UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Fabiana Maria Ferreira

Problemas Elípticos Superlineares com Ressonância

São Carlos - SP
Agosto de 2015
O presente trabalho teve suporte financeiro da CAPES

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Fabiana Maria Ferreira
Orientador: Prof Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva

Problemas Elípticos Superlineares com Ressonância

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática, área de concentração: Equações Diferenciais Parciais

São Carlos - SP
Agosto de 2015

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F383pe

Ferreira, Fabiana Maria
Problemas elípticos superlineares com ressonância / Fabiana Maria Ferreira. -- São Carlos : UFSCar, 2016.
79 p.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.

1. Sistemas Elípticos. 2. Grau topológico. 3. Estimativa a priori. 4. Ressonância. I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado da candidata Fabiana Maria Ferreira, realizada em 14/08/2015:

Francisco O.V. de Paiva

Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva
UFSCar

Prof. Dr. Gustavo Ferron Madeira
UFSCar

Adilson Eduardo Presoto

Prof. Dr. Adilson Eduardo Presoto
UFSCar

Eugenio Massa

Prof. Dr. Eugenio Tommaso Massa
USP

Eduardo V. Teixeira

Prof. Dr. Eduardo Vasconcelos Oliveira Teixeira
UFC

Aos meus pais.

Agradecimentos

A Deus pela vida. A certeza de Sua presença me faz querer enfrentar os desafios sempre com ânimo e alegria! Aos meus pais pelo apoio e incentivo. A alegria por mais uma etapa concluída é maior porque é compartilhada com vocês! As minhas irmãs pela amizade. Ao meu orientador, Professor Francisco Odair, pela dedicação e conhecimento transmitido. Ao professor Adilson Presoto, pela disponibilidade e pela ajuda valiosa. Aos amigos da sala 104 (a sala mais legal do DM) pelos cafés prolongados com muitas risadas e pela amizade. A todos os professores da pós-graduação que contribuiram para minha formação acadêmica. À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho apresentamos a existência de soluções não triviais para classes de sistemas elípticos ressonantes e superlineares. Tais sistemas são tratados via métodos topológicos. Encontramos estimativas a priori para possíveis soluções destes sistemas e utilizamos estas estimativas juntamente com a teoria do grau topológico para garantir a existência de soluções.

Palavras chave: Sistemas elípticos, Grau Topológico, Estimativas a priori, Ressonância.

Abstract

The aim of this work is to present results about the existence of non-trivial solutions for some classes of resonant and superlinear eliptic systems employing topological methods. More specifically, we use a-priori bounds on the eventual solutions of this problems and topological degree theory.

Palavras chave: Elliptic Systems, Degree Theory, Resonance, A priori bounds.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, temos como objetivo provar resultados de existência de soluções para alguns sistemas elípticos superlineares com ressonância. Mais precisamente, consideramos sistemas do tipo gradiente e do tipo hamiltoniano e também um problema envolvendo o operador bi-harmônico. Tais problemas serão tratados via métodos topológicos, e a estratégia usada consiste em obter estimativas a priori para possíveis soluções dos problemas. E a partir daí utilizar a teoria do grau topológico para garantirmos a existência de soluções.

De uma maneira geral, dado um sistema de equações elípticas

$$\begin{cases} -\Delta u = h(x,u,v) & x \in \Omega \\ -\Delta v = k(x,u,v) & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

em que $\Omega \in \mathbb{R}^N$ é domínio limitado suave com $N \geq 3$. Dizemos que o sistema acima é gradiente se existe $K : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1, tal que

$$\frac{\partial K}{\partial u} = h \quad \text{e} \quad \frac{\partial K}{\partial v} = k;$$

e é dito um sistema hamiltoniano se existe $H : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^1, tal que

$$\frac{\partial H}{\partial u} = k \quad \text{e} \quad \frac{\partial H}{\partial v} = h.$$

Os problemas considerados nesta tese são motivados por resultados obtidos por M. Cuesta, De Figueiredo e Srikanth, em [10], para a seguinte classe de sistemas hamiltonianos

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_1 u + u_+^p + f(x) & x \in \Omega \\ -\Delta v = \lambda_1 v + v_+^q + g(x) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

em que λ_1 denota o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Em [10], foi provado existência de solução para (2) supondo que $f, g \in L^r(\Omega)$, $r > N$, satisfazendo

$$\int_\Omega f\phi_1 < 0 \quad \text{e} \quad \int_\Omega g\phi_1 < 0, \tag{3}$$

em que ϕ_1 denota a autofunção associada ao primeiro autovalor e $p, q > 1$ satisfazem

$$\frac{1}{p+1} + \frac{N-1}{N+1}\frac{1}{q+1} > \frac{N-1}{N+1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q+1} + \frac{N-1}{N+1}\frac{1}{p+1} > \frac{N-1}{N+1}. \tag{4}$$

As hipérboles acima foram introduzidas por Clément-de Figueiredo-Mitidieri, em [7], para obter estimativas a priori para sistemas elípticos superlineares via técnica de Brezis-Turner ([4]). Note que se $p = q$ então (4) se reduz a condição de Brézis-Turner, $p < \frac{N+1}{N-1}$.

As não linearidades consideradas aqui podem ser caracterizadas como assimétricas: superlineares em $+\infty$ e assintoticamente linear em $-\infty$. Além disso, nossos problemas são ressonantes no primeiro autovalor em $-\infty$. Problemas deste tipo foram primeiramente considerados por Ward em [28]. Neste artigo, provou-se a existência de soluções para o seguinte problema superlinear com condição de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u = u_+^p + f(x) & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

onde $1 < p < \frac{N}{N-2}$ e $f \in L^1(\Omega)$ satisfazendo $\int_\Omega f < 0$. O autor observa que o método utilizado não se estende ao problema com fronteira de Dirichlet. O problema similiar com fronteira de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_1 u + u_+^p + f(x) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

foi considerado posteriormente por Kannan-Ortega em [20], em que $1 \leq p < \frac{N}{N-1}$ e $f \in C(\overline{\Omega})$ satisfazendo a condição $\int_\Omega f\phi_1 < 0$.

A condição (3) é chamada na literatura de *"one-sided Landesman-Lazer condition"*. Note que, quando não existe ressonância no primeiro autovalor o problema é do tipo Ambrosetti-Prodi. Mais precisamente, se $\lambda \neq \lambda_1$ no problema (6) e $f = t\phi_1 + h$, onde $\int_\Omega \phi_1 h = 0$, a existência, a não-existência e a multiplicidade dependem do parâmetro t. Para o problema escalar podemos citar [16] e [26]. Para sistemas de equações, citamos [23], [24] e [25].

No primeiro capítulo vamos estudar o sistema gradiente

$$\begin{cases} -\Delta u = au + bv + u_+^p + f(x) & x \in \Omega \\ -\Delta v = bu + cv + v_+^q + g(x) & x \in \Omega \\ u = v = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

em que $\Omega \in \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, com $N \geq 3$, $1 < p, q < \frac{N+1}{N-1}$, as funções f, $g \in L^r(\Omega)$, $r > N$, satisfazem a seguinte condição

$$\int_\Omega f\phi_1 + \frac{\lambda_1 - a}{b} \int_\Omega g\phi_1 < 0. \tag{8}$$

Além disso, os parâmetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ são tais que $\max\{a, c\} > 0$ e $b > 0$. Supomos também que λ_1 é um autovalor da matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, mais especificamente $\lambda_1 = \frac{a+c}{2} + \sqrt{\frac{(a-c)^2}{4} + b^2}$. Sob essas condições vamos mostrar a existência de soluções para o problema (7).

No segundo capítulo estudamos a resolubilidade do sistema hamiltoniano

$$\begin{cases} -\Delta u = au + bv + v_+^p + f(x) & x \in \Omega \\ -\Delta v = cu + av + u_+^q + g(x) & x \in \Omega \\ u = v = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{9}$$

em que $\Omega \in \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, com $N \geq 3$, $1 < p, q < \frac{N+1}{N-1}$ e as funções f, $g \in L^r(\Omega)$, $r > N$, satisfazem a condição

$$\int_\Omega \phi_1 f + \int_\Omega \phi_1 g < 0. \tag{10}$$

Os parâmetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ são tais que $b, c > 0$. Supomos também que o primeiro autovalor do Laplacianoλ_1 seja também autovalor da matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, mais especificamente supomos $\lambda_1 = a + b$. Note que, a condição natural sobre p e q seria (4). Por dificuldades técnicas nossa condição é mais forte. Conjecturamos que a condição (3) é suficiente para a obtenção dos resultados.

No terceiro capítulo tratamos o problema relacionado ao operador bi-harmônico

$$\begin{cases} (-\Delta)^2 u = \lambda_1^2 u + u_+^p + f(x) & x \in \Omega \\ u = \Delta u = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{11}$$

em que Ω é um domínio suave limitado de $\mathbb{R}^N$, com $N > 5$. A função $f \in L^r(\Omega)$, com $r > N/3$ e satisfaz a condição (3). E o expoente p satisfaz

$$\max\left\{1, \frac{4}{N-4}\right\} < p < \frac{N+1}{N-3}.$$

Sob essas condições vamos mostrar a existência de soluções para o problema (11).

Ao final de cada capítulo apresentaremos alguns resultados sobre regularidade das soluções.

O último capítulo é um Apêndice, este é divido em 4 partes. No Apêndice A apresentamos a notação usada durante toda a tese e algumas observações sobre os espaços em que trabalhamos e suas normas. O objetivo do Apêndice B é apresentar resultados clássicos de Análise Funcional, Equações Diferenciais Parciais e também alguns resultados que podem ser encontrados nas referências. No Apêndice C encontramos a base teorica auxiliar usadas nos Capítulos 1 e 2. O Apêndice D é destinado a Teoria do Grau Topológico, usada durante toda a tese, apresentamos suas principais propriedades e resultados.

Capítulo 1

Sistema Gradiente

O objetivo deste capítulo é estudar o problema de existência de soluções do seguinte sistema de equações elípticas

$$\begin{cases} -\Delta u = au + bv + u_+^p + f(x) & x \in \Omega \\ -\Delta v = bu + cv + v_+^q + g(x) & x \in \Omega \\ u = v = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

em que $\Omega \in \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, com $N \geq 3$ e $1 < p, q < \frac{N+1}{N-1}$. Os parâmetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ são tais que $\max\{a, c\} > 0$ e $b > 0$. Denotamos $w_+ = \max\{w, 0\}$. E as funções f, g são tais que,

$$f, g \in L^r(\Omega) \text{ para } r > N. \tag{1.2}$$

Para tratar esse problema vamos utilizar métodos topológicos. A estratégia é encontrar estimativas a priori para possíveis soluções de sistema (1.1) e utilizar a Teoria do Grau Topológico para garantir existência de soluções.

É conveniente escrevermos o sistema (1.1) na forma matricial:

$$\begin{cases} -\Delta U = AU + G(U) + F(x) & x \in \Omega \\ U = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

em que

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R}), \quad G(U) = \begin{pmatrix} u_+^p \\ v_+^q \end{pmatrix} \quad e \quad F(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}.$$

Consideramos $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \leq \lambda_n \leq ...$ os autovalores de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ e $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n, ...$ as correspondentes autofunções e tal que a norma L^2 de ϕ_1 seja normalizada igual a 1. Denotamos H o espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ munido da norma

$$\|U\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |\nabla v|^2$$

para $(u, v) \in H$. Pelo Teorema de Sobolev, para $1 \leq \sigma \leq 2^*$ fixado, a imersão $H \hookrightarrow L^\sigma(\Omega) \times L^\sigma(\Omega)$ é contínua. Além disso, se $\sigma < 2^*$, então a imersão é compacta.

Com relação a notação usada durante o capítulo, quando tratarmos sobre o produto de espaços de Banach $A \times B$, adotaremos, a menos que seja especificado, a norma da soma. Possivelmente, quando tratarmos do produto de espaços iguais $A \times A$ denotaremos a norma de um vetor $(a, b) \in A \times A$ simplesmente por $\|(a,b)\|_A = \|a\|_A + \|b\|_A$.

1.1. Estimativas a priori

Nesta seção vamos mostrar uma estimativa a priori para possíveis soluções do sistema (1.3).

Para isso vamos supor que o primeiro autovalor λ_1 de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ seja um autovalor da matriz A. Destacamos que os autovalores da matriz A são

$$\xi = \frac{a+c}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2} \quad \text{e} \quad \eta = \frac{a+c}{2} - \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2}.$$

Mais especificamente vamos supor que $\lambda_1 = \xi$. Sendo assim pelos resultados dados no Apêndice C, obtemos que $\Phi = (\alpha\phi_1, \beta\phi_1)$, com $\alpha = 1$ e $\beta = \frac{\lambda_1 - a}{b}$, é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta U = AU & x \in \Omega \\ U = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.4}$$

Note que, $\lambda_1 = \xi$ implica que $\lambda_1 > a$ e assim $\beta > 0$.

1.1 Lema. *Considere $1 < p, q < \frac{N+1}{N-1}$ as funções $f, g \in L^r(\Omega)$, $r > N$, satisfazendo a condição*

$$\int_\Omega f\phi_1 + \frac{\lambda_1 - a}{b}\int_\Omega g\phi_1 < 0 \tag{1.5}$$

e $\lambda_1 = \xi$. Seja $U \in H$ uma possível solução de (1.3). Então existe função crescente $\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, dependendo somente de p, q e Ω, tal que $\rho(0) = 0$ e

$$\|U\|_{C_0^1(\bar{\Omega})} \leq \rho(\|F\|_r). \tag{1.6}$$

Demonstração. Seja $U \in H$ uma possível solução de (1.3). Multiplicando (1.3) por Φ e integrando, obtemos

$$\int_\Omega -\Delta U \cdot \Phi = \int_\Omega AU \cdot \Phi + \int_\Omega G(U) \cdot \Phi + \int_\Omega F(x) \cdot \Phi,$$

como a matriz A é autoadjunta e Φ é solução do problema (1.4), temos que

$$\int_\Omega G(U) \cdot \Phi = -\int_\Omega F(x) \cdot \Phi \leq C \left\| F(x) \right\|_r . \tag{1.7}$$

Podemos decompor U em $U = t\Phi + U_1$ em que $U_1 = (u_1, v_1)$ é ortogonal a Φ em H, veja Seção (C.2). Consequentemente, U_1 é ortogonal a Φ também em $L^2 \times L^2$, isto é, $\int_\Omega U_1 \cdot \Phi = 0$. Multipliplicando tal decomposição por Φ e integrando, obtemos

$$\int_\Omega U \cdot \Phi = t \int_\Omega \Phi \cdot \Phi + \int_\Omega U_1 \cdot \Phi,$$

logo

$$\begin{aligned} t &= C \int_\Omega U \cdot \Phi \\ &= C\Big(\int_\Omega \alpha u \phi_1 + \int_\Omega \beta v \phi_1 \Big) \\ &= C\Big(\int_\Omega \alpha (u_+ - u_-) \phi_1 + \int_\Omega \beta (v_+ - v_-) \phi_1 \Big) \\ &\leq C\Big(\int_\Omega \alpha u_+ \phi_1 + \int_\Omega \beta v_+ \phi_1 \Big). \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder juntamente com a desigualdade (1.7), resulta que

$$t \leq C\Big(\int_\Omega u_+^p \phi_1 \Big)^{1/p} + C\Big(\int_\Omega v_+^q \phi_1 \Big)^{1/q} \leq C(\|F\|_r^{1/p} + \|F\|_r^{1/q}). \tag{1.8}$$

Lembremos que nosso objetivo é limitar U, para isso devemos limitar U_1 e $|t|$. Se $t \geq 0$, a desigualdade (1.8) nos dá uma limitação para $|t|$. Sendo assim, vamos dividir a demonstração em duas partes:

Caso 1: $t \geq 0$. Sob essa condição resta encontrarmos uma limitação para U_1. Multiplicando agora a equação (1.3) por U_1 e integrando, obtemos

$$-\int_\Omega \Delta U \cdot U_1 = \int_\Omega AU \cdot U_1 + \int_\Omega G(U) \cdot U_1 + \int_\Omega F(x) \cdot U_1$$

usando a decomposição $U = t\Phi + U_1$, temos

$$\begin{aligned} \|U_1\|^2 &= \int_\Omega AU_1 \cdot U_1 + \int_\Omega G(U) \cdot U_1 + \int_\Omega F(x) \cdot U_1 \\ &\le \int_\Omega AU_1 \cdot U_1 + \int_\Omega G(U) \cdot U_1 + \left| \int_\Omega F(x) \cdot U_1 \right|. \end{aligned}$$

Neste momento vamos utilizar a teoria espectral para operadores compactos, veja Apêndice C. Como U_1 é ortogonal a Φ em H e $\Phi = c\Phi_1^A$ então U_1 também é ortogonal a Φ_1^A em H. Logo podemos usar a desigualdade (C.4) para $k = 1$ e assim obtemos

$$\|U_1\|^2 \le \frac{1}{\lambda_2(A)} \|U_1\|^2 + \int_\Omega G(U) \cdot U_1 + \int_\Omega |F(x) \cdot U_1|,$$

isto é,

$$\left(1 - \frac{1}{\lambda_2(A)}\right) \|U_1\|^2 \le \int_\Omega G(U) \cdot U_1 + \int_\Omega |F(x) \cdot U_1|.$$

Como $1 = \lambda_1(A) < \lambda_2(A)$ e aplicando a Desigualdade de Hölder, obtemos que

$$\|U_1\|^2 \le C \int_\Omega G(U) \cdot U_1 + C \|F\|_2 \|U_1\|_2 .$$

Finalmente pela imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, concluímos que

$$\|U_1\|^2 \le C \int_\Omega G(U).U_1 + C \|F\|_r \|U_1\| . \tag{1.9}$$

Vamos agora estimar a primeira integral do lado direito da desigualdade (1.9),

$$\begin{aligned} \int_\Omega G(U) \cdot U_1 &= \int_\Omega u_+^p u_1 + v_+^q v_1 \\ &= \int_\Omega u_+^p u_1^+ - \int_\Omega u_+^p u_1^- + \int_\Omega v_+^q v_1^+ - \int_\Omega v_+^q v_1^- \\ &\le \int_\Omega u_+^p u_1^+ + \int_\Omega v_+^q v_1^+, \end{aligned}$$

como $t \ge 0$ temos que $u_1^+ \le u_+$ e $v_1^+ \le v_+$, logo

$$\int_\Omega G(U) \cdot U_1 \le \int_\Omega u_+^{p+1} + \int_\Omega v_+^{q+1}.$$

Aplicando o Lema (B.9) e em seguida a desigualdade (1.7), obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega G(U)\cdot U_1 &\leq \Big(\int_\Omega u_+^p\phi_1\Big)^\alpha\Big(\int_\Omega |\nabla u_+|^2\Big)^{\delta/2} + \Big(\int_\Omega v_+^q\phi_1\Big)^{\alpha'}\Big(\int_\Omega |\nabla v_+|^2\Big)^{\delta'/2}\\ &\leq C\left(\|F\|_r^\alpha\|u_+\|^\delta + \|F\|_r^{\alpha'}\|v_+\|^{\delta'}\right)\\ &\leq C\left(\|F\|_r^\alpha\|u\|^\delta + \|F\|_r^{\alpha'}\|v\|^{\delta'}\right)\\ &\leq C\left(\|F\|_r^\alpha\|U\|^\delta + \|F\|_r^{\alpha'}\|U\|^{\delta'}\right).\end{aligned}$$

Usando a decomposição $U = t\Phi + U_1$, temos

$$\int_\Omega G(U)\cdot U_1 \leq C\|F\|_r^\alpha(|t|\,\|\Phi\| + \|U_1\|)^\delta + C\|F\|_r^{\alpha'}(|t|\,\|\Phi\| + \|U_1\|)^{\delta'},$$

e pela estimativa de $t = |t|$, desigualdade (1.8), concluímos

$$\begin{aligned}\int_\Omega G(U)\cdot U_1 \leq{}& C\|F\|_r^\alpha\left(\|F\|_r^{1/p} + \|F\|_r^{1/q}\right)^\delta + C\|F\|_r^{\alpha'}\left(\|F\|_r^{1/p} + \|F\|_r^{1/q}\right)^{\delta'}\\ &+ C\|F\|_r^\alpha\|U_1\|^\delta + C\|F\|_r^{\alpha'}\|U_1\|^{\delta'}.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Substituindo a estimativa (1.10) em (1.9), resulta

$$\begin{aligned}\|U_1\|^2 \leq{}& C\left(\|F\|_r^{\alpha+\delta/p} + \|F\|_r^{\alpha+\delta/q} + \|F\|_r^{\alpha'+\delta'/p} + \|F\|_r^{\alpha'+\delta'/q}\right)\\ &+ C\|F\|_r^\alpha\|U_1\|^\delta + C\|F\|_r^{\alpha'}\|U_1\|^{\delta'} + C\|F\|_r\|U_1\|.\end{aligned}$$

