UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Marlon Pimenta Fonseca

Representações dos grupos Simétrico e Alternante e Aplicações às Identidades Polinomiais

São Carlos - SP
Novembro de 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Representações dos grupos Simétrico e Alternante e Aplicações às Identidades Polinomiais

Marlon Pimenta Fonseca
Bolsista Capes
Orientador: Prof. Dr. Waldeck Schützer

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

São Carlos - SP
Novembro de 2014

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

F676rg

Fonseca, Marlon Pimenta.
Representações dos grupos simétrico e alternante e aplicações às identidades polinomiais / Marlon Pimenta Fonseca. -- São Carlos : UFSCar, 2014.
108 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2014.

1. Matemática. 2. Álgebra. 3. Grassmann, Álgebra de. I. Título.

CDD: 510 (20ª)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a defesa de dissertação de Mestre em Matemática do candidato Marlon Pimenta Fonseca, realizada em 28/11/2014:

Waldeck Schutzer

Prof. Dr. Waldeck Schutzer
UFSCar

Ires Dias

Profa. Dra. Ires Dias
USP

Prof. Dr. Humberto Luiz Talpo
UFSCar

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por tudo que sou e por estar comigo quando ninguém mais podia estar.

A minha esposa Ana Paula por acreditar em mim quando nem eu mesmo acreditava. Sua presença em minha vida foi fundamental para eu chegar até aqui.

Aos meus pais , Luiz e Zildete, pelos valores que me ensinaram. Se hoje estou terminando mais uma importante etapa em minha vida é porque quando criança, me ensinaram que sem respeito ao próximo e dedicação ao que se faz não chegamos a lugar algum.

A meu orientador, Waldeck Schützer, pela paciência e dedicação.

A todos os meus amigos do DM, pela convivência dentro e fora do departamento.

Aos professores do DM, pelos ensinamentos que contribuíram para minha formação.

Por fim, agradeço à CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma discussão a respeito das Representações dos Grupos Simétrico S_n e do Grupo Alternante A_n. Estudaremos resultados básicos da Teoria de Young sobre as representações do grupo simétrico para encontrarmos a decomposição da álgebra de grupo FS_n em subálgebras simples. Depois utilizaremos tal decomposição para encontrar a decomposição da álgebra de grupo FA_n em subálgebras simples. Por fim empregaremos as informações a respeito das decomposições acima citadas, juntamente com a PI-Teoria, para obter a sequência de A-codimensões para a álgebra de Grassmann (álgebra exterior) infinitamente gerada.

Palavras-chave: Representações. Grupo simétrico. PI-álgebras. A-codimensões. Álgebra de Grassmann.

Abstract

In this dissertation we'll present a discussion about the Representations of the Symmetric Group S_n and Alternating Group A_n. We'll study basics results of the Young's Theory about the representations of the Symmetric Group and discover the decomposition of the algebra FS_n in simple subalgebras. After, we'll utilize this decomposition to find the decomposition of the algebra FA_n in simple subalgebras. Finally, we'll use this decompositions, together with the PI Theory, for get the sequence of A-codimensions for the Grassmann Algebra (Exterior Algebra) infinitely generated.

Keywords: Representations. Symmetric Group. PI-algebras. A-codimensions. Grassmann Algebra.

Sumário

Introdução

O estudo das *álgebras com identidades polinomiais* (ou *PI-álgebras*) é hoje uma importante vertente de estudos na matemática. Por mais que perguntas a respeito de PI-álgebras fossem encontradas já na década de 40, foi com o artigo *Minimal identities for algebras* de Amitsur e Levitzki, em 1950, que a teoria das álgebras com identidades polinomiais (PI-teoria) tornou-se de fato consolidada. Nesse trabalho foi provado, por métodos combinatórios, que o polinômio standard de grau $2n$ é identidade para a álgebra das matrizes quadradas $M_n(F)$.

Desde então a teoria das PI-álgebras tem se consolidado e atraído significativo esforço de investigação. Em 1972, Amitai Regev em seu artigo "*Existence of identities in $A \otimes B$*", apresentou os conceitos de *codimensão* de uma álgebra com o intuito de aplicar a teoria das representações dos grupos simétricos à PI-teoria.

Este trabalho tem como objetivo explorar as representações dos grupos simétrico e alternante bem como sua aplicação à Teoria das PI-álgebras, mais especificamente nas decomposições de tais representações em irredutíveis e sua aplicação ao cálculo das codimensões e A-codimensões.

No primeiro capítulo, discutiremos as representações de um grupo finito G e de um álgebra associativa e unitária A. Introduziremos os conceitos de G-módulos e A-módulos e exploraremos suas propriedades. Definiremos a álgebra grupo FG e provaremos a equivalência entre suas representações e as representações do grupo G. Esta equivalência nos dará importantes informações a respeito da decomposição de FG e de suas representações irredutíveis.

No segundo capítulo, estudaremos mais detalhadamente as representações dos grupo simétrico, seguindo de perto e complementando a exposição de Regev e Henke,

[1]. Começaremos com o conceito de partições de um número natural, seguindo-se a este os conceitos de diagrama e tableau de Young. Através dos diagramas e tableau de Young serão construídos as representações irredutíveis do grupo S_n. Também serão obtidas importantes propriedades dessas representações que nos possibilitarão encontrar uma decomposição para FS_n em ideais minimais à esquerda.

No terceiro capítulo, ainda seguindo [1], utilizaremos a decomposição de FS_n obtida no capítulo dois, juntamente com o fato de que $A_n \subset S_n$, para encontrar uma decomposição explícita para FA_n em termos de seus ideais minimais à esquerda.

No quarto e último capítulo, aplicaremos a teoria desenvolvida nos capítulos precedentes ao estudo das A-identidade e A-codimensões, como em [3]. Em particular, encontraremos o valor exato das A-codimensões para Álgebra de Grassmann infinitamente gerada.

Capítulo 1

Definições preliminares

1.1 Representações de Grupos

Ao longo deste trabalho, a menos que deixemos explícito o contrário, consideraremos F um corpo de característica zero.

Definição 1.1.1. Sejam G um grupo e V um F-espaço vetorial. Uma *representação* de G em V é uma função $\varphi : G \longrightarrow \mathrm{End}_F V$ que satisfaz $\varphi(e) = Id_V$ e $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$, para todo $g, h \in G$.

Observemos que para todo $g \in G$, $Id_V = \varphi(e) = \varphi(gg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(g^{-1})$, ou seja, $\varphi(g)^{-1} = \varphi(g^{-1})$, e assim $\varphi(g) \in GL(V)$. Portanto podemos considerar φ como um homomorfismo de grupos, $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$.

A dimensão de V é chamada *grau da representação* φ.

Definição 1.1.2. Seja G um grupo finito. Dizemos que um espaço vetorial V é um *G-módulo*, se existe uma aplicação

$$\begin{aligned} \cdot : G \times V &\longrightarrow V \\ (g, v) &\longmapsto g \cdot v \end{aligned}$$

possuindo as seguintes propriedades:

i) $e \cdot v = v$;

ii) $g \cdot (v_1 + v_2) = (g \cdot v_1) + (g \cdot v_2)$;

iii) $g \cdot (\lambda v) = \lambda(g \cdot v)$;

iv) $g_1 \cdot (g_2 \cdot v) = (g_1 g_2) \cdot v$;

para quaisquer $g, g_1, g_2 \in G, v, v_1, v_2 \in V, \lambda \in F$. Dizemos que a aplicação "$\cdot$" define uma *ação* de G em V e que G *age* sobre V.

Observação 1.1.3. Dada φ representação de G em V podemos definir a ação $\cdot : G \times V \longrightarrow V$ via $g \cdot v := \varphi(g)v$. Pode ser mostrado que V munido deste produto torna-se um G-módulo.

Por outro lado, se V é um G-módulo, então definindo $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ por $\varphi(g)v = g \cdot v$, temos que φ é uma representação de G em V.

Isto estabelece uma correspondência biunívoca entre as representações de G e seus G-módulos.

Por simplicidade é usual abolir o uso do "$\cdot$" para representar o produto em um módulo. Por exemplo, escrevemos simplesmente gv para $g \cdot v$.

Exemplo 1.1.4. Sendo G um grupo e V um F-espaço, temos que

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow GL(V) \\ g &\longmapsto \varphi(g) = Id_V \end{aligned}$$

é uma representação de G em V. Esta representação é chamada *representação trivial*. Quando $\dim V = n$, podemos definir a *representação trivial matricial* da seguinte forma

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow M_n(F) \\ g &\longmapsto \varphi(g) = I_n \end{aligned}$$

onde I_n é a matriz identidade $n \times n$.

De um modo geral, se V é um F-espaço vetorial de dimensão finita n e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ é uma representação, então devido ao isomorfismo existente entre $GL(V)$ e $M_n(F)$, podemos considerar $\varphi : G \longrightarrow M_n(F)$ como uma representação matricial.

Definição 1.1.5. Seja $W \subseteq V$ um subespaço vetorial, dizemos que W é φ-*invariante* se $\varphi(g)(W) \subseteq W$ para todo $g \in G$. Como $\varphi(g)$ é automorfismo, então $\varphi(g)|_W$

é também automorfismo, o que nos permite definir $\varphi_W : G \longrightarrow GL(W)$ por $\varphi_W(g) = \varphi(g)|_W$. Dizemos que φ_W é uma *subrepresentação*, ou que W é G-*submódulo* de V.

Definição 1.1.6. Sejam $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$, $\psi : G \longrightarrow GL(W)$ duas representações de G e $f : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. Dizemos que f é um *homomorfismo de representações* (ou de G-módulos) se para todo $g \in G$ vale $f \circ \varphi(g) = \psi(g) \circ f$, ou em linguagem de G-módulos, $f(gv) = gf(v)$ para todo $v \in V$. Neste caso, também dizemos que f é G-*equivariante*. Quando f for bijetora, diremos que φ e ψ são *equivalentes* e escreveremos $\varphi \cong \psi$, (ou $V \cong W$ como G-módulos).

Agora se não existe $f : V \longrightarrow W$ um isomorfismo de G-módulos, então dizemos que V e W são *inequivalentes* entre si.

O conjunto de todos estes homomorfismos será denotado por $\operatorname{Hom}_G(V, W)$.

Exemplo 1.1.7. Sejam $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ e $\psi : G \longrightarrow GL(W)$ duas representações de G e seja $f : V \longrightarrow W$, G-equivariante. Então $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ são submódulos de V e W, respectivamente. De fato:

i) Para todo $v \in \operatorname{Ker} f$, $g \in G$ temos $f(gv) = gf(v) = g0 = 0$. Logo $gv \in \operatorname{Ker} f$ e portanto $\operatorname{Ker} f$ é submódulo de V.

ii) Para todo $w \in \operatorname{Im} f$ e $g \in G$, existe $v \in V$ tal que $w = f(v)$, logo $gw = gf(v) = f(gv) \in \operatorname{Im} f$ e portanto $\operatorname{Im} f$ é submódulo de W.

Definição 1.1.8. Uma representação $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$, é *irredutível* se os únicos subespaços φ-invariantes de V, são $\{0\}$ e V. Caso contrário, φ é *redutível.*

Na linguagem de G-módulos, dizemos que um G-módulo é *simples* se seus únicos G-submódulos são os subespaços triviais.

Por abuso de linguagem, vamos usar os dois termos (irredutível, simples) indistintamente.

Exemplo 1.1.9. A representação

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{Z} &\longrightarrow GL(\mathbb{R}^2) \\ n &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}^2$ é redutível, pois o subespaço $W = \{(\lambda, 0) | \lambda \in \mathbb{R}\}$ satisfaz $\varphi(n)(W) \subseteq W$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 1.1.10. Toda representação de grau 1 é trivialmente irredutível. Se G é grupo finito (não trivial), então toda representação de grau maior que $\#G$ é redutível. De fato, suponhamos que $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ seja uma representação de G tal que $\dim V > \#G$. Sendo $v_0 \in V$ um vetor não nulo, $W = \langle \varphi(g)(v_0) | g \in G \rangle$ é um subespaço não nulo, pois $v_0 = Id_V(v_0) = \varphi(e)(v_0) \in W$. Além disso, se $w \in W$ então existe $h \in G$ tal que $\varphi(h)v_0 = w$, assim para todo $g \in G$ temos $\varphi(g)(w) = \varphi(g)\varphi(h)(v_0) = \varphi(gh)(v_0) \in W$, ou seja, W é φ-invariante. Como $\dim V > \#G \geq \dim W$, temos que W é um subespaço próprio e φ-invariante. Assim V é redutível.

Lema 1.1.11. (Lema de Schur para G-módulos) Sejam $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ e $\psi : G \longrightarrow GL(W)$ duas representações irredutíveis de G e seja $f : V \longrightarrow W$ G-equivariante. Então:

i) Ou $f = 0$ ou f é isomorfismo de G-módulos. Isto é, $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ é álgebra com divisão.

ii) Se F é algebricamente fechado e $W = V$ então $f = \lambda Id_V$ para algum $\lambda \in F$. Isto é, $\mathrm{End}_G(V) \cong F$.

Demonstração:

i) Como $\mathrm{Ker}\, f$ é submódulo de V e φ é irredutível temos $\mathrm{Ker}\, f = V$ ou $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$. Caso $\mathrm{Ker}\, f = V$, então $f = 0$. Caso $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$, então f é injetora. Ademais, $\mathrm{Im}\, f \neq \{0\}$ é submódulo de W e este é simples, assim $\mathrm{Im}\, f = W$, e portanto f é sobrejetora. Isso mostra que f é equivalência.

ii) Sendo F algebricamente fechado, então f possui um autovalor $\lambda \in F$ e um autovetor associado $v \in V$. Sendo $g = f - \lambda Id_V$, temos que g é operador linear G-equivariante. Além disso, $g(v) = f(v) - \lambda v = \lambda v - \lambda v = 0$, ou seja, $v \in \operatorname{Ker} g$, e assim $\operatorname{Ker} g \neq \{0\}$. Pelo item i, $g = 0$ e portanto $f = \lambda Id_V$. ■

O seguinte resultado é mais convenientemente expresso na linguagem de módulos.

Teorema 1.1.12. Seja V um G-módulo. São equivalentes:

i) $V = \sum\limits_{i \in I} V_i$, em que $\{V_i | i \in I\}$ é uma família de G-submódulos simples de V.

ii) $V = \bigoplus\limits_{i \in I} V_i$, em que $\{V_i | i \in I\}$ é uma família de G-submódulos simples de V.

iii) Para todo G-submódulo W_1 de V existe um G-submódulo W_2 de V tal que $V = W_1 \oplus W_2$ como G-módulos.

Demonstração: Podemos encontrar a demonstração deste teorema em [9], capítulo IX, teorema 3.6. ■

Definição 1.1.13. Um G-módulo V (respectivamente uma representação $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$) é *completamente redutível* se possuir uma, e consequentemente todas, das propriedades do teorema acima.

Exemplo 1.1.14. Se $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ é uma representação irredutível, então em particular, φ é completamente redutível.

Exemplo 1.1.15. Sejam $F = \mathbb{Z}_2$, $T : F^2 \longrightarrow F^2$ tal que $T(x, y) = (x + y, y)$ e $\varphi : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow GL(F^2)$ definida por $\varphi(0) = Id_{F^2}$, $\varphi(1) = T$. Notemos que $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ possui $\lambda = 1$ como único autovalor cujo autovetor associado é $(1, 0)$. Assim, considerando $W = \langle (1, 0) \rangle$, vemos que W é um subespaço T-invariante, consequentemente o único φ-invariante. Portanto, φ é redutível, porém não é completamente redutível.

Teorema 1.1.16. (Maschke) Seja G um grupo finito e F um corpo de característica zero. Se $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ é uma representação de grau finito e W um subespaço φ-invariante de V, então existe W_1 subespaço φ-invariante de V tal que $V = W \oplus W_1$. Em outras palavras, φ é completamente redutível.

Demonstração: Definamos o operador $P : V \longrightarrow V$, tal que $P(u) = 0$ se $u \in U$, $P(w) = w$ se $w \in W$. Então, P é a projeção de V em W e valem $P|_W = Id_W$, $P^2 = P$ e $\operatorname{Im} P = W$. Tomando

$$\begin{aligned} S: \quad & V \longrightarrow V \\ & v \mapsto \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} (\varphi(g^{-1}) P \varphi(g))(v) \end{aligned}$$

temos S linear, pois é soma de lineares. Como para todo $g \in G$ temos:

$$\varphi(g^{-1}) P \varphi(g)(V) = \varphi(g^{-1}) P(V) = \varphi(g^{-1})(W) = W$$

Então, $\operatorname{Im} S = W$. Além disso, se $w \in W$ então tomando para cada $g \in G$, $w_g = \varphi(g)w$, temos $w_g \in W$ pois W é φ-invariante, logo:

$$\varphi(g^{-1}) P \varphi(g) w = \varphi(g^{-1}) P(w_g) = \varphi(g^{-1})(w_g) = w$$

Assim $S(w) = w$ para todo $w \in W$, ou seja, $S|_W = Id_W$. Por fim, para todo $v \in V$ temos $S(v) \in W$ logo $S^2(v) = S(S(v)) = S(v)$, assim $S^2 = S$.

Desta forma, S é também a projeção de V em W, logo vale $V = \operatorname{Ker} S \oplus ImS = \operatorname{Ker} S \oplus W$. Vamos mostrar que $\operatorname{Ker} S$ é φ-invariante. Sejam $v \in \operatorname{Ker} S$, $h \in G$, então:

$$\begin{aligned} \varphi(h^{-1}) S \varphi(h)(v) &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} (\varphi(h)\varphi(g) P \varphi(g^{-1})\varphi(h^{-1}))(v) \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} (\varphi(hg) P \varphi(g^{-1}h^{-1}))(v) \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} (\varphi(g) P \varphi(g^{-1}))(v) \\ &= S(v) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo $\varphi(h^{-1}) S \varphi(h)(v) = 0$ e assim $S(\varphi(h)(v)) = 0$, ou seja, $\varphi(h)(v) \in \operatorname{Ker} S$. Portanto $\operatorname{Ker} S$ é φ-invariante. ∎

Definição 1.1.17. Sejam V um G-módulo e $M_1, \cdots, M_n$ G- submódulos simples de V. Dizemos que os M_i's *ocorrem* em V se $V = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$.

Pode ser mostrado que a equivalência de módulos é uma relação de equivalência na classe das representações de G. Sendo assim, podemos particionar o conjunto $\{M_1, \cdots, M_n\}$ dos submódulos irredutíveis de G que ocorrem em V em classes de equivalência. Vamos indicar a classe de equivalência de M_j por $\mathcal{C}_j$. Então $\mathcal{C}_j = \{M_i | M_i \cong M_j\}$.

Definição 1.1.18. Sejam $M_1, \cdots, M_n$ G-submódulos simples que ocorrem em V. Definimos a *componente isotípica* de V que contém M_j por $I_j = \bigoplus\limits_{M_i \in \mathcal{C}_j} M_i$.

É obvio que $M_i \cong M_j$ se, e somente se, $I_i = I_j$. Ademais se $I_i \neq I_j$ então $I_i \cap I_j = \{0\}$.

Lema 1.1.19. Sejam V um G-módulo e N um G-submódulo próprio de V.

i) Se $M_1, \cdots, M_n$ ocorrem em V, então existem $j_1, \cdots, j_l \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tais que $V = N \oplus M_{j_1} \oplus \cdots \oplus M_{j_l}$.

ii) Se N_1, N_2 são submódulos de V tais que $V = N \oplus N_1 = N \oplus N_2$, então $N_1 \cong N_2$.

Demonstração:

i) Como $N \subsetneq V$ deve existir $j_1 \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $M_{j_1} \subsetneq N$, assim $M_{j_1} \cap N = \{0\}$, pois M_{j_1} é simples. Se $N \oplus M_{j_1} = V$, está provado. Caso contrário deve existir $j_2 \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $M_{j_2} \cap (N \oplus M_{j_1}) = \{0\}$. Se $V = N \oplus M_{j_1} \oplus M_{j_2}$ acabou. Se não, o processo continua. Como $V = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ o processo deve parar em algum momento e assim temos o resultado.

ii) Dado $v \in N_1 \subset V = N \oplus N_2$, existem únicos $u \in N$, $w \in N_2$ tais que $v = u + w$. Assim podemos definir $f : N_1 \longrightarrow N_2$ onde $f(v) = w$. Esta aplicação é claramente um homomorfismo de G-módulos e seu núcleo é exatamente $N \cap N_1 = \{0\}$. Ademais, se $w \in N_2$, existem $u \in N$, $v \in N_1$ tais que $w = u + v$ e assim $v = (-u) + w$, portanto $f(v) = w$. Concluímos então que f é isomorfismo de G-módulos. ■

Proposição 1.1.20. Sejam V e W G-módulos isomorfos. Se $V = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ e $W = N_1 \oplus \cdots \oplus N_m$, onde os M_i's e N_j's são submódulos simples de V e W, respectivamente, então $m = n$ e, para todo $i = 1, \cdots, n$, $M_i \cong N_i$ (reordenando os N_j's se necessário).

Demonstração: Sendo $f : V \longrightarrow W$ tal isomorfismo, temos que $f(M_i)$ é um submódulo simples de W, para $i = 1, \cdots, n$, e que $W = f(M_1) \oplus \cdots \oplus f(M_n)$.

Vamos aplicar indução sobre n. Se $n = 2$ então $W = f(M_1) \oplus f(M_2)$ e, pelo lema anterior, existe $j \in \{1, 2\}$, que sem perda de generalidade assumiremos ser $j = 2$, tal que $W = N_1 \oplus f(M_2)$. Pelo lema anterior, $N_1 \cong f(M_1) \cong M_1$ e $N_2 \oplus \cdots \oplus N_m \cong f(M_2) \cong M_2$. Como M_2 é simples, devemos ter $m = 2$ e assim, $N_2 \cong M_2$.

Vamos supor, por hipótese de indução, que a afirmação seja verdadeira para $2 \leq k \leq n - 1$. Pelo lema anterior, devem existir $j_1, \cdots, j_l \in \{1, \cdots, n\}$ tais que $W = N_1 \oplus f(M_{j_1}) \oplus \cdots \oplus f(M_{j_l})$ e assim $f(M_{j_1}) \oplus \cdots \oplus f(M_{j_l}) \cong N_2 \oplus \cdots \oplus N_m$. Como $l < n$, temos por indução que $l = m - 1$, $M_{j_1} \cong N_2, \cdots, M_{j_l} \cong N_m$. Sendo $\{j_{l+1}, \cdots, j_n\} = \{1, 2, \cdots, n\} - \{j_1, \cdots, j_l\}$, temos:

$$W = (f(M_{j_{l+1}}) \oplus \cdots \oplus f(M_{j_n})) \oplus (f(M_{j_1}) \oplus \cdots \oplus f(M_{j_l}))$$

Assim pelo lema anterior $N_1 \cong f(M_{j_{l+1}}) \oplus \cdots \oplus f(M_{j_n})$. Mas como N_1 é simples, devemos ter $n = l + 1 = m$ e $N_1 \cong f(M_{j_m}) \cong M_{j_m}$. ■

Teorema 1.1.21. Seja V um G-módulo de dimensão finita e M um submódulo simples de V então:

i) M esta contido em alguma componente isotípica I de V.

ii) Se N é um submódulo simples de V tal que $N \cong M$, como G-módulos, então $N \subseteq I$, onde I é a componente isotípica de V que contém M.

Demonstração: Consideremos $M = M_1$.

i) Pelo teorema de Maschke, $V = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$, onde os M_i's são submódulos simples de V. Basta então tomar a componente isotípica de V gerada por M_1 com relação a esta decomposição.

ii) Suponhamos, sem perda de generalidade, que $M_1, \cdots, M_k$ são todos submódulos inequivalentes entre si tais que $V = I_1 \oplus \cdots \oplus I_k$. Suponhamos por absurdo que $N \nsubseteq I_1$, então $N \cap I_1 = \{0\}$ pois N é simples. Assim $I_1 \oplus N$ é submódulo de V e pelo Teorema de Maschke existe U submódulo de V tal que $V = I_1 \oplus N \oplus U$. Pelo item ii) do lema anterior, $N \oplus U \cong I_2 \oplus \cdots \oplus I_k$, e pela proposição acima deve existir um M_j, com $j \in \{2, \cdots, k\}$, tal que $N \cong M_j$, portanto $M_1 \cong N \cong M_j$. Absurdo! ■

Observação 1.1.22. Isso não significa que N seja igual a um dos submódulos simples que formam I_1.

Uma consequência direta deste teorema é que, embora um G-módulo possa ter inúmeras decomposições em submódulos irredutíveis, quando considerarmos sua decomposição em componentes isotípicas, esta será única.

1.2 Representações de Álgebras

Vamos recordar a definição de álgebra sobre um corpo F.

Definição 1.2.1. Seja A um espaço vetorial sobre F. Diremos que A é uma *álgebra* sobre F se existe uma operação binária interna $* : A \times A \longrightarrow A$ bilinear, isto é:

i) $a * (b + c) = a * b + a * c$;

ii) $(b + c) * a = b * a + c * a$;

iii) $\alpha(a * b) = (\alpha a) * b = a * (\alpha b)$;

para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\alpha \in F$.

Definição 1.2.2. Uma álgebra A é:

- *unitária* se existe um elemento $e \in A$ tal que $e * a = a * e = a$ para todo $a \in A$. Denotaremos $e = 1$.

- *associativa* se $a * (b * c) = (a * b) * c$ para quaisquer $a, b, c \in A$.

- *comutativa* se $a * b = b * a$ para quaisquer $a, b \in A$.

Exemplo 1.2.3. Seja A o espaço vetorial $F^n = F \times F \times \cdots \times F$ munido das seguintes operações:

$$(a_1, \cdots, a_n) + (b_1, \cdots, b_n) = (a_1 + b_1, \cdots, a_n + b_n)$$

$$\alpha(a_1, \cdots, a_n) = (\alpha a_1, \cdots, \alpha a_n)$$

$$(a_1, \cdots, a_n) * (b_1, \cdots, b_n) = (a_1 b_1, \cdots, a_n b_n)$$

Por um cálculo direto pode-se facilmente ver que A é uma álgebra associativa, comutativa e unitária sobre F.

Exemplo 1.2.4. Sendo $M_n(F)$ o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas em F e considerando sobre ele as operações usuais de soma, multiplicação e multiplicação por escalar de matrizes, temos que $M_n(F)$ é uma álgebra associativa e unitária porém não comutativa.

Exemplo 1.2.5. Seja V um espaço vetorial sobre F e $\mathrm{End}_F(V)$ o espaço vetorial dos operadores lineares de V. Com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar de operadores, $\mathrm{End}_F(V)$ é um espaço vetorial sobre F. Ademais, com a composição de operadores, $\mathrm{End}_F(V)$ é uma álgebra associativa unitária. De fato, podemos verificar de imediato que a composição de operadores é bilinear, associativa com unidade:

i) Para todo $v \in V$ e f, g, $h \in \mathrm{End}_F(V)$ temos:

$$\begin{aligned} (f \circ (g + h))(v) &= f(g(v) + h(v)) \\ &= (f \circ g)(v) + (f \circ h)(v) \\ &= ((f \circ g) + (f \circ h))(v) \end{aligned}$$

logo $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$.

ii) Para todo $v \in V$ e f, g, $h \in \mathrm{End}_F(V)$ temos:

$$\begin{aligned} ((f + g) \circ h)(v) &= (f + g)(h(v)) \\ &= f \circ h(v) + g \circ h(v) \\ &= (f \circ h + g \circ h)(v) \end{aligned}$$

logo $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$.

iii) Para todo $v \in V$, f, $g \in \mathrm{End}_F(V)$ e $\lambda \in F$ temos:

$$\begin{aligned}(\lambda(f \circ g))(v) &= \lambda f(g(v)) \\ &= ((\lambda f) \circ g)(v) \\ &= (f \circ (\lambda g))(v)\end{aligned}$$

logo $\lambda(f \circ g) = (\lambda f) \circ g = f \circ (\lambda g)$.

iv) Para todo $v \in V$ e f, g, $h \in \mathrm{End}_F(V)$ temos:

$$\begin{aligned}((f \circ g) \circ h)(v) &= (f \circ g)(h(v)) \\ &= f(h(g(v))) \\ &= f \circ (g \circ h)(v)\end{aligned}$$

logo $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

v) Sendo Id_V o operador identidade de V, então para todo $v \in V$ e $f \in \mathrm{End}_F(V)$ temos:

$$\begin{aligned}((f \circ Id_V)(v) &= f(Id_V(v)) \\ &= f(v) \\ &= Id_V \circ f(v)\end{aligned}$$

logo $Id_V \circ f = f \circ Id_V$.

Em geral, $\mathrm{End}_F(V)$ é uma álgebra não comutativa, se $\dim V > 1$. Por exemplo, se $B = \{v_1, v_2\}$ é uma base para V, podemos considerar os operadores f, $g \in \mathrm{End}_F(V)$ definidos por $f(v_1) = 0$, $f(v_2) = v_1$ e $g(v_1) = v_2$, $g(v_2) = 0$. Temos $(f \circ g)(v_1) = v_1$ e $(g \circ f)(v_1) = 0$, logo $g \circ f \neq f \circ g$.

Definição 1.2.6. Sejam A e B duas álgebras. Um *homomorfismo* de álgebras é uma transformação linear $\varphi : A \longrightarrow B$ tal que para todo $a_1, a_2 \in A$ vale $\varphi(a_1a_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2)$.

- Se φ é injetora dizemos que φ é *monomorfismo*;
- Se φ é sobrejetiva dizemos que φ é *endomorfismo*;

- Se φ é bijetora dizemos que φ é *isomorfismo*;

Definição 1.2.7. Seja A uma álgebra e $I \subseteq A$ um subespaço vetorial.

- Se $ab \in I$ para todo $a \in A$ e $b \in I$ dizemos que I é *ideal à esquerda de* A.
- Analogamente, se $ba \in I$ para todo $a \in A$ e $b \in I$ dizemos que I é *ideal à direita de* A.
- Se I é ideal à direita e à esquerda de A então dizemos que I é *ideal (bilateral) de* A.
- Se para todo b_1, $b_2 \in I$ tivermos $b_1 b_2 \in I$ então dizemos que I é *subálgebra de* A.

Exemplo 1.2.8. Seja A uma álgebra. É fácil ver que $\{0\}$ e A são ideais bilaterais de A. Agora, sendo $x \in A$ e $I = \{ax | a \in A\}$, temos:

- $0 = 0x \in I$;
- $y + z = a_1 x + a_2 x = (a_1 + a_2)x \in I$, $\forall y, z \in I$;
- $\lambda y = \lambda a x = (\lambda a)x \in I$, $\forall \lambda \in F$, $y \in I$;
- $by = b(ax) = (ba)x \in I$, $\forall b \in A$, $y \in I$

Assim, I é ideal e esquerda de A.

Exemplo 1.2.9. Sejam A uma álgebra e I um ideal à esquerda de A. Como visto no exemplo 1.2.5, $\mathrm{End}_F(I)$ é uma álgebra associativa e unitária. Agora definamos $\mathrm{End}_A(I) := \{f \in \mathrm{End}_F(I) | f(ax) = af(x), \forall a \in A, x \in I\}$.

i) Para todo $a \in A$ e $x \in I$ temos;

$$0(ax) = 0 = a0(x)$$

logo $0 \in \mathrm{End}_A(I)$.

ii) Para todo $a \in A$, $x \in I$, $f, g \in \mathrm{End}_A(I)$ temos;

$$(f + g)(ax) = f(ax) + g(ax) = af(x) + ag(x) = a(f + g)(x)$$

logo $f + g \in \mathrm{End}_A(I)$.

iii) Para todo $\lambda \in F$, $f \in \text{End}_A(I)$, $a \in A$ e $x \in I$ temos;

$$(\lambda f)(ax) = \lambda f(ax) = \lambda a f(x) = a(\lambda f(x)) = a(\lambda f)(x)$$

logo $\lambda f \in \text{End}_A(I)$.

Assim $\text{End}_A(I)$ é subespaço de $\text{End}_F(I)$. Ademais, para todo $f, g \in \text{End}_A(I)$, $a \in A, x \in I$ temos:

$$(f \circ g)(ax) = f(g(ax)) = f(ag(x)) = af(g(x)) = a(f \circ g)(x).$$

Ou seja, $f \circ g \in \text{End}_A(I)$. Portanto, $\text{End}_A(I)$ é subálgebra de $\text{End}_F(I)$.

Definição 1.2.10. Sejam A uma álgebra associativa unitária e V um espaço vetorial. Uma *representação* de A em V é um homomorfismo de álgebras $\varphi : A \longrightarrow \text{End}_F(V)$, onde $\varphi(1) = Id_V$.

