UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

EMERSON DONIZETI BIAJOTI

Experimentos Probabilísticos: Noções de Probabilidade no Ensino Fundamental II

SÃO CARLOS
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

EMERSON DONIZETI BIAJOTI

Experimentos Probabilísticos: Noções de Probabilidade no Ensino Fundamental II

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

Orientação: Prof. Dr. Roberto Ribeiro Paterlini

SÃO CARLOS
2013

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

B576ep

Biajoti, Emerson Donizeti.
Experimentos probabilísticos : noções de probabilidade no ensino fundamental II / Emerson Donizeti Biajoti. -- São Carlos : UFSCar, 2013.
107 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2013.

1. Probabilidades. 2. Probabilidades - estudo e ensino. 3. Probabilidades - experimentos. 4. Noções de probabilidade. I. Título.

CDD: 519.2 (20ª)

Banca Examinadora

Prof. Dr. Roberto Ribeiro Paterlini
DM - UFSCar

Prof. Dr. José Marcos Lopes
FEIS - UNESP

Grazielle F. Barbosa.

Profa. Dra. Grazielle Feliciani Barbosa
DM - UFSCar

À minha querida esposa Juliana.

À minha amada filha Maria Alice.

Aos meus queridos pais Sebastião e Lucia.

Aos meus irmãos Julio César, Richard, Rita de Cássia e Maria Teresa.

AGRADECIMENTOS

À minha família, pelo incentivo, pelo amor e pelo apoio nos momentos difíceis. À Juliana, por ser imprescindível na minha vida, por ter participado e compartilhado das alegrias e das angústias do curso. À Maria Alice, por ter tornado os meus dias muito mais felizes. Agradeço pelo amor, companheirismo e pelo apoio constante.

Aos meus irmãos, Julio César, Richard, Rita de Cássia e Maria Teresa, por tudo que representam para mim.

Especial gratidão aos meus pais, Lucia e Sebastião, por incentivarem meus estudos e por me apoiarem em todos os momentos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Roberto Ribeiro Paterlini, pela dedicação e pela orientação que possibilitou o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores Márcio, Renato, Luciene, Grazielle, Ivo, Roberto, Tomas, Paulo Caetano, Pedro e Sampaio, pelas discussões acadêmicas e pelos ensinamentos.

Aos meus companheiros da primeira turma do Profmat. Fico grato pelo apoio, pelas discussões e aprendizado durante o curso. Em especial, agradeço ao Fabiano, Fabrício, Luis Alexandre e Rodrigo pelo companheirismo e amizade.

À Deus, que torna tudo possível.

"O acaso é um deus e um diabo ao mesmo tempo".

Machado de Assis

"O destino é apenas o acaso com mania de grandeza".

Mário Quintana

“A experiência não permite nunca atingir a certeza absoluta. Não devemos procurar obter mais que uma probabilidade”.

Bertrand Russell

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo relatar os resultados de uma investigação didático-pedagógica que utiliza experimentos com moedas e dados, cujas soluções e a adequada intervenção do professor permitem a construção dos conceitos iniciais de Probabilidade pelos alunos. A investigação, através da metodologia da Engenharia Didática, ocorreu em quatro salas do sétimo ano do Ensino Fundamental II de uma escola pública do interior do Estado de São Paulo. Os resultados indicam que a utilização dessa proposta de ensino pode favorecer a aprendizagem e tornar as aulas mais prazerosas e participativas para os alunos. Os alunos tornam-se protagonistas no desenvolvimento de seu próprio conhecimento. Durante muitos anos, o estudo de problemas de Probabilidade fez parte, exclusivamente, do Ensino Médio. Entretanto, o tema é perfeitamente acessível aos alunos do Ensino Fundamental, o que tem sido reconhecido, por exemplo, pelos Parâmetros Curriculares editados pelo MEC. Para que essas aprendizagens relacionadas ao campo da Probabilidade se concretizem é preciso, primeiramente, transformar em experiências o que muitas vezes é simplesmente imposto como regras nos livros didáticos. É propondo jogar uma moeda diversas vezes, discutir e refletir sobre isso, por exemplo, que os alunos poderão observar e elaborar conjecturas sobre como e por que se define que a chance de ganhar num jogo de cara ou coroa é 50%. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs (BRASIL, 1998) as noções de Probabilidades devem ser exploradas através da elaboração de experimentos e simulações para estimar probabilidades e verificar probabilidades previstas.

Palavras-chave: Ensino de probabilidade. Experimentos em probabilidade. Noções de probabilidade.

ABSTRACT

This work has as its main goal to show the results of an instructive and pedagogical research which uses games with coins and dice, whose solutions and appropriate teacher´s mediation, allow the student to make the construction about the initial concepts of Probability. This research, through the engineering instructive method, took place in four different 7th grade classrooms in a public school, in the countryside of the state of São Paulo. The results show that the use of such a teaching proposal may improve learning, make the classes more interesting and help the students to take real part in them. The learners become the chief builders in the evolution of their own knowledge. The study about Probability problems was part, for many years, of High School only. Yet this subject can be taught to younger students as well, what has been widely recognized by the PCNs, published by MEC. In order to make these learnings related to Probability a reality we must change, which is just something imposed in our text books, in real experiences. It is suggested to toss a coin several times, discuss and reflect about this procedure, helping the students observe and make presumptions about how and why the chance of being winners in a heads or tails game is of 50%. According to the PCNs (BRAZIL, 1998), the notions about Probability must be explored through experiences and simulations to calculate the Probabilities themselves and check expected Ones.

Keywords: Teaching of probability. Probability experiments. Notions of probability.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como objetivo relatar os resultados de uma investigação didático-pedagógica que utiliza jogos para ensinar Probabilidade no Ensino Fundamental II.

Apresentamos aqui uma proposta de trabalho intencionalmente planejada, fundamentada na Engenharia Didática, a qual poderá trazer benefícios no processo de aquisição do conhecimento matemático por parte dos alunos. Como resultado do nosso trabalho, obtivemos um conjunto de quatro Atividades sobre Noções de Probabilidade.

As Folhas de Atividades foram aplicadas em quatro salas do 7º ano do Ensino Fundamental II de uma escola pública do interior de São Paulo. Analisamos os registros escritos e os comentários feitos durante a aplicação e fizemos uma avaliação da proposta de trabalho. Como resultado apresentamos um produto final, com pequenas alterações, no Anexo C.

Esse trabalho é formado por cinco Capítulos e pelos apêndices A, com as folhas de atividades conforme foram aplicadas, o apêndice B, com as folhas de atividades reformuladas e o apêndice C, com as folhas de atividades resolvidas. Segue uma breve descrição de cada Capítulo.

No Capítulo 1 falamos sobre a importância de se ensinar Probabilidade desde o Ensino Fundamental, os objetivos e maneiras de se ensinar Probabilidade.

No Capítulo 2 apresentamos uma breve história do desenvolvimento da Teoria das Probabilidades, comentamos o que são experimentos determinísticos e aleatórios, algumas definições e as diferentes concepções de Probabilidade.

No Capítulo 3 fizemos uma apresentação dos aspectos gerais da proposta e analisamos detalhadamente as quatro Atividades, apresentando seus objetivos e justificativas e fizemos algumas análises prévias, apontando algumas expectativas de soluções que podem ser apresentadas pelos alunos.

No Capítulo 4 fizemos uma breve descrição da escola e dos alunos, relatamos e analisamos a aplicação das Folhas de Atividades. Através das análises pudemos reformular algumas questões das Folhas de Atividades que julgamos não estar muito claras para os alunos.

No Capítulo 5 fizemos nossas considerações finais. Segundo nossa avaliação as Folhas de Atividades elaboradas atingiram seus objetos. A análise dos resultados obtidos permite concluir que o uso das Folhas de Atividades favoreceu a aprendizagem das noções básicas de Probabilidades.

CAPÍTULO 1

A IMPORTÂNCIA DO ENSINO DE NOÇÕES DE PROBABILIDADE NO ENSINO FUNDAMENTAL

1.1 INTRODUÇÃO

Nesse Capítulo falaremos sobre a importância de se ensinar Probabilidade desde o Ensino Fundamental, seus objetivos e a necessidade de se utilizar diferentes estratégias para se ensinar Probabilidade.

1.2 PROBABILIDADE NO ENSINO FUNDAMENTAL

Esse campo da Matemática foi recentemente introduzido nos currículos do Ensino Fundamental. Tal inclusão é decorrente da importância que o tema ocupa atualmente na sociedade. A Probabilidade esta cada vez mais presente em nosso cotidiano: controle de qualidade, seguros, expectativa de vida, previsão do tempo, entre outros. Além disso, os princípios probabilísticos têm se tornado instrumento de trabalho em muitas áreas do conhecimento.

A importância do ensino de Probabilidade nas escolas desde as séries iniciais vem sendo discutida por autores de diversos países. No Brasil o tema é sugerido nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), que reflete a preocupação com o ensino de Probabilidade desde as séries iniciais, constituindo um grande avanço para o Ensino Fundamental. No Estado de São Paulo o tema é sugerido na Proposta Curricular para o Ensino Fundamental Ciclo II e Ensino Médio (BRASIL, 2008) e desenvolvido no 7°e 9º anos do Ensino Fundamental e no 2º ano do Ensino Médio.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) enfatizam que o ensino da Probabilidade, juntamente com a estatística, tem por objetivo desenvolver no aluno posicionamento crítico sobre as informações provenientes de estudos estatísticos, bem como a capacidade de fazer previsões e tomar decisões à luz de informações estatísticas destacando que seu estudo promove a compreensão de acontecimentos do cotidiano que são de natureza aleatória, devendo a escola promover um ensino em que situações sejam desenvolvidas objetivando a realização de experiências e observação de experimentos.

Ainda segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) o trabalho com Probabilidade na escola deve se iniciar com jogos e situações cotidianas que despertem no aluno o interesse e a curiosidade de resolver os problemas propostos. Experiências com materiais como moedas, bolas, dados, urnas, etc., nas quais os alunos possam realizar as atividades por meio de experimentação concreta, coleta e organização de dados são uma forma eficaz de familiarizar o aluno com as questões sobre a aleatoriedade de um experimento.

O ensino da teoria elementar das Probabilidades deveria priorizar o desenvolvimento do senso crítico dos alunos, mas o que notamos é que a Teoria das Probabilidades é ensinada, muitas vezes, de uma forma tradicional e mecanizada que contradiz as orientações propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Atentos a isso, pesquisadores buscam soluções para minimizar o problema, pois acreditam que o ensino da Probabilidade seja de suma importância para a sociedade atual, já que suas implicações se refletem diretamente na interpretação das informações, nas tomadas de decisões profissionais e pessoais, nas questões éticas, na postura crítica diante das situações do cotidiano. Lopes (2008) sugere que tal processo de ensino e aprendizagem deva ser baseado em experimentos, investigações e resoluções de problemas.

A realização de experimentos com material concreto, como por exemplo moedas e dados, torna as aulas mais atraentes e participativas, os alunos tornam-se protagonistas na construção de seu próprio conhecimento. Para Lopes (2011a, p. 626) “o que buscamos é o desenvolvimento do raciocínio dedutivo do aluno e não a memorização de fórmulas. A memorização pode ser temporária, mas o desenvolvimento do raciocínio e a aquisição do conhecimento são para toda a vida”.

Em termos de metodologia nosso estudo foi desenvolvido usando a Engenharia Didática. Ela nos auxiliou na elaboração, organização e aplicação de nossa investigação didático-pedagógica, além de tornar possível realizar as análises e validações propostas nos objetivos, uma vez que essa visa pesquisas que estudam os processos de aprendizagem de um dado objeto matemático, favorecendo uma ligação entre a pesquisa e a ação pedagógica.

A metodologia de trabalho com experimentos aqui apresentada segue a tendência construtivista do ensino de Matemática. Nesta tendência, “a preocupação é com a construção do conceito pela criança, estando esta ativa nesta construção. O professor é o mediador e facilitador na aprendizagem do aluno, intervindo e problematizando” (GRANDO, 2007, p. 47).

Já vimos que há recomendações anteriores de se trabalhar Probabilidade partindo sempre de situações-problema e de forma integrada com outros conteúdos. Acreditamos que isto venha contribuir para a construção de conceitos, pois um conceito só é formado diante de várias situações, em que esse aluno possa elaborar hipóteses, criar estratégias e, daí, partir para a generalização, abstração e transferências desses conceitos a outros conceitos visando soluções e formulações de novos problemas. Desse modo, acreditamos que essa forma de abordar esses conteúdos contribui eficazmente para uma construção/reconstrução do conhecimento matemático que se realiza de modo mais significativo para o aluno.

Por isso, nossa proposta é colocar os alunos diante de experimentos em que suas crenças sejam explicitadas e que eles tenham a possibilidade de verificar algumas hipóteses. O papel do professor nesse processo é fundamental: propiciar a realização dos experimentos, ouvir o que os alunos têm a dizer, confrontar pontos de vista, criar contra exemplos, estimular a discussão na sala de aula, etc. Nessas explorações, não estamos preocupados em estabelecer sistematizações, mas em oferecer aos alunos situações de tomadas de decisão. Apoiamo-nos em estudos que apontam a necessidade de um trabalho pedagógico que explore simultaneamente os níveis empírico-experimentais e os teóricos.

1.3 MÉTODO DE INVESTIGAÇÃO

Como metodologia de pesquisa utilizamos a Engenharia Didática.

Engenharia Didática é um termo que foi criado na França pela educadora Michèle Artigue (década de 80), constituindo-se em uma metodologia de pesquisa para educadores e profissionais do ensino, inspirada na atividade do engenheiro. Segundo Almouloud (2008), a Engenharia Didática leva esse nome por ter semelhanças com o trabalho de um engenheiro, que se apóia em seus sólidos conhecimentos teóricos e científicos para elaborar um projeto, mas que em certo momento, na execução, pode se deparar com problemas práticos e imprevisíveis.

Para Almouloud (2008) a Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a priori e análise a posteriori. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste.

Especificamente este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de planejar e desenvolver uma sequência didática sobre noções iniciais de Probabilidades que permitisse uma assimilação significativa e abrangente do assunto através de uma metodologia que tem como ponto de partida a realização de experimentos, o uso de jogos e a realidade dos alunos.

CAPÍTULO 2

A EVOLUÇÃO DO PENSAMENTO PROBABILÍSTICO

2.1 IINTRODUÇÃO

A Teoria das Probabilidades, como diz o nome, é o estudo de fenômenos que envolvem a incerteza e se originou como instrumento para modelar jogos de azar, como cartas e dados.

Este Capítulo apresenta uma breve história do desenvolvimento da Teoria das Probabilidades, as diferentes concepções de Probabilidade, a definição de experimentos determinísticos e aleatórios e a definição clássica de probabilidade.

Para compor o item 2.2 desse capítulo, História da Probabilidade, utilizamos como referencial as obras de Boyer (2010), Eves (2004), Garbi (2006) e Lopes (2005).

2.2 HISTÓRIA DA PROBABILIDADE

Não é possível determinar exatamente a origem do estudo das Probabilidades, mas tudo leva a crer que, em algumas civilizações antigas, estudiosos se dedicaram à analise da existência de "regularidades" em fenômenos imprevisíveis. Sabe-se que povos não ocidentais, como os hindus e árabes, há muito tempo, já tinham noções dos chamados jogos de azar. Contudo, não temos indícios de que tenham desenvolvido conhecimentos sobre eles. A Igreja Católica, durante a Idade Média, proibiu os jogos, principalmente os de azar, e é muito provável que tenha destruído registros antigos.

Talvez seja correto dizer que não houve nenhum tratamento matemático da Probabilidade até por volta do final do século XV e início do século XVI, quando matemáticos italianos tentaram avaliar as possibilidades em jogos de azar, embora tenha se iniciado como ciência empírica muito antes desse período. Suas raízes apareceram principalmente nos jogos e apostas. Há registros de que, por volta do 1200 a.C., um pedaço de osso do calcanhar (astragalus) fosse utilizado formando faces como as de um dado. Mesmo antes disso, por volta de 3500 a.C., no Egito, já havia jogos utilizando ossinhos. Os Romanos também eram apaixonados por jogos de dados e cartas que, durante a Idade Média, foram proibidos pela Igreja Cristã.

No século XVI, o matemático e jogador italiano Jerônimo Cardano (1501-1576) decidiu estudar as probabilidades de ganhar em vários jogos de azar. Analisou seriamente as probabilidades de retirar azes de um baralho de cartas e de obter “setes” com dois dados e publicou os resultados dessas pesquisas em um breve manual para jogadores chamado *Liber de Ludo Aleae* (O livro dos jogos de azar - 1526) onde introduziu a noção moderna de Probabilidade e também ensinava maneiras de trapacear nos jogos.

Jerônimo Cardano é considerado iniciador da Teoria das Probabilidades, pois foi o primeiro a fazer observações do conceito probabilístico de um dado honesto e a escrever um argumento teórico para calcular probabilidades. Ele afirmou que, ao jogar dados, a chance de se obter um, três ou cinco era a mesma de se obter dois, quatro ou seis.

O também italiano Galileu Galilei (1564-1642) escreveu *Sopra le Scoperte dei Dadi* (Considerações sobre o Jogo de Dados), publicada postumamente em 1718. Galileu introduz o texto com a seguinte frase: "O fato que em um jogo de dados determinados números são mais vantajosos que outros tem um motivo muito obvio, isto é, que alguns são mais facilmente e frequentemente feitos do que outros, que depende de seu poder de ser obtido de maior variedade de números."

Apesar disso, muitos autores atribuem a origem organizada do estudo das Probabilidades às correspondências trocadas entre os matemáticos franceses Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665), nas quais discutiam as chances associadas aos jogos de azar, principalmente aos jogos envolvendo baralhos. Blaise Pascal publicou um folheto intitulado “*Sobre o raciocínio em jogos de azar*”, no qual tentava responder aos problemas propostos, em 1654, por Chevalier de Méré, um famoso jogador da época. Um dos problemas apresentados e discutidos nas correspondências entre os matemáticos foi o “problema dos pontos”, também conhecido como “problema do jogo interrompido”, no qual se questionava sobre a divisão justa de um prêmio entre dois jogadores igualmente hábeis, no caso de um determinado jogo não chegar ao fim, supondo-se conhecido o marcador no momento da interrupção e o número de pontos necessários para se ganhar o jogo.

Tempos depois, o físico e matemático Christiaan Huygens esteve em Paris, tomou conhecimento das cartas e resolveu continuar aqueles estudos. Daí nasceu o primeiro tratado sobre a Teoria das Probabilidades fundamentado no conceito de expectativa, *De raciociniis in ludo aleae*, publicado por Huygens em 1657. Foi a melhor exposição sobre a Teoria das Probabilidades até o aparecimento, em 1713, da *Ars Conjectandi* de Jacob

Bernoulli (1654- 1705). Em seu livro Jacob Bernoulli enunciou a Lei dos Grandes Números e com isto fez uma contribuição que marcou o início de uma nova era na Teoria das Probabilidades.

As idéias pioneiras de Fermat, Pascal e Huygens em Teoria das Probabilidades foram consideravelmente trabalhadas no século XVIII e os progressos nesse novo campo se sucederam de maneira bastante rápida. A *Ars Conjectandi* (Arte de Conjecturar) de Jacob Bernoulli, publicado postumamente, foi seguida de importantes contribuições à Teoria das Probabilidades, figurando com destaque entre elas as de Abraham De Moivre (1667-1754). De Moivre é conhecido principalmente por suas obras *Annuities upon Lives*, que teve um papel importante na história da Matemática atuarial, *Doctrine of Chances*, que continha muito material sobre Teoria das Probabilidades e *Miscellanea analytica*, em que há contribuições a séries recorrentes, probabilidade e trigonometria analítica.

Após esses esforços pioneiros, vemos o assunto ser levado à frente por importantes matemáticos como Daniel Bernoulli (1700-1782), Leonhard Euler (1707-1783), Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Pierre-Simon Laplace (1749-1827), Henri Poincaré (1854-1912) e tantos outros.

Os livros de Bernoulli e De Moivre foram as contribuições mais importantes no período inicial da Teoria das Probabilidades antes de Laplace. Nenhum outro livro de maior importância foi publicado até 1812, quando Laplace escreveu, com base em trabalhos que desenvolveu entre 1771 e 1786, seu grande tratado *Théorie Analytique des Probabilités*, publicado em dois volumes. Os fundamentos da Teoria das Probabilidades foram então colocados por Laplace em uma forma (hoje dita clássica) que se manteve praticamente inalterada até o início do século XX. Nesse tratado Laplace fez novas contribuições e reuniu, sistematizou e ampliou resultados desenvolvidos por seus predecessores. Ele considerou a teoria em todos os aspectos e em todos os níveis, e seu *Essai philosophique des probabilités* de 1814 é uma exposição introdutória para o leitor comum. Laplace escreveu que “no fundo a Teoria das Probabilidades é apenas o senso comum expresso em números”, mas sua *Théorie analytique* mostra a mão de um mestre da análise que conhece seu cálculo avançado.

Henri Poincaré, considerado o último universalista da Matemática, assim como Laplace, escreveu extensamente sobre Probabilidade e contribuiu notavelmente para a Teoria das Probabilidades. Em certos aspectos sua obra é uma continuação natural da de Laplace e outros matemáticos.

O uso de Probabilidade e de modelos estatísticos na Física no final do século XIX e início do século XX evidenciou as limitações dos fundamentos matemáticos da Teoria das Probabilidades a ponto de desacreditá-la junto a vários matemáticos da época. A necessidade de se estabelecer uma fundamentação mais consistente e um significado preciso dos conceitos usados na Teoria das Probabilidades foi enfatizada por paradoxos como os propostos por Joseph Bertrand (1822-1900) em seu livro *Calcul des Probabilités* (1899). Nas décadas seguintes muitos matemáticos contribuíram para o desenvolvimento da Teoria Moderna de Probabilidade.

Em 1918, em seu trabalho *Axiomatisches Denken*, David Hilbert (1862-1943) conclamou os matemáticos a construir toda a Matemática sobre sistemas axiomáticos. Sua famosa palestra no Congresso Internacional de Matemática de 1900 em Paris já colocava a axiomatizacão da Probabilidade como uma necessidade. Sua palestra foi o incentivo necessário para o desenvolvimento da matemática moderna e, em particular, para a axiomatizacão da Teoria das Probabilidades.

Uma primeira proposta de axiomatização da Teoria das Probabilidades foi feita pelo russo S. N. Bernstein (1880-1968) que publicou em 1917 o trabalho *Sobre os fundamentos axiomáticos da Teoria das Probabilidades.* No entanto, a axiomatização na forma apresentada pelo também russo Andrei Kolmogorov (1903-1987) foi a que se estabeleceu e passou a ser utilizada.

Andrei Kolmogorov foi um dos mais importantes matemáticos do século XX com trabalhos que tiveram impactos em várias áreas da Matemática. A axiomatizacão de Kolmogorov marcou o início do desenvolvimento da Teoria Moderna de Probabilidade. Em 1931 publicou um importante artigo *Métodos Analíticos na Teoria das Probabilidades* no qual estabelece os fundamentos da teoria moderna de processos probabilísticos e estatísticos.

2.3 PROBABILIDADE: DIFERENTES CONCEPÇÕES

Desde a sua origem, o conceito de Probabilidades desenvolveu-se em múltiplas perspectivas: concepção clássica ou laplaciana (baseada na “Lei de Laplace”), concepção frequentista ou empírica (baseada na “Lei dos Grandes Números” de Jacob Bernoulli), concepção subjetiva (baseada na crença ou percepção pessoal) e concepção axiomática ou formal (concepção atualmente vigente, desenvolvida por Andrei Kolmogorov).

