

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Bifurcação e estabilidade de equilíbrios de  
um problema de Neumann parabólico com  
peso indefinido em genética populacional**

**Tito Luciano Mamani Luna**

São Carlos  
Março/2015

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**Bifurcação e estabilidade de equilíbrios de um  
problema de Neumann parabólico com peso  
indefinido em genética populacional**

**Tito Luciano Mamani Luna**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação  
em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para  
obtenção do título de MESTRE EM MATEMÁTICA

Orientador: **Prof. Dr. Gustavo Ferron Madeira**

São Carlos  
Março/2015

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

M263be Mamani Luna, Tito Luciano.  
Bifurcação e estabilidade de equilíbrios de um problema de Neumann parabólico com peso indefinido em genética populacional / Tito Luciano Mamani Luna. -- São Carlos : UFSCar, 2015.  
77 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Estabilidade de equilíbrios. 3. Bifurcação de equilíbrios. I. Título.

CDD: 515.353 (20ª)



---

**Folha de Aprovação**

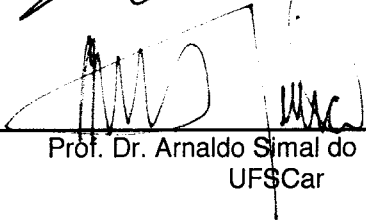
---

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Tito Luciano Mamani Luna, realizada em 30/03/2015




---

Prof. Dr. Gustavo Ferron Madeira  
UFSCar



---

Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento  
UFSCar



---

Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho  
USP

# Agradecimentos

Primeiramente a Deus pela vida e saúde. Embora a lista de pessoas a quem eu sou grato é grande, eu faria particularmente gosto de expressar minha profunda gratidão ao Prof. Dr. Gustavo Ferron Madeira; pela orientação e apoio contínuo desde o começo deste trabalho. Gostaria também de expressar minha gratidão aos Professores e colegas do DM. A Capes; pelo auxílio financeiro.

*“Tudo o que fizerem, façam de todo o coração, como para o Senhor, e não para os homens, sabendo que receberão do Senhor a recompensa da herança. É a Cristo, o Senhor, que vocês estão servindo.”*

(Colossenses 3:23-24)

# Resumo

Neste trabalho estuda-se uma equação diferencial parcial parabólica semilinear com condição de fronteira de Neumann homogênea que surge em genética populacional, a qual descreve a evolução de frequências de genes sob a ação conjunta de migração e seleção numa região limitada. No termo não-linear que aparece na equação, de tipo logístico, tem-se um parâmetro positivo e uma função peso de sinal indefinido. Considerando-se um espaço de fase adequado ao problema, determina-se um sistema dinâmico não-linear e gradiente, de forma que os equilíbrios, ou soluções estacionárias, desempenham um papel fundamental no que concerne a dinâmica.

Há dois equilíbrios constantes, chamados triviais, que dão origem a duas curvas, chamadas ramos triviais, contendo os equilíbrios triviais. O objetivo principal desta dissertação é estudar as estruturas de bifurcação e estabilidade de todos os equilíbrios, as quais são completamente determinadas e expressas através de diagramas, além de determinar o comportamento do único equilíbrio não-trivial que o problema possui para cada valor do parâmetro.

Elemento decisivo na análise é a média da função peso do termo não-linear. De fato, em caso de média não nula bifurca de ramo trivial – que é determinado pelo sinal da média – uma curva global constituída de equilíbrios não-triviais exponencialmente estáveis, enquanto os únicos equilíbrios que podem existir quando o parâmetro é pequeno são os triviais, sendo um exponencialmente estável e outro instável. Quando a média da função peso é zero uma nova curva passa a ter papel central: dela bifurca uma curva global, definida para cada valor do parâmetro, constituída de equilíbrios não triviais exponencialmente estáveis e não há bifurcação dos ramos triviais, estes contendo então equilíbrios instáveis.

Finalmente, é determinado o comportamento do ramo de bifurcação global quando o parâmetro é grande ao estabelecer-se que o único equilíbrio não trivial do problema tende a concentra-se numa região em que o peso tem sinal definido.

# Abstract

This work is concerned with a semilinear parabolic partial differential equation under a homogeneous Neumann boundary condition occurring in population genetics. It describes the evolution of gene frequencies under selection and migration effects in a bounded domain. In the nonlinear term appearing in the equation, which is of logistic type, one has a positive parameter and an indefinite sign weight function. Considering a suitable phase space one obtains a nonlinear dynamical system, actually a gradient system, in a such way that the equilibrium solutions, or stationary solutions, play a fundamental role in the dynamics viewpoint.

The problem has two constant equilibria, called the trivial ones, inducing two curves, called trivial branches, and containing the trivial equilibrium solutions. The main aim of this dissertation is to study the bifurcation and stability structures of equilibria, which are completely established and also expressed through diagrams. Furthermore, to establish the behaviour of the only nontrivial equilibrium the problem has for each value of the parameter.

A key ingredient in the analysis is the average of the weight function. Indeed, if the weight has nonzero average a global curve consisting of nontrivial exponentially stable equilibria bifurcates from a trivial branch – which is determined according to the sign of the average. But if the parameter is sufficiently small the problem admits the two trivial equilibria as the only equilibrium solutions, one of them exponentially stable and the other unstable. When the weight function has zero average a new curve has now a central role: from such curve bifurcates a global curve defined for all values of the parameter and consisting of nontrivial exponentially stable equilibria. Further, there is no bifurcation from the trivial branches, that ones containing unstable equilibria.

Finally, the behaviour of the global bifurcation branch is also established as the parameter is large. Actually, that is achieved as long as one proves the only nontrivial equilibrium concentrates in a region where the weight function has a definite sign, as the parameter is large.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>6</b>
1.1	Resultados básicos . . . . .	6
1.1.1	Os espaços de Sobolev . . . . .	6
1.1.2	O princípio do máximo . . . . .	8
1.2	Bifurcação de autovalor simples e o princípio da transferência da estabilidade	10
1.3	Problemas de autovalores com condição de fronteira de Neumann homogênea e com peso indefinido . . . . .	13
1.4	Um operador de Fredholm . . . . .	28
<b>2</b>	<b>Sistema dinâmico gerado por (0.0.1)</b>	<b>30</b>
2.1	O espaço de fase $\mathfrak{X}$ . . . . .	31
2.2	O funcional de energia e de Lyapunov . . . . .	33
2.3	Equilíbrios . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Estrutura de bifurcação dos equilíbrios</b>	<b>38</b>
3.1	Estrutura de bifurcação dos equilíbrios com peso de média não nula . . . . .	38
3.1.1	Possíveis pontos de bifurcação . . . . .	40
3.1.2	Construindo curva de bifurcação local . . . . .	43
3.1.3	Injetividade do operador derivada em torno de equilíbrio não trivial	47
3.2	Estrutura de bifurcação dos equilíbrios com peso de média nula . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Estrutura de estabilidade dos equilíbrios</b>	<b>58</b>
4.1	Estrutura de estabilidade dos equilíbrios com peso de média não nula . . . . .	58
4.1.1	Estabilidade dos equilíbrios triviais . . . . .	58
4.1.2	Estabilidade dos equilíbrios bifurcados . . . . .	60
4.1.3	Diagramas de bifurcação e estabilidade dos equilíbrios de (0.0.1) com função de peso de média não nula . . . . .	65
4.2	Estrutura de estabilidade dos equilíbrios com peso de média nula . . . . .	66
4.2.1	Instabilidade dos equilíbrios triviais . . . . .	66
4.2.2	Estabilidade dos equilíbrios bifurcados . . . . .	66
4.2.3	Diagrama de bifurcação e estabilidade dos equilíbrios de (0.0.1) com função de peso de média nula . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Convergência do equilíbrio não trivial quando <math>\lambda \rightarrow +\infty</math></b>	<b>71</b>

# Introdução

Neste trabalho estudamos uma equação parabólica semilinear com condição de fronteira de Neumann homogênea que surge em genética populacional, a qual descreve a evolução de frequências de genes sob a ação conjunta de migração e seleção numa região limitada. O modelo foi inicialmente proposto por R.A. Fisher em [14] e aperfeiçoado por W. Fleming em [15]. Mais precisamente, consideramos o problema parabólico

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + \lambda s(\cdot)f(u) & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot, 0) = \phi_0 & 0 \leq \phi_0 \leq 1 \text{ em } \Omega, \end{cases} \quad (0.0.1)$$

num domínio limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , com fronteira  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$ , em que  $\lambda$  é um parâmetro real positivo, que representa a razão entre a intensidade de seleção e a taxa de migração, e  $s(\cdot)$  é uma função peso em  $L^\infty(\Omega)$  de sinal indefinido, ou seja, que muda de sinal em conjuntos de medida positiva. A função não-linear  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^2$ , satisfazendo

$$(H_1) \quad \begin{cases} f > 0 & \text{em } (0, 1), & f(0) = 0 = f(1), \\ f'(0) > 0, & f'(1) < 0, & f'' < 0 & \text{em } (0, 1), \end{cases}$$

e foi introduzida por D. Henry no capítulo décimo de seu célebre livro [20], em que se estuda (0.0.1) generalizando-se os resultados de Fleming por meio de diferente abordagem, ainda que apresentada de forma bastante sintética, e influenciou diversos trabalhos dentre os quais esta dissertação. O principal objetivo deste trabalho é determinar as estruturas de bifurcação e estabilidade dos equilíbrios de (0.0.1), além de determinar o comportamento do único equilíbrio não-trivial que o problema possui para cada valor do parâmetro.

Para tratarmos (0.0.1) no contexto de sistemas dinâmicos não-lineares e levando em conta a situação concreta que o modelo representa, o espaço de fase adequado para considerarmos o problema (0.0.1) é

$$(H_2) \quad \mathfrak{X} := \{u \in H^1(\Omega) : 0 \leq u(x) \leq 1 \text{ q.t.p } x \in \Omega\}.$$

Assim, uma solução de equilíbrio ou um equilíbrio de (0.0.1) é uma solução do problema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda s(\cdot)f(u) & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (0.0.2)$$

e que pertença ao espaço de fase  $\mathfrak{X}$ , ou seja, um equilíbrio é uma solução  $u \in \mathfrak{X}$  do problema (0.0.2). Para cada  $\lambda > 0$  existem dois ramos triviais  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$ , curvas determinadas pelos equilíbrios triviais  $u \equiv 0$  e  $u \equiv 1$  de (0.0.1), respectivamente, qual sejam

$$\Gamma_0 := \{(\lambda, 0) : \lambda > 0\} \quad \text{e} \quad \Gamma_1 := \{(\lambda, 1) : \lambda > 0\}.$$

Há várias características interessantes no problema (0.0.1), conseqüentemente no correspondente problema elíptico (0.0.2), como a presença de uma função não-linear de tipo logístico, um peso de sinal indefinido, um parâmetro e a condição de fronteira de Neumann, frequente em aplicações. Além de [15, 20], muitos trabalhos tem sido dedicados ao estudo de (0.0.1): considerando operadores mais gerais ou sistemas como em [24, 25, 26, 34], em domínios ilimitados como em [8, 13], sob condições de fronteira não-lineares como em [28, 29], com outras funções não-lineares de tipo logístico como em [27, 30], entre outros.

Motivados principalmente pelos trabalhos [20, 34, 28, 29], os resultados contidos nesta dissertação serão obtidos por meio de ferramentas clássicas tais como o teorema da função implícita, o teorema de bifurcação de autovalor simples, o princípio da transferência de estabilidade, o princípio da estabilidade linearizada, o princípio de redução de Lyapunov-Schmidt, o Lema de Morse, estimativas para problemas elípticos, princípios de máximo, além de combinação entre argumentos variacionais e dinâmicos.

Nossa estratégia para atacar as principais questões estudadas neste trabalho, quais sejam, bifurcação e estabilidade dos equilíbrios de (0.0.1) e comportamento do único equilíbrio não-trivial  $u_\lambda$  quando o parâmetro é grande, será a seguinte. Estudaremos bifurcação e estabilidade em duas situações, segundo a média da função peso  $s(\cdot)$ , e, por fim, estudaremos o comportamento  $u_\lambda$ , quando  $\lambda \rightarrow \infty$ . Mais precisamente, a parte central desta dissertação está dividida em três partes, como segue.

1. Na primeira parte consideramos funções peso  $s(\cdot)$  com média não nula, i.e., satisfazendo  $\int_{\Omega} s(\cdot) dx \neq 0$ , e seguiremos os argumentos em [28]. Introduziremos a aplicação não linear  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^+ \times W_p^2(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$ , com  $p > n$ , definida por

$$\mathcal{F}(\lambda, u) = \left( \Delta u + \lambda s(\cdot) f(u), \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)$$

de modo que os métodos da teoria de bifurcação possam ser aplicados.

Quando a média de  $s(\cdot)$  é negativa ocorre que o número

$$\lambda_0 = \inf \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Omega} f'(0) s(\cdot) v^2 dx} : v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} f'(0) s(\cdot) v^2 dx > 0 \right\},$$

que é autovalor principal de um problema de autovalores com peso indefinido e condição de fronteira de Neumann homogênea, problema este satisfeito por auto-funções associadas ao autovalor zero de  $D_u \mathcal{F}$  em pontos de  $\Gamma_0$ , é positivo e é ponto de bifurcação de (0.0.2) com respeito a  $\Gamma_0$ . De fato, bifurca de  $\lambda_0$ , para à direita, uma curva global formada por equilíbrios não-triviais de (0.0.1) de tal modo que, para cada  $\lambda > \lambda_0$ , existe um único equilíbrio não-trivial  $u_\lambda$  de (0.0.1). Não há bifurcação com relação ao ramo  $\Gamma_1$ . Para  $0 < \lambda \leq \lambda_0$ , os únicos equilíbrios de (0.0.1) são os

triviais  $u \equiv 0$  e  $u \equiv 1$ .

Quando a média de  $s(\cdot)$  é positiva os papéis de  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$  invertem-se. Realmente, a mudança de variável  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $\sigma(u) = 1 - u$ , preserva a estrutura do problema (0.0.2) trocando apenas os ramos triviais e permite transportar todos resultados obtidos em relação ao ramo trivial  $\Gamma_0$  para o ramo trivial  $\Gamma_1$ .

Quanto a estabilidade a estrutura que se tem é a seguinte: para  $0 < \lambda \leq \lambda_0$  (observando-se que  $\lambda_0$  depende do sinal da média do peso  $s(\cdot)$ ), há dois equilíbrios, como mencionado acima, um deles exponencialmente estável e outro instável – conclusão obtida via princípio da estabilidade linearizada. Quando ocorre a bifurcação de equilíbrios para  $\lambda = \lambda_0$ , por meio do princípio da transferência de estabilidade mostramos que a estabilidade que o equilíbrio trivial possuía, no ramo em que a bifurcação ocorre, é transferida para o ramo bifurcado – que passa a ser exponencialmente estável – enquanto os equilíbrios triviais passam a ser instáveis.

2. Na segunda parte consideramos funções peso  $s(\cdot)$  com média nula, ou seja, satisfazendo  $\int_{\Omega} s(\cdot) dx = 0$ , e nos basearemos em [29]. Além dos ramos triviais  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$  outra curva, também denominada ramo trivial e formada por soluções de (0.0.2) para  $\lambda = 0$ , dada por

$$\Gamma_0^1 := \{(0, c) : 0 < c < 1\},$$

passa a ter papel central na estrutura do conjunto solução de (0.0.2) em  $\mathfrak{X}$ . Com efeito, utilizando uma redução tipo Lyapunov-Schmidt combinada com o Lema de Morse, é provado que há um único ponto de bifurcação para (0.0.2) em  $\mathfrak{X}$ , o qual pertence a curva  $\Gamma_0^1$ . Esta curva local é então estendida a uma curva globalmente definida para cada  $\lambda > 0$ . Provamos também que para cada dado inicial  $u_0 \neq 0, 1$ , a solução de (0.0.1) não pode convergir, em certa norma de Sobolev, para equilíbrio trivial. Uma vez que o problema possui para cada  $\lambda > 0$  três equilíbrios, dois triviais e um não-trivial  $u_\lambda$  sobre o ramo global previamente obtido, a estrutura gradiente do sistema dinâmico gerado por (0.0.1) nos permite concluir que  $u_\lambda$  é um mínimo global da energia associada a (0.0.1). Esta informação nos permite inferir que  $u_\lambda$  é um equilíbrio assintoticamente estável para cada  $\lambda > 0$ , mas, na verdade, com auxílio do princípio da estabilidade linearizada, podemos provar sua estabilidade exponencial – e também a instabilidade dos equilíbrios constantes para cada  $\lambda > 0$ .

3. Na terceira parte estabelecemos um resultado de concentração para o equilíbrio não-trivial  $u_\lambda$  de (0.0.1), quando o parâmetro é grande. De fato, mostramos que  $u_\lambda$  concentra-se em  $\mathcal{P} := \{x \in \Omega : s(x) > 0\}$  quando o parâmetro é grande se o conjunto  $\mathcal{P}$  for regular em certo sentido, por exemplo, se  $\mathcal{P}$  tiver capacidade finita, ao provarmos que  $u_\lambda$  converge para  $\chi_{\mathcal{P}}$  em  $L^q(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$ , quando  $\lambda \rightarrow \infty$ , sendo  $\chi_{\mathcal{P}}$  a função característica do conjunto  $\mathcal{P}$ .

A distribuição dos assuntos neste trabalho é feita da seguinte forma: no primeiro capítulo introduzimos notações, alguns resultados clássicos que serão utilizados ao longo do texto e demonstramos alguns resultados, como os Teoremas 1.3.2, 1.3.3, 1.3.23, 1.3.9, 1.4.5. No segundo capítulo mostramos que o problema (0.0.1) gera um sistema dinâmico não-linear no espaço de fase  $\mathfrak{X}$ , o qual é um sistema gradiente. No terceiro e quarto capítulos determinamos as estruturas de bifurcação e estabilidade dos equilíbrios de (0.0.1), respectivamente, e apresentamos os correspondentes diagramas de bifurcação e

estabilidade em cada situação em que a média da função peso  $s(\cdot)$  é negativa, positiva ou nula. No quinto capítulo mostramos que o equilíbrio não-trivial  $u_\lambda$  de (0.0.1) concentra-se no conjunto  $\mathcal{P} = \{x \in \Omega : s(x) > 0\}$ , quando  $\mathcal{P}$  tem capacidade finita, ao estabelecermos que  $u_\lambda \rightarrow \chi_{\mathcal{P}}$  em  $L^q(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$ , quando  $\lambda \rightarrow \infty$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

Nesta parte introduzimos notações, resultados clássicos e enunciamos e demonstramos Teoremas importantes para o trabalho.

### 1.1 Resultados básicos

O propósito desta seção introdutória é estabelecer a notação que será usada ao longo do trabalho e enunciar vários resultados clássicos importantes, os quais são necessários para uma melhor compreensão do trabalho que será desenvolvido.

#### 1.1.1 Os espaços de Sobolev

Começemos com a seguinte

**Definição 1.1.1** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto,  $u, v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  e  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  um multi-índice. Então,  $v$  é a  $\alpha$ -derivada fraca de  $u$ , de ordem  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ , se*

$$\int_{\Omega} u \partial^{\alpha} \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi \, dx, \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

assim, denota-se  $\partial^{\alpha} u := v$  e pode-se introduzir a estrutura de um espaço necessário para nosso objetivo

**Definição 1.1.2** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto. Se  $1 \leq p \leq \infty$  e  $k \in \mathbb{N}$ , o espaço de Sobolev  $W_p^k(\Omega)$  é o conjunto das funções  $u \in L^p(\Omega)$  tais que  $\partial^{\alpha} u \in L^p(\Omega)$  para cada multi-índice  $\alpha$  com  $|\alpha| \leq k$ .*

No caso  $p = 2$ , costum-se denotar  $H^k(\Omega) = W_2^k(\Omega)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  pois,  $H^k(\Omega)$  é um espaço de Hilbert. Ditos espaços têm estrutura topológica que vêm da seguinte

**Definição 1.1.3** *A norma em  $W_p^k(\Omega)$  é dada por*

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} := \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^{\alpha} u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \quad \text{se } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W_{\infty}^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^{\alpha} u\|_{L^{\infty}(\Omega)}.$$

Por exemplo,  $\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ .

Vejamos, algumas propriedades dos espaços  $W_p^k(\Omega)$ , nos seguintes quatro teoremas

**Teorema 1.1.4** *São válidas as seguintes afirmações.*

(i)  $W_p^k(\Omega)$  é um espaço de Banach para todo  $k \in \mathbb{N}$  e todo  $1 \leq p \leq \infty$ , com a norma  $\|\cdot\|_{W_p^k(\Omega)}$ .

(ii)  $W_p^k(\Omega)$  é separável se, e somente se,  $1 \leq p < \infty$ .

**Teorema 1.1.5** *Se  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um domínio limitado com fronteira de classe  $C^1$ , então  $C^\infty(\overline{\Omega})$  é denso em  $W_p^k(\Omega)$ , na norma  $\|\cdot\|_{W_p^k(\Omega)}$ , para  $k \in \mathbb{N}$  e  $1 \leq p < \infty$ .*

**Teorema 1.1.6 (Imersões de Sobolev, contínuas)** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado satisfazendo a condição do cone e  $k \geq 1$ ,  $m \geq 0$ , inteiros. Então, as seguintes imersões são contínuas:*

(i)  $W_p^{m+k}(\Omega) \hookrightarrow W_q^m(\Omega) \quad \forall 1 \leq q \leq \frac{np}{n-kp}$ , desde que  $kp < n$ .

(ii)  $W_p^{m+k}(\Omega) \hookrightarrow W_q^m(\Omega) \quad \forall q \geq 1$ , desde que  $kp = n$ .

**Teorema 1.1.7 (Imersões de Sobolev, compactas)** *A imersão do último item do Teorema 1.1.6 é compacta, sendo que a primeira também o é para todo  $1 \leq q < np/(n-kp)$ . Além disso, se  $\Omega$  é de classe  $C^{0,1}$ , as seguintes imersões são também compactas.*

(i)  $W_p^{m+k}(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$  desde que  $kp > n$ .

(ii)  $W_p^{m+k}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\theta}(\overline{\Omega})$  para  $0 < \theta < k - \frac{n}{p}$ , desde que  $kp > n \geq (k-1)p$ .

Por exemplo, nas condições do Teorema 1.1.7 tem-se

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \quad , \quad \text{compactamente,}$$

$$W_p^2(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \quad , \quad \text{compactamente para todo } p \geq 1,$$

$$W_p^2(\Omega) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega}) \quad , \quad \text{compactamente quando } p > n,$$

$$W_p^2(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\theta}(\overline{\Omega}) \quad , \quad \text{compactamente, para algum } 0 < \theta < 1 - \frac{n}{p}.$$

E também verifica-se

**Teorema 1.1.8 (Regra da Cadeia)** *Seja  $f \in C^1(\mathbb{R})$  tal que  $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Se  $u \in W_p^1(\Omega)$ , com  $1 \leq p < \infty$ , então  $f \circ u \in W_p^1(\Omega)$  e*

$$\nabla(f \circ u) = f'(u)\nabla u.$$

e uma consequência se refere as partes positiva e negativa de uma função  $u$ ,  $u^+ := \max\{u, 0\}$  e  $u^- := -\min\{u, 0\}$ , respectivamente, e a seu valor absoluto  $|u| = u^+ + u^-$ .

**Corolário 1.1.9** *Se  $u \in W_p^1(\Omega)$ , com  $1 \leq p < \infty$ , então  $u^+, u^-, |u| \in W_p^1(\Omega)$ . Além disso, denotando*

$$\{u > 0\} \doteq \{x \in \text{supp } u : u(x) > 0\}$$

e

$$\{u < 0\} \doteq \{x \in \text{supp } u : u(x) < 0\}$$

tem-se

$$\nabla u^+ = \chi_{\{u>0\}} \nabla u \quad e \quad \nabla u^- = -\chi_{\{u<0\}} \nabla u$$

de forma que

$$\nabla |u| = \chi_{\{u>0\}} \nabla u - \chi_{\{u<0\}} \nabla u,$$

sendo  $\text{supp } u$  o suporte da função  $u$ .

E

**Corolário 1.1.10** *Se  $u, v \in W_p^1(\Omega)$ , com  $1 \leq p < \infty$ , então  $\max\{u, v\} \in W_p^1(\Omega)$  e  $\min\{u, v\} \in W_p^1(\Omega)$ .*

## 1.1.2 O princípio do máximo

Nesta parte enunciaremos uma das ferramentas extremamente importantes em equações diferenciais que são chamados de princípios do máximo e Lema de Hopf

**Princípio do máximo elíptico** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado, com fronteira  $\partial\Omega$  suave e

$$\mathfrak{L}u := \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + \sum_{i=1}^n b_i \partial_{x_i} u + cu$$

um operador com coeficientes contínuos, uniformemente elíptico, isto é, que exista  $\theta > 0$  tal que

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi_k \geq \theta |\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

além de simétrico, isto é,  $a_{ij} = a_{ji}$  para  $i, j = 1, \dots, n$ . Então

**Teorema 1.1.11 (Princípio do máximo forte)** *Suponha que  $c \leq 0$  em  $\overline{\Omega}$*

- (i) *Se  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  é tal que  $\mathfrak{L}u \geq 0$  em  $\Omega$  e  $u$  atinge um máximo não negativo sobre  $\overline{\Omega}$  num ponto interior, então  $u$  é constante em  $\Omega$ .*
- (ii) *Se  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  é tal que  $\mathfrak{L}u \leq 0$  em  $\Omega$  e  $u$  atinge um mínimo não positivo sobre  $\overline{\Omega}$  num ponto interior, então  $u$  é constante em  $\Omega$ .*

Dizemos que  $\Omega$  satisfaz a condição da bola interior em  $x_0 \in \partial\Omega$  se existe uma bola aberta  $B \subset \Omega$  tal que  $x_0 \in \partial B$ . A condição da bola interior é automaticamente satisfeita em domínios com fronteira de classe  $C^2$ . Sendo  $\nu$  um campo normal exterior a  $\partial\Omega$ , temos



**Teorema 1.1.12 (Lema de Hopf)** *Seja  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  e suponha que  $c = 0$  em  $\Omega$ .*

(i) *Se  $\mathfrak{L}u \geq 0$  em  $\Omega$  e existe  $x_0 \in \partial\Omega$  tal que*

$$u(x_0) > u(x) \quad \forall x \in \Omega$$

*com  $\Omega$  satisfazendo a condição da bola interior em  $x_0$ , então*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

(ii) *Se  $\mathfrak{L}u \leq 0$  em  $\Omega$  e existe  $y_0 \in \partial\Omega$  tal que*

$$u(y_0) < u(y) \quad \forall y \in \Omega$$

*com  $\Omega$  satisfazendo a condição da bola interior em  $y_0$ , então*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(y_0) < 0.$$

*Se  $c \leq 0$  em  $\Omega$ , a conclusão em (i) permanece válida contanto que  $u(x_0) \geq 0$ . Se  $c \geq 0$  em  $\Omega$ , a conclusão em (ii) ainda é válida desde que  $u(y_0) \geq 0$ .*

**Princípio do máximo parabólico** Vamos assumir as mesmas hipóteses sobre  $\Omega$  e  $\mathfrak{L}$  feitas quando tratamos do princípio do máximo elíptico acima, sendo que os coeficientes de  $\mathfrak{L}$  podem agora depender do tempo. Fixado  $T > 0$ , defina  $\Omega_T \doteq \Omega \times (0, T]$ . A fronteira parabólica de  $\Omega_T$  é o conjunto  $\partial\Omega_T \doteq \overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T$ . Considerando o espaço

$$C_1^2(\Omega_T) \doteq \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid u, \partial_{x_i} u, \partial_{x_i x_j}^2 u, u_t \in C(\Omega_T), \quad i, j = 1, \dots, n \right\}$$

temos

**Teorema 1.1.13 (Princípio do máximo forte)** *Suponha  $\Omega$  conexo e  $c \leq 0$  em  $\Omega$ .*

(i) *Se  $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C^1(\overline{\Omega_T})$  é tal que*

$$u_t + \mathfrak{L}u \geq 0 \quad \text{em } \Omega_T$$

*e  $u$  atinge um máximo não-negativo sobre  $\overline{\Omega_T}$  em  $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ , então  $u$  é constante em  $\Omega_{t_0}$ .*

(ii) *Se  $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C^1(\overline{\Omega_T})$  é tal que*

$$u_t + \mathfrak{L}u \leq 0 \quad \text{em } \Omega_T$$

*e  $u$  atinge um mínimo não-positivo sobre  $\overline{\Omega_T}$  em  $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ , então  $u$  é constante em  $\Omega_{t_0}$ .*

## 1.2 Bifurcação de autovalor simples e o princípio da transferência da estabilidade

Sejam  $U, V$  dois espaços de Banach e sejam  $A, B$  em  $\mathcal{L}(U, V)$ , o espaço dos operadores lineares limitados entre  $U$  e  $V$ .

