UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ANA PAULA LORENÇO PEREIRA

FUTEBOL: A GEOMETRIA ANALÍTICA NO CAMPO

SÃO CARLOS

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ANA PAULA LORENÇO PEREIRA

FUTEBOL: A GEOMETRIA ANALÍTICA NO CAMPO

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao PROFMAT, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Orientadora:
Profa. Dra. Luciene Nogueira Bertoncello

São Carlos
2013

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

	Pereira, Ana Paula Lorenço.
P436fg	Futebol : a geometria analítica no campo / Ana Paula Lorenço Pereira. -- São Carlos : UFSCar, 2014.
	86 f.
	Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2013.
	1. Geometria analítica. 2. Matemática - estudo e ensino. 3. Sequência didática. 4. Distância entre dois pontos. I. Título.
	CDD: 516.3 (20ª)

Banca Examinadora

Profa. Dra. Luciene Nogueira Bertoncello
DM - UFSCar

Profa. Dra. Ires Dias
ICMC- USP

Prof. Dr. Renato José de Moura
DM - UFSCar

Em especial à minha mãe, que sempre compartilha meus ideais e incentiva-me a prosseguir vencendo os obstáculos.

“As pessoas mais felizes, não tem as melhores coisas... Elas sabem fazer o melhor das oportunidades que aparecem em seus caminhos... Pense nisso! O que você tem, todo mundo pode ter, mas o que você é... Ninguém pode ser...”

(Clarice Lispector)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pelo dom da inteligência e pela vida com saúde.

Dedico este trabalho aos meus pais Glodoaldo e Maria Luiza pela educação nos moldes do incentivo e apoio. Agradeço a eles principalmente por ter me ensinado a ser corajosa e buscar sempre os meus sonhos, enfrentando e vencendo os obstáculos.

Ao meu filho Gabriel, que embora com pouca idade, soube entender minhas ausências e preocupações e também meu marido Wladimir que está sempre ao meu lado.

Aos meus irmãos Cristina e Fernando que de alguma forma sempre acabam participando dos meus trabalhos. Em especial minha irmã Cristina que me ajudou a construir o campo de futebol que foi usado neste trabalho.

À minha orientadora Profa. Dra. Luciene Nogueira Bertoncello pela dedicação e competência em acompanhar este trabalho.

Aos colegas da escola em que trabalho. À Silvia Helena pelas correções e à Ângela pelo abstract.

A todos os alunos do 3º B por terem participado e contribuído para a conclusão deste trabalho.

Aos professores Luciene, Grazieli, Márcio, Renato, Ivo, Roberto, Tomas, Paulo, Pedro e João pelo apoio e os ensinamentos que levarei sempre comigo.

À CAPES pela bolsa de estudos concedida.

Aos colegas da primeira turma do Profmat. Em especial aos meus amigos Ana Lígia, Aparecida Patrícia, Alessandra, Patrícia Aparecida e Gilberto pela atenção, companheirismo, apoio, paciência, eu não teria chegado ao final sem vocês, cada um teve uma importância especial nessa trajetória tão importante para mim.

RESUMO

Este trabalho apresenta um modo prático de aproximar matemática do cotidiano do aluno, através das medidas usadas em um campo de futebol para ensinar geometria analítica aos alunos do ensino médio público. As atividades foram desenvolvida na escola E. E. Nelson Fernandes, na cidade de Santa Rita do Passa Quatro, onde a autora deste trabalho leciona há 20 anos e constatou que existe uma mecanização do uso das fórmulas prontas e falta conexão entre este assunto e a realidade do aluno.

O futebol é um assunto bastante comum no dia a dia da maioria dos alunos desta escola, motivo também de brincadeira entre alguns deles e professores, sendo assim um tema motivador ao aprendizado de qualquer matemática ligada a ele, como distância entre dois jogadores posicionados no campo, equação da reta quando um passa a bola para o outro, ou quando chuta ao gol, que são exatamente os assuntos básicos da geometria analítica da 3ª série do Ensino Médio.

O trabalho foi elaborado através de um campo de futebol em tamanho reduzido, usando jogadores de brinquedo, sem necessariamente conhecer as regras do jogo, a ideia é de que os alunos possam visualizar as distâncias e até mesmo medir para conferir. Através de uma sequência de atividades que, partindo do conceito de distância entre dois pontos, gradativamente levam o estudante à compreensão dos conceitos básicos da geometria analítica.

Um dos resultados principais e buscados neste projeto foi a aprendizagem participativa dos alunos na construção de seu conhecimento por meio da experimentação e visualização do concreto ligado ao intelectual. O material utilizado atingiu este objetivo.

Este trabalho trouxe, para a autora uma grande evolução profissional, desde a escolha do tema, sua aplicação em sala de aula e, finalmente, pela reflexão de tudo que foi feito e que se encontra registrado nesta dissertação.

Palavras–chave: Geometria analítica. Matemática. Campo de futebol.

ABSTRACT

This paper presents a practical math approach to everyday math student through the measures used in the football field do teach analytical geometry to students from public high schools. The activities were developed in E. E. Nelson Fernandes, in the city of Santa Rita do Passa Quatro, where the autor of the study has taught for 20 years and it was found that there is a mechanization of using standard formulas and still lack connection between this issue and the reality of the student.

Football is a very common issue on a daily basis for most of the students of this school, and also a joke among some students and teachers, so a theme motivating learning any math related to it, such as distance between two players positioned on the field, equation of the when a player passes the ball to another, or when kicks the goal, what exactly are the basic issues of analytic geometry of the 3^{rd} grade of high school.

The work was done through a football field in reduced size using toy players without necessarily knowing the rules of the game, the idea is that students can visualize distances and even measure to check them. Through a sequence os activities, starting from the concept of distance between two points, gradually lead the student to understand the basic concepts of analytic geometry.

One of the main results and related to this project was the participatory learning of students in building their knowledge through experimentation and visualization of concrete linked to the intellectual. The material reached this goal.

This work has brought to this author a great professional development since the choice of the theme, its application in the classroom and finally the reflection of everything that has been done and what is recorded in this dissertation.

Keywords: Analytic geometry. Mathematics. Football field.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A constante queda no aprendizado de matemática tem preocupado os educadores, em especial os da Escola Estadual Nelson Fernandes. Cada vez mais se observa o baixo rendimento dos alunos em avaliações de desempenho, principalmente no Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) e no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Por isso os professores têm buscado alternativas que motivem os alunos a aprenderem matemática, evitando o uso de fórmulas prontas, nas quais os alunos realizam cálculos de forma automática sem reflexão.

É preciso incentivar os alunos a pensarem, para que possam desenvolver as competências e habilidades que são descritas em documentos oficiais como os PCNs e a Proposta Curricular do Estado de São Paulo.

O presente trabalho foi realizado com a 3ª série B do Ensino Médio do ano de 2013, por ser uma turma muito heterogênea, o que torna bastante difícil ensinar através de aulas expositivas, mas facilita a troca de experiências exatamente pela heterogeneidade dos conhecimentos e habilidades desses alunos.

O projeto tem por objetivo que os próprios alunos descubram como fazer os cálculos básicos da geometria analítica usando o modelo de um campo de futebol e suas medidas, e que entendam na prática como as fórmulas podem facilitar os cálculos.

O trabalho consiste numa sequência de exercícios propostos pela professora, induzindo o aluno a usar a intuição natural e gradativamente aumentando o nível de dificuldade para que alcance o conhecimento necessário e consiga calcular as distâncias previstas nas aulas de geometria analítica da referida série.

Abaixo segue uma descrição de cada capítulo deste trabalho.

No Capítulo 1 é feita uma breve descrição sobre a escola, a comunidade na qual ela está inserida, a realidade dos alunos envolvidos no projeto e o trajeto profissional da professora em questão, finalizando com os motivos que a levaram a escolher esse tema.

O Capítulo 2 apresenta uma reflexão sobre o uso de materiais concretos no ensino de matemática, desde que aqueles proporcionem aprendizagem significativa. É feita também uma breve colocação sobre a Teoria de Ausubel que valoriza os conhecimentos prévios dos alunos, finalizando com as condições necessárias para que esta aprendizagem significativa aconteça.

O Capítulo 3 trata de uma descrição do projeto, apresentando o material usado e as motivações que levaram à escolha do tema.

O Capítulo 4 aborda a importância da geometria analítica na matemática básica, como se apresenta na Proposta Curricular do Estado de São Paulo e também nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio. Além disso, apresenta a importância da História da Matemática no aprendizado da geometria analítica, apresentando um breve relato histórico sobre a Geometria na Antiguidade. Finalizando com uma breve análise dos livros didáticos.

O Capítulo 5 descreve todo o trabalho desenvolvido, apresenta as atividades com algumas soluções feitas pelos alunos, comentários, dificuldades e pequenas conclusões.

Finalmente, no Capítulo 6, são apresentadas as conclusões: observações feitas pela professora com base nos resultados obtidos com a aplicação de aulas diferenciadas e inéditas.

CAPÍTULO 1

Breve descrição da escola, dos alunos, da professora e do projeto

1.1 Introdução

Este capítulo apresenta uma breve descrição da escola em que este trabalho foi idealizado e desenvolvido, apresentando as características da sala de aula, a professora que realizou este trabalho e um comentário sobre a aplicação das aulas.

1.2 Breve descrição da Escola

A aplicação da geometria analítica no campo de futebol foi realizada na escola pública E. E. Nelson Fernandes no município de Santa Rita do Passa Quatro, estado de São Paulo.

Figura 1 - Fachada da E. E. Nelson Fernandes

Fonte: elaborada pelo autor

Trata-se de uma escola de Ensino Fundamental e Médio, localizada na parte central da cidade, num terreno com área de 5940 m^2, e uma área construída de 1937,88 m^2. Possui mais de 20 salas de aula, que não são atualmente todas utilizadas devido à redução do número de alunos com o passar dos anos. Esta redução se deu devido a vários fatores, principalmente pela criação de outras escolas municipais e particulares na cidade.

A escola possui recursos materiais como:
18 computadores, retroprojetor, TV, projetor de Slides, telão para projeção, aparelho de som, DVD player, jornais diários, revistas mensais e semanais, DVD de filmes e documentários, mais de 25 000 livros.

1.3 Alunos envolvidos

Os alunos envolvidos neste projeto são da 3ª série B do Ensino Médio, que estudam no período da tarde. A sala possui 17 alunos matriculados e frequentes.

A classe é bastante heterogênea no aprendizado e vai aos extremos, pois têm alunos com bom rendimento em todas as disciplinas e outros que não atingem a média mínima necessária. E em matemática especificamente, acontece da mesma forma, pois mesmo os alunos que cumprem todos os compromissos, apresentam dificuldades em avaliações de desempenho como ENEM e SARESP.

As dificuldades no aprendizado aparecem, principalmente, quando se faz necessário o uso de conhecimentos básicos de séries anteriores como, por exemplo, o cálculo com radicais. Dificuldades essas, muitas vezes, que vem se arrastando por anos e assim chegaram à série final do Ensino Médio, que para a maioria é o encerramento de seus estudos, pois não tem perspectiva de cursarem uma Universidade.

Apesar das dificuldades no aprendizado, a turma é unida, com bom relacionamento e colaboração, o que motivou a iniciativa de introduzir os conteúdos de geometria analítica de modo diferenciado.

Figura 2 - Sala de aula da 3ª série B do Ensino Médio

Fonte: elaborada pelo autor

1.4 Aplicação do Projeto

A aplicação aconteceu no primeiro semestre do ano de 2013 com muito entusiasmo e participação dos alunos, mas todas as atividades foram feitas em sala de aula, pois quando alguma atividade ficava como lição de casa, a maioria não fazia, pois trabalham e não tem hábitos de estudos fora do horário escolar.

Figura 3 - Professora e autora dessa dissertação e alunos da 3ª série B do Ensino Médio, participantes desse projeto

Fonte: elaborada pelo autor

1.5 A Professora

A professora escolheu matemática por gosto na área de exatas e licenciatura porque era uma chance de emprego em uma cidade pequena, que não possui indústrias.

O curso de Licenciatura em Matemática foi feito na UNESP de Rio Claro e concluído em 1992, mesmo ano do início da carreira como professora, efetivada no concurso público de 1998 na Escola Estadual Nelson Fernandes, escola na qual cursou todo Ensino Fundamental e trabalha atualmente tanto no Ensino Fundamental como Médio.

Além do curso de licenciatura, a professora cursou Bacharelado em Análise de Sistemas concluído no ano de 2000 e o curso de Especialização em Matemática concluído em 2003.

1.6 Objetivos do Projeto

No decorrer do ano letivo, nas aulas de matemática é comum encontrar alunos que perguntam o porquê dos estudos de tal conteúdo, uma vez que nos seus entendimentos não conseguem visualizar nenhuma utilidade para eles em sua vida.

O excesso de aulas expositivas e, muitas vezes, a obrigatoriedade em seguir um modelo de programação com conteúdos prontos, fazem com que a compreensão e consequentemente o ensino de assuntos fundamentais fiquem muito aquém do que se espera de um aprendizado sólido e consciente. É muito comum o professor imaginar que grande parte do que ele explicou nas suas aulas os alunos captaram e entenderam; no entanto, a realidade aparece no momento da aferição desses conteúdos.

Existem muitos atrativos que prejudicam a concentração dos alunos, principalmente o uso de celular em sala de aula, inclusive com acesso a internet, causando muitas vezes transtorno para o professor, por isso é primordial usar um assunto atrativo para o início de alguma aula específica, despertando a curiosidade para que esses alunos possam participar do desenrolar do assunto em questão e, ao mesmo tempo, aprender os conteúdos matemáticos propostos para cada aula.

Este projeto tem por objetivo motivar os alunos a descobrirem as diversas formas de calcular distância entre dois pontos, usando plano cartesiano através de um campo de futebol em tamanho reduzido, onde se calcula a distância entre os jogadores, entre jogadores e o gol, observando atentamente as posições que estes ocupam em relação à origem dos eixos cartesianos. É importante fazer com que os alunos compreendam as diferentes maneiras de calcular a distância diferenciando as horizontais, verticais e oblíquas sem necessariamente usar a fórmula específica para isso.

CAPÍTULO 2

Referencial Teórico

2.1 Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos no ensino de matemática

As dificuldades encontradas por alunos e professores no processo ensino-aprendizagem da matemática são muitas e conhecidas. Por um lado, o aluno não consegue entender a matemática que a escola lhe ensina, muitas vezes é reprovado nesta disciplina, ou então, mesmo que aprovado, sente dificuldades em utilizar o conhecimento “adquirido”. Em síntese, não consegue efetivamente ter acesso a esse saber de fundamental importância.

O professor, por outro lado, consciente de que não consegue alcançar resultados satisfatórios junto a seus alunos, busca continuamente ensinar matemática a partir do concreto, como elemento motivador.

Segundo Dario Fiorentini e Maria Ângela Miorim, até o século XVI acreditava-se que a capacidade de assimilação da criança era idêntica à do adulto, apenas menos desenvolvida. A criança era considerada um adulto em miniatura. Por esta razão, o ensino deveria acontecer de forma a corrigir as deficiências ou defeitos da criança. Isso era feito através da transmissão do conhecimento. A aprendizagem do aluno era considerada passiva, consistindo basicamente em memorização de regras, fórmulas, procedimentos ou verdades localmente organizadas. Para o professor - cujo o papel era o de transmissor e expositor de um conteúdo pronto e acabado - o uso de materiais ou objetos era considerado pura perda de tempo, uma atividade que perturbava o silêncio ou a disciplina da classe. Este é o chamado “Ensino Tradicional” que existe até hoje em muitas de nossas escolas.

Já no século XVII, este tipo de ensino era questionado. Comenius (1592 – 1671) considerado o pai da Didática, dizia em sua obra “Didática Magna” (1657) que “... ao invés de livros mortos, por que não podemos abrir o livro vivo da natureza? Devemos apresentar a juventude as próprias coisas, ao invés das suas sombras” (PONCE, p.127).

No século XVIII, Rousseau (1727 - 1778), ao considerar a Educação como um processo natural do desenvolvimento da criança, ao valorizar o jogo, o trabalho manual, a experiência direta das coisas, seria o precursor de uma nova concepção de escola. Uma escola que passa a valorizar os aspectos biológicos e psicológicos do aluno em desenvolvimento: o sentimento, o interesse, a espontaneidade, a criatividade e o processo de aprendizagem, às vezes priorizando estes aspectos em detrimento da aprendizagem dos conteúdos.

Para D'Ambrosio (2001, p. 80) ″o ensino de uma matemática contextualizada se mostra como um dos recursos para enfrentar e solucionar problemas.″ Por sua vez, Fiorentini e Miorim (1990, p. 3) afirmam que:

> Ao aluno deve ser dado o direito de aprender. Não um “aprender” mecânico, repetitivo, de fazer sem saber o que faz e por que faz. Muito menos um “aprender” que se esvazia em brincadeiras. Mas um “aprender” significativo do qual o aluno participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente produzido e superando, assim, sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade. O material ou o jogo pode ser fundamental para que isto ocorra.

Para Floriani (2000, p. 65), *“*a utilização de materiais instrucionais concretos, exige clima de liberdade [...], apreço pela independência na construção de conceitos, promoção da autonomia moral, intelectual e social do educando”. O ensino de uma matemática contextualizada nas instituições escolares de educação básica, aliada à exploração de materiais didáticos criativos, de fácil construção, permite ao estudante apreender de modo efetivo os conceitos matemáticos essenciais para a sua vida acadêmica e diária.

2.2 Teoria da Aprendizagem Significativa segundo Ausubel

2.2.1 – Quem foi ele?

David Paul Ausubel (Nova Iorque, 25 de outubro de 1928 – 9 de julho de 2008), foi um grande psicólogo da educação estadunidense. Filho de família judia e pobre, imigrantes da Europa Central, cresceu insatisfeito com a educação que recebera.

Revoltado contra os castigos e humilhações pelos quais passara na escola, afirma que a educação é violenta e reacionária.

Após sua formação acadêmica, em território canadense resolve dedicar-se à educação no intuito de buscar as melhorias necessárias ao verdadeiro aprendizado. Totalmente contra a aprendizagem puramente mecânica, torna-se um representante do cognitivismo, e propõe uma aprendizagem que tenha uma “estrutura cognitivista”, de modo a intensificar a aprendizagem como um processo de armazenamento de informações que, ao agrupar-se no âmbito mental do indivíduo, seja manipulada e utilizada adequadamente no futuro, através da organização e integração dos conteúdos aprendidos significativamente.

2.2.2 Teoria

A teoria da aprendizagem de Ausubel propõe que os conhecimentos prévios dos alunos sejam valorizados, para que possam construir estruturas mentais utilizando, como meio, mapas conceituais que permitem descobrir e redescobrir outros conhecimentos, caracterizando, assim, uma aprendizagem prazerosa e eficaz.

A aprendizagem é muito mais significativa à medida que o novo conteúdo é incorporado às estruturas de conhecimento de um aluno e adquire significado para ele a partir da relação com seu conhecimento prévio. Ao contrário, ela se torna mecânica ou repetitiva, uma vez que se produziu menos essa incorporação e atribuição de significado, e o novo conteúdo passa a ser armazenado isoladamente ou por meio de associações arbitrárias na estrutura cognitiva.

Quando o conteúdo escolar a ser aprendido não consegue ligar-se a algo já conhecido, ocorre o que Ausubel chama de aprendizagem mecânica, ou seja, quando as novas informações são aprendidas sem interagir com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva. Assim, a pessoa decora fórmulas, leis, mas esquece após a avaliação.

2.2.3 Condições para a Aprendizagem Significativa

Para que a aprendizagem significativa ocorra é preciso entender um processo de modificação do conhecimento, em vez de comportamento em um sentido externo e observável, e reconhecer a importância que os processos mentais têm nesse desenvolvimento. As ideias de Ausubel também se caracterizam por basearem-se em uma reflexão específica sobre a aprendizagem escolar e o ensino, em vez de tentar somente generalizar e transferir à aprendizagem escolar conceitos ou princípios explicativos extraídos de outras situações ou contextos de aprendizagem.

Para haver aprendizagem significativa são necessárias duas condições. Em primeiro lugar, o aluno precisa ter uma disposição para aprender: se o indivíduo quiser memorizar o conteúdo arbitrária e literalmente, então a aprendizagem será mecânica. Em segundo, o conteúdo escolar a ser aprendido tem que ser potencialmente significativo, ou seja, tem que ser lógica e psicologicamente significativo: o significado lógico depende somente da natureza do conteúdo, e o psicológico é uma experiência que cada indivíduo tem. Cada aprendiz faz uma filtragem dos conteúdos que têm significado ou não para si próprio.

Com esse duplo marco de referência, as proposições de Ausubel partem da consideração de que os indivíduos apresentam uma organização cognitiva interna baseada em conhecimentos de caráter conceitual, sendo que a sua complexidade depende muito mais das relações que esses conceitos estabelecem em si que do número de conceitos presentes. Entende-se que essas relações têm um caráter hierárquico, de maneira que a estrutura cognitiva é compreendida, fundamentalmente, como uma rede de conceitos organizados de modo classificatório de acordo com o grau de abstração e de generalização.

A partir dessa especificação, a aprendizagem escolar passa a caracterizar-se globalmente como a assimilação a essa rede de determinados corpos de conhecimentos conceituais, selecionados socialmente como relevantes e organizados nas áreas de conhecimento.

É pouco provável que uma pessoa nos anos 70 imaginasse uma “era da informação” sem um pleno desenvolvimento da capacidade humana de comunicação, no entanto, comunicar-se, e bem, ainda tem sido um complexo desafio para a sociedade atual. As pessoas têm cada vez mais consciência de que aquilo que elas enviam muitas vezes não é a mensagem recebida, e uma possível integração passa a ser um objetivo quase inatingível. O aluno que hoje frequenta uma escola, infelizmente, ainda vê o conhecimento como algo muito distante da sua realidade, pouco aproveitável ou significativo nas suas necessidades cotidianas. Na sua teoria, Ausubel apresenta uma aprendizagem que tenha como ambiente uma comunicação eficaz, respeite e conduza o aluno a imaginar-se como parte integrante desse novo conhecimento através de elos, de termos familiares a ele. Através da palavra, o educador pode diminuir a distância entre a teoria e a prática na escola, capacitando-se de uma linguagem que ao mesmo tempo desafie e leve o aluno a refletir e sonhar, conhecendo a sua realidade e os seus anseios.

A palavra enquanto mensagem, segundo Bakthtin (1995), é uma estrutura pura, complexa, que o homem utiliza na sua prática, distanciando o receptor da essência da mensagem que pode ser feita de palavra escrita, falada, cantada, desenhada, pintada, tocada, cheirada, vista, gesticulada, saboreada ou, simplesmente, sentida. O próprio educador, praticante da sua área de conhecimento, é uma ferramenta do saber do aluno. Se ele for apaixonado pela sua área de conhecimento e for capaz de encantar, o aluno poderá talvez perceber que existe algo pelo qual alguém de fato se interessou e que talvez possa valer a pena seguir o mesmo caminho. Mas se essa não for a realidade vivida pelo professor, se ele apenas transmitir aquilo que leu nos livros, por mais que fale de determinado assunto, todo corpo estará dizendo o contrário e o aluno, provavelmente, terá aquele conhecimento como algo para apenas ser cumprido, porque a mente humana é capaz de fazer leituras bastante profundas dos detalhes aparentemente insignificantes, mas que certamente têm um grande poder de semear profundo significados.

