

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Existência Global de Soluções para
uma Classe de Leis de
Conservação e Algumas
Considerações sobre um Sistema
de Leis de Conservação**

Ricardo Edem Ferreira

São Carlos - SP

2006

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Existência Global de Soluções para uma Classe de Leis de
Conservação e Algumas Considerações sobre um Sistema de
Leis de Conservação**

Ricardo Edem Ferreira

Orientador: Prof. Dr. Cezar Issao Kondo

Dissertação apresentada ao Programa
de Pós-Graduação em Matemática da
UFSCar como parte dos requisitos
para obtenção do título de Mestre em
Matemática.

São Carlos - SP

Março de 2006

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

F383eg

Ferreira, Ricardo Edem.

Existência global de soluções para uma classe de leis de conservação e algumas considerações sobre um sistema de leis de conservação / Ricardo Edem Ferreira. -- São Carlos : UFSCar, 2006.

81 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2006.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Leis de conservação. I. Título.

CDD: 515.353 (20^a)

Orientador

Prof. Dr. Cezar Issao Kondo

Banca Examinadora

Prof. Dr. Cezar Issao Kondo

Prof. Dr. J R S dos S Filho

Prof. Dr. Marcelo R Ebert

Aos meus pais Francisco e Francisca.

Amo muito vocês.

”Tudo tem o seu tempo determinado, e há tempo para todo propósito debaixo do ceu: há tempo de nascer e tempo de morrer; tempo de plantar e tempo de arrancar o que se plantou; tempo de matar e tempo de curar; tempo de derribar e tempo de edificar; tempo de chorar e tempo de rir; tempo de prantear e tempo de saltar de alegria; tempo de espalhar pedras e tempo de ajuntar pedras; tempo de abraçar e tempo de afastar-se de abraçar; tempo de buscar e tempo de perder; tempo de guardar e tempo de deitar fora; tempo de rasgar e tempo de coser; tempo de estar calado e tempo de falar; tempo de amar e tempo de aborrecer; tempo de guerra e tempo de paz.”

(Eclesiastes 3)

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por estar sempre ao meu lado, por ter me presentiado com a vida, por ter me dado uma família tão querida, por me dar força e esperança para sempre continuar.

Aos meus pais, Francisco e Francisca, pelo amor, confiança, apoio, e por criarem uma família tão maravilhosa. À minha avó Geralda. Aos meus irmãos, Renato, Helio e Ana Paula, pela amizade, paciência e apoio de sempre. Às minhas cunhadas, Brigida e Viviane. Às minhas amadas sobrinhas, Maria Clara e Maria Eduarda. À minha avó Geralda. Em especial a Fernanda Leal, que sempre foi muito importante em minha vida e que tanto me apoiou nesse período.

Ao Prof. Dr. Cezar Issao Kondo, pela coordenação, dedicação, apoio e paciência. Em especial a Profa. Dra. Catarina Mendes de Jesus que tanto me apoiou no início desse trabalho.

Às minhas amigas, Adriana e Simone, nem mesmo a distância diminui a força da nossa amizade.

Aos amigos e aos professores do PPG-M.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro.

Resumo

Nesse trabalho, construiremos solução global para uma lei de conservação, devido a C. M. Dafermos. Também discutiremos algumas propriedades para uma classe de sistemas de leis de conservação.

Abstract

In this work, we will construct global solutions for a conservation law, due to C. M. Dafermos. Also we will discuss some properties for a class of systems of conservation laws, due to B. Rubino.

Sumário

Introdução	11
1 Preliminares	13
2 Aproximação Poligonal de Soluções do Problema de Valor Inicial para uma Lei de Consevação	17
2.1 Introdução	17
2.2 Soluções Admissíveis	19
2.3 Existência de Soluções Admissíveis	24
3 Algumas Considerações sobre o Problema de Cauchy para um Sistema 2×2 de uma Lei de Conservação	40
3.1 Introdução	40
3.2 Regiões Invariantes	44
3.3 Estudo do Sistema Viscoso	57
3.4 Entropias	65
3.4.1 Entropias do Tipo Produto	67
3.4.2 Entropias do Tipo Soma	68
3.4.3 Entropias Polinomiais	69
3.4.4 O Problema de Goursat	74
Referências Bibliográficas	80

Introdução

Esse trabalho está dividido em duas partes, apresentaremos inicialmente um método para construção de uma solução global para uma classe de leis de conservação baseado em [D], depois faremos algumas considerações sobre um sistema não-linear 2×2 hiperbólico de leis de conservação baseadas em [Ru].

No segundo capítulo, estudaremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1)$$

onde f é localmente Lipschitz contínua em \mathbb{R} e u_0 é limitada e de variação localmente limitada em \mathbb{R} . Primeiro, definiremos uma solução fraca admissível para (1). Depois, mostraremos a existência de solução fraca admissível para (1) em alguns casos particulares e construiremos uma solução fraca admissível global para o caso geral.

No terceiro capítulo, faremos algumas considerações sobre o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + \left(\left(\frac{1}{2} + a \right) u^2 + f(v) \right)_x = 0 \\ v_t + (uv)_x = 0 \\ (u, v)_{t=0} = (u_0, v_0), \end{cases} \quad (2)$$

para funções u, v definidas em $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t^+$ a valores reais. Assumiremos que $a > \frac{1}{2}$ é constante, $f \in C^2(\mathbb{R})$ é par e $\forall v$ satisfaz

$$\begin{cases} f'(v)v > 0, & v \neq 0 \\ f''(v) > 0, & v \neq 0. \end{cases}$$

Verificaremos a existência de regiões invariantes e faremos algumas estimativas a priori em L^∞ . Depois, estudaremos o sistema viscoso, mostraremos a existência de infinitas entropias de diferentes tipos e aplicaremos os argumentos de Tartar e DiPerna para provar a existência de uma entropia polinomial. Finalmente, estudaremos o problema de Goursat.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns conteúdos preliminares (definições, lemas, teoremas) necessários para o desenvolvimento da dissertação.

Enunciaremos agora, algumas definições e alguns resultados que serão usados no primeiro capítulo.

Definição 1.1 *Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ uma partição de $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Definimos*

$$\sum(f, P) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|.$$

A variação da função f , no intervalo $[a, b]$, é definida por

$$Var_{[a,b]}f \equiv \sup_P \sum(f, P).$$

Dizemos que f tem variação limitada, no intervalo $[a, b]$, se existe $M > 0$ tal que $Var_{[a,b]}f \leq M$.

Definição 1.2 *Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua à esquerda de $x_0 \in \mathbb{R}$ se*

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \equiv f(x_0^-) = f(x_0)$$

Teorema 1.1 *Se f tem variação limitada então $f(x^-)$ existe $\forall x \in \mathbb{R}$ e o conjunto onde f é descontínua é enumerável.*

Demonstração: ver [R].

Teorema 1.2 (Teorema de Helly) *Considere uma seqüência de funções $f_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tais que $\text{Var}_{\mathbb{R}} f_\nu \leq M$ e $|f_\nu(x)| \leq M$, $\forall \nu$ e $\forall x \in \mathbb{R}$. Então existe uma função f e uma subseqüência $\{f_n\}$ tal que $f_n(x) \rightarrow f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{Var}_{\mathbb{R}} f \leq M$ e $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: ver [B].

A seguir, enunciaremos algumas definições e alguns resultados que serão usados no segundo capítulo.

Definição 1.3 *Seja $T > 0$, definamos o conjunto de funções Γ_T por*

$$\Gamma_T = \{u \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}); \|u(t) - \bar{u}\|_\infty \leq r\},$$

e o operador G sobre Γ_T por

$$G(u)(t) = Z(t) * u_0 - \int_0^t Z_x(t-s) * f(u(s)) ds,$$

$u \in \Gamma_T$, onde Z é a solução fundamental da equação do calor e $*$ denota uma convolução em x .

Lema 1.1 *Supomos que $u_0 - \bar{u} \in L^\infty \cap L^2$, $f(\bar{u}) = 0$ e que $\|u_0 - \bar{u}\|_\infty = s < r$. Então se $T > 0$ é suficientemente pequeno (dependendo de s), valem as seguintes afirmações:*

- a) G aplica Γ_T em si próprio.
- b) G é uma contração na topologia L^∞ sobre Γ_T .
- c) Existe uma constante C_0 dependendo apenas de Z e f , tal que sempre que $u \in \Gamma_T$ satisfizer

$$\|u(t)\|_2 \leq C_0 \|u_0\|_2, \quad t \in [0, T], \quad (1.1)$$

então $G(u)$ também satisfaz (1.1).

d) Existe uma constante C_1 dependendo apenas de Z e f , tal que sempre que $u \in \Gamma_T$ satisfizer

$$\|u_x(t)\|_p \leq \frac{C_1 \|u_0\|_p}{\sqrt{t}}, \quad 0 < t \leq T, \quad (1.2)$$

para $p = 2$ ou $p = \infty$, então $G(u)$ também satisfaz (1.2).

e) Dado $t_0 \in (0, T)$, existe uma constante C_2 dependendo apenas de Z , f e t_0 , tal que, sempre que $u \in \Gamma_T$ satisfizer (1.2) e

$$\|u_{xx}(t)\|_2 \leq \frac{C_2(\|u_0\|_2 + \|u_0\|_2^2)}{\sqrt{t - t_0}}, \quad t_0 < t \leq T, \quad (1.3)$$

então $G(u)$ também satisfaz (1.3).

Demonstração: ver [W].

Teorema 1.3 Suponhamos $u_0 - \bar{u} \in L^\infty \cap L^2$ e $\|u_0 - \bar{u}\|_\infty = s < r$. Então existe uma única solução u de (3.4) definida em uma faixa $[0, T] \times \mathbb{R}$, onde T depende somente de Z , f e s . Mais ainda, u_t , u_x , u_{xx} são Hölder contínuas em $t \geq t_0 > 0$; $u_t(t)$, $u_x(t)$, $u_{xx}(t)$ e $u_{tx}(t)$ estão em $L^2(\mathbb{R})$ para $t > 0$.

Demonstração: ver [W].

Teorema 1.4 Sejam $\Omega_0 = \mathbb{R} \times (0, T]$ e $\Omega = \mathbb{R} \times [0, T]$. Seja L um operador parabólico com coeficientes contínuos em Ω_0 , da forma

$$L\psi = a(x, t) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial x} + c(x, t) \psi - \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

satisfazendo

$$|a(x, t)| \leq M, \quad |b(x, t)| \leq M(|x| + 1), \quad c(x, t) \leq M(|x|^2 + 1).$$

Assuma que $Lv \leq 0$ em Ω_0 e que

$$v(x, t) \geq -Be^{\beta|x|^2} \text{ em } \Omega,$$

para algumas constantes positivas B, β . Se $v(x, 0) \geq 0$ em \mathbb{R} então $v(x, t) \geq 0$ em Ω .

Demonstração: ver [Fr].

Definição 1.4 A seqüência $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ em $L^{\infty}(\Omega)$, converge fraco $*$ a $f \in L^{\infty}(\Omega)$, e escreve-se

$$f_k \xrightarrow{*} f \text{ em } L^{\infty}(\Omega)$$

se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k g \, dx = \int_{\Omega} f g \, dx$$

para cada $g \in L^1(\Omega)$.

Capítulo 2

Aproximação Poligonal de Soluções do Problema de Valor Inicial para uma Lei de Consevação

2.1 Introdução

Segundo [D], Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde f é localmente Lipschitz contínua em \mathbb{R} e u_0 é limitada e de variação localmente limitada em \mathbb{R} .

Em geral, não existe solução clássica de (2.1), mesmo quando f e u_0 são suaves.

Segundo [D], estabeleceremos a existência de uma solução que satisfaz a condição proposta por Hopf [Hf]. Tal solução será construída primeiro em um caso especial onde u_0 é uma função constante por partes e $f(u)$ é linear por partes. No caso geral, aproximaremos $f(u)$ por uma seqüência de funções lineares por partes e u_0 por uma seqüência de funções constantes por partes, então estabeleceremos a existência de

solução através de um argumento sugerido por Oleinik [O].

2.2 Soluções Admissíveis

Definição 2.1 Uma função localmente limitada e mensurável $u(x, t)$ definida em $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ é chamada uma solução fraca admissível de (2.1), segundo [Hf], se para qualquer função $h(u)$ não-decrescente e qualquer função $\phi(x, t) \in C_c^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ não-negativa, tivermos

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (I(u)\phi_t + F(u)\phi_x) dxdt + \int_{-\infty}^{+\infty} I(u_0)\phi(x, 0) dx \geq 0, \quad (2.2)$$

onde

$$I(u) \equiv \int^u h(\xi) d\xi, \quad F(u) \equiv \int^u h(\xi) df(\xi). \quad (2.3)$$

Observação 2.1 Se $u(x, t)$ é definida em $\mathbb{R} \times [0, T)$ e (2.2) é satisfeita para toda função $\phi(x, t) \in C_c^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ não-negativa, então $u(x, t)$ é chamada uma solução local fraca admissível de (2.1) em $\mathbb{R} \times [0, T)$.

Observação 2.2 Se $h(u) \equiv 1$ então $I(u) = u$ e $F(u) = f(u)$, logo (2.2) torna-se

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (u\phi_t + f(u)\phi_x) dxdt + \int_{-\infty}^{+\infty} u_0\phi(x, 0) dx \geq 0,$$

por outro lado, se $h(u) \equiv -1$ então $I(u) = -u$ e $F(u) = -f(u)$, assim (2.2) torna-se

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (-u\phi_t - f(u)\phi_x) dxdt + \int_{-\infty}^{+\infty} -u_0\phi(x, 0) dx \geq 0,$$

as duas desigualdades mostram que

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (u\phi_t + f(u)\phi_x) dxdt + \int_{-\infty}^{+\infty} u_0\phi(x, 0) dx = 0,$$

essa é uma condição satisfeita por qualquer solução fraca de (2.1).

Proposição 2.1 Uma função constante por partes $u(x, t)$ com linha de descontinuidade suave $x = \bar{x}(t)$, $t \in (a, b)$, ou seja, a função $u(x, t)$ é descontínua em $(\bar{x}(t), t)$, $t \in (a, b)$, que satisfaz $u(x, 0) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$, é uma solução fraca admissível de (2.1) se, e somente se, a seguinte condição é satisfeita: suponha que $x = \bar{x}(t)$, $t \in (a, b)$, é qualquer linha de descontinuidade de $u(x, t)$ e sejam

$$u^- \equiv \lim_{x \rightarrow \bar{x}(t)^-} u(x, t), \quad u^+ \equiv \lim_{x \rightarrow \bar{x}(t)^+} u(x, t).$$

Então:

i) A curva $\bar{x}(t)$ é uma reta com inclinação

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}. \quad (2.4)$$

ii) Para qualquer u entre u^- e u^+

$$\frac{f(u^+) - f(u)}{u^+ - u} \leq \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}. \quad (2.5)$$

Observação 2.3 A equação (2.4) é a clássica condição de salto, em dinâmica dos gases é conhecida como condição de Rankine-Hugoniot, enquanto (2.5) é a condição de Oleinik.

Observação 2.4 De acordo com (2.5), observamos que se u está entre u^+ e u^- e f é estritamente convexa, então temos que o ponto $(u, f(u))$, está abaixo da reta que passa pelos pontos $(u^-, f(u^-))$ e $(u^+, f(u^+))$, logo $u^+ < u^-$. Do mesmo modo, se u está entre u^+ e u^- e f é estritamente côncava, temos que o ponto $(u, f(u))$, está acima da reta que passa pelos pontos $(u^-, f(u^-))$ e $(u^+, f(u^+))$, logo $u^- < u^+$.

Agora demonstraremos a Proposição 2.1.

Demonstração:

Supomos que $u(x, t)$ é uma solução fraca admissível de (2.1). Então, $\forall h(u)$ não-decrescente e $\forall \phi(x, t) \in C_c^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ não-negativa, $u(x, t)$ satisfaz (2.2). Sejam \bar{x} uma curva suave na qual u tem um salto de descontinuidade, e

$$u^- \equiv \lim_{x \rightarrow \bar{x}(t)^-} u(x, t) \quad \text{e} \quad u^+ \equiv \lim_{x \rightarrow \bar{x}(t)^+} u(x, t).$$

Sejam p um ponto pertencente a \bar{x} e B uma bola fechada, centrada em p tal que $t > 0$, $\forall (x, t) \in B$. Seja $\phi \in C_c^1(B)$, assim $\int_{-\infty}^{+\infty} I(u_0)\phi(x, 0) dx = 0$, logo temos

$$\begin{aligned} \iint_B (I(u)\phi_t + F(u)\phi_x) dxdt &= \iint_{B_1} (I(u^-)\phi_t + F(u^-)\phi_x) dxdt \\ &+ \iint_{B_2} (I(u^+)\phi_t + F(u^+)\phi_x) dxdt \geq 0, \end{aligned}$$

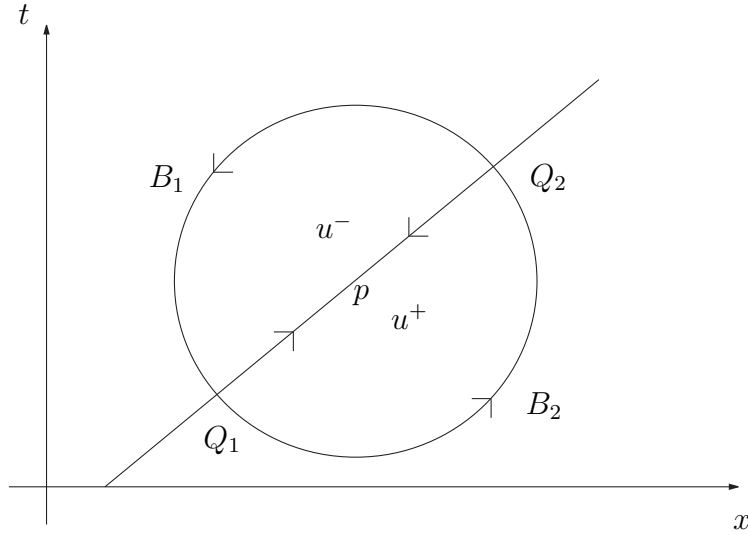


Figura 2.1: $B = B_1 \cup B_2$ contem o suporte compacto da ϕ .

onde $B_1 = \{(x, t); t \geq \bar{x}(t)\} \cap B$ e $B_2 = \{(x, t); t \leq \bar{x}(t)\} \cap B$.

Usando o Teorema de Green, temos que

$$\begin{aligned} \iint_B (I(u)\phi_t + F(u)\phi_x) dxdt &= \int_{\partial B_1} -I(u^-)\phi dx + F(u^-)\phi dt \\ &+ \int_{\partial B_2} -I(u^+)\phi dx + F(u^+)\phi dt \geq 0. \end{aligned}$$

Como $\phi = 0$ em ∂B , temos que

$$\int_{Q_1}^{Q_2} (-I(u^-) + I(u^+)) \phi(\bar{x}(t), t) dx + (F(u^-) - F(u^+)) \phi(\bar{x}(t), t) dt \geq 0,$$

$\forall \phi \in C_0^1(B)$.

