



Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

ANÁLISE DE UM MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS COM INTERFACE ESTABILIZADA PARA A EQUAÇÃO DE ADVECÇÃO - REAÇÃO

Rosalía Taboada Leiva

Orientador: *Sávio Brochini Rodrigues*

São Carlos
Agosto de 2014

ANÁLISE DE UM MÉTODO DE
ELEMENTOS FINITOS COM
INTERFACE ESTABILIZADA PARA A
EQUAÇÃO DE ADVECÇÃO - REAÇÃO

Rosalía Taboada Leiva

Orientador: *Sávio Brochini Rodrigues*

Dissertação apresentada ao PPG-M da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Orientação: Prof Dr. Sávio Brochini Rodrigues.

São Carlos

Agosto de 2014

Autor

Orientador

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

L533am Leiva, Rosalia Taboada.
Análise de um método de elementos finitos com interface estabilizada para a equação de advecção - reação / Rosalia Taboada Leiva. -- São Carlos : UFSCar, 2014.
71 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2014.

1. Matemática. 2. Elementos finitos. 3. Galerkin, Métodos de. 4. Equação de advecção-reação. I. Título.

CDD: 510 (20^a)

Banca Examinadora:

Sávio B. Rodrigues

**Prof. Dr. Sávio Brochini Rodrigues
DM - UFSCar**

José Luiz Boldrini

**Prof. Dr. José Luiz Boldrini
UNICAMP**

Ma To Fu

**Prof. Dr. Ma To Fu
ICMC - USP**

Agradecimentos

Principalmente ao meu Señor Jesuscristo pela ajuda em todo este tempo, dando-me ânimo e fortaleza nos momentos difíceis. A glória seja para ele.

Aos meus pais, Hugo Taboada Gonzáles e Carmen Rosa Leiva Huamanchumo, pela compreensão e as orações feitas a Deus por mim.

Ao professor Sávio Brochini Rodrigues, pela orientação, a paciência e os ensinamentos que ajudaram muito para este trabalho.

Ao programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, pela oportunidade da realização deste trabalho.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um método de elemento finito com interface estabilizada para a equação de advecção - reação:

$$\begin{aligned}\mu u + \mathbf{a} \cdot \nabla u &= f \quad \text{em } \Omega, \\ -u \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} &= g \quad \text{sobre } \Gamma^-, \end{aligned}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ com $1 \leq d \leq 3$ e Γ^- é a porção de $\partial\Omega$ na qual $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} < 0$.

Analisaremos a parte teórica da estimativa de erro e a melhor aproximação da solução do problema discreto com respeito à solução exata. O que faremos primeiro é estudar o método de Galerkin descontínuo clássico e depois introduziremos o novo método, onde usando as mesmas técnicas do método clássico analisaremos a estimativa de erro e a melhor aproximação.

Abstract

In this study we present an interface stabilised finite element method for the scalar advection-reaction equation:

$$\begin{aligned}\mu u + \mathbf{a} \cdot \nabla u &= f \quad \text{em } \Omega, \\ -u \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} &= g \quad \text{sobre } \Gamma^-, \end{aligned}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ with $1 \leq d \leq 3$ and Γ^- is the portion of $\partial\Omega$ on which $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} < 0$.

We analyze the theoretical part of the error estimate and the best approximation of the discrete solution to exact solution. We study the classic discontinuous Galerkin method and then we introduce the new method, which using the same techniques of classical method analyze the error estimate and the best approximation.

Sumário

1. Introdução	1
2. Formulação Variacional	4
2.1. Espaços com Produto Interno	4
2.2. Espaços de Hilbert	5
2.2.1. Exemplos de Subespaços de Espaços de Hilbert	6
2.2.2. Teorema de Representação de Riesz	7
2.2.3. Formulação de Problema Variacionais Não Simétricos	7
2.3. Boa colocação para modelos de problemas lineares	9
3. Espaços de Sobolev Quebrados	16
3.1. Espaços de Sobolev	16
3.1.1. Espaços de Lebesgue	16
3.1.2. Espaços de Sobolev	17
3.2. O Caso Discreto	20
3.2.1. Malhas	20
3.2.2. Faces da malha, Medias e Saltos	21
3.2.3. Espaço de Polinômios Quebrados	23
3.2.4. Espaço de Sobolev Quebrados	23
4. Análise abstrata de erro não conforme	27
4.1. Análise abstrata de erro não conforme	27

4.1.1.	O Problema Discreto	27
4.1.2.	Estabilidade Discreta	28
4.1.3.	Consistência	29
4.1.4.	Limitação	30
4.1.5.	Estimativa de erro	31
4.1.6.	Sequência de Malhas de Forma Regular	32
4.1.7.	Desigualdades Inversa e do Traço	35
4.1.8.	Aproximações Polinomiais	36
5.	Equação Advecção-Reação	39
5.0.9.	Derivação Heurística	45
5.0.10.	Estimativa de erro	48
5.1.	Upwinding	51
5.1.1.	Estimativa de erro baseado na condição inf-sup	53
5.2.	Fluxos Numéricos	55
6.	Equação Advecção-Reação com interface estabilizada	58
6.1.	Método de interface estabilizada	58
6.1.1.	Problema modelo	58
6.1.2.	O método	59
	Bibliografia	70

Capítulo 1

Introdução

Os métodos de Galerkin descontínuos (GD) foram introduzidos nos anos 1970 e seu desenvolvimento desde então têm seguido dois caminhos principalmente: métodos para equações diferenciais parciais hiperbólicas e elípticas. Mais recentemente, os métodos de Galerkin descontínuo para equações hiperbólicas tiveram uma evolução significativa com base nas idéias de fluxos numéricos (Cockburn e outros [2]).

Para equações diferenciais parciais hiperbólicas, o primeiro método de Galerkin descontínuo foi introduzido por Reed e Hill [9] no ano 1973 para simular o transporte de nêutrons e a primeira análise dos métodos de Galerkin descontínuo para equações hiperbólicas em uma forma geral e abstrata foi feito por Lesaint e Raviart em 1974 ([7] e [8]). A análise foi posteriormente melhorada por Johnson et al. que estabeleceu que a ordem ideal de convergência na norma L^2 é $p + \frac{1}{2}$ se fossem utilizados polinômios de grau p ([5]).

O interesse nos métodos de Galerkin descontínuo é estimulado por vários fatores, entre eles o fato de ser vantajoso em relação a suas propriedades de estabilidade e a possibilidade de combinar malhas não-conformes. Uma desvantagem do método é o aumento de graus de liberdade globais em uma determinada malha em relação aos métodos Galerkin contínuos. Neste trabalho foi estudado o artigo [10] em que o autor propõe um método para minimizar esta desvantagem através de um tratamento

especial para as interfaces entre elementos, no entanto somente nos limitaremos a estudar o funcionamento do método de uma forma mais teórica, analisando a convergência e a melhor aproximação da solução do problema discreto com respeito à solução exata, a análise dos graus de liberdade e a implementação do método podem ser feitos em trabalhos posteriores.

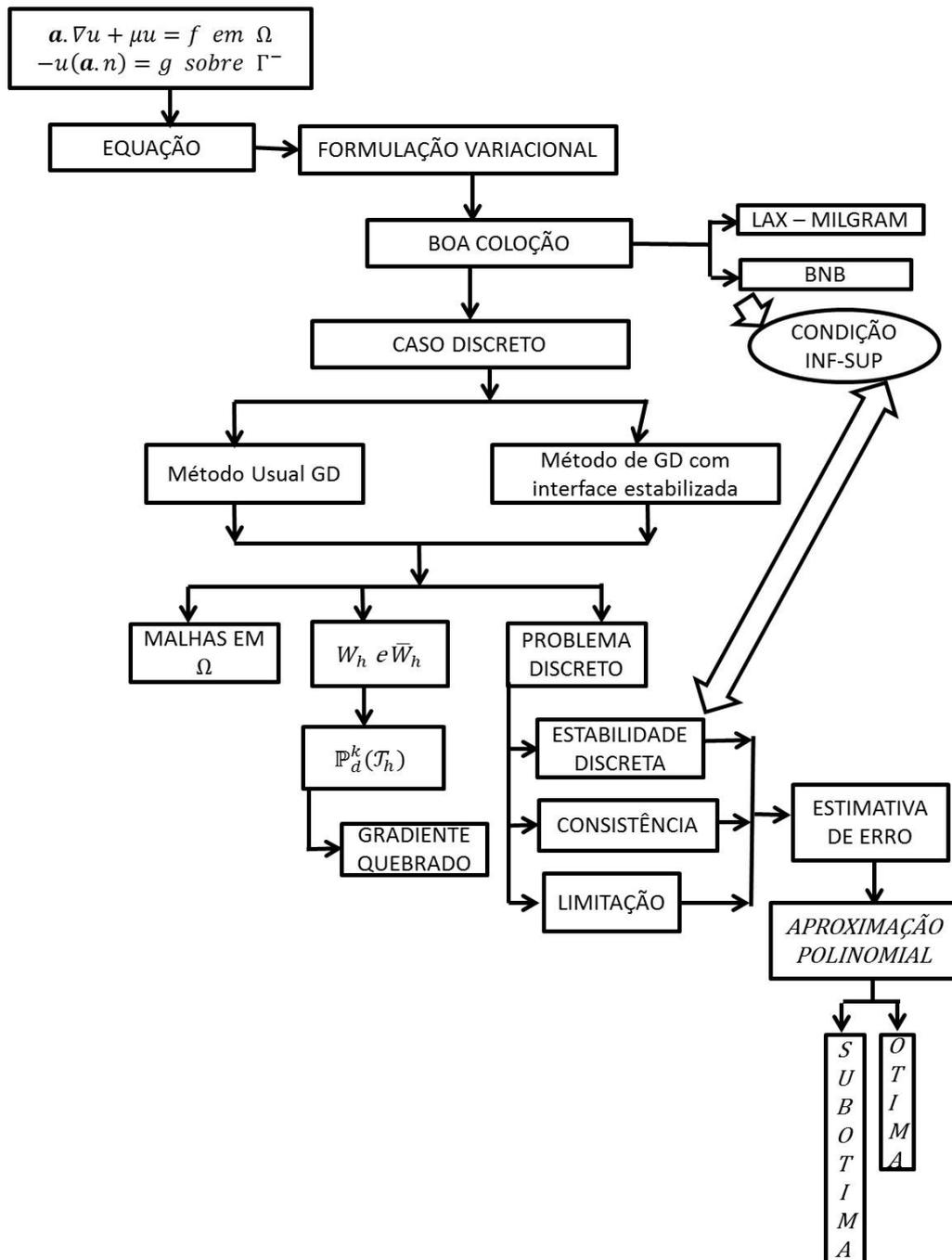
O trabalho está organizado da seguinte maneira: no capítulo 2 expomos os conceitos e resultados básicos que precisamos para obter a formulação variacional de uma equação diferencial e o seu boa colocação; os resultados mais importantes neste capítulo são o teorema Banach-Necas-Babuška e o lema de Lax - Milgram. No capítulo 3, começamos recordando os espaços de Sobolev usuais e introduzimos também as definições e algumas propriedades dos espaços de Sobolev Quebrados. No capítulo 4, apresentamos as ferramentas que precisamos para fazer a análise da estimativa de erro, os quais são a estabilidade discreta, a consistência e a limitação; além disso, vemos duas desigualdades importantes, desigualdade inversa e do traço, para o desenvolvimento de aproximação polinomial para o qual também precisaremos certa regularidade da solução exata. No capítulo 5, aplicaremos a teoria dos capítulos anteriores à equação de advecção - reação com condição de fronteira homogênea

$$\begin{aligned}\beta \cdot \nabla u + \mu u &= f \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega^-, \end{aligned}$$

Aqui, a função desconhecida u é de valor escalar e representa, por exemplo, uma concentração de alguma substância; β é a velocidade de advecção com valores em \mathbb{R}^d , μ o coeficiente de reação, f é o termo de fonte, e $\partial\Omega^-$ denota a parte da fronteira de $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ onde o fluxo entra, isto é:

$$\partial\Omega^- := \{x \in \partial\Omega \mid \beta(x) \cdot n(x) < 0\}.$$

Além disso, vemos como atua os fluxos numéricos quando restringimos a uma formulação local por elemento. Por último, no capítulo 6, vemos as estimativas de estabilidade e convergência de um método chamado de método de interface estabilizada o qual é formulado em [6]. Resumimos todo o trabalho no seguinte esquema:



Capítulo 2

Formulação Variacional

Este capítulo é dedicado às ferramentas da análise funcional necessárias para desenvolver a formulação variacional de equações diferenciais. Apresentamos uma introdução aos espaços de Hilbert, incluindo só o material que é essencial para futuros desenvolvimentos.

O objetivo do capítulo é fornecer os resultados com os quais podem ser estabelecidas a existência e a unicidade de soluções para problemas variacionais.

2.1. Espaços com Produto Interno

Definição 2.1 ▪ *Uma forma bilinear, $a(\cdot, \cdot)$, sobre um espaço vetorial V é uma função $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que cada uma das funções $w \mapsto a(w, v)$ e $v \mapsto a(w, v)$ é linear sobre V .*

- *Uma forma bilinear é **simétrica** se $a(w, v) = a(v, w)$, $\forall w, v \in V$*
- *Um **produto interno**, denotado por (\cdot, \cdot) , é uma forma bilinear simétrica sobre um espaço vetorial V que satisfaz:*

a) $(v, v) \geq 0$, $\forall v \in V$

b) $(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$

- Um espaço vetorial V acompanhado com um produto interno definido sobre este, é chamado um **Espaço Produto Interno** e é denotado por $(V, (\cdot, \cdot))$. Outras definições importantes são as seguintes:
- Uma forma bilinear é **coerciva** se existe $\alpha > 0$ tal que,

$$\forall w \in V, \quad a(w, w) \geq \alpha \|w\|_V^2$$

- Uma forma bilinear é **contínua** se existe uma constante $C > 0$ tal que,

$$\forall u, v \in V, \quad |a(u, v)| \leq C \|u\|_V \|v\|_V$$

Teorema 2.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) *Se $(V, (\cdot, \cdot))$ é um espaço com produto interno, então*

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{1/2} (v, v)^{1/2} \tag{2.1}$$

A igualdade vale se e somente se u e v são linearmente dependentes.

Proposição 1 $\|v\| := \sqrt{(v, v)}$ define a norma no espaço produto interno $(V, (\cdot, \cdot))$.

2.2. Espaços de Hilbert

A proposição (1) diz que para um espaço com produto interno, existe uma norma associada definida sobre V , isto é $\|v\| := \sqrt{(v, v)}$. Assim, um espaço produto interno pode ser transformado num espaço vetorial normado.

Definição 2.2 *Seja $(V, (\cdot, \cdot))$ um espaço com produto interno. Se o espaço vetorial normado associado $(V, \|\cdot\|)$ é completo, então $(V, (\cdot, \cdot))$ é chamado um **espaço de Hilbert**.*

Definição 2.3 *Seja H um espaço de Hilbert e $S \subset H$ é um subespaço linear¹ que é fechado em H . Então S é chamado um **subespaço de H** .*

Proposição 2 *Se S é um subespaço de H , então $(S, (\cdot, \cdot))$ é também um espaço de Hilbert.*

2.2.1. Exemplos de Subespaços de Espaços de Hilbert

- (i) H e $\{0\}$ são casos óbvios.
- (ii) Seja $T : H \rightarrow K$ uma função linear contínua de H em outro espaço vetorial. Então o núcleo de T , $\text{Ker } T$, é um subespaço.
- (iii) Seja $x \in H$ e definimos $x^\perp := \{v \in H : (v, x) = 0\}$. Então x^\perp é um subespaço de H . Para ver isso, notar que $x^\perp = \text{Ker } L_x$, onde L_x é a funcional linear

$$L_x : v \rightarrow (v, x) \tag{2.2}$$

Pela desigualdade de Schwarz (2.1), $|L_x(v)| \leq \|v\| \|x\|$, o qual implica que L_x é limitada e por tanto contínua. Isto prova que x^\perp é um subespaço de H em vista do exemplo anterior.

- (iv) Seja $M \subset H$ um subconjunto e definimos $M^\perp := \{v \in H : (x, v) = 0 \ \forall x \in M\}$. Note que $M^\perp = \bigcap_{x \in M} x^\perp$ e cada x^\perp é um subespaço fechado de H e a intersecção arbitrária de fechados é fechado. Assim, M^\perp é um subespaço de H .

Proposição 3 *Seja H um espaço de Hilbert. Então*

$$(1) \ \forall M, N \subset H, M \subset N \Rightarrow N^\perp \subset M^\perp.$$

$$(2) \ \forall M \subset H \text{ com } 0 \in M, M \cap M^\perp = \{0\}.$$

¹Lembrando que S é linear significa que se $u, v \in S, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha u + v \in S$

$$(3) \{0\}^\perp = H.$$

$$(4) H^\perp = \{0\}$$

2.2.2. Teorema de Representação de Riesz

Dado $u \in H$, lembremos que um funcional linear contínuo L_u pode ser definido sobre H por

$$L_u(v) = (u, v) \tag{2.3}$$

O seguinte teorema prova que a recíproca também é verdadeira.