Baseado nessas informações, conclui-se que a teoria de Ausubel contribuirá de maneira significativa na construção da sociedade do conhecimento.

CAPÍTULO 3

O Projeto

3.1 Introdução

Para o estudo da geometria analítica, foram retomados conceitos já estudados e outros novos, que serão introduzidos inicialmente através de um campo de futebol situado no plano cartesiano com escala 1:55.

Primeiramente, é feita uma retomada de todos os conceitos de plano cartesiano, pares ordenados e suas localizações, tendo por objetivo sanar qualquer tipo de dúvida ou confusão a respeito da localização de um ponto no plano cartesiano.

Em seguida, uma breve recordação dos conceitos de triângulo retângulo e o uso do Teorema de Pitágoras, chamando especial atenção dos alunos para quando o resultado da hipotenusa não é uma raiz quadrada exata, esta é também parte importante a ser tratada no campo de futebol, onde o aluno poderá visualizar e medir que $3\sqrt{2}$ é maior do que 3, por exemplo.

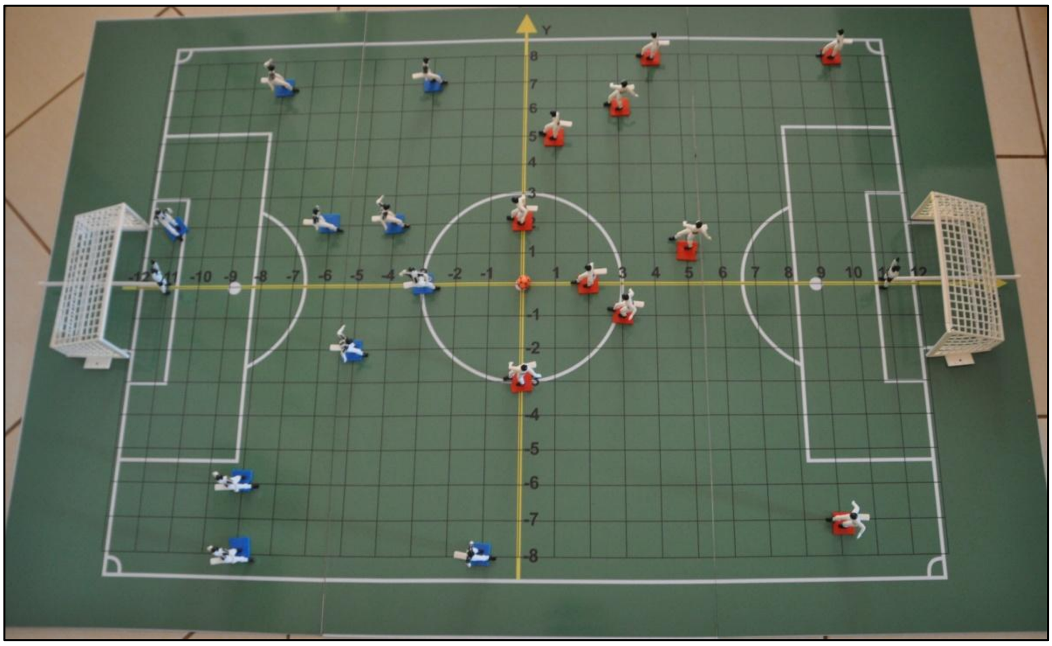
Então, são apresentados os conceitos de distância entre dois pontos, inicialmente com os pontos na mesma linha, horizontal ou vertical, propondo situações em que o aluno possa perceber que não basta subtrair os valores absolutos das coordenadas para calcular a distância, pois quando esta envolve números negativos e positivos, algumas regras não funcionam da mesma maneira que para os números positivos. Para estas atividades iniciais é dado todo o tempo necessário até que todos os alunos se sintam seguros em calcular as distâncias, cada um à sua maneira, sem fornecer nenhuma fórmula para isso.

Quando a distância entre dois pontos é dada por um segmento inclinado, os alunos são instruídos a visualizar este segmento como se fosse a hipotenusa de um triângulo retângulo e identificaram as medidas dos catetos desse triângulo no campo. Após a conclusão dos cálculos, usar uma régua graduada para conferir o resultado. A partir do domínio deste conteúdo pela maioria dos alunos, para concluir esta parte do assunto, é proposta uma disputa em grupos, na qual um grupo colocava os jogadores e o outro tinha que dizer o valor da distância.

3.2 O que consta no trabalho

O projeto consiste basicamente em ensinar a introdução da geometria analítica através de medições de um campo de futebol. Para isso, foi construída uma maquete de campo de futebol usando escala reduzida, com os eixos cartesianos centralizados exatamente no centro do campo, com eixo x variando de -12 a 12 e eixo y variando de -8 a 8. O campo está quadriculado para facilitar a localização dos pares ordenados, que no caso representa a posição dos jogadores, que são bonecos de brinquedo com tamanho adequado ao campo utilizado, como ilustra a figura 4.

Figura 4 - Campo de futebol com os bonecos representando os jogadores



Fonte: elaborada pelo autor

O primeiro passo é ensinar como obter a distância entre dois pontos sem o uso da fórmula:

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Para isso, procede-se da seguinte forma: os 22 jogadores são colocados no campo, com as posições pré-determinadas pela professora; é obtida a distância entre os jogadores, dois a dois, que ocupam pontos em que as abscissas ou ordenadas coincidem, ou seja, jogadores cuja distância é um segmento vertical ou horizontal; por último é calculada a distância entre quaisquer outros jogadores, usando o Teorema de Pitágoras.

Na primeira situação, a professora usa números inteiros para facilitar os cálculos que são obtidos sem o uso de calculadora. Posteriormente, são propostas outras localizações para os 22 jogadores usando números não inteiros e, podendo assim, fazer uso de calculadora para agilizar os cálculos.

Em seguida são propostas atividades que envolvem mediana, baricentro, perímetro e área de triângulo. Posteriormente algumas questões envolvendo equações da reta e finalizando com a equação da circunferência.

3.3 O porquê deste tema

Segundo Elizabeth Tunes (2004), a sala de aula é o espaço privilegiado de negociações e de produção de novos sentidos e significados a respeito, principalmente, dos diferentes conceitos escolares. Isso acontece em uma rede interativa complexa em que se tornam presentes e se atualizam a história de vida, as experiências e vivências de professores e alunos, além do próprio conhecimento formal.

O professor tem a missão de conduzir o seu grupo de alunos, buscando compreender e negociar os diferentes processos de significação que envolvem as situações de aprendizagem que planejou. Tem sido comum identificar o professor nesse papel de mediador, atribuindo a ideia à abordagem histórico-cultural.

Os conteúdos escolares somente estarão a serviço do desenvolvimento dos alunos se forem operados na conjuntura dos seus processos de significação.

A ideia de fazer uma aula diferente de geometria analítica surgiu devido aos anos de trabalho como professora do ensino médio. É visível e comprovado na escola Nelson Fernandes que as dificuldades dos alunos em matemática se acentuam mais no ensino médio. Além disso, a geometria analítica ensinada partindo-se das fórmulas como sugerem, em geral, os livros didáticos não despertam o interesse dos alunos por esta parte da matemática, por esses e outros motivos foi necessário introduzir um atrativo pertencente ao dia a dia desses alunos, no caso, o futebol.

CAPÍTULO 4

A Importância da Geometria Analítica na Matemática Básica

4.1 Introdução

A geometria é uma parte muito importante da Matemática ensinada na Educação Básica, pois com ela o estudante desenvolve a capacidade de compreender, representar, investigar e resolver problemas, habilidades citadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs).

Em particular, a geometria analítica tem sua importância entre os ramos da Matemática, porque permite relacionar álgebra com geometria. Propriedades algébricas podem ser verificadas geometricamente e problemas geométricos podem ser resolvidos por métodos algébricos.

A geometria analítica, também chamada geometria de coordenadas e de geometria cartesiana, é o estudo da geometria por meio de um sistema de coordenadas e dos princípios da álgebra e da análise. Ela contrasta com a abordagem sintética da geometria euclidiana, em que certas noções geométricas são consideradas primitivas, e é utilizado o raciocínio dedutivo a partir de axiomas e teoremas para obter proposições verdadeiras. A geometria analítica é muito utilizada na física e na engenharia, e é o fundamento das áreas mais modernas da geometria, incluindo geometria algébrica, diferencial, discreta e computacional.

Em geral, o sistema de coordenadas cartesianas é usado para manipular equações para planos, retas, curvas e círculos, geralmente em duas dimensões, mas por vezes também em três ou mais dimensões. A geometria analítica ensinada nos livros escolares pode ser explicada de forma mais simples: ela diz respeito à definição e representação de formas geométricas de modo numérico e a extração de informação numérica dessa representação.

A geometria que conhecemos hoje passou por inúmeras mudanças com o intuito de se aperfeiçoar cada vez mais. Dessa forma, nos deparamos com a necessidade social gerada pela evolução das tecnologias, pois cada vez mais os indivíduos aumentam sua interação com as máquinas, utilizando-as em benefício do aprender e do trabalho, conhecendo suas vantagens e limites.

Com a facilidade que os jovens têm no uso de informática e com os diversos atrativos da internet, TV, vídeo, entre outros, torna-se necessário motivar o aprendizado convencional, usando matemática mais próxima da realidade do aluno. Ensinar matemática significa trabalhar o pensamento lógico matemático, dedutivo, abstrato, a criticidade, a criatividade e a capacidade de resolver problemas. Segundo Riccetti (2004, p. 10):

> Fazer matemática é expor ideias próprias, escutar as dos outros, formular e comunicar procedimentos de solução de problemas, confrontar, argumentar e procurar validar seu ponto de vista, antecipar resultados e experiências não realizadas, aceitar erros, buscar dados que faltam para resolver problemas, entre outras coisas.

Cabe assim aos educadores a tarefa de buscar novas estratégias para dinamizar as aulas, onde possa estimular a atenção, concentração, autoconfiança, o raciocínio lógico-dedutivo e o senso cooperativo. Desenvolvendo no aluno, a socialização e a interação do próprio indivíduo com as outras pessoas.

4.2 A importância da História da Matemática

A História da Matemática é muito importante para o ensino da mesma, uma vez que, ao se trabalhar um conteúdo matemático, neste caso a geometria analítica, é de grande valia que o aluno perceba, através de exposições feitas pelo professor, que um conteúdo matemático não surgiu por acaso, simplesmente por que um homem não tinha com que ocupar a mente e foi estudar matemática, mas que todos os conhecimentos que o homem adquiriu, neste caso conhecimentos matemáticos, foram a partir de desafios que com os conhecimentos que possuía até o momento não era possível solucionar.

No caso do estudo da geometria analítica, é também importante o trabalho dando-se um enfoque histórico, para que os alunos percebam que a matemática passou por várias etapas, várias mentes, e que ainda há coisas que podem ser descobertas, despertando assim a curiosidade dos discentes para prestarem atenção na aula, pois eles conseguem ver que as pessoas que estudaram a matemática eram simples assim como eles.

Ainda falando da importância da parte histórica da disciplina é possível, com a utilização desta, compreender que a matemática não se resume somente a conteúdos apresentados por professores ainda no ensino fundamental ou médio, diga-se de passagem, prontos e acabados, mas é algo que vai muito além, é algo que se analisado percebe-se toda uma trajetória de ideias dinâmicas e heterogêneas, ou seja, a matemática esta sempre se renovando ao longo do tempo.

4.3 O início da Geometria Analítica na antiguidade

A geometria, como ciência dedutiva, foi criada pelos gregos. Mas, apesar do seu brilhantismo faltava operacionalidade à geometria grega. E isto só iria ser conseguido mediante a álgebra como princípio unificador. Os gregos, porém, não eram muito bons em álgebra. Mais do que isso, somente no século XVII a álgebra estaria razoavelmente aparelhada para uma fusão criativa com a geometria.

Ocorre, porém, que o fato de haver condições para uma descoberta, não exclui o toque de genialidade de alguém. E no caso da geometria analítica, fruto dessa fusão, o mérito não foi de uma só pessoa. Dois franceses, Pierre de Fermat (1601 – 1665) e René Descartes (1596 – 1650), curiosamente ambos graduados em Direito, nenhum deles matemático profissional, são os responsáveis por esse grande avanço científico: o primeiro movido basicamente por seu grande amor, a matemática; e o segundo, por razões filosóficas. E, diga-se de passagem, não trabalharam juntos: a geometria analítica é um dos muitos casos, em ciência, de descobertas simultâneas e independentes.

Se o bem-sucedido Pierre de Fermat, zeloso e competente conselheiro junto ao Parlamento de Toulouse, dedicava muitas de suas melhores horas de lazer à matemática, certamente não era porque faltassem outras maneiras de preencher o tempo disponível. Na verdade, Fermat simplesmente não conseguia fugir à sua verdadeira vocação e, apesar de praticar matemática como hobby, nenhum de seus contemporâneos contribuiu tanto para o avanço desta ciência quanto ele.

A contribuição de Fermat à geometria analítica encontra-se num pequeno texto intitulado *Introdução aos Lugares Planos e Sólidos* e data no máximo de 1636, mas só foi publicado em 1679, postumamente, junto com sua obra completa. É que Fermat, bastante modesto, era avesso a publicar seus trabalhos. Disso resulta, em parte, o fato de Descartes comumente ser mais lembrado como criador da geometria analítica.

O interesse de Descartes pela matemática surgiu cedo, no “College de la Fleche”, escola do mais alto padrão, dirigida por jesuítas, na qual ingressara aos oito anos de idade. Mas, por uma razão muito especial e que já revelava seus pendores filosóficos: a certeza que as demonstrações ou justificativas matemáticas proporcionavam. Aos vinte e um anos de idade, depois de frequentar rodas matemáticas em Paris, além de outras, já graduado em Direito, ingressou voluntariamente na carreira das armas, uma das poucas opções “dignas” que ofereciam a um jovem como ele, oriundo da nobreza menor da França.

A geometria analítica de Descartes apareceu em 1637 no pequeno texto chamado *A Geometria* como um dos três apêndices do *Discurso do método*, obra considerada o marco inicial da filosofia moderna. Nela, em resumo, Descartes defende o método matemático como modelo para a aquisição de conhecimentos em todos os campos.

A geometria analítica, como é hoje, pouco se assemelha às contribuições deixadas por Fermat e Descartes. Inclusive sua marca mais característica, um par de eixos ortogonais, não usada por nenhum deles. Mas, cada um a seu modo, sabia que a ideia central era associar equações e curvas e superfícies. Neste particular, Fermat foi mais feliz. Descartes superou Fermat na notação algébrica.

4.4 Geometria Analítica na atual Proposta Curricular do Estado de São Paulo

De acordo com a Proposta Curricular do Estado de São Paulo, geometria analítica é o conteúdo que deve ser ensinado no início da 3ª série do Ensino Médio e deve-se começar com os princípios básicos da distância entre dois pontos e em seguida ponto médio e, para estes conteúdos iniciais, deve ser desenvolvida principalmente a habilidade de saber usar de modo sistemático sistemas de coordenadas cartesianas para representar pontos, figuras, relações e equações.

Na página inicial do Caderno do Aluno fornecido pelo Governo do Estado de São Paulo, a Equipe Técnica de Matemática que o elaborou faz uma breve descrição dizendo que este caderno tem como objetivo principal apresentar os conhecimentos matemáticos de forma contextualizada, para que a aprendizagem seja construída como parte de sua vida cotidiana e do mundo ao seu redor. Por isso, as atividades propostas não devem ser consideradas exercícios ou problemas a serem resolvidos simplesmente com técnicas transformadas em rotinas automatizadas. Muitas dessas situações podem ser vistas como ponto de partida para estudar ou aprofundar uma noção ou propriedade matemática.

E realmente essa é a ideia inicial do caderno que, na primeira situação de aprendizagem, propõe que se use um plano cartesiano com dois pontos dados por seus pares ordenados para que se calcule a distância entre eles e a inclinação do segmento formado por estes dois pontos. A referida situação não fornece fórmula para isso, nem uma introdução sobre geometria analítica e nem mesmo uma retomada de conteúdos sobre plano cartesiano, pois deixa livre para que o professor faça essa retomada e a introdução como achar melhor, afinal de contas a proposta é fornecer um currículo mínimo e não uma aula pronta.

4.5 Geometria Analítica nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio

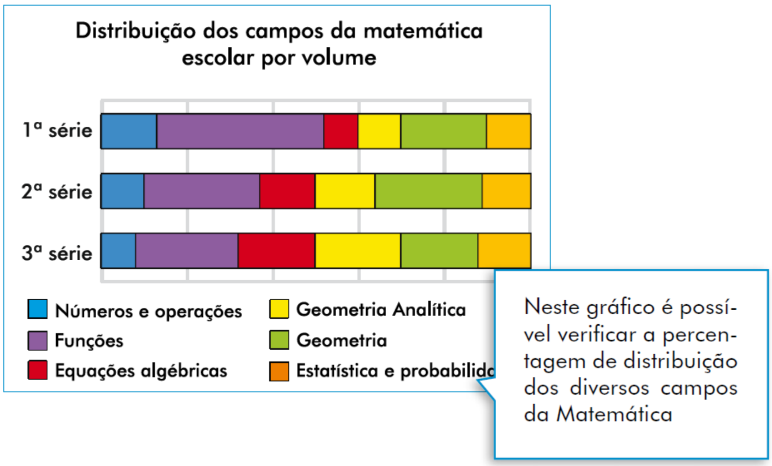
De acordo com o PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio), a Geometria, ostensivamente presente nas formas naturais e construídas, é essencial à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços. No ensino médio, trata das formas planas e tridimensionais e suas representações em desenhos, planificações, modelos e objetos do mundo concreto. Para o desenvolvimento desse tema, são propostas quatro unidades temáticas: geometria plana, espacial, métrica e analítica. As propriedades de que a Geometria trata são de dois tipos: associadas à posição relativa das formas e associadas às medidas. Isso dá origem a duas maneiras diferentes de pensar em Geometria, a primeira delas marcada pela identificação de propriedades relativas a paralelismo, perpendicularismo, intersecção e composição de diferentes formas e a segunda, que tem como foco quantificar comprimentos, áreas e volumes. Usar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos para resolução de questões da Matemática e de outras disciplinas. Como parte integrante deste tema, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas. Parte do trabalho com Geometria está estritamente ligada às medidas, que fazem a ponte entre o estudo das formas geométricas e os números que quantificam determinadas grandezas. No entanto, o ensino das propriedades métricas envolvendo cálculos de distâncias, áreas e volumes é apenas uma parte do trabalho a ser desenvolvido que não pode ignorar as relações geométricas em si.

O PCNEM diz que a unidade Geometria Analítica tem como função tratar algebricamente as propriedades e os elementos geométricos. O aluno do ensino médio terá a oportunidade de conhecer essa forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de equações, sistemas ou inequações. O aluno deve perceber que um mesmo problema pode então ser abordado com diferentes instrumentos matemáticos de acordo com suas características. Por exemplo, a construção de uma reta que passe por um ponto dado e seja paralela a uma reta dada pode ser obtida de diferentes maneiras. Se o ponto e a reta estão desenhados em papel, a solução pode ser feita por meio de uma construção geométrica, usando-se instrumentos. No entanto, se o ponto e a reta são dados por suas coordenadas e equações, o mesmo problema possui uma solução algébrica, mas que pode ser representada graficamente. Então, mais importante do que memorizar diferentes equações para um mesmo ente geométrico, é necessário investir para garantir a compreensão do que a geometria analítica propõe. Para isso, o trabalho com este tema pode ser centrado em estabelecer a correspondência entre as funções de 1º e 2º graus e seus gráficos e a resolução de problemas que exigem o estudo da posição relativa de pontos, retas, circunferências e parábolas. Além de conhecer uma forma de pensar em Matemática, entender o mundo do século XVII, que deu origem ao cartesianismo, pode ser uma excelente oportunidade para que o aluno perceba o desenvolvimento histórico do conhecimento e como certos momentos dessa história transformaram a ciência e a forma de viver da humanidade. A Geometria, na perspectiva das medidas, pode se estruturar de modo a garantir que os alunos aprendam a efetuar medições em situações reais com a precisão requerida ou estimando a margem de erro.

Resumindo, o PCNEM propõe que se ensine em Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.

4.4 Geometria Analítica nos livros didáticos

O Guia de Livros Didáticos PNLD 2012 faz uma análise sobre a abordagem dos conteúdos de Matemática no Ensino Médio:



Ainda de acordo com o PNLD 2012, a geometria analítica, desde suas origens, é um campo privilegiado para as conexões entre álgebra e geometria. É sabido que a escolha de um sistema de coordenadas permite que se estabeleça uma estreita relação entre, de um lado, figuras geométricas e, do outro, equações (ou inequações) envolvendo as coordenadas dos pontos. Na geometria analítica, tanto resolvemos problemas geométricos recorrendo a métodos algébricos, quanto atribuímos significado geométrico a fatos algébricos. Na maioria das coleções aprovadas, a geometria analítica no plano é apresentada em um único volume, normalmente o terceiro. As figuras geométricas estudadas são, essencialmente, as retas, as circunferências e as cônicas. Nota-se que, em geral, a abordagem adotada nos livros é muito fragmentada. Por exemplo, no estudo da reta, há vários tipos de equação, apresentados isoladamente e com igual destaque, ao invés de priorizar uma delas, à qual seriam relacionadas às demais.

No livro *Conexões com a Matemática – Juliane Matsubara Barroso – Editora Moderna,* a abordagem de pontos, retas, circunferências e cônicas no plano cartesiano é satisfatória, sendo feita uma conexão apropriada entre função afim e equação da reta. Já no livro *Matemática Contexto & Aplicações – Luiz Roberto Dante – Editora Ática,* o estudo da geometria analítica é feito adequadamente, com boas ilustrações e exercícios bem escolhidos. Notam-se diversas aplicações em outros campos da Matemática, inclusive em relação à geometria plana. Entretanto, constata-se fragmentação na apresentação dos conteúdos. No livro *Matemática Paiva – Manoel Paiva – Editora Moderna* a abordagem é, em geral, adequada, por vezes, com ênfase em regras e fórmulas, sem atividades de descobertas e de exploração. Embora com certa fragmentação, o estudo da reta começa com a dedução de uma equação fundamental e as demais equações são abordadas como variação dessa, o que é positivo. O livro *Matemática Ciência e Aplicações, David Degenszajn, Saraiva* traz uma abordagem das equações da reta e da circunferência muito detalhada e fragmentada em um grande número de situações particulares. Apesar disso, o estudo das cônicas, por exemplo, inclui deduções cuidadosas das equações dessas curvas, tanto com centro na origem como fora da origem. As elipses são relacionadas, de forma apropriada, às órbitas dos planetas. Em *Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia – Jackson Ribeiro – Editora Scipione,* o livro apresenta o estudo da reta e da circunferência com detalhes, mas fragmentado. Apesar disso, o uso do método de completar quadrados para encontrar o centro e o raio da circunferência é elogiável. As cônicas são introduzidas por suas propriedades geométricas como subconjuntos do plano, para, em seguida, suas equações serem deduzidas, de forma satisfatória. No livro *Matemática Ensino Médio – Maria Ignez Diniz, Kátia Stocco Smole – Editora Saraiva* são focalizadas, no plano cartesiano, as representações de pontos, retas, circunferências e cônicas e suas relações com as figuras geométricas planas. O tratamento é, no geral, correto, mas pouco articulado com as funções afim e quadrática. Além disso, o estudo desses conteúdos recai na subdivisão excessiva de conceitos e procedimentos. E, por último, no livro *Novo Olhar Matemática – Joamir Souza – Editora FTD,* o estudo de pontos e retas em um sistema cartesiano ortogonal de coordenadas é feito de maneira abrangente e detalhada. Também são adequadas as conexões entre equação da reta e função afim e, também, entre os sistemas lineares 2x2 e a posição relativa de duas retas no plano. No entanto, na abordagem da equação da reta prevalece a fragmentação em casos particulares, o que não favorece a formação de conceitos unificadores.

