UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Uma generalização do teorema de Ljusternik-Schnirelmann

Eduardo Silva Palmeira

Orientador: Prof. Dr. Tomas Edson Barros

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

São Carlos - SP

Agosto - 2005

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

	Palmeira, Eduardo Silva.
P172gt	Uma generalização do teorema de Ljusternik-Schnirelmann / Eduardo Silva Palmeira. -- São Carlos : UFSCar, 2006.
	76 p.
	Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2005.
	1. Topologia algébrica. 2. Teorema de Ljusternik-Schnirelmann . 3. Gênus de um Zp-espaço. 4. Retrato absoluto. I. Título.
	CDD: 514.2 (20ª)

Resumo

O objetivo desse trabalho é apresentar uma versão generalizada do teorema clássico de Ljusternik-Schnirelmann devida a H. Steinlein [16], usando o conceito de *genus* (c.f. [20]) de um espaço de Hausdorff M com uma função $f : M \longrightarrow M$ que gera uma $\mathbb{Z}_p$-ação livre em M, bem como estimar o valor do *genus* de $L_{k,p}$, um espaço especial usado para majorar o *genus* de (M, f).

Abstract

The purpose of this work is to present a generalized version of the classic Ljusternik-Schnirelmann theorem given by H. Steinlein [16] by using the concept of genus (c.f. [20]) of a Hausdorff space M with a mapping $f : M \longrightarrow M$ which generates a free $\mathbb{Z}_p$-action over M and to estimate the value of the genus of $L_{k,p}$, a special space used to construct an upper bound for the genus of (M, f).

Sumário

Introdução

Sejam S^n a esfera n-dimensional e $A : S^n \longrightarrow S^n$ a aplicação antípoda, ou seja, $A(x) = -x$, para todo $x \in S^n$. O teorema clássico de Ljusternik-Schnirelmann, afirma que se $H_1, \ldots, H_k$ são subconjuntos fechados que cobrem S^n tais que $H_i \cap (-H_i) = \emptyset$ para $i = 1, \ldots, k$ então $k \geq n + 2$. Agora, se trocarmos S^n por um espaço de Hausdorff M e A por uma função $f : M \longrightarrow M$ que gera uma $\mathbb{Z}_p$-ação livre sobre M (f contínua, $f^p = id_M$ e $f(x) \neq x$, $\forall\ x \in M$), de forma que existam subconjuntos fechados $M_1, \ldots, M_k$ tais que $M = \cup_{i=1}^{k} M_i$ e $M_i \cap f(M_i) = \emptyset$ para todo $i = 1, \ldots, k$, como poderíamos substituir a estimativa do teorema de Ljusternik-Schnirelmann?

Nosso trabalho visa descrever uma resposta a essa questão, dada por H. Steinlein em [16]. No capítulo 2 é dada a demonstração do teorema de Steinlein, uma versão generalizada do teorema de Ljusternik-Schnirelmann baseada no conceito de genus segundo A. S. Švarc, isto é, dado um espaço de Hausdorff M, uma $\mathbb{Z}_p$-ação livre f e considerando o conjunto $C(M, f) = \{G \subset M\ :\ \text{existem fechados disjuntos } G_0, \ldots, G_{p-1} \subset M \text{ tais que } G = \cup_{i=0}^{p-1} G_i \text{ e para todo } i = 1, \ldots, p-1,\ f^i(G_0) = G_i\}$, define-se o genus de M com a $\mathbb{Z}_p$-ação livre f (notação: $g(M, f)$) como sendo o mínimo dos cardinais de $\mathcal{G} \subset C(M, f)$ tais que $\cup_{G \in \mathcal{G}} G = M$.

Em 1955, Krasnosel'skiĭ provou em [11] que o $g(S^n, f) = n + 1$ independentemente da $\mathbb{Z}_p$-ação livre $f : S^n \longrightarrow S^n$ e do primo p. Logo, podemos substituir a estimativa $k \geq n+2$ do teorema de Ljusternik-Schnirelmann por $k \geq g(M,f)+1$. Nessa linha de pensamento temos, para $p=2$, o seguinte resultado (c.f. [17] e [21])

Teorema: Sejam M um espaço de Hausdorff, $f : M \longrightarrow M$ uma $\mathbb{Z}_2$-ação livre e $M_1, M_2, \ldots, M_k \subset M$ subconjuntos fechados tais que $\cup_{i=1}^k M_i = M$ e $M_i \cap f(M_i) = \emptyset$ para $i = 1, \ldots, k$. Então $k \geq g(M,f)+1$.

Entretanto, a generalização dada em [16] por Steinlein, a qual tratamos no capítulo 2, contempla apenas a classe dos espaços normais. Steinlein mostra que dado um espaço normal M, uma função $f : M \longrightarrow M$ que gera uma $\mathbb{Z}_p$-ação livre e $M_1, M_2, \ldots, M_k \subset M$ subconjuntos fechados tais que $\cup_{i=1}^k M_i = M$ e $M_i \cap f(M_i) = \emptyset$ para $i = 1, \ldots, k$, então $g(M,f) \leq g(L_{k,p}, \varphi_{k,p})$, onde $L_{k,p}$ é um espaço métrico, especialmente construido para esse propósito e $\varphi_{k,p}$ é uma $\mathbb{Z}_p$-ação livre sobre ele.

No capítulo 3, buscamos calcular o valor de $g(L_{k,p}, \varphi_{k,p})$, visando estimar o genus de M com a ação f em termos de k e p. Contudo, apenas para $k=3$ ou $p=2$ temos o valor exato de $g(L_{k,p}, \varphi_{k,p})$. Nos demais casos, apenas uma estimativa um tanto grosseira será dada. Um melhoramento da estimativa dada no teorema 3.0.12 pode ser encontrada em [18] e [2], para $p=7$.

Começamos o trabalho definindo alguns conceitos e listando alguns resultados no capítulo 1, os quais usaremos nos capítulos seguintes.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo daremos algumas definições e listaremos alguns resultados, os quais serão usados na confecção do corpo do trabalho. Começamos definindo simplexos e complexos simpliciais Euclidianos. Em seguida, falaremos um pouco a respeito da ação de um grupo G sobre um espaço topológico, retrato absoluto e de extensão de homotopia. Em todo o capítulo, o intervalo fechado $[0,1]$ será denotado por I.

Para maiores detalhes a respeito dos tópicos abordados aqui consulte as referências [4], [6], [8], [9], [10], [13] e [14].

1.0.1 n-simplexos e complexos simpliciais em $\mathbb{R}^n$

Seja $\mathbb{R}^n$ o espaço Euclidiano n-dimensional. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, definamos $[x,y] := \{tx + (1-t)y \in \mathbb{R}^n \ : \ 0 \leq t \leq 1\}$ como sendo o segmento de reta unindo os pontos x e y. Dizemos que um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é **convexo** se para quaisquer $x, y \in A$, tivermos $[x,y] \subset A$.

Definição 1.0.1 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Definimos a* ***envoltória convexa*** *de A (notação: $co\{A\}$) como sendo a interseção da família de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que são convexos e contém A.*

Em outras palavras $co\{A\}$ é o menor subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ que contém o conjunto A no sentido de que:

1. $co\{A\} \subset \mathbb{R}^n$ é convexo

2. $A \subset co\{A\}$

3. Se $K \subset \mathbb{R}^n$ é convexo e $A \subset K$ então $co\{A\} \subset K$

Exemplo 1.0.1 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ e definamos $P(A) := \cup_{x,y \in A}[x, y]$. Suponhamos que para algum $m \geq 0$ tenhamos $P^m(A)$ convexo (estamos considerando $P^0(A) = A$ e $P^m(A) = P(P^{m-1}(A))$, se $m > 0$). Então temos $P^m(A) = co\{A\}$.*

De fato, uma vez que $P^m(A)$ é convexo e $A \subset P^m(A)$, conclui-se de 3 acima que $co\{A\} \subset P^m(A)$. Basta então provarmos que, se $K \subset \mathbb{R}^n$ é convexo e $A \subset K$ então o conjunto $P^m(A) \subset K$.

Mas se $A \subset K$, então $P(A) \subset P(K) =$ [1]K. Repetindo tal procedimento $m-1$ vezes chegamos a $P^m(A) \subset K$. Assim, como $co\{A\}$ é convexo e contém A, segue que $P^m(A) \subset co\{A\}$, donde segue a igualdade desejada.

Definição 1.0.2 *Um subconjunto $\{a_0, \ldots, a_n\}$ de pontos do $\mathbb{R}^n$ é dito ser **independente** se o conjunto de vetores $\{a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_0\}$ for linearmente independente.*

Lema 1.0.1 *Se $A = \{a_0, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto independente, então*

$$co\{A\} = \{x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i \ ; \ 0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad e \ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\}$$

Além disso, se $\sum_{i=0}^n \lambda_i a_i = \sum_{i=0}^n \beta_i a_i$, com $0 \leq \lambda_i, \beta_i \leq 1$ e $\sum_{i=0}^n \lambda_i = \sum_{i=0}^n \beta_i = 1$, segue que $\lambda_i = \beta_i$ para todo $i = 0, 1, \ldots, n$ (veja [15]).

[1] a igualdade é devido ao fato de K ser convexo

Definimos um **n-simplexo** σ^n em $\mathbb{R}^n$ como sendo a envoltória convexa de $n+1$ pontos $\{a_0, \ldots, a_n\}$ independentes de $\mathbb{R}^n$. Pelo lema acima, um elemento $x \in \sigma^n$ é da forma $x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i$ com $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$ e os λ_i´s, os quais chamamos de **coordenadas baricêntricas** de x, são unicamente determinados. Os pontos $a_0, \ldots, a_n$ são chamados de **vértices** de σ^n e qualquer q-simplexo σ^q contido em σ^n $(q \leq n)$ é dito ser uma **q-face de** σ^n. Dizemos ainda que o número n é a **dimensão de** σ^n. Além disso, o ponto $[\sigma^n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1} a_i \in \sigma^n$ é dito ser o **baricentro** de σ^n.

Exemplo 1.0.2 *Seja $B = \{e_1, \ldots, e_{p+1}\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^{p+1}$. Desde que B é uma coleção independente de pontos em $\mathbb{R}^{p+1}$, então B determina um p-simplexo especial Δ_p, o qual é chamado um **p-simplexo padrão**. As coordenadas baricêntricas desse simplexo coincidem com as cartesianas.*

Definição 1.0.3 *Um **complexo simplicial** K em $\mathbb{R}^n$ (ou um complexo simplicial Euclidiano) é uma coleção de simplexos em $\mathbb{R}^n$ tais que:*

1. *Toda face de um simplexo em K, ainda é um elemento de K*
2. *Dados $\sigma, \sigma' \in K$, então $\sigma \cap \sigma' = \emptyset$ ou é uma face de ambos*

Agora, se L é um subconjunto de K o qual é ele mesmo um complexo simplicial, então dizemos que L é um **subcomplexo** de K. Ao subcomplexo de K formado por todos os p-simplexos, atribuímos o nome de **p-esqueleto** de K, e denotamos por $K^{(p)}$. Ainda, os pontos da coleção $K^{(0)}$ são chamados de vértices de K.

Exemplo 1.0.3 *Qualquer p-simplexo pode ser considerado um complexo simplicial cujos elementos são todos os simplexos que o compõem. Para qualquer $k \leq p$, temos que o conjunto formado por todas as i-faces de Δ_p com $0 \leq i \leq k$, é um subcomplexo de Δ_p.*

Observemos que, dado um complexo simplicial Euclidiano $K \subset \mathbb{R}^n$, cada simplexo $\sigma \in K$ pode ser encarado como um subespaço de $\mathbb{R}^n$ com a topologia induzida. Logo, faz sentido definir o espaço $|K|$ como sendo a união de todos os simplexos de K, munido da **topologia fraca**, isto é, um subconjunto A de $|K|$ é aberto se, e somente se, $A \cap \sigma$ é aberto em σ, para cada $\sigma \in K$. O espaço $|K|$ assim definido é um espaço topológico, o qual denominamos **poliedro** de K.

Observação 1.0.1 *Seja agora V um conjunto não vazio. Alternativamente, definimos um **complexo simplicial (abstrato)** K como sendo uma família não vazia de subconjuntos finitos de V tais que:*

1. *Se $u \in V$, então $\{u\} \in K$.*

2. *Se $s \in K$ e $s' \subset s$, então $s' \in K$.*

1.0.2 G-ação livre sobre um conjunto S

Definição 1.0.4 *Sejam G um grupo e S um conjunto não vazio. Uma **ação** (à esquerda) de G sobre o conjunto S é uma função $G \times S \longrightarrow S$ (usualmente denotada por $(g, x) \longmapsto gx$) tal que, para todo $x \in S$ e $g_1, g_2 \in G$, tem-se:*

1. *$ex = x$, sendo **e** o elemento neutro de G,*

2. *$(g_1.g_2)x = g_1(g_2x)$.*

Exemplo 1.0.4 *Seja S_n o grupo de todas as permutações do conjunto $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Então a função $S_n \times I_n \longrightarrow I_n$ dada por $(\sigma, x) \longmapsto \sigma(x)$ é uma ação de S_n sobre I_n.*

Exemplo 1.0.5 *Sendo H um subgrupo do grupo G, uma ação do grupo H sobre o conjunto G é dada por $(h, x) \longmapsto h.x$, para $h \in H$ e $x \in G$.*

Suponhamos que G seja um grupo atuando no conjunto S. Consideremos a seguinte relação sobre S

$$x \sim y \iff gx = y \text{ para algum } g \in G$$

Segue direto das propriedades da definição de ação que essa relação é reflexiva e transitiva. Além disso, se $x \sim y$, então existe $g \in G$ tal que $gx = y \Rightarrow g^{-1}gx = g^{-1}y \Rightarrow x = g^{-1}y \Rightarrow y \sim x$. Portanto, a relação $\sim$ é de equivalência sobre S. À classe de equivalência de um elemento $x \in S$ damos o nome de **órbita** de x, a qual será donotada por $\overline{x}$. Ainda, o subgrupo $G_x = \{g \in G \ ; \ gx = x\}$ de G é chamado **subgrupo de isotropia** de x.

Definição 1.0.5 *Seja G um grupo atuando sobre o conjunto S. Dizemos que essa ação é uma* ***G-ação livre****, se para todo $x \in S$, $G_x = \{e\}$ sendo "e" o elemento neutro de G.*

Observamos que a ação do exemplo 1.0.4 não é livre, uma vez que podemos ter $\sigma(x) = x$ sem que $\sigma = 1_{S_n}$. Já no caso do exemplo 1.0.5, como o único elemento que satisfaz a igualdade $hx = x$ é o elemento neutro de H, segue que a ação de H sobre G é livre.

Sejam $\mathbb{Z}_p$ o grupo dos inteiros módulo p (p primo), X um espaço topológico e $f : X \longrightarrow X$ uma função contínua satisfazendo

- $f^p = id_X \qquad (f^p = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{p})$
- $f(x) \neq x$, para todo $x \in X$

A função $\mathbb{Z}_p \times X \xrightarrow{\varphi} X$ dada por $(\overline{k}, x) \longmapsto f^k(x)$ é uma ação livre de $\mathbb{Z}_p$ sobre X, e dizemos que f gera uma $\mathbb{Z}_p$**-ação livre** sobre X.

Com efeito, verifica-se sem grandes dificuldades que a função φ definida acima é uma ação de $\mathbb{Z}_p$ sobre X. Mostremos então que essa ação é livre. Para isso, consideremos os seguintes resultados (c.f. [10]):

Lema 1.0.2 (Lagrange) *Seja G um grupo. Então*[2] $|G| = [G : G_x].|G_x|$ *para todo $x \in G$, onde $[G : G_x]$ é o cardinal do quociente G/G_x.*

Lema 1.0.3 *Se um grupo G atua sobre um conjunto S, então o cardinal da órbita de $x \in S$ é o índice $[G : G_x]$.*

Logo, os lemas acima nos permitem concluir que $p = |\overline{x}||(\mathbb{Z}_p)_x|$. Mas p é primo e portanto devemos ter $|\overline{x}| = 1$ ou p. Como a órbita de $x \in X$ é o conjunto $\{f^k(x)\ ;\ \overline{k} \in \mathbb{Z}_p\}$ e f não fixa pontos, então $|\overline{x}| \geq 2$ e daí temos que $|\overline{x}| = p$. Então, $|(\mathbb{Z}_p)_x| = 1$ para todo $x \in X$, isto é, $(\mathbb{Z}_p)_x = \{\overline{0}\}$ e portanto a ação é livre.

Exemplo 1.0.6 *Sejam $X = S^n$ a esfera n-dimensional e $A : X \longrightarrow X$ a aplicação tal que $x \longmapsto -x$(aplicação antípoda). É facil ver que $A^2 = id_X$ e que $A(x) \neq x$ para todo $x \in X$. A aplicação A gera uma $\mathbb{Z}_2$-ação livre sobre S^n.*

Vale ressaltar que quando n é par, $\mathbb{Z}_2$ é o único grupo não trivial que atua livremente sobre S^n(c.f. [8], p. 135)

Exemplo 1.0.7 *Consideremos $S^1 \subset \mathbb{C}$. A função $f : S^1 \longrightarrow S^1$ dada por $f(z) = e^{\frac{p-1}{p}\pi i}z$ gera uma $\mathbb{Z}_p$-ação livre em S^1, com $p \geq 3$. De fato, observemos que se $e^{n\pi i} = 1$ então $n\pi = 2k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Logo se existisse $z \in S^1$ tal que $f(z) = z$, então $e^{\frac{p-1}{p}\pi i}z = z \Rightarrow 1 - \frac{1}{p} = 2k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, o que é absurdo, pois p é primo. Além disso, $f^p(z) = e^{(\frac{p-1}{p}\pi i)p}z = e^{(p-1)\pi i}z = z = id_X(z)$.*

[2] A notação $|G|$ significa cardinalidade de G

1.0.3 Retrato absoluto

Sejam X e Y dois espaços e $A \subset X$ fechado. Se $f : A \longrightarrow Y$ é contínua, dizemos que uma função contínua $F : X \longrightarrow Y$ é uma **extensão** de f, se $F|_A = f$, sendo $F|_A$ a restrição da função F ao subconjunto A de X.

Definição 1.0.6 *Dados arbitrariamente um espaço X e um subconjunto fechado $A \subset X$ dizemos que o espaço Y é um* ***retrato absoluto*** *de X (abreviadamente AR), se toda função $f : A \longrightarrow Y$ contínua pode ser estendida a uma função contínua $F : X \longrightarrow Y$. Se X é um espaço normal, dizemos que Y é* ***AR(normal)****.*

Exemplo 1.0.8 *Pelo teorema de Tietze ([14]), qualquer intervalo fechado e limitado de $\mathbb{R}$ e o próprio $\mathbb{R}$ são espaços AR(normais).*

Exemplo 1.0.9 *O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, o cubo n-dimensional I^n e o cubo de Hilbert $I^\infty = \{(x_n) \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}_i \ : \ \mathbb{R}_i = \mathbb{R}, \ \forall\ i \in \mathbb{N}$ e $|x_n| \leq \frac{1}{n}\}$ são AR(normais). Isso é consequência imediata do seguinte fato.*

Lema 1.0.4 *Seja $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma família de espaços. Então $\prod_\alpha Y_\alpha$ é AR(normal) se, e somente se, cada Y_α é AR(normal).*

O resultado a seguir será fortemente usado no capítulo 2, para demonstrar o teorema 2.0.8. Antes, considere o seguinte resultado, cuja demonstração se encontra em [6].

Teorema 1.0.1 *Sejam X um espaço métrico, A subespaço fechado de X, L um espaço vetorial localmente convexo e $f : A \longrightarrow L$ contínua. Então existe uma extensão $F : X \longrightarrow L$. Além disso, $F(X)$ está contido na envoltória convexa de $f(A)$, ou seja, $F(X) \subset co\{f(A)\}$.*

Lembramos que um espaço vetorial L é dito ser **localmente convexo**, se para cada $a \in L$ e cada vizinhança U_a de a, existir uma vizinhança convexa V_a tal que $a \in V_a \subset U_a$.

Corolário 1.0.1 *Todo subconjunto convexo C de um espaço vetorial localmente convexo é AR.*

Teorema 1.0.2 *Todo subconjunto fechado e convexo de um espaço vetorial normado de dimensão finita é AR(normal).*

Demonstração:

Seja V um espaço normado de dimensão finita e C um subconjunto fechado convexo de V. Queremos mostrar que, se X é um espaço normal e A é um subconjunto fechado de X, então qualquer função contínua $f : A \longrightarrow C$ possui uma extensão contínua $F : X \longrightarrow C$

Seja então $f : A \longrightarrow C$ uma função contínua. Note que, como V é espaço normado de dimensão finita, então V é homeomorfo a algum $\mathbb{R}^n$. Ora, pelo lema 1.0.4, sabemos que $\mathbb{R}^n$ é AR(normal). Assim, se $i : C \longrightarrow V$ é a inclusão e h é o homeomorfismo entre V e $\mathbb{R}^n$, então a aplicação contínua $g = h \circ i \circ f$

$$A \xrightarrow{f} C \xrightarrow{i} V \xrightarrow{h} \mathbb{R}^n$$

pode ser estendida a uma função $G : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Logo, temos a função contínua $H = h^{-1} \circ G : X \longrightarrow V$. Basta então mostrar que $id_C : C \longrightarrow C$ pode ser estendida a uma aplicação $r : V \longrightarrow C$ e daí a função $F = r \circ H$ será a desejada extensão de f com relação a C.

Mas, V é métrico[3] e localmente convexo pois V é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, e além disso, pelo corolário 1.0.1, C é AR . Portanto, como C é subconjunto

[3]Como V é normado então $d(x, y) = |x - y|$ define uma métrica sobre V

fechado de V segue que existe uma extensão $r : V \longrightarrow C$ de id_C, como queríamos.

1.0.4 Extensão de homotopia

Sejam $f, g : X \longrightarrow Y$ funções contínuas. Dizemos que f é **homotópica** a função g (notação: $f \simeq g$), se existir uma aplicação contínua $F : X \times I \longrightarrow Y$ tal que

$$F(x, 0) = f(x) \quad \text{e} \quad F(x, 1) = g(x)$$

para todo $x \in X$. F é dita ser uma **homotopia** entre f e g.

Lema 1.0.5 *A relação $\simeq$ é de equivalência*

Dada uma f, denotamos por $[f]$ a classe de homotopia de f, isto é, $[f]$ é o conjunto de todas as funções g tais que $f \simeq g$.

Exemplo 1.0.10 *Sejam $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde X é um espaço qualquer. Pode-se verificar sem maiores dificuldades que a função $F : X \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $F(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x)$ é uma homotopia entre f e g. A função F é comumente chamada de **homotopia linear**, pois ela "move"o ponto $f(x)$ até o ponto $g(x)$ através do segmento de reta ligando os dois pontos.*

Observação 1.0.2 *Se A é um subespaço de um espaço X, não é simples responder quando uma dada função $f : A \longrightarrow Y$ possui uma extensão. Na grande maioria dos casos, a resposta para esse tipo de questionamento depende da classe de homotopia de f.*

Definição 1.0.7 *Seja $f : X \times \{0\} \longrightarrow Y$ e A subespaço de X. Uma homotopia $H : A \times I \longrightarrow Y$ é dita ser uma **homotopia parcial** de f, se $f(x, 0) = H(x, 0)$ para todo $x \in A$.*

Dado um espaço topológico X uma **triangulação** $T = \{t, K\}$ de X consiste de um complexo simplicial K e um homeomorfismo $t : |K| \longrightarrow X$. O espaço X é dito ser **triangulável** se admite uma triangulação $T = \{t, K\}$. Dizemos que X é **finitamente triangulável**, se existe uma triangulação $T = \{t, K\}$ de X tal que K é um complexo simplicial finito.

