

---

Hedging no modelo com processo de Poisson  
composto

*Victor Sae Hon Sung*

---



SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Victor Sae Hon Sung**

## Hedging no modelo com processo de Poisson composto

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP e ao Departamento de Estatística – DEs-UFSCar, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Estatística – Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Estatística

Orientador: Prof. Dr. Dorival Leão Pinto Júnior

**USP – São Carlos**  
**Fevereiro de 2016**

**Victor Sae Hon Sung**

## Hedging in compound Poisson process model

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP and to the Departamento de Estatística – DEs-UFSCar, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Joint Graduate Program in Statistics DEs-UFSCar/ICMC-USP. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Statistics

Advisor: Prof. Dr. Dorival Leão Pinto Júnior

**USP – São Carlos**  
**February 2016**

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar  
Processamento Técnico  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S958h Sae Hon Sung, Victor  
Hedging no modelo com processo de Poisson  
composto / Victor Sae Hon Sung. -- São Carlos :  
UFSCar, 2016.  
40 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de  
São Carlos, 2015.

1. Mercado futuro. 2. Princípio da programação  
dinâmica. 3. Modelo com processo de Poisson composto.  
4. Mean-variance hedging. 5. Hedging. I. Título.

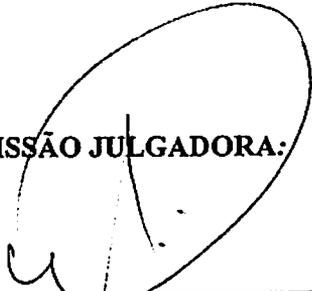
**VICTOR SAE HON SUNG**

**HEDGING NO MODELO COM PROCESSO DE POISSON COMPOSTO**

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Estatística.

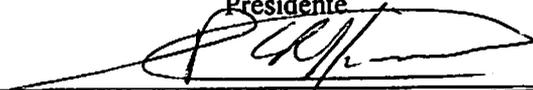
Aprovado em 07 de dezembro de 2015.

**COMISSÃO JULGADORA:**



---

**Prof. Dr. Dorival Leão Pinto Junior**  
ICMC-USP  
Presidente



---

**Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino**  
UNICAMP  
Membro



---

**Prof. Dr. Pedro Jose Catuogno**  
UNICAMP  
Membro

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao orientador Dorival Leão Pinto Júnior, pois sem sua ajuda não seria possível a realização deste trabalho.

Ao grupo de análise estocástica (Vinícius Cabeça, Ricardo Mestrado, Francys Andrews e Rafael Thi) pelas horas de estudos conjuntos.

Aos meus pais, que me deram todo tipo de apoio.

E por fim, a CAPES pelo auxílio financeiro.



# Resumo

Interessado em fazer com que o seu capital gere lucros, o investidor ao optar por negociar ativos, fica sujeito aos riscos econômicos de qualquer negociação, pois não existe uma certeza quanto a valorização ou desvalorização de um ativo.

Eis que surge o mercado futuro, em que é possível negociar contratos a fim de se proteger (hedge) dos riscos de perdas ou ganhos excessivos, fazendo com que a compra ou venda de ativos, seja justa para ambas as partes.

O objetivo deste trabalho consiste em estudar os processos de Lévy de puro salto de atividade finita, também conhecido como modelo de Poisson composto, e suas aplicações. Proposto pelo matemático francês Paul Pierre Lévy, os processos de Lévy tem como principal característica admitir saltos em sua trajetória, o que é frequentemente observado no mercado financeiro. Determinaremos uma estratégia de *hedging* no modelo de mercado com o processo de Poisson composto via o conceito de *mean-variance hedging* e princípio da programação dinâmica.

**Palavras-chave:** Mercado futuro; Hedging; Modelo com processo de Poisson composto; Processo de Poisson composto; Mean-variance hedging; Princípio da programação dinâmica .



# Abstract

The investor, that negotiate assets, is subject to economic risks of any negotiation because there is no certainty regarding the appreciation or depreciation of an asset.

Here comes the futures market, where contracts can be negotiated in order to protect (hedge) the risk of excessive losses or gains, making the purchase or sale assets, fair for both sides.

The goal of this work consist in study Lévy pure-jump process with finite activity, also known as compound Poisson process, and its applications. Discovered by the French mathematician Paul Pierre Lévy, the Lévy processes admits jumps in paths, which is often observed in financial markets. We will define a hedging strategy for a market model with compound Poisson process using mean-variance hedging and dynamic programming.

**Keywords:** Futures; hedging; Mean-variance hedging; Compound Poisson process; Dynamic programming .



# Sumário

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Lista de Figuras</b>  | <b>ix</b> |
| <b>1 Introdução</b>  | <b>1</b>  |
| <b>2 Processo de Poisson composto</b>  | <b>5</b>  |
| 2.1 Filtragem do processo de Poisson composto . . . . .                      | 10        |
| 2.2 Medida de Poisson . . . . .  | 13        |
| 2.3 Funcional de Poisson composto . . . . .                                  | 14        |
| 2.4 Decomposição de Doob-Meyer . . . . .                                     | 16        |
| <b>3 Modelo de mercado com processo de Poisson composto</b>                  | <b>23</b> |
| 3.1 Modelo de mercado . . . . .  | 23        |
| 3.2 Decomposição do processo capital associado ao <i>portfolio</i> . . . . . | 26        |
| 3.3 Princípio de <i>hedging</i> . . . . .                                    | 28        |
| 3.4 Princípio da programação dinâmica . . . . .                              | 29        |
| <b>Referências Bibliográficas</b>  | <b>39</b> |



# Lista de Figuras

- 2.1 Realização de um processo de Poisson composto com tamanho de saltos  $N(0,1)$ . 6



# Capítulo 1

## Introdução

O mercado de derivativos é de extrema importância no mundo das finanças, as oscilações e aleatoriedades dos ativos causam muitas incertezas aos investidores. Pensando nisso, modelos de mercado são criados com o intuito de prever todos os diversos cenários possíveis.

[Black e Scholes \(1973\)](#), publicou *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, artigo que serviu como base para muitos modelos de mercado a tempo contínuo. Robert Cox Merton aperfeiçoou o modelo proposto por Black e Scholes, e publicou o artigo *Theory of rational option pricing* [Merton \(1973\)](#), que rendeu o Nobel de economia a Merton e Scholes. O Modelo ficou conhecido como modelo de Black-Scholes-Merton.

[Merton \(1976\)](#) aprimorou ainda mais este modelo, e acrescentou um componente de saltos (processo do Poisson composto), sendo o primeiro modelo de difusão com saltos aplicado à precificação de derivativos.

Neste modelo, o processo de preço é dado por

$$S_t = S_0 \exp(\mu t + \sigma W_t + Y_t),$$

em que  $\mu, \sigma$  são constantes,  $(W_t)_{t \geq 1}$  o movimento Browniano e  $(Y_t)_{t \geq 1}$  o processo de Poisson composto.

Uma variação do modelo de Merton, é o modelo proposto por [Kou \(2002\)](#), em que é suposto que os tamanhos dos saltos seguem uma distribuição exponencial dupla. Ambos os modelos são de atividade finita, isto é, o número de saltos em um determinado intervalo é limitado.

Segundo [Tankov \(2010\)](#), introduzir saltos na modelagem do ativo enriquece o modelo, uma vez que estudos empíricos sugerem que o comportamento do preço do ativo apresenta saltos, e usar modelos de trajetórias contínuas não condiz com a realidade.

Neste trabalho apresentamos um modelo de mercado baseado somente no processo de Poisson composto, semelhante ao primeiro modelo de puro salto de atividade finita, proposto por [Press \(1967\)](#).

O modelo de mercado com o processo de Poisson composto é formado por dois ativos, o ativo com risco  $\bar{S}$  (*stock*) e o ativo livre de risco  $B$  (*money market account*). Suponha que o ativo  $\bar{S}$  segue a dinâmica

$$\bar{S}_t = \bar{S}_0 \exp(Y_t)$$

em que  $Y$  representa o processo de Poisson composto.

O ativo livre de riscos  $B$  tem processo de preço modelado por

$$\begin{cases} \frac{\Delta B_{T_n}}{B_{T_{n-1}}} = r_{T_{n-1}} \Delta T_n, & n \geq 1 \\ B_0 = 1 \end{cases}$$

em que  $\{r_t\}_{0 \leq t \leq T}$  é o processo taxa de juros.

Suponha que um investidor vendeu um contrato pelo valor  $C > 0$ , que fornece ao seu detentor a opção de comprar um dado ativo financeiro, num tempo especificado  $T$  (chamado tempo de maturidade) a um preço pré-especificado  $K$  (chamado de preço de exercício).

Se no instante  $T$ , o preço do ativo  $S_T$  for menor que  $K$ , o detentor da opção não irá exercer. Porém, se  $S_T > K$ , o detentor irá exercer, isto é, comprará o ativo especificado no contrato pelo preço  $K$ , ganhando a diferença  $S_T - K$ .

Este contrato em especial é denotado por opção de compra europeia (*european call option*) e sua função custo (a qual define os ganhos do detentor desta opção) é dada por

$$H = (S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0).$$

De modo geral, uma função custo  $H$  é uma variável aleatória quadrado integrável.

Ciente da necessidade de cumprir sua parte no acordo, o investidor que vendeu a opção pelo valor  $C$ , monta uma estratégia de investimento, de modo que:

- (i) O capital inicial de investimento é igual ao valor recebido pela contrato da opção;
- (ii) No tempo de maturidade do contrato, o investidor consegue os mesmos ganhos que o detentor da opção, isto é, replica perfeitamente a função custo.

Se o investidor conseguir uma estratégia nos moldes de (i) e (ii), então ele conseguiu uma estratégia de *hedging*.

No instante inicial, ele investe parte do valor recebido pela opção em uma certa quantidade  $\gamma_0$  de ativos  $\bar{S}$  e a outra parte em uma quantidade  $\beta_0$  de ativos  $B$ , isto é

$$C = \gamma_0 \bar{S}_0 + \beta_0 B_0.$$

Dizemos que o investidor está montando uma estratégia de investimento, na qual a cada flutuação do ativo de riscos ele reorganiza a sua estratégia, isto é, transfere dinheiro do ativo de riscos para o ativo livre de riscos, ou vice-versa, a qualquer momento e sem nenhum custo adicional. De maneira geral, em um instante  $t$  qualquer, denotaremos por  $\gamma_t$  e  $\beta_t$ , as quantidades de ativos com risco e sem risco, respectivamente.

O processo que representa as quantidades  $\gamma_t$  e  $\beta_t$ , em um instante  $t$  qualquer até a data de maturidade, é denominado processo *portfolio*  $\pi = \{\gamma_t, \beta_t\}_{0 \leq t \leq T}$ . O capital associado ao *portfolio* é dado por

$$\bar{X}_t^\pi = \gamma_t \bar{S}_t + \beta_t B_t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

A primeira contribuição deste trabalho consiste em apresentar uma decomposição do tipo Doob-Meyer para processos de puro salto adaptados na filtragem do processo de Poisson composto. Por exemplo, o processo capital investidor dado por  $X^\pi$ , em que  $\pi$  é uma estratégia admissível.

Dado um processo  $X$  de puro salto, adaptado na filtragem natural do processo de Poisson composto, este pode ser decomposto (ver Teorema 2.22) na forma

$$X(t) = X(0) + \oint_0^t \mathcal{D}X(s) dM(s) + \int_0^t \mathcal{U}X(s) d\langle Y, Y \rangle(s), \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.1)$$

com  $\oint_0^t \mathcal{D}X(s) dM(s)$  a integral opcional (ver Dellacherie e Meyer (1982) e He *et al.* (1992)) do processo  $\mathbb{F}$ -opcional  $\mathcal{D}X$ ,

$$\mathcal{U}X(t) \mathbb{1}_{\{T_{n-1} < t \leq T_n \leq T\}} = \frac{1}{\mathbb{E}[|\Delta Y_{T_n}|^2 | T_n = t]} \mathbb{E}[\Delta X_{T_n} | \mathcal{F}_{T_{n-1}}; T_n = t] \mathbb{1}_{\{T_{n-1} < t \leq T_n \leq T\}}; \quad n \geq 1$$

e

$$\mathcal{D}X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta X(T_n)}{\Delta M(T_n)} \mathbb{1}_{[[T_n, T_n]]}.$$

Ao se descontar a taxa de juros e assumir a ideia de auto-financeável, isto é

$$\Delta \gamma_t \bar{S}_t + \Delta \beta_t B_t = 0,$$

o capital associado ao *portfolio* no instante  $t$  passa a ser dado por

$$X_t^\pi = X_0^\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{T_{n-1}} \Delta S_{T_n} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.2)$$

em que  $\Delta S_{T_n} = \frac{\bar{S}_{T_n}}{B_{T_n}} - \frac{\bar{S}_{T_{n-1}}}{B_{T_{n-1}}}$ ,  $n \geq 1$ .

Note que em 1.2, o capital associado ao *portfolio* já não depende mais da quantidade  $\beta$  investida no ativo sem riscos. Dependendo apenas do valor inicial do *portfolio*  $C > 0$  e da quantidade investida no ativo de riscos. Assim, até a data de maturidade  $T$ , podemos denotar agora a estratégia por  $\Phi = \{\gamma_t\}_{0 \leq t \leq T}$ .

No modelo de mercado com processo de Poisson composto, o mercado é incompleto, ou seja, não existe uma estratégia auto-financeável que replique a função custo. Vamos definir uma estratégia que minimize a distância entre a função custo e o capital associado ao *portfolio*. A segunda contribuição deste trabalho, consiste em encontrar uma estratégia  $(c, \hat{\gamma}_t)_{0 \leq t \leq T}$ , de modo que

$$\mathbb{E} \left[ \left( c + \int_0^T \hat{\gamma}_t dS_t - H \right)^2 \right] = \inf_{C \in \mathbb{R}, \gamma \in \Phi} \mathbb{E} \left[ \left( C + \int_0^T \gamma_t dS_t - H \right)^2 \right]. \quad (1.3)$$

Assim, a partir da decomposição 1.1, vamos representar nosso processo *portfolio* de maneira conveniente, de modo que no capítulo 3, encontramos uma estratégia que minimiza 1.3 (ver Teorema 3.14) de maneira retrógrada. Tal estratégia, em um tempo  $T_n$  qualquer, é dada por

$$\hat{\gamma}_{T_n} = - \frac{\mathbb{E} [k_{T_{n+1}} \Delta S_{T_{n+1}} (x_n - H_{T_{n+1}}) | \mathcal{F}_{T_n}]}{\mathbb{E} [k_{T_{n+1}} (\Delta S_{T_{n+1}})^2 | \mathcal{F}_{T_n}]} \quad (1.4)$$

em que  $x_n = x + \sum_{\ell=1}^{n-1} \gamma_{T_\ell} \Delta S_{T_\ell}$  é a realização do *portfolio* até o instante  $T_n$ .

