

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**ADEVANILDE BATAGIN MARTINS RIBEIRO**

**AS FRAÇÕES QUE O LADRILHAMENTO REVELA**

**SÃO CARLOS**

**2013**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**ADEVANILDE BATAGIN MARTINS RIBEIRO**

## **AS FRAÇÕES QUE O LADRILHAMENTO REVELA**

**Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.**

**Orientação:**

**Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio**

**São Carlos**

**2013**

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

R484fL

Ribeiro, Adevanilde Batagin Martins.

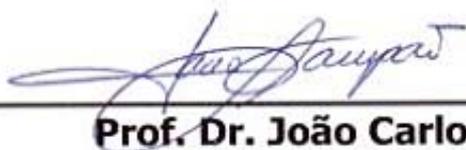
As frações que o ladrilhamento revela / Adevanilde Batagin Martins Ribeiro. -- São Carlos : UFSCar, 2013.  
132 f.

Dissertação (Mestrado profissional) -- Universidade Federal de São Carlos, 2013.

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Números racionais. 3. Frações ordinárias. 4. Jogos educativos. I. Título.

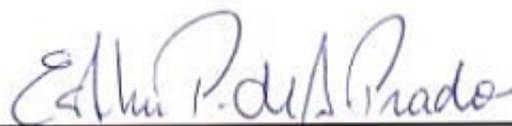
CDD: 510.7 (20<sup>a</sup>)

## **Banca Examinadora**



---

**Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio**  
**DM - UFSCar**



---

**Profa. Dra. Esther Pacheco de Almeida Prado**  
**ICMC- USP**



---

**Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti**  
**DM - UFSCar**

*Ao meu marido pelo apoio constante, aos meus filhos, noras, genro e netos; à minha mãe, aos meus familiares e, particularmente, aos alunos e professores do PROFMAT.*

## O USO DO VAZIO

Modela-se a argila e faz-se um jarro  
E no seu vazio reside o uso do jarro.

Erguem-se paredes e abrem-se portas  
e janelas para construir uma casa  
e no seu vazio reside o uso da casa.

Trinta raios convergem para o centro  
para fazer-se a roda  
e no seu vazio (do centro) reside o uso  
da roda.

Portanto, do ser provém a possessão  
e do não ser, a utilidade.

(Lao Tsé – Tao Te Ching)

## **Agradecimentos**

Agradeço a Deus pela vida, em sua plenitude.

Aos meus pais, que mais do que me trazerem à vida, deram-me os ensinamentos necessários para viver a vida com amor, respeito, coragem, disciplina, responsabilidade, confiança.

A minha família – esposo, filhos, filha, noras, genro e netos – pelo carinho constante, pela confiança depositada em mim, pelo incentivo nas horas difíceis; com que me cercaram durante todo o processo.

Aos meus familiares pela compreensão das ausências, assim como pelas palavras de estímulo.

Ao Programa PROFMAT pela oportunidade de realizar um grande sonho.

Aos professores do PROFMAT-UFSCar pela simplicidade com que compartilharam seus tão valiosos saberes, assim como pelo tratamento respeitoso e persistente dispensado a todos nós, seus alunos, durante o curso.

Aos professores-colaboradores que com seus depoimentos em entrevistas informais muito contribuíram para a realização deste trabalho.

Aos alunos das oitavas séries, por trilharem comigo esse caminho.

A todos os alunos da turma PROFMAT 2011, pela cumplicidade desenvolvida, pelos fortes laços afetivos estabelecidos durante essa trajetória, pelo trabalho colaborativo desencadeado nas discussões e postagens nos fóruns, que tanto ajudou no estudo e aprendizado dos conteúdos abordados nas disciplinas obrigatórias e eletivas.

## RESUMO

Esta dissertação apresenta o acompanhamento do estudo das frações por meio do ladrilhamento de um quadrado, com a variação dos moldes empregados. A experimentação apoia-se no trabalho interativo, que propicia o avanço cognitivo de todo o grupo. Traça uma trajetória da fração dentro da História da Matemática, com a evolução para os dias atuais trazendo indicações metodológicas para o ensino de frações. Esta pesquisa tem a questão norteadora: *como identificar e tratar as dúvidas que surgem durante a resolução de situações em que os alunos não conseguem aplicar os conceitos de frações, já vivenciados na sua vida escolar pregressa?* Na tentativa de resolver a questão de pesquisa, ficou definido o objetivo da investigação que consiste em proporcionar uma intervenção que mudasse para melhor o contato dos alunos com as questões que envolvem os conhecimentos relacionados com as ideias de frações ordinárias. O trabalho de pesquisa contou com a metodologia Engenharia Didática, foi desenvolvido em sala de aula, por meio de uma sequência didática composta por duas sequências de atividades: o jogo Pentaminós e o Ladrilhamento. Com essa intervenção, espera-se atender o objetivo da investigação e responder à questão norteadora.

Palavras-chave: Fração, Jogo Pentaminós, Ladrilhamento, Matemática.

## ABSTRACT

This dissertation presents the follow-up of the study of fractions by means of a square lattice, with the variation of molds. The trial is based on interactive work, which provides the cognitive breakthrough of the whole group. Traces a trajectory of the fraction, within the history of mathematics with the evolution to the present day presents some guidelines and methodological indications for teaching fractions.-The guiding this research question is: *How to identify and deal with the questions that arise during the resolution of situations where students are unable to apply the concepts of fractions, already experienced in their previous school life?* In an attempt to resolve the issue of research, was set the goal of research is to provide an intervention that would change for the better the students ' contact with the issues involving the knowledge related to the ideas of ordinary fractions. The research work was Didactic Engineering methodology, was developed in the classroom, through a didactic sequence consisting of two sequences of activities: the Pentaminos game and the Lattice. With this speech, is expected to meet the goal of guiding research and answer the research question.

Keywords for this page: Fraction, Pentaminós Game, Lattice, Mathematics.

## Lista de ilustrações

FIGURA 1 – Representação Egípcia: frações .....	25
FIGURA 2 – Sistema de numeração para os inteiros – base sessenta ....	27
FIGURA 3 – Representação do número 3559, usada pelos escribas .....	27
FIGURA 4 – Composições com o Tangram, do Tangranear .....	51
FIGURA 5 – Escala Cuisenaire .....	52
FIGURA 6 – Barrinhas da Escala Cuisenaire .....	52
FIGURA 7 – Escala Cuisenaire e as Frações .....	53
FIGURA 8 – Tiras com as Frações Unitárias .....	54
FIGURA 9 – Frações Equivalentes e a Régua de Frações .....	55
FIGURA 10 – Quadrados usados na obtenção das peças do Jogo Pentaminós .....	77
FIGURA 11 – Peças do Jogo Pentaminós .....	78
FIGURA 12 – Tipos de ladrilhamento .....	80
FIGURA 13 – Exemplos de ladrilhamento .....	81
FIGURA 14 – Pavimentações arquimedianas ou semirregulares .....	82
FIGURA 15 – Números Racionais: rede de significados .....	84
FIGURA 16 – Manipulação de quadrados para a obtenção das peças do Jogo Pentaminós .....	93
FIGURA 17 – Peças do Jogo Pentaminós .....	94
FIGURA 18 – Pentaminós: composição 4 x 15 .....	95
FIGURA 19 – Pentaminós: jogo-livre .....	95
FIGURA 20 – Pentaminós: composições 8 x 8 .....	96
FIGURA 21 – Composição 8 x 8 usando o Jogo Pentaminós .....	96
FIGURA 22 – Sequência Ladrilhamento: itens a, b, c, d, e, f – etapa I .....	98
FIGURA 23 - Sequência Ladrilhamento: itens g, h, i, j, k – etapa I .....	99

FIGURA 24 – Comparação das respostas encontradas – etapa I – Sequência Ladrilhamento .....	100
FIGURA 25 – Síntese de resultados: fechamento da atividade Ladrilhamento – etapa I – itens a, b, c, d, e, f .....	102
FIGURA 26 – Síntese de resultados: fechamento da atividade Ladrilhamento – etapa I – itens g, h, i, j, k .....	102
FIGURA 27 – Frações do ladrilho 5 x 5 .....	104
FIGURA 28 – Ladrilhamento 5 x 5 – etapa II .....	105
FIGURA 29 – Ladrilhamento 10 x10 – etapa II .....	106
FIGURA 30 – Resultados de ladrilhamento, com ladrilhos 8 x 8 .....	107
FIGURA 31 – Organograma: análise a posteriori .....	109

### **Lista de tabelas**

TABELA 1 – Resultados SAEB/Prova Brasil 2011: anos finais do Ensino Fundamental .....	16
---	----

### **Lista de abreviaturas e símbolos**

EF	Ensino Fundamental
EM	Ensino Médio
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
RPM	Revista do Professor de Matemática
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO .....	14
1.1 Metodologia .....	17
1.2 O tema e o campo de ação .....	17
1.2.1 O tema: Frações Ordinárias .....	18
1.2.2 Campo de ação .....	20
1.3 Os capítulos apresentados .....	20
1.4 Algumas considerações metodológicas .....	22
2 ANÁLISES PRÉVIAS .....	23
2.1 Nível epistemológico: o saber em jogo .....	23
2.2 Nível Didático: o funcionamento do sistema de ensino .....	43
2.3 Nível Cognitivo: o público ao qual se dirige o ensino .....	47
3 CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI .....	56
3.1 Constrangimentos e obstáculos .....	56
3.1.1 Alguns constrangimentos apontados para a aprendizagem de Matemática e, especialmente, de frações .....	59
3.2 Escolhas: questões de controle .....	62
3.2.1 Escolhas Globais - bases teóricas das escolhas globais .....	62
3.2.2 Escolhas Locais – a proposta didática .....	73
3.2.3 A escolha da atividade .....	75
4 HIPÓTESES .....	86

5 EXPERIMENTAÇÃO .....	88
5.1 Sequência Didática .....	88
5.1.1 Pentaminós: jogo, atividade lúdica e integradora .....	88
5.1.2 Ladrilhamento .....	89
5.2 Nosso contrato didático .....	90
5.2.1 Oficinas de Aprendizagem e as Discussões Coletivas .....	90
5.3 Desenvolvimento das atividades .....	91
6 ANÁLISE A POSTERIORI .....	109
7 VALIDAÇÃO .....	113
7.1 Validação do trabalho dos alunos .....	113
7.1.1 Comentários gerais dos alunos .....	113
7.2 Validação da aprendizagem do professor .....	114
7.2.1 Comentários do professor aplicador sobre o ensino das frações ordinárias .....	114
7.3 Validação sobre a metodologia engenharia didática .....	115
7.4 Considerações finais .....	115
8 REFERÊNCIAS .....	117
9 APÊNDICES .....	120
10 ANEXOS .....	128

## 1 INTRODUÇÃO

Nasci em 1954, em Ribeirão Preto, cidade do estado de São Paulo, Brasil. Conclui a Licenciatura em Matemática em 1979, em uma faculdade particular de Ribeirão Preto e em 2003, terminei a Licenciatura em Pedagogia, na mesma faculdade. Desde que iniciei meu trabalho como professora de Matemática, em 1991, participo de cursos de atualização profissional, oferecidos pelas Secretarias de Estado da Educação e do Município.

Fiz cursos de aperfeiçoamento e especialização, em Matemática para a Educação Básica, oferecidos pela Universidade de São Paulo, USP, e pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", UNESP, ambas em parceria com a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, sendo que os cursos foram ministrados por docentes das respectivas universidades. Participei de vários cursos e minicursos de extensão na Universidade Estadual de Campinas-SP, UNICAMP. Fiz um curso de especialização em Metodologias para o Ensino de Matemática, no Ensino Fundamental e Médio, no Centro Universitário Claretiano, em Batatais-SP, ministrado pelo Prof. Dr. Luiz Roberto Dante.

Frequentei, como aluna especial, o curso de Bioestatística, oferecido na Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto, na USP, por um ano. Fui pesquisadora no Observatório de Violência da USP de Ribeirão Preto, no Departamento de Psicologia, durante cinco anos, sendo que nos dois primeiros anos, tivemos o apoio do Fundo de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, FAPESP. Interrompi esses estudos para me dedicar ao PROFMAT/2011.

O PROFMAT surgiu num momento em que eu já não mais alimentava esperanças de fazer o tão sonhado Mestrado em Matemática. Sentia a necessidade de refazer e rever as disciplinas cursadas na distante graduação, ter acesso a outras disciplinas que não estiveram presentes no currículo da licenciatura em Matemática; então já vinha traçando planos de encontrar pessoas com os mesmos interesses e formar com elas um grupo de

estudos que atendessem a essas necessidades, usando os materiais disponíveis.

Para mim, o PROFMAT possibilitou a realização de um grande sonho: o Mestrado em Matemática; atendeu a um anseio: rever disciplinas estudadas no curso de formação e que ficaram distantes da sala de aula, na Educação Básica, caindo no esquecimento; ampliou os conteúdos conhecidos, com assuntos não vistos anteriormente; apresentou: novos materiais e ferramentas; oportunizou: novos contatos – coordenação, professores e alunos; fez surgir na minha prática novas reflexões e um novo olhar.

Considero que o meu perfil como professora é caracterizado pela busca de atualização profissional; reflexão constantemente da prática pedagógica e por acreditar que a escola pública pode e deve oferecer ensino de qualidade aos seus alunos.

Sou professora de Matemática da rede pública do Estado de São Paulo desde 1991, ocupando um cargo efetivo desde 1994, por concurso público; a partir de 1995 ocupo cargo efetivo, por concurso público, na Secretaria Municipal da Educação de Ribeirão Preto como professora de Matemática. Atualmente, atuo no Ensino Médio e no Ensino Fundamental, nos anos finais.

Enquanto professora de Matemática de escolas públicas, das redes municipal e estadual, quer seja nas séries finais do ensino fundamental ou no ensino médio, sofro de inquietação e me sinto provocada, especialmente, ao observar o insucesso dos alunos na resolução de questões que trazem as ideias de fração, a comparação entre frações, as operações com frações e o emprego de fração em situações que envolvem razão e proporção.

Esse insucesso pode ser observado e constatado em situações de avaliações externas, tais como, a título de exemplificação, citamos: no Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP), na Prova Brasil (ver Anexo D) e tantas outras formas de avaliação do ensino inclusive nas provas elaboradas pela Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

Na minha prática, acompanhando os resultados dos nossos alunos e discutindo com os mesmos as avaliações às quais se submeteram, verificamos que as questões que envolvem frações são aquelas que não recebem tentativas de resolução por parte da maioria dos alunos. Caso sejam questões abertas, são deixadas em branco, ou uma das alternativas é marcada aleatoriamente, no caso de serem questões objetivas. Estas questões são consideradas muito difíceis pela maioria dos estudantes.

Considerando a Prova Brasil 2011, que é uma das três avaliações externas que compõem o Sistema de Avaliação da Educação Básica, SAEB, ao compararmos os resultados obtidos, em Matemática, pelos alunos da escola em que trabalho com os alunos do Ensino Fundamental nas mesmas séries/anos finais de outros segmentos de consulta, observamos que o rendimento dos nossos alunos se situa na média, ou levemente acima, quando conferido com os resultados obtidos nas escolas municipais e estaduais do Brasil, na Região Sudeste, no Estado de São Paulo, no nosso município; porém este resultado fica muito aquém da média quando comparado aos resultados obtidos pelas escolas do segmento Federal e Privado.

TABELA 1 - Resultados SAEB/Prova Brasil 2011: Matemática, anos finais do Ensino Fundamental

Dependência Administrativa/ Localização	TIPO DE CONSULTA				
	Brasil	Região Sudeste	Estado UF: SP	Município UF: SP	Escola SP Rib. Preto
Municipal Rural	226,2	251,9	*	*	*
Municipal Urbana	243,9	255,3	*	259,7	259,7
Municipal Total	240,2	255,1	*	259,7	259,7
Estadual Rural	236,3	247,6	243,0	*	243,0
Estadual Urbana	245,1	248,2	244,3	*	244,3
Estadual Total	244,7	248,2	244,3	*	244,3
Federal	323,4	326,2	*	*	*
Pública	243,2	250,5	245,9	*	*
Privada	298,3	306,0	308,3	*	*
Total	250,6	259,1	254,9	*	*
SUA ESCOLA	*	*	*	*	266,0

Fonte: INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira; 2011

Notas: \* Não houve cálculo para esse estrato, conforme portarias normativas SAEB.

Em busca do ensino-aprendizagem de qualidade, precisamos abordar o ponto em que estamos vulneráveis: as frações ordinárias.

## 1.1 Metodologia

A metodologia empregada na realização deste trabalho é a da Engenharia Didática. Segundo Carneiro (2005, p. 90), Engenharia Didática é uma opção metodológica que apresenta um duplo sentido na medida em que prevê produções para o ensino, as quais têm origem em resultados de pesquisa, mas também, é uma metodologia de pesquisa que se baseia em experiências de sala de aula. Nesse sentido, Carneiro registrou:

Nessa linha, prática de ensino é articulada com prática de investigação. A teoria da engenharia didática pode ser vista como referencial para o desenvolvimento de produtos para o ensino, gerados na junção do conhecimento prático com o conhecimento teórico.

Carneiro observa ainda que como a teoria da Engenharia Didática tem sua origem na preocupação com certa “ideologia da inovação” que é inerente à Educação; cria-se a possibilidade para “qualquer tipo de experiência na sala de aula, descolada de fundamentação teórica” (2005, p. 89).

Esta opção metodológica envolve teoria dos jogos, teoria das situações didáticas, noções de quadros epistemológicos e estudo de obstáculos cognitivos o que lhe confere a possibilidade de ser uma teoria aprofundada. De acordo Carneiro (2005, p. 91) a Engenharia Didática é composta por níveis de organização ou fases:

- 1) análises prévias;
- 2) concepção e análise a priori de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula de Matemática;
- 3) implementação da experiência;
- 4) análise a posteriori e validação da experiência.

Segundo Almouloud e Coutinho (2008, p. 66) as necessidades emergentes durante o trabalho de pesquisa propiciam que cada uma dessas fases seja retomada e aprofundada, convenientemente.

## 1.2 O tema e o campo de ação

A abordagem de um assunto do ensino-aprendizagem em matemática que apresenta, entre os alunos, alto índice de dúvidas e

inseguranças na forma como reconhecê-lo, tratá-lo e empregá-lo em novas situações, é de grande importância e requer um tratamento pontual, como é o caso das frações.

Entendemos que o ambiente natural dos estudantes não oferece aos mesmos a mesma diversidade de situações matemáticas para que ocorra, por meio de tais situações, a familiarização com a ideia de fração de forma mais abrangente, pois, esta se restringe ao uso de metade, às vezes de um terço e um quarto, raramente, dois terços e três quartos; e ainda, o ambiente natural não propicia situações em que as propriedades das frações sejam vivenciadas. Assim, nesta pesquisa, consideramos que cabe ao ambiente escolar promover essas situações.

Em questões do dia a dia, temos presente os números fracionários. A nossa vivência de sala de aula indica que o conceito de número racional, mais especificamente na forma de fração ordinária, quando conhecimento prévio para algum tipo de aprendizagem, quer em situações didáticas ou adidáticas (PAIS, 2008), representam um obstáculo para a aprendizagem de novos conhecimentos matemáticos.

### **1.2.1 O tema: Frações Ordinárias**

Em seu livro *Números: Racionais e Irracionais*, capítulo 2, Ivan Niven (1984, p. 30-57) apresenta um estudo no que se refere à definição dos números racionais, representações decimais finitas e infinitas, dízimas periódicas. Buscamos nesse trabalho de Niven a definição de frações ordinárias.

Segundo Niven (1984, p. 30), nem o conjunto dos números naturais 1, 2, 3, 4, 5, ... e nem o conjunto dos números inteiros ..., - 3, - 2, - 1, 0, 1, 2, 3, 4, ... são fechados em relação à divisão, pois a divisão de inteiros pode produzir frações, tais como  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{7}{5}$ ,  $-\frac{3}{7}$ . O conjunto de todas as frações, é o conjunto dos números racionais. Niven apresenta a seguinte definição para os números racionais: “um número racional (ou uma fração ordinária) é um número que pode ser colocado na forma  $a/d$ , onde  $a$  e  $d$  são inteiros e  $d$  não é zero” e a seguir faz várias observações a respeito desta definição (IBIDEM).

A respeito dessa definição, Niven (1984, p.30-33) tece as observações:

- a) a exigência para que  $d$  seja diferente de zero,  $d \neq 0$ , é necessária pois se  $d$  é um divisor de  $a$ , então  $a = dc$  para algum número racional  $c$  e então, caso tenhamos  $a \neq 0$ , isto se torna impossível se  $d = 0$ ; neste caso, o termo *divisor* é empregado num sentido mais amplo podendo significar *divisor exato* ou *divisor não exato*;
- b) os termos número racional e fração ordinária podem ser usados como sinônimos, porém o termo fração, quando usado sozinho, serve para designar qualquer expressão algébrica com um numerador e um denominador; sendo  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\frac{17}{x}$  ou  $\frac{x^2-y^2}{x^2-y^2}$ , os exemplos usados pelo autor;
- c) ao se usar as palavras “um número que *pode ser colocado* na forma  $a/d$ , onde  $a$  e  $d$  são inteiros e  $d \neq 0$ ” ao invés de “um número da forma  $a/d$ , onde  $a$  e  $d$  são inteiros e  $d \neq 0$ ”, não ficamos na dependência da forma escolhida para representar o número racional pois, devemos considerar que um mesmo número racional pode ser representado de infinitos modos e nem sempre se apresenta na forma  $a/d$ , com  $a$  e  $d$  inteiros, sendo  $d \neq 0$ . Como exemplo, o autor traz os números  $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$  e  $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$  e ressalta que nenhum se apresenta na forma  $a/d$ , com  $a$  e  $d$  inteiros, mas efetuando algumas “manipulações aritméticas” na primeira expressão obtemos  $\frac{2}{1} = 2$ , que é um número racional, enquanto que a segunda expressão, não pode ser escrita como razão de dois números inteiros, não sendo, portanto, um número racional. Se a definição não admitisse que o número *pode ser colocado* na forma  $a/d$ , com  $a$  e  $d$  números inteiros e sendo  $d$  diferente de zero,  $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$  não teria sido “qualificado como um número racional”.
- d) Todo número inteiro é um número racional com denominador igual a 1.

### 1.2.2 Campo de ação

Nosso trabalho de pesquisa se direciona para a Educação Básica, no segmento Ensino Fundamental. A partir da lei nº 11114, de 16 de maio de 2005, publicada no Diário Oficial da União (DOU) de 17/05/2005, ficou determinada a duração de 9 anos para o Ensino Fundamental de no Brasil e, a partir de 2006, essa alteração se efetivou. A Lei das Diretrizes e Bases da Educação (LDB 9395/96) sofreu alteração em seus Artigos 29, 30, 32 e 87, através da Lei Ordinária 11274/2006, ampliando a duração do EF para 9 anos, recebendo a seguinte divisão:

- a) As séries iniciais do Ensino Fundamental, 1ª a 4ª Séries, passam a ser identificadas como Anos Iniciais, 1º ao 5º Ano; sendo que a criança ingressa no 1º Ano aos seis anos de idade e não mais aos sete anos;
- b) As séries finais do Ensino Fundamental, 5ª a 8ª Séries, compreendem o período do 6º ao 9º Ano, sendo que o 9º Ano fica concluído aos 14 anos de idade.

O grupo de trabalho, desta pesquisa, cujas atividades foram realizadas no primeiro bimestre de 2012, foi formado pelos alunos da 8ª Série A, B e C (9º Ano) do Ensino Fundamental, de uma escola da rede pública do interior paulista e pela professora que também é a pesquisadora deste trabalho. As 8ªs séries eram constituídas por alunos que completavam 14 ou 15 anos durante o ano letivo, sendo 31 alunos na 8ªA e na 8ªB e 33 alunos na 8ªC. As 8ªs séries têm cinco horas/aula de Matemática, por semana.

### 1.3 Os capítulos apresentados

No presente capítulo nos apresentamos, indicamos a metodologia empregada na pesquisa que é a Engenharia Didática, definimos o tema do trabalho, as frações ordinárias, e o campo de ação: os alunos das 8ª Séries A, B e C, de uma escola pública do interior do estado de São Paulo.

O capítulo 2, traz as Análises Prévias dispostas em três níveis: o nível epistemológico trata do saber em jogo sobre as Frações Ordinárias, a partir da trajetória das Frações Ordinárias na História da Matemática, as

contribuições de Dienes para o ensino-aprendizagem sobre as frações e discussões metodológicas de como se faz o estudo das frações nos dias atuais; o nível Didático nos mostra o funcionamento do sistema de ensino no que se refere ao estudo das frações ordinárias e para isso buscamos nos Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN, as suas indicações e orientações; o nível cognitivo delinea o público ao qual se dirige o ensino, no caso, alunos da série final do Ensino Fundamental.

No capítulo 3, encontramos a Concepção e Análise a Priori com o levantamento de alguns pontos que podem representar elementos dificultadores para o processo de ensino-aprendizagem e são apontadas as escolhas com as questões de controle amparadas na base teórica e nas orientações curriculares oficiais. Temos as escolhas globais com base teórica na Aprendizagem Significativa, nos Campos Conceituais, nas Situações Didáticas e ainda são apresentados alguns conceitos da Educação Matemática presentes na Engenharia Didática. Como escolha local, temos a proposta didática e apresentamos a escolha da atividade, assim como um breve estudo sobre Ladrilhamento ou Pavimentação.

No capítulo 4 levantamos as hipóteses da nossa pesquisa como indícios considerados a partir de indicativos observados durante a nossa prática pedagógica.

O capítulo 5 trata da experimentação da pesquisa. Apresenta a sequência didática elaborada em duas fases; a primeira fase tem uma sequência lúdica e integradora, com o uso do jogo Pentaminós e a segunda fase traz o Ladrilhamento como meio para obtenção das frações ordinárias; a seguir, relata o desenvolvimento das atividades e apresenta alguns trabalhos, produzidos pelos alunos, a título de ilustração do produto realizado.

A análise a posteriori, capítulo 6, confronta as hipóteses com o desenvolvimento das atividades e comenta a postura e desenvolvimento dos grupos, assim como a abrangência das questões elaboradas na sequência didática.

No capítulo 7, apresentamos a validação da ação didática realizada: da aprendizagem dos alunos e do professor, do ensino de frações ordinárias nas séries anteriores, da metodologia Engenharia Didática e são apontadas as considerações finais.

#### **1.4 Algumas considerações metodológicas**

O tratamento dado aos assuntos abordados durante este trabalho de pesquisa, que enfoca a Engenharia Didática como metodologia, não tem interesse em esgotar a questão num único momento, de forma compartimentada. Preferimos, sempre que possível e necessário, retomarmos a questão com maiores esclarecimentos sobre o assunto, durante o trabalho.

Ao apresentarmos as produções dos alunos, cuidamos para que contemplássemos os resultados obtidos pelos alunos das três turmas, 8ª Séries A, B e C com as quais desenvolvemos a sequência didática criada, de modo a apresentar, alternadamente, as produções representativas das atividades desenvolvidas.

Entendemos por sequência didática, ou sequência de atividades ou ainda unidades didáticas, como sendo as atividades sequenciadas, cuidadosamente elaboradas e desenvolvidas para tornar o processo de aprendizagem mais eficiente, conforme o que apresentamos sobre o assunto durante o nosso trabalho de pesquisa .

No nosso projeto de trabalho (APÊNDICE A), encontram-se as indicações, posturas e práticas metodológicas presentes na elaboração e desenvolvimento deste trabalho de pesquisa.

## 2 ANÁLISES PRÉVIAS

A partir das dificuldades apresentadas pelos estudantes, no que se refere às fragilidades educacionais manifestadas quando o assunto requer o conhecimento de frações, definimos o enfoque do nosso trabalho: as frações ordinárias, a quem chamamos simplesmente de frações, na maioria das vezes. Para Niven (1984, p. 30), “[...] um número racional (ou uma fração ordinária) é um número que pode ser colocado na forma  $a/d$ , onde  $a$  e  $d$  são inteiros e  $d$  não é zero”.

Niven (1984, p. 34) afirma que, os números racionais podem ser representados de outra forma, por meio das representações decimais, que podem ser finitas, por exemplo, tomemos 0,8625, ou infinitas tais como 0,333...; 0,454545... Além disso, esclarece (IBIDEM, p. 35) que “[...] qualquer fração decimal finita pode ser escrita na forma de fração ordinária com denominador igual a 10, 100 ou alguma potência de 10”.

Encontramos na Engenharia Didática o instrumento privilegiado para o estudo e a intervenção da problemática que se apresenta com um grau significativo de complexidade.

Planejamos que as Frações seriam alcançadas de modo indireto por meio de uma situação problematizadora que contextualizasse o seu estudo ao mesmo tempo em que, a partir dela, as dúvidas da turma fossem reveladas e, possivelmente, sanadas; quer seja nas interações do próprio grupo, quer pela intervenção do professor, quando os recursos dos alunos estivessem esgotados e dessa forma comprometendo o andamento das atividades.

### 2.1 Nível Epistemológico: o saber em jogo

Com a finalidade de tratarmos as características do saber em jogo, no caso do estudo das frações, buscamos nossos alicerces na História da Matemática, construindo a partir daí, um breve histórico que registrasse a

trajetória da construção desse conhecimento.

A História da Matemática traçada por Carl Benjamin Boyer (1974, p. 4) indica que a “noção de fração racional”, de um modo geral, não se relacionava com o sistema de numeração para números inteiros. As frações surgiram tardiamente, com indícios de que entre as tribos primitivas o uso das frações não se fez necessário. Seu emprego foi eliminado à medida que as questões relativas às necessidades quantitativas eram resolvidas tomando-se unidades tão pequenas quanto necessárias. Conforme Boyer “... as frações decimais foram essencialmente um produto da idade moderna da matemática, não do período primitivo” (IBIDEM, 1974, p. 4)

Segundo BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q.; “as frações fazem parte da matemática há quatro mil anos ou mais, porém a maneira como nós as escrevemos e como pensamos sobre elas é um desenvolvimento muito mais recente” (2010, p.88).

A palavra que usamos, isto é, fração, tem a mesma raiz de “fratura” e “fragmento” (IBIDEM). A princípio, quando se necessitava considerar partes de um inteiro, por exemplo, um objeto, este era, quebrado em pedaços menores e tais pedaços eram contados. Essa ideia evoluiu em sistemas primitivos de pesos e medidas, os quais utilizavam “unidades básicas de medidas menores” sempre que se desejava obter maior precisão na pesagem ou medição (IBIDEM).

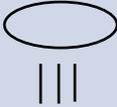
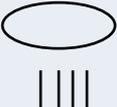
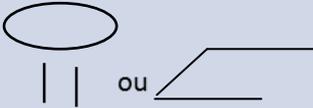
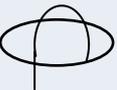
Conforme esses autores,

[...] em suas primeiras formas, o conceito de fração estava limitado principalmente a partes, o que nós hoje chamaríamos de frações unitárias, ou frações com numerador 1. Partes fracionárias mais gerais podem ser tratadas combinando frações unitárias; o que chamaríamos de três quintos era imaginado como a metade e um décimo (BERLINGHOFF; GOUVEA, 2010, p. 87)

Assim, a escrita das frações tornou-se simples uma vez que sendo o numerador 1, ao se destacar de algum modo o denominador para indicar que este representava a parte e não um número inteiro de coisas, a fração estaria caracterizada. Como exemplo, tomemos os egípcios que usavam

um ponto ou uma elipse sobre o numeral que representava o denominador (FIGURA 1).