CAPÍTULO 5

Uma aula diferente

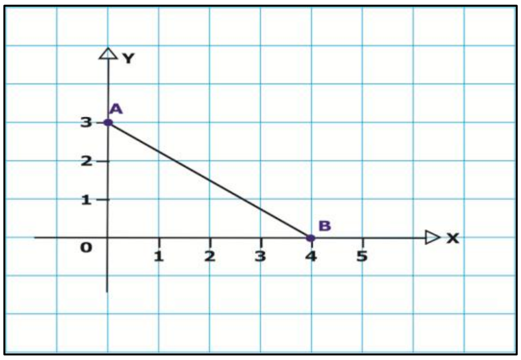
5.1 Introdução

Este capítulo tem por meta descrever as folhas de atividades aplicadas aos alunos. A descrição das mesmas será feita atividade por atividade, na mesma ordem em que os alunos as receberam nas suas folhas de atividades. Alguns comentários explicativos foram colocados, como foi desenvolvida a atividade e as soluções feitas por alunos. A fim de visualizar a folha de atividades por completo, foi criado o Apêndice deste trabalho. Em relação aos comentários, foram colocadas as intenções a serem atingidas, bem como algumas suposições no que se refere às respostas esperadas.

Em geral, os estudantes da E. E. Nelson Fernandes têm muita dificuldade em compreender geometria analítica, principalmente porque trazem dificuldades de entendimento em conteúdos trabalhados anteriormente como, por exemplo, raiz quadrada e localização dos pontos no plano cartesiano, entre outros.

Uma situação bastante comum é a dificuldade de entendimento dos alunos em distâncias, por exemplo, quando se pergunta a distância entre os pontos (0,3) e (4,0), mesmo olhando para o plano cartesiano, ou seja, olhando para o desenho já pronto, a maioria dos alunos responde 3 ou 4. É preciso que haja intervenção do professor para que compreendam que neste caso a resposta não é obtida olhando na horizontal ou vertical.

Figura 5 - Distância entre os pontos A e B



Fonte: elaborada pelo autor

Entre esta e outras situações, fica evidente que é preciso introduzir o estudo da geometria analítica pela compreensão do que é a distância entre dois pontos, pois a partir daí fica mais fácil compreender os outros conceitos.

Assim, com os alunos participantes desta pesquisa, dedicamos um tempo maior na retomada de conteúdos básicos como localização dos pontos no plano cartesiano, raiz quadrada não exata e Teorema de Pitágoras conforme será apresentado nas atividades a seguir.

5.2 Atividades

O material foi elaborado para que os alunos o fizessem em grupos de duas ou três pessoas em cada equipe. Além da folha de atividades, cada grupo tinha à sua disposição em sala de aula o campo de futebol com os 22 jogadores. A sequência didática tem 20 atividades organizadas por nível de dificuldade e com dependência dos resultados umas das outras. Cada uma das atividades tem por objetivo levar o aluno a aprender os conhecimentos básicos da geometria analítica, tomando como ponto de partida a distância entre dois pontos do plano cartesiano.

Estas atividades foram aplicadas na 3ª série do Ensino Médio, pois pelo currículo do Estado de São Paulo, este conteúdo deve ser ensinado no primeiro bimestre.

Todas as atividades foram desenvolvidas com o uso do campo de futebol e dos 22 jogadores, porém sempre que necessário eram feitas retomadas de conteúdo e introduções ou exercícios extras com o livro didático volume 3 da

Coleção Novo Olhar, de Joamir Souza. Este livro foi escolhido porque tem um exemplar dele disponível na escola para cada aluno.

As atividades foram desenvolvidas durante os meses de fevereiro, março e abril do ano de 2013 e a duração está descrita em cada uma delas.

Por uma aula entendemos o período de 50 minutos.

A seguir as atividades propostas juntamente com algumas soluções dos alunos, seus objetivos, um breve resumo do desenvolvimento e conclusões.

ATIVIDADE 1

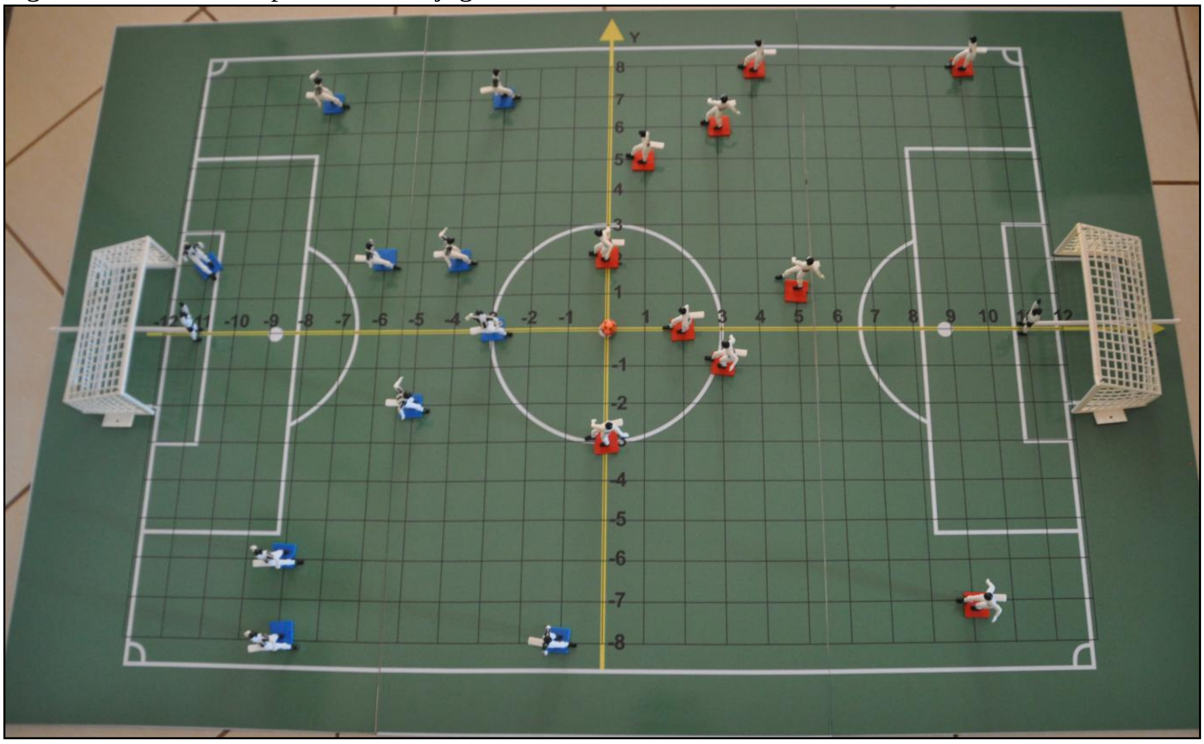
Esta atividade tem por objetivo que os alunos se familiarizem com o material que usaremos em todas as aulas, motivando-os a participarem ativamente, aproveitando para fazer uma breve retomada para esclarecer todas as dúvidas a respeito da localização dos pontos no plano cartesiano.

Cada aluno recebeu um jogador e foi convidado a colocá-lo no campo, de acordo com os pares ordenados fornecidos na atividade 1. Depois de colocados todos os jogadores, os alunos deverão representar todos os pontos num plano cartesiano com papel quadriculado.

ATIVIDADE 1: Coloque alguns jogadores no campo nas seguintes posições:

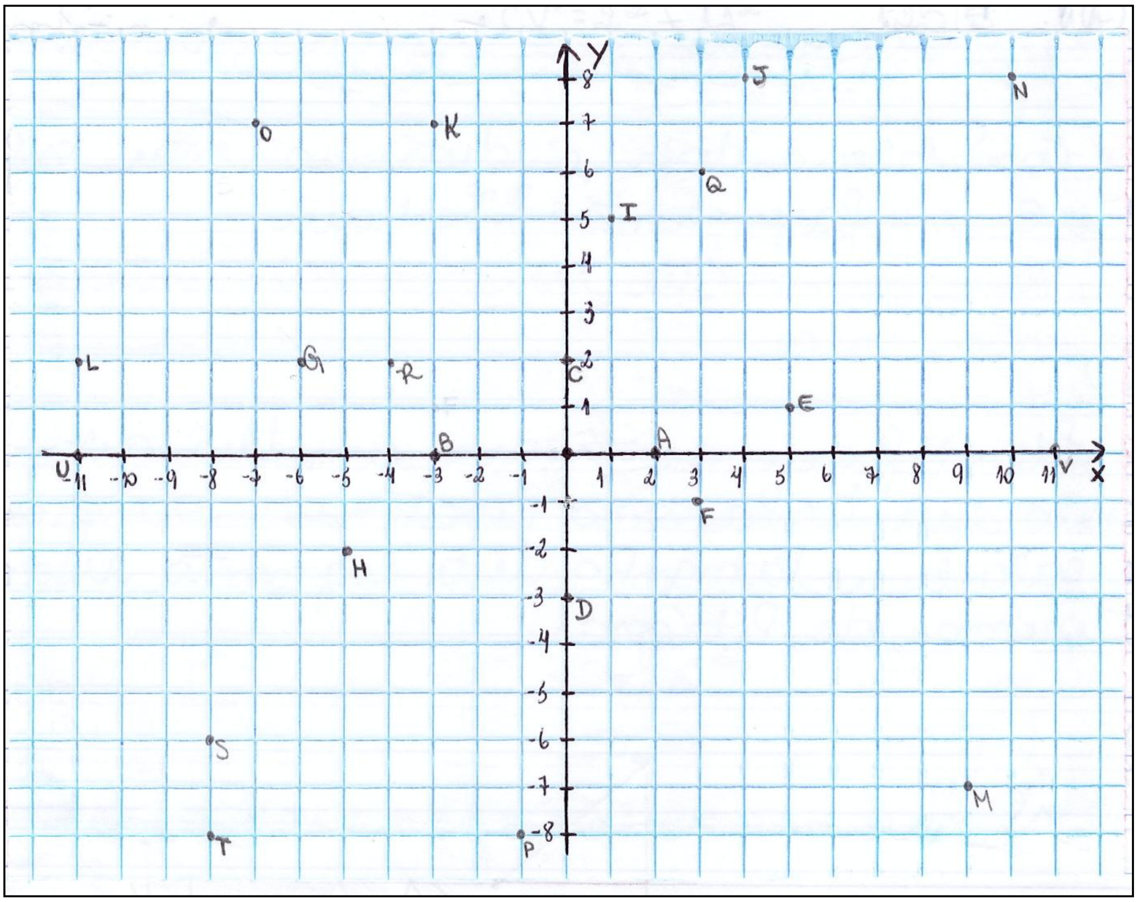
Jogador A = (2, 0)	Jogador L = (-11, 2)
Jogador B = (-3, 0)	Jogador M = (9, -7)
Jogador C = (0, 2)	Jogador N = (10, 8)
Jogador D = (0, -3)	Jogador O = (-8, 7)
Jogador E = (5, 1)	Jogador P = (-1, -8)
Jogador F = (3, -1)	Jogador Q = (3, 6)
Jogador G = (-6, 2)	Jogador R = (-4, 2)
Jogador H = (-5, -2)	Jogador S = (-8, -6)
Jogador I = (1, 5)	Jogador T = (-8, -8)
Jogador J = (4, 8)	Goleiro U = (-11, 0)
Jogador K = (-3, 7)	Goleiro V = (11, 0)

Figura 6 - Foto do campo com os 22 jogadores colocados conforme solicitado na atividade 1



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 7 - Atividade 1 – Representação no plano cartesiano, onde cada ponto representa um jogador – resposta feita por aluno



Fonte: Elaborada pelo autor

Esta atividade demorou mais tempo do que o esperado, mas segundo o Currículo do ensino oficial do Estado de São Paulo (2012, p. 49) o tempo dedicado a cada um dos temas a serem ensinados é uma variável a ser continuamente administrada pelo professor. Ele nunca é demais, ou de menos, em termos absolutos: tudo depende das circunstâncias dos alunos, da escola, do professor.

Houve resistência por parte de alguns alunos em participar da atividade. Alguns não queriam levantar-se da carteira e ir até o campo de futebol colocar o jogador, mas com bastante insistência acabaram cedendo e participando. Esta atividade só foi encerrada quando todos dominavam completamente o conteúdo da atividade, ou seja, que não havia mais dúvida na localização dos pontos no plano cartesiano.

Esta atividade foi planejada para 2 aulas, mas durou 4 aulas.

ATIVIDADE 2

Nesta atividade, é trabalhado o conceito de distância entre dois pontos no plano cartesiano.

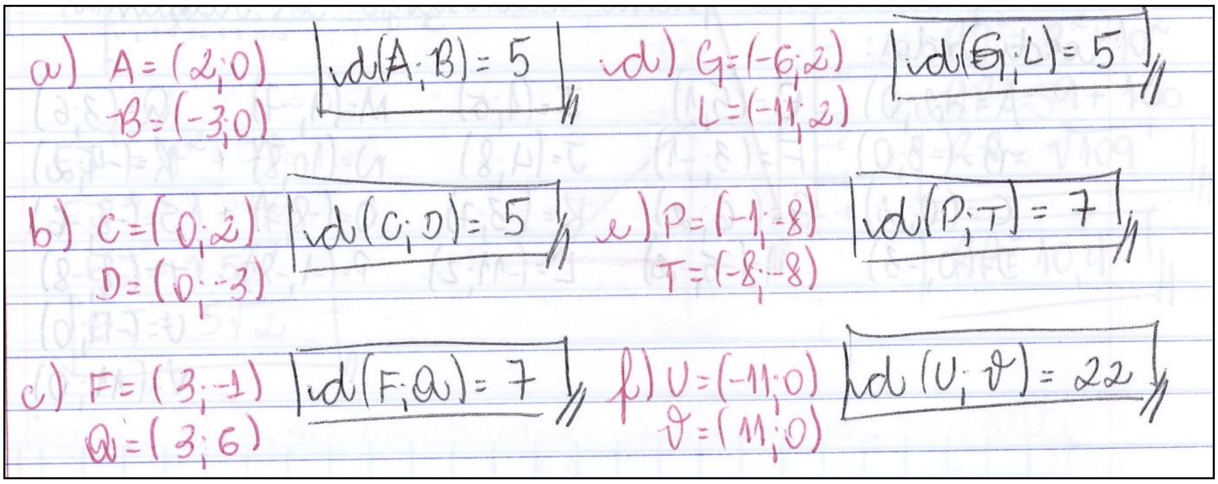
O objetivo principal constitui em estimular a ideia intuitiva do aluno para calcular distâncias, sem a necessidade do uso de fórmulas, pois os segmentos que unem estes jogadores citados, dois a dois, são segmentos situados sobre o eixo x ou sobre o eixo y, ou paralelos a eles, ou seja, são segmentos horizontais ou verticais, facilitando a visualização rápida da distância entre eles.

Através do campo de futebol quadriculado, os alunos não demonstraram nenhuma dificuldade em observar as posições dos jogadores em questão e descobrirem a distância entre eles, podendo para isso, contar os quadradinhos existentes entre os jogadores.

ATIVIDADE 2: Qual é a distância entre os seguintes jogadores?

a) A e B	c) F e Q	e) P e T
b) C e D	d) G e L	f) U e V

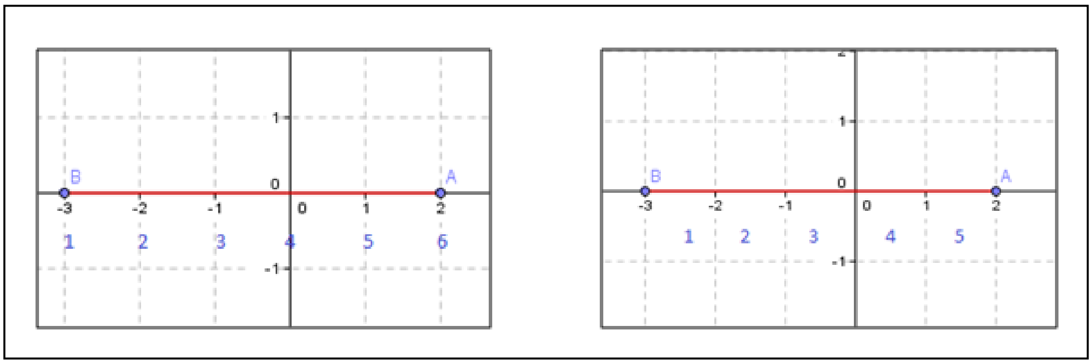
Figura 8 - Soluções da atividade 2 – feitas por aluno



Fonte: elaborada pelo autor

Logo no início, os alunos ficaram em dúvida se contavam os "risquinhos" ou o intervalo entre eles. Por exemplo, entre os pontos A e B, contando os "risquinhos" a distância seria 6 (figura 12 - esquerda) e contando os "espacinhos" a distância seria 5 (figura 12 - direita).

Figura 9 - Representação da dúvida dos alunos sobre a distância entre os pontos A e B



Fonte: elaborada pelo autor

A dúvida foi sanada sem a interferência da professora, pois alguns alunos usaram exemplos do dia a dia para explicar aos outros, do tipo: distância entre duas árvores na rua, esclarecendo que não se contam as árvores e sim o espaço entre elas.

Esta atividade teve a duração de 2 aulas.

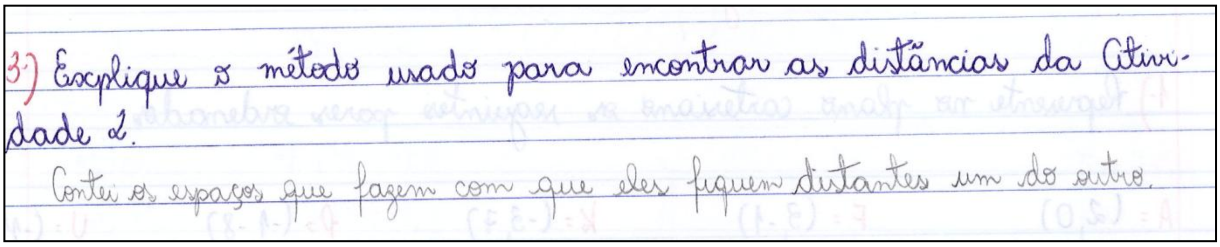
ATIVIDADE 3

O objetivo da atividade 3 é fazer com que o aluno explique seu raciocínio para que haja correção, caso esteja errado, e algum tipo de memorização, se estiver certo. Além disso, o aluno foi convidado a observar os pares ordenados e imaginar como seriam calculadas essas distâncias sem a observação dos jogadores no campo quadriculado, ou seja, é importante que ele observe o que acontece com as coordenadas quando possuem o mesmo sinal e quando possuem sinais opostos, construindo aqui raciocínio lógico que o ajude a calcular a distância entre quaisquer dois pontos através de seus pares ordenados.

Espera-se que o aluno conclua que, além de contar os quadradinhos para descobrir essas distâncias, é possível somar os números quando estes possuem sinais diferentes e subtrair quando possuem sinais iguais, lembrando que por se tratar de uma distância, o resultado deve ser o módulo do número encontrado.

ATIVIDADE 3: Explique o método usado para encontrar as distâncias da Atividade 2.

Figura 10 - Resposta da atividade 3 – feita por aluno



3) Explique o método usado para encontrar as distâncias da Atividade 2.

Contei os espaços que fazem com que eles fiquem distantes um do outro.

Fonte: elaborada pelo autor

Nesta atividade, cada aluno tinha que falar com suas palavras, sem nenhum rigor matemático, como entendeu e como descobriu ou calculou cada distância. Depois foram convidados a escrever, pois são também importantes as produções escritas em matemática, fixando os conhecimentos adquiridos.

Esta atividade durou apenas meia aula, ou seja, em torno de 25 minutos.

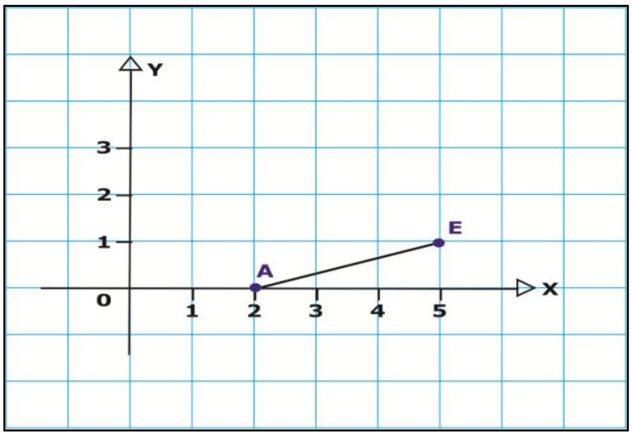
ATIVIDADE 4

Um erro comum cometido pelos alunos consiste, justamente, em usarem o mesmo raciocínio quando os pontos não formam um segmento paralelo aos eixos coordenados. Esta atividade tem como objetivo fazê-los refletir sobre a diferença de raciocínio, pois neste caso, não basta olhar para a figura e contar diretamente, ou seja, nem sempre a intuição funciona. É preciso saber calcular também para garantir o acerto. Espera-se que os alunos visualizem que a distância procurada pode representar a medida da hipotenusa de triângulo retângulo, cujos catetos são formados por segmentos paralelos aos eixos coordenados.

ATIVIDADE 4: Usando o mesmo raciocínio da Atividade 2, é possível encontrar a distância entre A e E? Explique.

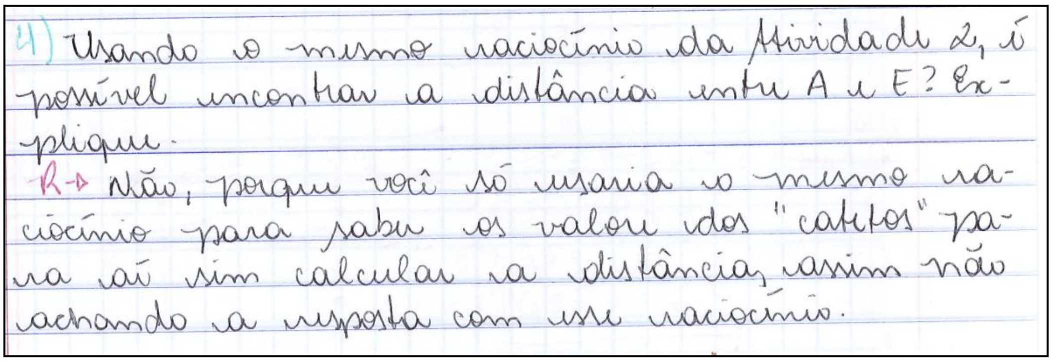
Foi feito um debate sobre este assunto, levantando os conhecimentos anteriores para conduzir à descoberta de que tipo de cálculo, já conhecido por eles seria adequado neste caso, que seria o uso do Teorema de Pitágoras. A primeira resposta dada foi sem pensar. No impulso, a maioria dos alunos responderam as distâncias olhando apenas na horizontal ou vertical, como já era esperado. Alguns responderam 3, outros responderam que a distância era 1. Depois, com mais reflexões e investidas da professora chegaram à conclusão de que precisavam fazer algum cálculo.