Os processos  $\{k\}_{0 \leq t \leq T}$  e  $\{H\}_{0 \leq t \leq T}$  são dados recursivamente por

$$k_{T_n} = \left( \mathbb{E} [k_{T_{n+1}} | \mathcal{F}_{T_n}] - \frac{\mathbb{E}^2 [k_{T_{n+1}} \Delta S_{T_{n+1}} | \mathcal{F}_{T_n}]}{\mathbb{E} [k_{T_{n+1}} (\Delta S_{T_{n+1}})^2 | \mathcal{F}_{T_n}]} \right)$$

e

$$H_{T_n} = \frac{\mathbb{E} \left[ \left( k_{T_{n+1}} - \frac{\mathbb{E} [k_{T_{n+1}} \Delta S_{T_{n+1}} | \mathcal{F}_{T_n}] k_{T_{n+1}} \Delta S_{T_{n+1}}}{\mathbb{E} [k_{T_{n+1}} (\Delta S_{T_{n+1}})^2 | \mathcal{F}_{T_n}]} \right) H_{T_{n+1}} | \mathcal{F}_{T_n} \right]}{k_{T_n}}$$

com condição terminal  $k_T = 1$  e  $H_T$  a função custo.

Este trabalho ficou dividido da seguinte maneira. No capítulo 2, é definido o processo de Poisson composto, tal como a sua filtragem interna, os funcionais de Poisson composto e todo o desenvolvimento para deduzir a forma explícita da decomposição de Doob-Meyer do

funcional de Poisson composto.

No capítulo 3, apresentamos o modelo de mercado com processo de Poisson composto, alguns conceitos básicos de mercado financeiro e propomos a estratégia de *hedging* obtida através da metodologia *mean-variance* e do princípio da programação dinâmica.

# Capítulo 2

## Processo de Poisson composto

A seguir, dado um espaço de probabilidade completo  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  definimos o processo que será base de estudo para o modelo de mercado proposto neste trabalho.

**Definição 2.1.** *O processo de Poisson composto de intensidade  $\lambda > 0$  e tamanho de saltos com distribuição  $F$  é um processo estocástico definido por*

$$\begin{cases} Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} J_i, \\ Y(0) = 0 \end{cases}$$

em que

- (i) os tamanhos dos saltos  $J_i, i \in \mathbb{N}$ , são v.a.s independentes e identicamente distribuídas com distribuição  $F$ ;
- (ii)  $(N_t)_{t \geq 0}$  o processo de Poisson de intensidade  $\lambda$ , independente de  $\{J_1, J_2, \dots\}$ ;
- (iii)  $0 = T_0 < T_1 < T_2 \dots$ , os instantes de saltos do processo de Poisson.

Na figura 2.1, um exemplo de uma realização do processo de Poisson composto com  $\lambda = 2$  e  $J_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, 1), i = 1, \dots, 9$ .

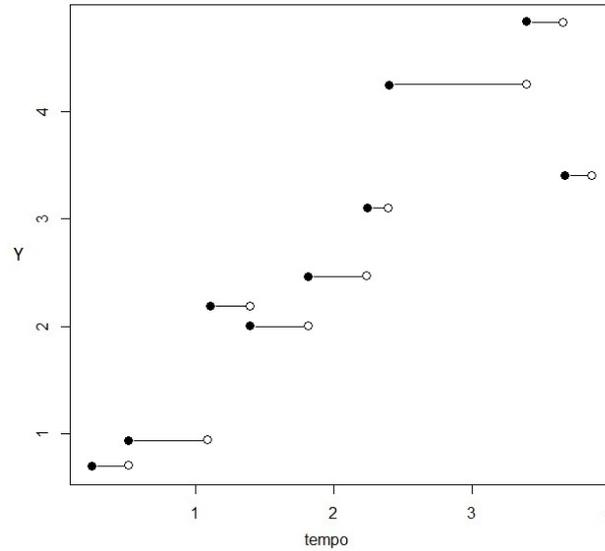
Agora, dados  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade completo e  $Y : [0, T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$  o processo de Poisson composto de intensidade  $\lambda$  e tamanho dos saltos com distribuição  $F$ . A filtragem natural do processo  $Y$  é uma coleção de sub-sigma-álgebras de  $\mathcal{F}$  com

- $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ;
- $\mathcal{A}_t = \sigma\{Y_s : s \leq t\}, t > 0$ ;
- $\mathcal{A}_s \subset \mathcal{A}_t \subset \mathcal{F}$  para  $s \leq t$ ;
- $\mathcal{A}_\infty = \sigma\left\{\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{A}_t\right\} \subset \mathcal{F}$ .

Por definição, a filtragem acima não é uma filtragem completa. Para completar esta filtragem, seja  $\mathcal{N}$  a coleção dos conjuntos de medida nula de  $\mathcal{F}$ .

A filtragem dada por

$$\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{A}_t \cup \mathcal{N})\}_{0 \leq t \leq T}, \quad (2.1)$$



**Figura 2.1:** Realização de um processo de Poisson composto com tamanho de saltos  $N(0,1)$ .

é completa e contínua a direita (ver Brémaud (1981), teorema 26 pág. 304 e teorema 35, pág. 309).

O espaço de probabilidade completo  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  equipado com a filtração  $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq \infty}$  é dita base estocástica completa ou espaço de probabilidade completo filtrado do processo de Poisson composto e será denotado por  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ .

A seguir, algumas propriedades do processo de Poisson composto  $Y$ .

**Propriedade 2.0.1.** *Seja  $Y$  o processo de Poisson composto, valem as propriedades:*

- (i)  $Y_0 = 0$ , q.c.;
- (ii)  $(Y_t)_{t \geq 0}$  é constante por partes, com trajetórias cádlág (ver figura 2.1, por exemplo);
- (iii) incrementos independentes do passado

$$Y_t - Y_s \text{ independe da filtração } \mathcal{F}_s;$$

- (iv) incrementos estacionários

$$Y_{t+s} - Y_t, \text{ tem a mesma distribuição que } Y_s - Y_0, \quad \forall s, t > 0;$$

- (v) contínuo em probabilidade

$$\lim_{h \rightarrow 0} P(|Y_{t+h} - Y_t| > \epsilon) = 0, \quad \forall \epsilon > 0 \text{ e } t > 0.$$

As propriedades (iii), (iv) e (v) decorrem do simples fato do processo de Poisson ser um caso particular dos processos de Lévy (Protter (2004) pág. 20 e 46).

Ao longo deste trabalho, sempre que nos referirmos ao processo de Poisson composto com intensidade  $\lambda$  e tamanho dos saltos com distribuição  $F$ , iremos denotar por  $PPC(\lambda, F)$ .

**Teorema 2.2.** *Seja  $Y$  um  $PPC(\lambda, F)$ , seu valor esperado é*

$$\mathbb{E}[Y(t)] = \lambda t k,$$

em que  $k = \mathbb{E}[J_1]$ , com  $J_1$  é o tamanho do primeiro salto.

*Demonstração.* Por propriedade de esperança condicional

$$\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_t|N_t]].$$

Como

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_t|N_t]] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{l=1}^{N_t} J_l \middle| N_t\right]\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{l=1}^{N_t} J_l \middle| N_t = n\right] P(N_t = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{l=1}^n J_l\right] P(N_t = n). \end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sum_{l=1}^n J_l\right] &= \sum_{l=1}^n \mathbb{E}[J_l] \\ &= nk, \end{aligned}$$

obtemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_t] &= \sum_{n=0}^{\infty} nkP(N_t = n) \\ &= k \sum_{n=0}^{\infty} nP(N_t = n) \\ &= k\mathbb{E}[N_t]. \end{aligned}$$

Como  $(N_t)_{t \geq 0}$  é o processo de Poisson de parâmetro  $\lambda$  com valor esperado

$$\mathbb{E}[N_t] = \lambda t.$$

Assim,

$$\mathbb{E}[Y_t] = k\lambda t.$$

□

Na sequência, vamos definir classes de processo que são fundamentais na análise estocástica.

**Definição 2.3.** *Um martingale (respectivamente submartingale, supermartingale) é um processo  $X$  adaptado na base  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ , de modo que  $X_t$  é integrável, e para todo  $s \leq t$*

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s \quad (\text{resp. } \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s, \quad \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s).$$

**Proposição 2.4.** *Dado  $Y$  um PPC( $\lambda F$ ), então  $M_t = Y_t - \lambda tk$  é um martingale.*

*Demonstração.* Temos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[Y_t - \lambda tk|\mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[Y_t|\mathcal{F}_s] - \lambda tk \\ &= \mathbb{E}[Y_t - Y_s + Y_s|\mathcal{F}_s] - \lambda tk.\end{aligned}$$

Como

$$\mathbb{E}[Y_s|\mathcal{F}_s] = Y_s.$$

Então

$$\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[Y_t - Y_s|\mathcal{F}_s] + Y_s - \lambda tk.$$

Como os incrementos são independentes do passado

$$\mathbb{E}[Y_t - Y_s|\mathcal{F}_s] = \lambda(t - s)k,$$

obtemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] &= \lambda(t - s)k + Y_s - \lambda tk \\ &= Y_s - \lambda sk.\end{aligned}$$

Assim

$$\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s.$$

□

Uma alternativa para descrever uma variável aleatória é pela sua função característica. A vantagem de se trabalhar com funções características, é que se tratando de funções reais, elas sempre existem, diferentemente da função geradora de momentos. A definição formal de função característica será dada a seguir.

**Definição 2.5.** *Seja  $X$  uma v.a.. Então a função característica (transformada de Fourier) é uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por*

$$f(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}]$$

em que

$$\mathbb{E}[e^{iuX}] = \mathbb{E}[\cos(uX)] + i\mathbb{E}[\sin(uX)].$$

Pela definição 2.5, se uma v.a. admite uma função densidade de probabilidade, então a função característica é a inversa da transformada de Fourier da função densidade de probabilidade.

Em particular, a função característica do processo de Poisson composto é dada no Teorema 2.6.

**Teorema 2.6. (Itô-Lévy-Kintchine)** *A função característica do processo  $Y$  é dada por*

$$f_t(u) = \exp \left\{ t \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1) \lambda F(dx) \right\}.$$

*Demonstração.* Pela definição

$$\begin{aligned} f_t(u) &= \mathbb{E} [e^{iuY_t}] \\ &= \mathbb{E} \left[ \exp \left( iu \sum_{l=1}^{N_t} J_l \right) \right]. \end{aligned}$$

Via propriedades de esperança condicional

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \exp \left( iu \sum_{l=1}^{N_t} J_l \right) \right] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \exp \left( iu \sum_{l=1}^{N_t} J_l \right) \middle| N_t = n \right] P(N_t = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \exp \left( iu \sum_{l=1}^n J_l \right) \right] P(N_t = n). \end{aligned}$$

Como  $N_t$  é o processo de Poisson, sabemos que

$$P(N_t = n) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}.$$

Logo, pela suposição dos  $J_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , serem identicamente distribuidos

$$f_t(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbb{E} [\exp(iuJ_1)])^n \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}.$$

Como

$$\mathbb{E} [\exp(iuJ_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuy} F(dy).$$

Assim

$$\begin{aligned} f_t(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuy} F(dy) \right)^n \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( \lambda t \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuy} F(dy) \right)^n}{n!} \\ &= \exp \left\{ -\lambda t + \lambda t \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuy} F(dy) \right\} \\ &= \exp \left\{ -\lambda t \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuy} F(dy) - 1 \right) \right\}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} f_t(u) &= \exp \left\{ -\lambda t \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuy} F(dy) - \int_{-\infty}^{\infty} 1 F(dy) \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ t \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iuy} - 1) \lambda F(dy) \right\}. \end{aligned}$$

□

Até o momento, foi apresentado propriedades do processo de Poisson composto. A seguir, vamos explorar um pouco mais a sua filtragem natural.

## 2.1 Filtragem do processo de Poisson composto

Conforme foi feito na seção anterior, dado  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade completo e  $Y : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  o processo de Poisson composto, definimos em 2.1 a filtragem natural completada do processo de Poisson composto. A seguir, apresentaremos o conceito de  $\sigma$ -álgebra tempo de parada, mas primeiramente a definição 2.7 é necessária.

**Definição 2.7.** *Um tempo de parada é uma função  $R : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  tal que o evento  $\{R \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ , para todo  $t, 0 \leq t \leq \infty$ .*

Do mesmo modo que a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_t$  representa a quantidade de informação que temos sobre os eventos até um dado instante  $t$ , dado um tempo de parada  $R$ , a filtragem avaliada no tempo de parada representa a quantidade de informação possuída até um instante aleatório  $R$ . Essa ideia intuitiva é formalizada na definição 2.8.

**Definição 2.8.** *Seja  $R$  um tempo de parada. O conjunto de informação até  $R$  é a filtragem avaliada no tempo de parada  $R$  definida por*

$$\mathcal{F}_R := \{\Lambda \in \mathcal{F} : \Lambda \cap \{R \leq t\} \in \mathcal{F}_t, t \geq 0\}.$$

O conjunto de informações estritamente anteriores a  $R$  será denotado por  $\mathcal{F}_{R^-}$  e definido por

$$\mathcal{F}_{R^-} := \sigma\{\Lambda \cap \{s < R\} : \Lambda \in \mathcal{F}_s, s \geq 0\}.$$

Note que toda informação contida em  $\mathcal{F}_{R^-}$  está contida em  $\mathcal{F}_R$ , mas o inverso não é verdadeiro. Sendo  $\mathcal{F}_{R^-}$  um subconjunto próprio de  $\mathcal{F}_R$ , como pode ser visto no Teorema 2.9 (ver Brémaud (1981) pág. 298, teoremas 4 e 5).

**Teorema 2.9.** *Seja  $R$  um tempo de parada, então*

- (i)  $\mathcal{F}_{R^-} \subset \mathcal{F}_R$ ;
- (ii)  $R$  é  $\mathcal{F}_{R^-}$ -mensurável.

*Demonstração.* (i) Basta mostrarmos que os geradores de  $\mathcal{F}_{R^-}$  pertencem a  $\mathcal{F}_R$ . Tomemos  $\Lambda \in \mathcal{F}_s$ , temos que

$$\Lambda \cap \{s < R\} \cap \{R \leq t\} = \Lambda \cap \{s < R \leq t\}.$$

Como  $R$  é tempo de parada

$$\Lambda \cap \{s < R \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Logo

$$\mathcal{F}_{R^-} \subset \mathcal{F}_R.$$

(ii) Temos de mostrar que

$$\{R = t\} \in \mathcal{F}_{R^-}, \forall t \geq 0.$$

De fato, basta notar que  $\{R = t\}$  é um dos geradores de  $\mathcal{F}_{R^-}$ . E por (i) o resultado segue.  $\square$

Uma das características interessantes da filtragem natural do processo de Poisson composto é que ela é uma filtragem do tipo discreta, isto é, tomando a sequência  $\{T_n\}_{n \geq 1}$  de tempos de parada

$$\mathcal{F}_t = \bigvee_{n=0}^{\infty} \left( \mathcal{F}_{T_n} \cap \{T_n \leq t < T_{n+1}\} \right), \quad 0 \leq t \leq T.$$

A importância de estarmos trabalhando com filtrações do tipo discreta se deve ao fato de que todo martingale em uma filtragem do tipo discreta pode ser decomposto em uma parte de saltos e uma parte previsível (Leão e Ohashi (2013) pág. 12), o que será útil na seção 2.3, em que iremos caracterizar os martingales com respeito a filtragem natural do processo de Poisson composto.

O teorema seguinte pode ser encontrado em Brémaud (1981) pág. 299, teorema 10.

