UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCAR
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – PPGECE

DIMITRIE HRISTOV SOBRINHO

O ENSINO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

SOROCABA
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCAR
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – PPGECE

DIMITRIE HRISTOV SOBRINHO

O ENSINO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dimitrie Hristov Sobrinho
Orientador: Prof. Dr. Geraldo Pompeu Junior

SOROCABA
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCAR

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – PPGECE

DIMITRIE HRISTOV SOBRINHO

ORIENTADOR: PROF. DR. GERALDO POMPEU JUNIOR

O ENSINO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação elaborada junto ao Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas. *Orientação: Prof. Dr. Geraldo Pompeu Junior*

SOROCABA

2015

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

	Hristov Sobrinho, Dimitrie.
H873ef	O ensino de funções trigonométricas através da resolução de problemas / Dimitrie Hristov Sobrinho. -- São Carlos : UFSCar, 2015.
	115 f.
	Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.
	1. Matemática - estudo e ensino. 2. Ensino - aprendizagem. 3. Resolução de problemas. 4. Funções trigonométricas. 5. Aplicações. I. Título.
	CDD: 510.7 (20ª)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Dimitrie Hristov Sobrinho, realizada em 25/06/2015:

Prof. Dr. Geraldo Pompeu Junior
UFSCar

Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi
UFABC

Profa. Dra. Graciele Paraguaia Silveira
UFSCar

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus familiares, amigos e a Deus.

Aos meus colegas que durante os estudos participaram de forma efetiva auxiliando-me em momentos difíceis, especialmente a Thaisa e a Silvia que desde o início estiveram presentes.

Aos professores, por tornarem possível a conclusão desse trabalho, me preparando para esse crescimento profissional.

Ao meu irmão Ivam e ao meu grande amigo Gilberto, por tornarem possíveis, várias viagens ao campus de Sorocaba durante o período das aulas presenciais.

A Jaqueline que sempre estudou comigo durante o curso.

A Patrícia por ter apoiado a minha decisão ao escolher esse Programa de Mestrado Profissionalizante.

Aos queridos alunos da Escola D. Pedro II, que participaram da pesquisa, sempre entusiasmados durante o desenvolvimento das Atividades propostas.

Agradeço especialmente ao meu Orientador, o Professor Dr. Geraldo Pompeu Jr., por ter acreditado em mim, dando todo suporte necessário para que eu pudesse completar essa pesquisa.

RESUMO

O ensino médio brasileiro, em particular no Estado de São Paulo, tem como principais objetivos gerais o aprofundamento dos conceitos estudados no Ensino Fundamental, tornando o aluno capaz de prosseguir com seus estudos no Ensino Superior e/ou em Cursos Profissionalizantes. Além disso, objetiva o desenvolvimento da capacidade crítica do aluno para que esse se utilize dos conhecimentos/conceitos matemáticos estudados para compreender e resolver situações reais de seu cotidiano. Entretanto, é comum observarmos, em nossas escolas, os alunos serem submetidos apenas à resolução de exercícios repetitivos, denominados por George Polya de "problemas rotineiros". Em consequência, o desenvolvimento de sua criticidade e de seu raciocínio lógico/dedutivo ficam prejudicados, para não dizer, esquecidos como objetivos a serem atingidos. A pesquisa, em nível de Mestrado Profissionalizante, aqui relatada tem como objetivo central a *"investigação das possíveis contribuições que uma metodologia baseada na Técnica de Resolução de Problemas pode ter para com o processo de ensino e aprendizagem de funções trigonométricas, bem como para com o desenvolvimento do raciocínio matemático de alunos da 2ª série do Ensino médio".* Para tal, foram formuladas três questões a serem investigadas durante o transcorrer da pesquisa. São elas: (1ª) Como deve ser realizada a generalização do conceito de razão trigonométrica (seno, cosseno e tangente), estudado no triangulo retângulo, para o ciclo trigonométrico? (2ª) Como deve ser realizada a transição da generalização procedida do ciclo trigonométrico para o estudo das funções trigonométricas no plano cartesiano, de forma lógica e dedutiva? (3ª) Qual a contribuição que essa pesquisa trouxe para com a minha formação docente, nas perspectivas matemática, didática e metodológica?Os resultados da pesquisa mostram que o envolvimento dos alunos na busca das soluções dos problemas propostos, aumentou a compreensão dos conceitos matemáticos trabalhados, bem como a aplicação deles em situações do cotidiano desses alunos. Finalmente, para minha formação profissional, a pesquisa mostrou que, ao conduzir o Processo de Ensino e Aprendizagem da Matemática, a partir de problemas "não rotineiros" e contextualizados, as chances de melhora na compreensão e aplicação dos conceitos matemáticos trabalhados, bem como, do interesse e do envolvimento dos alunos aumentaram significativamente.

Palavras-chave: Processo de Ensino e Aprendizagem; Resolução de Problemas; Funções Trigonométricas; Aplicações.

ABSTRACT

The Brazilian high school, particularly in São Paulo State, has as general objectives the deepening the concepts studied in elementary school, making the student able to continue their studies in higher education and / or vocational courses. In addition, objective the development of critical student's ability to use the mathematical knowledge / concepts studied to understand and solve real situations of their daily lives. However, it is common to see in our schools, students subjected only to the resolution of repetitive exercises, called by George Polya of "routine problems". Consequently, the development of their criticality and their logical / deductive reasoning are affected, not to say, forgotten as goals to be achieved. The research, at the level of Professional Master Degree, reported here was aimed at the "investigation of possible contributions to a methodology based on Problem Solving Theory may have towards the teaching and learning process of trigonometric functions, as well as with the development of mathematical reasoning students of the 2nd year of high school". To this end, it was formulated three issues to be investigated during the course of the research. Are they: (1st) What should be done to generalize the concept of trigonometric ratio (sine, cosine and tangent), studied in the right triangle to the trigonometric cycle? (2nd) How should the transition be held generalization preceded the trigonometric cycle for the study of trigonometric functions in the Cartesian plane in a logical and deductive way? (3rd) What is the contribution that this research brought to my teacher training in math, methodological and didactic perspectives? The investigation results show that the involvement of students in the search for solutions to the problems posed, increased understanding of mathematical concepts worked as well as their application in their everyday situations. Finally, from the my professional training perspective, the research has shown that, when driving the Teaching Process and Learning of Mathematics, from problems "non-routine" and contextualized, the chances of improvement in the understanding and application of mathematical concepts worked as well, interest and involvement of students increased significantly.

Keywords: Teaching and Learning Process; Troubleshooting; Trigonometric functions; Applications.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE FOTOS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O projeto de pesquisa, em nível de Mestrado Profissionalizante, aqui descrito, investigou se a utilização de uma metodologia de ensino, baseada na Técnica de Resolução de Problemas, proposta por George Polya (1887 – 1985), possibilitou ou não o aperfeiçoamento do processo de ensino e aprendizagem das funções trigonométricas trabalhadas em nível do Ensino Médio.

O conceito matemático de funções, de uma única variável real, é, provavelmente, o mais importante e aplicável dos conceitos trabalhados nesse nível de ensino. Especialmente, com relação às funções trigonométricas, pois estas buscam compreender e modelar fenômenos de comportamentos periódicos, característica não enfatizada pelas funções polinomiais de 1º e 2º graus, exponencial e logarítmica trabalhadas, também, nesse nível de escolarização.

Historicamente, os primeiros conceitos trigonométricos foram estabelecidos na Grécia Antiga (Século II, A.C.) em busca do entendimento e solução de eventos relacionados à Astronomia, tendo na semelhança de triângulos sua base de sustentação. Além disso, os conceitos trigonométricos foram importantes ferramentas matemáticas para a resolução de problemas relacionados à agrimensura de terras, particularmente no delta do rio Nilo e, posteriormente, para a navegação.

Hiparco de Nicéia (180 – 125, A.C.), considerado o pai da trigonometria, construiu a primeira tabela de cordas e, através dela determinou, com bastante precisão, os horários de nascimento e por do Sol da região em que vivia, Nicéia, na antiga Babilônia, região atualmente conhecida por Iraque, como mostra o mapa.

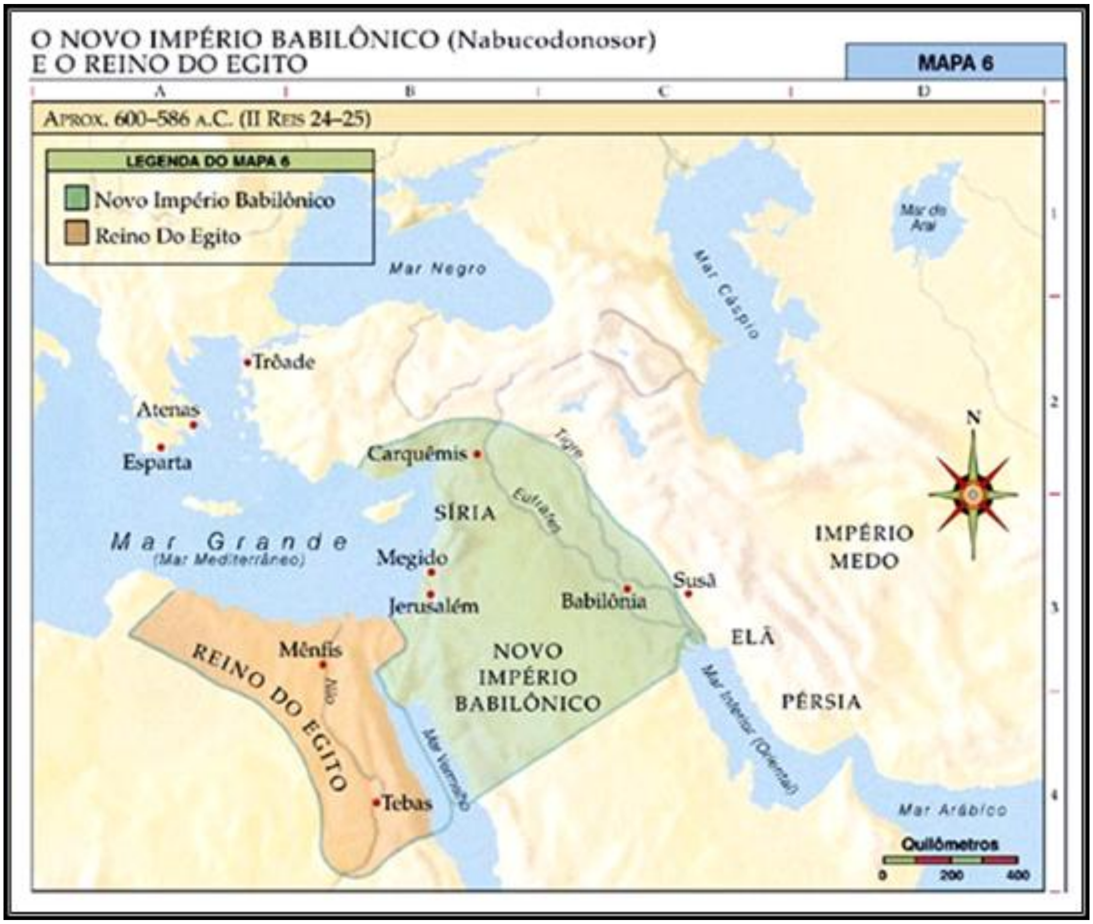


Figura 1: Império Babilônico e o Reino do Egito

Fonte: http://deusfaloucomigo.com.br/nabucodonozor.htm

No século XVI, a generalização e formalização dos conceitos de razões trigonométricas para os de funções trigonométricas, como atualmente os conhecemos, se iniciou com François Viète (1540 – 1603 D.C.) que propôs um tratamento analítico à trigonometria.

> Em *Canon mathematicus seu ad triangula* há contribuições notáveis à trigonometria. Trata-se, talvez, do primeiro livro na Europa Ocidental a desenvolver sistematicamente métodos para resolver triângulos plano e esféricos com o auxílio das seis funções trigonométricas. Viète obteve expressões para cós(nθ) como função de cosθ para n = 1, 2, ..., 9 e posteriormente sugeriu uma solução trigonométrica para o caso irredutível das cúbicas. (Eves, Howard. 2011, pág. 309).

Posteriormente, no Século XVII, Isaac Newton (1642 – 1727), em seus estudos sobre o Cálculo Infinitesimal, propôs a expansão do conceito do arco-seno (arcsen (x)) em séries e definiu a função inversa do seno (sen (x)). Também deduziu as fórmulas gerais para os valores do seno e do cosseno para argumentos múltiplos de "x", ou seja, sen (n.x) e cos (n.x).

No Século XVIII, em 1748, Leonard Euler (1707 – 1783) ao incorporar a trigonometria à análise matemática, passou a interpretar os conceitos de seno, cosseno, tangente, cotangentes, secante e cossecante como funções de uma única variável real, hoje conhecidas como funções trigonométricas.

É a partir dessa breve retrospectiva histórica, pontuando alguns fatos fundamentais da evolução dos conceitos relacionados às funções trigonométricas, que busquei justificar, historicamente, a escolha do tema de minha pesquisa. Enfatizo ainda que, nesta pesquisa, os alunos dela participantes tiveram também a oportunidade de associarem ao estudo das funções trigonométricas do seno, do cosseno e da tangente à compreensão e à resolução de problemas clássicos relacionados aos fenômenos ditos periódicos.

É importante registrar, ainda, que a escolha desse tema de pesquisa também se deu pelo número de anos de experiência docente que possuo no Ensino Médio. Em geral, os alunos desse nível de escolarização apresentam dificuldades no estudo desse tema, principalmente quando se procede com a generalização dos conceitos trigonométricos. Normalmente, os conceitos de razões trigonométricas são primeiro estudados em nível do triangulo retângulo para, posteriormente, serem analisados no ciclo trigonométrico e representados, enquanto funções, no plano cartesiano.

Além disso, boa parte dos materiais didáticos disponíveis para esse tema em sala de aula abordam essas três representações das razões trigonométricas (no triângulo retângulo, no ciclo trigonométrico e no plano cartesiano), posteriormente definidas por funções trigonométricas, de forma distinta e desconexa, deixando uma lacuna entre os mesmos conceitos, previamente estudados, e suas aplicações e/ou contextualizações.

Finalmente, a opção por se estudar os conceitos de funções trigonométricas através da "Resolução de Problemas" se justificou pelos fatos dessa metodologia de ensino buscar:

- Desenvolver, nos alunos, um aprendizado significativo, onde eles se confrontam com situações-problema;
- Desenvolver, nos alunos, estratégias de enfrentamento e de planejamento para a resolução dessas situações-problema;
- Estabelecer, junto aos alunos, relações, observando padrões de regularidades e utilizando de seus próprios erros na busca de alternativas para solucioná-lo; e, finalmente, em alguns casos,
- Oferecer, aos alunos, a oportunidade de modelar matematicamente a situação-problema sob investigação.

Segundo os PCNEM, ao se referirem ao ensino de trigonometria, em particular das funções trigonométricas de seno, cosseno e tangente, afirmam que:

> "Apesar de sua importância, tradicionalmente a trigonometria é apresentada desconectada das aplicações, investindo-se muito tempo no cálculo algébrico das identidades e equações em detrimento dos aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. O que deve ser assegurado são as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Dessa forma, o estudo deve se ater às funções seno, cosseno e tangente com ênfase ao seu estudo na primeira volta do círculo trigonométrico e à perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas." (PCNEM, 2013, p. 121 – 122).

Tendo procurado justificar a escolha do tema de minha pesquisa sobre "O ensino de funções trigonométricas, através da resolução de problemas":

- pela aplicabilidade dos conceitos estudados;
- por fatos marcantes da evolução histórica de tais conceitos;
- pelas dificuldades de aprendizagem, apresentada por boa parte de meus alunos, ao estudarem com esses conceitos;

- pela falta de materiais didáticos disponíveis na escola em que a pesquisa foi realizada e, avaliados por mim, como apropriados para o trabalho de sala de aula com tais conceitos; e, finalmente,
- pela importância da metodologia a ser adotada nesse trabalho

defino como objetivo central de minha pesquisa a **"investigação das possíveis contribuições que uma metodologia baseada na Técnica de Resolução de Problemas, de George Polya, pode ter para com o processo de ensino e aprendizagem de funções trigonométricas, bem como para com o desenvolvimento do raciocínio matemático de alunos da 2ª série do Ensino Médio"**.

Para determinar as possíveis contribuições que o uso desta metodologia pôde trazer para o processo de ensino e aprendizagem de funções trigonométricas do seno, do cosseno e da tangente, são três as principais questões que procurei responder ao final da pesquisa:

(1ª) Como realizar a generalização do conceito de razão trigonométrica (seno, cosseno e tangente), estudado no triângulo retângulo, para o ciclo trigonométrico?

(2ª) Como realizar a transição da generalização procedida no ciclo trigonométrico para o estudo das funções trigonométricas no plano cartesiano, de forma lógica e dedutiva?

(3ª) Qual a contribuição que essa pesquisa trouxe para a minha formação docente, nas perspectivas matemática, didática e metodológica?

Concluindo a Introdução, a presente dissertação é composta por quatro capítulos, cada um deles com os seguintes objetivos:

No Capítulo I, intitulado “As Bases Teóricas da Pesquisa”, encontra-se a definição da “Técnica da Resolução de Problemas" segundo a compreensão de George Polya. Além disso, também serão apresentadas as orientações relevantes fornecidas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) dos Ensinos Fundamental e Médio, assim como a Proposta Curricular do Estado de São Paulo, no que diz respeito às Competências e Habilidades que serão investigadas durante a pesquisa.

No Capítulo II, chamado de “A investigação do Tema de Pesquisa”, encontram-se as Atividades Didáticas propostas para a pesquisa. Serão três atividades didáticas a serem desenvolvidas pelos alunos, assim nomeadas: Atividade 1 – Calculando distâncias inacessíveis; Atividade 2 – Medindo o comprimento da sombra de uma estada fixada ao solo; e, Atividade 3 – O Estudo das Funções Trigonométricas.

Já no Capítulo III, denominado “Aplicação das Atividades Didáticas da Pesquisa”, encontra-se descrito, detalhadamente, o resultado da aplicação dessas atividades nos alunos, conforme estas foram definidas no capítulo anterior.

Finalmente, no Capítulo IV, intitulado “Conclusão”, encontra-se as respostas às três perguntas de pesquisa formuladas anteriormente. Além disso, apresento minhas conclusões a respeito das atividades didáticas planejadas e aplicadas junto aos alunos participantes da pesquisa, bem como sobre a utilização da metodologia de resolução de problemas no processo de ensino e aprendizagem das funções trigonométricas e no desenvolvimento do raciocínio matemático desses alunos.

CAPÍTULO I – AS BASES TEÓRICAS DA PESQUISA

Como colocado na Introdução da dissertação, a principal base teórica para a pesquisa será a "Técnica da Resolução de Problema" proposta por George Polya, em seu clássico livro intitulado "A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático". Concomitantemente, a pesquisa também se embasará nas recomendações feitas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) para a condução do processo de ensino e aprendizagem desses conceitos matemáticos nesse nível, bem como nos conceitos de "Competências e Habilidades" conforme estas são definidas em nível estadual e investigadas nesta pesquisa.

I.1 – A TÉCNICA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Problema, segundo o dicionário Aurélio, é definido como: "**problema** *sm.* **1**. Questão matemática proposta para que se lhe dê solução. **2**. Questão não resolvida, ou de solução difícil". (Mini Aurélio, 2008, p. 655).

Por outro lado, a definição dada a ***exercício***, pelo mesmo dicionário, se encontra: "**exercício** *sm.* **1**. Ato de exercer, prática, uso. **2**. Desempenho de função ou profissão. **3**. Atividade física. **4**. Atividade planejada e executada regularmente. **5**. Trabalho escolar para adestrar ou treinar o aluno. **6**. Período de execução dos serviços dum orçamento público". (Mini Aurélio, 2008. p. 387).

Comparando as duas definições, fica clara a substancial diferença existente entre *problema* e *exercício*, principalmente em sua perspectiva matemática. Enquanto que na resolução de um problema há sempre a necessidade do não conhecimento prévio, por parte de seu solucionador, de todas as etapas e/ou procedimentos envolvidos em sua resolução, no *exercício* isso não se aplica. De fato, um *exercício* envolve apenas a prática, o uso dos conhecimentos já adquiridos pelo seu solucionador. Trata-se apenas de um trabalho de "adestramento" ou "treinamento" desse solucionador, no caso da pesquisa, o aluno.

Na perspectiva de Polya, além desse não conhecimento prévio das etapas e/ou procedimentos envolvidos na resolução de um *problema*, há também a necessidade de seu solucionador reconhecê-lo como "uma curiosidade mais profunda, um desejo de compreender os meios e as maneiras, as motivações e os procedimentos de resolução." (POLYA, 1995. p. 6).

Polya associa *exercício* ao que chama de *problema rotineiro*. Para ele, "um problema será rotineiro se puder ser solucionado pela substituição de dados específicos em um problema genérico resolvido anteriormente." (POLYA, 1995. p. 125). Exemplo de *problema rotineiro* ou *exercício* é a resolução de equações do tipo $x^2 + 2x + 4 = 0$, uma vez que depois de explicada e solucionada, todas as demais equações semelhantes a essa seguem o mesmo padrão de resolução/raciocínio matemático nela envolvido.

Por outro lado, para Polya um problema não rotineiro é toda situação em que se faz necessário, além de sua solução, a compreensão de todo o processo de resolução. Ou seja, diferentemente do citado no parágrafo anterior, em um problema não rotineiro o aluno deve, além de considerar o conhecimento matemático que possui e que necessariamente não se encontra ordenado corretamente em sua mente, levar em conta todos os dados fornecidos no enunciado e, se possível, associá-lo a outro problema teoricamente semelhante e mais simples, anteriormente resolvido por ele.

Dentre os diversos tipos de problemas não rotineiros exemplificados por Polya, essa pesquisa se deterá mais especificamente àqueles chamados de "Problemas de Determinação", onde o objetivo central é encontrar o valor da incógnita nele contida. Nas palavras de Polya:

> Os “problemas de determinação” podem ser teóricos ou práticos, abstratos ou concretos, problemas sérios ou simples enigmas. Podemos procurar determinar incógnitas de todos os tipos; podemos tentar encontrar, calcular, obter, produzir, traçar, construir todos os tipos imagináveis de objetos. (POLYA, 1995. p. 125).

Mais do que isso, para Polya as principais características desse tipo de problema são, além de possuir uma incógnita, os dados e as condicionantes fornecidas para resolvê-lo.

Portanto, de agora em diante, durante o relato dessa pesquisa, o pesquisador, para simplificar, referir-se-á aos "problemas não rotineiros e de determinação" apenas por "problemas", pois a referência a eles será frequente.

Ainda segundo Polya, é imprescindível o uso de uma heurística no processo de resolução de um problema. Mas, o que significa a palavra "heurística"? Segundo o dicionário Aurélio, "Heurística" é um "conjunto de regras e métodos que visam à descoberta, à invenção ou à resolução de problemas” (Mini Aurélio, 2008. p. 450). Já Polya define o estudo através da heurística como sendo a ação de se:

> “procurar compreender o processo solucionador de problemas, particularmente as operações mentais, típicas desse processo, que tenham utilidade”. (POLYA, 1995. p. 87).

Para tal, Polya define como sendo quatro as principais etapas da "heurística da resolução de problemas". São elas:

- Compreender o problema;
- Traçar um plano para resolvê-lo;
- Executar o plano; e,
- Comprovar os resultados.

Durante o processo de ensino e aprendizagem da matemática é de fundamental importância que o aluno compreenda o problema que lhe é proposto a resolver. Mais do que isso, para que esse processo tenha êxito, o aluno deverá identificar no enunciado do problema a incógnita procurada, os dados e as condicionantes fornecidas e necessárias a essa resolução. Por outro lado, é papel do professor estimular o aluno para que o mesmo sinta vontade de resolver o problema proposto. Nesse processo, as indagações realizadas pelo professor aos alunos devem orientá-los sem, no entanto, responder diretamente a eles o que vem sendo questionado no problema. O professor deve instigar os alunos a analisarem se os dados e as condicionantes impostas no enunciado do problema são suficientes ou não para a determinação da incógnita buscada; se há redundância ou não entre os dados e condicionantes especificadas ou mesmo se eles se contrapõem.

Para melhor entendimento sobre as quatro etapas envolvidas na resolução de um problema, Polya faz diversas considerações e advertências. Para a etapa de "Compreender o problema", Polya propõe ao professor a seguinte linha de questionamento, acrescida de algumas observações, aos alunos:

> *Por onde começar?* Comece pelo enunciado do problema.
> *Que posso fazer?* Visualize o problema como um todo, com tanta clareza e nitidez quanto possível.
> *Qual a vantagem em assim proceder?* É preciso compreender o problema, familiarizar-se com ele, gravar na mente o seu objetivo. A atenção ao problema pode também estimular a memória e propiciar a recordação de pontos relevantes. (POLYA, 1995. p. 24).

Para ilustrar o trabalho a ser realizado durante a primeira etapa da resolução de um problema, Polya exemplifica como problema:

> *"Calcular a diagonal de um paralelepípedo retângulo do qual são conhecidos o comprimento, a largura e a altura".* (POLYA, 1995. p. 5).

Observe que, apesar do problema proposto ser relativamente simples, para que se determine a diagonal do paralelepípedo (a incógnita), é necessário que o aluno já tenha estudado alguns conceitos de Geometria Plana como, por exemplo, o Teorema de Pitágoras. É, também, conveniente que o aluno já tenha resolvido alguns problemas rotineiros, aqui referenciados simplesmente como exercícios, relativos a este teorema. Isso posto, Polya afirma que o professor pode avançar com conceitos de Geometria Espacial, pois o enunciado fornece todos os dados necessários à resolução do problema proposto. Ilustra, ainda esse trabalho com o possível seguinte diálogo entre o professor e o aluno:

> *Qual é a incógnita?*
> O comprimento da diagonal de um paralelepípedo.
> *Quais são os dados?*
> O comprimento, a largura e a altura do paralelepípedo.
> *Adote uma notação adequada. Qual a letra para denotar a diagonal?*
> x.
> *Quais as letras que escolheria para o comprimento, largura e altura?*
> a, b e c.
> *Qual é a condicionante que relaciona a, b e c com x?*
> x é diagonal do paralelepípedo no qual *a, b* e *c* são, respectivamente, o comprimento, a largura e a altura.
> *Trata-se de um problema razoável? Ou seja,* a *condicionante é suficiente para determinar a incógnita?*

> Sim, ele é razoável. Se conhecermos *a, b* e *c,* conheceremos o paralelepípedo. Se o paralelepípedo ficar determinado, a sua diagonal também o ficará. (POLYA, 1995. p. 5)

É esperado que a compreensão do problema leve o aluno ao estabelecimento de um plano, de uma estratégia lógico-dedutiva, para resolvê-lo.

Contudo, nesse ponto do processo de ensino e aprendizagem, o papel do professor é fundamental. Além do prévio conhecimento matemático que o aluno deve possuir é preciso associar a ele, da melhor forma possível, os dados fornecidos pelo problema, a fim de minimizar a possibilidade de buscar a solução apenas através do método conhecido como "tentativa e erro".

Polya afirma que uma indagação importante, que o professor deve fazer ao aluno, é se ele conhece algum problema semelhante e, logicamente, mais fácil que o problema apresentado. Embora não seja tão simples encontrar um problema relacionado com o problema a ser resolvido, Polya faz o importante comentário:

> A dificuldade está em que, geralmente, há problemas demais que estão de uma maneira ou de outra, relacionados com o nosso, isto é, que têm com este algum ponto em comum. Como, então, escolher aquele, ou os poucos, que são realmente úteis? Há uma sugestão que vai diretamente a um ponto comum essencial: *Considere a incógnita*! *E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.*(POLYA, 1995. p. 6)

Polya vai além, ao afirmar que o professor pode sugerir ao aluno que considere a incógnita e se pergunte se já viu algum problema semelhante com a mesma incógnita. Sabendo que a diagonal do paralelepípedo é um segmento, o professor propõe ao aluno verificar se o triângulo formado pela diagonal, altura e a diagonal da base de largura *a* e comprimento *b* do paralelepípedo é um triângulo retângulo. Sendo este último um triângulo retângulo, o professor questiona o aluno: Temos um problema semelhante? É possível resolvê-lo?

