\eta - T(-\theta_1)T(\theta)\xi_\lambda||_X\right]^2 \\
&= \frac{1}{4}\delta_1\left[\inf_{\theta\in\mathbb{R}} ||v - T(\theta_1)T(-\theta_1)T(\theta)\xi_\lambda||_X\right]^2 \\
&= \frac{1}{4}\delta_1\left[\inf_{\theta\in\mathbb{R}} ||v - T(\theta)\xi_\lambda||_X\right]^2 \\
&= \frac{1}{4}\delta_1 d(v, \Theta(\xi_\lambda))^2.
\end{aligned}$$

Logo, como a função V definida em (2.2) satisfaz os quatro itens da definição 2.1.2, ela é de fato uma função de Lyapunov Γ-invariante para a órbita $\Theta(\xi_\lambda)$ e portanto o teorema está demonstrado. □

Por fim, o Teorema 2.1.1 segue, juntamente com o Teorema 2.1.2 visto acima, do resultado abaixo.

Teorema 2.1.3. *Suponha que as hipóteses* $(1)-(3)$ *são satisfeitas e que* $\exists V : \Theta(\xi_\lambda)_\rho \longrightarrow \mathbb{R}$ *função de Lyapunov* Γ*-invariante, para a órbita* $\Theta(\xi_\lambda)$*. Então a "standing wave"* $u_\lambda(t) = T(\lambda t)\xi_\lambda$ *tem órbita estável.*

Demonstração. Fixe $\varepsilon > 0$.

Pela continuidade de V em ξ_λ, $\exists \delta_2 \in (0,\rho)$ tal que

$$V(\eta) = V(\eta) - V(\xi_\lambda) < C \min\left\{\left(\frac{\rho}{2}\right)^2,\ \varepsilon^2\right\},\ \forall \eta \in B_{\delta_2}(\xi_\lambda). \tag{2.18}$$

Assim,

$$V(\eta) < C \min\left\{(\frac{\rho}{2})^2, \varepsilon^2\right\},\ \forall \eta \in \Theta(\xi_\lambda)_{\delta_2}. \tag{2.19}$$

De fato, se $\eta \in \Theta(\xi_\lambda)_{\delta_2} = \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} T(\theta) B_{\delta_2}(\xi_\lambda)$ então $\eta = T(\theta)\xi$ para algum $\theta \in \mathbb{R}$ e $\xi \in B_{\delta_2}(\xi_\lambda)$ e daí como V é uma quantidade Γ-invariante, obtemos de (2.18) que

$$V(\eta) = V(T(\theta)\xi) = V(\xi) < C \min\left\{\left(\frac{\rho}{2}\right)^2,\ \varepsilon^2\right\},$$

e a afirmação (2.19) se verifica.

Agora, pela hipótese (3) podemos escolher $\delta_2 > 0$ tal que $b_+(u_0) = \infty,\ \forall u_0 \in B_{\delta_2}(\xi_\lambda)$.

Então considere u solução do PVI (1.12) com condição inicial u_0 e

$$W = \{\tau > 0 |\ u(t) \in \Theta(\xi_\lambda)_\rho\ ,\ \forall t \in [0,\tau)\}.$$

Note que, o conjunto W é um intervalo não vazio.

De fato, como $u \in C([0,b), X)$, $\forall \varepsilon_1 > 0$, $\exists \delta_3 > 0$ tal que

$$|t| < \delta_3 \Rightarrow d(u(t), u(0)) < \varepsilon_1. \tag{2.20}$$

Além disso, como $u(0) = u_0 \in B_{\delta_2}(\xi_\lambda)$ então $||u(0) - \xi_\lambda||_X < \delta_2$ e, daí,

$$\begin{aligned} d(u(0), \Theta(\xi_\lambda)) &= \inf_{\theta \in \mathbb{R}} ||u(0) - T(\theta)\xi_\lambda||_X \leq ||u(0) - T(0)\xi_\lambda||_X \\ &= ||u(0) - \xi_\lambda||_X \\ &< \delta_2 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Logo, de (2.20) e (2.21), temos que $\forall t \in (0,\delta_3)$,

$$\begin{aligned} d(u(t), \Theta(\xi_\lambda)) &\leq d(u(t), u(0)) + d(u(0), \Theta(\xi_\lambda)) \\ &< \varepsilon_1 + \delta_2 \end{aligned}$$

Portanto, fazendo $\varepsilon_1 \longrightarrow 0$ na desigualdade acima, concluímos que $\forall t \in (0,\delta_3)$,

$$d(u(t), \Theta(\xi_\lambda)) \leq \delta_2 < \rho,$$

ou seja, $u(t) \in \Theta(\xi_\lambda)_\rho$ $\forall t \in (0,\delta_3)$. Consequentemente, $(0,\delta_3) \subset W$ e, assim, $W \neq \emptyset$.

Além disso, a afirmação de W ser um intervalo, segue diretamente do fato de que se $\tau \in W$ então $(0,\tau) \subset W$, pois se existir $\tau^{'} \in (0,\tau)$ com $\tau^{'} \notin W$ significa que $\exists t \in (0,\tau^{'}) \subset$

$(0, \tau)$ para o qual $u(t) \notin \Theta(\xi_\lambda)_\rho$, o que contradiz o fato de τ pertencer a W.

Voltando a demonstração da proposição, como $W \neq \emptyset$ temos que existem $\tau > 0$ em W e $(0, \tau) \subset W$, de modo que $inf\ W = 0$.

Seja $\tau^* = sup\ W$.

Se $\tau^* < \infty$, então $u(t) \in \Theta(\xi_\lambda)_\rho\ \forall t < \tau^*$ e também,

$$\begin{aligned} Cd(u(t), \Theta(\xi_\lambda))^2 &\leq V(u(t)),\ \text{por } (b) \\ &= V(u_0),\ \text{por } (d) \\ &< C\ min\left\{\left(\frac{\rho}{2}\right)^2,\ \varepsilon^2\right\},\ \text{por } (2.18) \\ &\leq C\left(\frac{\rho}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Portanto, $d(u(t), \Theta(\xi_\lambda)) < \frac{\rho}{2},\ \forall t < \tau^*$.

Logo, pela continuidade de $u(t)$ em $[0, \infty)$, fazendo $t \longrightarrow \tau^*$ temos que:

$$d(u(\tau^*), \Theta(\xi_\lambda)) \leq \frac{\rho}{2}. \tag{2.22}$$

Ainda, pela continuidade de $u(t)$ em $[0, \infty)$, temos que $\exists \delta_3 > 0$ tal que se $|t - \tau^*| < \delta_3$ então

$$d(u(\tau^*), u(t)) < \frac{\rho}{2}. \tag{2.23}$$

Assim, $\forall t \in (\tau^* - \delta_3, \tau^* + \delta_3)$ vale:

$$\begin{aligned} d(u(t), \Theta(\xi_\lambda)) &\leq d(u(t), u(\tau^*)) + d(u(\tau^*), \Theta(\xi_\lambda)) \\ &< \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2},\ \text{por } (2.22) \text{ e } (2.23) \\ &= \rho, \end{aligned}$$

ou seja, $u(t) \in \Theta(\xi_\lambda)_\rho$ com $t \in (\tau^* - \delta_3, \tau^* + \delta_3)$.

Ora, mas então $\forall t \in (0, \tau^* + \delta_3)$ temos $u(t) \in \Theta(\xi_\lambda)_\rho$ e portanto $\tau^* < \tau^* + \delta_3 \in W$, o que contradiz o fato de τ^* ser o supremo de W.

Logo, obtemos que $W = (0, \infty)$ e $\forall t \geq 0$ temos que:

$$Cd(u(t), \Theta(\xi_\lambda))^2 \leq V(u(t)) = V(u_0) < C\varepsilon^2,\ \text{por } (2.18)$$

$$\Rightarrow\ d(u(t), \Theta(\xi_\lambda)) \leq \varepsilon,\quad \forall t \geq 0,$$

provando a estabilidade da órbita $\Theta(\xi_\lambda)$ de $u_\lambda(t)$ segundo a definição 2.1.1. $\square$

2.2 Condições suficientes para a hipótese (2.1)

Nesta seção, garantiremos, através do Teorema 2.2.1, condições suficientes para que a hipótese (2.1) do Teorema 2.1.1 seja satisfeita.

Teorema 2.2.1. *Seja* $(\lambda, \xi_\lambda) \in \mathbb{R} \times X$. *Suponha que valham as hipóteses* (1)-(3) *e a seguinte condição:*

$$\exists\ \varepsilon, C > 0 \ \textit{tais que}\ \left\langle D^2_{uu} G_\lambda(\xi_\lambda)v, v\right\rangle \geq \varepsilon\, ||v||^2_X - C\, ||v||^2\,,\ \forall v \in X. \tag{2.24}$$

Então existe um único operador auto-adjunto $L_\lambda : D(L_\lambda) \subset H \longrightarrow H$ *definido por:*

$$D(L_\lambda) = \{z \in X |\ \exists w \in H\ \textit{tal que}\ \left\langle D^2_{uu} G_\lambda(\xi_\lambda)z, v\right\rangle = (w, v)\,,\ \forall v \in X\},$$

com $L_\lambda z = w,\ \forall z \in D(L_\lambda)$. *Além disso, se* $\exists \delta > 0$ *tal que*

$$(L_\lambda v, v) \geq \delta ||v||^2,\ \forall v \in D(L_\lambda)\ \textit{com}\ (v, A\xi_\lambda) = (v, JA\xi_\lambda) = 0, \tag{2.25}$$

então a condição (2.1) *é satisfeita.*

A demonstração deste teorema seguirá de alguns lemas, mas antes de apresentarmos tais resultados, cabe observar que dados $x, y \in D(L_\lambda)$ temos, a partir da definição de $D(L_\lambda)$, que existem $w, z \in H$ tais que $\forall v \in X$,

$$\left\langle D^2_{uu} G_\lambda(\xi_\lambda)x, v\right\rangle = (w, v)\ \text{ e }\ \left\langle D^2_{uu} G_\lambda(\xi_\lambda)y, v\right\rangle = (z, v)\,, \tag{2.26}$$

e então, de (2.26), vemos que, $\forall v \in X$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \langle D^2_{uu} G_\lambda(\xi_\lambda)(x + y), v\rangle &= \langle D^2_{uu} G_\lambda(\xi_\lambda)x, v\rangle + \langle D^2_{uu} G_\lambda(\xi_\lambda)y, v\rangle \\ &= (w, v) + (z, v) = (w + z, v) \end{aligned} \tag{2.27}$$

e,

$$\left\langle D^2_{uu} G_\lambda(\xi_\lambda)(\alpha x), v\right\rangle = \alpha \left\langle D^2_{uu} G_\lambda(\xi_\lambda)x, v\right\rangle = \alpha\,(w, v) = (\alpha w, v)\,, \tag{2.28}$$

com $w + z \in H$ e $\alpha w \in H$, mostrando que $D(L_\lambda)$ é um subespaço vetorial de X.

Além disso, $D(L_\lambda)$ é *densamente definido*, isto é, $\overline{D(L_\lambda)} = X$ com relação a $||.||_X$. De fato, note que pelo Corolário 1.1.4, é suficiente supor que $\exists \varphi \in X^*$, com $\varphi(x) = 0$ $\forall x \in D(L_\lambda)$, e mostrar que $\varphi(x) = 0\ \forall x \in X$.

Assim, suponha que exista tal φ.

Então, como pelo Teorema 1.3.2 X é reflexivo, temos que $\mathfrak{J}(X) = X^{**}$, em que $\mathfrak{J}$ é a injeção canônica de X em X^{**} definida em (1.4), e, portanto, como $D(L_\lambda) \subset X$, obtemos que $\mathfrak{J}(D(L_\lambda)) \subset \mathfrak{J}(X) = X^{**}$. Desse modo, como $\varphi \in X^*$,

$$\langle f, \varphi\rangle = 0,\ \forall f \in \mathfrak{J}(D(L_\lambda)) \tag{2.29}$$

pois, se $f \in \mathfrak{J}(D(L_\lambda))$, então $\exists x \in D(L_\lambda)$ tal que $\mathfrak{J}x = f$ e, assim, $\langle f, \varphi \rangle = \langle \mathfrak{J}x, \varphi \rangle = \langle \varphi, x \rangle = 0$.

Sendo assim, suponha, por absurdo, que $\varphi \neq 0$. Então $[0, \varphi] \notin G\left(\mathfrak{J}|_{D(L_\lambda)}\right)$ pois, caso contrário, teríamos $\varphi = \mathfrak{J}(0) = 0$, já que de (1.6) temos que $\mathfrak{J}$ é linear.

