UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM PSICOLOGIA

MARCELO HENRIQUE OLIVEIRA HENKLAIN

EFEITOS DA FORMAÇÃO DE CLASSES DE EQUIVALÊNCIA SOBRE A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

São Carlos-SP
2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM PSICOLOGIA

MARCELO HENRIQUE OLIVEIRA HENKLAIN

EFEITOS DA FORMAÇÃO DE CLASSES DE EQUIVALÊNCIA SOBRE A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Psicologia como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Psicologia.
Orientação: Prof. Dr. João dos Santos Carmo

São Carlos-SP
2012

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

H513ef

Henklain, Marcelo Henrique Oliveira.
Efeitos da formação de classes de equivalência sobre a solução de problemas de adição e subtração / Marcelo Henrique Oliveira Henklain. -- São Carlos : UFSCar, 2012.
118 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2012.

1. Psicologia do comportamento e cognição. 2. Equivalência de estímulos. 3. Matemática. 4. Resolução de problemas. 5. Matemática – Adição e subtração. 6. Estudantes de ensino fundamental. I. Título.

CDD: 155.2 (20ª)

ufscar

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇAO EM PSICOLOGIA

COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Marcelo Henrique Oliveira Henklain

São Carlos, 14/12/2012

Prof. Dr. João dos Santos Carmo (Orientador e Presidente)
Universidade Federal de São Carlos/UFSCar

Prof.ª Dr.ª Verônica Bender Haydu
Universidade Estadual de Londrina/UEL

Prof.ª Dr.ª Regina Maria Simões Puccinelli Tancredi
Universidade Federal de São Carlos/UFSCar

Prof. Dr. Julio Cesar Coelho de Rose
Universidade Federal de São Carlos/UFSCar

Submetida à defesa em sessão pública realizada às 14:00h no dia 14/12/2012.

Comissão Julgadora:
Prof. Dr. João dos Santos Carmo
Prof.ª Dr.ª Verônica Bender Haydu
Prof.ª Dr.ª Regina Maria Simões Puccinelli Tancredi
Prof. Dr. Julio Cesar Coelho de Rose

Homologada pela CPG-PPGPsi na
_______ª.Reunião no dia ___/___/____

Prof.ª Dr.ª Azair Liane Matos do Canto de Souza
Coordenadora do PPGPsi

Apoio Financeiro:

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP)

Dedico este trabalho aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, aos meus pais, Fran e Alexandre, pelo amor e por todo o esforço para participar do meu dia-a-dia, escutando e orientando, a despeito da distância. Agradeço também pelos ensinamentos que têm sido fundamentais nas esferas pessoal e profissional.

À minha irmã, Ananda, pelo companheirismo e pelos momentos divertidos que passamos juntos.

À minha avó, Zimar, pelo amor e por ter continuado cuidando de mim mesmo quando saí de Londrina. Às minhas tias, Zocy, Zuleide e Zilá pelo carinho.

Aos meus tios, Gustavo, Guilherme e João, por estarem presentes em minha vida e por nossas ótimas conversas. Agradeço especialmente ao Gustavo pelo carinho, atenção e pelas importantes orientações.

Ao meu primo, Rivelli, e a sua maravilhosa família, Fabiana, Rebeca, Natan, João e Maria, por terem me acolhido em São Carlos e, desde o primeiro momento, me feito sentir verdadeiramente parte da família. Agradeço por terem participado tão ativamente da minha vida nesses dois anos.

Aos amigos de Londrina e de Boa Vista, Patrícia, Taíssa, Ana, Pedro, Lucas, Thaís, Igor e Mariana pelo companheirismo e lealdade. Aos amigos do laboratório e da pós, Camila, Angela, Alessandra, Rogério, João, Silvana, Rafael, Luíza e Grazi pela convivência intelectual durante esses dois anos, e, sobretudo, por toda a amizade, apoio e momentos de diversão. A presença desses amigos foi fundamental.

Aos meus estimados professores de Boa Vista e de Londrina, desde o ensino fundamental até a graduação, por terem contribuído com a minha formação intelectual e ensinado o prazer pelo conhecimento. Dentre eles, agradeço especialmente aos professores Elisângela, Vavá, Margarete, Beto, Deusa, Lourdes, Nelson, João, Lílian, Sílvia, Ari, Maura, Magda e Elisa.

Aos professores Júlio de Rose, Verônica Haydu, Regina Tancredi, Paulo Prado, Paulo Andrade (Tevão) e Deisy de Souza que tanto me ensinaram e contribuíram com a minha formação ao sugerir melhorias neste trabalho e indicar possibilidades futuras de pesquisa.

Ao professor João dos Santos Carmo por sempre encontrar tempo para ouvir pacientemente as dúvidas, os receios e os anseios, por refletir sobre cada situação e orientar de forma competente e segura.

À equipe da Liga da Leitura, Vera, Nathália e Viviane, que ajudou na realização da coleta de dados.

Às crianças que participaram da pesquisa, pela colaboração.

À Marinéia, que tanto me ajudou e apoiou desde o processo seletivo.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), de Junho de 2011 a Março de 2012, e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), de Abril a Dezembro de 2012, pelo fundamental apoio financeiro mediante bolsa de mestrado.

Henklain, M. H. O. (2012). *Efeitos da formação de classes de equivalência sobre a solução de problemas de adição e subtração*. Dissertação de mestrado, Programa de Pós-graduação em Psicologia, São Carlos, SP, 118pp.

Resumo

Pesquisas demonstraram que algumas propriedades do problema aditivo podem gerar dificuldades para solucioná-lo, como: a forma de apresentação do problema, a estrutura semântica e a posição da incógnita. Foram realizados dois experimentos com algumas diferenças metodológicas, porém ambos com o objetivo de investigar se a formação de classes de equivalência entre diferentes formas de apresentação de problemas pode reduzir dificuldades na resolução de problemas. Participaram do Experimento 1 oito estudantes do 2° ao 5° ano do Ensino Fundamental com dificuldades, verificadas no pré-teste, na resolução de problemas. Aplicou-se procedimento para ensino de discriminações condicionais entre diferentes formas de apresentação de problemas de adição (operação com algarismo, problema escrito, coleção e balança), seguido pelo Pós-teste 1. Houve aumento na porcentagem de acertos em todos os tipos de problemas, porém cinco participantes tiveram dificuldades com os problemas na forma de balança. Foi avaliado em seguida se um procedimento adicional de ensino de algoritmo para resolução de problemas aditivos com incógnitas nas posições *a* e *b* poderia produzir aumento ainda maior na porcentagem de acertos dos participantes. Foram realizadas duas sessões para ensino do algoritmo de adição, seguida pelo Pós-teste 2, e duas sessões para o ensino do algoritmo de subtração, sucedida pelo Pós-teste 3 e teste de generalização. Quatro participantes apresentaram aumento da porcentagem de acertos no Pós-teste 2 e seis no Pós-teste 3. Esse resultado, embora positivo, sugere que mudanças de procedimento são necessárias de modo que todos possam ser beneficiados pelo ensino de algoritmos. Os participantes acertaram todos os problemas do teste de generalização. No Experimento 2, foram utilizadas três formas de apresentação (algarismos, escrito e balança). O objetivo foi produzir a formação de dois conjuntos de classes de equivalência, uma de adição e outra de subtração, e avaliar o seu efeito sobre o desempenho na solução de problemas. Com o intuito de reduzir dificuldades com a balança, foram planejadas duas sessões para ensinar os participantes sobre o seu funcionamento. Participaram oito estudantes do 2º ao 5º ano que apresentaram dificuldades no pré-teste na solução de problemas. Após a formação das classes, verificou-se no Pós-teste 1 que todos os participantes aumentaram a porcentagem de acertos. Foi avaliado então se um treino de resolução de problemas sob a forma de balança poderia melhorar ainda mais esse desempenho, o que foi confirmado. No Teste de Generalização 1, todos os participantes alcançaram porcentagens de acerto acima de 75%. Foi avaliado também se seria possível aprimorar a fase de ensino de algoritmos do Experimento 1. Realizou-se uma única sessão para ensino dos algoritmos de adição e subtração, que foi seguida pelo Pós-teste 3, no qual verificou-se aumento na porcentagem de acertos. Em seguida foi reaplicado o teste de generalização, no qual todos alcançaram 100% de acerto. No Experimento 2, a cada pós-teste, observou-se melhora de desempenho. Foi demonstrado que os procedimentos de ensino adotados constituem aprendizagens importantes para reduzir dificuldades na resolução de problemas.

Palavras-chave: Equivalência de estímulos; Matemática; Resolução de problemas; Adição e Subtração; Estudantes do Ensino Fundamental

Henklain, M. H. O. (2012). *Some effects of equivalence class formation over the solution of addition and subtraction problems*. Dissertação de mestrado, Programa de Pós-graduação em Psicologia, São Carlos, SP, 118pp.

Abstract

Research has shown that some properties of the additive problem may cause difficulties to solve it. The most important are: the problems' presentation form, the semantic structure and the position of the unknown. Two experiments were conducted with some methodological differences, but both with the aim of investigating if the formation of equivalence classes between different problems' presentation forms could reduce difficulties in solving problems. Eight students from the 2nd to the 5th year of elementary school with difficulties in solving problems of the pretest analysis participated in Experiment 1. It was applied a procedure for teaching conditional discriminations between different forms of presentation of addition problems (numeral-problem, word-problem, collection-problem and balance-problem), followed by Post-test 1. There was an increase in the percentage of accuracy for all types of problems, but five participants had difficulties with the balance-problems. It was also assessed if an additional procedure for teaching algorithmic for solving additive problems with unknowns at positions *a* and *b* could produce even greater increase in the percentage of correct answers. There were two sessions for teaching the addition algorithm, followed by Post-test 2, and two sessions for teaching subtraction algorithm, succeeded by Post-test 3 and generalization test. Four participants showed an increase in the percentage of correct responses at Post-test 2 and six at Post-test 3. This result, although positive, suggests that procedural changes are necessary so that all may be benefited by learning algorithms. Participants achieved 100% correct responses at generalization test. In Experiment 2, three forms of presentation (numeral-problem, word-problem and balance-problem) were used. The goal was to produce the formation of two sets of equivalence classes, one of addition and one of subtraction, and evaluate its effect on problem solving performances. In order to reduce difficulties with balance, two sessions were designed to teach participants about their operation. Eight students in the 2nd to 5th year that presented difficulties in the pre-test problem solving participated. After the formation of classes, it was found in Post-test 1 that all participants increased the percentage of correct answers. It was then assessed whether a practice in solving balance-problems could further improve this performance, which was confirmed. In Generalization Test 1, all participants reached percentages above 75% accuracy. We evaluated whether it would be possible to improve the teaching of algorithms phase of Experiment 1. We performed a single session for teaching addition and subtraction algorithms, which was followed by post-test 3, in which there was an increase in the percentage of correct responses. Then the generalization test was reapplied, in which all achieved 100% accuracy. In Experiment 2, at each post-test, there was improvement in performance. It was demonstrated that the teaching procedures adopted are important to reduce learning difficulties in problem solving.

Keywords: Stimulus equivalence; Mathematics; Problem solving; Addition and subtraction; Elementary School Students

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

Sumário

Apresentação

A Matemática é uma área do conhecimento essencialmente criativa e aplicável aos problemas e interesses humanos (Lins & Gimenez, 1997; Carmo, 2010), bem como fundamental para o desenvolvimento científico e tecnológico de uma nação (Steen, 1987; Spielberger, 1993), importantes indicadores de competitividade econômica. Dados da Organização para Cooperação Econômica e Desenvolvimento demonstraram existir correlação entre melhora no desempenho de estudantes em "matemática-ciência" e crescimento do PIB *per capita* (OCDE, 2010b). De fato, quem possui repertório pobre em Matemática tem maiores dificuldades para conseguir emprego e, geralmente, ganha menos (Richland, Zur, & Holyoak, 2007; Butterworth, Varma, & Laurillard, 2011). Comportamentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e intervenção sobre situações do dia a dia, como, por exemplo, ler a seção de economia de um jornal, avaliar o resultado de uma pesquisa e negociar a taxa de juros ao fazer um empréstimo ou realizar uma compra a prazo (INEP, 1997). Além disso, a Matemática possui "muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares" (Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, 1997, p.15).

Apesar de sua relevância, pesquisas no Brasil apontam a desmotivação e a aversão de alunos em relação ao estudo da Matemática como condição frequente e que constitui uma barreira ao seu aprendizado (Carmo, Cunha, & Araújo, 2007; Carmo, 2010; Mendes, 2012). A Matemática tem sido percebida pelos alunos como uma das disciplinas mais difíceis e que está relacionada, no ensino público, a um alto índice de evasão e repetência escolar (Figueiredo & Galvão, 1999; Carmo & Prado, 2004; Costa, Galvão, & Ferreira, 2008). Para Capovilla, César, Capovilla e Haydu (1997) "é notória a dificuldade experimentada por escolares de primeiro grau para adquirir conceitos matemáticos" (p. 190).

Resultados das provas do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) revelam o fraco desempenho dos estudantes brasileiros em Matemática (Araújo & Luzio, 2005). Em 2001, 52,3% dos estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental estavam entre os estágios "muito crítico" e "crítico" e em 2003 51,6% estavam na mesma condição; "os níveis muito crítico e crítico reúnem estudantes que não conseguem solucionar problemas simples, envolvendo soma ou subtração de números naturais, formulados a partir de situações do cotidiano" (Araújo & Luzio, 2005, p. 38). Dados mais recentes do SAEB, relativos à média geral das escolas urbanas, sinalizam uma melhora tímida. A média em Matemática do 5º ano, por exemplo, passou de 182,38, em 2005, para 193,48, em 2007 e 204,30, em 2009 (INEP, 2009). Mas, esses resultados não são alentadores (Magina, Santana, Cazorla, & Campos, 2010) e não garantem ao Brasil posição de destaque em Matemática. Dados do Programa para Avaliação Internacional dos Estudantes (PISA) de 2009, mostram o Brasil em 58º lugar na área de Matemática (OCDE, 2010a).

Existe um descompasso entre a formação ofertada pela escola e o que é esperado pela sociedade e pelo mercado de trabalho (Steen, 1987). É importante que a Análise do Comportamento esteja envolvida na realização de pesquisas e na proposição de soluções para a melhoria do ensino da Matemática. Diversos trabalhos têm sinalizado que os métodos de ensino comportamentais são bastante efetivos (Skinner, 1972, 1991, 1998, 1999; Luna, 2000; Nico, 2001; Luna, Marinotti, & Pereira, 2004; Teixeira, 2006; Saville, Lambert, & Robertson, 2011) e podem oferecer contribuições à Educação Matemática (Mayfield & Chase, 2002; de Rose, 2010).

A despeito desse potencial, a Análise do Comportamento brasileira ainda tem uma produção quantitativamente pequena nessa área (Bitencourt, 2009; consultar também Del Rey, 2009 e Henklain & Carmo, 2011), embora com grande alcance em termos de contribuições (Carmo & Prado, 2004). É preciso, portanto, envidar esforços na tradução das preocupações com o ensino da Matemática em pesquisas e delas derivar programas instrucionais e projetos educacionais (Skinner, 1972; de Rose, 2010).

Nesse contexto, o presente trabalho busca, com base na Análise do Comportamento, oferecer contribuições ao ensino-aprendizagem da Matemática. Optou-se por uma investigação acerca das dificuldades geradas por problemas de adição e subtração (problemas aditivos) sob diferentes formas de apresentação com incógnitas variando em três posições, especialmente quando no formato escrito (também denominados *word-problems* ou *story-problems*) variando em três tipos de estrutura semântica.

Essa decisão se deve ao fato de que a literatura científica tem sistematicamente apontado dificuldades no ensino de resolução desses tipos de problemas (Nesher, Greeno & Riley, 1982; Carpenter & Moser, 1983; Carpenter, Moser, & Bebout, 1988; Fayol, 1992; Sophian, 1996; Vasconcelos, 1998; Haydu, Pullin, Iégas, & Costa, 2010; Fossa & Sá, 2008; Bryant, 2011) e de que os alunos brasileiros são pouco expostos a problemas com diferentes tipos de estrutura semântica e posições da incógnita (Iégas, 2003). Esse cenário preocupa, afinal o aprendizado da Matemática nos primeiros anos escolares é crucial porque está relacionado ao aprendizado de pré-requisitos para comportamentos matemáticos mais complexos (Nunes & Bryant, 1996; Costa, Galvão, & Ferreira, 2008; Magina, Santana, Cazorla, & Campos, 2010). Adição e subtração são tão importantes e, em muitos aspectos, difíceis de serem ensinadas que alguns autores defendem que ainda se investe pouco tempo no ensino desses conceitos (Nunes &

Bryant, 1996). Além disso, resolver problemas sob a forma escrita constitui uma das maiores fontes de confusão e dificuldade na aprendizagem da aritmética básica (Sophian, 1996). Isso acontece porque além dos comportamentos matemáticos, esse tipo de problema envolve comportamentos de leitura e escrita. Mas, ensinar os alunos a representar situações-problema, como as descritas em problemas sob a forma escrita, com símbolos matemáticos, constitui um dos principais objetivos do currículo de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental (Carpenter, Moser, & Bebout, 1988). Trazer a Análise do Comportamento para o campo das dificuldades na resolução de problemas é uma contribuição necessária. Conforme destacam Neef, Nelles, Iwata e Page (2003), por realizar poucas pesquisas na área, a Análise do Comportamento tem sido acusada de não ser capaz de analisar o comportamento de resolver problemas.

Neste trabalho, serão revisadas pesquisas demonstrando que geralmente (a) crianças têm dificuldade na resolução de problemas aditivos sob a forma escrita, (b) que essas dificuldades aumentam quando a incógnita está nas posições iniciais e quando as estruturas semânticas envolvem relações estáticas entre os elementos do problema e (c) que existem diferentes formas de reduzir essas dificuldades, seja pelo ensino de algoritmos, por meio do treino de resolução de problemas representados graficamente na forma de uma balança ou com base na formação de classes de equivalência entre diferentes formas de apresentação dos problemas. Serão abordadas essas três soluções, porém com ênfase sobre a formação de classes de equivalência entre diferentes formas de apresentação dos problemas.

A resolução de problemas sob a forma de balança e o ensino de algoritmos também envolvem formação de classes de equivalência. No primeiro caso, pode-se considerar, por exemplo, a formação de uma classe entre um problema na forma de balança, seu correlato na forma de algarismos e o resultado do problema; no caso dos algoritmos, pode-se pensar numa classe entre um problema na forma de algarismos, um conjunto de regras de como resolvê-lo e o seu resultado. Por esse motivo, o título deste trabalho diz respeito à “formação de classes de equivalência”[1]. Importa destacar também que esta pesquisa tem caráter translacional, mesclando controles típicos das pesquisas feitas em laboratório e aspectos do ambiente escolar. Nessa perspectiva, buscou-se tanto demonstrar a validade do procedimento de formação de classes de equivalência entre diferentes formas de apresentação de problemas, como também garantir que os participantes melhorassem o desempenho nas tarefas a que foram expostos. Por isso, procedimentos de ensino adicionais (resolução de problemas com a balança e ensino de algoritmos) foram introduzidos. Por fim, é preciso informar que existe diversidade no modo de denominar cada forma de apresentação de problemas. Neste trabalho, serão adotadas as expressões *problemas sob a forma escrita ou problemas escritos* (ou sentença-escrita), *operação com algarismo* (ou sentença-número) ou *problema sob a forma de algarismo*, *problema sob a forma de balança* e *problema sob a forma de coleção.*

[1] O uso dos termos “equivalência de estímulos” e “formação de classes de equivalência” são empregados neste texto para fazer referência a estímulos complexos, seguindo a tradição de outras pesquisas de analistas do comportamento (Haydu, Costa, & Pullin, 2006; Fienup & Critchfield, 2011).

Somar, subtrair e resolver problemas aritméticos

O aprendizado de conceitos matemáticos envolve a formação de relações entre estímulos, como algarismos, sinais das operações e fenômenos do mundo, de modo que o comportamento ocorra em função dessas relações. Ao longo da escolarização formal é ensinado que não importa se o estímulo for "1", "um" (falado), "um" (escrito) ou "*", ou, no contexto de uma operação de adição, "2+2" e "4". Embora fisicamente diferentes, significam a mesma quantidade. Essas relações entre estímulos podem ser interpretadas como uma classe de equivalência ou classes entre classes de equivalência.

O aprendizado dessas relações ocorre quando estímulos dissimilares são arbitrariamente relacionados por uma determinada comunidade verbal. Tais relações são chamadas de simbólicas (Matos, 1999). Analogamente, comportamento simbólico é a resposta controlada por estímulos arbitrariamente relacionados (símbolos e seus referentes) e substituíveis entre si, de tal maneira que símbolo e referente podem exercer a mesma função no controle de repertórios específicos (McIlvane, Goulart, Brino, Galvão, & Barros, 2005). Conceitos matemáticos podem ser interpretados como relações simbólicas (Carmo, 2002). E comportamentos matemáticos podem ser operacionalizados como redes de relações simbólicas, sendo denominados de comportamentos simbólicos que envolvem, por exemplo, relações entre numerais, quantidades, outros símbolos e referentes matemáticos.

Na Análise do Comportamento, as primeiras análises sobre relações simbólicas são encontradas em Keller e Schoenfeld (1973). Entretanto, foram os trabalhos relatados por Sidman em 1994 que propiciaram a investigação sistemática desse fenômeno com base no paradigma de equivalência de estímulos que estabelece o procedimento para o ensino de relações arbitrárias entre estímulos e os critérios para atestar a formação de uma relação simbólica ou classe entre estímulos equivalentes (Sidman & Tailby, 1982)[2]. O procedimento usualmente utilizado para o estabelecimento de classes de equivalência é o de *escolha de acordo com o modelo* (MTS, do inglês *matching to sample*), que consiste na apresentação de tentativas em que o participante escolhe entre dois ou mais estímulos de comparação condicionalmente a um estímulo-modelo. Estímulos relacionados condicionalmente, no contexto desse procedimento, podem se tornar equivalentes. Para atestar que são equivalentes, é preciso demonstrar a emergência das relações de simetria, transitividade e simetria da transitividade (de Rose, 1993).

Uma classe de estímulos equivalentes constitui-se em uma rede de relações, algumas ensinadas e as demais emergentes (de Rose, 1993), de tal modo que funções adquiridas por um membro da classe podem ser transferidas aos demais membros e esta pode ser expandida, bastando relacionar um estímulo novo a algum dos estímulos que compõem a classe (Sidman & Tailby, 1982). Investigar como diferentes estímulos são substituíveis entre si e como essa rede de relações se expande, fornece indícios sobre a aquisição de comportamento simbólico sofisticado, como o comportamento matemático. Tecnologias educacionais para ensino de leitura e matemática, derivadas do estudo de classes de equivalência, são eficazes e econômicas, porque envolvem o ensino de algumas relações que produzem a emergência de outras (de Rose, 2005; Carmo & Galvão, 1999; Prado & de Rose, 1999; Green, 2010; Escobal, Rossit, & Goyos, 2010).

Green (2010)[3], utilizando o modelo de equivalência de estímulos, investigou se o ensino da relação numeral-quantidade, independente do aprendizado da contagem, seria suficiente para a formação de um conjunto de classes de equivalência entre nomes dos números, quantidades de pontos e algarismos. Os resultados do estudo, do qual participaram dois jovens com deficiência intelectual, sugeriram que sim. Esse trabalho

[2] Este artigo é considerado o marco de lançamento do paradigma da equivalência de estímulos. Na prática o paradigma começou a ser esboçado no início da década de 1970.
[3] O experimento de Gina Green foi originalmente publicado em 1993.

deu origem a outros estudos sobre repertórios matemáticos elementares (Kahhale, 1993; Prado, 1997; Carmo, 1997, de León, 1998; Prado, 2001; Carmo, 2002) e complexos, tais como o ensino dos comportamentos de somar e subtrair (Rossit, 2003; Araújo & Ferreira, 2008; Costa, Galvão, & Ferreira, 2008).

Uma das primeiras operacionalizações do comportamento de somar foi proposta por Staats e Staats (1973). Esses autores argumentam que o repertório básico de soma aprendido pela criança é o operante verbal de tatear[4] estímulos. Diante de “🚲🚲” e “🚲”, a criança aprende a tatear “duas bicicletas” e “uma bicicleta”. Em seguida, a criança é ensinada a tatear o resultado da união desses dois conjuntos, isto é, “três”. O repertório mais complexo de adição, segundo os autores, encontra-se num nível puramente verbal e envolve complexas cadeias de respostas, em que cada estímulo presente no problema deve ser identificado pela criança para que possa ser resolvido.

Outra contribuição importante foi o trabalho de Resnick, Wang e Kaplan (1973), cuja proposta foi desenvolver um programa para o ensino de comportamentos matemáticos. Isso foi feito por meio da análise dos comportamentos que compõem (a) o conceito de número, (b) a contagem, (c) a comparação de conjuntos, (d) a seriação e a ordenação e (e) a soma e a subtração, e da indicação da sequência de ensino e da hierarquia de aprendizagem que pode ser adotada com base em uma análise de quais são os comportamentos mais básicos e mais complexos na aprendizagem desses conceitos. As definições adotadas por esses autores sinalizam o que pode constituir o núcleo do conceito dos comportamentos de somar e subtrair. Com base em Resnick et al. (1973), pode-se definir que o comportamento de somar mais básico envolve unir dois conjuntos e contar o total de elementos e que o comportamento de subtrair implica em retirar um

---

[4] O verbo “tatear” vem do termo tato, que se refere a uma resposta verbal emitida sob controle de estímulos antecedentes não verbais (ambiente físico), que produz como consequência reforço condicionado generalizado (Skinner, 1957).

conjunto menor de um conjunto maior e contar os elementos remanescentes do conjunto maior. Essa definição básica parece estar de acordo com a de Nunes e Bryant (1996).

Além desse repertório indicado por Resnick et al. (1973), que já envolve o aprendizado de relações arbitrárias entre estímulos, outras relações arbitrárias mais complexas podem ser aprendidas: por exemplo, que “1+1” ou “João tinha um gato e um papagaio” são substituíveis entre si, da mesma forma que “um gato mais um gato” ou “um dedo mais outro dedo” ou “uma bolinha mais outra bolinha”. Em resumo, os comportamentos básicos de somar e subtrair são redes de relações entre estímulos que envolvem a realização de uma operação, apresentada num determinado formato (por exemplo, escrito ou sob a forma de coleções de pontos) e com características específicas (por exemplo, com uma incógnita na posição inicial) e a apresentação de um resultado. Serão apresentados dois estudos que trabalham com essas definições de soma e subtração como redes de relações e demonstram a sua utilidade com base no sucesso dos seus programas de ensino de adição e subtração.

Costa, Galvão e Ferreira (2008) investigaram se a formação de um conjunto de classes de equivalência entre operações e seus resultados produziria o aprendizado do comportamento de somar. O conjunto de relações ensinadas foi: adição impressa de coleções (por exemplo, **+**) como estímulo-modelo (A) e total em algarismos arábicos (por exemplo, 4) como estímulo-comparação (B); adição de coleções (A) como estímulo-modelo e total em coleções (por exemplo, ****) como estímulo-comparação (C); total em algarismos (B) como estímulo-modelo e escritas aditivas (por exemplo, 2+2) como estímulo-comparação (D); total em coleções (C) como estímulo-modelo e escritas aditivas (D) como estímulo-comparação. Participaram dois estudantes do segundo ano do Ensino Fundamental com idades de 7 e 9 anos. Ao final do treino de adição, testou-se a emergência de seis novas relações: quatro simétricas (BA, CA, DB e

DC) e duas transitivas (AD e DA). Foi realizado um teste final com problemas escritos de adição. Os resultados mostraram aumento significativo no desempenho dos participantes desde o pré-teste do repertório conceitual numérico até o teste final.

Na pesquisa de Araújo e Ferreira (2008) foi investigado se a formação do conceito de número e da classe de equivalência entre o problema de subtração e seu resultado seria suficiente para ensinar o comportamento de subtração a pessoas com deficiência intelectual. Participaram quatro pessoas, com idades entre 15 e 35 anos. Foram ensinadas as relações entre (a) numerais falados, os conjuntos e os algarismos correspondentes com valores de um a nove; e entre (b) operadores (mais, menos e igual) falados e seus correspondentes em sinais e palavras impressas. Foram então treinadas as relações entre sentenças em diferentes configurações (falada, com conjuntos e com algarismos) para os valores de um a cinco. Por fim, foi treinada a relação entre problemas na forma de conjunto e solução na forma de conjunto. Os resultados mostraram que o procedimento foi efetivo na identificação das variáveis que compõem a operação de subtração e pode ser estendido para outras operações aritméticas básicas como a adição, o que está de acordo com outras pesquisas que conceberam comportamentos matemáticos como redes de relações (Gualberto & Rossit, 2010).

Nesses dois estudos, já na operacionalização dos conceitos de somar e subtrair são destacadas as relações entre estímulos que devem ser ensinadas para que os comportamentos de somar e subtrair sejam aprendidos. Isso facilita a avaliação de repertório e a criação de programas de ensino. Para o ensino de resolução de problemas, quando se considera a definição comportamental do que é resolver um problema, aprimorar essas operacionalizações representa um avanço.

Uma situação-problema[5] passível de solução é aquela em que (a) a pessoa já aprendeu os comportamentos que são pré-requisitos para a solução do problema, de modo que ela é capaz de resolvê-lo, (b) cujos estímulos presentes na situação sinalizam a disponibilidade de consequências reforçadoras caso determinada resposta ou conjunto de respostas sejam emitidas, mas (c) não são suficientes para evocá-la(s) ou evocam respostas concorrentes (Skinner, 1972; 1998; 1999; Donahoe & Palmer, 1994; Nico, 2001; Delage & Carvalho-Neto, 2006). Por esse motivo, resolver um problema é "mais do que emitir a resposta que lhe constitui a solução; é uma questão de dar os passos necessários para tornar tal resposta mais provável, via de regra mudando o ambiente" (Skinner, 1999, p. 98); "a solução de problemas pode ser definida como qualquer comportamento que, através da manipulação de variáveis, torne mais provável o aparecimento de uma solução" (Skinner, 1998, p. 239). Essas respostas de manipulação do ambiente, tais como aperfeiçoar ou ampliar a estimulação disponível e arranjar ou rearranjar estímulos, são denominadas de respostas precorrentes (Iégas, 2003; Haydu, Costa, & Pullin 2006; Haydu et al., 2010).

No caso da resolução de problemas de Matemática, "além de implicar na discriminação das variáveis relevantes da situação, implica, ainda, na aprendizagem de uma linguagem específica, com sintaxe, conceitos e símbolos próprios e, portanto, envolve discriminações condicionais de relações entre estímulos" (Haydu et al., 2006, p. 45). Numa situação-problema de adição ou subtração comportamentos precorrentes importantes envolvem a identificação dos termos do problema, a manipulação dos seus valores, a representação ou modelagem do problema em termos, por exemplo, de objetos concretos e o emprego de algoritmos. Esses comportamentos exigem o

[5] Segundo Skinner (1998), existe um *continuum* no qual em um dos extremos estão situações não problemáticas em que a resposta-solução é conhecida e está disponível e no outro extremo estão as situações-problema, seja porque os estímulos antecedentes não têm função discriminativa em relação à resposta-solução ou porque os pré-requisitos para a resposta-solução não foram aprendidos. Entre os extremos estão problemas com diferentes graus de complexidade.

aprendizado prévio de um repertório complexo de relações entre estímulos arbitrários (pré-requisitos). Por exemplo, diante de “2+2=” é importante discriminar os algarismos (dois e dois) e os sinais (mais e igual); ter formado a classe de equivalência entre o algarismo dois e a quantidade dois; ter formado uma classe de equivalência entre o tipo de problema e a estratégia para solucioná-lo, e assim por diante.

Conforme será discutido na próxima seção, dificuldades na resolução de problemas aditivos podem envolver, além de outros fatores (ver Belfiore, Vargas, & Skinner, 1997; Spinillo & Batista, 2008; Oliveira & Tourinho, 2001), repertórios precorrentes pobres para identificar informações importantes do problema (por exemplo, aprendizado prévio de que registrar os dados do problema pode ajudar a solucioná-lo) e ausência de pré-requisitos (por exemplo, aprendizado prévio de conceitos matemáticos) para a solução do problema.

Dificuldades na resolução de problemas de adição e subtração

Dentre as diferentes formas que um problema pode assumir – por exemplo, problemas envolvendo algarismos (exemplo: 2+1=) ou coleções de objetos (exemplo: 🚲🚲+🚲=) – são especialmente importantes aquelas na modalidade escrita. Esses problemas contam alguma história e, por esse motivo, mesclam uma operação matemática a um contexto que representa uma situação possível de acontecer na vida de uma pessoa (exemplo: “João tinha três carrinhos. Ganhou mais um de presente de aniversário. Quantos carrinhos João têm agora?”). Por isso, podem ser relacionados à vida do aluno, embora nem sempre seja possível.

Ao longo da história da Educação Matemática, os problemas aritméticos escritos foram empregados por professores com diferentes objetivos, tais como treinar os alunos a aplicar conhecimento matemático formal a situações reais, desenvolver o comportamento de resolução de problemas, para transformar as tarefas de Matemática em atividades prazerosas ou para promover um completo entendimento das operações aritméticas básicas (Nunes & Bryant, 1996; Verschaffel e de Corte, 1997; Nunes, Campos, Magina, & Bryant, 2005). A despeito de sua importância e dos papéis a eles atribuídos, problemas escritos são os que mais geram dificuldade e, de fato, a literatura científica está repleta de evidências de que não se têm alcançado os objetivos esperados no ensino da resolução desses problemas (Geary, 1994; Verschaffel e de Corte, 1997).

