UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

Michel Angelucci

Uma abordagem diferente para o ensino da função exponencial no Ensino Médio

São Carlos

Dezembro de 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Michel Angelucci

Uma abordagem diferente para o ensino da função exponencial no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exatas como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas à Unversidade Federal de São Carlos, UFSCar, sob orientação do Professor Doutor Ivo Machado da Costa

São Carlos
Dezembro de 2013

Autor

Orientador

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus amores: meus filhos Isabela e Leonardo, à minha companheira, e amiga acima de tudo, Luciana, pelo amor, carinho e disposição a me ajudar quando precisei, me incentivando mais do que ninguém nesta caminhada e ao meu irmão Lucas que jamais esquecerei.

Agradecimentos:

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado a oportunidade de chegar até aqui, e aos meus pais José e Izildinha pelo apoio, amor, carinho e educação que deram.

Ao meu orientador, e acima de tudo AMIGO, Profº Dr. Ivo Machado da Costa, por não medir esforços em me ajudar, por estar sempre disposto a me atender e por acreditar em mim desde o início.

Ao Profº Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti que me entrevistou e acreditou que eu poderia atender às expectativas do curso e cumpriria com os compromissos de um aluno regular.

À Profª Dr. Yuriko Yamamoto Baldin pelo apoio desde o início disposta a me orientar sempre que precisei.

Aos amigos de mestrado, Fábio e Jonas que, mesmo estando distante, estarão presentes em minhas lembranças, pois fizeram parte de uma etapa importante de minha vida, passando juntos por momentos de descontração e sofrimento que são peças chave na vida de uma pessoa.

A todos os professores integrantes desse belíssimo programa, pelo empenho e dedicação, programa ao qual devo muito e me orgulho de ter participado.

A todos da E.E. profº João Caetano da Rocha, direção, coordenação, corpo docente e alunos pelo apoio. Escola onde trabalhei durante oito anos e meio e sentirei muita saudade dos amigos que ali ficaram.

A todos que direta ou indiretamente me ajudaram e me incentivaram nessa caminhada. Muito obrigado a todos.

Resumo:

O objetivo desta dissertação é propor uma abordagem diferente para o ensino da função exponencial no Ensino Médio. Essa nova abordagem visa proporcionar uma aprendizagem significativa no que diz respeito ao assunto função exponencial, visto que alunos e professores, por vezes, apresentam dificuldades no entendimento desse conceito, principalmente quando se trata de expoentes reais. O trabalho foi baseado na elaboração de folhas de atividades pautadas na teoria das Situações Didáticas e aplicadas seguindo a metodologia da Engenharia Didática. Foram basicamente cinco folhas de atividades, sendo que três delas foram impressas e duas na forma de planilhas eletrônicas. Os problemas e exercícios contidos nas folhas de atividades tinham como objetivo analisar, bem como estender, a validade da propriedade fundamental das funções exponenciais, isto é, $f(m+n) = f(m).f(n)$, para o domínio dos naturais, inteiros, racionais e reais, sendo que neste último, trabalhamos apenas com as planilhas, mais especificamente na folha de atividade 5, para proporcionar aos alunos uma noção de como a calculadora obtém o resultado aproximado de $2^{\sqrt{2}}$, por exemplo. A planilha eletrônica também foi utilizada na folha de atividade 4, que trata de expoentes racionais. Nesta fornecemos um algoritmo para o cálculo aproximado de raízes n-ésimas de um número real qualquer. As folhas de atividades foram desenvolvidas tendo em vista proporcionar aos alunos o máximo de autonomia para que os mesmos pudessem resolvê-las, sendo intercaladas por folhas de complemento que buscam dar introdução e fundamentação teórica ao novo conceito abordado na folha de atividade seguinte. As atividades foram aplicadas em uma escola estadual da cidade de Itápolis, e os resultados obtidos nas análises a posteriori mostraram que essa abordagem proporcionou um aprendizado significativo, quando comparado com o ensino tradicional.

Palavras-chave: Ensino de Matemática, Função exponencial, Engenharia Didática, Situações didáticas.

Abstract:

The objective of this essay is to propose a different approach to teaching the exponential function in high school. This new approach aims to provide a meaningful learning related to the subject exponential function, since students and teachers sometimes have difficulty understanding this concept, especially when it comes to real exponents. The work was based on preparation of some activities based on the Theory of Didactical Situations and applied following the methodology of the Didactic Engineering. There were basically five activity sheets, three of them were printed and two of them were spreadsheets. The problems and exercises aimed to examine and extend the validity of the fundamental property of exponential functions, that is, $f(m+n) = f(m).f(n)$ for the dominance of natural numbers, integer, rational, real, and for the last one, we only worked with spreadsheets, specifically in the activity sheet number 5, to afford students an understanding about how the calculator obtains the approximate result of $2^{\sqrt{2}}$ for example. The spreadsheet was also used in the activity sheet number 4, which deals with rational exponents. On this one we present an algorithm for the approximate calculation of nth roots of any real number. The activity sheets have been developed in order to provide students with maximum autonomy so that they could resolve them, being interspersed with adjunct sheets in order to introduce the new concept and theory discussed in the following activity sheet. The activities were implemented at a state school in Itápolis, and the results in a final analysis showed that this approach supplied a significant learning compared to traditional teaching.

Keywords: Teaching of Mathematics, Exponential function, Didactic (or Teaching) Engineering, Didactic (or Teaching) situations.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Na Matemática do Ensino Médio estão presentes vários assuntos, os quais, sob nosso ponto de vista, poderiam ser explorados de maneira mais profunda e significativa. A função exponencial é um destacável exemplo. A forma como esta função tem sido desenvolvida no Ensino Médio nos parece ser a mesma, pelo menos, há 40 anos atrás. As causas ou motivos que convergem para que a abordagem dessa função se mantenha, não serão aqui, objetos de estudo. O que nos motiva e nos leva a propor uma outra forma de abordagem não são somente resultados de SARESP e de ENEM, onde se constata que o ensino público encontra inúmeras dificuldades, mas também, temos verificado que boa parte dos professores (e consequentemente dos alunos) têm grandes dificuldades conceituais sobre essa função.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), há uma grande preocupação relativa ao estudo e ensino de funções, em particular o ensino de funções exponenciais e logarítmicas [1, p. 121], devido ao grande número de aplicações e a variedade de exemplos contextualizados que se pode encontrar quando se estuda esse assunto, tais como o crescimento populacional, matemática financeira, intensidade sonora, entre outros. Todavia, o que se vê nos livros didáticos e em sala de aula, são atividades que se resumem simplesmente à reprodução de modelos prontos do que podemos chamar de “aulas tradicionais”, iniciando com alguns exemplos de potência (expoente natural), às vezes citando algumas propriedades, levemente comenta-se a definição de raiz n-ésima e em seguida parte-se para a definição de função exponencial (em sua forma generalizada), análise de seu gráfico e as condições de crescimento e decrescimento sem se preocupar com as complicações que existem quando se muda o domínio onde a função está definida.

Em confronto com essa realidade e conhecendo as possibilidades de exploração que se pode fazer quando se ensina função exponencial, uma abordagem diferenciada para o ensino dessa função é proposta neste trabalho. Através da aplicação de folhas de atividades interligadas, elaboradas sobre os pilares da Transposição Didática e utilizando as técnicas da Engenharia Didática, estas desempenham um papel fundamental na transposição de tal conteúdo e têm como principal objetivo melhorar qualitativamente o ensino desse assunto.

De forma resumida o que propomos é o seguinte: começaremos com atividades sobre potências (com expoentes naturais) conduzindo o aluno a associar o conceito de potência com a construção de uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $f(n) = a^n$ e a enfatizar a principal propriedade das funções exponenciais $f(n + m) = f(n).f(m)$, que na notação de potência é representada por $a^{m+n} = a^m.a^n$, para quaisquer que sejam $n,\ m \in \mathbb{N}$. Para alcançar esse objetivo, a Folha de Atividade 1 foi desenvolvida tendo em vista fazer com que o aluno perceba essa propriedade por meio de problemas contextualizados. Cabe destacar que a função nula satisfaz a propriedade citada, mas, isto é o mesmo que supor $a = 0$. Para discutir esse assunto e outros assuntos intermediários a cada extensão do domínio da função exponencial, foram elaboradas folhas explicativas denominadas Folha de Complemento.

De maneira quase que natural poderemos levar o aluno a questionar a possibilidade de estender a mesma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ para $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, matendo-se a propriedade principal que caracteriza as funções exponenciais, ou seja, $f(n+m) = f(n).f(m)$ quaisquer que sejam $n,\ m \in \mathbb{Z}$. Como consequência natural da propriedade citada, a imagem do número natural 0, isto é, $f(0)$ será igual a 1 (o que justifica $a^0 = 1$), pois esta escolha elimina a possibilidade de f ser a função identicamente nula. Porém, acreditamos que fatos como esse devem ser comentados com os alunos do Ensino Médio, e por esse motivo elaboramos a Folha de Complemento 1, cujo título é "Preparando para definir potências de expoente negativo", afim de explorar os motivos pelos quais $a \neq 0$ e $f(0) = a^0 = 1$.

Em decorrência da propriedade citada temos: $f(n).f(-n) = f(n+(-n)) =$

$f(0) = 1$. Isto implica em dois fatos simples, primeiro que $f(n) \neq 0, \quad$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e segundo que $f(-n)$ é o inverso de $f(n)$ (em relação à operação de multiplicação em $\mathbb{R}$). Isto vem justificar a notação da propriedade $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ baseada na simbologia usual de inverso de um número real. Para explorar e aplicar a definição de potência de expoente negativo, elaboramos a Folha de Atividade 2 cujo título é "Pensando em Expoentes Negativos", onde esse assunto é explorado utilizando a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definida por $f(n) = a^n$, juntamente com tabelas que exploram a aplicação direta da definição de potência de expoente inteiro.

Destacamos enfaticamente que, até este ponto, a base $a = f(1)$ pode ser qualquer número real, positivo ou negativo. Isto significa que, na linguagem usual, a base da potência a^n, com $n \in \mathbb{Z}$, pode assumir qualquer valor real não nulo e que a propriedade fundamental ainda permanece válida. Procuramos destacar este fato na Folha de Atividade 2, mais especificamente, nos problemas 1, 2 e 3 da Situação 2.

Nosso próximo passo foi levar os alunos a entender que a mesma função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ pode ter seu domínio estendido para $\mathbb{Q}$, ou seja, trabalhamos com a função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, afim de manter a validade da propriedade principal que caracteriza as funções exponenciais, isto é, $f(r + s) = f(r).f(s)$ para quaisquer que sejam $r,\ s \in \mathbb{Q}$. Neste ponto convém destacar uma observação extremamente importante, ou seja, para que seja possível estender o domínio de f, é necessário que $f(r) > 0$ para qualquer $r \in \mathbb{Q}$, pois, admitindo a validade da propriedade fundamental, $f(0) = f(r + (-r)) = f(r).f(-r) = 1$, o que implica que $f(r) \neq 0$ para qualquer $r \in \mathbb{Q}$. Então podemos ver que $f(r) = f\left(\dfrac{r}{2} + \dfrac{r}{2}\right) = \left(f\left(\dfrac{r}{2}\right)\right)^2 > 0$. Assim, elaboramos a Folha de Complemento 2 cujo título é "Justificativa para escolha de base estritamente positiva", afim de deixar claro para os alunos os motivos que nos levam a esta condição, além de enfatizar que perdemos a liberdade de escolha para a base "a", nos restringindo apenas a valores reais estritamente positivos, visto que $f(r) > 0$ para qualquer que seja $r \in \mathbb{Q}$, e em particular, $a = f(1) > 0$. Esta é uma condição que geralmente é citada nos livros didáticos voltados ao Ensino Médio, mas, nem sempre é justificada.