Concepção clássica ou laplaciana de Probabilidade. Trata-se de uma definição apresentada por Laplace, em 1812: define-se Probabilidade como a razão entre o número de casos favoráveis em relação ao número total de casos possíveis (sem a necessidade de realizar o experimento), desde que todos os resultados sejam igualmente prováveis. Matemáticos chamam isso de uma distribuição de probabilidade uniforme. Exemplo: no lançamento de uma moeda, dizer que a probabilidade é de $\frac{1}{2}$ para cada uma das faces, é um argumento aceitável sob essa concepção.

Concepção frequentista ou empírica de Probabilidade. A probabilidade emerge de uma experimentação – "probabilidade a *posteriori*", ou seja, a probabilidade é calculada depois de os experimentos terem sido realizados. As teorias frequentistas consideram probabilidades a serem atribuídas baseadas no comportamento a longo prazo dos resultados aleatórios. Matematicamente, isso envolve a teoria de limites e convergência. Experimentos realizados até mesmo com ajuda de computadores evidenciam que, quanto maior o número de experimentos, maior proximidade há entre a probabilidade empírica (*a posteriori*) e a probabilidade teórica (*a priori* – calculada sem manipulação experimental e tomando-se por base a concepção clássica). Em termos pedagógicos, a grande dificuldade é saber o número de experimentos necessários para que haja essa proximidade. Além disso, há uma forte tendência, entre os alunos, de trabalhar com essa concepção. Por exemplo, num jogo de dados, em que a soma mais provável é 7, muitos alunos apostam nos números que mais saíram nas jogadas anteriores, mesmo sabendo que 6, 7 e 8 são as somas mais prováveis.

Concepção subjetivista de Probabilidade. As probabilidades expressam grau de crença ou percepção pessoal. Ela fica centrada no sujeito. Tal concepção se faz muito presente em jogos de azar: os jogadores têm confiança em determinado acontecimento; apóiam-se na coerência e consistência do acontecimento. O mesmo costuma ocorrer com os alunos em sala de aula, no início do trabalho com Probabilidade: eles tendem a fazer julgamentos pessoais.

Concepção axiomática ou formal. Trata-se da concepção vigente atualmente que se apóia na teoria dos conjuntos, contrapondo-se à concepção clássica. É um conceito definido implicitamente por um sistema de axiomas e um conjunto de definições e teoremas deduzidos deles.

Nota: As nossas folhas de Atividade têm por finalidade introduzir a definição de Probabilidade Clássica, a partir da organização do espaço amostral de um experimento. Na

Atividade 2 faremos uso da concepção frequentista, através de dois jogos, como recurso lúdico e facilitador da aprendizagem.

2.4 EXPERIMENTOS DETERMINÍSTICOS E EXPERIMENTOS ALEATÓRIOS

Encontramos na natureza dois tipos de experimentos: determinísticos e aleatórios.

> Diremos que um experimento é *determinístico* quando repetido em condições semelhantes conduz a resultados essencialmente idênticos. Os experimentos que repetidos sob as mesmas condições produzem resultados geralmente diferentes serão chamados de experimentos *aleatórios* (MORGADO, 2001, p. 118).

Ao aquecermos a água pura no nível do mar temos a certeza de que ela entrará em ebulição a 100º C e se realizarmos esse experimento inúmeras vezes nas mesmas condições sempre vamos obter o mesmo resultado. Esse é um exemplo de experimento *determinístico*. Já ao lançarmos um dado não sabemos que número sairá. Se fizermos vários lançamentos provavelmente encontraremos resultados diferentes. Esse é um exemplo de experimento *aleatório*.

Chamaremos de *espaço amostral* o conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória. Representaremos o espaço amostral por S e só vamos considerar aqui o caso de S ser finito. Os subconjuntos do espaço amostral serão chamados de *eventos*. Diremos que um evento ocorre quando o resultado da experiência pertence ao evento.

Assim, podemos representar o espaço amostral para o lançamento de uma moeda (observando a face que sai voltada para cima) da seguinte maneira:

$$S = \{cara;\ \ coroa\}$$

E o número e eventos são quatro: ϕ (vazio), $A = \{cara\}$, $B = \{coroa\}$ e $S = \{cara;\ \ coroa\}$. ϕ é um evento que nunca ocorre e é chamado de evento impossível. S ocorre sempre e é chamado evento certo. $A = \{cara\}$ ocorre se e somente se o lançamento resulta em cara e $B = \{coroa\}$ ocorre se e somente se o lançamento resulta em coroa.

2.5 PROBABILIDADE: UMA DEFINIÇÃO

A concepção clássica do cálculo de probabilidade apresentada por Laplace, em sua obra *Théorie analytique des probabilités*, publicada em 1812, é considerada como o primeiro ensaio de se definir probabilidade com o rigor matemático. Nesse caso a probabilidade é definida pela razão entre números de casos favoráveis em relação ao número total de casos possíveis, desde que esteja explícito que todos os resultados são igualmente prováveis. Antes de Laplace a obra *Líber de Ludo Aleae* de Jerônimo Cardano e *Sopra le Scoperte dei Dadi* de Galileu Galilei já apresentavam explicações que hoje conhecemos como concepção clássica ou laplaciana de probabilidade.

Esta definição clássica de probabilidade possui fragilidades pelo fato de se aplicar apenas em situações em que os resultados possíveis são equiprováveis, mas também possui virtudes, pois as probabilidades são estabelecidas a *priori*, a partir da suposição dessa equiprobabilidade dos resultados, portanto, sem ser necessário recorrer à experimentação prolongada.

A Lei de Laplace continua a ter uma enorme aplicabilidade, principalmente no cálculo das probabilidades mais elementares, que fazem parte dos programas curriculares dos ensinos Fundamental e Médio.

Assim, pode-se dizer que a probabilidade é a razão entre o número de casos favoráveis em relação ao número total de casos possíveis, desde que todos os resultados sejam igualmente prováveis.

Dessa forma, dado um espaço amostral *S* e um evento possível *A*, dizemos que a probabilidade de ocorrência do evento *A* é dada pela razão:

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}}$$

Na expressão acima, $P(A)$ indica a probabilidade de ocorrer o evento A, $n(A)$ é a quantidade de casos favoráveis no espaço amostral e $n(S)$ é a quantidade de casos no espaço amostral.

CAPÍTULO 3

DESCRIÇÃO DA PROPOSTA DE ATIVIDADES

3.1 INTRODUÇÃO

Neste item, descrevemos as Atividades propostas aos alunos, apresentamos seus objetivos e justificativas e fazemos análises prévias, apontando algumas expectativas de soluções que podem ser apresentadas pelos alunos.

Ao elaborarmos as Atividades levamos em conta as recomendações de Lopes (2008, p. 71) sobre o ensino das noções probabilísticas: “a partir de uma metodologia heurística e ativa, por meio de proposições de problemas concretos e da realização de experimentos reais ou simulados”.

Assim, nossa proposta também está alicerçada nos PCNs considerando-se que “as noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis)” (BRASIL, 1998, p. 52).

Segundo Lopes (2011a, p. 614) para a solução dos problemas:

> [...] os alunos deverão utilizar-se de sua própria linguagem. Não devemos exigir ou inserir neste momento nenhum formalismo ou rigor característico da Matemática. O importante é que os alunos apreendam e reconstruam o conceito matemático. Apenas no final dos trabalhos de cada seção é que o professor deverá sistematizar o novo conceito estudado. É conveniente privilegiar, também, o trabalho e as discussões das soluções apresentadas entre os grupos.

O Relatório Pedagógico sobre o Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo – SARESP (Brasil 2012, p. 109) recomenda que “para chegar ao conceito de probabilidade, medida pela frequência com que um evento ocorre, deve-se trabalhar com o conceito de forma intuitiva, desde os primeiros anos do ensino fundamental”.

A partir da relação histórica entre a Teoria das Probabilidades e os jogos de azar, a nossa proposta pedagógica de trabalho consistirá na apresentação de quatro Atividades. Essa proposta tem como objetivos: introduzir noções elementares da Teoria das Probabilidades: eventos, espaço amostral, probabilidade de eventos simples; construir tabelas simples; discutir as diferenças entre experimento determinístico e aleatório; estimar probabilidades por meio da frequência relativa; e analisar padrões observados e esperados.

Sugerimos que os alunos trabalhem em duplas para que possam trocar ideias e, ao final, compartilhar com a classe as conclusões a que chegaram. Acreditamos que após discutirem suas ideias em dupla fiquem mais confiantes ao expor seus resultados para a classe. É importante privilegiar o trabalho e as discussões das soluções apresentadas pelas duplas.

3.2 O ENSINO DE PROBABILIDADE NA EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL E OS PCNs

Os conceitos e procedimentos de Probabilidade se encontram na disciplina de Matemática, no Bloco Tratamento da Informação no Ensino Fundamental (BRASIL, 1998). Nas séries iniciais do Ensino Fundamental, o ensino de Probabilidade tem como principal finalidade que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano é de natureza aleatória, sendo possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos.

Os PCNs (BRASIL, 1998) recomendam que a ideia de probabilidade seja explorada em situações-problema simples, identificando os eventos possíveis, os eventos certos e os eventos impossíveis, salientando a importância da observação da frequência de ocorrência de alguns eventos a partir de um número razoável de experiências.

> Com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis) (BRASIL, 1998, p. 52).

3.3 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES

Passamos a descrever detalhadamente as Atividades que elaboramos. As folhas de Atividades, conforme foram apresentadas aos alunos, encontram-se no Anexo A.

3.3.1 Descrição da Atividade 1

A Atividade 1 é composta de uma breve introdução sobre a relação entre o estudo da Probabilidade e os jogos de azar apontando algumas personagens importantes e suas obras que evidenciam esta relação; uma história cujas personagens precisam tomar algumas decisões e resolvem fazê-las na “sorte” utilizando moedas e dados; e três questões de múltipla escolha. Nesta Atividade iniciamos algumas discussões sobre sorte, aleatoriedade e noções de Probabilidade, partindo de um contexto em que os alunos precisarão se posicionar frente aos problemas propostos.

Na história (Figuras 1 e 2) as personagens Paulo e Pedro tomam algumas decisões na “sorte” apostando em cara ou coroa no lançamento de uma moeda, produto par ou ímpar no lançamento de dois dados e soma par ou ímpar no lançamento de dois dados. Os alunos devem responder às questões e explicar porque consideram as situações justas ou não. Esperamos que nessa Atividade inicial os alunos façam as justificativas apenas pela intuição. Posteriormente, na Atividade 2, deverão ser capazes de calcular a probabilidade nos experimentos e perceber que às vezes a intuição falha.

Figura 1 – Extraída da folha de Atividade 1

O jogo de xadrez

Paulo e Pedro são dois amigos que adoram jogar xadrez após terminarem as atividades escolares. Eles combinaram que decidiriam na sorte quem seria o primeiro a jogar. A escolha seria feita com o lançamento de uma moeda. Se sair cara, Paulo começa o jogo; se sair coroa, Pedro começa o jogo. Então todas as tardes, antes de começarem a jogar, eles lançam uma moeda.

Após algumas semanas Paulo fez uma nova proposta para seu amigo: vamos lançar dois dados ao mesmo tempo e multiplicar os resultados obtidos na face superior, se o produto for par eu começo o jogo, se for impar você começa.

Será que Paulo fez uma proposta justa para seu colega? Explique.

Lançar uma moeda para decidir “na sorte” quem começa o jogo é justo? Explique.

Fonte: O autor

Figura 2 – Extraída da folha de Atividade 1

Suco ou refrigerante?

Após o jogo de xadrez eles sempre tomam um lanche. Paulo gosta de refrigerante e Pedro de suco. Paulo propôs o seguinte ao amigo: vamos lançar dois dados ao mesmo tempo e somar os resultados obtidos na face superior, se o soma for par tomamos refrigerante, se for impar tomamos suco.

Será que Paulo fez uma proposta justa para seu colega? Explique.

Fonte: O autor

Temos como objetivo, na história, identificar as palavras que fazem parte do cotidiano dos alunos para expressar a confiança sobre a ocorrência de certos eventos.

Para encerrar a Atividade 1 elaboramos três questões de múltipla escolha (Figuras 3, 4 e 5) envolvendo situações similares às utilizadas pelas personagens Paulo e Pedro ao decidirem na sorte as situações apresentadas na história. Optamos por questões de múltipla escolha por favorecer uma análise mais objetiva dos resultados do teste aplicado.

Figura 3 – Extraída da folha de Atividade 1

1 - Se lançarmos uma moeda, qual a face que terá mais chance de sair?
a) coroa tem mais chance;
b) cara tem mais chance;
c) as chances são as mesmas;

Por quê?____

Fonte: O autor

Figura 4 – Extraída da folha de Atividade 1

2 - Dois dados numerados de 1 a 6 são lançados ao mesmo tempo e os pontos das faces superiores são multiplicados, resultando uma produto par ou impar. O que terá mais chance de ocorrer?
a) o produto par tem chance;
b) o produto impar tem chance;
c) as chances são as mesmas;

Por quê?____

Fonte: O autor

Figura 5 – Extraída da folha de Atividade 1

3 – Dois dados numerados de 1 a 6 são lançados ao mesmo tempo e os pontos das faces superiores são somados, resultando uma soma par ou impar. O que terá mais chance de ocorrer?
a) a soma par tem mais possibilidade;
b) a soma impar tem mais possibilidade;
c) as chances são as mesmas;

Por quê?____

Fonte: O autor

Acreditamos que os alunos assinalarão a alternativa c) nas três questões por acreditarem que as chances são as mesmas.

Observamos que no item 2) (Figura 4) houve um erro de redação que foi corrigido na hora da aplicação. Nesse item ficou faltando a palavra "mais".

3.3.2 Descrição da Atividade 2

A Atividade 2 é composta por dois jogos e a análise sobre eles. Esta Atividade tem por finalidade fazer com que os alunos percebam por meio de experimentações e simulações que podem indicar a probabilidade de ocorrência de um determinado evento. Temos neste trabalho, utilizado o jogo como uma forma de motivação para os alunos. Esperamos que a Atividade desperte o interesse dos alunos e conduza ao conhecimento matemático pretendido.

Para Lopes (2011a, p. 608) "outra concepção de probabilidade que pode e deve ser trabalhada no Ensino Fundamental e Médio é a frequentista, ou seja, a definição de probabilidade obtida por um processo de experimentação e simulação".

Para Coutinho (1994, p. 34) "a concepção frequentista é um agente facilitador para o aprendizado dos conceitos básicos em Probabilidade, devido a sua maior proximidade com a realidade dos alunos".

No jogo 1 (Figura 6), denominado *Cara ou Coroa*, os alunos devem escolher quem será o jogador cara e o jogador coroa. Se sair cara no lançamento, ponto para o jogador que escolheu cara e se for coroa, ponto para o jogador que escolheu coroa. O jogo termina após 50 lançamentos e vence quem fizer mais pontos. Certifique-se se os alunos entenderam as regras do jogo. Cada dupla receberá uma moeda de 1 real para realizar o experimento.

Os alunos devem lançar a moeda, apanhá-la no ar e colocá-la sobre o dorso da mão. Um aluno lança a moeda e o outro anota os resultados ou podem alternar as funções a cada lançamento.

Acreditamos que seja bastante claro para os alunos, mesmo que intuitivamente, que ao lançar uma moeda os resultados possíveis são cara e coroa e que estes resultados são igualmente prováveis, ou seja, a probabilidade de sair cara é de uma em duas possíveis, assim como sair coroa também é de uma em duas possíveis.

Figura 6 – Extraída da folha de Atividade 2

Jogo 1 – Cara ou Coroa
Regras:
* Antes de iniciar, cada dupla tem de decidir quem será o jogador "**cara**" e quem será "**coroa**".
* Para começar, a moeda deve ser lançada.
* Se sair **cara**, ponto para o jogador que escolheu cara. Se for **coroa**, ponto para o oponente.
* O jogo termina após 50 rodadas e vence quem fizer o maior número de pontos.

Fonte: O autor

Antes de iniciarem os alunos devem responder o item a) (Figura 7) indicando quantas vezes esperam que saia cara ou coroa, justificando suas respostas.

Figura 7 – Extraída da folha de Atividade 2

a) Antes de iniciar os lançamentos, responda: Quantas vezes vocês esperam que saia cara? E coroa? Por quê?

Fonte: O autor

No item b) (Figura 8) há uma tabela para os alunos registrarem os resultados dos lançamentos e uma coluna para indicarem a frequência relativa em porcentagem. Acreditamos que os alunos possam estabelecer uma relação com o cálculo da porcentagem, pois é um conceito que eles já conhecem.

Figura 8 – Extraída da folha de Atividade 2

b) Registrem os resultados na tabela abaixo.

Face obtida	Número de ocorrências	Frequência	Frequência relativa
cara			
coroa			

Fonte: O autor

No item c) (Figura 9) os alunos devem comparar os resultados obtidos no lançamento da moeda com as previsões que fizeram no item a). Como o número de repetições do experimento é muito pequeno (50 lançamentos) as previsões feitas no item a) não deverão ser confirmadas por todas as duplas.

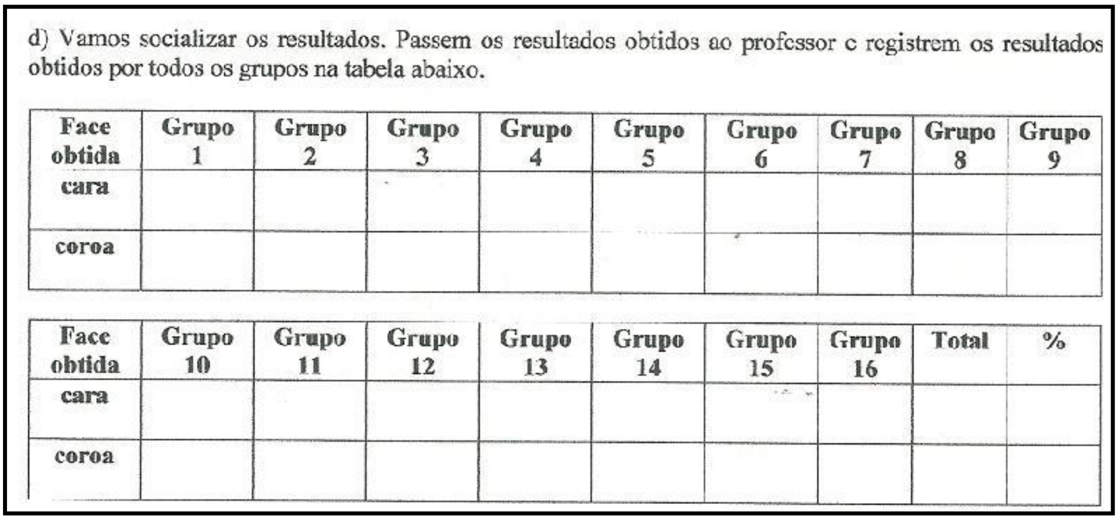
Figura 9 – Extraída da folha de Atividade 2

c) Analisem suas previsões iniciais (item a). Elas se confirmaram ou não após as jogadas? Explique.

Fonte: O autor

No item d) (Figura 10) os alunos devem registrar os resultados de todas as duplas da sala. Poderá ocorrer que os 50 lançamentos de cada dupla não sejam suficientes para a análise da tendência de 50% para cara e 50% para coroa, então, no momento em que as duplas compartilharem os resultados vamos somar o total de caras e o total de coroas de todos os grupos da sala, fazendo a análise de ocorrências. Espera-se que os alunos percebam que a ideia intuitiva de probabilidade de um evento está ligada à frequência observada deste evento quando o experimento é realizado um grande número de vezes.

Figura 10 – Extraída da folha de Atividade 2



d) Vamos socializar os resultados. Passem os resultados obtidos ao professor e registrem os resultados obtidos por todos os grupos na tabela abaixo.

Face obtida	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6	Grupo 7	Grupo 8	Grupo 9
cara									
coroa									

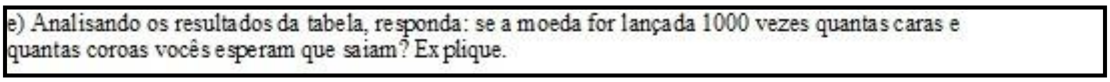
Face obtida	Grupo 10	Grupo 11	Grupo 12	Grupo 13	Grupo 14	Grupo 15	Grupo 16	Total	%
cara									
coroa									

Fonte: O autor

Ao observarem os resultados de todas as duplas (Figura 10) esperamos que os alunos percebam que os resultados cara e coroa foram "bem distribuídos" entre as duplas levando-os a intuir que sair cara ou sair coroa tem a mesma chance. Nesse momento faremos a análise e discussão sobre os resultados do jogo 1.

No item e) os alunos devem fazer uma previsão para 1000 lançamentos. Espera-se que os alunos reflitam sobre o que aconteceria com as frequências relativas de cada evento se continuassem fazendo muitos lançamentos e conjecturem que a frequência relativa de ocorrer cara cada vez mais se aproxime de 50%, e da mesma forma a frequência relativa do evento sair coroa irá convergir para 50%.

Figura 11 – Extraída da folha de Atividade 2



e) Analisando os resultados da tabela, responda: se a moeda for lançada 1000 vezes quantas caras e quantas coroas vocês esperam que saiam? Explique.

Fonte: O autor

No jogo 2 (Figura 12), denominado *jogo do produto,* os alunos devem escolher quem será o jogador par e o jogador ímpar. Se o produto dos resultados das faces superiores dos dois dados for par, ponto para o jogador que escolheu par e se for ímpar, ponto para o jogador que escolheu ímpar. O jogo termina após 50 lançamentos e vence quem fizer mais pontos. O professor deve se certificar de que os alunos compreenderam as regras do jogo. Cada dupla receberá dois dados.

Nas folhas de atividades reformuladas no anexo C substituímos a regra do jogo 2 – jogo do produto "*Para começar, o dados devem ser lançados duas vezes seguidas*" por "*Para começar, os dois dados devem ser lançados ao mesmo tempo*".

Figura 12 – Extraída da folha de Atividade 2

Jogo 2 – jogo do produto
Regras:
* Antes de iniciar, cada dupla tem de decidir quem será o jogador **par** e quem será **ímpar**.
* Para começar, os dados devem ser lançados duas vezes seguidas.
* Multiplicar os pontos da face superior de cada um dos lançamentos. Se o produto for **par**, ponto para o jogador **par**. Se for **ímpar**, ponto para o oponente.
* O jogo termina após 50 lançamentos e vence quem fizer o maior número de pontos.

Fonte: O autor

Assim como no jogo 1, antes de iniciarem os alunos devem responder o item a) (Figura 13) indicando quantas vezes esperam que ocorra produto par ou produto ímpar justificando suas respostas.

Provavelmente o número respostas/justificativas corretas será baixo. A expectativa é de que os alunos atribuam valores próximos de 50% para cada um dos eventos. Os alunos responderão provavelmente com base nos resultados do jogo 1 e em experiências do cotidiano, como por exemplo, na brincadeira realizada com as mãos de "tirar par ou ímpar" . Os alunos também poderão usar o seguinte raciocínio: são dois resultados possíveis, produto par ou produto ímpar, e concluir que há 50% de probabilidade para cada.

Figura 13 – Extraída da folha de Atividade 2

a) Antes de iniciar os lançamentos, responda: Quantas vezes vocês esperam que ocorra produto par? E ímpar? Por quê?

Fonte: O autor

No item b) (Figura 14) há uma tabela para os alunos registrarem os resultados dos lançamentos e uma coluna para indicarem a frequência relativa em porcentagem. Espera-se que durante a realização do jogo algumas duplas estranhem o fato do jogador par ganhar um número expressivo das jogadas, diferentemente do que ocorreu no jogo 1.

Figura 14 – Extraída da folha de Atividade 2

b) Registrem os resultados na tabela abaixo.

