

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CCET-CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Marcela Duarte da Silva

**Germes de funções sobre  
variedades analíticas**

São Carlos - SP

2006

Marcela Duarte da Silva

# Germes de funções sobre variedades analíticas

*Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação de Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.*

Orientador: Prof. Dr. João Nivaldo Tomazella

São Carlos - SP

2006

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

S586gf

Silva, Marcela Duarte da.  
Germes de funções sobre variedades analíticas / Marcela  
Duarte da Silva. -- São Carlos : UFSCar, 2006.  
65 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São  
Carlos, 2006.

1. Geometria - topologia. 2. Germes de funções. 3.  
Variedades analíticas. 4. Campos logarítmicos. 5.  
Determinação finita. I. Título.

CDD: 516 (20<sup>a</sup>)

# Agradecimentos

Ao meu orientador e amigo Prof. Tomazella por acreditar e me fazer acreditar.

À minha família pelo apoio emocional. Em especial, à minha Mãe e ao Tiago, pelo amor e compreensão incondicionais em todas as horas.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

À todos que tornaram esse sonho possível direta ou indiretamente.

“Os acontecimentos estão encadeados da melhor maneira possível. Pois, ao fim e ao cabo, se você não houvesse sido expulso de um belo castelo com pontapés no traseiro por causa do amor pela senhorita Cunegunda, se voce não se houvesse envolvido com a Inquisição, se não houvesse dado um belo golpe de espada no barão, se não houvesse perdido todos os seus carneiros do bom país do Eldorado, não estaria aqui comendo cidra com conserva e pistaches.”

Voltaire

# Resumo

O estudo de germes de funções analíticas  $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  sob a  $\mathcal{R}$  - equivalência é um ponto central na Teoria das Singularidades e a informação que temos nessa direção é bastante rica. Nessa dissertação temos um estudo similar para uma equivalência que preserva uma determinada variedade analítica  $X$ , a  $\mathcal{R}_X$  - equivalência.

# Abstract

The study of analytic germs of functions  $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  under  $\mathcal{R}$  - equivalence relation is a central point in Singularity Theory and the information we have in this direction is very rich. In this dissertation we have a study similar for an equivalence relation which preserve certain analytic variety  $X$ , the  $\mathcal{R}_X$  - equivalence.

# Conteúdo

<b>Prefácio</b>	<b>vi</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 O anel $\mathcal{O}_n$ e a $\mathcal{R}$ -equivalência . . . . .	1
1.2 Germes de variedades . . . . .	5
1.3 Campos de vetores . . . . .	6
<b>2 A <math>\mathcal{R}_X</math>-equivalência</b>	<b>9</b>
2.1 Os campos logarítmicos . . . . .	10
2.2 Deformações e Desdobramentos . . . . .	19
2.3 Germes estáveis . . . . .	20
2.4 Funções com pontos críticos isolados . . . . .	22
<b>3 A Transversal completa para o grupo <math>\mathcal{R}_X</math></b>	<b>28</b>
3.0.1 Submersões sobre o Guarda-chuva de Whitney . . . . .	40
<b>4 Germes de campos de vetores em variedades</b>	<b>44</b>
4.1 Caracterização dos campos de vetores . . . . .	44
4.2 Divisores Livres . . . . .	48
4.2.1 Cálculo de $\Theta_X$ quando $X$ é o discriminante . . . . .	49
<b>Considerações Finais</b>	<b>56</b>
<b>A Teoria de feixes</b>	<b>59</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>63</b>



# Prefácio

O estudo de germes de funções  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  sob a ação do grupo  $\mathcal{R}$  dos germes de difeomorfismos de  $\mathbb{C}^n$ , a  $\mathcal{R}$ -equivalência, é um dos objetivos da teoria das singularidades e a informação que temos nesta direção é bastante ampla e pode ser encontrada em livros básicos da teoria, por exemplo, em [6], [14] e [15].

Considerando um germe de variedade analítica  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ , V. Arnold [2], J. Bruce e R. Roberts [8], entre outros, apresentaram uma generalização da  $\mathcal{R}$ -equivalência através do grupo  $\mathcal{R}_X$  dos germes de difeomorfismos de  $\mathbb{C}^n$  que preservam  $X$ , onde dois germes  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{R}_X$ -equivalentes se existir um difeomorfismo  $\varphi \in \mathcal{R}_X$  tal que  $f = g \circ \varphi$ . Quando  $X = \emptyset$ , a  $\mathcal{R}_X$ -equivalência se torna a  $\mathcal{R}$ -equivalência. Para o estudo da  $\mathcal{R}_X$ -equivalência é necessário encontrar os campos logarítmicos de  $X$ ,  $\Theta_X$ , i.e., os campos de vetores tangentes à  $X$ .

O objetivo deste trabalho é estudar resultados básicos da  $\mathcal{R}_X$ -equivalência e apresentar algumas propriedades de  $\Theta_X$ .

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

Nas preliminares temos uma visão geral dos principais pré-requisitos utilizados no decorrer do texto, objetivando o esclarecimento de notações e a ilustração de resultados básicos. Maiores detalhes podem ser encontrados nos livros [15] e [19].

No segundo capítulo introduzimos a  $\mathcal{R}_X$ -equivalência, o conceito do módulo de campos logarítmicos para um germe de subvariedade  $X$ ,  $\Theta_X$ , que é de fundamental importância para o desenvolvimento do trabalho e também algumas definições que são comuns à todas as equivalências como as deformações, os desdobramentos e os germes estáveis.

No capítulo 3 direcionamos nosso estudo para um método mais eficiente

de classificação: A Transversal Completa. O Teorema da Transversal Completa foi demonstrado na sua forma mais geral no artigo de J. Bruce, N. Kirk e A. Du Plessis [7], usando-se o Lema de Mather 3.1. No caso particular do grupo  $\mathcal{R}_X$  o artigo de J. Bruce e J. West [9], demonstrou o teorema usando deformações  $\mathcal{R}_X$ -triviais. Neste trabalho estudamos ambas abordagens. Para ilustrar a eficiência desse método classificamos germes de submersão  $f : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  sob a  $\mathcal{R}_X$ -equivalência, considerando-se como variedade,  $X$ , o Guarda-chuva de Whitney.

No quarto capítulo, baseando-se em [4], [8] e [24], abordamos o cálculo do módulo  $\Theta_X$  que, em geral, é muito difícil de ser determinado. Mas, nos casos onde o germe de subvariedade  $X$  é definido por uma função quase-homogênea ou quando a subvariedade é o discriminante de uma deformação de uma função com uma singularidade isolada na origem, possuímos um algoritmo para determinar o módulo  $\Theta_X$ .

Finalizando, o apêndice fornece uma idéia introdutória sobre a teoria de feixes que é necessária para a compreensão de conceitos utilizados no decorrer do texto.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 O anel $\mathcal{O}_n$ e a $\mathcal{R}$ -equivalência

Nosso objetivo é estudar localmente funções analíticas  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ . Para tanto, introduzimos uma relação de equivalência no espaço das funções analíticas definidas num aberto contendo a origem de  $\mathbb{C}^n$ , da seguinte forma:

$$f \sim g \iff \exists \text{ aberto } V, \text{ com } 0 \in V \subset \mathbb{C}^n \text{ tal que } f|_V \equiv g|_V.$$

As classes de equivalência são chamadas de germes, denotadas por  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, f(0))$ , ou simplesmente, por  $f$ . A coleção de todos esses germes de funções é denotada por  $\mathcal{O}_n$ . Observemos que  $\mathcal{O}_n$  é um anel noetheriano local cujo ideal maximal é dado por  $\mathcal{M}_n = \{f \in \mathcal{O}_n : f(0) = 0\}$ . Denotamos por  $\mathcal{O}_{n,p}$  o conjunto dos germes de aplicações  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, f(0))$ .

A idéia é tentar agrupar esses germes em determinados conjuntos. Para isso precisamos da noção de uma ação de um grupo e da noção de grupo de Lie:

Uma ação de um grupo  $G$  em um conjunto  $M$  é uma aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : G \times M &\longrightarrow M \\ (g, x) &\longmapsto \varphi(g, x) = g \cdot x \end{aligned}$$

tal que para todo  $x \in M$  e todos  $g, h \in G$  temos

(a)  $1 \cdot x = x$ , onde  $1$  é identidade do grupo  $G$ ;

(b)  $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ .

Neste caso dizemos que  $G$  atua em  $M$ . O conjunto  $G \cdot x = \{g \cdot x : g \in G\}$  é chamado de órbita de  $x$  em  $M$ .

Um grupo de Lie  $G$  é um grupo multiplicativo que é uma variedade diferenciável tal que as operações de multiplicação e inversão são diferenciáveis. Dizemos que um grupo de Lie  $G$  atua em uma variedade diferenciável  $M$  quando existe uma ação de  $G$  em  $M$  que é diferenciável.

Em geral, as órbitas de uma ação de um grupo de Lie  $G$  em uma variedade diferenciável  $M$  não são subvariedades e, sim subvariedades imersas, mas nos casos em que para algum  $x \in M$ ,  $G \cdot x$  é uma subvariedade, obtemos o seguinte resultado:

**Teorema 1.1.** *Seja  $\varphi : G \times M \rightarrow M$  uma ação de um grupo de Lie  $G$  em uma variedade diferenciável  $M$ . Se as órbitas são subvariedades de  $M$ , então para todo  $x \in M$ , a aplicação  $\varphi_x : G \rightarrow G \cdot x$  dada por  $\varphi_x(g) = g \cdot x$  é uma submersão. E mais, o espaço tangente à órbita  $G \cdot x$  em  $x$  é a imagem de  $d\varphi_x(1) : T_1G \rightarrow T_xM$ , ou seja,*

$$T_xG \cdot x = d\varphi_x(1)(T_1G). \quad (1.1)$$

**Demonstração:** Veja [15], página 74.

Uma das metas da teoria das singularidades é classificar germes de  $\mathcal{O}_{n,p}$  sob relações de equivalências em  $\mathcal{O}_{n,p}$  dadas por ações de grupos. Como trabalhamos apenas no anel  $\mathcal{O}_n$  a relação de equivalência de nosso interesse é dada pela ação dos subgrupos do grupo dos germes de difeomorfismos de  $\mathcal{O}_{n,n}$  que preservam a origem, o qual é denotado por  $\mathcal{R}$ . A ação é dada por  $\varphi.f = f \circ \varphi^{-1}$ , para todo  $\varphi \in \mathcal{R}$  e  $f \in \mathcal{O}_n$ . Dizemos que dois germes  $f, g \in \mathcal{O}_n$  são  $\mathcal{R}$ -equivalentes se existir um germe  $\varphi \in \mathcal{R}$  tal que  $f \equiv g \circ \varphi^{-1}$  assim,

$$f \sim_{\mathcal{R}} g \iff \exists \varphi \in \mathcal{R} \text{ tal que } f \equiv g \circ \varphi^{-1}.$$

O conjunto dos germes de difeomorfismos que não preservam a origem é denotado por  $\mathcal{R}_e$  (o grupo estendido).

Dado  $f \in \mathcal{O}_n$ , para cada inteiro positivo  $k$ , definimos o  $k$ -jato de  $f$  por

$$j^k f = j^k f(0) = p_k(f)(0) - f(0),$$

onde  $p_k(f)(0)$  é o polinômio de Taylor de grau  $k$  do representante  $f$  no ponto  $x = 0$ , observemos que esse polinômio independe do representante escolhido.

Observemos que  $\mathcal{O}_n$  não é uma variedade diferenciável e na tentativa de amenizar a dificuldade em trabalhar com espaços de dimensão infinita, trabalhamos com variedades diferenciáveis; que possuem dimensão finita. Denotamos por  $J^k(n, 1)$  o  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial dos  $k$ -jatos dos germes de  $\mathcal{O}_n$  e por  $H^k$  o subespaço de  $J^k(n, 1)$  formado pelos polinômios homogêneos de grau  $k$ . Portanto  $J^k(n, 1)$  e  $H^k$  são variedades diferenciáveis pois são difeomorfas à algum espaço vetorial de dimensão finita. Dado  $j^k f \in J^k(n, 1)$  quando não houver dúvidas denotamos esse elemento apenas por  $f$ .

Da mesma forma, ao invés de trabalhar com o grupo  $\mathcal{R}$ , que possui dimensão infinita, trabalhamos com o conjunto  $\mathcal{R}^k$  que denota o grupo de Lie (que age em  $J^k(n, 1)$ , veja [22], página 151) formado pelos  $k$ -jatos de germes de  $\mathcal{R}$ .

Para a classificação de germes de função sob uma equivalência é necessário que conheçamos o espaço tangente de uma órbita em um germe. Como foi dito anteriormente, o grupo  $\mathcal{R}$  não é um grupo de Lie e  $\mathcal{O}_n$  não é uma variedade diferenciável, dado um inteiro positivo  $k$ , trabalhamos com os espaços dos  $k$ -jatos,  $\mathcal{R}^k$  (que é um grupo de Lie) e  $J^k(n, 1)$  (que é uma variedade diferenciável). Assim, podemos usar a equação (1.1) do Teorema 1.1 para encontrar o espaço tangente de uma órbita em um jato. No caso do grupo  $\mathcal{R}$  temos:

Dados um inteiro positivo  $k$  e um germe de  $k$ -jato  $f \in J^k(n, 1)$  fixados, definimos a aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi_f : \mathcal{R}^k &\longrightarrow J^k(n, 1) \\ h &\longmapsto j^k(f \circ h^{-1}) = j^k f \circ j^k h^{-1}. \end{aligned}$$

Como  $\mathcal{R}^k$  é um aberto de  $J^k(n, n)$  então  $T_1 \mathcal{R}^k = J^k(n, n)$ . Seja  $g \in T_1 \mathcal{R}^k$  e consideramos a curva  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{R}^k$ , com  $\alpha(0) = 1$  e  $\alpha'(0) = g$ ,

$$\alpha(t)(x) = x + tg(x),$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\varphi_f \circ \alpha(t)]_{t=0} &= \frac{d}{dt}[j^k(f \circ \alpha(t))]_{t=0} = j^k \frac{d}{dt}(f \circ \alpha(t))_{t=0} \\ &= j^k \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\alpha(t)) \alpha'_j(t) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^n j^k \frac{\partial f}{\partial x_j} g_j \in T_f \mathcal{R}^k f \end{aligned}$$

com  $g_j \in \mathcal{M}_n$  pois  $\alpha(t) \in \mathcal{R}^k$ , para qualquer  $t$ .

Considerando-se o ideal de  $\mathcal{O}_n$ ,  $J(f) = \langle \frac{\partial f}{\partial x_j} \rangle_{j=1}^n$  vemos que, pelo Teorema 1.1, temos  $T_f \mathcal{R}^k \cdot f = j^k(\mathcal{M}_n J(f))$ , para qualquer  $k$ . Portanto é natural definir o espaço tangente à  $\mathcal{R}$ -órbita em um germe  $f$  como o conjunto:

$$T_f \mathcal{R} f = \mathcal{M}_n J(f),$$

e o espaço tangente estendido à  $\mathcal{R}$ -órbita em um germe  $f$  por:

$$T_f \mathcal{R}_e f = J(f).$$

A seguir enunciamos alguns teoremas envolvendo o anel  $\mathcal{O}_n$  que são extremamente úteis no desenvolvimento de resultados posteriores do texto:

**Teorema 1.2** (Teorema de Preparação de Malgrange). *Dado um germe de função  $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^s, 0)$ , seja  $M$  um  $\mathcal{O}_n$ -módulo finitamente gerado então  $M$  é um  $\mathcal{O}_s$ -módulo finitamente gerado, com relação à estrutura de módulo dada pelo homomorfismo induzido:*

$$\begin{aligned} \varphi^* : \mathcal{O}_s &\longrightarrow \mathcal{O}_n \\ g &\longmapsto \varphi^*(g) = g \circ \varphi, \end{aligned}$$

se, e somente se, o  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial  $\frac{M}{\varphi^*(\mathcal{M}_s)M}$  tem dimensão finita.

**Demonstração:** Veja [14], página 30.

**Teorema 1.3** (Lema de Nakayama). *Sejam  $M$  um  $\mathcal{O}_n$ -módulo finitamente gerado,  $N$  um submódulo de  $M$  e  $I \subset \mathcal{M}_n$  um ideal. Então  $M \subseteq IM + N \implies M \subseteq N$ .*

**Demonstração:** Veja [15], página 102.

**Teorema 1.4.** *Sejam  $M$  um  $\mathcal{O}_n$ -módulo livre finitamente gerado e  $N$  um submódulo de  $M$ . Então*

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{M}{N} < \infty \iff \exists k > 0 \text{ tal que } \mathcal{M}_n^k M \subset N.$$

**Demonstração:** Veja [15], página 104.

## 1.2 Germes de variedades

Dados dois subconjuntos  $X, Y$  de  $\mathbb{C}^n$  dizemos que  $X$  e  $Y$  são equivalentes em um ponto  $z \in X \cap Y$  se existir uma vizinhança  $U$  de  $z$  tal que  $X \cap U = Y \cap U$ . A classe de equivalência do conjunto  $X$  em um ponto  $z$  é chamada de germe do conjunto  $X$  e é denotada por  $(X, z)$ , ou simplesmente por  $X$  quando o ponto  $z$  estiver subentendido.

Se  $f \in \mathcal{O}_n$ , a classe de equivalência do conjunto  $\{x : f(x) = 0\}$ , onde  $f$  é um representante do germe  $f$ , é denotada por  $\mathcal{V}(f)$ ; se  $f_1$  e  $f_2$  são dois representantes de um mesmo germe então os conjuntos  $\mathcal{V}(f_1)$  e  $\mathcal{V}(f_2)$  são iguais. Um germe de variedade  $(X, x)$  é um conjunto do tipo:

$$X = \mathcal{V}(f_1) \cap \dots \cap \mathcal{V}(f_r) = \mathcal{V}(f_1, \dots, f_r),$$

para determinados  $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}_n$ .

Definimos o ideal de um germe de variedade  $X$  por

$$\mathcal{I}(X) = \{f \in \mathcal{O}_n : X \subset f^{-1}(0)\}.$$

Dizemos que um germe de variedade  $X$  é irredutível quando para quaisquer germes  $X_1$  e  $X_2$  tais que  $X = X_1 \cup X_2$  então  $X = X_1$  ou  $X = X_2$ .

**Proposição 1.5.** *Seja  $X$  um germe de variedade então existem um inteiro positivo  $p$  e  $X_1, \dots, X_p$  variedades irredutíveis, com  $X_i$  não contida em  $X_j$ , para todo  $i \neq j$ , tais que  $X = X_1 \cup \dots \cup X_p$ . Essas variedades são unicamente determinadas, a menos da ordem, e são chamadas de componentes irredutíveis de  $X$ .*

**Demonstração:** Veja [19], página 89.

Chamamos de germe de subvariedade analítica em  $x$ , um germe de conjunto  $X$  em  $x$  tal que, para alguma vizinhança  $V$  de  $x$ , o germe  $X \cap V$  pode ser descrito por  $\mathcal{V}(f_1, \dots, f_r)$ , para alguns  $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}_n$ .

Dizemos que um ponto  $z$  de um germe de subvariedade  $X$  é um ponto regular ou suave se para alguma vizinhança  $V$  de  $z$ , o germe  $V \cap X$  pode ser descrito

como o conjunto dos zeros de um número finito de germes de funções analíticas que possuem  $z$  como ponto regular. Um ponto de  $X$  não regular é chamado de ponto singular de  $X$ .