Como decorrência desta extensão precisamos dar um significado para $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = a^{\frac{1}{n}}$ para $n \in \mathbb{N}^*$. Porém, como consequência da propriedade fundamental, teremos:

$$a = f(1) = f\left(\frac{n}{n}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n\,vezes}\right) = \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

Chamando de y o valor de $f\left(\frac{1}{n}\right)$, obtemos, como decorrência da expressão acima, a equação $y^n = a$. Dessa forma, definimos as potências de expoente fracionário do tipo $a^{\frac{1}{n}} = f\left(\frac{1}{n}\right)$ como sendo a raiz positiva da equação $y^n = a$, e a partir desta, definimos as potências de expoente racional, pois $f\left(\frac{1}{n}\right) = y$ nos conduz à equação $y^n = a$, então a raiz positiva de nossa equação pode ser representada por $y = f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a}$. O mesmo ocorre para um número da forma $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, onde podemos verificar que

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q}}_{p\ vezes}\right) = f\left(\frac{1}{q}\right)^p = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

Este argumento justifica a definição de potência de expoente fracionário dada pelos livros didáticos presentes no Ensino Médio. Entretanto, nenhum dos livros didáticos analisados neste trabalho apresentou alguma justificativa para essa definição. Note que se $p \in \mathbb{Z}$ e $p < 0$, basta ver que $1 = f(0) = f(r + (-r)) = f(r).f(-r) \rightarrow f(-r) = \frac{1}{f(r)}$.

Com o objetivo de tratar desses assuntos, elaboramos a Folha de Atividade 3 que, em particular o problema 1 da Situação 1, trata da resolução da equação $y^n = a$ e da definição de potência de expoente fracionário, bem como da generalização da definição de potência de expoente fracionário para qualquer número racional. Ainda na Folha de Atividade 3, exploramos a relação existente entre a definição de potência de expoente fracionário e o conceito de radiciação. Todavia, a resolução dessa equação em $\mathbb{R}$ requer algumas observações: a primeira é que estamos interessados apenas na solução positiva, a segunda observação diz respeito a existência da solução dessa equação, e a terceira, um método prático de como obtê-la.

A necessidade da solução ser positiva é justificada pelo fato de que $f(r) > 0$ para qualquer $r \in \mathbb{Q}$, e em particular, $y = f\left(\frac{1}{n}\right) > 0$. A existência da solução para o professor será fundamentada num apêndice deste trabalho e, como sabemos, essa fundamentação é decorrência do axioma da completividade dos números reais. Na Folha de Atividade 3, que trata da resolução dessa equação, nós admitimos que esta equação tem solução, porém, o mais importante é que apresentamos aos alunos na Folha de Atividade 4 um método "prático"de como determiná-la aproximadamente com erro inferior à $\frac{1}{10^n}$, onde $n \in \mathbb{N}$ e a escolha de n poderá ser razoavelmente grande.

O trabalho dispendido para a obtenção da raiz aproximada da equação $y^n = a$, em alguns casos, poderá ser minimizado e até tornar-se rotineiro, via o emprego da planilha eletrônica, ferramenta esta que geralmente as escolas dispõem. Cabe salientar que quando a for um número natural o método empregado é relativamente claro, por exemplo, resolver $y^2 = 2$, $y^3 = 5$. Porém, se o número a não for um número natural, neste caso, deve ficar claro para o aluno que todo número real admite uma expansão decimal da forma $a = a_o, a_1 a_2 a_3 \cdots$ onde $a_o \in \mathbb{N}$ e $a_j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \quad j = 1, 2, 3, \cdots$. Quando há repetição de certos "padrões", temos as chamadas dízimas periódicas, as quais correspondem aos números racionais, mas, quando não há padrões temos os números irracionais (conteúdo ministrado na 7ª série - 8º ano - do Ensino Fundamental). Sendo assim, com o auxílio das planilhas eletrônicas, levaremos os alunos a encontrar valores cada vez mais próximos para as raízes das equações em questão, através da comparação de casas decimais, e utilizando as aproximações por falta, encontraremos as raízes aproximadas das equações deixando os cálculos por conta das planilhas, porém, levando o aluno a construção do conceito de número irracional e suas aproximações decimais juntamente com o conceito de função exponencial.

No caso em que $p \in \mathbb{Z}$ e $p < 0$, basta ver que

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{-p}{q}\right)} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^{-p}}}.\frac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[q]{a^p}} = \frac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[q]{a^0}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Com estes argumentos conseguimos estender o domínio da função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ para $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ e nossa intenção é mostrar ao aluno que a cada extensão que se faz no domínio dessa função, preservando a propriedade principal das funções exponenciais, generalizamos e justificamos regras da potenciação e da radiciação que, na maioria das vezes, são apresentadas sem nenhuma relação entre si. As folhas atividades desenvolvidas para esse fim, abordam esses conceitos segundo uma concepção construtivista, trabalhando com exemplos numéricos e estimulando o aluno a perceber a relação existente entre tais conceitos por conta própria.

Com relação às potências de expoente real, procuramos trabalhar com a planilha eletrônica, mais especificamente na Folha de Atividade 5, para ajudar o aluno a entender e dar uma noção ao aluno de como obter o valor aproximado de uma potência de expoente real. Partindo da representação decimal do expoente real, as potências aproximadas são calculadas com auxílio da planilha.

As atividades foram divididas em várias etapas cada uma abordando uma propriedade diferente da Função Exponencial, onde em cada uma delas são realizadas as análises a priori, com o intuito de objetivar as atividades bem como sondar o conhecimento prévio dos alunos. Em seguida vem a aplicação da atividade juntamente com as possíveis intervenções do professor, a medida que se fizerem necessárias. Feito isso, é hora de fazer as análises a posteriori que verificam os resultados obtidos pelos alunos nas atividades aplicadas. E por fim segue a validação, que vai legitimar ou não se a atividade surtiu o efeito esperado.

No Apêndice, são realizadas todas as demonstrações e construções matemáticas relativas a Função Exponencial, assim como os teoremas e conclusões necessárias para essa construção. O objetivo de se realizar esses apontamentos matemáticos reside no fato de que muitos professores podem utilizar este trabalho como consulta, visto que há grande dificuldade em encontrar literatura que se dedique exclusivamente à construção e validação das propriedades da Função Exponencial. Também estão disponibilizadas as folhas de atividades aplicadas.

Espera-se que este trabalho seja aproveitado por professores e que os mesmos possam fazer uso das atividades por nós aplicadas, e que com isso obtenham bons resultados em suas aulas, como os resultados obtidos ao término deste trabalho de pequisa, contribuindo assim para a melhoria do ensino público.

Capítulo 2

Alguns fatos importantes na história da Função Exponencial

2.1 A evolução da notação de potência

O foco principal deste trabalho, está intimamente relacionado com a notação de potência, pois o trabalho explora significativamente a propriedade fundamental das funções exponenciais, isto é, dada uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a propriedade citada é expressa pela igualdade $f(x+y) = f(x).f(y)$ para quaisquer x, $y \in D$. No caso em que $D = \mathbb{N}$ (o conjunto dos números naturais), estamos falando da potência de expoente natural, cuja base é $f(1) = a$, e a propriedade fundamental será expressa, neste caso, pela igualdade $a^{m+n} = a^m.a^n$ para quaisquer m, $n \in \mathbb{N}$. Contudo, usamos com muita naturalidade a notação de potência, porém, em alguns casos sem saber que esta notação demorou muitos séculos até tomar a forma que tem hoje.

É muito comum no Brasil encontrarmos livros voltados ao ensino da Matemática, que abordam o conteúdo de função exponencial antes de logaritmo, por considerarem a função logarítmica a inversa da função exponencial. Todavia, não ocorreu assim na evolução histórica desses conceitos, em outras palavras, o conceito de logaritmo surgiu antes que a notação de potência tivesse tomado a forma de notação moderna que tem hoje (veremos com mais detalhes a invenção dos logaritmos na próxima seção).

A notação moderna de potência pode ser chamada de uma notação "operatória", no sentido de que favorece uma boa interação entre as operações matemáticas já existentes e a operação que está sendo representada pela notação em questão. Por exemplo: ao utilizarmos Q para representar x^2 e S para representar x^5, não fica explícito que $Q.S$ representa x^7, ao passo que a notação $x^2.x^5 = x^7$ nos induz automaticamente a escrever que $x^2.x^5 = x^7 = x^{2+5}$, relacionando diretamente com a operação de adição o grau de cada uma das potências em questão. Porém, muito tempo se passou até que essa notação tomasse a forma operatória que tem hoje.

Desde muito tempo já fora notado que existe uma relação simples entre os termos de uma progressão geométrica e os expoentes da razão. Segundo [2, p. 18], o matemático alemão Michael Stifel (1487 - 1567), em seu livro *Arithmetica integra* (1544), formulou esta relação como segue (em notação moderna): "se multiplicarmos quaisquer dois termos de uma progressão 1, q, q^2, ... o resultado será o mesmo se somarmos os expoentes correspondentes". Certamente a propriedade fundamental das potências já era conhecida há muito tempo, porém, uma notação operatória demorou a surgir. Podemos encontrar em vários períodos da História da Matemática, vários símbolos diferentes para representar as potências. Segundo [3, p. 309] o simbolismo algébrico matemático deve muito a obra *In artem* de François Viète (1540 - 1603). Dentre as várias notações sugeridas por Viète, estavam as notações para potências de uma mesma quantidade, isto é, o que se indica hoje por x, x^2, x^3 ele expressava por A, $A\,quadratum$, $A\,cubum$, que mais tarde foram abreviadas para A, Aq, Ac.

Segundo [4, p. 338], em 1685, John Willis escreveu "$ll - 2laa + a : \div bb$", onde o símbolo ":"corresponde a um sinal de agregação, que significa que todos os termos são divididos por b^2. Ainda em [4], J. Billy's (1678) em sua publicação *Abridgement of the Precepts of Algebra*, traz um conjunto de símbolos para as potências indicados por letras maiúsculas: N, R, Q, QQ, S, QS, entre outras combinações destes. Em sua notação, $x^2 = 20 - x$ era escrito como 1Q= $20 - 1$R. Entretanto, segundo [2, p. 23], expoentes negativos e fracionários têm sido sugeridos por alguns matemáticos desde o século XIV, mas o seu uso generalizado é devido ao matemático inglês John Wallis (1616 - 1703) e ainda mais a Newton, que sugeriu a notação moderna a^{-n} e $a^{\frac{n}{m}}$ em 1676.

Sem dúvida o simbolismo matemático deve muito a Viète, mas segundo [2] os créditos referentes à sugestão da notação moderna de potência são de Isaac Newton, que juntamente com Leibniz, contribuíram significativamente para a evolução das ideias matemáticas, bem como para a evolução de sua notação.

2.2 Logaritmos: a grande ideia de Nepier

Sem dúvida alguma, os logaritmos estão presentes em vários ramos do conhecimento humano. Tanto na Química como da Física, Biologia e obviamente na Matemática, os logaritmos desempenham um papel fundamental, seja como ferramenta de cálculo, funções que modelam fenômenos da natureza ou como elementos da própria Matemática. Diferente de vários outros conhecimentos matemáticos, os logaritmos não apareceram por acaso, mas sim foram criados e, a princípio, sua ideia básica é atribuída a um inventor, seu nome é Napier.