Figura 11 - Segmento que une os pontos A e E



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 12 - Solução da atividade 4 – feita por aluno



4) Usando o mesmo raciocínio da Atividade 2, é possível encontrar a distância entre A e E? Explique.
R-> Não, porque você só usaria o mesmo raciocínio para saber os valores dos "catetos" para aí sim calcular a distância, assim não achando a resposta com um raciocínio.

Fonte: elaborada pelo autor

O objetivo foi atingido, pois a atividade proporcionou momentos de reflexões e discussões, na qual os alunos participaram da construção do conhecimento de tal forma que ficou mais fácil de ser memorizado para ser usado nas atividades seguintes.

Esta atividade, assim como a anterior teve a duração de meia aula, ou seja, 25 minutos.

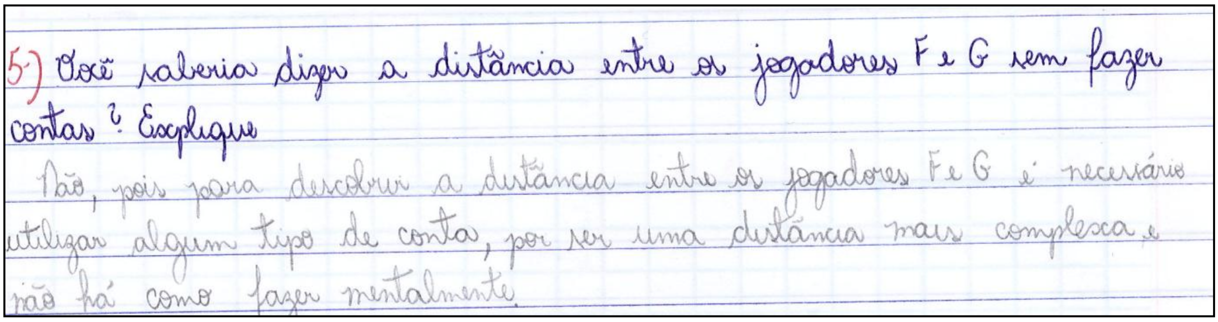
ATIVIDADE 5

Novamente foi lançado um desafio para os alunos refletirem e calcularem com cuidado para garantirem o acerto, nesta atividade foram incluídos números negativos. Espera-se que o aluno adquira facilidade na visualização do triângulo retângulo, bem como na medida dos seus catetos, relacionando esta atividade com a atividade 2, sendo que a medida dos catetos é obtida através do mesmo raciocínio usado na atividade 2.

ATIVIDADE 5: Você saberia dizer a distância entre os jogadores F e G sem fazer contas?

Os alunos foram convidados a observar atentamente a posição dos jogadores F(3, -1) e G(-6, 2) e visualizar através do campo quadriculado o triângulo retângulo, onde a medida da hipotenusa é exatamente a distância procurada.

Figura 13 - Resposta da atividade 5 – feita por aluno


5) Você saberia dizer a distância entre os jogadores F e G sem fazer contas? Explique

Não, pois para descobrir a distância entre os jogadores F e G é necessário utilizar algum tipo de conta, por ser uma distância mais complesca, e não há como fazer mentalmente.

Fonte: elaborada pelo autor

Nesta atividade os alunos já se sentiram seguros em reconhecer e desenhar o triângulo retângulo, cuja hipotenusa é o segmento de extremidades nos pontos F(3, -1) e G(-6, 2). Mas, responderam que sem fazer as contas não seria possível dizer a distância entre os pontos F(3, -1) e G(-6, 2) com precisão.

A duração foi de 1 aula.

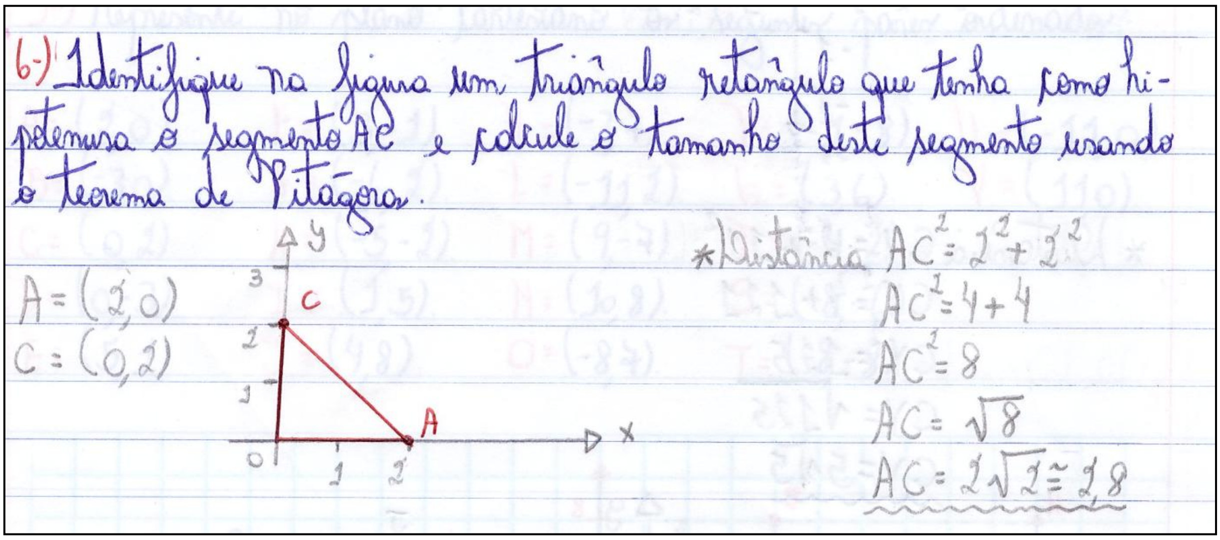
ATIVIDADE 6

Na atividade 6, foi retomado o mesmo desafio da atividade anterior para que os alunos refletissem e calculassem com cuidado para garantir o acerto.

ATIVIDADE 6: Identifique na figura um triângulo retângulo que tenha como hipotenusa o segmento AC e calcule o tamanho deste segmento usando o Teorema de Pitágoras.

Primeiramente, os alunos observaram a posição dos jogadores A(2, 0) e C(0, 2) no campo de futebol, já identificando o triângulo retângulo, bem como seus catetos, para calcular o valor da hipotenusa através do Teorema de Pitágoras (figura 21). Foi permitido o uso da calculadora para obter valores aproximados, quando o resultado é dado por uma raiz não exata.

Figura14 - Solução da atividade 6, feita por aluno



Fonte: elaborada pelo autor

Nas atividades anteriores, o enunciado não dizia claramente que era para usar o Teorema de Pitágoras, pois a ideia era deixar que os alunos descobrissem o melhor caminho sem imposição da professora. Mas, nesta atividade, já estão familiarizados e, portanto, bastava que eles aplicassem o que entenderam até aqui.

Esta atividade teve a duração de 1 aula.

ATIVIDADE 7

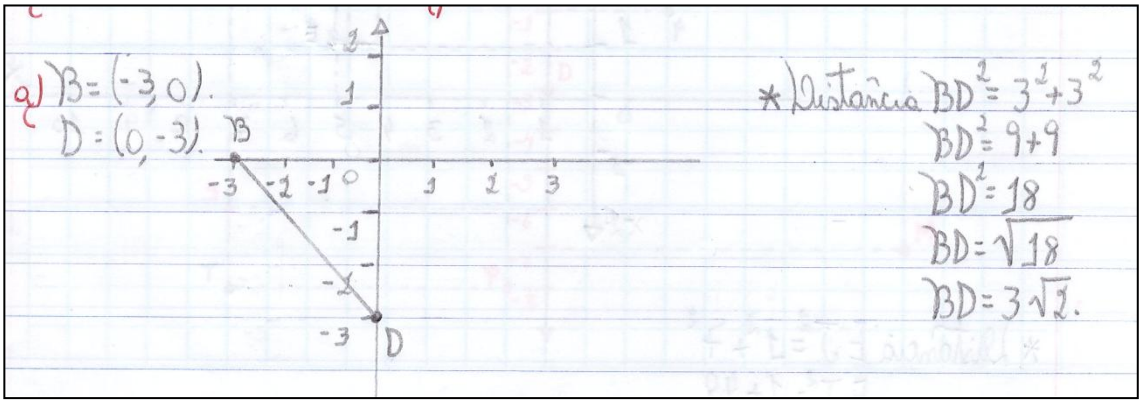
Esta atividade tem o objetivo de reforçar os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores e orientar os alunos a usarem o Teorema de Pitágoras da maneira correta, calculando o valor da hipotenusa que, neste caso, representa exatamente a distância procurada. É também importante que o aluno consiga identificar os catetos com exatidão.

ATIVIDADE 7: Usando o mesmo procedimento da atividade 6, encontre a distância entre os seguintes jogadores:

a) B e D
b) C e V
c) E e J
d) R e P
e) F e U
f) G e S

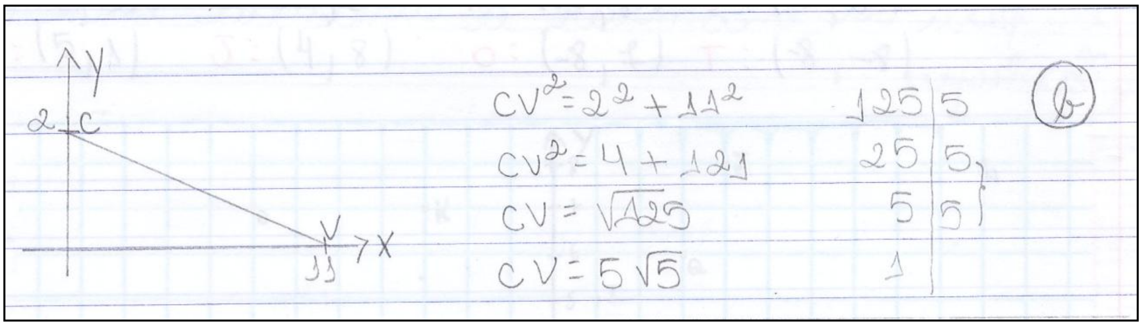
Primeiro os alunos observaram as posições dos jogadores no campo de futebol, identificaram o triângulo retângulo de cada item e concluíram esta atividade fazendo um esboço de cada triângulo retângulo num papel quadriculado e representando suas respectivas medidas com os cálculos feitos através do Teorema de Pitágoras, como mostram as figuras 23, 24, 25, 26 e 27.

Figura 15 - Solução da atividade 7, item a, feita por aluno



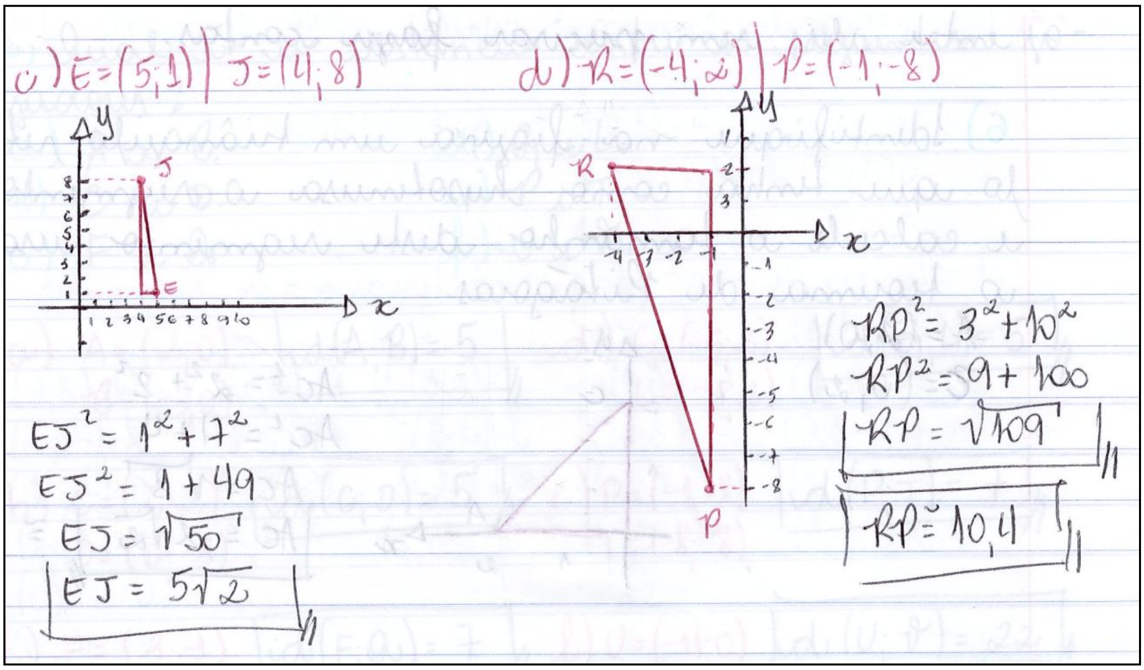
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 16 - Solução da atividade 7, item b, feita por aluno



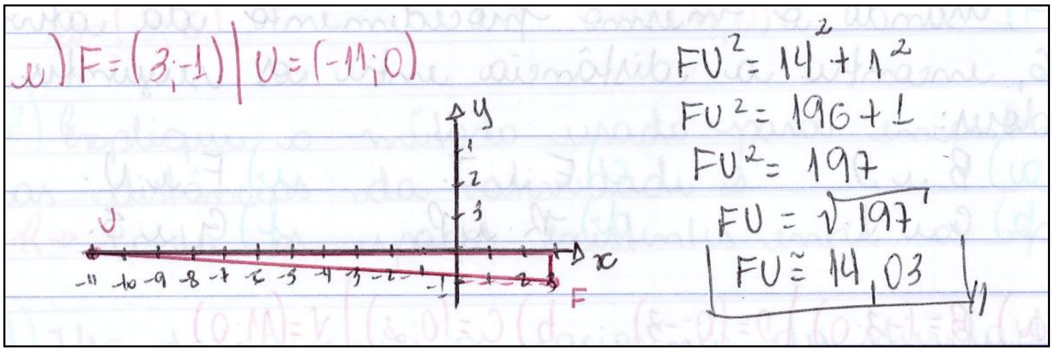
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 17 - Solução da atividade 7, itens c e d, feitas por aluno



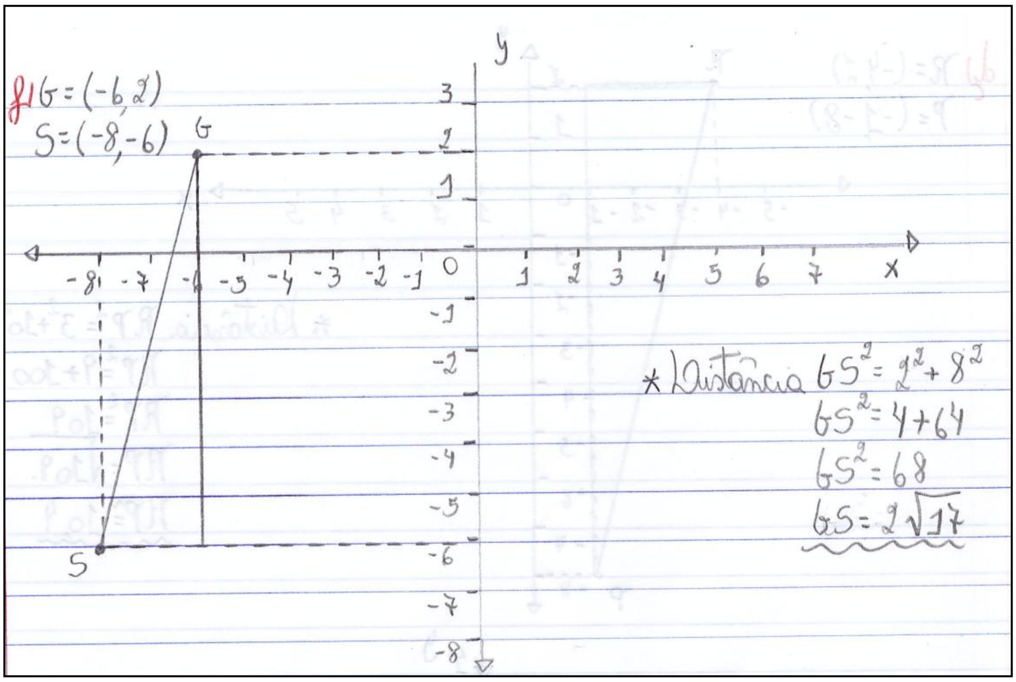
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 18 - Solução da atividade 7, item e, feita por aluno



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 19 - Solução da atividade 7, item f, feita por aluno



Fonte: elaborada pelo autor

Nesta atividade, eles já não precisaram mais do auxílio do professor, apenas conferiram os resultados entre si.

Os alunos usaram 3 aulas para realizar esta atividade.

ATIVIDADE 8

Esta atividade tem por objetivo introduzir o conceito de ponto médio de um segmento, permitindo que os alunos visualizem a propriedade característica do ponto médio, que é dividir o segmento em dois outros segmentos congruentes. A ideia principal é não fornecer a fórmula que aparece nos livros didáticos

$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

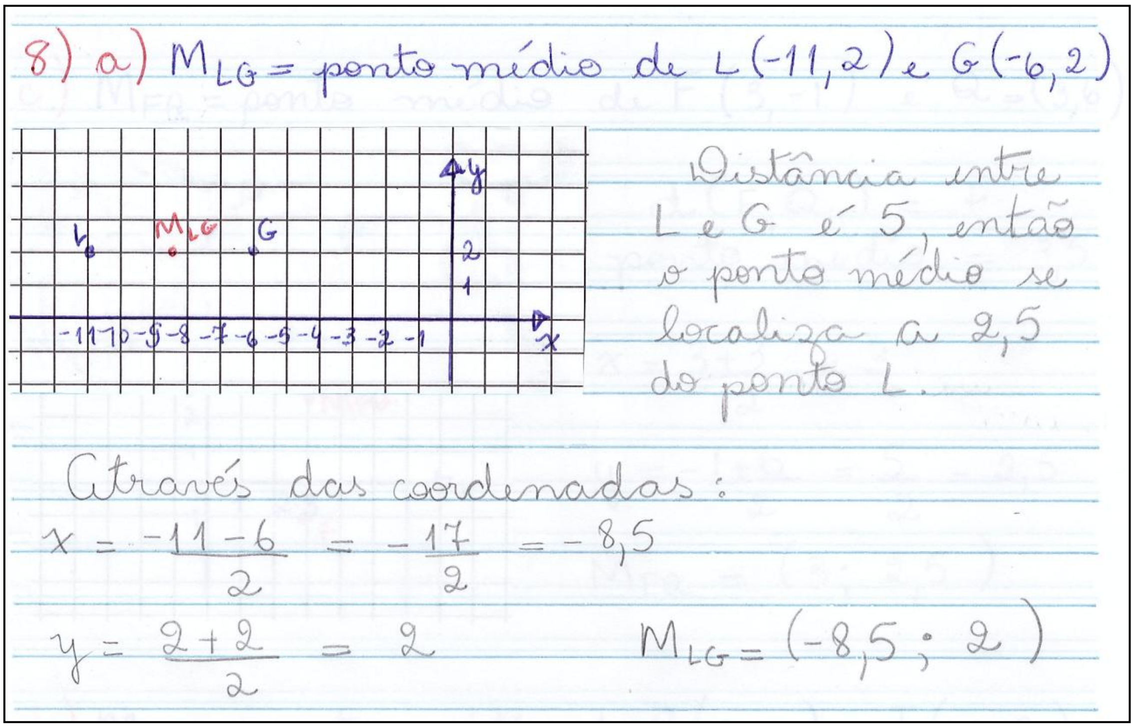
e fazer com que o aluno localize geometricamente o ponto médio no plano cartesiano para concluir algebricamente como deve ser calculada cada coordenada do par ordenado que representa o ponto médio, através das coordenadas dos pontos que estão nas extremidades do segmento.

ATIVIDADE 8: Qual o ponto médio do segmento que une os seguintes jogadores?

a) M_{LG} = ponto médio de L e G
b) M_{AB} = ponto médio de A e B
c) M_{FQ} = ponto médio de F e Q
d) M_{RJ} = ponto médio de R e J
e) M_{EN} = ponto médio de E e N
f) M_{DL} = ponto médio de D e L

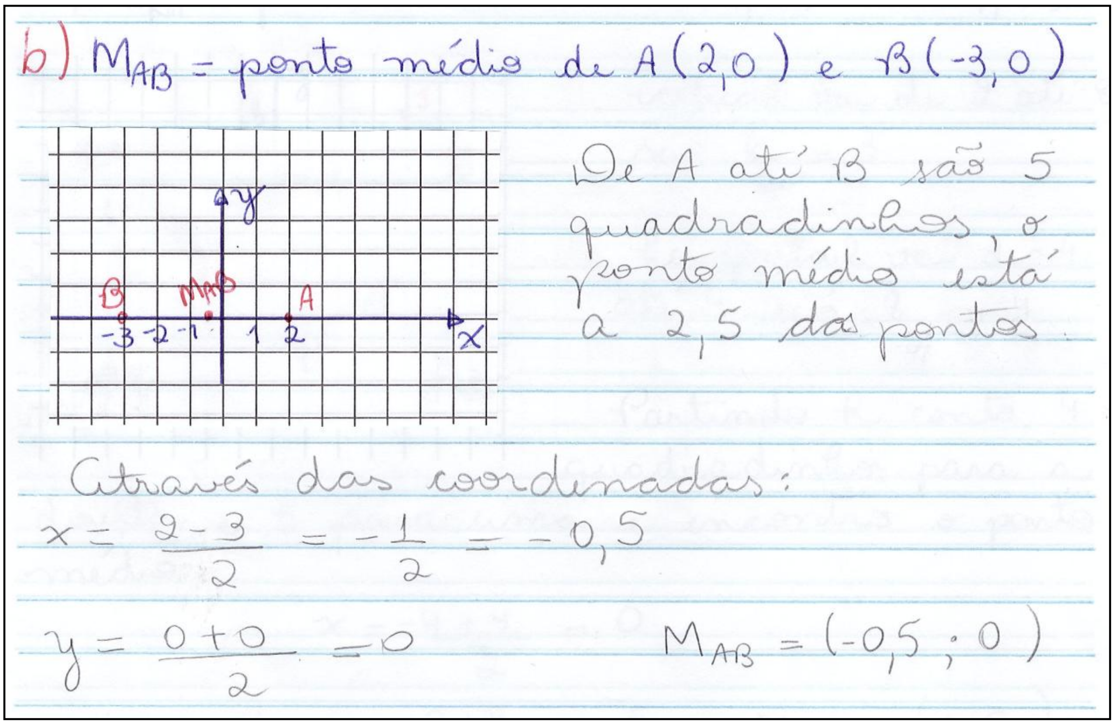
Foi feita a localização dos pontos no plano cartesiano, onde os alunos identificaram geometricamente o ponto médio de cada segmento com extremidades nos pontos dados. Primeiramente, fizeram contando quadradinhos ou medindo com a régua. Posteriormente, foram convidados a “descobrir” algebricamente como se calculam as coordenadas do ponto médio a partir das coordenadas dos pontos dados.