**Teorema 2.10.** *Sejam  $Y$  um PPC( $\lambda, F$ ),  $T_1, T_2, \dots$  os tempos de ocorrências dos saltos e  $J_1, J_2, \dots$  o tamanho dos saltos. Valem as igualdades*

$$(i) \quad \mathcal{F}_{T_n} = \sigma\{(T_1, J_1); \dots; (T_n, J_n)\};$$

$$(ii) \quad \mathcal{F}_{T_n^-} = \sigma\{(T_1, J_1); \dots; (T_{n-1}, J_{n-1}); T_n\}.$$

*Demonstração.* (i) Mostremos primeiramente que

$$\sigma\{(T_1, J_1); \dots; (T_n, J_n)\} \subset \mathcal{F}_{T_n}.$$

De fato, temos que

$$T_n \text{ é } \mathcal{F}_{T_n}\text{-mensurável} \implies T_i \text{ é } \mathcal{F}_{T_n}\text{-mensurável, } \forall i \leq n.$$

$Y_{T_n}$  é  $\mathcal{F}_{T_n}$ -mensurável, pois

$$Y_{T_n} = \sum_{l=1}^{\infty} J_l \mathbb{1}_{\{T_l \leq T_n\}}.$$

Tomemos  $B$  um boreliano da reta,

$$\left\{ \sum_{l=1}^{\infty} J_l \mathbb{1}_{\{T_l \leq T_n\}} \in B \right\} \cap \{T_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Então  $\{Y_{T_n} \in B\} \in \mathcal{F}_{T_n}$ .

Sabemos que

$$J_n = Y_{T_n} - Y_{T_{n-1}}.$$

Logo  $J_n$  é  $\mathcal{F}_{T_n}$ -mensurável

Assim

$$J_i \text{ é } \mathcal{F}_{T_n}\text{-mensurável } \forall i \leq n.$$

Para mostrar a recíproca, basta notar que  $Y_{u \wedge T_n}$  é  $\sigma((T_1, J_1), \dots, (T_n, J_n))$ -mensurável,  $\forall u \geq 0$ .

De fato, como  $Y_{u \wedge T_n}$  é um processo *càdlàg* adaptado, o resultado segue (ver Protter (2004), teorema 6, página 5).

(ii) Queremos mostrar que  $\mathcal{F}_{T_n^-} = \sigma\{(T_1, J_1); \dots; (T_{n-1}, J_{n-1}); T_n\}$ .

Como

$$\mathcal{F}_{T_n^-} = \sigma\{\Lambda \cap \{T_n > t\} \text{ e } \Lambda \in \mathcal{F}_t; t \geq 0\}.$$

Vamos mostrar que a classe

$$\{\Lambda \cap \{T_n > t\}\} \subset \sigma\{(T_1, J_1); \dots; (T_{n-1}, J_{n-1}); T_n\}.$$

Sabemos que

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{\mathbb{1}_{\{J_n \in A\}} \mathbb{1}_{\{T_n \leq s\}}\}$$

em que  $n \geq 1$ ,  $0 \leq s \leq t$  e  $\Lambda$  um boreliano da reta.

Tomemos

$$\Lambda = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{J_n \in A\}} \mathbb{1}_{\{T_n \leq s\}} = k \right\}.$$

Assim

$$\Lambda \cap \{T_n > t\} = \underbrace{\left\{ \sum_{l=1}^{n-1} \mathbb{1}_{\{J_l \in A\}} \mathbb{1}_{\{T_l \leq s\}} = k \right\}}_{\in \mathcal{F}_{T_n^-}} \cap \underbrace{\{T_n > t\}}_{\in \sigma(T_n)}.$$

Portanto

$$\mathcal{F}_{T_n^-} \subset \sigma\{(T_1, J_1); \dots; (T_{n-1}, J_{n-1}); T_n\}.$$

Para a recíproca, como

$$\sigma\{(T_1, J_1); \dots; (T_{n-1}, J_{n-1})\} = \mathcal{F}_{T_{n-1}} \subset \mathcal{F}_{T_n^-}.$$

Temos de mostrar apenas que  $T_n$  é  $\mathcal{F}_{T_n^-}$ -mensurável.

De fato, seja  $\Omega \in \mathcal{F}_t$ , temos pela definição 2.8 que  $\Omega \cap \{T_n < t\}$  é um dos geradores de  $\mathcal{F}_{T_n^-}$ .

Logo

$$\sigma\{(T_1, J_1); \dots; (T_{n-1}, J_{n-1}); T_n\} \subset \mathcal{F}_{T_n^-}.$$

□

Assim, no Teorema 2.10, como consequência dos resultados obtidos no Teorema 2.9, temos que a filtragem avaliada no tempo de parada  $\mathcal{F}_{T_n}$  é a mesma  $\sigma$ -álgebra gerada pelos tamanhos e instantes dos saltos, conhecidos até o tempo de parada  $T_n$ .

**Definição 2.11.** *Dado  $X$  um processo adaptado na filtragem do processo de Poisson composto. Se existe um processo previsível  $A$ , de modo que  $X - A$  é um martingale local, então  $A$  é chamado de compensador de  $X$ .*

**Lema 2.12.** *Seja  $X$  um processo com incrementos independentes e estacionários na filtragem do processo de Poisson composto, então o compensador de  $X$  é o seu valor esperado.*

*Demonstração.* Seja

$$Z = X - \mathbb{E}[X].$$

Se mostrarmos que  $Z$  é um martingale, então  $\mathbb{E}[X]$  é compensador de  $X$ .

De fato,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[X_t - \mathbb{E}[X_t] | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[X_t - X_s + X_s | \mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[X_t - X_s] - \mathbb{E}[X_s] \\ &= \mathbb{E}[X_t - X_s | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[X_s | \mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[X_t - X_s] - \mathbb{E}[X_s] \end{aligned}$$

Como o processo  $X$  tem incrementos independentes, temos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_s] &= X_s - \mathbb{E}[X_s] \\ &= Z_s.\end{aligned}$$

Logo  $Z$  é um martingale. □

## 2.2 Medida de Poisson

Considere  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade completo e  $Y : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  o processo de Poisson composto, com filtragem natural completada  $\mathbb{F}$ , conforme definida na seção anterior.

O processo de Poisson composto  $Y$  é um processo com trajetórias constantes por partes que pode ser representado na forma

$$Y(t, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta Y(T_n(\omega), \omega) \mathbf{1}_{\{T_n(\omega) \leq t\}}(\omega).$$

Assim, podemos associar ao processo  $Y$  uma medida aleatória  $\mu : \Omega \times \beta([0, T]) \times \beta(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ , de modo que

$$\mu(\omega, [0, t], B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_B(J_i) \mathbf{1}_{\{T_i(\omega) \leq t\}}(\omega)$$

para todo  $\omega \in \Omega$ ,  $t \in [0, T]$  e  $B \in \beta(\mathbb{R})$ .

A medida  $\mu$  caracteriza o processo  $Y$ , pois

$$Y(t, \omega) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x \mu(\omega, ds, dx).$$

Como os incrementos do processo de Poisson composto são independentes, pelo Lema 2.12, existe uma medida  $\nu$  no espaço  $([0, T] \times \mathbb{R}; \beta([0, T] \times \mathbb{R}))$ , compensador de  $\mu$ , de modo que

$$\nu([0, t], B) = \mathbb{E}[\mu([0, t] \times B)] \tag{2.2}$$

Notemos que, conforme foi definido em (2.2)

$$\begin{aligned}\nu([0, t], B) &= \mathbb{E}[\mu([0, t] \times B)] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{B\}}(J_n) \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{B\}}(J_n) \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}}] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{B\}}(J_n)] \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}}] \\ &= \int_B F(dx) \mathbb{E}[N_t] = \int_B \int_0^t \lambda F(dx) ds.\end{aligned}$$

Portanto

$$\nu(ds, dx) = \lambda F(dx) ds$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\nu([0, t], dx) = \lambda\mathbb{E}[J_1] < \infty.$$

Vamos admitir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^2\nu([0, T], dx) = \lambda\mathbb{E}[J_1^2] < \infty. \quad (2.3)$$

**Definição 2.13.** O processo variação quadrática  $[Y, Y]$  é definido por

$$[Y, Y]_t = \sum_{n=1}^{\infty} (Y_{T_n} - Y_{T_{n-1}})^2 \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}}.$$

Para o processo variação quadrática, temos

$$\begin{aligned} [Y, Y]_t &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mu(ds, dx) \\ &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mu(ds, dx) - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \nu(ds, dx) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \nu(ds, dx) \\ &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x^2 (\mu(ds, dx) - \nu(ds, dx)) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \nu(ds, dx). \end{aligned}$$

Como a medida  $\nu$  é compensadora de  $\mu$ , temos que o processo *angle bracket*<sup>1</sup>  $\langle Y, Y \rangle$ , é dado por

$$\begin{aligned} \langle Y, Y \rangle_t &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \nu(ds, dx) \\ &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \lambda F(dx) ds = \lambda t \theta, \end{aligned}$$

em que  $\mathbb{E}[J_i^2] = \theta$ ,  $i \in \mathbb{N}$ .Assim, temos que o compensador de  $[Y, Y]$  é dado por

$$\langle Y, Y \rangle_t = \lambda t \theta. \quad (2.4)$$

## 2.3 Funcional de Poisson composto

Nesta seção, iremos encontrar uma decomposição de Doob-Meyer para um dado funcional de Poisson composto. Considere um espaço de probabilidade filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ , definido pelo  $PPC(\lambda F)$ . Seguem algumas definições que serão necessárias.

**Definição 2.14.** *Sejam  $R$  e  $S$  dois tempos de parada, de modo que  $R(\omega) \leq S(\omega)$ ,  $\forall \omega \in \mathbb{R}$ . Então o intervalo estocástico é definido por*

$$[[R, S]] = \{(t, \omega); R(\omega) \leq t \leq S(\omega)\}$$

e

$$]]R, S]] = \{(t, \omega); R(\omega) < t \leq S(\omega)\}$$

<sup>1</sup>O processo *angle bracket*  $\langle Y, Y \rangle$  é o processo tal que  $[Y, Y] - \langle Y, Y \rangle$  é um martingale (para maiores detalhes ver Protter (2004) página 66 e Shiryaev (1999) página 305).

com  $[[R, S]]$  e  $[[R, S]] \subset [0, \infty) \times \Omega$ .

A seguir, será definido os processos opcional e previsível, os quais são necessários para a decomposição de Doob-Meyer de semimartingales, tal como o estudo de integrais estocásticas opcionais.

**Definição 2.15.** *A  $\sigma$ -álgebra gerada pelos processos  $(X_t)_{t \geq 0}$ , tal que  $X$  é càdlàg e adaptado a filtragem  $\mathbb{F}$  é denominada  $\sigma$ -álgebra opcional. O processo  $X : [0, T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$ , mensurável na  $\sigma$ -álgebra opcional, é chamado processo opcional.*

A partir da definição 2.15, pode-se concluir que todo processo càdlàg é opcional, mas nem toda realização de um processo opcional é càdlàg.

**Definição 2.16.** *A  $\sigma$ -álgebra gerada pelos processos  $(X_t)_{t \geq 0}$ , tal que  $X$  é contínua à esquerda e adaptado a filtragem  $\mathbb{F}$  é denominada  $\sigma$ -álgebra previsível. O processo  $X : [0, T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$ , mensurável na  $\sigma$ -álgebra previsível, é chamado processo previsível.*

Denotaremos por  $\mathcal{O}$  e  $\mathcal{P}$  as sigma álgebras opcional e previsível, respectivamente, com respeito a  $\mathbb{F}$ . Se  $X$  é um processo previsível, então ele também é um processo opcional (ver Brémaud (1981), página 9), em outras palavras

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{O}.$$

As  $\mathbb{F}$ -projeções dual previsível e opcional de um processo  $X$  serão denotadas por  $[X]^p$  e  $[X]^o$ , respectivamente.

Por fim,  $\mathbf{B}^2(\mathbb{F})$  o espaço dos processos  $X$  que são  $\mathbb{F}$ -adaptados tal que

$$\mathbb{E}[|X_T^*|^2] < \infty$$

em que  $X_T^* := \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|$ .

Ao longo do trabalho, assumiremos que o processo de Poisson composto  $Y \in \mathbf{B}^2(\mathbb{F})$ .

**Definição 2.17.** *Dizemos que um processo estocástico  $X \in \mathbf{B}^2(\mathbb{F})$  é um funcional de Poisson composto se ele é adaptado na filtragem natural do processo de Poisson composto  $\mathbb{F}$ , possui trajetórias càdlàg, valor esperado da variação quadrática finita, isto é*

$$\mathbb{E}[[X, X](T)] < \infty$$

e pode ser representado por

$$X_t = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta X_{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Como consequência da definição 2.17 o processo de Poisson composto  $Y$  é um funcional de Poisson composto.

De fato, por ser càdlàg e possuir variação finita, então a variação quadrática de  $Y$  é o somatório do quadrado dos saltos. Como no processo de Poisson composto os saltos são finitos e os tamanhos dos saltos são finitos, a variação quadrática é finita, logo

$$\mathbb{E}[[Y, Y](T)] < \infty.$$

**Definição 2.18.** *O processo  $X \in \mathbf{B}^2(\mathbb{F})$  é um semimartingale especial se ele pode ser decomposto em*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,$$

em que  $M_0 = A_0 = 0$ ,  $M$  um martingale local e  $A$  um processo previsível com variação limitada.

## 2.4 Decomposição de Doob-Meyer

De modo análogo ao que é feito com os processos estocásticos que são submartingales, em que é possível encontrar uma decomposição única de Doob-Meyer, iremos obter uma decomposição para os funcionais de Poisson composto.

**Lema 2.19.** *Seja  $X$  um funcional de Poisson composto, então existe um único processo  $N^X$  com variação integrável de modo que*

$$M_t^X = X_t - X_0 - N_t^X, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.5)$$

em que  $M_t^X$  é um martingale na filtragem  $\mathbb{F}$  e o processo  $N^X$  é a projeção previsível dual de  $X_t - X_0$  que possui trajetórias contínuas.

Como o processo  $X$  é um semimartingale especial, então a decomposição acima é canônica.

Denotaremos por  $\oint_0^t X(s)dM(s)$  a integral opcional do processo  $\mathbb{F}$ -opcional  $X$ , de modo que

$$\oint_0^t X(s)dM(s) = \int_0^t X(s)dM(s) - \left[ \int_0^\cdot X(s)dM(s) \right]_t^p$$

em que  $\left[ \int_0^\cdot X(s)dM(s) \right]_t^p$  representa a projeção previsível dual de  $\int_0^t X(s)dM(s)$  e  $M$  o martingale definido na proposição 2.4.

Como a filtragem  $\mathbb{F}$  é quase contínua à esquerda, então a integral opcional admite as mesmas propriedades usuais da integração estocástica com integrandos previsíveis (observação 3.5 Dellacherie e Meyer (1982), página 346).

A seguir, iremos caracterizar os elementos de 2.5. Mas primeiramente, é necessário definir o seguinte processo  $\mathbb{F}$ -opcional

$$\mathcal{D}X := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta X(T_n)}{\Delta M(T_n)} \mathbb{1}_{[[T_n, T_n]]} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta X(T_n)}{\Delta Y(T_n)} \mathbb{1}_{[[T_n, T_n]]}, \quad (2.6)$$

em que  $X$  é um funcional de Poisson composto,  $Y$  o processo de Poisson composto,  $M$  o martingale definido na proposição 2.4 e  $[[T_n, T_n]] = \{(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega : T_n(\omega) = t\}$  o intervalo estocástico.

