UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSINAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

GILMAR TOLENTINO

SITUAÇÕES-PROBLEMAS APLICADAS NA APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES E SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU COM DUAS VARIÁVEIS.

SÃO CARLOS
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSINAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

GILMAR TOLENTINO

SITUAÇÕES-PROBLEMAS APLICADAS NA APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES E SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU COM DUAS VARIÁVEIS.

Dissertação de mestrado apresentada ao programa de mestrado profissional em matemática em rede nacional – PROFMAT da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Orientação:
Profª Drª Luciene Nogueira Bertoncello

São Carlos

2013

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

T649sp

Tolentino, Gilmar.
Situações-problemas aplicadas na aprendizagem de equações e sistemas de equações do primeiro grau com duas variáveis / Gilmar Tolentino. -- São Carlos : UFSCar, 2013.
75 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2013.

1. Matemática. 2. Incógnita. 3. Intersecção. I. Título.

CDD: 510 (20ª)

Profa. Dra. Luciene Nogueira Bertoncello
DM - UFSCar

Profa. Dra. Ires Dias
ICMC- USP

Prof. Dr. Renato José de Moura
DM - UFSCar

DEDICATÓRIA

Dedico esta dissertação à minha esposa e aos meus filhos, pela paciência e compreensão despendida a mim, por me ausentar, muitas vezes, devido aos estudos que o curso exigiu.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus, pela vida e por toda força necessária para vencer as barreiras encontradas no caminho.

Agradeço aos meus pais pela base de minha formação.

Agradeço a minha esposa Sabrina dos Santos Tolentino, por estar comigo por todo esse tempo e por ser o meu alicerce.

Agradeço aos meus filhos, Guilherme e Thaisa, pela alegria e entusiasmo no viver.

Agradeço a todos os alunos da turma por terem contribuído para a conclusão do mesmo e, em especial, àqueles que estiveram mais próximos a mim durante o curso: Esdras Henrique Regatti Motinaga, Daniele Cristina Chiconato, Sérgio Luiz Franscisco e Paulo César Martimiano.

Agradeço ao apoio financeiro parcial da Capes e a equipe gestora da EMEF "Professora Idalina Canova de Barros" pelo apoio concedido para realização deste trabalho.

Agradeço a minha orientadora Profª. Drª. Luciene Nogueira Bertoncello, pela paciência, apoio e instruções na escrita desta dissertação.

Agradeço a todos os professores do programa, pelo apoio e os ensinamentos que levarei sempre comigo.

"Quando se está aprendendo, o professor atua apenas como uma agulha; o aluno é a linha. Como seu mentor, o professor pode ajudá-lo, apontando-lhe a direção correta. Mas, como a agulha da linha, ele deve separar do aluno no fim, porque a força, a fibra e a capacidade de juntar todas as partes devem ser do aluno."
(SECRETAN, Lance H. K. Os Passos do tigre)

RESUMO

O desenvolvimento deste trabalho tem como objetivo mostrar a importância da aplicação de situações-problemas para a aprendizagem de equações e sistemas de equações do primeiro grau com duas variáveis por alunos do 8° ano do ensino fundamental em ambiente papel e lápis e observação de balança de dois pratos. A proposta é mostrar a aplicação de resolução de problemas que envolva equações do primeiro grau com uma incógnita e sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas, a fim de incentivar os alunos a pensarem, encaminharem a solução do problema, tentarem superar as dificuldades de aprendizagem, enfrentarem desafios que exijam grande esforço e dedicação e descubram por si só a melhor estratégia que deve ser utilizada para o problema ser resolvido e, em seguida, comparar e apresentar os algoritmos definidos para a resolução destes conceitos. É apresentada também, a resolução destes problemas usando o método da balança de dois pratos, o método da adição e o método da substituição como método de resolução de equação e sistemas de equações com duas incógnitas.

Palavras-chave: Situações-problema, equações do primeiro grau com uma incógnita, sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas, balança de dois pratos.

ABSTRACT

The development of this work aims to aims to show the importance of the application of problem situations for the learning of equations and systems of first degree equations with two variables by students of the 8th grade level in paper and pencil environment and observation of two-pan balance. The proposal is to show the application of solving problem which involves first-degree equations with one unknown and systems of first-degree equation with two unknowns, in order to encourage the students to think, state the solution of the problem, try to overcome the learning difficulties, facing challenges which requires a great effort and dedication and find out by themselves the best strategy which must be used in order to solve the problem and, after this, compare and present the algorithms defined for the solution of these concepts. It is also presented the solution of these problems using the two-pan balance method, the addition and substitution method, as well as the method of solving equations and equation systems with two unknowns.

Keywords: problem-situations, first-degree equations with one unknown, the system of equations of the first degree with two unknowns, two-pan balance.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A matemática surgiu da necessidade que o homem teve e tem de resolver problemas que envolvam conceitos de contagem e geometria. Por isso, para aprender matemática não bastam fórmulas e algoritmos prontos, é necessário que o aluno verifique a aplicação de conceitos matemáticos em problemas reais.

Conforme Dante(1991), na aprendizagem da matemática, os problemas tem papel fundamental, pois, permite que os alunos reflitam sobre quais ferramentas matemáticas são necessárias para a resolução destes, possibilitando com isso, o raciocínio lógico e não apenas o uso padronizado de regras.

A metodologia de resolução de problemas é considerada uma maneira muito eficiente de desenvolver a aprendizagem matemática. Segundo os adeptos dessa proposta (ANGÓN, 1998; ECHEVERRÍA, 1998; ONUCHIC, 1999; POZO, 1998) ensinar a matemática através da resolução de problemas desenvolve o raciocínio e estimula o gosto pela matéria fazendo com que os alunos aprendam de forma prazerosa. A adoção dessa alternativa metodológica ajuda a preparar os alunos para enfrentarem situações novas, seja na vida escolar como também no dia-a-dia, e a desenvolverem a autonomia, pois ao resolver problemas estão sempre tendo que tomar decisões.

Dante(2005) propõe alguns dos objetivos a serem alcançados em sala de aula, quando se trabalha com a técnica de resolução de problemas, tais como:

a) Despertar o interesse do aluno;

Para despertar o interesse do aluno, nada melhor que lhe apresentar problemas que o envolvam, o desafiem e o motivem a querer resolvê-los, mas tais problemas devem ser elaborados levando-se em consideração o nível de desenvolvimento dos educandos.

b) Desenvolver o raciocínio do aluno;

É preciso ajudar o aluno a desenvolver a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e a fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis de modo que ele possa propor boas soluções para os problemas apresentados, quer sejam problemas matemáticos ou outros quaisquer que surjam.

c) Ensinar o aluno a enfrentar situações novas;

Pois as rápidas mudanças sociais e o aprimoramento cada vez mais acelerado das tecnologias impedem que se faça uma previsão exata de quais habilidades, conceitos e algoritmos matemáticos seriam úteis para preparar o cidadão. Para isso é necessário ajudar o aluno a desenvolver a iniciativa, o espírito explorador, a criatividade e a independência, habilidades que podem ser desenvolvidas por meio da resolução de problemas.

d) Dar oportunidade ao aluno de se envolver com as aplicações da matemática;

A resolução de problemas desde que elaborados adequadamente, poderá ser um auxílio para apresentar as aplicações da matemática de modo mais atraente e criativo.

e) Tornar as aulas de matemática mais interessantes e desafiadoras;

Uma aula de matemática em que os alunos, orientados pelo professor, trabalhem de modo ativo, individualmente ou em pequenos grupos, na aventura de buscar a solução de um problema que os desafie, poderá se tornar mais dinâmica e motivadora, do que uma aula em que se ensinem apenas conceitos e algoritmos, embora esses tenham sua relevância no ensino e na sistematização do conhecimento.

f) Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas;

Para o aluno resolver problemas, necessita de determinadas estratégias e procedimentos que em geral se aplicam a um grande número de situações. Esses procedimentos e estratégias o auxiliam na análise, interpretação e na solução de situações onde um ou mais elementos desconhecidos sejam procurados.

g) Dar uma boa base matemática aos educandos, pois, é necessário formar cidadãos matematicamente alfabetizados;

Educandos que saibam como resolver, de modo inteligente, seus problemas de economia, comércio, administração, engenharia, medicina, ou outro qualquer da vida diária. Para isso, é necessário que o aluno seja um estudante participativo e atuante, que tome decisões rápidas e precisas diante de situações novas que lhes apresente habilidades que podem ser desenvolvidas em trabalhos de resolução de problemas, elaborados de forma contextualizada e de preferência interdisciplinar.

Conforme Lupinacci e Botin(2004), “a resolução de problemas é um método eficaz para desenvolver o raciocínio e para motivar os alunos para o estudo da matemática. O processo ensino e aprendizagem podem ser desenvolvidos através de desafios, problemas interessantes que possam ser explorados e não apenas resolvidos”.

No entanto, a abordagem de conceitos, ideias e métodos sob a perspectiva de resolução de problemas ainda é bastante desconhecida da grande maioria dos professores e, quando é incorporada à prática escolar, aparece como um item isolado, desenvolvido paralelamente como aplicação da aprendizagem, a partir de listagem de problemas cuja resolução depende basicamente da escolha de técnicas ou formas de resolução memorizadas pelos alunos (BRASIL, 1998).

O ensino e a aprendizagem da matemática sem a resolução de problemas é um dos fatores do insucesso escolar. Com frequência encontramos pessoas que manifestam aversão à disciplina e os motivos referem-se à dificuldade para realizar desde as atividades mais simples do cotidiano e até associadas a atividades profissionais (LUPINACCI; BOTIN, 2004).

Na escola, encontramos alunos desinteressados com relação à disciplina de matemática e isso, se deve, em muitos casos, a forma de serem apresentados os conceitos matemáticos a ele. Por isso, muitas vezes escutamos dos alunos: professor, onde eu vou usar isso? Esta pergunta nos motiva a encontrar aplicações para tais conceitos apresentados e isso, na maioria das vezes, se resolve com problemas relacionados ao conceito ensinado (DANTE, 2005).

Diante disso, sentiu-se a necessidade de desenvolver um projeto de pesquisa, propondo a aplicação da metodologia da resolução de problemas, ao trabalhar os conteúdos: equações do primeiro grau com uma incógnita e sistemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas, em classes do 8º ano do ensino fundamental II da escola municipal Idalina Canova de Barros na cidade de Lençóis Paulista, colégio onde o autor deste trabalho exerce a função de professor de matemática e, além disso, chamar a atenção para como a relação professor / aluno / conhecimento pode ser alterada positivamente quando passa-se a trabalhar na sala de aula, com situações-problemas, dando ênfase a problemas abertos, ou também denominados problemas processo ou heurísticos, segundo Dante (2005). Como forma de motivar o trabalho, pergunta-se: como a metodologia da resolução de problemas pode auxiliar na construção de uma proposta didático-pedagógica para o ensino e a aprendizagem de matemática? Quais as possibilidades de trabalho e suas consequências com a resolução de situações-problemas e problemas abertos no ensino e aprendizagem da matemática com conteúdo equação e sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas, nas salas de 8º ano do ensino fundamental II?

O desenvolvimento deste trabalho tem como objetivo mostrar a importância da resolução de problemas para o ensino da matemática para alunos do ensino fundamental. A proposta é mostrar uma aplicação de resolução de problemas, a fim de incentivar os alunos a pensarem, encaminharem a solução do problema, tentarem superar as dificuldades de aprendizagem, enfrentarem desafios que exijam grande esforço e dedicação e descubram por si só a melhor estratégia que deve ser utilizada para o problema ser resolvido.

A ideia é aplicar os problemas relacionados a equações do primeiro grau e sistemas de equações do primeiro grau inicialmente, sem a apresentação dos métodos de resolução destes conteúdos usualmente apresentados neste grau de escolaridade (8º ano) e verificar como o aluno se sai para solucioná-los. E, a seguir, após verificar e discutir todas as estratégias utilizadas pelos alunos, apresentar os métodos de resolução, discutindo as vantagens ou desvantagens que estes têm em relação às estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas apresentados. Pretende-se também, mostrar o método da balança de dois pratos na resolução de equações do primeiro grau enfatizando o principio aditivo e multiplicativo e, na resolução de sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas, o método da balança de dois pratos, o método da adição e o método da substituição.

O trabalho está dividido em quatro capítulos, dos quais: o capítulo um traz uma breve descrição da escola, da comunidade em que está inserida, da realidade dos alunos envolvidos, do professor e das circunstâncias que o fez escolher este assunto. No capítulo dois é abordado o referencial teórico no qual a pesquisa foi embasada, a descrição passo a passo do projeto e duas listas de situações-problemas abordando os conteúdos que fazem parte do projeto. No capítulo três são apresentados os resultados encontrados pelos alunos na resolução da primeira lista de situações-problemas antes da apresentação da metodologia usual de resolução de equações e sistemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas, a metodologia usual de resolução de situações-problemas envolvendo estes conteúdos e os resultados encontrados pelos alunos após apresentação da metodologia para a primeira e segunda lista de situações-problemas, dando ênfase para as dificuldades encontradas e os resultados verificados com a aplicação do projeto. No capítulo quatro encontra-se a conclusão geral e sugestões para continuidade desta pesquisa.

CAPÍTULO 1

BREVE DESCRIÇÃO DA ESCOLA, DOS ALUNOS, DO PROFESSOR E DO PROJETO.

1.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados a descrição da escola em que o projeto foi aplicado, os alunos envolvidos no projeto, o autor do projeto, bem como, os objetivos e as etapas do projeto.

1.2 Conhecendo melhor a escola

A escola municipal de ensino fundamental Idalina Canova de Barros, localizada na cidade de Lençóis Paulista, aproximadamente, 300 km da cidade de São Paulo, foi inaugurada em 30/04/1988. Em seus 24 anos de existência, passou por grandes transformações. Hoje, sua equipe se constitui de aproximadamente 70 funcionários, que fazem da mesma um ambiente propício para que seu objetivo maior se realize: a formação educacional de aproximadamente 900 alunos do ensino fundamental. Para isso conta com recursos indispensáveis como sala de informática, laboratório de ciências, sala de vídeo, sala de SAPE (Serviço de Apoio Pedagógico Especializado, da área da Educação Especial, desenvolvido junto a unidades escolares da rede municipal de ensino), entre outros. A escola conta com a feira de tecnologia que ocorre no mês de setembro, onde cada disciplina aborda um tema tecnológico voltado para sua área.

1.3 Conhecendo os alunos envolvidos

São quarenta e seis alunos envolvidos no projeto que fazem parte das turmas do 8º ano A e B da Escola municipal Idalina Canova de Barros, com idade entre 12 a 15 anos. Em sua maioria, são de famílias de baixa renda, com pais com pouca ou nenhuma escolaridade. Alguns destes alunos já trabalham para ajudar suas famílias no sustento.

Dos quarenta e seis alunos, vinte e cinco são meninas, vinte e um meninos e cinco apresentam necessidades especiais.

Destes, grande parte tem dificuldade de aprendizagem em matemática, cujo motivo, alegado por eles, é devido a verificar pouco ou nenhuma aplicabilidade dos conceitos matemáticos apresentados em seu cotidiano.

1.4 Conhecendo melhor o professor

O autor deste projeto leciona matemática a mais de dez anos para alunos do ensino fundamental II e médio.

A circunstância que o levou a realizar este projeto nesta classe de alunos foi devido aos baixos índices em avaliações de matemática que esta escola vinha recebendo. É uma forma diferenciada de ensinar matemática, tentando resgatar o conhecimento do cotidiano do aluno nesta disciplina.

Atualmente, leciona em escolas da rede municipal, estadual e particular na região de Lençóis Paulista.

1.5 Objetivos do projeto

O conhecimento algébrico envolve resolução de problemas, em que o uso somente de estratégias pertencentes ao campo da aritmética se mostra insuficiente. Os conceitos algébricos iniciais são os alicerces para a formação de conceitos algébricos posteriores, e quando estes não são bem trabalhados, é provável que o déficit no ensino da álgebra se prolongue constituindo um obstáculo à formação de outros conceitos no ensino da matemática (FIORENTINE, 2007).

Para que o ensino da álgebra atinja seus objetivos, assegurando ao aluno um acervo de habilidades e conhecimentos úteis e funcionais, no sentido de prepará-lo, capacitando-o a enfrentar os problemas do dia-a-dia, é preciso introduzir uma nova metodologia para o ensino, onde se pode trabalhar o concreto, o abstrato e as aplicações (KIERAN, 2004).

As dificuldades encontradas no processo de aprendizagem de álgebra, por parte dos alunos do 7º e 8º anos do Ensino Fundamental se dá pela negligência das reais aplicações dos conceitos algébricos na vida concreta. Um fator influente na apropriação do conceito algébrico está na sua relação com a aritmética. Algumas barreiras se configuram no desconhecimento, por parte dos alunos, da importância prática dos assuntos abordados na ciência matemática (KIERAN, 2007).

O objetivo deste projeto é propor situações-problemas envolvendo conceitos de equações e sistemas de equações do primeiro grau com duas variáveis a fim de introduzir ou relembrar estes conceitos por meio de aplicações práticas e lúdicas. Pretende-se aplicar os problemas sem a apresentação dos métodos de resolução destes conceitos e, então, verificar como os alunos se saem na tentativa de solucioná-los. Em seguida, após verificar e discutir todas as estratégias utilizadas por estes, apresentar os métodos definidos para este fim, enfatizando as vantagens ou desvantagens que estes têm em relação às estratégias usadas pelos alunos. Pretende-se também, mostrar o método da balança de dois pratos na resolução de equações do primeiro grau, enfatizando o princípio aditivo e multiplicativo e, na resolução de sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas, o método da balança de dois pratos, o método da adição e o método da substituição.

CAPÍTULO 2

METODOLOGIA DE PESQUISA

2.1 Referencial teórico

No início do século XX, o ensino da matemática baseava-se em técnicas de memorização, dando ênfase nas regras de algoritmos e na resolução de grandes listas de exercícios. O professor tinha o papel de apresentar o conteúdo e o aluno, o papel de prestar atenção e memorizar, escrever e repetir tal conteúdo por meio de grandes listas de exercícios no qual, usavam-se os algoritmos matemáticos apresentados no conteúdo. Nessa época, o currículo de matemática ainda não estava bem definido, embora houvesse um caminho de trabalho: aritmética, álgebra e geometria. (ONUCHIC, 1999)

Com o passar dos anos, surge uma nova orientação que substitui a matemática por meio de repetição sendo que os alunos deveriam aprender matemática com compreensão. Essa forma de ensino de matemática baseava-se no treino de técnicas e habilidades para a resolução de problemas formais ou para aprender um novo conteúdo. Segundo (ONUCHIC; ALLEVATO, 2005), essas duas formas de ensino não lograram sucesso quanto à aprendizagem dos alunos. Na verdade, alguns alunos aprendiam, porém, a maioria não.

No final da década de 1950 e início de 1960, o ensino de Matemática em muitos países absorveu o MMM (Movimento da Matemática Moderna), que pretendia aproximar a Matemática trabalhada na escola básica com a Matemática produzida pelos pesquisadores da área. Os defensores MMM acreditavam que poderiam preparar pessoas que pudessem acompanhar e lidar com a tecnologia que estavam emergindo. Dessa forma, as propostas veiculadas pelo MMM inseriram no currículo conteúdos matemáticos que até aquela época não faziam parte do programa escolar como, por exemplo, estruturas algébricas, teoria dos conjuntos, topologia, transformações geométricas. Esse movimento apresentava uma matemática com abstrações excessivas, utilização exagerada de símbolos e complexidade na abordagem dos conceitos matemáticos. Porém, esse excesso de formalização também se distanciava de questões de relevância social e cultural. (VALENTE, 2006)

O excesso de formalizações e o afastamento de questões práticas fez esse movimento fracassar. O Movimento da Matemática Moderna refluiu “a partir da constatação da inadequação de alguns de seus princípios básicos, e das distorções e dos exageros ocorridos.” [...] “O movimento buscava ensinar Matemática de modo a preparar os alunos para um mundo de trabalho que exige conhecimento matemático.” (BRASIL, 1998).

A partir da década de 1970, a resolução de problemas passou a receber dos educadores matemáticos sua devida importância. Pozo e Echeverría(1998), observam que os professores receberam vários recursos a fim de colaborar com o seu trabalho didático através de listas de problemas, diferente tipos de estratégias e orientações para avaliação da capacidade dos alunos em resolver esses problemas, e dessa forma, passaram a fazer da resolução de problemas o foco de seu trabalho. Porém, o resultado esperado não foi satisfatório devido às discordâncias entre as concepções existentes sobre a resolução de problemas. Conforme Onuchic (1999) [...] este fato ocorreu devido às grandes diferenças entre as concepções que pessoas e grupos tinham sobre o significado da “resolução de problemas como foco da matemática escolar”. [...] os estudos da década de 80 deram muita atenção ao processo de resolução de problemas, não se limitando simplesmente à busca da solução do problema. Mesmo assim, o processo continuou atrelado à busca da solução do problema.