Exemplo 1.0.11 *Sejam S^1 a esfera 1-dimensional e Δ_2 o 2-simplexo padrão. Se $K = \partial\Delta_2$ é a união das faces de Δ_2 com dimensão menor que 2, então existe um homeomorfismo $f : |K| \longrightarrow S^1$, logo $T = \{f, K\}$ é uma triangulação de S^1. Em geral, S^n é triangulável.*

Definição 1.0.8 *Um par de espaços topológicos*[4] *(X, A) possui a* ***propriedade de extensão de homotopia*** *(notação: PEH) com relação a um espaço Y se, para toda aplicação $f : X \times \{0\} \longrightarrow Y$ e toda homotopia parcial $G : A \times I \longrightarrow Y$, existir uma função $F : X \times I \longrightarrow Y$ fazendo o diagrama abaixo comutar*

$$\begin{tikzcd}
X \times I \arrow[r, "F"] & Y \\
(X \times \{0\}) \cup (A \times I) \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "f \cup G"'] &
\end{tikzcd}$$

onde i é a inclusão e a função $f \cup G : (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \longrightarrow Y$ é tal que

$$(f \cup G)(x, t) = \begin{cases} f(x, 0), & \text{se } x \in X \\ G(x, t), & \text{se } x \in A \end{cases}$$

Notamos que $f \cup G$ está bem definida desde que $G(x, 0) = f(x, 0)$ para todo $x \in A$ e é contínua pelo lema da colagem.

Teorema 1.0.3 *Seja Y um espaço (finitamente) triangulável. Então todo subconjunto fechado de qualquer espaço binormal*[5] *X tem a PEH em X com relação a Y.*

[4] X espaço topológico e A subconjunto fechado de X

[5] Um espaço X é binormal, se $X \times I$ é normal

A prova desse teorema pode ser encontrada em [9]. No capítulo 3, usaremos esse resultado fortemente na demonstração do teorema 3.0.11.

Capítulo 2

Uma generalização do teorema de cobertura de Ljusternik-Schnirelmann

Considere o teorema clássico de Ljusternik-Schnirelmann-Borsuk:

Teorema 2.0.4 *Sejam $H_1, H_2, \ldots, H_k$ subconjuntos fechados da esfera S^n tais que $\cup_{i=1}^{k} H_i = S^n$ e $H_i \cap (-H_i) = \emptyset$ para $i = 1, \ldots, k$. Então $k \geq n+2$*

Agora, se ao invés da S^n tivermos um espaço de Hausdorff M qualquer juntamente com uma função $f : M \longrightarrow M$ que gera uma $\mathbb{Z}_p$-ação livre sobre M tal que os fechados $H_1, H_2, \ldots, H_k$ cobrem M e satisfazem $H_i \cap f(H_i) = \emptyset$, para $i = 1, \ldots, k$ e p primo, como poderíamos substituir a estimativa $k \geq n+2$?

Nesse capítulo nos dedicamos a responder essa questão. Daremos uma versão generalizada do teorema 2.0.4, segundo Steinlein [16], no contexto do *genus* segundo A. S. Švarc

Definição 2.0.9 *Sejam M um espaço de Hausdorff, p um número primo e $f : M \longrightarrow M$ uma função que gera uma $\mathbb{Z}_p$-ação livre em M(isto é, f é* *contínua, $f^p = id_M$ e $f(x) \neq x$, $\forall x \in M$). Seja ainda*

$C(M, f) = \{G \subset M$: *existem conjuntos fechados disjuntos* $G_0, G_1, \ldots, G_{p-1} \subset M$ *com* $\cup_{i=0}^{p-1} G_i = G$ *e* $f^i(G_0) = G_i$ *para* $i = 1, \ldots, p-1\}$

Então, definimos o genus $g(M, f)$ *por*

$$g(M,f) = min\{card\ \mathcal{G} \quad ; \quad \mathcal{G} \subset C(M,f), \quad \cup_{G \in \mathcal{G}} G = M\}$$

Observação 2.0.3 *Por simplicidade, a partir daqui quando dissermos que f é uma $\mathbb{Z}_p$-ação livre, estaremos nos referindo a uma função que gera uma $\mathbb{Z}_p$-ação livre sobre M.*

Nessa linha de pensamento, temos para $p = 2$ o seguinte resultado (veja [17], [21]):

Teorema 2.0.5 *Sejam M um espaço de Hausdorff, $f : M \longrightarrow M$ uma $\mathbb{Z}_2$-ação livre e $M_1, M_2, \ldots, M_k \subset M$ subconjuntos fechados tais que $\cup_{i=1}^k M_i = M$ e $M_i \cap f(M_i) = \emptyset$ para $i = 1, \ldots, k$. Então $k \geq g(M, f) + 1$*

Demonstração:

Como $M_k \cap f(M_k) = \emptyset$ e $\cup_{i=1}^k f(M_i) = f(\cup_{i=1}^k M_i) = f(M) = M$, segue que $M_k \subset \cup_{i=1}^k f(M_i)$. Assim,

$$M = \cup_{i=1}^k M_i = \cup_{i=1}^{k-1} M_i \cup M_k = \cup_{i=1}^{k-1} (M_i \cup f(M_i))$$

Sejam $G^i = M_i \cup f(M_i)$ para $i = 1, \ldots, k-1$, e chamemos $G_0^i = M_i$ e $G_1^i = f(M_i)$. Logo, $G^i = G_0^i \cup G_1^i$, $f(G_0^i) = G_1^i$ e $G_0^i \cap G_1^i = \emptyset$ para todo $i = 1, \ldots, k-1$. Portanto, cada $G^i \in C(M, f)$ e ainda $M = \cup_{i=1}^{k-1} G^i$. Daí $g(M, f) \leq k - 1$. $\square$

Entretanto, a questão análoga para uma $\mathbb{Z}_p$-ação livre com $p \geq 3$ primo, parece ser muito mais complicada. Assim, descreveremos aqui uma generalização do teorema 2.0.4 para espaços normais.

Vale ressaltar que o cálculo do *genus*, em geral, não é tarefa simples, apesar de existirem algumas estimativas em termos da dimensão, conexidade ou (co)-homologia do espaço. A exemplo disso, Krasnosel'skiĭ mostra em [11] o seguinte

Teorema 2.0.6 *Seja M um espaço de Hausdorff. Independente da função f que gera uma $\mathbb{Z}_p$-ação livre sobre M e do primo p, temos sempre $g(S^n, f) = n + 1$.*

Um resumo da demonstração desse teorema pode ser encontrada em [2].

Mostraremos, no teorema 2.0.8, que $g(M, f) \leq g(L_{k,p}, \varphi_{k,p})$ sendo $L_{k,p}$ um espaço normal especial e $\varphi_{k,p}$ uma $\mathbb{Z}_p$-ação livre sobre $L_{k,p}$.

Consideremos $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ e $\mathbb{R}^\infty := \{x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ x_n = x(n) = 0$ para quase todo $n \in \mathbb{N}\}$ dotado da topologia Euclidiana, isto é, a topologia induzida da métrica $d(x, y) = (\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$. Assim, sendo $e_i \in \mathbb{R}^\infty$ tal que

$$e_i(n) := \delta_{in} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = n \\ 0 & \text{se} \quad i \neq n \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, $I \subset \{1, \ldots, q\}$ e $i \in \{1, \ldots, q\}$, definimos

$$\begin{aligned} \Delta_{q-1} &:= co\{e_1, \ldots, e_q\} \\ \Delta_{q-1}^I &:= co\{e_j \mid j \in I\} \\ \Delta_{q-1:i} &:= \Delta_{q-1}^{\{1,\ldots,q\}\setminus\{i\}} = co\{e_j \mid j \in \{1, \ldots, q\} \setminus \{i\}\} \\ \partial\Delta_{q-1} &:= \cup_{i=1}^{q} \Delta_{q-1:i} \end{aligned}$$

Assim, Δ_{q-1} é o simplexo $(q-1)$-dimensional gerado por $e_1, \ldots, e_q$, Δ_{q-1}^I e $\Delta_{q-1:i}$ são faces e $\partial\Delta_{q-1}$ é o bordo de Δ_{q-1}. Além disso, usaremos $[\Delta_{q-1}^I]$ para denotar o baricentro de Δ_{q-1}^I.

Demonstraremos agora um teorema que é de fundamental importância na prova do resultado principal.

Teorema 2.0.7 *Sejam M um espaço normal, $k \in \mathbb{N}$, p um número primo, $f : M \longrightarrow M$ uma $\mathbb{Z}_p$-ação livre e $M_1, M_2, \ldots, M_k \subset M$ subconjuntos fechados tais que $\cup_{i=1}^{k} M_i = M$ e $M_i \cap f(M_i) = \emptyset$ para $i = 1, \ldots, k$. Então existe uma função contínua $h : M \longrightarrow \partial\Delta_{k-1}$ tal que $h(M_i) \subset \Delta_{k-1:i}$ e*

$$h(f(h^{-1}(\Delta_{k-1:i}))) \subset \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} co\{[\Delta_{k-1}^{K}] | \{i\} \subset K \subset \{1, \ldots, k\} \backslash \{j\}\}$$

Em particular, $h(f(h^{-1}(\Delta_{k-1:i}))) \cap \Delta_{k-1:i} = \emptyset$ para $i = 1, \ldots, k$.

Antes de demonstramos esse teorema, consideremos os seguintes lemas:

Lema 2.0.6 *Nas hipóteses do teorema acima, para cada $i = 1, \ldots, k$, existe aberto $N_i \subset M$ tal que $M_i \subset N_i$ e $N_i \cap f(N_i) = \emptyset$.*

Demonstração:

Notamos que f é homeomorfismo (f é contínua cuja inversa é f^{p-1}), e como cada M_i é fechado, segue que $f(M_i)$ é fechado em M. Daí, M_i e $f(M_i)$ são subconjuntos fechados do espaço normal M tais que $M_i \cap f(M_i) = \emptyset$, logo existem abertos A e B de M os quais são disjuntos e $A \supset M_i$ e $B \supset f(M_i)$.

Agora, como B é aberto e f é contínua, então $f^{-1}(B)$ é aberto em M. Segue então que $N_i = f^{-1}(B) \cap A$ é aberto.

Afirmação 2.0.1 *N_i é tal que $M_i \subset N_i$ e $N_i \cap f(N_i) = \emptyset$ para $i = 1, \ldots, k$.*

De fato, como $f(M_i) \subset B$ então $M_i \subset f^{-1}(f(M_i)) \subset f^{-1}(B)$. Ainda, $M_i \subset A$, o que nos permite concluir que $M_i \subset f^{-1}(B) \cap A = N_i$, como queríamos.

Ainda,

$$(f^{-1}(B) \cap A) \cap (B \cap f(A)) = f^{-1}(B) \cap (A \cap B) \cap f(A) = \emptyset$$

Portanto, $N_i \cap f(N_i) = \emptyset$. $\square$

Consideremos, nas notações acima, para $I, J \subset \{1, \ldots, k\}$, o seguinte conjunto:

$$W_{I,J} := \bigcap_{i \in \{1,\ldots,k\} \setminus I} M_i \setminus \bigcup_{j \in J} N_j \tag{2.1}$$

Observemos que, se $J \subset I$ e $I = \emptyset$ então $J = \emptyset$ e $W_{I,J} := \bigcap_{i \in \{1,\ldots,k\}} M_i = \emptyset$. Com efeito, como $\bigcap_{i \in \{1,\ldots,k\}} M_i \subset M_j$ para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ temos que $f(\bigcap_{i \in \{1,\ldots,k\}} M_i) \subset f(M_j)$ e consequentemente, $f(\bigcap_{i \in \{1,\ldots,k\}} M_i) \cap M_j \subset f(M_j) \cap M_j = \emptyset$ para cada $j \in \{1, \ldots, k\} \Longrightarrow \bigcap_{i \in \{1,\ldots,k\}} M_i = \emptyset$.

Seja $n \in \{1, 2, \ldots, k-2\}$. Denotando por *card* I a cardinalidade do conjunto I, definimos

$$M^{(n)} := \bigcup_{\substack{I \subset \{1,\ldots,k\} \\ card\ I \leq n}} \cap_{i \in \{1,\ldots,k\} \setminus I} M_i \tag{2.2}$$

Lema 2.0.7 *Segundo as mesmas notações e definições dadas acima, valem as seguintes afirmações:*

1. $M^{(n+1)} = \bigcup_{\substack{I \subset \{1,\ldots,k\} \\ card\ I = n+1}} (M^{(n)} \cup \cap_{i \in \{1,\ldots,k\} \setminus I} M_i)$.

2. $[(M^{(n)} \cup \cap_{i \in \{1,\ldots,k\} \setminus I_1} M_i) \cap (M^{(n)} \cup \cap_{i \in \{1,\ldots,k\} \setminus I_2} M_i)] \subset M^{(n)}$ *para* $I_1, I_2 \subset \{1, \ldots, k\}$ *com card* $I_1 = card\ I_2 = n+1$ *e* $I_1 \neq I_2$.

Demonstração:

1. Pelo que definimos em (2.2) temos:

$$M^{(n+1)} := \bigcup_{\substack{I \subset \{1,\ldots,k\} \\ card\ I \leq n+1}} \cap_{i \in \{1,\ldots,k\} \setminus I} M_i$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
M^{(n+1)} &= \Big(\bigcup_{\substack{I\subset\{1,\ldots,k\}\\ card\ \ I\leq n}} \cap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I} M_i\Big) \cup \Big(\bigcup_{\substack{I\subset\{1,\ldots,k\}\\ card\ \ I=n+1}} \cap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I} M_i\Big)\\
&= M^{(n)} \cup \Big(\bigcup_{\substack{I\subset\{1,\ldots,k\}\\ card\ \ I=n+1}} \cap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I} M_i\Big)\\
&= \bigcup_{\substack{I\subset\{1,\ldots,k\}\\ card\ \ I=n+1}} (M^{(n)} \cup \cap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I} M_i)
\end{aligned}
$$

2. Primeiramente, observemos que:

$$
(\cap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I_1} M_i) \cap (\cap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I_2} M_i) = \cap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I_1\cap I_2} M_i \tag{2.3}
$$

pois

$$
\begin{aligned}
(\cap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I_1} M_i) \cap (\cap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I_2} M_i) &= \cap_{i\in(\{1,\ldots,k\}\setminus I_1)\cup(\{1,\ldots,k\}\setminus I_2)} M_i\\
&= \cap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I_1\cap I_2} M_i
\end{aligned}
$$

Ainda, notemos que $card\ (I_1 \cap I_2) \leq n$, desde que $card\ I_1 = card\ I_2 = n+1$ e $I_1 \neq I_2$. Logo, temos que $\cap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I_1\cap I_2} M_i \subset M^{(n)}$.

Portanto, segue que:

$(M^{(n)} \cup \cap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I_1} M_i) \cap (M^{(n)} \cup \cap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I_2} M_i)=$

$= [(M^{(n)} \cup \cap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I_1} M_i) \cap M^{(n)}] \cup [(M^{(n)} \cup \cap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I_1} M_i)\cap$

$\cap(\cap_{i\in\{1,\ldots,k\})\}\setminus I_2} M_i)]$

$= M^{(n)} \cup [M^{(n)} \cap (\cap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I_1} M_i)] \cup [M^{(n)} \cap (\cap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I_2} M_i)]\cup$

$\cup[(\cap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I_1} M_i) \cap (\cap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I_2} M_i)]$

$\overset{(2.3)}{\subset} M^{(n)} \cup (M^{(n)} \cap \cap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I_1} M_i) \cup (M^{(n)} \cap \cap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I_2} M_i) \subseteq M^{(n)}.$

$\square$

Dados $I_0 \subset \{1, \ldots, k\}$ tal que $card\ I_0 = n+1$ e $m \in \{1, \ldots, n+1\}$, definimos

$$M_{I_0}^{(m)} := M^{(n)} \cup \bigcup_{\substack{J \subset I_0 \\ card\ J \geq m}} W_{I_0,J} \tag{2.4}$$

Lema 2.0.8 *Valem as seguintes propriedades:*

1. $M_{I_0}^{(m-1)} = \bigcup_{\substack{J \subset I_0 \\ card\ J = m-1}} (M_{I_0}^{(m)} \cup W_{I_0,J})$.
2. $[(M_{I_0}^{(m)} \cup W_{I_0,J_1}) \cap (M_{I_0}^{(m)} \cup W_{I_0,J_2})] \subset M_{I_0}^{(m)}$ *para* $J_1, J_2 \subset I_0$ *tais que* $card\ J_1 = card\ J_2 = m-1$ *e* $J_1 \neq J_2$.
3. *Se* $J_0 \subset I_0$ *então* $W_{I_0,J_0} \cap M_{I_0}^{(m)} = \bigcup_{\substack{J_0 \subset I \subset I_0 \\ card\ I \leq n}} W_{I,J_0} \cup \bigcup_{\substack{J_0 \subset J \subset I_0 \\ card\ J \geq m}} W_{I_0,J}$.
4. *Se* $card\ I_0 = n+1$ *então* $M^{(n)} \cap W_{I_0,I_0} = \emptyset$
5. $M_{I_0}^{(1)} = M^{(n)} \cup \cap_{i \in \{1,\ldots,k\} \setminus I_0} M_i$

Demonstração:

1. De acordo com a definição (2.4), temos:

$$\begin{aligned}
M_{I_0}^{(m-1)} &= M^{(n)} \cup \bigcup_{\substack{J \subset I_0 \\ card\ J \geq m-1}} W_{I_0,J} \\
&= M^{(n)} \cup \Big(\bigcup_{\substack{J \subset I_0 \\ card\ J \geq m}} W_{I_0,J} \cup \bigcup_{\substack{J \subset I_0 \\ card\ J = m-1}} W_{I_0,J} \Big) \\
&= M_{I_0}^{(m)} \cup \bigcup_{\substack{J \subset I_0 \\ card\ J = m-1}} W_{I_0,J} \\
&= \bigcup_{\substack{J \subset I_0 \\ card\ J = m-1}} (M_{I_0}^{(m)} \cup W_{I_0,J})
\end{aligned}$$

2. Para $J_1, J_2 \subset I_0$ tais que $card\ J_1 = card\ J_2 = m-1$ e $J_1 \neq J_2$, temos:

$[(M_{I_0}^{(m)} \cup W_{I_0,J_1}) \cap (M_{I_0}^{(m)} \cup W_{I_0,J_2})] =$

$= [(M_{I_0}^{(m)} \cup W_{I_0,J_1}) \cap M_{I_0}^{(m)}] \cup [(M_{I_0}^{(m)} \cup W_{I_0,J_1}) \cap W_{I_0,J_2}]$

$= M_{I_0}^{(m)} \cup (M_{I_0}^{(m)} \cap W_{I_0,J_1}) \cup (M_{I_0}^{(m)} \cap W_{I_0,J_2}) \cup (W_{I_0,J_1} \cap W_{I_0,J_2})$

$\overset{(*)}{\subset} M_{I_0}^{(m)} \cup (M_{I_0}^{(m)} \cap W_{I_0,J_1}) \cup (M_{I_0}^{(m)} \cap W_{I_0,J_2}) \subset M_{I_0}^{(m)}$

(*) Observe que, $W_{I_0,J_1} \cap W_{I_0,J_2} = W_{I_0,J_1 \cup J_2} \subset M_{I_0}^{(m)}$. Com efeito, por um lado, se tomarmos $x \in W_{I_0,J_1} \cap W_{I_0,J_2}$ então:

- $x \in W_{I_0,J_1} = \bigcap_{i \in \{1,\ldots,k\} \setminus I_0} M_i \setminus \bigcup_{j \in J_1} N_j \Rightarrow x \in M_i \setminus \bigcup_{j \in J_1} N_j$ para todo $i \in \{1,\ldots,k\} \setminus I_0$
- $x \in W_{I_0,J_2} = \bigcap_{i \in \{1,\ldots,k\} \setminus I_0} M_i \setminus \bigcup_{j \in J_2} N_j \Rightarrow x \in M_i \setminus \bigcup_{j \in J_2} N_j$ para todo $i \in \{1,\ldots,k\} \setminus I_0$

Logo, $x \in M_i \setminus \bigcup_{j \in J_1 \cup J_2} N_j$ para todo $i \in \{1,\ldots,k\} \setminus I_0$, isto é, $x \in \bigcap_{i \in \{1,\ldots,k\} \setminus I_0} M_i \setminus \bigcup_{j \in J_1 \cup J_2} N_j = W_{I_0,J_1 \cup J_2}$.

Reciprocamente, se $x \in W_{I_0,J_1 \cup J_2}$, temos

$x \in M_i \setminus \bigcup_{j \in J_1 \cup J_2} N_j$ para todo $i \in \{1,\ldots,k\} \setminus I_0$

$\Rightarrow x \in (M_i \setminus \bigcup_{j \in J_1} N_j) \cap (M_i \setminus \bigcup_{j \in J_2} N_j)$ para todo $i \in \{1,\ldots,k\} \setminus I_0$

$\Rightarrow x \in (M_i \setminus \bigcup_{j \in J_1} N_j)$ e $x \in (M_i \setminus \bigcup_{j \in J_2} N_j)$ para todo $i \in \{1,\ldots,k\} \setminus I_0$

$\Rightarrow x \in W_{I_0,J_1}$ e $x \in W_{I_0,J_2} \Rightarrow x \in W_{I_0,J_1} \cap W_{I_0,J_2}$

Ainda, $W_{I_0,J_1 \cup J_2} \subset M_{I_0}^{(m)}$, pois *card* $(J_1 \cup J_2) \geq m$ dado que *card* $J_1 =$ *card* $J_2 = m - 1$ e $J_1 \neq J_2$.