**Teorema 1.6** (Hilbert's nullstellensatz - versão local). *Seja  $I$  um ideal de  $\mathcal{O}_n$ . Então  $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \text{Rad}(I)$ , onde  $\text{Rad}(I)$  é o seguinte ideal  $\{f \in \mathcal{O}_n : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } f^n \in I\}$ .*

**Demonstração:** Veja [18], página 660.

Seja  $Y = \mathcal{V}(f_1, \dots, f_r)$  uma variedade irredutível. Definimos

$$\dim Y = n - \max_{x \in Y} \text{posto} \left( \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{n \times r} \right).$$

Se  $X$  é uma variedade e  $X = X_1 \cup \dots \cup X_p$  é a sua decomposição em componentes irredutíveis, então

$$\dim X = \max_{1 \leq i \leq p} \dim X_i.$$

Dizemos que a variedade é equidimensional quando todas as suas componentes irredutíveis têm a mesma dimensão. Além disso, se  $x \in X$  a dimensão da variedade  $X = X_1 \cup \dots \cup X_p$  no ponto  $x$  é

$$\dim_x X = \max_{x \in X_i} \dim X_i.$$

Dizemos que um germe  $X = \mathcal{V}(f_1, \dots, f_r)$  é reduzido se a  $\mathbb{C}$ -álgebra local  $\frac{\mathcal{O}_n}{\langle f_1, \dots, f_r \rangle}$  não possuir elementos nilpotentes.

### 1.3 Campos de vetores

Um campo de vetores  $\xi$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que a cada ponto  $p$  de  $M$  associa um vetor  $\xi(p) \in T_p M$ . O campo é suave se a aplicação  $\xi : M \rightarrow TM$  é suave. Considerando-se uma parametrização  $x : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow M$ , com  $U$  aberto, é possível escrever

$$\xi(p) = \sum_{j=1}^n \xi_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j},$$



onde  $\xi_j : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $j = 1, \dots, n$  é uma função em  $U$  e  $\{\frac{\partial}{\partial x_j}\}$  é uma base associada à  $x$  para  $T_pM$ . O conjunto dos campos de vetores formam um espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$ .

É conveniente pensar em um campo  $\xi$  como uma aplicação  $\xi : D \rightarrow D$ , onde  $D$  é o conjunto formado pelas funções analíticas em  $M$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ , dada por

$$(\xi f)(p) = \xi(f)(p) = \sum_{j=1}^n \xi_j(p) \frac{\partial f}{\partial x_j}(p),$$

onde  $f$  indica a expressão de  $f$  na parametrização  $x$ . Também podemos considerar germes de campos de vetores.

Dado um grupo de Lie  $G$  agindo suavemente em uma variedade diferenciável  $M$  e  $\xi$  um campo de vetores em  $G$  então dizemos que  $\xi$  é invariante à esquerda se, para qualquer  $x \in G$ , ocorrer

$$dA_x(\xi) = \xi \circ A_x,$$

onde  $A_x : G \rightarrow G \cdot x$  é dada por  $A_x(g) = gx$  (a ação do grupo à esquerda). Ou seja, se  $\xi$  é invariante à esquerda então  $dA_x(\xi(g)) = \xi(gx)$ .

Uma álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  sobre  $\mathbb{C}$  é um espaço vetorial complexo munido com uma aplicação bilinear  $[\cdot, \cdot] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  tal que para todo  $x, y, z \in \mathcal{G}$  tem-se:

- (a)  $[x, y] = -[y, x]$ ;
- (b)  $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ .

**Teorema 1.7.** *Sejam  $G$  um grupo de Lie agindo suavemente em uma variedade diferenciável  $M$  e  $DerG$  o conjunto de seus campos invariantes à esquerda. Então  $DerG$  munido com a aplicação*

$$[\cdot, \cdot] : (\xi, \delta) \longmapsto [\xi, \delta]$$

com  $(\xi\delta)f = \xi(\delta f)$ , para todo  $f \in D$ , satisfaz:

1.  $DerG$  é um  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial e a aplicação:

$$\begin{aligned} \alpha : DerG &\longrightarrow T_1G \\ \xi &\longmapsto \alpha(\xi) = \xi(1) \end{aligned}$$

é um isomorfismo de  $DerG$  no espaço tangente de  $G$  na identidade;

2. Campos de vetores invariantes à esquerda são analíticos;
3. Se  $\xi, \delta \in \text{Der}G$  então  $[\xi, \delta] \in \text{Der}G$ ;
4.  $\text{Der}G$  é uma álgebra de Lie.

**Demonstração:** Veja [26], página 85.

Logo à todo grupo de Lie  $G$  que age em uma variedade diferenciável  $M$  podemos associar uma álgebra de Lie,  $\text{Der}G$ , que é identificada com o espaço tangente de  $G$  na identidade. Para cada  $x \in M$ ,  $\text{Der}G \cdot x \subset T_x M$  é a imagem de  $\text{Der}G$  pela diferencial da ação, assim  $\text{Der}G \cdot x$  coincide com o espaço tangente  $T_x(G \cdot x)$  da órbita de  $x$  sob  $G$ .

# Capítulo 2

## A $\mathcal{R}_X$ -equivalência

Seja  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$  um germe de subvariedade analítica reduzida. Neste trabalho nosso interesse está voltado para o subgrupo dos germes de difeomorfismos de  $\mathcal{R}$  que preservam  $X$ , o qual passamos a descrever a seguir:

Seja  $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  um germe de difeomorfismo. Dizemos que  $\varphi$  preserva  $X$  se o isomorfismo induzido  $\varphi^* : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{O}_n$ , dado por  $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ , preserva o ideal  $\mathcal{I}(X)$ , i.e.,  $\varphi^*(\mathcal{I}(X)) = \mathcal{I}(X)$ . O grupo formado por tais germes é denotado por  $\mathcal{R}_X$ . O conjunto de germes de difeomorfismos que preservam  $X$  e não se anulam na origem é denotado por  $\mathcal{R}_{e_X}$ .

Um germe de difeomorfismo  $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  preserva  $X$  se, e somente se,  $(\varphi(X), 0) = (X, 0)$ , ou seja,  $\mathcal{R}_X = \{\varphi \in \mathcal{R} : \varphi(X) = X\}$ .

Embora o grupo  $\mathcal{R}_X$  seja uma generalização do grupo  $\mathcal{R}$  (basta tomar  $X = \emptyset$ ), ele é, na verdade, uma classe especial de subgrupos geométricos de  $\mathcal{R}$  estudados por J. Damon [12].

**Definição 2.1.** *Dois germes  $f, g \in \mathcal{O}_n$  são  $\mathcal{R}_X$ -equivalentes se existir um difeomorfismo  $\varphi \in \mathcal{R}_X$  tal que  $f \equiv g \circ \varphi$ . Notação:  $f \sim_{\mathcal{R}_X} g$ .*

A  $\mathcal{R}_X$ -equivalência é uma relação de equivalência.

**Definição 2.2.** *Seja  $k$  um inteiro positivo. Um germe  $f \in \mathcal{O}_n$  é  $k$ - $\mathcal{R}_X$ -determinado se para todo  $g \in \mathcal{O}_n$  com mesmo  $k$ -jato que  $f$  temos que  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{R}_X$ -equivalentes.*

Dizemos que  $f$  é finitamente  $\mathcal{R}_X$ -determinado quando  $f$  é  $k$ - $\mathcal{R}_X$ -determinado, para algum inteiro positivo  $k$ .

## 2.1 Os campos logarítmicos

Para encontrar germes de difeomorfismos que preservam um germe de subvariedade  $X$  a técnica usual é a integração de germes de campos de vetores tangentes à  $X$ . Passamos a descrever tais campos:

**Definição 2.3.** *Seja  $Der_0\mathbb{C}^n$  o  $\mathcal{O}_n$ -módulo formado pelos germes de campos de vetores analíticos de  $\mathbb{C}^n$  na origem.*

*Seja  $\xi \in Der_0\mathbb{C}^n$ , se quando visto como derivação, i.e.,*

$$\xi = \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

*ocorrer  $\xi(h) \in \mathcal{I}(X)$ , para qualquer  $h \in \mathcal{I}(X)$  então dizemos que esse campo é logarítmico para  $X$ . O  $\mathcal{O}_n$ -submódulo formado pelos germes de campos de vetores logarítmicos é denotado por  $\Theta_{(X,0)}$ , quando o ponto  $x = 0$  estiver subentendido escrevemos apenas  $\Theta_X$ .*

A próxima Proposição afirma que  $\Theta_X$  é exatamente o conjunto dos campos de vetores que são tangentes às partes suaves da variedade  $X$ .

**Proposição 2.4.** *Seja  $X = \bigcup_{j=1}^p X_j$  a decomposição em componentes irredutíveis de  $X$ . Então  $\xi \in \Theta_X$  se, e somente se, para cada ponto suave  $x$  (suficientemente próximo da origem) de cada componente irredutível  $X_j$  de  $X$ , o campo  $\xi$  é tangente à  $X_j$  em  $x$ .*

**Demonstração:** Seja  $\xi$  um representante de um germe em  $\Theta_X$ . Seja  $x \in X$  um ponto suave de  $X_j$  suficientemente próximo da origem. Podemos escolher germes  $f_1, \dots, f_r$ , onde  $f_i : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ , tais que o germe  $(X, x)$  é a imagem inversa do valor regular  $0 \in \mathbb{C}^r$  por  $f = (f_1, f_2, \dots, f_r)$ , i.e.,

$$(X, x) = f^{-1}(0) = \bigcap_{i=1}^r f_i^{-1}(0).$$

Então  $\xi(f_1), \dots, \xi(f_r)$  se anulam em  $x$  pois,  $f_i \in \mathcal{I}(X, x)$  e  $x$  está suficientemente próximo da origem. Então  $\xi$  é tangente à  $X_j$  em todo ponto suave  $x$  próximo da origem.

Por outro lado, suponhamos que  $\xi$  é tangente às partes suaves de  $X_j$ , para  $j = 1, \dots, p$ . Se  $h \in \mathcal{I}(X)$  e  $x \in X_j$  é um ponto suave então como  $h$  se anula em  $x$  temos que  $\xi(h)$  também se anula em  $x$ . Assim  $\xi(h)$  se anula em cada  $X_j$  e portanto se anula em  $X$ .

Esta demonstração também pode ser encontrada em [8]. ■

**Corolário 2.5.** *Se  $X = \bigcup_{j=1}^p X_j$  é a decomposição em componentes irredutíveis de  $X$  então  $\Theta_X = \bigcap_{j=1}^p \Theta_{X_j}$ .*

**Demonstração:** É uma consequência direta da Proposição 2.4. Esta demonstração também pode ser encontrada em [8].

**Definição 2.6.** *Denotamos por  $\Theta_X^0$  o  $\mathcal{O}_n$ -módulo formado pelos campos de vetores de  $\Theta_X$  que se anulam na origem.*

**Proposição 2.7.** *Seja  $\xi \in \Theta_X^0$ . Então o fluxo  $\varphi_t$  gerado por  $\xi$  preserva  $X$ . Dessa forma,  $\varphi_t \in \mathcal{R}_X$ , para todo  $t$  suficientemente próximo da origem.*

**Demonstração:** Seja  $\varphi(x, t)$  o fluxo gerado pelo campo de vetores  $\xi \in \Theta_X^0$ . Queremos mostrar que, para qualquer  $t$  suficientemente próximo da origem e para todo  $h \in \mathcal{I}(X)$ , temos  $h \circ \varphi_t \in \mathcal{I}(X)$ ; portanto, basta mostrar que  $\forall h \in \mathcal{I}(X)$ ,  $h \circ \varphi_t(x)$  é identicamente nula para pequenos valores de  $t$  e todo  $x \in X$ , para tanto verifiquemos que a expansão de Taylor de  $h \circ \varphi_t$  é identicamente nula em  $t = 0$  e  $x \in X$ .

Seja  $x \in X$  um ponto arbitrário, temos que

$$(h \circ \varphi_t)(x)|_{t=0} = h(\varphi(x, t))|_{t=0} = h(\varphi(x, 0)) = h(x) = 0;$$

se  $\xi = \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j}$  e como  $\varphi$  é o fluxo gerado por  $\xi$ , temos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) = \xi(\varphi(x, t)),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(h \circ \varphi)(x, t) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_j}(\varphi(x, t)) \frac{\partial \varphi_j}{\partial t}(x, t) = \\ &= \sum_{j=1}^n \xi_j(\varphi_t(x)) \frac{\partial h}{\partial x_j}(\varphi_t(x)) = \xi(\varphi_t(x))(h(\varphi_t(x))) \end{aligned}$$

assim,  $\frac{\partial}{\partial t}(h \circ \varphi)(x, t)|_{t=0} = \xi(\varphi_t(x))h(x)|_{t=0} = \xi(x)(h(x)) = \xi(h)(x) = 0$  pois,  $h \in \mathcal{I}(X)$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(h \circ \varphi)(x, t)|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{j=1}^n \xi_j(\varphi_t(x)) \frac{\partial h}{\partial x_j}(\varphi_t(x)) \right) |_{t=0} = \\ &= d\xi(\varphi_t(x))d\varphi_t(x) \frac{\partial h}{\partial t}(\varphi_t(x)) |_{t=0} = \\ &= d\xi(x)\xi(x)(h(x)) = d\xi(x)\xi(h)(x) = 0 \end{aligned}$$

Por indução, podemos ver que  $\frac{\partial^r}{\partial t^r}(h \circ \varphi)(x, t)|_{t=0} = 0$ , para todo  $r \geq 1$  e todo  $x \in X$ ; portanto  $h \circ \varphi$  é identicamente nulo para todo  $x \in X$  e todo  $t$  numa vizinhança da origem.

Esta demonstração também pode ser encontrada em [8]. ■

**Exemplo 2.8.** *Seja  $X$  a variedade de  $\mathbb{C}^2$  dada por  $X := y - x^2 = 0$  e consideramos o campo  $\xi$  dado por*

$$\xi(x, y) = x \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial y}.$$

*Notemos que  $\xi$  está em  $\Theta_X^0$ , pois se  $h \in \mathcal{I}(X) = \text{Rad}(\langle y - x^2 \rangle) = \langle y - x^2 \rangle$  então*

$$\xi(h)(x, y) = x \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) + 2y \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) \in \langle y - x^2 \rangle.$$

*Portanto pela Proposição anterior 2.7 temos que o fluxo gerado por  $\xi$ ,*

$$\begin{aligned} \varphi_t : (\mathbb{C}^2, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0) \\ (x, y) &\longmapsto \varphi_t(x, y) = (e^t x, e^{2t} y) \end{aligned}$$

*preserva  $X$ , para todo  $t$  suficientemente próximo da origem, de fato*

$$\varphi_t(x, x^2) = (e^t x, e^{2t} x^2) = (e^t x, (e^t x)^2).$$

Assim como a  $\mathcal{R}$ -equivalência, para classificar germes de função sob a  $\mathcal{R}_X$ -equivalência é necessário calcular os espaços tangentes à uma  $\mathcal{R}_X$ -órbita em um germe  $f$ .

Dado um inteiro  $k$  positivo e usando o Teorema 1.1, trabalhamos com o espaço dos  $k$ -jatos  $\mathcal{R}_X^k$  e a variedade diferenciável  $J^k(n, 1)$ . Portanto, precisamos determinar o espaço  $T_1\mathcal{R}_X^k$ :

**Afirmção:**  $T_1\mathcal{R}_X^k = j^k(\Theta_X^0)$ .

Seja  $\xi = \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j} \in T_1\mathcal{R}_X^k$  e seja  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{R}_X^k$ , com  $\alpha(0) = 1$ ,  $\alpha'(0) = \xi$ , e

$$\alpha(t)(x) = x + t\xi(x)$$

então  $\alpha(t)(x) \in \mathcal{R}_X^k$ , para qualquer  $t$  suficientemente pequeno, segue que  $\xi(0) = 0$  pois os difeomorfismos de  $\mathcal{R}_X$  preservam a origem. Queremos mostrar que  $\xi$  é um  $k$ -jato que satisfaz:

$$\xi(h) \in \mathcal{I}(X), \quad \forall h \in \mathcal{I}(X).$$

Observemos que, para qualquer  $x \in X$  e qualquer  $h \in \mathcal{I}(X)$ , temos

$$h(\alpha(t)(x)) = 0,$$

derivando em relação à  $t$ , e tomando  $t = 0$ , temos

$$0 = \sum_{j=1}^n \alpha'_j(0)(x) \frac{\partial h}{\partial x_j}(\alpha(0)(x)) = \sum_{j=1}^n \xi_j(x) \frac{\partial h}{\partial x_j}(x) = \xi(h)(x) \implies \xi(h) \in \mathcal{I}(X),$$

assim  $\xi \in j^k(\Theta_X^0)$ .

Por outro lado, se  $\xi \in j^k(\Theta_X^0)$  então, pela Proposição 2.7, o fluxo  $\varphi$  gerado por  $\xi$  preserva  $X$ . Consideramos a curva

$$\alpha(t) = j^k\varphi(x, t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{R}_X^k$$

e  $\alpha(0) = 1$  e portanto  $\xi \in T_1\mathcal{R}_X^k$ . ■

Sabendo-se qual é o espaço  $T_1\mathcal{R}_X^k$ , podemos determinar o espaço tangente à uma  $\mathcal{R}_X^k$ -órbita em um germe  $f$ , seguindo o Teorema 1.1. Fixado um  $k$ -jato  $f \in J^k(n, 1)$ , definimos a aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi_f : \mathcal{R}_X^k &\longrightarrow J^k(n, 1) \\ h &\longmapsto j^k(f \circ h^{-1}) = j^k f \circ j^k h^{-1}. \end{aligned}$$

Pela equação (1.1), temos

$$d\varphi_f(1)(j^k(\Theta_X^0)) = T_f\mathcal{R}_X^k f.$$

Sejam  $\xi = \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j} \in j^k(\Theta_X^0)$  e  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{R}_X^k$ , com  $\alpha(0) = 1$  e  $\alpha'(0) = \xi$ ,

$$\begin{aligned} \alpha(t)(x) &= x + t\xi(x), \\ \frac{d}{dt}[\varphi_f \circ \alpha(t)]|_{t=0} &= \frac{d}{dt}[j^k(f \circ \alpha(t))]|_{t=0} = j^k \frac{d}{dt}(f \circ \alpha(t))|_{t=0} = \\ &= j^k \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\alpha(t)) \alpha'_j(t) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^n j^k \xi_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \in T_f\mathcal{R}_X^k f, \end{aligned}$$

com  $\xi_j \in \mathcal{M}_n$  pois  $\alpha(t) \in \mathcal{R}_X^k$ , para qualquer  $t$ , portanto esse campo se anula na origem; temos, para qualquer inteiro positivo  $k$ ,

$$T_f\mathcal{R}_X^k f = j^k(\Theta_X^0 f).$$

Fazendo analogia com o grupo  $\mathcal{R}$ , definimos:

**Definição 2.9.** *O espaço tangente à  $\mathcal{R}_X$ -órbita em um germe  $f$  é o conjunto:*

$$\Theta_X^0 f = \{\delta(f) : \delta \in \Theta_X^0\}.$$

*O espaço tangente estendido à  $\mathcal{R}_X$ -órbita em um germe  $f$  é o conjunto:*

$$\Theta_X f = \{\delta(f) : \delta \in \Theta_X\}.$$

Assim como é feito com a  $\mathcal{R}$ -equivalência, queremos determinar métodos que ajudem a classificar germes sob a  $\mathcal{R}_X$ -equivalência. Apesar do grupo  $\mathcal{R}_X$  ser um subgrupo geométrico do grupo  $\mathcal{R}$  (veja [12], página 47) e portanto garantir que os teoremas de determinação (veja [11], parte III, seção 9) se apliquem à ele, damos a seguir uma demonstração desses teoremas cuja interpretação é mais simples:

**Teorema 2.10** (Teorema da Determinação Finita). *Dado um germe  $f \in \mathcal{M}_n$  se o ideal  $\Theta_X^0 f$  contém alguma potência do ideal maximal  $\mathcal{M}_n$  então  $f$  é finitamente  $\mathcal{R}_X$ -determinado. Mais ainda, se  $\mathcal{M}_n^k \subset \Theta_X^0 f$  então  $f$  é  $k$ - $\mathcal{R}_X$ -determinado.*



**Demonstração:** Seja  $g \in \mathcal{M}_n$  tal que  $j^k g = j^k f$  logo  $f - g \in \mathcal{M}_n^{k+1}$ .

Definimos a família

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}, 0) \\ (x, t) &\longmapsto F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x). \end{aligned}$$

Se  $F_t(x) = F(x, t)$  então  $F_1 = g$  e  $F_0 = f$ . Seja  $I$  um compacto de  $\mathbb{C}$  contendo 0 e 1 então basta mostrar que  $F_s$  é  $\mathcal{R}_X$ -equivalente à  $F_t$ , para todos  $t, s \in I$ . Fixamos  $s$  em  $I$ , por sua compacidade, basta mostrar tal fato para todo  $t$  suficientemente próximo de  $s$ . Seja  $s_0 \in I$  fixado arbitrariamente. Queremos mostrar que existe uma família de difeomorfismos  $H : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  preservando  $X$ , que satisfaz:

- (i)  $H(x, s_0) = x$ ;
- (ii)  $H(0, t) = 0$ ;
- (iii)  $F(H(x, t), t) = F(x, s_0)$ .