FIGURA 1 – Representação egípcia: frações

fração	representação
$\frac{1}{3}$	
$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{2}$	
$\frac{2}{3}$	

Fonte: Roque e Pitombeira, 2012, p. 26-27

Segundo Berlinghoff e Gouvêa (2010, p. 88), para os egípcios, enquanto a escrita das frações, isto é, a escrita das partes, era facilmente representada, trabalhar com elas não apresentava a mesma praticidade; para exemplificarem tomam a situação: “representemos um quinto, dobremos um quinto e teremos dois quintos. Para que dois quintos sejam representados por meio de frações unitárias, como soma de partes, temos que um quinto é igual a um terço e um quinze avos”. Os egípcios listaram o dobro de várias partes deixando os resultados registrados em longas tabelas (IBIDEM).

De acordo com Tatiana Roque e João Bosco Pitombeira (2012, p. 26-27), os egípcios usavam frações que para nós equivalem às frações unitárias, da forma  $\frac{1}{n}$ , ficando para a fração  $\frac{2}{3}$  a única representação com numerador diferente de 1 e a fração  $\frac{1}{2}$  que recebia, às vezes, uma representação simbólica especial. As demais frações recebiam uma elipse, cujo significado é “parte”, em cima do número inteiro (FIGURA 1). Esse símbolo

oval exprime para os egípcios um sentido ordinal, “... é como se estivéssemos distribuindo algo por n pessoas e  $1/n$  é o quanto a última pessoa irá ganhar”.

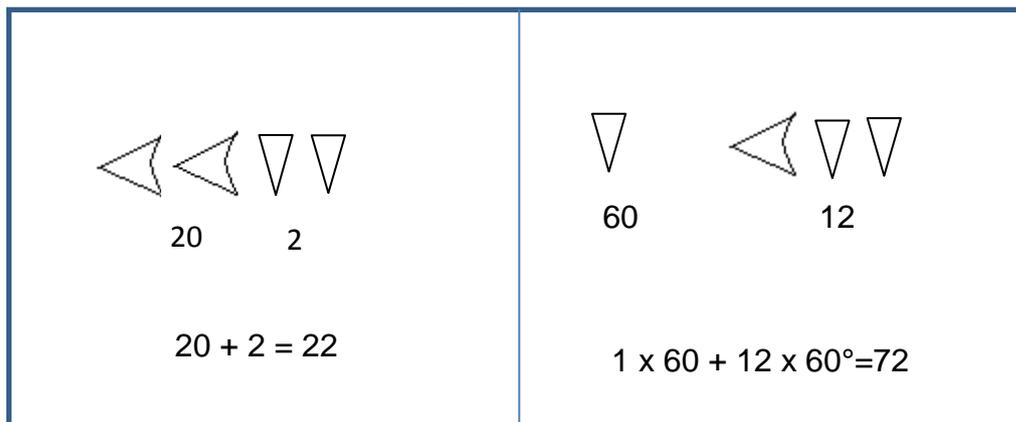
Pitombeira e Roque (2012, p. 27), com o Exemplo 1.6, ilustram as considerações tratadas: “Como repartir a quantidade de grãos contida em 5 sacos de feijão por oito pessoas”. E apontam a resolução da seguinte forma: tomemos 4 dos 5 sacos de feijão, e cada pessoa receberá a metade de cada saco. Assim, sobrarão um saco de feijão que deverá ser dividido pelas 8 pessoas. Cada pessoa receberá  $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ , o que indica o modo como a divisão foi realizada.

Os autores observam que esse resultado para a divisão realizada equivaleria a  $\frac{5}{8}$ , no nosso modo de representar frações; ressaltam que somente para fins de trabalhar com frações homogêneas, aquelas que apresentam o mesmo denominador, “cada meio saco será dividido em quatro partes” e comentam tratar-se de um procedimento artificial, cumprindo tão somente o papel de “justificar a nossa técnica de somar frações” (PITOMBEIRA; ROQUE, 2012, p. 27-28).

Berlinghoff e Gouvêa (2010, p. 66-67) explicam que na Mesopotâmia, os escribas trataram também as frações pelo sistema sexagesimal, uma vez que já utilizavam a base sessenta para o sistema de numeração dos inteiros. A representação dos inteiros de 1 a 59 era feita apenas pela combinação de dois símbolos, em forma de cunha: cada símbolo  representa dez e cada símbolo  representa um. A título de exemplificação, representamos os inteiros 22 e 72 (FIGURA 2).

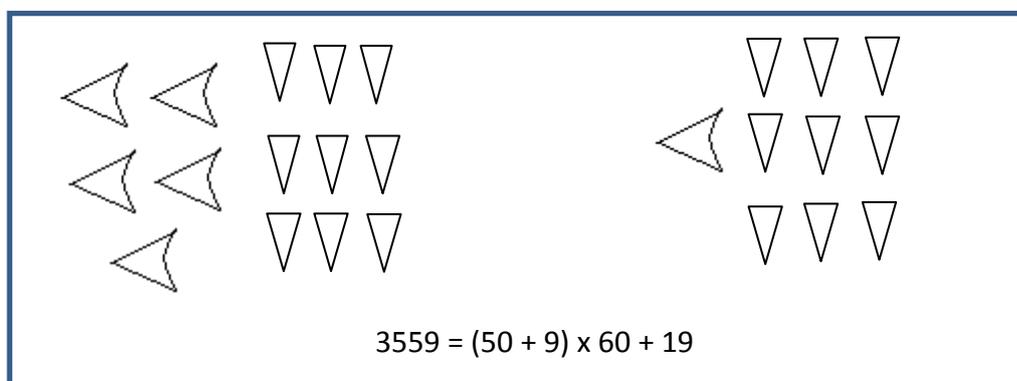
Os números de 60 a 3559, por exemplo 3559 (FIGURA 3), eram representados por dois grupos de números, separados apenas por um espaço e assim o grupo de números localizados à esquerda, tem os símbolos somados e o resultado é multiplicado por 60. Este resultado é somado ao valor encontrado para o grupo da direita, que também é conseguido com a soma dos valores dos símbolos (IBIDEM).

FIGURA 2 – Sistema de numeração para os inteiros – base sessenta



Fonte: montagem da própria autora

FIGURA 03 - Representação do número 3559, usada pelos escribas



Fonte: montagem da própria autora

Os números maiores ou iguais a 3600 eram obtidos com maior número de agrupamentos, os quais utilizavam combinações das duas formas básicas de cunha, dispostas mais à esquerda e separadas umas das outras por espaços. Cada agrupamento tem o seu resultado obtido pela soma dos valores representados pelos símbolos, e o valor encontrado multiplicado pela potência de base 60 apropriada, tais sejam:  $60^0$ ,  $60^1$ ,  $60^2$ ,  $60^3$ , e assim sucessivamente; de modo que o agrupamento mais à direita era multiplicado por  $60^0 = 1$ , o da segunda combinação a partir da direita, por  $60^1$ ; o da terceira combinação a partir da direita por  $60^2$ , e assim por diante.

De acordo Berlinghoff e Gouvêa (2010), as frações escritas pelos escribas no sistema sexagesimal tinham suas representações exatamente como as nossas representações na forma decimal. Assim como os escribas

escreveriam, com seus símbolos,  $72 = 1,12$  significando  $1 \times 60 + 12$ , escreveriam  $72,5 = 1,12;30$  significando  $1 \times 60 + 12 \times 60^0 + 30 \times 60^{-1}$ . Embora este fosse um sistema prático, os espaçamentos já deixavam dúvidas posicionais nas representações inteiras e, com relação às frações, os escribas usando as combinações com as duas cunhas e espaçamentos, não utilizavam um símbolo que sinalizasse o início da parte fracionária da representação e o entendimento do “real significado” do número representado, ficaria garantido pelo contexto apresentado (IBIDEM, p. 88).

As representações utilizadas tanto no sistema egípcio quanto no sistema babilônio foram difundidas para o povo grego e este passou-as para as culturas do Mediterrâneo. Os astrônomos gregos usaram em suas medidas as frações sexagesimais que aprenderam com os babilônios e daí tiveram origem os graus, minutos e segundos, que são utilizados como unidades de medida até os nossos dias pois, mesmo quando o sistema decimal foi adotado, o sistema sexagesimal permaneceu no trabalho técnico, para representar frações (IBIDEM).

O povo grego, em seu cotidiano, usava um sistema bem próximo ao sistema de partes dos egípcios. A história indica que, somar e multiplicar frações unitárias predominou na aritmética das frações desde os tempos da Grécia e de Roma, permanecendo até o início da Idade Média; e que “O *Liber Abacci* de Fibonacci, um texto bastante influente na matemática europeia do século XIII, fez uso extensivo das frações unitárias (...)” (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2010, p. 88).

Um outro sistema existente na antiguidade que se baseava na multiplicação de partes, ou seja, o procedimento exigia que se tomasse parte de parte (de parte), etc. Assim,  $\frac{2}{15} = \frac{1}{3}$  de  $\frac{2}{5}$ . Em manuscrito russo do século XVII, um nonagésimo sexto de alguma medida era indicada como “meio-meio-meio-meio-terço”, como subdivisões sucessivas:  $\frac{1}{2}$  de  $\frac{1}{2}$  de  $\frac{1}{2}$  de  $\frac{1}{2}$  de  $\frac{1}{2}$  de  $\frac{1}{3} = \frac{1}{96}$  (IBIDEM, p. 89).

A nossa forma de representar as frações contrasta com a representação por frações unitárias na medida que nos utilizamos de unidades

menores, isto é, de sub-unidades, que caibam um número inteiro de vezes naquilo que deve ser medido. Os chineses também pensavam as frações desta forma, porém não empregavam as frações impróprias, isto é, aquelas que têm o numerador maior do que o denominador; substituindo-as pelos números mistos, que são representações nas quais aparecem um número inteiro seguido de um número fracionário.

As regras usadas para operar com frações, aparecem no livro chinês *Nine Chapters on the Mathematical Art* (apud BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2010, p. 89), cuja data nos envia para cerca de 100 a.C. Este livro, apresenta uma regra para a soma de frações, que traduzida para a nossa terminologia, é similar a:

Cada numerador é multiplicado pelos denominadores das outras frações. Some-os como o dividendo, multiplique os denominadores como o divisor. Divida; se existir um resto, tome-o como numerador e tome o divisor como denominador. (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2010, p. 88).

Vejamos o que fica indicado, exemplificando:

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{23}{20} = 1 \frac{3}{20}$$

nesse caso,  $\frac{23}{20}$  é a fração imprópria enquanto  $1 \frac{3}{20}$  é o número misto a ela correspondente;

$$\frac{2}{5} + \frac{7}{10} = \frac{2 \cdot 10}{5 \cdot 10} + \frac{7 \cdot 5}{10 \cdot 5} = \frac{55}{50} = 1 \frac{5}{50}$$

nesse caso,  $\frac{55}{50}$  é a fração imprópria enquanto  $1 \frac{5}{50}$  é o número misto correspondente.

Na multiplicação e divisão de frações a regra indicada nesse livro *Nine Chapters on the Mathematical Art* também indica a “redução das frações ao mesmo denominador”, o que torna a divisão natural e evidente pois reduziu-se à divisão de números inteiros. Berlinghoff e Gouvêa (2010, p. 90) apontam o

exemplo, lembrando que ao escrever as frações com um denominador comum, a questão de dividir frações fica reduzida a uma divisão de números inteiros.

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} : \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15} : \frac{12}{15} = 10 : 12 = \frac{5}{6}$$

Berlinghoff e Gouvêa (2010, p. 90), informam que escritos hindus, do século XVII d.C., apresentavam um enfoque parecido ao utilizado pelos chineses, talvez aprendido com estes. Ressaltam uma particularidade na representação das frações pelos hindus que é a ausência do traço horizontal ou de qualquer outra sinalização que separasse um número do outro, caracterizando “o costume hindu de escrever frações como um número sobre o outro” o que foi acompanhado pela Europa alguns séculos depois.

Segundo Berlinghoff e Gouvêa (2010, p. 90), os termos “numerador (contador – quantos)” e “denominador (nomeador – de que tamanho)” que distinguem, convencionalmente, os números de cima e o de baixo da fração, foi usado inicialmente pelos escritores da Idade Média. No século XII, os árabes inseriram a barra horizontal para separar o numerador do denominador e a partir daí, a “barra horizontal” aparece na maioria dos manuscritos em latim; porém, com o início da imprensa (final do século XV e início do século XVI) a “barra horizontal” deixou de aparecer nas representações fracionárias, por dificuldades de impressão. Gradativamente, voltou a ser usada nos séculos XVI e XVII. A representação com a barra inclinada, embora mais fácil de imprimir, não apareceu antes de meados do século XIX.

A forma como as frações eram escritas afetou a aritmética que se desenvolvia. Por exemplo, a regra “inverter e multiplicar” para dividir frações foi usada pelo matemático hindu Mahāvīra cerca de 850 d.C. entretanto, ela não era parte da aritmética ocidental (europeia) até o século XVI, provavelmente porque não fazia sentido a menos que as frações, incluindo as frações maiores que 1, fossem rotineiramente escritas como um número sobre outro (BERLINGHOFF; GOUVÊA; 2010, p. 90).

Segundo esses autores, o *termo por cento* para designar frações com denominador cem, foi introduzido pela aritmética comercial dos séculos XV e XVI, tempo em que as taxas de juros eram comumente citadas em centésimos. Os Estados Unidos reforçaram estes costumes por apresentar seu

sistema monetário alicerçado em dólares e em centésimos de dólares, isto é, os centavos. Isto conferiu à porcentagem a continuidade de seu uso e ainda, ficou caracterizada como um “ramo especial da aritmética”. O símbolo que representa a porcentagem sofreu uma evolução ao longo de alguns séculos. Por volta de 1425, era escrito “por 100” como uma “abreviação à mão”, depois por volta de 1650 passou a ser escrito “por  $\frac{0}{0}$ ”, que a seguir ficou somente  $\frac{0}{0}$ , passando finalmente para o símbolo “%”, assim usado até os nossos dias (IBIDEM, 2010, p. 90-91).

As frações decimais ocorreram cedo na matemática chinesa e árabe, mas foi no século XVI que, na Europa, surgem os decimais como ferramenta computacional para frações. A popularização se deu pelo livro de Simon Stevin, *The Thenth*, 1585. Neste livro, Stevin mostrou que as operações com decimais são muito mais simples pois utilizam a aritmética de números inteiros. Sendo Stevin um homem prático, escreveu um livro prático, em que as questões com infinitos decimais eram evitadas e assim,  $\frac{1}{3}$  tem uma aproximação, tão melhor quanto se queira, como por exemplo em 0,333 (IBIDEM, 2010, p. 91).

Segundo Berlinghoff e Gouvêa (2012, p. 91), o uso de frações decimais por cientistas como Johannes Kepler e John Napier levou à ascensão a aritmética decimal. Apenas o elemento de separação da parte inteira da parte fracionária, que passou por várias mudanças no decorrer da história, ainda hoje oscila entre o uso do ponto, pela maioria dos países de língua inglesa, e o uso da vírgula, pela maioria das outras nações europeias e pelo Brasil.

Berlinghoff e Gouvêa (2010, p. 92), encerram o estudo do capítulo *Números quebrados* tecendo algumas observações:

Quando as calculadoras foram introduzidas em meados do século XX, parecia que os decimais tinham vencido permanentemente. Mas o velho sistema de numeradores e denominadores ainda tem muitas vantagens, tanto computacionais quanto teóricas, e se mostrou extraordinariamente resiliente (IBIDEM).

Os autores afirmam que, na atualidade, calculadoras e programas computacionais trabalham com frações comuns ou ordinárias (IMENES e

LELLIS, 2000, p. 140) . Ressaltam que no comércio, temos as porcentagens, nas receitas de culinária são empregados números mistos e frações comuns, e em medidas científicas encontramos os decimais. Assim, concluem: “Essas representações múltiplas são uma questão de conveniência e também um lembrete da rica história por trás das ideias que usamos todos os dias” (IBIDEM, 2010, p. 92).

Prosseguindo a trajetória construída pela matemática, encontramos destaque no final do século XIX, quando Georg Cantor criou a Teoria dos Conjuntos. Howard Eves (2011, p. 659) aponta a *teoria dos conjuntos*, como algo que despertou um interesse generalizado muito grande, causando impacto em, possivelmente, todos os campos da matemática. Eves ressalta que a maior importância da teoria dos conjuntos reside na “oportunidade que ela abriu para progressos com que sequer se sonhava há 50 anos” e, para finalizar, Eves menciona entre tais progressos a unificação considerável da matemática tradicional e, a criação de “muita matemática nova em ritmo acelerado”.

Segundo Eves (2011, p. 662) Cantor provou também a enumerabilidade de dois importantes conjuntos, dentre estes, o conjunto dos números racionais cuja demonstração, reproduzida por Eves, encontra-se às páginas 662-664, nesta mesma obra. Eves cita também a propriedade da densidade dos números racionais, dando para essa propriedade o significado de que “entre dois números racionais quaisquer existem outros números racionais – na verdade, infinitos”.

### 2.1.1 A influência de Dienes no ensino-aprendizagem das Frações.

Devido à influência exercida pelos trabalhos do educador Dienes no contexto da matemática moderna, na década de 60 (Brousseau, citado por PAIS, L. C.; 2008, p. 97), fazemos um estudo da publicação do próprio Dienes que se intitula *Frações*, publicada em 1971. Nesta publicação, Dienes apresenta um referencial metodológico para o ensino de frações.

Para Dienes (1971), os assuntos no que se referem a frações e suas propriedades, não devem ser abordados diretamente sem antes tornar

familiar aos estudantes a ideia de que a quantidade que servirá como unidade pode ser tomada arbitrariamente. Outro aspecto considerado relevante para Dienes é deixar claro para os alunos, por meio de experimentações diversificadas, que diferentes objetos, ou conjuntos de objetos, requerem diferentes espécies de medidas (p. 1).

Desde que o caráter arbitrário da unidade tenha sido assimilado e aceito pela criança, a passagem de uma unidade para outra não deverá, neste estágio, oferecer qualquer dificuldade. Isto deveria ser, em verdade, parte essencial no desenvolvimento deste estudo (DIENES, 1971, p.2)

Ao perguntar “O que é uma fração?” o autor explica que existem duas maneiras de considerá-la: pode ser considerada como “estados” e como “operadores”. Por exemplo, “dois terços” pode ser dois terços de qualquer coisa e isto lhe confere a situação de estado de coisas; mas por outro lado, pode indicar uma ordem, isto é, tomar dois terços de alguma coisa. A ordem para tomar dois terços “é a ordem para executar duas operações sucessivas”, em que a primeira é a divisão por três e a segunda é a multiplicação por dois (IBIDEM, p. 2).

Dienes (1971, p. 2-3) esclarece ser óbvio que ao tomarmos qualquer espécie de estado para sobre ele operar por meio de um conjunto de ordens, a cada vez, podemos obter um estado diferente. A partir daí, exemplifica com a situação: numa classe com 36 crianças (estado-unidade) ao dividirmos o “estado-unidade” em três grupos, a divisão nos forneceria um estado de doze crianças. Esse estado referente a um conjunto de doze crianças pode ser multiplicado por dois e para isto, devemos tomar dois conjuntos equivalentes (equipolentes) e assim, obtemos um estado de vinte e quatro crianças.

Est.	Oper.	Est.	Oper.	Estado
36	: 3	12	× 2	24

O autor considera que ao descrever a presença de 24 crianças de uma classe composta por 36 crianças, com a frase: “dois terços da classe

estão presentes”; estamos indicando um “estado de coisas”, que no caso é conhecido como o “estado de dois terços”. Este estado de coisas pode continuar recebendo alterações, à medida que continuarmos a operar sobre este estado. Declara a sua preferência por se referir a um “estado-unidade” a falar de “um todo” e conclui: “exprime-se, assim, de modo mais incisivo, a relatividade das frações” (DIENES, 1971, p. 3).

Dienes entende as frações como sucessões de multiplicações e divisões, a quem chama de “cadeias de multiplicações e divisões”. Apresentamos, a seguir, cadeias de multiplicações e divisões, a título de ilustração (1971, p. 4-6).

Estado	Operador	Estado	Operador	Estado
36	: 3	12	× 2	24

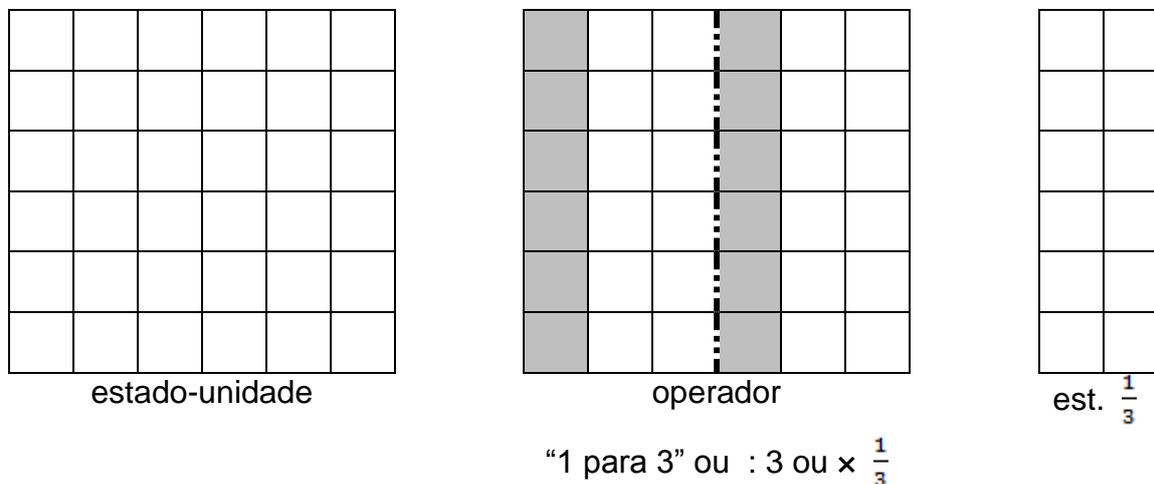
Estado	Operador	Estado	Operador	Estado
36	× 2	72	: 3	24

Dienes dá continuidade às suas orientações metodológicas para o ensino de frações: se partirmos de 1 ao invés de 36, para caracterizarmos o “estado-unidade” e aplicarmos o operador “divida por 3”, estaremos introduzindo a notação  $\frac{1}{3}$ . Em seguida, multiplicando o novo estado por dois, o próximo estado será de  $\frac{2}{3}$ .

Estado	Operador	Estado	Operador	Estado
1	× 2	2	: 3	$\frac{2}{3}$

O autor indica ser conveniente, “substituir uma vez ou outra o estado 'um' pelo seu equivalente particular”, isto é, 36 alunos. Representando o

estado-unidade por 36 quadrados, vamos obter os quadrados que representam o estado  $\frac{1}{3}$ , isto é, a cada três quadrados do estado-unidade, um deles será tomado (DIENES, 1971, p. 5).



Ao abordar “frações equivalentes”, Dienes salienta a necessidade do entendimento de que uma multiplicação por um número, seguida de uma divisão pelo mesmo número é equivalente à multiplicação, ou à divisão por 1, sendo este um “operador neutro”. Esses pares de operadores são inversos um do outro e o efeito final dessas operações com os operadores inversos é não apresentar modificação no estado inicial (1971, p. 7).

Segundo o autor, ao multiplicamos frações substituímos dois operadores por um único. No caso, em uma cadeia de multiplicações e divisões, substituímos todas as multiplicações por uma única multiplicação e todas as divisões por uma única divisão. Temos que isso é sempre possível uma vez que a ordem em que se efetuam as multiplicações e as divisões não altera o resultado; além disso, temos que as multiplicações sempre se combinam originando outras multiplicações, o mesmo ocorrendo com as divisões. Dienes (1971, p. 12-14) exemplifica como segue:

Est.	Oper.	Est.	Oper.	Est.	Oper.	Est.	Oper.	Est.
48	: 2	24	$\times 3$	72	: 12	6	$\times 5$	30

Ou, alterando a ordem de operadores:

Est.	Oper.	Est.	Oper.	Est.	Oper.	Est.	Oper.	Est.
48	: 2	24	: 12	2	× 3	6	× 5	30

ou, encurtando a cadeia:

Est.	Oper.	Est.	Oper.	Est.
48	: 24	2	× 15	30

Assim, pela observação do ocorrido, constatamos que os multiplicadores (que são os numeradores das frações) foram multiplicados entre si o mesmo acontecendo com os divisores (que são os denominadores das frações); o que nos leva ao procedimento utilizado para a multiplicação de frações.

Est.	Oper.	Est.	Oper.	Est.	que	Est.	Oper.	Est.
48	× $\frac{3}{2}$	72	× $\frac{5}{12}$	30	equivale	48	× $\frac{15}{24}$	30
					à			
					cadeia			

Com a introdução dos “operadores fracionários” como “operadores combinados”, sendo estes uma sucessão de multiplicações e divisões ou de divisões e multiplicações, obtemos a possibilidade de procurarmos outros operadores combinados que nos permitam “restabelecer o estado de coisas em que se encontrava nosso estado de origem, antes de começarmos a operar. Isto significa procurar o operador inverso” (IBIDEM, p. 20).

Dienes (1971, p. 21) afirma que ao calcularmos três meios de quarenta e oito, obtemos setenta e dois que representa o estado três meios do

estado-unidade. Para retomarmos ao estado-unidade, ou seja, ao estado um depois de termos obtido o estado de três meios, precisamos obter o operador neutro, ou seja, o operador três meios deverá ser seguido pelo operador dois terços, que equivale ao operador “multiplique por um”. Temos assim o exemplo dado por Dienes (IBIDEM):

Est.	Oper.	Est.
1	$\times \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$

e

Est.	Oper.	Est.
$\frac{3}{2}$	$\times \frac{2}{3}$	1

ou ainda, considerando o estado-unidade 48, exemplificamos:

Est.	Oper.	Est.
48	$\times \frac{3}{2}$	72

e

Est.	Oper.	Est.
72	$\times \frac{2}{3}$	48

Dienes recomenda que as crianças sejam familiarizadas com a ideia de inverso por meio da realização de diversos exercícios semelhantes, conceitua o inverso de um operador fracionário como aquele em que se substitui a multiplicação por uma divisão e a divisão por uma multiplicação e adverte que o emprego de expressões usadas com o intuito de facilitar o procedimento, tais como “basta virar a fração de cabeça para baixo”, não levarão à compreensão matemática desejável. O autor ressalta que a criança obterá a compreensão desejável por meio da familiarização da ideia de inverso (1971, p. 22).

Para Dienes, ao introduzirmos a ideia dos inversos dos operadores fracionários a questão da divisão está praticamente resolvida, uma vez que, para o autor, tratar a divisão como a operação inversa da multiplicação é bem mais simples do que procurar um operador que transforme um operador dado em outro operador esperado. Dienes exemplifica supondo uma situação em que temos um estado fracionário de dois terços e, em

seguida, propõe a seguinte questão “Que deveremos fazer a esse estado para obter um estado fracionário de cinco sétimos?” (1971, p. 23).

A partir da questão proposta, o autor tece as considerações:

Trata-se do problema que é normalmente expresso por cinco sétimos divididos por dois terços. Para propor a questão de maneira incisiva diremos: “quantos” dois terços “fazem” cinco sétimos? O “quantos” indaga que operador será necessário aplicar a dois terços, a fim de obter os cinco sétimos [...]

[...] Poderíamos, de fato, perguntar: se tivéssemos um operador dois terços, que outro operador deveríamos usar, ao mesmo tempo, para torná-lo equivalente a um operador cinco sétimos? Isto é um pouco mais complicado e alguns professores poderiam considerar mais prudente iniciar pela primeira forma de interpretação. Se, porém, parecer-lhes melhor a segunda maneira de abordar o problema, a eles compete decidir. Não existe regra de ouro sobre o que se deve fazer em primeiro lugar (DIENES, 1971, p. 23).

A solução do problema será obtida por meio da sucessão de quatro operadores, sendo que dois destes operadores neutralizam o operador dois terços, como segue (IBIDEM, p. 24-25).

Estado	Cadeia-operador				Estado
$\frac{2}{3}$	: 2	× 5	× 3	: 7	$\frac{5}{7}$

Analisando o que aconteceu ao resolvermos a situação, temos:

Estado	Cadeia-operador		Estado
$\frac{2}{3}$	× $\frac{3}{2}$	× $\frac{5}{7}$	$\frac{5}{7}$

De modo resumido, escrevemos:

Estado	Operador	Estado
$\frac{2}{3}$	$\frac{15}{14}$	$\frac{5}{7}$

Com base no exposto, constatamos que aplicando o operador fracionário quinze catorze avos, que é obtido pela multiplicação de três meios por cinco sétimos, resolvemos a questão. O autor observa ainda que esta é a regra: “inverta e multiplique” e que “na maioria dos casos, costuma-se reduzir a informação a esta regra, sem explicar sequer o que significa dividir uma fração por outra fração” (DIENES, 1971, p. 25).

A seguir, Dienes trata a desigualdade de frações e a comparação entre elas de forma prática. As frações são os operadores fracionários que serão aplicados a um estado-unidade favorável, isto é, o estado-unidade deve ser um número tal que ao ser multiplicado pelos operadores fracionários tenhamos um número definido de objetos. A comparação dos resultados obtidos permitirá estabelecer a relação de desigualdade entre as frações.

No caso de dois terços e cinco sétimos, por exemplo, poderíamos tomar um grupo de vinte e uma crianças como estado-unidade. [...] Tomar dois terços de vinte e um traria como resultado um estado de catorze crianças. Seriam dois terços do estado unidade. Tomar cinco sétimos de um estado-unidade de vinte e uma crianças daria como resultado quinze crianças, que vem a ser mais que catorze crianças. [...] Portanto, dois terços valem menos que cinco sétimos, ou seja, simbolicamente,  $\frac{2}{3} < \frac{5}{7}$  (DIENES, 1971, p. 26).

A partir do que foi exposto Dienes indica que podemos levar ao reconhecimento que uma quantidade é maior que outra, de forma prática, encontrando um estado-unidade adequado, ou seja, um estado-unidade que possa ser dividido pelos denominadores das frações, sem deixar restos. Isso, de acordo com o autor, leva os estudantes ao entendimento de que é sempre possível realizar as multiplicações e que o mesmo não ocorre com as divisões. Exercitar os alunos quanto à busca do número favorável que sirva de estado-unidade, configura o preparo do caminho para o procedimento conhecido como

“determinação do denominador comum”, que nada mais é do que “determinar modos equivalentes de exprimir os operadores fracionários, para que se tornem mais facilmente comparáveis” (IBIDEM, p. 26-28).

Dienes (1971, p. 30-35) considera que é a partir do que foi visto até então, e advertindo quanto à obrigatoriedade de que tudo o que foi ensinado deve ter sido acompanhado com generosa quantidade de exercícios concretos, reforçando a importância da “experiência pessoal, por parte de cada aluno” e esperando que os alunos tenham compreendido a equivalência de frações indica a abordagem da adição e subtração de frações.

De acordo com Dienes a adição de frações é uma noção muito mais complexa se comparada à noção de multiplicação de frações e que a necessidade de reduzir frações ao mesmo denominador faz surgir uma nova dificuldade. Para o autor, após ter sido trabalhada a adição de frações, a subtração não deverá apresentar dificuldades, porém ressalta que antes de levar as crianças a subtrair frações, torna-se indispensável que cada criança seja capaz de reconhecer qual dentre duas frações quaisquer é a maior.