**Definição 1.2.1** ([10],[22],[23]) *O conjunto resolvente  $\rho(A, B)$  do par  $(A, B)$  é definido como o conjunto dos  $\lambda \in \mathbb{C}$  tais que  $A - \lambda B$  tem uma inversa limitada. O espectro  $\sigma(A, B)$  do par  $(A, B)$  é definido como*

$$\sigma(A, B) := \mathbb{C} \setminus \rho(A, B).$$

$\lambda_0 \in \sigma(A, B)$  é dito um autovalor de  $(A, B)$  se zero é um autovalor de  $A - \lambda_0 B$ , isto é, se

$$\dim \text{Ker}[A - \lambda_0 B] \geq 1$$

e  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  é dito um autovalor simples do par  $(A, B)$  se

$$\dim \text{Ker}[A - \lambda_0 B] = \text{codim } \mathcal{R}[A - \lambda_0 B] = 1$$

e

$$B(\text{Ker}[A - \lambda_0 B]) \oplus \mathcal{R}[A - \lambda_0 B] = V,$$

sendo  $\mathcal{R}[A - \lambda_0 B]$  a imagem do operador  $A - \lambda_0 B$ .

Na definição anterior podemos ver que se  $U \subset V$ ,  $B = I$  (a aplicação inclusão) e  $\lambda_0$  é um autovalor simples do par  $(A, I)$ , dizemos simplesmente que  $\lambda_0$  é um autovalor simples de  $A$ .

**Observação 1.2.2** *É comum caracterizar autovalor simples da seguinte forma:  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  é um autovalor simples do par  $(A, B)$  se  $A - \lambda_0 B$  é um operador de Fredholm de índice zero (Definições 1.4.1 e 1.4.2) com*

$$\dim \text{Ker}[A - \lambda_0 B] = 1 \quad e \quad B(u_0) \notin \mathcal{R}[A - \lambda_0 B],$$

sendo  $u_0$  gerador de  $\text{Ker}[A - \lambda_0 B]$ . Esta última condição é conhecida como condição de transversalidade.

Seja  $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times U \longrightarrow V$  um operador não linear associado a uma equação não linear abstrata que depende do parâmetro  $\lambda$ , qual seja

$$\mathcal{F}(\lambda, u) = 0. \tag{1.2.1}$$

Uma ferramenta muito útil neste contexto é o Teorema de Função Implícita, que enunciaremos no contexto geral, como

**Teorema 1.2.3 (Teorema da Função Implícita)** *Sejam  $U, V$  e  $W$  espaços de Banach,  $\Omega \subset U \times V$  um aberto e  $T : \Omega \longrightarrow W$  uma aplicação de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ . Suponha que  $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}) \in \Omega$  satisfaça*

$$T(\tilde{\lambda}, \tilde{u}) = 0$$

e que

$$D_u T(\tilde{\lambda}, \tilde{u}) : V \longrightarrow W$$

seja uma bijeção. Então, existem uma vizinhança aberta  $\tilde{\Omega}$  de  $(\tilde{\lambda}, \tilde{u})$  em  $U \times V$ , uma vizinhança aberta  $\tilde{U}$  de  $\tilde{\lambda}$  em  $U$  e uma função  $\varphi : \tilde{U} \longrightarrow V$  de classe  $C^k$  tais que

$$\{(\lambda, u) \in \tilde{\Omega} : T(\lambda, u) = 0\} = \{(\lambda, u) : \lambda \in \tilde{U}, u = \varphi(\lambda)\}.$$

Além disso,  $\tilde{\Omega}$  pode ser escolhida de forma que  $D_u T(\tilde{\lambda}, \tilde{u})$  seja uma bijeção de  $V$  em  $W$  para todo  $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}) \in \tilde{\Omega}$ . Neste caso, se  $\lambda \in \tilde{U}$  então

$$D\varphi(\lambda) = -[D_u T(\lambda, \varphi(\lambda))]^{-1} D_\lambda T(\lambda, \varphi(\lambda)).$$

Estamos interessados na estrutura do conjunto solução. Para este fim, suponha que  $\Gamma$  seja uma curva de soluções de (1.2.1), que será chamada de ramo trivial, e que seus pontos sejam da forma  $(\lambda, 0)$ . Considere  $(\lambda_0, 0) \in \Gamma$ .

**Definição 1.2.4** Um ponto  $(\lambda_0, 0)$  (ou simplesmente  $\lambda_0$ ) é ponto de bifurcação de (1.2.1) com relação ao ramo trivial  $\Gamma$  se há uma sequência  $(\lambda_k, u_k) \in \mathbb{R} \times (U \setminus \{0\})$  satisfazendo  $\mathcal{F}(\lambda_k, u_k) = 0$  para todo  $k$  e tal que  $\lambda_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lambda_0$  e  $u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$  em  $U$ .

Para enunciarmos os principais resultados da teoria da bifurcação que utilizaremos neste trabalho, estabelecemos algumas notações. Dado um operador  $\mathcal{F}$  de classe  $C^2$ , no sentido de Fréchet, numa vizinhança de  $(\lambda_0, 0) \in \mathbb{R} \times U$ , denotamos as seguintes derivadas parciais

$$\mathfrak{L}_0 := D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0) \in \mathcal{L}(U, V)$$

e

$$\mathfrak{L}_1 := D_\lambda D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0) \in \mathcal{L}(U, V).$$

**Teorema 1.2.5 ([10],[11],[23];Bifurcação de um autovalor simples)** Suponha que  $\mathcal{F}$  é de classe  $C^k$ , para algum  $k \geq 2$ , e zero é um autovalor simples de  $(\mathfrak{L}_0, \mathfrak{L}_1)$ . Seja  $Y \subset U$  um subespaço tal que

$$\text{Ker}[\mathfrak{L}_0] \oplus Y = U$$

Então, existem  $\varepsilon > 0$  e duas aplicações de classe  $C^{k-1}$

$$\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R} \quad y : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow Y$$

tais que

$$\lambda(0) = \lambda_0, \quad y(0) = 0$$

e para cada  $r \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  se tem  $\mathcal{F}(\lambda(r), u(r)) = 0$ , em que  $u(r) := ru_0 + ry(r)$ , com  $u_0$  gerador de  $\text{Ker}[\mathfrak{L}_0]$ .

Além disso, existe  $\rho > 0$  tal que se  $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$  e  $(\lambda, u) \in B_\rho(\lambda_0, 0)$ , então ou  $u = 0$  ou  $(\lambda, u) = (\lambda(r), u(r))$  para algum  $r \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

Agora veremos a relação do espectro da linearização de  $\mathcal{F}(\lambda, u)$  ao longo do ramo trivial

$$\{(\lambda, 0) : \lambda \simeq \lambda_0\}$$

e o ramo de soluções bifurcadas

$$\{(\lambda(r), u(r)) : r \simeq 0\}.$$

O seguinte resultado garante que o autovalor zero de  $\mathfrak{L}_0$  pode ser perturbado ao longo de cada um destes ramos.

**Teorema 1.2.6** ([10],[12],[23]) *Suponha que  $\mathcal{F}$  é de classe  $C^k$ , para algum  $k \geq 2$ , e zero é um autovalor simples de  $(\mathfrak{L}_0, \mathfrak{L}_1)$ . Seja  $\mathcal{K} \in \mathcal{L}(U, V)$  tal que zero é um autovalor simples de  $(\mathfrak{L}_0, \mathcal{K})$ , e  $Y$  um subespaço fechado de  $U$  tal que*

$$\text{Ker}[\mathfrak{L}_0] \oplus Y = U$$

Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:

1. *Existem  $\varepsilon > 0$  e duas únicas aplicações de classe  $C^{k-1}$*

$$\gamma : (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R} \quad x : (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon) \longrightarrow U$$

tais que

$$\gamma(\lambda_0) = 0 \quad x(\lambda_0) = u_0 \quad x(\lambda) - u_0 \in Y$$

e

$$D_u \mathcal{F}(\lambda, 0) \cdot x(\lambda) = \gamma(\lambda) \mathcal{K} \cdot x(\lambda)$$

para cada  $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ .

2. *Existem  $\delta > 0$  e duas únicas aplicações de classe  $C^{k-1}$*

$$\mu : (-\delta, \delta) \longrightarrow \mathbb{R} \quad z : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow U$$

tais que

$$\mu(0) = 0 \quad z(0) = u_0 \quad z(r) - u_0 \in Y$$

e

$$D_u \mathcal{F}(\lambda(r), u(r)) \cdot z(r) = \mu(r) \mathcal{K} \cdot z(r)$$

para cada  $r \in (-\delta, \delta)$ , sendo que  $(\lambda(r), u(r))$  esta sobre a curva emanando desde o ramo trivial  $\{(\lambda, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$  em  $\lambda = \lambda_0$ , cuja existência é garantida pelo Teorema 1.2.5.

O resultado seguinte relaciona as perturbações do autovalor zero de  $\mathfrak{L}_0$  ao longo do ramo trivial e do ramo de soluções bifurcadas, usualmente conhecido como princípio da transferência da estabilidade.

**Teorema 1.2.7** ([10],[12],[23];Princípio da transferência da estabilidade) *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 1.2.6. Tem-se  $\gamma'(\lambda_0) \neq 0$ . Além disso, as funções  $\mu(r)$  e  $-r\lambda(r)\gamma'(\lambda_0)$  têm os mesmos zeros para todo  $r$  suficientemente pequeno, e o mesmo sinal quando  $\mu(r) \neq 0$  (sendo  $d/dr = \dot{\phantom{x}}$  e  $d/d\lambda = \prime$ ). Especificamente, a seguinte relação é válida*

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \mu(r) \neq 0}} \frac{-r\dot{\lambda}(r)\gamma'(\lambda_0)}{\mu(r)} = 1.$$

Outra ferramenta importante para descrever a estrutura dos zeros de uma equação não linear perto de um ponto de bifurcação (do tipo mencionado ao começo desta seção), é o seguinte resultado, dada por Morse.

**Teorema 1.2.8** ([21],[32];Lema de Morse) *Seja  $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação de classe  $C^k$ , para algum  $k \geq 2$ , tais que  $\Psi(0) = 0$ ,  $\Psi'(0) = 0$  e que  $\Psi''(0)$  é uma matriz não singular. Então, existe uma aplicação, mudança de coordenadas,  $x \mapsto y(x)$ , definida numa vizinhança do ponto 0 em  $\mathbb{R}^n$ , de classe  $C^{k-2}$  tal que  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = I$  e*

$$\Psi(x) = \frac{1}{2}(\Psi''(0)y(x), y(x)),$$

sendo  $\Psi''(0)y(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , e  $(\Psi''(0)y(x), y(x)) = (\Psi''(0)y(x)) \cdot y(x)$ .

Neste caso o conjunto solução de  $\Psi(x) = 0$  é muito simples. Em particular, temos

**Corolário 1.2.9** ([21],[32]) *Seja  $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação de classe  $C^k$ , para algum  $k \geq 2$ , tais que  $\Psi(0) = 0$ ,  $\Psi'(0) = 0$  e que  $\Psi''(0)$  é uma matriz não singular. Então, o conjunto solução da equação  $\Psi(x) = 0$ , perto do ponto  $0 \in \mathbb{R}^2$ , consiste de um par de curvas que se interceptam no ponto 0. Além disso, se  $k > 2$ , as curvas são de classe  $C^1$  e cortam-se transversalmente.*

### 1.3 Problemas de autovalores com condição de fronteira de Neumann homogênea e com peso indefinido

Nesta seção consideraremos o seguinte problema de autovalores elíptico, seguindo [7], [35] e [37], [1] dado por

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda g(x)v & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Assumiremos que  $\lambda$  é um parâmetro real;  $g \in L^\infty(\Omega)$  que troca de sinal e  $\nu$  é a normal exterior à  $\partial\Omega$ . Dizer que troca de sinal significa que os conjuntos  $\{x \in \Omega : g(x) > 0\}$  e  $\{x \in \Omega : g(x) < 0\}$  têm medida positiva.

É importante em aplicações, particularmente em dinâmica populacional, determinar os valores do parâmetro  $\lambda \in \mathbb{R}$  aos quais estão associados soluções positivas de (1.3.1)

**Definição 1.3.1** *Dizemos que  $\lambda \in \mathbb{R}$  é um autovalor principal de (1.3.1) se é um autovalor que está associado a uma autofunção positiva em  $\bar{\Omega}$ . Ou seja,  $\lambda$  é um autovalor principal de (1.3.1) se existe  $v > 0$  em  $\bar{\Omega}$  que satisfaça (1.3.1).*

Para conhecer os autovalores principais de (1.3.1), primeiro consideremos autovalores principais do seguinte problema de autovalores linear para um autovalor  $\mu(\lambda)$ , dado por

$$\begin{cases} -\Delta v - \lambda g(x)v = \mu(\lambda)v & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Como antes, dizemos que  $\mu(\lambda)$  é autovalor principal de (1.3.2) se existe  $v > 0$  em  $\bar{\Omega}$  solução

de (1.3.2). Note que,  $\lambda$  é um autovalor principal de (1.3.1) se, e somente se,  $\mu(\lambda) = 0$  for autovalor principal de (1.3.2).

O seguinte teorema caracteriza a existência e unicidade de autovalor principal de (1.3.2).

**Teorema 1.3.2** *Para qualquer  $\lambda \in \mathbb{R}$  há um único autovalor principal  $\mu_1(\lambda)$  de (1.3.2), caracterizado por*

$$\mu_1(\lambda) = \inf \left\{ \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 - \lambda g(\cdot)v^2) dx : v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} v^2 dx = 1 \right\}. \quad (1.3.3)$$

**Prova:** Para provar a existência se usará um argumento variacional (veja [35]). Consideremos o conjunto minimizador do funcional

$$S_{\lambda} = \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} g(\cdot)u^2 dx : u \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} u^2 dx = 1 \right\},$$

para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Note que  $S_{\lambda}$  é limitado inferiormente pois,

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} g(\cdot)u^2 dx \geq -\lambda \int_{\Omega} g(\cdot)u^2 dx \geq -\lambda \|g^+\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \text{se } \lambda \geq 0$$

e

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} g(\cdot)u^2 dx \geq -\lambda \int_{\Omega} g(\cdot)u^2 dx \geq -\lambda \inf(g^-), \quad \text{se } \lambda < 0$$

para todo  $u \in H^1(\Omega)$  com  $\int_{\Omega} u^2 dx = 1$ , sendo  $g^+(x) := \max\{0, g(x)\}$  e  $g^-(x) := \max\{0, -g(x)\}$  para  $x \in \Omega$ .

Afirmação: o ínfimo de  $S_{\lambda}$  é atingido por alguma função  $\phi_{\lambda}$ , ou seja,

$$I_{\lambda} := \inf S_{\lambda} = \int_{\Omega} |\nabla \phi_{\lambda}|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} g(\cdot)\phi_{\lambda}^2 dx \quad (1.3.4)$$

com  $\phi_{\lambda} \in H^1(\Omega)$  e  $\int_{\Omega} \phi_{\lambda}^2 dx = 1$ .

De fato, seja  $\{\phi_k\} \subset H^1(\Omega)$  uma sequência minimizante:

$$\int_{\Omega} |\nabla \phi_k|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} g(\cdot)\phi_k^2 dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} I_{\lambda}, \quad (1.3.5)$$

com  $\int_{\Omega} \phi_k^2 dx = 1$ . Note que,  $\left\{ \int_{\Omega} |\nabla \phi_k|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} g(\cdot)\phi_k^2 dx \right\}$  é limitada, pois é convergente, e  $\left| \lambda \int_{\Omega} g(\cdot)\phi_k^2 dx \right| \leq |\lambda| \|g\|_{L^\infty(\Omega)}$  para todo  $k$ , de modo que

$$\int_{\Omega} |\nabla \phi_k|^2 dx = \left( \int_{\Omega} |\nabla \phi_k|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} g(\cdot)\phi_k^2 dx \right) + \lambda \int_{\Omega} g(\cdot)\phi_k^2 dx \quad (1.3.6)$$

é também limitada. Assim,  $\{\phi_k\}$  é uma sequência limitada em  $H^1(\Omega)$  e, passando a uma subsequência se é necessário, existe  $\tilde{\phi} \in H^1(\Omega)$  e  $h \in L^2(\Omega)$  verificando, quando  $k \rightarrow \infty$

$\phi_k \rightharpoonup \tilde{\phi}$  em  $H^1(\Omega)$ ,

$\phi_k \rightarrow \tilde{\phi}$  em  $L^2(\Omega)$ ,

$\phi_k \rightarrow \tilde{\phi}$  q.t.p em  $\Omega$ , com  $|\phi_k(x)| \leq h(x)$  q.t.p em  $\Omega$ .

Então, por  $\phi_k \rightarrow \tilde{\phi}$  em  $L^2(\Omega)$  e pelo fato que  $\int_{\Omega} \phi_k^2 dx = 1$  para todo  $k$ ,  $\int_{\Omega} \tilde{\phi}^2 dx = 1$ ; além disso,

$$\begin{aligned} \left| \lambda \int_{\Omega} g(\cdot) \phi_k^2 dx - \lambda \int_{\Omega} g(\cdot) \tilde{\phi}^2 dx \right| &\leq |\lambda| \int_{\Omega} |g| |\phi_k^2 - \tilde{\phi}^2| dx \\ &\leq |\lambda| \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |\phi_k^2 - \tilde{\phi}^2| dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

pelo Teorema de Convergência Dominada, donde  $\lambda \int_{\Omega} g(\cdot) \phi_k^2 dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lambda \int_{\Omega} g(\cdot) \tilde{\phi}^2 dx$  e, por (1.3.5) e (1.3.6), segue

$$\int_{\Omega} |\nabla \phi_k|^2 dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} I_\lambda + \lambda \int_{\Omega} g(\cdot) \tilde{\phi}^2 dx. \quad (1.3.7)$$

Daí, a convergência fraca  $\phi_k \rightharpoonup \tilde{\phi}$  em  $H^1(\Omega)$  e a semicontinuidade inferior da norma implicam

$$\begin{aligned} \|\tilde{\phi}\|_{H^1(\Omega)} &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\phi_k\|_{H^1(\Omega)} \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \left( \int_{\Omega} |\nabla \phi_k|^2 dx + \int_{\Omega} \phi_k^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \int_{\Omega} |\nabla \phi_k|^2 dx + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( I_\lambda + \lambda \int_{\Omega} g(\cdot) \tilde{\phi}^2 dx + 1 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Como  $\tilde{\phi}$  é admissível ao conjunto  $S_\lambda$ , tem-se

$$I_\lambda \leq \int_{\Omega} |\nabla \tilde{\phi}|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} g(\cdot) \tilde{\phi}^2 dx$$

e assim,

$$I_\lambda + \lambda \int_{\Omega} g(\cdot) \tilde{\phi}^2 dx + 1 \leq \int_{\Omega} |\nabla \tilde{\phi}|^2 dx + \int_{\Omega} \tilde{\phi}^2 dx,$$

que implica

$$\left( I_\lambda + \lambda \int_{\Omega} g(\cdot) \tilde{\phi}^2 dx + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\tilde{\phi}\|_{H^1(\Omega)} \quad (1.3.9)$$

de modo que, por (1.3.8) e (1.3.9), se conclui

$$\|\tilde{\phi}\|_{H^1(\Omega)}^2 = \left( I_\lambda + \lambda \int_{\Omega} g(\cdot) \tilde{\phi}^2 dx + 1 \right).$$

Logo,

$$\int_{\Omega} |\nabla \tilde{\phi}|^2 dx + \int_{\Omega} \tilde{\phi}^2 dx = I_\lambda + \lambda \int_{\Omega} g(\cdot) \tilde{\phi}^2 dx + 1$$

e como  $\int_{\Omega} \tilde{\phi}^2 dx = 1$ , temos

$$\int_{\Omega} |\nabla \tilde{\phi}|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} g(\cdot) \tilde{\phi}^2 dx = I_\lambda,$$

ou seja,  $I_\lambda$  é atingido pela função  $\phi_\lambda = \tilde{\phi}$ .

Afirmção:  $\phi_\lambda$  é uma solução do problema de autovalores linear (1.3.2) com o autovalor  $I_\lambda$ .

De fato, consideremos a forma bilinear  $J_\lambda : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$J_\lambda(\phi, \psi) := \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \psi dx - \lambda \int_{\Omega} g(\cdot) \phi \psi dx. \quad (1.3.10)$$

Assim, para  $\phi \in H^1(\Omega)$ . Se  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante, então  $\frac{\phi_\lambda + C\phi}{\|\phi_\lambda + C\phi\|_{L^2(\Omega)}} \in H^1(\Omega)$  e que  $\int_{\Omega} \frac{(\phi_\lambda + C\phi)^2}{\|\phi_\lambda + C\phi\|_{L^2(\Omega)}^2} dx = 1$ , daí

$$I_\lambda \leq \int_{\Omega} \left| \nabla \left( \frac{\phi_\lambda + C\phi}{\|\phi_\lambda + C\phi\|_{L^2(\Omega)}} \right) \right|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} g(\cdot) \left( \frac{\phi_\lambda + C\phi}{\|\phi_\lambda + C\phi\|_{L^2(\Omega)}} \right)^2 dx, \quad (1.3.11)$$

e assim, por calculo direto, usando (1.3.4) e (1.3.10) segue que

$$\begin{aligned} I_\lambda \|\phi_\lambda + C\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \int_{\Omega} |\nabla(\phi_\lambda + C\phi)|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} g(\cdot) (\phi_\lambda + C\phi)^2 dx \\ &= 2C J_\lambda(\phi, \phi_\lambda) + I_\lambda + C^2 \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx - \lambda C^2 \int_{\Omega} g(\cdot) \phi^2 dx, \end{aligned}$$

de forma que

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2C J_\lambda(\phi, \phi_\lambda) + I_\lambda + C^2 \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx - \lambda C^2 \int_{\Omega} g(\cdot) \phi^2 dx - I_\lambda \|\phi_\lambda + C\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= 2C \left[ J_\lambda(\phi, \phi_\lambda) - I_\lambda \int_{\Omega} \phi_\lambda \phi dx \right] \\ &\quad + C^2 \|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 \left( \int_{\Omega} \left| \nabla \left( \frac{\phi}{\|\phi\|_{L^2(\Omega)}} \right) \right|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} g(\cdot) \left( \frac{\phi}{\|\phi\|_{L^2(\Omega)}} \right)^2 dx - I_\lambda \right), \end{aligned}$$



logo, como  $C$  é qualquer e  $\int_{\Omega} \left| \nabla \left( \frac{\phi}{\|\phi\|_{L^2(\Omega)}} \right) \right|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} g(\cdot) \left( \frac{\phi}{\|\phi\|_{L^2(\Omega)}} \right)^2 dx - I_{\lambda} \geq 0$ , se pode concluir que

$$J_{\lambda}(\phi, \phi_{\lambda}) = I_{\lambda} \int_{\Omega} \phi_{\lambda} \phi dx,$$

para todo  $\phi \in H^1(\Omega)$ , ou seja,

$$\int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \phi_{\lambda} dx - \lambda \int_{\Omega} g(\cdot) \phi \phi_{\lambda} dx = I_{\lambda} \int_{\Omega} \phi_{\lambda} \phi dx$$

para todo  $\phi \in H^1(\Omega)$ , que é a formulação fraca do problema de autovalores linear (1.3.2). Assim,  $\phi_{\lambda}$  é solução de (1.3.2) associada ao autovalor  $I_{\lambda}$ , provando a afirmação.

Agora, vamos mostrar que  $|\phi_{\lambda}|$  também é solução do problema de autovalores linear (1.3.2) associada ao autovalor  $I_{\lambda}$ . Note que

$$I_{\lambda} = \inf S_{\lambda} = \int_{\Omega} |\nabla \phi_{\lambda}|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} g(\cdot) \phi_{\lambda}^2 dx.$$

As afirmações acima mostram que se

$$I_{\lambda} = \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} g(\cdot) \psi^2 dx$$

então  $\psi$  é solução fraca de (1.3.2). Daí, basta mostrar que  $\psi = |\phi_{\lambda}|$  é tal que

$$I_{\lambda} = \int_{\Omega} |\nabla |\phi_{\lambda}||^2 dx - \lambda \int_{\Omega} g(\cdot) |\phi_{\lambda}|^2 dx.$$

Note que

$$\int_{\Omega} |\nabla |\phi_{\lambda}||^2 dx - \lambda \int_{\Omega} g(\cdot) |\phi_{\lambda}|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla |\phi_{\lambda}||^2 dx - \lambda \int_{\Omega} g(\cdot) \phi_{\lambda}^2 dx$$

e como

$$\begin{aligned} |\nabla |\phi_{\lambda}||^2 = \nabla |\phi_{\lambda}| \cdot \nabla |\phi_{\lambda}| &= (\chi_{\{\phi_{\lambda} > 0\}} \nabla \phi_{\lambda} - \chi_{\{\phi_{\lambda} < 0\}} \nabla \phi_{\lambda}) \cdot (\chi_{\{\phi_{\lambda} > 0\}} \nabla \phi_{\lambda} - \chi_{\{\phi_{\lambda} < 0\}} \nabla \phi_{\lambda}) \\ &= \chi_{\{\phi_{\lambda} > 0\}}^2 |\nabla \phi_{\lambda}|^2 - 2\chi_{\{\phi_{\lambda} > 0\}} \chi_{\{\phi_{\lambda} < 0\}} |\nabla \phi_{\lambda}|^2 + \chi_{\{\phi_{\lambda} < 0\}}^2 |\nabla \phi_{\lambda}|^2 \\ &= |\nabla \phi_{\lambda}|^2 (\chi_{\{\phi_{\lambda} > 0\}}^2 + \chi_{\{\phi_{\lambda} < 0\}}^2) \\ &= |\nabla \phi_{\lambda}|^2 \end{aligned}$$

temos

$$\int_{\Omega} |\nabla |\phi_{\lambda}||^2 dx - \lambda \int_{\Omega} g(\cdot) |\phi_{\lambda}|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla \phi_{\lambda}|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} g(\cdot) \phi_{\lambda}^2 dx = I_{\lambda},$$

assim  $|\phi_{\lambda}|$  também é solução fraca de (1.3.2).

Logo, podemos escolher  $\phi_\lambda \geq 0$ . Por outro lado, por regularidade elíptica também podemos considerar  $\phi_\lambda$  ao menos de classe  $C^2(\overline{\Omega})$ , assim se supomos que  $\phi_\lambda(x_0) = 0$ , para algum  $x_0 \in \overline{\Omega}$ , pelo princípio do máximo  $x_0$  pertenceria a  $\partial\Omega$  e logo  $\frac{\partial\phi_\lambda}{\partial\nu}(x_0) < 0$  pelo Lema de Hopf, uma contradição. Portanto, temos  $\phi_\lambda > 0$  em  $\overline{\Omega}$ , provando que  $I_\lambda$  é um autovalor principal do problema de autovalores (1.3.2).

Para provarmos a unicidade, supomos, que existe outro autovalor principal  $\mu (\neq \mu_1(\lambda))$  do problema de autovalores linear (1.3.2), cuja autofunção  $\psi$  positiva em  $\overline{\Omega}$  associada a ele é solução de

$$\begin{cases} -\Delta\psi = \lambda g(x)\psi + \mu\psi & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial\psi}{\partial\nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.3.12)$$

e também temos

$$\begin{cases} -\Delta\phi_\lambda = \lambda g(x)\phi_\lambda + \mu_1(\lambda)\phi_\lambda & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial\phi_\lambda}{\partial\nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.3.13)$$

sendo  $\phi_\lambda > 0$  em  $\overline{\Omega}$ . Logo, por (1.3.12), (1.3.13) e a fórmula de Green, segue

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} \left( \phi_\lambda \frac{\partial\psi}{\partial\nu} - \psi \frac{\partial\phi_\lambda}{\partial\nu} \right) d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \int_{\Omega} \left( \phi_\lambda \Delta\psi - \psi \Delta\phi_\lambda \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left[ -\phi_\lambda \left( \lambda g(x)\psi + \mu\psi \right) + \psi \left( \lambda g(x)\phi_\lambda + \mu_1(\lambda)\phi_\lambda \right) \right] dx \\ &= \int_{\Omega} \psi \phi_\lambda (\mu_1(\lambda) - \mu) dx, \end{aligned}$$

como  $\mu_1(\lambda) - \mu \neq 0$ , segue que  $\int_{\Omega} \psi \phi_\lambda dx = 0$ , uma contradição. Provando o teorema.  $\square$

As propriedades da aplicação  $\lambda \mapsto \mu_1(\lambda)$  são dadas no seguinte

**Teorema 1.3.3** *Suponha que  $g(\cdot)$  troque de sinal. Então a função real  $\mu_1(\lambda)$  da variável real  $\lambda$  possui as seguintes propriedades.*

- i) A aplicação  $\lambda \mapsto \mu_1(\lambda)$  é côncava e  $\mu_1(\lambda) \rightarrow -\infty$  quando  $\lambda \rightarrow \pm\infty$
- ii) A aplicação  $\lambda \mapsto \mu_1(\lambda)$  é contínua.
- iii) O único autovalor principal  $\mu_1(\lambda)$  tem um ponto máximo local (na verdade, global) que pertence ao intervalo  $[0, \infty)$ , se  $\int_{\Omega} g(\cdot) dx \leq 0$ . Se  $\int_{\Omega} g(\cdot) dx > 0$ , o ponto de máximo ocorre no intervalo  $(-\infty, 0)$ .

iv)  $\mu(\lambda)$  depende continuamente de  $g$  na topologia de  $L^\infty(\Omega)$ , isto é, denotando  $\mu_1(\lambda)$  por  $\mu_1^g(\lambda)$ , tem-se: Se  $g_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g$  em  $L^\infty(\Omega)$  então  $\mu_1^{g_k}(\lambda) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mu_1^g(\lambda)$ .