Temos agora um novo problema, semelhante ao primeiro com uma nova incógnita (a diagonal da base do paralelepípedo). Contudo, de resolução mais simples, em que a diagonal da base que *será* denotada por *y* é determinada pelo Teorema de Pitágoras relacionando a largura *a* e comprimento *b* da base, ou seja, $y^2 = a^2 + b^2$.

Analogamente, considerando a incógnita *x*, o professor deve perguntar ao aluno se ele já resolveu algum problema semelhante, com a mesma incógnita. Ao assim proceder, o professor estará auxiliando o aluno a traçar um plano para resolver o problema posto. Ou seja, transformou o problema dado em outros dois mais simples, cujas soluções são fornecidas através da determinação das hipotenusas de dois triângulos retângulos. Isto é, reduziu a dificuldade do problema inicial de Geometria Espacial a Geometria Plana.

É possível ainda que o professor se utilize de uma figura para melhorar o entendimento de seu aluno. Pela Figura 2, podemos ver que *y* é a hipotenusa do triângulo retângulo de lados *a, b* e *y* e que *x* é a hipotenusa do triângulo retângulo de lados *c, y* e *x*.

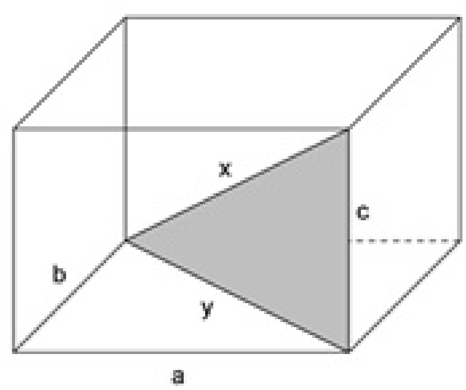


Figura 2 – Representação geométrica de situação problema

Espera-se que, deste ponto em diante, o aluno saiba resolver o problema proposto, individualmente. Ou seja, ele deverá executar sozinho o plano que traçou ao associar o problema de Geometria Espacial a um problema correlato de Geometria Plana. O papel do professor, nesse momento, é "*insistir para que o aluno verifique cada passo".* (POLYA, 1995. p. 9)

Polya descreve o que espera que ocorra em sala de aula, durante a definição do plano de resolução do problema e sua consequente execução como:

> [...] O aluno conseguiu, afinal, ter a ideia da resolução. Ele percebe o triângulo do qual a incógnita *x* é a hipotenusa e a altura *c* é um dos catetos; o outro cateto é a diagonal de uma face. Deve-se, possivelmente, insistir para que o

> estudante adote uma notação apropriada. Ele deve escolher *y* para denotar o outro cateto, que é a diagonal da face cujos lados são *a* e *b*. Assim conseguirá perceber com maior clareza a ideia da resolução, que consiste em introduzir um problema auxiliar cuja incógnita será *y*. Por fim, calculando um triângulo após o outro, ele poderá chegar a ver a figura 2.
>
> $$x^2 = y^2 + c^2$$
>
> $$y^2 = a^2 + b^2$$
>
> E daí eliminando a incógnita auxiliar *y*,
>
> $$x^2 = a^2 + b^2 + c^2$$
>
> $$x^2 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$. (POLYA, 1995. p. 9).

O aluno, sob a orientação do professor solucionou, o problema proposto passando pela compreensão do enunciado, elaboração de um plano e, por fim, executando o plano traçado para solucioná-lo. É muito comum, neste momento, que o aluno chegue à conclusão de que não há mais nada a fazer. Contudo, este é o momento propício para o professor questionar o aluno sobre a possibilidade de utilizar a solução, ou a metodologia empregada no processo de resolução em outro problema. Polya faz sugestões a este respeito:

> [...] O resultado do nosso problema “espacial” será análogo ao resultado do problema “plano”?
> Se a altura *c* decrescer até se anular, o paralelepípedo transformar-se-á num paralelogramo. Se fizer *c* = 0 na sua fórmula, obterá a fórmula correta para a diagonal de um paralelogramo retângulo?
> Se a altura *c* crescer, a diagonal também crescerá. A sua fórmula mostra isso? (POLYA, 1995. p. 11).

Diferentemente do exercício, onde o aluno resolve diversos deles empregando a mesma fórmula, o processo de ensino e aprendizado de matemático baseado na resolução de "problemas não rotineiros" é mais complexo. Entretanto, muito mais motivador e instigante ao aluno, para o desenvolvimento de seu raciocínio matemático.

Vejamos agora outro exemplo de problema geométrico, proposto por Polya, cujo processo de resolução é desenvolvido, basicamente, de uma perspectiva algébrica. O problema proposto por Polya é:

> O comprimento do perímetro de um triângulo retângulo é 60 centímetros e a altura relativa à hipotenusa é 12 centímetros. Calcular os lados desse triângulo. (POLYA, 1995. p. 167)

Para o processo de resolução Polya simplesmente indica:

> Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las? Podemos distinguir três partes na condicionante, referentes à:
> - Perímetro;
> - Triângulo retângulo;
> - Altura relativa à hipotenusa. (POLYA, 1995. p. 168).

Solução proposta por Polya:

> Sejam *a, b* e *c* os lados, sendo o último a hipotenusa. As três partes da condicionante são expressas por:
> $a + b + c = 60$;
> $a^2 + b^2 = c^2$;
> $ab = 12c$.
> Observando-se que:
> $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
> Obtém-se
> $(60 – c)^2 = c^2 +24c$.
> Portanto, $c = 25$ e $a = 15$ e $b = 20$ ou $a = 20$ e $b = 15$ (não faz diferença quanto ao triângulo). (POLYA, 1995. p. 175).

Finalmente, para concluirmos a exemplificação da utilização da heurística, aplicada à resolução de problemas, como proposta por Polya, analisemos um problema histórico e matemático que fascinou os estudiosos da área por mais de 2.000 anos. Consta que a primeira menção a esse problema é do matemático grego chamado Anaxágoras, um filósofo de mente inquiridora, que se ocupou, em boa parte de sua vida, na tentativa de quadrar um círculo. Segundo BOYER (2010), o problema da quadratura de um círculo não se trata de:

> […] uma aplicação prática de uma ciência de números a um aspecto da experiência comum, mas de uma questão teórica envolvendo uma distinção clara entre bom grau de aproximação e exatidão de pensamento. (BOYER, 2010. p. 44).

O problema da quadratura do círculo é assim posto: “Construir, utilizando-se apenas régua e compasso, um quadrado cuja área seja igual à área de um círculo dado”.

Seguindo a heurística de Polya para a resolução de problemas, a incógnita aqui buscada é a construção de um quadrado, sob a condição de ser construído apenas com régua e compasso e ter a mesma área de um círculo.

Trata-se, portanto, de um problema geométrico, que para solucioná-lo (construir o quadrado), são necessárias algumas indagações.

Para permanecer na mesma estrutura das narrativas de Polya, exemplificarei, aqui, o diálogo que manteria com os meus alunos, em sala de aula, durante o processo de resolução do problema. Ou seja, o diálogo seria, aproximadamente, o seguinte:

> *Como se calcula a área de um quadrado?*
> *Sendo l o lado do quadrado, qual sua área?*
> Será dada por l^2.
> *É condição do problema que o quadrado tenha a mesma área de um dado círculo. Como se calcula a área de um círculo cujo raio é r?*
> A área do círculo, de raio r, é dada por: $\pi.r^2$.
> *Sendo A = C, onde A é a área do quadrado e C a área do círculo, é possível algebrizar, mais detalhadamente, essa igualdade?*
> Sim. $l^2 = \pi.r^2$, de onde temos que $l = (\pi.r^2)^{1/2} = r.(\pi)^{1/2}$.
> *É possível resolver o problema proposto e encontrar o lado do quadrado utilizando-se apenas de uma régua e um compasso?*
> Não, pois a condição do problema é que se construa o quadrado de lado $l = r.(\pi)^{1/2}$, usando régua e compasso. Contudo, o número irracional π é transcendente. Ou seja, ele não pode ser expresso com um número finito de números inteiros, ou de frações racionais. Logo, não é possível construir tal segmento nessa condição. Portanto, o problema proposto é impossível de ser resolvido apenas utilizando-se de régua e compasso.

Observe que, para a resolução desse problema, o conhecimento matemático prévio do aluno é determinante para o bom êxito do trabalho. Mais do que isso, o diálogo entre professor e alunos é essencial e básico para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem da matemática, utilizando-se o processo de resolução de problemas proposto por Polya.

I.2 - ORIENTAÇÕES DOS PCNS E DO CURRÍCULO DE MATEMÁTICA DO ESTADO DE SÃO PAULO SOBRE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, COMPETÊNCIAS E HABILIDADES

Sob a perspectiva dos PCNs do Ensino Fundamental de 5ª à 8ª série (1998), a utilização da Resolução de Problemas, durante o processo de ensino-aprendizagem, dá sentido aos conceitos matemáticos estudados, de forma lógica e dedutiva. Mais do que isso, é através da resolução de situações-problema que os alunos podem desenvolver sua capacidade de trabalhar, cooperativamente, elaborando estratégias de análise e de busca soluções.

Contudo, por muitas vezes, a resolução de situações-problema se resume em avaliar se os alunos são capazes de aplicar o conhecimento aprendido anteriormente. Em outras palavras, os alunos são apenas estimulados a procederem com cálculos, utilizando-se de números que aparecem no enunciado, buscando apenas os resultados finais, os quais, quase sempre, são únicos e exatos.

Na realidade, ao se propor uma situação-problema para resolução em sala de aula, o professor deve não apenas objetivar a determinação de seu resultado final, mas principalmente avaliar todo o procedimento utilizado pelos alunos durante essa resolução. De acordo com orientações descritas nos PCNs, lemos que:

> A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem com de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança. (PCN, 1998. p.40).

Ou seja, o ensino Matemático por meio da resolução de problemas deve associar observações do cotidiano com os saberes matemáticos objetivando estimular o aluno a estabelecer relações entre esses dois universos. Ao assim proceder, o professor estará propiciando uma maior possibilidade de desenvolvimento de suas capacidades de fazer analogias e estimativas, de argumentar e validar soluções de forma clara e conclusiva. Os alunos poderão transformar o problema inicialmente proposto em outros semelhantes a ele e/ou usar essas habilidades para estudar problemas abertos propostos em sala de aula.

Os PCNs do Ensino Fundamental resumem, como eixo organizador para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, os seguintes princípios relacionados à Resolução de Problemas:

> - A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
> - O problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
> - Aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros problemas, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na História da Matemática;
> - Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular;
> - A resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, pois proporciona o contexto no qual se pode aprender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. (PCN, 1998. p. 41).

Por sua vez, os PCNs do Ensino Médio enfatizam que a necessidade do processo de ensino e aprendizagem de Matemática se dê através da "*Interdisciplinaridade"* e da "*Contextualização"*. Em educação, entende-se por contextualização a associação que deve feita entre o conceito sendo estudado e o problema que dele se utiliza para sua resolução. Logo, contextualizar requer que o aluno não permaneça passivo em relação à sua aprendizagem. Ou seja, que o aluno passe a questionar, sugerir e expor seus pensamentos acerca do tema apresentado. Interdisciplinaridade, por sua vez, é entendida como sendo uma proposta de trabalho capaz de relacionar os conceitos sendo estudados de uma determinada disciplina com outras áreas de conhecimento. Nas palavras dos PCNEM:

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência. (PCNEM, 1998. p. 43).

É natural que o processo de ensino e aprendizagem de matemática, através da resolução de problemas, seja permeado pela contextualização e a interdisciplinaridade. A simples observação de um fenômeno natural deve envolver outras disciplinas além da matemática. Ou seja, embora o problema sendo trabalhado em sala de aula possa ser de natureza diversa, sua resolução deve envolver a aplicação de conceitos matemáticos e requerer a compreensão de seu enunciado e a análise de seus dados e condicionantes para que sua solução possa ser determinada. O PCNEM vai além, ao atestar que:

> O currículo do Ensino Médio deve garantir também espaço para que os alunos possam estender e aprofundar seus conhecimentos sobre números e álgebra, mas não isoladamente de outros conceitos, nem em separado dos problemas e da perspectiva sócio-histórica que está na origem desses temas. Estes conteúdos estão diretamente relacionados ao desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à resolução de problemas, à apropriação da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos e à capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real. (PCNEM, 1998. p. 44).

Concluindo as recomendações a respeito da utilização da Resolução de Problemas em sala de aula, o Currículo do Estado de São Paulo afirma que "[...] problematizar é explicitar perguntas bem formuladas a respeito de determinado tema". (Currículo do Estado de São Paulo, Matemática e suas Tecnologias, 2011. p. 46). Vai além, atentando para as questões de contextualização e as relações interdisciplinares, sugerindo a associação de temas estudados em outras disciplinas àqueles trabalhados na Matemática. Exemplifica através do tema "água" ao atestar que: "[...] a água é fundamental para todos os seres vivos e é estudada em diferentes disciplinas [...]". Com esse tema, é possível relacionar um problema matemático ao conteúdo sendo estudado pela Física, Química ou Biologia. (Currículo do Estado de São Paulo, Matemática e suas tecnologias, 2011. p. 47).

Referente ao desenvolvimento de "Competências e Habilidades" em alunos do Ensino Médio, o PCNEM propõe ao professor a elaboração de atividades que os levem a deixar seus posicionamentos passivos e os torne parte de todo processo de ensino e aprendizagem. O documento afirma:

> "[…] o aprendizado deve ser planejado (nas) perspectiva(s) multidisciplinar e interdisciplinar, ou seja, os assuntos devem ser propostos e tratados (a partir de) uma compreensão global, articulando as competências que serão desenvolvidas em cada disciplina e no conjunto de disciplinas, em cada área e no conjunto das áreas". (PCNEM, 1998. p. 9).

Segundo o dicionário Aurélio, competência é definida como sendo "capacidade, aptidão". (Mini Aurélio, 2008, p. 655).

Por outro lado, para o PCNEM e o Currículo de Matemática e suas Tecnologias do Estado de São Paulo, competência é o conjunto de conhecimentos, habilidades e atitudes que possibilitam ao aluno ser capaz de explorar o conhecimento matemático (teoria) de forma a criar oportunidades que o conduza a praticar o que está sendo aprendido e, assim, assumir uma postura comportamental (atitude) determinante para todo o processo de ensino e aprendizagem da área. Nas palavras do segundo documento:

> […] competências e habilidades podem ser consideradas, (de) uma perspectiva geral, (como sendo o que há) de comum (nas) disciplinas e tarefas escolares […]. Competências […] caracterizam modos de ser, de raciocinar e de interagir que podem ser depreendidos das ações e das tomadas de decisão em contextos de problemas, de tarefas ou de atividades. Graças a elas, podemos inferir, hoje, se a escola, como instituição, esta cumprindo devidamente o papel que se espera dela. (Currículo do Estado de São Paulo, Matemática e suas Tecnologias, 2011. p. 12).

A Tabela 1 mostra as habilidades relativas ao tema de investigação da pesquisa, definidas em nível estadual, que se espera desenvolver nos alunos durante as três atividades didáticas programadas para a pesquisa. São elas:

2ª série do Ensino Médio		
	Contéudos	**Habilidades**
2º Bimestre	**Relações / Trigonometria:** • Fenômenos periódicos; e, • Funções Trigonométricas.	• Reconhecer a periodicidade presente em fenômenos naturais, associando-a às funções trigonométricas básicas; • Conhecer as principais características das funções trigonométricas básicas (especialmente o seno, cosseno e a tangente), sabendo construir seus gráficos e aplicá-las em diversos contextos.

Tabela 01 – Habilidades Matemáticas

Habilidades esperadas dos Alunos, da 2ª série do Ensino Médio, ao final da pesquisa, referentes a parte do conteúdo Relações/Trigonometria (Currículo do Estado de São Paulo, 2011. p. 67).

De acordo com os PCNEM, as competências gerais a serem desenvolvidas em matemática estão divididas em três grandes blocos, compostas pelas seguintes habilidades:

Bloco 1: Representação e comunicação
- Ler e interpretar textos de Matemática.
- Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.).
- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa.
- Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.
- Produzir textos matemáticos adequados.
- Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação.
- Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho.

Bloco 2: Investigação e compreensão
- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc.).
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
- Formular hipóteses e prever resultados.
- Selecionar estratégias de resolução de problemas.
- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
- Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
- Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Bloco 3: Contextualização sociocultural

> - Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.
> - Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.
> - Relacionar etapas da história da matemática com a evolução da humanidade.
> - Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades. (PCNEM, 1997. p. 13).

Analisando as habilidades matemáticas propostas pelo PCNEM, definiu-se aquelas que serão objetos de investigação na presente pesquisa, como sendo:

- Ler e interpretar textos de Matemática (Bloco 1);
- Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc.) (Bloco 1);
- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões, etc.) (Bloco 2);
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema (Bloco 2);
- Formular hipóteses e prever resultados (Bloco 2);
- Selecionar estratégias de resolução de problemas (Bloco 2);
- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades (Bloco 2);
- Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real (Bloco 3);
- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento (Bloco 3).

CAPÍTULO II – A INVESTIGAÇÃO DO TEMA DA PESQUISA

II.1 – O QUE MOTIVOU A ESCOLHA DO TEMA DA PESQUISA

Minha experiência, como professor do Ensino Médio, mostra que os alunos normalmente apresentaram dificuldades ao estudar e relacionar os conceitos de razões trigonométricas, trabalhados primeiramente no triângulo retângulo, com os das funções correspondentes, representadas no plano cartesiano. Dentre as razões para isso, atribuo a principal delas ao material didático (livros e apostilas) utilizado no processo de ensino e aprendizagem em sala de aula. Via de regra, eles não criam conexões entre os conceitos trabalhados e as atividades do cotidiano dos alunos. Enfatizam, sobremaneira, a resolução de exercícios rotineiros, utilizando da conceitualização definida por Polya. Finalmente, não exploram os conceitos de forma interdisciplinar e, consequentemente, não desenvolvem, a contento, as competências e habilidades necessárias aos alunos, de uma 2ª Série do Ensino Médio.

Como resultado desta minha realidade, muitos dos alunos podem, eventualmente, até conhecer os valores das funções para ângulos notáveis, ou mesmo, alguma identidade trigonométrica importante como o Teorema de Pitágoras. Contudo, não compreendem os reais conceitos desses valores e identidades e, raramente, trabalham com eles de forma aplicada e/ou contextualizada. Como afirma Lima:

> Os livros didáticos para o ensino médio dedicam muitas páginas ao ensino da Trigonometria. Entretanto, não fica claro nem para o aluno, nem para o professor, para que serve esse abundante material. (Lima et al, 2001. p. 64).

Portanto, a pesquisa aqui relatada procurou através de suas três atividades didáticas, que a seguir serão descritas, desenvolver nos alunos participantes uma estratégia de trabalho que lhes possibilite desenvolver:

- O processo de aprendizado baseado em situação-problema advinda de seus cotidianos;
- Mecanismos de enfrentamento, planejamento e resolução dessa situação-problema; e, finalmente,

- O sentido de importância dado às relações e aos padrões de regularidade durante o processo de aprendizado da Matemática.

Os alunos participantes da pesquisa foram de uma turma de 2ª série do Ensino Médio, da escola privada "D. Pedro II", na qual leciono, em Vargem Grande do Sul, Estado de São Paulo.

Quanto à escolha deles para participar da pesquisa, ela ocorreu através de convite feito a todos os alunos, sendo que, voluntariamente, oito deles, de uma turma de trinta alunos, manifestaram interesse.

Finalmente, registro que todo o material utilizado na pesquisa foi comprado e fornecido aos alunos por mim, salvo as tampas de garrafa pet utilizadas na 3ª Atividade Didática que solicitei dos alunos trouxessem de casa.

II.2 – SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES DIDÁTICAS

Historicamente, o homem sempre teve a necessidade de calcular distâncias. Contudo, algumas dessas vezes, não era possível calculá-las diretamente, ou seja, estas distâncias eram inacessíveis. Basicamente, seus cálculos estão relacionados ao conceito de razões trigonométricas.

A primeira atividade didática apresenta uma situação-problema, na qual buscar-se-á medir a altura que se encontra o sino da Matriz de Vargem Grande do Sul, cidade da qual sou professor.

II.2.1 1ª ATIVIDADE DIDÁTICA DA PESQUISA – CALCULANDO DISTÂNCIAS INACESSÍVEIS

Situação-Problema

"Em Vargem Grande do Sul a Matriz é chamada de 'Sant' Ana' e encontra-se localizada em sua praça central. Calcule a altura do sino, em relação ao piso da praça, utilizando-se para isso de seus conhecimentos matemáticos."

Objetivo

O objetivo central dessa 1ª atividade didática é contextualizar, através da situação-problema descrita, a necessidade e utilização do conceito de "razão trigonométrica" para resolver o problema proposto.

Tempo previsto para realização da atividade

3 horas-aula, de 50 minutos cada.

Material necessário ao desenvolvimento da atividade

Para cada aluno participante desta atividade serão necessários:

- Papel sulfite A4;
- Lápis;
- Cola quente;
- Borracha;
- Uma tabela com as medidas do seno, cosseno e tangente de ângulos menores que 90º;
- Transferidor;
- Trena;
- Alfinete de mapa;
- Um canudo grosso de refrigerante; e,
- Copo de plástico com tampa.

Descrição do desenvolvimento planejado para a atividade

A situação-problema proposta para a 1ª atividade didática será escrita na lousa e a foto da Matriz Sant' Ana, projetada.

Dos oito alunos, divididos em duplas, será, então, solicitado que leiam atentamente a situação-problema, observem a foto da Matriz e reflitam / discutam com os colegas de grupo como a situação-problema poderia ser resolvida.

Espera-se dos alunos que se recordem dos conceitos de razões trigonométricas, estudadas durante o 9º ano do Ensino Fundamental. Caso isso não ocorra, eu (professor) irei intervir, questionando:

- Que assunto vocês estudaram no 9º ano e revisaram, posteriormente, na 1ª série do ensino médio, em Matemática, relacionado aos triângulos retângulos? Espera-se como resposta o estudo das razões trigonometria no triângulo retângulo.

Tendo obtido a resposta esperada ou próxima da esperada ao questionamento, solicitar dos alunos que reflitam, esbocem um desenho, planejem e escrevam, na folha de papel sulfite, as ações a serem executadas para resolver a situação-problema em questão.

Alguns possíveis questionamentos a serem feitos aos alunos na busca de orientá-los durante o planejamento de resolução da situação-problema são:

- Como podemos medir o ângulo de minha visão ao focalizar o sino localizado na torre lateral da Matriz?
- Como podemos construir um aparelho para medir esse ângulo de visão? Ao formular essa questão, o professor deve sugerir aos alunos o uso do palito de sorvete, do canudo de refrigerante e do alfinete de mapa para construir tal aparelho.
- É conveniente afastar apenas uma pequena distância da torre, digamos de 1 m, para medir o ângulo de visão? Se não, explique o porquê disso.

- Será necessário medir a distância do ponto que nos encontramos até a base da torre lateral da Matriz? Se sim, explique o porquê dessa necessidade.
- Com que instrumento se pode realizar esta medida? (Resposta esperada: Trena).
- Conhecendo-se o ângulo de visão entre uma suposta reta horizontal passando na altura do olho do aluno e o posicionamento do sino na torre lateral da Matriz; a distância do aluno realizando a medição do ângulo até a base da torre, que razão trigonométrica devemos utilizar para determinar a resposta da situação-problema proposta? (Resposta esperada: a tangente).
- Necessito de mais alguma informação para determinar a resposta da situação-problema? Se sim, justifique. (Resposta esperada: a altura entre o piso da praça e a altura dos olhos de cada aluno).
- Como faço para calcular o valor da razão trigonométrica relativa ao ângulo de visão determinado, se este ângulo não for um ângulo notável? (Resposta esperada: para que os alunos respondam a essa questão, o professor deverá orientá-los quanto ao uso da tabela de medidas de seno, cosseno e tangente de ângulos menores que 90º, que será fornecida).
- Que certeza teremos de que a medida da altura até o sino da torre é próxima da real? (Resposta esperada: se o ângulo formado entre a parede lateral da torre e o piso da praça, onde o aluno se encontra, for de, aproximadamente, 90º e se a medição do ângulo de visão for razoavelmente precisa, então a altura calculada também será próxima da real).

II.2.2 2ª ATIVIDADE DIDÁTICA DA PESQUISA – MEDINDO O COMPRIMENTO DA SOMBRA DE UMA ESTACA FIXADA NO SOLO

Objetivo

Pretende-se, nessa atividade, desenvolver no aluno habilidades que o conduzam a verificar a necessidade e importância da construção do ***círculo trigonométrico***, como sendo a ferramenta matemática que o auxiliará na resolução dos questionamentos levantados nessa fase da pesquisa.

Tempo previsto para o desenvolvimento da atividade

Dois dias, sendo que, no primeiro dia, serão necessárias 4 horas para coleta de dados (medições dos comprimentos das sombras e dos ângulos). No segundo dia, serão necessárias 3 aulas de 50 minutos cada, onde, de posse dos dados coletados no primeiro dia, pretende-se responder às perguntas descritas na *"Expectativa do desenvolvimento da atividade".*

Material necessário ao desenvolvimento da atividade

- Papel Sultite A4;
- Papel Milimetrado;
- Lápis;
- Borracha;
- Compasso;
- Transferidor;
- Régua;
- Trena;
- Barbante;
- Giz (de várias cores).

Descrição do desenvolvimento planejado para a atividade

Na quadra de esportes da escola, será fixada uma estaca ou bastão de forma que a base deste seja perpendicular ao piso da quadra, em local em que a luz solar incida sobre ele por um período mínimo de seis horas e que o horário das 12 horas seja o ponto central deste período.

Isto feito, as duplas de alunos marcarão com giz, em intervalos de tempo de 30 minutos, o ponto extremo, mais distante, da sombra projetada pelo 'bastão' sobre o piso da quadra, registrando, ao lado, o horário da marcação realizada. Então, o comprimento da sombra será medido, em cm. Para realizar esta medição, os alunos utilização uma trena ou um barbante e uma régua. Após as nove marcações e medições terem sido feitas (10h00, 10h30, 11h00 e 11h30, horário da 'menor sombra' (próximo às 12h), 12h30, 13h00, 13h30 e 14h00) serão traçados segmentos de retas representando as diferentes sombras. Os alunos utilizarão a mesma cor de giz para traçar os segmentos de retas, de horários equidistantes ao horário da 'menor sombra'. Observando os posicionamentos e as dimensões lineares desses segmentos de retas os alunos deverão responder aos seguintes questionamentos:

- Que relação você pode estabelecer entre os comprimentos das sombras de horários equidistantes ao horário da 'menor sombra' registrado?
- Se traçarmos uma semirreta com origem no 'pé do bastão' passando pelo ponto que demarca a 'menor sombra' registrada e, com auxílio de um transferidor medirmos os ângulos formados por esta semirreta e os segmentos de retas representativos das sombras registradas, o que você observa?
- Com auxílio de um barbante, enquanto um aluno fixa uma de suas pontas no topo do 'bastão' e outro, no ponto extremo, mais distante, sobre o piso da quadra, de uma das sombras, como poderíamos calcular o ângulo formado entre o barbante e o piso da quadra utilizando-se: (a) de um transferidor?

(b) sem utilizarmos de um transferidor?

Utilize-se das duas possibilidades de cálculo e determine os ângulos correspondentes aos diferentes horários de medições das sombras. Avalie a diferença existente ou não na medição de cada ângulo, quando se utiliza das duas possibilidades de calculo, e justifique-as.

- A partir dos dados obtidos, é possível traçar a direção e sentido do movimento do Sol no horizonte?
- Com auxílio de uma Bússola, determine o sentido do caminhar do Sol no horizonte.
- Tendo determinado quais são os dois pontos cardeais do caminhar do Sol no Horizonte, marque com giz os outros dois pontos cardeais principais e defina seus nomes.
- Trace um segmento de reta unindo estes dois pontos. Qual o ângulo formado por este segmento de reta e os segmentos de retas que unem duas sombras de horários equidistantes à "menor sombra" registrada?
- Qual a posição relativa entre os segmentos de retas que unem: (1º) os pontos cardeais Norte e Sul, e, (2º) o da menor sombra registrada?
- Pesquise na internet sobre a construção e o funcionamento de um "Relógio de Sol".
- Qual o paralelo que você pode traçar entre o trabalho que realizamos e o resultado das pesquisas feitas na internet?".