A partir de considerações acerca do tópico “emprego de recursos” Dienes (1971, p. 36) indica que

Devemos reconhecer que abstrações de ordem bastante elevada entram em jogo no estudo das frações. Crianças pequenas não chegarão com facilidade a tais abstrações, a partir de outras que já dominam. A construção de conceitos abstratos é uma atividade que exige maturidade, para a qual as crianças terão necessidade de muito treino, mais tarde. Nas fases elementares, entretanto, as crianças, em conjunto, aprenderão com muito mais proveito, a partir de uma profusão de experiências concretas, tão variadas e tão numerosas quanto for possível oferecer-lhes na escola. (IBIDEM, 1971, p.36)

Dienes (1971, p. 36-55) aponta para as seguintes abordagens envolvendo frações: proporções e escalas, frações e razões, combinações de razões, porcentagem, desenhos de escalas e mapas, exercícios sucessivos de ampliações ou de reduções, emprego de potências e frações decimais. Conclui o trabalho publicando externando o desejo de que, primeiramente, o estudo das frações deve ser visto “como um estudo unificado”, aparecendo como parte integrante do “estudo do corpo da matemática”, além disso, que as ideias na

totalidade sejam formadas “a partir de experiências pessoais e concretas de cada criança” e, que a generalidade tenha sido alcançada dispensando a necessidade de ensinar às crianças formas particulares capazes de resolverem determinados exercícios.

### 2.1.2 O estudo de frações em tempos atuais

Atualmente, temos indicações para o estudo de frações que se apresentam como publicações de resultados de estudos e pesquisas, de vários estudiosos preocupados com o ensino aprendizagem de Matemática, na forma de Didática da Matemática, Metodologia para o Ensino de Matemática e Educação Matemática. De modo geral, estes trabalhos se direcionam para o ensino-aprendizagem de matemática nas séries iniciais do ensino fundamental. No caso das frações, observamos que tais orientações metodológicas se repetem nas atividades apresentadas nos livros didáticos, respeitando as diferenças próprias das linhas e convicções pedagógicas inerentes aos respectivos autores.

Marília Toledo e Mauro Toledo (1997, p.168) aconselham que o início do trabalho com números racionais seja feito a partir da 3ª série (4º ano) do Ensino Fundamental. Justificam esta indicação por meio das teorias de Piaget, as quais apontam a necessidade da criança ser capaz de conservar quantidades, discretas e contínuas, para construir o conceito de fração e assim, não obtermos resultados desprovidos de significado, meramente decorados.

Os autores ressaltam a importância que a criança tem de manipular materiais variados no início do trabalho com números racionais, ao invés de ficar tão somente colorindo figuras; indicam também ser produtivo iniciar o trabalho com grandeza contínua, pois neste caso o resultado será somente um número fracionário. Caso o trabalho seja feito com grandezas de natureza discreta termos dois resultados, a saber, o número fracionário que indica “o tamanho de cada porção obtida” e ainda um número natural que quantifica o número de elementos de cada uma destas porções.

Consideram tipos de experiências que a criança poderá realizar:

- Repartir quantidades (discretas ou contínuas) em porções iguais, buscando seus próprios caminhos;
- Verificar se as porções obtidas são realmente iguais, por meio de comparação das quantidades, no caso de grandezas de natureza discreta, ou superposição de partes, no caso de grandezas de natureza contínua;
- Conferir se a partição está completa, recompondo a coleção ou figura inicial. (TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro; 1997, p. 168)

Os autores oferecem uma abordagem metodológica, com sugestões diversificadas, de atividades e problemas, exemplos, estudos teóricos, contemplando o uso de materiais variados, para o desenvolvimento do estudo de números racionais, inclusive das frações ordinárias. Além disso, ilustram o assunto com textos pertinentes ao tema e aplicações dos números racionais (IBIDEM,1997, p.168-219).

As indicações metodológicas apontadas pelo PCN (1998, p. 102-103) recomendam diversos contextos nos quais os números racionais assumem diferentes significados: relação parte/todo, divisão e razão.

Na relação parte-todo, dividimos o todo em partes equivalentes e a fração indica a relação existente entre um certo número de partes e o total de partes em que o todo ou inteiro foi dividido; um exemplo simples para esse significado da fração é tomar uma barra de chocolate, dividi-la em 3 partes iguais e consumir duas das três partes em que o inteiro, ou seja, o chocolate foi dividido; representando dois terços do chocolate.

Uma situação considerada bem diferente, e que também representa dois terços, é tomar dois chocolates e dividi-los em três partes iguais; neste caso a fração assume o significado de divisão ou quociente. Um outro significado para a fração dois terços é usá-la como índice comparativo entre duas grandezas, no caso específico de  $\frac{2}{3}$ , temos duas de cada três partes e nesse sentido, a fração é interpretada como razão.

Os PCN atribuem um quarto significado para o número racional, o de operador, ou seja, desempenhar o papel de transformador, na medida em que “atua sobre uma situação e a modifica” (IBIDEM). Esse significado para os

números racionais está presente em situações nas quais devemos encontrar um número que ao ser multiplicado por outro fornece como produto um número pré-determinado. Por exemplo, por qual número devemos multiplicar sete para obtermos o número três. Assim, temos:  $7 \times \frac{3}{7} = 3$  e o número pedido é uma fração:  $\frac{2}{3}$ .

Nunes et al (2009) indicam cinco significados para as frações acrescentando aos significados já indicados no PCN (1998) a interpretação de medida ou número para as frações, isto é, parte-todo, quociente ou divisão, razão, operador e medida ou número.

## 2.2 Nível Didático: funcionamento do sistema de ensino

Para falarmos do sistema de ensino, analisamos as indicações dos Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN, para o 1º e 2º Ciclos do Ensino Fundamental (BRASIL, 2001, p.54-55), Matemática, com relação aos Blocos de Conteúdos, Números e Operações, que apontam:

Ao longo do ensino fundamental os conhecimentos numéricos são construídos e assimilados pelos alunos num processo dialético, em que intervêm como instrumentos eficazes para resolver determinados problemas e como objetos que serão estudados, considerando-se suas propriedades, relações e o modo como se figuram historicamente.

Os mesmos PCN (Brasil, 2001) predizem que nesse processo, o aluno entenderá que à medida que a humanidade enfrentou diferentes problemas, com os quais foi se encontrando ao longo do tempo, diversas categorias numéricas se instalaram. Vai além ao projetar que “à medida que se deparar com situações-problema – envolvendo adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação – ele irá ampliando seu conceito de número” (BRASIL, 2001, p. 54-55).

No que diz respeito às operações, os PCN (2001, p.55) orientam que o trabalho deve ser desenvolvido, concentrando-se “na compreensão dos diferentes significados de cada uma delas”, nas relações que existem entre as mesmas e no estudo reflexivo dos diferentes tipos de cálculo: exato, aproximado, mental e escrito (IBIDEM).

Especificamente, no que diz respeito ao estudo das frações, realizamos um acompanhamento dos objetivos traçados e dos conteúdos propostos para o ensino de matemática (PCN, 2001), nesses dois primeiros ciclos, do Ensino Fundamental: 1º ciclo (1ª e 2ª séries/1º ao 3º anos) e 2º ciclo (3ª e 4ª Séries/4º e 5º anos).

No 1º ciclo, os objetivos contemplam o diálogo dos alunos com números naturais na construção de significado, a partir de diferentes usos no contexto social, com a interpretação e produção de escritas numéricas e com a resolução de problemas, no intuito de construir os significados das operações fundamentais. É no 2º ciclo, que temos entre os objetivos e os conteúdos conceituais e procedimentais os Números Naturais, Sistema de Numeração Decimal e Números Racionais.

Destacamos a seguir, entre os conteúdos conceituais e procedimentais, a indicação dos itens que se referem ao ensino dos números racionais, enfatizando entre eles os números fracionários, na 1ª a 4ª séries (1º ao 5º Ano) do Ensino Fundamental (BRASIL, 2001, p.79 - 95) – Anexo A.

Ao direcionarmos o nosso olhar para as séries finais do EF, observamos que ao mesmo tempo em que a elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais, 5ª a 8ª Séries/6º a 9º Anos do EF (BRASIL, 1998), considera a necessidade de estabelecer bases curriculares comuns ao processo educativo em todas as regiões brasileiras, preocupa-se, igualmente, em respeitar as peculiaridades regionais, culturais e políticas existentes no país. Reforça as preocupações com os regionalismos, quando destaca:

O detalhamento dos conteúdos por ciclos, que será feito na sequência deste documento, não implica sua imediata transposição para a prática da sala de aula. É fundamental ressaltar que, ao serem reinterpretados regionalmente (nos estados e municípios) e localmente (nas unidades escolares), os conteúdos, além de incorporar elementos específicos de cada realidade, serão organizados de forma articulada e integrada ao projeto educacional de cada escola. (Ibidem, p. 54)

Ao propor que a seleção de conteúdos deve atentar para as “formas e saberes culturais, cuja assimilação é essencial para que produza novos conhecimentos” (BRASIL, 1998, p. 49), dimensiona os conteúdos não só

em conceitos (conteúdos conceituais), mas também em procedimentos (conteúdos procedimentais) e atitudes (conteúdos atitudinais).

Temos que os conteúdos conceituais envolvem competências, isto é, o saber; os conteúdos procedimentais mobilizam as habilidades, é o saber fazer e, igualmente importante, os conteúdos atitudinais relacionam-se ao componente afetivo atitude e são considerados fundamentais no processo, por tratar da predisposição, do interesse, da motivação, da perseverança, da valorização do trabalho coletivo, da colaboração na resolução de situações-problema: interpretação da situação problema, planejamento de estratégias de resolução e a contribuição na validação do resultado obtido; dos alunos no processo ensino-aprendizagem. (IBIDEM, p. 49-50)

No PCN para o ensino de Matemática no 3º Ciclo, 5ª e 6ª Séries, e no 4º Ciclo, 7ª e 8ª Séries (BRASIL, 1998), o estudo dos números e das operações é tratado no campo da Aritmética e da Álgebra, tal que os números são estudados, ora “como instrumento eficaz para resolver determinados problemas”, ora “como objeto de estudo em si mesmo...” (IBIDEM, p. 50)

Nesse processo, o aluno perceberá a existência de diversos tipos de números (números naturais, negativos, racionais e irracionais) bem como de seus diferentes significados, à medida que deparar com situações-problema envolvendo operações ou medidas de grandezas, como também ao estudar algumas das questões que compõem a história do desenvolvimento do conhecimento matemático.

Ao tratarem dos conteúdos apresentados para o ensino de Matemática no terceiro ciclo, os PCN (BRASIL, 1998, p. 66), de Matemática, para os anos finais do Ensino Fundamental, isto é, 5ª a 8ª Séries / 6º ao 9º anos, salientam a importância do estudo dos números racionais, nas suas representações fracionária e decimal. Destacamos, entre os conceitos e procedimentos apresentados para o currículo de matemática, para o 3º ciclo do EF, em números e operações; aqueles que indicam os números racionais (ANEXO B).

No que se referem ao quarto ciclo (7ª e 8ª Séries/ 8º e 9º Anos do EF), os PCN (BRASIL, 1998, p. 79 - 93) indicam a necessidade de se considerar outros números que não os números racionais, pois estes são

insuficientes para a resolução de algumas situações. É importante observarmos que sendo os números irracionais um número decimal infinito e não periódico, podem ser aproximados, o quanto se queira, numa representação racional, usando para isso de arredondamento. É próprio abordar a questão do arredondamento e suas consequências nos resultados das operações numéricas.

Acompanhando os conteúdos conceituais e procedimentais relativos ao quarto ciclo do Ensino Fundamental, constatamos a presença subjacente dos números racionais, deixando de ser objeto de estudo em si mesmo, para assumir o papel de instrumento para novas situações de aprendizagem. Em linhas gerais, podemos acompanhar os conteúdos previstos no processo ensino-aprendizagem deste ciclo, para o bloco de conteúdos números e operações (ANEXO C).

Temos a orientação dos PCN (1998) para que a Aritmética não seja abandonada, como usualmente ocorre. Novas situações-problema devem valorizar tanto as situações aritméticas quanto as algébricas. Por sua vez o trabalho com a Álgebra possibilita conexões com os demais blocos, a saber: espaço e forma, grandezas e medidas e tratamento das informações.

Assim como na Álgebra, o campo de estudos para Grandezas e Medidas articula diversos conteúdos matemáticos ao permitir a consolidação e ampliação quanto à noção de número e ao possibilitar a aplicação de noções geométricas. As medidas tanto se referem a fenômenos físicos e sociais como abrange a memória do computador. Ampliando a noção de medida, surgem grandezas que são obtidas pela razão de duas outras, como por exemplo, a densidade demográfica; ou o produto de duas grandezas tal como ocorre com a energia elétrica (IBIDEM).

Os números racionais também estão presentes no campo destinado ao Tratamento da Informação. Neste ciclo, os alunos já apresentam condições para intensificar as pesquisas e os temas transversais (Saúde, Meio Ambiente, Orientação Sexual, Trabalho e Consumo) oferecem a contextualização necessária para que os conceitos e procedimentos estatísticos ganhem significado (IBIDEM).

### 2.3 Nível Cognitivo: o público ao qual se dirige o ensino

Segundo o documento Saeb 2001: *Novas perspectivas* (BRASIL, 2002), enfrentar uma situação implica colocar em ação “vários recursos cognitivos” e completa citando novamente Perrenoud (1993) para afirmar: “quase toda ação mobiliza alguns conhecimentos, algumas vezes elementares e esparsos, outras vezes complexos e organizados em rede”. E conclui:

Assim, pode-se entender por competências cognitivas as diferentes modalidades estruturais da inteligência que compreendem determinadas operações que o sujeito utiliza para estabelecer relações com e entre os objetos físicos, conceitos, situações, fenômenos e pessoas.

As habilidades instrumentais referem-se especificamente ao plano do saber fazer e decorrem, diretamente, do nível estrutural das competências já adquiridas e que se transformam em habilidades. (2002, p. 11)

Sabemos que os alunos, de um modo geral, demonstram pouco domínio sobre o assunto frações, conforme resultados obtidos em situações de sala de aula e em avaliações oficiais; quer seja em âmbito nacional, quer seja em âmbito estadual. Assim, conversamos de modo informal, com os professores que atuam nos anos iniciais e finais do ensino fundamental com o intuito de conhecermos como e em que aprofundamento os assuntos envolvidos são abordados anteriormente.

Os professores, com os quais conversamos durante esta pesquisa, contam as suas experiências de sala de aula, relatando que em suas práticas, as frações são trabalhadas com a ideia de metade e em poucas situações utilizam a terça ou a quarta parte do inteiro. Pudemos observar, durante a pesquisa, que alguns professores dão ênfase ao estudo das frações, nos 4º e 5º Anos, no sentido de representá-las; desenvolvendo as atividades e exercícios propostos nos livros didáticos.

Outras informações colhidas, durante a nossa pesquisa, por meio das conversas informais com os professores colaboradores, as quais consideramos importantes no sentido de colaborar para projetarmos o nível cognitivo deste trabalho, são:

- a) as atividades, relativas a frações, mais comuns nos livros didáticos são as de representação de frações a partir de figuras poligonais tratadas individualmente. Cada uma delas é repartida em certo número de partes iguais em área, sendo que algumas destas partes são hachuradas e a partir de tais figuras, espera-se que os alunos registrem a fração que as partes destacadas representam;
- b) Menos trabalhada pelos professores é a atividade de representação de frações que alguns livros didáticos trazem, numa situação de contextualização. Trata-se de uma questão, considerada situação-problema, em que um pomar, exemplificando a situação, é representado por uma região quadriculada, geralmente na forma retangular, e com uma legenda especificam-se partes do inteiro destinadas a diversas culturas ou plantios. Os alunos devem representar a fração do pomar que é dedicada a cada tipo de plantio. Algumas vezes os livros usam de um quadrado  $10 \times 10$ , propiciando a representação percentual para cada uma das culturas.

A título de exemplificação, apontamos Marília Toledo e Mauro Toledo (1997, p.189) que trazem um problema similar quando propõem:

Uma pessoa tem um terreno e quer construir uma casa, de tal modo que:

- a)  $\frac{1}{4}$  do terreno seja ocupado pela casa;
- b)  $\frac{1}{2}$  do terreno se destine ao pomar;
- c)  $\frac{1}{8}$  para o jardim;
- d)  $\frac{1}{8}$  para a circulação.

Desenhe uma planta.

Os autores fazem algumas recomendações, tais como: os alunos podem propor diferentes soluções e é muito importante abrir espaço para que todas as diferentes soluções encontradas pelos alunos sejam expostas. Após discutir e resolver o problema, novas situações podem ser criadas no intuito de aumentar o grau de dificuldade como, por exemplo, desafiando-os para que a casa fique no centro do terreno ou para que atendam alguma possibilidade de

solução que não foi encontrada pela turma. (TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro, 1997, p. 189)

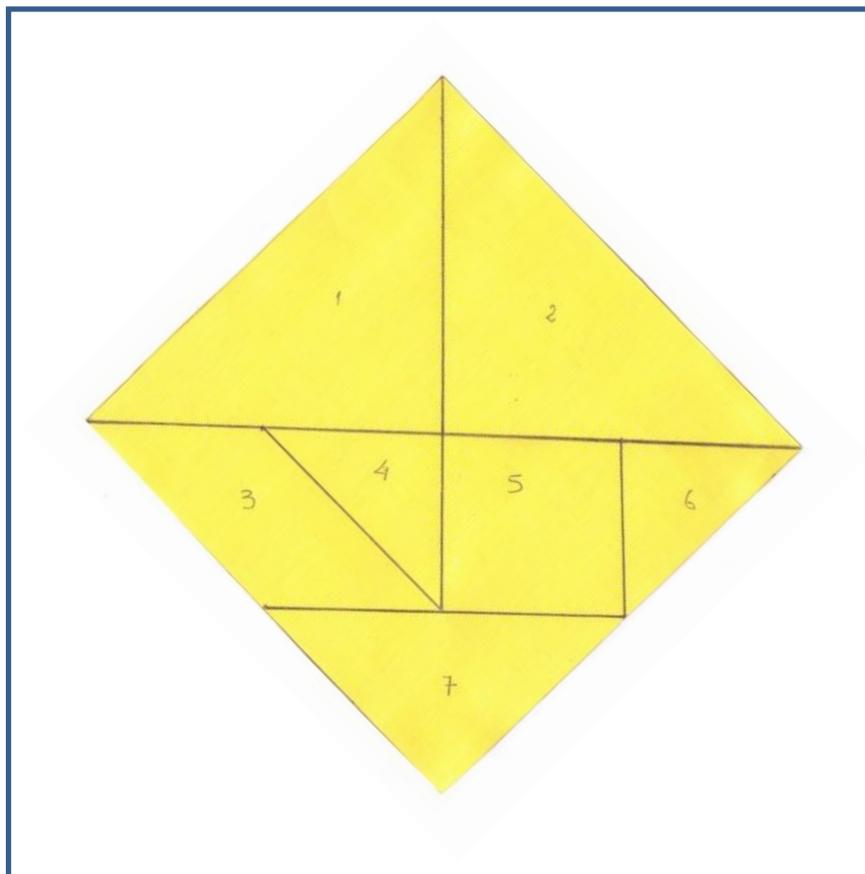
As conversas com os professores das séries anteriores dos nossos alunos e a nossa experiência de sala de aula apontam que o uso do Tangram é explorado como atividade matemática. As Experiências Matemáticas para a 6ª Série, abordam o Tangram, numa atividade que traz a origem do Tangram, sua construção e o jogo em si. Sobre a origem do Tangram, sabe-se que é um jogo milenar originário da China. Conta a lenda que um chinês de nome Tan deixou cair uma peça quadrada que se partiu em 7 pedaços. Ao tentar recompor o quadrado inicial, percebeu que poderia com os sete pedaços compor outras figuras, as quais se pareciam com pássaros, navios, homens, etc. Tan compartilhou com os seus amigos a sua descoberta e cada um deles construiu o seu Tangram, que significa o quadro de Tan. Deste modo o Tangram foi popularizado. (SÃO PAULO, 1996, p. 209)

Os mesmos professores, colaboradores desta pesquisa, informam que as atividades realizadas com o Tangram não contemplam a relação do todo e as partes do todo. Trata-se de um jogo clássico conhecido pelas ideias matemáticas intrínsecas a ele; principalmente, por ter suas peças em formato de polígonos convencionais, isto é, quadrado, triângulos, trapézio e paralelogramo. Assim, usar o Tangram para os professores é estar realizando uma atividade matemática, qualquer que seja a atividade realizada, pois na maioria das vezes, esta atividade consiste em recortar um quadrado dividido, convenientemente, em sete partes, reproduzindo o Tangram (FIGURA 4), e com as peças recortadas montar figuras propostas.

O Tangram é composto por sete peças, a saber:

- a) peças 1 e 2: dois triângulos grandes (TG);
- b) peça 3: um paralelogramo (P);
- c) peças 4 e 6: dois triângulos pequenos (TP);
- d) peça 5: um quadrado (Q);
- e) peça 7: um triângulo médio (TM).

Figura 4 – TANGRAM



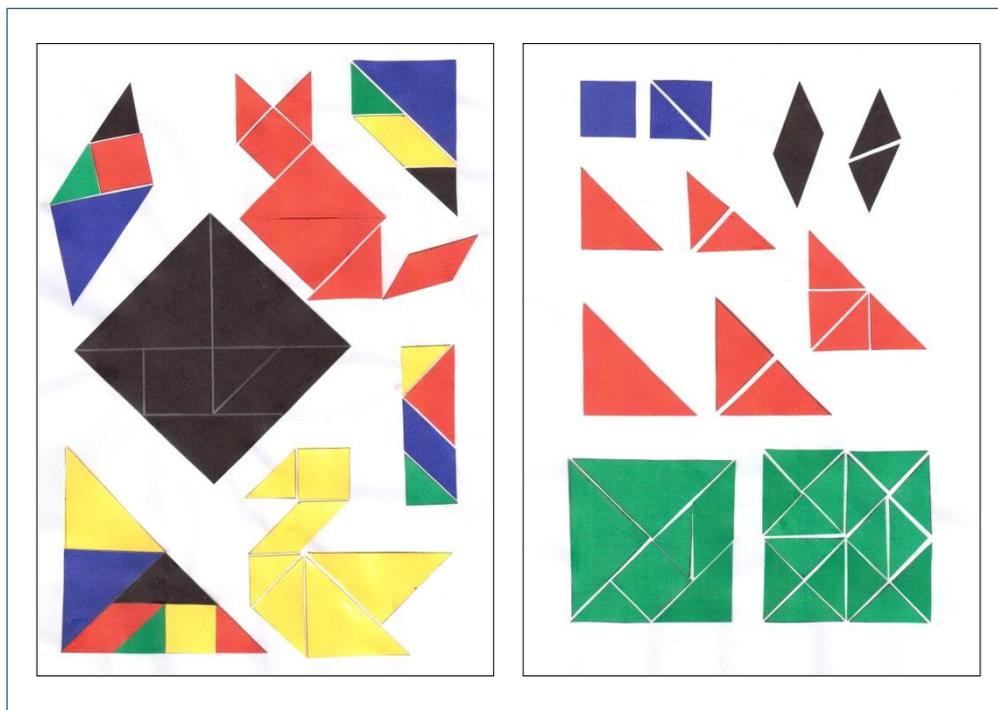
Fonte: produção dos alunos da 8ª Série

A publicação “Experiências Matemáticas”, 6ª Série / 7º Ano, traz em uma atividade intitulada “Tangranear” o uso do Tangram. Inicialmente, propõe a construção do Tangram com o recurso do desenho geométrico. Depois, aborda a questão histórica do Tangram e a seguir indica três situações de composição de figuras (SÃO PAULO, 1996, p. 208-210).

Com as peças do Tangram temos as composições da atividade Tangranear na FIGURA 4, p. 51.

Observamos que, também nessa atividade não se explora a ideia de qual é a parte do todo que cada peça do Tangram representa. Assim, não é previsto o registro de frações e nem sequer a comparação entre elas.

FIGURA 4 – Composições com o Tangram, do Tangranear.



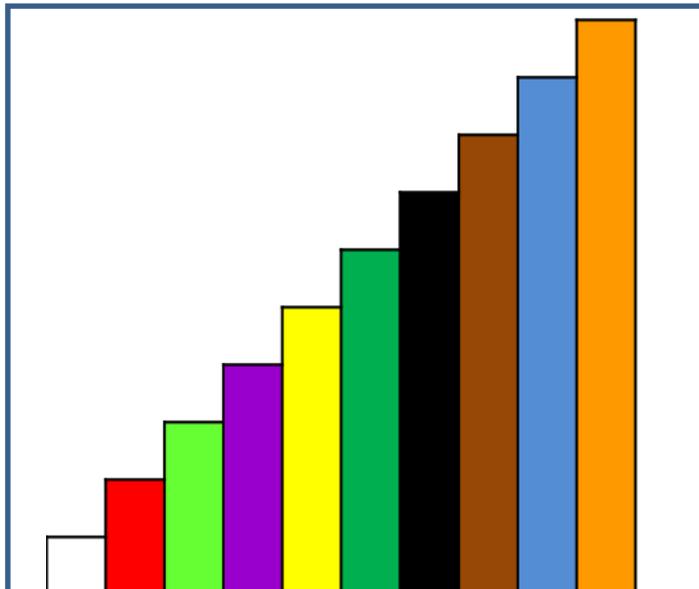
Fonte: Experiências Matemáticas 6ª Série (São Paulo, 1996, p.208-210).

A partir de informações obtidas com professores, temos que o *papel quadriculado* é largamente utilizado como recurso pedagógico e, principalmente, empregado no caso específico do estudo de áreas e em alguns casos, são ressaltadas partes da área ocasionando o registro de frações.

Com o propósito de investigação, buscamos as atividades de experimentação e/ou de manipulação de materiais, indicadas nas orientações metodológicas tidas como de uso mais frequente pelos professores e professoras do Ensino Fundamental, entendendo que supostamente, alguns alunos vivenciaram estas atividades. Chegamos ao resultado a seguir: Ernesto Rosa Neto (1996, p. 68) sugere o uso do Material Cuisenaire em atividade indicada a partir da 3ª série, para levar à representação, à equivalência e às operações com frações.

O Material Cuisenaire é constituído de barrinhas coloridas de madeira, de comprimento variável de 1 a 10 cm (FIGURA 5).

FIGURA 5 – Escala Cuisenaire.



Fonte: montagem da própria autora.

Devemos destacar que as cores são apresentadas em “famílias de múltiplos”, de 1 a 10.

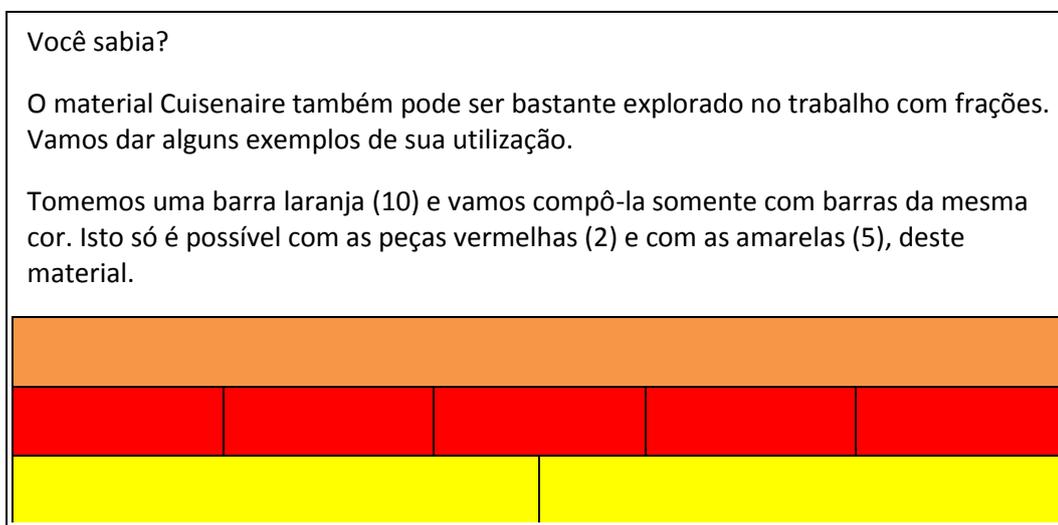
FIGURA 6 – Barrinhas da Escala Cuisenaire.

Cor da barrinha	Medida da barrinha(cm)
Branca ou natural	1
Cor da barrinha	Medida da barrinha(cm)
	7
Cor da barrinha	Medida da barrinha(cm)
	5
	10
Cor da barrinha	Medida da barrinha(cm)
	2
	4
	8
Cor da barrinha	Medida da barrinha(cm)
	3
	6
	9

Fonte: montagem da própria autora.

Marília Centurión (1994, p. 224) também indica o uso do Material Cuisenaire para o trabalho com frações, com a atividade reproduzida na FIGURA 7.

FIGURA 7- Escala Cuisenaire e as Frações.



Fonte – CENTURIÓN, Marília. Números e Operações. 1994, p. 224.

Com vistas nessa ilustração, Centurión (1994) tece os comentários:

Como a barra laranja é composta por 5 barras vermelhas, podemos afirmar que cada barra vermelha corresponde a  $\frac{1}{5}$  de uma barra laranja. Como 2 barras amarelas compõem uma barra laranja, podemos afirmar que a barra amarela **corresponde** a  $\frac{1}{2}$  da barra laranja (CENTURION, 1994, p. 224).

A partir do Material Cuisenaire, surgem as tiras para manipular frações. Tais tiras figuram com muita constância entre as didáticas, metodologias e práticas pedagógicas, quando se trata de vivenciar situações de representação, equivalência e operações com frações; ou seja, quando o interesse é tornar o aprendizado significativo para os estudantes, com o recurso de material manipulativo.

Marília Toledo e Mauro Toledo (1997, p. 176) apresentam as tiras feitas de papel cartão, de cores diferentes e, sobre elas, afirmam: “Todo esse

material é muito prático, tanto para a verificação das equivalências como para a comparação entre frações (ordenação) e a compreensão de operações com números fracionários” Sobre frações equivalentes Centurión (1994, p. 231-232) diz: “são aquelas que equivalem a uma mesma parte do todo”.

Para a verificação do significado da equivalência entre frações, diz ser interessante considerar as unidades fracionárias  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}$ , de um retângulo (FIGURA 8).

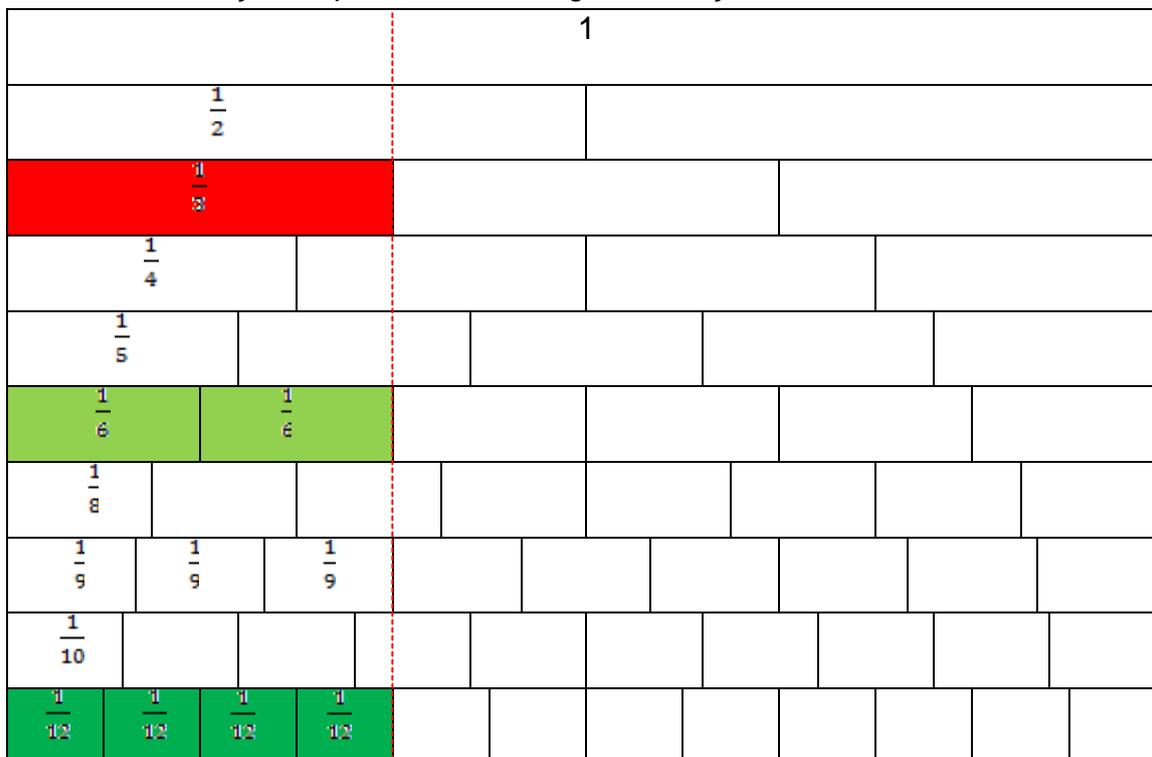
FIGURA 8 – Tiras com as frações unitárias

1									
$\frac{1}{2}$					$\frac{1}{2}$				
$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{3}$			
$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$	
$\frac{1}{6}$									
$\frac{1}{7}$									
$\frac{1}{8}$									
$\frac{1}{9}$									
$\frac{1}{10}$									

Fonte: CENTURIÓN, Marília. Números e Operações, 1994, p. 232

A seguir, Centurión indica que com o auxílio de uma régua é fácil constatar as equivalências. A autora propõe que, para encontrar as frações equivalentes a  $\frac{1}{3}$ , por exemplo, devemos colocar uma régua na extremidade direita desta fração e verificar quais outras frações têm a extremidade direita coincidentes com a fração um terço (CENTURIÓN, 1994, p.232).