3. Considerando as definições dos conjuntos envolvidos, temos

$$\begin{aligned}
W_{I_0,J_0} \cap M_{I_0}^{(m)} &= W_{I_0,J_0} \cap (M^{(n)} \cup \bigcup_{\substack{J\subset I_0 \\ card\ J\geq m}} W_{I_0,J}) \\
&= (W_{I_0,J_0} \cap M^{(n)}) \cup \bigcup_{\substack{J\subset I_0 \\ card\ J\geq m}} (W_{I_0,J_0} \cap W_{I_0,J}) \\
&= \bigcup_{\substack{I\subset\{1,\ldots,k\} \\ card\ I\leq n}} [W_{I_0,J_0} \cap (\cap_{i\in\{1,\ldots,k\}\backslash I} M_i)] \cup \bigcup_{\substack{J\subset I_0 \\ card\ J\geq m}} W_{I_0,J\cup J_0} \\
&= \bigcup_{\substack{I\subset\{1,\ldots,k\} \\ card\ I\leq n}} [(\bigcap_{i\in\{1,\ldots,k\}\backslash I_0} M_i \backslash \bigcup_{j\in J_0} N_j) \cap (\bigcap_{i\in\{1,\ldots,k\}\backslash I} M_i)] \cup \\
&\quad \cup \bigcup_{\substack{J\subset I_0 \\ card\ J\geq m}} W_{I_0,J\cup J_0} \\
&= \bigcup_{\substack{I\subset\{1,\ldots,k\} \\ card\ I\leq n}} [(\bigcap_{i\in\{1,\ldots,k\}\backslash I_0} M_i \cap \bigcap_{i\in\{1,\ldots,k\}\backslash I} M_i) \backslash \bigcup_{j\in J_0} N_j] \cup \\
&\quad \cup \bigcup_{\substack{J\subset I_0 \\ card\ J\geq m}} W_{I_0,J\cup J_0} \\
&= \bigcup_{\substack{I\subset\{1,\ldots,k\} \\ card\ I\leq n}} (\bigcap_{i\in\{1,\ldots,k\}\backslash I\cap I_0} M_i \backslash \bigcup_{j\in J_0} N_j) \cup \bigcup_{\substack{J\subset I_0 \\ card\ J\geq m}} W_{I_0,J\cup J_0} \\
&= \bigcup_{\substack{I\subset\{1,\ldots,k\} \\ card\ I\leq n}} W_{I\cap I_0,J_0} \cup \bigcup_{\substack{J\subset I_0 \\ card\ J\geq m}} W_{I_0,J\cup J_0} \\
&= \bigcup_{\substack{J_0\subset I\subset I_0 \\ card\ I\leq n}} W_{I,J_0} \cup \bigcup_{\substack{J_0\subset J\subset I_0 \\ card\ J\geq m}} W_{I_0,J}
\end{aligned}$$

4. Seja $I_0 \subset \{1,\ldots,k\}$ tal que $card\ I_0 = n+1$. Temos, por definição, que:

$$M^{(n)} := \bigcup_{\substack{I\subset\{1,\ldots,k\} \\ card\ I\leq n}} \cap_{i\in\{1,\ldots,k\}\backslash I} M_i$$

e

$$W_{I_0,I_0} := \bigcap_{i\in\{1,\ldots,k\}\backslash I_0} M_i \backslash \bigcup_{j\in I_0} N_j$$

Notamos que, se existisse $x \in M^{(n)} \cap W_{I_0,I_0}$ então, por um lado, $x \in M_i \backslash \bigcup_{j\in I_0} N_j$ para todo $i \in \{1,\ldots,k\}\backslash I_0$ e portanto, desde que $M_j \subset N_j$ (veja lema 2.0.6) , segue que $x \notin M_i, \forall i \in I_0$. Mas $card\ I_0 = n+1$ e $card\ I \leq n$, logo existe pelo menos um índice $i_0 \in I_0 \backslash I$ qualquer que seja $I \subset \{1, \ldots, k\}$. Por outro lado, $x \in \cap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I} M_i$ para algum $I \subset \{1, \ldots, k\}$ com $card\ I \leq n$ e conseqüentemente $x \in M_{i_0}$ pois $i_0 \notin I$ e $I_0 \subset \{1, \ldots, k\}$, o que contradiz o fato de $x \notin M_i$ com $i \in I_0$. Concluímos então que $M^{(n)} \cap W_{I_0,I_0} = \emptyset$.

5. Segue da definição (2.4) que

$$M_{I_0}^{(1)} = M^{(n)} \cup \bigcup_{\substack{J\subset I_0 \\ card\ J\geq 1}} W_{I_0,J}$$

Logo, tomando-se $x \in M_{I_0}^{(1)}$, então $x \in M^{(n)}$ ou $x \in \bigcup_{\substack{J\subset I_0 \\ card\ J\geq 1}} W_{I_0,J}$. Se x pertencer a $M^{(n)}$, certamente $x \in M^{(n)} \cup \cap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I_0} M_i$. Agora suponhamos que $x \in \bigcup_{\substack{J\subset I_0 \\ card\ J\geq 1}} W_{I_0,J}$. Segue que $x \in W_{I_0,J}$ para algum $J \subset I_0$ com $card\ J \geq 1$ e daí

$$x \in W_{I_0,J} = \bigcap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I_0} M_i \setminus \bigcup_{j\in J} N_j \quad \subset \quad \bigcap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I_0} M_i$$

Portanto, $x \in M^{(n)} \cup \bigcap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I_0} M_i$

Agora, tomando-se $x \in M^{(n)} \cup \bigcap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I_0} M_i$. Observa-se que, para cada $j = 1, \ldots, k$

$$f(N_j) \cap (\cap_{i=1}^k N_i) = (f(N_j) \cap N_j) \cap (\cap_{i=1}^k N_i) = \emptyset$$

Logo,

$$\begin{aligned} \cap_{i=1}^k N_i &= (\cap_{i=1}^k N_i) \cap M = (\cap_{i=1}^k N_i) \cap (\cup_{j=1}^k f(N_j)) \\ &= \cup_{j=1}^k [(\cap_{i=1}^k N_i) \cap f(N_j)] = \emptyset \end{aligned}$$

Assim, para cada $x \in M$, existe um índice $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $x \notin N_j$. Logo, se $x \in \bigcap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I_0} M_i$, então existe $j \in I_0$ (aqui necessariamente devemos ter $j \in I_0$, visto que $\bigcap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I_0} M_i \subset N_j$ para todo

$j \in \{1,\ldots,k\}\backslash I_0)$, tal que $x \notin N_j$ e daí $x \in \bigcap_{i\in\{1,\ldots,k\}\backslash I_0} M_i\backslash N_j = W_{I_0,\{j\}} \subset M_{I_0}^{(1)}$, isto é, $x \in M_{I_0}^{(1)}$. Por outro lado, se $x \in M^{(n)}$ então $x \in M_{I_0}^{(1)} = M^{(n)} \cup \bigcup_{\substack{J\subset I_0 \\ card\ J\geq 1}} W_{I_0,J}$.

□

Demonstração do teorema 2.0.7:

Daremos aqui apenas a demonstração para o caso $k = 4$, meramente para deixar mais "evidente" a técnica usada para k qualquer. A prova do caso geral é dada em [16] por indução.

Assim, como no lema 2.0.6, para cada M_i existe um aberto $N_i \subset M$ tal que $N_i \cap f(N_i) = \emptyset$ para $i \in \{1,2,3,4\}$. Queremos construir uma função contínua $h : M \longrightarrow \partial\Delta_3$ tal que $h(M_i) \subset \Delta_{3;i}$ para cada $i = 1,2,3,4$, ou seja, de forma que a imagem de cada M_i por h esteja contida na face oposta ao vértice e_i e ainda

$$h(f(h^{-1}(\Delta_{3:i}))) \subset \bigcup_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{4} co\{[\Delta_3^K]|\{i\} \subset K \subset \{1,\ldots,k\}\backslash\{j\}\}$$

Para isso, definiremos h continuamente sobre M satisfazendo, para todo $\emptyset \neq J \subset I \subset \{1,2,3,4\}$

$$h(W_{I,J}) \subset co\{[\Delta_3^K]|J \subset K \subset I\} \tag{2.5}$$

o que caracteriza as propriedades que exigimos para h, como acima (constataremos isso no final da demonstração).

Bem, observemos que, para $n \in \{1,2,3,4\}$, pelo que definimos em (2.2) temos $M^{(1)} \subset M^{(2)} \subset M^{(3)} = M$ (para $n = 4$, $M^{(n)} = \emptyset$). Começaremos então definindo uma função contínua h_1 sobre o conjunto

$$M^{(1)} = \bigcup_{\substack{I\subset\{1,2,3,4\} \\ card\ I=1}} \cap_{i\in\{1,2,3,4\}\backslash I} M_i$$

chegando em $\partial\Delta_3$ tal que, para todo $I \subset \{1,2,3,4\}$ com $card\ I = 1$ e $\emptyset \neq J \subset I$, a imagem de cada conjunto $W_{I,J}$ (veja (2.1)) por h_1 esteja contida em $co\{[\Delta_3^K]|J \subset K \subset I\}$. Notemos que, para cada I nestas condições, o conjunto $W_{I,J}$ nada mais é do que o conjunto dos pontos de $\cap_{i\in\{1,2,3,4\}\setminus I} M_i$, que não pertencem a $\cup_{j\in J} N_j$ e portanto $W_{I,J}$ é um subconjunto de $\cap_{i\in\{1,2,3,4\}\setminus I} M_i$.

Em seguida, definiremos uma função $h_2 : M^{(2)} \longrightarrow \partial\Delta_3$ de maneira que h_2 seja uma extensão contínua de h_1. Ora, pelo lema 2.0.7 item 1, temos

$$M^{(2)} = \bigcup_{\substack{I\subset\{1,\ldots,k\} \\ card\ I=2}} (M^{(1)} \cup \cap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I} M_i)$$

Logo, desde que a interseção duas a duas das parcelas dessa união está contida em $M^{(1)}$ (veja item 2 do lema 2.0.7), podemos assim definir h_2 em cada um dos conjuntos $M^{(1)} \cup \cap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I} M_i$ separadamente, com $card\ I = 2$. Para isso, definiremos h_2 sobre cada conjunto $M_I^{(2)}$ para $I \subset \{1,2,3,4\}$ com cardinal igual a dois, e estenderemos para o conjunto $M_I^{(1)}$, o qual é igual a $M^{(1)} \cup \cap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I} M_i$ (lema 2.0.8, item 5) para cada I, o que consequentemente nos dará uma definição de h_2 sobre $M^{(2)}$. Vale ressaltar que, cada extensão dessa é feita de modo a preservar a propriedade (2.5). Finalmente, desde que

$$M^{(3)} = \bigcup_{\substack{I\subset\{1,\ldots,k\} \\ card\ I=3}} (M^{(2)} \cup \cap_{i\in\{1,\ldots,k\}\setminus I} M_i)$$

construiremos $h_3 : M^{(3)} \longrightarrow \partial\Delta_3$, a qual estende h_2, de maneira inteiramente análoga ao que faremos para definir h_2, mas agora para todo $I \subset \{1,2,3,4\}$ com $card\ I = 3$. Assim, como $M^{(3)} = M$, segue que h_3 será a requerida função h.

Sendo assim, consideremos o conjunto

$$\begin{aligned} M^{(1)} &= \bigcup_{\substack{I\subset\{1,2,3,4\}\\ card\ I=1}} \cap_{i\in\{1,2,3,4\}\setminus I} M_i = \\ &= \underbrace{(M_2\cap M_3\cap M_4)}_{V_1}\cup\underbrace{(M_1\cap M_3\cap M_4)}_{V_2}\cup\underbrace{(M_1\cap M_2\cap M_4)}_{V_3}\cup \\ &\quad \cup\underbrace{(M_1\cap M_2\cap M_3)}_{V_4} \end{aligned}$$

Definamos então, $h_1 : M^{(1)} \to \partial\Delta_3$ como segue:

$$h_1(x) = \begin{cases} e_1, & \text{se} \quad x\in V_1 \\ e_2, & \text{se} \quad x\in V_2 \\ e_3, & \text{se} \quad x\in V_3 \\ e_4, & \text{se} \quad x\in V_4 \end{cases}$$

onde $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, são os vértices do 3-simplexo Δ_3.

Observemos que h_1 está bem definida desde que $V_i \cap V_j = \emptyset$ para todo $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ com $i \neq j$, pois $M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4 = \emptyset$ conforme já mostramos (veja página 20). Além disso, claramente h_1 é contínua e satisfaz a condição (2.5), visto que para $I = \{t\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ podemos ter somente $J = I$ e portanto

$$W_{I,I} = \bigcap_{i\in\{1,2,3,4\}\setminus I} M_i\setminus N_t \ \subset \bigcap_{i\in\{1,2,3,4\}\setminus I} M_i = V_t$$

Logo, como $h(V_t) = e_t$ e $co\{[\Delta_3^K]|I \subset K \subset I\} = [\Delta_3^{\{t\}}] = e_t$ para $t = 1, 2, 3, 4$, segue que

$$h_1(W_{I,I}) \subset co\{[\Delta_3^K]|I\subset K\subset I\}$$

Agora, nosso próximo passo será definir h_2 continuamente no conjunto

$$\begin{aligned} M^{(2)} &= M^{(1)}\cup(\bigcup_{\substack{I\subset\{1,2,3,4\}\\ card\ I=2}} \cap_{i\in\{1,2,3,4\}\setminus I} M_i) \\ &= \bigcup_{\substack{I\subset\{1,2,3,4\}\\ card\ I=2}} (M^{(1)}\cup\cap_{i\in\{1,2,3,4\}\setminus I} M_i) \end{aligned}$$

de forma a estender h_1 no conjunto $M^{(2)}$ preservando (2.5).

Notamos que, para $I_1, I_2 \subset \{1,2,3,4\}$ com $card\ I_1 = card\ I_2 = 2$ e $I_1 \neq I_2$, segue do lema 2.0.7 item 2 que

$$(M^{(1)} \cup \cap_{i\in\{1,2,3,4\}\setminus I_1} M_i) \cap (M^{(1)} \cup \cap_{i\in\{1,2,3,4\}\setminus I_2} M_i) \subset M^{(1)}$$

e portanto, basta que h_1 seja estendida continuamente em cada um dos conjuntos $M^{(1)} \cup \cap_{i\in\{1,2,3,4\}\setminus I} M_i$ para todo $I \subset \{1,2,3,4\}$ com $card\ I = 2$.

Por uma questão de otimização da demonstração, nos concentraremos aqui apenas na construção de h_2 especificamente para $I_0 = \{1,2\} \subset \{1,2,3,4\}$, visto que para os demais $I \subset \{1,2,3,4\}$ com cardinal igual a dois, a demonstração é inteiramente análoga. Logo, considerando I_0, como $\emptyset \neq J \subset I_0$, temos

Caso 1 ($J = I_0$):

Para todo $x \in W_{I_0,I_0}$ definamos

$$h_2(x) = [\Delta_3^{I_0}].$$

Note que, $M^{(1)} \cap W_{I_0,I_0} = \emptyset$ (lema 2.0.8, item 4). Portanto a função está bem definida e é contínua em $M_{I_0}^{(2)} = M^{(1)} \cup W_{I_0,I_0}$. Além disso,

$$h_2(W_{I_0,I_0}) \subset co\{[\Delta_3^K] | I_0 \subset K \subset I_0\} = [\Delta_3^{I_0}]$$

logo, $h_2|_{M_{I_0}^{(2)}}$ satisfaz (2.5).

Caso 2 ($J = \{1\}$ ou $J = \{2\}$):

Por conveniência, chamemos $J = \{1\}$ de J_1 e $J = \{2\}$ de J_2 e consideremos:

$$\begin{aligned} M_{I_0}^{(1)} &= M_{I_0}^{(2)} \cup (W_{I_0,J_1} \cup W_{I_0,J_2}) \\ &= (M_{I_0}^{(2)} \cup W_{I_0,J_1}) \cup (M_{I_0}^{(2)} \cup W_{I_0,J_2}) \end{aligned}$$

Queremos mais uma vez definir h_2, continuamente, agora sobre o conjunto $M_{I_0}^{(1)}$, de forma a satisfazer a condição (2.5). Já sabemos que h_2 está bem definida em $(M_{I_0}^{(2)} \cup W_{I_0,J_1}) \cap (M_{I_0}^{(2)} \cup W_{I_0,J_2}) \subset M_{I_0}^{(2)}$ (lema 2.0.8, item 2). Portanto basta que estendamos h_2 em cada um dos conjuntos $M_{I_0}^{(2)} \cup W_{I_0,J_i}$, para $i = 1, 2$.

Mas, pelo lema 2.0.8 item 3, para $i = 1, 2$, segue que:

$$\begin{aligned} W_{I_0,J_i} \cap M_{I_0}^{(2)} &= \bigcup_{\substack{J_i \subset I \subset I_0 \\ card\ I \leq 1}} W_{I,J_i} \cup \bigcup_{\substack{J_i \subset J \subset I_0 \\ card\ J \geq 2}} W_{I_0,J} \\ &= W_{J_i,J_i} \cup W_{I_0,I_0} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} h_2(W_{I_0,J_i} \cap M_{I_0}^{(2)}) &= h_2(W_{J_i,J_i}) \cup h_2(W_{I_0,I_0}) \\ &\overset{(*)}{\subset} co\{[\Delta_3^K] | K = J_i\} \cup co\{[\Delta_3^K] | K = I_0\} \\ &\subset co\{e_i, [\Delta_3^{I_0}]\} \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

(*) Essa passagem segue do fato de que h_2 está definida em $M_{I_0}^{(2)}$ satisfazendo a condição (2.5) e que $(W_{I_0,J_i} \cap M_{I_0}^{(2)}) \subset M_{I_0}^{(2)}$.

Notemos ainda que, $co\{e_i, [\Delta_3^{I_0}]\}$ nada mais é do que o 1-simplexo gerado por $\{e_i, [\Delta_3^{I_0}]\}$, o qual é um subconjunto fechado e convexo de $\mathbb{R}^3$. Assim, $co\{e_i, [\Delta_3^{I_0}]\}$ satisfaz as hipóteses do teorema 1.0.2 e, portanto é AR(normal). Mas, $M_{I_0}^{(2)}$ e W_{I_0,J_i} são subconjuntos fechados de M, logo W_{I_0,J_i} é normal e $W_{I_0,J_i} \cap M_{I_0}^{(2)}$ é um subconjunto fechado de W_{I_0,J_i} para $i = 1, 2$. Daí, $h_2|_{W_{I_0,J_i} \cap M_{I_0}^{(2)}}$ pode ser estendida continuamente para cada W_{I_0,J_i} de forma que $h_2(W_{I_0,J_i}) \subset co\{e_i, [\Delta_3^{I_0}]\} = co\{[\Delta_3^K] | J_i \subset K \subset I_0\}$ para $j = 1, 2$. Portanto, temos h_2 definida sobre o conjunto $M_{I_0}^{(1)}$ e satisfazendo (2.5).

Dessa forma, finalmente obtivemos uma definição para h_2 no conjunto $M^{(1)} \cup \cap_{i \in \{1,2,3,4\} \setminus I_0} M_i = M^{(1)} \cup (M_3 \cap M_4) = M_{I_0}^{(1)}$(lema 2.0.8, item 5). Como já tinhamos dito antes para os demais $I \subset \{1,2,3,4\}$ com cardinal igual a dois, construimos h_2 sobre cada $M^{(1)} \cup \cap_{i \in \{1,2,3,4\} \setminus I} M_i$, a qual estende h_1, de maneira inteiramente análoga ao que fizemos acima. Portanto, a união de todas essas extensões nos dá a requerida função h_2 sobre o conjunto $M^{(2)} = \bigcup_{\substack{I \subset \{1,2,3,4\} \\ card\ I=2}} M_I^{(1)}$ satisfazendo a condição (2.5), como queríamos.

Por fim, consideremos o conjunto

$$
\begin{aligned}
M^{(3)} &= \bigcup_{\substack{I \subset \{1,2,3,4\} \\ card\ I \leq 3}} \cap_{i \in \{1,2,3,4\} \setminus I} M_i \\
&= M^{(2)} \cup \Big(\bigcup_{\substack{I \subset \{1,2,3,4\} \\ card\ I=3}} \cap_{i \in \{1,2,3,4\} \setminus I} M_i \Big) \\
&= M^{(2)} \cup (M_4 \cup M_3 \cup M_2 \cup M_1) \\
&= (M^{(2)} \cup M_1) \cup (M^{(2)} \cup M_2) \cup (M^{(2)} \cup M_3) \cup (M^{(2)} \cup M_4)
\end{aligned}
$$

Mais uma vez, observemos que $(M^{(2)} \cup M_i) \cap (M^{(2)} \cup M_j) \subset M^{(2)}$ para todo $i, j \in \{1,2,3,4\}$, $i \neq j$ e portanto basta que definamos $h_3 : M^{(3)} \longrightarrow \partial\Delta_3$, uma extensão de h_2, em cada $M^{(2)} \cup M_i$ com $i = 1,2,3,4$ separadamente. Notemos que $M^{(3)} = M$ e, portanto se definirmos h_3 satisfazendo a condição (2.5), teremos $h = h_3 : M \longrightarrow \partial\Delta_3$, como desejamos. A técnica para estendermos h_2 é a mesma usada no processo de extensão de h_1. Entretanto, agora temos $I \subset \{1,2,3,4\}$ com $card\ I = 3$. Por esse motivo, faz sentido começarmos definindo h_3 sobre $M_I^{(3)}$, em seguinda estenderemos ao conjunto $M_I^{(2)}$ usando o fato de que $co\{[\Delta_3^K] | J \subset K \subset I\}$ é AR(normal). Desde que

$$M_I^{(3)} \subset M_I^{(2)} \subset M_I^{(1)} \ \text{ para cada } \ I \subset \{1,2,3,4\}, \ card\ I = 3$$

pelo mesmo motivo estendemos h_3 sobre $M_I^{(1)} = M^{(2)} \cup \cap_{i \in \{1,2,3,4\} \setminus I} M_i$ finalizando a prova do teorema.

Nos restringiremos novamente a construir a função h_3 para um determinado $I_1 \subset \{1,2,3,4\}$ com $card\ I_1 = 3$, mais especificamente para $I_1 = \{1,2,4\}$, devido ao fato de que a construção para os demais casos é mais uma vez análoga, o que tornaria a demonstração longa e mais enfadonha. Assim, considerando I_1, temos as seguintes possibilidades para $\emptyset \neq J \subset I_1$.

Caso 1 ($J = I_1$**:)**

Seja

$$M_{I_1}^{(3)} = M^{(2)} \cup \bigcup_{\substack{J\subset I_1 \\ card\ J \geq 3}} W_{I_1,J}$$

como definido em (2.4). Logo, $M_{I_1}^{(3)} = M^{(2)} \cup W_{I_1,I_1}$. Uma vez que já temos a h_3 para todo $x \in M^{(2)}$, definamos então,

$$h_3(x) = [\Delta_3^{I_1}], \quad \forall\ x \in W_{I_1,I_1}$$

Portanto, como $M^{(2)} \cap W_{I_1,I_1} = \emptyset$ (lema 2.0.8, item 4), então h_3 está bem definida em $M_{I_1}^{(3)}$, é contínua e $h_3|_{M_{I_1}^{(3)}}$ satisfaz (2.5).

Caso 2 ($card\ J = 2$**):**

Agora consideremos,

$$\begin{aligned} M_{I_1}^{(2)} &= M_{I_1}^{(3)} \cup \bigcup_{\substack{J\subset I_1 \\ card\ J = 2}} W_{I_1,J} \\ &= (M_{I_1}^{(3)} \cup W_{I_1,J_{12}}) \cup (M_{I_1}^{(3)} \cup W_{I_1,J_{14}}) \cup (M_{I_1}^{(3)} \cup W_{I_1,J_{24}}) \end{aligned}$$

sendo que $J_{12} = \{1,2\}$, $J_{14} = \{1,4\}$ e $J_{24} = \{2,4\}$.

Novamente, pelo lema 2.0.8 item 2, segue que $(M_{I_1}^{(3)} \cup W_{I_1,J_{ij}}) \cap (M_{I_1}^{(3)} \cup W_{I_1,J_{kl}}) \subset M_{I_1}^{(3)}$, com J_{ij} e J_{kl} sendo J_{12} ou J_{14} ou J_{24}. Logo, basta definirmos h_3 em cada parcela $M_{I_1}^{(3)} \cup W_{I_1,J_{ij}}$ do conjunto $M_{I_1}^{(2)}$ com $i,j \in \{1,2,4\}$, $i \neq j$, separadamente.