II.2.3 3ª ATIVIDADE DIDÁTICA DA PESQUISA – O ESTUDO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Objetivo

A partir do círculo trigonométrico, estudar as funções trigonométricas do seno e do cosseno, investigando sua característica de serem periódicas e analisando suas outras propriedades.

Tempo previsto para o desenvolvimento da atividade

Três aulas de 50 minutos cada.

Material necessário ao desenvolvimento da atividade

- Folha de papelão;
- Tesoura;
- Cola branca;
- Cola quente;
- Lápis;
- Borracha;
- Compasso;
- Transferidor;
- Tampinhas de garrafa pet;
- Régua;
- Barbante; e,
- Papel milimetrado.

Descrição do desenvolvimento planejado para a atividade

A atividade será dividida em dois momentos distintos. No primeiro os oito alunos, em duplas, construirão rodas gigantes, seguindo as orientações abaixo especificadas. No segundo momento, utilizando-se dessas rodas gigantes, cada dupla analisará, discutirá e estabelecerá as principais propriedades das funções seno e cosseno, partindo de medições realizadas diretamente nelas e anotando as medições realizadas em uma tabela.

Orientações para a construção da roda gigante

- De posse de um compasso e da folha de papelão, cada dupla de alunos deve traçar duas circunferências, de raios iguais, medindo entre 10 e 15 cm. Em seguida, recortar esses dois círculos. Observe que cada dupla deverá ter círculos com raio diferente das demais duplas.

- Cada dupla, Com os círculos em mãos e pelos seus centros trace dois segmentos de retas, perpendiculares entre si, conforme mostra a Figura 3.

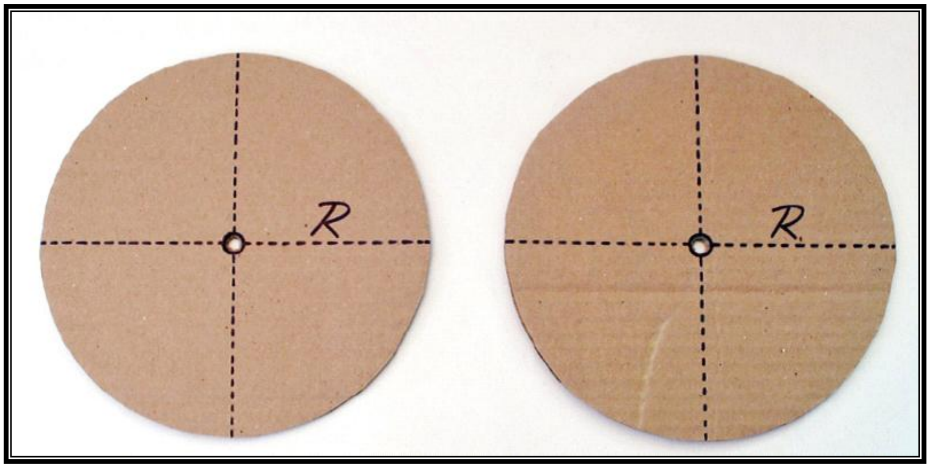


Figura 3 - Disco da Roda Gigante

Fonte:http://m3.ime.unicamp.br/portal/Midias/Experimentos/ExperimentosM3Matematica/roda_gigante/arquivos/a_roda-gigante---o_experimento.pdf

- Um dos círculos deverá ser, então, escolhido e nos pontos extremos de cada segmento de reta deverá ser colada uma tampa de garrafa pet (Veja Figura 4.a). Em seguida, será colado sobre as tampas o segundo círculo, observando que seus segmentos de retas fiquem nas mesmas posições daqueles desenhados no 1º círculo e que deverão estar voltados para fora (Veja Figura 4.b).

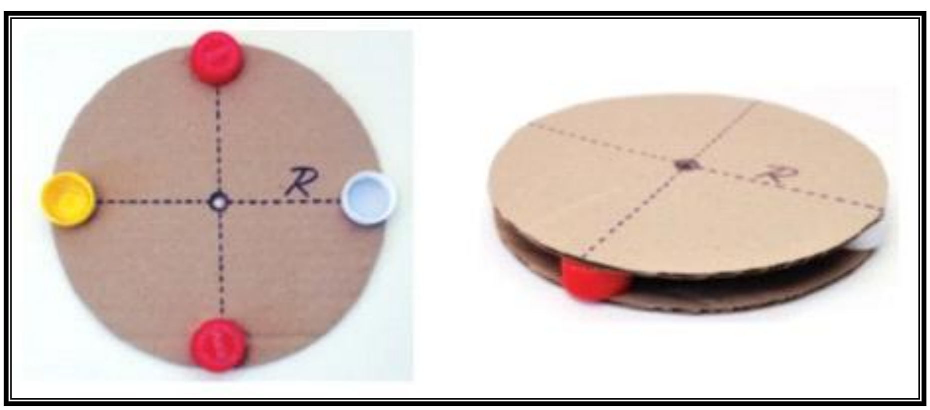


Figura 4a e Figura 4b – Disco da roda gigante com pontos de referência

Fonte:http://m3.ime.unicamp.br/portal/Midias/Experimentos/ExperimentosM3Matematica/roda_gigante/arquivos/a_roda-gigante---o_experimento.pdf

Os alunos deverão fazer uma base de sustentação para a roda gigante, conforme as orientações:

- Cortar parte do papelão restante como mostra a Figura 5. Como sugestão, o retângulo hachurado deve ter medidas de 2 cm x 5 cm;
- A medida h (distância, sobre a linha pontilhada, entre os vértices (à direita e a esquerda) e os lados maiores do retângulo hachurado) deve ser 4 cm maior que o raio dos dois círculos já traçados por cada grupo;
- A parte hachurada deve ficar para baixo após serem dobrados os triângulos de altura h (linhas pontilhadas) para cima. Sobre a linha hachurada, a 2 cm de seu vértice, deve ser furada para que um lápis possa ser transpassado (Veja Figura 6).

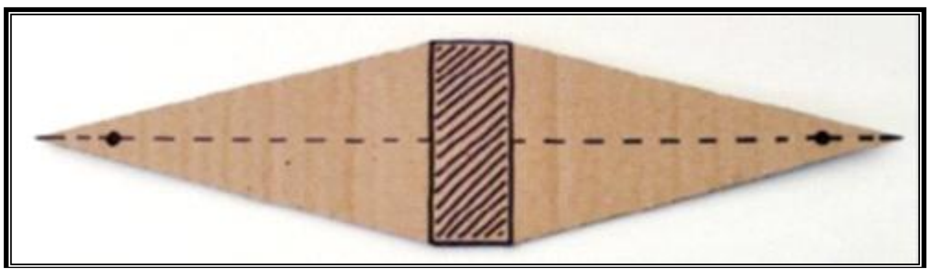


Figura 5 – Base de sustentação da Roda Gigante

Fonte:http://m3.ime.unicamp.br/portal/Midias/Experimentos/ExperimentosM3 Matematica/roda_gigante/arquivos/a_roda-gigante---o_experimento.pdf

- Posteriormente, deverá ser recortado um terceiro círculo, com 6 cm de raio, o qual será colado na base na parte hachurada como representado na Figura 6.

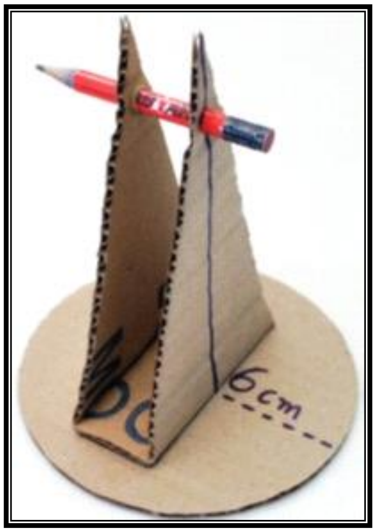


Figura 6 – Base de Sustentação da Roda Gigante

Fonte:http://m3.ime.unicamp.br/portal/Midias/Experimentos/ExperimentosM3
Matematica/roda_gigante/arquivos/a_roda-gigante---o_experimento.pdf

- Os alunos deverão fazer um mini-transferidor, com os valores dos ângulos notáveis e, em seguida, anexar esse mini-transferidor à roda gigante (Veja Figura 7).

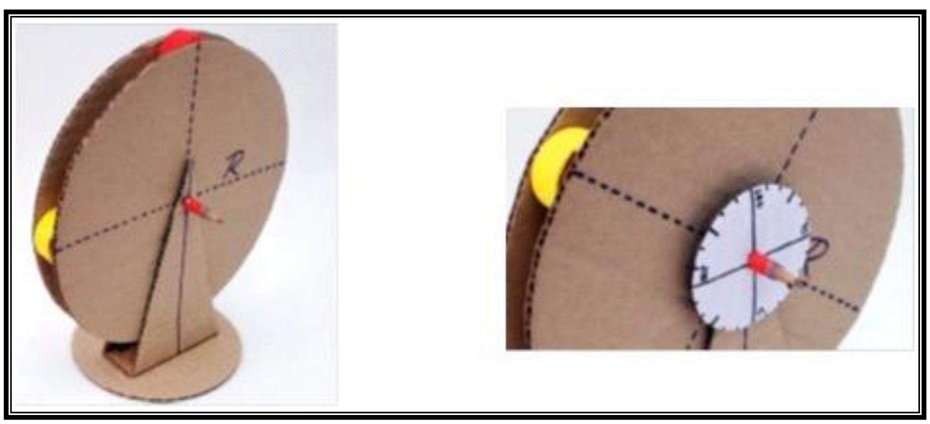


Figura 7a e Figura 7b – Roda Gigante concluída com o mini-transferidor

Fonte:http://m3.ime.unicamp.br/portal/Midias/Experimentos/ExperimentosM3Matematica/roda_gigante/
arquivos/a_roda-gigante---o_experimento.pdf

Assim estará concluída a construção da roda gigante a ser utilizada no estudo das funções trigonométricas.

Investigando as propriedades das funções periódicas

Primeiramente, os alunos deverão construir uma tabela, de duas colunas (ângulo e altura (h)) onde serão anotados os ângulos (em radianos) e as alturas (em mm). O aluno será orientado a escolher uma das quatro tampinhas e alinhar a reta tracejada que passa por ela com a reta que passa pela origem e o ângulo de 0 rad do mini-transferidor. Em seguida, deverá mover a roda-gigante no sentido anti-horário e fazer a medição da distância vertical (altura) entre a reta horizontal que passa pelo ângulo de 0 rad e a origem do mini-transferidor e o ponto extremo da reta tracejada que passa pelo centro da tampinha escolhida, utilizando-se de uma régua, como mostra a Figura 8.a.

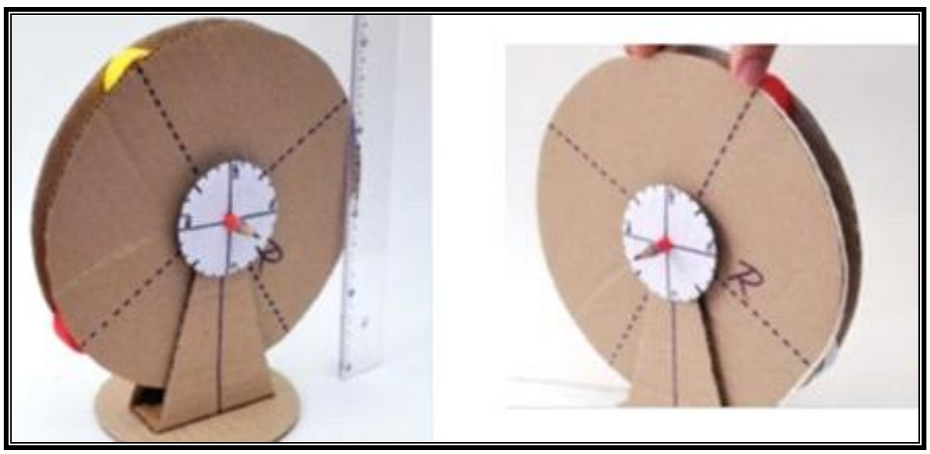


Figura 8a e Figura 8b – Medindo a altura (h)

Fonte:http://m3.ime.unicamp.br/portal/Midias/Experimentos/ExperimentosM3Matematica/roda_gigante/arquivos/a_roda-gigante---o_experimento.pdf

Feita a medição dos valores dos ângulos e das respectivas altura, esses valores deverão ser registrados na tabela inicialmente confeccionada.

Esse procedimento deverá ser repetido, deslocando a tampinha por outras 25 diferentes posições, perfazendo com isso, no mínimo 2 voltas completas da roda gigante. Todos os dados (ângulos e alturas correspondentes) deverão ser anotados na mesma tabela.

Em seguida, os alunos repetirão o processo de medição para os mesmos ângulos utilizados anteriormente, mas, agora, deverão anotar, em uma terceira coluna da mesma tabela, a distância horizontal (d) entre o ponto extremo da reta tracejada que passa sobre a tampinha escolhida e a reta vertical do mini transferidor que passa pela origem e o ângulo de $\pi/2$ rad. Para isso, serão orientados a utilizar um barbante, para efetuarem essas medidas.

De posse da tabela preenchida, cada dupla deverá construir dois gráficos cartesianos de pontos. O primeiro, com os pontos que representam o "ângulo em função da altura (h)" e o segundo, com os pontos dos "ângulos em função de suas distâncias horizontais (d) correspondentes".

Com os gráficos traçados e em mãos, cada dupla deverá responder às seguintes questões:

- Em cada gráfico, para quais valores de ângulos h e d atingem pontos de máximo e de mínimo? Comparem os valores de h e d desses pontos com o raio do círculo. O que observa-se?
- Comparando os gráficos e as respostas dadas para a 1ª questão com aqueles de outras duplas, o que vocês observam a respeito dos valores angulares obtidos para os pontos de máximos e de mínimos em cada um deles? São sempre iguais ou diferentes?
- Há algum valor de ângulo para os quais, a partir dele, os pontos marcados em ambos os gráficos se repetem? Se sim, e se continuarmos dando voltas indefinidamente na roda gigante, o mesmo continuaria ocorrendo? Que nome você daria às funções que possuem esta característica?
- A partir de um ângulo qualquer, definam o menor intervalo angular a partir do qual os pontos de cada um dos gráficos começam a se repetir. Qual a distância, em graus e em radianos, entre o maior e o menor ângulo que definem esse intervalo angular em cada um dos gráficos? Se o valor do menor ângulo do intervalo angular fosse outro, o mesmo continuaria ocorrendo? Comparem suas respostas às duas últimas

questões com as dos outros grupos? O que vocês observam? Que nome vocês dariam a esta menor distância que determinaram para o intervalo angular?

O professor deverá, então, formalizar as funções seno e cosseno associando-as aos gráficos do "ângulo em função da altura (h)" e do "ângulo em função da distância horizontal (d)", respectivamente, e as características de serem periódicas, com período de 2π, pontos de máximo em $\pi/2$ rad e $0\ \pi = 2\ \pi$ rad, respectivamente, e pontos de mínimo em $3\ \pi/2$ rad e π rad, respectivamente.

- Partindo dos dados de ângulos e sombras do bastão coletados em nossa atividade desenvolvida na quadra de esportes da escola, construam uma nova tabela onde na primeira coluna estejam registrados todos os ângulos observados e na segunda coluna, na linha correspondente a cada ângulo, registrem o resultado da divisão entre o valor do comprimento do bastão, em cm, e o comprimento da sobra, em cm, por ele determinada, no ângulo em questão.
- Tomem a primeira tabela confeccionada. Registrem em uma quarta coluna, em frente a cada ângulo, o resultado da divisão entre os valores da altura (h) e da distância horizontal (d). Se houver ângulos iguais, registrados nas duas tabelas que você confeccionaram, comparem os resultados das divisões obtidas em cada uma dessas linhas. O que observam? Caso não haja ângulos iguais nas tabelas, solicitem do professor uma tabela que ele preparou previamente e procedam da mesma forma agora com a mesma comparação, anteriormente solicitada. O que observam?

No laboratório de informática da escola, o professor deverá, então, fornecer a todos os alunos, um arquivo EXCEL contendo uma tabela de quatro colunas, onde na 1ª estejam registrados diferentes valores de ângulos, em graus e radianos, e nas 2ª, 3ª e 4ª colunas registrados os valores dos senos, cossenos e tangentes daqueles ângulos.

Os alunos, em duplas e trabalhando em computadores, de posse do arquivo fornecido pelo professor, deverão então construir, no EXCEL, uma 5ª coluna que deverá registrar o resultado da divisão entre os valores do seno e do cosseno de um mesmo ângulo.

- Indagar-se-á, então, dos alunos: o que eles observam quando comparam os valores registrados em cada linha das colunas 4 e 5 do arquivo? Tracem um novo gráfico cartesiano onde estejam registrados, com pontos, os diferentes ângulos e os respectivos valores registrados na 5ª coluna. Vocês observam as características de periodicidade e de pontos de máximo e de mínimo das funções seno e cosseno estudadas anteriormente? Se sim, qual o período desta nova função? O que acontece com o gráfico, para os valores de ângulos de $\pi/2$, $3\pi/2$, $3\pi/2 + k\pi$, para $k \in Z$?

Ao término da atividade, o professor deverá formalizar o estudo da função tangente junto aos alunos.

CAPÍTULO III – APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES DIDÁTICAS DA PESQUISA

III.2.1 DESCRIÇÃO DO OCORRIDO DURANTE A APLICAÇÃO DA 1ª ATIVIDADE DIDÁTICA DA PESQUISA – CALCULANDO DISTÂNCIAS INACESSÍVEIS

A atividade, bem como toda pesquisa, foi aplicada em uma turma de oito alunos, da 2ª série do Ensino Médio, da Escola com que trabalho em Vargem Grande do Sul, e ocorreram, sempre, no período contrário ao horário de aula, ou seja, começamos os trabalhos a partir das 14 horas.

A situação-problema proposta aos alunos e transcrita na lousa foi: *“Em Vargem Grande do Sul a Matriz é chamada de 'Sant’ Ana' e encontra-se localizada em sua praça central. Calculem a altura do sino, em relação ao piso da praça, utilizando-se para isso de seus conhecimentos matemáticos”*.

Os alunos permaneceram discutindo a situação por, aproximadamente, cinco minutos. Nesse tempo, era preparava o material a ser utilizado por eles na atividade.

Ao questionar os alunos se tinham pensado em uma estratégia para resolver a situação-problema proposta, um dos alunos sugeriu a utilização do Teorema de Pitágoras. Entretanto, logo em seguida, ponderou: "não pode ser, pois temos apenas a medida de um dos catetos, ou seja, a distância do ponto onde estaremos na praça até a parede da torre onde o sino da igreja se localiza".

Percebendo que os alunos não estavam conseguindo associar a solução do problema a uma resolução por meio de razões trigonométricas, intercedi questionando sobre que assunto eles haviam estudado no 9º ano, e revisado, posteriormente, na 1ª série do Ensino Médio, em Matemática, relacionado aos triângulos retângulos.

Houve certa estranheza na a pergunta que fiz, pois isso não era usual em nossas aulas, mas novamente o mesmo aluno que havia se manifestado anteriormente lembrou-se da definição da razão seno de um ângulo, definida a partir de dois lados de um triângulo retângulo.

Questionei, então, se havia outras razões que eles haviam estudado. Os alunos disseram que havia, ainda, o Cosseno e a Tangente, embora não tenham mencionado as razões trigonométricas estabelecidas entre eles e os lados de um triângulo retângulo.

Recordei com eles as definições das três razões trigonométricas e questionei como poderiam auxiliá-los a solucionar a situação-problema proposta.

Como não ocorreram manifestações por parte dos alunos, foi esboçado um triângulo retângulo na lousa e pedido a eles que procurassem associar aquela figura à situação problema. Outra indagação foi feita: "se necessitamos da medida de dois lados de um triângulo retângulo para determinar o valor do seno ou do cosseno ou da tangente de um ângulo, que ângulo seria este em nossa situação problema?".

Um dos alunos disse: "se pensarmos na tangente de um ângulo, esse ângulo seria aquele formado pelo solo (chão da praça onde se localiza a Matriz) e a hipotenusa do triângulo retângulo que, no caso, seria representada por um segmento de reta imaginário que partiria do sino da torre e terminaria no ponto do solo da praça de onde observaríamos o sino".

Questionei sobre como deveríamos proceder para medir tal ângulo.

Segundo os alunos, deveríamos usar um transferidor para isso. Um dos alunos indagou: "mas como faremos para utilizá-lo?".

Intervi dizendo que, para isto, existe um instrumento, chamado Teodolito que nada mais é que uma espécie de "transferidor". Mostrei através de foto, um teodolito explicando seu funcionamento. Como não tínhamos tal instrumento à disposição, propus que confeccionássemos nosso próprio teodolito. Mostrei aos alunos como deveriam proceder na construção desse instrumento, conforme descrito no capítulo anterior. Distribuí o material necessário e começamos a construí-lo. Como se tratava de quatro duplas de alunos, confeccionamos quatro teodolitos (veja Foto 1).

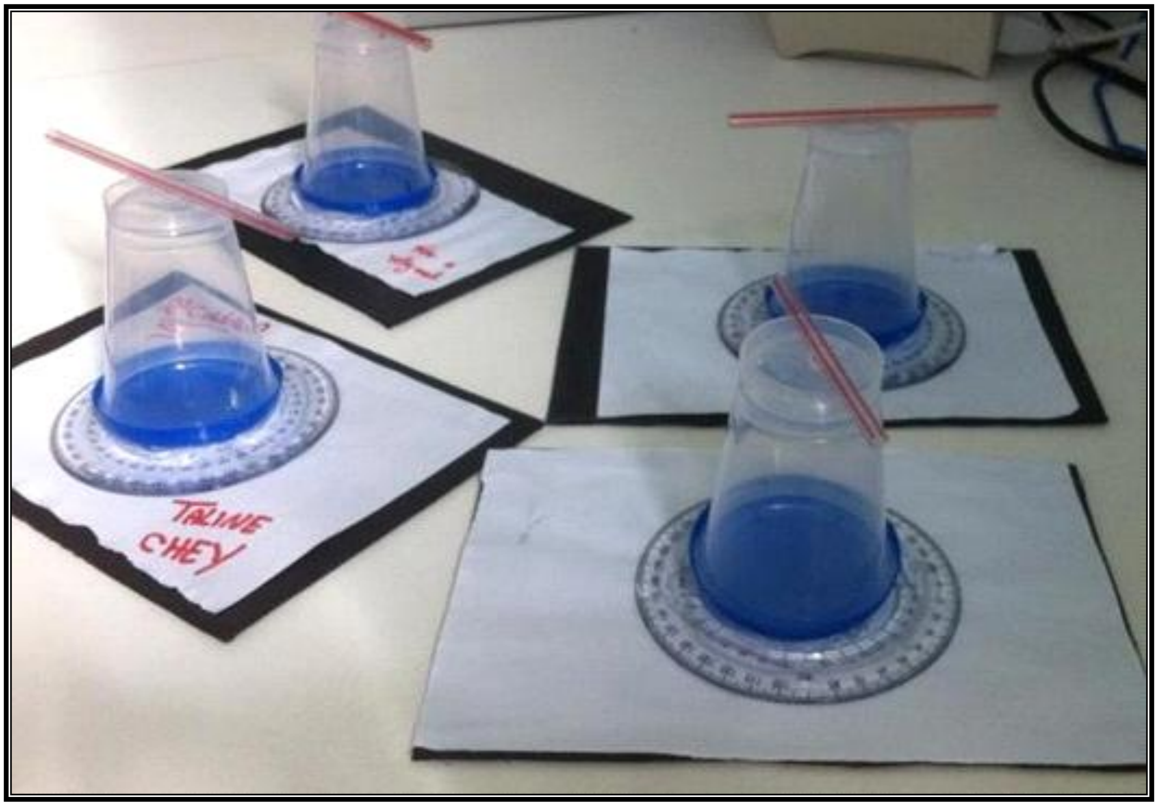


Foto 1 – Teodolitos construídos pelos alunos

Com os teodolitos confeccionados, antes de sairmos da escola rumo a Matriz para realizarmos a medição do ângulo, questionei: "O que é melhor para definirmos o ângulo de observação do sino: afastarmos apenas uma pequena distância da torre, digamos de 1 m, ou uma distância maior? Responda especificando, na visão de vocês, a razão da distância escolhida".

Os alunos procuram medir a altura da parede da sala, utilizando-se do teodolito e concluíram que a uma pequena distância este seria mais difícil de dimensionar com precisão. Concluíram que o conveniente seria tomar uma distância maior da torre da Matriz onde o sino se localiza.

Perguntei ainda a eles sobre como mediriam a distância entre o ponto da praça onde estariam parados para realizar a medida do ângulo e a parede da torre da Matriz.

Os alunos pensaram e sugeriram o uso de uma trena. Entreguei-a aos alunos e fiz novo questionamento: "Após determinar o ângulo de visão entre uma suposta reta horizontal passando na altura dos olhos de vocês (mais precisamente do aluno que medirá o ângulo) e o sino da torre da Matriz, e a distância entre o ponto da praça de onde a medida do ângulo será determinada e a base da torre do sino, que razão trigonométrica vocês devem utilizar para solucionar a situação-problema proposta?

Após alguns minutos refletindo, dois alunos responderam que seria "a tangente, pois essa relacionaria a altura procurada com a distância do medidor do ponto onde a medida do ângulo foi determinada e a base da torre em questão".

Finalmente, questionei aos alunos se haveria alguma outra informação necessária à resolução da situação-problema proposta. Como não houve manifestação por parte dos alunos, indaguei se a distância entre o solo da praça e o olho do aluno medindo o ângulo, influenciaria no resultado final da situação problema

Os alunos foram unânimes em dizer que sim, ou seja, essa distância deveria ser adicionada à solução final da situação-problema.

Tendo concluído o planejamento necessário, em sala de aula, junto aos alunos para a realização das medições na praça da Matriz, entreguei a cada dupla uma tabela contendo os valores do seno, do cosseno e da tangente, de grau em grau, para ângulos entre 1º e 90º. A tabela encontra-se reproduzida na Figura 9 abaixo:

Ângulo	Sen	Cos	Tg	Ângulo	Sen	Cos	Tg
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,682	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,766	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,788	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,327
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,809	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,829	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,225	0,9744	0,2309	58°	0,848	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,515	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,866	0,5	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,804
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,309	0,9511	0,3249	63°	0,891	0,454	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,342	0,9397	0,364	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,246
22°	0,3746	0,9272	0,404	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,342	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,454	0,891	0,5095	72°	0,9511	0,309	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5	0,866	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,515	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,848	0,6249	77°	0,9744	0,225	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,829	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,809	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,788	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,766	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,682	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,29
45°	0,7071	0,7071	1	90°	1	0	-

Figura 9 – Valores de seno, cosseno e tangente de ângulos entre 1° e 90°

Fonte: http://www.brasilescola.com/matematica/seno-cosseno-tangente-angulos.htm

Diante da Matriz, os alunos estudaram qual seria o melhor local para realizarem as medições e duas opções surgiram. Uma das alunas sugeriu um ponto em frente da entrada da Matriz, mas outra observou que a escadaria dificultaria a medição da distância entre o ponto de medição do ângulo e a base da torre do sino com a trena (veja Foto).

Foto 2 – Igreja Matriz

Outra aluna sugeriu realizar a medição a partir da lateral da torre da Matriz. Contudo, observou-se que o problema da escadaria seria similar, além do fato de que a inclinação do solo na lateral ser maior do que a inclinação da frente da Matriz.