FIGURA 9 – Frações Equivalentes e a Régua de Frações



Fonte – CENTURIÓN, Marilia. Números e Operações. 1994, p. 232.

Observamos na FIGURA 9 que a reta vertical tracejada representa a régua utilizada para encontrarmos, nesse caso, as frações equivalentes a  $\frac{1}{3}$ :

$$\frac{1}{3} \sim \frac{2}{6} \sim \frac{3}{9} \sim \frac{4}{12}$$

O uso das tiras, não se restringe a essas situações. São também empregadas nos diversos casos de operações com frações, inclusive naquelas situações em que os denominadores das frações a serem somadas ou subtraídas são diferentes, isto é, no caso de frações heterogêneas.

### **3 CONCEPÇÕES E ANÁLISES A PRIORI**

Sentimos, inicialmente, a necessidade de atualizar e formalizar dados sobre as concepções que o público envolvido, os alunos, tinha a respeito do tema. A princípio, nossa intenção trilhava entre nos situar sobre quais eram os conhecimentos prévios em relação a tais assuntos e encontrar um caminho que nos levasse às dúvidas e inseguranças trazidas pelo público em questão. Consideramos também que a questão apresentada envolveria outros conceitos juntamente com as frações, os quais poderiam gerar incertezas. Assim, elencamos, inicialmente, as ideias como ladrilhamento, superfície, medidas, áreas, como possíveis pontos para novas discussões.

#### **3.1 Constrangimentos e obstáculos**

Durante a nossa prática docente pudemos acompanhar o insucesso experimentado pela maioria dos alunos em atividades propostas que envolvem as ideias de frações ordinárias. A partir da nossa prática de sala de aula contatamos que o mal resultado obtido pelos alunos se manifestava também nas diversas situações de avaliação às quais os nossos alunos eram submetidos, tais como; avaliações oficiais de âmbito nacional, estadual, municipal; avaliação da aprendizagem na própria escola, olimpíadas e maratonas de matemática.

Como ponto de partida para o nosso trabalho de pesquisa, queríamos que a espontaneidade dos alunos fosse mantida durante o desenvolvimento das atividades referentes à sequência didática elaborada, tanto na fase I com a atividade lúdica e integradora, por meio do jogo Pentaminós, como na fase II com a atividade Ladrilhamento, com a qual colocaríamos em discussão as questões referentes às ideias elementares de frações.

A participação espontânea dos alunos, durante os trabalhos, seria fundamental para garantir as demonstrações dos conhecimentos, dúvidas e incertezas da turma. Assim, não tínhamos como interesse gerar qualquer tipo de embaraço, frente ao insucesso dos alunos, no sentido das usuais cobranças feitas por nós, professores, no tocante à ênfase de questionamentos e observações como: “quem foi o seu professor?”; “você já deveria saber isso ou aquilo”; “...mas você não viu isso?”; “ Como você não aprendeu? ” ... e tantas outras indagações do gênero.

A nossa prática de sala de aula revela que, com tais indagações; só transformamos as dúvidas apresentadas pelos estudantes em constrangimentos, não só aos alunos como também aos nossos colegas que trabalharam com estes alunos, desencadeando um clima de desconforto no ambiente de trabalho. Estas perguntas em nada ajudarão no sentido de sanar as dúvidas e defasagens apresentadas pela turma e podem servir como obstáculo para a aprendizagem, na medida em que se identificam como fator de oposição à extensão do ensino.

D'Amore (2007, p. 215) distingue os obstáculos que interferem na aprendizagem em três tipos, e resume:

- o obstáculo ontogenético é ligado ao estudante e à sua maturidade (sob muitos pontos de vista);
- o didático à escolha estratégica do docente;
- o epistemológico à própria natureza do assunto (IBIDEM).

Sobre o obstáculo ontogenético, D'Amore (2007, p. 212 - 213) explica que, por se relacionar ao desenvolvimento individual, pode ser superado, pois se referem a questões cronológicas, funções primárias como o instinto e funções superiores como o indivíduo estar predisposto a compreender e usar a língua materna.

Ao escolher um determinado projeto, um currículo, um método; ao interpretar de maneira pessoal a transposição didática, conforme suas convicções científicas e didáticas, o docente promove uma situação favorável para um ou alguns estudantes e para aqueles que as escolhas e interpretações feitas pelo professor não foram eficazes no seu aprendizado, tais escolhas se revelam como um obstáculo didático (D'AMORE, 2007, p. 213).

Um conceito apresenta, supostamente, um obstáculo de caráter epistemológico quando na sua história de evolução se evidencia uma ruptura, isto é uma não continuidade, ou ainda, mudanças radicais de concepções (D'AMORE, 2007, p. 214).

A noção de obstáculo epistemológico foi introduzida na Educação Matemática por Guy Brousseau em 1976; “A noção de obstáculo como constituinte do pensamento científico apareceu, pela primeira vez, com o epistemólogo francês Gaston Bachelard, em seu livro *A formação do espírito científico* (1938)”. Os obstáculos epistemológicos podem ser pesquisados “com base em uma análise histórica ou em dificuldades resistentes entre os alunos, procurando a confrontação com o desenvolvimento histórico” (IGLIORI, 2012, p. 123)

Do ponto de vista epistemológico, um obstáculo é um contra pensamento (BACHELARD, 1938 in IGLIORI, 2012, p. 124). Um estudo sobre os obstáculos epistemológicos nos remete às rupturas necessárias para a aprendizagem do assunto em questão. O obstáculo epistemológico, na Educação Matemática, é um dos obstáculos admitidos como causa de dificuldades à aprendizagem de Matemática (IGLIORI, 2012, p. 113).

Para Luiz Carlos Pais (2008, p. 39) a evolução de um conhecimento pré-científico para um reconhecimento científico sofre rejeições de conhecimentos anteriores e se depara com certo número de obstáculos. Nesse sentido, os obstáculos não se instituem pela falta de conhecimento, “pelo contrário, são conhecimentos antigos, cristalizados pelo tempo, que resistem à instalação de novas concepções que ameaçam a estabilidade intelectual de quem detém esse conhecimento” (IBIDEM).

Pais (2008, p. 44-46) observa que algumas dificuldades surgem decorrentes de conhecimentos anteriores, exemplificando que isso ocorre quando certos conhecimentos que já não condizem com determinada época, são defendidos por aqueles que o detêm, impedindo a construção de um novo saber. Para o autor, os obstáculos se manifestam durante a “reorganização intelectual”, que é quando um novo conhecimento deve se harmonizar com os conhecimentos anteriores.

Bruno D'Amore (2007) sintetiza a ideia de Brousseau indicando algumas características dos obstáculos:

- é preciso sempre ter presente que um obstáculo não é uma falta de conhecimento, mas é um conhecimento;
- o aluno utiliza esse conhecimento para responder adequadamente, em um contexto conhecido, já encontrado;
- se o aluno tenta usar esse conhecimento fora do contexto conhecido, já encontrado, fracassa, gerando respostas incorretas; percebe-se então que necessita de pontos de vista diferentes;
- o obstáculo produz contradições, mas o estudante resiste a elas; parece necessitar de um conhecimento mais geral, maior, mais profundo, que generalize a situação conhecida e resolvida, e que inclua a nova, na qual fracassou; é preciso que esse ponto se torne explícito e que o estudante seja consciente disso;
- mesmo depois de superado, esporadicamente, o obstáculo aparece (D'AMORE, 2007, p. 211-212).

Segundo Iglioni (2012, p. 125-126), Brousseau caracterizou a noção de obstáculo epistemológico como um obstáculo à aprendizagem da Matemática fundado por um saber “mal-adaptado”, em 1976, em conferência no XXVIII CIAEM (Congresso Interamericano de Educação Matemática). Nessa conferência, Brousseau afirma que com essa concepção, o erro cometido pelos estudantes reflete outro significado, pois deixa de representar ignorância, incerteza, acaso, conforme propaga as teorias empíricas ou behavioristas da aprendizagem e passa indicar o resultado de “um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, seus sucessos, mas que agora se revela falso ou simplesmente mal adaptado” (IBIDEM).

### **3.1.1 Alguns constrangimentos apontados para a aprendizagem de Matemática e, especialmente, de frações**

De acordo com Pais (2008, p. 40-43), a regularidade do saber que aparece no texto matemático em sua fase final de formulação não traduz o que ocorre no período inicial das ideias onde o saber é marcado por árduos conflitos. Quando a ideia formalizada é apresentada aos estudantes não aparecem os obstáculos surgidos durante a criação, aprendizagem e síntese do conhecimento, pois o texto científico não registra que as conjecturas feitas

pelos matemáticos são marcadas por avanços, retrocessos, dúvidas e erros cometidos, deixando a aparência de uma ordem serena. Devemos reconhecer que a diferença entre o processo de construção do conhecimento matemático e o que se apresenta na redação final da matemática gera uma dificuldade de aprendizagem.

Consideramos conveniente apresentar os exemplos de obstáculos indicados por Luiz Carlos Pais (2008, p. 46):

- a) no estudo de aritmética, quando se faz o produto de dois números inteiros positivos tem-se que o resultado é maior do que cada parcela. “Esse conhecimento pode representar um obstáculo à aprendizagem das propriedades do produto de dois números racionais, para os quais tal proposição nem sempre é verdadeira”. Exemplificando, podemos constatar esse fato com o produto de duas frações unitárias, cujo produto é menor do que cada parcela;
- b) com relação a operações com números racionais o autor destaca o caso da “divisão de um número inteiro positivo por um número racional menor do que um” em que se obtém um resultado maior do que o dividendo. A estrutura lógica da matemática entra em conflito com o conhecimento que o aluno traz de sua vivência não escolar, ou seja, na divisão, o resultado é sempre menor do que o dividendo.

Os PCN (BRASIL, 1998, p. 100-101) declaram que os alunos chegam para iniciarem as séries/anos finais do Ensino Fundamental sem compreenderem os diferentes significados associados aos números racionais, tais como: a relação parte/todo, quociente, razão e operador. Os PCN (IBIDEM) que os alunos da mesma forma não compreendem os procedimentos de cálculo, especialmente quando se trata de números racionais na forma decimal; embora o ensino formal das frações seja indicado a partir da 3ª série (4º ano) do Ensino Fundamental.

Nos PCN, tanto os referentes às séries iniciais do EF (BRASIL, 2001) como os relativos às séries finais do EF (BRASIL, 1998), encontramos uma tentativa de explicação para as dificuldades observadas na aprendizagem

dos números racionais: são originadas nas supostas rupturas necessárias com as ideias construídas para os números naturais, e essas rupturas representam obstáculos para a nova aprendizagem. Tais rupturas demandam tempo e, ainda, é preciso que se tenha uma abordagem adequada para o ensino/aprendizagem.

Conforme os PCN (BRASIL, 2001, p. 101) os alunos raciocinam sobre as frações como se fossem números naturais e daí, surge o enfrentamento de uma das maiores dificuldades pelo aluno que é conceber que a representação  $\frac{a}{b}$  com  $b \neq 0$  é um número e não dois números separados por um traço, ou ainda, que este número representa o quociente entre dois números inteiros quaisquer, sendo o segundo número não nulo.

A outra dificuldade apontada em ambos os PCN, tanto os referentes às séries iniciais do EF (BRASIL, 2001) como os relativos às séries finais do EF (BRASIL, 1998), é para o entendimento da equivalência, isto é, entender que cada fração pode ser representada por diferentes, ou melhor, infinitas representações fracionárias. Temos que, no campo dos números naturais, uma determinada quantidade é sempre representada por um único número e, com as representações com frações, é necessário conceber a possibilidade de infinitas representações, para uma mesma fração.

Segundo os PCN (BRASIL, 2001, p. 102), a ordenação das frações consiste em mais uma dificuldade. No campo dos números naturais, a concepção desenvolvida para a ordenação é a de que os números são construídos segundo uma ordem, na qual o sucessor de um número é ele próprio acrescido de uma unidade, portanto, os números naturais podem ser dispostos segundo uma ordenação constante. Assim, três é sempre menor do que quatro o que implica que quatro é sempre maior do que três. Essa é mais uma ruptura que deve ser feita em se tratando de números racionais, pois na comparação de duas frações  $\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$ , mas  $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$  ou ainda  $\frac{5}{2} > \frac{5}{3}$ .

Uma indicação presente em ambos os PCN (BRASIL, 1998, p.101); (BRASIL, 2001, p. 102), está na necessidade de haver ruptura, em se tratando de números racionais, é com relação à certeza de que a multiplicação

sempre aumenta e a divisão sempre diminui. Em se tratando de números naturais isso é o observável, mas quando os números são racionais, isso nem sempre acontece.

### **3.2 Escolhas: questões de controle**

Apresentamos a base teórica e as orientações curriculares oficiais que nos darão alicerce para o desenvolvimento e realização do nosso trabalho: a teoria da aprendizagem significativa, a teoria dos campos conceituais, a teoria das situações didáticas e alguns conceitos pertinentes à didática da matemática presentes na engenharia didática.

#### **3.2.1 Escolhas Globais: bases teóricas das escolhas globais**

##### **Teoria da aprendizagem significativa**

De acordo com Marco Antonio Moreira (2011) a *Teoria da Aprendizagem Significativa* foi proposta por David Ausubel em 1963 e ratificada por este em 2000. As ideias sobre Aprendizagem Significativa, apresentadas por Moreira na sua publicação, estão alicerçadas na obra de Ausubel cujo título traduzido por Moreira (2011, p. 13 ) é *Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva*, publicada em 2000.

Baseado em Ausubel (2000), Moreira (2011) afirma que a “Aprendizagem Significativa é aquela em que as ideias expressas simbolicamente interagem de maneira substantiva e não arbitrária com aquilo que o aprendiz já sabe” (p. 13) e dá entendimento que o termo *substantiva* é empregado no sentido de não-literal, enquanto esclarece que *não arbitrária* significa que “a interação não é com qualquer ideia prévia, mas sim com algum conhecimento especificamente relevante já existente na estrutura cognitiva do sujeito que aprende” (IBIDEM, 2011, p. 13).

Este conhecimento, presente na estrutura cognitiva do sujeito que aprende e que é essencialmente relevante à nova aprendizagem, pode ser “um símbolo já significativo, um conceito, uma proposição, um modelo mental, uma imagem” era chamado por Ausubel (1918-2008), segundo Moreira (2011, p. 14), de *ideia-âncora* ou *subsunçor*. Com a expectativa de dar melhor entendimento ao termo, Moreira diz:

Em termos simples, subsunçor é o nome que se dá a um conhecimento específico, existente na estrutura de conhecimentos do indivíduo, que permite dar significado a um novo conhecimento que lhe é apresentado ou por ele descoberto. Tanto por recepção como por descobrimento, a atribuição de significados a novos conhecimentos depende da existência de conhecimentos prévios especificamente relevantes e da interação com eles (MOREIRA, 2011, p. 14).

A caracterização da *aprendizagem significativa* se faz pela interação entre conhecimentos prévios ou subsunçores e conhecimentos novos. Assim, os conhecimentos novos se tornam significativos para o sujeito e os conhecimentos prévios se revestem de “maior estabilidade cognitiva”.

A aprendizagem significativa exige duas condições essenciais: o material de aprendizagem deve ter significado lógico, relacionável a determinados conhecimentos e o aprendiz deve apresentar uma predisposição para aprender, apresentando os conhecimentos prévios indispensáveis que permitam o relacionamento entre os conhecimentos, mas também os estudantes devem ter a predisposição de diferenciar e integrar os novos conhecimentos à sua estrutura cognitiva prévia e esta será modificada e enriquecida e, conseqüentemente, elaborada revestindo esses conhecimentos de significados (MOREIRA, M. A., 2011, p. 24-25).

Quando os conhecimentos prévios do aluno são inadequados, incapazes de “atribuir significados aos novos conhecimentos” o próprio Ausubel, segundo Moreira (2011, p. 29-31). indica o uso dos *organizadores prévios*, mas adverte que estes nem sempre apresentam o resultado almejado na prática. Entre os diversos recursos possíveis para a aplicação de um organizador prévio, temos o uso de uma leitura introdutória, uma imagem ou uma aula que deve preceder outras aulas. Os organizadores prévios servem para indicar as situações de

relacionalidade e de discriminabilidade entre os novos conhecimentos e os conhecimentos já elaborados anteriormente.

### **Teoria dos campos conceituais**

Segundo Sandra Magina et al (2008, p.3) os aspectos da Teoria dos Campos Conceituais, proposta por Gérard Vergnaud (1996), oferece aos professores um “quadro teórico” que lhes promove a compreensão de como seus alunos aprendem conceitos matemáticos referentes a operações elementares.

a Teoria dos Campos Conceituais considera que existe uma série de fatores que influenciam e interferem na formação e no desenvolvimento dos conceitos e que o conhecimento conceitual deve emergir de situações problema (MAGINA e outros, 2008, p.6)

Estamos de acordo com Luiz Carlos Pais (2008, p. 51) quando esclarece que a *Didática da Matemática* tem como um de seus objetivos o estudo das condições da aprendizagem conceitual, de forma que essa se torne mais acessível à compreensão do aluno; e quando afirma (IBIDEM) que a Teoria dos Campos Conceituais, proposta por Vergnaud, além de refletir sua preocupação em relação ao objetivo aqui exposto da Didática da Matemática, traz uma proposta de se repensar a questão do significado dos conceitos no contexto escolar (PAIS, 2008, p. 51).

Pais (2008, p. 55-56) afirma que o *conceito* está sempre em processo de formação, no que se refere à objetividade, generalidade e universalidade; e, contrariando a concepção tida na visão platônica, não deve ser considerado algo concluído. Diz ainda que o valor atribuído à aprendizagem de conceitos, embora esta prática seja pouco observada na educação escolar, reside na abertura que propicia para uma educação mais significativa e que melhor atende às exigências da sociedade tecnológica na qual estamos inseridos.

A teoria dos campos conceituais, segundo Pais,

- a) é marcada por um caráter pragmático, na medida em que a análise proposta está centrada em situações próximas à vivência dos alunos;
- b) devido ao caráter pragmático, a natureza dos problemas propostos não fica limitada; com isso os problemas podem ser teóricos ou práticos, tal escolha depende do nível em que se encontram os alunos;
- c) a linguagem ou o simbolismo relativos ao conceito não devem receber valorização excessiva;
- d) “as situações, os invariantes e os símbolos se integram de tal forma que o conceito, no nível inicial da cognição, não se sobressai apenas por um desses elementos” (2008, p. 54).

Enfocamos o sentido de cada um dos termos empregados (situações, invariantes e símbolos), expresso por Bruno D’Amore (2007, p. 209), a partir da definição, sugerida por Vergnaud, no que se refere a *conceito*.

Um conceito é uma terna de conjuntos:  $C = (S, I, S)$ , onde:

- S é o conjunto das situações que dão sentido ao conceito (o referente);
- I é o conjunto dos invariantes nos quais se baseia a operatividade dos esquemas (o significado);
- S é o conjunto das formas linguísticas e não linguísticas que permitem representar simbolicamente o conceito, seus procedimentos, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante) (VERGNAUD, in D’AMORE, 2007, p. 209).

Nos campos conceituais de Vergnaud, encontramos as frações associadas às estruturas multiplicativas; nessa teoria, as frações se enquadram na terna de conceitos  $C = (S, I, R)$ :

- S (referente): problemas que envolvem o conceito de fração nas linguagens oral ou escrita, contemplando os cinco significados: número, parte-todo, medida, operador-multiplicativo, quociente;
- I (invariantes do conceito): equivalência, ordenação, objetos/propriedades/relações;
- R (significante: representações simbólicas):  $a/b$ , com  $a, b$  naturais e  $b \neq 0$ ; pictórica; porcentagem; decimal.(NUNES et al, 2009)

## **Teoria das situações didáticas**

Para Freitas (2012), a *teoria das situações didáticas*, modelo teórico desenvolvido por Guy Brousseau (1986), envolve professor, aluno e conhecimento matemático, significa um ícone para o processo de aprendizagem matemática, desenvolvido em sala de aula. Essa teoria se contrapõe à “forma didática clássica” cuja característica é a divulgação de conteúdos sistematizados, inclusive com a forma axiomática. Brousseau alicerçou seus estudos na teoria da epistemologia genética de Piaget e desenvolveu um “tratamento científico do trabalho didático tendo como base a problematização matemática e a hipótese de que se aprende por adaptação a um meio que produz contradições e desequilíbrios” (p. 77-78)

Pais (2008, p. 65-69) indica a diferença entre uma situação didática e uma situação adidática. Enquanto uma situação didática envolve variadas relações pedagógicas entre professor, aluno ou grupos de alunos e o saber, objetivando o desenvolvimento de atividades que promovam o ensino-aprendizagem de um dado conteúdo, uma situação adidática é aquela em que o aluno consegue utilizar por si próprio, os conhecimentos que estão sendo por ele construídos, mas sem que o professor exerça um controle didático sobre a situação; compreende uma etapa do trabalho do aluno que não recebe uma influência direta da intenção de ensinar.

O nosso trabalho será desenvolvido por meio de situações didáticas, num ambiente de interação e cooperação com a atuação dos alunos, do professor e o saber.

## **Transposição didática**

Segundo Pais (2012, p. 11), estudar o processo evolutivo pelo qual passa a formação do seu próprio objeto de estudo é uma das questões centrais da Educação Matemática. As transformações do saber escolar e das

práticas educativas ficam condicionadas a diversas fontes de influência possíveis de serem identificadas a partir da análise dessa evolução. Pais descreve a estrutura dessas transformações, a partir da noção de *transposição didática* proposta por Chevallard (2001), a qual pode ser considerada como “um caso especial de transposição dos saberes”.

Declara a importância de se buscar sentidos mais precisos para diferenciar os termos aqui empregados, *saber e conhecimento*, mesmo não sendo usual diferenciá-los. O autor esclarece que nos meios científicos, o *saber* é geralmente caracterizado pela relativa descontextualização, mais voltado a um “contexto científico histórico e cultural”; enquanto o conhecimento se refere ao “contexto mais individual e subjetivo”, declarando experiências mais diretas e pessoais, isto é, tem um caráter mais experimental (PAIS, 2012, p. 13).

Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que, de um objeto a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática. (CHEVALLARD, 1991, in PAIS, 2008, p. 19)

Ao falarmos em saber matemático estabelecemos uma referência “a uma ciência que tem sua concepção estruturada num contexto próprio” e no que se refere ao contexto do ensino de matemática o saber associa-se à validação do conhecimento, no caso, o raciocínio lógico-dedutivo; o conhecimento fica vinculado ao aspecto experimental, caracterizando um contato mais pessoal na ação do sujeito (PAIS, 2012, p. 13-14).

Uma prática transformadora, geradora de novos saberes, é possível a partir do domínio do saber pelo sujeito. O conhecimento estabelece uma relação entre a dimensão teórica e prática quando partimos do princípio de que “todo saber-fazer está associado a um saber” e, além disso, toda prática se reveste de algum tipo de saber, assim como todo saber se associa a alguma tarefa realizada num contexto institucional (PAIS, 2012, p. 14).

No nosso trabalho, *As Frações que o Ladrilhamento Revela*, a transposição didática se apresenta à medida que apresentamos o estudo das frações adaptado para o objeto de ensino desenvolvido em situações didáticas.

### **Criações didáticas**

A diferença entre o saber científico e o saber ensinado se estabelece pelo conjunto de *criações didáticas*. As criações didáticas são compostas por conteúdos que se incorporam aos programas, atendendo a determinadas necessidades do ensino no sentido de facilitar a aprendizagem. Inicialmente, são recursos criados para atenderem as finalidades puramente didáticas, mas podem causar problemas quando são utilizados de “forma desvinculada de sua finalidade principal”. É assim, que alguns conteúdos são apresentados sem um contexto significativo, com um fim em si mesmo causando distorções (Pais, 2008, p. 19-20).

### **Vigilância didática**

De acordo com Pais, com um permanente espírito de prudência, devemos estar sempre atentos a estas possíveis distorções causadas pelas criações didáticas. Além disso, uma teoria perde o seu significado e sua validade quando é removida do seu lugar de origem. Nesse sentido, mobiliza-se uma das atribuições do trabalho do professor, sendo que este deve estar amparado nos saberes científicos e em uma concepção educacional, no sentido de exercer uma permanente *vigilância didática* durante toda a análise da transposição didática (2008, p. 23).

### **Tempo didático e tempo de aprendizagem**

Temos também duas variáveis relevantes no fenômeno didático, as quais se associam à temporalidade: o *tempo didático* e o *tempo de aprendizagem*. O tempo didático é aquele instituído nos programas escolares e nos livros didáticos e o tempo de aprendizagem é o tempo que o aluno precisa para “superar os bloqueios e atingir uma nova posição de equilíbrio”. Assim, o primeiro volta a sua atenção para o cumprimento de um programa curricular e o segundo, preocupa-se com os desafios do fenômeno cognitivo. Ao não respeitarmos o tempo de aprendizagem do aluno, podemos gerar bloqueios

para o aluno, os quais dão origem aos conhecidos “traumas” (PAIS, 2008, p. 24-26).

No nosso trabalho, voltamos as nossas atenções e propostas para que houvesse consonância do tempo didático com o tempo de aprendizagem, garantindo no planejamento da sequência didática que houvesse a possibilidade de que, durante o período destinado ao desenvolvimento das sequências de atividades, os alunos pudessem levantar e discutir as suas dúvidas sobre o assunto e, por meio das discussões coletivas, acomodar as instabilidades causadas pelas dificuldades sentidas durante o processo.

### **Contextualização**

Sobre a noção da *contextualização do saber*, temos:

A contextualização do saber é uma das mais importantes noções pedagógicas que deve ocupar um lugar de maior destaque na análise da didática contemporânea. Trata-se de um conceito didático fundamental para a expansão do significado da educação escolar. O valor educacional de uma disciplina expande na medida em que o aluno compreende os vínculos do conteúdo estudado com um contexto compreensível por ele (PAIS, 2008, p. 27).

Luiz Carlos Pais destaca a importância de que o educador tenha uma postura crítica frente aos conteúdos ensinados indagando “qual foi o contexto de sua origem e quais são os valores que justificam sua presença atual no currículo escolar”. O autor considera um desafio didático que essa contextualização seja feita, sem que haja redução no significado das ideias matemáticas geradoras do saber ensinado e, além disso, aponta outro desafio pedagógico como sendo a aprendizagem de conceitos “cujo significado pode estar mais próximo da abstração do que da dimensão experimental”; Pais pondera que o saber escolar tem suas peculiaridades e atribui como competência da didática conciliar a teoria e a experiência (2008, p. 26-28).

O autor adverte que não se deve reduzir a educação escolar ao saber cotidiano pois o saber escolar se presta “para modificar o estatuto dos

saberes que o aluno já aprendeu nas situações do mundo-da-vida” e além disso, devemos ter clareza de que “partir da realidade do aluno não significa substituir o saber escolar pelo saber cotidiano” (PAIS, L. C.; 2008, p. 28).

A educação escolar tem fontes legítimas, vinculadas ao cotidiano do aluno, para embasar a sua contextualização, ou seja: problemas científicos, as técnicas, problemas, jogos e recreações e, a isso se junta os problemas que surgem por “questões internas à própria matemática”. O que o autor considera indesejável é reduzir o ensino a uma única fonte de contextualização pois afirma ser esse o motivo de redução do significado do conteúdo abordado.

Ao apresentarmos, no nosso trabalho, o estudo das frações por meio do Ladrilhamento, temos como proposta que os alunos abarquem os vínculos do estudo das frações ordinárias presentes num contexto que possa ser compreensível pelos estudantes.

### **Contrato didático**

A nossa experiência de sala de aula nos ensinou, que devemos dar espaço para que os alunos criem e desenvolvam novos conhecimentos, enquanto ainda apresentarem recursos para fazê-lo. Esgotados os recursos, nada resolve ficarmos esperando pelas respostas elaboradas, pois em lugar delas, na maioria das vezes, temos situações de indisciplina.

Silva (2012) afirma que o conjunto de regras e convenções em que se baseiam as relações estabelecidas entre os professores, os alunos e o saber compõem o chamado *contrato didático*. Tais regras e convenções desempenham o papel de cláusulas de um contrato porém, são pouco explícitas e só se manifestam quando são transgredidas. Dessa forma, uma pequena parte desse contrato é explícita e o que se observa, é o acentuado caráter implícito que a ele confere (p. 49-50).

O contrato didático deve ser elaborado a partir da estratégia de ensino a ser adotada, dependendo das escolhas pedagógicas, das atividades solicitadas, dos objetivos do curso, das condições de avaliação. Isso significa que o contrato didático para uma aula expositiva deve ter regras diferentes,

explícitas ou implícitas, do contrato didático que irá reger “o gerenciamento” de uma prática pedagógica em que os alunos trabalham realizando atividades em duplas, seguindo as orientações contidas em uma sequência didática. É importante considerar que procurar dados pertinentes à questão proposta, assim como validar resultados obtidos fazem parte do contrato didático (SILVA, 2012, p.51-54).

Silva afirma que para os alunos, de um modo geral, uma mudança no contrato didático não é muito tranquila por encontrarem dificuldades na adaptação a novas regras. A renovação, renegociação e a transgressão do contrato didático dependem não só do tipo de trabalho a ser desenvolvido como também do meio em que se realiza a prática pedagógica. Convém ressaltar que um contrato didático mal colocado ou mal entendido pode refletir parte das dificuldades encontradas pelos alunos (2012, p.63).

Seguindo o que se entende por contrato didático e concordando com Pais (2008, p. 115) quando afirma que “A ação didática envolve regras do comportamento humano, que não podem ser totalmente previsíveis ou mensuráveis”, apresentamos aos alunos uma proposta inicial do trabalho a ser realizado e a partir de algumas regras de convivência, já vigentes em sala de aula, elaboramos, conjuntamente, o que denominamos de “nosso contrato didático”; sujeito à análise, aprovação, ampliação e adequações, feitas na elaboração ou durante a realização das atividades propostas, pelos alunos e professor.