Como $p < \frac{N+1}{N-1}$ segue do Lema B.9 que $\delta, \delta' \in (1,2)$. Sendo assim, aplicando a desigualdade de Young, obtemos que

$$\begin{aligned}\|U_1\|^2 \leq{}& C\left(\|F\|_r^{\alpha+\delta/p} + \|F\|_r^{\alpha+\delta/q} + \|F\|_r^{\alpha'+\delta'/p} + \|F\|_r^{\alpha'+\delta'/q}\right)\\ &+ C\|F\|_r^{2\alpha/(2-\delta)} + C\|F\|_r^{2\alpha'/(2-\delta')} + C\|F\|_r^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\|U_1\| \leq{}& C\left(\|F\|_r^{\alpha+\delta/p} + \|F\|_r^{\alpha+\delta/q} + \|F\|_r^{\alpha'+\delta'/p} + \|F\|_r^{\alpha'+\delta'/q}\right)^{1/2}\\ &+ C\|F\|_r^{\alpha/(2-\delta)} + C\|F\|_r^{\alpha'/(2-\delta')} + C\|F\|_r,\end{aligned}$$

novamente usando a decomposição $U = t\Phi + U_1$, concluímos que

$$\begin{aligned}\|U\| \leq{}& C\left(\|F\|_r^{1/p} + \|F\|_r^{1/q}\right) + C\left(\|F\|_r^{\alpha+\delta/p} + \|F\|_r^{\alpha+\delta/q} + \|F\|_r^{\alpha'+\delta'/p} + \|F\|_r^{\alpha'+\delta'/q}\right)^{1/2}\\ &+ C\|F\|_r^{\alpha/(2-\delta)} + C\|F\|_r^{\alpha'/(2-\delta')} + C\|F\|_r.\end{aligned}$$

Substituindo os valores de α, α', δ e δ', dados pelo Lema B.9, podemos ver que

$$\|U\| \leq C \max\left\{ \|F\|_r^{1/p}, \|F\|_r^{1/q}, \|F\|_r^{\alpha/(2-\delta)}, \|F\|_r^{\alpha'/(2-\delta')} \right\}. \tag{1.11}$$

Observa-se que encontramos uma limitação para U em H, mas precisamos encontrar uma limitação para U no espaço $C_0^1(\overline{\Omega})^2$. O primeiro passo para chegarmos ao nosso objetivo é aplicar um argumento de regularidade, conhecido por argumento de bootstrap, que encontra-se em detalhes na Seção (1.3). Aplicando o argumento do tipo bootstrap, obtemos que $u, v \in W^{2,r}(\Omega)$ e existe $C > 0$ tal que

$$\|U\|_{2,r} \leq C\left(\|F\|_r^{\gamma} + \|U\|^{\eta}\right)$$

com η, γ constantes, tais que $\eta, \gamma \geq 1$. Este fato, juntamente com a desigualdade (1.11), implica que

$$\|U\|_{2,r} \leq \rho(\|F\|_r).$$

Por fim, como $r > N$, vale a imersão $W^{2,r}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$, e portanto

$$\|U\|_{C_0^1(\bar{\Omega})} \leq \rho(\|F\|_r).$$

Caso 2: $t < 0$. Pelo Princípio do Máximo de Hopf, (veja Teorema B.7), sabemos que a primeira autofunção $\phi_1 > 0$ se encontra no interior de um cone de funções positivas no espaço $C_0^1(\overline{\Omega})$. Então existe $\epsilon > 0$ tal que

$$w \in B_{C_0^1(\bar{\Omega})}(\phi_1, \epsilon) \Rightarrow w > 0 \quad \text{em} \quad \Omega \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} < 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega,$$

em que η denota o vetor exterior normal a fronteira de Ω. Como $\Phi \in C_0^1(\overline{\Omega}) \times C_0^1(\overline{\Omega})$ é tal que $\Phi = \begin{pmatrix} \alpha\phi_1 \\ \beta\phi_1 \end{pmatrix}$, com α,$\beta > 0$, podemos afirmar que existe $\epsilon > 0$, tal que

$$(w_1, w_2) \in B_{C_0^1(\bar{\Omega})}(\phi_1, \epsilon) \times B_{C_0^1(\bar{\Omega})}(\phi_1, \epsilon) \Rightarrow w_1, w_2 > 0 \;\text{ em }\; \Omega \;\text{ e }\; \frac{\partial w_1}{\partial \eta}, \frac{\partial w_2}{\partial \eta} < 0 \;\text{ em }\; \partial\Omega.$$

Definimos ϵ_0 o supremos de tais ϵ's e relembramos que, pela Seção 1.3, $U = (u, v)$ solução de (1.3) bem como $U_1 = (u_1, v_1)$ pertencem a $C_0^1(\overline{\Omega}) \times C_0^1(\overline{\Omega})$. Podemos escrever

$$u = t\alpha\left(\phi_1 + \frac{u_1}{\alpha t}\right) \quad \text{e} \quad v = t\beta\left(\phi_1 + \frac{v_1}{\beta t}\right).$$

Afirmamos que $-u_1/\alpha t \notin B_{C_0^1(\bar{\Omega})}(0, \epsilon_0)$ e $-v_1/\beta t \notin B_{C_0^1(\bar{\Omega})}(0, \epsilon_0)$. Pois, caso contrário, teríamos que

$$\frac{u}{\alpha t} = \phi_1 - (-\frac{u_1}{\alpha t}) \in B_{C_0^1(\bar{\Omega})}(\phi_1, \epsilon_0) \quad \text{e} \quad \frac{v}{\beta t} = \phi_1 - (-\frac{v_1}{\beta t}) \in B_{C_0^1(\bar{\Omega})}(\phi_1, \epsilon_0)$$

o que é uma contradição, ja que $u^+, v^+ \not\equiv 0$, $\alpha, \beta > 0$ e $t < 0$. Sendo assim,

$$|t| \leq \frac{1}{\alpha \epsilon_0} \|u_1\|_{C_0^1(\bar{\Omega})} \quad \text{e} \quad |t| \leq \frac{1}{\beta \epsilon_0} \|v_1\|_{C_0^1(\bar{\Omega})}.$$

Portanto,

$$|t| \leq C \|u_1\|_{C_0^1(\bar{\Omega})} + C \|v_1\|_{C_0^1(\bar{\Omega})} = C \|U_1\|_{C_0^1(\bar{\Omega})}. \tag{1.12}$$

Resta encontrarmos uma limitação a priori para $\|U_1\|_{C_0^1(\Omega)}$. Observamos que a desigualdade (1.9) continua válida para $t < 0$, isto é,

$$\|U_1\|^2 \leq C \int_\Omega G(U) \cdot U_1 + C \|F\|_r \|U_1\|. \tag{1.13}$$

Agora vamos estimar a primeira integral do lado direito de (1.13). Note que

$$\left| \int_\Omega G(U) \cdot U_1 \right| \leq \int_\Omega u_+^p |u_1| + \int_\Omega v_+^q |v_1|,$$

como $t < 0$ temos que $u_+ < |u_1|$ e $v_+ < |v_1|$, sendo assim podemos aplicar o Lema (B.9) e obtemos que

$$\left| \int_\Omega G(U) \cdot U_1 \right| \leq \Big(\int_\Omega u_+^p \phi_1 \Big)^\alpha \Big(\int_\Omega |\nabla u_1| \Big)^{\delta/2} + \Big(\int_\Omega v_+^q \phi_1 \Big)^{\alpha'} \Big(\int_\Omega |\nabla v_1| \Big)^{\delta'/2}.$$

Pela desigualdade (1.7), resulta

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega G(U) \cdot U_1 \right| &\leq C \|F\|_r^\alpha \|u_1\|^\delta + C \|F\|_r^{\alpha'} \|v_1\|^{\delta'} \\ &\leq C \|F\|_r^\alpha \|U_1\|^\delta + C \|F\|_r^{\alpha'} \|U_1\|^{\delta'}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Substituindo (1.14) em (1.13), temos que

$$\|U_1\|^2 \leq C \|F\|_r^\alpha \|U_1\|^\delta + C \|F\|_r^{\alpha'} \|U_1\|^{\delta'} + C \|F\|_r \|U_1\|.$$

Novamente, como $\delta, \delta' \in (1, 2)$, aplicamos a Desigualdade de Young e concluímos que

$$\|U_1\| \leq C \|F\|_r^{\frac{\alpha}{2-\theta}} + C \|F\|_r^{\frac{\alpha'}{2-\theta'}} + C \|F\|_r. \tag{1.15}$$

Como U_1 é solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta U_1 = AU_1 + G(U) + F(x) & x \in \Omega \\ U_1 = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.16}$$

podemos aplicar o argumento do tipo bootstrap, (veja Seção 1.3), para o sistema (1.16) e concluir que $U_1 \in W^{2,r} \times W^{2,r}(\Omega)$ e também que existe constante $C > 0$, tal que

$$\|U_1\|_{2,r} \leq C\left(\|F\|_r^\gamma + \|U\|^\eta\right)$$

com η, γ constantes, tais que $\eta, \gamma \geq 1$. Este fato, juntamente com a desigualdade (1.15), implica que

$$\|U_1\|_{2,r} \leq \rho(\|F\|_r).$$

Além disso, como $r > N$, vale a imersão $W^{2,r}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$. Sendo assim, podemos concluir que

$$\|U_1\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} \leq \rho(\|F\|_r). \tag{1.17}$$

Como $U = U_1 + t\Phi$ e usando as desigualdades (1.12) e (1.17), obtemos que

$$\|U\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} \leq \rho(\|F\|_r).$$

□

1.2. Resultado de Existência

Nesta seção vamos mostrar um resultado de existência de soluções para o problema (1.1).

1.2 Teorema. *Assumindo as hipóteses do Lema (1.1) existe pelo menos uma solução* $U = (u, v) \in \left(W^{2,r}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)^2$ *do sistema (1.3).*

Na demonstração vamos proceder da seguinte forma, vamos mostrar que toda solução $U = (u, v) \in H$ do sistema (1.3) é não degenerada com índice 1, para funções f e g

pequenas e satisfazendo a condição (1.5). Considere a linearização de problema (1.1), para (u_0, v_0) solução de (1.3):

$$\begin{cases} -\Delta w = aw + bz + p(u_0^+)^{p-1}w & x \in \Omega \\ -\Delta z = bw + cz + q(v_0^+)^{q-1}z & x \in \Omega \\ w = z = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.18}$$

A não degeneracidade e o cálculo do índice são consequência dos seguintes resultados:

1.3 Lema. *Existe $\epsilon > 0$ tal que; para cada $m, k \in L^\infty$, $s \in \mathbb{R}$ e $t \in [0,1]$ tais que $m, k \geq 0$ q.t.p., $m \neq 0$, $k \neq 0$, $\|m\|_\infty, \|k\|_\infty < \epsilon$ e $0 < s < \epsilon$; suponha também, que exista $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ com medida positiva, tal que as funções m e k não se anulem simultaneamente para todo $x \in \tilde{\Omega}$. Então o sistema*

$$\begin{cases} -\Delta w = aw + bz + tm(x)w + (1-t)sw & x \in \Omega \\ -\Delta z = bw + cz + tk(x)z + (1-t)sz & x \in \Omega \\ w = z = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.19}$$

possui somente solução trivial $w = z = 0$.

Demonstração. Considere a forma matricial para o sistema (1.19):

$$\begin{cases} -\Delta W = \tilde{A}W & x \in \Omega \\ W = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

em que

$$\tilde{A}(x) = \begin{pmatrix} a + tm(x) + (1-t)s & b \\ b & c + tk(x) + (1-t)s \end{pmatrix} \quad e \quad W = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}.$$

Vamos mostrar que as matrizes A e $\tilde{A}(x)$ satisfazem a relação $A \prec \tilde{A}(x)$, veja Definição (C.2). Dado $(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}^2$, em que $y = (y_1, y_2)$, temos

$$\left\langle \left(\tilde{A}(x) - A\right) y, y \right\rangle = y_1^2 \left[tm(x) + (1-t)s\right] + y_2^2 \left[tk(x) + (1-t)s\right]$$

Pelas hipóteses dadas sobre m, k em Ω e $\tilde{\Omega}$, e sobre t e s , temos que a expressão anterior é não negativa em $\Omega \times \mathbb{R}^2$ e estritamente positiva em $\tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^2$. Portanto $A \prec \tilde{A}(x)$.

Além disso, sabemos que a autofunção Φ_1^A associada ao autovalor $\lambda_1(A)$ satisfaz a Propriedade de Continuação Única, veja definição (C.3). Sendo assim, utilizando a Proposição (C.4), temos que $\lambda_1(\tilde{A}(x)) < \lambda_1(A) = 1$. Temos também que cada entrada da matriz $\tilde{A}$ converge em L^∞ para A, usando a continuidade dos autovalores em relação as pesos $A(x)$, resulta que $\lambda_j(\tilde{A}(x)) \to \lambda_j(A)$ para cada $j = 1, 2....$ Em particular para $j = 2$ temos que $\lambda_2(\tilde{A}(x)) \to \lambda_2(A) > \lambda_1(A) = 1$. Portanto, $\lambda_1(\tilde{A}(x)) < 1 < \lambda_2(\tilde{A}(x))$ e consequentemente $w = z = 0$ é a única solução do problema (1.19).

□

1.4 Lema. *Seja $0 < s < \epsilon$ fixado, considere o seguinte problema de autovalor com parâmetro μ*

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda(aw + bz + sw) & x \in \Omega \\ -\Delta z = \lambda(bw + cz + sz) & x \in \Omega \\ w = z = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.20}$$

Então existe somente um autovalor λ no intervalo $[0, 1]$.

Demonstração. Primeiramente vamos escrever o problema (1.20) na forma matricial

$$\begin{cases} -\Delta W = \lambda \tilde{A} W & x \in \Omega \\ W = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a+s & b \\ b & c+s \end{pmatrix}$ e $W = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$.

Vamos proceder como na demonstração do Lema (1.3). Note que, $A \prec \tilde{A}$ então, pela Proposição (C.4), resulta que $\lambda_1(\tilde{A}) < \lambda_1(A) = 1$. Fazendo ϵ suficentemente pequeno temos que cada entrada da matriz $\tilde{A}$ converge em L^∞ para as entradas da matriz A, logo $\lambda_2(\tilde{A}) \to \lambda_2(A) > \lambda_1(A) = 1$. Portanto, $\lambda_1(\tilde{A}) < 1 < \lambda_2(\tilde{A})$ como queríamos mostrar.

□

Demonstração do Teorema (1.2):

Considere a aplicação $T_F : C_0^1(\Omega)^2 \longrightarrow C_0^1(\Omega)^2$ tal que

$$\begin{aligned} T_F(U) &= (-\Delta)^{-1}\left(AU + G(U) + F(x)\right) \\ &= \left((-\Delta)^{-1}\left(au + bv + u_+^p + f(x)\right), (-\Delta)^{-1}\left(bu + cv + v_+^q + g(x)\right)\right). \end{aligned}$$

Note que T_F é um operador compacto e contínuo e $T_F(u,v) = (u,v)$ se, e somente se, $U = (u,v)$ é solução do problema (1.1). Considere $F_1 = (f_1, g_1)$ com

$$f_1 = -(\gamma\alpha\phi_1)^p \quad \text{e} \quad g_1 = -(\gamma\beta\phi_1)^q$$

em que $\gamma > 0$. Sendo assim, $U_0 = (u_0, v_0) = (\gamma\alpha\phi_1, \gamma\beta\phi_1)$ é solução do problema (1.3) para $F = F_1$. De fato,

$$AU_0 + G(U_0) + F_1(x) = AU_0 = \gamma A\Phi = -\gamma\Delta\Phi = -\Delta U_0.$$

Considere a seguinte homotopia $H : [0,1] \times C_0^1(\Omega)^2 \longrightarrow C_0^1(\Omega)^2$ com

$$H(\tau, U) = \left((I - (-\Delta)^{-1})\left(AU + G(U) + (1-\tau)F(x) + \tau F_1(x)\right)\right).$$

Note que,

$$H(0,U) = \left((I - (-\Delta)^{-1})(AU + G(U) + F(x))\right) = I - T_F$$

e

$$H(1,U) = \left((I - (-\Delta)^{-1})(AU + G(U) + F_1(x))\right) = I - T_{F_1}.$$

Além disso, segue da estimativa a priori, Lema (1.1), que toda solução de

$$\begin{cases} -\Delta U = AU + G(U) + (1-\tau)F(x) + \tau F_1(x) & x \in \Omega \\ U = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

é uniformemente limitada em $C_0^1(\Omega)^2$. Sendo assim, para $R > 0$ suficientemente grande, temos que $H(\tau, U) \neq 0$ para todo $(\tau, U) \in [0,1] \times \partial B_{C_0^1(\Omega)^2}(0,R)$. Segue portanto, que a homotopia H é admissível (veja Apêndice D), e pela propriedade da invariância por homotopia do grau topológico, temos que

$$\deg(I - T_F, B_{C_0^1(\Omega)^2}(0,R), 0) = \deg(I - T_{F_1}, B_{C_0^1(\Omega)^2}(0,R), 0).$$

Façamos γ suficientemente pequeno tal que o Lema (1.3) seja aplicável para

$$m(x) = pu_+^{p-1} \quad \text{e} \quad k(x) = qv_+^{q-1},$$

para toda (u, v) solução arbitrária de (1.1) com $F = F_1$. Aplicando então o Lema (1.3) para $t = 1$, obtemos que (u, v) é não degenerada. Além disso, o índice de $I - T_{F_1}$ pode ser calculado através da homotopia dada em (1.19) e este coincide com o índice da solução trivial de (1.19) para $t = 0$. Usando o Lema (1.4) nós deduzimos que esse índice é -1, (veja também Teorema (D.8)). Portanto

$$\deg(I - T_{F_1}, B_{C_0^1(\Omega)^2}(0,R), 0) = \sum(-1) \neq 0,$$

note que a soma acima é finita, veja detalhes em (D.2). Sendo assim,

$$\deg(I - T_F, B_{C_0^1(\Omega)^2}(0,R), 0) \neq 0$$

e por fim, usando a propriedade de solução do grau topológico concluímos que existe $U \in B_{C_0^1(\Omega)^2}(0,R)$ tal que $(I - T_F)(U) = 0$, isto é, U é solução de (1.1).

1.3. Regularidade

Seja $\Omega \in \mathbb{R}^N$ um domínio suave e limitado, com $N \geq 3$. Vamos discutir a regularidade do seguinte sistema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta U = H(x, U(x)) & x \in \Omega \\ U(x) = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.21}$$

em que $U(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}$ e $H(x, U(x)) = \begin{pmatrix} h(x,u,v) \\ k(x,u,v) \end{pmatrix}$. As funções $h, k : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e existem $F(x) = (f(x), g(x)) \in L^r(\Omega) \times L^r(\Omega)$ e $C > 0$ tais que

$$|H(x,U)| \leq |F(x)| + C\,|U|^s$$

com $1 < s < 2^* - 1$ e algum $r > N$.

Seja $U = (u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ solução fraca de (1.21). Vamos mostrar que $u, v \in W^{2,r}(\Omega)$ e que existe constante $C > 0$, tal que

$$\|U\|_{2,r} \leq C\left(\|F\|_r^{\gamma} + \|U\|^{\eta}\right),$$

com $\gamma, \eta > 1$. Para isso, vamos usar um método do tipo bootstrap, que é um método de iterações usando sequências de imersões entre os espaços de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ e $L^q(\Omega)$. Observe que,

$$\int_\Omega |H(x,U)|^{2^*/s} \leq \int_\Omega |F(x)|^{2^*/s} + C\int_\Omega |U|^{2^*}. \tag{1.22}$$

Desejamos que as integrais da desigualdade anterior sejam finitas. Pela imersão de Sobolev, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, temos que $|U| \in L^{2^*}(\Omega)$. Denotando $p_1 := 2^*/s$, resta saber se $|F(x)| \in L^{p_1}(\Omega)$.