Como

$$X_t - X_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta X(T_n)}{\Delta M(T_n)} \Delta M(T_n) \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta X(T_n)}{\Delta Y(T_n)} \Delta Y(T_n) \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}}.$$

Assim, da equação 2.6, podemos representar o funcional de Poisson composto  $X$  como a seguinte integral de Lebesgue-Stieltjes

$$X(t) = \int_0^t \mathcal{D}X(s)dY(s).$$

Suponha

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{n=1}^m |\Delta X_{T_n}|^2 \right] < \infty, \quad m > 1.$$

Temos que

$$\left[ \int_0^\cdot |\mathcal{D}X(s)|^2 d[M, M](s) \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \int_0^\cdot |\mathcal{D}X(s)|^2 d[Y, Y](s) \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta X(T_n)|^2 \mathbf{1}_{\{T_n \leq \cdot\}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

é um processo crescente integrável.

Assim, existe um único  $\mathbb{F}$ -martingale  $M^X$  de modo que para cada  $\mathbb{F}$ -martingale  $V$  limitado, o processo  $[M^X, V] - \int_0^\cdot \mathcal{D}X(s) d[V, M]$  é um  $\mathbb{F}$ -martingale e portanto

$$M^X(t) = \int_0^t \mathcal{D}X(s) dY(s) - \left[ \int_0^\cdot \mathcal{D}X(s) dY(s) \right]_t^p, \quad (2.7)$$

em que  $\left[ \int_0^\cdot \mathcal{D}X(s) dY(s) \right]_t^p$  representa a projeção previsível dual de  $\int_0^t \mathcal{D}X(s) dY(s)$ .

Assim, o martingale  $M_t^X$  é representado por

$$M_t^X = \oint_0^t \mathcal{D}X(s) dM(s).$$

Em 2.7 o processo previsível foi apresentado, porém não de uma forma explícita. A seguir, vamos caracterizar o resíduo de 2.5.

**Lema 2.20.** (i) A projeção dual previsível de  $X - X(0)$  é dada pelo processo contínuo

$$\int_0^t \mathcal{U}X(s) d\langle M, M \rangle(s) = \int_0^t \mathcal{U}X(s) d\langle Y, Y \rangle(s), \quad 0 \leq t \leq T,$$

em que  $\mathcal{U}X := \mathbb{E}_{[Y]}[\mathcal{D}X/\Delta Y|\mathcal{P}]$ .

(ii)

$$\mathcal{U}X(t) \mathbf{1}_{\{T_{n-1} < t \leq T_n \leq T\}} = \frac{1}{\mathbb{E}[|\Delta Y_{T_n}|^2 | T_n = t]} \mathbb{E}[\Delta X_{T_n} | \mathcal{F}_{T_{n-1}}; T_n = t] \mathbf{1}_{\{T_{n-1} < t \leq T_n \leq T\}}; \quad n \geq 1.$$

**Observação 2.21.**  $\mathbb{E}_{[Y]}[\cdot | \mathcal{P}]$  denota a esperança condicional com respeito a sigma álgebra previsível sobre a medida de Doléans gerada por  $[Y, Y]$ .

*Demonstração.* (i) Defina

$$B_t = \int_0^t \mathcal{D}X(s) dY(s).$$

Temos que, pela definição, para todo  $\mathcal{C} \in \mathcal{P}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ \int_0^T \mathbf{1}_{\{\mathcal{C}\}}(s) dB(s) \right] &= \mathbb{E} \left[ \int_0^T \mathbf{1}_{\{\mathcal{C}\}}(s) \mathcal{D}X dY(s) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\mathcal{C}\}}(T_n) \mathcal{D}X(T_n) \Delta Y(T_n) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\mathcal{C}\}}(T_n) \frac{\mathcal{D}X(T_n)}{\Delta Y(T_n)} \Delta Y(T_n) \Delta Y(T_n) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \int_0^T \mathbf{1}_{\{\mathcal{C}\}}(s) \frac{\mathcal{D}X(s)}{\Delta Y(s)} d[Y, Y](s) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \int_0^T \mathbf{1}_{\{\mathcal{C}\}}(s) \mathcal{U}X(s) d[Y, Y](s) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \int_0^T \mathbf{1}_{\{\mathcal{C}\}}(s) \mathcal{U}X(s) d\langle Y, Y \rangle(s) \right].
\end{aligned}$$

Logo o processo previsível  $N^X$  é dado por

$$N_t^X = \left[ \int_0^\cdot \mathcal{D}X(s) dY(s) \right]_t^p = \int_0^t \mathcal{U}X(s) d\langle Y, Y \rangle(s). \quad (2.8)$$

(ii) Sabemos que, para todo  $\mathcal{C} \in \mathcal{F}_{T_n^-}$ , existe um processo previsível  $L$ , de modo que  $L_{T_n} = \mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ , e é nulo fora do intervalo estocástico  $]]T_{n-1}, T_n]]$  (Brémaud (1981), teorema 31, página 307).

De (i), temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [\mathbf{1}_{\mathcal{C}} \Delta X_{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n \leq T\}}] &= \mathbb{E} \left[ \int_0^T L(s) dB(s) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \int_0^T L(s) \mathcal{U}X(s) d[Y, Y](s) \right] \\
&= \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\mathcal{C}} \mathcal{U}X(T_n) |\Delta Y_{T_n}|^2 \mathbf{1}_{\{T_n \leq T\}}].
\end{aligned}$$

E como  $\mathcal{C}$  é arbitrário,  $\mathcal{U}X$  é um processo previsível e  $Y$  tem incrementos independentes, segue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [\Delta X(T_n) \mathbf{1}_{\{T_n \leq T\}} | \mathcal{F}_{T_n^-}] &= \mathbb{E} [\mathcal{U}X(T_n) |\Delta Y(T_n)|^2 \mathbf{1}_{\{T_n \leq T\}} | \mathcal{F}_{T_n^-}] \\
&= \mathcal{U}X(T_n) \mathbb{E} [|\Delta Y(T_n)|^2 | T_n] \mathbf{1}_{\{T_n \leq T\}}.
\end{aligned}$$

Logo, uma versão da esperança condicional pode ser escrita como a seguir

$$\mathcal{U}X(t) \mathbf{1}_{\{T_{n-1} < t \leq T_n \leq T\}} = \frac{1}{\mathbb{E} [|\Delta Y_{T_n}|^2]} \mathbb{E} [\Delta X_{T_n} | \mathcal{F}_{T_{n-1}}; T_n = t] \mathbf{1}_{\{T_{n-1} < t \leq T_n \leq T\}}; \quad n \geq 1.$$

□

Assim, conseguimos o seguinte teorema

**Teorema 2.22.** *Se  $X$  é um funcional de Poisson composto, então a única decomposição*

$\mathbb{F}$ -semimartingale especial  $(M^X, N^X)$  apresentada em 2.5 é dada agora por

$$X(t) = X(0) + \oint_0^t \mathcal{D}X(s)dM(s) + \int_0^t \mathcal{U}X(s)d\langle Y, Y \rangle(s), \quad 0 \leq t \leq T$$

em que

$$\mathcal{U}X(t)\mathbb{1}_{\{T_{n-1} < t \leq T_n \leq T\}} = \frac{1}{\mathbb{E}[|\Delta Y_{T_n}|^2]} \mathbb{E}[\Delta X_{T_n} | \mathcal{F}_{T_{n-1}}; T_n = t] \mathbb{1}_{\{T_{n-1} < t \leq T_n \leq T\}}; \quad n \geq 1$$

e

$$\mathcal{D}X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta X(T_n)}{\Delta M(T_n)} \mathbb{1}_{[[T_n, T_n]]}.$$

**Exemplo 2.23.** Dado o espaço de probabilidade completo  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Seja  $N$  o processo de Poisson de parâmetro  $\lambda$ , no intervalo  $[0, T]$  com filtragem natural  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_{T_n} = \sigma(T_1, \dots, T_n) : 0 \leq T_n \leq T\}$ . Seja  $X$  um martingale qualquer na filtragem natural do processo de Poisson, a partir do resultado anterior, como podemos representá-lo?

Como  $X$  é um martingale na filtragem natural do processo de Poisson, ele pode ser decomposto em um processo de saltos e um processo previsível

$$X_t = W_t - [W]_t^P$$

em que

$$W_t = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta X_{T_n} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}}.$$

Tomamos

$$\mathcal{D}W = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta W_{T_n}}{\Delta N_{T_n}} \mathbb{1}_{[[T_n, T_n]]} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta X_{T_n}}{\Delta N_{T_n}} \mathbb{1}_{[[T_n, T_n]]}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} W_t &= X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta X_{T_n} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}} \\ &= X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta W_{T_n}}{\Delta N_{T_n}} \Delta N_{T_n} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}} \\ &= \int_0^t \mathcal{D}W(s)dN(s). \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} X_t &= W_t - [W]_t^P \\ &= \int_0^t \mathcal{D}W(s)dN(s) - \int_0^t \mathcal{U}W(s)d\langle N \rangle(s) \\ &= \oint_0^t \mathcal{D}W(s)dN(s). \end{aligned}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} \mathcal{U}W(t)\mathbb{1}_{\{T_{n-1} < t \leq T_n \leq T\}} &= \frac{\mathbb{E}[\Delta W_{T_n} | \mathcal{F}_{T_{n-1}}; T_n = t]}{\mathbb{E}[|\Delta N_{T_n}|^2]} \mathbb{1}_{\{T_{n-1} < t \leq T_n \leq T\}} \\ &= \mathbb{E}[\Delta W_{T_n} | \mathcal{F}_{T_{n-1}}; T_n = t] \mathbb{1}_{\{T_{n-1} < t \leq T_n \leq T\}}. \end{aligned}$$

E para  $t = T_n$

$$\mathcal{U}W_{T_n} = \Delta W_{T_n} = \mathcal{D}W_{T_n}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \oint_0^t \mathcal{D}W(s)dN(s) &= \int_0^t \mathcal{D}W(s)dN(s) - \int_0^t \mathcal{U}W(s)d\langle N \rangle(s) \\ &= \int_0^t \mathcal{U}W(s)dN(s) - \int_0^t \mathcal{U}W(s)d\langle N \rangle(s) \\ &= \int_0^t \mathcal{U}W(s)[dN(s) - d\langle N \rangle(s)]. \end{aligned}$$

E portanto

$$X_t = \int_0^t \mathcal{U}W(s)[dN(s) - \lambda ds]. \quad (2.9)$$

Isto é, todo martingale na filtragem natural do processo de Poisson pode ser escrito como em (2.9), em que

$$\mathcal{U}W_t \mathbb{1}_{\{T_{n-1} < t \leq T_n \leq T\}} = \mathbb{E}[\Delta W_{T_n} | \mathcal{F}_{T_{n-1}}; T_n = t] \mathbb{1}_{\{T_{n-1} < t \leq T_n \leq T\}}.$$

**Lema 2.24.** (Doob-Dynkin) Uma variável aleatória  $Y$  é mensurável com respeito a sigma-álgebra  $\sigma(X_1, \dots, X_n)$  se, e somente se existe uma função Borel mensurável  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de modo que  $Y = g(X_1, \dots, X_n)$ .

A demonstração do Lema 2.24 pode ser vista em Rao e Swift (2006) página 8.

**Exemplo 2.25.** Dado o espaço de probabilidade completo  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Seja  $Y$  o processo de Poisson composto de intensidade  $\lambda$ , no intervalo  $[0, T]$  com filtragem natural

$$\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_{T_n} = \sigma(T_1, J_1, \dots, T_n, J_n) : 0 \leq T_n \leq T\}.$$

Para um dado martingale  $X$  qualquer na filtragem natural do processo de Poisson composto, com  $X_0 = 0$ , como podemos representá-lo?

Dado que  $X$  é um  $\mathbb{F}$ -martingale, temos que

$$X_t = W_t - [W]_t^{\mathcal{P}}$$

em que

$$W_t = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta W_{T_n} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}}.$$

Pelo Teorema 2.22 da decomposição de funcionais de Poisson composto

$$W(t) = \oint_0^t \mathcal{D}W(s)dY(s) + \int_0^t \mathcal{U}W(s)d\langle Y \rangle(s), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Pelo Lema de Doob-Dynkin (2.24), sabemos que existe uma função  $g_n : [0, T]^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Borel mensurável, tal que

$$\Delta W_{T_n} = g_n((T_1, J_1), \dots, (T_n, J_n)), n \geq 1. \quad (2.10)$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{U}W_s \mathbb{1}_{\{T_{n-1} < t \leq T_n \leq T\}} &= \frac{\mathbb{E}[g_n((T_1, J_1), \dots, (s, J_n)) | \mathcal{F}_{T_{n-1}}; T_n = s]}{\theta} \mathbb{1}_{\{T_{n-1} < t \leq T_n \leq T\}} \\ &= \frac{1}{\theta} \int_{-\infty}^{\infty} g_n((T_1, J_1), \dots, (s, x)) F(dx). \end{aligned}$$

em que  $\theta = \mathbb{E}[(J_{T_i})^2]$ ,  $i \in \mathbb{N}$ .

Seja

$$g_n(s, x) := g_n((T_1, J_1), \dots, (s, x)).$$

Temos que

$$\int_0^t \mathcal{U}W_s d\langle Y \rangle(s) = \frac{1}{\theta} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} g_n(s, x) F(dx) d\langle Y \rangle(s).$$

Como vimos em (2.4)

$$\langle Y \rangle_t = \lambda t \theta.$$

Assim

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathcal{U}W_s d\langle Y \rangle(s) &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} g_n(s, x) F(dx) \lambda ds \\ &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} g_n(s, x) \nu(ds, dx). \end{aligned}$$

Em contrapartida, temos que

$$W_t = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta W_{T_n} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}}$$

e

$$\Delta W_{T_n} = g_n(T_n; J_n).$$

Assim

$$W_t = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} g_n(s, x) \mu(\cdot, ds, dx).$$

E conseqüentemente

$$\begin{aligned} X_t &= \oint_0^t \mathcal{D}W(s) dY(s) \\ &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} g_n(s, x) \mu(\cdot, ds, dx) - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} g_n(s, x) \nu(ds, dx) \\ &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} g_n(s, x) [\mu(\cdot, ds, dx) - \nu(ds, dx)] \end{aligned}$$

em que

$$g_n(s, x) = \mathbb{E}[\Delta W_{T_n} | \mathcal{F}_{T_{n-1}}; T_n = s; J_{T_n} = x].$$



# Capítulo 3

## Modelo de mercado com processo de Poisson composto

Neste capítulo, iremos modelar um ativo financeiro via processo de Poisson Composto, também conhecido como Lévy de puro salto de atividade finita. Este é apenas um caso particular de processo de Lévy, uma vez que em um processo de Lévy geral, podem haver infinitos saltos em um intervalo de tempo. Em nossos estudos, como os saltos ocorrem de acordo a um processo de Poisson, o número de saltos será sempre finito.

### 3.1 Modelo de mercado

Considere um modelo de mercado composto pelos ativos com risco (*stock*) e sem riscos (*money market account*), negociados continuamente. Suponha primeiramente que o ativo financeiro  $\bar{S}$  (ativo com risco) segue o processo de Poisson composto, isto é,

$$\bar{S}_t = \bar{S}_0 + \sum_{i=1}^{N_t} J_i = \bar{S}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} J_i \mathbf{1}_{\{T_i \leq t\}}$$

em que  $\bar{S}_0 > 0$ ,  $J_i \sim F$  (conhecida),  $i \in \mathbb{N}$ , e  $N_t$  o processo de Poisson de parâmetro  $\lambda$ .