Agora, como $\mathfrak{J}$ além de ser linear, também é continuo pois vale (1.6), temos, pelo Teorema do Gráfico Fechado (Teorema 1.1.2), que $G\left(\mathfrak{J}|_{D(L_\lambda)}\right)$ é fechado.

Além disso, $G\left(\mathfrak{J}|_{D(L_\lambda)}\right)$ é convexo pois, dados $x_1, x_2 \in D(L_\lambda)$ temos, devido ao fato de $D(L_\lambda)$ ser um subespaço de X, que $D(L_\lambda)$ é convexo, e então $\forall t \in [0,1]$ obtemos que $tx_1 + (1-t)x_2 \in D(L_\lambda)$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned} t[x_1, \mathfrak{J}x_1] + (1-t)[x_2, \mathfrak{J}x_2] &= [tx_1 + (1-t)x_2, t\mathfrak{J}x_1 + (1-t)\mathfrak{J}x_2] \\ &= [tx_1 + (1-t)x_2, \mathfrak{J}(tx_1 + (1-t)x_2)] \in G\left(\mathfrak{J}|_{D(L_\lambda)}\right), \end{aligned}$$

ou seja, $G\left(\mathfrak{J}|_{D(L_\lambda)}\right)$ é convexo.

Logo, aplicando o Teorema 1.1.5, obtemos que $\{[0, \varphi]\}$ e $G\left(\mathfrak{J}|_{D(L_\lambda)}\right)$ são estritamente separados por um hiperplano fechado em $X \times X^*$, ou seja, existem $[g, \phi] \in X^* \times X^{**} = (X \times X^*)^*$ e algum $\alpha \in \mathbb{R}$, tais que

$$\langle [g, \phi], [u, \mathfrak{J}u] \rangle < \alpha < \langle [g, \phi], [0, \varphi] \rangle, \ \forall u \in D(L_\lambda),$$

ou ainda,

$$\langle g, u \rangle + \langle \phi, \mathfrak{J}u \rangle < \alpha < \langle g, 0 \rangle + \langle \phi, \varphi \rangle = \langle \phi, \varphi \rangle, \ \forall u \in D(L_\lambda). \tag{2.30}$$

Agora, se $u \in D(L_\lambda)$, então $\beta u \in D(L_\lambda)$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$, pois $D(L_\lambda)$ é um subespaço vetorial de X.

Portanto,

$$\beta(\langle g, u \rangle + \langle \phi, \mathfrak{J}u \rangle) = \langle g, \beta u \rangle + \langle \phi, \mathfrak{J}\beta u \rangle < \alpha, \ \forall u \in D(L_\lambda). \tag{2.31}$$

Então temos, de (2.31), que $\forall u \in D(L_\lambda)$,

$$\begin{cases} \beta > 0 \Rightarrow \langle g, u \rangle + \langle \phi, \mathfrak{J}u \rangle < \dfrac{\alpha}{\beta} \\ \beta < 0 \Rightarrow \langle g, u \rangle + \langle \phi, \mathfrak{J}u \rangle > \dfrac{\alpha}{\beta}. \end{cases} \tag{2.32}$$

Logo, fazendo $\beta \longrightarrow 0$ em (2.32), obtemos que $\forall u \in D(L_\lambda)$,

$$\begin{cases} \beta > 0 \Rightarrow \langle g, u \rangle + \langle \phi, \mathfrak{J}u \rangle \leq 0 \\ \beta < 0 \Rightarrow \langle g, u \rangle + \langle \phi, \mathfrak{J}u \rangle \geq 0, \end{cases}$$

ou seja,

$$\langle g, u \rangle + \langle \phi, \mathfrak{J}u \rangle = 0, \ \forall u \in D(L_\lambda).$$

Consequentemente, de (2.30), temos $0 < \alpha < \langle \phi, \varphi \rangle$, $\forall u \in D(L_\lambda)$. Dessa forma,

$$\langle \phi, \varphi \rangle \neq 0 \ \forall u \in D(L_\lambda),$$

ou ainda, $\langle \phi, \varphi \rangle \neq 0$ com $\phi \in \mathfrak{I}(D(L_\lambda))$, o que contradiz (2.29).

Logo, $\varphi = 0$ e, então, $\overline{D(L_\lambda)} = X$.

Assim, após as observações feitas acima, passaremos a ver os resultados que, como dito anteriormente, demonstram o Teorema 2.2.1.

Lema 2.2.1. *Se* $(\lambda, \xi_\lambda) \in \mathbb{R} \times X$ *e a condição* (2.24) *é satisfeita, então definindo a forma quadrática* $b_\lambda : D(b_\lambda) \subset H \longrightarrow \mathbb{R}$ *por*

$$b_\lambda(v) = \left\langle D^2_{uu} G_\lambda(\xi_\lambda) v, v \right\rangle, \ \forall v \in X = D(b_\lambda),$$

temos que b_λ *é fechada e limitada, no sentido de forma quadrática (veja apêndice). Consequentemente, existe um único operador auto-adjunto* $L_\lambda : D(L_\lambda) \subset H \longrightarrow H$ *definido por:*

$$D(L_\lambda) = \{ z \in X |\ \exists w \in H \ \textit{tal que} \ \left\langle D^2_{uu} G_\lambda(\xi_\lambda) z, v \right\rangle = (w, v), \ \forall v \in X \},$$

com $L_\lambda z = w, \ \forall z \in D(L_\lambda)$.

Demonstração. Para mostrar que b_λ é fechado em H, considere $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $D(b_\lambda) = X$ tal que $||v_n - v|| \longrightarrow 0$ e $b_\lambda(v_n - v_m) \longrightarrow 0$, para algum $v \in H$ quando $n, \ m \longrightarrow 0$.

A condição (2.24) implica que

$$b_\lambda(v_n - v_m) = \left\langle D^2_{uu} G_\lambda(\xi_\lambda)(v_n - v_m), v_n - v_m \right\rangle \geq \varepsilon \, ||v_n - v_m||^2_X - C \, ||v_n - v_m||^2, \quad (2.33)$$

e assim, $||v_n - v_m||_X \longrightarrow 0$ quando $n, \ m \longrightarrow 0$, ou seja, $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em X. Então como X é um espaço de Hilbert, $\exists w \in X$ tal que $||v_n - w||_X \longrightarrow 0$.

Logo, como $||.||_X$ e $||.||$ são equivalentes em X, temos

$$\begin{aligned} ||v - w|| &\leq ||v - v_n|| + ||v_n - w|| \\ &\leq ||v - v_n|| + C||v_n - w||_X \ \longrightarrow \ 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Daí, obtemos que $v = w \in X = D(b_\lambda)$.

Agora, pela continuidade de $D^2_{uu} G_\lambda(\xi_\lambda) : X \longrightarrow X^*$ e pela equivalência das normas $||.||_X$ e $||.||$, vemos que

$$\begin{aligned} b_\lambda(v_n - v) &= \langle D^2_{uu} G_\lambda(\xi_\lambda)(v_n - v), v_n - v \rangle \\ &\leq ||D^2_{uu} G_\lambda(\xi_\lambda)(v_n - v)||_{X^*} \, ||v_n - v||_X \\ &\leq |D^2_{uu} G_\lambda(\xi_\lambda)|_{\mathcal{L}(X, X^*)} \, ||v_n - v||^2_X \\ &\leq C|D^2_{uu} G_\lambda(\xi_\lambda)|_{\mathcal{L}(X, X^*)} \, ||v_n - v||^2 \\ &\longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Portanto, b_λ é fechado.

Vamos mostrar agora que b_λ é limitado.

Primeiramente, note que, se $v = 0$ então $b_\lambda(v) = 0 = ||v||_X$.

Por outro lado, se $v \neq 0$, temos

$$\begin{aligned}\frac{|b_\lambda(v)|}{||v||_X} &= \frac{1}{||v||_X}\left|\left\langle D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)v, v\right\rangle\right| = \left|\left\langle D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)\left(\frac{v}{||v||_X}\right), v\right\rangle\right| \\ &\leq \left|\left|D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)\left(\frac{v}{||v||_X}\right)\right|\right|_{X^*} ||v||_X \\ &\leq |D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)|_{\mathcal{L}(X,X^*)}\, ||v||_X\,.\end{aligned}$$

Dessa forma, $|b_\lambda(v)| \leq |D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)|_{\mathcal{L}(X,X^*)}\, ||v||_X^2$, $\forall v \in X$ e, como $|D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)|_{\mathcal{L}(X,X^*)} < \infty$, pois $D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)$ é um operador linear contínuo, temos que b_λ é limitado.

Por fim, a existência e unicidade de L_λ seguem do Teorema A.3.1 (veja apêndice). □

Lema 2.2.2. *Suponha que as hipótese (2.24) e (2.25) sejam satisfeitas. Então* $\exists \delta_1 > 0$ *para o qual*

$$\langle D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)v, v\rangle \geq \delta_1 ||v||^2_X,\ \forall v \in X \text{ com } (v, A\xi_\lambda) = (v, JA\xi_\lambda) = 0. \tag{2.35}$$

Demonstração. Por (2.25) temos que

$$(L_\lambda v, v) \geq \delta\, ||v||^2\,,\ \forall v \in D(L_\lambda) \text{ com } (v, A\xi_\lambda) = (v, JA\xi_\lambda) = 0 \tag{2.36}$$

e por (2.24),

$$(L_\lambda v, v) \geq \varepsilon ||v||^2_X - C||v||^2\ ,\ \forall v \in X. \tag{2.37}$$

Assim, $\forall v \in D(L_\lambda)$ com $(v, A\xi_\lambda) = (v, JA\xi_\lambda) = 0$, temos que

$$\begin{aligned}\left[1 + \frac{\delta}{C}\right](L_\lambda v, v) &= (L_\lambda v, v) + \frac{\delta}{C}(L_\lambda v, v) \\ &\geq \delta\, ||v||^2 + \frac{\delta}{C}\left[\varepsilon\, ||v||^2_X - C\, ||v||^2\right],\ \text{por (2.36) e (2.37)} \\ &= \delta\, ||v||^2 + \frac{\delta\varepsilon}{C}\, ||v||^2_X - \delta\, ||v||^2 \\ &= \frac{\delta\varepsilon}{C}\, ||v||^2_X\,.\end{aligned} \tag{2.38}$$

Logo, pelo Lema 2.2.1 e o que acabamos de concluir em (2.38), obtemos que

$$\begin{aligned}\left[\frac{C+\delta}{C}\right]\langle D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)v, v\rangle &= \left[1 + \frac{\delta}{C}\right]\langle D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)v, v\rangle = \left[1 + \frac{\delta}{C}\right](L_\lambda v, v) \\ &\geq \frac{\delta\varepsilon}{C}||v||^2_X.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)v, v\rangle \geq \delta_1 ||v||^2_X \text{ com } \delta_1 = \frac{\delta\varepsilon}{C+\delta},$$

$\forall v \in D(L_\lambda)$ satisfazendo $(v, A\xi_\lambda) = (v, JA\xi_\lambda) = 0$.

Dessa forma, como $\overline{D(L_\lambda)} = X$ com relação a $||.||_X$, obtemos que vale (2.35). $\square$

Observação 2.2.1. Note que, como L_λ é auto-adjunto em $(H, (.,.))$, obtemos que o operador $S_\lambda = R^{-1}D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda) : X \longrightarrow X$ é auto-adjunto em $(X, \langle .,. \rangle_X)$ pois, $\forall v, w \in X$

$$\begin{aligned}
\langle S_\lambda v, w\rangle_X &= \langle R^{-1}D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)v, w\rangle_X = \langle D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)v, w\rangle \\
&= (L_\lambda v, w) = (v, L_\lambda w) = (L_\lambda w, v) \\
&= \langle D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)w, v\rangle = \langle R^{-1}D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)w, v\rangle_X = \langle S_\lambda w, v\rangle_X \\
&= \langle v, S_\lambda w\rangle_X .
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Lema 2.2.3. *Suponha que a hipótese* (2.35) *se verifique. Neste caso, a desigualdade* (2.1) *é válida.*

Demonstração. Sejam $\varphi = \dfrac{A\xi_\lambda}{||A\xi_\lambda||}$ e $\psi = J\varphi$.

