UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Exemplos de T-espaços e T-ideais infinitamente gerados

Ronald Ismael Quispe Urure

São Carlos - SP
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Exemplos de T-espaços e T-ideais infinitamente gerados

Ronald Ismael Quispe Urure

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Dimas José Gonçalves

São Carlos - SP
Julho de 2014

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

	Quispe Urure, Ronald Ismael.
Q8et	Exemplos de T-espaços e T-ideais infinitamente gerados / Ronald Ismael Quispe Urure. -- São Carlos : UFSCar, 2014.
	53 f.
	Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2014.
	1. Álgebra. 2. T-ideal. 3. T-espaço. 4. Specht, Problema de. 5. Grassmann, Álgebra de. I. Título.
	CDD: 512 (20ª)

Banca Examinadora:

Dimas José Gonçalves

Prof. Dr. Dimas José Gonçalves
DM - UFSCar

Waldeck Schutz

Prof. Dr. Waldeck Schutzer
DM - UFSCar

Ednei Ap. Santulo Jr

Prof. Ednei Aparecido Santulo Júnior
UEM

Resumo

Seja F um corpo de característica $p \geq 3$. Denote por $F_0\langle X\rangle$ e $F_1\langle X\rangle$ as álgebras associativas livres sem e com unidade, respectivamente, livremente geradas pelo conjunto infinito X. Nesta dissertação estudamos T-ideais e T-espaços infinitamente gerados.

Em [2], os matemáticos Aladova e Krasilnikov exibiram em $F_0\langle X\rangle$ um T-ideal infinitamente gerado que contém o polinômio x^{2p}. Em [9], os matemáticos Gonçalves, Krasilnikov e Sviridova exibiram em $F_1\langle X\rangle$ infinitos T-espaços limites quando F é infinito.

O objetivo desta dissertação é estudar os resultados dos dois artigos citados acima.

Abstract

Let F be a field of characteristic $p \geq 3$. Denote by $F_0\langle X\rangle$ and $F_1\langle X\rangle$ the free associative algebras without and with unity, respectively, freely generated by the infinite set X. In this dissertation we study T-spaces and T-ideals infinitely generated.

In [2] the mathematicians Aladova and Krasilnikov exhibited in $F_0\langle X\rangle$ a T-ideal infinitely generated that contains the polynomial x^{2p}. In [9], the mathematicians Gonçalves, Krasilnikov and Sviridova exhibited in $F_1\langle X\rangle$ limits T-spaces when F is infinite.

The objective of this dissertation is to study the results of the two papers cited above.

Sumário

Introdução

Seja F um corpo e $F_0\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre sem unidade livremente gerada pelo conjunto infinito $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Os elementos de $F_0\langle X\rangle$ são chamados de *polinômios*.

Um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ é chamado de *identidade polinomial* para uma álgebra associativa A se

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$. Denotamos por $Id(A)$ o conjunto das identidades polinomiais de A e se $Id(A) \neq \{0\}$ dizemos que A é uma *PI-álgebra*. Existem vários exemplos de PI-álgebras, dentre elas estão todas as álgebras comutativas e as álgebras de dimensão finita. Nesta dissertação de mestrado o assunto a ser tratado é PI-álgebra.

Um ideal I de $F_0\langle X\rangle$ é chamado de *T-ideal* se ele é fechado por todos os endomorfismos de $F_0\langle X\rangle$. Pode ser mostrado que um ideal I é um T-ideal se, e somente se, $I = Id(A)$ para alguma álgebra A.

Dado um subconjunto S de $F_0\langle X\rangle$ denotamos por $\langle S\rangle^T$ o menor T-ideal de $F_0\langle X\rangle$ que contém S. Ele sempre existe e é chamado de *T-ideal gerado por S*. Dado um T-ideal I, se existe um subconjunto finito S tal que $I = \langle S\rangle^T$, dizemos que I é um *T-ideal finitamente gerado*. Caso contrário, dizemos que I é um *T-ideal infinitamente gerado*. Em 1950 o matemático Specht formulou o seguinte problema:

Problema de Specht. É todo T-ideal finitamente gerado?

A resposta surgiu apenas em 1987 com os trabalhos de Kemer em [16]:

Teorema de Kemer. Se F é um corpo de característica 0, então todo T-ideal é finitamente gerado.

A resposta para o Problema de Specht no caso em que a característica de F é $\neq 0$ levou ainda um tempo para ser obtida. Apenas em 1999 com os trabalhos de Belov [4], Grishin [11] e Shchigolev [20] foram obtidos contra-exemplos para o problema, isto é, eles exibiram T-ideais infinitamente gerados quando a característica de F é $\neq 0$.

Um polinômio f é chamado *polinômio de Specht* se todo T-ideal em $F_0\langle X\rangle$ que contém f é um T-ideal finitamente gerado. Como em $\mathrm{car}(F) = 0$ todo polinômio é de Specht, estamos interessados no caso em que $\mathrm{car}(F) = p > 0$. Uma pergunta natural a se fazer é a seguinte:

Pergunta. O polinômio x^n não é de Specht para algum n?

Usando o Teorema de Nagata-Higman-Dubnov-Ivanov (ver [15] e [18]) pode ser mostrado que x^n é de Specht para $n < p$.

Vários autores estudaram a questão acima (ver [1, 11, 12, 14, 20, 22]) e mostraram que tal n existe. Em particular, Aladova e Krasilnikov em [2] provaram o seguinte:

Teorema Principal 1. Se $\text{car}(F) = p \geq 3$, então x^{2p} não é de Specht.

Este é um resultado importante e dá margem para o enunciado de outro problema:

Problema em aberto. Se $\text{car}(F) = p \geq 3$, então $2p$ é o menor n tal que x^n não é de Specht?

Ligado ao problema de geradores de T-ideal surge o conceito de T-espaço.

Seja $F_1\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre com unidade livremente gerada por X. Um subespaço vetorial I de $F_1\langle X\rangle$ é chamado de *T-espaço* se I é fechado por todos os endomorfismos de $F_1\langle X\rangle$.

Observe que todo T-ideal é um T-espaço. Um exemplo mais "prático" de T-espaço seria o conjunto dos polinômios centrais de uma álgebra A. Um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in F_1\langle X\rangle$ é chamado de *polinômio central* para uma álgebra associativa com unidade A se

$$f(a_1, \ldots, a_n) \in Z(A) \text{ (Centro de } A)$$

para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$. Denotamos por $C(A)$ o conjunto desses polinômios e observe que este é um T-espaço.

Os polinômios centrais são conhecidos para poucas álgebras. Recentemente, em [5], os matemáticos Brandão, Krasilnikov, Koshlukov e Silva descreveram os polinômios centrais da álgebra de Grassmann G infinitamente gerada com unidade. Lá ocorre um fato interessante: quando $\text{car}(F) = 0$, temos que $C(G)$ é um T-espaço *finitamente gerado* e, quando F é infinito com $\text{car}(F) = p \geq 3$ temos que $C(G)$ é um T-espaço *infinitamente gerado*. Aqui os conceitos de finitamente e infinitamente gerados são similares aos de T-ideal. Um outro fato interessante a respeito de $C(G)$ quando $\text{car}(F) = p \geq 3$ e F é infinito é que $C(G)$ é um T-espaço *limite*. Um T-espaço I é chamado de limite se ele é infinitamente gerado e se todo T-espaço J que contém propriamente I é finitamente gerado. Este foi o primeiro exemplo de T-espaço limite na literatura.

Na busca por novos T-espaço limites, os matemáticos Gonçalves, Krasilnikov e Sviridova em [9] provaram o seguinte:

Teorema Principal 2. Seja F um corpo infinito de $\text{car}(F) = p \geq 3$. Existem em $F_1\langle X\rangle$ infinitos T-espaços limites.

Neste último teorema, não apenas é provada a existência, mas também são exibidos os T-espaços.

Esta dissertação trata de estudar os dois teorema principais citados anteriormente. A distribuição do assunto é feita da seguinte maneira: no primeiro capítulo são estudados os conceitos básicos da teoria de PI-álgebras usando como o base o livro [7]. No segundo capítulo é estudado o artigo [2] e demonstrado o Teorema Principal 1. No terceiro capítulo é estudado o artigo [9] e demonstrado o Teorema Principal 2.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos as definições e alguns resultados básicos da teoria de PI-álgebras. O objetivo aqui é fornecer as ferramentas necessárias para que o leitor passe pelos capítulos seguintes sem maiores dificuldades. Ao longo de toda a dissertação, F denotará um corpo e as álgebras consideradas serão associativas, a menos que seja dito algo em contrário. Muitos resultados por serem clássicos e de fácil procura na literatura serão apenas enunciados, não terão demonstração. Sugerimos os livros [7] e [10] para consulta.

1.1 Identidades Polinomiais

Seja $F_1\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre com unidade livremente gerada pelo conjunto infinito $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Ao longo de toda a seção, todas as álgebras consideradas serão associativas e com unidade.

Definição 1.1. *Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F_1\langle X\rangle$. Dizemos que f é uma identidade polinomial para uma álgebra A se*

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

para todos $a_1, \ldots, a_n \in A$. Denotamos por $Id(A)$ o conjunto das identidades polinomiais de A e dizemos que A é uma PI-álgebra se $Id(A) \neq \{0\}$.

Exemplo 1.2. *As álgebras comutativas são PI-álgebras, pois o comutador*

$$[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$$

é uma identidade polinomial.

Exemplo 1.3. *Toda álgebra A de dimensão finita é PI-álgebra. De fato, se $\dim(A) < n$, então o "Polinômio Standard" de grau n*

$$St_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)}$$

é uma identidade polinomial para A.

Como consequência do último exemplo, temos que $M_n(F)$ (a álgebra das matrizes $n \times n$) é uma PI-álgebra. Ela possui dimensão n^2 e tem o Polinômio Standard de grau $n^2 + 1$ como identidade polinomial. Uma pergunta natural seria: qual é o grau mínimo de uma identidade polinomial para $M_n(F)$? Um dos resultados clássicos da teoria, chamado de

Teorema de Amitzur-Levitzky, nos fornece a resposta. Ele foi provado em 1950 (ver [3, 23]) e afirma que

$$St_{2n}(x_1, x_2, ..., x_{2n})$$

é a identidade polinomial de menor grau para $M_n(F)$.

Definição 1.4. *Um ideal I de $F_1\langle X\rangle$ é dito ser um T-ideal se I for fechado por todos os endomorfismos de $F_1\langle X\rangle$.*

Uma maneira equivalente de se dizer que um ideal I é um T-ideal é dizer que

$$f(g_1, \dots, g_n) \in I$$

para todos $f(x_1, \dots, x_n) \in I$ e $g_1, \dots, g_n \in F_1\langle X\rangle$. Se A é uma PI-álgebra, então $Id(A)$ é um T-ideal. Reciprocamente, dado um T-ideal I, temos que

$$I = Id(A)$$

para alguma PI-álgebra A. Para verificar isso, basta considerar $A = F_1\langle X\rangle/I$.

Definição 1.5. *Se S é um subconjunto de $F_1\langle X\rangle$, definimos o T-ideal gerado por S como o menor T-ideal que contém S.*

Ele existe e é a interseção de todos os T-ideais que contêm S. Denotamos ele por $\langle S\rangle^T$. Pode ser mostrado que $\langle S\rangle^T$ é gerado como espaço vetorial pelos elementos do tipo

$$gf(g_1, \dots, g_n)g'$$

onde $f(x_1, \dots, x_n) \in S$ e $g_1, \dots, g_n, g, g' \in F_1\langle X\rangle$. Os elementos de $\langle S\rangle^T$ serão chamados de *consequências de S.*

Um dos grandes problemas na área consiste em dada uma PI-álgebra A, descrever um conjunto S tal que

$$Id(A) = \langle S\rangle^T.$$

Essa descrição é obtida apenas em algumas álgebras conhecidas. Abaixo citamos apenas duas delas:

a) Para A comutativa e F infinito temos

$$Id(A) = \langle [x_1, x_2]\rangle^T.$$

b) Para $A = M_2(F)$ com F infinito de característica diferente de 2 e 3 temos

$$Id(A) = \langle\ St_4(x_1, \dots, x_4) \ \text{ e } \ [[x_1, x_2]^2, x_3]\ \rangle^T.$$

A respeito da história do problema, as identidades de $M_2(F)$ quando $\mathrm{car}(F) = 0$ foram descritas por Razmyslov em 1973 (ver[19]). Depois, Drensky (ver [6]) melhorou o resultado obtendo apenas os dois geradores acima para o T-ideal. O caso em que F é infinito e de $\mathrm{car}(F) \geq 5$ foi descrito por Koshlukov (ver [17]).

Na próxima seção falaremos da álgebra de Grassmann e suas identidades polinomiais também.

Definição 1.6. *Um polinômio $f(x_1, \dots, x_n)$ é chamado de central para uma álgebra A se*

$$f(a_1, \dots, a_n) \in Z(A) \quad (\textit{centro de } A)$$

para todos $a_1, \dots, a_n \in A$.

Denotamos por $C(A)$ o conjunto dos polinômios centrais de uma álgebra A. Observe que

$$f(x_1,\ldots,x_n) \in C(A) \Longleftrightarrow [f(x_1,\ldots,x_n),x_{n+1}] \in Id(A).$$

Diante disso, temos por exemplo que

$$[x_1,x_2]^2$$

é um polinômio central para $M_2(F)$.

Como podemos ver acima, os conceitos de identidade polinomial e polinômio central estão relacionados entre si. Assim, o conhecimento de $C(A)$ nos fornece informações sobre $Id(A)$. Para entender melhor as propriedades de $C(A)$ vamos introduzir o conceito de *T-espaço.*

Definição 1.7. *Um subespaço vetorial V de $F_1\langle X\rangle$ é dito ser um T-espaço se ele for fechado por todos os endomorfismos de $F_1\langle X\rangle$.*

Uma maneira equivalente de se dizer que um subespaço vetorial V é um T-espaço é dizer que

$$f(g_1,\ldots,g_n) \in V$$

para todos $f(x_1,\ldots,x_n) \in V$ e $g_1,\ldots,g_n \in F_1\langle X\rangle$. Um exemplo clássico de T-espaço é o conjunto dos polinômios centrais de uma álgebra A. Aqui chamamos a atenção para o fato que nem todo T-espaço V é $C(A)$ para alguma álgebra A, como veremos depois. Observe também que todo T-ideal é um T-espaço.

Definição 1.8. *Se S é um subconjunto de $F_1\langle X\rangle$, definimos o T-espaço gerado por S como o menor T-espaço que contém S.*

Ele existe e é a interseção de todos os T-espaços que contêm S. Denotamos ele por $\langle S\rangle^{TS}$. Pode ser mostrado que $\langle S\rangle^{TS}$ é gerado como espaço vetorial pelos elementos do tipo

$$f(g_1,\ldots,g_n)$$

onde $f(x_1,\ldots,x_n) \in S$ e $g_1,\ldots,g_n \in F_1\langle X\rangle$.

Na próxima seção faremos comentários a respeito dos geradores do T-espaço dos polinômios centrais da álgebra de Grassmann G.

Definição 1.9. *Dizemos que um T-espaço V é finitamente gerado como T-espaço se existe um conjunto finito S tal que*

$$V = \langle S\rangle^{TS}.$$

Caso contrário, dizemos que V é infinitamente gerado como T-espaço.

De maneira análoga definimos T-ideal finitamente gerado e infinitamenete gerado.

Como já foi citado na introdução desta dissertação, em 1950 o matemático Specht se questionou a respeito da existência de T-ideais infinitamente gerados. A resposta só veio 37 anos depois com os trabalhos de Kemer no caso em que $\mathrm{car}(F) = 0$. Observe que a resposta para o caso em que F é de característica $\neq 0$ surgiu apenas meio século depois do questionamento, com os trabalhos de Belov, Grishin e Shchigolev. Diante da importância do tema, estudaremos nos próximos capítulos T-ideais e T-espaço infinitamente gerados.

É de grande importância, dado um conjunto de geradores para um T-espaço, conseguir extrair dele um conjunto menor de geradores. A partir disso, enunciaremos alguns resultados que dizem como obter "bons" geradores para um T-espaço

Definição 1.10. *Seja $m(x_1, \ldots, x_n) = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}$ um monômio e seja $u_i = deg_{x_i}m$ a quantidade de vezes que x_i aparece em m. Então, diremos que $(u_1, \ldots, u_n)$ é o multigrau de m. Um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ é chamado de multi-homogêneo com multigrau $(u_1, \ldots, u_n)$ se todos os seus monômios tem o mesmo multigrau $(u_1, \ldots, u_n)$. Dizemos que um polinômio multi-homogêneo é multilinear se ele tiver multigrau $(1, \ldots, 1)$, ou seja, cada variável aparecendo uma vez em cada monômio.*

Proposição 1.11. *Seja f um polinômio e escreva ele como*

$$f = \sum_{d_1,\ldots,d_n \geq 0} f^{(d_1,\ldots,d_n)},$$

onde $f^{(d_1,\ldots,d_n)}$ é a componente multi-homogênea de f com multigrau $(d_1, \ldots, d_n)$. Denote por d o grau máximo de f com respeito a uma variável. Se $|F| \geq d+1$, então

$$\langle f \rangle^{TS} = \langle f^{(d_1,\ldots,d_n)} \ : \ d_1, \ldots, d_n \geq 0 \rangle^{TS}.$$

A demonstração da proposição acima encontra-se no Capítulo 4 de [7]. Embora ela tenha sido feita para T-ideais, observe que a demonstração é a "mesma" para T-espaços.

Como consequência direta da proposição e usando o processo de multilinearização de um polinômio, temos o seguinte corolário:

Corolário 1.12. *Seja V um T-espaço de $F_1\langle X \rangle$. Se F é infinito, então V é gerado como T-espaço por seus polinômios multi-homogêneos. Se car$(F) = 0$, então V é gerado como T-espaço por seus polinômios multilineares.*

Definição 1.13. *Seja F um corpo de característica $p \neq 0$. Se $f(x_1, \ldots, x_n)$ é um polinômio multi-homogêneo com multigrau $(p^{s_1}, \ldots, p^{s_n})$, onde $s_1, \ldots, s_n \geq 0$, então dizemos que f é um polinômio do tipo p^s.*

Lema 1.14. *Seja F um corpo infinito de característica $p \neq 0$. Seja V um T-espaço de $F_1\langle X \rangle$. Então, V é gerado como T-espaço por seus polinômios multi-homogêneos do tipo p^s.*

Prova: Seja $f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio multi-homogêneo. Denotando $d = deg_{x_1}f$, temos que d pode ser escrito assim:

$$d = \alpha_0 + \alpha_1 p + \ldots + \alpha_k p^k$$

onde $k \geq 0$ e $0 \leqslant \alpha_i \leqslant p-1$ para todo i.

Seja

$$\{y_{rs} \mid 0 \leqslant r \leqslant k \ \text{ e } \ 1 \leqslant s \leqslant \alpha_r\}$$

um conjunto de variáveis distintas entre si e distintas de $x_1, \ldots, x_n$. Denote por $\tilde{f}$ o polinômio obtido de f pela seguinte substituição:

$$x_1 \longrightarrow \sum_{r=0}^{k} \sum_{s=1}^{\alpha_r} y_{rs}.$$

Seja h a componente multi-homogênea de $\tilde{f}$ com grau p^r na variável y_{rs} para todo r, s e grau $deg_{x_i}f$ na variável x_i para todo $i = 2, \ldots, n$. Então

$$h \in \langle f \rangle^{TS}.$$

Mostraremos agora que

$$f \in \langle h\rangle^{TS}.$$

Fazendo a substituição

$$y_{rs} \longrightarrow x_1$$

em todas as variáveis y_{rs} de h, obtemos um polinômio

$$h(x_1, \ldots, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda f(x_1, \ldots, x_n).$$

Em cada monômio de h aparecem

$$\alpha_0 + \ldots + \alpha_k$$

variáveis y_{rs} distribuídas em d lugares. Por argumentos combinatórios temos

$$\lambda = \frac{d!}{\prod_{r=0}^{k}[(p^r)!]^{\alpha_r}}.$$

Pode ser mostrado que $\lambda \neq 0 \mod p$. Façamos o caso $k = 2$.