A resolução de problemas foi o foco da matemática escolar na década de 1980. Neste sentido, o ensino de matemática por meio da resolução de problemas é uma concepção relevante dentre os vários tipos de concepções já existentes, pois o aluno tanto aprende matemática resolvendo problemas, como aprende matemática para resolvê-los. Essa orientação para o ensino de matemática considera que o ensino-aprendizagem de um conteúdo matemático ocorra a partir de um problema gerador, podendo este ser advindo de uma situação contextualizada ou ser um problema puramente matemático. Além disso, utiliza o que foi considerado satisfatório nas orientações curriculares anteriores. “[...] busca-se usar tudo o que havia de bom nas reformas anteriores: repetição, compreensão, a linguagem matemática da teoria dos conjuntos, técnicas de resolução de problemas e, às vezes, até a forma de ensino tradicional.” (ONUCHIC, 1999, p. 211).

Para muitos educadores matemáticos, a resolução de problemas consiste em permitir que os alunos utilizem seus conhecimentos e desenvolvam a capacidade de administrar as informações ao seu redor. Dessa forma, os alunos adquirem a oportunidade de ampliar seu conhecimento, desenvolver seu raciocínio lógico, enfrentar novas situações e conhecer as aplicações da matemática. O mesmo sucede para o professor, pois trabalhar com a resolução de problemas permite atingir os objetivos de aprendizagem definidos, além de tornar a aula mais interessante e motivadora (POLYA, 1986).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais: a prática mais frequente na resolução de problemas consiste em ensinar um conceito, um procedimento ou técnica e depois apresentar um problema para avaliar se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado. Para a maioria dos alunos, resolver um problema significa fazer cálculos com números do enunciado ou aplicar algo que aprendam nas aulas. Desse modo o que o professor explora na atividade matemática não é mais a atividade, ela mesma, mas seus resultados, técnicas e demonstrações. (BRASIL, 1998).

Na realidade, o foco central do ensino da matemática não deveria estar em se encontrar a solução dos problemas propostos. O papel da resolução de problemas no currículo de matemática seria um caminho de aquisição para novos conhecimentos, ou seja, compreender deveria ser o principal objetivo do ensino, para adquirir um novo conhecimento ou um processo no qual pode ser aplicado tudo aquilo que previamente havia sido construído. (ONUCHIC, 1999).

Segundo Polya(1977), o estudo dos métodos de resolução de problemas fornece um novo aspecto para matemática: além do já conhecido aspecto dedutivo, a matemática indutiva e experimental. Ambos os aspectos são tão antigos quanto a própria ciência.

Para Polya(1985), a resolução de um problema é na verdade um desafio e um pouco de descobrimento, uma vez que não existe um método rígido do qual o aluno possa sempre seguir para encontrar a solução de uma situação-problema. O que o autor afirma é que existem passos de pensamento, mais especificamente os de resolução que podem ajudar o aluno neste processo, que são os seguintes: compreender o problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e o retrospecto.

Com base nas ideias de Polya(1986), pode-se fazer uma reescrita dos quatro passos de resolução para assim melhor entender o tema situação-problema:

a) Compreensão da situação-problema: esta é a primeira etapa de resolução em que se deve interpretar o que sugere a situação-problema, retira-se o(s) dado(s) relevante(s) nela contida, verifica-se o que está sendo perguntado e o que precisa ser resolvido em termos de conhecimentos matemáticos;
b) Estabelecimento do plano de resolução: esta segunda etapa exige que o aluno faça mentalmente ou por escrito a conexão teoria-prática-problema: a teoria são os conhecimentos matemáticos apreendidos anteriormente e ensinados pelo professor, a prática são os conhecimentos obtidos de suas vivências diárias e o problema são os dados obtidos da situação-problema proposta. Nesta etapa o aluno pode fazer vários planos ou estratégias e trocar ideias com os demais componentes;
c) Execução do plano: nesta terceira etapa o aluno deve executar o plano elaborado na etapa anterior, com o propósito de tentar obter a solução da situação-problema. Aqui se torna importante o uso de material concreto e sem dúvida da capacidade de calcular mentalmente;
d) Retrospecto: nesta quarta e última etapa, o aluno deve verificar se a solução que encontrou é realmente a que foi solicitada pelo enunciado e pela pergunta da situação-problema. Aqui o professor deve ser um agente participante, no sentido de fazer coerentemente as devidas interferências ao examinar a solução que cada aluno encontrou, se esta é correta ou não: se correta devem ser feitos questionamentos, do tipo se existem outras maneiras de se chegar a mesma solução e, se erradas, verificar onde está o erro e ajudá-lo nesse processo construtivo na busca da solução correta.

Segundo Dante (1991), existe professores que chegam a considerar a resolução de problemas como a principal razão de se aprender e ensinar matemática, porque é através dela que o aluno se inicia no modo de pensar matemático e realiza algumas aplicações da Matemática no nível elementar. Porém, segundo o autor, a maior parte dos docentes não utiliza esta estratégia, predominando o emprego de listas com problemas básicos, cuja resolução depende basicamente de uma técnica operatória, do uso de uma fórmula conhecida ou ainda, de processos de memorização. Não é exigida a criação de estratégias para resolver problemas.

Rabelo (1995) salienta que:

> “Se um dos principais objetivos de se trabalhar a língua escrita é a formação de um bom leitor e escritor, um dos principais objetivos de se ensinar matemática é a formação de um bom formulador e resolvedor de problemas. E, se para alguém se tornar um bom leitor e escritor, é indispensável inseri-lo num bom e variado referencial de textos, para que ele se torne um bom formulador e resolvedor de problemas é preciso, igualmente, inseri-lo num bom e variado referencial de textos matemáticos, através dos quais ele poderá ler, interpretar, analisar e produzir textos que constituam desafios matemáticos”.

A organização do trabalho pedagógico com a matemática deve ser realizada de modo a incentivar os alunos a pensar, encaminhar a solução do problema, tentar superar as dificuldades de aprendizagem, enfrentar desafios que exijam grande esforço, dedicação e descobrir por si só a melhor estratégia que deve ser utilizada para o problema ser resolvido.

A resolução de problemas é vista como uma situação onde o problema é desencadeador do processo de aprendizagem, uma vez que o aluno está inserido num movimento de pensamento e elaboração de conhecimentos, visando resolver o problema enfrentado, por meio da utilização de conceitos matemáticos.

No processo dinâmico e evolutivo da aprendizagem da matemática, nomeadamente num ambiente de resolução de problemas, é importante incentivar os alunos a representar as suas ideias matemáticas de forma que façam sentido para eles, mesmo que essas representações não sejam convencionais. No entanto, é igualmente importante que os alunos aprendam formas estabelecidas de representação que facilitem a atividade matemática e que promovam a comunicação das ideias matemáticas. A resolução de problemas pode ser um bom veículo para estimular o uso de uma grande diversidade de representações. Além disso, possibilita o estabelecimento de conexões entre diferentes tipos de representação e a passagem de umas para outras, ampliando o conhecimento matemático dos alunos (DUFOUR-JANVIER, BEDNARZ & BÉLANGER, 1987).

A partir da observação de casos particulares, as regularidades são desvendadas, as conjecturas e teorias matemáticas são formuladas. O exercício da indução e da dedução em matemática reveste-se de importância no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, de formular e testar hipóteses, de induzir e de inferir dentro de determinada lógica, o que assegura um papel de relevo ao aprendizado dessa ciência em todos os níveis de ensino. (BRASIL, 1998).

A resolução de problemas é uma atividade importante em Álgebra. Kieran(2004) considera três tipos de atividade algébrica: atividades de geração, transformação e meta-globais. As primeiras correspondem à construção e interpretação de objetos algébricos. As atividades de transformação incluem a simplificação de expressões algébricas, a resolução de equações e inequações e o cálculo de expressões. Por fim, as atividades meta-globais abarcam a resolução de problemas, a modelação matemática, a generalização de padrões e a análise da variação em situações que envolvem funções.

Segundo Kieran(1996), tratar a álgebra como procedimento para resolver equações, significa, entre outras coisas, pensar nos símbolos operatórios de outra maneira, além daquela utilizada na aritmética. Os símbolos operatórios de uma equação não indicam necessariamente as operações a serem efetuadas.

Esse aspecto da álgebra como procedimento para resolver equações, pode gerar, segundo Kieran(1996), duas abordagens diferentes. Uma abordagem aritmética, focalizada nas operações dadas, que tem como base de procedimentos a resolução por tentativa e erro; e a abordagem algébrica centrada nas operações inversas, que se caracteriza pelo procedimento de resolução das equações por transposição de termos para o outro membro.

Kieran(2007) afirma que, na resolução de problemas algébricos, os alunos preferem frequentemente recorrer a métodos aritméticos, mostrando dificuldade em utilizar equações. Embora à primeira vista o pensamento aritmético possa parecer um obstáculo para o desenvolvimento do pensamento algébrico, a verdade é que ele também pode ser visto como uma via para esse desenvolvimento. Entre os processos aritméticos mais utilizados neste tipo de problemas, destacam-se as estratégias de tentativa e erro e de unwind (desfazer). Outra estratégia consiste em atribuir um valor a uma quantidade desconhecida e verificar a sua exatidão, usando um raciocínio funcional, isto é, reconhecendo a relação existente entre as variáveis, mesmo que essa relação não seja expressa através de linguagem algébrica formal (JOHANNING, 2004).

Vários estudos mostram que os alunos têm dificuldades na compreensão e utilização de letras (MCGREGOR e STACEY, 1997) e, por vezes, nem tentam compreender o seu significado, preferindo lembrar simplesmente os procedimentos. Algumas investigações acerca da forma como os alunos abordam a resolução de problemas que envolvem duas equações do 1.º grau a duas incógnitas mostram outros aspectos acerca da concepção do sinal de igual que pode causar dificuldades (FILLOY, ROJANO e SOLARES, 2004). Estes autores mostram que certos alunos resolvem equações com uma incógnita, mas não resolvem problemas com duas incógnitas, manifestando dificuldades na aplicação da "transitividade do sinal de igual", quando se depararam com duas equações $4x - 3 = y$ e $6x + 7 = y$. Não conseguem reconhecer a transitividade para obter, por exemplo, $4x - 3 = 6x + 7$. Uma possível interpretação alternativa tem a ver com a incapacidade dos alunos para substituir o y na primeira equação pela expressão igual da segunda equação. Isto pode ser interpretado como os alunos considerarem os y 's como sendo diferentes.

Windsor(2010) destaca a resolução de problemas como uma oportunidade para enriquecer e transformar o pensamento dos alunos, sublinhando que o professor pode incentivá-los a pensar algebricamente ao invés de influenciá-los simplesmente a recorrer a uma determinada estratégia ou procedimento. Salienta ainda que é através da discussão durante o processo de resolução que pode ser desenvolvida uma perspectiva algébrica da matemática, acrescentando que é fundamental que os alunos reflitam acerca das suas estratégias e partilhem as suas experiências por lhes permitirem desenvolver diferentes formas de entender e abordar os problemas.

As equações e sistemas de equações do primeiro grau com duas variáveis foram escolhidas como objeto de pesquisa por serem consideradas um conceito central da Álgebra, representando para os alunos o início de uma nova etapa no seu estudo da matemática. Segundo Ponte(2005), as equações e sistemas de equações ao lado das expressões numéricas, envolvendo números e operações, remetem o trabalho com a matemática para outro nível de abstração, pois envolve novos símbolos e novas regras de manipulação, anteriormente não utilizada de forma explicita pelos alunos. Para o autor, o início desta etapa revela-se particularmente problemático para muitos alunos.

No trabalho pedagógico com equações, devem-se propor problemas com contextos diversificados (matemático e extramatemático) para que os alunos tenham oportunidade de “construir a sintaxe das representações algébricas, traduzir as situações por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis), e construir as regras para resolução de equações” (BRASIL, 1998).

2.2. Descrição do projeto

O projeto visa melhorar e facilitar a aprendizagem dos conceitos de equações e sistemas de equações do primeiro grau com duas variáveis através da resolução de situações-problema envolvendo estes conceitos.

Na realização do projeto, será apresentada a primeira lista com cinco situações-problemas envolvendo equações e sistemas de equações do primeiro grau com duas variáveis e pedido aos alunos que as interpretem e tentem chegar à solução destas situações. Em seguida, serão apresentadas as metodologias para resolução destes conteúdos matemáticos e pedido aos alunos que resolvam novamente as situações-problemas apresentadas na primeira lista usando estas metodologias e comparem os resultados com os resultados obtidos anteriormente.

Para verificar a eficácia da aprendizagem através da aplicação deste projeto, será proposta a segunda lista com cinco novas situações-problemas e observado a resolução por parte dos alunos.

Espera-se que após a aplicação do projeto os alunos consigam interpretar, equacionar e resolver as situações-problemas envolvendo equações e sistemas de equações com duas variáveis através dos procedimentos usados por eles ou pela metodologia apresentada.

2.3 Etapas do projeto

O projeto será dividido em cinco etapas. A primeira etapa consiste em entregar aos alunos a primeira lista de situações-problemas, apresentada a seguir, envolvendo equações do primeiro grau com uma variável e sistemas de equações do primeiro grau com duas variáveis e pedido a eles que as leiam e interpretem o enunciado de cada uma delas.

Primeira lista de situações-problemas envolvendo equações e sistemas de equações com duas variáveis.

a) Uma batedeira e um liquidificador custam juntos 151 reais. A batedeira custa 21 reais a mais do que o liquidificador. Qual é o preço da batedeira?(BIANCHINI, 1998).

b) A base de um retângulo tem 8 cm a mais que sua largura. Seu perímetro é igual ao perímetro de um quadrado de 20 cm de lado. Quanto mede a base desse retângulo? (SILVEIRA e MARQUES, 2002).

c) Carmem tinha o mesmo número de moedas de 5, 10, 25 e 50 centavos. Com elas, comprou um livro que custava R$15,30. Quantas moedas Carmem tinha ao todo? (BIANCHINI, 1998).

d) Para embalar 1650 livros, uma editora utilizou 27 caixas, umas com capacidade para 50 livros e outras, para 70 livros. Quantas caixas de cada tipo a editora utilizou? (ANDRINI e VASCONCELLOS, 2011)

e) Duas pessoas têm, juntas, 70 anos. Subtraindo 10 anos da idade da mais velha e acrescentando os mesmos 10 anos a idade da mais jovem, as idades ficam iguais. Qual a idade de cada pessoa?(ANDRINI e VASCONCELLOS, 2011)

Na segunda etapa os alunos resolveram as situações-problemas sem a apresentação dos algoritmos para resolução de equações e sistemas de equações do primeiro grau com duas variáveis. Na terceira etapa são apresentados os algoritmos de resolução de equações e de sistemas de equações do primeiro grau com duas variáveis. Na quarta etapa são feitas as resoluções das situações-problemas apresentada na primeira lista usando os métodos apresentados na terceira etapa e, em seguida, os alunos compararam os resultados com os resultados obtidos na segunda etapa. E na quinta etapa são sugeridas mais cinco situações-problemas, apresentados na segunda lista de situações-problemas envolvendo equações e sistemas de equações do primeiro grau com duas variáveis, para que os alunos as resolvam da forma que fizeram na segunda etapa (se chegaram à solução exata) ou utilizando os algoritmos para resolução destes conceitos, verificando com isso, a eficácia da aplicação deste projeto na aprendizagem por parte dos alunos.

Segunda lista de situações-problemas envolvendo equações e sistemas de equações com duas variáveis.

a) A população de uma cidade A é o triplo da população da cidade B. Se as duas cidades juntas têm uma população de 100.000 habitantes, quantos habitantes tem a cidade B?(BIANCHINI, 1998).

b) Uma casa com 260m^2 de área construída possui 3 quartos de mesmo tamanho. Qual é a área de cada quarto, se as outras dependências da casa ocupam 140m^2? (BIANCHINI, 1998).

c) Meu irmão é cinco anos mais velho do que eu. O triplo da minha idade, somando ao dobro da idade dele, dá 100 anos. Qual a minha idade?(VIDIGAL et al. 2002)

d) Um aluno ganha 5 pontos por exercícios que acerta e perde 3 por exercícios que erra. Ao fim de 50 exercícios, tinha 130 pontos. Quanto exercício acertou? (VIDIGAL et al. 2002).

e) Laura foi à cantina e pagou R$1,10 por 3 pastéis e um copo de leite. Marisa pagou R$1,00 por 2 pastéis e dois copos de leite. Qual é o preço do pastel? E o do copo de leite?(GEOVANE e CASTRUCCI, 2009)

São previstos para aplicação do projeto seis aulas de 50 minutos cada. Em que: a primeira e a segunda etapa serão concluídas nas duas aulas iniciais, a terceira e a quarta etapa, na terceira e quarta aula, e a quinta etapa nas duas últimas aulas.

CAPÍTULO 3

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo são apresentados os resultados de cada etapa de aplicação do projeto e, além disso, as considerações referentes ao ocorrido nestas aplicações.

3.1 Resultados da primeira etapa do projeto

Após a leitura e interpretação dos cinco problemas apresentados na primeira lista, grande parte dos alunos disseram que resolveriam aqueles problemas usando as quatro operações fundamentais através do conceito de operações inversas. Quando perguntado para eles se já haviam aprendido equações e sistemas de equações do primeiro grau, muitos deles relataram que já haviam aprendido equações do primeiro grau, mas que não se lembravam de mais como resolver problemas envolvendo este conteúdo. Pouco deles lembrava-se de sistemas de equações do primeiro grau e o restante disseram nunca terem estudados este conteúdo.

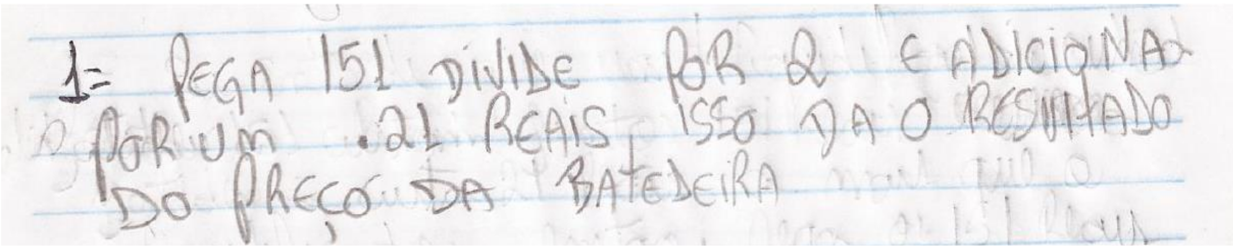
3.2 Resultados da segunda etapa do projeto

Após a apresentação da primeira lista de situações-problemas, os alunos resolveram os problemas usando estratégias já conhecidas por eles usando as operações fundamentais e fazendo as operações inversas daquelas apresentadas na sequência escrita em cada problema. Alguns deles chegaram a solução correta usando estes procedimentos, porém, o restante, não chegaram a nenhuma solução, apenas tentaram interpretar o problema, mostrando com isso, grande defasagem em relação à resolução de problemas relacionados aos conteúdos abordados.

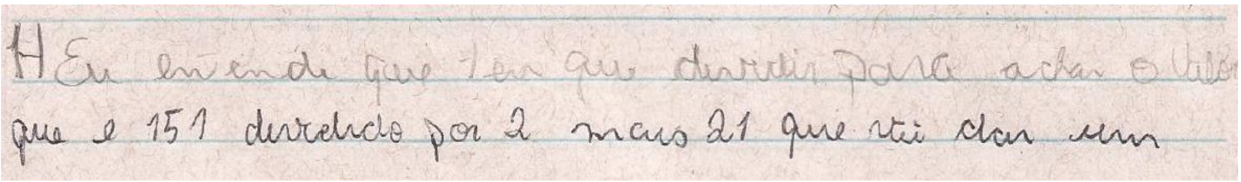
A seguir, são apresentadas as resoluções dos cinco problemas da primeira lista de três alunos desta turma:

a) Respostas do 1º problema da primeira lista de situações-problemas:

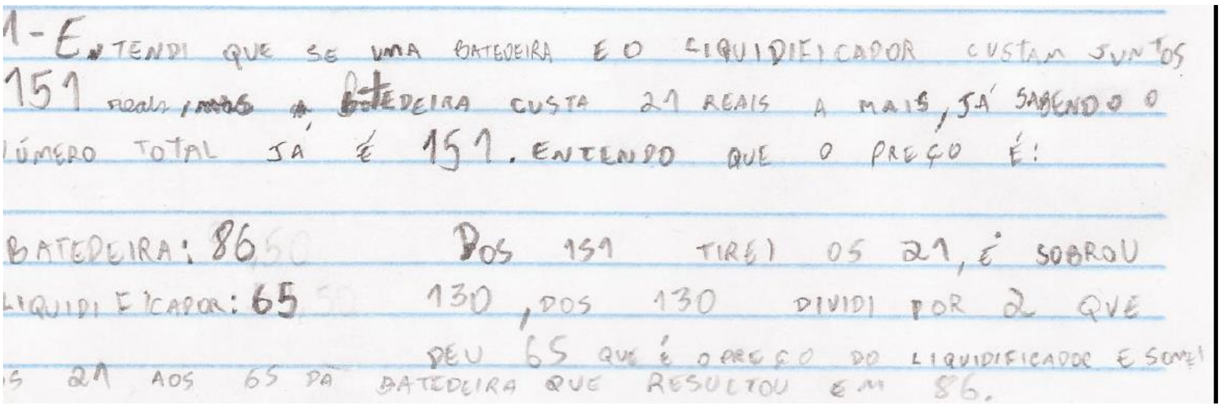
- Resposta do primeiro aluno;


1= PEGA 151 DIVIDE POR 2 E ADICIONA POR UM 21 REAIS ISSO DA O RESULTADO DO PREÇO DA BATEDEIRA

- Resposta do segundo aluno;


1) Eu entendi que tem que dividir para achar o valor que é 151 dividido por 2 mais 21 que vai dar um

- Resposta do terceiro aluno.