Parametrizando $x = \bar{x}(t)$ e como ϕ é arbitrária temos que

$$(I(u^+) - I(u^-)) \frac{dx}{dt} \geq F(u^+) - F(u^-). \quad (2.6)$$

Fazendo $h(u) \equiv 1$ temos que $I(u) = u$ e $F(u) = f(u)$, assim

$$(u^+ - u^-) \frac{dx}{dt} \geq f(u^+) - f(u^-).$$

Por outro lado, se $h(u) \equiv -1$ então $I(u) = -u$ e $F(u) = -f(u)$, logo

$$(u^- - u^+) \frac{dx}{dt} \geq f(u^-) - f(u^+).$$

Portanto

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-},$$

assim, verificamos o item *i*). Para verificarmos o item *ii*), supomos primeiro que $u^- \leq \tilde{u} \leq u^+$. Definimos

$$h(u) = \begin{cases} 0, & u < \tilde{u} \\ 1, & u \geq \tilde{u}, \end{cases}$$

assim, temos que

$$I(u) = \begin{cases} 0, & u < \tilde{u} \\ u - \tilde{u}, & u \geq \tilde{u} \end{cases}, \quad F(u) = \begin{cases} 0, & u < \tilde{u} \\ f(u) - f(\tilde{u}), & u \geq \tilde{u}. \end{cases}$$

Logo $I(u^-) = 0$, $I(u^+) = u^+ - \tilde{u}$, $F(u^-) = 0$ e $F(u^+) = f(u^+) - f(\tilde{u})$, dessa forma obtemos, de (2.6)

$$\frac{f(u^+) - f(\tilde{u})}{u^+ - \tilde{u}} \leq \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}.$$

Um argumento análogo mostra que a desigualdade é verdadeira quando $u^+ \leq \tilde{u} \leq u^-$.

Reciprocamente, supomos que $u(x, t)$ é uma função constante por partes, com uma linha de descontinuidade suave, $\bar{x}(t)$, que satisfaz $u(x, 0) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$, sem perda de generalidade podemos supor que $\bar{x}(t)$ passa pela origem, além disso, supomos que $u(x, t)$ satisfaz *i*) e *ii*).

Sejam $\phi(x, t) \in C_c^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ e $R = [a, b] \times [0, T]$ um retângulo que contem o suporte de ϕ , tal que $R = R_1 \cup R_2$, como na figura (2.2), onde $R_1 = R \cap \{(x, t); t \geq \bar{x}(t)\}$ e $R_2 = R \cap \{(x, t); t \leq \bar{x}(t)\}$. Queremos mostrar que $u(x, t)$ satisfaz (2.2).

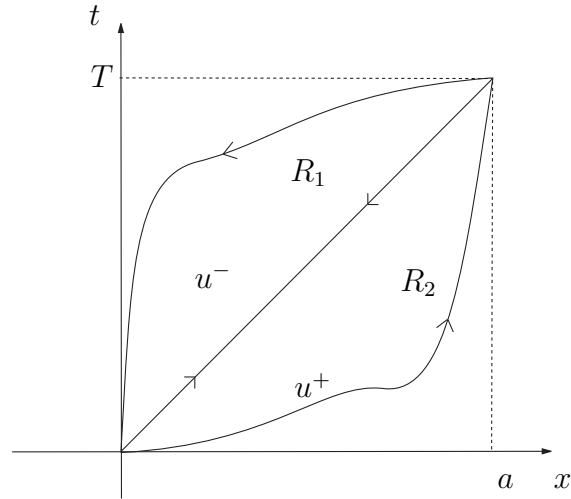


Figura 2.2: $R = R_1 \cup R_2$ é o suporte compacto de ϕ .

Como $\phi(x, 0) = 0$, temos que

$$\begin{aligned}
 \iint_R (I(u)\phi_t + F(u)\phi_x) dx dt &= \int_{\partial R_1} -I(u^-)\phi dx + F(u^-)\phi dt \\
 &\quad + \int_{\partial R_2} -I(u^+)\phi dx + F(u^+)\phi dt \\
 &= \int_0^T \left[(-I(u^-) + I(u^+)) \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-} \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^T (F(u^-) - F(u^+)) \right] \phi(\bar{x}(t), t) dt.
 \end{aligned}$$

Pelo Lema 6.1 de [G-R], temos que

$$(-I(u^-) + I(u^+)) \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-} + (F(u^-) - F(u^+)) \geq 0,$$

assim, $u(x, t)$ satisfaz (2.2). ■

2.3 Existência de Soluções Admissíveis

O resultado mais importante desse capítulo é o

Teorema 2.1 *Assuma que u_0 é contínua à esquerda, tem variação localmente limitada em \mathbb{R} e que existem $m, M \in \mathbb{R}$, tais que*

$$m \leq u_0(x) \leq M, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

Se $f(u)$ é localmente lipschitz contínua em \mathbb{R} e

$$|f(u) - f(u')| \leq K|u - u'|, \quad \forall u, u' \in [m, M], \quad (2.8)$$

então existe uma solução fraca admissível $u(x, t)$ de (2.1) que tem as seguintes propriedades, para todo t fixo em $[0, +\infty)$:

- *$u(x, t)$ é contínua à esquerda.*
- *$u(x, t)$ é limitada superiormente por M e inferiormente por m .*
- *$u(x, t)$ tem variação localmente limitada em \mathbb{R} .*
- *A restrição de $u(x, t)$ em qualquer intervalo $[x_1, x_2]$ está unicamente determinada pela restrição de u_0 no intervalo $[x_1 - Kt, x_2 + Kt]$ (domínio de dependência finita).*
- *Além disso,*

$$\text{Var}_{[x_1, x_2]} u(x, t) \leq \text{Var}_{[x_1 - Kt, x_2 + Kt]} u_0(x) \quad (2.9)$$

Antes de demonstrarmos o Teorema 2.1, estudaremos dois casos especiais, Lema 2.1 e Lema 2.2.

Lema 2.1 *(O problema de Riemann para uma aproximação poligonal)*

Assuma que f é linear por partes, ou seja, existe uma partição $P = \{m = x_0 < \dots < x_n = M\}$ de $[m, M]$ tal que f é linear em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$.

Supomos que f satisfaz (2.8) e

$$u_0 \equiv \begin{cases} u_l, & x \in (-\infty, 0] \\ u_r, & x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

onde u_l e u_r são constantes em $[m, M]$. Então existe uma solução fraca admissível de (2.1), que consiste de um número finito de constantes separadas por ondas de choque centradas na origem.

Demonstração: Supomos primeiro que $u_l < u_r$. A fronteira da casca convexa do conjunto $\{(u, v); u_l \leq u \leq u_r, v \geq f(u)\}$ é uma poligonal com vértices nos pontos $(u_l, f(u_l)), (u^1, f(u^1)), (u^2, f(u^2)), \dots, (u^k, f(u^k)), (u_r, f(u_r))$, sendo $u_l < u^1 < \dots < u^k < u_r$, onde $(u^1, f(u^1)), (u^2, f(u^2)), \dots, (u^k, f(u^k))$ são também vértices do gráfico de f .

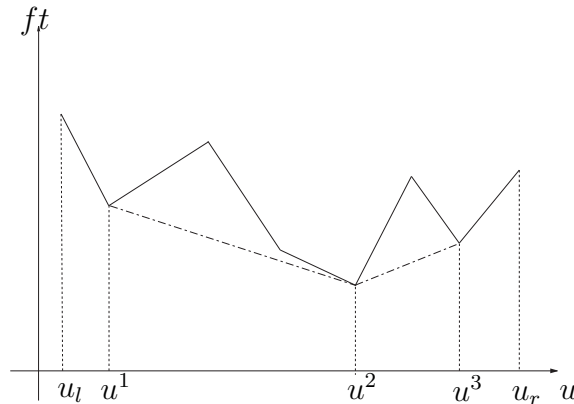


Figura 2.3: A linha pontilhada é um exemplo de representação de fronteira da casca convexa entre u^1 e u^3 , para uma função f linear por partes.

Mostraremos primeiro que

$$-K \leq \frac{f(u^{n+1}) - f(u^n)}{u^{n+1} - u^n} < \frac{f(u^{n+2}) - f(u^{n+1})}{u^{n+2} - u^{n+1}} \leq K,$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots, k-1$, $u^0 = u_l$ e $u^{k+1} = u_r$.

Como os pontos $(u_l, f(u_l)), (u^1, f(u^1)), (u^2, f(u^2)), \dots, (u^k, f(u^k)), (u_r, f(u_r))$ são vértices de uma poligonal convexa, todos os pontos do gráfico de f estão acima da reta que passa pelos pontos $(u^n, f(u^n))$ e $(u^{n+1}, f(u^{n+1}))$ e acima da reta que passa pelos pontos $(u^{n+1}, f(u^{n+1}))$ e $(u^{n+2}, f(u^{n+2}))$, $n = 0, 1, 2, \dots, k-1$. Sejam y_1 e y_2 as equações dessas retas e m_1 e m_2 suas inclinações, respectivamente. Se $m_1 = m_2$ então y_1 e y_2 são a mesma reta e o ponto $(u^{n+1}, f(u^{n+1}))$ não é vértice, o que é uma contradição pela construção. Supomos agora que $m_1 > m_2$. Como $y_1(u^{n+1}) = y_2(u^{n+1})$ e $u^{n+1} < u^{n+2}$, então $y_1(u^{n+2}) > y_2(u^{n+2})$. Mas nesse caso

temos um ponto da poligonal que está abaixo da reta y_1 , o que é uma contradição, pois a poligonal é convexa. Portanto $m_1 < m_2$. Como $-K \leq m_1 < m_2 \leq K$, pois f é lipschitz em $[m, M]$ com constante K , temos que

$$\begin{aligned} -K &\leq \frac{f(u^1) - f(u_l)}{u^1 - u_l} < \frac{f(u^2) - f(u^1)}{u^2 - u^1} < \dots \\ &< \frac{f(u^k) - f(u^{k-1})}{u^k - u^{k-1}} < \frac{f(u_r) - f(u^k)}{u_r - u^k} \leq K. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Definimos

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l, & \frac{x}{t} \leq \frac{f(u^1) - f(u_l)}{u^1 - u_l} \\ u^1, & \frac{f(u^1) - f(u_l)}{u^1 - u_l} < \frac{x}{t} \leq \frac{f(u^2) - f(u^1)}{u^2 - u^1} \\ \vdots \\ u^k, & \frac{f(u^k) - f(u^{k-1})}{u^k - u^{k-1}} < \frac{x}{t} \leq \frac{f(u_r) - f(u^k)}{u_r - u^k} \\ u_r, & \frac{f(u_r) - f(u^k)}{u_r - u^k} < \frac{x}{t}, \end{cases} \quad (2.11)$$

portanto $u(x, t)$ definida em (2.11) satisfaz (2.4). Devido a convexidade da poligonal que forma a fronteira da casca convexa, obtemos

$$\frac{f(u^{n+1}) - f(u)}{u^{n+1} - u} \leq \frac{f(u^{n+1}) - f(u^n)}{u^{n+1} - u^n},$$

$\forall u \in (u^n, u^{n+1})$, $n = 0, 1, 2, \dots, k-1$, logo $u(x, t)$ satisfaz (2.5). Assim, segundo a Proposição 2.1, temos que $u(x, t)$ é uma solução fraca admissível de (2.1).

No caso em que $u_l > u_r$, sejam $(u_r, f(u_r))$, $(u^k, f(u^k))$, \dots , $(u^1, f(u^1))$, $(u_l, f(u_l))$, onde $u_r < u^k < \dots < u^1 < u_l$, os vértices da fronteira da casca côncava do conjunto $\{(u, v); u_r \leq u \leq u_l, v \leq f(u)\}$. Então (2.10) é verificado. Assim, $u(x, t)$ definida como em (2.11) é uma solução fraca admissível de (2.1). \blacksquare

Lema 2.2 *O Teorema 2.1 é verdadeiro se $f(u)$ é linear por partes satisfazendo (2.8)*

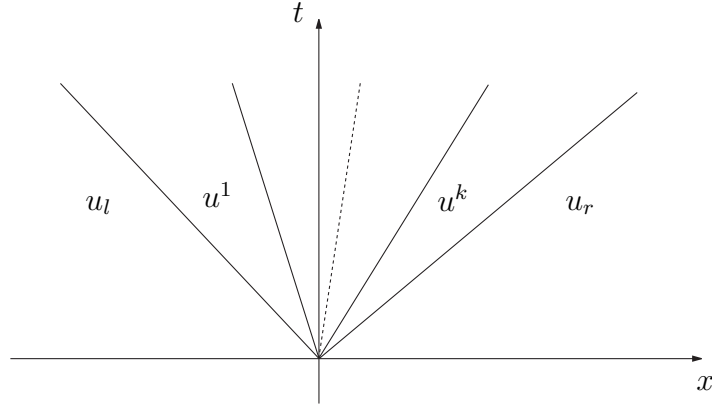


Figura 2.4: Representação de uma solução fraca admissível de (2.1), para $u_l < u_r$.

com

$$u_0 \equiv \begin{cases} v_1, & x \leq x_1 \\ v_2, & x_1 < x \leq x_2 \\ \vdots \\ v_s, & x_{s-1} < x, \end{cases} \quad (2.12)$$

onde v_j é constante em $[m, M]$, $j = 1, \dots, s$.

Demonstração: Seja $\{(u^1, f(u^1)), \dots, (u^k, f(u^k))\}$ o conjunto de todos os vértices do gráfico de f com abscissas u em $[m, M]$. Defina $\mathcal{J} \equiv \{u^1, \dots, u^k\} \cup \{v_1, \dots, v_s\}$.

Diremos que uma função $u(x, t)$ em $\mathbb{R} \times [0, T)$ é de classe D_T se as seguintes condições são satisfeitas:

- i) $u(x, t)$ é uma solução fraca local admissível de (2.1) em $\mathbb{R} \times [0, T)$.
- ii) Para qualquer $t \in [0, T)$ fixo, $u(x, t)$ é uma função constante por partes com valores em \mathcal{J} , contínua à esquerda e de variação limitada em \mathbb{R} . Mais ainda

$$\text{Var}_{\mathbb{R}} u(x, t) \leq \text{Var}_{\mathbb{R}} u_0(x). \quad (2.13)$$

- iii) Para todo $t, t' \in [0, T)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, t) - u(x, t')| dx \leq K|t - t'| \text{Var}_{\mathbb{R}} u_0. \quad (2.14)$$

Provaremos que existe uma função $u(x, t)$ de classe D_∞ , ou seja, $u(x, t)$ é uma função que satisfaz os itens i), ii) e iii) para todo $T > 0$. Para isso é suficiente

mostrarmos primeiro que para algum $\tau > 0$ existe uma função em D_τ e segundo que se $u(x, t)$ é de classe D_T para algum $T > 0$, então existe $T' > T$ e uma extensão de $u(x, t)$ em $\mathbb{R} \times [0, T')$ a qual é de classe $D_{T'}$.

Aplicando o Lema 2.1 para v_j e v_{j+1} , $j = 1, 2, \dots, s-1$, temos um número finito de soluções $u_j(x, t)$, $j = 1, 2, \dots, s-1$, que assumem valores no conjunto \mathcal{J} , e um número finito de choques entre as linhas de descontinuidade. Escolhemos $\tau > 0$ de modo que ele seja menor que o instante T onde ocorre o primeiro choque entre as linhas de descontinuidade. Definimos $u(x, t) = u_j(x, t)$ se $u_0(x) = v_j$, $j = 1, 2, \dots, s-1$, e $u(x, t) = u_{s-1}(x, t)$ se $u_0(x) = v_s$, assim obtemos uma solução fraca local admissível $u(x, t)$ de (2.1) em $\mathbb{R} \times [0, \tau)$, pelo Lema 2.1.

Fixando τ , de acordo com a demonstração do Lema 2.1, temos que se $v_j < v_{j+1}$, $j = 1, 2, \dots, s-1$, então os vértices da poligonal que formam a fronteira da casca convexa do conjunto $\{(u, w); v_j \leq u \leq v_{j+1}, w \geq f(u)\}$, são tais que $v_j < u^{1j} < \dots < u^{mj} < v_{j+1}$, $j = 1, 2, \dots, s-1$. Assim, para $t \in [0, \tau)$ fixo, dado uma partição $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$, de um intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$, onde $u(a, t) = v_j$ e $u(b, t) = v_{j+1}$, para algum $j = 1, \dots, s-1$, temos

$$\sum_{i=1}^n |u(x_i, t) - u(x_{i-1}, t)| = |u(b, t) - u(a, t)| = |v_{j+1} - v_j|.$$

Quando $v_j > v_{j+1}$, $j = 1, 2, \dots, s-1$, obtemos o mesmo resultado.

Dessa forma, se $u(a, t) = v_1$ e $u(b, t) = v_s$ então

$$\sum_{i=1}^{n-1} |u(x_i, t) - u(x_{i-1}, t)| = \sum_{j=1}^{s-1} |v_{j+1} - v_j|,$$

portanto

$$\text{Var}_{\mathbb{R}} u(x, t) = \text{Var}_{\mathbb{R}} u_0(x).$$

Até agora, mostramos que $u(x, t)$ satisfaz i) e ii) em $\mathbb{R} \times [0, \tau)$, resta mostrarmos que $u(x, t)$ satisfaz iii) em $\mathbb{R} \times [0, \tau)$.

Para isso é suficiente mostrarmos que: supondo $v_j < u^n < u^{n+1} < v_{j+1}$, sejam $t, t' \in [0, \tau)$ e $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, os pontos onde as linhas de descontinuidade tocam as retas t e t' , conforme a figura (2.5). Notamos que $x_1 = \alpha_1 t + c$, $x_2 = \alpha_1 t' + c$, $x_3 =$

$\alpha_2 t' + c$, $x_4 = \alpha_3 t' + c$, $x_5 = \alpha_2 t + c$ e $x_6 = \alpha_3 t + c$, onde α_1 , α_2 e α_3 são as inclinações das linhas de descontinuidade e c é uma constante, conforme a figura (2.5).

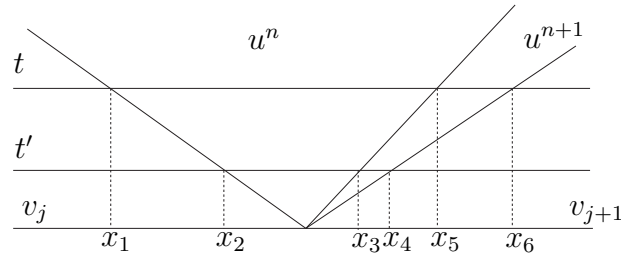


Figura 2.5:

Assim, temos

$$\begin{aligned}
 \int_{x_1}^{x_6} |u(x, t) - u(x, t')| dx &= \int_{x_1}^{x_2} |u^n - v_j| dx + \int_{x_3}^{x_4} |u^{n+1} - u^n| dx \\
 &\quad + \int_{x_4}^{x_5} |v_{j+1} - u^n| dx + \int_{x_5}^{x_6} |v_{j+1} - u^{n+1}| dx \\
 &= (u^1 - v_j) (\alpha_1 t' - \alpha_1 t) + (u^{n+1} - u^n) (\alpha_3 t' - \alpha_2 t') \\
 &\quad + (v_{j+1} - u^n) (\alpha_2 t - \alpha_3 t') + (v_{j+1} - u^{n+1}) (\alpha_3 t - \alpha_2 t) \\
 &= (u^n - v_j) \alpha_1 (t' - t) + (v_{j+1} - u^{n+1}) \alpha_3 (t' - t) \\
 &\quad + (u^{n+1} - u^n) \alpha_2 (t - t') \\
 &\leq |v_{j+1} - v_j| K |t - t'|.
 \end{aligned}$$

Segue que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, t) - u(x, t')| dx \leq \sum_{j=1}^{s-1} |v_{j+1} - v_j| K |t - t'| \leq K |t - t'| \text{Var}_{\mathbb{R}} u_0,$$

$\forall t, t' \in [0, \tau)$. Portando $u(x, t)$ é de classe D_τ .