Mas pelo lema 2.0.8 item 3, temos que:

$$\begin{aligned} W_{I_1,J_{12}} \cap M^{(3)}_{I_1} &= W_{J_{12},J_{12}} \cup W_{I_1,I_1} \\ W_{I_1,J_{14}} \cap M^{(3)}_{I_1} &= W_{J_{14},J_{14}} \cup W_{I_1,I_1} \\ W_{I_1,J_{24}} \cap M^{(3)}_{I_1} &= W_{J_{24},J_{24}} \cup W_{I_1,I_1} \end{aligned}$$

e portanto, segue que

$$\begin{aligned} h_3(W_{I_1,J_{12}} \cap M^{(3)}_{I_1}) &= h_3(W_{J_{12},J_{12}}) \cup h_3(W_{I_1,I_1}) \\ &\subset co\{[\Delta^K_3] | K = J_{12}\} \cup co\{[\Delta^K_3] | K = I_1\} \\ &= co\{[\Delta^K_3] | J_{12} \subset K \subset I_1\} = co\{[\Delta^{J_{12}}_3], [\Delta^{I_1}_3]\}. \end{aligned}$$

Analogamente, verifica-se que

$$\begin{aligned} h_3(W_{I_1,J_{14}} \cap M^{(3)}_{I_1}) &\subset co\{[\Delta^K_3] | J_{14} \subset K \subset I_1\} = co\{[\Delta^{J_{14}}_3], [\Delta^{I_1}_3]\} \\ h_3(W_{I_1,J_{24}} \cap M^{(3)}_{I_1}) &\subset co\{[\Delta^K_3] | J_{24} \subset K \subset I_1\} = co\{[\Delta^{J_{24}}_3], [\Delta^{I_1}_3]\}. \end{aligned}$$

Logo, desde que $co\{[\Delta^{J_{12}}_3], [\Delta^{I_1}_3]\}$, $co\{[\Delta^{J_{14}}_3], [\Delta^{I_1}_3]\}$ e $co\{[\Delta^{J_{24}}_3], [\Delta^{I_1}_3]\}$ são subconjuntos fechados e convexos em $\mathbb{R}^3$, segue que eles são AR(normais) (teorema 1.0.2), o que nos permite concluir que podemos estender h_3 continuamente dos fechados $W_{I_1,J_{12}} \cap M^{(3)}_{I_1}$, $W_{I_1,J_{14}} \cap M^{(3)}_{I_1}$ e $W_{I_1,J_{24}} \cap M^{(3)}_{I_1}$ para os espaços normais $W_{I_1,J_{12}}$, $W_{I_1,J_{14}}$ e $W_{I_1,J_{24}}$ respectivamente, satisfazendo

$$\begin{aligned} h_3(W_{I_1,J_{12}}) &\subset co\{[\Delta^K_3] | J_{12} \subset K \subset I_1\} \\ h_3(W_{I_1,J_{14}}) &\subset co\{[\Delta^K_3] | J_{14} \subset K \subset I_1\} \\ h_3(W_{I_1,J_{24}}) &\subset co\{[\Delta^K_3] | J_{24} \subset K \subset I_1\}. \end{aligned}$$

Caso 3 ($card\ J = 1$):

Resta definirmos h_3 no conjunto,

$$\begin{aligned} M_{I_1}^{(1)} &= M_{I_1}^{(2)} \cup \bigcup_{\substack{J\subset I_1\\ card\ J\geq 1}} W_{I_0,J} \\ &= (M_{I_1}^{(2)} \cup W_{I_1,\{1\}}) \cup (M_{I_1}^{(2)} \cup W_{I_1,\{2\}}) \cup (M_{I_1}^{(2)} \cup W_{I_1,\{4\}}) \end{aligned}$$

Novamente, a intersecção duas a duas das parcelas do conjunto $M_{I_1}^{(1)}$ está contida em $M_{I_1}^{(2)}$, no qual a função h_3 já está definida. Portanto é suficiente que definemos h_3 para cada $W_{I_1,\{i\}}$ com $i \in I_1$. Mais um vez, pelo item 3 do lema 2.0.8, temos

$$M_{I_1}^{(2)} \cap W_{I_1,\{i\}} = \bigcup_{\substack{\{i\}\subset I\subset I_1\\ card\ I\leq 2}} W_{I,\{i\}} \cup \bigcup_{\substack{\{i\}\subset J\subset I_1\\ card\ J\geq 2}} W_{I_1,J},\ \forall\ i \in I_1$$

e, portanto

$$\begin{aligned} h_3(M_{I_1}^{(2)} \cap W_{I_1,\{i\}}) &= h_3(\bigcup_{\substack{\{i\}\subset I\subset I_1\\ card\ I\leq 2}} W_{I,\{i\}}) \cup h_3(\bigcup_{\substack{\{i\}\subset J\subset I_1\\ card\ J\geq 2}} W_{I_1,J}) \\ &= \bigcup_{\substack{\{i\}\subset I\subset I_1\\ card\ I\leq 2}} h_3(W_{I,\{i\}}) \cup \bigcup_{\substack{\{i\}\subset J\subset I_1\\ card\ J\geq 2}} h_3(W_{I_1,J}) \\ &\subset \bigcup_{\substack{\{i\}\subset I\subset I_1\\ card\ I\leq 2}} co\{[\Delta_3^K] | \{i\} \subset K \subset I\} \cup \\ &\quad \cup \bigcup_{\substack{\{i\}\subset J\subset I_1\\ card\ J\geq 2}} co\{[\Delta_3^K] | J \subset K \subset I_1\} \\ &\subset co\{[\Delta_3^K] | \{i\} \subset K \subset I_1\} \quad \forall\ i \in I_1. \end{aligned}$$

Logo, se chamarmos de $A_i = co\{[\Delta_3^K] | \{i\} \subset K \subset I_1\}$ para $i = 1, 2, 4$, então, pelo teorema 1.0.2, cada A_i é AR(normal), e consequentemente podemos estender h_3 de cada fechado $M_{I_1}^{(2)} \cap W_{I_1,\{i\}}$ para $W_{I_1,\{i\}}$, tal que

$$h_3(W_{I_1,\{i\}}) \subset co\{[\Delta_3^K] | \{i\} \subset K \subset I_1\} \quad \forall\ i \in I_1.$$

Assim, desde que $M_{I_1}^{(1)} = M^{(2)} \cup M_3$, finalmente temos uma extensão de h_2 sobre o conjunto M_3 cumprindo a condição (2.5), como desejávamos. Observemos que aqui obtivemos apenas a extensão para M_3 devido as restrições que fizemos. Entretanto, procedendo da mesma maneira para as outras possibilidades de I_0 e I_1 obtemos uma extensão de h_1 para M_1, M_2 e M_4 e portanto em M. Resta então mostrar que a condição (2.5) implica que $h(M_i) \subset \Delta_{3:i}$ e

$$h(f(h^{-1}(\Delta_{3:i}))) \subset \bigcup_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{4} co\{[\Delta_3^K] | \{i\} \subset K \subset \{1,2,3,4\} \backslash \{j\}\}$$

Para isso, seja $I_i := \{1,2,3,4\} \backslash \{i\}$ onde $i = 1,2,3,4$. Assim,

$$\begin{aligned} W_{I_i,J} &= \bigcap_{k \in \{1,2,3,4\} \backslash I_i} M_k \backslash \bigcup_{j \in J} N_j \\ &= M_i \backslash \bigcup_{j \in J} N_j \end{aligned}$$

Afirmamos que $M_i \subset \bigcup_{\emptyset \neq J \subset I_i} W_{I_i,J}$ para todo $i = 1,2,3,4$. De fato, seja $x \in M_i$. Como $\cap_{j=1}^4 N_j = \emptyset$, segue que existe $j \in I_i$ tal que $x \notin N_j$. Logo, $x \in W_{I_i,\{j\}} \subset \bigcup_{\emptyset \neq J \subset I_i} W_{I_i,J}$. Assim, para todo $i = 1,2,3,4$, temos

$$\begin{aligned} h(M_i) &\subset \bigcup_{\emptyset \neq J \subset I_i} h(W_{I_i,J}) \subset \bigcup_{\emptyset \neq J \subset I_i} co\{[\Delta_3^K] | J \subset K \subset I_i\} \\ &\subset \Delta_3^{I_i} = \Delta_{3;i} \end{aligned}$$

Além disso, como $M = \cup_{j=1}^4 M_j$, então

$$\begin{aligned} h(M \backslash N_i) = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{4} h(M_j \backslash N_i) = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{4} h(W_{I_j,\{i\}}) \subset \\ \subset \bigcup_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{4} co\{[\Delta_3^K] | \{i\} \subset K \subset \{1,2,3,4\} \backslash \{j\}\} \subset \partial\Delta_3 \backslash \Delta_{3;i} \end{aligned}$$

e portanto, $h^{-1}(\Delta_{3;i}) \subset N_i$. Ainda, $N_i \cap f(N_i) = \emptyset$ para $i = 1, 2, 3, 4$, implicando que $f(N_i) \subset M \backslash N_i$. Logo,

$$\begin{aligned} h(f(h^{-1}(\Delta_{3:i}))) &\subset h(f(N_i)) \subset h(M \backslash N_i) \\ &\subset \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{4} co\{[\Delta_3^K] | \{i\} \subset K \subset \{1, 2, 3, 4\} \backslash \{j\}\}. \end{aligned}$$

□

Com esse teorema em mãos, estamos aptos a demonstrar o resultado principal deste capítulo. Entretanto, antes introduziremos algumas definições e demonstraremos um lema que iremos precisar.

Sejam $f : M \longrightarrow M$ e $g : N \longrightarrow N$ homeomorfismos que geram $\mathbb{Z}_p$-ações livres sobre os espaços M e N, respectivamente. Dizemos que uma aplicação contínua $P : (M, f) \longrightarrow (N, g)$ é **equivariante** se P satisfaz $g \circ P = P \circ f$. Neste caso, verifica-se sem maiores dificuldades, que $g^i \circ P = P \circ f^i$ para todo $i = 0, 1, \ldots, p-1$.

Além disso, se A é um subconjunto qualquer de N, temos

$$f^i(P^{-1}(A)) = P^{-1}(g^i(A)) \quad \forall\, i = 0, 1, \ldots, p-1.$$

De fato, por um lado se $x \in f^i(P^{-1}(A))$ então $x = f^i(w)$ para algum $w \in P^{-1}(A)$, isto é, $P(w) = y \in A$. Assim, como $g^i \circ P = P \circ f^i$, segue que $P(x) = P(f^i(w)) = g^i(P(w)) = g^i(y) \Rightarrow x \in P^{-1}(g^i(A))$. Agora, por outro lado, se tomarmos $x \in P^{-1}(g^i(A))$ então $P(x) = g^i(y)$ para algum $y \in A$. Mas f^i é sobrejetora e portanto, existe $w \in M$ tal que $x = f^i(w) \Rightarrow g^i(y) = P(x) = P(f^i(w)) = g^i(P(w))$. Desde que g^i é injetora, segue que $P(w) = y$ com $y \in A$ e ainda $x = f^i(w)$, ou seja, $x \in f^i(P^{-1}(A))$.

Lema 2.0.9 *Sejam f e h funções que geram uma $\mathbb{Z}_p$-ação livre sobre os espaços de Hausdorff M e N, respectivamente, com p primo. Suponhamos que* *a aplicação* $P : (M, f) \longrightarrow (N, h)$ *seja equivariante. Então* $g(M, f) \leq g(N, h)$.

Demonstração:

Seja $g(N, h) = n$. Portanto, pela definição do genus, existem n subconjuntos $G^1, G^2, \ldots, G^n$ fechados de N tais que, $N = \cup_{j=1}^{n} G^j$ e ainda, para cada G^j, existem fechados disjuntos $G_0^j, G_1^j, \ldots, G_{p-1}^j \subset N$ satisfazendo:

1. $\cup_{i=0}^{p-1} G_i^j = G^j$, para cada $j = 1, 2, \ldots, n$ e

2. $h^i(G_0^j) = G_i^j$, $i = 1, \ldots, p-1$

Desde que P é contínua, consideremos a coleção $\{P^{-1}(G^1), P^{-1}(G^2),$ $, \ldots, P^{-1}(G^n)\}$ de subconjuntos fechados de M. Denotemos $M^j = P^{-1}(G^j)$, para cada $j = 1, \ldots, n$.

Notamos que, se $x \in M$ então $P(x) \in N = \cup_{j=1}^{n} G^j$, ou seja, $P(x) \in G^j$ para algum $j \in \{1, \ldots, n\}$ e portanto $x \in M^j \Longrightarrow M = \cup_{j=1}^{n} M^j$. Agora, fixemos um j e definamos $M_i^j = P^{-1}(G_i^j)$ para cada $i = 0, 1, \ldots, p-1$. Então, para todo $i \in \{1, \ldots, p-1\}$, temos

$$\begin{aligned} M^j &= P^{-1}(G^j) = P^{-1}(\cup_{i=0}^{p-1} G_i^j) = \cup_{i=0}^{p-1} P^{-1}(G_i^j) = \cup_{i=0}^{p-1} M_i^j \quad (2.7) \\ f^i(M_0^j) &= f^i(P^{-1}(G_0^j)) = P^{-1}(h^i(G_0^j)) = P^{-1}(G_i^j) = M_i^j \quad (2.8) \end{aligned}$$

Além disso, se $i_1, i_2 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ com $i_1 \neq i_2$, então

$$M_{i_1}^j \cap M_{i_2}^j = P^{-1}(G_{i_1}^j) \cap P^{-1}(G_{i_2}^j) = P^{-1}(\underbrace{G_{i_1}^j \cap G_{i_2}^j}_{\emptyset}) = \emptyset \quad (2.9)$$

Portanto, temos n fechados $M^1, \ldots, M^n$ que cobrem M, cada um deles satisfazendo (2.7), (2.8) e (2.9). Segue, da definição de genus, que $g(M, f) \leq n$.

$\square$

Ainda, para todo $k \in \mathbb{N}$ e todo primo p, definamos

$$\begin{aligned} L_{k,p} &:= \{(x_1, \ldots, x_p) \in (\partial\Delta_{k-1})^p | se \;\; m, n \in \{1, \ldots, p\}, n \equiv m + 1 (mod p) \\ & \quad e \;\; x_m \in \Delta_{k-1:i}, \text{ então } x_n \notin \Delta_{k-1:i}\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \widetilde{L}_{k,p} &:= \{(x_1, \ldots, x_p) \in (\partial\Delta_{k-1})^p | se \;\; m, n \in \{1, \ldots, p\}, n \equiv m + 1 (mod p) \\ & \quad e \;\; x_m \in \Delta_{k-1:i}, \;\; \text{então} \;\; x_n \in \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} co\{[\Delta_{k-1}^K] | \{i\} \subset K \subset \{1, \ldots, k\} \backslash \{j\}\} \end{aligned}$$

A idéia por trás da definição de $L_{k,p}$ é de que, dada uma coordenada x_i em $(x_1, \ldots, x_p)$, ela não pode estar na mesma face em $\partial\Delta_{k-1}$ que a coordenada imediatamente anterior a ela pertence[1]. Esse fato é caracterizado pela congruência módulo p, ou seja, dado $n \in \{1, \ldots, p\}$ a relação $n \equiv m+1(mod\, p)$ diz que o único $m \in \{1, \ldots, p\}$ que satisfaz essa relação é o índice imediatamente anterior a n. Logo, se $x_m \in \Delta_{k-1;i}$ para algum $i \in \{1, \ldots, k\}$, segue que $x_n \notin \Delta_{k-1:i}$. A exemplo disso, se tomarmos $p = 5$, $k = 4$ e $n = 3$, o único número $m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ que satisfaz $3 \equiv m + 1(mod\ 5)$ é $m = 2$. Portanto se $x_2 \in \Delta_{3;1}$, ou seja, se x_2 estiver na face oposta ao vértice e_1 do 3-simplexo Δ_3 então x_3 não pode estar nesta face.

Ainda, notemos que $\widetilde{L}_{k,p} \subset L_{k,p}$. Com efeito, basta observar que dado $x \in \widetilde{L}_{k,p}$ tal que $x_n \in \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} co\{[\Delta_{k-1}^K] | \{i\} \subset K \subset \{1, \ldots, k\} \backslash \{j\}\}$, como $\{i\} \subset K \subset \{1, \ldots, k\} \backslash \{j\}$ e $j \neq i$, então x_n pertence somente às faces de $\partial\Delta_{k-1}$ nas quais um dos vértices é e_i e portanto $x \notin \Delta_{k-1;i}$. Em outras palavras, $\widetilde{L}_{k,p}$ é o subconjunto de $L_{k,p}$, no qual exigimos ainda que se $x_i \in \Delta_{k-1;i}$ para algum

[1]considerando x_p a coordenada imediatamente anterior a x_1

$i = 1, \ldots, k$, então a coordenada imediatamente anterior a x_i deve estar no conjunto

$$\bigcup_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} co\{[\Delta_{k-1}^{K}]|\{i\} \subset K \subset \{1, \ldots, k\}\backslash\{j\}\}$$

o qual é uma espécie de vizinhaça bem determinada do vértice e_i.

Consideremos também $\varphi_{k,p} : L_{k,p} \longrightarrow L_{k,p}$, a função definida da seguinte maneira:

$$\varphi_{k,p}(x_1, \ldots, x_p) := (x_2, \ldots, x_p, x_1) \tag{2.10}$$

Observemos que $(x_2, \ldots, x_p, x_1) \in L_{k,p}$, desde que, se $(x_1, \ldots, x_p) \in L_{k,p}$, a imagem de $(x_1, \ldots, x_p)$ por meio de $\varphi_{k,p}$ no fundo é um tipo de renomeação das coordenadas, e portanto a propriedade exigida em $L_{k,p}$ é preservada. Logo, temos $\varphi_{k,p}(L_{k,p}) \subset L_{k,p}$ e portanto $\varphi_{k,p}$ está bem definida.

Afirmação: $\varphi_{k,p}$ é $\mathbb{Z}_p$-ação livre

Precisamos provar que $\varphi_{k,p}$ é contínua, $(\varphi_{k,p})^p = id_{L_{k,p}}$ e que $\varphi_{k,p}$ não fixa pontos.

Notemos que $\varphi_{k,p} : L_{k,p} \longrightarrow L_{k,p} \subset (\partial\Delta_{k-1})^p$ e, portanto podemos considerar $\varphi_{k,p} = (f_2, \ldots, f_p, f_1)$, onde cada função coordenada é entendida como $f_i : L_{k,p} \longrightarrow \partial\Delta_{k-1}$ onde $f_i(x_1, \ldots, x_p) = x_i$ para cada $i = 1, \ldots, p$, isto é, a i-ésima projeção em cada "fatia"de $(\partial\Delta_{k-1})^p$. Logo, como cada f_i é contínua, consequentemente $\varphi_{k,p}$ também o é.

Além disso, temos que:

$$\begin{array}{rcccl}
\varphi_{k,p}(x_1, \ldots, x_p) & = & (x_2, \ldots, x_p, x_1) & & \\
(\varphi_{k,p})^2(x_1, \ldots, x_p) & = & \varphi_{k,p}(x_2, \ldots, x_p, x_1) & = & (x_3, \ldots, x_1, x_2) \\
(\varphi_{k,p})^3(x_1, \ldots, x_p) & = & \varphi_{k,p}(x_3, \ldots, x_1, x_2) & = & (x_4, \ldots, x_2, x_3) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
(\varphi_{k,p})^i(x_1, \ldots, x_p) & = & \varphi_{k,p}(x_i, \ldots, x_{i-2}, x_{i-1}) & = & (x_{i+1}, \ldots, x_{i-1}, x_i)
\end{array}$$

Portanto, $(\varphi_{k,p})^p(x_1,\ldots,x_p) = (x_1,\ldots,x_{p-1},x_p) = id_{L_{k,p}}(x_1,\ldots,x_{p-1},x_p)$.

Agora, suponhamos por absurdo, que $\varphi_{k,p}$ fixe algum ponto, isto é, que existe $x = (x_1,\ldots,x_p) \in L_{k,p}$ tal que $\varphi_{k,p}(x) = x$. Logo, $(x_1,\ldots,x_p) = (x_2,\ldots,x_p,x_1)$ implicando que $x_1 = x_2 = \ldots = x_{p-1} = x_p$. Assim, em particular $x_1 = x_2$, e, portanto $x_1, x_2 \in \Delta_{k-1;i}$ para algum $i \in \{1,\ldots,p\}$, contradizendo o fato de $x \in L_{k,p}$.

Portanto, $\varphi_{k,p}$ é uma $\mathbb{Z}_p$-ação livre.

Ainda, como observamos para $L_{k,p}$, devido a dinâmica da função $\varphi_{k,p}$ segue que $\varphi_{k,p}(\widetilde{L}_{k,p}) \subset \widetilde{L}_{k,p}$ e, portanto $\varphi_{k,p}$ também gera uma $\mathbb{Z}_p$-ação livre sobre $\widetilde{L}_{k,p}$.

Observação 2.0.4 *Desde que $(\partial\Delta_{k-1})^p$ é métrico (pois cada $\partial\Delta_{k-1}$ é métrico), então se considerarmos em $L_{k,p}$ a métrica induzida de $(\partial\Delta_{k-1})^p$, segue que $L_{k,p}$ é métrico e consequentemente normal.*

Teorema 2.0.8 *Sejam M um espaço normal, $k \in \mathbb{N}$, p um número primo, $f : M \longrightarrow M$ uma $\mathbb{Z}_p$-ação livre e $M_1, M_2, \ldots, M_k \subset M$ subconjuntos fechados tais que $\cup_{i=1}^k M_i = M$ e $M_i \cap f(M_i) = \emptyset$ para $i = 1,\ldots,k$. Então, temos $g(M,f) \leq g(\widetilde{L}_{k,p}, \varphi_{k,p}) = g(L_{k,p}, \varphi_{k,p})$.*

Demonstração:

Nessas condições, pelo teorema 2.0.7, existe uma aplicação contínua $h : M \longrightarrow \partial\Delta_{k-1}$ tal que $h(M_i) \subset \Delta_{k-1:i}$ e

$$h(f(h^{-1}(\Delta_{k-1:i}))) \subset \bigcup_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} co\{[\Delta_{k-1}^K] | \{i\} \subset K \subset \{1,\ldots,k\}\backslash\{j\}\}.$$

Definamos $P : M \longrightarrow \widetilde{L}_{k,p}$ por

$$P(x) := (h(x), h(f(x)), \ldots, h(f^{p-1}(x))). \tag{2.11}$$

Observemos que P é equivariante, isto é, P é tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "P"'] & M \arrow[d, "P"] \\ \widetilde{L}_{k,p} \arrow[r, "\varphi_{k,p}"] & \widetilde{L}_{k,p} \end{tikzcd}$$

comuta.

De fato, se $x \in M$, então

$$\begin{aligned} (P \circ f)(x) &= P(f(x)) = (h(f(x)), h(f^2(x)), \ldots, h(f^p(x))) \\ &= (h(f(x)), h(f^2(x)), \ldots, h(f^{p-1}(x)), h(x)) \quad (2.12) \\ (\varphi_{k,p} \circ P)(x) &= \varphi_{k,p}(P(x)) = \varphi_{k,p}(h(x), h(f(x)), \ldots, h(f^{p-1}(x))) \\ &= (h(f(x)), h(f^2(x)), \ldots, h(f^{p-1}(x)), h(x)) \quad (2.13) \end{aligned}$$

Logo, pelo lema 2.0.9, segue que $g(M, f) \leq g(\widetilde{L}_{k,p}, \varphi_{k,p}) \leq$ [2] $g(L_{k,p}, \varphi_{k,p})$.