Supondo que (i) é válido e tomando  $t = s_0$  então (iii) é automaticamente satisfeita, assim (iii) pode ser trocada pela afirmação de que  $F(H(x, t), t)$  não depende de  $t$ , i.e.,

$$(iii)', \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j}(H(x, t), t) \frac{\partial H_j}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(H(x, t), t) = 0;$$

para mostrar (i), (ii) e (iii)' basta encontrar um campo  $\xi$  na origem de  $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$  tal que

$$(iv) \quad \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial F}{\partial x_j} = -\frac{\partial F}{\partial t};$$

$$(v) \quad \xi_j(0, t) = 0, \text{ para qualquer } j = 1, \dots, n;$$

$$(vi) \quad \xi_t \in \Theta_X^0, \text{ para cada } t \text{ fixo};$$

se tal campo existir, o seu fluxo  $H$  preserva  $X$ , para cada  $t$  fixo (pelo Teorema 2.7) e

$$(vii) \quad \frac{\partial H}{\partial t}(x, t) = \xi(H(x, t), t);$$

satisfazendo  $H(x, s_0) = x$ . Consideramos o P.V.I.

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t}(x, t) = \xi(H(x, t), t) \\ H(0, s_0) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

tem solução única  $H(0, t) = 0$  (veja [1], página 56). E, (ii) está satisfeita; o item (iii)' pode ser trocado por (iv) e (vii). Portanto resta mostrar a existência de um campo  $\xi$  satisfazendo (iv), (v) e (vi). O argumento é algébrico e não depende da escolha de  $s_0$ . Vejamos que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = g - f \in \mathcal{M}_n^{k+1}$$

e mais se  $\eta \in \Theta_X^0$  então, tomando  $\eta(F) = \sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial F}{\partial x_j}$  e considerando o germe  $(x_1, \dots, x_n, t) \mapsto t$  como um elemento de  $\mathcal{O}_{n+1}$  que só depende de  $t$

$$\eta(f) = \sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial F}{\partial x_j} + t \sum_{j=1}^n \eta_j \left[ \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \right] \in \Theta_X^0 F + \mathcal{M}_{n+1} \mathcal{M}_n^{k+1}$$

e temos

$$\mathcal{M}_n^{k+1} \subseteq \mathcal{M}_n^k \subseteq \Theta_X^0 f \subseteq \Theta_X^0 F + \mathcal{M}_{n+1} \mathcal{M}_n^{k+1}$$

segue do Lema de Nakayama 1.3 que

$$\mathcal{M}_n^{k+1} \subseteq \Theta_X^0 F$$

e provamos a existência de tal campo  $\xi$  tangente à variedade  $X$ .

Esta demonstração também pode ser encontrada em [11]. ■

Observemos que o Teorema 2.11, a seguir, é quase uma recíproca do Teorema anterior 2.10.

**Teorema 2.11.** *Se  $f$  é  $k$ - $\mathcal{R}_X$ -determinado então  $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \Theta_X f$ .*

**Demonstração:** Consideramos a projeção

$$\begin{aligned} \Pi : J^{k+1}(n, 1) &\longrightarrow J^k(n, 1) \\ j^{k+1}g &\longmapsto \Pi(j^{k+1}g) = j^k g. \end{aligned}$$

Afirmamos que  $\Pi^{-1}(j^k f) \subseteq \mathcal{R}_X^{k+1} \cdot j^{k+1} f$ . De fato, dado  $g \in \Pi^{-1}(j^k f)$ , como  $f$  é  $k$ - $\mathcal{R}_X$ -determinado então  $g \sim_{\mathcal{R}_X} f$  e existe  $h \in \mathcal{R}_X$  tal que  $f \circ h = g$  assim,

$$g = j^{k+1} g = j^{k+1}(f \circ h) \in \mathcal{R}_X^{k+1} \cdot j^{k+1} f$$

sendo

$$T_{j^{k+1} f} \mathcal{R}_X^{k+1} \cdot j^{k+1} f = j^{k+1}(\Theta_X f) = \frac{\Theta_X f + \mathcal{M}_n^{k+2}}{\mathcal{M}_n^{k+2}}$$

e

$$\begin{aligned} T_{j^{k+1} f} \Pi^{-1}(j^k f) &= (d\Pi)^{-1}(j^{k+1} f)(T_{j^k f}\{j^k f\}) = (d\Pi)^{-1}(j^{k+1} f)(0) \\ &= \ker d\Pi(j^{k+1} f) = \Pi^{-1}(0) = \frac{\mathcal{M}_n^{k+1}}{\mathcal{M}_n^{k+2}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\mathcal{M}_n^{k+1}}{\mathcal{M}_n^{k+2}} \subseteq \frac{\Theta_X f + \mathcal{M}_n^{k+2}}{\mathcal{M}_n^{k+2}} \implies \mathcal{M}_n^{k+1} \subseteq \Theta_X f$$

pelo Lema de Nakayama 1.3. ■

Portanto, pelos Teoremas 2.10 e 2.11 temos que, dado um germe  $f \in \mathcal{M}_n$

$f$  é finitamente  $\mathcal{R}_X$ -determinado  $\iff \Theta_X^0 f \supset \mathcal{M}_n^p$ , para algum  $p$ .

O Corolário a seguir fornece um critério geométrico para estabelecer a  $\mathcal{R}_X$ -determinação de um germe:

**Corolário 2.12.** *Um germe  $f \in \mathcal{M}_n$  é finitamente  $\mathcal{R}_X$ -determinado se, e somente se, o germe de*

$$\{x \in \mathbb{C}^n : \delta(f)(x) = 0, \forall \delta \in \Theta_X\}$$

em 0 é igual a  $\{0\}$  ou é vazio.

**Demonstração:** Observemos que

$$\mathcal{V}(\Theta_X f) = \left( \{x \in \mathbb{C}^n : \delta(f)(x) = 0, \forall \delta \in \Theta_X\}, 0 \right).$$

Vamos supor que  $f$  é finitamente  $\mathcal{R}_X$ -determinado, então pelo Teorema anterior 2.11, existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{M}_n^p \subset \Theta_X f$ , olhando para as variedades desses elementos temos

$$\{0\} = \mathcal{V}(\mathcal{M}_n^p) \supset \mathcal{V}(\Theta_X f) = \left( \{x \in \mathbb{C}^n : \delta(f)(x) = 0, \forall \delta \in \Theta_X\}, 0 \right)$$

portanto o germe de  $\{x \in \mathbb{C}^n : \delta(f)(x) = 0, \forall \delta \in \Theta_X\}$  é vazio ou é  $\{0\}$ .

Por outro lado, se  $\mathcal{V}(\Theta_X f)$  é vazio ou  $\{0\}$  então  $\mathcal{I}(\mathcal{V}(\Theta_X f))$  é igual a  $\mathcal{M}_n$  ou a  $\mathcal{O}_n$ , segue, pelo Teorema 1.6, que

$$\mathcal{M}_n \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{V}(\Theta_X f)) = \text{Rad}(\Theta_X f).$$

Sabemos que  $\Theta_X f$  contem uma potência do seu radical (veja [3], página 83) logo

$$\mathcal{M}_n^p \subseteq (\text{Rad}(\Theta_X f))^p \subset \Theta_X f, \text{ para algum } p \in \mathbb{N},$$

pelo Teorema 2.10, temos que  $f$  é finitamente  $\mathcal{R}_X$ -determinado. ■

**Definição 2.13.** Dizemos que um germe  $f \in \mathcal{M}_n$  possui uma singularidade isolada na origem em  $X$  quando o germe de

$$\{x \in \mathbb{C}^n : \delta(f)(x) = 0, \forall \delta \in \Theta_X\}$$

na origem é igual a  $\{0\}$ .

Observemos que, pela Definição acima e pelo Corolário 2.12, se um germe possuir uma singularidade isolada na origem em  $X$  então o germe é finitamente  $\mathcal{R}_X$ -determinado.

**Exemplo 2.14.** Seja  $X := x^3 - y^2 = 0$  uma variedade analítica de  $\mathbb{C}^2$ . Vemos na Proposição 4.10 que os seus campos de vetores tangentes são gerados por

$$\xi_1(x, y) = 2x \frac{\partial}{\partial x} + 3y \frac{\partial}{\partial y} \text{ e } \xi_2(x, y) = 2y \frac{\partial}{\partial x} + 3x^2 \frac{\partial}{\partial y}.$$

Consideramos os germes de função:

$$f(x, y) = y^3 + xy^2 \text{ e } g(x, y) = 3x^3 + xy + 4y^2$$

assim,

$$\Theta_X f = \langle 8xy^2 + 9y^3, 6x^3y + 9x^2y^2 + 2y^3 \rangle$$

$$\Theta_X g = \langle 18x^3 + 5xy + 24y^2, 3x^3 + 42x^2y + 2y^2 \rangle$$

e

$$\mathcal{V}(\Theta_X f) = \{(x, 0) : x \in \mathbb{C}\}$$

$$\mathcal{V}(\Theta_X g) = \{(0, 0)\}$$

então  $f$  não é finitamente  $\mathcal{R}_X$ -determinado e  $g$  é finitamente  $\mathcal{R}_X$ -determinado.

## 2.2 Deformações e Desdobramentos

**Definição 2.15.** *Seja  $f_0 \in \mathcal{O}_n$ .*

(a) *Um germe  $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^r, 0) \rightarrow \mathbb{C}$  é uma deformação de  $f_0$  se  $F(x, 0) = f_0(x)$ .*

*A deformação  $F$  é denotada por  $(F, r)$ ;*

(b) *Um germe  $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^r, 0) \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^r$  é um desdobramento de  $f_0$  se*

- $F(x, a) = (f(x, a), a)$  e,
- $f(x, 0) = f_0(x)$ .

As definições abaixo são análogas para um germe de desdobramento.

**Definição 2.16.** *Seja  $f_0 \in \mathcal{O}_n$ .*

(a) *Duas deformações  $(F, r)$  e  $(G, q)$  do germe  $f_0$  são isomorfas se existir uma aplicação  $(\Phi, \lambda) : (F, r) \rightarrow (G, q)$ , denominada  $\mathcal{R}_X$ -aplicação de deformações tal que:*

1.  $\Phi(x, a) = (\phi(x, a), a)$  satisfazendo

- $\phi(x, 0) = x$ , para todo  $x \in (\mathbb{C}^n, 0)$ ;
- Para cada  $a_0 \in \mathbb{C}^q$  suficientemente próximo da origem fixado,

$$\phi(\cdot, a_0) : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}^n$$

*pertence à  $\mathcal{R}_{e_X}$ .*

2. *Um germe  $\lambda : (\mathbb{C}^q, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^r, 0)$ .*

3.  $F(\phi(x, a), \lambda(a)) = G(x, a)$ .

(b) *Uma deformação  $(F, r)$  de  $f_0$  é  $\mathcal{R}_X$ -trivial se for isomorfa à deformação constante  $(x, a) \mapsto f_0(x)$ .*

(c) *Uma deformação  $(F, r)$  de  $f_0$  é  $\mathcal{R}_X$ -versal se para qualquer deformação  $(G, q)$  de  $f_0$  existir uma  $\mathcal{R}_X$ -aplicação de deformações  $(\Phi, \lambda)$  de  $(F, r)$  em  $(G, q)$ .*

**Teorema 2.17.** *Uma deformação  $(F, r)$  de um germe  $f$  é  $\mathcal{R}_X$ -versal se, e somente se,*

$$\Theta_X f + \mathbb{C} \left\{ \frac{\partial F}{\partial a_1}(x, 0), \frac{\partial F}{\partial a_2}(x, 0), \dots, \frac{\partial F}{\partial a_r}(x, 0) \right\} = \mathcal{O}_n.$$

**Demonstração:** Veja [11], página 44.

**Corolário 2.18.** *Uma deformação  $(F, r)$  de um germe  $f$  é  $\mathcal{R}_X$ -versal se, e somente se*

$$\mathbb{C} \left\{ \frac{\partial F}{\partial a_1}(x, 0), \frac{\partial F}{\partial a_2}(x, 0), \dots, \frac{\partial F}{\partial a_r}(x, 0) \right\}$$

geram o espaço quociente  $\frac{\mathcal{O}_n}{\Theta_X f}$ .

**Demonstração:** Consequência imediata do Teorema 2.17. ■

**Definição 2.19.** *Duas deformações de mesmo parâmetro  $(F, r)$  e  $(G, r)$  de um germe  $f$  são  $\mathcal{R}_X$ -equivalentes se existir duas  $\mathcal{R}_X$ -aplicações de deformações  $(\Phi, \lambda) : (F, r) \rightarrow (G, r)$  e  $(\Psi, \mu) : (G, r) \rightarrow (F, r)$  que satisfazem:*

- $\Phi(x, a) = (\phi(x, a), a)$  e  $\Psi(y, b) = (\psi(y, b), b)$ ;
- $(\Phi(\psi(y, b), \mu(b)), \lambda(\mu(b))) = (y, b)$  e  $(\Psi(\phi(x, a), \lambda(a)), \mu(\lambda(a))) = (x, a)$ .

**Teorema 2.20.** *Quaisquer duas deformações  $\mathcal{R}_X$ -versais de mesmo parâmetro de um mesmo germe são  $\mathcal{R}_X$ -equivalentes.*

**Demonstração:** Veja [11], página 47.

## 2.3 Germes estáveis

A idéia de um germe estável  $f$  é que qualquer deformação de  $f$  é equivalente a  $f$ , ou seja, um germe estável deve ser a sua própria deformação versal. Entretanto essa idéia não é totalmente correta. Por exemplo, tomando-se

$$(X, 0) = \emptyset \quad \text{e} \quad f(x) = \sum_{j=1}^n x_j^2,$$

para  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$  certamente gostaríamos que  $f$  fosse estável mas o germe  $(x, t) \mapsto f(x) + t$  é uma deformação versal não-trivial. Isso nos leva a seguinte definição:

**Definição 2.21.** *Um germe  $f \in \mathcal{M}_n$  é  $\mathcal{R}_X$ -estável se a deformação à 1-parâmetro  $F(x, t) = f(x) + t$  é uma deformação  $\mathcal{R}_X$ -versal.*

**Definição 2.22.** *Se  $f \in \mathcal{M}_n$  possui uma singularidade isolada na origem em  $X$  então  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\Theta_X f}$  é chamada de multiplicidade de  $f$  sobre  $X$  na origem. Notação:  $\mu_X(f)$ .*

Seja  $f \in \mathcal{M}_n$  um germe com uma singularidade isolada na origem em  $X$ . Então

1.  $f$  é  $\mathcal{R}_X$ -estável se, e somente se, 1 gera  $\frac{\mathcal{O}_n}{\Theta_X f}$ ,  $\Theta_X f = \mathcal{M}_n$  e  $\mu_X(f) = 1$ .
2.  $\mu_X(f) = 0$  e  $\Theta_X f = \mathcal{O}_n$  se, e somente se,  $f$  é a sua deformação  $\mathcal{R}_X$ -versal.

**Proposição 2.23.** *Sejam  $f \in \mathcal{M}_n$  um germe  $\mathcal{R}_X$ -estável e  $(F, r)$  uma deformação de  $f$ . Então para todo  $a \in (\mathbb{C}^r, 0)$ , suficientemente próximo da origem, existe um ponto  $x(a)$  de  $X$ , dependendo suavemente de  $a$  e um germe de difeomorfismo  $\varphi_a : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}^n$  que também depende suavemente de  $a$ , que leva  $(X, 0)$  em  $(X, x(a))$ , tais que  $f(\varphi_a(x)) = F(x, a) + \text{constante}$ .*

**Demonstração:** Como  $f$  é  $\mathcal{R}_X$ -estável então  $G(x, t) = f(x) + t$  é uma deformação  $\mathcal{R}_X$ -versal logo existe uma  $\mathcal{R}_X$ -aplicação de deformações,  $(\Phi, \lambda) : (G, 1) \rightarrow (F, r)$  tal que  $F(x, a) = G(\phi(x, a), \lambda(a)) = f(\phi(x, a)) + \lambda(a)$ . Tomamos o ponto  $x(a) = \phi(0, a) \in X$  e lembramos que  $\phi(\cdot, a) \in \mathcal{R}_{e_X}$  para cada  $a$  suficientemente pequeno e ambos dependendo suavemente de  $a$ ; seja  $\varphi_a(x) = \phi(x, a)$ . Assim, temos  $f(\varphi_a(x)) = F(x, a) - \lambda(a)$ , com  $a$  fixo.

Como  $\varphi_a \in \mathcal{R}_{e_X}$ ,  $\varphi_a$  leva  $(X, 0)$  em  $(X, x(a))$ .

Esta demonstração também pode ser encontrada em [8]. ■

**Proposição 2.24.** *Todo germe  $f \in \mathcal{M}_n$ ,  $\mathcal{R}_X$ -estável é 2- $\mathcal{R}_X$ -determinado.*

**Demonstração:** Como  $f$  é  $\mathcal{R}_X$ -estável, a deformação  $F(x, t) = f(x) + t$  é  $\mathcal{R}_X$ -versal e portanto  $\frac{\partial F}{\partial t}(x, 0) = 1$  gera  $\frac{\mathcal{O}_n}{\Theta_X f}$  o que acarreta  $\mathcal{M}_n = \Theta_X f$  e o resultado segue pelo Teorema 2.10.

Esta demonstração também pode ser encontrada em [8]. ■

**Proposição 2.25.** *Seja  $f \in \mathcal{M}_n$  e suponhamos que  $\Theta_X = \Theta_X^0$ . Então*

1.  *$f$  é  $\mathcal{R}_X$ -estável se, e somente se,  $\mathcal{M}_n \subset \Theta_X f + \mathcal{M}_n^2$ ;*
2. *Os germes  $\mathcal{R}_X$ -estáveis são 1- $\mathcal{R}_X$ -determinados;*
3. *Quaisquer dois germes  $\mathcal{R}_X$ -estáveis são  $\mathcal{R}_X$ -equivalentes.*

**Demonstração:** Veja [8], página 65.

## 2.4 Funções com pontos críticos isolados

Nesta seção procuramos condições no germe de subvariedade analítica  $X$  que assegurem que existam germes  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  com ponto crítico isolado na origem em  $X$ . Estas condições são dadas em termos de uma determinada estratificação de  $X$ , a qual passamos a descrever; para maiores detalhes veja [8] e [24].

**Definição 2.26.** *Uma estratificação de um subconjunto  $V$  de uma variedade diferenciável  $M$  é uma partição  $\mathcal{X}$  de  $V$  em subvariedades diferenciáveis, chamadas de estratos, de  $M$  que satisfazem:*

- *Todo ponto em  $V$  possui uma vizinhança em  $M$  que intersecta um número finito de estratos;*
- *A condição de fronteira: Se  $X, Y \in \mathcal{X}$  e  $\bar{X} \cap Y \neq \emptyset$  então  $Y \subset \partial X$ .*

Sejam  $X$  uma subvariedade analítica reduzida de  $\mathbb{C}^n$  e  $U$  uma vizinhança suficientemente pequena da origem de  $\mathbb{C}^n$ . Dado um ponto  $x \in U$ , denotamos por

$$\Theta_X(x) = \{\delta(x) \in \mathbb{C}^n : \delta \in \Theta_X\}$$



o subespaço linear de  $T_x U$ .