Supomos agora que $u(x, t)$ é de classe D_T . Mostraremos que existe $T' > T$ tal que podemos estender u a \tilde{u} de classe $D_{T'}$.

Dados $B \subset \mathbb{R}$ compacto e $t, t' \in [0, T)$, de (2.14) obtemos

$$\int_B |u(x, t) - u(x, t')| dx \leq K |t - t'| \text{Var}_{\mathbb{R}} u_0.$$

Como $L^1_{Loc}(\mathbb{R})$ é completo, existe $u(x, T) \in L^1_{Loc}(\mathbb{R})$ tal que $u(x, t) \rightarrow u(x, T)$, quando $t \rightarrow T$, em $L^1_{Loc}(\mathbb{R})$.

Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $x_1 < x_2$. Então

$$\int_{x_1}^{x_2} |u(x, t') - u(x, t)| dx \leq K|t' - t| \text{Var}_{\mathbb{R}} u_0,$$

tomando o limite quando $t' \rightarrow T$, temos

$$\int_{x_1}^{x_2} |u(x, T) - u(x, t)| dx \leq K|T - t| \text{Var}_{\mathbb{R}} u_0.$$

Como x_1 e x_2 são arbitrários, fazendo $x_1 \rightarrow -\infty$ e depois $x_2 \rightarrow +\infty$, obtemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, T) - u(x, t)| dx \leq K|T - t| \text{Var}_{\mathbb{R}} u_0.$$

Consideramos agora a família $\{u(x, t)\}_{t \in [0, T]}$. Temos que $\forall t \in [0, T)$ fixo, $|u(x, t)| \leq |u_0(x)| \leq \max\{|M|, |m|\}$, e que $u(x, t)$ satisfaz (2.13). Assim pelo Teorema (1.2) (Teorema de Helly) existe uma subsequência $(u(x, t))$ de $\{u(x, t)\}_{t \in [0, T)}$ que converge pontualmente para uma função limitada e de variação limitada. Como $u(x, t) \rightarrow u(x, T)$ em $L^1_{Loc}(\mathbb{R})$, então $u(x, T)$ pode ser identificada como uma função de variação limitada contínua à esquerda, além disso, $|u(x, T)| \leq \max\{|M|, |m|\}$ e

$$\text{Var}_{\mathbb{R}} u(x, T) \leq \text{Var}_{\mathbb{R}} u_0, \quad (2.15)$$

Em particular, como existe uma subsequência $(u(x, t))$ de $\{u(x, t)\}_{t \in [0, T)}$ que converge pontualmente para $u(x, T)$, concluímos que $u(x, T)$ é constante por partes com valores em \mathcal{J} , além disso, devido a (2.15), $u(x, T)$ tem um número contável de pontos de descontinuidade.

Supomos que $u(x, T)$ tem um número infinito de pontos de descontinuidade em um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Dada uma partição $P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ do intervalo $[a, b]$, devido a nossa hipótese e ao fato que $u(x, T)$ assume valores em \mathcal{J} , podemos supor que $|u(x_j, T) - u(x_{j-1}, T)| > 0$, $j = 1, \dots, n$, assim obtemos

$$\sum_{j=1}^n |u(x_j, T) - u(x_{j-1}, T)| \geq nC,$$

onde $C = \min\{|x - y|; x, y \in \mathcal{J}, x \neq y\}$. Fazendo $n \rightarrow \infty$ temos uma contradição com (2.15). Com um argumento similar podemos mostrar uma contradição quando

todo intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$ possui um número finito de pontos de descontinuidades. Portanto $u(x, T)$ tem um número finito de pontos de descontinuidades.

Podemos então usar a função $u(x, T)$ como novo dado inicial no enunciado do Lema 2.2 e construir uma solução fraca local admissível $u'(x, t)$ de (2.1) em $\mathbb{R} \times [T, T')$ que admite condição inicial $u(x, T)$. Como antes, (2.14) é satisfeita para quaisquer $t, t' \in [T, T')$. Mais ainda

$$\text{Var}_{\mathbb{R}} u'(x, t) = \text{Var}_{\mathbb{R}} u(x, T),$$

$\forall t \in [T, T')$.

Assim, por (2.15), concluimos que

$$\tilde{u}(x, t) = \begin{cases} u(x, t), & t \in [0, T) \\ u'(x, t), & t \in [T, T'). \end{cases}$$

satisfaz (2.13), e se $t \in [0, T)$ e $t' \in [T, T')$ então

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{u}(x, t) - \tilde{u}(x, t')| dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, t) - u'(x, t')| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, t) - u(x, T)| dx \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, T) - u'(x, t')| dx \\ &\leq K \text{Var}_{\mathbb{R}} u_0 (|t - T| + |t' - T|) \\ &\leq K |t - t'| \text{Var}_{\mathbb{R}} u_0, \end{aligned}$$

logo $\tilde{u}(x, t)$ satisfaz (2.14), portanto é de classe $D_{T'}$.

Continuando esse processo estabelecemos a existência de uma solução fraca admissível de (2.1) em D_{∞} .

Agora, mostraremos que (2.9) é verificada. Considerando ainda a solução $u(x, t)$ de (2.1), em $\mathbb{R} \times [0, T)$. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $x_1 < x_2$, $t \in [0, T)$ fixo,

$u(x_1, t) = u^j$ e $u(x_2, t) = u^i$, sendo $u^j, u^i \in \mathcal{J}$. Suponha que $u_0(x) \in \{v_{k-1}, v_k, v_{k+1}\}$, $x \in [x_1 - Kt, x_2 + Kt]$, e além disso que u^j está entre os valores v_{k-1} e v_k e u^i está entre os valores v_k e v_{k+1} . Seja $P = \{x_1 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = x_2\}$ uma partição do intervalo $[x_1, x_2]$, assim temos que

$$\sum_{l=1}^m |u(s_l, t) - u(s_{l-1}, t)| = |u^j - v_k| + |v_k - u^i|,$$

pois devido a construção da solução os valores que a função $u(x, t)$ assume entre u^j e v_k e entre v_k e u^i , estão dispostos de forma crescente ou decrescente, de modo que temos cancelamentos. Supomos ainda que $v_{k-1} < u^j < v_k < u^i < v_{k+1}$, assim

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^m |u(s_l, t) - u(s_{l-1}, t)| &= v_k - u^j + u^i - v_k = u^i - u^j < v_{k+1} - v_{k-1} \\ &< |v_{k+1} - v_k| + |v_{k-1} - v_k|, \end{aligned}$$

Seja $P' = P \cup \{x_1 - Kt = s', x_2 + Kt = s''\}$, que é uma partição do intervalo $[x_1 - Kt, x_2 + Kt]$, assim

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^m |u_0(s_l) - u_0(s_{l-1})| + |u_0(s_0) - u_0(s')| + |u_0(s'') - u_0(s_m)| \\ \leq |v_{k+1} - v_k| + |v_{k-1} - v_k| \leq \text{Var}_{[x_1 - Kt, x_2 + Kt]} u_0(x), \end{aligned}$$

logo

$$\sum_{l=1}^m |u(s_l, t) - u(s_{l-1}, t)| < |v_{k+1} - v_k| + |v_{k-1} - v_k| \leq \text{Var}_{[x_1 - Kt, x_2 + Kt]} u_0(x).$$

Portanto

$$\text{Var}_{[x_1, x_2]} u(x, t) \leq \text{Var}_{[x_1 - Kt, x_2 + Kt]} u_0(x).$$

Os casos $v_{k-1} > v_k > v_{k+1}$, $v_{k-1} > v_k$ e $v_k < v_{k-1}$, $v_{k-1} < v_k$ e $v_k > v_{k+1}$ são análogos. (ver figura (2.6)).

Assim o método de construção garante que (2.9) é verificado.

Finalmente, a restrição de $u(x, t)$ a qualquer intervalo $[x_1, x_2]$, fica determinada de forma única pela restrição de u_0 ao intervalo $[x_1 - Kt, x_2 + Kt]$. De fato, pelo limite na inclinação das linhas de descontinuidade da solução $u(x, t)$, podemos aplicar os resultados anteriores a restrição de u_0 , por construção temos a unicidade. ■

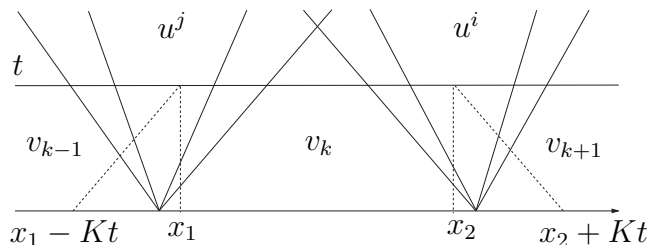


Figura 2.6: Domínio de dependência finita.

Observação 2.5 A prova do Lema (2.2), sugere o seguinte **método numérico** de construção de uma solução de (2.1) para $f(u)$ linear por partes e $u_0(x)$ uma função constante por partes: por superposição de soluções do problema de Riemann construímos uma solução em $\mathbb{R} \times [0, T_1)$, onde T_1 é o tempo em que o primeiro choque ocorre. Então repetimos o processo usando $u(x, T_1)$ como nova condição inicial (que é também uma função constante por partes). Assim extendemos a solução em $\mathbb{R} \times [0, T_2)$, onde T_2 é o tempo em que o primeiro "novo" choque ocorre, e assim continuamos sucessivamente. Implementando, este processo não existe garantia que possamos atingir todos os pontos $t \in [0, +\infty)$ em um número finito de passos. (ver figura (2.7)).

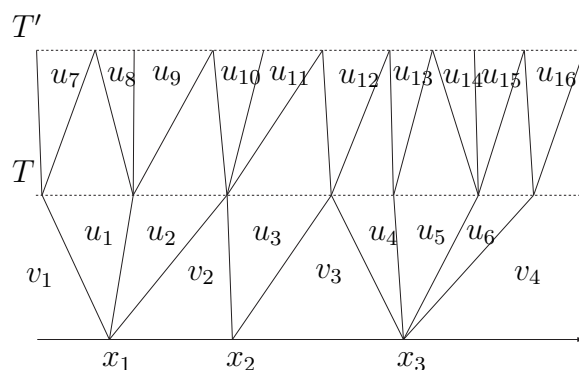


Figura 2.7: Exemplo de superposição de soluções locais fracas admissíveis.

Exemplo 2.1 Suponha porém que $f(u)$ é convexa, e que $v_{j+1} < v_j$, $j = 1, \dots, s-1$. Nesse caso, pela observação 2.4, podemos construir a solução com apenas uma linha de descontinuidade separando dois valores diferentes do dado inicial, além disso duas, ou mais linhas de descontinuidades, quando se tocam produzem no máximo uma linha de descontinuidade. Assim a solução global pode ser construída em um

número finito de passos. Quando a função f é côncava, podemos fazer uma análise semelhante. (ver figura (2.8)).

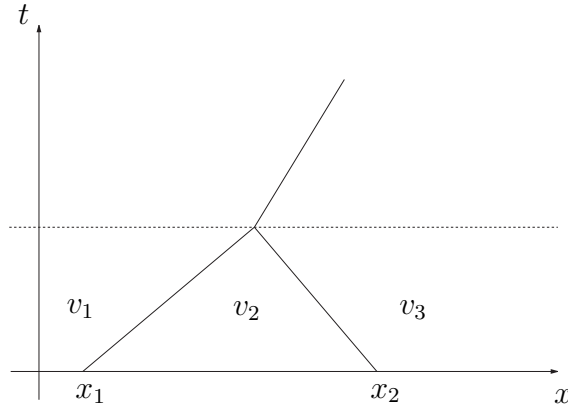


Figura 2.8: Exemplo de solução para f convexa.

Agora, estamos preparados para demonstrar o Teorema 2.1.

Demonstração:

Assumimos primeiro que $u_0(x)$ é de variação limitada em \mathbb{R} . Como $u_0(x)$ é contínua à esquerda e limitada, podemos aproximá-la por baixo, como na integral de Riemann, por uma seqüência de funções (u_0^n) constantes por partes tais que

$$u_0^n(x) \rightarrow u_0(x), \quad n \rightarrow +\infty,$$

$\forall x \in \mathbb{R}$. Além disso, temos que $|u_0^n(x)| \leq \max\{|m|, |M|\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dados $u_0^n(x)$ e $[a, b] \subset \mathbb{R}$, seja $P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ a partição do intervalo $[a, b]$ tal que $u_0^n(x_j) = u_0(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, n$, e dado $y \in u_0^n([a, b])$ então $u_0^n(x_j) = y$ para algum $j = 0, 1, \dots, n$, isso é possível devido à construção das $u_0^n(x)$.

Dessa forma, obtemos

$$\sum_{j=1}^n |u_0^n(x_j) - u_0^n(x_{j-1})| = \sum_{j=1}^n |u_0(x_j) - u_0(x_{j-1})| \leq \text{Var}_{\mathbb{R}} u_0(x).$$

Assim, dada qualquer partição Q do intervalo $[a, b]$, temos

$$\sum(u_0^n, Q) \leq \sum(u_0^n, Q \cup P) = \sum(u_0^n, P) \leq \text{Var}_{\mathbb{R}} u_0(x).$$

Portanto temos que

$$u_0^n(x) \rightarrow u_0(x), \quad n \rightarrow +\infty \quad \text{em } L_{Loc}^1(\mathbb{R}). \quad (2.16)$$

$$\text{Var}_{\mathbb{R}} u_0^n(x) \leq \text{Var}_{\mathbb{R}} u_0(x). \quad (2.17)$$

Considere também a seqüência $(f_n(u))$ de funções lineares por partes com vértices nos pontos $(u^0, f(u^0)), \dots, (u^n, f(u^n))$, onde $u^i = m + \frac{i(M-m)}{n}$, $i = 0, \dots, n$, ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, dividimos o intervalo $[m, M]$ em n subintervalos de comprimento igual a $\frac{1}{n}$, sendo que $u^0 = m$ e $u^n = M$. Note que devido a (2.8)

$$|f_n(u) - f_n(u')| \leq K|u - u'|, \quad (2.18)$$

$\forall u, u' \in [m, M]$ e

$$|f(u) - f_n(u)| \leq \frac{2K(M-m)}{n}, \quad (2.19)$$

$\forall u \in [m, M]$, $n = 1, 2, \dots$

De fato, se $u \in [u^{j-1}, u^j]$ e $u' \in [u^j, u^{j+1}]$ então

$$\begin{aligned} |f_n(u) - f_n(u')| &\leq |f_n(u) - f_n(u^j)| + |f_n(u^j) - f_n(u')| \\ &\leq K|u - u^j| + K|u^j - u'| = K|u - u'|. \end{aligned}$$

Para verificar (2.19), se $u \in [u^{j-1}, u^j]$, notamos que $f_n(u^j) = f(u^j)$, assim

$$\begin{aligned} |f(u) - f_n(u)| &\leq |f(u) - f(u^j)| + |f_n(u) - f_n(u^j)| \\ &\leq 2K|u - u^j| \leq 2K \frac{(M-m)}{n}. \end{aligned}$$

Seja $u_n(x, t)$ a solução fraca admissível do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + f_n(u)_x = 0 & (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0^n(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.20)$$

cuja existência é verificada no Lema 2.2 e que satisfaz as propriedades da classe D_∞ . Para todo $t \in [0, +\infty)$ fixo, e em virtude de (2.13) e (2.17), a seqüência $(u_n(x, t))$ é uniformemente limitada e de variação uniformemente limitada em \mathbb{R} , pois $|u_n(x, t)| \leq |u_0(x)| \leq \max\{|M|, |m|\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, além disso

$$Var_{\mathbb{R}} u^n(\cdot, t) \leq Var_{\mathbb{R}} u_0^n \leq Var_{\mathbb{R}} u_0,$$

$\forall n \in \mathbb{N}$.

Seja $\{t_n\}$ um conjunto enumerável de números racionais, em $[0, \infty)$. Pelo Teorema (1.2) (Teorema de Helly), existe uma subsequência $(u_n^1(x, t_1))$ de $\{u_n(x, t_1)\}$ pontualmente convergente. Considerando agora a família $\{u_n^1(x, t_2)\}$, novamente pelo Teorema (1.2) existe uma subsequência $(u_n^2(x, t_2))$ de $\{u_n^1(x, t_2)\}$, pontualmente convergente. Continuando esse processo, encontramos uma subsequência $(u_n^m(x, t_m))$ de $\{u_n^{m-1}(x, t_{m-1})\}$, pontualmente convergente. Tome então a seqüência $(u_n^n(x, t))$. Seja $t_j \in \{t_n\}$, como $(u_n^j(x, t_j))$ é convergente, então $(u_n^n(x, t_j))$ converge pontualmente quando $n \rightarrow +\infty$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Para simplificar a notação vamos chamar $u_n^n(x, t)$ de $u_n(x, t)$.

Seja $u_n(x, t_j) \rightarrow \phi_j(x)$, $n \rightarrow +\infty$, para cada $j \in \mathbb{N}$, assim, para qualquer intervalo $[x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} |u_n(x, t_j) - u_m(x, t_j)| dx &\leq \int_{x_1}^{x_2} |u_n(x, t_j) - \phi_j(x)| dx \\ &\quad + \int_{x_1}^{x_2} |u_m(x, t_j) - \phi_j(x)| dx. \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > k_0$ então

$$\int_{x_1}^{x_2} |u_n(x, t_j) - \phi_j(x)| dx < \frac{\varepsilon}{6}$$

Assim, se $m, n \geq k_0$ então

$$\int_{x_1}^{x_2} |u_n(x, t_j) - u_m(x, t_j)| dx < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Logo $(u_n(x, t))$ converge também em $L^1_{Loc}(\mathbb{R})$, $\forall t \in \{t_n\}$ fixo.

Sejam $t \in [0, \infty)$, $t' \in [0, \infty)$ racional e $[x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} |u_n(x, t) - u_m(x, t)| dx &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |u_n(x, t) - u_n(x, t')| dx \\ &\quad + \int_{x_1}^{x_2} |u_n(x, t') - u_m(x, t')| dx + \int_{-\infty}^{+\infty} |u_m(x, t) - u_m(x, t')| dx. \end{aligned} \quad (2.21)$$

De (2.14) e (2.17), temos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_n(x, t) - u_n(x, t')| dx &\leq K|t - t'|Var_{\mathbb{R}} u_0^n(x) \\ &\leq K|t - t'|Var_{\mathbb{R}} u_0(x) \end{aligned} \quad (2.22)$$

$\forall n \in \mathbb{N}$.

Dados $t \in [0, \infty)$ e $\varepsilon > 0$, tome $t' \in [0, \infty)$ racional tal que

$$|t - t'| \leq \frac{\varepsilon}{3KVar_{\mathbb{R}}u_0(x)},$$

então

$$\int_{x_1}^{x_2} |u_n(x, t) - u_m(x, t)| dx < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Por outro lado, dados $B \subset [0, \infty)$ compacto, $t \in B$ e $\varepsilon > 0$. Seja $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{KVar_{\mathbb{R}}u_0(x)}$. Temos que $B \subset \bigcup_{t_j \in \{t_n\}} \cap_B (t_j - \varepsilon_1, t_j + \varepsilon_1)$, logo existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $B \subset \bigcup_{j=1}^{n_1} (t_j - \varepsilon_1, t_j + \varepsilon_1)$.