Resta mostrar que $g(L_{k,p}, \varphi_{k,p}) \leq g(\widetilde{L}_{k,p}, \varphi_{k,p})$. Para isso, usaremos a mesma técnica aplicada acima para $(L_{k,p}, \varphi_{k,p})$. Consideremos então os seguintes subconjuntos de $L_{k,p}$,

$$\widehat{M_i} := \{(x_1, \ldots, x_p) \in L_{k,p} \ ; \ x_1 \in \Delta_{k-1;i}\}.$$

Notemos que, cada $\widehat{M_i}$ é fechado em $L_{k,p}$. Com efeito, consideremos a projeção na primeira coordenada $p_1 : L_{k,p} \longrightarrow \partial\Delta_{k-1}$, isto é, $p_1(x_1, \ldots, x_p) = x_1$. Portanto $\widehat{M_i}$ é fechado, desde que $\widehat{M_i}$ é a imagem inversa de $\Delta_{k-1;i}$ por p_1, o qual é fechado em $\partial\Delta_{k-1}$. Além disso, para cada $x \in L_{k,p}$, $x_1 \in \partial\Delta_{k-1} := \cup_{i=1}^{k} \Delta_{k-1;i}$. Logo, $x_1 \in \Delta_{k-1;i}$ para algum $i \in \{1, \ldots, k\}$ e consequentemente $x \in \widehat{M_i}$. Assim, $L_{k,p} = \cup_{i=1}^{k} \widehat{M_i}$.

Ainda, se existisse $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \widehat{M_i} \cap \varphi_{k,p}(\widehat{M_i})$ então $x_1 \in \Delta_{k-1;i}$ e $x = \varphi_{k,p}(y)$ com $y = (y_1, \ldots, y_p) \in \widehat{M_i}$. Logo, $x_1 = y_2$ o que implica que

[2] segue também pelo lema 2.0.9, pois a inclusão de $\widetilde{L}_{k,p}$ em $L_{k,p}$ é equivariante

$y_2 \in \Delta_{k-1;i}$. Ora, isso contradiz o fato de $y \in L_{k,p}$, ou seja, $y_1 \in \Delta_{k-1;i}$(observe que $y \in \widehat{M_i}$). Segue então que $\widehat{M_i} \cap \varphi_{k,p}(\widehat{M_i}) = \emptyset$ para todo $i = 1, \ldots, k$.

Já que $L_{k,p}$ é normal (veja a observação 2.0.4) e os $\widehat{M_i}$ satisfazem às hipóteses do teorema 2.0.7, então existe uma função $h' : L_{k,p} \longrightarrow \partial\Delta_{k-1}$ contínua, tal que

$$h'(\widehat{M_i}) \subset \Delta_{k-1;i} \ \text{ para todo } \ i = 1, \ldots, k \tag{2.14}$$

$$h'(\varphi_{k,p}((h')^{-1}(\Delta_{k-1:i}))) \subset \bigcup_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} co\{[\Delta_{k-1}^{K}] | \{i\} \subset K \subset \{1, \ldots, k\} \backslash \{j\}\} \tag{2.15}$$

Podemos assim, definir a função contínua $P' : L_{k,p} \longrightarrow \widetilde{L}_{k,p}$ por

$$P'(x) := (h'(x), h'(\varphi_{k,p}(x)), \ldots, h'(\varphi_{k,p}^{p-1}(x)))$$

Precisamos verificar se P' está bem definida, isto é, que $P'(x) \in \widetilde{L}_{k,p}$ qualquer que seja $x \in L_{k,p}$. Para isso, dada uma m-ésima coordenada x_m de x a qual pertence a $\Delta_{k-1;i}$ para algum $i = 1, 2, \ldots, k$, devemos provar que a n-ésima coordenada x_n de x tal que $n \equiv m + 1(mod\ p)$ pertence ao conjunto $\bigcup_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} co\{[\Delta_{k-1}^{K}] | \{i\} \subset K \subset \{1, \ldots, k\} \backslash \{j\}\}$.

Observemos que cada coordenada de $P'(x)$ é da forma $h'(\varphi_{k,p}^{j}(x))$ com $0 \leq j \leq p-1$. Suponhamos então que $h'(\varphi_{k,p}^{j}(x)) \in \Delta_{k-1;i}$ seja a m-ésima coordenada de $P'(x)$, para algum $i \in \{1, \ldots, k\}$. Então da definição de P' concluimos que $h'(\varphi_{k,p}^{j+1}(x))$ é a n-ésima coordenada de $P'(x)$. Assim, considerando (2.15) e como $h'(\varphi_{k,p}^{j+1}(x)) = h'(\varphi_{k,p}(\varphi_{k,p}^{j}(x))$, basta então provarmos que $\varphi_{k,p}^{j}(x) \in (h')^{-1}(\Delta_{k-1;i})$. Mas isso segue direto do fato de que $h'(\varphi_{k,p}^{j}(x)) \in \Delta_{k-1;i}$, isto é, $\varphi_{k,p}^{j}(x) \in (h')^{-1}(\Delta_{k-1;i})$ e portanto,

$$h'(\varphi_{k,p}^{j+1}(x)) \in \bigcup_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} co\{[\Delta_{k-1}^{K}] | \{i\} \subset K \subset \{1, \ldots, k\} \backslash \{j\}\}$$

mostrando assim que $(h'(x), h'(\varphi_{k,p}(x)), \ldots, h'(\varphi_{k,p}^{p-1}(x))) \in \widetilde{L}_{k,p}$. Logo, P' está bem definida.

Ainda,

$$\begin{aligned}
(P' \circ \varphi_{k,p})(x) &= P'(\varphi_{k,p}(x)) = (h'(\varphi_{k,p}(x)), h'(\varphi_{k,p}^2(x)), \ldots, h'(\varphi_{k,p}^p(x))) \\
&= (h'(\varphi_{k,p}(x)), h'(\varphi_{k,p}^2(x)), \ldots, h'(\varphi_{k,p}^{p-1}(x)), h'(x)) \\
(\varphi_{k,p} \circ P')(x) &= \varphi_{k,p}(P'(x)) = \varphi_{k,p}(h'(x), h'(\varphi_{k,p}(x)), \ldots, h'(\varphi_{k,p}^{p-1}(x))) \\
&= (h'(\varphi_{k,p}(x)), h'(\varphi_{k,p}^2(x)), \ldots, h'(\varphi_{k,p}^{p-1}(x)), h'(x))
\end{aligned}$$

Logo, $P' \circ \varphi_{k,p} = \varphi_{k,p} \circ P'$. Então, novamente pelo lema 2.0.9, temos $g(L_{k,p}, \varphi_{k,p}) \leq g(\widetilde{L}_{k,p}, \varphi_{k,p})$.

$\square$

Assim, para que tenhamos uma estimativa do genus de M com a ação f, basta então que calculemos o valor de $g(L_{k,p}, \varphi_{k,p})$. Desde que, $L_{k,p}$ é um subconjunto de $(\partial\Delta_{k-1})^p$ e cada $\partial\Delta_{k-1}$ é homeomorfo a S^{k-2}, logo, a menos de homeomorfismos, temos $L_{k,p} \subset \underbrace{S^{k-2} \times \cdots \times S^{k-2}}_{p\ vezes}$, e portanto um primeiro passo para que possamos estimar o genus de $L_{k,p}$ seria então calcular o valor de $g(S^{k-2} \times \cdots \times S^{k-2}, \varphi_{k,p})$ (observemos que $\varphi_{k,p}$ gera uma $\mathbb{Z}_p$-ação livre sobre $S^{k-2} \times \cdots \times S^{k-2}$).

Portanto, consideremos o seguinte resultado, cuja prova pode ser encontrada em [2]

Teorema 2.0.9 *Seja M uma $n-$variedade topológica conexa por caminhos, isto é, M é um espaço de Hausdorff com base enumerável conexo por caminhos, tal que para cada ponto $p \in M$ existe uma vizinhança aberta de p que é homeomorfa a um aberto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Se $f : M \longrightarrow M$ gera uma $\mathbb{Z}_p$-ação livre em M, então $g(M, f) \leq n + 1$.*

Observemos ainda que, se M_i é uma n_i-variedade topológica, $i = 1,\ldots,k$, então $M_1 \times \ldots \times M_k$ é uma $(n_1 + \cdots + n_k)$-variedade topológica. Além disso, verifica-se que que S^{k-2} é uma $(k-2)$-variedade topológica. Logo, pelo teorema anterior, temos $g(S^{k-2} \times \cdots \times S^{k-2}, \varphi_{k,p}) \leq p(k-2)+1$.

O fato acima, juntamente com teorema 2.0.8, produz o seguinte

Corolário 2.0.2 *Sejam M um espaço normal, $k \in \mathbb{N}$, p um número primo, $f : M \longrightarrow M$ uma $\mathbb{Z}_p$-ação livre e $M_1, M_2, \ldots, M_k \subset M$ subconjuntos fechados tais que $\cup_{i=1}^k M_i = M$ e $M_i \cap f(M_i) = \emptyset$ para $i = 1,\ldots,k$. Então, temos $g(M,f) \leq p(k-2)+1$.*

Entretanto, essa parece ser uma estimativa um pouco distante do que se espera. Como prova disso, daremos no capítulo seguinte, uma outra estimativa de $g(L_{k,p}, \varphi_{k,p})$ a qual melhora a que acabamos de fornecer, mas que ainda parece não ser a melhor possível.

Cabe ainda uma última observação a respeito do teorema 2.0.8. O espaço $\widetilde{L}_{k,p}$ pode ser descrito da seguinte forma:

$$\widetilde{L}_{k,p} = \bigcap_{j=1}^{p} (\cup_{i=1}^k (p_j^{-1}(\Delta_{k-1;i}) \cap p_{j+1}^{-1}(C_i)))$$

sendo $p_j : (\partial\Delta_{k-1})^p \longrightarrow \partial\Delta_{k-1}$ a projeção sobre a j-ésima coordenada e

$$C_i = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} co\{[\Delta_{k-1}^K] | \{i\} \subset K \subset \{1,\ldots,k\} \backslash \{j\}\}$$

(quando $j = p$ consideramos $j+1 = 1$).

Como cada $\Delta_{k-1;i}$ e C_i são fechados em $\partial\Delta_{k-1}$ para $i = 1,\ldots,k$ e cada p_j é contínua ($j = 1,\ldots,p$), segue que $\widetilde{L}_{k,p}$ é fechado em $(\partial\Delta_{k-1})^p \approx \underbrace{S^{k-2} \times \ldots \times S^{k-2}}_{p}$ o qual é compacto, portanto $\widetilde{L}_{k,p}$ é compacto.

Assim, a estimativa para o genus de (M,f) no teorema 2.0.8 não pode ser melhorada se restringirmos a classe dos espaços normais para a classe dos espaços compactos.

Capítulo 3

Estimativas para $g(L_{k,p}, \varphi_{k,p})$

Vimos no capítulo 2 que dado um espaço M, uma função $f : M \longrightarrow M$ que gera uma $\mathbb{Z}_p$-ação livre e fechados $M_1, M_2, \ldots, M_k$ que cobrem M satisfazendo $M_i \cap f(M_i) = \emptyset$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$, então $g(M, f) \leq g(L_{k,p}, \varphi_{k,p})$ (teorema 2.0.8). Logo, um próximo passo no sentido de estimar o genus de M seria calcular o valor de $g(L_{k,p}, \varphi_{k,p})$. Entretanto, o cálculo do genus de $L_{k,p}$ com a ação $\varphi_{k,p}$ em alguns casos não é muito fácil.

Apenas para $k = 3$ ou $p = 2$ sabemos calcular o valor exato de $g(L_{k,p}, \varphi_{k,p})$. Para os demais casos, temos a estimativa

$$g(L_{k,p}, \varphi_{k,p}) \leq \frac{p-1}{2}(k-3) + \begin{cases} 1 & \text{se} \quad p = 3 \\ 2 & \text{se} \quad p \geq 5 \end{cases}$$

a qual parece não ser a melhor possível. Um melhoramento dessa estimativa, para $p = 7$, é dada em [18] e [2].

Vale ressaltar que estamos considerando aqui a definição do genus e também de alguns conjuntos que utilizaremos, como dadas no capítulo 2. Além disso, em todo o capítulo consideraremos $[0, 1] = I$.

Teorema 3.0.10 *Seja $k \in \mathbb{N}$. Então $g(L_{k,2}, \varphi_{k,2}) = k - 1$.*

Demonstração:

Primeiramente, exibiremos uma cobertura de $L_{k,2}$ com $k-1$ fechados cada um satisfazendo a propriedade do genus, o que nos permitirá concluir que $g(L_{k,2}, \varphi_{k,2}) \leq k - 1$

Consideremos os fechados $M_i = \{(x_1, x_2) \in L_{k,2}\ ;\ x_1 \in \Delta_{k-1;i}\}$ para $i = 1, \ldots, k$. Observamos que, pela definição de $L_{k,2}$, x_1 e x_2 não podem pertencer ao mesmo $\Delta_{k-1;i}$, logo $M_i \cap \varphi_{k,2}(M_i) = \emptyset$. Portanto, $M_k \subset \cup_{i=1}^{k-1} \varphi_{k,2}(M_i)$ e daí

$$L_{k,2} = \cup_{i=1}^{k} M_i = \cup_{i=1}^{k-1} M_i \cup M_k \subseteq \cup_{i=1}^{k-1} (M_i \cup \varphi_{k,2}(M_i)) \tag{3.1}$$

Mostremos que cada $G_i = M_i \cup \varphi_{k,2}(M_i)$ é um elemento de $C(L_{k,2}, \varphi_{k,2})$ conforme a definição 2.0.9. De fato, para cada $i = 1, \ldots, k-1$ definamos

$$G_i^0 = M_i \quad e \quad G_i^1 = \varphi_{k,2}(M_i) \tag{3.2}$$

É obvio que $\varphi_{k,2}(G_i^0) = G_i^1$. Além disso, $\emptyset = M_i \cap \varphi_{k,2}(M_i) = G_i^0 \cap G_i^1$. Portanto, segue que cada $G_i = M_i \cup \varphi_{k,2}(M_i) \in C(L_{k,2}, \varphi_{k,2})$ e daí $g(L_{k,2}, \varphi_{k,2}) \leq k - 1$.

Para mostrarmos que $g(L_{k,2}, \varphi_{k,2}) \geq k - 1$, basta considerarmos o seguinte resultado (c.f [5] ou [1])

Lema 3.0.10 *A esfera S^{k-2} pode ser coberta por k fechados $M_1, \ldots, M_k$ tais que $M_i \cap (-M_i) = \emptyset$ para $i = 1, \ldots, k$.*

Mas, já sabemos do lema 2.0.6 que $g(S^{k-2}, -id_{S^{k-2}}) = k-1$ e daí, pelo teorema 2.0.8 juntamente com o lema acima, concluimos que $g(L_{k,2}, \varphi_{k,2}) \geq g(S^{k-2}, -id_{S^{k-2}}) = k - 1$.

$\square$

No teorema que segue, calculamos o valor do $g(L_{k,p}, \varphi_{k,p})$ para $k = 3$. Consideraremos $p \geq 3$, pois para $p = 2$ já temos a estimativa dada no teorema 3.0.10. Antes, consideremos os seguintes resultados.

Lema 3.0.11 *Seja M um espaço de Hausdorff e $f : M \longrightarrow M$ uma $\mathbb{Z}_p$-ação livre, com p primo. Suponhamos que $g(M, f) = m$. Então existe um subconjunto N de M tal que $f(N) = N$ e $g(N, f|_N) = m - 1$.*

Demonstração:

Desde que $g(M, f) = m$, então existem $F^1, \ldots, F^m$ fechados tais que $M = \cup_{i=1}^m F^i$, $F^i = \cup_{j=0}^{p-1} F_j^i$, $f^j(F_0^i) = F_j^i$ para cada $i = 1, \ldots, m$ e para $j = 0, \ldots, p-1$, onde $F_0^i, F_1^i, \ldots, F_{p-1}^i$ são fechados disjuntos.

Seja então $N = \cup_{i=1}^{m-1} F^i$. Afirmamos que $g(N, f) = m - 1$.

De fato, notemos que, $f(N) = f(\cup_{i=1}^{m-1} F^i) = \cup_{i=1}^{m-1} f(F^i) = \cup_{i=1}^{m-1} F^i = N$. Logo, segue imediatamente das definições de N e do genus, que $g(N, f) \leq m - 1$.

Agora, suponhamos que $g(N, f) = k < m-1$. Logo, existem $G^1, \ldots, G^k$ fechados tais que $N = \cup_{i=1}^k G^i$, onde cada G^i é coberto por p fechados disjuntos $G_0^i, \ldots, G_{p-1}^i$ satisfazendo $f^j(G_0^i) = G_j^i$. Como $M = N \cup F^m$, então $G^1, \ldots, G^k, F^m$ é uma coleção de conjuntos em $C(M, f)$ que cobre M e portanto $g(M, f) \leq k+1 < m$, o que é absurdo. Temos então que $g(N, f) = m-1$.

□

Lema 3.0.12 *Sejam M um espaço de Hausdorff e $f : M \longrightarrow M$ uma $\mathbb{Z}_p$-ação livre. Suponhamos que existam $M_1, \ldots, M_k$ subconjuntos (não vazios) fechados disjuntos do espaço M os quais são invariantes por f e cobrem M. Então, se $g(M_i, f) \leq 2$ para cada $i = 1, \ldots, k$, temos $g(M, f) \leq 2$.*

Demonstração:

Temos aqui três possíveis casos. Primeiro suponhamos que para todo $i = 1, \ldots, k$, $g(M_i, f) = 1$. Então, para cada i, existem subconjuntos $G_i^0, G_i^1, \ldots, G_i^{p-1}$ de M_i fechados e disjuntos tais que

- $M_i = \cup_{j=0}^{p-1} G_i^j$
- $f^j(G_i^0) = G_i^j$ para $j = 1, \ldots, p-1$

Ainda, desde que os M_i's são disjuntos então $G_{i_1}^j \cap G_{i_2}^j = \emptyset$ para todo $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, k\}$ e $i_1 \neq i_2$. Portanto, se definirmos $W^m = \cup_{i=1}^k G_i^m$ com $m = 0, 1, \ldots, p-1$, segue então que

$$\begin{aligned} W^{m_1} \cap W^{m_2} &= (\cup_{i=1}^k G_i^{m_1}) \cap (\cup_{j=1}^k G_j^{m_2}) \\ &= \cup_{i=1}^k [G_i^{m_1} \cap (\cup_{j=1}^k G_j^{m_2})] \\ &= \cup_{i=1}^k [\cup_{j=1}^k \underbrace{(G_i^{m_1} \cap G_j^{m_2})}_{\emptyset}] = \emptyset \end{aligned}$$

Além disso, como $f^j(G_i^0) = G_i^j$ para todo $j = 1, \ldots, p-1$, então

$$f^j(W^0) = f^j(\cup_{i=1}^k G_i^0) = \cup_{i=1}^k f^j(G_i^0) = \cup_{i=1}^k G_i^j = W^j$$

Portanto, $W = \cup_{m=0}^{p-1} W^m \in C(M, f)$ e cobre M pois $M = \cup_{i=1}^k M_i$. Logo, $g(M, f) = 1$ (notemos que M é não vazio).

Analogamente, se $g(M_i, f) = 2$ para todo $i = 1, \ldots, k$, podemos construir uma cobertura como fizemos no caso anterior, mas agora com dois fechados $W_1 = \cup_{m=0}^{p-1} W_1^m$ e $W_2 = \cup_{m=0}^{p-1} W_2^m$ onde $W_1^m = \cup_{i=1}^k G_{(1,i)}^m$ e $W_2^m = \cup_{i=1}^k G_{(2,i)}^m$. Portanto, $g(M, f) \leq 2$.

Agora suponhamos, sem perda de generalidade, que $g(M_i, f) = 1$ para $i = 1, \ldots, l$ e $g(M_i, f) = 2$ para os demais $i = l+1, \ldots, k$. Logo, temos l fechados $G_1, \ldots, G_l$ tais que, para cada $i = 1, \ldots, l$

- $G_i = \cup_{j=0}^{p-1} G_i^j$ e $f^j(G_i^0) = G_i^j$

- $M_i = G_i$ e $G_i^{j_1} \cap G_i^{j_2} = \emptyset$ para $j_1, j_2 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ e $j_1 \neq j_2$,

- G_i^j são fechados em $G_i = M_i$, $\forall\, j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$.

Além disso, como $g(M_i, f) = 2$, para cada $i = l+1, \ldots, k$, existem dois fechados $W_{(i,1)}$ e $W_{(i,2)}$ tais que $M_i = W_{(i,1)} \cup W_{(i,2)}$ e ainda

- $W_{(i,s)} = \cup_{t=0}^{p-1} W_{(i,s)}^t$ para $s = 1, 2$ e $i = l+1, \ldots, k$,

- $W_{(i,s)}^{t_1} \cap W_{(i,s)}^{t_2} = \emptyset$ para $t_1, t_2 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $t_1 \neq t_2$ e $f^t(W_{(i,s)}^0) = W_{(i,s)}^t$ com $s = 1, 2$ e $t = 1, \ldots, p-1$,

- $W_{(i,s)}^t$ é fechado em $W_{(i,s)}$ para todo $t \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $i \in \{l+1, \ldots, k\}$ e $s \in \{1, 2\}$.