Devido aos saltos do processo  $\bar{S}_t$ , este é um bom processo para se modelar um ativo financeiro. Porém, do modo como  $\bar{S}_t$  foi definido, dependendo da distribuição dos saltos, este pode assumir valores negativos, sendo contrário as noções de mercado racional. Para evitar este tipo de problema, basta definir  $\bar{S}_t$  do seguinte modo

$$\bar{S}_t = \bar{S}_0 \exp \left\{ \sum_{i=1}^{N_t} J_i \right\}, \quad \bar{S}_0 > 0. \quad (3.1)$$

Assim

$$\frac{\Delta \bar{S}_{T_n}}{\bar{S}_{T_{n-1}}} = \exp \{J_{T_n}\} - 1.$$

O ativo livre de riscos  $B$ , tem processo de preço modelado por

$$\begin{cases} \frac{\Delta B_{T_n}}{B_{T_{n-1}}} = r_{T_{n-1}} \Delta T_n, & n \geq 1 \\ B_0 = 1 \end{cases} \quad (3.2)$$

em que o processo taxa de juros  $\{r_t\}_{0 \leq t \leq T}$  é um processo adaptado com relação a base

estocástica  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ .

Assim, imagine um investidor que resolve investir nestes dois ativos (de riscos e o sem riscos), com um capital inicial  $C > 0$ . Suponha que o investidor pode transferir dinheiro do ativo de riscos para o livre de riscos, ou vice-versa, a qualquer momento e sem nenhum custo adicional.

**Definição 3.1.** *Seja  $\pi = \{\gamma_t, \beta_t\}_{0 \leq t \leq T}$  um par de processos estocásticos previsíveis na base estocástica completa  $(\Omega, \mathbb{F}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , tal que*

$$\gamma_t = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\gamma_{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}} \quad e \quad \beta_t = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\beta_{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

*Dizemos que  $\pi$  é um portfolio se satisfaz as seguintes condições de integrabilidade*

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (\Delta\gamma_{T_n})^2 \mathbf{1}_{T_n \leq t} \right] < \infty \quad e \quad \mathbb{E} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (\Delta\beta_{T_n})^2 \mathbf{1}_{T_n \leq t} \right] < \infty. \quad (3.3)$$

Entende por processo *portfolio*  $\pi$ , o processo que representa a quantidade de ativos comprados pelo investidor no instante  $t$ , em que  $\gamma_t$  representa a quantidade de ativos com risco e  $\beta_t$  a quantidade de ativos livre de risco. Assim, um investidor que montou seu *portfolio* seguindo a estratégia  $\pi$ , no instante inicial, tem o valor do seu *portfolio* dado por

$$C = \bar{X}_0^\pi = \gamma_0 \bar{S}_0 + \beta_0 B_0.$$

E em um instante  $t$  qualquer

$$\bar{X}_t^\pi = \gamma_t \bar{S}_t + \beta_t B_t, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.4)$$

**Definição 3.2.** *O capital no tempo de parada  $T_n$ , descontado a taxa de juros é dado por*

$$X_{T_n}^\pi = \frac{\bar{X}_{T_n}^\pi}{B_{T_n}}, \quad 0 \leq T_n \leq T.$$

*Da mesma forma, o processo de preço descontado é dado por:*

$$S_t := \frac{\bar{S}_t}{B_t}.$$

Nos instantes de saltos, o incremento é dado por

$$\begin{aligned}
\Delta X_{T_n}^\pi &= \frac{\bar{X}_{T_n}^\pi}{B_{T_n}} - \frac{\bar{X}_{T_{n-1}}^\pi}{B_{T_{n-1}}} \\
&= (\beta_{T_n} - \beta_{T_{n-1}}) + \frac{\gamma_{T_n} \bar{S}_{T_n}}{B_{T_n}} - \frac{\gamma_{T_{n-1}} \bar{S}_{T_{n-1}}}{B_{T_{n-1}}} \\
&= (\beta_{T_n} - \beta_{T_{n-1}}) \frac{B_{T_n}}{B_{T_n}} + \frac{\gamma_{T_n} \bar{S}_{T_n}}{B_{T_n}} - \frac{\gamma_{T_{n-1}} \bar{S}_{T_{n-1}}}{B_{T_n}} - \left( \frac{\gamma_{T_{n-1}} \bar{S}_{T_{n-1}}}{B_{T_{n-1}}} - \frac{\gamma_{T_{n-1}} \bar{S}_{T_n}}{B_{T_n}} \right) \\
&= (\beta_{T_n} - \beta_{T_{n-1}}) \frac{B_{T_n}}{B_{T_n}} + \gamma_{T_{n-1}} (S_{T_n} - S_{T_{n-1}}) + (\gamma_{T_n} - \gamma_{T_{n-1}}) \frac{\bar{S}_{T_n}}{B_{T_n}} \\
&= \frac{1}{B_{T_n}} (\Delta \beta_{T_n} B_{T_n} + \Delta \gamma_{T_n} \bar{S}_{T_n}) + \gamma_{T_{n-1}} (S_{T_n} - S_{T_{n-1}}).
\end{aligned}$$

**Definição 3.3.** Um *portfolio*  $\pi = \{\beta_t, \gamma_t\}_{0 \leq t \leq T}$  é *auto-financiável* se

$$\Delta \gamma_t \bar{S}_t + \Delta \beta_t B_t = 0. \quad (3.5)$$

De maneira intuitiva, se o *portfolio* é auto-financiável então uma variação no ativo de risco corresponde a uma mesma variação no ativo livre de riscos.

Assuma que a estratégia  $\pi$  é auto-financiável, temos que

$$\Delta X_{T_n}^\pi = \gamma_{T_{n-1}} (S_{T_n} - S_{T_{n-1}}), \quad n \geq 1. \quad (3.6)$$

Logo, o capital descontando a taxa de juros, é dado por

$$X_t^\pi = X_0^\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{T_{n-1}} \Delta S_{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.7)$$

em que  $\Delta S_{T_n} = (S_{T_n} - S_{T_{n-1}})$ ,  $n \geq 1$ .

Notemos que, por 3.7, sendo o *portfolio* auto-financiável, o investidor não precisa se preocupar com a quantidade  $\beta$  investidos no ativo livre de riscos, bastando apenas o conhecimento de  $\gamma$ .

Agora,

$$\begin{aligned}
\Delta S_{T_n} &= \frac{\bar{S}_{T_n}}{B_{T_n}} - \frac{\bar{S}_{T_{n-1}}}{B_{T_{n-1}}} = \frac{\bar{S}_{T_n}}{B_{T_n}} - \frac{\bar{S}_{T_{n-1}} (1 + r_{T_{n-1}} \Delta T_n)}{B_{T_{n-1}} (1 + r_{T_{n-1}} \Delta T_n)} \\
&= \frac{\bar{S}_{T_n}}{B_{T_n}} - \frac{\bar{S}_{T_{n-1}} (1 + r_{T_{n-1}} \Delta T_n)}{B_{T_{n-1}} (1 + r_{T_{n-1}} \Delta T_n)} \\
&= \frac{\bar{S}_{T_n}}{B_{T_n}} - \frac{\bar{S}_{T_{n-1}} (1 + r_{T_{n-1}} \Delta T_n)}{B_{T_n}} \\
&= \frac{\bar{S}_{T_{n-1}}}{B_{T_n}} \left( \frac{\bar{S}_{T_n}}{\bar{S}_{T_{n-1}}} - 1 - r_{T_{n-1}} \Delta T_n \right) \\
&= \frac{\bar{S}_{T_{n-1}}}{B_{T_n}} \left( \frac{J_{T_n}}{\bar{S}_{T_{n-1}}} - r_{T_{n-1}} \Delta T_n \right),
\end{aligned}$$

em que  $\{J_t\}_{0 \leq t \leq T}$  é o processo de saltos.

Assim o preço descontado a taxa de juros é dado por

$$S_t = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{S}_{T_{n-1}}}{B_{T_n}} \left( \frac{J_{T_n}}{\bar{S}_{T_{n-1}}} - r_{T_{n-1}} \Delta T_n \right) \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

## 3.2 Decomposição do processo capital associado ao *portfolio*

O processo capital associado ao *portfolio*  $\{X_t^\pi\}_{0 \leq t \leq T}$  é um funcional de Poisson composto. De fato, ele é adaptado na filtragem natural do processo de Poisson composto,  $X^\pi \in \mathbf{B}^2(\mathbb{F})$  por hipótese, possui trajetórias *càdlàg*, constante por partes, isto é

$$X^\pi(t, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta X^\pi(T_i(\omega), \omega) \mathbf{1}_{\{T_i(\omega) \leq t\}},$$

e valor esperado da variação quadrática finito

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [[X^\pi, X^\pi]](T) &= \mathbb{E} \left[ \sum_{n=1}^{N(T)} (X_{T_n}^\pi - X_{T_{n-1}}^\pi)^2 \right] \\ &= \sum_{n=1}^{N(T)} \mathbb{E} [\gamma_{T_n}^2 (J_{T_n})^2] < \infty. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.22 podemos decompor o processo capital associado ao *portfolio*, do seguinte modo

$$X_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t \mathcal{D}X_s^\pi dY_s + \int_0^t UX_s^\pi d\langle Y \rangle(s) \quad (3.8)$$

em que

$$\mathcal{D}X^\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta X_{T_n}^\pi}{\Delta Y_{T_n}} \mathbf{1}_{[[T_n, T_n]]}$$

e

$$UX_t^\pi \mathbf{1}_{\{T_{n-1} < t \leq T_n < T\}} = \frac{\mathbb{E} [\Delta X_{T_n}^\pi | \mathcal{F}_{T_{n-1}}; T_n = t]}{\mathbb{E} [|\Delta Y_{T_n}|^2]} \mathbf{1}_{\{T_{n-1} < t \leq T_n < T\}}.$$

Por (3.6), temos que

$$\Delta X_{T_n}^\pi = \gamma_{T_{n-1}} \Delta S_{T_n}.$$

Assim

$$\begin{aligned} UX_t^\pi \mathbf{1}_{\{T_{n-1} < t \leq T_n < T\}} &= \frac{\mathbb{E} [\Delta X_{T_n}^\pi | \mathcal{F}_{T_{n-1}}; T_n = t]}{\mathbb{E} [|\Delta Y_{T_n}|^2]} \mathbf{1}_{\{T_{n-1} < t \leq T_n < T\}} \\ &= \frac{\mathbb{E} [\gamma_{T_{n-1}} \Delta S_{T_n} | \mathcal{F}_{T_{n-1}}; T_n = t]}{\mathbb{E} [|\Delta Y_{T_n}|^2]} \mathbf{1}_{\{T_{n-1} < t \leq T_n < T\}} \\ &= \gamma_{T_{n-1}} \frac{\mathbb{E} [\Delta S_{T_n} | \mathcal{F}_{T_{n-1}}; T_n = t]}{\mathbb{E} [|\Delta Y_{T_n}|^2]} \mathbf{1}_{\{T_{n-1} < t \leq T_n < T\}}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.24 de Doob-Dynkin, como  $S_t$  é  $\mathcal{F}_t$ -mensurável então existe uma função

$h_n : [0, T]^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Borel mensurável tal que

$$\Delta S_{T_n} = h_n((T_1, J_1); \dots; (T_n, J_n)).$$

Seja

$$h_n(s, x) := h_n((T_1, J_1); \dots; (s, x)).$$

Temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{U}X_t^\pi \mathbb{1}_{\{T_{n-1} < t \leq T_n < T\}} &= \gamma_{T_{n-1}} \frac{\mathbb{E}[h_n(T_n, J_n) | \mathcal{F}_{T_{n-1}}; T_n = t]}{\mathbb{E}[|\Delta Y_{T_n}|^2]} \mathbb{1}_{\{T_{n-1} < t \leq T_n < T\}} \\ &= \frac{\gamma_{T_{n-1}}}{\mathbb{E}[|\Delta Y_{T_n}|^2]} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(t, x) F(dx) \mathbb{1}_{\{T_{n-1} < t \leq T_n < T\}}. \end{aligned}$$

Logo

$$\int_0^t \mathcal{U}X_s^\pi d\langle Y \rangle(s) = \frac{\gamma_{T_{n-1}}}{\mathbb{E}[|\Delta Y_{T_n}|^2]} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} h_n(s, x) F(dx) d\langle Y \rangle(s).$$

Seja

$$\mathbb{E}[|\Delta Y_{T_n}|^2] = \theta \quad \text{e} \quad \langle Y \rangle_t = \lambda t \theta.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathcal{U}X_s^\pi d\langle Y \rangle(s) &= \frac{\gamma_{T_{n-1}}}{\theta} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} h_n(s, x) F(dx) \lambda \theta ds \\ &= \gamma_{T_{n-1}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} h_n(s, x) \underbrace{F(dx) \lambda ds}_{\nu(ds, dx)} \\ &= \gamma_{T_{n-1}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} h_n(s, x) \nu(ds, dx). \end{aligned}$$

Resta caracterizar a parte martingale da decomposição (3.8). Pelo exemplo (2.25), sabemos que todo martingale  $Z$  na filtragem natural do processo de Poisson composto pode ser escrito como

$$Z_t = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} g_n(s, x) [\mu(\cdot, dx, ds) - \nu(ds, dx)]$$

em que  $g$  é uma função Borel mensurável como definida em (2.10), isto é

$$g_n((T_1, J_1), \dots, (T_n, J_n)) = \Delta W_{T_n}$$

e

$$Z_t = W_t - [W]_t^{\mathcal{P}},$$

com  $W$  um processo constante por partes.

Assim, o processo capital associado ao *portfolio* pode ser decomposto do seguinte modo

$$X_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} g_n(s, x) [\mu(\cdot, dx, ds) - \nu(ds, dx)] + \gamma_{T_{n-1}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} h_n(s, x) \nu(ds, dx)$$

com  $g$  e  $h$  funções Borel mensuráveis.

### 3.3 Princípio de *hedging*

Suponha que um investidor assinou um contrato que lhe dá a opção de comprar um dado ativo financeiro, num tempo especificado  $T$  (chamado tempo de maturidade), por um preço pré-especificado  $K$  (chamado de preço de exercício).

Se no instante  $T$ , o preço do ativo  $S_T$  for menor que  $K$ , o detentor da opção não irá exercer. Porém, se  $S_T > K$ , o detentor irá exercer, isto é, comprará o ativo especificado no contrato pelo preço  $K$ , ganhando a diferença  $S_T - K$ .

Este contrato em especial é denotado por opção de compra europeia (*european call option*) e sua função custo (a qual define os ganhos do detentor desta opção) é dada por

$$H = (S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0).$$

De modo geral, uma função custo  $H$  é uma variável aleatória quadrado integrável.

Ciente da necessidade de cumprir sua parte no acordo, o investidor que vendeu a opção pelo capital  $C$ , monta uma estratégia de *hedging* para se proteger.

**Definição 3.4.** *Dados  $C > 0$ , o valor pago pela opção,  $\pi = \{(\beta_t, \gamma_t)\}_{0 \leq t \leq T}$  o processo portfolio e  $X_t^\pi$  o capital do investidor, associado a estratégia  $\pi$ . A estratégia  $\pi$  é uma estratégia de hedging se*

$$(i) \quad X_0^\pi = C;$$

$$(ii) \quad X_T^\pi = H.$$

Dizemos que um mercado é completo, quando é possível encontrar uma estratégia de *hedging* auto-financiável que replique perfeitamente a função custo. De modo análogo, quando não existe esta estratégia, chamamos o mercado de incompleto.