Definição 1.2.11. Seja A uma álgebra associativa unitária. Um espaço vetorial V é dito um A-*módulo* se existe uma ação

$$\begin{aligned} \cdot : A \times V &\longrightarrow V \\ (a, v) &\longmapsto a \cdot v \end{aligned}$$

com as propriedades:

i) $(a_1 + a_2) \cdot v = (a_1 \cdot v) + (a_2 \cdot v)$;

ii) $a \cdot (v_1 + v_2) = (a \cdot v_1) + (a \cdot v_2)$;

iii) $(\lambda a) \cdot v = a \cdot (\lambda v) = \lambda(a \cdot v)$;

iv) $a_1 \cdot (a_2 v) = (a_1 a_2) \cdot v$;

v) $1_A \cdot v = v$;

para quaisquer $a, a_1, a_2 \in A, v, v_1, v_2 \in V, \lambda \in F$.

Observemos que os ítens (i), (ii) e (iii) da definição acima significam que a ação "$\cdot$" é uma aplicação bilinear.

Observação 1.2.12. Seja $\varphi : A \longrightarrow \mathrm{End}_F(V)$ uma representação de uma álgebra A. Definindo a ação

$$\begin{aligned} \cdot : A \times V &\longrightarrow V \\ (a, v) &\longmapsto a \cdot v := \varphi(a)v \end{aligned}$$

pode-se verificar que V munido deste produto é um A-módulo.

Por outro lado, se V é um A-módulo podemos definir

$$\begin{aligned} \varphi : A &\longrightarrow \mathrm{End}_F(V) \\ a &\longmapsto \varphi_a \end{aligned}$$

onde $\varphi_a(v) = a \cdot v$. Fica a cargo do leitor verificar que φ é um homomorfismo de álgebras, e que portanto é representação de A em V.

Desta forma, existe uma correspondência biunívoca entre as representações de A e seus A-módulos.

Exemplo 1.2.13. Seja A uma álgebra, então A é naturalmente um módulo sobre si mesma, cuja ação é a multiplicação à esquerda. Vamos denotar este módulo por A_A.

Exemplo 1.2.14. Sendo V um espaço vetorial sobre F e definindo a ação

$$\begin{aligned} \cdot : \mathrm{End}_F(V) \times V &\longrightarrow V \\ (T, v) &\longmapsto T \cdot v := T(v) \end{aligned}$$

temos por um cálculo direto que V é um $\mathrm{End}_F(V)$-módulo.

Exemplo 1.2.15. Sejam A uma álgebra e I um ideal à esquerda, assim A/I é espaço vetorial sobre F. Definamos a ação

$$\begin{aligned} \cdot : A \times A/I &\longrightarrow A/I \\ (a, \overline{b}) &\longmapsto a \cdot \overline{b} := \overline{ab}\,. \end{aligned}$$

Observemos que para todo $b, b', a \in A$ temos:

$$\overline{b} = \overline{b'} \Longrightarrow b - b' \in I \Longrightarrow a(b - b') \in I \Longrightarrow ab - ab' \in I \Longrightarrow \overline{ab - ab'} = \overline{0}$$

$$\Longrightarrow \overline{ab} = \overline{ab'} \Longrightarrow a \cdot \overline{b} = a \cdot \overline{b'}.$$

Portanto "$\cdot$" está bem definida. Ademais, "$\cdot$" possui as seguintes propriedades:

i) $(a_1 + a_2) \cdot \overline{b} = \overline{(a_1 + a_2)b} = \overline{a_1 b + a_2 b} = \overline{a_1 b} + \overline{a_2 b} = a_1 \cdot \overline{b} + a_2 \cdot \overline{b}$;

ii) $a \cdot (\overline{b_1 + b_2}) = \overline{a(b_1 + b_2)} = \overline{ab_1 + ab_2} = \overline{ab_1} + \overline{ab_2} = a \cdot \overline{b_1} + a \cdot \overline{b_2}$;

iii) $(\lambda a) \cdot \overline{b} = \overline{\lambda ab} = \overline{a(\lambda b)} = a \cdot (\overline{\lambda b}) = a \cdot (\lambda \overline{b}) = \overline{a(\lambda b)} = \overline{\lambda(ab)} = \lambda \overline{ab} = \lambda(a \cdot \overline{b})$;

iv) $(a_1 a_2) \cdot \overline{b} = \overline{a_1 a_2 b} = a_1 \cdot \overline{a_2 b} = a_1 \cdot (a_2 \cdot \overline{b})$;

v) $1_A \cdot \overline{b} = \overline{1_A b} = \overline{b}$;

Para quaisquer $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 \in A, \lambda \in F$. Logo, com a ação acima definida, A/I é um A-módulo.

Definição 1.2.16. Seja $\varphi : A \longrightarrow \mathrm{End}_F(V)$ uma representação ou equivalentemente seja V um A-módulo.

i) Um subespaço $W \subseteq V$ é *φ-invariante* se $\varphi(a)(W) \subseteq W$, para todo $a \in A$. Equivalentemente, $W \subseteq V$ é um *submódulo* de V se $a \cdot w \in W$ para todo $a \in A, w \in W$.

ii) Dizemos que φ é *irredutível* se os únicos subespaços invariantes são $\{0\}$ e V. Equivalentemente, V é *irredutível* se os únicos submódulos são $\{0\}$ e V. Neste caso, também dizemos que V é um A-módulo *simples*.

Exemplo 1.2.17. Seja A uma álgebra, e consideremos o A-módulo A_A. Se I é um ideal à esquerda de A, então para todo $a \in A$, $b \in I$ temos que $a \cdot b = ab \in I$, e portanto I é um submódulo de A_A, ou seja, os submódulos de A_A coincidem com os ideais à esquerda de A. Ademais, se I é ideal minimal à esquerda, então para todo J ideal à esquerda de A tal que $J \subseteq I$ temos $J = \{0\}$ ou $J = I$. Seja então H um submódulo de A_A tal que $H \subseteq I$. Como H é A-submódulo, em particular, ideal à esquerda de A, então pela minimalidade de I temos $H = \{0\}$ ou $H = I$. Portanto, I é A_A-submódulo simples. Desta forma concluímos que I é ideal minimal à esquerda de A se, e somente se, I é A_A-módulo simples.

Exemplo 1.2.18. Sejam V um A-módulo e $v \in V$. Definamos $Av = \{a \cdot v|\, a \in A\}$. Um cálculo direto nos mostra que Av é um submódulo de V.

Definição 1.2.19. Sejam $\varphi : A \longrightarrow \mathrm{End}_F(V)$, $\psi : A \longrightarrow \mathrm{End}_F(W)$ duas representações de A. Dizemos que uma transformação linear $f : V \longrightarrow W$ é *homomorfismo de representações* (ou de A-módulos), se para todo $a \in A$ e $v \in V$ vale $f(\varphi(a)(v)) = \psi(a)(f(v))$ (em linguagem de A-módulos, $f(a \cdot v) = a \cdot f(v)$). Neste caso também dizemos que f é A-*equivariante*. Além disso, se f for bijetora então diremos que f é *isomorfismo* (ou *equivalência*) de representações (de A-módulos), e neste caso, $\varphi \cong \psi$ como representações (V e W são *isomorfos*, ou *equivalentes*, como A-módulos).

Exemplo 1.2.20. Sejam A uma álgebra e V um A-módulo. Fixando $v \in V$ e definindo

$$\begin{aligned} T: \quad A_A &\longrightarrow V \\ a &\longmapsto T(a) := a \cdot v \end{aligned}$$

temos que T é um homomorfismo de A-módulos.

Exemplo 1.2.21. Sejam A uma álgebra e I um ideal à esquerda. Consideremos

$$\begin{aligned} \pi : A &\longrightarrow A/I \\ a &\longmapsto \overline{a} \end{aligned}$$

a projeção canônica de A sobre A/I. Sabemos que π é transformação linear. Agora, olhando para os A-módulos A_A e A/I vemos que

$$\pi(a \cdot b) = \overline{a \cdot b} = \overline{ab} = a \cdot \overline{b} = a \cdot \pi(b)$$

para todo $a, b \in A$. Logo, π é homomorfismo de A-módulos.

Exemplo 1.2.22. Sejam V, W A-módulos e $T : V \longrightarrow W$ um homomorfismo de A-módulos.

i) $\operatorname{Ker} T$ é submódulo de V.

De fato, sabemos que $\operatorname{Ker} T$ é subespaço de V. Ademais, para todo $a \in A$, $v \in \operatorname{Ker} T$ temos $T(a \cdot v) = a \cdot T(v) = a \cdot 0 = 0$, logo $a \cdot v \in \operatorname{Ker} T$. Assim, $\operatorname{Ker} T$ é submódulo de V

ii) $\operatorname{Im} T$ é submódulo de W.

Já temos $\operatorname{Im} T$ subespaço de W. Para todo $a \in A, w \in \operatorname{Im} T$ existe $v \in V$ tal que $w = T(v)$ e assim $a \cdot w = a \cdot T(v) = T(a \cdot v) \in \operatorname{Im} T$. Logo, $\operatorname{Im} T$ é submódulo de W.

Por comodidade aboliremos a partir de agora o uso do "$\cdot$" na indicação da ação de um A-módulo.

Teorema 1.2.23. Sejam $f : V \longrightarrow W$ um homomorfismo de A-módulos e U um submódulo de $\operatorname{Ker} f$. Então existe um único homomorfismo de A-módulos $\overline{f} : V/U \longrightarrow W$ tal que $\overline{f}(\overline{v}) = f(v)$ para todo $v \in V$; $Im\,\overline{f} = Im\,f$ e $\operatorname{Ker} \overline{f} = \operatorname{Ker} f/U$. Ademais, $\overline{f}$ é um isomorfismo de A-módulos se, e somente se, f é sobrejetora e $U = Ker\,f$.

Este teorema é conhecido como *Primeiro Teorema do Isomorfismo para A-módulos.* Sua demonstração pode ser obtida adaptando a demonstração do teorema 1.7 do capítulo IV de [9].

Proposição 1.2.24. Se V é um A-módulo irredutível, então existe I ideal maximal à esquerda de A tal que $V \cong A/I$ como A-módulos.

Demonstração: Como V é irredutível então $V \neq \{0\}$. Seja $v \in V$ não nulo, e definamos $Av = \{av|\, a \in A\}$. Sabemos que Av é A-submódulo de V, além disso $v = 1_A v \in Av$ logo $Av \neq \{0\}$ e portanto $Av = V$. Definindo

$$\begin{aligned} \psi : A_A &\longrightarrow V \\ a &\longmapsto av \end{aligned}$$

vemos que ψ é transformação linear. Como $\psi(ab) = (ab)v = a(bv) = a\psi(b)$ para todo a, $b \in A$, então ψ é homomorfismo de A-módulos. Seja $I = \operatorname{Ker} \psi$, logo I é submódulo de A_A, ou seja, I é ideal à esquerda de A. Ademais, se $w \in V = Av$, então existe $a \in A$ tal que $av = w$, logo $\psi(a) = w$, e portanto ψ é sobrejetora. Pelo *Primeiro Teorema do Isomorfismo* para A-módulos, existe $\overline{\psi} : A/I \longrightarrow V$ isomorfismo de A-módulos que satisfaz a $\overline{\psi}(\overline{a}) = \psi(a)$, para todo $a \in A$.

Por fim, se J é um ideal à esquerda tal que $I \subsetneq J$ então $\psi(J) \neq \{0\}$. Seja $w \in \psi(J)$, existe $a \in J$ tal que $w = av$. Como J é ideal à esquerda, então para todo $b \in A$ temos $ba \in J$ e assim $bw = b(av) = (ba)v = \psi(ba) \in \psi(J)$, logo $\psi(J)$ é A-submódulo de V, que por sua vez é irredutível, logo $\psi(J) = V$. Portanto, $\overline{\psi}(J/I) = \psi(J) = V$, logo $J/I = A/I$ e assim $A = J$. Isso mostra que I é ideal maximal à esquerda de A. ■

Proposição 1.2.25. Se I é um ideal maximal à esquerda de A então A/I é um A-módulo irredutível.

Demonstração: Sejam W um submódulo de A/I, $\pi : A \longrightarrow A/I$ a projeção natural de A em A/I e $J = \pi^{-1}(W)$. É fácil ver que J é subespaço de A. Ademais, para todo $a \in A$, $b \in J$ temos $\overline{ab} = a \cdot \overline{b} \in W$ logo $ab \in J$ e assim J é ideal à esquerda de A. Mas $\overline{0} \in W$ logo $I \subseteq J$, e pela maximalidade de I temos $J = I$ ou $J = A$, e portanto $W = \{\overline{0}\}$ ou $W = A/I$. ■

Lema 1.2.26. (Lema de Schur para A-módulos) Seja V um A-módulo simples. Então, $\mathrm{End}_A(V)$ é uma álgebra com divisão, isto é, para todo $a \in D$, $a \neq 0$, existe $a^{-1} \in D$ tal que $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$.

Demonstração: Seja $f \in \mathrm{End}_A(V) \setminus \{0\}$. Temos que $\mathrm{Ker}\, f \subsetneq V$ é submódulo de V, logo $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$ e $\mathrm{Im}\, f \neq \{0\}$. Mas $\mathrm{Im}\, f$ é submódulo de V logo $\mathrm{Im}\, f = V$ e portanto existe $f^{-1} \in \mathrm{End}_F(V)$.

Sejam $v, w \in V$ tais que $f(v) = w$. Se $a \in A$, então

$$f(av) = af(v) = aw \Longrightarrow f^{-1}(aw) = av = af^{-1}(w).$$

Como a, v, w são arbitrários, então $f^{-1} \in \mathrm{End}_A(V)$. Portanto, $\mathrm{End}_A(V)$ é álgebra com divisão. ■

Definição 1.2.27. Uma álgebra A é dita *simples* se os únicos ideais bilaterais de A são os triviais.

Exemplo 1.2.28. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre F, assim $\mathrm{End}_F(V) \cong M_n(F)$ como álgebras. Seja então W um ideal bilateral de $M_n(F)$, $W \neq \{0\}$. Consideremos a base canônica de $M_n(F)$ dada por $\{E_{11}, \cdots, E_{nn}\}$, onde $E_{ij} \in$

$M_n(F)$ é tal que o elemento da posição (i, j) é igual a 1 e os demais elementos são iguais a 0. Notemos que $E_{ij}E_{pq}E_{rs} \neq 0$ se, e somente se, $p = j, q = r$, e neste caso, $E_{ij}E_{pq}E_{rs} = E_{is}$. Seja $w = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}E_{ij} \in W$ não nulo, assim existe (k, l) tal que $\alpha_{kl} \neq 0$. Logo, para todo $r = 1, \cdots, n$, $s = 1, \cdots, n$ temos:

$$E_{rk}wE_{ls} \in W \Longrightarrow E_{rk}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}E_{ij}\right)E_{ls} \in W \Longrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}E_{rk}E_{ij}E_{ls} \in W$$
$$\Longrightarrow \alpha_{kl}E_{rs} \in W \Longrightarrow E_{rs} \in W.$$

Logo $M_n(F) \subseteq W$, e assim $W = M_n(F)$. Desta forma $M_n(F)$ é uma álgebra simples, e portanto $\mathrm{End}_F(M)$ também é álgebra simples.

Lema 1.2.29. Sejam A uma álgebra, M um A-módulo e $f \in \mathrm{End}_F(M)$ tal que $f \circ T = T \circ f$ para todo $T \in \mathrm{End}_A(M)$. Se $f^{(n)} : M^n \longrightarrow M^n$ é definida por $f^{(n)}(m_1, \cdots, m_n) = (f(m_1), \cdots, f(m_n))$, então $f^{(n)} \circ \varphi = \varphi \circ f^{(n)}$ para todo $\varphi \in \mathrm{End}_A(M^n)$.

Demonstração: Seja $\varphi \in \mathrm{End}_A(M^n)$ e consideremos para $i = 1, \cdots, n$, $\varphi_i : M^n \longrightarrow M$, onde $\varphi(m) = (\varphi_1(m), \cdots, \varphi_n(m))$. Notemos que:

$$\begin{array}{rc} & \varphi(am) = a\varphi(m) \\ \Longrightarrow & \varphi(am) = a(\varphi_1(m), \cdots, \varphi_n(m)) \\ \Longrightarrow & (\varphi_1(am), \cdots, \varphi_n(am)) = (a\varphi_1(m), \cdots, a\varphi_n(m)) \\ \Longrightarrow & \varphi_i(am) = a\varphi_i(m), \quad \forall\, i = 1, \cdots, n. \end{array}$$

Consideremos também para $j = 1, \cdots, n$,

$$\begin{array}{rccc} \iota_j : & M & \longrightarrow & M^n \\ & x & \longmapsto & (0, \cdots, 0, x, 0, \cdots, 0). \end{array}$$

Notemos ainda que $\varphi_i \circ \iota_j : M \longrightarrow M$ é endomorfismo, e para todo $a \in A$, $x \in M$ temos:

$$\begin{aligned} \varphi_i \circ \iota_j(ax) &= \varphi_i(0, \cdots, 0, ax, 0, \cdots, 0) \\ &= \varphi_i(a(0, \cdots, 0, x, 0, \cdots, 0)) \\ &= a\varphi_i(0, \cdots, 0, x, 0, \cdots, 0) \\ &= a\varphi_i \circ i_j(x). \end{aligned}$$

Logo, $\varphi_i \circ i_j \in \mathrm{End}_A(M)$. Desta forma, para todo $i = 1, \cdots, n$,

$$\begin{aligned}
f \circ \varphi_i(m) &= f \circ \varphi_i(m_1, \cdots, m_n) \\
&= f \circ \varphi_i((m_1, 0, \cdots, 0) + \cdots + (0, \cdots, 0, m_n)) \\
&= f \circ \varphi_i(m_1, 0, \cdots, 0) + \cdots + f \circ \varphi_i(0, \cdots, 0, m_n) \\
&= f \circ \varphi_i \circ \iota_1(m_1) + \cdots + f \circ \varphi_i \circ \iota_n(m_n) \\
&= \varphi_i \circ \iota_1 \circ f(m_1) + \cdots + \varphi_i \circ \iota_n \circ f(m_n) \\
&= \varphi_i(f(m_1), \cdots, f(m_n)) \\
&= \varphi_i \circ f^{(n)}(m).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
f^{(n)} \circ \varphi(m) &= (f \circ \varphi_1(m), \cdots, f \circ \varphi_n(m)) \\
&= (\varphi_1 \circ f^{(n)}(m), \cdots, \varphi_n \circ f^{(n)}(m)) \\
&= \varphi \circ f^{(n)}(m).
\end{aligned}$$

Logo, $f^{(n)} \circ \varphi = \varphi \circ f^{(n)}$. ■

Lema 1.2.30. Sejam M um A-módulo simples de dimensão finita, e $f \in \mathrm{End}_F(M)$ tal que $f \circ T = T \circ f$ para todo $T \in \mathrm{End}_A M$. Se $m_1, \cdots, m_n \in M$ são arbitrários, então existe $a \in A$ tal que $f(m_i) = am_i$, para todo $i = 1, \cdots, n$.

Demonstração: Se $m_1 = \cdots = m_n = 0$ então basta tomar $a = 1$. Se $m_1, \cdots, m_n$ não são todos nulos então, para todo $j = 1, \cdots, n$, consideremos ι_j a inclusão natural de M em M^n, assim ι_j é A-equivariante. Como M é simples, então $N_j = \iota_j(M)$ é submódulo simples de M^n, ademais $M^n = \bigoplus_{i=1}^{n} N_j$. Seja $v = (m_1, \cdots, m_n) \in M^n$ não nulo e consideremos o submódulo Av de M^n. Consideremos também I_0 o submódulo de M^n de maior dimensão tal que $Av \cap I_0 = \{0\}$. Como M tem dimensão finita, então I_0 existe.

Afirmamos que $M^n = Av \oplus I_0$. De fato, suponhamos que para algum j em $\{1, \cdots, n\}$ tenhamos $(Av \oplus I_0) \cap N_j = \{0\}$. Tomando $x \in (I_0 + N_j) \cap Av$ temos $x = y + z$, $y \in I_0, z \in N_j$, assim $z = x - y \in (Av \oplus I_0) \cap N_j$, logo $z = 0$. Portanto, $x = y$ e assim $x = 0$, logo $(I_0 + N_j) \cap Av = \{0\}$. Mas $I_0 + N_j$ é submódulo de M_n,

$I_0 \subsetneq I_0 + N_j$, o que contradiz a maximalidade de I_0. Portanto, $N_j \cap (I_0 \oplus Av) \neq \{0\}$ para todo $j = 1, \cdots, n$. Como $N_j \cap (I_0 \oplus Av)$ é submódulo de N_j e este é simples, temos que $N_j \subseteq I_0 \cap Av$ para todo $j = 1, \cdots, n$, e assim $M^n = Av \oplus I_0$.

Consideremos agora $\varphi : M^n \longrightarrow M^n$ definida por $\varphi(w) = \varphi(w_1 + w_2) = w_1$, onde $w_1 \in Av$ e $w_2 \in I_0$, ou seja, φ é a projeção de M^n sobre o submódulo Av. Assim $\operatorname{Im}\varphi = Av$ e φ é A-equivariante, portanto pertence a $\operatorname{End}_A(M^n)$. Pelo lema anterior, $\varphi \circ f^{(n)} = f^{(n)} \circ \varphi$ logo:

$$\begin{aligned}
(f(m_1), \cdots, f(m_n)) &= f^{(n)}(m_1, \cdots, m_n) \\
&= f^{(n)}(v) \\
&= f^{(n)} \circ \varphi(v) \\
&= \varphi \circ f^{(n)}(v) \\
&= \varphi(f^{(n)}(v)) \in Av.
\end{aligned}$$

Portanto, existe $a \in A$ tal que $(f(m_1), \cdots, f(m_n)) = av = (am_1, \cdots, am_n)$. ■

Lema 1.2.31. Seja A uma álgebra simples de dimensão finita possuindo um ideal minimal à esquerda I tal que $\operatorname{End}_A(I) = \{\lambda Id_I | \lambda \in F\}$. Então $A \cong M_n(F)$, onde $n = \dim I$.

Demonstração: Sabemos que $\operatorname{End}_F(I) \cong M_n(F)$ como álgebras. Agora, consideremos $\varphi : A \longrightarrow \operatorname{End}_F(I)$, onde $\varphi(a)(v) = av$. Como I é ideal à esquerda, temos $av \in I$ para todo $a \in A$, $v \in I$, logo φ está bem definida. É fácil notar que φ é homomorfismo de álgebras.

Para todo $a \in A$, $b \in \operatorname{Ker}\varphi$, $v \in I$ temos:

- $\varphi(ab)v = (ab)v = a(bv) = a0 = 0 \Longrightarrow ab \in \operatorname{Ker}\varphi$;
- $\varphi(ba)v = (ba)v = b(av) = 0 \Longrightarrow ba \in \operatorname{Ker}\varphi$;

Assim, $\operatorname{Ker}\varphi$ é ideal bilateral de A. Mas A é simples, logo $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ ou $\operatorname{Ker}\varphi = A$. Ademais, A é unitária e $\varphi(1)v = 1v = v$ para todo $v \in I$, ou seja, $\varphi(1) = Id_I \neq 0$. Desta forma, $1 \notin \operatorname{Ker}\varphi$ e portanto $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$, ou seja, φ é injetora.

Sejam $B = \{x_1, \cdots, x_n\}$ uma base de I e $f \in \text{End}_F I$. Se $T \in \text{End}_A I$ então $T = \lambda Id_I$ para algum $\lambda \in F$, logo $f \circ T = T \circ f$, e pelo lema anterior existe $a \in A$ tal que $f(x_i) = ax_i = \varphi(a)(x_i)$, $i = 1, \cdots, n$. Portanto, $f = \varphi(a)$, e assim φ é sobrejetora. Desta forma, $A \cong \text{End}_F(I) \cong M_n(F)$. ■

A condição imposta neste último resultado (A possuir um ideal minimal à esquerda I tal que $\text{End}_A(I) = \{\lambda Id_I | \lambda \in F\}$) nem sempre é satisfeita por uma álgebra A sobre um corpo F de característica zero. Porém, se considerarmos F também algebricamente fechado, mostraremos que toda álgebra simples de dimensão finita sobre F satisfaz tal condição, e portanto é isomorfa a alguma álgebra matricial.

Lema 1.2.32. Se F é algebricamente fechado e D é uma álgebra tal que para todo $a \in D$ existe $f \in F[x]$, $f \neq 0$, tal que $f(a) = 0$, unitária e com divisão sobre F, então $D \cong F$.

Demonstração: Consideremos $\varphi : F \longrightarrow D$ onde $\varphi(\alpha) = \alpha 1_D$. É fácil ver que φ é monomorfismo de álgebras. Ademais, sejam $a \in D$ e $f \in F[x]$ tal que $f(a) = 0$. Como F é algebricamente fechado temos:

$$f(x) = \alpha(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n) \Longrightarrow 0 = f(a) = \alpha(a - \lambda_1 1_D) \cdots (a - \lambda_n 1_D).$$

Como f é não nula temos $\alpha \neq 0$. Mas D é álgebra com divisão, logo $a - \lambda_i 1_D = 0$ para algum $i \in \{1, \cdots, n\}$. Assim $a = \lambda_i 1_D \in \text{Im}\,\varphi$. Como a é arbitrário em D, então φ é sobrejetora. Portanto $F \cong D$. ■

Corolário 1.2.33. Se F é algebricamente fechado e A é uma álgebra associativa, unitária, simples e de dimensão finita sobre F, então $A \cong M_n(F)$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Seja I ideal minimal à esquerda de A, assim I é também um A-módulo simples. Pelo Lema de Schur, $\text{End}_A(I)$ é álgebra com divisão. Como $\text{End}_A(I)$ tem dimensão finita, então é algébrica sobre F, assim pelo lema acima, $\text{End}_A(I) = \{\lambda Id_I | \lambda \in F\}$. Pelo lema 1.2.31, $A \cong M_n(F)$, onde $n = \dim I$. ■

1.3 A álgebra FG

Seja $G = \{g_1, \cdots, g_n\}$ um grupo finito. Denotemos por FG o espaço vetorial com base G. Os elementos de FG tem a forma $\alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_n g_n$, onde $\alpha_i \in F$, para todo $i = 1, \cdots, n$. Definindo o produto $*$ entre os elementos de G por $g_i * g_j = g_i g_j$ e estendendo por linearidade a FG,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i\right) * \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j (g_i g_j)$$

temos:

i) Para todo $a, b, c \in FG$ temos:

$$\begin{aligned}
a * (b + c) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i * \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k g_k\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i * \left(\sum_{j=1}^{n} (\beta_j + \gamma_j) g_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i (\beta_j + \gamma_j) g_i g_j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j g_i g_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_i \gamma_k g_i g_k \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i\right) * \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i\right) * \left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k g_k\right) \\
&= a * b + a * c
\end{aligned}$$

Analogamente, $(b + c) * a = b * a + c * a$.

ii) Para todo a, $b \in FG$ e $\rho \in F$ temos:

$$\begin{aligned}
\rho(a * b) &= \rho\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i\right) * \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \rho \alpha_i \beta_j g_i g_j \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \rho \alpha_i g_i\right) * \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j\right) \\
&= \left(\rho \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i\right)\right) * \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j\right) \\
&= (\rho a) * b
\end{aligned}$$

Analogamente, $\rho(a * b) = a * (\rho b)$.

iii) Como para quaisquer $g_i, g_j, g_k \in G$ vale $(g_i g_j) g_k = g_i (g_j g_k)$, então para quaisquer $a, b, c \in FG$ temos:

$$\begin{aligned}
(a * b) * c &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i * \sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j \right) * \sum_{k=1}^{n} \gamma_k g_k \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_i \beta_j) \gamma_k (g_i g_j) g_k \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_i (\beta_j \gamma_k) g_i (g_j g_k) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i * \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j * \sum_{k=1}^{n} \gamma_k g_j g_k \right) \\
&= a * (b * c)
\end{aligned}$$

iv) Seja $e \in G$ o elemento neutro de G, podemos considerar $e = 1_F e \in FG$. Para todo $a \in FG$ temos:

$$\begin{aligned}
a * e &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i * e \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i e \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i \\
&= a
\end{aligned}$$

Analogamente, $e * a = a$.

Portanto, FG é uma álgebra associativa unitária sobre F.

Agora, se G é um grupo comutativo, então para quaisquer $g_i, g_j \in G$ temos

$g_ig_j = g_jg_i$. Assim, para todo $a, b \in FG$ temos:

$$\begin{aligned} a * b &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i\right) * \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\beta_j(g_ig_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \beta_j\alpha_i(g_jg_i) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j\right) * \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i\right) \\ &= b * a \end{aligned}$$

Logo FG é comutativa.

Mas se G não é comutativo, então existem $g_i, g_j \in G$ tal que $g_ig_j \neq g_jg_i$. Mas $g_i = 1_F g_i \in FG, g_j = 1_F g_j \in FG$ e $g_i * g_j = g_ig_j \neq g_jg_i = g_j * g_i$, ou seja, FG não é comutativa. Portanto, FG é comutativa se, e somente se, G for comutativo.

A álgebra FG é chamada *Álgebra de Grupo gerada por* G.

Como visto na seção anterior, a álgebra FG é naturalmente um FG-módulo. Porém é fácil ver que a ação $\cdot : G \times FG \longrightarrow FG$ dada por $g \cdot a = ga$ define uma estrutura de G-módulo em FG. Ademais, os resultados que provaremos a seguir nos mostrarão que tais estruturas são compatíveis, isto é, olhar para FG como G-módulo é o mesmo que olhar para FG como FG-módulo.

Teorema 1.3.1. Se $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ é representação de G, então φ se estende de modo único a uma representação $\overline{\varphi} : FG \longrightarrow \mathrm{End}_F(V)$ da álgebra FG. Reciprocamente, se $\overline{\varphi} : FG \longrightarrow \mathrm{End}_F(V)$ é uma representação da álgebra FG então $\varphi = \overline{\varphi}|_G : G \longrightarrow GL(V)$ é uma representação de G.

Demonstração: Seja $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação de G. Pelo Teorema Fundamental das Transformações Lineares, existe uma única transformação linear $\overline{\varphi} : FG \longrightarrow \mathrm{End}_F(V)$, onde para todo $g \in G$ temos $\overline{\varphi}(g) = \varphi(g)$. É trivial que $\overline{\varphi}(e) = Id_V$. Vamos então mostrar que $\overline{\varphi}$ é um homomorfismo de álgebras. De fato, se $a = \sum\limits_{g\in G} \alpha_g g$, $b = \sum\limits_{h\in G} \beta_h h \in FG$ então:

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}(ab) &= \overline{\varphi}\left(\sum_{g\in G}\alpha_g g \sum_{h\in G}\beta_h h\right)\\
&= \sum_{g\in G}\sum_{h\in G}\alpha_g\beta_h\overline{\varphi}(gh)\\
&= \sum_{g\in G}\sum_{h\in G}\alpha_g\beta_h\varphi(gh)\\
&= \sum_{g\in G}\sum_{h\in G}\alpha_g\beta_h\varphi(g)\varphi(h)\\
&= \sum_{g\in G}\sum_{h\in G}\alpha_g\beta_h\overline{\varphi}(g)\overline{\varphi}(h)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{g\in G}\alpha_g\overline{\varphi}(g)\right)\left(\sum_{h\in G}\beta_h\overline{\varphi}(h)\right)\\
&= \overline{\varphi}(a)\overline{\varphi}(b)
\end{aligned}$$

Logo $\overline{\varphi}$ é homomorfismo de álgebras, e portanto representação de FG.

Agora, se $\overline{\varphi} : FG \longrightarrow \mathrm{End}_F(V)$ é uma representação de FG, então considerando $\varphi = \overline{\varphi}|_G$ temos :

- $\varphi(e) = \overline{\varphi}(1_F e) = \overline{\varphi}(1) = Id_V$;
- $\varphi(gh) = \overline{\varphi}(gh) = \overline{\varphi}(g)\overline{\varphi}(h) = \varphi(g)\varphi(h)$;
- $\varphi(g)\varphi(g^{-1}) = \overline{\varphi}(1) = Id_V \Longrightarrow \varphi(g)^{-1} = \varphi(g^{-1}) \Longrightarrow \varphi(g) \in GL(V)$;

para todo $g, h \in G$. Logo, φ é representação de G em V. ■

Teorema 1.3.2. Sejam $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ representação de G e $\overline{\varphi} : FG \longrightarrow \mathrm{End}_F(V)$ sua extensão. Um subespaço $W \subseteq V$ é φ- invariante se, e somente se, é $\overline{\varphi}$-invariante. Em particular, φ é irredutível se, e somente se, $\overline{\varphi}$ é irredutível.