Temos $d = \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2$,

$$\frac{d!}{(p^2!)^{\alpha_2}(p!)^{\alpha_1}} = \frac{(\alpha_2 p^2)!}{(p^2!)^{\alpha_2}} \cdot \frac{(\alpha_2 p^2 + 1)\cdots(\alpha_2 p^2 + \alpha_1 p)}{p!^{\alpha_1}} \cdot (\alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + 1)\cdots(\alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0).$$

Por uma parte

$$\frac{(\alpha_2 p^2)!}{(p^2!)^{\alpha_2}} = \frac{1\cdots p^2}{p^2!} \cdot \frac{(p^2+1)\cdots(2p^2)}{p^2!} \cdot \frac{(2p^2+1)\cdots(3p^2)}{p^2!} \cdots \frac{[(\alpha_2 - 1)p^2 + 1]\cdots\alpha_2 p^2}{p^2!}.$$

Para cada $1 \leqslant i \leqslant \alpha_2$ temos

$$\frac{[(i-1)p^2+1]\cdots ip^2}{p^2!} = [(i-1)p^2+1][\frac{(i-1)p^2}{2}+1]\cdots[\frac{(i-1)p^2}{p^2-1}+1]i = i \mod p.$$

Logo

$$\frac{(\alpha_2 p^2)!}{(p^2!)^{\alpha_2}} = 1\cdot 2\cdots\alpha_2 = \alpha_2! \neq 0 \mod p.$$

De forma similar temos

$$\frac{(\alpha_2 p^2 + 1)\cdots(\alpha_2 p^2 + \alpha_1 p)}{(p!)^{\alpha_1}} = \frac{(\alpha_2 p^2 + 1)\cdots(\alpha_2 p^2 + p)}{p!} \cdot \frac{(\alpha_2 p^2 + p + 1)\cdots(\alpha_2 p^2 + 2p)}{p!} \cdots$$

$$\cdots \frac{(\alpha_2 p^2 + (\alpha_1 - 1)p + 1)\cdots(\alpha_2 p^2 + \alpha_1 p)}{p!} \equiv 1\cdot 2\cdots\alpha_1 \mod p.$$

Finalmente

$$(\alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + 1)\cdots(\alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0) = 1\cdot 2\cdots\alpha_0 \mod p.$$

Como $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \leqslant p$ temos que

$$\frac{d!}{(p^2!)^{\alpha_2}(p!)^{\alpha_1}} \neq 0 \mod p.$$

Para k arbitrário o esquema é o mesmo, dessa forma

$$\frac{d!}{\prod_{r=0}^{k}(p^r!)^{\alpha_r}} = \alpha_0!\alpha_1!\cdots\alpha_k! \neq 0 \mod p,$$

pois $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k < p$. Logo, f está no T-espaço gerado pelo polinômio h. Concluímos assim que

$$\langle f\rangle^{TS} = \langle h\rangle^{TS}.$$

Fazendo o mesmo processo na variável x_2 de h, obtemos outro polinômio h_2 tal que

$$\langle f\rangle^{TS} = \langle h_2\rangle^{TS}.$$

Continuando com esse procedimento, após um número finito de passos, encontraremos um polinômio g do tipo p^s tal que

$$\langle f\rangle^{TS} = \langle g\rangle^{TS}.$$

Como o corpo F é infinito, V é gerado como T-espaço pelos seus polinômios multi-homogêneos. Logo, V é gerado como T-espaço pelos seus polinômios multi-homogêneos do tipo p^s, como se queria provar. $\square$

Chamamos a atenção do leitor para o seguinte fato: se para um T-ideal I tivermos $I = \langle S\rangle^{TS}$, então $I = \langle S\rangle^{T}$. Assim, os resultados anteriores para T-espaços também são válidos para T-ideais.

Defina os polinômios

$$[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1, \quad [x_1, x_2, x_3] = [[x_1, x_2], x_3], \quad [x_1, x_2, x_3, x_4] = [[x_1, x_2, x_3], x_4], \ldots$$

Esses polinômios são chamados de *comutadores*. Uma relação importante entre eles é a identidade de Jacobi

$$[x_1, x_2, x_3] + [x_2, x_3, x_1] + [x_3, x_1, x_2] = 0.$$

Uma outra que usaremos com certa frequência é

$$[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y.$$

Seja $L(X)$ o subespaço vetorial de $F_1\langle X\rangle$ gerado pelas letras $x_1, x_2, \ldots$ e por todos os comutadores. A partir desses geradores formemos uma base para $L(X)$, que denotaremos por $\mathcal{B}$. Agora considere uma relação de ordem em $\mathcal{B}$ de modo que

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots < \begin{pmatrix} \textit{comutadores de} \\ \textit{comprimento } 2 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} \textit{comutadores de} \\ \textit{comprimento } 3 \end{pmatrix} < \ldots$$

Com a ordem anti-simétrica obtida desta relação temos o seguinte teorema.

Teorema 1.15. *Uma base para o espaço vetorial $F_1\langle X\rangle$ é o conjunto dos elementos do tipo*

$$u_1u_2\ldots u_t,$$

onde $u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_t$ pertencem a $\mathcal{B}$ e $t \geq 0$.

O espaço vetorial $L(X)$ pode ser interpretado da seguinte maneira: considere em $F_1\langle X\rangle$ a operação comutador e denote por $F_1\langle X\rangle^{[\ ,\ ]}$ a álgebra de Lie associada. Então $L(X)$ é a subálgebra de Lie de $F_1\langle X\rangle^{[\ ,\ ]}$ gerada por X. Não mostraremos aqui, mas $L(X)$ é a álgebra de Lie livre gerada por X e o último resultado é uma consequência direta do Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, uma vez que $F_1\langle X\rangle$ é a álgebra envolvente universal de $L(X)$. Para mais detalhes, ver Capítulos 1 e 4 de [7].

Definição 1.16. *Um polinômio é dito próprio se ele pode ser escrito como combinação linear de produtos de comutadores.*

Convencionamos que o polinômio constante 1 é um polinômio próprio também.

O seguinte resultado está no Capítulo 4 de [7].

Teorema 1.17. *Seja I um T-ideal em $F_1\langle X\rangle$. Se F é infinito, então I é gerado por seus elementos próprios multi-homogêneos. Se $car(F) = 0$, então I é gerado por seus elementos próprios multilineares.*

1.2 Álgebra de Grassmann

Nesta seção descreveremos as identidades polinomiais da álgebra de Grassmann infinitamente gerada e finitamente gerada quando F é infinito. Além disso, obteremos algumas consequências do comutador triplo que serão importantes nos próximos capítulos. Ao longo de toda a seção, o corpo F será de característica $\mathrm{car}(F) = p \neq 2$.

Seja G a álgebra de Grassmann infinitamente gerada pelo conjunto $e_1, e_2, e_3, \dots$. Relembramos que G como espaço vetorial tem uma base formada por 1 e pelos elementos

$$e_{i_1} \cdots e_{i_m}, \tag{1.1}$$

onde $i_1 < \ldots < i_m$ e $m \geq 1$. Além disso, em G temos a relação

$$e_i e_j = -e_j e_i$$

que define o produto entre seus elementos. Fixado $k > 1$, denotamos por G_k a subálgebra de G gerada por $e_1, e_2, \dots, e_k$. Então G_k é a álgebra de Grassmann finitamente gerada por k elementos. Observe que uma base para G_k como espaço vetorial é formada por 1 e pelos elementos em (1.1) com $1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq k$ e $1 \leq m \leq k$.

Lema 1.18. *O polinômio*

$$[x_1, x_2, x_3]$$

é uma identidade polinomial para G.

Demonstração. Como $[x_1, x_2, x_3]$ é um polinômio multilinear, só precisamos verificar que esse polinômio se anula para substituições dos elementos da base de G em (1.1). Um elemento da base de G é chamado par se é formado por uma quantidade par de e_i's (o elemento 1 também é par). Caso contrário ele é chamado ímpar. Observe que os elementos pares estão no centro de G.

Sejam u_1, u_2, u_3 elementos da base de G. Para mostrar que

$$[u_1, u_2, u_3] = 0$$

só precisamos verificar que $[u_1, u_2]$ é zero ou par. Com efeito, se algum u_i é par, então ele comuta com o outro, logo $[u_1, u_2] = 0$. Se u_1 e u_2 são ímpares, então

$$u_1u_2 - u_2u_1 = 2u_1u_2$$

é par, finalizando assim a demonstração. □

Lema 1.19. *Denote por* $T^{(3)}$ *o T-ideal*

$$T^{(3)} = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T.$$

Então,

1. $[x_1, x_2][x_1, x_3] \in T^{(3)}$.
2. $[x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4] \in T^{(3)}$.
3. $[x_1^a [x_1, x_2] x_2^b, x_3] \in T^{(3)}$ *para todo* $a, b \in \mathbb{N}$.

Demonstração. *1.* Aplicando a igualdade $[a, bc] = [a, b]c + b[a, c]$ temos

$$\underbrace{[x_1, x_1 x_2, x_3]}_{em\ T^{(3)}} = [x_1[x_1, x_2], x_3] = \underbrace{x_1[x_1, x_2, x_3]}_{em\ T^{(3)}} + [x_1, x_3][x_1, x_2].$$

Logo, $[x_1, x_3][x_1, x_2] \in T^{(3)}$.

2. Pelo item anterior temos $[x_1, x_2][x_2, x_3] \in T^{(3)}$. Da igualdade

$$\underbrace{[x_1, x_2 + x_3][x_2 + x_3, x_4]}_{em\ T^{(3)}} = \underbrace{[x_1, x_2][x_2, x_4]}_{em\ T^{(3)}} + [x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4] + \underbrace{[x_1, x_3][x_3, x_4]}_{em\ T^{(3)}}$$

segue que $[x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4] \in T^{(3)}$.

3. No que segue, usaremos a notação $f \equiv g$ para denotar a igualdade $f + T^{(3)} = g + T^{(3)}$ na álgebra quociente $F_1\langle X \rangle / T^{(3)}$. Temos

$$[x_1^a [x_1, x_2], x_3] = x_1^a [x_1, x_2, x_3] + [x_1^a, x_3][x_1, x_2] \equiv [x_1^a, x_3][x_1, x_2].$$

Pelo item anterior,

$$[x_1^a, x_3][x_1, x_2] \equiv -[x_1^a, x_1][x_3, x_2] = 0,$$

isto é, $[x_1^a [x_1, x_2], x_3] \equiv 0$.

No caso geral temos

$$[x_1^a [x_1, x_2] x_2^b, x_3] = x_1^a [x_1, x_2][x_2^b, x_3] + [x_1^a [x_1, x_2], x_3] x_2^b.$$

Como

$$[x_1^a [x_1, x_2], x_3] \equiv 0$$

e

$$x_1^a [x_1, x_2][x_2^b, x_3] \equiv x_1^a [x_2, x_2^b][x_1, x_3] = 0$$

concluímos que $[x_1^a [x_1, x_2] x_2^b, x_3] \equiv 0$, isto é,

$$[x_1^a [x_1, x_2] x_2^b, x_3] \in T^{(3)}.$$

□

Teorema 1.20. *Seja* F *um corpo infinito de* $car(F) \neq 2$. *Então*

$$Id(G) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T.$$

Demonstração. Pelo Lema 1.18 temos que

$$\langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T \subseteq Id(G).$$

Denote $J = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$ e suponha que $Id(G) \neq J$. Como F é um corpo infinito, existe um polinômio próprio multi-homogêneo $f \in Id(G) - J$, ou seja,

$$f + J \neq J.$$

Neste caso, temos

$$f + J = \sum_i \alpha_i [x_{i_1}, x_{i_2}] \ldots [x_{i_{2l-1}}, x_{i_{2l}}] + J,$$

onde $\alpha_i \in F$. Pelo Lema 1.19,

$$f + J = \alpha [x_{i_1}, x_{i_2}] \ldots [x_{i_{2l-1}}, x_{i_{2l}}] + J$$

onde $i_1 < \ldots < i_{2l}$ e $\alpha \in F$. Observe que $\alpha \neq 0$ pois f não pertence a J. Como $f \in Id(G)$ e $J \subseteq Id(G)$ temos que

$$[x_{i_1}, x_{i_2}] \ldots [x_{i_{2l-1}}, x_{i_{2l}}] \in Id(G).$$

Em particular

$$[e_1, e_2] \ldots [e_{2l-1}, e_{2l}] = 0,$$

isto é,

$$2^l e_1 e_2 \ldots e_{2l} = 0.$$

Absurdo, pois $2^l \neq 0 \mod p$.

$\square$

Lema 1.21. *Seja F um corpo infinito de car$(F) \neq 2$. Então*

$$Id(G_k) = \langle\ [x_1, x_2, x_3] \quad e \quad [x_1, x_2] \cdots [x_{2l-1}, x_{2l}]\ \rangle^T,$$

onde l é o menor número natural tal que $k < 2l$.

Demonstração. Vamos mostrar que

$$h = [x_1, x_2] \cdots [x_{2l-1}, x_{2l}]$$

é uma identidade polinomial para G_k. O polinômio h é multilinear, logo só precisamos verificar a identidade nos elementos da base de G_k. Sejam $u_1, \ldots, u_{2l}$ elementos da base de G_k. Logo

$$[u_1, u_2] \cdots [u_{2l-1}, u_{2l}] = \alpha u_1 u_2 \cdots u_{2l-1} u_{2l},$$

onde $\alpha \in F$. Observe que $u = u_1 u_2 \cdots u_{2l-1} u_{2l}$ é um elemento do tipo $e_{j_1} \cdots e_{j_t}$ com $t \geq 2l$. Como G_k é álgebra gerada por $e_1, \ldots, e_k$ e $k < 2l \leq t$, temos algum e_j aparecendo mais de uma vez em u. Logo, $u = 0$.

Agora, denote

$$J' = \langle\ [x_1, x_2, x_3] \quad \text{e} \quad [x_1, x_2] \cdots [x_{2l-1}, x_{2l}]\ \rangle^T.$$

Como $G_k \subseteq G$ temos que $J' \subseteq Id(G_k)$. Suponhamos que não vale a igualdade. Então existe um polinômio próprio multi-homogêneo f tal que $f \in Id(G_k) - J'$. Usando um argumento similar ao do teorema anterior, temos que

$$f + J' = \alpha [x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2m-1}}, x_{i_{2m}}] + J'$$

para algum $m \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in F$.

Se $m \geq l$, então

$$[x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2m-1}}, x_{i_{2m}}] \in J'$$

e consequentemente f também pertence a J'. Absurdo.

Se $m \leq l-1$, então m contradiz a minimalidade de l, pois em particular temos

$$[x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2m-1}}, x_{i_{2m}}] \in Id(G_k).$$

□

No último capítulo usaremos a notação

$$T^{(3,l)} = \langle\ [x_1, x_2, x_3] \ \text{ e } \ [x_1, x_2] \cdots [x_{2l-1}, x_{2l}]\ \rangle^T$$

para denotar tal T-ideal.

1.3 Relação entre nil e nilpotente

Nesta seção apresentaremos o clássico Teorema de Nagata-Higman-Dubnov-Ivanov para a nilpotência das álgebras nil de índice limitado. Inicialmente, tal resultado foi provado sobre um corpo de característica 0 por Nagata em 1953 (ver [18]). Depois, em 1956, o resultado foi provado por Higman num caso mais geral (ver [15]). Com o passar dos anos, foi descoberto que o Teorema foi determinado em 1943 por Dubnov e Ivanov. Para maiores dados históricos a respeito do Teorema, citamos [8].

Ao longo de toda a seção, as álgebras consideradas serão associativas e sem unidade. Denote por $F_0\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre "sem unidade" livremente gerada pelo conjunto infinito X. O conceito de T-ideal e T-ideal gerado pode ser definido de maneira similar em $F_0\langle X\rangle$, mas observe que

$$\langle S\rangle^T$$

não necessariamente coincide em $F_0\langle X\rangle$ e $F_1\langle X\rangle$. Por exemplo, x_1 não pertence ao T-ideal gerado por x_1x_2 em $F_0\langle X\rangle$ mas pertence a ele quando pensado em $F_1\langle X\rangle$. Portanto, quando olhamos para álgebras associativas sem unidade, o lugar ideal para estudar suas identidades polinomiais e propriedades é $F_0\langle X\rangle$. Com base no exposto, nesta seção a notação $\langle S\rangle^T$ deve ser entendida como *T-ideal em $F_0\langle X\rangle$ gerado por S.*

Definição 1.22. *Seja Ω uma álgebra. Dizemos que:*

a) Ω é nil se para cada $a \in \Omega$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$.

b) Ω é nil de índice $n \in \mathbb{N}$ se $a^n = 0$ para todo $a \in \Omega$ mas $b^{n-1} \neq 0$ para algum $b \in \Omega$.

c) Ω é nilpotente de índice $n \in \mathbb{N}$ se $a_1 \cdots a_n = 0$ para todo $a_1, \ldots, a_n \in \Omega$, mas $b_1 \cdots b_{n-1} \neq 0$ para algum $b_1, \ldots, b_{n-1} \in \Omega$.

Aqui cabe algumas observações a respeito da definição acima. Se

$$x_1^n \in Id(\Omega),$$

então Ω é nil de índice $\leq n$. Se

$$x_1 \cdots x_n \in Id(\Omega),$$

então Ω é nilpotente de índice $\leq n$.

É claro que toda álgebra nilpotente é nil. Já a recíproca não é verdadeira. A álgebra de Grassmann infinitamente gerada "sem unidade" é nil sem ser nilpotente. Uma condição necessária para que uma álgebra nil seja nilpotente é que ela seja nil de índice "limitado". Portanto, estamos interessados no problema: Quando uma álgebra nil de índice limitado é nilpotente? Em linguagem de PI-álgebra, estamos interessados em saber quando

$$x_1 \cdots x_m \in \langle x_1^n \rangle^T \ ?$$

Lema 1.23. *Se F é um corpo com $car(F) \neq 2$, então*

$$x_1 x_2 x_3 \in \left\langle x_1^2 \right\rangle^T .$$

Demonstração. Temos que $(x_1 + x_2)^2 \in \langle x_1^2 \rangle^T$. Abrindo essa expressão temos

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2 x_1 + x_2^2.$$

Logo $x_1 x_2 + x_2 x_1 \in \langle x_1^2 \rangle^T$ e consequentemente

$$x_1(x_2 x_3) + (x_2 x_3) x_1,$$

$$-x_2(x_3 x_1) - (x_3 x_1) x_2,$$

$$x_3(x_1 x_2) + (x_1 x_2) x_3$$

estão também em $\langle x_1^2 \rangle^T$. Somando eles, temos que $2 x_1 x_2 x_3 \in \langle x_1^2 \rangle^T$, provando assim o resultado. □

Teorema 1.24 (Nagata-Higman-Dubnov-Ivanov)**.** *Fixe $k \geq 2$. Seja F um corpo de característica p, onde $k < p$, ou de característica 0. Então, existe $d = d(k)$ tal que*

$$x_1 \cdots x_d \in \left\langle x_1^k \right\rangle^T .$$

Em particular, toda álgebra nil de índice limitado é nilpotente.

Demonstração. Faremos a demonstração apenas para o caso em que $\mathrm{car}(F) = p > k$. No caso em que $\mathrm{car}(F) = 0$ a demonstração é a mesma.

A prova será por indução sobre $k = 2, 3, \ldots, p-1$. O lema anterior resolve o caso $k = 2$. Suponha (hipótese de indução) que o resultado é válido para $k - 1$, isto é, existe um inteiro $d = d(k-1)$ tal que

$$x_1 \cdots x_d \in \left\langle x_1^{k-1} \right\rangle^T .$$

Provaremos o resultado para k. Seja $I = \left\langle x_1^k \right\rangle^T$. Temos que $(x_1 + x_2)^k \in I$. Considere a componente multi-homogênea $(k-1, 1)$ de $(x_1 + x_2)^k$, isto é,

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{k-1} x_1^i x_2 x_1^{k-i-1}.$$

Como $k < p$ e o corpo F tem pelo menos p elementos, temos pela Proposição 1.11 que $f(x_1, x_2) \in I$. Temos também que

$$f(x_1, x_2 g^j) g^{k-1-j} \in I,$$

para todo $j = 0, \ldots, k-1$ e $g \in F_0\langle X \rangle$. Logo

$$\sum_{j=0}^{k-1} f(x_1, x_2 g^j) g^{k-1-j} \in I.$$

Mas

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k-1} f(x_1, x_2 g^j) g^{k-1-j} &= \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1} x_1^i (x_2 g^j) x_1^{k-i-1} g^{k-1-j} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1} x_1^i x_2 (g^j x_1^{k-i-1} g^{k-1-j}) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} x_1^i x_2 \sum_{j=0}^{k-1} (g^j x_1^{k-i-1} g^{k-1-j}) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} x_1^i x_2 f(g, x_1^{k-i-1}) \\
&= \sum_{i=0}^{k-2} x_1^i x_2 f(g, x_1^{k-i-1}) + x_1^{k-1} x_2 f(g, x_1^0) \\
&= \sum_{i=0}^{k-2} x_1^i x_2 f(g, x_1^{k-i-1}) + k x_1^{k-1} x_2 g^{k-1}
\end{aligned}$$

Como $f(g, x_1^{k-i-1})$ está em I para todo $i = 0, \ldots, k-2$ temos que $kx_1^{k-1}x_2 g^{k-1} \in I$. Logo

$$x_1^{k-1} x_2 g^{k-1} \in I. \tag{1.2}$$

Por outro lado, aplicando hipótese de indução temos

$$x_1 \cdots x_d = \sum_{\alpha} \alpha u_{1\alpha} (u_{2\alpha})^{k-1} u_{3\alpha} \quad \text{e} \quad x_{d+2} \cdots x_{2d+1} = \sum_{\beta} \beta v_{1\beta} (v_{2\beta})^{k-1} v_{3\beta}$$

para certos polinômios u's e v's. Daí

$$x_1 \cdots x_{2d+1} = (x_1 \cdots x_d) x_{d+1} (x_{d+2} \cdots x_{2d+1}) = \sum_{\alpha,\beta} \alpha\beta u_{1\alpha} \underbrace{(u_{2\alpha})^{k-1} u_{3\alpha} x_{d+1} v_{1\beta} (v_{2\beta})^{k-1}}_{\text{em } I \text{ por } (1.2)} v_{3\beta}$$

e consequentemente

$$x_1 \cdots x_{2d+1} \in I.$$

□

Definição 1.25. *Um polinômio f é chamado de Specht se todo T-ideal $I \subseteq F_0\langle X\rangle$ contendo f é finitamente gerado.*

Pelo Teorema de Kemer, se $\operatorname{car}(F) = 0$ então todo polinômio é de Specht. Isso já não ocorre quando $\operatorname{car}(F) \neq 0$ (ver comentários na introdução da dissertação).