Notemos que se a estratégia não for auto-financiável, é sempre possível replicar a função custo, sendo necessário apenas inserir ou retirar ativos livre de riscos.

**Notação 1.**  $\Pi(C, H) :=$  *classe de todas as estratégias de hedging para um valor pago  $C$ .*

Ao se vender uma opção, a questão mais importante é: Qual deveria ser o preço justo a ser pago por ela?

**Definição 3.5.** *O preço justo  $c$  de uma opção é dado por*

$$c = \inf \{C > 0 : \Pi(C, H) \neq \emptyset\}.$$

Devido ao fato de que nem todo  $\mathbb{F}$ -martingale, em que  $\mathbb{F}$  é a filtragem natural completada do processo de Poisson Composto, pode ser representado por processos previsíveis, o modelo de mercado com processo de Poisson composto é incompleto. Assim, é impossível encontrar uma estratégia auto-financiável de *hedging*, como dada na Definição 3.4, que replique perfeitamente a função custo. Para resolver este problema seguiremos uma abordagem via *mean-variance hedging*.

Primeiramente, como vimos em 3.7, como estamos supondo o *portfolio* auto-financiável, temos apenas que nos preocupar com as quantidades investidas no ativo de riscos. A partir de agora vamos denotar por

$$\Phi := \{\gamma_t\}_{0 \leq t \leq T}.$$

**Definição 3.6.** *Seja  $\Phi$  o conjunto das estratégias  $\{\gamma_t\}_{0 \leq t \leq T}$ . Uma estratégia de mean-variance hedging consiste em encontrar o processo  $(c, \hat{\gamma}_t)_{0 \leq t \leq T}$ , para algum  $c \in \mathbb{R}$ , de modo que a diferença entre o valor final do portfolio e a função custo seja mínima. Isto é, queremos*

$$\mathbb{E} \left[ \left( c + \int_0^T \hat{\gamma}_t dS_t - H \right)^2 \right] = \inf_{C \in \mathbb{R}, \gamma \in \Phi} \mathbb{E} \left[ \left( C + \int_0^T \gamma_t dS_t - H \right)^2 \right]. \quad (3.9)$$

Para encontrar o par, apresentaremos o Teorema 3.14, em que será possível encontrar as estratégias  $\hat{\gamma} \in \Phi$ , de maneira retrógrada. Mas antes disso, será necessário verificar se podemos aplicar o *princípio da programação dinâmica*.

### 3.4 Princípio da programação dinâmica

Nesta seção, faremos uso do princípio da programação dinâmica para encontrar o par apresentado em 3.9. De uma maneira intuitiva, o princípio da programação dinâmica nos permite representar o processo no instante atual em termos de elementos futuros. Dados dois processo que satisfazem o princípio da programação dinâmica, com condições terminais iguais, então os processos são iguais, a menos de um conjunto de medida nula. Para maiores detalhes ver [Lamberton \(2009\)](#) e [Jeanblanc et al. \(2012\)](#).

Sem perda de generalidade, podemos fixar um valor  $m$  de saltos totais, uma vez que sem isso, estando em um instante qualquer, não podemos voltar para o instante anterior, já que este instante pode nem existir.

Assim, como o processo do ativo  $S$  é *càdlàg*, para o tempo de maturidade  $T > 0$ ,

$$S_{T_m \wedge \cdot} \xrightarrow{m \uparrow \infty} S \text{ em } \mathbf{B}^2(\mathbb{F})$$

sendo  $\mathbf{B}^2(\mathbb{F})$  o espaço dos processos  $X$  que são  $\mathbb{F}$ -adaptados tal que

$$\mathbb{E}[|X_T^*|^2] < \infty$$

em que  $X_T^* := \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|$ , conforme definido anteriormente.

Para fins de simplicidade, será adotada as seguintes notações.

**Notação 2.**

$$\mathcal{T}_m := T_m \wedge T$$

e

$$H^m := H_{\mathcal{T}_m}.$$

Ao longo do trabalho necessitamos da seguinte hipótese

$$H^m \xrightarrow{\mathbf{L}^2} H, \quad m \rightarrow \infty. \quad (3.10)$$

De fato, para os tipos de opções europeias mais usuais, tais como

- $H = (S_T - K)^+$  (*call*),
- $H = (K - S_T)^+$  (*put*),
- $H = \mathbb{1}_{\{\max_{\{0 \leq t \leq T\}} \{S_t\} > L\}}$  (*one touch*),
- $H = (S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{\max_{\{0 \leq t \leq T\}} \{S_t\} > L\}}$  (*barreira*),

com  $K$ ,  $T$  e  $L$  pré-especificados nos contratos, a convergência é verificada.

No lema seguinte, verificamos que de fato não há perda de generalidade fixando o número  $m$  de saltos.

**Lema 3.7.** *Para toda estratégia  $\gamma \in \Phi$ , temos*

$$\mathbb{E} \left[ (X_{\mathcal{T}_m}^\gamma - H^m)^2 \right] \longrightarrow \mathbb{E} \left[ (X_T^\gamma - H_T)^2 \right], \quad m \rightarrow \infty.$$

*Demonstração.* Temos que

$$X_{\mathcal{T}_m}^\gamma \xrightarrow{\mathbf{B}^2} X_T^\gamma, \quad m \rightarrow \infty$$

Como a convergência é em  $\mathbf{B}^2$ , pela hipótese 3.10 e pelo fato da função quadrática ser contínua, o valor esperado converge.  $\square$

Agora, precisamos definir a ideia de concatenação. Seja  $\Phi_j^l$  a classe de todas as estratégias auto-financeáveis geradas por  $\{\gamma_{\mathcal{T}_j}, \dots, \gamma_{\mathcal{T}_l}\}$  com  $\gamma_{\mathcal{T}_j}$  sendo  $\mathcal{F}_{\mathcal{T}_j}$ -mensurável, e  $0 \leq j \leq l \leq m-1$  inteiro positivo.

**Definição 3.8.** *A concatenação de  $\psi \in \Phi_0^{j-1}$  e  $\theta \in \Phi_j^m$  é definida por*

$$(\psi, \theta)_j(t) := \begin{cases} \psi(t), & t < T_j \\ \theta(t), & t \geq T_j \end{cases}$$

para todo  $0 \leq t \leq T$  e  $0 \leq j \leq m-1$ .

Para fins de simplicidade na notação

$$\Phi_0^{-1} = \emptyset.$$

A ideia de concatenação é necessária, pois a seguir vamos definir um processo que depende de estratégias já utilizadas até um certo instante, isto é,  $\psi \in \Phi_0^{j-1}$ , e de estratégias que ainda serão utilizadas nos instantes seguintes,  $\theta \in \Phi_j^m$ , para  $0 \leq j \leq m-1$ .

**Definição 3.9.** *Para  $\psi \in \Phi_0^{j-1}$ , o processo  $\{V(t, \psi)\}_{\{0 \leq t \leq T\}}$  é dado por*

$$V(\mathcal{T}_j, \psi) = \operatorname{ess\,inf}_{\theta \in \Phi_j^m} \mathbb{E} \left[ \left( x + \sum_{\ell=1}^m (\psi, \theta)_j(\mathcal{T}_{\ell-1}) \Delta S_{\mathcal{T}_\ell} - H^m \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{\mathcal{T}_j} \right], \quad 0 \leq j \leq m-1$$

e no instante final  $\mathcal{T}_m$  dado por

$$V(\mathcal{T}_m, \psi) = \left( x + \sum_{\ell=1}^m \psi(\mathcal{T}_{\ell-1}) \Delta S_{\mathcal{T}_\ell} - H^m \right)^2.$$

Para fins de simplicidade, será adotada a seguinte notação.

**Notação 3.**

$$\Lambda_j^m(\psi, \theta) := \left( x + \sum_{\ell=1}^m (\psi, \theta)_j(\mathcal{T}_{\ell-1}) \Delta S_{\mathcal{T}_\ell} - H^m \right)^2, \quad 0 \leq j \leq m-1.$$

Na sequência, a propriedade de *Lattice* será apresentada no Lema 3.10, a qual será necessária para provar a otimalidade do princípio da programação dinâmica.

**Lema 3.10.** *Para cada  $\theta, \eta \in \Phi_j^{m-1}$ , existe  $\phi \in \Phi_j^{m-1}$  de modo que*

$$\mathbb{E} [\Lambda_j(\psi, \phi) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_j}] = \mathbb{E} [\Lambda_j(\psi, \eta) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_j}] \vee \mathbb{E} [\Lambda_j(\psi, \theta) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_j}], \quad (3.11)$$

para todo  $\psi \in \Phi_0^{j-1}$ .

*Demonstração.* Seja o conjunto

$$C = \{\omega \in \Omega \mid \mathbb{E} [\Lambda_j^m(\psi, \eta) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_j}] > \mathbb{E} [\Lambda_j^m(\psi, \theta) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_j}]\}.$$

Tomemos

$$\phi = \eta \mathbf{1}_{\{C\}} + \theta \mathbf{1}_{\{C^c\}}.$$

Como o conjunto  $C$  é  $\mathcal{F}_{\mathcal{T}_j}$ -mensurável, então  $\phi \in \Phi_j^{m-1}$ . Logo a propriedade de *Lattice* é válida.  $\square$

Valendo a propriedade de *Lattice* (ver [Lamberton \(2009\)](#), página 4, proposição 1.1.4), para  $j \leq i$ , temos

$$\mathbb{E} \left\{ \operatorname{ess\,inf}_{\phi \in \Phi_j^m} \mathbb{E} [\Lambda_j^m(\psi, \phi) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_j}] \mid \mathcal{F}_{\mathcal{T}_i} \right\} = \operatorname{ess\,inf}_{\phi \in \Phi_j^m} \mathbb{E} [\mathbb{E} [\Lambda_j^m(\psi, \phi) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_j}] \mid \mathcal{F}_{\mathcal{T}_i}] \quad (3.12)$$

e

$$\operatorname{ess\,inf}_{\phi \in \Phi_j^m} \mathbb{E} [\mathbb{E} [\Lambda_j^m(\psi, \phi) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_j}] \mid \mathcal{F}_{\mathcal{T}_i}] = \operatorname{ess\,inf}_{\phi \in \Phi_j^m} \mathbb{E} [\Lambda_j^m(\psi, \phi) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_j}]. \quad (3.13)$$

A seguir, será verificado o princípio da programação dinâmica

**Teorema 3.11.** *Para todo  $\psi \in \Phi_0^{j-1}$ , temos*

$$V(\mathcal{T}_j; \psi) = \operatorname{ess\,inf}_{\theta \in \Phi_j^j} \mathbb{E} [V(\mathcal{T}_{j+1}, (\psi, \theta)_j) \mid \mathcal{F}_{\mathcal{T}_j}] \quad (3.14)$$

em que  $0 \leq j \leq m-1$  e  $V(T, \psi) = (x + \sum_{\ell=1}^m \gamma^\psi(\mathcal{T}_{\ell-1}) \Delta S(\mathcal{T}_\ell) - H^m)^2$ .

*Inversamente temos que, seja  $\psi \in \Phi_0^{j-1}$  e  $\{Z(t, \psi)\}_{\{0 \leq t \leq T\}}$  um processo tal que*

$$Z(\mathcal{T}_j, \psi) = \operatorname{ess\,inf}_{\theta \in \Phi_j^j} \mathbb{E} [Z(\mathcal{T}_{j+1}, (\psi, \theta)_j) \mid \mathcal{F}_{\mathcal{T}_j}]$$

de modo que  $Z(T, \psi) = V(T, \psi)$ . Então  $Z(\mathcal{T}_j, \psi) = V(\mathcal{T}_j, \psi)$ , a menos de um conjunto de medida nula,  $0 \leq j \leq m-1$ .

*Demonstração.* Temos que

$$\begin{aligned} V(\mathcal{T}_j, \psi) &= \operatorname{ess\,inf}_{\theta \in \Phi_j^j} \mathbb{E} [\Lambda_j(\psi, \theta) \mid \mathcal{F}_{\mathcal{T}_j}] \\ &= \operatorname{ess\,inf}_{\theta \in \Phi_j^j} \mathbb{E} \left[ \left( x + \sum_{\ell=1}^j \psi(\mathcal{T}_{\ell-1}) \Delta S_{\mathcal{T}_\ell} + \theta_{\mathcal{T}_j} \Delta S_{\mathcal{T}_{j+1}} + \sum_{\ell=j+2}^m \theta_{\mathcal{T}_{\ell-1}} \Delta S_{\mathcal{T}_\ell} - H^m \right)^2 \mid \mathcal{F}_{\mathcal{T}_j} \right]. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
& \operatorname{ess\,inf}_{\theta \in \Phi_j^m} \mathbb{E} \left[ \left( x + \sum_{\ell=1}^j \psi(\mathcal{T}_{\ell-1}) \Delta S_{\mathcal{T}_\ell} + \theta_{\mathcal{T}_j} \Delta S_{\mathcal{T}_{j+1}} + \sum_{\ell=j+2}^m \theta_{\mathcal{T}_{\ell-1}} \Delta S_{\mathcal{T}_\ell} - H^m \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{\mathcal{T}_j} \right] = \\
& = \operatorname{ess\,inf}_{\theta \in \Phi_j^j} \operatorname{ess\,inf}_{\phi \in \Phi_{j+1}^m} \mathbb{E} \left[ \left( x + \sum_{\ell=1}^j \psi_{\mathcal{T}_{\ell-1}} \Delta S_{\mathcal{T}_\ell} + \theta_{\mathcal{T}_j} \Delta S_{\mathcal{T}_{j+1}} + \sum_{\ell=j+2}^m \phi_{\mathcal{T}_{\ell-1}} \Delta S_{\mathcal{T}_\ell} - H^m \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{\mathcal{T}_j} \right] \\
& = \operatorname{ess\,inf}_{\theta \in \Phi_j^j} \operatorname{ess\,inf}_{\phi \in \Phi_{j+1}^m} \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ \left( x + \sum_{\ell=1}^j \psi_{\mathcal{T}_{\ell-1}} \Delta S_{\mathcal{T}_\ell} + \theta_{\mathcal{T}_j} \Delta S_{\mathcal{T}_{j+1}} + \sum_{\ell=j+2}^m \phi_{\mathcal{T}_{\ell-1}} \Delta S_{\mathcal{T}_\ell} - H^m \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{\mathcal{T}_{j+1}} \right] \middle| \mathcal{F}_{\mathcal{T}_j} \right] \\
& = \operatorname{ess\,inf}_{\theta \in \Phi_j^j} \mathbb{E} \left[ \operatorname{ess\,inf}_{\phi \in \Phi_{j+1}^m} \mathbb{E} \left[ \left( x + \sum_{\ell=1}^j \psi_{\mathcal{T}_{\ell-1}} \Delta S_{\mathcal{T}_\ell} + \theta_{\mathcal{T}_j} \Delta S_{\mathcal{T}_{j+1}} + \sum_{\ell=j+2}^m \phi_{\mathcal{T}_{\ell-1}} \Delta S_{\mathcal{T}_\ell} - H^m \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{\mathcal{T}_{j+1}} \right] \middle| \mathcal{F}_{\mathcal{T}_j} \right] \\
& = \operatorname{ess\,inf}_{\theta \in \Phi_j^j} \mathbb{E} \left[ \operatorname{ess\,inf}_{\phi \in \Phi_{j+1}^m} \mathbb{E} [\Lambda_j^m(\psi, \theta) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_{j+1}}] \middle| \mathcal{F}_{\mathcal{T}_j} \right] \\
& = \operatorname{ess\,inf}_{\theta \in \Phi_j^j} \mathbb{E} [V(\mathcal{T}_{j+1}, (\psi, \theta)_j) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_j}].
\end{aligned}$$