1-ENTENDI QUE SE UMA BATEDEIRA E O LIQUIDIFICADOR CUSTAM JUNTOS 151 reais, mas a batedeira custa 21 REAIS A MAIS, JÁ SABENDO O NÚMERO TOTAL JÁ É 151. ENTENDO QUE O PREÇO É:

BATEDEIRA: 86

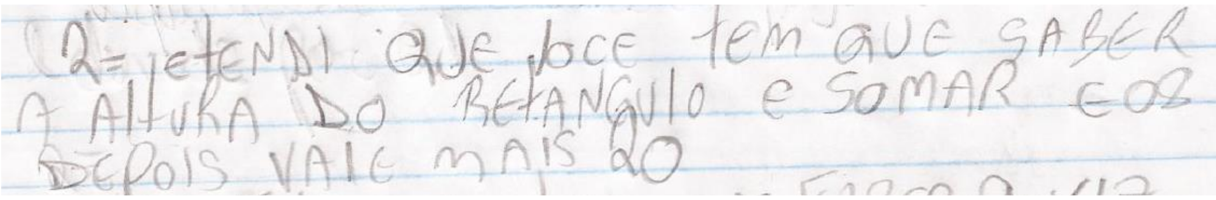
LIQUIDIFICADOR: 65

DOS 151 TIREI OS 21, E SOBROU 130, DOS 130 DIVIDI POR 2 QUE DEU 65 QUE É O PREÇO DO LIQUIDIFICADOR E SOMEI OS 21 AOS 65 DA BATEDEIRA QUE RESULTOU EM 86.

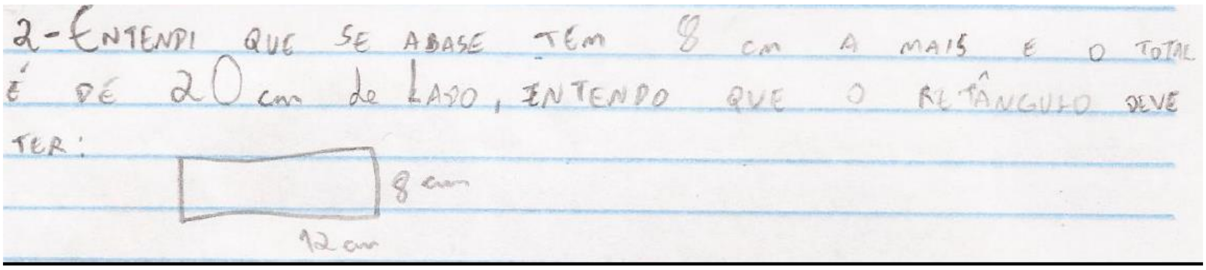
Observa-se que o primeiro e o segundo aluno apenas escreveram o que poderia ser feito para chegar à solução do problema, no entanto, se fosse realizado o que eles sugeriram, não chegaria à solução correta. Porém, verifica-se que a interpretação e a solução do problema sugerida pelo terceiro aluno esta correta.

b) Respostas do 2º problema da primeira lista de situações-problemas:

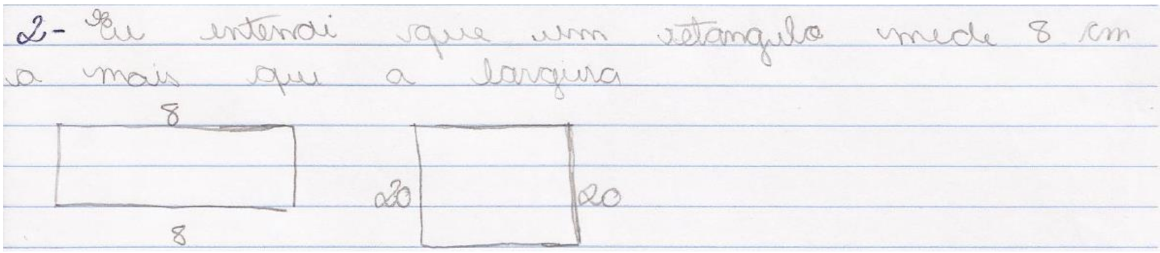
-Resposta do primeiro aluno;


2= etENDI QUE Voce tem QUE SABER A AltURA DO RETANGULO e SOMAR EOS DEPOIS VAIE MAIS 20

-Resposta do segundo aluno;


2-ENTENDI QUE SE ABASE TEm 8 cm A MAIS E O TOTAL É DE 20 cm de LADO, ENTENDO QUE O RETÂNGULO DEVE TER:

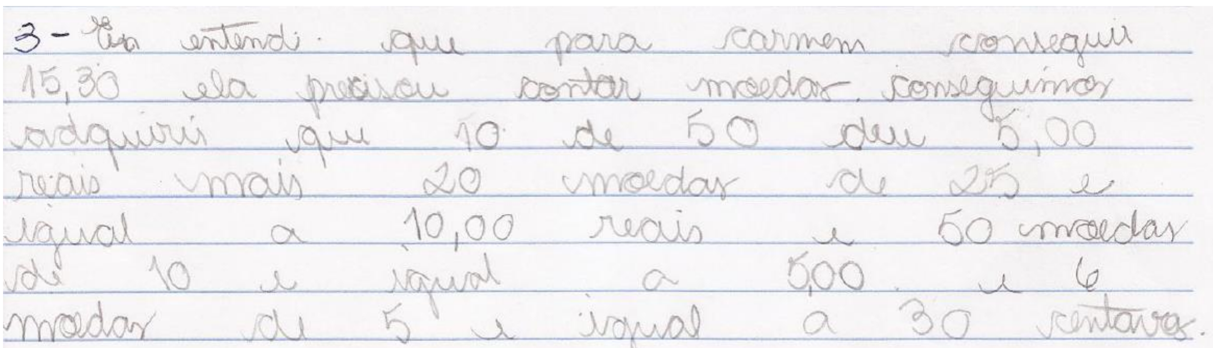
-Resposta do terceiro aluno.


2- Eu entendi que um retangulo mede 8 cm a mais que a largura

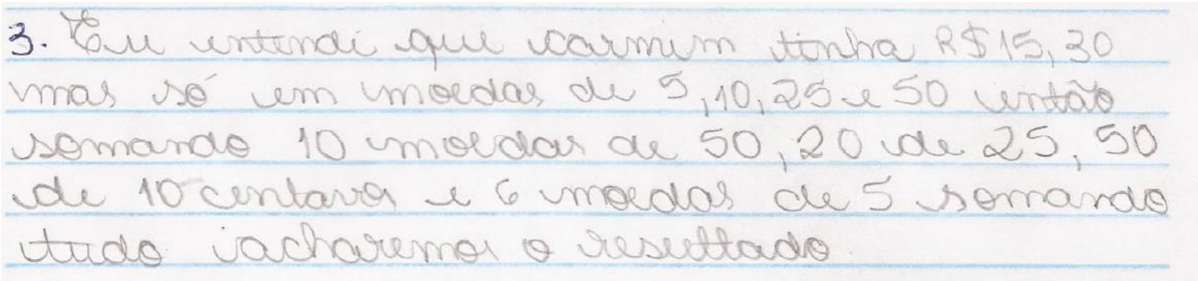
Observa-se que os três alunos não conseguiram chegar a solução do problema. Pode-se verificar que eles não conseguiram interpretar o problema e não tem ou não se lembraram das noções sobre perímetro de figuras planas.

c) Respostas do 3º problema da primeira lista de situações-problemas:

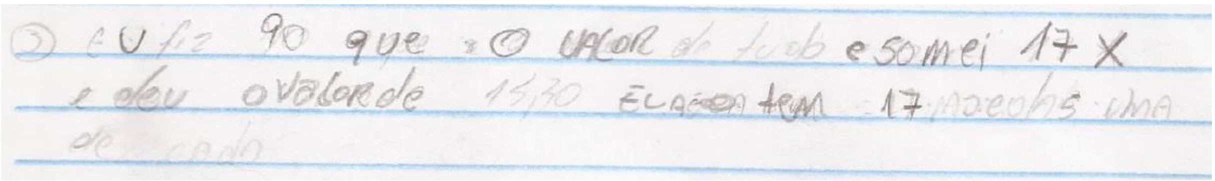
- Resposta do primeiro aluno;


3- Eu entendi que para carmem conseguir 15,30 ela precisou contar moedas. conseguimos adquirir que 10 de 50 deu 5,00 reais mais 20 moedas de 25 e igual a 10,00 reais e 50 moedas de 10 e igual a 5,00 e 6 moedas de 5 e igual a 30 centavos.

- Resposta do segundo aluno;


3. Eu entendi que carmim tinha R$15,30 mas só em moedas de 5, 10, 25 e 50 então somando 10 moedas de 50, 20 de 25, 50 de 10 centavos e 6 moedas de 5 somando tudo acharemos o resultado.

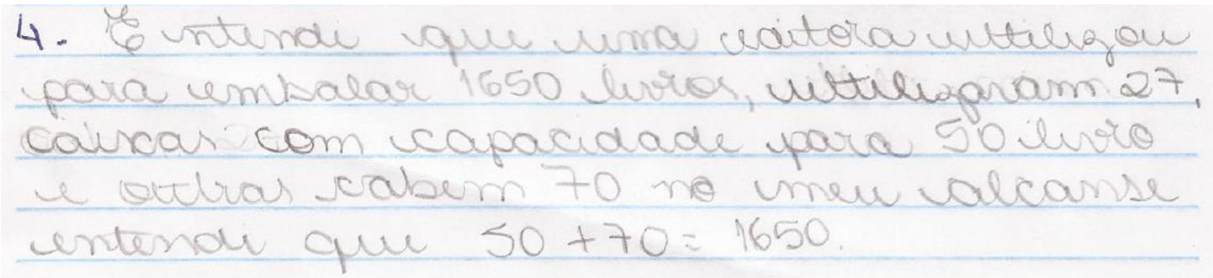
- Resposta do terceiro aluno.


③ Eu fiz [illegible] que o valor [illegible] e somei 17 X e deu o valor de 15,30 ela tem 17 moedas uma de cada

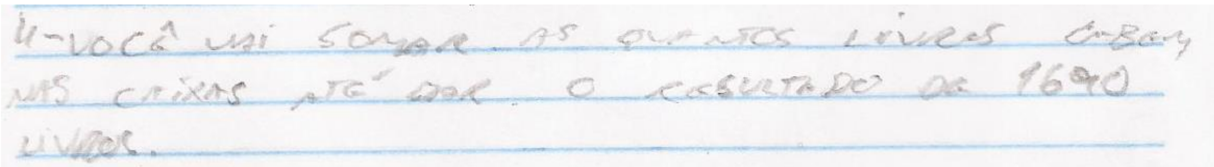
O primeiro e o segundo aluno não conseguiram interpretar o problema corretamente. O terceiro aluno chegou próximo à solução, porém, não soube expressar corretamente a forma que fez para solucioná-lo.

d) Respostas do 4º problema da primeira lista de situações-problemas:

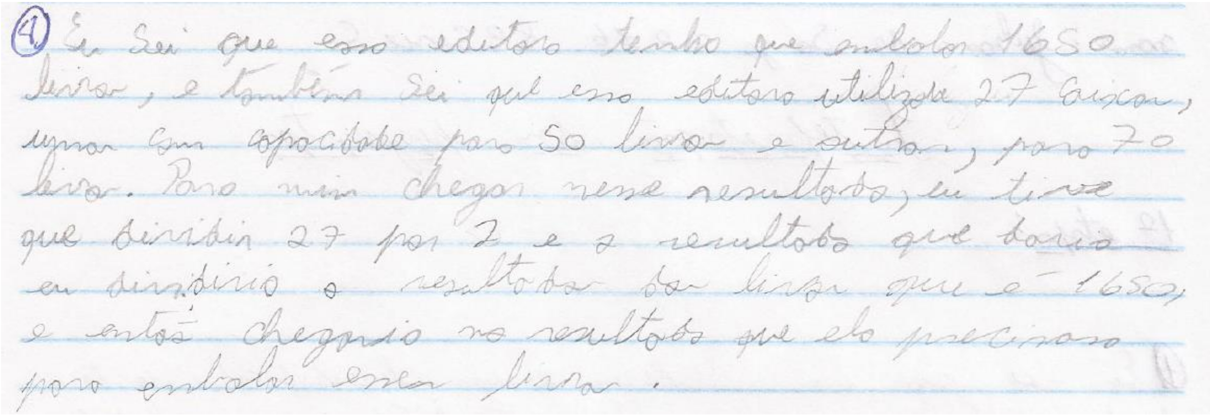
- Resposta do primeiro aluno;


4. Eu entendi que uma editora utilizou para embalar 1650 livros, utilizaram 27 caixas com capacidade para 50 livro e outras cabem 70 no meu alcance entendi que 50 + 70 = 1650.

- Resposta do segundo aluno;


4- Você vai somar as quantos livros embalou nas caixas até dar o resultado de 1690 livros.

- Resposta do terceiro aluno

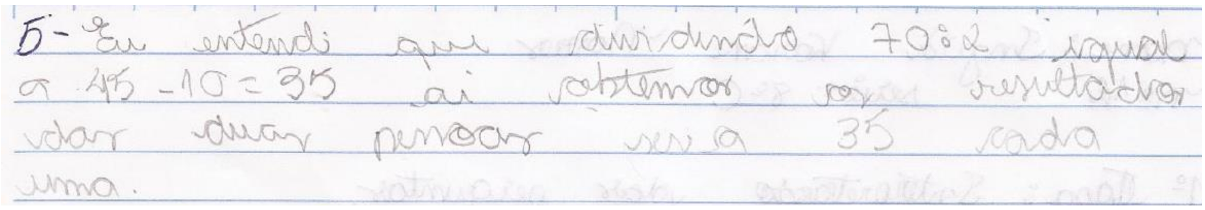


4) Eu sei que essa editora tenho que embalar 1650 livros, e também sei que essa editora utiliza 27 caixas, uma com capacidade para 50 livros e outras para 70 livros. Para mim chegar nesse resultado, eu tive que dividir 27 por 2 e o resultado que daria eu dividiria o resultado dos livros que é 1650, e então chegaria no resultado que ela precisaria para embalar esses livros.

Os três alunos erraram o problema, demonstrando com isso, nenhuma ou pouca habilidade com problemas relacionados ao conceito de sistemas de equações do primeiro grau.

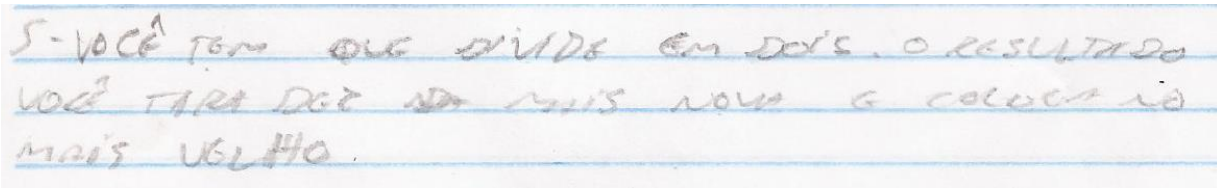
e) Respostas do 5º problema da primeira lista de situações-problemas:

- Resposta do primeiro aluno;



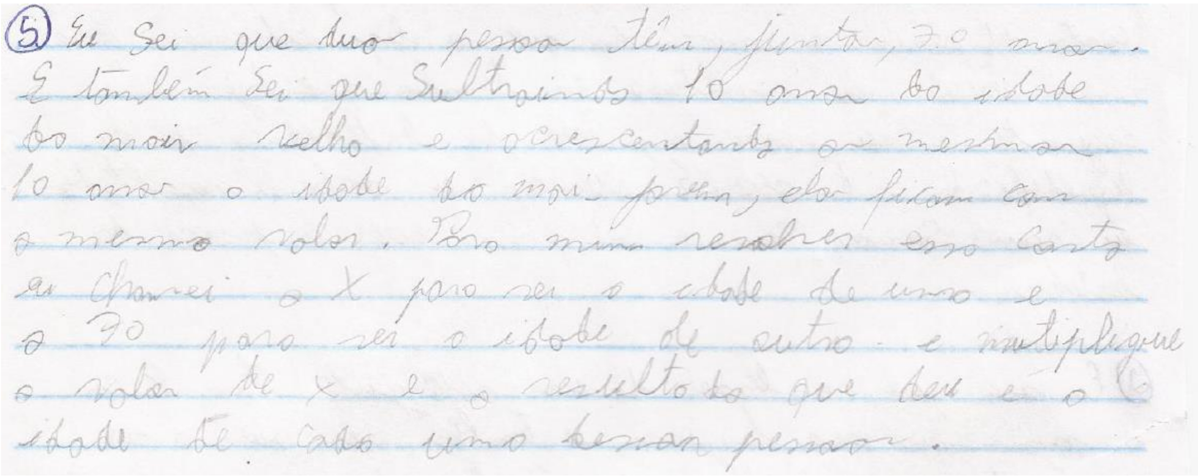
5- Eu entendi que dividindo 70:2 igual a 45 -10 = 35 aí obtemos os resultados das duas pessoas seria 35 cada uma.

- Resposta do segundo aluno;



5- VOCÊ TEM QUE DIVIDE EM DOIS. O RESULTADO VOCÊ TIRA DEZ DO MAIS NOVO E COLOCA NO MAIS VELHO.

- Resposta do terceiro aluno.


5 Eu sei que duas pessoa têm, juntas, 70 anos.
E também sei que subtraindo 10 anos da idade
do mais velho e acrescentando os mesmos
10 anos a idade do mais jovem, elas ficam com
o mesmo valor. Para mim resolver essa conta
eu chamei o X para ser a idade de uma e
o 70 para ser a idade de outro e multipliquei
o valor de x e o resultado que deu é a
idade de cada uma pessoa pessoa.

Da mesma forma que o problema anterior, os alunos não souberam resolver este, ficando nítida a grande defasagem que estes têm com relação a sistemas de equações do primeiro grau.

3.3 Resultados da terceira etapa do projeto

Nesta etapa, os alunos aprenderam ou revisaram os conceitos de equações e sistemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas.

Para solucionar equações do primeiro grau com uma incógnita, foram apresentados dois métodos: método algébrico e método das balanças de dois pratos. E para resolver sistemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas, foram apresentados três métodos: método da adição, método da substituição e método das balanças de dois pratos.

3.3.1 Métodos para resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita

3.3.1.1 Método algébrico.

Segundo Kieran(1994) tratar a álgebra como procedimento para resolver equações, significa, entre outras coisas, pensar nos símbolos operatórios de uma outra maneira, além daquela utilizada na aritmética. Os símbolos operatórios de uma equação não indicam necessariamente as operações a serem efetuadas. Por exemplo, na equação $2x + 3 = 10$, o símbolo de adição não significa que os termos numéricos dados no primeiro membro, 2 e 3, devam ser somados; este símbolo indica que, se somar o resultado da multiplicação do 2 por um determinado número (x), com o número 3, este valor tem que ser igual a 10, ou se pensarmos na operação inversa, o símbolo da adição significa subtrair 3 de 10.

Usiskin(1994) relaciona a álgebra a uma simplificação de procedimentos para que seja realizada a resolução, ou seja, para resolver determinadas equações, recorremos a determinados procedimentos para escrever outras equações equivalentes, porém simplificadas. As variáveis são incógnitas que devem ser descobertas. Por exemplo, para resolver $2x - 3 = 5$, devemos escrever uma equação equivalente a esta, somando (3) a ambos os membros, obtendo outra mais simples da forma $2x = 8$ e, então, obteríamos $x = 4$. A verificação do resultado é feita pela substituição do valor encontrado na incógnita da equação e, em seguida, resolvendo as operações pertinentes na equação.

Dois princípios fundamentais para a resolução de equações do primeiro grau são os seguintes:

a) Princípio aditivo: adicionando ou subtraindo o mesmo número a ambos os membros de uma equação, a igualdade mantém-se.