Em discussão conjunta, objetivando a elaboração do nosso contrato didático, além das regras de convivência, estabelecemos também que:

- a) As atividades seriam desenvolvidas em grupos, por meio de “*Oficinas de Aprendizagem*”, na expectativa de privilegiar o *trabalho interativo*, sendo este baseado em compartilhar saberes e ideias que possam levar à solução das questões;
- b) os grupos seriam formados por 4 ou 5 alunos, observando que a preferência é para que se forme o maior número de grupos com quatro alunos;

- c) após a formação dos grupos, estes, seriam mantidos durante todas as etapas do desenvolvimento das atividades propostas, a sequência didática;
- d) cada aluno seria parte integrante de um todo,
- e) cada aluno teria direitos e deveres: “é direito do aluno ter acesso às informações, participar das atividades, opinar, questionar, fazer-se ouvir, dar opiniões e ser respeitado; é dever do aluno, tratar os colegas e professores com respeito e cordialidade, permitir que os colegas também tenham oportunidade para emitir seus pensamentos, conhecimentos e opiniões, cuidar do espaço da sala de aula mantendo-o limpo e em ordem, zelar pelos materiais utilizados, ser assíduo e responsável”;
- f) cada grupo deveria eleger **um coordenador ou uma coordenadora** para acompanhar as atividades, garantir a participação de todos nos trabalhos a ser realizados, liderar a iniciativa de interação com seus pares na busca de soluções para as questões, o bom relacionamento dos participantes e cuidar para que todos mantivessem em ordem o espaço e os materiais utilizados, acompanhar a execução e a entrega das tarefas e atividades propostas, oralmente ou em fichas de atividades.
- g) as **atividades** seriam apresentadas por meio de uma ficha (APÊNDICE B, C e D) contendo as questões e as orientações para a resolução e apresentação dos resultados obtidos.
- h) as fichas de atividades (APÊNDICES B, C e D) precisariam ser amplamente discutidas e analisadas, com o levantamento dos temas que deveriam receber algum tipo de esclarecimento;
- i) cada grupo deveria esgotar todos os conhecimentos disponíveis na tentativa de resolver a questão, e avisar quando não conseguir mais prosseguir a resolução da questão ou situação problematizadora;

- j) quando o grupo interrompesse as atividades, por não conseguir mais dar andamento ao trabalho, deveria preparar-se para a discussão coletiva com o levantamento de quais são e em quais circunstâncias essas dúvidas se manifestaram, ou seja, aonde se instalam os embaraços;
- k) se antes do tempo previsto para o término da atividade, todos os grupos sinalizassem que não conseguiam mais avançar, após identificarem as suas dúvidas, poderíamos antecipar a discussão coletiva;
- l) estariam previstas, durante a sequência didática, um número de quatro discussões coletivas, mas esse número poderia ser alterado se houvesse a necessidade de acomodação conceitual ou procedimental ou, ainda, para promover a reorganização do contrato didático;
- m) se antes do tempo previsto para o término da atividade, todos os grupos sinalizassem que não conseguiriam mais avançar, após identificarem as suas dúvidas, poderíamos antecipar a discussão coletiva;
- n) após o fechamento da discussão coletiva das atividades, cada grupo deveria providenciar a entrega da elaboração com as suas conclusões, para serem analisadas e, em seguida, devolvidas para o grupo usá-las como material de consulta nas próximas atividades.
- o) A priorização deveria ser a resolução da situação proposta, pois é justamente com os resultados da solução da questão em andamento que o grupo terá argumentos para a participação na discussão coletiva.

### **3.2.2 Escolhas locais: a proposta didática**

Temos por objetivo neste trabalho proporcionar uma intervenção que modifique para melhor o contato dos alunos com as questões que envolvem os saberes relacionados com as ideias de fração ordinária. Para isso, devemos propor uma situação de vivência em que a representação dos números racionais, enfatizando a forma decimal fracionária, aconteça espontaneamente a partir dos questionamentos da situação proposta.

Outro ponto que entendemos relevante para a realização dessa atividade é o de mantermos algumas posturas que sempre refletiram como elementos facilitadores na nossa prática pedagógica. Sempre buscamos propor aos alunos uma atividade inicial em que todos possam realizá-la. Denominamos este tipo de atividade por “Atividade Integradora”, pois traz com ela a intenção maior que é oportunizar a participação de todos, sem exceção.

Por meio das “Atividades Integradoras”, obtemos a atenção dos alunos mais indisciplinados e que, possivelmente por estarem mais atentos, começam compreender outros assuntos das aulas de Matemática, crescendo assim o interesse e a participação da turma. Dessa forma, todos os alunos inclusive e, principalmente, aqueles que nunca conseguem concluir uma tarefa podem experimentar o prazer e o orgulho de ter realizado uma tarefa proposta.

Nosso olhar aponta para outro aspecto facilitador para o trabalho desenvolvido em sala de aula é o que se refere a não enfatizar os rótulos ou estigmas que os alunos trazem. Entendemos que propiciar oportunidades reais de crescimento aos alunos significa alicerçar as nossas relações de convívio nos fatos que ocorram a partir do momento, sem reforçar o acontecido no ontem, que na maioria dos casos aponta para lembranças de insucessos, transgressões, rebeldias e punições.

No sentido de criar oportunidades reais de crescimento individual aos estudantes, Vera da Rocha Resende e Maria Lúcia de Oliveira nos alertam sobre o equívoco que se instala ao rotular, apressadamente, os alunos.

...o crescimento emocional avança em ritmo próprio e está sujeito a bloqueios, interrupções e regressões. Por esta razão, ela precisa contar com a tolerância do adulto, principalmente do professor que está submetido ao modelo de ensino que privilegia o resultado médio dos alunos de uma sala, e deixa de contemplar aquele que tem um ritmo diferente, e por isso pode apresentar-se no degrau ligeiramente abaixo. Certamente ele deseja alcançar os demais e poderá sair deste lugar, incômodo, se o educador se colocar a seu lado e ele sentir que há disposição para ajudá-lo a crescer. (RESENDE e OLIVEIRA, 2008, p. 149)

Para atendermos a tantas diversidades, observamos que o nosso trabalho deve ser desenvolvido por meio de uma sequência didática, isto é, um conjunto de passos interligados objetivando maior eficiência no processo de aprendizagem não só do assunto em destaque, mas também dos temas subjacentes. É conveniente esclarecer que dentro da metodologia Engenharia Didática, devemos observar as sequências didáticas como elemento integrante das práticas educativas.

Segundo Antoni Zabala (1998, p. 18), a ordem em que se propõem as atividades é o elemento identificador de um método. O autor destaca que:

Das diferentes variáveis que configuram as propostas metodológicas, analisaremos primeiro a que é determinada pela série ordenada e articulada de atividades que formam as unidades didáticas. Situamos esta variável em primeiro lugar porque é a mais fácil de reconhecer como elemento diferenciador das diversas metodologias ou formas de ensinar. Os tipos de atividades, mas sobretudo sua maneira de se articular, são um dos traços diferenciais que determinam a especificidade de muitas propostas didáticas (IBIDEM, p.53).

Entendemos que a realização da sequência didática deva acontecer em um ambiente de “Oficinas de Aprendizagem” nas quais os saberes são compartilhados e as produções podem ser individuais, em grupos ou coletivas; de modo que tudo transcorre sob o clima da interação, permeando a sensação de que ninguém está sozinho. Nesse espaço de aprendizagem, cada aluno tem a possibilidade de ter acesso aos saberes dos outros integrantes do grupo e depois, com a apresentação coletiva dos resultados obtidos pelos grupos, cada aluno pode ainda tomar conhecimento das soluções inusitadas, ampliando assim os saberes acumulados quer no âmbito individual, quer no âmbito de grupo.

### **3.2.3 A escolha da atividade**

Apesar dos nossos estudantes, alunos das 8ª Séries A, B e C, terem se relacionado com as ideias pertencentes aos números racionais

durante o seu percurso escolar pregresso, somos conscientes de que o conhecimento prévio estimado a partir do conhecimento manifesto sobre o assunto, pela maioria dos nossos alunos, mostra-se acentuadamente vulnerável em termos das devolutivas, quando se faz necessário empregar, as ideias concebidas sobre números racionais e mais precisamente no que se referem às representações fracionárias, nas mais variadas situações que enfrentam.

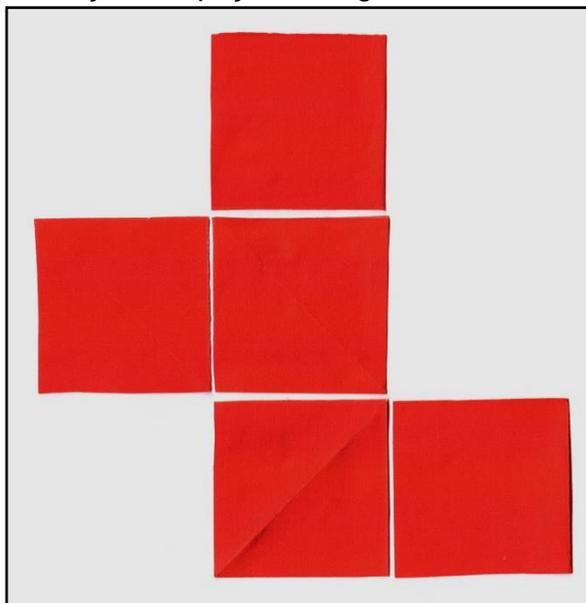
Em cada classe, 8ª A, B ou C, escolhemos apoiar a nossa situação didática no conhecimento prévio coletivo para ser compartilhado. Trata-se de juntar os possíveis conhecimentos individuais e promover um conhecimento único, que possa promover aprendizagem significativa (MOREIRA, 2008)

Nossas escolhas didáticas tiveram como elemento inspirador uma antiga inquietação que gerou a questão de pesquisa: **como identificar e tratar as dúvidas que surgem durante a realização de situações em que os alunos não conseguem aplicar os conceitos de frações, já vivenciados na sua trajetória escolar pregressa?**

Buscamos selecionar atividades integradas, que tratassem os pontos elementares das frações ordinárias, cuidando para que a abordagem e discussões provocadas pudessem dar sustentação ao tratamento das dúvidas que surgem regularmente em nossos alunos e ao mesmo tempo ampliasse o conhecimento do assunto. Decidimos pelo *Jogo Pentaminós* e pelo *Ladrilhamento* de uma área determinada.

Sobre o Jogo Pentaminós (SÃO PAULO, 1996, p. 211-213) informamos que é um jogo composto por doze peças sendo cada peça formada por cinco quadrados e cada quadrado tem, pelo menos, um lado comum com outro quadrado, unidas por vértice-lado-vértice. A obtenção das peças pode ser realizada a partir de cinco quadrados, separados, que pela manipulação e a partir do raciocínio combinatório, facilitarão a busca das possibilidades que servirão de resposta para a situação (FIGURA 10, p. 77).

FIGURA 10 – Quadrados usados na obtenção das peças do Jogo Pentaminós



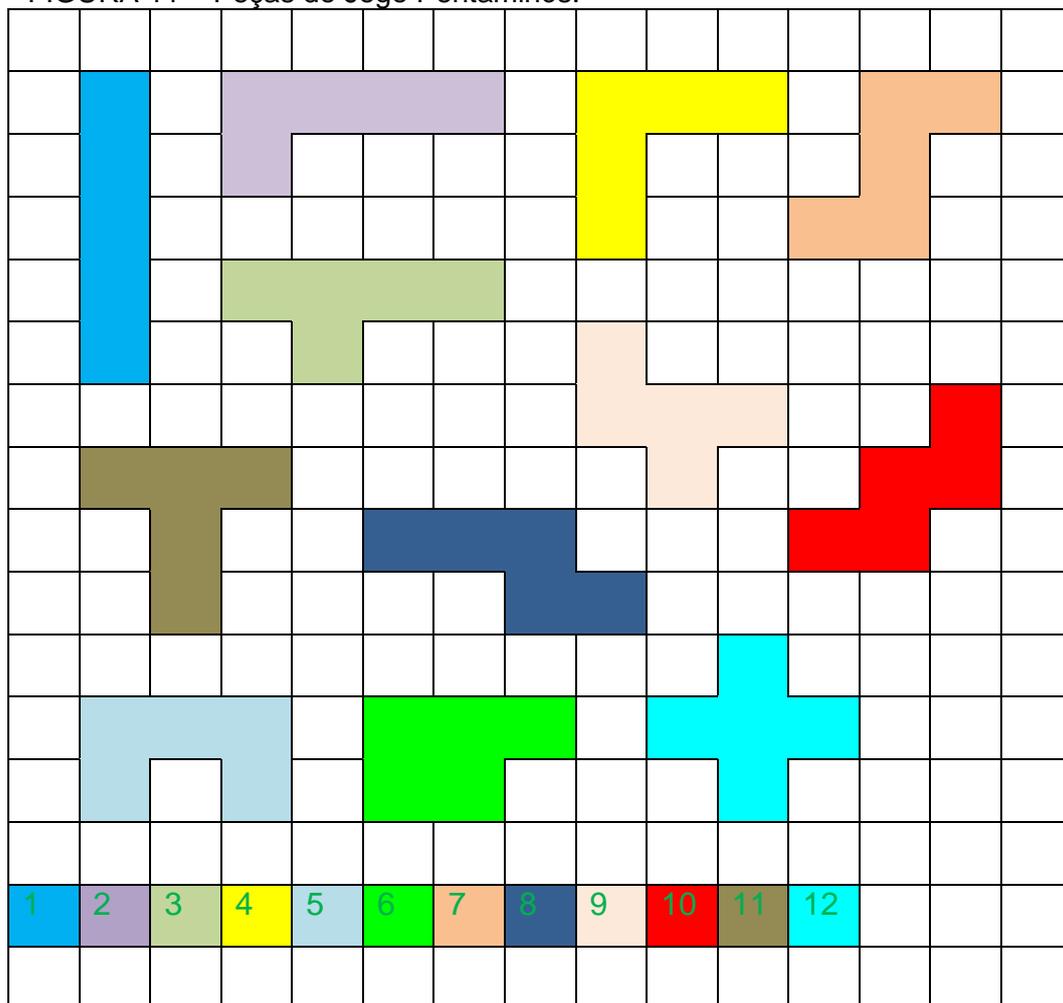
Fonte: material produzido em sala de aula

Vale observar que peças que tenham quadrados unidos apenas por um vértice, não valem; também não são consideradas as peças obtidas por rotação, ou pela simetria das peças já conseguidas (FIGURA 11, p. 78).

Cada nova possibilidade encontrada deverá ser registrada em papel quadriculado. Os moldes das peças, desenhadas no papel quadriculado, poderão ser colados em papel cartão, recortados e utilizados para compor figuras quaisquer em jogo-livre ou em jogo-desafio.

O jogo desafio com o Pentaminós fica caracterizado quando se estipula previamente a figura, que pode ser um retângulo ou um quadrado, de modo que se usem todas ou algumas peças do jogo. Devemos observar que o quadrado é um caso particular de retângulo. Como outra atividade, a composição de figuras pode dar lugar à cobertura de tabuleiros cujas medidas são as mesmas empregadas para a composição dos retângulos.

FIGURA 11 – Peças do Jogo Pentaminós.



Fonte: Produção da autora, a partir das EM - 6ª Série (SÃO PAULO, 1996, p. 211).

O jogo *Pentaminós* será o organizador prévio (MOREIRA, 2011, p. 105) de uma aula inicial; com ele pretendemos despertar a motivação dos nossos alunos, envolvendo-os positivamente para a sequência de atividades vindouras. É adequado para o nosso trabalho propiciar momentos de interação da turma e, além disso, envolver o raciocínio combinatório quando propõe levantar quais são as posições possíveis que temos para dispor os cinco quadrados, de forma que as figuras atendam às condições pré-estabelecidas na atividade apresentada. Este é o momento didático de colocarmos o grupo frente a uma situação-problema para ser resolvida de forma compartilhada.

A ideia de compor ou cobrir uma área, presente no jogo Pentaminós, é similar ao que vamos propor ao ladrilhar o quadrado 12 X 12. O uso das peças do jogo Pentaminós na composição dos retângulos 5 X 12, 10 X 6, 15 X 4 caracterizam o ladrilhamento ou pavimentação pois, embora diferentes, não deixam espaços vazios entre si e as peças não se sobrepõem. No caso do quadrado não temos ladrilhamento, pois sobram 4 espaços vazios, o que abre espaço para a discussão de contraexemplo, quando estivermos dialogando sobre *ladrilhamento*. O jogo oportuniza aos alunos um novo contato com área e Perímetro, estabelecendo a diferença entre esses dois conceitos.

O intuito de abordarmos o assunto, frações ordinárias, de modo diferenciado, levar-nos-á, possivelmente, a uma atividade inédita, cumprindo o papel de colocar todos os alunos numa situação experimental, compartilhada. Essa atividade inédita consiste em trilhar um caminho novo, diferente, o quanto possível, das situações de vivência que foram empregadas e apontadas pelos professores, nas séries anteriores, a partir dessas considerações, optamos pelo Ladrilhamento.

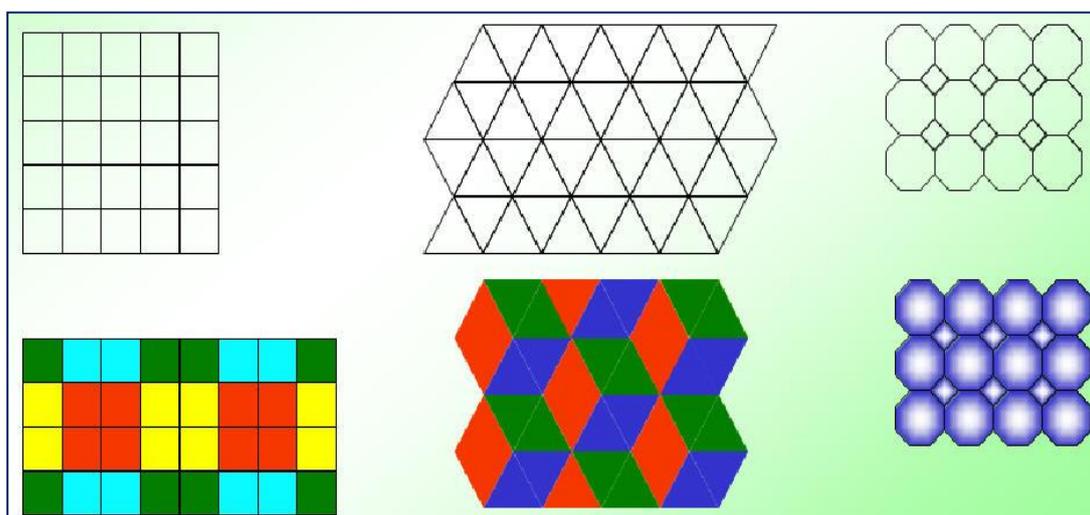
Sallum (p.1) considera que “a arte do *ladrilhamento* consiste no preenchimento do plano, por moldes, sem superposição ou buracos”. Para Dalcin e Alves (RPM 40, p. 3), quando a cobertura de uma superfície plana é feita com regiões poligonais, sem que haja “lacunas” e nem “superposições”, temos os *mosaicos do plano*. O termo *pavimentação do plano* aparece como sendo “um conjunto numerável de ladrilhos que cobrem o plano sem espaços intermediários nem sobreposições” (<http://www.educ.fc.ul.pt>).

Ao pensarmos em cobrir uma superfície plana ou uma região do plano, consideramos os termos ladrilhamento, pavimentação e mosaico, usados de forma similar, conforme observamos nas definições apresentadas. A partir daí, entenderemos tais expressões como portadoras do mesmo significado. Os moldes com os quais o plano é ladrilhado ou pavimentado são conhecidos por ladrilhos, lajotas, azulejos, pastilhas de vidro, pedras e outros.

Caetano e outros (2010, p. 2-4) afirmam em aula publicada:

Para que um ladrilhamento possa ser considerado “bem-comportado”, a primeira regra diz que os polígonos que o constituem precisam ser regulares, ou seja, é necessário que eles possuam todos os lados e ângulos internos iguais [...] Além disso, a segunda regra define que a intersecção entre os polígonos deve ser sempre um lado ou um vértice. Garantidas essas condições, a soma dos ângulos internos adjacentes a cada vértice será igual a  $360^\circ$ , para que não existam sobreposições e nem espaços vazios entre eles. Por fim, para que a terceira regra seja atendida, a distribuição dos ladrilhos ao redor de cada um dos vértices do ladrilhamento deverá ser sempre a mesma (IBIDEM).

FIGURA 12 – Tipos de ladrilhamento.



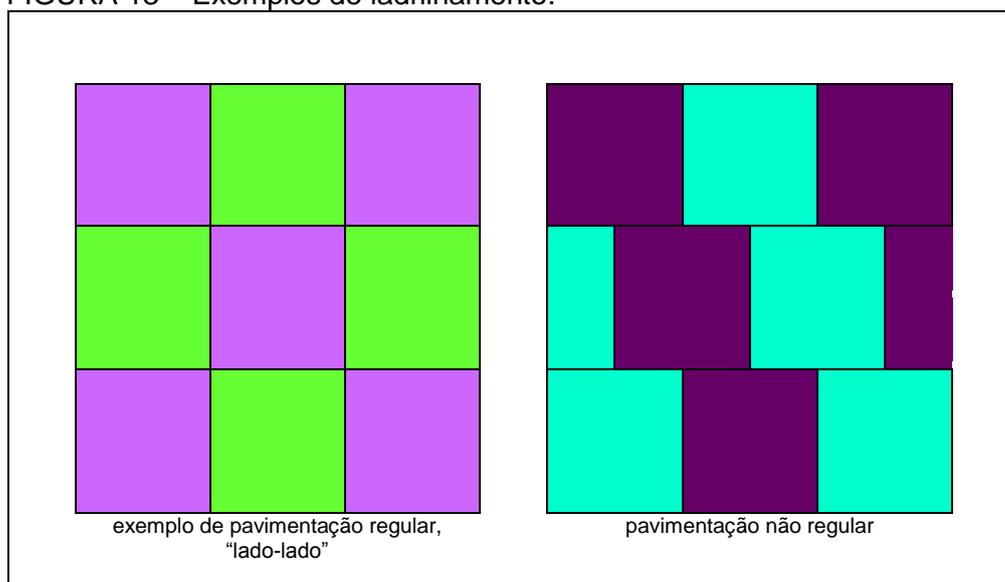
Disponível em <[janelasdamatematica.blogspot.com](http://janelasdamatematica.blogspot.com)>

Tratando do tema “Ladrilhando o plano com quadriláteros”, Alves (RPM 51, p.7) considera que as pavimentações mais conhecidas são aquelas realizadas usando como molde os retângulos ou os paralelogramos. Mostra que usando um “triângulo arbitrário”, obtido a partir do corte do paralelogramo pela diagonal, é possível pavimentar um plano e justifica, por diversas maneiras, que com qualquer quadrilátero, convexo ou não, podemos gerar a pavimentação do plano. Explica que a “ideia básica” é dispor, em volta do mesmo vértice, os ângulos do quadrilátero e dessa forma observar que a soma da medida dos ângulos, que compõem um mesmo vértice, deve ser igual a  $360^\circ$ .

Segundo o artigo Tipos de Pavimentação (<http://www.educ.fc.ul.pt>, 2003) as pavimentações podem ser:

- a) formadas por ladrilhos de um único tipo, porém, não sendo todos os ladrilhos da pavimentação necessariamente da mesma cor, são as *Pavimentações monoédricas ou puras*;
- b) do tipo monoédrica mas formada por polígonos regulares congruentes, isto é, devem ter os lados e os ângulos internos iguais para serem regulares e serem do mesmo tamanho e forma para serem congruentes. Essas são as *Pavimentações regulares*. Quando os polígonos são regulares congruentes, mas um vértice de um polígono está sobre o lado de outro polígono, não temos uma pavimentação regular (FIGURA 13).

FIGURA 13 – Exemplos de ladrilhamento.

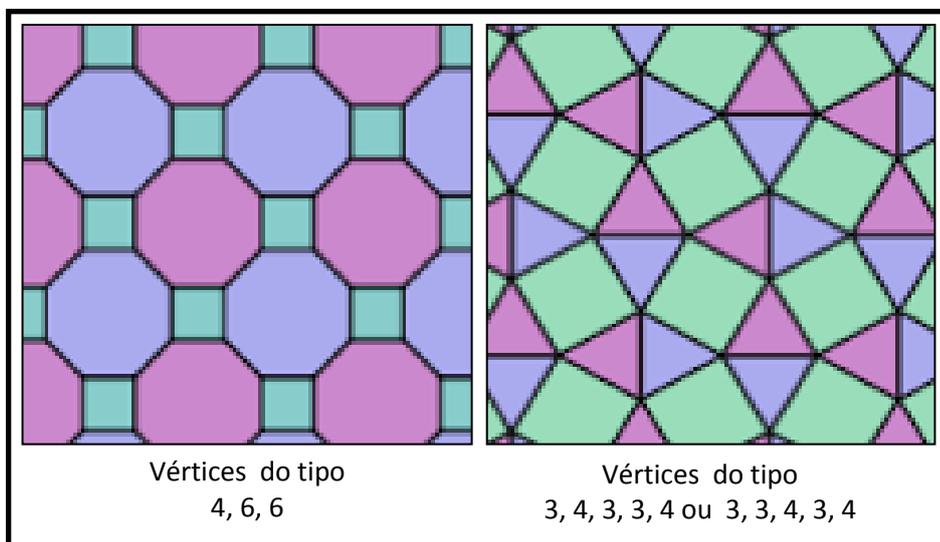


Fonte: produção da própria autora.

- c) nas pavimentações formadas por dois ou mais polígonos regulares, sendo todos os vértices, ou nós da pavimentação, do mesmo tipo; temos as *Pavimentações arquimedianas ou semirregulares*. Estas pavimentações são diferenciadas pelos polígonos regulares que entram na sua formação e também pelos polígonos que ficam ao redor de um vértice. Disso temos que

mesmo quando duas pavimentações semirregulares ou arquimedianas (FIGURA 14) têm em sua composição os mesmos polígonos regulares, não necessariamente são do mesmo tipo.

Figura 11 - Pavimentações arquimedianas ou semirregulares.



Fonte: montagem da figura: produção da própria autora; Imagens disponíveis em <<http://passeiomatematico.blogspot.com.br/2010/10/pavimentacoes.html>>

- d) Quando as pavimentações são formadas por dois ou mais polígonos regulares e apresentam mais do que um tipo de constituição do vértice ou nó de pavimentação, temos as *pavimentações demirregulares*, que não representam pavimentações regulares.

Precisamos estar atentos também para o fato de que nem todos os polígonos regulares ladrilham a superfície plana. A pavimentação só acontece quando a soma dos ângulos internos em torno de cada vértice é igual a  $360^\circ$  e assim, podemos afirmar que nem todos os polígonos regulares pavimentam. Os únicos polígonos regulares que pavimentam são aqueles cujo ângulo interno é divisor de  $360^\circ$ , isto é, o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular (TIPOS de Pavimentação; <http://www.educ.fc.ul.pt>, 2003, p.2).

Além da classificação apresentada, temos que o ladrilhamento ou pavimentação se divide em dois tipos: as pavimentações periódicas e as pavimentações aperiódicas.

As pavimentações periódicas são aquelas que, ao sofrerem uma translação, os ladrilhos continuam corretamente alinhados. Temos as pavimentações monoédricas, regulares, arquimedianas e as demirregulares como exemplos de pavimentação periódica (IBIDEM, p. 3).

Nas pavimentações aperiódicas, embora ocorra a cobertura completa do plano sem espaços vazios entre os ladrilhos, nem sobreposição total ou parcial das peças, não existe um padrão que se repete. Assim, a translação da pavimentação aperiódica, provoca variações na disposição dos ladrilhos enquanto que a pavimentação periódica permanece invariante numa translação. Para falarmos de pavimentação aperiódica, precisamos saber um pouco sobre *protoladrilhos*. Sempre que um ladrilho ou um conjunto de ladrilhos realiza a pavimentação do plano, dizemos que é um protoladrilho. Um ladrilho ou um conjunto de ladrilhos pode originar uma pavimentação periódica ou aperiódica (IBIDEM, p. 3-4).

Encontramos em *Pavimentações*<sup>1</sup> e *Pavimentação com polígonos regulares*<sup>2</sup> termos que indicam elementos de pavimentação ou ladrilhamento:

- a) *vértice da pavimentação* é qualquer ponto que seja a intersecção de três ou mais ladrilhos. Isto significa que o vértice da pavimentação não é necessariamente formado somente por vértices de polígonos (Pavimentações, p. 1);
- b) *nós da pavimentação* são os vértices do polígono (Pavimentação com polígonos regulares, p. 1);
- c) *aresta da pavimentação* é qualquer arco, linha poligonal ou segmento que represente a intersecção entre dois ladrilhos. Quando um lado do polígono intersecta o vértice de outro polígono, o lado considerado não representa aresta de pavimentação (Pavimentações, p. 1), ou ainda, “Os segmentos de retas que têm por extremos dois nós consecutivos de um mesmo lado de polígono chamamos de *arestas*” (Pavimentação com polígonos regulares, p. 1);

---

<sup>1</sup> Disponível em <http://www1.esec.pt/pagina/fcmat/documentos/Pavimentacaooes.Tarefas.pdf>

<sup>2</sup> Disponível em <http://www.uff.br/cdme/ppr/ppr-html/ppr-br.html>

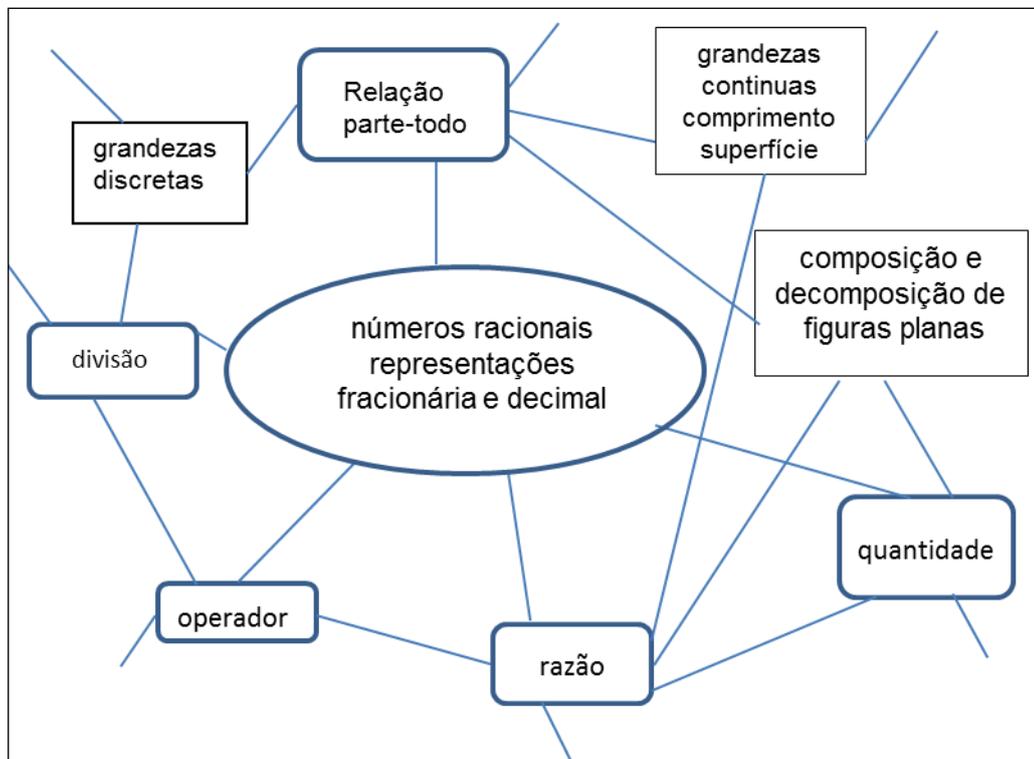
- d) *Pavimentação lado-lado* é aquela somente em que “toda aresta é lado comum a dois polígonos” (Pavimentação com polígonos regulares, p. 1);
- e) *Pavimentação por rotação, translação e simetria* são pavimentações realizadas empregando isometria (rotação, translação ou reflexão). Temos por exemplo as pavimentações de Escher (Pavimentações, p. 5-6);
- f) *Técnica da dentada* é usada na criação de ladrilhos que pavimentam o plano. Consiste em “retirar um pedaço do ladrilho de um dos lados e aplicá-lo a outro lado (por rotação ou translação), de modo a obter um novo plano” (Pavimentações, p. 7);

Após esse breve estudo sobre ladrilhamento ou pavimentação, preparamos com quais questões se daria a nossa intervenção. Para tanto, buscamos os referenciais recomendados nos PCN (BRASIL, 2001 e 1998), as possíveis atividades empregadas a partir da recomendação das metodologias de ensino mais usualmente consultadas e, além disso, usamos as conversas com os professores aliadas à nossa prática de sala de aula. Nossa escolha pontuou dentro do Ladrilhamento, o registro das lajotas empregadas para a pavimentação do quadrado  $12 \times 12$  (APÊNDICES C e D).