Logo

$$V(\mathcal{T}_j, \psi) = \operatorname{ess\,inf}_{\theta \in \Phi_j^j} \mathbb{E} [V(\mathcal{T}_{j+1}, (\psi, \theta)_j) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_j}].$$

Para a volta, considere que  $Z(T, \psi) = V(T, \psi)$  e

$$Z(\mathcal{T}_j, \psi) = \operatorname{ess\,inf}_{\theta \in \Phi_j^j} \mathbb{E}[Z(\mathcal{T}_{j+1}, (\psi, \theta)_j) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_j}].$$

Assim

$$\begin{aligned}
Z(\mathcal{T}_{m-1}, \psi) &= \operatorname{ess\,inf}_{\theta \in \Phi_{m-1}^{m-1}} \mathbb{E}[Z(\mathcal{T}_m, (\psi, \theta)_{m-1}) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_{m-1}}] \\
&= \operatorname{ess\,inf}_{\theta \in \Phi_{m-1}^{m-1}} \mathbb{E}[Z(\mathcal{T}, \psi) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_{m-1}}] \\
&= \operatorname{ess\,inf}_{\theta \in \Phi_{m-1}^{m-1}} \mathbb{E}[V(\mathcal{T}, \psi) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_{m-1}}] \\
&= \operatorname{ess\,inf}_{\theta \in \Phi_{m-1}^{m-1}} \mathbb{E}[V(\mathcal{T}_m, (\psi, \theta)_{m-1}) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_{m-1}}] \\
&= V(\mathcal{T}_{m-1}, \psi).
\end{aligned}$$

Suponha que  $Z(\mathcal{T}_{j+1}, \psi) = V(\mathcal{T}_{j+1}, \psi)$ , temos

$$\begin{aligned}
Z(\mathcal{T}_j, \psi) &= \operatorname{ess\,inf}_{\theta \in \Phi_j^j} \mathbb{E}[Z(\mathcal{T}_{j+1}, (\psi, \theta)_j) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_j}] \\
&= \operatorname{ess\,inf}_{\theta \in \Phi_j^j} \mathbb{E}[V(\mathcal{T}_{j+1}, (\psi, \theta)_j) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_j}] \\
&= V(\mathcal{T}_j, \psi).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

E conseqüentemente, por uma indução retrógrada, temos

$$Z(\mathcal{T}_j, \psi) = V(\mathcal{T}_j, \psi), \quad \forall j \geq 0.$$

□

Verificamos então ser válido o princípio da programação dinâmica. Resta mostrar que  $\psi$  encontrado é ótimo.

**Teorema 3.12.** *Seja  $\psi \in \Phi_0^{j-1}$ ,  $\psi$  é ótimo se, e somente se,  $\{V(t, \psi)\}_{0 \leq t \leq T}$  é um martingale.*

*Demonstração.* Seja  $\psi \in \Phi_0^{j-1}$  ótimo,  $\mathcal{T}_j \in [0, T]$  e  $i < j$ , então

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V(\mathcal{T}_j, \psi) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_i}] &= \mathbb{E} \left[ \operatorname{ess\,inf}_{\theta \in \Phi_j^m} \mathbb{E}[\Lambda_j^m(\psi, \theta) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_j}] | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_i} \right] \\ &= \operatorname{ess\,inf}_{\theta \in \Phi_j^m} \mathbb{E} \left[ \mathbb{E}[\Lambda_j^m(\psi, \theta) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_j}] | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_i} \right] \\ &= \operatorname{ess\,inf}_{\theta \in \Phi_j^m} \mathbb{E}[\Lambda_j^m(\psi, \theta) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_i}] \\ &= \mathbb{E}[\Lambda_j^m(\psi, \psi) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_i}] \\ &= \mathbb{E}[\Lambda_i^m(\psi, \psi) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_i}] \\ &= \operatorname{ess\,inf}_{\theta \in \Phi_i^m} \mathbb{E}[\Lambda_i^m(\psi, \theta) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_i}] \\ &= V(\mathcal{T}_i, \psi). \end{aligned}$$

Logo  $\{V(t, \psi)\}_{0 \leq t \leq T}$  é um martingale.

Para a recíproca, se  $\{V(t, \psi)\}_{0 \leq t \leq T}$  é um martingale, então

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V(\mathcal{T}_j, \psi) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_i}] &= V(\mathcal{T}_i, \psi) \\ &= \operatorname{ess\,inf}_{\theta \in \Phi_i^m} \mathbb{E}[\Lambda_i^m(\psi, \theta) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_i}]. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V(\mathcal{T}_j, \psi) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_i}] &= \mathbb{E} \left[ \operatorname{ess\,inf}_{\theta \in \Phi_j^m} \mathbb{E}[\Lambda_j^m(\psi, \theta) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_j}] | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_i} \right] \\ &= \operatorname{ess\,inf}_{\theta \in \Phi_j^m} \mathbb{E} \left[ \mathbb{E}[\Lambda_j^m(\psi, \theta) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_j}] | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_i} \right] \\ &= \operatorname{ess\,inf}_{\theta \in \Phi_j^m} \mathbb{E}[\Lambda_j^m(\psi, \theta) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_i}]. \end{aligned}$$

Logo

$$\operatorname{ess\,inf}_{\theta \in \Phi_i} \mathbb{E}[\Lambda_i^m(\psi, \theta) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_i}] = \operatorname{ess\,inf}_{\theta \in \Phi_j^m} \mathbb{E}[\Lambda_j^m(\psi, \theta) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_i}].$$

Assim  $\psi$  é ótimo em  $[\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_j]$ , e como  $i$  e  $j$  são arbitrários  $\psi$  é ótimo. □

Ao longo do trabalho, usaremos a seguinte notação.

**Notação 4.**  $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] := \mathbb{E}_s[X_t], \quad s < t.$

A seguir, utilizaremos os mesmos princípios aplicados para o caso discreto (ver Černý (2004)), para o nosso problema de estratégia de *mean-variance hedging*.

**Lema 3.13.** Para  $\psi \in \Phi_0^{m-2}$ , e  $0 \leq \mathcal{T}_m \leq T$  o último instante de salto, temos

$$\begin{aligned} V(\mathcal{T}_{m-1}, \psi) &= \operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in \Phi_{m-1}^{m-1}} \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} \left[ (X_{\mathcal{T}_m}^\gamma - H^m)^2 \right] = k_{\mathcal{T}_{m-1}} (x_{m-1} - H_{\mathcal{T}_{m-1}})^2 - k_{\mathcal{T}_{m-1}} H_{\mathcal{T}_{m-1}}^2 + \\ &\quad + \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} [(H^m)^2] - \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}^2 [\Delta S_{\mathcal{T}_m} H^m]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} [(\Delta S_{\mathcal{T}_m})^2]} \end{aligned} \quad (3.16)$$

em que  $x_{m-1} = x + \sum_{\ell=1}^{m-1} \psi_{\mathcal{T}_{\ell-1}} \Delta S_{\mathcal{T}_\ell}$  é a realização do portfolio até o instante  $\mathcal{T}_{m-1}$ ,

$$\begin{aligned} k_{\mathcal{T}_{m-1}} &= 1 - \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}^2 [\Delta S_{\mathcal{T}_m}]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} [(\Delta S_{\mathcal{T}_m})^2]}, \\ H_{\mathcal{T}_{m-1}} &= \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} \left[ \left( 1 - \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} [\Delta S_{\mathcal{T}_m}]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} [(\Delta S_{\mathcal{T}_m})^2]} \Delta S_{\mathcal{T}_m} \right) H^m \right]}{k_{\mathcal{T}_{m-1}}} \end{aligned}$$

e

$$\hat{\gamma}_{\mathcal{T}_{m-1}} = - \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} [\Delta S_{\mathcal{T}_m} (x_{m-1} - H^m)]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} [(\Delta S_{\mathcal{T}_m})^2]}$$

a estratégia ótima.

*Demonstração.* Notemos que, pelo princípio da programação dinâmica, para  $\psi \in \Phi_0^{m-2}$  temos

$$\begin{aligned} V(\mathcal{T}_{m-1}, \psi) &= \operatorname{ess\,inf}_{\gamma_{m-1} \in \Phi_{m-1}^{m-1}} \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} [V(\mathcal{T}_m, (\psi))] \\ &= \operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in \Phi_{m-1}^{m-1}} \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} \left[ (X_{\mathcal{T}_m}^\gamma - H^m)^2 \right] \\ &= \operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in \Phi_{m-1}^{m-1}} \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} \left[ (x_{m-1} + \gamma_{m-1} \Delta S_{\mathcal{T}_m} - H^m)^2 \right]. \end{aligned}$$

Como o ínfimo é um representante da classe de equivalência do *essencial* ínfimo, podemos escrever apenas

$$V(\mathcal{T}_{m-1}, \psi) = \inf_{\gamma_{\mathcal{T}_{m-1}} \in \mathbb{R}} \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} \left[ (x_{m-1} + \gamma_{\mathcal{T}_{m-1}} \Delta S_{\mathcal{T}_m} - H^m)^2 \right]. \quad (3.17)$$

Assim, derivando e igualando a zero, temos

$$\hat{\gamma}_{\mathcal{T}_{m-1}} = - \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} [\Delta S_{\mathcal{T}_m} (x_{m-1} - H^m)]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} [(\Delta S_{\mathcal{T}_m})^2]}.$$

Notemos que

$$\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} \left[ \left( \underbrace{x_{m-1} - H^m}_b + \gamma_{\mathcal{T}_{m-1}} \underbrace{\Delta S_{\mathcal{T}_m}}_c \right)^2 \right] = \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} [b^2 + 2\gamma_{\mathcal{T}_{m-1}} bc + \gamma_{\mathcal{T}_{m-1}}^2 c^2] \quad (3.18)$$

e

$$\hat{\gamma}_{\mathcal{T}_{m-1}} = - \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} [bc]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} [c^2]}.$$

Logo, substituindo  $\hat{\gamma}_{\mathcal{T}_{m-1}}$  em 3.18, temos

$$\begin{aligned} V(\mathcal{T}_{m-1}, \psi) &= \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} \left[ b^2 - 2 \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}[bc]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}[c^2]} bc + \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}^2[bc]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}^2[c^2]} c^2 \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} [b^2] - 2 \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}[bc] \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}[bc]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}[c^2]} + \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}^2[bc] \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}[c^2]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}^2[c^2]} \\ &= \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} [b^2] - \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}^2[bc]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}[c^2]}. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} V(\mathcal{T}_{m-1}, \psi) &= \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} [(x_{m-1} - H^m)^2] - \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}^2[(x_{m-1} - H^m) \Delta S_{\mathcal{T}_m}]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}[(\Delta S_{\mathcal{T}_m})^2]} \\ &= x_{m-1}^2 \left[ 1 - \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}^2[\Delta S_{\mathcal{T}_m}]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}[(\Delta S_{\mathcal{T}_m})^2]} \right] - 2x_{m-1} \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} \left[ \left( 1 - \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}[\Delta S_{\mathcal{T}_m}]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}[(\Delta S_{\mathcal{T}_m})^2]} \Delta S_{\mathcal{T}_m} \right) H^m \right] + \\ &\quad + \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} [(H^m)^2] - \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}^2[\Delta S_{\mathcal{T}_m} H^m]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}[(\Delta S_{\mathcal{T}_m})^2]}. \end{aligned}$$

Agora notemos que, denotando por

$$k_{\mathcal{T}_{m-1}} = 1 - \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}^2[\Delta S_{\mathcal{T}_m}]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}[(\Delta S_{\mathcal{T}_m})^2]}$$

e

$$H_{\mathcal{T}_{m-1}} = \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} \left[ \left( 1 - \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}[\Delta S_{\mathcal{T}_m}]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}[(\Delta S_{\mathcal{T}_m})^2]} \Delta S_{\mathcal{T}_m} \right) H^m \right]}{k_{\mathcal{T}_{m-1}}}.$$

Temos

$$\begin{aligned} V(\mathcal{T}_{m-1}, \psi) &= x_{m-1}^2 k_{\mathcal{T}_{m-1}} - 2x_{m-1} H_{\mathcal{T}_{m-1}} k_{\mathcal{T}_{m-1}} + k_{\mathcal{T}_{m-1}} H_{\mathcal{T}_{m-1}}^2 - k_{\mathcal{T}_{m-1}} H_{\mathcal{T}_{m-1}}^2 + \\ &\quad + \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} [(H^m)^2] - \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}^2[\Delta S_{\mathcal{T}_m} H^m]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}[(\Delta S_{\mathcal{T}_m})^2]} \\ &= k_{\mathcal{T}_{m-1}} (x_{m-1} - H_{\mathcal{T}_{m-1}})^2 - k_{\mathcal{T}_{m-1}} H_{\mathcal{T}_{m-1}}^2 + \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} [(H^m)^2] - \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}^2[\Delta S_{\mathcal{T}_m} H^m]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}[(\Delta S_{\mathcal{T}_m})^2]}. \end{aligned}$$

□

**Teorema 3.14.** *Dados  $\mathcal{T}_n$  um tempo de parada qualquer,  $k_{\mathcal{T}_n}$  e  $H_{\mathcal{T}_n}$  duas variáveis aleatórias  $\mathcal{F}_{\mathcal{T}_n}$ -mensuráveis, com  $k_{\mathcal{T}_n} > 0$  q.c.. Então*

$$V_{\mathcal{T}_{n-1}}(\psi) = \operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in \Phi_{n-1}^{n-1}} \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}} [V_{\mathcal{T}_n}(\psi)] = k_{\mathcal{T}_{n-1}} (x_{n-1} - H_{\mathcal{T}_{n-1}})^2 + \epsilon_{\mathcal{T}_{n-1}}^2$$

em que  $x_{n-1} = x + \sum_{\ell=1}^{n-1} \gamma_{\mathcal{T}_{\ell-1}} \Delta S_{\mathcal{T}_\ell}$  é a realização do portfolio até o instante  $\mathcal{T}_{n-1}$ ,

$$k_{\mathcal{T}_{n-1}} = \left( \mathbb{E} [k_{\mathcal{T}_n} | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_{n-1}}] - \frac{\mathbb{E}^2 [k_{\mathcal{T}_n} \Delta S_{\mathcal{T}_n} | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_{n-1}}]}{\mathbb{E} [k_{\mathcal{T}_n} (\Delta S_{\mathcal{T}_n})^2 | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_{n-1}}]} \right),$$

$$H_{\mathcal{T}_{n-1}} = \frac{\mathbb{E} \left[ \left( k_{\mathcal{T}_n} - \frac{\mathbb{E}[k_{\mathcal{T}_n} \Delta S_{\mathcal{T}_n} | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_{n-1}}] k_{\mathcal{T}_n} \Delta S_{\mathcal{T}_n}}{\mathbb{E}[k_{\mathcal{T}_n} (\Delta S_{\mathcal{T}_n})^2 | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_{n-1}}]} \right) H_{\mathcal{T}_n} \middle| \mathcal{F}_{\mathcal{T}_{n-1}} \right]}{k_{\mathcal{T}_{n-1}}}$$

e estratégia ótima

$$\hat{\gamma}_{\mathcal{T}_{n-1}} = - \frac{\mathbb{E} [k_{\mathcal{T}_n} \Delta S_{\mathcal{T}_n} (x_{n-1} - H_{\mathcal{T}_n}) | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_{n-1}}]}{\mathbb{E} [k_{\mathcal{T}_n} (\Delta S_{\mathcal{T}_n})^2 | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_{n-1}}]}. \quad (3.19)$$

Com  $\epsilon$  um processo adaptado

$$\begin{cases} \epsilon_{\mathcal{T}_{n-1}}^2 = \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}} [\epsilon_{\mathcal{T}_n}^2] + EQER_{\mathcal{T}_{n-1}}(H_{\mathcal{T}_n}) \\ \epsilon_{\mathcal{T}}^2 = 0 \end{cases}$$

com  $EQER_{\mathcal{T}_{n-1}}(H_{\mathcal{T}_n})$  denotado por

$$EQER_{\mathcal{T}_{n-1}}(H_{\mathcal{T}_n}) := \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}} [k_{\mathcal{T}_n} H_{\mathcal{T}_n}^2] - k_{\mathcal{T}_{n-1}} H_{\mathcal{T}_{n-1}}^2 - \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}}^2 [k_{\mathcal{T}_n} \Delta S_{\mathcal{T}_n} H_{\mathcal{T}_n}]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}} [k_{\mathcal{T}_n} (\Delta S_{\mathcal{T}_n})^2]}.$$

*Demonstração.* Provaremos por uma indução retrógrada.