Exemplo:

$2x - 3 = 5$ (solução: 4)

$2x - 3 + 3 = 5 + 3$

$2x = 8$ (solução: 4)

b) Princípio multiplicativo: dividindo ou multiplicando por um mesmo número diferente de zero em ambos os membros de uma equação, a igualdade mantém-se.

Exemplo

$12x = 36$ (solução: 3)

$12x/2 = 36/2$

$6x = 18$ (solução: 3)

O princípio aditivo e multiplicativo determina equações equivalentes a inicial, encontrando com isso, a solução da equação. No primeiro exemplo, usando os dois princípios têm-se as equações equivalentes: $2x - 3 =5$; $2x = 8$; $x = 4$ (solução da equação) e no segundo exemplo, aplicando apenas o principio multiplicativo, tem-se as equações equivalentes: 12x = 36 e x = 3 (dividindo ambos os membros por 12).

Em equações que aparecem frações, determina-se uma fração equivalente para todas as frações encontradas na equação e, em seguida, determina-se sua solução usando os princípios aditivo e multiplicativo. No exemplo a seguir tem-se:

a) $\frac{x}{2} + 3 = \frac{x}{5} + 8$

Determinando o mínimo múltiplo comum de 2 e 5, obtém- se:

2 = 2, 4, 6, 8, **10**, 12,...
5 = 5, **10**, 15,...

Obtendo as frações equivalentes em cada termo, tem-se:

$$\frac{5x}{10} + \frac{30}{10} = \frac{2x}{10} + \frac{80}{10}$$

Multiplicando-se ambos os membros da igualdade por 10, obtém-se a equação a seguir.

5x + 30 = 2x + 80

Somando-se (-2x) em ambos os membros da igualdade, obtém-se o resultado a seguir.

5x -2x + 30 = 2x – 2x + 80
3x + 30 = 80

Somando-se (-30) em ambos os membros da igualdade, segue.

3x + 30 – 30 = 80 – 30

3x = 50

Para finalizar, dividem-se ambos os membros da igualdade por 3, obtendo a solução a seguir.

$$3x = 50$$

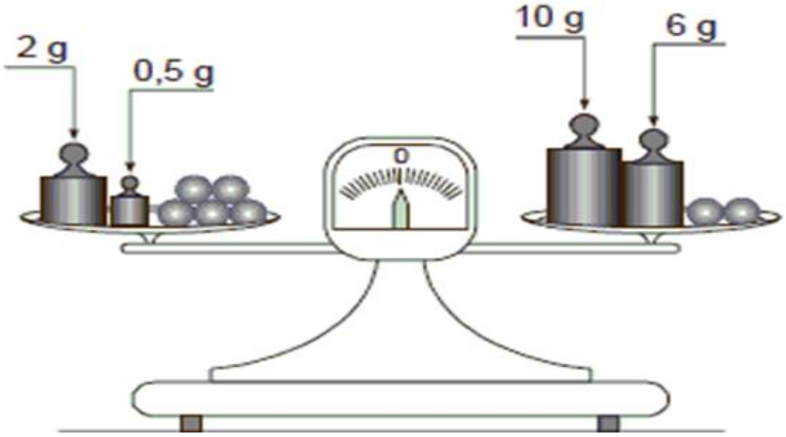
$$\frac{3x}{3} = \frac{50}{3}$$

$$x = \frac{50}{3}$$

3.3.1.2 Método das balanças.

Na resolução de equações do primeiro grau pelo método da balança de dois pratos em equilíbrio, cada prato representa um membro da equação. Retirando ou colocando (princípio aditivo) um peso[1] nos pratos da balança, estes se mantêm em equilíbrio. Dividindo ou multiplicando (princípio multiplicativo) as quantidades de pesos nos dois pratos, estes se mantêm em equilíbrio. Na figura 1, a seguir, tem-se representado a equação 3x + 3y = 8 através do equilíbrio dos pesos nos dois pratos da balança.

Figura 1 - Balança de dois pratos para resolução de equações do primeiro grau.



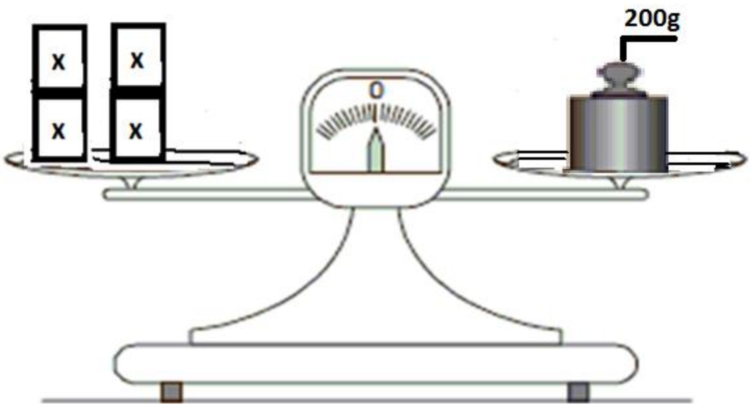
Fonte: Autoria própria.

[1] Nome popular dado aos massores usados na balança de dois pratos.

O método da balança para a resolução de equações do primeiro grau é um método lúdico e iterativo para este fim, pois, o aluno visualiza e brinca simultaneamente com as peças encontradas nos pratos, descobrindo com isso, o peso desconhecido do objeto que representa a incógnita da situação-problema na qual, a equação esta representando.

Observe a balança representada na figura 2, ela representa a equação $x + x + x + x = 100 + 100$ ou $4x = 200$.

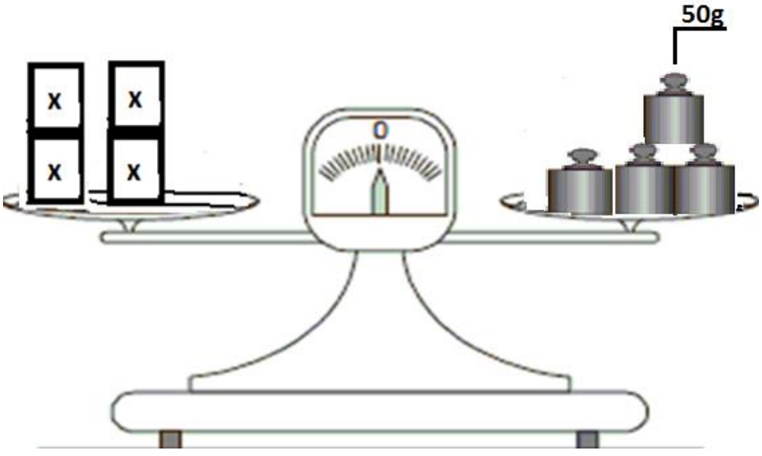
Figura 2 - Balança equilibrada representando a equação 4x = 200.



Fonte: Autoria própria.

Substituindo o peso 200g por quatro pesos de 50g na balança representada na figura 2, obtém-se a balança representada na figura 3.

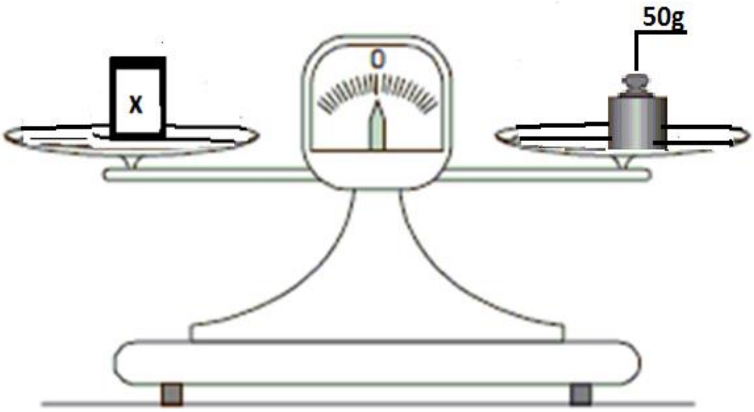
Figura 3 – Troca do peso 200g por quatro pesos de 50g.



Fonte: Autoria própria.

Retirando-se 3x em um prato da balança e três pesos de 50g no outro prato da balança, obtém-se a solução da equação 4x = 200.

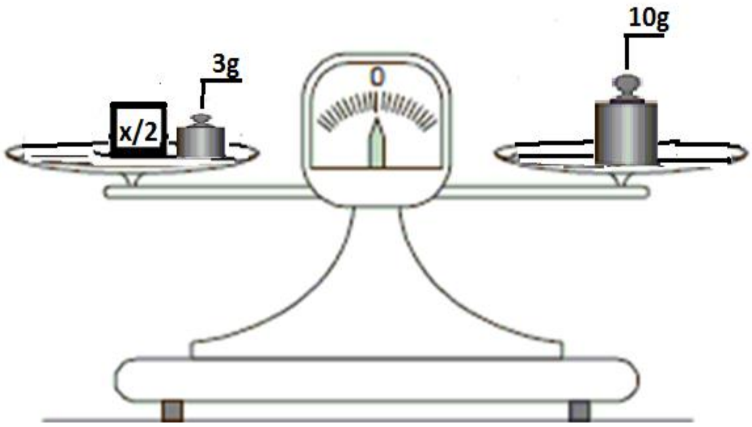
Figura 4 - Balança equilibrada representando a solução da equação 4x = 200.



Fonte: Autoria própria

Observe a balança representada na figura 5 que representa a equação $\frac{x}{2} + 3 = 10$.

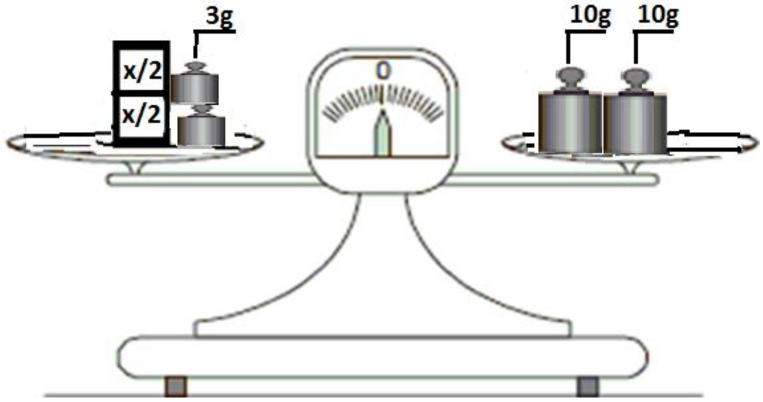
Figura 5 - balança equilibrada representando a equação $\frac{x}{2} + 3 = 10$



Fonte: Autoria própria

Dobrando todos os pesos da balança, obtém-se a balança de dois pratos em equilíbrio a seguir.

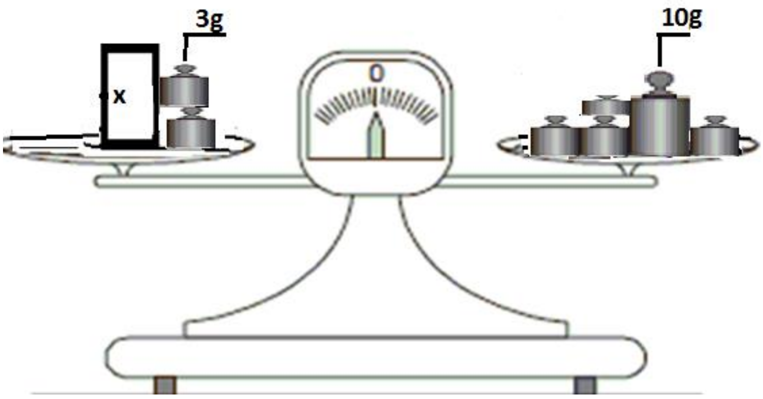
Figura 6 - Dobrando os pesos em ambos os pratos da balança da figura 5.



Fonte: Autoria própria.

Substituindo os pesos x/2 por um peso x e o peso 10g por três pesos de 3g e um de 1g, obtém-se a balança apresentada na figura 7.

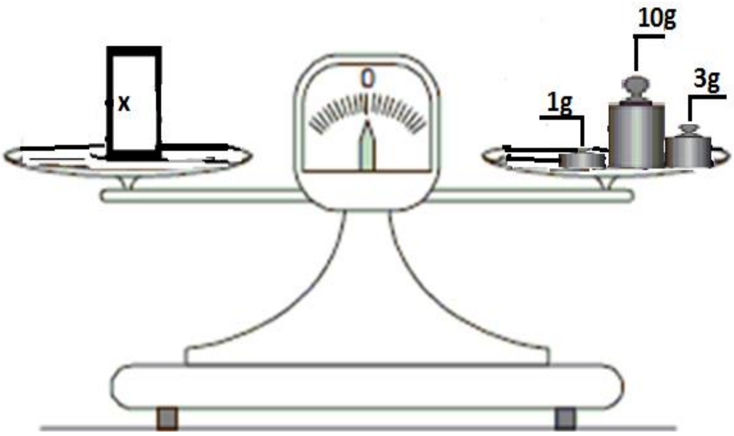
Figura 7: Substituição dos pesos $\frac{x}{2}$ por um peso x e o peso de 10g por três pesos de 3g e um de 1g.



Fonte: Autoria própria

Retirando-se dos pesos de 3g dos dois pratos da balança, obtém-se a solução da equação $\frac{x}{2}+3=10$ mostrada na figura 8.

Figura 8 - Solução da equação $\frac{x}{2} + 3 = 10$



Fonte: Autoria própria.

3.3.2 Métodos para resolução de sistemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas.

3.3.2.1 Método da adição.

A resolução de um sistema linear de duas incógnitas por este método consiste basicamente em somar as duas equações e, através desta operação, eliminar uma das incógnitas, determinando assim, uma equação do primeiro grau com uma incógnita.

Em muitos casos, é necessário usar o princípio multiplicativo em uma das equações para que, quando somada à outra, elimine uma das incógnitas.

Resolvendo o exemplo a seguir pelo método da adição, tem-se:

a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + y = 0 \end{cases}$

Somando-se as duas equações, as duas incógnitas se mantem, ou seja, não há cancelamento da incógnita. Para isso, uma opção para solucionar este problema é multiplicar a segunda equação do sistema por -1 e, em seguida somar as equações obtendo a solução desejada.

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -x - y = -2 + \end{cases}$$

$$y = 1 \rightarrow y = 1 \text{ e } x = 1$$

O exemplo a seguir exige o produto das duas equações para o cancelamento de uma das incógnitas na resolução pelo método da adição.

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x + 5y = 13 \end{cases}$

A adição das duas equações resulta em $5x + 8y = 21$ o que não resulta em nenhuma solução para x e y. Para eliminar uma das incógnitas na adição das equações, por exemplo, a incógnita x, multiplica-se a primeira equação pelo oposto do coeficiente de x na segunda equação, ou seja, -3 e, também, multiplica-se a segunda equação pelo coeficiente de x na primeira equação, ou seja, 2. Em seguida, somam-se as duas equações, cancelando assim a incógnita x.

$$\begin{cases} -6x - 9y = -24 \\ 6x + 10y = 26 \quad + \end{cases}$$

$$y = 2 \text{ e } x = 1$$

Para solucionar um exemplo em que os coeficientes são frações, procede-se da mesma forma com o método da adição.

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + y = 12 \\ x + 3\dfrac{y}{5} = 10 \end{cases}$

Para eliminar os denominadores nas duas equações, multiplica-se a primeira por 2 e a segunda por 5, encontrando o sistema equivalente a seguir.

$$\begin{cases} x + 2y = 24 \\ 5x + 3y = 50 \end{cases}$$

E para determinar a solução deste sistema usando o método da adição eliminando o valor de x, por exemplo, multiplica-se a primeira equação por -5 e somam-se as equações.

$$\begin{array}{l} \begin{cases} -5x - 10y = -120 \\ \ \ 5x + \ 3y \ = 50 \quad + \end{cases} \\ \hline \qquad -7y = -70 \rightarrow y = 10 \text{ e } x = 4. \end{array}$$

3.3.2.2 Método da substituição

A resolução de um sistema equações lineares de duas incógnitas por este método, consiste, basicamente, em "isolar" uma das incógnitas em uma das equações e, a seguir, substituir o valor encontrado para a incógnita "isolada" na outra equação do sistema, determinando com este processo, uma equação do primeiro grau com uma incógnita que pode ser resolvida usando um dos métodos já apresentados.

Resolvendo os sistemas lineares apresentado no método da adição usando o método da substituição, obtêm-se os mesmo resultados como segue:

a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$

Isolando, na segunda equação a incógnita x, obtém-se a igualdade x = y, que substituindo em x na primeira equação, resulta nas soluções de x e y a seguir:

$y + 2y = 3 \rightarrow y = 1$ e $x = 1$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x + 5y = 13 \end{cases}$

Observa-se que, isolando qualquer uma das incógnitas, recai em frações. Escolhendo, por exemplo, isolar x na primeira equação, segue a igualdade a seguir.

$$x = \frac{8-3y}{2}$$

Substituindo o resultado de x em função de y na segunda equação, obtém-se a equação do primeiro grau e a solução de x abaixo:

$$3\left(\frac{8-3y}{2}\right)+5y=13$$
$$\frac{24-9y}{2}+5y=13$$
$$24-9y+10y=26$$
$$y=2 \quad e \quad x=1$$

c) $\begin{cases} \frac{x}{2}+y=12 \\ x+3\frac{y}{5}=10 \end{cases}$

Isolando x na primeira equação, tem-se a igualdade a seguir:

$$\frac{x}{2}=12-y$$
$$x=24-2y$$

Substituindo o resultado de x em função de y na segunda equação, obtém-se a solução do sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas.

$$24-2y+\frac{3y}{5}=10$$
$$120-10y+3y=50$$
$$-7y=-70$$
$$y=10 \quad e \quad x=4$$

3.3.2.3 Método da balança

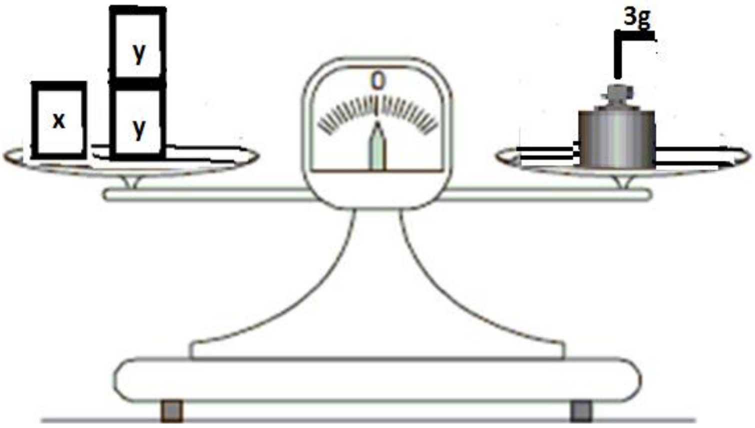
Para resolver um sistema linear de duas incógnitas pelo método da balança, representam-se as duas equações por meio de balanças de dois pratos em equilíbrio e, a seguir, usando o processo de retirar, colocar, dividir ou multiplicar pesos, determina-se o peso de uma das incógnitas em função da outra, substituindo o resultado na outra balança de dois pratos em equilíbrio, recaindo no método da balança de dois pratos para resolução de equação do primeiro grau, já estudado.

Resolvendo os sistemas lineares apresentado no método da adição usando o método da balança, obtêm-se os mesmo resultados como segue:

a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$

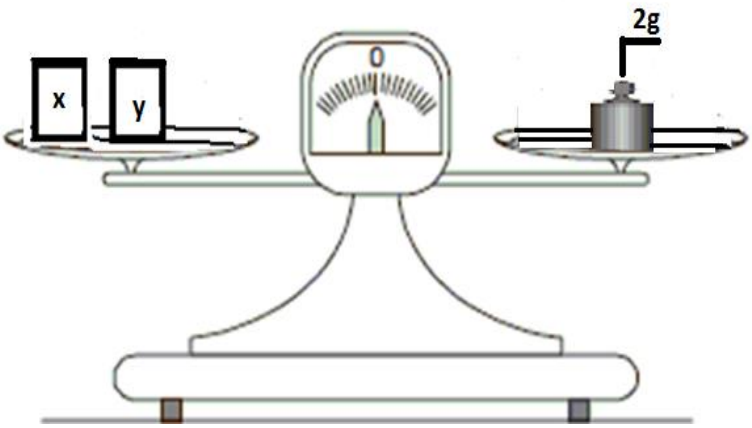
Representando as equações do sistema por meio de balança de dois pratos, têm-se as figuras 8 e 9 a seguir.

Figura 9 - Representação da equação x + 2y = 3 na balança equilibrada



Fonte: Autoria própria.