Com o auxílio do PCN (BRASIL, 1998, p. 139) projetamos as adequações necessárias para a aplicação da nossa situação proposta, elaborando uma rede de significados para os números racionais, que abrangem as representações fracionária e decimal, enfocando as frações ordinárias. (FIGURA 15, p. 85 ).

Também elaboramos um instrumento a quem denominamos de Quadro Conceitual Norteador (APÊNDICE E) para o acompanhamento das atividades, garantindo o não distanciamento dos pontos essenciais, referentes às ideias básicas de frações ordinárias, a serem acompanhados. Esse quadro apontará os possíveis avanços, manifestados nas expressões orais e escritas dos alunos; da mesma forma que possibilitará a análise das dúvidas declaradas e indicadas pelos alunos.

FIGURA 15 – Números Racionais: rede de significados.



Fonte: Elaboração da própria autora.

## 4 HIPÓTESES

A nossa vivência de sala de aula indica que o conceito de número racional, mais especificamente na forma de fração ordinária, quando conhecimento prévio para algum tipo de aprendizagem, quer em situações didáticas ou adidáticas, no sentido de Pais (2008), representa um empecilho para o avanço a novos conhecimentos matemáticos. Acreditamos que a superação das dificuldades encontradas quanto aos conhecimentos das frações ordinárias, passaremos a obter melhores resultados, com o nosso trabalho, no que diz respeito ao ensino de Matemática.

No que diz respeito ao trabalho com frações, desenvolvido nas séries anteriores, nossas experiências pedagógicas indicam que os alunos envolvidos nessa situação didática tiveram algum tipo de contato com atividades e situações de vivência, envolvendo frações; se não todos, alguns. Com o trabalho desenvolvido em grupos, por meio da discussão entre os integrantes do próprio grupo, teremos sempre a possibilidade de algum aluno já ter visto algum caminho que possa ser utilizado para resolver as questões apresentadas e comunicar tais recursos aos colegas. Desta forma estaremos privilegiando momentos de conhecimento compartilhado, favorecendo os espaços de aprendizagem significativa (Moreira, 2011).

Com o jogo *Pentaminós*, pelo seu caráter lúdico, pretendemos desencadear a participação espontânea dos alunos, incentivando a convivência solidária, numa expectativa de unir esforços para vencer desafios. Além disso, esperamos que os estudantes desenvolvam a capacidade de expor resultados obtidos, compartilhando com a classe as dúvidas e incertezas que porventura surgiram durante o desafio.

Espera-se também que a sequência didática proposta, ou sequência de atividades de ensino/aprendizagem, ou ainda, unidade didática (ZABALA, 1998, p. 20), apresente como destaque outro ponto desejado que é o de ser capaz de revelar as possíveis dificuldades encontradas pela turma ao

se depararem com as questões que envolvem as ideias de fração e, a partir delas sermos capazes para encontrarmos meios de superação de tais dificuldades. Temos como expectativa, que a nossa intervenção seja possível a partir das dúvidas apresentadas pelos grupos, usando como estratégia o tipo de aula dialogada. Com isso, espera-se promover a intervenção necessária; suscitando discussões com questões provocativas, ou ainda, com a explanação dos conceitos envolvidos.

Alimentamos a expectativa de que, com a nossa ação didática possamos identificar e tratar as principais dificuldades manifestadas pelos alunos no que se refere ao conhecimento das frações ordinárias e suas aplicações e que a análise do material produzido pelas turmas, ofereça-nos a sustentação necessária para a avaliação da própria engenharia didática por nós construída.

## 5 EXPERIMENTAÇÃO

A aplicação e o desenvolvimento das atividades elaboradas se deram na forma de *situações didáticas*, com ênfase às *sequências didáticas*, desenvolvidas em sala de aula, sendo estas entendidas por Pais (2008, p. 110) como “a criação de uma sequência de aulas, cuidadosamente planejadas, com a finalidade de obter informações para desvelar o fenômeno investigado”; enquanto que as situações didáticas caracterizam o espaço vivo da sala de aula, em que se relacionam alunos, professor e o saber (IBIDEM, p. 66).

### 5.1 A sequência didática

A sequência didática elaborada para o desenvolvimento deste trabalho de pesquisa foi composta por duas fases:

- Fase 1: Sequência Pentaminós;
- Fase 2: Sequência Ladrilhamento.

#### 5.1.1 Sequência Pentaminós: atividade lúdica e integradora

- a) apresentação do jogo e confecção das peças: obtenção, registro e análise das peças do jogo Pentaminós:
  - dispor, de todos os modos possíveis, cinco quadrados de modo que cada quadrado tenha ao menos um lado em comum com outro quadrado;
  - registrar as soluções encontradas em papel quadriculado;
  - descartar as peças simétricas ou aquelas obtidas pela rotação de outra peça já considerada; também não são consideradas as peças que apresentam dois quadrados unidos somente pelo vértice.
  - determinar a área e o perímetro das peças encontradas;

- cada grupo deverá expor para a turma os seus resultados referentes ao número e ao tipo de peças obtidas, perímetro e área das peças;
- discussão coletiva para comparar os resultados obtidos e verificar qual a relação que se estabelece entre as áreas encontradas;
- após a conclusão, cada grupo deverá apresentar uma folha resumo com os resultados da atividade.

b) Pentaminós: jogo e desafio:

- situação problematizadora: usando todas as peças do jogo Pentaminós, cada grupo deverá resolver um dos seguintes problemas (sorteio):
  - problema 1: construir um retângulo de 10 X 6;
  - problema 2: construir um retângulo de 12 X 5;
  - problema 3: construir um retângulo de 15 X 4;
  - problema 4: construir um quadrado de 8 X 8.
- registro dos resultados encontrados em papel quadriculado,
- discussão coletiva para apresentação e conclusões sobre os resultados encontrados.
- avaliação: opinião dos grupos sobre a atividade; análise das informações obtidas durante a atividade e, posteriormente, durante as discussões coletivas, assim como do material entregue pelos alunos após a elaboração das conclusões.

### 5.1.2 Ladrilhamento

- Apresentação da situação problematizadora para os grupos;
- diálogo professora/alunos, entrega da ficha com o roteiro de atividades ,
- levantamento dos termos desconhecidos para busca de informações;
- Comparação dos pontos de vista,

- conclusões / fechamento da atividade com elaboração de conclusões;
- exercitação;
- discussão coletiva para apresentação dos resultados, possíveis intervenções, se estas forem necessárias, elaboração de conclusões;
- situação similar proposta para prova
- avaliação: opinião dos grupos sobre a atividade; análise das informações obtidas durante a atividade e, posteriormente, durante as discussões coletivas, assim como do material entregue pelos alunos após a elaboração das conclusões

## **5.2 O nosso contrato didático**

Antes de darmos início ao desenvolvimento das atividades apresentamos para cada turma, 8ª A, B e C, a proposta de desenvolvermos algumas atividades que, de alguma forma estão relacionadas entre si e envolvem os conceitos elementares das frações ordinárias. Esclarecemos que esta iniciativa foi o meio encontrado na tentativa de sanar as dificuldades demonstradas pelos alunos, no que se trata diretamente desse assunto, as frações ordinárias, ou de suas aplicações.

Apresentamos os meios programados para que as ações fossem postas em prática, tais como desenvolvimento das atividades em grupos com trabalhos interativos realizados em oficinas de aprendizagem; discussões coletivas.

### **5.2.1 Oficinas de Aprendizagem e as Discussões Coletivas**

Como experiência de sala de aula, as Oficinas de Aprendizagem representam espaços para a construção de conhecimentos, em termos conceituais, procedimentais e atitudinais. Tais espaços contemplam o trabalho realizado em grupos de alunos e é caracterizado pelo diálogo, pelo saber compartilhado num labor interativo que recebe o auxílio do professor, cuja

assistência é oferecida ao percorrer os grupos de trabalho ou grupos de estudos.

As Discussões Coletivas representam momentos de participação, de modo que todos os alunos tenham oportunidade para expor suas ideias e produções, concordarem ou discordarem daquilo que está sendo exposto, intervirem nas soluções apresentadas; tudo num ambiente de cordialidade e respeito. Tanto servem para fazer o fechamento das atividades a partir dos resultados obtidos para as questões propostas, como também para que os alunos ou os grupos de alunos possam expor as dificuldades que estão servindo de empecilho para o andamento e realização das atividades.

### **5.3 O desenvolvimento das atividades**

O desenvolvimento das nossas atividades tiveram como referência o nosso projeto de trabalho (APÊNDICE A) e o ponto inicial das nossas atividades foi a apresentação, para cada turma, da nossa proposta de trabalho e, principalmente, as características e objetivos dessa sequência de atividades. Destacamos para as turmas, 8<sup>a</sup> A, B e C, que as questões propostas para resolução, as orientações e os questionamentos, seriam apresentadas por meio de fichas de atividades, num total de três fichas. Uma ficha de atividades subsidiaria a sequência *Pentaminós* (APÊNDICE B) e para a sequência *Ladrilhamento* eram previstas duas fichas de atividades: sendo a primeira destinada à resolução de situações propostas (APÊNDICE C) e a segunda propõe a exercitação para avaliação escrita (APÊNDICE D).

Os grupos de trabalho foram compostos, segundo as preferências dos alunos quanto às afinidades de convivência, seguindo a distribuição (nº de grupos x nº de alunos); sendo para 8<sup>a</sup>A e 8<sup>a</sup>B (4 x 4 e 3 x 5) e para a 8<sup>a</sup>C (7 x 4 e 1 x 5).

A elaboração, juntamente com as turmas, de um contrato didático, o qual deveria nortear as relações pessoais e as posturas no decorrer das atividades foi o nosso próximo passo. Com a leitura compartilhada do contrato didático, avançamos em alguns pontos: os grupos de trabalho indicaram o

aluno coordenador e a seguir destacamos, para conhecimento da classe, as suas atribuições. Os alunos pediram esclarecimentos sobre alguns termos usados na redação do contrato didático tais como: contrato didático, discussão coletiva, registros, elaboração de conclusões, situação didática e outros. Após os esclarecimentos pedidos, repassamos e acrescentamos, oralmente, as regras de convivência já usadas na sala de aula e no trabalho em grupos.

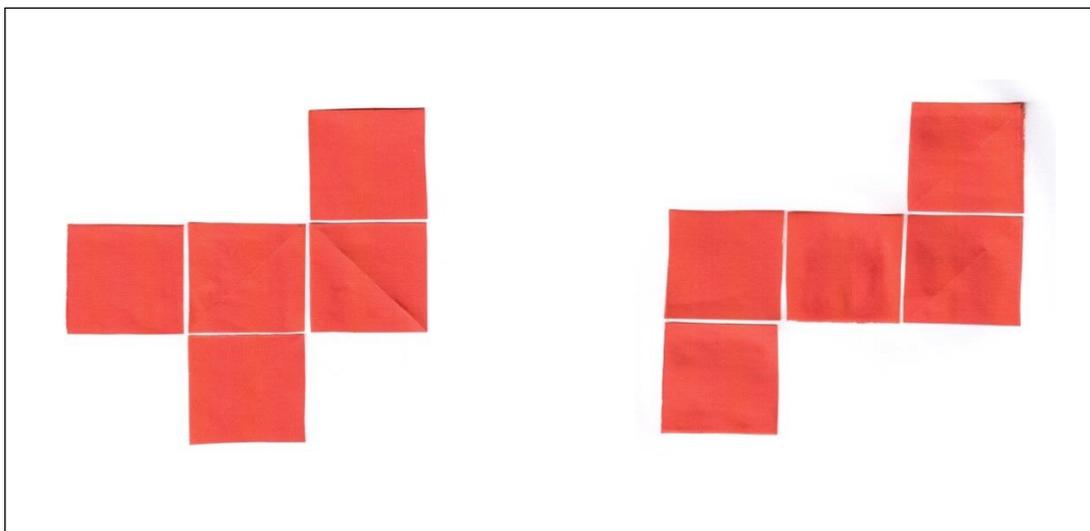
Providenciamos a divisão da classe em grupos de quatro ou de cinco pessoas, conforme o previsto, mas deixamos a critério dos alunos a formação dos grupos de trabalho, segundo as suas afinidades pessoais. Era chegada a hora de iniciarmos, oficialmente, a sequência didática elaborada. Aproveitamos um tempo final da aula para a distribuição da primeira ficha de atividades (Apêndice B), para que os alunos tivessem contato com a forma de comunicação das tarefas.

Uma leitura rápida da ficha foi feita e já começaram surgir algumas dúvidas como, por exemplo, o que significam peças simétricas, rotação, ladrilhamento e, além disso, ficou claro que teríamos que desenvolver a sequência Pentaminós em cinco aulas. Sugeri aos alunos que trouxessem dicionários da língua portuguesa, para a próxima aula. São minidicionários oferecidos aos alunos pelo governo federal por meio do PNLD, isto é, Programa Nacional do Livro Didático. Além disso, pedimos que cada aluno providenciasse um conjunto de cinco quadrados de mesmo tamanho; a manipulação dos quadrados facilitaria a visão combinatória de suas posições, na obtenção das peças do jogo Pentaminós.

Na aula seguinte, iniciamos oficialmente a primeira aula da sequência Pentaminós. Alguns alunos esqueceram a ficha de atividades, o dicionário, e outros, não providenciaram os quadrados para a atividade inicial. A disposição em grupos favoreceu para que todos os grupos estivessem com o material necessário. Distribuimos, para cada aluno, as folhas quadriculadas com as duas malhas  $1 \times 1$  e  $0,5 \times 0,5$ . A aula transcorreu com as discussões das ideias de rotação, simetria, área e perímetro, vistas anteriormente, recapituladas com o auxílio dos dicionários e, num esforço mútuo, logo após essa primeira aula realizamos a nossa primeira discussão coletiva.

Conforme a apresentação dos grupos de trabalho, constatamos que nem todos os grupos conseguiram visualizar as doze peças do jogo, embora a manipulação dos quadrados tenha contribuído muito para facilitar a composição das peças, como mostra a FIGURA 16.

FIGURA 16 – Manipulação de quadrados para obtenção das peças do jogo Pentaminós



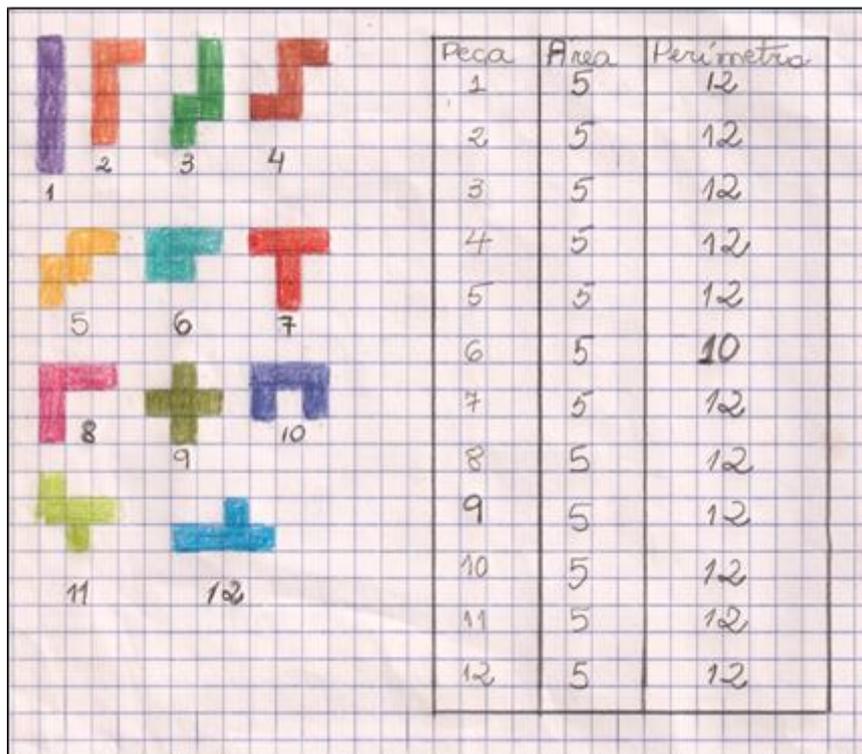
Fonte: produção dos alunos da 8ªC

De forma colaborativa, todos chegaram à configuração das doze peças, pois uma peça foi obtida por alguns, outra por outros e assim, compartilhando os resultados pudemos ter êxito ao que nos propusemos: registramos as peças do jogo Pentaminós e discutimos sobre a área e o perímetro de cada uma delas.

Alguns alunos acreditavam que, por terem a mesma área, deveriam ter o mesmo perímetro, mas ao observarem entre os resultados encontrados que uma das peças apresentava seu perímetro igual a dez, enquanto que as demais tinham doze como perímetro e, após inúmeras contagens, compreenderam que ter a mesma área não garante o mesmo perímetro.

Para ilustrarmos o fechamento das discussões desencadeadas nesta atividade apresentamos a FIGURA 17 (p. 94).

FIGURA 17 – Peças do jogo Pentaminós: perímetros e áreas.



Peça	Área	Perímetro
1	5	12
2	5	12
3	5	12
4	5	12
5	5	12
6	5	10
7	5	12
8	5	12
9	5	12
10	5	12
11	5	12
12	5	12

Fonte: produção dos alunos da 8ª Série B

Antes do término da aula, lembramos aos alunos que, cada um, deveria produzir o seu jogo Pentaminós. Aproveitamos para enfatizar a importância de que todos providenciem os materiais de apoio solicitados. Sugerimos que aproveitassem o tempo que ainda dispúnhamos para olharem a próxima proposta de trabalho.

Prosseguindo, iniciamos a aula que daria continuidade à sequência Pentaminós, parte B, intitulada *jogo e desafio*. Na ficha de atividades, já havíamos antecipado que seria sorteado um problema para cada grupo. Após todos estarem acomodados, em seus grupos de trabalho, pedimos aos coordenadores dos grupos, ou representante, que escolhessem um entre oito cartões coloridos, sendo dois vermelhos, dois amarelos, dois verdes, dois azuis. Atendendo à curiosidade da turma, combinamos que os cartões vermelhos ficariam com o problema um, os amarelos com o problema dois, os verdes com o problema três e os azuis com o problema quatro.

Seguindo a sequência da ficha de atividades, foi recomendado à turma que deveriam, primeiramente, realizar composições livres para a familiarização com as peças e com o jogo. Esta experimentação se constitui do jogo em si que, embora aparentemente simples, requer persistência e colaboração.

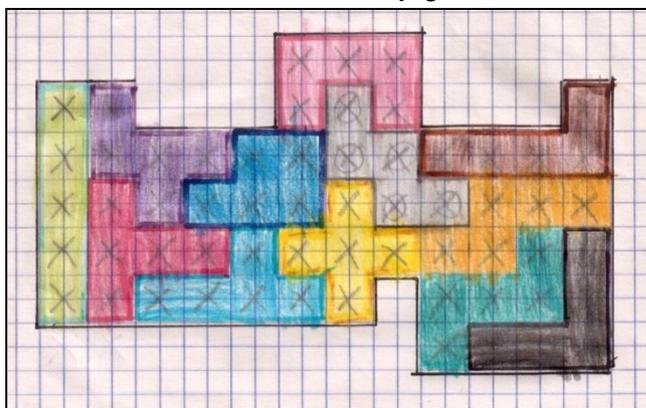
Gradativamente, os alunos de cada grupo de trabalho foram se empenhando na busca de soluções para a questão com a qual o grupo foi sorteado; foram incentivados para que apresentassem ao menos uma solução para a referida questão e com isso, estreitamos as necessidades do trabalho interativo. Deixamos duas aulas para que realizassem a tarefa, fizessem seus registros, buscassem outras soluções. Na segunda discussão compartilhada, tivemos a exposição dos resultados. Apresentamos uma amostra dos resultados obtidos com as Figuras 15,16 e 17.

FIGURA 18 – Pentaminós: composição 4 x 15.



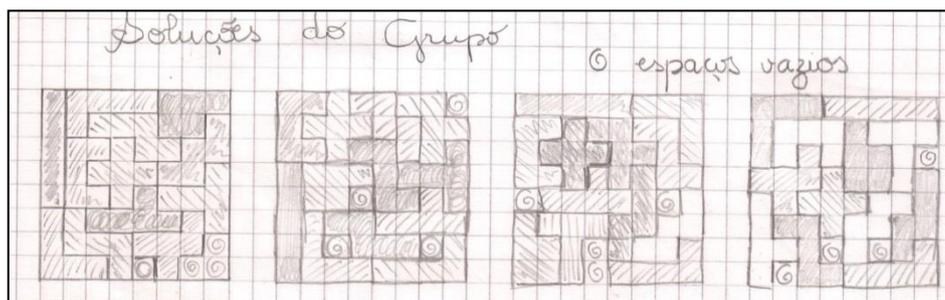
Fonte: produção da 8ª Série A.

FIGURA 19 – Pentaminós: jogo-livre.



Fonte: produção da 8ª Série B.

FIGURA 20 – Pentaminós: composições 8 x 8.



Fonte: Produção 8ª Série C.

Discussão interessante surgiu a partir da montagem da composição 8 x 8, com a manipulação das peças do jogo Pentaminós (FIGURA 21).

FIGURA 21 – Composição 8 x 8 usando o jogo Pentaminós.



Fonte: produção da 8ª Série A.

*“Não teve jeito, teve hora que tivemos que por algumas peças do avesso e às vezes até de ponta cabeça”* (manifestação de aluno da 8ªA durante as discussões).

Depois que levantaram as considerações e justificativas para esse fato, ficou entendido que o fato das peças ficarem do lado contrário foi devido a termos considerado as peças originárias da translação e rotação de outras como peças já obtidas. Para resolver o problema, isto é, para que todas as peças do jogo fiquem coloridas, é preciso que sejam dupla-face, ou seja, as peças devem ser coloridas dos dois lados.

Após a mostra das composições realizadas pelos grupos, voltamos à discussão coletiva para completarmos a tarefa, debatendo os questionamentos propostos como finalização da atividade. Depois de algumas opiniões como “os problemas um, dois e três formam retângulo e no problema quatro dá um quadrado”, o que houve a concordância da maioria; e com a comparação das figuras obtidas ficou claro que a formação do quadrado deixava quatro espaços vazios, e após algumas incitações chegamos à conclusão que a área do quadrado proposto é sessenta e quatro enquanto que a área total das peças é sessenta, daí a diferença das quatro unidades.

A cobertura do retângulo foi completa e sem sobreposições, enquanto que a do quadrado também não teve sobreposições, mas deixou quatro espaços vazios, ou seja, lacunas. Com a ajuda do material de apoio e a condução do diálogo, pudemos caracterizar que com os retângulos, tivemos o ladrilhamento e com o quadrado isso não ocorreu pelo fato do preenchimento ter deixado lacunas.

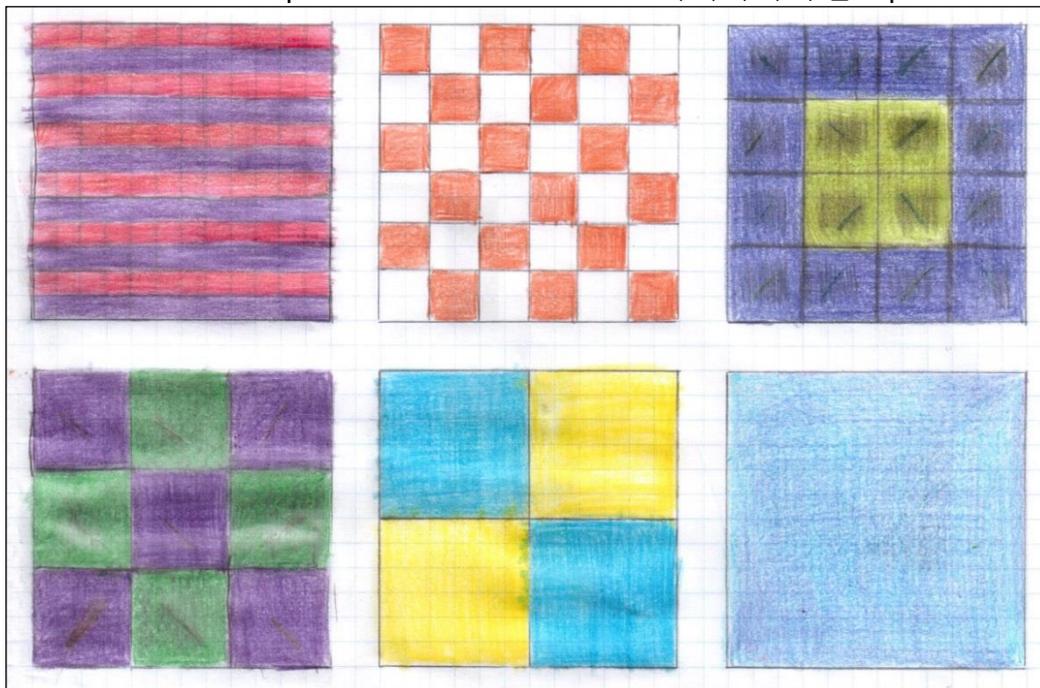
Assim, concluímos a sequência Pentaminós discutindo sobre áreas e ladrilhamento, assuntos de nosso interesse na continuidade dessa sequência didática.

Dando início à sequência Ladrilhamento, distribuímos para todos os alunos a ficha de atividades – folha I (APÊNDICE B), aonde foram apresentadas as etapas I e II desta sequência. Concentramos nosso interesse na etapa I, oferecendo um período de leitura do material que foi entregue, e, paralelamente, a busca dos termos desconhecidos nos dicionários disponíveis, assim como, no material volante de apoio. Posteriormente, abrimos um diálogo professora/alunos para esclarecimentos e acomodações.

Uma dúvida que ficou evidente, mas foi esclarecida, referiu-se a menção feita aos *quadriláteros retangulares*. Aproveitamos para comentar que o quadrado é um caso especial de retângulo e que por isso, empregamos a expressão “quadriláteros retangulares”. Concordamos no ponto que, durante a realização da tarefa, faríamos a distinção, para reconhecimento imediato, usando os termos *quadrado* e *retângulo*. Levantamos se as orientações dadas foram bem entendidas, após breves considerações, deixamos que os grupos prosseguissem as discussões.

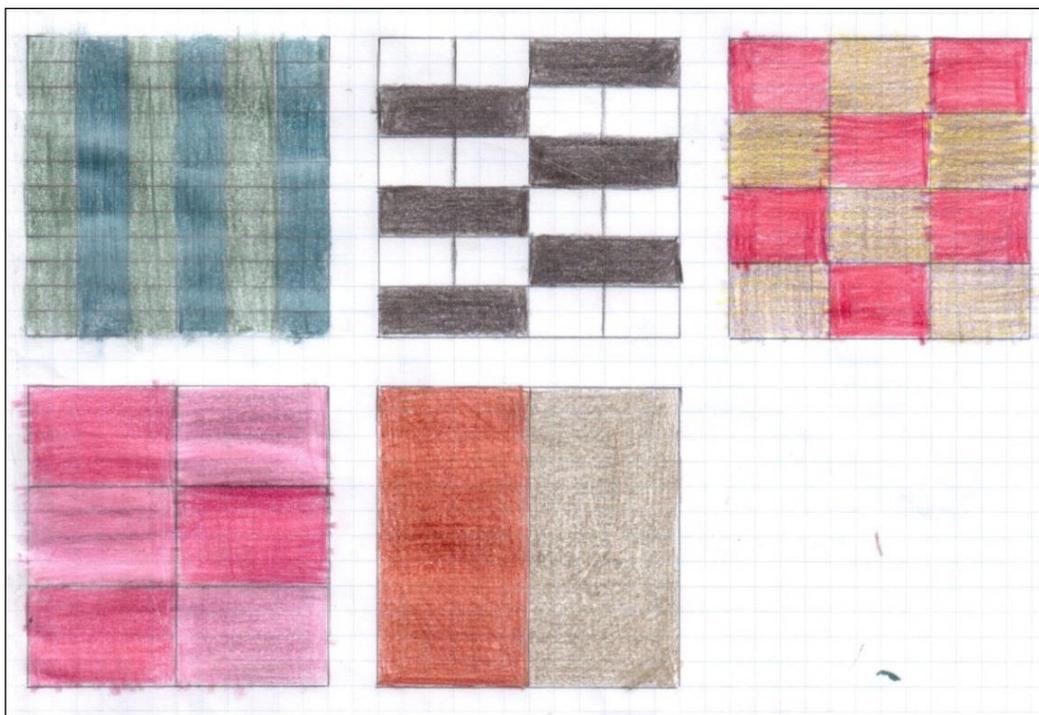
Os grupos de estudos deram início às atividades propostas para a etapa I (APÊNDICE B). Em todas as turmas, as dúvidas frequentes estiveram pautadas na colocação dos ladrilhos lado-lado. Ao passar pelos grupos enquanto trabalhavam, auxiliamos sanando as dúvidas e indicando a leitura e pesquisa do material disponível em sala de aula, observamos que a dificuldade representava certa resistência para seguirem um padrão estabelecido. Ilustramos a seguir a solução da série ladrilhamento com a FIGURA 22 e FIGURA 23 (p. 99).

FIGURA 22 – Sequência Ladrilhamento: itens a, b, c, d, e, f\_etapa I.



Fonte: produção dos alunos da 8ª Série B.

FIGURA 23 – Sequência Ladrilhamento: itens g, h, i, j, k – etapa I.



Fonte: produção da 8ª Série A.

Com relação à determinação de qual fração que cada ladrilho representa em relação ao inteiro, contamos com a interação dos participantes dos grupos e os ladrilhamentos realizados. A discussão coletiva quanto a esta etapa da sequência Ladrilhamento, mostrou que as nossas expectativas foram atendidas, com relação à troca de informações que serviriam de apoio para o avanço das atividades. Observamos a partir das manifestações orais que a solução para estes itens foi atingida, principalmente, após a resolução iconográfica, isto é, aquela que se apoia exclusivamente no desenho.

O ladrilhamento, na forma como foi orientado, serviu como elemento facilitador para a determinação da fração que cada ladrilho representa em relação ao todo que é o quadrado  $12 \times 12$  de área é 144; dando indício de que as frações no que se refere ao significado parte-todo, é muito presente na trajetória escolar. A maior dúvida da classe se instalou na necessidade de mostrar, numericamente, que com o emprego das lajotas, o quadrado  $12 \times 12$  ficou completamente coberto. Após os grupos se posicionarem, expondo as suas ideias, a situação proposta ainda ficava sem solução; pois não havia consenso entre os participantes (FIGURA 24, p. 100).

FIGURA 24 – Comparação das respostas encontradas – etapa I – Sequência Ladrilhamento.