Figura 20 - Solução da atividade 8, item a – feito por aluno



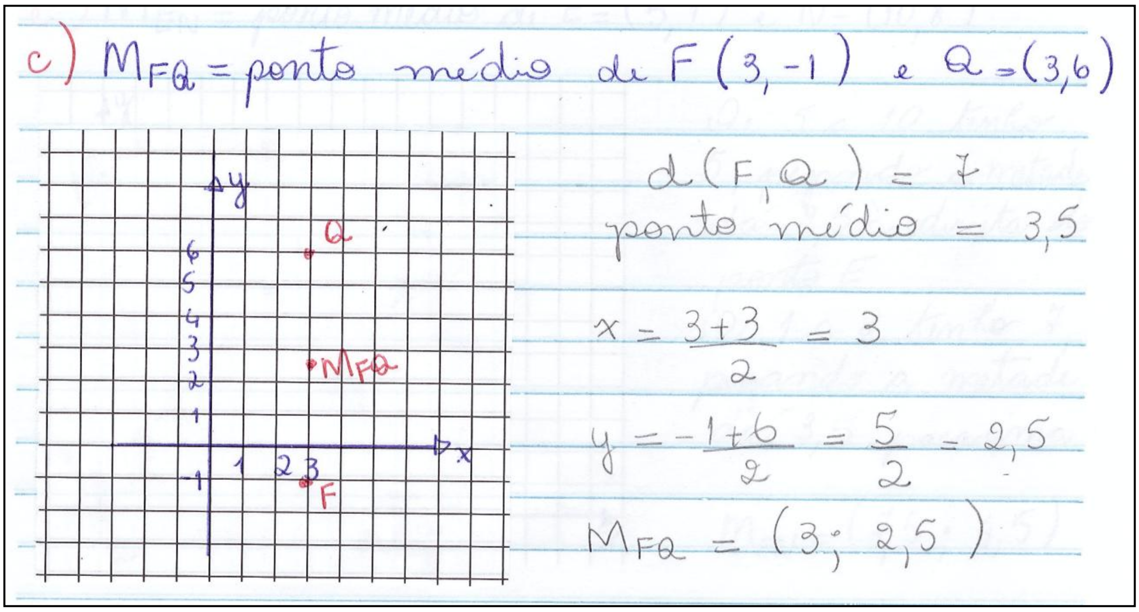
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 21 - Solução da atividade 8, item b – feito por aluno



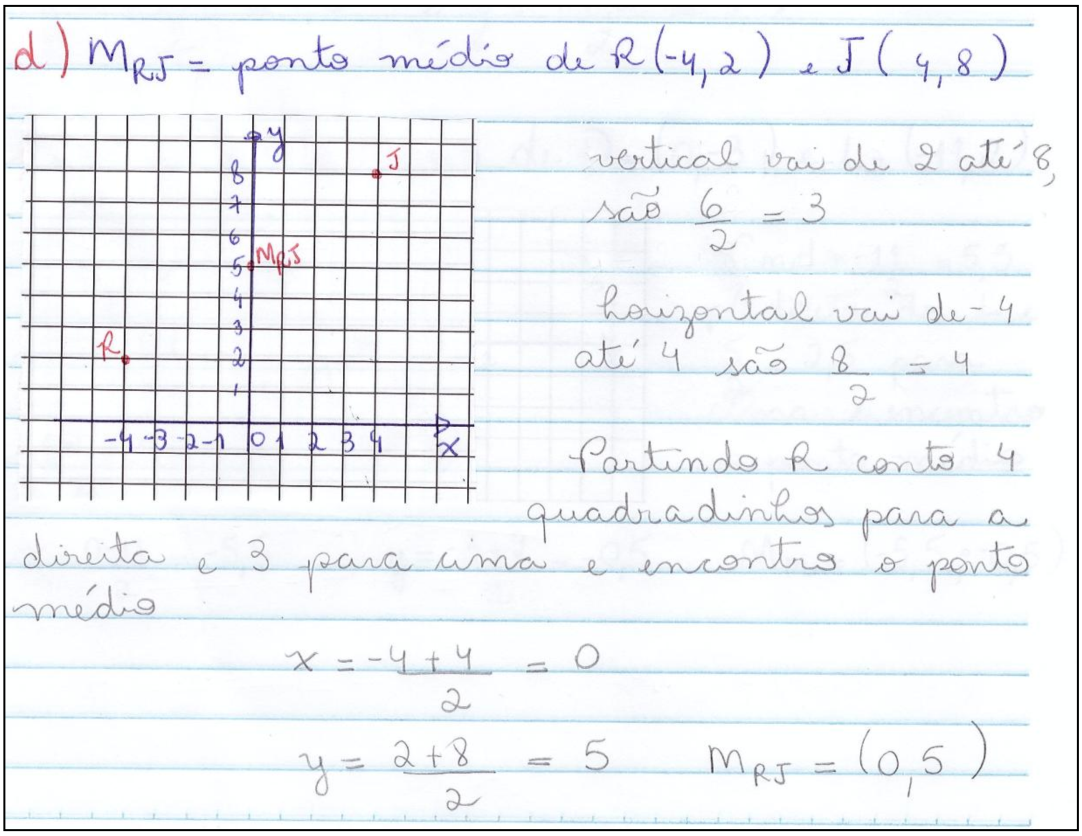
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 22 - Solução da atividade 8, item c – feito por aluno



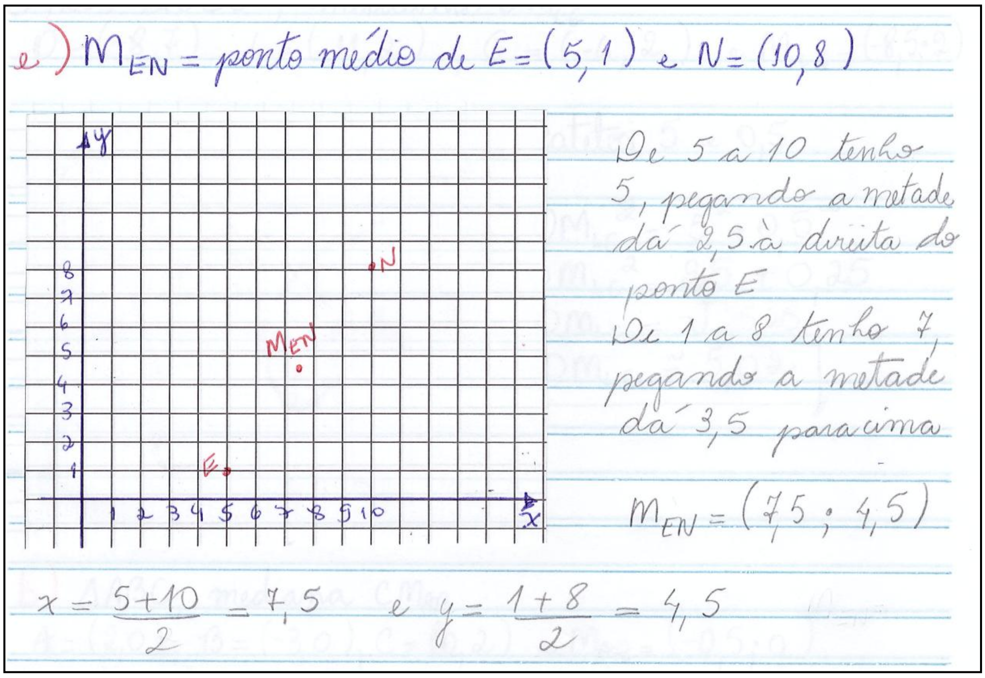
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 263 - Solução da atividade 8, item d – feito por aluno



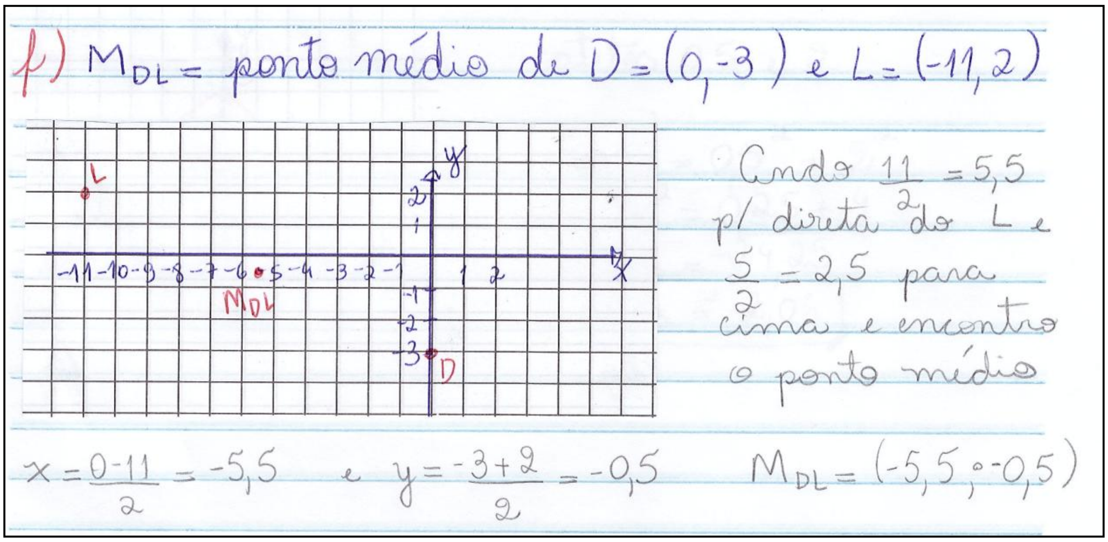
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 24 - Solução da atividade 8, item e – feito por aluno



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 25 - Solução da atividade 8, item f – feito por aluno



Fonte: elaborada pelo autor

Nesta atividade, os objetivos foram alcançados plenamente. Foi muito interessante o desenvolvimento do raciocínio de alguns alunos em contar quadradinhos para a direita e para cima partindo da extremidade do segmento que se localiza à esquerda no plano cartesiano para chegar até a localização do ponto médio no plano cartesiano. E, no final, eles compreenderam a importância de saber calcular as coordenadas do ponto médio através das coordenadas dos pontos dados, pois nem sempre os números usados como abscissas e ordenadas dos pontos dados são números inteiros.

Esta atividade foi desenvolvida durante 4 aulas.

ATIVIDADE 9

O objetivo desta atividade é levar os alunos a usarem os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores para calcular o comprimento de cada mediana através do cálculo da distância entre dois pontos.

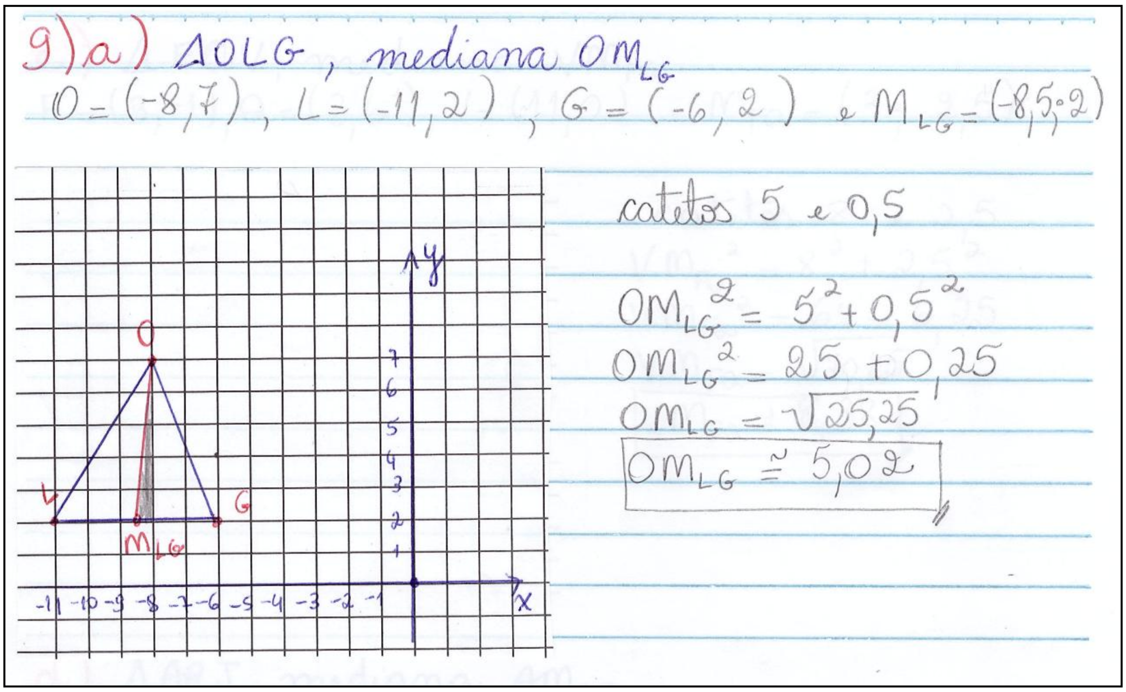
ATIVIDADE 9: Qual o comprimento de cada mediana?

a) Triângulo OLG, mediana OM_{LG}.
b) Triângulo ABC, mediana CM_{AB}.
c) Triângulo FQV, mediana VM_{FQ}.
d) Triângulo ARJ, mediana AM_{RJ}.

Na atividade anterior já foram calculados os pontos médios, basta agora localizar os 3 pontos que compõem cada triângulo no plano cartesiano e novamente usar o cálculo da distância entre dois pontos, através do Teorema de Pitágoras, lembrando que a medida da mediana procurada é exatamente a medida da hipotenusa dos triângulos retângulos auxiliares que serão usados para o cálculo.

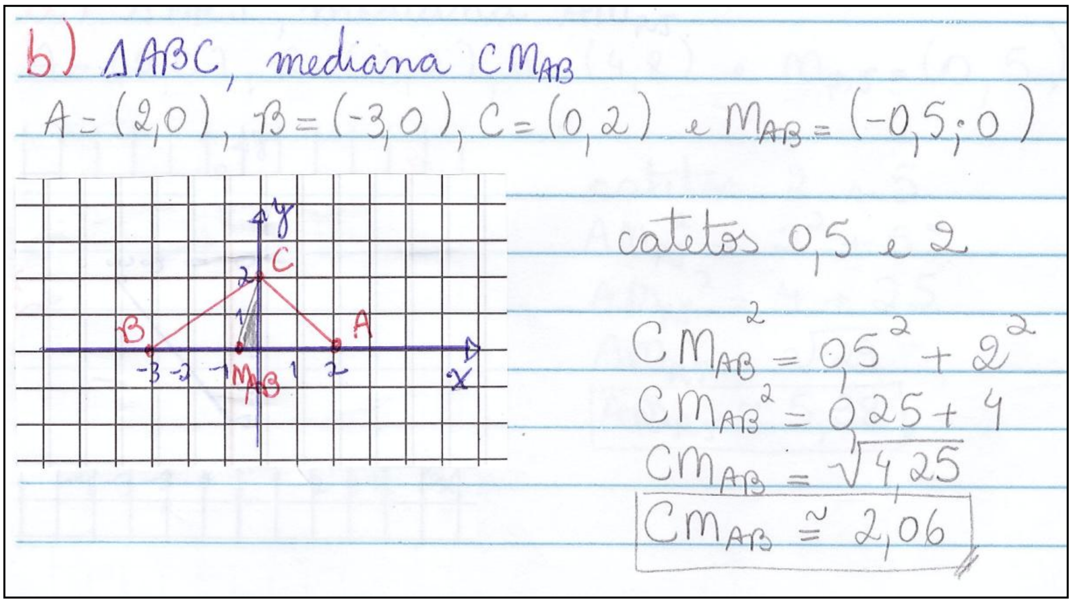
Inicialmente, houve a dúvida se usariam números fracionários ou números decimais, alguns alunos tentaram fazer as contas com frações, mas acharam a visualização da resposta difícil de entender, então optaram por fazer as contas com números decimais.

Figura 76 - Solução da atividade 9, item a – feita por aluno



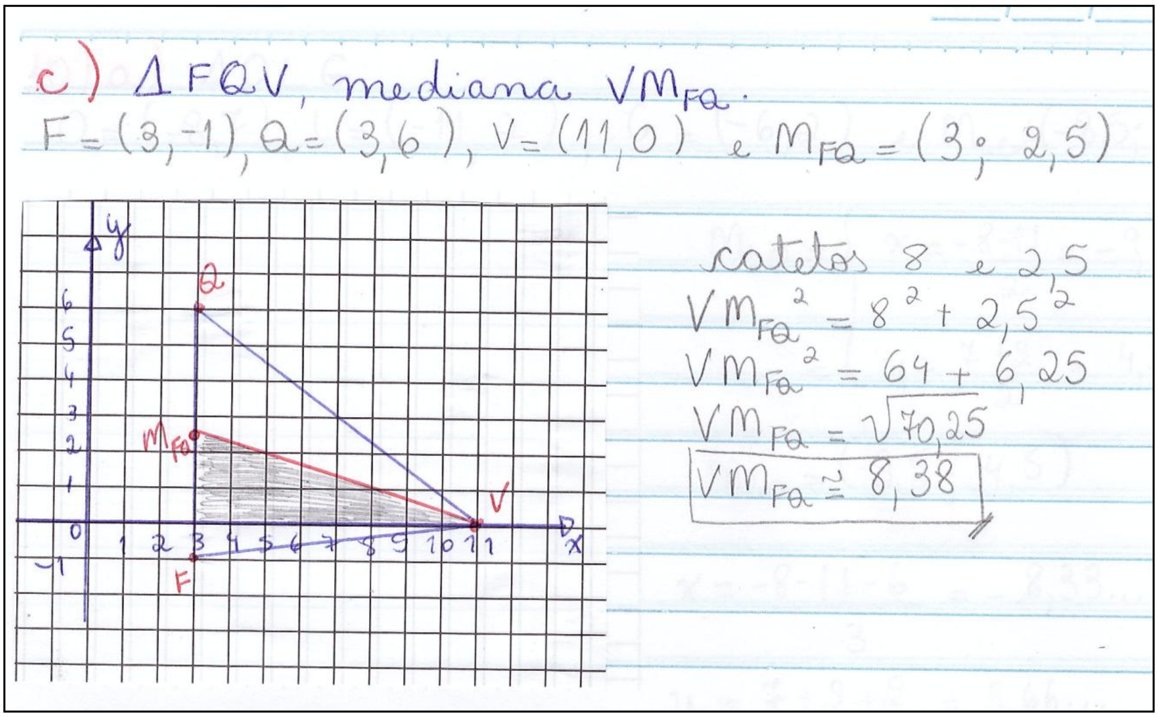
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 27 - Solução da atividade 9, item b – feita por aluno



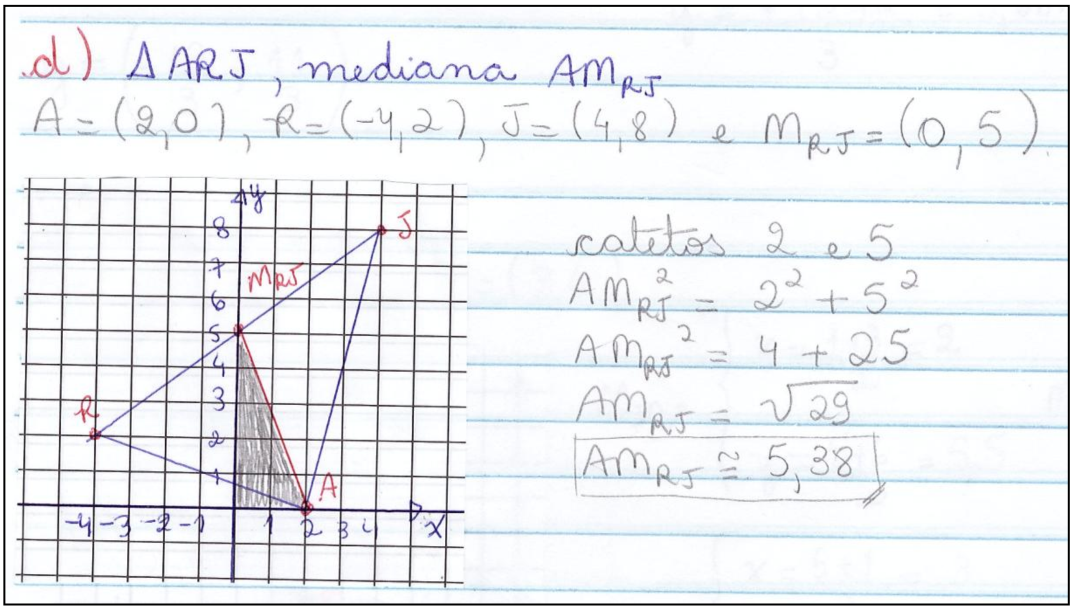
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 28 - Solução da atividade 9, item c – feita por aluno



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 29 - Solução da atividade 9, item d – feita por aluno



Fonte: elaborada pelo autor

Esta atividade foi feita em grupo e demorou 6 aulas para ser concluída, pois cada grupo ficou responsável pela correção de um item.

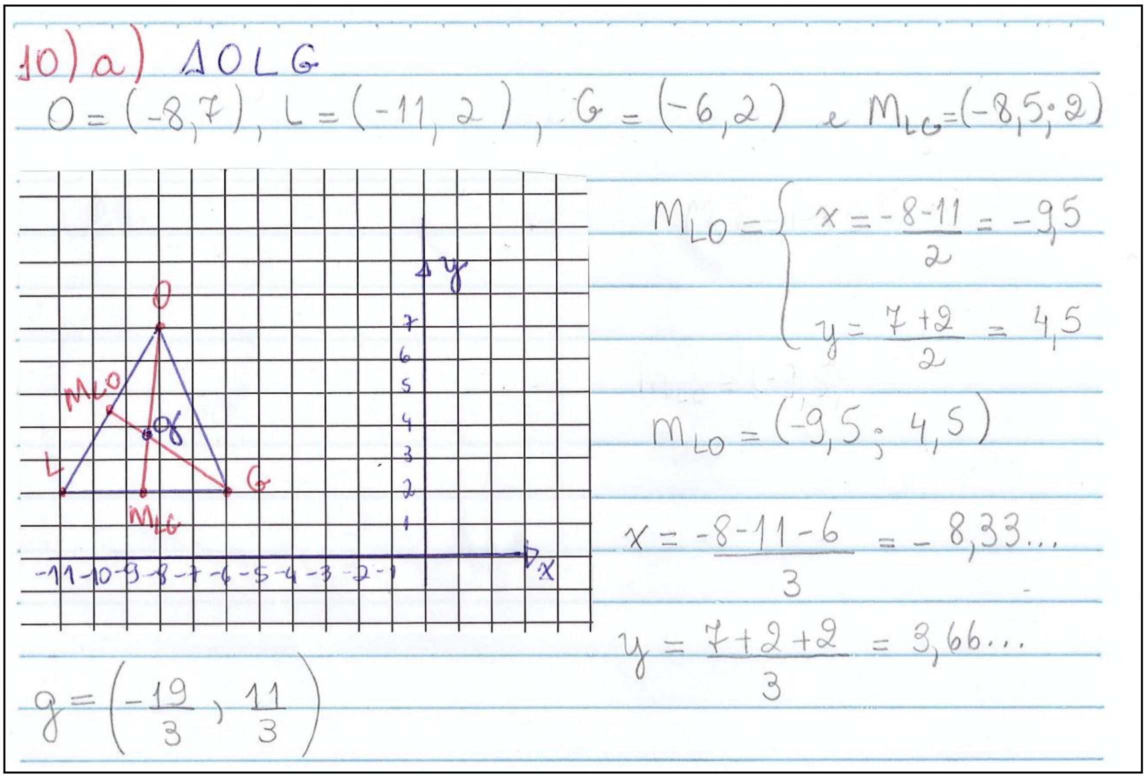
ATIVIDADE 10

Como o baricentro é determinado pelo encontro das três medianas de um triângulo, os alunos devem observar nos respectivos triângulos, os pontos médios de cada lado, assim como os segmentos que formam as medianas. Ao construírem geometricamente as medianas, observaram que elas se intersectam em um ponto g (usado aqui com letra minúscula para diferenciar do ponto G(-6,2) usado em todas as atividades), sendo este o baricentro do triângulo. Analisando as coordenadas dos vértices e também do ponto g, concluíram que as coordenadas do baricentro de um triângulo correspondem à média aritmética das coordenadas dos seus três vértices. O importante aqui é que a fórmula novamente não foi fornecida antecipadamente.