A dificuldade pode estar relacionada com os diferentes comportamentos (matemáticos e linguísticos) que são demandados para resolver esse tipo de problema. Verschaffel e de Corte (1997) apontam algumas variáveis relacionadas ao repertório do aluno[6], que costumam afetar a resolução de problemas escritos: (a) qualidade da representação das informações apresentadas no enunciado do problema; (b) palavras ou expressões linguísticas desconhecidas ou interpretadas erroneamente pela criança; (c) nível de conhecimento sobre o "jogo dos problemas escritos escolares"[7].

Geary (1994) complementa essa análise destacando que características do problema, tais como quantidade de palavras no enunciado do problema, em especial, o número de palavras entre o primeiro e o último número do enunciado, quantidade de operações aritméticas requeridas e quantidade de conceitos matemáticos presentes, também são geradores de dificuldades. Além dessas características, Fayol (1992) aponta que, desde os anos 1980 (por exemplo, Nesher et al., 1982), a literatura científica tem demonstrado o papel crucial de fatores sintáticos e semânticos na determinação do nível de dificuldade de um problema. Fatores sintáticos estão relacionados à

[6] Frequentemente o problema é que o aluno (a) simplesmente seleciona todos os números apresentados no enunciado do problema e realiza aleatoriamente alguma operação; (b) usa "palavras-chave" para definir o tipo de operação aritmética que deve ser realizada ("mais" e "juntos" são associadas com adição, "menos" e "perder" com subtração); (c) comete erros por não verificar a razoabilidade do resultado encontrado.

[7] Jogo refere-se a situações-problema prototípicas e termos linguísticos específicos, ou seja, o aluno precisa saber o que fazer diante de um problema, desconsiderando o que for irrelevante.

palavras/expressões, como é o caso de "mais que" ou "menos que", e a ordem de apresentação das informações no enunciado do problema. Fatores semânticos estão vinculados ao significado do problema, isto é, a situação que ele descreve.

Outra variável geradora de dificuldades é a posição da incógnita[8] (Fayol, 1992). A literatura científica tem trabalhado com problemas que envolvem três valores, ou seja, três possibilidades de posição da incógnita (Fossa & Sá, 2008; Haydu, 2010). Por exemplo, "2+3=5": posição *a* ou posição inicial (que, no caso do exemplo dado, seria a posição do número 2); posição *b* ou posição de mudança (número 3 no exemplo anterior); e posição *c* ou posição do resultado (número 5). Problemas com incógnita em *c*, geralmente, são mais fáceis que problemas com incógnita em *b* e problemas com incógnita em *a* são os mais difíceis. Uma explicação para essa dificuldade é que a criança se orienta pelas ações descritas no enunciado do problema, estratégia que não é possível adotar quando a incógnita está em *a* e *b* (Haydu, 2009; Bryant, 2011). Por exemplo, "João tinha alguns cadernos. Ganhou mais dois e ficou com cinco. Quantos cadernos o João tinha?". Não é possível somar "alguns" com "dois" para descobrir o valor "cinco"; outra estratégia é necessária.

Uma pesquisa clássica sobre essas variáveis é o trabalho de Resnick e Rosenthal (1974), que investigou o efeito da ordem de apresentação dos dados do problema (apresentados em ordem cronológica, começo, mudança e fim, e na ordem reversa, fim, mudança e começo), da posição da incógnita (posições *a* ou *c*) e dos verbos ganhar e perder (representando, respectivamente, adição e subtração) sobre o desempenho na resolução de problemas. Participaram 63 estudantes do 4º ano do Ensino Fundamental, que foram expostos a 32 problemas. Os participantes foram instruídos a ler em voz alta cada problema e depois resolvê-lo. Os resultados mostraram que os problemas na ordem

[8] A discussão sobre a posição da incógnita se insere numa área de grande interesse para os educadores matemáticos, relacionada à transição do ensino da aritmética para a álgebra (Fossa & Sá, 2008).

inversa produziram mais erros que os problemas na ordem direta e que problemas com incógnita na posição inicial produziram mais erros e latências maiores que os problemas com incógnita na posição final. Não houve efeito de latência significante para a ordem cronológica. Posição da incógnita foi a variável que mais afetou o desempenho dos participantes. Essa pesquisa é importante porque demonstra que muitos elementos de um problema escrito podem dificultar a sua resolução e que, portanto, eles devem ser considerados pelo professor de Matemática.

Outro trabalho clássico na área foi o de Hiebert (1982), que examinou o efeito da posição da incógnita sobre estratégias e uso de objetos concretos para representar e resolver problemas. Participaram da pesquisa 47 crianças da 2º ano do Ensino Fundamental. Elas foram expostas a 36 problemas aritméticos verbais de estrutura semântica similar: (a) 18 problemas de união e (b) 18 problemas de separação. Os problemas foram lidos para cada participante, quantas vezes fossem necessárias, durante uma entrevista individual. Cubos (objetos concretos) estavam disponíveis para que os participantes os utilizassem para representar os problemas. Para cada problema resolvido, o pesquisador questionava o participante sobre como ele havia chegado à solução. Os resultados mostraram que a posição da incógnita é crítica para a forma como a criança irá usar os cubos para representar o problema, o que, por sua vez, está correlacionado com a probabilidade de acerto na resolução do problema; ocorreram mais estratégias corretas e respostas corretas em problemas que foram representados com cubos. Segundo Hiebert (1982), é necessário aprender estratégias específicas para lidar com cada posição da incógnita, o que, juntamente com os achados de Resnick e Rosenthal (1974), sugere a importância de se desenvolver procedimentos específicos para ensinar a criança a resolver esses tipos de problema.

Conforme foi dito, além da posição da incógnita, existem estudos que avaliam também o efeito da estrutura semântica sobre o comportamento de resolver problemas. Existe diversidade na forma de se categorizar os diferentes tipos de estrutura semântica (consultar Vergnaud, 1982 e Nesher et al., 1982). No presente trabalho, serão empregados apenas três tipos de estrutura (Fayol, 1992; Fossa & Sá, 2008): (a) problemas com estrutura semântica de transformação, que envolvem pelo menos uma mudança entre um estado inicial e final; (b) problemas com estrutura de combinação, que envolvem relações estáticas de união ou separação entre os elementos do problema, nas quais não ocorre mudança de um estado inicial; e (c) problemas com estrutura de comparação também envolvem relações estáticas, mas, neste caso, a operação aritmética deve determinar a quantidade exata de um dos conjuntos com base em outro conjunto. Diferenças de estrutura semântica influenciam como o problema é interpretado, o que afeta a compreensão do problema e as estratégias empregadas para resolvê-lo.

De acordo com Fayol (1992) e Geary (1994), problemas com estrutura de transformação são de fácil solução, enquanto os de comparação e combinação são difíceis. Nunes e Bryant (1996) explicam que a facilidade da estrutura de transformação reside no fato de que, após representar cada valor do problema por meio do suporte de objetos concretos, a criança precisa apenas reproduzir cada ação descrita no enunciado do problema com esses objetos concretos para então resolvê-lo. Se o problema descreve uma situação na qual um personagem tinha um bombom e ganhou mais dois, basta levantar um dedo e em seguida mais dois e contar quantos dedos foram levantados. Por outro lado, quando os problemas envolvem estrutura semântica de combinação ou de comparação, a relação entre a situação-problema e os comportamentos que devem ser apresentados em relação aos valores do problema é menos evidente porque nada é adicionado ou retirado dos conjuntos. Segundo os autores, crianças desenvolvem um conceito inicial de adição e subtração que está relacionado a, respectivamente, juntar/unir conjuntos e separá-los e esse conceito não é facilmente conectado com o significado de número como medida de uma relação estática.

A dificuldade de a criança representar matematicamente estruturas semânticas que envolvem números como medidas de relações estáticas, bem como a necessidade de ensinar esse comportamento fica evidente na pesquisa de Carpenter, Moser e Bebout (1988). Os autores investigaram o efeito de duas histórias de aprendizagem sobre o comportamento de representar problemas aditivos escritos com diferentes estruturas semânticas e posições da incógnita (*a* e *b*) por meio de operações com algarismos (sentenças-número). Participaram 22 crianças do segundo ano e 41 do terceiro ano do Ensino Fundamental, distribuídas em dois grupos. O Grupo 1 foi exposto a todas as possibilidades de sentenças-número aditivas (a+b=☐, a–b=☐, a+☐=c, a–☐=c, ☐+b=c, ☐–b=c) e o Grupo 2 apenas às sentenças-número com incógnita em *c* (a+b=☐, a–b=☐). Cada grupo recebeu dois períodos de 30 minutos de instruções para escrever problemas escritos no formato de sentenças-número e resolvê-los. Após a fase de instrução, foram avaliados os comportamentos de escrever sentenças-número para representar problemas escritos com diferentes estruturas semânticas, transformação (positiva e negativa), combinação, comparação e equalização[9], e de resolução desses problemas.

Os resultados indicaram que os participantes do Grupo 1 apresentaram mais acertos nas tarefas de representar e resolver problemas com diferentes estruturas semânticas e posições da incógnita que os do Grupo 2, indicando forte correlação entre história de aprendizagem e desenvolvimento da capacidade de tradução de problemas escritos em problemas na forma de operações com algarismos, e que o grau de precisão dessa tradução está associado com a solução correta do mesmo. Esses dados sugerem

---

[9] Envolve transformação: a quantidade de elementos de um conjunto deve ser igualada a outro.

que a formação de classes de equivalência entre diferentes formas de apresentação de problemas é essencial ao aprimoramento do comportamento de resolver problemas.

Para avaliar a dificuldade de cada tipo de estrutura semântica e se ocorre ou não redução dessas dificuldades ao longo do Ensino Fundamental, Magina, Santana, Cazorla e Campos (2010) apresentaram a 1021 alunos do 2º ao 5º ano 12 problemas escritos de adição e subtração, com estruturas semânticas de combinação, transformação e comparação, envolvendo situações familiares e pequenos números. Os dados mostraram que quanto maior a complexidade do problema, menor o percentual de acertos. Os problemas mais complexos foram aqueles com estrutura de comparação e todas as situações em que não havia congruência semântica[10] entre as palavras-chave do enunciado do problema e a operação que deveria ser realizada para resolvê-lo. Isso significa que os alunos tendem a identificar a operação pelo tipo de palavra, o que indica um processo mecânico de resolução de problemas. As pesquisadoras verificaram ainda pequeno crescimento no percentual de acertos ao longo do 2º para o 5º ano, o que significa que em três anos de instrução ocorreram poucos ganhos.

Herebia (2007) relata que muitos professores constatam essa dificuldade de crianças com relação à leitura e interpretação de problemas matemáticos em geral e, particularmente, aqueles que envolvem fatos aditivos. A autora acrescenta que mesmo quando os alunos são capazes de ler esses problemas adequadamente, é comum não conseguirem interpretar as relações expressas no texto de modo que possam representá-los em termos matemáticos e resolvê-los adequadamente. Participaram do seu estudo 40 alunos de 5º ano, 20 de escola pública e 20 de escola particular. Esses participantes foram expostos a seis problemas aditivos: um com estrutura semântica de transformação, dois com estrutura de comparação e três com uma estrutura

[10] Há congruência semântica quando o verbo empregado no problema tem o significado de adição e a operação que o resolve é de adição. Caso contrário, há incongruência semântica. Por exemplo, uso do verbo ganhar e solução do problema por meio de uma operação de subtração.

caracterizada pela presença de duas transformações. A experimentadora verificou o comportamento de leitura dos participantes e solicitou, em seguida, que resolvessem os problemas, sem esquecer-se de representá-lo em termos matemáticos. Os resultados, para escolas pública e particular, mostraram que, em média, o número de acertos foi maior nos problemas com estrutura semântica de transformação (60%), seguido pelos problemas compostos por duas transformações (82,5%); a menor porcentagem de acertos foi obtida nos problemas com estrutura de comparação (46,25%). Os dados mostraram também que ser capaz de ler adequadamente o problema matemático não garante que ele será representado e resolvido adequadamente.

Analistas do comportamento também têm trabalhado com pesquisas sobre os efeitos de propriedades específicas do problema sobre o comportamento de resolver problemas, tanto no sentido de mapear padrões de erros, como de desenvolver procedimentos de ensino para redução desses erros. Um exemplo é o trabalho de Neef, Nelles, Iwata e Page (2003), que investigou o efeito do ensino de precorrentes (identificar o valor inicial, o valor que sofreu mudança, a operação e o valor final) sobre o desempenho na resolução de problemas aditivos escritos. Participaram dois estudantes com desenvolvimento atípico. Os resultados mostraram que os dois participantes precisaram cada vez de menos sessões para alcançar os critérios de aprendizagem conforme o treino avançava. Houve também aumento no número de respostas corretas nas sondas apresentadas logo após a instrução de cada precorrente e aumento no número de soluções corretas após o ensino de todos os precorrentes.

No Brasil, Capovilla et al. (1997) demonstraram que a dificuldade gerada pela posição da incógnita nas posições *a* e *b* poderia ser reduzida se os problemas fossem representados graficamente na forma de uma balança. O *software* Equação-Equilíbrio desenvolvido por esses autores, pode ser utilizado para testar a eficácia do uso da balança sobre o desempenho de solução de problemas nas três possíveis posições da incógnita e avaliar o efeito da incógnita sobre esse desempenho. Esse *software* é composto por seis fases: (a) 1ª e 2ª fases: familiarização com as noções de adição, subtração, equilíbrio e o uso da balança; (b) 3ª fase: familiarização com as noções de incógnita e número negativo; (d) 4ª, 5ª e 6ª fases: resolução de problemas de adição e subtração sob a forma de balança com três posições da incógnita.

Foram conduzidos dois estudos com esse *software*. O Experimento 1 avaliou o efeito da utilização de representações gráficas de números positivos e negativos e do uso da balança sobre o desempenho na resolução de problemas de adição com três posições da incógnita. Foi comparado o desempenho em problemas sob a forma de balança e os dados sobre desempenho em problemas escritos. Participaram dois meninos, um com seis anos, que estava na pré-escola e outro com oito anos, que estava cursando o segundo ano do Ensino Fundamental pela segunda vez (apresentava dificuldade para a aprendizagem de leitura, escrita e aritmética). Os participantes foram expostos apenas às quatro primeiras fases do programa. Os resultados mostraram que as duas crianças apresentaram melhor desempenho em problemas com incógnita na posição *a* e o pior na posição *c*, o que está em oposição aos dados de Hiebert (1982). Os autores sugerem que essa discrepância indica que os dados de Hiebert refletem mais a dificuldade com problemas escritos do que com uma posição da incógnita específica.

O Experimento 2 replicou o Experimento 1. Participaram seis crianças de sete anos do segundo ano do Ensino Fundamental, sem quaisquer queixas de dificuldades de aprendizagem. Os participantes foram expostos a todas as fases do *software* Equação-Equilíbrio. Os resultados mostraram que a subtração foi mais difícil que a adição em problemas com incógnita na posição *c*. A dificuldade dos problemas de adição com incógnita na posição *c* foi menor que na posição *a*, mas não foi menor do que problemas com incógnita na posição *b*. Um dado interessante é que nos problemas de subtração, a dificuldade foi maior com a incógnita na posição *c* do que *b* e não houve diferença significativa de dificuldade entre as incógnitas *a* e *c*. Na fase 6, os problemas de adição e subtração com incógnita na posição *c* não foram mais difíceis que os problemas com incógnita na posição *a* ou *b*. Foi demonstrado que não é possível replicar os dados obtidos com problemas escritos a partir de problemas sob a forma de balança. Todavia, é preciso lembrar que a amostra foi muito pequena.

O experimento de Haydu et al. (2001) ajudou a resolver esse problema. Foi investigado o efeito de três formas de apresentação de problemas de adição (problema escrito, operação com algarismos e balança) com incógnitas em três posições e valores entre zero e quatro, sobre o comportamento de resolver problemas. Participaram 86 alunos do terceiro ano do Ensino Fundamental, com idades entre 7 e 11 anos, cujo desempenho foi superior a 50% no teste de leitura. Foram empregados 90 problemas, sendo 30 para cada forma de apresentação e 10 para cada posição da incógnita. Os resultados mostraram que nos problemas em forma de algarismos e escritos, o desempenho foi melhor quando a incógnita estava na posição *c*, ao passo que na forma de balança o melhor desempenho foi com incógnita em *b*, embora a diferença de acertos em relação às outras duas posições seja sutil. A conclusão é a de que a forma de apresentação do problema é uma variável que afeta o desempenho. Portanto, os dados de Hiebert (1982) e Resnick e Rosenthal (1974) representam bem o padrão de erros em problemas escritos, mas não em todas as formas de apresentação.

A pesquisa de Iégas (2003) acompanhou essas descobertas e investigou se o treino de resolução de problemas na forma de uma balança poderia produzir melhora de desempenho em problemas de adição e subtração sob a forma de operações com algarismos e escritos com estrutura semântica de transformação, mesmo quando a incógnita estava nas posições *a* e *b*. Participaram 48 alunos do 2º ano do Ensino Fundamental, com idades entre seis e oito anos. No pré-teste, eles foram expostos a 24 problemas (12 de adição e 12 de subtração, 12 para cada forma de apresentação, oito para cada posição da incógnita), com valores entre 0 e 10, todos apresentados por meio do *software* Arit-Fácil. Durante a fase de treino, os participantes foram expostos a 40 problemas (20 de adição e 20 de subtração, 13 com em *a*, 13 em *b* e 14 em *c*). Os resultados mostraram em relação aos problemas de adição, que os participantes tinham maior dificuldade com problemas escritos e as incógnitas em *a* e *b*. Nos problemas de subtração, o que mais gerou dificuldade foi a incógnita na posição *a*. Embora a menor porcentagem de acertos tenha permanecido em problemas com incógnitas nas posições *a* e *b*, os dados indicaram que o procedimento de ensino (uso da balança) produziu melhora no desempenho dos participantes.

Estudo conduzido por Haydu, Costa e Pullin (2006) inovou em relação ao trabalho de Iégas (2003). No lugar de treinar a resolução de problemas sob a forma de balança, foi avaliado se a formação de um conjunto de classes de equivalência entre problemas escritos, problemas sob a forma de algarismos e sob a forma de balança seria suficiente para melhorar o seu desempenho na resolução de problemas de adição. Participaram sete alunos do segundo ano do Ensino Fundamental ainda não expostos ao ensino de resolução de problemas aritméticos na escola, aprovados no teste de leitura e que apresentaram no pré-teste porcentagem de acerto inferior a 70%.

Antes da aplicação do pré-teste, a experimentadora explicou aos participantes, mostrando cada forma de apresentação dos problemas, que eles deveriam encontrar o valor da incógnita para resolver o problema. No treino de discriminação condicional, problemas na forma de balança foram apresentados como estímulo-modelo (A) e os estímulos-comparação foram problemas na forma de operação com algarismos (B) ou problema escrito (C). Na fase de teste das relações emergentes, avaliou-se a emergência de simetria (relações BA e CA) e equivalência (relações BC e CB). A fase de pós-teste foi composta por 45 problemas aritméticos organizados da mesma maneira que o pré-teste, diferindo apenas quanto aos valores numéricos. Os resultados mostraram que (a) seis dos sete participantes formaram classes de equivalência entre as diferentes formas de apresentação dos problemas; (b) a maioria dos participantes apresentou aumento superior a 20% nas porcentagens médias de acerto entre pré-teste e pós-teste; (c) nos problemas escritos, a porcentagem de repostas corretas foi menor do que a registrada nos problemas em forma de operação e balança; (d) três participantes apresentaram uma pequena redução na porcentagem de acerto nos problemas em forma de operação com algarismos com incógnita na posição *c*.

Resultados de pesquisas sobre resolução de problemas e, especificamente, a literatura analítico-comportamental sugerem que a formação de classes de equivalência entre diferentes formas de apresentação de problemas aditivos com as três posições da incógnita é um dos conjuntos de relações importantes para melhorar o desempenho na resolução de problemas aritméticos[11]. Esse tipo de ensino possibilita ao aluno utilizar estratégias comuns para resolver todos os diferentes tipos de problemas que foram incluídos na mesma classe de equivalência, reduzindo dificuldades específicas geradas pela posição da incógnita ou pela forma de apresentação do problema (Haydu, 2009); ou seja, essa “[...] pode ser uma maneira de o professor levar o aluno a aprender que o comportamento (estratégia de resolução) apresentado em uma situação pode ser usado em situações que são semelhantes” (Haydu et al., 2006, p. 51). Outros procedimentos,

[11] Segundo Nunes e Bryant (1996), a aprendizagem de conceitos envolve estabelecer conexões entre diferentes comportamentos de solução de problemas. Portanto, a compreensão sobre adição e subtração se desenvolve a medida que a criança relaciona o seu entendimento inicial dessas operações a novas situações e consegue empregar estratégias e representações formais da Matemática na análise dessas situações. Esse processo pode ser interpretado como expansão de classes de equivalência.

como o treino de resolução de problemas na forma de uma balança e o ensino de algoritmos, também demonstraram potencial.

Contudo, poucos estudos foram realizados para tentar replicar esses resultados positivos. Além disso, outras variáveis devem ser manipuladas para avaliar a aplicabilidade desses procedimentos a situações reais. É importante, por exemplo, testar os efeitos desses procedimentos sobre o desempenho em diferentes tipos de estrutura semântica, avaliar se é preferível formar um (só adição ou subtração) ou dois conjuntos (adição e subtração) de classes de equivalência, comparar o desempenho em problemas na forma de balança e outro tipo de representação gráfica (por exemplo: coleção de pontos) e investigar se os mesmos resultados positivos alcançados com um procedimento realizado por meio de interação direta entre pesquisador e aluno são obtidos com outro realizado prioritariamente com o uso do computador.

Serão respondidas quatro perguntas: (a) os participantes formaram a classe de equivalência? (b) Apresentaram desempenho pobre no pré-teste em função das variáveis posição da incógnita, forma de apresentação e estrutura semântica? (c) Ocorreu melhora no desempenho após a formação da classe de equivalência? (d) Ocorreu melhora após o ensino dos algoritmos e o treino com a balança?

Objetivos

Foram conduzidos dois experimentos. O primeiro teve o objetivo principal de avaliar o efeito da formação de um conjunto de classes de equivalência entre diferentes formas de apresentação de problemas de adição (operação com algarismos, problema escrito com estrutura de transformação, problemas na forma de balança e coleção) sobre o desempenho de resolução de problemas de adição e subtração em diferentes formas de apresentação, estruturas semânticas e com incógnitas nas três posições. Foi estabelecido o objetivo adicional de avaliar, após essa história experimental de formação de classe de equivalência, o efeito do ensino de algoritmos[12] para solução de problemas aditivos sobre o desempenho de solução de problemas. O segundo experimento teve por objetivos avaliar se a formação de dois conjuntos de classes de equivalência (adição e subtração) entre três diferentes formas de apresentação de problemas (algarismo, problema escrito com estrutura de transformação e balança) produziria melhora em resolução de problemas, e avaliar, após essa história, o efeito do treino com a balança e do ensino de algoritmos sobre esse desempenho.

Experimento 1

Método

Visão geral

Foi empregado delineamento de sujeito único, composto pelas seguintes fases: (a) medida da variável dependente (VD) durante a linha de base (pré-teste); (b) inserção da Variável Independente (VI) 1; (c) medida da VD (Pós-teste 1); (d) inserção das VI's 2 e 3; (e) medida da VD (Pós-testes 2 e 3); (f) medida da VD (teste de generalização). A VD foi a resposta-solução aos problemas aditivos. A VI 1 foi a formação de um conjunto de classes de equivalência entre quatro diferentes formas de apresentação de problemas de adição. As VI's 2 e 3 foram, respectivamente, o ensino dos algoritmos para resolução de problemas de adição e subtração.

Participantes

Oito crianças com idades entre 8 e 11 anos. Todas estudavam numa mesma escola pública municipal da cidade de São Carlos-SP, exceto HC que estudava numa

---

[12] Algoritmo refere-se à descrição de uma sequência de comportamentos que devem ser emitidos para a solução de um problema; pode-se interpretá-lo como "regras que controlam o comportamento matemático eficiente" (Oliveira & Tourinho, 2001, p. 64).

escola estadual de São Carlos. Segundo os pais, nenhum deles utilizava medicamento permanente ou possuía qualquer tipo de limitação sensorial, motora ou intelectual. Não foi avaliada a presença de transtornos de aprendizagem na amostra selecionada e não foram empregados testes padronizados para a avaliação dos participantes.

Os participantes eram experimentalmente ingênuos em relação a pesquisas sobre resolução de problemas de Matemática, mas faziam parte de um projeto de extensão da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), a Liga da Leitura, cujo objetivo é ensinar crianças com dificuldades na área de linguagem a ler e a escrever. Por esse motivo, eles já possuíam experiência com tarefas de MTS. A Tabela 1 exibe as informações sobre sexo, idade e escolaridade dos participantes.

Tabela 1
Caracterização dos participantes do Experimento 1

Características	**JM**	**PR**	**MS**	**MB**	**VG**	**PS**	**FS**	**HC**
Sexo	Masc.	Masc.	Masc.	Masc.	Masc.	Fem.	Masc.	Masc.
Idade	8a5m	8a10m	9a1m	9a7m	10a1m	10a0m	10a9m	10a10m
Escolaridade	2° ano	2º ano	2º ano	2º ano	2º ano	4º ano	4° ano	5º ano

Seleção dos participantes

O critério de participação foi ser capaz de ler problemas escritos simples (por isso foram selecionadas somente crianças que já haviam iniciado o Programa 2[13] de leitura do Projeto de Extensão Liga da Leitura) e apresentar baixa porcentagem de acertos em um conjunto de problemas aditivos desenvolvidos para o presente estudo. Esse conjunto foi formado por quatro provas, (a) problemas escritos, (b) balança, (c) algarismo e (d) coleção, que compuseram as fases de pré-teste e pós-teste. Mais detalhes

[13] A criança inicia o Programa 1 sem saber ler, ou lendo poucas palavras e aprende palavras pequenas (duas ou três sílabas) formadas por sílabas simples (do tipo consoante-vogal). Esse programa ensina 60 palavras. No programa 2, iniciam as crianças que finalizaram o Programa 1 ou que sabem ler mais de 70% das palavras na avaliação do Programa 1, mas que precisam aprender palavras contendo dificuldades da língua (ditongos, dígrafos, encontros consonantais, etc.). Esse programa tem 16 unidades de ensino, com 16 palavras em cada unidade (total de 256 palavras). Cada unidade se refere a uma dificuldade (Ç, LH, NH, GU, QU, RR, etc.). As sessões envolvem basicamente leitura e ditado.

sobre essas provas são apresentados na seção “Procedimentos”. Um desempenho foi considerado baixo caso o participante (a) errasse todas as questões de uma determinada prova ou (b) alcançasse no pré-teste porcentagem de acertos inferior a 70%.

Os participantes não eram inexperientes em relação à resolução de problemas de adição e subtração com um e dois dígitos e incógnita na posição *c* por já terem sido expostos a esse conteúdo na escola. Eles foram selecionados para participar do estudo não porque não sabiam resolver esses problemas, mas porque cometeram erros e atingiram um dos critérios de inclusão no estudo.

Local e Materiais

Local

A coleta foi realizada numa sala da Biblioteca da UFSCar, onde funciona uma unidade do Projeto de Extensão Liga da Leitura (ver Figura 1). Nessa sala são atendidas até nove crianças simultaneamente, o que gera distração porque enquanto uma criança realiza a sua atividade outra, por exemplo, pode estar conversando ou brincando.

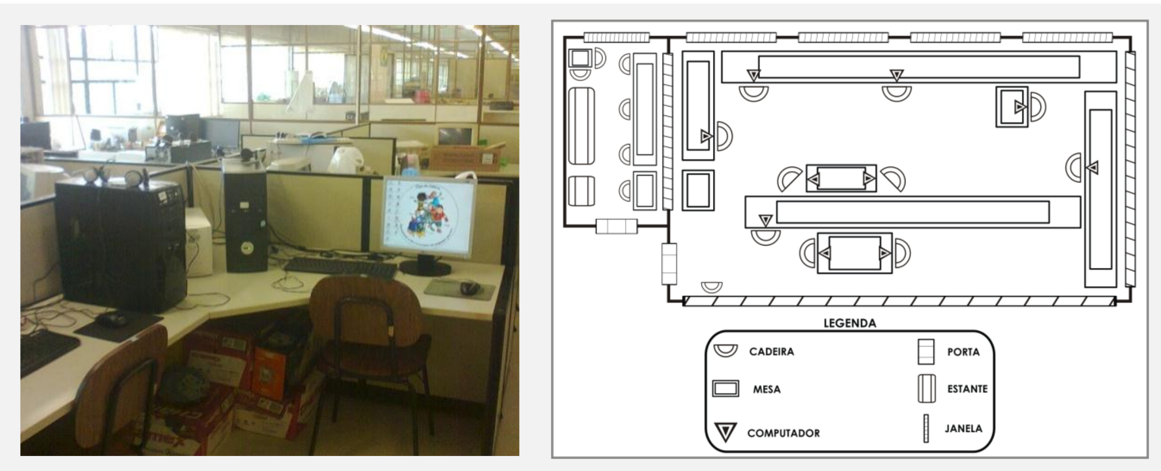


Figura 1. Foto e diagrama do local de coleta.

Softwares

Foi utilizado o *software* ProgMTS (Marcicano, Carmo, & Prado, 2011) que oferece uma interface visual para a construção de sessões de treino e teste de discriminações condicionais e realiza a execução dessas sessões. No pré-teste e nos pós-testes foi empregado também o *software* Excel 2007® (Microsoft) para a elaboração e apresentação dos problemas escritos e sob a forma de balança, devido ao fato de que os estímulos construídos para esses tipos de problema ficavam muito pequenos e pouco nítidos na tela do ProgMTS, que define uma área específica da tela para a apresentação de estímulos-modelo limitando a sua ampliação. Ao final de cada sessão realizada no Excel, o programa fornecia a informação da resposta dada pelo participante e se ele havia acertado ou errado a tentativa. O ProgMTS fornecia diversas informações, sendo as principais os nomes da sessão e dos estímulos-modelo e comparação, a resposta dada, a indicação de acerto ou erro e a duração total da tentativa.

Algumas vantagens de se utilizar o ProgMTS e o Excel são: (a) diminuição de custos com impressão de materiais, tais como as provas do pré-teste e dos pós-testes, (b) possibilidade de que o pesquisador colete dados com até três[14] participantes simultaneamente, (c) possibilidade de reutilização das sessões criadas, (d) diminuição de equívocos na atribuição de acertos e erros, (e) diminuição do tempo gasto para tabular os dados, pois os programas criam automaticamente planilhas com as informações de interesse sobre a sessão, (f) automatização e controle exato do momento de apresentação das tentativas, das instruções e das consequências, o que garante maior controle das condições experimentais a que os participantes foram expostos.

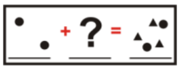
Estímulos

Os participantes foram expostos a quatro tipos diferentes de apresentação de problemas aditivos: (a) problema sob a forma de operação com algarismos, (b) problema sob a forma de coleções (foram utilizados círculos e triângulos pretos), (c)

[14] A coleta com mais de três crianças era inviável, pois os participantes tinham dúvidas e dificuldades que precisavam ser acompanhadas e solucionadas ao longo da sessão.

problemas escritos e (d) problemas sob a forma de balança. Foi manipulada também a posição da incógnita: (a) *posição a* (por exemplo, ?+1=2), (b) *posição b* (por exemplo, 1+?=2) e (c) *posição c* (por exemplo, 1+1=?). A Tabela 2 exibe exemplos desses quatro tipos de problemas e das três posições da incógnita, que foram representadas no experimento pelo sinal de interrogação (?).

Tabela 2
Formas de apresentação dos problemas empregados no Experimento 1[15]

Algarismo	Coleção	Problemas Escritos	Balança
? + 2 = 5		César tinha ? aviões. Ganhou mais dois e ficou com cinco ao todo.	
2 + ? = 5		João tinha dois aviões. Ganhou mais ? e ficou com cinco ao todo.	
3 + 2 = ?		Vitor tinha três aviões. Ganhou mais dois e ficou com ? ao todo.	

É difícil construir problemas escritos cuja posição da incógnita tenha uma correspondência direta com as demais formas de apresentação. Os problemas podem ser reformulados pela criança, simplesmente alterando a ordem das informações, de modo a ter a posição da incógnita modificada. A rigor, essa alteração não estaria errada. Por exemplo, no lugar de “César tinha ? aviões. Ganhou mais dois e ficou com cinco ao todo” a criança poderia rearranjar o problema do seguinte modo “César tem ao todo cinco aviões. De início tinha ? aviões e depois ganhou mais dois”. Neste caso, a posição da incógnita deixaria de estar em *a* e passaria a estar em *b*. Embora com uma estrutura rígida, buscou-se seguir o padrão adotado em outros estudos (por exemplo, Hiebert, 1982; Resnick & Rosenthal, 1974; Magina et al., 2010).

A prova com problemas na forma de balança também continha problemas escritos, que funcionavam como instruções sobre o tipo de problema que estava sendo

[15] Evitou-se incluir perguntas nos problemas escritos para reduzir ao máximo a quantidade de palavras, no intuito de facilitar a leitura.

representado pela balança. O objetivo foi facilitar a compreensão dos participantes, ao ser estabelecida uma relação de igualdade entre o problema escrito e o que era mostrado na balança. Também no intuito de facilitar a compreensão, os valores empregados nesses problemas escritos estavam na forma de algarismos e não na forma escrita, como no caso na prova com problemas escritos. Um exemplo de instrução para problema de adição na forma de balança foi “O prato B têm 9 bolas verdes. Precisamos colocar ? bolas pretas e 6 bolas azuis no prato A para equilibrar a balança”; um exemplo de instrução para problema de subtração foi “O prato B têm 4 bolas verdes. O prato A têm ? bolas pretas. Precisamos retirar 5 bolas do prato A para equilibrar a balança”. Esses problemas apresentavam duas características adicionais que os diferenciavam das balanças utilizadas nas demais sessões da pesquisa (conforme Tabela 2): (a) apresentavam um campo para a inserção da resposta-solução no lugar do ponto de interrogação; e (b) não continham os sinais de mais ou de menos (consultar nos apêndices o modelo de balança utilizado no pré-teste e pós-testes do Experimento 1).