**Prova:** Para verificar a afirmação (i). Note que, para cada  $v \in H^1(\Omega)$  a aplicação

$$\lambda \longmapsto \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} g(\cdot) v^2 dx$$

é afim e assim côncava, e daí que também o ínfimo é côncava. Por outro lado, quando  $\lambda < 0$  é possível escolher uma função não-trivial  $\psi_1 \in C^1(\overline{\Omega})$  satisfazendo  $\int_{\Omega} \psi_1^2 dx = 1$ , tal que  $\psi_1$  tenha suporte compacto em  $\{x \in \Omega : g(x) < 0\}$  pois, a função peso  $g(\cdot)$  troca de sinal em  $\Omega$  logo

$$\begin{aligned} \mu_1(\lambda) &\leq \int_{\Omega} |\nabla \psi_1|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} g(\cdot) \psi_1^2 dx \\ &\leq M_1^2 m(\Omega) + \lambda \int_{\Omega} g^-(\cdot) \psi_1^2 dx \\ &\xrightarrow{\lambda \rightarrow -\infty} -\infty, \end{aligned}$$

sendo  $M_1 = \sup_{\overline{\Omega}} |\nabla \psi_1|$ ,  $m$  a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^n$  e  $g^-(x) = \max\{0, -g(x)\}$ . E quando  $\lambda > 0$  é possível escolher uma função não trivial  $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$  satisfazendo  $\int_{\Omega} \psi^2 dx = 1$ , tal que  $\psi$  tenha suporte compacto em  $\{x \in \Omega : g(x) > 0\}$  assim, temos

$$\begin{aligned} \mu_1(\lambda) &\leq \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} g(\cdot) \psi^2 dx \\ &\leq M^2 m(\Omega) - \lambda \int_{\text{ssup } \psi} g(\cdot) \psi^2 dx \\ &\xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} -\infty, \end{aligned}$$

sendo  $M = \sup_{\overline{\Omega}} |\nabla \psi|$ ,  $m$  a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^n$  e  $\text{ssup } \psi$  o suporte da função  $\psi$ .

Para verificar a afirmação (ii). Consideremos, o conjunto

$$\mathcal{A} := \left\{ \phi \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} \phi^2 dx = 1 \right\}$$

e para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$  o funcional linear  $J_\lambda : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , dado por

$$J_\lambda(\phi) := \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} g(\cdot) \phi^2 dx$$

para todo  $\phi \in H^1(\Omega)$ . Logo,

$$\mu_1(\lambda) = \inf_{\mathcal{A}} J_\lambda. \tag{1.3.14}$$

Para cada  $\phi \in \mathcal{A}$  e  $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{R}$ , temos

$$|J_\lambda(\phi) - J_{\lambda_0}(\phi)| = \left| (\lambda_0 - \lambda) \int_{\Omega} g(\cdot) \phi^2 dx \right| \leq |\lambda - \lambda_0| \|g\|_{L^\infty(\Omega)}$$

que implica

$$\inf_{\phi \in \mathcal{A}} |J_\lambda(\phi) - J_{\lambda_0}(\phi)| \leq |\lambda - \lambda_0| \|g\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (1.3.15)$$

Por outro lado, temos

$$-\inf_{\mathcal{A}} |J_\lambda - J_{\lambda_0}| \leq \inf_{\mathcal{A}} (J_\lambda - J_{\lambda_0}) \leq \inf_{\mathcal{A}} J_\lambda - \inf_{\mathcal{A}} J_{\lambda_0}$$

e trocando os papeis de  $J_\lambda$  por  $J_{\lambda_0}$ , e viceversa

$$\inf_{\mathcal{A}} J_\lambda - \inf_{\mathcal{A}} J_{\lambda_0} \leq \inf_{\mathcal{A}} |J_\lambda - J_{\lambda_0}|,$$

que implicam

$$|\inf_{\mathcal{A}} J_\lambda - \inf_{\mathcal{A}} J_{\lambda_0}| \leq \inf_{\mathcal{A}} |J_\lambda - J_{\lambda_0}| \quad (1.3.16)$$

Logo, por (1.3.14), (1.3.15) e (1.3.16), temos

$$|\mu_1(\lambda) - \mu_1(\lambda_0)| = |\inf_{\mathcal{A}} J_\lambda - \inf_{\mathcal{A}} J_{\lambda_0}| \leq |\lambda - \lambda_0| \|g\|_{L^\infty(\Omega)},$$

que mostra a continuidade da aplicação  $\lambda \mapsto \mu_1(\lambda)$ .

Para verificarmos a afirmação (iii). Diferenciamos o problema de autovalores linear (1.3.13) com respeito a  $\lambda$ , temos

$$\begin{cases} -\Delta \phi'_\lambda = g(x)\phi_\lambda + \lambda g(x)\phi'_\lambda + \mu'_1(\lambda)\phi_\lambda + \mu_1(\lambda)\phi'_\lambda & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial \phi'_\lambda}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.3.17)$$

Assim, usando (1.3.13), (1.3.17) e pela fórmula de Green, segue

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} \left( \phi_\lambda \frac{\partial \phi'_\lambda}{\partial \nu} - \phi'_\lambda \frac{\partial \phi_\lambda}{\partial \nu} \right) d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \int_{\Omega} (\phi_\lambda \Delta \phi'_\lambda - \phi'_\lambda \Delta \phi_\lambda) dx \\ &= \int_{\Omega} \left[ -\phi_\lambda \left( g(x)\phi_\lambda + \lambda g(x)\phi'_\lambda + \mu'_1(\lambda)\phi_\lambda + \mu_1(\lambda)\phi'_\lambda \right) + \phi'_\lambda \left( \lambda g(x)\phi_\lambda + \mu_1(\lambda)\phi_\lambda \right) \right] dx \\ &= - \int_{\Omega} g(x)\phi_\lambda^2 dx - \mu'_1(\lambda) \int_{\Omega} \phi_\lambda^2 dx, \end{aligned}$$

que implica

$$\mu'_1(\lambda) = - \int_{\Omega} g(x)\phi_\lambda^2 dx \quad (1.3.18)$$

pois,  $\phi_\lambda > 0$  em  $\bar{\Omega}$  e que  $\int_{\Omega} \phi_\lambda^2 dx = 1$ . Para  $\lambda = 0$ , temos  $\mu_1(0) = 0$  logo,  $\phi_0$  pode ser escolhido uma constante  $C$ , positiva. Daí

$$\mu'_1(0) = -C^2 \int_{\Omega} g(x) dx. \quad (1.3.19)$$

De (1.3.18), encontramos que  $\lambda_0$  é um ponto crítico de  $\mu_1(\lambda)$ , isto é,  $\mu_1'(\lambda_0) = 0$  se, e somente se,  $\int_{\Omega} g(x)\phi_{\lambda_0}^2 = 0$ . Logo, pelas afirmações (i), (ii) e (1.3.19), garantimos a existência de um ponto crítico em  $\lambda \geq 0$ , quando  $\int_{\Omega} g(x) dx \leq 0$ .

Além disso, a unicidade pode ser obtida da seguinte forma, consideremos  $\lambda_0$  ponto crítico de  $\mu_1(\lambda)$ , ou seja,  $\int_{\Omega} g(x)\phi_{\lambda_0}^2 dx = 0$ . É suficiente provar que  $\mu_1(\lambda) < \mu_1(\lambda_0)$  para  $\lambda \neq \lambda_0$ .

De fato, note que  $\mu_1(\lambda_0) = \int_{\Omega} |\nabla\phi_{\lambda_0}|^2 dx$  e também

$$\begin{aligned} \mu_1(\lambda) &\leq \int_{\Omega} |\nabla\phi_{\lambda_0}|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} g(x)\phi_{\lambda_0}^2 dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla\phi_{\lambda_0}|^2 dx \\ &= \mu_1(\lambda_0) \end{aligned}$$

para todo  $\lambda \neq \lambda_0$ . Então, se existe  $\lambda_1 (\neq \lambda_0)$  tal que  $\mu_1(\lambda_1) = \mu_1(\lambda_0)$ , teríamos que  $\phi_{\lambda_0}$  atinge o ínfimo de  $S_{\lambda_1}$ , ou seja,

$$\begin{cases} -\Delta\phi_{\lambda_0} = \lambda_1 g(x)\phi_{\lambda_0} + \mu_1(\lambda_1)\phi_{\lambda_0} & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial\phi_{\lambda_0}}{\partial\nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

mas também

$$\begin{cases} -\Delta\phi_{\lambda_0} = \lambda_0 g(x)\phi_{\lambda_0} + \mu_1(\lambda_0)\phi_{\lambda_0} & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial\phi_{\lambda_0}}{\partial\nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

logo, subtraindo as primeiras equações e pela suposição, segue  $(\lambda_1 - \lambda_0)g\phi_{\lambda_0} = 0$  em  $\Omega$  que implicaria  $g \equiv 0$  em  $\Omega$ , uma contradição, com o que conclui a prova da afirmação (iii).

Finalmente, a prova de (iv) é análoga a prova de (ii). Ou seja, consideremos, o conjunto

$$\mathcal{A} := \{\phi \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} \phi^2 dx = 1\},$$

para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$  e cada função peso  $g(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ , o funcional linear  $J_\lambda^g : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , dado por

$$J_\lambda^g(\phi) := \int_{\Omega} |\nabla\phi|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} g(\cdot)\phi^2 dx$$

para todo  $\phi \in H^1(\Omega)$ . Logo,

$$\mu_1^g(\lambda) = \inf_{\mathcal{A}} J_\lambda^g. \quad (1.3.20)$$

Para cada  $\phi \in \mathcal{A}$  e  $g, \tilde{g} \in L^\infty(\Omega)$ , temos

$$|J_\lambda^g(\phi) - J_\lambda^{\tilde{g}}(\phi)| = \left| \lambda \int_\Omega (g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)) \phi^2 dx \right| \leq |\lambda| \|g - \tilde{g}\|_{L^\infty(\Omega)}$$

que implica

$$\inf_{\phi \in \mathcal{A}} |J_\lambda^g(\phi) - J_\lambda^{\tilde{g}}(\phi)| \leq |\lambda| \|g - \tilde{g}\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (1.3.21)$$

Por outro lado, temos

$$-\inf_{\mathcal{A}} |J_\lambda^g - J_\lambda^{\tilde{g}}| \leq \inf_{\mathcal{A}} (J_\lambda^g - J_\lambda^{\tilde{g}}) \leq \inf_{\mathcal{A}} J_\lambda^g - \inf_{\mathcal{A}} J_\lambda^{\tilde{g}}$$

e trocando os papeis de  $J_\lambda^g$  por  $J_\lambda^{\tilde{g}}$ , e viceversa

$$\inf_{\mathcal{A}} J_\lambda^g - \inf_{\mathcal{A}} J_\lambda^{\tilde{g}} \leq \inf_{\mathcal{A}} |J_\lambda^g - J_\lambda^{\tilde{g}}|,$$

que implicam

$$|\inf_{\mathcal{A}} J_\lambda^g - \inf_{\mathcal{A}} J_\lambda^{\tilde{g}}| \leq \inf_{\mathcal{A}} |J_\lambda^g - J_\lambda^{\tilde{g}}| \quad (1.3.22)$$

para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$

Portanto, se tomarmos uma seqüência  $\{g_k\} \subset L^\infty(\Omega)$  com  $g_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g$  em  $L^\infty(\Omega)$ . Por (1.3.20), (1.3.21) e (1.3.22), teríamos

$$|\mu_1^{g_k}(\lambda) - \mu_1^g(\lambda)| = |\inf_{\mathcal{A}} J_\lambda^{g_k} - \inf_{\mathcal{A}} J_\lambda^g| \leq |\lambda| \|g_k - g\|_{L^\infty(\Omega)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ . □

**Observação 1.3.4** *Com relação aos autovalores principais de (1.3.1), tem-se:*

- $\mu_1(0) = 0$ , pois  $\int_\Omega |\nabla v|^2 dx \geq 0$  para cada  $v \in H^1(\Omega)$  e existe  $v_0 \equiv \frac{1}{|\Omega|^{1/2}}$  tal que  $\mu_1(0) = 0 = \int_\Omega |\nabla v_0|^2 dx$ , isto é, segue de (1.3.3) que 0 é sempre um autovalor principal de (1.3.1).
- Se  $\int_\Omega g(\cdot) dx \geq 0$  então não existe um autovalor principal positivo de (1.3.1).
- Se  $\int_\Omega g(\cdot) dx < 0$  então existe um único autovalor principal positivo  $\lambda_0$  de (1.3.1), isto significa que  $\mu_1(\lambda_0) = 0$ . Decorre das afirmações (i) e (iii) do teorema anterior.

O seguinte teorema dá uma caracterização variacional do único autovalor principal positivo  $\lambda_0$  de (1.3.1), que terá papel relevante no estado de bifurcação e estabilidade dos equilíbrios do problema (0.0.1).

**Teorema 1.3.5** *Suponha que  $g$  troque de sinal. O problema (1.3.1) possui autovalor principal positivo se, e só se,  $\int_{\Omega} g(\cdot) dx < 0$ . Neste caso, existe um único autovalor principal positivo  $\lambda_0$ , caracterizado por*

$$\lambda_0 = \inf \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Omega} g(\cdot) v^2 dx} : v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} g(\cdot) v^2 dx > 0 \right\}. \quad (1.3.23)$$

Para provarmos precisaremos do seguinte

**Lema 1.3.6** *Suponha  $\int_{\Omega} g(x) dx < 0$  válida. Então, existe uma constante  $C_0 > 0$  tal que  $\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx \geq C_0$  para todo  $\phi \in H^1(\Omega)$  tais que  $\int_{\Omega} \phi^2 dx = 1$  e  $\int_{\Omega} g(x) \phi^2 dx > 0$ .*

**Prova:** Suponhamos que não exista nenhuma constante com tal propriedade, isto é, existe uma seqüência  $\{\phi_k\} \subset H^1(\Omega)$  tais que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi_k^2 dx &= 1 \\ \int_{\Omega} g(x) \phi_k^2 dx &> 0 \\ \int_{\Omega} |\nabla \phi_k|^2 dx &\leq \frac{1}{k}, \end{aligned}$$

para todo  $k$ . Então  $\{\phi_k\}$  é limitada em  $H^1(\Omega)$ , pois

$$\|\phi_k\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\nabla \phi_k|^2 dx + \int_{\Omega} \phi_k^2 dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1, \quad (1.3.24)$$

já que  $\int_{\Omega} |\nabla \phi_k|^2 dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ . Daí, existe subsequência, ainda denotada por  $\{\phi_k\}$ , e existe  $\phi \in H^1(\Omega)$  tais que quando  $k \rightarrow \infty$

- (1)  $\phi_k \rightharpoonup \phi$  em  $H^1(\Omega)$ ,
- (2)  $\phi_k \rightarrow \phi$  em  $L^2(\Omega)$ .

Da semicontinuidade inferior da norma e por (1.3.24), obtemos

$$\left( \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx + \int_{\Omega} \phi^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|\phi\|_{H^1(\Omega)} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\phi_k\|_{H^1(\Omega)} = 1.$$

Como  $\int_{\Omega} \phi^2 dx = 1$  por (2) acima, obtemos  $\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx = 0$ , donde  $\phi$  é constante não nula. Portanto,

$$0 < \int_{\Omega} g(x) \phi_k^2 dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(x) \phi^2 dx = \phi^2 \int_{\Omega} g(x) dx < 0$$

o que é impossível. □

Agora, provemos o teorema

**Prova:** Seja  $\phi \in H^1(\Omega)$  com  $\int_{\Omega} g(x)\phi^2 dx > 0$ . Então, tomemos  $\psi := \frac{\phi}{\|\phi\|_{L^2(\Omega)}}$  que verifica  $\int_{\Omega} g(x)\psi^2 dx > 0$ , assim, por Lema 1.3.6  $\int_{\Omega} |\nabla\psi|^2 dx \geq C_0$  para alguma constante  $C_0 > 0$ , e daí segue

$$\frac{\int_{\Omega} |\nabla\phi|^2 dx}{\int_{\Omega} g(x)\phi^2 dx} = \frac{\int_{\Omega} |\nabla\psi|^2 dx}{\int_{\Omega} g(x)\psi^2 dx} \geq \frac{C_0}{\|g^+\|_{L^\infty(\Omega)}} > 0$$

sendo,  $g^+(\cdot) = \max\{0, g(\cdot)\}$ . Logo, definamos

$$\lambda_0 = \inf \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Omega} g(\cdot)v^2 dx} : v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} g(\cdot)v^2 dx > 0 \right\}, \quad (1.3.25)$$

note que  $\lambda_0 > 0$ . De acordo com a Observação 1.3.4 é suficiente provar que  $\mu_1(\lambda_0) = 0$  que verificamos nos seguintes itens

- $\mu_1(\lambda_0) \geq 0$ .

De fato, para  $\phi \in H^1(\Omega)$  com  $\int_{\Omega} \phi^2 dx = 1$ .

Se,  $\int_{\Omega} g(x)\phi^2 dx > 0$ , de (1.3.25), temos

$$\lambda_0 \leq \frac{\int_{\Omega} |\nabla\phi|^2 dx}{\int_{\Omega} g(x)\phi^2 dx}$$

$$0 \leq \int_{\Omega} |\nabla\phi|^2 dx - \lambda_0 \int_{\Omega} g(x)\phi^2 dx$$

que implica  $\mu_1(\lambda_0) \geq 0$ .

E se,  $\int_{\Omega} g(x)\phi^2 dx \leq 0$ , tem-se,  $0 \leq \int_{\Omega} |\nabla\phi|^2 dx - \lambda_0 \int_{\Omega} g(x)\phi^2 dx$  que implica de novo  $\mu_1(\lambda_0) \geq 0$ .

- $\mu_1(\lambda_0) \leq 0$ .

De fato, pela propriedade do ínfimo em (1.3.25), é possível construir uma sequência



normalizada  $\{\phi_k\} \subset H^1(\Omega)$  tais que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(x)\phi_k^2 dx &> 0, \\ \int_{\Omega} \phi_k^2 dx &= 1, \\ \left(1 + \frac{1}{k}\right)\lambda_0 &\geq \frac{\int_{\Omega} |\nabla\phi_k|^2 dx}{\int_{\Omega} g(x)\phi_k^2 dx}. \end{aligned}$$

Desta última desigualdade, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla\phi_k|^2 dx - \lambda_0 \int_{\Omega} g(x)\phi_k^2 dx &\leq \frac{\lambda_0}{k} \int_{\Omega} g(x)\phi_k^2 dx \\ &\leq \frac{\lambda_0}{k} \|g^+\|_{L^\infty(\Omega)}, \end{aligned}$$

Assim,

$$\mu_1(\lambda_0) \leq \frac{\lambda_0}{k} \|g^+\|_{L^\infty(\Omega)}$$

para todo  $k$ . Logo, passando ao limite quando  $k \rightarrow \infty$

$$\mu_1(\lambda_0) \leq 0.$$

□

Resumindo os resultados nos diagramas seguintes

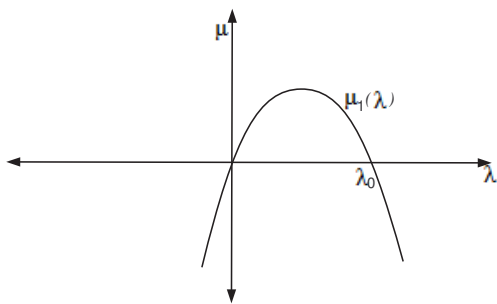


Figura 1.1: Primeiro autovalor principal do problema de autovalores linear (1.3.2) pro caso  $\int_{\Omega} g(x) dx < 0$ .

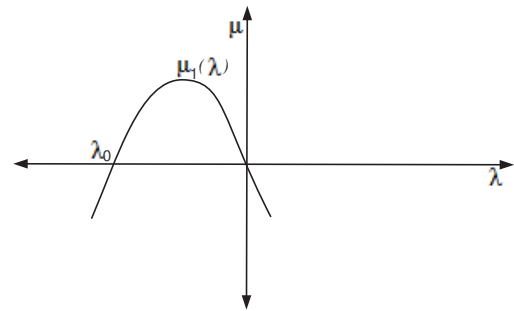


Figura 1.2: Primeiro autovalor principal do problema de autovalores linear (1.3.2) pro caso  $\int_{\Omega} g(x) dx > 0$ .

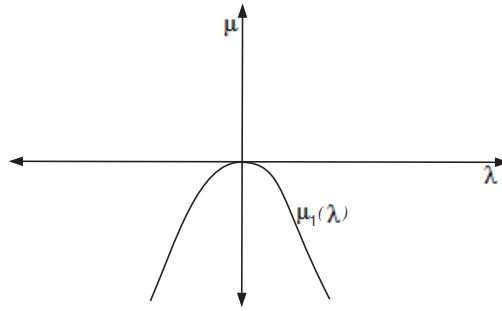


Figura 1.3: Primeiro autovalor principal do problema de autovalores linear (1.3.2) pro caso  $\int_{\Omega} g(x) dx = 0$ .

**Observação 1.3.7** (i) Como o quociente  $\frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Omega} g(\cdot)v^2 dx}$  é homogêneo de grau 0 em  $v$ , é simples ver que os números

$$\inf \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Omega} g(\cdot)v^2 dx} : v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} g(\cdot)v^2 dx > 0 \right\}$$

e

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx : v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} g(\cdot)v^2 dx = 1 \right\}$$

são iguais

(ii) Note que  $\lambda$  é autovalor de

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda g(x)v & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

se, e somente se,  $\mu = -\lambda$  é autovalor de

$$\begin{cases} -\Delta v = \mu(-g(x))v & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.3.26)$$

Assim, se  $\int_{\Omega} g(\cdot) dx > 0$  segue do Teorema anterior que os únicos autovalores principais de (1.3.26) são 0 e  $\mu_0 > 0$ , com  $\mu_0$  dado por (1.3.23) trocando-se  $g$  por  $-g$ . Podemos então concluir que, quando  $\int_{\Omega} g(\cdot) dx > 0$ , os únicos autovalores principais de (1.3.1) são 0 e  $\lambda_0^- := -\mu_0$ , com  $\lambda_0^- < 0$  dado por

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx : v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} g(\cdot)v^2 dx = -1 \right\}.$$

Como  $\lambda_0$  é um autovalor de (1.3.1) e  $W_p^2(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$  compactamente para todo  $p > 1$ , denotando por  $I$  o operador que fornece a inclusão, temos que zero é um autovalor simples do operador limitado  $\mathfrak{L} : W_p^2(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$  dado por

$$\mathfrak{L}(v) = \left( \Delta v + b(\cdot)v, \frac{\partial v}{\partial \nu} \right)$$

ou seja,  $\text{Ker}[\mathfrak{L} - \mu I]$  é não vazio para  $\mu = 0$ . O próximo teorema revela uma característica importante de  $\lambda_0$ , a saber, que a multiplicidade geométrica de  $\lambda_0$  é um, isto é,  $\text{Ker}[\mathfrak{L} - \mu I]$  tem dimensão um quando  $\mu = 0$ . Para demonstrá-lo utilizaremos uma identidade de Piccone, provada em [4], que pode ser enunciada como

**Lema 1.3.8** *Sejam  $v > 0, u \geq 0$  funções contínuas em  $\Omega$ , diferenciáveis em quase todo ponto. Definindo*

$$\begin{aligned} L(u, v) &:= |\nabla u|^2 + \frac{u^2}{v^2} |\nabla v|^2 - 2\frac{u}{v} \nabla v \cdot \nabla u \\ R(u, v) &:= |\nabla u|^2 - \nabla \left( \frac{u^2}{v} \right) \cdot \nabla v \end{aligned}$$

são válidas as afirmações:

- (i)  $L(u, v) = R(u, v)$ .
- (ii)  $L(u, v) \geq 0$  a.e. em  $\Omega$ .
- (iii)  $L(u, v) = 0$  a.e. em  $\Omega$  se, e somente se,  $u = kv$  para algum  $k \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 1.3.9** *O autovalor principal  $\lambda_0$  de (1.3.1) dada por (1.3.23) tem multiplicidade geométrica um.*

**Prova:** Primeiro note que segue da Observação 1.3.4 que a afirmação é trivial se a média do peso  $g(\cdot)$  é não negativa sobre  $\Omega$  pois, neste caso, tem-se  $\lambda_0 = 0$ . Para o outro caso, sejam  $u, v$  autofunções de (1.3.1) correspondentes a  $\lambda_0 > 0$ , positivas em  $\bar{\Omega}$ , e suaves por regularidade elíptica. Por Lema 1.3.8, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} R(u, v) dx &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} \nabla \left( \frac{u^2}{v} \right) \cdot \nabla v dx \\ &= \lambda_0 \int_{\Omega} g(\cdot)u^2 dx - \int_{\Omega} \nabla \left( \frac{u^2}{v} \right) \cdot \nabla v dx. \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação de (1.3.1) por  $u^2/v$  quando  $v$  é uma solução, e integrando por partes, obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla \left( \frac{u^2}{v} \right) \cdot \nabla v dx = \lambda_0 \int_{\Omega} g(\cdot)u^2 dx$$

de modo que pela parte (i) do Lema 1.3.8,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} L(u, v) \, dx &= \int_{\Omega} R(u, v) \, dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo, as partes (ii) e (iii) do Lema 1.3.8 implicam a existência de  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $u = kv$ , provando que a multiplicidade geométrica de  $\lambda_0$  é um.  $\square$

## 1.4 Um operador de Fredholm

Sejam  $U, V$  dois espaços de Banach e  $\mathcal{L}(U, V)$  é espaço de operadores lineares limitados entre esses espaços.

**Definição 1.4.1** Dizemos que  $T \in \mathcal{L}(U, V)$  é um operador de Fredholm se  $\mathcal{R}(T)$  é fechado e  $\text{Ker}(T)$ ,  $V \setminus \mathcal{R}(T)$  têm dimensão finita.

Denotaremos o espaço dos operadores de Fredholm por  $\text{Fred}(U, V)$ .

**Definição 1.4.2** Seja  $T \in \text{Fred}(U, V)$ . O índice de  $T$  é o número

$$\text{ind}(T) := \dim \text{Ker}(T) - \dim(V \setminus \mathcal{R}(T)). \quad (1.4.1)$$

O resultado seguinte pode ser encontrada em [36], p. 594.

**Teorema 1.4.3** São válidas as seguintes afirmações

1. Se  $T \in \text{Fred}(U, V)$  e  $K : U \rightarrow V$  é linear e compacto, então  $T + K \in \text{Fred}(U, V)$ .
2. A composição de operadores de Fredholm é um operador de Fredholm.

Um resultado fundamental sobre operadores de Fredholm, cuja demonstração pode ser encontrada em [36] p. 594, se refere a aplicação índice e pode ser enunciado como

**Teorema 1.4.4** A aplicação índice

$$\text{ind} : \text{Fred}(U, V) \rightarrow \mathbb{Z}$$

definida por (1.4.1) é constante em cada componente conexa de  $\text{Fred}(U, V)$ .

Vamos provar que a classe protótipo de problemas elípticos de segunda ordem com condição de fronteira de tipo Neumann definem operadores de Fredholm de índice zero.

**Teorema 1.4.5** O operador linear

$$\mathfrak{L} : W_p^2(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega), \quad 1 < p < \infty,$$

dado por

$$\mathfrak{L}(v) = \left( \Delta v + b(\cdot)v, \frac{\partial v}{\partial \nu} \right)$$

sendo  $b \in L^\infty(\Omega)$ , é um operador de Fredholm de índice zero.