Demonstração: Se W é φ-invariante então para todo $g \in G$, $w \in W$ vale $\varphi(g)w \in W$. Logo, para todo $u = \sum\limits_{g\in G}\alpha_g g \in FG$ temos, $\overline{\varphi}(u)w = \sum\limits_{g\in G}\alpha_g\varphi(g)w \in W$. Portanto, W é $\overline{\varphi}$-invariante.

Agora, se W é $\overline{\varphi}$-invariante, então para todo $u \in FG$, $w \in W$ vale $\overline{\varphi}(u)w \in W$, em particular $\varphi(g)w = \overline{\varphi}(g)w \in W$ para todo $g \in G$, logo W é φ-invariante. ■

Teorema 1.3.3. Sejam $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$, $\psi : G \longrightarrow GL(W)$ representações de G, e $\overline{\varphi} : FG \longrightarrow \mathrm{End}_F(V)$, $\overline{\psi} : FG \longrightarrow \mathrm{End}_F(W)$ as respectivas extensões. Então, $\varphi \cong \psi$ se, e somente se, $\overline{\varphi} \cong \overline{\psi}$.

Demonstração: Suponhamos que φ e ψ são equivalentes via $f : V \longrightarrow W$, então f é transformação linear bijetora e $f(\varphi(g)(v)) = \psi(g)(f(v))$ para todo $g \in G$, $v \in V$. Para $u = \sum_{g \in G} \alpha_g g \in FG$ temos:

$$\begin{aligned} f(\overline{\varphi}(u)(v)) &= f(\sum_{g \in G} \alpha_g \varphi(g)(v)) \\ &= \sum_{g \in G} \alpha_g f(\varphi(g)(v)) \\ &= \sum_{g \in G} \alpha_g \psi(g)(f(v)) \\ &= \overline{\psi}(u)(f(v)) \end{aligned}$$

Agora, se $\overline{\varphi} \cong \overline{\psi}$ via f então $f(\overline{\varphi}(u)(v)) = \overline{\psi}(u)(f(v))$ para todo $u \in FG$, $v \in V$. Em particular, para todo $g \in G$ temos:

$$f(\varphi(g)(v)) = f(\overline{\varphi}(g)(v)) = \overline{\psi}(g)(f(v)) = \psi(g)(f(v))$$

portanto, $\varphi \cong \psi$ via f. ■

Sendo G um grupo finito, então FG é um G-módulo de dimensão finita. Pelo Teorema de Maschke FG é completamente redutível, ou seja, existem $J_1, \cdots, J_n$ G-submódulos simples de FG tais que $FG = J_1 \oplus \cdots \oplus J_n$. Mas pelo teorema 1.3.2 cada J_k é também um FG-submódulo simples de FG, logo são ideais minimais à esquerda de FG. Isso demonstra o seguinte resultado.

Teorema 1.3.4. Sejam G um grupo finito. Então $FG = J_1 \oplus \cdots \oplus J_n$, onde $J_1, \cdots, J_n$ são ideais minimais à esquerda de FG.

Nosso próximo passo caracterizar a decomposição isotípica de FG. Além disso, mostraremos que as componentes isotípicas de FG são subálgebras associativas unitárias, e que são isomorfas a álgebras matriciais.

Definição 1.3.5. Seja J ideal minimal à esquerda de FG, definamos $U := J \cdot FG$. Vemos que U é ideal bilateral de FG. Em particular, U é ideal à esquerda de FG. Sendo assim se J' é ideal minimal à esquerda de FG então $J' \cap U = \{0\}$ ou $J' \cap U = J'$.

Lema 1.3.6. Seja J' ideal minimal à esquerda de FG. Se $J' \subseteq U$, então $J' \cong J$ como FG-módulos. Reciprocamente, se $J' \cong J$ então $J' \subseteq U$.

Demonstração: Seja $x \in J' \subseteq U$ não nulo, temos $x = y_0 a$, onde $y_0 \in J$, $a \in FG$, são não nulos. Desta forma $Ja \neq \{0\}$ é ideal minimal à esquerda e $x \in Ja \cap J'$, logo $Ja = J'$. Considerando $f : J \longrightarrow Ja$ onde $f(y) = ya$, temos $f(uy) = uya = u(ya)$ para todo $u \in FG$, $y \in J$, logo f é homomorfismo de FG-módulos. Ademais, $\varphi(y_0) = y_0 a = x \neq 0$, logo $f \neq 0$ e, pelo Lema de Schur, f é isomorfismo de FG-módulos.

Agora, se $J' \cong J$, então seja $f : J \longrightarrow J'$ tal isomorfismo. Pelo Teorema de Maschke, existe W ideal à esquerda de FG tal que $FG = J \oplus W$. Logo existem $x_0 \in J, w_0 \in W$ tais que $1 = x_0 + w_0$. Desta forma, para todo $x \in J$ temos:

$$x = xx_0 + xw_0 \Longrightarrow xw_0 = x - xx_0 \in J \Longrightarrow xw_0 \in J \cap W = \{0\} \Longrightarrow xw_0 = 0.$$

Assim, para todo $x \in J$ temos $f(x) = f(xx_0) = xf(x_0)$, pois f é FG-equivariante. Sendo $a = f(x_0)$ temos $f(x) = xa$, portanto $J' = \operatorname{Im} f = \{xa | \, x \in J\} \subseteq U$. ■

Corolário 1.3.7. Se J é ideal minimal à esquerda de FG então $I = U$, onde I é a componente isotípica de FG que contém J.

Demonstração: Considerando $J = J_1$ temos, pelo Teorema de Maschke, $FG = J_1 \oplus \cdots \oplus J_n$, onde os J_i's são ideais minimais a esquerda de FG. Assumindo sem perda de generalidade que $J_1, \cdots, J_k$ são todos os J_i's isomorfos a J_1, temos que $I := \sum_{i=1}^{k} J_i$. Para $i = 1, \cdots, k$, temos $J_i \cong J_1$, e pelo lema anterior, $J_i \subseteq U$, assim $I \subseteq U$. Seja $x \in U$, então $x = ya$, $y \in J_1$, $a \in FG$. Como $J_1 a$ é ideal minimal à esquerda de FG e pela demonstração do lema acima, $J_1 a \cong J_1$, temos pelo teorema 1.1.21, que $J_1 a \subseteq I$, e portanto $x \in I$. Logo $U \subseteq I$. ■

Observação 1.3.8. Pelo corolário acima as componentes isotípicas de FG são ideais bilaterais. Ademais se I_1, I_2 são componentes isotípicas distintas de FG então $I_1 \cap I_2 = \{0\}$. Assim $I_1 I_2 = I_2 I_1 = \{0\}$.

Proposição 1.3.9. Se $J_1, \cdots, J_m$ são todos os ideais minimais à esquerda dois a dois inequivalentes de FG então $FG = I_1 \oplus \cdots \oplus I_m$, onde $I_i = J_i \cdot FG$.

Demonstração: Como $J_1, \cdots, J_m$ são todos os ideais minimais à esquerda dois a dois inequivalentes, $J_1 \oplus \cdots \oplus J_m$ é ideal à esquerda de de FG. Se $FG = J_1 \oplus \cdots \oplus J_m$ então $I_i = J_i$ para todo $i = 1, \cdots, m$ e portanto segue o resultado. Se $J_1 \oplus \cdots \oplus J_m \subsetneq FG$ então, pelo Teorema de Maschke, existe W ideal à esquerda de FG tal que $FG = J_1 \oplus \cdots \oplus J_m \oplus W$. Mas W é completamente redutível, logo existem $J_{m+1}, \cdots, J_n$ ideais minimais à esquerda de FG tais que $W = J_{m+1} \oplus \cdots \oplus J_n$, assim $FG = J_1 \oplus \cdots \oplus J_m \oplus J_{m+1} \oplus \cdots \oplus J_n$. Como $J_1, \cdots, J_m$ são todos os ideais minimais à esquerda dois a dois inequivalentes de FG, então para todo $j = m+1, \cdots, n$ temos $J_j \cong J_i$, onde $i \in \{1, \cdots, m\}$ e, portanto, $J_j \subseteq I_i$. Desta forma $FG \subseteq I_1 \oplus \cdots \oplus I_m$. ■

Proposição 1.3.10. Seja I_i uma componente isotípica de FG. Então I_i é álgebra associativa unitária simples.

Demonstração: Um cálculo direto nos mostra que as I_i's são subálgebras associativas de FG. Ademais, FG é unitária, então pela proposição anterior existem $e_1 \in I_1, \cdots, e_m \in I_m$ tais que $1 = e_1 + \cdots + e_m$. Assim, para todo $x_i \in I_i$ vale:

$$x_i = x_i 1 = x_i(e_1 + \cdots + e_m) = x_i e_1 + \cdots + x_i e_m = x_i e_i.$$

Analogamente, $x_i = e_i x_i$. Ou seja, e_i é unidade em I_i para todo $i = 1, \cdots, m$.

Por fim, seja $P \neq \{0\}$ ideal bilateral de I_i. Como $I_i I_j = I_j I_i = \{0\}$, então P é ideal bilateral de FG. Se J é ideal minimal à esquerda de FG contido em P, então $J \cong J_i$ e assim, pela demonstração do lema 1.3.6, existe $a \in FG$ tal que $J_i = Ja \subseteq P$, logo $I_i \subseteq P$ e desta forma $I_i = P$. Portanto, I_i é álgebra associativa unitária simples. ■

Proposição 1.3.11. Se I_i é uma componente isotípica de FG e e_i é sua respectiva unidade, então $e_i \in Z(FG) := \{a \in FG | ax = xa, \forall x \in FG\}$.

Demonstração: Sejam $I_1, \cdots, I_m$ as componentes isotípicas de FG, então $FG = I_1 \oplus \cdots \oplus I_m$. Pela proposição anterior elas são subálgebras associativas e unitárias de FG. Como para todo $a \in FG$ existem $a_1 \in I_1, \cdots, a_m \in I_m$ tais que $a = a_1 + \cdots + a_m$ então:

$$ae_i = (a_1 + \cdots + a_m)e_i = a_i e_i = a_i = e_i a_i = e_i(a_1 + \cdots + a_m) = e_i a.$$

Logo $e_i \in Z(FG)$. ■

Como a soma dos I_i's é direta então $\{e_1, \cdots, e_m\}$ é linearmente independente. Mas $\{e_1, \cdots, e_m\} \subseteq Z(FG)$, logo $\dim Z(FG) \geq m$, ou seja, o número de ideais minimais à esquerda dois a dois inequivalentes de FG é menor ou igual a $\dim Z(FG)$.

Lema 1.3.12. Sejam G um grupo finito, $Cl_1, \cdots, Cl_k$ as classes de conjugação de G e $v_i = \sum_{g \in Cl_i} g$, para $i = 1, \cdots, k$. Então $\{v_1, \cdots, v_k\}$ é base de $Z(FG)$. Desta forma, $\dim Z(FG)$ é igual ao número de classes de conjugação de G.

Demonstração: Sejam $h \in G$ e $i \in \{1, \cdots, k\}$. Por definição de classe de conjugação, se $g \in Cl_i$ então $h^{-1}gh \in Cl_i$. Ademais, se $g_1, g_2 \in G$ são tais que $h^{-1}g_1h = h^{-1}g_2h$ então $g_1 = g_2$. Logo $\{h^{-1}gh | g \in Cl_i\} = Cl_i$. Assim:

$$h^{-1}v_ih = \sum_{g \in Cl_i} h^{-1}gh = \sum_{g \in Cl_i} g = v_i \Longrightarrow v_ih = hv_i.$$

Desta forma, para todo $a = \sum_{g \in G} \alpha_g g \in FG$ temos:

$$av_i = \sum_{g \in G} \alpha_g g v_i = \sum_{g \in G} \alpha_g v_i g = v_i a.$$

Portanto, $v_i \in Z(FG)$.

Suponhamos $u = \sum_{g \in G} \lambda_g g \in Z(FG)$. Se $g_1, g_2 \in Cl_i$ então existe $h \in G$ tal que $g_1 = hg_2h^{-1}$. Assim:

$$\sum_{g \in G} \lambda_g g = u = huh^{-1} = \sum_{g \in G} \lambda_g hgh^{-1} \Longrightarrow \lambda_{g_1} - \lambda_{g_2} = 0 \Longrightarrow \lambda_{g_1} = \lambda_{g_2}.$$

Ou seja, $u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$. Portanto, $\{v_1, \cdots, v_k\}$ gera $Z(FG)$. Mas, $G = \bigcup_{i=1}^{k} Cl_i$, e esta união é disjunta. Assim, pelo fato de G ser linearmente independente, temos $\{v_1, \cdots, v_k\}$ também linearmente independente. ■

Observação 1.3.13. Devido a este lema, o número de ideais minimais à esquerda dois a dois disjuntos de FG é menor ou igual ao número de classes de conjugação de G.

Proposição 1.3.14. Um F-espaço vetorial V é um FG-módulo irredutível se, e somente se, $V \cong J$ para algum J ideal minimal à esquerda de FG.

Demonstração: Sabemos que olhando para FG como FG-módulo, seus submódulos irredutíveis são justamente os ideais minimais à esquerda de FG, logo a recíproca já está provada.

Agora, se V é um FG-módulo irredutível então, pela proposição 1.2.24, $V \cong \frac{FG}{K}$ para algum K ideal maximal à esquerda de FG. Notemos que se J é ideal minimal à esquerda de FG então $J \cap K \subseteq J$ é ideal à esquerda de FG, assim $J \cap K = \{0\}$ ou $J \cap K = J$. Como K é maximal, então $K \subsetneq FG$, ademais FG é igual a soma de seus ideais minimais à esquerda, logo existe J ideal minimal à esquerda de FG tal que $J \cap K = \{0\}$. Sendo $K \oplus J$ ideal à esquerda de FG tal que $K \subsetneq K \oplus J$, temos pela maximalidade de K que $K \oplus J = FG$. Deste modo $V \cong \frac{FG}{K} = \frac{K \oplus J}{K} \cong J$. ∎

Concluímos então que o número de representações irredutíveis e inequivalentes de FG é igual ao número de ideais minimais à esquerda dois a dois inequivalentes de FG, que por sua vez é menor ou igual ao número de classes de conjugação de G. Provamos assim o seguinte resultado:

Teorema 1.3.15. O número de representações irredutíveis e inequivalentes de FG, onde F é um corpo de característica zero e G é um grupo finito, é menor ou igual ao número de classes de conjugação de G.

Capítulo 2

A decomposição da álgebra de grupo FS_n

Neste capítulo vamos expor alguns resultados da teoria de representações de grupo, no qual restringiremos ao grupo simétrico S_n. Como vimos no capítulo anterior FS_n é uma álgebra associativa unitária, pode naturalmente ser vista como S_n-módulo e por isso possui uma decomposição em ideais minimais à esquerda.

Nossa intenção é compreender melhor como se dá esta decomposição e explicitar os ideais de FS_n que formam esta decomposição. Encontraremos também uma decomposição de FS_n em subálgebras simples. Esta decomposição é muito importante no estudo das PI-álgebras e terá um papel central em nossa discussão sobre as A-identidades da Álgebra de Grassmann, no capítulo 4.

2.1 Partições

Definição 2.1.1. Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma partição (não ordenada) λ de n é uma sequência $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$ tal que $\lambda_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$ e $\mid \lambda \mid = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots = n$. O *comprimento* de λ é o número $l(\lambda) = \#\{i \in \mathbb{N}; \lambda_i \neq 0\}$. Se λ é partição de n, então denotaremos por $\lambda \vdash n$.

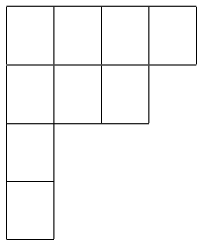
Definição 2.1.2. Se $\lambda = (n_1, n_2, \cdots, n_r) \vdash n$, definiremos o diagrama de Young D_λ

da partição λ com sendo o conjunto

$$D(\lambda) = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}/1 \leq i \leq l(\lambda); 1 \leq j \leq l_i\}.$$

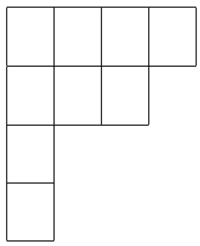
Observemos que $D(\lambda)$ é um conjunto com exatamente n elementos. Na prática, costuma-se representar $D(\lambda)$ por n quadrados (células) dispostos em r filas horizontais, chamadas de linhas, sendo a i-ésima linha composta por n_i quadrados. Da esquerda para a direita, os primeiros quadrados das linhas aparecem numa mesma coluna (fila vertical). Observe que o número de colunas é igual a $n - 1$. Sendo $(i; j)$ um elemento de $D(\lambda)$, o quadrado correspondente a ele está na i-ésima linha e na j-ésima coluna. A numeração das linhas cresce de cima para baixo e a das colunas cresce da esquerda para a direita.

Exemplo 2.1.3. Tomando $\lambda = (4, 3, 1, 1) \vdash 9$, identificaremos λ com o seguinte diagrama de Young

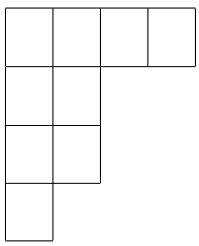
$D(\lambda) =$ 

Definição 2.1.4. Dada $\lambda \vdash n$, definimos a *partição conjugada* de λ como sendo $\lambda' \vdash n$ tal que $D(\lambda') = D(\lambda)^t = \{(j, i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}/1 \leq i \leq l(\lambda); 1 \leq j \leq l_i\}$.

Exemplo 2.1.5. Sendo $\lambda = (4, 3, 1, 1) \vdash 9$, temos:

$D(\lambda) =$ 

assim,

$D(\lambda)^t =$ 

logo $\lambda' = (4, 2, 2, 1)$.

Definição 2.1.6. Seja $\lambda \vdash n$. Um *tableau de Young* é uma função bijetora $T : D(\lambda) \to \{1, \cdots n\}$. Podemos pensar em T como o preenchimento das caixas de $D(\lambda)$ pelos números de 1 a n sem repetição.

O conjunto de todos os tableaux de λ é denotado por Tab_λ. Notemos que $\#Tab_\lambda = n!$.

Exemplo 2.1.7. Seja $\lambda = (2, 1) \vdash 3$, então:

$$Tab_\lambda = \left\{ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array} ; \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array} ; \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array} ; \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1} \end{array} ; \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array} ; \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1} \end{array} \right\}$$

Definição 2.1.8. Seja $\lambda \vdash n$, $T \in Tab_\lambda$ e $\sigma \in S_n$. Definimos o tableau $\sigma T \in Tab_\lambda$ pela composição $\sigma \circ T : D(\lambda) \to \{1, \cdots, n\}$.

Exemplo 2.1.9. Seja $\lambda = (3, 2, 1) \vdash 6$. Considerando

$$T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 3 & 5 \\ \hline 1 & 4 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

e $\sigma = (1\ 5)(2\ 3\ 4)$ temos

$$\sigma T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 2 & 1 \\ \hline 5 & 3 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Observação 2.1.10. Se $\sigma, \eta \in S_n$ são tais que $\sigma T = \eta T$ para algum $T \in Tab_\lambda$, então como T é bijeção, ou seja, existe T^{-1}, temos $\sigma T T^{-1} = \eta T T^{-1}$ e assim $\sigma = \eta$.

Definição 2.1.11. Seja $\lambda \vdash n$ e $T \in Tab_\lambda$, definimos:

- $R_i(T) = \{T(i, j) | 1 \leq j \leq \lambda_i\}$, a *i-ésima linha* de T.
- $C_j(T) = \{T(i, j) | 1 \leq i \leq \lambda'_j\}$, a *j-ésima coluna* de T.

Definição 2.1.12. Sejam $\lambda \vdash n, T \in Tab_\lambda$, definimos:

- $S_{\lambda_i}(T) = \{\sigma : R_i(T) \longrightarrow R_i(T); \sigma \text{ bijetora}\} < S_n$.
- $S_{\lambda'_j}(T) = \{\sigma : C_j(T) \longrightarrow C_j(T); \sigma \text{ bijetora}\} < S_n$.

É importante observar que se $i \neq j$ então $R_i(T)$ e $R_j(T)$ são disjuntos. Logo, se $\sigma \in S_{\lambda_i}(T), \tau \in S_{\lambda_j}$, então $\sigma\tau = \tau\sigma$. Portanto, $S_{\lambda_i}S_{\lambda_j} = S_{\lambda_j}S_{\lambda_j}$, e assim $S_{\lambda_i}S_{\lambda_j} < S_n$.

Definição 2.1.13. Seja $\lambda \vdash n$ e $T \in Tab_\lambda$, definimos:

- $R_T = S_{\lambda_1}(T) \times \cdots \times S_{\lambda_{l(\lambda)}}(T) < S_n$, chamado *grupo das linhas* de T.

- $C_T = S_{\lambda'_1}(T) \times \cdots \times S_{\lambda'_{l(\lambda')}}(T) < S_n$, chamado *grupo das colunas* de T.

Observação 2.1.14. Se $\sigma \in R_T$, então T e σT possuem exatamente as mesmas linhas, e se $\sigma \in C_T$, então T e σT possuem exatamente as mesmas colunas. Ademais, para todo $m = 1, \cdots, n$ temos $\{m\} = R_i(T) \cap C_j(T)$ para algum i, j. Tomando $\sigma \in R_T \cap C_T$ temos $\sigma(m) \in R_i(T) \cap C_j(T) = \{m\}$, logo $\sigma(m) = m$. Portanto, $\sigma = 1$.

2.2 Os semi-idempotentes e_T

Definição 2.2.1. Para um subconjunto $A \subseteq S_n$ definimos os seguintes elementos de FS_n:

$$A^+ = \sum_{\sigma \in A} \sigma; \qquad A^- = \sum_{\sigma \in A} (-1)^\sigma \sigma$$

Em particular definimos o elemento e_T, chamado *simetrizador de Young*, por:

$$e_T = R_T^+ C_T^- = \sum_{\tau \in R_T} \tau \sum_{\eta \in C_T} (-1)^\eta \eta = \sum_{\tau \in R_T} \sum_{\eta \in C_T} (-1)^\eta \tau\eta.$$

Este por sua vez tem um papel central em nosso estudo da decomposição de FS_n.

Exemplo 2.2.2. Seja $\lambda = (2, 1) \vdash 3$ e

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

então:

$$\begin{array}{cc} R_1(T) = \{1, 2\}; R_2(T) = \{3\} & C_1(T) = \{1, 3\}; C_2(T) = \{2\} \\ S_{\lambda_1} = \{1, (1\,2)\}; S_{\lambda_2} = \{1\} & S_{\lambda'_1} = \{1, (1\,3)\}; S_{\lambda'_2} = \{1\} \\ R_T = \{1, (1\,2)\} & C_T = \{1, (1\,3)\} \end{array}$$

desta forma:

$$e_T = \sum_{\tau \in R_T} \sum_{\eta \in C_T} (-1)^\eta \tau\eta = 1 + (1\,2) - (1\,3) - (1\,2)(1\,3) = 1 + (1\,2) - (1\,3) - (1\,3\,2).$$

Lema 2.2.3. Sejam $\lambda \vdash n, T \in Tab_\lambda$ e $\sigma \in S_n$. Então $R_{\sigma T} = \sigma R_T \sigma^{-1}$ e $C_{\sigma T} = \sigma C_T \sigma^{-1}$. Portanto, $e_{\sigma T} = \sigma e_T \sigma^{-1}$. Em particular, se $\tau \in C_T$ então $C_{\tau T} = C_T$.

Demonstração: Sabemos que se $(a_1 \cdots a_m) \in S_n$ então

$$(\sigma(a_1) \cdots \sigma(a_m)) = \sigma(a_1 \cdots a_m)\sigma^{-1}.$$

Um elemento típico de $R_{\sigma T}$ é da forma $(\sigma(a_{11}) \cdots \sigma(a_{1r_1})) \cdots (\sigma(a_{s1}) \cdots \sigma(a_{sr_s}))$, onde $(a_{11} \cdots a_{1r_1}) \cdots (a_{s1} \cdots a_{sr_1}) \in R_T$. Assim,

$$(\sigma(a_{11}) \cdots \sigma(a_{1r_1})) \cdots (\sigma(a_{s1}) \cdots \sigma(a_{sr_s}))$$

$$= \sigma(a_{11} \cdots a_{1r_1})\sigma^{-1} \cdots \sigma(a_{s1} \cdots (a_{s1} \cdots a_{sr_1})\sigma^{-1}$$

$$= \sigma(a_{11} \cdots a_{1r_1}) \cdots (a_{s1} \cdots a_{sr_1})\sigma^{-1}.$$

Mas $\sigma(a_{11}, \cdots, a_{1r_1}) \cdots (a_{s1}, \cdots, a_{sr_1})\sigma^{-1}$ é um elemento típico de $\sigma R_T \sigma^{-1}$. Portanto, $R_{\sigma T} = \sigma R_T \sigma^{-1}$. Analogamente $C_{\sigma T} = \sigma C_T \sigma^{-1}$. Desta forma:

$$e_{\sigma T} = \sum_{\tau \in R_{\sigma T}} \sum_{\eta \in C_{\sigma T}} (-1)^\eta \tau\eta = \sum_{\tau \in R_T} \sum_{\eta \in C_T} (-1)^{\sigma\eta\sigma^{-1}} \sigma\tau\sigma\sigma^{-1}\eta\sigma^{-1}$$

$$= \sigma \left(\sum_{\tau \in R_T} \sum_{\eta \in C_T} (-1)^\eta \tau\eta \right) \sigma^{-1} = \sigma e_T \sigma^{-1}.$$

Em particular, se $\tau \in C_T$ então $C_{\tau T} = \tau C_T \tau^{-1} = C_T$.

■

Definição 2.2.4. Seja $T \in Tab_\lambda$.

i) Dizemos que i, j são *co-linha* em T se i e j estão na mesma linha de T.

ii) Dizemos que i, j são *co-coluna* em T se i e j estão na mesma coluna de T.

Lema 2.2.5. Sejam $\lambda \vdash n, T \in Tab_\lambda$, $\tau \in R_T$ e $\eta \in C_T$. Se i e j são co-linha em T então não são co-coluna em $\tau\eta T$.

Demonstração: Temos $\tau\eta T = (\tau\eta\tau^{-1})(\tau T)$, e pelo lema 2.2.3, $\tau\eta\tau^{-1} \in C_{\tau T}$. Assim, $C_{\tau\eta T} = C_{(\tau\eta\tau^{-1})(\tau T)} = C_{\tau T}$. Como $(i\, j) \in R_T = R_{\tau T}$, temos $(i\, j) \notin C_{\tau\eta T}$. Portanto, i e j não são co-coluna em $\tau\eta T$. ■

Observação 2.2.6. Sejam $\lambda \vdash n, T \in Tab_\lambda$ e $\sigma \in S_n$ tais que T e σT satisfazem a seguinte condição:

$$\text{“Não existem } i,\ j \text{ co-linha em } T \text{ e co-coluna em } \sigma T\text{”}\quad (*)$$

Tomando $\tau \in C_{\sigma T}$, se i e j são co-linha de T então não são co-coluna em σT, e desta forma não são co-coluna de $\tau\sigma T$. Assim T e $\tau\sigma T$ satisfazem a condição $(*)$.

Lema 2.2.7. Sejam $\lambda \vdash n, T \in Tab_\lambda$. Suponhamos que não existam elementos i, j que são simultaneamente co-linha em T e co-coluna em σT. Então existem $\tau \in R_T$ e $\eta \in C_T$ tal que $\sigma = \tau\eta$.

Demonstração: Seja k o número de linhas de T. Temos, por hipótese, que os elementos da primeira linha de T estão em diferentes colunas de σT. Assim existe $\eta_1 \in C_{\sigma T}$ tal que $R_1(T) = R_1(\eta_1\sigma T)$. Agora, consideremos os elementos da segunda linha de T. Em $\eta_1\sigma T$ eles aparecem abaixo da primeira linha. Mas pela observação 2.2.6, T e $\eta_1\sigma T$ não tem elementos i, j que estão simultaneamente na mesma linha de T e coluna de $\eta_1\sigma T$. Assim existe $\eta_2 \in C_{\eta_1\sigma T} = C_{\sigma T}$ tal que $R_1(\eta_2\eta_1\sigma T) = R_1(T)$ e $R_2(\eta_2\eta_1\sigma T) = R_2(T)$.

Repetindo este argumento, ao final de k passos obteremos $\eta_1, \cdots, \eta_k \in C_{\sigma T}$ tal que $R_l(\eta_k \cdots \eta_1\sigma T) = R_l(T)$, para todo $l = 1, \cdots, n$. Desta forma existe $\tau \in R_T$ tal que $\eta_k \cdots \eta_1\sigma T = \tau T$, logo $\eta_k \cdots \eta_1\sigma = \tau$. Como $\eta_k \cdots \eta_1 \in C_{\sigma T} = \sigma C_T\sigma^{-1}$, existe $\eta \in C_T$ tal que $\eta_k \cdots \eta_1 = \sigma\eta^{-1}\sigma^{-1}$, logo $\sigma\eta^{-1}\sigma^{-1}\sigma = \tau$, e portanto $\sigma = \tau\eta$. ■

Lema 2.2.8. Suponhamos que $\sigma \notin R_TC_T$. Então, existem transposições $\tau \in R_T$ e $\eta \in C_T$ tais que $\tau\sigma\eta = \sigma$.

Demonstração: Como $\sigma \notin R_TC_T$ então existem i, j que são co-linha em T e co-coluna em σT. Tomando $\tau = (i\,j)$, assim $\tau \in R_T$. Ademais, $\tau \in C_{\sigma T} = \sigma C_T\sigma^{-1}$, logo existe $\eta \in C_T$ tal que $\tau = \sigma\eta\sigma^{-1}$. Observemos que η é uma transposição, pois a conjugação de elementos de S_n não altera sua decomposição em ciclos. Como $\eta = \sigma^{-1}\tau\sigma$ então $\tau\sigma\eta = \tau\sigma\sigma^{-1}\tau\sigma = \sigma$. ■

Lema 2.2.9. (Von-Neumann) Seja $a \in FS_n$ tal que $\tau a\eta = (-1)^\eta a$ para todo $\tau \in R_T, \eta \in C_T$. Então existe $\beta \in F$ tal que $a = \beta e_T$.

Demonstração: Escrevendo $a = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma$, $\alpha_\sigma \in F$, temos para todo $\tau \in R_T$, $\eta \in C_T$:

$$(-1)^\eta a = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \tau\sigma\eta = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_{\tau^{-1}\sigma\eta^{-1}} \sigma.$$

Por outro lado,

$$(-1)^\eta a = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\eta \alpha_\sigma \sigma \quad \Longrightarrow \quad \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\eta \alpha_\sigma \sigma = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_{\tau^{-1}\sigma\eta^{-1}} \sigma.$$

Assim, para todo $\tau \in R_T, \eta \in C_T$,

$$\alpha_{\tau\sigma\eta} = (-1)^{\eta^{-1}} \alpha_\sigma = (-1)^\eta \alpha_\sigma.$$

Tomando $\sigma = 1$, temos para todo $\tau \in R_T, \eta \in C_T$,

$$\alpha_{\tau\eta} = (-1)^\eta \alpha_1. \qquad (*)$$

Agora, se $\sigma \notin R_T C_T$ então pelo lema anterior existem transposições $\tau \in R_T, \eta \in C_T$ tais que $\sigma = \tau\sigma\eta$. Logo,

$$\alpha_\sigma = \alpha_{\tau\sigma\eta} = (-1)^\eta \alpha_\sigma = -\alpha_\sigma \quad \Longrightarrow \quad \alpha_\sigma = 0.$$

Assim,

$$a = \sum_{\sigma \in R_T C_T} \alpha_\sigma \sigma = \sum_{\tau \in R_T} \sum_{\eta \in C_T} \alpha_{\tau\eta} \tau\eta \overset{(*)}{=} \sum_{\tau \in R_T} \sum_{\eta \in C_T} (-1)^\eta \alpha_1 \tau\eta = \alpha_1 e_T.$$

Portanto, basta tomar $\beta = \alpha_1$. ■

Corolário 2.2.10. Para todo $a \in FS_n$ existe $\beta \in F$ tal que $e_T a e_T = \beta e_T$.