Se $N \geq 4$ então $2^* \leq N$, este fato juntamente com a hipótese $s > 1$ implica que $p_1 := \frac{2^*}{s} < 2^* \leq N < r$. E assim temos que $|F| \in L^{p_1}(\Omega)$. Agora se $N = 3$ então p_1 pode ser maior ou menor que r. Sendo assim, vamos dividir a demonstração em dois casos:

Caso 1: $N = 3$ e $p_1 \geq r$. Nesse caso consideramos r no lugar de p_1 na integral em (1.22), daí

$$\int_\Omega |H(x,U)|^r \leq \int_\Omega |F(x)|^r + C\int_\Omega |U|^{rs} \tag{1.23}$$

como $p_1 = \frac{2^*}{s} \geq r$ temos que $rs \leq 2^*$ logo $|U| \in L^{rs}$ e portanto concluímos que $|H| \in L^r$. Aplicando o Teorema (B.13), concluímos que $u, v \in W^{2,r}(\Omega)$ e que

$$\|U\|_{2,r} \leq C\|H\|_r.$$

Utilizando a desigualdade (1.23), resulta

$$\|U\|_{2,r} \leq C\left(\|F\|_r + \|U\|_{rs}^s\right).$$

Enfim, como $1 < rs \leq 2^*$, obtemos

$$\|U\|_{2,r} \leq C\left(\|F\|_r + \|U\|^s\right).$$

Caso 2: $N \geq 3$ e $p_1 < r$. Nesse caso, observamos que $|F(x)| \in L^{p_1}(\Omega)$ e da desigualdade (1.22), concluímos que $|H| \in L^{p_1}$. Aplicando o Teorema (B.13), concluímos que $u, v \in W^{2,p_1}(\Omega)$ e que

$$\|U\|_{2,p_1} \leq C \|H\|_{p_1}.$$

Usando a desigualdade (1.22), resulta que

$$\|U\|_{2,p_1} \leq C \left(\|F\|_{p_1} + \|U\|_{2^*}^s \right),$$

e pela imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{2^*}(\Omega)$, concluímos que

$$\|U\|_{2,p_1} \leq C \left(\|F\|_{p_1} + \|U\|^s \right). \tag{1.24}$$

Agora precisamos analisar três situações:

Caso 2i: Se $2p_1 > N$ então pelo item (iii) do Teorema (B.12), temos que $W^{2,p_1}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, para $\alpha < 1$. Assim,

$$\int_\Omega |H(x,U)|^r \leq \int_\Omega |F(x)|^r + C \int_\Omega |U|^{rs} < \infty, \tag{1.25}$$

portanto, $|H| \in L^r(\Omega)$. Pelo Teorema (B.13), resulta que $|U| \in W^{2,r}(\Omega)$ e

$$\|U\|_{2,r} \leq C \|H\|_r,$$

usando a desigualdade (1.25), resulta que

$$\begin{aligned} \|U\|_{2,r} &\leq C \left(\|F\|_r + \|U\|_{rs}^s \right) \\ &\leq C \left(\|F\|_r + \|U\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}^s \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|U\|_{2,r} \leq C \left(\|F\|_r + \|U\|_{2,p_1}^s \right).$$

Usando a desigualdade, (1.24), obtemos

$$\|U\|_{2,r} \leq C \left(\|F\|_r + \|F\|_r^s + \|U\|^{s^2} \right).$$

Caso 2ii: Se $2p_1 = N$ então pelo Teorema (B.12)(ii) vale a imersão $W^{2,p_1}(\Omega) \hookrightarrow L^\sigma$ para todo $p_1 < \sigma < \infty$. Usando esta imersão para $\sigma = rs$, temos que $|U| \in L^{rs}$, logo

$$\int_\Omega |H(x,U)|^r \leq \int_\Omega |F(x)|^r + C\int_\Omega |U|^{rs} < \infty, \tag{1.26}$$

portanto, $|H| \in L^r(\Omega)$. Pelo Teorema (B.13), resulta que $|U| \in W^{2,r}(\Omega)$ e

$$\|U\|_{2,r} \leq C\,\|H\|_r\,.$$

Usando a desigualdade (1.26), resulta que

$$\begin{aligned}\|U\|_{2,r} &\leq C\left(\|F\|_r + \|U\|_{rs}^s\right)\\ &\leq \left(\|F\|_r + \|U\|_{2,p_1}^s\right).\end{aligned}$$

E pela desigualdade (1.24), obtemos

$$\|U\|_{2,r} \leq C\left(\|F\|_r + \|F\|_r^s + \|U\|^{s^2}\right).$$

Caso 2iii: Se $2p_1 < N$ então aplicamos o Teorema (B.12)(i) e concluimos que $u, v \in L^{q_1}(\Omega)$, em que $q_1 = \frac{Np_1}{N-2p_1}$. Note que,

$$\int_\Omega |H(x,U)|^{q_1/s} \leq \int_\Omega |F(x)|^{q_1/s} + C\int_\Omega |U|^{q_1}.$$

Então repetimos o processo, agora com $p_2 = q_1/s$.

Vamos iterar o processo k vezes para obter números p_m e q_m com $m = 1,...k$, tais que

$$p_m = \frac{q_{m-1}}{s} \quad \text{e} \quad q_m = \frac{Np_m}{(N-2p_m)}.$$

Note que, o número de iterações é finito. Isto é, existe $k > 0$ tal que $2p_k > N$. De fato, como $s < 2^* - 1$, temos que

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{q_1}{2^*} = \frac{N}{Ns - 2.2^*} > \frac{N}{N(2^*-1) - 2.2^*} = 1.$$

Portanto,

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \delta,$$

para algum $\delta > 0$. Agora;

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{q_2}{q_1} = \frac{p_2}{p_1}\left(\frac{N-2p_1}{N-2p_2}\right) > \frac{p_2}{p_1} = 1+\delta.$$

de onde se conclui que $p_3 > p_2(1+\delta)$. Mas $p_2 = (1+\delta)p_1$ portanto $p_3 > (1+\delta)^2 p_1$. Iterando o processo temos

$$p_k > (1+\delta)^{k-1} p_1.$$

Logo, para algum k suficientemente grande temos $2p_k > N$. Portanto, o número de iterações é finito.

Sendo assim, concluímos que $U \in W^{2,r}(\Omega) \times W^{2,r}(\Omega)$ e que

$$\|U\|_{2,r} \leq C\left(\|F\|_r^{\gamma} + \|U\|^{\eta}\right),$$

com $\gamma, \eta > 1$.

Capítulo 2

Sistema Hamiltoniano

Neste capítulo vamos estudar o sistema de equações elípticas do tipo hamiltoniano

$$\begin{cases} -\Delta u = au + bv + v_+^p + f(x) & x \in \Omega \\ -\Delta v = cu + av + u_+^q + g(x) & x \in \Omega \\ u = v = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

em que $\Omega \in \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave com $N \geq 3$; $a, b, c \in \mathbb{R}$ são tais que $b, c > 0$; as funções $f, g \in L^r$ com $r > N$ e denotamos $w_+ = \max\{w, 0\}$. Os expoentes p e q são tais que $1 < p, q < \frac{N+1}{N-1}$.

Nosso objetivo, é encontrar estimativas a priori para possíveis soluções deste sistema e mostrar um resultado de existência de soluções.

Note que, sem perda de generalidade podemos tomar $b = c$ no sistema (2.1). De fato, se (u, v) é solução de

$$\begin{cases} -\Delta u = au + bv/\delta + v_+^p/\delta + f(x)/\delta & x \in \Omega \\ -\Delta v = c\delta u + av + \delta^q u_+^q + g(x) & x \in \Omega \\ u = v = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

com $\delta > 0$, então $(\delta u, v)$ é solução do sistema (2.1). Assim como feito em [23], podemos escolher $\delta = \sqrt{b/c}$ e obtemos a diagonal secundária com valores iguais a $\sqrt{bc}$. A menos de reescalar os valores podemos trabalhar agora com o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = au + bv + v_+^p + f(x) & x \in \Omega \\ -\Delta v = bu + av + u_+^q + g(x) & x \in \Omega \\ u = v = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

É conveniente escrevermos o sistema (2.2) na forma matricial:

$$\begin{cases} -\Delta U = MU + G(U) + F(x) & x \in \Omega \\ U = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

onde

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R}), \quad G(U) = \begin{pmatrix} v_+^p \\ u_+^q \end{pmatrix} \quad e \quad F(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}.$$

Os autovalores da matriz M são $\xi = a + b$ e $\eta = a - b$.

Consideramos $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \leq \lambda_n \leq ...$ os autovalores de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ e $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n, ...$ as correspondentes autofunções e tal que a norma L^2 de ϕ_1 seja normalizada igual a 1.

2.1. Estimativas a priori

Para encontrarmos estimativas a priori para possíveis soluções do problema (2.2), nos baseamos em argumentos encontrados em [7] e [10]. Inicialmente encontraremos uma estimativa para possíveis soluções U do sistema (2.3), no espaço $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \times W^{2,\frac{q+1}{q}}(\Omega)$.

Vamos supor que λ_1 é uma autovalor da matriz M, mais especificamente que $\lambda_1 = a+b$, Segue dos resultados dados no Apêndice C que $\Phi = (\phi_1, \phi_1)$ é uma solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta U = MU & x \in \Omega \\ U = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.4}$$

2.1 Lema. *Suponha que $\lambda_1 = a + b$. Considere $f, g \in L^r$, $r > N$, satisfazendo*

$$\int_\Omega \phi_1 f + \int_\Omega \phi_1 g < 0; \tag{2.5}$$

e $1 < p, q < \frac{N+1}{N-1}$. Toda possível solução $U \in H$ de (2.3) satisfaz

$$\|U\|_{C_0^1(\bar{\Omega})} \leq \rho(\|F\|_r) \tag{2.6}$$

onde $\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função crescente dependendo de p, q e Ω e tal que $\rho(0) = 0$.

Demonstração. Seja $U \in H$ solução de (2.3). Multiplicando (2.3) por Φ e integrando, obtemos

$$\int_\Omega -\Delta U.\Phi = \int_\Omega MU.\Phi + \int_\Omega G(U).\Phi + \int_\Omega F(x).\Phi$$

como M é autoadjunta e Φ é solução fraca de (2.4), resulta

$$\int_\Omega G(U).\Phi = -\int_\Omega F(x).\Phi \leq C\, \|F(x)\|_r \tag{2.7}$$

Podemos decompor $U = t\Phi + U_1$ tal que $\langle \Phi, U_1 \rangle_H = 0$. Note que

$$\begin{aligned}
\langle (\Phi, U_1) \rangle_H = 0 &\Rightarrow \int_\Omega (\nabla\phi_1 \nabla u_1 + \nabla\phi_1 \nabla v_1) = 0 \\
&\Rightarrow \lambda_1 \int_\Omega (\phi_1 u_1 + \phi_1 v_1) = 0 \\
&\Rightarrow \int_\Omega \Phi \cdot U_1 = 0.
\end{aligned}$$

isto é, U_1 é ortogonal a Φ também em $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Portanto, multiplicando esta decomposição por Φ e integrando, resulta

$$\int_\Omega U \cdot \Phi = t \int_\Omega \Phi \cdot \Phi + \int_\Omega U_1 \cdot \Phi = t \int_\Omega \Phi \cdot \Phi,$$

logo

$$\begin{aligned}
t &= C \int_\Omega U \cdot \Phi \\
&= C \int_\Omega (u\phi_1 + v\phi_1) \\
&\leq C \int_\Omega (u_+\phi_1 + v_+\phi_1).
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, temos

$$t \leq \left(\int_\Omega u_+^q \phi_1 \right)^{1/q} \left(\int_\Omega \phi_1 \right)^{1/q'} + \left(\int_\Omega v_+^p \phi_1 \right)^{1/p} \left(\int_\Omega \phi_1 \right)^{1/p'}$$

em que, p e p' são expoentes conjugados, o mesmo para q e q'. Portanto

$$t \leq C \left(\|F\|_r^{1/p} + \|F\|_r^{1/q} \right). \tag{2.8}$$

Análogo ao capítulo anterior, se $t > 0$ a desigualdade (2.8) nos dá um limitação para $|t|$. Dessa forma, vamos dividir a demonstração em dois casos.

Caso 1: $t \geq 0$. Nesse caso a desigualdade (2.8) nos dá uma limitação para $|t|$, consequentemente resta encontrarmos uma estimativa para U_1.

Vamos definir os seguintes espaços:

$$L = L^{\frac{p+1}{p}} \times L^{\frac{q+1}{q}} \quad \text{e} \quad W = W^{2,\frac{p+1}{p}} \times W^{2,\frac{q+1}{q}},$$

respectivamente com suas normas

$$\|U\|_L = \|u\|_{\frac{p+1}{p}} + \|v\|_{\frac{q+1}{q}} \quad \text{e} \quad \|U\|_W = \|u\|_{2,\frac{p+1}{p}} + \|v\|_{2,\frac{q+1}{q}}.$$

Note que U_1 satisfaz a equação

$$-\Delta U_1 = MU_1 + G(U) + F(x),$$

passando a norma do espaço L em ambos os lados, temos

$$\|\Delta U_1 + MU_1\|_L = \|G(U) + F(x)\|_L \leq \|G(U)\|_L + \|F(x)\|_L.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|\Delta U_1 + MU_1\|_L &\leq \|v_+^p\|_{\frac{p+1}{p}} + \|u_+^q\|_{\frac{q+1}{q}} + \|F(x)\|_L \\ &\leq \left(\int_\Omega v_+^{p+1}\right)^{\frac{p}{p+1}} + \left(\int_\Omega u_+^{q+1}\right)^{\frac{q}{q+1}} + \|F(x)\|_r. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Podemos escrever,

$$\int_\Omega v_+^{p+1} = \int_\Omega v_+^{p\alpha}\phi_1^\alpha \phi_1^{-\alpha} v_+^{p(1-\alpha)+1}$$

para $0 < \alpha < 1$ a ser determinado posteriormente. Pela desigualdade de Hölder, temos que

$$\int_\Omega v_+^{p+1} \leq \left(\int_\Omega v_+^p \phi_1\right)^\alpha \left(\int_\Omega \frac{v_+^{p+\frac{1}{1-\alpha}}}{\phi_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\right)^{1-\alpha}, \tag{2.10}$$

para estimar a primeira integral do lado direito da desigualdade anterior usamos a desigualdade (2.7) e obtemos

$$\int_\Omega v_+^{p+1} \leq \|F(x)\|_r^\alpha \left(\int_\Omega \frac{v_+^{p+\frac{1}{1-\alpha}}}{\phi_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\right)^{1-\alpha}.$$

Agora vamos utilizar o Lema B.10 para estimar a segunda integral de (2.10). De acordo com as hipóteses do Lema B.10, para estimarmmos a segunda integral vamos considerar

$$m = \frac{q+1}{q}, \qquad t = p + \frac{1}{1-\alpha} \qquad \text{e} \qquad \tau t = \frac{\alpha}{1-\alpha} \tag{2.11}$$

e temos as seguintes opções:

(i) Se $N = 3$ e $1 < q < 2$ então $\frac{N}{2} < m < N$. Assim para que possamos aplicar o Lema B.10, devemos ter

$$\frac{1}{t} = \tau\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{N}\right),$$

e para que essa igualdade seja verdadeira devemos ter

$$\alpha = \frac{3(q+1)}{5q+2} \in (0,1).$$

(ii) Se $N \geq 4$ e $1 < q < 2$ então $m < \frac{N}{2}$. Analogamente, pelo Lema B.10, para esta condição devemos ter

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{m} - \frac{2-\tau}{N},$$

daí encontramos

$$\alpha = \frac{N(1-L-Lp)}{1+N-LpN},$$

em que $L = \frac{1}{m} - \frac{2}{N} > 0$. Usando o fato de que $L > 0$ obtemos $\alpha < 1$. E da hipótese $q < \frac{N+1}{N-1}$, concluímos que $\alpha > 0$.

Além disso, para ambos os casos, observamos que a última igualdade em 2.11 implica que $\tau \in (0,1)$.

Finalmente, aplicando o Lema B.10, resulta

$$\int_\Omega v_+^{p+1} \leq C\|F(x)\|_r^\alpha \|v\|_{2,\frac{q+1}{q}}^{p(1-\alpha)+1}. \tag{2.12}$$

Analogamente, obtemos

$$\int_\Omega u_+^{q+1} \leq C \left\| F(x) \right\|_r^{\alpha'} \left\| u \right\|_{2,\frac{p+1}{p}}^{q(1-\alpha')+1}, \tag{2.13}$$

para $m' = \frac{p+1}{p}$ e $K = \frac{p}{p+1} - \frac{2}{N}$ no lugar de L. Encontramos casos análogos ao anteriores, respectivamente com

$$\alpha' = \frac{3(p+1)}{5p+2} \quad \text{e} \quad \alpha' = \frac{N\left(1-K-Kp\right)}{1+N-KpN}.$$

Substituindo as equações (2.12) e (2.13) na desigualdade (2.9), obtemos

$$\left\| \Delta U_1 + M U_1 \right\|_L \leq C \left[\left\| F(x) \right\|_r^{\alpha} \left\| v \right\|_{2,\frac{q+1}{q}}^{p(1-\alpha)+1} \right]^{\frac{p}{p+1}} + C \left[\left\| F(x) \right\|_r^{\alpha'} \left\| u \right\|_{2,\frac{p+1}{p}}^{q(1-\alpha')+1} \right]^{\frac{q}{q+1}} + \left\| F(x) \right\|_r.$$

Agora vamos usar o fato de que a aplicação $(\Delta + MId) : W_*(\Omega) \longrightarrow L_*(\Omega)$ é um isomorfismo, em que

$$W_*(\Omega) = \left\{ U \in W; \int_\Omega U \cdot \Phi = 0 \right\}$$

e

$$L_*(\Omega) = \left\{ U \in L; \int_\Omega U \cdot \Phi = 0 \right\}.$$

Basta observar que $\ker\{\Delta + MId\} = \{0\}$ e pela alternativa de Fredholm obtemos a sobrejetividade. Assim, existe constante $C > 0$, tal que

$$\left\| U_1 \right\|_W \leq C \left\| \Delta U_1 + M U_1 \right\|_L.$$

Portanto, da desigualdade anterior

$$\left\| U_1 \right\|_W \leq C \left\| F(x) \right\|_r^{\frac{\alpha p}{p+1}} \left\| v \right\|_{2,\frac{q+1}{q}}^{[p(1-\alpha)+1]\frac{p}{p+1}} + C \left\| F(x) \right\|_r^{\frac{\alpha' q}{q+1}} \left\| u \right\|_{2,\frac{p+1}{p}}^{[q(1-\alpha')+1]\frac{q}{q+1}} + \left\| F(x) \right\|_r.$$

Usando a decomposição $U = t\Phi + U_1$ e a estimativa (2.8) para t, resulta

$$\begin{aligned} \left\| U_1 \right\|_W \leq C &\left(\left\| F \right\|_r^{\left[\alpha + \frac{p(1-\alpha)+1}{p}\right]\frac{p}{p+1}} + \left\| F \right\|_r^{\left[\alpha + \frac{p(1-\alpha)+1}{q}\right]\frac{p}{p+1}} + \left\| F \right\|_r^{\frac{\alpha p}{p+1}} \left\| U_1 \right\|_{2,\frac{q+1}{q}}^{[p(1-\alpha)+1]\frac{p}{p+1}} \right) \\ &+ C \left(\left\| F \right\|_r^{\left[\alpha' + \frac{q(1-\alpha')+1}{p}\right]\frac{q}{q+1}} + \left\| F \right\|_r^{\left[\alpha' + \frac{q(1-\alpha')+1}{q}\right]\frac{q}{q+1}} + \left\| F \right\|_r^{\frac{\alpha' q}{q+1}} \left\| U_1 \right\|_{2,\frac{p+1}{p}}^{[q(1-\alpha')+1]\frac{q}{q+1}} \right) \\ &+ \left\| F \right\|_r. \end{aligned} \tag{2.14}$$

A fim de aplicarmos a desigualdade de Young na desiguldade (2.14) resta mostrarmos que

$$\frac{1}{\theta} = [p\,(1-\alpha)+1]\,\frac{p}{p+1} < 1 \tag{2.15}$$

e também que

$$\frac{1}{\omega} = [q\,(1-\alpha')+1]\,\frac{q}{q+1} < 1. \tag{2.16}$$

A hipótese $1 < p, q < \frac{N+1}{N-1}$, juntamente com os valores encontrados para α e α' nos permitem mostrar que as desigualdades (2.15) e (2.16) são verdadeiras. Então, aplicando a desigualdade de Young, obtemos

$$\|U_1\|_W \le C\left(\|F\|_r^{\left[\alpha+\frac{p(1-\alpha)+1}{q}\right]\frac{p}{p+1}} + \|F\|_r^{\frac{\alpha p}{p+1}\theta'} + \|F\|_r^{\left[\alpha'+\frac{q(1-\alpha')+1}{p}\right]\frac{q}{q+1}} + \|F\|_r^{\frac{\alpha' q}{q+1}\omega'} + \|F\|_r\right),$$

em que, θ' e ω' são os expoentes conjugados de θ e ω respectivamente. Como $\|U\|_W \le |t|\,\|\Phi\|_W + \|U_1\|_W$, concluímos

$$\begin{aligned}\|U\|_W \le{}& C\left(\|F\|_r^{\left[\alpha+\frac{p(1-\alpha)+1}{q}\right]\frac{p}{p+1}} + \|F\|_r^{\frac{\alpha p}{p+1}\theta'} + \|F\|_r^{\left[\alpha'+\frac{q(1-\alpha')+1}{p}\right]\frac{q}{q+1}} + \|F\|_r^{\frac{\alpha' q}{q+1}\omega'} + \|F\|_r\right)\\ &+ C\left(\|F\|_r^{\frac{1}{p}} + \|F\|_r^{\frac{1}{q}}\right),\end{aligned} \tag{2.17}$$