Houve certa frustração, pois essa inclinação não havia sido considerada durante a preparação prévia do trabalho, em sala de aula. Voltamos para a escola e reestudarmos a forma de realizar as medições necessárias à solução da situação-problema proposta. Em sala de aula, utilizando-me de um esboço da situação observada na praça da Matriz, sugeri aos alunos a realização de duas medições de ângulos. O primeiro, medido e anotado de um ponto em frente à Matriz. O segundo, medido e também anotado de um ponto 5 m mais próximo da Matriz, em relação ao primeiro ponto. Questionei, então, como poderíamos, matematicamente, escrever uma expressão algébrica / trigonométrica que representasse tal situação. Após algumas idas e vindas matemáticas, chegamos à expressão desejada, a qual se encontra transcrita na Foto 3 abaixo:

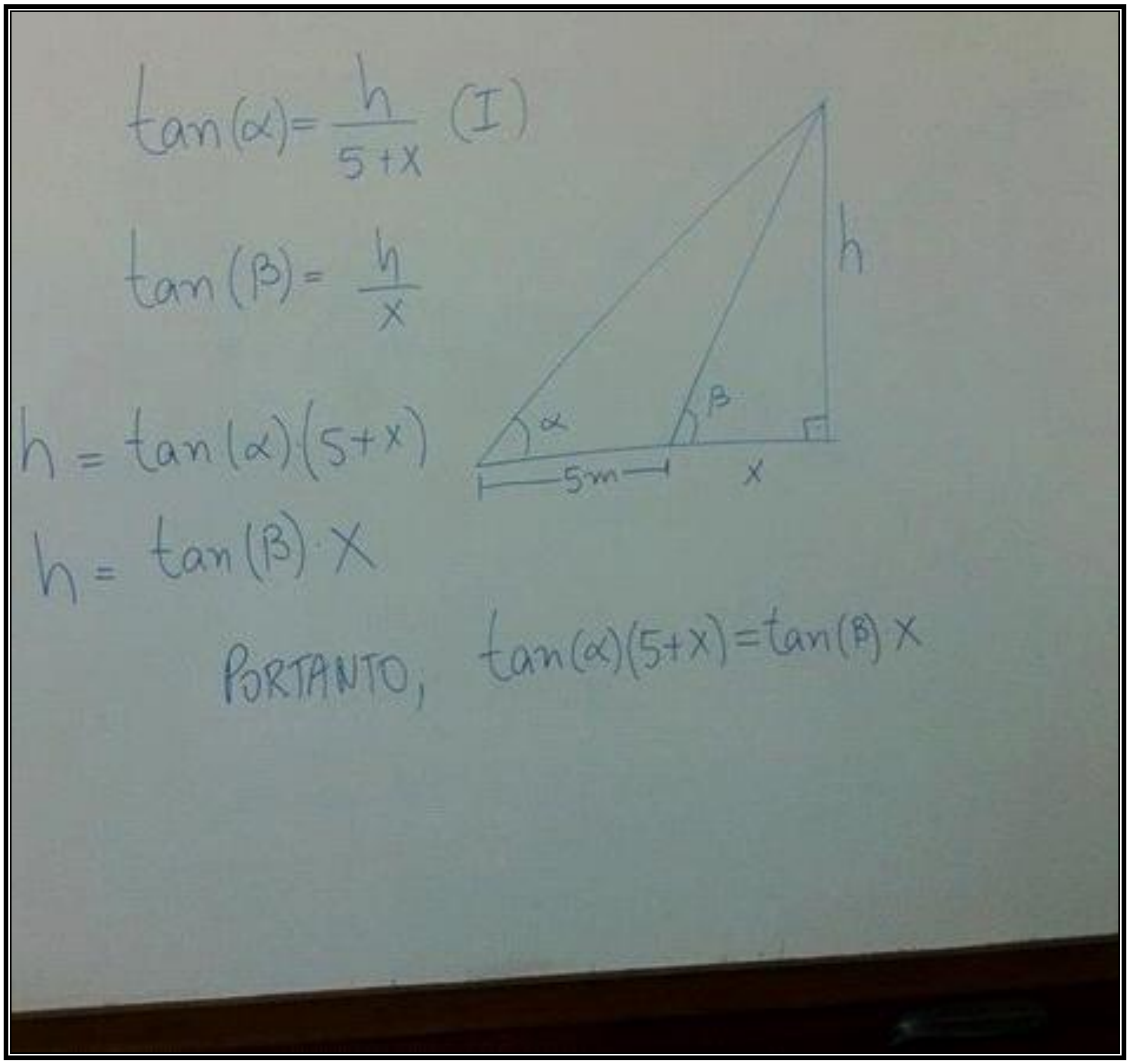


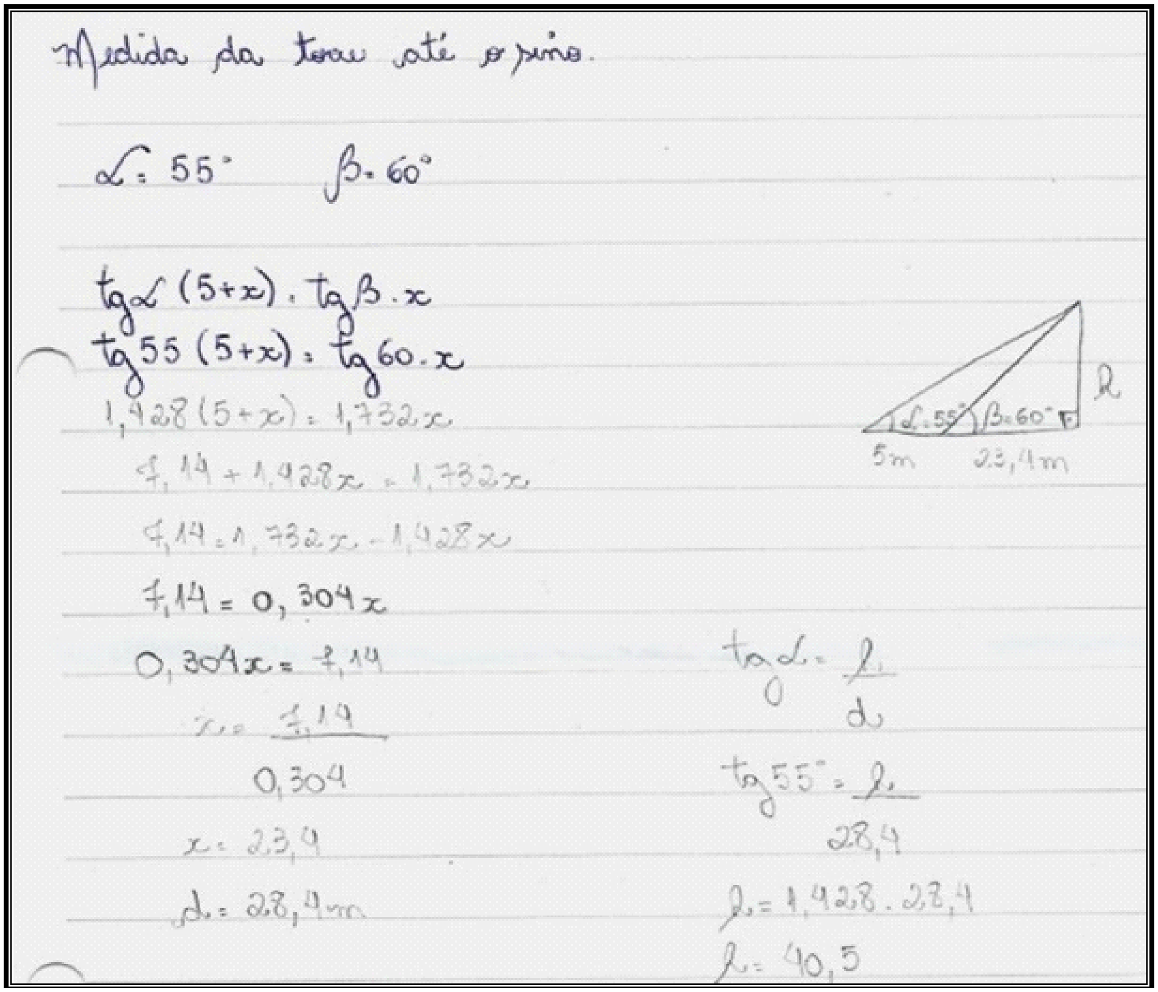
Foto 3 – Expressão algébrica / trigonométrica

Voltamos à praça e, dessa vez, de frente para a Matriz iniciamos as medições. Marcamos um ponto no chão de onde seria medido o primeiro ângulo. A partir desse ponto, utilizando-nos da trena, caminhamos 5 metros em direção à torre e medimos novamente o ângulo, como mostram as Fotos 4a e 4b abaixo:

Fotos 4a e 4b – Alunos medindo o ângulo relativo a altura "h" do sino

Após realizarmos as duas medições angulares, voltamos à sala de aula, com os valores registrados. Cada dupla fez os cálculos com suas próprias medições. Foi escolhido dois deles para relatar o ocorrido. As próximas Fotos (5a e 5b) e Figuras (10 e 11) exemplificam o ocorrido:

Fotos 5a e 5b – Alunos trabalhando nos cálculos para a determinação da altura do sino



Medida da torre até o pino.

$\alpha = 55°$ $\beta = 60°$

$tg\,\alpha\,(5+x) = tg\,\beta \cdot x$

$tg\,55\,(5+x) = tg\,60 \cdot x$

$1,428\,(5+x) = 1,732x$

$7,14 + 1,428x = 1,732x$

$7,14 = 1,732x - 1,428x$

$7,14 = 0,304x$

$0,304x = 7,14$

$x = \dfrac{7,14}{0,304}$

$x = 23,4$

$d = 28,4m$

$tg\,\alpha = \dfrac{h}{d}$

$tg\,55° = \dfrac{h}{28,4}$

$h = 1,428 \cdot 28,4$

$h = 40,5$

Figura 10 – Cálculo do valor de "h" realizado por um dos grupos de alunos

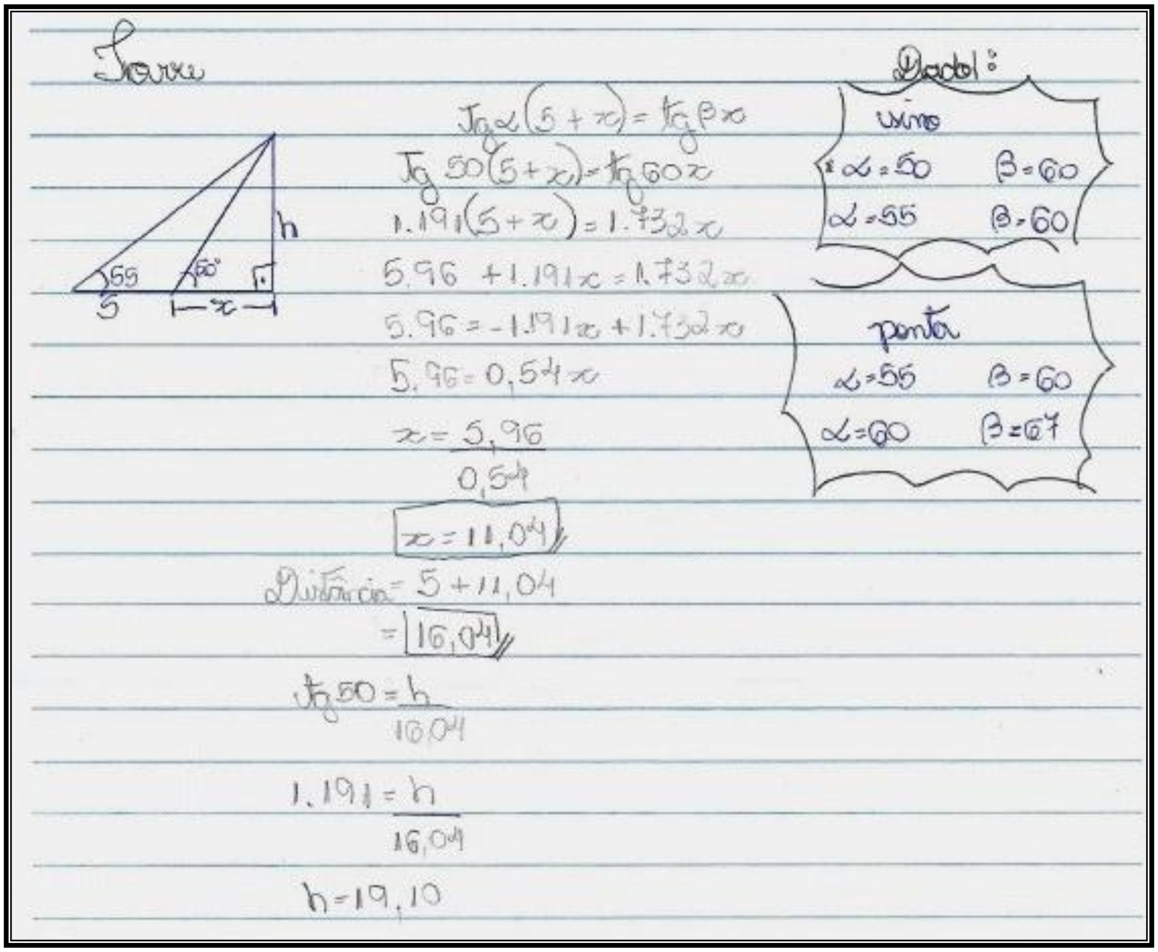


Figura 11 – Cálculo do valor de "h", realizado por um segundo grupo de alunos

Observe que houve uma diferença muito grande das alturas encontradas pelas duas duplas de alunos. A segunda dupla determinou quatro medições para os ângulos α e β (mais distante e mais próximo da torre, respectivamente) e utilizou em seus cálculos apenas os valores de α = 50° e β = 60°.

Diante deste fato, os alunos questionaram o porquê dos grupos terem encontrado valores de "h" tão diferentes.

Sem responder ao questionamento feito, deixei a questão em aberto para que discutissem entre eles sobre o que poderia ter ocorrido para que esta diferença fosse observada. Os alunos apontaram três possíveis razões:

- A base do teodolito pode não ter ficado paralela ao solo da praça, ocorrendo assim erro(s) na(s) medição(ções) angular(es) realizada(s);
- O caminhar de 5 m em direção à torre certamente implicaria numa variação angular, fato este não observado em todas as medições realizadas pela segunda dupla;
- O ângulo formado entre a parede da torre e o piso da praça não é de 90º.

Expliquei que, possivelmente, a principal razão para a diferença nos valores de "h" encontrados, deve ter sido o posicionamento do teodolito, no momento das medições.

Os alunos questionaram o que poderia ser feito para resolver o problema. Sugeri a construção de outro modelo de teodolito e eles prontamente se dispuseram a confeccioná-lo.

No dia seguinte, nos encontramo-nos na escola às 14h e apresentei o novo modelo de teodolito a eles. Com o novo teodolito (Foto 6) em mãos, os alunos voltaram à praça da Matriz e refizeram as medições angulares (Fotos 7a e 7b).

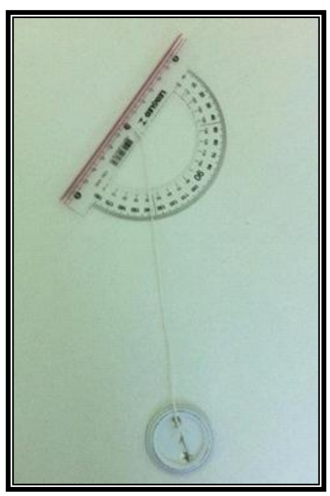


Foto 6 - Novo Teodolito

Fotos 7a e 7b – Alunos medindo o ângulo relativo a altura "h" do sino

De posse dos novos dados, voltaram à escola para recalcular a altura do sino na torre da Matriz. A Foto 8 mostra dois alunos realizando este trabalho.

Foto 8 – Alunos trabalhando nos cálculos para a determinação da altura do sino

Os ângulos medidos pelos alunos da Foto 8 foram de α = 53º e β = 58º, dos quais se conclui que a altura do sino na torre da Matriz é de h = 40,6 m, já inclusa neste número a altura do aluno que realizou a medição. Todos ficaram animados, pois essa medida estava muito próxima de uma das calculadas com o primeiro teodolito, ou seja, h = 40,5 m.

Os alunos sugeriram, então, uma nova ida à Matriz, para indagar na Secretaria da igreja se alguém poderia informá-los sobre a real altura do sino na torre da Matriz. Assim procedendo, os alunos obtiveram a informação de que a altura é de 40 m.

Ficaram ao mesmo tempo satisfeitos e empolgados com a precisão matemática dos cálculos por eles efetuados.

Com isto, concluiu-se a aplicação da 1ª Atividade Didática planejada da pesquisa.

III.2.2 DESCRIÇÃO DO OCORRIDO DURANTE A APLICAÇÃO DA 2ª ATIVIDADE DIDÁTICA DA PESQUISA – MEDINDO O COMPRIMENTO DA SOMBRA DE UMA ESTACA FIXADA NO SOLO

De posse de uma estaca de aço de 1 m de comprimento e com uma base retangular fixada perpendicularmente a ela em uma de suas extremidades (Foto 9), eu e os alunos descemos para a quadra poliesportiva da Escola, onde seriam feitas as medições das sombras, no intervalo entre 10h e 14h. Neste dia, a quadra havia sido reservada para este trabalho e, portanto, não ocorreriam as aulas normais de Educação Física no local.

Foto 9 – Estaca utilizada na 2ª Atividade Didática da pesquisa

Na quadra, a estaca foi colocada em local onde a luz solar pudesse incidir sobre ela, durante todo o período da atividade (Foto 10) e, ao mesmo tempo, não oferecesse risco aos alunos da escola que, por ventura, ficassem curiosos para observar o que estava ali acontecendo.

Expliquei aos participantes da atividade que deveriam marcar o ponto final da sombra da estaca com giz de cera e, com o auxílio de uma régua de madeira de 1 m, medir seu comprimento, ou seja, a distância do ponto ao pé da estaca. Tais marcações e medições teriam de ser realizadas em intervalos regulares de 30 minutos, isto é, às 10h, às 10:30h, às 11h e, assim sucessivamente até às 14h. Além disso, os pontos e os segmentos de retas que representavam as sombras da estaca em horários equidistantes das 12h, ou seja, as marcações e medições das 10h e 14h, das 10:30h e 13:30h e, assim sucessivamente, deveriam ser registradas no piso da quadra com giz de cera da mesma cor, pela dupla de alunos que estava executando-as, pois a cada horário somente uma das duplas sairia da sala de aula para realizar esse trabalho. A última orientação ficou assim acordada, tendo em vista que os alunos estariam em aula de outros professores nos horários fixados para as marcações e medições. Paralelamente, acordei com os outros professores que estariam lecionando na sala desses alunos, nesse dia, a saída de cada dupla nos horários fixados para as marcações e medições.

Orientações dadas e compreendidas, a primeira dupla de alunos passou a realizar a marcação e a medição das 10h, enquanto os demais alunos observavam o trabalho que estava sendo realizado. A Foto mostra um dos alunos, da primeira dupla, realizando a marcação e a medição solicitadas.

Foto 10 – Aluno realizando medição da sombra da estaca às 10 horas

Em duplas, os alunos deram continuidade às marcações e medições, nos horários previamente fixados. A Foto 11 mostra uma dupla de alunos trabalhando em um dos últimos horários fixados.

Foto 11 – Dupla de alunos realizando uma das últimas medições da experiência

Concluído o trabalho, os resultados foram compilados em um único arquivo. Isto feito, os alunos, em sala de aula, passaram a responder ao questionário previamente elaborado e descrito no capítulo anterior. A Foto 12 mostra alguns alunos trabalhando neste questionário.

Foto 12 – Alunos trabalhando no questionário de pesquisa

Analisando os dados coletados, da primeira indagação do questionário, os alunos concluíram que as medidas das sombras diminuíram durante o período das 10 e 12 horas e aumentaram entre 12 e 14 horas. Mais do que isso, observaram que as medições realizadas em horários equidistantes da menor das sombras (12 h) eram numericamente próximas. A Figura 12 mostra a resposta dada por uma dupla de alunos a esta primeira indagação.

Questionário

1. Que relação você pode estabelecer entre os comprimentos das sombras de horários equidistantes ao horário da 'menor sombra' registrado?

Tabela de registros das medições	
10h00	97 cm
10h30	81,5 cm
11h00	70 cm
11h30	63 cm
12h00	54 cm
12h30	60 cm
13h00	64,5 cm
13h30	73 cm
14h00	83 cm

Conclusão

As 10hrs teve maior comprimento devido a posição do sol em relação a estaca, o comprimento foi diminuindo conforme passava as horas, até 12hrs. A partir das 12hrs o comprimento da sombra voltou a ter um aumento, não de acordo como observou anteriormente, pois a Terra está em rotação e não voltará à posição inicial no mesmo intervalo de tempo. No entanto, podemos observar também que as medidas das sombras estão equidistantes da medida da sombra as 12hrs, terão medidas aproximadas.

Figura 12 – Resposta de aluno à 1ª questão do Questionário de pesquisa

Transcrição da Figura 12 (Conclusão que questão 1): As 10h00 teve maior comprimento devido a posição do Sol em relação à estaca. O comprimento foi diminuindo conforme passa as horas, até 12 horas. A partir das 12 horas o comprimento da sombra voltou a ter um aumento, não de acordo como observou anteriormente, pois a Terra está em rotação e não voltará a posição inicial no mesmo intervalo de tempo. No entanto, podemos observar também que as medidas das sombras estão equidistantes da medida da sombra das 12 horas, terão medidas aproximadas.

Na questão 2, a principal observação dos alunos foi que os ângulos definidos entre "a semirreta de origem no pé da estaca e que passa pelo ponto de menor sombra (das 12 h)" e "as semirretas também de origem no pé da estaca e que passam pelos pontos das sombras definidas em horários equidistantes às 12 horas" tinham medidas também aproximadas, com a média das diferenças próxima a 6°. A Figura exemplifica as respostas emitidas pelos alunos para esta questão.

2. Se traçarmos uma semirreta com origem no 'pé do bastão' passando pelo ponto que demarca a 'menor sombra' registrada e, com auxílio de um transferidor medirmos os ângulos formados por esta semirreta e os segmentos de retas representativos das sombras registradas, o que você observa?

Tabela de registro das medições	
10h00	47°
10h30	37°
11h00	25°
11h30	10°
12h00	0°
12h30	16°
13h00	30°
13h30	45°
14h00	53°

Conclusão

A partir das 10hrs até as 12hrs nota-se que houve uma diminuição no ângulo, chegando aproximadamente a 0° por volta de 12hrs, e houve um aumento no decorrer do tempo, sendo os ângulos equidistantes havendo uma diferença de aproximadamente 6°.

Figura 13 – Exemplo de resposta dada pelos alunos à questão 2 do Questionário de Pesquisa

Transcrição da Figura 13 (Conclusão que questão 2): A partir das 10 horas até às 12 horas nota-se que houve uma diminuição no ângulo, chegando aproximadamente a 0º por volta de 12 horas, e houve um aumento no decorrer do tempo, sendo os ângulos equidistantes havendo uma diferença de aproximadamente 6º.

Já a questão 3, em seu primeiro questionamento (item ‘a’), solicitava dos alunos que voltassem à quadra e, com auxílio de um transferidor, medissem o ângulo de incidência dos raios solares a cada horário de marcação das sombras. Na Foto 13, o raio solar está representado pelo barbante esticado entre a extremidade superior da estaca e o ponto final da sombra registrado em um dos horários, no piso da quadra. Os alunos também foram orientados a registrarem tais medidas em uma única tabela. A Foto 13 mostra os alunos realisando este trabalho.

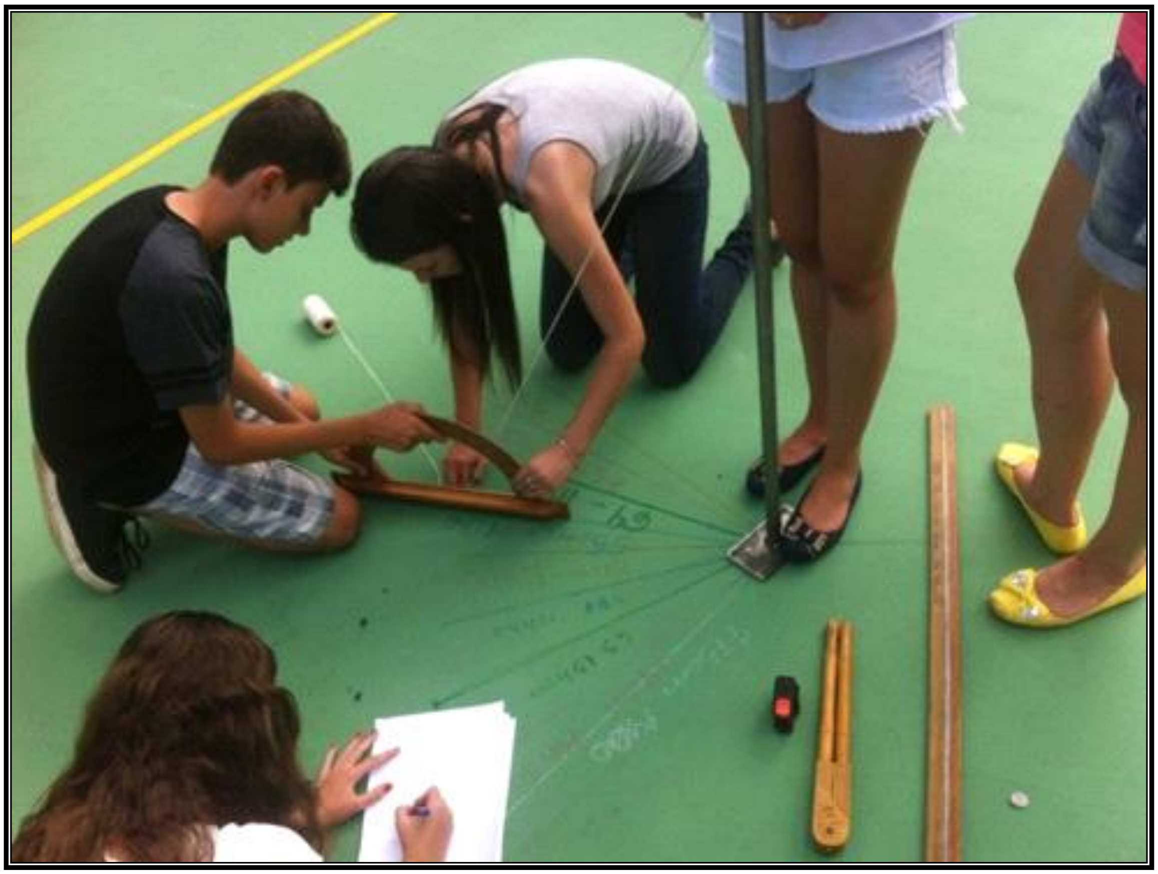


Foto 13 – Alunos trabalhando na medição do ângulo de incidência do raio solar, em um determinado instante

No segundo questionamento da terceira questão (item ‘b’) foi solicitado dos alunos que medissem o mesmo ângulo de incidência do raio solar, no entanto, sem a utilização do transferidor. Para isso deveriam fazer uso dos conceitos trigonométricos trabalhados na 1ª Atividade Didática e da tabela de valores de seno, cosseno e tangente já fornecida. Os alunos calcularam as medidas solicitadas a partir das medidas da estaca (cateto oposto ao ângulo de incidência) e do comprimento da sombra (cateto adjacente ao ângulo de incidência) em cada um dos horários de medição estabelecidos inicialmente. Posteriormente, anotaram os resultados obtidos para os itens 'a' e 'b' da questão na tabela sendo preenchida por eles (Figura 14).

As conclusões registradas pelos alunos sobre o trabalho realizado nesta questão não foram simples de serem obtidas e, usualmente, continham erros conceituais. De fato, as diferenças verificadas entre os valores do ângulo de incidência do raio solar feitas com e sem o auxílio do transferidor se deve principalmente a erros de marcação e/ou medição cometidos durante o experimento. Por menor que seja a imprecisão cometida na marcação ou na medição da sombra certamente ela causará diferença na definição do ângulo de incidência do raio solar. Além disso, certamente há erro no ângulo definido, na prática, pela estaca e o piso da quadra. Este deveria ser de 90° e, na realidade, provavelmente não foi. Consequentemente, a razão trigonométrica que afirma que , aplicável somente em triângulos retângulos, foi inadequadamente utilizada neste experimento. Apesar de estar ciente deste problema, quando planejei a atividade, mantive o experimento com o objetivo de propiciar espaço para discutir junto aos alunos a chamada "exatidão" matemática observada na "Teoria" e a "não exatidão" quando se aplica o mesmo conceito em situações práticas. Ademais, o objetivo central desta 2ª atividade era simplesmente aplicar o conceito de razão trigonométrica, no caso a da tangente, em uma situação investigativa do cotidiano.