Tome $1 \leq j \leq n_1$ tal que

$$|t - t_j| < \frac{\varepsilon}{3KVar_{\mathbb{R}}u_0(x)}.$$

Sejam $m, n \geq k_0$ então

$$\int_{x_1}^{x_2} |u_n(x, t) - u_m(x, t)| dx \leq \varepsilon.$$

Vemos assim que $(u_n(x, t))$ é convergente em $L^1_{Loc}(\mathbb{R})$, uniformemente em t , para t em conjuntos compactos. Em particular, dado um compacto $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R} \times [0, \infty)$, temos que

$$\int_a^b \int_c^d |u_n(x, t) - u_m(x, t)| dx dt \leq \varepsilon |b - a|.$$

Concluimos assim, que $(u_n(x, t))$ é convergente em $L^1_{Loc}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ e

$$u_n(x, t) \rightarrow u(x, t), \quad n \rightarrow +\infty \tag{2.23}$$

em $L^1_{Loc}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$, $\forall t \in [0, \infty)$ fixo.

Passando a uma subsequência se necessário, $u_n(x, t) \rightarrow u(x, t)$, pontualmente $\forall t \in [0, \infty)$ fixo, q.t.p. em $x \in \mathbb{R}$. Assim, devido ao Teorema (1.2) (Teorema de Helly) e as observações anteriores, $u(x, t)$ (modificando se necessário em um conjunto de medida nula) é limitada superiormente por M , inferiormente por m , é contínua à esquerda e de variação limitada em \mathbb{R} . Mais ainda

$$Var_{\mathbb{R}}u(x, t) \leq Var_{\mathbb{R}}u_0, \quad t \in [0, \infty). \tag{2.24}$$

Afirmação 2.1 $u(x,t)$ é a solução fraca admissível de (2.1) desejada.

De fato, fixando uma função crescente $h(u)$ e uma função $\phi(x,t) \in C_c^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ não-negativa. De (2.2)

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (I(u_n)\phi_t + F_n(u_n)\phi_x) dxdt + \int_{-\infty}^{+\infty} I(u_0^n)\phi(x,0) dx \geq 0, \quad (2.25)$$

onde

$$F_n(u) \equiv \int_m^u h(\xi) df_n(\xi). \quad (2.26)$$

Subtraindo (2.2) e (2.25) temos

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (I(u)\phi_t + F(u)\phi_x) dxdt + \int_{-\infty}^{+\infty} I(u_0)\phi(x,0) dx \\ & \geq \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{(I(u) - I(u_n))\phi_t + (F(u) - F_n(u))\phi_x\} dxdt \\ & + \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (F_n(u) - F_n(u_n))\phi_x dxdt + \int_{-\infty}^{+\infty} (I(u_0) - I(u_0^n))\phi(x,0) dx. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Definimos o conjunto

$$H \equiv \max_{[m,M]} |h(\xi)| = \max\{|h(m)|, |h(M)|\}.$$

Usando (2.3), (2.18), (2.19) e (2.26), temos que

$$|I(u) - I(u_n)| = \left| \int_m^{u_n} h(\xi) d\xi - \int_m^u h(\xi) d\xi \right| = \left| \int_u^{u_n} h(\xi) d\xi \right| \leq H|u - u_n|,$$

$$|I(u_0) - I(u_0^n)| \leq H|u_0 - u_0^n|,$$

$$\begin{aligned} |F_n(u) - F_n(u_n)| &= \left| \int_m^u h(\xi) df_n(\xi) - \int_m^{u_n} h(\xi) df_n(\xi) \right| = \left| \int_u^{u_n} h(\xi) df_n(\xi) \right| \\ &\leq KH|u - u_n|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|F(u) - F_n(u)| &= \left| \int_m^u h(\xi) df(\xi) - \int_m^u h(\xi) df_n(\xi) \right| \\
&= \left| \int_m^u h(\xi) d(f(\xi) - f_n(\xi)) \right| \\
&= \left| h(u)[f(u) - f_n(u)] - \int_m^u (f(\xi) - f_n(\xi)) dh(\xi) \right| \\
&\leq \left| h(u)2K\frac{M-m}{n} - \int_m^u 2K\frac{M-m}{n} dh(\xi) \right| \\
&\leq \frac{2K(M-m)}{n} \left(|h(u)| + \int_m^u |dh(\xi)| \right) \\
&\leq 2K(H + h(M) - h(m))\frac{M-m}{n}.
\end{aligned}$$

Relembrando (2.16) e (2.23), concluímos que o lado direito de (2.27) tende a zero, quando $n \rightarrow +\infty$, tal que (2.2) é satisfeita.

Assim $u(x, t)$ é uma solução fraca admissível de (2.1), devido a Definição 2.1.

Para $n = 1, 2, \dots$, $u_n(x, t)$ tem a propriedade do domínio de dependência finita e isso implica que $u(x, t)$ tem a mesma propriedade. Portanto, podemos relaxar a hipótese de que $u_0(x)$ é de variação limitada em \mathbb{R} , assumindo que $u_0(x)$ é localmente de variação limitada.

Temos ainda que, passando a uma subsequência se necessário, $u_n(x, t) \rightarrow u(x, t)$, pontualmente $\forall t \in [0, \infty)$ fixo. Sejam $t \in [0, \infty)$ fixo, $[x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$ e P uma partição de $[x_1, x_2]$. Temos que

$$Var_{[x_1, x_2]} u_n(\cdot, t) \leq Var_{[x_1 - Kt, x_2 + Kt]} u_0,$$

$\forall n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, obtemos

$$\sum_{j=1}^m |u(x_j, t) - u(x_{j-1})| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^m |u_n(x_j, t) - u_n(x_{j-1})| \leq Var_{[x_1 - Kt, x_2 + Kt]} u_0,$$

logo (2.9) é verificada. ■

Capítulo 3

Algumas Considerações sobre o Problema de Cauchy para um Sistema 2×2 de uma Lei de Conservação

3.1 Introdução

Segundo [Ru], considere o seguinte sistema não-linear 2×2 hiperbólico de Leis de Conservação

$$\begin{cases} u_t + \left(\left(\frac{1}{2} + a \right) u^2 + f(v) \right)_x = 0 \\ v_t + (uv)_x = 0 \\ (u, v)_{t=0} = (u_0, v_0), \end{cases} \quad (3.1)$$

para funções u, v definidas em $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t^+$ a valores reais. Assumimos que $a > \frac{1}{2}$, $f \in C^2(\mathbb{R})$ é uma função par e $\forall v$ satisfaz

$$\begin{cases} v f'(v) > 0, & v \neq 0 \\ f''(v) > 0, & v \neq 0. \end{cases}$$

O sistema (3.1) não é estritamente hiperbólico quando $(u, v) = (0, 0)$, caso

contrário o sistema é estritamente hiperbólico. Mais ainda, o sistema não é genuinamente não linear ao longo do eixo u .

De fato, o sistema (3.1) pode ser escrito na forma vetorial como uma simples Lei de Conservação

$$\begin{cases} U_t + F(U)_x = 0 \\ U_{t=0} = U_0, \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $U = (u, v)^T$, $F(U) = \left(\left(\frac{1}{2} + a \right) u^2 + f(v), uv \right)^T$ e $U_0 = (u_0, v_0)^T$, ou seja,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2} + a \right) u^2 + f(v) \\ uv \end{pmatrix}_x = 0.$$

O sistema (3.1) é dito estritamente hiperbólico se os dois autovalores $\lambda_{\mp} = \lambda_{\mp}(u, v)$, satisfazem

$$\lambda_- < \lambda_+.$$

Em nosso caso, denotando por $G = G(u, v) = a^2 u^2 + v f'(v)$ e $g_{\mp} = g_{\mp}(u, v) = -au \mp \sqrt{G(u, v)}$, podemos encontrar os autovalores do problema como segue: seja

$$A = \begin{pmatrix} (1 + 2a)u & f'(v) \\ v & u \end{pmatrix},$$

então, o sistema (3.1) torna-se

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t + A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_x = 0.$$

Como

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} (1 + 2a)u - \lambda & f'(v) \\ v & u - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - \lambda(2u + 2au) - v f'(v) + (1 + 2a)u^2, \end{aligned}$$

fazendo $\det(A - \lambda I) = 0$, temos que

$$\lambda = (1 + a)u \pm \sqrt{a^2 u^2 + v f'(v)},$$

portanto

$$\lambda_{\mp} \doteq \lambda_{\mp}(u, v) = (1 + a)u \mp \sqrt{G}.$$

Observamos que

$$\lambda_{-}(u, v) = (1 + a)u - \sqrt{G} < (1 + a)u + \sqrt{G} = \lambda_{+}(u, v)$$

$\forall (u, v) \neq (0, 0)$, pois $vf'(v) > 0, \forall v \neq 0$. Então a origem é chamada de ponto isolado umbilical para (3.1).

Podemos calcular os autovetores à direita e à esquerda de A . Dado (u, v) fixo, com $v \neq 0$, temos que

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} (1 + 2a)u - \lambda & f'(v) \\ v & u - \lambda \end{pmatrix},$$

então, para encontrar os autovetores à direita, precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} (u + 2au - \lambda)x + f'(v)y = 0 \\ vx + (u - \lambda)y = 0. \end{cases}$$

Temos que os autovetores à direita de A são

$$r_{-} \equiv r_{-}(u, v) = \begin{pmatrix} f'(v) \\ g_{-} \end{pmatrix}, \quad r_{+} \equiv r_{+}(u, v) = \begin{pmatrix} f'(v) \\ g_{+} \end{pmatrix}.$$

Para encontrarmos os autovetores à esquerda, precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} (u + 2au - \lambda)x + vy = 0 \\ f'(v)x + (u - \lambda)y = 0. \end{cases}$$

Logo os autovetores à esquerda de A são

$$\ell_{-} \equiv \ell_{-}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{v}{au\sqrt{G} + G} \\ -\frac{1}{\sqrt{G}} \end{pmatrix}, \quad \ell_{+} \equiv \ell_{+}(u, v) = \begin{pmatrix} -\frac{v}{au\sqrt{G} - G} \\ \frac{1}{\sqrt{G}} \end{pmatrix}.$$

Observamos também que

$$\begin{aligned} \ell_{+} \cdot r_{-} &= \left(\frac{-v}{au\sqrt{G} - G}, \frac{1}{\sqrt{G}} \right) \cdot \left(f'(v), -au - \sqrt{G} \right) \\ &= \frac{-vf'(v)\sqrt{G} - a^2u^2\sqrt{G} + auG - auG + G\sqrt{G}}{(au\sqrt{G} - G)\sqrt{G}} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ell_{-.r_+} &= \left(\frac{v}{au\sqrt{G} + G}, -\frac{1}{\sqrt{G}} \right) \cdot (f'(v), -au + \sqrt{G}) \\
&= \frac{vf'(v)\sqrt{G} - a^2u^2\sqrt{G} + auG - auG - G\sqrt{G}}{(auG - G)\sqrt{G}} = 0.
\end{aligned}$$

O sistema (3.1) é dito genuinamente não linear se $\nabla\lambda_{\mp}.r_{\mp} \neq 0$, $\forall (u, v)$, em nosso caso temos

$$\begin{aligned}
\nabla\lambda_{\mp}.r_{\mp} &= \left((1+a) \mp \frac{a^2u}{\sqrt{G}}, \mp \frac{vf''(v) + f'(v)}{2\sqrt{G}} \right) \cdot (f'(v), -au \mp \sqrt{G}) \\
&= f'(v) + af'(v) \mp \frac{f'(v)a^2u}{\sqrt{G}} \pm \frac{auvf''(v) + au f'(v)}{2\sqrt{G}} + \frac{vf''(v) + f'(v)}{2} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{G}} \left\{ f'(v) \left[(2a+3)\sqrt{G} \mp au(2a-1) \right] + vf''(v) \left[\sqrt{G} \pm au \right] \right\},
\end{aligned}$$

como $\sqrt{G} > au$ e $(2a+3) > (2a-1)$, então quando $v > 0$ temos $\nabla\lambda_{\mp}.r_{\mp} > 0$, e quando $v < 0$ temos $\nabla\lambda_{\mp}.r_{\mp} < 0$. Porém se $v = 0$ então $\nabla\lambda_{\mp}.r_{\mp} = 0$. Logo o argumento de genuinamente não linear falha no eixo u , ou seja, em $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v = 0\}$.

Uma solução fraca para (3.2) é uma função mensurável limitada $U = U(x, t)$ tal que para toda $\phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, temos

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (U\phi_t + F(U)\phi_x) dxdt + \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x)\phi(x, 0) dx = 0.$$

Um par de entropia-fluxo de entropia (η, q) , que chamaremos de forma abreviada de um par e-f, do sistema (3.1) é definido como

$$\nabla q = \nabla\eta\nabla F. \tag{3.3}$$

3.2 Regiões Invariantes

Consideramos agora, a aproximação de viscosidade nula para o sistema (3.1)

$$\begin{cases} u_t + \left(\left(\frac{1}{2} + a \right) u^2 + f(v) \right)_x = \varepsilon u_{xx} \\ v_t + (uv)_x = \varepsilon v_{xx} \\ (u, v)_{t=0} = (u_0, v_0) \end{cases} \quad (3.4)$$

$\varepsilon > 0$. Para estabelecermos uma estimativa a priori, independente de ε , usaremos o Teorema de Regiões Invariantes devido a Chueh, Conley e Smoller[C-C-S]. Os resultados de [C-C-S] podem ser resumidos no seguinte

Teorema 3.1 *Sejam g_{\mp} duas funções suaves, $\phi_{\mp} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\Sigma = \{(u, v); \phi_+(u, v) \leq 0\} \cap \{(u, v); \phi_-(u, v) \leq 0\}$. Assuma que, $\forall t > 0$ e $(\bar{u}, \bar{v}) \in \partial\Sigma$, as seguintes condições se verificam:*

a) $\nabla\phi_{\mp}$ é um autovetor à esquerda de $\nabla F(\bar{u}, \bar{v})$.

b) ϕ_{\mp} é quasi-convexo em (\bar{u}, \bar{v}) , isto é, $\forall \zeta \in \mathbb{R}^2$

$$\zeta \cdot \nabla\phi_{\mp} = 0 \Rightarrow \nabla^2\phi_{\mp}(\zeta, \zeta) \geq 0.$$

Então Σ é uma região invariante para (3.4), para cada $\varepsilon > 0$, ou seja, se $(u_0, v_0) \in \Sigma$, $\forall x \in \mathbb{R}$ então $(u^\varepsilon(x, t), v^\varepsilon(x, t)) \in \Sigma$, $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$.

Diremos que $\omega_- \in C^1$ (ω_+ , respectivamente) é uma primeira (segunda, respectivamente) Invariante de Riemann para (3.1) se para todo (u, v)

$$\nabla\omega_-(u, v) \cdot r_+(u, v) = 0$$

($\nabla\omega_+(u, v) \cdot r_-(u, v) = 0$, respectivamente). Como $l_+ \cdot r_- = 0$ e $l_- \cdot r_+ = 0$, então $\nabla\omega_{\mp}$ e l_{\mp} são paralelos, logo $\nabla\omega_-$ e $\nabla\omega_+$ são autovetores à esquerda de ∇F .

Além disso, para qualquer solução clássica (u, v) de (3.1), $\omega_- = \omega_-(u, v)$ e $\omega_+ = \omega_+(u, v)$ satisfazem

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega_-}{\partial t} + \lambda_- \frac{\partial \omega_-}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \omega_+}{\partial t} + \lambda_+ \frac{\partial \omega_+}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

De fato, seja (u, v) solução clássica de (3.1), como $\nabla \omega_-$ é autovetor à esquerda de ∇F , e

$$\frac{\partial \omega_-}{\partial t} = \frac{\partial \omega_-}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \omega_-}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \omega_-}{\partial x} = \frac{\partial \omega_-}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \omega_-}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x},$$

então

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_-}{\partial t} + \lambda_- \frac{\partial \omega_-}{\partial x} &= \frac{\partial \omega_-}{\partial u} u_t + \frac{\partial \omega_-}{\partial v} v_t + \lambda_- \left[\frac{\partial \omega_-}{\partial u} u_x + \frac{\partial \omega_-}{\partial v} v_x \right] \\ &= \left(\frac{\partial \omega_-}{\partial u}, \frac{\partial \omega_-}{\partial v} \right) \cdot \begin{pmatrix} u_t + \lambda_- u_x \\ v_t + \lambda_- v_x \end{pmatrix} \\ &= \nabla \omega_- \cdot \left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t + \lambda_- \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_x \right] \\ &= \nabla \omega_- \cdot [-F(U)_x + \lambda_- U_x] \\ &= \{\nabla \omega_- \cdot [-\nabla F(U) + \lambda_- I]\} U_x = 0. \end{aligned}$$

De modo análogo temos $\frac{\partial \omega_+}{\partial t} + \lambda_+ \frac{\partial \omega_+}{\partial x} = 0$.

Diremos que uma onda de rarefação é uma solução contínua de (3.2) da forma $U = U(\frac{x}{t})$, para $t > 0$, segundo [Sm]. Existem duas famílias de ondas de rarefação, correspondentes aos dois autovetores r_- e r_+ . Uma onda da família relacionada a r_- será chamada de primeira onda de rarefação, uma onda da família relacionada a r_+ será chamada de segunda onda de rarefação. Em nosso caso, a primeira (segunda, respectivamente) onda de rarefação satisfaz a EDO de primeira ordem

$$\frac{dv}{du} = \frac{g_-}{f'(v)} \quad \left(\frac{dv}{du} = \frac{g_+}{f'(v)}, \text{ respectivamente} \right). \quad (3.6)$$

De fato, se $t > 0$, seja $U = U(\xi)$ solução de (3.2), onde $\xi = \frac{x}{t}$, como

$$U_t = U_\xi \xi_t = U_\xi \left(-\frac{x}{t^2} \right)$$

$$U_x = U_\xi \xi_x = U_\xi \left(\frac{1}{t} \right),$$

então, substituindo em (3.2) temos

$$U_\xi \xi_t + DF(U) U_\xi \xi_x = -U_\xi \frac{x}{t} \frac{1}{t} + DF(U) U_\xi \frac{1}{t} = 0,$$

logo

$$-\xi U_\xi + DF(U) U_\xi = 0.$$

Assim, U_ξ é um autovetor de $DF(U)$ associado ao autovalor ξ . Como $DF(U)$ tem dois autovalores distintos λ_- e λ_+ , temos

$$(DF(U(\xi)) - \lambda_{\mp} I) U_\xi = \begin{pmatrix} au \mp \sqrt{G(u, v)} & f'(v) \\ v & -au \mp \sqrt{G(u, v)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_\xi \\ v_\xi \end{pmatrix} = 0,$$

então

$$\begin{cases} (au \mp \sqrt{G(u, v)}) u_\xi + f'(v) v_\xi = 0 \\ v u_\xi + (-au \mp \sqrt{G(u, v)}) v_\xi = 0, \end{cases}$$

logo

$$\frac{dv}{du} = \frac{v_\xi}{u_\xi} = \frac{-au \pm \sqrt{G(u, v)}}{f'(v)} = \frac{g_\pm}{f'(v)} \quad (3.7)$$

e

$$\frac{dv}{du} = \frac{v_\xi}{u_\xi} = \frac{v}{au \pm \sqrt{G(u, v)}}. \quad (3.8)$$

As duas igualdades anteriores são equivalentes, para vermos isso basta multiplicarmos e dividirmos (3.7) por $au \pm \sqrt{G(u, v)}$ (respectivamente).