Corolário 1.26. *Seja F um corpo de característica $p \neq 0$. Se $k < p$, então o polinômio x_1^k é de Specht.*

Demonstração. Seja J um T-ideal de $F_0\langle X\rangle$ que contém x_1^k. Pelo Teorema 1.24 temos que

$$x_1 \ldots x_d \in J$$

para algum d. Denote por B_J uma base para o subespaço vetorial de J formado por todos os polinômios de grau $< d$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_d$. Temos que B_J é finito e

$$J = \langle B_J \cup \{x_1 \ldots x_d\}\rangle^T.$$

Assim, J é finitamente gerado como T-ideal. □

Suponha F como acima. Pelo corolário, o T-ideal das identidades polinomiais de uma álgebra nil de índice $< p$ é finitamente gerado. Como já afirmamos na introdução da dissertação, existe n tal que x^n não é de Specht. Defina $n(p)$ como sendo o menor n tal que x^n não é de Specht. Observe que o conhecimento de $n(p)$ nos fornece uma condição suficiente para que o T-ideal das identidades polinomiais de uma álgebra nil de índice limitado n seja finitamente gerado:

$$n < n(p).$$

Daí a importância em encontrar $n(p)$. No Capítulo 2 mostraremos que x^{2p} não é de Specht. Logo

$$p \leq n(p) \leq 2p.$$

Capítulo 2

T-ideais infinitamente gerados

Ao longo de todo o capítulo, F representará um corpo de característica $p \geq 3$. Denotaremos por $F_0\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre sem unidade livremente gerada pelo conjunto infinito $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. O objetivo deste capítulo será exibir um T-ideal J em $F_0\langle X\rangle$ infinitamente gerado que contenha o polinômio x_1^{2p}, isto é, provaremos o Teorema Principal 1 da introdução desta dissertação. Os resultados aqui apresentados foram provados por Aladova e Krasilnikov e encontram-se em [2].

2.1 A álgebra B_n

Nesta seção definiremos para cada $n \geq 3$ uma álgebra B_n. Exibiremos um conjunto infinito de polinômios

$$w_3, w_4, \ldots, w_n, \ldots$$

com a propriedade que $w_3, w_4, \ldots, w_n$ são identidades para B_n, mas w_{n+1} não. Esses polinômios w's junto com x_1^{2p} gerarão o T-ideal J (citado acima) e os resultados obtidos nesta seção serão de extrema importância para provar que J é infinitamente gerado na seção seguinte.

O seguinte lema segue de um resultado de Shchigolev [21, Lema 13].

Lema 2.1. *Denote*

$$f(x_1, x_2) = x_1^{p-1} x_2^{p-1} [x_1, x_2].$$

Então existe uma álgebra associativa unitária R satisfazendo as seguintes condições:

a) Existe um ideal bilateral I de R tal que $R = I \oplus F$.

b) Para cada $h \in I$ temos $h^p = 0$.

c) R é gerado como álgebra por certos $z_i \in I$ $(i \in \mathbb{N})$ tal que para cada $n \geq 1$ o produto

$$f(z_1, z_2) f(z_3, z_4) \cdots f(z_{2n+1}, z_{2n+2})$$

não está contido no espaço vetorial gerado por

$$\{1\} \cup \{f(u_1, u_2) f(u_3, u_4) \cdots f(u_{2k-1}, u_{2k}) \mid 1 \leq k \leq n,\ u_1, u_2, \ldots, u_{2k} \in R\}. \qquad (2.1)$$

d) $[x_1, x_2, x_3]$ é identidade polinomial para R.

Em [21] Shchigolev provou o resultado para corpos infinitos e em [22] ele observou que o resultado ainda é válido para corpos finitos.

Como a quantidade de notações ao longo do capítulo será grande, a cada nova notação (importante) colocaremos **Notação ...** para facilitar a leitura e relembrá-la.

Notação Δ_n.

Seja Δ_n o subespaço de R gerado pelo conjunto (2.1).

Notação $\Re_n$.

Definimos o conjunto $\Re_n$ das matrizes $(2p+1) \times (2p+1)$ como sendo o conjunto

$$\Re_n = \begin{pmatrix} 0 & R & R & R & R & \dots & R & R & R/\Delta_n \\ 0 & R & R & R & R & \dots & R & R & R \\ 0 & 0 & 0 & R & R & \dots & R & R & R \\ 0 & 0 & 0 & R & R & \dots & R & R & R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & R & R & R \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & R & R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & R & R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que uma entrada de $\Re_n$ está no espaço quociente R/Δ_n, outras entradas em R e no resto 0, conforme estabelece a notação. Na verdade, $\Re_n$ é a álgebra quociente da álgebra de matrizes $(2p+1) \times (2p+1)$

$$\begin{pmatrix} 0 & R & R & R & R & \dots & R & R & R \\ 0 & R & R & R & R & \dots & R & R & R \\ 0 & 0 & 0 & R & R & \dots & R & R & R \\ 0 & 0 & 0 & R & R & \dots & R & R & R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & R & R & R \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & R & R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & R & R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sobre o ideal

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \Delta_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notação B_n, D e $\mathbf{r}$.

Fixado $n \in \mathbb{N}$, definimos B_n como sendo a subálgebra de $\Re_n$ gerada pela matriz

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

e todas as matrizes

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

onde $r \in I$.

Notação w_k.

Fixado $k \geq 3$, denotamos por w_k o polinômio

$$w_k(x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_k) = [x_1, x_2, x_3]f(x_3, y_3) \cdots f(x_k, y_k)[y_1, y_2, y_3]([x_3, x_1, x_2][y_3, y_1, y_2])^{p-1}.$$

O principal resultado desta seção é o seguinte:

Proposição 2.2. *Fixe $n \geq 3$. As seguintes sentenças são verdadeiras:*

a) $w_k \in Id(B_n)$ *para todo* $k \leq n$.

b) $w_{n+1} \notin Id(B_n)$.

Antes de fornecer a demonstração da proposição obteremos algumas propriedades da álgebra B_n.

Lema 2.3. *Todo elemento da álgebra B_n é uma matriz da forma*

$$\begin{pmatrix} 0 & u & v & * & * & \dots & * & * & * & * & * \\ 0 & r & w & h & * & \dots & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & u & v & \dots & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & r & w & \dots & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & * & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & u & v & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r & w & h & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & u & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & r & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

onde $u, v, w, h \in R$, $r \in I$ e as entradas marcadas com asterisco indicam elementos arbitrários.

Prova: Dado um elemento $X \in B_n$ decomponha ele como

$$X = \begin{pmatrix} A_{11}(X) & A_{12}(X) & A_{13}(X) \\ 0 & A_{22}(X) & A_{23}(X) \\ 0 & 0 & A_{33}(X) \end{pmatrix}$$

onde $A_{11}(X), A_{22}(X)$ e $A_{33}(X)$ são matrizes quadradas e as outras de tamanhos adequados. A aplicação

$$X \to A_{ii}(X)$$

é um homomorfismo de álgebras para todo i.

Denotando

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \cdots & * & * & * \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \cdots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} & \cdots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & \cdots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2p-1,2p} & a_{2p-1,2p+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2p,2p} & a_{2p,2p+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

temos pelo exposto acima que para cada $1 \leqslant k \leqslant p-1$ a função $\psi_k : B_n \to M_5(R)$ dada por

$$\psi_k(X) = \begin{pmatrix} 0 & a_{2k-1,2k} & a_{2k-1,2k+1} & a_{2k-1,2k+2} & a_{2k-1,2k+3} \\ 0 & a_{2k,2k} & a_{2k,2k+1} & a_{2k,2k+2} & a_{2k,2k+3} \\ 0 & 0 & 0 & a_{2k+1,2k+2} & a_{2k+1,2k+3} \\ 0 & 0 & 0 & a_{2k+2,2k+2} & a_{2k+2,2k+3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é um homomorfismo de álgebras.

Note que

$$\psi_1(D) = \psi_2(D) = \ldots = \psi_{p-1}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\psi_1(\mathbf{r}) = \psi_2(\mathbf{r}) = \ldots = \psi_{p-1}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

para toda matriz $\mathbf{r}$ como em (2.3). Como a álgebra B_n é gerada por D e pelas matrizes da forma (2.3) temos

$$\psi_1(X) = \psi_2(X) = \ldots = \psi_{p-1}(X)$$

para cada $X \in B_n$. Comparando as entradas de $\psi_1(X)$, $\psi_2(X), \ldots, \psi_{p-1}(X)$ temos o resultado desejado. $\square$

Agora vamos estudar um pouco os elementos de B_n. Para isso, considere as matrizes abaixo:

Notação $X_i^{(j)}$.

Fixe $3 \leq k \leq n$ e sejam $X_i^{(j)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k$ e $j = 1, 2)$ elementos arbitrários de B_n com

$$X_i^{(j)} = \begin{pmatrix} 0 & u_i^{(j)} & * & * & * & \ldots & * & * & * \\ 0 & r_i^{(j)} & v_i^{(j)} & * & * & \ldots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & u_i^{(j)} & * & \ldots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & r_i^{(j)} & v_i^{(j)} & \ldots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & u_i^{(j)} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & r_i^{(j)} & v_i^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

onde $r_i^{(j)} \in I, u_i^{(j)}, v_i^{(j)} \in R$.

Queremos calcular as entradas da diagonal principal e da diagonal secundária (diagonal acima da principal) das matrizes $[X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}]$ e $[X_3^{(j)}, X_1^{(j)}, X_2^{(j)}]$. Por comodidade e para evitar uma grande quantidade de notações, faremos a análise apenas no primeiro bloco 4×4:

$$\begin{pmatrix} 0 & u_i^{(j)} & * & * \\ 0 & r_i^{(j)} & v_i^{(j)} & * \\ 0 & 0 & 0 & u_i^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & r_i^{(j)} \end{pmatrix}$$

O primeiro bloco 4×4 de $X_1^{(j)} X_2^{(j)}$ é

$$\begin{pmatrix} 0 & u_1^{(j)} r_2^{(j)} & * & * \\ 0 & r_1^{(j)} r_2^{(j)} & r_1^{(j)} v_2^{(j)} & * \\ 0 & 0 & 0 & u_1^{(j)} r_2^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & r_1^{(j)} r_2^{(j)} \end{pmatrix}$$

e de $[X_1^{(j)}, X_2^{(j)}]$ é

$$\begin{pmatrix} 0 & u_1^{(j)} r_2^{(j)} - u_2^{(j)} r_1^{(j)} & * & * \\ 0 & [r_1^{(j)}, r_2^{(j)}] & r_1^{(j)} v_2^{(j)} - r_2^{(j)} v_1^{(j)} & * \\ 0 & 0 & 0 & u_1^{(j)} r_2^{(j)} - u_2^{(j)} r_1^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & [r_1^{(j)}, r_2^{(j)}] \end{pmatrix}.$$

De $[X_1^{(j)}, X_2^{(j)}] X_3^{(j)}$ temos

$$\begin{pmatrix} 0 & (u_1^{(j)} r_2^{(j)} - u_2^{(j)} r_1^{(j)}) r_3^{(j)} & * & * \\ 0 & [r_1^{(j)}, r_2^{(j)}] r_3^{(j)} & [r_1^{(j)}, r_2^{(j)}] v_3^{(j)} & * \\ 0 & 0 & 0 & (u_1^{(j)} r_2^{(j)} - u_2^{(j)} r_1^{(j)}) r_3^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & [r_1^{(j)}, r_2^{(j)}] r_3^{(j)} \end{pmatrix},$$

e de $X_3^{(j)} [X_1^{(j)}, X_2^{(j)}]$ temos

$$\begin{pmatrix} 0 & u_3^{(j)}[r_1^{(j)}, r_2^{(j)}] & * & * \\ 0 & r_3^{(j)}[r_1^{(j)}, r_2^{(j)}] & r_3^{(j)}(r_1^{(j)}v_2^{(j)} - r_2^{(j)}v_1^{(j)}) & * \\ 0 & 0 & 0 & u_3^{(j)}[r_1^{(j)}, r_2^{(j)}] \\ 0 & 0 & 0 & r_3^{(j)}[r_1^{(j)}, r_2^{(j)}] \end{pmatrix}.$$

Como $[x_1, x_2, x_3]$ é uma identidade polinomial para a álgebra R, temos que $[r_1^{(j)}, r_2^{(j)}, r_3^{(j)}] = 0$. Logo, o primeiro bloco 4×4 da matriz $[X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}]$ é

$$\begin{pmatrix} 0 & \bar{u}^{(j)} & * & * \\ 0 & 0 & \bar{v}^{(j)} & * \\ 0 & 0 & 0 & \bar{u}^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(j)} &= (u_1^{(j)}r_2^{(j)} - u_2^{(j)}r_1^{(j)})r_3^{(j)} - u_3^{(j)}[r_1^{(j)}, r_2^{(j)}] \\ \bar{v}^{(j)} &= [r_1^{(j)}, r_2^{(j)}]v_3^{(j)} - r_3^{(j)}(r_1^{(j)}v_2^{(j)} - r_2^{(j)}v_1^{(j)}). \end{aligned} \tag{2.6}$$

A matriz inteira segue o mesmo padrão, isto é,

$$[X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}] = \begin{pmatrix} 0 & \bar{u}^{(j)} & * & * & \dots & * & * & * \\ 0 & 0 & \bar{v}^{(j)} & * & \dots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bar{u}^{(j)} & \dots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{u}^{(j)} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \bar{v}^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da mesma forma temos

$$[X_3^{(j)}, X_1^{(j)}, X_2^{(j)}] = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{u}^{(j)} & * & * & \dots & * & * & * \\ 0 & 0 & \tilde{v}^{(j)} & * & \dots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{u}^{(j)} & \dots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{u}^{(j)} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \tilde{v}^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(j)} &= (u_3^{(j)}r_1^{(j)} - u_1^{(j)}r_3^{(j)})r_2^{(j)} - u_2^{(j)}[r_3^{(j)}, r_1^{(j)}] \\ \tilde{v}^{(j)} &= [r_3^{(j)}, r_1^{(j)}]v_2^{(j)} - r_2^{(j)}(r_3^{(j)}v_1^{(j)} - r_1^{(j)}v_3^{(j)}). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Notação H.

Denote $H = [X_3^{(1)}, X_1^{(1)}, X_2^{(1)}][X_3^{(2)}, X_1^{(2)}, X_2^{(2)}]$. Observe que

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tilde{u}^{(1)}\tilde{v}^{(2)} & * & * & \dots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{v}^{(1)}\tilde{u}^{(2)} & * & \dots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{u}^{(1)}\tilde{v}^{(2)} & \dots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \tilde{u}^{(1)}\tilde{v}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como H é de tamanho $(2p+1) \times (2p+1)$ temos

$$H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & (\tilde{u}^{(1)}\tilde{v}^{(2)})^2 & * & * & \dots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\tilde{v}^{(1)}\tilde{u}^{(2)})^2 & * & \dots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\tilde{u}^{(1)}\tilde{v}^{(2)})^2 & \dots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & (\tilde{u}^{(1)}\tilde{v}^{(2)})^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$H^{p-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & (\tilde{u}^{(1)}\tilde{v}^{(2)})^{p-1} & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & (\tilde{v}^{(1)}\tilde{u}^{(2)})^{p-1} & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & (\tilde{u}^{(1)}\tilde{v}^{(2)})^{p-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$[X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, X_3^{(2)}]H^{p-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \bar{u}^{(2)}(\tilde{v}^{(1)}\tilde{u}^{(2)})^{p-1} & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \bar{v}^{(2)}(\tilde{u}^{(1)}\tilde{v}^{(2)})^{p-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notação A.

Seja A um elemento de B_n dado por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & * & * & \dots & * & * & * \\ 0 & a & * & \dots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $a \in I \cap Z(R)$.

As seguintes igualdades envolvendo o polinômio $f(x_1, x_2) = x_1^{p-1}x_2^{p-1}[x_1, x_2]$ são válidas:

$$f(X_i^{(1)}, X_i^{(2)}) = \begin{pmatrix} 0 & * & * & \dots & * & * & * \\ 0 & f(r_i^{(1)}, r_i^{(2)}) & * & \dots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f(r_i^{(1)}, r_i^{(2)}) & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(X_3^{(1)}, X_3^{(2)})A = \begin{pmatrix} 0 & * & * & \dots & * & * & * \\ 0 & f(r_3^{(1)}, r_3^{(2)})a & * & \dots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f(r_3^{(1)}, r_3^{(2)})a & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(X_3^{(1)}, X_3^{(2)})A[X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, X_3^{(2)}]H^{p-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & \dots & 0 & f(r_3^{(1)}, r_3^{(2)})a\bar{v}^{(2)}(\tilde{u}^{(1)}\tilde{v}^{(2)})^{p-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notação W.

Denote por W o elemento

$$W = [X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, X_3^{(1)}]f(X_3^{(1)}, X_3^{(2)})A[X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, X_3^{(2)}]H^{p-1}. \tag{2.8}$$

Temos a seguinte igualdade:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & \bar{u}^{(1)} & * & * & \dots & * & * & * \\ 0 & 0 & \bar{v}^{(1)} & * & \dots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bar{u}^{(1)} & \dots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{u}^{(1)} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \bar{v}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & \dots & 0 & f(r_3^{(1)}, r_3^{(2)})a\bar{v}^{(2)}(\tilde{u}^{(1)}\tilde{v}^{(2)})^{p-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \bar{u}^{(1)}f(r_3^{(1)}, r_3^{(2)})a\bar{v}^{(2)}(\tilde{u}^{(1)}\tilde{v}^{(2)})^{p-1} + \Delta_n \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notação d.

Denote por d o elemento

$$d = \bar{u}^{(1)}f(r_3^{(1)}, r_3^{(2)})a\bar{v}^{(2)}(\tilde{u}^{(1)}\tilde{v}^{(2)})^{p-1}$$

que aparece na entrada da matriz W.

Estamos quase prontos para a demonstração da Proposição 2.2. Seguem mais algumas considerações: como $[x_1, x_2, x_3]$ é uma identidade polinomial para R, temos pelo Lema 1.19 as seguintes informações:

1. $[x, y][x, z] = 0$ para todo $x, y, z \in R$.
2. $f(x, y)$ pertence ao centro de R para todo $x, y \in R$.
3. $(r_i^{(j)})^p = 0$ pois na definição de $X_i^{(j)}$ temos que $r_i^{(j)} \in I$.