ATIVIDADE 10: Encontrar os respectivos baricentros dos triângulos a seguir: a) Triângulo OLG b) Triângulo EIQ

Ao construir os triângulos pedidos, primeiramente os alunos identificaram os três pontos médios dos respectivos lados de cada triângulo e traçaram as três medianas, o que permitiu visualizar com facilidade a localização do ponto g. Houve aqui uma discussão a respeito da necessidade das três medianas, sem dificuldade os alunos refletiram e entenderam que bastam duas medianas para se determinar o baricentro no plano cartesiano. Depois disso, a professora precisou conduzir o raciocínio de modo que os alunos pudessem descobrir o valor das coordenadas do ponto g, apenas algebricamente, sem a visualização geométrica.

Figura 30 - Solução da atividade 10, item a – feita por aluno

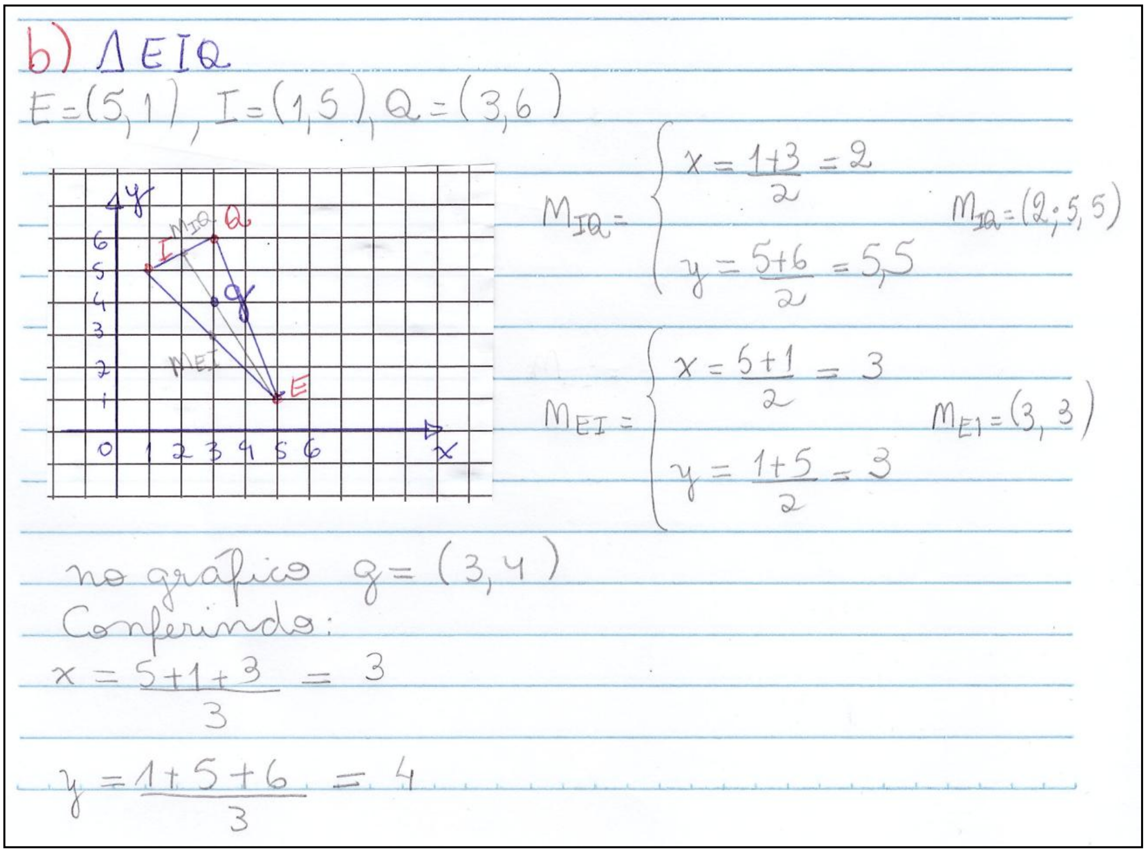


Fonte: elaborada pelo autor

Nesta resolução, ficou claro para os alunos que nem sempre é possível obter respostas exatas através do gráfico, pois ao encontrar o ponto g no plano cartesiano, foi impossível que identificassem que as coordenadas deste ponto eram exatamente $x_g = -\frac{19}{3}$ e $y_g = \frac{11}{3}$.

Após a resolução deste exercício a professora retomou o caso do ponto médio e provocou uma reflexão sobre divisibilidade, onde os alunos demonstraram bastante dificuldade de entender que no baricentro, ao calcular a média aritmética de três números e dividir por 3, nem sempre a divisão é exata e no caso do ponto médio, onde a média aritmética de dois números é dividida por 2 sempre resulta numa divisão exata.

Figura 31 - Solução da atividade 10, item b – feita por aluno



Fonte: elaborada pelo autor

Foi interessante fazer o item a com a dificuldade de localizar o baricentro geometricamente, antes do item b, onde eles puderam localizá-lo com facilidade e os cálculos serviram apenas para conferir. Isto deu confiança aos alunos para prosseguirem com as atividades.

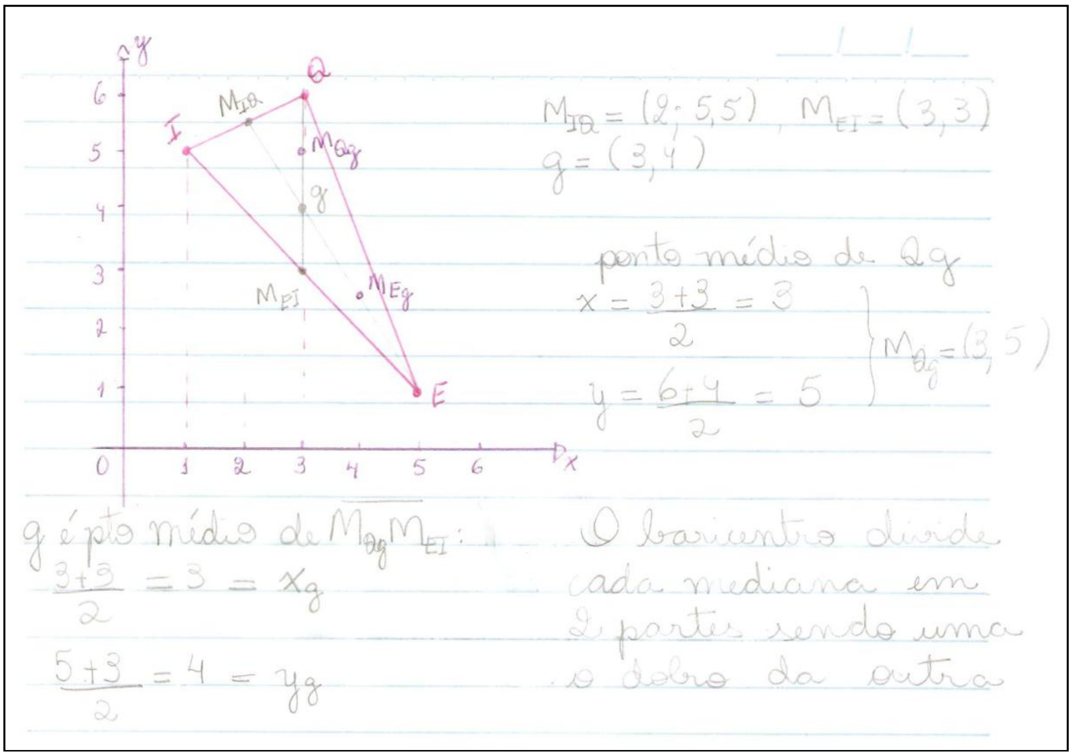
Esta atividade levou 5 aulas para ser totalmente concluída.

ATIVIDADE 11

Foi proposta esta atividade com a intenção de conduzir os alunos a comprovarem que o baricentro divide cada mediana em dois segmentos tais que aquele que contém o vértice é o dobro do outro.

ATIVIDADE 11: Retomando o triângulo EIQ da atividade anterior, encontre o ponto médio do segmento que une os pontos Q e g. Em seguida, comprove que g é o ponto médio de M_{Qg} e M_{EI}. Explique suas conclusões a respeito do baricentro.

Figura 32 - Solução da atividade 11 – feita por aluno



Fonte: elaborada pelo autor

Foi interessante acompanhar os cálculos feitos pelos alunos e suas observações a respeito do baricentro, pois a princípio demonstraram dificuldade de entender que o segmento QM_{EI} foi dividido em 3 segmentos congruentes através do cálculo com pontos médios, sendo assim eles calcularam também a distância entre os pontos, dois a dois para comprovar a congruência.

Esta atividade teve a duração de 3 aulas.

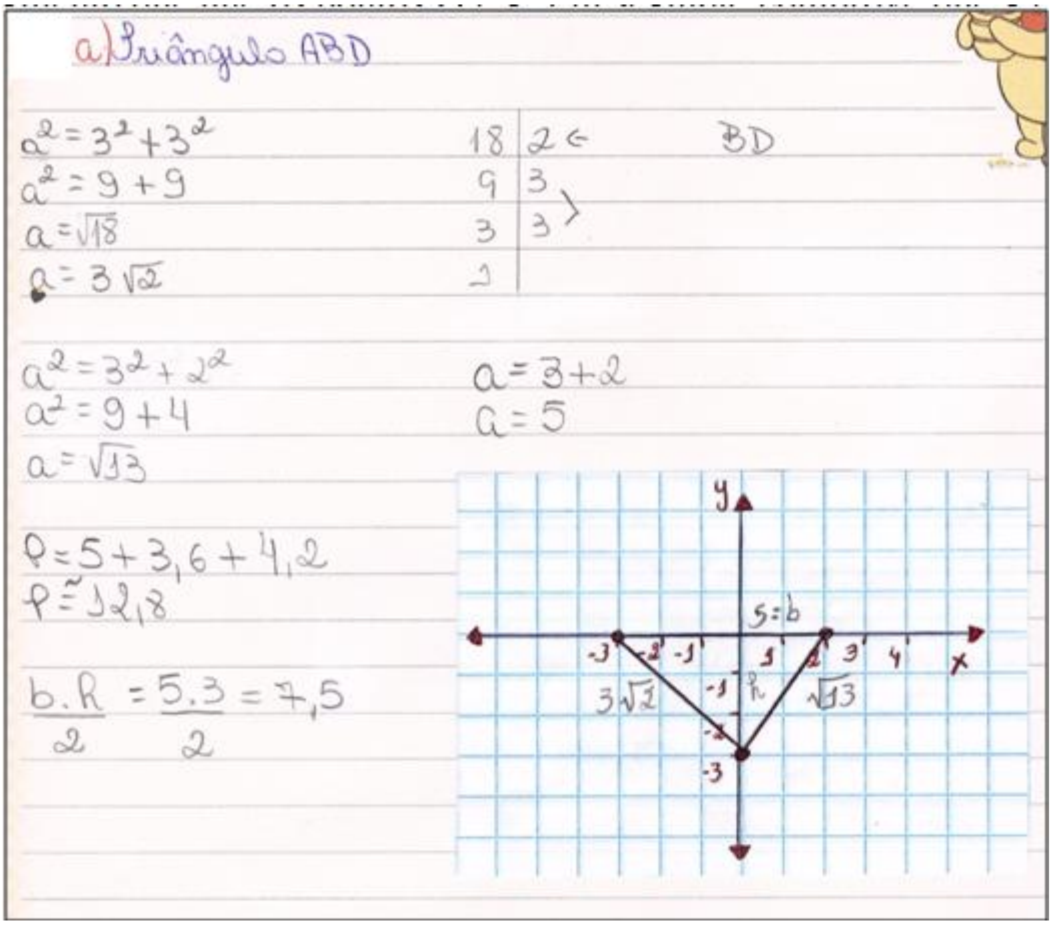
ATIVIDADE 12

Nesta atividade, o objetivo é que os alunos usem os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores para calcular o comprimento de cada lado do triângulo usando a distância entre dois pontos e dessa forma encontrar o perímetro procurado, através da soma das três distâncias encontradas.

ATIVIDADE 12: Calcular os perímetros dos triângulos seguintes:

a) Triângulo ABD
b) Triângulo CDV
c) Triângulo FQU
d) Triângulo GLS
e) Triângulo EPT

Figura 33 - Solução da atividade 12, item a – feita por aluno

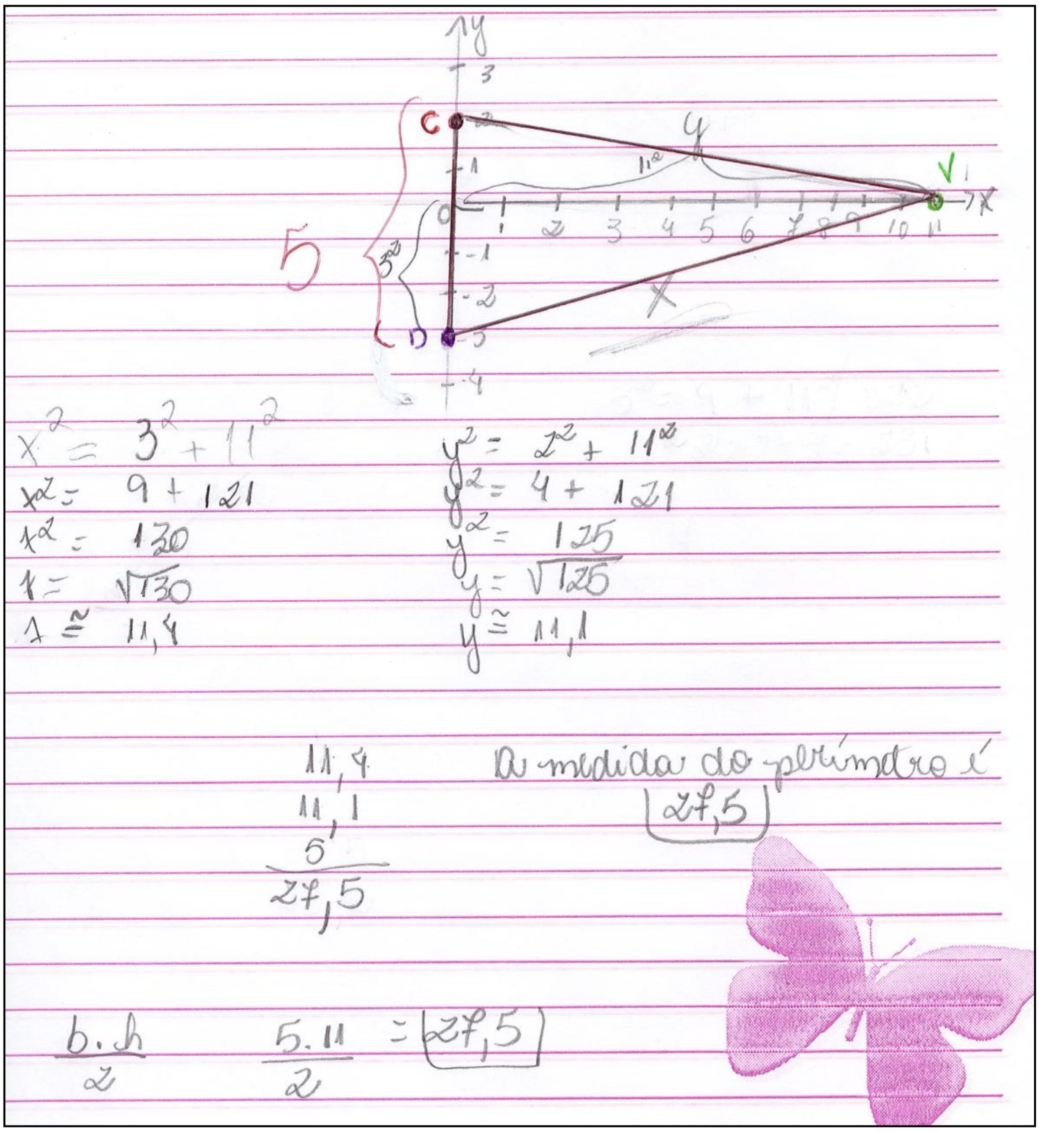


Fonte: elaborada pelo autor

Através do Teorema de Pitágoras, os alunos calcularam a distância entre os vértices do triângulo, dois a dois, e efetuaram a soma para obter o perímetro. Por se tratar de números irracionais, usaram a calculadora para obter valores aproximados e somar.

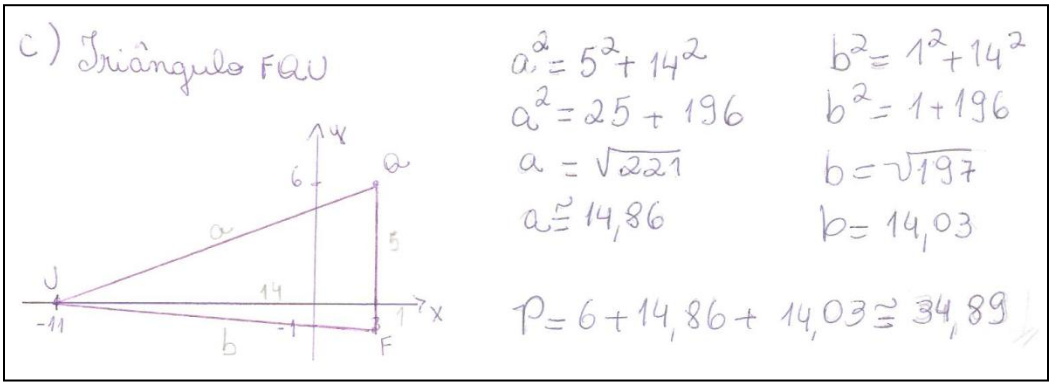
Podemos observar que os alunos aproveitaram a mesma figura para calcular a área da atividade 13, pois se refere ao mesmo triângulo.

Figura 34 - Solução da atividade 12, item b – feita por aluno



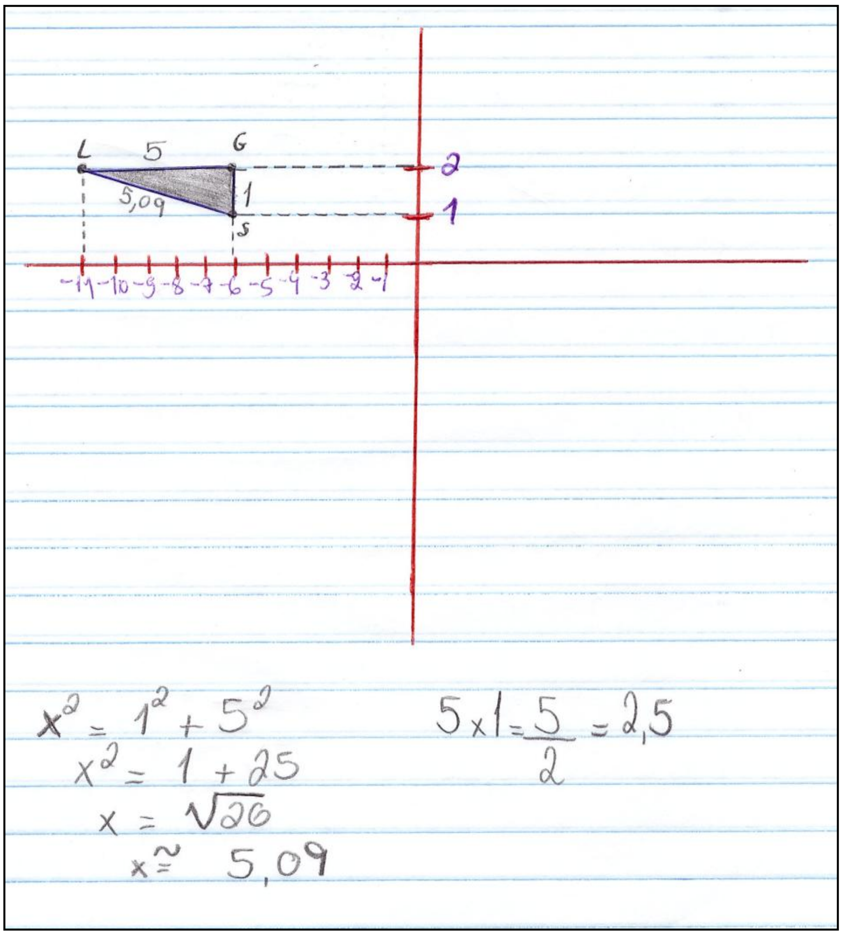
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 35 - Solução da atividade 12, item c – feita por aluno



Fonte: elaborada pelo autor

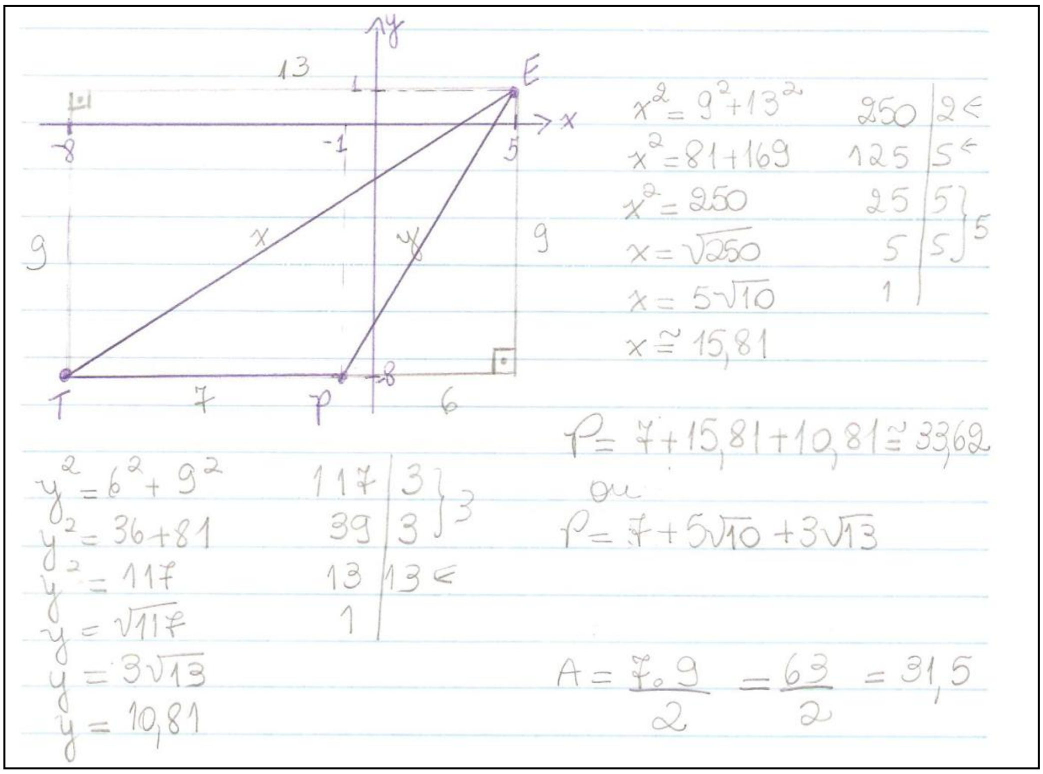
Figura 36 - Solução da atividade 12, item d – feita por aluno



Fonte: elaborada pelo autor

Neste item, o aluno calculou a distância entre L(-11, 2) e S(-6, 1), usou a calculadora para obter um valor aproximado para $\sqrt{26}$, mas não calculou o perímetro, apesar de ouvir as explicações da professora. Aproveitou também o desenho e calculou a área (atividade 12), mas sem nenhum rigor na escrita. Para os alunos não existe erro em escrever 5x1 = $\frac{5}{2}$, eles justificam esta escrita dizendo que se deve ler da esquerda para a direita e que, portanto, primeiro multiplicou e depois dividiu. Após várias colocações da professora, ficou claro a todos os alunos desta sala que o sinal de igual não obriga que a leitura seja feita da esquerda para a direita.