**Prova:** Como  $W_p^2(\Omega)$  está compactamente imerso em  $L^p(\Omega)$  e em  $W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$ , para todo  $1 < p < \infty$ , e  $b(\cdot)$  é limitada, vemos que  $\mathfrak{L}$  é limitado. Note que considerando

$$A, K : W_p^2(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$$

dados por

$$A(v) := \left( \Delta v + \alpha v, \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) \quad \text{e} \quad K(v) := ( -\alpha v + b(\cdot)v, 0 ),$$

com  $\alpha \in \mathbb{R}$ , obtemos

$$\mathfrak{L} = A + K.$$

Agora, as imersões acima mencionadas mostram que  $K$  é compacto e, sendo  $A$  um isomorfismo para  $\alpha$  suficientemente grande pelo Teorema 2.4.1.3 de [18], obtemos por Teorema 1.4.3 que  $\mathfrak{L}$  é um operador de Fredholm (Claramente, todo isomorfismo entre espaços de Banach é um operador de Fredholm). Para mostrarmos que  $\mathfrak{L}$  tem índice zero, defina a curva

$$\sigma : [0, 1] \longrightarrow Fred(W_p^2(\Omega), L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega))$$

pondo  $\sigma(t) = A + tK$ . Temos pelo Teorema 1.4.3 que  $\sigma$  é bem definida. Além disso,  $\sigma$  é contínua. De fato, fixado  $0 \leq t_0 \leq 1$  e dado  $\varepsilon > 0$ , se  $|t - t_0| < \varepsilon (\|K\|_{\mathcal{L}(W_p^2(\Omega), L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega))} + 1)^{-1}$  temos

$$\|\sigma(t) - \sigma(t_0)\| = |t - t_0| \|K\|_{\mathcal{L}(W_p^2(\Omega), L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega))} < \varepsilon.$$

Portanto, como  $A$  e  $A + K$  pertencem ao conexo

$$\sigma([0, 1]) \subset Fred(W_p^2(\Omega), L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)),$$

pelo Teorema 1.4.4 concluímos que

$$ind(A + K) = ind(A).$$

como  $ind(A) = 0$  pois  $A$  é um isomorfismo, o teorema está provado.  $\square$

## Capítulo 2

### Sistema dinâmico gerado por (0.0.1)

Veremos que o problema parabólico (0.0.1) gera um sistema dinâmico não-linear num subconjunto fechado de  $H^1(\Omega)$ , a saber

$$\mathfrak{X} := \{u \in H^1(\Omega) : 0 \leq u(x) \leq 1 \text{ q.t.p } x \in \Omega\}.$$

Para realizar esta tarefa faremos uso fato que o problema (0.0.1) gera um sistema dinâmico não-linear em  $H^1(\Omega)$

$$\{S(t) : H^1(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega) \mid t \geq 0\} \quad (2.0.1)$$

definido pelas soluções de (0.0.1), dado por

$$S(t)\phi_0 := u(\cdot, t; \phi_0) \text{ para todo } t \geq 0, \phi_0 \in H^1(\Omega),$$

para uma ampla classe de não linearidades de  $f$ , veja [3, 5, 6]. Isto significa que as seguintes propriedades são válidas:

- Para cada  $t \geq 0$ ,  $S(t)$  é uma aplicação contínua de  $H^1(\Omega)$  em  $H^1(\Omega)$ ,
- Para cada  $x \in H^1(\Omega)$ , a aplicação  $t \mapsto S(t)x$  é contínua,
- $S(0)$  é a identidade sobre  $H^1(\Omega)$ ,
- $S(t)(S(\tau)x) = S(t + \tau)x$ , para todo  $x \in H^1(\Omega)$  e todo  $t, \tau \geq 0$ .

Para construir o sistema dinâmico gerado por (0.0.1) no espaço de fase  $\mathfrak{X}$ , estendemos a função  $f$  satisfazendo  $(\mathbf{H}_1)$ , definida no intervalo  $[0,1]$ , a todo  $\mathbb{R}$  de modo a obter um sistema dinâmico em  $H^1(\Omega)$ . Mostramos então, por meio de uma aplicação adequada do princípio do máximo, que o conjunto fechado  $\mathfrak{X}$  é invariante por aquele fluxo, de modo que teremos então um sistema dinâmico não-linear tendo  $\mathfrak{X}$  como espaço de fase. Por fim, este semifluxo não-linear possui uma função de Lyapunov e órbitas précompactas em  $H^1(\Omega)$ , de forma a ser um sistema gradiente no qual as órbitas aproximam, quando o tempo é grande, o conjunto dos equilíbrios.

As noções de estabilidade e instabilidade, no sentido de Lyapunov, das órbitas de um sistema dinâmico são dadas na seguinte

**Definição 2.0.6** *Seja  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  um sistema dinâmico em um espaço métrico  $(\mathfrak{X}, d)$ .*

(i) Uma órbita  $S(\cdot)x : [0, \infty) \rightarrow \mathfrak{X}$  é **estável** se, para cada  $\varepsilon > 0$ , existir  $\delta(\varepsilon) > 0$  tal que

$$y \in B_\delta(x) \Rightarrow d(S(t)y, S(t)x) < \varepsilon \quad \forall t \in [0, \infty).$$

(ii) Uma órbita é **instável** se não for estável.

(iii) Uma órbita  $S(\cdot)x : [0, \infty) \rightarrow \mathfrak{X}$  é **assintoticamente estável** se for estável e existir  $\delta > 0$  tal que

$$y \in B_\delta(x) \Rightarrow d(S(t)y, S(t)x) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0,$$

ao passo que tal órbita é **exponencialmente estável** se existirem  $\delta > 0$ ,  $\alpha(\delta) > 0$ ,  $M(\delta) < \infty$  tais que

$$y \in B_\delta(x) \Rightarrow d(S(t)y, S(t)x) \leq M e^{-\alpha t} d(y, x) \quad \forall t \in [0, \infty).$$

## 2.1 O espaço de fase $\mathfrak{X}$

Definamos a seguinte função de classe  $C^1$   $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f'(0)t, & t \leq 0, \\ f(t), & 0 \leq t \leq 1, \\ f'(1)(t-1), & t \geq 1 \end{cases}$$

e consideremos o correspondente problema

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + \lambda s(\cdot) \tilde{f}(u) & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot, 0) = \phi_0 & 0 \leq \phi_0 \leq 1 \text{ em } \Omega. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Os equilíbrios do problema (2.1.1) são soluções do problema elíptico

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda s(\cdot) \tilde{f}(u) = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Observemos que  $\tilde{f}$  verifica a hipótese  $(\mathbf{H}_1)$ . Além disso, pondo  $K = \sup_{\mathbb{R}} |\tilde{f}'|$ , pelo teorema de valor médio há  $\theta$  entre  $t$  e 0 tal que  $|\tilde{f}(t) - \tilde{f}(0)| = |t \tilde{f}'(\theta)|$ , donde obtemos a desigualdade seguinte

$$|\tilde{f}(t)| \leq K|t|. \quad (2.1.3)$$

Assim, segue do Teorema 2.2 de [6] que o problema (2.1.1) define um sistema dinâmico não-linear em  $H^1(\Omega)$ , dado por (2.0.1). Além disso, dado  $\phi_0 \in H^1(\Omega)$ , tem-se  $S(t)\phi_0 \in W^{1,q}(\Omega)$  qualquer que seja  $1 < q < \infty$ , para todo  $t > 0$ . Seja

$$\mathfrak{X} := \{u \in H^1(\Omega) : 0 \leq u(x) \leq 1 \text{ q.t.p } x \in \Omega\}.$$

**Teorema 2.1.1** *O conjunto  $\mathfrak{X}$  é invariante pelo sistema dinâmico não-linear gerado por (2.1.1).*

**Prova:** Precisamos mostrar que, dado  $\phi_0 \in \mathfrak{X}$ , toda solução  $u = u(x, t; \phi_0)$  (com  $u(x, 0; \phi_0) = \phi_0(x)$  q.t.p  $x \in \Omega$ ) de (2.1.1) satisfaz  $0 \leq u(x, t; \phi_0) \leq 1$  q.t.p.  $x \in \Omega$  e todo  $t > 0$ . Provaremos isto nos seguintes ítems.

1. Existe  $\{\phi_j\} \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ , com  $\phi_j > 0$  em  $\overline{\Omega}$ , tal que  $\phi_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \phi_0$  em  $H^1(\Omega)$ .

De fato, escolhemos  $\{\varphi_j\} \subset C^\infty(\overline{\Omega})$  com  $\varphi_j \geq 0$  em  $\overline{\Omega}$  e tal que  $\varphi_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \phi_0$  em  $H^1(\Omega)$ , o que é possível pela densidade de  $C^\infty(\overline{\Omega})$  em  $H^1(\Omega)$  e por aproximação via convolução, pois  $\phi_0 \geq 0$ . Logo basta considerar  $\phi_j(x) = \varphi_j(x) + \frac{1}{j}$  para todo  $x \in \overline{\Omega}$ , que verifica

$$\int_{\Omega} |\nabla(\phi_j - \phi_0)|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla(\varphi_j - \phi_0)|^2 dx \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0,$$

e

$$\int_{\Omega} (\phi_j - \phi_0)^2 dx = \int_{\Omega} (\varphi_j - \phi_0)^2 dx + 2 \int_{\Omega} (\varphi_j - \phi_0) \frac{1}{j} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{j^2} dx \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

provando (1).

Considere as soluções correspondentes  $u(x, t; \phi_j)$  de (2.1.1).

2. Para cada  $j$  há um  $t_j > 0$  tal que

$$u(x, t; \phi_j) > 0 \quad \text{para todo } (x, t) \in \overline{\Omega} \times [0, t_j]. \quad (2.1.4)$$

De fato, se ocorresse o contrário poderíamos escolher  $T_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$  e  $(x_k, t_k) \in \overline{\Omega} \times [0, T_k)$  tal que  $u(x_k, t_k; \phi_j) \leq 0$ . Como  $\{x_k\}$  é uma seqüência no compacto  $\overline{\Omega}$ , obteríamos uma subsequência que converge a um  $x_0 \in \overline{\Omega}$ . Assim, passando a uma subsequência, ainda denotada por  $(x_k, t_k)$ , teríamos

$$0 \geq u(x_k, t_k; \phi_j) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u(x_0, 0; \phi_j) = \phi_j(x_0),$$

o que contradiz (1).

3. Tem-se  $t_j = +\infty$  para todo  $j$ .

De fato, é suficiente mostrar que o conjunto

$$\Psi_j = \{t \in \mathbb{R}^+ : u(x, t; \phi_j) = 0 \text{ para algum } x \in \overline{\Omega}\}$$

é vazio para todo  $j$ . Suponhamos  $\Psi_{j_0} \neq \emptyset$ , para algum  $j_0$ , e consideremos

$$\bar{t} := \inf \Psi_{j_0} \geq t_{j_0}.$$



Temos  $\bar{t} \geq t_{j_0}$  (por (2.1.4)) e existe  $x_{j_0} \in \bar{\Omega}$  tal que  $u(x_{j_0}, \bar{t}; \phi_{j_0}) = 0$ . Além disso, segue do item (1) que  $u(x, t; \phi_{j_0}) \geq 0$  para cada  $(x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, \bar{t}]$  e assim, pelo princípio do máximo (veja Observação 2.1.2),  $(x_{j_0}, \bar{t})$  pertenceria a fronteira parabólica de  $\bar{\Omega} \times [0, \bar{t}]$ . Pelo lema de Hopf, teríamos

$$0 > \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_{j_0}, \bar{t}) = 0$$

o que é impossível. Logo  $u(\cdot, \cdot; \phi_j) > 0$  em  $\bar{\Omega} \times [0, +\infty)$  para cada  $j$  e fica provado (3).

Agora, como  $u$  depende continuamente dos dados iniciais em  $H^1(\Omega)$ , para cada  $t > 0$  temos

$$\|u(\cdot, t; \phi_j) - u(\cdot, t; \phi_0)\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

e como  $H^1(\Omega)$  esta imerso compactamente em  $L^2(\Omega)$ , temos que

$$\|u(\cdot, t; \phi_j) - u(\cdot, t; \phi_0)\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$

Assim existe uma subsequência, ainda indexada com  $j$ , tal que

$$u(\cdot, t; \phi_j) - u(\cdot, t; \phi_0) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \quad \text{q.t.p } x \in \Omega.$$

Portanto,  $u(x, t; \phi_0) \geq 0$  q.t.p  $x \in \Omega$  e todo  $t \geq 0$ . Finalmente mostra-se que  $u(x, t; \phi_0) \leq 1$  q.t.p  $x \in \Omega$  e todo  $t \geq 0$ , trabalhando-se com  $v(\cdot, \cdot; \phi_0) = 1 - u(\cdot, \cdot; \phi_0)$ .  $\square$

**Observação 2.1.2** *Notemos que se  $s(x) < 0$ , pela desigualdade (2.1.3) temos que  $s(x)\tilde{f}(u) + K|s(x)|u \geq 0$  e no caso em que  $s(x) \geq 0$  sempre ocorre  $s(x)\tilde{f}(u) + K|s(x)|u \geq 0$ . Logo, em (2.1.1) temos que*

$$u_t - \Delta u + \lambda K|s(\cdot)|u = \lambda s(\cdot)\tilde{f}(u) + \lambda K|s(\cdot)|u = \lambda(s(\cdot)\tilde{f}(u) + K|s(\cdot)|u) \geq 0$$

e sendo  $\lambda K|s(\cdot)| \geq 0$ , se aplica o princípio do máximo na demonstração do teorema anterior.

## 2.2 O funcional de energia e de Lyapunov

Definamos o funcional  $\mathcal{J}_\lambda : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , para  $u \in H^1(\Omega)$ , dado por

$$\mathcal{J}_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} s(\cdot)F(u) dx, \quad (2.2.1)$$

com  $F(u) = \int_0^u \tilde{f}(\tau) d\tau$ .

**Observação 2.2.1** *O funcional  $\mathcal{J}_\lambda$  está bem definido, isto é,  $\mathcal{J}_\lambda(u) \in \mathbb{R}$  para cada  $u \in H^1(\Omega)$ .*

De fato,

$$|F(u)| = \left| \int_0^u \tilde{f}(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^u |\tilde{f}(\tau)| d\tau = \frac{K}{2} u^2$$

por (2.1.3), e conseqüentemente

$$\int_{\Omega} |s(\cdot)F(u)| dx \leq \|s\|_{L^\infty(\Omega)} \frac{K}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 < \infty.$$

**Proposição 2.2.2**  $\mathcal{J}_\lambda$  é um funcional de energia para o problema (2.1.2) e é função de Lyapunov para o problema (2.1.1).

**Prova:** Se demonstrará nos seguintes itens

1.  $\mathcal{J}_\lambda$  é diferenciável, no sentido de Fréchet, sobre  $H^1(\Omega)$  e tem-se

$$\mathcal{J}'_\lambda(u)(v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \lambda \int_{\Omega} s(\cdot) \tilde{f}(u) v dx.$$

De fato, sejam  $\mathcal{J}_0(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$  e  $\mathcal{J}_1(u) = \int_{\Omega} s(\cdot) F(u) dx$ .

Para verificar que o funcional  $\mathcal{J}_1$  é diferenciável no sentido de Fréchet, primeiro mostraremos que  $\mathcal{J}_1$  é Gâteaux diferenciável e então mostraremos que sua derivada de Gâteaux é contínua.

Temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{s(\cdot)F(u+tv) - s(\cdot)F(u)}{t} = s(\cdot) \tilde{f}(u) v \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Pelo teorema de valor médio para funções de varias variáveis existe um número real  $\theta$  tal que  $|\theta| \leq |t|$  e

$$\begin{aligned} \left| \frac{s(\cdot)F(u+tv) - s(\cdot)F(u)}{t} \right| &= |s(\cdot) \tilde{f}(u + \theta v) v| \\ &\leq \|s\|_{L^\infty(\Omega)} |\tilde{f}(u + \theta v)| |v| \\ &\leq \|s\|_{L^\infty(\Omega)} K |u + \theta v| |v| \\ &\leq C(|uv| + v^2). \end{aligned}$$

Como as funções  $|uv|$  e  $v^2$  estão em  $L^1(\Omega)$ , por causa da desigualdade de Hölder  $\int_{\Omega} |uv| dx \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$  e  $\int_{\Omega} v^2 dx = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2$ , pela imersão compacta de  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  e pelo teorema de convergência dominada temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{s(\cdot)F(u+tv) dx - s(\cdot)F(u)}{t} dx = \int_{\Omega} s(\cdot) \tilde{f}(u) v dx.$$

Como a integral do lado direito é linear em relação a  $v$  e, pela desigualdade (em que se usa (2.1.3))

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} s(\cdot) \tilde{f}(u) v \, dx \right| &\leq \|s\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |\tilde{f}(u)| |v| \, dx \\ &\leq \|s\|_{L^\infty(\Omega)} K \int_{\Omega} |uv| \, dx \\ &\leq \|s\|_{L^\infty(\Omega)} K \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

é também contínua com respeito a  $v$ , definimos a derivada de Gâteaux  $\mathcal{J}'_{1G} : H^1(\Omega) \longrightarrow (H^1(\Omega))^*$  por  $\mathcal{J}'_{1G}(u)(v) = \int_{\Omega} s(\cdot) \tilde{f}(u) v \, dx$ . Vamos mostrar que  $\mathcal{J}'_{1G}$  é contínua; para isto, tomamos  $\{u_k\}$  em  $H^1(\Omega)$  tal que  $u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u$  em  $H^1(\Omega)$ . Desde que pelo teorema de valor médio  $|\tilde{f}(u_k) - \tilde{f}(u)| \leq K|u_k - u|$ , temos que

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}(u_k) - \tilde{f}(u)\|_{L^2(\Omega)} &= \left( \int_{\Omega} |\tilde{f}(u_k) - \tilde{f}(u)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K \left( \int_{\Omega} |u_k - u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K \|u_k - u\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Além disso, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} |(\mathcal{J}'_{1G}(u_k) - \mathcal{J}'_{1G}(u))(v)| &= \left| \int_{\Omega} s(\cdot) (\tilde{f}(u_k) - \tilde{f}(u)) v \, dx \right| \\ &\leq \|s\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |\tilde{f}(u_k) - \tilde{f}(u)| |v| \, dx \\ &\leq \|s\|_{L^\infty(\Omega)} \|\tilde{f}(u_k) - \tilde{f}(u)\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{J}'_{1G}(u_k) - \mathcal{J}'_{1G}(u))\|_{(H^1(\Omega))^*} &= \sup_{v \in H^1(\Omega), \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq 1} \{ |(\mathcal{J}'_{1G}(u_k) - \mathcal{J}'_{1G}(u))(v)| \} \\ &\leq \|s\|_{L^\infty(\Omega)} \|\tilde{f}(u_k) - \tilde{f}(u)\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Logo  $\mathcal{J}_1$  é diferenciável no sentido de Fréchet e  $\mathcal{J}'_1(u)(v) = \int_{\Omega} s(\cdot) \tilde{f}(u) v \, dx$ .

O funcional  $\mathcal{J}_0$  é diferenciável no sentido de Fréchet e tem-se

$$\mathcal{J}'_0(u)(v) = 2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

uma vez que provém da forma bilinear contínua  $T : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$T(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Portanto está verificado (1).

2.  $\mathcal{J}_\lambda$  é um funcional de energia para o problema (2.1.2).

De fato, como  $\mathcal{J}'_\lambda(u) = 0 \iff \mathcal{J}'_\lambda(u)(v) = 0, \forall v \in H^1(\Omega)$  e

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \lambda \int_{\Omega} s(\cdot) \tilde{f}(u) v \, dx = 0, \forall v \in H^1(\Omega),$$

é a formulação fraca de (2.1.2), temos o resultado.

3.  $\mathcal{J}_\lambda$  é um funcional de Lyapunov para o problema (2.1.1).

A afirmação segue pois se  $u(x, t) := u(x, t; \phi_0)$  é solução do problema parabólico (2.1.1), com  $\phi_0$  não sendo solução de (0.0.2) então  $\frac{d}{dt} \mathcal{J}_\lambda u(x, t) < 0$  para todo  $t > 0$ . Veja a prova em [31].

□

Como  $\mathcal{J}_\lambda$  dado por (2.2.2) é funcional de Lyapunov para o problema (2.1.1) e as órbitas do sistema dinâmico gerado por (2.1.1) são précompactas (veja [3, 9, 33]), segue do princípio da invariância de LaSalle que as órbitas convergem para o conjunto dos equilíbrios de (2.1.1) quando o tempo é grande, na norma de  $H^1(\Omega)$ ; veja [20], Teorema 4.3.4. Portanto, o sistema dinâmico gerado por (0.0.1), que é obtido do sistema dinâmico gerado por (2.1.1) quando restrito a  $\mathfrak{X}$ , herda todas as propriedades acima mencionadas.

## 2.3 Equilíbrios

Os equilíbrios do problema parabólico (0.0.1) são as soluções do problema elíptico (0.0.2) que pertencem a  $\mathfrak{X}$ . Para cada  $\lambda > 0$ , temos dois equilíbrios triviais  $u_\lambda \equiv 0$  e  $u_\lambda \equiv 1$ .

**Proposição 2.3.1** *Assumindo  $(H_1)$ . Um equilíbrio  $u_\lambda$  não trivial de (0.0.1) tem as propriedades seguintes*

1.  $0 < u_\lambda < 1$  em  $\overline{\Omega}$ ,
2.  $u_\lambda$  é não constante.

**Prova:** Seja  $K = \sup_{x \in \Omega} |f'(u_\lambda)(x)|$ . Pelo teorema de valor médio existe  $0 < \theta < u_\lambda$  tal que  $f(u_\lambda) - f(0) = f'(\theta)u_\lambda$ , daí obtemos a desigualdade seguinte

$$f(u_\lambda) = |f(u_\lambda) - f(0)| = |f'(\theta)|u_\lambda \leq K u_\lambda, \quad (2.3.1)$$

notemos que se  $s(x) > 0$ , pela desigualdade (2.3.1), temos  $-s(x)f(u_\lambda) - K|s(x)|u_\lambda \leq 0$ ; se  $s(x) \leq 0$  sempre ocorre que  $-s(x)f(u_\lambda) - K|s(x)|u_\lambda \leq 0$ . Logo em (0.0.2) temos que

$$\Delta u_\lambda - \lambda K|s|u_\lambda = -\lambda s f(u_\lambda) - \lambda K|s|u_\lambda = \lambda(-s f(u_\lambda) - K|s|u_\lambda) \leq 0$$

Como  $u_\lambda \in \mathfrak{X}$  temos que  $0 \leq u_\lambda \leq 1$  em  $\bar{\Omega}$ . Suponhamos que exista  $x_0 \in \bar{\Omega}$  tal que  $u_\lambda(x_0) = 0$ . Sendo  $u_\lambda$  não trivial (isto é,  $u_\lambda \not\equiv 0$  e  $u_\lambda \not\equiv 1$ ), o princípio do máximo elíptico implica que  $x_0 \in \partial\Omega$  e daí pelo Lema de Hopf, conseguimos  $\frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu}(x_0) < 0$ , uma contradição. Portanto,  $0 < u_\lambda$  em  $\bar{\Omega}$ . Similarmente provamos que  $u_\lambda < 1$  em  $\bar{\Omega}$ , fazendo a mudança de variável  $v_\lambda = 1 - u_\lambda$ . A afirmação (1) está provada.

Finalmente, verificamos a afirmação (2). Se  $u_\lambda \equiv c$ , com  $c$  constante, pela parte (1)  $c$  é uma constante tal que  $0 < c < 1$ , e temos de (0.0.2) que  $\Delta c + \lambda s f(c) = 0$  em  $\Omega$ , de modo que  $s \equiv 0$ , uma contradição.  $\square$

# Capítulo 3

## Estrutura de bifurcação dos equilíbrios

Estudaremos neste capítulo bifurcação dos equilíbrios de (0.0.1), isto é, descreveremos completamente a estrutura do conjunto solução de (0.0.2), no espaço de fase  $\mathfrak{X}$ , para cada valor do parâmetro  $\lambda > 0$ .

### 3.1 Estrutura de bifurcação dos equilíbrios com peso de média não nula

O primeiro resultado relacionado aos equilíbrios de (0.0.1) é:

**Teorema 3.1.1** *Suponha  $(\mathbf{H}_1)$  e  $\int_{\Omega} s(x) dx \neq 0$ . Então, para todo  $\lambda > 0$  suficientemente pequeno, os únicos equilíbrios de (0.0.1) são os triviais.*

**Prova:** Suponha que  $u_{\lambda}$  é um equilíbrio não trivial de (0.0.1) e seja  $\bar{u}_{\lambda} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u_{\lambda}(x) dx$  a média de  $u_{\lambda}$  sobre  $\Omega$ . Temos:

1.  $0 < \bar{u}_{\lambda} < 1$ , pois, como  $\bar{\Omega}$  é compacto, há  $x_0$  e  $x_1$  tais que  $0 < u_{\lambda}(x_0) \leq u_{\lambda}(x) \leq u_{\lambda}(x_1) < 1$  para todo  $x \in \bar{\Omega}$ . Daí, integrando, temos a afirmação.
2. Existe  $v_{\lambda} \in W_p^2(\Omega)$ ,  $p > n$ , tal que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} v_{\lambda} dx = 0, \\ \Delta v_{\lambda} = -\lambda s(\cdot) f(\bar{u}_{\lambda} + v_{\lambda}) \quad \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

De fato, só definir para cada  $x \in \Omega$  a função  $v_{\lambda}(x) = u_{\lambda}(x) - \bar{u}_{\lambda} \in W_p^2(\Omega)$  e verificar as propriedades diretamente. Além disso, pela fórmula de Green, temos  $-\lambda \int_{\Omega} s(\cdot) f(\bar{u}_{\lambda} + v_{\lambda}) dx = \int_{\Omega} \Delta v_{\lambda} dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial \nu} d\mathcal{H}^{n-1} = 0$ , donde

$$\int_{\Omega} s(\cdot) f(\bar{u}_{\lambda} + v_{\lambda}) dx = 0. \quad (3.1.2)$$

3. Existe  $C > 0$  tal que  $\|v_{\lambda}\|_{L^2(\Omega)} \leq C\lambda f(\bar{u}_{\lambda})$ , para  $\lambda > 0$  suficientemente pequeno.

De fato, por integração por partes de (3.1.1) temos

$$\int_{\Omega} |\nabla v_{\lambda}|^2 dx = - \int_{\Omega} v_{\lambda} \Delta v_{\lambda} dx = \lambda \int_{\Omega} s(\cdot) f(\bar{u}_{\lambda} + v_{\lambda}) v_{\lambda} dx$$

e pela desigualdade de Poincaré existe  $C_1 > 0$  tal que

$$\|v_{\lambda}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_1 \int_{\Omega} |\nabla v_{\lambda}|^2 dx \leq C_1 \lambda \int_{\Omega} |s f(\bar{u}_{\lambda} + v_{\lambda})| |v_{\lambda}| dx$$

Daí, pela desigualdade de Hölder, temos

$$\|v_{\lambda}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \lambda \|s(\cdot) f(\bar{u}_{\lambda} + v_{\lambda})\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \lambda \|f(\bar{u}_{\lambda} + v_{\lambda})\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.1.3)$$

com  $C_2 = C_1 \|s\|_{L^{\infty}(\Omega)}$ .

Por outro lado, pelo teorema de valor médio, para cada  $x \in \bar{\Omega}$  há  $\theta(x)$  que está entre  $\bar{u}_{\lambda}$  e  $\bar{u}_{\lambda} + v_{\lambda}(x)$  e verifica

$$|f(\bar{u}_{\lambda} + v_{\lambda}) - f(\bar{u}_{\lambda})| \leq C_3 |v_{\lambda}|, \quad \text{com } C_3 = \sup_{\bar{\Omega}} |f'(\theta(x))|. \quad (3.1.4)$$

Assim,  $f(\bar{u}_{\lambda} + v_{\lambda}) \leq |f(\bar{u}_{\lambda} + v_{\lambda}) - f(\bar{u}_{\lambda})| + f(\bar{u}_{\lambda}) \leq f(\bar{u}_{\lambda}) + C_3 |v_{\lambda}|$ , e obtemos

$$\|f(\bar{u}_{\lambda} + v_{\lambda})\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f(\bar{u}_{\lambda})\|_{L^2(\Omega)} + C_3 \|v_{\lambda}\|_{L^2(\Omega)} = |\Omega|^{1/2} f(\bar{u}_{\lambda}) + C_3 \|v_{\lambda}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Logo, por (3.1.3) segue que

$$\|f(\bar{u}_{\lambda} + v_{\lambda})\|_{L^2(\Omega)} \leq |\Omega|^{1/2} f(\bar{u}_{\lambda}) + C_3 C_2 \lambda \|f(\bar{u}_{\lambda} + v_{\lambda})\|_{L^2(\Omega)}.$$

Multiplicando a desigualdade anterior por  $C_2 \lambda$  e usando (3.1.3), obtemos

$$\|v_{\lambda}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_4 \lambda f(\bar{u}_{\lambda}) + C_5 \lambda^2 \|f(\bar{u}_{\lambda} + v_{\lambda})\|_{L^2(\Omega)} \leq \lambda [C_4 f(\bar{u}_{\lambda}) + C_5 \lambda \|f(\bar{u}_{\lambda} + v_{\lambda})\|_{L^2(\Omega)}] \quad (3.1.5)$$

Como  $\|f(\bar{u}_{\lambda} + v_{\lambda})\|_{L^2(\Omega)}$  é limitado uniformemente em  $\lambda$ , pois  $\|f(\bar{u}_{\lambda} + v_{\lambda})\|_{L^2(\Omega)} \leq (\sup_{[0,1]} f) |\Omega|^{1/2}$ , temos

$$C_5 \lambda \|f(\bar{u}_{\lambda} + v_{\lambda})\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0.$$

Daí, existe  $\bar{\lambda} > 0$  tal que  $C_5 \lambda \|f(\bar{u}_{\lambda} + v_{\lambda})\|_{L^2(\Omega)} < C_4 f(\bar{u}_{\lambda})$ ,  $\forall \lambda < \bar{\lambda}$ . De (3.1.5) segue então que

$$\|v_{\lambda}\|_{L^2(\Omega)} \leq \lambda [C_4 f(\bar{u}_{\lambda}) + C_4 f(\bar{u}_{\lambda})] = (2C_4) \lambda f(\bar{u}_{\lambda}), \quad (3.1.6)$$

$\forall \lambda < \bar{\lambda}$ . Portanto, tomando  $C = 2C_4$  provamos (3).