Note que encontramos uma limitação para U no espaço $W = W^{2,\frac{p+1}{p}} \times W^{2,\frac{q+1}{q}}$ e para passarmos essa limitação para o espaço $C_0^1(\overline{\Omega})^2$ vamos utilizar um argumento do tipo bootstrap, (veja Seção 2.3). Para isso, tomamos em (2.27), na Seção 2.3, os valores

$$H\,(x,U) = MU + G(U) + F(x) \quad \text{e} \quad m = \min\left\{\frac{p+1}{p}, \frac{q+1}{q}\right\}.$$

Sendo assim, concluímos que $U \in \left(W^{2,r} \cap H_0^1\,(\Omega)\right)^2$ e vale a desigualdade

$$\|U\|_{2,r} \le C\left(\|F\|_r^{\gamma} + \|U\|_{2,m}^{\eta}\right),$$

com $\gamma, \eta \ge 1$. Consequentemente

$$\|U\|_{2,r} \le C\left(\|F\|_r^{\gamma} + \|U\|_W^{\eta}\right). \tag{2.18}$$

Usando o fato de que $r > N$ e as desigualdades (2.17) e (2.18), concluímos

$$\|U\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} \leq \rho\left(\|F\|_r\right).$$

Caso 2: $t < 0$. Pelos mesmos argumentos utilizados na demonstração do Lema 1.1, temos $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$|t| \leq \frac{C}{\epsilon_0}\|u_1\|_{C_0^1(\Omega)} + \frac{C}{\epsilon_0}\|v_1\|_{C_0^1(\Omega)} = C\|U_1\|_{C_0^1(\Omega)}.$$

Note que, a desigualdade (2.9) continua verdadeira. Além disso, como $t < 0$ temos que $v^+ < v_1$. Portanto, semelhante ao caso anterior temos

$$\int_\Omega v_+^{p+1} \leq \left(\int_\Omega v_+^p\phi_1\right)^\alpha \left(\int_\Omega \frac{v_1^{p+\frac{1}{1-\alpha}}}{\phi_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\right)^{1-\alpha},$$

analogamente, $u^+ < u_1$ e vale que

$$\int_\Omega u_+^{q+1} \leq \left(\int_\Omega u_+^q\phi_1\right)^{\alpha'} \left(\int_\Omega \frac{u_1^{q+\frac{1}{1-\alpha'}}}{\phi_1^{\frac{\alpha'}{1-\alpha'}}}\right)^{1-\alpha'}$$

Aplicando o Lema B.10, obtemos

$$\int_\Omega v_+^{p+1} \leq C\|F(x)\|_r^\alpha \|v_1\|_{2,\frac{q+1}{q}}^{p(1-\alpha)+1}. \tag{2.19}$$

e

$$\int_\Omega u_+^{q+1} \leq C\|F(x)\|_r^{\alpha'} \|u_1\|_{2,\frac{p+1}{p}}^{q(1-\alpha')+1}. \tag{2.20}$$

Substituindo (2.19) e (2.20) na desiguladade (2.9), para as mesmas escolhas de α e α', concluímos que

$$\begin{aligned}\|U_1\|_W &\leq C\left(\|F(x)\|_r^{\frac{\alpha p}{p+1}}\|v_1\|_{2,\frac{q+1}{q}}^{[p(1-\alpha)+1]\frac{p}{p+1}} + \|F(x)\|_r^{\frac{\alpha' q}{q+1}}\|u_1\|_{2,\frac{p+1}{p}}^{[q(1-\alpha')+1]\frac{q}{q+1}} + \|F(x)\|_r\right)\\ &\leq C\left(\|F(x)\|_r^{\frac{\alpha p}{p+1}}\|U_1\|_{2,\frac{q+1}{q}}^{[p(1-\alpha)+1]\frac{p}{p+1}} + \|F(x)\|_r^{\frac{\alpha' q}{q+1}}\|U_1\|_{2,\frac{p+1}{p}}^{[q(1-\alpha')+1]\frac{q}{q+1}} + \|F(x)\|_r\right),\end{aligned}$$

aplicando a desigualdade de Young, resulta

$$\|U_1\|_W \leq C\left(C\|F\|_r^{\frac{\alpha p}{p+1}\theta'} + \|F\|_r^{\frac{\alpha' q}{q+1}\omega'} + \|F\|_r\right). \tag{2.21}$$

Assim como no caso anterior vamos usar o argumento de bootstrap, (veja Seção 2.3). Observe que U_1 satisfaz a equação

$$\begin{cases} -\Delta U_1 = MU_1 + G(U) + F(x) & x \in \Omega \\ U = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

Sendo assim, basta tomarmos em (2.27),

$$H\left(x, U_1\right) = MU_1 + G(U) + F(x) \quad \text{e} \quad m = \min\left\{\frac{p+1}{p}, \frac{q+1}{q}\right\}.$$

Sendo assim, concluímos que $U_1 \in \left(W^{2,r} \cap H_0^1\left(\Omega\right)\right)^2$ e vale a desigualdade

$$\|U_1\|_{2,r} \leq C\left(\|F\|_r^{\gamma} + \|U_1\|_{2,m}^{\eta}\right),$$

consequentemente

$$\|U_1\|_{2,r} \leq C\left(\|F\|_r^{\gamma} + \|U_1\|_W^{\eta}\right), \tag{2.22}$$

para constantes $\gamma, \eta \geq 1$. Usando o fato de $r > N$ e pelas desigualdades (2.21) e (2.22), concluímos

$$\|U_1\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} \leq \rho\left(\|F\|_r\right).$$

Por fim, usando a decomposição $U = t\Phi + u_1$ e a limitação $|t| \leq C\, \|U_1\|_{C_0^1(\Omega)}$, obtemos

$$\|U\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} \leq \rho\left(\|F\|_r\right).$$

□

2.2. Resultado de Existência

Vamos agora demonstrar o resultando de existência de soluções para o sistema (2.2).

2.2 Teorema. *Assumindo as hipoteses do Lema (2.1) existe pelo menos uma solução* $U = (u, v) \in \left(W^{2,r}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)^2$ *do sistema (2.2).*

Na demonstração vamos proceder da seguinte forma, vamos mostrar que toda solução $U = (u, v) \in H$ do sistema (2.2) é não degenerada com índice 1, para funções f e g pequenas e satisfazendo a condição (2.5). Considere a linearização de problema (2.2), para (u_0, v_0) uma possível solução

$$\begin{cases} -\Delta w = aw + bz + p(v_0^+)^{p-1}z & x \in \Omega \\ -\Delta z = cw + az + q(u_0^+)^{q-1}w & x \in \Omega \\ w = z = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.23}$$

A não degeneracidade e o cálculo do índice são consequência dos seguintes resultados:

2.3 Lema. *Existe $\epsilon > 0$ tal que; para cada $m, k \in L^\infty$, $s \in \mathbb{R}$ e $t \in [0,1]$ tal que $m, k \geq 0$ q.t.p., $m \neq 0$, $k \neq 0$, $\|m\|_\infty < \epsilon$, $\|k\|_\infty < \epsilon$ e $0 < s < \epsilon$. Então o sistema*

$$\begin{cases} -\Delta w = aw + bz + tm(x)z + (1-t)sz & x \in \Omega \\ -\Delta z = cw + az + tk(x)w + (1-t)sw & x \in \Omega \\ w = z = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.24}$$

possui somente solução trivial $w = z = 0$.

Demonstração. Primeiramente escrevemos o sistema acima na forma matricial

$$\begin{cases} -\Delta W = MW + M(x)W & x \in \Omega \\ W = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

em que

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad M(x) = \begin{pmatrix} 0 & tm(x) + (1-t)s \\ tk(x) + (1-t)s & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad W = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}.$$

Vamor argumentar por absurdo. Assumimos que existem sequências de funções $m_n(x)$ e $k_n(x)$; $n \in \mathbb{N}$, com $m_n(x), k_n(x) \not\equiv 0$ e $m_n(x), k_n(x) \leq \frac{1}{n}$, e também sequências de números $t_n \in [0,1]$ e $s_n \in \left(0, \frac{1}{n}\right]$ tal que o sistema (2.24) possui, para cada n, solução não trivial $W_n = (w_n, z_n)$. Considere a sequência

$$\widetilde{W}_n = \frac{W_n}{\|W_n\|_2}.$$

Para cada n, temos que

$$\begin{cases} -\Delta\widetilde{W}_n = M\widetilde{W}_n + M_n(x)\widetilde{W}_n & x \in \Omega \\ \widetilde{W}_n = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.25}$$

Usando, na igualdade anterior, $\widetilde{W}_n$ como função teste, obtemos

$$\int_\Omega -\Delta\widetilde{W}_n \cdot \widetilde{W}_n = \int_\Omega M\widetilde{W}_n \cdot \widetilde{W}_n + \int_\Omega M_n(x)\widetilde{W}_n \cdot \widetilde{W}_n,$$

como $\left\|\widetilde{W}_n\right\|_2$ é limitada resulta que $\left\|\widetilde{W}_n\right\| < C$. Logo existe $\widetilde{W} \in H$ tal que, $\widetilde{W}_n \rightharpoonup \widetilde{W}$ em H e também que $\widetilde{W}_n \longrightarrow \widetilde{W}$ em $L^2 \times L^2$. Além disso, do sistema (2.25), obtemos também que

$$\int_\Omega -\Delta\widetilde{W}_n \cdot \Psi = \int_\Omega M\widetilde{W}_n \cdot \Psi + \int_\Omega M_n(x)\widetilde{W}_n \cdot \Psi,$$

para toda função teste $\Psi \in H$. Passando o limite na igualdade anterior, concluímos que $\widetilde{W}$ é solução fraca do sistema

$$\begin{cases} -\Delta\widetilde{W} = M\widetilde{W} & x \in \Omega \\ \widetilde{W} = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

portanto $\widetilde{W} = c\Phi$, para $c \in \mathbb{R}$. Sendo assim, $\widetilde{W}$ tem sinal bem definido e podemos dizer que para n suficientemente grande o mesmo acontece para $\widetilde{W}_n$.

Por outro lado, usando Φ como função teste, temos para cada n

$$\int_\Omega M_n(x)\widetilde{W}_n \cdot \Phi = 0$$

o que é uma contradição com o fato de $\widetilde{W}_n$ ter sinal definido, $s_n > 0$ e $0 \leq m_n(x), k_n(x) \not\equiv 0$.

□

2.4 Lema. *Seja $0 < s < \lambda_2 - \lambda_1$ fixado, considere o seguinte problema de autovalor com parametro μ*

$$\begin{cases} -\Delta w = \mu(aw + bz + sz) & x \in \Omega \\ -\Delta z = \mu(bw + az + sw) & x \in \Omega \\ w = z = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.26}$$

Então existe somente um autovalor μ no intervalo $[0, 1]$.

Demonstração. Sabemos que as autofunções $\{\phi_n\}_n$, com $n \geq 1$, do operador Laplaciano formam uma base para o espaço $H_0^1(\Omega)$. Logo w e z podem ser escritos como combinação linear destes elementos, isto é,

$$w = \sum \gamma_n \phi_n \qquad \text{e} \qquad z = \sum \eta_n \phi_n.$$

Assim como foi feito no do Apêndice C, obtemos que μ é um autovalor de (2.26) se, e somente se, λ_n/μ é um autovalor da matriz

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} a & b+s \\ b+s & a \end{pmatrix}$$

isto é, $\mu = \frac{\lambda_n}{a+b+s}$ ou $\mu = \frac{\lambda_n}{a-b-s}$. Como $\lambda_1 = a+b$, temos que $\mu_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+s}$ e $\mu_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+s}$. Usando a hipótese $0 < s < \lambda_2 - \lambda_1$, concluímos que $\mu_1 < 1 < \mu_2$. $\square$

Demonstração. **Demonstração do Teorema (2.2):**
Considere a aplicação $T_F : C_0^1(\Omega)^2 \longrightarrow C_0^1(\Omega)^2$ tal que

$$\begin{aligned} T_F(U) &= (-\Delta)^{-1}\left(MU + G(U) + F(x)\right) \\ &= \left((-\Delta)^{-1}\left(au + bv + v_+^p + f(x)\right), (-\Delta)^{-1}\left(bu + av + u_+^q + g(x)\right)\right). \end{aligned}$$

Note que T_F é um operador compacto e contínuo e $T_F(u,v) = (u,v)$ se, e somente se, $U = (u,v)$ é solução do problema (2.2). Considere $F_1 = (f_1, g_1)$ com

$$f_1 = -(\gamma\phi_1)^p \quad \text{e} \quad g_1 = -(\gamma\phi_1)^q$$

em que $\gamma > 0$. Sendo assim, $U_0 = (u_0, v_0) = (\gamma\phi_1, \gamma\phi_1)$ é solução do problema (2.3) para F_1. De fato, como $G(U_0) = -F_1(x)$, resulta que

$$AU_0 + G(U_0) + F_1(x) = AU_0 = \gamma A\Phi = -\gamma\Delta\Phi = -\Delta U_0.$$

Considere a seguinte homotopia $H : [0,1] \times C_0^1(\Omega)^2 \longrightarrow C_0^1(\Omega)^2$ com

$$H(\tau, U) = \left((I - (-\Delta)^{-1})\left(MU + G(U) + (1-\tau)F(x) + \tau F_1(x)\right)\right).$$

Note que,

$$H(0,U) = \left((I - (-\Delta)^{-1})(MU + G(U) + F(x))\right) = I - T_F$$

e

$$H(1,U) = \big((I - (-\Delta)^{-1})(MU + G(U) + F_1(x))\big) = I - T_{F_1}.$$

Além disso, segue da estimativa a priori, Lema (2.1), que toda solução de

$$\begin{cases} -\Delta U = MU + G(U) + (1-\tau)F(x) + \tau F_1(x) & x \in \Omega \\ U = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

é uniformemente limitada em $C_0^1(\Omega)^2$. Sendo assim, para $R > 0$ suficientemente grande, temos que $H(\tau, U) \neq 0$ para todo $(\tau, U) \in [0,1] \times \partial B_{C_0^1(\Omega)^2}(0,R)$. Segue portanto, que a homotopia H é admissível (veja Apêndice D), e pela propriedade da invariância por homotopia do grau topológico, temos que

$$\deg(I - T_F, B_{C_0^1(\Omega)^2}(0,R), 0) = deg(I - T_{F_1}, B_{C_0^1(\Omega)^2}(0,R), 0).$$

Façamos γ suficientemente pequeno tal que o Lema (2.3) seja aplicável para

$$m(x) = pv_+^{p-1} \quad \text{e} \quad k(x) = qu_+^{q-1}$$

para toda (u,v) solução arbitrária de (2.2) com $F_1 = (f_1, g_1)$. Aplicando então o Lema (2.3) para $t = 1$, obtemos que (u,v) é não degenerada. Além disso, o índice de $I - T_{F_1}$ pode ser calculado através da homotopia dada em (2.24) e este coincide com o índice da solução trivial de (2.24) para $t = 0$. Usando o Lema (2.4) nós deduzimos que esse índice é -1, (veja também Teorema (D.8)). Portanto

$$\deg(I - T_{F_1}, B_{C_0^1(\Omega)^2}(0,R), 0) = \sum(-1) \neq 0.$$

Note que a soma acima é finita veja detalhes em (D.2). Portanto,

$$\deg(I - T_F, B_{C_0^1(\Omega)^2}(0,R), 0) \neq 0.$$

□

2.3. Regularidade

Seja $\Omega \in \mathbb{R}^N$ um domínio suave e limitado, com $N \geq 3$. Vamos discutir a regularidade do seguinte sistema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta U = H(x, U(x)) & x \in \Omega \\ U(x) = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.27}$$

em que $U(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}$ e $H(x, U(x)) = \begin{pmatrix} h(x,u,v) \\ k(x,u,v) \end{pmatrix}$. As funções $h, k : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e existem $F(x) = (f(x), g(x)) \in L^r(\Omega) \times L^r(\Omega)$ e $C > 0$ tais que

$$|H(x, U)| \leq C\left(|F(x)| + |U|^s\right) \tag{2.28}$$

com $1 < s < 1 + \frac{2q_0}{N}$, em que q_0 será definido a seguir, e algum $r > N$.

Considere U solução fraca de (2.27) tal que $U \in W^{2,m} \times W^{2,m}(\Omega)$ com $m < N/2$. Vamos mostrar que $U \in W^{2,r} \times W^{2,r}(\Omega)$ e que existe constante $C > 0$, tal que

$$\|U\|_{2,r} \leq C \|F\|_r^{\gamma} + C \|U\|^{\eta},$$

com $\gamma, \eta \geq 1$

Sabemos que, para $m < N/2$ e Ω limitado, vale a seguinte imersão

$$W^{2,m} \times W^{2,m}(\Omega) \hookrightarrow L^{\sigma} \times L^{\sigma}(\Omega) \quad \forall \sigma \in \left[m, \frac{Nm}{N-2m}\right]. \tag{2.29}$$

Assim como no capítulo anterior, vamos utilizar o argumento do tipo bootstrap. Denotando $q_0 = \frac{Nm}{N-2m}$, iniciamos o processo com $p_1 = \frac{q_0}{s}$. Note que, pela desigualdade (2.28), temos

$$\int_{\Omega} |H(x,U)|^{p_1} \leq \int_{\Omega} |F(x)|^{p_1} + C \int_{\Omega} |U|^{q_0}. \tag{2.30}$$

A segunda integral do lado direito sabemos ser finita, devido a imersão anterior. Neste momento temos duas opções a analisar quanto a integrabilidade do primeira integral, a saber

Caso 1: Se $p_1 > r$ então consideramos r no lugar de p_1 e temos

$$\int_\Omega |H(x,U)|^r \leq \int_\Omega |F(x)|^r + C\int_\Omega |U|^{rs}. \tag{2.31}$$

Como $p_1 = \frac{q_0}{s} > r$ temos que $rs < q_0$, assim pela imersão (2.29), concluímos que $|H| \in L^r(\Omega)$. Aplicando o Teorema (B.13) obtemos que $u, v \in W^{2,r} \cap H_0^1(\Omega)$ e também que existe constante positiva tal que

$$\|U\|_{2,r} \leq C\|H\|_r .$$

Usando a desigualdade (2.31), resulta

$$\|U\|_{2,r} \leq C\left(\|F\|_r + \|U\|_{rs}^s\right),$$

novamente usando a imersão (2.29), concluímos

$$\|U\|_{2,r} \leq C\left(\|F\|_r + \|U\|_{2,m}^s\right).$$

Caso 2: Se $p_1 \leq r$ então temos a integrabilidade de ambas as integrais em (2.30). Logo $|H| \in L^{p_1}(\Omega)$. Novamente, aplicando o Teorema (B.13) obtemos que $u, v \in W^{2,p_1} \cap H_0^1(\Omega)$ e também que existe constante positiva tal que

$$\|U\|_{2,p_1} \leq C\|H\|_{p_1} .$$

Usando a desigualdade (2.30), resulta

$$\|U\|_{2,p_1} \leq C\left(\|F\|_{p_1} + \|U\|_{q_0}^s\right),$$

novamente usando a imersão (2.29), concluímos

$$\|U\|_{2,p_1} \leq C\left(\|F\|_r + \|U\|_{2,m}^s\right). \tag{2.32}$$

Agora temos que analisar três situações:

Caso 2i: Se $2p_1 > N$ então pelo Teorema B.12 (iii), temos que $u, v \in C^{0,\alpha}$ com $\alpha < 1$. Portanto, podemos considerar novamente r no lugar de p_1 em (2.30) e concluímos que $|H| \in L^r(\Omega)$. Aplicando o Teorema (B.13), resulta que $|U| \in W^{2,r}(\Omega)$ e

$$\|U\|_{2,r} \leq C\|H\|_r ,$$

usando a desigualdade (2.30), resulta que

$$\begin{aligned}\|U\|_{2,r} &\leq C\left(\|F\|_r + \|U\|_{rs}^s\right)\\ &\leq C\left(\|F\|_r + \|U\|_{C^0(\overline{\Omega})}^s\right).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|U\|_{2,r} \leq C\left(\|F\|_r + \|U\|_{2,p_1}^s\right),$$

e usando a desigualdade, (2.32), obtemos

$$\|U\|_{2,r} \leq C\left(\|F\|_r + \|F\|_r^s + \|U\|_{2,m}^{s^2}\right).$$

Caso 2ii: Se $2p_1 = N$ então pelo Teorema (B.12)(ii) vale a imersão $W^{2,p_1}(\Omega) \hookrightarrow L^\sigma$ para todo $p_1 < \sigma < \infty$. Usando esta imersão para $\sigma = rs$, temos que $|U| \in L^{rs}$, logo

$$\int_\Omega |H(x,U)|^r \leq \int_\Omega |F(x)|^r + C\int_\Omega |U|^{rs} < \infty, \tag{2.33}$$

portanto, $|H| \in L^r(\Omega)$. Pelo Teorema (B.13), resulta que $|U| \in W^{2,r}(\Omega)$ e

$$\|U\|_{2,r} \leq C\,\|H\|_r\,,$$

usando a desigualdade (2.33), resulta que

$$\begin{aligned}\|U\|_{2,r} &\leq C\left(\|F\|_r + \|U\|_{rs}^s\right)\\ &\leq \left(\|F\|_r + \|U\|_{2,p_1}^s\right).\end{aligned}$$

Usando a desigualdade, (2.32), obtemos

$$\|U\|_{2,r} \leq C\left(\|F\|_r + \|F\|_r^s + \|U\|_{2,m}^{s^2}\right).$$

Caso 2iii: Se $2p_1 > N$ então aplicamos o Teorema (B.12)(i) e concluimos que $u, v \in L^{q_1}(\Omega)$, em que $q_1 = \frac{Np_1}{N-2p_1}$. Note que,

$$\int_\Omega |H(x,U)|^{q_1/s} \leq \int_\Omega |F(x)|^{q_1/s} + C\int_\Omega |U|^{q_1}.$$

Então vamos repetir o processo, agora com $p_2 = q_1/s$.