**Lema 2.27.** *Sejam  $X$  uma subvariedade analítica reduzida e  $U$  uma vizinhança suficientemente pequena da origem de  $\mathbb{C}^n$ . Então existe uma única estratificação  $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$  de  $U$  com as seguintes propriedades:*

1. *Cada estrato  $X_\alpha$  é uma subvariedade conexa imersa de  $U$  e, ainda*

$$U = \dot{\bigcup}_{\alpha \in I} X_\alpha;$$

2. *Se  $x \in U$  está no estrato  $X_\alpha$  então o espaço tangente  $T_x X_\alpha$  coincide com  $\Theta_X(x)$ ;*
3. *Se  $X_\alpha$  e  $X_\beta$  são dois estratos distintos com  $X_\alpha \cap \overline{X_\beta} \neq \emptyset$  então  $X_\alpha \subset \partial X_\beta$ .*

**Demonstração:** Veja [24], página 280.

**Definição 2.28.** *A estratificação do Lema 2.27,  $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$  de  $U$  é chamada de estratificação logarítmica de  $X$  e cada estrato  $X_\alpha$  é chamado de estrato logarítmico.*

**Proposição 2.29.** *Sejam  $X$  uma subvariedade analítica reduzida e  $U$  uma vizinhança suficientemente pequena da origem de  $\mathbb{C}^n$ . Então*

1. *Se  $X$  é equidimensional então as componentes conexas do conjunto  $U \setminus X$  e do conjunto  $X \setminus \text{sing}(X)$  são estratos logarítmicos;*
2. *Se  $x$  e  $y$  são pontos do mesmo estrato logarítmico de  $X$  então existem vizinhanças  $V$  e  $W$  de  $x$  e  $y$  respectivamente, e uma aplicação biholomorfa  $\varphi : (V, x) \rightarrow (W, y)$  que preserva  $X$ ;*
3. *Seja  $X_\alpha$  um estrato logarítmico de  $X$  de dimensão  $m$ . Então em cada ponto  $x \in X_\alpha$  existem uma vizinhança  $V$  de  $x$ , um sistema de coordenadas local  $z_1, \dots, z_n$  e uma aplicação  $h : V \rightarrow \mathbb{C}^n$  tais que*
  - (i)  $h(z_1, \dots, z_n) = h(z_1, \dots, z_{n-m}, 0, \dots, 0)$ ;
  - (ii)  $X \cap V = \{z \in \mathbb{C}^n : h(z) = 0\}$ ;

(iii)  $X_\alpha \cap V = \{z_1 = \dots = z_{n-m} = 0\}$ .

**Demonstração:** Veja [24], páginas 282 e 284.

Na Proposição 2.29, a segunda afirmação afirma que dois germes  $(X, x)$  e  $(X, y)$  em pontos de um mesmo estrato logarítmico são isomorfos. A terceira afirmação diz que em uma vizinhança de um ponto  $x \in \mathbb{C}^n$ , a variedade  $X$  e, portanto sua estratificação logarítmica é analiticamente um produto cartesiano dos estratos logarítmicos que contêm  $x$ .

**Definição 2.30.** *Um germe  $X$  é holonômico se para alguma vizinhança  $U$  da origem a estratificação logarítmica de  $U$  possuir um número finito de estratos.*

Seja  $r$  um inteiro positivo e consideramos o germe

$$A_r = \left( \{x \in U : \dim_{\mathbb{C}} \Theta_X(x) \leq r\}, 0 \right)$$

$A_r$  é um germe analítico fechado e é a união de todos estratos logarítmicos de dimensão  $\leq r$ . E seja

$$B_r = A_r \setminus A_{r-1} = \left( \{x \in U : \dim_{\mathbb{C}} \Theta_X(x) = r\}, 0 \right).$$

Observemos que para  $x \in B_r$  suficientemente próximo da origem  $\dim_x B_r \geq r$ .

**Proposição 2.31.** *Um germe  $X$  é holonômico se, e somente se,  $\dim_0 A_r \leq r$ , para todo  $r$ , com  $m \leq r \leq n$ , onde  $m$  é a dimensão do estrato  $X_\alpha$  que contém a origem.*

**Demonstração:** Veja [24], página 287.

**Proposição 2.32.** *Se o germe  $X$  não é holonômico então para algum inteiro  $r$ , com  $0 \leq r \leq n - 1$  temos  $\dim B_r > r$ .*

**Demonstração:** Veja [8], página 28.

**Proposição 2.33.** *Seja  $f \in \mathcal{M}_n$  um germe com um ponto crítico isolado na origem em  $X$ . Suponhamos que  $F_t$  seja uma deformação analítica de  $f$ . Então, para  $t$  suficientemente próximo da origem, todos os pontos críticos de  $F_t$  são isolados.*

**Demonstração:** Consideramos o conjunto

$$\Sigma = \{(x, t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} : x \text{ é ponto crítico de } F_t\}.$$

Seja  $\pi : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$  a projeção no segundo fator,  $\pi(x, t) = t$ . Então  $\Sigma$  é uma variedade analítica, pois

$$\Sigma = \mathcal{V}\left(\frac{\partial F_t}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F_t}{\partial x_n}\right) \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}.$$

Por hipótese  $0 \in \mathbb{C}^n$  é um ponto crítico isolado de  $F_0 = f$  acarretando que  $\pi$  é uma aplicação finita em uma vizinhança da origem (veja [17], página 62), i.e., imagem inversa do ponto nesta vizinhança é um conjunto finito.

Esta demonstração também pode ser encontrada em [8]. ■

**Corolário 2.34.** *Seja  $f \in \mathcal{M}_n$  um germe com ponto crítico isolado na origem em  $X$ . Suponhamos que  $\ker(df(0))$  contenha  $\lim_{t \rightarrow 0} \Theta_X(x(t))$ , para algum caminho analítico  $x : [0, \varepsilon) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ , com  $x(0) = 0$ . Então existe uma deformação analítica  $F_t$ ,  $t \in [0, \varepsilon)$  de  $f$  tal que  $F_t$  possui um ponto crítico isolado em  $x(t)$  em  $X$ .*

**Demonstração:** Seja  $l_t$  uma família de formas lineares com  $l_0 = df(0)$  e  $l_t \supset \Theta_X(x(t)) = \{\delta(x(t)) : \delta \in \Theta_X\}$ , para  $t \in [0, \varepsilon)$ , definimos

$$F_t(x) = f(x) + l_t(x) - df(x(t))(x).$$

$$F_0(x) = f(x) + l_0(x) - df(x(0))(x) = f(x) + df(0)(x) - df(0)(x) = f(x).$$

$$dF_t(x(t)) = df(x(t)) + l_t - df(x(t)) = l_t.$$

Portanto  $F_t$  tem pontos críticos em  $x(t)$ , para todo  $t \in [0, \varepsilon)$ , já que  $l_t$  foram tomadas de forma que  $l_t \supset \Theta_X(x(t))$ . Como  $F_t$  é uma deformação de  $f$ , pela Proposição anterior 2.33, todos os pontos críticos de  $F_t$  são isolados.

Esta demonstração também pode ser encontrada em [8]. ■

**Lema 2.35.** *Dado uma subvariedade analítica  $X$ . Sejam  $x$  um ponto suave de  $B_r$  e  $f : (\mathbb{C}^n, x) \rightarrow \mathbb{C}$  com uma singularidade isolada em  $x$ . Então a dimensão de  $B_r$  em  $x$  é menor ou igual à  $r$ .*

**Demonstração:** Suponhamos que  $\dim_x B_r \geq r + 1$ . Se  $\delta_1, \dots, \delta_r$  estão em  $\Theta_{(X,x)}$  e são linearmente independentes em  $x$  (tais campos existem pois estamos supondo  $\dim_x B_r > r$ ) então para  $y \in B_r$  suficientemente próximo de  $x$ , temos que  $\delta_1(y), \dots, \delta_r(y)$  são linearmente independentes e  $\langle \delta_1(y), \dots, \delta_r(y) \rangle$  está contido em  $\Theta_X(y)$ ; pela definição de  $B_r$ , sabemos que  $\dim \Theta_X(y) = r$  portanto esse conjunto de vetores  $\delta_1(y), \dots, \delta_r(y)$  geram  $\Theta_X(y)$ . O germe de variedade em  $x$  formado pelos pontos críticos de  $f$  em  $B_r$  é igual à

$$\left( \{p \in B_r : \delta_1(f)(p) = \dots = \delta_r(f)(p) = 0\}, x \right)$$

e tem dimensão maior ou igual à 1 e assim  $f$  não possui uma singularidade isolada em  $x$ .

Esta demonstração também pode ser encontrada em [8]. ■

**Teorema 2.36.** *Seja  $U$  uma vizinhança suficientemente pequena da origem de  $\mathbb{C}^n$ . Então  $(X, x)$  suporta um germe com ponto crítico isolado para cada ponto  $x \in X \cap U$  se, e somente se,  $X$  é holonômico.*

**Demonstração:** Veja [8], página 66. ■

**Teorema 2.37.** *O conjunto dos germes  $f \in \mathcal{M}_n$  com pontos críticos não-isolados em  $X$  tem codimensão infinita no espaço de todos os germes se, e somente se,  $X$  é holonômico.*

**Demonstração:** Afirmamos que o conjunto dos germes com pontos críticos não-isolados tem codimensão infinita se para todo germe de polinômio  $p$  de grau  $d$  podemos encontrar um germe  $f$  com  $j^d f(0) = p$  e  $f$  gerando uma função tendo  $0 \in X$  como ponto crítico isolado.

Se  $X$  é holonômico sejam  $\{0\}, X_1, \dots, X_s$  seus estratos logarítmicos. Para cada inteiro positivo  $d$  seja  $\{\varphi_j : 1 \leq j \leq N\}$  o conjunto de monômios nas variáveis  $x_1, \dots, x_n$  de grau  $d$  e definimos

$$\begin{aligned} \varphi^d : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}, 0) \\ (x, u) &\longmapsto \varphi^d(x, u) = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x). \end{aligned}$$

Se  $g \in \mathcal{M}_n$  é uma função polinomial de grau  $d$  definimos

$$\begin{aligned} G : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}, 0) \\ (x, u) &\longmapsto g(x) + \varphi^{d+1}(x, u). \end{aligned}$$

A restrição de  $G$  à  $X_i \times \mathbb{C}^N$  é uma submersão, para  $i = 1, \dots, s$

Para uma vizinhança suficientemente pequena  $U$  de  $0 \in \mathbb{C}^n$  e quase todos  $s \in \mathbb{C}^N$  o germe  $G(\cdot, s) : X_i \cap U \rightarrow \mathbb{C}$  tem 0 como valor regular pelo Lema da Transversalidade de Thom (veja [15], página 53).

Afirmamos que qualquer germe  $h$  tem ponto crítico isolado na origem em  $X$ . Caso contrário podemos encontrar uma curva  $x : [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{C}^n$ , com  $x(0) = 0$ ,  $x(t) \neq 0$  para todo  $t > 0$  e com  $h$  tendo um ponto singular em  $x(t)$  (veja [10], página 148).

Mostremos que  $h(x(t)) = 0$ . Certamente  $x(t)$  está em algum estrato, digamos  $X_1$ . Agora,

$$\frac{d}{dt}(h(x(t))) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t}$$

e, como  $x(t)$  está em  $X_1$ , temos que

$$\delta(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial t}(t) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

está em  $T_{x(t)}X_1$ . Como  $h$  tem ponto singular em  $x(t)$  temos  $\frac{d}{dt}(h(x(t))) = 0$ , para todo  $t > 0$ , e como  $h(x(0)) = 0$  deduzimos que  $h(x(t)) = 0$  para todo  $t > 0$ . Isso contradiz a afirmação que  $h : X_1 \cap U \rightarrow \mathbb{C}$  tem a origem como valor regular.

Para a recíproca suponhamos que  $(X, 0)$  não seja holonômico, tal que para algum  $0 \leq r \leq n - 1$  temos que  $\dim B_r < r$ . Seja  $l$  uma forma linear determinando um hiperplano que contem o limite de espaços  $\Theta_X(x(t))$  para algum caminho analítico  $x(t)$ , com  $x(0) = 0$  e  $x(t) \in B_r$ , para  $t > 0$ . Afirmamos que nenhum germe  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  com  $df(0) = l$  tem ponto crítico isolado em 0. Se algum germe dessa forma possuir um ponto crítico isolado na origem então pela Proposição 2.33 existe uma deformação  $F_t$  de  $f$  com pontos críticos isolados em  $x(t) \in B_r$  e segundo [8], página 67, isso não é possível. Dessa forma germes com singularidades não-isoladas são de codimensão  $\leq n - 1$ .

Esta demonstração também pode ser encontrada em [8]. ■

# Capítulo 3

## A Transversal completa para o grupo $\mathcal{R}_X$

A classificação de germes é em grande parte um trabalho indutivo. Por exemplo, trabalhando com funções sob a  $\mathcal{R}$ -equivalência, se consideramos o germe  $f(x, y) = x^3$  então  $J(f) = \langle x^2 \rangle$ . Assim,  $T_f \mathcal{R}f = \langle x^3, x^2y \rangle$  e  $f$  não é um germe finitamente  $\mathcal{R}$ -determinado. Como  $j^3 f = f$ , o próximo passo para a classificação é considerar os 4-jatos  $g$  tais que  $j^3 g = f$ . Ou seja, consideramos os 4-jatos da forma:

$$g = x^3 + ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4$$

com  $a, b, c, d, e \in \mathbb{C}$  e obtemos 5 parâmetros para serem analisados.

Neste capítulo mostramos como o Teorema da Transversal Completa pode ser usado para obter métodos eficientes para a classificação de germes sob a  $\mathcal{R}_X$ -equivalência. Uma maneira de agrupar os germes é classificando todos os  $(k + 1)$ -jatos a partir de um determinado  $k$ -jato dado, obtendo assim uma árvore de classificação com vários níveis correspondentes ao grau do jato envolvido. O Teorema da Transversal Completa fornece uma lista reduzida de germes a serem analisados.

No caso do exemplo acima, o método afirma que qualquer 4-jato  $g$  com  $j^3 g = f$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente à um germe da forma:

$$x^3 + axy^3 + by^4$$

$a, b \in \mathbb{C}$  reduzindo-se o número de parâmetros a serem analisados para 2.

Portanto o método fornece uma lista reduzida de todos  $(k + 1)$ -jatos que são equivalentes a um  $k$ -jato dado.

O Teorema da Transversal Completa foi demonstrado na sua forma mais geral no artigo de J. Bruce, N. Kirk e A. Du Plessis [7], onde foi usado o Lema de Mather. Para o caso particular do subgrupo  $\mathcal{R}_X$ , J. Bruce e J. West [9], demonstraram o Teorema usando as propriedades das deformações  $\mathcal{R}_X$ -triviais. A seguir descrevemos tais resultados:

**Teorema 3.1** (Lema de Mather). *Seja  $G$  um grupo de Lie agindo suavemente numa variedade diferenciável  $M$ . Seja  $W$  uma subvariedade conexa de  $M$ . Então  $W$  está contido em uma única órbita se, e somente se,*

1.  $T_w W \subset T_w Gw$ , para qualquer  $w \in W$ ;
2.  $\dim_{\mathbb{C}} T_w Gw$  independe da escolha de  $w \in W$ .

**Demonstração:** Veja [23], página 234.

Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita sobre  $\mathbb{C}$ ; dizemos que um conjunto não-vazio  $A$  é um espaço afim associado à  $V$  se existir uma aplicação  $V \times A \rightarrow A$  que leva cada par  $(v, a)$  em um elemento de  $A$ , denotado por  $a + v$ , satisfazendo as seguintes condições:

- (i)  $a + (v + u) = (a + v) + u$ , para quaisquer  $v, u \in V$  e qualquer  $a \in A$ ;
- (ii) Dados  $a, b \in A$  existe um único vetor  $v \in V$  tal que  $b = a + v$ ;

denotamos tal espaço vetorial por  $V_A$ .

Lembremos também que à todo grupo de Lie  $G$  podemos associar uma álgebra de Lie identificada com o espaço tangente à  $G$  na identidade,  $T_1 G$ . E, se temos uma ação de  $G$  em uma variedade diferenciável  $M$ , para cada  $x \in M$ , podemos associar a álgebra de Lie de  $G \cdot x$  com  $T_x(G \cdot x)$ , o espaço tangente da órbita de  $x$  sob  $G$  no ponto  $x$ .

**Teorema 3.2** (Teorema da Transversal Completa). *Seja  $G$  um grupo de Lie agindo suavemente em um espaço afim  $A$  associado a um espaço vetorial  $V_A$  e  $W \subset V_A$  um subespaço vetorial tal que*

$$T_{a+w}G(a+w) = T_aGa \quad (3.1)$$

para qualquer  $a \in A$  e qualquer  $w \in W$ . Então

1.  $a + (T_aGa \cap W) \subset Ga \cap (a + W)$ , para qualquer  $a \in A$ ;

2. Se  $a \in A$  e  $T$  é um subespaço vetorial de  $W$  tais que

$$W \subset T + T_aGa$$

então para qualquer  $w \in W$ , existem  $g \in G$  e  $t \in T$  tais que

$$g(a+w) = a+t$$

**Demonstração:**

1. Fixemos  $a \in A$  arbitrariamente. Vamos mostrar que  $N = a + (T_aGa \cap W) \subset Ga$ . Como  $N$  é subespaço afim de  $V_A$  então  $N$  é conexo.

Seja  $y \in N$ , com  $y = a + \beta$  onde  $\beta \in T_aGa \cap W \subseteq W$ . Por hipótese,

$$T_yGy = T_{a+\beta}G(a+\beta) = T_aGa$$

o que acarreta

$$T_yN = T_aGa \cap W \subset T_yGy;$$

$$\text{e, } \dim_{\mathbb{C}} T_yGy = \dim_{\mathbb{C}} T_aGa.$$

Portanto  $\dim_{\mathbb{C}} T_yGy$  independe de  $y$ . Pelo Lema de Mather 3.1,  $N$  está contido em uma única órbita, a saber,  $Ga$ .

2. Pelo item (1) temos

$$G(a+\beta) \cap (a+\beta+W) \supset a+\beta + (T_{a+\beta}G(a+\beta) \cap W)$$

para qualquer  $\beta \in W$ , o que implica

$$G(a+\beta) \cap (a+\beta+W) \supset a+\beta + (T_aGa_0 \cap W).$$



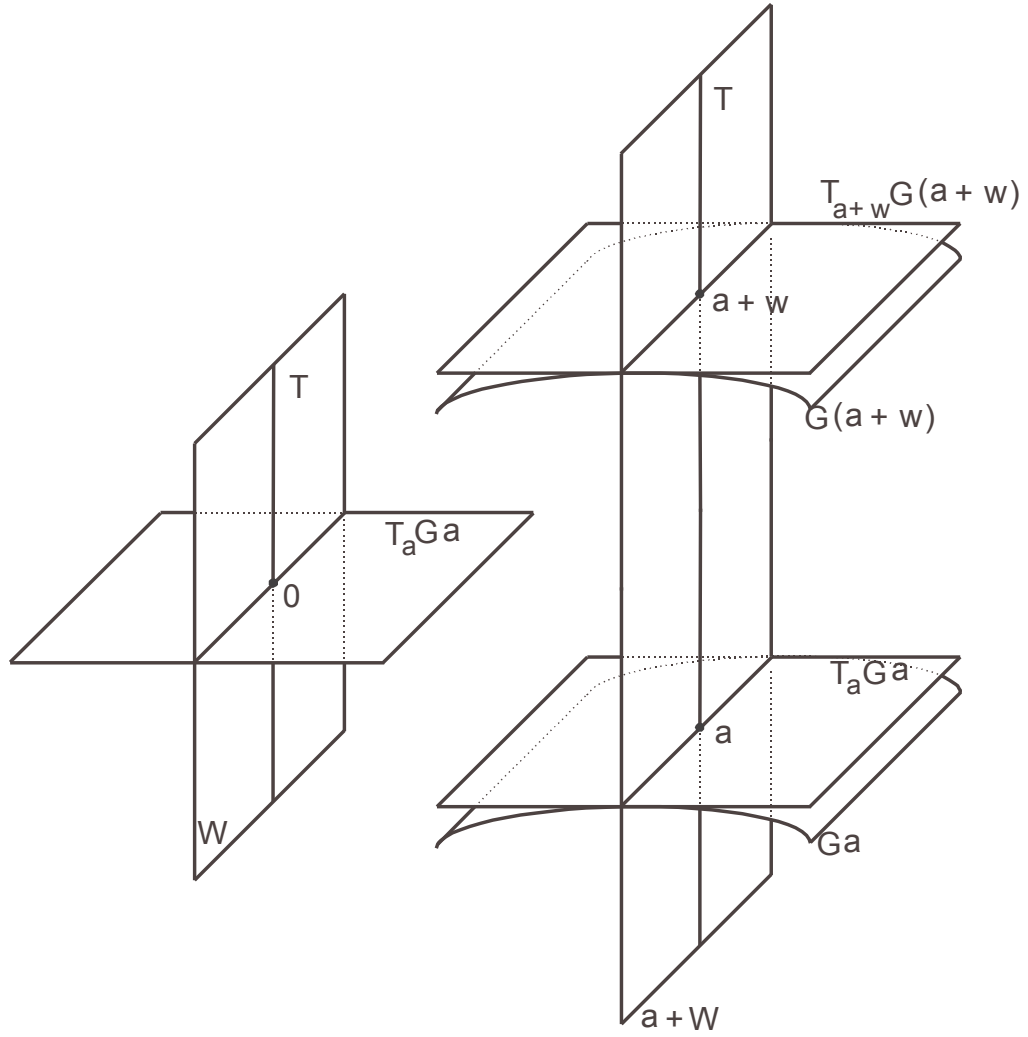


Figura 3.1: Transversal Completa

Portanto

$$\bigcup_{\beta \in T} G(a + \beta) \supset \bigcup_{\beta \in T} (a + \beta + (T_a G a \cap W)) = a + T + (T_a G a \cap W),$$

logo

$$\bigcup_{\beta \in T} G(a + \beta) \supset a + W,$$

e para qualquer  $\beta \in W$ ,  $a + \beta \in \bigcup_{t \in T} G(a + t)$ , assim  $a + \beta \in G(a + \tilde{t})$ , para algum  $\tilde{t} \in T$ .