Finalmente, de (3.1.2) e (3.1.4) segue que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega} s(\cdot) dx \right| f(\bar{u}_{\lambda}) &= \left| \int_{\Omega} s(\cdot)(f(\bar{u}_{\lambda}) - f(\bar{u}_{\lambda} + v_{\lambda})) dx \right| \\
&\leq \int_{\Omega} |s(\cdot)| |f(\bar{u}_{\lambda}) - f(\bar{u}_{\lambda} + v_{\lambda})| dx \\
&\leq C_3 \|s\|_{L^{\infty}(\Omega)} \int_{\Omega} |v_{\lambda}| dx \\
&\leq C_3 \|s\|_{L^{\infty}(\Omega)} |\Omega|^{1/2} \|v_{\lambda}\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Assim, combinando (3) a esta última desigualdade, obtemos

$$\left| \int_{\Omega} s(\cdot) dx \right| f(\bar{u}_{\lambda}) \leq C_3 \|s\|_{L^{\infty}(\Omega)} |\Omega|^{1/2} C \lambda f(\bar{u}_{\lambda})$$

e como  $\int_{\Omega} s(\cdot) dx \neq 0$ , segue que  $\frac{\left| \int_{\Omega} s(\cdot) dx \right|}{C_3 \|s\|_{L^{\infty}(\Omega)} |\Omega|^{1/2} C} \leq \lambda$ . Com o que se conclui a prova do teorema.  $\square$

### 3.1.1 Possíveis pontos de bifurcação

Nesta subseção determinaremos os possíveis pontos de bifurcação dos equilíbrios de (0.0.1) com relação aos ramos triviais (os ramos triviais são as curvas  $\Gamma_0 := \{(\lambda, 0) : \lambda > 0\}$  e  $\Gamma_1 := \{(\lambda, 1) : \lambda > 0\}$ ), mas antes disso vejamos algumas notações e definições.

Para aplicarmos os teoremas de bifurcação que vimos na Seção 1.2, definamos a aplicação não linear

$$\mathcal{F} : \mathbb{R}^+ \times W_p^2(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$$

com  $p > n$ , definida por

$$\mathcal{F}(\lambda, u) := \left( \Delta u + \lambda s(\cdot) f(u), \frac{\partial u}{\partial \nu} \right).$$

Observamos que:

1. Na definição de  $\mathcal{F}$  consideramos  $f$  estendida a  $\mathbb{R}$  (por exemplo, como  $\tilde{f}$  definida no Capítulo 2, seção 2.1), embora tenhamos mantido a notação  $f$  pois, estamos interessados em soluções de equilíbrio de (0.0.1), isto é, funções  $u \in W_p^2(\Omega) \cap \mathfrak{X}$ , com  $p > n$ , que sejam zeros de  $\mathcal{F}$ .
2.  $\mathcal{F}$  está bem definido pois, para cada  $u \in W_p^2(\Omega)$ , temos  $D^{\alpha} u \in L^p(\Omega)$  para  $|\alpha| \leq 2$ , que implica  $\Delta u \in L^p(\Omega)$ . Também pela imersão compacta  $W_p^2(\Omega) \hookrightarrow C^1(\bar{\Omega})$ ,  $p > n$ , temos, modificando num conjunto de medida zero,  $f \circ u \in C^1(\bar{\Omega})$  e, assim,  $f(u) \in L^p(\Omega)$  pois  $\Omega$  é limitado. Portanto,  $\Delta u + \lambda s(\cdot) f(u) \in L^p(\Omega)$ . Além disso,  $u \in W_p^2(\Omega)$  implica  $\frac{\partial u}{\partial \nu} \in W_p^1(\Omega)$ , o que garante que  $\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} \in W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$ .



3. Os equilíbrios de (0.0.1), são os zeros da aplicação  $\mathcal{F}$  e vice-versa.

4.  $\mathcal{F}$  é três vezes continuamente Fréchet diferenciável. Isto é garantido pela hipótese  $(\mathbf{H}_1)$ . Além disso, a derivada parcial com respeito à variável  $u \in W_p^2(\Omega)$  num ponto  $(\bar{\lambda}, \bar{u}) \in \mathbb{R}^+ \times W_p^2(\Omega)$  é o operador  $D_u \mathcal{F}(\bar{\lambda}, \bar{u}) : W_p^2(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$ , definido por

$$D_u \mathcal{F}(\bar{\lambda}, \bar{u}) \cdot v = \left( \Delta v + \bar{\lambda} s(\cdot) f'(\bar{u}) v, \frac{\partial v}{\partial \nu} \right)$$

para todo  $v \in W_p^2(\Omega)$ , e o operador  $D_\lambda D_u \mathcal{F}(\bar{\lambda}, \bar{u}) : W_p^2(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$  é definido por

$$D_\lambda D_u \mathcal{F}(\bar{\lambda}, \bar{u}) \cdot v = \left( s(\cdot) f'(\bar{u}) v, 0 \right)$$

para todo  $v \in W_p^2(\Omega)$ .

**Observação 3.1.2** *Para estudar problemas de bifurcação com relação aos ramos triviais  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$ , será suficiente estudar apenas um deles. De fato, seja  $u$  uma solução do problema elíptico (0.0.2)*

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda s(\cdot) f(u) = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então a mudança de variável  $v = 1 - u$  transforma o problema elíptico anterior em

$$\begin{cases} \Delta v + \lambda \hat{s}(\cdot) \hat{f}(v) = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que  $\hat{s} := -s$  e  $\hat{f}(v) := f(1 - v)$ , a qual verifica as condições

$$\begin{aligned} \hat{f} &> 0 \quad \text{em } (0, 1), & \hat{f}(0) = 0 = \hat{f}(1), \\ \hat{f}'(0) &> 0, & \hat{f}'(1) < 0, & \hat{f}'' < 0 \quad \text{em } (0, 1) \end{aligned}$$

Portanto, o estudo estará focado no caso  $\int_{\Omega} s(\cdot) dx < 0$ , pois o outro caso seguirá deste via Observação 3.1.2, de modo que basta apresentarmos provas para os resultados relativos ao ramo trivial  $\Gamma_0$ .

Uma condição necessária para que um ponto  $(\lambda, 0) \in \mathbb{R}^+ \times W_p^2(\Omega)$  (respect.  $(\lambda, 1) \in \mathbb{R}^+ \times W_p^2(\Omega)$ ) seja de bifurcação é que não seja injetor o operador  $D_u \mathcal{F}(\lambda, 0)$  (respect.  $D_u \mathcal{F}(\lambda, 1)$ ) para algum  $\lambda$ . Mas daremos uma condição específica no próximo resultado.

**Teorema 3.1.3** *Suponha que  $(\mathbf{H}_1)$  seja válida. Se  $\lambda > 0$  é um ponto de bifurcação dos equilíbrios com relação ao ramo trivial  $\Gamma_0$  (respect.  $\Gamma_1$ ), então  $\lambda$  é um autovalor principal de (1.3.1) com  $g(\cdot) = f'(0)s(\cdot)$  (respect.  $g(\cdot) = f'(1)s(\cdot)$ ).*

**Prova:** Como  $\lambda$  é um ponto de bifurcação dos equilíbrios de (0.0.1) com relação ao ramo trivial  $\Gamma_0$ , há uma sequência  $(\lambda_k, u_{\lambda_k}) \in \mathbb{R}^+ \times (H^1(\Omega) \setminus \{0\})$  tal que

$$\lambda_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lambda \quad \text{e} \quad u_{\lambda_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \text{em} \quad H^1(\Omega).$$

Além disso,  $u_{\lambda_k}$  é solução não trivial de (0.0.2) para todo  $k$ . Considerando a sequência  $v_k := \frac{u_{\lambda_k}}{\|u_{\lambda_k}\|_{L^2(\Omega)}}$ , isto é,  $v_k$  é tal que  $\|v_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$ , pela formulação fraca de (0.0.2) temos que

$$\int_{\Omega} \nabla u_{\lambda_k} \cdot \nabla \phi \, dx = \lambda_k \int_{\Omega} s(\cdot) f(u_{\lambda_k}) \phi \, dx \quad (3.1.7)$$

para todo  $\phi \in H^1(\Omega)$ . Pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange temos  $f(u_{\lambda_k}) = f(0) + f'(0)u_{\lambda_k} + \frac{1}{2}f''(\theta u_{\lambda_k})u_{\lambda_k}^2$ , com  $0 < \theta < 1$ , e assim, combinando esta última igualdade com (3.1.7), obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla u_{\lambda_k} \cdot \nabla \phi \, dx = \lambda_k \int_{\Omega} s(\cdot) f'(0) u_{\lambda_k} \phi \, dx + \lambda_k \int_{\Omega} s(\cdot) \rho_k u_{\lambda_k} \phi \, dx \quad (3.1.8)$$

sendo

$$\rho_k = \frac{1}{2} f''(\theta u_{\lambda_k}) u_{\lambda_k}, \quad \text{com} \quad 0 < \theta < 1,$$

de forma que  $\rho_k = O(u_{\lambda_k})$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Logo, (3.1.8) torna-se

$$\int_{\Omega} \nabla v_k \cdot \nabla \phi \, dx = \lambda_k \int_{\Omega} s(\cdot) f'(0) v_k \phi \, dx + \lambda_k \int_{\Omega} s(\cdot) \rho_k v_k \phi \, dx. \quad (3.1.9)$$

Escolhendo  $\phi = v_k$  em (3.1.9), tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla v_k|^2 \, dx &= \lambda_k \int_{\Omega} s(\cdot) f'(0) v_k^2 \, dx + \lambda_k \int_{\Omega} s(\cdot) \rho_k v_k^2 \, dx \\ &\leq \lambda_k M, \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

em que  $M > 0$  é uma constante dependendo somente das funções  $f$  e  $s$ . Daí temos que a sequência  $\{v_k\}$  é limitada em  $H^1(\Omega)$ . Assim, passando a uma subsequência se necessário, existe  $v_{\lambda} \in H^1(\Omega)$  tal que, quando  $k \rightarrow \infty$ ,

$$v_k \rightharpoonup v_{\lambda} \quad \text{em} \quad H^1(\Omega),$$

$$v_k \rightarrow v_{\lambda} \quad \text{em} \quad L^2(\Omega),$$

$$v_k \rightarrow v_{\lambda} \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega.$$

Agora, passando ao limite em (3.1.9), obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla v_{\lambda} \cdot \nabla \phi \, dx = \lambda \int_{\Omega} f'(0) s(\cdot) v_{\lambda} \phi \, dx$$

para todo  $\phi \in H^1(\Omega)$ . Portanto, como  $0 < u_{\lambda_k} < 1$  pela Proposição 2.3.1 e  $v_k \rightarrow v_\lambda$  q.t.p, temos que  $v_\lambda$  é uma solução fraca positiva de (1.3.1) com  $g(\cdot) = f'(0)s(\cdot)$  o que significa que  $\lambda > 0$  é um autovalor principal de (1.3.1).  $\square$

**Corolário 3.1.4** *Suponha que  $(\mathbf{H}_1)$  seja válida e que  $\int_{\Omega} s(\cdot) dx < 0$ . Então não há bifurcação com relação ao ramo trivial  $\Gamma_1$ .*

**Prova:** Suponhamos que  $\hat{\lambda}$  seja um ponto de bifurcação dos equilíbrios com relação ao ramo trivial  $\Gamma_1$ . Então, pelo Teorema 3.1.3,  $\hat{\lambda}$  é um autovalor principal do problema de autovalores de tipo (1.3.1) com  $g(\cdot) = f'(1)s(\cdot)$ , isto é

$$\begin{cases} -\Delta v = \hat{\lambda} f'(1)s(\cdot)v & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como  $g$  muda de sinal e  $\int_{\Omega} g(\cdot) dx = f'(1) \int_{\Omega} s(\cdot) dx > 0$ , pela Observação 1.3.4 teríamos que  $\hat{\lambda} = 0$ , que é uma contradição com o Teorema 3.1.1.  $\square$

**Observação 3.1.5** *De acordo com a prova do Corolário 3.1.4 e com o Teorema 3.1.3 quando  $\int_{\Omega} s(\cdot) dx < 0$  a única possibilidade de termos um ponto de bifurcação com relação ao ramo trivial  $\Gamma_0$  será autovalor principal positivo*

$$\lambda_0 = \inf \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Omega} f'(0)s(\cdot)v^2 dx} : v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} s(\cdot)v^2 dx > 0 \right\} \quad (3.1.11)$$

do problema de autovalores (1.3.1) com  $g(\cdot) = f'(0)s(\cdot)$ , uma vez que o autovalor principal  $\lambda = 0$  não pode ser ponto de bifurcação por causa do Teorema 3.1.1.

### 3.1.2 Construindo curva de bifurcação local

Nesta subseção provaremos que  $\lambda_0$  dado por (3.1.11) é um ponto de bifurcação das soluções de (0.0.2) com relação ao ramo trivial  $\Gamma_0$  aplicando o Teorema de Crandall-Rabinowitz para um autovalor simples, isto é, Teorema 1.2.5. Mais precisamente

**Teorema 3.1.6** *Assuma  $\int_{\Omega} s(\cdot) dx < 0$  e que  $(\mathbf{H}_1)$  seja válida. O autovalor principal positivo  $\lambda_0$  dado por (3.1.11) é ponto de bifurcação dos equilíbrios de (0.0.1) com relação ao ramo trivial  $\Gamma_0$ . Isto é, há uma vizinhança de  $(\lambda_0, 0)$  em  $\mathbb{R}^+ \times W_p^2(\Omega)$ ,  $p > n$ , tal que os únicos equilíbrios não triviais de (0.0.1) estão sobre a curva de classe  $C^2$*

$$\mathcal{C} = \{(\lambda(r), u(r)) : r \in \tilde{\mathcal{I}} \subset \mathbb{R}\}.$$

Além disso,  $u(r) = ru_0 + ry(r)$ , onde  $u_0$  é gerador de  $\text{Ker}[D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0)]$ ,  $\tilde{\mathcal{I}}$  é um intervalo aberto contendo 0 e  $\lambda : \tilde{\mathcal{I}} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y : \tilde{\mathcal{I}} \rightarrow W_p^2(\Omega)$  são funções de classe  $C^2$  no sentido de Fréchet tal que  $\lambda(0) = \lambda_0$  e  $y(0) = 0$ .

**Prova:** Verificaremos as hipóteses do Teorema 1.2.5, isto é, a aplicação não-linear  $\mathcal{F}$ , é de classe  $C^3$  no sentido de Fréchet,  $\Gamma_0 \subset \mathcal{F}^{-1}(0, 0)$  e zero é um autovalor simples do par  $(D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0), D_\lambda D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0))$ , de acordo com a Observação 1.2.2. As primeiras duas condições foram justificadas na Seção anterior, resta justificar a terceira. Como  $D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0)$  dado por

$$D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0) \cdot v = \left( \Delta v + \lambda_0 s(\cdot) f'(0)v, \frac{\partial v}{\partial \nu} \right)$$

para todo  $v \in W_p^2(\Omega)$ , é um operador de Fredholm de índice zero pelo Teorema 1.4.5 e  $\lambda_0$  tem multiplicidade geométrica um pelo Teorema 1.3.9, precisamos verificar a condição de transversalidade na Observação 1.2.2. Suponhamos que não seja verdadeira, isto é, que a condição  $D_\lambda D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0) \cdot u_0 \notin \mathcal{R}(D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0))$ , em que  $u_0$  é o gerador de  $\text{Ker}[D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0)]$ , seja falsa. Então, como  $D_\lambda D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0) \cdot u_0 = (s(\cdot) f'(0)u_0, 0)$  temos que há uma solução  $v \in W_p^2(\Omega)$ ,  $p > n$ , do problema

$$\begin{cases} \Delta v + \lambda_0 s(\cdot) f'(0)v = s(\cdot) f'(0)u_0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Note que  $u_0$  satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u_0 + \lambda_0 s(\cdot) f'(0)u_0 = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1.12)$$

de forma que, pela fórmula de Green temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} u_0 \frac{\partial v}{\partial \nu} d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u_0}{\partial \nu} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \int_{\Omega} u_0 \Delta v dx - \int_{\Omega} v \Delta u_0 dx \\ &= \int_{\Omega} s(\cdot) f'(0)u_0^2 dx - \lambda_0 \int_{\Omega} s(\cdot) f'(0)u_0 v dx + \lambda_0 \int_{\Omega} s(\cdot) f'(0)u_0 v dx \\ &= \int_{\Omega} s(\cdot) f'(0)u_0^2 dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\Omega} s(\cdot) f'(0)u_0^2 dx = 0$$

e se multiplicarmos a primeira equação de (3.1.12) por  $u_0$  e integramos por partes, obteremos

$$\int_{\Omega} s(\cdot) f'(0)u_0^2 dx = \frac{1}{\lambda_0} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx > 0,$$

uma contradição.

Logo, pelo Teorema 1.2.5, existem um intervalo aberto  $\tilde{\mathcal{I}}$  contendo 0 e funções de classe  $C^2$

$$\lambda : \tilde{\mathcal{I}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y : \tilde{\mathcal{I}} \longrightarrow W_p^2(\Omega)$$

satisfazendo  $\lambda(0) = \lambda_0$ ,  $y(0) = 0$  e tais que, numa vizinhança de  $(\lambda_0, 0)$  em  $\mathbb{R}^+ \times W_p^2(\Omega)$ ,  $p > n$ , as únicas soluções não triviais do problema elíptico (0.0.2), a priori em  $W_p^2(\Omega)$ , têm a forma

$$u(r) := ru_0 + ry(r),$$

com  $r \in \tilde{\mathcal{I}}$  e  $\lambda = \lambda(r)$ .

A prova estará terminada ao provarmos que  $u(r) \in \mathfrak{X}$  para  $r$  pequeno, isto é,  $0 \leq u(r)(x) \leq 1$  q.t.p  $x \in \Omega$ , para  $r > 0$  suficientemente pequeno. De fato, como  $u_0$  é uma autofunção principal de (1.3.1) com  $g(x) = s(x)f'(0)$  para  $x \in \Omega$ , então é positiva daí podemos escolher  $\delta > 0$  que verifique  $u_0(x) \geq \delta > 0$ , para todo  $x \in \bar{\Omega}$ . Note também que  $\|y(r)\|_{W_p^2(\Omega)} \rightarrow 0$ , quando  $r \rightarrow 0$ , de modo que pela definição de  $u(r)$  também tem-se  $\|u(r)\|_{W_p^2(\Omega)} \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow 0$ . Por outro lado, como  $W_p^2(\Omega)$  está compactamente imerso em  $C^{1,\theta}(\bar{\Omega})$ ,  $p > n$ , para algum  $0 < \theta < 1 - n/p$ , obtemos  $K > 0$  tal que  $\|u(r)\|_{C^{1,\theta}(\bar{\Omega})} \leq K\|u(r)\|_{W_p^2(\Omega)}$  e daí temos

$$\|u(r)\|_{C^{1,\theta}(\bar{\Omega})} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

e

$$\|y(r)\|_{C^{1,\theta}(\bar{\Omega})} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

Deste último limite, para  $r > 0$  suficientemente pequeno temos

$$|y(r)| \leq \|y(r)\|_{C^{1,\theta}(\bar{\Omega})} < \frac{\delta}{2},$$

de modo que  $-\frac{\delta}{2} \leq y(r) \leq \frac{\delta}{2}$  em  $\bar{\Omega}$ . Logo,  $u(r) = r[u_0 + y(r)] > r[u_0 - \frac{\delta}{2}] > 0$  em  $\bar{\Omega}$ , para  $r > 0$  suficientemente pequeno.

Além disso, como  $u(r)$ ,  $u_0$  e  $y(r)$  estão em  $W_p^2(\Omega)$  também estão em  $C^{1,\theta}(\bar{\Omega})$  e assim, pela desigualdade triangular da norma em  $C^{1,\theta}(\bar{\Omega})$ , para  $r > 0$  suficientemente pequeno temos

$$0 \leq u(r) \leq \|u(r)\|_{C^{1,\theta}(\bar{\Omega})} \leq r\|u_0\|_{C^{1,\theta}(\bar{\Omega})} + r\|y(r)\|_{C^{1,\theta}(\bar{\Omega})} \leq r\|u_0\|_{C^{1,\theta}(\bar{\Omega})} + r\frac{\delta}{2}.$$

Portanto, podemos escolher  $r > 0$  ainda suficientemente pequeno tal que  $u(r) \leq 1$ , provando o teorema.  $\square$

**Corolário 3.1.7** *Nas hipóteses do Teorema 3.1.6,  $\lambda_0 > 0$  é o único ponto de bifurcação com relação ao ramo trivial  $\Gamma_0$ .*

Note que  $(\dot{\lambda}(0), u_0)$ , onde  $\dot{\phantom{x}} = d/dr$ , é o vetor tangente da curva  $\mathcal{C}$ , dada no Teorema 3.1.6, no ponto  $(\lambda_0, 0)$ . O teorema seguinte determina o sinal de  $\dot{\lambda}(0)$ .

**Teorema 3.1.8** *Suponha que as hipóteses do Teorema 3.1.6 estejam satisfeitas e que  $f'' < 0$  em  $[0, 1]$ . A bifurcação ocorrendo em  $\lambda_0$  é transcítica, isto é, tem-se  $\dot{\lambda}(0) > 0$ .*

**Prova:** Pelo Teorema 3.1.6 temos que para todo  $r \in \tilde{\mathcal{I}}$

$$\begin{cases} \Delta u(r) + \lambda(r)s(\cdot)f(u(r)) = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u(r)}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

com  $u(r) = ru_0 + ry(r)$ . Aplicando  $d/dr$  ( $= \dot{\cdot}$ ) nas equações acima, pela regra da cadeia obtemos

$$\begin{cases} \Delta(u_0 + y(r) + r\dot{y}(r)) + \dot{\lambda}(r)s(\cdot)f(u(r)) + \lambda(r)s(\cdot)f'(u(r))\dot{u}(r) = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial \nu}(u_0 + y(r) + r\dot{y}(r)) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

para todo  $r \in \tilde{\mathcal{I}}$ . Diferenciando, novamente com relação  $r$ , as equações do problema anterior em  $r = 0$  e lançando mão do fato que  $\dot{u}(0) = u_0$  e  $\ddot{u}(0) = 2\dot{y}(0)$ , temos

$$\begin{cases} \Delta\dot{y}(0) + \dot{\lambda}(0)s(\cdot)f'(0)u_0 + \frac{\lambda_0}{2}s(\cdot)f''(0)u_0^2 + \lambda_0s(\cdot)f'(0)\dot{y}(0) = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial \dot{y}(0)}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim, como  $u_0$  é solução de (3.1.12), por meio da fórmula de Green segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} u_0 \frac{\partial \dot{y}(0)}{\partial \nu} d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\partial\Omega} \dot{y}(0) \frac{\partial u_0}{\partial \nu} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \int_{\Omega} \Delta\dot{y}(0)u_0 dx - \int_{\Omega} \dot{y}(0)\Delta u_0 dx \\ &= - \int_{\Omega} \lambda_0s(\cdot)f'(0)u_0\dot{y}(0) dx - \int_{\Omega} \dot{\lambda}(0)s(\cdot)f'(0)u_0^2 dx - \int_{\Omega} \frac{\lambda_0}{2}s(\cdot)f''(0)u_0^3 dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \lambda_0s(\cdot)f'(0)u_0\dot{y}(0) dx \\ &= - \int_{\Omega} \dot{\lambda}(0)s(\cdot)f'(0)u_0^2 dx - \int_{\Omega} \frac{\lambda_0}{2}s(\cdot)f''(0)u_0^3 dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$\dot{\lambda}(0) \int_{\Omega} s(\cdot)f'(0)u_0^2 dx = - \int_{\Omega} \frac{\lambda_0}{2}s(\cdot)f''(0)u_0^3 dx$$

e como decorre de (3.1.12) que

$$\int_{\Omega} s(\cdot)f'(0)u_0^2 dx = \frac{1}{\lambda_0} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx,$$

obtemos

$$\dot{\lambda}(0) = - \frac{\lambda_0^2 f''(0) \int_{\Omega} s(\cdot) u_0^3 dx}{2 \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx}.$$

Agora, multiplicando a primeira equação de (3.1.12) por  $u_0^2$  e integrando por partes, obtemos

$$\int_{\Omega} s(\cdot) u_0^3 dx = \frac{2}{\lambda_0 f'(0)} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 u_0 dx > 0.$$

Portanto, como  $f'' < 0$  em  $[0, 1]$  concluímos que

$$\dot{\lambda}(0) > 0$$

de modo que a bifurcação ocorrendo em  $\lambda_0$  é transcítica.  $\square$

### 3.1.3 Injetividade do operador derivada em torno de equilíbrio não trivial

Nesta parte apresentamos primeiramente uma ferramenta muito útil para conhecer melhor as estruturas de bifurcação e estabilidade de (0.0.1) e, em seguida, suas conseqüências.

**Teorema 3.1.9** *Suponha que  $(H_1)$  seja válida. Seja  $u_\lambda$  um equilíbrio não trivial de (0.0.1) com  $\lambda > 0$ . Então, o operador derivada parcial  $D_u \mathcal{F}(\lambda, u_\lambda) : W_p^2(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$ , com  $p > n$ , dado por*

$$D_u \mathcal{F}(\lambda, u_\lambda) \cdot v = \left( \Delta v + \lambda s(\cdot) f'(u_\lambda) v, \frac{\partial v}{\partial \nu} \right)$$

é injetor.

**Prova:** Por contradição, suponhamos que o operador  $D_u \mathcal{F}(\lambda, u_\lambda)$  não é injetor, isto é, o problema

$$\begin{cases} \Delta \xi + \lambda s(\cdot) f'(u_\lambda) \xi = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial \xi}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

tem uma solução  $\xi \neq 0$ . Como  $u_\lambda$  é um equilíbrio não trivial, pela Proposição 2.3.1 temos que  $0 < u_\lambda < 1$  em  $\bar{\Omega}$  e, assim,  $f(u_\lambda) > 0$  em  $\bar{\Omega}$ . Consideremos a função  $\zeta : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\zeta(x) := \frac{\xi(x)}{f(u_\lambda(x))}. \quad (3.1.13)$$

Pela regra da cadeia, temos

$$\partial_i(\zeta) = \frac{\partial_i(\xi) f(u_\lambda) - f'(u_\lambda) \partial_i(u_\lambda) \xi}{f(u_\lambda)^2} \quad \text{com } \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.1.14)$$

e

$$\begin{aligned} \partial_{ii}(\zeta) &= \frac{\partial_{ii}(\xi)f(u_\lambda)^2 - 2\partial_i(\xi)\partial_i(u_\lambda)f'(u_\lambda)f(u_\lambda) + \partial_i(u_\lambda)^2[2f'(u_\lambda)^2\xi - f''(u_\lambda)f(u_\lambda)\xi]}{f(u_\lambda)^3} \\ &\quad - \frac{\partial_{ii}(u_\lambda)f'(u_\lambda)f(u_\lambda)\xi}{f(u_\lambda)^3} \quad \text{com } \partial_{ii} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Assim, usando (3.1.13), (3.1.14), (3.1.15) e o fato que  $u_\lambda$  é um equilíbrio de (0.0.1), obtém-se que  $\zeta$  é solução para o problema elíptico

$$\begin{cases} \Delta\zeta + \sum_{i=1}^n \left( \frac{2f'(u_\lambda)\partial_i(u_\lambda)}{f(u_\lambda)} \right) \partial_i(\zeta) + \frac{f''(u_\lambda)|\nabla u_\lambda|^2}{f(u_\lambda)} \zeta = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial\zeta}{\partial\nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1.16)$$

Como a função coeficiente satisfaz  $\frac{f''(u_\lambda)|\nabla u_\lambda|^2}{f(u_\lambda)} \leq 0$ , pelo princípio de máximo e pelo Lema de Hopf temos que o máximo de  $\zeta$  ocorreria num ponto de  $\partial\Omega$  e que  $\frac{\partial\zeta}{\partial\nu} > 0$  naquele ponto se  $\zeta$  não fosse constante. Assim,  $\zeta$  tem que ser constante, mas pela primeira equação de (3.1.16) e como  $f''(u_\lambda)|\nabla u_\lambda|^2 \leq 0$  (por causa da Proposição 2.3.1), teríamos que  $\zeta \equiv 0$ , uma contradição.  $\square$

Uma primeira consequência imediata de Teorema 3.1.9 e do Teorema da Função Implícita é o seguinte

**Corolário 3.1.10** *Não há uma bifurcação secundária dos equilíbrios de (0.0.1).*

**Prova:** Como  $D_u\mathcal{F}(\lambda, u_\lambda)$  é um operador de Fredholm de índice zero e

$$\dim \text{Ker}[D_u\mathcal{F}(\lambda, u_\lambda)] = 0,$$

pelos Teoremas 1.4.5 e 3.1.9, temos que

$$\dim(L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega) \setminus \mathcal{R}[D_u\mathcal{F}(\lambda, u_\lambda)]) = 0$$

isto implica que  $D_u\mathcal{F}(\lambda, u_\lambda)$  é um isomorfismo. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita temos o resultado.  $\square$

O seguinte resultado mostra que o Teorema 3.1.1 pode ser melhorada, isto é, fornece um intervalo onde vale a unicidade dos equilíbrios triviais de (0.0.1).