Produto obtido	Número de ocorrências	Frequência	Frequência relativa
Par			
Ímpar			

Fonte: O autor

No item c) (Figura 15) os alunos devem comparar os resultados obtidos no lançamento dos dados com as previsões que fizeram no item a). Acreditamos que os resultados previstos no item a) não se confirmem após a realização das jogadas, uma vez que a probabilidade de sair par é de 75% e a de sair ímpar é de 25%.

Figura 15 – Extraída da folha de Atividade 2

c) Analisem suas previsões iniciais (item a). Ela se confirmou ou não após as jogadas? Explique.

Fonte: O autor

No item d) (Figura 16) os alunos devem registrar os resultados de todas as duplas da sala. Espera-se que esta situação gere discussões interessantes, pois os alunos perceberão que raramente o jogador impar irá vencer o jogo.

Figura 16 – Extraída da folha de Atividade 2

d) Vamos socializar os resultados. Passem os resultados obtidos ao professor e registrem os resultados obtidos por todos os grupos na tabela abaixo.

Produto obtido	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6	Grupo 7	Grupo 8	Grupo 9
Par									
Ímpar									

Produto obtido	Grupo 10	Grupo 11	Grupo 12	Grupo 13	Grupo 14	Grupo 15	Grupo 16	Total	%
Par									
Ímpar									

Fonte: O autor

Ressaltamos que nesses momentos de compartilhamento de experiências o papel do professor é fundamental: permitir que os alunos façam conjecturas, explicitem seus pensamentos sobre o experimento e as chances da cada jogada. Assim, as discussões promovidas começarão a desestabilizar algumas crenças e mostrar que a intuição pode falhar.

No item e) (Figura 17) os alunos devem fazer uma previsão para 1000 lançamentos. Assim como no jogo 1, espera-se que os alunos reflitam sobre o que o que aconteceria com as frequências relativas de cada evento se continuassem fazendo muitos lançamentos e concluam que em 1000 lançamentos saiam mais resultados pares do que ímpares.

Figura 17 – Extraída da folha de Atividade 2

e) Analisando os resultados da tabela, responda: se o experimento for realizado 1000 vezes quantos produtos pares e quantos produtos impares vocês esperam que saiam? Explique.

Fonte: O autor

Nos dois jogos chamaremos a atenção dos alunos para o confronto entre o conceitual e o empírico. Por exemplo, no jogo 1, embora cara e coroa tenham a mesma probabilidade de ocorrer, pode acontecer de uma prevalecer sobre a outra.

Após a realização dos dois jogos e a discussão dos resultados obtidos realizaremos uma análise dos dois jogos na seção denominada *Possibilidades e chances*. O principal objetivo aqui é representar o espaço amostral do jogo 2 e levar os alunos a perceberem que o produto par ocorre um número de vezes maior que o produto ímpar.

Novamente chamaremos a atenção dos alunos para o fato de que no jogo 1 os resultados terem sido bem distribuídos entre as duplas, o mesmo não ocorrendo no jogos 2.

Acreditamos que no jogo 1 é bastante claro que ao lançar uma moeda os resultados possíveis são cara ou coroa e que estes resultados são igualmente prováveis, ou seja, a probabilidade de sair cara é de uma em duas possíveis, assim como sair coroa também é de uma em duas possíveis, ou seja, as chances são iguais.

Já no jogo 2 a expectativa é de que em um primeiro momento os alunos acreditem que cada jogador tem chance igual de marcar ponto, pois sair produto par ou produto ímpar parece ser igualmente provável. No entanto, ao preencher a tabela (Figura 18), esperamos que verifiquem que não é bem assim.

Exploraremos o fato de que quando lançamos dois dados (experimento aleatório) não sabemos qual resultado irá ocorrer, entretanto sabemos quais serão os resultados possíveis (espaço amostral). A representação de todos os resultados possíveis em uma tabela de dupla entrada é bastante conveniente. Os alunos registrarão na tabela (Figura 18) a paridade de todos os produtos possíveis.

Figura 18 – Extraída da folha de Atividade 2

1 - Complete a tabela abaixo indicando os números sorteados e o resultado par ou impar do produto:

X	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1) impar	(1, 2) par				
2	(2, 1) par	(2, 2) par				
3						
4						
5						
6						

Fonte: O autor

Quando tentamos descrever todos os resultados possíveis do jogo, estamos intuitivamente trabalhando o conceito de espaço amostral. Espera-se que os alunos preencham a tabela corretamente e respondam o item 2) (Figura 19): 27 resultados pares e 9 resultados ímpares.

Figura 19 – Extraída da folha de Atividade 2

2 - Quantos resultados são pares? Quantos são impares?

Fonte: O autor

Para responder o item 3) (Figura 20) espera-se que eles raciocinem com base nos 36 resultados obtidos na tabela e percebam que existem 27 chances em 36 de o produto ser par e apenas 9 chances em 36 de o produto ser ímpar.

Figura 20 – Extraída da folha de Atividade 2

3 - Observando essa tabela quem você acha que tem mais chance de ganhar, o jogador **par** ou o jogador **impar**? Por quê?

Fonte: O autor

Essas Atividades já preparam os alunos para a Atividade 3.

3.3.3 Descrição da Atividade 3

A Atividade 3 tem por objetivo a formalização dos conceitos de experimento aleatório, espaço amostral, evento e introduzir o conceito de Probabilidade. Espera-se que depois dos jogos 1 e 2 os alunos compreendam com mais facilidade esses conceitos, fazendo uma conexão entre a probabilidade encontrada por meio de um modelo matemático e os resultados encontrados por meio de experimentações e simulações feitas na Atividade 2. Para tanto, terão de construir o espaço amostral como referência para estimar a probabilidade de sucesso, utilizando-se de uma razão. Todos estes conceitos já foram trabalhados durante as Atividades anteriores, entretanto em nenhum momento foram mencionados.

No início dessa Atividade o professor deverá discutir com os alunos as Atividades 1 e 2. Após as discussões deverá formalizar os conceitos estudados e trabalhar os exemplos. Finalmente deverá solicitar que os alunos resolvam as atividades a) e b).

Espera-se com essa Atividade que os alunos entendam que, quando todos os resultados têm a mesma chance de ocorrer, a probabilidade de um evento é a razão entre o número de resultados relativos ao evento e o número total de resultados. Em outras palavras, é a razão entre o número de casos favoráveis à ocorrência do evento e o número total de casos.

Espera-se que os alunos consigam facilmente resolver o item a) (Figura 21).

Figura 21 – Extraída da folha de Atividade 3

a) No lançamento de um dado numerado de 1 a 6, qual é a probabilidade de se obter um número par?
Resolução:

Fonte: O autor

Espera-se que no item b) (Figura 22) o número de acertos não seja tão grande, pois, os alunos poderão considerar como resultados possíveis apenas (cara, coroa), (cara, cara) e (coroa, coroa) esquecendo-se que os eventos (cara, coroa) e (coroa, cara) são distintos.

Figura 22 – Extraída da folha de Atividade 3

b) Jogando-se ao acaso duas moedas, qual é a probabilidade de se obter duas coroas?
Resolução:

Fonte: O autor

Espera-se que ao final desta Atividade os alunos sejam capazes de fazer uso correto da linguagem probabilística, organizar espaços amostrais simples, identificar eventos igualmente prováveis e determinar probabilidades simples.

É importante, ao final dessa Atividade, discutir coletivamente as resoluções apresentadas pelos alunos.

3.3.4 Descrição da Atividade 4

A Atividade 4 é composta por dois jogos e tem por finalidade verificar se os alunos aplicam corretamente os conceitos desenvolvidos nas Atividades anteriores. Os alunos devem, sem realizar os experimentos, preencher as tabelas e responder os itens propostos.

Figura 23 – Extraída da folha de Atividade 4

Jogo 3 – soma par

Regras:
* Antes de iniciar, cada dupla tem de decidir quem será o jogador **par** e quem será **ímpar**.
* Para começar, os dados devem ser lançados simultaneamente.
* Somar os pontos da face superior de cada um dos dados. Se a soma for **par**, ponto para o jogador **par**. Se for **ímpar**, ponto para o oponente.
* O jogo termina após 50 lançamentos e vence quem fizer o maior número de pontos.

Fonte: O autor

No jogo 3 (Figura 23) a probabilidade de sair par ou ímpar é a mesma. Espera-se que os alunos preencham corretamente o item a) (Figura 24) e concluam, no item b) (Figura 25), que os resultados par ou ímpar têm a mesma chance de ocorrer, pois ao preencher a tabela encontraram 18 resultados pares e 18 resultados ímpares.

Figura 24 – Extraída da folha de Atividade 4

a) Complete a tabela abaixo indicando se a soma entre os valores obtidos nos dados é par ou ímpar.

+	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Fonte: O autor

Figura 25 – Extraída da folha de Atividade 4

b) Os resultados par ou ímpar tem a mesma chance de ocorrer? Por quê?

Fonte: O autor

Figura 26 – Extraída da folha de Atividade 4

Jogo 4

Paulo e Pedro inventaram um jogo de dados com as seguintes regras:

* Lançam-se dois dados simultaneamente e calcula-se a diferença entre a maior e a menor pontuação ou entre os pontos iguais.
* Se a diferença for 0, 1 ou 2, Pedro marca um ponto.
* Se a diferença for 3, 4 ou 5, Paulo marca um ponto.
* O jogo termina após dez lançamentos e vence quem fizer o maior número de pontos.

Fonte: O autor

No jogo 4 (Figura 26) a probabilidade da diferença ser 0, 1 ou 2 é de $\frac{2}{3}$ e a probabilidade da diferença ser 3, 4 ou 5 é de $\frac{1}{3}$. Espera-se que os alunos preencham corretamente o item a) (Figura 27) e concluam, no item b) (Figura 28), que o jogo não é justo, pois o jogador Pedro tem mais chance de ganhar.

Figura 27 – Extraída da folha de Atividade 4

a) Complete a tabela abaixo indicando a diferença entre os valores obtidos nos dados.

-	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Fonte: O autor

Figura 28 – Extraída da folha de Atividade 4

b) Você acha esse jogo justo? Se você fosse um dos jogadores, gostaria de estar no lugar de Pedro ou de Paulo? Por quê?

Fonte: O autor

3.4 CONCLUSÕES

A análise detalhada das folhas de Atividade proporciona uma maior clareza sobre os objetivos que desejamos atingir.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DA APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

4.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo tem por finalidade fazer uma breve descrição da escola e dos alunos, relatar e analisar a aplicação da sequência didática elaborada.

4.2 A ESCOLA

A Escola Estadual “Euclides da Cunha” fica localizada na cidade de São José do Rio Pardo, interior de São Paulo, e pertence à Diretoria de Ensino da Região de São João da Boa Vista. A escola é privilegiada por levar o nome do engenheiro/escritor Euclides da Cunha, que morou em São José do Rio Pardo de 1898 a 1901, onde escreveu parte do livro “Os Sertões”, além de reconstruir a ponte metálica que recebeu seu nome.

A Escola foi criada pelo Decreto nº 6.691 de 21 de setembro de 1934 com o nome de Gymnásio Oficial do Estado, com atividades iniciadas em março de 1935 e inaugurado solenemente no dia 18 de outubro de 1936 com a presença do Sr. Armando de Sales Oliveira, o então governador do Estado. A mudança de nome, homenageando Euclides da Cunha, ocorreu no ano de 1943. Atualmente a Escola trabalha com o Ensino Fundamental Ciclo II e o Ensino Médio regular. Há atividades nos três períodos, sendo o Ensino Médio no período da manhã e no período da noite e o Ensino Fundamental II no período tarde.

A escola conta com uma excelente estrutura e possui um prédio bem conservado com aproximadamente 2.900 metros quadrados, sendo constituída por um prédio principal com sete salas de aulas, uma sala de professores, uma sala de direção, uma sala de coordenação pedagógica, uma secretaria, três laboratórios (de Biologia, Física e Química), uma sala ambiente de informática, uma sala de leitura (biblioteca) e um salão nobre. Há também um anexo com mais quatro salas de aulas e outro anexo que ainda apresenta seis salas de aulas, cozinha com despensa e um almoxarifado. Existem ainda outras salas para material de educação física, grêmio estudantil, projeto Escola da Família, banheiros, um pátio coberto, um pátio descoberto e uma quadra coberta. A unidade conta com um grande acervo de livros didáticos e paradidáticos e mídias em sua biblioteca.

A escola utiliza o material fornecido pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, os “caderninhos” e os livros didáticos. Os professores são orientados a utilizá-los podendo, é claro, complementar suas aulas com outros materiais disponíveis como livros paradidáticos, vídeos, jogos, entre outros.

No início do ano e ao final de cada bimestre a equipe gestora realiza reuniões de pais e mestres com a finalidade de informar e orientar os pais sobre o rendimento dos alunos e as normas da escola. Semanalmente a direção, coordenação e professores reúnem-se para avaliar e analisar o desenvolvimento da proposta pedagógica. Além dessas reuniões, sempre que necessário a Escola convida os pais e/ou responsáveis para, juntos, buscarem soluções para os problemas.

Nos finais de semana a escola é utilizada pelo programa *Escola da Família* para a realização de oficinas, atividades físicas e recreativas, as quais são desenvolvidas por voluntários e estagiários. São ao todo 23 cursos que englobam saúde, trabalho, esporte e cultura. Ou seja, a comunidade também faz uso do ambiente escolar.

Na escola há também o Grêmio Estudantil que promove ações culturais e sociais, tais como, campanha do agasalho, campanha de alimento, campanha de preservação do prédio da escola. Os alunos também têm como iniciativa, jogos, danças e música durante o intervalo. A escola também conta com a Associação de Pais e Mestres (APM) que auxilia na organização de eventos realizados na escola e acompanha a utilização das verbas.

Embora a escola esteja localizada na região central a maioria dos alunos é dos bairros, sítios e fazendas e necessitam do transporte escolar. De acordo com os resultados do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (Saresp) de 2011 (BRASIL, 2012), no Estado o percentual de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental com desempenho abaixo do adequado em matemática chega a quase 80%, no nível adequado 18,4% e no avançado apenas 1,7%. Nossa experiência mostra que os alunos da nossa escola apresentam rendimento muito próximo dos verificados na média estadual. Um número significativo de alunos ingressa no sexto ano com grande defasagem de conteúdos, graves problemas de alfabetização e sem hábito de estudo. Também percebemos que muitas famílias não valorizam, não incentivam e não acompanham o estudo dos filhos.

Por outro lado sentimos que os alunos, principalmente os do Ensino Fundamental II, gostam muito da escola e possuem um carinho especial pelos professores, direção coordenação e funcionários. A Escola é muito organizada e tranquila e raramente ocorrem casos graves de indisciplina ou desacato a funcionários.

A nossa comunidade escolar é bastante cooperativa, participativa e inserida no contexto escolar, procura ir ao encontro aos anseios comunitários, para juntos buscarmos soluções e aprimoramento do processo de ensino-aprendizagem, porque este trabalho de parceria é fio condutor, que gratifica nosso caminhar.

É necessário agradecer à diretora Alexandra Helena K. P. S. Diógenes e aos coordenadores Carlos Alberto Arzani e Rosimeiri Pedroza pela atenção, disposição em ajudar e pelas informações fornecidas.

4.3 APLICAÇÃO DA ATIVIDADE

4.3.1 Aspectos Gerais

Com o propósito de que acontecesse da melhor forma possível, organizamos antecipadamente as duplas e a disposição das carteiras na sala de aula, pois em nossas experiências com trabalho em grupos observamos que os alunos, quando têm a possibilidade de escolher seus parceiros de grupos, excluem alguns colegas. Esse foi um dos aspectos que levamos em conta quando optamos, previamente, por organizar pessoalmente os grupos. A maioria das duplas realizou as Atividades de maneira independente e harmoniosa, mas houve duplas que solicitaram a intervenção do professor em suas discussões, alegando que o parceiro não estava colaborando para a realização da Atividade. Nesses momentos procurávamos mostrar-lhes a importância do trabalho em grupo para a construção do conhecimento individual.

Assim nos dias em que aplicamos as Atividades os alunos entravam na sala e dirigiam-se rapidamente aos seus lugares, sem perder tempo. Como as aulas possuem 50 minutos e, quando são aulas duplas, 100 minutos a organização é imprescindível para que a Atividade seja executada no tempo planejado.

Depois de organizadas as duplas os alunos receberam a ficha de Atividade da aula, sendo orientados a resolvê-las. Destacamos que os aspectos mais importantes da Atividade são a participação e o empenho em resolver os exercícios. Também orientamos que só deveriam registrar a justificativa/resposta da dupla sobre cada tarefa depois de discutir e chegar a um consenso.

As folhas de Atividades foram aplicadas em quatro salas do sétimo ano do

Ensino Fundamental II da Escola Estadual Euclides da Cunha. Participaram do projeto 94 alunos organizados em 47 duplas.

No próximo item, descrevemos as tarefas desenvolvidas, assim como as respectivas observações e considerações, nossas e dos alunos. As considerações dos alunos quanto às Atividades foram semelhantes nas quatro salas, portanto, não achamos necessário trazê-las separadas por sala.

Abordaremos, na sequência, uma discussão acerca das concepções sobre probabilidade, pensamento e linguagem probabilísticos. Traremos a análise dos registros orais e escritos, produzidos pelos alunos durante a aplicação das Atividades.

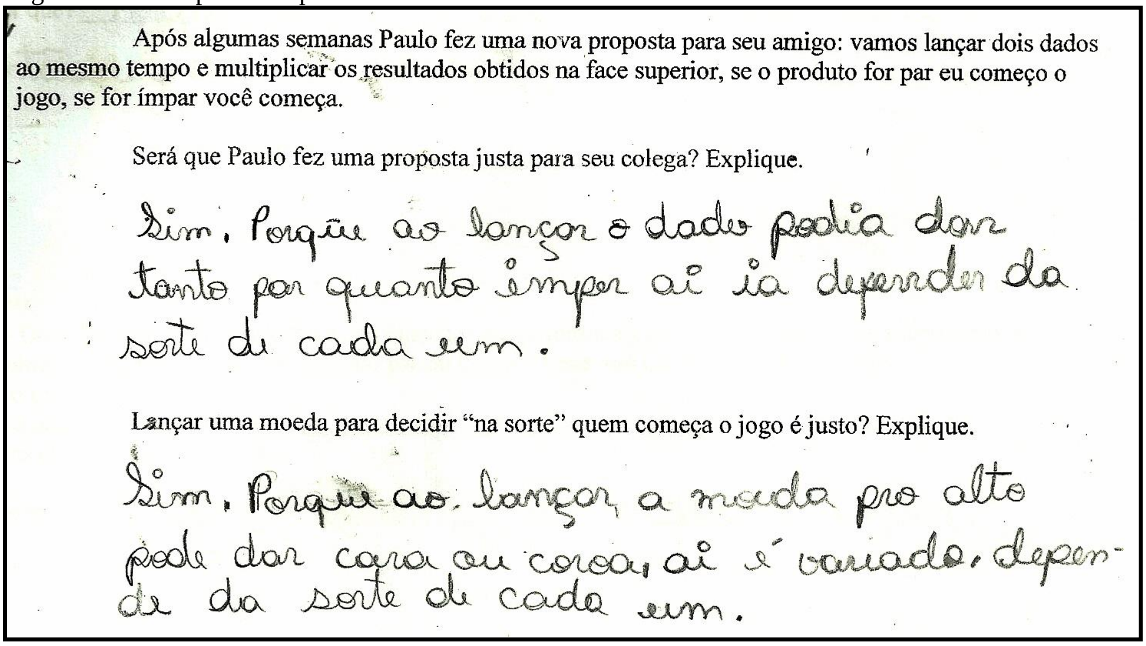
4.3.2 Aplicação da Atividade 1

Ao iniciarmos a aula as duplas já estavam organizadas como havíamos combinado em aulas anteriores. Após a distribuição das fichas de Atividades fizemos a leitura do texto *Jogos: sorte ou matemática? Noções de probabilidade* juntamente com os alunos. Os alunos foram então orientados a ler e responder as questões da história onde as personagens Paulo e Pedro realizavam o lançamento de moedas e dados para definirem escolhas: quem começa o jogo e qual bebida irão tomar.

As duas primeiras questões abordavam se era justo ou não o modo como seria iniciado o jogo, observamos que as duplas faziam as justificativas baseados no reconhecimento de situações de incerteza e sorte. Todas as duplas consideraram que decidir no cara ou coroa é justo e de modo geral justificaram suas respostas alegando que antes de lançar a moeda não dá para saber se vai sair cara ou coroa dependendo, portanto apenas da sorte.

Apenas duas duplas justificaram que a proposta de lançar dois dados e multiplicar os resultados não era justa, pois a probabilidade de sair produto par é maior. Essas duas duplas fizeram alguns cálculos para justificarem suas respostas, mas não conseguiram representar o espaço amostral todo. As demais duplas consideraram a proposta justa e utilizaram as mesmas justificativas usadas para a decisão no cara ou coroa.

Figura 29 – exemplo de resposta



Após algumas semanas Paulo fez uma nova proposta para seu amigo: vamos lançar dois dados ao mesmo tempo e multiplicar os resultados obtidos na face superior, se o produto for par eu começo o jogo, se for ímpar você começa.

Será que Paulo fez uma proposta justa para seu colega? Explique.

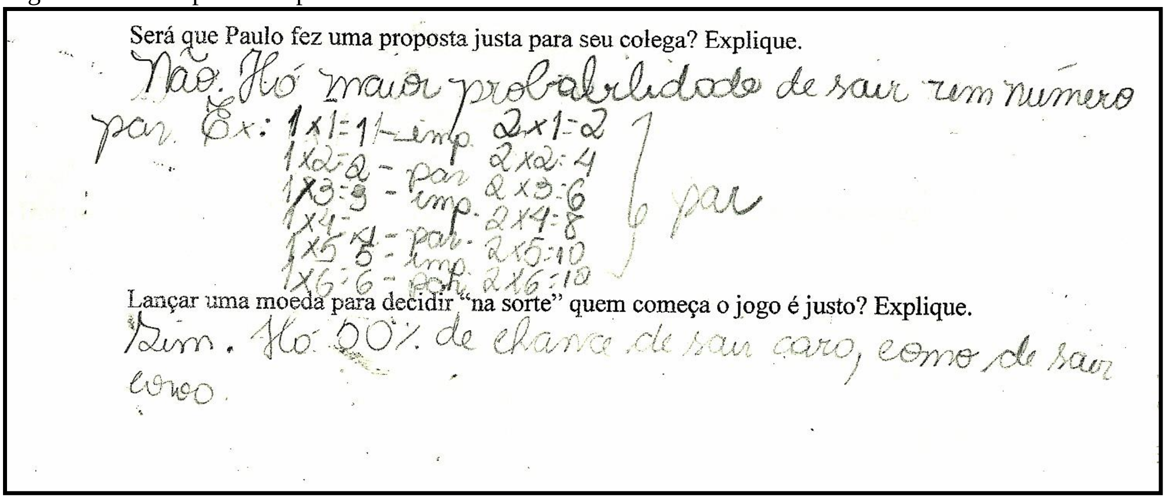
Sim. Porquê ao lançar o dado podia dar tanto par quanto ímpar aí ia depender da sorte di cada um.

Lançar uma moeda para decidir "na sorte" quem começa o jogo é justo? Explique.

Sim. Porque ao lançar a moeda pro alto pode dar cara ou coroa, aí é variado, depende da sorte de cada um.

Fonte: O autor

Figura 30 – exemplo de resposta



Será que Paulo fez uma proposta justa para seu colega? Explique.