A Figura 14 exemplifica a resposta registrada por uma dupla de alunos para a Questão 3, item 'b'.

b) Sem utilizarmos de um transferidor? Utilize-se das duas possibilidades de cálculo e determine os ângulos correspondentes aos diferentes horários de medições das sombras. Avalie a diferença existente ou não na medição de cada ângulo, quando se utiliza das duas possibilidades de calculo, e justifique-as.

Tabela de registro das medições		
	Com a utilização do transferidor	Sem a utilização de um transferidor
10h00	38°	45,8°
10h30	42°	50,8°
11h00	51°	55°
11h30	54°	57,7°
12h00	56°	59,4°
12h30	55°	59°
13h00	51°	57°
13h30	46°	53,8°
14h00	41°	50,3°

Conclusão

Com a utilização do transferidor, concluimos que ao colocar o barbante na extremidade da estaca e na extremidade da sombra conseguimos obter a medida do ângulo diretamente.

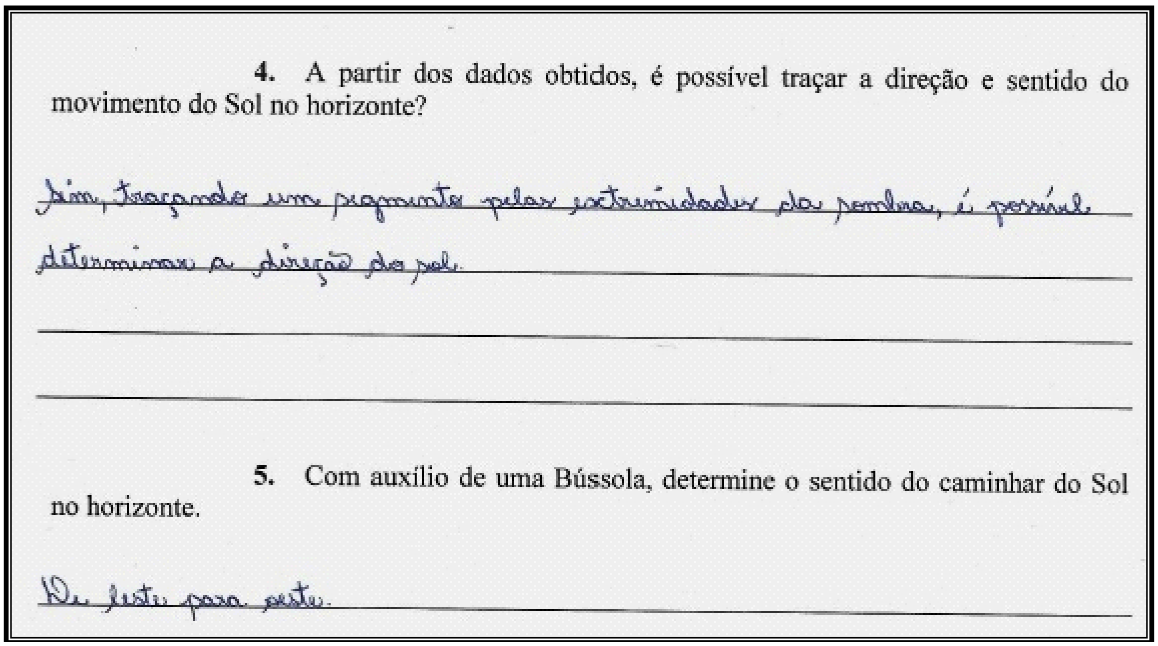
Sem a utilização de um transferidor, medimos através da expressão: tg θ = estaca (em cm) / medida da sombra (em cm)

A diferença das medidas ocorre pois o ângulo formado entre a estaca e o solo é menor que 90°. Calculamos o valor desse ângulo com a lei dos cossenos com o seguimento formado pela sombra das 12 horas e o valor encontrado foi 87°.

Figura 14 - Resposta registrada por uma dupla de alunos para a Questão 3, item 'b'

Transcrição da Figura 14 (Conclusão da Questão 3b): Com a utilização do transferidor, concluímos que ao colocar o barbante na extremidade da estaca e na extremidade da sombra conseguimos obter a medida do ângulo diretamente.
Sem a utilização de um transferidor, medimos através da expressão tan θ, estaca (em cm).
A diferença das medidas ocorre, pois o ângulo formado entre a estaca e o solo é menor que 90º. Calculamos o valor desse ângulo com a lei dos cossenos com o segmento formado pela sombra das 12 horas e o valor encontrado foi 87º.

As questões 4 e 5 referiam-se à direção e sentido do deslocamento do Sol, ao longo do dia. Os alunos concluíram que, traçando uma reta unindo as extremidades das sombras, tal reta representaria o caminho do Sol e o sentido Leste para Oeste, o que foi comprovado com o auxílio de uma bússola (aplicativo de celular). A Figura 15 registra a resposta a estas questões, registrada por uma dupla de alunos participantes da pesquisa.



4. A partir dos dados obtidos, é possível traçar a direção e sentido do movimento do Sol no horizonte?

Sim, traçando um segmento pelas extremidades da sombra, é possível determinar a direção do sol.

5. Com auxílio de uma Bússola, determine o sentido do caminhar do Sol no horizonte.

De leste para oeste.

Figura 15 – Exemplo de resposta dada por uma dupla de alunos às Questões 4 e 5 do Questionário

Transcrição da Figura 15 (Conclusão da Questão 4): Sim, traçando um segmento pelas extremidades da sombra, é possível determinar a direção do Sol.

Transcrição da Figura 15 (Conclusão da Questão 5): De Leste para Oeste.

A questão 6 solicitava dos alunos a marcação e a nomeação dos principais pontos cardeais sobre as marcações feitas na quadra da escola. O resultado deste trabalho é observado na Foto 14.

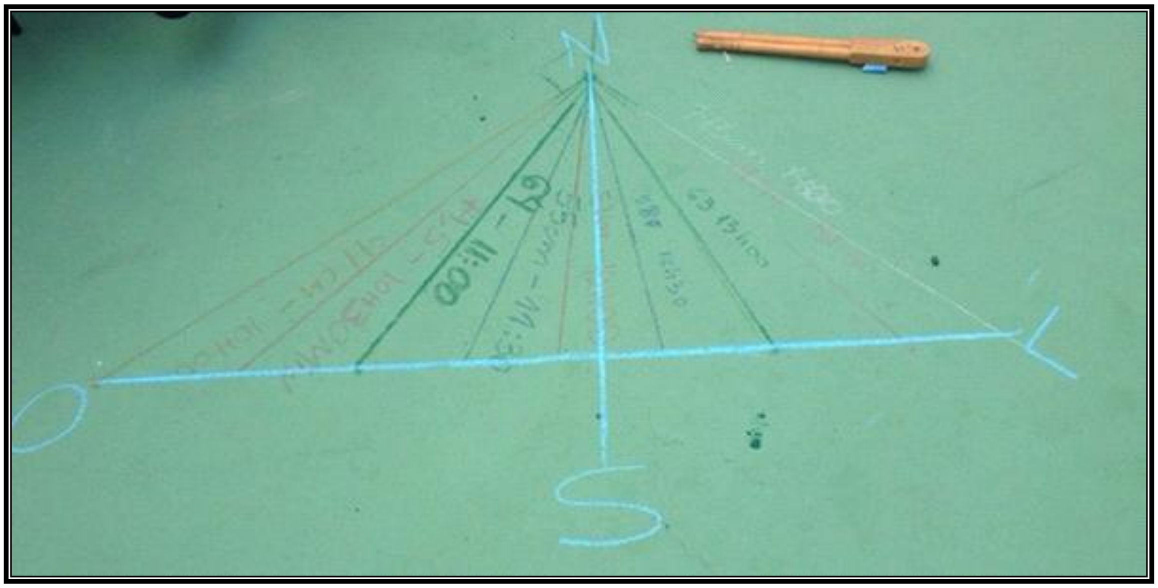
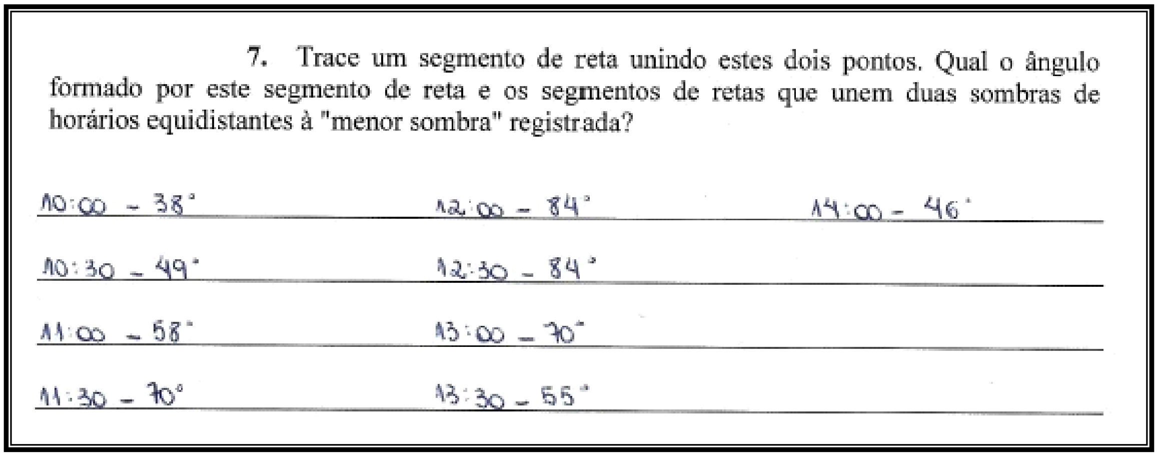


Foto 14 – Principais pontos cardeais marcados sobre os dados experimentais na quadra da escola

Observe que os alunos inverteram as posições Leste (L) e Oeste (O), bem como a do Norte (N) e do Sul (S), tendo em vista que o Sol nasce no Leste (L) e se pôe no Oeste (O). Os horários, marcados próximos aos segmentos de retas que definem a sombra do bastão, comprovam este fato. Isso ocorreu devido os alunos terem se posicionado próximos ao local onde a letra S está marcada e, com o auxílio da bússola, localizaram o Norte (N). Na realidade os alunos deveriam ter sido orientados por mim nesse posicionamento, mas, novamente, somente observei o erro durante a análise posterior da Foto.

Com os principais pontos cardeais registrado no piso da quadra, os alunos responderam à questão 7. Exemplo de resposta obtida encontra-se na Figura 16:

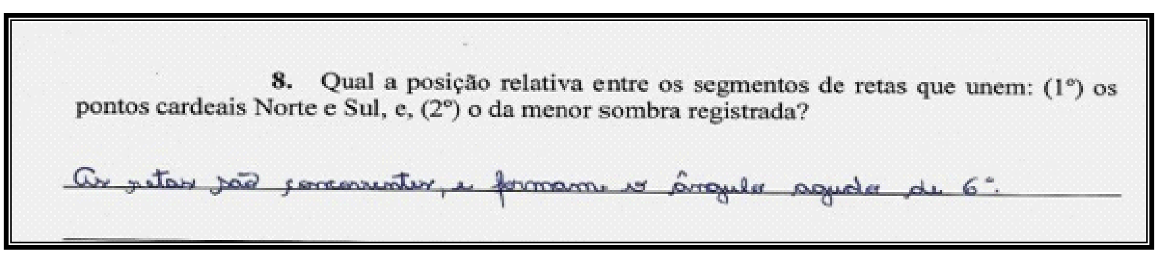

7. Trace um segmento de reta unindo estes dois pontos. Qual o ângulo formado por este segmento de reta e os segmentos de retas que unem duas sombras de horários equidistantes à "menor sombra" registrada?

10:00 – 38°
10:30 – 49°
11:00 – 58°
11:30 – 70°
12:00 – 84°
12:30 – 84°
13:00 – 70°
13:30 – 55°
14:00 – 46°

Figura 16 – Exemplo de resposta emitida por uma dupla de alunos à Questão 7

Observe que os dados registrados para horários equidistantes às 12 horas registram, em média, diferenças superiores àquelas registradas na Questão 2. Ou seja, de aproximadamente 10°. Além disso, há erros claros de medição, tendo em vista que os valores dos ângulos registrados para os horários das 12h e das 12:30h são os mesmos, o que é impossível. Houve erro de procedimento e/ou entendimento dos alunos sobre o solicitado na questão e, mais uma vez, isso não foi observado por mim durante a condução da atividade. Somente após ter analisado os dados coletados, esses erros foram identificados.

A questão 8 indagava dos alunos a posição relativa entre os segmentos de retas que "uni os pontos cardeais do Norte e do Sul" e aquele que representa o "comprimento da menor sombra" registrada, isto é, o das 12h. A Figura 17 mostra exemplo de resposta dada a esta questão pelas duplas de alunos.


8. Qual a posição relativa entre os segmentos de retas que unem: (1°) os pontos cardeais Norte e Sul, e, (2°) o da menor sombra registrada?

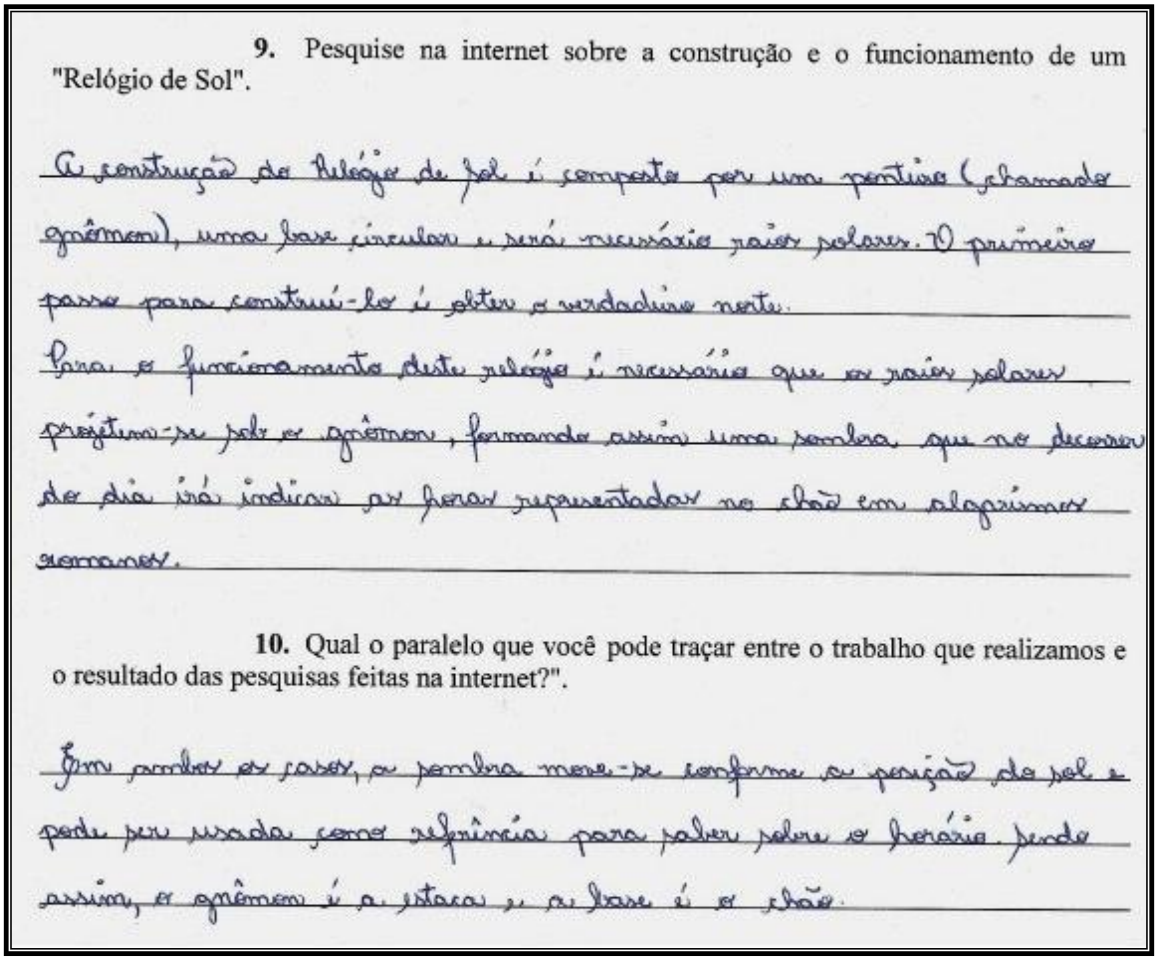
As retas são concorrentes, e formam o ângulo agudo de 6°.

Figura 17 – Exemplo de resposta registrada pelas duplas de alunos à Questão 8

Transcrição da Figura 17 (Conclusão da Questão 8): As retas são concorrentes, e formam o ângulo agudo de 6º.

Frente a este tipo de resposta, intervi na continuidade da atividade e expliquei aos alunos o porquê deles terem registrado essa diferença. Expliquei que o fato da posição em que nos encontramos na superfície do planeta não ser um ponto de passagem do Trópico de Capricórnio (Hemisfério Sul), e de não estarmos em dia de "Solstício", ocorre esta pequena diferença no ângulo entre os segmentos de retas considerados. Como observei que nenhum aluno compreendeu o que eu havia dito, procurei explicar o fato mais detalhadamente, ou seja, expliquei: "'Solstício' é o momento em que o Sol, durante seu movimento aparente na esfera celeste, atinge a maior declinação em latitude, medida a partir da linha do equador. Os solstícios ocorrem duas vezes por ano em cada hemisfério. Em nosso hemisfério, o Sul, o Solstício de Verão ocorre em dezembro e o Solstício de Inverno em junho. Os trópicos de Câncer e Capricórnio são definidos em função dos solstícios. No solstício de verão do hemisfério sul, os raios solares incidem perpendicularmente à superfície da Terra na linha imaginária conhecida como Trópico de Capricórnio. No solstício de verão do hemisfério norte, ocorre o mesmo fenômeno no Trópico de Câncer". Conclui, dizendo: "como o dia de nossa experiência não era data de Solstício de Verão e não estávamos sob o Trópico de Capricórnio, a estaca produziu uma sombra que não coincidiu com o segmento de reta unindo os pontos cardeais do Norte e do Sul. Esses dois fatores, data de Solstício e posição da quadra da escola na superfície do Planeta, foram as principais causas para a diferença constatada".

Finalmente, as questões 9 e 10 do questionário buscavam relacionar a experiência realizada pelos alunos nesta 2ª Atividade Didática com a construção e o funcionamento de um Relógio de Sol. A Figura abaixo mostra o resultado da pesquisa realizada por uma dupla envolvida na pesquisa, e que serve de exemplo de pesquisa do grupo.



9. Pesquise na internet sobre a construção e o funcionamento de um "Relógio de Sol".

A construção do Relógio de Sol é composto por um ponteiro (chamado gnômon), uma base circular e será necessário raios solares. O primeiro passo para construí-lo é obter o verdadeiro norte.
Para o funcionamento deste relógio é necessário que os raios solares projetem-se sob o gnômon, formando assim uma sombra que no decorrer do dia irá indicar as horas representadas no chão em algarismos romanos.

10. Qual o paralelo que você pode traçar entre o trabalho que realizamos e o resultado das pesquisas feitas na internet?".

Em ambos os casos, a sombra move-se conforme a posição do sol e pode ser usada como referência para saber sobre o horário. Sendo assim, o gnômon é a estaca e a base é o chão.

Figura 18 – Exemplo de pesquisa realizada por uma dupla de alunos para as questões 9 e 10

Transcrição da Figura 18 (Conclusão da Questão 9): A construção do Relógio de Sol é composta por um ponteiro (chamado Gnômon), uma base circular e será necessário raio solares. O primeiro passo para construí-lo é obter o verdadeiro Norte.
Para o funcionamento deste relógio é necessário que os raios solares projetem-se sob o Gnômon, formando assim uma sombra que no decorrer do dia irá indicar as horas representadas no chão em Algarismos Romanos.

Transcrição da Figura 18 (Conclusão da Questão 10): Em ambos os casos, a sombra move-se conforme a posição do Sol e pode ser usada como referência para saber sobre o horário, sendo assim, o Gnômon é a estaca e a base é o chão (piso da quadra).

Considerando ter atingido satisfatoriamente os objetivos traçados para esta 2ª Atividade Didática da pesquisa, concluo, aqui, o relato do que nela ocorreu durante sua aplicação.

III.2.3 DESCRIÇÃO DO OCORRIDO DURANTE A APLICAÇÃO DA 3ª ATIVIDADE DIDÁTICA DA PESQUISA – O ESTUDO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Para a aplicação da terceira atividade, não havia sala de aula disponível no período da tarde para os alunos trabalharem. Mas, por iniciativa deles, foi sugerido colocar algumas mesas na quadra de esportes, próximo a arquibancada, o que propiciou o início dos trabalhos.

Estando todos acomodados na quadra de esportes, expliquei que eles confeccionariam, em duplas, rodas gigantes, de papelão, como descrito no capítulo II, na 3ª atividade didática. Distribuí o material para a confecção das rodas gigantes a cada dupla de alunos e os trabalhos foram realizados durante dois períodos de dias consecutivos. As fotos 15a e 15b mostram duplas confeccionando suas rodas gigantes, as quais possuíam raios de 10, 12, 13 e 15 cm.

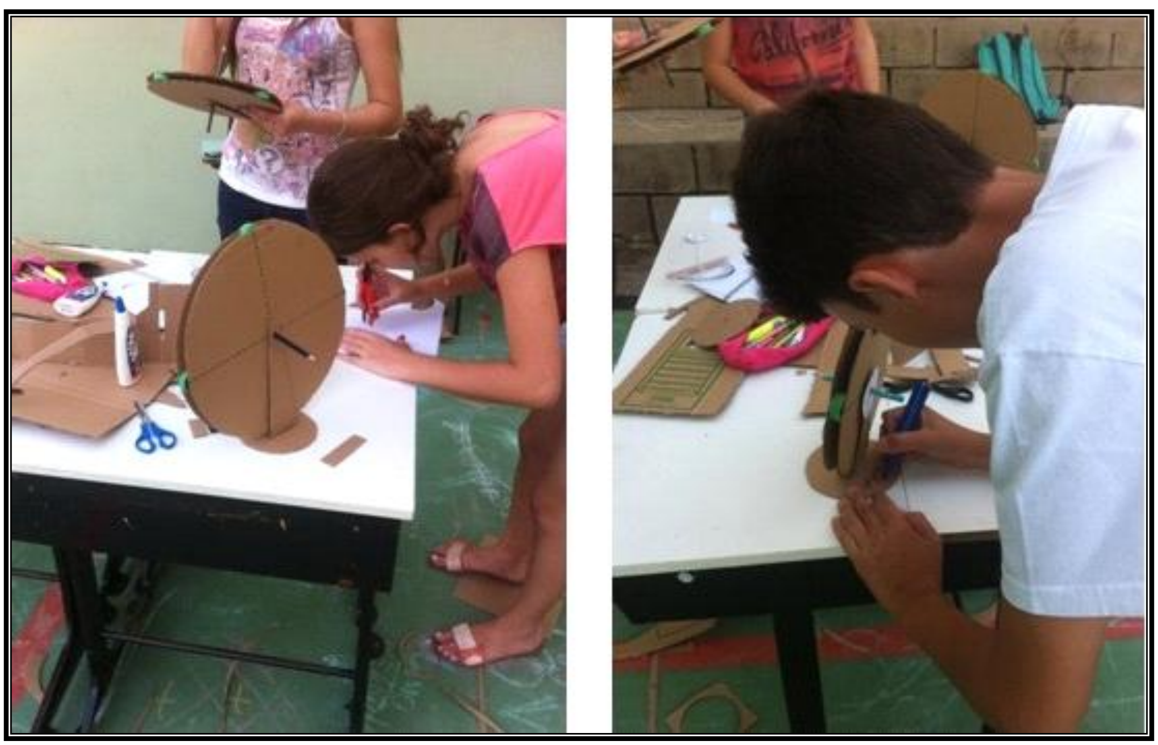


Foto 15a e Foto15b – Alunos trabalhando na confecção de rodas gigantes

Trabalhando no laboratório de informática, os alunos foram orientados a construírem uma nova tabela, primeiramente, com duas colunas. A primeira, contendo alguns valores angulares da primeira volta no círculo trigonométrico, medidos em graus e radianos. A segunda, contendo o resultado da divisão "das medidas, em cm, das alturas verticais (h) entre a reta horizontal que passa pela origem do mini transferidor e o ponto extremo da reta tracejada, que passa pelo centro das tampinhas" pela medida "do raio do disco da roda gigante com a qual estão trabalhando". Em seguida, os alunos foram orientados a registrar em uma 3ª coluna, o resultado da divisão "das distâncias horizontais (d), em cm, do centro da roda gigante e o ponto de intersecção entre a reta vertical da altura (h) e a reta horizontal que passa pelo centro do disco" pela medida "do raio do disco da roda gigante com a qual estão trabalhando". Chamei, ainda, a atenção dos alunos sobre a necessidade de subtraírem a distância vertical entre a base da roda gigante (tampo da mesa de trabalho) e o centro do disco durante a determinação das alturas verticais 'h'. Finalmente, orientei-os alunos para colocarem o centro do disco da roda gigante como origem do plano cartesiano que utilizariam para proceder com as medições de 'd' e de 'h', e que, para segmentos à esquerda e abaixo dessa origem, seus valores seriam negativos. As Fotos 16a, 16b, 17a e 17b registram duplas de alunos realizando esse trabalho.

Foto 16a e Foto 16b – Alunos realizando as medições de 'h' e 'd'

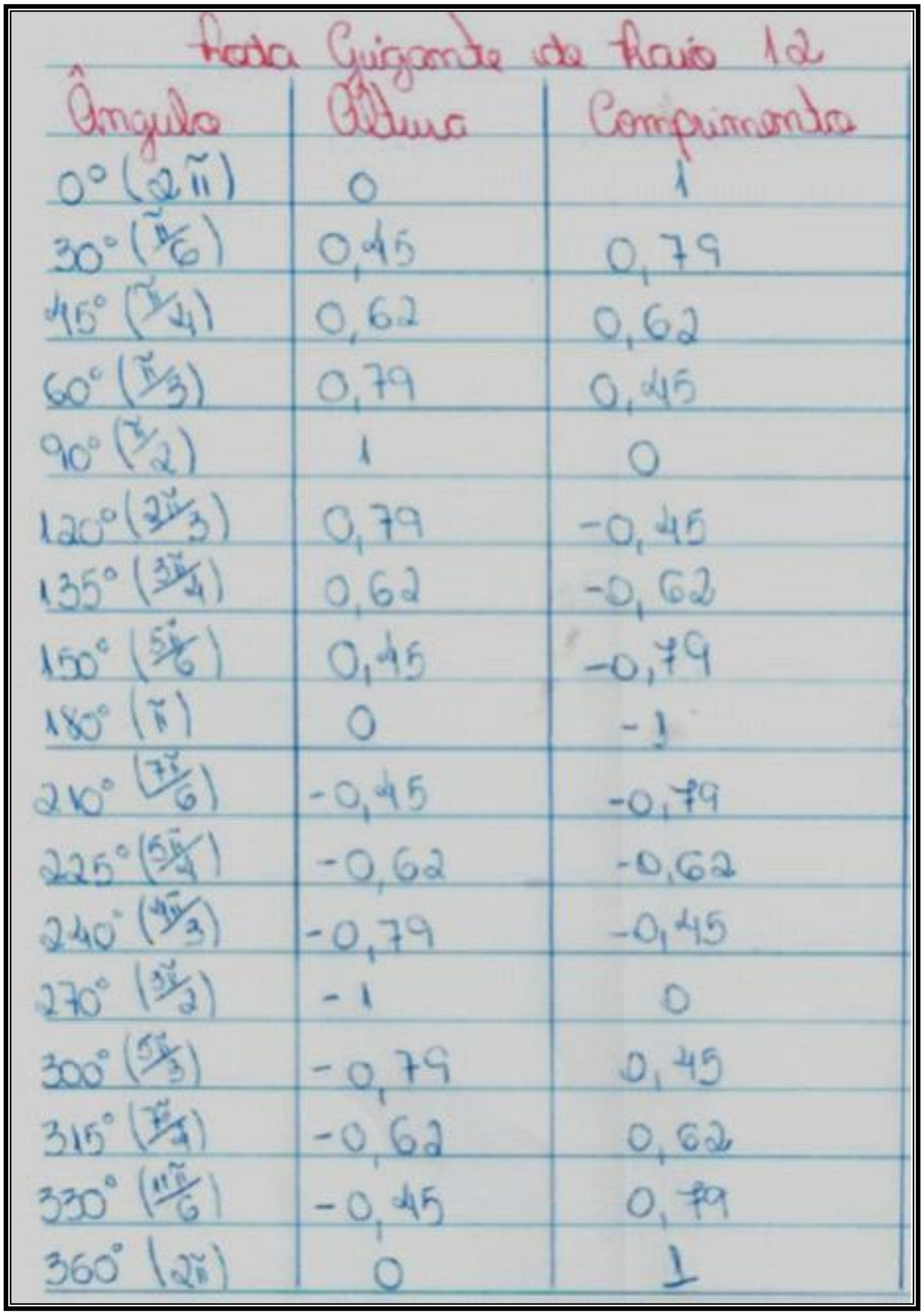
Foto 17a e Foto 17b – Alunos construindo a tabela 2ª

Os resultados das medições de 'h' e 'd' de cada dupla de alunos estão registrados nas tabelas 2a, 2b, 2c 2 2d.