Vamos iterar o processo k vezes para obter números p_m e q_m com $m = 1, ...k$, tais que

$$p_m = \frac{q_{m-1}}{s} \quad \text{e} \quad q_m = \frac{Np_m}{(N - 2p_m)}.$$

Note que, o número de iterações é finito. Isto é, existe $k > 0$ tal que $2p_k > N$. De fato, como $s < 1 + \frac{2q_0}{N}$, temos que

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{q_1}{q_0} = \frac{N}{Ns - 2.q_0} > \frac{N}{N(1 + \frac{2q_0}{N}) - 2.q_0} = 1.$$

Portanto,

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \delta,$$

para algum $\delta > 0$. Agora;

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{q_2}{q_1} = \frac{p_2}{p_1}\left(\frac{N - 2p_1}{N - 2p_2}\right) > \frac{p_2}{p_1} = 1 + \delta.$$

de onde se conclui que $p_3 > p_2(1 + \delta)$. Mas $p_2 = (1 + \delta)p_1$ portanto $p_3 > (1 + \delta)^2 p_1$. Iterando o processo temos

$$p_k > (1 + \delta)^{k-1} p_1.$$

Logo, para algum k suficientemente grande temos $2p_k > N$. Portanto, o número de iterações é finito.

Sendo assim, concluímos que $U \in W^{2,r}(\Omega) \times W^{2,r}(\Omega)$ e que

$$\|U\|_{2,r} \leq C \|F\|_r^{\gamma} + C \|U\|^{\eta},$$

com $\gamma, \eta \geq 1$.

Capítulo 3

Problema Bi-Harmônico

Neste capítulo vamos discutir a resolubilidade do seguinte problema bi-harmônico

$$\begin{cases} (-\Delta)^2 u = \lambda_1^2 u + u_+^p + f(x) & x \in \Omega \\ u = \Delta u = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

em que Ω é um domínio suave limitado de $\mathbb{R}^N$, com $N > 5$. A função $f \in L^r(\Omega)$, com $r > N/3$. Consideramos também $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \leq \lambda_n \leq ...$ os autovalores de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ e $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n, ...$ as correspondentes autofunções. Consideramos a primeira autofunção ϕ_1 positiva, com norma em $L^2(\Omega)$ normalizada igual a 1. Denotamos o espaço $H = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Vamos trabalhar com a mesma estratégia dos capítulos anteriores, buscando uma estimativa a priori para possíveis soluções de (3.1) e posteriormente a existência de soluções usando a teoria de grau topológico.

3.1. Algumas observações sobre o operador bi-harmônico

Nesta seção vamos apresentar algumas observações e resultados sobre o operador bi-harmônico. Considere o problema linear

$$\begin{cases} (-\Delta)^2 u = f(x) & x \in \Omega \\ u = \Delta u = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

com $f \in L^2(\Omega)$. A condição de fronteira acima é denominada condição de Navier. Sabemos que uma solução fraca para o problema (3.2) é uma função $u \in H = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$

tal que para toda $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$,

$$\int_\Omega (\Delta u \Delta v - fv) = 0,$$

além disso, se $\partial\Omega$ é de classe C^2 então existe uma única solução fraca de (3.2).

Considere também o problema de autovalor de Δ^2 sob a condição de fronteira de Navier

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \mu u & x \in \Omega \\ u = \Delta u = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.3}$$

dizemos que μ é um autovalor de Δ^2 se existe $u \in H$ solução fraca do problema (3.3). Os autovalores de Δ^2 formam uma sequência $0 < \mu_1 < \mu_2 \leq ...$ e existe base ortonormal de H formada por autofunções associadas a (μ_n). Além disso, para o caso da fronteira com condição de Navier, as autofunções associadas ao operador Δ^2 são as mesmas do operador Laplaciano.

Considere o problema de autovalor envolvendo o operador bi-harmônico com peso e condição de fronteira de Navier:

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \mu m(x) u & x \in \Omega \\ u = \Delta u = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.4}$$

em que, o peso $m(x) \in L^\infty(\Omega)$ é uma função não negativa e não trivial. Sabemos que os autovalores μ formam uma sequência $0 < \mu_1(m) < \mu_2(m) \leq ...$, além disso, possuem caracterização variacional

$$\frac{1}{\mu_k(m)} = \sup_{F_k} \inf \left\{ \int_\Omega m u^2; \quad u \in F_k \ \text{ e } \ \int_\Omega |\Delta u|^2 = 1 \right\} \tag{3.5}$$

em que F_k varia sobre todos os subespaços k-dimensionais de H. Vamos mostrar que a monotonicidade estrita dos autovalores vale se, e somente se, a correspondente autofunção satisfaz o Princípio da Continuação Única. A notação $\leq\neq$ significa a desigualdade q.t.p. juntamente com a desigualdade estrita em um conjunto de medida positiva.

3.1 Proposição. *Sejam m, $\tilde{m}$ pesos com $m \leq\neq \tilde{m}$ e seja $j \in \mathbb{Z}_0$. Se a autofunção associada a $\mu_j(m)$ satisfaz o Princípio da Continuação Única, veja Definição C.3, então $\mu_j(m) > \mu_j(\tilde{m})$.*

Demonstração. Como o extremo em (3.5) é atingido existe $F_j \in H$ de dimensão j, tal que

$$\frac{1}{\mu_j(m)} = \inf\left\{\int_\Omega mu^2; \quad u \in F_j \quad \text{e} \quad \int_\Omega |\Delta u|^2 = 1\right\}. \tag{3.6}$$

Escolha $u \in F_j$, com $\int_\Omega |\Delta u|^2 = 1$. Temos que, ou u atinge o ínfimo em (3.6) ou não. No primeiro caso, u é a autofunção associada a $\mu_j(m)$, e então pelo Príncipio da Continuação Única, temos

$$\frac{1}{\mu_j(m)} = \int_\Omega mu^2 < \int_\Omega \tilde{m}u^2.$$

No segundo caso,

$$\frac{1}{\mu_j(m)} < \int_\Omega mu^2 \leq \int_\Omega \tilde{m}u^2.$$

Em ambos os casos, temos

$$\frac{1}{\mu_j(m)} < \int_\Omega \tilde{m}u^2. \tag{3.7}$$

Usando argumentos de compacidade podemos dizer que

$$\frac{1}{\mu_j(m)} < \inf\left\{\int_\Omega \tilde{m}u^2; \quad u \in F_j \quad \text{e} \quad \int_\Omega |\Delta u|^2 = 1\right\}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{\mu_j(m)} < \frac{1}{\mu_j(\tilde{m})}.$$

□

Posteriormente vamos utilizar o seguinte fato,

3.2 Teorema. *Seja u solução de 3.4 com $|m(x)| < M$. Se o conjunto $E = \{x \in \Omega; u\,(x) = 0\}$ tem medida positiva então u é identicamente nula em Ω. Ou seja, a solução u satisfaz o princípio da continuação única.*

Demonstração. Veja demontração em [9].

□

3.2. Estimativa a priori

Nesta seção vamos apresentar uma estimativa a priori para possíveis soluções do problema (3.1).

3.3 Teorema. *Considere*

$$\max\left\{1, \frac{4}{N-4}\right\} < p < \frac{N+1}{N-3} \tag{3.8}$$

e a função $f \in L^r(\Omega)$ com $r > \frac{N}{3}$, tal que

$$\int_\Omega f(x)\phi_1 < 0. \tag{3.9}$$

Então toda possível solução $u \in H$ de (3.1) satisfaz

$$\|u\|_{C_0^1(\bar{\Omega})} \leq \rho(\|f\|_r), \tag{3.10}$$

onde $\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função crescente dependendo de p e Ω e tal que $\rho(0) = 0$.

Demonstração. Seja $u \in H$ solução fraca do problema (3.1). Multiplicando (3.1) por ϕ_1 e integrando, temos

$$\int_\Omega (-\Delta u)^2\phi_1 = \int_\Omega \lambda_1^2 u\phi_1 + \int_\Omega u_+^p\phi_1 + \int_\Omega f\phi_1,$$

logo,

$$\int_\Omega u_+^p\phi_1 = -\int_\Omega f\phi_1 \leq C\,\|f\|_r\,. \tag{3.11}$$

Podemos decompor $u = t\phi_1 + u_1$ com u_1 ortogonal a ϕ_1 em $H_0^1(\Omega)$ e consequentemente também em $L^2(\Omega)$. Multiplicando esta decomposição por ϕ_1 e integrando, obtemos

$$\int_\Omega u\phi_1 = t\int_\Omega \phi_1^2 + \int_\Omega u\phi_1,$$

portanto,

$$t = C\int_\Omega u\phi_1 = C\int_\Omega (u_+ - u_-)\phi_1 \leq C\left(\int_\Omega u_+^p\phi_1\right)^{1/p},$$

pela desigualdade (3.11), concluímos

$$t \leq C \|f\|_r^{1/p}. \tag{3.12}$$

Note que se $t > 0$ então encontramos uma estimativa para $|t|$. Nesse caso resta encontramos uma estimativa para u_1. Sendo assim, vamos dividir a demonstração em duas partes:

Caso 1: $t \geq 0$. Vamos primeiramente encontrar uma limitação para u_1 no espaço $W^{4,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$. Note que, u_1 satisfaz a igualdade:

$$\int_\Omega (-\Delta)^2 u_1 = \int_\Omega \lambda_1^2 u_1 + \int_\Omega u_+^p + \int_\Omega f(x),$$

passando a norma $L^{\frac{p+1}{p}}$ em ambos os lados da igualdade anterior, temos

$$\int_\Omega \left|(-\Delta)^2 u_1 - \lambda_1^2 u_1\right|^{\frac{p+1}{p}} \leq \int_\Omega u_+^{p+1} + \int_\Omega |f(x)|^{\frac{p+1}{p}}. \tag{3.13}$$

Vamos estimar cada integral do lado direito da desigualdade anterior. Podemos escrever a primeira integral do lado direito na forma

$$\int_\Omega u_+^{p+1} = \int_\Omega u_+^{p\alpha} \phi_1^\alpha \phi_1^{-\alpha} u_+^{p(1-\alpha)+1}$$

para $0 < \alpha < 1$ a ser determinado posteriormente. Aplicando a desigualdade de *Hölder* juntamente com a desigualdade (3.11), obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_+^{p+1} &\leq \left(\int_\Omega u_+^p \phi_1\right)^\alpha \left(\int_\Omega \frac{u_+^{p+\frac{1}{1-\alpha}}}{\phi_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\right)^{1-\alpha} \\ &\leq \|f\|_r^\alpha \left(\int_\Omega \frac{u_+^{p+\frac{1}{1-\alpha}}}{\phi_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\right)^{1-\alpha} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Pela hipótese sobre p temos que $\frac{p+1}{p} < \frac{N}{4}$, além disso, como $r > N/3$ concluímos que $\frac{p+1}{p}\frac{1}{r} < 1$. Aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_\Omega |f(x)|^{\frac{p+1}{p}} \leq C \left(\int_\Omega |f(x)|^r\right)^{\frac{p+1}{p}\frac{1}{r}} = C \|f(x)\|_r^{\frac{p+1}{p}}. \tag{3.15}$$

Substituindo (3.14) e (3.15) em (3.13), resulta

$$\int_\Omega \left|(-\Delta)^2 u_1 - \lambda_1^2 u_1\right|^{\frac{p+1}{p}} \leq \|f\|_r^\alpha \left(\int_\Omega \frac{u_+^{p+\frac{1}{1-\alpha}}}{\phi_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\right)^{1-\alpha} + \|f(x)\|_r^{\frac{p+1}{p}},$$

isto é,

$$\left\|(-\Delta)^2 u_1 - \lambda_1^2 u_1\right\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} \leq \|f(x)\|_r^\alpha \left(\int_\Omega \frac{u_+^{p+\frac{1}{1-\alpha}}}{\phi_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\right)^{1-\alpha} + \|f(x)\|_r^{\frac{p+1}{p}}. \tag{3.16}$$

Vamos agora estimar a integral

$$I = \left(\int_\Omega \frac{u_+^{p+\frac{1}{1-\alpha}}}{\phi_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\right)^{1-\alpha},$$

para isso, vamos usar o Corolário (B.11). Note que, podemos escrever a integral I da seguinte forma

$$I = \left\|\frac{u_+}{\phi_1^\tau}\right\|_t^{p(1-\alpha)+1},$$

em que,

$$t = p + \frac{1}{1-\alpha} \quad \text{e} \quad \tau t = \frac{\alpha}{1-\alpha}. \tag{3.17}$$

Definimos

$$L = \frac{p}{p+1} - \frac{4}{N}.$$

Usando o lado esquerdo da desigualdade (3.8) obtemos que $L > 0$. Logo temos que $1 < \frac{p+1}{p} < \frac{N}{4}$. Portanto, vamos usar o Corolário (B.11) considerando $s = \frac{p+1}{p}$ e $m = 2$. Além disso, para que todas as hipóteses deste sejam satisfeitas, resta encontrar $\alpha \in (0,1)$ tal que

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{s} - \frac{4-\tau}{N}. \tag{3.18}$$

Das igualdades (3.17) e (3.18) podemos determinar os valores de α, τ e t em função de N e p:

$$\alpha = \frac{N - NL - NLp}{1 + N - pLN}, \quad \tau = \frac{N - NL - NLp}{1 + N + p}, \quad t = \frac{1 + N + p}{1 + NL}. \tag{3.19}$$

Com estes valores fica mais fácil mostrar que $\alpha \in (0,1)$ e $\tau \in [0,1]$. Note que

$$N(1 - L - Lp) > 0 \Leftrightarrow p < \frac{N+4}{N-4}$$

e de fato p satisfaz essa condição devido a hipótese (3.8). Quanto ao termo $1 + N - pLN$, novamente pela hipótese (3.8) sobre p, é suficiente mostrar que $N + 1 > NL\frac{N+1}{N-3}$ para concluir que $1+N-pLN > 0$. E $N+1 > NL\frac{N+1}{N-3}$ se, e somente se, $p > -(N+1)$. Sendo assim, o numerador e o denominador tanto da expressão para α quanto da expressão de τ, são positivos. Para ver que $\alpha, \tau \leq 1$ basta substituir as expressões dadas por (3.19) e multiplicar cruzado.

Enfim, aplicando o Corolário (B.11) (i), temos que

$$I \leq \|u\|_{4,\frac{p+1}{p}}^{p(1-\alpha)+1}.$$

Portanto, a desigualdade (3.16) fica da seguinte forma:

$$\left\|(-\Delta)^2 u_1 - \lambda_1^2 u_1\right\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} \leq \|f(x)\|_r^{\alpha} \|u\|_{4,\frac{p+1}{p}}^{p(1-\alpha)+1} + \|f(x)\|_r^{\frac{p+1}{p}}. \tag{3.20}$$

Afirmamos que o operador $(-\Delta)^2 - \lambda_1^2 Id : W_*^{4,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \longrightarrow L_*^{p+\frac{1}{1-\alpha}}(\Omega)$ é um isomorfismo, em que

$$W_*^{4,\frac{p+1}{p}}(\Omega) = \{u \in W^{4,\frac{p+1}{p}}(\Omega); \int_\Omega u\phi_1 = 0\}$$

e

$$L_*^{p+\frac{1}{1-\alpha}}(\Omega) = \{u \in L^{p+\frac{1}{1-\alpha}}(\Omega); \int_\Omega u\phi_1 = 0\}.$$

De fato, a injetividade decorre do fato que

$$v \in \ker\{(-\Delta)^2 - \lambda_1^2 Id\} \Leftrightarrow \int_\Omega v\phi_1 \neq 0$$

logo $\ker\{(-\Delta)^2 - \lambda_1^2 Id\} = \{0\}$, já a sobrejetividade é consequência da Alternativa de Fredholm. Sendo assim, existe constante $c > 0$ tal que

$$\|u_1\|_{4,\frac{p+1}{p}} \leq c\left\|(-\Delta)^2 u_1 - \lambda_1^2 u_1\right\|_{\frac{p+1}{p}};$$

e juntamente com (3.20), resulta que

$$\|u_1\|_{4,\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} \leq \|f(x)\|_r^{\alpha} \|u\|_{W^{4,\frac{p+1}{p}}}^{p(1-\alpha)+1} + \|f(x)\|_r^{\frac{p+1}{p}}.$$

Usando a decomposição $u = t\phi_1 + u_1$, concluímos que

$$\begin{aligned} \|u_1\|_{4,\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} &\leq \|f(x)\|_r^{\alpha}\left(|t|\,\|\phi_1\| + \|u_1\|_{W^{4,\frac{p+1}{p}}}\right)^{p(1-\alpha)+1} + \|f(x)\|_r^{\frac{p+1}{p}} \\ &\leq \|f\|_r^{\alpha+\frac{P(1-\alpha)+1}{p}} + \|f(x)\|_r^{\alpha}\,\|u_1\|_{W^{4,\frac{p+1}{p}}}^{p(1-\alpha)+1} + \|f(x)\|_r^{\frac{p+1}{p}}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Note que, se mostramos que

$$[p\,(1-\alpha)+1]\,\frac{p}{p+1} < 1$$

então a conclusão (3.10) segue aplicando a desigualdade de Young na desigualdade (3.21). De fato,

$$[p\,(1-\alpha)+1]\,\frac{p}{p+1} < 1 \Leftrightarrow p^2(N-3) - 4p - (N+1) < 0.$$

Tal desigualdade é verdadeira se, e somente se,

$$-1 < p < \frac{N+1}{N-3}.$$

Note que, pela hipótese (3.8) estamos em tal situação. Portanto, pela desigualdade de young, para

$$\frac{1}{\theta} = [p\,(1-\alpha)+1]\,\frac{p}{p+1}$$

e $\theta' > 1$ tal que $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$, obtemos

$$\|u_1\|_{4,\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} \leq \|f\|_r^{\alpha+\frac{P(1-\alpha)+1}{p}} + \frac{1}{\theta}\,\|u_1\|_{W^{4,\frac{p+1}{p}}}^{\frac{p+1}{p}} + \frac{C}{\theta'}\,\|f(x)\|_r^{\alpha\theta'} + \|f(x)\|_r^{\frac{p+1}{p}}.$$

Portanto,

$$\|u_1\|_{4,\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} \leq C\left(\|f\|_r^{\alpha+\frac{P(1-\alpha)+1}{p}} + \|f(x)\|_r^{\alpha\theta'} + \|f(x)\|_r^{\frac{p+1}{p}}\right).$$

Novamente usando a decomposição $u = t\phi_1 + u_1$, resulta

$$\|u\|_{4,\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} \leq C\left(\|f\|_r^{\alpha+\frac{P(1-\alpha)+1}{p}} + \|f(x)\|_r^{\alpha\theta'} + \|f(x)\|_r^{\frac{p+1}{p}} + \|f\|_r^{1/p}\right). \tag{3.22}$$

Encontramos assim uma estimativa para u no espaço $W^{4,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ e nosso objetivo final é encontrar uma estimativa em $C_0^1(\overline{\Omega})$. Observamos que, como $r > N/3$ temos que

$W^{4,r}(\Omega) \hookrightarrow C_0^1(\overline{\Omega})$, logo basta encontrarmos uma limitação em $W^{4,r}(\Omega)$. Para isso, utilizamos a Seção 3.4 tomando

$$h(x,u) = \lambda_1^2 u + u_+^p + f(x), \quad m = \frac{p+1}{p} \quad \text{e} \quad \eta = p.$$