Então, por $(H4)$ e como $J^{-1} = -J$, temos

$$\begin{cases}
||\varphi|| = 1, \\
||\psi||^2 = \dfrac{||JA\xi_\lambda||^2}{||A\xi_\lambda||^2} = \dfrac{(JA\xi_\lambda, JA\xi_\lambda)}{||A\xi_\lambda||^2} = \dfrac{(A\xi_\lambda, A\xi_\lambda)}{||A\xi_\lambda||^2} = 1 \ \text{ e} \\
(\varphi, \psi) = (\varphi, J\varphi) = 0.
\end{cases} \tag{2.40}$$

Agora, considere $z \in \{A\xi_\lambda, R^{-1}B\xi_\lambda\}^\perp$, isto é, $z \in X$ e $\langle z, A\xi_\lambda\rangle_X = \langle z, R^{-1}B\xi_\lambda\rangle_X = 0$, e defina

$$v = z - (z,\varphi)\,\varphi - (z,\psi)\,\psi. \tag{2.41}$$

Dessa forma, pelo que vimos em (2.40), temos que

$$\begin{cases}
(v,\varphi) = (z,\varphi) - (z,\varphi)\,(\varphi,\varphi) - (z,\psi)\,(\psi,\varphi) = 0 \\
(v,\psi) = (z,\psi) - (z,\varphi)\,(\varphi,\psi) - (z,\psi)\,(\psi,\psi) = 0,
\end{cases}$$

e, portanto, pela hipótese (2.35) temos que para v definido por (2.41),

$$\left\langle D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)v, v\right\rangle \geq \delta\,||v||^2_X \Leftrightarrow \left\langle R^{-1}D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)v, v\right\rangle_X \geq \delta\,||v||^2_X .$$

Mas,

$$\begin{aligned}(z,\psi) &= \frac{1}{||A\xi_\lambda||}(z,JA\xi_\lambda) = \frac{1}{||A\xi_\lambda||}(JA\xi_\lambda,z)\\ &= \frac{1}{||A\xi_\lambda||}\left\langle R^{-1}\mathfrak{T}JA\xi_\lambda,z\right\rangle_X = \frac{1}{||A\xi_\lambda||}\left\langle R^{-1}B\xi_\lambda,z\right\rangle_X \\ &= 0,\ \text{pois } z\in\{R^{-1}B\xi_\lambda\}^\perp\end{aligned} \tag{2.42}$$

e, pela Observação 1.4.7,

$$R^{-1}D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)\varphi = \frac{1}{||A\xi_\lambda||}R^{-1}D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)A\xi_\lambda = 0, \tag{2.43}$$

já que R é injetor.

Então, por (2.42) e (2.43),

$$v = z-(z,\varphi)\,\varphi-(z,\psi)\,\psi = z-(z,\varphi)\,\varphi \tag{2.44}$$

e,

$$\begin{aligned}R^{-1}D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)v &= R^{-1}D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)z-(z,\varphi)\,R^{-1}D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)\varphi\\ &= R^{-1}D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)z\end{aligned} \tag{2.45}$$

Assim, como, pela Observação 2.2.1, $S_\lambda = R^{-1}D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)$ é auto-adjunto e vale (2.43), temos

$$\begin{aligned}\langle R^{-1}D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)z,z\rangle_X &= \langle R^{-1}D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)v, v+(z,\varphi)\,\varphi\rangle_X\,,\ \text{por (2.44) e (2.45)}\\ &= \langle R^{-1}D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)v,v\rangle_X+(z,\varphi)\,\langle R^{-1}D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)v,\varphi\rangle_X\\ &= \langle R^{-1}D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)v,v\rangle_X+(z,\varphi)\,\langle v, R^{-1}D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)\varphi\rangle_X\\ &= \langle R^{-1}D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)v,v\rangle_X\,,\end{aligned} \tag{2.46}$$

e,

$$\begin{aligned}||z||^2_X &= \langle z, v+(z,\varphi)\,\varphi\rangle_X = \langle z,v\rangle_X+(z,\varphi)\,\langle z,\varphi\rangle_X\\ &= \langle z,v\rangle_X+\frac{(z,\varphi)}{||A\xi_\lambda||}\langle z,A\xi_\lambda\rangle_X\\ &= \langle z,v\rangle_X\,,\ \text{pois } z\in\{A\xi_\lambda\}^\perp.\end{aligned} \tag{2.47}$$

Agora, por Cauchy-Schwarz e (2.47)

$$||z||^2_X = \langle z,v\rangle_X \le ||z||_X\,||v||_X \ \Rightarrow\ ||z||_X\le ||v||_X\,,\ \forall z\neq 0. \tag{2.48}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\delta\,||z||^2_X \le \delta\,||v||^2_X &\le \langle R^{-1}D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)v,v\rangle_X\,,\ \text{por (2.35)}\\ &= \langle R^{-1}D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)z,z\rangle_X\,,\ \text{por (2.46)}\\ &= \langle D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)z,z\rangle\,,\end{aligned}$$

e assim obtemos que vale (2.1). □

CAPÍTULO 3

Estabilidade Orbital - Aplicação

Neste capítulo, mostraremos que a equação de Schrödinger não-linear

$$i\partial_t w(x,t) + \Delta w(x,t) + f(x, |w(x,t)|^2) w(x,t) = 0 \tag{3.1}$$

com $w : \mathbb{R}^N \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ e $f : \mathbb{R}^N \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, reformulada como caso particular do sistema hamiltoniano (1.12) nos espaços de funções:

$$\begin{aligned} X &= H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N), \\ H &= L^2(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N) \ \text{ e} \\ X^* &= H^{-1}(\mathbb{R}^N) \times H^{-1}(\mathbb{R}^N), \end{aligned} \tag{3.2}$$

com o seguinte produto escalar,

$$\begin{aligned} \left\langle \binom{\varphi}{\psi}, \binom{\xi}{\eta} \right\rangle_X &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla\varphi \cdot \nabla\xi + \nabla\psi \cdot \nabla\eta + \varphi\xi + \psi\eta \, dx, \\ \left(\binom{\varphi}{\psi}, \binom{\xi}{\eta} \right) &= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi\xi + \psi\eta \, dx \end{aligned} \tag{3.3}$$

possui "standing wave" com órbita estável, via o Teorema 2.1.1.

3.1 Formulação do sistema Hamiltoniano

Identificando $w = \varphi + i\psi \longmapsto \binom{\varphi}{\psi}$, obtemos que

$$i\partial_t w(x,t) = -\partial_t\psi + i\partial_t\varphi \longmapsto \begin{pmatrix} -\partial_t\psi \\ \partial_t\varphi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t\varphi \\ \partial_t\psi \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

e também

$$\begin{aligned}
\Delta w(x,t) + f(x,|w(x,t)|^2)w(x,t) &= \Delta\varphi + i\Delta\psi + f(x,\varphi^2+\psi^2)(\varphi + i\psi)\\
&= \Delta\varphi + f(x,\varphi^2+\psi^2)\varphi + i(\Delta\psi + f(x,\varphi^2+\psi^2)\psi)\\
&\longmapsto \begin{pmatrix}\Delta\varphi + f(x,\varphi^2+\psi^2)\varphi\\ \Delta\psi + f(x,\varphi^2+\psi^2)\psi\end{pmatrix}, \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

de modo que, a partir de (3.4) e (3.5), podemos reescrever (3.1) da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\partial_t\varphi\\ \partial_t\psi\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\Delta\varphi + f(x,\varphi^2+\psi^2)\varphi\\ \Delta\psi + f(x,\varphi^2+\psi^2)\psi\end{pmatrix}. \qquad (3.6)$$

Agora, temos o seguinte resultado:

Proposição 3.1.1. *Seja* $F(x,s) = \displaystyle\int_0^s f(x,\sigma)\,d\sigma$*, e considere formalmente (em cada ponto) o hamiltoniano*

$$\mathcal{H}\left(\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi|^2 + |\nabla\psi|^2 - F(x,\varphi^2+\psi^2)\,dx, \qquad (3.7)$$

então

$$\mathcal{H}'\left(\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-\Delta\varphi - f(x,\varphi^2+\psi^2)\varphi\\ -\Delta\psi - f(x,\varphi^2+\psi^2)\psi\end{pmatrix}. \qquad (3.8)$$

Demonstração. De fato, como $X = H^1(\mathbb{R}^N)\times H^1(\mathbb{R}^N) \cong H^1(\mathbb{R}^N)\oplus H^1(\mathbb{R}^N)$, do cálculo em espaços de Banach, Proposição 1.2.5, sabemos que

$$\left\langle \mathcal{H}'\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle \partial_1\mathcal{H}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}, \xi\right\rangle + \left\langle \partial_2\mathcal{H}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}, \eta\right\rangle. \qquad (3.9)$$

Além disso, note que:

$$\left\langle \partial_1\mathcal{H}\tbinom{\varphi}{\psi}, \xi\right\rangle = \lim_{t\to 0}\frac{\mathcal{H}\tbinom{\varphi+t\xi}{\psi} - \mathcal{H}\tbinom{\varphi}{\psi}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(\varphi+t\xi)\cdot\nabla(\varphi+t\xi) - \nabla\varphi\cdot\nabla\varphi - F(x,(\varphi+t\xi)^2+\psi^2) \qquad (3.10)$$
$$+ F(x,\varphi^2+\psi^2)\,dx$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} 2t\nabla\varphi\cdot\nabla\xi + t^2|\nabla\xi|^2 - F(x,\varphi^2+\psi^2+2t\varphi\xi+t^2\xi^2) + F(x,\varphi^2+\psi^2)\,dx.$$

Então, como

$$-\lim_{t\to 0}\frac{F(x,\varphi^2+\psi^2+2t\varphi\xi+t^2\xi^2) - F(x,\varphi^2+\psi^2)}{2t}$$

$$= -\lim_{t\to 0}\frac{F\left(x,\varphi^2+\psi^2+2t\left(\varphi\xi+\dfrac{t\xi^2}{2}\right)\right) - F(x,\varphi^2+\psi^2)}{2t}$$

$$= -F'(x, \varphi^2 + \psi^2)\varphi\xi = -f(x, \varphi^2 + \psi^2)\varphi\xi,$$

vemos, de (3.10), que:

$$\left\langle \partial_1 \mathcal{H}\binom{\varphi}{\psi}, \xi \right\rangle = \tag{3.11}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} 2t\nabla\varphi \cdot \nabla\xi + t^2|\nabla\xi|^2 - F(x, \varphi^2 + \psi^2 + 2t\varphi\xi + t^2\xi^2) + F(x, \varphi^2 + \psi^2)\ dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{t\to 0} \nabla\varphi \cdot \nabla\xi + \frac{t|\nabla\xi|^2}{2} - \lim_{t\to 0} \frac{F\left(x, \varphi^2 + \psi^2 + 2t\left(\varphi\xi + \frac{t\xi^2}{2}\right)\right) - F(x, \varphi^2 + \psi^2)}{2t}\ dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla\varphi \cdot \nabla\xi - f(x, \varphi^2 + \psi^2)\varphi\xi\ dx.$$

Agora, pelo Teorema 1.3.6, temos que, para $\{\varphi^n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{\xi^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tais que $\varphi^n \longrightarrow \varphi$ e $\xi^n \longrightarrow \xi$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, com $\nabla\varphi^n \longrightarrow \nabla\varphi$ e $\nabla\xi^n \longrightarrow \nabla\xi$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$, vale

$$\nabla\varphi^n \cdot \nabla\xi^n = \left(\sum_{j=1}^{N} \varphi^n_{x_j}\xi^n_{x_j}\right) + \varphi^n_t\xi^n_t,\ \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{3.12}$$