Teorema 2.2 (Teorema de Representação de Riesz) *Todo funcional linear contínuo L sobre um espaço de Hilbert H pode ser representado unicamente como*

$$L(v) = (u, v) \quad \text{para algum } u \in H \tag{2.4}$$

também temos, $\|L\|_{H'} = \|u\|_H$.

2.2.3. Formulação de Problema Variacionais Não Simétricos

Um problema variacional não simétrico é colocado da seguinte forma. Suponha que as 5 condições seguintes são válidas:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad (H, (\cdot, \cdot)) \text{ é um espaço de Hilbert.} \\ (2) \quad V \text{ é um subespaço (fechado) de } H. \\ (3) \quad a(\cdot, \cdot) \text{ é uma forma bilinear sobre } V, \text{ não necessariamente simétrica.} \\ (4) \quad a(\cdot, \cdot) \text{ é contínua (limitada) sobre } V. \\ (5) \quad a(\cdot, \cdot) \text{ é coerciva sobre } V. \end{array} \right. \tag{2.5}$$

Então o **problema variacional não simétrico** é o seguinte:

$$\text{Dado } F \in V', \text{ encontre } u \in V \text{ tal que } a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V. \quad (2.6)$$

O **problema de aproximação (Galerkin)** é dado assim:

Dado um subespaço de dimensão finita $V_h \subset V$ e $F \in V'$, encontre $u_h \in V_h$ tal que

$$a(u_h, v) = F(v) \quad \forall v \in V_h. \quad (2.7)$$

Consideremos o seguinte exemplo: Seja o seguinte problema de contorno

$$-u'' + u' + u = f \quad \text{sobre } [0, 1] \quad u'(0) = u'(1) = 0 \quad (2.8)$$

Uma formulação variacional para este problema é a seguinte:

$$\left. \begin{aligned} V &= H^1(0, 1) \\ a(u, v) &= \int_0^1 (u'v' + u'v + uv)dx \\ F(v) &= (f, v) \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Notar que $a(\cdot, \cdot)$ não é simétrica pelo termo $u'v$.

Mas $a(\cdot, \cdot)$ é contínua; pois observe que

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_0^1 (u'v' + uv)dx + \int_0^1 u'v dx \right| \\ &\leq \left| \int_0^1 (u'v' + uv)dx \right| + \left| \int_0^1 u'v dx \right| \\ &= |(u, v)_{H^1}| + \left| \int_0^1 u'v dx \right| \\ &\leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} + \|u'\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \quad \text{usando desig. Schwarz (2.1)} \\ &\leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} + \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \\ &= 2\|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Portanto, $a(\cdot, \cdot)$ é contínua (tomando $C_1 = 2$ na definição).

Além disso,

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_0^1 (v'^2 + v'v + v^2) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}v'^2 + v'v + \frac{1}{2}v^2 \right) dx + \int_0^1 \left(\frac{1}{2}v'^2 + \frac{1}{2}v^2 \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}(v' + v)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (v'^2 + v^2) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}(v' + v)^2 dx + \frac{1}{2} \|v\|_{H^1}^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \|v\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

Portanto, $a(\cdot, \cdot)$ é coerciva (tomando $\alpha = \frac{1}{2}$ na definição).

2.3. Boa colocação para modelos de problemas lineares

Depois de descrevermos a formulação variacional de um problema, gostaríamos de considerar a existência e a unicidade da solução de tal problema variacional.

Nosso primeiro objetivo é especificar as condições em que este problema é bem posto. Usamos a seguinte definição: Um problema é bem posto se admite uma única solução e se for dotado de uma propriedade de estabilidade. Dois importantes resultados afirmando a boa colocação são apresentados:

- O teorema Banach-Nêcas-Babuška com suposições um pouco mais sofisticadas, dá condições necessárias e suficientes para que o problema seja bem posto.
- O lema de Lax- Milgram, o qual fornece uma condição suficiente para ser bem posto.

Considere o seguinte problema (abstrato)

$$\text{Encontrar } u \in X \text{ tal que } a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in Y. \quad (2.10)$$

onde:

(i) X e Y são espaços vetoriais equipados com suas respectivas normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$. Para um caso geral supomos que Y é um espaço de Banach reflexivo e X é um espaço de Banach.

X é chamado *espaço solução* e Y é chamado *espaço teste*.

(ii) a é uma forma bilinear contínua sobre $X \times Y$, i.e., $a \in \mathcal{L}(X \times Y, \mathbb{R})$, daqui dizemos também a é limitada em $X \times Y$

(iii) f é uma forma linear contínua sobre Y , i.e., $f \in Y' := \mathcal{L}(Y, \mathbb{R})$. Para simplificar a notação, escrevemos $f(v)$ em vez de $\langle f, v \rangle_{Y', Y}$.

Definição 2.4 (Hadamard) *O problema (2.10) é dito **bem posto** se admite uma única solução e se a seguinte estimativa a priori vale*

$$\exists C > 0, \forall f \in Y', \quad \|u\|_X \leq C \|f\|_{Y'}$$

Banach-Nêcas-Babuška

O teorema Banach-Nêcas-Babuška (BNB) tem um papel fundamental neste trabalho, este resultado foi indicado pela primeira vez por Nêcas em 1962 e popularizado por Babuška em 1972 no contexto dos métodos de elementos finitos.

Teorema 2.3 (Banach-Nečas-Babuška (BNB)) *Seja X um espaço de Banach e Y um espaço de Banach reflexivo. Seja $a \in \mathcal{L}(X \times Y, \mathbb{R})$ e seja $f \in Y'$. Então, o problema (2.10) está bem posto se, e somente se:*

(i) Existe $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha \leq \inf_{w \in X \setminus \{0\}} \sup_{v \in Y \setminus \{0\}} \frac{a(w, v)}{\|w\|_X \|v\|_Y}, \quad (2.11)$$

(ii) Para todo $v \in Y$,

$$(\forall w \in X, \quad a(w, v) = 0) \Rightarrow (v = 0). \quad (2.12)$$

Além disso, a seguinte estimativa a priori é válida:

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{Y'}.$$

Para mostrar isso usaremos a seguinte proposição [Ern-Guermond, pg. 472, proposição A.45]

Proposição A.45: Seja $A \in \mathcal{L}(X, Y')$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) A é bijetora.

(ii) Existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$\forall w \in X, \quad \|Aw\|_{Y'} \geq \alpha \|w\|_X. \quad (2.13)$$

$$\forall v \in Y, \quad (A^T v = 0) \Rightarrow (v = 0). \quad (2.14)$$

(iii) Existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha \leq \inf_{w \in X} \sup_{v \in Y} \frac{\langle v, Aw \rangle_{Y, Y'}}{\|w\|_X \|v\|_Y}, \quad (2.15)$$

$$\forall v' \in Y'', \quad (\langle v', Aw \rangle_{Y'', Y'} = 0, \forall w \in X) \Rightarrow (v' = 0). \quad (2.16)$$

Prova do teorema BNB:

[\Rightarrow] A hipótese é equivalente a dizer: $\forall f \in Y', \exists! u \in X$ tal que $a(u, v) = \langle f, v \rangle_{Y', Y} \quad \forall v \in Y$.

Para usar a proposição A.45, introduziremos um operador linear limitado $A \in \mathcal{L}(X, Y')$ definido assim:

$$\langle Aw, v \rangle_{Y', Y} := a(w, v) \quad \forall (w, v) \in X \times Y$$

e mostraremos que A é bijetora:

- A é injetora, pois seja Aw_1 e Aw_2 que pertencem a Y' tal que $Aw_1 = Aw_2$, isso significa que $\langle Aw_1, v \rangle = \langle Aw_2, v \rangle \quad \forall v \in Y$

$$\Rightarrow a(w_1, v) = a(w_2, v) \quad \forall v \in Y$$

$$\Rightarrow a(w_1 - w_2, v) = 0 \quad \forall v \in Y$$

Agora pela hipótese, para $f = 0 \in Y', \exists! u = 0 \in X$ tal que $a(0, v) = 0 \quad \forall v \in Y$

$$\Rightarrow w_1 = w_2$$

$\therefore A$ é injetora.

- A é sobrejetora, pois $\forall f \in Y', \exists u \in X$ tal que $a(u, v) = \langle f, v \rangle_{Y', Y} \quad \forall v \in Y$

$$\Rightarrow \langle Au, v \rangle_{Y', Y} = \langle f, v \rangle_{Y', Y} \quad \forall v \in Y$$

$$\Rightarrow \langle Au - f, v \rangle_{Y', Y} = 0 \quad \forall v \in Y$$

$$\Rightarrow Au = f$$

\Rightarrow pela proposição A.45 (2.13), existe uma constante $\alpha > 0$ tal que $\forall w \in X, \|Aw\|_{Y'} \geq \alpha \|w\|_X$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \sup_{v \in Y \setminus \{0\}} \frac{|\langle Aw, v \rangle|}{\|v\|_Y} \geq \alpha \|w\|_X \quad \forall w \in X \\ \Rightarrow & \sup_{v \in Y \setminus \{0\}} \frac{|\langle Aw, v \rangle|}{\|v\|_Y \|w\|_X} \geq \alpha, \quad \forall w \in X \setminus \{0\} \\ \Rightarrow & \inf_{w \in X \setminus \{0\}} \sup_{v \in Y \setminus \{0\}} \frac{|\langle Aw, v \rangle|}{\|w\|_X \|v\|_Y} \geq \alpha. \end{aligned}$$

Daí, para mostrar (2.12) usamos (2.16) da proposição A.45, isto é, $\forall v' \in Y'', (\langle v', Aw \rangle_{Y'', Y'} = 0, \forall w \in X) \Rightarrow (v' = 0)$.

Lembrando a injeção canônica

$$\begin{aligned} J : Y & \rightarrow Y'' \\ x & \mapsto J_x : Y' \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

definida assim $\langle J_x, f \rangle = \langle f, x \rangle$, a qual é injetora. Então seja $v \in Y$ arbitrário e temos que $(\forall w \in X, a(w, v) = 0)$, isso é equivalente a dizer que

$$\begin{aligned} \forall w \in X, \quad \langle Aw, v \rangle &= 0, \text{ como } Aw \in Y' \\ \Rightarrow \forall w \in X, \quad \langle J_v, Aw \rangle &= \langle Aw, v \rangle = 0 \\ \Rightarrow J_v &= 0 \\ \Rightarrow v &= 0 \end{aligned}$$

[\Leftarrow] Como Y é reflexivo introduzimos o operador $A^T \in \mathcal{L}(Y, X')$ tal que $\forall (w, v) \in X \times Y$

$$\langle A^T v, w \rangle_{X', X} = \langle Aw, v \rangle_{Y', Y}.$$

Vamos provar (2.14),

$$\begin{aligned} \forall v \in Y, \quad A^T v &= 0 \\ \Rightarrow \forall w \in X, \quad \langle Aw, v \rangle &= \langle A^T v, w \rangle = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall w \in X, \quad a(w, v) = 0$$

por (2.12), $\Rightarrow v = 0$

Isto, mostra (ii) da proposição (A.45) o qual implica (i). ■

Lema de Lax-Milgram

Consideraremos o caso onde o espaço solução e o espaço test é o mesmo. Assim, o problema modelo é:

$$\text{Encontrar } u \in Y \text{ tal que } a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in Y. \quad (2.17)$$

Lema 2.1 (Lax-Milgram) *Seja Y um espaço de Hilbert, seja $a \in \mathcal{L}(Y \times Y, \mathbb{R})$ e seja $f \in Y'$. Suponha que a forma bilinear a é coerciva, i.e.,*

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall w \in Y, \quad a(w, w) \geq \alpha \|w\|_Y^2$$

Então, o problema (2.17) é bem posto com a estimativa a priori

$$\forall f \in Y', \quad \|w\|_Y \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{Y'}.$$

Prova:

Vamos verificar as condições do teorema BNB:

- $X = Y$
- Y é Hilbert, isso implica que Y é Banach e reflexivo.
- Vamos mostrar que a coercividade de $a(\cdot, \cdot)$ implica (2.11) e (2.12).

De fato, para provar (2.11) usamos a coercividade, i.e., $\exists \alpha > 0, \forall w \in Y, a(w, w) \geq$

$$\alpha \|w\|^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \forall w \in Y \setminus \{0\}, \quad \alpha \|w\|_Y &\leq \frac{a(w, w)}{\|w\|_Y} \leq \sup_{v \in Y \setminus \{0\}} \frac{a(w, v)}{\|v\|_Y} \\ \Rightarrow \quad \exists \alpha > 0, \quad \inf_{w \in Y \setminus \{0\}} \sup_{v \in Y \setminus \{0\}} &\frac{a(w, v)}{\|w\|_Y \|v\|_Y} \geq \alpha. \end{aligned}$$

Para mostrar (2.12), seja $v \in Y$ tal que $a(w, v) = 0 \quad \forall w \in Y$, em particular para $w = v$, temos $\alpha \|v\|^2 \leq a(v, v) = 0 \Rightarrow \|v\|^2 \leq 0 \Rightarrow \|v\| = 0$
 $\Rightarrow v = 0.$ ■

Capítulo 3

Espaços de Sobolev Quebrados

3.1. Espaços de Sobolev

Na prática, o problema modelo (2.10) corresponde a uma EDP definida sobre um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$). O domínio Ω é um subconjunto limitado, conexo e aberto de \mathbb{R}^d com fronteira Lipschitz $\partial\Omega$. Os espaços X e Y em (2.10) são espaços de funções geradas por funções definidas sobre Ω . Por simplicidade consideraremos funções de valor escalar.

Apresentaremos brevemente duas classes de espaços de funções que serão usadas no que segue, isto é, os espaços de Lebesgue e os espaços de Sobolev. Nós só indicaremos as propriedades básicas de tais espaços.

3.1.1. Espaços de Lebesgue

Consideraremos funções $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que são Lebesgue mensuráveis e denotamos por $\int_{\Omega} v$ a integral (Lebesgue) de v sobre Ω .

Seja $1 \leq p \leq \infty$ um número real, definimos

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

e

$$\begin{aligned}\|v\|_{L^\infty(\Omega)} &:= \sup \text{ess}\{|v(x)| \text{ q.t.p } x \in \Omega\} \\ &= \inf \{M > 0 \text{ tal que } |v(x)| \leq M \text{ q.t.p } x \in \Omega\}.\end{aligned}$$

Em ambos casos, definimos o **espaço de Lebesgue**

$$L^p(\Omega) := \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ lebesgue mensurável} \mid \|v\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}.$$

Equipado com a norma $\|\cdot\|_{L^p}$, L^p é um espaço de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$. Além disso, o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ gerado por funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.

No caso particular $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert quando tem como produto interno

$$(v, w)_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} vw$$

Uma ferramenta útil nos espaços de Lebesgue é a **desigualdade de Hölder**, a qual afirma que, para todo $1 \leq p, q < \infty$ tal que $1/p + 1/q = 1$, para todo $v \in L^p(\Omega)$ e todo $w \in L^q(\Omega)$, temos que $vw \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} vw \leq \|v\|_{L^p(\Omega)} \|w\|_{L^q(\Omega)}$$

O caso particular $p = q = 2$ dá como resultado a desigualdade de Cauchy.

3.1.2. Espaços de Sobolev

Sobre a base cartesiana de \mathbb{R}^d com coordenadas (x_1, \dots, x_d) , o símbolo ∂_i com $i \in \{1, \dots, d\}$ denota a derivada parcial distribucional com respeito a x_i . Para uma d -upla $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha v$ denota a **derivada distribucional** $\partial_1^{\alpha_1}, \dots, \partial_d^{\alpha_d} v$ de v com a convenção que $\partial^{(0, \dots, 0)} v = v$. Para qualquer número real $1 \leq p \leq \infty$, definimos para

todo $\xi \in \mathbb{R}^d$ com componentes (ξ_1, \dots, ξ_d) na base cartesiana de \mathbb{R}^d , a norma

$$|\xi|_{l^p} := \left(\sum_{i=1}^d |\xi_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

e $|\xi|_{l^\infty} := \max_{1 \leq i \leq d} |\xi_i|$. O índice é omitido para a norma euclideana obtida com $p = 2$.

Seja $m \leq 0$ um inteiro e seja $1 \leq p \leq \infty$ um número real, definimos o **espaço de Sobolev**

$$W^{m,p}(\Omega) := \{v \in L^p(\Omega) / \forall \alpha \in A_d^m, \partial^\alpha v \in L^p(\Omega)\}$$

onde $A_d^m := \{\alpha \in \mathbb{N}^d / |\alpha|_{l^1} \leq m\}$.

Assim, $W^{m,p}$ é gerado por funções com derivadas globais de ordem até m em $L^p(\Omega)$. Em particular $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach quando é equipado com a norma

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{\alpha \in A_d^m} \|\partial^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|v\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} := \max_{\alpha \in A_d^m} \|\partial^\alpha v\|_{L^\infty}.$$

Consideremos também a seminorma $|\cdot|_{W^{m,p}(\Omega)}$ restringindo as definições acima as d -uplas no conjunto $\bar{A}_d^m := \{\alpha \in \mathbb{N}^d / |\alpha|_{l^1} = m\}$, isto é, mantendo apenas as derivadas de ordem global igual a m .