Demonstração: Para todo $a \in FS_n$, $\tau_1 \in R_T, \eta_1 \in C_T$ temos:

$$\begin{aligned}
\tau_1(e_T a e_T)\eta_1 &= \tau_1 \left(\sum_{\tau \in R_T} \sum_{\eta \in C_T} (-1)^\eta \tau\eta \right) a \left(\sum_{\tau \in R_T} \sum_{\eta \in C_T} (-1)^\eta \tau\eta \right) \eta_1 \\
&= \left(\sum_{\tau \in R_T} \sum_{\eta \in C_T} (-1)^\eta \tau_1\tau\eta \right) a \left(\sum_{\tau \in R_T} \sum_{\eta \in C_T} (-1)^\eta \tau\eta\eta_1 \right) \\
&= (e_T) a ((-1)^{\eta_1} e_T) \\
&= (-1)^{\eta_1} e_T a e_T
\end{aligned}$$

Logo, pelo lema acima, existe $\beta \in F$ tal que $e_T a e_T = \beta e_T$. ■

Lema 2.2.11. Seja $a \in FS_n$. Assumindo que $a = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma$ com $\alpha_1 \neq 0$, então $a^2 \neq 0$.

Demonstração: Definindo a transformação linear:

$$\begin{aligned} r_a : FS_n &\longrightarrow FS_n \\ x &\longmapsto xa \end{aligned}$$

Temos $r_a = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma r_\sigma$, e portanto $\mathrm{tr}(r_a) = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \mathrm{tr}(r_\sigma)$. Observemos então que:

- Se $\sigma = 1$ então para todo $\zeta \in S_n, r_1(\zeta) = \zeta$, logo os elementos da diagonal principal da matriz de r_1 são todos iguais a 1, assim $\mathrm{tr}(r_1) = n!$.

- Se $\sigma \neq 1$ então para todo $\zeta \in S_n, r_\sigma(\zeta) \neq \zeta$, logo os elementos da diagonal principal da matriz de r_σ são todos iguais a 0, assim $\mathrm{tr}(r_\sigma) = 0$.

Desta forma, $\mathrm{tr}(r_a) = \alpha_1 n! \neq 0$.

Por outro lado, $tr(r_a)$ é igual a soma dos autovalores de r_a multiplicados por suas respectivas multiplicidades. Portanto, r_a possui um autovalor $\gamma \in \overline{F}$ (fecho algébrico de F) não nulo associado a um autovetor $x \in FS_n$. Assim,

$$xa^2 = (r_a)^2(x) = r_a(r_a(x)) = r_a(\gamma x) = \gamma^2 x \neq 0.$$

Logo, $a^2 \neq 0$. ■

Teorema 2.2.12. O elemento e_T é um semi-idempotente, isto é, existe um elemento $\beta \in F$ não nulo tal que $e_T^2 = \beta e_T$.

Demonstração: Pelo corolário 2.2.10, existe $\beta \in F$ tal que $e_T^2 = \beta e_T$. Ademais, escrevendo $e_T = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma$, vemos que $\alpha_1 = 1$ e pelo lema anterior, $e_T^2 \neq 0$, portanto $\beta \neq 0$. ■

2.3 Os módulos M_T's

Definição 2.3.1. Sejam $\lambda \vdash n$ e $T \in Tab_\lambda$. Definimos o submódulo

$$M_T = FS_n e_T = \{a e_T | a \in FS_n\}.$$

Proposição 2.3.2. Se $e_T^2 = \beta e_T$ para $\beta \in F$ não nulo então:

$$\dim M_T = \frac{n!}{\beta}.$$

Demonstração: Definindo $e = \frac{1}{\beta}e_T$ temos $e^2 = e$, ademais $FS_ne = FS_ne_T = M_T$. Observando que $FS_n = FS_ne + FS_n(1-e)$ e que $FS_ne \bigcap FS_n(1-e) = \{0\}$ temos $FS_n = FS_ne \bigoplus FS_n(1-e)$. Considerando a aplicação

$$\begin{aligned} r_e : FS_n &\longrightarrow FS_n \\ x &\longmapsto xe \end{aligned}$$

vemos que:

- se $a \in FS_ne$ então $a = xe, x \in FS_n$ logo $r_e(a) = ae = xe^2 = xe = a$.
- se $a \in FS_n(1-e)$ então $a = x(1-e), x \in FS_n$ logo $r_e(a) = ae = x(1-e)e = xe - xe^2 = xe - xe = 0$.

Assim, $tr(r_e) = \dim FS_ne = \dim M_T$.

Por outro lado, escrevendo $e = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma$ temos $\alpha_1 = \dfrac{1}{\beta}$. E pela demonstração do lema 2.2.11, $tr(r_e) = \alpha_1 n! = \frac{1}{\beta}n!$. Portanto, $\dim M_T = \dfrac{1}{\beta}n!$. ■

Proposição 2.3.3. Sejam $\lambda \vdash n$ e $T_1, T_2 \in Tab_\lambda$. Então $M_{T_1} \cong M_{T_2}$ como FS_n-módulos .

Demonstração: Existe $\sigma \in S_n$ tal que $T_2 = \sigma T_1$. Assim pelo lema 2.2.3 $e_{T_2} = \sigma e_{T_1}\sigma^{-1}$, logo $M_{T_2} = FS_ne_{T_2} = FS_n\sigma e_{T_1}\sigma^{-1} = FS_ne_{T_1}\sigma^{-1} = M_{T_1}\sigma^{-1}$.

Considerando

$$\begin{aligned} r_{\sigma^{-1}} : M_{T_1} &\longrightarrow M_{T_1}\sigma^{-1} \\ x &\longmapsto x\sigma^{-1} \end{aligned}$$

temos que $r_{\sigma^{-1}}$ é homomorfismo de FS_n-módulos e $\operatorname{Ker}(r_{\sigma^{-1}}) = \{0\}$, logo $r_{\sigma^{-1}}$ é isomorfismo de FS_n módulos. Portanto, $M_{T_1} \cong M_{T_1}\sigma^{-1} = M_{T_2}$. ■

Lema 2.3.4. Sejam $\lambda, \mu \vdash n$ e $T_\lambda \in Tab_\lambda, T_\mu \in Tab_\mu$. Suponhamos que existam i, j que são simultaneamente co-linha em T_μ e co-coluna em T_λ. Então $e_{T_\lambda}e_{T_\mu} = 0$.

Demonstração: Por definição $e_T = R_T^+ C_T^-$. Tomando $\zeta = (i\,j)$ temos $\zeta \in R_{T_\mu}$ e $\zeta \in C_{T_\lambda}$. Ademais,

$$C_{T_\lambda}^- R_{T_\mu}^+ = (C_{T_\lambda}^-)(\zeta R_{T_\mu}^+) = (C_{T_\lambda}^- \zeta)(R_{T_\mu}^+) = -C_{T_\lambda}^- R_{T_\mu}^+.$$

Logo $C_{T_\lambda}^- R_{T_\mu}^+ = 0$, pois F tem característica zero.

Assim $e_{T_\lambda} e_{T_\mu} = R_{T_\lambda}^+ C_{T_\lambda}^- R_{T_\mu}^+ C_{T_\mu}^+ = 0$. ■

Observação 2.3.5. Como dito no lema acima, se existam i, j que são simultaneamente co-linha em T_μ e co-coluna em T_λ, então $e_{T_\lambda} e_{T_\mu} = 0$. Porém possivelmente podemos ter $e_{T_\mu} e_{T_\lambda} \neq 0$.

Por exemplo tomando $\lambda = \mu = (2, 1) \vdash 3$ e

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}; \qquad T_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

Como 1, 2 são co-linha em T_1 e co-coluna em T_2 então pelo lema acima $e_{T_2} e_{T_1} = 0$. Mas;

$R_{T_1} = \{1,\ (1\,2)\}$; $\qquad C_{T_1} = \{1,\ (1,\ 3)\}$

$R_{T_2} = \{1,\ (2\,3)\}$; $\qquad C_{T_2} = \{1,\ (1\,2)\}$

Logo,

$$\begin{aligned} e_{T_1} e_{T_2} &= R_{T_1}^+ C_{T_1}^- R_{T_2}^+ C_{T_2}^- \\ &= (1 + (1\,2))(1 - (1\,3))(1 + (2\,3))(1 - (1\,2)) \\ &= 3((2\,3) - (1\,3) - (1\,3\,2) + (1\,2\,3)) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Definição 2.3.6. Sejam $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots), \mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots)$ duas partições de n. Definiremos uma relação de ordem parcial $\trianglerighteq$ sobre o conjunto das partições de n, onde $\lambda \trianglerighteq \mu$ se para todo $i \in \mathbb{N}$ tivermos $\lambda_1 + \cdots + \lambda_i \geq \mu_1 + \cdots + \mu_i$. Esta ordem é conhecida como *ordem natural* ou da *dominância*.

Definiremos também uma relação de ordem total $\geq$ no conjunto das partições de n, onde $\lambda \geq \mu$ se $\lambda = \mu$ ou existir $i \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_1 = \mu_1; \cdots; \lambda_{i-1} = \mu_{i-1}; \lambda_i > \mu_i$. Esta é conhecida como *ordem lexicográfica*.

Lema 2.3.7. Sejam $\lambda, \mu \vdash n$. Se $\lambda \trianglerighteq \mu$ então $\lambda \geq \mu$.

Demonstração: Se $\lambda \neq \mu$ então existe $i \in \mathbb{N}$, o menor número tal que $\lambda_i \neq \mu_i$. Assim $\lambda_1 = \mu_1; \cdots; \lambda_{i-1} = \mu_{i-1}$, e $\lambda_i \neq \mu_i$. Como $\lambda \trianglerighteq \mu$ temos:

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_i \geq \mu_1 + \cdots + \mu_i \Longrightarrow \lambda_i > \mu_i.$$

Logo $\lambda_1 = \mu_1; \cdots; \lambda_{i-1} = \mu_{i-1}$, e $\lambda_i > \mu_i$, portanto $\lambda \geq \mu$. ■

Lema 2.3.8. Sejam $\lambda, \mu \vdash n$ e $T_\lambda \in Tab_\lambda, T_\mu \in Tab_\mu$. Suponhamos que T_λ, T_μ satisfaçam a seguinte condição:

"Não existem i, j que são simultaneamente co-linha em T_μ e co-coluna em T_λ" $(\triangle)$

Então $\lambda \trianglerighteq \mu$.

Demonstração: Seja $i \in \mathbb{N}$. Por hipótese, os elementos da primeira linha de T_μ estão em colunas distintas em T_λ, logo $\lambda_1 \geq \mu_1$. Ademais, existe $\eta_1 \in C_{T_\lambda}$ tal que os elementos da primeira linha de T_μ estão na primeira linha de $\eta_1 T_\lambda$ e $T_\mu, T_{\eta_1 \lambda}$ satisfazem $(\triangle)$.

Considerando então os elementos da segunda linha de T_μ, temos que eles estão em diferentes colunas de $\eta_1 T_\lambda$. Assim existe $\eta_2 \in C_{\eta_1 T_\lambda} = C_{T_\lambda}$ tal que os elementos das duas primeiras linhas de T_μ estão nas duas primeiras linhas de $\eta_2 \eta_1 T_\lambda$, assim $\lambda_1 + \lambda_2 \geq \mu_1 + \mu_2$. Ademais, $T_\mu, \eta_1 \eta_2 T_\lambda$ satisfazem $(\triangle)$.

Repetindo este argumento, ao final de i passos teremos $\lambda_1 + \cdots + \lambda_i \geq \mu_1 + \cdots + \mu_i$. Portanto, $\lambda \trianglerighteq \mu$. ■

Proposição 2.3.9. Sejam $\lambda, \mu \vdash n$ com $\mu > \lambda$. Se $T_\lambda \in Tab_\lambda, T_\mu \in Tab_\mu$, então $e_{T_\lambda} e_{T_\mu} = 0$. Ademais, se $a \in FS_n$ então $e_{T_\lambda} a e_{T_\mu} = 0$.

Demonstração: Como $\mu > \lambda$, então pelo lema 2.3.7 temos $\lambda \not\trianglerighteq \mu$, e assim, pelo lema anterior, existem i, j que são co-linha em T_μ e co-coluna em T_λ, e do lema 2.3.4 temos $e_{T_\lambda} e_{T_\mu} = 0$.

Se $\sigma \in S_n$ temos $\sigma T_\mu \in Tab_\mu$, assim pelo argumento acima $e_{T_\lambda} e_{\sigma T_\mu} = 0$. Mas

$$0 = e_{T_\lambda} e_{\sigma T_\mu} = e_{T_\lambda} \sigma e_{T_\mu} \sigma^{-1} \Longrightarrow e_{T_\lambda} \sigma e_{T_\mu} = 0.$$

Desta forma, se $a = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma, \alpha_\sigma \in F$, temos:

$$e_{T_\lambda} a e_{T_\mu} = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma e_{T_\lambda} \sigma e_{T_\mu} = 0.$$

■

Proposição 2.3.10. Sejam $\lambda, \mu \vdash n$, com $\mu > \lambda$, e $T_\lambda \in Tab_\lambda, T_\mu \in Tab_\mu$. Então o único homomorfismo $h : M_{T_\lambda} \longrightarrow M_{T_\mu}$ de FS_n-módulos é a aplicação nula. Em particular, $M_{T_\lambda} \ncong M_{T_\mu}$.

Demonstração: Suponhamos que exista h não nula, então $h(e_{T_\lambda}) \neq 0$. Tomando $a = h(e_{T_\lambda})$ temos, pela proposição 2.3.9, que $e_{T_\lambda} a e_{T_\mu} = 0$. Agora, pelo teorema 2.2.12, existem $\beta_1, \beta_2 \in F$ não nulos tais que $e_{T_\lambda}^2 = \beta_1 e_{T_\lambda}, e_{T_\mu}^2 = \beta_2 e_{T_\mu}$. Fazendo $e_\lambda = \beta_1^{-1} e_{T_\lambda}, e_\mu = \beta_2^{-1} e_{T_\mu}$, temos que e_λ, e_μ são idempotentes e geram M_{T_λ} e M_{T_μ} respectivamente. Definindo $b = \beta_1^{-1} a \neq 0$ temos $b = h(e_\lambda) \in M_{T_\mu}$, tendo assim $b = w e_\mu, w \in FS_n$ e portanto, $b e_\mu = w e_\mu^2 = w e_\mu = b$. Desta forma:

$$0 \neq b = h(e_\lambda) = h(e_\lambda^2) = e_\lambda h(e_\lambda) = e_\lambda b = e_\lambda b e_\mu = \beta_1^{-1} \beta_2^{-1} e_{T_\lambda} b e_{T_\mu} = 0.$$

Contradição! ■

Lema 2.3.11. Sejam $\lambda \vdash n$ e $T \in Tab_\lambda$. Temos $\mathrm{End}_{FS_n}(M_T) = \{\lambda Id_{M_T} | \lambda \in F\}$.

Demonstração: Se $f \in \mathrm{End}_{FS_n}(M_T)$ então, considerando $f(e_T) = a e_T$, $a \in FS_n$, temos para todo $\tau \in R_T$, $\eta \in C_T$:

$$\tau f(e_T) \eta = f(\tau e_T) \eta = f(e_T) \eta = a e_T \eta = (-1)^\eta a e_T = (-1)^\eta f(e_T).$$

Assim, pelo lema de Von-Neumann, existe $\lambda \in F$ tal que $f(e_T) = \lambda e_T$. Desta forma, para todo $x \in M_T$, $x = b e_T$, $b \in FS_n$, temos:

$$f(x) = f(b e_T) = b f(e_T) = b(\lambda e_T) = \lambda x.$$

Logo $f = \lambda Id_{M_T}$, e assim $\mathrm{End}_{FS_n}(M_T) \subseteq \{\lambda Id_{M_T} | \lambda \in F\}$. Porém a outra inclusão é óbvia, logo $\mathrm{End}_{FS_n}(M_T) = \{\lambda Id_{M_T} | \lambda \in F\}$. ■

Proposição 2.3.12. O módulo M_T é um S_n-módulo irredutível.

Demonstração: Seja N um submódulo de M_T. Pelo Teorema de Maschke existe N_1 submódulo de M_T tal que $M_T = N \oplus N_1$. Considerando então $\pi : M_T \longrightarrow M_T$ a projeção de M_T em N, temos que $\pi \in \mathrm{End}_{FS_n}(M_T)$ e, pelo lema acima, $\pi = \alpha Id_{M_T}$, $\alpha \in F$. Mas $\pi^2 = \pi$, logo $\alpha^2 = \alpha$ e assim $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, ou seja, $\pi = 0$ ou $\pi = Id_{M_T}$. Se $N \neq \{0\}$ então $\pi \neq 0$, logo $\pi = Id_{M_T}$ e portanto $N = M_T$. ■

Proposição 2.3.13. Para um corpo de característica zero (não necessariamente algebricamente fechado), S_n possui exatamente $p(n)$ representações irredutíveis e inequivalentes.

Demonstração: Vimos no capítulo anterior que o número de S_n-módulos irredutíveis e inequivalentes sobre um corpo de característica zero é menor ou igual ao número de classes de conjugação de S_n, neste caso, o número de partições de n. Porém como vimos no decorrer desta seção, cada partição λ de n dá origem a um S_n-módulo irredutível M_T. Ademais, vimos que partições distintas dão origem a módulos inequivalentes entre si. Logo os módulos M_T são, a menos de isomorfismo, todos os módulos irredutíveis de S_n sobre um corpo de característica zero. ■

Definição 2.3.14. Sejam $\lambda \vdash n$ e $T \in Tab_\lambda$. Vamos indicar M_T por M_λ e $\dim M_T$ por d_λ. Denotamos $I_\lambda = M_\lambda \cdot FS_n$ como sendo a *componente isotípica* de FS_n que contém M_λ.

Proposição 2.3.15. $FS_n \cong \bigoplus\limits_{\lambda \vdash n} M_{d_\lambda}(F)$ e $n! = \sum\limits_{\lambda \vdash n} d_\lambda^2$.

Demonstração: Sabemos que os I_λ's são ideais bilaterais de FS_n e, como visto na proposição 1.3.9, $FS_n = \oplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda$. Sabemos também, pela proposição 1.3.10, que os I_λ's são subálgebras associativas, unitárias e simples de FS_n. Ademais, para todo $\lambda \vdash n$, M_λ é ideal minimal à esquerda de I_λ, e pelo lema 2.3.11, $\mathrm{End}_{FS_n}(M_\lambda) = \{\alpha Id_{M_\lambda} | \alpha \in F\}$. Assim pelo lema 1.2.31, $I_\lambda \cong M_{d_\lambda}(F)$ e $\dim I_\lambda = d_\lambda^2$. Portanto $FS_n \cong \bigoplus\limits_{\lambda \vdash n} M_{d_\lambda}(F)$ e $n! = \sum\limits_{\lambda \vdash n} d_\lambda^2$. ■

Para terminar esta seção, nós encontraremos de maneira explícita uma base para os módulos M_T's. Para isso introduziremos o conceito de *tableaux Standard*, bem como provaremos alguns resultados que nos serão muito úteis para explicitar tal base.

Definição 2.3.16. Seja $\lambda \vdash n$. Um tableau $T \in Tab_\lambda$ é dito *Standard* se satisfaz a:

i) $T(i,j) < T(i,j+1)$ para todo i,j.

ii) $T(i,j) < T(i+1,j)$ para todo i,j.

Ou seja, T é crescente nas linhas e nas colunas. O conjunto de todos os tableaux Standard de λ é denotado por Std_λ.

Exemplo 2.3.17. Se $\lambda = (2,1) \vdash 3$ então

$$Std_\lambda = \left\{ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} ; \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \right\}.$$

Definição 2.3.18. Sejam $(i_1,j_2),(i_2,j_2) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Dizemos que $(i_1,j_2) < (i_2,j_2)$ se $i_1 < i_2$ ou $i_1 = i_2$ e $j_1 < j_2$. Esta é a *ordem lexicográfica* em $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Se $T_1, T_2 \in Tab_\lambda$, então definimos $T_1 < T_2$ se $T_1 \neq T_2$ e $T_1(i_0,j_0) < T_2(i_0,j_0)$, onde $(i_0,j_0) = \min\{(i,j) \in D_\lambda | \, T_1(i,j) \neq T_2(i,j)\}$. Isso introduz uma ordem total em Tab_λ, e portanto também em Std_λ.

Exemplo 2.3.19. Se $\lambda = (2,1) \vdash 3$ então

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} < \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} < \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} < \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} < \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} < \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}.$$

Lema 2.3.20. Sejam $\lambda \in n$ e $T_1, T_2 \in Std_\lambda$ tais que $T_1 < T_2$. Então $e_{T_2} e_{T_1} = 0$.

Demonstração: Sejam $(i_0,j_0) = \min\{(i,j) \in D_\lambda | T_1(i,j) \neq T_2(i,j)\}$, $a_1 = T_1(i_0,j_0)$ e $a_2 = T_2(i_0,j_0)$, assim $a_1 < a_2$.

Para $j = 1,2$, seja U_j a união das linhas $i_0, i_0+1, \cdots, i_{l(\lambda)}$ de T_j. Como T_1, T_2 tem exatamente as mesmas $i_0 - 1$ primeiras linhas, então $U_1 = U_2$. Além disso, $T_1, T_2 \in Std_\lambda$ assim $T_1(i_0,1) = \min U_1$ e $T_2(i_0,1) = \min U_2$, logo $T_1(i_0,1) = T_2(i_0,1)$ e portanto $j_0 > 1$.

Seja (i_1, j_1) tal que $T_2(i_1, j_1) = a_1$. Como $a_1 \in U_1 = U_2$ temos $i_1 \geq i_0$. Ademais, para todo $i \geq i_0$, $j \geq j_0$ temos $T_2(i, j) \geq a_2$, pois $T_2 \in Std_\lambda$, assim $j_0 > j_1$.

Consideremos $b = T_1(i_0, j_1)$. Sendo $(i_0, j_1) < (i_0, j_0)$, então $b = T_1(i_0, j_1) = T_2(i_0, j_1)$, assim a_1 e b estão na mesma linha de T_1 e coluna de T_2 e, pelo lema 2.3.4, temos $e_{T_2} e_{T_1} = 0$. ■

Lema 2.3.21. A soma $\sum\limits_{T \in Std_\lambda} M_T$ é direta.

Demonstração: Sejam $T_1 < T_2 < \cdots < T_m$ todos os elementos de Std_λ e suponhamos $a_1 e_{T_1} + \cdots + a_m e_{T_m} = 0, a_i \in FS_n$. Multiplicando a equação por e_{T_1} à direita teremos:

$$a_1 e_{T_1}^2 + \cdots + a_m e_{T_m} e_{T_1} = 0 \Longrightarrow a_1 e_{T_1}^2 = 0.$$

Mas pelo teorema 2.2.12, existe $\alpha \in F$ não nulo tal que $e_{T_1}^2 = \alpha e_{T_1}$. Assim:

$$0 = a_1 e_{T_1}^2 = \alpha a_1 e_{T_1} \Longrightarrow a_1 e_{T_1} = 0.$$

Analogamente mostramos que $a_2 e_{T_2} = \cdots = a_m e_{T_m} = 0$. ■

Teorema 2.3.22. $\sum\limits_{\lambda \vdash n} (\# Std_\lambda)^2 = n!$

Este resultado segue do Algoritmo de Robinson-Schensted-Knuth. Podemos encontrar sua demonstração no capítulo 3 de [4].

Teorema 2.3.23. Se $\lambda \vdash n$ e $T \in Tab_\lambda$, então $\dim M_T = d_\lambda = \# Std_\lambda$.

Demonstração: Seja $I_\lambda = M_T \cdot FS_n$, logo $\dim I_\lambda = d_\lambda^2$. Pela proposição 2.3.3 temos para todo $T' \in Std_\lambda$, $M_{T'} \cong M_T$, e existe $\sigma \in S_n$ tal que $M_{T'} = M_T \sigma^{-1} \subseteq I_\lambda$. Assim $\bigoplus_{T' \in Std_\lambda} M_{T'} \subseteq I_\lambda$, portanto:

$$\dim \bigoplus_{T' \in Std_\lambda} M_{T'} \leq \dim I_\lambda \implies \dim M_T \, (\# Std_\lambda) \leq d_\lambda^2 \implies \# Std_\lambda \leq d_\lambda.$$

Mas $\sum\limits_{\lambda \vdash n} (\# Std_\lambda)^2 = n! = \sum\limits_{\lambda \vdash n} d_\lambda^2$, logo $\# Std_\lambda = d_\lambda$. ■

Corolário 2.3.24. A decomposição explícita de FS_n em ideais minimais à esquerda é dada por $FS_n = \bigoplus\limits_{\lambda \vdash n} (\oplus_{T \in Std_\lambda} M_T)$.

Demonstração: Como vimos na demonstração acima, para todo $\lambda \vdash n$ temos $\bigoplus_{T\in Std_\lambda} M_T \subseteq I_\lambda$. Mas $\dim \bigoplus_{T\in Std_\lambda} M_T = d_\lambda^2 = \dim I_\lambda$, assim $\bigoplus_{T\in Std_\lambda} M_T = I_\lambda$. Como $FS_n = \bigoplus_{\lambda\vdash n} I_\lambda$, então

$$FS_n = \bigoplus_{\lambda\vdash n} \left(\oplus_{T\in Std_\lambda} M_T\right).$$

■

Definição 2.3.25. Seja $s(i,j) \in D_\lambda$, definimos:

i) O *comprimento do braço* de s por $a(s) = \lambda_i - j$.

ii) O *comprimento da perna* de s por $l(s) = \lambda'_j - 1$.

iii) O *gancho* de s por $h(s) = a(s) + l(s) + 1$.

iv) O *produto dos ganchos* $h(\lambda) = \prod_{s\in D(\lambda)} h(s)$.

Exemplo 2.3.26. Seja $\lambda = (5,3,3,1) \vdash 12$, assim:

$$\underset{\text{braço}}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 4&2&2&1&0\\\hline 2&1&0\\\cline{1-3} 2&1&0\\\cline{1-3} 0\\\cline{1-1}\end{array}}\;;\quad \underset{\text{perna}}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 3&2&2&0&0\\\hline 2&1&1\\\cline{1-3} 1&0&0\\\cline{1-3} 0\\\cline{1-1}\end{array}}\;;\quad \underset{\text{gancho}}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 8&6&5&2&1\\\hline 5&3&2\\\cline{1-3} 4&2&1\\\cline{1-3} 1\\\cline{1-1}\end{array}}$$

Assim, $h(\lambda) = 115200$.

Teorema 2.3.27. Seja $\lambda \in n$. Então:

$$\#Std_\lambda = \frac{n!}{h(\lambda)}.$$

Este resultado é conhecido como a *Fórmula do Gancho*. Sua demonstração pode ser encontrada [8], página 211.

Lema 2.3.28. Seja $\lambda \vdash n$. Para todo $T \in Tab_\lambda$ temos que $e_T^2 = \beta_T e_T$, onde $\beta_T = h(\lambda) = \dfrac{n!}{\dim M_T}$.

Demonstração: Em consequência da Fórmula do Gancho e o teorema 2.3.23 temos:

$$\dim M_T = \frac{n!}{h(\lambda)} \Longrightarrow h(\lambda) = \frac{n!}{\dim M_T}.$$

Mas, pelo teorema 2.2.12 existe $\beta_T \in F$ não nulo tal que $e_T^2 = \beta_T e_T$ e pela proposição 2.3.2,

$$\dim M_T = \frac{n!}{\beta_T}.$$

Portanto,

$$\beta_T = h(\lambda) = \frac{n!}{\dim M_T}.$$

■

Observação 2.3.29. Concluímos do lema acima que a constante β_T depende apenas dos comprimentos dos ganchos de λ, não de T. Assim, para todo $T \in Tab_\lambda$ temos $e_T^2 = h(\lambda)e_T$.

Definição 2.3.30. Sejam $\lambda \vdash n$ e $T \in Std_\lambda$. Definimos $\Sigma_T = \{\sigma \in S_n | \sigma T \in Std_\lambda\}$. Observemos que $\Sigma_T \neq \emptyset$, pois $1 \in \Sigma_T$.

Teorema 2.3.31. Sejam $\lambda \vdash n$ e $T \in Std_\lambda$. O conjunto $B_T = \{\sigma e_T | \sigma \in \Sigma_T\}$ é uma base para M_T como espaço vetorial sobre F.

Demonstração: Considerando $\Sigma_T = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_m\}$ de modo que $T_1 = \sigma_1 T > T_2 = \sigma_2 T > \cdots > T_m = \sigma_m T$, temos $Std_\lambda = \{T_1, \cdots, T_m\}$ e assim dim $M_T = \#Std_\lambda = m$. Se $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in F$ são tais que $\alpha_1\sigma_1 e_T + \cdots + \alpha_m\sigma_m e_T = 0$ então:

$$\alpha_1\sigma_1 e_T + \cdots + \alpha_m\sigma_m e_T = 0 \Longrightarrow \alpha_1\sigma_1(\sigma_1^{-1}e_{T_1}\sigma_1) + \cdots + \alpha_m\sigma_m(\sigma_m^{-1}e_{T_m}\sigma_m) = 0$$

$$\Longrightarrow \alpha_1 e_{T_1}\sigma_1 + \cdots + \alpha_m e_{T_m}\sigma_m = 0$$

Multiplicando a equação acima por e_{T_1} à esquerda temos:

$$\alpha_1 e_{T_1}^2\sigma_1 + \alpha_2 e_{T_1}e_{T_2}\sigma_2 + \cdots + \alpha_m e_{T_1}e_{T_m}\sigma_m = 0$$

Para todo $i \geq 2$ temos $T_1 > T_i$, e pelo lema 2.3.20 $e_{T_1}e_{T_i} = 0$, logo $\alpha_1 e_{T_1}^2\sigma_1 = 0$ e portanto $\alpha_1 = 0$.

Analogamente $\alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$, logo os vetores $\sigma_1 e_T, \cdots, \sigma_m e_T$ são linearmente independentes. Como $\dim M_T = m$, temos que $B_T = \{\sigma_1 e_T, \cdots, \sigma_m e_T\}$ é base para M_T. ■

Exemplo 2.3.32. Sejam $\lambda = (n-1, 1) \vdash n$ e

$$T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & ... & \text{n-1} \\ \hline \text{n} \\ \cline{1-1}\end{array}.$$

Vemos que $\sigma T \in Std_\lambda$ se, e somente se, $\sigma = 1$ ou $\sigma = (i\ n\ n-1\ \cdots\ i+1)$ onde $i = 2, \cdots n-1$. Fazendo $\sigma_i = (i\ n\ n-1\ \cdots\ i+1)$, temos que $\Sigma_T = \{1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n-1}\}$, logo $B_T = \{e_T, \sigma_2 e_T, \cdots, \sigma_{n-1} e_T\}$ e $\dim M_T = n-1$.

Em particular, para $n = 4$ temos $\lambda = (3, 1) \vdash 4$,

$$T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

$$\sigma_2 = (2\ 4\ 3), \sigma_3 = (3\ 4).$$

Assim, $\Sigma_T = \{1, \sigma_2, \sigma_3\}$ e $B_T = \{1, \sigma_2 e_T, \sigma_3 e_T\}$.

Capítulo 3

A decomposição da álgebra de grupo FA_n

Seja $A_n \subset S_n$ o subgrupo das permutações pares de S_n. Como vimos no capítulo 1, FA_n é uma álgebra associativa unitária. Além disso, é obvio que $FA_n \subset FS_n$.

Como no capítulo anterior, onde explicitamos a decomposição de FS_n em ideais minimais à esquerda e a decomposição em componentes isotípicas, nossa intenção neste capítulo é encontrar as decomposições em ideais minimais à esquerda e em componentes isotípicas de FA_n.

Vimos anteriormente que FS_n é naturalmente FS_n-módulo. Porém $FA_n \subseteq FS_n$, assim para todo $\tau \in FA_n$, $\sigma \in FS_n$ temos $\tau\sigma \in FS_n$. Desta forma, utilizando da estrutura de FS_n-módulo de FS_n, vemos que FS_n é também um FA_n-módulo. Como consequência, poderemos utilizar as informações que temos sobre as decomposições de FS_n para encontrar as de FA_n.

Neste capítulo será de extrema importância que consideremos F um corpo algebricamente fechado e de característica zero. Basicamente podemos pensar que $F = \mathbb{C}$.

3.1 As funções f e η

Definiremos abaixo duas aplicações que serão muito importantes para nosso trabalho, pois eles nos permitirão fazer ligações entre as decomposições de FS_n como FA_n-módulo e as decomposições de FA_n.

Definição 3.1.1. Seja $f : FS_n \longrightarrow FS_n$, definida por linearidade, onde $f(\sigma) = (-1)^\sigma \sigma, \sigma \in S_n$. Definamos também $\eta := Id_{FS_n} + f$, assim $\eta(a) = a + f(a)$, $a \in FS_n$.

Proposição 3.1.2. A função f definida acima é uma involução ($f^2 = Id_{FS_n}$) que possui as seguintes propriedades:

i) f é isomorfismo de álgebras.

ii) f é homomorfismo de FA_n-módulos.

iii) Para todo $\lambda \vdash n$ temos $f(I_\lambda) = I_{\lambda'}$.