Não. Há maior probabilidade de sair um número par. Ex: 1x1=1 - imp. 2x1=2
1x2=2 - par 2x2=4
1x3=3 - imp. 2x3=6
1x4=4 - par. 2x4=8
1x5=5 - imp. 2x5=10
1x6=6 - par. 2x6=12
6 par

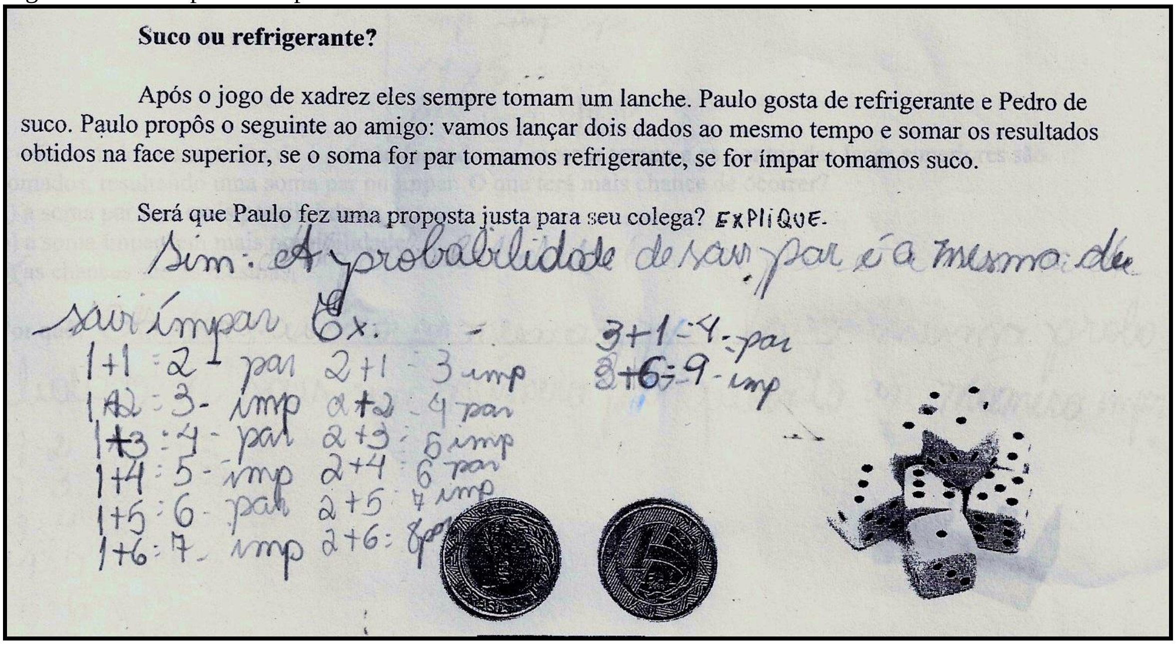
Lançar uma moeda para decidir "na sorte" quem começa o jogo é justo? Explique.

Sim. Há 50% de chance de sair cara, como de sair coroa.

Fonte: O autor

Na questão que abordava se a proposta feita para decidir qual bebida seria tomada era justo ou não muitos alunos justificaram suas respostas dizendo que a proposta não era justa porque cada um deveria tomar o que gosta (Figura 33). Percebemos que eles não analisaram se o modo como estava sendo decidido era justo ou não. Provavelmente o enunciado da questão não ficou muito claro e, por esse motivo, optamos por alterar a questão no produto final. Novamente apenas as mesmas duas duplas realizaram alguns cálculos para tentar justificar suas respostas (Figura 31) e os demais consideraram a proposta justa utilizando a mesma justificativa apresentada nas questões anteriores, ou seja, novamente concluíram que a proposta era justa pois poderia sair soma par ou soma ímpar (Figura 32).

Figura 31 – exemplo de resposta



Suco ou refrigerante?

Após o jogo de xadrez eles sempre tomam um lanche. Paulo gosta de refrigerante e Pedro de suco. Paulo propôs o seguinte ao amigo: vamos lançar dois dados ao mesmo tempo e somar os resultados obtidos na face superior, se o soma for par tomamos refrigerante, se for ímpar tomamos suco.

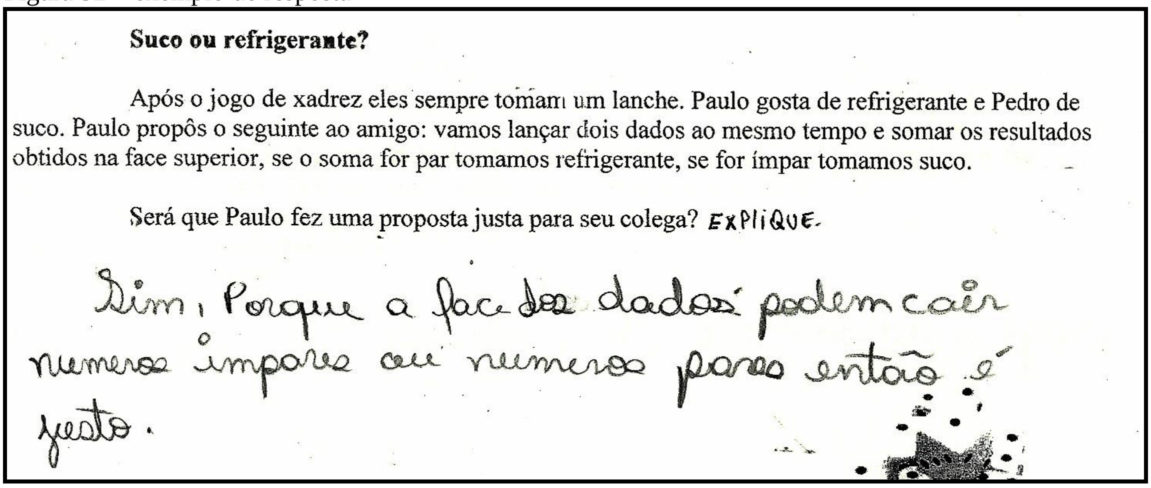
Será que Paulo fez uma proposta justa para seu colega? EXPLIQUE.

Sim. A probabilidade de sair par é a mesma de sair ímpar Ex:

1+1 = 2 par 2+1 = 3 imp 3+1 = 4 par
1+2 = 3 imp 2+2 = 4 par 3+6 = 9 imp
1+3 = 4 par 2+3 = 5 imp
1+4 = 5 imp 2+4 = 6 par
1+5 = 6 par 2+5 = 7 imp
1+6 = 7 imp 2+6 = 8 par

Fonte: O autor

Figura 32 – exemplo de resposta



Suco ou refrigerante?

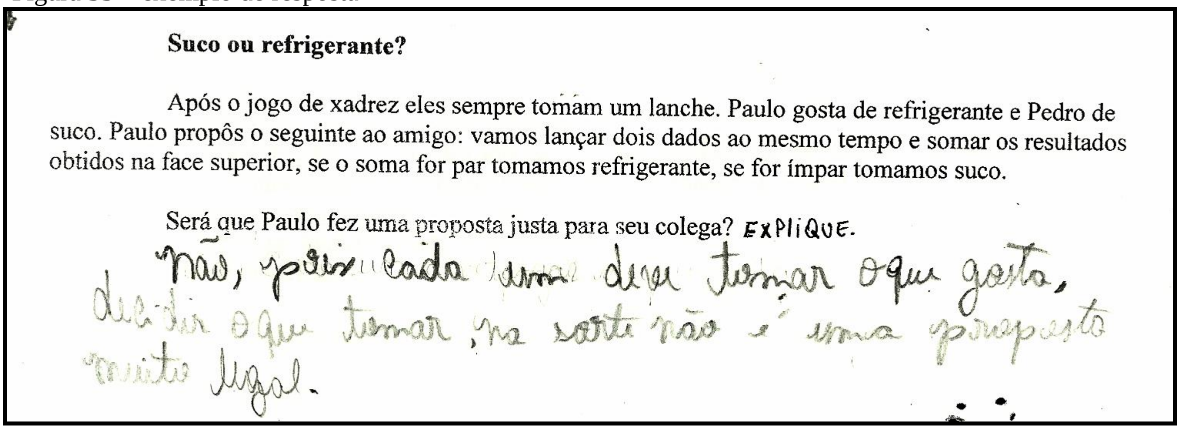
Após o jogo de xadrez eles sempre tomam um lanche. Paulo gosta de refrigerante e Pedro de suco. Paulo propôs o seguinte ao amigo: vamos lançar dois dados ao mesmo tempo e somar os resultados obtidos na face superior, se o soma for par tomamos refrigerante, se for ímpar tomamos suco.

Será que Paulo fez uma proposta justa para seu colega? EXPLIQUE.

Sim, Porque a face dos dados podem caír numeros impares ou numeros pares então é justo.

Fonte: O autor

Figura 33 – exemplo de resposta



Suco ou refrigerante?

Após o jogo de xadrez eles sempre tomam um lanche. Paulo gosta de refrigerante e Pedro de suco. Paulo propôs o seguinte ao amigo: vamos lançar dois dados ao mesmo tempo e somar os resultados obtidos na face superior, se o soma for par tomamos refrigerante, se for ímpar tomamos suco.

Será que Paulo fez uma proposta justa para seu colega? EXPLIQUE.

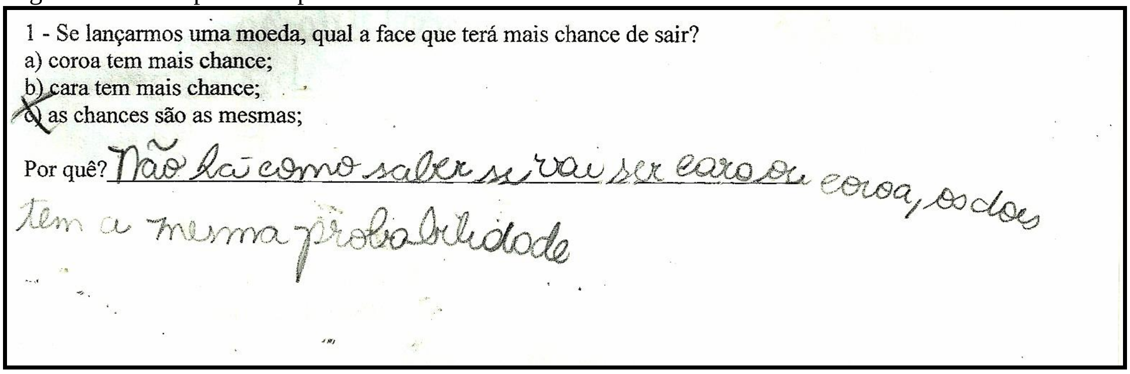
Não, pois cada um deve tomar o que gosta, decidir o que tomar, na sorte não é uma proposta muito legal.

Fonte: O autor

Nas questões de múltipla escolha, que abordavam situações similares às que estavam presentes na história, obtivemos os seguintes resultados:

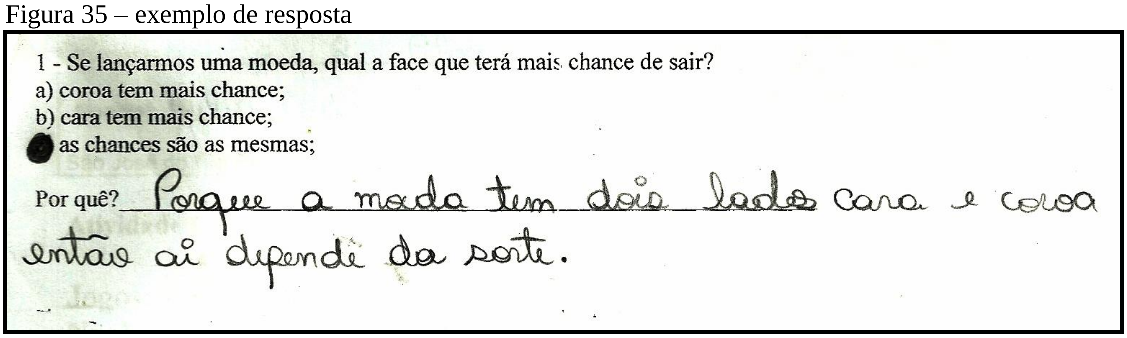
Para a questão 1)- *Se lançarmos uma moeda, qual face terá mais chance de sair?* – 46 duplas assinalaram, como já previsto a resposta correta, a letra c) - *as chances são as mesmas* - e apenas uma dupla assinalou a letra b). De modo geral os alunos justificaram a escolha da letra c) argumentando que havia dois resultados possíveis e concluíam que as chances são as mesmas (Figuras 34 e 35).

Figura 34 – exemplo de resposta


1 - Se lançarmos uma moeda, qual a face que terá mais chance de sair?
a) coroa tem mais chance;
b) cara tem mais chance;
c) as chances são as mesmas;
Por quê? Não há como saber se vai ser cara ou coroa, os dois tem a mesma probabilidade

Fonte: O autor

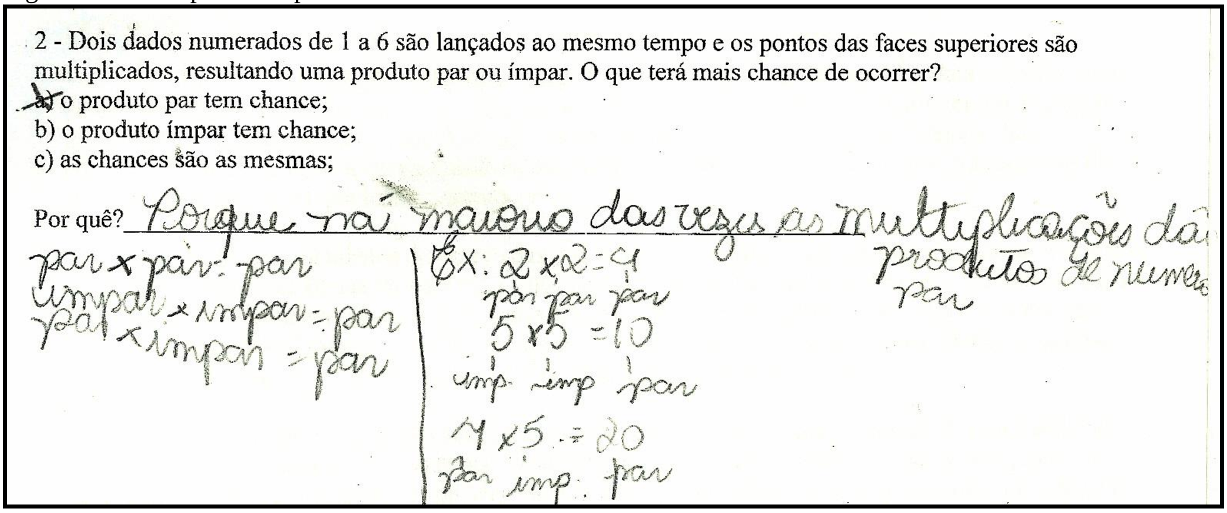
Figura 35 – exemplo de resposta


1 - Se lançarmos uma moeda, qual a face que terá mais chance de sair?
a) coroa tem mais chance;
b) cara tem mais chance;
c) as chances são as mesmas;
Por quê? Porque a moeda tem dois lados cara e coroa então aí dipendi da sorte.

Fonte: O autor

Para a questão 2) – *Dois dados numerados de 1 a 6 são lançados ao mesmo tempo e os pontos das faces superiores são multiplicados, resultando produto par ou ímpar. O que terá mais chance de ocorrer?* – 39 duplas assinalaram a letra c) – *as chances são as mesmas* – 5 duplas assinalaram corretamente a letra a) – *O produto par tem mais chance* – e 3 duplas assinalaram a letra b) – *o produto ímpar tem mais chance*. De modo geral os alunos justificaram a escolha da letra c) usando o mesmo raciocínio da questão 1) (Figuras 36 e 37).

Figura 36 – exemplo de resposta



2 - Dois dados numerados de 1 a 6 são lançados ao mesmo tempo e os pontos das faces superiores são multiplicados, resultando uma produto par ou ímpar. O que terá mais chance de ocorrer?
a) o produto par tem chance;
b) o produto ímpar tem chance;
c) as chances são as mesmas;

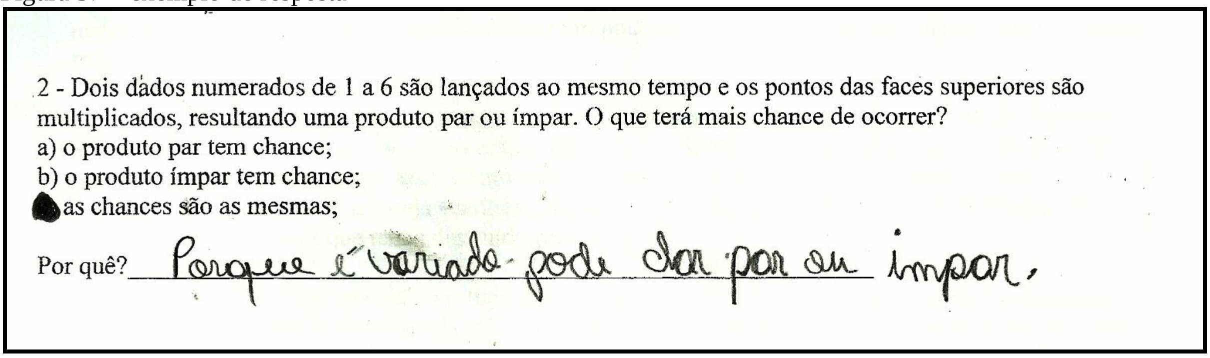
Por quê? Porque na maioria das vezes as multiplicações dão produtos de numero par

par x par = par
impar x impar = par
par x impar = par

Ex: 2x2 = 4
par par par
5x5 = 10
imp imp par
4x5 = 20
par imp par

Fonte: O autor

Figura 37 – exemplo de resposta



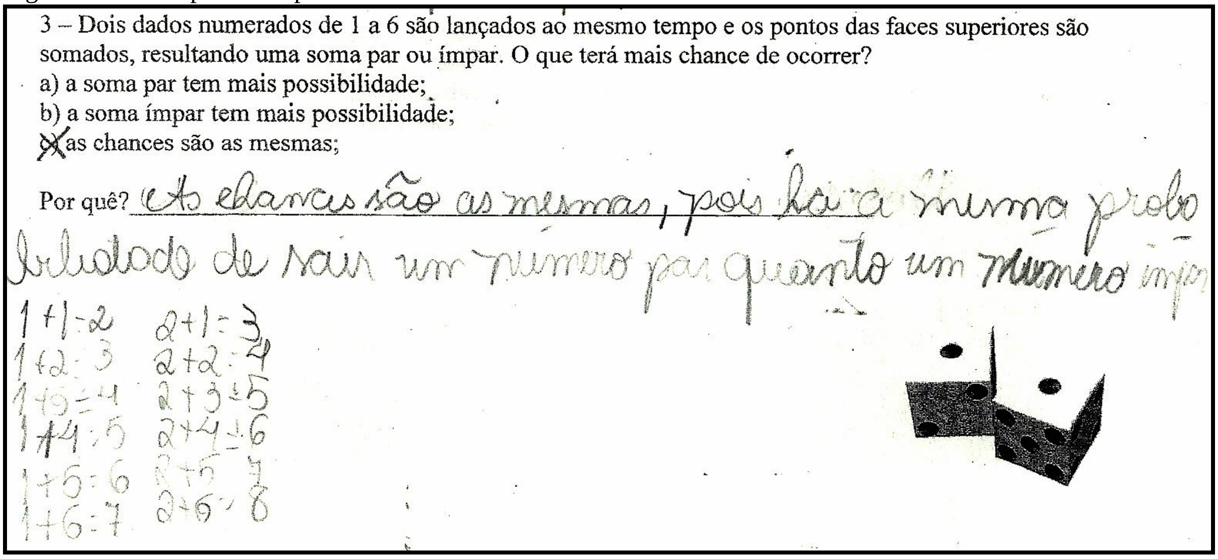
2 - Dois dados numerados de 1 a 6 são lançados ao mesmo tempo e os pontos das faces superiores são multiplicados, resultando uma produto par ou ímpar. O que terá mais chance de ocorrer?
a) o produto par tem chance;
b) o produto ímpar tem chance;
c) as chances são as mesmas;

Por quê? Porque é variado pode dar par ou impar.

Fonte: O autor

Para a questão 3) - *Dois dados numerados de 1 a 6 são lançados ao mesmo tempo e os pontos das faces superiores são somados, resultando soma par ou ímpar. O que terá mais chance de ocorrer?* – 39 duplas assinalaram corretamente a letra c) – *as chances são as mesmas* – 7 duplas assinalaram a letra a) – *a soma par tem mais possibilidade* – e uma dupla assinalou a letra b) - *a soma ímpar tem mais possibilidade* (Figuras 38 e 39).

Figura 38 – exemplo de resposta



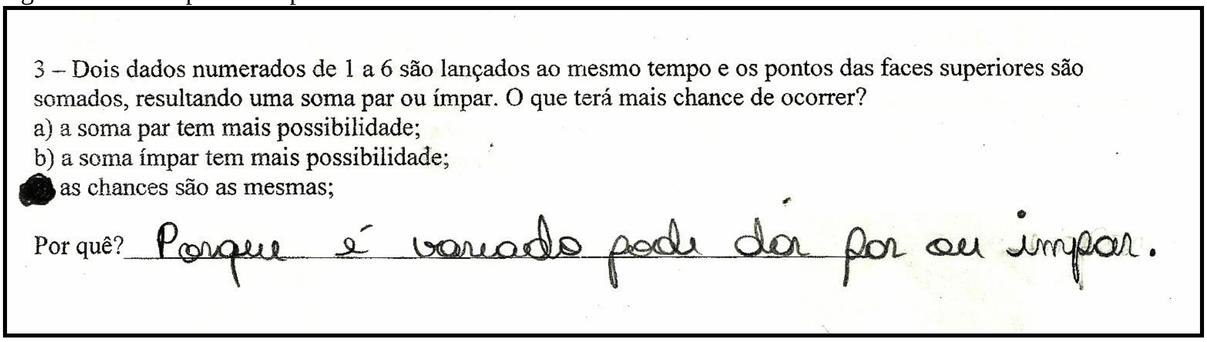
3 – Dois dados numerados de 1 a 6 são lançados ao mesmo tempo e os pontos das faces superiores são somados, resultando uma soma par ou ímpar. O que terá mais chance de ocorrer?
a) a soma par tem mais possibilidade;
b) a soma ímpar tem mais possibilidade;
as chances são as mesmas;

Por quê? As chances são as mesmas, pois há a mesma probabilidade de sair um número par quanto um número impar

1+1=2 2+1=3
1+2=3 2+2=4
1+3=4 2+3=5
1+4=5 2+4=6
1+5=6 2+5=7
1+6=7 2+6=8

Fonte: O autor

Figura 39 – exemplo de resposta

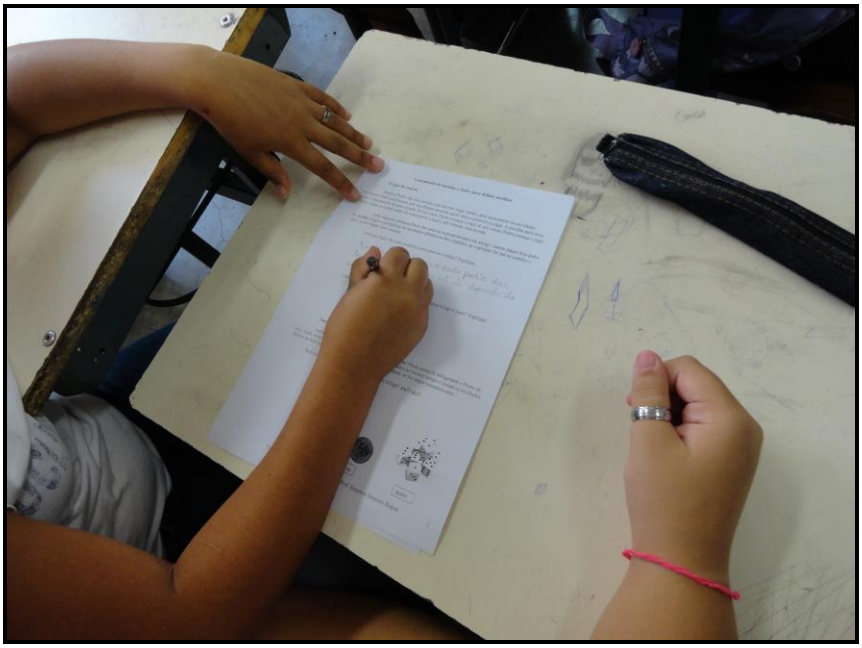


3 – Dois dados numerados de 1 a 6 são lançados ao mesmo tempo e os pontos das faces superiores são somados, resultando uma soma par ou ímpar. O que terá mais chance de ocorrer?
a) a soma par tem mais possibilidade;
b) a soma ímpar tem mais possibilidade;
as chances são as mesmas;

Por quê? Porque é variado pode dar par ou impar.