Assim, definamos para $r = 0, 1, \ldots, p-1$

$$\begin{aligned} A_1^r &= (\cup_{i=1}^{l} G_i^r) \cup (\cup_{i=l+1}^{k} W_{(i,1)}^r) \\ A_2^r &= \cup_{i=l+1}^{k} W_{(i,2)}^r \end{aligned}$$

Logo, se chamarmos de $A_1 = \cup_{r=0}^{p-1} A_1^r$ e $A_2 = \cup_{r=0}^{p-1} A_2^r$ então certamente $M = A_1 \cup A_2$. Ainda, como os M_i's são disjuntos e temos $G_i^{j_1} \cap G_i^{j_2} = \emptyset$ para $j_1, j_2 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $j_1 \neq j_2$ e $W_{(i,s)}^{t_1} \cap W_{(i,s)}^{t_2} = \emptyset$ para $t_1, t_2 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $t_1 \neq t_2$, segue que

$$\begin{aligned} A_1^{r_1} \cap A_1^{r_2} &= [(\cup_{i=1}^{l} G_i^{r_1}) \cup (\cup_{i=l+1}^{k} W_{(i,1)}^{r_1})] \cap [(\cup_{i=1}^{l} G_i^{r_2}) \cup (\cup_{i=l+1}^{k} W_{(i,1)}^{r_2})] \\ &= \{[(\cup_{i=1}^{l} G_i^{r_1}) \cup (\cup_{i=l+1}^{k} W_{(i,1)}^{r_1})] \cap (\cup_{i=1}^{l} G_i^{r_2})\} \cup \\ &\quad \cup \{[(\cup_{i=1}^{l} G_i^{r_1}) \cup (\cup_{i=l+1}^{k} W_{(i,1)}^{r_1})] \cap (\cup_{i=l+1}^{k} W_{(i,1)}^{r_2})\} \\ &= [(\cup_{i=1}^{l} G_i^{r_1}) \cap (\cup_{i=1}^{l} G_i^{r_2})] \cup [(\cup_{i=l+1}^{k} W_{(i,1)}^{r_1}) \cap (\cup_{i=1}^{l} G_i^{r_2})] \cup \\ &\quad \cup [(\cup_{i=1}^{l} G_i^{r_1}) \cap (\cup_{i=l+1}^{k} W_{(i,1)}^{r_2})] \cup [(\cup_{i=l+1}^{k} W_{(i,1)}^{r_1}) \cap (\cup_{i=l+1}^{k} W_{(i,1)}^{r_2})] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{\cup_{i=1}^{l}[\cup_{i=1}^{l}(G_i^{r_1} \cap G_i^{r_2})]\} \cup \{\cup_{i=l+1}^{k}[\cup_{i=1}^{l}(W_{(i,1)}^{r_1} \cap G_i^{r_2})]\} \cup \\
&\quad \cup\{\cup_{i=1}^{l}[\cup_{i=l+1}^{k}(G_i^{r_1} \cap W_{(i,1)}^{r_2})]\} \cup \{\cup_{i=l+1}^{k}[\cup_{i=l+1}^{k}(W_{(i,1)}^{r_1} \cap W_{(i,1)}^{r_2})]\} \\
&= \emptyset
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
A_2^{r_1} \cap A_2^{r_2} &= (\cup_{i=l+1}^{k} W_{(i,2)}^{r_1}) \cap (\cup_{i=l+1}^{k} W_{(i,2)}^{r_2}) \\
&= \cup_{i=l+1}^{k}[\cup_{i=l+1}^{k}(\underbrace{W_{(i,2)}^{r_1} \cap W_{(i,2)}^{r_2}}_{\emptyset})] = \emptyset
\end{aligned}
$$

para todo $r_1, r_2 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ e $r_1 \neq r_2$.

Além disso, desde que $f^j(G_i^0) = G_i^j$ e $f^t(W_{(i,s)}^0) = W_{(i,s)}^t$ para $s = 1, 2$ e $j, t = 1, \ldots, p-1$, então para todo $r = 1, \ldots, p-1$ temos

$$
\begin{aligned}
f^r(A_1^0) &= f^r((\cup_{i=1}^{l} G_i^0) \cup (\cup_{i=l+1}^{k} W_{(i,1)}^0)) = f^r(\cup_{i=1}^{l} G_i^0) \cup f^r(\cup_{i=l+1}^{k} W_{(i,1)}^0) \\
&= (\cup_{i=1}^{l} f^r(G_i^0)) \cup (\cup_{i=l+1}^{k} f^r(W_{(i,1)}^0)) = (\cup_{i=1}^{l} G_i^r) \cup (\cup_{i=l+1}^{k} W_{(i,1)}^r) \\
&= A_1^r \\
f^r(A_2^0) &= f^r(\cup_{i=l+1}^{k} W_{(i,2)}^0) = \cup_{i=l+1}^{k} f^r(W_{(i,2)}^0) = \cup_{i=l+1}^{k} W_{(i,2)}^r = A_2^r
\end{aligned}
$$

Segue portanto que $g(M, f) \leq 2$ □

Observação 3.0.5 *Provamos no lema acima que $g(M, f) \leq 2$ supondo que $g(M_i, f) \leq 2$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Contudo, esse resultado vale de maneira mais geral da seguinte forma*

Proposição 3.0.1 *Sejam M um espaço de Hausdorff e $f : M \longrightarrow M$ uma $\mathbb{Z}_p$-ação livre. Suponhamos que existam $M_1, \ldots, M_k$ subconjuntos (não vazios) fechados disjuntos do espaço M os quais são invariantes por f e cobrem M. Então, se $g(M_i, f) \leq n$ para cada $i = 1, \ldots, k$, temos $g(M, f) \leq n$.*

A prova dessa proposição é dada de maneira análoga ao que fizemos no lema 3.0.12, considerando o fato de que se $g(M_i, f) \leq n$, então para qualquer $m \geq n$ podemos construir uma cobertura com m fechados a qual ainda satisfaz as propriedades do genus.

Teorema 3.0.11 *Seja p um número primo. Então*

$$g(L_{3,p}, \varphi_{3,p}) = \begin{cases} 1 & se \;\; p = 3 \\ 2 & se \;\; p \geq 5 \end{cases}$$

Demonstração:

Primeiramente, seja $p = 3$. Por definição, temos que

$$\begin{aligned} L_{3,3} &= \{(x_1, x_2, x_3) \in (\partial\Delta_2)^3 \;:\; Se \;\; m, n \in \{1,2,3\}, n \equiv m + 1 (mod\ 3) \\ &\quad e \;\; x_m \in \Delta_{2;i}, \text{ então } x_n \notin \Delta_{2;i}\} \end{aligned}$$

É facil ver que $L_{3,3} \neq \emptyset$, por exemplo, o ponto $([\Delta_{2;3}], [\Delta_{2;1}], [\Delta_{2;2}])$ pertence a $L_{3,3}$. Portanto, $g(L_{3,3}, \varphi_{3,3}) \geq 1$.

Consideremos o conjunto

$$M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in L_{3,3} \;:\; x_1 \in \Delta_{2;1}\}$$

Agora, tomemos $x = (x_1, x_2, x_3) \in L_{3,3}$. Então $x_1 \in \Delta_{2;i}$ para algum $i = 1, 2, 3$. Afirmamos que M_1 contem apenas um dos pontos x, $\varphi_{3,3}(x)$, $\varphi_{3,3}^2(x)$. De fato, suponhamos que $x \in M_1$, logo $x_1 \in \Delta_{2;1}$. Portanto, pela definição do conjunto $L_{3,3}$, x_2 e x_3 não podem pertencer a $\Delta_{2;1}$ e daí $\varphi_{3,3}(x), \varphi_{3,3}^2(x) \notin M_1$. Agora, se $x \notin M_1$ então x_2 ou x_3 pertence a $\Delta_{2:1}$

- Se $x_2 \in \Delta_{2:1}$ então $x_1, x_3 \notin \Delta_{2:1}$. Logo, somente $\varphi_{3,3}(x) \in M_1$

- Se $x_3 \in \Delta_{2:1}$ então $x_1, x_2 \notin \Delta_{2:1}$. Logo, somente $\varphi^2_{3,3}(x) \in M_1$

Segue então que $\varphi^i_{3,3}(M_1) \cap \varphi^j_{3,3}(M_1) = \emptyset$ para $i, j \in \{0, 1, 2\}$ e $i \neq j$. Além disso, claramente $L_{3,3} = \cup_{i=0}^2 \varphi^i_{3,3}(M_1)$. Assim, pela definição do genus, temos $g(L_{3,3}, \varphi_{3,3}) \leq 1$. Portanto, $g(L_{3,3}, \varphi_{3,3}) = 1$.

Agora, seja $p \geq 5$. Para mostrarmos que $g(L_{3,p}, \varphi_{3,p}) \geq 2$, consideremos a $\mathbb{Z}_p$-ação livre $f : S^1 \longrightarrow S^1$ dada por $f(z) = e^{\frac{p-1}{p}\pi i}z$ (veja exemplo 1.0.7). Para $j = 1, 2, 3$, definamos

$$M_j = \{e^{\alpha i} \ ; \ 2\pi(j-1)/3 \leq \alpha \leq 2\pi j/3\}$$

Observemos que, os M_j formam uma cobertura de S^1 por três fechados. Além disso, para todo $j = 1, 2, 3$, dado $x = e^{\alpha i} \in M_j$ a dinâmica da ação f é de somar o ângulo $\frac{p-1}{p}\pi$ a α, isto é, uma rotação do ângulo $\frac{p-1}{p}\pi$. Daí, como os arcos determinados pelos ângulos α compreendidos no intervalo $2\pi(j-1)/3 \leq \alpha \leq 2\pi j/3$ tem comprimento $\frac{2\pi}{3}$, então $f(x) \notin M_j$ para qualquer $x \in M_j$ desde que $\frac{(p-1)\pi}{p} > \frac{2\pi}{3}$ para todo $p \geq 5$ primo. Portanto, $M_j \cap f(M_j) = \emptyset$. Segue então do teorema 2.0.8 que $2 = g(S^1, f) \leq g(L_{3,p}, \varphi_{3,p})$.

Mostremos agora que $g(L_{3,p}, \varphi_{3,p}) \leq 2$. Para isso, construiremos uma cobertura finita de $L_{3,p}$ por fechados disjuntos invariantes por $\varphi_{3,p}$, tais que o genus de cada um desses fechados com a ação $\varphi_{3,p}$ é ≤ 2. Daí, pelo lema 3.0.12, teremos $g(L_{3,p}, \varphi_{3,p}) \leq 2$.

Assim, para cada $x = (x_1, \ldots, x_p) \in L_{3,p}$ definamos o conjunto

$$T_x = \{(a_1, \ldots, a_p) \in \{1, 2, 3\}^p \ ; \ x_j \in \Delta_{2;a_j} \text{ com } j = 1, \ldots, p\}$$

Ainda, para $a_i, a_j \in \{1, 2, 3\}$, $a_i \neq a_j$ e $i, j \in \{1, \ldots, p\}$, seja

$$r(a_i, a_j) = \begin{cases} 1 \ \text{ se } \ a_j \equiv a_i + 1 \ (mod\ 3) \\ 2 \ \text{ se } \ a_j \equiv a_i + 2 \ (mod\ 3) \end{cases}$$

e para cada $j \in \{1, \ldots, p\}$, consideremos

$$j^{+} = \begin{cases} j+1, & \text{se } \ j \leq p-1 \\ 1, & \text{se } \ j = p \end{cases} \qquad e \quad j^{-} = \begin{cases} j-1, & \text{se } \ j \geq 2 \\ p, & \text{se } \ j = 1 \end{cases}$$

Notamos que, qualquer que seja $x \in L_{3,p}$, o conjunto T_x é não vazio desde que cada coordenada x_i pertence a $\Delta_{2;j}$ para algum $j \in \{1, 2, 3\}$ e $i = 1, \ldots, p$. O que determina a cardinalidade de T_x é a quantidade de coordenadas de x que são vértices de $\partial\Delta_2$. Na pior das hipóteses, quando nenhuma das coordenadas de x é vértice de $\partial\Delta_2$, o cardinal de T_x é 1. Faz sentido então definirmos a função $v : L_{3,p} \longrightarrow \mathbb{N}$ por

$$v(x) = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{p} r(a_j, a_{j^+})$$

onde a p-upla $(a_1, \ldots, a_p)$ pertence a T_x. Mostremos então que a definição de v independe da escolha do elemento $(a_1, \ldots, a_p) \in T_x$. Suponhamos que $card\ T_x \geq 2$, pois para $card\ T_x = 1$ não temos problemas quanto a escolha do representante.

Sejam então $(a_1, \ldots, a_p), (b_1, \ldots, b_p) \in T_x$ e suponhamos que para os índices $j_1, \ldots, j_l \in \{1, \ldots, p\}$ com $j_1 < \ldots < j_l$ as coordenadas $a_{j_k} \neq b_{j_k}$, $k = 1, \ldots, l$ e para os demais $j \in \{1, \ldots, p\}$, $a_j = b_j$.

Seja x_{j_k} uma coordenada de x com $k = 1, \ldots, l$. Como $a_{j_k} \neq b_{j_k}$, $x_{j_k} \in \Delta_{2;a_{j_k}}$ e $x_{j_k} \in \Delta_{2;b_{j_k}}$ então necessariamente x_{j_k} está no vértice cuja face oposta é o simplexo determinado por $co\{e_{a_{j_k}}, e_{b_{j_k}}\}$. Seja e_m esse vértice. Portanto, $\Delta_{2;m} = co\{e_{a_{j_k}}, e_{b_{j_k}}\}$ e daí, concluimos da defincão de $L_{3,p}$ que $x_{j_k^-}$ e $x_{j_k^+}$ necessariamente pertencem a $\Delta_{2;m}$. Logo, temos $a_{j_k^-} = a_{j_k^+} = b_{j_k^-} = b_{j_k^+} = m$ para todo $j = 1, \ldots, l$.

Afirmação 3.0.2 $r(a_{j_k^-}, a_{j_k}) + r(a_{j_k}, a_{j_k^+}) = 3$, *para todo* $k = 1, \ldots, l$

Com efeito, suponhamos primeiro que $r(a_{j_k^-}, a_{j_k}) = 1$. Logo,

$$a_{j_k} \equiv a_{j_k^-} + 1 \ (mod\ 3) \quad \Rightarrow \quad a_{j_k^-} \equiv a_{j_k} - 1 \equiv a_{j_k} + 2 \ (mod\ 3).$$

Portanto, como $a_{j_k^-} = a_{j_k^+}$, temos $2 = r(a_{j_k}, a_{j_k^-}) = r(a_{j_k}, a_{j_k^+})$ implicando que $r(a_{j_k^-}, a_{j_k}) + r(a_{j_k}, a_{j_k^+}) = 3$. Analogamente, se $r(a_{j_k^-}, a_{j_k}) = 2$, segue que $a_{j_k^-} \equiv a_{j_k} - 2 \equiv a_{j_k} + 1 \ (mod\ 3)$, e então $1 = r(a_{j_k}, a_{j_k^-}) = r(a_{j_k}, a_{j_k^+})$. Logo, $r(a_{j_k^-}, a_{j_k}) + r(a_{j_k}, a_{j_k^+}) = 3$.

Seja agora $J = \{j_1^-, \ldots, j_l^-, j_1, \ldots, j_l\}$. Pela afirmação acima e considerando que para $j \in \{1, \ldots, p\} \setminus \{j_1, \ldots, j_l\}$, $a_j = b_j$, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{p} r(a_j, a_{j^+}) &= \frac{1}{3}\sum_{j\in\{1,\ldots,p\}\setminus J} r(a_j, a_{j^+}) + \frac{1}{3}\sum_{j\in J} r(a_j, a_{j^+}) \\
&= \frac{1}{3}\sum_{j\in\{1,\ldots,p\}\setminus J} r(a_j, a_{j^+}) + \frac{1}{3}(\underbrace{3 + 3 + \ldots + 3}_{l\ vezes}) \\
&= \frac{1}{3}\sum_{j\in\{1,\ldots,p\}\setminus J} r(a_j, a_{j^+}) + l \\
&= \frac{1}{3}\sum_{j\in\{1,\ldots,p\}\setminus J} r(b_j, b_{j^+}) + l \\
&= \frac{1}{3}\sum_{j\in\{1,\ldots,p\}\setminus J} r(b_j, b_{j^+}) + \frac{1}{3}\sum_{j\in J} r(b_j, b_{j^+}) = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{p} r(b_j, b_{j^+}).
\end{aligned}$$

Assim, para mostrarmos que v está bem definida, resta verificarmos que $v(x) \in \mathbb{N}$.

Antes observemos que, dados $x \in L_{3,p}$ e $(a_1, \ldots, a_p) \in T_x$ então $(a_2, \ldots, a_p, a_1) \in T_{\varphi_{3,p}(x)}$. Daí

$$\begin{aligned}
v(\varphi_{3,p}(x)) &= \frac{1}{3}(r(a_2, a_3) + \ldots + r(a_p, a_1) + r(a_1, a_2)) \\
&= \frac{1}{3}(r(a_1, a_2) + r(a_2, a_3) + \ldots + r(a_p, a_1)) \\
&= \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{p} r(a_j, a_{j^+}) = v(x).
\end{aligned}$$

Afirmação 3.0.3 *Para cada $x \in L_{3,p}$ temos $v(x) \in \mathbb{N}$ e $p/3 < v(x) < 2p/3$. Ainda, cada $W_n = v^{-1}(n)$ é fechado em $L_{3,p}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Com efeito, tomemos $x \in L_{3,p}$. Logo, para qualquer $(a_1, \ldots, a_p) \in T_x$, temos $v(x) = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{p} r(a_j, a_{j^+})$. Portanto, para mostrarmos que $v(x) \in \mathbb{N}$, basta verificarmos que $\sum_{j=1}^{p}(a_j, a_{j^+})$ é um múltiplo de 3. Mas, considerando a definição de $r(a_j, a_{j^+})$ e denotando por $\overline{x}$ a classe do inteiro x módulo 3, temos

$$\begin{aligned}
\overline{\sum_{j=1}^{p} r(a_j, a_{j^+})} &= \sum_{j=1}^{p} \overline{r(a_j, a_{j^+})} \\
&= \sum_{j=1}^{p} \overline{a_{j^+} - a_j} \\
&= \overline{a_2 - a_1} + \overline{a_3 - a_2} + \cdots + \overline{a_p - a_{p-1}} + \overline{a_1 - a_p} \\
&= \overline{a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + \cdots + a_p - a_{p-1} + a_1 - a_p} \\
&= \overline{0}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Segue então que $v(x) = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{p} r(a_j, a_{j^+})$ é um número natural. Além disso, observemos que não podemos ter $\sum_{j=1}^{p} r(a_j, a_{j^+}) = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{p \text{ vezes}} = p$ pois $v(x)$ é natural e $p \geq 5$ primo. Analogamente, $\sum_{j=1}^{p} r(a_j, a_{j^+}) \neq \underbrace{2 + \ldots + 2}_{p \text{ vezes}} = 2p$ desde que $3 \nmid 2p$ (isso também pode ser verificado através da definição de T_x). Portanto, certamente $p/3 < v(x) < 2p/3$.

Agora, queremos mostrar que $W_n \subset L_{3,p} \subset (\partial\Delta_2)^p$ é fechado. Para isso, mostraremos que o seu complementar $L_{3,p} \backslash W_n$ é aberto.

Assim, tomando $x = (x_1, \ldots, x_p) \in L_{3,p} \backslash W_n$ temos que $v(x) = m \neq n$. Suponhamos primeiro que nenhuma das coordenadas de x é vértice de $\partial\Delta_2$. Logo, $x_i \in \Delta_{2;a_i}$ para $i = 1, \ldots, p$ e consideremos $(a_1, \ldots, a_p) \in T_x$. Seja então $V_{x_i} = B(x_i, \varepsilon_i) \cap \partial\Delta_2$ uma vizinhança de x_i, onde ε_i é tomado suficientemente pequeno de forma que V_{x_i} esteja inteiramente contida em $\Delta_{2;a_i}$ para cada $i = 1, \ldots, p$. Portanto, $V_x = V_{x_1} \times \cdots \times V_{x_p}$ é uma vizinhança de x em $L_{3,p}$ que está inteiramente contida em $L_{3,p}\backslash W_n$. De fato, tomemos $y \in V_x \Rightarrow y_i \in V_{x_i}$ e daí $y_i \in \Delta_{2,a_i}$. Logo, $(a_1, \ldots, a_p) \in T_y \Rightarrow v(y) = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{p} r(a_j, a_{j^+}) = m \neq n$. Logo $V_x \subset L_{3,p}\backslash W_n$.

Agora, se algumas das coordenadas de x são vértices de $\partial\Delta_2$, digamos $x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}$, então consideremos a vizinhança de x_{i_k}, $U_{x_{i_k}} = B(x_{i_k}, \varepsilon_{x_{i_k}}) \cap \partial\Delta_2$ com $\varepsilon_{x_{i_k}}$ suficientemente pequeno de tal sorte que $U_{x_{i_k}} \cap \Delta_{2;a_{i_k}} = \emptyset$ para todo $k = 1, \ldots, l$. Observemos que, como x_{i_k} é vértice de $\partial\Delta_2$ então se chamarmos de $b^1_{i_k}$ e $b^2_{i_k}$ os vértices da face oposta a a_{i_k}, segue que $x_{i_k} \in \Delta_{2;b^1_{i_k}}$ e $x_{i_k} \in \Delta_{2;b^2_{i_k}}$. Logo $(a_1, \ldots, b^1_{i_1}, \ldots, b^1_{i_l}, \ldots, a_p)$ e $(a_1, \ldots, b^2_{i_1}, \ldots, b^2_{i_l}, \ldots, a_p)$ pertencem a T_x. Para os x_j tais que $j \in \{1, \ldots, p\}\backslash\{i_1, \ldots, i_l\}$ tomemos a vizinhança V_{x_j} como acima.

Assim, seja então U_x a vizinhança de x tal que nas i_k-ésimas "fatias" temos U_{i_k} para $k = 1, \ldots, l$ e nas demais V_{x_j}. Portanto se $y \in U_x$ então $y_j \in \Delta_{2;a_j}$ e $y_{i_k} \in \Delta_{2;b^1_{i_k}}$ ou $y_{i_k} \in \Delta_{2;b^2_{i_k}}$. Logo, $(a_1, \ldots, b^1_{i_1}, \ldots, b^1_{i_l}, \ldots, a_p)$, $(a_1, \ldots, b^2_{i_1}, \ldots, b^2_{i_l}, \ldots, a_p)$ pertencem a T_y, implicando que $v(y) = m \neq n$. Concluímos então que $L_{3,p}\backslash W_n$ é aberto e consequentemente W_n é fechado.

Bem, desde que $v(x) \in \mathbb{N}$ e $p/3 < v(x) < 2p/3$, temos então uma quantidade finita de conjuntos W_n de $L_{3,p}$ os quais são disjuntos e cobrem $L_{3,p}$. Além disso, $\varphi_{3,p}(W_n) = W_n$ pois $v(x) = v(\varphi_{3,p}(x))$ qualquer que seja $x \in L_{3,p}$. Mostraremos que $g(W_n, \varphi_{3,p}) \leq 2$ para todo $p/3 < n < 2p/3$ e consequentemente $g(L_{3,p}, \varphi_{3,p}) \leq 2$ (veja lema 3.0.12).

Suponhamos então, por absurdo, que exista algum n para o qual tenhamos $g(W_n, \varphi_{3,p}) \geq 3$. Tendo em vista o lema 3.0.11, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $g(W_n, \varphi_{3,p}) = 3$ pois, caso contrário, poderíamos substituir W_n por um subconjunto W'_n invariante por $\varphi_{3,p}$ e tal que $g(W'_n, \varphi_{3,p}) = 3$.

Seja $f : S^1 \longrightarrow S^1$ dada por $f(z) = e^{(\frac{2}{p}\pi i)n} z$. Como $p/3 < n < 2p/3$, segue sem dificuldades que f gera uma $\mathbb{Z}_p$-ação livre em S^1. Contruiremos uma função $P : W_n \longrightarrow S^1$ equivariante, o que nos permitirá concluir que $g(W_n, \varphi_{3,p}) \leq g(S^1, f) = 2$ (lema 2.0.9), contradizendo o fato do $g(W_n, \varphi_{3,p}) = 3$.

Seja $h : \partial\Delta_2 \longrightarrow S^1$ o homeomorfismo tal que

$$h(\Delta_{2;j}) = \{e^{\alpha i} \ ; \ \frac{2\pi(j-1)}{3} \leq \alpha \leq \frac{2\pi j}{3}\} \ \text{ para } \ j = 1, 2, 3$$

Como $g(W_n, \varphi_{3,p}) = 3$, existem fechados W^1, W^2 e W^3 que cobrem W_n tais que, para cada $j = 1, 2, 3$, existem fechados $W_0^j, \ldots, W_{p-1}^j$ satisfazendo:

- $W^j = \cup_{k=0}^{p-1} W_k^j$
- $\varphi_{3,p}^k(W_0^j) = W_k^j$ e $W_{k_1}^j \cap W_{k_2}^j = \emptyset$ para $k_1, k_2 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ e $k_1 \neq k_2$

Queremos definir uma homotopia $H : (W^1 \cup W^2 \cup W_0^3) \times I \longrightarrow S^1$. A idéia é construir H sobre determinados subconjuntos de $(W^1 \cup W^2 \cup W_0^3) \times I$ que possuem a propriedade de extensão de homotopia, o que ao final nos dará a definição de H desejada.