Filho de Sir Archibald e de sua primeira esposa, John Napier nasceu por volta de 1550 (a data exata é desconhecida [2]), na propriedade de sua família no castelo de Merchiston, próximo a Edimburgo, na Escócia. Estudou religião na Universidade de St. Andrews, e logo após voltou para a sua terra natal em 1571. Casou-se, e após a morte de seu pai, tornou-se o oitavo senhor do castelo onde passou o resto de sua vida. Contudo, o interesse de Napier não estava confinado a religião. Como dono de terras, era interessado na melhoria da colheita e do gado. Inventou um parafuso hidráulico para controlar o nível de água nas minas de carvão, além de se interessar por questões militares. Inspirado por Arquimedes, ele imaginou uma arma poderosa para exterminar seus inimigos. Dentre várias de suas ideias, uma delas era construir uma carruagem com uma "boca móvel de fogo ardente"que, segundo ele, "espalharia a destruição por todos os lados", além de navegação debaixo d'água, mergulhadores, entre outros artifícios para destruir os inimigos. Entretanto, sua principal invenção se deu no campo da Matemática.

Sua linha de pensamento era a seguinte: se pudéssemos escrever qualquer número positivo como potência de algum dado número fixo (chamado de base), então a multiplicação e a divisão de números se reduziriam, respectivamente, a adição e a subtração de seus expoentes. Além disso, elevar um número a n-ésima potência é o mesmo que multiplicar seu expoente por n. Resumindo, cada operação seria reduzida à operação imediatamente abaixo na hierarquia de operações, reduzindo assim seu grau de complexidade.

Napier utilizou uma base próxima de um, de modo que suas potências fossem decrescendo lentamente. A base escolhida por Napier, depois de muito pensar, foi $0,9999999$, ou seja, $1 - 10^{-7}$. Após sua escolha, ele partiu para a tarefa de encontrar, através de inúmeras subtrações, os termos sucessivos de sua progressão. Este trabalho consumiu vinte anos de sua vida (1594 - 1614) até ser publicado em 1614 num tratado em latim intitulado *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição do maravilhoso cânone dos logaritmos).


MIRIFICI
Logarithmorum
Canonis descriptio,
Ejusque usus, in utraque
Trigonometria; ut etiam in
omni Logistica Mathematica,
Amplissimi, Facillimi, &
expeditissimi explicatio.
Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
Barone Merchistonii,
&c. Scoto.
EDINBURGI,
Ex officinâ ANDREÆ HART
Bibliopolæ, CIƆ. DC. XIV.

Figura 2.1: Folha de rosto do *Mirifici*

A definição de logaritmos que Napier apresentou em seu livro era a seguinte: se N= $10^7\,(1 - 10^{-7})^L$, então L é o logaritmo neperiano de N. Esta definição é bem diferente da moderna (introduzida por Leonard Euler, em 1728 segundo [2]): se N= b^L, onde b é um número positivo fixo e diferente de 1, então L é o logaritmo de N na base b. A principal diferença entre a definição de Napier e a que se tem hoje, é que nos logaritmos de Napier, log Nep $10^7 = 0$ enquanto que na definição atual, log $1 = 0$.

Raramente, na história da ciência, uma nova ideia foi aceita com tamanho entusiasmo pela comunidade científica. Um dos primeiros a utilizar a ideia de Nepier foi o astrônomo Johannes Kepler nos cálculos de órbitas planetárias. Napier também era defensor do uso da vírgula para a separação da parte inteira da fracionária do número, e foi por causa das frações decimais que Napier formulou sua definição utilizando a unidade como sendo 10^7, para evitar a parte fracionária. Foi um professor do Colégio Greshman em Londres, Henry Briggs quem propôs a Nepier algumas modificações em suas tabelas, para que estivessem em harmonia com o sistema de numeração, o decimal. Então, em um encontro na casa do próprio Napier, Briggs propôs que se fizesse $\log 1 = 0$ e que o logaritmo de 10 fosse igual a uma potência apropriada de 10. Depois de considerarem várias possibilidades, decidiram então que $\log 10 = 1 = 10^0$. Na linguagem moderna, se N= 10^L , então L é o logaritmo "comum"de N, escrito como log N, surgiria então o conceito de base.

Outra pessoa também reclamou o título de inventor dos logaritmos, seu nome era Joost Bürgi (1552 - 1632). Ele criou uma tabela de logaritmos usando o mesmo esquema utilizado por Napier, porém, onde Napier utilizava a proporção $1 - 10^{-7}$, que é ligeiramente menor do que 1, Bürgi utilizava $1 + 10^{-4}$, que é ligeiramente maior do que 1. Assim, os logaritmos de Bürgi aumentavam à medida que os números cresciam, enquanto os de Napier diminuíam.

Como pudemos observar, o conceito de logaritmo surgiu em uma época em que a notação de potência ainda não havia se desenvolvido por completo. Apesar de que hoje seja natural interpretarmos os logaritmos como a inversa da função exponencial, seu desenvolvimento se deu praticamente de maneira independente da evolução do conceito de potência e mais distante ainda da ideia de função exponencial. Entretanto, para que seja possível buscar as origens da evolução do conceito de função exponencial, é de extrema importância que observemos como se deu o desenvolvimento do conceito de função propriamente dito, pois mesmo este demorou séculos até tomar a forma que possui atualmente.

2.3 O conceito de função ao longo da história

O conceito de função veio se moldando ao longo de séculos. A princípio, os matemáticos entendiam função como uma expressão matemática ou uma fórmula que exprimia a relação entre as variáveis, ou seja, os números utilizados no cálculo do valor numérico da expressão.

Por volta do século XIII, os matemáticos já utilizavam, de certa forma, a função como a relação de dependência entre duas quantidades. Exemplo disso, são "os filósofos escoláticos que seguiam a escola de Aristóteles e discutiam a quantificação de formas variáveis, dentre elas, a velocidade de objetos em movimento ou a variação de temperatura de um sólido"em função do tempo, segundo [5, p. 21].

Com o advento do Plano Cartesiano, no século XVII, com Fermat e Descartes, houve uma evolução significativa no estabelecimento de fundamentos matemáticos para o conceito de função, que permitiriam, mais tarde, o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, por Leibniz e Newton, sendo Leibniz o primeiro a utilizar a palavra função. Em [3, p. 660] vemos "a palavra função, na sua forma latina equivalente, parece ter sido introduzida por Leibniz em 1694, inicialmente para expressar qualquer quantidade associada a uma curva".

As palavras coordenada, abscissa e ordenada, no sentido que têm hoje, foram contribuições deixadas por Leibniz em 1692, segundo [3, p. 338]. Porém, a definição de função percorreu um longo caminho até chegar a forma que tem hoje. Nesse sentido, [6, p. 02], comentam que:

> Sendo assim, parece-nos que concepções espontâneas sobre os conceitos matemáticos são cabíveis em poucas situações, geralmente ligadas à vivência sóciocultural dos indivíduos. Para a maioria dos conceitos atuais e mais complexos da Matemática, entretanto, que foram gerados a partir de evoluções contínuas, realizadas por muitas mentes humanas, e em diferentes períodos históricos, é bastante difícil que se revelem concepções espontâneas, pois estas se mostram muito distantes do conhecimento especializado dos matemáticos e também do conhecimento escolar.

Inúmeros matemáticos reconheceram a importância do conceito de função para a Matemática de modo geral, deixando suas contribuições para a formalização desse conceito. Um desses matemáticos foi Johann Bernoulli, que chegou a considerar o conceito de função como uma expressão matemática formada de variáveis e constantes segundo [3, p. 660].

Entre os discípulos de Johann Bernoulli estava Leonard Euler, que além de contribuir para o desenvolvimento de inúmeros ramos da Matemática, também deixou sua contribuição para o refinamento do conceito de função. Uma de suas obras de maior destaque é *Introduction in analysin infinitorum* (Introdução à análise infinitesimal), composta de dois volumes publicados em 1748. No primeiro volume, Euler faz um estudo detalhado do conceito de função, padronizando este termo tal como foi efetivamente utilizado na análise matemática. Euler também considerou uma função como uma equação ou fórmula que envolvesse variáveis e constantes, segundo [3, p. 661]. Porém, as pequisas de Joseph Fourier (1768-1830) o levaram a um tipo diferente de função, na qual a relação entre as variáveis era mais abrangente e na tentativa de dar uma formulação ampla que abordasse esses conceitos, Lejeune Dirichlet (1805-1859) deu a seguinte formulação para o conceito de função:

> Uma variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre se atribui um valor a x, corresponde automaticamente, por uma lei ou regra, um valor a y, então diz que y é uma função (unívoca) de x. A variável x, à qual se atribuem valores à vontade, é chamada variável independente e a variável y, cujos valores dependem dos valores de x, é chamada variável dependente. Os valores possíveis que x pode assumir constituem o campo de definição da função e os valores assumidos por y constituem o campo de valores da função. [3, p. 661]

A teoria dos conjuntos propiciou muitos avanços na Matemática, em especial, no que diz respeito ao conceito de função que se tem hoje, ou seja, a relação entre os elementos de dois conjuntos quaisquer, não importando se são números ou qualquer outro objeto matemático. Uma *função f* é, por definição, um conjunto de pares ordenados nos quais nunca encontramos dois cujas primeiras coordenadas têm o mesmo valor, ou seja, se $(a_1, b_1) \in f$ e $(a_2, b_2) \in f$ e eventualmente $a_1 = a_2$ então teremos obrigatoriamente $b_1 = b_2$. O campo de definição da função é chamado de *domínio da função* e o campo dos valores da função é chamado de *imagem* da função. Desta forma, dizemos que a *função f* está definida em D (domínio da função), e que a_1, $a_2 \in D$.

Certamente o conceito de função é de extrema importância para a Matemática, seja no Ensino Médio, graduação ou pós-graduação, uma boa compreensão desta ideia é fator determinante no estudo de qualquer assunto em Matemática. Entretanto, quando o conceito de função se concretizou, o mesmo foi aplicado aos mais diferentes ramos do conhecimento matemático quase que ao mesmo tempo, surgindo então as funções circulares trigonométricas, funções quadráticas, cúbicas e, dentre elas, a função exponencial, onde o conceito de função é aplicado ao estudo de potências. Isto possibilitou uma extensão da ideia de potência para além do domínio do conjunto dos números inteiros, relacionando os conceitos de radiciação e logaritmo por meio do conceito de função exponencial.

2.4 A exponencial e^x na História da Matemática

Pelos registros que temos sobre a História da Matemática, pouco se sabe sobre a evolução do estudo da função exponencial propriamente dita. Como já vimos, o estudo de logaritmo surgiu antes mesmo que a notação funcional de potência tivesse sido criada. Podemos encontrar problemas que envolvem juros compostos, uma aplicação das funções do tipo exponencial, em documentos antigos, como nos papiros. Isso mostra que problemas que envolvem a função exponencial eram comuns na comunidade matemática.

Podemos citar o problema mencionado por [2, p. 41], encontrado em um tablete de argila da Mesopotâmia, datado de 1700 a.C., que propõe: "Qual é o tempo necessário para que uma soma em dinheiro dobre de valor, quando aplicada a uma taxa de 20% de juros composta anualmente?" Podemos observar claramente que a solução do problema, apesar de ser logarítmica, é proveniente da equação exponencial $(1,2)^x = 2$, que é uma equação exponencial.