Então fixado $n \in \mathbb{N}$, para cada $j = 1, 2, ..., N$, tomando $u_j = \varphi^n_{x_j}$ e $dv_j = \xi^n_{x_j} dx_j$ na fórmula de integração por partes em $\mathbb{R}$, temos que $du_j = \varphi^n_{x_jx_j} dx^j$, $v_j = \xi^n$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \int \varphi^n_{x_j}\xi^n_{x_j}\ dx^j &= \int u_j\ dv_j = [u_jv_j]|_{-\infty}^{\infty} - \int v_j\ du_j \\ &= [\varphi^n_{x_j}\xi^n]|_{-\infty}^{+\infty} - \int \varphi^n_{x_jx_j}\xi^n\ dx^j \\ &= -\int \varphi^n_{x_jx_j}\xi^n\ dx^j. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Além disso, para $w_j = \varphi^n_t$ e $dz_j = \xi^n_t$ temos novamente pela fórmula de integração por partes em $\mathbb{R}$ que $dw_j = \varphi^n_{x_jt}\ dx^j$, $z_j = \displaystyle\int \xi^n_t\ dx^j$ e portanto

$$\begin{aligned} \int \varphi^n_t\xi^n_t\ dx^j &= \int w_j\ dz_j = [w_jz_j]|_{-\infty}^{\infty} - \int z_j\ dw_j \\ &= \left[\varphi^n_t \int \xi^n_t\ dx^j\right]\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int \left(\int \xi^n_t\ dx^j\right)\varphi^n_{x_jt}\ dx^j \\ &= -\left(\int \xi^n_t\ dx^j\right)\left(\int \varphi^n_{x_jt}\ dx^j\right) \\ &= \left[\varphi^n_t \int \xi^n_t\ dx^j\right]\Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Logo, usando o Teorema de Fubini (Teorema 1.3.3) e os itens (3.12), (3.13) e (3.14), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla\varphi^n \cdot \nabla\xi^n \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{j=1}^{N} \varphi^n_{x_j} \xi^n_{x_j} \right) + \varphi^n_t \xi^n_t \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{j=1}^{N} \varphi^n_{x_j} \xi^n_{x_j} \right) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^n_t \xi^n_t \, dx = \sum_{j=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \varphi^n_{x_j} \xi^n_{x_j} \, dx \right) + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^n_t \xi^n_t \, dx$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left[\int \varphi^n_{x_j} \xi^n_{x_j} \, dx^j \right] dx^1 ... dx^{j-1} dx^{j+1} ... dx^N \right)$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left[\int \varphi^n_t \xi^n_t \, dx^j \right] dx^1 ... dx^{j-1} dx^{j+1} ... dx^N$$

$$= -\sum_{j=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left[\int \varphi^n_{x_j x_j} \xi^n \, dx^j \right] dx^1 ... dx^{j-1} dx^{j+1} ... dx^N \right) = -\sum_{j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^n_{x_j x_j} \xi^n \, dx$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^N} \sum_{j=1}^{N} \varphi^n_{x_j x_j} \xi^n \, dx$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^N} \xi^n \Delta\varphi^n \, dx.$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada (1.3.1) e pela igualdade acima temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla\varphi \cdot \nabla\xi \, dx = -\int_{\mathbb{R}^N} \xi \Delta\varphi \, dx. \tag{3.15}$$

Assim, de (3.11) e (3.15), concluímos que

$$\left\langle \partial_1 \mathcal{H}\binom{\varphi}{\psi}, \xi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla\varphi \cdot \nabla\xi - f(x, \varphi^2 + \psi^2)\varphi\xi \, dx = -\int_{\mathbb{R}^N} \xi\Delta\varphi - f(x, \varphi^2 + \psi^2)\varphi\xi \, dx.$$

Analogamente, obtemos que

$$\left\langle \partial_2 \mathcal{H}\binom{\varphi}{\psi}, \eta \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla\psi \cdot \nabla\eta - f(x, \varphi^2 + \psi^2)\psi\eta \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} -\eta\Delta\psi - f(x, \varphi^2 + \psi^2)\psi\eta \, dx.$$

Logo, de (3.9) e pelo que vimos acima, temos

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{H}'\binom{\varphi}{\psi}, \binom{\xi}{\eta} \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} [-\Delta\varphi - f(x, \varphi^2 + \psi^2)\varphi]\xi + [-\Delta\psi - f(x, \varphi^2 + \psi^2)\psi]\eta \, dx \\ &= \left(\begin{pmatrix} -\Delta\varphi - f(x, \varphi^2 + \psi^2)\varphi \\ -\Delta\psi - f(x, \varphi^2 + \psi^2)\psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

de modo que,

$$\mathcal{H}'\left(\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\Delta\varphi - f(x, \varphi^2 + \psi^2)\varphi \\ -\Delta\psi - f(x, \varphi^2 + \psi^2)\psi \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

□

A partir desta proposição, vemos que

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{H}'\tbinom{\varphi}{\psi}, \tbinom{\xi}{\eta} \right\rangle &= \left(\begin{pmatrix} -\Delta\varphi - f(x,\varphi^2+\psi^2)\varphi \\ -\Delta\psi - f(x,\varphi^2+\psi^2)\psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= \left\langle \mathcal{T} \begin{pmatrix} -\Delta\varphi - f(x,\varphi^2+\psi^2)\varphi \\ -\Delta\psi - f(x,\varphi^2+\psi^2)\psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle.\end{aligned}$$

Portanto, a equação de Schrödinger não-linear (3.1) pode ser interpretada no seguinte formato hamiltoniano

$$\mathcal{H}' \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \mathcal{T} \begin{pmatrix} -\Delta\varphi - f(x,\varphi^2+\psi^2)\varphi \\ -\Delta\psi - f(x,\varphi^2+\psi^2)\psi \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Para finalizar, a fim de obtermos operadores como nas hipóteses $(H1) - (H4)$, necessárias para o método de estabilidade estudado, definimos $J : X \longrightarrow X$ e $A : X \longrightarrow X$ por

$$J \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi \\ \varphi \end{pmatrix} \text{ e } A = -J = \begin{bmatrix} 0 & I_{H^1(\mathbb{R}^N)} \\ -I_{H^1(\mathbb{R}^N)} & 0 \end{bmatrix}, \ \forall \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \in X. \tag{3.18}$$

Sendo assim, estes operadores, J e A, realmente satisfazem as suposições feitas em $(H1) - (H4)$ pois, pela definição acima, temos que $AJ = JA$ e, também, pelo Teorema 1.2.5 (I - Teorema Fundamental do Cálculo), $\mathcal{H} \in C^2(X)$. Além disso, valem os seguintes itens:

(i) $J, A \in \mathcal{L}(X)$;

De fato, dados $\binom{u}{v}, \binom{w}{z} \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que

$$\begin{aligned} J\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \right) &= J \begin{pmatrix} u + \alpha w \\ v + \alpha z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v - \alpha z \\ u - \alpha w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -w \\ z \end{pmatrix} \\ &= J \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \alpha J \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

portanto, J é um operador linear. Consequentemente, como $A = -J$, obtemos que A também é linear.

(ii) $J^T = J^{-1} = -J$, $A^T = -A$;

Com efeito, dados $\binom{u}{v}, \binom{w}{z} \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ vemos que

$$
\begin{aligned}
\left\langle J\binom{u}{v}, \binom{w}{z} \right\rangle_X &= \left\langle \binom{-v}{u}, \binom{w}{z} \right\rangle_X \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} -\nabla v \cdot \nabla w + \nabla u \cdot \nabla z - vw + uz \; dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \cdot \nabla(-w) + \nabla u \cdot \nabla z + v(-w) + uz \; dx \\
&= \left\langle \binom{u}{v}, \binom{z}{-w} \right\rangle_X = \left\langle \binom{u}{v}, -\binom{-z}{w} \right\rangle_X \\
&= \left\langle \binom{u}{v}, -J\binom{w}{z} \right\rangle_X,
\end{aligned}
$$

ou seja, $J^T = -J$. Além disso, como

$$
\begin{aligned}
J(-J) &= \begin{bmatrix} 0 & -I_{H^1(\mathbb{R}^N)} \\ I_{H^1(\mathbb{R}^N)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_{H^1(\mathbb{R}^N)} \\ -I_{H^1(\mathbb{R}^N)} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I_{H^1(\mathbb{R}^N)} & 0 \\ 0 & I_{H^1(\mathbb{R}^N)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & I_{H^1(\mathbb{R}^N)} \\ -I_{H^1(\mathbb{R}^N)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -I_{H^1(\mathbb{R}^N)} \\ I_{H^1(\mathbb{R}^N)} & 0 \end{bmatrix} = (-J)J,
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

obtemos, de (3.19), que $J^{-1} = -J$ e $-J^2 = I_X$.

Consequentemente, pela definição do operador A, podemos concluir que $A^T = (-J)^T = (J^T)^T = J = -A$.

(iii) $J \in \mathcal{B}(X)$

Neste item, também, como consequência imediata, obtemos, se verificado que J é contínuo, que A também é contínuo, pois $A = -J$. Assim, usando as propriedades já verificadas no item (ii) acima, obtemos que $\forall \binom{u}{v} \in X$,

$$
\begin{aligned}
\left\| J\binom{u}{v} \right\|_X^2 &= \left\langle J\binom{u}{v}, J\binom{u}{v} \right\rangle_X = \left\langle \binom{u}{v}, J^T J\binom{u}{v} \right\rangle_X = \left\langle \binom{u}{v}, J^{-1} J\binom{u}{v} \right\rangle_X \\
&= \left\langle \binom{u}{v}, \binom{u}{v} \right\rangle_X = \left\| \binom{u}{v} \right\|_X^2,
\end{aligned}
$$

como queríamos demonstrar.

(iv) $\left(J\binom{u}{v}, \binom{w}{z}\right) = -\left(\binom{u}{v}, J\binom{w}{z}\right), \; \forall \binom{u}{v}, \binom{w}{z} \in X.$

De fato, $\forall \binom{u}{v}, \binom{w}{z} \in X$

$$\begin{aligned}
\left(J\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\begin{pmatrix}w\\z\end{pmatrix}\right) &= \left(\begin{pmatrix}-v\\u\end{pmatrix},\begin{pmatrix}w\\z\end{pmatrix}\right) = \int_{\mathbb{R}^N} -vw+uz\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} v(-w)+uz\,dx\\
&= \left(\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z\\-w\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},-\begin{pmatrix}-z\\w\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},-J\begin{pmatrix}w\\z\end{pmatrix}\right)\\
&= -\left(\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},J\begin{pmatrix}w\\z\end{pmatrix}\right),
\end{aligned}$$

portanto, J satisfaz (iv).

(v) $\left(A\binom{u}{v},\binom{w}{z}\right) = -\left(\binom{u}{v},A\binom{w}{z}\right),\ \forall\binom{u}{v},\binom{w}{z}\in X.$

Com efeito, a partir do que provamos no item anterior, vemos que $\forall\binom{u}{v},\binom{w}{z}\in X$

$$\begin{aligned}
\left(A\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\begin{pmatrix}w\\z\end{pmatrix}\right) &= \left(-J\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\begin{pmatrix}w\\z\end{pmatrix}\right) = -\left(J\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\begin{pmatrix}w\\z\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},J\begin{pmatrix}w\\z\end{pmatrix}\right)\\
&= \left(\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},-A\begin{pmatrix}w\\z\end{pmatrix}\right) = -\left(\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},A\begin{pmatrix}w\\z\end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

(vi) $\left\langle \mathcal{H}'\binom{u}{v},A\binom{u}{v}\right\rangle = 0,\ \forall\binom{u}{v}\in X.$

Utilizando a definição de $\mathcal{H}'$ dada em (3.8), temos que

$$\left\langle \mathcal{H}'\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},A\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right\rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle \mathcal{H}'\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},-J\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle \mathcal{H}'\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},-\begin{pmatrix}-v\\u\end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle \mathcal{H}'\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\begin{pmatrix}v\\-u\end{pmatrix}\right\rangle\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u\cdot\nabla v+\nabla v\cdot\nabla(-u)-f(x,\varphi^2+\psi^2)uv-f(x,\varphi^2+\psi^2)v(-u)\,dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u\cdot\nabla v-\nabla v\cdot\nabla u-f(x,\varphi^2+\psi^2)uv+f(x,\varphi^2+\psi^2)vu\,dx\\
&= 0,\ \forall\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\in X,
\end{aligned}$$

provando este item.

3.2 Caso real

Esta seção tem por objetivo garantir a estabilidade da solução "standing wave" $u_\lambda(t) = T(\lambda t)\xi_\lambda$, quando $\xi_\lambda \in X$ é real, isto é, quando ξ_λ é da forma $\binom{\varphi_\lambda}{0}$, em que $\varphi_\lambda \in H^1(\mathbb{R}^N)$, utilizando o método estudado no capítulo 2, ou, mais precisamente, satisfazendo as condições suficientes, (2.24) e (2.25), para a hipótese (2.1).