Todos os problemas empregados continham valores entre um e nove. Nos apêndices deste trabalho foi inserida a Tabela 10 com os valores dos problemas empregados nas sessões em função do tipo de operação, apresentação do problema e posição da incógnita. Foi feita (a) variação de posição apenas dos estímulos-comparação, (b) variação de forma e posição das coleções (ver Figura 2) e (c) variação de ordem de apresentação dos problemas entre as sessões.

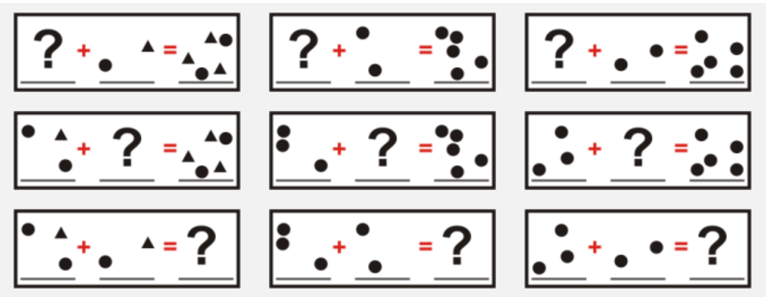


Figura 2. Tipos de coleções empregadas.

Procedimento

Comandos, procedimentos de correção, ajuda e tipos de tentativa

Os comandos, que descreviam o que o participante deveria fazer, foram: “Aponte o igual” e “Que número deve ser colocado no lugar desta interrogação para que esta conta fique correta?”. As consequências para os acertos eram todas estímulos verbais vocais (voz feminina) dos seguintes tipos: (a) “Beleza”, (b) “Correto”, (c) “Isso”, (d) “Joia”, (e) “Muito bem”, (f) “Muito bom”, (g) “Ótimo” e (h) “Parabéns”. Ao acertar, além dessa consequência, havia um intervalo de 1 segundo entre tentativas seguida pela apresentação da nova tentativa.

A consequência para erro era o estímulo verbal vocal (voz feminina), “Não, não é”. Nesses casos, havia um intervalo entre tentativas de 1 segundo e a tentativa que o participante havia errado era reapresentada. Caso o participante errasse novamente, ele ouvia “Não, não é”, seguia-se o intervalo de 1 segundo entre tentativas e a reapresentação da tentativa que havia errado. Caso o participante errasse pela terceira vez, ele ouvia “Não, não é” e, após um segundo, uma nova tentativa era apresentada, seguindo dessa forma até o final da sessão. Portanto, cada tentativa poderia ser apresentada ao participante por, no máximo, três vezes.

A única mudança nas consequências para acertos ocorreu nas sessões de ensino dos algoritmos de adição e subtração em problemas na forma de balança, que foi o acréscimo de um vídeo de uma balança sendo equilibrada. Como em qualquer outra tentativa, caso o participante errasse a resposta, ele ouvia a consequência “Não, não é”. Nas sondas não havia qualquer consequência exceto o intervalo entre tentativas.

Para todos os casos em que os participantes perguntassem algo durante a sessão relacionado a como resolver o problema ou se o resultado a que haviam chegado estava correto, o procedimento foi o seguinte: era dada atenção ao que o participante estava falando e, apontando para a tela do computador, o experimentador o ajudava a fazer a leitura do problema. Por exemplo, diante do problema “?+2=3”, o experimentador dizia “que número mais dois é igual a três?”.

É importante entender agora como os estímulos eram apresentados no ProgMTS e no Excel. Quando o participante tinha que encontrar o valor da incógnita, havia um estímulo-modelo e nove estímulos-comparação (números de 1 a 9) e um comando verbal vocal (ver Figura 3–A). Essa escolha por apresentar vários estímulos-comparação foi uma tentativa de diminuir as chances de que o participante pudesse acertar ao acaso. No caso das provas criadas no Excel, o participante tinha que digitar o número que considerava ser a resposta correta. Os treinos e testes de discriminações condicionais foram realizados integralmente no ProgMTS e caracterizavam-se por serem tarefas de MTS. O participante era exposto à tela de um monitor com fundo azul, que a cada tentativa exibia um estímulo-modelo, três estímulos-comparação e um comando verbal vocal (ver Figura 3–B). Dos três estímulos-comparação, um representava integralmente (na mesma ordem de apresentação dos valores e os mesmos valores) o estímulo-modelo. Dos outros dois estímulos-comparação, um dos estímulos tinha a mesma posição da incógnita que o estímulo-modelo, embora valores diferentes, e o terceiro não tinha a mesma posição da incógnita, podendo ter ou não valores similares.

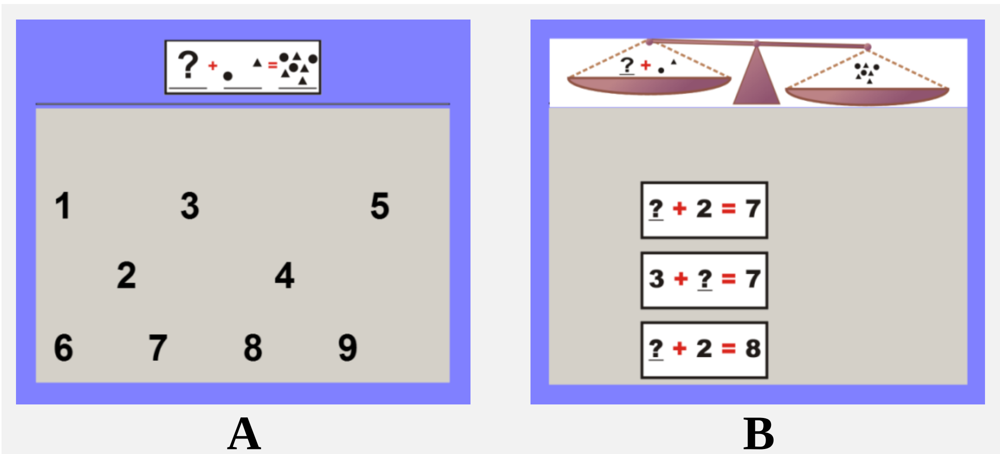


Figura 3. Exemplos de tentativas típicas das sessões de treino e de teste de discriminações condicionais.

Fases da pesquisa

Antes do pré-teste, todos os participantes foram expostos individualmente a um vídeo cujo objetivo era explicar que eles iriam participar de uma pesquisa na qual teriam que resolver problemas (identificar o valor da interrogação/incógnita). Todos os participantes foram expostos também a um segundo vídeo que explicava o funcionamento da balança, destacando que o objetivo era equilibrá-la. A instrução dada foi a seguinte: “Esta é uma balança. Ela tem dois pratos, o Prato A e o Prato B. Em cada prato há algumas bolinhas. Você pode observar que um prato está mais alto que o outro. Para que os dois pratos fiquem na mesma altura (retinha) é necessário que eles tenham a mesma quantidade de bolinhas dos dois lados. Assim, a balança vai ficar equilibrada. Em um dos pratos há um espaço vazio que deve ser preenchido com algumas bolinhas. Lembrando que para ficar retinha, a balança precisa ter o mesmo número de bolinhas dos dois lados, quantas bolinhas você deve colocar no espaço vazio para que a balança fique equilibrada?”.

Para demonstrar que havia compreendido a tarefa, o participante deveria então identificar a quantidade que iria equilibrar a balança. Não foi considerado nesse caso se a resposta estava correta ou não. Ao final da exibição dos vídeos, o experimentador disse aos participantes que eles poderiam resolver os problemas da forma que considerassem mais conveniente e forneceu alguns exemplos: “você pode fazer as contas de cabeça, pode escrever no papel, pode usar os dedos”. Foram utilizados vídeos para garantir a padronização das instruções e para permitir a coleta simultânea com mais de um participante.

Além dessas instruções, no início de qualquer prova do pré-teste e dos pós-testes, havia um problema-exemplo (sempre de adição e com incógnita em *c*) que o experimentador lia e resolvia junto com o participante para garantir que ele sabia o que devia fazer diante das tarefas que seriam propostas. O experimentador não fornecia o modelo de como resolver, somente explicava que o participante deveria encontrar o valor da interrogação. Quando ele dava a resposta correta para o problema, recebia o *feedback* de que havia acertado. Caso errasse, o experimentador solicitava que ele tentasse novamente. Diante de um novo erro, o experimentador lia o problema com o participante e fornecia os seguintes tipos de ajuda: “você acha que tem que fazer uma conta de mais ou de menos?”, “Quanto fica este mais este/este menos este?”. No caso dos problemas sob a forma de balança, antes de resolver o problema-exemplo o experimentador explicava o funcionamento da balança para o participante, repetindo as instruções contidas no vídeo apresentado antes do pré-teste.

Para cada forma de apresentação dos problemas foi elaborada uma prova (quatro no total). Exceto a prova com problemas escritos, cada prova era composta por seis problemas. Desses seis, três eram de adição e três de subtração. Havia dois problemas, um de adição e um de subtração, para cada posição da incógnita (dois problemas com a incógnita na posição *a*, dois na *b* e dois na *c*). A prova com problemas escritos continha 18 problemas, sendo nove de adição e nove de subtração. Essa prova foi construída com mais questões porque foram empregados três diferentes tipos de estruturas semânticas: (a) combinação, (b) transformação e (c) comparação, o que deu origem a seis tipos diferentes de problemas escritos: problemas de adição escritos com estruturas de (a) combinação, (b) transformação (positiva) e (c) comparação, e problemas de subtração escritos com estruturas de (d) separação, (e) transformação (negativa) e (f) comparação. Para cada tipo de problema havia três questões, uma com a incógnita em *a*, outra em *b* e outra em *c* (seis problemas, três de adição e três de subtração, para cada posição da incógnita). As quatro provas totalizavam 36 questões. As provas com problemas escritos e balança podem ser consultadas nos apêndices.

As estruturas semânticas de comparação e combinação só foram utilizadas no pré-teste e nos pós-testes. Nas demais sessões, só foram empregados problemas com estrutura de transformação, o que permitiu avaliar se a melhora nessa estrutura poderia implicar numa melhora de desempenho nas estruturas de combinação e comparação.

Após a aplicação do pré-teste, caso fosse selecionada para participar do experimento e a própria criança e seus responsáveis legais tivessem concordado, ela era conduzida para a fase de ensino e teste das discriminações condicionais. As sessões de ensino foram compostas por 12 problemas divididos em dois conjuntos de seis, em que os componentes de cada conjunto variaram a cada fase de treino. Numa sessão de treino, primeiramente o participante aprendia todas as relações do Conjunto 1 e, se obtivesse porcentagem de acerto maior ou igual a 90%, começava a aprender as do Conjunto 2. Para o ensino de todas as relações foram programadas seis sessões. Três compostas pelas relações do Conjunto 1 e três pelas do Conjunto 2.

Se o participante obtivesse as porcentagens de acerto esperadas nos dois conjuntos, ele poderia então passar para a fase seguinte do procedimento de ensino. Caso contrário, ele poderia repetir as três sessões com os problemas dos Conjuntos 1 ou 2 por até três vezes num mesmo dia. Se não alcançasse o desempenho esperado a sessão era encerrada. Foi programado um procedimento adicional de ajuda que consistiu no experimentador sentar ao lado da criança e solicitar respostas de observação ao estímulo-modelo, em que o participante tinha que dizer quais eram os valores desse estímulo. Em seguida, se a sua resposta estivesse correta, ele poderia escolher o estímulo-comparação que considerasse mais adequado. Caso contrário, o experimentador solicitava que o participante prestasse atenção e tentasse mais uma vez. Se errasse novamente, a sessão era finalizada e um procedimento especial deveria ser planejado para sanar a sua dificuldade.

Ao longo da sessão de treino, havia sondas que eram apresentadas entre as tentativas de treino, atendendo ao critério de que para o aprendizado de uma determinada relação ser testado pela primeira vez era preciso o participante ter sido exposto a, pelo menos, duas tentativas de treino dessa relação. As sondas eram tentativas idênticas às de treino só que sem *feedback* para acerto e erro. Cada relação foi treinada três vezes e testada três vezes por meio de sondas. Além do critério de 90% de acertos nos Conjuntos 1 e 2, para seguir adiante o participante precisava também apresentar, pelo menos, 70% de acertos nas 36 tentativas de sonda.

Nas fases de teste de simetria, o critério para avançar era alcançar, pelo menos, 70% de acerto nas 36 tentativas. O participante que não alcançasse esse critério poderia repetir o teste até três vezes. Se continuasse com desempenho abaixo do esperado, poderia repetir as três sessões referentes aos problemas dos Conjuntos 1 e/ou 2 a depender dos erros cometidos no teste. O teste de simetria era composto pelos mesmos problemas da fase de treino. Portanto, era possível verificar se o participante havia acertado, no mínimo, 12 tentativas de cada um dos dois conjuntos de problemas. Caso apresentasse menos que 12 acertos num conjunto, o experimentador já sabia que deveria repetir apenas as sessões de treino relativas a esse conjunto de problemas. Nos testes de transitividade e de equivalência, o critério para avançar foi o mesmo, 70% em 36 tentativas. Contudo, caso o participante não alcançasse o desempenho esperado, seria preciso ensinar novamente as relações que não haviam sido aprendidas, o que envolveria mais do que a repetição de somente um conjunto de problemas e poderia ser necessário voltar às fases de treino de mais de uma relação. Esses casos teriam que ser avaliados mediante análise do desempenho do participante, não tendo sido previstos no planejamento dos procedimentos desta pesquisa.

A Figura 4 exibe as relações ensinadas e testadas neste experimento. As linhas contínuas representam as relações ensinadas, enquanto as linhas descontínuas representam as relações que foram testadas e que se esperava que emergissem a partir das relações ensinadas. Foram ensinadas as relações Balança (A) e Algarismo (B), Balança (A) e Coleção (C), Algarismo (D) e Problema escrito (B), e foi avaliado se ocorria a emergência das relações BA, CA, BD, DC, CD, AD, DA, BC e CB.

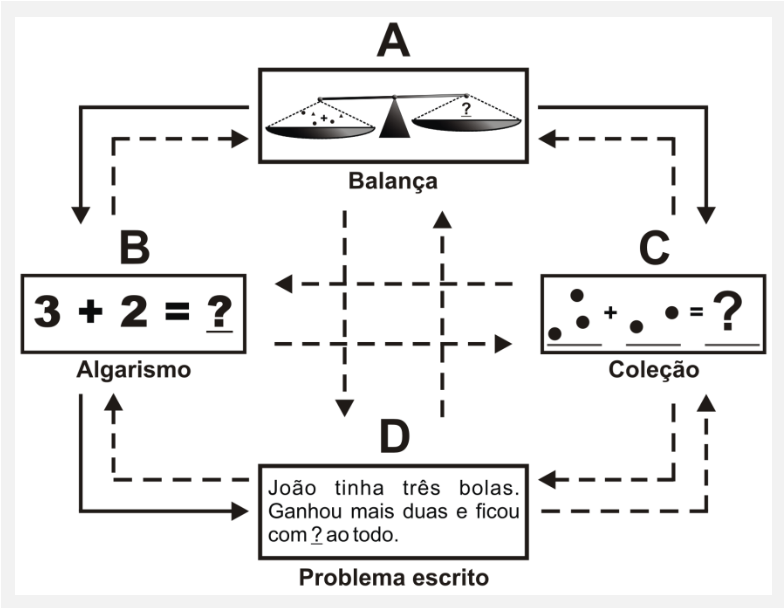


Figura 4. Relações entre estímulos ensinadas e testadas nas sessões de treino e teste de discriminações condicionais no Experimento 1.

Ao final dos treinos e testes das discriminações condicionais foi aplicado o Pós-teste 1, idêntico ao pré-teste. Em seguida, foi iniciada a fase de ensino de algoritmos, que se caracterizou pela interação verbal entre experimentador e participante, na qual o experimentador fornecia regras e o modelo de como o participante deveria proceder para resolver problemas.

A fase de ensino do algoritmo para resolver problemas de adição com incógnitas nas posições *a*, *b* e *c*, que ocorreu após o Pós-teste 1, foi dividida nas sessões de instrução (com a presença do experimentador fornecendo regras de como resolver os problemas) e treino (após a sessão de instrução, o participante resolvia os problemas sem a ajuda do experimentador). A sessão de instrução era composta por 24 problemas, todos de adição. O critério para seguir para a fase de treino era obter, pelo menos, 70% de acerto. Durante toda essa sessão, o experimentador estava sentado ao lado da criança. A fase de treino era composta por 48 problemas de adição e o critério de aprovação era obter, pelo menos, 70% de acerto. Ao ensinar algoritmos, o experimentador utilizou os dedos como suporte para a realização dos cálculos.

Para problemas de adição com incógnita na posição *a*, por exemplo, "?+1=2", foi ensinada a seguinte regra: "Veja que você tem uma interrogação aqui no começo (?) mais esse valor aqui (1). Agora veja que você tem como resultado este número aqui (2). Você não sabe quanto vale a interrogação, mas conhece esse valor que está sendo somado com ela. Se você já tem isso, basta contar quanto falta para chegar ao resultado. Conte nos dedos. Se você já tem isso aqui (1) [um dedo era levantado], vá contando até chegar ao resultado (2) [até ter dois dedos levantados]. Quantos dedos você levantou para chegar ao resultado? Este é o valor da interrogação". Para problemas com a incógnita na posição *b*, foi ensinada a mesma regra. Apenas foi enfatizado que a interrogação mudou de lugar, mas o procedimento era o mesmo, ou seja, identificar o valor apresentado na posição *b* e contar quanto faltava para chegar ao valor da posição *c*. Em relação aos problemas com incógnita na posição *c*, foi enfatizado que o procedimento era somar os dois valores iniciais para descobrir o resultado. Ao final dessas sessões foi aplicado o Pós-teste 2, idêntico ao pré-teste e ao Pós-teste 1.

A fase de ensino explícito da resolução de problemas de subtração com incógnitas nas posições *a*, *b* e *c* também foi dividida nas sessões de instrução e treino. A sessão de instrução era composta por 19 problemas, todos de subtração. O critério para seguir para a fase de treino era obter, pelo menos, 70% de acerto. A fase de treino era composta por 12 problemas, todos de subtração. O critério para seguir adiante era obter, pelo menos, 70% de acerto.

Para os problemas de subtração com incógnita na *posição a,* por exemplo, “?–2=3”, foi ensinada a seguinte regra: “Veja que agora a conta é de menos. Você tem um número que não conhece – representado pela interrogação – menos este aqui (2), que sabemos quem é. O resultado é este (3). O que podemos fazer para descobrir o valor da interrogação? Se nós tirarmos dessa quantidade aqui (?) esta outra quantidade (2) e sobrou isto aqui de resultado (3), basta eu somar esse resultado (3) com essa quantidade (2) que eu tirei da interrogação para descobrir quanto eu tinha inicialmente. Quanto dá o resultado (3) [três dedos eram levantados] mais este número aqui (2) [mais dois dedos eram levantados]? Conte nos dedos. Qual foi o resultado? Este é o valor da interrogação”.

Em seguida, para os problemas de subtração com incógnita na posição *b*, por exemplo, “5–?=3”, foi ensinada a seguinte regra: “Agora temos uma situação diferente. A interrogação mudou de lugar, você viu? Sabemos o quanto temos aqui no começo (5), mas não sabemos – veja a interrogação – quanto foi tirado (?). Conhecemos também o resultado (3). O que fazer para encontrar a interrogação? Se eu tirei essa quantidade (?) e sobrou isso de resultado (3), basta fazer a continha de quanto eu tinha (5) [cinco dedos eram levantados] menos o resultado (3) [três dedos deveriam ser baixados] para saber quanto teria que ser retirado desse valor aqui (5) para sobrar este resultado aqui (3). Qual foi o resultado? Este é o valor da interrogação”. Ao final dessas sessões foi aplicado o Pós-teste 3, idêntico aos testes anteriores.

Foi realizado em seguida o teste de generalização, no qual foram empregados apenas problemas escritos com estrutura de transformação, sendo seis de adição e seis de subtração. Seis problemas foram apresentados na tela do computador e seis foram ditados pelo experimentador. O participante deveria verbalizar a resposta e o experimentador apenas registrava o acerto ou o erro, sem fornecer *feedback*. Nessa sessão, uma vez que os valores envolvidos nos problemas eram maiores que nove, o experimentador repetiu a instrução (para todos os participantes) de que eles poderiam resolver os problemas do modo que considerassem mais conveniente, e acrescentou que poderiam, por exemplo, utilizar "riscos no papel" para representar os valores. Por exemplo, "2+3" = "| | + | | |".

O teste de generalização avaliou se o desempenho alcançado em problemas com valores e resultados entre 1 e 9 poderia ser generalizado para problemas com valores e resultados entre 1 e 15. Como não foi realizado nenhum procedimento para ensino de resolução de problemas com valores acima de nove e as crianças já sabiam realizar somas e subtrações com um e dois dígitos, é preciso lembrar que o desempenho no teste de generalização é o resultado do que foi aprendido no experimento e nas aulas de Matemática da escola. O resumo do delineamento do Experimento 1 pode ser consultado nos apêndices (ver Tabela 9).

Nesta pesquisa não foram estabelecidos critérios de 100% de acerto porque as crianças num mesmo dia tinham que realizar uma tarefa de ensino de leitura e escrita e participar da pesquisa de matemática. Critérios muito altos poderiam fazer com que o participante tivesse que repetir muitas sessões em função de um ou dois erros cometidos. No caso específico das sondas e testes de emergência das relações de equivalência, foi adotado um critério de 70% considerando que a tarefa era mais difícil, uma vez que não havia *feedback*. Buscou-se definir critérios mínimos para indicar aquisição de um comportamento e permitir que o participante seguisse na pesquisa sem ter que repetir muitos passos, de modo que não ficasse desmotivado ao participar de um estudo que significava mais uma atividade, além da escola e das tarefas de leitura e escrita da Liga da Leitura.

Em função de que não haveria tempo para realizar todas as sessões antes do final do período letivo e não havia garantias de que a coleta poderia ser retomada no ano subsequente, JM e VG passaram por uma fase reduzida de treino de discriminações condicionais. No caso de JM, isso significou uma diminuição na quantidade de tentativas de treino e de teste no ensino da relação entre problemas na forma de balança e na forma de coleções (36 tentativas de treino do Conjunto 1 e 18 testes, e 12 tentativas de treino do Conjunto 2 e 6 testes), e no ensino da relação entre problemas na forma de algarismo e escrita (12 tentativas de treino e 6 de teste dos Conjuntos 1 e 2). No caso de VG, houve alteração apenas no treino da relação algarismo-problema escrito, que foi composta por 12 tentativas de treino e 6 de teste nos dois conjuntos. A porcentagem de acertos foi calculada em relação ao total de tentativas de discriminação condicional a que eles foram efetivamente expostos.

Ao final do ano letivo, a coleta foi finalizada integralmente apenas com HC, PS, MB e PR. JM e FS foram expostos ao pré-teste, à fase de formação da classe de equivalência, ao Pós-teste 1 e ao teste de generalização. VG foi exposto às mesas fases, exceto o teste de generalização. MS foi exposto ao pré-teste, à fase de formação da classe, ao Pós-teste 1, à fase de ensino do algoritmo de adição, ao Pós-teste 2 e ao teste de generalização. No ano seguinte, a pesquisa pôde ser retomada. JM, FS e VG foram expostos às fases de ensino dos algoritmos de adição e subtração, aos Pós-testes 2 e 3 e ao teste de generalização. MS foi exposto à fase de ensino do algoritmo de subtração, ao Pós-teste 3 e novamente ao teste de generalização.

Procedimentos de análise de dados

Os dados de acerto foram convertidos em porcentagem para análise da porcentagem de acertos, por grupo (todos os oito participantes) e por participante, antes (pré-teste) e depois (pós-testes) da realização dos procedimentos de ensino e para a verificação do alcance dos critérios nas fases de ensino e teste das discriminações condicionais e de instrução e treino dos algoritmos. Expressões empregadas neste texto, tais como “melhora no desempenho” e “redução de dificuldades” significam, portanto, aumento na porcentagem de acertos. Com base nos dados de antes e depois, isto é, pré-teste e Pós-teste 1, Pós-testes 1 e 2, Pós-testes 2 e 3, foi calculado se houve mudança estatisticamente significativa por meio do Teste de Wilcoxon bicaudal. Calculou-se também se houve diferença entre o desempenho inicial e final do grupo por meio do teste de Friedman.

Resultados e Discussão

Serão respondidas às quatro perguntas anunciadas ao final da introdução. Os dados de formação da classe de equivalência serão apresentados por participante. Em relação aos dados de desempenho, serão apresentados, primeiramente, de cada participante e, em seguida, os do grupo.

Formação das classes de equivalência

A Figura 5 exibe a porcentagem de acertos por participante nas sondas e testes de equivalência.

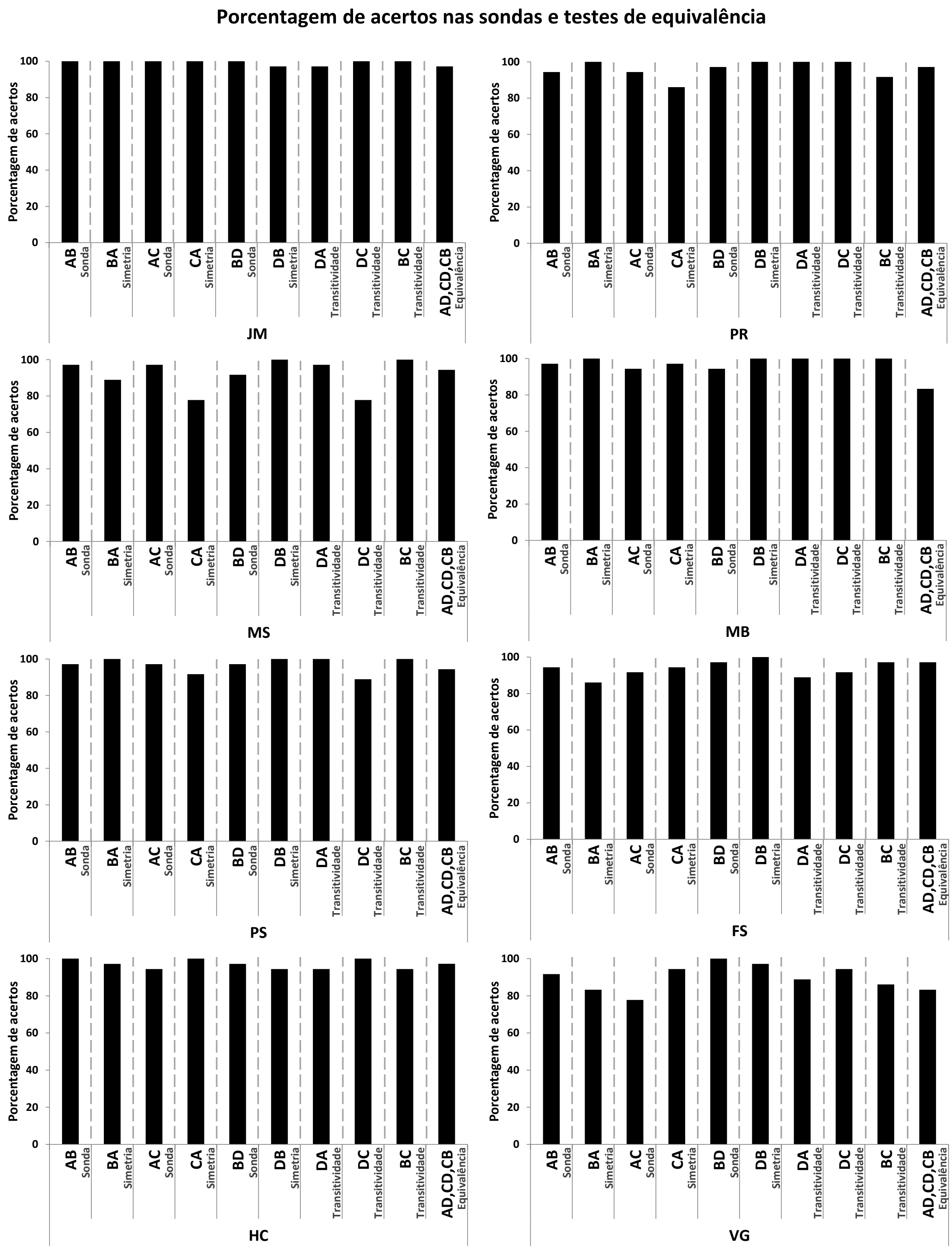


Figura 5. Porcentagem de acertos nas sondas e testes de equivalência do Experimento 1.

Verifica-se na Figura 5, que JM, PR, MS, MB, PS, FS, HC e VG apresentaram elevada porcentagem de acertos (acima de 75%, com média de 95% de acertos) em todas as tentativas de sonda e testes de equivalência, o que sugere que formaram ao longo da pesquisa a classe de equivalência. Na prática, ficou a dúvida de se a classe de equivalência já havia sido formada antes mesmo do início do experimento como resultado da experiência escolar dos participantes. Embora essa hipótese possa ser criticada com base nos erros que os participantes cometeram (pois, se tivessem a classe de equivalência formada, poderiam ter sempre acertado), é possível supor que alguns desses erros tenham ocorrido por simples distração, por exemplo, no processo de contagem dos elementos de uma coleção ou por dificuldades de leitura.

Em estudos futuros, parece ser relevante testar essa hipótese. Se for atestado que a classe de equivalência não foi formada, a pesquisa poderá avaliar com segurança os efeitos da formação da classe sobre o comportamento de resolver de problemas. Caso contrário, avaliará se o treino de discriminações condicionais, mesmo para uma classe de equivalência já formada, pode produzir melhora no desempenho. Restou também a dúvida de se a classe de equivalência uma vez formada se manteve constante ao longo da pesquisa, questão que não pôde ser respondida porque os pós-testes não incluíram testes de equivalência. Novos estudos podem incluir essa avaliação.

JM, MS, FS, PS, MB e HC alcançaram todos os critérios da fase de ensino das discriminações condicionais sem precisar repetir nenhuma sessão. VG precisou repetir uma vez o teste de simetria da relação coleção-balança (CA) e PR precisou repetir três vezes as sessões de treino dos problemas do Conjunto 2 da relação balança-algarismo (AB). As menores porcentagens de acertos nos testes foram apresentadas pelo participante MS (77,8%), na sonda da relação CA e no teste de transitividade da relação DC e pelo participante VG, na sonda da relação AC (77,8%). Nos três casos estão envolvidos problemas escritos, que de fato eram os estímulos mais complexos, especialmente, para alunos com dificuldades em leitura. Contudo, em termos de desempenho, o critério era obter pelo menos 70% de acerto. Portanto, os desempenhos de MS e VG foram considerados suficientes. Além disso, nos testes de emergência das relações de equivalência, MS alcançou 94,4% de acerto e VG 83,3%.

Desempenho por participante no pré-teste e nos pós-testes

A Tabela 3 exibe a porcentagem média de acertos por participante no pré-teste e nos pós-testes por tipo de problema.

Tabela 3

Porcentagem de acertos por participante no pré-teste e nos pós-testes do Experimento 1

Part.	Testes	Operação		Forma				Estrutura			Incógnita			Média
		Ad	**Sub**	**Ag**	**Bl**	**Cl**	**St**	**TF**	**CP**	**CB**	***a***	***b***	***c***	
JM 2º ano	**Pré**	100	78	83	100	100	83	83	83	83	75	92	100	89
	Pós1	100	94	100	100	100	94	83	100	100	92	100	100	97
	Pós2	83	83	83	83	50	94	100	83	100	67	100	83	83
	Pós3	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
HC 5º ano	**Pré**	89	78	100	67	100	78	83	67	83	92	83	75	83
	Pós1	94	78	83	83	83	89	83	100	83	67	92	100	86
	Pós2	83	67	83	50	67	83	100	67	83	58	92	75	75
	Pós3	100	89	100	100	67	100	100	100	100	92	92	100	94
FS 4º ano	**Pré**	78	56	83	83	67	56	50	67	50	42	75	83	67
	Pós1	83	67	100	50	67	78	67	67	100	58	83	83	75
	Pós2	78	67	83	50	100	67	83	67	50	67	67	83	72
	Pós3	89	94	100	100	100	83	83	100	67	92	83	100	92
PS 4º ano	**Pré**	56	50	100	33	83	33	33	33	33	67	42	50	53
	Pós1	61	50	100	50	83	33	33	33	33	67	42	58	56
	Pós2	78	72	100	50	83	72	83	67	67	67	83	75	75
	Pós3	78	67	100	50	83	67	83	50	67	75	67	75	72
MS 2º ano	**Pré**	50	33	83	67	83	6	0	0	17	33	50	42	42
	Pós1	50	44	67	50	33	44	67	33	33	8	67	67	47
	Pós2	72	44	83	50	83	44	67	67	0	33	75	67	58
	Pós3	83	61	100	33	100	67	83	67	50	67	83	67	72
MB 2º ano	**Pré**	44	33	83	0	50	33	50	17	33	25	33	58	39
	Pós1	78	78	100	50	67	83	83	67	100	83	92	58	78
	Pós2	100	72	100	67	83	89	100	83	83	75	92	92	86
	Pós3	78	67	100	50	83	67	83	33	83	83	58	75	72
PR 2º ano	**Pré**	44	28	33	17	50	39	83	17	17	25	33	50	36
	Pós1	72	50	67	67	83	50	50	33	67	58	58	67	61
	Pós2	50	17	67	17	17	33	17	33	50	25	17	58	33
	Pós3	89	94	83	100	83	94	100	100	83	92	92	92	92
VG 2º ano	**Pré**	28	17	50	17	67	0	0	0	0	17	25	25	22
	Pós1	61	50	83	50	100	33	33	33	33	58	42	67	56
	Pós2	78	78	100	83	100	61	83	17	83	83	75	75	78
	Pós3	100	94	100	100	100	94	100	83	100	92	100	100	97

Nota. Ad = Adição; Sub = Subtração; Ag = Algarismo; Bl = Balança; Cl = Coleção; St = Problema escrito; TF = Estrutura de transformação; CP = Estrutura de comparação; CB = Estrutura de combinação; *a*, *b* e *c* representam as posições da incógnita ($a+b=c$ ou $a–b=c$); Média = Média geral do participante no pré-teste e pós-testes.