**Teorema 3.1.11** *Suponha que  $(\mathbf{H}_1)$  e  $(\mathbf{H}_2)$  sejam válidas e que  $\int_\Omega s(\cdot) dx < 0$ . Então o Teorema 3.1.1 é válido para todo  $0 < \lambda \leq \lambda_0$ .*



**Prova:** Note que é suficiente provar o Teorema para  $0 < \lambda < \lambda_0$ . De fato, assumindo que o mesmo seja válido para  $0 < \lambda < \lambda_0$  se  $u_{\lambda_0}$  fosse equilíbrio não trivial de (0.0.1) poderíamos obter, via argumentação semelhante abaixo, um intervalo aberto contendo  $\lambda_0$  e equilíbrios não triviais de (0.0.1)  $u_\lambda$ , com  $\lambda < \lambda_0$ , o que seria uma contradição. Assim provaremos o teorema para  $0 < \lambda < \lambda_0$ . Por contradição, suponhamos que exista  $0 < \tilde{\lambda} < \lambda_0$  tal que  $u_{\tilde{\lambda}}$  seja um equilíbrio não trivial de (0.0.1). Como na prova do Corolário 3.1.10 temos que o operador  $D_u \mathcal{F}(\tilde{\lambda}, u_{\tilde{\lambda}})$  é um isomorfismo. Então, pelo Teorema da Função Implícita, há um intervalo  $\mathcal{I}$  contendo  $\tilde{\lambda}$  e soluções  $u_{\tilde{\lambda}}(\lambda) \in W_p^2(\Omega)$ ,  $p > n$ , de (0.0.2) para todo  $\lambda \in \mathcal{I}$  tal que  $u_{\tilde{\lambda}}(\tilde{\lambda}) = u_{\tilde{\lambda}}$ .

Para todo  $\lambda$  suficientemente próximo de  $\tilde{\lambda}$ , temos

$$0 < u_{\tilde{\lambda}}(\lambda) < 1 \quad \text{em} \quad \overline{\Omega}.$$

De fato, como  $u_{\tilde{\lambda}}$  é um equilíbrio não trivial segue Proposição 2.3.1 que

$$0 < u_{\tilde{\lambda}} < 1 \quad \text{em} \quad \overline{\Omega}.$$

Agora, como as soluções  $u_{\tilde{\lambda}}(\lambda)$  de (0.0.2) dadas pelo Teorema da Função Implícita satisfazem

$$\|u_{\tilde{\lambda}}(\lambda) - u_{\tilde{\lambda}}\|_{W_p^2(\Omega)} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \tilde{\lambda}} 0,$$

pela imersão  $W_p^2(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\theta}(\overline{\Omega})$  com  $0 < \theta < 1 - n/p$ , válida para  $p > n$ , obtemos

$$\|u_{\tilde{\lambda}}(\lambda) - u_{\tilde{\lambda}}\|_{C^{1,\theta}(\overline{\Omega})} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \tilde{\lambda}} 0$$

e, em particular, segue que

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} |u_{\tilde{\lambda}}(\lambda)(x) - u_{\tilde{\lambda}}(x)| \xrightarrow{\lambda \rightarrow \tilde{\lambda}} 0.$$

Assim, dado

$$0 < \varepsilon \leq \min \left\{ \inf_{x \in \overline{\Omega}} u_{\tilde{\lambda}}(x), 1 - \sup_{x \in \overline{\Omega}} u_{\tilde{\lambda}}(x) \right\},$$

existe  $\delta > 0$  tal que se  $0 < |\lambda - \tilde{\lambda}| < \delta$  temos que

$$u_{\tilde{\lambda}}(x) - \varepsilon < u_{\tilde{\lambda}}(\lambda)(x) < u_{\tilde{\lambda}}(x) + \varepsilon \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

de modo que

$$0 < u_{\tilde{\lambda}}(\lambda) < 1 \quad \text{em} \quad \overline{\Omega}, \quad \forall \lambda \in (\tilde{\lambda} - \delta, \tilde{\lambda} + \delta).$$

Logo, para todo  $\lambda$  pertencente ao intervalo  $\tilde{\mathcal{I}} := (\tilde{\lambda} - \delta, \tilde{\lambda} + \delta)$ , a função  $u_{\tilde{\lambda}}(\lambda)$  é um equilíbrio de (0.0.1), a qual é não constante pela Proposição 2.3.1.

Tomando uma sequência  $\{\lambda_k\} \subset \tilde{\mathcal{I}}$  que converge para  $\tilde{\lambda} - \delta$  e os correspondentes equilíbrios  $u_k := u_{\tilde{\lambda}}(\lambda_k)$ , temos

$$\int_{\Omega} \nabla u_k \cdot \nabla \phi \, dx = \lambda_k \int_{\Omega} s(\cdot) f(u_k) \phi \, dx, \quad \forall \phi \in H^1(\Omega). \quad (3.1.17)$$

Da relação anterior com  $\phi = u_k$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 dx &= \lambda_k \int_{\Omega} s(\cdot) f(u_k) u_k dx \\ &\leq \lambda_k \|s^+\|_{L^\infty(\Omega)} \sup_{x \in \bar{\Omega}} f(u_k(x)) |\Omega|, \quad \text{pois } \int_{\Omega} u_k dx \leq |\Omega| \text{ para todo } k \\ &\leq M \lambda_k \\ &\leq M \lambda_0 \end{aligned}$$

Assim,  $\{u_k\}$  é uma sequência limitada em  $H^1(\Omega)$  e, passando a uma subsequência se é necessário, existe  $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$  verificando quando  $k \rightarrow \infty$

$$u_k \rightharpoonup \tilde{u} \text{ em } H^1(\Omega),$$

$$u_k \rightarrow \tilde{u} \text{ q.t.p em } \Omega$$

Assim, passando ao limite quando  $k \rightarrow \infty$  na equação (3.1.17) provamos que  $\tilde{u} \in \mathfrak{X}$  é uma solução fraca de (0.0.2) com  $\lambda = \tilde{\lambda} - \delta$ , a qual é não trivial por causa do Corolário 3.1.7. Portanto, toda argumentação prévia pode ser aplicada a partir de  $\tilde{u}$ . Por indução, poderíamos construir uma sequência  $\{u_{\lambda_j}\}$  de equilíbrios não triviais de (0.0.1), em que  $\lambda_1 = \tilde{\lambda}$ , tal que  $\lambda_j \rightarrow 0$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Isto é impossível pelo Teorema 3.1.1.  $\square$

O seguinte teorema estabelece um resultado de unicidade com relação a equilíbrio não trivial.

**Teorema 3.1.12** *O problema (0.0.1) tem um único equilíbrio não trivial para cada  $\lambda > \lambda_0$ .*

**Prova:** A principal idéia é estender a curva local  $\mathcal{C}$  dada pelo Teorema 3.1.6 a uma curva suave definida sobre  $(\lambda_0, +\infty)$  e contendo todos os equilíbrios não triviais de (0.0.1).

Pelo Teorema 3.1.8, a função  $\lambda(r)$  é crescente perto de  $r = 0$ ; fixemos o intervalo pequeno  $(0, \bar{r})$ ,  $r > 0$ , tomemos uma sequência  $r_j \rightarrow \bar{r}$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Como no Teorema 3.1.11 a sequência  $\{u(r_j)\}$  de soluções não triviais de (0.0.2) converge fracamente em  $H^1(\Omega)$  e fortemente em  $L^2(\Omega)$  para uma solução fraca não trivial  $\bar{u}$  de (0.0.2); como no mesmo teorema segue também, via Teorema da Função Implícita, a existência de um intervalo aberto  $\tilde{\mathcal{I}}$  contendo  $\lambda(\bar{r})$  e uma função de classe  $C^3$   $\Theta : \tilde{\mathcal{I}} \rightarrow W_p^2(\Omega)$ ,  $p > n$ , tal que  $\Theta(\lambda(\bar{r})) = \bar{u}$  e  $\Theta(\lambda)$  é uma solução não trivial de (0.0.2) para todo  $\lambda \in \tilde{\mathcal{I}}$ .

Agora, denotemos  $\{u(r_j)\}$  e  $\lambda(r_j)$  por  $\{u_j\}$  e  $\lambda_j$ , respectivamente, assim a convergência de  $\{u_j\}$  pode ser melhorada, em certo sentido, desde que  $\bar{u}$  é uma solução clássica de (0.0.2) e, pela estimativa de Amann, há  $C > 0$  tal que, para  $p > n$ ,

$$\begin{aligned}
\|u_j - u_k\|_{W_p^1(\Omega)} &\leq C \left[ \|\Delta(u_j - u_k) + (u_j - u_k)\|_{L^p(\Omega)} \right] \\
&\leq C \left[ \|\lambda_j sf(u_j) - \lambda_k sf(u_k)\|_{L^p(\Omega)} + \|u_j - u_k\|_{L^p(\Omega)} \right] \\
&\leq C \left[ |\lambda_j| \|sf(u_j) - sf(u_k)\|_{L^p(\Omega)} + |\lambda_j - \lambda_k| \|sf(u_k)\|_{L^p(\Omega)} \right. \\
&\quad \left. + \|u_j - u_k\|_{L^p(\Omega)} \right] \xrightarrow{j,k \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Assim,  $\{u_j\}$  é uma sequência de Cauchy em  $W_p^1(\Omega)$ ,  $p > n$ , logo convergirá para certo  $\bar{u}$  em  $W_p^1(\Omega)$ , e também em  $W_p^2(\Omega)$ ,  $p > n$ , quando  $j \rightarrow \infty$ , por causa da estimativa de Agmon, Douglis e Nirenberg [2]. Por unicidade, temos  $\Theta(\lambda(r)) = u(r)$  para  $r \sim \bar{r}$ , mas, como no Teorema 3.1.11,  $\Theta$  pode ser estendido até conseguir

$$\Theta(\lambda(r)) = u(r), \quad \forall r \in (0, \bar{r}). \quad (3.1.18)$$

Pelo mesmo argumento  $\Theta$  pode ser estendido a uma função definida sobre  $(\lambda_0, +\infty)$ , que será uma extensão de  $\mathcal{C}$ . A prova do teorema será concluída ao se provar que qualquer equilíbrio não trivial de (0.0.1) está sobre a curva  $\mathcal{C}$ . Para  $\lambda \sim \lambda_0$ , isto segue por (3.1.18) e o Teorema 3.1.6. Então vejamos o outro caso, se há  $\tilde{\lambda} \gg \lambda_0$  tal que  $u_{\tilde{\lambda}} \in \mathfrak{X} \setminus \mathcal{C}$  é um equilíbrio não trivial de (0.0.1). Trabalhando como acima e usando o Corolário 3.1.7, conseguiremos uma outra função  $\Upsilon : (\lambda_0, +\infty) \rightarrow [W_p^2(\Omega) \cap \mathfrak{X}]$ ,  $p > n$ , tal que  $\Upsilon(\tilde{\lambda}) = u_{\tilde{\lambda}}$  e  $\Upsilon(\lambda) \neq \Theta(\lambda)$  para todo  $\lambda \in (\lambda_0, +\infty)$ . Por (3.1.18) e pela unicidade de  $\mathcal{C}$  perto de  $(\lambda_0, 0)$ , isto é impossível.  $\square$

Decorre da demonstração do Teorema 3.1.12 que a bifurcação ocorrendo em  $(\lambda_0, 0)$  com relação ao ramo trivial  $\Gamma_0$ , sendo  $\lambda_0$  dado por (3.1.11), não é apenas um fenômeno local, mas global. Com efeito, foi provado que os equilíbrios não-triviais de (0.0.1) formam uma curva suave ilimitada em  $(\lambda_0, +\infty) \times [W_p^2(\Omega) \cap \mathfrak{X}]$ ,  $p > n$ . Assim, foi provado também o seguinte resultado.

**Teorema 3.1.13** *O autovalor principal  $\lambda_0$  dado por (3.1.11) é um ponto de bifurcação global com relação ao ramo trivial  $\Gamma_0$ . Além disso, a aplicação*

$$(\lambda_0, +\infty) \ni \lambda \longmapsto u_\lambda \in [W_p^2(\Omega) \cap \mathfrak{X}], \quad p > n$$

*que associa a cada  $\lambda > \lambda_0$  o correspondente equilíbrio não-trivial de (0.0.1) é três vezes continuamente diferenciável no sentido de Fréchet.*

## 3.2 Estrutura de bifurcação dos equilíbrios com peso de média nula

**Teorema 3.2.1** *Suponha que  $(H_1)$  seja válida e que  $\int_{\Omega} s(\cdot) dx = 0$ . Então não há bifurcação com relação aos ramos triviais  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$ .*

**Prova:** Consideremos o caso  $\Gamma_0$ . Se  $\lambda > 0$  fosse um ponto de bifurcação com respeito ao ramo trivial  $\Gamma_0$ , então pelo Teorema 3.1.3 teríamos que  $\lambda > 0$  seria um autovalor principal de (1.3.1) com  $g(\cdot) = f'(0)s(\cdot)$ , o qual é uma contradição pois, como  $\int_{\Omega} g(\cdot) dx = f'(0) \int_{\Omega} s(\cdot) dx = 0$ , o único autovalor principal de (1.3.1) seria  $\lambda = 0$ .  $\square$

Nesta parte precisamos introduzir um novo ramo de soluções triviais de (0.0.2), com  $\lambda = 0$ , a saber

$$\Gamma_0^1 := \{(0, c) : 0 < c < 1\}.$$

Estudaremos bifurcação dos equilíbrios não triviais de (0.0.1) com relação a este ramo. Para isto, consideremos a decomposição  $L^2(\Omega) = \mathbb{R} \oplus V$ , sendo

$$V = \{v \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} v dx = 0\}.$$

Segue que  $u = \alpha + v \in \mathbb{R} \oplus V$  é uma solução de (0.0.2) se, e somente se,

$$\begin{cases} \Delta v = -\lambda s(\cdot)f(\alpha + v) & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \\ \lambda \int_{\Omega} s(\cdot)f(\alpha + v) dx = 0. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Agora, nos seguintes subespaços

$$X := \left\{ v \in W_p^2(\Omega) : \int_{\Omega} v dx = 0 \right\} \subset V$$

$$Z := \left\{ (\phi, \psi) \in L^p(\Omega) \times W_p^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega) : \int_{\Omega} \phi dx = \int_{\partial\Omega} \psi d\mathcal{H}^{n-1} \right\}$$

com  $p > n$ , definamos a aplicação  $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times X \rightarrow Z$ , dada por

$$G(\lambda, \alpha, v) = \left( \Delta v + \lambda s(\cdot)f(\alpha + v), \frac{\partial v}{\partial \nu} \right).$$

Pelo Teorema da Divergência  $G$  é bem definida e verifica:  $(\lambda, \alpha, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times X$  é um zero de  $G$  se, e somente se,  $v$  é  $W_p^2(\Omega)$ -solução de (3.2.1). Além disso,  $G(0, c, 0) = (0, 0)$ ,  $\forall c \in \mathbb{R}$ ,  $G$  é de classe  $C^3$  numa vizinhança do ponto  $(0, c, 0)$  e a derivada parcial  $D_v G(0, c, 0) : X \rightarrow Z$ , dada por  $D_v G(0, c, 0) \cdot w = \left( \Delta w, \frac{\partial w}{\partial \nu} \right)$  é um homeomorfismo linear graças ao Lema 7.5 do capítulo III de [38].

Portanto, pelo Teorema da Função Implícita, segue que o conjunto  $G^{-1}(0, 0)$  perto do ponto  $(0, c, 0)$  consiste do gráfico de uma função suave (de classe  $C^3$ )  $v(\lambda, \alpha)$ , definida numa vizinhança de  $(0, c)$ , e satisfaz  $v(0, c) = 0$ .

**Observação 3.2.2** *Estamos interessados por  $v = v(\lambda, \alpha)$  para  $(\lambda, \alpha) \simeq (0, c) \in \Gamma_0^1$ . Como  $v$  é solução de (3.2.1), temos que*

$$\begin{cases} \Delta\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right) = -\lambda s(\cdot) f'(\alpha + v) \left[1 + \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right] & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.2.2)$$

e

$$\begin{cases} \Delta\left(\frac{\partial v}{\partial \lambda}\right) = -s(\cdot) f(\alpha + v) - \lambda s(\cdot) f'(\alpha + v) \frac{\partial v}{\partial \lambda} & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda}\right) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.2.3)$$

O problema de resolver (0.0.2) numa vizinhança de  $(0, c) \in \Gamma_0^1$  equivale a achar os zeros da função real  $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\Psi(\lambda, \alpha) = \int_{\Omega} s(\cdot) f(\alpha + v(\lambda, \alpha)) \, dx. \quad (3.2.4)$$

**Observação 3.2.3** *Notamos que  $\Psi$  é uma função ao menos de classe  $C^2$  numa vizinhança do ponto  $(0, c) \in \Gamma_0^1$  e verifica*

- $\Psi(0, c) = f(c) \int_{\Omega} s(\cdot) \, dx = 0$
  - $\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}(\lambda, \alpha) = \int_{\Omega} s(\cdot) f'(\alpha + v(\lambda, \alpha)) \frac{\partial v}{\partial \lambda}(\lambda, \alpha) \, dx$
  - $\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}(\lambda, \alpha) = \int_{\Omega} s(\cdot) f'(\alpha + v(\lambda, \alpha)) \left[1 + \frac{\partial v}{\partial \alpha}(\lambda, \alpha)\right] \, dx$
  - $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2}(\lambda, \alpha) = \int_{\Omega} s(\cdot) \left[ f''(\alpha + v(\lambda, \alpha)) \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda}(\lambda, \alpha)\right)^2 + f'(\alpha + v(\lambda, \alpha)) \frac{\partial^2 v}{\partial \lambda^2}(\lambda, \alpha) \right] \, dx$
  - $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha^2}(\lambda, \alpha) = \int_{\Omega} s(\cdot) \left[ f''(\alpha + v(\lambda, \alpha)) \left(1 + \frac{\partial v}{\partial \alpha}(\lambda, \alpha)\right)^2 + f'(\alpha + v(\lambda, \alpha)) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2}(\lambda, \alpha) \right] \, dx$
  -
- $$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda \partial \alpha}(\lambda, \alpha) = \int_{\Omega} s(\cdot) \left[ f''(\alpha + v(\lambda, \alpha)) \left(1 + \frac{\partial v}{\partial \alpha}(\lambda, \alpha)\right) \frac{\partial v}{\partial \lambda}(\lambda, \alpha) + f'(\alpha + v(\lambda, \alpha)) \frac{\partial^2 v}{\partial \lambda \partial \alpha}(\lambda, \alpha) \right] \, dx$$

**Teorema 3.2.4** *Suponha  $(H_1)$  seja válida e que  $\int_{\Omega} s(\cdot) \, dx = 0$ . Então*

1. O ponto  $(0, \bar{c})$ , com  $0 < \bar{c} < 1$  e  $f'(\bar{c}) = 0$ , é ponto de bifurcação dos equilíbrios de (0.0.1) com relação ao ramo  $\Gamma_0^1$ .
2. Qualquer ponto  $(0, c)$ , com  $0 < c < 1$  e  $f'(c) \neq 0$ , não é de bifurcação dos equilíbrios de (0.0.1) com relação ao ramo  $\Gamma_0^1$ .
3. Não há solução não trivial de (0.0.2) perto dos pontos  $(0, 0)$  e  $(0, 1)$ .

**Prova:** Para  $(0, \bar{c})$ , com  $0 < \bar{c} < 1$  e  $f'(\bar{c}) = 0$ , pela Observação 3.2.3 temos

- $\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}(0, \bar{c}) = 0$
- $\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}(0, \bar{c}) = 0$
- $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2}(0, \bar{c}) = \int_{\Omega} s(\cdot) f''(\bar{c}) \left( \frac{\partial v}{\partial \lambda}(0, \bar{c}) \right)^2 dx$
- $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha^2}(0, \bar{c}) = \int_{\Omega} s(\cdot) f''(\bar{c}) \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial \alpha}(0, \bar{c}) \right)^2 dx$
- $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda \partial \alpha}(0, \bar{c}) = \int_{\Omega} s(\cdot) f''(\bar{c}) \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial \alpha}(0, \bar{c}) \right) \frac{\partial v}{\partial \lambda}(0, \bar{c}) dx$

e por (3.2.2), temos

$$\begin{cases} \Delta \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha}(0, \bar{c}) \right) = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha}(0, \bar{c}) \right) = 0 & \text{sobre } \partial \Omega. \end{cases}$$

Daí,  $\frac{\partial v}{\partial \alpha}(0, \bar{c})$  é constante e como  $\frac{\partial v}{\partial \alpha}(0, \bar{c}) \in X$ , isto é, tem média zero, concluímos que

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha}(0, \bar{c}) \equiv 0 \quad (3.2.5)$$

Além disso, segue de (3.2.3) que

$$\begin{cases} \Delta \left( \frac{\partial v}{\partial \lambda}(0, \bar{c}) \right) = -s(\cdot) f(\bar{c}) & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{\partial v}{\partial \lambda}(0, \bar{c}) \right) = 0 & \text{sobre } \partial \Omega, \end{cases}$$

e assim, multiplicando por  $\frac{\partial v}{\partial \lambda}(0, \bar{c})$  e integrando por partes do problema anterior obtemos

$$- \int_{\Omega} s(\cdot) f(\bar{c}) \frac{\partial v}{\partial \lambda}(0, \bar{c}) dx = - \int_{\Omega} \left| \nabla \left( \frac{\partial v}{\partial \lambda}(0, \bar{c}) \right) \right|^2 dx \quad (3.2.6)$$

$$\int_{\Omega} s(\cdot) \frac{\partial v}{\partial \lambda}(0, \bar{c}) dx = \frac{1}{f(\bar{c})} \int_{\Omega} \left| \nabla \left( \frac{\partial v}{\partial \lambda}(0, \bar{c}) \right) \right|^2 dx > 0.$$

Logo, por (3.2.5) e (3.2.6) temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha^2}(0, \bar{c}) &= f''(\bar{c}) \int_{\Omega} s(\cdot) dx = 0 \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda \partial \alpha}(0, \bar{c}) &= f''(\bar{c}) \int_{\Omega} s(\cdot) \frac{\partial v}{\partial \lambda}(0, \bar{c}) dx = \frac{f''(\bar{c})}{f(\bar{c})} \int_{\Omega} |\nabla(\frac{\partial v}{\partial \lambda}(0, \bar{c}))|^2 dx < 0\end{aligned}$$

Assim, concluímos que a Hessiana  $\Psi''(0, \bar{c})$  de  $\Psi$  em  $(0, \bar{c})$  é indefinida e não degenerada pois, a matriz  $H\Psi(0, \bar{c})$  satisfaz

$$\det H\Psi(0, \bar{c}) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2}(0, \bar{c}) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha^2}(0, \bar{c}) - [\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda \partial \alpha}(0, \bar{c})]^2 = -[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda \partial \alpha}(0, \bar{c})]^2 < 0.$$

Então, pelo Corolário 1.2.9, temos que  $\Psi^{-1}(0)$  consiste, numa vizinhança de  $(0, \bar{c})$ , de um par de curvas suaves interceptando-se transversalmente em  $(0, \bar{c})$ . Um deles é  $\Gamma_0^1$  e outro deve ser formado por uma solução não trivial de (0.0.2), com o que verificamos (1).

Agora seja  $(0, c) \in \Gamma_0^1$ , com  $0 < c < 1$  e  $f'(c) \neq 0$ . Pela Observação 3.2.3 temos que  $\Psi(0, c) = 0$  e

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}(0, c) = \int_{\Omega} s(\cdot) f'(c) \frac{\partial v}{\partial \lambda}(0, c) dx = f'(c) \int_{\Omega} s(\cdot) \frac{\partial v}{\partial \lambda}(0, c) dx.$$

De (3.2.3), para  $(\lambda, \alpha) = (0, c)$  temos que  $\frac{\partial v}{\partial \lambda}(0, c)$  é solução de

$$\begin{cases} \Delta(\frac{\partial v}{\partial \lambda}(0, c)) = -s(\cdot) f(c) & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial \nu}(\frac{\partial v}{\partial \lambda}(0, c)) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

e assim, novamente multiplicando por  $\frac{\partial v}{\partial \lambda}(0, c)$  e integrando por partes, temos

$$\int_{\Omega} s(\cdot) \frac{\partial v}{\partial \lambda}(0, c) dx = \frac{1}{f(c)} \int_{\Omega} |\nabla(\frac{\partial v}{\partial \lambda}(0, c))|^2 dx > 0.$$

Logo  $\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}(0, c) \neq 0$ . Portanto, pelo Teorema da Função Implícita o conjunto  $\Psi^{-1}(0)$ , numa vizinhança de  $(0, c)$ , consiste do gráfico de função suave  $\lambda = \lambda(\alpha)$ , definida para  $\alpha \simeq c$ , tal que  $\lambda(c) = 0$ . Mas a função nula  $\lambda(\alpha) = 0$ , definida para  $\alpha \simeq c$ , que produz  $v(0, \alpha) = 0$  por (3.2.1) e então implica  $(\lambda, u) = (0, \alpha)$ , tem seu gráfico como subconjunto do conjunto dos zeros de  $\Psi$ , pois

$$\Psi(0, \alpha) = \int_{\Omega} s(\cdot) f(\alpha) dx = f(\alpha) \int_{\Omega} s(\cdot) dx = 0$$

para todo  $\alpha \simeq c$ . Portanto, numa vizinhança ponto  $(0, c)$ , a solução de (0.0.2) é uma parte do ramo  $\Gamma_0^1$  e não ocorre fenômeno de bifurcação o que prova (2).

Finalmente, seja  $c \in \{0, 1\}$ . De (3.2.2) e (3.2.3) temos que

$$\frac{\partial v}{\partial \lambda}(0, c) = \frac{\partial v}{\partial \alpha}(0, c) = \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2}(0, c) = 0.$$

Pela Observação 3.2.3, temos

- $\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}(0, c) = 0$
- $\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}(0, c) = 0$
- $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2}(0, c) = \int_{\Omega} s(\cdot) f'(c) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \lambda^2}(0, c) \right) dx$
- $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha^2}(0, c) = 0$
- $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda \partial \alpha}(0, c) = \int_{\Omega} s(\cdot) f'(c) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \lambda}(0, c) \right) dx$

e, por (3.2.2), obtemos

$$\begin{cases} \Delta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \lambda}(0, c) \right) = -s(\cdot) f'(c) & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \lambda}(0, c) \right) = 0 & \text{sobre } \partial \Omega. \end{cases}$$

Multiplicando a equação no problema anterior por  $\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \lambda}(0, c)$  e integrando por partes, vem que

$$- \int_{\Omega} s(\cdot) f'(c) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \lambda}(0, c) dx = - \int_{\Omega} \left| \nabla \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \lambda}(0, c) \right) \right|^2 dx \quad (3.2.7)$$

$$\int_{\Omega} s(\cdot) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \lambda}(0, c) dx = \frac{1}{f'(c)} \int_{\Omega} \left| \nabla \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \lambda}(0, c) \right) \right|^2 dx \neq 0,$$

pois  $c = 0$  ou  $c = 1$  e  $\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \lambda}(0, c)$  não pode ser constante pois é solução do problema anterior. Portanto, a Hessiana  $\Psi''(0, c)$  verifica  $\det H\Psi(0, c) = -\left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda \partial \alpha}(0, c) \right]^2 \neq 0$ , isto é,  $\Psi''(0, c)$  é indefinida e não degenerada. Logo, pelo Corolário 1.2.9. temos que o conjunto solução  $\Psi^{-1}(0)$  consiste, numa vizinhança de  $(0, c)$ , de um par de curvas interceptando-se transversalmente em  $(0, c)$ . Mas as ditas curvas são  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_0^1$  para  $c = 0$  e  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_0^1$  para  $c = 1$ , o que prova (3).  $\square$

**Corolário 3.2.5** *O ponto  $(0, \bar{c})$ , onde  $0 < \bar{c} < 1$  e  $f'(\bar{c}) = 0$ , é único ponto de bifurcação com relação ao ramo  $\Gamma_0^1$ . Além disso, a curva bifurcante é suave.*



**Teorema 3.2.6** *Suponha que  $(\mathbf{H}_1)$  e  $(\mathbf{H}_2)$  sejam válidas e que  $\int_{\Omega} s(\cdot) dx = 0$ . Então, para cada  $\lambda > 0$  existe um único equilíbrio  $u_{\lambda}$  de (0.0.1), o qual pertence a uma curva suave global que bifurca do ramo  $\Gamma_0^1$ . Além disso, a curva bifurcante é globalmente parametrizado em  $\lambda$ , isto é, a aplicação*

$$(0, +\infty) \ni \lambda \mapsto u_{\lambda} \in [W_p^2(\Omega) \cap \mathfrak{X}],$$

onde  $p > n$ , é suave.