Problemas que envolviam empréstimo de dinheiro e cobrança de juros eram comuns. Entretanto, a cobrança de juros, dependendo da maneira que é computada, nos leva a uma questão interessante. Uma taxa anual de 5% por exemplo, pode ser computada semestralmente, utilizando metade da taxa anual, ou seja, duas composições de 2,5%. O interessante nesse tipo de cobrança é que, para um capital de R$ 100,00 por exemplo, se computado a 5% ao ano gera um montante de R$ 105,00, ao passo que se computado por semestre à taxa de 2,5%, gera um montante de R$ 105,06, cerca de seis centavos a mais. Aparentemente a diferença é insignificante, entretanto se tomarmos um capital de R$ 1.000.000,00 essa diferença é igual a R$ 625,00. Para um caso geral, em que um capital C é aplicado a uma taxa anual i, que é composta n vezes em um ano, teremos, ao final de n composições, o montante $M = C\left(1 + \frac{i}{n}\right)^n$. Se considerarmos $C = 1$ e $i = 1 = 100\%$, teremos a seguinte expressão

$$M = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Quando atribuímos valores cada vez maiores para n, percebemos que os valores numéricos da expressão, a medida que n cresce, vão se aproximando cada vez mais de 2,71828. De acordo com [2, p. 45], não se sabe ao certo quem primeiro estudou o comportamento de tal expressão, entretanto, o valor limite dessa expressão, quando n tende ao infinito, é a base para a definição de um número irracional, que mais tarde seria denotado por e, a base da função que hoje é chamada de exponencial. Não se sabe ao certo quem primeiro notou o comportamento da expressão $M = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ quando n tende para o infinito, por isso, a data exata do nascimento do número e permanece obscura. Mas, podemos notar que sua origem data do século XVII, por volta da época em que Napier criou suas tábuas, pois podemos encontrar uma referência indireta ao número e em seus logaritmos. Vimos que, se $N = 10^7(1-10^{-7})^L$, então L é o logaritmo neperiano de N. Então podemos escrever $\frac{N}{10^7} = (1-10^{-7})^L$, e dividindo N e L por 10^7, (o que seria o mesmo que mudar a escala de nossas variáveis) teremos $\frac{N}{10^7} = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{\frac{10^7 L}{10^7}} \Rightarrow N^* = \left[\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}\right]^{L^*}$, onde $N^* = \frac{N}{10^7}$ e $L^* = \frac{L}{10^7}$. Daí, notamos que $\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$ é um número muito próximo de $\frac{1}{e}$, em outras palavras, os logaritmos de Napier são, virtualmente, logaritmos de base $\frac{1}{e}$. Porém, a afirmação de que Napier descobriu esta base ou propriamente o número e é falsa, pois, como vimos Napier não pensava em termos de base, esse conceito surgiu após as ideias de Briggs.

Sabemos que o número e foi estudado por Euler e muito do que se sabe a respeito desse número se deve a ele. Desde convergência de sequências até somas infinitas. Sem dizer da famosa equação que relaciona as constantes mais importantes da matemática, a equação $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Isaac Newton nasceu em Woolsthorpe, Lincolnshire, Inglaterra, no dia de Natal de 1642, o ano da morte de Galileu. Newton demonstrava um interesse especial à equação $y = \frac{1}{x+1}$. Newton observou que a área delimitada sob o gráfico dessa hipérbole de $x = 0$ até $x = t$ é $\log(t+1)$. Assim, ao aplicar a fórmula da série geométrica infinita a cada termo da equação, Newton encontrou uma importante série

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + ...$$

Com ela, é possível calcular o valor aproximado de inúmeros logaritmos, porém, esta mesma série já teria sido publicada por Nicolaus Mercador (1620 - 1687) no ano de 1668, em um trabalho intitulado Logarithmotechnia, no qual a série descoberta por Newton aparecia pela primeira vez. Esta dentre outras descobertas, impulsionaram Newton à criação da Teoria das Fluxões ou Método das Fluxões.

Por meio dessa série, seria possível encontrar o valor aproximado da base do logaritmo que fornece o valor da área sob o gráfico da hipérbole $y = \frac{1}{x}$. Todavia, não foi esse o caminho escolhido para a sua determinação.

Quando Newton e Leibniz desenvolveram o cálculo, surgiu então o conceito de derivação e de derivada de uma função. Então como isso ocorre para as funções exponenciais, aquelas do tipo $y = b^x$, onde x é um número real, e $b > 0$ e $b \neq 1$? Na definição de derivada de uma função $y = f(x)$ temos $\frac{dy}{dx} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Dessa forma, é possível demonstrar que as funções exponenciais têm uma característica marcante, que as difere de qualquer outra função, a de possuir taxa de variação proporcional à própria função, daí a grande aplicabilidade em vários ramos do conhecimento. No caso da função exponencial $f(x) = e^x$, a derivada e a própria função são iguais o que faz dela umas das principais funções estudadas no cálculo.

Vemos que a história da função exponencial está repleta de acontecimentos que marcaram época na comunidade matemática. Foram grandes fatos que desencadearam novas descobertas e novos estudos sobre uma das principais funções presentes na matemática e em muitos outros ramos das ciências da natureza.

Capítulo 3

A Função Exponencial no Ensino Médio

3.1 Introdução

Neste capítulo procuramos destacar como os eixos norteadores do ensino público atual abordam, ou propõem abordagens, sobre o ensino de função exponencial. Os eixos mencionados basicamente são três: os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), a Proposta Curricular do Governo do Estado de São Paulo e os mais conceituados livros didáticos do mercado que procuram abordar esse assunto. Os principais elementos e ideias contidas em cada um desses eixos serão destacadas neste capítulo.

3.2 Fatos que nos motivaram a escolher esse tema

Analisando os livros didáticos mais utilizados na rede pública estadual, os capítulos que se destinam ao estudo da função exponencial são todos muito parecidos. Geralmente fazem uma revisão do conceito de potência e suas principais propriedades e, logo em seguida, já introduzem o conceito de função exponencial em sua forma mais geral, isto é, definida sobre o domínio dos números reais, analisando seu gráfico e condições de crescimento e decrescimento, sem mencionar algumas palavras sobre o vínculo que uma potência do tipo $4^{\frac{1}{3}}$ tem com função exponencial, isto para dar uma pequena noção. E o que dizer das potências cujos expoentes são irracionais? Estas se quer são mencionadas, ficando a critério do leitor (aluno) o seu entendimento. Entretanto, sabemos que mesmo os professores têm grandes dificuldades com esse tipo de potência, e o que é pior, se tais potências têm algum significado matemático preciso. Questões como essas surgem frequentemente entre os professores. Então o que dizer sobre o embasamento teórico que os alunos têm sobre esse assunto, que vem sendo ensinado da mesma forma há, pelo menos, 40 anos? Essas lacunas na formação dos alunos e também dos professores, entre outras razões que mencionaremos mais adiante, acabaram nos motivando a escrever este trabalho, para que o mesmo, possivelmente, possa contribuir para um aprendizado significativo do conceito de função exponencial nos mais diferentes domínios, bem como ajudar no planejamento das aulas de alguns professores de matemática. É nosso objetivo que o produto final construído seja, além das atividades que foram elaboradas, essa própria dissertação de mestrado.

Quando se fala em potenciação, juntamente como sua definição e suas propriedades, os livros didáticos trazem a definição de potência de expoente nulo, isto é, $a^0 = 1$ as vezes trazendo a restrição $a \neq 0$ e as vezes não. Vejamos a definição que [7] traz para a função exponencial:

> Seja a um número real positivo que suponhamos sempre ser diferente de 1. Uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de Função Exponencial de base a se para todo $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se $f(x + y) = f(x).f(y)$, e além disso, $f(1) = a$.

De acordo com a definição dada, quando se trabalha com os conceitos de potenciação, intuitivamente já estamos trabalhando com uma função que satisfaz essa propriedade, em outras palavras, quando escrevemos que $a^{m+n} = a^m.a^n$ fica claro que as potências de expoente natural satisfazem a propriedade da definição de função exponencial. Todavia, a justificativa para o fato de que $a^0 = 1$ é tratada em alguns livros didáticos da seguinte forma: um exemplo numérico com potências de expoentes naturais decrescentes, até chegar ao expoente zero, como na tabela 3.1.

O argumento utilizado para que o valor de 2^0 seja igual a 1 num exemplo como esse, é o fato de que os resultados das potências formam uma progressão geométrica de razão 2, e em consequência disso, e assumindo que esse padrão permaneça para os próximos valores, então $2^0 = 1$.

Entretanto, acreditamos que é possível realizar uma exploração mais profunda neste tópico, trabalhando com a principal propriedade das potências, isto é, $a^{m+n} =$

$(2)^5 =$	32
$(2)^4 =$	16
$(2)^3 =$	8
$(2)^2 =$	4
$(2)^1 =$	2
$(2)^0 =$	1

Tabela 3.1: Justificativa dos livros para 2^0

$a^m.a^n$, podemos ver que $a^0 = a^{0+0} = a^0.a^0 = (a^0)^2$. Chamando de x o valor de a^0, obtemos a seguinte equação do segundo grau:

$$x^2 - x = 0$$

As raízes dessa equação são $x = 0$ e $x = 1$, isto significa que a^0 pode ser tanto igual a 0 como igual a 1. Porém, podemos ver que se $a^0 = 0$, então $a = a^1 = a^{1+0} = a^1.a^0 = a^1.0 = 0$, ou seja, se adotarmos $a^0 = 0$, a própria base a deveria ser igual a zero, e teríamos a função constantemente igual a zero. Isso deveria ser claro para o professor, que, na medida do possível, pudesse alertar os alunos sobre esse fato. Dessa forma é conveniente definir $a^0 = 1$ para que evitar esse problema. Acreditamos que esta discussão não foge dos conteúdos abordados no Ensino Médio e pode ser tratada de forma natural com os alunos, pois relaciona o conceito de equação do segundo grau com a definição de um novo conceito matemático. Para abordar tais assuntos com os alunos, elaboramos a Folha de Complemento 1, onde tratamos dessa discussão de uma maneira simples, como veremos com mais detalhes no capítulo 6.

Um fator importante que nos levou à escolha desse tema, foi a falta de justificativa para várias regras utilizadas na potenciação, uma delas é a regra utilizada para o cálculo do valor de uma potência cujo expoente é um número inteiro e negativo. Quando utilizamos a propriedade das funções exponenciais, podemos facilmente justificar a propriedade $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, que geralmente é decorada pelos alunos quando lhes é ensinada. Ao considerarmos uma função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ de tal forma que $f(m+n) = f(m).f(n)$, então a melhor maneira de se definir $f(-n)$ é utilizar o fato de que $f(0) = f(n + (-n)) = f(n).f(-n) = 1$, assim, concluímos naturalmente que $f(-n) = \dfrac{1}{f(n)}$. Para a discussão deste tópico, desenvolvemos a Folha de Atividade 2, onde as atividades propostas induzem o aluno a encontrar a definição correta para uma potência de expoente inteiro e negativo, como veremos no capítulo 6.