Figura 37 - Solução da atividade 12, item e – feita por aluno



Fonte: elaborada pelo autor

Nesta atividade, os alunos demonstraram dificuldade em usar os triângulos retângulos auxiliares para calcular os lados EP e ET do triângulo EPT, mas conseguiram concluir a atividade com êxito. Para sanar as dúvidas, fizeram os triângulos separadamente numa folha de rascunho e assim conseguiram compreender os cálculos.

A duração da atividade 12 foi de 5 aulas.

ATIVIDADE 13

Esta atividade tem por objetivo mostrar aos alunos que basta conhecer as coordenadas dos vértices de um triângulo para que seja calculada a sua área.

ATIVIDADE 13: Calcular a área dos triângulos seguintes:

a) Triângulo ABD
b) Triângulo CDV
c) Triângulo FQU
d) Triângulo GLS
e) Triângulo EPT

A partir do triângulo dado, os alunos calcularam a área com os conhecimentos que já tinham. Posteriormente, foi apresentado que a área do triângulo pode ser calculada através do determinante de uma matriz, formada pelos valores das coordenadas dos pontos de posicionamento. A matriz construída deverá conter em uma de suas colunas os valores das abscissas e em outra, os valores das ordenadas dos pontos, uma terceira coluna será completada com valores iguais a 1.

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

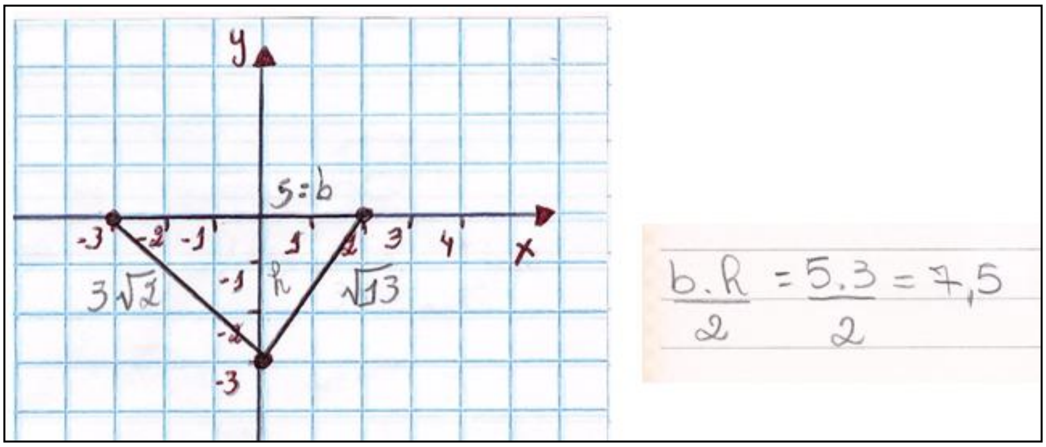
x : *abscissas*

y : *ordenadas*

A área do triângulo será determinada pela metade do valor do determinante:

$$A = \frac{|D|}{2}$$

Figura 38 - Solução da atividade 13, item a – feita por aluno

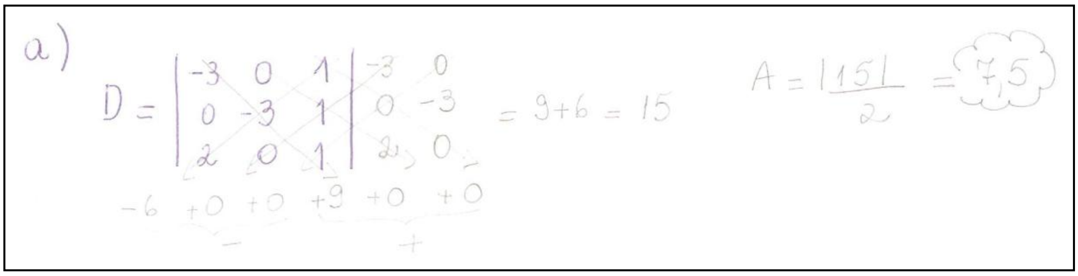


Fonte: elaborada pelo autor

Esta atividade não apresentou dificuldade alguma, pois o triângulo tem a base horizontal e a altura bem definida no desenho.

Os alunos entenderam que é possível calcular a área do triângulo conhecendo suas coordenadas, bastando para isso montar o determinante, obter seu valor e assim calcular a área através da metade do módulo do determinante, esse é o método cartesiano.

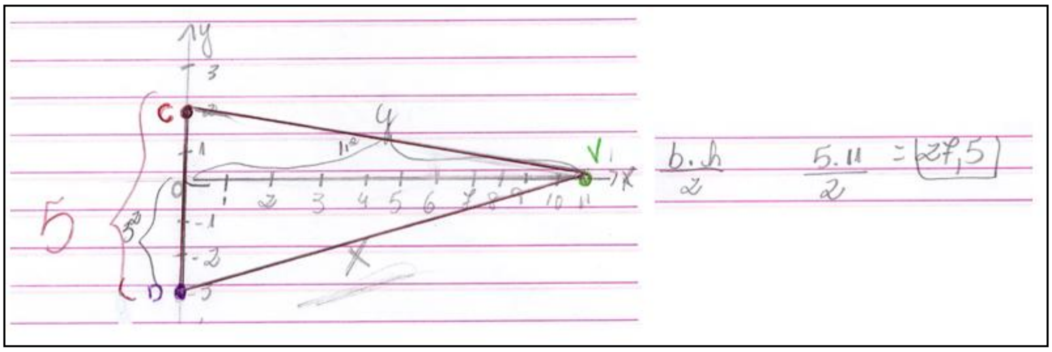
Figura 39 - Solução da atividade 13, item a – feita por aluno



Fonte: elaborada pelo autor

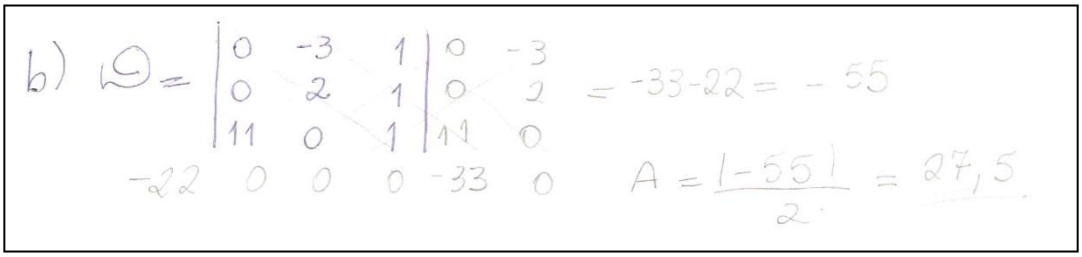
Analogamente os alunos resolveram os outros itens da atividade 12, primeiramente com o desenho e depois com o determinante.

Figura 40 - Solução da atividade 13, item b – feita por aluno



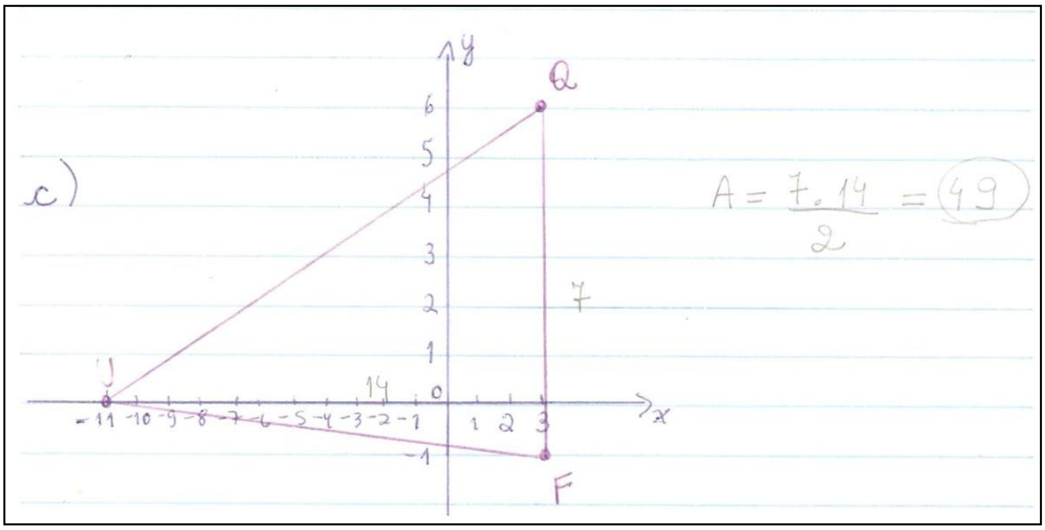
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 41 - Solução da atividade 13, item b – feita por aluno



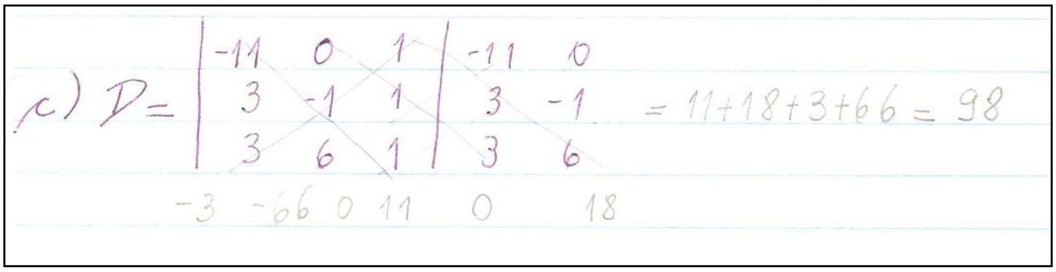
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 42 - Solução da atividade 13, item c – feita por aluno



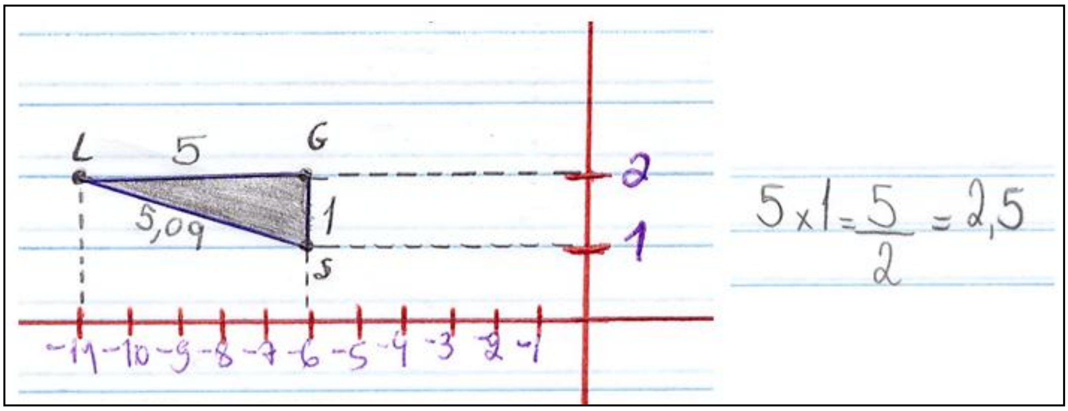
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 43 - Solução da atividade 13, item c – feita por aluno



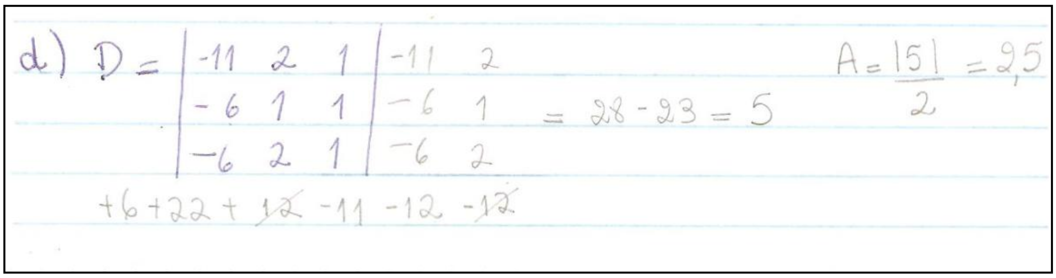
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 44 - Solução da atividade 13, item d – feita por aluno



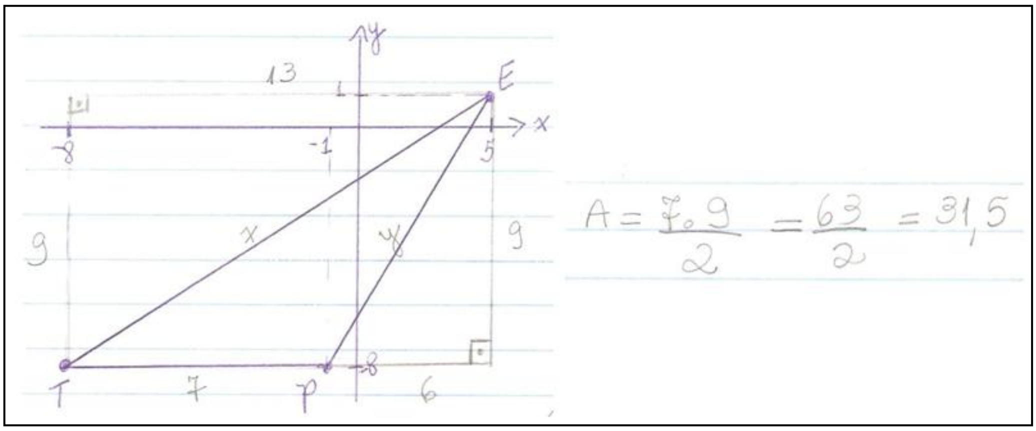
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 458 - Solução da atividade 13, item d – feita por aluno



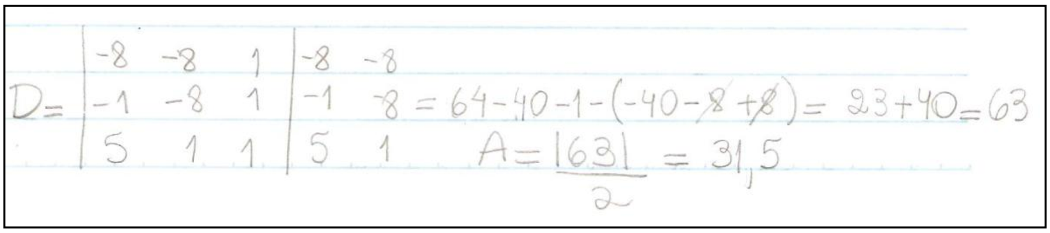
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 46 - Solução da atividade 13, item e – feita por aluno



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 47 - Solução da atividade 13, item e – feita por aluno



Fonte: elaborada pelo autor

Esta atividade teve a duração de 3 aulas.

ATIVIDADE 14

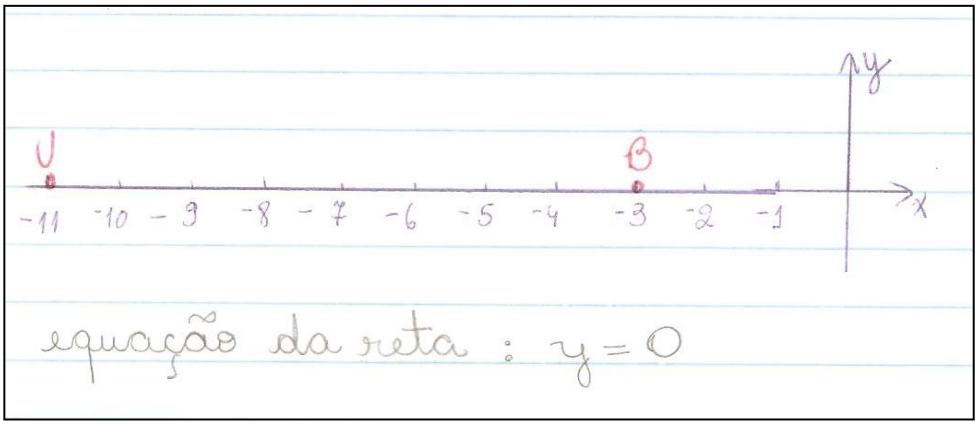
Nesta atividade inicia-se o aprendizado da equação reduzida da reta, partindo da visualização desta no campo de futebol.

ATIVIDADE 14: Se o jogador B for chutar direto ao gol e a bola for exatamente em direção ao goleiro U, qual a equação da reta que passa pelos pontos B e U?

Em uma reta paralela ao eixo x, temos que o coeficiente angular é nulo (m = 0) e, consequentemente, a equação da reta é dada por $y = y_0$, onde y_0 é a ordenada de um ponto que pertence à reta procurada.

Através da observação da localização dos pontos B(-3, 0) e U(-11, 0), os alunos escreveram a equação da reta que passa por estes dois pontos.

Figura 48 - Solução da atividade 14 – feita por aluno



Fonte: elaborada pelo autor

Nesta atividade, os alunos acompanharam às explicações, atentos, mas não demonstraram compreensão no primeiro momento, houve muita dificuldade para que entendessem o significado da equação da reta, foi preciso retomar alguns exemplos básicos do ensino fundamental para sanar as dúvidas.

Devido às dificuldades apresentadas, esta atividade teve a duração de 2 aulas.

ATIVIDADE 15

O objetivo aqui é mostrar aos alunos que o coeficiente angular da reta, calculado pela tangente do ângulo, que a mesma forma com o eixo x, pode ser visualizado também em um triângulo retângulo, facilitando a compreensão sem o uso de fórmulas prontas. Através do coeficiente angular e um ponto pertencente à reta, encontrar a equação da reta e observar o coeficiente linear.

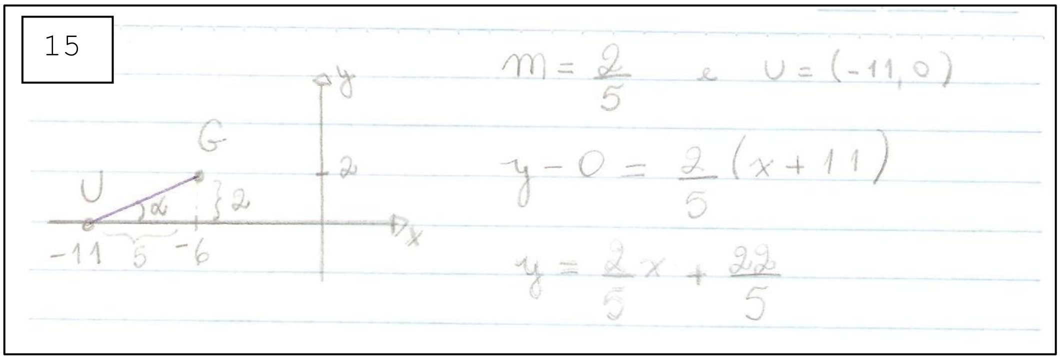
ATIVIDADE 15: Se o jogador G for chutar direto ao gol e a bola for exatamente em direção ao goleiro U, qual a equação da reta que passa pelos pontos G e U?

O primeiro passo foi conversar com os alunos sobre o coeficiente angular da reta, lembrando que o mesmo é obtido através da tangente do ângulo de inclinação da referida reta. Usamos apenas a relação

$$tg\alpha = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

sem, necessariamente, consultar a tabela trigonométrica, nem precisar calcular exatamente os ângulos em graus. Aqui foi preciso uma aula expositiva sobre os conceitos de equação reduzida da reta, que pode ser obtida a partir do coeficiente angular e um ponto conhecido.

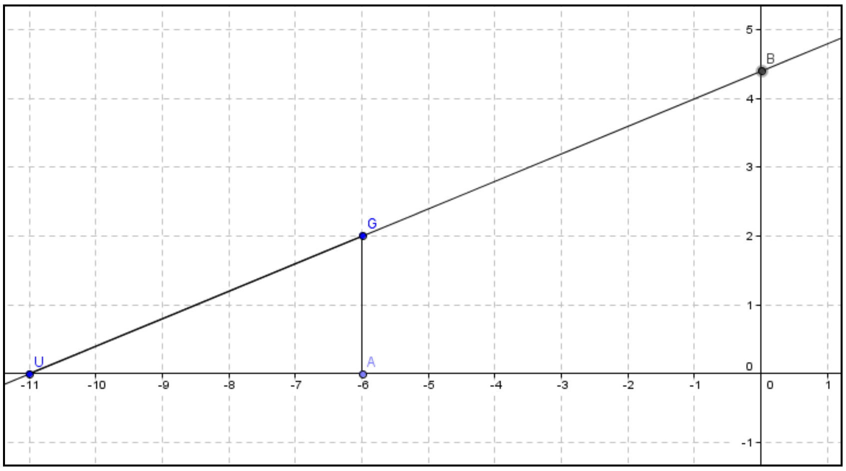
Figura 49 - Solução da atividade 15 – feita por aluno



Fonte: elaborada pelo autor

É importante que os alunos observem que $\frac{22}{5}$ = 4,4 e visualizem no plano cartesiano que este ponto representa o coeficiente linear, ou seja, é exatamente o ponto em que a reta intersecta o eixo y.

Figura 50 - Coeficiente linear da reta que passa por U e G



Fonte: elaborada pelo autor

A duração desta atividade foi de 3 aulas.