Roda GiGante Raio 10

Ângulo	Altura (h)	comprimento (d)
0	0	1
30° ou $\frac{\pi}{6}$	0,55	0,9
45° ou $\frac{\pi}{4}$	0,75	0,7
60° ou $\frac{\pi}{3}$	0,95	0,5
90° ou $\frac{\pi}{2}$	1	0
120° ou $\frac{2\pi}{3}$	0,95	-0,5
135° ou $\frac{3\pi}{4}$	0,75	-0,7
150° ou $\frac{5\pi}{6}$	0,55	-0,9
180° ou π	0	-1
210° ou $\frac{7\pi}{6}$	-0,55	-0,9
225° ou $\frac{5\pi}{4}$	-0,75	-0,7
240° ou $\frac{4\pi}{3}$	-0,95	-0,5
270° ou $\frac{3\pi}{2}$	-1	0
300° ou $\frac{5\pi}{3}$	-0,95	0,5
315° ou $\frac{7\pi}{4}$	-0,75	0,7
330° ou $\frac{11\pi}{6}$	-0,55	0,9
360° ou 2π	0	1

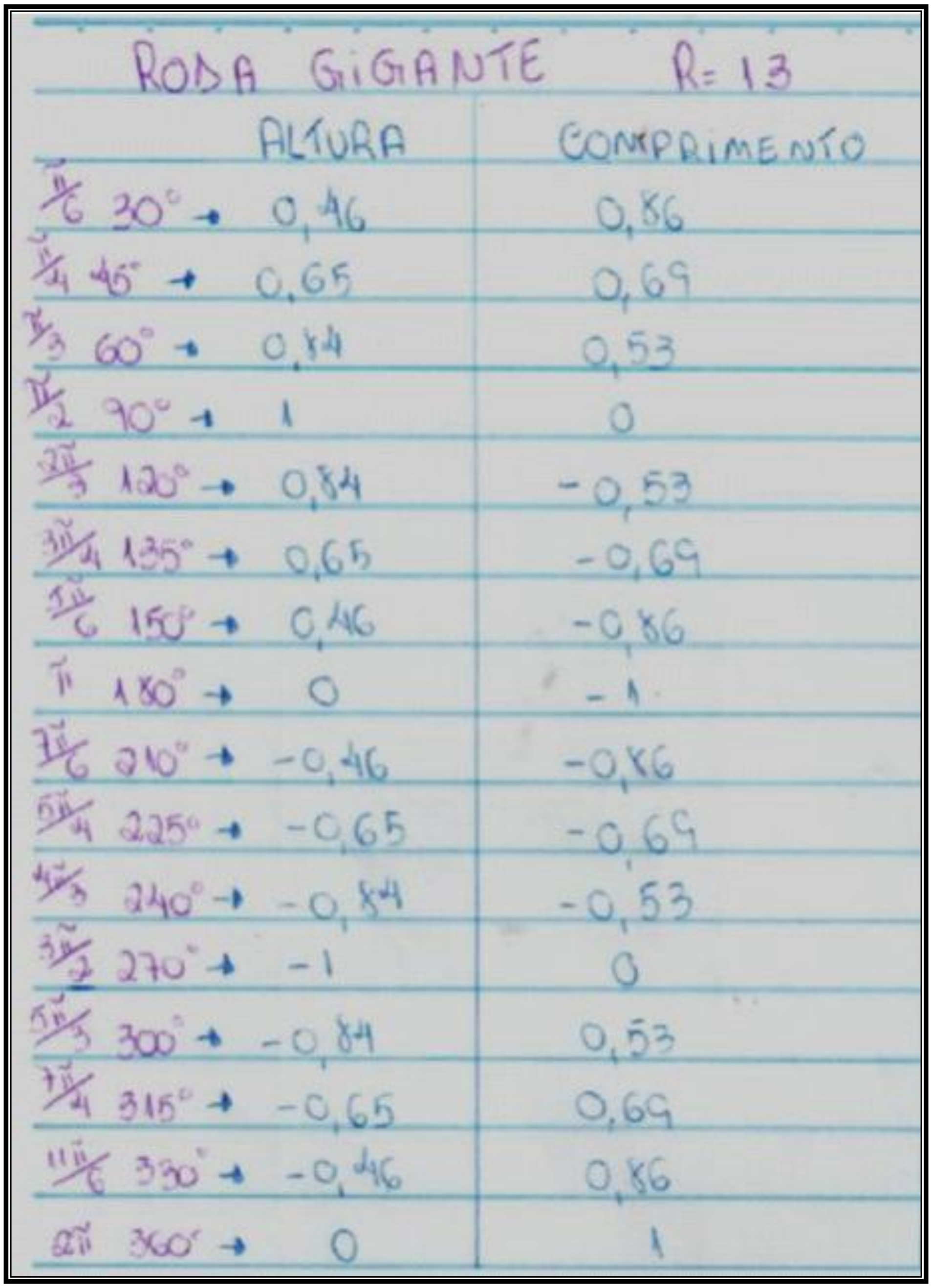
Tabela 2a – Medidas de 'h' e 'd' observadas na roda gigante com disco de 10 cm de raio



Roda Gigante de Raio 12

Ângulo	Altura	Comprimento
0° (2π)	0	1
30° (π/6)	0,45	0,79
45° (π/4)	0,62	0,62
60° (π/3)	0,79	0,45
90° (π/2)	1	0
120° (2π/3)	0,79	-0,45
135° (3π/4)	0,62	-0,62
150° (5π/6)	0,45	-0,79
180° (π)	0	-1
210° (7π/6)	-0,45	-0,79
225° (5π/4)	-0,62	-0,62
240° (4π/3)	-0,79	-0,45
270° (3π/2)	-1	0
300° (5π/3)	-0,79	0,45
315° (7π/4)	-0,62	0,62
330° (11π/6)	-0,45	0,79
360° (2π)	0	1

Tabela 2b - Medidas de 'h' e 'd' observadas na roda gigante com disco de 12 cm de raio



RODA GIGANTE R= 13

	ALTURA	COMPRIMENTO
$\pi/6$ 30° →	0,46	0,86
$\pi/4$ 45° →	0,65	0,69
$\pi/3$ 60° →	0,84	0,53
$\pi/2$ 90° →	1	0
$2\pi/3$ 120° →	0,84	-0,53
$3\pi/4$ 135° →	0,65	-0,69
$5\pi/6$ 150° →	0,46	-0,86
π 180° →	0	-1
$7\pi/6$ 210° →	-0,46	-0,86
$5\pi/4$ 225° →	-0,65	-0,69
$4\pi/3$ 240° →	-0,84	-0,53
$3\pi/2$ 270° →	-1	0
$5\pi/3$ 300° →	-0,84	0,53
$7\pi/4$ 315° →	-0,65	0,69
$11\pi/6$ 330° →	-0,46	0,86
2π 360° →	0	1

Tabela 2c - Medidas de 'h' e 'd' observadas na roda gigante com disco de 13 cm de raio

15 cm

Roda Gigante

	h	d
0° ou 2π	0	1
30° ou $\frac{\pi}{6}$	0,53	0,9
45° ou $\frac{\pi}{4}$	0,76	0,73
60° ou $\frac{\pi}{3}$	0,9	0,46
90° ou $\frac{\pi}{2}$	1	0
120° ou $\frac{2\pi}{3}$	0,9	-0,46
135° ou $\frac{3\pi}{4}$	0,76	-0,73
150° ou $\frac{5\pi}{6}$	0,53	-0,9
180° ou π	0	-1
210° ou $\frac{7\pi}{6}$	-0,53	-0,9
225° ou $\frac{5\pi}{4}$	-0,76	-0,73
240° ou $\frac{4\pi}{3}$	-0,9	-0,46
270° ou $\frac{3\pi}{2}$	-1	0
300° ou $\frac{5\pi}{3}$	-0,9	0,46
315° ou $\frac{7\pi}{4}$	-0,76	0,73
330° ou $\frac{11\pi}{6}$	-0,53	0,9
360° ou 2π	0	1

Tabela 2d - Medidas de 'h' e 'd' observadas na roda gigante com disco de 15 cm de raio

Após as duplas de alunos terem construído as quatro tabelas acima, e de ter observado a eles que o esperado era terem encontrado os mesmos valores para 'h' e 'd', em ângulos iguais, para qualquer que fosse o raio da roda gigante trabalhada, o que não ocorreu, entreguei a cada dupla duas folhas de papel milimetrado. Orientei-os, então, a construir os gráficos da altura ‘h’ e da distância ‘d’ em função do ângulo. As Fotos 18a e 18b mostram alunos trabalhando na atividade.

Foto 18a e Foto 18b – Alunos construindo os gráficos da altura 'h' e da distância 'd' em função dos ângulos de observação

As Figuras 19a, 19b, 20a, 20b, 21a, 21b, 22a e 22b mostram os gráficos construídos pelas quatro duplas de alunos.

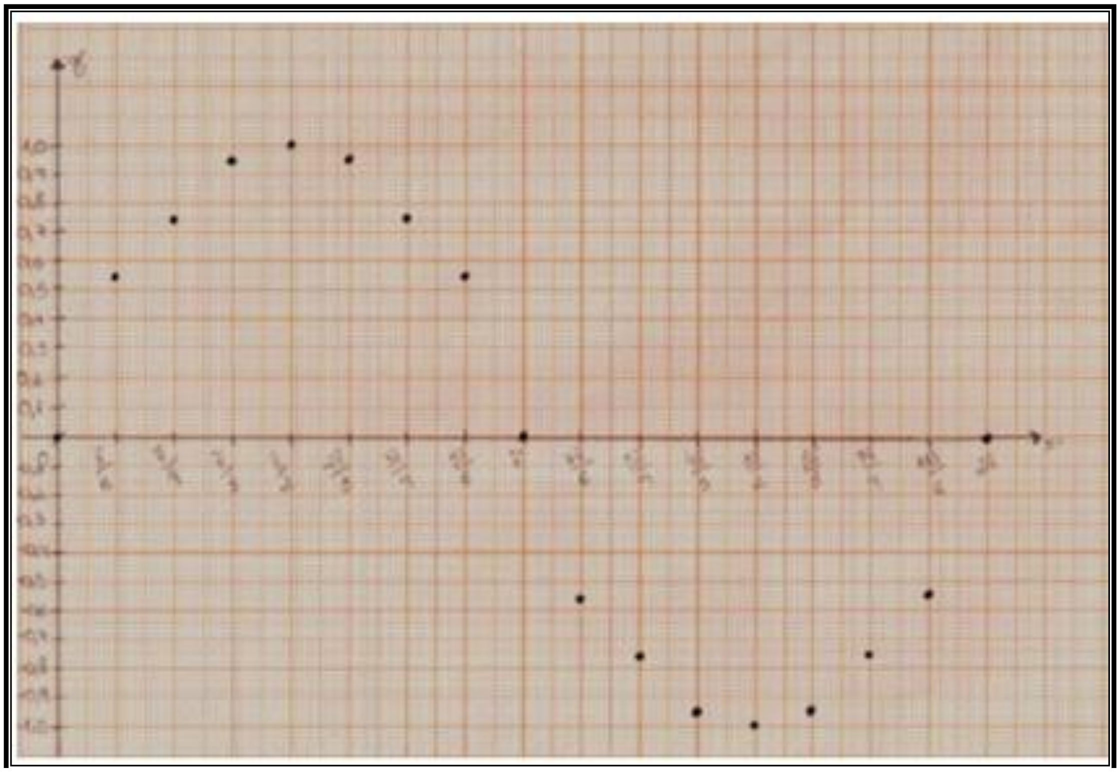


Figura 19a – Gráfico da altura 'h' em função do ângulo de observação, para a roda gigante com raio de 10 cm

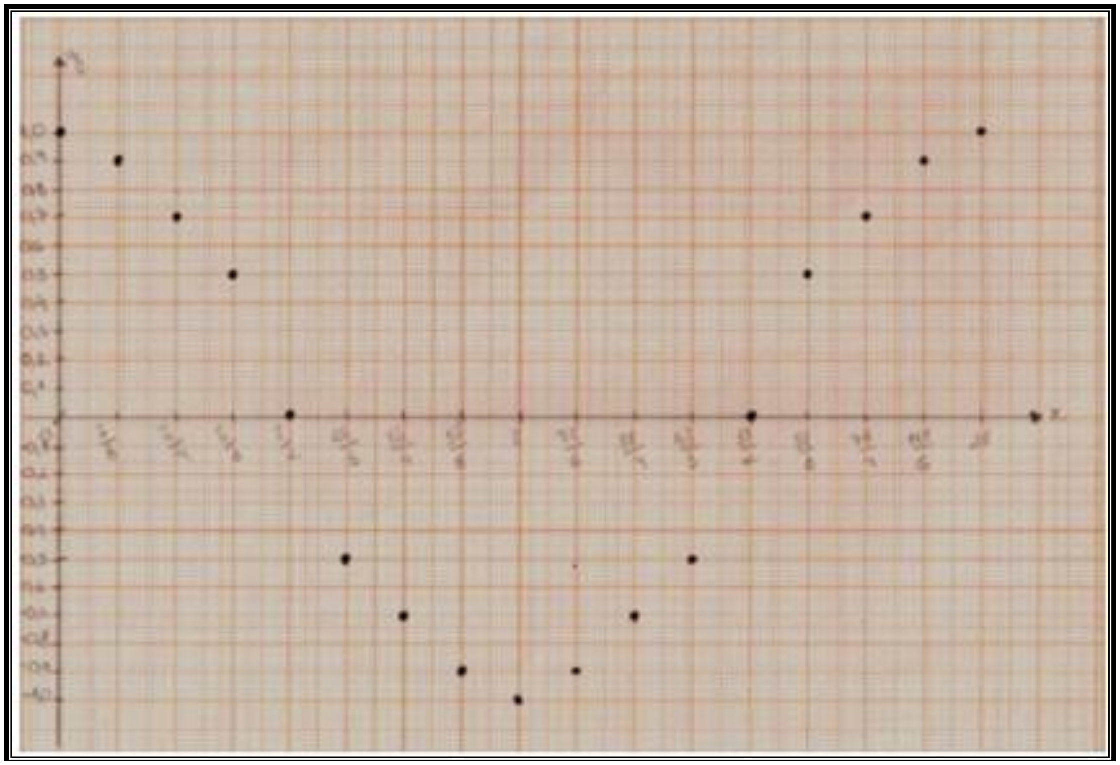


Figura 19b – Gráfico da distância 'd' em função do ângulo de observação, para a roda gigante com raio de 10 cm

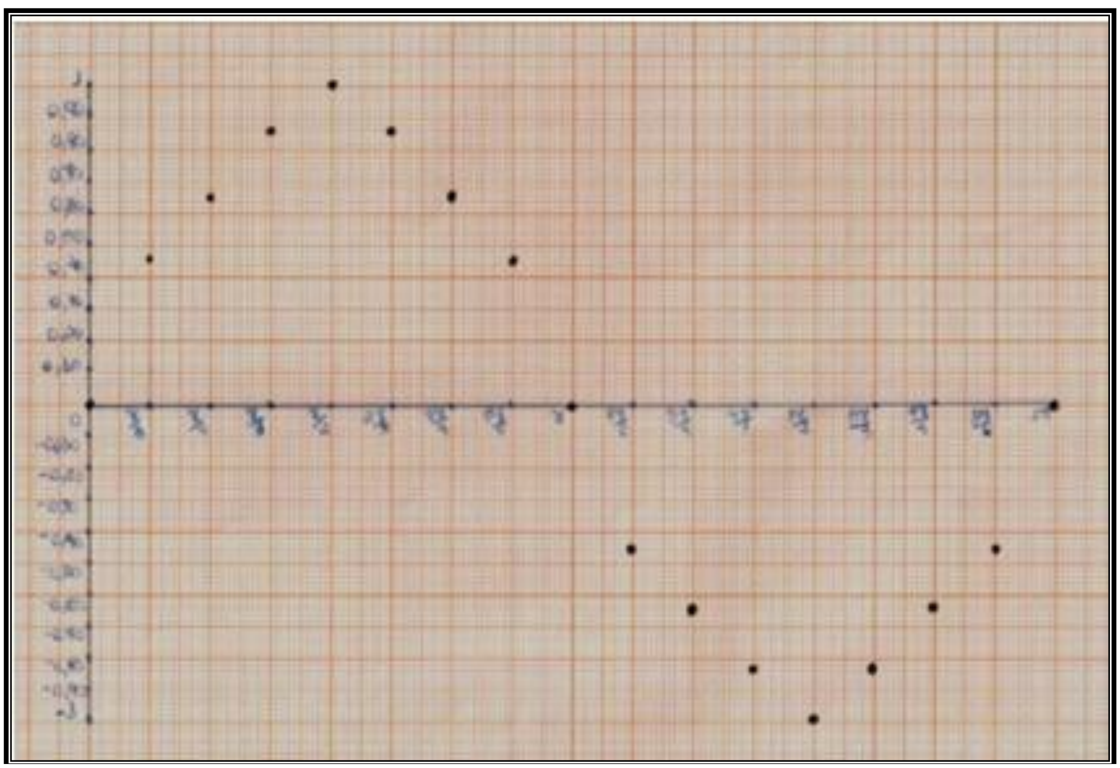


Figura 20a – Gráfico da altura 'h' em função do ângulo de observação, para a roda gigante com raio de 12 cm

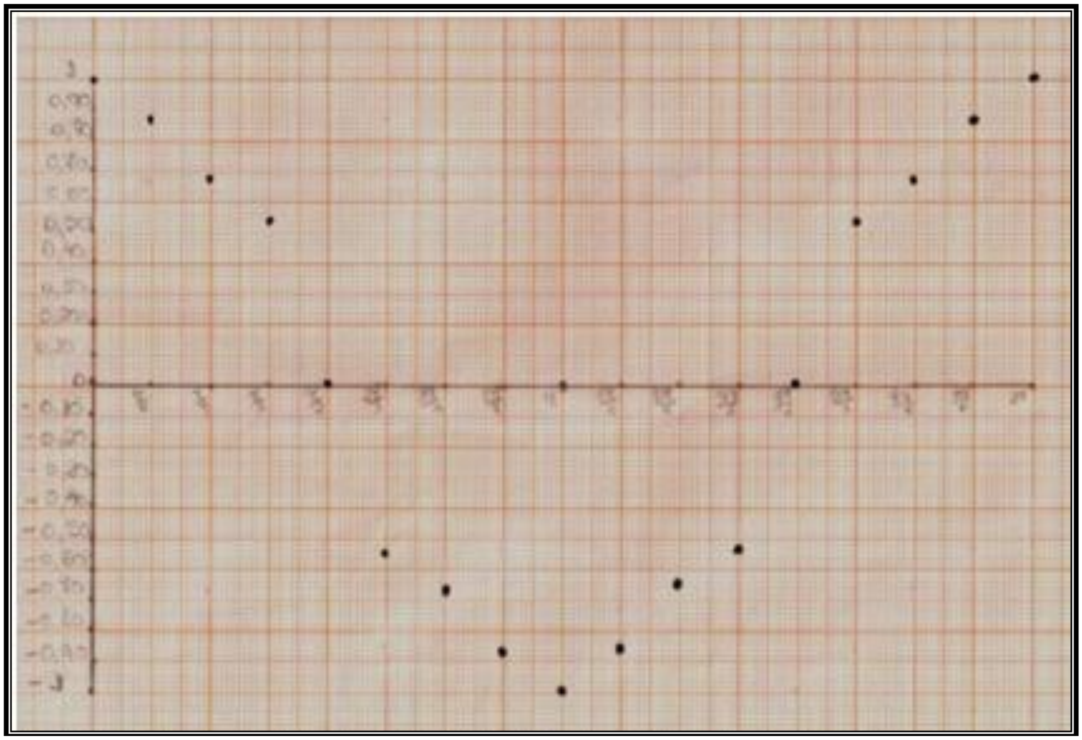


Figura 20b – Gráfico da distância 'd' em função do ângulo de observação, para a roda gigante com raio de 12 cm

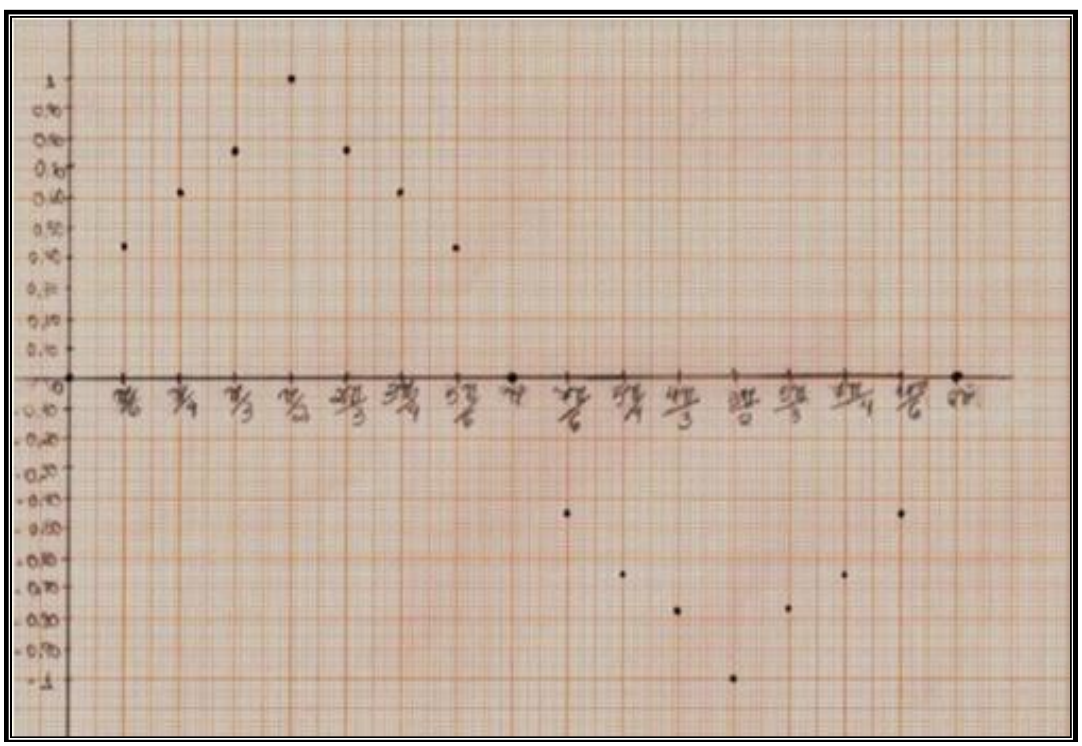


Figura 21a – Gráfico da altura 'h' em função do ângulo de observação, para a roda gigante com raio de 13 cm

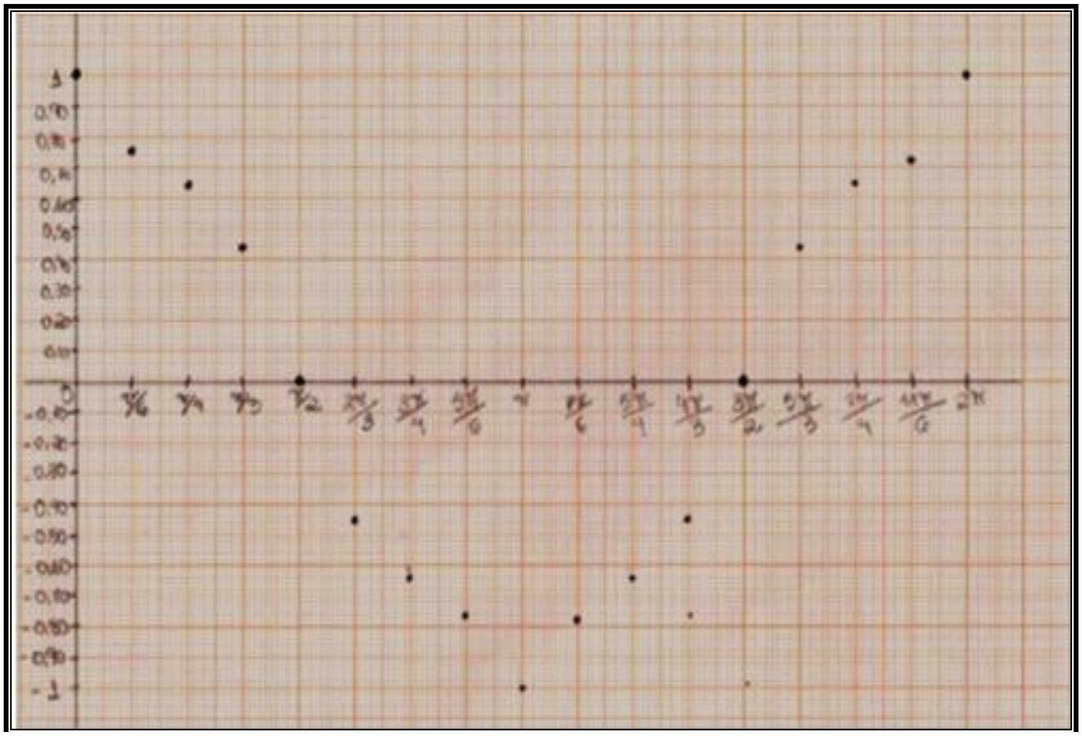


Figura 21b – Gráfico da distância 'd' em função do ângulo de observação, para a roda gigante com raio de 13 cm