Outro fator motivador para a escolha do tema, foi a relação que se pode estabelecer entre o conceito de radiciação e o conceito de função exponencial, bem como as restrições que a base a assume na definição de função exponencial presente nos livros didáticos. Na maioria dos livros didáticos analisados, tais restrições, são feitas sem qualquer justificativa, o que nos motivou a formular uma atividade, mais especificamente a Folha de Atividade 3 e a Folha de Complemento 2, que deixassem claro os porquês de tais restrições, pois, quando se define uma função não nula $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ que satisfaz a propriedade $f(r+s) = f(r).f(s)$ para quaisquer racionais r, $s \in \mathbb{Q}$, concluímos que a base a da função exponencial deve, obrigatoriamente, ser positiva, pois $f(r) = f\left(\frac{r}{2}+\frac{r}{2}\right) = f\left(\frac{r}{2}\right).\left(\frac{r}{2}\right) = \left[f\left(\frac{r}{2}\right)\right]^2 > 0$, que no caso particular de $r = 1$, teremos $f(1) = a > 0$. Nas atividades, fazemos essas passagens com exemplos numéricos, como veremos com mais detalhes no capítulo 7.

3.3 A Função Exponencial e os PCNEM

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) é um documento que tem como objetivo orientar e padronizar o ensino de Matemática no Brasil. De acordo com o [1, p. 119], o ensino de Matemática, bem como os temas a serem desenvolvidos durante a escolaridade, devem ser organizados e selecionados segundo alguns critérios básicos. Vemos a justificativa de tais critérios em [1, p. 119], que diz:

> ...explorar conteúdos relativos aos temas números, álgebra, medidas, geometria e noções de estatística e probabilidade envolve diferentes formas do pensar em Matemática, diferentes contextos para as aplicações, bem como a existência de razões históricas que deram origem e importância a esses conhecimentos. Mas para evitar a quantidade excessiva de informações, é preciso fazer um recorte, usando alguns critérios orientadores deste processo de seleção de temas...

Podemos destacar os três critérios mais importantes no que diz respeito à escolha dos temas a serem ministrados no ensino de Matemática:

- desenvolver um grupo de competências pré estabelecidas no documento;
- os temas selecionados devem ter relevância científica e cultural;

- os temas devem permitir uma articulação lógica entre diferentes ideias e conceitos, possibilitando assim uma aprendizagem significativa.

No que diz respeito as competências pré estabelecidas, podemos ver em [1, p. 113] que tais competências se resumem a três grandes grupos de competências que devem ser almejadas durante todas as etapas da escolaridade, são elas:

- representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;

- investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;

- contextualização das ciências no âmbito sócio-cultural, na forma de análise crítica das idéias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico.

Entretanto, tais competências são amplas e certamente deve haver uma reflexão quando buscamos adequar o objetivo de determinado conteúdo às mesmas. Dessa forma, o documento trata desse assunto baseando-se em exemplos de como tais competências podem ser alcançadas em Matemática, basta ver [1], nos quadros das páginas 114 à 119.

Quanto à relevância científica e cultural dos temas selecionados, esta se encontra intimamente relacionada com a capacidade explicativa que o tema oferece, isto é, quais as possibilidades que o aluno terá, após ter estudado tal conteúdo, de compreender melhor o funcionamento de aparelhos eletrônicos ou de ter argumentos suficientes para explicar/compreender o mundo em que vive. Um exemplo clássico é o ensino da Geometria, que segundo [1, p. 119] afirma que:

> A abordagem tradicional, que se restringe à métrica do cálculo de áreas e volumes de alguns sólidos, não é suficiente para explicar a estrutura de moléculas e cristais em forma de cubos e outros sólidos, nem tampouco justifica a predominância de paralelepípedos e retângulos nas construções arquitetônicas ou a predileção dos artistas pelas linhas paralelas e perpendiculares nas pinturas e esculturas. Ensinar Geometria no ensino médio deve possibilitar que essas questões aflorem e possam ser discutidas e analisadas pelos alunos.

Dessa forma, devem compor o conjunto de temas, conteúdos que possibilitam uma boa interação com assuntos relacionados ao cotidiano das pessoas. Fica claro que não são todos os conteúdos de Matemática que oferecem essa possibilidade, porém, o conceito de função exponencial é um ótimo exemplo, como veremos mais adiante.

Por fim, quanto a articulação lógica que os temas devem oferecer, devemos ter em mente que tais conteúdos não devem ser trabalhados isoladamente como se um não tivesse algum tipo de ligação com o outro, e, por coincidência, um dos objetivos dessa dissertação de mestrado, é propor uma abordagem para o ensino da função exponencial que busque, entre outras coisas, relacionar conceitos que até então sempre foram ensinados de maneira independente, tais como potenciação e radiciação, bem como a determinação aproximada de raízes para particulares equações. Além de relacionar tais conteúdos, o estudo da função exponencial possibilita um melhor entendimento do comportamento de diversos fenômenos naturais, tais como despoluição de rios ou a evolução de um capital aplicado a certa taxa de juros, dentre outros.

Seguindo os critérios estabelecidos acima, os PCNEM propõem um conjunto mínimo de temas que possibilitam alcançar as competências estabelecidas. Divididos em três grandes eixos temáticos, podemos agrupá-los da seguinte forma:

- Álgebra: números e funções

- Geometria e medidas

- Análise de dados

Nosso interesse se restringirá ao primeiro eixo temático (Álgebra: números e funções), já que o tema deste trabalho de pesquisa é o estudo das funções exponenciais.

Neste primeiro eixo estruturador, são abordados os estudos de números e variáveis em conjuntos infinitos [1, p. 120]. Entretanto, são objetos de estudo o conjunto dos números reais e suas operações e, eventualmente, o conjunto dos números complexos, bem como as funções e equações de variáveis ou incógnitas reais.

Com relação ao estudo das funções, [1] afirma que:

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções.

Basicamente, os procedimentos relativos a esse tema se referem a calcular, resolver, identificar variáveis, traçar e interpretar gráficos e resolver equações. Tomando como base os critérios estabelecidos pelos PCNEM para a escolha dos temas, o estudo de funções certamente é um dos que oferece maior possibilidade de relação com a vida das pessoas e pode ser permeado com vários exemplos do cotidiano. Assim, [1] afirma que:

> A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas.

Dentre as funções estudadas no Ensino Médio, a função exponencial apresenta grande número de aplicações em problemas do cotidiano, o que torna seu estudo essencial para um bom entendimento do mundo em que vivemos. A respeito desse assunto, [1] diz que:

> As funções exponencial e logarítmica, por exemplo, são usadas para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável independente é muito rápido, sendo aplicada em áreas do conhecimento como matemática financeira, crescimento de populações, intensidade sonora, pH de substâncias e outras.

Como podemos observar[1], os PCNEM propõem que o ensino de Matemática como um todo não seja excessivamente conteudista e busque, na medida do possível, trabalhar conteúdos de forma contextualizada, relacionando-os com situações do cotidiano. Essa forma de trabalho ajuda a despertar o interesse dos alunos no estudo da Matemática, visto que eles podem observar os conteúdos estudados em ação. Todavia tomamos o cuidado de não omitirmos informações essenciais prejulgando a capacidade de compreensão dos nossos alunos. É claro que ajustamos adequadamente a linguagem ao nível de compreensão dos mesmos.

[1]Observamos aqui um erro que, em nosso ponto de vista, jamais poderia aparecer em um documento oficial de referência nacional. O crescimento da variável *dependente* que é muito rápido em funções exponenciais, e não o contrário.

3.4 A função exponencial segundo a proposta curricular do Estado de São Paulo

No ano de 2008, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo propôs a implantação de um currículo básico para todas as escolas públicas da rede estadual paulista, voltado para os dois últimos níveis da escolaridade básica, ou seja, Ensino Fundamental (Ciclo II) e Ensino Médio. Um dos objetivos principais da implementação do currículo é proporcionar uma base comum de conhecimentos e de competências para que todas as escolas funcionem, de fato, como uma rede, visto que antes da elaboração do currículo isso não acontecia, pois cada escola tinha autonomia para escolher o livro didático que julgasse mais apropriado. Anteriormente, o ensino na rede estadual não seguia um padrão no que diz respeito à ordem e seleção dos conteúdos ministrados, já que cada livro didático abordava os conteúdos que achava mais interessante e em ordens, muitas vezes, divergentes entre si.

Com a implementação do currículo, os conteúdos ministrados nas escolas do Estado de São Paulo foram padronizados, o que fez com que as editoras investissem na reescrita de livros que contemplassem os conteúdos da proposta curricular. Como vimos, os PCNEM fornecem diretrizes para a escolha dos temas a serem trabalhados no Ensino Médio, entretanto, não propõem uma seleção de conteúdos a ser seguida. Com a elaboração da proposta, esse padrão foi criado e todas as escolas caminham juntas no desenvolvimento dos conteúdos ali selecionados. Segundo [8, p. 7]:

> Este documento apresenta os princípios orientadores do currículo para uma escola capaz de promover as competências indispensáveis ao enfrentamento dos desafios sociais, culturais e profissionais do mundo contemporâneo.

Os conteúdos disciplinares de Matemática eleitos na proposta curricular, também são divididos em três eixos temáticos que, entretanto, diferem em alguns aspectos dos eixos temáticos propostos nos PCNEM. Os três blocos temáticos são: Números, Geometria e Relações. Nesta seleção, o estudo de funções fica implícito no bloco das relações, que segundo [8, p. 39]:

> As Relações, consideradas como um bloco temático, incluem a noção de medida, com a fecundidade e a riqueza da ideia de aproximação; as relações métricas em geral; e as relações de interdependência, como as de proporcionalidade ou as associadas à ideia de função.

Em particular, o estudo de função exponencial pertence tanto ao eixo temático dos Números como ao eixo das Relações, visto que para um bom entendimento desse assunto se fazem necessários os conhecimentos sobre a álgebra das operações fundamentais, bem como as representações simbólicas que fazem parte do eixo temático dos Números, segundo [8, p. 39].

Percebemos que há na proposta uma atenção especial quando se trata do estudo das funções exponenciais, como podemos observar em [8, p. 45]:

> sendo imprescindíveis o estudo das grandezas que variam exponencialmente: decomposição radiativa, crescimento exponencial, potencial hidrogenônico, escala Richter para terremotos

Todavia, a definição e os conceitos relativos à função exponencial serão tratados no caderno do 3º bimestre do 1° ano do Ensino Médio, como podemos ver na figura 3.1.

1ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	**Habilidades**
3º Bimestre	**Relações** Funções exponencial e logarítmica • Crescimento exponencial • Função exponencial: equações e inequações • Logaritmos: definição e propriedades • Função logarítmica: equações e inequações	• Conhecer a função exponencial e suas propriedades relativas ao crescimento ou decrescimento • Compreender o significado dos logaritmos como expoentes convenientes para a representação de números muito grandes ou muito pequenos, em diferentes contextos • Conhecer as principais propriedades dos logaritmos, bem como a representação da função logarítmica, como inversa da função exponencial • Saber resolver equações e inequações simples, usando propriedades de potências e logaritmos

Figura 3.1: Quadro de conteúdos e habilidades de Matemática

Percebemos uma grande preocupação com o estudo do comportamento das funções exponenciais, isto é, seu crescimento, decrescimento e análise de seu gráfico. Entretanto, nossa preocupação está em torno de algo mais fino e delicado, que é a definição de função exponencial para um número real qualquer, bem como fornecer meios para que o aluno possa compreender e encontrar uma aproximação razoável para uma potência de expoente racional e real, pois percebemos que muitos alunos, e até mesmo alguns professores, sentem dificuldades quando se trata desse assunto. Porém, vemos que, infelizmente, as abordagens que encontramos na proposta curricular, relativas à definição de função exponencial, sua propriedade fundamental e sua relação com os conteúdos de potenciação e radiciação (principalmente), é muito inferior ao que estamos propondo nessa dissertação de mestrado, como podemos observar claramente no segundo exercício sobre função exponencial que se encontra em [9, p. 4]:

Uma população *N* de micróbios cresce exponencialmente de acordo com a expressão ***N* = 5000 . 3^t** (*t* em horas).

a) Indique o valor de N para os seguintes valores de *t*:

a1) *t* = 2 h

a2) *t* = 0,5 h

a3) *t* = (2/3) h

a4) *t* = 1,25 h

b) Esboce gráfico de *N* como função de *t*: *N* = *f(t)*

Figura 3.2: Situação de aprendizagem 1 - Exercício 2

Notamos que, nos exercícios presentes no caderno do aluno, não há um cuidado especial quando se define uma função exponencial $f(x) = a^x$ com $a > 0$ e $a \neq 1$, para $x \in \mathbb{R}$, ou seja, aparentemente é tranquilo para o aluno entender quanto vale $2^{\sqrt{2}}$ por exemplo? Outro fato que parece estar isolado do conceito de função exponencial, é o conceito de potência de expoente fracionário que, nos exercícios do caderno do aluno, aparece como uma propriedade da radiciação e não como uma consequência da propriedade fundamental das funções exponenciais, como podemos observar no exercício 4 (figura 3.3), que pode ser encontrado em [9, p. 6].

Ainda no caderno do aluno, após a construção dos gráficos nos exercícios 2 e 5, o autor traz um quadro resumo em [9, p. 8], com algumas características da função exponencial:

- Quando x aumenta uma unidade a partir de qualquer valor, a^x é multiplicado por a. De fato, $a^{x+1} = a^x.a$, ou seja, para cada unidade a mais no valor de x, o valor de a^x crescerá ou decrescerá, dependendo apenas do valor de a.

- Sendo $a > 1$, quando o valor de x aumenta, o valor de a^x também aumenta, ou seja, a função $f(x) = a^x$ é crescente.

- Sendo $0 < a < 1$, quando o valor de x aumenta, o valor de a^x diminui, ou seja, a função $f(x) = a^x$ é decrescente.

4. Para analisar a função exponencial $y = a^x$, ou seja, $f(x) = a^x$, sendo $a > 0$ e $a \neq 1$, para todo número real, construímos, a seguir, uma tabela com diversos valores de **x** e os valores correspondentes de **f(x)** para alguns valores de **a**. Preencha os espaços em branco da tabela.

x	2^x	3^x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$
1	2		$\frac{1}{2}$	
2	$2^2 = 4$			$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$
3	$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$	
0		$3^0 = 1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$	
–3		$3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$		$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$
$\frac{1}{2}$	$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \cong 1{,}41$		$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0{,}71$	

6

Figura 3.3: Situação de aprendizagem 1 - Exercício 4

No trabalho proposto por nós nesta dissertação, esses assuntos são tratados em uma folha de complemento cujo título é Gráfico da Função Exponencial, que deverá ser abordado após os estudos sobre sua definição no conjunto dos números Naturais e as extensões da definição sobre cada um dos conjuntos numéricos, bem como as restrições sobre a escolha da base a provocadas por cada extensão.

3.5 Análise dos Livros Didáticos

3.5.1 Introdução

Neste capítulo, procuramos observar como o conceito de função exponencial é tratado nos livros didáticos mais conceituados e mais populares disponíveis no mercado. O objetivo aqui, não é julgar se a abordagem adotada por determinado livro é melhor ou pior que a adotada por outro, mas sim, verificar qual foi a metodologia utilizada, qual foi a definição utilizada ou como são as atividades propostas.

Selecionamos quatro livros didáticos para a análise, sendo que entre eles está o livro didático adotado pela escola onde as atividades foram aplicadas. São eles:

- Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia vol. 01 - Jackson Ribeiro - Editora

Scipione;

- Matemática Paiva vol. 01 - Manoel Paiva - Editora Moderna;
- Matemática Ensino Médio vol. 01 - Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz - Editora Saraiva;
- Matemática: Contextos e Aplicações vol. 01 - Dante - Editora Ática.

O livro adotado pela escola onde foram aplicadas as atividades foi o Matemática Ensino Médio vol. 01. Faremos a análise de cada livro seguindo a ordem listada acima.

3.5.2 Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia

No livro [10], o autor inicia o capítulo de Função Exponencial com uma situação problema envolvendo juros compostos. O autor parte de um exemplo de uma pessoa que empresta 1000 reais a taxa de juros de 4% ao mês. Em seguida, o autor comenta que existe uma fórmula que generaliza essa situação, isto é, $M = C.(1+i)^n$ e diz que essa função é do tipo exponencial, representando o exemplo dado por meio de um gráfico. Após esse exemplo, o autor trata de revisar os conceitos de potenciação, iniciando pelas potências de expoente natural, onde o autor define que para $a \in \mathbb{R}$, e $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$, temos $a^n = \underbrace{a.a.\ldots.a}_{n\,vezes}$. Para os casos em que $n = 0$ e $n = 1$, o autor define que $a^1 = a$ e $a^0 = 1$, com o detalhe de que $a \neq 0$. Nas potências de expoente inteiro, o autor, por meio de um exemplo de potência de base 5, induz o aluno a perceber que, para uma sequência de potências de base igual a 5, com expoentes consecutivos e decrescentes, quando o expoente diminui de uma unidade, a potência fica dividida por 5. Com base nessa verificação, o autor define que, para um dado número real $a \neq 0$, e um número natural n, a potência $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. A partir dessa definição, o autor traz alguns exemplos de aplicação da definição e logo após, enuncia algumas propriedades reativas às potências de base real e expoentes inteiros. Nas potências de expoente racional, o autor justifica a igualdade $\sqrt[3]{5^4} = 5^{\frac{4}{3}}$ por meio da definição de raiz n-ésima, e assim define que, dado um número real $a > 0$, e um número racional da forma $\dfrac{m}{n}$, como m, n inteiros e $n > 0$, $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$. Nesta etapa o autor traz apenas dois exemplos de aplicação da definição dada, mas com nenhum tipo de cálculo do valor aproximado de tais raízes. Finalmente o autor trata das potências de expoente real, calculando seu valor por aproximação. O autor traz um quadro com as aproximações por falta e por excesso do número irracional $\sqrt{3}$, sem fornecer nenhum procedimento específico para encontrar tais aproximações. Em seguida, o autor faz uso de uma calculadora científica para obter os valores aproximados da potência $2^{\sqrt{3}}$. Após as definições de potência, o autor traz uma situação problema que pode ser modelada pela função $f(x) = 2^x$ com $x \in \mathbb{N}$. O autor comenta que essa função é uma função exponencial e define função exponencial como sendo toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. O autor traz vários exemplos e exercícios de aplicação da função exponencial.

3.5.3 Matemática Paiva

No livro [11], o autor inicia o capítulo sobre função exponencial com uma situação problema que envolve a reprodução por bipartição de bactérias, onde o número de bactérias ao final de n gerações é igual a 2^n. O autor chama de y o número de indivíduos na geração x, e estabelece que $y = 2^x$ e diz que funções como essas são chamadas de funções exponenciais. Logo em seguida, o autor trata de revisar os conceitos de potenciação e radiciação, iniciando com potências de expoente inteiro, onde o autor define que $a^0 = 1$, se $a \neq 0$, $a^1 = a$, $a^n = \underbrace{a.a.\ldots.a}_{n\,vezes}$ se $n > 1$ e finalmente $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ se $a \neq 0$. Logo após as definições, o autor traz alguns exemplos de aplicação das definições dadas, incluindo bases negativas e fracionárias. Em seguida, o autor trata de algumas propriedades das potências verificando sua validade através de exemplos. O autor também revisa e define o que ele mesmo chama de radiciação no conjunto dos números reais. Trazendo como exemplo o cálculo da área de um quadrado sabendo a medida de um de seus lados e, logo em seguida o mesmo problema em que em vez do lado, sabemos a área e queremos descobrir o lado. O autor comenta que no segundo problema, realizamos a operação inversa do primeiro problema, e diz que a operação realizada na segunda situação, que é a inversa da potenciação, é chamada de radiciação. Assim, o autor separa a definição de radiciação em dois casos:

- **1º caso:** Sendo n um número natural não nulo, dizemos que a raiz n-ésima de um número real não negativo a é o número real não negativo b se, e somente se, $b^n = a$.

- **2º caso:** Sendo n um número natural ímpar, dizemos que a raiz n-ésima de um número real negativo a é o número real b se, e somente se, $b^n = a$.

O autor trata cada caso com exemplos que ilustram o que foi definido, além de enunciar algumas propriedades dos radicais com radicandos não negativos, verificando a validade das mesmas por meio de exemplos. O autor trata de potência de expoente racional sem relacionar esse conceito ao conceito de radiciação. O autor apenas comenta que é conveniente que uma potência de expoente racional seja definida como um radical, e traz a seguinte definição: sendo a um número real positivo e os números inteiros k e n, com $n \geq 1$, definimos $a^{\frac{k}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$. O autor traz alguns exemplos que ilustram a aplicabilidade da definição dada. Em outro momento, o autor trata de potências de expoente irracional, e traz como exemplo o desafio de calcular a potência $3^{\sqrt{2}}$. Neste caso, o autor parte do fato de que sabemos que $\sqrt{2} = 1,41421356...$ (o que sabemos não ser tão claro assim para os alunos), e a partir desse fato, basta calcular as potências aproximando os expoentes com aproximações por falta e por excesso. Porém, o autor traz uma tabela contendo tais valores calculados sem comentar como esses valores podem ser obtidos. Por fim o autor trata da função exponencial propriamente dita, iniciando o assunto com uma situação problema que envolve juros compostos e a aplicação da fórmula $M = C.(1+i)^t$, que aplicada ao exemplo dado resulta na função $M = 2000.(1,0004)^t$. O autor diz que essa função, por apresentar a variável t no expoente de uma constante positiva e diferente de 1, é chamada de função exponencial. Entretanto, o autor define mais abaixo a função exponencial como sendo toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, tal que $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}_+^*$. Aparentemente as definições se contradizem, pois na primeira situação, temos uma função que é chamada de função do tipo exponencial, isto é, uma função do tipo $f(x) = b.a^x$, e vemos claramente que $f(1)$ apresenta resultados diferentes em cada uma das definições. Encerrando o capítulo, o autor trata dos gráficos das funções exponenciais, e os casos em que ela é crescente ou decrescente.

3.5.4 Matemática do Ensino Médio

O livro [12] inicia o capítulo sobre função exponencial com uma situação problema envolvendo o crescimento de uma planta aquática, onde seu diâmetro triplicava a cada mês. As autoras apresentam os dados referente ao crescimento da planta durante os quatro primeiros meses, organizados em uma tabela. Em seguida, apresentam os dados sob a forma de gráfico e afirmam que, observando o gráfico, podemos dizer que o crescimento dessa planta é exponencial, fazendo referência à palavra exponencial pela primeira vez. As autoras comentam que o crescimento da planta pode ser modelado pela função $y = 3^x$ onde y é o diâmetro da planta no mês x. Logo em seguida, definem função exponencial como sendo a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a cada x associa o número a^x, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Após a definição, as autoras trazem alguns exemplos de funções exponenciais.