Comecemos então definindo

$$H(x,t) = \begin{cases} h(x_1) \text{ para } (x,t) \in [(W^1 \cup W^2 \cup W_0^3) \times \{0\}] \cup (W_0^1 \times I) \\ f^k(H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x), 1)) \text{ para } (x,t) \in W_k^1 \times \{1\}, \ k = 1, \ldots, p-1 \end{cases}$$

Observemos que, $[(W^1 \cup W^2 \cup W_0^3) \times \{0\}] \cup (W_0^1 \times I) \subset (W^1 \cup W^2 \cup W_0^3) \times I$ e além disso,

$$[(W^1 \cup W^2 \cup W_0^3) \times \{0\} \cup (W_0^1 \times I)] \cap (W_k^1 \times \{1\}) = \emptyset$$

para todo $k = 1, \ldots, p-1$. Portanto H está bem definida.

Ainda, $\varphi_{3,p}^k(W_0^1) = W_k^1$ e daí $\varphi_{3,p}^{p-k}(W_k^1) = W_0^1$ para $k = 1, \ldots, p-1$. Assim, $H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x), 1)) = h(x_{p+1-k})$, desde que $\varphi_{3,p}^{p-k}(x) = (x_{p+1-k}, \ldots, x_{p-k})$

para todo $x \in W_k^1$. Logo,

$$f^k(H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x),1)) = f^k(h(x_{p+1-k})) = e^{(\frac{2}{p}\pi i)nk}h(x_{p+1-k}) \tag{3.4}$$

Afirmação 3.0.4 *Para todo $x \in W^1$ a aplicação $H_1(x) := H(x,1)$ é equivariante.*

Primeiramente, observemos que se $x \in W^1 = \cup_{k=0}^{p-1} W_k^1$, então $x \in W_k^1$ para algum $k = 0,1,\ldots,p-1$. Assim, $\varphi_{3,p}(x) \in \varphi_{3,p}(W_k^1) = W_{k+1}^1$ (para $k = p-1$, $\varphi_{3,p}(W_k^1) = W_0^1$) e portanto $\varphi_{3,p}(W^1) \subseteq W^1$. Por outro lado, se $x \in W_k^1 = \varphi_{3,p}(\varphi_{3,p}^{k-1}(W_0^1)) = \varphi_{3,p}(W_{k-1}^1)$, então $x = \varphi_{3,p}(y)$ com $y \in W_{k-1}^1$, isto é, $x \in W^1$ e daí $W^1 \subseteq \varphi_{3,p}(W^1)$. Logo, $\varphi_{3,p}(W^1) = W^1$ e daí $\varphi_{3,p}$ gera uma $\mathbb{Z}_p$-ação livre sobre W^1.

Agora, para mostrarmos que H_1 é equivariante em W^1, temos os seguintes casos.

- Se $x \in W_0^1$ então $\varphi_{3,p}(x) \in \varphi_{3,p}(W_0^1) = W_1^1$. Logo

$$\begin{aligned}
f \circ H_1(x) &= f(H(x,1)) = f(h(x_1)) = e^{(\frac{2}{p}\pi i)n}h(x_1) \\
H_1 \circ \varphi_{3,p}(x) &= H_1(\varphi_{3,p}(x)) = H(\varphi_{3,p}(x),1) = f(H(\varphi_{3,p}^{p-1}(\varphi_{3,p}(x)),1)) = \\
&= f(H(\varphi_{3,p}^{p}(x),1)) = f(H(x,1)) = f(h(x_1)) = e^{(\frac{2}{p}\pi i)n}h(x_1)
\end{aligned}$$

- Para $x \in W_{p-1}^1$, temos

$$\begin{aligned}
f \circ H_1(x) &= f(H(x,1)) = f(f^{p-1}(H(\varphi_{3,p}^{p-p+1}(x),1))) = \\
&= f^p(H(\varphi_{3,p}(x),1)) = H(\varphi_{3,p}(x),1) = h(x_2) \\
H_1 \circ \varphi_{3,p}(x) &= H_1(\varphi_{3,p}(x)) = H(\varphi_{3,p}(x),1) = h(x_2)
\end{aligned}$$

desde que, $\varphi_{3,p}(W_{p-1}^1) = W_0^1$.

- Agora, para $x \in W_k^1$ com $k = 1, \ldots, p-2$, temos que $\varphi_{3,p}(W_k^1) = \varphi_{3,p}^{k+1}(W_0^1) = W_{k+1}^1$. Assim,

$$\begin{aligned}
f \circ H_1(x) &= f(H(x,1)) = f(f^k(H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x),1))) = \\
&= f^{k+1}(h(x_{p+1-k})) = e^{(\frac{2}{p}\pi i)n(k+1)}h(x_{p+1-k}) \\
H_1 \circ \varphi_{3,p}(x) &= H_1(\varphi_{3,p}(x)) = H(\varphi_{3,p}(x),1) = \\
&= f^{k+1}(H(\varphi_{3,p}^{p-k-1}(\varphi_{3,p}(x)),1)) = f^{k+1}(H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x),1)) = \\
&= f^{k+1}(h(x_{p+1-k})) = e^{(\frac{2}{p}\pi i)n(k+1)}h(x_{p+1-k}).
\end{aligned}$$

Portanto, $(f \circ H_1)(x) = (H_1 \circ \varphi_{3,p})(x)$ qualquer que seja $x \in W^1$.

Definamos agora a função $d_1 : W^1 \times I \longrightarrow (0, 2\pi)$ por

$$d_1(x,t) := \begin{cases} \arg(\frac{H(\varphi_{3,p}(x),t)}{H(x,t)}) & \text{para } (x,t) \in W^1 \times \{0,1\} \\ td_1(x,1) + (1-t)d_1(x,0) & \text{para } (x,t) \in W^1 \times (0,1) \end{cases}$$

Notemos que, como $f(x) \neq x$ para todo $x \in L_{3,p}$, então $H(\varphi_{3,p}(x),1) = e^{(\frac{2}{p}\pi i)n}h(x_1) = f(h(x_1)) \neq h(x_1) = H(x,1)$ para $x \in W_0^1$. Pelo mesmo motivo $f^{k+1}(h(x_{p+1-k})) \neq f^k(h(x_{p+1-k}))$ e daí $H(\varphi_{3,p}(x),1) \neq H(x,1)$ para todo $x \in W_k^1$ com $k = 1, \ldots, p-1$. Ainda, se $x \in L_{3,p}$ então $x_2 \neq x_1$ e consequentemente $H(\varphi_{3,p}(x),0) = h(x_2) \neq h(x_1) = H(x,0)$ e em particular para $x \in W^1$. Logo, $d_1(x,t) \in (0,2\pi)$, $\forall\ (x,t) \in W^1 \times \{0,1\}$ e portanto d_1 está bem definida e é contínua. Podemos assim definir

$$H(x,t) = H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x),t) \prod_{m=1}^{k} e^{id_1(\varphi_{3,p}^{p-m}(x),t)} \tag{3.5}$$

para $(x,t) \in W_k^1 \times (0,1)$, $k = 1, \ldots, p-1$. Temos assim, em particular, $H : W^1 \times I \longrightarrow S^1$. Agora, consideremos o conjunto $(W^1 \cup W_0^2) \times \{0\}$ onde H também já está definida. Como $(W^1 \cup W_0^2)$ é um subconjunto fechado do espaço normal $L_{3,p}$, então $(W^1 \cup W_0^2)$ é normal. Além disso, $(W^1 \cup W_0^2) \times I$ é fechado em $L_{3,p} \times \mathbb{R}$ e portanto normal. Logo $(W^1 \cup W_0^2)$ é binormal. Daí, como W^1 é fechado em $(W^1 \cup W_0^2)$, pelo teorema 1.0.3, H pode ser estendida ao conjunto $(W^1 \cup W_0^2) \times I$ de forma que $H((W^1 \cup W_0^2) \times I) \subset S^1$.

Ainda, definimos para $x \in W_k^2$ com $k = 1, \ldots, p-1$

$$H(x,1) = f^k(H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x),1)) = e^{(\frac{2}{p}\pi i)nk} H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x),1).$$

Desejamos agora estender continuamente H sobre $W^2 \times I$. Para isso, basta construirmos H sobre $W_k^2 \times (0,1)$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$, visto que, para $W_k^2 \times \{0,1\}$ a função já está definida.

Assim, definamos $d_2 : (W^1 \cup W^2) \times I \longrightarrow (0, 2\pi)$ por

$$d_2(x,t) := \begin{cases} \arg(\frac{H(\varphi_{3,p}(x),t)}{H(x,t)}) & \text{para } (x,t) \in (W^1 \cup W^2) \times \{0,1\} \\ td_2(x,1) + (1-t)d_2(x,0) & \text{para } (x,t) \in (W^1 \cup W^2) \times (0,1) \end{cases}$$

Observemos que $d_2(x,t) = d_1(x,t)$ para todo $(x,t) \in W^1 \times I$. Além disso,

Afirmação 3.0.5 *Para todo $x \in W^1 \cup W^2$, $(a_1, \ldots, a_p) \in T_x$ e $s \in \{1, \ldots, p\}$ temos*

$$\left| \frac{2\pi}{3} \sum_{m=1}^{s} r(a_m, a_{m^+}) - \sum_{m=1}^{s} d_2(\varphi_{3,p}^{m-1}(x), 0) \right| \leq \frac{2\pi}{3} \tag{3.6}$$

Com efeito, consideremos primeiro os seguintes fatos:

(1) Se $(a_1, \ldots, a_p) \in T_x$ e $m \in \{1, \ldots, p\}$, então

$$a_m < a_{m^+} \iff \arg(h(x_m)) < arg(h(x_{m^+})). \tag{3.7}$$

Pela definição de T_x temos que $x_m \in \Delta_{2;a_m}$ e $x_{m^+} \in \Delta_{2;a_{m^+}}$ e portanto $h(x_m) \in h(\Delta_{2;a_m})$ e $h(x_{m^+}) \in h(\Delta_{2;a_{m^+}})$. Daí,

$$\frac{2\pi(a_m - 1)}{3} \leq \arg(h(x_m)) \leq \frac{2\pi a_m}{3}$$
$$\frac{2\pi(a_{m^+} - 1)}{3} \leq \arg(h(x_{m^+})) \leq \frac{2\pi a_{m^+}}{3}.$$

Mas, $a_m < a_{m^+} \Rightarrow a_m \leq a_{m^+} - 1$. Assim,

$$\arg(h(x_m)) \leq \frac{2\pi a_m}{3} \leq \frac{2\pi(a_{m^+} - 1)}{3} \leq \arg(h(x_{m^+})). \tag{3.8}$$

Ainda, $x_m \neq x_{m^+}$. Então $\arg(h(x_m)) \neq \arg(h(x_{m^+}))$. Logo, $\arg(h(x_m)) < \arg(h(x_{m^+}))$. Analogamente, verifica-se que, se $a_m > a_{m^+}$ então $\arg(h(x_m)) > \arg(h(x_{m^+}))$.

Como consequência desse fato temos que

$$\begin{aligned} a_m < a_{m^+} \;\Rightarrow\; \arg\left(\frac{h(x_{m^+})}{h(x_m)}\right) &= \arg(h(x_{m^+})) - \arg(h(x_m)) \\ a_m > a_{m^+} \;\Rightarrow\; \arg\left(\frac{h(x_{m^+})}{h(x_m)}\right) &= 2\pi + (\arg(h(x_{m^+})) - \arg(h(x_m))) \end{aligned}$$

(2) Dados $a_i, a_j \in \{1,2,3\}$, $a_i \neq a_j$ e $i, j \in \{1,\ldots,p\}$ temos

$$r(a_i, a_j) = \begin{cases} a_j - a_i, & \text{se } a_j > a_i \\ 3 + (a_j - a_i), & \text{se } a_j < a_i \end{cases}$$

Esse fato segue direto da definição de $r(a_i, a_j)$ dada anteriormente (veja p. 54).

Agora, seja $s \in \{1,\ldots,p\}$ e consideremos $A_1 = \{m \in \{1,\ldots,s\} : a_m < a_{m^+}\}$ e $A_2 = \{m \in \{1,\ldots,s\} : a_m > a_{m^+}\}$. Observemos que, pelos fatos (1) e (2) temos que, se $m \in A_1$, então

$$r(a_m, a_{m^+}) = a_{m^+} - a_m \tag{3.9}$$

$$\arg\left(\frac{h(x_{m^+})}{h(x_m)}\right) = \arg(h(x_{m^+})) - \arg(h(x_m)). \tag{3.10}$$

Mas, se $m \in A_2$, segue que

$$r(a_m, a_{m^+}) = 3 + (a_{m^+} - a_m) \tag{3.11}$$

$$\arg\left(\frac{h(x_{m^+})}{h(x_m)}\right) = 2\pi + (\arg(h(x_{m^+})) - \arg(h(x_m))) \tag{3.12}$$

Suponhamos que $card\ A_2 = l$. Segue então que,

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{s} d_2(\varphi_{3,p}^{m-1}(x), 0) &= d_2(x,0) + d_2(\varphi_{3,p}(x),0) + \cdots + d_2(\varphi_{3,p}^{s-1}(x),0) \\
&= \arg\left(\frac{h(x_2)}{h(x_1)}\right) + \arg\left(\frac{h(x_3)}{h(x_2)}\right) + \cdots + \arg\left(\frac{h(x_{s+1})}{h(x_s)}\right) \\
&= \sum_{m=1}^{s} \arg\left(\frac{h(x_{m^+})}{h(x_m)}\right) \\
&= \sum_{m\in A_1} \arg\left(\frac{h(x_{m^+})}{h(x_m)}\right) + \sum_{m\in A_2} \arg\left(\frac{h(x_{m^+})}{h(x_m)}\right) \\
&= \sum_{m\in A_1} (\arg(h(x_{m^+})) - \arg(h(x_m))) + \\
&\quad +(2\pi l + \sum_{m\in A_2} (\arg(h(x_{m^+})) - \arg(h(x_m)))) \\
&= 2\pi l + \sum_{m=1}^{s} (\arg(h(x_{m^+})) - \arg(h(x_m))) \\
&= 2\pi l + (\arg(h(x_2)) - \arg(h(x_1)) + \\
&\quad + \cdots + \arg(h(x_{s+1})) - \arg(h(x_s))) \\
&= 2\pi l + (\arg(h(x_{s+1})) - \arg(h(x_1))).
\end{aligned}
$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\frac{2\pi}{3}\sum_{m=1}^{s} r(a_m, a_{m^+}) &= \frac{2\pi}{3}\left(\sum_{m\in A_1} r(a_m, a_{m^+}) + \sum_{m\in A_2} r(a_m, a_{m^+})\right) \\
&= \frac{2\pi}{3}\left(\sum_{m\in A_1} (a_{m^+} - a_m) + (3l + \sum_{m\in A_2} (a_{m^+} - a_m))\right) \\
&= \frac{2\pi}{3}\left(3l + \sum_{m=1}^{s} (a_{m^+} - a_m)\right) \\
&= 2\pi l + \frac{2\pi}{3}(a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + \cdots + a_{s+1} - a_s) \\
&= 2\pi l + \frac{2\pi}{3}(a_{s+1} - a_1).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\frac{2\pi}{3}\sum_{m=1}^{s} r(a_m, a_{m^+}) - \sum_{m=1}^{s} d_2(\varphi_{3,p}^{m-1}(x), 0) &= \frac{2\pi}{3}(a_{s+1} - a_1) - \\
&= -(\arg(h(x_{s+1})) - \arg(h(x_1))).
\end{aligned}
$$

Basta então mostrarmos que a soma acima satisfaz a desigualdade (3.6). Notamos que, se $a_{s+1} - a_1 = 0$ então x_{s+1} e x_1 pertencem à mesma face em $\partial\Delta_2$ e portanto $\frac{-2\pi}{3} \leq \arg(h(x_{s+1})) - \arg(h(x_1)) \leq \frac{2\pi}{3}$. Suponhamos então agora que $a_{s+1} \neq a_1$. Pela definição de T_x sabemos que $x_1 \in \Delta_{2;a_1}$ e $x_{s+1} \in \Delta_{2;a_{s+1}}$ e daí $h(x_1) \in h(\Delta_{2;a_1})$ e $h(x_{s+1}) \in h(\Delta_{2;a_{s+1}})$. Assim,

$$\frac{2\pi(a_1 - 1)}{3} \leq \arg(h(x_1)) \leq \frac{2\pi a_1}{3}$$
$$\frac{2\pi(a_{s+1} - 1)}{3} \leq \arg(h(x_{s+1})) \leq \frac{2\pi a_{s+1}}{3}$$

implicando que

$$\begin{aligned}
((a_{s+1} - a_1) - 1)\frac{2\pi}{3} &\leq \arg(h(x_{s+1})) - \arg(h(x_1)) \leq ((a_{s+1} - a_1) + 1)\frac{2\pi}{3} \\
\Rightarrow \frac{2\pi}{3}(a_{s+1} - a_1) - \frac{2\pi}{3} &\leq \arg(h(x_{s+1})) - \arg(h(x_1)) \leq \frac{2\pi}{3}(a_{s+1} - a_1) + \frac{2\pi}{3} \\
\Rightarrow -\frac{2\pi}{3} &\leq \frac{2\pi}{3}(a_{s+1} - a_1) - (\arg(h(x_{s+1})) - \arg(h(x_1))) \leq \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

Consequentemente, segue que

$$\left| \frac{2\pi}{3} \sum_{m=1}^{s} r(a_m, a_{m^+}) - \sum_{m=1}^{s} d_2(\varphi_{3,p}^{m-1}(x), 0) \right| \leq \frac{2\pi}{3}$$

Observemos ainda que, quando $s = p$ temos

$$\sum_{m=1}^{s} d_2(\varphi_{3,p}^{m-1}(x), 0) = 2\pi l \tag{3.13}$$

Assim, como $(W^1 \cup W^2) \subset W_n = v^{-1}(n)$, temos $\frac{2\pi}{3} \sum_{m=1}^{p} r(a_m, a_{m^+}) = 2\pi n$ e portanto, podemos concluir da afirmação acima juntamente com (3.13) que

$$|2\pi n - 2\pi l| \leq \frac{2\pi}{3} \;\Rightarrow\; 2\pi|n - l| \leq \frac{2\pi}{3} \;\Rightarrow\; |n - l| \leq \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; n = l$$

pois $n \in \mathbb{N}$ e $l \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$\sum_{m=1}^{p} d_2(\varphi_{3,p}^{m-1}(x), 0) = \frac{2\pi}{3} \sum_{m=1}^{p} r(a_m, a_{m^+}) = 2\pi n$$

Mostramos na afirmação 3.0.4 que H_1 é equivariante em W^1. Analogamente, mostra-se também que $H_1 \circ \varphi_{3,p} = f \circ H_1$ para todo $x \in W^2$. Observemos ainda que se $z = e^{i\alpha} \in S^1$ então $f(z) = e^{(\frac{2\pi n}{p}+\alpha)i}$ e daí $\frac{f(z)}{z} = \frac{e^{(\frac{2\pi n}{p}+\alpha)i}}{e^{i\alpha}} = e^{\frac{2\pi n}{p}i}$. Logo, $\arg(f(z)/z) = \frac{2\pi n}{p}$ e portanto

$$\begin{aligned} d_2(x,1) &= \arg\left(\frac{H(\varphi_{3,p}(x),1)}{H(x,1)}\right) = \arg\left(\frac{H_1(\varphi_{3,p}(x))}{H(x,1)}\right) \\ &= \arg\left(\frac{f(H_1(x))}{H(x,1)}\right) = \arg\left(\frac{f(H(x,1))}{H(x,1)}\right) = \frac{2\pi n}{p} \end{aligned}$$

Ressaltamos que o mesmo vale para $d_2(\varphi_{3,p}^{p-m}(x),1)$ com $m = 1,\ldots,p$, visto que $H_1 \circ \varphi_{3,p}^{p-m} = f^{p-m} \circ H_1$

Assim, para todo $(x,t) \in (W^1 \cup W^2) \times I$ temos

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{p} d_2(\varphi_{3,p}^{p-m}(x),t) &= t\sum_{m=1}^{p} d_2(\varphi_{3,p}^{p-m}(x),1) + (1-t)\sum_{m=1}^{p} d_2(\varphi_{3,p}^{p-m}(x),0) \\ &= t\sum_{m=1}^{p}\frac{2\pi n}{p} + (1-t)2\pi n = 2\pi n \end{aligned}$$

e consequentemente

Afirmação 3.0.6 *Para $(x,t) \in W^1 \times I$ e $k \in \{1,\ldots,p-1\}$ temos*

$$H(x,t) = H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x),t)\prod_{m=1}^{k} e^{d_2(\varphi_{3,p}^{p-m}(x),t)}$$

De fato, se $(x,t) \in W_k^1 \times (0,1)$, $k = 1,\ldots,p-1$, então pelo que definimos em (3.5) temos

$$H(x,t) = H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x),t)\prod_{m=1}^{k} e^{id_1(\varphi_{3,p}^{p-m}(x),t)}.$$

Além disso, como $H_1(x) = H(x,1)$ é equivariante em W^1 segue então que $H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x),1) = f^{p-k}(H(x,1))$. Logo

$$\begin{aligned} H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x),1) &= f^{p-k}(H(x,1)) = H(x,1)e^{i(\frac{2\pi n}{p})(p-k)} \\ &= H(x,1)e^{i(\frac{2\pi n}{p})(p-k-1+1)} = H(x,1)e^{i(\frac{2\pi n}{p})(p-(k+1)+1)} \\ &= H(x,1)e^{i\sum_{m=k+1}^{p}(\frac{2\pi n}{p})} = H(x,1)e^{i\sum_{m=k+1}^{p} d_1(\varphi_{3,p}^{p-m}(x),1)} \\ &= H(x,1)\prod_{m=k+1}^{p} e^{id_1(\varphi_{3,p}^{p-m}(x),1)}. \end{aligned}$$

Ainda, para $(x,t) \in W_0^1 \times I$,

$$\begin{aligned} H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x),t) &= H(x,t) = H(x,t)e^{i2\pi n} = H(x,t)e^{i\sum_{m=1}^{p} d_1(\varphi_{3,p}^{p-m}(x),t)} \\ &= H(x,t)\prod_{m=1}^{p} e^{id_1(\varphi_{3,p}^{p-m}(x),t)} \end{aligned}$$

e para $x \in W_k^1$, com $k = 1,\ldots,p-1$, analogamente ao que fizemos na demonstração da afirmação 3.0.5, segue que

$$\sum_{m=k+1}^{p} d_1(\varphi_{3,p}^{p-m}(x),0) = 2\pi l_1 + (\arg(h(x_{p-k+1})) - \arg(h(x_1)))$$

onde l_1 é o cardinal de $A' = \{m \in \{k+1,\ldots,p\} \ : \ a_m > a_m^+\}$. Daí,

$$\begin{aligned} H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x),0) &= h(x_{p-k+1}) = e^{i\arg(h(x_{p-k+1}))} = \\ &= e^{i2\pi l_1}e^{i(\arg(h(x_1))-\arg(h(x_1))+\arg(h(x_{p-k+1})))} \\ &= e^{i\arg(h(x_1))}e^{i(2\pi l_1+\arg(h(x_{p-k+1}))-\arg(h(x_1)))} \\ &= h(x_1)e^{i(2\pi l_1+\arg(h(x_{p-k+1}))-\arg(h(x_1)))} \\ &= H(x,0)\prod_{m=k+1}^{p} e^{id_1(\varphi_{3,p}^{p-m}(x),0)}. \end{aligned}$$

Portanto, $\forall\ (x,t) \in W^1 \times I$ temos

$$\begin{aligned} H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x),t)\prod_{m=1}^{k} e^{id_2(\varphi_{3,p}^{p-m}(x),t)} &= H(x,t)\prod_{m=k+1}^{p} e^{id_1(\varphi_{3,p}^{p-m}(x),t)}\prod_{m=1}^{k} e^{id_2(\varphi_{3,p}^{p-m}(x),t)} \\ &= H(x,t)\prod_{m=k+1}^{p} e^{id_2(\varphi_{3,p}^{p-m}(x),t)}\prod_{m=1}^{k} e^{id_2(\varphi_{3,p}^{p-m}(x),t)} \\ &= H(x,t)\prod_{m=1}^{p} e^{id_2(\varphi_{3,p}^{p-m}(x),t)} \\ &= H(x,t)e^{i\sum_{m=1}^{p} d_2(\varphi_{3,p}^{p-m}(x),t)} \\ &= H(x,t)e^{i2\pi n} = H(x,t). \end{aligned}$$

Isso justifica o fato de definirmos, para todo $(x,t) \in W_k^2 \times (0,1)$ e $k = 1,\ldots,p-1$,

$$H(x,t) = H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x),t)\prod_{m=1}^{k} e^{id_2(\varphi_{3,p}^{p-m}(x),t)}$$

Bem, até aqui já temos H definida continuamente sobre o conjunto $[(W^1 \cup W^2) \times I] \cup (W_0^3 \times \{0\})$. Para alcançarmos nosso objetivo, resta estender H sobre o conjunto $W_0^3 \times (0,1)$. Mas, em particular, temos $H : (W^1 \cup W^2) \times I \longrightarrow S^1$ e além disso $(W^1 \cup W^2 \cup W_0^3)$ é binormal (como observado para $W^1 \cup W^2$). Assim, desde que $W^1 \cup W^2$ é um subconjunto fechado de $(W^1 \cup W^2 \cup W_0^3)$, novamente pelo teorema 1.0.3, segue que a função $H : (W^1 \cup W^2) \times I \longrightarrow S^1$ pode ser estendida à homotopia $H : (W^1 \cup W^2 \cup W_0^3) \times I \longrightarrow S^1$ a qual desejávamos obter.