JM não atendeu a nenhum dos critérios para participar da pesquisa, mas foi convidado para se avaliasse se o procedimento produziria efeito de melhora no seu desempenho ou se, de alguma forma, poderia prejudicá-lo. Considerou-se também que a maioria dos erros de JM estava em problemas escritos e sob a forma de algarismo e que ele poderia se beneficiar da exposição a esses tipos de problema ao longo da pesquisa. No pré-teste, JM acertou menos em problemas com incógnita em *a* (75%), problemas de subtração (78%) e problemas escritos e na forma de algarismo (ambos com 83%). Não ficou clara a existência de uma dificuldade específica. No Pós-teste 1, JM melhorou o seu desempenho, tendo cometido apenas um erro. No Pós-teste 2, JM apresentou queda significativa de desempenho em problemas de subtração com incógnita em *a* (de 92% de acertos caiu para 67%) e em problemas de adição com incógnita em *c* (de 100% para 83%). No Pós-teste 3, acertou todos os problemas.

HC foi selecionado para a pesquisa pelos mesmos motivos que JM. No pré-teste, HC acertou menos os problemas sob a forma de balança (67%), problemas escritos (78%), com estrutura semântica de comparação (67%) e problemas com incógnita em *c* (75%). No Pós-teste 1, o desempenho de HC nas diferentes formas de apresentação foi muito similar, com melhora em relação aos problemas escritos (de 78% para 89%) e redução de acertos nos problemas com incógnita em *a* (de 92% para 67%). No Pós-teste 2, houve redução na porcentagem de acertos em problemas de subtração (de 78% para 67%) e adição (de 94% para 83%), em problemas com incógnita em *c* (75%) e *a* (58%). No Pós-teste 3, HC voltou a aumentar a porcentagem de acertos, alcançando 100% de acerto em todos os problemas, exceto em alguns de subtração na forma de coleção, dado inesperado porque no pré-teste ele obteve 100% de acerto nesse tipo de problema.

No pré-teste, FS acertou menos os problemas de subtração (56%), os problemas escritos (56%), problemas com incógnita em *a* (42%) e nas estruturas de combinação e transformação (ambas com 50% de acerto). No Pós-teste 1, houve melhora na porcentagem de acertos em problemas de subtração (67%), nos problemas escritos, de 56% para 78%, com 100% de acerto na estrutura de combinação e 67% nas demais, em problemas com incógnitas em *a* (58%) e *b* (83%), e piora apenas em problemas sob a forma de balança (de 83% para 50%). Nos Pós-teste 2, ocorreu queda de desempenho em problemas com estrutura de combinação (50%) e incógnita em *b* (67%), sendo que houve melhora em *a* (67%). No Pós-teste 3, FS acertou mais problemas de subtração (94%), melhorando numa operação com a qual tinha dificuldade e apresentou 100% de acertos em todas as formas de apresentação, exceto nos problemas escritos, 83% (porcentagem maior que as obtidas anteriormente).

No pré-teste, PS acertou poucos problemas escritos e sob a forma de balança (ambos com 33% de acerto), os três tipos de estrutura semântica (33%) e problemas com incógnita em *b* (42%), tendo acertado mais em *a* (67%), resultado inusitado porque a incógnita em *a* costuma ser a mais difícil. No Pós-teste 1, houve uma sutil melhora nos problemas na forma de balança, de 33% para 50%, e com incógnita em *c*, de 50% para 58%. No Pós-teste 2, verificou-se melhora na porcentagem de acertos nos problemas escritos entre o Pós-teste 1 e o 2, de 33% para 72%. A porcentagem de acertos nos problemas sob a forma de balança permaneceu a mesma, mas com uma diferença importante não sinalizada na Tabela 3: PS acertou 33% dos problemas de subtração na forma de balança, melhorando o seu desempenho já que havia apresentado 0% de acertos nos testes anteriores. Ainda no Pós-teste 2, PS acertou menos nas estruturas de combinação e comparação (ambas com 67%) e acertou mais problemas com incógnita em *b* (83%) e menos em *a* (67%). No Pós-teste 3, o desempenho final de PS foi superior àquele apresentado no pré-teste e com ganhos nos problemas escritos e sob a forma de balança, os mais difíceis para ela. A participante também melhorou em problemas com incógnita em *a* (75%) e piorou em *b* (67%).

No pré-teste, MS acertou menos os problemas de subtração (33%), na forma escrita (6%), com incógnita em *a* (33%) e com estruturas semânticas de transformação e comparação (ambos com 0%). No Pós-teste 1, houve menos provas em que apresentou 0% de acerto e aumentou de 6% para 44% os acertos em problemas escritos, sendo mais difíceis os problemas com estrutura de combinação e comparação (ambos com 33% de acerto). Houve também melhora em problemas de subtração (44%) e piora na incógnita em *a* (8%), apesar dos acertos em *b* e *c* (ambos com 67%). No Pós-teste 2, houve aumento dos acertos em problemas de adição (72%) e nas incógnitas *a* (33%) e *b* (75%). A dificuldade restringiu-se aos problemas com estrutura semântica de combinação (0% de acerto). No Pós-teste 3, o que não foi indicado na Tabela 3, MS apresentou 0% de acerto nos problemas de subtração sob a forma de balança e acabou a pesquisa tendo menor porcentagem de acertos justamente em problemas sob a forma de balança (33%). O seu desempenho em problemas escritos aumentou, de 6% no pré-teste para 67% no Pós-teste 3. Além disso, MS alcançou acertou todos os problemas sob a forma de algarismos e coleções, e melhorou em problemas com incógnita em *a* (67%) e *b* (83%).

No pré-teste, MB acertou menos em problemas com incógnita em *a* (25%), nos problemas de subtração (33%), em forma de balança (0% de acerto) e escritos (33%), especialmente, aqueles com a estrutura de comparação (17%). No Pós-teste 1, o desempenho melhorou muito nos problemas na forma de balança, de 0% para 50%, bem como nos escritos, de 33% para 83%. A porcentagem de acertos aumentou também nas incógnitas *a* (83%) e *b* (92%). No Pós-teste 2, MB apresentou redução (de 83% para 75%) na porcentagem de acertos em problemas com incógnita em *a* (75%) e baixa porcentagem de acertos em problemas sob a forma de balança (67%) e nas estruturas semânticas de combinação e comparação (ambas com 67% de acerto). No Pós-teste 3, MB aumentou a porcentagem de acertos em problemas com incógnita em *a* (83%) e teve uma queda em *b* (58%) e *c* (75%). O seu desempenho nos problemas de adição e subtração também caiu. Uma hipótese para explicar essa queda é a de que MB tenha diminuído o seu engajamento com a tarefa porque descobriu, na época de aplicação desse pós-teste, que seria reprovado de ano na escola. A sua maior dificuldade continuou sendo os problemas sob a forma de balança (50%) e a estrutura semântica de comparação (33% de acerto). Apesar da queda no desempenho, MB manteve porcentagens de acerto acima daquelas apresentadas no pré-teste.

No pré-teste, PR apresentou menor porcentagem de acertos em problemas de subtração (27,67%), em problemas sob a forma de balança (17% de acertos) e de algarismos (33%). Poucos acertos nos problemas sob a forma de algarismo é incomum e pode estar relacionado à distração; PR pode ter resolvido rapidamente a prova sem verificar se os seus resultados estavam corretos. No Pós-teste 1, houve melhora significativa no desempenho de PR, que não apresentou 0% de acertos em nenhuma das provas. PR aumentou a porcentagem de acertos em problemas com estrutura de combinação (de 17% para 67%) e comparação (de 17% para 33%) e diminuiu nos problemas com estrutura de transformação (de 83% para 50%). No Pós-teste 2, apresentou queda significativa do seu desempenho. No dia da coleta PR resolveu rapidamente todos os problemas e, no meio da sessão, disse que estava “errando propositalmente”[16]. No Pós-teste 3, com a exigência de resposta de observação ao modelo (para evitar respostas ao acaso), verificou-se melhora de seu desempenho, que ultrapassou as porcentagens de acerto dos Pós-testes 1 e 2. Ocorreram alguns erros em problemas com estrutura semântica de combinação (83%) e sob a forma de algarismos e coleção (ambos com 83%). Diferentemente dos pós-testes anteriores, desta vez PR alcançou a mesma porcentagem de acertos nas três posições da incógnita (92%).

No pré-teste, VG não conseguiu acertar nenhum problema escrito e acertou muito pouco os problemas na forma de balança (17%). No Pós-teste 1, ocorreu uma

[16] Considerou-se que não seria adequado finalizar a sessão e reaplicá-la porque isso iria aumentar o efeito de experiência com os testes.

melhora considerável. VG acertou 33% dos problemas escritos e alcançou uma média de 56% de acertos. No Pós-teste 2, o participante continuou exibindo melhoras no seu desempenho, alcançando 78% de acertos. Aparentemente, permaneceu apenas uma dificuldade com os problemas escritos com estrutura de comparação nos quais VG apresentou 17% de acertos, desempenho bem inferior ao alcançado nos outros dois tipos de estrutura semântica (83%). No Pós-teste 3, VG praticamente não apresentou erros (97% de acerto). Parece ter permanecido alguma dificuldade com a estrutura de comparação (83% de acerto), mas a melhora foi significativa quando se considera que o participante iniciou a pesquisa com 0% de acerto nos problemas escritos.

Por fim, foram observados alguns padrões de desempenho. JM, HC, PR e FS apresentaram redução na porcentagem de acertos após o ensino do algoritmo de adição. Isso pode ser o efeito do fato de que o participante pode ter tentado empregar o algoritmo de adição nos problemas de adição e subtração; se essa hipótese for verdadeira, o mais adequado seria ensinar os algoritmos de adição e subtração numa única sessão para evitar confusões. No Pós-teste 3, PS e MB apresentaram uma queda na porcentagem de acertos em relação ao Pós-teste 2. Novamente, é possível que esses participantes tenham empregado o algoritmo de subtração em problemas de adição e vice-versa. Deve-se considerar ainda o efeito da reprovação sobre o desempenho de MB. PR, FS, PS, MS e MB tiveram dificuldades para resolver problemas na forma de balança. Provavelmente, essa dificuldade se deve ao fato de que a instrução de como a balança funcionava pode não ter sido suficiente e/ou em função da presença de problemas escritos junto com a balança.

Ainda com base na Tabela 3, ao calcular a diferença entre o desempenho no pré-teste e a média dos desempenhos nos três pós-testes, notou-se que os participantes alcançaram um ganho médio de 22%. A partir da diferença entre pré-teste e Pós-teste 1, nota-se um ganho médio de 16%. Ao remover os dados dos três participantes que alcançaram no pré-teste mais de 65% de acerto (FS, HC e JM), verificou-se um ganho médio de 31% e na diferença entre pré-teste e Pós-teste 1 o ganho médio foi de 22%; todos esses dados estão muito próximos ao ganho médio obtido na pesquisa de Haydu et al. (2006) e isso considerando que não se teve sucesso no emprego dos problemas representados sob a forma de balança.

A Figura 6 apresenta um resumo dos dados apresentados na Tabela 3, destacando a porcentagem média de acertos no pré-teste e nos pós-testes por participante, o que permite visualizar o progresso de cada um longo da pesquisa.

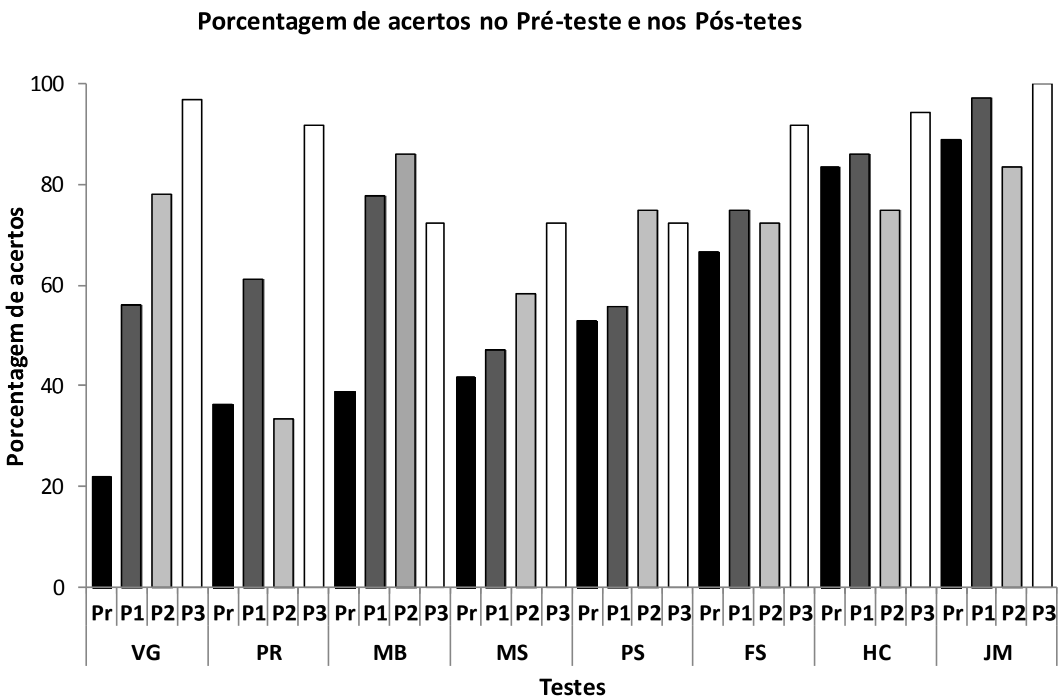


Figura 6. Porcentagem média de acertos no pré-teste (Pr) e nos pós-testes (P1, P2 e P3) do Experimento 1.

Observa-se na Figura 6 que todos os participantes chegaram ao final da pesquisa com uma porcentagem de acertos maior do que aquela obtida no pré-teste. Esse dado demonstra que, mesmo em casos nos quais a diferença é apenas sutil, a intervenção produziu melhora no desempenho dos participantes. Também fica claro nessa figura que todos os participantes apresentaram aumento nas porcentagens de acerto após a formação da classe de equivalência. Por outro lado, não há uma tendência de crescimento uniforme para todos os participantes ao longo de toda a pesquisa porque a partir das fases de ensino dos algoritmos, alguns participantes apresentaram aumento da porcentagem de acertos e outros, redução. Somente VG e MS apresentaram porcentagens de acerto que crescem uniformemente ao longo do experimento. No Pós-teste 2, PR, FS, HC e JM apresentaram redução na porcentagem de acertos e VG, MB, MS e PS apresentaram aumento. No Pós-teste 3, MB e PS apresentaram redução na porcentagem de acertos e os demais participantes aumento.

Desempenho do grupo no pré-teste e nos pós-testes

A Tabela 4 exibe a porcentagem média de acertos do grupo no pré-teste e nos pós-testes por tipo de problema. Com relação às sessões de ensino de algoritmos, todos os participantes alcançaram os critérios esperados para as sessões de ensino de algoritmos em uma única sessão.

Tabela 4
Porcentagem de acertos do grupo no pré-teste e nos pós-testes do Experimento 1

Grupo	Testes	Operação		Forma				Estrutura			Incógnita			Média
		Ad	Sub	Ag	Bl	Cl	St	TF	CP	CB	*a*	*b*	*c*	
Média	Pré	61	47	77	48	75	41	48	35	40	47	54	60	54
	Pós1	75	64	88	63	77	63	63	58	69	61	72	75	69
	Pós2	78	63	88	56	73	68	79	60	65	59	75	76	70
	Pós3	90	83	98	79	90	84	92	79	81	86	84	89	86

Nota. Ad = Adição; Sub = Subtração; Ag = Problema na forma de algarismo; Bl = Problema na forma de balança; Cl = Problema na forma de coleção; St = Problema escrito; TF = Estrutura semântica de transformação; CP = Estrutura semântica de comparação; CB = Estrutura semântica de combinação; *a*, *b* e *c* representam as posições da incógnita ($a+b=c$ ou $a–b=c$); Média = Média geral do pré-teste e pós-testes.

De acordo com a Tabela 4, no pré-teste, a porcentagem de acertos foi maior em problemas de adição (61%) do que em problemas de subtração (47%). Em média, os participantes acertaram mais quando os problemas tinham incógnitas na posição *c* (60%) e acertaram menos quando os problemas tinham incógnita nas posições *b* (54%)

e *a* (47%). A prova em que ocorreram mais acertos foi a com problemas na forma de algarismos (77%), seguida pelas provas com coleções (75%) e balanças (48%). A menor porcentagem de acertos ocorreu na prova com problemas escritos (41%). A estrutura semântica mais difícil foi a de comparação, com 35% de acertos; a estrutura de combinação obteve 40% de acertos e a de transformação 48%. O desempenho geral foi de 54% de acertos. Quando esses cálculos são realizados sem considerar as provas com problemas escritos, verificou-se que nos problemas com incógnita em *b* os participantes apresentaram 77% de acerto, em problemas com incógnita em *c* alcançaram 67% e com incógnita em *a* 56%, demonstrando o efeito da forma de apresentação sobre a variável posição da incógnita (Capovilla et al., 1997; Haydu et al., 2001).

Apresentar menor porcentagem de acertos em problemas de subtração, na forma escrita, sendo os problemas com estrutura de comparação os mais difíceis, e em problemas com incógnita em *a*, são os resultados tipicamente esperados (Resnick e Rosenthal, 1974; Hiebert, 1982; Carpenter et al., 1988; Fayol, 1992; Geary, 1994; Nunes & Bryant, 1996; Verschaffel & de Corte, 1997). O que não se esperava encontrar (de acordo com Capovilla et al., 1997; Haydu et al., 2001; Iégas, 2003; Haydu, 2009) era uma baixa porcentagem de acertos nos problemas sob a forma de balança (48%), quando comparado com os problemas sob a forma de algarismos e coleções (77% e 75%, respectivamente). Considerando que os alunos da Liga da Leitura têm dificuldades para ler e escrever, provavelmente, a dificuldade com a balança ocorreu porque foi apresentada em conjunto com problemas escritos. Outra possibilidade que deve ser considerada é o fato de que as instruções sobre o funcionamento da balança podem não ter sido suficientes e/ou eficazes para todos os participantes. De fato, nenhum participante relatou saber o funcionamento da balança antes que o vídeo de instrução e o exemplo fossem apresentados. Portanto, embora a literatura científica indique que representar problemas sob a forma de uma balança ajude a melhorar o desempenho na resolução de problemas aditivos, isso nem sempre será verdade caso a instrução sobre o funcionamento da balança não fique clara ou algum outro elemento gerador de dificuldade esteja presente[17].

No Pós-teste 1, após a formação da classe de equivalência (ver Tabela 4), o grupo apresentou aumento na porcentagem de acertos em todos os tipos de problema, alcançando uma diferença média entre pré-teste e Pós-teste 1 de 16,25%. No Pós-teste 2, após o ensino do algoritmo de adição, ocorreram reduções das porcentagens de acerto, em relação ao teste anterior, nos problemas de subtração (de 64% para 63%), na forma de balança (de 63% para 56%), na forma de coleção (de 77% para 73%), com estrutura de combinação (de 69% para 65%) e com incógnita em *a* (de 61% para 59%). No Pós-teste 3, após o ensino do algoritmo de subtração, houve recuperação e aumento da porcentagem de acertos em todos os tipos de problemas, com uma diferença média em relação ao Pós-teste 2 de 16,25%. No teste de Wilcoxon bicaudal, houve diferença estatisticamente significativa entre pré-teste e Pós-teste 1 (z = -2,527, p = 0,012, r = -0,63) e Pós-testes 2 e 3 (z = -2,043, p = 0,041, r = -0,51). Nos apêndices são apresentados testes adicionais. O teste de Friedman indicou mudança estatisticamente significativa entre o desempenho dos participantes no início e ao final do experimento (X^2 = 12,3, p = 0,003).

A Figura 7 exibe quatro tipos de informações: (a) porcentagem de acertos do grupo no pré-teste e nos pós-testes, e a média dos três pós-testes, por tipo de operação (figura superior à esquerda); (b) porcentagem de acertos por posição da incógnita e tipo de operação (figura superior à direita); (c) porcentagem de acertos por estrutura semântica e tipo de operação (figura inferior à esquerda); e (d) porcentagem de acertos

[17] Na pesquisa de Costa (2010) a simples apresentação da balança como analogia para problemas de álgebra não foi suficiente para que os alunos conseguissem resolvê-los. Para alcançar esse resultado, foi preciso demonstrar como resolver a equação e então relacioná-la com uma balança.

por forma de apresentação e tipo de operação (figura inferior à direita). Para obter o dado do pós-teste, foi realizado o cálculo da média da porcentagem de acertos obtida em todos os pós-testes.

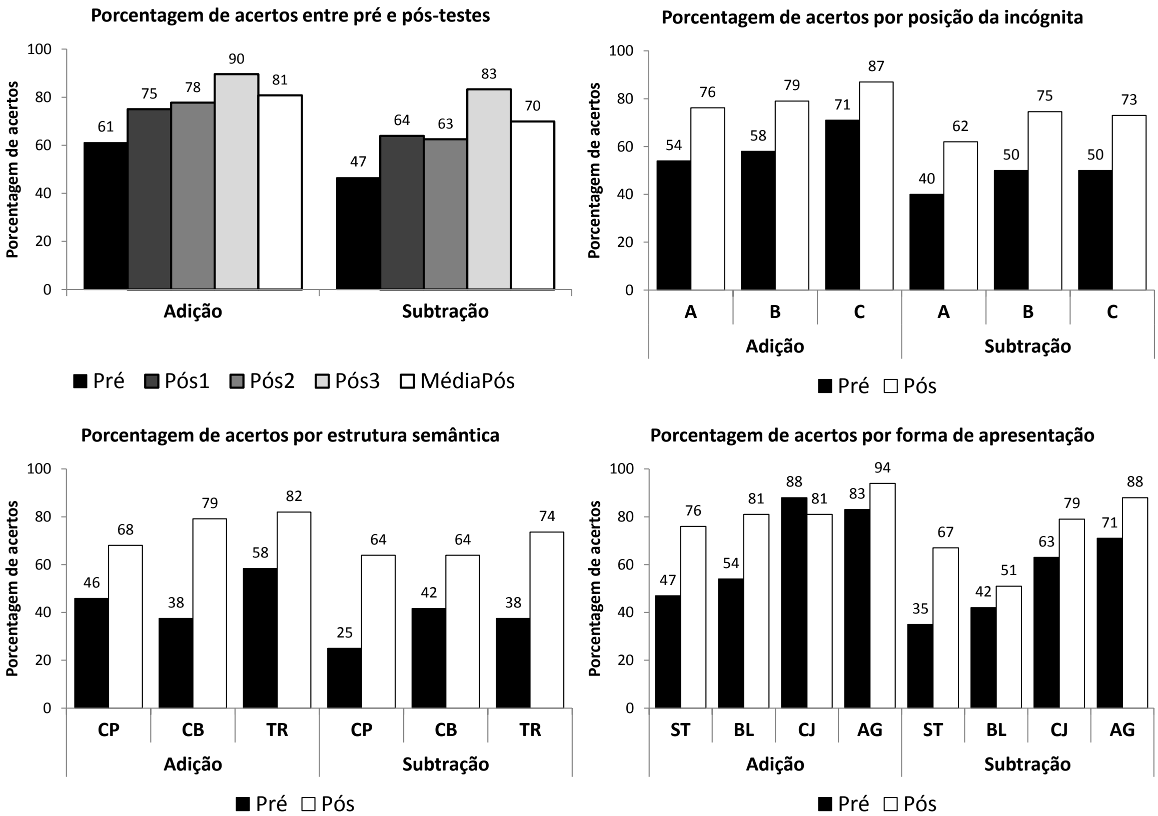


Figura 7. Porcentagem média de acertos por testes e por variável no pré-teste e no pós-teste do Experimento 1[18].

Observa-se na Figura 7 (porção superior à esquerda) que ocorreram mais acertos nos problemas de adição do que de subtração, tanto no pré-teste como nos pós-testes. Nos problemas de adição houve aumento na porcentagem de acertos a cada pós-teste, com crescimentos maiores entre pré-teste e Pós-teste 1 e entre os Pós-testes 2 e 3. Nos problemas de subtração o padrão foi o mesmo, exceto pelo fato de que ocorreu uma pequena redução na porcentagem de acertos entre os Pós-testes 1 e 2. O cálculo da média dos três pós-testes mostrou que nos dois tipos de operação o grupo alcançou uma

[18] **Posição da incógnita:** A, B, C; **Estrutura:** Transformação = TF; Combinação = CB; Comparação = CP; **Forma de apresentação:** Algarismo = AG; Balança = BL; Coleção = CJ; Escrito = ST.

porcentagem de acertos superior ao pré-teste (em problemas de adição a diferença foi de 20% e nos de subtração, 23%).

Na porção superior à direita da Figura 7, nota-se que, em problemas de adição, a maior parte dos acertos no pré-teste ocorreu quando a incógnita estava em *c*; já nos problemas de subtração ocorreram mais acertos quando a incógnita estava em *b*. Uma hipótese para explicar esse dado é a de que crianças desconsideram as informações do problema e simplesmente selecionam todos os valores que encontram e realizam alguma operação com eles (Verschaffel & de Corte, 1997). Portanto, é provável que, independente da posição da incógnita, os participantes tenham simplesmente realizado subtrações com os valores disponíveis no problema todas as vezes que identificaram o sinal de menos. Isso pode explicar a elevada porcentagem de acertos na posição *b* porque num problema desse tipo, por exemplo, “4-?=2”, subtrair os valores dados, ou seja, quatro e dois, de fato produz a resposta correta, dois.

Com relação ao pós-teste, é preciso destacar que houve aumento na porcentagem de acertos em todas as posições da incógnita e que, em alguns casos (por exemplo, problemas de adição com incógnita em *a* e *c*), a diferença nas porcentagens de acertos em cada posição não ficou tão distante entre si como no pré-teste, sugerindo que as dificuldades com a posição da incógnita reduziram significativamente.

Sobre as estruturas semânticas (parte inferior da Figura 7 à esquerda), no pré-teste e nos pós-testes, problemas de adição com estrutura de transformação foram mais fáceis que problemas com estruturas de comparação ou combinação, o que está em concordância com os dados de outros estudos (Fayol, 1992; Geary, 1994; Nunes & Bryant, 1996; Verschaffel & de Corte, 1997). Nos problemas de subtração, verificou-se no pré-teste que mais acertos foram apresentados diante da estrutura de combinação; na realidade, apenas um pouco acima da porcentagem de acertos na estrutura de transformação. Já nos pós-testes a estrutura mais fácil, replicando dados da literatura, foi a de transformação. Em média, houve aumento da porcentagem de acertos em todos os três tipos de estrutura semântica e uma aproximação das porcentagens de acerto, sugerindo novamente redução de dificuldades na resolução de problemas.

Em relação à forma de apresentação (porção inferior da Figura 7 à direita), em comparação aos resultados obtidos por Haydu et al. (2001), era esperada uma porcentagem média de acertos mais parecida entre os problemas na forma de algarismo, coleção e balança. Problemas de adição e subtração nas formas de algarismo ou coleção foram sempre mais fáceis que os demais, exceto nos pós-testes em que ocorreu uma pequena redução na porcentagem de acertos diante de problemas de adição na forma de coleção. Talvez esse desempenho seja efeito de distração porque era preciso contar a quantidade de elementos de cada coleção para efetuar os cálculos. Nos demais casos, verificou-se aumento da porcentagem de acertos em todas as formas de apresentação de problemas, mesmo diante de problemas nas formas de balança e escrita, que foram os mais difíceis do pré-teste. Novamente, as porcentagens de acerto se aproximaram nos pós-testes, sugerindo redução de dificuldades.

No teste de generalização, todos alcançaram 100% de acertos. Embora não fossem problemas especialmente complicados, é preciso considerar que (a) traziam valores, 10 a 15, acima daqueles a que os participantes foram expostos ao longo da pesquisa; (b) não havia nenhum número apresentado na tela do ProgMTS que pudesse servir de dica da possível resposta (o experimentador é que deveria registrar acerto ou erro diante da resposta verbal vocal do participante); e (c) metade dos problemas foi ditada, ou seja, eles não tinham como consultar os valores do problema na tela do computador conforme estavam habituados. O dado parece reforçar o argumento de que o experimento trouxe ganhos para os participantes.

Os resultados sugerem que o procedimento que, com maior segurança, produziu melhoras foi o ensino de discriminações condicionais entre diferentes formas de apresentação dos problemas. O ensino dos algoritmos ajudou, mas não produziu uma melhora uniforme para todos os participantes, conforme observado nos Pós-testes 2 e 3. Embora cada criança tenha o seu próprio ritmo para aprender, é possível interpretar quedas no desempenho como produtos de um procedimento de ensino que precisa ser revisto, por exemplo, em termos das instruções empregadas (provavelmente precisem ser simplificadas) e da sequência de ensino. Parece ser muito importante ensinar numa mesma sessão os algoritmos de adição e subtração para evitar que o algoritmo de adição seja inadvertidamente aplicado a problemas de subtração e vice-versa. É importante indicar que os participantes da pesquisa reclamaram que as sessões e o experimento como um todo foram muito longos. Em parte isso aconteceu porque além das atividades da pesquisa de Matemática, eles tinham que realizar as sessões de ensino de leitura-escrita da Liga da Leitura.

Com o objetivo de corrigir problemas encontrados nesse experimento (por exemplo, dificuldade com a balança e na fase de ensino de algoritmos), foi realizado um segundo experimento para avaliar o efeito da formação de dois conjuntos de classes de equivalência (adição e subtração) sobre o comportamento de resolver problemas com três diferentes formas de apresentação, dois tipos de estruturas semânticas e três posições da incógnita. Além da fase de ensino de algoritmos, foi incluída também uma fase de treino de resolução de problemas sob a forma de uma balança, considerando os resultados positivos obtidos por Iégas (2003).

Experimento 2

Método

Visão geral

Delineamento de sujeito único, composto pelas seguintes fases: (a) medida da VD durante a linha de base (pré-teste); (b) inserção da VI 1; (c) medida da VD (Pós-teste 1); (d) inserção da VI 2; (e) medida da VD (Pós-teste 2); (f) medida da VD (Teste de Generalização 1); (g) inserção da VI 3; (h) medida da VD (Pós-teste 3); (i) medida da VD (Teste de Generalização 2). A VD foi a resposta-solução aos problemas aditivos. A VI 1 foi a formação de dois conjuntos de classes de equivalência, uma de adição e outra de subtração, entre quatro diferentes formas de apresentação de problemas. A VI 2 foi o treino de resolução de problemas na forma de balança e a VI 3 o ensino dos algoritmos de adição e subtração.

Participantes

Oito crianças com idades entre 7 e 12 anos, cujos dados de sexo e escolaridade estão na Tabela 5. Todos estudavam numa escola municipal da cidade de São Carlos. Segundo relato dos pais, nenhum deles utilizava medicamento permanente ou possuía qualquer tipo de limitação sensorial, motora ou intelectual. Não foi avaliada a presença de dificuldades e transtornos de aprendizagem na amostra selecionada. Todos eram experimentalmente ingênuos em relação a pesquisas sobre ensino-aprendizagem da Matemática, mas faziam parte da Liga da Leitura e já possuíam experiência com tarefas de MTS. Além disso, também não eram inexperientes em relação à resolução de problemas de adição e subtração com um e dois dígitos e incógnita na posição *c* por já terem sido expostos a esse conteúdo na escola.

Tabela 5

Caracterização dos participantes do Experimento 2

Características	FG	NV	AQ	GS	MD	CB	LP	SP
Sexo	Fem.	Fem.	Fem.	Masc.	Fem.	Fem.	Fem.	Fem.
Idade	7a11m	8a0m	8a1m	8a1m	8a6m	9a0m	9a6m	11a3m
Cursando	2º ano	2º ano	3º ano	3º ano	3º ano	3º ano	5º ano	5º ano

Seleção dos participantes

Foram selecionadas exclusivamente crianças do Programa 2 de leitura e que apresentaram baixo desempenho (critérios idênticos aos do Experimento 1) em três provas, (a) problemas escritos, (b) balança e (c) algarismo, elaboradas para o Experimento 2 e que compuseram as fases de pré-teste e pós-teste. Havia uma quarta prova, avaliação da classe de equivalência, que não foi considerada no cálculo da porcentagem de acertos das sessões de pré-teste e pós-testes.

Local e Materiais

A coleta foi realizada na mesma sala do Experimento 1 e, desta vez, foi utilizado apenas o *software* ProgMTS (Marcicano, Carmo, & Prado, 2011).