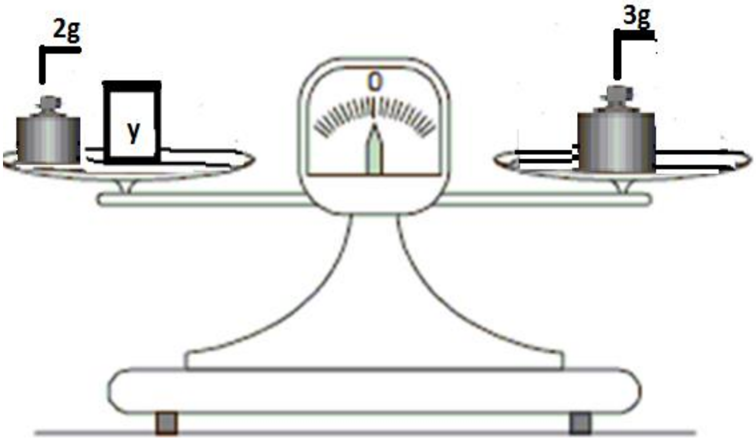
Figura 10 - Representação da equação x + y = 2 na balança equilibrada



Fonte: Autoria própria.

Substituindo o resultado apresentado pela balança da figura 10 no resultado apresentado na balança da figura 9, obtém-se o resultado apresentado na balança da figura 11.

Figura 11 - Resultado da substituição do resultado da balança da figura 10 no resultado da balança da figura 9.



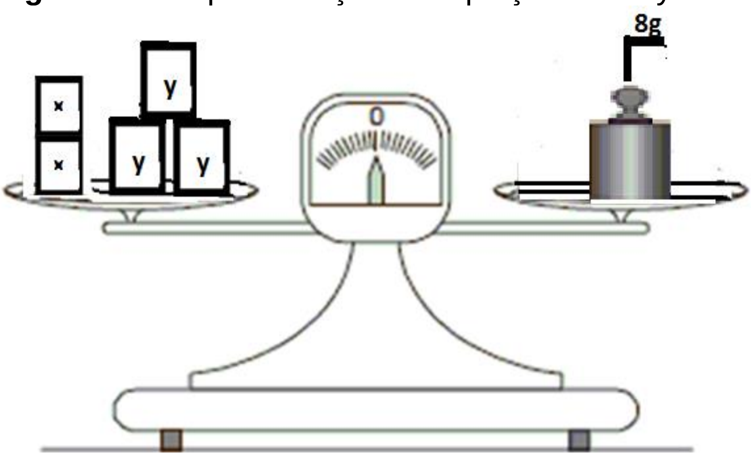
Fonte: Autoria própria.
.

O resultado da figura 11 sugere que y = 1 e, portanto, x = 1.

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x + 5y = 13 \end{cases}$

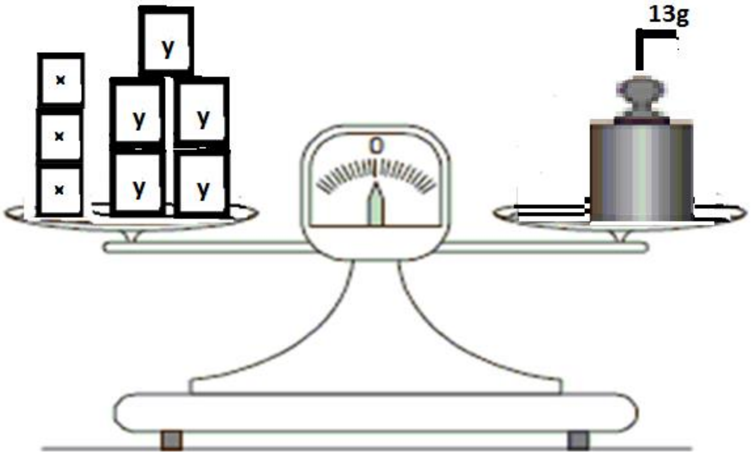
Representando as equações do sistema por meio de balança de dois pratos, têm-se as figuras 12 e 13 a seguir.

Figura 12 - Representação da equação 2x + 3y = 8 na balança equilibrada



Fonte: Autoria própria.

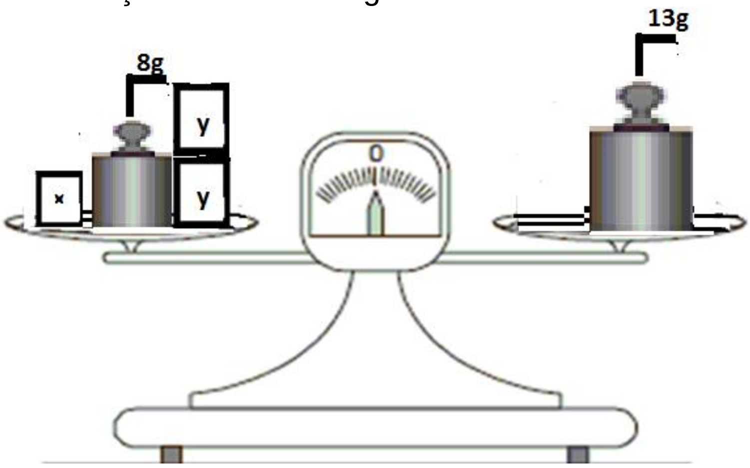
Figura 13 - Representação da equação 3x + 5y = 13 na balança equilibrada



Fonte: Autoria própria.

Substituindo o resultado da balança da figura 12 no resultado da balança da figura 13, obtém-se o resultado mostrado na figura 14.

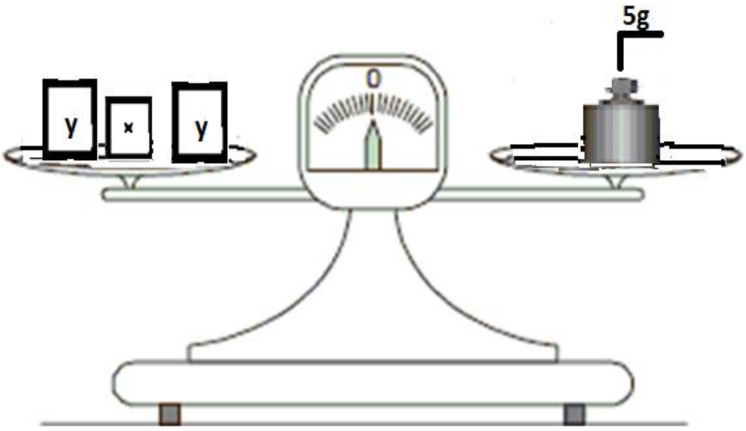
Figura 14 - Substituição do resultado da balança mostrada na figura 12 no resultado da balança mostrada na figura 13.



Fonte: Autoria própria.

Trocando o peso 13g na balança da figura 14 pelos pesos de 8g e 5g, segue que x + 2y = 5, conforme a figura 15 a seguir.

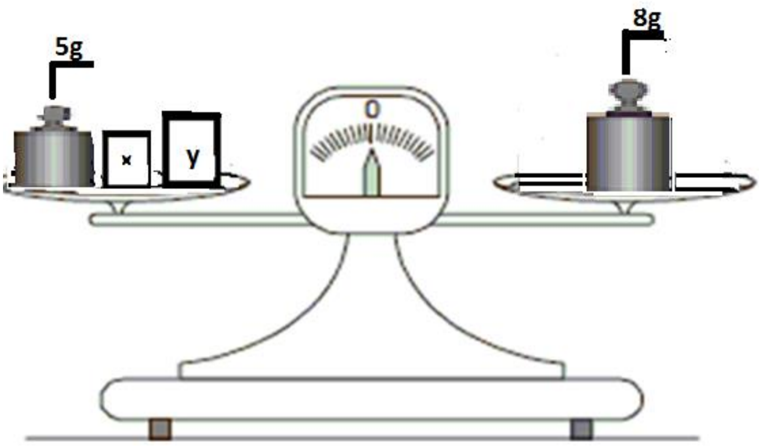
Figura 15 – Representação da equação x +2y = 5 na balança de dois pratos.



Fonte: Autoria própria.

Substituindo o resultado da balança da figura 15 no resultado da balança da figura 12, obtém-se o resultado mostrado na figura 16.

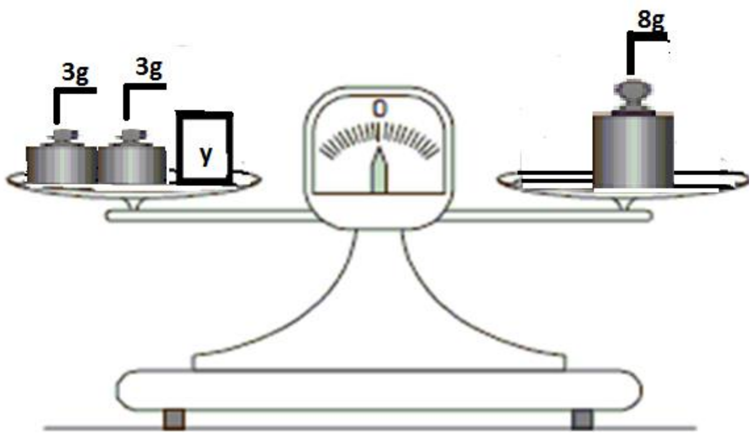
Figura 16 - Resultado da balança representada na figura 15 substituída no resultado da balança representada na figura 12.



Fonte: Autoria própria.

Observando a balança da figura 16, verifica-se que x + y = 3 e, substituindo este resultado balança da figura 12 novamente, obtém-se a balança representada na figura 17.

Figura 17: Resultado obtido da balança representada na figura 16, substituído no resultado da balança representada na figura 12.

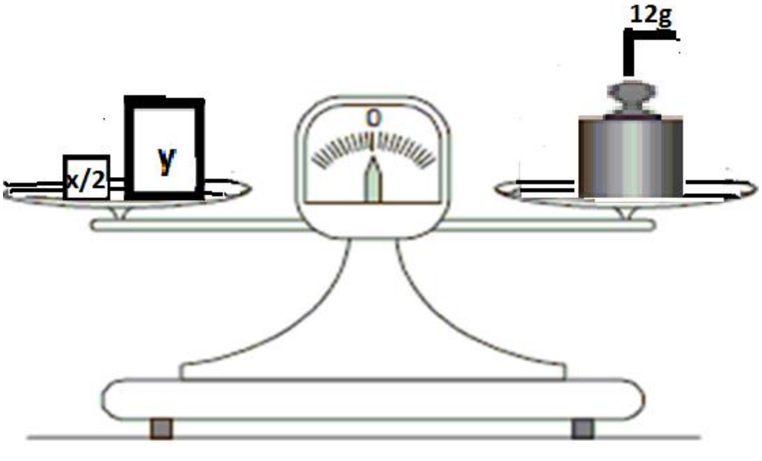


Portanto, as soluções do sistema são: y = 2 e x = 1.

c) $\begin{cases} \frac{x}{2} + y = 12 \\ x + 3\frac{y}{5} = 10 \end{cases}$

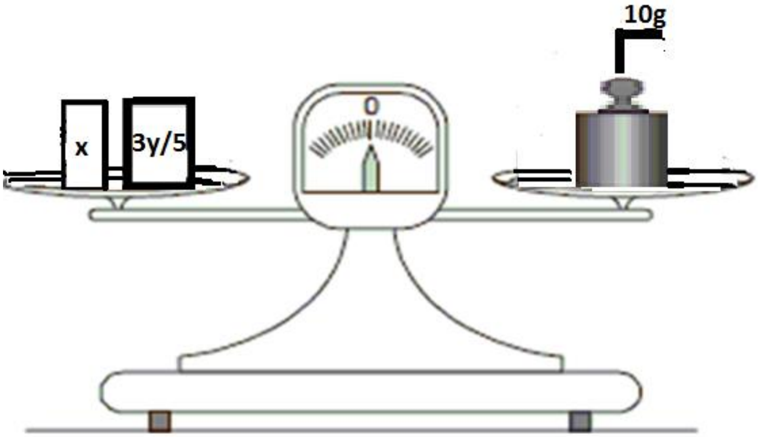
Representando as equações do sistema por meio de balança de dois pratos, têm-se as figuras 17 e 18 a seguir.

Figura 18 - Representação da equação $\frac{x}{2} + y = 12$ na balança equilibrada.



Fonte: Autoria própria.

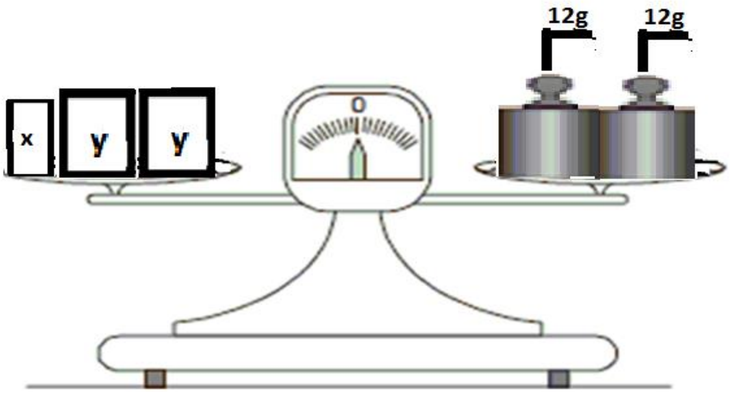
Figura 19 - Representação da equação $x+\frac{3y}{5}=10$ na balança equilibrada.



Fonte: Autoria própria.

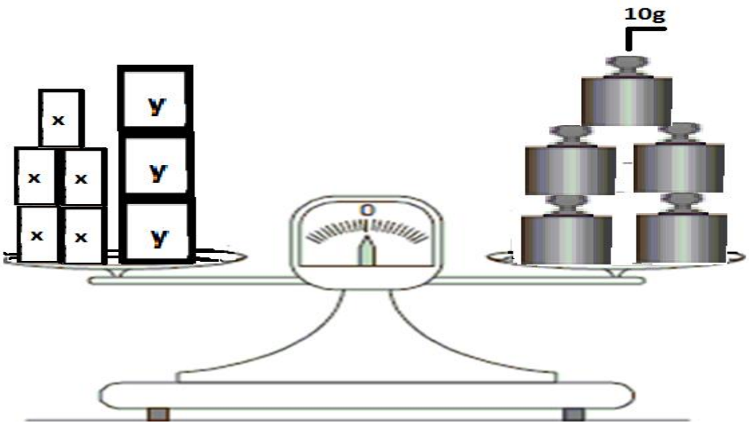
Dobrando e quintuplicando os “pesos” nas balanças das figuras 16 e 17 respectivamente, obtêm-se as figuras 18 e 19 a seguir.

Figura 20 - Representação do dobro dos pesos da balança da figura 18.



Fonte: Autoria própria.

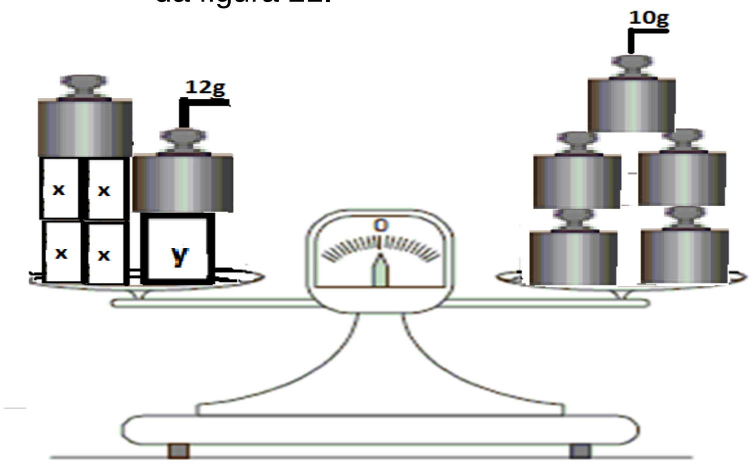
Figura 21 - Representação do quíntuplo dos pesos da balança da figura 19.



Fonte: Autoria própria.

Substituindo o resultado da balança da figura 20 no resultado da balança da figura 21, obtém-se o resultado da balança da figura 20 a seguir.

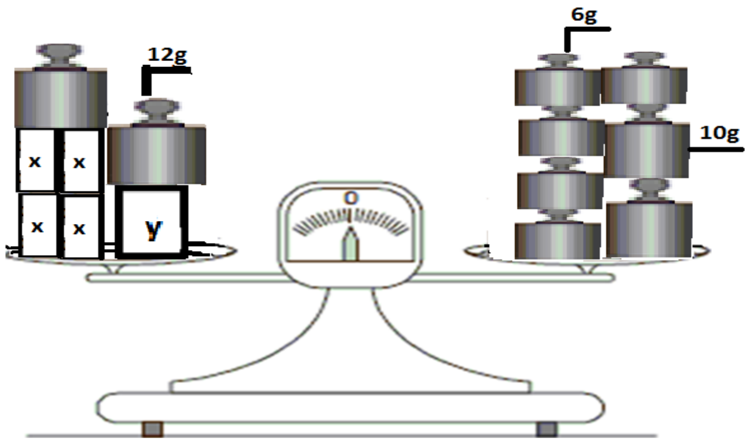
Figura 22 - Resultado da balança da figura 20 substituído no resultado da balança da figura 21.



Fonte: Autoria própria.

Trocando três pesos 10g balança da figura 20 por cinco pesos 6g, obtém-se a balança da figura 21.

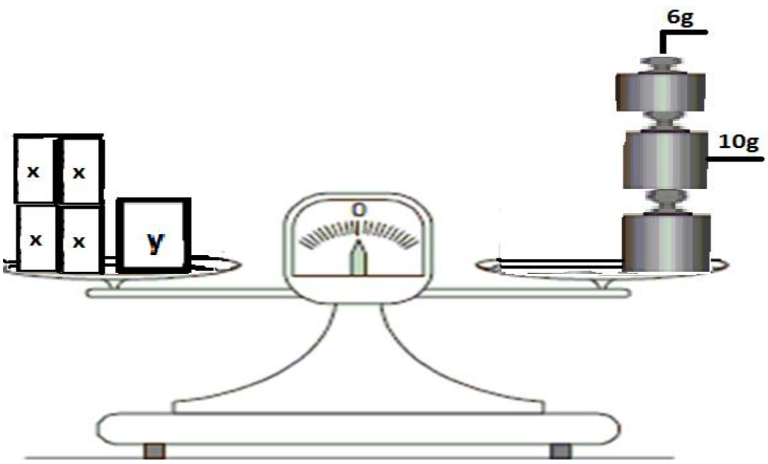
Figura 23: Troca de três pesos 10g da balança apresentada na figura 22 por cinco pesos de 6g.



Fonte: Autoria própria

Retirando dois pesos 12g do prato esquerdo da balança e quatro pesos de 6g do prato direito da balança, obtém-se a balança que representa a equação 4x + y = 26, apresentada na figura 24:

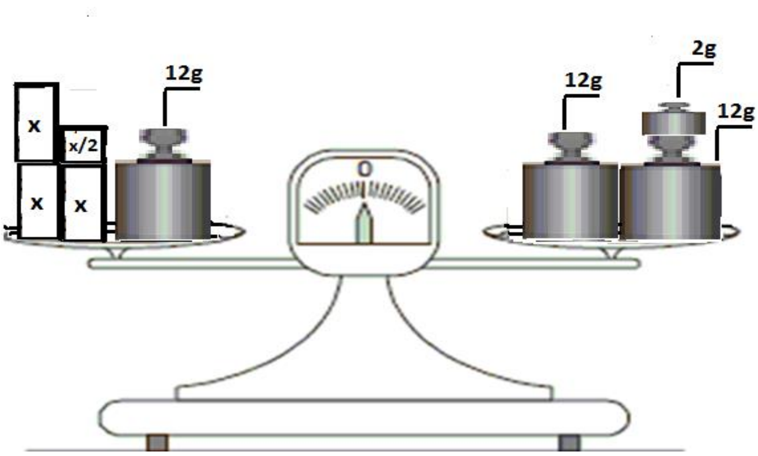
Figura 24: Balança de dois pratos representando a equação 4x + y = 26.



Fonte: autoria própria.

Substituindo o resultado apresentado na balança da figura 18 no resultado apresentado na balança da figura 24, obtém-se o resultado apresentado pela balança da figura 25.

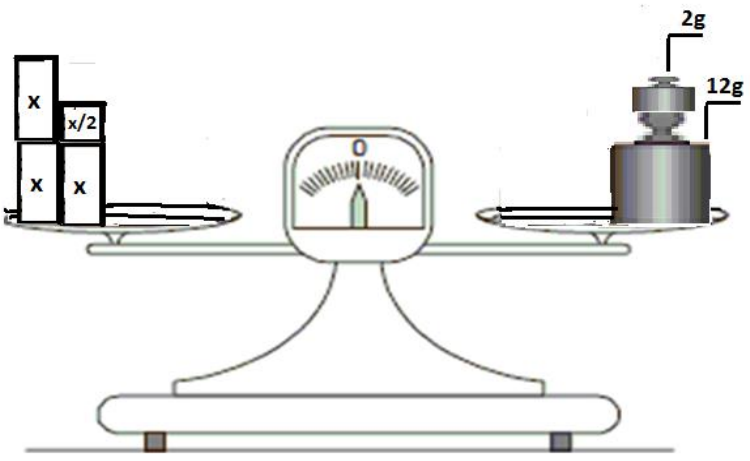
Figura 25 - Resultado da balança da figura 18 substituído no resultado balança da figura 25.



Fonte: Autoria própria.

Retirando um peso 12g de cada prato da balança, obtém-se a balança apresentada na figura 25.