Medidas dos ladrilhos	Nº de ladrilhos		Fração do quadrado 12 x 12 que cada ladrilho representa	Cobertura completa do quadrado 12 x 12
	necessário	empregado		
1 x 1	144	144	$\frac{1}{144}$	PREJUDICADO
2 x 2	36	36	$\frac{4}{144} \sim \frac{1}{36}$	PREJUDICADO
3 x 3	16	16	$\frac{9}{144} \sim \frac{1}{16}$	PREJUDICADO
4 x 4	9	9	$\frac{16}{144} \sim \frac{1}{9}$	PREJUDICADO
6 x 6	4	4	$\frac{36}{144} \sim \frac{1}{4}$	PREJUDICADO
12 x 12	1	1	$\frac{144}{144} = 1$	PREJUDICADO
1 x 2	72	72	$\frac{2}{144} \sim \frac{1}{72}$	PREJUDICADO
2 x 3	24	24	$\frac{6}{144} \sim \frac{1}{24}$	PREJUDICADO
3 x 4	12	12	$\frac{12}{144} \sim \frac{1}{12}$	PREJUDICADO
4 x 6	6	6	$\frac{24}{144} \sim \frac{1}{6}$	PREJUDICADO
6 x 12	2	2	$\frac{72}{144} \sim \frac{1}{2}$	PREJUDICADO

Fonte: elaboração da própria autora, a partir dos resultados apresentados pela 8ª B

Convidamos os alunos que observassem quais os cálculos que estão envolvidos nos resultados obtidos ou qual o procedimento utilizado para chegarmos às respostas dadas. Com esta análise e após certa troca de ideias concluíram que para obtermos as respostas almejadas precisaríamos proceder algumas operações que encaminhassem ao inteiro, à unidade. Ficou estabelecido um caminho prático para isso que é multiplicar a fração, que cada lajota representa em relação ao inteiro, pelo número de lajotas necessárias para cobrir o inteiro. Surgiu então nova pergunta: “... mas qual das duas frações?”. Após testarem as duas situações, os alunos perceberam que com qualquer uma das frações equivalentes, chegaríamos à conclusão desejada; então, esquematizamos o caminho, generalizando:

$$n^{\circ} \text{ de ladrilhos} \times \frac{\text{medida do ladrilho}}{\text{inteiro de área } 12 \times 12} = \text{unidade};$$

e com a pergunta: “...mas como chegamos ao número de ladrilhos necessários?”. A resposta foi imediata: “pegando 144 e dividindo pelo número de quadrinhos, unidades de medidas, do ladrilho”. Assim, empregamos o significado de divisão que a fração traz e, averiguamos os resultados para o ladrilho 3 x 3, observando que a área desse ladrilho é 9. Obtendo:

$$16 \times \frac{9}{144} = \frac{144}{144} = 1,$$

ou ainda, pela fração irredutível equivalente:

$$16 \times \frac{1}{16} = \frac{16}{16} = 1.$$

Com o caminho indicado, ficou acessível para a turma buscar a resposta para as outras situações, mostrando que em todos os itens a área 12 x 12 ficou completamente revestida pelos ladrilhos. Chamamos a atenção de todos os alunos sobre a conservação da medida da área do quadrado 12 x 12, depois de multiplicarmos pelo número de ladrilhos e ressaltamos que esta é uma das características das frações. Comparados os resultados, finalizamos a atividade e em seguida, recolhemos as folha-resumo, produzidas pelos grupos de trabalho, com a finalidade de acompanhar se todos os grupos registraram adequadamente as situações evidenciadas.

FIGURA 25 – Síntese de resultados:

Fechamento da atividade Ladrilhamento – Etapa I – itens: a, b, c, d, e, f

ladrilhos	N° de ladrilhos		Fração do quadrado 12x12 que cada ladrilho representa	Cobertura completa do quadrado 12 x 12
	necessário	empregado		
1 x 1	144	144	$\frac{1}{144}$	$144 \times \frac{1}{144} = 1$
2 x 2	36	36	$\frac{4}{144} \sim \frac{1}{36}$	$36 \times \frac{4}{144} \sim 36 \times \frac{1}{36} = 1$
3 x 3	16	16	$\frac{9}{144} \sim \frac{1}{16}$	$16 \times \frac{9}{144} \sim 16 \times \frac{1}{16} = 1$
4 x 4	9	9	$\frac{16}{144} \sim \frac{1}{9}$	$9 \times \frac{16}{144} \sim 9 \times \frac{1}{9} = 1$
6 x 6	4	4	$\frac{36}{144} \sim \frac{1}{4}$	$36 \times \frac{4}{144} \sim 36 \times \frac{1}{36} = 1$
12 x 12	1	1	$\frac{144}{144} = 1$	$144 \times \frac{1}{144} = 1$

Fonte: produção das turmas 8ª A, B e C

FIGURA 26 – Síntese de resultados:

fechamento da atividade Ladrilhamento – Etapa I – itens: g, h, i, j, k.

ladrilhos	N° de ladrilhos		Fração do quadrado 12x12 que cada ladrilho representa	Cobertura completa do quadrado 12 x 12
	necessário	empregado		
1 x 2	72	72	$\frac{2}{144} \sim \frac{1}{72}$	$72 \times \frac{2}{144} \sim 72 \times \frac{1}{72} = 1$
2 x 3	24	24	$\frac{6}{144} \sim \frac{1}{24}$	$24 \times \frac{6}{144} \sim 24 \times \frac{1}{24} = 1$
3 x 4	12	12	$\frac{12}{144} \sim \frac{1}{12}$	$12 \times \frac{12}{144} \sim 12 \times \frac{1}{12} = 1$
4 x 6	6	6	$\frac{24}{144} \sim \frac{1}{6}$	$6 \times \frac{24}{144} \sim 6 \times \frac{1}{6} = 1$
6 x 12	2	2	$\frac{72}{144} \sim \frac{1}{2}$	$2 \times \frac{72}{144} \sim 2 \times \frac{1}{2} = 1$

Fonte: produção das turmas 8ª A, B e C

Reconhecemos a importância de considerar, nesta discussão, que embora a FIGURA 24 (p. 100) sintetize os resultados obtidos pela turma 8<sup>a</sup>B, produtos e situações similares foram manifestados nas turmas A e C; os quais nos propiciaram as intervenções já apontadas e finalizamos com os resultados expostos (FIGURA 25 e 26; p. 102).

Depositamos muita expectativa na realização da segunda etapa da sequência ladrilhamento, pois esperamos que, durante o desenvolvimento desta etapa da sequência didática seriam reveladas as dúvidas e incertezas dos nossos alunos, com os itens propostos para discussão, análise e registros. Em grupos, os alunos iniciaram as atividades.

Antes do tempo previsto para o término da atividade, os grupos foram sinalizando que não tinham mais recursos para continuarem a atividade, apesar da assistência pontual dada aos grupos durante as discussões. Resolvemos, como o previsto, interromper o trabalho em grupo para dar espaço a uma discussão coletiva. Combinamos que discutiríamos as ideias básicas do primeiro item, buscando expandir os conhecimentos prévios que seriam utilizados na resolução da tarefa.

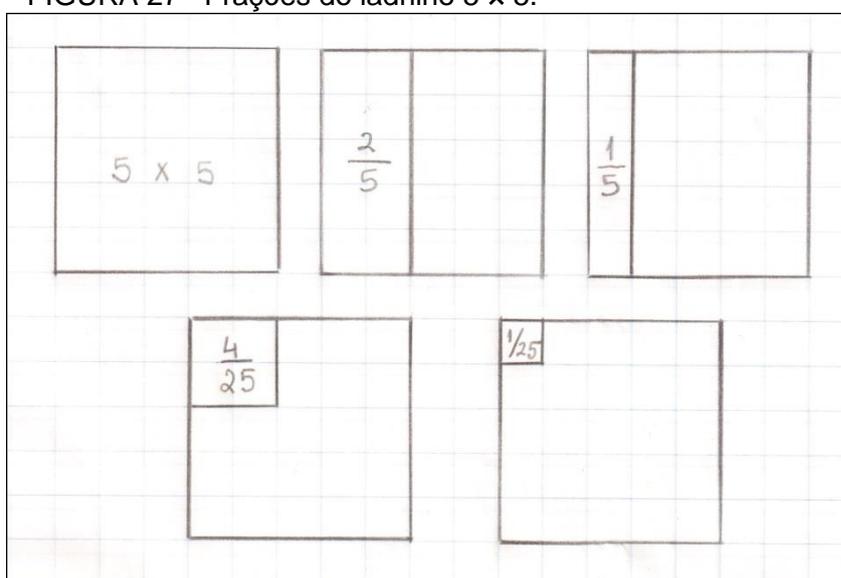
Iniciamos com a apresentação dos registros dos tipos de ladrilhamento produzidos pela turma, constatando a necessidade do emprego de pedaços de ladrilhos, ou seja, de fracionar o ladrilho. Nesse ponto, surgiu a necessidade de compreender que o todo, o inteiro considerado é transferível, e foi justamente o que ocorreu. Na etapa anterior, a diferença entre ladrilhos empregados e necessários não causou estranheza, pois os dados coincidiam, mas nesse caso, apareciam diferenças e com exemplos, indicamos a diferença entre ladrilhos empregados e ladrilhos necessários. Ficou definido que para conseguirmos partes do ladrilho, precisamos de mais ladrilho e daí decorre a diferença entre a quantidade empregada e a quantidade necessária.

No caso do ladrilhamento proposto, há momentos em que o inteiro é o quadrado que vamos pavimentar e, em outros, o inteiro a ser tomado é o ladrilho que será usado na pavimentação. Sugerimos que, no papel

quadriculado, desenhassem o ladrilho  $5 \times 5$  e as partes dele, empregadas na pavimentação (FIGURA 27).

Retomadas as discussões em grupo, concluíram o item proposto. As exposições, durante as discussões coletivas, indicaram que as conclusões dos grupos chegaram a estágios diferentes, com alguns grupos indicando as operações com as frações, mas sem concluí-las e outros, conseguindo dar um resultado final. Dentre estes, um grupo apresentou resultado, mas não estava correto.

FIGURA 27– Frações do ladrilho  $5 \times 5$ .



Fonte: produção em sala de aula; 8ª Série B.

Os grupos que realizaram as operações compartilharam o procedimento utilizado, justificando os caminhos usados nas operações empregadas. Foi concluído que são necessários 6 ladrilhos, dos quais serão empregados 5 ladrilhos mais  $\frac{19}{25}$  de outro ladrilho, totalizando  $\frac{144}{25}$  ladrilhos, sendo que a partir do significado de quociente, resultado da divisão, encontramos:

$$\frac{144}{25} = 144 : 25 = 6 + \frac{19}{25} = 6 \frac{19}{25}$$

Com a discussão coletiva, observamos que havia melhorado o entendimento da turma para as ideias de frações ordinárias; as dúvidas foram explicitadas e tratadas localmente, mas somos conscientes de que, em se

tratando de frações, é comum a aparência mascarar a realidade, vamos oportunizar outra situação semelhante a essa vivenciada, a título de experimentação. O resumo das discussões e registros realizados pela 8ª C encontra-se na FIGURA 28.

FIGURA 28 – Ladrilhamento  $5 \times 5$  – etapa II.

1ª solução

$5 \times 5$	$\frac{2}{5}$	$5 \times 5$
$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{2}{5}$
$5 \times 5$	$\frac{2}{5}$	$5 \times 5$

2ª solução

$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{25}$
$5 \times 5$ ①	$5 \times 5$ ①	$\frac{2}{5}$
$5 \times 5$ ①	$5 \times 5$ ①	$\frac{2}{5}$

3ª solução

$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{5}$	$5 \times 5$	$5 \times 5$
$\frac{1}{5}$	$5 \times 5$	$5 \times 5$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

1ª e 2ª soluções

$$4 + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{4}{25} =$$

$$= 4 + \frac{8}{5} + \frac{4}{25} = 4 + \frac{5}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{25} =$$

$$= 4 + 1 + \frac{15}{25} + \frac{4}{25} = 5 + \frac{19}{25} =$$

$$= \frac{5 \times 5 \times 5}{25} + \frac{19}{25} = \frac{125}{25} + \frac{19}{25} = \frac{144}{25}$$

3ª solução

$$4 + 3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{25} = 4 + \frac{8}{5} + \frac{4}{25} =$$

$$= \frac{100 + 40 + 4}{25} = \frac{144}{25}$$

Mostrou que 144 quadradinhos foram divididos por 25 quadradinhos e o quadrado grande foi dividido pelo ladrilho.

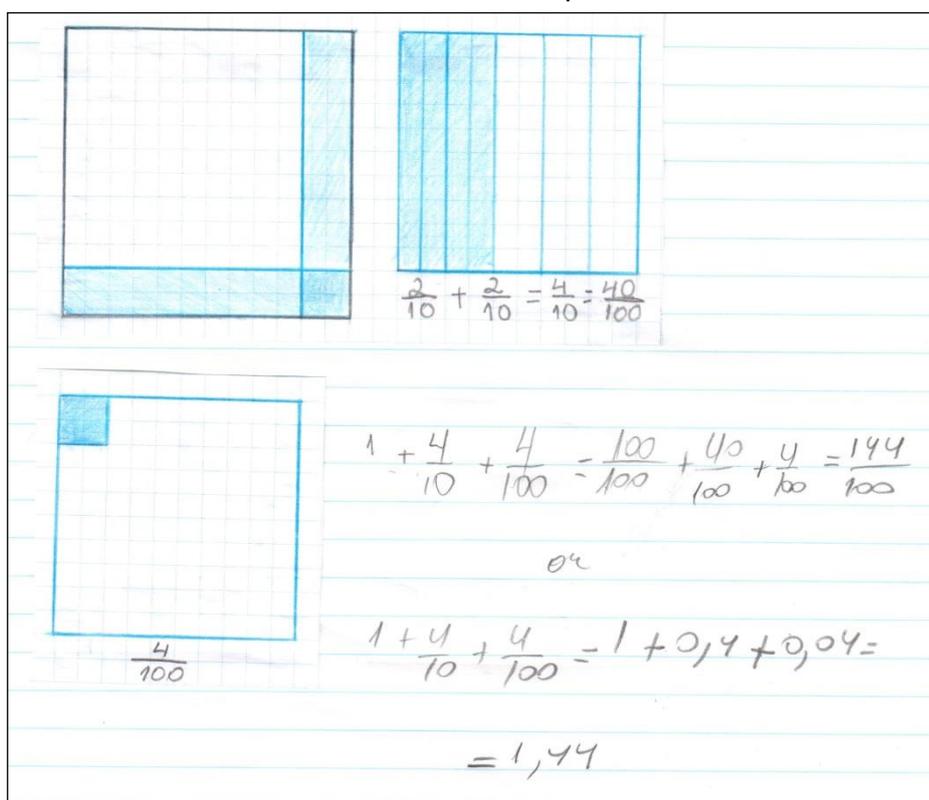
Fonte: Folha resumo produzida pela 8ª Série C.

Complementando a etapa II, temos o ladrilhamento do quadrado  $12 \times 12$  por um ladrilho quadrado, de medidas  $10 \times 10$ . As discussões provocadas por esta questão nos grupos geraram uma interação muito importante; novas questões surgiram, mas foram tratadas e solucionadas a partir do que foi visto no item anterior. A situação era nova, somente no que diz respeito às medidas do novo ladrilho. Era preciso aplicar o que foi visto na resolução do item anterior, fazendo as devidas acomodações. Os grupos trabalharam com mais autonomia.

Visitando os grupos de trabalho, oferecemos alguns esclarecimentos naquilo que os grupos solicitaram. A atividade foi resolvida com mais recursos por parte dos alunos, atingindo soluções mais amplas. Após a discussão coletiva da atividade, ainda apareceram dúvidas pontuais que foram esclarecidas, pelos outros grupos ou pela professora-pesquisadora desta sequência didática.

Durante a exposição da resolução, alguns participantes observaram que as frações com denominador 10 ou 100 podem ser representadas como fração decimal ou número decimal. Mostraram seus registros compartilhando a nova escrita e resolução. Aqui, são necessários dois ladrilhos  $10 \times 10$ , para serem empregados  $\frac{144}{100}$  dos dois ladrilhos. Fechamos a atividade e com isso a etapa II da sequência ladrilhamento (FIGURA 29).

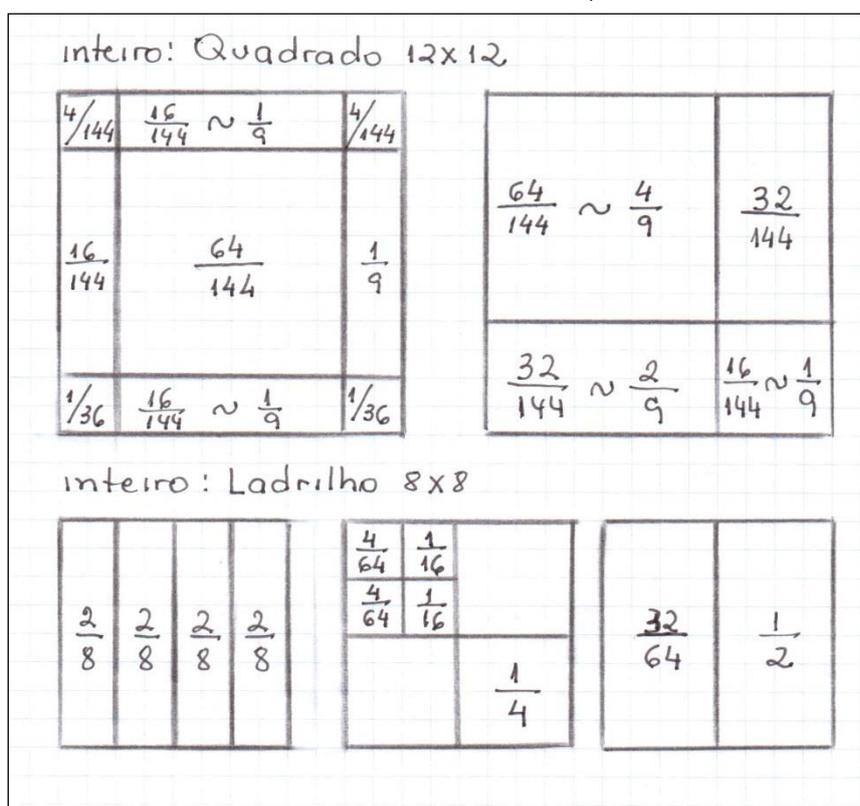
FIGURA 29 – Ladrilhamento  $10 \times 10$ : etapa II.



Fonte: Folha Resumo da 8ª Série A.

Com a etapa final da Sequência Ladrilhamento, propusemos aos grupos de trabalho uma avaliação escrita, seguindo os mesmos critérios empregados durante as atividades e, dessa forma, mantendo as características da nossa sequência didática. Nessa etapa da atividade, a questão problematizadora da avaliação ainda contempla o Ladrilhamento. O novo é o ladrilho:  $8 \times 8$ , que também traz a necessidade de ser fracionado. Precisamos tratar o inteiro em dois momentos: o inteiro quadrado  $12 \times 12$  e o inteiro ladrilho  $8 \times 8$ . Sintetizamos as soluções apresentadas (FIGURA 30).

FIGURA 30 – Resultados de ladrilhamento, com ladrilhos  $8 \times 8$ .



Fonte: Alunos das 8ª Séries: A, B e C.

As resoluções que mais aparecem para

a) a obtenção da parte do ladrilho empregada, são:

$$1 + 4 \cdot \frac{2}{8} + 4 \cdot \frac{1}{16} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{144}{64} = 2 \frac{16}{64} = 2 \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

b) Para o número de ladrilhos necessários: 3;

- c) a fração do inteiro que o ladrilho  $8 \times 8$  representa e o registro da distribuição das lajotas estão na Figura 24, acima;
- d) verificação numérica do ladrilhamento realizado:

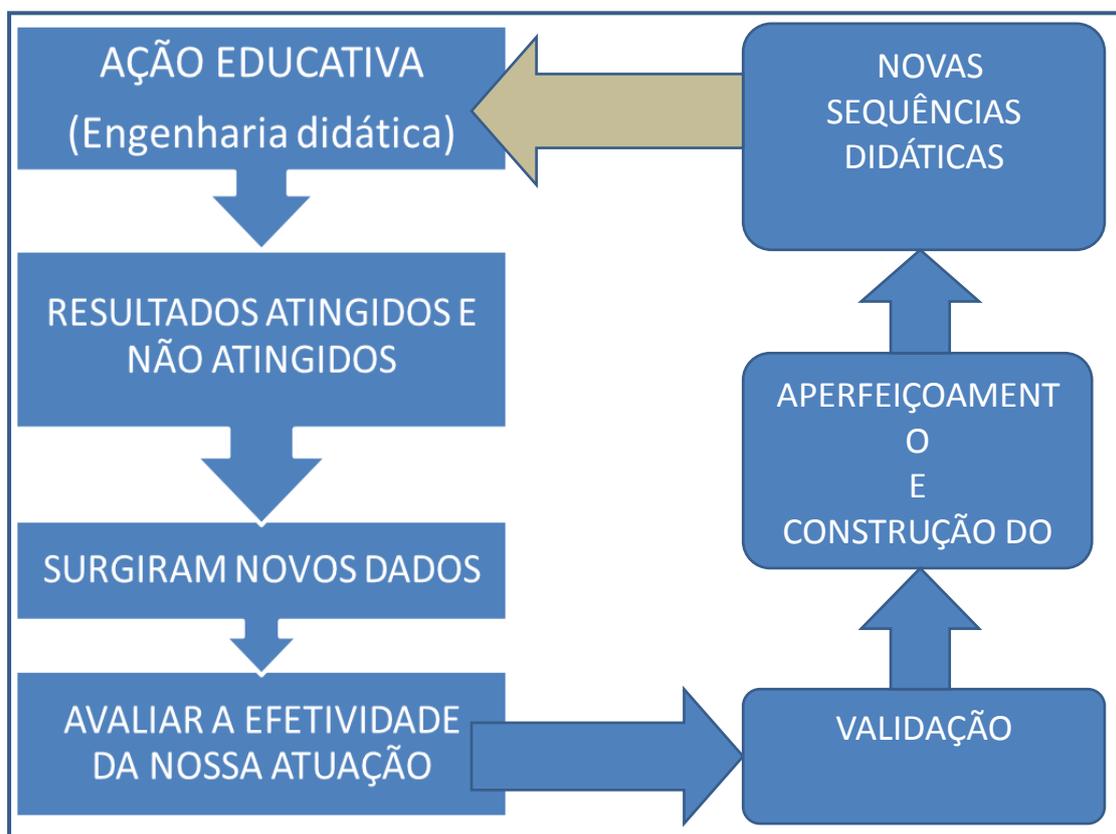
$$\frac{64}{144} + 4 \cdot \frac{4}{144} + 4 \cdot \frac{16}{144} = \frac{64}{144} + \frac{16}{144} + \frac{64}{144} = \frac{144}{144} = 1.$$

Para alguns alunos e grupos de estudo alguns pontos ainda precisavam ser esclarecidos e assim, mais uma discussão coletiva deu atenção às dúvidas apresentadas. Concluímos a aplicação da sequência didática propiciando em linguagem verbal, a avaliação dos alunos pelo trabalho desenvolvido e do aluno coordenador do grupo, com suas impressões sobre o acompanhamento dos alunos e a participação do grupo; caracterizando participação efetiva e envolvimento expressivo de todos.

## 6 ANÁLISE A POSTERIORI

Estamos concluindo uma ação educativa. Novos dados surgem referentes aos nossos alunos e, a partir dos novos dados, precisamos avaliar a efetividade da nossa atuação. Afinal, com os resultados dessa avaliação estaremos nos aperfeiçoando e provendo a construção do conhecimento. Nossa marcha trilhou o caminho da Engenharia Didática e, nesse momento, os passos utilizados nesse caminho, evidencia os resultados atingidos e os que não atingimos, levando-nos à validação deste trabalho.

FIGURA 31 – Organograma: análise a posteriori



FONTE: produção da própria autora

Retomando duas questões norteadoras: a nossa questão de pesquisa e o objetivo geral dessa pesquisa. A nossa questão de pesquisa indaga: *“como identificar e tratar as dúvidas que surgem durante a realização de situações em que os alunos não conseguem aplicar os conceitos de frações já vivenciados em suas trajetórias escolares pregressas?”*. Temos por objetivo

geral neste trabalho “*proporcionar uma intervenção que modifique para melhor o contato dos alunos com as questões que envolvem os conhecimentos relacionados com as ideias de fração ordinária*”.

A partir da análise de nossas hipóteses em confronto com o desenvolvimento das atividades temos a considerar que o trabalho desenvolvido em grupos, com *oficinas de aprendizagem contemplando discussões interativas*, conseguiu mobilizar os conhecimentos desenvolvidos nas séries anteriores de modo que, na maioria das situações propostas, sempre algum aluno do grupo pode contribuir com as suas informações. No entanto, o número de colaboradores se apresentou bem modesto na maioria das discussões iniciais, crescendo à medida que novas atividades foram se desenvolvendo. Em algumas situações, precisamos interromper as discussões coletivas, por falta de cooperadores, dando lugar a aulas dialogadas e, em algumas situações, a aulas expositivas.

A partir do desempenho dos grupos em seus respectivos contextos, aqui considerado o foco do trabalho que é a sala de aula, pudemos observar que as primeiras atividades relacionadas à sequência ladrilhamento, deram evidências de que o índice de compreensão do conceito de fração estava muito baixo e variável. Destacamos muito baixo devido às classes não indicarem níveis de compreensão que atingissem 50% da turma, e variável porque a manifestação do conhecimento demonstrado durante as discussões, em grupos ou coletivas, não originava sempre dos mesmos alunos. Com essa observação, levantamos a possibilidade de que os professores das séries anteriores, quando trabalharam as ideias de fração, usaram abordagens diferenciadas, as quais não contemplaram os quatro significados de fração propostos nos PCN: parte-todo, quociente, razão e operador.

As observações feitas no decorrer do trabalho dos alunos, nas atividades em grupos e nas manifestações dos estudantes durante as discussões coletivas, dão indícios de que os professores exploram, acentuadamente, o significado parte-todo da fração, e mesmo assim as questões que apresentam essa significação não refletem índices elevados de desempenho; observamos também que algum outro significado da fração é

contemplado esporadicamente, o que varia de professor para professor, dependendo do seu critério de escolha e domínio do assunto.

Com relação à sequência Pentaminós, embora trouxesse a aplicação das ideias de raciocínio combinatório, ladrilhamento e cálculos de áreas e perímetros, ao que nos aparenta, seu caráter lúdico diluiu as marcas dos conhecimentos conceituais e procedimentais presentes na atividade. O jogo Pentaminós prestou-se como exercício do trabalho coletivo, valorizou atitudes de boa convivência, envolveu os alunos na busca de informações ou na iniciativa de compartilharem suas ideias e impressões. Gradativamente, os estudantes ficaram mais seguros de seus atos, desenvolvendo além de maior autonomia em todos: estudantes-alunos e estudante-professor, a disponibilidade de unir esforços para vencer desafios.

As atividades propostas na sequência Ladrilhamento se direcionaram para explorar algumas situações elementares envolvendo as ideias de frações ordinárias (ver Apêndice E, tópicos de acompanhamento), permitindo-nos observar os pontos relevantes oportunizados a partir das questões levantadas. A partir da análise do quadro teórico elaborado, devemos admitir que nem todos os itens indicados nos *tópicos de acompanhamento dos conteúdos conceituais e procedimentais* atingidos, foram contemplados igualmente na ação desenvolvida. Como exemplo disso, podemos citar que os significados da fração não apareceram de modo equitativo e, no que se refere às operações, a divisão de fração por fração surgiu somente em discussões provocadas com a turma, no fechamento de alguns itens, de modo complementar.

Indicamos como uma das possíveis causas desse acontecimento a limitação na forma de ladrilhar, imposta pelas orientações da atividade; que se de um lado uniformizou as resoluções viabilizando a participação de todos, por outro lado restringiu a discussão de novas questões, perdendo de certa forma, o momento para gerar questões mais amplas que poderiam enriquecer as discussões e oportunizar a revelação de mais dúvidas durante as discussões; e desperdiçamos a oportunidade das manifestações criativas que poderiam surgir com o ladrilhamento, para garantirmos o foco do nosso estudo.

As análises prévias levantadas no estudo da formação da Engenharia Didática foram substanciais, para dar suporte à elaboração, desenvolvimento, aplicação, acompanhamento e análise da sequência didática, configurando-se como o alicerce desse processo.

## **7 VALIDAÇÃO**

A partir da Análise a Posteriori realizada, do material produzido pela professora-aplicadora e pelos alunos e, ainda, das manifestações de todos os envolvidos neste trabalho, temos a validação da ação didática realizada.

### **7.1 Validação da aprendizagem dos alunos**

As atividades da sequência didática foram experimentadas com alunos das oitavas séries do ensino fundamental de uma escola pública municipal, de Ribeirão Preto, estado de São Paulo, Brasil. A partir das observações feitas no acompanhamento das atividades e nas manifestações dos alunos, identificamos um envolvimento crescente das turmas no desempenho das tarefas, e do material produzido. Constatamos uma significativa evolução dos alunos, em termos conceituais, procedimentais e atitudinais o que nos motiva considerar que, de modo geral, os nossos objetivos conceituais e procedimentais foram alcançados pela maioria dos nossos alunos e os objetivos referentes aos conteúdos atitudinais, pela totalidade.

Pontuamos que alguns alunos, mesmo progredindo no sentido de ter conseguido participar de forma integrada e satisfatória nas situações didáticas oferecidas, ressaltando que os mesmos em outras circunstâncias tiveram participação insatisfatória, ainda não desenvolveram completamente as habilidades necessárias para tratar com autonomia as questões ou situações que envolvem frações ordinárias.

#### **7.1.1 Comentários gerais dos alunos**

Nas avaliações orais feitas pelos alunos sobre as atividades propostas na sequência didática aplicada os estudantes externaram que as frações foram vistas de um modo diferente e que com o ladrilhamento, as

frações apareceram de modo inesperado, pois tiveram que usar a fração numa hora que não esperavam que elas fossem aparecer. Consideraram importante ter com quem discutir as dúvidas que surgiram no decorrer das atividades e que conforme foram praticando foram também aprendendo.

## **7.2 Validação da aprendizagem do professor**

A Engenharia Didática tem entre as suas características inovadoras propiciar, desde a sua elaboração até a sua conclusão, que o professor experimente um crescimento pessoal. Os passos da Engenharia Didática exigem a atualização teórica do professor, ao realizar estudos para o levantamento do referencial teórico utilizado, ao fundamentar as suas concepções e hipóteses, e também, ao estudar a metodologia que a Engenharia Didática representa. As situações didáticas promovem, simultaneamente, dois processos de ensino-aprendizagem: um que se relaciona com o aprendizado do aluno e o outro relacionado à aprendizagem do professor.

No nosso caso específico, pudemos observar o crescimento pessoal ao elaborávamos e cumpríamos os passos da Engenharia Didática. A aprendizagem foi experimentada nos aspectos teóricos, na fundamentação das concepções e hipóteses e no próprio estudo da Engenharia Didática enquanto metodologia de pesquisa em Matemática. Além disso, contribuiu para o desenvolvimento de um trabalho diferenciado fortalecendo as relações aluno-aluno e alunos-professor.

### **7.2.1 Comentários do professor-aplicador sobre o ensino das frações ordinárias**

As entrevistas informais com os professores das séries anteriores emitem indícios de que os números racionais em sua representação fracionária ordinária tem menor espaço nos currículos de Matemática e quando aparece figurando entre os conteúdos previstos, o tempo didático a ele destinado fica

aquele do tempo de aprendizagem necessário, não respeitando o processo de acomodação e assimilação que o novo requer para o aprendiz.