Estímulos

Os participantes foram expostos a três tipos de apresentação de problemas: (a) problemas sob a forma de algarismos; (b) problemas escritos, com duas estruturas semânticas, transformação e comparação; e (c) problemas sob a forma de balança. Os problemas poderiam ter uma de três posições de incógnita: *a*, *b* e *c*. O Experimento 2 difere do Experimento 1 nos problemas escritos que, desta vez, continham uma pergunta, e nos problemas sob a forma de balança que nunca foram apresentados junto com qualquer instrução escrita. Além disso, no Experimento 2 não foram empregados problemas na forma de coleções, uma das medidas adotadas para tornar o experimento menos cansativo. A Tabela 6 exibe exemplos dos tipos de estímulo utilizados.

Tabela 6

Formas de apresentação dos problemas empregados no Experimento 2

Algarismo	Problema escrito	Balança
? + 2 = 4	João tinha ? pipas. Ganhou mais duas e ficou com quatro ao todo. Quantas pipas o João tinha?	
3 + ? = 5	Edu tinha três bolas. Ganhou mais ? e ficou com cinco ao todo. Quantas bolas o Edu ganhou?	
5 + 4 = ?	Ana tinha cinco bolas. Ganhou mais quatro e ficou com ? ao todo. Com quantas bolas a Ana ficou?	

Os problemas tinham apenas valores e resultados entre um e nove. Foi realizada (a) variação de posição dos estímulos-comparação e (b) variação de ordem de apresentação dos problemas entre as sessões. Todos os tipos de problemas escritos utilizados neste experimento, bem como os valores dos problemas utilizados em cada fase, podem ser consultados nos apêndices (ver Tabela 12).

Procedimentos

Comandos e procedimentos de correção

Os comandos e consequências para acerto e erro foram os mesmos do Experimento 1. A única mudança nas consequências para acertos ocorreu nas sessões de treino de resolução de problemas na forma de balança: o vídeo de uma balança sendo equilibrada era apresentado contingente ao acerto. Caso o participante errasse a resposta, ele simplesmente ouviria “Não, não é”. Cada tentativa podia ser apresentada por, no máximo, três vezes.

Os treinos e testes de discriminações condicionais foram similares aos do Experimento 1. A diferença foi que, desta vez, dos três estímulos-comparação, um representava integralmente o estímulo-modelo e os outros dois apresentavam valores diferentes, porém apresentavam a mesma posição da incógnita. As tentativas em que o participante teve que encontrar o valor da incógnita, foram idênticas às do Experimento 1 e o teste de generalização diferiu apenas na forma do participante dar a resposta-solução. No lugar de verbaliza-la, ele deveria selecionar um de 15 estímulos-comparação (algarismos de um a 15) apresentados na tela do computador.

Fases da pesquisa

As sessões foram realizadas individualmente, exceto nas situações em que o experimentador tinha que fornecer instruções ou ditar um problema. Antes do pré-teste, todos os participantes foram expostos a um vídeo que fornecia instruções sobre como cada tipo de problema deveria ser resolvido; durante o vídeo o participante era solicitado a resolver alguns problemas, no mesmo padrão adotado para os problemas presentes no pré-teste e pós-testes. Contudo, não era dado *feedback* sobre acerto ou erro. Nas sessões de pré-teste e pós-teste foram aplicadas três provas, uma para cada forma de apresentação e outra de avaliação da classe de equivalência, num total de 108 questões. Ao final das três primeiras provas do pré-teste (problemas escritos, algarismo e balança), antes da avaliação sobre a existência de classes de equivalência entre diferentes formas de apresentação de problemas, foram apresentadas três tentativas acompanhadas por instruções que explicavam para o participante que ele deveria identificar qual estímulo-comparação correspondia ao estímulo-modelo. Os estímulos empregados foram diferentes daqueles utilizados na avaliação e no treino e teste das discriminações condicionais.

Para as sessões de pré-teste e de pós-teste, foram construídas três provas, uma para cada forma de apresentação dos problemas e mais uma para avaliar se os participantes já haviam formado antes mesmo do início do experimento classes de equivalência entre as diferentes formas de apresentação dos problemas. Exceto a prova com problemas escritos e a avaliação da classe de equivalência, cada prova foi composta por seis problemas, cada um deles repetido três vezes, ou seja, ao todo, a prova continha 18 problemas. Desses 18, nove foram de adição e nove de subtração. Havia três problemas para cada posição da incógnita. A prova com problemas escritos foi composta por 12 problemas, cada um repetido três vezes, de modo que, ao todo, foram 36 problemas, sendo 18 de adição e 18 de subtração. Desses 18, nove eram com estrutura semântica de transformação e nove de comparação. Desses nove, três possuíam incógnita em *a*, três em *b* e três em *c*. A estrutura de comparação foi empregada apenas no pré-teste e nos pós-testes. Nas demais sessões, os participantes foram expostos somente à estrutura de transformação.

Após o término das quatro provas do pré-teste, caso o participante fosse selecionado, era feito um treino preparatório para a resolução de problemas na forma de balança, em que o participante foi explicitamente ensinado a equilibrá-la e teve *feedback* para acerto e erro. Isso foi feito porque esta era uma forma de apresentação de problemas a que os participantes não estavam habituados, de modo que era preciso ter certeza de que eles haviam compreendido o seu funcionamento, o que exigia mostrar para a criança uma balança equilibrando em função de a solução correta do problema ter sido identificada. A instrução sobre quais métodos podiam ser utilizados para resolver os problemas e o procedimento diante de perguntas sobre como resolver um problema ou se o resultado estava correto, foram os mesmos do Experimento 1.

Os procedimentos de ensino e teste das discriminações condicionais foram os mesmos empregados no Experimento 1, com apenas duas diferenças: (a) foram utilizados menos problemas, com o objetivo de tornar esta fase menos aversiva para os participantes, que reclamaram no Experimento 1 das sessões muito longas. Eram ensinados ao todo três tipos de problema, um para cada posição da incógnita, havendo três tentativas de ensino e três de sonda para cada problema. Por serem menos problemas, o critério para avançar foi de 100%. Nos testes de simetria, transitividade e equivalência o critério de aprovação era obter mais que 80% de acerto; (b) havia dois conjuntos de discriminações condicionais: uma para os problemas de adição e outro para os problemas de subtração. Foram ensinadas e testadas primeiro o conjunto de relações da classe de adição e depois as de subtração. A Figura 8 exibe as relações ensinadas (linhas contínuas) e testadas (linhas descontínuas). Para os dois conjuntos de classes de estímulos, foram ensinadas as relações Balança (A) e Algarismo (B) e Balança (A) e Problema escrito (C) e foi avaliado se ocorria a emergência das relações BA, CA, BC e CB.

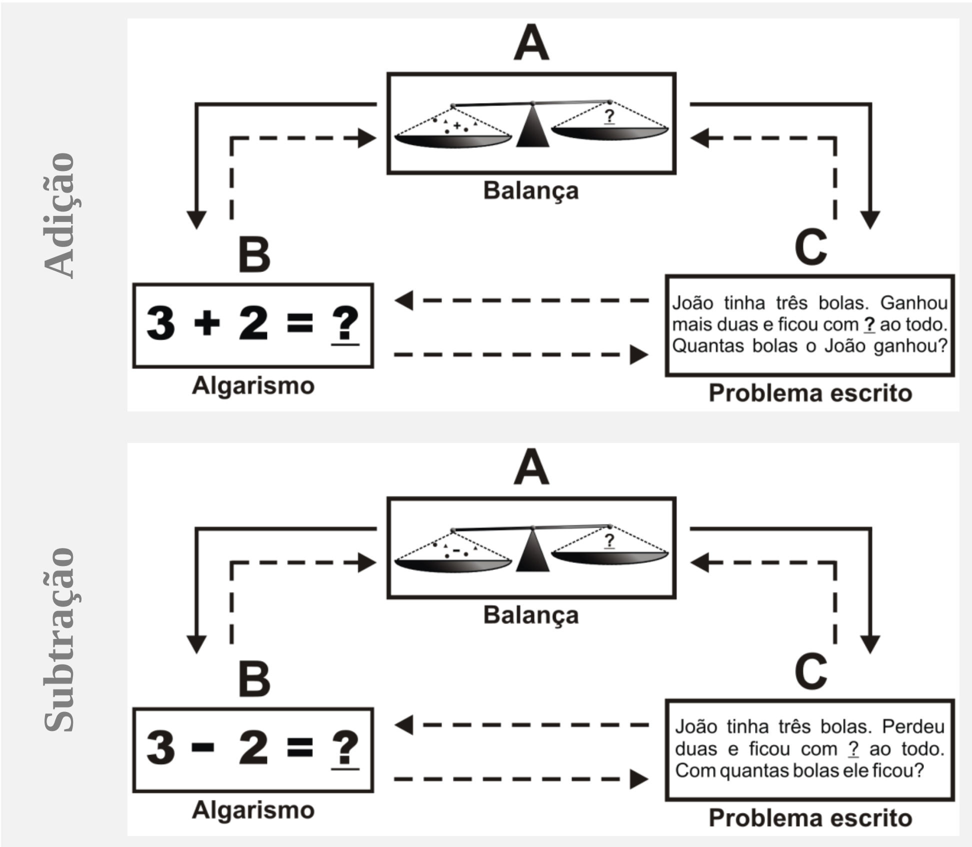


Figura 8. Relações entre estímulos ensinadas e testadas nas sessões de treino e teste de discriminações condicionais do Experimento 2.

A fase de resolução de problemas sob a forma de balança teve como requisito para que o participante avançasse a obtenção de 100% de acerto, dada a importância de garantir que ele era capaz de resolver esse tipo de problema. Só assim seria possível averiguar se o modelo da balança teve ou não impacto sobre o desempenho dos participantes nos demais tipos de problema. Em seguida, foi aplicado o Teste de Generalização 1 que envolvia 24 tentativas, sendo 12 com problemas escritos e 12 ditados. Desses 12, seis foram de adição e seis de subtração. Desses seis, dois eram com incógnita na posição *a*, dois na *b* e dois na *c*. Não foi dado *feedback* para acertos e erros. Assim como no Experimento 1, o experimentador repetiu a instrução de que os participantes poderiam resolver os problemas do modo que considerassem mais conveniente e acrescentou que poderiam, por exemplo, utilizar "riscos no papel" para representar os valores.

Os procedimentos para ensino dos algoritmos foram diferentes dos empregados no Experimento 1 porque foi realizada apenas uma sessão para ensino dos algoritmos de adição e subtração. O critério para avançar era de 100% e não havia fase de treino. Finalizado o ensino dos algoritmos, era aplicado o Pós-teste 3. Os algoritmos ensinados foram os mesmos do Experimento 1, mas eles foram simplificados. O algoritmo para os problemas de adição com incógnita nas posições *a* (exemplo, "?+2=4") e *b* (exemplo: "2+?=4") foi: "A conta é de mais ou de menos? Isso é de mais. Não importa onde está a interrogação. Basta você ver quanto você tem (valor na posição *a* ou *b*) e quanto falta para chegar ao resultado (valor da posição *c*). Quanto temos aqui (posição *a* ou *b*)? [dois dedos eram levantados]. Quanto falta para chegar neste resultado? [mais dois dedos eram levantados; o valor da incógnita correspondia à quantidade de dedos levantados]".

O algoritmo para problemas de subtração com incógnita em *a* (exemplo, "?–3=2") foi: "A conta é de mais ou de menos? Isso é de menos. A interrogação está no começo ou no meio? Isso, no começo. Então você vai somar este número aqui (valor da posição *b*, no caso 3) [três dedos eram levantados] com este outro número aqui (valor da posição *c*, no caso 2) [mais dois dedos eram levantados e a soma de todos os dedos correspondia ao valor da incógnita na posição *a*]". Para os problemas de subtração com incógnita na posição *b* (exemplo, “5–?=2”), foi adotada a seguinte regra: “A conta é de mais ou de menos? Isso é de menos. A interrogação está no começo ou no meio? Isso, no meio. Então você vai fazer uma conta de menos com este número aqui (valor da posição *a*, no caso 5) [cinco dedos eram levantados] e este outro número aqui (valor da posição *c*, no caso 2) [dois dedos eram abaixados e os dedos levantados que haviam sobrado eram contados para fornecer o valor da incógnita em *b*]”.

Depois da execução do algoritmo, o experimentador solicitava que o participante colocasse o valor obtido no lugar da interrogação e checasse se o seu resultado estava correto. Por exemplo, se a conta era “5-?=2” e o participante obtinha o valor “3” após executar o algoritmo, ele deveria, em seguida, substituir a interrogação pelo valor encontrado, “3”, e verificar se a conta estava correta: cinco menos três é igual a dois? Se sim, o valor encontrado era a interrogação, caso contrário o algoritmo tinha de ser executado novamente. Após o ensino dos algoritmos foi aplicado o Pós-teste 3, seguido pelo Teste de Generalização 2. Nos apêndices há um resumo do delineamento experimental (ver Tabela 11).

Procedimentos de análise de dados

Foram realizadas as mesmas análises empregadas no Experimento 1, com a diferença de que foram analisados também o alcance dos critérios de desempenho nas sessões de treino com a balança. Além disso, duas novas análises foram acrescentadas: (a) análise de eficiência e (b) análise da distância do erro.

O cálculo da eficiência foi feito pela divisão da porcentagem de acertos em cada prova nas fases de pré-teste e pós-testes pelo tempo total, em segundos, de duração dessas provas em cada uma dessas fases. Os dados de duração das provas do Experimento 2 foram todos obtidos automaticamente. No Experimento 1, por outro lado, apenas os dados das provas com problemas na forma de algarismo e coleção foram obtidos automaticamente. A duração das provas com problemas na forma escrita e de balança foi obtida por meio do registro do tempo inicial e final da sessão. Porém, muitas provas foram aplicadas num mesmo dia e, em alguns casos, não foi feito o registro do horário final de término das sessões. Portanto, os dados referentes a essas duas provas devem ser analisados com cuidado porque não são precisos; servem apenas para fornecer um parâmetro de qual pode ter sido a eficiência dos participantes.

No Experimento 1, as provas com problemas nas formas de algarismo, coleção e balança tinham 6 problemas e as provas com problemas escritos tinham 18. No Experimento 2, as provas com problemas na forma de algarismo e balança tinham 18 problemas cada uma e a prova com problemas escritos, 36 problemas. Portanto, ao comparar a eficiência nas diferentes formas de apresentação, é preciso considerar que, nos dois experimentos, a duração média das provas com problemas escritos tende a ser maior, o que gera uma eficiência menor. Ao comparar os dois experimentos, é preciso considerar que as provas do Experimento 2 foram maiores, o que produz uma eficiência menor neste experimento em relação ao primeiro.

A expressão “distância do erro” significa a diferença entre a resposta correta e a resposta dada pelo participante. Por exemplo, se a resposta correta era 10 e o participante respondeu 3, a distância do erro foi de 7. Da mesma forma, se a resposta foi 17, a distância do erro também foi 7. Se a resposta dada for correta, a distância é igual a zero. As distâncias médias de erros são o resultado do cálculo da média aritmética da distância dos erros de todos os participantes diante de uma fase de teste.

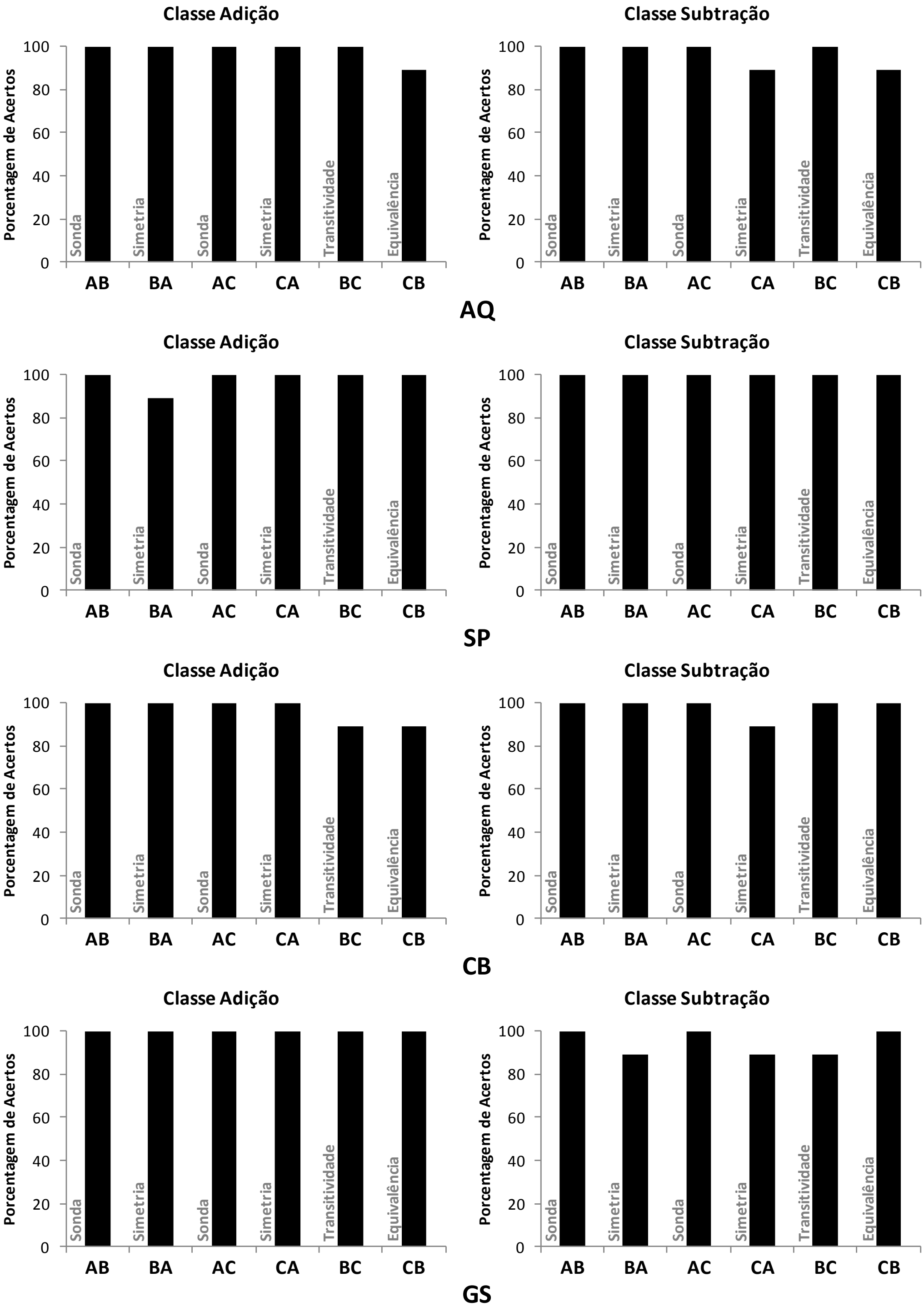
Resultados e Discussão

Foi adotada a mesma forma e ordem de apresentação dos dados empregada no Experimento 1.

Formação das classes de equivalência

A Figura 9 exibe a porcentagem de acertos nas sondas e testes de equivalência para os dois conjuntos de classes de equivalência (adição e de subtração).

Porcentagem de acertos nas sondas e testes de equivalência



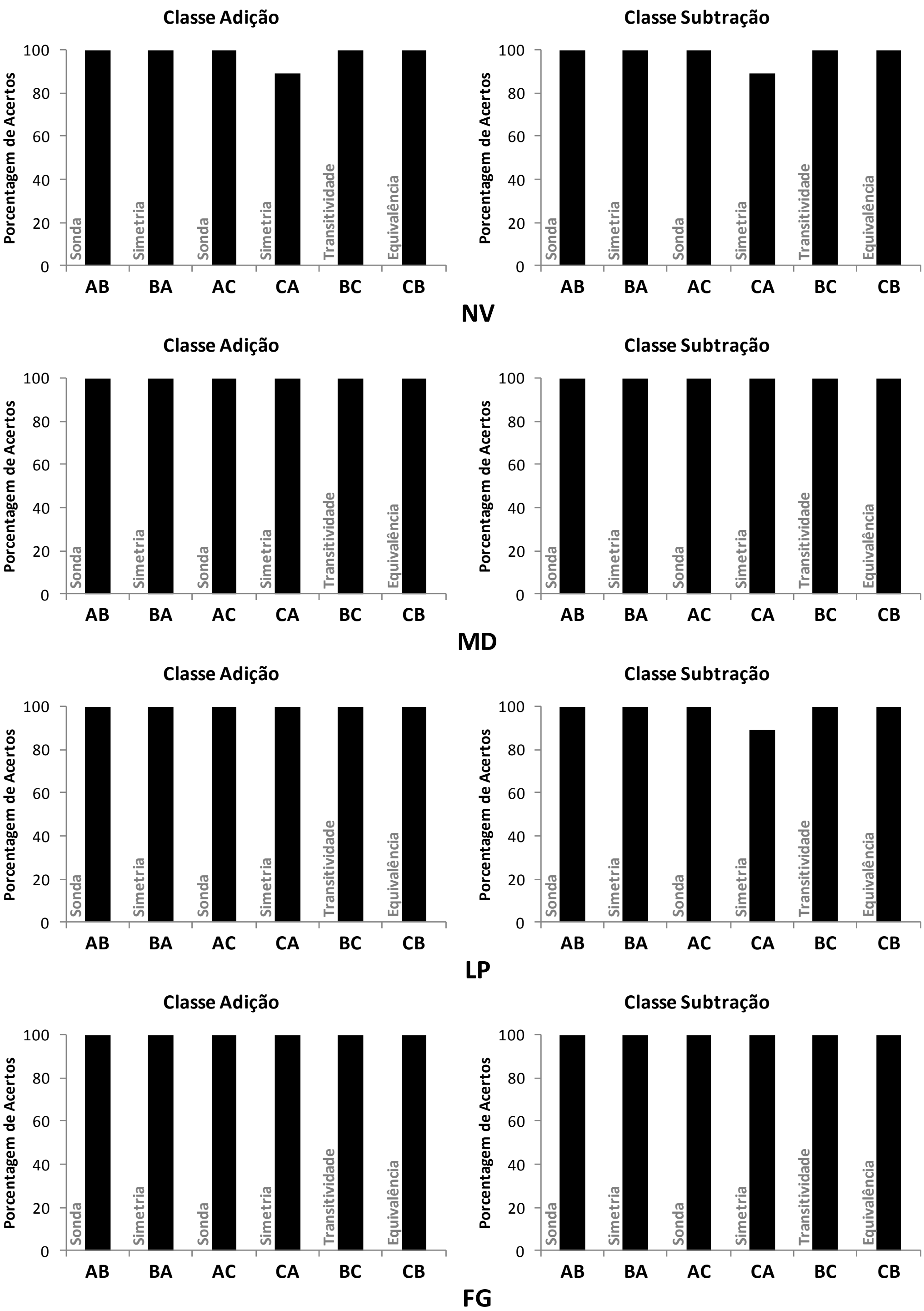


Figura 9. Porcentagem de acerto nas sondas e testes de equivalência do Experimento 2.

Na Figura 9 nota-se que todos os participantes alcançaram porcentagens de acerto acima de 88% em todas as sondas e testes de simetria, transitividade e equivalência. Esse dado sugere que ocorreu a formação das classes de equivalência entre três diferentes formas de apresentação de problemas de adição e de subtração.

Contudo, essa afirmação precisa ser avaliada com base no teste que avaliou se os participantes já haviam formado os dois conjuntos de classes de equivalência antes do início do estudo. As porcentagens médias de acerto das relações dos dois conjuntos de classes de adição e de subtração foram, respectivamente: (a) AQ apresentou 78% e 61%; (b) SP apresentou 56% e 61%; (c) CB apresentou 56% e 72%; (d) GS alcançou 72% e 89%; (e) NV apresentou 72% e 56%; (f) MD apresentou 94% nos dois conjuntos de classes de equivalência; (g) LP alcançou 89% e 100%; (h) FG alcançou 94% em ambas. Essas não são porcentagens baixas.

É possível que este mesmo dado (elevadas porcentagens de acerto nas tentativas de discriminação condicional no pré-teste) fosse obtido no Experimento 1 e no trabalho de Haydu et al. (2006) porque o ensino de algumas dessas relações são comuns na rotina escolar, como, por exemplo, a tradução do problema escrito para a forma de algarismos (Carpenter et al., 1988). Provavelmente, o treino de discriminações condicionais é eficaz porque ele ajuda o participante a ficar sob controle das propriedades relevantes do problema, o que diminui a chance de erros. Além disso, ocorre também a expansão da classe de equivalência na medida em que, por exemplo, a balança é relacionada às outras formas de apresentação. Isso pode ajudar a criança, pois as estratégias utilizadas para resolver problemas nesse formato podem ser utilizadas nos demais tipos de problemas que fazem parte da classe (Haydu, 2009; Haydu et al., 2010).

No treino da classe de problemas de adição, na sessão de ensino da relação balança-algarismo (AB), NV e SP repetiram duas vezes a sessão para atingir o critério, AQ e FB repetiram uma. Apenas GS teve que repetir uma vez o teste de simetria dessa relação. No ensino da relação balança-sentença (AC), LP, SP e MD repetiram três vezes a sessão, CB duas vezes e FB uma. Novamente, apenas GS repetiu uma vez o teste de simetria dessa relação. No treino da classe de problemas de subtração, no ensino da relação balança-algarismo (AB), LP e GS repetiram uma vez a sessão. No ensino da relação balança-sentença (AC), MD repetiu duas vezes a sessão e SP e NV repetiram uma.

Desempenho por participante no pré-teste e nos pós-testes

A Tabela 7 exibe a porcentagem de acertos por participante diante de cada uma das variáveis independentes manipuladas no Experimento 2. No treino de resolução de problemas na forma de balança, SP e CB alcançaram os critérios esperados em oito sessões, NV e MD em seis, GS e LP em cinco, AQ e FB em quatro. Todos os participantes alcançaram os critérios da fase de ensino de algoritmos em uma única sessão.

Tabela 7

Porcentagem de acertos por participante no pré-teste e nos pós-testes do Experimento 2

Part.	Testes	Operação		Forma			Estrutura		Incógnita			Média
		Ad	Sub	Ag	Bl	St	TF	CP	*a*	*b*	*c*	
AQ 3º ano	Pré	56	28	67	28	36	44	28	33	33	58	42
	Pós1	78	75	94	100	56	78	33	75	67	88	76
	Pós2	92	89	78	94	94	100	89	83	96	92	90
	Pós3	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
GS 3º ano	Pré	44	50	44	44	50	50	50	17	58	67	47
	Pós1	56	47	78	56	36	44	28	38	54	63	51
	Pós2	83	83	94	72	83	89	78	75	92	83	83
	Pós3	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
SP 5º ano	Pré	36	25	22	44	28	17	39	25	42	25	31
	Pós1	58	36	56	50	42	39	44	42	42	58	47
	Pós2	97	83	100	100	81	89	72	88	96	88	90
	Pós3	97	92	100	89	94	94	94	88	96	100	94
CB 3º ano	Pré	44	58	83	39	42	50	33	25	46	83	51
	Pós1	56	53	78	67	36	33	39	21	54	88	54
	Pós2	78	89	100	78	78	83	72	63	92	96	83
	Pós3	97	100	100	100	97	94	100	96	100	100	99
MD 3º ano	Pré	42	44	78	22	36	50	22	38	38	54	43
	Pós1	78	83	83	94	72	72	72	79	75	88	81
	Pós2	92	94	89	100	92	94	89	92	92	96	93
	Pós3	100	97	100	100	97	100	94	96	100	100	99
NV 2º ano	Pré	22	25	22	11	31	33	28	4	25	42	24
	Pós1	61	67	78	89	44	72	17	50	58	83	64
	Pós2	94	89	94	83	94	100	89	83	96	96	92
	Pós3	97	92	89	100	94	89	100	96	96	92	94
LP 5º ano	Pré	31	42	6	50	44	39	50	17	25	67	36
	Pós1	86	69	78	83	75	89	61	75	75	83	78
	Pós2	92	97	100	100	89	89	89	92	100	92	94
	Pós3	100	97	94	100	100	100	100	100	100	96	99
FG 2º ano	Pré	61	56	100	44	44	56	33	38	58	79	58
	Pós1	92	75	83	67	92	89	94	67	88	96	83
	Pós2	94	97	94	100	94	94	94	92	100	96	96
	Pós3	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

Nota. Ad = Adição; Sub = Subtração; Ag = Algarismo; Bl = Balança; St = Problema escrito; TF = Estrutura de transformação; CP = Estrutura de comparação; CB = Estrutura de combinação; *a*, *b* e *c* representam as posições da incógnita (*a*+*b*=*c* ou *a*–*b*=*c*); Média = Média geral do participante no pré-teste e pós-testes.

No pré-teste, AQ apresentou menos acertos em problemas de subtração (28%), nas incógnitas *a* e *b* (ambas com 33%), nos problemas sob a forma de balança (28%) e escrita (36%) e na estrutura semântica de comparação (28%). No Pós-teste 1, o desempenho nos problemas de adição e subtração se aproximou (78% e 75%, respectivamente) e houve melhora de desempenho em problemas sob a forma de balança (100%), de escrita (56%), na estrutura de comparação (33%) e na incógnita *a* (75%). No Pós-teste 2, houve queda de desempenho em problemas sob a forma de algarismo (de 94% para 78%) e nos problemas na forma de balança (de 100% para 94%). Entretanto, verificou-se aumento na porcentagem de acertos nas incógnitas *a* e *b* (83% e 96%) e nos problemas escritos (de 56% para 94%); sendo que 89% dos problemas com estrutura de comparação foram resolvidos corretamente. No Pós-teste 3, AQ acertou todos os tipos de problemas.

No pré-teste, GS, surpreendentemente, acertou mais problemas escritos (50%) que nas formas de algarismo e balança (ambas com 44% de acertos). A mesma porcentagem de acertos, 50%, foi obtida nos problemas com estrutura de transformação e comparação; e, conforme esperado, ele acertou mais problemas com incógnita em *c* (67%) e menos em *a* (17%). No Pós-teste 1, apresentou uma queda de desempenho nos problemas escritos (36%). Ou seja, embora tenha ocorrido um ganho geral de desempenho entre pré-teste e Pós-teste 1 (de 47% para 51%), o desempenho de GS ainda era pouco estável porque alguns problemas que havia acertado mais no pré-teste passaram a ser os que ele acertou menos no Pós-teste 1. No Pós-teste 2, o desempenho do participante pareceu ter se estabilizado e a porcentagem de acertos nos diferentes tipos de problemas se aproximou. No Pós-teste 3, GS acertou todos os problemas demonstrando significativa melhora de desempenho.

No pré-teste, as menores porcentagens de acerto de SP ocorreram em problemas escritos (28%) e na forma de algarismo (22%), tendo acertado 44% dos problemas na forma de balança, na estrutura de transformação (17%) e em *a* e *c*, ambas com 25%. O bom desempenho nos problemas na forma de balança já no pré-teste sugere que o vídeo sobre o funcionamento da balança foi suficiente para essa participante resolver adequadamente problemas desse tipo. No Pós-teste 1, houve uma aproximação entre o desempenho diante das três formas de apresentação. Aproximaram-se também as porcentagens de acerto entre as duas estruturas semânticas: transformação (39%) e comparação (44%). No Pós-teste 2, houve 100% de acerto nos problemas nas formas de algarismo e balança e aumento na porcentagem de acertos nos problemas escritos, de 28% para 42% para 81% no Pós-teste 2. No Pós-teste 3, persistiu essa tendência geral de melhora, embora a porcentagem de acertos tenha se mantido constante diante de alguns tipos de problema ou caído um pouco, como ocorreu nos problemas sob a forma de balança, que caiu de 100% para 89% no Pós-teste 3. Ao longo de todo experimento apresentou uma tendência uniforme de crescimento da porcentagem de acertos.

No pré-teste, CB apresentou menor porcentagem de acertos nos problemas sob a forma de balança (39%), na estrutura de comparação (33%) e na incógnita em *a* (25%). No Pós-teste 1, houve aproximação no desempenho em problemas de adição (56%) e subtração (53%) e mais acertos em problemas na forma de balança (67%) do que escrita (que caiu de 42% para 36%). Verificou-se queda no desempenho em problemas na forma de transformação, de 50% para 33%. No Pós-teste 2, CB acertou 100% dos problemas na forma de algarismo e apresentou desempenho similar nos problemas na forma de balança e escrita, 78%. Nos problemas com incógnita em *c* a participante alcançou 96% de acerto, em *b* 92% e em *a* 63%. No Pós-teste 3, a participante acertou 99% dos problemas, demonstrando redução de dificuldades diante de aspectos do problema que, na fase de pré-teste, geravam erros.

No pré-teste, MD acertou menos problemas sob a forma de balança (22% de acerto) e escrita (36%), sendo que nesses problemas a estrutura semântica de comparação foi a mais difícil (22% de acerto). Em relação à incógnita, as porcentagens de acerto foram menores nas posições *a* e *b* (ambas com 38% de acertos). No Pós-teste 1, pode-se observar uma significativa mudança na porcentagem total de acertos, 81%, e uma redução da dificuldade com problemas sob a forma de balança (de 22% no pré-teste para 94% no Pós-teste 1). Essa participante também melhorou nos problemas escritos (72%), alcançando a mesma porcentagem de acerto (72%) nos dois tipos de estrutura semântica. Não obstante, o desempenho nesses problemas ainda foi menor que em problemas sob a forma de algarismo e balança. Nos Pós-testes 2 e 3, há uma clara aproximação das porcentagens de acerto em todos os tipos de problemas, tendo a participante alcançado no Pós-teste 3 99% de acertos.

No pré-teste, NV acertou menos problemas na forma de balança (11%) e algarismo (22%), especialmente, problemas com incógnita na posição *a* (4% de acertos). No Pós-teste 1, nota-se uma melhora significativa de desempenho (64%), sendo que desta vez problemas escritos foram os mais difíceis (44%), sobretudo, quando a estrutura foi de comparação (17%). Ocorreu também melhora no desempenho em problemas com incógnita em *a* (50%). Nos Pós-testes 2 e 3 pode-se observar que a participante praticamente acertou todos os problemas (92% e 94%, respectivamente) e que as porcentagens de acerto se aproximaram nos diferentes tipos de problemas.