Esta demonstração também pode ser encontrada em [7].

■

Nosso objetivo é aplicar o Teorema da Transversal Completa para o grupo  $\mathcal{R}_X$ ; enunciaremos o Teorema para qualquer subgrupo de Lie do grupo  $\mathcal{R}_1$  e mostramos que  $\mathcal{R}_{1_X}$  é um subgrupo de Lie de  $\mathcal{R}_1$ . Primeiramente definimos um subgrupo de Lie:

Sejam  $M$  e  $N$  duas variedades diferenciáveis e  $f : M \rightarrow N$  uma imersão. Tomamos  $L = f(M)$  e consideramos em  $L$  duas topologias:

1. A topologia induzida de  $N$ ;
2. A topologia dada pela imersão  $f$ , onde os abertos são da forma  $A \subset L$ , onde  $f^{-1}(A)$  é um aberto em  $M$ .

Uma subvariedade imersa  $L$  em  $N$  é quase-regular se para toda aplicação contínua  $\varphi : V \rightarrow N$ , com  $V$  espaço topológico localmente conexo e  $\varphi$  assumindo valores em  $L$  então  $\varphi : V \rightarrow L$  é contínua na topologia dada pela imersão; observemos que se a topologia induzida por  $N$  coincidir com a topologia dada pela imersão então a condição de quase-regularidade é sempre satisfeita.

Um subgrupo de Lie  $H$  de um grupo de Lie  $G$  é um subgrupo que também é uma variedade quase-regular.

Dado um grupo de Lie  $G$  agindo em um espaço afim  $A$  associado a um espaço vetorial  $V_A$  e  $W \subset V_A$  um subespaço vetorial, a principal hipótese do Teorema da Transversal Completa é a seguinte:

$$T_{a+w}G(a+w) = T_aGa.$$

O nosso objetivo é aplicar o Teorema para subgrupos do grupo  $\mathcal{R}$  então tomamos  $V_A = A = J^k(n, 1)$  considerando-o como um subespaço de  $J^{k+1}(n, 1)$ , sendo  $H^k$  o subespaço de  $J^k(n, 1)$  formado pelos polinômios homogêneos de grau  $k$  tomamos  $W = H^{k+1}$  nosso primeiro impulso é tomar  $G = \mathcal{R}^{k+1}$  o grupo dos  $(k+1)$ -jatos de difeomorfismos de  $\mathcal{R}$  mas nessas condições a hipótese do Teorema não é satisfeita pois, para quaisquer  $g \in J^k(n, 1)$  e  $p \in H^{k+1}$ ,

$$T_{g+p}\mathcal{R}^{k+1}(g+p) = j^{k+1}(\mathcal{M}_n J(f) + \mathcal{M}_n J(p))$$

e não podemos afirmar que o conjunto dos  $(k+1)$ -jatos de  $\mathcal{M}_n J(p)$  é nulo. Portanto  $T_{g+p}\mathcal{R}^{k+1}(g+p)$  não é igual à  $T_g\mathcal{R}^{k+1}g$ ; dessa forma definimos:

**Definição 3.3.** *Seja  $\mathcal{R}_1$  o subgrupo de  $\mathcal{R}$  formado pelos difeomorfismos cujos 1-jatos é a identidade.*

Analogamente ao grupo  $\mathcal{R}$ , no caso do grupo  $\mathcal{R}_1$  obtemos

$$T_f\mathcal{R}_1^k f = j^k(\mathcal{M}_n^2 J(f))$$

e a hipótese do Teorema da Transversal Completa é satisfeita para  $G = \mathcal{R}_1^{k+1}$ .

Um subgrupo  $\mathcal{H}$  de  $\mathcal{R}$  é um subgrupo de Lie de  $\mathcal{R}_1$  se, para cada inteiro positivo  $k$ , o grupo dos  $k$ -jatos  $\mathcal{H}^k$  é um subgrupo de Lie de  $\mathcal{R}_1^k$ .

**Teorema 3.4** (Transversal Completa para o grupo  $\mathcal{R}$ ). *Sejam  $\mathcal{H}$  um subgrupo de Lie de  $\mathcal{R}_1$  e  $f \in J^k(n, 1)$ . Se  $T \subset H^{k+1}$  é um subespaço vetorial tal que*

$$H^{k+1} \subset T + T_f\mathcal{H}^{k+1}f$$

*então todo  $(k+1)$ -jato  $g$ , com  $j^k g = f$  está na mesma  $\mathcal{H}^{k+1}$ -órbita do que algum  $(k+1)$ -jato da forma  $f + t$ , para algum  $t \in T$ .*

**Demonstração:** Sejam  $A = V_A = J^k(n, 1)$ ,  $W = H^{k+1}$  e  $G = \mathcal{H}^{k+1}$ . Olhando o espaço vetorial dos  $k$ -jatos incluído no espaço vetorial dos  $(k+1)$ -jatos, para se usar o Teorema da Transversal Completa 3.2 basta mostrar que:

$$T_{g+p}\mathcal{H}^{k+1}(g+p) = T_g\mathcal{H}^{k+1}g$$

para quaisquer  $g \in J^k(n, 1)$  e  $p \in H^{k+1}$ .

Sejam  $g \in J^k(n, 1)$ ,  $p \in H^{k+1}$  e  $\xi \in T_1\mathcal{H}$  temos

$$j^{k+1}\xi(f+p) = j^{k+1}\xi(f)$$

já que  $T_1\mathcal{H} \subset T_1\mathcal{R}_1$  então  $\xi$  tem seu 1-jato nulo e  $p$  é um polinômio homogêneo de grau  $k+1$ . Portanto para qualquer  $p \in H^{k+1}$  existem  $h \in \mathcal{H}^{k+1}$  e  $t \in T$  tais que

$$(f+p) \circ h = f+t,$$

ou seja, qualquer  $(k + 1)$ -jato  $g$ , com  $j^k g = j^k f$  é  $\mathcal{H}^{k+1}$ -equivalente à  $f + t$ , para algum  $t \in T$ .

Esta demonstração também pode ser encontrada em [7]. ■

Finalizando, queremos aplicar o Teorema da Transversal Completa, para o grupo  $\mathcal{R}_X$ . Analogamente ao grupo  $\mathcal{R}$  se consideramos  $G = \mathcal{R}_X^{k+1}$ ,  $A = V_A = J^k(n, 1)$  e  $W = H^{k+1}$ , a hipótese (3.1) não é satisfeita pois,

$$T_{f+p}\mathcal{R}_X^{k+1}(f + p) = j^{k+1}\left(\Theta_X f + \Theta_X p\right)$$

e não podemos afirmar que os  $(k + 1)$ -jatos de  $\Theta_X p$  são nulos; portanto consideramos campos em  $\Theta_X$  cujos 1-jatos são nulos e obtemos fluxos que são difeomorfismos cujos 1-jatos são a identidade.

**Definição 3.5.** Denotamos por  $\Theta_X^1$  o  $\mathcal{O}_n$ -submódulo de  $\Theta_X$  formado pelos campos cujos 1-jatos são nulos.

**Lema 3.6.** O grupo  $\mathcal{R}_{1X}$  é um subgrupo de Lie de  $\mathcal{R}_1$ .

**Demonstração:** Como  $\mathcal{R}_{1X}$  é um subgrupo de  $\mathcal{R}_1$  então para cada inteiro positivo  $k$  fixado, seja  $i_k : \mathcal{R}_{1X}^k \rightarrow \mathcal{R}_1^k$  a aplicação de inclusão. Então  $i_k$  é uma imersão e a topologia induzida por  $\mathcal{R}_{1X}^k$  coincide com a topologia dada por  $i_k$ . Portanto  $\mathcal{R}_{1X}$  é um subgrupo de Lie de  $\mathcal{R}_1$ . ■

**Teorema 3.7** (Transversal Completa para o grupo  $\mathcal{R}_X$ ). *Seja  $f \in J^k(n, 1)$ . Se  $T \subset H^{k+1}$  é um subespaço vetorial tal que*

$$H^{k+1} \subset T + T_f \mathcal{R}_{1X}^{k+1} f$$

*então todo  $(k + 1)$ -jato  $g$ , com  $j^k g = f$  é  $\mathcal{R}_{1X}^{k+1}$ -equivalente à  $f + t$ , para algum  $t \in T$ .*

Conforme foi observado anteriormente, o Teorema acima 3.7, foi demonstrado por J. Bruce, J. West em [9], usando-se apenas a abordagem das deformações  $\mathcal{R}_X$ -triviais; a qual passamos a descrever a seguir:

**Definição 3.8.** *Seja  $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um germe de uma família de funções à 1-parâmetro, com  $F(0, t) = 0$  para  $t$  próximo da origem.*

1.  *$F$  é uma família  $\mathcal{R}_X$ -trivial se existir uma família à 1-parâmetro de difeomorfismos  $H : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  que preservam  $X$ , com  $H(x, 0) = x$ ,  $H(0, t) = 0$  para  $t$  próximo da origem e*

$$F(H(x, t), t) = F(x, 0);$$

2. *Seja  $k$  um inteiro positivo.  $F$  é uma família  $k$ - $\mathcal{R}_X$ -trivial se existir uma família à 1-parâmetro de difeomorfismos  $H : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  que preservam  $X$ , com  $H(x, 0) = x$ ,  $H(0, t) = 0$  para  $t$  próximo da origem e*

$$F(H(x, t), t) = F(x, 0) + \phi(x, t)$$

para algum  $\phi \in \mathcal{M}_{n+1}^{k+1}$ .

Esta definição diz que se uma família  $F$  é  $\mathcal{R}_X$ -trivial então, para  $t$  próximo da origem fixado,  $F_t$  é  $\mathcal{R}_X$ -equivalente à  $F_0$ .

Observemos que uma família é  $k$ - $\mathcal{R}_X$ -trivial se ela é  $\mathcal{R}_X$ -trivial a menos de termos de grau  $k$ . Obviamente, uma família  $\mathcal{R}_X$ -trivial é  $k$ - $\mathcal{R}_X$ -trivial para todo inteiro positivo  $k$ .

A próxima Proposição fornece critérios para identificar se uma família é  $\mathcal{R}_X$ -trivial ou  $k$ - $\mathcal{R}_X$ -trivial, para algum  $k$ .

**Proposição 3.9.** *Seja  $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um germe tal que  $F(0, t) = 0$ , para  $t$  próximo da origem. Sejam  $\xi_1, \dots, \xi_p$  os germes de campos de vetores que geram  $\Theta_X^0$ . Então*

1.  *$F$  é  $\mathcal{R}_X$ -trivial se existir um germe  $\alpha : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow \mathbb{C}^p$  satisfazendo*

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i \xi_i(F) + \frac{\partial F}{\partial t} \equiv 0,$$

onde

$$\xi_i(F) = \sum_{j=1}^n \xi_{ij} \frac{\partial F}{\partial x_j}$$

ou, equivalentemente

$$\frac{\partial F}{\partial t} \in \Theta_X^0 F;$$

2.  $F$  é  $k$ - $\mathcal{R}_X$ -trivial se existir um germe  $\alpha : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow \mathbb{C}^p$  satisfazendo

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i \xi_i(F) + \frac{\partial F}{\partial t} \in \mathcal{M}_n^{k+1}$$

ou, equivalentemente

$$\frac{\partial F}{\partial t} \in \Theta_X^0 F + \mathcal{M}_n^{k+1}.$$

**Demonstração:**

(1) Suponhamos que exista tal  $\alpha$  e definimos o campo

$$\eta \equiv \sum_{i=1}^p \alpha_i \xi_i \equiv \sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

então a equação diferencial

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t}(x, t) = \eta(H(x, t), t) \\ H(x, 0) = x \end{cases} \quad (3.2)$$

tem solução definida em alguma vizinhança de  $(0, 0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$  (veja [1], página 56).

Ou seja, podemos encontrar  $H : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  satisfazendo (3.2).

O campo  $\eta$  é tangente à  $X$  pois é uma combinação de campos de  $\Theta_X^0$ ; pela Proposição 2.7, o fluxo gerado por  $\eta$ ,  $H_t$  preserva  $X$  para  $t$  próximo da origem.

Definimos, então, uma nova família

$$\begin{aligned} G : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}, 0) \\ (x, t) &\longmapsto G(x, t) = F(H(x, t), t), \end{aligned}$$

diferenciando em relação à  $t$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ F(H(x, t), t) \right] = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j}(H(x, t), t) \frac{\partial H_j}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(H(x, t), t) = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j}(H(x, t), t) \eta_j(H(x, t), t) + \frac{\partial F}{\partial t}(H(x, t), t) = \left( \sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial F}{\partial x_j} + \frac{\partial F}{\partial t} \right)(H(x, t), t) = 0 \end{aligned}$$

por (3.2) e, pela hipótese que  $\sum_{i=1}^p \alpha_i \xi_i(F) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$ .

Vemos que  $G$  não depende de  $t$ , i.e.,  $G(x, t) = G(x, 0)$  para  $t$  próximo da origem, portanto

$$F(H(x, t), t) = G(x, t) = G(x, 0) = F(H(x, 0), 0) = F(x, 0).$$

Observemos que  $\frac{\partial H}{\partial t}(0, t) = \eta(H(0, t), t)$  tem solução única  $H(0, t) = 0$  já que os campos  $\xi_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , se anulam na origem, então  $H$  tem as propriedades exigidas.

(2) Suponhamos que tal  $\alpha$  exista e seja  $H$  solução do P.V.I.

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t}(x, t) = \eta(H(x, t), t) \\ H(x, 0) = x \end{cases} \quad (3.3)$$

onde  $\eta = \sum_{i=1}^p \alpha_i \xi_i$ .

Da mesma forma que no item (1), como  $\xi_i$  são tangentes à  $X$ ,  $H_t$  preserva  $X$ . Se  $G(x, t) = F(H(x, t), t)$ ,

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x, t) = \left( \sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial F}{\partial x_j} + \frac{\partial F}{\partial t} \right)(H(x, t), t) \in \mathcal{M}_n^{k+1}.$$

Observando que  $\mathcal{M}_n^{k+1} = \langle x^I = x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \rangle$  onde  $|I| = \sum_{l=1}^n i_l = k + 1$  podemos escrever  $\frac{\partial G}{\partial t}$  como uma soma  $\sum G_I x^I$ , com  $|I| = k + 1$ . Então

$$G(x, t) - G(x, 0) = \int_0^t \frac{\partial G}{\partial u}(x, u) du = \sum_I \left( \int_0^t \frac{\partial G_I}{\partial u}(x, u) du \right) x^I \in \mathcal{M}_n^{k+1}$$

como  $G(x, 0) = F(x, 0)$  o resultado segue.

Esta demonstração também pode ser encontrada em [9]. ■

Como aplicação do Teorema 3.9 podemos demonstrar o Teorema da Transversal Completa para o grupo  $\mathcal{R}_X$ .

**Teorema 3.10.** *Sejam  $f \in \mathcal{M}_n$  e  $\{h_1, \dots, h_r\}$  uma coleção de polinômios homogêneos de grau  $k + 1$  tais que*

$$\Theta_X^1 f + \langle h_1, \dots, h_r \rangle + \mathcal{M}_n^{k+2} \supset \mathcal{M}_n^{k+1}.$$

Então qualquer  $g \in \mathcal{M}_n$  com  $j^k g = j^k f$  é  $\mathcal{R}_{1_X}$ -equivalente a um germe da forma:

$$f(x) + \sum_{i=1}^r u_i h_i(x) + \phi(x),$$

onde  $\phi \in \mathcal{M}_n^{k+2}$  e  $u_i \in \mathbb{C}$ .

**Demonstração:** Seja  $g \in \mathcal{M}_n$ , com  $j^k g = j^k f$  e consideramos a diferença  $g - f \in \mathcal{M}_n^{k+1}$ . Por hipótese, podemos escrever:

$$g - f = \eta(f) + \sum_{i=1}^r u_i h_i + \phi, \quad (3.4)$$

onde  $\eta = \sum \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j} \in \Theta_X^1$ ,  $u_i \in \mathbb{C}$  e  $\phi \in \mathcal{M}_n^{k+2}$ . Consideramos um compacto  $I$  de  $\mathbb{C}$  que contenha os pontos 1 e 0 e para cada ponto  $t_0 \in I$  definimos a família  $F^0 : \mathbb{C}^n \times I \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$F^0(x, t) = f(x) + (1 - t - t_0)(g - f)(x) + (t + t_0) \sum_{i=1}^r u_i h_i(x),$$

$F_t^0(x) = F^0(x, t)$  e  $F^0(0, t) = 0$ . Para cada  $t_0 \in I$  fixado, temos

$$\eta(F^0) = \eta(f) + (1 - t - t_0)(\eta(g - f)) + (t + t_0) \sum_{i=1}^r u_i \eta(h_i)$$

$$\frac{\partial F^0}{\partial t} = f - g + \sum_{i=1}^r u_i h_i = -\eta(f) - \phi$$

por (3.4) e lembrando que  $\eta$  tem o seu 1-jato nulo,

$$\eta(F^0) + \frac{\partial F^0}{\partial t} \in \mathcal{M}_n^{k+1}.$$

Pela Proposição 3.9 a família  $F^0$  é  $k$ - $\mathcal{R}_X$ -trivial.

Assim para cada  $t_0$  fixo e  $t$  próximo da origem existe uma família de difeomorfismos que preservam  $X$ ,  $H^0(x, t)$ , tal que

$$(F_t^0 \circ H_t^0)(x) = f(x) + (1 - t_0)(g - f)(x) + t_0 \sum_{i=1}^r u_i h_i(x) + \phi_t^0(x). \quad (3.5)$$

Para cada  $t_0$  conseguimos uma vizinhança aberta desse ponto na qual  $F_t^0$  é  $\mathcal{R}_X$ -equivalente ao germe da segunda parcela de (3.5). Essas vizinhanças formam uma



cobertura de abertos do compacto  $I$  logo existe uma subcobertura finita (que possui intersecções) de  $I$  formada por vizinhanças dos pontos  $t_0, \dots, t_r$ ; podemos supor que  $t_r = 1$  e  $t_0 = 0$  e,

$$(F_t^0 \circ H_t^0)(x) = g(x) + \phi_t^0(x),$$

$$(F_t^r \circ H_t^r)(x) = f(x) + \sum_{i=1}^r u_i h_i(x) + \phi_t^r(x).$$

A  $\mathcal{R}_X$ -equivalência é transitiva portanto podemos concluir que os dois germes acima são  $\mathcal{R}_X$ -equivalentes.