Para $p = 2$, usamos a notação $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$, de modo que

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) / \forall \alpha \in A_d^m, \partial^\alpha v \in L^2(\Omega)\}.$$

H^m é um espaço de Hilbert quando está equipado com o produto interno

$$(v, w)_{H^m(\Omega)} := \sum_{\alpha \in A_d^m} (\partial^\alpha v, \partial^\alpha w)_{L^2(\Omega)},$$

a qual conduz à norma e seminorma

$$\|v\|_{H^m(\Omega)} := \left(\sum_{\alpha \in A_d^m} \|\partial^\alpha v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \quad |v|_{H^m(\Omega)} := \left(\sum_{\alpha \in \bar{A}_d^m} \|\partial^\alpha v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Para permitir uma notação mais compacta, no caso $m = 1$, consideremos o gradiente $\nabla v = (\partial_1 v, \dots, \partial_d v)^t$ com valores em \mathbb{R}^d . A norma sobre $W^{1,p}(\Omega)$ pode se reescrever assim:

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \left(\|v\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla v\|_{[L^p(\Omega)]^d}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

com

$$\|\nabla v\|_{[L^p(\Omega)]^d} := \left(\int_{\Omega} |\nabla v|_{\ell^p}^p \right)^{1/p} = \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^d |\partial_i v|^p \right)^{1/p}.$$

No caso $p = 2$, obtemos

$$(v, w)_{H^1(\Omega)} = (v, w)_{L^2(\Omega)} + (\nabla v, \nabla w)_{[L^2(\Omega)]^d}.$$

Valores de contorno de funções no espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ pode ser visto como funções (pelo menos) em $L^p(\partial\Omega)$. Mais precisamente (ver, por exemplo, Brenner e Scott ([1], pg.39, Cap. 1)), para todo $1 \leq p \leq \infty$, existe C tal que

$$\|v\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{L^p(\Omega)}^{1-1/p} \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{1/p} \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega). \quad (3.1)$$

Em particular, para $p = 2$, obtemos

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (3.2)$$

As limitações (3.1) e (3.2) São chamadas **desigualdades do traço contínuas**.

3.2. O Caso Discreto

Definição 3.1 (Poliedro em \mathbb{R}^d) Dizemos que o conjunto P é um poliedro em \mathbb{R}^d se P é um conjunto aberto, conexo, limitado de \mathbb{R}^d tal que sua fronteira ∂P é uma união finita de partes de hiperplanos, $\{H_i\}_{1 \leq i \leq n_P}$. Além disso, para todo $1 \leq i \leq n_P$, cada ponto x do interior de $\partial P \cap H_i$, os pontos y do interior de P que acumulam próximos a x o fazem somente de um lado da fronteira (isto evita cortes no domínio).

Suponhamos que o domínio Ω é um poliedro em \mathbb{R}^d .

Definição 3.2 (Fronteira e Normal exterior) A fronteira de Ω é denotada por $\partial\Omega$ e sua normal (unitária) exterior, a qual está definida q.t.p sobre Ω , por \mathbf{n} .

3.2.1. Malhas

Definição 3.3 (Simplexo) Dada uma família $\{a_0, \dots, a_d\}$ de $(d+1)$ pontos em \mathbb{R}^d tal que os vetores $\{a_1 - a_0, \dots, a_d - a_0\}$ são linearmente independentes, a envoltória convexa de $\{a_0, \dots, a_d\}$ é chamada um simplexo não degenerado de \mathbb{R}^d , e os pontos $\{a_0, \dots, a_d\}$ são chamados de vértices.

Definição 3.4 (FACES de simplexo) Seja S um simplexo não degenerado com vértices $\{a_0, \dots, a_d\}$. Para cada $i \in \{0, \dots, d\}$, a envoltória convexa de $\{a_0, \dots, a_d\} \setminus \{a_i\}$ é chamada uma face do simplexo S .

Definição 3.5 (Malha Simplicial) Uma malha simplicial \mathcal{T} de um domínio Ω é uma coleção finita de simplexos não degenerados $\mathcal{T} = \{T\}$ formando uma partição de Ω ,

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} \bar{T} \quad (3.3)$$

Cada $T \in \mathcal{T}$ é chamado um **elemento de malha**.

Definição 3.6 (Malha Geral) *Uma malha geral \mathcal{T} de um domínio Ω é uma coleção finita e disjunta de poliedros $\mathcal{T} = \{T\}$ obedecendo (3.3). Cada $T \in \mathcal{T}$ é chamado um **elemento de malha**.*

Uma malha simplicial é um caso particular de uma malha geral.

Definição 3.7 (Diâmetro do elemento, tamanho da malha) *Seja \mathcal{T} uma malha geral do domínio Ω . Para todo $T \in \mathcal{T}$, h_T denota o **diâmetro de T** , e o **tamanho da malha** é definido como o número real*

$$h := \max_{T \in \mathcal{T}} h_T$$

Usamos a notação \mathcal{T}_h para uma malha \mathcal{T} com tamanho de malha h .

Definição 3.8 (Normal exterior de um elemento) *Seja \mathcal{T}_h uma malha geral do domínio Ω e seja $T \in \mathcal{T}_h$. Definimos \mathbf{n}_T q.t.p sobre ∂T como a normal exterior (unitária) a T .*

3.2.2. Faces da malha, Medias e Saltos

Definição 3.9 (Faces da malha) *Seja \mathcal{T}_h uma malha do domínio Ω . Dizemos que um subconjunto (fechado) F de $\bar{\Omega}$ é uma **face da malha** se F é $(d-1)$ -dimensional e se uma das seguintes duas condições é satisfeita:*

- (i) *Existem elementos distintos T_1 e T_2 tal que $F = \partial T_1 \cap \partial T_2$; nesse caso, F é chamada uma **interface**.*
- (ii) *Existe $T \in \mathcal{T}_h$ tal que $F = \partial T \cap \partial \Omega$; nesse caso, F é chamada uma **face de fronteira***

\mathcal{F}_h^i denota o conjunto de interfaces e \mathcal{F}_h^b denota o conjunto de faces de fronteira.

Daqui em diante, definimos

$$\mathcal{F}_h = \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^b.$$

Definição 3.10 (Medias e Saltos de interfaces) *Seja v uma função de valor único definida sobre Ω e assumimos que é suficientemente suave para admitir sobre cada $F \in \mathcal{F}_h^i$ traços provenientes dos elementos T_1 e T_2 (possivelmente com valores diferentes). Isto significa que, para todo $T \in \mathcal{T}$, a restrição $v|_T$ de v ao conjunto aberto T pode ser definida sobre a fronteira ∂T . Então, para todo $F \in \mathcal{F}_h^i$ e $x \in F$ q.t.p, a **média de v** é definida como*

$$\{\{v\}\}_F(x) := \frac{1}{2} (v|_{T_1}(x) + v|_{T_2}(x)),$$

e o **salto de v** como

$$[[v]]_F(x) = v|_{T_1}(x) - v|_{T_2}(x). \quad (3.4)$$

Definição 3.11 (Normais das faces) *Para todo $F \in \mathcal{F}_h$ e $x \in F$ q.t.p, definimos a normal (unitária) \mathbf{n}_F a F em x como*

(i) n_{T_1} , a normal unitária a F em x de T_1 a T_2 se $F \in \mathcal{F}_h^i$ com $F = \partial T_1 \cap \partial T_2$, a orientação de \mathbf{n}_F é arbitrária dependendo da escolha de T_1 a T_2 e mantém-se fixa no que segue.

(ii) n , a normal exterior unitária a Ω em x se $F \in \mathcal{F}_h^b$.

Nota 3.1 *No que segue do trabalho veremos expressões que envolvem o salto de v na fase F ($[[v]]_F$) e a normal na fase (\mathbf{n}_F). Observe que nas definições (3.10) e (3.11) a escolha dos elementos T_1 e T_2 é a mesma. Ou seja, a direção da normal \mathbf{n}_F é determinada pela escolha feita na fórmula (3.4).*

3.2.3. Espaço de Polinômios Quebrados

O Espaço Polinomial \mathbb{P}_d^k

Seja $k \geq 0$ um inteiro e seja o conjunto $A_d^k := \{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha|_{\ell^1} \leq k\}$, definimos o espaço de polinômios de d variáveis, de grau no máximo k , como

$$\mathbb{P}_d^k = \left\{ p : \mathbb{R}^d \ni x \mapsto p(x) \in \mathbb{R} \mid \exists (\gamma_\alpha)_{\alpha \in A_d^k} \in \mathbb{R}^{\text{card}(A_d^k)} \text{ tal que } p(x) = \sum_{\alpha \in A_d^k} \gamma_\alpha x^\alpha \right\},$$

com a convenção que, para $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $x^\alpha := \prod_{i=1}^d x_i^{\alpha_i}$.

O Espaço Polinomial Quebrado $\mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h)$

Podemos agora definir o espaço polinomial quebrado o qual contém funções tal que a restrição em cada elemento da malha \mathcal{T}_h é um polinômio, isto é,

$$\mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h) := \{v \in L^2(\Omega) \mid \forall T \in \mathcal{T}_h, v|_T \in \mathbb{P}_d^k(T)\}. \quad (3.5)$$

3.2.4. Espaço de Sobolev Quebrados

Nesta seção introduziremos os espaços de sobolev quebrados e o operador gradiente quebrado. Seja \mathcal{T}_h uma malha no domínio Ω . Para qualquer elemento $T \in \mathcal{T}_h$, os espaços de Sobolev $H^m(T)$ e $W^{m,p}(T)$ podem ser definidos como antes substituindo Ω por T . Então definimos os *Espaços de Sobolev Quebrados*

$$H^m(\mathcal{T}_h) := \{v \in L^2(\Omega) \mid \forall T \in \mathcal{T}_h, v|_T \in H^m(T)\}, \quad (3.6)$$

$$W^{m,p}(\mathcal{T}_h) := \{v \in L^p(\Omega) \mid \forall T \in \mathcal{T}_h, v|_T \in W^{m,p}(T)\}, \quad (3.7)$$

onde $m \geq 0$ é um inteiro e $1 \leq p \leq \infty$ é um número real.

No contexto de espaços de Sobolev quebrados, a desigualdade de traço contínuo

(3.1) pode ser usada para inferir que, para todo $v \in W^{1,p}(\mathcal{T}_h)$ e todo $T \in \mathcal{T}_h$,

$$\|v\|_{L^p(\partial T)} \leq C \|v\|_{L^p(T)}^{1-\frac{1}{p}} \|v\|_{W^{1,p}(T)}^{\frac{1}{p}}, \quad (3.8)$$

enquanto $p = 2$, obtemos, para todo $v \in H^1(\mathcal{T}_h)$ e todo $T \in \mathcal{T}_h$,

$$\|v\|_{L^2(\partial T)} \leq C \|v\|_{L^2(T)}^{\frac{1}{2}} \|v\|_{H^1(T)}^{\frac{1}{2}}. \quad (3.9)$$

Agora, é natural definir o operador gradiente quebrado agindo sobre o espaço de Sobolev quebrado $W^{1,p}(\mathcal{T}_h)$. Em particular, este operador também age sobre os espaços de polinômios quebrados.

Definição 3.12 (Gradiente Quebrado) *O gradiente quebrado $\nabla_h : W^{1,p}(\mathcal{T}_h) \rightarrow [L^p(\Omega)]^d$ é definido tal que, para todo $v \in W^{1,p}(\mathcal{T}_h)$,*

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad (\nabla_h v)|_T := \nabla(v|_T). \quad (3.10)$$

Uma vez vista a definição, é importante observar que os espaços de Sobolev usuais são subespaços dos espaços de Sobolev quebrados, e que sobre os espaços de Sobolev usuais, o gradiente quebrado coincide com o gradiente distribucional como se mostra no seguinte resultado.

Lema 3.1 (Gradiente Quebrado sobre espaços de Sobolev usuais) *Seja $m \geq 0$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então $W^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\mathcal{T}_h)$. Além disso, para todo $v \in W^{1,p}(\Omega)$, $\nabla_h v = \nabla v$ em $[L^p(\Omega)]^d$*

Prova:

É suficiente provar a inclusão para $m = 1$. Se $v \in W^{1,p}(\Omega)$ primeiro observamos que

$$\nabla(v|_T) = (\nabla v)|_T, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$$

De fato, $\forall \Phi \in [C_0^\infty(T)]^d$, a extensão de Φ por zero a Ω , denotada por $E\Phi$, pertence a $[C_0^\infty(\Omega)]^d$ então

$$\begin{aligned}
\int_T \nabla(v|_T) \cdot \Phi &= - \int_T (\nabla \cdot \Phi) \cdot v \quad \text{usando integração por partes} \\
&= - \int_\Omega (\nabla \cdot (E\Phi))v \quad \text{pela definição de } v \text{ em } \Omega \\
&= \int_\Omega \nabla v \cdot E\Phi \quad \text{integração por partes} \\
&= \int_T (\nabla v)|_T \cdot \Phi \quad \text{pois } E\Phi|_{\Omega \setminus T} = 0.
\end{aligned}$$

Como Φ é arbitrária, isto implica $\nabla(v|_T) = (\nabla v)|_T$ e como $T \in \mathcal{T}_h$ é arbitrário, então $\nabla_h v = \nabla v$. Esta igualdade também mostra que $v \in W^{1,p}(\mathcal{T}_h)$. ■

Lema 3.2 (Caracterização de $W^{1,p}(\Omega)$) *Seja $1 \leq p \leq \infty$. A função $v \in W^{1,p}(\mathcal{T}_h)$ pertence a $W^{1,p}(\Omega)$ se, e somente se*

$$[[v]] = 0 \quad \forall F \in \mathcal{F}_h^i. \quad (3.11)$$

Prova:

[\Leftarrow] Seja $v \in W^{1,p}(\mathcal{T}_h)$. Então para todo $\Phi \in [C_0^\infty(\Omega)]^d$, observemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\nabla_h v) \cdot \Phi &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla(v|_T) \cdot \Phi \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} - \int_T v(\nabla \cdot \Phi) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} (n_T \cdot \Phi)v|_T \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} - \int_T v(\nabla \cdot \Phi) + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (n_F \cdot \Phi) [[v]] \quad (3.12) \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} - \int_T v(\nabla \cdot \Phi) \\
&= - \int_\Omega v(\nabla \cdot \Phi) \quad \forall \Phi \in [C_0^\infty(\Omega)]^d
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \nabla_h v = \nabla v$, significa então que $\nabla_h v \in [L^p(\Omega)]^d$. Assim $v \in W^{1,p}(\Omega)$.

[\Rightarrow] Se $v \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\nabla v = \nabla_h v$ em $[L^p(\Omega)]^d$, daí de (3.12) implica

$$\begin{aligned} \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (n_F \cdot \Phi) \llbracket v \rrbracket &= \int_{\Omega} (\nabla_h v) \cdot \Phi + \int_{\Omega} v (\nabla \cdot \Phi) \\ &= \int_{\Omega} (\nabla_h v) \cdot \Phi - \int_{\Omega} (\nabla v) \cdot \Phi = 0 \end{aligned}$$

o que por sua vez implica (3.11), escolhendo o suporte de Φ interceptando uma interface e uma vez Φ é arbitrária. ■

Capítulo 4

Análise abstrata de erro não conforme

4.1. Análise abstrata de erro não conforme

4.1.1. O Problema Discreto

Seja $V_h \subset L^2(\Omega)$ denota um espaço de funções de dimensão finita; tipicamente, V_h é um espaço de polinômios quebrados. Estamos interessados no problema discreto

$$\text{Encontrar } u_h \in V_h \text{ tal que } a_h(u_h, w_h) = l_h(w_h) \text{ para todo } w_h \in V_h, \quad (4.1)$$

com a forma bilinear discreta a_h definida somente sobre $V_h \times V_h$ e a forma linear l_h definida sobre V_h . Em terminologia de elementos finitos, dizemos que a aproximação é *não conforme*, no sentido em que V_h não é subespaço de $W^{m,p}(\Omega)$ no qual espera-se que a solução de (2.10) pertença.

Assim mesmo, é possível introduzir o operador discreto (linear) $A_h : V_h \rightarrow V_h$ tal que, para todo $v_h, w_h \in V_h$,

$$(A_h v_h, w_h)_{L^2(\Omega)} := a_h(v_h, w_h), \quad (4.2)$$

e a função discreta $L_h \in V_h$ tal que, para todo $w_h \in V_h$, $(L_h, w_h)_{L^2(\Omega)} = l_h(w_h)$. Isso leva para o seguinte problema (equivalentemente a (4.1)):

$$\text{Encontrar } u_h \in V_h \text{ tal que } A_h u_h = L_h \text{ em } V_h, \quad (4.3)$$

Por simplicidade, suporemos que $f \in L^2(\Omega)$, já que o lado direito do problema modelo (2.10) torna-se $(f, w)_{L^2(\Omega)}$, enquanto o lado direito dos problemas discretos (4.1) e (4.3) tornam-se, respectivamente,

$$l_h(w_h) = (f, w_h)_{L^2(\Omega)}, \quad L_h = \pi_h f$$

Aqui, π_h denota a projeção ortogonal de $L^2(\Omega)$ para V_h , isto é, $\pi_h : L^2(\Omega) \rightarrow V_h$ está definido tal que, para todo $v \in L^2(\Omega)$, $\pi_h v \in V_h$ com

$$(\pi_h v, y_h)_{L^2(\Omega)} = (v, y_h)_{L^2(\Omega)} \quad \forall y_h \in V_h. \quad (4.4)$$

4.1.2. Estabilidade Discreta

Para formular estabilidade discreta, introduzimos uma norma, denotada por $\|y\|$, e definida (pelo menos) sobre V_h .