No pré-teste, LP acertou pouco os problemas na forma de algarismo (6%), apresentando porcentagens parecidas nos problemas na forma de balança (50%) e escrita (44%). Não se sabe por qual motivo LP teve desempenho pobre nos problemas na forma de algarismo, cujo grau de dificuldade é baixo de acordo com a revisão de literatura feita no presente trabalho. Em termos de estrutura semântica, LP acertou menos os problemas com estrutura de transformação (39%). Houve também baixa porcentagem de acertos nos problemas com incógnita em *a* (17%). No Pós-teste 1 observou-se uma melhora significativa do desempenho (78% de acerto) com um desempenho equilibrado, ou seja, porcentagens de acerto similares diante dos diferentes tipos de problema. Essa tendência de melhora e desempenho equilibrado se manteve nos Pós-testes 2 e 3.

No pré-teste, FG apresentou menores porcentagens de acertos nos problemas sob a forma de balança e escrita (ambas com 44% de acertos). Nos problemas escritos, a estrutura de comparação gerou mais dificuldades (33% de acertos) que a de transformação (56%). FG acertou menos os problemas com incógnita em *a*. No Pós-teste 1, ocorreu uma melhora substancial no desempenho da participante (83%) , mas manteve-se uma dificuldade com problemas na forma de balança (67%) quando se compara com o desempenho nas formas de algarismo (83%) e escrita (92%). Houve melhora em problemas com incógnita em *a*, mas a porcentagem de acertos permaneceu menor que nas posições *b* e *c* (58% e 79%). Nos Pós-testes 2, FG alcança uma elevada porcentagem de acertos em todos os tipos de problema, atingindo, no Pós-teste 3, 100% de acerto.

Em resumo, CB e GS apresentaram uma pequena melhora, 3% e 4% respectivamente, entre pré-teste e Pós-teste 1. AQ, NV, MD, LP, FG e SP, por outro lado, alcançaram uma elevada diferença de porcentagem de acertos: SP apresentou ganho de 17%, FG de 25%, AQ de 35%, MD de 38%, NV de 40% e LP de 42% e. A diferença de acertos entre Pós-teste 1 e 2 também foi elevada para todos os participantes, variando entre 13% a 43%, o que sugere que o treino de resolução de problemas sob a forma de balança foi bastante efetivo para a redução de dificuldades específicas na resolução de problemas. No Pós-teste 3, por fim, todos os participantes melhoraram, pelo menos, 3%, sendo que CB melhorou 15% e GS, 17%.

A Figura 10 exibe a porcentagem média de acertos no pré-teste e nos pós-testes por participante, o que permite visualizar a sua evolução ao longo do Experimento 2.

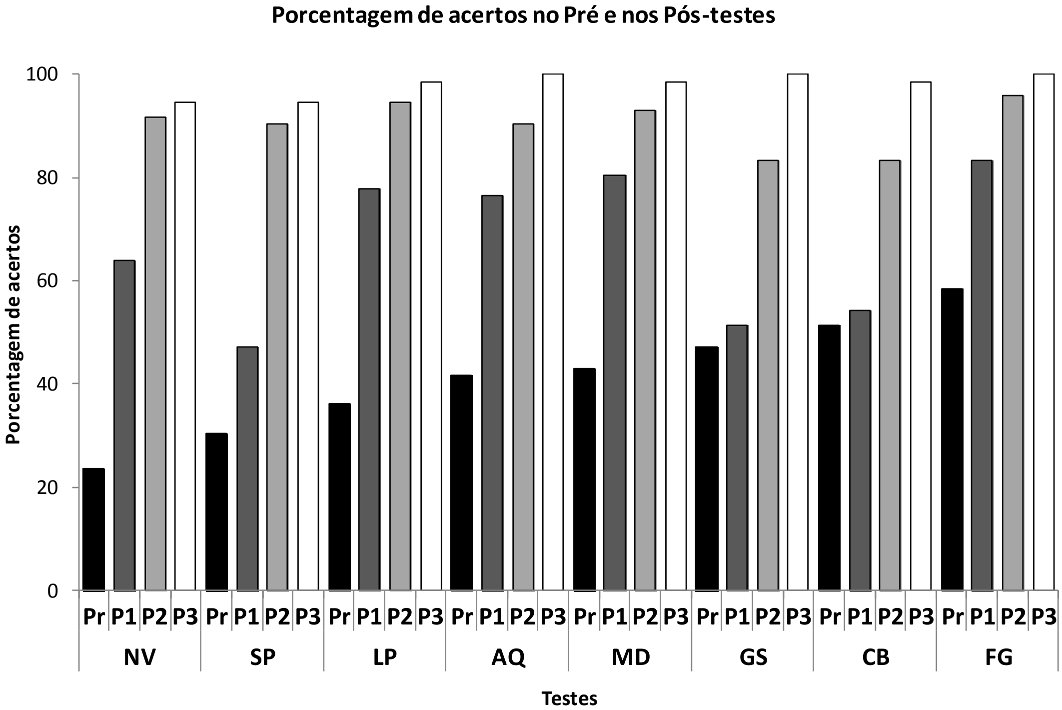


Figura 10. Porcentagem média de acertos no pré-teste (Pr) e nos pós-testes (P1, P2 e P3) do Experimento 2.

Nota-se na Figura 10 que, após a formação dos dois conjuntos de classes de equivalência (adição e subtração), todos os participantes apresentaram melhoras de desempenho, e o mesmo ocorreu nas fases de treino de resolução de problemas na forma de balança e de ensino dos algoritmos. Esse dado demonstra que, diferentemente do Experimento 1, todos apresentaram crescimento uniforme das suas porcentagens de acerto, em que pese o fato de que no pré-teste eles apresentaram porcentagens de acerto abaixo de 60%. Torna-se evidente a melhora de desempenho ao longo de cada fase do experimento. Ao final do Experimento 2, NV e SP haviam alcançado 94% de acerto, LP, MD e CB, 99%, e AQ, GS e FG, 100%. O ganho médio foi de 44%.

Desempenho do grupo no pré-teste e nos pós-testes

A Tabela 8 exibe a porcentagem média de acertos do grupo em cada tipo de problema do Experimento 2.

Tabela 8

Porcentagem de acertos do grupo no pré-teste e nos pós-testes do Experimento 2

Grupo	Testes	Operação		Forma			Estrutura		Incógnita			Média
		Ad	**Sub**	**Ag**	**Bl**	**St**	**TF**	**CP**	***a***	***b***	***c***	
Média	**Pré**	42	41	53	35	39	42	35	24	41	59	41
	Pós1	70	63	78	76	57	65	49	56	64	81	67
	Pós2	90	90	94	91	88	92	84	83	95	92	90
	Pós3	99	97	98	99	98	97	99	97	99	98	98

Nota. Ad = Adição; Sub = Subtração; Ag = Algarismo; Bl = Balança; St = Problema escrito; TF = Estrutura de transformação; CP = Estrutura de comparação; CB = Estrutura de combinação; *a*, *b* e *c* representam as posições da incógnita (*a*+*b*=*c* ou *a*–*b*=*c*).

Observa-se na Tabela 8 que, em média, os participantes apresentaram porcentagens de acertos muito próximas nos problemas de adição e subtração, 42% e 41%, respectivamente. Em relação à forma de apresentação dos problemas, verificou-se que apresentaram maior porcentagem de acertos em problemas sob a forma de algarismo (53%), seguida pelos problemas escritos (39%) e sob a forma de balança (35%). Neste primeiro momento, antes do treino preparatório, ainda se mantém uma baixa porcentagem de acertos em problemas na forma de balança. Esse dado, assim como ocorreu no Experimento 1, contraria a literatura (Haydu, 2009; Haydu et al., 2010). Em termos de estrutura semântica, a maior porcentagem de acertos foi apresentada em problemas com estrutura de transformação (42%). Houve maior porcentagem de acertos em problemas com incógnita em *c* (59%) e menor porcentagem de acertos em *a* (24%). Desconsiderando os dados dos problemas escritos, a porcentagem média de acertos por posição da incógnita é: 34% na posição *a*, 45% na posição *b* e 53% na posição *c*. Diferentemente do Experimento 1, no qual após desconsiderar os problemas escritos a maior porcentagem de acertos foi em problemas com incógnita em *b* e não *c*, no Experimento 2, com ou sem os problemas escritos permaneceu o padrão de menos acertos em *a* e mais acertos em *c*.

Nos pós-testes, verificou-se crescimento uniforme ao longo de todo o experimento, sendo que no último pós-teste as porcentagens de acerto estão muito próximas nos diferentes tipos de problema, o que indica redução do grau de dificuldade de problemas que no pré-teste geraram muitos erros. No teste de Wilcoxon bicaudal, houve diferença estatisticamente significativa entre pré-teste e Pós-teste 1 (z = -2,521, p = 0,012, r = -0,63), Pós-testes 1 e 2 (z = -2,524, p = 0,012, r = -0,63) e Pós-testes 2 e 3 (z = -2,533, p = 0,011, r = -0,63). Nos apêndices foram inseridos testes adicionais. O teste de Friedman indicou mudança estatisticamente significativa entre o desempenho dos participantes no início e ao final do experimento (X^2 = 24, p = 0,001).

Assim como na Figura 7 do Experimento 1, a Figura 11 exibe (a) a porcentagem média de acertos por testes (pré-teste s Pós-testes 1, 2 e 3); e (b) por variável (incógnita, estrutura semântica e forma de apresentação) no pré-teste e no pós-teste.

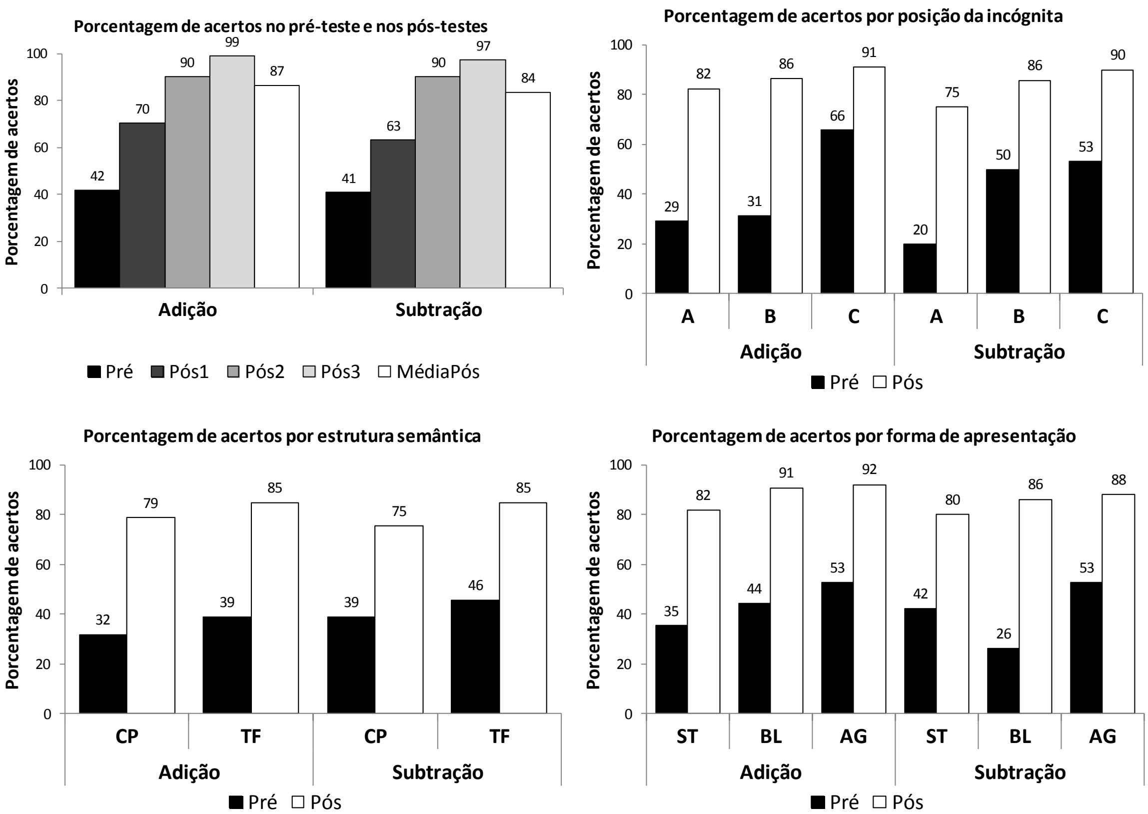


Figura 11. Porcentagem média de acertos por testes e por variável no pré-teste e no pós-teste do Experimento 2[19].

---

19 **Posição da incógnita:** A, B, C; **Estrutura:** Transformação = TF; Combinação = CB; **Forma de apresentação:** Algarismo = AG; Balança = BL; Escrito = ST.

Observa-se na parte superior da Figura 11 à esquerda, que a porcentagem de acertos em problemas de adição e de subtração foi bastante próxima, e que as porcentagens aumentaram a cada pós-teste. Considerando a média de desempenho nos três pós-testes, o grupo alcançou um ganho médio em problemas de adição e subtração de, respectivamente, 45% e 43%. Na parte superior da Figura 11 à direita, é possível observar que no pré-teste, independente da operação ser de adição ou de subtração, ocorreram mais acertos em problemas com incógnita em *c* e menos acertos em *a*. Nos pós-testes houve aumento na porcentagem de acertos em todas as posições da incógnita e manutenção do padrão de mais acertos em *c* do que em *a*, porém com diferenças mais sutis porque as porcentagens de acerto diante de cada incógnita se aproximaram de forma significativa, sugerindo uma redução no grau de dificuldade das incógnitas *a* e *b*.

Em termos de estrutura semântica (figura inferior à esquerda), verificou-se uma inesperada proximidade entre a porcentagem de acertos nos problemas com estrutura de transformação e comparação, sobretudo, em problemas de adição. Nos pós-testes, esse padrão se manteve, com menor intensidade nos problemas de subtração (com 85% de acerto na estrutura de transformação e 75% na de comparação). Houve também aumento significativo na porcentagem de acertos, o que fortalece o argumento de que ocorreu melhora no comportamento de resolução de problemas.

Em relação à forma de apresentação (figura inferior à direita), observaram-se dois padrões ligeiramente diferentes no pré-teste em problemas de adição e subtração. Nos problemas de adição, mais acertos ocorreram em problemas na forma de algarismo (53%) e menos em problemas escritos (35%); no caso dos problemas de subtração, ocorreram mais acertos em problemas na forma de algarismos (53%) e menos nos problemas na forma de balança (26%). No pós-teste, o desempenho dos participantes, independente da operação, foi similar, variando entre 82% e 92% de acertos. As pequenas diferenças remanescentes nas porcentagens de acerto indicaram que problemas escritos foram os mais difíceis. Verificou-se também no pós-teste o aumento geral na porcentagem de acertos.

No Experimento 2, os dados sugerem que foi alcançado o objetivo de reduzir as dificuldades com problemas na forma de balança, permitindo que ela se tornasse um recurso para a diminuição de dificuldades na resolução de problemas sob outras formas de apresentação (Capovilla et al., 1997; Haydu et al., 2001; Iégas, 2003; Haydu et al., 2006; Haydu, 2009; Haydu et al., 2010). Da mesma forma, ensinar os algoritmos de adição e subtração numa única sessão também ajudou a evitar as pioras de desempenho observadas em alguns participantes do Experimento 1. Esse procedimento, assim como o treino com problemas na forma de balança foram úteis para reduzir dificuldades na solução de problemas. Por fim, assim como no Experimento 1, a formação de classes de equivalência entre diferentes formas de apresentação de problemas mostrou-se efetiva para aumentar a porcentagem de acertos dos participantes, mesmo nos problemas que, inicialmente, geravam dificuldades.

A Figura 12 exibe a eficiência média dos oito participantes em cada prova a que foram expostos no pré-teste e pós-testes dos Experimentos 1 e 2.

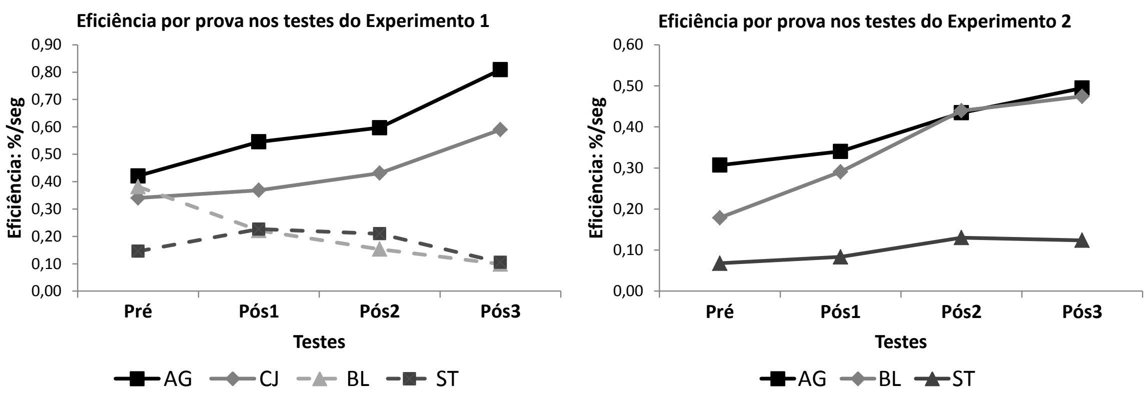


Figura 12. Eficiência nas provas dos Experimentos 1 e 2[20].

[20] As linhas descontínuas indicam as provas do Experimento 1 cujas durações não foram obtidas automaticamente e que, portanto, precisam ser avaliadas com cautela.

Nota-se na Figura 12 que, nos dois experimentos, quando comparada às demais provas, a eficiência nos problemas na forma de algarismos já no pré-teste foi elevada (Experimento 1: 0,42; Experimento 2: 0,31). Ao longo dos dois experimentos, essa eficiência aumentou de modo uniforme, alcançando no Experimento 1 0,81 de eficiência e no Experimento 2, 0,49. No Experimento 1, a eficiência nas provas com problemas na forma de coleção também cresceu de modo uniforme, mas com uma aceleração menor: no pré-teste a eficiência foi de 0,34 e no último pós-teste foi de 0,59.

Com relação à eficiência nos problemas na forma de balança, houve diferenças entre os dois experimentos. No Experimento 1, houve uma queda de eficiência, enquanto no Experimento 2 houve uma tendência de aumento uniforme (de 0,18 no pré-teste para 0,47 no último pós-teste). A eficiência na prova com problemas na forma de coleção do Experimento 1 é similar à eficiência na prova com problemas na forma de balança do Experimento 2, indicando que as dificuldades com a balança encontradas no Experimento 1 foram contornadas no segundo experimento.

Nos problemas escritos, verificou-se no Experimento 1 um crescimento inicial da eficiência seguido por uma queda. No Experimento 2, ocorreram aumentos entre pré-teste e Pós-teste 1 e entre os Pós-testes 1 e 2. Entre os Pós-testes 2 e 3 houve uma pequena queda de eficiência. As diferenças encontradas entre cada fase foram sempre muito pequenas, num padrão semelhante ao do Experimento 1.

A Figura 13 exibe a distância média dos erros nos Experimentos 1 e 2 em cada fase de teste.

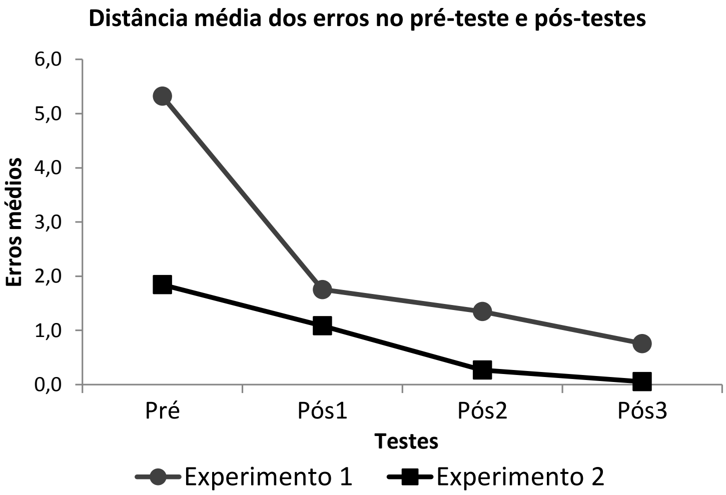


Figura 13. Distância média dos erros nas fases de pré-teste e pós-testes dos Experimentos 1 e 2.

Em relação às distâncias dos erros, de um modo geral, os desvios-padrão foram pequenos, o que sinaliza que as médias aritméticas encontradas representam bem a amostra. Ocorreram apenas dois grandes desvios em relação à média. No pré-teste, o participante MS, do Experimento 1, respondeu 110 e 114 para dois problemas escritos cujos resultados corretos eram, respectivamente, quatro e nove. Nota-se na Figura 2 que, no Experimento 1, os participantes apresentaram erros maiores que os participantes do Experimento 2, e que nos dois experimentos houve uma redução significativa e uniforme dos erros entre o pré-teste e o último pós-teste.

Nas duas aplicações do Teste de Generalização todos os participantes apresentaram elevada porcentagem de acertos. SP, MD e FG apresentaram 100% de acertos em todas as aplicações do teste. AQ e LP acertaram 92% na primeira aplicação e alcançaram 100% na segunda. GS alcançou 83% de acertos na primeira aplicação e 100% na segunda. NV alcançou 75% na primeira aplicação e 100% na segunda. Apenas CB apresentou uma redução na porcentagem de acertos entre o primeiro e o segundo teste. Na primeira aplicação, ela apresentou 100% de acertos e, na segunda, errou dois problemas de subtração escritos, um com incógnita em *b* e outro em *c*; uma vez que ela acertou os problemas de subtração ditados com incógnitas em *b* e *c* e que forneceu a mesma resposta para os dois problemas que errou, pode-se supor que esses erros foram por distração. Reforça essa hipótese o fato de que o experimentador reaplicou esses dois problemas para essa participante no dia subsequente e, desta vez, ela acertou os dois.

Discussão Geral

Os métodos utilizados nos Experimento 1 e 2 estão fundamentados em pesquisas que apontaram sucesso no ensino dos comportamentos de soma (Costa et al., 2008) e subtração (Araújo & Ferreira, 2008) definidos como redes de relações entre estímulos e experimentos que demonstraram a redução de dificuldades na resolução de problemas com base no treino de resolução de problemas representados por uma balança (Capovilla et al., 1997; Haydu et al., 2001; Iégas, 2003) e na formação de classe de equivalência entre diferentes formas de apresentação de problemas de adição (Haydu et al., 2006; Haydu, 2009; Haydu et al., 2010). Os procedimentos de ensino de algoritmos não estavam fundamentados em pesquisas anteriores e foram tentativas iniciais de ensinar regras que pudessem ajudar as crianças a resolver problemas. No Experimento 1, a regra foi longa e provavelmente pouco clara. No Experimento 2, com base nos estudos de Neef et al. (2003), buscou-se simplificar as regras, dividindo-as em pequenos passos: identificação (a) da operação, (b) da posição da incógnita, (c) dos valores disponíveis e, com base nos passos anteriores, (d) realização de uma soma ou subtração com os elementos apresentados no problema.

Os resultados da pesquisa podem ser divididos em duas categorias: (a) avaliação do desempenho na resolução de problemas e (b) verificação da melhora desse desempenho em função dos procedimentos de ensino adotados.

Desempenho nos Experimentos 1 e 2

Os dados dos dois experimentos revelaram que há uma concentração menor de acertos em torno de problemas de subtração e na forma escrita com estrutura semântica de comparação, especialmente quando a incógnita se encontra na posição *a*. Esses dados confirmam os resultados das pesquisas apresentadas na introdução e, mais uma vez, salientam a importância de se compreender o porquê dessas dificuldades e como reduzi-las. Carpenter et al. (1988), Fayol (1992), Geary (1994), Nunes e Bryant (1996), Verschaffel e de Corte (1997), Nunes et al. (2005), Fossa e Sá (2008) e Magina et al. (2010) sugerem que as crianças costumam resolver problemas escritos reproduzindo as ações descritas no enunciado dos problemas. Quando eles envolvem transformação e a incógnita está em *c*, essa estratégia é adequada porque há um valor inicial que sofre uma mudança (positiva ou negativa) e isso leva a um resultado final correto. Mas essa forma de resolver o problema não funciona quando ele envolve relações estáticas entre dois ou mais conjuntos (estruturas semânticas de comparação e combinação) e, sobretudo, quando a incógnita está em *a* ou *b*.

Em relação à posição da incógnita, de acordo com a literatura, problemas com incógnitas nas posições iniciais são mais difíceis. Hiebert (1982) salienta que em problemas aditivos com incógnita na posição *a* os seus participantes erraram mais do que nos problemas com incógnita nas posições *b* e *c*. Resnick e Rosenthal (1974) também identificaram mais erros em problemas com incógnita na posição *a* do que na posição *c*, independente dos verbos empregados (ganhar ou perder) e da ordem cronológica de apresentação dos dados do problema. Fossa e Sá (2008) em sua revisão de literatura sobre resolução de problemas com incógnita nas posições *a* e *c* também concluíram que a posição *a* foi a mais difícil, embora essa dificuldade diminua em função da idade (provável efeito da escolarização). Nos Experimentos 1 e 2, esse padrão geral foi verificado. Contudo, quando se analisa o desempenho de cada participante, nota-se variação nesse padrão geral em função da forma de apresentação do problema. Conforme Capovilla et al. (1997), Haydu et al. (2001), Iégas (2003) e Haydu et al. (2006), é verdade que a posição *a* é a mais difícil quando o problema é escrito. Não é verdade que esse dado possa ser sistematicamente replicado, por exemplo, em problemas na forma de uma balança ou de algarismos.

Um resultado que precisa ser ressaltado foi a baixa porcentagem de acertos nos problemas sob a forma de balança encontrada no Experimento 1. Provavelmente, no Experimento 1, o treino sobre o funcionamento da balança foi insuficiente. No estudo de Haydu et al. (2006), além de uma instrução inicial antes do pré-teste, foi realizada uma fase de treino preparatório para ensinar aos participantes como a balança funciona e como os problemas deveriam ser resolvidos, o que não ocorreu no Experimento 1. Além disso, deve ter sido determinante para o fracasso nesse tipo de problema a presença de problemas escritos junto com a balança. Isso foi controlado no Experimento 2 e uma fase de treino preparatório também foi incluída. Dessa vez, observou-se que, embora as maiores porcentagens de acertos não tenham ocorrido sistematicamente em problemas na forma de balança, houve um bom desempenho nesse tipo de problema. Ou seja, no Experimento 2, os dados corroboram os achados de que as crianças têm facilidade com problemas representados na forma de uma balança (Capovilla et al., 1997; Iégas, 2003; Haydu et al., 2010). Uma estratégia para melhorar ainda mais a compreensão do funcionamento da balança é trabalhar com vídeos mostrando a balança sendo equilibrada e aumentar a amplitude da diferença de altura entre os pratos da balança no intuito de facilitar a percepção de desequilíbrio e equilíbrio. A pequena diferença de amplitude pode ter sido uma variável que gerou dificuldades na resolução desses problemas nos dois experimentos.

É importante destacar que tanto nos problemas com coleções, quanto nos de balança, não foram verificadas dificuldades decorrentes do uso de bolinhas e/ou triângulos para representar quantidades; tampouco foram observadas dificuldades relacionadas à apresentação não canônica dessas coleções. Esse dado é interessante porque, do ponto de vista aritmético, igualdade significa identidade (correspondência exata). Em aritmética, não faz sentido somar duas bolas e três triângulos e representar o resultado como cinco bolas, porque os conjuntos iniciais não correspondem ao resultado. O correto seria o resultado apresentar o conjunto de duas bolas e três triângulos, cinco elementos ao todo. Portanto, o uso de coleções nas quais não há correspondência entre os conjuntos relacionados pela conta de adição ou subtração e o conjunto-resultado, conforme ocorreu em alguns casos nos Experimentos 1 e 2 (problemas na forma de coleção e balança), podem ser interpretados como inadequados (Nunes & Bryant, 1996).

A implicação prática é que os participantes podem até resolver corretamente os problemas, mas podem ter aprendido um conceito aritmeticamente inadequado de adição e subtração ou, por outro lado, podem ter errado sistematicamente alguns problemas porque não compreendiam como dois conjuntos, *x* e *y*, poderiam resultar num terceiro, *z*, e não no conjunto *x*+*y*. Não obstante, com base nos dados obtidos nos dois experimentos, sobretudo, no segundo, o uso da balança não foi um elemento que dificultou o aprendizado de resolução de problemas. Ao contrário, para muitos participantes, resolver problemas sob a forma de balança e ter como *feedback* o vídeo dela sendo equilibrada, além de variável motivadora para o engajamento na tarefa, ajudou a aumentar a porcentagem de acertos. No Experimento 2, o ganho médio alcançado após o treino com a balança no Pós-teste 2 foi de 25%, quando comparado aos acertos apresentados no Pós-teste 1. Em relação ao aprendizado de conceitos inadequados do ponto de vista matemático, é difícil discutir essa possibilidade em função dos dados coletados. Pesquisas futuras deverão considerar essas questões no planejamento dos procedimentos de ensino. Por fim, ao analisar desempenho é importante considerar que, segundo Haydu et al. (2006), atenção e motivação reduzidas, também podem contribuir para a diminuição na porcentagem de acertos.

Eficácia dos procedimentos de ensino

No pré-teste do Experimento 1, seis dos oito participantes apresentaram desempenho abaixo de 70% de acertos e somente dois entre 70% e 90%. Ao final do Pós-teste 1, todos os participantes apresentaram melhora no desempenho em relação ao pré-teste, dado que confirma os resultados de Haydu et al. (2006) e avança em relação a essa pesquisa ao demonstrar que a formação apenas da classe de equivalência de problemas de adição pode produzir melhora no desempenho não só em problemas de adição como também de subtração e que não só a estrutura semântica (transformação) utilizada no treino foi afetada positivamente, mas também as estruturas de comparação e combinação. Provavelmente o ensino de que diferentes tipos de problemas de adição eram equivalentes ajudou os participantes a ficar sob controle de propriedades relevantes do problema, tais como os valores apresentados pelo mesmo, a posição em que devem ser colocados (*a*, *b* ou *c*) e a operação em vigor. Portanto, problemas de adição que poderiam ser percebidos como complexos pelos participantes puderam ser representados sob formas mais simples, como a forma de uma operação com algarismos, coleções ou balança. Possivelmente, conforme era esperado, esse aprendizado foi generalizado para situações com problemas de subtração. No caso das estruturas semânticas, o processo possivelmente foi o mesmo, ou seja, os participantes aprenderam a representar problemas mais complexos sob formatos mais simples, o que aumentou as chances de que pudessem acertá-los.

No Pós-teste 2 do Experimento 1, após exposição ao ensino do algoritmo de adição, quatro participantes apresentaram melhora no desempenho em relação ao pré-teste e Pós-teste 1, e quatro apresentaram piora quando comparados ao Pós-teste 1. Após exposição ao algoritmo de subtração, seis participantes melhoraram o desempenho em relação ao Pós-teste 2. Os desempenhos ao final desse experimento foram maiores que os desempenhos apresentados no pré-teste, demonstrando que os participantes alcançaram ganhos advindos das intervenções adotadas nessa pesquisa.

No Experimento 2, todos os participantes apresentaram desempenho inferior a 60% e os resultados mostraram que a cada pós-teste ocorreu melhora em relação ao teste anterior e todos os participantes terminaram o experimento com uma diferença significativa entre pré-teste e Pós-teste 3. Nesse experimento, houve uma tendência geral de aproximação das porcentagens de acerto diante dos diferentes tipos de problema, provável efeito da formação de classes de equivalência. O treino de resolução de problemas na forma de balança também ajudou a melhorar o desempenho de resolução de problemas, confirmando os dados de Iégas (2003). Houve também melhora no desempenho de todos os participantes a partir do ensino de algoritmos, indicando que o ensino dos algoritmos de adição e subtração numa única sessão foi eficaz.

Os resultados do teste de generalização dos dois experimentos demonstraram que os participantes não só aprenderam a resolver os problemas treinados, como se tornaram capazes de resolver novos problemas com valores entre 10 e 15; é preciso lembrar que a capacidade de resolver adequadamente esses problemas com dois dígitos deve ter forte influência da experiência escolar.

Os dados dos dois experimentos sugerem que um efeito importante da formação de classes de equivalência entre diferentes formas de apresentação de problemas é o aumento da porcentagem de acertos em problemas nos quais, inicialmente, houve baixa porcentagem de acertos. O delineamento adotado nos Experimentos 1 e 2 fornece os fundamentos para essa afirmação porque quando avaliados no pré-teste, os participantes acertaram pouco determinados tipos de problema. Após a formação da classe de equivalência, quando foram reavaliados, a porcentagem de acertos geral cresceu, inclusive, nos problemas que eles haviam acertado pouco.