Para $m = \frac{p+1}{p}$ temos que a condição $1 < \eta < 1 + \frac{4q_0}{N}$ é equivalente a condição $1 < p < \frac{N+4}{N-4}$ que é verdadeira devido a hipótese sobre p dada em (3.8). Portanto, garantimos que $u \in W^{4,r}(\Omega)$ e que existe constante $C > 0$, tal que

$$\|u\|_{4,r} \leq C \left(\|u\|_{4,\frac{p+1}{p}}^{\gamma} + \|f\|_r^{\xi} \right)$$

com $\gamma, \xi \geq 1$. Usando a desigualdade (3.22), resulta que

$$\|u\|_{4,r} \leq \rho(\|f\|_r).$$

Como $r > N/3$ temos que $W^{4,r}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$. Portanto

$$\|u\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} \leq \rho(\|f\|_r).$$

Caso 2: $t < 0$. Pelo Princípio do Máximo de Hopf sabemos que a primeira autofunção $\phi_1 > 0$ se encontra no interior de um cone de funções positivas no espaço $C_0^1(\Omega)$. Então existe $\epsilon > 0$ tal que

$$w \in B_{C_0^1(\Omega)}(\phi_1, \epsilon) \Rightarrow w > 0 \quad \text{em} \quad \Omega \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} < 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega,$$

em que η denota o vetor exterior normal a fronteira de Ω. Definimos ϵ_0 o supremos de tais ϵ's e relembramos que u solução de (3.1) bem como u_1 pertencem a $C_0^1(\Omega)$. Podemos escrever $u = t(\phi_1 + u_1/t)$. Afirmamos que $-u_1/t \notin B_{C_0^1(\Omega)}(0, \epsilon_0)$. Pois, caso contrário, teríamos que

$$\frac{u}{t} = \phi_1 - (-\frac{u_1}{t}) \in B_{C_0^1(\Omega)}(\phi_1, \epsilon_0)$$

o que é uma contradição, ja que $u^+ \neq 0$ e $t < 0$. Sendo assim, resulta

$$|t| \leq \frac{1}{\epsilon_0} \|u_1\|_{C_0^1(\Omega)}.$$

Novamente resta encontramos uma limitação para $\|u_1\|_{C_0^1(\Omega)}$. Note que a desigualdade (3.16) continua verdadeira e como, nesse caso, $u_+ \leq u_1$, temos

$$\left\|(-\Delta)^2 u_1 - \lambda_1^2 u_1\right\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} \leq \|f(x)\|_r^{\alpha} \left\|\frac{u_1}{\phi_1^{\tau}}\right\|_{L^{p+\frac{1}{1-\alpha}}}^{p(1-\alpha)+1} + \|f(x)\|_r^{\frac{p+1}{p}}$$

aplicanto o Corolário (B.11) (i), juntamente com a desigualdade (3.12), obtemos

$$\left\|(-\Delta)^2 u_1 - \lambda_1^2 u_1\right\|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} \leq \|f(x)\|_r^{\alpha} \|u_1\|_{4,\frac{p+1}{p}}^{p(1-\alpha)+1} + \|f(x)\|_r^{\frac{p+1}{p}}.$$

Como o isomorfismo dado no caso anterior também contínua verdadeiro, conluimos

$$\|u_1\|_{4,\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} \leq C\|f(x)\|_r^{\alpha} \|u_1\|_{4,\frac{p+1}{p}}^{p(1-\alpha)+1} + C\|f(x)\|_r^{\frac{p+1}{p}}.$$

Como no caso anterior, aplicamos a desigualdade de Young, e obtemos

$$\|u_1\|_{4,\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} \leq \frac{C}{\theta'}\|f(x)\|_r^{\alpha\theta'} + \frac{1}{\theta}\|u_1\|_{4,\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} + C\|f(x)\|_r^{\frac{p+1}{p}}$$

isto é,

$$\|u_1\|_{4,\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} \leq C\left(\|f(x)\|_r^{\alpha\theta'} + \|f(x)\|_r^{\frac{p+1}{p}}\right). \tag{3.23}$$

Como u_1 é solução do sitema

$$\begin{cases} (-\Delta)^2 u_1 = \lambda_1^2 u_1 + u_+^p + f(x) & x \in \Omega \\ u_1 = \Delta u_1 = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

vamos usar o argumento de bootstrap dado na seção 3.4 para esse sistema. Análigo ao caso anterior, tomamos

$$h(x,u) = \lambda_1^2 u_1 + u_+^p + f(x), \quad \eta = p \quad \text{e} \quad m = \frac{p+1}{p}.$$

Sendo assim, concluímos que $u_1 \in W^{4,r}(\Omega)$ e existe constante $C > 0$, tal que

$$\|u\|_{4,r} \leq C\left(\|u\|_{4,\frac{p+1}{p}}^{\gamma} + \|f\|_r^{\xi}\right),$$

com $\gamma, \xi \geq 1$. Usando a desigualdade (3.23), resulta

$$\|u\|_{4,r} \leq \rho(\|f\|_r).$$

Como $r > N/3$ temos que $W^{4,r}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$. Portanto

$$\|u\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} \leq \rho(\|f\|_r).$$

$\square$

3.3. Resultado de Existência

Nesta seção vamos mostrar o seguinte resultado de existência de solução para o problema (3.1).

3.4 Teorema. *Assumimos as mesmas hipótese do Teorema 3.3. Então existe pelo menos uma solução para o problema* (3.1) *em* $W^{4,r} \cap W_0^{2,r}(\Omega)$.

Vamos inicialmente introduzir a seguinte formulação do problema (3.1). Seja T_f : $C_0^1(\bar{\Omega}) \longrightarrow C_0^1(\bar{\Omega})$ a aplicação tal que

$$T_f(u) = \left(\Delta^2\right)^{-1} \left(\lambda_1^2 u + u_+^p + f\right).$$

O operador T_f é compacto contínuo e $T_f(u) = u$, se e somente se, u é solução do problema (3.1). Para demonstrar o Teorema de existência vamos usar a seguinte Proposição.

3.5 Proposição. *Existe* $\epsilon > 0$ *e* $R_0 > 0$ *tal que, para toda função* $f \in L^r$ *satisfazendo a hipótese* (3.9) *com* $\|f\|_r < \epsilon$ *e tal que o problema* (3.1) *tenha pelo menos uma solução, vale que*

$$\deg\left(Id - T_f, B_{C_0^1(\bar{\Omega})}(0, R), 0\right) \neq 0$$

para todo $R > R_0$.

Demonstração. Seja ρ a função dada pelo Teorema 3.3, como ρ é crescente considere $\epsilon < 1$, tal que, $\rho(\epsilon) < \left(\frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}$. Seja $f \in L^r$, com $\|f\|_r \leq \epsilon$ e satisfazendo a hipótese (3.9). Do Teorema 3.3 toda solução u_0 de (3.1), para tal f, satisfaz

$$\|u_0\|_{C_0^1} \leq \rho\left(\|f\|_r\right) \leq \rho\left(\epsilon\right) < \left(\frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{3.24}$$

Linearizando o problema (3.1) para a solução u_0, temos

$$\begin{cases} (-\Delta)^2 v = \left[\lambda_1^2 + p\left(u_0^+\right)^{p-1}\right] v & x \in \Omega \\ v = \Delta v = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.25}$$

Note que,

$$\lambda_1^2 < \lambda_1^2 + p\left(u_0^+\right)^{p-1} < \lambda_2^2, \tag{3.26}$$

de fato, a primeira desigualdade é direta, já a segunda segue da desigualdade (3.24), pois

$$\|u_0\|_{C_0^1} := \max_{x\in\bar{\Omega}} |u_0(x)| + \max_{x\in\bar{\Omega}} |\nabla u_0(x)| < \left(\frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}},$$

logo

$$|u_0(x)| < \left(\frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}},$$

portanto

$$u_0^+ < \left(\frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} \Rightarrow \lambda_1^2 + p\left(u_0^+\right)^{p-1} < \lambda_2^2.$$

Denotamos por $\mu_1(g) < \mu_2(g) \leq ...$ os autovalores do problema com peso

$$\begin{cases} (-\Delta)^2 v = \mu g(x) v & x \in \Omega \\ v = \Delta v = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.27}$$

Note que, para $g(x) = \lambda_1^2 + p\left(u_0^+\right)^{p-1}$ obtemos a linearização (3.25), e de (3.26) vale que $\lambda_1^2 < g(x) < \lambda_2^2$. Sendo assim $|g(x)|$ é limitado e pelo Teorema 3.2, concluímos que as autofunções associadas ao problema (3.27) satisfaz o Princípio da continuação única. Sendo assim pela Proposição (3.1), temos que

$$\mu_1(g) < \mu_1(\lambda_1^2) = 1 = \mu_2(\lambda_2^2) < \mu_2(g).$$

Portanto a única solução para a linearização (3.25) é $u_0 \equiv 0$ logo u_0 é solução não degenerada de (3.1). Portanto, veja também Teorema (D.8), temos que

$$\deg\left(Id - T_f, B_{C_0^1(\bar{\Omega})}(0,R), 0\right) = \sum (-1)^1 \neq 0.$$

□

Demonstração. **Demonstração do Teorema (3.4):**
Vamos escolher $f_1 = -(t\phi_1)^p$ com $0 < t < \left(\frac{\epsilon}{\|\phi_1^p\|_r}\right)^{1/p}$. Note que $\|f_1\|_r < \epsilon$ e que $u = t\phi_1$ é solução de (3.1) para f_1. Logo, ela Proposição 3.5, temos que

$$\deg\left(Id - T_{f_1}, B_{C_0^1(\bar{\Omega})}(0,R), 0\right) \neq 0$$

para R suficientemente grande. Consideremos a homotopia $H : [0,1] \times C_0^1(\Omega) \longrightarrow C_0^1(\Omega)$ tal que

$$H(\tau, u) = \left(I - \left(\Delta^2\right)^{-1}\right)\left(\lambda_1^2 u + u_+^P + (1-\tau) f + \tau f_1\right).$$

Note que, $H(\tau, u) = 0$ se, e somente se, u é solução de

$$\begin{cases} (-\Delta)^2 u = \lambda_1^2 u + u_+^p + (1-\tau) f + \tau f_1 & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.28}$$

A estimativa a priori dada no Teorema 3.3 nos garante que toda solução da problema anterior é uniformemente limitada em $C_0^1(\Omega)$, por, digamos $R_1 := \rho(\max\{\|f\|_r, \|f_1\|_r)$. Sendo assim, concluirmos que $H(\tau, u) \neq 0$ para todo $u \in \partial B_{C_0^1}(0, R_1)$, isto é, H é admissível e portanto

$$\deg(H(0,\tau), B_{C_0^1(\Omega)}(0, R_1), 0) = \deg(H(1,\tau), B_{C_0^1(\Omega)}(0, R_1), 0). \tag{3.29}$$

Portanto basta tomarmos R suficientemente grande, tal que $R > \max\{R_0, R_1\}$ e concluimos que

$$\deg(Id - T_f, B_{C_0^1(\Omega)}(0, R), 0) = \deg(Id - T_{f_1}, B_{C_0^1(\Omega)}(0, R), 0) \neq 0. \tag{3.30}$$

Portanto, $\deg(Id - T_f, B_{C_0^1(\Omega)}(0, R), 0) \neq 0$ e garantimos a existência de solução para o problema (3.1). □

3.4. Regularidade

Nesta seção vamos discutir a regularidade do problema elíptico (3.1);

$$\begin{cases} (-\Delta)^2 u = h(x, u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = \Delta u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ com $N > 5$. A função $h : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e existem $f(x) \in L^r(\Omega)$ e $C > 0$ tal que

$$|h(x, u)| \leq C\left(|u|^{\eta} + |f(x)|\right). \tag{3.31}$$

com $r > N$ e $1 < \eta < 1 + \frac{4q_0}{N}$, em que q_0 será definido a seguir.

Vamos mostrar que, se $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ é solução fraca de 3.1 e $u \in W^{4,m}(\Omega)$ com $m < N/4$ então $u \in W^{4,r}(\Omega) \cap W_0^{2,r}(\Omega)$ e existe constante $C > 0$, tal que

$$\|u\|_{4,r} \leq C \left(\|u\|_{4,m}^{\gamma} + \|f\|_r^{\xi} \right),$$

com $\gamma, \xi > 1$.

Como $m < N/4$ entao

$$W^{4,m}(\Omega) \hookrightarrow L^{\sigma}(\Omega) \quad \forall \sigma \in \left[m, \frac{Nm}{N-4m} \right]. \tag{3.32}$$

Definimos $q_0 = \frac{Nm}{N-4m}$.

Vamos iniciar o processo com $p_1 := \frac{q_0}{\eta}$. Note que, da condição (3.31), temos

$$\int_\Omega |h(x)|^{p_1} \leq \int_\Omega |u|^{q_0} + \int_\Omega |f|^{p_1},$$

a primeira integal do lado direito é finita devido a imersão (3.32). Para concluirmos que $h \in L^{p_1}$ resta analisar se $f \in L^{p_1}$. Para isso temos que tratar dois casos.

Caso 1: Se $p_1 > r$ então consideramos r no lugar de p_1 e temos

$$\int_\Omega |h(x)|^r \leq \int_\Omega |u|^{r\eta} + \int_\Omega |f|^r, \tag{3.33}$$

como $f \in L^r$ a segunda integral é finita, além disso,

$$p_1 > r \Rightarrow \frac{q_0}{\eta} > r \Rightarrow r\eta < q_0$$

e

$$rs > r > N > m$$

ou seja, $m < r\eta < q_0$, pela imersão (3.32) conclui-se que $u \in L^{r\eta}$. Assim, de (3.33), concluímos que $h \in L^r$. Aplicando o Teorema B.15 obtemos que $u \in W^{4,r} \cap W_0^{2,r}(\Omega)$, além disso, existe $C > 0$, tal que,

$$\|u\|_{4,r} \leq C \|h\|_r.$$

Novamente usando a desigualdade (3.33), resulta

$$\begin{aligned}\|u\|_{4,r} &\leq C\,\|u\|_{\eta r}^{\eta} + \|f\|_{r}\\ &\leq \|u\|_{4,m}^{\eta} + \|f\|_{r}\,.\end{aligned}$$

Caso 2: Se $p_1 \leq r$ então

$$\int_{\Omega} |h(x)|^{p_1} \leq \int_{\Omega} |u|^{q_0} + \int_{\Omega} |f|^{p_1} < \infty,$$

ou seja, $h \in L^{p_1}$. Usando o Teorema B.15 obtemos que $u \in W^{4,p_1} \cap W_0^{2,p_1}(\Omega)$ e existe constante $C > 0$, tal que,

$$\|u\|_{4,p_1} \leq C\,\|h\|_{p_1}\,,$$

logo,

$$\begin{aligned}\|u\|_{4,p_1}^{p_1} &\leq C\left(\int_{\Omega} |u|^{q_0} + \int_{\Omega} |f|^{p_1}\right)\\ &= C\left(\|u\|_{q_0}^{q_0} + \|f\|_{p_1}^{p_1}\right).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u\|_{4,p_1} \leq C\left(\|u\|_{q_0}^{\eta} + \|f\|_{p_1}\right).$$

Lembrando que $p_1 \leq r$ e a imersão (3.32), concluímos que

$$\|u\|_{4,p_1} \leq C\left(\|u\|_{4,m}^{\eta} + \|f\|_{r}\right). \tag{3.34}$$

Agora temos três situações para analisar;

Caso 2i: Se $4p_1 > N$ então pelo Teorema B.12 (iii), temos que $u \in C^{0,\alpha}$ com $\alpha < 1$. Portanto,

$$\int_{\Omega} |h(x)|^{r} \leq \int_{\Omega} |u|^{\eta r} + \int_{\Omega} |f|^{r} < \infty,$$

ou seja, $h \in L^r$ e novamente pelo Teorema B.15, concluímos que $u \in W^{4,r} \cap W_0^{2,r}(\Omega)$ e existe constante $C > 0$, tal que,

$$\begin{aligned}\|u\|_{4,r} &\leq C\,\|u\|_{\eta r}^{\eta} + \|f\|_{r}\\ &\leq C\,\|u\|_{C^{0,1}}^{p} + \|f\|_{r}\end{aligned}$$

então

$$\|u\|_{4,r} \leq C \|u\|_{4,p_1}^{\eta} + \|f\|_r$$

e portanto, usando a desigualdade (3.34), resulta

$$\|u\|_{4,r} \leq C \left(\|u\|_{4,m}^{\eta} + \|f\|_r \right)^{\eta} + \|f\|_r .$$

Concluímos nesse caso que $u \in W^{4,r} \cap W_0^{2,r}(\Omega)$ e existe constante $C > 0$, tal que

$$\|u\|_{4,r} \leq C \left(\|u\|_{4,m}^{\eta^2} + \|f\|_r^{\eta} \right).$$

Caso 2ii: Se $4p_1 = N$ então pelo Teorema (B.12)(ii) vale a imersão $W^{4,p_1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\sigma}$ para todo $p_1 < \sigma < \infty$. Usando esta imersão para $\sigma = rs$, temos que $|u| \in L^{r\eta}$, logo

$$\int_{\Omega} |h|^r \leq \int_{\Omega} |f(x)|^r + C \int_{\Omega} |u|^{r\eta} < \infty, \tag{3.35}$$

portanto, $h \in L^r(\Omega)$. Pelo Teorema (B.15), resulta que $u \in W^{4,r}(\Omega)$ e

$$\|u\|_{4,r} \leq C \|h\|_r ,$$

usando a desigualdade (3.35), resulta que

$$\begin{aligned} \|u\|_{4,r} &\leq C \left(\|f\|_r + \|u\|_{r\eta}^{s} \right) \\ &\leq \left(\|f\|_r + \|u\|_{4,p_1}^{\eta} \right). \end{aligned}$$

Usando a desigualdade, (3.34), obtemos

$$\|u\|_{4,r} \leq C \left(\|u\|_{4,m}^{s\eta^2} + \|f\|_r^{\eta} \right)$$

Caso 2iii: Se $4p_1 < N$ então pelo Teorema B.12 (i), temos que $W^{4,p_1}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_1}$ para $q_1 = \frac{Np_1}{N-4p_1}$ e repetimos o processo para $p_2 = \frac{q_1}{p}$.

Note que, o número de iterações é finito. Isto é, existe $k > 0$ tal que $4p_k > N$. De fato, como $s < 1 + \frac{4q_0}{N}$, temos que

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{q_1}{q_0} = \frac{N}{Ns - 4.q_0} > \frac{N}{N(1 + \frac{4q_0}{N}) - 2.q_0} = 1.$$

Portanto,

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \delta,$$

para algum $\delta > 0$. Agora;

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{q_2}{q_1} = \frac{p_2}{p_1}\left(\frac{N - 2p_1}{N - 2p_2}\right) > \frac{p_2}{p_1} = 1 + \delta.$$

de onde se conclui que $p_3 > p_2(1 + \delta)$. Mas $p_2 = (1 + \delta)p_1$ portanto $p_3 > (1 + \delta)^2 p_1$. Iterando o processo temos

$$p_k > (1 + \delta)^{k-1} p_1.$$

Logo, para algum k suficientemente grande temos $4p_k > N$. Portanto, o número de iterações é finito.

Sendo assim, concluímos que $u \in W^{4,r}(\Omega)$ e que

$$\|u\|_{4,r} \leq C\left(\|u\|_{4,m}^{\gamma} + \|f\|_{r}^{\xi}\right),$$

com $\gamma, \xi \geq 1$.

Apêndice A

Notações

Nesse capítulo traremos algumas notações que serão usadas durante o trabalho. Maiores informações podem ser encontradas em [11] e [3].

A.1. Algumas notações fundamentais

- Ω representa um subconjunto aberto, limitado, não vazio contido em $\mathbb{R}^N$. O espaço $\mathbb{R}^N$ é munido com a medida de Lebesgue dx, e todas as integrais são consideradas no sentido de Lebesgue.

- $\partial\Omega$ denota a fronteira do conjunto Ω.

- $|E|$ denota a medida de um conjunto $E \subset \Omega$.

- C, c denotam constantes positivas.

- Considere X um espaço de Banach e o espaço produto $X \times X$. Vamos considerar a seguinte norma neste espaço produto

$$\|(x, y)\|_{X\times X} = \|x\|_X + \|y\|_X$$

para todo vetor $(x, y) \in X \times X$. Além disso, sempre que a notação deixar claro se tratar de vetor em um espaço produto da forma acima, podemos cometer o abuso de notação e denotar a norma simplesmente por

$$\|(x, y)\|_X = \|x\|_X + \|y\|_X$$

a fim de não carregar as expressões matemáticas mais extensas com notação.

- Dada uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ denotamos $u_+(x) = \max\{u(x), 0\}$ e $u_-(x) = \max\{-u(x), 0\}$. Então $u(x)$ pode ser escrita como $u = u_+ - u_-$ e vale também $|u| = u_+ + u_-$.

- Se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é diferenciável então o gradiente de u em $x = (x_1, ..., x_N)$ é dado pelo vetor

$$\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}(x) \right).$$

- Se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável então o Laplaciano de u em $x = (x_1, ..., x_N)$, denotado por $\Delta(x)$, é definido como

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x).$$

A.2. Espaços de Funções

- $C(\Omega)$ é o espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ contínuas.