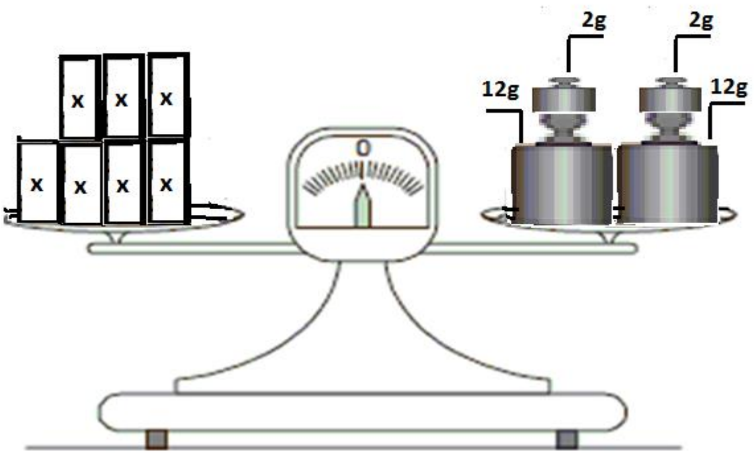
Figura 26: Retirando um peso de 12g de cada prato da balança apresentada na figura 25.



Fonte: Autoria própria

Dobrando os pesos nos dois pratos da balança apresentada na figura 26, obtém-se a balança apresentada na figura 27.

Figura 27 - dobro dos pesos dos pratos da balança da figura 26.



Fonte: Autoria própria.

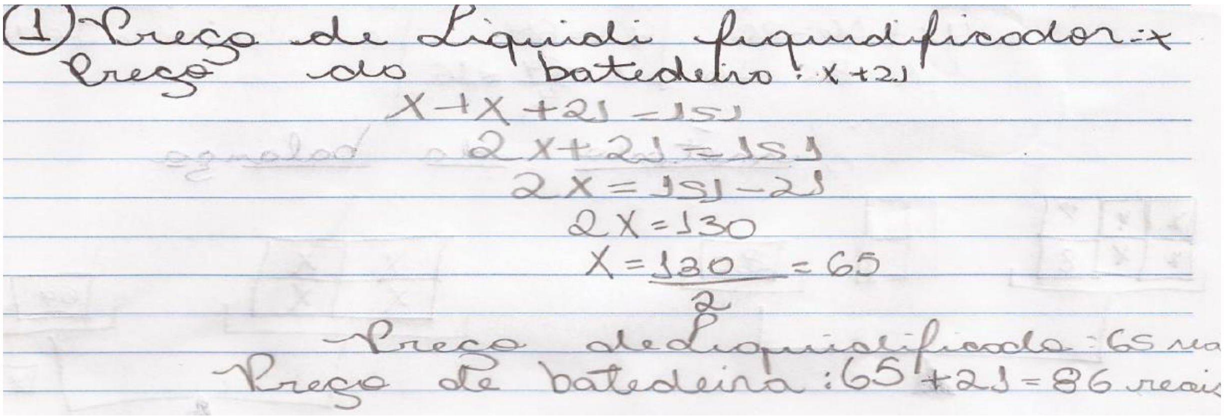
Observando o resultado das balanças das figuras 25 e 22, segue que as soluções do sistema são x= 4 e y = 10.

3.4 Resultados da quarta etapa do projeto

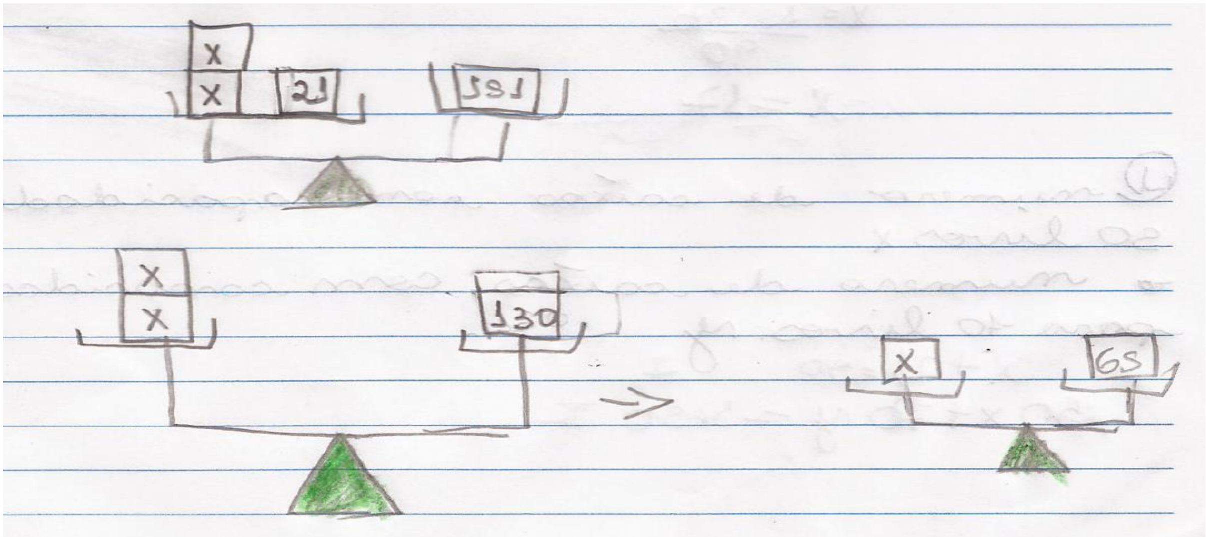
Nesta etapa são apresentadas as soluções determinadas por três alunos para os problemas propostos na primeira lista de situações-problemas, em que, para solucioná-los, os alunos usaram um dos métodos aprendidos ou relembrados na terceira etapa. A seguir, os alunos fizeram as comparações com as soluções determinadas por eles conforme a segunda etapa:

a) Solução do 1º problema da primeira lista de situações-problemas:

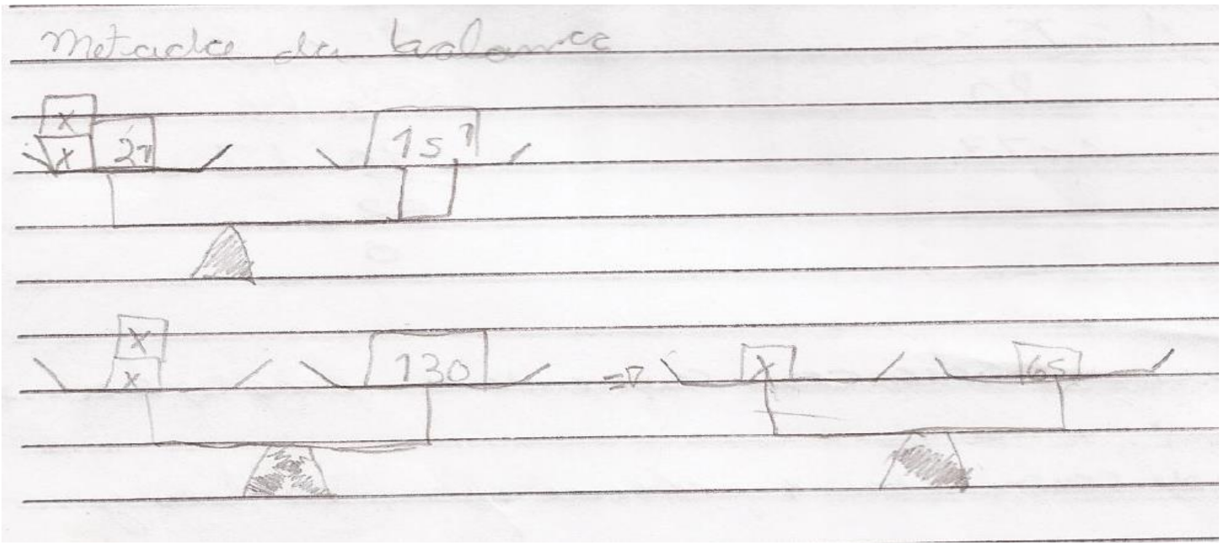
- Resposta do primeiro aluno;



- Resposta do segundo aluno;



- Resposta do terceiro aluno.



Analisando os resultados obtidos pelos alunos na resolução deste problema, mostrado na segunda etapa, apenas o 3º aluno acertou o problema. Este não escreveu uma equação solucioná-lo, porém, usou os mesmos procedimentos para resolvê-lo.

Eles alegaram que a maior dificuldade foi a interpretação do problema e muitos deles erraram em usar primeiro o princípio multiplicativo para em seguida, usar o princípio aditivo.

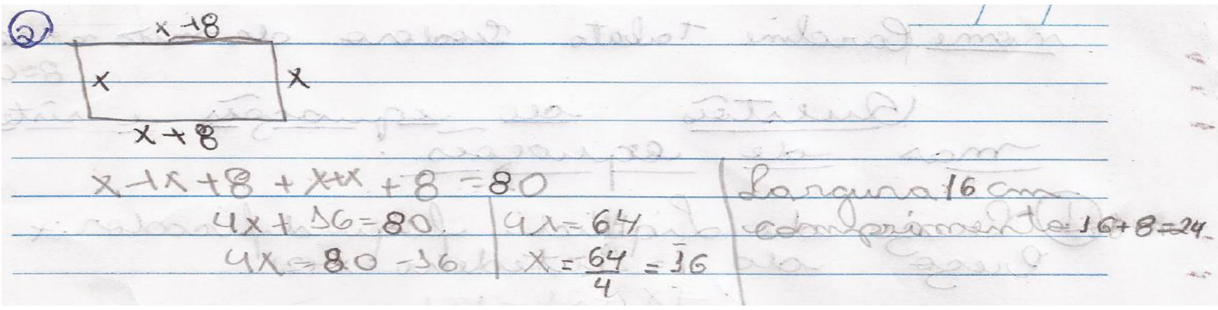
A figura 26 a seguir, mostra um aluno usando a balança de dois pratos para resolver um problema envolvendo equações do primeiro grau da primeira lista de situações-problemas. Observe que as incógnitas foram representadas pelo peso da tesoura.

Figura 28 - Aluno usando a balança de dois pratos para resolver uma equação

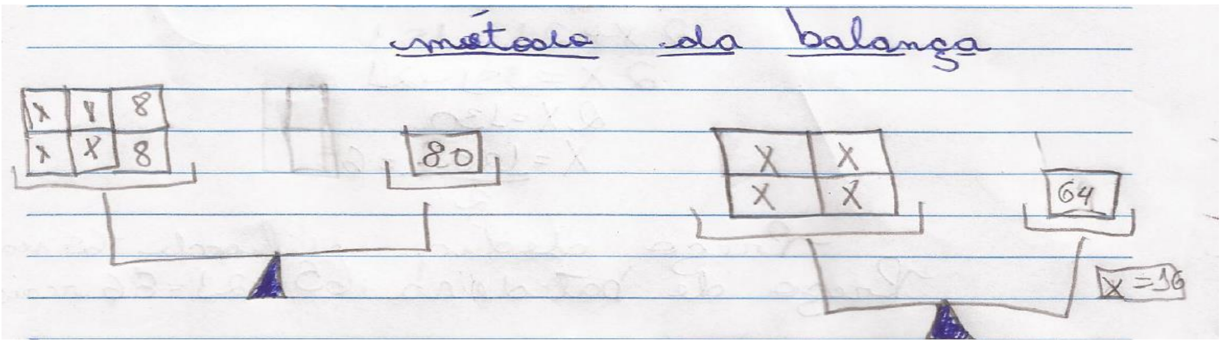
Fonte: Autoria própria.

b) Solução do 2º problema da primeira lista de situações-problemas:

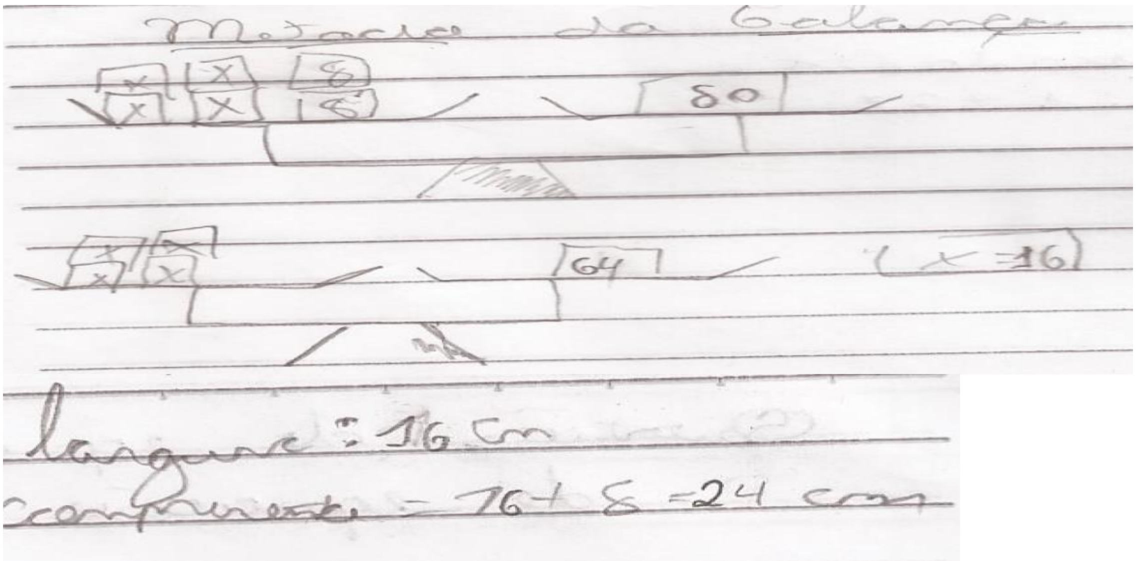
- Resposta do primeiro aluno;



- Resposta do segundo aluno;



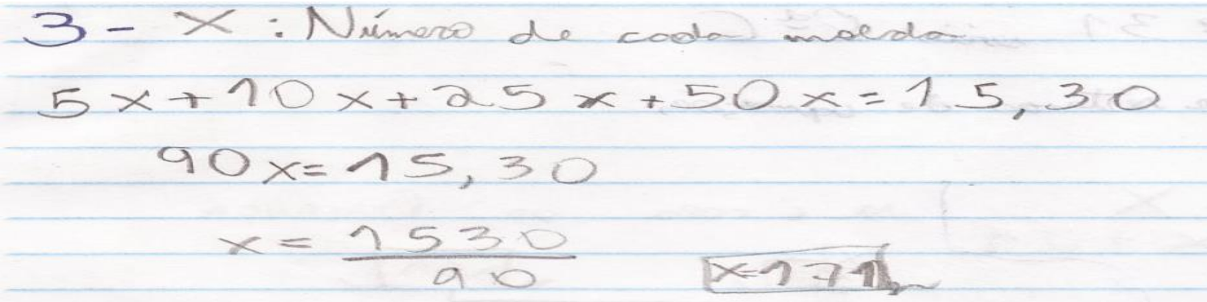
- Resposta do terceiro aluno.



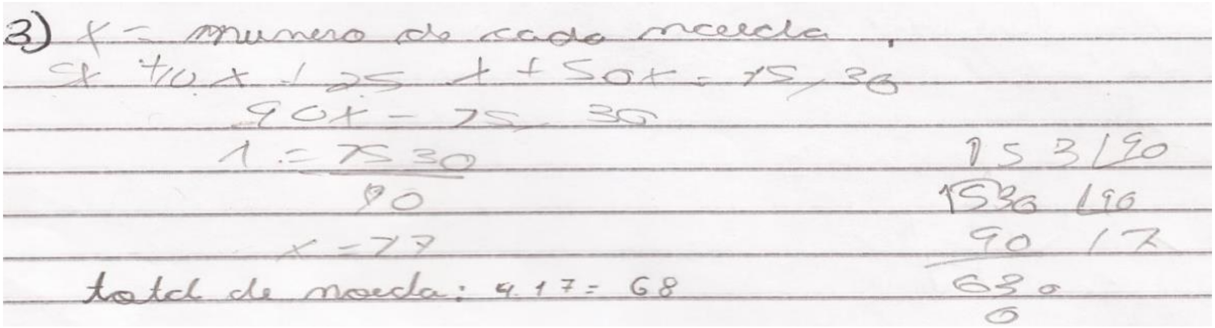
Nenhuma das resoluções apresentadas pelos alunos para este problema na segunda etapa foi o correto. Verificou-se, após a aplicação deste problema que grande parte dos alunos não sabia qual o significado da palavra perímetro e, por isso, não chegaram à solução correta do problema.

c) Solução do 3º problema da primeira lista de situações-problemas:

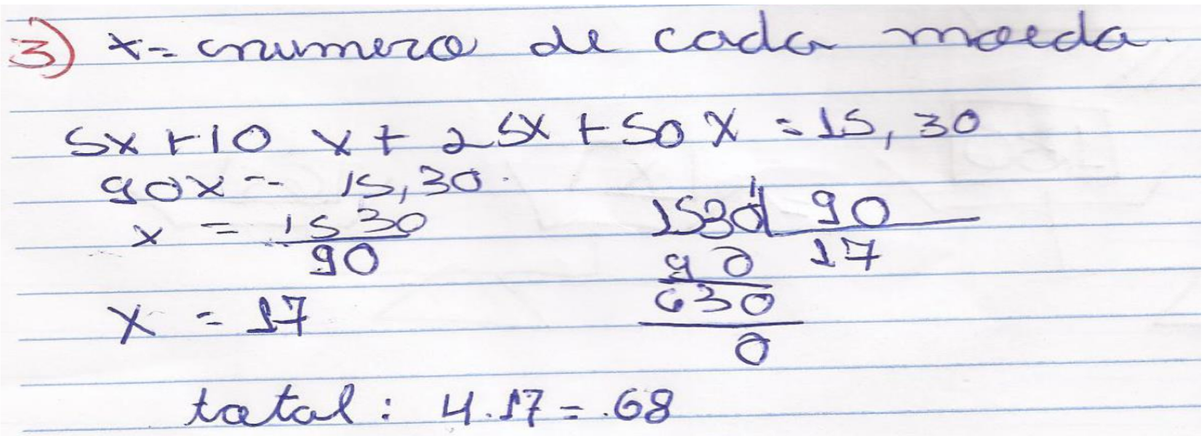
- Resposta do primeiro aluno;



- Resposta do segundo aluno;



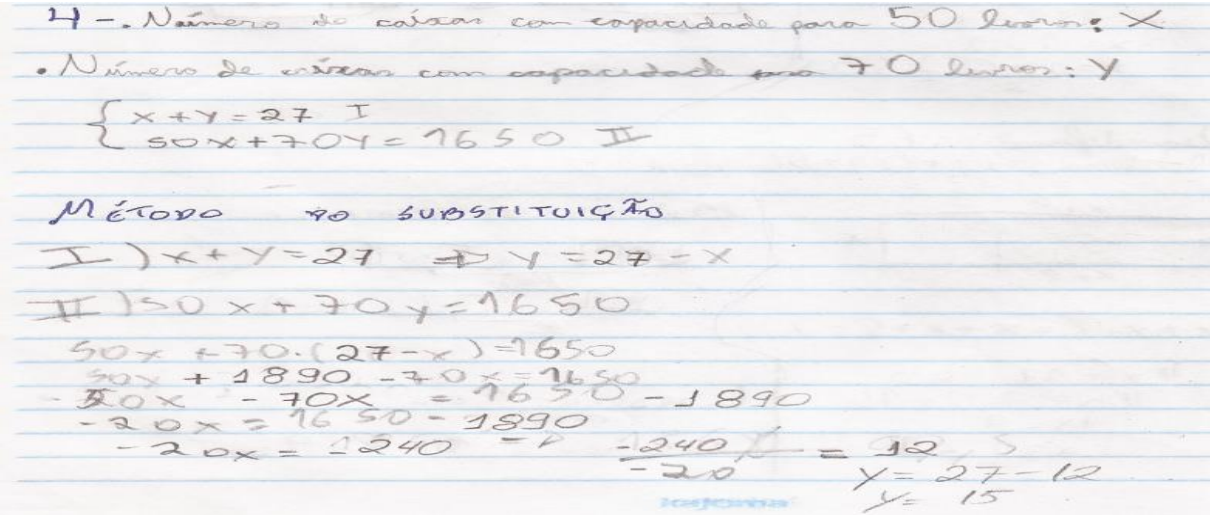
- Resposta do terceiro aluno.