Outras variáveis podem ter contribuído para essa mudança de comportamento, como, por exemplo, o que foi aprendido na escola entre o pré-teste e o pós-teste ou o fato de que essas duas avaliações eram idênticas. Contudo, é pouco provável que tenham afetado significativamente o comportamento dos participantes, afinal eles já haviam sido expostos na escola a um ensino sobre como resolver problemas de adição e subtração. Alguns, inclusive, já estavam aprendendo a resolver problemas de multiplicação e divisão. Ou seja, adição e subtração não eram mais o foco das aulas de matemática e mesmo tendo estudado essas operações no passado, baixas porcentagens de acerto foram observadas no pré-teste de ambos os experimentos. Uma mudança de desempenho só foi observada após a manipulação da variável independente e o período entre pré-teste e pós-teste foi curto, aproximadamente, um mês. Em relação à repetição das mesmas provas de matemática no pré-teste e pós-teste, nota-se que o efeito deve ter sido pequeno porque, na continuidade dos dois experimentos, foram aplicados por mais duas vezes o pós-teste e nem todos os participantes alcançaram 100% de acertos. No Experimento 1, alguns participantes, mesmo aqueles que já no pré-teste haviam alcançado elevadas porcentagens de acerto, apresentaram quedas no desempenho após os Pós-testes 2 e 3. Os dados sugerem, portanto, que as variáveis manipuladas é que foram preponderantes na determinação do comportamento de resolução de problemas, mesmo considerando, conforme destacado nas seções de Resultados e Discussão dos dois experimentos, que as classes de equivalência já poderiam ter sido formadas antes mesmo do início da pesquisa.

Procedimentos adicionais foram adotados nos dois experimentos, mas o delineamento experimental não pôde responder se eles foram de fato efetivos porque os comportamentos de solução de problemas apresentados nos Pós-testes 2 e 3, de ambos os experimentos, eram o produto de toda história experimental do participante ao longo da pesquisa. O que se pode afirmar é que esses procedimentos parecem ter afetado o comportamento de solução de problemas e, de modo geral, contribuíram para o aumento da porcentagem de acertos nos dois experimentos. Dado o caráter aplicado do presente trabalho, eles foram úteis porque o objetivo foi justamente a melhora de desempenho. A eficácia dos procedimentos de ensino adotados também foi demonstrada pelos dados de aumento da eficiência na resolução de problemas e diminuição da distância dos erros ao longo da pesquisa.

Uma proposta de experimento futuro para avaliar qual procedimento é o mais eficaz, seria trabalhar com um delineamento de grupos, de modo que fosse possível aplicar um procedimento em cada grupo e comparar qual deles alcançou maiores porcentagens de acerto no pós-teste, sendo necessário incluir um grupo controle que não seria exposto a nenhum dos procedimentos. Outra proposta, que aumenta a segurança sobre a eficácia de cada um dos procedimentos de ensino, envolve o uso do delineamento de linha de base múltipla. Poderiam ser formados três grupos, cada um para testar os efeitos de apenas um dos três procedimentos de ensino. Neste delineamento, todos os participantes de um grupo (por exemplo, A, B e C) são avaliados num mesmo momento em relação a uma mesma VD. Em seguida, a VI é apresentada apenas para um dos participantes, A, enquanto a VD dos demais (B e C) continua sendo mensurada. Somente quando A é reavaliado após a exposição a VI é que essa VI é apresentada para o participante B. Os demais participantes continuam no estágio de avaliação da VD. O delineamento segue desta forma até que todos os participantes tenham sido expostos a VI e reavaliados. Esses estudos poderiam fornecer indícios de qual procedimento é o mais eficaz como estratégia pontual de redução de dificuldades específicas na resolução de problemas.

Em relação ao ensino de algoritmos, a despeito dos resultados positivos, observou-se que após esse procedimento os participantes (nos dois experimentos) passavam a apresentar as seguintes perguntas: "Esse é de mais? Tem que ver quanto falta para chegar, né?", "A conta é de menos? Eu junto ou tiro?". Ou seja, aparentemente as fases de ensino dos algoritmos foram insuficientes para que os participantes se tornassem independentes no uso dessas estratégias e o algoritmo em si demonstrou ser uma regra que não fazia sentido para os participantes, conforme a literatura destaca que pode ocorrer (Nunes & Bryant, 1996; Vasconcelos, 1998). Mas essa observação de "não fazer sentido" não chega a surpreender porque o ensino de algoritmos é um dos desafios do ensino da resolução de problemas (Sophian, 1996).

Outro aspecto importante a ser destacado em relação aos algoritmos diz respeito ao seu efeito sobre a sensibilidade às contingências. De acordo com Oliveira e Tourinho (2001), algoritmos são regras que controlam o comportamento matemático eficiente. Segundo Catania (1999) e Bittencourt (2009) discutem, quando se aprende uma regra pode-se ficar sob controle exclusivo dela e, por esse motivo, menos sensível às contingências. Na Matemática, isso pode significar que quando a criança aprende que existem problemas "de mais e de menos", ela tentará "juntar ou tirar" mesmo que o problema não permita esses tipos de operação. Esta é uma explicação para os casos descritos por Verschaffel e de Corte (1997) em que a criança simplesmente seleciona todos os números apresentados no enunciado do problema e realiza a operação que foi recentemente ensinada ou quando busca identificar "palavras-chave" para definir o tipo de operação aritmética que deve ser realizada.

Uma forma de reduzir o efeito deletério das regras, talvez seja adotar a estratégia de ensinar a criança a criar seus próprios algoritmos e implementá-los computacionalmente, o que permite o teste da eficácia do algoritmo (Hatfield & Kieren, 1972) e o aprendizado incidental de que existem diferentes estratégias adequadas a um mesmo problema. Seguramente, uma aprendizagem essencial e que poderia reduzir a resolução mecânica dos problemas, é o que Nunes e Bryant (1996), Nunes et al. (2005) e Bryant (2011) chamam de noção de inversão, ou seja, a criança deve aprender que a solução de operações de adição com incógnitas nas posições iniciais envolve a realização da operação de subtração e vice-versa. O desenvolvimento desses comportamentos pode se tornar o objetivo de pesquisas futuras e, de fato, constituem objetivos importantes para a Educação Matemática (Nunes & Bryant, 1996; Nunes et al., 2005; Bryant, 2011). Nesta pesquisa, ajudar os participantes a resolver problemas que eles estavam errando mesmo após terem sido capazes de representá-los em formatos mais simples, foi a função das fases de ensino de algoritmos.

Considerando os resultados positivos encontrados, mas também as perguntas que ainda precisam ser respondidas, sugere-se que estudos futuros continuem mapeando dificuldades na resolução de problemas e construindo estratégias e recursos, tais como *softwares*, para a redução dessas dificuldades. Butterworth et al. (2001) argumenta ser importante elaborar pesquisas e intervenções que ajudem a melhorar os comportamentos matemáticos e amenizar transtornos como a discalculia. Em paralelo, é preciso ampliar a compreensão acerca das aprendizagens envolvidas no comportamento de resolver problemas de adição e subtração. Isso exige análise minuciosa desses comportamentos e pesquisas empíricas que demonstrem a validade dessas análises. Considera-se importante que novos estudos ampliem a amostra e empreguem instrumentos padronizados, como o TDE, ZAREKI-K e/ou WISC-IV[21], para melhor caracterização[22] dos participantes e para facilitar replicações do estudo e generalização dos dados. Esses cuidados ajudam a avaliar de forma mais clara os efeitos dos procedimentos de ensino sobre o desempenho das crianças.

Considerações finais

O objetivo principal da presente pesquisa foi avaliar se a formação de classes de equivalência entre diferentes formas de apresentação de problemas poderia produzir aumento na porcentagem de acertos na resolução de problemas de adição e subtração; avaliou-se também se o ensino de algoritmos e se o treino de resolução de problemas com a balança poderia melhorar ainda mais esse desempenho. Os resultados sugerem que os programas de ensino empregados nos Experimentos 1 e 2 foram capazes de melhorar o desempenho dos participantes.

As dificuldades produzidas pela forma de apresentação, estrutura semântica e posição da incógnita devem chamar a atenção dos educadores porque, na prática, são variáveis fáceis de serem manipuladas pelo professor. Basta que ele mude a ordem de apresentação das informações, as palavras ou o tipo de situação-problema. Portanto, é preciso considerar que diferentes comportamentos podem estar sendo requisitados pela simples mudança da estrutura do problema. Ou seja, o erro do aluno pode ser o resultado de um ensino ineficaz ou que não ocorreu (Skinner, 1972, 1991, 1998, 1999).

---

[21] Teste de Desempenho Escolar (TDE): avalia comportamentos de leitura, escrita e aritmética; ZAREKI-K: bateria de testes neuropsicológicos para processamento de número e cálculo; Escala de Inteligência Wechsler para crianças – terceira edição (WISC-III): avalia a capacidade intelectual.

[22] Permite a separação da amostra em grupos de participantes, por exemplo, com e sem dificuldades de leitura, com e sem dificuldades em Matemática.

A depender das condições de trabalho e dos recursos disponíveis, tais como laboratório de informática com um profissional que possa orientar o professor no uso do computador e ajuda de monitores, pode ser viável para o professor de Matemática elaborar as tentativas de treino empregadas e descritas no presente trabalho no intuito de reduzir dificuldades que seus alunos possam ter com problemas aditivos. No caso das escolas que já possuem laboratórios de informática, o professor pode trabalhar com planilhas eletrônicas, que podem ser programadas, por exemplo, para exibir consequências de acerto e erro, a depender da resposta do aluno, o que permite automatizar o treino de resolução de problemas (para outras opções de uso de planilhas eletrônicas em aulas de matemática, consultar Silveira, 2007). No caso de escolas sem laboratórios de informática, desde que existam monitores que possam auxiliar o professor, uma sugestão é seguir o modelo utilizado por Haydu et al. (2006). As pesquisadoras utilizaram pastas-catálogo, exibindo na mesma folha o estímulo-modelo e os estímulos-comparação. Os monitores poderiam ter um roteiro com as soluções corretas, de modo a fornecer *feedback* imediato para as respostas dos alunos. Outra sugestão é desenhar ou escrever no quadro-negro o estímulo-modelo e os estímulos-comparação e pedir que a turma responda em conjunto qual o estímulo-comparação correto ou que os alunos registrem as suas respostas numa folha do caderno. O professor poderá então fornecer *feedback* imediato para todos os alunos sobre qual era a opção correta e ainda discutir o porquê.

Além de novas replicações deste estudo, pesquisas futuras podem tentar viabilizar o uso dos procedimentos descritos no contexto real de sala de aula. Sidman (2006) destacou que os analistas do comportamento têm feito pouco progresso na produção de mudanças de comportamento em grandes grupos.

> [...] A medicina clínica, como a análise do comportamento, tem de fato feito considerável progresso no alívio do sofrimento dos indivíduos que a procuram, mas deve-se reconhecer que os grandes avanços da saúde pública não têm vindo do tratamento de pessoas doentes. Ao contrário, devemos nossos crescentes tempo de vida e libertação de doenças a aplicações da ciência e da engenharia tecnológica em dimensões populacionais: por exemplo, as ciências e técnicas da bacteriologia aplicada, como na sanitização; virologia, como no controle dos vírus por meio de vacinação; engenharia sanitária, como nos esgotos modernos, e em coleta e tratamento de lixo e dejetos; purificação de comida e água, como na descontaminação e dessalinização; e coisas assim [...] (Sidman, 2006, p. 283).

É importante começar a traduzir pesquisas em programas e projetos instrucionais (Skinner, 1972; Vasconcelos, 1998; de Rose, 2010) de larga escala, o que exige o uso de "[...] métodos de generalidade mais ampla, no sentido de afetar muitas pessoas ao mesmo tempo – ou em curto tempo [...]" (Sidman, 2006, p. 285).

Referências

Araújo, C. H., & Luzio, N. (2005). *Avaliação da educação básica: em busca da qualidade e equidade no Brasil*. Brasília: MEC/INEP.

Araújo, P. M., & Ferreira, P. R. S. (2008). Ensinando subtração a pessoas com deficiência mental com base em relações de equivalência de estímulos. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, *24*(3), 313-322.

Belfiore, P. J., Lee, D. L., Vargas, A. U., & Skinner, C. H. (1997). Effects of high-preference single-digit mathematics problem completion on multiple-digit mathematics problem performance. *Journal of Applied Behavior Analysis*, *30*(2), 327-330.

Bitencourt, L. C. (2009). *Descrição e análise do comportamento de crianças na resolução de problemas lógicos* (Dissertação de mestrado não publicada). Programa de Estudos Pós-graduados em Psicologia Experimental: Análise do Comportamento, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Bryant, P. (2011). Children`s understanding and use of inversion in arithmetic. In *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, Recife, Anais do XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática (pp. 1-7).

Butterworth, B., Varma, S., & Laurillard, D. (2011). Dyscalculia: From brain to education. *Science*, *332*(27), 1049-1053.

Capovilla, F. C., César, O., Capovilla, A. G. S., & Haydu, V. B. (1997). Equação-equilíbrio: O modelo da balança e a análise da resolução de problemas aritméticos em escolares do ensino fundamental. *Torre de Babel*, *4*(2), 189-215.

Carmo, J. S. (1997). *Aquisição do conceito de número em crianças pré-escolares através do ensino de relações condicionais e generalização* (Dissertação de mestrado não publicada). Programa de Teoria e Pesquisa do Comportamento Humano, Universidade Federal do Pará, Belém.

Carmo, J. S. (2002). *Comportamento conceitual numérico: Um modelo de rede de relações equivalentes* (Tese de doutorado não publicada). Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP.

Carmo, J. S. (2010). Controle aversivo, ensino das matemáticas em sala de aula e programação de contingências reforçadoras no ensino escolar. In J. dos S. Carmo, & P. S. T. Prado (Orgs.), *Relações simbólicas e aprendizagem da matemática* (pp. 253-271). Santo André, SP: ESETec.

Carmo, J. S., & Galvão, O. F. (1999). Aquisição do conceito de número em crianças pré-escolares através do ensino de ralações condicionais e generalização. In J. S. Carmo, L. C. C. Silva, & R. M. E. Figueiredo (Orgs.). *Dificuldades de aprendizagem no ensino de leitura, escrita e conceitos matemáticos* (pp. 50-87). Belém: UNAMA.

Carmo, J. S., & Prado, P. S. T. (2004). Análise do comportamento e psicologia da educação matemática: Algumas aproximações. In M. M. C. Hübner, & M. Marinotti (Orgs.), *Análise do comportamento para a educação: Contribuições recentes* (pp. 115-136). Santo André, SP: ESETec.

Carmo, J. S., Cunha, L. O., & Araújo, P. V. S. (2007). *Atribuições dadas à matemática por alunos do Ensino Fundamental com dificuldades em matemática: Um estudo preliminar*. In *V EPAEM - Encontro Paraense de Educação Matemática*, Belém, Anais do V EPAEM – Encontro Paraense de Educação Matemática [CD] (pp. 328-335). Retirado de http://www.unama.br/pesquisa/aceam/artigos/Atribuicoes-dadas-a-matematica-por-alunos-do-Ensino-Fundamental.pdf. Acesso em 01 de Outubro de 2010.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *The acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 7–44). New York: Academic Press.

Carpenter, T. P., Moser, J. M., & Bebout, H. C. (1988). Representation of addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(4), 345-357.

Catania, A. C. (1999). *Aprendizagem: Comportamento, linguagem e cognição* (4a ed., D. das G. de Souza et al., trads.). Porto Alegre: Artes Médicas Sul.

Costa, A. L. M. (2004). *Paradigma da equivalência e o ensino informatizado da operação de adição* (Dissertação de mestrado não publicada). Programa de Teoria e Pesquisa do Comportamento, Universidade Federal do Pará, Belém.

Costa, A. L. M., Galvão, O. F., & Ferreira, B. P. (2008). ARIT – um software baseado em equivalência de estímulos dirigido a crianças com histórico de fracasso na aprendizagem de conceitos aritméticos. In *XIX Simpósio Brasileiro de Informática na Educação* [CD] (pp. 125-134), Fortaleza.

Costa, E. V. (2010). Um estudo de álgebra elementar com balança de dois pratos. *Psicologia: Reflexão e Crítica*, *23*(3), 456-465.

de León, N. P. A. (1998). Aquisição de habilidades básicas de matemática através da formação de equivalência em crianças pré-escolares. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP.

de Rose, J. C. (1993). Classes de estímulos: Implicações para uma análise comportamental da cognição. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, *9*(2), 283-303.

de Rose, J. C. (2005). Análise comportamental da aprendizagem de leitura e escrita. *Revista Brasileira de Análise do Comportamento*, *1*(1), 29-50.

de Rose, J. C. (2010). Prefácio. In J. dos S. Carmo, & P. S. T. Prado (Orgs.), *Relações simbólicas e aprendizagem da matemática* (pp. 7-12). Santo André, SP: ESETec.

Delage, P. E. G., & Carvalho-Neto, M. B. de. (2006). Comportamento criativo e análise do comportamento I: Insight. In H. J. Guilhardi & N. C. de Aguirre (Orgs.), *Sobre comportamento e cognição: expondo a variabilidade* (vol. 18, pp. 345-351). Santo André: Esetec.

Del Rey, D. (2009). *Análise do comportamento no Brasil: O que já foi pesquisado até 2005 em relação aos comportamentos matemáticos* (Dissertação de mestrado não publicada). Programa de Pós-graduação em Psicologia Experimental: Análise do Comportamento, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Donahoe, J. W., & Palmer, D. C. (1994). Problem solving. In J. W. Donahoe, & D. C. Palmer, *Learning and complex behavior* (pp. 270-295). Massachusetts: Allyn and Bacon.

Escobal, G., Rossit, R., & Goyos, A. C. N. (2010). Aquisição de conceito de número por pessoas com deficiência intelectual. *Psicologia em Estudo (Impresso), 15*, 467-475.

Fayol, M. (1992). From number to numbers in use: Solving arithmetic problems. In J. Bideaud, C. Meljac, & J. P. Fischer (Eds.), *Pathways to number: Children's developing numerical abilities* (pp. 283-306). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Fienup, D. M., & Critchfield, T. S. (2011). Transportability of equivalence-based programmed instruction: efficacy and efficiency in a college classroom. *Journal of Applied Behavior Analysis, 3*(44), 435-450.

Figueiredo, R. M. E., & Galvão, O. F. (1999). Estratégias de resoluções de problemas matemáticos em crianças do ensino fundamental: Um estudo descritivo. In J. S.

Carmo (Org.), *Dificuldades da aprendizagem: o instrumento da análise do comportamento no ensino da leitura e escrita e conceitos matemáticos* (pp. 117-130). Belém: UNAMA.

Fossa, J. A., & Sá, P. F. (2008). Uma distinção entre problemas aritméticos e algébricos. *Revista Educação em Questão, 33*(19), 253-278.

Geary, D. C. (1994). Learning mathematical problem solving. In D. C. Geary, *Children's mathematical development: Research and practical applications* (pp. 95-130). Washington: American Psychological Association.

Green, G. (2010). A tecnologia de controle de estímulo no ensino de equivalências número quantidade. In J. S. Carmo, & P. S. T. Prado (Orgs.), *Relações simbólicas e aprendizagem da matemática* (1a ed, pp. 159-172). Santo André, SP: ESETec.

Gualberto, P. M. A., & Rossit, R. A. S. (2010). Ensino de habilidades aritméticas para crianças das séries iniciais do ensino fundamental: Uma proposta em investigação. In J. dos S. Carmo, & P. S. T. Prado (Orgs.), *Relações simbólicas e aprendizagem da matemática* (pp. 173-195). Santo André, SP: ESETec.

Hatfield, L. L., & Kieren, T. E. (1972). Computer-assisted problem solving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *3*(2), 99-112.

Haydu, V. B. (2009). Contribuições da análise experimental do comportamento ao ensino de resolução de problemas aritméticos. In I. L. Batista, & R. F. Salvi (Orgs.), *Pós-graduação em ensino de ciências e educação matemática: Um perfil de pesquisas* (pp. 199-216). Londrina, PR: EDUEL.

Haydu, V. B. H., Costa, L. P. C., & Pullin, E. M. M. P. (2006). Resolução de problemas aritméticos: Efeito de relações de equivalência entre três diferentes formas de apresentação dos problemas. *Psicologia: Teoria e Pesquisa, 19*(1), 44-52.

Haydu, V. B., Paranzini, A. C. S., Isquierdo, G. R., Ausec, H. O., Mazzo, I. M. B., Pires, I. T. M., Souza, J., Tini, J. R., Miura, P. O., & Pimentel, N. S. (2001). Dificuldades e facilidades produzidas pela forma de apresentação de problemas aritméticos com a incógnita em diferentes posições. In M. C. Marquezine, M. A. Almeida, & E. D. O. Tanaka (Orgs.), *Perspectivas Multidisciplinares em Educação Especial II* (pp. 593-601). Londrina, PR: EDUEL.

Haydu, V. B., Pullin, E. M. M. P., Iégas, A. L. F., & Costa, L. P. (2010). Solucionar problemas aritméticos: Contribuições da análise do comportamento. In J. dos S. Carmo, & P. S. T. do Prado (Orgs.), *Relações simbólicas e aprendizagem da matemática* (pp. 159-172). Santo André, SP: ESETec.

Henklain, M. H. O., & Carmo, J. S. (2011). Produção analítico-comportamental sobre ensino-aprendizagem de habilidades matemáticas: Dados representativos de eventos científicos brasileiros. *Perspectivas em Análise do Comportamento*, *2*(2), 179-191.

Herebia, C. F. B. (2007). Leitura, interpretação e resolução de problemas matemáticos de estruturas aditivas (Dissertação de mestrado não publicada). Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Católica Dom Bosco, Campo Grande, MS.

Hiebert, J. (1982). The Position of the Unknown Set and Children's Solutions of Verbal Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *13*(5), 341-349.

Iégas, A. L. F. (2003). *Software para a resolução de problemas aritméticos: O modelo da balança* (Dissertação de mestrado não publicada). Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR.

Kahhale, E. M. S. P. (1993). *Comportamento matemático: Formação e ampliação do conceito de quantidade e relações de equivalência* (Tese de doutorado não publicada). Programa de Psicologia, Universidade de São Paulo, São Paulo.

Keller, F. S., & Schoenfeld, W. N. (1973). *Princípios de psicologia*. São Paulo: EPU.

Lins, R. C., & Gimenez, J. (1997). *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas, SP: Papirus.

Luna, S. V. (2000). Contribuições de Skinner para a educação. In Vera M. N. de S. Placco (Org.). *Psicologia & educação: Revendo contribuições* (pp. 145-179). São Paulo: Educ.

Luna, S. V., Marinotti, M., & Pereira, M. E. M. (2004). O compromisso do professor com a aprendizagem do aluno: Contribuições da Análise do Comportamento. In M. M. C. Hübner, & M. Marinotti (Orgs), *Análise do comportamento para a educação: Contribuições recentes* (pp. 11-32). Santo André, SP: ESETec.

Magina, S. P. M., Santana, E. R. S., Cazorla, I. M., & Campos, T. M. M. (2010). As estratégias de resolução de problemas das estruturas aditivas nas quatro primeiras séries do Ensino Fundamental. *Zetetiké*, *18*(34), 15-50.

Marcicano, D. C., Carmo, J. S., Prado, P. S. T. (2011). Software ProgMTS: Possibilidades de delineamento e condução de programas de ensino em Análise Experimental do Comportamento [programa de computador]. In 41ª Reunião Anual da Sociedade Brasileira de Psicologia: Formação e produção do conhecimento em psicologia, Belém, Resumos de comunicação científica da 41ª Reunião Anual da Sociedade Brasileira de Psicologia.

Marr, M. J. (1986). Mathematics and verbal behavior. In T. Thompson, & M. Zeiler (Eds.), *Analysis and integration of behavioral units* (pp. 161-183). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Matos, M. A. (1999). Controle de estímulo condicional, formação de classes conceituais e comportamentos cognitivos. *Revista Brasileira de Terapia Comportamental e Cognitiva*, *1*(2), 159-178.

Mayfield, K. H., & Chase, P. N. (2002). The effects of cumulative practice on mathematics problem solving. *Journal of Applied Behavior Analysis*, *35*(2), 105-123.

McIlvane, W. J., Galvão, O. F., Goulart, P. R. K., Brino, A. L. F., & Barros, R. S. (2005). Variáveis de procedimento na pesquisa sobre classes de equivalência: Contribuições para o estudo do comportamento simbólico. *Revista Brasileira de Análise do Comportamento*, *1*(1), 15-27.

Mendes, A. C. (2012). Identificação de graus de ansiedade à matemática em estudantes do ensino fundamental e médio: Contribuições à validação de uma escala de ansiedade à matemática (Dissertação de mestrado não publicada). Programa de Pós-graduação em Psicologia, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP.

Ministério da Educação, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. (1997). *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.* Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental.

Ministério da Educação, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. (2009). Taxa de Aprovação, Prova Brasil, IDEB e Projeções (até a 4ª, 5ª a 8ª série e Ensino Médio) – Brasil. Retirado de http://portal.inep.gov.br/web/portal-ideb/planilhas-para-download

Neef, N. A., Nelles, D. E., Iwata, B. A., & Page, T. J. (2003). Analysis of precurrent skills in solving mathematics story problems. *Journal of Applied Behavior Analysis*, *36*(1), 21-33.

Nesher, P., Greeno, J. G., & Riley, M. S. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, *13*(4), 373-394.

Nico, Y. C. (2001). O que é autocontrole, tomada de decisão e solução de problemas na perspectiva de B. F. Skinner. In H. J. Guilhardi, M. B. B. P. Madi, P. P. Queiroz, & M. C. Scoz (Orgs.), *Sobre comportamento e cognição: Expondo a variabilidade* (pp. 62-70). Santo André, SP: Esetec.

Nunes, T., & Bryant, P. (1996). Giving meaning to addition and subtraction. In T. Nunes, & P. Bryant, *Children doing mathematics* (pp. 114-141). Oxford: Blackwell.

Nunes, T., Campos, T. M. M., Magina, S., & Bryant, P. (2005). *Educação matemática: Números e operações numéricas*. São Paulo: Cortez.

Oliveira, M. S., & Tourinho, E. Z. (2001). Desempenho de crianças do ensino fundamental na solução de problemas aritméticos. *Estudos de Psicologia*, *6*(1), 63-74.

Organization for Economic Co-operation and Development. (2010a). *PISA 2009 results: What students know and can do – student performance in reading, mathematics and science* (Vol. 1). Retirado de www.oecd.org/publishing/corrigenda. Acesso em 15 de Maio de 2012.

Organization for Economic Co-operation and Development. (2010b). *The High Cost of Low Educational Performance: The long-run economic impact of improving educational outcomes*. Paris: OECD.

Prado, P. S. T. (1997). *O conceito de número: Uma análise com base no paradigma de rede de relações* (Dissertação de mestrado não publicada). Programa de Educação, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP.

Prado, P. S. T. (2001). *Ensinando o conceito de número: Contribuições do paradigma de rede de relações* (Tese de doutorado não publicada). Programa de Psicologia Experimental, Universidade de São Paulo, São Paulo.

Prado, P. S. T., & de Rose, J. C. (1999). Conceito de número: Uma contribuição da Análise Comportamental da Cognição. *Psicologia: Teoria e Pesquisa, 15*(3), 227-235.

Resnick, L. B., & Rosenthal, D. J. A. (1974). Children's solution processes in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, *66*(6), 817-825.

Resnick, L. B., Wang, M. C., & Kaplan, J. (1973). Task analysis in curriculum design: A hierarchically sequenced introductory mathematics curriculum. *Journal of Applied Behavior Analysis*, *6*(4), 679-710.

Richland, L. E., Zur, O., & Holyoak, K. J. (2007). Cognitive supports for analogies in the mathematics classroom. *Science*, *316*(25), 1128-1129.

Rossit, R. A. S. (2003). *Matemática para deficientes mentais: Contribuições do paradigma de equivalência de estímulos para o desenvolvimento e avaliação de um currículo* (Tese de doutorado não publicada). Programa de Educação Especial, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP.

Saville, B. K., Lambert, T., & Robertson, S. (2011). Interteaching: Bringing behavioral education into de 21st century. *The Psychological Record*, 61, 153-166.

Schmidt, W. H., Houang, R., & Cogan, L. S. (2011). Preparing future math teachers. *Science*, *332*, 1266-1267.

Sidman, M. (1994). *Equivalence relations and behavior: A research story*. Boston: Authors Cooperative.

Sidman, M. (2006). Fred Keller, um reforçador condicionado generalizado. *Revista Brasileira de Análise do Comportamento*, *2*(2), 277-285.

Sidman, M., & Tailby, W. (1982). Conditional discrimination vs. matching to sample: An expansion of the testing paradigm. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *37*(1), 5-22.

Silveira, W. T. N. (2007). *Criando ambientes matemáticos com planilhas eletrônicas* (Dissertação de mestrado não publicada). Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Centro Federal de Educação Tecnológica, Rio de Janeiro.

Skinner, B. F. (1972). *Tecnologia do ensino* (R. Azzi, Trad.). São Paulo: Herder e Edusp. (Trabalho original publicado em 1968).

Skinner, B. F. (1978). *Comportamento Verbal* (11a ed., M. da P. Villalobos, Trad.). São Paulo: Editora Cultrix. (Trabalho original publicado em 1957).

Skinner, B. F. (1980). *Contingencies of reinforcement: A theoretical analysis*. New York: Appleton-Century-Crofts. (Trabalho original publicado em 1969).

Skinner, B. F. (1991). A escola do futuro. In B. F. Skinner, *Questões recentes na análise comportamental* (pp. 117-131). Campinas, SP: Papirus. (Trabalho original publicado em 1989).

Skinner, B. F. (1998). *Ciência e Comportamento Humano* (10a ed., J. C. Todorov & R. Azzi, Trads.). São Paulo: Martins Fontes. (Trabalho original publicado em 1953).

Skinner, B. F. (1999). *Sobre o Behaviorismo* (11a ed., M. da P. Villalobos, Trad.). São Paulo: Cultrix. (Trabalho original publicado em 1974).

Sophian, C. (1996). The sum of the parts. In C. Sophian, *Children's numbers* (pp. 73-88). Colorado: Westview Press.

Spielberger, C. D. (1993). Foreword. In L. A. Pennser, G. M. Batsche, H. M. Knoff, & D. L. Nelson, *The challenge in mathematics and science education: Phychology's response* (pp. 11-14). Washington: American Psychological Association.

Spinillo, A. G., & Batista, A. M. S. B. (2008). Nem todo material concreto é igual: A importância dos referentes na resolução de problemas. *Estudos de Psicologia*, *13*(1), 13-21.

Staats, A. W., & Staats, C. K. (1973). *Comportamento humano complexo: Uma extensão sistemática dos princípios da aprendizagem*. São Paulo: EPU.

Steen, L. A. (1987). Mathematics education: A predictor of scientific competitiveness. *Science*, *237*, 251-302.

Teixeira, A. M. S. (2006). Algumas considerações. In A. M. S. Teixeira, *Análise de contingências em programação de ensino infantil: Liberdade e efetividade na educação* (pp. 183-231). Santo André, SP: ESETec.

Teixeira, A. M. S. (2010). Componentes verbais do repertório matemático elementar. In J. S. Carmo, & P. S. T. Prado (Orgs.), *Relações simbólicas e aprendizagem da matemática* (pp. 159-172). Santo André, SP: ESETec.

Vasconcelos, L. (1998). Problemas de adição e subtração: Modelos teóricos e práticas de ensino. In A. Schliemann, & D. W. Carraher (Orgs.), *A compreensão de conceitos aritméticos: Ensino e pesquisa* (pp. 32-45). Campinas, SP: Papirus.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In T. Carpenter, J. Moser, & T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 39-59). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Verschaffel, L., & de Corte, E. (1997). Word problems: A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school? In T. Nunes, & P. Bryant (Orgs.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 69-97). Hove: Psychology.

Apêndices

Delineamento experimental do Experimento 1

Tabela 9

Resumo do delineamento experimental do Experimento 1

Delineamento experimental	Tarefas realizadas
Pré-teste (sem *feedback*)	18 ST (9+ e 9-); 6 AG (3+ e 3-); 6 CJ (3+ e 3-); 6 BL (3+ e 3-)
Ensino da relação BL (A) e AG (B) (com *feedback*)	72 Tts (BL como E-M e AG como E-C) e 36 Tts de sonda (sem *feedback*)
Teste da relação de simetria AG (B) e BL (A) (sem *feedback*)	36 Tts (AG como E-M e BL como E-C)
Ensino da relação BL (A) e CJ (C) (com *feedback*)	36 Tts (BL como E-M e CJ como E-C) e 36 Tts de sonda (sem *feedback*)
Teste da relação de simetria CJ (C) e BL (A) (sem *feedback*)	36 Tts (CJ como E-M e BL como E-C)
Ensino da relação AG (B) e ST (D) (com *feedback*)	36 Tts (AG como E-M e ST como E-C) e 36 Tts de sonda (sem *feedback*)
Teste da relação de simetria ST (D) e AG (B) (sem *feedback*)	36 Tts (ST como E-M e AG como E-C)
Teste da relação de transitividade ST (D) e BL (A) (sem *feedback*)	36 Tts (ST como E-M e BL como E-C)
Teste da relação de transitividade ST (D) e CJ (C) (sem feedback)	36 Tts (ST como E-M e CJ como E-C)
Teste da relação de simetria AG (B) e CJ (C) (sem *feedback*)	36 Tts (AG como E-M e CJ como E-C)
Teste das relações simétricas da transitiva BL (A) e ST (D), CJ (C) e ST (D) e CJ (C) e AG (B) (sem *feedback*)	12 Tts (BL como E-M e ST como E-C); 12 Tts (CJ como E-M e ST como E-C); 12 Tts (CJ como E-M e AG como E-C)
Pós-teste 1 (sem *feedback*)	18 ST (9+ e 9-); 6 AG (3+ e 3-); 6 CJ (3+ e 3-); 6 BL (3+ e 3-)
Ensino do algoritmo para resolução de problemas de Adição com incógnitas na posição a, b, c (com *feedback*)	24 Tts (6 CJ, sendo 3 que o experimentador forneceu modelo de como resolver e 3 que o participante resolveu sozinho; 6 BL, sendo 2 que o experimentador resolveu e 4 o participante; 6 ST, sendo 1 que o experimentador resolveu e 5 o participante; 6 AG que o participante resolveu sozinho)
Treino de resolução de problemas de Adição (com *feedback*)	48 Tts (12 Tts sob cada uma das formas de apresentação: BL, AG, CJ e ST)
Pós-teste 2 (sem *feedback*)	18 ST (9+ e 9-); 6 AG (3+ e 3-); 6 CJ (3+ e 3-); 6 BL (3+ e 3-)
Ensino do algoritmo para resolução de problemas de Subtração com incógnitas na posição a, b, c (com *feedback*)	19 Tts (6 AG, sendo 3 que o experimentador forneceu modelo de como resolver e 3 que o participante resolveu sozinho; 6 ST, sendo 2 que o experimentador resolveu e 4 o participante; 4 CJ, sendo 1 que o experimentador resolveu e 3 o participante; 4 BL, sendo 1 que o experimentador resolveu e 3 o participante)
Treino de resolução de problemas de Subtração (com *feedback*)	12 Tts (3 Tts sob cada uma das formas de apresentação: BL, AG, CJ e ST)
Pós-teste 3 (sem *feedback*)	18 ST (9+ e 9-); 6 AG (3+ e 3-); 6 CJ (3+ e 3-); 6 BL (3+ e 3-)
Teste de generalização (sem *feedback*)	12 Tts (6 ST escritas e 6 ditados, sendo 6+ [3 escritas e 3 ditadas] e 6- [3 escritas e 3 ditadas]), existindo 2 Tts por posição da incógnita

Nota. ST = problema escrito; AG = problema sob a forma de algarismo; BL = problema sob a forma de balança; CJ = problema sob a forma de coleção; + = problema de adição; - = problema de subtração; Tts = tentativas; Estímulo-modelo = E-M; Estímulo-comparação = E-C.