Finalmente, podemos então definir $P : W_n \longrightarrow S^1$ por

$$P(x) = \begin{cases} H(x,1), & \text{para } x \in W^1 \cup W^2 \cup W_0^3 \\ f^k(H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x),1)), & \text{para } x \in W_k^3,\ k = 1, \ldots, p-1 \end{cases}$$

Observemos que P está bem definida, desde que $(W^1 \cup W^2 \cup W_0^3) \cap W_k^3 = \emptyset$, para qualquer $k \in \{1, \ldots, p-1\}$. Além disso, como $H_1(x) = H(x,1)$ é tal que $H_1 \circ \varphi_{3,p} = f \circ H_1$ para todo $x \in W^1 \cup W^2 \cup W_0^3$, segue que P é equivariante neste conjunto. Para $x \in W_k^3$ $k = 1, \ldots, p-1$, temos que $\varphi_{3,p}(x) \in \varphi_{3,p}(W_k^3) = \varphi_{3,p}(\varphi_{3,p}^k(W_0^3)) = W_{k+1}^3$ e daí

$$P(\varphi_{3,p}(x)) = f^{k+1}(H(\varphi_{3,p}^{p-k-1}(\varphi_{3,p}(x)),1)) = f(f^k(H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x),1))) = f(P(x)).$$

Logo, pelo lema 2.0.9, temos $g(W_n, \varphi_{3,p}) \leq g(S^1, f) = 2$, contradizendo o fato de $g(W_n, \varphi_{3,p}) = 3$.

Portanto, temos que $L_{3,p}$ é coberto por uma quantidade finita de fechados disjuntos $W_n = v^{-1}(n)$ os quais são invariantes por $\varphi_{3,p}$ com $g(W_n, \varphi_{3,p}) \leq 2$. Segue então do lema 3.0.12 que $g(L_{3,p}, \varphi_{3,p}) \leq 2$.

□

Para demonstrarmos o teorema que segue, considere primeiro o seguinte:

Lema 3.0.13 *Suponhamos que os subconjuntos fechados $M_1, \ldots, M_k$ cubram* *o espaço de Hausdorff M. Se $f : M \longrightarrow M$ é uma $\mathbb{Z}_p$-ação livre e $g(M_i, f) = n_i$ para cada $i = 1, \ldots, k$, então $g(M, f) \leq \sum_{i=1}^{k} g(M_i, f)$*

Demonstração:

Como $g(M_i, f) = n_i$, então existem, para cada $i = 1, \ldots, k$, fechados $M_i^1, \ldots, M_i^{n_i}$ que cobrem M_i tais que $M_i^j = \cup_{k=0}^{p-1} M_i^{(j,k)}$, $M_i^{(j,k)} = f^k(M_i^{(j,0)})$ e $M_i^{(j,k_1)} \cap M_i^{(j,k_2)} = \emptyset$ para $k_1, k_2 \in \{0, \ldots, p-1\}$, $k_1 \neq k_2$, $j = 1, \ldots, n_i$. Ainda, cada $M_i^{(j,k)}$ é fechado em M_i^j.

Desde que cada M_i^j é um subconjunto fechado de M_i, o qual é fechado em M, então M_i^j é fechado em M. Portanto, se $\lambda_i = \{1, \ldots, n_i\}$ com $i = 1, 2, \ldots, k$, então o conjunto $B = \{M_i^j \ ; \ i = 1, \ldots, k \text{ e } j \in \lambda_i\}$ é uma cobertura de M, satisfazendo as propriedades do genus. Logo, $g(M, f) \leq \sum_{i=1}^{k} n_i = \sum_{i=1}^{k} g(M_i, f)$.

$\square$

Teorema 3.0.12 *Se $p \geq 3$ é um primo e $k \in \{3, 4, 5, \ldots\}$, então*

$$g(L_{k,p}, \varphi_{k,p}) \leq \frac{(p-1)}{2}(k-3) + \begin{cases} 1 & se \quad p = 3 \\ 2 & se \quad p \geq 5 \end{cases}$$

Demonstração:

Consideremos os fechados $M_i = \{(x_1, \ldots, x_p) \in \widetilde{L}_{k,p} \ ; \ x_1 \in \Delta_{k-1;i}\}$ os quais cobrem $\widetilde{L}_{k,p}$ (como na demonstração do teorema 2.0.8). Então sejam $F_i = \cup_{j=0}^{p-1} \varphi_{k,p}^j(M_i)$ para $i = 1, \ldots, k-3$.

Agora, desde que $\cup_{j=k-2}^{k} \Delta_{k-1;j}$ é fechado em $\partial \Delta_{k-1}$ então segue que $(\cup_{j=k-2}^{k} \Delta_{k-1;j})^p$ é fechado em $(\partial \Delta_{k-1})^p$. Portanto, consideremos o subconjunto fechado $G = \widetilde{L}_{k,p} \cap (\cup_{j=k-2}^{k} \Delta_{k-1;j})^p$ de $\widetilde{L}_{k,p}$.

Afirmação 3.0.7 $\widetilde{L}_{k,p} = \cup_{i=1}^{k-3} F_i \cup G$

Com efeito, certamente temos $\widetilde{L}_{k,p} \supseteq \cup_{i=1}^{k-3} F_i \cup G$. Tomemos então $x \in \widetilde{L}_{k,p}$. Como $x_1 \in \partial\Delta_{k-1} = \cup_{i=1}^{k} \Delta_{k-1;i}$, então $x_1 \in \Delta_{k-1;i}$, para algum $i = 1, \ldots, k$. Se $i \in \{1, \ldots, k-3\}$ então $x \in F_i \subset \cup_{j=1}^{k-3} F_j$. Suponhamos então que $x_1 \in \Delta_{k-1;j}$ para $j \in \{k-2, k-1, k\}$. Se $x_2 \in \Delta_{k-1;i}$ para $i = 1, \ldots, k-3$ então $x \in \varphi_{k,p}(M_i) \subset F_i$. Caso contrário, $x_2 \in \Delta_{k-1;j}$ para $j = k-2, k-1, k$ e daí olhemos para x_3. Resumidamente, se $x_i \in \Delta_{k-1;j}$ com $j = k-2, k-1, k$ para todo $i = 1, \ldots, p$ então $x \in (\cup_{j=k-2}^{k} \Delta_{k-1;j})^p$ e portanto a G. Mas se alguma coordenada de x pertence a um $\Delta_{k-1;i}$ com $i = 1, \ldots, k-3$ então $x \in \varphi_{k,p}^{j}(M_i)$ para algum $j = 0, \ldots, p-1$, logo $x \in F_i$. Daí, $\widetilde{L}_{k,p} \subseteq \cup_{i=1}^{k-3} F_i \cup G$.

Notamos ainda que, como G é um subconjunto fechado de $\widetilde{L}_{k,p}$, temos que G é normal. Além disso, se $x \in G$ então $\varphi_{k,p}(x) \in G$ pois todos as coordenadas de x pertencem a $(\cup_{j=k-2}^{k} \Delta_{k-1;i})^p$, logo as coordenadas de $\varphi_{k,p}(x)$ também pertencem. Segue então que $\varphi_{k,p}|_G$ é uma $\mathbb{Z}_p$-ação livre.

Consideremos então os seguintes subconjuntos de G

$$
\begin{aligned}
G_1 &= \{x \in G \; ; \; x_1 \in \Delta_{k-1;k-2}\} \\
G_2 &= \{x \in G \; ; \; x_1 \in \Delta_{k-1;k-1}\} \\
G_3 &= \{x \in G \; ; \; x_1 \in \Delta_{k-1;k}\}
\end{aligned}
$$

Observemos que $G_i = M_{k+i-3} \cap G$ para $i = 1, 2, 3$ e portanto são fechados em G. Notamos ainda que se $x \in G_i$ então $\varphi_{k,p}(x) \notin G_i$, pois caso contrário teriamos que $x = (x_1, \ldots, x_p) \in G_i$ e $\varphi_{k,p}(x) = (x_2, \ldots, x_p, x_1) \in G_i$ implicando que x_1 e x_2 pertencem à mesma face $\Delta_{k-1;k+i-3}$ de Δ_{k-1}, contradizendo o fato de $x \in \widetilde{L}_{k,p}$. Segue então que $G_i \cap \varphi_{k,p}(G_i) = \emptyset$ para todo $i = 1, 2, 3$ e $G = \cup_1^3 G_i$.

Assim, pelos teoremas 2.0.8 e 3.0.11, temos

$$g(G, \varphi_{k,p}) \leq g(\widetilde{L}_{3,p}, \varphi_{3,p}) = g(L_{3,p}, \varphi_{3,p}) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad p = 3 \\ 2 & \text{se} \quad p \geq 5 \end{cases}$$

Além disso, Steinlein prova em [17], que $g(F_i, \varphi_{k,p}) \leq \frac{p-1}{2}$. Segue então do lema 3.0.13 que

$$\begin{aligned} g(L_{k,p}, \varphi_{k,p}) = g(\widetilde{L}_{k,p}, \varphi_{k,p}) &\leq \sum_{i=1}^{k-3} g(F_i, \varphi_{k,p}) + g(G, \varphi_{k,p}) \\ &\leq \frac{(p-1)}{2}(k-3) + \begin{cases} 1 & \text{se} \quad p = 3 \\ 2 & \text{se} \quad p \geq 5 \end{cases} \end{aligned}$$

□

Finalizamos o capítulo com alguns exemplos envolvendo o toro bidimensional.

Exemplo 3.0.12 *Considere o toro 2-dimensional $T = S^1 \times S^1$ e $f : T \longrightarrow T$ a função dada por $f(x, y) = (x, e^{\frac{2\pi i}{p}} y)$ com p primo, ou seja, uma rotação de $\frac{2\pi}{p}$ radianos na segunda coordenada. Observemos que f é contínua desde que suas funções coordenadas o são, e além disso*

$$f^p(x, y) = (x, e^{\frac{2\pi i}{p} p} y) = (x, e^{2\pi i} y) = (x, y) = id_T(x, y)$$

Ainda, temos $f(x, y) \neq (x, y)$ para todo $(x, y) \in T$, pois se existisse $(x, y) \in T$ tal que $f(x, y) = (x, y)$ então teríamos que $(x, y) = (x, e^{\frac{2\pi i}{p}} y)$ e daí $y = e^{\frac{2\pi i}{p}} y \Rightarrow \frac{1}{p} = k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, o que é absurdo, visto que p é primo. Segue então que f gera uma $\mathbb{Z}_p$-ação livre em T.

Consideremos agora os seguintes fechados de T

$$M_j = \{(e^{i\alpha}, e^{i\beta}) \in T \; : \; \frac{\pi(j-1)}{p} \leq \beta \leq \frac{\pi j}{p}\} \quad \textit{para} \quad j = 1, 2$$

Notamos que, a dinâmica da f é somar o ângulo $\frac{2\pi}{p}$ ao argumento β. Daí, se $z = (e^{i\alpha}, e^{i\beta}) \in M_j$, segue que $f(z) = (e^{i\alpha}, e^{i\gamma})$, com $\frac{\pi(j+1)}{p} \leq \gamma \leq \frac{\pi(j+2)}{p}$ e, portanto temos $M_j \cap f(M_j) = \emptyset$ para $j = 1, 2$. Concluimos então que $f^i(M_j) \cap f^{i+1}(M_j) = \emptyset$ para todo $i = 0, 1, \ldots, p-1$.

Assim, se definirmos $G_i^{(j)} = f^i(M_j)$ para cada $i = 0, 1, \ldots, p-1$ e $j = 1, 2$, então os fechados $G^{(j)} = \cup_{i=0}^{p-1} f^i(M_j)$ pertencem a $C(T, f)$ (veja definição do genus) e cobrem T, isto é, $T = G^{(1)} \cup G^{(2)}$. Portanto $g(T, f) \leq 2$.

Provemos que $g(T, f) = 2$. Com efeito, primeiramente observemos que $T \neq \emptyset$, logo $g(T, f) \neq 0$. Agora, suponhamos que $g(T, f) = 1$. Assim, existem fechados disjuntos $G_0, \ldots, G_{p-1}$ tais que $f^i(G_0) = G_i$ para todo $i = 1, \ldots, p-1$ e $T = \cup_{i=1}^{p-1} G_i$, o que produz uma cisão não trivial do toro, contradizendo o fato de T ser conexo. Concluimos então que $g(T, f) = 2$.

Exemplo 3.0.13 *Sejam T e f como no exemplo anterior, com $p = 2$. Temos então que $G^{(j)} = G_0^{(j)} \cup G_1^{(j)}$ para $j = 1, 2$ são tais que $T = G^{(1)} \cup G^{(2)}$ (veja anexo I, figura* 3.1.13*).*

Assim, como $g(L_{k,2}, \varphi_{k,2}) = k - 1$ (teorema 3.0.10) e $g(T, f) = 2$, segue do teorema 2.0.8 que

$$2 = g(T, f) \leq g(L_{k,2}, \varphi_{k,2}) = k - 1 \quad \Rightarrow \quad k \geq 3$$

ou seja, T pode ser coberto com no mínimo 3 fechados M_1, M_2, M_3 tais que $M_i \cap f(M_i) = \emptyset$ para $i = 1, 2, 3$ (anexo I, figura 3.2.13*).*

Agora, consideremos $p = 3$. Neste caso, temos $G^{(j)} = \cup_{i=0}^{2} G_i^{(j)}$ para $j = 1, 2$ os quais pertencem a $C(T, f)$ e cobrem T, como na figura 3.3.13 *(veja anexo I). Bem, uma vez que $g(T, f)$ também é igual a 2, então não podemos cobrir T com três fechados M_1, M_2, M_3 tais que $M_i \cap f(M_i) = \emptyset$ para $i = 1, 2, 3$, visto que para $k = 3$ e $p = 3$ temos $g(L_{3,3}, \varphi_{3,3}) = 1$ (teorema 3.0.11) e daí,* *pelo teorema 2.0.8, teríamos* $2 = g(T, f) \leq g(L_{3,3}, \varphi_{3,3}) = 1$*. Observamos no entanto que* T *pode ser coberto com quatro fechados* M_1, M_2, M_3, M_4 *satisfazendo* $M_i \cap f(M_i) = \emptyset$ *para* $i = 1, 2, 3, 4$ *(anexo I, figura* 3.4.13*). Pode ser mostrado com o auxílio de um resultado encontrado em [1] que para qualquer primo* p*, existem* 4 *fechados* M_1, M_2, M_3 *e* M_4 *de* T *que cobrem* T *e satisfazem* $M_i \cap f(M_i) = \emptyset$ *para todo* $i = 1, 2, 3, 4$*, sendo* f *a* $\mathbb{Z}_p$*-ação livre dada no exemplo 3.0.12. Uma configuração disso é dada na figura* 3.5.13*, no anexo I, para* $p = 5$.

Referências Bibliográficas

[1] Aarts, J. M., Fokkink, R. J. e Vermeer, H. *Variations on a Theorem of Ljusternik and Schnirelmann*, Topology vol. 35, n. 4 (1996), 1051-1056.

[2] Amaral, Fabíolo M., *Estimativas Ótimas para certos Teoremas Generalizados de Borsuk-Ulam e Ljusternik-Schnirelmann*, Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática-UFSCar, São Carlos, (2005).

[3] Armstrong, M. A., *Basic Topology*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, (1990).

[4] Bredon, G. E., *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 139, Springer-Verlag, New York, (1997).

[5] Borsuk, K., *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre*, Fund. Math., 20 (1933), 177-190.

[6] Dugundji, J., *An Extension do Tietze's Theorem*, Pacific J. Math., I (1951), 353-367.

[7] Dugundji, J., *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, (1966).

[8] Hatcher, A., *Algebraic Topology*, University Press, Cambridge, (2002).

[9] Hu, Sze-Tsen, *Homotopy Theory*, Academic Press, New York and London, (1959).

[10] Hungerford, Thomas W., *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics 73, Springer-Verlag, New York, fifth printing (1989).

[11] Krasnosel'skiĭ, M. A., *On special coverings of a finite-dimensional sphere*, Doklady Akad. Nauk SSSR103 (1955), 961-964 (Russian).

[12] Lima, E. L., *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Projeto Euclides, IMPA, CNPq, Rio de Janeiro, (1998).

[13] Munkres, J. R., *Elements of Algebraic Topology*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., Cambridge, Massachusetts, (1984).

[14] Munkres, J. R., *Topology, a first course*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ (1975).

[15] Rotman, J. J., *An Introduction to Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics 119, Springer-Verlag, New York, (1998).

[16] Steinlein, H., *Some abstract generalizations of the Ljusternik-Schnirelmann-Borsuk covering theorem*, Pacific J. Math. 83 (1979), 285-296.

[17] Steinlein, H., *Borsuk-Ulam Sätze und Abbildungen mit kompakten Iterierten*, Habilitationsschrift, University of Munich, (1976).

[18] Steinlein, H., *On the Theorems of Borsuk-Ulam and Ljusternik-Schnirelmann-Borsuk*, Canad. Math. Bull. Vol. 27 (2) (1984).

[19] Švarc, A. S., *Some estimates of the genus of a topological space in the sense of Krasnosel'skiĭ*, Usephi Mat. Nauk 12, 209-214, (1957) (Russian).

[20] Švarc, A. S., *The genus of a fiber space*, English translation in Amer. Math. Soc., Translat, II. Ser. 55 , 49-140, 1966.

[21] Yang, Chung-Tao, *On theorems of Borsuk-Ulam*, Kakutani-Yamabe-Yujobô and Dyson, I. Ann. Math. 60 (1954), 262-282.

Anexo I

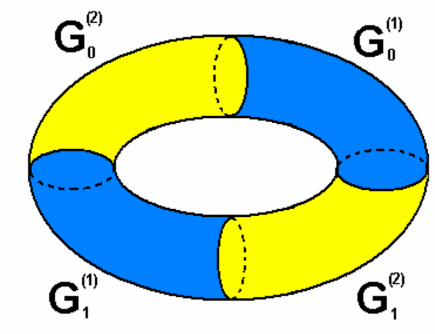

Figura 3.1.13

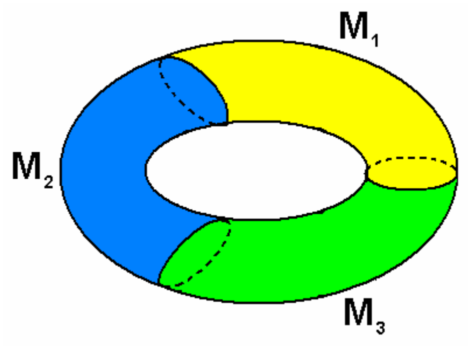

Figura 3.2.13

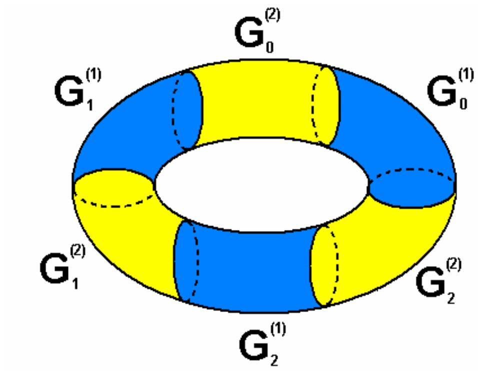

Figura 3.3.13

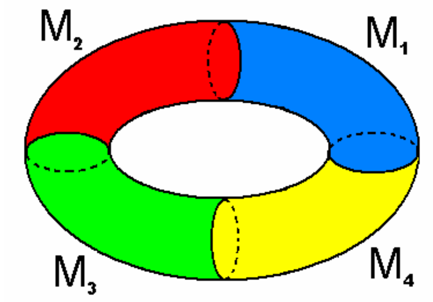

Figura 3.4.13

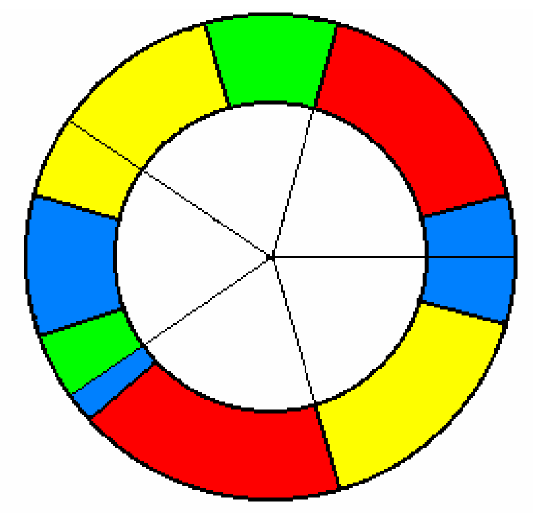

Figura 3.5.13