Primeiramente, para cada par $\binom{\varphi}{\psi}$ em X, vamos determinar explicitamente a forma da hessiana $D^2_{uu}G_\lambda(\binom{\varphi}{\psi})$. Dessa forma, como $JA = -J^2 = I_X$ e por definição $B = J^*A^*\mathcal{T}$, temos que

$$B = J^*A^*\mathcal{T} = RJ^TR^{-1}RA^TR^{-1}\mathcal{T} = R(-J)(J)R^{-1}\mathcal{T} = RR^{-1}\mathcal{T} = \mathcal{T} \tag{3.20}$$

e,

$$\begin{aligned} Q\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\left\langle B\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \mathcal{T}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^2 + \psi^2 \, dx. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Agora, de (3.17) e pelo que vimos acima,

$$\begin{aligned} D_uG_\lambda\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} &= D_u\mathcal{H}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} - \lambda D_uQ\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} = -\mathcal{T}\begin{pmatrix}\Delta\varphi + f(x,\varphi^2+\psi^2)\varphi\\ \Delta\psi + f(x,\varphi^2+\psi^2)\psi\end{pmatrix} - \lambda B\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} \\ &= -\mathcal{T}\begin{pmatrix}\Delta\varphi + f(x,\varphi^2+\psi^2)\varphi\\ \Delta\psi + f(x,\varphi^2+\psi^2)\psi\end{pmatrix} - \lambda\mathcal{T}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} \\ &= -\mathcal{T}\begin{pmatrix}\Delta\varphi + f(x,\varphi^2+\psi^2)\varphi + \lambda\varphi\\ \Delta\psi + f(x,\varphi^2+\psi^2)\psi + \lambda\psi\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Assim,

$$D^2_{uu}G_\lambda\left(\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}v\\ z\end{pmatrix} = D_u\mathcal{H}'\left(\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}v\\ z\end{pmatrix} - \lambda D_u\mathcal{T}\left(\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}v\\ z\end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

Sendo assim, para determinarmos $D^2_{uu}G_\lambda(\binom{\varphi}{\psi})$, vamos estabelecer $D_u\mathcal{H}'\left(\binom{\varphi}{\psi}\right)\binom{v}{z}$ e, posteriormente, $D_u\mathcal{T}\left(\binom{\varphi}{\psi}\right)\binom{v}{z}$. Como $X = H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N) \cong H^1(\mathbb{R}^N) \oplus H^1(\mathbb{R}^N)$, do cálculo em espaços de Banach, Proposição 1.2.5, sabemos que

$$\left\langle D_u\mathcal{H}'\left(\tbinom{\varphi}{\psi}\right)\tbinom{\xi}{\xi}, \tbinom{v}{z}\right\rangle = \left\langle \partial_1\mathcal{H}'\left(\tbinom{\varphi}{\psi}\right)\tbinom{\xi}{\xi}, v\right\rangle + \left\langle \partial_2\mathcal{H}'\left(\tbinom{\varphi}{\psi}\right)\tbinom{\xi}{\xi}, z\right\rangle. \tag{3.24}$$

Então,

$$\begin{aligned} &\left\langle \partial_1\mathcal{H}'\left(\tbinom{\varphi}{\psi}\right)\tbinom{\xi}{\xi}, v\right\rangle = \lim_{t\to 0}\frac{\mathcal{H}'\left(\tbinom{\varphi+tv}{\psi}\right)\tbinom{\xi}{\xi} - \mathcal{H}'\left(\tbinom{\varphi}{\psi}\right)\tbinom{\xi}{\xi}}{t} \\ &= -\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^N} \xi\Delta(\varphi+tv) + f(x,(\varphi+tv)^2+\psi^2)(\varphi+tv)\xi + f(x,(\varphi+tv)^2+\psi^2)\psi\xi \\ &-\xi\Delta\varphi - f(x,\varphi^2+\psi^2)\varphi\xi - f(x,\varphi^2+\psi^2)\psi\xi \, dx \\ &= -\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^N} t\xi\Delta v + f(x,\varphi^2+\psi^2+2t\varphi v+t^2v^2)\varphi\xi + tf(x,\varphi^2+\psi^2+2t\varphi v+t^2v^2)v\xi \\ &+f(x,\varphi^2+\psi^2+2t\varphi v+t^2v^2)\psi\xi - f(x,\varphi^2+\psi^2)\varphi\xi - f(x,\varphi^2+\psi^2)\psi\xi \, dx. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Agora, como

$$\lim_{t\to 0}\frac{[f(x,\varphi^2+\psi^2+2t\varphi v+t^2v^2)-f(x,\varphi^2+\psi^2)]\varphi\xi}{t}=$$

$$\begin{aligned}&=\lim_{t\to 0}\frac{[f(x,\varphi^2+\psi^2+t(2\varphi v+tv^2))-f(x,\varphi^2+\psi^2)]\varphi\xi}{t}\\&=\partial_s f(x,\varphi^2+\psi^2)(2\varphi v)\varphi\xi\\&=2\partial_s f(x,\varphi^2+\psi^2)(\varphi v)\varphi\xi\end{aligned}\tag{3.26}$$

e, analogamente,

$$\lim_{t\to 0}\frac{[f(x,\varphi^2+\psi^2+2t\varphi v+t^2v^2)-f(x,\varphi^2+\psi^2)]\psi\xi}{t}=2\partial_s f(x,\varphi^2+\psi^2)(\varphi v)\varphi\xi,\tag{3.27}$$

obtemos, a partir de (3.26) e (3.27), passando o limite sob o sinal de integração em (3.25), que

$$\begin{aligned}\left\langle\partial_1\mathcal{H}'\left(\binom{\varphi}{\psi}\right)\binom{\xi}{\xi},v\right\rangle &= -\int_{\mathbb{R}^N}\xi\Delta v+2\partial_s f(x,\varphi^2+\psi^2)(\varphi v)\varphi\xi\\ &+ 2\partial_s f(x,\varphi^2+\psi^2)(\varphi v)\psi\xi+f(x,\varphi^2+\psi^2)v\xi\ dx.\end{aligned}\tag{3.28}$$

Prosseguindo da mesma forma para $\left\langle\partial_2\mathcal{H}'\left(\binom{\varphi}{\psi}\right)\binom{\xi}{\xi},z\right\rangle$, obtemos que

$$\begin{aligned}\left\langle\partial_2\mathcal{H}'\left(\binom{\varphi}{\psi}\right)\binom{\xi}{\xi},z\right\rangle &= -\int_{\mathbb{R}^N}\xi\Delta z+2\partial_s f(x,\varphi^2+\psi^2)(\psi z)\varphi\xi\\ &+ 2\partial_s f(x,\varphi^2+\psi^2)(\psi z)\psi\xi+f(x,\varphi^2+\psi^2)z\xi\ dx.\end{aligned}\tag{3.29}$$

Logo, de (3.28) e (3.29), concluímos que

$$\left\langle\mathcal{H}''\left(\binom{\varphi}{\psi}\right)\binom{\xi}{\xi},\binom{v}{z}\right\rangle=$$

$$\begin{aligned}&=-\int_{\mathbb{R}^N}\xi\Delta v+2\partial_s f(x,\varphi^2+\psi^2)(\varphi v)\varphi\xi+2\partial_s f(x,\varphi^2+\psi^2)(\varphi v)\psi\xi+f(x,\varphi^2+\psi^2)v\xi\\&+\xi\Delta z+2\partial_s f(x,\varphi^2+\psi^2)(\psi z)\varphi\xi+2\partial_s f(x,\varphi^2+\psi^2)(\psi z)\psi\xi+f(x,\varphi^2+\psi^2)z\xi\ dx\\&=-\int_{\mathbb{R}^N}\xi\Delta v+f(x,\varphi^2+\psi^2)v\xi+2\partial_s f(x,\varphi^2+\psi^2)[\varphi v+\psi z]\varphi\xi+\xi\Delta z\\&+f(x,\varphi^2+\psi^2)z\xi+2\partial_s f(x,\varphi^2+\psi^2)[\varphi v+\psi z]\psi\xi\ dx\\&=\left(-\begin{pmatrix}\Delta v+f(x,\varphi^2+\psi^2)v+2\partial_s f(x,\varphi^2+\psi^2)[\varphi v+\psi z]\varphi\\ \Delta z+f(x,\varphi^2+\psi^2)z+2\partial_s f(x,\varphi^2+\psi^2)[\varphi v+\psi z]\psi\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\xi\\ \xi\end{pmatrix}\right),\end{aligned}\tag{3.30}$$

e, então, para cada $\binom{\varphi}{\psi} \in X$, temos, $\forall \binom{v}{z} \in X$, a seguinte representação:

$$\mathcal{H}''\left(\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}v\\ z\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\Delta v + f(x,\varphi^2+\psi^2)v + 2\partial_s f(x,\varphi^2+\psi^2)[\varphi v + \psi z]\varphi\\ \Delta z + f(x,\varphi^2+\psi^2)z + 2\partial_s f(x,\varphi^2+\psi^2)[\varphi v + \psi z]\psi\end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

Por fim, vamos determinar $D_u\mathcal{T}(\binom{\varphi}{\psi})\binom{v}{z}$. Para isso, note que para cada $\binom{\varphi}{\psi} \in X$, vale a seguinte igualdade:

$$\left\langle \mathcal{T}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi\\ \xi\end{pmatrix}\right\rangle = \left(\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi\\ \xi\end{pmatrix}\right) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi\xi + \psi\xi \; dx, \; \forall \begin{pmatrix}\xi\\ \xi\end{pmatrix} \in X. \tag{3.32}$$

Então, do mesmo modo que foi feito em (3.24), vamos calcular, $\forall \binom{v}{z} \in X$, $\langle \partial_1\mathcal{T}(\binom{\varphi}{\psi})\binom{\xi}{\xi}, v\rangle$ e $\langle \partial_2\mathcal{T}(\binom{\varphi}{\psi})\binom{\xi}{\xi}, z\rangle$. Assim,

$$\begin{aligned}\left\langle \partial_1\mathcal{T}(\tbinom{\varphi}{\psi})\tbinom{\xi}{\xi}, v\right\rangle &= \lim_{t\to 0}\frac{\mathcal{T}(\binom{\varphi+tv}{\psi})\binom{\xi}{\xi} - \mathcal{T}(\binom{\varphi}{\psi})\binom{\xi}{\xi}}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_{R^N}(\varphi+tv)\xi + \psi\xi - \varphi\xi - \psi\xi \; dx, \text{ por } (3.32)\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_{R^N} tv\xi \; dx\\ &= \int_{R^N} v\xi \; dx.\end{aligned} \tag{3.33}$$

Analogamente, obtemos que

$$\left\langle \partial_2\mathcal{T}\left(\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\xi\\ \xi\end{pmatrix}, z\right\rangle = \int_{R^N} z\xi \; dx. \tag{3.34}$$

Logo, de (3.33) e (3.34), concluímos que para cada $\binom{v}{z} \in X$

$$\left\langle D_u\mathcal{T}(\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix})\begin{pmatrix}\xi\\ \xi\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}v\\ z\end{pmatrix}\right\rangle = \int_{R^N} v\xi + z\xi \; dx = \left(\begin{pmatrix}v\\ z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi\\ \xi\end{pmatrix}\right), \; \forall \begin{pmatrix}\xi\\ \xi\end{pmatrix} \in X \tag{3.35}$$

e, portanto, temos a seguinte representação:

$$\left\langle D_u\mathcal{T}\left(\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}\right), \begin{pmatrix}v\\ z\end{pmatrix}\right\rangle = \begin{pmatrix}v\\ z\end{pmatrix}, \; \forall \begin{pmatrix}v\\ z\end{pmatrix} \in X. \tag{3.36}$$

Finalmente, pelo que observamos em (3.23) e com as identidades obtidas em (3.31) e (3.36), temos, para cada $\binom{v}{z} \in X$, que

$$D^2_{uu}G_\lambda(\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix})\begin{pmatrix}v\\ z\end{pmatrix} = D_u\mathcal{H}'\left(\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}v\\ z\end{pmatrix} - \lambda D_u\mathcal{T}\left(\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}v\\ z\end{pmatrix}$$
$$= -\begin{pmatrix}\Delta v + f(x,\varphi^2+\psi^2)v + 2\partial_s f(x,\varphi^2+\psi^2)[\varphi v+\psi z]\varphi\\ \Delta z + f(x,\varphi^2+\psi^2)z + 2\partial_s f(x,\varphi^2+\psi^2)[\varphi v+\psi z]\psi\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}v\\ z\end{pmatrix} \tag{3.37}$$
$$= -\begin{pmatrix}\Delta v + f(x,\varphi^2+\psi^2)v + 2\partial_s f(x,\varphi^2+\psi^2)[\varphi v+\psi z]\varphi + \lambda v\\ \Delta z + f(x,\varphi^2+\psi^2)z + 2\partial_s f(x,\varphi^2+\psi^2)[\varphi v+\psi z]\psi + \lambda z\end{pmatrix}.$$

A partir de agora, a fim otimizar os cálculos, vamos definir uma função $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x,s) = f(x,s^2)s,\ \forall (x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R},$$

e utilizar que $\partial_s g(x,s) = f(x,s^2) + \partial_s f(x,s^2)(2s)s = f(x,s^2) + 2\partial_s f(x,s^2)s^2$. Além disso, como nesta seção estaremos interessados no caso real, ou seja, quando $\xi_\lambda = \binom{\varphi_\lambda}{0} \in X$, trabalharemos $\forall \binom{v}{z} \in X$, a partir de (3.37), com

$$D^2_{uu}G_\lambda\left(\begin{pmatrix}\varphi_\lambda\\ 0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}v\\ z\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\Delta v + f(x,\varphi_\lambda^2)v + 2\partial_s f(x,\varphi_\lambda^2)\varphi_\lambda^2 v + \lambda v\\ \Delta z + f(x,\varphi_\lambda^2)z + \lambda z\end{pmatrix}, \tag{3.38}$$

que pode ser reescrita, usando a função g definida acima juntamente com o fato de $\xi_\lambda \neq 0$, por:

$$D^2_{uu}G_\lambda\left(\begin{pmatrix}\varphi_\lambda\\ 0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}v\\ z\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\Delta v + \partial_s g(x,\varphi_\lambda)v + \lambda v\\ \Delta z + \dfrac{g(x,\varphi_\lambda)z}{\varphi_\lambda} + \lambda z\end{pmatrix},\ \forall \begin{pmatrix}v\\ z\end{pmatrix} \in X. \tag{3.39}$$

Com isso, enunciaremos o próximo teorema, um dos principais desta seção, cuja demonstração visa satisfazer as hipóteses já mencionadas no início desta seção.