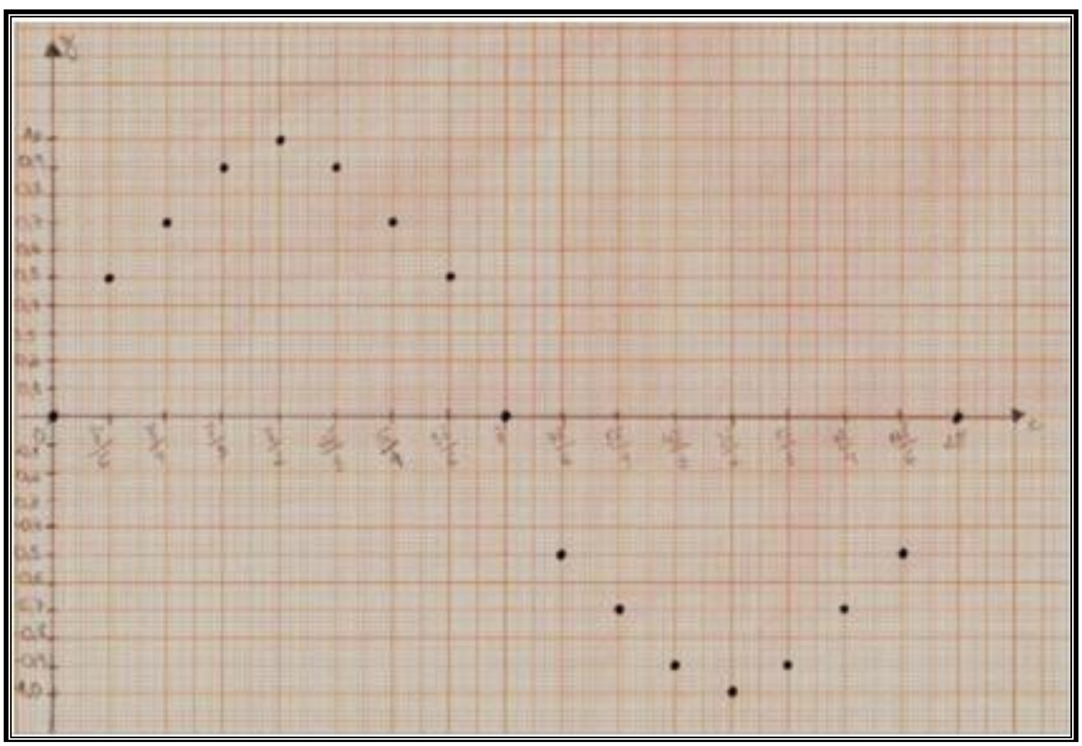


Figura 22a – Gráfico da altura 'h' em função do ângulo de observação, para a roda gigante com raio de 15 cm

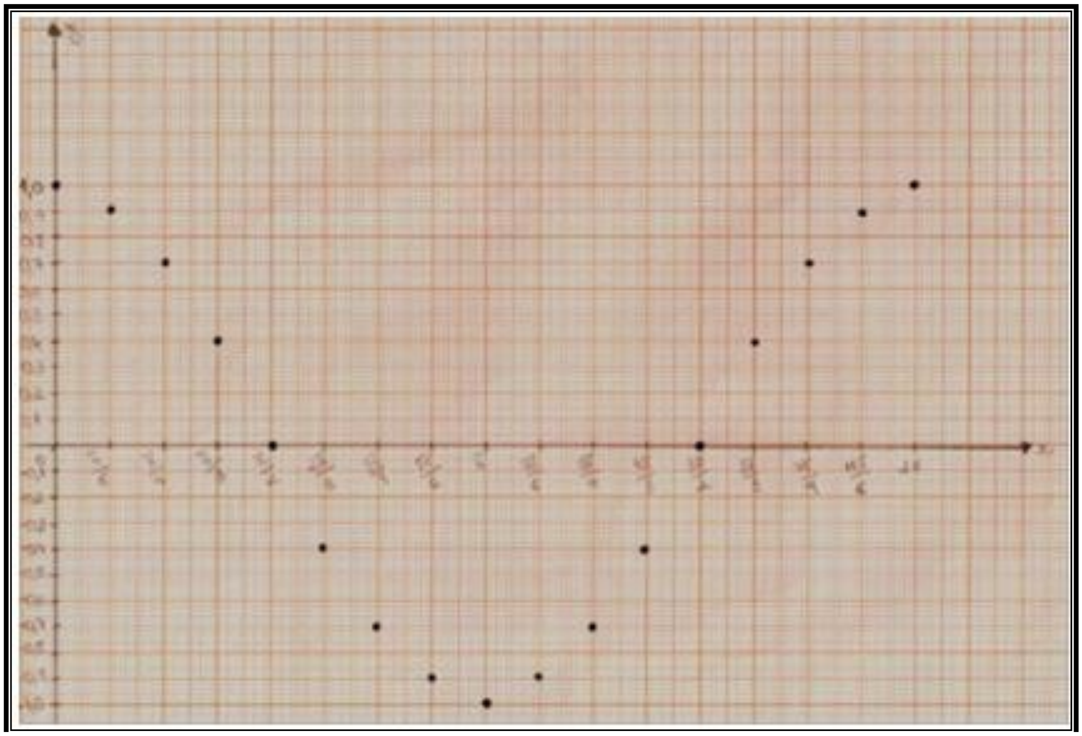
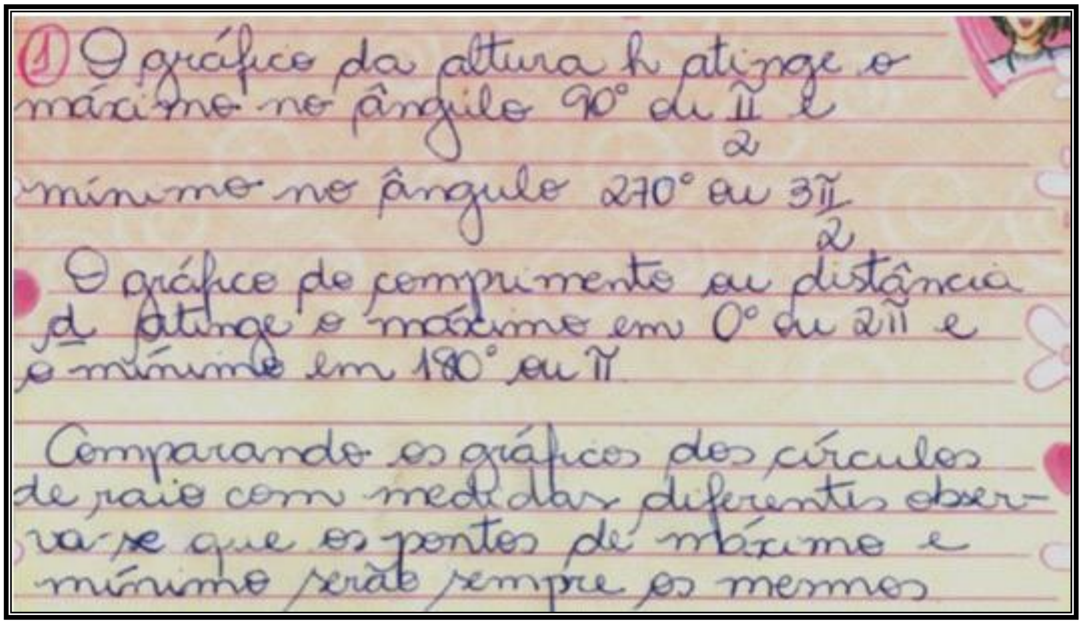


Figura 22b – Gráfico da distância 'd' em função do ângulo de observação, para a roda gigante com raio de 15 cm

De posse das tabelas e gráficos, os alunos responderam a um novo questionário. Entretanto, como as respostas das duplas foram muito semelhantes, as respostas para cada uma das questões foi compilada em uma única resposta padrão.

A primeira questão *“Em cada gráfico, para quais valores de ângulos h e d atingem pontos de máximo e de mínimo? Comparem os valores de h e d desses pontos com o raio do círculo? O que vocês observam?”* teve como resposta padrão:



(1) O gráfico da altura h atinge o máximo no ângulo 90° ou $\frac{\pi}{2}$ e mínimo no ângulo 270° ou $\frac{3\pi}{2}$

O gráfico do comprimento ou distância d atinge o máximo em 0° ou 2π e o mínimo em 180° ou π

Comparando os gráficos dos círculos de raio com medidas diferentes obser-va-se que os pontos de máximo e mínimo serão sempre os mesmos

Figura 23 – Conclusão padrão do grupo de alunos sobre os pontos de máximo e mínimo dos gráficos construídos

Transcrição da Figura 23 (Conclusão da Questão 1): O gráfico da altura h atinge o máximo no ângulo 90º ou π/2 e mínimo no ângulo 270º ou 3π/2.

O gráfico do comprimento ou distância d atinge o máximo em 0º ou 2π e o mínimo em 180º ou π.

Comparando os gráficos dos círculos de raio com medidas diferentes observa-se que os pontos de máximo e mínimo serão sempre os mesmos.

Observe que, nos gráficos de 'h' e 'd' em função dos ângulos de observação, quanto aos seus pontos de máximos e de mínimos, as quatro duplas não discordaram. Entretanto, os gráficos representados pelas Figuras 20a, 20b, 21a e 21b não apresentam períodos de crescimento e decrescimento "suaves" quanto esperados, em relação àqueles apresentados nos gráficos das outras duas duplas (Figuras 19a, 19b, 22a e 22b).

A segunda questão *“Há algum valor de ângulo para o qual, a partir dele, os pontos marcados em ambos os gráficos se repetem? Se sim, e se continuarmos dando voltas indefinidamente na roda gigante, o mesmo continuaria ocorrendo? Que nome vocês dariam a funções que possuem esta característica?”*. A resposta padrão das duplas de alunos foi:

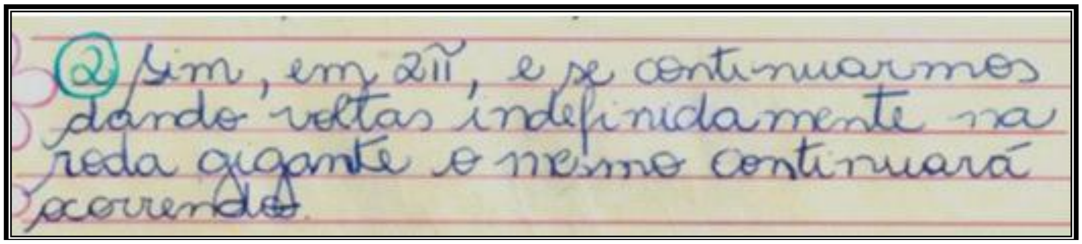

2 Sim, em 2π, e se continuarmos dando voltas indefinidamente na roda gigante o mesmo continuará ocorrendo

Figura 24 – Conclusão do grupo de alunos sobre a periodicidade dos gráficos traçados

Transcrição da Figura 24 (Conclusão da Questão 2): Sim, em 2π, e se continuarmos dando voltas indefinidamente na roda gigante o mesmo continuará ocorrendo.

Note que o grupo de alunos não sugeriu nenhum nome para as funções cujos gráficos se repetem indefinidamente, como havia sido solicitado na questão proposta.

A terceira questão *"A partir de um ângulo qualquer, definam o menor intervalo angular a partir do qual, os pontos de cada um dos gráficos começam a se repetir. Qual a distância, em graus e em radianos, entre o maior e o menor ângulo que definem esse intervalo angular em cada um dos gráficos? Se o valor do menor ângulo do intervalo angular fosse outro, o mesmo continuaria ocorrendo? Comparem suas respostas às duas últimas questões com as dos outros grupos. O que vocês observam? Que nome dariam a esta menor distância que vocês determinaram para o intervalo angular?"*. A resposta padrão a essas questões foi:

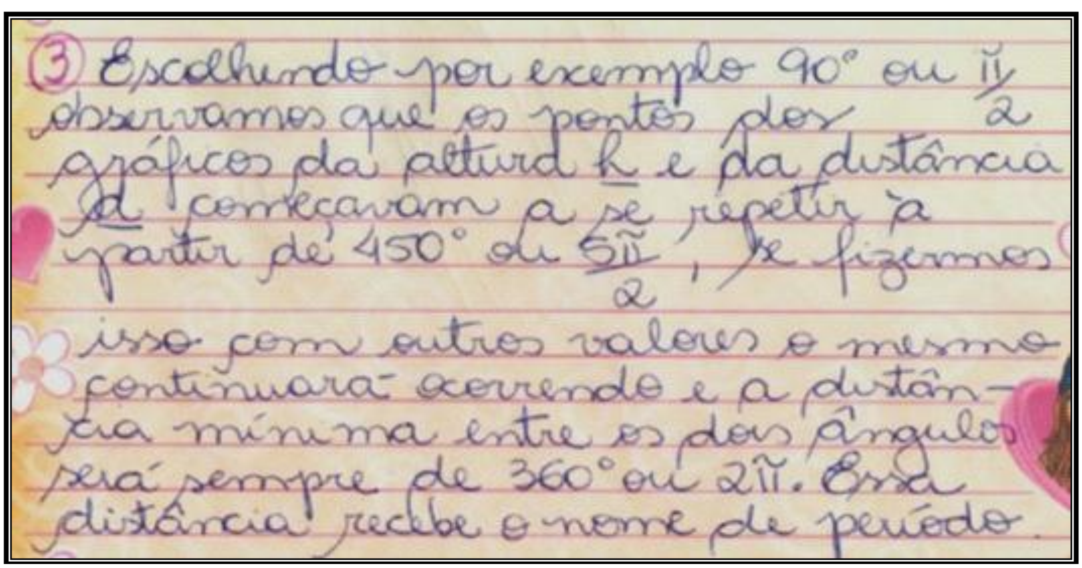

3 Escolhendo por exemplo 90° ou $\frac{\pi}{2}$ observamos que os pontos dos gráficos da altura h e da distância d começavam a se repetir à partir de 450° ou $\frac{5\pi}{2}$, se fizermos isso com outros valores o mesmo continuará ocorrendo e a distância mínima entre os dois ângulos será sempre de 360° ou 2π. Essa distância recebe o nome de período.

Figura 25 – Conclusão padrão do grupo de alunos sobre o período das funções estudadas

Transcrição da Figura 25 (Conclusão da Questão 3): Escolhendo, por exemplo, 90º ou π/2 observamos que os pontos dos gráficos da altura h e da distância d começavam a se repetir à partir de 450º ou 5π/2. Se fizermos isso com outros valores o mesmo continuará ocorrendo e a distância será sempre de 360º ou 2π. Essa distância recebe o nome de período.

A partir desse momento, com base nos gráficos apresentados e nas respostas padrões, defini formalmente as funções seno e cosseno com os alunos, e fiz as respectivas correspondências com os gráficos da altura ‘h’ e da distância ‘d’ em função dos ângulos de observação. Defini, ainda, suas características de periodicidade, tendo período de 2π, e atentei para seus pontos de máximos e mínimos.

No encontro seguinte, os alunos deram prosseguimento à atividade respondendo à quarta questão. Ou seja, *“Partindo dos dados de ângulos e sombras do bastão coletados em nossa atividade desenvolvida na quadra de esportes da escola, construam uma nova tabela onde na primeira coluna estejam registrados os horários em que as medições foram feitas; na segunda os ângulos observados; na terceira o comprimento da sombra do bastão em cada horário; e na quarta coluna o resultado da divisão entre o valor do comprimento do bastão (h), 100 cm, e o comprimento da sobra (d), em cm, por ele determinada, no ângulo em questão.”*. Abaixo se encontra a tabela padrão produzida pelos alunos:

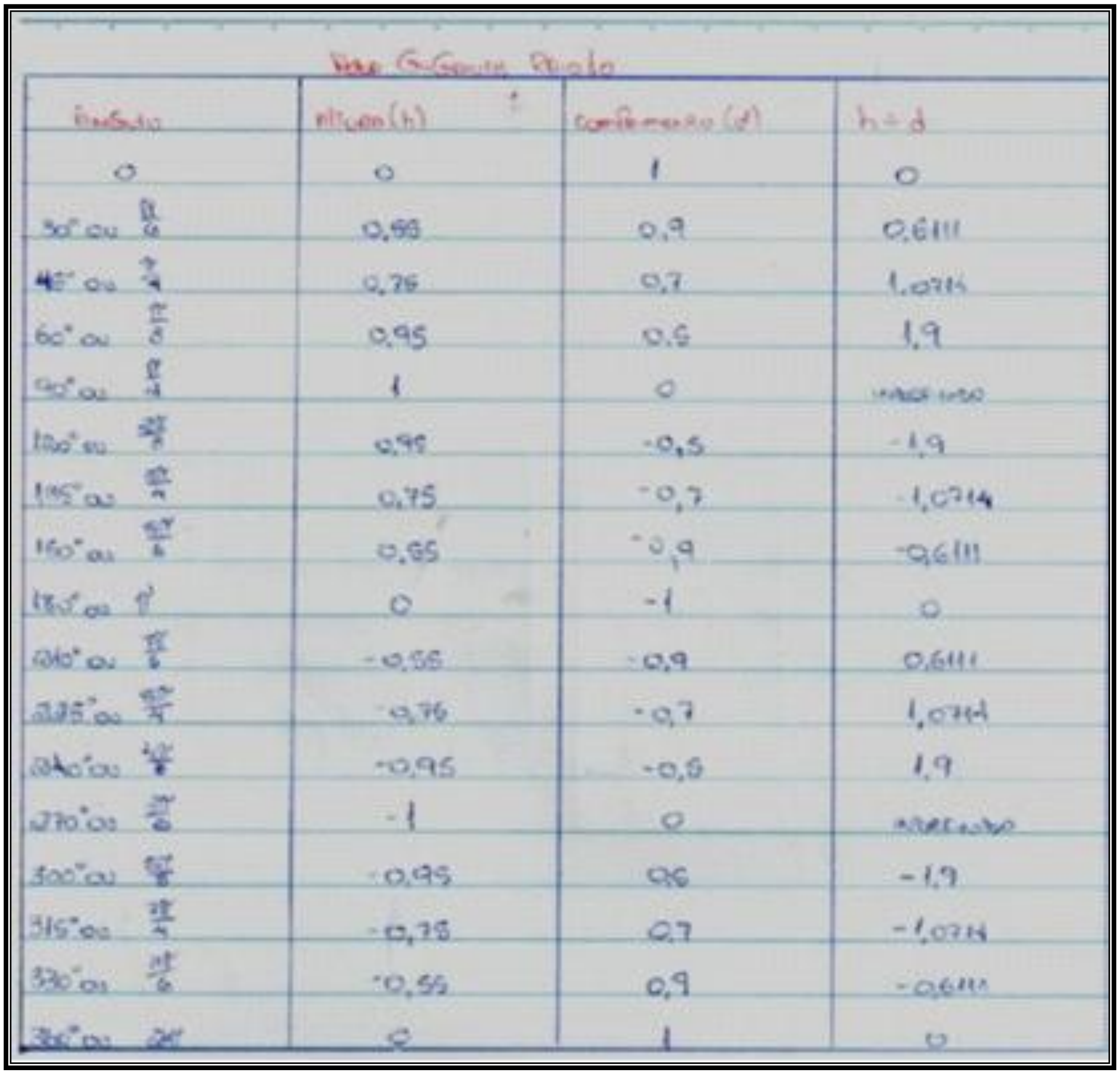
Tabela 3 h = 100 cm

	Ângulo	Comprimento	altura / comprimento
10h00	45,8°	97 cm	1,0309
10h30	50,8°	81,5 cm	1,2270
11h00	55°	70 cm	1,4286
11h30	57,7°	63 cm	1,5873
12h00	59,4°	54 cm	1,8519
12h30	59°	60 cm	1,6667
13h00	57°	64,5 cm	1,5504
13h30	53,8°	73 cm	1,3699
14h00	50,3°	83 cm	1,2048

Tabela 3 – Tabela construída pelos alunos com os valores do quociente

A quinta questão solicitava de cada dupla que retornasse à Tabela 2 (a, b, c ou d, conforme o caso) e registrasse, em uma quarta coluna, o resultado da divisão entre os valores da altura (h), da segunda coluna, e a distância horizontal (d), da terceira coluna. Além disso, cada dupla deveria comparar os resultados obtidos nesta quarta coluna com aqueles registrados na quarta coluna da Tabela 3. Os alunos foram questionados sobre o que observaram nesta comparação.

As tabelas 2 (a, b, c e d), com suas quartas colunas acrescidas, encontram-se abaixo representadas.

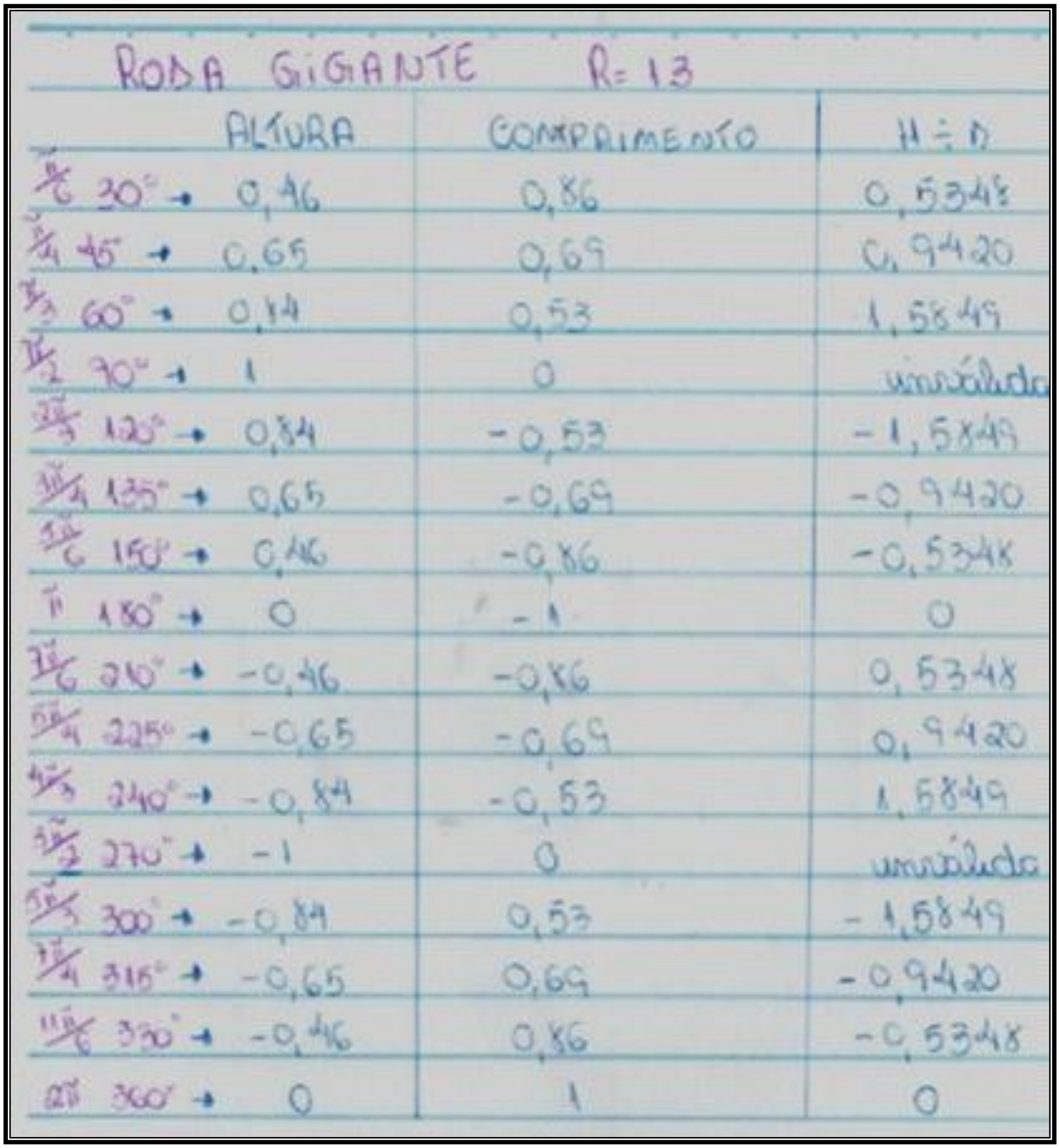


Ângulo	Altura (h)	Comprimento (d)	h ÷ d
0	0	1	0
30° ou [illegible]	0,55	0,9	0,6111
45° ou [illegible]	0,75	0,7	1,0714
60° ou [illegible]	0,95	0,5	1,9
90° ou [illegible]	1	0	impossível
120° ou [illegible]	0,95	-0,5	-1,9
135° ou [illegible]	0,75	-0,7	-1,0714
150° ou [illegible]	0,55	-0,9	-0,6111
180° ou π	0	-1	0
210° ou [illegible]	-0,55	-0,9	0,6111
225° ou [illegible]	-0,75	-0,7	1,0714
240° ou [illegible]	-0,95	-0,5	1,9
270° ou [illegible]	-1	0	impossível
300° ou [illegible]	-0,95	0,5	-1,9
315° ou [illegible]	-0,75	0,7	-1,0714
330° ou [illegible]	-0,55	0,9	-0,6111
360° ou 2π	0	1	0

Tabela 2a - Acrescida da coluna "h/d", da roda gigante com disco de 10 cm de raio

Roda Gigante de Raio 12			
Ângulo	Altura	Comprimento	h ÷ d
0° (2π)	0	1	0
30° (π/6)	0,45	0,79	0,5696
45° (π/4)	0,62	0,62	1
60° (π/3)	0,79	0,45	1,7555
90° (π/2)	1	0	indefinido
120° (2π/3)	0,79	-0,45	-1,7555
135° (3π/4)	0,62	-0,62	-1
150° (5π/6)	0,45	-0,79	-0,5696
180° (π)	0	-1	0
210° (7π/6)	-0,45	-0,79	0,5696
225° (5π/4)	-0,62	-0,62	1
240° (4π/3)	-0,79	-0,45	1,7555
270° (3π/2)	-1	0	indefinido
300° (5π/3)	-0,79	0,45	-1,7555
315° (7π/4)	-0,62	0,62	-1
330° (11π/6)	-0,45	0,79	-0,5696
360° (2π)	0	1	0

Tabela 2b - Acrescida da coluna "h/d", da roda gigante com disco de 12 cm de raio



RODA GIGANTE R= 13

	ALTURA	COMPRIMENTO	H ÷ D
$\pi/6$ 30° →	0,46	0,86	0,5348
$\pi/4$ 45° →	0,65	0,69	0,9420
$\pi/3$ 60° →	0,84	0,53	1,5849
$\pi/2$ 90° →	1	0	invalido
$2\pi/3$ 120° →	0,84	-0,53	-1,5849
$3\pi/4$ 135° →	0,65	-0,69	-0,9420
$5\pi/6$ 150° →	0,46	-0,86	-0,5348
π 180° →	0	-1	0
$7\pi/6$ 210° →	-0,46	-0,86	0,5348
$5\pi/4$ 225° →	-0,65	-0,69	0,9420
$4\pi/3$ 240° →	-0,84	-0,53	1,5849
$3\pi/2$ 270° →	-1	0	invalido
$5\pi/3$ 300° →	-0,84	0,53	-1,5849
$7\pi/4$ 315° →	-0,65	0,69	-0,9420
$11\pi/6$ 330° →	-0,46	0,86	-0,5348
2π 360° →	0	1	0

Tabela 2c - Acrescida da coluna "h/d", da roda gigante com disco de 13 cm de raio

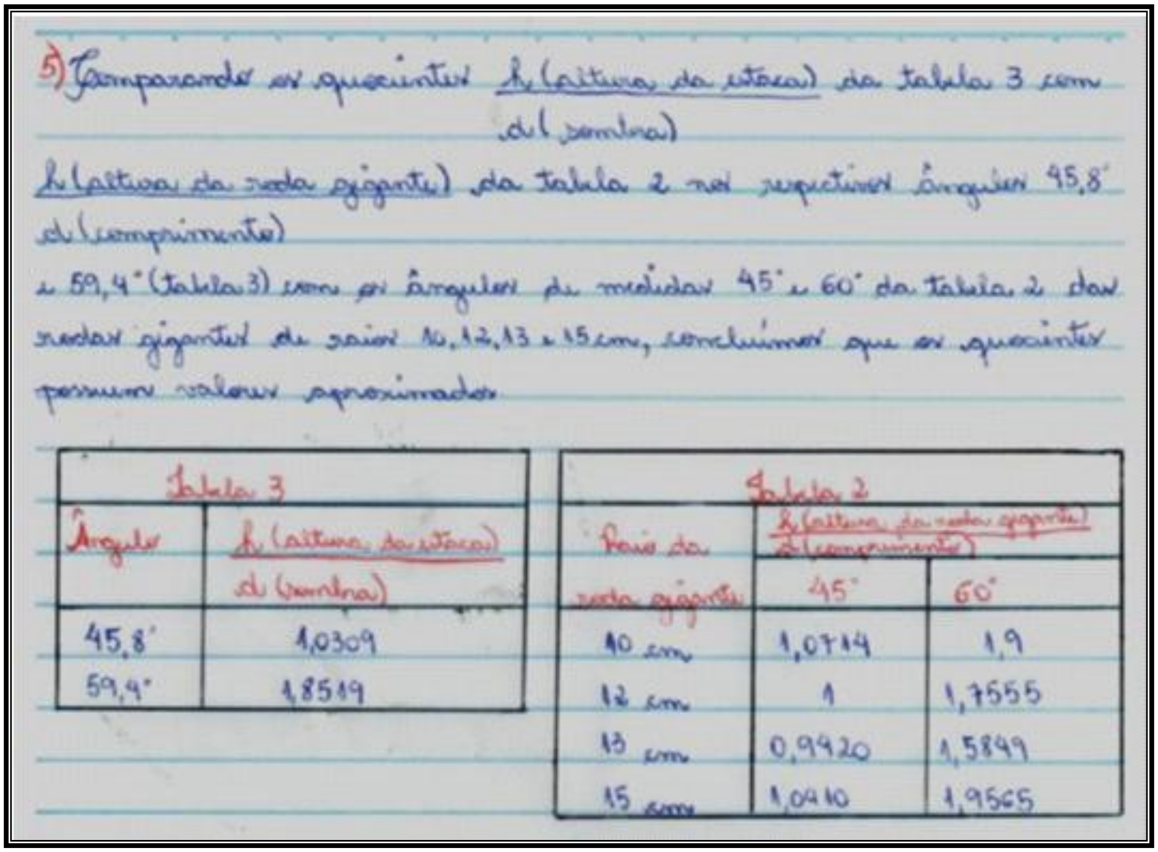
15 cm

Roda Gigante

	h	d	h/d
0° ou 2π	0	1	0
30° ou π/6	0,53	0,9	0,5888
45° ou π/4	0,76	0,73	1,0410
60° ou π/3	0,9	0,46	1,9565
90° ou π/2	1	0	indefinido
120° ou 2π/3	0,9	-0,46	-1,9565
135° ou 3π/4	0,76	-0,73	-1,0410
150° ou 5π/6	0,53	-0,9	-0,5888
180° ou π	0	-1	0
210° ou 7π/6	-0,53	-0,9	0,5888
225° ou 5π/4	-0,76	-0,73	1,0410
240° ou 4π/3	-0,9	-0,46	1,9565
270° ou 3π/2	-1	0	indefinido
300° ou 5π/3	-0,9	0,46	-1,9565
315° ou 7π/4	-0,76	0,73	-1,0410
330° ou 11π/6	-0,53	0,9	-0,5888
360° ou 2π	0	1	0

Tabela 2d - Acrescida da coluna "h/d", da roda gigante com disco de 15 cm de raio

Comparando os valores encontrados nas quartas colunas das Tabelas 2 (a, b, c e d) e 3, as duplas de alunos chegaram a conclusão que está exposta abaixo na figura 26.