Definição 4.1 (Estabilidade Discreta) *Dizemos que uma forma bilinear discreta a_h possui estabilidade discreta sobre V_h se existe $C_{sta} > 0$ tal que*

$$\forall v_h \in V_h, \quad C_{sta} \|v\| \leq \sup_{w_h \in V_h \setminus \{0\}} \frac{a_h(v_h, w_h)}{\|w_h\|}. \quad (4.5)$$

A propriedade (4.5) é referida como uma condição inf-sup já que é equivalente a

$$C_{sta} \leq \inf_{v_h \in V_h \setminus \{0\}} \sup_{w_h \in V_h \setminus \{0\}} \frac{a_h(v_h, w_h)}{\|v_h\| \|w_h\|}$$

Um fato importante é que (4.5) é uma condição necessária e suficiente para o bom posicionamento discreto pois V_h é de dimensão finita.

Lema 4.1 (Boa colocação discreto) *O problema discreto (4.1), ou equivalentemente (4.3), está bem posto se, e somente se a condição inf-sup (4.5) é satisfeita.*

Prova:

Note que a condição (4.5) é o equivalente da condição (2.11) no teorema BNB. Daí, devido a este teorema, a boa colocação discreto implica (4.5).

Reciprocamente, observemos que (4.5) implica que o operador A_h definido por (4.2) é injetora. De fato:

$$\begin{aligned} A_h v_h = 0 &\Rightarrow a_h(v_h, w_h) = 0 \quad \forall w_h \in V_h \\ \text{por (4.5)} &\Rightarrow v_h = 0. \end{aligned}$$

Como V_h é de dimensão finita, então A_h é sobrejetora e por tanto A_h é bijetora e isso implica a boa colocação. ■

Observemos que a boa colocação discreto é equivalente a uma única condição, isto é (4.5), embora no caso contínuo aparecem duas condições. Isto é porque injetividade é equivalente a bijetividade quando o espaço teste e o espaço solução tem a mesma dimensão.

4.1.3. Consistência

Até agora, nós consideramos uma forma bastante forte de consistência, isto é que a solução u satisfaz as equações discretas em (4.1). Para formular consistência, é necessário colocar a solução exata no primeiro argumento da forma bilinear discreta a_h , e isto não é possível em geral pois a forma bilinear discreta a_h está definida até agora somente sobre $V_h \times V_h$.

Por esse motivo, supomos que existe um subespaço $X_* \subset X$ tal que a solução exata u pertence a X_* e tal que a forma bilinear discreta a_h pode ser estendida a $X_* \times V_h$ (em geral não é possível estender a_h a $X \times V_h$). Consistência pode agora ser formulada como segue.

Definição 4.2 (Consistência) Dizemos que o problema discreto (4.1) é consistente se para a solução exata $u \in X_*$,

$$a_h(u, w_h) = l_h(w_h) \quad w_h \in V_h. \quad (4.6)$$

Observação 4.1 (Ortogonalidade de Galerkin) *Consistência é equivalente à propriedade de ortogonalidade de Galerkin freqüentemente considerada no contexto dos métodos de elemento finito*

De fato, (4.6) é válido se, e somente se $a_h(u - u_h, w_h) = 0 \quad \forall w_h \in V_h$.

4.1.4. Limitação

O último ingrediente na análise de erro é a limitação. Introduzimos o espaço vetorial

$$X_{*h} := X_* + V_h,$$

e observamos que a *aproximação de erro* $(u - u_h)$ pertence a este espaço. Nosso objetivo é medir a aproximação de erro usando a norma de estabilidade discreta $\|\cdot\|_h$.

Portanto, assumimos no que segue esta norma pode ser estendida ao espaço X_{*h} . No caso presente, desejamos assegurar limitação no espaço produto $X_{*h} \times V_h$ e não apenas em $V_h \times V_h$. Acontece em muitas situações, que não é possível afirmar limitação usando só a norma de estabilidade discreta $\|\cdot\|_h$.

Esta é a razão pela qual introduzimos uma segunda norma, que denotaremos $\|\cdot\|_{*h}$.

Definição 4.3 (Limitação) Dizemos que a forma bilinear discreta a_h é limitada em $X_{*h} \times V_h$ se existe C_{bnd} tal que

$$\forall (v, w_h) \in X_{*h} \times V_h, \quad |a_h(v, w_h)| \leq C_{bnd} \|v\|_* \|w_h\|,$$

para uma norma $\|\cdot\|_*$ definida sobre X_{*h} e tal que, para todo $v \in X_{*h}$, $\|v\| \leq \tilde{C} \|v\|_*$, onde \tilde{C} é uma constante positiva.

4.1.5. Estimativa de erro

Agora podemos afirmar o resultado principal desta seção.

Teorema 4.1 (Estimativa de erro) Seja u a solução de (2.10) com $f \in L^2(\Omega)$. Seja u_h a solução de (4.1). Seja $X_* \subset X$ e suponhamos que $u \in X_*$. Seja $X_{*h} := X_* + V_h$ e suponhamos que a forma bilinear discreta a_h pode ser estendida a $X_{*h} \times V_h$. Seja $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_*$ duas normas definidas sobre X_{*h} e tal que, para todo $v \in X_{*h}$, $\|v\| \leq \tilde{C} \|v\|_*$. Supondo estabilidade discreta, consistência e limitação, como definimos anteriormente, temos a seguinte estimativa de erro:

$$\|u - u_h\| \leq C \inf_{y_h \in V_h} \|u - y_h\|_*, \quad (4.7)$$

com $C = 1 + C_{sta}^{-1} C_{bnd}$.

Prova:

Seja $\forall y_h \in V_h$. Devido à estabilidade discreta temos

$$\begin{aligned} \|u_h - y_h\| &\leq C_{sta}^{-1} \sup_{w_h \in V_h \setminus \{0\}} \frac{a_h(u_h - y_h, w_h)}{\|w_h\|} \\ &= C_{sta}^{-1} \sup_{w_h \in V_h \setminus \{0\}} \frac{a_h(u - y_h, w_h)}{\|w_h\|} \quad (\text{isso pela consistência}) \end{aligned}$$

Daí pela definição de limitação obtemos

$$\|u_h - y_h\| \leq C_{sta}^{-1} C_{bnd} \|u - y_h\|_*$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|u - u_h\| &\leq \|u - y_h\| + \|y_h - u_h\| \\ &\leq \|u - y_h\|_* + C_{sta}^{-1} C_{bnd} \|u - y_h\|_* \\ &= (1 + C_{sta}^{-1} C_{bnd}) \|u - y_h\|_* \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|u - u_h\| \leq C \inf_{y_h \in V_h} \|u - y_h\|_* \quad \text{onde } C = 1 + C_{sta}^{-1} C_{bnd}.$$

■

4.1.6. Sequência de Malhas de Forma Regular

O objetivo desta seção é derivar algumas técnicas importantes, ferramentas para analisar a convergência do método de Galerkin descontínuo quando o tamanho da malha vai para zero. Nós consideramos uma sequência de malha

$$\mathcal{T}_{\mathcal{H}} := (\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}},$$

onde \mathcal{H} denota um subconjunto contável de $\mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ tendo a 0 como único ponto de acumulação. Nossas ferramentas de análise são, a desigualdade inversa e a desigualdade do traço, as quais são fundamentais para se afirmar a estabilidade discreta e a limitação em h , e por outro lado, propriedades ótimas de aproximação polinomial, de modo que possamos inferir, a partir de estimativas de erro da forma (4.7), as taxas de convergência em h para a aproximação de erro sempre que a solução exata for suficientemente suave. Primeiro, introduziremos o conceito de forma e contato regular de sequências de malhas, o que é suficiente para derivar a desigualdade inversa e desigualdade do traço.

Um conceito útil encontrado no contexto dos métodos de elementos finitos conformes é o de malhas simpliciais encaixadas.

Definição 4.4 (Malha Simplicial Encaixada) *Dizemos que \mathcal{T}_h é uma malha simplicial encaixada se esta é uma malha simplicial e se para cada $T \in \mathcal{T}_h$ com vértices $\{a_0, \dots, a_d\}$, o conjunto $\partial T \cap \partial T'$ para todo $T' \in \mathcal{T}_h$, $T' \neq T$, é a envoltória convexa (possivelmente vazia) de um subconjunto de $\{a_0, \dots, a_d\}$.*

Definição 4.5 (Submalha Simplicial Encaixada) *Seja \mathcal{T}_h uma malha geral. Dizemos que \mathfrak{G}_h é uma submalha simplicial encaixada de \mathcal{T}_h se*

- (i) \mathfrak{G}_h é uma malha simplicial encaixada,
- (ii) Para todo $T' \in \mathfrak{G}_h$, existe um único $T \in \mathcal{T}_h$ tal que $T' \subset T$,
- (iii) Para todo $F' \in \mathfrak{F}_h$, a coleção de faces da malha de \mathfrak{G}_h , existe no máximo uma $F \in \mathcal{F}_h$ tal que $F' \subset F$.

Os simplexes em \mathfrak{G}_h são chamados *subelementos*, e as faces da malha em \mathfrak{F}_h são chamados *subfaces*. Seja, para todo $T \in \mathcal{T}_h$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_T &:= \{T' \in \mathfrak{G}_h \mid T' \subset T\}, \\ \mathfrak{F}_T &:= \{F' \in \mathfrak{F}_h \mid F' \subset \partial T\}.\end{aligned}$$

E também seja, para todo $F \in \mathcal{F}_h$,

$$\mathfrak{F}_F := \{F' \in \mathfrak{F}_h \mid F' \subset F\}.$$

Definição 4.6 (Forma e Contato Regular) *Dizemos que a sequência de malhas $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$ é de forma e contato regular se para todo $h \in \mathcal{H}$, \mathcal{T}_h , possui uma submalha simplicial encaixada \mathfrak{G}_h tal que*

(i) A sequência de malhas \mathfrak{G}_h é de forma regular, isto é, se existe um parâmetro $\varrho_1 > 0$, independente de h , tal que, para todo $T' \in \mathfrak{G}_h$,

$$\varrho_1 h_{T'} \leq r_{T'},$$

onde $h_{T'}$ é o diâmetro de T' e $r_{T'}$ o raio da maior bola inscrita em T' ,

(ii) Existe um parâmetro $\varrho_2 > 0$, independente de h , tal que, para todo $T \in \mathcal{T}_h$ e para todo $T' \in \mathfrak{G}_h$,

$$\varrho_2 h_T \leq h_{T'}.$$

Os parâmetros ϱ_1 e ϱ_2 são chamados os *parâmetros de regularidade de malha* e são coletivamente denotados pelo símbolo ϱ . Finalmente, se \mathcal{T}_h é simplicial encaixada, então $\mathfrak{G}_h = \mathcal{T}_h$ e a única exigência para os resultados seguintes é a forma e contato regular com o parâmetro $\varrho_1 > 0$ independente de h .

Daqui em diante trabalharemos com uma sequência de malhas simplicial encaixada.

Brevemente veremos algumas propriedades geométricas úteis de sequências de malhas de forma e contato regular.

Lema 4.2 (Limitante Inferior sobre Diâmetro de Faces) *Seja \mathcal{T}_h uma sequência de malhas com forma e contato regular com parâmetro ϱ . Então, para todo $h \in \mathcal{H}$ e para todo $T \in \mathcal{T}_h$, e todo $F \in \mathcal{F}_T$,*

$$\delta_F \geq \varrho_1 \varrho_2 h_T, \tag{4.8}$$

onde δ_F denota o diâmetro de F .

Prova: Pode-se encontrar a demonstração em [3], pg. 25, lema 1.42.

Uma consequência direta do lema (4.2) é um resultado de comparação dos diâmetros de elementos vizinhos.

Lema 4.3 (Comparação de Diâmetro de Elementos Vizinhos) *Seja \mathcal{T}_h uma sequência de malhas com forma e contato regular com parâmetro ϱ . Então, para todo $h \in \mathcal{H}$ e para todo $T, T' \in \mathcal{T}_h$ que compartilham uma face F , cumpre-se*

$$\min(h_T, h_{T'}) \geq \varrho_1 \varrho_2 \max(h_T, h_{T'}). \quad (4.9)$$

Prova: Pode-se encontrar a demonstração em [3], pg. 26, lema 1.43.

4.1.7. Desigualdades Inversa e do Traço

As desigualdades inversa e do traço são ferramentas úteis para analisar métodos de Galerkin descontínuo. Por simplicidade, derivaremos essas desigualdades sobre o espaço de polinômios quebrados $\mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h)$ definido em (3.5).

Lema 4.4 (Desigualdade Inversa) *Seja \mathcal{T}_h uma sequência de malha de forma e contato regular com parâmetro ϱ . Então, para todo $h \in \mathcal{H}$, e para todo $v_h \in \mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h)$, e todo $T \in \mathcal{T}_h$,*

$$\|\nabla v_h\|_{[L^2(T)]^d} \leq C_{inv} h_T^{-1} \|v_h\|_{L^2(T)}, \quad (4.10)$$

onde C_{inv} só depende de ϱ , d e k .

Prova: A demonstração encontra-se em [3], pg. 26, lema 1.44.

Lema 4.5 (Desigualdade do traço discreta) *Seja \mathcal{T}_h uma sequência de malha de forma e contato regular com parâmetro ϱ . Então, para todo $h \in \mathcal{H}$, e para todo $v_h \in \mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h)$, todo $T \in \mathcal{T}_h$, e todo $F \in \mathcal{F}_T$*

$$\|v_h\|_{L^2(F)} \leq h_T^{-1/2} C_{tr} \|v_h\|_{L^2(T)}, \quad (4.11)$$

onde C_{tr} só depende de ϱ , d e k .

Prova: A demonstração encontra-se em [3], pg. 27, lema 1.46.

Lema 4.6 (Desigualdade do traço contínuo) *Seja \mathcal{T}_h uma sequência de malha de forma e contato regular. Então, para todo $h \in \mathcal{H}$, e para todo $v \in H^1(\mathcal{T}_h)$, todo $T \in \mathcal{T}_h$, e todo $F \in \mathcal{F}_T$*

$$\|v\|_{L^2(F)}^2 \leq C_{cti}(2\|\nabla v\|_{[L^2(T)]^d} + dh_T^{-1}\|v\|_{L^2(T)})\|v\|_{L^2(T)}, \quad (4.12)$$

onde $C_{cti} := \varrho_1^{-1}$ se \mathcal{T}_h é encaixada e simplicial, enquanto $C_{cti} := (1+d)(\varrho_1\varrho_2)^{-1}$ em outro caso.

Prova: A demonstração encontra-se em [3], pg. 28, lema 1.49.

4.1.8. Aproximações Polinomiais

Para inferir da estimativa (4.7) uma taxa de convergência em h para a aproximação do erro $(u - u_h)$ medida na norma $\|\cdot\|$ onde a solução exata é o suficientemente suave, precisamos estimar primeiro o lado direito da desigualdade por

$$\inf_{y_h \in V_h} \|u - y_h\|_*$$

onde V_h é o espaço de polinômios quebrados $\mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h)$ definida em (3.5). Como $u_h \in V_h$, de (4.7) temos que

$$\inf_{y_h \in V_h} \|u - y_h\| \leq \|u - u_h\| \leq C \inf_{y_h \in V_h} \|u - y_h\|_* \quad (4.13)$$

Definição 4.7 (Otimidade, Quasi-otimalidade e subotimalidade) *Dizemos que a estimativa de erro (4.13) é*

(i) **Ótima** se $\|\cdot\| = \|\cdot\|_*$,

- (ii) **Quasi-ótima** se as duas normas são diferentes, mas os limitantes superior e inferior de (4.13) converge, para uma u suave, na mesma taxa de convergência quando $h \rightarrow 0$,
- (iii) **Subótima** se o limitante superior converge a uma taxa menor que o limitante inferior.

A análise do limitante superior $\inf_{y_h \in V_h} \|u - y_h\|_*$ depende das propriedades de aproximação polinomial que podem se efetuar no espaço de polinômios quebrados V_h .

Definição 4.8 (Aproximação polinomial ótima) Dizemos que uma sequência de malha \mathcal{T}_h tem **propriedades de aproximação polinomial ótima** se, para todo $h \in \mathcal{H}$, todo $T \in \mathcal{T}_h$, e todo polinômio de grau k ; existe um operador de interpolação $\mathcal{I}_T^k : L^2(T) \rightarrow \mathbb{P}_d^k(T)$ tal que, para todo $s \in \{0, \dots, k+1\}$ e todo $v \in H^s(T)$, vale

$$|v - \mathcal{I}_T^k v|_{H^m(T)} \leq C_{app} h_T^{s-m} |v|_{H^s(T)} \quad \forall m \in \{0, \dots, s\}, \quad (4.14)$$

onde C_{app} é independente de T e h .

Definição 4.9 (Sequência de malhas admissíveis) Dizemos que uma sequência de malha $\mathcal{T}_\mathcal{H}$ é **admissível** se é uma malha com forma e contato regular e se tem propriedades de aproximação polinomial ótima.