Fonte: O autor

Figura 40 – alunos realizando a Atividade 1



Fonte: O autor

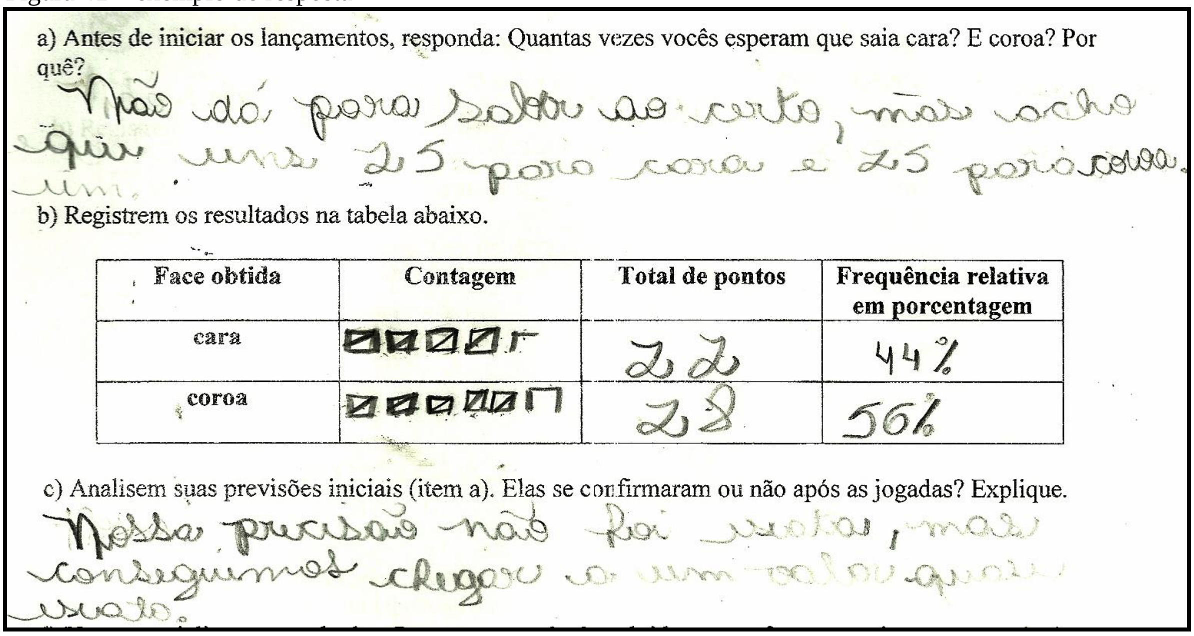
4.3.3 Aplicação da Atividade 2

A tarefa 2 foi muito interessante. Os alunos divertiram-se muito, ao realizar os experimentos/jogos.

No jogo 1 temos uma situação em que a probabilidade de cada evento – *cara e coroa* – é a mesma. Já no jogo 2 temos uma situação em que a probabilidade de cada evento - *produto par e produto ímpar* - são diferentes.

Fizemos a leitura das regras do *jogo 1- cara ou coroa* e perguntamos se todos haviam entendido. Pedimos para eles responderem o item a) - *Antes de iniciar os lançamentos, responda: Quantas vezes vocês esperam que saia cara? E coroa? Por quê?*

Figura 41 – exemplo de resposta



a) Antes de iniciar os lançamentos, responda: Quantas vezes vocês esperam que saia cara? E coroa? Por quê?

Não dá para saber ao certo, mas acho que uns 25 para coroa e 25 para coroa. um.

b) Registrem os resultados na tabela abaixo.

Face obtida	Contagem	Total de pontos	Frequência relativa em porcentagem
cara		22	44%
coroa		28	56%

c) Analisem suas previsões iniciais (item a). Elas se confirmaram ou não após as jogadas? Explique.

Nossa previsão não foi exata, mas conseguimos chegar a um valor quase exato.

Fonte: O autor

As respostas/justificativas de todas as duplas foram muito parecidas. Fizemos uma síntese das respostas dadas pelas duplas:

- 25, 25. As chances são as mesmas porque esta tirando na sorte.

- Não sei. Este jogo depende da sorte, provavelmente sairá um número parecido, como 26 caras e 24 coroas.

- Não sabemos ao certo qual dos lados irá cair, depende da sorte. Provavelmente próximos de 25 para cada um.

- Nós achamos que vai dar 24 caras e 26 coroas. Por que nós achamos que vai na sorte.

Ao analisarmos as respostas/justificativas constatamos que todos os alunos identificam a situação como aleatória como verificamos na resposta "*não sabemos ao certo qual dos lados irá cair*" e utilizam a sorte para justificar que os eventos têm as mesmas probabilidades. Acreditamos que quando os alunos apresentam a sorte como justificativa estão admitindo, intuitivamente, que as probabilidades sejam as mesmas para cada evento, isto é, que eles sejam equiprováveis.

Logo após responderem o item a), começaram a jogar. O jogo ocorreu de maneira bastante tranquila. Muitos alunos disseram que não estavam entendendo o que era para fazer na coluna "*freqüência relativa em porcentagem*". Nesse momento fizemos uma rápida intervenção explicando o que era para ser feito. Ao final, contaram o número de caras e coroas sorteadas em cada dupla e anotaram em uma tabela que o professor fez na lousa. Os resultados não apresentaram nenhuma surpresa.

Com o resultado do experimento, as previsões iniciais feitas no item a) confirmaram-se. Alguns alunos escreveram que o resultado não foi exatamente o previsto, mas que ficou bem próximo por que depende da sorte.

No item e) - *Analisando os resultados da tabela, responda: se o experimento for realizado 1000 vezes quantas caras e quantas coroas vocês esperam que saiam? Explique*, todas as duplas apresentaram valores e justificativas parecidas. Fizemos uma síntese das respostas/justificativas dadas pelas duplas:

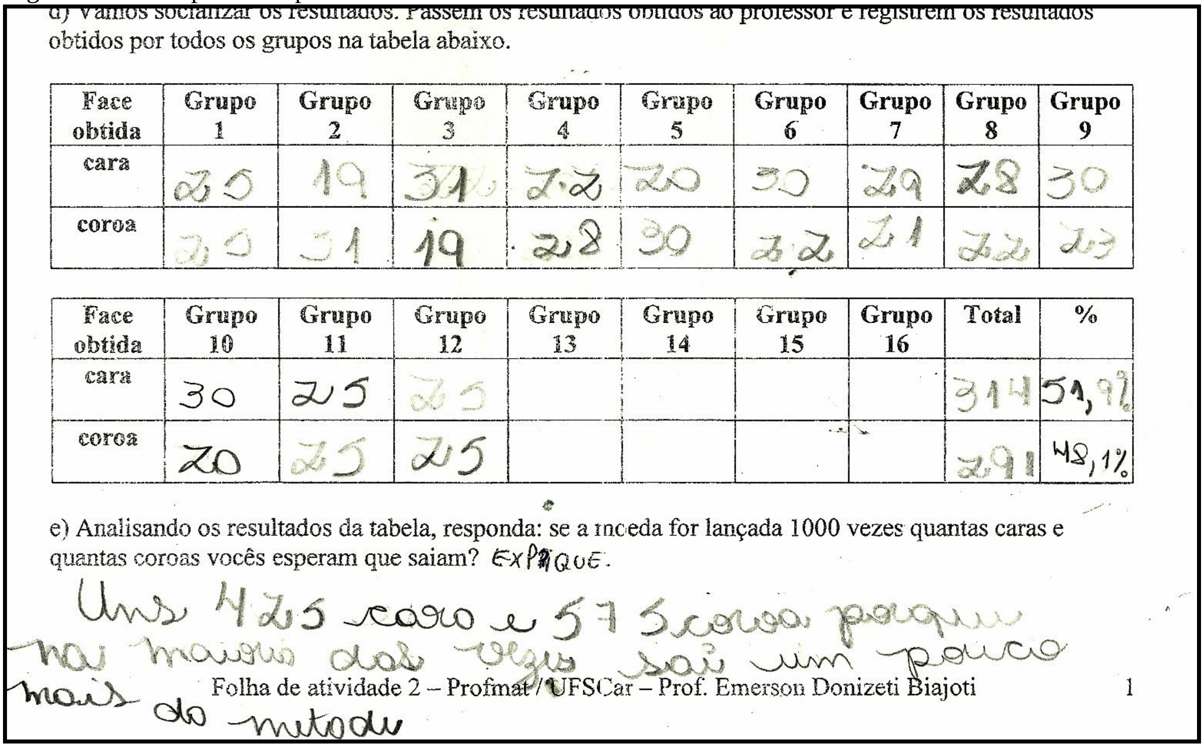
- 500 caras e 500 coroas. Está tirando na sorte, não tem como saber, então as chances são as mesmas.

- Cara eu acho que vai sair 500 vezes e coroa 500 vezes, mas depende da sorte.

- Não dá para saber ao certo, depende da sorte, mais ou menos a metade de cada.

- Uns 425 cara e 575 coroas porque na maioria das vezes sai um pouco mais da metade.

Figura 42 – exemplo de resposta



d) Vamos socializar os resultados. Passem os resultados obtidos ao professor e registrem os resultados obtidos por todos os grupos na tabela abaixo.

Face obtida	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6	Grupo 7	Grupo 8	Grupo 9
cara	25	19	31	22	20	30	29	28	30
coroa	25	31	19	28	30	22	21	22	23

Face obtida	Grupo 10	Grupo 11	Grupo 12	Grupo 13	Grupo 14	Grupo 15	Grupo 16	Total	%
cara	30	25	25					314	51,9%
coroa	20	25	25					291	48,1%

e) Analisando os resultados da tabela, responda: se a moeda for lançada 1000 vezes quantas caras e quantas coroas vocês esperam que saiam? EXPLIQUE.

Uns 425 cara e 575 coroa porque na maioria das vezes sai um pouco mais do metade

Folha de atividade 2 – Profmat / UFSCar – Prof. Emerson Donizeti Biajoti 1

Fonte: O autor

Fizemos a leitura das regras do *jogo 2- jogo do produto* e perguntamos se todos haviam entendido. Pedimos para eles responderem o item a) - *Antes de iniciar os lançamentos, responda: Quantas vezes vocês esperam que ocorra produto par? E ímpar? Por quê?*

Apenas quatro duplas fizeram uma estimativa acreditando que o produto par iria ocorrer um número de vezes bem maior que o produto ímpar. Transcrevemos abaixo as respostas dadas por essas duplas:

- Talvez caia mais par e ímpar caia menos, vamos ver qual vai ser o resultado obtido.

- Porque na maioria das vezes o produto das contas são par, acredito que provavelmente será 30 pontos de número par e 20 de número ímpar.

- As chances de ocorrer o par tem mais probabilidade do que o ímpar.

- É provável que saia 31 par e 19 ímpar, porque na maioria das vezes o par sai mais.

As demais duplas, como já era esperado, atribuíram valores próximos a 50% para cada um dos eventos – *produto par ou ímpar.* As respostas/justificativas dessas duplas foram muito parecidas. Fizemos uma síntese das respostas dadas pelas duplas:

- 25 par, 25 ímpar. As chances são as mesmas. *- Achamos que dará 26 pares e 24 ímpares porque as chances são quase igual do cara e coroa.* *- Talvez par caia mais e ímpar caia menos ou vice-versa, vamos ver qual vai ser o resultado obtido.* *- 25 de cada, porque tem que ser 50 no total.*

Figura 43 – exemplo de resposta

a) Antes de iniciar os lançamentos, responda: Quantas vezes vocês esperam que ocorra produto par? E ímpar? Por quê?

25 vezes par, e 25 vezes impar, por ter nos dois dados juntos 8 numer par e 6 numeros impar

b) Registrem os resultados na tabela abaixo.

Produto obtido	Contagem	Total de pontos	Frequência relativa em porcentagem
Par		42	84%
Ímpar		8	16%

c) Analisem suas previsões iniciais (item a). Ela se confirmou ou não após as jogadas? Explique.

Não, pois pensei que os resultados seriam os mesmos, mas agora persebi que saiu muito mais o numero par do que o numero impar.

Fonte: O autor

Figura 44 – exemplo de resposta

a) Antes de iniciar os lançamentos, responda: Quantas vezes vocês esperam que ocorra produto par? E ímpar? Por quê?

Porque na maioria das vezes, o produto dos contos são par, acredito que provavelmente, sera 30 pontos de número par e 20 de número impar

b) Registrem os resultados na tabela abaixo.

Produto obtido	Contagem	Total de pontos	Frequência relativa em porcentagem
Par		37	74 %
Ímpar		13	26 %

c) Analisem suas previsões iniciais (item a). Ela se confirmou ou não após as jogadas? Explique.

Não, mas realmente saiu mais número pares do que impares

Fonte: O autor

Logo após responderem o item a), começaram a jogar. Alguns minutos após o inicio do jogo já era possível observar que alguns alunos começaram a estranhar a repetição de resultados. Um aluno levantou-se antes de terminar o jogo e indignado disse: “*Professor tem alguma coisa errada com esse jogo, eu estou perdendo de muito*”. Logo várias duplas começaram a comentar: “*Só dá par*.”

Com o resultado do experimento os alunos analisaram as previsões iniciais feitas no item a) e, com exceção das quatro duplas que fizeram acertadamente a previsão, chegaram à conclusão que as previsões não se confirmaram. Fizemos uma síntese das respostas dadas pelas duplas no item c):

- *Não, os números pares saem bem mais.*
- *Não, passou longe.*
- *Não, porque o par sai mais vezes do que o ímpar.*
- *Não, pois pensei que os resultados seriam os mesmos, mas agora percebi que caiu muito mais o número par do que o número ímpar.*

Ao final, contaram o número de pares e ímpares sorteadas em cada dupla e anotaram em uma tabela que o professor fez na lousa. Os resultados chamaram a atenção dos alunos que ficaram surpresos ao ver que em todas as duplas o jogador par ganhou com uma vantagem considerável.

Figura 45 – exemplo de resposta

d) Vamos socializar os resultados. Passem os resultados obtidos ao professor e registrem os resultados obtidos por todos os grupos na tabela abaixo.

Produto obtido	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6	Grupo 7	Grupo 8	Grupo 9
Par	43	37	29	34	41	42	30	35	38
Ímpar	7	13	21	16	12	8	22	15	12

Produto obtido	Grupo 10	Grupo 11	Grupo 12	Grupo 13	Grupo 14	Grupo 15	Grupo 16	Total	%
Par	31	21	21					402	84,9
Ímpar	19	18	8					171	15,1

e) Analisando os resultados da tabela, responda: se o experimento for realizado 1000 vezes quantos produtos pares e quantos produtos ímpares vocês esperam que saiam? Explique.

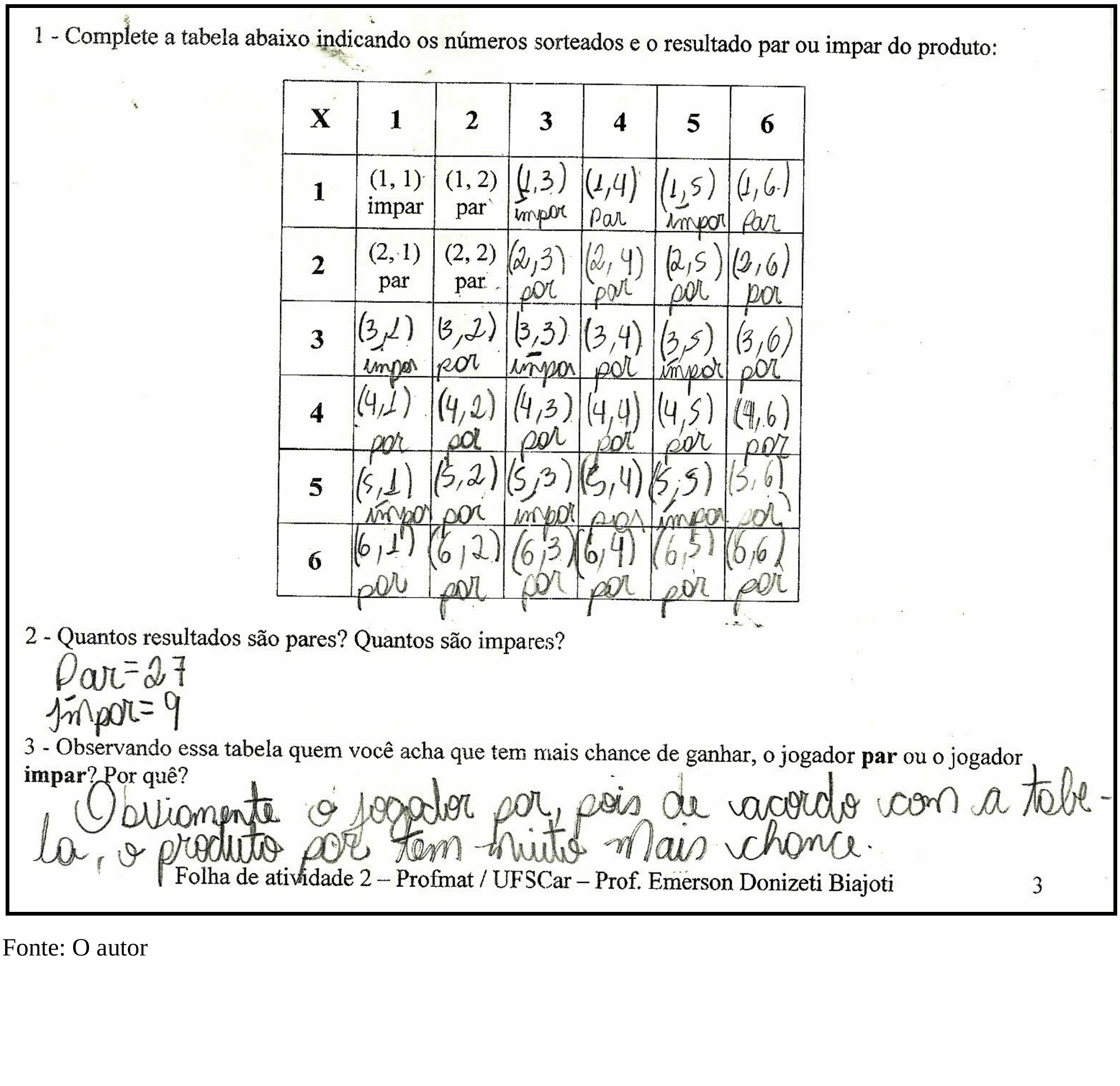
785 par e 215 impar, porque o multiplica- ção, nos resultados o maioria é par

Fonte: O autor

Ao analisarmos os jogos 1 e 2 , observamos que a maioria dos alunos apresentam uma concepção equivocada de espaço amostral, ou seja, no jogo 1 todos responderam e justificaram sua resposta “corretamente”, assumindo a equiprobabilidade dos acontecimentos elementares do espaço amostral; no entanto, no jogo 2, a maioria respondeu da mesma forma, afirmando em suas justificativas que as chances são as mesmas. Ao admitirem que as chances sejam iguais, os alunos baseiam-se na amostra e concebem equivocadamente como espaço amostral o *resultado par ou ímpar*, atribuindo, a cada um deles, 50% de chances de ser sorteado.

Notamos que a Atividade realizada no final da Atividade 2 que envolvia a análise de possibilidades para o lançamento de dois dados utilizando uma tabela de dupla entrada foi muito significativa pois, possibilitou que os alunos percebessem a relação entre analisar as possibilidades e estimar as probabilidades. O resultado foi imediato, pois após completarem a tabela todos os alunos responderam que o jogador par tinha mais chance de ganhar (Figura 46).

Figura 46 – exemplo de resposta



1 - Complete a tabela abaixo indicando os números sorteados e o resultado par ou impar do produto:

X	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1) impar	(1, 2) par	(1,3) impar	(1,4) par	(1,5) impar	(1,6) par
2	(2, 1) par	(2, 2) par	(2,3) par	(2,4) par	(2,5) par	(2,6) par
3	(3,1) impar	(3,2) par	(3,3) impar	(3,4) par	(3,5) impar	(3,6) par
4	(4,1) par	(4,2) par	(4,3) par	(4,4) par	(4,5) par	(4,6) par
5	(5,1) impar	(5,2) par	(5,3) impar	(5,4) par	(5,5) impar	(5,6) par
6	(6,1) par	(6,2) par	(6,3) par	(6,4) par	(6,5) par	(6,6) par

2 - Quantos resultados são pares? Quantos são impares?

Par=27
ímpar=9

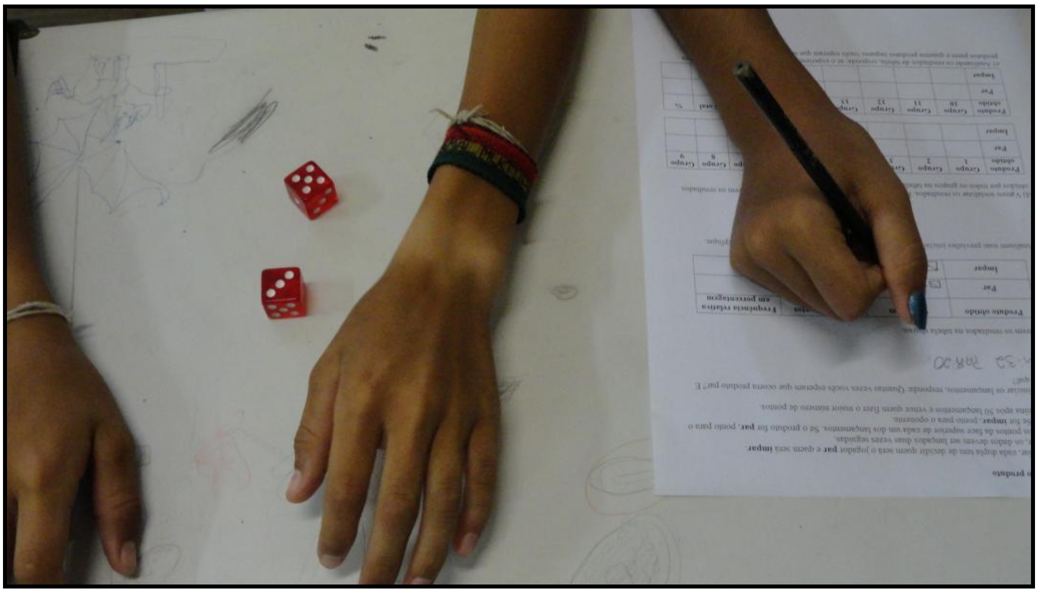
3 - Observando essa tabela quem você acha que tem mais chance de ganhar, o jogador **par** ou o jogador **impar**? Por quê?

Obviamente o jogador par, pois de acordo com a tabela, o produto par tem muito mais chance.