O primeiro e o segundo aluno apresentados na segunda etapa erraram este problema. O terceiro aluno conseguiu determinar o número de moeda de cada espécie, porém, não encontrou o total de moedas que Carmem tem. Isso ocorreu, conforme relato deles, pela má interpretação do problema e por eles não conseguirem encontrar uma operação correta para resolver o problema.

d) Solução do 4º problema da primeira lista de situações-problemas:

- Resposta do primeiro aluno;


4-. Número de caixas com capacidade para 50 livros: X

• Número de caixas com capacidade pra 70 livros: Y

$$\begin{cases} x + y = 27 & \text{I} \\ 50x + 70y = 1650 & \text{II} \end{cases}$$

Método do substituição

I) $x + y = 27 \Rightarrow y = 27 - x$

II) $50x + 70y = 1650$

$50x + 70.(27 - x) = 1650$

$50x + 1890 - 70x = 1650$

$50x - 70x = 1650 - 1890$

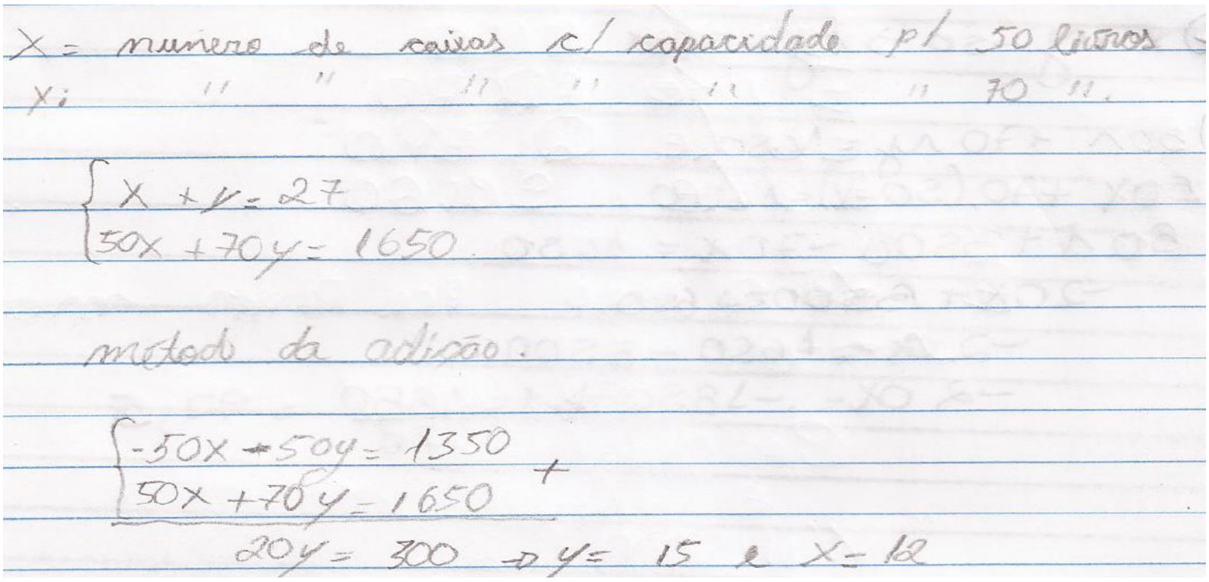
$-20x = 1650 - 1890$

$-20x = -240 \Rightarrow \frac{-240}{-20} = 12$

$y = 27 - 12$

$y = 15$

- Resposta do segundo aluno;


X = número de caixas c/ capacidade p/ 50 livros

Y: " " " " " 70 "

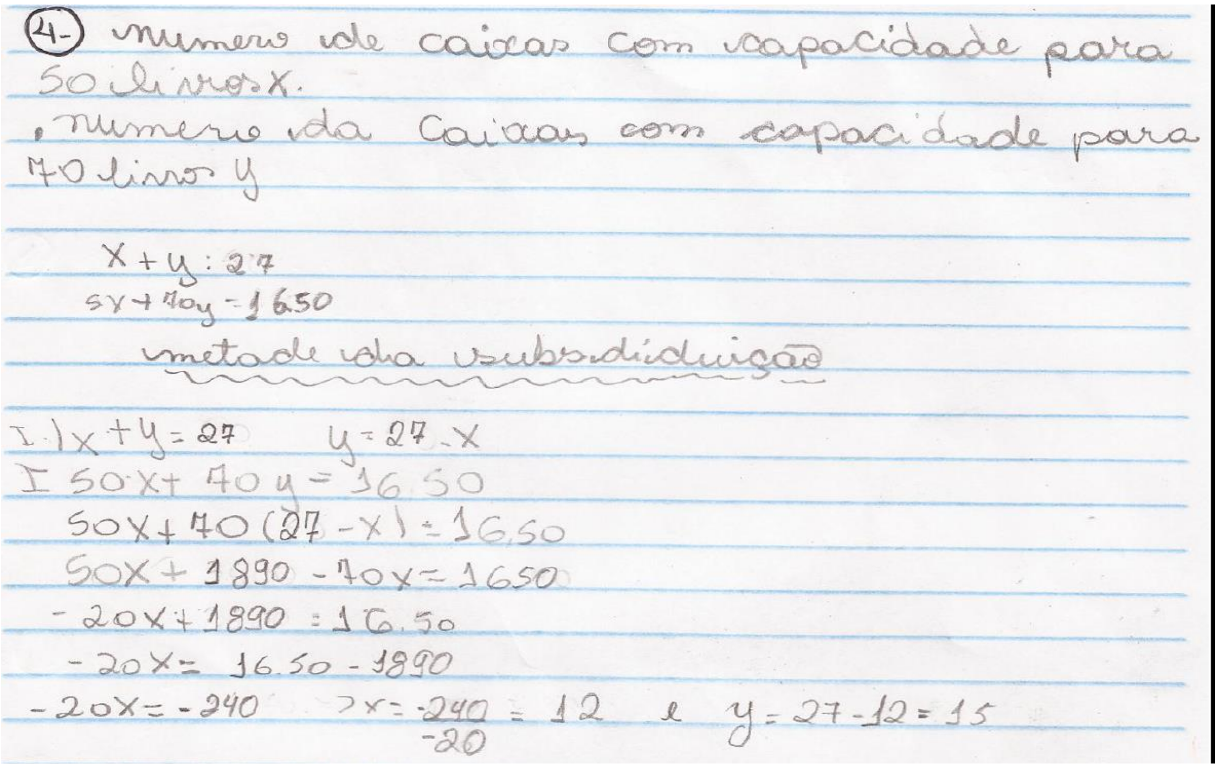
$$\begin{cases} x + y = 27 \\ 50x + 70y = 1650 \end{cases}$$

método da adição.

$$\begin{cases} -50x - 50y = 1350 \\ 50x + 70y = 1650 \end{cases} +$$

$20y = 300 \Rightarrow y = 15$ e $x = 12$

- Resposta do terceiro aluno.


4- numero de caixas com capacidade para 50 livros X.
numero da caixas com capacidade para 70 livro Y

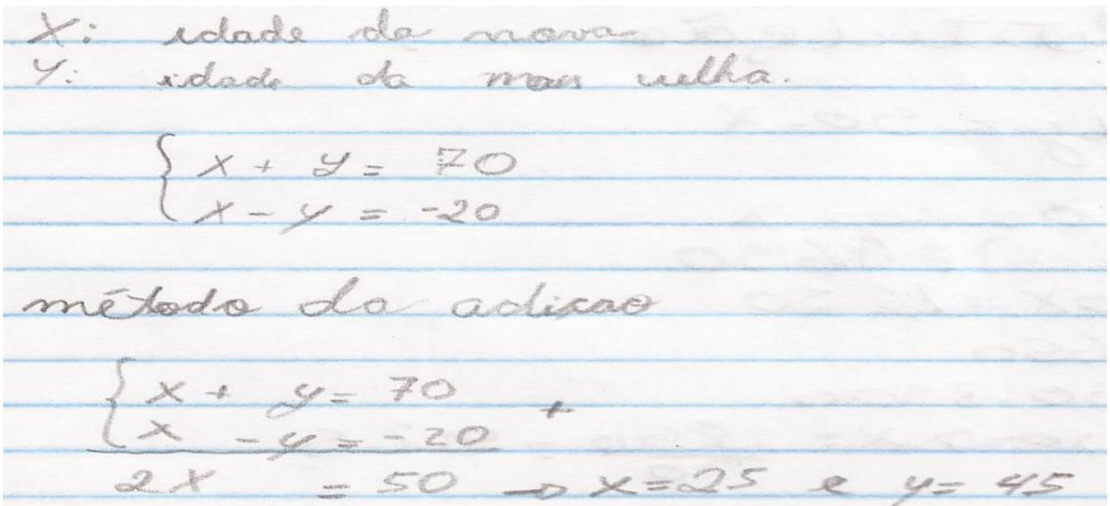
X + y : 27
5x + 70y = 1650
metodo da subsdiduição

I.) x + y = 27   y = 27 - x
I 50x + 40 y = 16.50
50x + 40 (27 - x) = 16.50
50x + 1890 - 70x = 1650
-20x + 1890 = 16.50
-20x = 16.50 - 1890
-20x = -240   ⇒ x = -240 / -20 = 12   e   y = 27 - 12 = 15

Os três alunos erraram o problema na segunda etapa, demonstrando com isso, como alegado por eles, nenhuma ou pouca habilidade com problemas relacionados ao conceito de sistemas de equações do primeiro grau.

e) Solução do 5º problema da primeira lista de situações-problemas:

- Resposta do primeiro aluno;


X: idade da nova
Y: idade da mais velha.

x + y = 70
x - y = -20

método da adição

x + y = 70
x - y = -20   +
2x = 50 ⇒ x = 25 e y = 45

- Resposta do segundo aluno;

X: IDADE DA MAIS NOVA
Y: " " " VELHA.

$$\begin{cases} X + Y = 70 & \text{I} \\ X - Y = -20 & \text{II} \end{cases}$$

MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO

II) $x = -20 + y$

I) $-20 + y + y = 70$

$-20 + 2y = 70$

$2y = 90$

$y = 45$ e $X = -20 + 45 = 25$

- Resposta do terceiro aluno.

X idade da pessoa mais nova
Y idade da pessoa mais velha

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ x \quad y = -20 \end{cases}$$

$2x = 50$

$\boxed{x = \frac{50}{2} = 25}$

$x + y = 70$

$25 + y = 70$

$\boxed{y = 45}$

Da mesma forma que o problema anterior, os alunos não souberam resolver este problema na segunda etapa, ficando nítida a grande defasagem que estes têm com relação a sistemas de equações do primeiro grau.

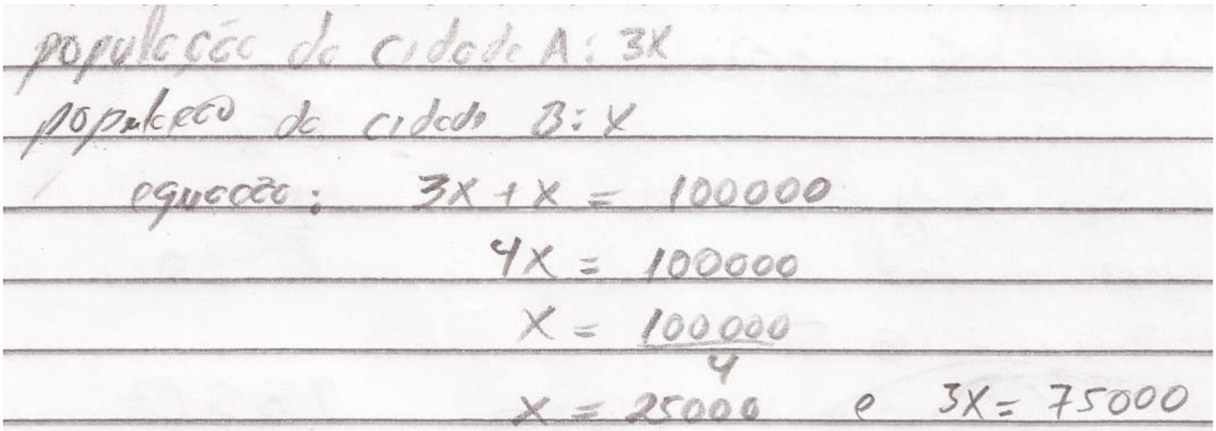
3.5 Resultados da quinta etapa do projeto

Nesta etapa foi apresentada aos alunos a segunda lista com situações-problemas envolvendo equações do primeiro grau e sistemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas para que os alunos os interpretem e os resolva pelo método que desejarem inclusive aqueles que resolveram na segunda etapa se chegaram à resposta correta do problema.

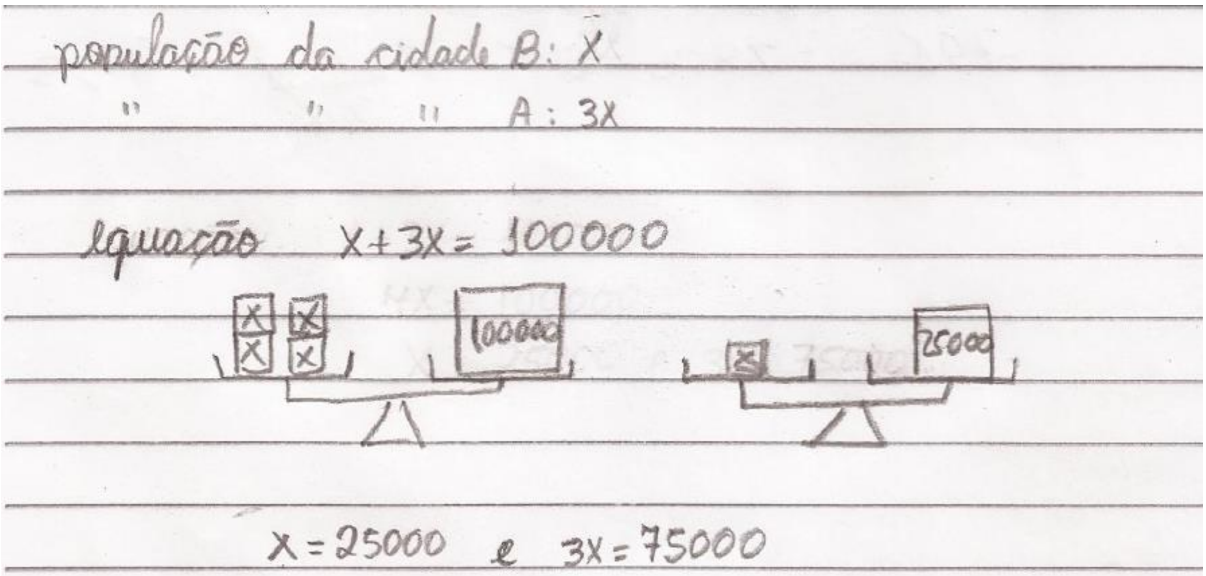
Segue a seguir, a resposta dos problemas produzidos por dois alunos:

a) Solução do 1º problema da segunda lista de situações-problemas:

- Resposta do primeiro aluno;

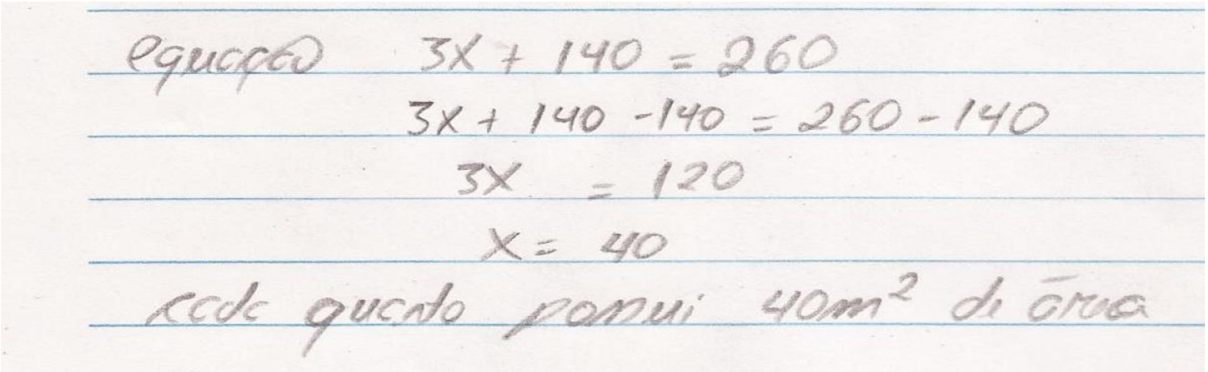


- Resposta do segundo aluno.

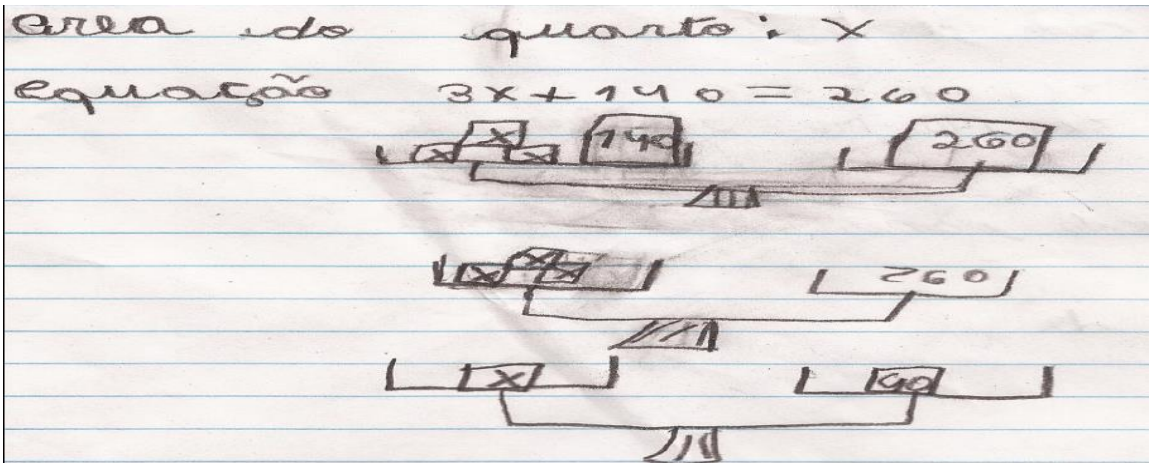


b) Solução do 2º problema da segunda lista de situações-problemas:

- Resposta do primeiro aluno;

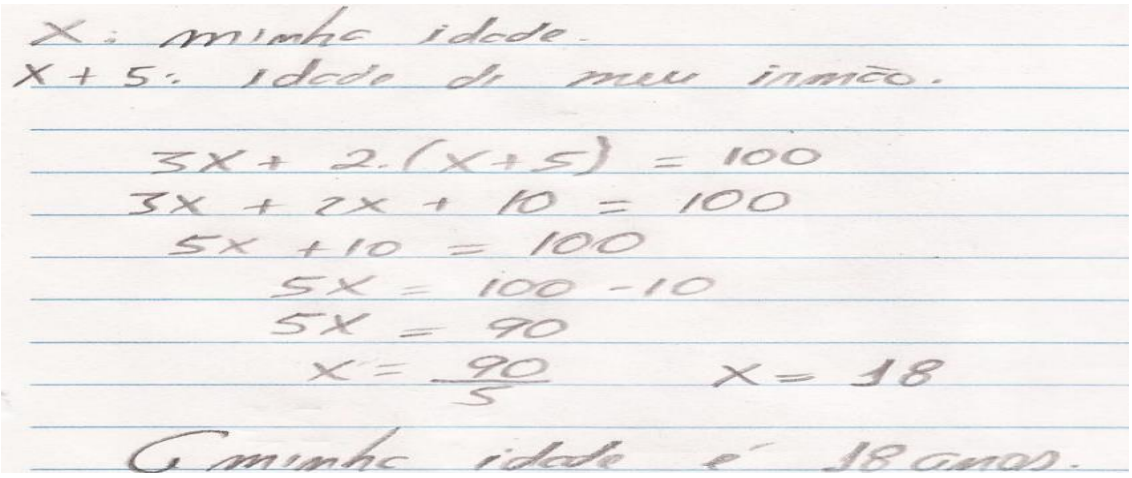


- Resposta do segundo aluno.