Lema 4.7 (Otimalidade da projeção ortogonal de L^2) Seja $\mathcal{T}_\mathcal{H}$ uma sequência de malha admissível. Seja π_h a projeção ortogonal de L^2 sobre $\mathbb{P}_d^k(T)$. Então, para todo $s \in \{0, \dots, k+1\}$ e todo $v \in H^s(T)$ vale

$$|v - \pi_h v|_{H^m(T)} \leq C'_{app} h_T^{s-m} |v|_{H^s(T)} \quad \forall m \in \{0, \dots, s\}, \quad (4.15)$$

onde C'_{app} é independente de T e h .

Prova:

Pela definição da projeção ortogonal de L^2 , e fazendo $m = 0$ na definição (4.8) temos

$$\|v - \pi_h v\|_{L^2(T)} \leq \|v - \mathcal{I}_T^k v\|_{L^2(T)} \leq C_{\text{app}} h_T^s |v|_{H^s(T)}. \quad (4.16)$$

Para $m \geq 1$, usamos m vezes a desigualdade inversa (4.10) e junto com a desigualdade triangular inferimos

$$\begin{aligned} |v - \pi_h v|_{H^m(T)} &\leq |v - \mathcal{I}_T^k v|_{H^m(T)} + |\mathcal{I}_T^k v - \pi_h v|_{H^m(T)} \quad \text{usando desig. triangular} \\ &\leq |v - \mathcal{I}_T^k v|_{H^m(T)} + C' h_T^{-m} \|\mathcal{I}_T^k v - \pi_h v\|_{L^2(T)} \quad \text{usando desig. inversa } m \text{ vezes} \\ &\leq |v - \mathcal{I}_T^k v|_{H^m(T)} + C' h_T^{-m} [\|\mathcal{I}_T^k v - v\|_{L^2(T)} + \|v - \pi_h v\|_{L^2(T)}] \\ &= |v - \mathcal{I}_T^k v|_{H^m(T)} + C' h_T^{-m} \|\mathcal{I}_T^k v - v\|_{L^2(T)} + C' h_T^{-m} \|v - \pi_h v\|_{L^2(T)} \\ &\leq |v - \mathcal{I}_T^k v|_{H^m(T)} + C' h_T^{-m} \|\mathcal{I}_T^k v - v\|_{L^2(T)} + C' h_T^{-m} \|v - \mathcal{I}_T^k v\|_{L^2(T)} \\ &= |v - \mathcal{I}_T^k v|_{H^m(T)} + 2C' h_T^{-m} \|v - \mathcal{I}_T^k v\|_{L^2(T)}, \\ &\leq C_{\text{app}} h_T^{s-m} |v|_{H^s(T)} + 2C' h_T^{-m} C_{\text{app}} h_T^s |v|_{H^s(T)} \quad \text{usando (4.14) e (4.16)} \\ &= (1 + 2C') C_{\text{app}} h_T^{s-m} |v|_{H^s(T)} \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde C' tem as mesmas dependências de C'_{app} . ■

Lema 4.8 (Aproximação polinomial sobre faces da malha) *Sob as hipóteses do lema (4.7), e supondo que $s \geq 1$. Então, para todo $h \in \mathcal{H}$, todo $T \in \mathcal{T}_h$ e toda face $F \in \mathcal{F}_T$ vale*

$$\|v - \pi_h v\|_{L^2(F)} \leq C''_{\text{app}} h_T^{s-1/2} |v|_{H^s(T)},$$

e se $s \geq 2$,

$$\|\nabla(v - \pi_h v)|_T \cdot n_T\|_{L^2(F)} \leq C'''_{\text{app}} h_T^{s-3/2} |v|_{H^s(T)},$$

onde C''_{app} e C'''_{app} são independentes de T e h .

Capítulo 5

Equação Advecção-Reação

A equação advecção-reação com condição de fronteira homogênea

$$\beta \cdot \nabla u + \mu u = f \quad \text{em } \Omega, \quad (5.1)$$

$$u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega^-, \quad (5.2)$$

Aqui, a função desconhecida u é de valor escalar e representa, por exemplo, uma concentração de alguma substância; β é a velocidade de advecção com valores em \mathbb{R}^d , μ o coeficiente de reação, f é o termo de fonte, e $\partial\Omega^-$ denota a parte da fronteira de Ω onde o fluxo entra, isto é:

$$\partial\Omega^- := \{x \in \partial\Omega \mid \beta(x) \cdot n(x) < 0\} \quad (5.3)$$

O principal objetivo deste capítulo é o de aplicar e analisar o métodos de Galerkin descontínuo para aproximar o problema modelo (5.1) e (5.2).

Antes de começar, vamos especificar condições sobre os dados para o problema modelo (5.1) e (5.2), e assim formular este problema na sua forma fraca, e mostrar

que é bem posto. Em relação aos dados μ e β supomos que

$$\mu \in L^\infty(\Omega), \quad \beta \in [Lip(\Omega)]^d \quad (5.4)$$

onde $Lip(\Omega) := \{v = \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists L_v \text{ tal que } \forall x, y \in \Omega, |v(x) - v(y)| \leq L_v|x - y|\}$. Daí $\beta \in [W^{1,\infty}(\Omega)]^d$ com $\|\nabla\beta_i\|_{[L^\infty(\Omega)]^d} \leq L_{\beta_i} \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}$ onde $(\beta_1, \dots, \beta_d)$ são as componentes de β .

Definimos

$$L_\beta := \max_{1 \leq i \leq d} L_{\beta_i}. \quad (5.5)$$

Além de (5.4), supomos que existe um número real $\mu_0 > 0$ tal que

$$\Lambda := \mu - \frac{1}{2}\nabla \cdot \beta \geq \mu_0 \text{ em } \Omega \text{ q.t.p.} \quad (5.6)$$

Em relação ao termo fonte f , supomos que $f \in L^2(\Omega)$.

Finalmente, lembremos que Ω é um poliedro em \mathbb{R}^d , no que segue, consideraremos uma referência de tempo τ_c e uma referência de velocidade β_c definidas como

$$\tau_c := \{\max(\|\mu\|_{L^\infty(\Omega)}, L_\beta)\}^{-1}, \quad \beta_c := \|\beta\|_{[L^\infty(\Omega)]^d}. \quad (5.7)$$

Nosso primeiro objetivo é especificar o espaço funcional no qual a solução do problema modelo (5.1) pertence. Seja $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço de funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω e lembremos que este espaço é denso em $L^2(\Omega)$.

Para uma função $v \in L^2(\Omega)$, a afirmação $\beta \cdot \nabla v \in L^2(\Omega)$ significa que a forma linear

$$\begin{aligned} C_0^\infty(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto - \int_{\Omega} v \nabla \cdot (\beta \varphi) \end{aligned}$$

é limitada em L^2 , isto é, $\exists C_v$ tal que

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \int_{\Omega} v \nabla \cdot (\beta \varphi) \leq C_v \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Definição 5.1 (Espaço Grafo) *O espaço grafo é definido como*

$$V := \{v \in L^2(\Omega) \mid \beta \cdot \nabla v \in L^2(\Omega)\} \quad (5.8)$$

com o produto escalar

$$\forall v, w \in V, \quad (v, w)_V := (v, w)_{L^2(\Omega)} + (\beta \cdot \nabla v, \beta \cdot \nabla w)_{L^2(\Omega)}, \quad (5.9)$$

e a norma associada **norma grafo** $\|v\|_V = (v, v)_V^{1/2}$

Proposição 4 *O espaço grafo da definição (5.1) equipada com o produto escalar $(\cdot, \cdot)_V$ é um espaço de Hilbert.*

Prova: A demonstração encontra-se em [3], pg. 40, lema 2.2.

O próximo passo é especificar matematicamente o significado das condições de fronteira (5.2). Para este propósito, precisamos pesquisar o traço sobre $\partial\Omega$ de funções no espaço grafo V . Nosso objetivo é dar significado para tais traços no espaço

$$L^2(|\beta \cdot n|; \partial\Omega) := \left\{ v \text{ é mensurável sobre } \partial\Omega \mid \int_{\partial\Omega} |\beta \cdot n| v^2 < \infty \right\}. \quad (5.10)$$

Lema 5.1 (Traço e integração por partes.) *No contexto acima, o operador tra-*

ζ_0

$$\begin{aligned}\gamma : C^0(\bar{\Omega}) &\rightarrow L^2(|\beta \cdot n|; \partial\Omega) \\ v &\mapsto \gamma(v) := v|_{\partial\Omega}\end{aligned}$$

estende-se continuamente a V , isto significa que $\exists C_\gamma$ tal que

$$\forall v \in V, \quad \|\gamma(v)\|_{L^2(|\beta \cdot n|; \partial\Omega)} \leq C_\gamma \|v\|_V.$$

Além disso, a seguinte fórmula de integração por partes vale

$$\forall v, w \in V, \quad \int_{\Omega} [(\beta \cdot \nabla v)w + (\beta \cdot \nabla w)v + (\nabla \cdot \beta)vw] = \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)\gamma(v)\gamma(w).$$

Prova: A prova deste lema pode ser encontrado em [3], pg. 44, lema 2.5.

Agora com o uso deste lema, já podemos estabelecer a formulação fraca do problema (5.1) e com isso derivar o bom posicionamento do modelo.

Para um número real x , definimos sua parte positiva e negativa respectivamente como

$$x^\oplus := \frac{1}{2}(|x| + x), \quad x^\ominus := \frac{1}{2}(|x| - x) \quad (5.11)$$

Observamos que ambas quantidades são não negativas. Introduzimos a seguinte forma bilinear: $\forall v, w \in V$,

$$a(v, w) := \int_{\Omega} \mu vw + \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla v)w + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^\ominus vw. \quad (5.12)$$

Esta forma bilinear é limitada em $V \times V$, precisamente

$$|a(v, w)| \leq (1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)}^2)^{1/2} \|v\|_V \|w\|_{L^2(\Omega)} + C_\gamma^2 \|v\|_V \|w\|_V.$$

Usando o espaço grafo V e a forma bilinear a , o problema modelo (5.1) pode ser convertido na forma fraca

$$\text{Encontrar } u \in V \text{ tal que } a(u, w) = \int_{\Omega} fw \quad \forall w \in V \quad (5.13)$$

Proposição 5 (Caracterização da solução de (5.13)) *Suponha que $u \in V$ solucionadora (5.13). Então,*

$$\beta \cdot \nabla u + \mu u = f \quad \text{q.t.p. em } \Omega \quad (5.14)$$

$$u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega^- \quad (5.15)$$

Lema 5.2 (Coercividade em L^2 de a) *A forma bilinear a definida por (5.12) é L^2 -coerciva sobre V , isto é,*

$$\forall v \in V \quad a(v, v) \geq \mu_0 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} |\beta \cdot n| v^2. \quad (5.16)$$

As demonstrações da proposição 5 e do lema 5.2 podem se encontrar em [3] na página 43.

Teorema 5.1 (Boa colocação) *O problema (5.13) é bem posto.*

Prova: A demonstração encontra-se em [3], pg. 44, lema 2.9.

Agora veremos que acontece no caso em que a condição de fronteira é não homogênea, i.e.,

$$u = g \quad \text{sobre } \partial\Omega^-.$$

Estendemos o dado da fronteira g a $\partial\Omega$ sendo zero fora de $\partial\Omega^-$ e supomos que $g \in L^2(|\beta \cdot n|; \partial\Omega)$.

Então o problema modelo na forma fraca fica assim:

$$\text{Encontrar } u \in V \text{ tal que } a(u, w) = \int_{\Omega} fw + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^{\ominus} gw \quad \forall w \in V \quad (5.17)$$

O resultado chave para pesquisar as condições de fronteira não homogêneas é a sobrejetividade do operador traço $\gamma : V \rightarrow L^2(|\beta \cdot n|; \partial\Omega)$ definido no lema (5.1)

Lema 5.3 (Sobrejetividade do traço) *Para todo $g \in L^2(|\beta \cdot n|; \partial\Omega)$, existe $u_g \in V$ tal que $u_g = g$ q.t.p em $\partial\Omega^- \cup \partial\Omega^+$. Além disso, existe C , que somente depende de Ω e β , tal que $\|u_g\|_V \leq C\|g\|_{L^2(|\beta n|; \partial\Omega)}$*

Prova: A demonstração encontra-se em [3], pg. 46, lema 2.11.

Teorema 5.2 (Boa colocação) *O problema (5.17) é bem posto. Além disso, sua única solução $u \in V$ satisfaz (5.14) e $u = g$ q.t.p em $\partial\Omega^-$.*

Prova: A demonstração encontra-se em [3], pg. 47, lema 2.12.

Com isso presente analisaremos o método de Galerkin descontínuo para aproximar o problema modelo (5.13). Conforme à seção (4.1), o método é elaborado de modo a ser consistente, e a possuir estabilidade discreta assegurada pela coercividade em L^2 .

Nós vimos uma solução aproximada no espaço de polinômios quebrados $\mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h)$ definido em (3.5). Supomos que $k \geq 1$ e que \mathcal{T}_h pertence a alguma sequência de malha de forma regular. Seja $V_h := \mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h)$ e consideremos o problema discreto:

$$\text{Encontrar } u_h \in V_h \text{ tal que } a_h(u_h, v_h) = \int_{\Omega} fv_h \quad \forall v_h \in V_h,$$

para uma forma bilinear discreta a_h ainda a ser proposta.

Para analisar o método, faremos uma suposição de regularidade um pouco mais forte sobre a solução exata u que agora pertencem ao espaço grafo V . Esta suposição

é necessária para formular a consistência do método, ao colocá-la diretamente na forma bilinear discreta a_h . Em particular, é preciso considerar o traço da solução exata em cada face da malha.

Supomos que existe uma partição $P_\Omega = \{\Omega_i\}_{1 \leq i \leq N_\Omega}$ de Ω em poliedros disjuntos tal que, para a solução exata u ,

$$u \in V_* := V \cap H^1(P_\Omega). \quad (5.18)$$

Assim como na seção (4.1), seja $V_{*h} := V_* + V_h$.

Devido à desigualdade do traço (3.8) com $p = 2$, a suposição anterior implica que para todo $T \in \mathcal{T}_h$, a restrição $u|_T$ tem traço q.t.p sobre cada face $F \in \mathcal{F}_T$, e esses traços pertencem a $L^2(F)$. Com isto é possível mostrar o seguinte lema

Lema 5.4 (Saltos de u através das interfaces) *A solução exata $u \in V_*$ é tal que, para todo $F \in \mathcal{F}_h^i$,*

$$(\beta \cdot n_F) \llbracket u \rrbracket (x) = 0 \quad \text{q.t.p em } x \in F. \quad (5.19)$$

Prova: A demonstração encontra-se em [3], pg. 48, lema 2.14.

Quando trabalhamos com condição de fronteira não homogênea $u = g$ sobre $\partial\Omega^-$, o problema discreto fica assim

$$\text{Encontrar } u_h \in V_h \text{ tal que } a_h(u_h, v_h) = \int_\Omega f v_h + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^\ominus g v_h \quad \forall v_h \in V_h.$$

5.0.9. Derivação Heurística

A idéia principal para elaborar a forma bilinear discreta a_h é de obter a coercividade em L^2 que vale no caso contínuo e ao mesmo tempo mantermos a consistência. Nosso ponto inicial é uma forma bilinear discreta $a_h^{(0)}$, a qual é derivada da forma

bilinear exata a substituindo o termo de advecção $\beta \cdot \nabla$ por seu termo equivalente discreto $\beta \cdot \nabla_h$, isto é definimos sobre $V_{*h} \times V_h$,

$$a_h^{(0)}(v, w_h) := \int_{\Omega} \{\mu v w_h + (\beta \cdot \nabla_h v) w_h\} + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^{\ominus} v w_h.$$

Podemos ver que $a_h^{(0)}$ tem consistência pois a solução exata satisfaz (5.14) e (5.15).