Assim, no último instante, como a condição terminal do processo é

$$V(\mathcal{T}_m, \psi) = (X_{\mathcal{T}_m}^\gamma - H^m)^2,$$

temos que  $k_{\mathcal{T}_m} = 1$ .

Logo pelo Lema 3.13

$$\begin{aligned} V(\mathcal{T}_{m-1}, \psi) &= \operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in \Phi_{m-1}^{m-1}} \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} \left[ (X_{\mathcal{T}_m}^\gamma - H^m)^2 \right] = k_{\mathcal{T}_{m-1}} (x_{m-1} - H_{\mathcal{T}_{m-1}})^2 - k_{\mathcal{T}_{m-1}} H_{\mathcal{T}_{m-1}}^2 + \\ &\quad + \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} [k_{\mathcal{T}_m} (H^m)^2] - \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}^2 [k_{\mathcal{T}_m} \Delta S_{\mathcal{T}_m} H^m]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} [k_{\mathcal{T}_m} (\Delta S_{\mathcal{T}_m})^2]} \end{aligned}$$

em que  $x_{m-1} = x + \sum_{\ell=1}^{m-1} \psi_{\mathcal{T}_{\ell-1}} \Delta S_{\mathcal{T}_\ell}$  é a realização do *portfolio* até o instante  $\mathcal{T}_{m-1}$ ,

$$\begin{aligned} k_{\mathcal{T}_{m-1}} &= \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} [k_{\mathcal{T}_m}] - \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}}^2 [k_{\mathcal{T}_m} \Delta S_{\mathcal{T}_m}]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} [k_{\mathcal{T}_m} (\Delta S_{\mathcal{T}_m})^2]}, \\ H_{\mathcal{T}_{m-1}} &= \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} \left[ \left( k_{\mathcal{T}_m} - \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} [k_{\mathcal{T}_m} \Delta S_{\mathcal{T}_{m-1}}]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} [k_{\mathcal{T}_m} (\Delta S_{\mathcal{T}_m})^2]} k_{\mathcal{T}_m} \Delta S_{\mathcal{T}_m} \right) H^m \right]}{k_{\mathcal{T}_{m-1}}} \end{aligned}$$

e a estratégia ótima

$$\hat{\gamma}_{m-1} = - \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} [k_{\mathcal{T}_m} \Delta S_{\mathcal{T}_m} (x_{m-1} - H^m)]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{m-1}} [k_{\mathcal{T}_m} (\Delta S_{\mathcal{T}_m})^2]}.$$

Suponha válido para  $n$ , ou seja,

$$V(\mathcal{T}_n, \psi) = k_{\mathcal{T}_n} (x_n - H_{\mathcal{T}_n})^2 + \epsilon_{\mathcal{T}_n}^2.$$

Vamos mostrar que

$$V(\mathcal{T}_{n-1}, \psi) = \operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in \Phi_{n-1}^{n-1}} \mathbb{E}_{n-1} [V_{\mathcal{T}_n}(\psi)] = k_{\mathcal{T}_{n-1}} (x_{n-1} - H_{\mathcal{T}_{n-1}})^2 + \epsilon_{\mathcal{T}_n}^2.$$

Novamente temos que o ínfimo é um representante da classe de equivalência do essencial ínfimo, podemos então escrever

$$\begin{aligned} V(\mathcal{T}_{n-1}, \psi) &= \inf_{\gamma_{n-1} \in \mathbb{R}} \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}} [k_{\mathcal{T}_n}(x_{n-1} + \gamma_{n-1} \Delta S_{\mathcal{T}_n} - H_{\mathcal{T}_n})^2 + \epsilon_{\mathcal{T}_n}^2] \\ &= \inf_{\gamma_{n-1} \in \mathbb{R}} \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}} [k_{\mathcal{T}_n}(x_{n-1} + \gamma_{n-1} \Delta S_{\mathcal{T}_n} - H_{\mathcal{T}_n})^2] + \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}} [\epsilon_{\mathcal{T}_n}^2]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Primeiramente vamos tratar apenas de

$$\inf_{\gamma_{n-1} \in \mathbb{R}} \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}} [k_{\mathcal{T}_n}(x_{n-1} + \gamma_{n-1} \Delta S_{\mathcal{T}_n} - H_{\mathcal{T}_n})^2].$$

Uma vez que

$$\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}}[\epsilon_{\mathcal{T}_n}^2],$$

não precisa ser minimizado, já que não depende da estratégia.

Assim

$$\begin{aligned} \inf_{\gamma_{n-1} \in \mathbb{R}} \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}} [k_{\mathcal{T}_n}(x_{n-1} + \gamma_{n-1} \Delta S_{\mathcal{T}_n} - H_{\mathcal{T}_n})^2] &= \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}} \left[ \left( \underbrace{k_{\mathcal{T}_n}^{1/2}(x_{n-1} - H_{\mathcal{T}_n})}_b + \gamma_{n-1} \underbrace{k_{\mathcal{T}_n}^{1/2} \Delta S_{\mathcal{T}_n}}_c \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}} [b^2 + 2\gamma_{n-1}bc + \gamma_{n-1}^2c^2]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Derivando e igualando a zero temos

$$\hat{\gamma}_{n-1} = -\frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}}[bc]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}}[c^2]}.$$

Logo, substituindo  $\hat{\gamma}_{n-1}$  em 3.21, temos

$$\begin{aligned} V(\mathcal{T}_{n-1}, \psi) &= \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}} \left[ b^2 - 2\frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}}[bc]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}}[c^2]}bc + \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}}^2[bc]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}}^2[c^2]}c^2 \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}} [b^2] - 2\frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}}[bc] \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}}[bc]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}}[c^2]} + \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}}^2[bc] \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}}[c^2]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}}^2[c^2]} \\ &= \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}} [b^2] - \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}}^2[bc]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}}[c^2]} + \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}}[\epsilon_{\mathcal{T}_n}^2]. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} V(\mathcal{T}_{n-1}, \psi) &= \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}} [k_{\mathcal{T}_n}(x_{n-1} - H_{\mathcal{T}_n})^2] - \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}}^2[(x_{n-1} - H_{\mathcal{T}_n}) \Delta S_{\mathcal{T}_n} k_{\mathcal{T}_n}]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}} [k_{\mathcal{T}_n} (\Delta S_{\mathcal{T}_n})^2]} + \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}}[\epsilon_{\mathcal{T}_n}^2] \\ &= x_{n-1}^2 \left[ \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}}[k_{\mathcal{T}_n}] - \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}}^2[k_{\mathcal{T}_n} \Delta S_{\mathcal{T}_n}]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}}[k_{\mathcal{T}_n} (\Delta S_{\mathcal{T}_n})^2]} \right] - \\ &\quad - 2x_{n-1} \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}} \left[ \left( k_{\mathcal{T}_n} - \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}}[k_{\mathcal{T}_n} \Delta S_{\mathcal{T}_n}]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}}[k_{\mathcal{T}_n} (\Delta S_{\mathcal{T}_n})^2]} k_{\mathcal{T}_n} \Delta S_{\mathcal{T}_n} \right) H_{\mathcal{T}_n} \right] + \\ &\quad + \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}} [k_{\mathcal{T}_n} (H_{\mathcal{T}_n})^2] - \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}}^2[k_{\mathcal{T}_n} \Delta S_{\mathcal{T}_n} H_{\mathcal{T}_n}]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}} [(k_{\mathcal{T}_n} \Delta S_{\mathcal{T}_n})^2]} + \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}}[\epsilon_{\mathcal{T}_n}^2]. \end{aligned}$$

Agora notemos que, denotando por

$$k_{\mathcal{T}_{n-1}} = \left( \mathbb{E} [k_{\mathcal{T}_n} | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_{n-1}}] - \frac{\mathbb{E}^2 [k_{\mathcal{T}_n} \Delta S_{\mathcal{T}_n} | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_{n-1}}]}{\mathbb{E} [k_{\mathcal{T}_n} (\Delta S_{\mathcal{T}_n})^2 | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_{n-1}}]} \right),$$

$$H_{\mathcal{T}_{n-1}} = \frac{\mathbb{E} \left[ \left( k_{\mathcal{T}_n} - \frac{\mathbb{E} [k_{\mathcal{T}_n} \Delta S_{\mathcal{T}_n} | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_{n-1}}] k_{\mathcal{T}_n} \Delta S_{\mathcal{T}_n}}{\mathbb{E} [k_{\mathcal{T}_n} (\Delta S_{\mathcal{T}_n})^2 | \mathcal{F}_{\mathcal{T}_{n-1}}]} \right) H_{\mathcal{T}_n} \middle| \mathcal{F}_{\mathcal{T}_{n-1}} \right]}{k_{\mathcal{T}_{n-1}}}.$$

Temos

$$\begin{aligned} V(\mathcal{T}_{n-1}, \psi) &= x_{n-1}^2 k_{\mathcal{T}_{n-1}} - 2x_{n-1} H_{\mathcal{T}_{n-1}} k_{\mathcal{T}_{n-1}} + k_{\mathcal{T}_{n-1}} H_{\mathcal{T}_{n-1}}^2 - k_{\mathcal{T}_{n-1}} H_{\mathcal{T}_{n-1}}^2 + \\ &\quad + \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}} [(H_{\mathcal{T}_n})^2] - \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}}^2 [\Delta S_{\mathcal{T}_n} H_{\mathcal{T}_n}]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}} [(\Delta S_{\mathcal{T}_n})^2]} + \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}} [\epsilon_{\mathcal{T}_n}^2] \\ &= k_{\mathcal{T}_{n-1}} (x_{n-1} - H_{\mathcal{T}_{n-1}})^2 + \\ &\quad + \underbrace{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}} [\epsilon_{\mathcal{T}_n}^2] - k_{\mathcal{T}_{n-1}} H_{\mathcal{T}_{n-1}}^2 + \mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}} [(H_{\mathcal{T}_n})^2] - \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}}^2 [\Delta S_{\mathcal{T}_n} H_{\mathcal{T}_n}]}{\mathbb{E}_{\mathcal{T}_{n-1}} [(\Delta S_{\mathcal{T}_n})^2]}}_{\epsilon_{\mathcal{T}_{n-1}}^2}. \end{aligned}$$

Logo, pela indução retrógrada, o resultado segue.  $\square$

Assim, para o cálculo do preço da opção  $c > 0$ , basta aplicar o Lema 3.13 uma vez, e repetir o Teorema 3.14 até encontrar  $H_0 = c$ , tudo isto de maneira retrógrada.

E dado  $H_0$ , podemos encontrar  $\hat{\gamma}_0$ , uma vez que por 3.19, temos

$$\hat{\gamma}_0 = - \frac{\mathbb{E} [k_{\mathcal{T}_1} \Delta S_{\mathcal{T}_1} (H_0 - H_{\mathcal{T}_1}) | \mathcal{F}_0]}{\mathbb{E} [k_{\mathcal{T}_1} (\Delta S_{\mathcal{T}_1})^2 | \mathcal{F}_0]}.$$

Concluindo assim o objetivo proposto de encontrar uma solução para o problema de *mean-variance hedging*.

# Referências Bibliográficas

- Black e Scholes (1973)** Fischer Black e Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *The journal of political economy*, páginas 637–654. Citado na pág. [1](#)
- Brémaud (1981)** Pierre Brémaud. *Point processes and queues*. Springer, 30 ed. Citado na pág. [6](#), [10](#), [11](#), [15](#), [18](#)
- Černý (2004)** Aleš Černý. Dynamic programming and mean-variance hedging in discrete time. *Applied Mathematical Finance*, 11(1):1–25. Citado na pág. [33](#)
- Dellacherie e Meyer (1982)** C Dellacherie e P-A Meyer. *Probabilities and Potential, B: Theory of Martingales*. Elsevier. Citado na pág. [2](#), [16](#)
- He et al. (1992)** Sheng-wu He, Jia-gang Wang e Jia-an Yan. *Semimartingale theory and stochastic calculus*. Taylor & Francis. Citado na pág. [2](#)
- Jeanblanc et al. (2012)** Monique Jeanblanc, Michael Mania, Marina Santacrose e Martin Schweizer. Mean-variance hedging via stochastic control and bsdes for general semimartingales. *The Annals of Applied Probability*, 22(6):2388–2428. Citado na pág. [29](#)
- Kou (2002)** Steven G Kou. A jump-diffusion model for option pricing. *Management science*, 48(8):1086–1101. Citado na pág. [1](#)
- Lamberton (2009)** Damien Lamberton. Optimal stopping and american options. *Laboratoire d'analyse et de Mathématiques Appliquées, Université Paris-Est, Lecture Notes*. Citado na pág. [29](#), [31](#)
- Leão e Ohashi (2013)** Dorival Leão e Alberto Ohashi. Weak approximations for Wiener functionals. *The Annals of Applied Probability*, 23(4):1660–1691. Citado na pág. [11](#)
- Merton (1973)** Robert C Merton. Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of economics and management science*, páginas 141–183. Citado na pág. [1](#)
- Merton (1976)** Robert C Merton. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of financial economics*, 3(1):125–144. Citado na pág. [1](#)
- Press (1967)** S James Press. A compound events model for security prices. *Journal of business*, páginas 317–335. Citado na pág. [1](#)
- Protter (2004)** Philip E Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations: Version 2.1*, volume 21. Springer. Citado na pág. [6](#), [11](#), [14](#)
- Rao e Swift (2006)** Malempati M. Rao e Randall J. Swift. *Probability theory with applications*, volume 582. Springer. Citado na pág. [20](#)

**Shiryaev (1999)** Albert N Shiryaev. *Essentials of stochastic finance*. World scientific. Citado na pág. [14](#)

**Tankov (2010)** Peter Tankov. *Financial modeling with Lévy processes*. Citado na pág. [1](#)