Como  $\eta \in \Theta_X^1$ , para cada  $t$ ,  $H_t$  tem como 1-jato a identidade.

Esta demonstração também pode ser encontrada em [9]. ■

Usando o Lema de Nakayama 1.3, podemos enfraquecer a hipótese do Teorema 3.10 da seguinte forma:

$$\Theta_X^1 f + \langle h_1, \dots, h_r \rangle \supset \mathcal{M}_n^{k+1} \tag{3.6}$$

então qualquer germe  $g$ , com  $j^k g = j^k f$  é  $\mathcal{R}_{1X}$ -equivalente a um germe da forma  $f(x) + \sum_{i=1}^r u_i h_i(x)$ .

Como corolário do Teorema da Transversal Completa podemos demonstrar de forma mais direta o Teorema da Determinação Finita 2.10 para o grupo  $\mathcal{R}_X$ .

**Corolário 3.11.** *Dado  $f \in \mathcal{M}_n$  e  $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \Theta_X^1 f$  então  $f$  é  $k$ - $\mathcal{R}_X$ -determinado.*

**Demonstração:** Seja  $g \in \mathcal{M}_n$  com  $j^k g = j^k f$  então, pelo Teorema 3.10,  $g$  é  $\mathcal{R}_X$ -equivalente com um germe da forma  $f + \sum_{j=1}^r u_j \cdot 0 + 0 = f$ , (veja a equivalência de (3.6)).

Esta demonstração também pode ser encontrada em [9]. ■

**Corolário 3.12.** *Seja  $f \in \mathcal{M}_n$ .*

1. *Se  $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \Theta_X^1 f + \mathcal{M}_n^{k+2}$  então  $f$  é  $k$ - $\mathcal{R}_X$ -determinado;*
2. *Se  $\mathcal{M}_n^k \subset \Theta_X^0 f + \mathcal{M}_n^{k+1}$  então  $f$  é  $k$ - $\mathcal{R}_X$ -determinado.*

**Demonstração:**

(1) Se  $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \Theta_X^1 f + \mathcal{M}_n \mathcal{M}_n^{k+1}$  então pelo Lema de Nakayama 1.3, temos que  $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \Theta_X^1 f$  e portanto, pelo Corolário 3.11,  $f$  é  $k$ - $\mathcal{R}_X$ -determinado.

(2) Temos que

$$\mathcal{M}_n \cdot \Theta_X^0 f \subset \Theta_X^1 f$$

pois, se  $\xi(x) = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$ , com  $\xi_j(0) = 0$  então  $j^1 \xi(0) = 0$ . Portanto

$$\mathcal{M}_n^k \subset \Theta_X^0 f + \mathcal{M}_n^{k+1} \Rightarrow \mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n \cdot \Theta_X^0 f + \mathcal{M}_n^{k+2}$$

o que acarreta  $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \Theta_X^1 f + \mathcal{M}_n^{k+2}$  e pelo item (1),  $f$  é  $k$ - $\mathcal{R}_X$ -determinado.

Esta demonstração também pode ser encontrada em [9]. ■

### 3.0.1 Submersões sobre o Guarda-chuva de Whitney

Para ilustrar a aplicabilidade do Teorema da Transversal Completa para o grupo  $\mathcal{R}_X$ , vamos classificar germes de submersão sob o Guarda-chuva de Whitney, i.e., vamos considerar como variedade analítica a hipersuperfície definida pela equação  $X := v^2 - u^2 w = 0$ , o Guarda-chuva de Whitney. Para maiores detalhes veja [9].

**Proposição 3.13.** *O  $\mathcal{O}_3$ -módulo,  $\Theta_X$ , onde  $X := v^2 - u^2 w = 0$ , é gerado por*

$$\begin{aligned} \xi_1 &= u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v}, & \xi_2 &= v \frac{\partial}{\partial v} + 2w \frac{\partial}{\partial w}, \\ \xi_3 &= u^2 \frac{\partial}{\partial v} + 2v \frac{\partial}{\partial w} & e, & \xi_4 = v \frac{\partial}{\partial u} + uw \frac{\partial}{\partial v} \end{aligned}$$

neste caso,  $\Theta_X = \Theta_X^0$ .

**Demonstração:** Veja [9], página 22.

Para classificar germes sob a  $\mathcal{R}_X^1$ -equivalência precisamos determinar os 1-jatos de difeomorfismos de  $\mathcal{R}_X$ . Vamos considerar as partes lineares dos campos de vetores que geram  $\Theta_X$ :

$$\begin{aligned} \text{linear}(\xi_1) &= u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v} & \text{linear}(\xi_2) &= v \frac{\partial}{\partial v} + 2w \frac{\partial}{\partial w} \\ \text{linear}(\xi_3) &= 2v \frac{\partial}{\partial w} & \text{linear}(\xi_4) &= v \frac{\partial}{\partial u} \end{aligned}$$

Integrando essas partes lineares obtemos os 1-jatos dos germes de  $\mathcal{R}_X$ :

$$\begin{aligned}\varphi_1 : (u, v, w) &\longmapsto (e^\lambda u, e^\lambda v, w) & \varphi_2 : (u, v, w) &\longmapsto (u, e^\lambda v, e^{2\lambda} w) \\ \varphi_3 : (u, v, w) &\longmapsto (u, v, w + 2\alpha v) & \varphi_4 : (u, v, w) &\longmapsto (u + \beta v, v, w)\end{aligned}$$

**Teorema 3.14.** *Qualquer 1-jato de um germe de submersão  $f$  de  $(\mathbb{C}^3, 0)$  em  $(\mathbb{C}, 0)$  é  $\mathcal{R}_X^1$ -equivalente a um germe de alguma das seguintes famílias:*

1.  $UW^{k+1} : u + w^{k+1}$ , para  $k \geq 0$ ;
2.  $WU^{k+1} : w + u^{k+1}$ , para  $k \geq 1$ ;
3.  $VW^{k+1} : v + w^{k+1}$ , para  $k \geq 1$ ;

e, cada um desses germes é  $(k+1)$ - $\mathcal{R}_X$ -determinado.

**Demonstração:** Consideramos o 1-jato de  $f$ ,  $au + bv + cw$ , com algum  $a$ ,  $b$  ou  $c$  não-nulo já que  $f$  é uma submersão.

Se  $ac \neq 0$  então  $a \neq 0$  e  $c \neq 0$  usando o difeomorfismo

$$\varphi_3(u, v, w) = (u, v, w + 2\alpha v)$$

podemos tomar  $\alpha = \frac{-b}{2c}$  e, conseguimos o 1-jato de difeomorfismo,

$$\begin{aligned}\phi_1 : (\mathbb{C}^3, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0) \\ (u, v, w) &\longmapsto \phi_1(u, v, w) = \left(\frac{1}{a}u, \frac{\sqrt{c}}{ac}v, \frac{1}{c}w - \frac{b\sqrt{c}}{ac^2}v\right)\end{aligned}$$

portanto  $au + bv + cw$  é  $\mathcal{R}_X^1$ -equivalente com

(a)  $u + w$ .

Agora, se  $ac = 0$  então  $a = 0$  ou  $c = 0$ .

Para  $a = 0$  e  $c \neq 0$  temos o germe  $bv + cw$  e usamos o difeomorfismo:

$$\varphi_3(u, v, w) = \left(u, v, w - \frac{b}{c}v\right)$$

e, consideramos o germe

$$\begin{aligned}\phi_2 : (\mathbb{C}^3, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0) \\ (u, v, w) &\longmapsto \phi_2(u, v, w) = \left(u, \frac{\sqrt{c}}{c}v, \frac{1}{c}w - \frac{b\sqrt{c}}{c^2}v\right)\end{aligned}$$

portanto  $bv + cw$  é  $\mathcal{R}_X^1$ -equivalente com

(b)  $w$ .

Para  $c = 0$  e  $a \neq 0$  temos  $au + bv$  e usamos o difeomorfismo:

$$\varphi_4(u, v, w) = \left(u - \frac{b}{a}v, v, w\right)$$

e,

$$\begin{aligned} \phi_3 : (\mathbb{C}^3, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0) \\ (u, v, w) &\longmapsto \phi_3(u, v, w) = \left(\frac{1}{a}u - \frac{b}{a^2}v, \frac{1}{a}v, w\right) \end{aligned}$$

portanto  $au + bv$  é  $\mathcal{R}_X^1$ -equivalente com

(c)  $u$ .

Para  $a = 0$  e  $c = 0$  temos o germe  $bv$  e consideramos o difeomorfismo

$$h_5(u, v, w) = \left(\frac{1}{b}u, \frac{1}{b}v, w\right) \in \mathcal{R}_X$$

portanto  $bv$  é  $\mathcal{R}_X^1$ -equivalente com

(d)  $v$ .

**Caso (a)** Suponhamos que  $f(u, v, w) = u + w$ . Então temos

$$\begin{aligned} \xi_1(f) &= u & \xi_2(f) &= 2w \\ \xi_3(f) &= 2v & \xi_4(f) &= v \end{aligned}$$

portanto  $\Theta_X^0 f \supset \mathcal{M}_3$ , pelo Corolário 3.12, item (2),  $k = 0$  temos que  $f$  é 1- $\mathcal{R}_X$ -determinado.

**Caso (b)** Suponhamos que  $f(u, v, w) = w$ . Então temos

$$\begin{aligned} \xi_1(f) &= 0 & \xi_2(f) &= 2w \\ \xi_3(f) &= 2v & \xi_4(f) &= 0 \end{aligned}$$

temos um germe com  $k$ -jato  $w$  e a transversal completa (veja 3.7) é dada por  $T = \mathbb{C}\{u^{k+1}\}$ . Consideramos o germe  $f(u, v, w) = w + u^{k+1}$  e

$$\begin{aligned} \xi_1(f) &= (k+1)u^{k+1} & \xi_2(f) &= 2w \\ \xi_3(f) &= 2v & \xi_4(f) &= (k+1)vu^k \end{aligned}$$

temos que  $\Theta_X^0 f \supset \mathcal{M}_3^{k+1}$  e  $f$  é  $(k+1)$ - $\mathcal{R}_X$ -determinado.

**Caso (c)** Suponhamos que  $f(u, v, w) = u$ . Então temos

$$\begin{aligned}\xi_1(f) &= u & \xi_2(f) &= 0 \\ \xi_3(f) &= 0 & \xi_4(f) &= v\end{aligned}$$

dessa forma temos um germe com  $k$ -jato  $u$  e a transversal completa (veja 3.7) é dada por  $T = \mathbb{C}\{w^{k+1}\}$ . Consideramos o germe  $f(u, v, w) = u + w^{k+1}$  e

$$\begin{aligned}\xi_1(f) &= u & \xi_2(f) &= 2(k+1)w^{k+1} \\ \xi_3(f) &= 2(k+1)vw^k & \xi_4(f) &= v\end{aligned}$$

temos que  $\Theta_X^0 f \supset \mathcal{M}_3^{k+1}$  e  $f$  é  $(k+1)$ - $\mathcal{R}_X$ -determinado.

**Caso (d)** Suponhamos que  $f(u, v, w) = v$ . Então temos

$$\begin{aligned}\xi_1(f) &= v & \xi_2(f) &= v \\ \xi_3(f) &= u^2 & \xi_4(f) &= uw\end{aligned}$$

dessa forma temos um germe com  $k$ -jato  $v$  e a transversal completa (veja 3.7) é dada por  $T = \mathbb{C}\{w^{k+1}\}$ . Consideramos o germe  $f(u, v, w) = v + w^{k+1}$  e

$$\begin{aligned}\xi_1(g) &= v & \xi_2(g) &= v + 2(k+1)w^{k+1} \\ \xi_3(g) &= u^2 + 2(k+1)vw^k & \xi_4(g) &= uw\end{aligned}$$

temos que  $\Theta_X^0 f \supset \mathcal{M}_3^{k+1}$  e  $f$  é  $(k+1)$ - $\mathcal{R}_X$ -determinado.

Esta demonstração também pode ser encontrada em [9]. ■

# Capítulo 4

## Germes de campos de vetores em variedades

Para o estudo da  $\mathcal{R}_X$ -equivalência é fundamental conhecer o espaço tangente à  $\mathcal{R}_X$ -órbita em um determinado germe  $f$ , ou seja, precisamos descobrir quais são os campos de vetores tangentes à variedade. Um caso, relativamente simples de encontrar o  $\mathcal{O}_n$ -módulo  $\Theta_X$  ocorre quando  $X$  é uma variedade quase-homogênea, veja Proposição 4.7. Quando consideramos como variedade o discriminante de uma deformação versal de um germe com singularidade isolada, podemos mostrar que os campos de vetores definidos por Saito [24], são os campos de vetores tangentes ao discriminante, veja o Teorema 4.17. Parte deste capítulo está baseado no artigo de J. Bruce [4].

### 4.1 Caracterização dos campos de vetores

**Proposição 4.1.** *Existe um subconjunto finito de campos em  $\Theta_X^0$  que juntos geram o espaço tangente de  $\mathbb{C}^n$  em todos os pontos de  $\mathbb{C}^n \setminus X$  suficientemente próximos da origem.*

**Demonstração:** Suponhamos que  $(X, 0) = \mathcal{V}(f_1, \dots, f_r)$  e, consideramos o conjunto  $F = \{f_i \frac{\partial}{\partial x_j}\}$ , com  $1 \leq i \leq r$  e  $1 \leq j \leq n$ , esse conjunto satisfaz as condições da Proposição. De fato,

- Para todo  $g \in \mathcal{I}(X)$  e todo  $x \in X$ ,

$$f_i(x) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = 0 \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = 0,$$

para  $1 \leq i \leq r$  e  $1 \leq j \leq n$ ; portanto  $f_i \frac{\partial g}{\partial x_j} \in \mathcal{I}(X)$ ;

- Como  $0 \in X$ , para cada  $i$ , temos  $f_i(0) = 0$  logo  $f_i \frac{\partial}{\partial x_j}$  se anula na origem;
- Se  $x \notin X$  está suficientemente próximo da origem, então podemos encontrar  $j_0 \in \{1, \dots, r\}$  tal que  $f_{j_0}(x) \neq 0$  e, qualquer campo de vetores  $\delta$  do espaço tangente à  $\mathbb{C}^n$  em  $x$  pode ser escrito como combinação dos campos formados por este germe, i.e.,

$$\delta = \sum_{j=1}^n \delta_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \delta_1 \frac{1}{f_{j_0}} f_{j_0} \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \delta_n \frac{1}{f_{j_0}} f_{j_0} \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Esta demonstração também pode ser encontrada em [8]. ■

**Proposição 4.2.** *Se  $X$  é equidimensional então existe um subconjunto finito de  $\Theta_X$  consistindo de germes que se anulam no conjunto singular de  $X$  e juntos geram o espaço tangente à  $X$  em todos os pontos suaves de  $X$  suficientemente próximos da origem.*

**Demonstração:** Suponhamos  $(X, 0) = \mathcal{V}(f_1, \dots, f_r)$  e que a dimensão de  $X$  seja  $l$ . Então, como  $X$  é equidimensional existe, pelo menos, um menor de ordem  $(n-l) \times (n-l)$  da matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \frac{\partial f_r}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

cujo determinante quando aplicado em um ponto suave de  $X$  é não-nulo enquanto que os determinantes dos menores de ordem maior a  $(n-l) \times (n-l)$  são nulos.

Lembremos que um ponto  $x \in X$  é singular se os determinantes de todos os  $(n-l) \times (n-l)$  menores de  $A$  são nulos em  $x$ .

Seja  $B$  a matriz obtida de  $A$  adicionando-se, como a  $(r + 1)$  linha o vetor  $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ , obtendo-se a seguinte matriz

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \frac{\partial f_r}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_n} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Então o conjunto dos campos obtidos tomando-se o determinante dos menores de  $B$  de ordem  $(n - l + 1) \times (n - l + 1)$  que contêm essa última linha adicionada possui as propriedades desejadas:

Os germes obtidos são campos de vetores que se anulam em pontos singulares de  $X$  pois, como foi mencionado anteriormente todos determinantes de todos menores de  $A$  de ordem  $(n - l) \times (n - l)$  são nulos em um ponto singular. E ainda, esses campos geram o espaço tangente à  $X$  nos pontos suaves, pois quando aplicado em um ponto suave esse determinante não será nulo e o resultado segue análogo à Proposição 4.2.

Esta demonstração também pode ser encontrada em [8]. ■

O exemplo a seguir ilustra a construção feita na demonstração anterior:

**Exemplo 4.3.** *Seja  $X$  a hipersuperfície definida por  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ , então essa variedade tem dimensão  $n - 1$ . Pelo menos um menor de ordem  $1 \times 1$  da matriz  $A = (\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n})$  é não-nulo em um ponto suave. Construímos a matriz*

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

e os determinantes dos menores de ordem  $2 \times 2$  são os campos

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

para  $1 \leq i < j \leq n$ .

Seja  $U$  uma vizinhança suficientemente pequena da origem de  $\mathbb{C}^n$ . Seja  $\mathcal{F}_U$  o conjunto das funções analíticas definidas em  $U$ ; se  $V$  é um subconjunto abertos de



$U$  e  $f \in \mathcal{F}_U$  e consideramos a aplicação  $\rho_{VU}(f) = f|_V$  então  $\{\mathcal{F}_U, \rho_{VU}\}$  é um prefeixe em  $U$  e o feixe associado a este prefeixe é denotado por  $\mathcal{O}_U$ , analogamente, o feixe de germes de campos de vetores em  $U$  é denotado por  $Der_U$ . Definimos

$$\Xi_X = \bigcup_{x \in X} \Theta_{(X,x)},$$

onde  $\Theta_{(X,x)} = \{\delta \in Der_U : \delta(h) \in \mathcal{I}(X,x), \forall h \in \mathcal{I}(X,x)\}$  e  $\Xi_X$  é um subfeixe de  $Der_U$ . Além disso, com a operação

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \Xi_X \times \Xi_X &\longrightarrow \Xi_X \\ (\xi, \delta) &\longmapsto [\xi, \delta] = \xi\delta - \delta\xi \end{aligned}$$

$\Xi_X$  se torna uma álgebra de Lie.

**Proposição 4.4** (Propriedade dos campos de vetores). *Seja  $X$  uma subvariedade analítica reduzida. Então*

1.  $\Xi_X$  é um  $\mathcal{O}_U$ -submódulo coerente de  $Der_U$ ;
2.  $\Xi_X$  é fechado para a operação de álgebra de Lie;
3. Se  $\delta_k = \sum_{j=1}^n \delta_{kj} \frac{\partial}{\partial x_j}$ , para  $1 \leq k \leq l+1$  são elementos de  $\Theta_{(X,x)}$ , e  $X$  tem dimensão  $l$  em  $x$ , então os determinantes dos menores de ordem  $(l+1) \times (l+1)$  de  $(\delta_{kj})$  estão em  $\mathcal{I}(X,x)$ .

**Demonstração:** Veja [15], página 60.

**Definição 4.5.** *Um germe de variedade  $X \subset (\mathbb{C}^n, 0)$  de dimensão  $d$  é chamado de intersecção completa se o seu ideal  $\mathcal{I}(X)$ , é gerado por  $n - d$  germes de  $\mathcal{O}_n$ .*

Vamos considerar uma classe especial de intersecção completa com singularidade isolada para a qual  $\Xi_X$  é particularmente boa: a classe quase-homogênea.