Agora centraremos a análise na coercividade discreta. Uma observação importante é que esta propriedade não é transferida de a a $a_h^{(0)}$. *De fato:*

Integrando por partes sobre cada elemento da malha temos, para cada $v_h \in V_h$,

$$\begin{aligned} a_h^{(0)}(v_h, v_h) &= \int_{\Omega} \{\mu v_h^2 + (\beta \cdot \nabla_h v_h) v_h\} + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^{\ominus} v_h^2 \\ &= \int_{\Omega} \mu v_h^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\beta \cdot \nabla v_h) v_h + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^{\ominus} v_h^2 \\ &= \int_{\Omega} \Lambda v_h^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} \frac{1}{2} (\beta \cdot n_T) v_h^2 + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^{\ominus} v_h^2, \end{aligned}$$

onde lembremos que $\Lambda = \mu - \frac{1}{2} \nabla v \cdot \beta$ e que n_T denota a normal exterior a T sobre ∂T . O segundo termo da expressão do lado direito pode ser reformulado como uma soma sobre faces da malha. Fazemos isto aproveitando a continuidade de β através das interfaces obtemos

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} \frac{1}{2} (\beta \cdot n_T) v_h^2 = \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \frac{1}{2} (\beta \cdot n_F) \llbracket v_h^2 \rrbracket + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} \int_F \frac{1}{2} (\beta \cdot n) v_h^2.$$

Para todo $F \in \mathcal{F}_h^i$ com $F = \partial T_1 \cup \partial T_2$, $v_i = v_h|_{T_i}$, $i \in \{1, 2\}$, vemos que

$$\frac{1}{2} \llbracket v_h^2 \rrbracket = \frac{1}{2} (v_1^2 - v_2^2) = \frac{1}{2} (v_1 - v_2)(v_1 + v_2) = \llbracket v_h \rrbracket \{ \{ v_h \} \},$$

temos como resultado

$$a_h^{(0)}(v_h, v_h) = \int_{\Omega} \Lambda v_h^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (\beta \cdot n_F) \llbracket v_h \rrbracket \{ \{ v_h \} \} + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} \int_F \frac{1}{2} (\beta \cdot n) v_h^2 + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^{\ominus} v_h^2,$$

e lembrando que $|x| = 2x^{\ominus} + x$ então chegamos a

$$a_h^{(0)}(v_h, v_h) = \int_{\Omega} \Lambda v_h^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (\beta \cdot n_F) \llbracket v_h \rrbracket \{ \{ v_h \} \} + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} |\beta \cdot n| v_h^2.$$

Observamos que o segundo termo do lado direito envolve interfaces e não tem um sinal definido. Portanto, este termo deveria ser retirado, e isto pode ser efetuado mantendo a consistência se definimos para todo $(v, w_h) \in V_{*h} \times V_h$

$$a_h^{\text{cf}}(v, w_h) := \int_{\Omega} \{ \mu v w_h + (\beta \cdot \nabla_h v) w_h \} + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^{\ominus} v w_h - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (\beta \cdot n_F) \llbracket v \rrbracket \{ \{ w_h \} \} \quad (5.20)$$

pois $(\beta \cdot n_F) \llbracket u \rrbracket = 0$ para todo $F \in \mathcal{F}_h^i$ devido a (5.19).

Agora podemos resumir as propriedades da forma bilinear discreta a_h^{cf} . A coerividade de a_h^{cf} é expressada usando a seguinte norma definida sobre V_{*h} :

$$\| \| v \|_{\text{cf}}^2 := \tau_c^{-1} \| v \|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} |\beta \cdot n| v^2, \quad (5.21)$$

com a escala de tempo definida em (5.7). Observe que $\| \| \cdot \|_{\text{cf}}^2$ é de fato uma norma pois controla a L^2 -norma.

Lema 5.5 (Consistência e Coercividade Discreta) *A forma bilinear discreta a_h^{cf} definida por (5.20) satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) *Consistência, isto é para a solução exata $u \in V_*$,*

$$a_h^{\text{cf}}(u, v_h) = \int_{\Omega} f v_h \quad \forall v_h \in V_h,$$

(ii) *Coercividade sobre V_h com respeito à norma $\|\cdot\|$, isto é*

$$\forall v_h \in V_h, \quad a_h^{\text{cf}}(v_h, v_h) \geq C_{sta} \|v_h\|_{\text{cf}}^2,$$

$$\text{com } C_{sta} := \min\{1, \tau_c \mu_0\}.$$

Prova: A prova é direta.

Antes de prosseguir, vamos registrar uma expressão equivalente da forma bilinear discreta a_h^{cf} obtida após integrar por partes a derivada de advecção em cada elemento da malha.

Lema 5.6 (Expressão equivalente para a_h^{cf}) *Para todo $(v, w_h) \in V_{*h} \times V_h$, temos que*

$$a_h^{\text{cf}}(v, w_h) := \int_{\Omega} \{(\mu - \nabla \cdot \beta) v w_h - v(\beta \cdot \nabla_h w_h)\} + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^{\oplus} v w_h - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (\beta \cdot n_F) \{v\} \llbracket w_h \rrbracket \quad (5.22)$$

5.0.10. Estimativa de erro

Consideraremos o seguinte problema discreto:

$$\text{Encontrar } u_h \in V_h \text{ tal que } a_h^{\text{cf}}(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f v_h \quad \forall v_h \in V_h. \quad (5.23)$$

Este problema é bem posto devido à coercividade discreta de a_h^{cf} sobre V_h . Nosso objetivo agora é estimar a aproximação de erro $(u - u_h)$ na norma $\|\cdot\|_{\text{cf}}$. A análise de convergência é realizado no espírito do Teorema (4.1). Devido ao lema (5.5), só resta abordar a limitação da forma bilinear discreta a_h^{cf} . Para este propósito, definimos

sobre V_{*h} a norma

$$\|v\|_{cf,*}^2 = \|v\|_{cf}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \tau_c \|\beta \cdot \nabla v\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \tau_c \beta_c^2 h_T^{-1} \|v\|_{L^2(\partial T)}^2,$$

com a escala de tempo τ_c e a velocidade de referência β_c definida em (5.7).

Lema 5.7 (Limitação) *Para a forma bilinear a_h^{cf} vale*

$$\forall (v, w_h) \in V_{*h} \times V_h, \quad a_h^{cf}(v, w_h) \leq C_{bnd} \|v\|_{cf,*} \|w_h\|_{cf}$$

com C_{bnd} independente de h e dos dados μ e β .

Com este lema também garantimos a continuidade da forma bilinear, a demonstração pode ser encontrada em ([3], pg.53), uma demonstração similar a este resultado será desenvolvido para o lema 6.5 do próximo capítulo.

Uma consequência direta do teorema (4.1) é a seguinte estimativa de erro.

Teorema 5.3 (Estimativa de erro) *Seja u que soluciona (5.13) e seja u_h solução de (5.23) onde a_h^{cf} está definida por (5.20) e $V_h = \mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h)$ com $k \geq 1$ e \mathcal{T}_h pertence a uma sequência de malhas de forma regular. Então vale*

$$\|u - u_h\|_{cf} \leq C \inf_{y_h \in V_h} \|u - y_h\|_{cf,*}, \quad (5.24)$$

com C independente de h e dependente apenas do fator $\{\min(1, \tau_c \mu_0)\}^{-1}$.

Para inferir um resultado de convergência de (5.24), suponhamos que a solução exata é suficientemente suave, e tomando $y_h = \pi_h u$, a projeção ortogonal de u sobre V_h , em (5.24), e usando os lemas (4.7) e (4.8).

Corolario 5.1 (Taxa de convergência para soluções suaves) *Sob as hipóteses do teorema (5.3), suponha que $u \in H^{k+1}(\Omega)$. Então temos*

$$\|u - u_h\|_{cf} \leq C_u h^k, \quad (5.25)$$

com $C_u = C \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}$ e C independente de h e dependente só do fator $\{\min(1, \tau_c \mu_0)\}^{-1}$

A estimativa (5.25) resulta numa taxa de convergência da aproximação de Galerkin descontínuo para $k \geq 1$. O resultado não é quase-ótimo, mas é subótimo pois o termo $\inf_{y_h \in V_h} \|u - y_h\|$ da equação (4.13) converge com ordem $k + \frac{1}{2}$ se a solução for o suficientemente suave como mostraremos a seguir. Em particular faremos as contas com $y_h = \pi_h u$, então

$$\|u - \pi_h u\|_{cf}^2 = \tau_c^{-1} \|u - \pi_h u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} |\beta \cdot n| (u - \pi_h u)^2 \quad (5.26)$$

Para o primeiro termo notamos que,

$$\begin{aligned} \|u - \pi_h u\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} (u - \pi_h u)^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (u - \pi_h u)^2 \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|u - \pi_h u\|_{L^2(T)}^2 \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(C'_{app} h_T^{k+1} |u|_{H^{k+1}(T)} \right)^2, \quad \text{usando o lema (4.7)} \\ &= (C'_{app})^2 h_T^{2k+2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |u|_{H^{k+1}(T)}^2 \\ &\leq C_1^2 h_T^{2k+2} \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 \quad \text{onde } C_1 = C'_{app}. \end{aligned}$$

Para o segundo termo,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} |\beta \cdot n| (u - \pi_h u)^2 &= \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_F \frac{1}{2} |\beta \cdot n| (u - \pi_h u)^2 \leq \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_F \frac{1}{2} |\beta \cdot n| (u - \pi_h u)^2 \\ &\leq \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \frac{1}{2} \beta_c \int_F (u - \pi_h u)^2 \\ &\leq \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \frac{1}{2} (C''_{app})^2 h_T^{2k+1} |u|_{H^{k+1}(T)}^2, \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{2} (C''_{app})^2 h_T^{2k+1} |u|_{H^{k+1}(T)}^2 \leq \frac{1}{2} (C''_{app})^2 h_T^{2k+1} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |u|_{H^{k+1}(T)}^2 \\ &\leq C_2 h_T^{2k+1} \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2, \quad \text{onde } C_2 = \frac{1}{2} (C''_{app})^2, \end{aligned}$$

considerando que na terceira desigualdade foi usado o lema (1.59) de ([3], pg. 32).

Voltando para a equação (5.26), obtemos:

$$\begin{aligned}
\|u - \pi_h u\|_{cf}^2 &= \tau_c^{-1} \|u - \pi_h u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} |\beta \cdot n| (u - \pi_h u)^2 \\
&\leq \tau_c^{-1} C_1^2 h_T^{2k+2} \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 + C_2 h_T^{2k+1} \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 \\
&= \tau_c^{-1} (C_1^2 h_T^{2k+2} + C_2 h_T^{2k+1}) \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\|u - \pi_h u\|_{cf} &= \tau_c^{-1/2} \sqrt{C_1^2 h_T + C_2} h^{k+\frac{1}{2}} \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)} \\
&\leq C_k h^{k+\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

onde $C_k = C \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}$ onde C é independente de h (pois $h_T \leq \max_{h_T \in \mathcal{H}} h_T$).

Logo, deve ser possível obter uma estimativa melhor que (5.25) no sentido de modificar a forma bilinear e obter uma nova solução no mesmo subespaço V_h e com isso esperamos obter uma melhor estimativa de erro. Isto será visto na seção 5.1 com o uso de upwind na formulação discreta.

5.1. Upwinding

O objetivo desta seção é fortalecer a estabilidade da forma bilinear do Galerkin descontínuo de modo a obter uma estimativa de erro quase ótima no sentido da definição (4.7). Este objetivo é alcançado penalizando os saltos das interfaces da solução discreta, para isso continuaremos usando as suposições (5.4) e (5.6) sobre os dados μ e β assim também a condição (5.18) sobre a regularidade da solução exata u , mas o grau polinomial k é tal que $k \geq 0$.

Consideraremos a nova forma bilinear

$$a_h^{\text{upw}}(v_h, w_h) := a_h^{\text{cf}}(v_h, w_h) + s_h(v_h, w_h), \quad (5.27)$$

com a forma bilinear de estabilização

$$s_h(v_h, w_h) := \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \int_F \frac{\eta}{2} |\beta \cdot n_F| \llbracket v_h \rrbracket \llbracket w_h \rrbracket, \quad (5.28)$$

onde $\eta > 0$ é um parâmetro definido pelo usuário. Especificamente, usando (5.20) temos,

$$\begin{aligned} a_h^{\text{upw}}(v_h, w_h) &:= \int_{\Omega} \{ \mu v_h w_h + (\beta \cdot \nabla_h v_h) w_h \} + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^{\ominus} v_h w_h \\ &\quad - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (\beta \cdot n_F) \llbracket v_h \rrbracket \{ w_h \} + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \frac{\eta}{2} |\beta \cdot n_F| \llbracket v_h \rrbracket \llbracket w_h \rrbracket, \end{aligned} \quad (5.29)$$

ou equivalentemente, usando (5.22) temos,

$$\begin{aligned} a_h^{\text{upw}}(v_h, w_h) &:= \int_{\Omega} \{ (\mu - \nabla \cdot \beta) v_h w_h - v_h (\beta \cdot \nabla_h w_h) \} + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^{\oplus} v_h w_h \\ &\quad + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (\beta \cdot n_F) \{ v_h \} \llbracket w_h \rrbracket + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \frac{\eta}{2} |\beta \cdot n_F| \llbracket v_h \rrbracket \llbracket w_h \rrbracket. \end{aligned} \quad (5.30)$$

A forma bilinear a_h^{upw} é daqui em diante referida como a *forma bilinear de Galerkin descontínuo com upwind*.

Assim, consideraremos o problema discreto:

$$\text{Encontre } u_h \in V_h \text{ tal que } a_h^{\text{upw}}(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f v_h \text{ para todo } v_h \in V_h. \quad (5.31)$$

Primeiro examinaremos a consistência e a coercividade discreta da forma bilinear de Galerkin descontínuo com upwind. Lembrando a definição da norma $\| \cdot \|_{\text{cf}}$ em (5.21), afirmaremos coercividade com respeito à seguinte norma, também definida

em V_{*h} :

$$\|v\|_{\text{upwb}}^2 := \|v\|_{\text{cf}}^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \frac{\eta}{2} |\beta \cdot n_F| [[v]]^2. \quad (5.32)$$

Lema 5.8 (Consistência e coercividade discreta) *A forma bilinear de Galerkin descontínuo com upwind a_h^{upw} definida por (5.27) e (5.28) satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) *Consistência, isto é para a solução exata $u \in V_*$,*

$$a_h^{\text{upw}}(u, v_h) = \int_{\Omega} f v_h \quad \forall v_h \in V_h,$$

(ii) *Coercividade sobre V_h com respeito à norma $\|\cdot\|_{\text{upwb}}$, isto é*

$$\forall v_h \in V_h, \quad a_h^{\text{upw}}(v_h, v_h) \geq C_{\text{sta}} \|v_h\|_{\text{upwb}}^2$$

com $C_{\text{sta}} = \min(1, \tau_c \mu_0)$ como no lema (5.5).

A coercividade discreta de a_h^{upw} sobre V_h implica o bom posicionamento do problema discreto (5.31).

Na seção 2.3.2 de [3] pode se ver uma estimativa de erro obtida usando a coercividade de a_h^{upw} com respeito à norma $\|\cdot\|_{\text{upwb}}$, a qual é quase-ótima. No entanto, o procedimento para estabelecer aquela estimativa tem uma desvantagem pois não proporciona informação sobre o comportamento da derivada de advecção. Na seguinte seção, essa deficiência será remediada estimando a aproximação do erro $(u - u_h)$, usando a propriedade de estabilidade, isto é a condição discreta de inf-sup.

5.1.1. Estimativa de erro baseado na condição inf-sup

A análise de convergência é realizado no espírito do teorema (4.1). Com a consistência de a_h^{upw} já enunciada, e resta mostrar a estabilidade discreta e a limitação.

Ampliaremos a norma $\|\cdot\|_{\text{uw}\sharp}$ definida em (5.32) adicionando um termo com a derivada de advecção e definimos a seguinte norma

$$\|v\|_{\text{uw}\sharp}^2 := \|v\|_{\text{uw}\flat}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \beta_c^{-1} h_T \|\beta \cdot \nabla v\|_{L^2(T)}^2.$$

Podemos agora enunciar o principal resultado da estabilidade em relação ao método de Galerkin descontínuo com upwinding.

Lema 5.9 (Condição discreta *inf-sup*) *Existe $C'_{\text{sta}} > 0$, independente de h , μ e β , tal que*

$$\forall v_h \in V_h, \quad C'_{\text{sta}} C_{\text{sta}} \|v_h\|_{\text{uw}\sharp} \leq \sup_{w_h \in V_h \setminus \{0\}} \frac{a_h^{\text{upw}}(v_h, w_h)}{\|w_h\|_{\text{uw}\sharp}}$$

com $C_{\text{sta}} = \min(1, \tau_c \mu_0)$ como no lema (5.8).

A demonstração deste lema pode-se encontrar em ([3], pg. 62).

Para formular um resultado sobre a limitação, definimos a seguinte norma:

$$\|v\|_{\text{uw}\sharp,*}^2 := \|v\|_{\text{uw}\sharp}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \beta_c \left(h_T^{-1} \|v\|_{L^2(T)}^2 + \|v\|_{L^2(\partial T)}^2 \right).$$

Lema 5.10 (Limitação) *Temos que $\forall (v, w_h) \in V_{*h} \times V_h$,*

$$|a_h^{\text{upw}}(v, w_h)| \leq C_{\text{bnd}} \|v\|_{\text{uw}\sharp,*} \|w_h\|_{\text{uw}\sharp}$$

com C_{bnd} independente de h , μ e β .

Como nos casos anteriores, este resultado juntamente com o lema da condição discreta *inf-sup* vão ser úteis para a demonstração do teorema a seguir. A demonstração do lema 5.10 pode ser encontrado em ([3], pg. 64).

Uma consequência direta do teorema (4.1) é a seguinte estimativa de erro.

Teorema 5.4 (Estimativa de erro) *Seja u a solução de (5.13) e u_h a solução de (5.31) onde a_h^{upw} está definida por (5.29), seja também $V_h = \mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_h)$ com $k \geq 0$ e \mathcal{T}_h pertence a uma sequência de malha admissível. Então, temos*

$$\|u - u_h\|_{\text{uw}\sharp} \leq C \inf_{y_h \in V_h} \|u - y_h\|_{\text{uw}\sharp,*} \quad (5.33)$$

com C independente de h e dependente do dado somente através do fator $\{\min(1, \tau_c \mu_0)\}^{-1}$.

Para inferir um resultado de convergência de (5.33), supomos que a solução exata é o suficientemente suave e usamos os lemas (4.7) e (4.8).