A curva integral referente à primeira onda de rarefação será denominada de R_- e a curva integral referente à segunda onda de rarefação será denominada de R_+ .

Lema 3.1 *Com as hipóteses anteriores temos as seguintes propriedades:*

- a) *O conjunto $\{(u, v) : u > 0, v = 0\}$ é uma curva R_+ .*
- b) *As curvas R_+ estão em uma correspondência biunívoca com os pontos da parte negativa do eixo u .*
- c) *As curvas R_+ não interceptam a parte positiva do eixo u .*
- d) *Toda curva R_+ que não fica sobre o eixo u tende a infinito quando $u \rightarrow +\infty$.*

Assim podemos concluir que qualquer curva R_+ que começa na origem fica sobre o eixo u e vai para infinito pela direita, caso contrário intersecta a parte negativa do eixo u e $\lim_{|v| \rightarrow +\infty} u(v) = \infty$. Finalmente, para (3.1), podemos construir Invariantes de Riemann ω_- , ω_+ tais que $\omega_-(u, v) \leq 0 \leq \omega_+(u, v)$.

Demonstração: a) De (3.8) temos que

$$\frac{dv}{du} = \frac{v}{au + \sqrt{a^2u^2 + vf'(v)}}.$$

Seja $u_0 > 0$, então $v \equiv 0$ é uma solução da EDO acima com condição inicial $v(u_0) = 0$, logo o conjunto $\{(u, v) : u > 0, v = 0\}$ é uma curva R_+ .

b) Definimos $h(u, v) = \frac{f'(v)}{-au + \sqrt{a^2u^2 + vf'(v)}}$. Seja $\Omega = [b, c] \times [-1, 1]$, onde $b, c < 0$. Queremos mostrar que h é Lipschitz em Ω . Observamos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial u} &= \frac{af'(v)}{(-au + \sqrt{a^2u^2 + vf'(v)})^2} \\ &+ \frac{1}{(-au + \sqrt{a^2u^2 + vf'(v)})^2} \frac{a^2u}{\sqrt{a^2u^2 + vf'(v)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial v} &= \frac{f''(v)}{-au + \sqrt{a^2u^2 + vf'(v)}} \\
&+ \frac{1}{(-au + \sqrt{a^2u^2 + vf'(v)})^2} \left[\frac{-af'(v)^2}{-au + \sqrt{a^2u^2 + vf'(v)}} \right. \\
&+ \frac{a^2uf'(v)^2}{\sqrt{a^2u^2 + vf'(v)}(-au + \sqrt{a^2u^2 + vf'(v)})} \\
&\left. + \frac{f'(v)}{-au + \sqrt{a^2u^2 + vf'(v)}}(f'(v) + vf''(v)) \right].
\end{aligned}$$

Como $\frac{\partial h}{\partial u}$ e $\frac{\partial h}{\partial v}$ são contínuas e Ω é compacto, temos que

$$|\nabla h| \leq C,$$

onde C é constante. Portanto h é Lipschitz em Ω . Aplicando o Teorema de Picard, concluímos que dado $u_0 < 0$ existe uma única curva R_+ em Ω que passa em u_0 . Um argumento análogo mostra que $v \equiv 0$ é a única solução para a EDO em a).

Por outro lado, dado uma curva R_+ que não começa no conjunto $\{(u, v) : u > 0, v = 0\}$, temos que R_+ é estritamente crescente quando $v > 0$ e estritamente decrescente quando $v < 0$. De fato, como $g_+(u, v) = -au + \sqrt{a^2u^2 + vf'(v)} > 0$ e $vf'(v) > 0, \forall v \neq 0$, então quando $v > 0$ temos $f'(v) > 0$, logo $\frac{dv}{du} = \frac{g_+}{f'(v)} > 0$. Por outro lado, como $g_-(u, v) = -au - \sqrt{a^2u^2 + vf'(v)} > 0$, então se $v < 0$ temos $f'(v) < 0$, logo $\frac{dv}{du} = \frac{g_+}{f'(v)} < 0$. De (3.7), notamos que

$$\frac{du}{dv} = \frac{f'(v)}{-au + \sqrt{a^2u^2 + vf'(v)}},$$

como f é par, então f' é ímpar, assim $\frac{du}{dv}$ é ímpar em v , logo $u(v)$ é par, assim R_+ é simétrica em relação ao eixo u . Pela simetria e continuidade da curva R_+ e considerando o resultado do item a), temos que ela corta a parte negativa do eixo u apenas uma vez. Notamos que as curvas R_+ não são fechadas.

c) Decorre de a) e b).

d) De fato, supomos que existe $M > 0$ tal que uma curva \mathbb{R}_+ permanece no semiplano superior entre as curvas $v = \frac{M}{2}$ e $v = M$, para todo $u > \bar{u}$. Obtemos de (3.8), que $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{v}{au + \sqrt{G}} = 0$, isto é claro pois v é limitado e $au + \sqrt{G} \rightarrow +\infty$, quando $u \rightarrow +\infty$. Porém f' é contínua, então existe $B > 0$ tal que $f'(v) \leq B$, $\forall v \in \left[\frac{M}{2}, M\right]$, assim

$$vf'(v) \leq BM.$$

Temos também que $\exists \tilde{u} > \bar{u}$ tal que $BM \leq 3a^2u^2$, $\forall u > \tilde{u}$, assim

$$au + \sqrt{a^2u^2 + vf'(v)} \leq au + 2au = 3au,$$

$\forall u > \tilde{u}$, portanto

$$\frac{dv}{du} = \frac{v}{au + \sqrt{a^2u^2 + vf'(v)}} \geq \frac{M}{2} \frac{1}{3au} = \frac{M}{6au},$$

$\forall u > \tilde{u}$, integrando a desigualdade, temos

$$\int_{\tilde{u}}^u \frac{dv}{du} du \geq \int_{\tilde{u}}^u \frac{M}{6au} du,$$

assim

$$v(u) \geq \frac{M}{6a} \ln |u| + c,$$

onde c é uma constante, quando $u \rightarrow +\infty$ temos que o lado esquerdo da desigualdade tende a infinito, isso mostra uma contradição.

Para estudarmos a convexidade da curva R_+ , calculamos a segunda derivada em (3.7)

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{du^2} &= \frac{1}{f'(v)} \left(-a + \frac{1}{2} + \frac{a^2u}{\sqrt{G}} - \frac{au}{2\sqrt{G}} - \frac{vf''(v)}{2f'(v)} - \frac{auvf''(v)}{2\sqrt{G}f'(v)} - \frac{2a^2u^2f''(v)}{f'(v)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2auf''(v)\sqrt{G}}{f'(v)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2f'(v)\sqrt{G}} \left((1-2a)g_+ - \frac{vf''(v)}{f'(v)}g_+ + \frac{2auf''(v)}{f'(v)^2}g_+^2 \right) \\ &= \frac{g_+(u,v)}{2f'(v)\sqrt{G(u,v)}} \left(1-2a - \frac{vf''(v)}{f'(v)} + \frac{2auf''(v)g_+(u,v)}{(f'(v))^2} \right). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} ug_+ &= \frac{\partial}{\partial u} \left(-au^2 + u\sqrt{a^2u^2 + vf'(v)} \right) = -2au + \sqrt{G} + \frac{a^2u^2}{\sqrt{G}} \\ &= \frac{2a^2u^2 + vf'(v) - 2au\sqrt{G}}{\sqrt{G}} = \frac{g_+^2}{\sqrt{G}} \geq 0, \end{aligned}$$

então, para cada v fixo, $ug_+(u, v)$ é uma função crescente de u . Como

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} ug_+(u, v) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{vf'(v)}{a + \sqrt{a^2 + \frac{vf'(v)}{u^2}}} = \frac{vf'(v)}{2a},$$

então $\sup_{u \in \mathbb{R}} ug_+ \leq \frac{vf'(v)}{2a}$. Dessa forma temos que

$$\left(-\frac{vf''(v)}{f'(v)} + \frac{2au f''(v) g_+(u, v)}{(f'(v))^2} \right) \leq 0.$$

Considerando ainda que $g_+ > 0$ e $a > \frac{1}{2}$, concluímos que

$$\frac{d^2v}{du^2} \leq \frac{(1-2a)}{2} \frac{g_+}{f'(v)\sqrt{G}} \leq 0,$$

quando $v > 0$.

Além disso, como f é par, e observando que se $u > 0$ então

$$\frac{g_+(-u, v)}{f'(v)} = \frac{-a(-u) + vf'(v)}{f'(v)} = \frac{au + vf'(v)}{f'(v)} = -\frac{-au - vf'(v)}{f'(v)} = -\frac{g_-(u, v)}{f'(v)},$$

concluímos que as curvas R_- são obtidas por uma reflexão das curvas R_+ sobre o eixo v . Podemos assim restringir nossa atenção à família R_+ .

Portanto, no plano $u \times v$, as curvas R_+ são côncavas no semiplano positivo e, devido a simetria em relação ao eixo u , são convexas no semiplano negativo. Similarmente, no plano $u \times v$, as curvas R_- são côncavas no semiplano positivo e convexas no semiplano negativo.

Os invariantes de Riemann ω_+ são constantes ao longo de cada curva R_- , bem como os invariantes ω_- são constantes ao longo de cada curva R_+ . De fato, derivando-se $\omega_{\pm}(U(\xi))$ em ξ e escolhendo $U_{\xi} = r_{\mp}$, obtemos

$$\nabla \omega_{\pm}(U(\xi)).U_{\xi} = \nabla \omega_{\pm}.r_{\mp}(U(\xi)) = 0.$$

Podemos assim, definir

$$\omega_-(u, 0) = \begin{cases} u, & u < 0 \\ 0, & u \geq 0 \end{cases} \quad \omega_+(u, 0) = \begin{cases} 0, & u \leq 0 \\ u, & u > 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Dado um ponto (u, v) existe uma única curva integral R_+ e uma única curva integral R_- , que passam pelo ponto (u, v) e tocam o eixo dos u . Os invariantes ω_- e ω_+ são constantes ao longo das curvas R_+ e R_- , respectivamente.

Para $u < 0$ e $v > 0$ existe um único $u_1 < u$ e existe um único $u_2 > 0$, tais que

$$\omega_-(u, v) = \omega_-(u_1, 0) = u_1 < 0 < u_2 = \omega_+(u_2, 0) = \omega_+(u, v).$$

Com um argumento análogo, podemos chegar a mesma conclusão quando o ponto (u, v) estiver em outro quadrante. Portanto

$$\omega_-(u, v) \leq 0 \leq \omega_+(u, v).$$

■

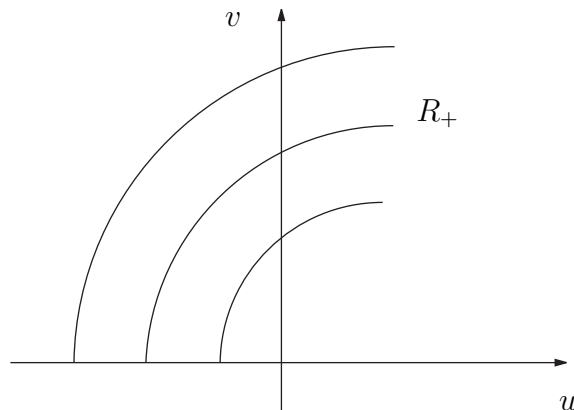


Figura 3.1: Curvas Integrais R_+ .

Da geometria das curvas temos também o seguinte

Corolário 3.1 *Seja $v \neq 0$. Os invariantes de Riemann construídos como antes satisfazem,*

$$\begin{cases} \frac{1}{f'(v)} \frac{\partial \omega_-}{\partial v} < 0 \\ \frac{1}{f'(v)} \frac{\partial \omega_+}{\partial v} > 0. \end{cases}$$

Demonstração: Por definição,

$$\nabla\omega_{\pm}.r_{\mp} = \frac{\partial\omega_{\pm}}{\partial u} f'(v) + \frac{\partial\omega_{\pm}}{\partial v} (-au \mp \sqrt{G}) = 0,$$

então

$$\frac{\partial\omega_{\pm}}{\partial v} \frac{1}{f'(v)} = \frac{\partial\omega_{\pm}}{\partial u} \frac{1}{au \pm \sqrt{G}}.$$

Para $v \neq 0$ fixo, sejam $u_1 < u_2$, então existem únicos \bar{u}_1 e \bar{u}_2 tais que

$$\omega_-(u_1, v) = \omega_-(\bar{u}_1, 0) = \bar{u}_1$$

$$\omega_-(u_2, v) = \omega_-(\bar{u}_2, 0) = \bar{u}_2,$$

devido ao Lema 3.1 temos que $\bar{u}_1 < \bar{u}_2$, caso contrario teriamos duas curvas R_+ distintas, se cruzando. Portanto para $v \neq 0$ fixo, ω_- é crescente. Um argumento análogo mostra que ω_+ também é crescente para $v \neq 0$ fixo. Logo

$$\frac{\partial\omega_{\pm}}{\partial u} > 0.$$

Como $au + \sqrt{G} > 0$ e $au - \sqrt{G} < 0$, então $\frac{1}{f'(v)} \frac{\partial\omega_-}{\partial v} < 0$ e $\frac{1}{f'(v)} \frac{\partial\omega_+}{\partial v} > 0$ ■

De agora em diante, usaremos os invariantes de Riemann ω_- , ω_+ fornecidos pela construção anterior. Por definição, $\nabla\omega_{\mp}$ são autovetores à esquerda de ∇F , os invariantes de Riemann são as funções ω_{\mp} usadas para definir as regiões invariantes segundo o Teorema 3.1. Portanto encontramos uma família de regiões dadas por:

$$\Sigma_c = \{\omega_- + c \geq 0\} \cap \{\omega_+ - c \leq 0\}, \quad c > 0.$$

Essas regiões são limitadas por duas famílias de curvas. Para $c_1 > c_2$ temos que $\Sigma_{c_1} \supset \Sigma_{c_2}$. Devido ao Lema 3.1, quando $c \rightarrow \infty$ então Σ_c gera todo o \mathbb{R}^2 .

Para mostrarmos que Σ_c é uma região invariante resta mostrarmos a propriedade b) do Teorema 3.1.

Lema 3.2 Quando $(u, v) \neq (0, 0)$, temos

$$\begin{cases} \nabla^2\omega_+(r_-, r_-) \geq 0 \\ \nabla^2\omega_-(r_+, r_+) \leq 0, \end{cases}$$

sendo ω_+ quase-convexa e ω_- quase-côncava.

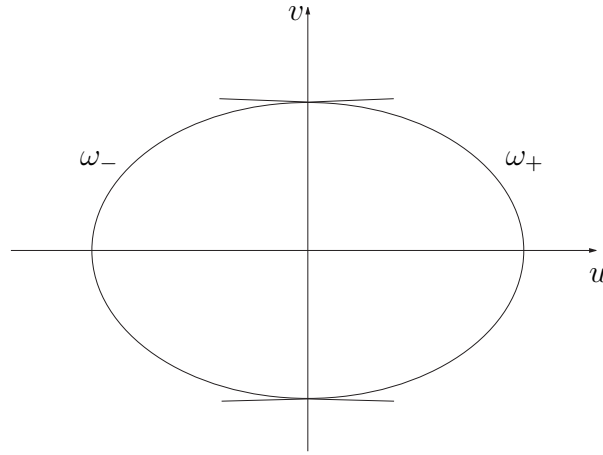


Figura 3.2: Região Invariante.

Demonstração: Para $(u, v) \neq (0, 0)$ fixo, supomos $v \neq 0$. Denotemos

$$\nabla^2 \omega_{\pm}(r_{\mp}, r_{\mp}) = (r_{\mp}(u, v))^T \cdot \nabla^2 \omega_{\pm}(u, v) \cdot r_{\mp}(u, v).$$

Como $\nabla \omega_{\pm} \cdot r_{\mp} = 0$, então

$$\left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial u}, \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v} \right) \cdot (f'(v), g_{\mp}) = f'(v) \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial u} + g_{\mp} \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v} = 0. \quad (3.10)$$

Diferenciando em relação a u , temos

$$f'(v) \frac{\partial^2 \omega_{\pm}}{\partial u^2} + g_{\mp} \frac{\partial^2 \omega_{\pm}}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v} \frac{\partial g_{\mp}}{\partial u} = 0.$$

Multiplicando por $\frac{1}{f'(v)} \left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v} \right)^2$,

$$\left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v} \right)^2 \frac{\partial^2 \omega_{\pm}}{\partial u^2} + \frac{g_{\mp}}{f'(v)} \left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v} \right)^2 \frac{\partial^2 \omega_{\pm}}{\partial u \partial v} + \frac{1}{f'(v)} \left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v} \right)^2 \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v} \frac{\partial g_{\mp}}{\partial u} = 0,$$

logo

$$\left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v} \right)^2 \frac{\partial^2 \omega_{\pm}}{\partial u^2} + \frac{g_{\mp}}{f'(v)} \left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v} \right)^2 \frac{\partial^2 \omega_{\pm}}{\partial u \partial v} = -\frac{1}{f'(v)} \left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v} \right)^3 \frac{\partial g_{\mp}}{\partial u}. \quad (3.11)$$

Por outro lado, diferenciando (3.10) em relação a v temos

$$f'(v) \frac{\partial^2 \omega_{\pm}}{\partial v \partial u} + f''(v) \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial u} + g_{\mp} \frac{\partial^2 \omega_{\pm}}{\partial v^2} + \frac{\partial g_{\mp}}{\partial v} \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v} = 0.$$

Multiplicando por $\frac{1}{f'(v)} \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial u} \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v}$,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial u} \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v} \frac{\partial^2 \omega_{\pm}}{\partial v \partial u} + \frac{f''(v)}{f'(v)} \left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial u} \right)^2 \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v} \\ & + \frac{g_{\mp}}{f'(v)} \frac{\partial^2 \omega_{\pm}}{\partial v^2} \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial u} \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v} + \frac{1}{f'(v)} \frac{\partial g_{\mp}}{\partial v} \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial u} \left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Como $\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial u} = -\frac{g_{\mp}}{f'(v)} \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v}$, então de (3.11) e (3.12) temos

$$\left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v}\right)^2 \frac{\partial^2 \omega_{\pm}}{\partial u^2} - \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial u} \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v} \frac{\partial^2 \omega_{\pm}}{\partial u \partial v} = -\left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v}\right)^3 \frac{1}{f'(v)} \frac{\partial g_{\mp}}{\partial u} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial u}\right)^2 \frac{\partial^2 \omega_{\pm}}{\partial v^2} - \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial u} \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v} \frac{\partial^2 \omega_{\pm}}{\partial v \partial u} &= \frac{f''(v)}{f'(v)} \left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial u}\right)^2 \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v} \\ &+ \frac{1}{f'(v)} \frac{\partial g_{\mp}}{\partial v} \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial u} \left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v}\right)^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Lembramos que $l_{\pm} \cdot r_{\mp} = 0$ e por definição $\nabla \omega_{\pm} \cdot r_{\mp} = 0$, ou seja, $\nabla \omega_{\pm}$ é paralelo a l_{\pm} . Como $\nabla \omega_{\pm} = \left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial u}, \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v}\right)$, então $\left(-\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v}, \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial u}\right)$ é paralelo a r_{\mp} , logo $\exists \gamma \neq 0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left(-\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v}, \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial u}\right) = \gamma r_{\mp}$$

assumimos, sem perda de generalidade, que $r_{\mp} = \left(-\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v}, \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial u}\right)$.