**Definição 4.6.** *Um germe de subvariedade  $X \subset (\mathbb{C}^n, 0)$  é dito quase-homogêneo se é definido por um germe  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ ,  $f = (f_1, \dots, f_p)$  tal que existem inteiros  $w_1, \dots, w_n, d_1, \dots, d_p$  e para todo  $t \in \mathbb{C}$ ,*

$$f_j(t^{w_1}x_1, \dots, t^{w_n}x_n) = t^{d_j} f_j(x_1, \dots, x_n), \quad 1 \leq j \leq p.$$

**Proposição 4.7.** *Seja  $X \subset (\mathbb{C}^n, 0)$  um germe de intersecção completa com uma singularidade isolada definido por um germe quase-homogêneo  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ ,  $f = (f_1, \dots, f_p)$ . Então  $\Xi_X$  é gerado pelos campos  $f_i \frac{\partial}{\partial x_j}$ ,  $1 \leq i \leq p$  e  $1 \leq j \leq n$ , o*

*campo de Euler  $\sum_{j=1}^n w_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$  e os campos triviais:*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{i_{p+1}}} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_{p+1}}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial f_p}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_{i_{p+1}}} \end{vmatrix}$$

para toda  $(p+1)$ -upla  $i_1, \dots, i_{p+1}$  satisfazendo  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{p+1} \leq n$ .

**Demonstração:** Veja [8], página 79.

**Exemplo 4.8.** *Consideramos o germe de variedade analítica  $X := x^4 + y^4 + z^4 = 0$  é um germe de intersecção completa com uma singularidade isolada na origem definido por um germe homogêneo. Pela Proposição 4.7,  $\Xi_X$  é gerado pelos campos:*

$$\begin{aligned} & (x^4 + y^4 + z^4) \frac{\partial}{\partial x}, \quad (x^4 + y^4 + z^4) \frac{\partial}{\partial y}, \quad x^4 + y^4 + z^4 \frac{\partial}{\partial z}, \\ & x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}, \\ & 4y^3 \frac{\partial}{\partial x} - 4x^3 \frac{\partial}{\partial y}, \quad 4z^3 \frac{\partial}{\partial x} - 4x^3 \frac{\partial}{\partial z}, \quad e \quad 4z^3 \frac{\partial}{\partial y} - 4y^3 \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

## 4.2 Divisores Livres

**Definição 4.9.** *Uma variedade reduzida  $X \subset (\mathbb{C}^n, 0)$  é um divisor livre quando  $\Theta_X$  é um  $\mathcal{O}_n$ -módulo livre.*

**Proposição 4.10.** *Seja  $X$  uma hipersuperfície analítica reduzida e sejam*

$$\xi_j = \sum_{l=1}^n \xi_{jl} \frac{\partial}{\partial x_l},$$

com  $1 \leq j \leq n$ , elementos de  $\Theta_X$  com a propriedade que  $\det(\xi_{jl})$  é uma equação que define  $X$ . Então  $X$  é um divisor livre e  $\Theta_X$  é livremente gerado por  $\xi_1, \dots, \xi_n$ .

**Demonstração:** Veja [24], página 270.

**Exemplo 4.11.** Tomemos  $X := y - x^2 = 0$  uma hipersuperfície analítica reduzida de  $\mathbb{C}^2$ . Consideramos os campos de  $\Theta_X$

$$\xi_1 = \frac{\partial}{\partial x} + 2x \frac{\partial}{\partial y} \quad e \quad \xi_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\det(\xi_{ji}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2x \\ x & 2y \end{pmatrix} = 2(y - x^2)$$

que gera  $X$ , portanto pela Proposição acima 4.10,  $X$  é um divisor livre e  $\Theta_X$  é gerado pelos campos  $\xi_1$  e  $\xi_2$ .

### 4.2.1 Cálculo de $\Theta_X$ quando $X$ é o discriminante

**Definição 4.12.** Dada uma deformação  $(F, p)$  de um germe  $f \in \mathcal{M}_n$ , definimos o discriminante de  $F$  como o germe do conjunto:

$$D = \left\{ a \in \mathbb{C}^p : \exists x \in \mathbb{C}^n, F(x, a) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(x, a) = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n}(x, a) = 0 \right\}$$

**Teorema 4.13.** Sejam  $f \in \mathcal{O}_n$  e  $(F, p)$  uma deformação de  $f$ . Então  $F$  é uma deformação  $\mathcal{R}$ -versal de  $f$  se, e somente se,

$$J(f) + \mathbb{C} \left\{ \frac{\partial F}{\partial a_1}(x, 0), \dots, \frac{\partial F}{\partial a_p}(x, 0) \right\} = \mathcal{O}_n$$

**Demonstração:** Veja [11], página 44.

Observemos que a definição de deformação versal para a  $\mathcal{R}$ -equivalência é análoga à Definição 2.16, item (c), dada anteriormente de deformação  $\mathcal{R}_X$ -versal.

**Lema 4.14.** Seja  $f \in \mathcal{M}_n$  um germe com uma singularidade isolada na origem. Então  $\frac{\mathcal{O}_n}{J(f)}$  é um  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial de dimensão finita.

**Demonstração:** Como  $f$  possui uma singularidade isolada na origem temos que  $\mathcal{V}(J(f)) = \{0\}$ , assim pelo Teorema 1.6

$$\text{Rad}(J(f)) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(J(f))) = \mathcal{I}(\{0\}) = \mathcal{M}_n.$$

Como  $J(f)$  contem uma potência do seu radical (veja [3], página 83), então existe inteiro  $k > 0$  tal que  $J(f) \supset \mathcal{M}_n^k$  e o resultado segue pelo Lema 1.4. ■

**Lema 4.15.** *Sejam  $f \in \mathcal{M}_n$  um germe com singularidade isolada na origem e  $\{g_1 + J(f), \dots, g_p + J(f)\}$  uma base do  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial  $\frac{\mathcal{O}_n}{J(f)}$ . Então o germe*

$$F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(x, a) \longmapsto F(x, a) = f(x) + \sum_{i=1}^p a_i g_i(x),$$

onde  $a = (a_1, \dots, a_p)$ , é uma deformação  $\mathcal{R}$ -versal do germe  $f \in \mathcal{O}_n$ .

**Demonstração:** Pelo Teorema 4.13, basta mostrar que

$$J(f) + \mathbb{C}\left\{\frac{\partial F}{\partial a_1}(x, 0), \dots, \frac{\partial F}{\partial a_p}(x, 0)\right\} = \mathcal{O}_n. \quad (4.1)$$

Mas (4.1) ocorre pois,  $g_1 + J(f), \dots, g_p + J(f)$  geram  $\frac{\mathcal{O}_n}{J(f)}$ . ■

Considerando as hipóteses do Lema anterior 4.15, definimos o ideal:

$$\mathcal{J}(F) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right\rangle \subset \mathcal{O}_{n+p}.$$

**Lema 4.16.** *Se  $f \in \mathcal{M}_n$  é um germe com singularidade isolada na origem e  $\{g_i + J(f)\}_{i=1}^p$  formam uma  $\mathbb{C}$ -base para  $\frac{\mathcal{O}_n}{J(f)}$  então os germes  $g_1 + \mathcal{J}(F), \dots, g_p + \mathcal{J}(F)$  formam uma  $\mathcal{O}_p$ -base livre para  $\frac{\mathcal{O}_{n+p}}{\mathcal{J}(F)}$ .*

**Demonstração:** Sejam  $A = \frac{\mathcal{O}_{n+p}}{\mathcal{J}(F)}$  e  $\Pi$  a projeção

$$\Pi : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$$

$$(x, a) \longmapsto \Pi(x, a) = a$$

pelo Teorema de Preparação de Malgrange 1.2 temos que  $A$  é um  $\mathcal{O}_p$ -módulo finitamente gerado via  $\Pi^*$  se, e somente se,  $\frac{A}{\mathcal{M}_p A}$  é um  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial de dimensão finita. Afirmamos que:

$$\frac{A}{\mathcal{M}_p A} \text{ tem dimensão finita} \iff \frac{\mathcal{O}_n}{J(f)} \text{ tem dimensão finita.}$$

observemos que  $\frac{A}{\mathcal{M}_p A} \cong \frac{\mathcal{O}_{n+p}}{\mathcal{J}(F) + \mathcal{M}_p}$ , basta usar o homomorfismo sobrejetor:

$$\begin{aligned} \phi : A &\longrightarrow \frac{\mathcal{O}_{n+p}}{\mathcal{J}(F) + \mathcal{M}_p} \\ g + \mathcal{J}(F) &\longmapsto g + (\mathcal{J}(F) + \mathcal{M}_p), \end{aligned}$$

onde  $\ker(\phi) = \mathcal{M}_p A$ . E,  $\mathcal{J}(F) + \mathcal{M}_p = \mathcal{J}(f) + \mathcal{M}_p$  já que, para  $1 \leq j \leq n$ ,  $\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^p a_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ , assim

$$\frac{A}{\mathcal{M}_p A} \cong \frac{\mathcal{O}_{n+p}}{\mathcal{J}(F) + \mathcal{M}_p} = \frac{\mathcal{O}_{n+p}}{\mathcal{J}(f) + \mathcal{M}_p} \cong \frac{\mathcal{O}_n}{\mathcal{J}(f)}$$

e pelo Lema 4.14,  $\frac{\mathcal{O}_n}{\mathcal{J}(f)}$  tem dimensão finita.

Agora, basta mostrar que  $g_1 + \mathcal{J}(F), \dots, g_p + \mathcal{J}(F)$  geram  $A$  livremente.

Considerando o conjunto:

$$\Sigma = \{(x, a) : \frac{\partial F}{\partial x_j}(x, a) = 0, 1 \leq j \leq n\}$$

e sendo  $\pi : (\Sigma, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$  a projeção na segunda coordenada. Denotemos por  $\mathcal{O}(\Sigma)$  a estrutura de feixe de  $\Sigma$ , i.e.,  $\mathcal{O}(\Sigma)$  é o feixe  $\Sigma$  juntamente com a aplicação  $\pi$  sobre o espaço topológico  $(\mathbb{C}^p, 0)$ , logo  $\pi$  é uma aplicação holomorfa própria onde todas as fibras são conjunto discretos em  $(\Sigma, 0)$  pois  $f$  é um germe com uma singularidade isolada, portanto é finita (veja [17], página 175) e assim a imagem direta  $\pi_*(\mathcal{O}(\Sigma))$  é um feixe de  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^p)$ -módulos coerente (veja [17], página 64). Definimos o homomorfismo de  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^p)$ -módulos

$$\begin{aligned} r : \mathcal{O}(\mathbb{C}^p)^p &\longrightarrow \pi_*(\mathcal{O}(\Sigma)) \\ (\psi_1, \dots, \psi_p) &\longmapsto r(\psi_1, \dots, \psi_p) = \sum_{j=1}^p \psi_j g_j \end{aligned}$$

e seja  $\mathcal{F} = \frac{\pi_*(\mathcal{O}(\Sigma))}{\text{Im}(r)}$  (também coerente veja A.4) o co-núcleo de  $r$ . Como  $g_1, \dots, g_p$  geram  $\frac{\mathcal{O}_{n+p}}{\mathcal{J}(F)}$  como um  $\mathcal{O}_p$ -módulo o feixe  $\mathcal{F}$  tem fibra trivial em  $0 \in \mathbb{C}^p$ . Por coerência temos que  $\mathcal{F}$  é trivial em uma vizinhança de  $0 \in \mathbb{C}^p$ . Dessa forma para  $b$  próximo da origem podemos dizer que  $g_1, \dots, g_p$  geram

$$\bigoplus_{\hat{x}} \frac{\mathcal{O}_{n+p(\hat{x}, b)}}{\mathcal{J}(F)_{(\hat{x}, b)}}$$

como um  $(\mathcal{O}_p)_b$ -módulo (veja A.2), com  $\tilde{x}$  variando de forma que  $(\tilde{x}, b) \in \Sigma$ . Segue que  $g_1, \dots, g_p$  geram

$$\bigoplus_{\tilde{x}} \frac{\mathcal{O}_{n_{\tilde{x}}}}{\mathcal{J}(f)_{\tilde{x}}} \quad (4.2)$$

como um  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial, a soma sendo sobre os mesmos  $\tilde{x}$ . Como essa soma direta tem dimensão  $p$  segue que  $g_1, \dots, g_p$  formam, de fato, uma  $\mathbb{C}$ -base para (4.2). Afirmamos que  $g_1, \dots, g_p$  geram livremente  $\frac{\mathcal{O}_{n+p}}{\mathcal{J}(F)}$  pois, caso contrário, para algum germe não-nulo  $(\psi_1, \dots, \psi_p) \in \mathcal{O}_p^p$  teríamos  $\sum_{i=1}^p \psi_i g_i = 0$  em  $\frac{\mathcal{O}_{n+p}}{\mathcal{J}(F)}$  o que contradiz o fato que, para cada  $b$  fixo,  $\{g_i\}$  são linearmente independentes em (4.2).

Esta demonstração também pode ser encontrada em [4]. ■

Como os germes  $g_1 + \mathcal{J}(F), \dots, g_p + \mathcal{J}(F)$  formam uma base livre para  $\frac{\mathcal{O}_{n+p}}{\mathcal{J}(F)}$  então para cada  $j = 1, \dots, p$ , podemos encontrar germes  $a_{ij} \in \mathcal{O}_p$  que satisfazem:

$$F \cdot g_j + \mathcal{J}(F) = \sum_{i=1}^p a_{ij} g_i + \mathcal{J}(F) \quad (4.3)$$

usando as notações acima, os campos

$$\xi_j = \sum_{i=1}^p a_{ij} \frac{\partial}{\partial a_i} \quad (4.4)$$

são germes de campos de vetores tangentes ao discriminante  $D$ . Mais ainda, eles formam uma base livre para  $\Theta_D$ , portanto o discriminante é um divisor livre, i.e.,

**Teorema 4.17.** *Os campos em (4.4) formam uma base livre para  $\Theta_D$ , i.e., o conjunto de todos os campos tangentes ao discriminante coincide com o  $\mathcal{O}_p$ -módulo gerado pelos  $\xi_j$  e qualquer tal campo é expresso como combinação linear dos  $\xi_j$ .*

Para demonstrar tal teorema precisamos dos seguintes resultados:

Consideramos o seguinte conjunto:

$$M = \{(x, a) \in (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0) : F(x, a) = 0\}$$

e seja  $\Pi$  a projeção na segunda componente de  $(M, 0)$  em  $(\mathbb{C}^p, 0)$ , i.e.,

$$\begin{aligned} \Pi : (M, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}^p, 0) \\ (x, a) &\longmapsto \Pi(x, a) = a \end{aligned}$$

**Definição 4.18.** Um campo  $\xi \in \text{Der}_0 \mathbb{C}^p$  é  $\Pi$ -levantável se para algum campo  $\tilde{\xi}$  restrito à  $M$  temos

$$d\Pi(\tilde{\xi}) = \xi \circ \Pi$$

Se  $\Sigma\Pi$  é o conjunto dos pontos críticos de  $\Pi$  então  $(D, 0)$  e  $\Pi(\Sigma\Pi, 0)$  coincidem pois

$$\Sigma\Pi = \mathcal{V}\left(\left\langle F, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right\rangle\right) \text{ e, } D = \Pi(\mathcal{V}\left(\left\langle F, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right\rangle\right)).$$

**Lema 4.19.** Um campo  $\xi$  em  $\mathbb{C}^p$  é tangente ao discriminante se, e somente se,  $\xi$  levanta via  $\Pi$  à um campo em  $\Sigma\Pi$ .

**Demonstração:** Veja [4], página 563.

**Lema 4.20.** Um campo  $\xi$  levanta em  $\Sigma\Pi$  se, e somente se,  $\xi$  levanta em  $M$ .

**Demonstração:** Veja [4], página 564.

O Teorema 4.17 é uma consequência imediata do seguinte teorema:

**Teorema 4.21.** As seguintes condições são equivalentes:

1. O campo  $\xi$  em  $\mathbb{C}^p$  é  $\Pi$ -levantável;
2. O campo  $\xi$  pertence à  $\Theta_D$ ;
3.  $\xi = \sum c_j \xi_j$ , para únicos  $c_j \in \mathcal{O}_p$ , com  $\xi_j$  como em (4.4).

**Demonstração:** Pelos Lemas 4.19 e 4.20 sabemos que (1) e (2) são equivalentes, portanto um campo  $\xi$  em  $\mathbb{C}^p$  é tangente ao discriminante se, e somente se,  $\xi$  levanta em  $M$ .

Vamos mostrar que (3)  $\iff$  (1).

Suponhamos que, para cada  $j$ , o campo  $\xi_j$  é levantável então existe  $\tilde{\xi}_j$  em  $M$  tal que  $d\Pi(\tilde{\xi}_j) = \xi_j \circ \Pi$  e

$$\xi \circ \Pi = \sum_{i=1}^p (c_i \circ \Pi)(\xi_i \circ \Pi) = \sum_{i=1}^p (c_i \circ \Pi)(d\Pi(\tilde{\xi}_i)) = d\Pi\left(\sum_{i=1}^p b_i \tilde{\xi}_i\right)$$

e  $\sum b_i \tilde{\xi}_i$  é um campo em  $M$ .

Portanto vamos mostrar que  $\xi_j$  são levantáveis. Para cada  $j = 1, \dots, p$ , temos

$$F \cdot g_j = \sum_{i=1}^p a_{ij} g_i + \sum_{l=1}^n \alpha_l \frac{\partial F}{\partial x_l}$$

para  $\alpha_l \in \mathcal{O}_{n+p}$ , consideramos o campo

$$\tilde{\xi}_j = \xi_j + \sum_{l=1}^n \alpha_l \frac{\partial}{\partial x_l}$$

$$\text{com } \tilde{\xi}_j(F) = \sum_{i=1}^p a_{ij} \frac{\partial F}{\partial a_i} - \sum_{i=1}^p a_{ij} g_i + F g_j,$$

como  $\frac{\partial F}{\partial a_i} = g_i$  temos  $\tilde{\xi}_j F$  se anulando em  $M$  e,

$$d\Pi(\tilde{\xi}_j) = d\Pi\left(\xi_j + \sum_{l=1}^n \alpha_l \frac{\partial}{\partial x_l}\right) = \xi_j \circ \Pi$$

então  $\tilde{\xi}_j$  é um levantamento para  $\xi_j$ .

Por outro lado, se  $\xi$  tem um levantamento  $\tilde{\xi}$  então  $\tilde{\xi}(F) \in \langle F \rangle$  em  $\mathcal{O}_{n+p}$ . Conseqüentemente podemos escrever:

$$\tilde{\xi}(F) = \left( \sum_{j=1}^n \gamma_j \frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^p c_i g_i \right) F$$

para únicos  $c_i \in \mathcal{O}_p$  e alguns  $\gamma_j \in \mathcal{O}_{n+p}$ , dessa forma,

$$\tilde{\xi}(F) = \sum_{j=1}^n \delta_j \frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^p c_i a_{ij} g_i$$

para alguns  $\delta_j \in \mathcal{O}_{n+p}$ . Reciprocamente se

$$\tilde{\xi} = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^p e_i \frac{\partial}{\partial a_i}$$

com  $\varepsilon_j \in \mathcal{O}_{n+p}$  e  $e_i \in \mathcal{O}_p$  então

$$\tilde{\xi}(F) = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^p e_i g_i$$

Como  $g_i$  geram  $\frac{\mathcal{O}_{n+p}}{\mathcal{J}(F)}$  livremente temos  $e_i = \sum_{l=1}^p c_l a_{il}$  e

$$\xi = \sum_{i=1}^p e_i \frac{\partial}{\partial a_i} = \sum_{i=1}^p c_i \xi_i.$$



Esta demonstração também pode ser encontrada em [4]. ■

No exemplo abaixo, usando-se o Teorema 4.17, vamos encontrar o  $\mathcal{O}_1$ -módulo  $\Theta_X$ , quando  $X$  é o discriminante de uma singularidade do tipo  $A_k$ :

**Exemplo 4.22. As singularidades  $A_k$**

Consideramos o germe  $f(x) = x^{k+1}$ . Então  $J(f) = \langle x^k \rangle$  e

$$\frac{\mathcal{O}_1}{J(f)} \approx \frac{\mathbb{C}[[x]]}{\langle x^k \rangle} \approx \langle 1, x, x^2, \dots, x^{k-1} \rangle$$

e como  $\mathbb{C}$ -base desse espaço vetorial escolhemos

$$\{g_1(x) = x^{k-1}, g_2(x) = x^{k-2}, \dots, g_{k-1}(x) = x, g_k(x) = 1\}$$

e temos a deformação  $\mathcal{R}$ -versal

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^k, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}, 0) \\ (x, a) &\longmapsto F(x, a) = x^{k+1} + \sum_{j=1}^k a_j x^{k-j} \end{aligned}$$

onde  $a = (a_1, \dots, a_k)$ .