Seguem dessas informações, outras duas mais que serão usadas frequentemente até o final da seção:

$$r_3^{(1)}f(r_3^{(1)}, r_3^{(2)}) = 0 \quad \text{e} \quad f(r_3^{(1)}, r_3^{(2)})r_3^{(2)} = 0.$$

Por (2.6) vale

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(1)}f(r_3^{(1)}, r_3^{(2)})\bar{v}^{(2)} &= ((u_1^{(1)}r_2^{(1)} - u_2^{(1)}r_1^{(1)})r_3^{(1)} - u_3^{(1)}[r_1^{(1)}, r_2^{(1)}])f(r_3^{(1)}, r_3^{(2)})\bar{v}^{(2)} \\ &= -u_3^{(1)}[r_1^{(1)}, r_2^{(1)}]f(r_3^{(1)}, r_3^{(2)})\bar{v}^{(2)} \\ &= -u_3^{(1)}[r_1^{(1)}, r_2^{(1)}]f(r_3^{(1)}, r_3^{(2)})([r_1^{(2)}, r_2^{(2)}]v_3^{(2)} - r_3^{(2)}(r_1^{(2)}v_2^{(2)} - r_2^{(2)}v_1^{(2)})) \\ &= -u_3^{(1)}[r_1^{(1)}, r_2^{(1)}]f(r_3^{(1)}, r_3^{(2)})[r_1^{(2)}, r_2^{(2)}]v_3^{(2)} \\ &= -u_3^{(1)}v_3^{(2)}[r_1^{(1)}, r_2^{(1)}][r_1^{(2)}, r_2^{(2)}]f(r_3^{(1)}, r_3^{(2)}). \end{aligned}$$

Daí, como a pertence ao centro de R, temos

$$\begin{aligned} d &= \bar{u}^{(1)}f(r_3^{(1)}, r_3^{(2)})\bar{v}^{(2)}a(\tilde{u}^{(1)}\tilde{v}^{(2)})^{p-1} \\ &= -u_3^{(1)}v_3^{(2)}[r_1^{(1)}, r_2^{(1)}][r_1^{(2)}, r_2^{(2)}]f(r_3^{(1)}, r_3^{(2)})a(\tilde{u}^{(1)}\tilde{v}^{(2)})^{p-1}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Agora, procuremos os termos de $\tilde{u}^{(1)}\tilde{v}^{(2)}$ que contêm $r_3^{(1)}$ e $r_3^{(2)}$. De

$\tilde{u}^{(1)} = (u_3^{(1)}r_1^{(1)} - u_1^{(1)}r_3^{(1)})r_2^{(1)} - u_2^{(1)}[r_3^{(1)}, r_1^{(1)}]$ e $\tilde{v}^{(2)} = [r_3^{(2)}, r_1^{(2)}]v_2^{(2)} - r_2^{(2)}(r_3^{(2)}v_1^{(2)} - r_1^{(2)}v_3^{(2)})$

temos

$$\tilde{u}^{(1)}\tilde{v}^{(2)}f(r_3^{(1)}, r_3^{(2)}) = (u_3^{(1)}r_1^{(1)}r_2^{(1)})(r_2^{(2)}r_1^{(2)}v_3^{(2)})f(r_3^{(1)}, r_3^{(2)})$$

e também

$$(\tilde{u}^{(1)}\tilde{v}^{(2)})^{p-1}f(r_3^{(1)}, r_3^{(2)}) = (u_3^{(1)}r_1^{(1)}r_2^{(1)}r_2^{(2)}r_1^{(2)}v_3^{(2)})^{p-1}f(r_3^{(1)}, r_3^{(2)}).$$

Como a e $f(r_3^{(1)}, r_3^{(2)})$ estão no centro de R, temos por (2.9) que

$$d = -u_3^{(1)}v_3^{(2)}[r_1^{(1)}, r_2^{(1)}][r_1^{(2)}, r_2^{(2)}](u_3^{(1)}r_1^{(1)}r_2^{(1)}r_2^{(2)}r_1^{(2)}v_3^{(2)})^{p-1}f(r_3^{(1)}, r_3^{(2)})a.$$

Observe que $[r_1^{(1)}, r_2^{(1)}]$ e $[r_1^{(2)}, r_2^{(2)}]$ aparecem na expressão anterior. Logo pelo item 1 da página anterior, $r_1^{(1)}, r_2^{(1)}, r_1^{(2)}, r_2^{(2)}$ podem comutar com os outros termos que estão no produto. Obtemos assim:

$$\begin{aligned} d &= -u_3^{(1)}v_3^{(2)}[r_1^{(1)}, r_2^{(1)}][r_1^{(2)}, r_2^{(2)}](u_3^{(1)}v_3^{(2)})^{p-1}(r_1^{(1)}r_2^{(1)}r_2^{(2)}r_1^{(2)})^{p-1}f(r_3^{(1)}, r_3^{(2)})a \\ &= -u_3^{(1)}v_3^{(2)}[r_1^{(1)}, r_2^{(1)}][r_1^{(2)}, r_2^{(2)}](u_3^{(1)}v_3^{(2)})^{p-1}(r_1^{(1)})^{p-1}(r_2^{(1)})^{p-1}(r_2^{(2)})^{p-1}(r_1^{(2)})^{p-1}f(r_3^{(1)}, r_3^{(2)})a \\ &= -(u_3^{(1)}v_3^{(2)})^p f(r_1^{(1)}, r_2^{(1)})f(r_1^{(2)}, r_2^{(2)})f(r_3^{(1)}, r_3^{(2)})a. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Aqui faremos uma observação a respeito do elemento $(u_3^{(1)}v_3^{(2)})^p$ que aparece na expressão de d. Se $r \in R$ então $r = \alpha + \beta$ para algum $\alpha \in I$ e $\beta \in F$. Logo

$$r^p = \alpha^p + \beta^p = \beta^p \in F.$$

Em particular, $(u_3^{(1)}v_3^{(2)})^p \in F$.

Agora finalizaremos a seção dando a demonstração da Proposição 2.2:

Prova da Proposição 2.2: Relembramos o polinômio

$$w_k(x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_k) = [x_1, x_2, x_3]f(x_3, y_3)\cdots f(x_k, y_k)[y_1, y_2, y_3]([x_3, x_1, x_2][y_3, y_1, y_2])^{p-1}.$$

da proposição. De (2.5), devemos mostrar que

$$w_k(X_1^{(1)}, \ldots, X_k^{(1)}, X_1^{(2)}, \ldots, X_k^{(2)}) \tag{2.11}$$

é 0 para todo $k \leq n$ e não nulo se $k = n + 1$ (para uma adequada substituição dos $X_i^{(j)}$).

As notações usadas serão as mesmas utilizadas ao longo da seção.

Fazendo

$$A = f(X_4^{(1)}, X_4^{(2)})\cdots f(X_k^{(1)}, X_k^{(2)}),$$

temos que

$$a = f(r_4^{(1)}, r_4^{(2)})\cdots f(r_k^{(1)}, r_k^{(2)}).$$

Observe que de fato a pertence ao centro de R como requer a definição de A. Observe também que

$$w_k(X_1^{(1)}, \ldots, X_k^{(1)}, X_1^{(2)}, \ldots, X_k^{(2)}) = W, \tag{2.12}$$

onde W é definido em (2.8). Temos que W é nulo se, e somente se, $d \in \Delta_n$. De (2.10) segue que

$$d = -(u_3^{(1)}v_3^{(2)})^p f(r_1^{(1)}, r_2^{(1)})f(r_1^{(2)}, r_2^{(2)})f(r_3^{(1)}, r_3^{(2)})f(r_4^{(1)}, r_4^{(2)})\cdots f(r_k^{(1)}, r_k^{(2)}).$$

Se $k \leq n$ temos que $d \in \Delta_n$ e portanto $W = 0$.

Suponha $k = n+1$. Na definição dos $X_i^{(j)}$'s considere

$$u_i^{(j)} = v_i^{(j)} = 1.$$

As entradas, da diagonal principal de $X_i^{(j)}$, defina da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ccccccccc} r_1^{(1)} & r_2^{(1)} & r_1^{(2)} & r_2^{(2)} & r_3^{(1)} & r_3^{(2)} & \ldots & r_k^{(1)} & r_k^{(2)} \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & & \shortparallel & \shortparallel \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & \ldots & z_{2k-1} & z_{2k} \end{array}$$

onde os z_i's aparecem no Lema 2.1. As demais entradas de $X_i^{(j)}$ defina como 0. Neste caso temos

$$d = -f(z_1, z_2)f(z_3, z_4)\cdots f(z_{2k-1}, z_{2k}) \notin \Delta_n$$

e portanto $W \neq 0$ como queríamos. $\square$

2.2 Um T-ideal infinitamente gerado

Assim como na seção anterior, o corpo F considerado será de característica $p \geq 3$. Nesta seção, mostraremos que B_n é uma álgebra nil para todo n. Mais precisamente, mostraremos que x_1^{2p} é uma identidade polinomial para B_n. Depois exibiremos um T-ideal em $F_0\langle X\rangle$ infinitamente gerado que contém x_1^{2p}.

Antes de provar que x_1^{2p} é uma identidade polinomial para B_n, faremos um certo estudo do que vem a ser X^{2p}, onde $X \in B_n$. O fato de X ser triangular implica que

$$X = \sum_{1\leq i\leq j\leq 2p+1} a_{ij}E_{ij},$$

onde $a_{ii} \in I$ $(i = 2, 4, \ldots, 2p)$ e $a_{ii} = 0$ $(i = 1, 3, \ldots, 2p+1)$. Multiplicando temos

$$X^{2p} = \sum_{l_1\leq\ldots\leq l_{2p+1}} a_{l_1l_2}a_{l_2l_3}\ldots a_{l_{2p}l_{2p+1}}E_{l_1l_{2p+1}}.$$

Seja m_{ij} a entrada (i, j) da matriz X^{2p}. Note que $m_{ii} = a_{ii}^{2p} = 0$. Assim, para verificar que X^{2p} é a matriz nula, basta estudar m_{ij} quando $i < j$. Explicitando temos:

$$m_{ij} = \sum_{i=l_1\leq\ldots\leq l_{2p+1}=j} a_{l_1l_2}a_{l_2l_3}\ldots a_{l_{2p}l_{2p+1}}.$$

A cada termo $a_{l_1l_2}a_{l_2l_3}\ldots a_{l_{2p}l_{2p+1}}$ acima temos associado uma *sequência de índices*

$$(i = l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq \ldots \leq l_{2p+1} = j).$$

Como $a_{ll} = 0$ para l ímpar, temos que $a_{l_1l_2}a_{l_2l_3}\ldots a_{l_{2p}l_{2p+1}} = 0$ para toda sequência de índices com algum índice ímpar repetido. Como $X \in B_n$ temos que $a_{22} = a_{44} = \ldots = a_{(2p)(2p)} = r$ para algum $r \in I$. Assim, cada $a_{l_1l_2}a_{l_2l_3}\ldots a_{l_{2p}l_{2p+1}}$ pode ser escrito como

$$b_0r^{i_1}b_1r^{i_2}b_2\ldots b_{t-1}r^{i_t}b_t \tag{2.13}$$

onde t é a quantidade de números pares distintos na sequência de índices.

Por exemplo, se $p = 5$, então o produto

$$a_{14}a_{44}a_{44}a_{44}a_{45}a_{57}a_{78}a_{88}a_{88}a_{89}$$

tem uma sequência de índices $(1, 4, 4, 4, 4, 5, 7, 8, 8, 8, 9)$, tem $t = 2$ índices pares distintos e pode ser escrito como

$$\underbrace{a_{14}}_{b_0}\underbrace{a_{44}a_{44}a_{44}}_{r^3}\underbrace{a_{45}a_{57}a_{78}}_{b_1}\underbrace{a_{88}a_{88}}_{r^2}\underbrace{a_{89}}_{b_2}.$$

Daremos mais um exemplo, o produto

$$a_{24}a_{45}a_{56}a_{66}a_{66}a_{66}a_{66}a_{67}a_{79}a_{9,10}$$

pode ser escrito assim:

$$\underbrace{1}_{b_0}r^0\underbrace{a_{24}}_{b_1}r^0\underbrace{a_{45}a_{56}}_{b_2}r^4\underbrace{a_{67}a_{79}a_{9,10}}_{b_3}r^0\underbrace{1}_{b_4}.$$

Neste caso, a sequência de índices associada é $(2, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 9, 10)$. Note que r está sendo escrito em (2.13) no meio de índices pares.

Agora apresentaremos alguns lemas envolvendo somas de elementos do tipo (2.13).

Lema 2.4. *Seja Ω uma álgebra que satisfaz a identidade polinomial $[x_1, x_2, x_3]$. Sejam t,k inteiros tais que $t \geq 1$ e $k \geq 0$. Então para todo $a_1, a_2, \ldots, a_{t-1}, r \in \Omega$ temos*

$$\sum_{\substack{i_1+i_2+\ldots+i_t=k \\ i_1,i_2,\ldots,i_t\geq 0}} r^{i_1}a_1r^{i_2}a_2\ldots a_{t-1}r^{i_t} = \binom{k+t-1}{t-1}r^k a_1a_2\ldots a_{t-1}$$

$$+\binom{k+t-1}{t}r^{k-1}\left(\sum_{j=1}^{t-1}(t-j)a_1\ldots a_{j-1}a_{j+1}\ldots a_{t-1}[a_j, r]\right). \tag{2.14}$$

Prova: Seja

$$\sigma(t, k) = \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_t=k} r^{i_1}a_1r^{i_2}a_2\ldots a_{t-1}r^{i_t}.$$

Devemos provar que a igualdade envolvendo $\sigma(t, k)$ é válida para todo (t, k). Observe que o lema é verdadeiro para os casos $(1, k)$ e $(t, 0)$. Assim, para provar o lema é suficiente provar o seguinte: se o resultado é verdadeiro para $(t, k-1)$ e $(t-1, k)$, então ele é verdadeiro para (t, k) (veja a tabela).

	$(1,1)$	$\cdots$	$(1,k-1)$	$(1,k)$	$\cdots$
$(2,0)$	$(2,1)$	$\cdots$	$(2,k-1)$	$(2,k)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	
$(t-1,0)$	$(t-1,1)$	$\cdots$	$(t-1,k-1)$	$(\mathbf{t-1,k})$	$\cdots$
$(t,0)$	$(t,1)$	$\cdots$	$(\mathbf{t,k-1})$	$(\mathbf{t,k})$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	

Usaremos a seguinte relação:

$$\sigma(t, k-1)r + \sigma(t-1, k)a_{t-1} = \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_t=k-1} r^{i_1}a_1r^{i_2}a_2\ldots a_{t-1}r^{i_t}r$$

$$+\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_{t-1}=k} r^{i_1}a_1r^{i_2}a_2\ldots a_{t-2}r^{i_{t-1}}a_{t-1}=\sigma(t,k).$$

Temos $[a,r]b=b[a,r]$ e $[a,r][b,r]=0$. Aplicando a hipótese de indução temos

$$\begin{aligned}
\sigma(t,k-1)r=&\binom{k+t-2}{t-1}r^{k-1}a_1a_2\ldots a_{t-1}r\\
&+\binom{k+t-2}{t}r^{k-2}\left(\sum_{j=1}^{t-1}(t-j)a_1\ldots a_{j-1}a_{j+1}\ldots a_{t-1}[a_j,r]r\right)\\
=&\binom{k+t-2}{t-1}r^{k}a_1a_2\ldots a_{t-1}\\
&+\binom{k+t-2}{t-1}r^{k-1}\left(\sum_{j=1}^{t-1}a_1\ldots a_{j-1}a_{j+1}\ldots a_{t-1}[a_j,r]\right)\\
&+\binom{k+t-2}{t}r^{k-1}\left(\sum_{j=1}^{t-1}(t-j)a_1\ldots a_{j-1}a_{j+1}\ldots a_{t-1}[a_j,r]\right)
\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
\sigma(t-1,k)a_{t-1}=&\binom{k+t-2}{t-2}r^{k}a_1a_2\ldots a_{t-2}a_{t-1}\\
&+\binom{k+t-2}{t-1}r^{k-1}\left(\sum_{j=1}^{t-2}(t-j-1)a_1\ldots a_{j-1}a_{j+1}\ldots a_{t-2}[a_j,r]a_{t-1}\right)\\
=&\binom{k+t-2}{t-2}r^{k}a_1a_2\ldots a_{t-1}\\
&+\binom{k+t-2}{t-1}r^{k-1}\left(\sum_{j=1}^{t-2}(t-j)a_1\ldots a_{j-1}a_{j+1}\ldots a_{t-1}[a_j,r]\right)\\
&-\binom{k+t-2}{t-1}r^{k-1}\left(\sum_{j=1}^{t-2}a_1\ldots a_{j-1}a_{j+1}\ldots a_{t-1}[a_j,r]\right).
\end{aligned}$$

Agrupando e somando binomiais o resultado segue. □

Lema 2.5. *Seja Ω uma álgebra que satisfaz as identidades polinomiais*

$$[x_1,x_2,x_3] \quad e \quad x_1^p.$$

Sejam $1\le t\le p-1$ e $k\ge p-t+1$. Então, para todo $a_1,a_2,\ldots,a_{t-1},r\in\Omega$ temos

$$\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_t=k} r^{i_1}a_1r^{i_2}a_2\ldots a_{t-1}r^{i_t}=0. \tag{2.15}$$

Prova: Pelo Lema 2.4 temos

$$\sigma(t,k)=\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_t=k} r^{i_1}a_1r^{i_2}a_2\ldots a_{t-1}r^{i_t}=\binom{k+t-1}{t-1}r^ka_1a_2\ldots a_{t-1}+\binom{k+t-1}{t}r^{k-1}f,$$

onde $f\in\Omega$. Vamos mostrar que $\sigma(t,k)=0$ separarando em 3 casos:

Caso 1. $k \geq p+1$.
Como x_1^p é uma identidade para Ω, temos $r^k = 0$ e $r^{k-1} = 0$. Logo $\sigma(t,k) = 0$.

Caso 2. $k = p$.
Neste caso, $r^p = 0$ anula o primeiro somando. Por outro lado,

$$\binom{p+t-1}{t} = \frac{(p+t-1)!}{t!(p-1)!} = \frac{(p+t-1)\cdots p}{t!}.$$

Como $p > t$ e p é primo, p não aparece na decomposição prima de $t!$. Logo p divide $\binom{p+t-1}{t}$ e se anula o segundo somando.

Caso 3. $p-t+1 \leq k \leq p-1$.
A desigualdade deste caso implica que $k+1 \leq p \leq k+t-1$. Temos também por hipótese que $t+1 \leq p$. Agora abriremos os binomiais que aparecem acima:

$$\binom{k+t-1}{t-1} = \frac{(k+t-1)!}{(t-1)!k!} = \frac{(k+t-1)\cdots t}{k!}$$

e

$$\binom{k+t-1}{t} = \frac{(k+t-1)!}{t!(k-1)!} = \frac{(k+t-1)\cdots k}{t!}.$$

Uma vez que $p \geq k+1$ e p é primo, p não aparece na decomposição de $k!$. Além disso, $(k+t-1)\cdots t$ é múltiplo de p pois $t \leq p \leq k+t-1$. Logo p divide

$$\frac{(k+t-1)\cdots t}{k!}$$

e o primeiro somando de $\sigma(t,k)$ é 0.
Com raciocínio análogo, p divide

$$\frac{(k+t-1)\cdots k}{t!},$$

e portanto a segunda parcela de $\sigma(t,k)$ também é 0.
Finalizamos a demonstração do lema. □

Lema 2.6. *Seja Ω uma álgebra que satisfaz as identidades polinomiais*

$$[x_1, x_2, x_3] \quad e \quad x_1^p.$$

Sejam $k \geq 1$ e $0 \leq l \leq p-1$. Então para quaisquer $a_0, a_1, r \in \Omega$ temos

$$\sum_{\substack{j_1+\ldots+j_{p-1}=l \\ 0\leq j_1,\ldots,j_{p-1}\leq 1}} \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_p=k \\ i_1,\ldots,i_p\geq 0}} r^{i_1}a_{j_1}r^{i_2}a_{j_2}\ldots r^{i_{p-1}}a_{j_{p-1}}r^{i_p} = 0.$$

Prova: Seja

$$\sigma(j) = \sigma(j_1, j_2, \ldots, j_{p-1}) = \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_p=k \\ i_1,\ldots,i_p\geq 0}} r^{i_1}a_{j_1}r^{i_2}a_{j_2}\ldots r^{i_{p-1}}a_{j_{p-1}}r^{i_p}$$

onde $j = (j_1, j_2, \ldots, j_{p-1})$. Pelo Lema 2.4

$$\begin{aligned}\sigma(j) =&\binom{k+p-1}{p-1} r^k a_{j_1} \ldots a_{j_{p-1}} \\ &+ \binom{k+p-1}{p} r^{k-1} \sum_{h=1}^{p-1} (p-h) a_{j_1} \ldots a_{j_{h-1}} a_{j_{h+1}} \ldots a_{j_{p-1}} [a_{j_h}, r].\end{aligned}$$

Observe que

$$\binom{k+p-1}{p-1} = \frac{(k+p-1)(k+p-2)\ldots(k+1)}{(p-1)!}$$

Portanto, se $p > k$ temos

$$\binom{k+p-1}{p-1} = 0$$

e se $p \leq k$ temos $r^k = 0$. Acabamos de mostrar que

$$\sigma(j) = \binom{k+p-1}{p} r^{k-1} \sum_{h=1}^{p-1} (p-h) a_{j_1} \ldots a_{j_{h-1}} a_{j_{h+1}} \ldots a_{j_{p-1}} [a_{j_h}, r].$$