Demonstração: Para todo $\sigma \in S_n$ temos $f^2(\sigma) = (-1)^\sigma(-1)^\sigma\sigma = \sigma$, logo $f^2 = Id_{FS_n}$.

i) Se $a \in \operatorname{Ker} f$ então:

$$f(a) = 0 \Longrightarrow a = f^2(a) = 0 \Longrightarrow a = 0.$$

Logo $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, e assim f é injetora, em particular bijetora, pois FS_n tem dimensão finita. Além disso, para todo $\sigma, \tau \in FS_n$ temos:

$$f(\sigma\tau) = (-1)^{\sigma\tau}\sigma\tau = (-1)^\sigma\sigma(-1)^\tau\tau = f(\sigma)f(\tau).$$

Por linearidade temos $f(ab) = f(a)f(b)$ para todo a, $b \in FS_n$. Logo f é isomorfismo de álgebras.

ii) Se $\tau \in A_n$, $\sigma \in S_n$ então:

$$f(\tau\sigma) = (-1)^\tau\tau(-1)^\sigma\sigma = \tau(-1)^\sigma\sigma = \tau f(\sigma).$$

Por linearidade, $f(ab) = af(b)$ para todo $a \in FA_n$, $b \in FS_n$. Assim, f é homomorfismo de FA_n-módulos.

iii) Seja $h : FS_n \longrightarrow FS_n$ a transformação linear definida por $h(\sigma) = \sigma^{-1}$, $\sigma \in S_n$. Para todo $\tau, \sigma \in S_n$ temos:

$$h(\sigma\tau) = \tau^{-1}\sigma^{-1} = h(\tau)h(\sigma).$$

Sendo h linear então $h(ab) = h(b)h(a)$ para todo $a, b \in FS_n$.

Seja $T \in Tab_\lambda$, então $h(e_T) = h(R_T^+C_T^-) = h(C_T^-)h(R_T^+) = C_T^-R_T^+ := \tilde{e}_T$. Como e_T é semi-idempotente, existe $\beta \in F$ não nulo tal que $e_T^2 = \beta e_T$, assim:

$$\beta\tilde{e}_T = h(\beta e_T) = h(e_T^2) = h(e_T)h(e_T) = \tilde{e}_T^2.$$

Logo, $\tilde{e}_T$ é semi-idempotente. Mas $\beta\tilde{e}_T = \tilde{e}_T^2 = C_T^-R_T^+C_T^-R_T^+ = C_T^-e_TR_T^+ \in I_\lambda$, portanto $\tilde{e}_T \in I_\lambda$. Analogamente $\tilde{e}_{T'} \in I_{\lambda'}$. Ademais:

$$f(e_T) = f(R_T^+C_T^-) = f(R_T^+)f(C_T^-) = R_T^-C_T^+ = C_{T'}^-R_{T'}^+ = \tilde{e}_{T'} \in I_{\lambda'}.$$

Como $I_\lambda = FS_ne_TFS_n$ e $I_{\lambda'}$ é ideal bilateral, então $f(I_\lambda) = FS_n\tilde{e}_{T'}FS_n \subseteq I_{\lambda'}$. Mas $e_{T'} = R_{T'}^+C_{T'}^- = C_T^+R_T^- = f(C_T^-R_T^+) = f(\tilde{e}_T) \in f(I_\lambda)$ e f é isomorfismo, assim para todo $a, b \in FS_n$,

$$ae_{T'}b = f(a')f(\tilde{e}_T)f(b') = f(a'\tilde{e}_Tb') \in f(I_\lambda).$$

Logo $I_{\lambda'} \subseteq f(I_\lambda)$. ■

Observação 3.1.3. É importante notarmos que $\eta : FS_n \longrightarrow FS_n$ é homomorfismo de FA_n-módulos pois é soma de homomorfismos. Além disso, $\eta : FS_n \longrightarrow FA_n$ pois $\eta(\sigma) = 2\sigma$ se $\sigma \in A_n$ e $\eta(\sigma) = 0$ se $\sigma \notin A_n$. Também é fácil de ver que $a \in FA_n$ se, e somente se, $\eta(a) = 2a$.

Lema 3.1.4. Para todo $\lambda \vdash n$ temos $\eta(I_\lambda) = \eta(I_{\lambda'}) = \eta(I_\lambda + I_{\lambda'})$.

Demonstração: Seja $a \in \eta(I_\lambda)$ então $a = \eta(x_\lambda)$, $x_\lambda \in I_\lambda$. Pela proposição anterior, $f(I_{\lambda'}) = I_\lambda$, logo $x_\lambda = f(y_{\lambda'})$, $y_{\lambda'} \in I_{\lambda'}$. Como $f^2 = Id_{FS_n}$ então:

$$a = x_\lambda + f(x_\lambda) = f(y_{\lambda'}) + f^2(y_{\lambda'}) = f(y_{\lambda'}) + y_{\lambda'} = \eta(y_{\lambda'}) \in \eta(I_{\lambda'}).$$

Assim, $\eta(I_\lambda) \subseteq \eta(I_{\lambda'})$. Analogamente mostramos que $\eta(I_{\lambda'}) \subseteq \eta(I_\lambda)$. Portanto, $\eta(I_\lambda) = \eta(I_{\lambda'})$. E pela linearidade de η temos:

$$\eta(I_\lambda + I_{\lambda'}) = \eta(I_\lambda) + \eta(I_{\lambda'}) = 2\eta(I_\lambda) = \eta(I_\lambda) = \eta(I_{\lambda'}).$$

■

Proposição 3.1.5. Seja $\lambda \vdash n$. Então $\eta(I_{\lambda'}) = \eta(I_\lambda) = (I_\lambda + I_{\lambda'}) \cap FA_n$. Em particular, se λ é auto-conjugada ($\lambda = \lambda'$), então $\eta(I_\lambda) = I_\lambda \cap FA_n$.

Demonstração: A primeira igualdade já foi demonstrada, portanto vamos mostrar a segunda. Pela observação anterior, $\eta(I_\lambda) \subseteq FA_n$ e pela proposição 3.1.2 temos $f(I_\lambda) = I_{\lambda'}$, assim $\eta(I_\lambda) \subseteq I_\lambda + f(I_\lambda) = I_\lambda + I_{\lambda'}$. Logo, $\eta(I_\lambda) \subseteq (I_\lambda + I_{\lambda'}) \cap FA_n$.

Seja $a \in (I_\lambda + I_{\lambda'}) \cap FA_n$, então $\eta(a) = 2a$ e $a \in I_\lambda + I_{\lambda'}$. Assim:

$$2a = \eta(a) \in \eta(I_\lambda + I_{\lambda'}) = \eta(I_\lambda).$$

Logo, $a \in \eta(I_\lambda)$. Portanto $(I_\lambda + I_{\lambda'}) \cap FA_n \subseteq \eta(I_\lambda)$. ■

Observação 3.1.6. Se λ não é autoconjugada ($\lambda \neq \lambda'$) então $I_\lambda \cap FA_n = \{0\}$. De fato, se $x \in FA_n$ então $f(x) = x$, e $x \in I_\lambda$ implica em $f(x) \in I_{\lambda'}$. Assim, se $x \in I_\lambda \cap FA_n$, então $x = f(x) \in I_{\lambda'}$, portanto $x \in I_\lambda \cap I_{\lambda'} = \{0\}$.

3.2 A decomposição isotípica de FA_n

Nosso objetivo nesta seção é descrever a decomposição isotípica de FA_n. Para isso, vamos primeiro descrever a decomposição isotípica de FS_n como FA_n-módulo, que será uma consequência do Teorema 3.2.1. Depois nós mostraremos que a partir desta decomposição se deriva a decomposição de FA_n.

Teorema 3.2.1. Seja $F = \mathbb{C}$ e recordemos que $FS_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda$. Para cada $\lambda \vdash n$, seja M_λ um ideal minimal à esquerda de FS_n tal que $M_\lambda \subseteq I_\lambda$. Considerando M_λ um FA_n-módulo temos:

i) Se $\lambda \neq \lambda'$ então M_λ é FA_n-módulo irredutível. Ademais, $M_\lambda \cong M_{\lambda'}$ como FA_n-módulos.

ii) Se $\lambda = \lambda'$ então como FA_n-módulos, $M_\lambda = M_\lambda^+ \oplus M_\lambda^-$, onde M_λ^+, M_λ^- são FA_n-módulos irredutíveis, inequivalentes e $\dim M_\lambda^+ = \dim M_\lambda^- = \frac{1}{2} d_\lambda$.

Mais ainda, a menos de isomorfismos, estes são todos os FA_n-módulos irredutíveis e inequivalentes . Assim qualquer FA_n-módulo irredutível é isomorfo a um FA_n-submódulo irredutível de FS_n.

Este teorema é na verdade uma tradução para a linguagem da Teoria de Representações, de um teorema advindo da Teoria de Caracteres de A_n. O teorema referido pode ser encontrado em [1], teorema 7.6, ou em [7], teorema 2.5.7 página 66, esta última contendo também sua demonstração. Não entraremos em maiores detalhes a respeito dele pois sua demonstração exige certa discussão a respeito de caracteres induzidos e projetados, bem como a utilização da teoria de Clifford para grupos com subgrupos normais, o que despenderia de um tempo e tornaria este trabalho demasiadamente longo.

Proposição 3.2.2. Consideraremos FS_n como um FA_n-módulo e $\lambda \vdash n$.

i) Se λ não é autoconjugada, então $I_\lambda \oplus I_{\lambda'}$ é uma componente isotípica de FS_n.

ii) Se λ é autoconjugada, então $I_\lambda = I_\lambda^+ \oplus I_{\lambda'}^-$, onde I_λ^+ e I_λ^- são componentes isotípicas distintas de FS_n.

Demonstração: Sabemos que $FS_n = \bigoplus\limits_{\lambda \vdash n} I_\lambda$, e que para todo $\lambda \vdash n$, I_λ é uma soma de ideais minimais à esquerda, todos isomorfos entre si.

i) Se $\lambda \neq \lambda'$ então pelo teorema anterior temos, para todo M_λ ideal minimal à esquerda de FS_n contido em I_λ, M_λ é FA_n-módulo irredutível. Ademais, se $\mu \vdash n$ e M_μ é um ideal minimal à esquerda de FS_n, então $M_\mu \cong M_\lambda$ como FA_n-módulos se, e somente se, $\mu = \lambda$ ou $\mu = \lambda'$. Portanto $I_\lambda \oplus I'_\lambda$ é componente isotípica de FS_n, como FA_n-módulo.

ii) Se $\lambda = \lambda'$, então pelo teorema anterior temos, para todo M_λ ideal minimal à esquerda de FS_n contido em I_λ, $M_\lambda = M_\lambda^+ \oplus M_\lambda^-$, onde M_λ^+, M_λ^- são FA_n-módulos irredutíveis e inequivalentes. Para $\epsilon =^+_-$ consideremos $I_\lambda^\epsilon = \sum M_\lambda^\epsilon$, onde M_λ ideal minimal a esquerda de FS_n contido em I_λ. É fácil ver que $I_\lambda = I_\lambda^+ \oplus I_\lambda^-$. Além disso, seja M^ϵ um FA_n-submódulo irredutível de FS_n. Temos que $M^\epsilon \cong M_\lambda^\epsilon$ como FA_n-módulos se, e somente se, existe M um ideal a minimal a esquerda de FS_n tal que $M_\lambda \cong M$ e $M = M^\epsilon \oplus M^{-\epsilon}$. Desta forma, $M \subseteq I_\lambda$ e $M^\epsilon \subseteq I_\lambda^\epsilon$. Portanto I_λ^ϵ é componente isotípica de FS_n, como FA_n-módulo. ■

Teorema 3.2.3. Se I é uma componente isotípica de FS_n, visto como FA_n-módulo, então $\eta(I)$ é componente isotípica de FA_n. Além disso, componentes distintas de FS_n dão origem a componentes distintas de FA_n. Reciprocamente, se $\overline{I}$ é componente isotípica de FA_n, então existe I componente isotípica do FA_n-módulo FS_n tal que $\overline{I} = \eta(I)$.

Demonstração: Seja $M \subseteq I$ um FA_n-submódulo simples de FS_n. Pela proposição 1.3.14, $M \cong J$ para algum J ideal minimal à esquerda de FA_n. Seja $\overline{I}$ a componente isotípica de FA_n que contém J. Se $N \subseteq I$ é um FA_n-submódulo simples de FS_n então $N \cong M$. Considerando $\eta : N \longrightarrow FA_n$, temos que $\operatorname{Ker}\eta$ é um FA_n-submódulo de N, assim $\operatorname{Ker}\eta = \{0\}$ ou $\operatorname{Ker}\eta = N$, e portanto $\eta(N) = \{0\}$, ou $\eta(N) \cong N$ como FA_n-módulos. No primeiro caso $\eta(N) = \{0\} \subseteq \overline{I}$. No segundo caso, $\eta(N) \cong N \cong M \cong J$, assim $\eta(N)$ é ideal minimal a esquerda de FA_n e $\eta(N) \subseteq \overline{I}$. Logo $\eta(I) \subseteq \overline{I}$. Seja $J' \subseteq \overline{I}$ um ideal minimal à esquerda de $FA_n \subseteq FS_n$, logo J' é um FA_n-submódulo simples de FS_n tal que $J' \cong J \cong M$, assim $J' \subseteq I$ e portanto $J' = \eta(J') \subseteq \eta(I)$. Logo $\overline{I} \subseteq \eta(I)$. Portanto, $\overline{I} = \eta(I)$.

Agora, sejam I_1, I_2 componentes isotípicas de FS_n, visto como FA_n-módulo, tais que $\eta(I_1) = \eta(I_2)$. Como $\eta(I_1)$ é componente isotípica de FA_n então $\eta(I_1) \neq \{0\}$, logo existe $M_1 \subseteq I_1$ um FA_n-submódulo simples de FS_n tal que $\eta(M_1) \neq \{0\}$, portanto $M_1 \cong \eta(M_1)$ como FA_n-módulos e assim $\eta(M_1) \subseteq \eta(I_1)$ é ideal minimal à esquerda de FA_n. Analogamente existe $M_2 \subseteq I_2$ tal que $M_2 \cong \eta(M_2)$ como FA_n-módulos e $\eta(M_2) \subseteq \eta(I_2)$ é ideal minimal à esquerda de FA_n. Mas $\eta(I_1) = \eta(I_2)$, logo $\eta(M_1) \cong \eta(M_2)$, e portanto $M_1 \cong \eta(M_1) \cong \eta(M_2) \cong M_2$. Assim $I_1 = I_2$.

Para demonstrar a recíproca, seja $J \subseteq \overline{I}$ um ideal minimal à esquerda de FA_n, então J é um FA_n-submódulo simples de FS_n. Consideremos I a componente isotípica de FS_n, como FA_n-módulo, que contém J. Pela primeira implicação, $\eta(I)$ é componente isotípica de FA_n, logo $\eta(I) \cap \overline{I} = \{0\}$ ou $\eta(I) = \overline{I}$. Mas $J = \eta(J) \subseteq \eta(I)$ logo $J \subseteq \eta(I) \cap \overline{I}$ e portanto $\eta(I) = \overline{I}$. ■

Este teorema nos dá uma correspondência biunívoca entre as componentes isotípicas de FS_n, visto como FA_n-módulo, e as componentes isotípicas de FA_n. Sendo assim obteremos a decomposição isotípica de FA_n aplicando $\eta : FS_n \longrightarrow FA_n$. Com base nesta observação podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 3.2.4. Seja $\lambda \vdash n$:

i) Se $\lambda \neq \lambda'$, então $\eta(I_\lambda \oplus I_{\lambda'}) = \eta(I_\lambda) = \eta(I_{\lambda'}) := \overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}}$ é uma componente isotípica de FA_n. Em particular $\eta(I_\lambda \oplus I_{\lambda'}) \neq \{0\}$.

ii) Se $\lambda = \lambda'$ então $\eta(I_\lambda^+) := \overline{I}_\lambda^+$ e $\eta(I_\lambda^-) := \overline{I}_\lambda^-$ são componentes isotípicas de FA_n. Em particular $\eta(I_\lambda^+) \neq \{0\}$, $\eta(I_\lambda^-) \neq \{0\}$.

Ademais, estas são todas as componentes isotípicas de FA_n. Mais precisamente,

$$FA_n = \left[\bigoplus_{\{\lambda,\lambda'\} \in \Omega_{nac}(n)} \overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}} \right] \oplus \left[\bigoplus_{\lambda \in \Omega_{ac}(n)} (\overline{I}_\lambda^+ \oplus \overline{I}_\lambda^-) \right].$$

Onde $\Omega_{nac}(n) = \{\{\lambda, \lambda'\} | \lambda \vdash n \,\mathrm{e}\, \lambda \neq \lambda'\}$, e $\Omega_{ac} = \{\lambda \vdash n | \lambda = \lambda'\}$.

Demonstração: A demonstração deste resultado decorre diretamente da proposição 3.2.2 que nos fala quem são as componentes isotípicas de FS_n visto como FA_n-módulo, e do teorema anterior que nos dá uma correspondência entre tais isotípicas e as isotípicas de FA_n. ■

Observação 3.2.5. Pela proposição 1.3.10, as componentes isotípicas de FA_n são álgebras associativas unitárias simples. Logo a decomposição dada acima é também uma decomposição de FA_n em álgebras unitárias simples.

Proposição 3.2.6. Seja $M_\lambda \subseteq I_\lambda$ um ideal minimal à esquerda de FS_n. Denotemos $d_\lambda = \dim M_\lambda$. Assim:

i) Se $\lambda \neq \lambda'$ então como álgebras, $\overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}} \cong M_{d_\lambda}(F)$. Em particular $I_\lambda \cong \overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}} \cong I_{\lambda'}$ como FA_n-módulos e como álgebras. Também temos $\overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}} = (I_\lambda \oplus I_{\lambda'}) \cap FA_n$.

ii) Se $\lambda = \lambda'$ então para $\epsilon =^+_-$ temos $\overline{I}_\lambda^\epsilon \cong M_{\frac{1}{2}d_\lambda}(F)$ como álgebras.

Demonstração:

i) Sabemos pelo corolário 1.2.33 que $\overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}} \cong M_d(F)$ como álgebras, onde $d = \dim J$ e J é um ideal minimal à esquerda de FA_n contido em $\overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}}$. Neste caso, J é também um FA_n-submódulo simples de FS_n e $\eta(J) = J \subseteq \overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}}$, então pelo teorema 3.2.3, $J \subseteq I_\lambda \oplus I_{\lambda'}$. Assim $\dim J = d_\lambda$ e portanto $\overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}} \cong M_{d_\lambda}(F) \cong I_\lambda \cong I_{\lambda'}$ como álgebras.

Agora observemos que $\eta : I_\lambda \longrightarrow \eta(I_\lambda) = \overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}}$ é sobrejetora e $\dim I_\lambda = \dim \overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}}$, logo η é isomorfismo. Como η é homomorfismo de FA_n-módulos então $\overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}} \cong I_\lambda$ como FA_n-módulos. Analogamente $\overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}} \cong I_{\lambda'}$ como FA_n-módulos.

Por fim, da proposição 3.1.5 temos $\overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}} = \eta(I_\lambda) = (I_\lambda \oplus I_{\lambda'}) \cap FA_n$.

ii) O resultado segue de modo análogo ao anterior. ■

Proposição 3.2.7. Se $\lambda = \lambda'$ então $\overline{I}_\lambda = \overline{I}_\lambda^+ \oplus \overline{I}_\lambda^-$. Além disso, para $\epsilon =^+_-$ temos $\overline{I}_\lambda^\epsilon = I_\lambda^\epsilon \cap FA_n$ e $\dim \overline{I}_\lambda^\epsilon = (\frac{1}{2}d_\lambda)^2$. Em particular, $\dim \overline{I}_\lambda = \frac{1}{2}\dim I_\lambda = \frac{1}{2}d_\lambda^2$.

Demonstração: Como η é linear então:

$$\overline{I}_\lambda = \eta(I_\lambda) = \eta(I_\lambda^+ \oplus I_\lambda^-) = \eta(I_\lambda^+) + \eta(I_\lambda^-) = \overline{I}_\lambda^+ \oplus \overline{I}_\lambda^-.$$

Se $x \in I_\lambda^\epsilon \cap FA_n$ então $2x = \eta(x) \in \eta(I_\lambda^\epsilon) = \overline{I}_\lambda^\epsilon$. Assim $x \in \overline{I}_\lambda^\epsilon$ e portanto $I_\lambda^\epsilon \cap FA_n \subseteq \overline{I}_\lambda^\epsilon$. Para provar que $\overline{I}_\lambda^\epsilon \subseteq I_\lambda^\epsilon \cap FA_n$ basta mostrar que $\overline{I}_\lambda^\epsilon \subseteq I_\lambda^\epsilon$, pois já temos $\overline{I}_\lambda^\epsilon \subseteq FA_n$. Seja $J_\lambda^\epsilon \subseteq \overline{I}_\lambda^\epsilon$ ideal minimal à esquerda de FA_n, então J_λ^ϵ é FA_n-submódulo simples de FS_n. Além disso, $\eta(J_\lambda^\epsilon) = J_\lambda^\epsilon \subseteq \overline{I}_\lambda^\epsilon$, então pelo teorema 3.2.3 temos $J_\lambda^\epsilon \subseteq I_\lambda^\epsilon$. Desta forma $\overline{I}_\lambda^\epsilon \subseteq I_\lambda^\epsilon$.

Pela proposição anterior temos $\overline{I}_\lambda^\epsilon \cong M_{\frac{1}{2}d_\lambda}(F)$, logo $\dim \overline{I}_\lambda^\epsilon = (\frac{1}{2}d_\lambda)^2$ e assim $\dim \overline{I}_\lambda = \dim(\overline{I}_\lambda^+ \oplus \overline{I}_\lambda^-) = 2(\frac{1}{2}d_\lambda)^2 = \frac{1}{2}d_\lambda^2$. ■

3.3 Os idempotentes centrais de FA_n

Seja e_λ o elemento identidade da álgebra unitária simples I_λ, então $e_\lambda^2 = e_\lambda$ e pela proposição 1.3.11, $e_\lambda \in Z(FS_n)$.

Lema 3.3.1. Sejam $e_\lambda \in I_\lambda$ e $e_{\lambda'} \in I_{\lambda'}$. Então $f(e_\lambda) = e_{\lambda'}$. Mais ainda:

i) Se $\lambda \neq \lambda'$, denotemos $e_{\{\lambda,\lambda'\}} = e_\lambda + e_{\lambda'}$, então $e_{\{\lambda,\lambda'\}} \in \overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}}$ é a unidade da álgebra simples $\overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}}$.

ii) Se $\lambda = \lambda'$ então $e_\lambda \in I_\lambda \cap FA_n = \overline{I}_\lambda$. Ademais, como $I_\lambda = I_\lambda^+ \oplus I_\lambda^-$ e $\overline{I}_\lambda = \overline{I}_\lambda^+ \oplus \overline{I}_\lambda^-$, então $e_\lambda = e_\lambda^+ + e_\lambda^-$ e $e_\lambda = \overline{e}_\lambda^+ + \overline{e}_\lambda^-$ onde para $\epsilon =^+_-$ temos $e_\lambda^\epsilon \in I_\lambda^\epsilon$ e $\overline{e}_\lambda^\epsilon \in \overline{I}_\lambda^\epsilon$. Assim $\overline{e}_\lambda^\epsilon$ é a unidade de $\overline{I}_\lambda^\epsilon$. Além disso, estas decomposições coincidem, isto é, $e_\lambda^\epsilon = \overline{e}_\lambda^\epsilon$.

Demonstração: Sabemos que f é isomorfismo de álgebras e que $f(I_\lambda) = I_{\lambda'}$. Assim existe $a \in I_\lambda$ tal que $f(a) = e_{\lambda'}$. Desta forma:

$$f(e_\lambda) = f(e_\lambda)e_{\lambda'} = f(e_\lambda)f(a) = f(e_\lambda a) = f(a) = e_{\lambda'}.$$

i) Se $\lambda \neq \lambda'$ então $e_{\{\lambda,\lambda'\}} = e_\lambda + e_{\lambda'} = \eta(e_\lambda) \in \overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}}$. Pela proposição 3.2.6, $\overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}} = (I_\lambda \oplus I_{\lambda'}) \cap FA_n$, assim se $x \in \overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}}$, então $x \in FA_n$ e existem $x_\lambda \in I_\lambda$, $x_{\lambda'} \in I_{\lambda'}$ tais que $x = x_\lambda + x_{\lambda'}$. Logo:

$$xe_{\{\lambda,\lambda'\}} = (x_\lambda + x_{\lambda'})(e_\lambda + e_{\lambda'}) = x_\lambda e_\lambda + x_\lambda e_{\lambda'} + x_{\lambda'} e_\lambda + x_{\lambda'} e_{\lambda'}.$$

Como $x_\lambda \in I_\lambda$ e e_λ é a unidade de I_λ então $x_\lambda e_\lambda = x_\lambda$. Analogamente $x_{\lambda'} e_{\lambda'} = x_{\lambda'}$. Sendo I_λ, $I_{\lambda'}$ ideais bilaterais, então $x_\lambda e_{\lambda'}, x_{\lambda'} e_\lambda \in I_\lambda \cap I_{\lambda'} = \{0\}$. Logo:

$$xe_{\{\lambda,\lambda'\}} = x_\lambda + x_{\lambda'} = x.$$

Analogamente $e_{\{\lambda,\lambda'\}}x = x$. Portanto $e_{\{\lambda,\lambda'\}}$ é a unidade de $\overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}}$.

ii) Se $\lambda = \lambda'$ então $f(e_\lambda) = e_{\lambda'} = e_\lambda$, logo $\eta(e_\lambda) = 2e_\lambda$ e assim $e_\lambda \in I_\lambda \cap FA_n = \overline{I}_\lambda$. Como $I_\lambda = I_\lambda^+ \oplus I_\lambda^-$ então existem $e_\lambda^+ \in I_\lambda^+$, $e_\lambda^- \in I_\lambda^-$ tais que $e_\lambda = e_\lambda^+ + e_{\lambda'}^-$. Da mesma forma, $\overline{I}_\lambda = \overline{I}_\lambda^+ \oplus \overline{I}_\lambda^-$, logo existem $\overline{e}_\lambda^+ \in \overline{I}_\lambda^+$, $\overline{e}_\lambda^- \in \overline{I}_\lambda^-$ tais que $e_\lambda = \overline{e}_\lambda^+ + \overline{e}_\lambda^-$. Se $x \in \overline{I}_\lambda^\epsilon$ então $x\overline{e}_\lambda^{-\epsilon} \in \overline{I}_\lambda^\epsilon \cap \overline{I}_\lambda^{-\epsilon} = \{0\}$, ademais pela proposição 3.2.7, $\overline{I}_\lambda^\epsilon = I_\lambda^\epsilon \cap FA_n \subseteq I_\lambda$, logo:

$$x = xe_\lambda = x\overline{e}_\lambda^\epsilon + x\overline{e}_\lambda^{-\epsilon} = x\overline{e}_\lambda^\epsilon.$$

Analogamente $\overline{e}_\lambda^\epsilon x = x$, logo $\overline{e}_\lambda^\epsilon$ é a unidade de $\overline{I}_\lambda^\epsilon$. Por fim, observemos que $\overline{e}_\lambda^\epsilon \in \overline{I}_\lambda^\epsilon = I_\lambda^\epsilon \cap FA_n$, logo $\overline{e}_\lambda^+ \in I_\lambda^+$, $\overline{e}_\lambda^- \in I_\lambda^-$. Como $\overline{e}_\lambda^+ + \overline{e}_\lambda^- = e_\lambda = e_\lambda^+ + e_\lambda^-$, e a decomposição de e_λ em elementos de I_λ^+ e I_λ^- é única, pois a soma destes subespaços é direta, então temos $\overline{e}_\lambda^\epsilon = e_\lambda^\epsilon$. ■

Proposição 3.3.2. Sejam $\lambda = \lambda'$ e $M_\lambda \subseteq I_\lambda$ um ideal minimal à esquerda de FS_n. Para $\epsilon =^+_-$ temos $e_\lambda^\epsilon M_\lambda \neq \{0\}$ e $e_\lambda^\epsilon M_\lambda \subseteq I_\lambda^\epsilon$. Assim as componentes isotípicas de FS_n, visto como FA_n-módulo, e de FA_n que correspondem a λ são dadas respectivamente por $I_\lambda^\epsilon = e_\lambda^\epsilon I_\lambda$ e $\overline{I}_\lambda^\epsilon = e_\lambda^\epsilon \overline{I}_\lambda$.

Demonstração: Sabemos que $M_\lambda = M_\lambda^+ \oplus M_\lambda^-$, onde $M_\lambda^\epsilon \subseteq I_\lambda^\epsilon$ é um FA_n-submódulo simples de FS_n. Pela proposição 1.2.24, existe J_λ^ϵ ideal minimal à esquerda de FA_n tal que $M_\lambda^\epsilon \cong J_\lambda^\epsilon$. Como $FA_n \subseteq FS_n$ então J_λ^ϵ é um FA_n-submódulo simples FS_n, e $M_\lambda^\epsilon \cong J_\lambda^\epsilon$, então devemos ter $J_\lambda^\epsilon \subseteq I_\lambda^\epsilon \cap FA_n = \overline{I}_\lambda^\epsilon$. Consideremos então $h : M_\lambda^\epsilon \cong J_\lambda^\epsilon$. Como $e_\lambda^\epsilon \in \overline{I}_\lambda^\epsilon = I_\lambda^\epsilon \cap FA_n$ então:

$$h(e_\lambda^\epsilon M_\lambda^\epsilon) = e_\lambda^\epsilon h(M_\lambda^\epsilon) = e_\lambda^\epsilon J_\lambda^\epsilon = J_\lambda^\epsilon \Longrightarrow e_\lambda^\epsilon M_\lambda^\epsilon = M_\lambda^\epsilon \neq \{0\}$$

Mas $M_\lambda^\epsilon \subseteq M_\lambda$, assim $e_\lambda^\epsilon M_\lambda^\epsilon \subseteq e_\lambda^\epsilon M_\lambda$. Portanto $e_\lambda^\epsilon M_\lambda \neq \{0\}$.

De modo análogo $M_\lambda^{-\epsilon} \cong J_\lambda^{-\epsilon}$, onde $J_\lambda^{-\epsilon}$ é ideal minimal à esquerda de FA_n e $J_\lambda^{-\epsilon} \subseteq \overline{I}_\lambda^{-\epsilon}$. Como $\overline{I}_\lambda^\epsilon$ é ideal bilateral, então $e_\lambda^\epsilon J_\lambda^{-\epsilon} \subseteq \overline{I}_\lambda^\epsilon$. Mas $J_\lambda^{-\epsilon}$ é ideal à esquerda de FA_n, logo $e_\lambda^\epsilon J_\lambda^{-\epsilon} \subseteq J_\lambda^{-\epsilon} \subseteq \overline{I}_\lambda^{-\epsilon}$. Portanto $e_\lambda^\epsilon J_\lambda^{-\epsilon} \subseteq \overline{I}_\lambda^\epsilon \cap \overline{I}_\lambda^{-\epsilon} = \{0\}$. Considerando $g : M_\lambda^{-\epsilon} \cong J_\lambda^{-\epsilon}$ temos $g(e_\lambda^\epsilon M_\lambda^{-\epsilon}) = e_\lambda^\epsilon g(M_\lambda^{-\epsilon}) = e_\lambda^\epsilon J_\lambda^{-\epsilon} = \{0\}$, logo $e_\lambda^\epsilon M_\lambda^{-\epsilon} = \{0\}$. Desta forma:

$$e_\lambda^\epsilon M_\lambda = e_\lambda^\epsilon (M_\lambda^\epsilon \oplus M_\lambda^{-\epsilon}) = (e_\lambda^\epsilon M_\lambda^\epsilon) + (e_\lambda^\epsilon M_\lambda^{-\epsilon}) = e_\lambda^\epsilon M_\lambda^\epsilon \subseteq I_\lambda^\epsilon$$

Com isso, $e_\lambda^\epsilon M_\lambda \subseteq I_\lambda^\epsilon$ para todo $M_\lambda \subseteq I_\lambda$ ideal minimal à esquerda de FS_n, logo $e_\lambda^\epsilon I_\lambda \subseteq I_\lambda^\epsilon$. Mas para todo $M_\lambda \subseteq I_\lambda$ ideal minimal à esquerda de FS_n, temos $M_\lambda = M_\lambda^+ \oplus M_\lambda^-$ onde $M_\lambda^\epsilon = e_\lambda^\epsilon M_\lambda^\epsilon = e_\lambda^\epsilon M_\lambda \subseteq e_\lambda^\epsilon I_\lambda$, logo $I_\lambda^\epsilon \subseteq e_\lambda^\epsilon I_\lambda$. Portanto $I_\lambda^\epsilon = e_\lambda^\epsilon I_\lambda$. E deste modo $\overline{I}_\lambda^\epsilon = \eta(I_\lambda^\epsilon) = \eta(e_\lambda^\epsilon I_\lambda) = e_\lambda^\epsilon \eta(I_\lambda) = e_\lambda^\epsilon \overline{I}_\lambda$. ■

Proposição 3.3.3. Seja $\lambda = \lambda'$. Para $\epsilon =^+_-$ temos:

i) $e_\lambda^\epsilon x = x$ se $x \in I_\lambda^\epsilon$ e $e_\lambda^\epsilon x = 0$ se $x \in I_\lambda^{-\epsilon}$.

ii) $x e_\lambda^\epsilon = e_\lambda^\epsilon x = x$ se $x \in \overline{I}_\lambda^\epsilon$ e $x e_\lambda^\epsilon = e_\lambda^\epsilon x = 0$ se $x \in \overline{I}_\lambda^{-\epsilon}$.