Teorema 3.2.1. *Suponha que existam $\varepsilon > 0$ e $C > 0$ tais que, $\forall v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, tenhamos:*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 - \partial_s g(x,\varphi_\lambda)v^2\ dx \ \geq\ \varepsilon\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + v^2\ dx - C\int_{\mathbb{R}^N} v^2\ dx,\\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 - \frac{g(x,\varphi_\lambda)v^2}{\varphi_\lambda}\ dx \ \geq\ \varepsilon\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + v^2\ dx - C\int_{\mathbb{R}^N} v^2\ dx. \end{cases} \tag{3.40}$$

Além disso, que exista $\delta > 0$ para o qual, $\forall v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} v\varphi_\lambda\ dx = 0$, tenhamos:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 - \partial_s g(x,\varphi_\lambda)v^2 - \lambda v^2\ dx \ \geq\ \delta\int_{\mathbb{R}^N} v^2\ dx,\\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 - \frac{g(x,\varphi_\lambda)v^2}{\varphi_\lambda} - \lambda v^2\ dx \ \geq\ \delta\int_{\mathbb{R}^N} v^2\ dx. \end{cases} \tag{3.41}$$

Então, a solução real $u_\lambda(t) = T(\lambda t)\xi_\lambda$ do sistema hamiltoniano (1.12) tem órbita estável.

A demonstração deste teorema seguirá mediante aos resultados que passaremos a apresentar a partir de agora.

Lema 3.2.1. *A condição (2.24) é satisfeita se, e somente se, a hipótese (3.40) é válida.*

Demonstração. Por um lado, se supormos que (2.24) é satisfeita, então existem $\varepsilon > 0$ e $C > 0$ tais que

$$\left\langle D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}\right\rangle \geq \varepsilon \left\|\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}\right\|^2_X - C\left\|\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}\right\|^2, \ \forall \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \in X.$$

Em particular, $\forall v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ temos que

$$\begin{cases} \left\langle D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)\binom{v}{0}, \binom{v}{0}\right\rangle \geq \varepsilon \left\|\binom{v}{0}\right\|^2_X - C\left\|\binom{v}{0}\right\|^2, \\ \left\langle D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)\binom{0}{v}, \binom{0}{v}\right\rangle \geq \varepsilon \left\|\binom{0}{v}\right\|^2_X - C\left\|\binom{0}{v}\right\|^2. \end{cases} \tag{3.42}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left\langle D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)\binom{v}{0}, \binom{v}{0}\right\rangle \geq \varepsilon \left\langle \binom{v}{0}, \binom{v}{0}\right\rangle_X - C\left(\binom{v}{0}, \binom{v}{0}\right), \\ \left\langle D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)\binom{0}{v}, \binom{0}{v}\right\rangle \geq \varepsilon \left\langle \binom{0}{v}, \binom{0}{v}\right\rangle_X - C\left(\binom{0}{v}, \binom{0}{v}\right). \end{cases} \tag{3.43}$$

Portanto, pelas definições dos produtos escalares de X e H dadas em (3.3) e também pela identidade (3.39), obtemos que

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 - \partial_s g(x,\varphi_\lambda)v^2 \, dx & \geq & \varepsilon \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + v^2 \, dx - C \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} v^2 \, dx, \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 - \frac{g(x,\varphi_\lambda)v^2}{\varphi_\lambda} \, dx & \geq & \varepsilon \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + v^2 \, dx - C \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} v^2 \, dx. \end{cases} \tag{3.44}$$

Logo vale (3.40).

Reciprocamente, se assumimos que a hipótese (3.40) é válida, então $\forall v, z \in H^1(\mathbb{R}^N)$ temos,

$$\begin{aligned} &\varepsilon\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + v^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z|^2 + z^2 \, dx\right) - C\left(\int_{\mathbb{R}^N} v^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} z^2 \, dx\right) = \\ &= \left(\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + v^2 \, dx - C\int_{\mathbb{R}^N} v^2 \, dx\right) + \left(\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z|^2 + z^2 \, dx - C\int_{\mathbb{R}^N} z^2 \, dx\right) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 - \partial_s g(x,\varphi_\lambda)v^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 - \frac{g(x,\varphi_\lambda)v^2}{\varphi_\lambda} \, dx. \end{aligned}$$

Portanto, novamente pelas definições, dos produtos escalares de X e H, dadas em (3.3) e também pela identidade (3.39), obtemos que

$$\left\langle D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}\right\rangle \geq \varepsilon \left\|\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}\right\|^2_X - C\left\|\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}\right\|^2, \ \forall \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \in X,$$

mostrando que a condição (2.24) é satisfeita. □

Lema 3.2.2. *Suponha que a hipótese (3.40) é satisfeita, então existem domínios $D(L^1_\lambda)$ e $D(L^2_\lambda)$ em $H^1(\mathbb{R}^N)\times\{0\}$ e $\{0\}\times H^1(\mathbb{R}^N)$ respectivamente, tais que:*

$$\begin{cases} L^1_\lambda\begin{pmatrix} v\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta v - \partial_s g(x,\varphi_\lambda)v - \lambda v\\ 0\end{pmatrix}, \ \forall\begin{pmatrix} v\\ 0\end{pmatrix}\in D(L^1_\lambda),\\ L^2_\lambda\begin{pmatrix} 0\\ v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ -\Delta v - \dfrac{g(x,\varphi_\lambda)v}{\varphi_\lambda} - \lambda v\end{pmatrix}, \ \forall\begin{pmatrix} 0\\ v\end{pmatrix}\in D(L^2_\lambda),\end{cases} \tag{3.45}$$

definem operadores auto-adjuntos no espaço $L^2(\mathbb{R}^N)$. Consequentemente, o operador auto-adjunto $L_\lambda : D(L_\lambda)\subset H \longrightarrow H$ associado com a hessiana $D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)$ é dado por:

$$L_\lambda\begin{pmatrix} v\\ z\end{pmatrix} = L^1_\lambda\begin{pmatrix} v\\ 0\end{pmatrix} + L^2_\lambda\begin{pmatrix} 0\\ z\end{pmatrix}, \tag{3.46}$$

em que $D(L_\lambda) = D(L^1_\lambda)\oplus D(L^2_\lambda)$.

Demonstração. Pelo Lema (3.2.1) temos que a condição (2.24) é satisfeita, já que por hipótese (3.40) é valida. Então, definindo as funções $b^1_\lambda : D(b^1_\lambda)\subset L^2(\mathbb{R}^N)\times\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ e $b^2_\lambda : D(b^2_\lambda)\subset\{0\}\times L^2(\mathbb{R}^N)\longrightarrow\mathbb{R}$, em que

$$D(b^1_\lambda) = \{\tbinom{v}{0}\in L^2(\mathbb{R}^N)\times\{0\} \mid \tbinom{v}{0}\in X\} \text{ e } D(b^2_\lambda) = \{\tbinom{0}{v}\in \{0\}\times L^2(\mathbb{R}^N) \mid \tbinom{0}{v}\in X\},$$

por,

$$\begin{cases} b^1_\lambda\tbinom{v}{0} = \left\langle D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)\tbinom{v}{0},\tbinom{v}{0}\right\rangle \ \forall\tbinom{v}{0}\in D(b^1_\lambda),\\ b^2_\lambda\tbinom{0}{v} = \left\langle D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)\tbinom{0}{v},\tbinom{0}{v}\right\rangle \ \forall\tbinom{0}{v}\in D(b^2_\lambda),\end{cases} \tag{3.47}$$

e, usando o Lema (2.2.1), obtemos que existem operadores auto-adjuntos $L^1_\lambda : D(L^1_\lambda)\subset L^2(\mathbb{R}^N)\times\{0\}\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)\times\{0\}$ e $L^2_\lambda : D(L^2_\lambda)\subset\{0\}\times L^2(\mathbb{R}^N)\longrightarrow\{0\}\times L^2(\mathbb{R}^N)$ em que

$$\begin{aligned} D(L^1_\lambda) = \{\tbinom{z}{0}\in H^1(\mathbb{R}^N)\times\{0\} \mid \exists\tbinom{w_1}{0}\in L^2(\mathbb{R}^N)\times\{0\} \text{ tal que}\\ \left\langle D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)\tbinom{z}{0},\tbinom{v}{0}\right\rangle = \left(\tbinom{w_1}{0},\tbinom{v}{0}\right) \ \forall\tbinom{v}{0}\in H^1(\mathbb{R}^N)\times\{0\}\},\end{aligned} \tag{3.48}$$

com, $L^1_\lambda\tbinom{z}{0} = \tbinom{w_1}{0}$ $\forall\tbinom{z}{0}\in D(L^1_\lambda)$ e

$$\begin{aligned} D(L^2_\lambda) = \{\tbinom{0}{z}\in\{0\}\times H^1(\mathbb{R}^N) \mid \exists\tbinom{0}{w_2}\in\{0\}\times L^2(\mathbb{R}^N) \text{ tal que}\\ \left\langle D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)\tbinom{0}{z},\tbinom{0}{v}\right\rangle = \left(\tbinom{0}{w_2},\tbinom{0}{v}\right) \ \forall\tbinom{0}{v}\in\{0\}\times H^1(\mathbb{R}^N)\},\end{aligned} \tag{3.49}$$

com, $L^2_\lambda\tbinom{0}{z} = \tbinom{0}{w_2}$ $\forall\tbinom{0}{z}\in D(L^2_\lambda)$.

Logo, de (3.48) e (3.49), obtemos que $\forall\tbinom{v}{0}\in D(L^1_\lambda)$

$$\begin{aligned} \left(L^1_\lambda\begin{pmatrix} v\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} v\\ 0\end{pmatrix}\right) &= \left\langle D^2_{uu}G_\lambda(\xi_\lambda)\begin{pmatrix} v\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} v\\ 0\end{pmatrix}\right\rangle\\ &= \left(\begin{pmatrix} -\Delta v - \partial_s g(x,\varphi_\lambda)v - \lambda v\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} v\\ 0\end{pmatrix}\right)\end{aligned} \tag{3.50}$$

e, também, $\forall \binom{0}{v} \in D(L_\lambda^2)$

$$\begin{aligned}\left(L_\lambda^2\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix}\right) &= \left\langle D_{uu}^2 G_\lambda(\xi_\lambda)\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix}\right\rangle \\ &= \left(\begin{pmatrix}0\\-\Delta v-\dfrac{g(x,\varphi_\lambda)v}{\varphi_\lambda}-\lambda v\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix}\right).\end{aligned} \tag{3.51}$$

Consequentemente, podemos definir o operador $L_\lambda : D(L_\lambda) \subset H \longrightarrow H$, em que $D(L_\lambda) = D(L_\lambda^1) \oplus D(L_\lambda^2)$, por

$$L_\lambda\begin{pmatrix}v\\z\end{pmatrix} = L_\lambda^1\begin{pmatrix}v\\0\end{pmatrix} + L_\lambda^2\begin{pmatrix}0\\z\end{pmatrix}. \tag{3.52}$$

Obviamente, como L_λ^1 e L_λ^2 são auto-adjuntos, temos que L_λ é auto-adjunto. Concluindo assim, a demonstração deste Lema. $\square$

Lema 3.2.3. *Suponha que a hipótese (3.40) esteja satisfeita, então a condição de estabilidade (2.25) é equivalente a hipótese (3.41) do Teorema (3.2.1).*