Assim, temos

$$\sum_{\substack{j_1+\ldots+j_{p-1}=l \\ 0 \leq j_1, \ldots, j_{p-1} \leq 1}} \sigma(j) = \binom{k+p-1}{p} r^{k-1} \sum_{h=1}^{p-1} (p-h) \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_{p-1}=l \\ 0 \leq j_1, \ldots, j_{p-1} \leq 1}} a_{j_1} \ldots a_{j_{h-1}} a_{j_{h+1}} \ldots a_{j_{p-1}} [a_{j_h}, r].$$

Note que o somatório

$$\tau = \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_{p-1}=l \\ 0 \leq j_1, \ldots, j_{p-1} \leq 1}} a_{j_1} \ldots a_{j_{h-1}} a_{j_{h+1}} \ldots a_{j_{p-1}} [a_{j_h}, r]$$

independe do h, isto é,

$$\begin{aligned}\tau &= \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_{p-1}=l \\ 0 \leq j_1, \ldots, j_{p-1} \leq 1}} a_{j_1} \ldots a_{j_{p-2}} [a_{j_{p-1}}, r] \\ &\vdots \\ &= \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_{p-1}=l \\ 0 \leq j_1, \ldots, j_{p-1} \leq 1}} a_{j_1} a_{j_3} \ldots a_{j_{p-1}} [a_{j_2}, r] \\ &= \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_{p-1}=l \\ 0 \leq j_1, \ldots, j_{p-1} \leq 1}} a_{j_2} \ldots a_{j_{p-1}} [a_{j_1}, r].\end{aligned}$$

Finalmente

$$\sum_{\substack{j_1+\ldots+j_{p-1}=l \\ 0 \leq j_1, \ldots, j_{p-1} \leq 1}} \sigma(j) = \binom{k+p-1}{p} r^{k-1} \sum_{h=1}^{p-1} (p-h) \tau = \binom{k+p-1}{p} r^{k-1} \frac{p(p-1)}{2} \tau = 0$$

pois $\mathrm{car}(F) = p \geq 3$. $\square$

Lema 2.7. *Seja Ω uma álgebra que satisfaz a identidade polinomial $[x_1, x_2, x_3]$. Se $k \geq 0$, então para quaisquer $a, d_0, \ldots, d_k \in \Omega$ temos*

$$\sum_{\substack{i_1+\ldots+i_{p-1}=k \\ i_1,\ldots,i_{p-1}\geq 0}} \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_p=1 \\ j_1,\ldots,j_p\geq 0}} a^{j_1} d_{i_1} a^{j_2} d_{i_2} \ldots a^{j_{p-1}} d_{i_{p-1}} a^{j_p} = 0.$$

Prova: Como a característica do corpo é p, temos que

$$\binom{p}{p-1} = 0.$$

Segue do Lema 2.4 que

$$\sum_{\substack{j_1+\ldots+j_p=1 \\ j_1,\ldots,j_p\geq 0}} a^{j_1} d_{i_1} a^{j_2} d_{i_2} \ldots a^{j_{p-1}} d_{i_{p-1}} a^{j_p} = \sum_{s=1}^{p-1} (p-s) d_{i_1} \ldots d_{i_{s-1}} d_{i_{s+1}} \ldots d_{i_{p-1}} [d_{i_s}, a].$$

Denotando

$$\sigma = \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_{p-1}=k \\ i_1,\ldots,i_{p-1}\geq 0}} \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_p=1 \\ j_1,\ldots,j_p\geq 0}} a^{j_1} d_{i_1} a^{j_2} d_{i_2} \ldots a^{j_{p-1}} d_{i_{p-1}} a^{j_p}$$

temos

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_{p-1}=k \\ i_1,\ldots,i_{p-1}\geq 0}} \left(\sum_{s=1}^{p-1} (p-s) d_{i_1} \ldots d_{i_{s-1}} d_{i_{s+1}} \ldots d_{i_{p-1}} [d_{i_s}, a] \right) \\ &= \sum_{s=1}^{p-1} (p-s) \underbrace{\left(\sum_{\substack{i_1+\ldots+i_{p-1}=k \\ i_1,\ldots,i_{p-1}\geq 0}} d_{i_1} \ldots d_{i_{s-1}} d_{i_{s+1}} \ldots d_{i_{p-1}} [d_{i_s}, a] \right)}_{\tau}. \end{aligned}$$

Assim como na prova do lema anterior, temos que τ independe de s. Daí

$$\sigma = \left(\sum_{s=1}^{p-1} (p-s) \right) \tau = \frac{p(p-1)}{2} \tau = 0.$$

□

Voltando ao estudo da matriz X^{2p} no início desta seção, lembre que estávamos analisando a entrada

$$m_{ij} = \sum_{i=l_1 \leq \ldots \leq l_{2p+1}=j} a_{l_1 l_2} a_{l_2 l_3} \ldots a_{l_{2p} l_{2p+1}},$$

onde $i < j$. Fixe um elemento $a_{l_1 l_2} a_{l_2 l_3} \ldots a_{l_{2p} j}$ desse somatório e considere a sequência de índices $(l_1, l_2, \ldots, l_{2p}, j)$. Seja

$$\{m_1, m_2, \ldots, m_b, j\} = \{l_1, l_2, \ldots, l_{2p}, j\}, \tag{2.16}$$

onde $m_1 < m_2 < \ldots < m_b < j$. Já vimos que $a_{l_1 l_2} a_{l_2 l_3} \ldots a_{l_{2p} j}$ pode ser escrito como

$$b_0 r^{i_1} b_1 r^{i_2} b_2 \ldots r^{i_t} b_t \quad \text{onde} \quad b_0 b_1 \ldots b_t = a_{m_1 m_2} a_{m_2 m_3} \ldots a_{m_b j}.$$

Seja $\deg(b_0b_1\ldots b_t)$ a quantidade de a's que aparece em $b_0b_1\ldots b_t$, isto é, $\deg(b_0b_1\ldots b_t) = b$. O conjunto $\{m_1, m_2, \ldots, m_b, j\}$ tem t números pares e o número máximo de pares que poderíamos encontrar é p, pois ele está contido em $\{1, 2, \ldots, 2p+1\}$. Logo, existem $p-t$ pares que não aparecem em $\{m_1, m_2, \ldots, m_b, j\}$ e portanto

$$(\text{n}^{\text{o}} \text{ de elementos de } \{m_1, m_2, \ldots, m_b, j\}) \leq 2p+1-(p-t) = p+t+1.$$

Obtemos assim

$$\deg(b_0b_1\ldots b_t) \leq p+t.$$

Além disso, se $k = i_1 + i_2 + \ldots + i_t$, então $k = 2p - \deg(b_0b_1\ldots b_t)$. Logo

$$k \geq 2p-(p+t) = p-t.$$

Observação 2.8. Suponha que vale a igualdade

$$\deg(b_0b_1\ldots b_t) = p+t.$$

Então $k = p-t$ e o conjunto $\{m_1, m_2, \ldots, m_b, j\}$ tem $p+t+1$ elementos dos quais t são pares e $p+1$ são ímpares. Concluímos assim que todos os ímpares entre $1, \ldots, 2p+1$ aparecem em $\{m_1, m_2, \ldots, m_b, j\}$. Em particular, $m_1 = 1$ e $j = 2p+1$.

Observação 2.9. Observe que pelo menos um termo da sequência $(l_1, l_2, \ldots, l_{2p}, j)$ será um número par. Logo $t \geq 1$. Na verdade, $1 \leq t \leq p$, pois entre 1 e $2p+1$ existem p pares.

Teorema 2.10. *O polinômio x^{2p} é uma identidade polinomial para a álgebra B_n.*

Demonstração. Seguindo as notações do início desta seção e os comentários após a demonstração do Lema 2.7, devemos mostrar que $m_{ij} = 0$ para todo i, j. Para isso, observe que m_{ij} é a soma de elementos do tipo

$$b_0r^{i_1}b_1r^{i_2}b_2\ldots r^{i_t}b_t$$

e que a análise deste elemento foi feita acima. O que faremos é separar a soma envolvendo m_{ij} em subsomas e mostrar que cada subsoma dessa é nula.

Caso 1) $(i, j) \neq (1, 2p+1)$.
Pela Observação 2.8 temos que em todo elemento $b_0r^{i_1}b_1r^{i_2}b_2\ldots r^{i_t}b_t$ do somatório m_{ij} vale $\deg(b_0b_1\ldots b_t) < p+t$ e consequentemente $k \geq p-t+1$.

Vamos separar m_{ij} em p subsomas: fixado um $t = 1, \ldots, p$ a subsoma correspondente a esse t será formada pelos elementos do tipo

$$b_0r^{i_1}b_1r^{i_2}b_2\ldots r^{i_t}b_t.$$

a) Se $1 \leq t \leq p-1$ podemos separar a subsoma correspondente em várias subsomas fixando $b_0, b_1, \ldots, b_t$, isto é, cada subsoma teria o formato

$$\sum_{i_1+\ldots+i_t=k} b_0r^{i_1}b_1r^{i_2}b_2\ldots r^{i_t}b_t.$$

Observe que k está fixado (determinado), pois t está fixado e $k = 2p - \deg(b_0b_1\ldots b_t)$, como já foi comentado acima. Como $k \geq p-t+1$ segue do Lema 2.5 que

$$\sum_{i_1+\ldots+i_t=k} b_0r^{i_1}b_1r^{i_2}b_2\ldots r^{i_t}b_t = 0.$$

b) Se $t = p$ podemos separar a subsoma correspondente em várias subsomas fixando b_0 e b_p e fixando o grau $\deg(b_1 b_2 \dots b_{p-1}) = l$. Observe que consequentemente $k = i_1 + \dots + i_p$ fica fixado também. Um dos termos da soma seria assim:

$$b_0 r^{i_1} b_1 r^{i_2} b_2 \dots r^{i_p} b_p.$$

Como $t = p$, a sequência de índices associada contém todos os números pares entre 1 e $2p+1$. Assim, para cada termo b_j (para $1 \le j \le p-1$) temos duas possibilidades:

$$b_j = a_{2j,2j+2} \qquad \text{ou} \qquad b_j = a_{2j,2j+1} a_{2j+1,2j+2}.$$

Por (2.4)

$$\begin{aligned} a_{12} &= a_{34} = \dots = a_{2s-1,2s} = \dots \\ a_{13} &= a_{35} = \dots = a_{2s-1,2s+1} = \dots \\ a_{23} &= a_{45} = \dots = a_{2s,2s+1} = \dots \\ a_{24} &= a_{46} = \dots = a_{2s,2s+2} = \dots \end{aligned} \tag{2.17}$$

Logo

$$b_j = a_{24} =: c_1 \qquad \text{ou} \qquad b_j = a_{23} a_{34} =: c_2.$$

Se $b_j = c_{s_j}$ então $l = s_1 + s_2 + ... + s_{p-1}$. Finalizando, pelo Lema 2.6 temos

$$\sum_{\substack{s_1+s_2+\dots+s_{p-1}=l \\ s_1,\dots,s_{p-1}\ge 0}} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_p=k \\ i_1,\dots,i_p \ge 0}} b_0 r^{i_1} c_{s_1} r^{i_2} c_{s_2} \dots r^{i_{p-1}} c_{s_{p-1}} r^{i_p} b_p = 0.$$

Caso 2) $(i,j) = (1, 2p+1)$.
Escreva

$$m_{1,2p+1} = d_1 + d_2 + \Delta_n,$$

onde d_1 é a soma formada por termos $b_0 r^{i_1} b_1 r^{i_2} b_2 \dots r^{i_t} b_t$ que satisfazem $\deg(b_0 b_1 ... b_t) < p+t$, e d_2 é a soma formada por aqueles que tem $\deg(b_0 b_1 ... b_t) = p + t$.

Análise de d_1: observe que o mesmo argumento usado no Caso 1) pode ser usado para mostrar que $d_1 = 0$.

Análise de d_2: seja $b_0 r^{i_1} b_1 r^{i_2} b_2 \dots r^{i_t} b_t$ um elemento que aparece no somatório d_2. Como $\deg(b_0 b_1 ... b_t) = p + t$, segue da Observação 2.8 que a sequência de índices associada a $b_0 r^{i_1} b_1 r^{i_2} b_2 \dots r^{i_t} b_t$ contém $p + t + 1$ inteiros distintos, sendo $p + 1$ deles ímpares. Ou seja, todos os ímpares entre 1 e $2p + 1$ aparecem na sequência de índices. Considere o conjunto dos índices

$$\{1, m_2, \dots, m_b, 2p+1\}$$

como em (2.16). As possibilidades para

$$b_0 b_1 \dots b_t = a_{1m_2} a_{m_2 m_3} \dots a_{m_b,2p+1}$$

envolvem só a_{ij} com $j - i = 1$ ou 2. Denotando por c_l o número de a_{ij}'s em b_l, temos pelas igualdades (2.17) o seguinte:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_{13}^{c_0-1} a_{12} \\ b_j &= a_{23} a_{13}^{c_j-2} a_{12} \text{ para } 1 \le j \le t-1 \\ b_t &= a_{23} a_{13}^{c_t-1} \end{aligned}$$

Note que
$$p+t=\deg(b_0b_1...b_t)=c_0+c_1+\ldots+c_t.$$
Além disso, $k=i_1+i_2+\ldots+i_t=p-t$ e
$$\underbrace{(c_0-1)}_{l_0}+\underbrace{(c_t-1)}_{l_t}+\underbrace{(c_1-2)}_{l_1}+\ldots+\underbrace{(c_{t-1}-2)}_{l_{t-1}}=p+t-2-2(t-1)=p-t.$$

a) Se $1\leq t\leq p-2$, então para cada $i_1,i_2,\ldots,i_t$ fixados temos
$$\sum_{\substack{l_0+\ldots+l_t=p-t\\ l_0,\ldots,l_t\geq 0}} a_{13}^{l_0}(a_{12}r^{i_1}a_{23})a_{13}^{l_1}\ldots(a_{12}r^{i_t}a_{23})a_{13}^{l_t}=0$$
pelo Lema 2.5.

b) Se $t=p-1$ então $p-t=1$. Assim, o elemento $b_0r^{i_1}b_1r^{i_2}b_2\ldots r^{i_t}b_t$ no somatório $m_{1,2p+1}$ tem a aparência
$$a_{13}^{l_0}\underbrace{(a_{12}r^{i_1}a_{23})}_{d_{i_1}}a_{13}^{l_1}\ldots\underbrace{(a_{12}r^{i_{p-1}}a_{23})}_{d_{i_{p-1}}}a_{13}^{l_{p-1}}$$
com $l_0+\ldots+l_{p-1}=1$ e $i_1+\ldots+i_{p-1}=1$. Pelo Lema 2.6 temos
$$\sum_{\substack{i_1+\ldots+i_{p-1}=1\\ i_1,\ldots,i_{p-1}\geq 0}}\ \sum_{\substack{l_0+\ldots+l_{p-1}=1\\ l_0,\ldots,l_{p-1}\geq 0}} a_{13}^{l_0}d_{i_1}a_{13}^{l_1}\ldots d_{i_{p-1}}a_{13}^{l_{p-1}}=0.$$

c) Se $t=p$ então $k=0$. Assim, o elemento $b_0r^{i_1}b_1r^{i_2}b_2\ldots r^{i_t}b_t$ no somatório $m_{1,2p+1}$ é exatamente
$$a_{12}\underbrace{(a_{23}a_{12})(a_{23}a_{12})\ldots(a_{23}a_{12})}_{p-1\quad vezes}a_{23}=(a_{12}a_{23})^p.$$
Como $a_{12}a_{23}\in R$, existem $\alpha\in F$ e $u\in I$ tais que $a_{12}a_{23}=\alpha+u$. Assim,
$$(a_{12}a_{23})^p=(\alpha+u)^p=\alpha^p+u^p=\alpha^p\in\Delta_n.$$
Logo,
$$a_{12}\underbrace{(a_{23}a_{12})(a_{23}a_{12})\ldots(a_{23}a_{12})}_{p-1\quad vezes}a_{23}+\Delta_n=\Delta_n.$$

Os itens a,b e c mostram que $d_2+\Delta_n=\Delta_n$.

Finalizamos assim a demonstração do teorema. □

Relembramos que $F_0\langle X\rangle$ é a álgebra associativa livre “sem unidade” livremente gerada pelo conjunto X e F é um corpo de característica $p\geq 3$.

O principal resultado deste capítulo é o seguinte.

Teorema 2.11. *Seja J o T-ideal em $F_0\langle X\rangle$ gerado por*
$$x^{2p},\ w_3,\ w_4,\ \ldots,\ w_n,\ldots$$
Então J é um T-ideal infinitamente gerado.

Demonstração. Denote por J_n o T-ideal de $F_0\langle X\rangle$ gerado por

$$x^{2p},\ w_3,\ w_4, \ldots,\ w_n.$$

Observe que

$$J = \bigcup_{n=3}^{\infty} J_n \quad \text{e} \quad J_3 \subset J_4 \subset J_5 \subset \ldots$$

Suponha que existe um subconjunto finito S tal que $J = \langle S\rangle^T$. Assim, existe n_0 tal que $S \subset J_{n_0}$. Em particular

$$J = J_{n_0}.$$

Pelo item a) da Proposição 2.2 e pelo teorema anterior, temos que

$$J_{n_0} \subset Id(B_{n_0}).$$

Em particular, w_{n_0+1} é uma identidade polinomial para B_{n_0}. Absurdo pelo item b) da Proposição 2.2. □

Uma consequência direta do último teorema é o Teorema Principal 1 da Introdução desta dissertação.

Capítulo 3

T-espaços infinitamente gerados

Ao longo de todo o capítulo, F representará um corpo infinito de característica $p \geq 3$. Mostraremos que $F_1\langle X\rangle$ admite infinitos T-espaços limites, provando assim o Teorema Principal 2 da introdução desta dissertação. Os resultados aqui apresentados foram provados por Gonçalves, Krasilnikov, Sviridova e encontram-se em [9].

3.1 Polinômios centrais para a álgebra de Grassmann e suas propriedades

Antes de iniciar um novo assunto, gostaríamos de relembrar alguns fatos e notações do Capítulo 1. Usaremos a notação $T^{(3)}$ para denotar o T-ideal

$$T^{(3)} = \langle [x_1, x_2, x_3]\rangle^T.$$

Relembramos que $T^{(3)} = Id(G)$, onde G é a álgebra de Grassmann infinitamente gerada. Observe que

$$T^{(3)} = \langle x_1[x_2, x_3, x_4]x_5\rangle^{TS}.$$

Como

$$x_1[x_2, x_3, x_4]x_5 = x_1x_5[x_2, x_3, x_4] + x_1[x_2, x_3, x_4, x_5],$$

temos que

$$T^{(3)} = \langle x_1[x_2, x_3, x_4]\rangle^{TS}.$$

Notação $T^{(3,i)}$.

Denote por $T^{(3,i)}$ o seguinte T-ideal:

$$T^{(3,i)} = \langle [x_1, x_2, x_3] \ \text{ e } \ [x_1, x_2] \dots [x_{2i-1}, x_{2i}]\rangle^T.$$

Observe que o índice i faz referência ao produto de i comutadores [,].

Definição 3.1. *Um T-espaço não finitamente gerado V^* em $F_1\langle X\rangle$ é chamado de T-espaço limite se todo T-espaço maior*

$$W \supsetneq V^*$$

é finitamente gerado.

Observe pela definição, que um T-espaço limite é um T-espaço não finitamente gerado maximal. Segue do Lema de Zorn que todo T-espaço não finitamente gerado está contido num T-espaço limite. Em [5] surgiu o primeiro exemplo na literatura de T-espaço limite em $F_1\langle X\rangle$. Segue o resultado:

Teorema 3.2. *O conjunto dos polinômios centrais $C(G)$ da álgebra de Grassmann G infinitamente gerada é um T-espaço limite em $F_1\langle X\rangle$.*

Relembramos que estamos considerando o corpo F infinito de $\mathrm{car}(F) = p \geq 3$. Aqui cabe uma observação: se $\mathrm{car}(F) = 0$ então ainda em [5] foi provado que

$$C(G) = \langle [x_1, x_2] \ \text{ e } \ x_1[x_2, x_3, x_4]\rangle^{TS}.$$

Vamos analisar um pouco da estrutura de $C(G)$, voltando então ao caso onde F é infinito de $\mathrm{car}(F) = p \geq 3$. Do Lema 1.19 - item 3) temos

$$x_1^a[x_1, x_2]x_2^b \in C(G)$$

para todos $a, b \geq 0$. Temos também

$$\begin{aligned} x_1^p x_2 + T^{(3)} &= x_1^{p-1}x_2x_1 + x_1^{p-1}[x_1, x_2] + T^{(3)} = x_1^{p-2}x_2x_1^2 + x_1^{p-2}[x_1, x_2]x_1 + x_1^{p-1}[x_1, x_2] + T^{(3)} \\ &= x_1^{p-2}x_2x_1^2 + 2x_1^{p-1}[x_1, x_2] + T^{(3)} = \ldots = x_2x_1^p + px_1^{p-1}[x_1, x_2] + T^{(3)} = x_2x_1^p + T^{(3)}. \end{aligned}$$

Logo, $x_1^p \in C(G)$. Observe que o produto de dois polinômios centrais é também central. Portanto, é natural se perguntar se os produtos dos polinômios acima junto com as identidades polinomiais de G não são suficientes para descrever $C(G)$. A resposta é sim.