- $C^k(\Omega)$ para $k = 1, 2, ...$ é o espaço de funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que são k vezes diferenciáveis em Ω e todas as k-ésimas derivadas também são contínuas em Ω.

- $C^\infty(\Omega)$ é o espaço de funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis em Ω.

- $C_0^1(\overline{\Omega})$ é definido como

$$C_0^1\left(\overline{\Omega}\right) = \left\{u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right); u = 0 \text{ em } \partial\Omega\right\}$$

e é um espaço de Banach munido com a norma

$$\|u\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} = \max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)| + \max_{x\in\overline{\Omega}} |\nabla u(x)|.$$

- O espaço de Hölder $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ é definido como

$$C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) = \left\{u \in C\left(\overline{\Omega}\right); H_\alpha[u] < \infty\right\}$$

em que $H_\alpha[u]$ é o quociente de Hölder,

$$H_\alpha[u] = \sup_{x,y\in\overline{\Omega}, x\neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Este é um espaço de Banach munido da norma

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} = \max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)| + H_\alpha[u].$$

- $L^p(\Omega)$, para $p \in [1, +\infty)$ é o espaço de funções mensuráveis de Lesbegue $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\int_\Omega |u(x)|^p < \infty,$$

e $L^\infty(\Omega)$ é o espaço de funções mensuráveis tal que

$$\operatorname{ess\,sup} |u(x)| = \inf \{C > 0; |u(x)| < 0 \text{ q.t.p em } \Omega\} < \infty.$$

A norma adotada nesses espaços são, respectivamente

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \right)^{1/p} \quad \text{e} \quad |u|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |u(x)|.$$

- $H^1(\Omega)$ é o espaço de Sobolev definido por

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, ..., N \right\},$$

em que as derivadas $\partial u/\partial x_i$, são todas no sentido das distribuiçoes. $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert munido do produto escalar

$$\langle u, v \rangle_{H_1} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv,$$

e com a seguinte norma correspondente

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle_{H_1}} = \left(\int_\Omega |\nabla u^2| + \int_\Omega u^2 \right)^{1/2}.$$

- $H_0^1(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$. Vamos considerar a norma usual em $H_0^1(\Omega)$

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u^2| \right)^{1/2},$$

e o produto interno associado a esta norma

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v.$$

- Dado um vetor $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$ com cada entrada α_i um inteiro não negativo. α é um *multi-índice* cuja ordem é definida por $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_N$.

- Dado um *multi-índice* α, definimos

$$D^{\alpha}u\left(x\right)=\frac{\partial^{|\alpha|}u\left(x\right)}{\partial x_{1}^{\alpha_{1}}\cdots\partial x_{N}^{\alpha_{N}}}.$$

- O espaço de Sobolev $W^{k,p}\left(\Omega\right)$ é o espaço das funções $u:\Omega\rightarrow\mathbb{R}$ que são k-vezes diferenciáveis no sentido das distribuições e tais que $D^{\alpha}u\in L^{p}\left(\Omega\right)$ para todo $|\alpha|\leq k$.

  O espaço de Sobolev $W^{k,p}\left(\Omega\right)$ é munido da norma

$$\|u\|_{W^{k,p}}=\left(\sum_{|\alpha|\leq k}\|D^{\alpha}u\|_{p}^{p}\right)^{1/p}$$

  para $1\leq p<\infty$. E para $p=\infty$,

$$\|u\|_{W^{k,p}}=\max_{|\alpha|\leq k}\|D^{\alpha}u\|_{\infty}.$$

  Quando $p=2$ vamos usar a notação $W^{k,2}\left(\Omega\right)=H^{k}\left(\Omega\right)$.

  Sabemos também que $W^{k,p}\left(\Omega\right)$ é um espaço de Banach para $1\leq p\leq\infty$ e é espaço de Hilbert para $p=2$ com produto interno

$$\left\langle u,v\right\rangle_{H^{k}}=\sum_{|\alpha|\leq k}\int_{\Omega}D^{\alpha}uD^{\alpha}v.$$

Apêndice B

Resultados auxiliares

B.1 Proposição (Desigualdade de Young)**.** *Seja* $1 < p < \infty$ *e* p' *tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *então*

$$ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

para $a, b > 0$.

Demonstração. Veja [11]. □

B.2 Proposição (Desigualdade de Hölder)**.** *Seja* $1 < p, p' < \infty$ *tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *se* $u \in L^p(\Omega)$ *e* $v \in L^q(\Omega)$ *então*

$$\int_\Omega |uv| < \|u\|_p \|v\|_q .$$

Demonstração. Veja [11]. □

B.3 Proposição. *Se* $a_j \geq 0$ *para* $1 \leq j \leq n$ *e* $p \geq 1$ *então*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^p \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \right)^p \leq n^{p-1} \sum_{j=1}^{n} a_j^p.$$

A desigualdade reversa vale se $0 < p \leq 1$.

Demonstração. Veja □

B.4 Teorema (Fórmulas de Green)**.** *Sejam* $\Omega \in \mathbb{R}^N$ *um aberto limitado e suave e* $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ *então*

- $\displaystyle\int_\Omega v\Delta u dx + \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \upsilon} dS$
- $\displaystyle\int_\Omega v\Delta u dx - \int_\Omega u\Delta v dx = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \upsilon} - u \frac{\partial v}{\partial \upsilon} dS \right)$

em que $\upsilon = \upsilon(x)$ é o vetor normal exterior a fronteira $\partial\Omega$ no ponto x. E dS é a medida de superfície me $\partial\Omega$.

Demonstração. Veja [11]. □

B.5 Teorema. *Sejam $\Omega \in \mathbb{R}^N$ um aberto com $|\Omega| < \infty$. Se $1 \leq p \leq q \leq \infty$ então*

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

Se $|\Omega| = \infty$ o resultado é falso.

Demonstração. Veja [11]. □

B.6 Lema (Lema de Hopf)**.** *Seja L operador uniformemente elíptico*

$$L = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_iu + c(x)u.$$

Suponha $u \in C^2(U) \cap C^1(\overline{U})$ e $c \equiv 0$ em U. Se $Lu \geq 0$ em U e existe $x_0 \in \partial U$ tal que $u(x_0) < u(x)$ para todo $x \in U$. Suponha também que U satisfaça a condiçao da esfera interior, isto é, existe bola aberta B contida em U tal que $x_0 \in \partial B$

i) Então $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0$ em que ν é vetor normal unitário a B em x_0.

ii) Se $c \leq 0$ em U obtemos o mesmo resultado desde que $u(x_0) \leq 0$.

Demonstração. Veja [11]. □

B.7 Teorema (Princípio do Máximo Forte)**.** *Considere L operador elíptico definido como no Lema de Hoplf. Suponha $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ e $c \geq 0$ em U. Suponha também que U seja conexo.*

i) Se $Lu \leq 0$ em U e u atinge o máximo não negativo sobre $\overline{U}$ em um ponto interior de U então u é constante em U.

ii) Se $Lu \geq 0$ em U e u atinge o mínimo não positivo sobre $\overline{U}$ em um ponto interior de U então u é constante em U.

Demonstração. Veja [11]. □

B.8 Proposição. *Para $v \in H_0^1(\Omega)$ e $0 \leq \tau \leq 1$, temos*

$$\left\| \frac{v}{\phi^\tau} \right\|_{L^q} \leq C \left\| Dv \right\|_{L^2},$$

onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1-\tau}{N}$.

Consequentemente, sob as mesmas condições e lembrando que Ω é um domínio limitado, vale que

$$\left\| \frac{v}{\phi^\tau} \right\|_{L^r} \leq C \left\| Dv \right\|_{L^2}, \tag{B.1}$$

para todo $r \leq q$.

Demonstração. Veja Brezis-Turner, [4], Lema 2.2. □

B.9 Lema. *Seja $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$. Então existe uma constante $C = C(p, \Omega)$, tal que, para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$ com $|u| \leq v$ q.t.p, vale que*

$$\int_\Omega |u|^p v \leq C \Big(\int_\Omega |u|^p \phi \Big)^\alpha \Big(\int_\Omega |\nabla v|^2 \Big)^{\delta/2}$$

onde

$$\alpha = 1 - \frac{N}{2 + 2N - (N-2)p} \in [0, 1),$$
$$\delta = 1 + \frac{Np}{2 + 2N - (N-2)p} \in (1, 2^*].$$

Se além disso, $p < \frac{N+1}{N-1}$ então $\alpha \in (0, 1)$ e $\delta \in (1, 2)$.

Demonstração. Veja em [10], Lema 2.1 □

B.10 Lema. *Seja $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,m}(\Omega)$, $1 < m < \infty$. Então a seguinte desigualdade é verdadeira*

$$\left\| \frac{u}{\phi_1^\tau} \right\| \leq C \left\| u \right\|_{2,m} \tag{B.2}$$

onde C é uma constante que depende somente de τ, m e N; em que, $\tau \in [0, 1]$ e $t > 1$ são tais que

(i) $\frac{1}{t} = \frac{1}{m} - \frac{2-\tau}{N}$ *se* $m < \frac{N}{2}$,

(ii) $\frac{1}{t} > \frac{\tau}{N}$ *se* $m = \frac{N}{2}$,

(iii) $\frac{1}{t} = \tau\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{N}\right)$ *se* $\frac{N}{2} < m < N$,

(iv) $\forall t > 1$, $\forall \tau \in [0,1]$, *se* $m \geq N$.

Demonstração. Veja em [7], Corolário 1.1. □

B.11 Corolário. *Seja* $u \in W_0^{1,s}(\Omega) \cap W^{2m,s}(\Omega)$ *onde* $1 < s < \infty$, $m \geq 1$ *e* $\tau \in [0,1]$. *Assumimos que*

(i) $\frac{1}{r} = \frac{1}{s} - \frac{2m-\tau}{N}$ *se* $s < \frac{N}{2m}$,

(ii) $\frac{1}{r} = \frac{\tau}{N}$ *se* $s = \frac{N}{2}$,

(iii) $\frac{1}{r} = \tau\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{N}\right)$ *se* $\frac{N}{2m} < s < N$,

(iv) $\forall r > 1$, $\forall \tau \in [0,1]$, *se* $N \geq s$.

então

$$\left\| \frac{u}{\phi_1^\tau} \right\|_{L^r} \leq C \|u\|_{W^{2m,s}} \tag{B.3}$$

em que a constante C *depende somente de* τ, s *e* N.

Demonstração. Veja [7], Corolário 1.2. □

B.12 Teorema (Teorema de imersão de Sobolev)**.** *Seja* $\Omega \in \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado com fronteira Lipschitz,* $k \in \mathbb{N}$ *e* $1 \leq p \leq \infty$. *Então vale que*

(i) Se $kp < N$ *então* $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *para todo* $p \leq q \leq \frac{NP}{N-kp}$,

(ii) Se $kp = N$ *então* $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *para todo* $p \leq q < \infty$

(iii) Se $kp > N$ *então* $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$ *em que* $0 < \alpha < k - \frac{N}{p}$.

Demonstração. Veja em [1]. □

B.13 Teorema. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Considere o seguinte problema com fronteira Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = h(x) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{B.4}$$

(i) Se $h \in L^p(\Omega)$, com $1 < p < \infty$ então (B.4) tem única solução fraca $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ e

$$\|u\|_{W^{2,p}} \leq c\,\|h\|_{L^p}$$

(ii) Se Ω é de classe $C^{2,\alpha}(\Omega)$ e $h \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ então $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ é uma solução clássica de (B.4) e

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq c\,\|h\|_{C^{0,\alpha}}\,.$$

Demonstração. Veja em [2]. □

B.14 Teorema. *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^N$ um aberto limitado. Se $p \geq 1$ então*

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C_0^1(\overline{\Omega})$$

para todo $0 \leq 1 < k - \frac{N}{p}$.

Demonstração. Veja em [1]. □

B.15 Teorema. *Seja $1 < p < \infty$ e $k \geq 2m$. Assuma que $\partial\Omega \in C^k$. Então para toda $f \in W^{k-2m,p}(\Omega)$ a equação*

$$\begin{cases} (-\Delta)^m\, u(x) = f(x) & x \in \Omega \\ u(x) = \Delta u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

admite uma única solução forte $u \in W^{k,p} \cap W_0^{m,p}(\Omega)$. Além disso, existe uma constante $C = C(\Omega, k, m) > 0$, independente de f, tal que

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{W^{k-2m,p}(\Omega)}\,.$$

Demonstração. Veja Corolário 2.21 em [19]. □

Apêndice C

O Problema Linear

Neste Apêndice vamos abordar alguns resultados com respeito ao sistema linear associado a uma matriz real 2×2 e utilizamos como referência o artigo de Costa e Magalhães em [8]. Vamos apresentar também alguns detalhes sobre a teoria espectral do problema de autovalor com peso associado a uma matriz simétrica também 2×2. Maiores detalhes podem ser encontrados em [12], [18] e [6].

Consideramos $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \ldots$ os autovalores de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ e $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots$ as correspondentes autofunções

C.1. O Problema Linear

Dada uma matriz real $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e o sistema linear

$$\begin{cases} -\Delta U = AU \quad x \in \Omega \\ U \in H, \end{cases} \tag{C.1}$$

definimos (C.1) como um problema ressonante se possui solução $U \neq 0$ em H. Denotando I a matriz identidade, temos o importante resultado:

C.1 Lema. *O problema (C.1) é ressonante se, e somente se, a matriz $A - \lambda_j I$ é singular para algum λ_j. Nesse caso, se $x = (x_1, x_2) \neq (0,0)$ é tal que $Ax = \lambda_j x$ então $U = (x_1\phi_j, x_2\phi_j) \neq (0,0)$ é uma solução de (C.1) em H.*

Demonstração. Veja em [8]. □

C.2. Problema de autovalor com peso

Seja $M_2(\Omega)$ o conjunto de todas as matrizes simétricas da forma

$$A = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ b(x) & c(x) \end{pmatrix},$$

em que $a, b, c \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ e satisfazem as seguintes condições

1. A é cooperativa, isto é, $b(x) \geq 0$ para todo $x \in \bar{\Omega}$;

2. $\max_{x\in\Omega} \max\{a(x), c(x)\} > 0$.

Seja $A \in M_2(\Omega)$, considere o problema de autovalor com peso A:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda(a(x)u + b(x)v) & x \in \Omega \\ -\Delta v = \lambda(b(x)u + c(x)v) & x \in \Omega \\ u = v = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{C.2}$$

Note que, dado $T_A : H \longrightarrow H$ o operador linear limitado definido por

$$\langle T_A(u, v), (\phi, \varphi)\rangle = \int_\Omega A(x) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi \\ \varphi \end{pmatrix},$$

temos que λ é autovalor de (C.2) se, e somente se,

$$T_A(u, v) = \frac{1}{\lambda}(u, v).$$

Como os coeficientes de A são funções contínuas e a imersão $H \hookrightarrow L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ é compacta, podemos ver que o operador T_A é compacto. Dessa maneira, podemos usar a teoria espectral para operadores compactos para concluir que H possui base formada por autofunções de (C.2).

Seja $z = (u, v) \in H$, o primeiro autovalor é caracterizado por

$$\frac{1}{\lambda_1(A)} = \mu_1(A) = \sup\{\langle T_A z, z\rangle\,;\, \|z\| = 1\}.$$

Como $A \in M_2(\Omega)$, podemos usar [5] (veja Teorema 1.1) para concluir que o primeiro autovalor $\lambda_1(A)$ é positivo, simples e isolado no espectro de T_A. Além disso, se denotarmos por Φ_1^A a primeira autofunção normalizada associada a $\lambda_1(A)$, podemos supor que as funções coordenadas de Φ_1^A são positivas em Ω. Usando indução, supomos que $\mu_1(A) > \mu_2(A) \geq ... \geq \mu_{k-1}(A)$ são os $k-1$ primeiros autovalores de T_A e $\{\Phi_i^A\}_{i=1}^{k-1}$ são as autofunções associadas e normalizadas, podemos definir

$$\frac{1}{\lambda_k(A)} = \mu_k(A) = \sup\{\langle T_A z, z\rangle \,;\, \|z\| = 1, z \in (\text{span}\{\Phi_1^A, ..., \Phi_{k-1}^A\})^{\perp}\}.$$

Como provado em [12] (veja Teorema 1.3), se $\mu_k(A) > 0$ então obtemos que este é autovalor de T_A com Φ_k^A autofunção associada. Para isso, argumentamos como na demonstração da Proposição 1.11(c) de [12]. Sendo assim, obtemos sequência de autovalores para (C.2)

$$0 < \lambda_1(A) < \lambda_2(A) \leq ... \leq \lambda_k(A) \leq ...$$

tal que $\lambda_k(A) \to \infty$ quando $k \to \infty$. Além disso, para $V_k = \text{span}\{\Phi_1^A, ..., \Phi_k^A\}$, podemos decompor o espaço H como $H = V_k \oplus V_k^{\perp}$. Segue também, as seguintes desigualdades variacionais

$$\|z\|^2 \leq \lambda_k(A) \int_\Omega \langle A(x)z, z\rangle \qquad \forall z \in V_k, \tag{C.3}$$

e

$$\|z\|^2 \geq \lambda_{k+1}(A) \int_\Omega \langle A(x)z, z\rangle \qquad \forall z \in V_k^{\perp}. \tag{C.4}$$

C.2 Definição. *Sejam $A(x)$, $B(x) \in M_2(\Omega)$ com $\Omega \in \mathbb{R}^N$. Dizemos que $A \leq B$ se*

$$\langle A(x)z, z\rangle \leq \langle B(x)z, z\rangle\,,$$

para todo $(x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^2$. Além disso, definimos a relação $A \prec B$ se $A \leq B$ e $B - A$ é positiva definida em algum $\tilde{\Omega} \subseteq \Omega$ tal que $|\tilde{\Omega}| > 0$, isto é, se

$$\langle (B(x) - A(x)z, z)\rangle > 0$$

para todo $(x, z) \in \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^2$.

C.3 Definição. *Uma família de funções satisfaz a Propriedade da Continuação Única (PCU), se nenhuma função, exceto possivelmente a função nula, se anula em um conjunto de medida positiva.*

C.4 Proposição. *Sejam A e $B \in M_2(\Omega)$ pesos tais que $A \prec B$. Se a autofunção associada a $\lambda_j(A)$, para $j \in \mathbb{Z}_0$, satisfaz o Propriedade da Continuação Única então $\lambda_j(A) > \lambda_j(B)$.*

Demonstração. Vamos argumentar como em [14]. Seja $j > 0$, sabemos que

$$\frac{1}{\mu_j(A)} = \sup_{F_j} \inf\{\int_\Omega \langle Az, z\rangle; z \in F_j \ \text{ e } \ \|z\| = 1\},$$

em que F_j varia sobre todos os subespaços k-dimensionais de H. Como o extremo acima é atingido, existe $F_j \in H$ tal que

$$\frac{1}{\mu_j(A)} = \inf\{\int_\Omega \langle Az, z\rangle; z \in F_j \ \text{ e } \ \|z\| = 1\}. \tag{C.5}$$

Escolha $z \in F_j$ com $\|z\| = 1$, temos duas opções nesse momento:

Opção 1: z atinge o ínfimo em (C.5). Nesse caso, z é uma autofunção associada ao autovalor $\mu_j(A)$ e consequentemente satisfaz o PCU, sendo assim

$$\frac{1}{\mu_j(A)} = \int_\Omega \langle Az, z\rangle < \int_\Omega \langle Bz, z\rangle$$

Opção 2: z não atinge o ínfimo em (C.5). Nese caso,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_j(A)} &= \inf\{\int_\Omega \langle Az, z\rangle; z \in F_j \ \text{ e } \ \|z\| = 1\}\\ &< \int_\Omega \langle Az, z\rangle\\ &\leq \int_\Omega \langle Bz, z\rangle.\end{aligned}$$

Em ambas a situações, a conclusão que tiramos é que

$$\frac{1}{\mu_j(A)} < \int_\Omega \langle Bz, z\rangle.$$

Como z foi escolhido aleatoriamente em F_j, usamos argumentos de compacidade para afirmar que

$$\frac{1}{\mu_j(A)} < \int_\Omega \langle Bz, z\rangle \leq \inf\{\int_\Omega \langle Bz, z\rangle; z \in F_j \ \text{ e } \ \|z\| = 1\},$$

segue que,

$$\frac{1}{\mu_j(A)} < \sup_{F_j} \inf\{\int_\Omega \langle Bz, z\rangle; z \in F_j \ \text{ e } \ \|z\| = 1\} = \frac{1}{\mu_j(B)}.$$

Portanto, $\mu_j(B) < \mu_j(A)$. □

C.3. Observações

Vamos agora utilizar os resultados dados em C e C.2 para obter alguns informações importantes. Considere

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$$

tal que A seja cooperativa e que $\max\{a, c\} > 0$, Lembremos que a matriz A possui autovalores

$$\xi = \frac{a+c}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2} \quad \text{e} \quad \eta = \frac{a+c}{2} - \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2}.$$

Considere também o problema de autovalor,

$$\begin{cases} -\Delta U = \mu A U & x \in \Omega \\ U = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{C.6}$$

vamos exibir seus autovalores e as autofunções associadas.