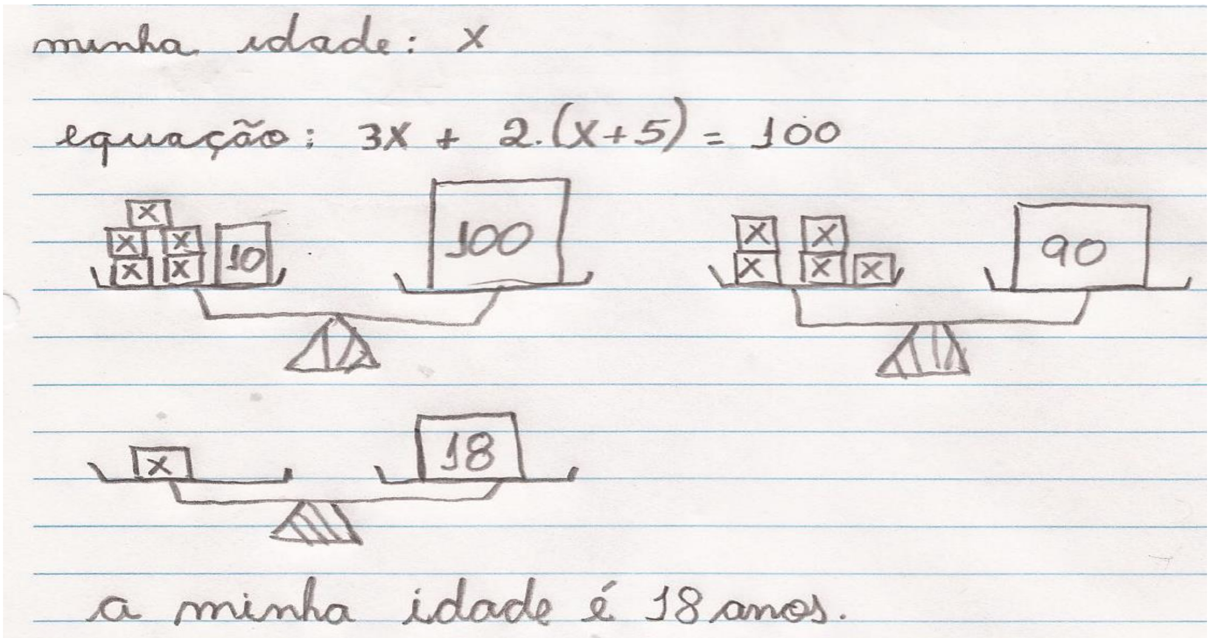


c) Solução do 3º problema da segunda lista de situações-problemas:

- Resposta do primeiro aluno;

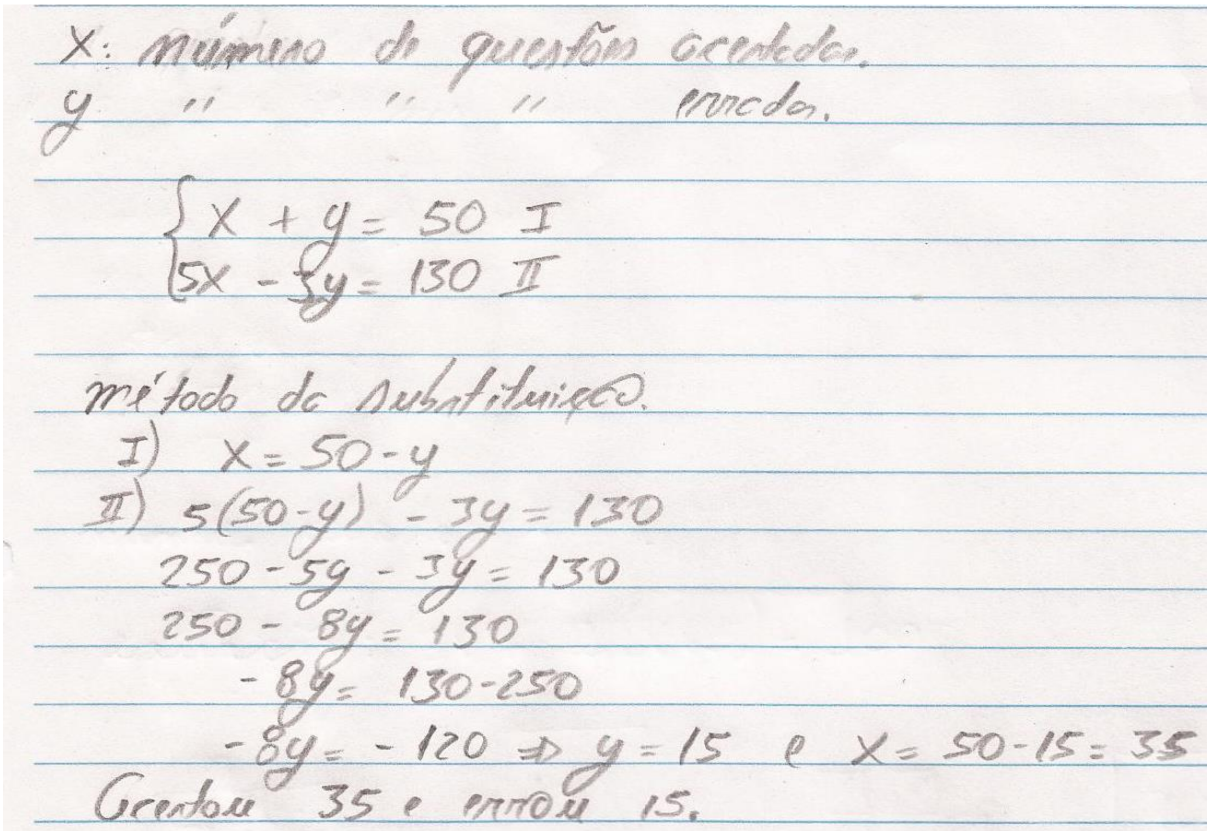


- Resposta do segundo aluno.



d) Solução do 4º problema da segunda lista de situações-problemas:

- Resposta do primeiro aluno;



X: número de questões acertadas.

y " " " erradas.

$$\begin{cases} X + y = 50 & \text{I} \\ 5X - 3y = 130 & \text{II} \end{cases}$$

método da substituição.

I) $X = 50 - y$

II) $5(50-y) - 3y = 130$

$250 - 5y - 3y = 130$

$250 - 8y = 130$

$-8y = 130 - 250$

$-8y = -120 \Rightarrow y = 15$ e $X = 50 - 15 = 35$

Acertou 35 e errou 15.

- Resposta do segundo aluno.

X: número de questões acertadas

50 − X: número de questões erradas

$$5x - 3(50 - x) = 130$$
$$5x - 150 + 3x = 130$$
$$8x - 150 = 130$$
$$8x = 130 + 150$$
$$8x = 280$$
$$x = \frac{280}{8} = 35$$

O número de questões acertadas é 35.

e) Solução do 5º problema da segunda lista de situações-problemas:

- Resposta do primeiro aluno;

X: preço do pastel

y: preço do copo de leite.

$$\begin{cases} 3x + y = 1{,}10 & (I) \\ 2x + 2y = 1{,}00 & (II) \end{cases}$$

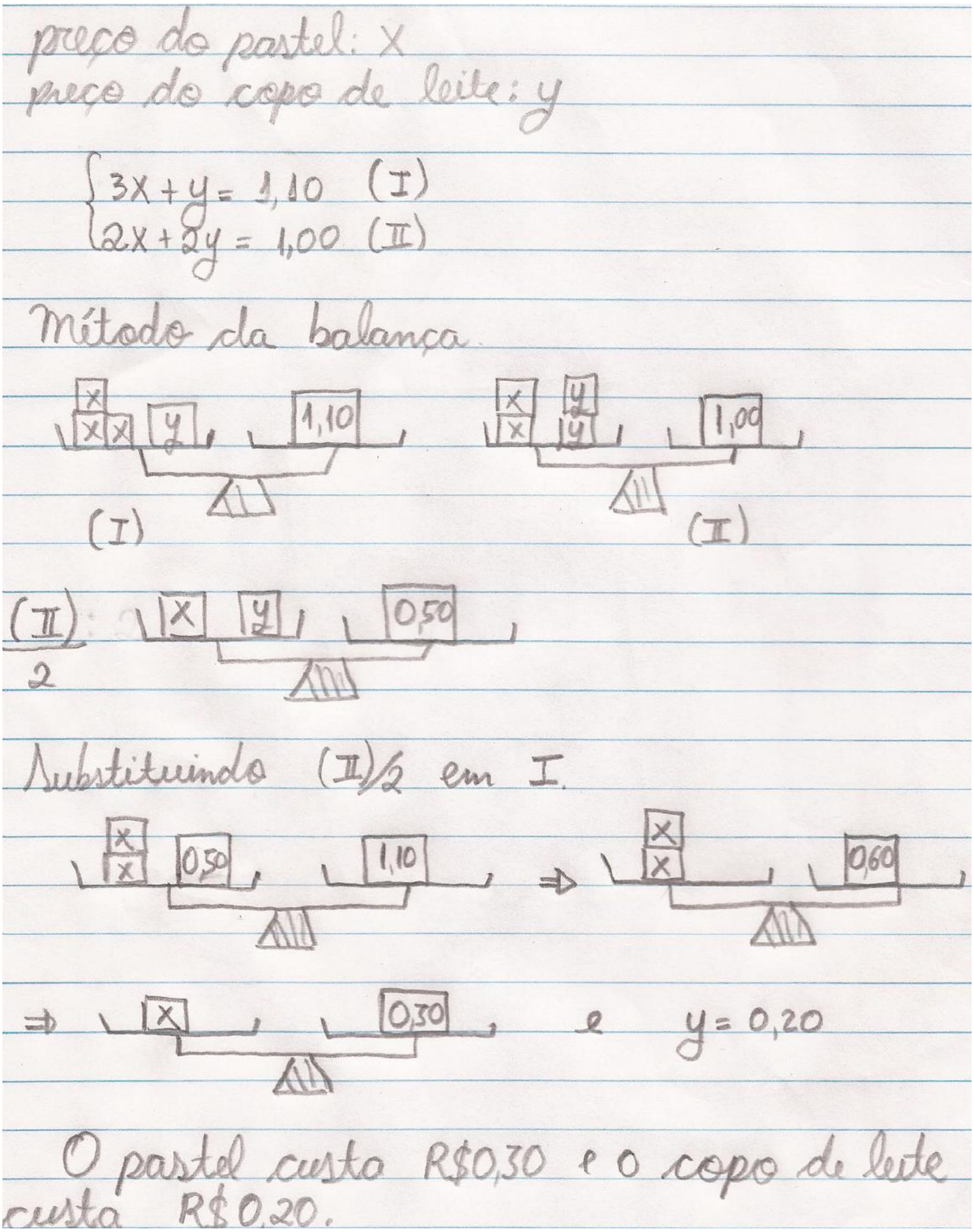
Método de substituição

$$I)\quad y = 1{,}10 - 3x$$

$$II)\quad 2x + 2(1{,}10 - 3x) = 1{,}00$$
$$2x + 2{,}20 - 6x = 1{,}00$$
$$-4x = 1{,}00 - 2{,}20$$
$$-4x = -1{,}20 \Rightarrow x = 0{,}30 \text{ e } y = 1{,}10 - 3.(0{,}30)$$
$$y = 1{,}10 - 0{,}90 = 0{,}20$$

O pastel custa R$0,30 e o copo de leite R$0,20

- Resposta do segundo aluno.



preço do pastel: x
preço do copo de leite: y

$$\begin{cases} 3x + y = 1{,}10 & (\mathrm{I}) \\ 2x + 2y = 1{,}00 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

Método da balança

(I)

(II)

$\frac{(\mathrm{II})}{2}$:

Substituindo (II)/2 em I.

$\Rightarrow$ e $y = 0{,}20$

O pastel custa R$0,30 e o copo de leite custa R$0,20.

A figura 27 a seguir, mostra um aluno usando a balança de dois pratos para resolver um problema envolvendo um sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas da segunda lista de situações-problemas. Novamente é usada tesouras para representar a incógnita.

Figura 29 - Aluno usando a balança de dois pratos para resolver um sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas.

Fonte: Autoria própria.

3.6 Restrições quanto ao uso do método da balança de dois pratos

O uso do método da balança de dois pratos para resolver equações do primeiro grau e sistemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas possui duas restrições quanto à resolução na prática: a impossibilidade da representação do número zero em um dos pratos da balança e a representação de números negativos.

Por exemplo, como representar o número zero na equação $3x - 6 = 0$, como representar o número negativo na equação $3x - 6 = 9$ ou como representar a incógnita y na equação $x - y = 2$?

Diante destas restrições, verifica-se que o método da balança de dois pratos é um método lúdico que serve para introduzir os conceitos de equações do primeiro grau e sistemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas, porém, não serve para resolver todo tipo de equações e sistemas de equações. E, portanto, o aluno deve ser incentivado a aprender outros métodos, além deste, para a resolução de problemas enfatizando estes conteúdos.

3.7 Considerações finais

A maioria dos alunos, antes da aplicação do projeto, alegaram que não gostavam de matemática pelo motivo de não encontrar aplicação dos conceitos aprendidos, além das quatro operações fundamentais. Quando foi apresentado para eles o projeto com as listas de situações-problemas, estes alegaram que seria muito difícil resolvê-los através de algoritmos que já haviam aprendido em séries anteriores e, por isso, tentariam resolvê-los através de estratégias estabelecidas por eles, porém, praticamente, todos eles erraram o resultado dos problemas usando tais estratégias.

Quando foi apresentada para eles a metodologia de resolução de equações e sistemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas, como estratégia de resolução dos problemas que já haviam tentado resolvê-los por estratégias próprias mas, não haviam conseguido, os alunos assimilaram os conceitos com mais facilidade, pois, haviam encontrado uma aplicação para tais conceitos matemáticos e o método nos quais, eles alegaram ser o mais fácil, foi o método da balança, utilizado tanto para resolver as equações quanto o sistema de equações.

O tempo designado para aplicação do projeto foi insuficiente. Houve necessidade de mais duas aulas de 50 minutos cada uma para realização da quinta etapa do projeto.

CAPÍTULO 4

Neste capítulo são apresentadas as conclusões referentes aos resultados obtidos com a aplicação do projeto bem como, uma proposta para continuidade deste projeto em conteúdos matemáticos elencados através da aplicação de situações-problemas.

CONCLUSÃO

Verificou-se que a aplicação de situações-problemas na aprendizagem de conceitos matemáticos antes de apresentá-los aos alunos é um processo que aguça a curiosidade e o interesse deles para aprender tais conceitos. Algo que não se vê quando são apresentados apenas os conceitos, sem uma aplicação prática.

Conforme os autores abordados neste projeto, ensinar conteúdos matemáticos através da aplicação de situações-problemas desperta nos alunos o interesse em aprender tais conteúdos pelo fato de encontrar uma aplicação prática para eles.

O conceito de equações do primeiro grau é, praticamente, o primeiro contato que o aluno tem com a álgebra e é também, um dos conceitos que serve como pré-requisito para a aprendizagem de toda a álgebra no decorrer do ensino fundamental e médio do aluno e, por isso, deve ser bem aprendido tanto na aplicação de situações-problemas como na sua metodologia de resolução. O mesmo acontece com sistemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas, é pré-requisito para muitos conceitos matemáticos que serão apresentados no decorrer do ensino médio, além de ter muitas aplicações em situações-problemas.

A aplicação deste projeto mostrou a dificuldade que muitos dos alunos têm com relação à aprendizagem de conceitos relacionados com equações e sistemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas mesmo para aqueles que já foram apresentados tais conceitos. Talvez tal fato ocorra pelo motivo destes conceitos serem transmitidos apenas pela sua metodologia, sem aplicação de situações-problemas.

O que se pode concluir da aplicação deste trabalho é que os alunos participantes do projeto se interessam mais pelos conceitos matemáticos quando são apresentadas para eles situações-problemas que envolvam tais conceitos. E o método da balança de dois pratos fez com que eles se interessassem mais pelos conteúdos abordados no problema por se tratar de uma forma lúdica e prática para resolver equações e sistemas de equações, apresentadas neste projeto.

Um fato interesse relacionado a este trabalho é que quando apresentado aos alunos o método da balança de dois pratos para resolver equações e sistemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas, muitos deles disseram nunca terem visto uma balança de dois pratos e como utilizá-las para medir a massa de um objeto, porém, pelo fato de ser lúdica a aprendizagem, muitos deles preferiram resolver equações e sistemas de equações por este método mesmo tendo que desenhar as balanças.

Pode-se concluir também que pelo fato de não ser frequente a forma de ensinar aplicando-se primeiro uma quantidade de situações-problemas para resolver e, em seguida, apresentar a metodologia para resolvê-los, os alunos não estão acostumados a aprender desta forma e, por isso, houve muitos erros, conforme mostrado na segunda etapa do capítulo 3. Se os conteúdos matemáticos forem transmitidos desta forma aos alunos com mais frequência, haverá mais empenho por parte deles para resolver situações-problemas antes mesmo de apresentar a metodologia para solucioná-las.

Uma proposta para continuidade deste projeto é a aplicação desta forma de ensinar, apresentando situações-problemas antes de apresentar os conteúdos que se pretende ensinar, através de problemas que enfatiza os conteúdos encontrados no cotidiano do aluno.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando Matemática 8º ano**, 2ª edição, São Paulo: Editora do Brasil, 2011. 304p.

BIANCHINI, Edwaldo Pacola. **Matemática 6ª série**. 6ª edição. São Paulo: Editora Moderna, 1998. 260p.

BRASIL. Secretaria de Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, 1998.148p.

DANTE, Luiz R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 2ª edição, São Paulo: Editora Ática, 1991. 176p:

DANTE, Luiz R. **Didática da resolução de problemas de matemática**. 12ª edição. São Paulo: Editora Ática, 2005. 176p

DANTE, Luiz R. **Tudo é Matemática 8º ano**. 4ª edição. São Paulo: Editora Ática, 2008, 364p.

DUFOUR-JANVIER, B.; BERDNARZ, N.; Belanger, M**. Pedagogical considerations concerning the problem of representation**. In: JANVIER, C. **Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.** Hillsdale, NJ: Erlbaum.1987. p. 109-122. .

FILLOY, E.; ROJANO, T.; SOLARES, A. **Arithmetic/algebraic problem-solving and the representation of two unknown quantities**. In: HOINES, M. J.; FUGLESTAT, A. B. ***Proceedings of the Twenty-eighth Annual Conferense for the Psychology of the Mathematics Education****. Bergen, Norway. 2004. p. 391 – 398.*

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 1ª edição, Campinas: Autores associados, 2006, 226p.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Processo de sistematização das informações**. In: ________. **Investigação em Educação Matemática**. Campinas: Autores Associados, 2007.

GIOVANI, J. R. J.; CASTRUCCI, B. **A conquista da Matemática 8º ano**. Nova edição. São Paulo: Editora FDT, 2009. 336p.

JOHANNING, D. I. **Supporting the development of algebraic thinking in middle school**: A closer look at students' informal strategies. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*, 2004, 371-388.

KIERAN, C. **The changing face of school algebra**. In ALSINA, C.; ALVARES, J. M.; HODGSON, B.; LABORDE, C.; PÉREZ, **International Congress on Mathematical Education 8:** Selected lectures, Seville: SAEM Thales. 1996. p. 271-290.

KIERAN, C. **The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities**. In Stacey, K. et al (Eds). **The Future of teaching and learning of algebra**: The 12th ICMI Study Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 2006, p. 21-34.

KIERAN, C**. Developing Algebraic reasoning: the role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels.** Quadrante, XVI(1). 2007, 5-26.

LUPINACCI, M. L. V.; BOTIN, M. L. M. Resolução de problemas no ensino de matemática. Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, 2004, p. 1–5.

MACGREGOR, M.; STACEY, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation:11-15. Educational Studies in Mathematics, 33, 1-19

ONUCHIC, L. R. **Ensino-aprendizagem de Matemática a través da resolução de problemas.** In: BICUDO, M. A. V. (ORG). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas.** São Paulo: Editora UNESP. 1999. p31-62.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas.** In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). **Educação matemática: pesquisa em movimento**. 3 edição. São Paulo: Editora Cortez. 2005. p 213-231.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspécto do método matemático.** Rio de Janeiro. Editora Interciência, 1977. 179p

POLYA, G. O ensino por meio de problemas. In: **Revista do professor de matemática**, n. 7. São Paulo. 1985. p 11 – 16.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Primeira reimpressão. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de janeiro: Interciências, 1986. 179p.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Editora Autêntica. 2005. 178p

POZO, J. I. ; ANGÓN, Y. P. **A Solução de Problemas como Conteúdo Procedimental da Educação Básica**. In: POZO, J. I. (org) **A solução de Problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Porto Alegre: Editora Artmed, 1998. p 139-165.

POZO, J.I & ECHEVERRÍA, M.D.P.P. **Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In A solução de problemas: aprender a resolver, resolver a aprender.** Juan Ignacio Pozo. Porto Alegre: Editora Artmed. 1998. p 12 - 38

RABELO, E. H. **Produção e interpretação de textos matemáticos:** um caminho para um melhor desempenho na resolução de problemas. 1995. 209f. Dissertação de mestrado (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, 1995.

SILVEIRA, E.; MARQUES, C.; **Matemática 6ª série**, 1ª edição, São Paulo: Editora Moderna. 2002. 235p.

USISKIN, Z. **Resolvendo os Dilemas Permanentes da Geometria Escolar** In LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P (org). **Aprendendo e Ensinando Geometria**, São Paulo: Editora Atual. 2010, p12-32

VALENTE, W. R. A Matemática Moderna nas Escolas do Brasil: Um Tema Para Estudos Históricos Comparativos. Curitiba, PR. In: Revista Diálogo Educacional/PUCPR, v. 6 n. 18, 2006.

VIDIGAL, A.; REGO, C. A.; BARBOSA, M. G. G.; SPIRA, M. **Matemática e Você 7ª série (8º ano)**, 1ª edição, São Paulo: Editora FDT, 2002. 280p.

WINDSOR, W. (2010). **Algebraic Thinking:** A Problem Solving Approach. In SPARROW, L.; KISSAINE, B.; HURST, C. (Eds.). **Shaping the future of mathematics education:** Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Fremantle, WA: MERGA. p. 665-672