**Prova:** Pelo Teorema 3.2.4 e Corolário 3.2.5 existe uma curva local que bifurca do ramo  $\Gamma_0^1$  num único ponto, consistindo de equilíbrios não triviais de (0.0.1). Combinando Teorema 3.1.9 e o Teorema da Função Implícita, podemos estender tal curva local a uma curva suave global parametrizada pelo parâmetro  $\lambda$ . De fato, desde que não há bifurcação com relação aos ramos  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$  pelo Teorema 3.2.1, e não há bifurcação secundária pelo Corolário 3.1.10, segue do Teorema 3.1.9 e do Teorema da Função Implícita a curva local estende-se suavemente realmente a uma curva definida para todo  $\lambda > 0$ .

Finalmente, podemos provar como no Teorema 3.1.12 que a curva global contém todos os equilíbrios de (0.0.1) e então concluir, também como no Teorema 3.1.12, a existência de um único equilíbrio não trivial  $u_{\lambda}$  de (0.0.1) para cada  $\lambda > 0$ . Também obtemos que a aplicação

$$(0, +\infty) \ni \lambda \mapsto u_{\lambda} \in [W_p^2(\Omega) \cap \mathfrak{X}],$$

onde  $p > n$ , é suave. □

# Capítulo 4

## Estrutura de estabilidade dos equilíbrios

Neste capítulo estudaremos a estabilidade dos equilíbrios de (0.0.1). A ferramenta principal usada nesta parte será o princípio de estabilidade linearizada.

Para cada  $\lambda > 0$  considere o problema de autovalores linearizado correspondente a (0.0.2)

$$\begin{cases} \Delta v + \lambda g_i(x)v = \mu(\lambda)v & \text{em } \Omega, \quad (i = 0, 1), \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.0.1)$$

em torno de  $u \equiv 0$  e  $u \equiv 1$ , sendo  $g_0(\cdot) = f'(0)s(\cdot)$  e  $g_1(\cdot) = f'(1)s(\cdot)$ , respectivamente. Segue do Teorema 1.3.2 que o primeiro autovalor de (4.0.1) é dado por

$$\mu_1^i(\lambda) = \sup_{\phi \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{-\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} g_i(\cdot) \phi^2 dx}{\|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2} \right\} \quad (i = 0, 1). \quad (4.0.2)$$

Denotaremos por  $\varphi_i$  a autofunção suave correspondente ao autovalor principal  $\mu_1^i(\lambda)$  do problema (4.0.1), com  $\varphi_i > 0$  em  $\bar{\Omega}$  e tal que  $\|\varphi_i\|_{L^2(\Omega)} = 1$ , para  $i = 0, 1$ .

### 4.1 Estrutura de estabilidade dos equilíbrios com peso de média não nula

Suponhamos que  $\int_{\Omega} s(\cdot) dx < 0$ , que corresponde ao caso de bifurcação do ramo  $\Gamma_0$ .

Se  $\int_{\Omega} s(\cdot) dx > 0$ , de acordo com a Observação 3.1.2 resultados exatamente análogos aos que dizem respeito ao ramo trivial  $\Gamma_0$  podem ser deduzidos para o ramo  $\Gamma_1$ .

#### 4.1.1 Estabilidade dos equilíbrios triviais

**Teorema 4.1.1** *Com relação aos equilíbrios triviais de (0.0.1), temos*

(i) Para  $0 < \lambda < \lambda_0$ , o equilíbrio  $u \equiv 0$  é exponencialmente estável.

(ii) Para  $\lambda > \lambda_0$ , o equilíbrio  $u \equiv 0$  é instável.

(iii) Para todo  $\lambda > 0$ , o equilíbrio  $u \equiv 1$  é instável.

**Prova:** Para provar (i) vejamos dois casos.

- Se  $\int_{\Omega} g_0(\cdot)\varphi_0^2 dx \leq 0$ , integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned}\mu_1^0(\lambda) &= \int_{\Omega} \varphi_0 \Delta \varphi_0 dx + \lambda \int_{\Omega} g_0(\cdot)\varphi_0^2 dx = - \int_{\Omega} |\nabla \varphi_0|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} g_0(\cdot)\varphi_0^2 dx \\ &\leq - \int_{\Omega} |\nabla \varphi_0|^2 dx < 0.\end{aligned}$$

- Se  $\int_{\Omega} g_0(\cdot)\varphi_0^2 dx > 0$  temos que  $\varphi_0$  é admissível no conjunto que define  $\lambda_0$  em (1.3.23) (com  $g(\cdot) = g_0(\cdot)$  e  $\int_{\Omega} g_0(\cdot) dx = f'(0) \int_{\Omega} s(\cdot) dx < 0$ ), de modo que

$$- \int_{\Omega} |\nabla \varphi_0|^2 dx \leq -\lambda_0 \int_{\Omega} g_0(\cdot)\varphi_0^2 dx$$

e assim

$$\begin{aligned}\mu_1^0(\lambda) &= \int_{\Omega} \varphi_0 \Delta \varphi_0 dx + \lambda \int_{\Omega} g_0(\cdot)\varphi_0^2 dx = - \int_{\Omega} |\nabla \varphi_0|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} g_0(\cdot)\varphi_0^2 dx \\ &\leq (\lambda - \lambda_0) \int_{\Omega} g_0(\cdot)\varphi_0^2 dx < 0.\end{aligned}$$

Logo, para cada  $0 < \lambda < \lambda_0$  temos  $\mu_1^0(\lambda) < 0$ , de forma que  $u \equiv 0$  é um equilíbrio exponencialmente estável.

Para (ii), como  $\lambda_0$  é atingido por uma função suave, digamos  $\psi$ , a qual pode ser normalizada  $\|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 = 1$  e satisfaz

$$\int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx = \lambda_0 \int_{\Omega} g_0(\cdot)\psi^2 dx, \quad (4.1.1)$$

segue de (4.0.2) que para cada  $\lambda > \lambda_0$

$$\mu_1^0(\lambda) \geq - \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} g_0(\cdot)\psi^2 dx = (\lambda - \lambda_0) \int_{\Omega} g_0(\cdot)\psi^2 dx > 0.$$

Assim,  $\mu_1^0(\lambda) > 0$  para todo  $\lambda > \lambda_0$  o que implica  $u \equiv 0$  equilíbrio instável de (0.0.1).

Finalmente, para provarmos (iii), vemos que a instabilidade de  $u \equiv 1$  para todo  $\lambda > 0$  segue de  $\int_{\Omega} g_1(\cdot) dx > 0$ , isto é, por (4.0.2) temos

$$\mu_1^1(\lambda) \geq \frac{-\int_{\Omega} |\nabla 1|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} g_1(\cdot) dx}{|\Omega|} = \frac{\lambda \int_{\Omega} g_1(\cdot) dx}{|\Omega|} > 0,$$

provando (iii). □

Notamos que para  $\lambda = \lambda_0$ , segue de (4.0.2) e (4.1.1) que

$$\mu_1^0(\lambda_0) \geq -\int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx + \lambda_0 \int_{\Omega} g_0(\cdot) \psi^2 dx = 0,$$

isto é,  $\mu_1^0(\lambda_0) \geq 0$ . Mas desde que a aplicação  $\lambda \mapsto \mu_1^0(\lambda)$  é contínua (Teorema 1.3.3) e  $\mu_1^0(\lambda) < 0$  para  $\lambda \in (0, \lambda_0)$ , obtemos  $\mu_1^0(\lambda_0) = 0$ . Logo, não podemos aplicar a princípio de estabilidade linearizada e precisamos de outro argumento, veja [24], fornecido na seguinte

**Teorema 4.1.2** *O equilíbrio  $u \equiv 0$  de (0.0.1) é assintoticamente estável para  $\lambda = \lambda_0$ .*

**Prova:** Vimos no capítulo 2 que (0.0.1) gera um sistema dinâmico não linear no espaço de fase  $\mathfrak{X}$ . Além disso, sabemos que a restrição a  $\mathfrak{X}$  do funcional  $\mathcal{J}_{\lambda_0} : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , dado por

$$\mathcal{J}_{\lambda_0}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda_0 \int_{\Omega} s(\cdot) F(u) dx,$$

sendo  $F(u) = \int_0^u f(\tau) d\tau$ , é uma função de Lyapunov para o sistema dinâmico acima mencionado. Além disso,  $\mathcal{J}_{\lambda_0}|_{\mathfrak{X}}$  tem um mínimo global num equilíbrio de (0.0.1). Assim, pelo Teorema 3.1.11 o conjunto dos equilíbrios de (0.0.1) para  $\lambda = \lambda_0$  é  $\mathcal{E} = \{0, 1\}$  e  $u \equiv 0$  é o mínimo global do funcional  $\mathcal{J}_{\lambda_0}|_{\mathfrak{X}}$ , pois  $\mathcal{J}_{\lambda_0}(0) = 0 < -\lambda_0 \int_{\Omega} s(\cdot) F(1) dx = \mathcal{J}_{\lambda_0}(1)$ . Portanto, uma vez que a energia decresce a longo das semi-órbitas fica provado o teorema. □

## 4.1.2 Estabilidade dos equilíbrios bifurcados

Consideremos o operador compacto

$$\mathcal{K} : W_p^2(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega) \quad p > n,$$

dado por  $\mathcal{K}(u) := (u, 0)$ . Este operador está relacionado com o operador  $D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0)$  da seguinte forma.

**Lema 4.1.3** *Zero é um autovalor simples do par  $(D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0), \mathcal{K})$ .*

**Prova:** De acordo com a Observação 1.2.2, uma vez que o operador  $D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0)$ , dado por

$$D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0) \cdot v = \left( \Delta v + \lambda_0 s(\cdot) f'(0)v, \frac{\partial v}{\partial \nu} \right)$$

para todo  $v \in W_p^2(\Omega)$ , é um operador de Fredholm de índice zero pelo Teorema 1.4.5 e  $\lambda_0$  tem multiplicidade geométrica um pelo Teorema 1.3.9, so resta verificarmos a condição de transversalidade. Suponhamos não seja ela verdadeira, isto é, a condição  $\mathcal{K} \cdot u_0 \notin$

$\mathcal{R}(D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0))$ , sendo  $u_0$  é o gerador de  $\text{Ker}[D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0)]$ , seja falsa. Então, como  $\mathcal{K} \cdot u_0 = (u_0, 0)$  existe uma solução  $v \in W_p^2(\Omega)$ ,  $p > n$ , do problema

$$\begin{cases} \Delta v + \lambda_0 s(\cdot) f'(0)v = u_0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Note que  $u_0$  satisfaz (3.1.12), de forma que pela fórmula de Green temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_0^2 dx &= \int_{\Omega} u_0 \Delta v dx + \int_{\Omega} \lambda_0 v s(\cdot) f'(0) u_0 dx \\ &= \int_{\Omega} v \Delta u_0 dx + \int_{\Omega} \lambda_0 v s(\cdot) f'(0) u_0 dx = 0 \end{aligned}$$

Assim  $u_0 = 0$  q.t.p. em  $\Omega$ , uma contradição, provando o Lema.  $\square$

Logo, em consequência do corolário anterior segue do Teorema 1.2.6

1. Existem  $\varepsilon > 0$  e duas únicas aplicações de classe  $C^2$

$$\gamma : (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R} \quad x : (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon) \longrightarrow W_p^2(\Omega)$$

com  $p > n$ , tais que

$$\gamma(\lambda_0) = 0 \quad x(\lambda_0) = u_0 \quad x(\lambda) - u_0 \in W_p^2(\Omega) \quad (4.1.2)$$

e

$$D_u \mathcal{F}(\lambda, 0) \cdot x(\lambda) = \gamma(\lambda) \mathcal{K} \cdot x(\lambda) \quad (4.1.3)$$

para cada  $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ .

2. Existem  $\delta > 0$  e duas únicas aplicações de classe  $C^2$

$$\mu : (-\delta, \delta) \longrightarrow \mathbb{R} \quad z : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow W_p^2(\Omega)$$

com  $p > n$ , tais que

$$\mu(0) = 0 \quad z(0) = u_0 \quad z(r) - u_0 \in W_p^2(\Omega) \quad (4.1.4)$$

e

$$D_u \mathcal{F}(\lambda(r), u(r)) \cdot z(r) = \mu(r) \mathcal{K} \cdot z(r) \quad (4.1.5)$$

para cada  $r \in (-\delta, \delta)$ , em que  $(\lambda(r), u(r))$  é a curva emanando do ramo trivial  $\Gamma_0$  em  $\lambda = \lambda_0$ , cuja existência é garantida pelo Teorema 1.2.5.

Além disso, pelo Teorema 1.2.7 as funções  $\mu(r)$  e  $-r\dot{\lambda}(r)\gamma'(\lambda_0)$  têm os mesmos zeros para todo  $r$  suficientemente pequeno, e o mesmo sinal quando  $\mu(r) \neq 0$  (sendo  $d/dr = \dot{\phantom{x}}$  e  $d/d\lambda = \prime$ ). Especificamente,

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \mu(r) \neq 0}} \frac{-r\dot{\lambda}(r)\gamma'(\lambda_0)}{\mu(r)} = 1. \quad (4.1.6)$$

Assim, para conhecermos o sinal de  $\mu(r)$ , para  $r$  suficientemente pequeno, precisamos conhecer o sinal de  $\gamma'(\lambda_0)$  pois, pelo Teorema 3.1.8 já sabemos que  $\dot{\lambda}(0) > 0$ .

**Proposição 4.1.4** *O sinal de  $\gamma'(\lambda_0)$  é positivo.*

**Prova:** Note que (4.1.3) é equivalente, para todo  $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ , ao problema

$$\begin{cases} \Delta x(\lambda) + \lambda s(\cdot) f'(0) x(\lambda) = \gamma(\lambda) x(\lambda) & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial x(\lambda)}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Diferenciando com respeito a  $\lambda$  em  $\lambda = \lambda_0$ , e usando (4.1.2), obtemos

$$\begin{cases} \Delta x'(\lambda_0) + s(\cdot) f'(0) u_0 + \lambda_0 s(\cdot) f'(0) x'(\lambda_0) = \gamma'(\lambda_0) u_0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial x'(\lambda)}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Logo, pela fórmula de Green

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u_0 x'(\lambda_0) \, dx - \int_{\Omega} \Delta x'(\lambda_0) u_0 \, dx &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_0}{\partial \nu} x'(\lambda_0) \, d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial x'(\lambda_0)}{\partial \nu} u_0 \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

e do fato que  $u_0$  satisfaz (3.1.12), temos

$$- \int_{\Omega} \lambda_0 s f'(0) u_0 x'(\lambda_0) \, dx + \int_{\Omega} s f'(0) u_0^2 \, dx + \int_{\Omega} \lambda_0 s f'(0) x'(\lambda_0) u_0 \, dx - \int_{\Omega} \gamma'(\lambda_0) u_0^2 \, dx = 0.$$

Daí

$$\int_{\Omega} s(\cdot) f'(0) u_0^2 \, dx = \int_{\Omega} \gamma'(\lambda_0) u_0^2 \, dx,$$

e como por (3.1.12) temos  $\lambda_0 \int_{\Omega} s(\cdot) f'(0) u_0^2 \, dx = \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 \, dx$ , concluímos que

$$\gamma'(\lambda_0) = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 \, dx}{\lambda_0 \int_{\Omega} u_0^2 \, dx} > 0.$$

□

Por outro lado, (4.1.5) é equivalente ao problema de autovalores

$$\begin{cases} \Delta z(r) + \lambda(r)s(\cdot)f'(u(r))z(r) = \mu(r)z(r) & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial z(r)}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1.7)$$

para todo  $r \in (-\delta, \delta)$ , que corresponde ao problema de autovalores associado à linearização do problema (0.0.2) em torno do equilíbrio de (0.0.1) bifurcado de  $\Gamma_0$  próximo  $(\lambda_0, 0)$ .

Precisamos conhecer o sinal do primeiro autovalor do problema de autovalores (4.1.7), dado por

$$\mu_1(\lambda(r)) = \sup_{v \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{- \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \lambda(r) \int_{\Omega} s(\cdot)f'(u(r))v^2 dx}{\|v\|_{L^2(\Omega)}^2} \right\}.$$

**Lema 4.1.5**  $\mu_1(\lambda(r))$  é um autovalor simples do par  $(D_u \mathcal{F}(\lambda(r), u(r)), \mathcal{K})$ , para todo  $r \in (-\delta, \delta)$ .

**Prova:** O operador

$$D_u \mathcal{F}(\lambda(r), u(r)) - \mu_1(\lambda(r))\mathcal{K} : W_p^2(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$$

com  $p > n$  e  $r \in (-\delta, \delta)$ , dado por

$$(D_u \mathcal{F}(\lambda(r), u(r)) - \mu_1(\lambda(r))\mathcal{K}) \cdot \phi = \left( \Delta \phi + \lambda(r)s(\cdot)f'(u(r))\phi - \mu_1(\lambda(r))\phi, \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)$$

para todo  $\phi \in W_p^2(\Omega)$ , é um operador de Fredholm de índice zero pelo Teorema 1.4.5. Como na prova do Teorema 1.3.9 se pode mostrar que  $\mu_1(\lambda(r))$  tem multiplicidade geométrica um, e assim temos que

$$1 = \dim \text{Ker}(D_u \mathcal{F}(\lambda(r), u(r)) - \mu_1(\lambda(r))\mathcal{K})$$

para todo  $r \in (-\delta, \delta)$ . Logo, pela Observação 1.2.2 resta provar a condição de transversalidade.

De fato, suponhamos que

$$\mathcal{K} \cdot u_0(r) \in R(D_u \mathcal{F}(\lambda(r), u(r)) - \mu_1(\lambda(r))\mathcal{K})$$

para algum  $r \in (-\delta, \delta)$ , sendo  $u_0(r) \in W_p^2(\Omega)$  gerador de  $\text{Ker}(D_u \mathcal{F}(\lambda(r), u(r)) - \mu_1(\lambda(r))\mathcal{K})$ . Isto implica que o problema

$$\begin{cases} \Delta \phi + \lambda(r)s(\cdot)f'(u(r))\phi - \mu_1(\lambda(r))\phi = u_0(r) & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

tem uma solução  $\phi \in W_p^2(\Omega)$ ,  $p > n$ , com  $u_0(r)$  satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta u_0(r) + \lambda(r)s(\cdot)f'(u(r))u_0(r) - \mu_1(\lambda(r))u_0(r) = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u_0(r)}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Utilizando os dois problemas anteriores, pela fórmula de Green obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_0^2(r) \, dx &= \int_{\Omega} u_0(r)\Delta\phi \, dx + \int_{\Omega} \lambda(r)s(\cdot)f'(u(r))u_0(r)\phi \, dx - \int_{\Omega} \mu_1(\lambda(r))u_0(r)\phi \, dx \\ &= \int_{\Omega} \phi\Delta u_0(r) \, dx + \int_{\Omega} \lambda(r)s(\cdot)f'(u(r))u_0(r)\phi \, dx - \int_{\Omega} \mu_1(\lambda(r))u_0(r)\phi \, dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim,  $u_0(r) = 0$  q.t.p. em  $\Omega$ , uma contradição, provando o lema.  $\square$

**Teorema 4.1.6** *Para todo  $\lambda > \lambda_0$  o equilíbrio não trivial de (0.0.1) que bifurca de  $\Gamma_0$  desde  $(\lambda_0, 0)$  é exponencialmente estável.*

**Prova:** Segue do Lema 4.1.5 que  $\mu(r) = \mu_1(\lambda(r))$  em (4.1.7) para todo  $r \in (-\delta, \delta)$ , como uma consequência de Lema 1.3 de [12]. Assim,  $\mu(r) \neq 0$  para todo  $r > 0$  pequeno pelo Corolário 3.1.10 e Teorema 1.2.5. De (4.1.6) temos que  $\mu_1(\lambda(r)) < 0$  para  $r > 0$  pequeno, isto é, o equilíbrio não trivial  $u(r)$  é exponencialmente estável para todo  $r > 0$  pequeno.

Pelo Teorema 1.3.3 temos que a aplicação  $\lambda \mapsto \mu_1(\lambda)$  é contínua, sendo  $\mu_1(\lambda)$  o primeiro autovalor de

$$\begin{cases} \Delta v + \lambda s(\cdot)f'(u_\lambda)v = \mu v & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

e  $u_\lambda$  o único equilíbrio não trivial de (0.0.1) dado pelo Teorema 3.1.12. Portanto, desde que  $\mu_1(\lambda) < 0$  para  $\lambda \simeq \lambda_0$  segue do Corolário 3.1.10 que  $\mu_1(\lambda) < 0$  para todo  $\lambda > \lambda_0$  e conclui a prova.  $\square$



### 4.1.3 Diagramas de bifurcação e estabilidade dos equilíbrios de (0.0.1) com função de peso de média não nula

Nesta subseção apresentamos os resultados obtidos sob a estrutura de bifurcação e estabilidade dos equilíbrios de (0.0.1)

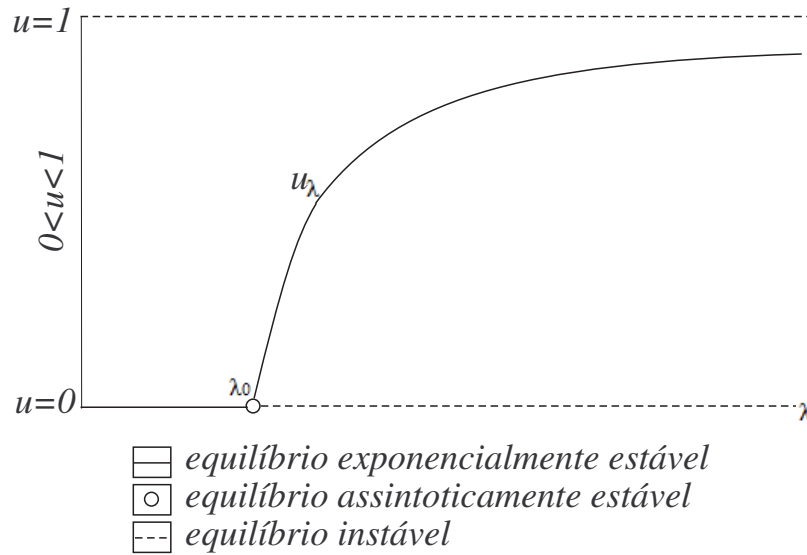


Figura 4.1: Estrutura de bifurcação e estabilidade dos equilíbrios de (0.0.1) pro caso  $\int_{\Omega} s(x) dx < 0$ .

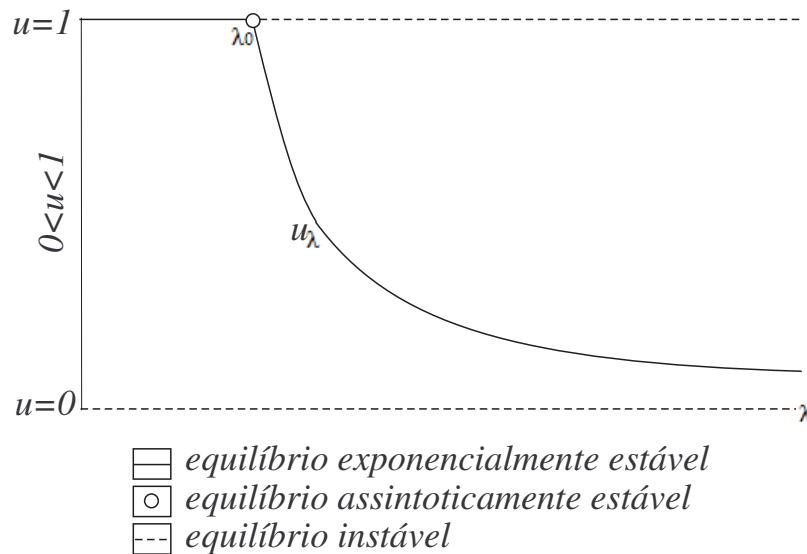


Figura 4.2: Estrutura de bifurcação e estabilidade dos equilíbrios de (0.0.1) pro caso  $\int_{\Omega} s(x) dx > 0$ .

## 4.2 Estrutura de estabilidade dos equilíbrios com peso de média nula

Assumiremos nesta seção que a função peso  $s(\cdot)$  tem média zero, isto é,  $\int_{\Omega} s(\cdot) dx = 0$ .

### 4.2.1 Instabilidade dos equilíbrios triviais

**Lema 4.2.1** *Para todo  $\lambda > 0$  os equilíbrios triviais  $u_{\lambda} \equiv 0$  e  $u_{\lambda} \equiv 1$  de (0.0.1) são instáveis.*

**Prova:** Basta verificar que, na notação empregada no início deste capítulo, tem-se  $\mu_1^i(\lambda) > 0$  para  $i = 0, 1$ , pois como  $\phi \equiv c \neq 0$  é uma função constante admissível em (4.0.2), obtemos  $\mu_1^i(\lambda) \geq 0$  já que  $\int_{\Omega} g_i(\cdot) dx = f'(i) \int_{\Omega} s(\cdot) dx = 0$  para  $i = 0, 1$ . Se ocorresse  $\mu_1^i(\lambda) = 0$ , teríamos que as autofunções  $\varphi_i$ ,  $i = 0, 1$ , de (4.0.1) seriam também autofunções do problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda g_i(\cdot)v & \text{em } \Omega, & (i = 0, 1), \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Isto significaria que  $\lambda > 0$  é autovalor principal de (4.2.1) mas como visto na Observação 1.3.4, isso é impossível pelo fato de  $\int_{\Omega} g_i(\cdot) dx = 0$ . Portanto,  $\mu_1^i(\lambda) > 0$  para  $i = 0, 1$  e desde que o espectro de (4.0.1) intercepta  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ , o princípio de estabilidade linearizada garante que os equilíbrios triviais  $u_{\lambda} \equiv 0$  e  $u_{\lambda} \equiv 1$  de (0.0.1) são instáveis.  $\square$

### 4.2.2 Estabilidade dos equilíbrios bifurcados

**Lema 4.2.2** *Dada qualquer condição inicial  $u_0 \in \mathfrak{X}$ , com  $u_0 \not\equiv 0, 1$ , a correspondente solução  $u(\cdot, t; u_0)$  de (0.0.1) satisfaz*

$$\|u(\cdot, t; u_0)\|_{W_p^1(\Omega)} \not\rightarrow 0$$

e

$$\|1 - u(\cdot, t; u_0)\|_{W_p^1(\Omega)} \not\rightarrow 0$$

quando  $t \rightarrow \infty$ , para  $p > n$ .

**Prova:** Provaremos o caso de não existência de semi-órbita positiva não trivial convergindo para  $u \equiv 0$ , o outro caso se pode provar similarmente.