Notações $q(x_1, x_2)$ e $q_k(x_1, \ldots, x_{2k})$.
Defina os polinômios

$$q(x_1, x_2) = x_1^{p-1}[x_1, x_2]x_2^{p-1} \ \text{ e } \ q_k(x_1, \ldots, x_{2k}) = q(x_1, x_2)\ldots q(x_{2k-1}, x_{2k}).$$

O seguinte resultado foi provado em [5] por Brandão, Koshlukov, Krasilnikov e Silva.

Teorema 3.3. *$C(G)$ é gerado como T-espaço pelo polinômio*

$$x_1[x_2, x_3, x_4]$$

e pelos polinômios

$$x_1^p,\ x_1^p q_1(x_2, x_3),\ x_1^p q_2(x_2, x_3, x_4, x_5),\ \ldots,\ x_1^p q_n(x_2, \ldots, x_{2n+1}),\ \ldots$$

Notações $q_k^{(l)}$ e $Q_k^{(l)}$
Agora, considere os seguintes polinômios de $C(G)$:

$$q^{(l)}(x_1, x_2) = x_1^{p^l-1}[x_1, x_2]x_2^{p^l-1}, \qquad q_k^{(l)}(x_1, \ldots, x_{2k}) = q^{(l)}(x_1, x_2)\ldots q^{(l)}(x_{2k-1}, x_{2k}).$$

Observe que $q_k^{(l)}$ é o produto de k polinômios do tipo $q^{(l)}$. Seja $Q^{(k,l)}$ o T-espaço de $F_1\langle X\rangle$ dado por

$$Q^{(k,l)} = \left\langle q_k^{(l)}(x_1, \ldots, x_{2k})\right\rangle^{TS}.$$

A componente multi-homogênea do polinômio

$$\begin{aligned} &q_k^{(l)}(1 + x_1, \ldots, 1 + x_{2k}) = \\ &\quad (1 + x_1)^{p^l-1}[x_1, x_2](1 + x_2)^{p^l-1}\ldots(1 + x_{2k-1})^{p^l-1}[x_{2k-1}, x_{2k}](1 + x_{2k})^{p^l-1} \end{aligned}$$

de grau p^{l-1} em todas as variáveis $x_1, \ldots, x_{2k}$ é

$$\gamma q_k^{(l-1)}(x_1, \ldots, x_{2k}) = \gamma x_1^{p^{l-1}-1}[x_1, x_2]x_2^{p^{l-1}-1} \ldots x_{2k-1}^{p^{l-1}-1}[x_{2k-1}, x_{2k}]x_{2k}^{p^{l-1}-1},$$

onde $\gamma = \binom{p^l-1}{p^{l-1}-1} \equiv 1 \pmod p$. Como F é infinito temos $q_k^{(l-1)} \in Q^{(k,l)}$. Daí $Q^{(k,l-1)} \subset Q^{(k,l)}$ e temos a igualdade

$$\sum_{i=0}^{l} Q^{(k,i)} = Q^{(k,l)}. \tag{3.1}$$

O lema a seguir é uma reformulação de um resultado de Grishin e Tsybulya [13] (Teorema 1.3, item 1).

Lema 3.4. *Seja $k \geq 1$ e $a_i \geq 1$ para todo $i = 1, 2, \ldots, 2k$. Denote*

$$m = x_1^{a_1-1}x_2^{a_2-1} \ldots x_{2k}^{a_{2k}-1}[x_1, x_2] \ldots [x_{2k-1}, x_{2k}].$$

Se $l \geq 0$ é o maior inteiro tal que $p^l | a_i$ para todo i, então

$$\langle m \rangle^{TS} + T^{(3)} = Q^{(k,l)} + T^{(3)}.$$

Seja $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ um conjunto finito de variáveis e denote por $F_1 \langle X_n \rangle$ a álgebra associativa livre com unidade livremente gerada por X_n.

Os conceitos de T-espaço e T-espaço gerado, definidos no Capítulo 1, para subespaços de $F_1\langle X \rangle$ podem ser definidos de maneira análoga para subespaços de $F_1 \langle X_n \rangle$ e subespaços da álgebra quociente $F_1 \langle X_n \rangle / I$, onde I é um ideal.

Estamos interessados no estudo do T-espaço C_n de $F_1 \langle X_n \rangle$ definido por

$$C_n = C(G) \cap F_1 \langle X_n \rangle .$$

Observe que C_n é o conjunto dos polinômios centrais de G nas n variáveis $x_1, \ldots x_n$. Claramente, os polinômios

$$x_1^p,\ x_1^p q_1(x_2, x_3),\ x_1^p q_2(x_2, x_3, x_4, x_5),\ \ldots,\ x_1^p q_{k-1}(x_2, \ldots, x_{2k-1}) \ \text{ e } \ q_k^{(l)}(x_1, \ldots, x_{2k})$$

estão em C_n se $n = 2k$ e

$$x_1^p,\ x_1^p q_1(x_2, x_3),\ x_1^p q_2(x_2, x_3, x_4, x_5),\ \ldots, x_1^p q_k(x_2, \ldots, x_{2k+1})$$

estão em C_n se $n = 2k + 1$.

Denote

$$T_n^{(3)} = T^{(3)} \cap F_1 \langle X_n \rangle .$$

Provaremos a seguinte proposição:

Proposição 3.5. *Se $n = 2k$, $k \geq 1$, então, $C_n/T_n^{(3)}$ é gerado como T-espaço de $F_1 \langle X_n \rangle / T_n^{(3)}$ pelos polinômios*

$$x_1^p + T_n^{(3)}, x_1^p q_1(x_2, x_3) + T_n^{(3)}, x_1^p q_2(x_2, x_3, x_4, x_5) + T_n^{(3)}, \ldots, x_1^p q_{k-1}(x_2, \ldots, x_{2k-1}) + T_n^{(3)}$$

e pelo conjunto

$$\{q_k^{(l)}(x_1, \ldots, x_{2k}) + T_n^{(3)} |\ l = 1, 2, \ldots\}.$$

Se $n = 2k + 1$, $k \geq 1$, então o T-espaço $C_n/T_n^{(3)}$ em $F_1 \langle X_n \rangle / T_n^{(3)}$ é gerado por

$$x_1^p + T_n^{(3)}, x_1^p q_1(x_2, x_3) + T_n^{(3)}, x_1^p q_2(x_2, x_3, x_4, x_5) + T_n^{(3)}, \ldots, x_1^p q_k(x_2, \ldots, x_{2k+1}) + T_n^{(3)}.$$

Demonstração. Seja $h + T_n^{(3)} \in C_n/T_n^{(3)}$. Pelo Teorema 3.3,

$$h = \sum_j \alpha_j v_j^p + \sum_{i,j} \alpha_{ij} w_{ij}^p q_i(f_1^{(ij)}, \ldots, f_{2i}^{(ij)}) + h',$$

onde $h' \in T^{(3)}$, $v_j, w_{ij}, f_s^{(ij)} \in F_1 \langle X \rangle$, $\alpha_j, \alpha_{ij} \in F$. Isso ocorre pois $h \in C_n \subseteq C(G)$. Como $h \in F_1 \langle X_n \rangle$ podemos assumir que $v_j, w_{ij}, f_s^{(ij)} \in F_1 \langle X_n \rangle$ e $h' \in T_n^{(3)}$.

Se $2i > n$, então

$$w_{ij}^p q_i(f_1^{(ij)}, \ldots, f_{2i}^{(ij)}) + T^{(3)} = w_{ij}^p g_{ij}[f_1^{(ij)}, f_2^{(ij)}] \ldots [f_{2i-1}^{(ij)}, f_{2i}^{(ij)}] + T^{(3)},$$

onde $g_{ij} \in F_1 \langle X_n \rangle$. Por outro lado

$$w_{ij}^p g_{ij}[f_1^{(ij)}, f_2^{(ij)}] \ldots [f_{2i-1}^{(ij)}, f_{2i}^{(ij)}] \in T^{(3,i)} \cap F_1 \langle X_n \rangle \subset T_n^{(3)}.$$

Logo

$$h + T_n^{(3)} = \sum_j \alpha_j v_j^p + \sum_{i \leq \frac{n}{2}} \sum_j \alpha_{ij} w_{ij}^p q_i(f_1^{(ij)}, \ldots, f_{2i}^{(ij)}) + T_n^{(3)}.$$

Se $n = 2k + 1$ temos as seguintes implicações:

$$i \leq \frac{n}{2} \Rightarrow 2i \leq 2k + 1 \Rightarrow i \leq k.$$

Daí

$$h + T_n^{(3)} = \sum_j \alpha_j v_j^p + \sum_{i=1}^{k} \sum_j \alpha_{ij} w_{ij}^p q_i(f_1^{(ij)}, \ldots, f_{2i}^{(ij)}) + T_n^{(3)},$$

como queríamos.

Agora, se $n = 2k$ então vamos separar $h + T_n^{(3)}$ como

$$h + T_n^{(3)} = \sum_j \alpha_j v_j^p + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_j \alpha_{ij} w_{ij}^p q_i(f_1^{(ij)}, \ldots, f_{2i}^{(ij)}) + \sum_j \alpha_{kj} w_{kj}^p q_k(f_1^{(kj)}, \ldots, f_{2k}^{(kj)}) + T_n^{(3)}.$$

Note que neste caso $x_1^p q_k(x_2, \ldots, x_{2k+1}) + T_n^{(3)}$ não pode ser um gerador de $C_n/T_n^{(3)}$ pois $x_1^p q_k(x_2, \ldots, x_{2k+1})$ tem $n + 1$ variáveis. Seja

$$h_2 = \sum_j \alpha_{kj} w_{kj}^p q_k(f_1^{(kj)}, \ldots, f_{2k}^{(kj)}) + T_n^{(3)}.$$

Usando os fatos que $[a + b, c] = [a, c] + [b, c]$, $[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b$ e ordenando as variáveis dentro dos comutadores, temos que $w_{kj}^p q_k(f_1^{(kj)}, \ldots, f_{2k}^{(kj)}) + T_n^{(3)}$ pode ser escrito como combinação linear de elementos do tipo $m + T_n^{(3)}$ onde

$$m = x_1^{b_1} \ldots x_{2k}^{b_{2k}} [x_1, x_2] \ldots [x_{2k-1}, x_{2k}].$$

Pelo Lema 3.4, para cada m existe um $l \geq 0$ tal que

$$\langle m \rangle^{TS} + T^{(3)} = \left\langle q_k^{(l)} \right\rangle^{TS} + T^{(3)}.$$

Como $m \in F_1\langle X_n \rangle$, em particular $m + T_n^{(3)}$ está no T-espaço de $F_1\langle X_n \rangle / T_n^{(3)}$ gerado por $q_k^{(l)} + T_n^{(3)}$. Assim h_2 pertence ao T-espaço de $F_1\langle X_n \rangle / T_n^{(3)}$ gerado por

$$\{q_k^{(l)}(x_1, \ldots, x_{2k}) + T_n^{(3)} |\ l = 1, 2, \ldots\}$$

e o resultado está provado. $\square$

Faremos uma observação com relação a demonstração do resultado. Nela usamos o seguinte fato:

$$(T^{(3,i)} \cap F_1 \langle X_n \rangle) \subset T_n^{(3)},$$

se $2i > n$. De fato, isso é verdade (ver página 160 de [9]). Faremos um simples exemplo para que o leitor entenda o porque.

$$\begin{aligned}[x_1, x_2][x_1x_2, x_3] + T_3^{(3)} &= [x_1, x_2][x_1, x_3]x_2 + [x_1, x_2]x_1[x_2, x_3] + T_3^{(3)} \\ &= [x_1, x_2]x_1[x_2, x_3] + T_3^{(3)} \\ &= [x_1, x_2][x_1, [x_2, x_3]] + [x_1, x_2][x_2, x_3]x_1 + T_3^{(3)} \\ &= T_3^{(3)}.\end{aligned}$$

Proposição 3.6. *Se $n = 2k$, $k > 1$, então C_n é gerado como T-espaço de $F_1 \langle X_n \rangle$ pelos polinômios*

$$x_1[x_2, x_3, x_4],\ x_1^p,\ x_1^p q_1(x_2, x_3), \ldots, x_1^p q_{k-1}(x_2, \ldots, x_{2k-1})$$

junto com os polinômios

$$\{q_k^{(l)}(x_1, \ldots, x_{2k}) |\ l = 1, 2, \ldots\}.$$

Se $n = 2k + 1$, $k > 1$, então C_n é gerado como T-espaço de $F_1 \langle X_n \rangle$ pelos polinômios

$$x_1[x_2, x_3, x_4],\ x_1^p,\ x_1^p q_1(x_2, x_3), \ldots, x_1^p q_k(x_2, \ldots, x_{2k+1}).$$

Demonstração. Como

$$T^{(3)} = \langle x_1[x_2, x_3, x_4] \rangle^{TS},$$

temos que se $n \geq 4$, então $T_n^{(3)}$ é um T-espaço de $F_1 \langle X_n \rangle$ gerado por $x_1[x_2, x_3, x_4]$ também. Agora o resultado é finalizado usando a última proposição. □

Uma consequência direta da proposição é o seguinte:

Teorema 3.7. *Se $k > 1$, então C_{2k+1} é finitamente gerado como T-espaço de $F_1 \langle X_{2k+1} \rangle$.*

3.2 T-espaço limite

Vimos na seção anterior que no caso $n \geq 5$ ímpar temos C_n finitamente gerado como T-espaço de $F_1\langle X_n \rangle$. Veremos agora que isso não acontece no caso $n \geq 4$ par. Depois usaremos C_n (n par) para construir os desejados T-espaços limites em $F_1\langle X \rangle$.

Seja $k \geq 1$. Pela Proposição 3.5 temos que C_{2k} é gerado, como T-espaço de $F_1\langle X_{2k} \rangle$, por $T_{2k}^{(3)}$ junto com os polinômios

$$x_1^p,\ x_1^p q_1(x_2, x_3), \ldots, x_1^p q_{k-1}(x_2, \ldots, x_{2k-1}) \tag{3.2}$$

e

$$\{q_k^{(l)}(x_1, \ldots, x_{2k}) \mid l = 1, 2, \ldots\}.$$

Denote por V_l o T-espaço de $F_1\langle X_{2k} \rangle$ gerado por $T_{2k}^{(3)}$, pelos polinômios (3.2) e por

$$\{q_k^{(i)}(x_1, \ldots, x_{2k}) \mid i = 1, 2, \ldots, l\}.$$

Note que $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots$ e

$$C_{2k} = \bigcup_{l=1}^{\infty} V_l.$$

A seguinte proposição está em [13, Teorema 3.1]. Para enunciá-la vamos relembrar a notação

$$Q^{(k,l)} = \left\langle q_k^{(l)}(x_1, \ldots, x_{2k}) \right\rangle^{TS}$$

e definir outra:

Notação $U^{(k-1)}$.

Denotamos por $U^{(k-1)}$ o T-espaço de $F_1\langle X\rangle$ dado por

$$U^{(k-1)} = \langle\ x_1^p,\ x_1^p q_1(x_2, x_3), \ldots, x_1^p q_{k-1}(x_2, \ldots, x_{2k-1})\rangle^{TS}.$$

Proposição 3.8. *Para cada* $l \geq 1$

$$(Q^{(k,l+1)} + T^{(3)})/T^{(3)} \nsubseteq (U^{(k-1)} + Q^{(k,l)} + T^{(3,k+1)})/T^{(3)}.$$

Segue da proposição acima que

$$q_k^{(l+1)} \notin U^{(k-1)} + Q^{(k,l)} + T^{(3,k+1)}.$$

Outra coisa que acontece é

$$V_l \subseteq U^{(k-1)} + Q^{(k,l)} + T^{(3,k+1)}.$$

Como $q_k^{(l+1)} \in V_{l+1}$ segue que

$$V_1 \subsetneqq V_2 \subsetneqq V_3 \subsetneqq \ldots$$

Proposição 3.9. *Se* $k \geq 1$*, então* C_{2k} *não é finitamente gerado como* T*-espaço de* $F_1\langle X_{2k}\rangle$.

Demonstração. Suponhamos que C_{2k} é gerado por $f_1, \ldots, f_s$. Então, para algum l, V_l contém todos os f's. Em particular,

$$C_{2k} = V_l = V_{l+1} = V_{l+2} = \ldots$$

Absurdo. □

Sejam $a_1, \ldots, a_n \geq 0$. Fixe $1 \leq i_1 < \ldots < i_t \leq n$ tais que $a_{i_1}, \ldots, a_{i_t} \geq 1$. Definimos

$$\frac{x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}}{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_t}} = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_n^{b_n}$$

onde $b_j = a_j - 1$ se $j \in \{i_1, i_2, \ldots, i_t\}$ e $b_j = a_j$ caso contrário. Por exemplo,

$$\frac{x_1^2 x_2^4 x_3^7 x_4^5}{x_2 x_4} = x_1^2 x_2^3 x_3^7 x_4^4.$$

Lema 3.10. *Seja* $f(x_1, \ldots, x_n) \in F_1\langle X\rangle$ *um polinômio multi-homogêneo da forma*

$$f = \alpha x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n} + \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \ldots < i_{2t} \leq n \\ t \geq 1}} \alpha_{(i_1, \ldots, i_{2t})} \frac{x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}}{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{2t}}} [x_{i_1}, x_{i_2}] \ldots [x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}] \tag{3.3}$$

onde $\alpha, \alpha_{(i_1, \ldots, i_{2t})} \in F$*. Seja* $L = \langle f\rangle^{TS} + \langle [x_1, x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)}$*. Se* $a_i = 1$ *para algum* i*, então* $L = F_1\langle X\rangle$ *ou*

$$L = \langle [x_1, x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)} \text{ ou } L = \langle x_1[x_2, x_3] \ldots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}]\rangle^{TS} + \langle [x_1, x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)}$$

para algum $\theta \leq \frac{n-1}{2}$.

Demonstração. Se f_1, f_2 são polinômios, denote $f_1 \equiv f_2$ se $f_1 + T^{(3)} = f_2 + T^{(3)}$ no quociente $F_1\langle X\rangle / T^{(3)}$.

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $a_1 = 1$. De fato, permutando as variáveis x_1 e x_i em f, obtemos o polinômio f':

$$f'(x_1, \ldots, x_n) = f(x_i, x_2 \ldots, x_{i-1}, x_1, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Existe um polinômio g da forma (3.3) com mesmo multigrau de f' tal que $f' \equiv g$. Logo,

$$\langle f\rangle^{TS} + \langle [x_1, x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)} = \langle f'\rangle^{TS} + \langle [x_1, x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)} = \langle g\rangle^{TS} + \langle [x_1, x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)}.$$

Assim, para facilitar a notação, assumiremos que $a_1 = 1$ em f.

Se $\alpha \neq 0$, então $f(x_1, 1, \ldots, 1) = \alpha x_1$. Assim $x_1 \in L$ e $L = F_1\langle X\rangle$.