Assim,

$$\nabla^2 \omega_{\pm}(r_{\mp}, r_{\mp}) = \frac{\partial^2 \omega_{\pm}}{\partial u^2} \left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v}\right)^2 - 2 \frac{\partial^2 \omega_{\pm}}{\partial u \partial v} \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial u} \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v} + \frac{\partial^2 \omega_{\pm}}{\partial v^2} \left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial u}\right)^2,$$

adicionando (3.13) e (3.14), obtemos

$$\begin{aligned} \nabla^2 \omega_{\pm}(r_{\mp}, r_{\mp}) &= \frac{f''(v)}{f'(v)} \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v} \left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v}\right)^2 \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial u} \frac{\partial g_{\mp}}{\partial v} \frac{1}{f'(v)} \\ &\quad - \left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v}\right)^3 \frac{1}{f'(v)} \frac{\partial g_{\mp}}{\partial u} \\ &= \frac{1}{f'(v)^3} \left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v}\right)^3 \left[f''(v) \left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial u}\right)^2 f'(v)^2 \left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v}\right)^{-2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial u} \frac{\partial g_{\mp}}{\partial v} f'(v)^2 \left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v}\right)^{-1} - f'(v)^2 \frac{\partial g_{\mp}}{\partial u} \right] \\ &= \frac{1}{f'(v)^3} \left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial v}\right)^3 \left[f''(v) g_{\mp}^2 - f'(v) g_{\mp} \frac{\partial g_{\mp}}{\partial v} - f'(v)^2 \frac{\partial g_{\mp}}{\partial u} \right], \end{aligned}$$

a última igualdade é dada por (3.10). Devido ao corolário (3.1), precisamos provar apenas que

$$L_{\pm}(u, v) \equiv f''(v)g_{\mp}^2 - f'(v)g_{\mp}\frac{\partial g_{\mp}}{\partial v} - f'(v)^2\frac{\partial g_{\mp}}{\partial u} \quad (3.15)$$

é não-negativo. Para isso, temos que

$$\frac{1}{g_{\mp}}\frac{\partial g_{\mp}}{\partial u} = \frac{1}{-au \mp \sqrt{G}} \left(\frac{-a\sqrt{G} \mp a^2u}{\sqrt{G}} \right) = \pm \frac{a}{\sqrt{G}},$$

podemos escrever (3.15) como

$$L_{\pm}(u, v) = g_{\mp} \left[g_{\mp}f''(v) \mp f'(v)^2\frac{a}{\sqrt{G}} \pm f'(v) \left(\frac{f'(v) + vf''(v)}{2\sqrt{G}} \right) \right].$$

Como $\mp g_{\mp}(u, v) \geq 0$, precisamos apenas mostrar que

$$\begin{aligned} Q_{\pm}(u, v) &\equiv \mp \left[g_{\mp}f''(v) \mp f'(v)^2\frac{a}{\sqrt{G}} \pm f'(v) \left(\frac{f'(v) + vf''(v)}{2\sqrt{G}} \right) \right] \\ &= \mp \left[f''(v) \left(g_{\mp} \pm \frac{vf'(v)}{2\sqrt{G}} \right) \mp \frac{f'(v)^2}{\sqrt{G}} \left(\frac{2a-1}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

é não-negativo. Mas

$$\begin{aligned} \mp \left(g_{\mp} \pm \frac{vf'(v)}{2\sqrt{G}} \right) &= \mp \left(-au \mp \sqrt{G} \pm \frac{vf'(v)}{2\sqrt{G}} \right) \\ &= \mp \left(\frac{-2au\sqrt{G} \mp 2a^2u^2 \mp 2vf'(v) \pm vf'(v)}{2\sqrt{G}} \right) \\ &= \frac{2a^2u^2 + vf'(v) \pm 2au\sqrt{G}}{2\sqrt{G}}, \end{aligned}$$

assim o Lema 3.2 é verdadeiro se $\mp u \geq 0$. se $\mp u \leq 0$, observamos que

$$\begin{aligned} (2a^2u^2 + vf'(v))^2 &= 4a^4u^4 + v^2f'(v)^2 + 4a^2u^2vf'(v) \\ &\geq 4a^4u^4 + 4a^2u^2vf'(v) \\ &\geq 4a^2u^2(a^2u^2 + vf'(v)) = (2au\sqrt{G})^2, \end{aligned}$$

logo $2a^2u^2 + vf'(v) \geq 2au\sqrt{G}$. Nesse caso, $Q_{\pm}(u, v) \geq 0$.

Mostraremos agora que ω_+ é quase-convexa, ou seja, que $\forall \zeta \in \mathbb{R}^2$ temos

$$\zeta \cdot \nabla \omega_+ = 0 \Rightarrow \nabla^2 \omega_+(\zeta, \zeta) \geq 0.$$

De fato, $\nabla \omega_+$ é paralelo a l_+ , como l_+ e r_- são linearmente independentes, então podemos escrever $\zeta = \alpha l_+ + \beta r_-$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se $\zeta \cdot \nabla \omega_+ = 0$ então temos que $\alpha = 0$, pois $\nabla \omega_+ \cdot r_- = 0$, dessa forma temos que

$$\nabla^2 \omega_+(\zeta, \zeta) = \nabla^2 \omega_+(\beta r_-, \beta r_-) = \beta^2 \nabla^2 \omega_+(r_-, r_-) \geq 0.$$

De modo análogo temos que ω_- é quase-côncava. Derivando em (3.9), quando $v = 0$, temos que $\nabla^2 \omega_{\mp}$ é identicamente nula. ■

Devido a propriedade de quasi-convexidade, podemos concluir com o seguinte

Teorema 3.2 *Assuma que $(u_0, v_0) \in L^\infty(\mathbb{R}) \times L^\infty(\mathbb{R})$. Considere o problema de viscosidade (3.4), então a solução $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ é limitada a priori em L^∞ independente de ε .*

3.3 Estudo do Sistema Viscoso

Mostraremos agora que, para cada $\varepsilon > 0$ fixo, (3.4) tem uma solução global. A prova será obtida usando o resultado da seção (3.2) e o teorema da contração.

Sejam $\mathcal{C}_T = C(\mathbb{R})$ munido com a norma

$$\|(u, v)\| \equiv \sup_x \|u\| + \sup_x \|v\|$$

e $C([0, T] \times \mathbb{R})$

$$\|(u, v)\| \equiv \sup_{0 \leq \tau \leq T} \|(u, v)(\tau)\|.$$

Sejam $\varepsilon > 0$ fixo qualquer e

$$\Gamma_T \equiv \{U = (u, v) \in C([0, T] \times \mathbb{R}); \|(u, v)(t) - Z^\varepsilon * (u_0, v_0)\| \leq \|(u_0, v_0)\|\},$$

onde $Z^\varepsilon(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon t}}$ é o núcleo do calor e $*$ denota a convolução em x .

Usando o Princípio de Duhamel e propriedades de convolução, temos

$$U^\varepsilon \equiv U^\varepsilon(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z^\varepsilon(x - y, t) U_0(y) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} Z_x^\varepsilon(x - y, t - \tau) F(U^\varepsilon(y, \tau)) dy d\tau.$$

Seja

$$G(U^\varepsilon) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} Z^\varepsilon(x - y, t) U_0(y) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} Z_x^\varepsilon(x - y, t - \tau) F(U^\varepsilon(y, \tau)) dy d\tau.$$

Mostraremos que $G : \Gamma_T \rightarrow \Gamma_T$ para $T > 0$ suficientemente pequeno. De fato, temos a estimativa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |Z_x^\varepsilon(x - y, t - \tau)| dy \leq \frac{c}{\sqrt{t - \tau}}.$$

Por outro lado, se $U^\varepsilon \in \Gamma_T$ então

$$\|U^\varepsilon\| \leq \|U^\varepsilon - Z^\varepsilon * U_0\| + \|Z^\varepsilon * U_0\| \leq 2\|U_0\|,$$

Observamos que Γ_T é um conjunto fechado e limitado. Como f é contínua, denotamos por

$$f_{U_0} \equiv \max_{U^\varepsilon \in \Gamma_T} |f(v^\varepsilon)| \frac{1}{\|U_0\|^2}.$$

Se $U^\varepsilon \in \Gamma_T$, temos que

$$\begin{aligned}
|F(U^\varepsilon)| &= \left| \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2} + a\right)(u^\varepsilon)^2 + f(v^\varepsilon) \\ u^\varepsilon v^\varepsilon \end{pmatrix} \right| \leq \left| \left(\frac{1}{2} + a\right)(u^\varepsilon)^2 + f(v^\varepsilon) \right| + |u^\varepsilon v^\varepsilon| \\
&\leq \left(\frac{1}{2} + a\right) |(u^\varepsilon)^2| + |f(v^\varepsilon)| + \sup_x |u^\varepsilon| \sup_x |v^\varepsilon| \\
&\leq \left(\frac{1}{2} + a\right) \sup_x |(u^\varepsilon)^2| + |f(v^\varepsilon)| + 4\|U_0\|^2 \\
&\leq \left(\frac{1}{2} + a\right) 2\|U_0\|^2 + |f(v^\varepsilon)| + 4\|U_0\|^2 \leq (2a + 5 + f_{U_0}) \|U_0\|^2,
\end{aligned}$$

assim

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} |F(U^\varepsilon(y, \tau))| \leq (2a + 5 + f_{U_0}) \|U_0\|^2.$$

Portanto segue que

$$\begin{aligned}
|G(U^\varepsilon) - Z^\varepsilon * U_0| &\leq \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} |Z_x^\varepsilon(x - y, t - \tau)| |F(U^\varepsilon(y, \tau))| dy d\tau \\
&\leq c(2a + 5 + f_{U_0}) \|U_0\|^2 \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} d\tau \leq 2c(2a + 5 + f_{U_0}) \|U_0\|^2 \sqrt{t}.
\end{aligned}$$

O lado direito da desigualdade está limitado por $\|U_0\|$, desde que

$$t \leq T_1 \equiv \frac{1}{[2c(2a + 5 + f_{U_0}) \|U_0\|]^2}.$$

Para T suficientemente pequeno, $G : \Gamma_T \rightarrow \Gamma_T$ é uma contração em Γ_T . De fato, se $U_1^\varepsilon, U_2^\varepsilon \in \Gamma_T$, então

$$\begin{aligned}
|F(U_1^\varepsilon) - F(U_2^\varepsilon)| &= \left| \begin{pmatrix} (1 + a)((u_1^\varepsilon)^2 - (u_2^\varepsilon)^2) + f(v_1^\varepsilon) - f(v_2^\varepsilon) \\ u_1^\varepsilon v_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon v_2^\varepsilon \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} (1 + a)(u_1^\varepsilon + u_2^\varepsilon)(u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon) + f(v_1^\varepsilon) - f(v_2^\varepsilon) \\ u_1^\varepsilon(v_1^\varepsilon - v_2^\varepsilon) + v_2^\varepsilon(u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon) \end{pmatrix} \right|.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
|(1+a)(u_1^\varepsilon + u_2^\varepsilon)(u_1^\varepsilon - v_1^\varepsilon) + f(v_1^\varepsilon) - f(v_2^\varepsilon)| &\leq |(1+a)(u_1^\varepsilon + u_2^\varepsilon)(u_1^\varepsilon - v_1^\varepsilon)| \\
&\quad + |f(v_1^\varepsilon) - f(v_2^\varepsilon)| \\
&\leq |(1+a)(u_1^\varepsilon + u_2^\varepsilon)(u_1^\varepsilon - v_1^\varepsilon)| \\
&\quad + K|v_1^\varepsilon - v_2^\varepsilon| \\
&\leq (1+a)4\|U_0\| |U_1^\varepsilon - U_2^\varepsilon| \\
&\quad + K|U_1^\varepsilon - U_2^\varepsilon|
\end{aligned}$$

e

$$|u_1^\varepsilon(v_1^\varepsilon - v_2^\varepsilon) + v_2^\varepsilon(u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon)| \leq 2\|U_0\| |U_1^\varepsilon - U_2^\varepsilon|,$$

então

$$|F(U_1^\varepsilon) - F(U_2^\varepsilon)| \leq c_{a,f,U_0} \|U_1^\varepsilon - U_2^\varepsilon\|$$

onde $c_{a,f,U_0} > 0$ é constante.

Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned}
\|G(U_1^\varepsilon) - G(U_2^\varepsilon)\|_t &= \left\| \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} Z_x^\varepsilon(x-y, t-\tau)(F(U_1^\varepsilon) - F(U_2^\varepsilon)) dy d\tau \right\| \\
&\leq \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \|Z_x^\varepsilon(x-y, t-\tau)\| \|F(U_1^\varepsilon) - F(U_2^\varepsilon)\| dy d\tau \\
&\leq \int_0^t cc_{a,f,U_0} \frac{\|U_1^\varepsilon - U_2^\varepsilon\|}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \leq 2cc_{a,f,U_0} \|U_1^\varepsilon - U_2^\varepsilon\| \sqrt{t}.
\end{aligned}$$

O lado direito da desigualdade anterior, está limitado por $\|U_1^\varepsilon - U_2^\varepsilon\|$, desde que

$$t \leq T_2 \equiv \frac{1}{(2cc_{a,f,U_0})^2}.$$

Portanto para cada $\varepsilon > 0$ fixo, (3.4) tem uma única solução em $C((0, T^*), \mathcal{C}(T^*))$,

onde

$$T^* \equiv \frac{1}{2[\max\{2c(2a+5+f_{U_0})\|U_0\|, 2cc_{a,f,U_0}\}]^2}$$

Por causa da existência de uma região invariante, T^* depende apenas de $\|U_0\|$. então podemos repetir o argumento tomando $(u, v)|_{t=T^*}$ como dado inicial. Portanto temos a prova.

Teorema 3.3 *Com as mesmas hipóteses anteriores a aproximação (3.4) para o problema (3.1) tem uma única solução suave dentro de uma região invariante limitada apropriada.*

A suavidade da solução é garantida pelo Lema 1.1 pelo Teorema 1.3.

Concluimos essa seção mostrando que, quando os dados estão no semiplano $v > 0$, a solução permanece nele para todo $v > 0$. Para estabelecer esse resultado aplicamos um teorema de soluções positivas para equações parabólicas de segunda ordem.

Seja $\varepsilon > 0$ fixo. Considere o operador linear

$$L\psi \equiv \varepsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - u \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial t} - u_x \psi,$$

para qualquer função suave ψ . Se $U = (u, v)$ é solução de (3.4) então $Lv = 0$.

Devido à equação (3.4) e ao Teorema 3.2, existe $M > 0$ tal que $|u|, |v| < M$. Portanto, para todo (x, t) , $\beta > 0$, temos

$$v \geq -M \geq -Me^{\beta|x^2|}.$$

Deduziremos um limite a priori $\|U_x\|_\infty$ em termos de $\|(u_0)_x\|_\infty$ e $\|(v_0)_x\|_\infty$. De fato, se diferenciarmos (3.4) com respeito a x obteremos

$$U_x^\varepsilon(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z^\varepsilon(x - y, t)(U_0)_x(y) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} Z_x^\varepsilon(x - y, t - \tau) F(U(y, \tau))_x dx d\tau.$$

Denotamos por

$$\Phi(\tau) \equiv \max\{\sup_x |u_x^\varepsilon(x, \tau)|, \sup_x |v_x^\varepsilon(x, \tau)|\},$$

então

$$\begin{aligned}
|F(U^\varepsilon)_x| \equiv |\nabla F(U^\varepsilon)U_x^\varepsilon| &\leq \left| \begin{pmatrix} (1+2a)u^\varepsilon & f'(v^\varepsilon) \\ v^\varepsilon & u^\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x^\varepsilon \\ v_x^\varepsilon \end{pmatrix} \right| \\
&\leq \left| \begin{pmatrix} (1+2a)u^\varepsilon u_x^\varepsilon + f'(v^\varepsilon)v_x^\varepsilon \\ v^\varepsilon u_x^\varepsilon + u^\varepsilon v_x^\varepsilon \end{pmatrix} \right| \\
&\leq (|1+2a||u^\varepsilon| + |f'(v^\varepsilon)|) \Phi(\tau) + (|v^\varepsilon| + |u^\varepsilon|) \Phi(\tau) \\
&\leq c_{a,M,f} \Phi(\tau),
\end{aligned}$$

onde $c_{a,M,f}$ depende de a, M e f .

Afirmamos que

$$\begin{aligned}
\Phi(t) - \Phi(0) &= \max\{\sup_x |u_x^\varepsilon(x, \tau)|, \sup_x |v_x^\varepsilon(x, \tau)|\} - \max\{\sup_x |(u_0)_x|, \sup_x |(v_0)_x|\} \\
&\leq \sup_x |U_x^\varepsilon(x, t) - U_x^\varepsilon(x, 0)|.
\end{aligned}$$

De fato, supondo que

$$\max\left\{\sup_x |u_x^\varepsilon(x, t)|, \sup_x |v_x^\varepsilon(x, t)|\right\} = \sup_x |u_x^\varepsilon(x, t)|$$

e

$$\max\left\{\sup_x |(u_0)_x|, \sup_x |(v_0)_x|\right\} = \sup_x |(v_0)_x|,$$

como

$$\begin{aligned}
\sup_x |u_x^\varepsilon(x, t)| &\leq \sup_x |u_x^\varepsilon(x, t) - (u_0)_x| + \sup_x |(u_0)_x| \\
&\leq \sup_x |u_x^\varepsilon(x, t) - (u_0)_x| + \sup_x |(v_0)_x|,
\end{aligned}$$

então

$$\sup_x |u_x^\varepsilon(x, t)| - \sup_x |(v_0)_x| \leq \sup_x |u_x^\varepsilon(x, t) - (u_0)_x| \leq \sup_x |U_x^\varepsilon(x, t) - U_x^\varepsilon(x, 0)|.$$

Os outros casos são análogos.

Portanto

$$\begin{aligned}
\Phi(t) - \Phi(0) &\leq \sup_x |U_x^\varepsilon(x, t) - U_x^\varepsilon(x, 0)| \\
&= \sup_x \left| \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} Z_x^\varepsilon(x - y, t - \tau) F(U^\varepsilon(y, \tau))_x dy d\tau \right| \\
&\leq \sup_x \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} |Z_x^\varepsilon(x - y, t - \tau)| |F(U^\varepsilon(y, \tau))_x| dy d\tau \\
&\leq \int_0^t \frac{c}{\sqrt{t - \tau}} c_{a, M, f} \Phi(\tau) d\tau, \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Assuma que $T > 0$. Defina $A : C([0, T]) \rightarrow C([0, T])$ por

$$(A\Psi)(t) = \int_0^t \frac{\Psi(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau.$$

Temos assim que

$$\|A\Psi\|_\infty \leq \sup_t \left| \int_0^t \frac{\Psi(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau \right| \leq \sup_t \left| \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} d\tau \right| \|\Psi\|_\infty = \sup_t 2\sqrt{t} \|\Psi\|_\infty = 2\sqrt{T} \|\Psi\|_\infty,$$

Daí A é limitado e

$$\|A\| = \sup\{\|A\Psi\|_\infty; \|\Psi\|_\infty = 1\} \leq 2\sqrt{T}.$$

Se $T < \frac{1}{(2cc_{a, M, f})^2}$ então $\|A\| \leq \frac{1}{cc_{a, M, f}}$, portanto o operador $(I - cc_{a, M, f}A)$ é invertível.