Valores dos problemas do Experimento 1

Tabela 10

Problemas empregados no Experimento 1 por fase

Fase	Operação	Forma de apresentação		Problemas
Pré-teste e pós-teste	Adição	Problema escrito	Combinação	?+6=9 | 6+?=7 | 6+3=?
			Transformação positiva	?+6=8 | 4+?=9 | 2+5=?
			Comparação	?+3=7 | 4+?=8 | 7+2=?
		Algarismo		?+2=7 | 5+?=9 | 6+2=?
		Coleção		?+3=8 | 3+?=7 | 6+3=?
		Balança		?+6=9 | 6+?=7 | 6+3=?
	Subtração	Problema escrito	Separação	?-5=4 | 7-?=3 | 8-3=?
			Transformação negativa	?-6=3 | 7-?=5 | 8-4=?
			Comparação	?-4=5 | 7-?=4 | 8-5=?
		Algarismo		?-2=4 | 6-?=5 | 5-2=?
		Coleção		?-2=5 | 6-?=3 | 5-1=?
		Balança		?-5=4 | 7-?=3 | 8-3=?
Treino e testes de equivalência	Adição	Problema escrito (transformação), Algarismo, Coleção e Balança		?+2=5 | ?+2=7 | ?+2=8 ?+2=9 | 3+?=5 | 3+?=7 3+?=8 | 3+?=9 | 3+2=? 4+2=? | 4+4=? | 5+4=?
Ensino do algoritmo	Adição	Problema escrito (transformação), Algarismo, Coleção e Balança		?+2=7 | ?+2=8 | ?+2=9 3+?=5 | 3+?=7 | 3+?=8 3+?=9 | 3+2=? | 4+2=? 4+4=? | 5+4=? | 6+2=?
	Subtração	Problema escrito (transformação), Algarismo, Coleção e Balança		?–7=2 | ?–6=3 | ?–5=4 8-?=2 | 8-?=3 | 8-?=4 7–3=? | 7–4=? | 7–5=?
Instrução e treino do algoritmo	Adição	Problema escrito (transformação), Algarismo, Coleção e Balança		?+2=5 | ?+2=7 | ?+2=8 ?+2=9 | 3+?=5 | 3+?=7 3+?=8 | 3+?=9 | 3+2=? 4+2=? | 4+4=? | 5+4=?
	Subtração	Problema escrito (transformação), Algarismo, Coleção e Balança		?–7=2 | ?–6=3 | ?–5=4 8-?=2 | 8-?=3 | 8-?=4 7–3=? | 7–4=? | 7–5=?
Teste de generalização	Adição	Problema escrito na tela (transformação)		?+4=13 | 9+14=? | 9+6=?
		Problema escrito ditado (transformação)		7+8=? | ?+6=13 | 7+?=14
	Subtração	Problema escrito na tela (transformação)		?–6=9 | 15-?=8 | 15–8=?
		Problema escrito ditado (transformação)		13–6=? | ?–4=9 | 13-?=8

Prova com problemas escritos – Experimento 1

Exemplo - Numa sala há duas meninas e dois meninos. No total, são ? alunos. Quantos alunos há nesta sala?

Estrutura semântica de transformação		
Incóg.	**Adição**	**Subtração**
a	Pedrinho tinha ? carrinhos. Ganhou mais seis de presente e ficou com oito carrinhos ao todo. Quantos carrinhos ele tinha antes de ganhar o presente?	Bruna tinha ? bonecas. Perdeu seis num passeio e ficou com três bonecas ao todo. Quantas bonecas ela tinha antes do passeio?
b	Paulo tinha quatro carrinhos. Ganhou mais ? de presente e ficou com nove carrinhos ao todo. Quantos carrinhos ele ganhou de presente?	Roberta tinha sete bonecas. Perdeu ? num passeio e ficou com cinco bonecas ao todo. Quantas bonecas ela perdeu no passeio?
c	Márcio tinha dois carrinhos. Ganhou mais cinco de presente e ficou com ? carrinhos ao todo. Quantos carrinhos ele ficou ao todo?	Patrícia tinha oito bonecas. Perdeu quatro num passeio e ficou com ? bonecas ao todo. Quantas bonecas ela ficou após passeio?

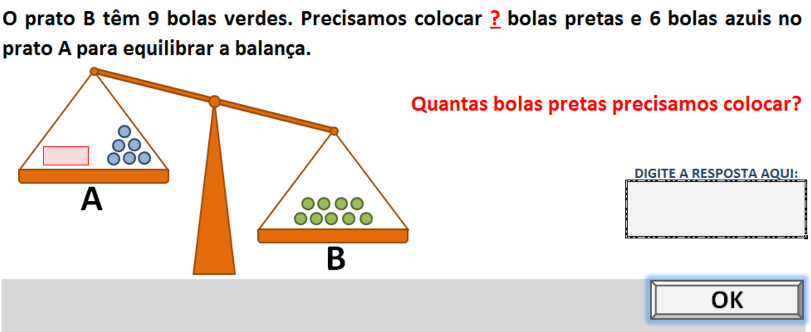
Estrutura semântica de combinação		
Incóg.	**Adição**	**Subtração**
a	Numa sala há ? meninas e seis meninos. No total, são nove alunos. Quantas meninas há nesta sala?	Numa sala há ? alunos. Se cinco são meninos, então quatro são meninas. Quantos alunos há nesta sala?
b	Numa sala há seis meninas e ? meninos. No total, são sete alunos. Quantos meninos há nesta sala?	Numa sala há sete alunos. Se ? são meninos, então três são meninas. Quantos meninos há nesta sala?
c	Numa sala há seis meninas e três meninos. No total, são ? alunos. Quantos alunos há nesta sala?	Numa sala há oito alunos. Se três são meninos, então ? são meninas. Quantas meninas há nesta sala?

Estrutura semântica de comparação		
Incóg.	**Adição**	**Subtração**
a	Mariana tinha ? figurinhas e Gabriela tinha três a mais que Mariana. Ao todo, Gabriela tinha sete figurinhas. Quantas eram as figurinhas de Mariana?	Amanda tinha ? figurinhas e Sônia tinha quatro a menos que Amanda. Ao todo, Sônia tinha cinco figurinhas. Quantas eram as figurinhas de Amanda?
b	Joana tinha quatro figurinhas e Bruna tinha ? a mais que Joana. Ao todo, Bruna tinha oito figurinhas. Quantas figurinhas Bruna tinha a mais que Joana?	Kátia tinha sete figurinhas e Ângela tinha ? a menos que Kátia. Ao todo, Ângela tinha quatro figurinhas. Quantas figurinhas Ângela tinha a menos que Kátia?
c	Ana tinha sete figurinhas e Roberta tinha duas a mais que Ana. Ao todo, Roberta tinha ? figurinhas. Quantas figurinhas Roberta tinha?	Luíza tinha oito figurinhas e Sandra tinha cinco a menos que Luíza. Ao todo, Sandra tinha ? figurinhas. Quantas figurinhas tinha Sandra?

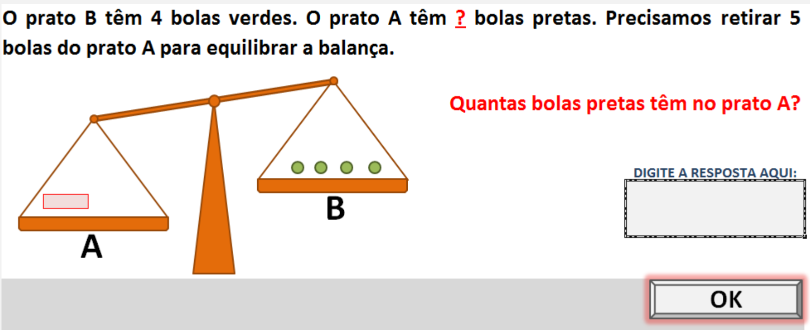
Prova com problemas na forma de balança – Experimento 1

Exemplo

1

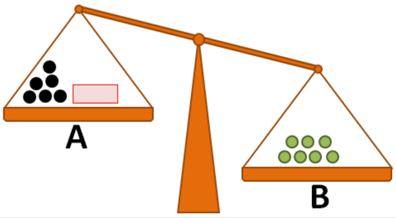


2



3

O prato B têm 7 bolas verdes. Precisamos colocar 6 bolas pretas e ? bolas azuis no prato A para equilibrar a balança.



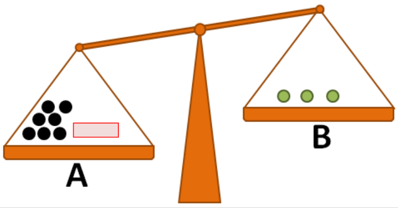
Quantas bolas azuis precisamos colocar?

DIGITE A RESPOSTA AQUI:

OK

4

O prato B têm 3 bolas verdes. O prato A têm 7 bolas pretas. Precisamos retirar ? bolas do prato A para equilibrar a balança.



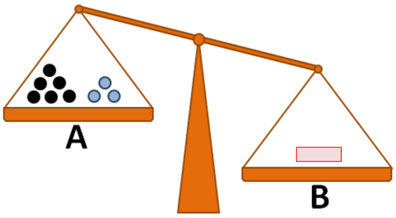
Quantas bolas precisamos retirar?

DIGITE A RESPOSTA AQUI:

OK

5

O prato B têm ? bolas verdes. Precisamos colocar 6 bolas pretas e 3 bolas azuis no prato A para equilibrar a balança.



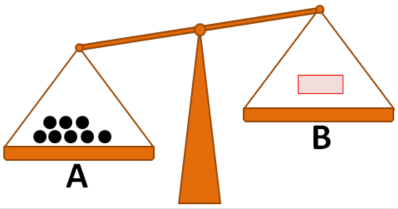
Quantas bolas verdes têm no prato B?

DIGITE A RESPOSTA AQUI:

OK

6

O prato B têm ? bolas verdes. O prato A tem 8 bolas pretas. Retiramos 3 bolas do prato A e equilibramos a balança.



Quantas bolas verdes têm no prato B?

DIGITE A RESPOSTA AQUI:

OK

Experimento 1 – Wilcoxon Bicaudal[23]

Tipo de Operação						
	Pos1Ad - PreAd	Pos2Ad - Pos1Ad	Pos3Ad - Pos2Ad	Pos1Sub - PreSub	Pos2Sub - Pos1Sub	Pos3Sub - Pos2Sub
Z	-2,232[a]	-0,566[a]	-1,445[a]	-2,207[a]	-0,315[b]	-2,113[a]
p	**,026**	,572	,149	**,027**	,752	**,035**

Nota. Ad = Operação de adição; Sub = Operação de subtração.

Forma de Apresentação												
	Pos1Ag - PreAg	Pos2Ag - Pos1Ag	Pos3Ag - Pos2Ag	Pos1Bl - PreBl	Pos2Bl - Pos1Bl	Pos3Bl - Pos2Bl	Pos1Cj - PreCj	Pos2Cj - Pos1Cj	Pos3Cj - Pos2Cj	Pos1St - PreSt	Pos2St - Pos1St	Pos3St - Pos2St
Z	-1,406[a]	0,001[c]	-2,236[a]	-1,282[a]	-0,68[b]	-1,552[a]	-0,272[a]	-0,316[b]	-1,604[a]	-2,384[a]	-0,42[a]	-1,546[a]
p	,160	1,000	**,025**	,200	,496	,121	,785	,752	,109	**,017**	,674	,122

Nota. Ag = Forma de algarismo; Bl = Forma de balança; Cj = Forma de coleção; St = Forma escrita.

Estrutura Semântica									
	Pos1Tf - PreTf	Pos2Tf - Pos1Tf	Pos3Tf - Pos2Tf	Pos1Cp - PreCp	Pos2Cp - Pos1Cp	Pos3Cp - Pos2Cp	Pos1Cb - PreCb	Pos2Cb - Pos1Cb	Pos3Cb - Pos2Cb
Z	-1,236[a]	-1,552[a]	-1,134[a]	-2,232[a]	-0,322[a]	-1,275[a]	-2,214[a]	-0,317[b]	-2,06[a]
p	,216	,121	,257	**,026**	,748	,202	**,027**	,751	**,039**

Nota. Tf = Estrutura de transformação; Cp = Estrutura de comparação; Cb = Estrutura de combinação.

Posição da Incógnita									
	Pos1A - PreA	Pos2A - Pos1A	Pos3A - Pos2A	Pos1B - PreB	Pos2B - Pos1B	Pos3B - Pos2B	Pos1C - PreC	Pos2C - Pos1C	Pos3C - Pos2C
Z	-1,187[a]	-0,343[b]	-2,546[a]	-2,388[a]	-0,271[a]	-0,631[a]	-2,032[a]	-0,105[a]	-1,807[a]
p	,235	,732	**,011**	**,017**	,786	,528	**,042**	,916	,071

Nota. A = Incógnita em A; B = Incógnita em B; C = Incógnita em C.

[23] Pre = pré-teste; Pos1, Pos2, Pos3 = Pós-testes 1, 2, 3; [a] = Baseado em *ranks* negativos; [b] = Baseado em *ranks* positivos; [c] = *Ranks* positivos e negativos foram iguais.

Delineamento experimental do Experimento 2

Tabela 11

Resumo do delineamento experimental do Experimento 2

Delineamento experimental	**Tarefas realizadas**
Instrução	Vídeo com instrução sobre como realizar as tarefas propostas no pré-teste.
Pré-teste	36 ST (18+ e 18-). Desses 18, 9 TF e 9 CP. Desses 9, 3*a*, 3*b* e 3*c* (sem *feedback*); 18 AG (9+ e 9-). Desses 9, 3*a*, 3*b* e 3*c* (sem *feedback*); 18 BL (9+ e 9-). Desses 9, 3 *a*, 3 *b* e 3 *c* (sem *feedback*); 36 testes de relações de equivalência entre as diferentes formas de apresentação dos problemas, sendo 6 testes por relação. Desses 6, 3+ e 3-. Um problema para cada posição da incógnita (sem *feedback*)
Treino preparatório	3 Tts BL que o experimentador resolve, sendo 1 para cada posição da incógnita (com *feedback*); 3 Tts BL que o participante resolve, sendo 1 para cada posição da incógnita (com *feedback*)
Ensino da relação BL (A) e AG (B)	36 Tts (BL como E-M e AG como E-C), sendo 18+ e 18-. Desses 18, 3*a*, 3*b* e 3*c* (com *feedback*). Sondas ao longo da sessão, 3 para cada posição da incógnita (sem *feedback*).
Teste da relação de simetria AG (B) e BL (A)	18 Tts (AG como E-M e BL como E-C), sendo 9+ e 9-. Desses 9, 3*a*, 3*b* e 3*c* (sem *feedback*).
Ensino da relação BL (A) e ST-transformação (C)	36 Tts (BL como E-M e ST como E-C), sendo 18+ e 18-. Desses 18, 3*a*, 3*b* e 3*c* (com *feedback*). Sondas ao longo da sessão, 3 para cada posição da incógnita (sem *feedback*).
Teste da relação de simetria ST-transformação (C) e BL (A)	18 Tts (ST como E-M e BL como E-C), sendo 9+ e 9-. Desses 9, 3*a*, 3*b* e 3*c* (sem *feedback*).
Teste da relação de transitividade ST-transformação (C) e AG (B)	18 Tts (ST como E-M e AG como E-C), sendo 9+ e 9-. Desses 9, 3*a*, 3*b* e 3*c* (sem *feedback*).
Teste da relação de transitividade AG (B) e ST-transformação (C)	18 Tts (AG como E-M e ST como E-C), sendo 9+ e 9-. Desses 9, 3*a*, 3*b* e 3*c* (sem *feedback*).
Pós-teste 1	Idêntico ao pré-teste.
Treino de resolução de problemas com a BL	40 Tts, sendo 20+ e 20-. Desses 20, 7*a*, 7*b* e 6*c* (com *feedback*).
Pós-teste 2	Idêntico ao pré-teste.
Teste de Generalização 1	24 Tts, sendo 12 escritas e 12 ditadas. Desses 12, 6+ e 6-. Desses 6, 2*a*, 2*b* e 2*c* (sem *feedback*).
Ensino dos algoritmos de Adição e Subtração	12 Tts+, sendo 4 sob cada forma de apresentação (ST, BL e AG) e 6*a* e 6*b*. Em 4 Tts das 12 (2*a* e 2*b*), experimentador forneceu modelo de como resolver o problema. Nas demais Tts, participante resolveu sozinho (com *feedback*); 12 Tts-, sendo 4 sob cada forma de apresentação (ST, BL e AG) e 6*a* e 6 *b*. Em 4 Tts das 12 (2*a* e 2*b*), experimentador forneceu modelo de como resolver o problema. Nas demais Tts, participante resolveu sozinho (com *feedback*).
Pós-teste 3	Idêntico ao pré-teste.
Teste de Generalização 2	Idêntico ao Teste de Generalização 1.

Nota. ST = problema escrito; AG = problema sob a forma de algarismo; BL = problema sob a forma de balança; + = problema de adição; - = problema de subtração; TF = estrutura de transformação; CP = estrutura de comparação; Tts = tentativas; Estímulo-modelo = E-M; Estímulo-comparação = E-C; Posição da incógnita = *a*, *b*, *c*.

Valores dos problemas do Experimento 2

Tabela 12

Problemas empregados no Experimento 2 por fase

Fase	Operação	Forma de apresentação		Problemas
Pré-teste e pós-testes	Adição	Problema escrito	Transformação positiva	?+2=9 | 5+?=7 | 5+3=?
			Comparação	?+3=9 | 4+?=7 | 6+2=?
		Algarismo		?+3=7 | 6+?=8 | 6+3=?
		Balança		?+2=7 | 5+?=8 | 7+2=?
	Subtração	Problema escrito	Transformação negativa	?-3=4 | 9-?=6 | 9-4=?
			Comparação	?-2=4 | 8-?=6 | 8-3=?
		Algarismo		?-3=6 | 9-?=5 | 7-3=?
		Balança		?-2=6 | 8-?=5 | 6-2=?
Avaliação das classes de equivalência	Adição	Relações entre problema escrito (transformação), algarismo e balança		?+1=7 | 7+?=8 | 8+1=?
	Subtração	Relações entre problema escrito (transformação), algarismo e balança		?-1=4 | 4-?=3 | 3-1=?
Treino preparatório	Adição	Balança		?+1=4 | ?+1=5 | 2+?=3 4+?=5 | 4+1=? | 5+1=?
	Subtração	Balança		?-2=2 | ?-3=1 | 4-?=2 5-?=1 | 4-2=? | 6-3=?
Treino e testes de equivalência	Adição	Relações entre problema escrito (transformação), algarismo e balança		?+2=6 | ?+2=4 | 3+?=5 4+?=8 | 3+3=? | 5+4=?
	Subtração	Relações entre problema escrito (transformação), algarismo e balança		?-2=3 | ?-1=8 | 7-?=5 8-?=7 | 7-1=? | 9-2=?
Resolução de problemas na forma de uma balança	Adição	Balança		?+3=5 | ?+3=4 | ?+2=6 ?+2=7 | ?+2=10 | 3+?=5 1+?=5 | 1+?=7 | 3+?=6 2+?=3 | 2+3=? | 5+1=? 6+2=? | 1+3=? | 4+4=?
	Subtração	Balança		?-3=1 | ?-3=2 | ?-1=5 ?-2=4 | ?-4=1 | 4-?=3 5-?=1 | 6-?=4 |7-?=5 6-?=3 | 6-1=? | 3-2=? 4-2=? | 5-1=? | 5-3=?
Ensino do algoritmo	Adição	Problema escrito (transformação), Algarismo e Balança		?+2=4 | ?+2=6 | 3+?=5 4+?=8 | ?+2=6 | ?+2=4 4+?=8 | 3+?=5 | ?+3=6 ?+4=9 | ?+4=9 | 3+?=5 4+?=6
	Subtração	Problema escrito (transformação), Algarismo e Balança		?-1=8 | ?-2=3 | 7-?=5 8-?=7 | ?-2=3 | ?-1=8 8-?=7 | 7-?=5 | ?-1=6 ?-2=7 | 5-?=3 | 9-?=8
Testes de Generalização 1 e 2	Adição	Problema escrito na tela (transformação)		?+4=13 | 8+?=14 | 9+6=?
		Problema escrito ditado (transformação)		?+6=13 | 7+?=14 | 8+7=?
	Subtração	Problema escrito na tela (transformação)		?-6=9 | 12-?=8 | 15-8=?
		Problema escrito ditado (transformação)		?-4=9 | 13-?=8 | 13-6=?

Prova com problemas escritos – Experimento 2

Estrutura semântica de transformação		
Incóg.	**Adição**	**Subtração**
a	Ana tinha ? bombons. Ganhou mais dois e ficou com nove ao todo. Quantos bombons a Ana tinha?	Ana tinha ? bonecas. Perdeu três e ficou com quatro ao todo. Quantas bonecas a Ana tinha?
b	João tinha cinco bolas. Ganhou mais ? e ficou com sete ao todo. Quantas bolas o João ganhou?	Edu tinha nove lápis. Perdeu ? e ficou com seis ao todo. Quantos lápis o Edu perdeu?
c	Bia tinha cinco bonecas. Ganhou mais três e ficou com ? ao todo. Com quantas bonecas a Bia ficou?	Léo tinha nove moedas. Perdeu quatro e ficou com ? ao todo. Com quantas moedas o Léo ficou?

Estrutura semântica de comparação		
Incóg.	**Adição**	**Subtração**
a	Léo tinha ? pipas e Bia tinha três a mais que ele. Ao todo Bia tinha nove pipas. Quantas pipas o Léo tinha?	Léo tinha ? pipas e Bia tinha duas a menos que ele. Ao todo Bia tinha quatro pipas. Quantas pipas o Léo tinha?
b	Rita tinha quatro lápis e Edu tinha ? a mais que ela. Ao todo Edu tinha sete lápis. Quantos lápis o Edu tinha a mais?	Rita tinha oito bolas e Edu tinha ? a menos que ela. Ao todo Edu tinha seis bolas. Quantas bolas o Edu tinha a menos?
c	João tinha seis moedas e Ana tinha duas a mais que ele. Ao todo Ana tinha ? moedas. Quantas moedas a Ana tinha?	João tinha oito bombons e Bia tinha três a menos que ele. Ao todo Bia tinha ? bombons. Quantos bombons a Bia tinha?

Experimento 2 – Wilcoxon Bicaudal[24]

Tipo de Operação

	Pos1Ad - PreAd	Pos2Ad - Pos1Ad	Pos3Ad - Pos2Ad	Pos1Sub - PreSub	Pos2Sub - Pos1Sub	Pos3Sub - Pos2Sub
Z	-2,527[a]	-2,524[a]	-2,384[a]	-2,100[a]	-2,527[a]	-2,388[a]
p	**,012**	**,012**	**,017**	**,036**	**,012**	**,017**

Nota. Ad = Operação de adição; Sub = Operação de subtração.

Forma de Apresentação

	Pos1Ag - PreAg	Pos2Ag - Pos1Ag	Pos3Ag - Pos2Ag	Pos1Bl - PreBl	Pos2Bl - Pos1Bl	Pos3Bl - Pos2Bl	Pos1St - PreSt	Pos2St - Pos1St	Pos3St - Pos2St
Z	-1,895[a]	-,318[b]	-1,186[a]	-2,524[a]	-1,973[a]	-1,483[a]	-1,970[a]	-2,524[a]	-2,384[a]
p	,058	,750	,236	**,012**	**,049**	,138	**,049**	**,012**	**,017**

Nota. Ag = Forma de algarismo; Bl = Forma de balança; St = Forma escrita.

Estrutura Semântica

	Pos1Tf - PreTf	Pos2Tf - Pos1Tf	Pos3Tf - Pos2Tf	Pos1Cp - PreCp	Pos2Cp - Pos1Cp	Pos3Cp - Pos2Cp
Z	-2,106[a]	-2,375[a]	-1,474[a]	-1,057[a]	-2,371[a]	-2,539[a]
p	**,035**	**,018**	,140	,291	**,018**	**,011**

Nota. Tf = Estrutura de transformação; Cp = Estrutura de comparação.

Posição da Incógnita

	Pos1A - PreA	Pos2A - Pos1A	Pos3A - Pos2A	Pos1B - PreB	Pos2B - Pos1B	Pos3B - Pos2B	Pos1C - PreC	Pos2C - Pos1C	Pos3C - Pos2C
Z	-2,383[a]	-2,521[a]	-2,371[a]	-2,201[a]	-2,533[a]	-1,890[a]	-2,319[a]	-2,384[a]	-2,154[a]
p	**,017**	**,012**	**,018**	**,028**	**,011**	,059	**,020**	**,017**	**,031**

Nota. A = Incógnita em A; B = Incógnita em B; C = Incógnita em C.

[24] Pre = pré-teste; Pos1, Pos2, Pos3 = Pós-testes 1, 2, 3; [a] = Baseado em *ranks* negativos; [b] = Baseado em *ranks* positivos.

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – Experimentos 1 e 2

O seu filho está sendo convidado para participar da pesquisa Equivalência de Estímulos e Resolução de Problemas de adição e subtração. Esta pesquisa será conduzida pelo pesquisador e mestrando do Programa de Pós-graduação em Psicologia da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), Marcelo Henrique Oliveira Henklain, e supervisionado pelo orientador João dos Santos Carmo, docente do curso de Psicologia e da Pós-graduação em Psicologia da UFSCar.

Pesquisas na área de educação têm relatado dificuldades no ensino da Matemática. Muitos alunos não aprendem conceitos básicos e demonstram desinteresse ou, inclusive, aversão em relação a essa disciplina. Dentre muitos tipos de pesquisa científica que tentam contribuir com a solução desses problemas, estão aquelas que investigam como melhorar a capacidade dos alunos em resolver problemas de Matemática. O objetivo deste estudo é **investigar condições que possam facilitar o aprendizado de resolução de problemas de adição e de subtração**.

O seu filho foi selecionado para esta pesquisa e a participação dele não é obrigatória. Os participantes da pesquisa serão expostos a um programa de ensino (de resolução de problemas de adição e subtração) por computador. Todas as sessões serão acompanhadas pelo pesquisador e realizadas numa sala destinada ao Projeto Liga da Leitura, que está vinculado ao Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia sobre Comportamento, Cognição e Ensino localizado na UFSCar. A participação do seu filho consistirá na realização das atividades de Matemática apresentadas no computador.

Não foram encontrados na literatura científica efeitos adversos ou riscos referentes aos procedimentos que serão utilizados nesta pesquisa. Contudo, é possível que o participante possa experimentar ligeiro cansaço ao longo da sessão. Nessas condições, a sessão será finalizada e reiniciada apenas com o consentimento do participante.

Informo que a participação do seu filho é livre. Caso aceite participar, o seu filho também é livre para abandonar a pesquisa em qualquer fase, sem penalização ou prejuízo algum. Garantimos o sigilo relativo a todas as informações pessoais fornecidas. Mas informamos que os resultados e conclusões obtidos na pesquisa serão publicados na dissertação de mestrado do pesquisador e poderão ser publicados em forma de artigo científico ou resumo, e apresentados em eventos científicos.

Você receberá uma cópia deste termo onde consta o telefone e o endereço do pesquisador principal, podendo tirar suas dúvidas sobre o projeto e sua participação, agora ou a qualquer momento.

Deste modo, eu, ____, portador da carteira de identidade nº ________________, expedida por _________, em ___/___/___, portador do CPF nº ________________, declaro que entendi os objetivos, riscos e benefícios da participação do meu filho na pesquisa e concordo que ele participe. Informo também que o pesquisador me informou que o projeto foi aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos da UFSCAR, Parecer nº. 013-2012, que funciona na Pró-reitoria de Pesquisa da Universidade Federal de São Carlos, localizada na Rodovia Washington Luiz, Km. 235 – Caixa Postal 676 – CEP 13.565-905 – São Carlos – SP – Brasil. Fone (16) 3351-8028. Endereço eletrônico: cephumanos@power.ufscar.br

Decido, portanto, permitir que meu filho(a), ____, portador da carteira de identidade nº ________________, expedida por _________, em ___/___/___, participe desta pesquisa. Autorizo que sejam feitas entrevistas, filmagens e fotografias, apenas para a coleta de dados, não sendo possível a divulgação dessas imagens ou da minha identificação ou de meu filho(a), as quais devem ser preservadas em sigilo. Autorizo também a divulgação dos resultados e conclusões da pesquisa por meio de publicações científicas, tais como resumo em anais, capítulos de livro, artigos, dissertações e teses.

E por estarem de acordo, as partes firmam o presente compromisso.

São Carlos, ___ de ________________ de ______.

Pesquisador: Marcelo Henrique Oliveira Henklain	Assinatura do(a) Pai/Responsável
Orientador: João dos Santos Carmo	Assinatura do(a) Mãe/Responsável

Contato:
Pesquisador: Marcelo Henrique Oliveira Henklain | E-mail: marcelo_henklain@hotmail.com | Telefone: (16)8134-2214
Orientador: Prof. Dr. João dos Santos Carmo | E-mail: carmojs@gmail.com | Telefone: (16)3351-9357

Parecer do Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos – UFSCar

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA EM SERES HUMANOS
Via Washington Luiz, Km. 235 - Caixa Postal 676
CEP 13.565-905 - São Carlos - SP - Brasil
Fones: (016) 3351-8028 Fax (016) 3351-8025 Telex 162369 - SCUF - BR
cephumanos@power.ufscar.br http://www.propq.ufscar.br

Parecer Nº. 013/2012

CAAE: 0189.0.135.000-11
Título do projeto: EQUIVALÊNCIA DE ESTÍMULOS E ENSINO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO A ESTUDANTES COM DIFICULDADES EM MATEMÁTICA
Pesquisadores (as): MARCELO HENRIQUE OLIVEIRA HENKLAIN

Conclusão
As pendências apontadas no Parecer nº.455/2011 foram satisfatoriamente resolvidas. **Projeto aprovado.** Atende as exigências contidas na Resolução 196/96, do Conselho Nacional de Saúde.

Normas a serem seguidas
• O sujeito da pesquisa tem a liberdade de recusar-se a participar ou de retirar seu consentimento em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma e sem prejuízo ao seu cuidado (Res. CNS 196/96 – Item IV.1.f) e deve receber uma cópia do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, na íntegra, por ele assinado (Item IV.2.d).

• O sujeito de pesquisa ou seu representante, quando for o caso, deverá rubricar todas as folhas do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE– apondo sua assinatura na última página do referido Termo.

• O pesquisador responsável deverá da mesma forma, rubricar todas as folhas do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE– apondo sua assinatura na última página do referido Termo.

• O pesquisador deve desenvolver a pesquisa conforme delineada no protocolo aprovado e descontinuar o estudo somente após análise das razões da descontinuidade pelo CEP que o aprovou (Res. CNS Item III.3.z), aguardando seu parecer, exceto quando perceber risco ou dano não previsto ao sujeito participante ou quando constatar a superioridade de regime oferecido a um dos grupos da pesquisa (Item V.3) que requeiram ação imediata.

• O CEP deve ser informado de todos os efeitos adversos ou fatos relevantes que alterem o curso normal do estudo (Res. CNS Item V.4). É papel do pesquisador assegurar medidas imediatas adequadas frente a evento adverso grave ocorrido (mesmo que tenha sido em outro centro) e enviar notificação ao CEP e à Agência Nacional de Vigilância Sanitária – ANVISA – junto com seu posicionamento.

• Eventuais modificações ou emendas ao protocolo devem ser apresentadas ao CEP de forma clara e sucinta, identificando a parte do protocolo a ser modificada e suas justificativas. Em caso de projetos do Grupo I ou II apresentados anteriormente à ANVISA, o pesquisador ou patrocinador deve enviá-las também à mesma, junto com o parecer aprobatório do CEP, para serem juntadas ao protocolo inicial (Res. 251/97, item III.2.e).
• Relatórios parciais e final devem ser apresentados ao CEP, inicialmente dentro de 1 (um) ano a partir desta dada e ao término do estudo.
São Carlos, 27 de Janeiro de 2012.

Prof. Dr. Daniel Vendrúscolo
Coordenador do CEP/UFSCar