Seja $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a base de autofunções do Laplaciano em $H_0^1(\Omega)$, podemos escrever $u = \sum u_n\phi_n$ e $v = \sum v_n\phi_n$. Segue de (C.6) que

$$\begin{cases} \sum u_n\lambda_n\phi_n = \mu(\sum a u_n\phi_n + \sum b v_n\phi_n) \\ \sum v_n\lambda_n\phi_n = \mu(\sum b u_n\phi_n + \sum c v_n\phi_n). \end{cases}$$

Isto é, para cada n

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{\lambda_n}{\mu}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

Portanto a condição necessária e suficiente para que μ seja um autovalor de (C.6) é que λ_n/μ seja um autovalor da matriz A, isto é, $\lambda_n/\mu = \xi$ ou $\lambda_n/\mu = \eta$. Em outras palavras $\mu = \lambda_n/\xi$ ou $\mu = \lambda_n/\eta$. Seja Φ a autofunção associada ao autovalor μ, note que

$$-\Delta\Phi = \mu A\Phi \Longrightarrow -\Delta\Phi = \tilde{A}\Phi$$

em que $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \mu a & \mu b \\ \mu b & \mu c \end{pmatrix}$. Note que os autovalores de $\tilde{A}$ são $\mu\xi$ e $\mu\eta$. Escolhendo tanto $\mu = \lambda_n/\xi$ quanto $\mu = \lambda_n/\eta$ resulta que λ_n é autovalor de $\tilde{A}$. Concluimos que o problema

$$\begin{cases} -\Delta U = \tilde{A}U & x \in \Omega \\ U \in H, \end{cases}$$

é ressonante e existe $x = (x_1, x_2) \neq (0, 0)$ tal que $\tilde{A}x = \lambda_n x$. Usando o Lema (C.1), temos que Φ é da forma $\Phi = (x_1\phi_n, x_2\phi_n)$.

Apêndice D

Grau Topológico

Neste apêndice vamos apresentar algumas definições e resultados sobre a Teoria do Grau Topológico. O Grau de uma aplicação é uma ferramenta muito usada para encontrar soluções de equações funcionais. Foi introduzido por L. Brouwer para dimensões finitas e extendido por J. Leray e J. Schauder para dimensões infinitas. Vamos dar maior atenção aos resultados que serão usados em nosso trabalho sem nos preocuparmos com suas demonstrações. Estas e maiores detalhes, além de algumas aplicações, podem ser encontrados em [2].

D.1. Grau de Brouwer e suas propriedades

Assumimos que;

(a) Ω é um um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$, com fronteira $\partial\Omega$;

(b) f é uma função contínua de $\bar{\Omega}$ em $\mathbb{R}^N$; os componentes de f serão denotados por f_i;

(c) p é um ponto em $\mathbb{R}^N$ tal que $p \notin f(\partial\Omega)$.

Para cada tripla (f, Ω, p) satisfazendo (a)-(c), associa-se um inteiro $\deg(f, \Omega, p)$, chamado grau de f (com respeito a Ω e p), com as seguintes propriedades básicas:

(P1) Normalização: Se $I_{\mathbb{R}^N}$ denota a aplicação identidade em $\mathbb{R}^N$, então

$$\deg(I_{\mathbb{R}^N}, \Omega, p) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad p \in \Omega \\ 0 & \text{se} \quad p \notin \Omega \end{cases}$$

(P2) Propriedade de Solução: Se $\deg(f, \Omega, p) \neq 0$ então existe $z \in \Omega$ tal que $f(z) = p$.

(P3) $\deg(f, \Omega, p) = \deg(f - p, \Omega, 0)$.

(P4) Decomposição: Se $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ então $\deg(f, \Omega_1 \cup \Omega_2, p) = \deg(f, \Omega_1, p) + \deg(f, \Omega_2, p)$.

Para completar a definição do grau vamos omitir a consistência da definição e a verificação das propriedades $(P1) - (P4)$. Primeiro consideramos uma aplicação f de classe $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e p um valor regular. Relembramos que, por definição, p é dito um valor regular de f se o Jacobiano $J_f(x)$ é diferente de zero para todo $x \in f^{-1}(p)$. E o Jacobiano é o determinante da matriz $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ com entradas

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

Se p é um valor regular então o conjunto $f^{-1}(p)$ é finito e pode-se definir o grau do seguinte modo:

$$\deg(f, \Omega, p) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} \operatorname{sgn}[J_f(x)], \tag{D.1}$$

em que, para $b \in \mathbb{R} - \{0\}$, temos

$$\operatorname{sgn}[b] = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad b > 0 \\ 0 & \text{se} \quad b < 0. \end{cases}$$

O grau definido como acima satisfaz as propriedades $(P_1) - (P5)$. Para estendermos a definição acima para qualquer função contínua para todo p usamos um procedimento de aproximação. Primeiramente aproximamos p por valores regulares p_k via Teorema de Sard.

D.1 Teorema (Teorema de Sard)**.** *Seja* $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *e* $S_f = \{x \in \Omega; J_f(x) = 0\}$. *Então* $f(S_f)$ *é um conjunto de medida nula.*

Demonstração. Veja [17]. □

O conjunto S_f é chamado de conjunto de pontos singulares de f.

De acordo com o Teorema de Sard, existe uma sequência $p_k \notin S_f$ tal que $p_k \to p$. Quando p_k está suficientemente próximo de p então p_k verifica a condição (c) dada no inicio do capítulo, logo faz sentido considerar $\deg(f, \Omega, p_k)$ dado por (D.1). Além disso, podemos mostrar que, para $k >> 1$, $\deg(f, \Omega, p_k)$ é uma constante que independe da sequência p_k. Portanto, podemos definir o grau de $f \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right) \cap C\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right)$ em qualquer ponto p por

$$\deg(f, \Omega, p) = \lim_{k\to\infty} \deg(f, \Omega, p_k).$$

Similarmente, dada $f \in C\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right)$ e seja $f_k \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right) \cap C\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right)$ tal que $f_k \to f$ uniformemente em $\overline{\Omega}$. Se $k >> 1$ então a tripla (f_k, Ω, p) satisfaz (a)-(c) e podemos considerar o grau $\deg(f_k, \Omega, p_k)$. Novamente é possível mostrar que o limite $\lim \deg(f_k, \Omega, p)$ não depende da escolha da sequência f_k e então podemos definir o grau de f por

$$\deg(f, \Omega, p) = \lim_{k\to\infty} \deg(f_k, \Omega, p).$$

Uma importante propriedade do grau, a ser definida a seguir, é a invariância por homotopia. Uma homotopia é uma aplicação $h(\lambda, x)$ tal que $h \in C\left([0,1] \times \bar{\Omega}, \mathbb{R}^N\right)$. E uma homotopia e dita admissível (com respeito a Ω e p), se $h(\lambda, x) \neq p$ para todo $(\lambda, x) \in [0,1] \times \partial\Omega$.

(P5) Invariância por homotopia: Se h é uma homotopia admissível então $\deg(h(\lambda, .), \Omega, p)$ é constante com respeito a $\lambda \in [0,1]$. Em particular, se $f(x) = h(0,x)$ e $g(x) = h(1,x)$ então $\deg(f, \Omega, p) = \deg(g, \Omega, p)$.

Como consequência imediata da invariância por homotopia, temos o seguinte resultado

D.2 Teorema (Dependência dos valores de fronteira)**.** *Seja* $f, g \in C(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *tal que* $f(x) = g(x)$ *para todo* $x \in \partial\Omega$ *e seja* $p \notin f(\partial\Omega) = g(\partial\Omega)$. *Então* $\deg(f, \Omega, p) = \deg(g, \Omega, p)$.

Demonstração. Veja [2], [Teorema 3.2, página 28]. □

(P6) Continuidade: Se $f_k \to f$ uniformemente em $\bar{\Omega}$ então $\deg(f_k, \Omega, p) \to \deg(f, \Omega, p)$. Além disso, $\deg(f, \Omega, p)$ é contínua com respeito a p.

(P7) Propriedade de Excisão: Seja $\Omega_0 \subset \Omega$ um conjunto aberto tal que $f(x) \neq p$, para todo $x \in \Omega - \Omega_0$. Então $\deg(f, \Omega, p) = \deg(f, \Omega_0, p)$.

A propriedade da Excisão permite definir o índice de uma solução isolada de $f(x) = p$. Seja $x_0 \in \Omega$ tal que $f(x_0) = p$ e suponha que exista $r > 0$ tal que $f(x) \neq p$ para todo $x \in \overline{B_r(x_0)} - \{x_0\}$. Usando a propriedade de excisão, com $\Omega = B_r(x_0)$ e $\Omega_0 = B_\rho(x_0)$ em que $\rho \in (0, r)$, deduzimos que

$$\deg(f, B_\rho(x_0), p) = \deg(f, B_r(x_0), p), \qquad \forall \rho \in (0, r).$$

Esse valor em comum é por definição o índice de f com respeito a x_0:

$$i(f, x_0) = \lim_{\rho \to 0} \deg(f, B_r(x_0), p), \qquad p = f(x_0).$$

Além disso, se $f^{-1}(p) = \{x_1, ..., x_k\}$, $x_j \in \Omega$, então

(P8) $\deg(f, \Omega, p) = \sum_1^k i(f, x_j)$.

Para ver isso é suficiente fazer $\rho > 0$ tal que $B_\rho(x_i) \cap B_\rho(x_j) = \emptyset$ para todo $i \neq j$. Considerando $\Omega_0 = B_\rho(x_1) \cup ... \cup B_\rho(x_k)$ e usando a proprieda de excisão $(P7)$ e a de decomposição $(P4)$, obtemos

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f, \Omega_0, p) = \sum_1^k \deg(f, B_\rho(x_j), p) = \sum_1^k i(f, x_j)$$

provando assim $(P8)$.

Seja $f \in C^1$ e p um valor regular de f, isto é, $J_f(x_0) \neq 0$ para todo $x_0 \in f^{-1}(p)$. Como já mencionamos anteriormente, se p é um valor regular de f então o conjunto $f^{-1}(p)$ é discreto. Em particular toda solução x_0 de $f(x) = p$ é isolada e faz sentido considerar o índice $i(f, x_0)$.

D.3 Lema. *Suponha que $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e seja $x_0 \in \Omega$ tal que $p = f(x_0)$ é um valor regular de f. Então*

$$i(f, x_0) = (-1)^\beta$$

em que β é a soma das multiplicidades algébricas de todos os autovalores negativos de $f'(x_0)$.

Demonstração. Seja $r > 0$ tal que a solução de $f(x) = p$ em $B_r = B_r(x_0)$ é x_0. Então $i(f, x_0) = \deg(f, B_r, p)$ e por (D.1) vale que $i(f, x_0) = \text{sgn}[J_f(x_0)]$. Usando a forma normal de Jordan, sabemos que o determinante jacobiano $J_f(x_0)$ é dado por

$$J_f(x_0) = \lambda_1 ... \lambda_N,$$

em que λ_j são autovalores de $f'(x_0)$ com $j = 1, ..., N$ e se repetem de acordo com sua multiplicidade algébrica. Lembramos que,

- cada λ_j é diferente de zero, pois x_0 é valor regular;
- se o autovalor é complexo, digamos igual a $a + bi$, então o conjugado $a - bi$ também é um autovalor de $f'(x_0)$ e o produto destes é $a^2 + b^2 > 0$.

Logo, segue que $\text{sgn}[J_f(x_0)] = (-1)^\beta$, completando assim a demonstração. □

D.2. Grau de Leray-Schauder

Nessa seção definimos o grau de Leray-Schauder, que estende a definição de grau topológico para aplicações $f \in C(X, X)$, onde X é um espaço de Banach e f é uma pertubação compacta da identidade $I = I_X$.

Seja D um subconjunto aberto limitado de um espaço de Banach X. Considere também S uma pertubação compacta da identidade, isto é, $S \in C(\overline{D}, X)$ tal que $S = I - T$ onde T é um operador compacto.

Seja $p \notin S(\partial D)$. É possível verificar que $S(\partial D)$ é fechado e então

$$r := \text{dist}(p, S(\partial D)) > 0.$$

Sabemos, veja [3], que todo operador compacto pode ser aproximado por uma sequência de operadores de posto finito, ou seja, existe uma sequência $T_k \in C(\overline{D}, X)$ tal que $T_k \to T$ uniformemente em $\overline{D}$ e

$$T_k(\overline{D}) \subset E_k \subset X \qquad \text{com} \quad \dim(E_k) < \infty \tag{D.2}$$

Vamos definir o grau de $I-T$ como o limite dos graus de $I-T_k$, que definiremos a seguir.

Em [2] prova-se que existe k suficientemente grande

$$\sup_{x\in\overline{D}} \|T(x)-T_k(x)\| < r/2 \tag{D.3}$$

e sendo assim, conclui-se que $p \notin S_k(\overline{D})$. Portanto faz sentido considerar o grau de Brouwer $\deg(S_k, D, p)$ e é possível mostrar que

$$\deg(S_k, D, p) = \deg(I - T_k|D\cap E_k, D\cap E_k, p)$$

D.4 Definição. *Seja $p \notin S(\partial D)$, onde $S = I - T$ com T operador compacto. Então*

$$\deg(S, D, p) = \deg(I - T_k, D, p)$$

para todo T_k satisfazendo(D.2) e (D.3).

Em [2], encontra-se também, a demonstração de que a definição acima não depende da escolha da aproximação $\{T-k\}$ e que o grau de Leray-Schauder satisfaz as condições $(P1)-(P8)$

Podemos extender a definição de índice de uma solução isolada x_0 de $S(x) = x-T(x) = p$, fazendo

$$i(S, x_0) = \lim_{r\to 0}\deg(S, B_r(x_0), p), \quad p = S(x_0),$$
$$B_r(x_0) = \{x\in X; \|x-x_0\| > r\}.$$

Com esta definição mais geral de índice vamos mostrar, no final do capítulo, um resultado análogo ao Lema (D.3).

Lembramos que $\mu \neq 0$ é um valor característico de um aplicação linear A se, e somente se, μ^{-1} é um autovalor de A. Além disso, se 1 não é um valor característico de $T'(x_0)$, então $S'(x_0)$ é invertível. Em particular, o Teorema da Função Inversa se aplica e portanto x_0 e uma solução isolada de $x - T(x) = p$.

D.5 Lema. *Seja $T\in C(X,X)$ um operador compacto e diferenciável em x_0. Então $T'(x_0)$ é um operador linear compacto e existe apenas um número finito de valores característicos contidos em $]0,1[$ e cada um tem multiplicidade finita.*

Demonstração. Veja em [2], página 41. □

D.6 Lema. *Seja* $T \in C^1(\overline{D}, X)$ *um operador compacto e suponha que* 1 *não é valor característico de* $T'(0)$*. Seja* $S(x) = x - T(x)$ *e, seja* $x_0 \in X$ *tal que* $S(x_0) = p$*. Então*

$$i(S, x_0) = \deg(S'(x_0), B_r(x_0), p), \qquad r << 1.$$

Demonstração. Veja em [2], página 41. □

D.7 Lema. *Seja* L *uma aplicação linear compacta em* X *e suponha que* 1 *não é valor característico de* L*. Então*

$$\deg(I - L, B_r(0), 0) = (-1)^\beta, \qquad r > 0,$$

em que β *é a soma das multiplicidades algébricas de todos os autovalores negativos de* L *contidos em* $]0, 1[$*.*

Demonstração. Veja em [2], página 42. □

D.8 Teorema. *Seja* $T \in C(\overline{D}, X)$ *compacto e tal que* 1 *não é valor característico de* $T'(x_0)$ *para algum* $x_0 \in D$*. Então, tomando* $S(x) = x - T(x)$ *e* $S(x_0) = p$*, tem-se que* x_0 *é uma solução isolada de* $S(x) = p$ *e*

$$i(S, x_0) = (-1)^\beta,$$

em que β *é a soma das multiplicidades algébricas de todos os valores característicos de* $T'(x_0)$ *contidos em* $]0, 1[$*.*

Demonstração. Veja em [2], página 43. □

Referências Bibliográficas

[1] Adams, R. A. *Sobolev Spaces.* Academic Express, New York, 1975.

[2] Ambrosetti, A.; Malchiodi, A. *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems.* Cambridge studies in advanced mathematics 104, New York, 2007.

[3] Brézis, H. *Análisis funcional: teoría e aplicaciones*. Alianza Editorial S.A., Madrid, 1984.

[4] Brézis, H.; Turner, R. *On a Class of Superlinear Elliptic Problems*. Comm. Partial Diff. Equations, 2, (1977) 601-614.

[5] Chang, K.C. *An extension of the Hess-Kato theorem to elliptic systems and its applications to multiple solutions problems.* Nonlinear Anal. 46, (1999) 439-454.

[6] Chang, K.C. *Principal eigenvalue for weight in elliptic systems.* Acta Math. Sinica 15, (2001) 419-433.

[7] Clemente, Ph.; De Figueiredo, D. G.; Mitidieri, E. *A priori estimates for positive solutions of semilinear elliptic systems via Hardy-Sobolev inequalities.* Nonlinear partial differential equations, Pitman Res. Notes Math. Ser. 343, (1996) 73-91.

[8] Costa, D. G.; Magalhães, C. A. *A variational approach to subquadratic pertubations of elliptic systems.* J. Differential Equations 111, (1994), 103-122.

[9] Cuccu, F.; Porru, G. *Optimization of the first eigenvalue in problems involving the bi-laplacian.* Differential Equations and aplications, Volume 1, Number 2(2009), 219-235.

[10] Cuesta, M.; De Figueiredo, D. G.; Srikanth, P. N. *On a resonant superlinear elliptic problem.* Calc. Var. Partial Differential Equations 17, (2003), 221-233

[11] Evans, L.C. *Partial Differential Equations.* Graduate studies in Mathematics, vol 19 (American Mathematical Society, Providence, 1998).

[12] De Figueiredo, D. G. *Positive solutions of semilinear elliptic equations.* Lecture Notes in Mathematics 957, (1982), 34-87.

[13] De Figueiredo, D. G.; Felmer, P. *On superquadratic elliptic systems.* Trans. Amer. Math. Soc. 343, (1996), 99-116.

[14] De Figueiredo, D. G.; Gossez, J. P. *Strict Monotonicity of engenvalues and unique continuation.* Comm. Partial Differential Equations 17, 1992, no. 1-2, 339-346.

[15] De Figueiredo, D. G.; Ramos, M. *On linear pertubations of superquadratic elliptic systems.* Reaction Diffusion systems, (Triste 1995), in Lectures Notes in Pure and Appl. Math., vol 194, Dekker, New York, 1998, 121-130.

[16] De Figueiredo, D. G.; Yang, J. *Critical superlinear Ambrosetti-Prodi problems.* Top. Meth. Nonlin. Anal. Nonl. Anal. TMA 9 (12)(1985),1313-1317.

[17] Fonseca, I.; Gangbo, W. *Degree Theory in Analysis and Applications.* Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, New York: Oxford University Press, 1995.

[18] Furtado, M. F.; De Paiva, F. O. V. *Multiplicity of solutions for resonant elliptic systems.* Journal Math. Anal. Appl. 319, (2006), 435-449.

[19] Gazzola, F.; Grunau, H.; Sweers, G. *Polyharmonic Boundary Value Problems: Positivity Preserving and Nonlinear Higher Order Elliptic Equations Domanins.* Lecture Notes in Mathematics Springer, 2010.

[20] Kannan, R.; Ortega, R. *Landesman-Lazer conditions for problems with "one-side unbounded"nonlinearities.* Nonl. Anal. TMA 9 (12) (1985), 1313-1317.

[21] Kannan, R.; Ortega, R. *Superlinear elliptic boundary value problems.* Czechoslovak Mathematical Journal 37 (112), (1087), 386-399.

[22] Massa, E. *Multiplicity results for a superlinear elliptic system with partial interference with the spectrum.* Nonlinear Analysis 67, (2007), 295-306.

[23] de Morais Filho, D. C.; Pereira, F. R. *Critical Ambrosetti-Prodi type problems for systems of elliptic equations.* Nonlinear Anal. 68(2008), no.1, 194-207.

[24] Pereira, F. R. *Multiple solutions for a class of Ambrosetti-Prodi type problems for systems involving critical Sobolev exponents.* Commun. Pure Appl. 7(2008), no. 2, 355-372.

[25] Ruf, B.; Srikanth, P.N. *Multiplicity results for superlinear elliptic problems with partial interference with the spectrum.* J. Math. Anal. Appl. 118(1)(1986), 15-23.

[26] Struwe, M. *Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems.* Second edition, 34, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[27] Ward, J. *Pertubations with some superlinear growth for a class of second order elliptic boundary value problems.* Nonlinear analysis TMA 6 (1982), 367-374.