Folha de atividade 2 – Profmat / UFSCar – Prof. Emerson Donizeti Biajoti 3

Fonte: O autor

Figura 47 – alunos realizando a Atividade 2



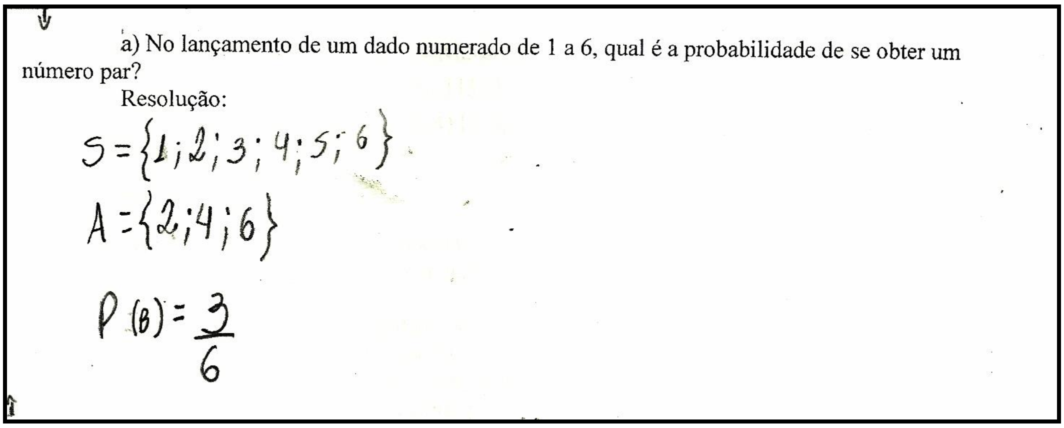
Fonte: O autor

4.3.4 Aplicação da Atividade 3

Na Atividade 3 formalizamos os conceitos de experimento aleatório, espaço amostral, evento e introduzimos o conceito de Probabilidade utilizando a concepção Laplaciana.

Após a exposição pedimos para os alunos resolverem os itens a) e b). O item a) foi resolvido facilmente pela maioria das duplas (figura 48).

Figura 48 – exemplo de resposta



a) No lançamento de um dado numerado de 1 a 6, qual é a probabilidade de se obter um número par?

Resolução:

$S = \{1;2;3;4;5;6\}$

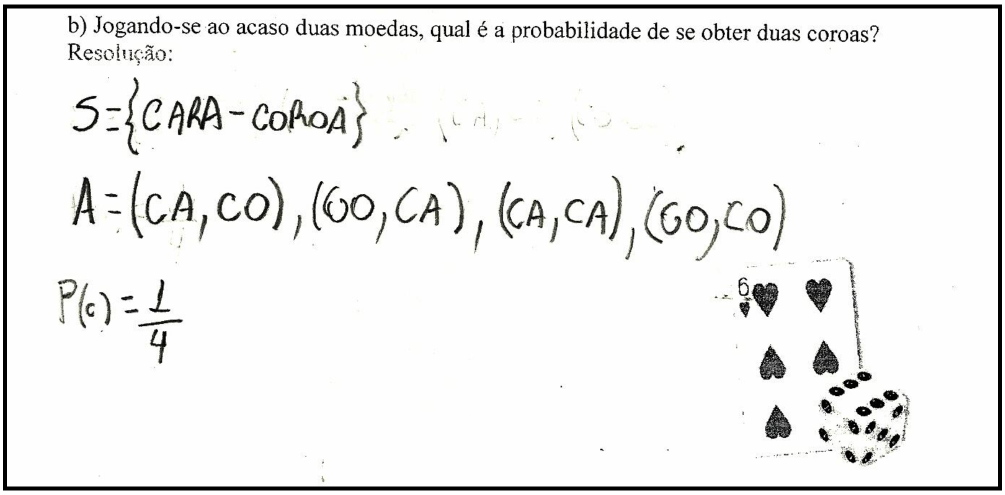
$A = \{2;4;6\}$

$P(B) = \frac{3}{6}$

Fonte: O autor

No item b) ao descreverem o espaço amostral, nove duplas escreveram: $\{cara/cara,\ \ coroa/coroa,\ \ cara/coroa\}$; dessa forma, entendem *cara/coroa* e *coroa/cara* como sendo a mesma coisa e apresentaram como resposta $\frac{1}{3}$. Os outros alunos representaram corretamente o espaço amostral e responderam corretamente (Figura 49).

Figura 49 – exemplo de resposta



b) Jogando-se ao acaso duas moedas, qual é a probabilidade de se obter duas coroas?
Resolução:

$S = \{CARA - COROA\}$

$A = (CA, CO), (CO, CA), (CA, CA), (CO, CO)$

$P(c) = \frac{1}{4}$

Fonte: O autor

Notamos que alguns alunos cometeram erros com relação à notação utilizada para espaço amostral e evento nos itens a) e b) utilizando S, que denota espaço amostral, para representar evento e se referir ao mesmo evento com letras diferentes. Como exemplo, no item a) (Figura 48) o aluno utilizou a letra A para representar o evento e na sequência utilizou P(B) para se referir à probabilidade. Já no item b) (Figura 49) o aluno utilizou equivocadamente a letra A para indicar o espaço amostral.

Figura 50 – alunos realizando a Atividade 2

Fonte: O autor

4.3.5 Aplicação da Atividade 4

A Atividade 4 foi tranquila, as duplas desenvolveram as Atividades sem dificuldades. Todas as duplas desenvolveram os itens a) e b) corretamente. Novamente percebemos que a utilização da tabela de dupla entrada para representar todas as possibilidades possibilitou que os alunos percebessem a relação entre analisar as possibilidades e estimar as probabilidades.

Figura 51 – exemplo de resposta

a) Complete a tabela abaixo indicando a diferença entre os valores obtidos nos dados.

-	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

0,1,2 = 24
3,4,5 = 12

24

b) Você acha esse jogo justo? Se você fosse um dos jogadores, gostaria de estar no lugar de Pedro ou de Paulo? Por quê?

Não, gostaria de ser Pedro, porque o Pedro irá ganhar na maioria das vezes, o tanto de vezes que aparece os números 3,4,5 é a metade do que aparece 0,1,2, as chances de Paulo são mínimos, enquanto as de Pedro são bem maiores.

Fonte: O autor

Figura 52 – exemplo de resposta

a) Complete a tabela abaixo indicando se a soma entre os valores obtidos nos dados é par ou ímpar.

+	1	2	3	4	5	6
1	2 (PAR)	3 (ÍMPAR)	4 (PAR)	5 (ÍMPAR)	6 (PAR)	7 (ímpar)
2	3 (ímpar)	4 (par)	5 (ímpar)	6 (par)	7 (ímpar)	8 (par)
3	4 (par)	5 (ímpar)	6 (par)	7 (ímpar)	8 (par)	9 (ímpar)
4	5 (ímpar)	6 (par)	7 (ímpar)	8 (par)	9 (ímpar)	10 (par)
5	6 (par)	7 (ímpar)	8 (par)	9 (ímpar)	10 (par)	11 (ímpar)
6	7 (ímpar)	8 (par)	9 (ímpar)	10 (par)	11 (ímpar)	12 (par)

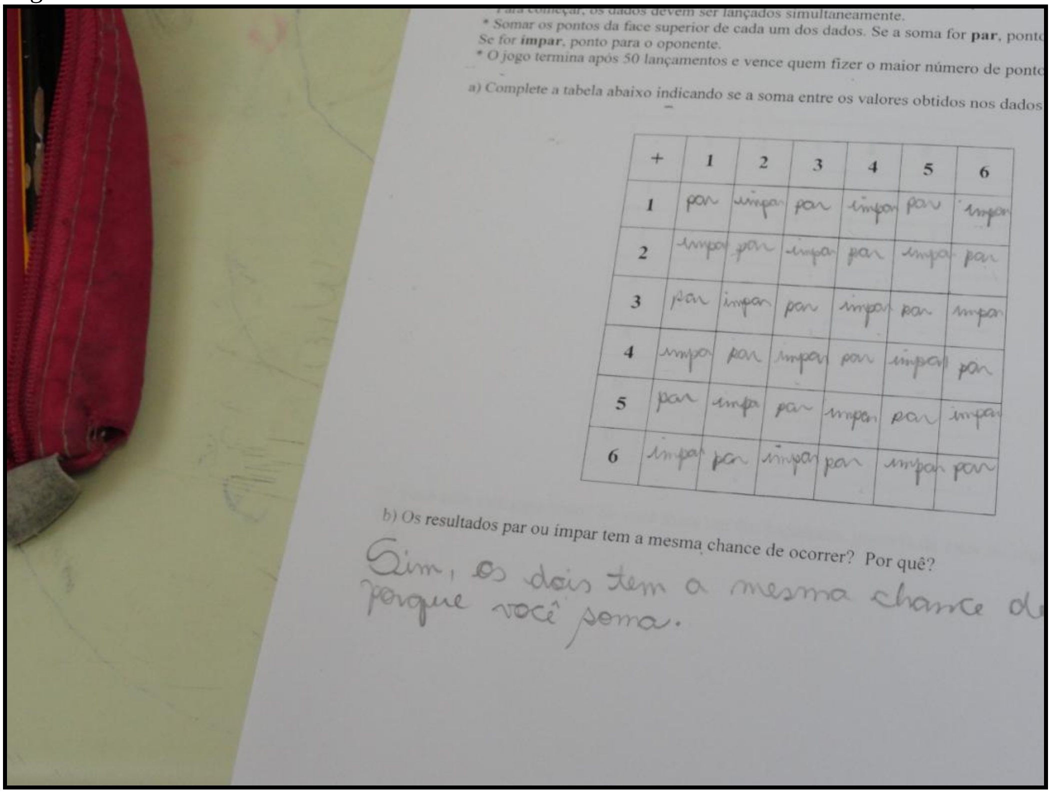
18 = par
18 = impar

b) Os resultados par ou ímpar tem a mesma chance de ocorrer? Por quê?

R: Sim, porque a tabela está distribuída igualmente com 18 números pares e 18 números ímpares, então, o par e o ímpar tem a mesma chance.

Fonte: O autor

Figura 53 – alunos realizando a Atividade 4



Fonte: O autor

Figura 54 – alunos realizando a Atividade 4

Fonte: O autor

4.4 CONCLUSÕES

O procedimento de aplicação das folhas de Atividade mostrou-se bastante tranquilo. A formação de duplas ajudou a promover discussões. Durante a realização das Atividades os alunos participaram ativamente na construção dos conceitos desenvolvidos, discutindo e argumentando sobre as escolhas feitas.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa propôs-se a identificar a linguagem e as ideias sobre pensamento probabilísticos que os alunos do 7º ano do Ensino Fundamental utilizam, desenvolver a linguagem correta, introduzir a noção de probabilidade e formalizar os conceitos a partir da utilização de jogos com dados e moedas. Para isso levamos em consideração as dificuldades encontradas pelos alunos no desenvolvimento desse conteúdo em anos anteriores e elaboramos uma sequência didática para tentar minimizar essas dificuldades.

As folhas de Atividades elaboradas formam um material diferente do encontrado no material fornecido pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, os chamados "caderninhos do aluno". Nosso produto é formado por quatro Atividades e são necessárias cinco aulas de 50 minutos para ser aplicado.

Tínhamos como hipótese inicial que as técnicas utilizadas no cotidiano escolar não vinham promovendo o desenvolvimento do pensamento probabilístico dos alunos, e que uma metodologia diferenciada, com uma prática voltada aos cenários de investigação e através de experimentos, poderia mobilizar tal pensamento, pois os alunos atuariam no seu processo de aprendizagem.

Em nossa sequência, partimos do princípio que o aluno do Ensino Fundamental II deveria conhecer alguns conceitos básicos de probabilidade, como experimento aleatório e determinístico, espaço amostral e evento. A introdução desses conceitos foi feita a partir da realização dos experimentos com moedas e dados e das observações e percepções que os alunos foram elaborando durante a aplicação das Atividades 1 e 2 que serviram para posterior formalização na Atividade 3. Consideramos que os alunos aprenderam esses conceitos, pois os utilizaram corretamente na realização da Atividade 4.

Os registros escritos dos alunos e as discussões durante a aplicação das Atividades nos permitem elaborar algumas conclusões que apresentaremos a seguir.

Notamos que durante a aplicação das Atividades os alunos foram participativos, mostraram interesse fazendo perguntas e buscando orientações sobre o desenvolvimento de algumas situações propostas. Também notamos que ao trabalharem em duplas eles participaram ativamente na construção dos conceitos desenvolvidos, quando discutiam a realização das Atividades e argumentavam sobre as escolhas feitas. Durante a aplicação da Atividade 2 os alunos ficaram altamente motivados e descontraídos durante a execução dos experimentos envolvendo moedas e dados.

Pelo depoimento dos alunos ficou evidente que aprovaram e gostaram da nova experiência de ensino. Vários alunos destacaram ser mais divertido e gostoso trabalhar com Atividades envolvendo jogos e que o trabalho em dupla facilitou o entendimento, pois um ajudava do outro. Ainda com base nos depoimentos dos alunos percebemos que a maneira como o conteúdo foi desenvolvido foi fundamental para despertar o interesse dos alunos.

A utilização de uma sequência didática em sala de aula pode parecer a princípio mais trabalhosa para o professor, mas se adequadamente utilizada pode contribuir significativamente com a melhoria do processo de ensino e aprendizagem, pois o aluno torna-se ativo na construção do seu próprio conhecimento. Esta forma de trabalho até o momento não era usual, porém diante dos bons resultados pretendemos utilizá-la com mais frequência.

Com a análise das Atividades envolvendo a linguagem probabilística pelos alunos, observamos que as duplas reconhecem situações de incertezas e utilizam palavras e expressões adquiridas nas observações e nas vivências cotidianas para justificarem suas respostas.

Ao analisarmos as Atividades 1 e 2 notamos que a maioria dos alunos expressavam suas idéias de forma intuitiva, o que os levou a cometer equívocos relacionados à interpretação do espaço amostral em situações nas quais as possibilidades envolviam situações combinatórias como ocorreu na situação "lançar dois dados e multiplicar os pontos da face superior de cada um obtendo produto par ou ímpar". Nessa situação a maioria dos alunos consideraram que as possibilidades eram produto par e produto ímpar e concluíram que as probabilidades era as mesmas de sair produto par ou ímpar.

Notamos que o experimento realizado no final da Atividade 2 que envolvia a análise de possibilidades para o lançamento de dois dados utilizando uma tabela de dupla entrada foi muito significativa pois, possibilitou que os alunos percebessem a relação entre analisar as possibilidades e estimar as probabilidades. O resultado foi imediato, pois após completarem a tabela todos os alunos responderam que o jogador par tinha mais chance de ganhar.

Após a realização das Atividades 1 e 2 notamos que a formalização de alguns conceitos e a definição de probabilidade realizados na Atividade 3 foram assimilados com mais facilidade pelos alunos, o que não ocorria em anos anteriores.

A construção e análise de tabelas que apresentam todas as possibilidades relacionadas ao experimento para calcular a probabilidade de cada evento é bastante claro aos alunos. Na Atividade 4 evidenciamos que os alunos responderam corretamente as questões propostas após completarem as tabelas.

A observação da aplicação e a análise do material escrito dos alunos permitiram realizar algumas alterações com a finalidade de deixar os enunciados mais claros. Apresentamos no Anexo C as folhas de Atividades reformuladas.

A primeira modificação realizada foi na página 2 da Atividade 1. Percebemos durante a análise das aplicações que a questão referente ao texto "*Suco ou refrigerante?*" não ficou muito clara. Acrescentamos à questão a pergunta: "*Quem tem mais chance de tomar a bebida preferida?*".

Na página 3 da Atividade 1 ocorreu um erro de redação na questão 2, ficou faltando a palavra "mais" nas alternativas a) e b). Na questão 3 substituímos a palavra "*possibilidade*" por "*chance*" nas alternativas a) e b).

Na página 1 da Atividade 2 substituímos a pergunta "*Elas se confirmaram após as jogadas?*" do item c) por "*Após as jogadas os resultados obtidos ficaram próximos do previsto ou não?*". Essa mesma alteração também foi feita no item c) da página 2 da Atividade 2.

Na página 2 da Atividade 2 substituímos a regra do jogo 2 – jogo do produto "*Para começar, o dados devem ser lançados duas vezes seguidas*" por "*Para começar, os dois dados devem ser lançados ao mesmo tempo*".

A elaboração desse material nos proporcionou o contato com muitos materiais, livros, artigos e dissertações que contribuíram muito para nosso conhecimento. O desenvolvimento deste trabalho consistiu em uma etapa muito importante da nossa vida profissional, já que nos levou a refletir sobre a prática docente de forma geral. Esperamos que esse material também seja utilizado por outros professores.

A análise dos resultados obtidos permite concluir que o uso da sequência didática favoreceu a aprendizagem das noções básicas de Probabilidades.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, S. A; COUTINHO, C. Q. S. *Engenharia didática*: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. REVEMAT, v.3.6, p.62-77, 2008.

BOYER, C. B. *História da matemática*. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria do Ensino Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais:* matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 15 Dez. 2012.

______. Ministério da Educação. Secretaria do Ensino fundamental. *Proposta curricular do Estado de São Paulo*: matemática MEC/SEF, 2008. Disponível em: <http://www.rededosaber.sp.gov.br/portais/Portals/18/arquivos/Prop_MAT_COMP_red_md_20_03.pdf >. Acesso em: 15 Dez. 2012.

______. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. *Caderno do professor*: matemática, Ensino Fundamental - 8a série, volume 4; 6ª série, volume 3. Brasília: MEC/SEE, 2009.

______. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. *Caderno do professor*: matemática, Ensino Médio - 2 série, volume 3. Brasília: MEC/SEE, 2009.

______. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. *Relatório pedagógico Saresp Matemática 2011*. Brasília: MEC/SEE, 2012.

CAZORLA, I. M.; GUSMÃO, T. C.; KATAOKA, V. Y. Validação de uma sequência didática de probabilidade a partir da análise da prática de professores, sob a ótica do enfoque ontossemiótico. *Bolema*. Rio Claro-SP, v. 24, n. 39, p. 537-560, ago. 2011.

COUTINHO, C. Q. S. *Introdução ao conceito de probabilidade por uma visão frequentista*. 1994. 151f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Curso de pós-graduação em Matemática, PUC-SP, São Paulo, 1994.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas, SP: Unicamp, 2004.

GARBI, G. G. *A rainha das ciências*: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

GRANDO, R. C. Concepções quanto ao uso de jogos no ensino da matemática. *Revista de Educação Matemática*, São Paulo, v. 10, n. 12, p. 43-50, 2º sem. 2007.

LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio*. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2000. (Coleção do Professor de Matemática, v.2).

LOPES, C. A. E. *A probabilidade e a estatística no ensino fundamental*: uma análise curricular. Dissertação (Mestrado em Educação). Unicamp, Campinas, 1998.

LOPES, C. A. E.; CURI, E. *Pesquisas em educação matemática*: um encontro entre a teoria e a prática. São Carlos/SP: Pedro & João Editores, 2008.

LOPES, C. A. E.; MEIRELLES, E. *O desenvolvimento da probabilidade e da estatística.* In: XVIII ENCONTRO REGIONAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA. Campinas: LEM/IMECC/UNICAMP, 2005.

LOPES, J. M. Conceitos básicos de probabilidade com resolução de problemas. Relato de uma experiência. *RPM* – Soc. Bras. de Matemática, São Paulo, v. 59, p. 41- 45, 2006.

LOPES, J. M. O bozó do ensino de probabilidades. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n. 74, p.15-21, 2011B.

LOPES, J. M.; REZENDE, J. C. Um novo jogo para o estudo do raciocínio combinatório e do cálculo de probabilidade. *Bolema*, Rio Claro-SP, v. 23, n. 36, p. 657-682, agosto 2010.

LOPES, J. M.; TEODORO, J. V.; REZENDE, J. C. Uma proposta para o estudo de probabilidade no ensino médio. *Zetetiké* – FE/Unicamp, v. 19, n. 36, p. 75- 93, jul./dez. 2011.

LOPES, J. M. Uma proposta didático-pedagógica para o estudo da concepção clássica de probabilidade. *Bolema*, Rio Claro-SP, v. 24, n. 39, p. 607-628, ago. 2011A.

MENEGHETTI, R. C. G..; BATISTELA, R. F.; BICUDO, M. A. V. A pesquisa sobre o ensino de probabilidade e estatística no Brasil: um exercício de metacompreensão. *Bolema*, Rio Claro-SP, v. 24, n. 40, p. 811-833, dez. 2011.

MORGADO, A. C. O. et al. *Análise combinatória e probabilidade*. Rio de Janeiro: SBM, 2001. (Coleção do Professor de Matemática).

NAGAMINE, C. M. L. et al. Análise praxeológica dos passeios aleatórios da Mônica. *Bolema*, Rio Claro-SP, v. 24, n. 39, p. 451-472, ago. 2011.

SANTOS, J. A. F. L.; GRANDO, R. C. O movimento das ideias probabilísticas no ensino fundamental: análise de um caso. *Bolema,* Rio Claro-SP, v. 24, n. 39, p. 561- 584, ago. 2011.

SILVA, M. A. da. A presença da estatística e da probabilidade no currículo prescrito de cursos de licenciatura em matemática: uma análise do possível descompasso entre as orientações curriculares para a Educação Básica e a formação inicial do professor de Matemática. *Bolema*, Rio Claro-SP, v. 24, n. 40, p. 747-764, dez. 2011.

SOUZA, L. O.; LOPES, C. E. O uso de simuladores e a tecnologia no ensino da estocástica. *Bolema*, Rio Claro-SP, v. 24, n. 40, p. 659-677, dez. 2011.

ANEXOS

ANEXO A – FOLHAS DE ATIVIDADES

Apresentamos nesse Anexo as folhas de Atividades na forma em que foram aplicadas aos alunos.

Atividade 1

EE Euclides da Cunha

Aluno(a):_________________________________ nº___ série____

Aluno(a):_________________________________ nº___ série____

São José do Rio Pardo – SP ____/____/2012

PROFMAT ufscar

Atividade 1

Jogos: sorte ou matemática?
Noções de Probabilidade.

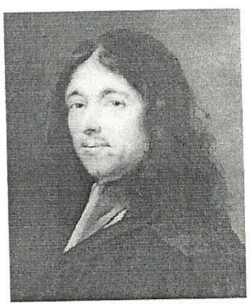
Você já ouviu falar em jogos de azar? São aqueles que envolvem a aleatoriedade – os que usam dados, fichas, roletas, por exemplo. Esses jogos são muito antigos e deram origem ao campo matemático da probabilidade. Vamos conhecer um pouco dessa história e ampliar nossos conhecimentos sobre probabilidade.

Embora os jogos sejam bastante antigos, o interesse matemático por eles data de pouco mais de três séculos. Sabe-se que povos não ocidentais, como os hindus e árabes, há muito tempo, já tinham noções dos chamados jogos de azar. Contudo, não temos indícios de que tenham desenvolvido conhecimentos sobre eles. A Igreja Católica, durante a Idade Média, proibiu os jogos, sobretudo os de azar, e é muito provável que tenha destruído seus registros

A origem organizada do estudo das probabilidades remonta à correspondência trocada entre os matemáticos franceses Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665), que viveram no século XVII, na qual discutiam as chances associadas aos jogos de azar, notadamente aos jogos envolvendo baralhos. Blaise Pascal publicou um folheto intitulado "*Sobre o raciocínio em jogos de azar*", no qual tentava responder aos problemas propostos por um famoso jogador da época.

Pode-se afirmar que, por muitos anos anteriores ao século XIX, o cálculo das probabilidades foi utilizado apenas para prever as chances de determinada aposta sair vencedora em algum jogo. As descobertas da Física, notadamente da Mecânica Quântica, conduziram o estudo das probabilidades a um novo patamar, no qual algumas ocorrências, no mundo do muito pequeno, podem apenas ser previstas com determinada margem de segurança. Na teoria das probabilidades, procura-se quantificar a ocorrência de um acontecimento sob determinadas condições. Essa teoria constitui atualmente a base da Estatística, uma ciência que possibilita previsões e tomadas de decisão.