5) Comparando os quocientes h (altura da estaca) / d (sombra) da tabela 3 com h (altura da roda gigante) / d (comprimento) da tabela 2 nos respectivos ângulos 45,8° e 59,4° (tabela 3) com os ângulos de medidas 45° e 60° da tabela 2 das rodas gigantes de raios 10, 12, 13 e 15 cm, concluímos que os quocientes possuem valores aproximados.

Tabela 3	
Ângulo	h (altura da estaca) / d (sombra)
45,8°	1,0309
59,4°	1,8519

Tabela 2		
Raio da roda gigante	h (altura da roda gigante) / d (comprimento)	
	45°	60°
10 cm	1,0714	1,9
12 cm	1	1,7555
13 cm	0,9920	1,5849
15 cm	1,0410	1,9565

Figura 26 – Comparação realizada pelos alunos, com relação ao questionado na 5ª questão

Transcrição da Figura 26 (Conclusão da Questão 5): Comparando os quocientes h(altura da estaca) / d(sombra) da Tabela 3 com h(altura da roda gigante) / d(comprimento) da Tabela 2 nos respectivos ângulos 45,8º e 59,4º (Tabela 3) com os ângulos de medidas 45º e 60º da Tabela 2 das rodas gigantes de raios 10, 12, 13 e 15 cm, concluímos que os quocientes possuem valores aproximados.

Frente ao apresentado pelos alunos da 3ª dupla (Tabela 2c), questionei-os a respeito da comparação feita com os ângulos de 60° e 59,4°. A Tabela 2c, para o ângulo de 60°, apresenta o valor de 1,5849 enquanto a Tabela 3, para o ângulo de 59,4°, registra o valor de 1,8519, aparentemente, valores muito distantes um do outro. Os alunos argumentaram que a roda gigante de 13 cm de raio não apresentou medições precisas, como ocorreu nas demais rodas gigantes. Seu centro estava ligeiramente deslocado e o disco não estava perfeitamente construído.

No laboratório de informática da escola, cada dupla foi orientada a construir um arquivo no MS-Excel, contendo uma planilha de cinco colunas. As 1ª e 2ª colunas deveriam registrar, em graus e radianos, respectivamente, os ângulos de 0º / 0 rad; 30° / π/6 rad; 45º / π/4 rad; 60° / π/3 rad; 90° / π/2 rad; 120° / 2π/3 rad; 135º / 3π/4 rad;; 150° / 5π/6 rad; 180° / π rad; 210° / 7π/6 rad; 225° / 5π/4 rad; 240° / 4π/3 rad; 270° / 3π/2 rad; 300° / 5π/3 rad; 315° / 7π/4 rad; 330° / 7π/6 rad; e, finalmente, 360° / 2π rad. Nas 3ª, 4ª e 5ª colunas, os alunos deveriam registrar os valores dos senos, cossenos e tangentes daqueles ângulos. Isso feito, uma 6ª coluna deveria ser, então, criada e nela registrados os valores dos quocientes "h/d" das Tabelas 2 (a, b, c e d). Isto realizado, solicitei que comparassem os valores de uma mesma linha, das colunas 5 e 6 da planilha. Finalizando a 3ª atividade didática, as duplas de alunos construíram, com os valores registrados na 2ª e 6ª colunas da planilha do EXCEL, o gráfico discreto da função tangente, e responderam à sexta questão do questionário: *“Vocês observam as características de periodicidade e de pontos de máximo e de mínimo das funções seno e cosseno estudadas anteriormente? Se sim, qual o período desse novo gráfico? O que acontece com o gráfico para os valores de ângulos de π/2, 3π/2, 3π/2 + k π, para k ϵ Z?"*.

As Figuras 27, 28, 29 e 30 mostram os gráficos discretos da função tangente, construídos pelas quatro duplas de alunos.

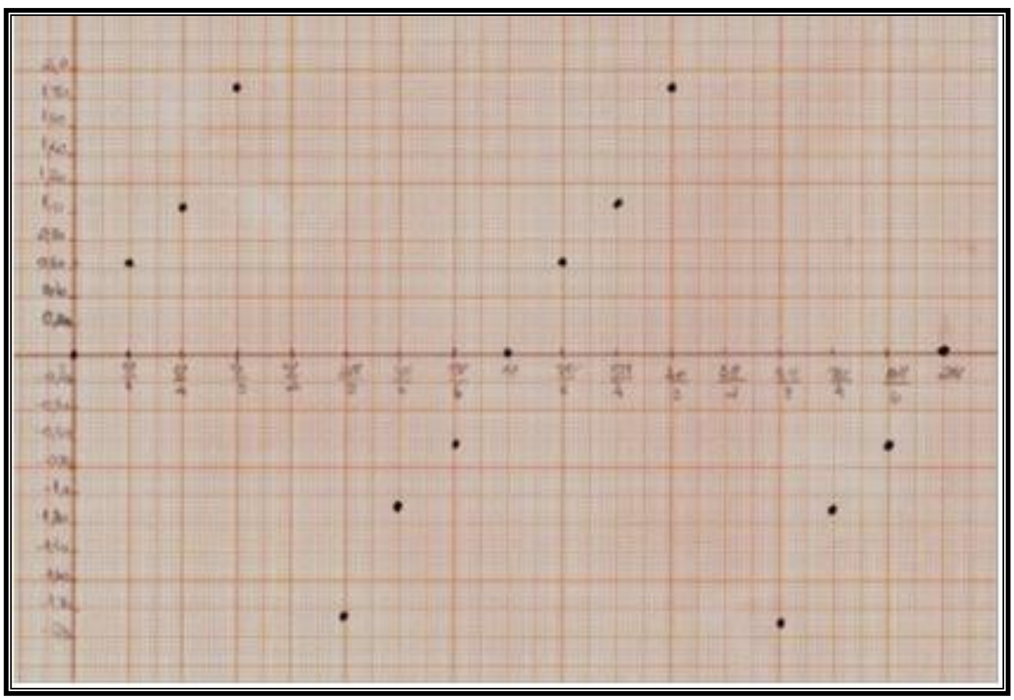


Figura 27 – Gráfico discreto da função tangente, da dupla da roda gigante de 10 cm de raio

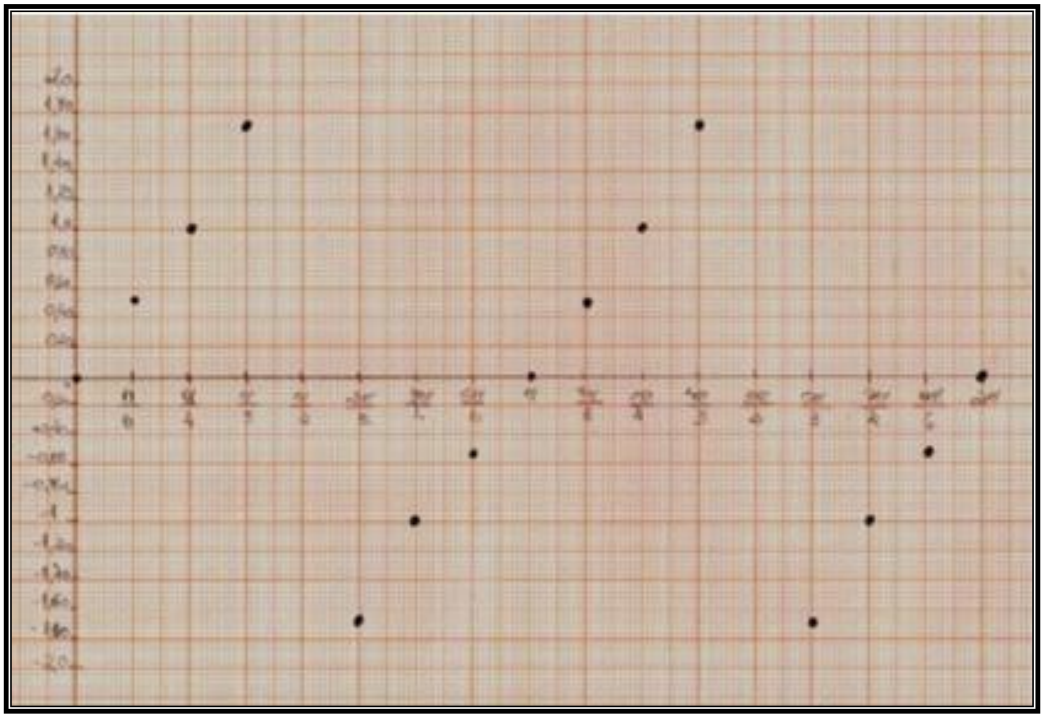


Figura 28 – Gráfico discreto da função tangente, da dupla da roda gigante de 12 cm de raio

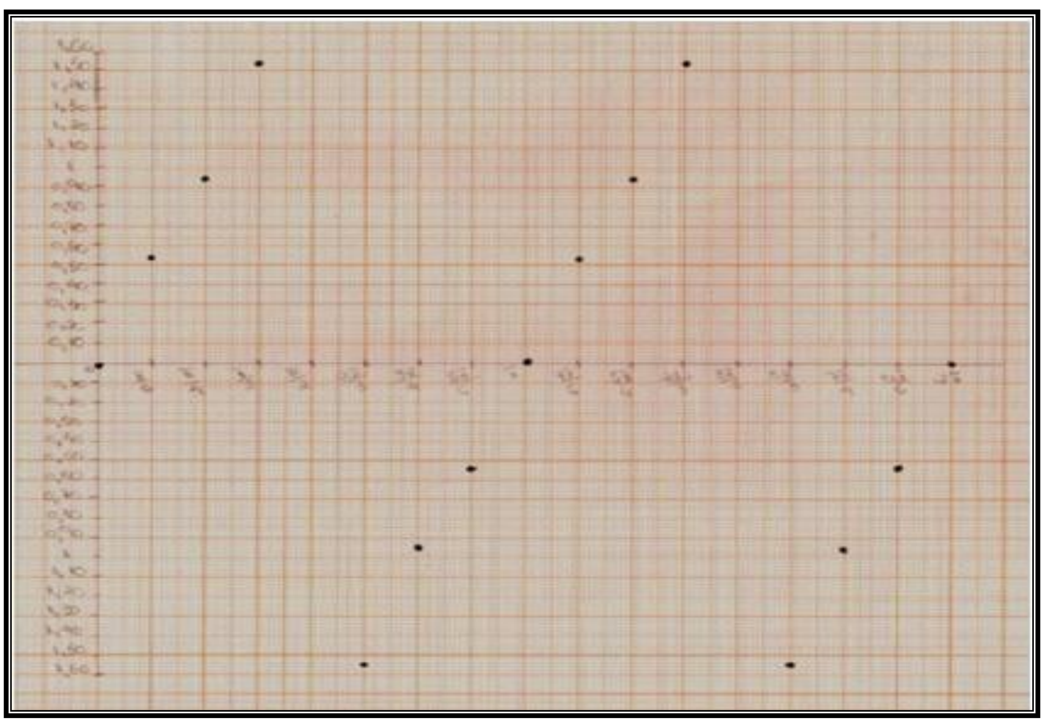


Figura 29 – Gráfico discreto da função tangente, da dupla da roda gigante de 13 cm de raio

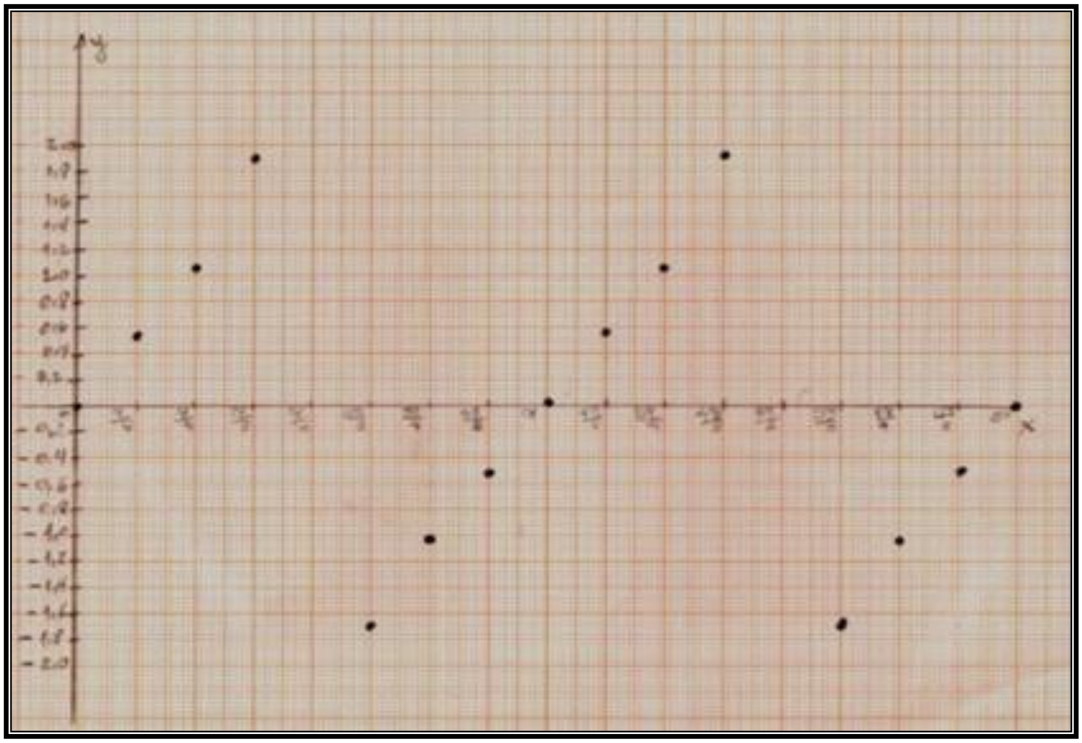
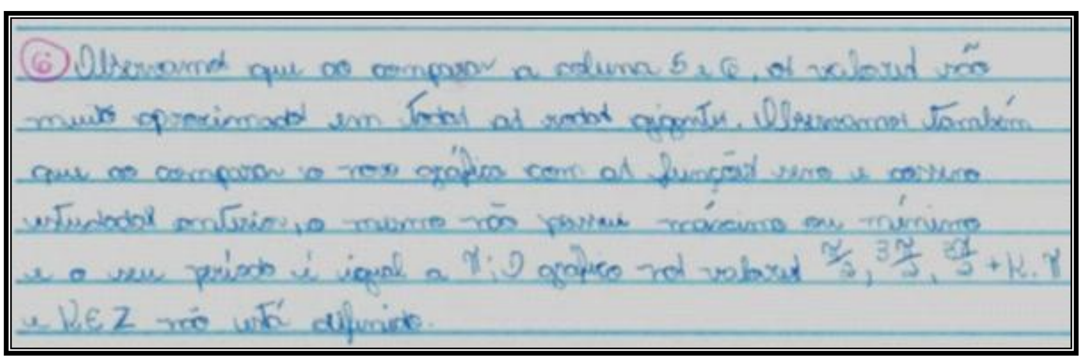


Figura 30 – Gráfico discreto da função tangente, da dupla da roda gigante de 15 cm de raio

A resposta padrão dada pelos alunos à sexta questão do questionário foi:



6 Observamos que ao comparar a coluna 5 e 6, os valores são muito aproximados em todas as rodas gigantes. Observamos também que ao comparar o novo gráfico com as funções seno e cosseno estudadas anteriormente, o mesmo não possui máximo ou mínimo e o seu período é igual a π; O gráfico nos valores π/2, 3π/2, 3π/2 + k.π e k∈Z não está definido.

Figura 31 – Respostas padrão dos alunos à sexta questão do questionário

Transcrição da Figura 31 (Conclusão da Questão 6): Observamos que ao comparar a coluna 5 e 6, os valores são muito aproximados em todas as rodas gigantes. Observamos também que ao comparar o novo gráfico com as funções seno e cosseno estudadas anteriormente, o mesmo não possui máximo ou mínimo e o seu período é igual a π; o gráfico nos valores π/2, 3π/2, 3π/2 +kπ e kЄZ não está definido.

Com a formalização do estudo da função tangente, concluí a terceira e última atividade didática da pesquisa.

CAPÍTULO IV – CONCLUSÃO

O objetivo central desta pesquisa foi a *"investigação das possíveis contribuições que uma metodologia baseada na Técnica de Resolução de Problemas pode ter para com o processo de ensino e aprendizagem de funções trigonométricas, bem como para com o desenvolvimento do raciocínio matemático de alunos da 2ª série do Ensino Médio"*. Para determinar as possíveis contribuições acerca desta metodologia utilizada foram formuladas três questões.

A primeira questão se refere à passagem/generalização do conceito de razão trigonométrica (seno, cosseno e tangente), estudado, primeiramente, no triângulo retângulo e, posteriormente, no ciclo trigonométrico.

A primeira atividade (Medindo distancias inacessíveis) mostrou-me que, de maneira geral, o grupo de alunos com o qual trabalhei não se recordava do conceito de *"razão trigonométrica"*, o que havia sido estudado no 9º ano do Ensino Fundamental, e, posteriormente, retomado na 1ª série do Ensino Médio. Do grupo de 8 alunos, apenas um se arriscou a dizer que era possível se utilizar desse conceito para resolver a questão proposta na atividade. Percebi que o conceito, trabalhado de maneira tradicional nas duas ocasiões, não causou o efeito esperado na prática, após um ou dois anos. Ou seja, o grupo de alunos não conseguiu buscar uma solução matemática para resolver um problema que já havíamos trabalhado em sala de aula, nos anos anteriores. Digamos que esses alunos sabiam os conceitos matemáticos de seno, cosseno e tangente de um ângulo. Entretanto, esse conhecimento estava restrito apenas à resolução de exercícios, chamado por Polya de problemas rotineiros.

Após a realização da primeira atividade didática, observei que os alunos compreenderam melhor o conceito de "razão trigonométrica", através de sua aplicação na resolução de um problema real.

Contudo, foi durante a segunda atividade didática (Medir o comprimento da sombra de uma estaca fixada ao solo) que os alunos chegaram ao real entendimento do conceito de "razão trigonométrica". Observaram a aproximação entre as medidas das sombras do bastão em horários equidistantes das 12 horas. Ao final da atividade, ao responderem à pergunta “Se medirmos o comprimento da sombra às 14:30h, seria possível determinar a medida da sombra do bastão no solo às 9:30h?, os alunos, prontamente, responderam que sim. Disseram que bastava observar o ângulo formado entre o solo e o segmento de reta imaginário que ligava o "extremo da sombra" ao "topo do bastão", ou seja, a hipotenusa, e calcular o valor do produto do cosseno daquele ângulo pelo comprimento do segmento de reta, a hipotenusa.

Tomando como base as respostas dos alunos às indagações ao final das duas primeiras atividades didáticas, minha conclusão a respeito da primeira pergunta de pesquisa sobre a passagem/generalização do conceito de "razão trigonométrica" é de que: "sempre que possível, devemos buscar associar o conceito matemático estudado a sua aplicação prática, por meio de um problema "não rotineiro", segundo a definição de Polya. Certamente, agindo desta maneira, estaremos aumentando a possibilidade do aluno melhor compreender o conceito estudado e aplicá-lo durante a resolução de um problema de seu cotidiano".

A segunda questão de pesquisa se refere à passagem/transição do conceito de "razão trigonométrica" estudado no ciclo trigonométrico durante a 2ª atividade didática para o estudo das funções trigonométricas no plano cartesiano, visto na 3ª atividade didática.

Para isso, como relatado anteriormente, os alunos construíram rodas gigantes de papelão e realizaram medições sobre elas. Durante esse processo, observaram que as medições que seriam realizadas nos segundo, terceiro e quarto quadrantes seriam “iguais” àquela feita no primeiro quadrante, alterando-se apenas o sinal do valor encontrado. Entretanto, foi na passagem da tabela contendo os registros dessas medições para a construção do gráfico cartesiano das funções seno e cosseno, em folha de papel milimetrado, que os alunos tiveram a noção real do objetivo da atividade didática proposta. Ou seja, de compreenderem os conceitos de máximo e mínimo de funções, e de sua possível periodicidade.

Ao traçarem o gráfico da função tangente, os alunos também observaram a inexistência de máximos e mínimos, o porquê desta função não estar definida para ângulos iguais a ($\pi/2 + k.\pi$, para $k \in Z$), e de seu período ser de apenas π rad.

Minha conclusão a respeito da "passagem/transição do conceito de "razão trigonométrica" estudado no ciclo trigonométrico para o estudo das funções trigonométricas no plano cartesiano" é de que a proposta de realizar medições sobre as rodas gigantes trouxe um enfoque aplicado aos conceitos das funções trigonométricas estudadas (seno, cosseno e tangente). Os alunos, ao se envolverem com essas medições, determinarem as razões entre elas, tabularem os resultados obtidos e confeccionarem os gráficos solicitados, melhor compreenderam os conceitos matemáticos estudados. Ou seja, os alunos, ao trabalharem com problemas "não rotineiros" e "práticos", apresentaram um maior envolvimento com o trabalho de sala de aula e melhoraram a compreensão dos conceitos matemáticos estudados.

A terceira e última pergunta de pesquisa se relaciona à possível contribuição que esta investigação trouxe para minha formação docente, nas perspectivas matemática, didática e metodológica.

A contribuição matemática desse trabalho foi de grande valia, pois tive de pesquisar na História da Matemática, o que motivou o estudo da trigonometria e das funções trigonométricas no desenvolvimento humano. Esse estudo sinalizou-me para a possibilidade da utilização, em sala de aula, de raciocínio similar àquele usado pelos Egípcios para medir distâncias inacessíveis no delta do rio Nilo. Ainda da perspectiva matemática, pude constatar que os conceitos matemáticos relacionados à Geometria/Trigonometria, estudados hoje por alunos do Ensino Médio, é bastante restrito, se levarmos em consideração o que já foi desenvolvido pelo homem, ao longo de sua história. Em nosso sistema escolar de hoje, basicamente, nossos alunos estão restritos ao "treinamento" na resolução de exercícios repetitivos, ou seja, "problemas rotineiros" na terminologia de Polya. Exemplo disso foi a dificuldade dos alunos participantes da pesquisa em relacionar a situação problema proposta (medir a altura do sino da igreja Matriz da cidade) com o conceito matemático de "razões trigonométricas". Mais do que isso, somente na terceira atividade didática realizada, durante a construção dos gráficos discretos das funções seno, cosseno e tangente, é que os alunos associaram a aplicação prática desses conceitos matemáticos.

Portanto, concluo que a metodologia empregada nesta pesquisa foi fator preponderante para que meu aluno melhor compreendesse os conceitos teóricos que tinha como objetivo que aprendesse. A utilização da Técnica de Resolução de Problemas de George Polya mostrou-me, a cada atividade didática aplicada que, ao buscar responder às dúvidas dos alunos através de questionamentos relacionados a elas, aumento a chance de, juntos, construirmos os conceitos matemáticos pretendidos, no caso dessa pesquisa, o conceito de funções trigonométricas. Essa experiência certamente fará com que, no futuro, busque preparar minhas aulas utilizando-me de metodologia semelhante àquela usada nesta pesquisa, ou seja, a Resolução de Problemas.

Finalmente, devo registrar que, em uma nova oportunidade de utilização de desta metodologia de trabalho de sala de aula, ou seja, baseada na Resolução de Problemas, alguns cuidados extras terei de tomar. Primeiro, necessito planejar com mais detalhes as atividades didáticas que proporei aos alunos, pois problemas como "o do desnível da Matriz em relação à praça", "do tipo de teodolito a ser utilizado", e "o da marcação dos pontos cardeais", possíveis de serem evitados, não ocorram durante a aplicação da atividade. Segundo, preciso melhor prever o tempo a ser gasto na execução da atividade didática planejada, para que possa cumprir, sem atropelos, boa parte do conteúdo programático prevista para a série acadêmica com a qual estarei trabalhando. E, para concluir, necessito pensar em formas de aplicar esse tipo de metodologia em grupos de alunos mais numerosos, pois a minha realidade de sala de aula é de trabalhar com turmas de 20 a 30 alunos. Registro isso, pois considero esta metodologia de trabalho de sala de aula, baseada na Resolução de Problemas, como essencial para a condução de qualquer Processo de Ensino e Aprendizagem avaliado como sendo de qualidade.

Como possíveis futuros temas de pesquisa, utilizando desta mesma linha metodológica, baseada na Técnica de Resolução de Problemas, proposta por George Polya, cito: "a problemática do abastecimento de água em nossas cidades", "a problemática da contaminação dos mares e rios por resíduos químicos", "a problemática da corrupção em nossas cidades, estados e país", e, finalmente, "a problemática do desmatamento em nossas cidades".

REFERÊNCIAS

Boyer, Carl B. **História da matemática**. 3ª ed. – São Paulo: Blucher, 2010. 496 p.

BRASIL, Ministério da Educação. Parâmetros curriculares nacionais: **Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p.

BRASIL, Ministério da Educação. Parâmetros curriculares nacionais: **Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997, 82 p.

Eves, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5ª ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011. 843 p.

Ferreira, Aurélio Buarque de Holanda. **O minidicionário da língua portuguesa**. 7. ed. – Curitiba: Ed. Positivo; 2008. 806p.

Polya, G. (George), 1887 - **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. 2ª reimpr. – Rio de Janeiro; Interciência, 1995, 196p.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. Currículo do Estado de São Paulo: **Matemática e suas tecnologias**. São Paulo: SEE; 2010, 72p.

UNICAMP – (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS) . IME.A **roda gigante, O Experimento**. Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/portal/Midias/Experimentos/ExperimentosM3Matematica/roda_gigante/arquivos/a_roda-gigante---o_experimento.pdf. Acessado em 03/2015.