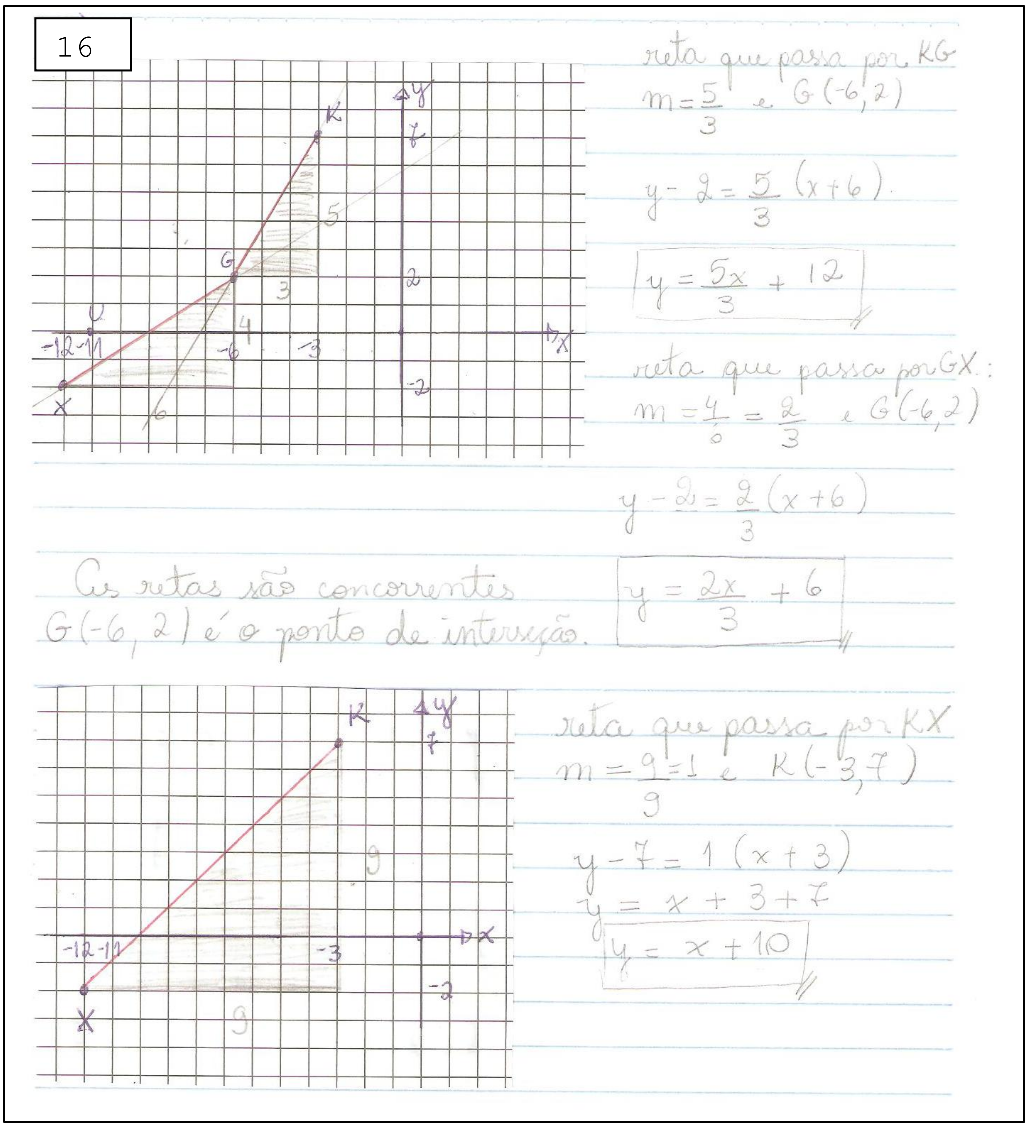
ATIVIDADE 16

Analogamente à atividade anterior, a ideia aqui é que o aluno visualize as retas e suas inclinações. Neste caso, também será observada a posição relativa das duas retas em questão.

ATIVIDADE 16: Se o jogador K fizer um passe para o jogador G que vai chutar a bola no canto à direita do goleiro U, qual a equação das duas retas encontradas? E se o jogador K chutasse direto no canto do gol, qual seria a equação da reta? (O canto do gol corresponde ao ponto de coordenadas (-12, -2).)

Abaixo segue a resolução de um aluno.

Figura 51 - Solução da atividade 16 – feita por aluno



Fonte: elaborada pelo autor

Os alunos não demonstraram dificuldades nos cálculos. Ao final foram feitas algumas observações sobre o fato do coeficiente angular ser positivo e as retas representarem uma função crescente, além disso, foi bem observado o coeficiente linear, pois no gráfico fica visível a localização do ponto de intersecção da reta com o eixo y.

Na equação da reta que passa pelos pontos K(-3, 7) e X(-12, -2), ao verificar que o triângulo retângulo usado para calcular o coeficiente angular da reta era um triângulo isósceles, e que a tangente era igual a 1, os alunos demonstraram compreensão de que esse fato é porque o ângulo que a hipotenusa forma com o cateto é exatamente 45º.

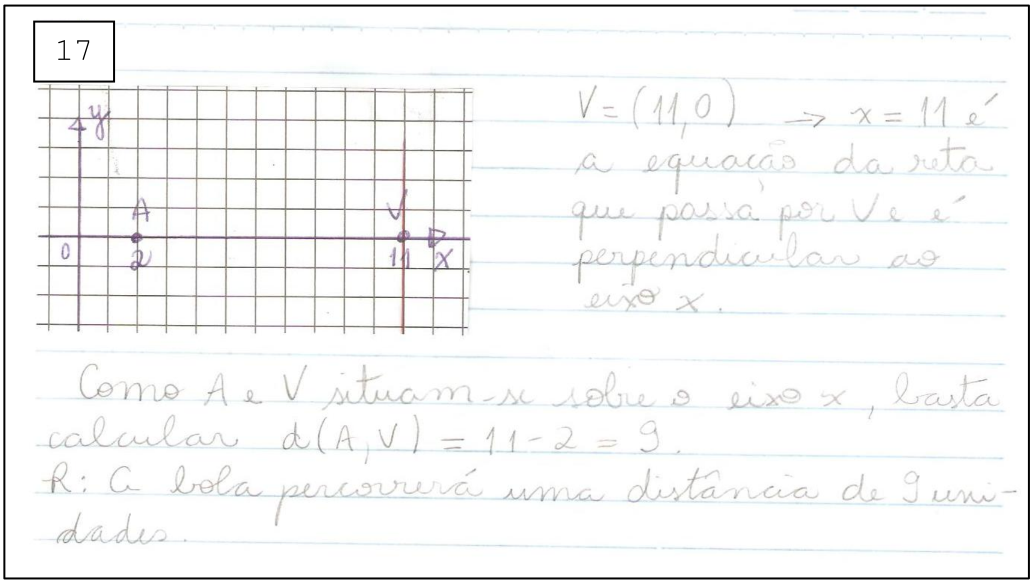
A duração desta atividade foi de 2 aulas.

ATIVIDADE 17

A atividade foi desenvolvida para iniciar o conceito de distância entre ponto e reta e, neste caso, como os pontos se situam sobre o eixo x, facilitou o entendimento do aluno.

ATIVIDADE 17: Calcule a distância que a bola deve percorrer se o jogador A chutá-la em direção à reta que passa pelo goleiro V e é perpendicular ao eixo x (considere a menor distância do ponto à reta).

Figura 52 - Solução da atividade 17 – feita por aluno



Fonte: elaborada pelo autor

A duração desta atividade foi de 1 aula.

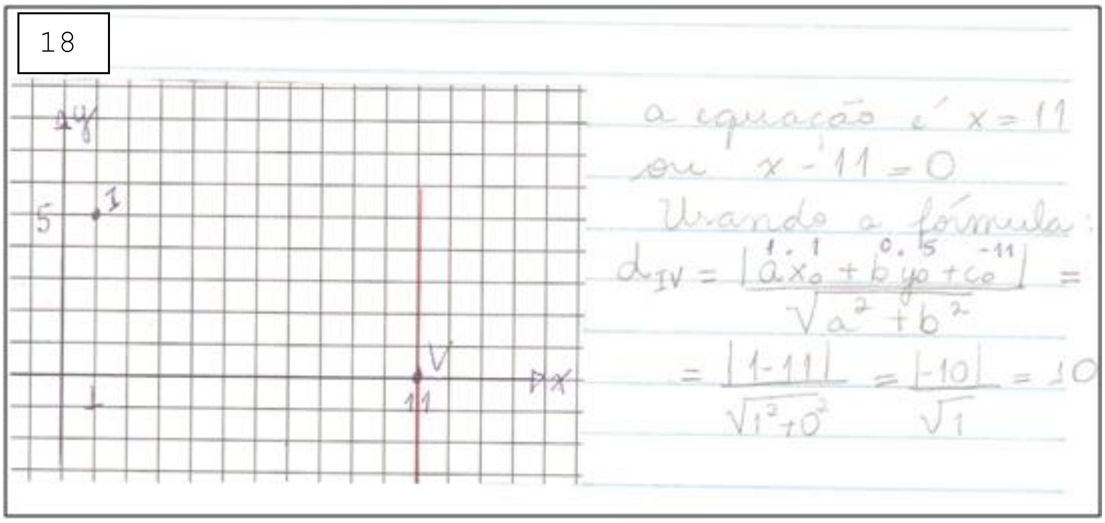
ATIVIDADE 18

Usando a mesma reta da atividade anterior, mas aumentando um pouco o nível de dificuldade, o objetivo é, aos poucos, introduzir o cálculo da distância entre ponto e reta.

Os cálculos foram feitos através da equação da reta que passa pelo ponto I e é perpendicular à reta vertical que passa pelo ponto V, encontrando assim um ponto de intersecção entre elas e, portanto, para obter a distância desejada, basta usar o conceito de distância entre dois pontos. Posteriormente foi apresentada a fórmula e usada apenas para conferir os resultados.

ATIVIDADE 18: Calcule a distância que a bola deve percorrer se o jogador I chutá-la em direção à reta que passa pelo goleiro V e é perpendicular ao eixo x (considere a menor distância do ponto à reta).

Figura 53 - Solução da atividade 18 – feita por aluno



Fonte: elaborada pelo autor

Essa atividade provocou dúvidas, pois os alunos chegaram a pensar que era simplesmente calcular a distância entre os pontos I e V, mas após os cálculos e observando a posição do ponto e da reta no plano cartesiano, ficou claro que era possível encontrar a resposta fazendo novamente uma simples subtração, porque a distância desejada é paralela ao eixo x.

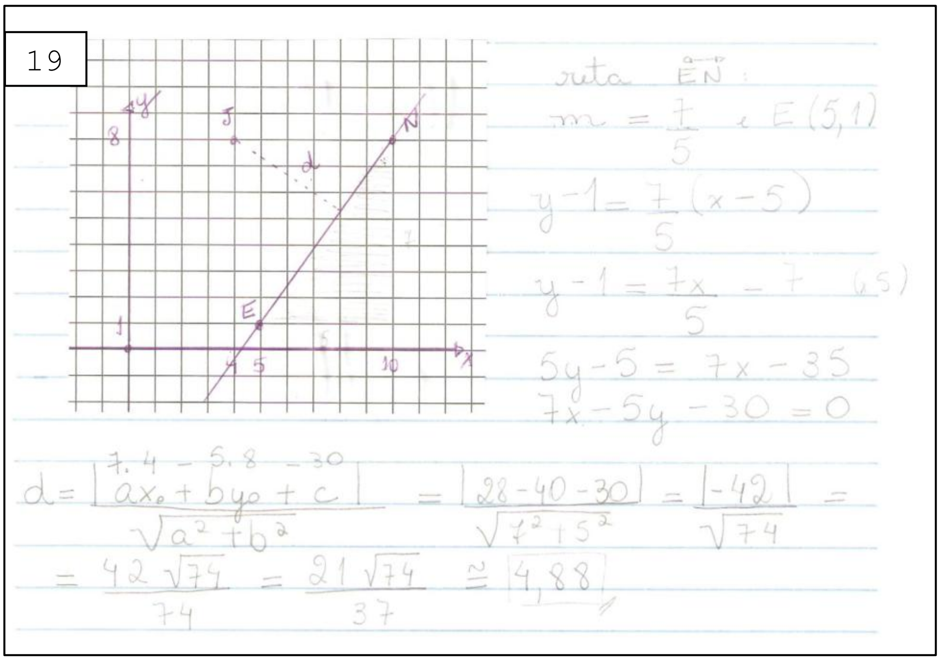
A duração desta atividade foi de 1 aula.

ATIVIDADE 19

Esta atividade tem por objetivo que os alunos compreendam e calculem a distância de um ponto a uma reta dada. Não é importante aqui desenvolver cálculos, mas sim a compreensão dos conceitos, por isso é permitido o uso de calculadora e valores aproximados.

ATIVIDADE 19: Haverá uma cobrança de falta e a barreira foi colocada sobre a reta que passa pelos pontos E(5, 1) e N(10, 8). Encontre a distância que o jogador J = (4, 8) está da barreira.

Figura 54 - Solução da atividade 19 – feita por aluno



Fonte: elaborada pelo autor

Nesta atividade, a professora mostrou aos alunos como os cálculos seriam complicados sem o uso da fórmula, mas seriam possíveis.

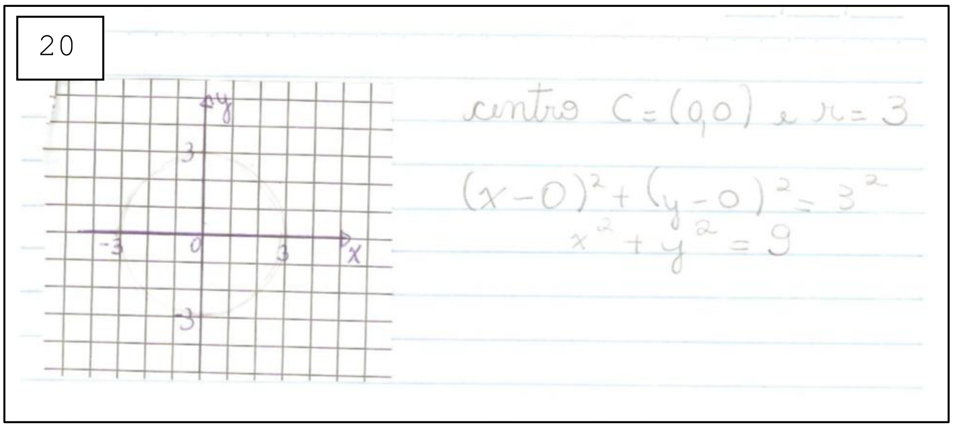
Esta atividade teve a duração de 3 aulas.

ATIVIDADE 20

Antes desta atividade, foram feitas 6 aulas sobre equação da circunferência, envolvendo equação geral, reduzida e o método do completamento de quadrados.

ATIVIDADE 20: Observando a circunferência no centro do campo de futebol, determine sua equação.

Figura 95 - Solução da atividade 20 – feita por aluno



Fonte: elaborada pelo autor

Como a circunferência tem centro exatamente na origem dos eixos coordenados, não houve dificuldade em identificar que o raio é 3. Como os alunos já conheciam a fórmula da equação da circunferência, não tiveram dificuldade nesta solução.

Esta atividade teve a duração de 1 aula.

Capítulo 6

Conclusão

Constatou-se que o material de ensino produzido funcionou, pois atingiu seus objetivos principais, sendo o maior deles o aprendizado do aluno. Acredita-se que o material elaborado possa ser útil a outros professores que desejarem desenvolver o tema proposto em suas aulas, fazendo as adaptações necessárias às suas turmas.

O campo de futebol mostrou-se como um material viável e potencialmente importante no ensino da geometria analítica, podendo ainda ter outras aplicações, como nas aulas de Física, ou até mesmo na matemática do Ensino Fundamental com as equações, áreas e perímetros.

Sendo professora dessa turma desde a 1ª série do Ensino Médio, sei da indiferença que alguns alunos têm pelo estudo. A grande surpresa foi a dedicação desses alunos, onde a todo momento, durante as aulas questionavam e participavam demonstrando uma dedicação nunca antes vista nesta sala de aula.

O conteúdo foi atingido e os alunos adquiriram rapidez nas contas, trabalharam com raiz não exata, dízimas periódicas e equações.

A disciplina da sala melhorou consideravelmente, houve muita participação, envolvimento, trabalho em equipe e até mesmo a frequência, pois os alunos que faltavam todas as sextas-feiras passaram a vir devido ao interesse pelo assunto, por se tratar de futebol.

A sala que começou no início deste ano letivo, indisciplinada, desinteressada pelos estudos, ao final deste trabalho era outra, houve uma mudança bastante significante de comportamento e o importante, é que abrangeu todos os alunos, sem exceção.

Foram feitas outras atividades que a autora decidiu não incluir neste trabalho.

Fica aqui uma sugestão de melhoria: os enunciados das atividades 9, 10, 11, 12 e 13 podem ser reescritos de acordo com o contexto que envolve o campo de futebol.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, I. **Metodologia da Matemática.** Rio de Janeiro : Ed. Conquista, 1953

AUSUBEL, D. P. **A aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel**. São Paulo: Moraes, 1982.

AZEVEDO, E. D. M. **Apresentação do trabalho Montessoriano**. In: Ver. de Educação & Matemática no. 3, 1979 (pp. 26 – 27).

BAKHTIN, M. **Marxismo e filosofia da linguagem**. 7.ed. São Paulo: Hucitec, 1995.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: ensino médio, ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 2002. 46p.
Disponível em: :< http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 28/04/2013.

CARRAHER, T. N. **Na vida dez, na escola zero.** São Paulo: Cortez, 1988.

DANTE, L. R. **Matemática**. São Paulo: Editora Ática, 2004.

DIENNES, Z. P. **Aprendizado moderno da matemática.** Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1970

EVES, H. **Introdução á História da Matemática**. Tradução de Hygino Domingues. Campinas: UNICAMP, 1997.

GIOVANNI & BONJORNO. **Matemática Completa.** São Paulo: Editora FTD, 2005.

IEZZI, G. et. al. **Matemática: Ciência e Aplicação**. São Paulo. Editora Saraiva, 2010.

LIMA, E. L. et. al. **A Matemática do Ensino Médio.** Coleção Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LOPES, R. **O uso do Caderno do Professor na escola pública: percepções de alunos e professora**. 2010. 148f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

MINGUET, P. A. (Org.) **A construção do conhecimento na educação**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

MORAN, J. M. **Mudanças na comunicação pessoal: gerenciamento integrado da comunicação pessoal, social e tecnológica**. São Paulo: Paulinas, 1998.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa**. Brasília: Ed. da UnB, 1998.

NOVAK, J. D.; GOWIN, D. B. **Teoria y practica de la educación**. 1988.

______. **Orientações Educacionais aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio** (PCN+). Brasília, 2007.
Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>.
Acesso em: 03/05/2013.

PIAGET, J. **O diálogo com a criança e o desenvolvimento do raciocínio**. São Paulo: Scipione, 1997.

PONCE, A. **Educação e luta de classes.** São Paulo: Cortez, 1985.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo Para o Ensino de Matemática Para o Ensino Médio. São Paulo**: SE, 2008.

SAVIANI, D. **Escola e democracia.** São Paulo: Cortez 1985.

SMOLE, K. S. et. al. **Matemática Ensino Médio**. São Paulo: Editora Saraiva, 2005.

SOUZA, J. **Coleção Novo Olhar**, São Paulo: Editora FTD, 2010.

TUNES, E. **O Professor e o Ato de Ensinar.** Cadernos de Pesquisa, v. 35, n. 126, p. 689-698, Dez. 2005.
Disponível em: :< http://www.acervodigital.unesp.br/bitstream/123456789/142/3/01d08t03.pdf>. Acesso em: 27/04/2013.

APÊNDICE

Escola Estadual Nelson Fernandes – Santa Rita do Passa Quatro
3ª série B do Ensino Médio – 1º bimestre, ano 2013

Atividades envolvendo Geometria Analítica

ATIVIDADE 1: Coloque alguns jogadores no campo nas seguintes posições:

Jogador A = (2,0)	Jogador L = (-11, 2)
Jogador B = (-3,0)	Jogador M = (9, -7)
Jogador C = (0,2)	Jogador N = (10, 8)
Jogador D = (0,-3)	Jogador O = (-8, 7)
Jogador E = (5,1)	Jogador P = (-1, -8)
Jogador F = (3,-1)	Jogador Q = (3, 6)
Jogador G = (-6,2)	Jogador R = (-4, 2)
Jogador H = (-5,-2)	Jogador S = (-8, -6)
Jogador I = (1,5)	Jogador T = (-8, -8)
Jogador J = (4,8)	Goleiro U = (-11, 0)
Jogador K = (-3, 7)	Goleiro V = (11, 0)

ATIVIDADE 2: Qual é a distância entre os seguintes jogadores?

a) A e B	c) F e Q	e) P e T
b) C e D	d) G e L	f) U e V

ATIVIDADE 3: Explique o método usado para encontrar as distâncias da Atividade 2.

ATIVIDADE 4: Usando o mesmo raciocínio da Atividade 2, é possível encontrar a distância entre A e E? Explique.

ATIVIDADE 5: Você saberia dizer a distância entre os jogadores F e G sem fazer contas?

ATIVIDADE 6: Identifique na figura um triângulo retângulo que tenha como hipotenusa o segmento AC e calcule o tamanho deste segmento usando o Teorema de Pitágoras.

ATIVIDADE 7: Usando o mesmo procedimento da atividade 6, encontre a distância entre os seguintes jogadores:

a) B e D
b) C e V
c) E e J
d) R e P
e) F e U
f) G e S

ATIVIDADE 8: Qual o ponto médio do segmento que une os seguintes jogadores?

a) M_{LG} = ponto médio de L e G
b) M_{AB} = ponto médio de A e B

c) M_{FQ} = ponto médio de F e Q
d) M_{RJ} = ponto médio de R e J
e) M_{EN} = ponto médio de E e N
f) M_{DL} = ponto médio de D e L

ATIVIDADE 9: Qual o comprimento de cada mediana?
a) Triângulo OLG, mediana OM_{LG}
b) Triângulo ABC, mediana CM_{AB}
c) Triângulo FQV, mediana VM_{FQ}
d) Triângulo ARJ, mediana AM_{RJ}

ATIVIDADE 10: Encontrar os respectivos baricentros dos triângulos a seguir:
a) Triângulo OLG
b) Triângulo EIQ

ATIVIDADE 11: Retomando o triângulo EIQ da atividade anterior, encontre o ponto médio do segmento que une os pontos Q e g. Em seguida, comprove que g é o ponto médio de M_{Qg} e M_{EI}. Explique suas conclusões a respeito do baricentro.

ATIVIDADE 12: Calcular os perímetros dos triângulos seguintes:
a) Triângulo ABD
b) Triângulo CDV
c) Triângulo FQU
d) Triângulo GLS
e) Triângulo EPT

ATIVIDADE 13: Calcular a área dos triângulos seguintes:
a) Triângulo ABD
b) Triângulo CDV
c) Triângulo FQU
d) Triângulo GLS
e) Triângulo EPT

ATIVIDADE 14: Se o jogador B for chutar direto ao gol e a bola for exatamente em direção ao goleiro U, qual a equação da reta que passa pelos pontos B e U?

ATIVIDADE 15: Se o jogador G for chutar direto ao gol e a bola for exatamente em direção ao goleiro U, qual a equação da reta que passa pelos pontos G e U?

ATIVIDADE 16: Se o jogador K fizer um passe para o jogador G que vai chutar a bola no canto à direita do goleiro U, qual a equação das duas retas encontradas? E se o jogador K chutasse direto no canto do gol, qual seria a equação da reta?
(O canto do gol corresponde ao ponto de coordenadas (-12, -2).)

ATIVIDADE 17: Calcule a distância que a bola deve percorrer se o jogador A chutá-la em direção à reta que passa pelo goleiro V e é perpendicular ao eixo x (considere a menor distância do ponto à reta).

ATIVIDADE 18: Calcule a distância que a bola deve percorrer se o jogador I chutá-la em direção à reta que passa pelo goleiro V e é perpendicular ao eixo x (considere a menor distância do ponto à reta).

ATIVIDADE 19: Haverá uma cobrança de falta e a barreira foi colocada sobre a reta que passa pelos pontos E(5, 1) e N(10, 8). Encontre a distância que o jogador J = (4, 8) está da barreira.

ATIVIDADE 20: Observando a circunferência no centro do campo de futebol, determine sua equação.