Blaise Pascal



Pierre de Fermat

Folha de atividade 1 – Profmat / UFSCar – Prof. Emerson Donizeti Biajoti 1

Lançamento de moedas e dados para definir escolhas

O jogo de xadrez

Paulo e Pedro são dois amigos que adoram jogar xadrez após terminarem as atividades escolares. Eles combinaram que decidiriam na sorte quem seria o primeiro a jogar. A escolha seria feita com o lançamento de uma moeda. Se sair cara, Paulo começa o jogo; se sair coroa, Pedro começa o jogo. Então todas as tardes, antes de começarem a jogar, eles lançam uma moeda.

Após algumas semanas Paulo fez uma nova proposta para seu amigo: vamos lançar dois dados ao mesmo tempo e multiplicar os resultados obtidos na face superior, se o produto for par eu começo o jogo, se for ímpar você começa.

Será que Paulo fez uma proposta justa para seu colega? Explique.

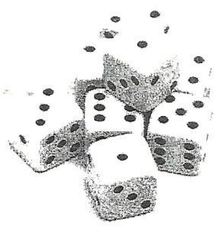
Lançar uma moeda para decidir "na sorte" quem começa o jogo é justo? Explique.

Suco ou refrigerante?

Após o jogo de xadrez eles sempre tomam um lanche. Paulo gosta de refrigerante e Pedro de suco. Paulo propôs o seguinte ao amigo: vamos lançar dois dados ao mesmo tempo e somar os resultados obtidos na face superior, se o soma for par tomamos refrigerante, se for ímpar tomamos suco.

Será que Paulo fez uma proposta justa para seu colega? EXPliQUE.

Cara ou Coroa



dados

Discuta com seu colega as questões abaixo e marque a alternativa que julgar mais adequada. Não se esqueça de escrever o porquê escolheu a alternativa.

1 - Se lançarmos uma moeda, qual a face que terá mais chance de sair?
a) coroa tem mais chance;
b) cara tem mais chance;
c) as chances são as mesmas;

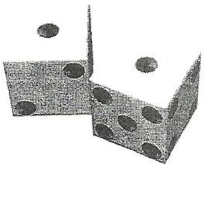
Por quê?____

2 - Dois dados numerados de 1 a 6 são lançados ao mesmo tempo e os pontos das faces superiores são multiplicados, resultando uma produto par ou ímpar. O que terá mais chance de ocorrer?
a) o produto par tem chance;
b) o produto ímpar tem chance;
c) as chances são as mesmas;

Por quê?____

3 – Dois dados numerados de 1 a 6 são lançados ao mesmo tempo e os pontos das faces superiores são somados, resultando uma soma par ou ímpar. O que terá mais chance de ocorrer?
a) a soma par tem mais possibilidade;
b) a soma ímpar tem mais possibilidade;
c) as chances são as mesmas;

Por quê?____



Atividade 2

Atividade 2 – nomes: ______________________________ **série**____

Façam suas apostas! Forme uma dupla com um colega para jogarem.

Jogo 1 – Cara ou Coroa
Regras:
* Antes de iniciar, cada dupla tem de decidir quem será o jogador "**cara**" e quem será "**coroa**".
* Para começar, a moeda deve ser lançada.
* Se sair **cara**, ponto para o jogador que escolheu cara. Se for **coroa**, ponto para o oponente.
* O jogo termina após 50 rodadas e vence quem fizer o maior número de pontos.

a) Antes de iniciar os lançamentos, responda: Quantas vezes vocês esperam que saia cara? E coroa? Por quê?

b) Registrem os resultados na tabela abaixo.

Face obtida	Contagem	Total de pontos	Frequência relativa em porcentagem
cara			
coroa			

c) Analisem suas previsões iniciais (item a). Elas se confirmaram ou não após as jogadas? Explique.

d) Vamos socializar os resultados. Passem os resultados obtidos ao professor e registrem os resultados obtidos por todos os grupos na tabela abaixo.

Face obtida	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6	Grupo 7	Grupo 8	Grupo 9
cara									
coroa									

Face obtida	Grupo 10	Grupo 11	Grupo 12	Grupo 13	Grupo 14	Grupo 15	Grupo 16	Total	%
cara									
coroa									

e) Analisando os resultados da tabela, responda: se a moeda for lançada 1000 vezes quantas caras e quantas coroas vocês esperam que saiam? EXPLIQUE.

Jogo 2 – jogo do produto

Regras:

* Antes de iniciar, cada dupla tem de decidir quem será o jogador **par** e quem será **ímpar**.
* Para começar, os dados devem ser lançados duas vezes seguidas.
* Multiplicar os pontos da face superior de cada um dos lançamentos. Se o produto for **par**, ponto para o jogador **par**. Se for **ímpar**, ponto para o oponente.
* O jogo termina após 50 lançamentos e vence quem fizer o maior número de pontos.

a) Antes de iniciar os lançamentos, responda: Quantas vezes vocês esperam que ocorra produto par? E ímpar? Por quê?

b) Registrem os resultados na tabela abaixo.

Produto obtido	**Contagem**	**Total de pontos**	**Frequência relativa em porcentagem**
Par			
Ímpar			

c) Analisem suas previsões iniciais (item a). Ela se confirmou ou não após as jogadas? Explique.

d) Vamos socializar os resultados. Passem os resultados obtidos ao professor e registrem os resultados obtidos por todos os grupos na tabela abaixo.

Produto obtido	**Grupo 1**	**Grupo 2**	**Grupo 3**	**Grupo 4**	**Grupo 5**	**Grupo 6**	**Grupo 7**	**Grupo 8**	**Grupo 9**
Par									
Ímpar									

Produto obtido	**Grupo 10**	**Grupo 11**	**Grupo 12**	**Grupo 13**	**Grupo 14**	**Grupo 15**	**Grupo 16**	**Total**	**%**
Par									
Ímpar									

e) Analisando os resultados da tabela, responda: se o experimento for realizado 1000 vezes quantos produtos pares e quantos produtos ímpares vocês esperam que saiam? Explique.

Possibilidades e chances

Vocês participaram de dois jogos com moedas e dados e devem ter notado que os resultados nos jogo 1 foram distribuídos de maneira bem igual. Já no jogo 2 os resultados foram distribuídos de maneira bem desigual entre os grupos. Vocês sabem explicar o porquê isso ocorreu? Para responder, faremos uma análise das possibilidades em cada um desses jogos. Nessa análise, vamos supor que as moedas e dados são honestos, ou seja, a chance de sair cara ou coroa é a mesma e no dado a chance de uma face ser sorteada é a mesma para todas as faces.

Jogo 1

No jogo 1 é bastante claro que ao lançar uma moeda os resultados possíveis são **cara** ou **coroa** e que estes resultados são igualmente prováveis, ou seja, a chance de sair cara é de uma em duas possíveis, assim como sair coroa também é de uma em duas possíveis, ou seja, as chances são iguais.

Jogo 2

No jogo 2 a primeira impressão é que cada jogador teria chance igual de marcar ponto, pois sair produto par ou produto ímpar parece ser igualmente provável. No entanto, ao combinar os resultados dos dois lançamentos, verificamos que não é bem assim.
Primeiramente, vamos observar todas as possibilidades de resultado no lançamento de dois dados ao mesmo tempo. Em cada dado temos 6 resultados possíveis. No lançamento de dois dados temos 36 combinações diferentes. Para isso faremos uma tabela.

1 - Complete a tabela abaixo indicando os números sorteados e o resultado par ou impar do produto:

X	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1) impar	(1, 2) par				
2	(2, 1) par	(2, 2) par				
3						
4						
5						
6						

2 - Quantos resultados são pares? Quantos são impares?

3 - Observando essa tabela quem você acha que tem mais chance de ganhar, o jogador **par** ou o jogador **impar**? Por quê?

Atividade 3

Atividade 3 – nomes: ____ **série**____

Leitura e Análise de Texto: organizando as ideias.

Espaço Amostral e Evento

Nas atividades anteriores, ao lançar uma moeda ou um dado, você realizou um experimento aleatório. No **jogo 1** há duas possibilidades: obter **cara** ou obter **coroa**. No **jogo 2** há 36 possibilidades diferentes para o lançamento de dois dados dos quais 27 apresentam produto par e 9 apresentam produto ímpar. O conjunto de todos os resultados possíveis num experimento aleatório e chamado de **espaço amostral**. Cada uma dessas possibilidades é chamada de **evento**.

Assim, podemos representar o **espaço amostral** para o lançamento de uma moeda (jogo 1) da seguinte maneira:

$$S = \{cara;\ \ coroa\}$$

No lançamento de dois dados (jogo 2) o **espaço amostral** é:

$$S = \left\{\begin{matrix} (1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);(2,1)(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6); \\ (3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(3,5);(3,6);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4);(4,5);(4,6); \\ (5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6);(6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5);(6,6) \end{matrix}\right\}$$

Probabilidade

A probabilidade é um tipo especial de razão, na qual se compara o número de possibilidades de ocorrência de um evento particular com o número total de possibilidades relacionadas a esse evento.

Para determinar a probabilidade de ocorrência de um determinado **evento**, devemos quantificar o número de casos em que este evento ocorre e o número total de casos possíveis, chamado de **espaço amostral**. A razão entre esses valores é o que chamamos de probabilidade. O resultado dessa razão pode ser expresso como número decimal ou como porcentagem.

Por exemplo, no lançamento de uma moeda, a probabilidade de se obter a face "**cara**" é de uma em duas, ou seja, uma chance em duas, ou $\frac{1}{2}$, ou, ainda, 50%. É a razão entre o número de possibilidades de se obter "**cara**" (1) e o número total de possibilidades, **cara** ou **coroa** (2). No lançamento de um dado numerado de 1 a 6, a probabilidade de se obter o número 5 é de uma em seis, ou $\frac{1}{6}$, ou 16,7%.

Um cálculo de probabilidades sempre está associado a um "sim" e a um "não", ou a um "sucesso" e a um "fracasso", sem, todavia, que esses aspectos sejam expressos por probabilidades iguais. Em outras palavras, nem sempre há 50% de chance para o "sim" e 50% para o "não", como no caso da face observada no lançamento de uma moeda.

A definição de probabilidade como **o quociente do número de casos favoráveis sobre o número de casos possíveis** foi a primeira definição formal de probabilidade, e apareceu pela primeira vez em forma clara na obra *Líber de Ludo Aleae* de Jerônimo Cardano (1501-1576).

Com base nas informações apresentadas na seção **Leitura e Análise de Texto: organizando as ideias** e no exemplo abaixo resolva as questões a seguir.

Veja um exemplo: No lançamento de um dado numerado de 1 a 6 qual é a probabilidade de se obter um múltiplo de 3?

Resolução:

Espaço amostral: Todos os resultados possíveis no lançamento do dado.

$$S = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$$

Evento: Sair múltiplo de 3 no lançamento de um dado.

$$A = \{3;\ 6\}$$

Observe que dos seis resultados possíveis dois são múltiplos de três, logo a probabilidade de sair um múltiplo de três no lançamento de um dado é de duas chances em seis, ou, $\frac{2}{6}$, ou, ainda, 33,3%.

a) No lançamento de um dado numerado de 1 a 6, qual é a probabilidade de se obter um número par?

Resolução:

b) Jogando-se ao acaso duas moedas, qual é a probabilidade de se obter duas coroas?

Resolução:

Atividade 4

Atividade 4 – nomes: ____ **série**____

Agora é sua vez! Sem realizar o lançamento dos dados analise os dois jogos abaixo e responda as questões.

Jogo 3 – soma par

Regras:
* Antes de iniciar, cada dupla tem de decidir quem será o jogador **par** e quem será **ímpar**.
* Para começar, os dois dados devem ser lançados simultaneamente.
* Somar os pontos da face superior de cada um dos dados. Se a soma for **par**, ponto para o jogador **par**. Se for **ímpar**, ponto para o oponente.
* O jogo termina após 50 lançamentos e vence quem fizer o maior número de pontos.

a) Complete a tabela abaixo indicando se a soma entre os valores obtidos nos dados é par ou ímpar.

+	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

b) Os resultados par ou ímpar tem a mesma chance de ocorrer? Por quê?

Jogo 4

Paulo e Pedro inventaram um jogo de dados com as seguintes regras:

* Lançam-se dois dados simultaneamente e calcula-se a diferença entre a maior e a menor pontuação ou entre os pontos iguais.
* Se a diferença for 0, 1 ou 2, Pedro marca um ponto.
* Se a diferença for 3, 4 ou 5, Paulo marca um ponto.
* O jogo termina após dez lançamentos e vence quem fizer o maior número de pontos.

Realize a atividades sem efetuar o lançamento dos dados.

a) Complete a tabela abaixo indicando a diferença entre os valores obtidos nos dados.

-	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1						
2						
3						
4						
5						
6						

b) Você acha esse jogo justo? Se você fosse um dos jogadores, gostaria de estar no lugar de Pedro ou de Paulo? Por quê?

ANEXO B – FOLHAS DE ATIVIDADES RESOLVIDAS

Apresentamos nesse Anexo as folhas de Atividades resolvidas.

Atividade 1 - resolvidas

EE Euclides da Cunha	PROFMAT ufscar
Aluno(a):________________________________ nº___ série___	
Aluno(a):________________________________ nº___ série___	
São José do Rio Pardo – SP ____/____/2012	

Atividade 1

Jogos: sorte ou matemática?
Noções de Probabilidade.

Você já ouviu falar em jogos de azar? São aqueles que envolvem a aleatoriedade – os que usam dados, fichas, roletas, por exemplo. Esses jogos são muito antigos e deram origem ao campo matemático da probabilidade. Vamos conhecer um pouco dessa história e ampliar nossos conhecimentos sobre probabilidade.

Embora os jogos sejam bastante antigos, o interesse matemático por eles data de pouco mais de três séculos. Sabe-se que povos não ocidentais, como os hindus e árabes, há muito tempo, já tinham noções dos chamados jogos de azar. Contudo, não temos indícios de que tenham desenvolvido conhecimentos sobre eles. A Igreja Católica, durante a Idade Média, proibiu os jogos, sobretudo os de azar, e é muito provável que tenha destruído seus registros

A origem organizada do estudo das probabilidades remonta à correspondência trocada entre os matemáticos franceses Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665), que viveram no século XVII, na qual discutiam as chances associadas aos jogos de azar, notadamente aos jogos envolvendo baralhos. Blaise Pascal publicou um folheto intitulado "*Sobre o raciocínio em jogos de azar*", no qual tentava responder aos problemas propostos por um famoso jogador da época.

Pode-se afirmar que, por muitos anos anteriores ao século XIX, o cálculo das probabilidades foi utilizado apenas para prever as chances de determinada aposta sair vencedora em algum jogo. As descobertas da Física, notadamente da Mecânica Quântica, conduziram o estudo das probabilidades a um novo patamar, no qual algumas ocorrências, no mundo do muito pequeno, podem apenas ser previstas com determinada margem de segurança. Na teoria das probabilidades, procura-se quantificar a ocorrência de um acontecimento sob determinadas condições. Essa teoria constitui atualmente a base da Estatística, uma ciência que possibilita previsões e tomadas de decisão.

Blaise Pascal

Pierre de Fermat

Lançamento de moedas e dados para definir escolhas

O jogo de xadrez

Paulo e Pedro são dois amigos que adoram jogar xadrez após terminarem as atividades escolares. Eles combinaram que decidiriam na sorte quem seria o primeiro a jogar. A escolha seria feita com o lançamento de uma moeda. Se sair cara, Paulo começa o jogo; se sair coroa, Pedro começa o jogo. Então todas as tardes, antes de começarem a jogar, eles lançam uma moeda.

Após algumas semanas Paulo fez uma nova proposta para seu amigo: vamos lançar dois dados ao mesmo tempo e multiplicar os resultados obtidos na face superior, se o produto for par eu começo o jogo, se for ímpar você começa.

Será que Paulo fez uma proposta justa para seu colega? Explique.

Construindo uma árvore de possibilidades ou uma tabela de dupla entrada verificamos que no lançamento de dois dados há 36 possibilidades das quais 9 resultam em produto ímpar e 27 em produto par. Assim Paulo leva vantagem na proposta, pois ele tem 27 chances em 36 possibilidades, enquanto Pedro tem apenas 9 chances em 36 possibilidades. Portanto a proposta feita por Paulo não é justa.

Lançar uma moeda para decidir "na sorte" quem começa o jogo é justo? Explique.

Sim, é justo porque ao lançar uma moeda os resultados possíveis são cara ou coroa, portanto a chance de sair cara é de uma em duas possíveis, assim como sair coroa também é de uma em duas possíveis, ou seja, as chances são iguais.

Suco ou refrigerante?

Após o jogo de xadrez eles sempre tomam um lanche. Paulo prefere refrigerante e Pedro suco. Paulo propôs o seguinte ao amigo: vamos lançar dois dados ao mesmo tempo e somar os resultados obtidos na face superior, se o soma for par tomamos refrigerante, se for ímpar tomamos suco.

Será que Paulo fez uma proposta justa para seu colega? Quem tem mais chance de tomar a bebida preferida? Explique.

Construindo uma árvore de possibilidades ou uma tabela de dupla entrada verificamos que no lançamento de dois dados há 36 possibilidades das quais 18 resultam em soma ímpar e 18 em soma par. Portanto a proposta feita por Paulo é justa e os dois têm as mesmas chances de tomar a bebida preferida.

Cara ou Coroa

Dados

Discuta com seu colega as questões abaixo e marque a alternativa que julgar mais adequada. Não se esqueça de escrever o porquê escolheu a alternativa.

1 - Se lançarmos uma moeda, qual a face que terá mais chance de sair?
a) coroa tem mais chance;
b) cara tem mais chance;
c) as chances são as mesmas;

Por quê?

Ao lançarmos uma moeda os resultados possíveis são cara ou coroa, portanto a chance de sair cara é de uma em duas possíveis, assim como sair coroa também é de uma em duas possíveis, ou seja, as chances são as mesmas de sair cara ou sair coroa.

2 - Dois dados numerados de 1 a 6 são lançados ao mesmo tempo e os pontos das faces superiores são multiplicados, resultando uma produto par ou ímpar. O que terá mais chance de ocorrer?
a) o produto par tem mais chance;
b) o produto ímpar tem mais chance;
c) as chances são as mesmas;

Por quê?

No lançamento de dois dados há 36 possibilidades das quais 9 resultam em produto ímpar e 27 em produto par, portanto o produto par tem mais chance de ocorrer.

3 – Dois dados numerados de 1 a 6 são lançados ao mesmo tempo e os pontos das faces superiores são somados, resultando uma soma par ou ímpar. O que terá mais chance de ocorrer?
a) a soma par tem mais chance;
b) a soma ímpar tem mais chance;
c) as chances são as mesmas;

Por quê?

No lançamento de dois dados há 36 possibilidades das quais 18 resultam em soma ímpar e 18 em soma par, portanto as chances são as mesmas.

Atividade 2 - resolvidas

Atividade 2 – nomes: ____ **série**___

Façam suas apostas! Forme uma dupla com um colega para jogarem.

Jogo 1 – Cara ou Coroa
Regras:
* Antes de iniciar, cada dupla tem de decidir quem será o jogador "**cara**" e quem será "**coroa**".
* Para começar, a moeda deve ser lançada.
* Se sair **cara**, ponto para o jogador que escolheu cara. Se for **coroa**, ponto para o oponente.
* O jogo termina após 50 rodadas e vence quem fizer o maior número de pontos.

a) Antes de iniciar os lançamentos, responda: Quantas vezes vocês esperam que saia cara? E coroa? Por quê?

Resposta pessoal. Teoricamente, a probabilidade de sair cara ou sair coroa é de 50%, ou seja, nesse experimento espera-se sair 25 caras e 25 coroas, no entanto, trata-se de um experimento aleatório e poderá haver diferenças nos resultados obtidos.

b) Registrem os resultados na tabela abaixo.

Face obtida	Contagem	Total de pontos	Frequência relativa em porcentagem
cara			
coroa			

c) Analisem suas previsões iniciais (item a). Após as jogadas os resultados obtidos ficaram próximos do previsto ou não? Explique.

Resposta pessoal. Poderá ocorrer que 50 lançamentos não sejam suficientes para a análise da tendência de 50% de chance para cara e 50% para coroa, portanto é provável que o resultado obtido não coincida com o resultado previsto. O professor deverá, no momento em que as duplas compartilharem os resultados, somar o total de caras e o total de coroas de todas as duplas, fazendo a análise das ocorrências.

d) Vamos socializar os resultados. Passem os resultados obtidos ao professor e registrem os resultados obtidos por todos os grupos na tabela abaixo.

Face obtida	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6	Grupo 7	Grupo 8	Grupo 9
cara									
coroa									

Face obtida	Grupo 10	Grupo 11	Grupo 12	Grupo 13	Grupo 14	Grupo 15	Grupo 16	Total	%
cara									
coroa									

e) Analisando os resultados da tabela, responda: se a moeda for lançada 1000 vezes quantas caras e quantas coroas vocês esperam que saiam? Explique.

Resposta pessoal. Espera-se que os alunos percebam que, à medida que aumenta o número de lançamentos, há uma tendência de os resultados se aproximarem da metade do total.

Jogo 2 – jogo do produto

Regras:

* Antes de iniciar, cada dupla tem de decidir quem será o jogador **par** e quem será **ímpar**.
* Para começar, os dois dados devem ser lançados ao mesmo tempo.
* Multiplicar os pontos da face superior de cada um dos dados. Se o produto for **par**, ponto para o jogador **par**. Se for **ímpar**, ponto para o oponente.
* O jogo termina após 50 lançamentos e vence quem fizer o maior número de pontos.

a) Antes de iniciar os lançamentos, responda: Quantas vezes vocês esperam que ocorra produto par? E ímpar? Por quê?

Resposta pessoal. Teoricamente, a probabilidade de sair produto par é 75% e sair produto ímpar é de 25%, no entanto, trata-se de um experimento aleatório e poderá haver diferenças nos resultados obtidos.

b) Registrem os resultados na tabela abaixo.

Produto obtido	Contagem	Total de pontos	Frequência relativa em porcentagem
Par			
Ímpar			

c) Analisem suas previsões iniciais (item a). Após as jogadas os resultados obtidos ficaram próximos do previsto ou não? Explique.

Resposta pessoal. Poderá ocorrer que 50 lançamentos não sejam suficientes para a análise da tendência de 75% de chance para produto par e 25% para produto ímpar, portanto é provável que o resultado obtido não coincida com o resultado previsto. O professor deverá, no momento em que as duplas compartilharem os resultados, somar o total de produtos pares e o total de produtos ímpares de todas as duplas, fazendo a análise das ocorrências.

d) Vamos socializar os resultados. Passem os resultados obtidos ao professor e registrem os resultados obtidos por todos os grupos na tabela abaixo.

Produto obtido	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6	Grupo 7	Grupo 8	Grupo 9
Par									
Ímpar									

Produto obtido	Grupo 10	Grupo 11	Grupo 12	Grupo 13	Grupo 14	Grupo 15	Grupo 16	Total	%
Par									
Ímpar									

e) Analisando os resultados da tabela, responda: se o experimento for realizado 1000 vezes quantos produtos pares e quantos produtos ímpares vocês esperam que saiam? Explique.

Resposta pessoal. Espera-se que os alunos percebam que, à medida que aumenta o número de lançamentos, há uma tendência de os resultados se aproximarem de 75% de produtos pares e 25% de produtos ímpares.

Possibilidades e chances

Vocês participaram de dois jogos com moedas e dados e devem ter notado que os resultados nos jogo 1 foram distribuídos de maneira bem igual. Já no jogo 2 os resultados foram distribuídos de maneira bem desigual entre os grupos. Vocês sabem explicar o porquê isso ocorreu? Para responder, faremos uma análise das possibilidades em cada um desses jogos. Nessa análise, vamos supor que as moedas e dados são honestos, ou seja, a chance de sair cara ou coroa é a mesma e no dado a chance de uma face ser sorteada é a mesma para todas as faces.