Da prova do Lema 4.2.1 obtemos que o primeiro autovalor  $\mu_1 = \mu_1(\lambda)$  do problema

$$\begin{cases} \Delta v + \lambda f'(0)s(\cdot)v = \mu(\lambda)v & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

é positivo para cada  $\lambda > 0$ . Da dependência contínua de  $\mu_1$  provada no Teorema 1.3.3, parte *iv*), segue que para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno o primeiro autovalor  $\mu_1^\varepsilon$  do problema

$$\begin{cases} \Delta v + (\lambda f'(0)s(\cdot) - \varepsilon)v = \mu(\lambda)v & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

satisfaz  $\mu_1^\varepsilon > 0$ . Suponhamos que exista  $u_0 \in \mathfrak{X}$ , com  $u_0 \not\equiv 0, 1$ , verificando

$$\|u(\cdot, t; u_0)\|_{W_p^1(\Omega)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

para algum  $p > n$ . Seja  $\varphi > 0$  em  $\bar{\Omega}$  autofunção correspondente a  $\mu_1^\varepsilon > 0$ , normalizada por  $\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 = 1$ , e definamos  $\xi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\xi(t) = \int_{\Omega} u(\cdot, t; u_0) \varphi \, dx.$$

**Afirmção.**  $\xi$  é estritamente crescente para  $t$  suficientemente grande.

De fato, escrevendo  $u(t) := u(\cdot, t; u_0)$  temos que

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt}(t) &= \int_{\Omega} \partial_t u(t) \varphi \, dx \\ &= \int_{\Omega} \varphi \Delta u(t) \, dx + \int_{\Omega} \lambda s(\cdot) f(u(t)) \varphi \, dx \\ &= \int_{\Omega} u(t) \Delta \varphi \, dx + \int_{\Omega} \lambda s(\cdot) f(u(t)) \varphi \, dx \\ &= \int_{\Omega} [-\lambda s(\cdot) f'(0) + \varepsilon] \varphi u(t) \, dx + \mu_1^\varepsilon \int_{\Omega} \varphi u(t) \, dx + \int_{\Omega} \lambda s(\cdot) f(u(t)) \varphi \, dx \\ &= \mu_1^\varepsilon \int_{\Omega} \varphi u(t) \, dx + \int_{\Omega} \varphi [\lambda s(\cdot) f(u(t)) - (\lambda s(\cdot) f'(0) - \varepsilon) u(t)] \, dx. \end{aligned}$$

Pelo princípio do Máximo e Lema de Hopf,  $0 < u(t) < 1$  em  $\bar{\Omega}$  para todo  $t > 0$ . Além disso, temos

$$\|u(t)\|_{C(\bar{\Omega})} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \tag{4.2.2}$$

pois a inclusão  $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$  vale para  $p > n$ , e também

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\lambda s(\cdot) f(u)}{u} = \lambda s(\cdot) f'(0) \tag{4.2.3}$$

já que  $f(0) = 0$ . Assim, usando (4.2.3) e o fato de  $\mu_1^\varepsilon > 0$  temos que existe  $\delta > 0$  tal que, se  $0 < \|u\|_{C(\bar{\Omega})} < \delta$ , então

$$\left| \frac{\lambda s(\cdot) f(u)}{u} - \lambda s(\cdot) f'(0) \right| < \mu_1^\varepsilon.$$

E por (4.2.2) há um  $t_0 > 0$  tal que se  $t \geq t_0$  então

$$u(t)\mu_1^\varepsilon + \lambda s(\cdot)f(u(t)) - \lambda s(\cdot)f'(0)u(t) > 0.$$

Logo,

$$\frac{d\xi}{dt}(t) = \mu_1^\varepsilon \int_{\Omega} \varphi u(t) dx + \int_{\Omega} \varphi [\lambda s(\cdot)f(u(t)) - (\lambda s(\cdot)f'(0) - \varepsilon)u(t)] dx > 0$$

para  $t \geq t_0$ , provando a afirmação.

Finalmente, tomamos  $t_* > t_0$  tal que  $\|u(t_*)\|_{C(\bar{\Omega})} < \inf_{\bar{\Omega}} u(t_0)$ , o que é possível por (4.2.2). Pela afirmação temos que  $\xi(t_0) < \xi(t_*)$ , isto é,

$$\int_{\Omega} u(t_0)\varphi dx < \int_{\Omega} u(t_*)\varphi dx.$$

Como  $\varphi > 0$  em  $\bar{\Omega}$  e tem-se

$$\int_{\Omega} u(t_*)\varphi dx \leq \int_{\Omega} \|u(t_*)\|_{C(\bar{\Omega})}\varphi dx < \int_{\Omega} \inf_{\bar{\Omega}} u(t_0)\varphi dx,$$

concluimos que

$$\int_{\Omega} [u(t_0) - \inf_{\bar{\Omega}} u(t_0)]\varphi dx < 0$$

o que é impossível, concluindo a prova.  $\square$

**Lema 4.2.3** *O equilíbrio não trivial  $u_\lambda$  de (0.0.1) é um minimizador global para o funcional de energia  $\mathcal{J}_\lambda$  em  $\mathfrak{X}$ , para todo  $\lambda > 0$ .*

**Prova:** O conjunto dos equilíbrios de (0.0.1) é  $\mathcal{E} = \{0, u_\lambda, 1\}$ , para cada  $\lambda > 0$ , pelo Teorema 3.2.6, dado  $v \in \mathfrak{X} \setminus \{0, 1\}$ , segue do Lema 4.2.2 e o Teorema 2.2.2 que

$$\mathcal{J}_\lambda(u(\cdot, t; v)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathcal{J}_\lambda(u_\lambda).$$

Por tanto

$$\mathcal{J}_\lambda(u_\lambda) \leq \mathcal{J}_\lambda(v), \quad \forall v \in \mathfrak{X} \setminus \{0, 1\}. \quad (4.2.4)$$

Agora comparemos o nível de energia de  $u_\lambda$  e os equilíbrios triviais 0 e 1. Lembrando que  $\varphi_0$  é autofunção correspondente ao autovalor  $\mu_1^0(\lambda) > 0$  (prova do Lema 4.2.2) do problema (4.0.1) e  $\mathcal{J}_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} s(\cdot)F(u) dx$ , sendo  $F(u) = \int_0^u f(\tau)d\tau$  daí pela fórmula de Taylor temos  $F(u) = \frac{1}{2}f'(0)u^2 + \frac{1}{6}f''(\theta)u^3$  para algum  $\theta$  entre 0 e  $\tau$ .

Assim, para um  $\delta > 0$  fixo, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\lambda(\delta\varphi_0) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(\delta\varphi_0)|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} sF(\delta\varphi_0) dx \\ &= \frac{\delta^2}{2} \left[ \int_{\Omega} |\nabla\varphi_0|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} s(\cdot)f'(0)\varphi_0^2 dx \right] - \frac{\lambda\delta^3}{6} \int_{\Omega} s(\cdot)f''(\theta)\varphi_0^3 dx \end{aligned}$$

para algum  $\theta(x)$  entre 0 e  $\delta\varphi_0(x)$ ,  $x \in \Omega$ . Logo, temos

$$\mathcal{J}_\lambda(\delta\varphi_0) = \frac{\delta^2}{2}\mu_1^0(\lambda) - \lambda O(\delta^3) < 0$$

para  $\delta > 0$  suficientemente pequeno porque  $\mu_1^0(\lambda) > 0$ . Finalmente, como  $\mathcal{J}_\lambda(0) = 0 = \mathcal{J}_\lambda(1)$ , para todo  $\lambda > 0$ , e  $\delta\varphi_0 \in \mathfrak{X}$  para todo  $\delta > 0$  pequeno, por (4.2.4) fica provado o Lema.  $\square$

**Teorema 4.2.4** *Suponha  $(\mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_2)$  válidas e que  $\int_\Omega s(\cdot) dx = 0$ . Então, o equilíbrio não trivial  $u_\lambda$  de (0.0.1) é exponencialmente estável, para cada  $\lambda > 0$ .*

**Prova:** Consideremos o problema de autovalores linearizado em torno do equilíbrio não trivial  $u_\lambda$  de (0.0.1)

$$\begin{cases} \Delta v + \lambda s(\cdot) f'(u_\lambda) v = \mu v & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.2.5)$$

cujo primer autovalor é

$$\mu_1(\lambda) = \sup_{\phi \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{-\int_\Omega |\nabla \phi|^2 dx + \lambda \int_\Omega s(\cdot) f'(u_\lambda) \phi^2 dx}{\|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2} \right\}.$$

Existem,  $c_1$  e  $c_2$  tais que  $0 < c_1 \leq u_\lambda \leq c_2 < 1$  em  $\bar{\Omega}$  pela Proposição 2.3.1. Dado  $\delta > 0$  tal que  $B_\delta(u_\lambda) \subset W_p^1(\Omega)$ , por a inclusão compacta  $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$ ,  $p > n$ , existe  $K > 0$  com  $\|\phi - u_\lambda\|_{C(\bar{\Omega})} \leq K\|\phi - u_\lambda\|_{W_p^1(\Omega)}$ , para cada  $\phi \in W_p^1(\Omega)$ , em particular para cada  $\psi \in B_\delta(u_\lambda)$  temos,

$$\|\psi - u_\lambda\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |\psi(x) - u_\lambda(x)| \leq K\delta$$

assim,  $|\psi(x) - u_\lambda(x)| \leq K\delta$  para todo  $x \in \bar{\Omega}$ , dai obtemos

$$0 \leq c_1 - K\delta \leq u_\lambda - K\delta < \psi(x) < u_\lambda + K\delta \leq c_2 + K\delta \leq 1 \quad \text{q.t.p } x \in \Omega,$$

para todo  $\delta$  suficientemente pequeno, então,  $\psi \in \mathfrak{X}$  para todo  $\psi \in B_\delta(u_\lambda)$  com  $\delta$  suficientemente pequeno.

Logo, como  $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$  compactamente,  $p > n$ , e  $u_\lambda \in \mathfrak{X}$  é um mínimo global da restrição do funcional  $\mathcal{J}_\lambda|_{\mathfrak{X}}$  ao espaço  $W_p^1(\Omega)$  pelo Lema 4.2.3, temos

$$-\int_\Omega |\nabla \psi|^2 dx + \lambda \int_\Omega s(\cdot) f'(u_\lambda) \psi^2 dx = \langle -\mathcal{J}_\lambda''(u_\lambda) \psi, \psi \rangle \leq 0, \quad \text{para todo } \psi \in W_p^1(\Omega),$$

sendo  $W_p^1(\Omega)$  denso em  $H^1(\Omega)$  se conclui que

$$-\int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} s(\cdot) f'(u_{\lambda}) \psi^2 dx \leq 0, \quad \text{para todo } \psi \in H^1(\Omega),$$

ou seja  $\mu_1 \leq 0$ . Mas se  $\mu_1 = 0$  é um autovalor de (4.2.5), teríamos que  $\lambda > 0$  é autovalor do problema 1.3.1 com  $g(\cdot) = s(\cdot) f'(u_{\lambda})$ , que tem média nula, uma contradição, assim, temos  $\mu_1 < 0$ . Portanto, pelo princípio de estabilidade linearizada, o equilíbrio não trivial  $u_{\lambda}$  de (0.0.1) é exponencialmente estável.  $\square$

### 4.2.3 Diagrama de bifurcação e estabilidade dos equilíbrios de (0.0.1) com função de peso de média nula

Nesta subsecção apresentamos os resultados obtidos sob a estrutura de bifurcação e estabilidade dos equilíbrios de (0.0.1), no diagrama seguinte

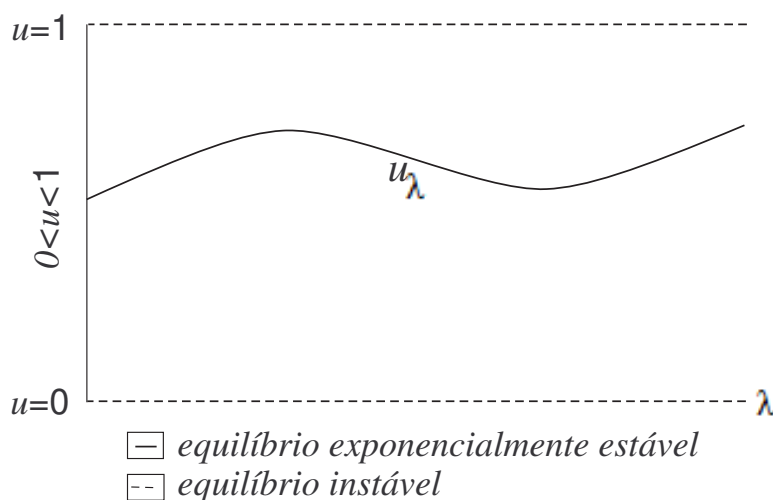


Figura 4.3: Estrutura de bifurcação e estabilidade dos equilíbrios de (0.0.1) pro caso  $\int_{\Omega} s(x) dx = 0$ .

## Capítulo 5

# Convergência do equilíbrio não trivial quando $\lambda \rightarrow +\infty$

Neste capítulo estabeleceremos um resultado de convergência para o equilíbrio não trivial  $u_\lambda$  de (0.0.1), quando o parâmetro  $\lambda > 0$  tende ao infinito, a saber, o equilíbrio concentra-se num subconjunto do aberto  $\Omega$  quando o parâmetro é suficientemente grande. Para esse fim, necessitamos introduzir algumas noções de capacidade finita de um subconjunto contido no aberto limitado de  $\mathbb{R}^n$ . Mais informações podem ser encontradas em [17, 19].

Sejam  $\mathcal{M}$  uma variedade Riemanniana conexa suave,  $\Omega$  um conjunto aberto sobre  $\mathcal{M}$  e  $K$  um conjunto compacto em  $\Omega$ . Dizemos o par  $(K, \Omega)$  é um capacitor e definimos sua capacidade  $\text{cap}(K, \Omega)$  por

$$\text{cap}(K, \Omega) := \inf_{\phi \in L(K, \Omega)} \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 d\mu,$$

sendo  $L(K, \Omega)$  o conjunto das funções localmente Lipschitz  $\phi$  em  $\mathcal{M}$  com suporte compacto em  $\bar{\Omega}$ , tal que  $0 \leq \phi \leq 1$  e  $\phi|_K = 1$ , e  $\mu$  o volume Riemanniano sobre  $\mathcal{M}$ .

Para um aberto precompacto  $K \subset \Omega$ , definimos

$$\text{cap}(K, \Omega) := \text{cap}(\bar{K}, \Omega).$$

Note que,  $\nabla \phi = 0$  sobre  $\bar{K}$ , assim  $\text{cap}(K, \Omega)$  é determinado por as propriedades intrínsecas de  $\Omega \setminus \bar{K}$ .

Suponhamos que o conjunto

$$\mathcal{P} := \{x \in \Omega : s(x) > 0\}$$

tenha capacidade finita. O seguinte resultado é válido para os dois casos diferenciados até o Capítulo 4, ou seja  $\int_{\Omega} s(\cdot) dx$  sendo zero ou diferente de zero, mas existe uma sutil diferença na demonstração da existência do mínimo global do funcional  $\mathcal{J}_\lambda|_{\mathcal{P}}$ .

O resultado deste capítulo é o seguinte

**Teorema 5.0.5** *Suponha  $(H_1)$  e  $(H_2)$  sejam válidas e que  $s(x) \neq 0$  q.t.p  $x \in \Omega$ . Então, o equilíbrio não trivial  $u_\lambda$  de (0.0.1) converge para  $\chi_{\mathcal{P}}$  em  $L^p(\Omega)$ , quando  $\lambda \rightarrow \infty$ , para todo  $1 < p < \infty$ , sendo  $\chi_{\mathcal{P}}$  a função característica do conjunto  $\mathcal{P}$ . Ou seja*

$$u_\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \chi_{\mathcal{P}} \quad \text{em } L^p(\Omega)$$

para todo  $1 < p < \infty$ .

**Prova:** Basta provar que

$$u_\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \chi_{\mathcal{P}} \quad \text{em medida,}$$

ou seja, para todo  $\varepsilon > 0$  os conjuntos

$$N_\varepsilon^\lambda := \{x \in \Omega : |\chi_{\mathcal{P}}(x) - u_\lambda(x)| \geq \varepsilon\}$$

são tais que  $m(N_\varepsilon^\lambda) \rightarrow 0$  quando  $\lambda \rightarrow \infty$ , sendo  $m$  a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^n$ . De fato, em  $L^\infty(\Omega)$ , com  $\Omega$  conjunto de medida finita, convergência em medida implica convergência em  $L^p(\Omega)$  (cf. [16]).

Como  $\mathcal{P}$ , pré-compacto, tem capacidade finita,  $\text{cap}(\mathcal{P}, \Omega) := \text{cap}(\overline{\mathcal{P}}, \Omega)$ , existe  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  suportada numa vizinhança aberta em  $\Omega$  contendo  $\mathcal{P}$  de forma que  $\phi|_{\overline{\mathcal{P}}} \equiv 1$  e  $0 \leq \phi < 1$  em  $\Omega \setminus \overline{\mathcal{P}}$ .

Para cada  $\lambda > 0$ , consideremos a função  $h_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$h_\lambda(t) = \begin{cases} t^{\sqrt{\lambda}} & , \text{ se } t \geq 0, \\ 0 & , \text{ se } t \leq 0. \end{cases}$$

Claramente  $h_\lambda \in C^1(\mathbb{R})$  para  $\lambda$  grande, o que implica  $h_\lambda \circ \phi = \phi^{\sqrt{\lambda}}$  bem definida e, pela regra da cadeia, tem-se  $\nabla(\phi^{\sqrt{\lambda}}) = \sqrt{\lambda} \phi^{\sqrt{\lambda}-1} \nabla \phi$ . Logo  $\phi^{\sqrt{\lambda}} \in \mathfrak{X}$  e, além disso,  $\phi^{\sqrt{\lambda}} \rightarrow 0$  q.t.p  $x \in \Omega \setminus \mathcal{P}$  quando  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

Considerando o funcional de energia  $\mathcal{J}_\lambda : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  associado a (0.0.2), dado por

$$\mathcal{J}_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} s(\cdot) F(u) dx,$$

com  $F(u) = \int_0^u f(\tau) d\tau$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \mathcal{J}_\lambda(\phi^{\sqrt{\lambda}}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 \phi^{2(\sqrt{\lambda}-1)} dx - \int_{\Omega} s(\cdot) F(\phi^{\sqrt{\lambda}}) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} |\nabla \phi|^2 \phi^{2(\sqrt{\lambda}-1)} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \mathcal{P}} |\nabla \phi|^2 \phi^{2(\sqrt{\lambda}-1)} dx \\ &\quad - \int_{\mathcal{P}} s(\cdot) F(1) dx - \int_{\Omega \setminus \mathcal{P}} s(\cdot) F(\phi^{\sqrt{\lambda}}) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \mathcal{P}} |\nabla \phi|^2 \phi^{2(\sqrt{\lambda}-1)} dx - \int_{\mathcal{P}} s(\cdot) F(1) dx - \int_{\Omega \setminus \mathcal{P}} s(\cdot) F(\phi^{\sqrt{\lambda}}) dx. \end{aligned}$$



Daí segue que

$$\frac{1}{\lambda} \mathcal{J}_\lambda(\phi^{\sqrt{\lambda}}) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} -F(1) \int_{\mathcal{P}} s(\cdot) dx \quad (5.0.1)$$

pelo Teorema da Convergência Dominada.

Por outro lado, como  $u_\lambda$  minimiza  $\mathcal{J}_\lambda$  globalmente em  $\mathfrak{X}$  para cada  $\lambda$  suficientemente grande e  $\phi^{\sqrt{\lambda}} \in \mathfrak{X}$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \mathcal{J}_\lambda(\phi^{\sqrt{\lambda}}) &\geq \frac{1}{\lambda} \mathcal{J}_\lambda(u_\lambda) \geq - \int_{\Omega} s(\cdot) F(u_\lambda) dx \\ &= - \int_{\mathcal{P}} s(\cdot) F(u_\lambda) dx - \int_{\Omega \setminus \mathcal{P}} s(\cdot) F(u_\lambda) dx \\ &\geq - \int_{\mathcal{P}} s(\cdot) F(u_\lambda) dx \\ &\geq -F(1) \int_{\mathcal{P}} s(\cdot) dx \end{aligned}$$

pois,  $0 < u_\lambda < 1$  pela Proposição 2.3.1 que implica que  $-F(u_\lambda) \geq -F(1)$ , de modo que por (5.0.1) obtemos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} - \int_{\Omega} s(\cdot) F(u_\lambda) dx = -F(1) \int_{\mathcal{P}} s(\cdot) dx = - \int_{\Omega} s(\cdot) F(\chi_{\mathcal{P}}) dx$$

e assim

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\Omega} s(\cdot) [F(\chi_{\mathcal{P}}) - F(u_\lambda)] dx = 0.$$

Agora, como  $s(\cdot) [F(\chi_{\mathcal{P}}) - F(u_\lambda)] \geq 0$  em  $\Omega$ , temos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |s(\cdot) [F(\chi_{\mathcal{P}}) - F(u_\lambda)]| dx = 0. \quad (5.0.2)$$

Da seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |s(\cdot) [F(\chi_{\mathcal{P}}) - F(u_\lambda)]| dx &\geq \int_{N_\varepsilon^\lambda} |s(\cdot)| \left| \int_{u_\lambda}^{\chi_{\mathcal{P}}} f(\tau) d\tau \right| dx \\ &= \int_{N_\varepsilon^\lambda \cap \mathcal{P}} |s(\cdot)| \left[ \int_{u_\lambda}^1 f(\tau) d\tau \right] dx + \int_{N_\varepsilon^\lambda \cap (\Omega \setminus \mathcal{P})} |s(\cdot)| \left[ \int_0^{u_\lambda} f(\tau) d\tau \right] dx \\ &\geq \int_{N_\varepsilon^\lambda \cap \mathcal{P}} |s(\cdot)| \left[ \int_{1-\varepsilon}^1 f(\tau) d\tau \right] dx + \int_{N_\varepsilon^\lambda \cap (\Omega \setminus \mathcal{P})} |s(\cdot)| \left[ \int_0^\varepsilon f(\tau) d\tau \right] dx \\ &\geq \min \left\{ \int_{1-\varepsilon}^1 f(\tau) d\tau, \int_0^\varepsilon f(\tau) d\tau \right\} \int_{N_\varepsilon^\lambda} |s(\cdot)| dx \end{aligned}$$

e de (5.0.2) obtemos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{N_\varepsilon^\lambda} |s(\cdot)| dx = 0. \quad (5.0.3)$$

Para concluir a prova, afirmamos que  $m(N_\varepsilon^\lambda) \rightarrow 0$  quando  $\lambda \rightarrow \infty$ , sendo  $m(\cdot)$  a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^n$ .

De fato, se a afirmação fosse falsa, existiriam  $\varepsilon_0 > 0$  e uma sequência  $\{\lambda_j\}$ , com  $\lambda_j \rightarrow \infty$ , tais que

$$m(N_\varepsilon^{\lambda_j}) \geq \varepsilon_0, \quad \forall j.$$

Definamos, para  $\delta > 0$ , o conjunto

$$\mathcal{Z}_\delta := \{x \in \Omega : |s(x)| < \delta\}.$$

Como  $s(x) \neq 0$  q.t.p  $x \in \Omega$ , pelo Teorema da Convergência Dominada temos

$$m(\mathcal{Z}_\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Finalmente, escolhendo  $\delta_0 > 0$  tal que  $m(\mathcal{Z}_{\delta_0}) < \varepsilon_0$ , teríamos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta_0} \int_{N_\varepsilon^{\lambda_j}} |s(\cdot)| dx &\geq \frac{1}{\delta_0} \int_{N_\varepsilon^{\lambda_j} \cap (\Omega \setminus \mathcal{Z}_{\delta_0})} |s(\cdot)| dx \\ &\geq m(N_\varepsilon^{\lambda_j} \cap (\Omega \setminus \mathcal{Z}_{\delta_0})) \\ &= m(N_\varepsilon^{\lambda_j}) - m(N_\varepsilon^{\lambda_j} \cap \mathcal{Z}_{\delta_0}) \\ &\geq m(N_\varepsilon^{\lambda_j}) - m(\mathcal{Z}_{\delta_0}) \\ &\geq \varepsilon_0 - m(\mathcal{Z}_{\delta_0}) > 0. \end{aligned}$$

Portanto, quando  $j \rightarrow \infty$ , de (5.0.3) obteríamos uma contradição. Assim está provado o teorema.  $\square$

# Referências Bibliográficas

- [1] Afrouzi, G. A.; Brown, K. J.; *On principal eigenvalues for boundary value problems with indefinite weight and robin boundary conditions*, Proc. A.M.S., Vol. 127, No 1, p. 125-130, 1999.
- [2] Agmon, S.; Douglis, A.; Nirenberg, L.; *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I*, Comm. Pure Appl. Math., v. 12, p. 623-727, 1959.
- [3] Alikakos, N.D.; *Regularity and asymptotic behavior for the second order parabolic equation with nonlinear boundary conditions in  $L^p$* , J. Diff. Eqns., v. 39, p. 311-344, 1981.
- [4] Allegretto, W.; Huang, Y.X.; *A Picone's identity for the  $p$ -Laplacian and applications*, Nonlinear Anal., v. 32, p. 819-830, 1998.
- [5] Amann, H.; *Parabolic evolution equations and nonlinear boundary conditions*, J. Diff. Eqns., v. 72, p. 201-269, 1988.
- [6] Arrieta, J.M.; Carvalho, A.N.; Rodríguez-Bernal, A; *Attractors of parabolic problems with nonlinear boundary conditions. Uniform bounds*, Comm. Part. Diff. Eqns., v. 25, p. 1-37, 2000.
- [7] Brown, K.J.; Lin, S.S.; *On the existence of positive eigenfunctions for an eigenvalue problem with indefinite weight function*, J. Math. Anal. Appl., v. 75, p. 112-120, 1980.
- [8] Brown, K.J.; Lin, S.S.; Tertikas, A.; *Existence and nonexistence of steady-state solutions for a selection-migration model in population genetics*, J. Math. Biol., v. 27, p. 91-104, 1989.
- [9] Carvalho, A.N.; Oliva, S.M.; Pereira, A.L.; Rodríguez-Bernal, A.; *Attractors for parabolic problems with nonlinear boundary conditions*, J. Math. Anal. Appl., v. 207, p. 409-461, 1997.
- [10] Chow, S.-N.; Hale, J.K.; *Methods of bifurcation theory*, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [11] Crandall, M. G.; Rabinowitz, P. H.; *Bifurcation from simple eigenvalues*, J. Func. Anal., v.8, p. 321-340, 1971.
- [12] Crandall, M. G.; Rabinowitz, P. H.; *Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues, and linearized stability*, Arch. Rat. Mech. Anal., v. 52, p. 161-180, 1973.

- [13] Fife, P.; Peletier, L.A.; *Nonlinear diffusion in population genetics*, Arch. Rational Mech. Anal., v. 64, p. 93-109, 1977.
- [14] Fisher, R.A.; *Gene frequencies in a cline determined by selection and diffusion*, Biometrics, v. 6, p. 353-361, 1950.
- [15] Fleming, W.H.; *A selection-migration model in population genetics*, J. Math. Biol., v. 2, p. 219-233, 1975.
- [16] Folland, G.B.; *Real analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
- [17] Gilbarg, D.; Trudinger, N.S.; *Elliptic partial differential equations of second order*, 2<sup>a</sup> Ed., Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [18] Grisvard, P.; *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Pitman, London, 1985.
- [19] Grygor'yan, A.; *Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of brownian motion on riemannian manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), v. 36, p. 135-249, 1999.
- [20] Henry, D.; *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, 2<sup>a</sup> Impressão, Lect. Notes in Math. 840, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [21] Kesavan, S.; *Nonlinear functional analysis a first course*, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2003.
- [22] Kielhöfer, H.; *Bifurcation theory*, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [23] López-Gómez, J.; *Spectral theory and nonlinear functional analysis*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2001.
- [24] Lou, Y.; Nagylaki, T.; *A semilinear parabolic system for migration and selection in population genetics*, J. Diff. Eqns. 181 (2002) 388–418.
- [25] Lou, Y.; Nagylaki, T.; *Evolution of a semilinear parabolic system for migration and selection in population genetics*, J. Diff. Eqns. 204 (2004) 292–322.
- [26] Lou, Y.; Nagylaki, T.; *Evolution of a semilinear parabolic system for migration and selection without dominance*, J. Diff. Eqns. 225 (2006) 624–665.
- [27] Lou, Y.; Ni, W.-M.; Su, L.; *An indefinite nonlinear diffusion problem in population genetics. II. Stability and multiplicity*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 27 (2010) 643–655.
- [28] Madeira, G.F.; Nascimento, A.S.; *Bifurcation of stable equilibria and nonlinear flux boundary condition with indefinite weight*, J. Diff. Eqns 251 (2011) 3228-3247.
- [29] Madeira, G.F.; Nascimento, A.S.; *Bifurcation of stable equilibria under nonlinear flux boundary condition with indefinite null average weight*, submetido para publicação.
- [30] Nakashima, K.; Ni, W.-M.; Su, L.; *An indefinite nonlinear diffusion problem in population genetics. I. Existence and limiting profiles*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 27 (2010) 617–641.

- [31] Ni, W.-M.; *The Mathematics of Diffusion*, SIAM, USA, 2011.
- [32] Nirenberg, L.; *Topics in nonlinear functional analysis*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [33] Rodríguez-Bernal, A.; *Attractors for parabolic equations with nonlinear boundary conditions, critical exponents, and singular data*, J. Diff. Eqns. 181, 165-196, 2002.
- [34] Senn, S.; *On a nonlinear elliptic eigenvalue problem with Neumann boundary conditions, with an application to population genetics*, Comm. Partial Diff. Eqns. 8 (1983) 1199-1228.
- [35] Smoller, J.; *Shock waves and reaction-diffusion equations*, Springer-Verlag, New-York, 1983.
- [36] Taylor, M.E.; *Partial differential equations I*, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [37] Umezū, K.; *On eigenvalue problems with Robin type boundary conditions having indefinite coefficients*, Applicable Analysis., Vol. 85, No. 11, p. 1313-1325, 2006.
- [38] Valent, T.; *Boundary value problems of finite elasticity*, Springer-Verlag, New York, 1988.