Seja

$$\Psi(t) = [(I - cc_{a, M, f}A)^{-1}\Phi(0)](t),$$

então

$$(I - cc_{a, M, f}A)\Psi(t) = \Phi(0),$$

logo

$$\Psi(t) = \Phi(0) + cc_{a, M, f} \int_0^t \frac{\Psi(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau.$$

Afirmamos que $\Phi(t) \leq \Psi(t)$, $\forall t \in [0, T]$. De fato, seja $g(t) \equiv \max\{0, \Phi - \Psi\}$. Então $g(0) = 0$, para $t \neq 0$ usando (3.16), temos que

$$g(t) \leq cc_{a,M,f} \int_0^t \frac{g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

Se $0 \leq \tau \leq T$ então $g(\tau) \leq \sup_{0 \leq t \leq T} g(t)$, assim para $t \neq 0$

$$\begin{aligned} g(t) &\leq cc_{a,M,f} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \sup_{0 \leq t \leq T} g(t) d\tau \\ &\leq cc_{a,M,f} \sup_{0 \leq t \leq T} g(t) \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \\ &\leq 2cc_{a,M,f} \sqrt{t} \sup_{0 \leq t \leq T} g(t) \\ &\leq 2cc_{a,M,f} \sqrt{T} \sup_{0 \leq t \leq T} g(t). \end{aligned}$$

Assim

$$\sup_{0 \leq t \leq T} g(t) \leq 2cc_{a,M,f} \sqrt{T} \sup_{0 \leq t \leq T} g(t).$$

Porém $2cc_{a,M,f} \sqrt{T} < 1$, portanto a desigualdade anterior só é verdadeira se $g(t) = 0$, $\forall t \in [0, T]$. Isso prova nossa afirmação. Como

$$\|\Psi\|_\infty \leq |\Phi(0)| + 2cc_{a,M,f} \sqrt{T} \|\Psi\|_\infty,$$

então

$$\|\Phi\|_\infty \leq \|\Psi\|_\infty \leq \frac{|\Phi(0)|}{1 - 2cc_{a,M,f} \sqrt{T}}.$$

Concluimos que Φ é limitada em $[0, T]$ e, como T depende apenas de M , podemos interar os argumentos anteriores, e obtermos para todo $T > 0$

$$\sup_x |u_x|(t) \leq c_{T, \|(u_0)_x\|_\infty, \|(v_0)_x\|_\infty}$$

$\forall t \in [0, T]$.

Resumimos nossas conclusões nos seguintes resultados

Proposição 3.1 *Assuma que $u_0, v_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial v_0}{\partial x} \in L^\infty(\mathbb{R})$, $v_0(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então a solução $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ para (3.4) satisfaz $v^\varepsilon(x, t) \geq 0 \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$.*

Demonstração: Segue do Teorema 1.4.

Corolário 3.2 *Com as mesmas hipóteses anteriores temos $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$*

$$w^* - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (u^\varepsilon, v^\varepsilon) \in \{(u, v) : v \geq 0\}.$$

Demonstração: O Teorema de Banach-Alaoglu aplicado aos espaços L^p nos diz que se tivermos $\|U^\varepsilon\|_p$ uniformemente limitada, com $1 < p \leq \infty$, então podemos obter uma subsequência que continuamos denotando por (U^ε) e uma função U tal que $U^\varepsilon \rightarrow U$ ($U^\varepsilon \rightarrow U$ fraco * no caso L^∞).

3.4 Entropias

Nessa seção, discutiremos algumas propriedades da entropia associada ao nosso problema.

A equação (3.3) pode ser escrita explicitamente como

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial u} = (2a + 1)u \frac{\partial \eta}{\partial u} + v \frac{\partial \eta}{\partial v} \\ \frac{\partial q}{\partial v} = f'(v) \frac{\partial \eta}{\partial u} + u \frac{\partial \eta}{\partial v}. \end{cases}$$

Derivando a primeira equação em relação a v e a segunda em relação a u temos

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 q}{\partial v \partial u} = (2a + 1)u \frac{\partial^2 \eta}{\partial v \partial u} + \frac{\partial \eta}{\partial v} + v \frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 q}{\partial u \partial v} = f'(v) \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} + \frac{\partial \eta}{\partial v} + u \frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial v}. \end{cases}$$

Eliminando q , obtemos uma equação diferencial parcial de segunda ordem em η

$$v \frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2} - f'(v) \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} + 2au \frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial v} = 0. \quad (3.17)$$

O produto interno de (3.3) com o autovetor à direita r_{\mp} de ∇F produz a forma característica de

$$(\lambda_{\mp} \nabla \eta - \nabla q) \cdot r_{\mp} = 0 \quad (3.18)$$

que é equivalente à (3.3). Assim, os invariantes de Riemann (ω_-, ω_+) estão bem definidos, pois de acordo com o Lema 3.1

$$T : (u, v) \rightarrow (\omega_-, \omega_+)$$

é uma bijeção que define uma mudança de coordenadas no semiplano $\{(u, v); v \geq 0\}$.

De fato, dado um ponto (u, v) , $v \geq 0$, existe apenas uma curva integral R_+ , e apenas uma curva integral R_- , que passam pelo ponto dado, caso contrário teríamos duas soluções diferentes de um mesmo P.V.I. que se cruzam nesse ponto, o que é uma contradição pelo teorema de existência e unicidade, isso define um único ponto (ω_-, ω_+) relacionada ao ponto (u, v) . Por outro lado, dado um ponto (ω_-, ω_+) , como

ω_- é constante sobre a curva R_+ e ω_+ é constante sobre a curva R_- , e as curvas R_+ e R_- se cruzam em um único ponto, quando $v \geq 0$, temos que elas definem um único ponto (u, v) , $v \geq 0$.

Podemos considerar r_- e r_+ normalizados de forma que

$$\begin{cases} \nabla\omega_- \cdot r_- = 1 & \nabla\omega_- \cdot r_+ = 0 \\ \nabla\omega_+ \cdot r_- = 0 & \nabla\omega_+ \cdot r_+ = 1. \end{cases}$$

Definimos os operadores

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\omega_-} = r_- \cdot \nabla \\ \frac{\partial}{\partial\omega_+} = r_+ \cdot \nabla, \end{cases}$$

que transformam o sistema (3.18) em

$$\begin{cases} \lambda_- \eta_{\omega_-} = q_{\omega_-} \\ \lambda_+ \eta_{\omega_+} = q_{\omega_+}. \end{cases} \quad (3.19)$$

De fato, devido a (3.3), temos

$$\frac{\partial q}{\partial\omega_-} = \nabla q \cdot r_- = \nabla\eta \cdot \nabla F \cdot r_- = \lambda_- \nabla\eta \cdot r_- = \lambda_- \frac{\partial\eta}{\partial\omega_-},$$

da mesma forma

$$\frac{\partial q}{\partial\omega_+} = \nabla q \cdot r_+ = \nabla\eta \cdot \nabla F \cdot r_+ = \lambda_+ \nabla\eta \cdot r_+ = \lambda_+ \frac{\partial\eta}{\partial\omega_+}.$$

Além disso, se no sistema (3.19), derivarmos a primeira equação em relação a ω_+ e a segunda em relação a ω_- obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial\lambda_-}{\partial\omega_+} \frac{\partial\eta}{\partial\omega_-} + \lambda_- \frac{\partial^2\eta}{\partial\omega_+ \partial\omega_-} = \frac{\partial^2 q}{\partial\omega_+ \partial\omega_-} \\ \frac{\partial\lambda_+}{\partial\omega_-} \frac{\partial\eta}{\partial\omega_+} + \lambda_+ \frac{\partial^2\eta}{\partial\omega_- \partial\omega_+} = \frac{\partial^2 q}{\partial\omega_- \partial\omega_+}. \end{cases}$$

Eliminando $\frac{\partial^2 q}{\partial\omega_- \partial\omega_+}$ temos, em coordenadas $\omega = (\omega_-, \omega_+)$,

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial\omega_- \partial\omega_+} + \frac{1}{\lambda_+(\omega) - \lambda_-(\omega)} \left(\frac{\partial\lambda_+(\omega)}{\partial\omega_-} \frac{\partial\eta}{\partial\omega_+} - \frac{\partial\lambda_-(\omega)}{\partial\omega_+} \frac{\partial\eta}{\partial\omega_-} \right) = 0. \quad (3.20)$$

Consideramos (3.20) apenas quando $\omega_- \leq 0 \leq \omega_+$.

Estudaremos a seguir alguns tipos particulares de entropia.

3.4.1 Entropias do Tipo Produto

Procuramos soluções da forma

$$\eta(u, v) = \alpha(u)\beta(v).$$

Para uma tal função $\eta(u, v)$, (3.17) assume a forma

$$v\alpha(u)\beta''(v) - f'(v)\alpha''(u)\beta(v) + 2au\alpha'(u)\beta'(v) = 0. \quad (3.21)$$

Dividindo por $\alpha(u)\beta(v)f'(v)$ e diferenciando em relação a u , obtemos

$$\left(\frac{\alpha''(u)}{\alpha(u)}\right)' = 2a \left(u \frac{\alpha'(u)}{\alpha(u)}\right)' \frac{\beta'(v)}{\beta(v)f'(v)}.$$

que nos permite concluir que existe um $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \alpha(u) = \int_0^u e^{\frac{k}{2}t^2} dt \\ \beta(v) = e^{\frac{k}{2a}f(v)}. \end{cases}$$

Portanto encontramos uma família de entropias do seguinte tipo

$$\eta_k(u, v) = \int_0^u e^{\frac{k}{2}\left(\frac{f(v)}{a} + t^2\right)} dt.$$

Por outro lado, dividindo (3.21) por $\alpha(u)\beta(v)f'(v)$ e diferenciando com respeito a v , obtemos

$$\left(\frac{v\beta''(v)}{f'(v)\beta(v)}\right)' = -2au \frac{\alpha'(u)}{\alpha(u)} \left(\frac{\beta'(v)}{f'(v)\beta(v)}\right)'.$$

Então existe um $h \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \alpha(u) = e^{-hu^2} \\ \beta(v) = v^{ah+1}. \end{cases}$$

Portanto encontramos uma outra família de entropias dependentes do parâmetro h do tipo

$$\eta_h(u, v) = v^{ah+1}e^{-hu^2}. \quad (3.22)$$

Observamos que (3.22) é uma entropia para nosso problema que não depende de f , e η_h é convexa se $h \geq 0$. De fato, temos que

$$\frac{\partial^2 \eta_h}{\partial u^2} = (4h^2 u^2 - 2h) v^{ah+1} e^{-hu^2}$$

$$\frac{\partial^2 \eta_h}{\partial u \partial v} = (-2ah^2 u - 2hu) v^{ah} e^{-hu^2}$$

$$\frac{\partial^2 \eta_h}{\partial v^2} = (a^2 h^2 + ah) v^{ah-1} e^{-hu^2}.$$

Mostraremos que

$$\nabla^2 \eta_h((w, z), (w, z)) = \frac{\partial^2 \eta_h}{\partial u^2} w^2 + 2 \frac{\partial^2 \eta_h}{\partial u \partial v} zw + \frac{\partial^2 \eta_h}{\partial v^2} z^2 \geq 0$$

$\forall (w, z) \in \mathbb{R}^2$. Como $v^{2ah} e^{-hu^2} \geq 0$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, então é suficiente mostrarmos que

$$(2ah^2 u + 2hu)^2 - (-2h + 4h^2 u^2) (a^2 h^2 + ah) \geq 0,$$

ou seja,

$$h^2 [h(2a^2 + 4au^2) + (2a + 4u^2)] \geq 0.$$

Como $h^2 \geq 0$, $\forall h \in \mathbb{R}$, basta que

$$h(2a^2 + 4au^2) + (2a + 4u^2) \geq 0,$$

logo precisamos que $h \geq -\frac{1}{a}$. Como $a > \frac{1}{2}$, basta que $h \geq 0 \geq -\frac{1}{a}$.

3.4.2 Entropias do Tipo Soma

Agora, procuramos por soluções da forma

$$\eta(u, v) = \alpha(u) + \beta(v).$$

Nesse caso (3.17) reduz-se a

$$v\beta'(v) - f'(v)\alpha''(u) = 0,$$

que admite a seguinte solução

$$\begin{cases} \alpha(u) = \frac{1}{2}u^2 \\ \beta(v) = \int_0^v \int_0^y \frac{f'(z)}{z} dz dy, \end{cases}$$

assim

$$\eta(u, v) = \frac{1}{2}u^2 + \int_0^v \int_0^y \frac{f'(z)}{z} dz dy$$

é uma entropia convexa bem definida. De fato, para $v \neq 0$, temos

$$\nabla^2 \eta(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{f'(v)}{v} \end{pmatrix}.$$

Dado $(w, z) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$\nabla^2 \eta((w, z), (w, z)) = w^2 + \frac{f'(v)}{v} z^2$$

então η é convexa.

Lembramos que $\nabla q = \nabla \eta \nabla F$, então

$$\nabla q = \left((1 + 2a)u^2 + v \int_0^v \frac{f'(\xi)}{\xi} d\xi, u f'(v) + u \int_0^v \frac{f'(\xi)}{\xi} d\xi \right),$$

logo o fluxo correspondente é dado por

$$q(u, v) = \frac{2a + 1}{3}u^3 + uv \int_0^v \frac{f'(z)}{z} dz.$$

3.4.3 Entropias Polinomiais

Nessa subseção, assumimos que f é um polinômio de grau n . Com essa hipótese provaremos a existência de entropias polinomiais por um processo de interação.

Supomos primeiro que $f(v) = \frac{1}{2}v^2$, sem perda de generalidade, pois se $f(v) = \frac{c^2}{2}v^2$, por meio de uma mudança de variável $v \rightarrow \frac{v}{c}$, obtemos

$$\begin{cases} u_t + \left(\left(\frac{1}{2} + a \right) u^2 + \frac{1}{2}v^2 \right)_x = 0 \\ \frac{1}{c}v_t + \frac{1}{c}(uv)_x = 0 \end{cases}$$

que é o problema (3.1), com $f(v) = \frac{1}{2}v^2$.

De fato, (3.17) reduz-se a

$$v \frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2} - v \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} + 2au \frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial v} = 0 \quad (3.23)$$

que é invariante sobre a dilatação

$$(u, v, \eta) \mapsto (cu, cv, c\eta).$$

Sejam $\xi = \frac{u}{v}$ e $\tilde{\eta}(\xi) = \frac{\eta(u, v)}{v^\alpha}$, onde $\alpha > 0$ é um inteiro que queremos determinar para que η seja um polinômio de grau α . Então

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2}(u, v) = \tilde{\eta}''(\xi)v^{\alpha-2}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2}(u, v) = \tilde{\eta}''(\xi)u^2v^{\alpha-4} - (\alpha-2)\tilde{\eta}'(\xi)uv^{\alpha-3} - \alpha\tilde{\eta}'(\xi)uv^{\alpha-3} + \alpha(\alpha-1)\tilde{\eta}(\xi)v^{\alpha-2}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial v \partial u}(u, v) = \tilde{\eta}''(\xi)uv^{\alpha-3} + (\alpha-1)\tilde{\eta}'(\xi)v^{\alpha-2}.$$

Substituindo em (3.23), temos

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}''(\xi) [u^2v^{\alpha-3} - v^{\alpha-1} - 2au^2v^{\alpha-3}] + \tilde{\eta}'(\xi) [-(\alpha-2)uv^{\alpha-2} - \alpha uv^{\alpha-2} \\ - 2au(\alpha-1)v^{\alpha-2}] + \tilde{\eta}(\xi)\alpha(\alpha-1)v^{\alpha-1} = 0. \end{aligned}$$

Escolhendo $\alpha = 1$, obtemos

$$\tilde{\eta}''(\xi) [u^2v^{-2} - 1 - 2au^2v^{-2}] = 0.$$

Como $[u^2v^{-2}(1-2a) - 1] \neq 0$, pois $a > \frac{1}{2}$, então $\tilde{\eta}(\xi) = k_1\xi + k_2$, onde k_1 e k_2 são constantes. Portanto

$$\eta(u, v) = v\tilde{\eta}\left(\frac{u}{v}\right) = k_1u + k_2v,$$

é uma solução polinomial de grau 1 de (3.23).

Agora, supomos que f é uma função polinomial de grau n que pode ser escrita como

$$f(v) = \frac{1}{2}v^2 + g(v),$$

onde g é uma função polinomial de grau maior que 2.

Seja

$$\mathcal{L}(\eta) = v \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} \right) + 2au \frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial v} - g'(v) \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2}.$$

Então (3.17) pode ser escrita como

$$\mathcal{L}(\eta) = 0. \quad (3.24)$$

Seja

$$\mathcal{L}_0(\eta) = v \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} \right) + 2au \frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial v}.$$

Então podemos encontrar soluções para

$$\mathcal{L}_0(\eta) = 0. \quad (3.25)$$

Queremos encontrar uma solução para (3.24). Seja η_0 uma solução para (3.25).

Podemos, então escrever a solução para (3.24) da seguinte forma

$$\eta = \eta_0 + H_1^0 + H_1^R,$$

onde H_1^0 é uma solução para a equação não-homogênea

$$\mathcal{L}_0(\eta) = g'(v) \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial u^2}.$$

Como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\eta) &= v \left(\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial u^2} \right) + 2au \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial u \partial v} - g'(v) \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial u^2} \\ &\quad + v \left(\frac{\partial^2 H_1^0}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 H_1^0}{\partial u^2} \right) + 2au \frac{\partial^2 H_1^0}{\partial u \partial v} - g'(v) \frac{\partial^2 H_1^0}{\partial u^2} \\ &\quad + v \left(\frac{\partial^2 H_1^R}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 H_1^R}{\partial u^2} \right) + 2au \frac{\partial^2 H_1^R}{\partial u \partial v} - g'(v) \frac{\partial^2 H_1^R}{\partial u^2} \\ &= -g'(v) \frac{\partial^2 H_1^0}{\partial u^2} + \mathcal{L}(H_1^R), \end{aligned}$$

então H_1^R é uma solução de

$$\mathcal{L}(\eta) = g'(v) \frac{\partial^2 H_1^0}{\partial u^2}.$$

Vamos agora dividir H_1^R da seguinte forma

$$H_1^R = H_2^0 + H_2^R,$$

onde H_2^0 é uma solução de

$$\mathcal{L}_0(\eta) = g'(v) \frac{\partial^2 H_1^0}{\partial u^2}.$$

Como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(H_1^R) &= v \left(\frac{\partial^2 H_2^0}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 H_2^0}{\partial u^2} \right) + 2au \frac{\partial^2 H_2^0}{\partial u \partial v} - g'(v) \frac{\partial^2 H_2^0}{\partial u^2} \\ &\quad + v \left(\frac{\partial^2 H_2^R}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 H_2^R}{\partial u^2} \right) + 2au \frac{\partial^2 H_2^R}{\partial u \partial v} - g'(v) \frac{\partial^2 H_2^R}{\partial u^2} \\ &= -g'(v) \frac{\partial^2 H_2^R}{\partial u^2} + \mathcal{L}(H_2^R), \end{aligned}$$

então H_2^R é uma solução de

$$\mathcal{L}(\eta) = g'(v) \frac{\partial^2 H_2^0}{\partial u^2}.$$

Assim, a solução η é dada por

$$\eta = \eta_0 + H_1^0 + H_1^R + H_2^0 + H_2^R.$$

Então, continuando esse processo, depois de k passos obtemos

$$\eta = \eta_0 + \sum_{j=1}^k H_j^0 + H_k^R,$$

onde

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0(\eta_0) = 0 \\ \mathcal{L}_0(H_j^0) = g'(v) \frac{\partial^2 H_{j-1}^0}{\partial u^2}, \end{cases} \quad (3.26)$$

para $j \geq 0$. Finalmente, temos

Proposição 3.2 *Com as hipóteses anteriores as seguintes propriedades são verdadeiras:*

a) *Se H_{j-1}^0 é um polinômio então existe H_j^0 que também é um polinômio.*

b) $\exists k > 0$ tal que $H_k^R \equiv 0$.