Suponha $\alpha = 0$. Escreva

$$\begin{aligned} f = & x_1 \sum_{\substack{2 \leq i_1 < \ldots < i_{2t} \leq n \\ t \geq 1}} \alpha_{(i_1, \ldots, i_{2t})} \frac{x_2^{a_2} x_3^{a_3} \ldots x_n^{a_n}}{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{2t}}} [x_{i_1}, x_{i_2}] \ldots [x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}] \\ & + \sum_{\substack{2 \leq i_2 < \ldots < i_{2t} \leq n \\ t \geq 1}} \alpha_{(1, i_2, \ldots, i_{2t})} \frac{x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}}{x_{i_2} \ldots x_{i_{2t}}} [x_1, x_{i_2}] \ldots [x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}]. \end{aligned}$$

Seja

$$f_2 = \sum_{\substack{2 \leq i_2 < \ldots < i_{2t} \leq n \\ t \geq 1}} \alpha_{(1, i_2, \ldots, i_{2t})} \frac{x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}}{x_{i_2} \ldots x_{i_{2t}}} [x_1, x_{i_2}] \ldots [x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}]$$

e $f_1 = f - f_2$. Vamos expressar f_2 em termos de polinômios do tipo f_1 e $T^{(3)}$. Se

$$m = \frac{x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}}{x_{i_2} \ldots x_{i_{2t}}}$$

então

$$m[x_1, x_{i_2}] \ldots [x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}] \equiv [m x_1, x_{i_2}] \ldots [x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}] - x_1 [m, x_{i_2}] \ldots [x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}]. \tag{3.4}$$

Por outro lado, usando a identidade $[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b$, temos que

$$\begin{aligned} [m x_1 [x_{i_3}, x_{i_4}] \ldots [x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}], x_{i_2}] &= m x_1 [[x_{i_3}, x_{i_4}] \ldots [x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}], x_{i_2}] \\ &\quad + [m x_1, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}] \ldots [x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}] \\ &\equiv [m x_1, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}] \ldots [x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}] \end{aligned}$$

pois $[[x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}], x_{i_2}] \in T^{(3)}$. Logo,

$$[m x_1, x_{i_2}] \ldots [x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}] \in \langle [x_1, x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)}$$

e a equação (3.4) resulta em

$$m[x_1, x_{i_2}] \ldots [x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}] = -x_1 [m, x_{i_2}] \ldots [x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}] + h,$$

onde $h \in \langle [x_1, x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)}$. Assim, existe um polinômio $g(x_2, \ldots, x_n)$ tal que

$$f = x_1 g + h,$$

onde $h \in \langle [x_1, x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)}$. Observe que $L = \langle x_1 g \rangle^{TS} + \langle [x_1, x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)}$ e que g pode ser escolhido como sendo da forma

$$g = \sum_{\substack{2 \leq i_1 < \ldots < i_{2t} \leq n \\ t \geq 1}} \alpha_{(i_1,\ldots,i_{2t})} \frac{x_2^{a_2} x_3^{a_3} \ldots x_n^{a_n}}{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{2t}}} [x_{i_1}, x_{i_2}] \ldots [x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}].$$

Pela igualdade de T-espaços acima, podemos assumir que $f = x_1 g(x_2, \ldots, x_n)$.

Se $g = 0$, então $L = \langle [x_1, x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)}$.

Suponha $g \neq 0$. Seja $\theta = \min\{t \mid \alpha_{(i_1,\ldots,i_{2t})} \neq 0\}$. Claramente $2\theta + 1 \leq n$, isto é, $\theta \leq \frac{n-1}{2}$. A menos de uma reordenação das variáveis, podemos assumir que $\alpha_{(2,\ldots,2\theta+1)} \neq 0$. Logo

$$\begin{aligned} f = x_1 (\alpha_{(2,\ldots,2\theta+1)} & \frac{x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}}{x_2 \ldots x_{2\theta+1}} [x_2, x_3] \ldots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}] \\ & + \sum_{\substack{2 \leqslant i_1 < \ldots < i_{2t} \leqslant n \\ t \geq \theta, i_{2t} > 2\theta+1}} \alpha_{(i_1,\ldots,i_{2t})} \frac{x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}}{x_{i_1} \ldots x_{i_{2t}}} [x_{i_1}, x_{i_2}] \ldots [x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}]). \end{aligned}$$

Seja $f_1(x_1, \ldots, x_{2\theta+1}) = f(x_1, \ldots, x_{2\theta+1}, 1, \ldots, 1)$. Temos

$$f_1 = \alpha_{(2,\ldots,2\theta+1)} x_1 \frac{x_2^{a_2} \ldots x_{2\theta+1}^{a_{2\theta+1}}}{x_2 \ldots x_{2\theta+1}} [x_2, x_3] \ldots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}] \in L$$

A componente multi-homogênea de multigrau $(1, 1, \ldots, 1)$ de $f_1(x_1, x_2 + 1, \ldots, x_{2\theta+1} + 1)$ é

$$\alpha_{(2,\ldots,2\theta+1)} x_1 [x_2, x_3] \ldots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}].$$

Daí

$$\langle x_1 [x_2, x_3] \ldots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}] \rangle^{TS} + \langle [x_1, x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)} \subseteq L.$$

Por outro lado, cada termo de f está em $\langle x_1 [x_2, x_3] \ldots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}] \rangle^{TS}$, ou seja,

$$f \in \langle x_1 [x_2, x_3] \ldots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}] \rangle^{TS}.$$

Logo

$$L \subseteq \langle x_1 [x_2, x_3] \ldots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}] \rangle^{TS} + \langle [x_1, x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)}$$

e concluímos $L = \langle x_1 [x_2, x_3] \ldots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}] \rangle^{TS} + \langle [x_1, x_2] \rangle^{TS} + T^{(3)}$. □

Definição 3.11. *Dado $k \geq 1$, definimos R_k como sendo o T-espaço de $F_1 \langle X \rangle$ gerado por C_{2k} e $T^{(3,k+1)}$, isto é,*

$$R_k = \langle C_{2k} \rangle^{TS} + T^{(3,k+1)}.$$

De agora em diante, nosso objetivo será mostrar que R_k é um T-espaço limite de $F_1\langle X \rangle$ para todo $k \geq 1$. Pela Proposição 3.5 temos

$$C_{2k} \subseteq U^{(k-1)} + \sum_{l \geqslant 1} Q^{(k,l)} + T^{(3,k+1)}.$$

Logo,

$$R_k \subseteq U^{(k-1)} + \sum_{l \geqslant 1} Q^{(k,l)} + T^{(3,k+1)}.$$

Como os geradores de $U^{(k-1)}$ e $Q^{(k,l)}$ estão em C_{2k} temos a igualdade

$$R_k = U^{(k-1)} + \sum_{l \geqslant 1} Q^{(k,l)} + T^{(3,k+1)}.$$

Observe que $U^{(k-1)}$ e $T^{(3,k+1)}$ são T-espaços finitamente gerados de $F_1\langle X\rangle$. Denote

$$\overline{V_l} = U^{(k-1)} + \sum_{i=1}^{l} Q^{(k,i)} + T^{(3,k+1)}.$$

Temos

$$R_k = \bigcup_{l\geq 1} \overline{V_l} \quad \text{e} \quad \overline{V_1} \subseteq \overline{V_2} \subseteq \overline{V_3} \subseteq \dots$$

Como já foi mostrado anteriormente, temos

$$\sum_{i=1}^{l} Q^{(k,i)} = Q^{(k,l)}$$

e portanto

$$\overline{V_l} = U^{(k-1)} + Q^{(k,l)} + T^{(3,k+1)}.$$

Pela Proposição 3.8 temos $Q^{(k,l+1)} \nsubseteq \overline{V_l}$ para todo $l \geqslant 1$. Logo

$$\overline{V_1} \subsetneqq \overline{V_2} \subsetneqq \overline{V_3} \subsetneqq \dots$$

Teorema 3.12. *Se $k \geqslant 1$, então R_k não é finitamente gerado como T-espaço de $F_1\langle X\rangle$.*

Demonstração. Suponhamos que R_k é gerado por $f_1, \dots, f_s$. Então, para algum l, $\overline{V_l}$ contém todos os f's. Em particular,

$$R_k = \overline{V_l} = \overline{V_{l+1}} = \overline{V_{l+2}} = \dots$$

Absurdo. □

Lema 3.13. *Seja $f = f(x_1, \dots, x_n) \in F_1\langle X\rangle$ um polinômio multi-homogêneo da forma*

$$f = \alpha x_1^{p^{s_1}} \dots x_n^{p^{s_n}} + \sum_{i_1<\dots<i_{2t}} \alpha_{(i_1,\dots,i_{2t})} \frac{x_1^{p^{s_1}} \dots x_n^{p^{s_n}}}{x_{i_1} \dots x_{i_{2t}}} [x_{i_1}, x_{i_2}] \dots [x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}],$$

onde $\alpha, \alpha_{(i_1,\dots,i_{2t})} \in F$ e $s_1, \dots, s_n \geq 0$. Seja $L = \langle f\rangle^{TS} + R_k$. Então temos as seguintes possibilidades:

1. *$L = F_1\langle X\rangle$,*
2. *$L = R_k$,*
3. *$L = \langle x_1[x_2, x_3] \dots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}]\rangle^{TS} + R_k$, para algum θ, $1 \leqslant \theta \leqslant k$,*
4. *$L = \left\langle x_1^{p^s} q_k^{(s)}(x_2, \dots, x_{2k+1})\right\rangle^{TS} + R_k$, para algum $s \geqslant 1$.*

Demonstração. Podemos assumir sem perda de generalidade que $s = s_1 \leqslant s_i$ para todo i (permutando variáveis se necessário, da mesma forma que foi feito na prova do Lema 3.10). Iremos estudar L em dois casos: caso $s = 0$ e caso $s > 0$.

Caso $s = 0$.

Se $s = 0$, então $\deg_{x_1} f = 1$ e pelo Lema 3.10 podem acontecer três possibilidades:

a) $\langle f\rangle^{TS} + \langle [x_1, x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)} = F_1\langle X\rangle$,

b) $\langle f\rangle^{TS} + \langle [x_1, x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)} = \langle [x_1, x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)}$,

c) $\langle f\rangle^{TS} + \langle [x_1, x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)} = \langle x_1[x_2, x_3] \dots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}]\rangle^{TS} + \langle [x_1, x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)}$ para algum $\theta \leqslant \frac{n-1}{2}$.

Observe que $[x_1, x_2] \in C_{2k}$ para todo $k \geqslant 1$. Logo

$$\langle f\rangle^{TS} + \langle [x_1, x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)} \subseteq \langle f\rangle^{TS} + \langle C_{2k}\rangle^{TS} + T^{(3,k+1)} = L.$$

Se o item a) ocorre, então $L = F_1\langle X\rangle$.
Se o item b) ocorre, então $f \in \langle [x_1, x_2]\rangle^{TS} + T^{(3)}$. Logo $f \in R_k$ e portanto $L = R_k$.
Se o item c) ocorre, então

$$L = \langle x_1[x_2, x_3] \dots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}]\rangle^{TS} + R_k$$

para algum $\theta \leqslant \frac{n-1}{2}$. Se $\theta > k$ então $x_1[x_2, x_3] \dots [x_{2\theta}, x_{2\theta+1}] \in T^{(3,k+1)} \subseteq R_k$ e consequentemente $L = R_k$. Se $\theta \leq k$ temos o item 3 do enunciado.

Caso $s > 0$.

Denote por $\equiv$ a congruência módulo $T^{(3)}$. Pode ser mostrado que se $u, v \in F_1\langle X\rangle$, então

$$(uv)^p \equiv u^p v^p. \tag{3.5}$$

Assim, como $s_i > 0$ para todo i, temos

$$x_1^{p^{s_1}} \dots x_n^{p^{s_n}} \equiv (x_1^{p^{s_1-1}} \dots x_n^{p^{s_n-1}})^p.$$

Logo,

$$x_1^{p^{s_1}} \dots x_n^{p^{s_n}} \in \langle x_1^p\rangle^{TS} + T^{(3)} \subsetneqq R_k.$$

Pelo exposto acima, para descrever L, podemos assumir

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1 < \dots < i_{2t}} \alpha_{(i_1, \dots, i_{2t})} \frac{x_1^{p^{s_1}} \dots x_n^{p^{s_n}}}{x_{i_1} \dots x_{i_{2t}}} [x_{i_1}, x_{i_2}] \dots [x_{i_{2t-1}}, x_{i_{2t}}],$$

Já sabemos que x_1^p é um polinômio central para a álgebra de Grassmann. Isso implica que u^p é central para todo polinômio u e portanto

$$u^p v \equiv v u^p$$

para todo polinômio v. Em particular,

$$x_2^{p^{s_2}-1} \dots x_{2t+1}^{p^{s_{2t+1}}-1} = x_2^{p^{s_2}-p} x_2^{p-1} \dots x_{2t+1}^{p^{s_{2t+1}}-p} x_{2t+1}^{p-1} \equiv x_2^{p^{s_2}-p} \dots x_{2t+1}^{p^{s_{2t+1}}-p} x_2^{p-1} \dots x_{2t+1}^{p-1} \equiv$$
$$\equiv (x_2^{p^{s_2-1}-1} \dots x_{2t+1}^{p^{s_{2t+1}-1}-1})^p x_2^{p-1} \dots x_{2t+1}^{p-1}.$$

Isso implica que

$$x_2^{p^{s_2}-1} \dots x_{2t+1}^{p^{s_{2t+1}}-1} [x_2, x_3] \dots [x_{2t}, x_{2t+1}] \equiv (x_2^{p^{s_2-1}-1} \dots x_{2t+1}^{p^{s_{2t+1}-1}-1})^p q_t(x_2, \dots, x_{2t+1})$$

e também que

$$x_2^{p^{s_2}-1} \dots x_{2t+1}^{p^{s_{2t+1}}-1} [x_2, x_3] \dots [x_{2t}, x_{2t+1}] \in \langle x_1^p q_t(x_2, \dots x_{2t+1})\rangle^{TS} + T^{(3)}.$$

Daí
$$\frac{x_1^{p^{s_1}}\dots x_n^{p^{s_n}}}{x_{i_1}\dots x_{i_{2t}}}[x_{i_1},x_{i_2}]\dots[x_{i_{2t-1}},x_{i_{2t}}]\in\langle x_1^p q_t(x_2,\dots x_{2t+1})\rangle^{TS}+T^{(3)}$$
para todo t. Já vimos que se $t<k$, o polinômio $x_1^p q_t(x_2,\dots x_{2t+1})$ está em C_{2k}. Portanto, se $t<k$, então
$$\frac{x_1^{p^{s_1}}\dots x_n^{p^{s_n}}}{x_{i_1}\dots x_{i_{2t}}}[x_{i_1},x_{i_2}]\dots[x_{i_{2t-1}},x_{i_{2t}}]\in R_k.$$
Se $t>k$, então
$$\frac{x_1^{p^{s_1}}\dots x_n^{p^{s_n}}}{x_{i_1}\dots x_{i_{2t}}}[x_{i_1},x_{i_2}]\dots[x_{i_{2t-1}},x_{i_{2t}}]\in T^{(3,k+1)}\subseteq R_k.$$
Falta analisar o caso $t=k$. Observe que para descrever L podemos assumir então
$$f=\sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_{2k}\leqslant n}\alpha_{(i_1,\dots,i_{2k})}\frac{x_1^{p^{s_1}}\dots x_n^{p^{s_n}}}{x_{i_1}\dots x_{i_{2k}}}[x_{i_1},x_{i_2}]\dots[x_{i_{2k-1}},x_{i_{2k}}].$$
Como $n\geqslant 2k$, vamos analisar dois casos: caso $n=2k$ e caso $n>2k$.

Caso $n=2k$.

Temos
$$f=\alpha_{(1,\dots,2k)}\frac{x_1^{p^{s_1}}\dots x_{2k}^{p^{s_{2k}}}}{x_1\dots x_{2k}}[x_1,x_2]\dots[x_{2k-1},x_{2k}].$$
Como s é o maior inteiro tal que $p^s\mid p^{s_i}$ para todo i, pelo Lema 3.4 temos
$$\langle f\rangle^{TS}+T^{(3)}=Q^{(k,s)}+T^{(3)}\subseteq R_k.$$
Logo $f\in R_k$ e daí $L=R_k$.

Caso $n>2k$.

Vamos tentar fatorar $x_1^{p^{s_1}}$ de f. Então, separamos o f assim: $f=f_1+f_2$, onde
$$f_1=x_1^{p^{s_1}}\sum_{2\leqslant i_1<\dots<i_{2k}\leqslant n}\alpha_{(i_1,\dots,i_{2k})}\frac{x_2^{p^{s_2}}\dots x_n^{p^{s_n}}}{x_{i_1}\dots x_{i_{2k}}}[x_{i_1},x_{i_2}]\dots[x_{i_{2k-1}},x_{i_{2k}}]$$
$$f_2=\sum_{2\leqslant i_2<\dots<i_{2k}\leqslant n}\alpha_{(1,i_2,\dots,i_{2k})}x_1^{p^{s_1}-1}\frac{x_2^{p^{s_2}}\dots x_n^{p^{s_n}}}{x_{i_2}\dots x_{i_{2k}}}[x_1,x_{i_2}]\dots[x_{i_{2k-1}},x_{i_{2k}}]$$
Seja m um termo de f_2 sem o coeficiente:
$$m=x_1^{p^{s_1}-1}\frac{x_2^{p^{s_2}}\dots x_n^{p^{s_n}}}{x_{i_2}\dots x_{i_{2k}}}[x_1,x_{i_2}]\dots[x_{i_{2k-1}},x_{i_{2k}}].$$
Temos
$$m\equiv x_{j_1}^{a_{j_1}}\dots x_{j_l}^{a_{j_l}}x_1^{a_1-1}[x_1,x_{i_2}]x_{i_2}^{a_{i_2}-1}\dots x_{i_{2k-1}}^{a_{i_{2k-1}}-1}[x_{i_{2k-1}},x_{i_{2k}}]x_{i_{2k}}^{a_{i_{2k}}-1}$$
onde $a_i=p^{s_i}$, $\{j_1,\dots,j_l\}=\{2,\dots,n\}-\{i_2,\dots,i_{2k}\}$. Reordenando novamente, se necessário, podemos supor $a_{j_1}=\dots=a_{j_z}=a_1$ e $a_{j_{z+1}},\dots,a_{j_l}>a_1$. Para simplificar a notação, denote
$$m'=x_{i_3}^{a_{i_3}-1}[x_{i_3},x_{i_4}]x_{i_4}^{a_{i_4}-1}\dots x_{i_{2k-1}}^{a_{i_{2k-1}}-1}[x_{i_{2k-1}},x_{i_{2k}}]x_{i_{2k}}^{a_{i_{2k}}-1}.$$

Então:

$$\begin{aligned}
m \equiv&(x_{j_1}\dots x_{j_z})^{a_1}x_{j_{z+1}}^{a_{j_{z+1}}}\dots x_{j_l}^{a_{j_l}}x_1^{a_1-1}[x_1,x_{i_2}]x_{i_2}^{a_{i_2}-1}m'\\
\equiv&(x_{j_1}\dots x_{j_z})^{a_1-1}x_{j_{z+1}}^{a_{j_{z+1}}}\dots x_{j_l}^{a_{j_l}}x_1^{a_1-1}[x_1,x_{i_2}]x_{j_1}\dots x_{j_z}x_{i_2}^{a_{i_2}-1}m'\\
\equiv&x_1^{a_1-1}(x_{j_1}\dots x_{j_z})^{a_1-1}x_{j_{z+1}}^{a_{j_{z+1}}}\dots x_{j_l}^{a_{j_l}}[x_1,x_{i_2}]x_{j_1}\dots x_{j_z}x_{i_2}^{a_{i_2}-1}m'\\
\equiv&x_1^{a_1-1}(x_{j_1}\dots x_{j_z})^{a_1-1}x_{j_{z+1}}^{a_{j_{z+1}}}\dots x_{j_l}^{a_{j_l}}[x_1x_{j_1}\dots x_{j_z},x_{i_2}]x_{i_2}^{a_{i_2}-1}m'\\
&-x_1^{a_1-1}(x_{j_1}\dots x_{j_z})^{a_1-1}x_{j_{z+1}}^{a_{j_{z+1}}}\dots x_{j_l}^{a_{j_l}}x_1[x_{j_1}\dots x_{j_z},x_{i_2}]x_{i_2}^{a_{i_2}-1}m'
\end{aligned}$$

Sejam

$$m_1 = x_1^{a_1-1}(x_{j_1}\dots x_{j_z})^{a_1-1}x_{j_{z+1}}^{a_{j_{z+1}}}\dots x_{j_l}^{a_{j_l}}[x_1x_{j_1}\dots x_{j_z},x_{i_2}]x_{i_2}^{a_{i_2}-1}m'$$

$$m_2 = x_1^{a_1-1}(x_{j_1}\dots x_{j_z})^{a_1-1}x_{j_{z+1}}^{a_{j_{z+1}}}\dots x_{j_l}^{a_{j_l}}x_1[x_{j_1}\dots x_{j_z},x_{i_2}]x_{i_2}^{a_{i_2}-1}m'$$

Observe que m_2 é do tipo f_1, pois

$$\begin{aligned}
m_2 \equiv&x_1^{a_1}(x_{j_1}\dots x_{j_z})^{a_1-1}x_{j_{z+1}}^{a_{j_{z+1}}}\dots x_{j_l}^{a_{j_l}}[x_{j_1}\dots x_{j_z},x_{i_2}]x_{i_2}^{a_{i_2}-1}m'\\
\equiv&x_1^{p^s}g(x_2,\dots,x_n)
\end{aligned}$$

onde

$$g(x_2,\dots,x_n) = \sum_{2\leqslant i_1<\dots<i_{2k}\leqslant n}\beta_{(i_1,\dots,i_{2k})}\frac{x_2^{p^{s_2}}\dots x_n^{p^{s_n}}}{x_{i_1}\dots x_{i_{2k}}}[x_{i_1},x_{i_2}]\dots[x_{i_{2k-1}},x_{i_{2k}}].$$