Corolário 5.2 (Taxa de convergência para soluções suaves) *Sob as hipóteses do teorema (5.4), suponha que $u \in H^{k+1}(\Omega)$. Então,*

$$\|u - u_h\|_{\text{uw}\sharp} \leq C_u h^{k+1/2}, \quad (5.34)$$

com $C_u = C \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}$ e C independente de h e dependente dos dados somente através do fator $\{\min(1, \tau_c \mu_0)\}^{-1}$.

A estimativa (5.34) fornece uma estima de convergência ótima para o termo com a derivada de advecção. Concluimos assim que é possível obter taxas de convergência quase-ótima para a forma bilinear a_h^{upw} ao combinar normas apropriadas com a condição de inf-sup.

5.2. Fluxos Numéricos

Nesta etapa, é instrutivo considerar um ponto de vista alternativo, baseado em fluxos numéricos. Como estamos trabalhando com espaços de polinômios quebrados, o problema discreto (5.31) admite uma formulação local obtida considerando um elemento de malha arbitrário $T \in \mathcal{T}_h$ e um polinômio arbitrário $\xi \in \mathbb{P}_d^k(T)$. Para um

subconjunto $S \subset \Omega$, denotamos por χ_S sua função característica, isto é

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in S, \\ 0 & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

Então, usando a função teste $w_h = \xi\chi_T$ no problema discreto (5.31), e observando que $[[\xi\chi_T]] = \epsilon_{T,F}\xi$ com $\epsilon_{T,F} := n_T \cdot n_F$, e considerando também T como um elemento da malha que não contém faces de fronteira ($\partial T \cap \partial\Omega = \emptyset$) vemos que na expressão (5.30) da forma bilinear discreta a_h^{upw} , obtemos

$$\begin{aligned} a_h^{\text{upw}}(u, w_h) &= \int_T \{(\mu - \nabla \cdot \beta)u\xi - u(\beta \cdot \nabla \xi)\} + \sum_{F^i \in \partial T} \left\{ \int_{F^i} (\beta \cdot n_F) \{u\} [[\xi]] \right. \\ &\quad \left. + \int_{F^i} \frac{\eta}{2} |\beta \cdot n_F| [[u]] [[\xi]] \right\} \\ &= \int_T \{(\mu - \nabla \cdot \beta)u\xi - u(\beta \cdot \nabla \xi)\} \\ &\quad + \sum_{F^i \in \partial T} \int_{F^i} \left\{ (\beta \cdot n_F) \{u\} \epsilon_{T,F} + \frac{\eta}{2} |\beta \cdot n_F| [[u]] \epsilon_{T,F} \right\} \xi \end{aligned}$$

Denotaremos

$$\phi_F(u_h) = \sum_{F^i \in \partial T} \int_{F^i} \left\{ (\beta \cdot n_F) \{u\} \epsilon_{T,F} + \frac{\eta}{2} |\beta \cdot n_F| [[u]] \epsilon_{T,F} \right\} \xi,$$

e vamos tomar o caso particular $\xi \equiv 1$ para mostrar que $\phi_F(u_h)$ representa o fluxo de u através da fronteira de T . Lembrando a definição (3.10), para cada interface $F \in \partial T$ existe um elemento T' tal que $F = \partial T \cap \partial T'$, com isso podemos especificar o salto e a média de u em F , assim

$$\begin{aligned} [[u]] &= (u|_T - u|_{T'})\epsilon_{T,F}, \\ \{u\} &= \left(\frac{u|_T + u|_{T'}}{2} \right). \end{aligned}$$

Com isso,

$$\phi_F(u_h) = \sum_{F \in \partial T} \int_F (\beta \cdot n_F) \left(\frac{u|_T + u|_{T'}}{2} \right) \epsilon_{T,F} + \frac{\eta}{2} |\beta \cdot n_F| (u|_T - u|_{T'}).$$

Para reduzir mais a expressão anterior definamos

$$S_T = \begin{cases} 1 & \text{se } \beta \cdot n_T > 0, \\ -1 & \text{se } \beta \cdot n_T < 0 \end{cases}$$

e notemos que $|\beta \cdot n_F| = |\beta \cdot n_T| = S_T(\beta \cdot n_T)$ e também que $(\beta \cdot n_F)\epsilon_{T,F} = \beta \cdot n_T$, então

$$\begin{aligned} \phi_F(u_h) &= \sum_{F \in \partial T} \int_F (\beta \cdot n_T) \left(\frac{u|_T + u|_{T'}}{2} \right) + \frac{\eta}{2} S_T(\beta \cdot n_T)(u|_T - u|_{T'}) \\ &= \int_{\partial T} (\beta \cdot n_T) \left[\frac{u|_T + u|_{T'}}{2} + \frac{\eta}{2} S_T(u|_T - u|_{T'}) \right]. \end{aligned}$$

Esta integral representa o fluxo da quantidade

$$\frac{u|_T + u|_{T'}}{2} + \frac{\eta}{2} S_T(u|_T - u|_{T'})$$

através da fronteira do elemento T . Em particular, quando $\eta = 1$, temos o que é conhecido como upwind *puro*

$$\frac{u|_T + u|_{T'}}{2} + \frac{S_T}{2} (u|_T - u|_{T'}) = \begin{cases} u|_T & \text{se } \beta \cdot n_T > 0, \\ u|_{T'} & \text{se } \beta \cdot n_T < 0. \end{cases}$$

No caso $\eta = 0$ recuperamos a expressão do fluxo centrado, o qual é calculado como a média do valor de u em cada lado da fronteira de T .

Capítulo 6

Equação Advecção-Reação com interface estabilizada

6.1. Método de interface estabilizada

6.1.1. Problema modelo

Considere um domínio poligonal $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ onde $1 \leq d \leq 3$, com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$. O vetor unitário normal ao domínio é denotado por \mathbf{n} . A equação advecção-reação está dada por:

$$\mu u + \mathbf{a} \cdot \nabla u = f \quad \text{em } \Omega, \quad (6.1)$$

onde supomos que $\mu \geq 0$ constante, $\mathbf{a} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ é a velocidade de advecção com valores em \mathbb{R}^d , a qual é Lipschitz contínua sobre $\bar{\Omega}$ e satisfaz $\|\mathbf{a}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$, além disso, vamos supor neste capítulo, que \mathbf{a} tem divergência nulo, isto significa que $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$. A mudança de notação de β para \mathbf{a} é para indicar que esta tem divergente nulo. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suficientemente regular. A porção da fronteira na qual $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \geq 0$ é denotada por Γ^+ , e a porção onde $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} < 0$ é denotada por Γ^- .

Consideraremos também neste capítulo a seguinte condição de fronteira

$$-u\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = g \quad \text{sobre } \Gamma^-. \quad (6.2)$$

6.1.2. O método

Seja \mathcal{T} uma malha de Ω , onde o tamanho de cada elemento $K \in \mathcal{T}$ se denotará por h_K , com a suposição que $h_K \leq 1$ e $h = \max_{K \in \mathcal{T}} h_K$. A parte da fronteira de K onde há saída de fluxo é a porção na qual $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \geq 0$ e é denotado por ∂K^+ . A parte onde há fluxo entrante é onde $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} < 0$ e é denotado por ∂K^- . Denotaremos o conjunto de todas as faces da malha \mathcal{T} por $\mathcal{F} = \{F\}$, assim também a união de todas as faces denotaremos por Γ^0 .

Usando a seguinte notação $\mathbf{w} = (w, \bar{w})$ e $\mathbf{v} = (v, \bar{v})$, consideremos a seguinte forma bilinear:

$$\begin{aligned} B_A(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = & \int_{\Omega} \mu w v \, dx - \sum_K \int_K \mathbf{a} w \cdot \nabla v \, dx - \sum_K \int_{\partial K^+} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} w (\bar{v} - v) \, ds \\ & - \sum_K \int_{\partial K^-} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \bar{w} (\bar{v} - v) \, ds + \int_{\Gamma^+} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \bar{w} \bar{v} \, ds \end{aligned} \quad (6.3)$$

e a forma linear

$$L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma^-} g \bar{v} \, ds. \quad (6.4)$$

Os espaços de elementos finitos para este problema são considerados assim

$$W_h = \{w_h \in L^2(\Omega), w_h|_K \in \mathbb{P}_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}\}, \quad (6.5)$$

$$\bar{W}_h = \{\bar{w}_h \in H^l(\Gamma^0), \bar{w}_h|_F \in \mathbb{P}_k(F) \quad \forall F \in \mathcal{F}\}, \quad (6.6)$$

onde $0 \leq l \leq 1$ e $\mathbb{P}_k(K)$ denota o espaço de polinômios de grau até k sobre o elemento K . O espaço W_h é o espaço V_h de polinômios quebrados que está definido em (3.5) e também é usado no capítulo anterior, e o espaço \bar{W}_h contém os polinômios

de Lagrange definidos somente as faces dos elementos e são de valor único sobre as faces.

Usando a notação $W_h^* = W_h \times \overline{W}_h$ e $\mathbf{v}_h = (v_h, \bar{v}_h)$, o problema discreto fica assim:

$$\text{Encontre } \mathbf{u}_h \in W_h^* \text{ tal que } B_A(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = L(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in W_h^* \quad (6.7)$$

O seguinte lema vai garantir a consistência do método, considerando u como a solução do problema (6.1) e com isso definimos $\mathbf{u} = (u, u)$, onde u no segundo argumento de \mathbf{u} é a restrição de u em Γ^0 .

Lema 6.1 *Se $\mathbf{u} = (u, u)$, onde $u \in H^1(\Omega)$ e é a solução de (6.1) e se \mathbf{u}_h é a solução de (6.7), então para todo $\mathbf{v}_h \in W_h^*$*

$$B_A(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = 0. \quad (6.8)$$

Prova:

Como \mathbf{u}_h é solução de (6.7) então $B_A(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - L(\mathbf{v}_h) = 0$, $\forall \mathbf{v}_h \in W_h^*$, levando em conta isso e devido a natureza da forma bilinear B_A , é suficiente mostrar que $B_A(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - L(\mathbf{v}_h) = 0$, tratando os casos onde $v_h = 0$ e $\bar{v}_h = 0$.

Para isso, consideremos primeiro a seguinte notação $a_n = |\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}|$ e com isso obtemos,

$$\begin{aligned} B_A(\mathbf{u}, (v_h, 0)) - L((v_h, 0)) &= \int_{\Omega} \mu u v_h - \sum_K \int_K \mathbf{a} u \cdot \nabla v_h + \sum_K \int_{\partial K^+} a_n u v_h + \\ &\quad + \sum_K \int_{\partial K^-} a_n u v_h - \int_{\Omega} f v_h \\ &= \int_{\Omega} \mu u v_h - \sum_K \int_K (\mathbf{a} \cdot \nabla v_h) u + \sum_K \int_{\partial K} a_n u v_h - \int_{\Omega} f v_h. \end{aligned}$$

Aplicando integração por partes no terceiro termo, obtemos

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} \mu u v_h - \sum_K \int_K (\mathbf{a} \cdot \nabla v_h) u + \sum_K \left(\int_K (\nabla \cdot \mathbf{a}) u v_h + \int_K (\mathbf{a} \cdot \nabla u) v_h + \int_K (\mathbf{a} \cdot \nabla v_h) u \right) \\
&\quad - \int_{\Omega} f v_h \\
&= \int_{\Omega} \mu u v_h + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{a}) u v_h + \int_{\Omega} (\mathbf{a} \cdot \nabla u) v_h - \int_{\Omega} f v_h \\
&= \int_{\Omega} (\mu u + \mathbf{a} \cdot \nabla u - f) v_h + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{a}) u v_h \quad \text{usando o fato que } u \text{ é solução de (6.1)} \\
&= \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{a}) u v_h = 0 \quad \text{pois } \nabla \cdot \mathbf{a} = 0.
\end{aligned}$$

Agora, veremos o caso onde $v_h = 0$,

$$\begin{aligned}
B_A(\mathbf{u}, (0, \bar{v}_h)) - L((0, \bar{v}_h)) &= - \sum_K \int_{\partial K^+} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) u \bar{v}_h - \sum_K \int_{\partial K^-} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) u \bar{v}_h \\
&\quad + \int_{\Gamma^+} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) u \bar{v}_h - \int_{\Gamma^-} g \bar{v}_h \\
&= - \int_{\Gamma^-} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) u \bar{v}_h - \int_{\Gamma^-} g \bar{v}_h = - \int_{\Gamma^-} [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) u + g] \bar{v}_h
\end{aligned}$$

lembrando a condição de fronteira (6.2),

$$\Rightarrow B_A(\mathbf{u}, (0, \bar{v}_h)) - L((0, \bar{v}_h)) = 0.$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
B_A(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - L(\mathbf{v}_h) &= B_A(\mathbf{u}, (0, \bar{v}_h)) + B_A(\mathbf{u}, (v_h, 0)) - L((v_h, 0)) - L((0, \bar{v}_h)) \\
&= B_A(\mathbf{u}, (0, \bar{v}_h)) - L((0, \bar{v}_h)) + B_A(\mathbf{u}, (v_h, 0)) - L((v_h, 0)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

Para a análise da estabilidade do método e estimativa de erro usaremos os se-

guintes espaços

$$W(h) = W_h + H^1(\Omega), \quad (6.9)$$

$$\overline{W}(h) = \overline{W}_h + H^{1/2}(\Gamma^0), \quad (6.10)$$

e também $W^*(h) = W(h) \times \overline{W}(h)$. O espaço $\overline{W}(h)$ tem sido definido tal que este contém o traço de todas as funções em $H^1(\Omega)$ sobre Γ^0 .

Vamos definir duas normas em $W^*(h)$. A primeira é referida como a norma ‘estabilidade’,

$$\|\mathbf{v}\|_A^2 = \mu \|v\|_{0,\Omega}^2 + \sum_K h_K \|\mathbf{a} \cdot \nabla v\|_{0,K}^2 + \sum_K \left\| a_n^{\frac{1}{2}}(\bar{v} - v) \right\|_{0,\partial K}^2 + \left\| a_n^{\frac{1}{2}}\bar{v} \right\|_{0,\Gamma}^2. \quad (6.11)$$

A segunda norma, a qual é referida como a norma ‘continuidade’, é a seguinte

$$\|\mathbf{v}\|_{A'}^2 = \|\mathbf{v}\|_A^2 + \sum_K h_K^{-1} \|v\|_{0,K}^2 + \sum_K \left\| a_n^{\frac{1}{2}}\bar{v} \right\|_{0,\partial K_-}^2 + \sum_K \left\| a_n^{\frac{1}{2}}v \right\|_{0,\partial K_+}^2. \quad (6.12)$$

Queremos estabelecer estabilidade para o método de interface estabilizada, e isso será feito cumprindo a condição de inf-sup. Mas é necessário apresentar antes, resultados importantes que vão nos ajudar a este objetivo.