Apesar dos modelos e metodologias de ensino, assim como os currículos propostos pelos órgãos governamentais, oferecerem diretrizes e sugestões didático-metodológicas para o ensino das frações ordinárias contemplando visões mais elaboradas e amplas sobre o assunto, a prática dá indicativos de que no nosso fazer pedagógico, as frações são tratadas, especialmente, com exercícios que estimulam o significado da fração como parte-todo. Esses exercícios contemplam situações em que se devem colorir parte do todo para representar uma fração dada, ou identificar a fração que representa a parte que foi colorida do todo; esquecemo-nos até mesmo de evidenciar a conservação do número de partes em que o todo foi dividido.

### **7.3 Validação sobre a metodologia engenharia didática**

Sobre a Engenharia Didática, é uma metodologia aplicada, principalmente, a pesquisas em Educação Matemática, desde a sua elaboração até a sua análise e conclusão. Tem como foco a prática da sala de aula, mas não permite o descuido do conhecimento teórico e une, por meio de uma sequência didática experimental, a construção do saber matemático à uma prática investigativa apoiada na reflexão. É por tudo isso que a engenharia didática permite desenvolver produtos para o ensino, gerados no próprio ensino aliado ao conhecimento teórico.

No caso específico desta pesquisa, pudemos com a Engenharia Didática dar tratamento às dúvidas apresentadas pelos alunos ao se depararem com questões envolvendo as ideias elementares sobre frações ordinárias, contribuindo com essa intervenção para o desenvolvimento dos alunos.

### **7.4 Considerações finais**

Embora os alunos não tenham conseguido o mesmo nível de compreensão e aprendizado, pudemos observar que cada um, a seu modo, experimentou situações de sucesso e crescimento o que pode representar para estes estudantes melhores condições para prosseguir a sua trajetória. Assim, a

partir dessas considerações, concluímos que o nosso objetivo maior foi alcançado e a nossa questão de pesquisa fica respondida, afirmativamente, por ser possível por meio de sequências didáticas, convenientemente elaboradas, tratarmos as dúvidas apresentadas pelos nossos alunos no intuito de transpor as suas dificuldades.

A Engenharia Didática nos deu mostras da sua força investigativa, reflexiva e conclusiva. Os materiais produzidos pelos alunos indicaram os avanços alcançados, facilitados pela sequência didática desenvolvida, as oficinas de aprendizagem, as discussões coletivas. Resta-nos considerar que muitas outras questões como essas podem e devem ser resolvidas e, o caminho que hora apresentamos, é de que outras sequências didáticas sejam elaboradas e desenvolvidas usando como metodologia a Engenharia Didática.

## 8 REFERÊNCIAS

ALMOULOU, S. A.; COUTINHO, C. de Q. e S. **Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPED**<sup>3</sup>. REVMAT<sup>4</sup>. V3.6, p. 62-77, UFSC: 2008. Disponível em: <<http://www.journal.ufsc.br/index.php/revemat/article/viewFile/13031/12137>> Acesso em jan. 2013.

ALVES, Sérgio. **Ladrilhando o Plano com Quadriláteros**. In: Revista do Professor de Matemática, n. 51. S.l: SBM, 2003, p. 7-9.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. **A Matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas**. Tradução E. F. Gomide; H. Castro. 2. Ed. São Paulo: Blücher, 2010.

BIBLIOTECA COMUNITÁRIA. **Guia para apresentação do trabalho acadêmico**: de acordo com NBR 14724/2011. São Carlos (SP): UFSCAR, 2011.

BIBLIOTECA COMUNITÁRIA. **Guia para elaboração de Referências**: de acordo com NBR 6023/2002. São Carlos (SP): UFSCAR, 2012.

BIBLIOTECA COMUNITÁRIA. **Guia para padronização de Citações**: de acordo com NBR 10520/2002. São Carlos (SP): UFSCAR, 2012.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. **SAEB 2001: novas perspectivas**. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. Brasília: O Instituto, 2002. 106 p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, 1ª a 4ª Séries**. 3. Ed. Brasília: A Secretaria, 2001. 142p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, 5ª a 8ª Séries**. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p.

CAETANO, P. A. S e outros. Ladrilhamento do plano: ângulos internos e ladrilhos de três em três: desafio do ladrilhamento: matemática na prática. In: **Curso de Especialização para Professores do Ensino Médio de Matemática**: módulo I: a sala de aula em foco. Disponível em: <<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=21085>>. Acesso em 09. jan. 2013.

---

<sup>3</sup> Grupo de Trabalho 19 da associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação

<sup>4</sup> Revista Eletrônica de Educação Matemática

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. **Engenharia didática**: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática. Zetetiké, Campinas-UNICAMP, v. 13, n.23, 2005, p. 85-118. Disponível em <<http://www.fe.unicamp.br/zetetike/viewarticle.php?id=67>>. Acesso em jan. 2013.

CENTURIÓN, Marília. **Números e Operações**: conteúdo e metodologia da matemática. Série Didática – Classes de Magistério. São Paulo: Scipione, 1994.

DALCIN, M; ALVES, S. **Mosaicos no Plano**. In: Revista do Professor de Matemática, n. 40. S.l: SBM, S. d. Disponível em <<http://www.rpm.org.br/conheca/40/1/mosaico.htm>> Acesso em mar. 2013.

D'AMORE, B. **Elementos de Didática da matemática**. Traduzido por Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

DIENES, Z. P. **Frações**. Traduzido por M. P. B. de M. Charlier; R. F. J. Charlier. Supervisão do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática – GEEM – São Paulo. São Paulo: Herder, 1971. 55p.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H Domingues. 5. Ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FRANCHI, A. Considerações sobre a Teoria dos Campos Conceituais. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2012. p. 189-232.

FREITAS, J. L. M. Teoria das Situações Didáticas. In MACHADO, S. D. A. (Org.) **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2012. p. 77-111.

IGLIORI, S. B. C. A Noção de “Obstáculo Epistemológico” e a Educação Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.) **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2012. p. 113-142.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. Microdicionário de Matemática. São Paulo: Scipione, 1998. 351 p

MAGINA; S. et al. **Repensando Adição e Subtração**: contribuições da teoria dos campos conceituais. 3. ed. São Paulo: PROEM, 2008.

MOREIRA, M. A. Aprendizagem Significativa: a teoria e textos complementares. São Paulo: Livraria Editora da Física, 2011. p.179.

NIVEN, I. **Números: Racionais e Irracionais**. Traduzido por Renate Watanabe. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984, c1961.

NUNES, T et al. **Educação Matemática**: números e operações numéricas. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2009.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 2. Ed., 2ª reimpressão. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

PAIS, L. C. Transposição Didática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.) **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2012. p. 11-48.

**PAVIMENTAÇÃO** com Polígonos Regulares. Disponível em <<http://www.4ff.br/cdme/ppr/ppr-html/ppr-br.html>>.

**PAVIMENTAÇÕES**. Disponível em <<http://www1.esec.pt/pagina/fcmat/documentos/Pavimentacoes.Tarefas.pdf>>

PITOMBEIRA, J. B.; ROQUE, T. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012

RESENDE, V. da R.; OLIVEIRA, M. L. Vínculos Parentais. In OLIVEIRA, M. L.(Org.). **O Acolhimento do Desejo na Educação**: um desafio para educadores. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2008.

ROSA NETO, E. **Didática da Matemática**. 9.ed. Série Educação. São Paulo: Ática. 1996.

SALLUM, E. M. **Ladrilamentos**. Disponível em <[www.ime.usp.br](http://www.ime.usp.br)>.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Experiências Matemáticas**: 6ª série. Versão preliminar. São Paulo: SE/CENP, 1996. 411p.

SILVA, B. A. Contrato Didático in MACHADO, S. D. A. (Org.) **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2012. p. 49-75.

**TIPOS de Pavimentação**. Disponível em <<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2003/icm22/paviaper.htm#Pavaper>>.

TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. **Didática da Matemática**: como dois e dois: a construção da matemática. Conteúdo e Metodologia, 1ª a 4ª Série. São Paulo: FTD, 1997.

ZABALA, Antoni; tradução Ernani F. da F. Rosa. **A Prática Educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

## 9 APÊNDICES

### APÊNDICE A – Projeto de pesquisa: AS FRAÇÕES QUE O LADRILHAMENTO REVELA.

Público Alvo	8ª séries A, B e C, com idade entre 14 e 15 anos Escola pública – Ribeirão Preto - SP
Período	Primeiro semestre de 2012
Tempo de aplicação	15 aulas <ul style="list-style-type: none"> <li>– 5 aulas para o desenvolvimento da sequência Pentaminós;</li> <li>– 10 aulas para o desenvolvimento da sequência Ladrilhamento.</li> </ul>
Objetivo	Abordar os números racionais e, especialmente, as frações ordinárias de forma inovadora;
Justificativa	A importância de identificar e dar tratamento pontual a um assunto matemático que apresenta, entre os alunos, alto índice de dúvidas e inseguranças na forma como aplicá-lo.
Metodologia	<i>Engenharia didática</i> envolvendo sequência didática em situações didáticas.
Estratégias	<ul style="list-style-type: none"> <li>– atividades realizadas em <i>oficinas de aprendizagem</i> caracterizada por trabalho interativo, conhecimentos compartilhados em grupos de trabalho, discussões coletivas, elaboração das conclusões com solução para as questões apresentadas;</li> <li>– questões que instiguem discussões por parte dos integrantes dos grupos e os levem a reflexões para a tomada de decisão.</li> </ul>
Intervenção	Atividade integradora inicial seguida de uma sequência de situações propostas como meio que indique a necessidade de fracionar o inteiro, em algumas ocasiões, e também ressaltar as diferentes formas de registrar as respostas obtidas para as questões apresentadas.
Recursos	<ul style="list-style-type: none"> <li>- papel quadriculado: malha 1 × 1 e 0,5 × 0,5; papel cartão colorido;</li> <li>- lápis grafite preto e lápis de cor; régua, tesoura; cola;</li> <li>- jogo Pentaminós – confeccionado;</li> <li>- dicionário da língua portuguesa (do próprio aluno);</li> <li>- microdicionário de Matemática.</li> </ul>
Comunicação	<ul style="list-style-type: none"> <li>– apresentação e discussão oral da situação a ser trabalhada;</li> <li>– <i>fichas de atividades</i> com as questões propostas e orientações sobre o desenvolvimento e apresentação das atividades.</li> </ul>
Fichas de atividades	<ul style="list-style-type: none"> <li>– ficha de atividades para a sequência <i>Pentaminós</i> (APÊNDICE B);</li> <li>– ficha de atividades para a sequência <i>Ladrilhamento</i> (APÊNDICE C) e (APÊNDICE D).</li> </ul>
Apresentação conclusões dos alunos	<ul style="list-style-type: none"> <li>– exposição oral;</li> <li>– registro, por escrito, para entrega.</li> </ul>

Avaliação das atividades	<ul style="list-style-type: none"><li>– que fazem: alunos; aluno-coordenador de cada grupo;</li><li>– professor-aplicador da atividade com o acompanhamento das atividades propostas, envolvimento dos participantes durante as atividades, análise do material recolhido com as conclusões elaboradas;</li></ul>
Avaliação dos alunos	<ul style="list-style-type: none"><li>– participação observada pelo professor-aplicador durante o trabalho em grupo;</li><li>– atuação observada pelo aluno-coordenador do grupo;</li><li>– participação na apresentação coletiva dos trabalhos;</li><li>– produções escritas do grupo e individuais;</li></ul>
Avaliação da Engenharia Didática	<ul style="list-style-type: none"><li>– análise crítica dos participantes;</li><li>– análise crítica, individual, do professor-aplicador, autora da Engenharia Didática.</li></ul>

Fonte: produção da própria autora.

## APÊNDICE B – Modelo de ficha contendo atividades para a sequência Pentaminós

<i>As frações que o ladrilhamento revela</i>
Sequência Pentaminós: atividades lúdicas e integradoras
Parte A – obtenção, registro e análise das peças do jogo Pentaminós – 2 aulas
<p>Desenvolvimento da atividade, em grupos.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– dispor, de todos os modos possíveis, cinco quadrados de modo que cada quadrado tenha ao menos um lado em comum com outro quadrado;</li> <li>– descartar as peças simétricas ou aquelas obtidas pela rotação de outra peça já considerada; também não são consideradas as peças que apresentam dois quadrados unidos somente pelo vértice.</li> <li>– registrar as soluções encontradas em papel quadriculado;</li> <li>– determinar a área e o perímetro das peças encontradas;</li> </ul>
<p>Elaboração das conclusões, em discussões coletivas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– cada grupo deverá expor para a turma os seus resultados referentes ao número e ao tipo de peças obtidas, perímetro e área das peças;</li> <li>– discussão coletiva para comparar os resultados obtidos e verificar qual a relação que se estabelece entre as áreas encontradas;</li> </ul>
<p>Produção escrita elaborada pelo grupo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– após a conclusão cada grupo apresenta uma folha resumo, com os resultados do grupo para a atividade, que será recolhida para análise e devolvida em seguida, para uso do grupo como material de consulta.</li> <li>– Cada aluno, usando os moldes das peças obtidas, deverá colar os moldes em papel cartão colorido, recortar as peças para obter o seu jogo Pentaminós.</li> </ul>

Parte B – Pentaminós: jogo e desafio.....3 aulas

Desenvolvimento da atividade, em grupos:

- jogo livre: com as peças do Pentaminós, fazer composições livres de figuras geométricas quaisquer;
- usando todas as peças do jogo Pentaminós, cada grupo deverá resolver um dos seguintes problemas (de acordo sorteio), registrar os resultados encontrados em papel quadriculado, para que sejam discutidos, coletivamente, na próxima aula.
  - a) problema 1: construir um retângulo de  $10 \times 6$ ;
  - b) problema 2: construir um retângulo de  $12 \times 5$ ;
  - c) problema 3: construir um retângulo de  $15 \times 4$ ;
  - d) problema 4: construir um quadrado de  $8 \times 8$ .
- conclusão da atividade com a exposição e discussão dos resultados obtidos,
- a exposição dos resultados será feita, na sequência, pelos dois grupos que foram sorteados para apresentarem a mesma composição geométrica;
- após todos os grupos terem apresentado as suas soluções, passaremos observar algumas particularidades existentes.

Questionamento:

“Existe alguma diferença na solução dos problemas apresentados?”

“Você já ouviu falar de ladrilhamento, pavimentação ou mosaico?”

Escrevam as suas respostas, justificando-as.

Fonte: elaboração da própria autora, a partir das EM-6ª Série (SÃO PAULO, 1996, p. 211-213)

## APÊNDICE C – Modelo de ficha de atividades para a Sequência Ladrilhamento – folha I

<i>As frações que o ladrilhamento revela</i>
<i>Sequência Ladrilhamento</i>
<p>Orientações:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a) As peças devem ser colocadas lado-lado, de modo que os vértices dos polígonos fiquem todos no vértice de pavimentação;</li> <li>b) por convenção, a leitura das medidas das lajotas ou ladrilhos deve ser entendida: altura x largura e deverão ser aplicadas nesse sentido;</li> <li>c) cada grupo deve registrar as suas respostas em papel quadriculado, desenhando o modo como o quadrado <math>12 \times 12</math> foi “ladrilhado” em cada item.</li> <li>d) Em todas as questões de ladrilhamento, desprezar a compra de 10% a mais dos ladrilhos necessários, que na prática os 10% são destinados para quebras e perdas.</li> </ul>
<p>Questões levantadas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>e) Quantos são os ladrilhos necessários e quanto dos ladrilhos foi empregado para cobrir a área do quadrado <math>12 \times 12</math>? Por que isso acontece? Será que essa situação sempre se repete?</li> <li>f) Qual é a fração que cada ladrilho representa do quadrado <math>12 \times 12</math>?</li> <li>g) mostrem, numericamente, que com as lajotas usadas em cada caso o quadrado ficou completamente coberto;</li> <li>h) discussão coletiva para apresentação das soluções encontradas e elaboração das conclusões;</li> <li>i) algum de vocês, ou o grupo, observa alguma situação que possa ser levada à discussão coletiva? Anote-a, vale a pena levantar dúvidas ou experiências pois todos aprenderemos com elas.</li> <li>j) cada grupo entrega a folha com a produção inicial e, após discussão, folha resumo.</li> </ul>
<p>Etapa II</p> <p>Resolver a situação proposta, em grupos, seguindo as mesmas orientações anteriores <i>Devemos ladrilhar um quadrado <math>12 \times 12</math> usando lajotas quadradas que medem, respectivamente, <math>5 \times 5</math> e <math>10 \times 10</math>. ..... 4 aulas</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>k) Usando um tipo de lajota de cada vez, quantas são as lajotas necessárias e quantas são as lajotas empregadas para cobrir a área do quadrado <math>12 \times 12</math>? Por que isso acontece? Compare esta situação com a que foi proposta anteriormente. Dê sua resposta por escrito.</li> <li>l) Qual é a fração que cada ladrilho representa do quadrado <math>12 \times 12</math>?</li> <li>m) Existem outras frações ou outras ideias que aparecem nesta situação? Quais? Por que surgem?</li> <li>n) Registre cuidadosamente as lajotas inteiras e as frações de lajotas empregadas;</li> <li>o) Verifique, numericamente, se o inteiro foi completamente pavimentado.</li> <li>p) <i>Discussão coletiva para fechamento da atividade. Entregue as produções escritas.</i></li> </ul>

Fonte: elaboração da própria autora

## APÊNDICE D – Modelo de ficha de atividades para a Sequência Ladrilhamento – folha II

Etapa final – Avaliação Escrita para os grupos de Trabalho..... 2 aulas

Leia atentamente a presente ficha de atividades e orientações. A seguir, mãos à obra, vamos dar início às atividades.

Agora vamos mostrar o nosso avanço.

Esta será uma aula inédita, para todos nós, em que precisaremos pensar para resolver as questões propostas, isto é normal porque é com a reflexão e a experimentação que adquirimos novos conhecimentos; mas com as nossas vivências anteriores temos conhecimentos prévios para resolvê-las. É isto que fará toda a diferença nesta aula. Bom trabalho.

Questão e questionamentos:

Resolva e discuta com o seu grupo de trabalho, a mesma situação problematizadora, porém em nova circunstância: *vamos fazer o Ladrilhamento do quadrado  $12 \times 12$ , com ladrilhos iguais medindo  $8 \times 8$ . Primeiramente, use o papel quadriculado para ilustrar o ladrilhamento empregado pelo grupo. A partir daí, resolvam os questionamentos propostos:*

- a) quantos ladrilhos são necessários e qual parte destes ladrilhos será usada?
- b) qual é a fração do inteiro que o ladrilho  $8 \times 8$  representa?
- c) registre cuidadosamente as lajotas inteiras e as frações de lajotas empregadas;
- d) verifique, numericamente, se o inteiro foi completamente ladrilhado.

Orientações

- não é necessário colorir a pavimentação (ladrilhamento) de imediato, esta não é a nossa prioridade para o momento. Com a régua e lápis grafite, deixe registrado apenas o contorno (a silhueta) dos ladrilhos e as partes deles, de modo que o quadrado  $12 \times 12$  fique completamente revestido pelos ladrilhos. Se, ao terminarem todas as questões, ainda sobrar tempo e, se for de interesse do grupo, podem colorir a pavimentação.

Sugestão: usem duas cores para ressaltar o efeito dos ladrilhos.

- as peças devem ser colocadas lado a lado, de modo que os vértices dos polígonos fiquem

todos no vértice de pavimentação;

- por convenção, a leitura das medidas das lajotas ou ladrilhos deve ser entendida: altura x largura e deverão ser aplicadas nesse sentido;

- em todas as questões de ladrilhamento, desprezar a compra de 10% a mais dos ladrilhos necessários, que na prática estes 10% são destinados para previsão de perdas do tipo ladrilhos com defeito e quebras.

- terminada a tarefa, esta será recolhida para ser analisada e, posteriormente, devolvida.

- teremos uma aula para a nossa discussão coletiva, incluindo, uma avaliação das sequências de atividades que estamos completando.

Fonte: elaboração da própria autora

## APÊNDICE E – Quadro conceitual norteador

Tópicos para acompanhamento dos conteúdos conceituais e procedimentais	
Reconhecem os números racionais nas formas fracionárias: fração ordinária e decimal	
Relacionam as representações fracionária e decimal de um mesmo número racional e conseguem representa-los	
Atribuem à fração os significados de	
número	- não precisa referir-se a quantidades específicas; - formas de representação fracionária: ordinária e decimal
parte-todo	Partição de um todo, contínuo ou discreto, em $n$ partes iguais, sendo que cada parte é representada por $\frac{1}{n}$ .
Medida (quantidades)	- extensivas: relação entre duas variáveis (probabilidade); - intensivas: relação parte-parte (composição suco).
quociente	- divisão surge como estratégia favorável para resolver um problema.
operador multiplicativo	- é associado o papel de transformação; - funciona como redutor ou ampliador de uma quantidade.
Reconhecem que existem infinitas formas de representar a mesma fração	
Compreendem a Equivalência de Frações e a comparação de frações	
Realizam as operações com frações	
Adição e subtração com frações homogêneas	
Adição e subtração com frações heterogêneas	
Multiplicação de número inteiro positivo por fração	
Multiplicação de fração por fração	
Divisão de número inteiro por fração	
Divisão de fração por fração	
Tópicos para acompanhamento: avaliação dos conteúdos atitudinais	
Valores	solidariedade, respeito aos outros, responsabilidade, liberdade
Atitudes	cooperar com o grupo, ajudar os colegas, respeitar o meio ambiente, participar das tarefas escolares
Normas	aceitação como regras básicas de funcionamento

Fonte: elaboração da própria autora

## 10 ANEXOS

**ANEXO A** – Conteúdos, procedimentos e indicações com enfoque para os números racionais - PCN 1ª a 4ª séries (1º ao 5º Ano) do Ensino Fundamental. (BRASIL, 2001, p.79 - 95)

CONTEÚDOS E PROCEDIMENTOS – 2º Ciclo (3ª e 4ª Séries/4º e 5º Anos)	
CONTEÚDOS CONCEITUAIS E PROCEDIMENTAIS	INDICAÇÕES
Reconhecimento de números naturais e racionais no contexto diário	Construir o significado de número racional e de suas representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social.
Formulação de hipóteses sobre a grandeza numérica, pela observação da posição dos algarismos na representação decimal de um número racional.	Pela análise das regras de funcionamento do sistema de numeração decimal
Extensão das regras do sistema de numeração decimal para compreensão, leitura e representação dos números racionais.	Forma decimal.
Comparação e ordenação de números racionais.	Forma decimal.
Localização na reta numérica, de números racionais.	Forma decimal.
Leitura, escrita, comparação e ordenação de <b>representações fracionárias</b>	Representações fracionárias de uso frequente
Reconhecimento de que os números racionais admitem diferentes (infinitas) representações na <b>forma fracionária</b> .	Frações equivalentes
Identificação e produção de frações equivalentes...	... pela observação de representações gráficas e de regularidades nas escritas numéricas.
Exploração dos diferentes significados das <b>frações</b> em situações-problema.	Explorar os significados das frações: parte-todo, quociente e razão
Observação de que os números naturais podem ser expressos na <b>forma fracionária</b> .	Fração de denominador 1
Relação entre representações fracionária e decimal...	... de um mesmo número racional.
Reconhecimento do uso da porcentagem no contexto diário	Fração de denominador 100
Cálculo de adição e subtração de números racionais na forma decimal...	... por meio de estratégias pessoais e pelo uso de técnicas operatórias convencionais.
Cálculo de porcentagem	Cálculo simples de porcentagem

**ANEXO B** – Conceitos e procedimentos, com enfoque para números racionais, indicados nos PCN 5ª a 8ª séries (6º ao 9º Ano) do Ensino Fundamental. (BRASIL, 2001, p.71 - 72)

CONCEITOS E PROCEDIMENTOS – 3º Ciclo (5ª e 6ª Séries/6º e 7º Anos)
Números e Operações
Compreensão do sistema de numeração decimal, identificando o conjunto de regras e símbolos que o caracterizam e extensão das regras desse sistema para leitura, escrita e representação dos números racionais na forma decimal.
Reconhecimento de números racionais em diferentes contextos – cotidianos e históricos – e exploração de situações-problema em que indicam relação <b>parte/todo, quociente, razão ou funcionam como operador</b> .
Localização na reta numérica de números racionais e reconhecimento de que estes podem ser expressos na <b>forma fracionária</b> e decimal, estabelecendo relações entre essas representações.
Análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números naturais, inteiros e racionais, reconhecendo que diferentes situações-problema podem ser resolvidas por uma única operação e que eventualmente diferentes operações podem resolver um mesmo problema.
Cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) envolvendo operações – com números naturais, inteiros e racionais –, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos nelas envolvidos, utilizando a calculadora para verificar e controlar resultados.
Compreensão da potência com expoente inteiro positivo como produto reiterado de fatores iguais, identificando e fazendo uso das propriedades da potenciação em situações-problema.
Atribuição de significado à potência de <b>expoente</b> nulo e <b>negativo</b> pela observação de regularidades e pela extensão das propriedades das potências com expoente positivo.
Compreensão da raiz quadrada e cúbica de um número, a partir de problemas como a determinação do lado de um quadrado de área conhecida ou da aresta de um cubo de volume dado.
Cálculos aproximados de raízes quadradas por meio de estimativas e fazendo uso de calculadoras.
Resolução de situações-problema que envolve a ideia de <b>proporcionalidade</b> , incluindo os cálculos com <b>porcentagens</b> , pelo uso de estratégias não convencionais.
Utilização de representações algébricas para expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas e regularidades observadas em algumas sequências numéricas.
Construção de procedimentos para calcular o valor numérico de expressões algébricas simples.

**ANEXO C** – Conceitos e procedimentos, indicados nos PCN 5ª a 8ª séries (6º ao 9º Ano) do Ensino Fundamental. (BRASIL, 2001, p. 87) parte A

## CONCEITOS E PROCEDIMENTOS

### Números e Operações

- Constatação que existem situações-problema, em particular algumas vinculadas à Geometria e medidas, cujas soluções não são dadas por números racionais (caso do  $\pi$ , da  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  etc.).
- Identificação de um número irracional como um número de representação decimal infinita, e não-periódica, e localização de alguns deles na reta numérica, com régua e compasso.
- Análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais aproximados por racionais.
- Resolução de situações-problema de contagem, que envolvem o princípio multiplicativo, por meio de estratégias variadas, como a construção de diagramas, tabelas e esquemas sem a aplicação de fórmulas.
- Construção de procedimentos para calcular o número de diagonais de um polígono pela observação de regularidades existentes entre o número de lados e o de diagonais.
- Identificação da natureza da variação de duas grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não-proporcionais (afim ou quadrática), expressando a relação existente por meio de uma sentença algébrica e representando-a no plano cartesiano.
- Resolução de problemas que envolvem grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais por meio de estratégias variadas, incluindo a regra de três.
- Resolução de situações-problema que envolvem juros simples e alguns casos de juros compostos, construindo estratégias variadas, particularmente as que fazem uso de calculadora.
- Tradução de situações-problema por equações ou inequações do primeiro grau, utilizando as propriedades da igualdade ou desigualdade, na construção de procedimentos para resolvê-las, discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta.

ANEXO C – Conceitos e procedimentos, indicados nos PCN 5ª a 8ª séries (6º ao 9º Ano) do Ensino Fundamental. (BRASIL, 2001, p. 88) parte B

- Resolução de situações-problema por meio de um sistema de equações do primeiro grau, construindo diferentes procedimentos para resolvê-lo, inclusive o da representação das equações no plano cartesiano, discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta.
- Construção de procedimentos para calcular o valor numérico e efetuar operações com expressões algébricas, utilizando as propriedades conhecidas.
- Obtenção de expressões equivalentes a uma expressão algébrica por meio de fatorações e simplificações.
- Resolução de situações-problema que podem ser resolvidas por uma equação do segundo grau cujas raízes sejam obtidas pela fatoração, discutindo o significado dessas raízes em confronto com a situação proposta.

ANEXO D – Coletânea de questões referentes aos números racionais,  
in SAEB/PROVA BRASIL\_2011 – 9º Ano (8ª Série)

000 IT\_005286 - Questão 2

Em um exame de vista, o médico solicitou que o paciente identificasse  $\frac{2}{3}$  de bolinhas pretas em relação ao total de bolinhas. Qual a figura identificada pelo paciente?

- (A) ● ● ○ ○ ○ ○      (B) ● ● ● ○ ○ ○      (C) ● ● ● ● ○ ○      (D) ● ● ● ● ● ○

000 IT\_005361 - Questão 3

Quatro amigos, João, Pedro, Ana e Maria saíram juntos para fazer um passeio por um mesmo caminho. Até agora, João andou  $\frac{6}{8}$  do caminho; Pedro,  $\frac{9}{12}$ ; Ana,  $\frac{3}{8}$  e Maria,  $\frac{4}{6}$ .

Os amigos que se encontram no mesmo ponto do caminho são

- (A) João e Pedro.      (B) João e Ana.      (C) Ana e Maria.      (D) Pedro e Ana.

000 IT\_007823 - Questão 7

Em um jogo de vôlei, os torcedores estavam acomodados em três áreas distintas do ginásio, demarcadas por cores diferentes. Na área verde havia 21 828 torcedores, na azul 12 100 e na amarela 32 072. Nesse jogo, apenas 20% do total de torcedores presentes no ginásio torciam pelo time que venceu a partida. Qual é o número de torcedores que torciam pelo time vencedor?

- (A) 2 420      (B) 4 365      (C) 6 414      (D) 13 200

000 IT\_021334 - Questão 11

Em uma aula de Matemática, o professor apresentou aos alunos uma reta numérica como a da figura a seguir. [inserir figura: reta numérica de -4 até 4,1; tal que, cada unidade é dividida em 4 partes] O professor marcou o número  $\frac{11}{4}$  nessa reta. Esse número foi marcado entre que pontos da reta numérica?      (A) -4 e -3.      (B) -3 e -2.      (C) 2 e 3.      (D) 3 e 4.

000 IT\_025279 - Questão 18

Das 15 bolinhas de gude que tinha, Paulo deu 6 para o seu irmão. Considerando-se o total de bolinhas, a fração que representa o número de bolinhas que o irmão de Paulo ganhou é:

- (A)  $\frac{6}{15}$       (B)  $\frac{9}{15}$       (C)  $\frac{15}{9}$       (D)  $\frac{15}{6}$

000 IT\_025521 - Questão 19

Paulo é dono de uma fábrica de móveis. Para calcular o preço  $V$  de venda, em reais, de cada móvel que fabrica, ele usa a seguinte fórmula:  $V = 1,5 C + 10$ , sendo  $C$  o preço de custo em reais desse móvel. Considere que o preço de custo de um móvel que Paulo fabrica é R\$ 100,00. Então, ele vende esse móvel por

- (A) R\$ 110,00.      (B) R\$ 150,00.      (C) R\$ 160,00.      (D) R\$ 210,00.

000 IT\_025570 - Questão 20

Fazendo-se as operações indicadas em  $0,74 + 0,5 - 1,5$  obtém-se

- (A) -0,64.      (B) -0,26.      (C) 0,26.      (D) 0,64

000 IT\_043535 - Questão 32

Uma casa tem 3,88 metros de altura. Um engenheiro foi contratado para projetar um segundo andar e foi informado que a prefeitura só permite construir casas de dois andares com altura de até 7,80 metros. Qual deve ser a altura máxima, em metros, do segundo andar?

- (A) 3,92      (B) 4,00      (C) 4,92      (D) 11,68

000 IT\_043744 - Questão 31

Uma torneira com defeito desperdiça 2,206 litros de água por dia. Isto significa que a torneira desperdiça 2 litros e

- (A) 0,206 centésimos de litros.      (B) 0,206 décimos de litros.  
(C) 206 centésimos de litros.      (D) 206 milésimos de litros.