Demonstração:

i) Como $e_\lambda^\epsilon e_\lambda^{-\epsilon} \in \overline{I}_\lambda^\epsilon \cap \overline{I}_\lambda^{-\epsilon} = \{0\}$ e $I_\lambda^{-\epsilon} = e_\lambda^{-\epsilon} I_\lambda$, então $e_\lambda^\epsilon I_\lambda^{-\epsilon} = e_\lambda^\epsilon e_\lambda^{-\epsilon} I_\lambda = \{0\}$. Agora, se $x \in I_\lambda^\epsilon \subseteq I_\lambda$ então $x = e_\lambda x = e_\lambda^\epsilon x + e_\lambda^{-\epsilon} x = e_\lambda^\epsilon x$.

ii) Já demonstramos que e_λ^ϵ é a unidade de $\overline{I}_\lambda^\epsilon$, logo $xe_\lambda^\epsilon = e_\lambda^\epsilon x = x$ se $x \in \overline{I}_\lambda^\epsilon$. Agora se $x \in \overline{I}_\lambda^{-\epsilon}$ então $xe_\lambda^\epsilon, e_\lambda^\epsilon x \in \overline{I}_\lambda^\epsilon \cap \overline{I}_\lambda^{-\epsilon} = \{0\}$, logo $xe_\lambda^\epsilon = e_\lambda^\epsilon x = 0$. ∎

3.4 A decomposição de FA_n em ideais minimais à esquerda

Lema 3.4.1. Se $\lambda \vdash n$ e $T \in Tab_\lambda$, então $M_T = FS_n e_T = FA_n e_T$.

Demonstração: Claramente $FA_n e_T \subseteq M_T$. No caso de $\lambda = (1^n) \vdash n$ então $\dim M_T = \#Std_\lambda = 1$. Como $FA_n e_T \neq \{0\}$ então $\dim FA_n e_T = 1 = \dim M_T$, logo $FA_n e_T = M_T$. Caso $\lambda \neq (1^n)$ então $\lambda_1 \geq 2$. Sejam i, j elementos da primeira linha de T e consideremos a transposição $\tau = (i\,j)$, assim $\tau \in R_T$ e portanto $\tau e_T = \tau(R_T^+ C_T^-) = (\tau R_T^+) C_T^- = R_T^+ C_T^- = e_T$.

Seja $\sigma \in S_n \backslash A_n$, então $\sigma = (\sigma\tau)\tau$ onde $\sigma\tau \in A_n$, ou seja, $S_n \backslash A_n = A_n \tau$. Se $a \in FS_n$ então:

$$a = \sum_{\sigma \in S_n \backslash A_n} \alpha_\sigma \sigma + \sum_{\xi \in A_n} \beta_\xi \xi = \sum_{\rho \in A_n} \alpha_{\rho\tau} \rho\tau + \sum_{\xi \in A_n} \beta_\xi \xi \in FA_n\tau + FA_n.$$

Logo $FS_n \subseteq FA_n + FA_n \tau$ e portanto:

$$M_T = FS_n e_T \subseteq FA_n e_T + FA_n \tau e_T = FA_n e_T + FA_n e_T = FA_n e_T.$$

∎

Definição 3.4.2. Sejam $\lambda \vdash n$ e $T \in Tab_\lambda$. Denotemos $g_T = \eta(e_T) = e_T + e'_T$, onde $e_T = R_T^+ C_T^-$ e $e'_T = f(e_T) = R_T^- C_T^+$.

Lema 3.4.3. Seja $\lambda \vdash n$, $n \geq 2$, tal que $\lambda = \lambda'$. Se $T \in Tab_\lambda$ então para $\epsilon =^+_-$ temos $e_T^\epsilon g_T \neq 0$.

Demonstração: Suponhamos que $e_\lambda^\epsilon g_T = e_\lambda^\epsilon (e_T + e'_T) = 0$. Sendo $n \geq 2$ e λ autoconjugada, então $\lambda \neq (n)$, logo $l(\lambda) \geq 2$. Sejam i, j elementos da primeira coluna de T e consideremos $\tau = (i\,j)$, então $\tau \in C_T$. Multiplicando a equação $e^{\epsilon}_T(e_T + e'_T) = 0$ por $1 - \tau$ à direita temos:

$$e^{\epsilon}_{\lambda}(e_T + e'_T)(1-\tau) = 0 \Rightarrow e^{\epsilon}_{\lambda}R^+_T C^-_T + e^{\epsilon}_{\lambda}R^-_T C^+_T - e^{\epsilon}_{\lambda}R^+_T C^-_T\tau - e^{\epsilon}_{\lambda}R^-_T C^+_T\tau = 0$$

$$\Rightarrow e^{\epsilon}_{\lambda}R^+_T C^-_T + e^{\epsilon}_{\lambda}R^-_T C^+_T + e^{\epsilon}_{\lambda}R^+_T C^-_T - e^{\epsilon}_{\lambda}R^-_T C^+_T = 0 \Rightarrow 2e^{\epsilon}_{\lambda}R^+_T C^-_T = 0 \Rightarrow e^{\epsilon}_{\lambda}e_T = 0.$$

Pela proposição 3.3.2, $e^{\epsilon}_{\lambda}FA_n e_T = e^{\epsilon}_{\lambda}M_T \neq \{0\}$. Mas e^{ϵ}_{λ} é a unidade de $\overline{I}^{\epsilon}_{\lambda}$ então pela proposição 1.3.11, $e^{\epsilon}_{\lambda} \in Z(FA_n)$, assim $e^{\epsilon}_{\lambda}FA_n e_T = FA_n e^{\epsilon}_{\lambda}e_T = \{0\}$. Contradição! Logo $e^{\epsilon}_{\lambda}g_T \neq 0$. ■

Lema 3.4.4. Sejam $\lambda \vdash n$ autoconjugada e $T \in Tab_{\lambda}$. Então, $FA_n g_T$ é a soma direta de dois ideais à esquerda $FA_n g_T = FA_n e^+_{\lambda}g_T \oplus FA_n e^-_{\lambda}g_T$.

Demonstração: No lema anterior vimos que $e^{\epsilon}_T g_T \neq 0$, para $\epsilon =^+_-$, assim $FA_n e^+_{\lambda}g_T$ e $FA_n e^-_{\lambda}g_T$ são não nulos. Como $e^{\epsilon}_{\lambda} \in FA_n$ então $FA_n e^{\epsilon}_{\lambda}g_T \subseteq FA_n g_T$, desta forma $FA_n e^+_{\lambda}g_T + FA_n e^-_{\lambda}g_T \subseteq FA_n g_T$. Sendo $g_T = \eta(e_T) \in \overline{I}_{\lambda} = I_{\lambda} \cap FA_n$ e e_{λ} a unidade de I_{λ}, temos $g_T = e_{\lambda}g_T = e^+_{\lambda}g_T + e^-_{\lambda}g_T$, e assim:

$$FA_n g_T = FA_n(e^+_{\lambda}g_T + e^-_{\lambda}g_T) \subseteq FA_n e^+_{\lambda}g_T + FA_n e^-_{\lambda}g_T.$$

Portanto $FA_n g_T = FA_n e^+_{\lambda}g_T + FA_n e^-_{\lambda}g_T$. Mas $g_T \in FA_n$ e $\overline{I}^{\epsilon}_{\lambda}$ é ideal bilateral de FA_n, logo $FA_n e^{\epsilon}_{\lambda}g_T \subseteq \overline{I}^{\epsilon}_{\lambda}$ e $FA_n e^+_{\lambda}g_T \cap FA_n e^-_{\lambda}g_T \subseteq \overline{I}^+_{\lambda} \cap \overline{I}^-_{\lambda} = \{0\}$. Desta forma $FA_n e^+_{\lambda}g_T \cap FA_n e^-_{\lambda}g_T = \{0\}$ e portanto $FA_n g_T = FA_n e^+_{\lambda}g_T \oplus FA_n e^-_{\lambda}g_T$ ■

Sejam $\lambda \vdash n$ autoconjugada e $T_1, \cdots, T_m$ os tableaux de Std_{λ} tais que 1, 2 pertencem a primeira coluna. Para $i = 1, \cdots, m$ definamos T'_i o tableau obtido da conjugação de T_i. Como $T_i \in Std_{\lambda}$, logo é crescente nas linhas e nas colunas, então T'_i também é crescente nas linhas e colunas, assim $T'_i \in Std_{\lambda}$. Ademais, T'_i é um tableau que possui 1, 2 na primeira linha. Como todos os tableaux Standard tem 1, 2 na primeira linha ou na primeira coluna, vemos que o conjunto de todos os tableaux T_i e T'_i é igual ao conjunto de todos os tableaux Standard de λ, e neste caso $d_{\lambda} = 2m$.

Lema 3.4.5. Seja $\lambda \vdash n$, $n \geq 2$.

i) Se λ é autoconjugada, então a seguinte soma de ideais à esquerda de FA_n é direta:

$$\sum_{i=1}^{m} FA_n g_{T_i} = \bigoplus_{i=1}^{m} FA_n g_{T_i}.$$

Onde $m = \frac{1}{2}d_\lambda$ e $T_1, \cdots, T_m$ os tableuaux Standard de λ que tem 1, 2 na primeira coluna.

ii) Se λ não é autoconjugada, então a seguinte soma de ideais à esquerda de FA_n é direta:

$$\sum_{T \in Std_\lambda} FA_n g_T = \bigoplus_{T \in Std_\lambda} FA_n g_T.$$

Demonstração:

i) Suponhamos que $\sum_{i=1}^{m} a_i g_{T_i} = 0$, $a_i \in FA_n$. Multiplicando a equação por $1 - (1\,2)$ à direita temos:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{m} a_i g_{T_i}(1 - (1\,2)) \\
&= \sum_{i=1}^{m} a_i(R_{T_i}^{+}C_{T_i}^{-} + R_{T_i}^{-}C_{T_i}^{+} - R_{T_i}^{+}C_{T_i}^{-}(1\,2) - R_{T_i}^{-}C_{T_i}^{+}(1\,2)) \\
&= \sum_{i=1}^{m} a_i(R_{T_i}^{+}C_{T_i}^{-} + R_{T_i}^{-}C_{T_i}^{+} + R_{T_i}^{+}C_{T_i}^{-} - R_{T_i}^{-}C_{T_i}^{+}) \\
&= 2\sum_{i=1}^{m} a_i e_{T_i}.
\end{aligned}$$

Como $\mathrm{Car}(F) \neq 2$ então $\sum_{i=1}^{m} a_i e_{T_i} = 0$. Porém, para todo $i = 1, \cdots, m$, temos $a_i e_{T_i} \in FA_n e_{T_i} = M_{T_i}$, e a soma dos M_{T_i}'s é direta, logo $a_i e_{T_i} = 0$, para todo $i = 1, \cdots, m$. Desta forma, para todo $i = 1, \cdots, m$, temos $a_i g_{T_i} = \eta(a_i e_{T_i}) = 0$. Assim segue o resultado.

ii) Se $\lambda \neq \lambda'$ então para todo $T \in Std_\lambda$ temos $e_\lambda g_T = e_\lambda(e_T + e'_T)$. Como $e_\lambda \in I_\lambda$ e $e'_T = f(e_T) \in I_{\lambda'}$, então $e_\lambda e'_T \in I_\lambda \cap I_{\lambda'} = \{0\}$. Assim $e_\lambda g_T = e_\lambda e_T = e_T$. Supondo $\sum_{T \in Std_\lambda} a_T g_T = 0$, $a_T \in FA_n$, e multiplicando a equação à esquerda por $e_\lambda \in Z(FA_n)$ temos:

$$0 = \sum_{T \in Std_\lambda} e_\lambda a_T g_T = \sum_{T \in Std_\lambda} a_T e_\lambda g_T = \sum_{T \in Std_\lambda} a_T e_T.$$

Como para todo $T \in Std_\lambda$ temos $a_T e_T \in M_T$, e pelo lema 2.3.21 a soma dos M_T's é direta, então $a_T e_T = 0$. Assim, para todo $T \in Std_\lambda$ temos $a_T g_T = \eta(a_T e_T) = 0$. Portanto segue o resultado. ■

Teorema 3.4.6. Seja $\lambda \vdash n$. Com as notações adotadas no teorema 3.2.4 temos:

i) Se λ não é autoconjugada então $\overline{I}_{\{\lambda, \lambda'\}}$ se decompõem em uma soma direta do seguinte modo:

$$\overline{I}_{\{\lambda, \lambda'\}} = \bigoplus_{T \in Std_\lambda} FA_n g_T$$

Ademais, para todo $T \in Std_\lambda$ temos que $FA_n g_T$ é ideal minimal à esquerda de FA_n.

ii) Se λ é autoconjugada e $T_1, \cdots, T_m$ são todos os tableaux de Std_λ que tem 1, 2 como elementos da primeira coluna, então para $\epsilon =^{+}_{-}$ temos que $\overline{I}^{\epsilon}_{\lambda}$ se decompõem em uma soma direta da seguinte forma:

$$\overline{I}^{\epsilon}_{\lambda} = \bigoplus_{i=1}^{m} FA_n e^{\epsilon}_{\lambda} g_{T_i}$$

Ademais, para todo $i = 1, \cdots, m$ temos que $FA_n e^{\epsilon}_{\lambda} g_{T_i}$ é ideal minimal à esquerda de FA_n.

Demonstração:

i) Como $\lambda \neq \lambda'$ então para todo $T \in Std_\lambda$, M_T é um FA_n-submódulo simples de FS_n. Pelo lema 3.4.1, $M_T = FA_n e_T$, e como η é homomorfismo de FA_n-módulos então $\eta(M_T) = \eta(FA_n e_T) = FA_n \eta(e_T) = FA_n g_T$, assim $\eta(M_T) \neq \{0\}$, e portanto $\eta : M_T \longrightarrow FA_n g_T$ é isomorfismo de FA_n-módulos, logo $FA_n g_T$ é FA_n-módulo simples, ou seja, ideal minimal à esquerda de FA_n. Além disso, $I_\lambda = \bigoplus_{T \in Std_\lambda} M_T$, logo:

$$\overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}} = \eta(I_\lambda) = \eta\left(\bigoplus_{T \in Std_\lambda} M_T\right) = \sum_{T \in Std_\lambda} \eta(M_T) = \sum_{T \in Std_\lambda} FA_n g_T = \bigoplus_{T \in Std_\lambda} FA_n g_T.$$

ii) Como vimos acima, para todo $i = 1, \cdots, m$ temos $\eta(M_{T_i}) = FA_n g_{T_i}$. Sabemos também que $\bigoplus_{i=1}^{m} M_{T_i} \subseteq I_\lambda$, assim:

$$\bigoplus_{i=1}^{m} FA_n g_{T_i} = \eta\left(\bigoplus_{i=1}^{m} M_{T_i}\right) \subseteq \eta(I_\lambda) = \overline{I}_\lambda.$$

Mas pelo lema 3.4.4, temos para todo $i = 1, \cdots, m$, $FA_n g_{T_i} = FA_n e_\lambda^+ g_{T_i} \oplus FA_n e_\lambda^- g_{T_i}$, logo:

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{m} FA_n e_\lambda^+ g_{T_i}\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{m} FA_n e_\lambda^- g_{T_i}\right) \subseteq \overline{I}_\lambda.$$

Recordando que e_λ^ϵ é unidade de $\overline{I}_\lambda^\epsilon$ então $(e_\lambda^\epsilon)^2 = e_\lambda^\epsilon$, $e_\lambda^\epsilon e_\lambda^{-\epsilon} = 0$ e $e_\lambda^\epsilon \in Z(FA_n)$, assim:

- $e_\lambda^\epsilon \bigoplus_{i=1}^{m} FA_n e_\lambda^\epsilon g_{T_i} = \bigoplus_{i=1}^{m} e_\lambda^\epsilon FA_n e_\lambda^\epsilon g_{T_i} = \bigoplus_{i=1}^{m} FA_n (e_\lambda^\epsilon)^2 g_{T_i} = \bigoplus_{i=1}^{m} FA_n e_\lambda^\epsilon g_{T_i}$.
- $e_\lambda^\epsilon \bigoplus_{i=1}^{m} FA_n e_\lambda^{-\epsilon} g_{T_i} = \bigoplus_{i=1}^{m} e_\lambda^\epsilon FA_n e_\lambda^{-\epsilon} g_{T_i} = \bigoplus_{i=1}^{m} FA_n e_\lambda^\epsilon e_\lambda^{-\epsilon} g_{T_i} = \{0\}$.

Recordemos ainda que $\overline{I}_\lambda^\epsilon = e_\lambda^\epsilon \overline{I}$, assim:

$$e_\lambda^\epsilon\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{m} FA_n e_\lambda^\epsilon g_{T_i}\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{m} FA_n e_\lambda^{-\epsilon} g_{T_i}\right)\right) \subseteq e_\lambda^\epsilon \overline{I}_\lambda = \overline{I}_\lambda^\epsilon.$$

$$\Longrightarrow e_\lambda^\epsilon \bigoplus_{i=1}^{m} FA_n e_\lambda^\epsilon g_{T_i} + e_\lambda^\epsilon \bigoplus_{i=1}^{m} FA_n e_\lambda^{-\epsilon} g_{T_i} \subseteq \overline{I}_\lambda^\epsilon.$$

$$\Longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{m} FA_n e_\lambda^\epsilon g_{T_i} \subseteq \overline{I}_\lambda^\epsilon.$$

Pelo lema 3.4.3, $e_\lambda^\epsilon g_{T_i} \neq 0$ para todo $i = 1, \cdots, m$, assim $FA_n e_\lambda^\epsilon g_{T_i}$ é ideal à esquerda não nulo, e portanto existe J_i ideal minimal à esquerda de FA_n, tal que $J_i \subseteq FA_n e_\lambda^\epsilon g_{T_i} \subseteq \overline{I}_\lambda^\epsilon$. Pela proposição 3.2.6 temos $\dim J_i = \frac{1}{2} d_\lambda$, logo, se considerarmos $\dim FA_n e_\lambda^\epsilon g_{T_i} = d_i$ temos $d_i \geq \frac{1}{2} d_\lambda$. Ademais $\bigoplus_{i=1}^{m} FA_n e_\lambda^\epsilon g_{T_i} \subseteq \overline{I}_\lambda^\epsilon$ e $\dim \overline{I}_\lambda^\epsilon \geq \dim \bigoplus_{i=1}^{m} FA_n e_\lambda^\epsilon g_{T_i}$, ou seja:

$$(\frac{1}{2} d_\lambda)^2 \geq d_1 + \cdots + d_m \geq (\frac{1}{2} d_\lambda) m = (\frac{1}{2} d_\lambda)^2.$$

Portanto $\dim \overline{I}_\lambda^\epsilon = \dim \bigoplus_{i=1}^{m} FA_n e_\lambda^\epsilon g_{T_i} = (\frac{1}{2}d_\lambda)^2$, e assim $\bigoplus_{i=1}^{m} FA_n e_\lambda^\epsilon g_{T_i} = \overline{I}_\lambda^\epsilon$. Além disso, para todo $i = 1, \cdots, m$ devemos ter $d_i = \frac{1}{2}d_\lambda$, logo $FA_n e_\lambda^\epsilon g_{T_i} = J_i$, portanto $FA_n e_\lambda^\epsilon g_{T_i}$ é ideal minimal à esquerda de FA_n.

■

Lema 3.4.7. Seja $T \in Tab_\lambda$. Então $\dim FA_n g_T = d_\lambda$.

Demonstração: Se $\lambda \neq \lambda'$ então $\eta : M_T \longrightarrow FA_n g_T$ é isomorfismo, logo $\dim FA_n g_T = \dim M_T = d_\lambda$.

Se $\lambda = \lambda'$, sejam $T_1, \cdots, T_m$ todos os tableaux de Std_λ que tem $1, 2$ como elementos da primeira coluna. Para $i = 1, \cdots, m$ temos $FA_n g_{T_i} = FA_n e_\lambda^+ g_{T_i} \oplus FA_n e_\lambda^- g_{T_i}$, onde pelo teorema anterior, $\dim FA_n e_\lambda^+ g_{T_i} = \dim FA_n e_\lambda^- g_{T_i} = \frac{1}{2}d_\lambda$, logo $\dim FA_n g_{T_i} = 2(\frac{1}{2}d_\lambda) = d_\lambda$.

Como para todo $T \in Tab_\lambda$ existe $\sigma \in S_n$ tal que $\sigma T_1 = T$ então:

$$\begin{aligned} g_T &= \eta(e_T) = \eta(\sigma e_{T_1} \sigma^{-1}) \\ &= \sigma e_{T_1} \sigma^{-1} + (-1)^\sigma \sigma f(e_{T_1})(-1)^{\sigma^{-1}} \sigma^{-1} \\ &= \sigma e_{T_1} \sigma^{-1} + \sigma f(e_{T_1}) \sigma^{-1} \\ &= \sigma(e_{T_1} + f(e_{T_1}))\sigma^{-1} \\ &= \sigma \eta(e_{T_1}) \sigma^{-1} \\ &= \sigma g_{T_1} \sigma^{-1}. \end{aligned}$$

Ademais, $\sigma FA_n \sigma^{-1} = FA_n$, logo $FA_n g_T = (\sigma FA_n \sigma^{-1})\sigma g_{T_1} \sigma^{-1} = \sigma FA_n g_{T_1} \sigma^{-1}$. Definamos:

$$\begin{aligned} S: \quad & FA_n g_{T_1} \longrightarrow FA_n g_T \\ & x \mapsto \sigma x \sigma^{-1} \end{aligned}$$

Um cálculo direto mostra que S é isomorfismo de espaços vetoriais, logo $\dim FA_n g_T = \dim FA_n g_{T_1} = d_\lambda$. ■

Proposição 3.4.8. Sejam $\lambda \vdash n$, $T \in Tab_\lambda$ e $M_\lambda \subseteq I_\lambda$ um ideal minimal à esquerda de FS_n. Temos:

i) $M_\lambda \cong FA_n g_T$ como FA_n-módulos.

ii) $FS_ng_T = FS_ne_T \oplus FS_ne'_T$. Em particular, $\dim FS_ng_T = 2d_\lambda$.

Demonstração:

i) Como $M_\lambda \subseteq I_\lambda$ então $M_\lambda \cong M_T$ como FS_n-módulos, e portanto também como FA_n-módulos. Mas $\eta(M_T) = FA_ng_T$ e pelo lema anterior $\dim M_T = \dim FA_ng_T$, logo $M_T \cong FA_ng_T$ como FA_n-módulos via η. Desta forma $M_\lambda \cong M_T \cong FA_ng_T$ como FA_n-módulos.

ii) Afirmação: Para todo L ideal à esquerda de FA_n temos $FS_nL = L \oplus (1\,2)L$. Em particular, $\dim FS_nL = 2\dim L$.

De fato, se $x \in FS_nL$ então $x = ay$, $a \in FS_n$, $y \in L$. Como $S_n \backslash A_n = (1\,2)A_n$ logo podemos escrever $a = \sum_{\tau\in A_n} \alpha_\tau(1\,2)\tau + \sum_{\sigma\in A_n} \beta_\sigma\sigma$, $\alpha_\tau, \beta_\sigma \in F$, e assim,

$$x = \sum_{\tau\in A_n} \alpha_\tau(1\,2)\tau y + \sum_{\sigma\in A_n} \beta_\sigma\tau y \in (1\,2)L + L.$$

Logo $FS_nL \subseteq L + (1\,2)L$, mas a outra inclusão é trivial, assim $FS_nL = L + (1\,2)L$. Mas é também trivial que $L \cap (1\,2)L = \{0\}$, portanto $FS_nL = L \oplus (1\,2)L$.

Além disso, definindo:

$$\begin{aligned} S: \quad L &\longrightarrow (1\,2)L \\ x &\mapsto (1\,2)x \end{aligned}$$

Vemos que S é isomorfismo de espaços vetoriais, logo $\dim L = \dim(1\,2)L$ e portanto $\dim FS_nL = 2\dim L$.

Agora vejamos, $FS_ng_T = FS_n \cdot FA_ng_T$, e pela afirmação acima, $\dim FS_ng_T = \dim(FS_n \cdot FA_ng_T) = 2\dim FA_ng_T = 2d_\lambda$. Além disso, temos $FS_ng_T = FS_n(e_T + e'_T) \subseteq FS_ne_T + FS_ne'_T$, logo $2d_\lambda \leq \dim(FS_ne_T + FS_ne'_T)$. Como $FS_ne_T = M_T$ então $\dim FS_ne_T = d_\lambda$. Ademais f é isomorfismo de álgebras e $f(FS_ne_T) = FS_ne'_T$, logo $\dim FS_ne'_T = \dim FS_ne_T = d_\lambda$. Portanto $\dim(FS_ne_T + FS_ne'_T) \leq \dim(FS_ne_T) + \dim(FS_ne'_T) = 2d_\lambda$. Desta forma $\dim FS_ng_T = \dim(FS_ne_T + FS_ne'_T) = \dim(FS_ne_T) + \dim(FS_ne'_T) = 2d_\lambda$, o que nos dá $FS_ne_T \cap FS_ne'_T = \{0\}$ e $FS_ng_T = FS_ne_T \oplus FS_ne'_T$. ■

Capítulo 4

Conjectura de Henke e Regev

Definição 4.0.9. Um elemento $e \in FS_n$ é dito um *idempotente primitivo* se, $e^2 = e$ e $FS_n e$ for um FS_n-módulo irredutível.

Em nossa primeira referência, o artigo *Explicit decompositions of the group algebras* FS_n *and* FA_n, os autores A. Henke e A. Regev apresentaram a seguinte conjectura:

Conjectura 4.0.10. Para todo idempotente primitivo $e \in FS_n$, temos:

a) $FS_n e = FA_n e$;

b) $\eta(FS_n e) \cong FA_n \eta(e)$;

c) $\dim FS_n \eta(e) = 2 \dim FS_n e$.

Vamos explorar um pouco mais esta conjectura.

Lema 4.0.11. Seja $e \in FS_n$ tal que $FS_n e = FA_n e$, então $\eta(FS_n E) = FA_n \eta(e)$.

Demonstração: De fato, se $FS_n e = FA_n e$, então $\eta(FS_n E) = \eta(FA_n e)$. Mas η é homomorfismo de FA_n-módulos, logo $\eta(FS_n E) = \eta(FA_n e) = FA_n \eta(e)$. ■

Observemos que se $e \in FS_n$ é idempotente primitivo, então $FS_n e$ é FS_n-módulo irredutível, portanto existe um $\lambda \vdash n$ tal que $FS_n e \cong M_T$, onde $T \in Tab_\lambda$.

Vamos demonstrar um caso particular da conjectura.

Lema 4.0.12. Seja $e \in FS_n$ um idempotente primitivo tal que $FS_ne \cong M_T$, onde $T \in Tab_\lambda$, $\lambda \vdash n$. Se $\lambda \neq \lambda'$, temos:

a) $FS_ne = FA_ne$;

b) $\eta(FS_ne) \cong FA_n\eta(e)$;

c) $\dim FS_n\eta(e) = 2\dim FS_ne$.

Demonstração:

a) Se $\lambda \neq \lambda'$ então M_T é FA_n-módulo irredutível. Sendo $FS_ne \cong M_T$ como FS_n-módulos, então, em particular, $FS_ne \cong M_T$ como FA_n-módulos, assim FS_ne é também FA_n-módulo irredutível. Mas FA_ne é FA_n-submódulo de FS_ne, e $FA_ne \neq \{0\}$, logo $FA_ne = FS_ne$.

b) Segue do item a e do lema anterior.

c) É fácil ver que $FS_n\eta(e) = FS_n \cdot FA_n\eta(e)$, assim pela demonstração da proposição 3.4.8, $\dim FS_n\eta(e) = 2\dim FA_n\eta(e)$.

Como $FS_ne \cong M_T$, temos pelo teorema 1.1.21, $FS_ne \subseteq I_\lambda$. Recordando que $f(I_\lambda) = I_{\lambda'}$ e que $I_\lambda + I_{\lambda'} = I_\lambda \oplus I_{\lambda'}$, então $\eta(e) = e + f(e) \neq 0$. Logo $\eta(FS_ne) = FA_n\eta(e) \neq \{0\}$. Considerando $\eta : FS_ne \longrightarrow FA_n\eta(e)$, temos que η é sobrejetora. Ademais, $\operatorname{Ker}\eta$ é FA_n-submódulo de FS_ne, e $\operatorname{Ker}\eta \neq FS_ne$. Como FS_ne é irredutível, então $\operatorname{Ker}\eta = \{0\}$. Logo η é isomorfismo e $FS_ne \cong FA_n\eta(e)$.

Portanto:

$$\dim FS_n\eta(e) = 2\dim FA_n\eta(e) = 2\dim FS_ne.$$

■

Este lema prova um caso particular da conjectura acima referida.

Capítulo 5

As A-codimensões da Álgebra de Grassmann

5.1 Introdução à teoria das PI-álgebras

Definição 5.1.1. Seja $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$ um conjunto infinito e enumerável de variáveis. Denotamos por $F\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre com unidade, que tem uma base formada por 1 e pelas palavras $x_{i1} \cdots x_{in}$, $x_{ij} \in X$, $n \in \mathbb{N}$, com multiplicação definida por:

$$(x_{i1} \cdots x_{im})(x_{j1} \cdots x_{jm}) = x_{i1} \cdots x_{in} x_{j1} \cdots x_{jm}.$$

Definição 5.1.2. Seja A uma álgebra e $f = f(x_1, \cdots, x_n) \in F\langle X\rangle$. Diremos que f é uma *identidade polinomial* para A se $f(a_1, \cdots, a_n) = 0$, para quaisquer $a_1, \cdots, a_n \in A$. No caso de f ser um elemento não nulo de $F\langle X\rangle$, então diremos que A é uma *PI-álgebra*.

Exemplo 5.1.3. Seja A uma álgebra comutativa, então para todo a_1, $a_2 \in A$ temos $a_1a_2 = a_2a_1$. Consideremos o polinômio $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1 \in F\langle X\rangle$, que chamaremos de *comutador duplo*. É trivial ver que $[a_1, a_2] = 0$, ou seja, $[x_1, x_2]$ é uma identidade polinomial para A.

Exemplo 5.1.4. Seja $s_n(x_1, \cdots, x_n) \in F\langle X\rangle$ definido da seguinte forma:

$$s_n(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\sigma} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}.$$

O polinômio acima definido é conhecido como *polinômio Standard* de grau n. Podemos facilmente observar que s_n é multilinear e possui a seguinte propriedade:

"Se $x_{i1} \cdots x_{ij} \cdots x_{it} \cdots x_{in}$ aparece em s_n com coeficiente ± 1, então $x_{i1} \cdots x_{it} \cdots x_{ij} \cdots x_{in}$ aparece em s_n com coeficiente ∓ 1."

Se A é uma álgebra de dimensão finita com $\dim A = m < n$, então s_n é uma identidade polinomial para A.

De fato, seja $B = \{e_1, \cdots, e_m\}$ uma base para A. Escolhendo $e_{i1}, \cdots, e_{in}$ em B então como $m < n$, pelo menos um deles se repete. Assim pela propriedade de s_n acima referida, vemos que $s_n(e_{i1}, \cdots, e_{in}) = 0$. Mas s_n é multilinear, logo $s_n(a_1, \cdots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, \cdots, a_n \in A$, ou seja, s_n é identidade polinomial para A.

Exemplo 5.1.5. Em 1950 Amitsur e Levitzki publicaram o artigo *Minimal identities for algebras*, onde demonstraram o seguinte resultado:

"O polinômio Standard de grau $2n$ é uma identidade polinomial para a álgebra $M_n(F)$, das matrizes de ordem n."