Demonstração: Supomos que H_{j-1}^0 tem grau m_1 em u e m_2 em v , isto é,

$$H_{j-1}^0(u, v) = \sum_{k=0}^{m_1} \sum_{h=0}^{m_2} d_{k,h} u^k v^h,$$

então

$$\frac{\partial^2 H_{j-1}^0}{\partial u^2} = \sum_{k=0}^{m_1} \sum_{h=0}^{m_2} k(k-1) d_{k,h} u^{k-2} v^h$$

e existe $\tilde{d}_{k,h}$ tal que

$$g'(v) \frac{\partial^2 H_{j-1}^0}{\partial u^2} = \sum_{k=0}^{m_1-2} \sum_{h=0}^{m_2+n-1} \tilde{d}_{k,h} u^k v^h.$$

Se assumirmos que

$$H_j^0(u, v) = \sum_{k_1 \geq 0, h_1 \geq 0} c_{k_1, h_1} u^{k_1} v^{h_1},$$

então (3.26)_j torna-se

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1 \geq 0, h_1 \geq 2} h_1(h_1 - 1) c_{k_1, h_1} u^{k_1} v^{h_1-1} \\ & - \sum_{k_1 \geq 2, h_1 \geq 0} k_1(k_1 - 1) c_{k_1, h_1} u^{k_1-2} v^{h_1+1} \\ & + \sum_{k_1 \geq 1, h_1 \geq 1} 2a h_1 k_1 c_{k_1, h_1} u^{k_1} v^{h_1-1} = \sum_{k=0, h=2} \tilde{d}_{k,h} u^k v^h, \end{aligned}$$

ou equivalente

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1 \geq 0, h_1 \geq 1} h_1(h_1 + 1) c_{k_1, h_1+1} u^{k_1} v^{h_1} \\ & - \sum_{k_1 \geq 0, h_1 \geq 1} (k_1 + 2)(k_1 + 1) c_{k_1+2, h_1-1} u^{k_1} v^{h_1} \\ & + \sum_{k_1 \geq 1, h_1 \geq 0} 2a(h_1 + 1) k_1 c_{k_1, h_1+1} u^{k_1} v^{h_1} = \sum_{k=0, h=2} \tilde{d}_{k,h} u^k v^h \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\left\{ \begin{array}{ll} c_{k,1} = 0, & \text{se } k \in \mathbb{N} \\ c_{k,2} = 0, & \text{se } k \in \mathbb{N} \\ (h+1)(h+2ak)c_{k,h+1} - (k+1)(k+2)c_{k+2,h-1} = \tilde{d}_{k,h}, \\ & \text{se } k \leq m_1 - 2 \text{ e } h \leq m_2 + n - 1 \\ c_{k,h} = 0, & \text{caso contrário.} \end{array} \right.$$

Podemos escolher alguns dos coeficientes $c_{k,h}$ arbitrariamente, por exemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{m_1-1,h} = 0 \\ c_{m_1,h} = 0. \end{array} \right.$$

Assim, obtemos H_j^0 com grau $m_1 - 2$ em u , de fato se η_0 tem grau γ em u , depois de $\left\lceil \frac{\gamma}{2} \right\rceil + 1$ passos obtemos uma função que é independente de u . ■

Portanto provamos que

Teorema 3.4 *Se considerarmos (3.1) com um polinômio f de grau n , então existe uma entropia polinomial em (u, v) .*

3.4.4 O Problema de Goursat

Consideramos o sistema de coordenadas de invariantes de Riemann (ω_-, ω_+) . Nesse caso, encontramos que as curvas características para as equações de entropia são as retas paralelas aos eixos coordenados. O problema de Goursat consiste em encontrar uma solução η de (3.20) quando seus valores nas duas curvas características são conhecidos.

Tomamos duas constantes ω_-^*, ω_+^* com $\omega_-^* \leq \omega_+^*$. Estudaremos o problema de Goursat.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \omega_- \partial \omega_+} + \frac{1}{\lambda_+(\omega) - \lambda_-(\omega)} \left(\frac{\partial \lambda_+(\omega)}{\partial \omega_-} \frac{\partial \eta}{\partial \omega_+} - \frac{\partial \lambda_-(\omega)}{\partial \omega_+} \frac{\partial \eta}{\partial \omega_-} \right) = 0 \\ \eta(\omega_-, \omega_+^*) = \theta_-(\omega_-) \\ \eta(\omega_-^*, \omega_+) = \theta_+(\omega_+), \end{array} \right. \quad (3.27)$$

onde θ_- e θ_+ são funções suaves dadas.

Relembramos o seguinte resultado devido a Sobolev

Teorema 3.5 *O problema de Goursat (3.27) admite uma solução tão regular quanto os dados iniciais θ_- e θ_+ em qualquer domínio limitado fora do ponto umbilical e do eixo ω_+ .*

Demonstração: Segundo [Sb], considere que a equação (3.27) seja da forma

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \omega_- \partial \omega_+} + \alpha \frac{\partial \eta}{\partial \omega_-} + \beta \frac{\partial \eta}{\partial \omega_+} = 0 \\ \eta(\omega_-, \omega_+^*) = \theta_-(\omega_-) & \omega_-^* \leq \omega_- \leq a \\ \eta(\omega_-^*, \omega_+) = \theta_+(\omega_+) & \omega_+^* \leq \omega_+ \leq b, \end{cases} \quad (3.28)$$

onde

$$\alpha \equiv \alpha(\omega_-, \omega_+) = \frac{-1}{\lambda_+(\omega) - \lambda_-(\omega)} \frac{\partial \lambda_-(\omega)}{\partial \omega_+}$$

e

$$\beta \equiv \beta(\omega_-, \omega_+) = \frac{1}{\lambda_+(\omega) - \lambda_-(\omega)} \frac{\partial \lambda_+(\omega)}{\partial \omega_-}.$$

Supomos também que $\theta_-(\omega_-^*) = \theta_+(\omega_+^*)$. Sejam

$$\frac{\partial \eta}{\partial \omega_-} = u \quad \text{e} \quad \frac{\partial \eta}{\partial \omega_+} = v, \quad (3.29)$$

dessa forma temos

$$\frac{\partial u}{\partial \omega_+} = \frac{\partial v}{\partial \omega_-} = -\alpha u - \beta v, \quad (3.30)$$

segue que

$$\begin{cases} u(\omega_-, \omega_+) = u(\omega_-, \omega_+^*) + \int_{\omega_+^*}^{\omega_+} (-\alpha u - \beta v) d\omega_+ \\ v(\omega_-, \omega_+) = v(\omega_-^*, \omega_+) + \int_{\omega_-^*}^{\omega_-} (-\alpha u - \beta v) d\omega_- \\ \eta(\omega_-, \omega_+) = \eta(\omega_-, \omega_+^*) + \int_{\omega_+^*}^{\omega_+} v d\omega_+. \end{cases} \quad (3.31)$$

De (3.28) e (3.29) temos

$$u(\omega_-, \omega_+^*) = \left[\frac{\partial \eta}{\partial \omega_-} \right]_{\omega_+ = \omega_+^*} = \theta'_-(\omega_-) \quad (3.32)$$

$$v(\omega_-^*, \omega_+) = \left[\frac{\partial \eta}{\partial \omega_+} \right]_{\omega_- = \omega_-^*} = \theta'_+(\omega_+).$$

Assim, (3.31) torna-se

$$\begin{cases} u(\omega_-, \omega_+) = \theta'_-(\omega_-) + \int_{\omega_+^*}^{\omega_+} (-\alpha u - \beta v) d\omega_+ \\ v(\omega_-, \omega_+) = \theta'_+(\omega_+) + \int_{\omega_-^*}^{\omega_-} (-\alpha u - \beta v) d\omega_- \\ \eta(\omega_-, \omega_+) = \theta_-(\omega_-) + \int_{\omega_+^*}^{\omega_+} v d\omega_+. \end{cases} \quad (3.33)$$

Qualquer solução do sistema (3.33) satisfaz (3.30) e a segunda equação em (3.29), observamos ainda que

$$\frac{\partial \eta}{\partial \omega_-} = \theta'_-(\omega_-) + \int_{\omega_+^*}^{\omega_+} \frac{\partial v}{\partial \omega_-} d\omega_+ = \theta'_-(\omega_-) + \int_{\omega_+^*}^{\omega_+} (-\alpha u - \beta v) d\omega_+ = u.$$

Conseqüentemente a primeira equação em (3.29) também é satisfeita. Segue ainda de (3.33) que η satisfaz

$$\begin{aligned} \eta(\omega_-, \omega_+^*) &= \theta_-(\omega_-) \\ \eta(\omega_-^*, \omega_+) &= \theta_-(\omega_-^*) + \int_{\omega_+^*}^{\omega_+} v d\omega_+ \\ &= \theta_-(\omega_-^*) + \int_{\omega_+^*}^{\omega_+} \theta'_+(\omega_+) d\omega_+ \\ &= \theta_-(\omega_-^*) + \theta_+(\omega_+) - \theta_+(\omega_+^*) \\ &= \theta_+(\omega_+), \end{aligned}$$

condições iniciais de (3.28)

Portanto, qualquer solução do sistema (3.33) é uma solução do problema (3.28). Segue que o sistema (3.33) é equivalente ao problema (3.28).

Encontraremos então uma solução de (3.33) por um método de aproximações sucessivas. Sejam $u_0(\omega_-, \omega_+^*) = \theta'_-(\omega_-)$, $v_0(\omega_-^*, \omega_+) = \theta'_+(\omega_+)$ e $\eta_0(\omega_-, \omega_+^*) = \theta_-(\omega_-)$, e escrevemos $\forall n \geq 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n = \theta'_-(\omega_-) + \int_{\omega_+^*}^{\omega_+} (-\alpha u_{n-1} - \beta v_{n-1}) d\omega_+ \\ v_n = \theta'_+(\omega_+) + \int_{\omega_-^*}^{\omega_-} (-\alpha u_{n-1} - \beta v_{n-1}) d\omega_- \\ \eta_n = \theta_-(\omega_-) + \int_{\omega_+^*}^{\omega_+} v_{n-1} d\omega_+. \end{array} \right. \quad (3.34)$$

Mostraremos que as seqüências u_n , v_n e η_n convergem. Para isso, assumimos que todas as funções θ_- , θ_+ , θ'_- , θ'_+ , α e β são limitadas no retângulo definido em (3.28). Assim temos

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} - u_n = - \int_{\omega_+^*}^{\omega_+} \alpha (u_n - u_{n-1}) + \beta (v_n - v_{n-1}) d\omega_+ \\ v_{n+1} - v_n = - \int_{\omega_-^*}^{\omega_-} \alpha (u_n - u_{n-1}) + \beta (v_n - v_{n-1}) d\omega_- \\ \eta_{n+1} - \eta_n = - \int_{\omega_+^*}^{\omega_+} (v_n - v_{n-1}) d\omega_+. \end{array} \right.$$

Mostraremos que

$$|u_n - u_{n-1}| \leq K^{n-1} A \frac{(\omega_- + \omega_+ - \omega_-^* - \omega_+^*)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$|v_n - v_{n-1}| \leq K^{n-1} A \frac{(\omega_- + \omega_+ - \omega_-^* - \omega_+^*)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$|\eta_n - \eta_{n-1}| \leq K^{n-1} A \frac{(\omega_- + \omega_+ - \omega_-^* - \omega_+^*)^{n-1}}{(n-1)!},$$

onde $K > |\alpha| + |\beta|$ e os A 's são números independentes de n . Como estamos em um

retângulo definido em (3.28), temos que se $n = 1$ então

$$|u_1 - u_0| \leq \int_{\omega_+^*}^b |\alpha\theta'_-(\omega_-)| d\omega_+ + \int_{\omega_+^*}^b |\beta\theta'_+(\omega_+)| d\omega_+ \leq A_1$$

$$|v_1 - v_0| \leq \int_{\omega_-^*}^a |\alpha\theta'_-(\omega_-)| d\omega_- + \int_{\omega_-^*}^a |\beta\theta'_+(\omega_+)| d\omega_- \leq A_2,$$

$$|\eta_1 - \eta_0| \leq \int_{\omega_+^*}^b |v_1 - v_0| d\omega_+ \leq A_2 (b - \omega_+^*) = A_3,$$

onde A_1 , A_2 e A_3 são constantes.

Supomos agora, que a desigualdade vale para n , mostraremos que ela é válida para $n + 1$, assim

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - u_n| &\leq \int_{\omega_+^*}^{\omega_+} |\alpha| |u_n - u_{n-1}| + |\beta| |v_n - v_{n-1}| d\omega_+ \\ &\leq \int_{\omega_+^*}^{\omega_+} (|\alpha| + |\beta|) K^{n-1} A \frac{(\omega_- + \omega_+ - \omega_-^* - \omega_+^*)^{n-1}}{(n-1)!} d\omega_+ \\ &\leq AK^n \int_{\omega_+^*}^{\omega_+} \frac{(\omega_- + \omega_+ - \omega_-^* - \omega_+^*)^{n-1}}{(n-1)!} d\omega_+ \\ &\leq \frac{AK^n}{n!} [(\omega_- + \omega_+ - \omega_-^* - \omega_+^*)^n - (\omega_- - \omega_-^*)^n] \\ &\leq AK^n \frac{(\omega_- + \omega_+ - \omega_-^* - \omega_+^*)^n}{n!}, \end{aligned}$$

as outras diferenças são estimadas de forma semelhante. Segue que as séries

$$u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n - u_{n-1})$$

$$v_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (v_n - v_{n-1})$$

$$\eta_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\eta_n - \eta_{n-1}),$$

são absolutamente e uniformemente convergente, pois seus termos são limitados pelos termos correspondente da série

$$A + A \sum_{n=1}^{+\infty} K^{n-1} \frac{(\omega_- + \omega_+ - \omega_-^* - \omega_+^*)^{n-1}}{(n-1)!},$$

que é a função $A + Ae^{K(\omega_- + \omega_+ - \omega_-^* - \omega_+^*)}$. Consequentemente, u_n , v_n e η_n tendem uniformemente para limites definidos no retângulo definido em (3.28). Tomando o limite na formula (3.34), vemos que as funções limites u , v e η satisfazem (3.33), assim nosso problema está resolvido. Podemos aplicar um argumento similar para os casos $a < \omega_-^*$, $b < \omega_+^*$. Para mostrarmos a unicidade, é suficiente mostrarmos que no caso onde $\theta_-(\omega_-) \equiv \theta_+(\omega_+) \equiv 0$, o sistema (3.33) não possui outra solução limitada além de $u = 0$, $v = 0$ e $\eta = 0$. Supomos que existe alguma solução que satisfaz as condições $|u| < A$, $|v| < A$ e $|\eta| < A$. Então as funções u , v e η satisfazem as desigualdades

$$\left\{ \begin{array}{l} |u| \leq K^{n-1} A \frac{(\omega_- + \omega_+ - \omega_-^* - \omega_+^*)^{n-1}}{(n-1)!} \\ |v| \leq K^{n-1} A \frac{(\omega_- + \omega_+ - \omega_-^* - \omega_+^*)^{n-1}}{(n-1)!} \\ |\eta| \leq K^{n-1} A \frac{(\omega_- + \omega_+ - \omega_-^* - \omega_+^*)^{n-1}}{(n-1)!}, \end{array} \right. \quad (3.35)$$

que são obtidas por aproximações sucessivas. Temos assim a unicidade da solução, pois as únicas funções que satisfazem (3.35), $\forall n \in \mathbb{N}$, são $u = v = \eta = 0$. ■

Referências Bibliográficas

- [B] BRESSAN, A.: **Hiperbolic Systems of Conservation Laws**, Oxford Universitypress, New York, 2000.
- [C-C-S] CHUEH, K. N.; CONLEY, C. C.; SMOLLER, J. A.: Positively Invariant Regions for Systems of Non-Linear Diffusion Equations, **Indiana Univ. J. Math**, Vol 26, 1977, pp. 372-411.
- [C-H] COURANT, R.; HILBERT, D.: **Methods of Mathematical Physics II: Partial Differential Equations**, Wiley and Sons, 1962.
- [D] DAFERMOS, C. M.: Polygonal Approximations of Solutions of the Initial Value Problem for a Conservation Law, **J. Math Anal. and Applic.**, Vol 38, 1972, pp. 33-41.
- [E] EVANS, L.C.: **Partial Differential Equations**, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.
- [F] FRID NETO, Hermano: **Compacidade Compensada Aplicada às Leis de Conservação**, IMPA, 19º Colóquio Brasileiro de Matemático.
- [Fr] FRIEDMAN, A.: **Partial Differential Equations of Parabolic Type**, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1970.
- [G-R] GODLEWSKI, E., RAVIART, P. A.: **Hiperbolic Systems of Conservation Laws**, n° 3/4, Ellipses, Paris, 1990.
- [H] HÖRMANDER, L. : **The Anaysis of Linear Partial Differential Operators** , Vol.1, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

- [Hf] HOPF, E.: On the Right Weak Solution of the Cauchy Problem for a Quasi-linear Equation of First Order, **Indiana Univ. J. Math.** and Mech., Vol 19, 1969, pp.483-487.
- [L] LIMA, E. L.: **Curso de Análise**, Vol. 2, IMPA, Rio de Janeiro, 2000.
- [O] OLEINIK, O. A.: Discontinuous Solutions of Non-Linear Differential Equations, **Usp. Mat. Nauk** **12**, 1957, 3-73.
- [R] RUDIN, W.: **Real and Complex Analysis**, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [Ru] RUBINO, B.: On the Vanishing Viscosity Approximation to the Cauchy Problem for 2×2 System of Conservation Laws, **Ann. Inst. Henri Poincaré**, Vol. 10, 1993, pp.627-656.
- [Sb] SOBOLEV, S. L.: **Partial Differential Equations of Mathematical Physics**, Dover Publications, New York, 1964.
- [Se] SERRE, D.: La compacité par compensation pour les systèmes hyperboliques non linéaires de deux équation a une dimension d'espace, **J. Math. Pures Appl.**, Vol 65, 1986, pp. 423-468.
- [Sm] SMOLLER, J.: **Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations**, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [W] WEBLER, Claudete M.: Existência Global de Soluções para Certos Sistemas Parabólicos não Lineares, **Dissertação de Mestrado**, UFSCar, São Carlos, 2005.