Jogo 1

No jogo 1 é bastante claro que ao lançar uma moeda os resultados possíveis são **cara** ou **coroa** e que estes resultados são igualmente prováveis, ou seja, a chance de sair cara é de uma em duas possíveis, assim como sair coroa também é de uma em duas possíveis, ou seja, as chances são iguais.

Jogo 2

No jogo 2 a primeira impressão é que cada jogador teria chance igual de marcar ponto, pois sair produto par ou produto ímpar parece ser igualmente provável. No entanto, ao combinar os resultados dos dois lançamentos, verificamos que não é bem assim.
Primeiramente, vamos observar todas as possibilidades de resultado no lançamento de dois dados ao mesmo tempo. Em cada dado temos 6 resultados possíveis. No lançamento de dois dados temos 36 combinações diferentes. Para isso faremos uma tabela.

1 - Complete a tabela abaixo indicando os números sorteados e o resultado par ou impar do produto:

X	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1, 1) impar	(1, 2) par	(1, 3) impar	(1, 4) par	(1, 5) impar	(1, 6) par
2	(2, 1) par	(2, 2) par	(2, 3) par	(2, 4) par	(2, 5) par	(2, 6) par
3	(3, 1) impar	(3, 2) par	(3, 3) impar	(3, 4) par	(3, 5) impar	(3, 6) par
4	(4, 1) par	(4, 2) par	(4, 3) par	(4, 4) par	(4, 5) par	(4, 6) par
5	(5, 1) impar	(5, 2) par	(5, 3) impar	(5, 4) par	(5, 5) impar	(5, 6) par
6	(6, 1) par	(6, 2) par	(6, 3) par	(6, 4) par	(6, 5) par	(6, 6) par

2 - Quantos resultados são pares? Quantos são impares?
Há 27 resultados pares e 9 resultados impares.

3 - Observando essa tabela quem você acha que tem mais chance de ganhar, o jogador **par** ou o jogador **impar**? Por quê?
O jogador par tem mais chance, pois como observamos na tabela o resultado par é o que tem mais chance de ocorrer (27 em 36).

Atividade 3 - resolvidas

Atividade 3 – nomes: ____ **série**___

Leitura e Análise de Texto: organizando as ideias.

Espaço Amostral e Evento

Nas atividades anteriores, ao lançar uma moeda ou um dado, você realizou um experimento aleatório. No **jogo 1** há duas possibilidades: obter **cara** ou obter **coroa**. No **jogo 2** há 36 possibilidades diferentes para o lançamento de dois dados dos quais 27 apresentam produto par e 9 apresentam produto ímpar. O conjunto de todos os resultados possíveis num experimento aleatório e chamado de **espaço amostral**. Cada uma dessas possibilidades é chamada de **evento**.

Assim, podemos representar o **espaço amostral** para o lançamento de uma moeda (jogo 1) da seguinte maneira:

$$S = \{cara;\ \ coroa\}$$

No lançamento de dois dados (jogo 2) o **espaço amostral** é:

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);(2,1)(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6); \\ (3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(3,5);(3,6);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4);(4,5);(4,6); \\ (5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6);(6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5);(6,6) \end{Bmatrix}$$

Probabilidade

A probabilidade é um tipo especial de razão, na qual se compara o número de possibilidades de ocorrência de um evento particular com o número total de possibilidades relacionadas a esse evento.

Para determinar a probabilidade de ocorrência de um determinado **evento**, devemos quantificar o número de casos em que este evento ocorre e o número total de casos possíveis, chamado de **espaço amostral**. A razão entre esses valores é o que chamamos de probabilidade. O resultado dessa razão pode ser expresso como número decimal ou como porcentagem.

Por exemplo, no lançamento de uma moeda, a probabilidade de se obter a face "**cara**" é de uma em duas, ou seja, uma chance em duas, ou $\frac{1}{2}$, ou, ainda, 50%. É a razão entre o número de possibilidades de se obter "**cara**" (1) e o número total de possibilidades, **cara** ou **coroa** (2). No lançamento de um dado numerado de 1 a 6, a probabilidade de se obter o número 5 é de uma em seis, ou $\frac{1}{6}$, ou 16,7%.

Um cálculo de probabilidades sempre está associado a um "sim" e a um "não", ou a um "sucesso" e a um "fracasso", sem, todavia, que esses aspectos sejam expressos por probabilidades iguais. Em outras palavras, nem sempre há 50% de chance para o "sim" e 50% para o "não", como no caso da face observada no lançamento de uma moeda.

A definição de probabilidade como **o quociente do número de casos favoráveis sobre o número de casos possíveis** foi a primeira definição formal de probabilidade, e apareceu pela primeira vez em forma clara na obra *Líber de Ludo Aleae* de Jerônimo Cardano (1501-1576).

Com base nas informações apresentadas na seção **Leitura e Análise de Texto: organizando as ideias** e no exemplo abaixo resolva as questões a seguir.

Veja um exemplo: No lançamento de um dado numerado de 1 a 6 qual é a probabilidade de se obter um múltiplo de 3?
Resolução:
Espaço amostral: Todos os resultados possíveis no lançamento do dado.

$S = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$

Evento: Sair múltiplo de 3 no lançamento de um dado.

$A = \{3;\ 6\}$

Observe que dos seis resultados possíveis dois são múltiplos de três, logo a probabilidade de sair um múltiplo de três no lançamento de um dado é de duas chances em seis, ou, $\frac{2}{6}$, ou, ainda, 33,3%.

a) No lançamento de um dado numerado de 1 a 6, qual é a probabilidade de se obter um número par?
Resolução:

Espaço amostral:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Evento: sair um número par.

$A = \{2, 4, 6\}$

$P(A) = 3/6 = 1/2$

b) Jogando-se ao acaso duas moedas, qual é a probabilidade de se obter duas coroas?
Resolução:

Espaço amostral:

S= {(cara; cara); (cara; coroa); (coroa; cara); (coroa; coroa)}

Evento: sair duas coroas.

A= {(coroa; coroa)}

$P(A) = 1/4$

Atividade 4 - resolvidas

Atividade 4 – nomes: ____ **série**___

Agora é sua vez! Sem realizar o lançamento dos dados analise os dois jogos abaixo e responda as questões.

Jogo 3 – soma par

Regras:
* Antes de iniciar, cada dupla tem de decidir quem será o jogador **par** e quem será **ímpar**.
* Para começar, os dois dados devem ser lançados simultaneamente.
* Somar os pontos da face superior de cada um dos dados. Se a soma for **par**, ponto para o jogador **par**. Se for **ímpar**, ponto para o oponente.
* O jogo termina após 50 lançamentos e vence quem fizer o maior número de pontos.

a) Complete a tabela abaixo indicando se a soma entre os valores obtidos nos dados é par ou ímpar.

+	1	2	3	4	5	6
1	par	ímpar	par	ímpar	par	ímpar
2	par	ímpar	par	ímpar	par	ímpar
3	par	ímpar	par	ímpar	par	ímpar
4	par	ímpar	par	ímpar	par	ímpar
5	par	ímpar	par	ímpar	par	ímpar
6	par	ímpar	par	ímpar	par	ímpar

b) Os resultados par ou ímpar tem a mesma chance de ocorrer? Por quê?

Sim, os resultados par ou ímpar tem a mesma chance de ocorrer porque como observamos na tabela há 18 resultados pares e 18 resultados ímpares.

Jogo 4

Paulo e Pedro inventaram um jogo de dados com as seguintes regras:

* Lançam-se dois dados simultaneamente e calcula-se a diferença entre a maior e a menor pontuação ou entre os pontos iguais.
* Se a diferença for 0, 1 ou 2, Pedro marca um ponto.
* Se a diferença for 3, 4 ou 5, Paulo marca um ponto.
* O jogo termina após dez lançamentos e vence quem fizer o maior número de pontos.

Realize a atividades sem efetuar o lançamento dos dados.

a) Complete a tabela abaixo indicando a diferença entre os valores obtidos nos dados.

-	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

b) Você acha esse jogo justo? Se você fosse um dos jogadores, gostaria de estar no lugar de Pedro ou de Paulo? Por quê?

Pela tabela, observa-se que as diferenças 0, 1 e 2 ocorrem 24 vezes enquanto as diferenças 3, 4 e 5 ocorrem 12 vezes. Por isso o jogo não é justo: Pedro tem mais chance de marcas pontos (24 em 36).

Se eu fosse um dos jogadores gostaria de ser o Pedro, pois como observamos na tabela as diferenças 0, 1 e 2 são as que têm mais chance de ocorrer (24 em 36).

ANEXO C – FOLHAS DE ATIVIDADES REFORMULADAS

Apresentamos nesse Anexo as folhas de Atividades reformuladas após a análise da aplicação.

Atividade 1 - reformuladas

EE Euclides da Cunha	PROFMAT ufscar
Aluno(a):______________________________ nº___ série____	
Aluno(a):______________________________ nº___ série____	
São José do Rio Pardo – SP ____/____/2012	

Atividade 1

Jogos: sorte ou matemática?
Noções de Probabilidade.

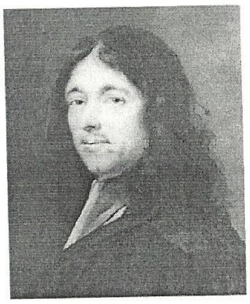
Você já ouviu falar em jogos de azar? São aqueles que envolvem a aleatoriedade – os que usam dados, fichas, roletas, por exemplo. Esses jogos são muito antigos e deram origem ao campo matemático da probabilidade. Vamos conhecer um pouco dessa história e ampliar nossos conhecimentos sobre probabilidade.

Embora os jogos sejam bastante antigos, o interesse matemático por eles data de pouco mais de três séculos. Sabe-se que povos não ocidentais, como os hindus e árabes, há muito tempo, já tinham noções dos chamados jogos de azar. Contudo, não temos indícios de que tenham desenvolvido conhecimentos sobre eles. A Igreja Católica, durante a Idade Média, proibiu os jogos, sobretudo os de azar, e é muito provável que tenha destruído seus registros

A origem organizada do estudo das probabilidades remonta à correspondência trocada entre os matemáticos franceses Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665), que viveram no século XVII, na qual discutiam as chances associadas aos jogos de azar, notadamente aos jogos envolvendo baralhos. Blaise Pascal publicou um folheto intitulado "*Sobre o raciocínio em jogos de azar*", no qual tentava responder aos problemas propostos por um famoso jogador da época.

Pode-se afirmar que, por muitos anos anteriores ao século XIX, o cálculo das probabilidades foi utilizado apenas para prever as chances de determinada aposta sair vencedora em algum jogo. As descobertas da Física, notadamente da Mecânica Quântica, conduziram o estudo das probabilidades a um novo patamar, no qual algumas ocorrências, no mundo do muito pequeno, podem apenas ser previstas com determinada margem de segurança. Na teoria das probabilidades, procura-se quantificar a ocorrência de um acontecimento sob determinadas condições. Essa teoria constitui atualmente a base da Estatística, uma ciência que possibilita previsões e tomadas de decisão.

Blaise Pascal



Pierre de Fermat

Folha de atividade 1 – Profmat / UFSCar – Prof. Emerson Donizeti Biajoti 1

Lançamento de moedas e dados para definir escolhas

O jogo de xadrez

Paulo e Pedro são dois amigos que adoram jogar xadrez após terminarem as atividades escolares. Eles combinaram que decidiriam na sorte quem seria o primeiro a jogar. A escolha seria feita com o lançamento de uma moeda. Se sair cara, Paulo começa o jogo; se sair coroa, Pedro começa o jogo. Então todas as tardes, antes de começarem a jogar, eles lançam uma moeda.

Após algumas semanas Paulo fez uma nova proposta para seu amigo: vamos lançar dois dados ao mesmo tempo e multiplicar os resultados obtidos na face superior, se o produto for par eu começo o jogo, se for ímpar você começa.

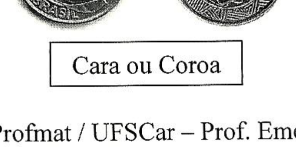
Será que Paulo fez uma proposta justa para seu colega? Explique.

Lançar uma moeda para decidir "na sorte" quem começa o jogo é justo? Explique.

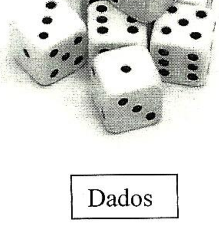
Suco ou refrigerante?

Após o jogo de xadrez eles sempre tomam um lanche. Paulo prefere refrigerante e Pedro suco. Paulo propôs o seguinte ao amigo: vamos lançar dois dados ao mesmo tempo e somar os resultados obtidos na face superior, se o soma for par tomamos refrigerante, se for ímpar tomamos suco.

Será que Paulo fez uma proposta justa para seu colega? Quem tem mais chance de tomar a bebida preferida? Explique.



Cara ou Coroa



Dados

Discuta com seu colega as questões abaixo e marque a alternativa que julgar mais adequada. Não se esqueça de escrever o porquê escolheu a alternativa.

1 - Se lançarmos uma moeda, qual a face que terá mais chance de sair?
a) coroa tem mais chance;
b) cara tem mais chance;
c) as chances são as mesmas;

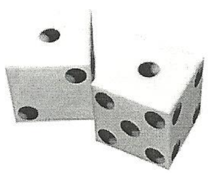
Por quê?____

2 - Dois dados numerados de 1 a 6 são lançados ao mesmo tempo e os pontos das faces superiores são multiplicados, resultando uma produto par ou ímpar. O que terá mais chance de ocorrer?
a) o produto par tem mais chance;
b) o produto ímpar tem mais chance;
c) as chances são as mesmas;

Por quê?____

3 – Dois dados numerados de 1 a 6 são lançados ao mesmo tempo e os pontos das faces superiores são somados, resultando uma soma par ou ímpar. O que terá mais chance de ocorrer?
a) a soma par tem mais chance;
b) a soma ímpar tem mais chance;
c) as chances são as mesmas;

Por quê?____



Atividade 2 - reformuladas

Atividade 2 – nomes: ____ **série**___

Façam suas apostas! Forme uma dupla com um colega para jogarem.

Jogo 1 – Cara ou Coroa

Regras:

* Antes de iniciar, cada dupla tem de decidir quem será o jogador "**cara**" e quem será "**coroa**".
* Para começar, a moeda deve ser lançada.
* Se sair **cara**, ponto para o jogador que escolheu cara. Se for **coroa**, ponto para o oponente.
* O jogo termina após 50 rodadas e vence quem fizer o maior número de pontos.

a) Antes de iniciar os lançamentos, responda: Quantas vezes vocês esperam que saia cara? E coroa? Por quê?

b) Registrem os resultados na tabela abaixo.

Face obtida	Contagem	Total de pontos	Frequência relativa em porcentagem
cara			
coroa			

c) Analisem suas previsões iniciais (item a). Após as jogadas os resultados obtidos ficaram próximos do previsto ou não? Explique.

d) Vamos socializar os resultados. Passem os resultados obtidos ao professor e registrem os resultados obtidos por todos os grupos na tabela abaixo.

Face obtida	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6	Grupo 7	Grupo 8	Grupo 9
cara									
coroa									

Face obtida	Grupo 10	Grupo 11	Grupo 12	Grupo 13	Grupo 14	Grupo 15	Grupo 16	Total	%
cara									
coroa									

e) Analisando os resultados da tabela, responda: se a moeda for lançada 1000 vezes quantas caras e quantas coroas vocês esperam que saiam? Explique.

Jogo 2 – jogo do produto

Regras:

* Antes de iniciar, cada dupla tem de decidir quem será o jogador **par** e quem será **ímpar**.
* Para começar, os dois dados devem ser lançados ao mesmo tempo.
* Multiplicar os pontos da face superior de cada um dos dados. Se o produto for **par**, ponto para o jogador **par**. Se for **ímpar**, ponto para o oponente.
* O jogo termina após 50 lançamentos e vence quem fizer o maior número de pontos.

a) Antes de iniciar os lançamentos, responda: Quantas vezes vocês esperam que ocorra produto par? E ímpar? Por quê?

b) Registrem os resultados na tabela abaixo.

Produto obtido	Contagem	Total de pontos	Frequência relativa em porcentagem
Par			
Ímpar			

c) Analisem suas previsões iniciais (item a). Após as jogadas os resultados obtidos ficaram próximos do previsto ou não? Explique.

d) Vamos socializar os resultados. Passem os resultados obtidos ao professor e registrem os resultados obtidos por todos os grupos na tabela abaixo.

Produto obtido	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6	Grupo 7	Grupo 8	Grupo 9
Par									
Ímpar									

Produto obtido	Grupo 10	Grupo 11	Grupo 12	Grupo 13	Grupo 14	Grupo 15	Grupo 16	Total	%
Par									
Ímpar									

e) Analisando os resultados da tabela, responda: se o experimento for realizado 1000 vezes quantos produtos pares e quantos produtos ímpares vocês esperam que saiam? Explique.

Possibilidades e chances

Vocês participaram de dois jogos com moedas e dados e devem ter notado que os resultados nos jogo 1 foram distribuídos de maneira bem igual. Já no jogo 2 os resultados foram distribuídos de maneira bem desigual entre os grupos. Vocês sabem explicar o porquê isso ocorreu? Para responder, faremos uma análise das possibilidades em cada um desses jogos. Nessa análise, vamos supor que as moedas e dados são honestos, ou seja, a chance de sair cara ou coroa é a mesma e no dado a chance de uma face ser sorteada é a mesma para todas as faces.

Jogo 1

No jogo 1 é bastante claro que ao lançar uma moeda os resultados possíveis são **cara** ou **coroa** e que estes resultados são igualmente prováveis, ou seja, a chance de sair cara é de uma em duas possíveis, assim como sair coroa também é de uma em duas possíveis, ou seja, as chances são iguais.

Jogo 2

No jogo 2 a primeira impressão é que cada jogador teria chance igual de marcar ponto, pois sair produto par ou produto ímpar parece ser igualmente provável. No entanto, ao combinar os resultados dos dois lançamentos, verificamos que não é bem assim.
Primeiramente, vamos observar todas as possibilidades de resultado no lançamento de dois dados ao mesmo tempo. Em cada dado temos 6 resultados possíveis. No lançamento de dois dados temos 36 combinações diferentes. Para isso faremos uma tabela.

1 - Complete a tabela abaixo indicando os números sorteados e o resultado par ou impar do produto:

X	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1, 1) impar	(1, 2) par				
2	(2, 1) par	(2, 2) par				
3						
4						
5						
6						

2 - Quantos resultados são pares? Quantos são impares?

3 - Observando essa tabela quem você acha que tem mais chance de ganhar, o jogador **par** ou o jogador **impar**? Por quê?

Atividade 3 - reformuladas

Atividade 3 – nomes: ____ **série**___

Leitura e Análise de Texto: organizando as ideias.

Espaço Amostral e Evento

Nas atividades anteriores, ao lançar uma moeda ou um dado, você realizou um experimento aleatório. No **jogo 1** há duas possibilidades: obter **cara** ou obter **coroa**. No **jogo 2** há 36 possibilidades diferentes para o lançamento de dois dados dos quais 27 apresentam produto par e 9 apresentam produto ímpar. O conjunto de todos os resultados possíveis num experimento aleatório e chamado de **espaço amostral**. Cada uma dessas possibilidades é chamada de **evento**.

Assim, podemos representar o **espaço amostral** para o lançamento de uma moeda (jogo 1) da seguinte maneira:

$$S = \{cara;\ \ coroa\}$$

No lançamento de dois dados (jogo 2) o **espaço amostral** é:

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);(2,1)(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6); \\ (3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(3,5);(3,6);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4);(4,5);(4,6); \\ (5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6);(6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5);(6,6) \end{Bmatrix}$$

Probabilidade

A probabilidade é um tipo especial de razão, na qual se compara o número de possibilidades de ocorrência de um evento particular com o número total de possibilidades relacionadas a esse evento.

Para determinar a probabilidade de ocorrência de um determinado **evento**, devemos quantificar o número de casos em que este evento ocorre e o número total de casos possíveis, chamado de **espaço amostral**. A razão entre esses valores é o que chamamos de probabilidade. O resultado dessa razão pode ser expresso como número decimal ou como porcentagem.

Por exemplo, no lançamento de uma moeda, a probabilidade de se obter a face "**cara**" é de uma em duas, ou seja, uma chance em duas, ou $\frac{1}{2}$, ou, ainda, 50%. É a razão entre o número de possibilidades de se obter "**cara**" (1) e o número total de possibilidades, **cara** ou **coroa** (2). No lançamento de um dado numerado de 1 a 6, a probabilidade de se obter o número 5 é de uma em seis, ou $\frac{1}{6}$, ou 16,7%.

Um cálculo de probabilidades sempre está associado a um "sim" e a um "não", ou a um "sucesso" e a um "fracasso", sem, todavia, que esses aspectos sejam expressos por probabilidades iguais. Em outras palavras, nem sempre há 50% de chance para o "sim" e 50% para o "não", como no caso da face observada no lançamento de uma moeda.

A definição de probabilidade como **o quociente do número de casos favoráveis sobre o número de casos possíveis** foi a primeira definição formal de probabilidade, e apareceu pela primeira vez em forma clara na obra *Líber de Ludo Aleae* de Jerônimo Cardano (1501-1576).

Com base nas informações apresentadas na seção **Leitura e Análise de Texto: organizando as ideias** e no exemplo abaixo resolva as questões a seguir.

Veja um exemplo: No lançamento de um dado numerado de 1 a 6 qual é a probabilidade de se obter um múltiplo de 3?

Resolução:

Espaço amostral: Todos os resultados possíveis no lançamento do dado.

$S = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$

Evento: Sair múltiplo de 3 no lançamento de um dado.

$A = \{3;\ 6\}$

Observe que dos seis resultados possíveis dois são múltiplos de três, logo a probabilidade de sair um múltiplo de três no lançamento de um dado é de duas chances em seis, ou, $\frac{2}{6}$, ou, ainda, 33,3%.

a) No lançamento de um dado numerado de 1 a 6, qual é a probabilidade de se obter um número par?

Resolução:

b) Jogando-se ao acaso duas moedas, qual é a probabilidade de se obter duas coroas?

Resolução:

Atividade 4 - reformuladas

Atividade 4 – nomes: ____ **série**____

Agora é sua vez! Sem realizar o lançamento dos dados analise os dois jogos abaixo e responda as questões.

Jogo 3 – soma par

Regras:
* Antes de iniciar, cada dupla tem de decidir quem será o jogador **par** e quem será **ímpar**.
* Para começar, os dois dados devem ser lançados simultaneamente.
* Somar os pontos da face superior de cada um dos dados. Se a soma for **par**, ponto para o jogador **par**. Se for **ímpar**, ponto para o oponente.
* O jogo termina após 50 lançamentos e vence quem fizer o maior número de pontos.

a) Complete a tabela abaixo indicando se a soma entre os valores obtidos nos dados é par ou ímpar.

+	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

b) Os resultados par ou ímpar tem a mesma chance de ocorrer? Por quê?

Jogo 4

Paulo e Pedro inventaram um jogo de dados com as seguintes regras:

* Lançam-se dois dados simultaneamente e calcula-se a diferença entre a maior e a menor pontuação ou entre os pontos iguais.
* Se a diferença for 0, 1 ou 2, Pedro marca um ponto.
* Se a diferença for 3, 4 ou 5, Paulo marca um ponto.
* O jogo termina após dez lançamentos e vence quem fizer o maior número de pontos.

Realize a atividades sem efetuar o lançamento dos dados.

a) Complete a tabela abaixo indicando a diferença entre os valores obtidos nos dados.

-	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1						
2						
3						
4						
5						
6						

b) Você acha esse jogo justo? Se você fosse um dos jogadores, gostaria de estar no lugar de Pedro ou de Paulo? Por quê?