Este famoso resultado é conhecido como o *Teorema de Amitsur-Levitzki*, e é considerado um marco na Teoria de PI-álgebras.

Definição 5.1.6. Um ideal bilateral I de $F\langle X\rangle$ é dito um *T-ideal* se, $f(g_1, \cdots, g_n) \in I$ para todo $f(x_1, \cdots, x_n) \in I$, $g_1, \cdots, g_n \in F\langle X\rangle$. Ou seja, I é um T-ideal se for invariante por endomorfismos de $F\langle X\rangle$.

Proposição 5.1.7. Seja A uma álgebra e consideremos $T(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais de A. Então $T(A)$ é um T-ideal.

Demonstração: Um cálculo direto nos mostra que $T(A)$ é um ideal de $F\langle X\rangle$. Sejam $f(x_1, \cdots, x_k) \in T(A)$, $g_1(x_{11}, \cdots, x_{1n_1}), \cdots, g_k(x_{k1}, \cdots, x_{kn_k}) \in F\langle X\rangle$ e, para $j = 1, \cdots, k$, sejam $a_{j1}, \cdots, a_{jn_j} \in A$. Como $b_j := g_j(a_{j1}, \cdots, a_{jn_j}) \in A$, então:

$$f(g_1(a_{11}, \cdots, a_{1n_1}), \cdots, g_k(a_{k1}, \cdots, a_{kn_k})) = f(b_1, \cdots, b_n) = 0.$$

Logo $f(g_1, \cdots, g_k) \in T(A)$. Como $f, g_1, \cdots, g_k$ são quaisquer, temos que $T(A)$ é T-ideal. ■

Definição 5.1.8. Pode ser mostrado que a interseção de uma família qualquer de T-ideais de $F\langle X\rangle$ é ainda um T-ideal. Logo, dado um subconjunto S qualquer de $F\langle X\rangle$, podemos definir o *T-ideal gerado* por S, denotado por $\langle S\rangle^T$, como sendo a interseção de todos os T-ideais de $F\langle X\rangle$ que contém S. Assim, $\langle S\rangle^T$ é o menor T-ideal de $F\langle X\rangle$ que contém S.

Proposição 5.1.9. Seja S um subconjunto qualquer de $F\langle X\rangle$. Então $\langle S\rangle^T$ é formado por combinações lineares de elementos do tipo:

$$pf(g_1, \cdots, g_n)h \quad (*)$$

onde p, g_1, $\cdots$, g_n, $h \in F\langle X\rangle$ e $f \in S$.

Demonstração: Seja J o conjunto formando pelas combinações lineares de elementos como em $(*)$. É fácil notar que J é T-ideal de $F\langle X\rangle$ e que $S \subseteq J$, logo $\langle S\rangle^T \subseteq J$. Agora, para todo elemento $pf(g_1, \cdots, g_n)h$ como em $(*)$ temos $pf(g_1, \cdots, g_n)h \in \langle S\rangle^T$. Mas $\langle S\rangle^T$ é ideal, logo todas as combinações lineares de elementos do tipo $(*)$ estão em $\langle S\rangle^T$, ou seja, $J \subseteq \langle S\rangle^T$. ■

Definição 5.1.10. Sejam S um subconjunto de $F\langle X\rangle$. Dizemos que $f \in F\langle X\rangle$ é uma *consequência* dos polinômios de S (ou que f *segue* dos polinômios de S) se $f \in \langle S\rangle^T$.

Pela proposição anterior, $f \in F\langle X\rangle$ é uma consequência de S se, e somente se, f é combinação linear de elementos do tipo $pf(g_1, \cdots, g_n)h$, onde p, g_1, $\cdots$, g_n, $h \in F\langle X\rangle$ e $f \in S$.

Definição 5.1.11. Seja $m = m(x_1, \cdots, x_n)$ um monômio em $F\langle X\rangle$. Para $i = 1, \cdots, n$, se x_i aparece d_i vezes em m, então definimos o *multigrau* de m como sendo $(d_1, \cdots, d_n)$. Dizemos que $f = f(x_1, \cdots, x_n)$ é um polinômio *multi-homogêneo* de multigrau $(d_1, \cdots, d_n)$ se f é uma combinação linear de monômios com multigrau $(d_1, \cdots, d_n)$. Em particular, se $f = f(x_1, \cdots, x_n)$ é um polinômio multi-homogêneo de multigrau $(1, \cdots, 1)$ então dizemos que f é *multilinear*.

Exemplo 5.1.12. O polinômio $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_1x_3x_1+x_1^3x_3x_2$ é multi-homogêneo de multigrau $(3, 1, 1)$. Já o polinômio Standard,

$$s_n(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$$

é multilinear.

Definição 5.1.13. Dois conjuntos de polinômios são *equivalentes* se eles geram o mesmo T-ideal.

Teorema 5.1.14. Seja F um corpo infinito. Para todo $f = f(x_1, \cdots, x_n) \in F\langle X\rangle$ temos que $\{f\}$ e $\{f_{d_1,\cdots,d_n}; d_1, \cdots, d_n \geq 0\}$ são equivalentes, onde $f_{d_1,\cdots,d_n}$ é a componente multi-homogênea de multigrau $(d_1, \cdots, d_n)$ de f.

Demonstração: Seja m_1 o maior número de vezes que x_1 aparece em um monônio de f. Escrevendo $f = f_0 + \cdots + f_{m_1}$, sendo f_i a componente de f formada pelos monômios onde x_1 aparece exatamente i vezes. Desta forma $f \in \langle f_0, \cdots, f_{m_1}\rangle^T$ e $\langle f\rangle^T \subseteq \langle f_0, \cdots, f_{m_1}\rangle^T$.

Como F é infinito, existem $\alpha_0, \cdots, \alpha_{m_1}$ elementos distintos de F. Desta forma:

$$\begin{array}{rcl} f(\alpha_0 x_1, x_2, \cdots, x_n) & = & \alpha_0^0 f_0 + \alpha_0^1 f_1 + \cdots + \alpha_0^{m_1} f_{m_1} \\ f(\alpha_1 x_1, x_2, \cdots, x_n) & = & \alpha_1^0 f_0 + \alpha_1^1 f_1 + \cdots + \alpha_1^{m_1} f_{m_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f(\alpha_{m_1} x_1, x_2, \cdots, x_n) & = & \alpha_{m_1}^0 f_0 + \alpha_{m_1}^1 f_1 + \cdots + \alpha_{m_1}^{m_1} f_{m_1}. \end{array}$$

Em forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} f(\alpha_0 x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ f(\alpha_1 x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f(\alpha_{m_1} x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_0^1 & \cdots & \alpha_0^{m_1} \\ 1 & \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_1^{m_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_{m_1}^1 & \cdots & \alpha_{m_1}^{m_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{m_1} \end{bmatrix}.$$

Definindo,

$$V := \begin{bmatrix} 1 & \alpha_0^1 & \cdots & \alpha_0^{m_1} \\ 1 & \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_1^{m_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_m^1 & \cdots & \alpha_{m_1}^{m_1} \end{bmatrix}$$

vemos que V é uma matriz de Vandermond cujo determinante é dado por:

$$\det V = \prod_{0 \leq j < i \leq m_1} (\alpha_i - \alpha_j) \neq 0.$$

Logo V é uma matriz invertível e portanto:

$$V^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f(\alpha_0 x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ f(\alpha_1 x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f(\alpha_{m_1} x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{m_1} \end{bmatrix}.$$

Desta forma $f_0, \cdots, f_{m_1}$ são combinações lineares de $f(\alpha_0 x_1, x_2, \cdots, x_{m_1}), \cdots,$ $f(\alpha_{m_1} x_1, x_2, \cdots, x_{m_1})$, e assim $f_0, \cdots, f_{m_1} \in \langle f \rangle^T$. Logo $\langle f_0, \cdots, f_{m_1} \rangle^T \subseteq \langle f \rangle^T$.

Para cada $i = 1, \cdots, m_1$, seja $f_i = f_{i0} + \cdots + f_{im_{2i}}$, onde m_{2i} é o maior número de vezes que x_2 aparece em f_i, e f_{ij} é a componente de f_i formada pelos monômios onde a variável x_2 aparece exatamente j vezes. Usando o mesmo argumento temos $\langle f_{i0} \cdots, f_{im_{2i}} \rangle^T = \langle f_i \rangle^T$, e assim :

$$\langle f \rangle^T = \langle f_{00}, \cdots, f_{0m_{20}}, \cdots, f_{m_1 0} \cdots, f_{m_1 m_{2m_1}} \rangle^T.$$

Repetindo este argumento, ao final de n passos, onde n é número de variáveis de f, temos o resultado esperado. ■

Corolário 5.1.15. Seja I um T-ideal de $F\langle X \rangle$. Se F é infinito, então I é gerado por seus elementos multi-homogêneos.

Demonstração: A demonstração deste resultado decorre diretamente do teorema acima. ■

Uma importante consequência deste corolário é que, as identidades polinomiais de uma álgebra A sobre um corpo F infinito seguem de suas componentes multi-homogêneas. Logo, para procurar tais identidades é suficiente procurar pelas identidades multi-homogêneas.

Teorema 5.1.16. Seja F um corpo de característica zero. Para todo $f = f(x_1, \cdots, x_n) \in F\langle X \rangle$ com multigrau $(d_1, \cdots, d_n)$, denotemos f_{mult} a componente multilinear de $f(x_{11} + \cdots + x_{1d_1}, \cdots, x_{n1} + \cdots + x_{nd_n})$. Então $\{f\}$ é equivalente a $\{f_{\text{mult}}\}$.

Demonstração: Como F é um corpo de característica zero, então F é infinito, e pelo teorema anterior temos:

$$\langle f_{\text{mult}} \rangle^T \subseteq \langle f(x_{11} + \cdots + x_{1d_1}, \cdots, x_{n1} + \cdots + x_{nd_n}) \rangle^T \subseteq \langle f \rangle^T.$$

Agora observemos que,

$$f_{\text{mult}}(\underbrace{x_1, \cdots, x_1}_{d_1}, \cdots, \underbrace{x_n, \cdots, x_n}_{d_n}) = d_1! \cdots d_n! f(x_1, \cdots, x_n).$$

Logo $d_1! \cdots d_n! f(x_1, \cdots, x_n) \in \langle f_{\text{mult}} \rangle^T$. Mas F tem característica zero, logo $d_1! \cdots d_n! \neq 0$ e portanto $f \in \langle f_{\text{mult}} \rangle^T$. Assim $\langle f \rangle^T \subseteq \langle f_{\text{mult}} \rangle^T$. ■

Corolário 5.1.17. Seja I um T-ideal de $F\langle X \rangle$. Se $\text{Car}(F) = 0$ então I é gerado por seus elementos multilineares.

Demonstração: A demonstração deste resultado decorre diretamente dos teoremas acima. ■

Este corolário mostra que identidades polinomiais de uma álgebra A sobre um corpo F de característica zero seguem de suas componentes multilineares. Logo, para procurar tais identidades é suficiente procurar pelas multilineares.

5.2 A-identidades e A-codimensões

Nesta seção, se faz necessária uma troca de notações. Para evitar ambiguidade passaremos a denotar uma álgebra qualquer por R.

Também devemos considerar $F = \mathbb{C}$.

Definição 5.2.1. Seja P_n o conjunto dos polinômios multilineares de grau n nas variáveis $\{x_1, \cdots, x_n\}$. Um cálculo direto mostra que $\{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} |\, \sigma \in S_n\}$ é uma base para P_n como espaço vetorial, portanto $\dim P_n = n!$.

Vamos considerar o seguinte produto bilinear $S_n \times P_n \longrightarrow P_n$, onde $\sigma f(x_1, \cdots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$. Notemos que P_n munido deste produto torna-se um S_n-módulo, e consequentemente um FS_n-módulo.

Vamos considerar também a aplicação:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & FS_n & \longrightarrow & P_n \\ & \sum\limits_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma & \longmapsto & \sum\limits_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \,. \end{array}$$

Um cálculo direto mostra que φ é um isomorfismo de FS_n-módulos. Assim, existe uma correspondência biunívoca entre FS_n e P_n. Diante deste isomorfismo, podemos tratar os elementos de FS_n como polinômios em P_n e vice-versa.

Seja R uma álgebra sobre F. Como T-ideais são invariantes por permutações de variáveis temos:

$$\sigma f(x_1, \cdots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) \in P_n \cap T(R)$$

para todo $f(x_1, \cdots, x_n) \in P_n \cap T(R)$ e $\sigma \in S_n$. Assim $P_n \cap T(R)$ é um FS_n-submódulo de P_n e, consequentemente, o quociente

$$P_n(R) := \frac{P_n}{P_n \cap T(R)}$$

é também um FS_n-módulo.

Definição 5.2.2. Seja R uma álgebra. Para $n \in \mathbb{N}$, definimos a *n-ésima codimensão* de R como sendo:

$$c_n(R) = \dim P_n(R) = \dim \frac{P_n}{P_n \cap T(R)}.$$

Como $P_n(R)$ é FS_n-módulo de dimensão finita, então o Teorema de Maschke nos diz que $P_n(R)$ pode ser decomposto em soma de FS_n-submódulos simples. Mas cada submódulo simples é equivalente a algum dos FS_n-módulos irredutíveis M_λ, $\lambda \vdash n$. Desta forma, sendo m_λ o número de submódulos simples de $P_n(R)$ que são equivalentes a M_λ, temos:

$$P_n(R) \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} m_\lambda M_\lambda.$$

Portanto:

$$c_n(R) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda d_\lambda\,. \tag{5.1}$$

Definição 5.2.3. Para cada $\lambda \vdash n$, o m_λ descrito acima é chamado de *multiplicidade* do FS_n-módulo M_λ em $P_n(R)$.

Definição 5.2.4. Recordando que $FS_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda$, onde os I_λ's são ideais bilaterais de FS_n e sendo R uma PI-álgebra, dizemos que $c_\lambda = \dim \dfrac{I_\lambda}{I_\lambda \cap T(R)}$ é a *S_n-codimensão local* de R associada a λ.

Como $FS_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda$ então:

$$P_n(R) = \frac{FS_n}{FS_n \cap T(R)} = \frac{\bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda}{(\bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda) \cap T(R)} = \frac{\bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda}{\bigoplus_{\lambda \vdash n} (I_\lambda \cap T(R))}.$$

Para todo $a \in FS_n$ e $\lambda \vdash n$ existem $a_\lambda \in I_\lambda$ tais que $a = \sum_{\lambda \vdash n} a_\lambda$. Definamos então o seguinte homomorfismo de FS_n-módulos:

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \dfrac{FS_n}{FS_n \cap T(R)} & \longrightarrow & \bigoplus_{\lambda \vdash n} \dfrac{I_\lambda}{I_\lambda \cap T(R)} \\ & \overline{a} & \mapsto & (\overline{a}_{\lambda_1}, \cdots, \overline{a}_{\lambda_m}) \,. \end{array}$$

Se $\overline{a} = \overline{b}$ então $a - b \in FS_n \cap T(R)$ e assim, para todo $\lambda \vdash n$ temos $a_\lambda - b_\lambda \in I_\lambda \cap T(R)$, logo $\overline{a}_\lambda = \overline{b}_\lambda$. Portanto $\psi(\overline{a}) = \psi(\overline{b})$, ou seja, ψ está bem definida.

Se $\psi(\overline{a}) = (\overline{0}, \cdots, \overline{0})$ então, para todo $\lambda \vdash n$, temos $a_\lambda \in I_\lambda \cap T(R)$. Assim, $a = \sum_{\lambda \vdash n} a_\lambda \in \bigoplus_{\lambda \vdash n} (I_\lambda \cap T(R)) = FS_n \cap T(R)$, logo $\overline{a} = \overline{0}$. Portanto, ψ é injetora. Mas,

$$\begin{aligned} \dim \bigoplus_{\lambda \vdash n} \frac{I_\lambda}{I_\lambda \cap T(R)} &= \sum_{\lambda \vdash n} \dim I_\lambda - \dim(I_\lambda \cap T(R)) \\ &= \sum_{\lambda \vdash n} \dim I_\lambda - \sum_{\lambda \vdash n} \dim(I_\lambda \cap T(R)) \\ &= \dim FS_n - \dim(FS_n \cap T(R)) \\ &= \dim \frac{FS_n}{FS_n \cap T(R)} \,. \end{aligned}$$

Portanto, ψ é isomorfismo de FS_n-módulos e assim:

$$P_n(R) \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} \frac{I_\lambda}{I_\lambda \cap T(R)}.$$

Logo:

$$c_n(R) = \sum_{\lambda \vdash n} c_\lambda(R).$$

Assim, devido a equação 5.1, temos para todo $\lambda \vdash n$,

$$c_\lambda(R) = m_\lambda d_\lambda \,. \tag{5.2}$$

Definição 5.2.5. Seja P_n^A o espaço vetorial com base $\{x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)} | \, \sigma \in A_n\}$. Os elementos de P_n^A são chamados *A-polinômios* ou *polinômios pares*. Se R é uma álgebra com uma identidade $f \in P_n^A$, então dizemos que f é uma *A-identidade* para R.

Observemos que $\varphi(FA_n) = P_n^A$ e assim, fazendo a identificação $FA_n \cong P_n^A$ temos que P_n^A é também um FA_n-módulo. Desta forma, se R é uma PI-álgebra, $P_n^A \cap T(R)$ é um FA_n-submódulo de P_n^A e assim, o quociente

$$P_n^A(R) := \frac{P_n^A}{P_n^A \cap T(R)}$$

é também um FA_n-módulo.

Definição 5.2.6. Seja R uma PI-álgebra com T-ideal $T(R)$. Denotamos $c_n^A = \dim P_n^A(R)$, a *n-ésima A-codimensão* de R.

Observação 5.2.7. Vimos no teorema 3.2.1 que, para todo $\lambda \vdash n$, se $M_\lambda \subset I_\lambda$ é um ideal minimal à esquerda então, visto como FA_n-módulo, temos:

i) Se $\lambda \neq \lambda'$ então M_λ é FA_n-módulo irredutível. Ademais, $M_\lambda \cong M_{\lambda'}$ como FA_n-módulos.

ii) Se $\lambda = \lambda'$ então como FA_n-módulos, $M_\lambda = M_\lambda^+ \oplus M_\lambda^-$, onde M_λ^+, M_λ^- são FA_n-módulos irredutíveis, e $\dim M_\lambda^+ = \dim M_\lambda^- = \frac{1}{2}d_\lambda$.

Mais ainda, estes são todos os FA_n-módulos irredutíveis e inequivalentes.

Consideremos a decomposição isotípica de FA_n:

$$FA_n = \left[\bigoplus_{\{\lambda,\lambda'\}\in\Omega_{nac}(n)} \overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}}\right] \oplus \left[\bigoplus_{\lambda\in\Omega_{ac}(n)} (\overline{I}_\lambda^+ \oplus \overline{I}_\lambda^-)\right].$$

Definição 5.2.8. Seja R uma PI-álgebra. Definimos as *A_n-codimensões locais* c_λ^A, $c_\lambda^{A\pm}$ de R da seguinte maneira:

i) Se $\lambda' \neq \lambda$, então $c_\lambda^A = \dim \dfrac{\overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}}}{\overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}} \cap T(R)}$.

ii) Se $\lambda = \lambda'$, então $c_\lambda^{A\pm} = \dim \dfrac{\overline{I}_\lambda^\pm}{\overline{I}_\lambda^\pm \cap T(R)}$. Denotemos também $c_\lambda^A = c_\lambda^{A+} + c_\lambda^{A-}$.

Assim:

$$c_n^A = \sum_{\lambda'<\lambda} c_\lambda^A + \sum_{\lambda'=\lambda} c_\lambda^A. \tag{5.3}$$

Proposição 5.2.9. Seja R uma PI-álgebra.

1) Se $\lambda \neq \lambda'$ então, ou $c_\lambda^A(R) = c_\lambda(R) + c_{\lambda'}(R)$, ou $c_\lambda^A(R) \leq c_\lambda(R) + c_{\lambda'}(R) - d_\lambda$.

2) Se $\lambda = \lambda'$ então, ou $c_\lambda^A(R) = c_\lambda(R)$, ou $c_\lambda^A(R) \leq c_\lambda(R) - \frac{1}{2}d_\lambda$.

Demonstração:

1) Sendo $\lambda \neq \lambda'$ então, pela proposição 3.1.5, temos $\overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}} \subseteq I_\lambda \oplus I_{\lambda'}$. Para $a \in \overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}}$, vamos denotar $\overline{a} := a + (\overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}} \cap T(R))$ e $\tilde{a} := a + ((I_\lambda \oplus I_{\lambda'}) \cap T(R))$. Definamos o homomorfismo de FA_n-módulos:

$$\begin{array}{cccc} \iota : & \dfrac{\overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}}}{\overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}} \cap T(R)} & \longrightarrow & \dfrac{I_\lambda \oplus I'_\lambda}{(I_\lambda \oplus I'_\lambda) \cap T(R)} \\ & \overline{a} & \mapsto & \tilde{a} \end{array}$$

Sejam $a_1, a_2 \in \overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}}$ tais que $\overline{a_1} = \overline{a_2}$. Logo $a_1 - a_2 \in \overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}} \cap T(R) \subseteq (I_\lambda \oplus I_{\lambda'}) \cap T(R)$. Assim $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2$ e portanto $\iota(\overline{a_1}) = \iota(\overline{a_2})$, ou seja, ι está bem definida.

Sejam $\overline{a_1}, \overline{a_2} \in \dfrac{\overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}}}{\overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}} \cap T(R)}$ tais que $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2$, então $a_1 - a_2 \in (I_\lambda \oplus I_{\lambda'}) \cap T(R)$. Assim, $a_1 - a_2 \in \overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}} \cap T(R)$, logo $\overline{a_1} = \overline{a_2}$ e portanto ι é injetora.

Agora temos as seguintes opções:

i)Se ι for sobrejetora então,

$$\frac{\overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}}}{\overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}} \cap T(R)} \cong \frac{I_\lambda \oplus I_{\lambda'}}{(I_\lambda \oplus I_{\lambda'}) \cap T(R)} \cong \frac{I_\lambda}{I_\lambda \cap T(R)} \oplus \frac{I'_\lambda}{I'_\lambda \cap T(R)}.$$

Assim,

$$\dim \frac{\overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}}}{\overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}} \cap T(R)} = \dim \frac{I_\lambda}{I_\lambda \cap T(R)} + \dim \frac{I'_\lambda}{I'_\lambda \cap T(R)}$$

e portanto $c_\lambda^A(R) = c_\lambda(R) + c_{\lambda'}(R)$.

ii)Se ι não é sobrejetora então,

$$\frac{\overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}}}{\overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}} \cap T(R)} \cong \operatorname{Im}\iota \subsetneq \frac{I_\lambda \oplus I'_\lambda}{(I_\lambda \oplus I'_\lambda) \cap T(R)}.$$

Desta forma existe M um FA_n-submódulo irredutível de $\dfrac{I_\lambda \oplus I'_\lambda}{(I_\lambda \oplus I'_\lambda) \cap T(R)}$, tal que $M \nsubseteq \operatorname{Im}\iota$. Assim:

$$\dim \frac{\overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}}}{\overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}} \cap T(R)} = \dim \operatorname{Im}\iota \leq \dim \frac{I_\lambda \oplus I'_\lambda}{(I_\lambda \oplus I'_\lambda) \cap T(R)} - \dim M.$$

Mas M é FA_n-submódulo irredutível de $\dfrac{I_\lambda \oplus I'_\lambda}{(I_\lambda \oplus I'_\lambda) \cap T(R)}$, logo $\dim M = d_\lambda$ e assim:

$$c^A_\lambda(R) \leq c_\lambda(R) + c_{\lambda'}(R) - d_\lambda.$$

2) Sendo $\lambda = \lambda'$ então $\overline{I}_\lambda = \overline{I}^+_\lambda \oplus \overline{I}^-_\lambda \subseteq I_\lambda \cap FA_n$. Procedendo de maneira análoga ao caso anterior temos o resultado esperado. ■

Definição 5.2.10. Seja R uma PI-álgebra. Definimos:

i) $\Gamma_{nac}(n, R) : \{\lambda \vdash n | \lambda' < \lambda \text{ e } c^A_\lambda \neq c_\lambda + c'_\lambda\}$

ii) $\Gamma_{ac}(n, R) : \{\lambda \vdash n | \lambda' = \lambda \text{ e } c^A_\lambda \neq c_\lambda\}$

iii) $\Gamma(n, R) = \Gamma_{ac}(n, R) \cup \Gamma_{nac}(n, R)$

Corolário 5.2.11. Seja R uma PI-álgebra, então:

$$c^A_n(R) \leq c_n(R) - \sum_{\lambda \in \Gamma_{nac}(n,R)} d_\lambda - \sum_{\lambda \in \Gamma_{ac}(n,R)} \frac{1}{2} d_\lambda.$$

Demonstração: Pela equação 5.3 temos $c^A_n = \sum_{\lambda' < \lambda} c^A_\lambda + \sum_{\lambda = \lambda'} c^A_\lambda$.

i) Se $\lambda \notin \Gamma(n, R)$ então:

- $c^A_\lambda(R) = c_\lambda(R) + c'_\lambda(R)$, caso $\lambda \neq \lambda'$;
- $c^A_\lambda(R) = c_\lambda(R)$, caso $\lambda = \lambda'$.

ii) Se $\lambda \in \Gamma(n, R)$ então pela proposição 5.2.9:

- $c^A_\lambda(R) \leq c_\lambda(R) + c_{\lambda'}(R) - d_\lambda$, caso $\lambda \neq \lambda'$.
- $c^A_\lambda \leq c_\lambda - \frac{1}{2} d_\lambda$, caso $\lambda = \lambda'$.

Portanto:

$$c^A_n(R) = \sum_{\lambda \notin \Gamma(n,R)} c^A_\lambda + \sum_{\lambda \in \Gamma_{nac}(n,R)} c^A_\lambda + \sum_{\lambda \in \Gamma_{ac}(n,R)} c^A_\lambda$$

$$\leq \sum_{\substack{\lambda \notin \Gamma(n,R) \\ \lambda \neq \lambda'}} (c_\lambda + c_{\lambda'}) + \sum_{\substack{\lambda \notin \Gamma(n,R) \\ \lambda = \lambda'}} c_\lambda + \sum_{\lambda \in \Gamma_{nac}(n,R)} (c_\lambda + c_{\lambda'} - d_\lambda) + \sum_{\lambda \in \Gamma_{ac}(n,R)} (c_\lambda - \frac{1}{2} d_\lambda)$$

$$= c_n(R) - \sum_{\lambda \in \Gamma_{nac}(n,R)} d_\lambda - \sum_{\lambda \in \Gamma_{ac}(n,R)} \frac{1}{2} d_\lambda.$$

■

5.3 As A-codimensões da Álgebra de Grassmann

Definição 5.3.1. A álgebra gerada por uma sequência de elementos $\{1, e_1, e_2, \cdots\}$ satisfazendo a relação,

$$e_i e_j + e_j e_i = 0$$

é chamada *Álgebra de Grassmann* ou *Álgebra Exterior*. Ela será denotada por E.

Fica a cargo do leitor mostrar que o conjunto D, formado por 1 e pelos elementos $e_{i_1} \cdots e_{i_n}$, tais que $i_1 < \cdots < i_n$, $n \geq 1$, é uma base para E como espaço vetorial.

Lema 5.3.2. Seja $a = e_{i_1} \cdots e_{i_n} \in D$, dizemos que o *comprimento* de a é n. Desta forma:

1) Se $a \in D$ tem comprimento par, então a pertence ao centro de E.

2) Se a, $b \in D$ tem comprimento ímpar, então $ab = -ba$.

Demonstração:

1) Se $a = e_{i_1} \cdots e_{i_n} \in D$ tem comprimento par, então para todo $b = e_{j_1} \cdots e_{j_m} \in D$ temos:

$$\begin{aligned}
ab &= e_{i_1} \cdots e_{i_n} e_{j_1} \cdots e_{j_m} \\
&= (-1)^n e_{j_1} e_{i_1} \cdots e_{i_n} e_{j_2} \cdots e_{j_m} \\
&= (-1)^{2n} e_{j_1} e_{j_2} e_{i_1} \cdots e_{i_n} e_{j_3} \cdots e_{j_m} \\
&\vdots \\
&= (-1)^{mn} e_{j_1} \cdots e_{j_m} e_{i_1} \cdots e_{i_n} \\
&= (-1)^{mn} ba.
\end{aligned}$$

Mas o comprimento de a é par, logo $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, assim $mn = 2mk$ e $(-1)^{mn} = (-1)^{2mk} = 1$, ou seja $ab = ba$. Como D é uma base de E então $ax = xa$ para todo $x \in E$, e assim $a \in Z(E)$.

2) Como vimos acima se $a = e_{i_1} \cdots e_{i_n}$, $b = e_{j_1} \cdots e_{j_m} \in D$ então $ab = (-1)^{mn} ba$. Mas se $m,\ n$ são ímpares, então mn também é ímpar, portanto $ab = -ba$. ■

Teorema 5.3.3. O *comutador triplo*

$$[x_1, x_2, x_3] = [[x_1,\ x_2],\ x_3] = x_1x_2x_3 - x_2x_1x_3 - x_3x_1x_2 + x_3x_2x_1$$

é identidade polinomial para E.

Demonstração: Como $[x_1, x_2, x_3]$ é multilinear, é suficiente verificar que $[a_1, a_2, a_3] = 0$ para quaisquer $a_1,\ a_2,\ a_3 \in D$. Se a_1 ou a_2 tem comprimento par, então $[a_1, a_2] = 0$. Se a_1 e a_2 tem comprimento ímpar então, pelo lema anterior, $a_1a_2 = -a_2a_1$. Assim $[a_1, a_2] = 2a_1a_2$ que tem comprimento par, logo $[a_1, a_2, a_3] = [[a_1, a_2], a_3] = 0$. Com isso, segue o resultado. ■

Teorema 5.3.4. Seja F um corpo de característica zero e E a Álgebra de Grassmann infinitamente gerada, então:

1) $T(E)$ é gerado por $[x_1, x_2, x_3]$, ou seja, toda identidade polinomial de E é consequência de $[x_1, x_2, x_3]$.

2) A n-ésima codimensão de E é dada por $c_n(E) = 2^{n-1}$.

3) Recordando que $\mathrm{H}(1, 1, n) = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots) \vdash n | \lambda_2 \leq 1\}$ temos $\dfrac{FS_n}{FS_n \cap T(E)} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{H}(1,1,n)} \dfrac{I_\lambda}{I_\lambda \cap T(E)}$.

A demonstração do item 1 pode ser encontrada em [10], corolário do Teorema 4.1. A demonstração do item 2 pode ser encontrada também em [10], corolário do Teorema 3.1. Já a demonstração do item 3 pode ser encontrada em [11], Teorema 2.7

Lema 5.3.5. Se $n \geq 4$, então $c_n^A(E) = 2^{n-1} - 1$ ou $c_n^A(E) \leq 2^{n-1} - 4$.

Demonstração: Do lema acima, $c_\lambda(E) = d_\lambda$ se $\lambda \in \mathrm{H}(1, 1, n)$ e $c_\mu(E) = 0$ se $\mu \notin \mathrm{H}(1, 1, n)$, em particular, $c_{(1^n)}(E) = c_{(n)}(E) = 1$. Recordando que $\overline{I}_{\{(n),(1^n)\}} \cong I_{(n)} \cong I_{(1^n)}$, então $\dim \overline{I}_{\{(n),(1^n)\}} = 1$. Como $c_{(n)}(E) = c_{(1^n)}(E) = 1$, então $I_{(1^n)} \cap T(E) = I_{(n)} \cap T(E) = \{0\}$, logo $(I_{(n)} \oplus I_{(1^n)}) \cap T(E) = \{0\}$. Mas

$\overline{I}_{\{(n),(1^n)\}} \subseteq I_{(n)} \oplus I_{(1^n)}$, logo $\overline{I}_{\{(n),(1^n)\}} \cap T(E) \subseteq (I_{(n)} \oplus I_{(1^n)}) \cap T(E) = \{0\}$, assim $c^A_{(n)}(E) = \dim \dfrac{\overline{I}_{(n)}}{\overline{I}_{(n)} \cap T(E)} = 1$. Sendo $c_{(n)}(E) + c_{(1^n)}(E) = 2$, temos $c^A_{(n)}(E) \neq c_{(n)}(E) + c_{(1^n)}(E)$ e portanto $(n) \in \Gamma_{nac}(n, E)$.

Notemos que se $\lambda \in \mathrm{H}(1,1,n)$, então $\lambda = (n-j, 1^j)$ para algum j, e $d_{(n-j,1^j)} = \binom{n-1}{j}$. Se $1 \leq j \leq n-2$, então $d_{(n-j,1^j)} \geq n-1 \geq 3$, pois $n \geq 4$. Ademais se n é ímpar, então $n = 2m+1$, $m \geq 2$, assim o único λ autoconjugado é $\lambda = (m+1, 1^m)$ e $\frac{1}{2}d_\lambda = \frac{1}{2}\binom{2m}{m} \geq 3$.