Demonstração. Primeiramente note que $\forall \binom{v}{z} \in D(L_\lambda)$ com $\left(\binom{v}{z}, A\xi_\lambda\right) = \left(\binom{v}{z}, JA\xi_\lambda\right) = 0$,

$$\left(L_\lambda\begin{pmatrix}v\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}v\\z\end{pmatrix}\right) \geq \delta\left\|\begin{pmatrix}v\\z\end{pmatrix}\right\|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(L_\lambda^1\begin{pmatrix}v\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}v\\z\end{pmatrix}\right) + \left(L_\lambda^2\begin{pmatrix}0\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}v\\z\end{pmatrix}\right) \geq \delta\left\|\begin{pmatrix}v\\z\end{pmatrix}\right\|^2, \text{ por (3.52)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix}-\Delta v-\partial_s g(x,\varphi_\lambda)v-\lambda v\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}v\\z\end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix}0\\-\Delta z-\dfrac{g(x,\varphi_\lambda)z}{\varphi_\lambda}-\lambda z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}v\\z\end{pmatrix}\right)$$

$$\geq \delta\left\|\begin{pmatrix}v\\z\end{pmatrix}\right\|^2, \text{ por (3.45)}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} -\Delta v^2 - \partial_s g(x,\varphi_\lambda)v^2 - \lambda v^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} -\Delta z^2 - \frac{g(x,\varphi_\lambda)z^2}{\varphi_\lambda} - \lambda z^2\,dx$$

$$\geq \delta\int_{\mathbb{R}^N} v^2\,dx + \delta\int_{\mathbb{R}^N} z^2\,dx.$$

Agora, pela definição dos operadores J e A, temos que

$$\left(\begin{pmatrix}v\\z\end{pmatrix}, A\xi_\lambda\right) = \left(\begin{pmatrix}v\\z\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}\varphi_\lambda\\0\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}v\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-\varphi_\lambda\end{pmatrix}\right) = -\int_{\mathbb{R}^N} z\varphi_\lambda\,dx \tag{3.53}$$

e

$$\left(\begin{pmatrix}v\\z\end{pmatrix}, JA\xi_\lambda\right) = \left(\begin{pmatrix}v\\z\end{pmatrix}, -J^2\xi_\lambda\right) = \left(\begin{pmatrix}v\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\varphi_\lambda\\0\end{pmatrix}\right) = \int_{\mathbb{R}^N} v\varphi_\lambda\,dx. \tag{3.54}$$

Então,

$$\begin{cases} \left(\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, A\xi_\lambda \right) = 0 \Leftrightarrow \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} z\varphi_\lambda \, dx = 0, \\ \left(\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, JA\xi_\lambda \right) = 0 \Leftrightarrow \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} v\varphi_\lambda \, dx = 0. \end{cases}$$

Portanto, se vale a hipótese (3.41) temos que

$$\delta \int_{\mathbb{R}^N} v^2 \, dx + \delta \int_{\mathbb{R}^N} z^2 \, dx \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 - \partial_s g(x, \varphi_\lambda) v^2 - \lambda v^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z|^2 - \frac{g(x, \varphi_\lambda) z^2}{\varphi_\lambda} - \lambda z^2 \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} -\Delta v^2 - \partial_s g(x, \varphi_\lambda) v^2 - \lambda v^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} -\Delta z^2 - \frac{g(x, \varphi_\lambda) z^2}{\varphi_\lambda} - \lambda z^2 \, dx,$$

e, a partir das equivalências obtidas no início desta demonstração, o resultado segue.

Reciprocamente, se assumimos que vale (2.25), temos, em particular, que

$$\begin{cases} \left(L_\lambda \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \right) \geq \delta \left\| \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2, \ \forall \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \in D(L_\lambda^1) \\ \left(L_\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix} \right) \geq \delta \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix} \right\|^2, \ \forall \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix} \in D(L_\lambda^2) \end{cases}$$

e daí, obtemos as duas desigualdades de (3.41). □

APÊNDICE A

Apêndice

A.1 Adjunto

Nesta seção definiremos o operador adjunto de um operador limitado em um espaço de Banach e também num espaço de Hilbert. Além disso, observaremos que um operador adjunto $T \in \mathcal{L}(H)$ em um espaço de Hilbert H não é igual ao operador adjunto em um espaço de Banach, embora estejam intimamente relacionados (veja (A.2)).

Definição A.1.1. Sejam X e Y espaços de Banach e T um operador linear limitado de X em Y. O adjunto de Banach de T, denotado por $T^{'}$, é o operador linear de Y^* em X^* definido por

$$(T^{'}l)(x) = l(Tx), \ \forall l \in Y^*, \ \forall x \in X. \tag{A.1}$$

Exemplo A.1.1. Sejam $X = \ell^1 = Y$ e T definido por

$$T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Então $T^{'} : \ell^\infty \longrightarrow \ell^\infty$ é o operador

$$T^{'}(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

Neste exemplo, $||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} = 1 = ||T^{'}||_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)}$. Com efeito, as normas de T e $T^{'}$ são iguais pois:

Teorema A.1.1. *Sejam X e Y espaços de Banach. A aplicação $T \longrightarrow T^{'}$ é um isomorfismo isométrico de $\mathcal{B}(X,Y)$ sobre $\mathcal{B}(Y^*,X^*)$.*

Demonstração. Veja [17], Teorema VI.2, página 186. $\square$

Nós estamos interessados, principalmente, no caso em que T é um operador linear limitado de um espaço de Hilbert H sobre si mesmo. O adjunto de Banach de T será, então, uma aplicação de H^* em H^*. Seja $C : H \longrightarrow H^*$ a aplicação que para cada $y \in H$, associa o funcional linear $(y, \cdot)$ em H^*. C é uma isometria antilinear que é sobrejetiva pelo Teorema 1.1.1 (Teorema de Riesz). Agora, definimos a aplicação $T^T : H \longrightarrow H^*$ por

$$T^T = C^{-1}T^{'}C \tag{A.2}$$

Então T^T satisfaz

$$\begin{aligned}(x, Tx) = (Cx)(Ty) &= (T^{'}Cx)(y), \text{ por } (A.1) \\ &= (C^{-1}T^{'}Cx, y) \\ &= \left(T^T x, y\right), \text{ por } (A.2)\end{aligned}$$

T^T é chamado de *adjunto de Hilbert* de T, mas frequentemente vamos chamá-lo de *adjunto* e usar ^{T} para distinguí-lo de $T^{'}$. Note que a aplicação $T \longrightarrow T^T$ é antilinear. Isto ocorre devido a C ser antilinear. Nós resumiremos, a segui, as propriedades da aplicação $T \longrightarrow T^T$:

Teorema A.1.2. *(a) $T \longrightarrow T^T$ é um isomorfismo isométrico de $\mathcal{B}(H)$ sobre $\mathcal{B}(H)$;*

(b) $(TS)^T = S^T T^T$;

(c) $(T^T)^T = T$;

(d) Se T tem inversa limitada, T^{-1}, então T^T tem inversa limitada e $(T^T)^{-1} = (T^{-1})^T$;

(e) A aplicação $T \longrightarrow T^T$ é sempre uniformemente contínua na topologia fraca, mas apenas contínua na topologia forte se H tem dimensão finita;

(f) $||T^T T|| = ||T||^2$.

Demonstração. Veja [17], Teorema VI.3, página 186. □

Definição A.1.2. Um operador T em um espaço de Hilbert é chamado auto-adjunto se $T = T^T$.

Operadores auto-adjuntos desempenham um papel importante na análise funcional e na física matemática, e a maior parte do nosso tempo é destinado a estudá-los.

Uma importante classe de operadores em espaços de Hilbert são as projeções:

Definição A.1.3. Se $P \in \mathcal{L}(H)$ e $P^2 = P$, então P é chamado de projeção. Se adicionalmente $P = P^T$, então P é chamado de projeção ortogonal.

Note que a imagem de uma projeção é um subespaço fechado em que P age como a identidade. Se, adicionalmente, P é ortogonal, então P age como o openador nulo em $(Im(P))^{\perp}$. Se $x = y + z$, com $y \in Im(P)$ e $z \in (Im(P))^{\perp}$, então $Px = y$. P é chamado *projeção ortogonal sobre* $Im(P)$.

A.2 Espectro

Se T é um operador linear em $\mathbb{C}^n$, então os autovalores de T são números complexos λ tais que o determinante de $\lambda I_d - T$ é igual a zero. O conjunto de tais λ é chamado de *espectro de* T. Ele pode ter n pontos, desde que $det(\lambda I_d - T)$ seja um polinômio de grau n. Se λ não é um autovalor, então $\lambda I_d - T$ tem inverso, desde que $det(\lambda I_d - T) \neq 0$.

A teoria espectral de operadores em espaços de dimensão infinita é mais complicada, mas de grande valia para uma melhor compreensão do próprio operador. Na física-matemática, esta teoria é de extrema importância, podendo-se citar que o hamiltoniano, na mecânica quântica, é um operador auto-adjunto ilimitado em um espaço de Hilbert. Somado a isso, desempenha papel importante na teoria dispersiva de um sistema (Veja [17], Capítulo XII).

Definição A.2.1. Seja $T \in \mathcal{B}(X)$. Um número complexo λ é dito pertencer ao conjunto resolvente $\rho(T)$ de T se $\lambda I_d - T$ é uma bijeção com inversa limitada. $R_\lambda(T) = (\lambda I_d - T)^{-1}$ é chamado de resolvente de T em λ. Se $\lambda \notin \rho(T)$, então λ é dito pertencer ao espectro $\sigma(T)$ de T.

Note que, pelo Teorema da Aplicação Inversa, $\lambda I_d - T$ tem, automaticamente, uma inversa limitada, se esta aplicação é bijetora.

Definição A.2.2. Seja $T \in \mathcal{B}(X)$.

(a) Um $x \neq 0$ que satisfaz $Tx = \lambda x$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$ é chamado de autovetor de T; λ é chamado de autovalor correspondente ao autovetor x. Se λ é um autovalor, então $\lambda I_d - T$ não é injetiva e também λ pertence ao espectro de T. O conjunto de todos os autovalores de T é chamado de espectro pontual de T;

(b) Se λ não é autovalor e se $Im(\lambda I_d - T)$ não é denso, então λ é dito pertencer ao espectro residual de T.

Ao final desta seção, apresentaremos um exemplo que ilustra os tipos de espectro acima citados. Destacamos o espectro residual pois ele é vazio para uma grande quantidade de operadores, como, por exemplo, para operadores auto-adjuntos (veja o Teorema A.2.5). Além disso, provaremos que o conjunto resolvente $\rho(T)$ é um aberto e que $R_\lambda(T)$ é um operador analítico com valores em $\rho(T)$, o que permite a utilização da análise complexa para estudar $R_\lambda(T)$ e, dessa forma, obter informações sobre T. Para tal, iniciaremos com algumas definições a respeito da teoria de funções analíticas.

Seja X um espaço de Banach e D uma *região complexa* do plano, isto é, um subconjunto de $\mathbb{C}$ aberto e conexo. Dizemos que uma função, $x(\cdot)$, definida em D com valores em X, é *fortemente analítica em* $z_0 \in D$ se o limite de $\frac{x(z_0+h)-x(z_0)}{h}$ existe em X, quando h tende para zero em $\mathbb{C}$. Ainda, uma função $x(\cdot)$ em D com valores em X será dita *fracamente analítica* se $l(x(\cdot))$ é uma função analítica a valores complexos em D para cada $l \in X^*$. Esta segunda definição de analiticidade é aparentemente mais fraca que a primeira, mas provaremos mais adiante que na verdade as duas são equivalentes, o que é de grande utilidade, pois a analiticidade fraca é, em geral, mais fácil de ser verificada.

Lema A.2.1. *Seja X um espaço de Banach. Então uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é Cauchy se, e somente, $\{l(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é Cauchy, uniformemente para $l \in X^*$, $||l|| \leq 1$.*

Demonstração. Veja [17], Lema, página 189. □

Teorema A.2.1. *Toda função fracamente analítica é fortemente analítica.*

Demonstração. Veja [17], Teorema VI.4, página 189. □

Teorema A.2.2. *Seja X um espaço de Banach e suponha $T \in \mathcal{B}(X)$. Então $\rho(T)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ e $R_\lambda(T)$ é uma função analítica em cada componente (subconjunto conexo maximal) de D. Além disso, para cada dois pontos $\lambda, \mu \in \rho(T)$, $R_\lambda(T)$ e $R_\mu(T)$ comutam e*

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda)R_\mu(T)R_\lambda(T) \tag{A.3}$$

Demonstração. Veja [17], Teorema VI.5, página 190. □

A equação (A.3) é chamada de *primeira fórmula resolvente*. Um bom exemplo do uso de funções analíticas para a teoria espectral é dado na demostração do seguinte corolário:

Corolário A.2.1. *Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{B}(X)$. Então o espectro de T é não vazio.*

Demonstração. Veja [17], Corolário, página 191. □

A demostração deste corolário mostra que $\sigma(T)$ está contido em um disco fechado de raio $||T||$. Atualmente, nós sabemos dizer mais sobre $\sigma(T)$:

Definição A.2.3. Seja $r(T) = \sup\limits_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|$. $r(T)$ é chamado de raio espectral de T.