Lema 6.2 (Coercividade) *Para todo $\mathbf{v} \in W^*(h)$*

$$B_A(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \mu \|v\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \sum_K \left\| a_n^{\frac{1}{2}}(\bar{v} - v) \right\|_{0,\partial K}^2 + \frac{1}{2} \left\| a_n^{\frac{1}{2}}\bar{v} \right\|_{0,\Gamma}^2. \quad (6.13)$$

Prova:

Lembrando a definição da forma bilinear temos

$$B_A(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mu v^2 - \sum_K \int_K \mathbf{a} v \nabla v - \sum_K \int_{\partial K^+} a_n v (\bar{v} - v) + \sum_K \int_{\partial K^-} a_n \bar{v} (\bar{v} - v) + \int_{\Gamma^+} a_n \bar{v}^2$$

Integrando por partes o segundo termo da igualdade obtemos

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} \mu v^2 - \sum_K \left[\frac{1}{2} \int_{\partial K} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) v^2 - \frac{1}{2} \int_K (\nabla \cdot \mathbf{a}) v^2 \right] - \sum_K \int_{\partial K^+} a_n v (\bar{v} - v) \\
&\quad + \sum_K \int_{\partial K^-} a_n \bar{v} (\bar{v} - v) + \int_{\Gamma^+} a_n \bar{v}^2
\end{aligned}$$

Considerando que $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$, quebrando ∂K em ∂K^+ e ∂K^- e lembrando que $a_n = |\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}|$, temos

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} \mu v^2 + \int_{\Gamma^+} a_n \bar{v}^2 + \sum_K \left(\int_{\partial K^+} a_n \left[\frac{v^2}{2} - \bar{v}v \right] + \int_{\partial K^-} a_n \left[\frac{v^2}{2} - \bar{v}v + \bar{v}^2 \right] \right) \\
&= \int_{\Omega} \mu v^2 + \int_{\Gamma^+} a_n \bar{v}^2 + \sum_K \left(\int_{\partial K^+} a_n \left[\frac{v^2}{2} - \bar{v}v + \frac{\bar{v}^2}{2} \right] - \int_{\partial K^+} a_n \frac{\bar{v}^2}{2} \right. \\
&\quad \left. + \int_{\partial K^-} a_n \left[\frac{v^2}{2} - \bar{v}v + \frac{\bar{v}^2}{2} \right] + \int_{\partial K^-} a_n \frac{\bar{v}^2}{2} \right) \\
&= \int_{\Omega} \mu v^2 + \sum_K \frac{1}{2} \int_{\partial K^+} a_n (v - \bar{v})^2 + \sum_K \frac{1}{2} \int_{\partial K^-} a_n (v - \bar{v})^2 - \int_{\partial K^+} a_n \frac{\bar{v}^2}{2} \\
&\quad + \int_{\partial K^-} a_n \frac{\bar{v}^2}{2} + \int_{\Gamma^+} a_n \bar{v}^2 \\
&= \int_{\Omega} \mu v^2 + \sum_K \frac{1}{2} \int_{\partial K} a_n (v - \bar{v})^2 - \int_{\partial K^+} a_n \frac{\bar{v}^2}{2} + \int_{\partial K^-} a_n \frac{\bar{v}^2}{2} + \int_{\Gamma^+} a_n \bar{v}^2
\end{aligned}$$

Separando ∂K^+ e ∂K^- em interfaces e fases de fronteira obtemos

$$\begin{aligned}
&= \mu \int_{\Omega} v^2 + \sum_K \frac{1}{2} \int_{\partial K} a_n (v - \bar{v})^2 + \frac{1}{2} \sum_{F_i \in \mathcal{F}^i} \left(\int_{F_i^-} a_n \bar{v}^2 - \int_{F_i^+} a_n \bar{v}^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{F_b \in \mathcal{F}^b} \left(\int_{F_b^-} a_n \bar{v}^2 - \int_{F_b^+} a_n \bar{v}^2 \right) + \sum_{F_b \in \mathcal{F}^b} \int_{F_b^+} a_n \bar{v}^2 \\
&= \mu \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \sum_K \|a_n^{\frac{1}{2}} (v - \bar{v})\|_{L^2(\partial K)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{F_b \in \mathcal{F}^b} \left(\int_{F_b^-} a_n \bar{v}^2 + \int_{F_b^+} a_n \bar{v}^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{F_i \in \mathcal{F}^i} \left(\int_{F_i^-} a_n \bar{v}^2 - \int_{F_i^+} a_n \bar{v}^2 \right)
\end{aligned}$$

Lembrando que cada interface $F_i = \partial K_1 \cap \partial K_2$ onde $n_{K_1}(x) = -n_{K_2}(x)$ q.t.p em F_i .

$$\Rightarrow B_A(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \mu \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \sum_K \|a_n^{\frac{1}{2}}(v - \bar{v})\|_{L^2(\partial K)}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} a_n \bar{v}^2$$

■

Lema 6.3 (Condição *inf-sup*) *Existe $\beta_A > 0$, a qual é independente de h , tal que para todo $\mathbf{v}_h \in W_h^*$,*

$$\sup_{\mathbf{w}_h \in W_h^*} \frac{B_A(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)}{\|\mathbf{w}_h\|_A} \geq \beta_A \|\mathbf{v}_h\|_A. \quad (6.14)$$

A condição inf-sup estabelece estabilidade para o método de interface estabilizada, para a sua demonstração vamos apresentar dois resultados importantes, lema 6.4 e proposição 6, cujas demonstrações pode se encontrar em [10] (lema 4.3 e proposição 4.4, pg. 9-10).

Consideremos uma função \mathbf{z}_h o qual depende de $\mathbf{w}_h \in W_h^*$ de acordo a

$$\mathbf{z}_h = (z_h, 0) = (-h_K \bar{\mathbf{a}}_K \cdot \nabla w_h, 0), \quad (6.15)$$

onde $\bar{\mathbf{a}}_K$ é a média de \mathbf{a} sobre o elemento K .

Lema 6.4 *Se a função \mathbf{z}_h depende de \mathbf{w}_h conforme à equação (6.15), então para todo $\mathbf{w}_h \in W_h^*$, existe uma constante $c_1 > 0$ tal que se $\mathbf{v}_h = c_1 \mathbf{w}_h + \mathbf{z}_h$, então*

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{w}_h\|_A^2 \leq B_A(\mathbf{z}_h, \mathbf{w}_h) + c_1 B_A(\mathbf{w}_h, \mathbf{w}_h) = B_A(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h). \quad (6.16)$$

Proposição 6 *Para \mathbf{z}_h que depende de \mathbf{w}_h conforme à equação (6.15), existe uma constante $c_2 > 0$ tal que para todo $\mathbf{w}_h \in W_h^*$*

$$\|\mathbf{z}_h\|_A \leq c_2 \|\mathbf{w}_h\|_A. \quad (6.17)$$

Se $\mathbf{v}_h = c_1 \mathbf{w}_h + \mathbf{z}_h$, a proposiçãõ anterior implica que

$$\|\mathbf{v}_h\|_A = \|c_1 \mathbf{w}_h + \mathbf{z}_h\|_A \leq (c_1 + c_2) \|\mathbf{w}_h\|_A. \quad (6.18)$$

Prova do lema (6.3):

Podemos afirmar que para todo $\mathbf{v}_h \in W_h^*$, $\exists \mathbf{w}_h \in W_h^*$, tal que $\mathbf{v}_h = c_1 \mathbf{w}_h + \mathbf{z}_h$, mostraremos isso para um caso particular ($d = 1$ ou seja $W_h = \mathbb{P}_k(K)$).

Em cada K , seja $v_h = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$, vamos encontrar $w_h = b_0 + b_1x + \dots + b_kx^k$ tal que

$$v_h = c_1 w_h - h_K \bar{\mathbf{a}}_K \cdot \nabla w_h,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k &= c_1(b_0 + b_1x + \dots + b_kx^k) - h_K \bar{\mathbf{a}}_K (b_1 + 2b_2x + \dots + kb_kx^{k-1}) \\ &= (c_1b_0 - h_K \bar{\mathbf{a}}_K b_1) + (c_1b_1 - 2h_K \bar{\mathbf{a}}_K b_2)x + \dots + \\ &\quad + (c_1b_{k-1} - kh_K \bar{\mathbf{a}}_K b_k)x^{k-1} + c_1b_kx^k \end{aligned}$$

Daí vemos que $a_k = c_1b_k \Rightarrow b_k = \frac{a_k}{c_1}$,

depois $a_{k-1} = c_1b_{k-1} - kh_K \bar{\mathbf{a}}_K b_k$ como b_k já é conhecido então

$$b_{k-1} = \frac{a_{k-1} + kh_K \bar{\mathbf{a}}_K b_k}{c_1}$$

fazendo isso recursivamente, todos os coeficientes $\{b_j\}_{j=0}^k$ ficam determinados, portanto também \mathbf{w}_h como desejávamos.

Com isso, para $\mathbf{v}_h = c_1 \mathbf{w}_h + \mathbf{z}_h$ não trivial, temos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_h\|_A \|\mathbf{w}_h\|_A &\leq (c_1 + c_2) \|\mathbf{w}_h\|_A^2 \text{ usando a equaçãõ (6.18)} \\ &\leq 2(c_1 + c_2) B_A(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) \text{ usando o lema (6.4)} \end{aligned} \quad (6.19)$$

o qual implica que para $\beta_A = \frac{1}{2(c_1 + c_2)}$, existe $\mathbf{w}_h \in W_h^*$ tal que

$$\beta_A \|\mathbf{v}_h\|_A \leq \frac{B_A(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)}{\|\mathbf{w}_h\|_A} \leq \sup_{\mathbf{w} \in W_h^*} \frac{B_A(\mathbf{v}_h, \mathbf{w})}{\|\mathbf{w}\|_A} \quad \forall \mathbf{v}_h \in W_h^*. \quad (6.20)$$

E com isso a condição de inf-sup é satisfeita. ■

Analisaremos a convergência do método, para isso é importante a continuidade da forma bilinear com respeito as normas (6.11) e (6.12).

Lema 6.5 (Continuidade) *Existe $C_A > 0$, a qual é independente de h , tal que para todo $\mathbf{w} \in W^*(h)$ e para todo $\mathbf{v}_h \in W_h^*$,*

$$|B_A(\mathbf{w}, \mathbf{v}_h)| \leq C_A \|\mathbf{w}\|_{A'} \|\mathbf{v}_h\|_A. \quad (6.21)$$

Prova:

$$\begin{aligned} |B_A(\mathbf{w}, \mathbf{v}_h)| &= \left| \int_{\Omega} \mu w v_h - \sum_K \int_K \mathbf{a} w \cdot \nabla v_h - \sum_K \int_{\partial K^+} a_n w (\bar{v}_h - v_h) \right. \\ &\quad \left. + \sum_K \int_{\partial K^-} a_n \bar{w} (\bar{v}_h - v_h) + \int_{\Gamma^+} a_n \bar{w} \bar{v}_h \right| \\ &\leq \sum_K \left| \int_K \mu w v_h \right| + \sum_K \left| \int_K (\mathbf{a} \cdot \nabla v_h) w \right| + \sum_K \left| \int_{\partial K^+} a_n^{\frac{1}{2}} w a_n^{\frac{1}{2}} (\bar{v}_h - v_h) \right| \\ &\quad + \sum_K \left| \int_{\partial K^-} a_n^{\frac{1}{2}} \bar{w} a_n^{\frac{1}{2}} (\bar{v}_h - v_h) \right| + \left| \int_{\Gamma^+} a_n^{\frac{1}{2}} \bar{w} a_n^{\frac{1}{2}} \bar{v}_h \right| \\ &\leq \sum_K \mu \|v_h\|_{L^2(K)} \|w\|_{L^2(K)} + \sum_K \|\mathbf{a} \cdot \nabla v_h\|_{L^2(K)} \|w\|_{L^2(K)} \\ &\quad + \sum_K \|a_n^{\frac{1}{2}} w\|_{L^2(\partial K^+)} \|a_n^{\frac{1}{2}} (\bar{v}_h - v_h)\|_{L^2(\partial K^+)} \\ &\quad + \sum_K \|a_n^{\frac{1}{2}} \bar{w}\|_{L^2(\partial K^-)} \|a_n^{\frac{1}{2}} (\bar{v}_h - v_h)\|_{L^2(\partial K^-)} + \|a_n^{\frac{1}{2}} \bar{w}\|_{L^2(\Gamma^+)} \|a_n^{\frac{1}{2}} \bar{v}_h\|_{L^2(\Gamma^+)}. \end{aligned}$$

Vamos limitar cada somatório da última expressão usando a desigualdade de Cauchy-

Schwarz discreta¹:

$$\begin{aligned}
\sum_K \mu^{\frac{1}{2}} \|v_h\|_{L^2(K)} \mu^{\frac{1}{2}} \|w\|_{L^2(K)} &\leq \left(\sum_K \mu \|v_h\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_K \mu \|w\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \left(\mu \|v_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mu \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (\|v_h\|_A^2)^{\frac{1}{2}} (\|w\|_{A'}^2)^{\frac{1}{2}} \leq \|v_h\|_A (\|w\|_{A'}^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|v_h\|_A \|w\|_{A'},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_K \|\mathbf{a} \cdot \nabla v_h\|_{L^2(K)} \|w\|_{L^2(K)} &\leq \left(\sum_K h_K \|\mathbf{a} \cdot \nabla v_h\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_K h_K^{-1} \|w\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (\|v_h\|_A^2)^{\frac{1}{2}} (\|w\|_{A'}^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|v_h\|_A \|w\|_{A'},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_K \|a_n^{\frac{1}{2}} w\|_{L^2(\partial K^+)} \|a_n^{\frac{1}{2}} (\bar{v}_h - v_h)\|_{L^2(\partial K^+)} &\leq \left(\sum_K \|a_n^{\frac{1}{2}} w\|_{L^2(\partial K^+)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_K \|a_n^{\frac{1}{2}} (\bar{v}_h - v_h)\|_{L^2(\partial K^+)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (\|w\|_{A'}^2)^{\frac{1}{2}} (\|v_h\|_A^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|w\|_{A'} \|v_h\|_A.
\end{aligned}$$

De forma similar limitamos

$$\sum_K \|a_n^{\frac{1}{2}} \bar{w}\|_{L^2(\partial K^-)} \|a_n^{\frac{1}{2}} (\bar{v}_h - v_h)\|_{L^2(\partial K^-)} \leq \|w\|_{A'} \|v_h\|_A.$$

$${}^1 \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

O último termo é limitado assim

$$\begin{aligned}
\|a_n^{\frac{1}{2}}\bar{w}\|_{L^2(\Gamma^+)}\|a_n^{\frac{1}{2}}\bar{v}_h\|_{L^2(\Gamma^+)} &\leq \left(\|a_n^{\frac{1}{2}}\bar{w}\|_{L^2(\Gamma^+)}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\|a_n^{\frac{1}{2}}\bar{v}_h\|_{L^2(\Gamma^+)}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (\|w\|_A^2)^{\frac{1}{2}} (\|v_h\|_A^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (\|w\|_{A'}^2)^{\frac{1}{2}} (\|v_h\|_A^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|w\|_{A'}\|v_h\|_A.
\end{aligned}$$

Juntando todos os resultados anteriores, obtemos

$$\Rightarrow |B_A(\mathbf{w}, \mathbf{v}_h)| \leq 5\|w\|_{A'}\|v_h\|_A,$$

onde $C_A = 5$. ■

Este lema, juntamente com o lema (6.3), vão nos ajudar a estabelecer o seguinte resultado de convergência:

Lema 6.6 (Convergência) *Se $\mathbf{u} = (u, u)$, onde u soluciona a equação (6.1) e \mathbf{u}_h é a solução do problema discreto (6.7), então*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_A \leq \left(1 + \frac{C_A}{\beta_A}\right) \inf_{\mathbf{v}_h \in W^*} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{A'} \quad (6.22)$$

Prova:

Pela condição inf-sup sabemos que

$$\begin{aligned}
\beta_A \|\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h\|_A &\leq \sup_{\mathbf{v}_h \in W_h^*} \frac{B_A(\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_A} \\
&= \sup_{\mathbf{v}_h \in W_h^*} \frac{B_A(\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_A} \quad \text{usando a consistência} \\
&\leq C_A \sup_{\mathbf{v}_h \in W_h^*} \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_{A'}\|\mathbf{v}_h\|_A}{\|\mathbf{v}_h\|_A} \quad \text{usando a continuidade de } B_A \\
&= C_A \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_{A'}
\end{aligned}$$

Daí, aplicando a desigualdade triangular temos que

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_A &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_A + \|\mathbf{w}_h - \mathbf{u}_h\|_A \\
&\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_A + \frac{C_A}{\beta_A} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_{A'} \\
&\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_{A'} + \frac{C_A}{\beta_A} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_{A'} \quad \text{pois } \|\cdot\|_A \leq \|\cdot\|_{A'} \\
&= \left(1 + \frac{C_A}{\beta_A}\right) \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_{A'} \\
&\Rightarrow \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_A \leq \inf_{\mathbf{w}_h \in W_h^*} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_{A'}.
\end{aligned}$$

■

Lema 6.7 (A melhor aproximação) *Seja $u \in H^{k+1}(\Omega)$ é solução da equação (6.1) e $\mathbf{u} = (u, u)$, além disso seja \mathbf{u}_h a solução do problema discreto (6.7), então existe um $c_{\mu, \mathbf{a}} > 0$ tal que*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_A \leq c_{\mu, \mathbf{a}} h^{k+\frac{1}{2}} \|u\|_{k+1, \Omega} \quad (6.23)$$

e

$$\|u - u_h\|_{0, \Omega} \leq c_{\mu, \mathbf{a}} h^{k+\frac{1}{2}} \|u\|_{k+1, \Omega} \quad (6.24)$$

Concluimos que os resultados de estabilidade e a estimativa de erro do método de interface estabilizada são similares aos resultados estabelecidos no capítulo anterior usando Galerkin descontínuo usual com upwind, pois a taxa de convergência $(k+1/2)$ coincide em ambos métodos.

Referências Bibliográficas

- [1] BRENNER S., SCOTT R., *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Texts in Applied Mathematics, Vol. 15, 3rd ed., 2008.
- [2] COCKBURN B., KARNIADAKIS G., SHU C., *Discontinuous Galerkin Methods - Theory, Computation and Applications*, vol. 11 of Lecture Notes in Computer Science and Engineering, Springer, 2000.
- [3] DI PIETRO D. A., ERN A., *Mathematical Aspects of Discontinuous Galerkin Methods*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 2012.
- [4] ERN A., GUERMOND J., *Theory and Practice of Finite Elements*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 159, 2004.
- [5] JOHNSON C., NÄVERT U., and PITKÄRANTA J., *Finite element methods for linear hyperbolic equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 45 (1984), pp. 285-312.
- [6] LABEUR R. J. and WELLS G. N., *A Galerkin interface stabilisation method for the advection-diffusion and incompressible Navier-Stokes equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 196(49-52):4985-5000, 2007.
- [7] LESAINT P. and RAVIART P.A., *On a finite element method for solving the neutron transport equation*, Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations, Math. Res. Center, Univ. of Wisconsin-Madison, Academic Press, New York, 1974, pp. 89-123. Publication No. 33.

- [8] LESAIN P., *Sur la résolution des systèmes hyperboliques du premier ordre par des méthodes d'éléments finis*, PhD thesis, University of Paris VI, 1975.
- [9] REED W.H., HILL T.R., *Triangular mesh methods for the neutron transport equation*, Technical report, LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory, 1973.
- [10] WELLS G. N., *Analysis of an interface stabilised finite element method: the advection-diffusion-reaction equation*, SIAM J. Numer. Anal. 49(1), 2011, 87-109.