Caso 1: Suponhamos que $\Gamma(n, E) = \{(n)\}$. Sabemos que

$$c_n(E) = c_{(n)}(E) + c_{(1^n)}(E) + c^*_n(E) = 2 + c^*_n(E)$$

onde $c^*_n(E) = \sum_{\lambda \in \mathrm{H}^*(1,1,n)} c_\lambda(E)$, e $\mathrm{H}^*(1,1,n) = \mathrm{H}(1,1,n) - \{(n),\, (1^n)\}$. Assim $c^*_n(E) = 2^{n-1} - 2$.

Como $\dfrac{FS_n}{FS_n \cap T(E)} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{H}(1,1,n)} \dfrac{I_\lambda}{I_\lambda \cap T(E)}$, então:

$$\frac{FA_n}{FA_n \cap T(E)} = \left(\bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathrm{H}^*(1,1,n) \\ \lambda' \neq \lambda}} \frac{\overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}}}{\overline{I}_{\{\lambda,\lambda'\}} \cap T(E)} \right) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathrm{H}^*(1,1,n) \\ \lambda' = \lambda}} \frac{\overline{I}_\lambda}{\overline{I}_\lambda \cap T(E)} \right) \oplus \frac{\overline{I}_{\{(n),(1^n)\}}}{\overline{I}_{\{(n),(1^n)\}} \cap T(E)}$$

Logo $c^A_n(E) = \sum_{\substack{\lambda \in \mathrm{H}^*(1,1,n) \\ \lambda' < \lambda}} c^A_\lambda + \sum_{\substack{\lambda \in \mathrm{H}^*(1,1,n) \\ \lambda' = \lambda}} c^A_\lambda + c^A_{(n)}$. Como $\Gamma(n, E) = \{(n)\}$ então:

- Para todo $\lambda \in \mathrm{H}^*(1,1,n)$, $\lambda' < \lambda$, temos $c^A_\lambda(E) = c_\lambda(E) + c_{\lambda'}(E)$.
- Para todo $\lambda \in \mathrm{H}^*(1,1,n)$, $\lambda' = \lambda$, temos $c^A_\lambda(E) = c_\lambda(E)$.

Assim:

$$\begin{aligned} c^A_n(E) &= \sum_{\substack{\lambda \in H^*(1,1,n) \\ \lambda' < \lambda}} c^A_\lambda + \sum_{\substack{\lambda \in H^*(1,1,n) \\ \lambda' = \lambda}} c^A_\lambda + c^A_{(n)} \\ &= \sum_{\substack{\lambda \in H^*(1,1,n) \\ \lambda' < \lambda}} (c_\lambda + c_{\lambda'}) + \sum_{\substack{\lambda \in H^*(1,1,n) \\ \lambda' = \lambda}} c_\lambda + 1 \\ &= c^*_n(E) + 1 \\ &= 2^{n-1} - 1 \end{aligned}$$

Caso 2: Suponhamos que exista $\lambda \in \Gamma(n, E)$, $\lambda \neq (n)$. Da definição 5.2.10 e do teorema 5.3.4 temos, $\Gamma(n, E) \subseteq H(1, 1, n)$, logo $\lambda = (n - j, 1^{(j)})$ para $1 \leq j \leq n - 2$. Agora temos dois subcasos:

i) Se $\lambda' < \lambda$, então $c_\lambda^A(E) \leq c_\lambda(E) + c_{\lambda'}(E) - d_\lambda$. Assim:

$$c_n^A(E) \leq c_n(E) - 1 - d_\lambda \leq 2^{n-1} - 4$$

pois $d_\lambda \geq 3$.

ii) Se $\lambda = \lambda'$, então $n = 2m + 1$, $m \geq 2$ e $\lambda = (m + 1, 1^{(m)})$. Assim $c_\lambda^A(E) \leq c_\lambda(E) - \frac{1}{2}d_\lambda$ e portanto:

$$c_n^A(E) \leq c_n(E) - 1 - \frac{1}{2}d_\lambda \leq 2^{n-1} - 4$$

pois $\frac{1}{2}d_\lambda \geq 3$.

■

Lema 5.3.6. As duas condições a seguir são equivalentes.

1) Se $n \geq 3$ então $c_n^A(E) \geq 2^{n-1} - 1$.

2) Se $n \geq 3$ então $c_n^A(E) \geq 2^{n-1} - 3$.

Demonstração: Relembrando que $T(E)$ é gerado por $[x_1, x_2, x_3] \notin FA_n$, então $FA_3 \cap T(E) = \{0\}$. Portanto $c_3^A(E) = \dim FA_3 = 3$, e a equivalência torna-se obvia para $n = 3$.

Se $n \geq 4$ então se vale 1 temos trivialmente 2. Agora se vale 2 então $c_n^A(E) \geq 2^{n-1} - 3 > 2^{n-1} - 4$. Pelo lema anterior temos $c_n^A(E) = 2^{n-1} - 1$ e portanto vale 1. ■

Observemos que pelo lema 5.3.5, se $n \geq 4$ então $c_n^A(E) = 2^{n-1} - 1$ ou $c_n^A(E) \leq 2^{n-1} - 4$. Agora, se o lema 5.3.6 é verdadeiro, então para $n \geq 3$ temos $c_n^A(E) \geq 2^{n-1} - 1$. Assim, para $n \geq 4$, $c_n^A(E) = 2^{n-1} - 1$. Como $c_3^A(E) = 3 = 2^{3-1} - 1$, então concluímos que $c_n^A(E) = 2^{n-1} - 1$, para todo $n \geq 3$.

Portanto, para demonstrar que $c_n^A(E) = 2^{n-1} - 1$, para todo $n \geq 3$, basta demonstrar o lema 5.3.6. Para demonstrar este lema, vamos transformar este problema em um problema de existência de determinadas matrizes. Para isso, consideremos a seguinte definição.

Definição 5.3.7. Seja $I \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$ (possivelmente vazio). Definimos $f_I : S_n \longrightarrow \{\pm 1\}$, onde $f_I(\sigma)$ é o sinal da permutação que σ induz nos elementos de I.

Exemplo 5.3.8. Sejam $I = \{1, 3, 5\}$ e $\sigma = (1\,2\,4\,3\,5) \in S_5$ então:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{logo} \quad \sigma|_I = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\,5)$$

portanto $f_I(\sigma) = -1$.

Para quaisquer escolha de $\{a_1, \cdots, a_n\}$ elementos de D, seja $I \subseteq \{1, \cdots, n\}$ o conjunto dos índices para os quais a_i tem comprimento ímpar. Pelo lema 5.3.2,se a_i tem comprimento par então $a_i \in Z(E)$ e se a_i, a_j tem comprimento ímpar, então $a_i a_j = -a_j a_i$. Desta forma para todo $\sigma \in S_n$, $a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} = f_I(\sigma) a_1 \cdots a_n$.

Lema 5.3.9. Sejam $I \subseteq \{1, \cdots, n\}$ e $\eta, \sigma \in S_n$. Então $f_I(\sigma\eta) = f_I(\sigma) f_{\sigma^{-1}(I)}(\eta)$.

Demonstração: Consideremos $a_1, \cdots, a_n \in D$ tais que o conjunto dos índices para os quais a_i tem comprimento ímpar é igual a I, e $a_1 \cdots a_n \neq 0$. Escrevendo $b_i = a_{\sigma(i)}$, então $b_{\eta(i)} = a_{\sigma(\eta(i))}$ e $a_j = b_{\sigma^{-1}(j)}$, assim considerando $b_1, \cdots, b_n$, temos que o conjunto dos índices para os quais b_j tem comprimento ímpar é igual a $\sigma^{-1}(I)$. Portanto:

$$\begin{aligned} f_I(\sigma\eta) a_1 \cdots a_n &= a_{\sigma(\eta(1))} \cdots a_{\sigma(\eta(n))} \\ &= b_{\eta(1)} \cdots b_{\eta(n)} \\ &= f_{\sigma^{-1}(I)}(\eta) a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} \\ &= f_{\sigma^{-1}(I)}(\eta) f_I(\sigma) a_1 \cdots a_n \end{aligned}$$

Assim $f(\sigma\eta) = f_{\sigma^{-1}(I)}(\eta) f_I(\sigma) = f_I(\sigma) f_{\sigma^{-1}(I)}(\eta)$. ■

Proposição 5.3.10. Seja $K^{(n)}$ a matriz que tem suas linhas indexadas pelos subconjuntos $I \subseteq \{1, \cdots, n\}$, suas colunas indexadas pelas permutações de $\sigma \in A_n$ e suas entradas são $f_I(\sigma)$. Então $c_n^A(E) = rank\, K^n$.

Demonstração: Seja $g(x_1, \cdots, x_n) \in P_n^A(x)$. Pela multilinearidade, g é identidade polinomial para E se, e somente se, $g(a_1, \cdots, a_n) = 0$, para todo $a_1, \cdots, a_n \in D$. Escrevamos $g = \sum_{\sigma \in A_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$ e considerarmos os α_σ's como incógnitas. Se $a_1, \cdots, a_n \in D$, então:

$$\begin{aligned} g(a_1, \cdots, a_n) &= \sum_{\sigma \in A_n} \alpha_\sigma a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in A_n} \alpha_\sigma f_I(\sigma) a_1 \cdots a_n \\ &= \left(\sum_{\sigma \in A_n} \alpha_\sigma f_I(\sigma) \right) a_1 \cdots a_n \end{aligned}$$

Como podemos tomar $a_1, \cdots, a_n \in D$ de modo que $a_1 \cdots a_n \neq 0$, então g é identidade se, e somente se, $\sum_{\sigma \in A_n} \alpha_\sigma f_I(\sigma) = 0$ para todo $I \subseteq \{1, \cdots, n\}$. Isso nos dá um sistema de 2^n equações lineares em $\frac{n!}{2}$ incógnitas $\{\alpha_\sigma | \sigma \in A_n\}$. Observemos que a matriz deste sistema é justamente K^n. Agora, a dimensão do espaço de soluções do sistema acima é $\frac{n!}{2} - rank\, K^n$. Mas a dimensão do espaço de soluções do sistema também corresponde a dimensão do subespaço das A-identidades polinomiais multilineares de grau n de E, ou seja, $\dim P_n^A \cap T(E)$. Como $\dim P_n^A = \frac{n!}{2}$ então:

$$c_n^A(E) = \dim P_n^A - \dim(P_n^A \cap T(E)) = \frac{n!}{2} - (\frac{n!}{2} - rank\, K^n) = rank\, K^n.$$

■

Observemos que devido a este teorema, são equivalentes os problemas de mostrar que $c_n^A(E) = 2^{n-1} - 1$, para todo $n \geq 3$, e mostrar que $rank\, K^n = 2^{n-1} - 1$, para todo $n \geq 3$.

Consideremos agora o seguinte resultado:

Lema 5.3.11. As seguintes afirmações são equivalentes:

1) Seja $n \geq 3$. Existe uma submatriz $P^{(n)}$ de tamanho $2^n \times (2^{n-1} - 1)$, formada das $2^{n-1} - 1$ colunas de $K^{(n)}$, tal que $rank\, P^{(n)} = 2^{n-1} - 1$.

2) Seja $n \geq 3$. Existe uma submatriz $L^{(n)}$ de tamanho $2^n \times (2^{n-1} - 2)$, formada das $2^{n-1} - 2$ colunas de $K^{(n)}$, tal que $rank\, L^{(n)} = 2^{n-1} - 2$.

Notemos que se vale 1 então existe uma submatriz $P^{(n)}$ tal que $rank\, P^{(n)} = 2^{n-1} - 1$, e portanto $c_n^A(E) = rank\, K^n \geq 2^{n-1} - 1$, logo vale 1 do lema 5.3.6. Analogamente, se vale 1 do lema 5.3.6 então vale 1 do lema 5.3.11. Agora, se vale 2 do lema 5.3.11, então existe uma submatriz $L^{(n)}$ tal que $rank\, L^{(n)} = 2^{n-1} - 2$, assim $c_n^A(E) = rank\, K^n \geq 2^{n-1} - 2 > 2^{n-1} - 3$, logo vale 2 do lema 5.3.6. E se vale 2 do lema 5.3.6 então vale 1 do lema 5.3.6, e consequentemente 1 do lema 5.3.11, o que trivialmente implica em 2 de 5.3.11.

Portanto os lemas 5.3.6 e 5.3.11 são equivalentes.

Estratégia para provar o Lema 5.3.11 Devido a esta última observação, vemos as afirmações 1 e 2 são equivalentes.

Para provarmos que a afirmação 2 é verdadeira, nós construiremos de modo indutivo a matriz $L^{(n)}$ escolhendo todas as linhas de $K^{(n)}$ e determinadas $2^{n-1} - 2$ de suas colunas. Então mostraremos que $rank\, L^{(n)} = 2^{n-1} - 2$.

Primeiramente, observemos que $A_n \subseteq A_{n+1}$, onde $\sigma(n+1) = n+1$ para todo $\sigma \in A_n$. Assumindo que o lema 5.3.11 vale para algum $n \geq 3$, então da parte 1 existe uma matriz $P^{(n)}$ com as correspondentes $2^{n-1} - 1$ permutações pares $\{\sigma^j \in A_n | 1 \leq j \leq 2^{n-1} - 1\}$ que indexam as colunas de $P^{(n)}$. Mais ainda $rank\, P^{(n)} = 2^{n-1} - 1$. Seja $\tau = (n-1\, n\, n+1) \in A_{n+1}$, assim $\tau\sigma^j \in A_{n+1}$ para todo $1 \leq j \leq 2^{n-1} - 1$. As $2^n - 2$ permutações pares que indexam as colunas de $L^{(n+1)}$ são:

$$\{\sigma^j | 1 \leq j \leq 2^{n-1} - 1\} \cup \{\tau\sigma^j | 1 \leq j \leq 2^{n-1} - 1\} \subseteq A_{n+1} \tag{5.4}$$

Nós então provamos que $rank\, L^{(n+1)} = 2^n - 2$. Pela equivalência entre 1 e 2 no lema 5.3.11, existe $P^{(n+1)}$.

Começaremos descrevendo as matrizes $L^{(n)}$ e $P^{(n)}$, a começar por $P^{(3)}$. As entradas das matrizes são $f_I(\sigma)$. Nós representaremos $\sigma \in A_n$ por $\sigma = [\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n)]$. Assim por exemplo se $\sigma = (1\,3\,2)$ então $\sigma = [3, 2, 1]$. Desta forma $f_{\{1,3\}}[3, 2, 1] = -1$.

Desta construção obtemos $P^{(3)}$ da seguinte forma:

	[1, 2, 3]	[2, 3, 1]	[3, 1, 2]
$\emptyset$	+1	+1	+1
{1}	+1	+1	+1
{2}	+1	+1	+1
{1, 2}	+1	-1	+1
{3}	+1	+1	+1
{1, 3}	+1	-1	-1
{2, 3}	+1	+1	-1
{1, 2, 3}	+1	+1	+1

Observemos que ao escolher as linhas indexadas por subconjuntos $W \subseteq \{1, 2, 3\}$ que contém 1, temos a seguinte submatriz:

$$\begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 \end{bmatrix}$$

Cujo *rank* é $3 = 2^{3-1} - 1$. Como $rank\, P^{(3)} \leq 3$, então temos $rank\, P^{(3)} = 3$. Construiremos agora $L^{(4)}$ a partir de $P^{(3)}$. As 16 linhas de $L^{(4)}$ são indexadas pelos 16 subconjuntos de $W \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$. Primeiro listaremos os 8 subconjuntos $W \subseteq \{1, 2, 3\}$ e depois os 8 subconjuntos W com $4 \in W$. Observemos que neste caso $\tau = (2\,3\,4)$. As colunas de $L^{(4)}$ serão indexadas pelas 6 seguintes permutações:

i) As primeiras três são as que indexam as colunas de $P^{(3)}$, ou seja, $[1, 2, 3, 4]$, $[2, 3, 1, 4]$, $[3, 1, 2, 4]$.

ii) As três próximas são $(2\,3\,4)[1, 2, 3, 4] = [1, 3, 4, 2]$, $(2\,3\,4)[2, 3, 1, 4] = [3, 4, 1, 2]$, $(2\,3\,4)[3, 1, 2, 4] = [4, 1, 3, 2]$.

Assim a matriz $L^{(4)}$ fica:

	[1, 2, 3, 4]	[2, 3, 1, 4]	[3, 1, 2, 4]	[1, 3, 4, 2]	[3, 4, 1, 2]	[4, 1, 3, 2]
$\emptyset$	+1	+1	+1	+1	+1	+1
{1}	+1	+1	+1	+1	+1	+1
{2}	+1	+1	+1	+1	+1	+1
{1, 2}	+1	-1	+1	+1	+1	+1
{3}	+1	+1	+1	+1	+1	+1
{1, 3}	+1	-1	-1	+1	-1	+1
{2, 3}	+1	+1	-1	-1	-1	-1
{1, 2, 3}	+1	+1	+1	-1	+1	-1
{4}	+1	+1	+1	+1	+1	+1
{1,4}	+1	+1	+1	+1	-1	-1
{2, 4}	+1	+1	+1	-1	-1	-1
{1, 2, 4}	+1	-1	+1	-1	+1	+1
{3, 4}	+1	+1	+1	+1	+1	-1
{1, 3, 4}	+1	-1	-1	+1	+1	+1
{2, 3, 4}	+1	+1	-1	+1	+1	-1
{1, 2, 3, 4}	+1	+1	+1	+1	+1	+1

A proposição 5.3.14 nos mostrará que $rank\, L^{(4)} = 6$.

Definição 5.3.12. Seja $W \subseteq \{1, \cdots, m\}$ e sejam $a, b > m$. Denotemos $W \cup \{a\} = \{W, a\}$ e $W \cup \{a, b\} = \{W, a, b\}$. Se $n \geq 3$ e $\{W_i | 1 \leq i \leq 2^{n-2}\}$ alguma ordenação nos subconjuntos $W \subseteq \{1, \cdots, n-2\}$, então ordenaremos os subconjuntos $W \subseteq \{1, \cdots, n\}$ da seguinte forma: $\{W_i | 1 \leq i \leq 2^{n-2}\}$, depois $\{\{W_i, n-1\} | 1 \leq i \leq 2^{n-2}\}$, depois $\{\{W_i, n\} | 1 \leq i \leq 2^{n-2}\}$ e por fim $\{\{W_i, n-1, n\} | 1 \leq i \leq 2^{n-2}\}$.

Com esta ordem as linhas de $P^{(n)}$ são divididas nos seguintes blocos de tamanho $2^{n-2} \times (2^{n-1} - 1)$:

$$P^{(n)} = (A,B,C,D)^t = \begin{array}{|c|c|} \hline & \sigma^j \\ \hline W_i & A \\ \hline \{W_i, n-1\} & B \\ \hline \{W_i, n\} & C \\ \hline \{W_i, n-1, n\} & D \\ \hline \end{array} \tag{5.5}$$

Agora vamos construir $L^{(n+1)}$ a partir de $P^{(n)}$. As colunas de $L^{(n+1)}$ são indexadas pelas permutações como em 5.4. As primeiras 2^n linhas são indexadas pelos mesmos subconjuntos que indexam $P^{(n)}$, enquanto as 2^n últimas são indexadas pelos correspondentes subconjuntos com $n+1$ adicionado. Os blocos de $L^{(n+1)}$ são então denotados por L_{ij}. Assim:

$$L^{(n+1)} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \sigma^j & \tau\sigma^j \\ \hline W_i & L_{11} & L_{12} \\ \hline \{W_i, n-1\} & L_{21} & L_{22} \\ \hline \{W_i, n\} & L_{31} & L_{32} \\ \hline \{W_i, n-1, n\} & L_{41} & L_{42} \\ \hline \{W_i, n+1\} & L_{51} & L_{52} \\ \hline \{W_i, n-1, n+1\} & L_{61} & L_{62} \\ \hline \{W_i, n, n+1\} & L_{71} & L_{72} \\ \hline \{W_i, n-1, n, n+1\} & L_{81} & L_{82} \\ \hline \end{array}$$

Para terminar a demonstração do lema 5.3.11, devemos mostrar que considerando $P^{(n)}$ e $L^{(n+1)}$ como acima, então $rank\, L^{(n+1)} = 2\, rank\, P^{(n)}$. Para isso, provaremos o seguinte resultado:

Lema 5.3.13. Seja $P^{(n)} = (A,B,C,D)^t$ definido como em 5.5, e consideremos $L^{(n+1)}$ construído como acima. Então as submatrizes L_{ij} de $L^{(n+1)}$ são dadas da seguinte forma.

$$L^{(n+1)} = \begin{array}{|c|c|c|}
\hline
 & \sigma^j & \tau\sigma^j \\
\hline
W_i & A & A \\
\hline
\{W_i, n-1\} & B & A \\
\hline
\{W_i, n\} & C & B \\
\hline
\{W_i, n-1, n\} & D & -B \\
\hline
\{W_i, n+1\} & A & C \\
\hline
\{W_i, n-1, n+1\} & B & -C \\
\hline
\{W_i, n, n+1\} & C & D \\
\hline
\{W_i, n-1, n, n+1\} & D & D \\
\hline
\end{array}$$

Demonstração: Os blocos L_{11}, L_{21}, L_{31}, L_{41} são dados pela definição de $P^{(n)}$. Para L_{51}, L_{61}, L_{71}, L_{81}, sejam $I \subseteq \{1, \cdots, n\}$ e $\sigma \in S_n \subset S_{n+1}$. Segue da definição de f que $f_{\{I,n+1\}}(\sigma) = f_I(\sigma)$. Com isso temos $L_{i+4\,1} = L_{i1}$ para $1 \leq i \leq 4$.

Para a segunda coluna de blocos, vamos recordar que $W_i \subseteq \{1, \cdots, n-2\}$, $\sigma^j \in A_n$ e τ é o 3-ciclo $\tau = (n-1\, n\, n+1)$.

1. Para que $L_{12} = A$, é suficiente que para todo $1 \leq i \leq 2^{n-2}$, $f_{W_i}(\tau\sigma^j) = f_{W_i}(\sigma^j)$. Como $W_i \subseteq \{1, \cdots, n-2\}$, então $\tau^{-1}(W_i) = W_i$ e $f_{W_i}(\tau) = +1$. Pelo lema 5.3.9 temos:

$$\begin{aligned} f_{W_i}(\tau\sigma^j) &= f_{W_i}(\tau) f_{\tau^{-1}(W_i)}(\sigma^j) \\ &= f_{W_i}(\sigma^j). \end{aligned}$$

2. Para termos $L_{22} = A$, é suficiente que para todo $1 \leq i \leq 2^{n-2}$, $f_{W_i,n-1}(\tau\sigma^j) = f_{W_i}(\sigma^j)$. De novo $f_{W_i,n-1}(\tau) = +1$ e temos $\tau^{-1}(\{W_i,\, n-1\}) = \{W_i,\, n+1\}$. Portanto:

$$\begin{aligned} f_{\{W_i,n-1\}}(\tau\sigma^j) &= f_{\{W_i,n-1\}}(\tau) f_{\tau^{-1}(\{W_i,\,n-1\})}(\sigma^j) \\ &= f_{\{W_i,\,n+1\}}(\sigma^j) \\ &= f_{W_i}(\sigma^j). \end{aligned}$$

3. Para que $L_{32} = B$, é suficiente que para todo $1 \leq i \leq 2^{n-2}$, $f_{\{W_i,n\}}(\tau\sigma^j) = f_{\{W_i,n-1\}}(\sigma^j)$. Como $f_{\{W_i,n\}}(\tau) = +1$ e temos

$\tau^{-1}(\{W_i,\, n\}) = \{W_i,\, n-1\}$. Portanto:

$$\begin{aligned} f_{\{W_i,n\}}(\tau\sigma^j) &= f_{\{W_i,n\}}(\tau) f_{\tau^{-1}(\{W_i,\, n\})}(\sigma^j) \\ &= f_{\{W_i,\, n-1\}}(\sigma^j). \end{aligned}$$

4. Para que $L_{42} = -B$, basta mostrarmos que para todo $1 \leq i \leq 2^{n-2}$, $f_{\{W_i,\, n-1,\, n\}}(\tau\sigma^j) = -f_{\{W_i,\, n-1\}}(\sigma^j)$. Observemos que $\tau = [1, \cdots, n-2,\, n,\, n+1,\, n-1]$, então $f_{\{W_i,\, n-1,\, n\}}(\tau) = -1$, e temos $\tau^{-1}(\{W_i,\, n-1,\, n\}) = \{W_i,\, n-1,\, n+1\}$. Portanto:

$$\begin{aligned} f_{\{W_i,\, n-1,\, n\}}(\tau\sigma^j) &= f_{\{W_i, n-1,\, n\}}(\tau) f_{\tau^{-1}(\{W_i,\, n-1,\, n\})}(\sigma^j) \\ &= -f_{\{W_i,\, n-1,\, n+1\}}(\sigma^j) \\ &= -f_{\{W_i, n-1\}}(\sigma^j). \end{aligned}$$

5. Para que $L_{52} = C$, basta que para todo $1 \leq i \leq 2^{n-2}$, $f_{\{W_i, n+1\}}(\tau\sigma^j) = f_{\{W_i,\, n\}}(\sigma^j)$. Como $f_{\{W_i, n+1\}}(\tau) = +1$ e temos $\tau^{-1}(\{W_i,\, n+1\}) = \{W_i,\, n\}$, então:

$$\begin{aligned} f_{\{W_i, n+1\}}(\tau\sigma^j) &= f_{\{W_i, n+1\}}(\tau) f_{\tau^{-1}(\{W_i,\, n+1\})}(\sigma^j) \\ &= f_{\{W_i,\, n\}}(\sigma^j). \end{aligned}$$

6. Para que $L_{62} = -C$, basta que para todo $1 \leq i \leq 2^{n-2}$, $f_{\{W_i,\, n-1,\, n+1\}}(\tau\sigma^j) = -f_{\{W_i,\, n\}}(\sigma^j)$. Como $f_{\{W_i,\, n-1,\, n+1\}}(\tau) = -1$ e $\tau^{-1}(\{W_i,\, n-1,\, n+1\}) = \{W_i,\, n,\, n+1\}$, então:

$$\begin{aligned} f_{\{W_i,\, n-1,\, n+1\}}(\tau\sigma^j) &= f_{\{W_i,\, n-1,\, n+1\}}(\tau) f_{\tau^{-1}(\{W_i,\, n-1,\, n+1\})}(\sigma^j) \\ &= -f_{\{W_i,\, n,\, n+1\}}(\sigma^j) \\ &= f_{\{W_i,\, n\}}(\sigma^j). \end{aligned}$$

7. Para que $L_{72} = D$ é suficiente que para todo $1 \leq i \leq 2^{n-2}$, $f_{\{W_i,\, n,\, n+1\}}(\tau\sigma^j) = f_{\{W_i,\, n-1,\, n\}}(\sigma^j)$. Mas $f_{\{W_i,\, n,\, n+1\}}(\tau) = +1$ e $\tau^{-1}(\{W_i,\, n,\, n+1\}) = \{W_i,\, n-1,\, n\}$, logo:

$$\begin{aligned} f_{\{W_i,\, n,\, n+1\}}(\tau\sigma^j) &= f_{\{W_i,\, n,\, n+1\}}(\tau) f_{\tau^{-1}(\{W_i,\, n,\, n+1\})}(\sigma^j) \\ &= f_{\{W_i,\, n-1,\, n\}}(\sigma^j). \end{aligned}$$

8. Para que $L_{82} = D$ é suficiente mostrarmos que para todo $1 \leq i \leq 2^{n-2}$, $f_{\{W_i,\, n-1,\, n,\, n+1\}}(\tau\sigma^j) = f_{\{W_i,\, n-1,\, n\}}(\sigma^j)$. Mas $f_{\{W_i,\, n-1,\, n,\, n+1\}}(\tau) = +1$ e $\tau^{-1}(\{W_i,\, n-1,\, n,\, n+1\}) = \{W_i,\, n-1,\, n,\, n+1\}$, assim:

$$\begin{aligned} f_{\{W_i,\, n-1,\, n,\, n+1\}}(\tau\sigma^j) &= f_{\{W_i,\, n-1,\, n,\, n+1\}}(\tau) f_{\tau^{-1}(\{W_i,\, n-1,\, n,\, n+1\})}(\sigma^j) \\ &= f_{\{W_i,\, n-1,\, n,\, n+1\}}(\sigma^j) \\ &= f_{\{W_i,\, n-1,\, n\}}(\sigma^j). \end{aligned}$$

■

Proposição 5.3.14. Sejam $P^{(n)}$ e $L^{(n+1)}$ como acima. Então $rank\, L^{(n+1)}$ é $2^n - 2$.

Demonstração: Observemos que $L^{(n+1)} = \begin{pmatrix} U & V \\ U & X \end{pmatrix}$, onde $U = P^{(n)}$. Assim:

$$L^{(n+1)} = \begin{pmatrix} U & V \\ U & X \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} U & V \\ 0 & X - V \end{pmatrix}$$

Notemos que:

$$X - V = \begin{pmatrix} C - A \\ -C - A \\ D - B \\ D + B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2A \\ 2C \\ 2B \\ 2D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A \\ C \\ B \\ D \end{pmatrix} = P^{(n)}$$

Logo:

$$L^{(n+1)} \sim \begin{pmatrix} P^{(n)} & V \\ 0 & P^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A \\ B & A \\ C & B \\ D & -D \\ 0 & A \\ 0 & B \\ 0 & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \\ C & 0 \\ D & 0 \\ 0 & A \\ 0 & B \\ 0 & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{(n)} & 0 \\ 0 & P^{(n)} \end{pmatrix}$$

Logo $rank\, L^{(n+1)} = rank \begin{pmatrix} P^{(n)} & 0 \\ 0 & P^{(n)} \end{pmatrix} = 2(2^{n-1} - 1) = 2^n - 2$, pois por indução $rank\, P^{(n)} = 2^{n-1} - 1$. ■

Desta forma, concluímos de forma indutiva que, para todo $n \geq 3$, existe uma submatriz $L^{(n)}$ de tamanho $2^n \times (2^{n-1} - 2)$, formada das $2^{n-1} - 2$ colunas de $K^{(n)}$ tal que $rank\, L^{(n)} = 2^{n-1} - 2$. Isso prova o lema 5.3.11, e consequentemente o lema 5.3.6.

Com isso podemos provar o seguinte resultado:

Teorema 5.3.15. Se E denota a Álgebra de Grassmann infinitamente gerada e $F = \mathbb{C}$ então $c_n^A(E) = 2^{n-1} - 1$.

Referências Bibliográficas

[1] A. HENKE, ; A. REGEV. *Explicit decompositions of the group algebras FS_n and FA_n*, in "Polynomial identities and combinatorial methods"(Pantelleria, 2001), Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 235, Dekker, New York, 329-357, 2003.

[2] A. HENKE; A. REGEV. *Weyl modules for the Schur algebra of the alternating group*, Journal of Algebra, 257, 168-196, 2002.

[3] A. HENKE; A. REGEV. *A- codimensions and A-cocharacters*, Israel J. Math. 133, 339-355, 2003.

[4] B.E.SAGAN. *The symmetric group, representations, combinatorial algorithms, and summetric functions*, Wadsworth & Brooks / Cole Mathematics Series, 1991.

[5] A. REGEV. *Algebras satisfying a Capelli identity*, Israel J. Math. 33, 149-154, 1979.

[6] A. BERELE; A. REGEV. *Hook Young diagrams with applications to combinatorics and to representations of Lie superalgebras*, Adv. in Math. 46, 118-175, 1987.

[7] G. D. JAMES; A. KERBER. *The representation theory of the symmetric group*, Encyclopedia of Mathematics and its applications, vol. 16. Addison-Wesley, 1981.

[8] H. BOERNER. *Representations of groups*, 2nd ed. North-Holland, Amsterdan, 1967, 1970.

[9] T. W. HUNGERFORD. *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2003.

[10] D. KRAKOWSKI; A. REGEV. *The polynomial identities of the Grassamnn algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. 181, 429-438, 1973.

[11] J. OLSSON; A. REGEV. *The colength of some T-ideals*, Journal of Algebra, 100-111, 1976.

[12] W.SCHÜTZER. Notas de aula do curso *Introdução a Teoria das Representações Algebricas*, 2013.

[13] D.J.GONÇALVES. Notas de aula do curso *Introdução as PI-Álgebras*, 2013.

[14] D.J.GONÇALVES. *A-identidades polinomiais em álgebras associativas*, 2009.