Nos demais livros analisado, todos fazem uma revisão dos conceitos de potenciação e radiciação, bem como suas principais propriedades. Entretanto, as autoras preferiram introduzir o conceito de função exponencial sem optar pela revisão de tais assuntos intimamente ligados ao conceito de função exponencial. Outra observação a ser feita está nas justificativas impostas aos valores da base a. As autoras comentam que, no caso de $a = 0$, teremos uma função constante, "porque $0^x = 0$ para todo valor de $x \in \mathbb{R}$, com $x \neq -1$". Porém, sabemos que 0^x não está definido para $x < 0$, e não somente para $x = -1$, um erro grave em nosso ponto de vista.

As autoras explicam, em uma atividade cujo título é "Para Saber Mais", como obter o valor de potências cujos expoentes são números inteiros negativos definindo $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, para $a \neq 0$, potências de expoentes fracionários, definindo $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, com $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$ e até mesmo números irracionais, tomando números racionais que se aproximam cada vez mais do expoente irracional. As autoras também fazem um estudo do comportamento do gráfico da função exponencial e os casos em que a função é crescente e decrescente.

3.5.5 Matemática: Contexto e Aplicações

No livro [13], o autor inicia o capítulo que trata das funções exponenciais com uma situação problema que envolve a reprodução de bactérias, onde no início da experiência havia um total de 1000 bactérias e esse total dobrava a cada hora. O autor utiliza o exemplo para definir as funções do tipo exponencial, isto é, $f(x) = b.a^x$ que serão abordadas no livro.

Após essa introdução, o autor faz uma revisão das definições e propriedades da potenciação, começando com potências de expoente natural, definindo-a como um produto de fatores iguais, isto é, $a^n = \underbrace{a.a.\ldots.a.a}_{n\,vezes}$ e para o caso $n = 1$ define $a^1 = a$, seguindo de alguns exemplos de aplicação da definição. Em seguida, o autor traz a propriedade fundamental das potências $a^{m+n} = a^m.a^n$ para $m,\, n \in \mathbb{N}$ e utiliza a propriedade para mostrar que $(a^m)^p = a^{mp}$ para $m,\, p \in \mathbb{N}$. O autor ainda destaca que se $a > 1$, então $a^{n+1} > a^n$ e que se $0 < a < 1$, então $a^{n+1} < a^n$ para $n \in \mathbb{N}$.

Em seguida, o autor parte para a as potências de expoente inteiro, procurando dar um significado para as potências de expoente nulo e negativo, desde que seja mantida a propriedade fundamental das potências. Assim, o autor trata de mostrar qual deve ser o valor de a^0 quando $a \neq 0$, partindo do fato de que $a^0.a^1 = a^{0+1}$, o que resulta em $a^0.a = a$, o que implica que $a^0 = 1$ quando $a \neq 0$. Em seguida, utilizando o fato de que $a^{-n}.a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$, para $a \neq 0$, o autor define $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. O autor destaca ainda que continuam válidas as afirmações que se $a > 1$, então $a^{n+1} > a^n$ e que se $0 < a < 1$, então $a^{n+1} < a^n$ mesmo para $n \in \mathbb{Z}$.

Na revisão de potência de expoente racional, o autor utiliza o fato de que todo número racional r é da forma $r = \dfrac{m}{n}$, com $m,\, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Com isso, procurando manter válida a propriedade fundamental das potências, e utilizando o fato de que $(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n}}.a^{\frac{1}{n}} \ldots a^{\frac{1}{n}} = a^{n.\frac{1}{n}} = a$, o autor define $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ com a real positivo. O autor generaliza então sua definição para um racional r qualquer da forma $r = \dfrac{m}{n}$, com $m,\, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, definindo $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$. Após as definições, traz exemplo e exercícios de aplicação.

Para as potências de expoente irracional, o autor procura dar uma noção ao aluno de como obter o valor aproximado da potência $2^{\sqrt{2}}$, partindo das aproximações decimais de $\sqrt{2}$, isto é, $1; 1,4; 1,41; 1,414$ e calculando com auxílio da calculadora científica, os valores de $2^1; 2^{1,4}; 2^{1,41}; 2^{1,414}$, mostrando que a medida que o expoente se aproxima de $\sqrt{2}$, as potências se aproximam de $2^{\sqrt{2}}$.

Após as revisões o autor trata da função exponencial propriamente dita, definindo-a para um dado número real $a\,(a > 0,\, a \neq 1)$ a função exponencial de base a como sendo uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$. Em seguida o autor traz alguns exemplos de funções exponenciais e, em uma observação, justifica as restrições feitas nos valores da base a, entretanto não utiliza, neste momento, a propriedade fundamental como argumento como fez nas propriedades das potências. O autor também faz a análise dos gráficos das funções exponenciais para o caso de $a > 0$ (função crescente) e $0 < a <$

1 (função decrescente). Além disso, o autor também trata das equações exponenciais, inequações exponenciais, caracterização das funções do tipo exponencial e uma pequena noção da origem do número irracional e, bem como a importância da função $f(x) = e^x$ na matemática. O autor também traz vários problemas de aplicação das funções do tipo exponencial, sendo quatro resolvidos e dez propostos. Em nosso ponto de vista, este é o livro que mais se aproxima da proposta de trabalho desta dissertação.

Capítulo 4

Referenciais Teóricos e Metodológicos

4.1 Introdução

Procuramos destacar e descrever aqui, os principais referenciais teóricos e metodológicos que norteiam nosso trabalho de pesquisa, e como tais referenciais influenciaram no desenvolvimento do trabalho e na elaboração das atividades propostas.

De maneira geral, nosso trabalho foi elaborado tomando por base a teoria das situações didáticas desenvolvida por Guy Brousseau, juntamente com a metodologia da engenharia didática, com base nas ideias de Michèle Artigue. Basicamente as atividades elaboradas têm como um de seus objetivos promover, por meio da resolução de problemas cuidadosamente elaborados, uma transferência de responsabilidade, ou seja, atividades que façam com que o aluno aceite o desafio de resolvê-las, como se o problema proposto fosse de seu interesse, e não somente de interesse do professor que o propôs. Evidentemente que entre a aceitação dessa responsabilidade e a efetiva aprendizagem muitas etapas deverão ser desenvolvidas, porém se o aluno aceita o desafio proposto e obtêm sucesso, inicia-se um processo de aprendizagem, segundo [14, p. 83]. A elaboração de tais etapas e sua execução consiste no grande desafio pedagógico que nos propomos. Em resumo, o conteúdo e a elaboração das atividades se balizarão na teoria das situações didáticas e a metodologia de trabalho procurará seguir, na medida do possível, os pressupostos da engenharia didática.

4.2 A teoria das Situações Didáticas

Citaremos aqui os pontos principais da teoria das situações didáticas desenvolvida por Guy Brousseau, que trata das formas de apresentação do conteúdo matemático aos alunos, visando compreender melhor o fenômeno da aprendizagem em Matemática. Para Guy Brousseau, o processo de aprendizagem pode ser caracterizado por um conjunto de situações reprodutíveis. Segundo o autor,

> um processo de aprendizagem pode ser caracterizado de modo geral (se não determinado) por um conjunto de situações identificáveis (naturais ou didáticas) reprodutíveis, conduzindo frequentemente à modificação de um conjunto de comportamentos de alunos, modificação característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos (BROUSSEAU, 1975, p.6 apud [15], 2010, p. 31).

Brousseau busca teorizar os fenômenos ligados às interações entre professor, aluno e saber matemático, seguindo uma estrutura chamada de sistema minimal [15, p. 32], como ilustra o esquema abaixo.

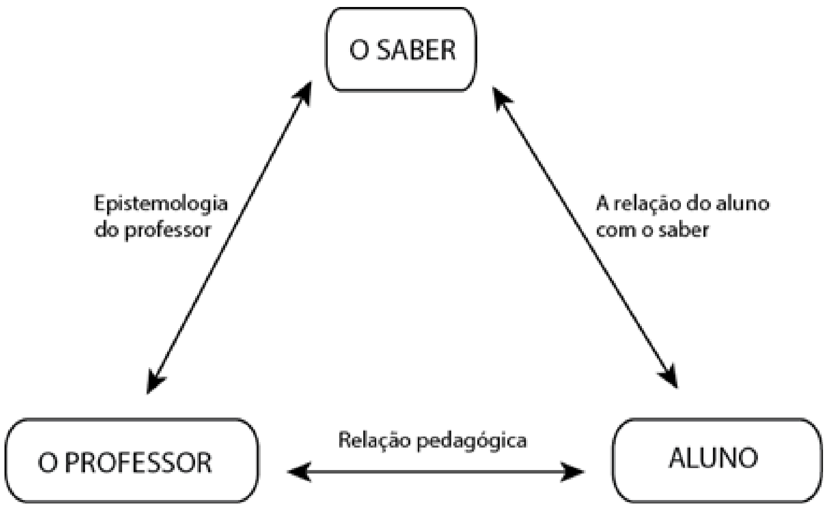


Figura 4.1: Figura ilustrativa do sistema minimal

A partir de estudos sobre o construtivismo pedagógico, cuja origem se pauta na epistemologia genética de Piaget, Brousseau desenvolveu sua pesquisa baseada no fato de que o aluno aprende por adaptações a um meio que produz desequilíbrios e contradições [14]. Trata-se de um referencial em educação matemática, visto que geralmente as teorias educacionais tratam da aprendizagem de maneira geral, sem levar em consideração aspectos característicos da aprendizagem especificamente em matemática. De certa forma, a teoria valoriza os conhecimentos mobilizados pelo aluno e seu envolvimento na construção do saber, e o professor, que cria e organiza o meio de forma que o aluno se aproprie de conteúdos matemáticos específicos.

4.2.1 Situações didáticas e situações adidáticas

Podemos dizer que existirá uma situação didática sempre que ficar caracterizada uma intenção, do professor, de ensinar um determinado conteúdo matemático. Para Brousseau, uma situação didática é definida como

> o conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, um certo meio (contendo eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (professor) para que esses alunos adquiram um saber constituído ou em constituição (BROUSSEAU, 1978, apud [15], 2010, p. 33)

Toda situação didática é regida por um contrato didático, que é um conjunto de regras explícitas ou implícitas que controlam a relação entre o saber interposto entre aluno e professor [14, p. 81]. Entretanto, a ideia de se produzir um ambiente que propicie desequilíbrios e conflitos no aluno, que por meio destes conduzirá a uma aprendizagem significativa, não é uma tarefa fácil. Não se trata da reprodução de uma espécie de ambiente científico onde o saber original foi concebido, mas sim a criação de um meio que promova eventuais redescobertas, e que despertem o interesse no aluno. Porém, a prática de tais redescobertas somente faz sentido em um quadro muito bem definido e estudado.

Uma situação adidática é parte essencial de uma situação didática. Nela a intenção de ensinar não é revelada ao aluno ou não está explícita, porém, foi imaginada e planejada pelo professor, visando provocar a aprendizagem de um determinado saber [15]. Segundo Brousseau, uma situação adidática tem as seguintes características:

1. o problema matemático é escolhido de modo que possa fazer o aluno agir, falar, refletir e evoluir por iniciativa própria;

2. o problema é escolhido para que o aluno adquira novos conhecimentos justificados pela lógica interna da situação;

3. o professor assume papel de mediador, e o aluno, o principal ator da construção de seu próprio conhecimento.