Teorema A.2.3. *Seja X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{B}(X)$. Então $\exists \lim_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}}$ e é igual a $r(T)$. Se X é um espaço de Hilbert e A é um operador auto-adjunto, então $r(A) = ||A||$.*

Demonstração. Veja [17], Teorema VI.6, página 192. □

O teorema a seguir é, na maioria das vezes, útil para determinarmos o espectro de T.

Teorema A.2.4 (Phillips). *Seja X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{B}(X)$. Então $\sigma(T) = \sigma(T')$ e $R_\lambda(T') = (R_\lambda(T))'$. Se X é um espaço de Hilbert, então $\sigma(T^T) = \{\lambda \mid \lambda \in \sigma(T)\}$ e $R_\lambda(T^T) = (R_\lambda(T))^T$.*

Demonstração. Veja [17], Teorema VI.7, página 192. □

Agora, veremos um exemplo que ilustra os tipos de espectro:

Exemplo A.2.1. Seja T um operador em ℓ^1 definido por

$$T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

O adjunto de T, T', age em ℓ^∞ como

$$T'(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Já observamos que $||T|| = ||T'|| = 1$, e também temos que todo λ com $|\lambda| > 1$ pertence a $\rho(T)$ e $\rho(T')$. Suponha que $|\lambda| < 1$. Então o vetor $x_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, ...)$ pertence a ℓ^1 e satisfaz $(\lambda I_d - T)x_\lambda = 0$. Então todo tal λ está no espectro de T. Como o espectro é fechado, $\sigma(T) = \{\lambda \mid |\lambda| \leq 1\}$. Mas pelo Teorema A.2.4 este conjunto é também o espectro de T'.

Agora, mostraremos que T' não tem espectro pontual. Suponha que $\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^\infty$ e $(\lambda I_d - T')\{x_n\} = 0$. Então

$$\begin{aligned} \lambda x_1 &= 0 \\ \lambda x_2 - x_1 &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Estas equações juntas implicam que $\{x_n\}_{n=1}^\infty = 0$ e também que $\lambda I_d - T'$ é injetor e T' não tem espectro pontual. Além disso, suponha $|\lambda| < 1$. Então $\forall L \in \ell^\infty$,

$$[(\lambda I_d - T')L](x_\lambda) = L((\lambda I_d - T)x_\lambda) = 0$$

em que $x_\lambda \in \ell^1$ é um autovetor com autovalor λ. Pelo Corolário 1.1.4 do Teorema de Hahn-Banach, sabemos que existe um funcional linear em ℓ^∞ que não se anula em x_λ, de modo que a imagem de $\lambda I_d - T'$ não é densa. Então $\{\lambda \mid |\lambda| < 1\}$ está no espectro residual de T'.

Nos resta considerar o caso em que $|\lambda| = 1$. Suponha $|\lambda| = 1$ e $(\lambda I_d - T)\{x_n\} = 0$ para algum $\{x_n\} \in \ell^1$. Então

$$x_2 = \lambda x_1$$
$$x_3 = \lambda x_2 = \lambda^2 x_1$$
$$\vdots$$

e assim $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = x_1(1, \lambda, \lambda^2, \dots)$ que não pertence a ℓ^1. Então λ não pertence ao espectro pontual. Se a imagem de $\lambda I_d - T$ não fosse densa existiria $L \in \ell^\infty$ não nulo tal que $L[(\lambda I_d - T)x] = 0\ \forall x \in \ell^1$. Mas então $[(\lambda I_d - T^{'})L](x) = 0$ implicaria que λ pertenceria ao espectro pontual de $T^{'}$, o que nós já provamos que não pode ocorrer. Então $\{\lambda \mid |\lambda| = 1\}$ não pertence nem ao espectro pontual de T nem ao espectro residual de T.

Finalmente, mostraremos que $\{\lambda \mid |\lambda| = 1\}$ está no espectro residual de $T^{'}$ encontrando explicitamente uma bola aberta disjunta da $Im(\lambda I_d - T^{'})$. se $a = \{a_n\}$ e $b = \{b_n\}$ pertencem a ℓ^∞ são tais que $a = (\lambda I_d - T^{'})b$, então

$$a_1 = \lambda b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{n+1} = \lambda b_{n+1} - b_n$$

e também $b_n = (\overline{\lambda})^{n+1} \displaystyle\sum_{m=1}^{n} \lambda^m a_m$. Seja $c = \{c_n\}$ com $c_n = \overline{\lambda^n}$ e suponha que $d \in \ell^\infty$ e $||d - c||_\infty \leq \frac{1}{2}$. Então

$$\mathrm{Re}\{\lambda^n d_n\} \geq \mathrm{Re}\{\lambda^n c_n\} - ||d - c||_\infty = 1 - ||d - c||_\infty \geq \frac{1}{2}$$

Assim, se $(\lambda I_d - T^{'})e = d$ para algum $e \in \ell^\infty$, temos que

$$e_n = (\overline{\lambda})^{n+1} \sum_{m=1}^{n} \lambda^m d_m$$

e então $|e_n| \geq \frac{n}{2}$ o que é impossível pois, $e \in \ell^\infty$. Portanto, $Im(\lambda I_d - T^{'})$ não intersepta a bola de raio $\frac{1}{2}$ centrada em c tomada acima e assim λ pertence ao espectro residual.

Operador	Espectro	Espectro Pontual	Espectro Residual
T	$\lvert\lambda\rvert \leq 1$	$\lvert\lambda\rvert < 1$	$\emptyset$
$T^{'}$	$\lvert\lambda\rvert \leq 1$	$\emptyset$	$\lvert\lambda\rvert \leq 1$

Como no exemplo acima, podemos provar em geral que:

Proposição A.2.1. *Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{B}(X)$. Então:*

(a) *Se λ pertence ao espectro residual de T, então λ pertence ao espectro pontual de $T^{'}$;*

(b) *Se λ pertence ao espectro pontual de T, então λ ou pertence ao espectro pontual ou ao espectro residual de $T^{'}$.*

Demonstração. Veja [17], Proposição, página 194. □

Finalmente, temos o seguinte teorema:

Teorema A.2.5. *Seja T um operador auto-adjunto em um espaço de Hilbert H. Então:*

(a) *T não tem espectro residual;*

(b) *$\sigma(T)$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$;*

(c) *Autovetores correspondentes a autovalores distintos de T são ortogonais.*

Demonstração. Veja [17], Teorema VI.8, página 194. □

A.3 Teorema de Representação

Com o objetivo de enunciar uma versão um pouco mais fraca do Primeiro Teorema de Representação em Kato [15], fundamental neste trabalho para garantir a existência do operador auto-adjunto L_λ já mensionado no Teorema 2.2.1 e que teve grande importância no que diz respeito a reescrever, de uma forma mais clara, a hipótese (2.1) do Teorema 2.1.1, considere $(H, (.,.))$ e $(H^{'}, \langle .,. \rangle_{H'})$ espaços de Hilbert cujas normas associadas são $||.||$ e $||.||_{H'}$, respectivamente. Dizemos que uma função a valores reais $t[u, u^{'}]$, definida para $u \in H$ e $u^{'} \in H^{'}$, é uma *forma sesquilinear em $H \times H^{'}$* se ela for linear em cada uma de suas entradas. Em particular, se $H = H^{'}$ dizemos que $t[u, u^{'}]$ é uma forma sesquilinear em H. Além disso, $t[u] = t[u, u]$ será chamada de *forma quadrática associada com $t[u, u^{'}]$* ou, simplesmente, *forma quadrática*.

Em se tratando da forma quadrática $t[u]$, dada uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$, dizemos que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é *t-convergente* (para $u \in H$), e denotamos $u_n \xrightarrow[t]{} u$, quando $n \longrightarrow \infty$, se $u_n \in D(t)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \longrightarrow u$ em H e $t[u_n - u_m] \longrightarrow 0$ quando $n, m \longrightarrow \infty$. Além disso, a forma quadrática t é *fechada* se $u_n \xrightarrow[t]{} u$ implicar que $u \in D(t)$ e $t[u_n - u] \longrightarrow 0$. Ainda, t será *limitada*, se existir uma constante $C \geq 0$ para a qual,

$$t[u] \leq C\,||u||\,||u|| = C\,||u||^2\,,\ \forall u \in D(t).$$

A partir do que vimos acima, podemos compreender o próximo resultado, o qual nos propusemos a enunciar e cuja demonstração pode ser encontrada em Kato [15], Teorema 2.1 e 2.6, Capítulo VI.

Teorema A.3.1. *Seja $t[u]$ uma forma quadrática em H densamente definida e fechada. Então existe um operador auto-adjunto T para o qual valem os seguintes itens:*

(i) *$D(T) \subset D(t)$ e $t[u, v] = (Tu, v)\,,\ \forall u \in D(T)$ e $\forall v \in D(t)$;*

(ii) *se $u \in D(t)$, $w \in H$ e $t[u, v] = (w, v)$, $\forall v \in D(t)$, então $u \in D(T)$ e $Tu = w$.*

O operador auto-adjunto T é unicamente determinado pela condição (i).

Referências Bibliográficas

[1] ARBOGAST, T. & BONA, J., **Notes on Methods of Applied Mathematics**. Texas: The University of Texas at Austin, 1999.

[2] ARRUDA, L. K., **Nonlinear stability properties of periodic travelling wave solutions of the classical Korteweg-de Vries and Boussinesq equations**, Portugaliae Mathematica, Vol.66, Fasc.2 (2009), 225-259.

[3] BONA J. L. & SACHS, R., **Global existence of smooth solutions and stability of solitary waves for a generalized Boussinesq equation**. Commun. Math. Phis. 118 (1988), 15-29.

[4] BONA J. L., SOUGANIDIS P. E. & STRAUSS, W. A., **Stability and instability of solitary waves of Korteweg-de Vries type**. Proc. Roy. Soc. London Ser., A 411 (1987), 395-412.

[5] BOURGAIN J., **Global Solutions of Nonlinear Schrödinger Equations**. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. vol 46, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[6] BREZIS, H., **Functional Analysis, Sobolev Space and Partial Differential Equations**. New York: Springer, 2011.

[7] COLLIANDER, J., KELL, M., STAFFILANI, G., TAKAOKA, H. & TAO, T., **Sharp global well-posedness for periodic and non-periodic KdV and mKdV em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{T}$**. J. Amer. Math. Soc. (2003) 16.

[8] DRABEK, P. & JAROSLAV, M., **Methods Of Nonlinear Analysis, Applications Differential Equations**. Basel: Birkhäuser, 2007.

[9] FOLLAND, G. B., **Introduction To Partial Differential Equations**. New Jersey: Princeton University Press, 1995.

[10] FOLLAND, G. B., **Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications**. Seattle: John Wiley & Sons, 1999.

[11] GRILLAKIS, M., SHATAH, J. & STRAUSS, W., **Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry**. I, J. Functional Anal., 74 (1987), 160-190.

[12] GRILLAKIS, M., SHATAH, J. & STRAUSS, W., **Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry**. II, J. Functional Anal., 90 (1990), 308-348.

[13] JUNIOR, A. A. C., **Notas do Curso de Análise II**. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[14] JUNIOR, A. A. C., **Notas do Curso de Equações Diferenciais Ordinárias**. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[15] KATO, T., **Perturbation Theory for Linear Operators**. Berlin: Springer, 1967.

[16] OLIVEIRA, C. R., **Introdução à Análise Funcional**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[17] REED, M. & SIMON, B., **Methods of Modern Mathematical Physics, IV: Analysis of operators**. New York: Academic Press, 1978.

[18] STUART, C. A., **Lectures on the Orbital Stability of Standing Waves and Application to the Nonlinear Schrödinger Equation**. Milan J. of Math., 76 (2008), 329-399.

[19] STUART, C. A., **Uniqueness and stability of ground states for some nonlinear Schrödinger equations**. J. Eur. Math. Soc., 8 (2006), 399-414.

[20] WEINSTEIN, M. I., **Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations**. Comm. Pure Appl. Math., 39 (1986), 51-68.