Vamos mostrar agora que m_1 pertence a R_k. Sabemos que

$$x_1^{a_1-1}[x_1,x_2]x_2^{a_2-1}\dots x_{2k-1}^{a_{2k-1}-1}[x_{2k-1},x_{2k}]x_{2k}^{a_{2k}-1}\in C_{2k}\subseteq R_k.$$

Logo

$$u^{p^s-1}[u,x_{i_2}]x_{i_2}^{a_{i_2}-1}m'\in R_k$$

onde $u = x_1x_{j_1}\dots x_{j_z}x_{j_{z+1}}^{a'_{j_{z+1}}}\dots x_{j_l}^{a'_{j_l}}$ e $a'_i = p^{s_i-s}$. Seguem as igualdades:

$$\begin{aligned}
[u,x_{i_2}] =&[x_1x_{j_1}\dots x_{j_z}x_{j_{z+1}}^{a'_{j_{z+1}}}\dots x_{j_l}^{a'_{j_l}},x_{i_2}]\\
=&x_1x_{j_1}\dots x_{j_z}[x_{j_{z+1}}^{a'_{j_{z+1}}}\dots x_{j_l}^{a'_{j_l}},x_{i_2}]+[x_1x_{j_1}\dots x_{j_z},x_{i_2}]x_{j_{z+1}}^{a'_{j_{z+1}}}\dots x_{j_l}^{a'_{j_l}}\\
\equiv&[x_1x_{j_1}\dots x_{j_z},x_{i_2}]x_{j_{z+1}}^{a'_{j_{z+1}}}\dots x_{j_l}^{a'_{j_l}}\\
\equiv&x_{j_{z+1}}^{a'_{j_{z+1}}}\dots x_{j_l}^{a'_{j_l}}[x_1x_{j_1}\dots x_{j_z},x_{i_2}]
\end{aligned}$$

pois $[x_{j_{z+1}}^{a'_{j_{z+1}}}\dots x_{j_l}^{a'_{j_l}},x_{i_2}]\in T^{(3)}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
&u^{p^s-1}[u,x_{i_2}]x_{i_2}^{a_{i_2}-1}m'\equiv\\
&\equiv(x_1x_{j_1}\dots x_{j_z}x_{j_{z+1}}^{a'_{j_{z+1}}}\dots x_{j_l}^{a'_{j_l}})^{p^s-1}x_{j_{z+1}}^{a'_{j_{z+1}}}\dots x_{j_l}^{a'_{j_l}}[x_1x_{j_1}\dots x_{j_z},x_{i_2}]x_{i_2}^{a_{i_2}-1}m'\\
&\equiv(x_1x_{j_1}\dots x_{j_z})^{p^s-1}(x_{j_{z+1}}^{a'_{j_{z+1}}}\dots x_{j_l}^{a'_{j_l}})^{p^s-1}x_{j_{z+1}}^{a'_{j_{z+1}}}\dots x_{j_l}^{a'_{j_l}}[x_1x_{j_1}\dots x_{j_z},x_{i_2}]x_{i_2}^{a_{i_2}-1}m'\\
&\equiv(x_1x_{j_1}\dots x_{j_z})^{p^s-1}x_{j_{z+1}}^{a_{j_{z+1}}}\dots x_{j_l}^{a_{j_l}}[x_1x_{j_1}\dots x_{j_z},x_{i_2}]x_{i_2}^{a_2-1}m'\\
&\equiv m_1
\end{aligned}$$

pois $(x_{j_{z+1}}^{a'_{j_{z+1}}} \dots x_{j_l}^{a'_{j_l}})^{p^s} \equiv (x_{j_{z+1}}^{a'_{j_{z+1}}})^{p^s} \dots (x_{j_l}^{a'_{j_l}})^{p^s} \equiv x_{j_{z+1}}^{a_{j_{z+1}}} \dots x_{j_l}^{a_{j_l}}$. Desse modo, $m_1 \in R_k$ e assim f_2 é do tipo f_1 módulo R_k.

Então podemos supor que f é um polinômio do tipo

$$f = x_1^{p^s} g(x_2, \dots, x_n) = x_1^{p^s} \sum_{2 \leqslant i_1 < \dots < i_{2k} \leqslant n} \alpha_{(i_1,\dots,i_{2k})} \frac{x_2^{p^{s_2}} \dots x_n^{p^{s_n}}}{x_{i_1} \dots x_{i_{2k}}} [x_{i_1}, x_{i_2}] \dots [x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}].$$

Se $g = 0$, então $L = R_k$.

Se $g \neq 0$, suponha sem perda de generalidade que $\alpha = \alpha_{(2,\dots,2k+1)} \neq 0$. Então

$$f(x_1, \dots, x_{2k+1}, 1, \dots, 1) = \alpha x_1^{p^s} x_2^{p^{s_2}-1} \dots x_{2k+1}^{p^{s_{2k+1}}-1} [x_2, x_3] \dots [x_{2k}, x_{2k+1}]$$

Denotando $h(x_1, \dots, x_{2k+1}) = x_1^{p^s} x_2^{p^{s_2}-1} \dots x_{2k+1}^{p^{s_{2k+1}}-1} [x_2, x_3] \dots [x_{2k}, x_{2k+1}]$, temos que h é consequência de f e portanto $h \in L$. Considere a componente multi-homogênea de multigrau $(p^s, \dots, p^s)$ de

$$h(1 + x_1, \dots, 1 + x_{2k+1}),$$

isto é,

$$\gamma x_1^{p^s} x_2^{p^s-1} \dots x_{2k+1}^{p^s-1} [x_2, x_3] \dots [x_{2k}, x_{2k+1}],$$

onde $\gamma = \prod_{i=1}^{2k+1} \binom{p^{s_i}-1}{p^s-1} \equiv 1 \mod p$. Como o corpo F é infinito temos

$$\begin{aligned} & x_1^{p^s} x_2^{p^s-1} \dots x_{2k+1}^{p^s-1} [x_2, x_3] \dots [x_{2k}, x_{2k+1}] \in L \\ & \Rightarrow x_1^{p^s} q_k^{(s)}(x_2, \dots, x_{2k+1}) \in L \\ & \Rightarrow \left\langle x_1^{p^s} q_k^{(s)}(x_2, \dots, x_{2k+1}) \right\rangle^{TS} + R_k \subseteq L. \end{aligned}$$

Para a outra inclusão

$$x_1^{p^s} q_k^{(s)}(x_2, \dots, x_{2k+1}) \equiv x_1^{p^s} x_2^{p^s-1} \dots x_{2k+1}^{p^s-1} [x_2, x_3] \dots [x_{2k}, x_{2k+1}].$$

Logo

$$x_1^{p^s} x_2^{p^s-1} \dots x_{2k+1}^{p^s-1} [x_2, x_3] \dots [x_{2k}, x_{2k+1}] \in \left\langle x_1^{p^s} q_k^{(s)}(x_2, \dots, x_{2k+1}) \right\rangle^{TS} + R_k$$

Seguem as equivalências:

$$\begin{aligned} x_2^{p^{s_2}-1} \dots x_{2k+1}^{p^{s_{2k+1}}-1} &= x_2^{p^{s_2}-p^s} x_2^{p^s-1} \dots x_{2k+1}^{p^{s_{2k+1}}-p^s} x_{2k+1}^{p^s-1} \\ &\equiv x_2^{p^{s_2}-p^s} \dots x_{2k+1}^{p^{s_{2k+1}}-p^s} x_2^{p^s-1} \dots x_{2k+1}^{p^s-1} \\ &\equiv (x_2^{p^{s_2-s}-1} \dots x_{2k+1}^{p^{s_{2k+1}-s}-1})^{p^s} x_2^{p^s-1} \dots x_{2k+1}^{p^s-1} \end{aligned}$$

e daí seguem as implicações

$$x_1^{p^s} x_2^{p^{s_2}-1} \dots x_{2k+1}^{p^{s_{2k+1}}-1} [x_2, x_3] \dots [x_{2k}, x_{2k+1}] \in \left\langle x_1^{p^s} q_k^{(s)}(x_2, \dots, x_{2k+1}) \right\rangle^{TS} + R_k$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow x_1^{p^s} \frac{x_2^{p^{s_2}} \dots x_n^{p^{s_n}}}{x_{i_1} \dots x_{i_{2k}}} [x_{i_1}, x_{i_2}] \dots [x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}] \in \left\langle x_1^{p^s} q_k^{(s)}(x_2, \dots, x_{2k+1}) \right\rangle^{TS} + R_k \\ & \Rightarrow f \in \left\langle x_1^{p^s} q_k^{(s)}(x_2, \dots, x_{2k+1}) \right\rangle^{TS} + R_k \end{aligned}$$

Provamos assim que

$$L = \left\langle x_1^{p^s} q_k^{(s)}(x_2, \dots, x_{2k+1}) \right\rangle^{TS} + R_k.$$

□

Proposição 3.14. *Seja W um T-espaço de $F_1\langle X\rangle$ tal que $R_k \subsetneqq W$. Então temos três possibilidades para W:*

1. $W = F_1\langle X\rangle$

2. *W é gerado como T-espaço pelos polinômios*

$$x_1^p,\ x_1^p q_1(x_2,x_3),\ldots,\ x_1^p q_{\lambda-1}(x_2,\ldots,x_{2\lambda-1}),$$

$$x_1[x_2,x_3,x_4],\ x_1[x_2,x_3]\ldots[x_{2\lambda},x_{2\lambda+1}]$$

para algum $\lambda \leqslant k$.

3. *W é gerado como T-espaço pelos polinômios*

$$x_1^p,\ x_1^p q_1(x_2,x_3),\ldots,\ x_1^p q_{k-1}(x_2,\ldots,x_{2k-1}),$$

$$\{q_k^{(l)}(x_1,\ldots,x_{2k})|1\leqslant l\leqslant \mu-1\}, x_1^{p^\mu} q_k^{(\mu)}(x_2,\ldots,x_{2k+1}),$$

$$x_1[x_2,x_3,x_4],\ x_1[x_2,x_3]\ldots[x_{2k+2},x_{2k+3}]$$

para algum $\mu \geqslant 1$.

Demonstração. Seja S o conjunto dos polinômios multi-homogêneos $f = f(x_1,\ldots,x_n)$ do tipo p^s em $W - R_k$. Dado $f \in S$ denote

$$L_f = \langle f\rangle^{TS} + R_k.$$

Pelo Lema 3.13, temos que para todo $f \in S$, $L_f = F_1\langle X\rangle$ ou

$$L_f = \langle x_1[x_2,x_3]\ldots[x_{2\theta},x_{2\theta+1}]\rangle^{TS} + R_k$$

para algum $\theta \leqslant k$ ou

$$L_f = \left\langle x_1^{p^s} q_k^{(s)}(x_2,\ldots,x_{2k+1})\right\rangle^{TS} + R_k$$

para algum $s \geqslant 1$. É claro que se $L_f = F_1\langle X\rangle$ para algum $f \in S$, então $W = F_1\langle X\rangle$. Suponhamos então que $L_f \neq F_1\langle X\rangle$ para todo $f \in S$. Temos dois casos:

Caso 1.

Suponha que

$$L_f = \langle x_1[x_2,x_3]\ldots[x_{2\theta},x_{2\theta+1}]\rangle^{TS} + R_k,$$

para algum $f \in S$ e $\theta \leqslant k$. Defina $\lambda = \min\{\theta \mid x_1[x_2,x_3]\ldots[x_{2\theta},x_{2\theta+1}] \in W\}$. Temos

$$x_1[x_2,x_3]\ldots[x_{2\theta},x_{2\theta+1}] \in \langle x_1[x_2,x_3]\ldots[x_{2\lambda},x_{2\lambda+1}]\rangle^{TS}$$

para todo $\theta \geqslant \lambda$ e

$$x_1^{p^s} q_k^{(s)}(x_2,\ldots,x_{2k+1}) \in \langle x_1[x_2,x_3]\ldots[x_{2\lambda},x_{2\lambda+1}]\rangle^{TS} + T^{(3)}$$

para todo s, pois $\lambda \leqslant k$. Assim, concluímos que $f \in \langle x_1[x_2,x_3]\ldots[x_{2\lambda},x_{2\lambda+1}]\rangle^{TS} + R_k$ para todo $f \in S$. Temos portanto que

$$W = \langle x_1[x_2,x_3]\ldots[x_{2\lambda},x_{2\lambda+1}]\rangle^{TS} + R_k,$$

pois W é gerado por seus polinômios do tipo p^s.

Agora, é fácil ver que W é um T-espaço gerado por

$$x_1^p,\ x_1^p q_1(x_2,x_3),\ldots,\ x_1^p q_{\lambda-1}(x_2,\ldots,x_{2\lambda-1}),$$

$$x_1[x_2,x_3,x_4],\ x_1[x_2,x_3]\ldots[x_{2\lambda},x_{2\lambda+1}].$$

Caso 2.

Suponhamos agora que para todo $f \in S$,

$$L_f = \left\langle x_1^{p^s} q_k^{(s)}(x_2,\ldots,x_{2k+1})\right\rangle^{TS} + R_k$$

para algum $s = s_f \geqslant 1$. Note que se $r \geqslant s$, então

$$\begin{aligned} x_1^{p^r} q_k^{(r)}(x_2,\ldots,x_{2k+1}) &\equiv x_1^{p^r} x_2^{p^r-1}\ldots x_{2k+1}^{p^r-1}[x_2,x_3]\ldots[x_{2k},x_{2k+1}] \\ &\equiv (x_1^{p^{r-s}})^{p^s} x_2^{p^{r-s}} x_2^{p^{s-1}} \ldots x_{2k+1}^{p^{r-s}} x_{2k+1}^{p^{s-1}}[x_2,x_3]\ldots[x_{2k},x_{2k+1}] \\ &\equiv (x_1^{p^{r-s}})^{p^s} x_2^{p^{r-s}} \ldots x_{2k+1}^{p^{r-s}} x_2^{p^{s-1}} \ldots x_{2k+1}^{p^{s-1}}[x_2,x_3]\ldots[x_{2k},x_{2k+1}] \\ &\equiv (x_1^{p^{r-s}} x_2^{p^{r-s}-1} \ldots x_{2k+1}^{p^{r-s}-1})^{p^s} x_2^{p^{s-1}} \ldots x_{2k+1}^{p^{s-1}}[x_2,x_3]\ldots[x_{2k},x_{2k+1}]. \end{aligned}$$

Daí

$$x_1^{p^r} q_k^{(r)}(x_2,\ldots,x_{2k+1}) \in \left\langle x_1^{p^s} q_k^{(s)}(x_2,\ldots,x_{2k+1})\right\rangle^{TS} + T^{(3)}.$$

Seja $\mu = \min\{s \mid x_1^{p^s} q_k^{(s)}(x_2,\ldots,x_{2k+1}) \in W\}$. Então

$$W = \left\langle x_1^{p^\mu} q_k^{(\mu)}(x_2,\ldots,x_{2k+1})\right\rangle^{TS} + R_k.$$

Agora é fácil ver que W é gerado pelos polinômios do item 3 do enunciado da proposição. $\square$

Como corolário temos:

Corolário 3.15. *Seja W um T-espaço de $F_1\langle X\rangle$ tal que $R_k \subsetneq W$. Então W é um T-espaço finitamente gerado.*

O seguinte teorema segue do Teorema 3.12 e do corolário acima.

Teorema 3.16. *Para cada $k \geqslant 1$, o T-espaço R_k é um T-espaço limite de $F_1\langle X\rangle$.*

Para provar que $F_1\langle X\rangle$ tem infinitos T-espaços limites, falta só provar que os R_k's são distintos. Isso é obtido no próximo resultado.

Proposição 3.17. *Se $k \neq l$ então $R_k \neq R_l$.*

Demonstração. Suponhamos que $R_k = R_l$ para alguns k, l com $k < l$. Veremos que isso implica em $C(G) \subseteq R_l$. Com efeito, os geradores de $C(G)$ são:

$$x_1[x_2,x_3,x_4],\ x_1^p,\ x_1^p q_1(x_2,x_3),\ldots,\ x_1^p q_n(x_2,\ldots,x_{2n+1}),\ldots.$$

Então

$$x_1[x_2,x_3,x_4] \in T^{(3)} \subseteq R_l,$$

$$x_1^p,\ x_1^p q_1(x_2,x_3),\ldots,\ x_1^p q_{l-1}(x_2,\ldots,x_{2l-1}) \in U^{(l-1)} \subseteq R_l,$$

$$x_1^p q_{l+1}(x_2,\ldots,x_{2l+3}),\ x_1^p q_{l+2}(x_2,\ldots,x_{2l+5}),\ldots \in T^{(3,l+1)} \subseteq R_l.$$

Como $k < l$
$$x_1^p q_l(x_2, \dots, x_{2l+1}) \in T^{(3,k+1)} \subseteq R_k = R_l.$$
Logo $C(G) \subseteq R_l$ como foi previsto. Mas $C(G) \neq R_l$ pois
$$x_1[x_2, x_3] \dots [x_{2l+2}, x_{2l+3}] \notin C(G).$$
Como $C(G)$ é T-espaço limite, temos R_l finitamente gerado. Absurdo. $\square$

Juntando o Teorema 3.16 e a proposição anterior, temos o Teorema Principal 2, da introdução desta dissertação, demonstrado.

Referências Bibliográficas

[1] E. V. Aladova, *A non-finitely based variety of nil-algebras over a field of characteristic* 3. (Russian) Algebra and linear optimization (Ekaterinburg, 2002), Ross. Akad. Nauk Ural. Otdel., Inst. Mat. Mekh., Ekaterinburg, 2002, pp. 5-11.

[2] E.V. Aladova, A. Krasilnikov, *Polynomial identities in nil-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009) 5629-5646.

[3] A. Amitsur, J. Levitzki, *Minimal identities for algebras*, Proc. Amer. Math. 1 (1950), 449-463.

[4] A. Ya. Belov, *On non-Specht varieties* (Russian), Fundam. Prikl. Mat. 5 (1999), 47-66.

[5] A. Brandão Jr., P. Koshlukov, A.Krasilnikov, E.A. Silva, *The central polynomials for the Grassmann algebra*, Israel J. Math. 179 (2010) 127-144.

[6] V. Drensky, *A minimal basis for the identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0* (Russian), Algebra i Logika 20, 282-290 (1981). Translation: Algebra and Logis 20, 188-194 (1981).

[7] V. Drensky, *Free algebras and PI-algebras.* Springer-Verlag Singapore, Singapore, 2000.

[8] E. Formanek, *The Nagata-Higman theorem*, Acta Appl. Math. 21 (1990), no. 1-2, 185-192.

[9] D. Gonçalves, A. Krasilnikov, I. Sviridova, *Limit T-subspaces and the central polynomials in n variables of the Grassmann algebra*, J. Algebra 371 (2012) 156-174.

[10] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*, Math. Surveys Monogr., vol. 122, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[11] A.V. Grishin, *Examples of T-spaces and T -ideals of characteristic 2 without the finite basis property*, Fundam. Prikl. Mat. 5 (1999) 101-118.

[12] A. V. Grishin, *On non-Spechtianness of the variety of associative rings that satisfy the identity* $x^{32} = 0$, Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 6 (2000), 50-51.

[13] A.V. Grishin, L.M. Tsybulya, *On the multiplicative and T-space structure of the relatively free Grassmann algebra*, Sb. Math. 200 (2009) 1299-1338.

[14] C. K. Gupta, A. N. Krasilnikov, *A non-finitely based system of polynomial identities which contains the identity* $x^6 = 0$, Quart. J. Math. 53 (2002), 173-183.

[15] G. Higman, *On a conjecture of Nagata*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 52 (1956), 1-4.

[16] A. R. Kemer, *Finite basability of identities of associative algebras* (Russian), Algebra i Logika 26 (1987), 597-641.

[17] P. Koshlukov, *Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic* $p \neq 2$, J. Algebra 241 (2001),410-434.

[18] M. Nagata, *On the nilpotency of nil algebras.* J. Math. Soc. Japan 4 (1953), 296-301.

[19] Yu. P. Razmyslov, *Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero* (Russian), Algebra i Lokika 12, 83-113 (1973), Translation: Algebra and Logis 12, 47-63 (1973).

[20] V. V. Shchigolev, *Examples of infinitely based* T *-ideals* (Russian), Fundam. Prikl. Mat. 5 (1999), 307-312.

[21] V. V. Shchigolev, *Examples of infinitely basable T-spaces* (Russian), Mat. Sb. 191 (2000), 143-160. English translation in Sb. Math. 191 (2000), 459-476.

[22] V. V. Shchigolev, *Infinitely based* T *-spaces and* T *-ideals*, Ph.D. thesis, Moscow State University, 2002.

[23] S.Rosset, A new proof of the Amitsur-Levitzki identity, Israel J. Math. 23, 187-188 (1976).