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (k+1)x^k + \sum_{j=1}^{k-1} a_j(k-j)x^{k-j-1} \Rightarrow \mathcal{J}(F) = \langle (k+1)x^k + \sum_{j=1}^{k-1} a_j(k-j)x^{k-j-1} \rangle$$

trabalhando no anel  $\frac{\mathcal{O}_{1+k}}{\mathcal{J}(F)}$  podemos trocar  $x^k$  por

$$-\frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^{k-1} a_j(k-j)x^{k-j-1}$$

já que estão na mesma classe. E é fácil obter os campos de vetores básicos para qualquer  $A_k$ -singularidade.

Tomamos  $k = 3$ , logo  $f(x) = x^4$ ,  $J(f) = \langle x^3 \rangle$  e

$$\{g_1(x) = x^2, g_2(x) = x, g_3(x) = 1\}$$

é uma base para  $\frac{\mathcal{O}_1}{J(f)}$ .

Temos a deformação versal:

$$F(x, (a_1, a_2, a_3)) = x^4 + \sum_{j=1}^3 a_j x^{3-j} = x^4 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

e ainda,

$$\mathcal{J}(F) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x} \right\rangle = \langle 4x^3 + 2a_1x + a_2 \rangle$$

podemos trocar  $x^3$  por  $-\frac{1}{4} \sum_{j=1}^2 (3-j)a_j x^{3-j-1} = -\frac{1}{2}a_1x - \frac{1}{4}a_2$

Assim, concluímos que, quando  $X$  é o discriminante de uma singularidade  $A_3$ , o  $\mathcal{O}_3$ -módulo  $\Theta_X$  é gerado por:

$$\begin{aligned} \xi_1(a_1, a_2, a_3) &= \left(a_3 - \frac{1}{4}a_1^2\right) \frac{\partial}{\partial a_1} - \frac{1}{2}a_1a_2 \frac{\partial}{\partial a_2} - \frac{3}{16}a_2^2 \frac{\partial}{\partial a_3} \\ \xi_2(a_1, a_2, a_3) &= \frac{3}{4}a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \left(a_3 - \frac{1}{4}a_1^2\right) \frac{\partial}{\partial a_2} - \frac{1}{8}a_1a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} \\ \xi_3(a_1, a_2, a_3) &= \frac{1}{2}a_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + \frac{3}{4}a_2 \frac{\partial}{\partial a_2} + a_3 \frac{\partial}{\partial a_3}. \end{aligned}$$

# Considerações Finais

Dado um germe de subvariedade analítica  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$  e um germe de função  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ , podemos trabalhar com uma segunda relação de equivalência em  $\mathcal{O}_n$  que também considera a subvariedade  $X$ . Basta estudar a restrição de  $f$  ao germe  $X$ ,  $f|_X$  e usar difeomorfismos de  $X$ . O grupo dos difeomorfismos de  $X$  é denotado por  $\mathcal{R}(X)$ . O estudo sobre a  $\mathcal{R}(X)$ -equivalência pode ser encontrado em [13].

Observamos que enquanto a  $\mathcal{R}(X)$ -equivalência considera o comportamento de um germe  $f$  somente sobre  $X$ , a  $\mathcal{R}_X$ -equivalência considera o comportamento do germe sobre  $X$  e fora de  $X$ . Por exemplo:

Consideramos a subvariedade de  $\mathbb{C}^2$ ,  $X := y - x^2 = 0$  e os germes

$$f(x, y) = x^3 \text{ e } g(x, y) = x^3 + y - x^2;$$

$f$  e  $g$  são iguais quando considerados sobre  $X$  e portanto são  $\mathcal{R}(X)$ -equivalentes. Mas, considerando-se a  $\mathcal{R}_X$ -equivalência, temos que

$$\Theta_X = \left\langle \frac{\partial}{\partial x} + 2x \frac{\partial}{\partial y}, x \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$$

e

$$\Theta_X f = \langle 3x^2, 3x^3 \rangle \Rightarrow \mathcal{V}(\Theta_X f) = \{(0, y) : y \in \mathbb{C}\}$$

$$\Theta_X g = \langle 3x^2, 3x^3 - 2x^2 + 2y \rangle \Rightarrow \mathcal{V}(\Theta_X g) = \{(0, 0)\}$$

logo  $f$  não é finitamente  $\mathcal{R}_X$ -determinado e  $g$  é finitamente  $\mathcal{R}_X$ -determinado então  $f$  e  $g$  não são  $\mathcal{R}_X$ -equivalentes.

Portanto podemos concluir que a  $\mathcal{R}_X$ -equivalência é mais restritiva do que a  $\mathcal{R}(X)$ -equivalência.

O fato da  $\mathcal{R}_X$ -equivalência levar em conta o comportamento dos germes fora da subvariedade  $X$  acarreta em uma diferença nos espaços tangentes de uma órbita em um germe  $f$ , i.e.,

$$T\mathcal{R}_e(X)f = T\mathcal{R}_{e_X}f + \mathcal{I}(X).$$

Assim como para o grupo  $\mathcal{R}_X$ , todos os resultados de determinação e desdobramentos são válidos para o grupo  $\mathcal{R}(X)$ . Por exemplo:

**Teorema 4.23** (Teorema de determinação finita). *Dado  $f \in \mathcal{M}_n$  então se*

$$T\mathcal{R}(X)f \supset \mathcal{M}_n^p,$$

*para algum inteiro positivo  $p$ , então  $f$  é finitamente  $\mathcal{R}(X)$ -determinado.*

A demonstração deste teorema é análoga à demonstração do Teorema de Determinação Finita para o grupo  $\mathcal{R}_X$  2.10, onde basta considerar o espaço tangente de uma  $\mathcal{R}(X)$ -órbita no germe  $f$ .

# Apêndice A

## Teoria de feixes

Nesta seção damos uma visão geral e introdutória sobre feixes; noções básicas necessárias para o entendimento de alguns conceitos que são usados ao longo do texto. Para maiores detalhes veja [17].

Sejam  $\mathcal{T}$  e  $X$  dois espaços topológicos, se  $\pi : \mathcal{T} \rightarrow X$  é um homeomorfismo local, o par  $(\mathcal{T}, \pi)$  é chamado de *feixe* (de conjuntos) em  $X$  e  $\pi$  é chamada de *projeção*. Para cada  $x \in X$ , o subconjunto  $\mathcal{T}_x = \pi^{-1}(x)$  é chamado de *fibra* (ou stalk) de  $\mathcal{T}$  em  $x$ .

Sejam  $(\mathcal{T}, \pi)$  e  $(\mathcal{F}, \Pi)$  dois feixes em  $X$ . Um *morfismo de feixes* é uma aplicação contínua  $\varphi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{F}$  tal que  $\Pi \circ \varphi = \pi$ ; portanto um morfismo de feixes leva cada fibra de  $\mathcal{T}$  num ponto  $x$  na fibra correspondente de  $\mathcal{F}$  no ponto  $x$  e podemos considerar, para cada  $x \in X$ , a aplicação induzida  $\varphi_x : \mathcal{T}_x \rightarrow \mathcal{F}_x$ .

Se  $Y$  é um subespaço topológico de  $X$ , cada feixe  $(\mathcal{T}, \pi)$  em  $X$  induz um feixe  $(\pi^{-1}(Y), \pi|_{\pi^{-1}(Y)})$  em  $Y$ , onde  $\pi^{-1}(Y)$  carrega a topologia de  $\mathcal{T}$ . Esse feixe é chamado de *restrição* de  $\mathcal{T}$  à  $Y$  e é denotado por  $\mathcal{T}|_Y$ . Analogamente um subespaço topológico  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{T}$  é um *subfeixe* de  $\mathcal{T}$  quando  $(\mathcal{F}, \pi|_{\mathcal{F}})$  é um feixe em  $X$ .

Sejam  $(\mathcal{T}, \pi)$  e  $(\mathcal{F}, \Pi)$  dois feixes em  $X$ , consideramos o produto:

$$\mathcal{T} \oplus \mathcal{F} = \{(z, w) \in \mathcal{T} \times \mathcal{F} : \pi(z) = \Pi(w)\} = \bigcup_{x \in X} (\mathcal{T}_x \times \mathcal{F}_x)$$

com a topologia de  $\mathcal{T} \times \mathcal{F}$ ; a aplicação  $\mathcal{T} \oplus \mathcal{F} \rightarrow X$  dada por  $(z, w) \mapsto \pi(z)$  é um homeomorfismo local e  $\mathcal{T} \oplus \mathcal{F}$  é um feixe em  $X$ , chamado de *soma de Whitney* de

$\mathcal{T}$  e  $\mathcal{F}$ . Analogamente podemos definir a soma de Whitney para  $p$  feixes em  $X$ ,  $\mathcal{T}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{T}_p$ ; se  $\mathcal{T}_j$  são todos iguais, escrevemos  $\mathcal{T}^p$  para essa soma de Whitney.

Uma aplicação contínua  $s : Y \rightarrow \mathcal{T}$  de um subespaço  $Y \subset X$  em um feixe  $(\mathcal{T}, \pi)$  em  $X$  é chamada de *seção* sobre  $Y$  em  $\mathcal{T}$  se  $\pi \circ s = id_Y$ . Escrevemos  $s_x = s(x)$ ; o conjunto de todas as seções sobre  $Y$  em  $\mathcal{T}$  é denotado por  $\Gamma(Y, \mathcal{T})$ .

Suponhamos que para cada subconjunto aberto  $U$  de  $X$  existe um espaço topológico associado à  $U$ ,  $\mathcal{T}_U$  e para qualquer par de abertos  $U$  e  $V$  de  $X$ , com  $V \subset U$ , existem aplicações restrições  $\rho_{VU} : \mathcal{T}_U \rightarrow \mathcal{T}_V$  satisfazendo

$$\rho_{UU} = id_U \quad \text{e} \quad \rho_{WV} \circ \rho_{VU} = \rho_{WU}$$

sempre que  $W \subset V \subset U$ . Então a família  $\{\mathcal{T}_U, \rho_{VU}\}$  é um *prefeixe* em  $X$ . Para todo feixe  $\mathcal{T}$  em  $X$  temos  $\{\Gamma(U, \mathcal{T}), r_{VU}\}$  com  $r_{VU}(s) = s|_V$ , o prefeixe canônico.

**Lema A.1.** *Para todo prefeixe existe um feixe associado.*

**Demonstração:** Veja [17], página 225.

Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços topológicos,  $f : X \rightarrow Y$  contínua e  $\mathcal{T}$  um feixe em  $X$ . Para cada aberto  $V \subset Y$  associamos um conjunto  $\Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{T}|_{f^{-1}(V)})$ . Se  $V \subset U$  são abertos de  $Y$  temos a restrição  $\rho_{VU} : \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{T}|_{f^{-1}(U)}) \rightarrow \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{T}|_{f^{-1}(V)})$  e  $\{\Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{T}|_{f^{-1}(V)}), \rho_{VU}\}$  é um prefeixe em  $Y$ ; o feixe associado é denotado por  $f_*(\mathcal{T})$  é chamado de *feixe imagem* de  $\mathcal{T}$  com respeito à  $f$ . Com a bijeção natural de  $\Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{T}|_{f^{-1}(V)})$  em  $\Gamma(V, f_*(\mathcal{T}))$  podemos identificar  $\Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{T}|_{f^{-1}(V)})$  com  $\Gamma(V, f_*(\mathcal{T}))$ .

## Feixes com estrutura algébrica

Um feixe  $\mathcal{T}$  em  $X$  é chamado de *feixe de anéis* (ou de grupos abelianos) se

- (i) Para cada  $x \in X$ ,  $\mathcal{T}_x$  é um anel (subgrupo abeliano);
- (ii) A aplicação  $\mathcal{T} \oplus \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ ,  $(z, w) \mapsto z - w$  é contínua;
- (iii) A aplicação:  $\mathcal{T} \oplus \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ ,  $(z, w) \mapsto zw$  é contínua;

tais operações estão bem definidas pois, se  $(z, w) \in \mathcal{T} \oplus \mathcal{T}$  então  $x = \pi(z) = \pi(w)$  e  $z - w, zw \in \mathcal{T}_x$ , para algum  $x \in X$ . E,  $0_x$  é o elemento neutro em  $\mathcal{T}_x$  e a aplicação  $x \mapsto 0_x$  é uma seção de  $X$  em  $\mathcal{T}$ , a seção nula. Assumimos que toda fibra  $\mathcal{T}_x$  possui identidade  $1_x$  dependendo suavemente de  $x$ , gerando uma seção em  $\mathcal{T}$ .

Sejam  $\mathcal{A}$  um feixe de anéis e  $\mathcal{T}$  um feixe de grupos abelianos.  $\mathcal{T}$  é um *feixe de  $\mathcal{A}$ -módulos* se existir um morfismo de feixes  $\mathcal{A} \oplus \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$  tal que cada fibra  $\mathcal{T}_x$  é um  $\mathcal{A}_x$ -módulo. Se  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_p$  são feixes de  $\mathcal{A}$ -módulos então a soma de Whitney é um  $\mathcal{A}$ -módulo com operações definidas componente à componente. Em particular  $\mathcal{A}^p$  é um  $\mathcal{A}$ -módulo.

Sejam  $\mathcal{T}$  um feixe de  $\mathcal{A}$ -módulos em  $X$  e  $s_1, \dots, s_p \in \Gamma(U, \mathcal{T})$ . Definimos um  $\mathcal{A}_U$ -homomorfismo

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{A}_U^p &\longrightarrow \mathcal{T}_U \\ (a_{1x}, \dots, a_{px}) &\longmapsto \sum_{i=1}^p a_{ix} s_{i_x} \end{aligned} \tag{A.1}$$

com  $x \in U$  e  $a_{jx} \in \mathcal{A}_{U_x}$ . Dizemos que  $\mathcal{T}_U$  é gerado pelas seções  $s_1, \dots, s_p$  quando  $\sigma$  é sobrejetora, ou seja, para qualquer  $x \in U$

$$\mathcal{T}_x = \mathcal{A}_x s_{1_x} + \dots + \mathcal{A}_x s_{p_x}$$

um feixe de módulos é *localmente finitamente gerado em  $x$*  se existir uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que o feixe restrito à  $U$  é gerado por finitas seções. O feixe é *localmente finitamente gerado* quando é localmente finitamente gerado em  $x$ ,  $\forall x \in X$ .

**Teorema A.2.** *Sejam  $\mathcal{F}$  um feixe localmente finitamente gerado e  $s_1, \dots, s_p$  seções numa vizinhança de  $x$  que geram  $\mathcal{F}_x$  então  $s_1, \dots, s_p$  geram  $\mathcal{F}_w$  para todo  $w$  suficientemente próximo de  $x$ .*

**Demonstração:** Veja [20], página 166.

Seja  $\sigma$   $\mathcal{A}_U$ -homomorfismo como em (A.1), o *feixe de relações de  $s_1, \dots, s_p$*  é um  $\mathcal{A}_U$ -submódulo de  $\mathcal{A}_U^p$  definido por

$$Rel(s_1, \dots, s_p) := \ker \sigma = \bigcup_{x \in U} \left\{ (a_{1x}, \dots, a_{px}) \in \mathcal{A}_x^p : \sum_{i=1}^p a_{ix} s_{i_x} = 0 \right\}$$

Um feixe é um *feixe de relação com tipo finito em  $x$* , se para todo  $\sigma$  como na expressão (A.1) de seções num aberto  $U$  de  $x$ ,  $Rel(s_1, \dots, s_p)$  é localmente finitamente gerado em  $x$ . O feixe é um *feixe de relação com tipo finito* se é de relação com tipo finito em todo  $x$ .

Um feixe  $\mathcal{T}$  de  $\mathcal{A}$ -módulos é um *feixe coerente* se é um feixe localmente finitamente gerado e é um feixe de relação com tipo finito.

**Teorema A.3.** *Todo subfeixe de  $\mathcal{O}_n^p$  localmente finitamente gerado é coerente.*

**Demonstração:** Veja [20], página 167.

**Teorema A.4.** *Seja  $\varphi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{F}$  um  $\mathcal{O}_n$ -homomorfismo entre feixes coerentes. Então os feixes  $Im(\varphi)$ ,  $ker(\varphi)$  e  $coker(\varphi)$  são coerentes.*

**Demonstração:** Veja [20], página 237.



# Bibliografia

- [1] ARNOLD, V. *Mathematical methods of classical mechanics*. New York: Springer - Verlag, 1978.
- [2] ARNOLD, V. *Wave front evolution and equivariant Morse lemma*. Communications on pure and applied mathematics 29, pg. 557-582, 1976.
- [3] ATIYAH, M.; MACDONALD, I. *Introduction to commutative algebra*. Massachusetts: Addison - Wesley, 1969.
- [4] BRUCE, J. *Functions on discriminants*. Journal of London mathematical society 30, pg. 551-567, 1984.
- [5] BRUCE, J.; DU PLESSIS, A.; WALL, C. *Determinacy and unipotency*. Inventiones mathematicae 88, pg. 521-554, 1987.
- [6] BRUCE, J.; Giblin, P. *Curves and singularities*.- 2<sup>a</sup> edição. Glasgow: Cambridge University, 1992.
- [7] BRUCE, J.; KIRK, N. P.; DU PLESSIS, A. *Complete transversals and the classification of singularities*. Nonlinearity 10, pg. 253-275, 1997.
- [8] BRUCE, J.; ROBERTS, R. *Critical points of functions on analytic varieties*. Topology 27, pg. 57-90, 1988.
- [9] BRUCE, J.; WEST, J. *Function on a crosscap*. Math. proc. camb. phil. soc. 123, pg. 19-39, 1998.

- [10] CARNEIRO, M.; SOARES, M. *Introdução à topologia de singularidades complexas*. Poços de Caldas: IMPA, 1985.
- [11] DAMON, J. *The unfolding and determinacy theorems for subgroups of  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{K}$* . *Memoirs of the american mathematical society* 50, 306, 1984.
- [12] DAMON, J. *Topological triviality and versality for subgroups of  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{K}$* . *Memoirs of the american mathematical society* 75, 389 (primeiro de 3 números), 1988.
- [13] DIMCA, A. *Function germs defined on isolated hypersurface singularities*. *Compositio mathematica* 53, pg. 245-258. 1984.
- [14] TARI, F. *Singularidades de aplicações diferenciáveis*. São Carlos: Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, 1999. (notas didáticas do ICMC).
- [15] GIBSON, C. *Singular points of smooth mappings*. London: Pitman, 1979.
- [16] GOLUBITSKY, M.; GUILLEMIN, V. *Stable mappings and their singularities*. New York: Springer - Verlag, 1973.
- [17] GRAUERT, H.; REINHOLD, R. *Coherent analytic sheaves*. Berlin: Springer - Verlag, 1984.
- [18] GRIFFITHS, P.; HARRIS, J. *Principles of algebraic geometry*. New York: John Wiley & sons, 1978.
- [19] GUNNING, R.; ROSSI, H. *Analytic functions of several complex variables*. New Jersey: Prentice - Hall, 1965.
- [20] HÖRMANDER, L. *An introduction to complex analysis in several variables*. Amsterdam: North - Holland, 1973.
- [21] HUNGERFORD, T. *Algebra*. New York: Springer - Verlag, 1974.
- [22] MATHER, J. *Stability of  $C^\infty$  mappings, III. Finitely determined map-germs*. *Publications mathématiques de l'L.H.É.S.* 35, pg. 127-156, 1968.

- [23] MATHER, J. *Stability of  $C^\infty$  mappings, IV. Classification of stable germs by  $R$ -algebras*. Publications mathématiques de l’L.H.É.S. 37, pg. 223-248, 1969.
- [24] SAITO, K. *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields*. Journal fac. of science university of Tokyo sect. 1A math. 27, pg. 265-291, 1980.
- [25] SAN MARTIN, L. *Imersões*. Disponível em [http:// www.ime.unicamp.br/smartin/ grupolie.html](http://www.ime.unicamp.br/smartin/grupolie.html). Acesso em: 03 Novembro 2005.
- [26] WARNER, F. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. New York: Scott, Foresman, 1983.