O professor deve estar atento à elaboração de suas atividades, bem como ao planejamento da situação de maneira geral. Para [14],

> o professor deve evitar a apresentação precoce de resultados gerais envolvendo conteúdos formalizados e, sempre que possível, deve promover uma simulação de um ambiente científico de pesquisa que permita ao alunos vivenciarem momentos de investigação em sala de aula [14, p. 82]

O grande desafio é fazer com que o aluno aprenda em pouco tempo conceitos que levaram anos para serem elaborados. Isso se dá com atividades muito bem planejadas que despertem no aluno um espírito investigativo, para que este tome para si a responsabilidade de encontrar a resposta do problema, momento esse que podemos chamar de transferência de responsabilidade (devolução). Na situação adidática, o aluno trabalha de maneira totalmente independente, de tal forma que o professor não exerce nenhuma intervenção no aprendizado do conceito matemático em jogo, ou seja, é o momento em que se estabelece as relações entre o aluno e o saber.

4.2.2 Modelagem de uma situação adidática

Para facilitar a análise do processo de aprendizagem em Matemática, a teoria das situações didáticas decompõe uma situação adidática em quatro fases distintas. São elas a fase da *ação, formulação, validação* e *institucionalização.* Para Brousseau, a modelagem de uma situação adidática pode ser comparada a um jogo, onde o aprendiz dispõe de ferramentas para utilizar e regras a serem seguidas. Ao ser completada uma fase inicia-se a fase seguinte.

Vejamos os principais aspectos de cada uma das fases que compõem uma situação adidática.

Fase da Ação

Nesta fase, o aluno é colocado em uma situação que, segundo [15], deve ter as seguintes características:

1. colocar um problema para o aluno cuja melhor solução, nas condições propostas, é o conhecimento a ensinar;
2. o aluno possa agir sobre essa situação e que ela lhe retorne informações sobre sua ação.

Segundo o autor,

> Uma boa situação de ação não é somente uma situação de manipulação livre que exija uma lista de instruções para seu desenvolvimento. Ela deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, se necessário, sem a intervenção do mestre [15, p. 37]

Dessa forma, vemos que uma situação adidática de ação, é o momento em que o aluno se empenha em resolver o problema/atividade proposta, buscando utilizar suas ferramentas de maneira imediata, produzindo um conhecimento de caráter operacional.

Fase da Formulação

Nesta fase, ocorre a troca de informações entre o alunos e seus pares, que podem ser escritas ou orais. Neste momento o grupo deve explicitar na forma escrita ou oral, as ferramentas que utilizou para a obtenção da solução encontrada.

Segundo [14],

> Trata-se do caso em que o aluno faz determinadas afirmações relativas à sua interação com o problema, mas sem intenção de julgamento sobre validade, embora contenham implicitamente intenções de validação [14, p. 97]

O objetivo central da fase de formulação, é a troca de experiências e a construção progressiva de uma linguagem que expresse as ideias contidas na situação, bem como as relações matemáticas ali envolvidas.

Fase da Validação

É o momento em que o aluno submete uma mensagem matemática a um interlocutor, com intuito de verificar a validade do modelo por ele elaborado na fase de formulação. Há de se considerar que as fases da formulação e da validação estão intimamente relacionadas, visto que na validação, o grupo deve submeter a solução encontrada para a análise do interlocutor, que pode aceitá-la ou recusá-la, justificando sua decisão. Segundo [14], nesta fase é necessário que o aluno elabore uma espécie de prova daquilo que já afirmou nas fases anteriores.

Fase da Institucionalização

Nesta fase o professor formaliza o conceito envolvido da situação. Uma vez formalizado, esse conceito passa a fazer parte do conjunto de conhecimentos colecionados por aquele conjunto de alunos. Segundo [15], a institucionalização:

> se feita muito cedo, a institucionalização interrompe a construção do significado, impedindo uma aprendizagem adequada e produzindo dificuldades para o professor e os alunos; quando feita após o momento adequado, ela reforça interpretações inexatas, atrasa a aprendizagem, dificulta as aplicações [15, p. 40]

Como vemos, é de extrema importância saber o momento adequado de adentrar à fase da institucionalização, pois se introduzida no momento inoportuno, pode causar diversas complicações no aprendizado do conceito matemático envolvido na situação. Vale ressaltar que por mais que o aluno se esforce para resolver e formular uma solução que seja válida, este, por si só, não é capaz de reconhecer este conhecimento como novo, sendo necessário que o professor confira a esse conhecimento uma espécie de validade cultural. Neste ponto a situação deixa de ser adidática e passa a ser didática, pois o próprio professor deve organizar este conhecimento a ser formalizado, de modo que o aluno se aproprie desse novo conhecimento.

4.3 Metodologia da Engenharia Didática

Citaremos aqui os pontos principais da Metodologia da Engenharia Didática, segundo as ideias de Michèle Artigue. Trata-se de uma metodologia de pesquisa de uma determinada situação didática, como parte integrante do quadro teórico da Didática da Matemática. Segundo Artigue (1988) apud [15],

> é uma forma de pesquisa que se baseia no trabalho de um engenheiro, que para elaborar e executar um projeto, se apoia em conhecimentos científicos da área, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar com objetos bem mais complexos que os objetos depurados da ciência e, portanto, a enfrentar praticamente, com todos os meios de que dispõe ,problemas que a ciência não quer e não pode levar em conta.

4.3.1 Fases da Metodologia da Engenharia Didática

As análises prévias

A fase das análises prévias é o momento em que se retrata o quadro teórico didático geral, bem como o quadro teórico dos conteúdos abordados na sequencia didática em que será aplicada a metodologia da engenharia didática. Segundo [15], a fase das análises prévias comporta as seguintes ações:

> estudar a gênese histórica do saber em estudo e suas manifestações antigas ou contemporâneas, suas funcionalidades na matemática e os obstáculos epistemológicos relativos ao conceito; analisar a estrutura matemática do conceito investigado; analisar o ensino atual e seus efeitos [15, p. 172]

Toda pesquisa que utilize em sua essência a metodologia da engenharia didática, deve deixar claro que tais ações foram realizadas, como parte integrante do planejamento da situação didática como um todo. Neste trabalho de pesquisa, as análises prévias foram explicitadas nos capítulos iniciais desta dissertação.

A análise a priori

A fase da análise a priori é o momento em que são levantadas os aspectos descritivos e previsivos da situação adidática que se deseja por em prática. Tal levantamento deve ser realizado pelo pesquisador, antes que seja feita a experimentação, para que seja possível confrontar os dados coletados com os possíveis resultados. Segundo [15],

> A análise a priori é importantíssima, pois de sua qualidade depende a situação-problema; além disso, ela permite, ao professor, poder controlar a realização das atividades dos alunos, e, também, identificar e compreender fatos observados. Assim, as conjecturas que vão aparecer poderão ser consideradas, e algumas poderão ser objeto de um debate científico em sala de aula [15, p. 176]

Ao realizar uma análise a priori bem feita, o pesquisador coleta dados importantes que serão norteadores no momento da experimentação, observando se as possíveis dificuldades elencadas na análise a priori realmente surgirão. Entretanto, é de extrema importância que se faça a análise a priori no momento correto, pois os dados obtidos servem de base para a observação da experimentação, bem como para o confronto de dados com a análise a posteriori.

A experimentação, análise a posteriori e validação

A fase da experimentação é o momento clássico em que os alunos entram em contato com a situação-problema, isto é, o instante em que certa população de alunos realizam a engenharia como um todo.

A fase da análise a posteriori é o momento em que o pesquisador faz o levantamento dos dados obtidos durante a experimentação, isto é, faz a coleta dos resultados após a aplicação da situação didática elaborada. Segundo [16]

> Essa fase se apoia sobre todos os dados colhidos durante a experimentação constante das observações realizadas durante cada sessão de ensino, bem como das produções dos alunos em classe ou fora dela [16, p. 246]

É através do confronto entre os dados elencados na análise a priori e os dados obtidos na análise a posteriori, que se dá a validação da hipótese levantada no momento da elaboração da situação didática. Segundo [16], é por meio da confrontação das duas análises é que são aceitas ou são refutadas as hipóteses levantadas no início da engenharia.

Capítulo 5

Descrição e análise da Folha de Atividade 1

5.1 Introdução

Iniciamos nossa sequência didática com a Folha de Atividade 1, cujo título é: "Explorando alguns conceitos". O objetivo dessa atividade foi recordar e fazer verificações e aplicações de alguns conceitos importantes já estudados pelos alunos, particularmente, a propriedade principal das potências, isto é, $a^{m+n} = a^m.\ a^n$ para m, n números naturais. Vale lembrar que as dificuldades esperadas citadas na Análise a Priori foram previsões realizadas antes da aplicação da atividade, que aqui serão confrontadas com a realidade, pautada nos registros feitos durante as aplicações.

5.2 Resumo da Aplicação

A aplicação da Folha de Atividade 1 ocorreu no dia 03/10/2012 na sala da 1ª série A do Ensino Médio, período da manhã da E.E. profº João Caetano da Rocha, Distrito de Tapinas, município de Itápolis - SP. A sala é composta por 32 alunos, porém, nesse dia 5 alunos estavam ausentes e não realizaram a atividade. Assim sendo, a atividade foi realizada em duplas, num total de 12 duplas e um trio. A atividade é composta de duas situações, sendo que a Situação 1 foi realizada neste mesmo dia, utilizando duas aulas de 50 minutos cada e a Situação 2, terminada no dia 17/10/2012 utilizando uma aula de 50 minutos. A Folha de Atividade 1 durou, em sua totalidade, 3 aulas de 50 minutos.

5.3 Análise a Priori: Expectativas sobre a Folha de Atividade 1

O objetivo central da Folha de Atividade 1 é fazer o aluno recordar a principal propriedade das potências, (no caso desta folha, potências de expoente natural) isto é, na multiplicação de potências de mesma base, conserva-se a base e o expoente do produto é a soma dos expoentes dos fatores que compõem a multiplicação. O bom entendimento desse fato é de extrema importância, pois é através dele que será feita toda a construção da função exponencial segundo a propriedade que a caracteriza. Vale lembrar que essa propriedade é uma condição necessária mas não suficiente para a caracterização da função exponencial. É necessário que a função seja contínua, porém, a questão da continuidade não será tratada neste trabalho, apenas uma pequena noção de convergência de sequências será destacada nas atividades.

A Folha de Atividade 1 é composta de duas situações distintas. A primeira traz problemas que abordam essencialmente a propriedade já mencionada e a segunda situação aborda a propriedade sob o ponto de vista das funções, utilizando de sua notação para representar a propriedade. Vejamos os objetivos específicos de cada exercício/problema mencionando em cada caso as dificuldades esperadas.

5.3.1 Problemas da Situação 1

Problema 1: Objetivos

No problema 1 da primeira situação, o aluno deve encontrar a quantidade máxima de caixas da cor vermelha que é possível armazenar dentro de uma sala cúbica de aresta medindo 3 metros. Como as caixas são guardadas em pacotes cúbicos de aresta medindo 1 metro (a figura do problema ilustra essa situação), espera-se que o aluno encontre a quantidade de caixas contidas em um pacote, no caso 27 caixas por pacote, e em seguida, calcule a quantidade máxima de pacotes que é possível armazenar na sala. Neste caso também vale destacar que o problema requer habilidades de geometria espacial, no que se refere ao conceito de capacidade, noção de espaço tridimensional e cálculo do volume de um cubo.

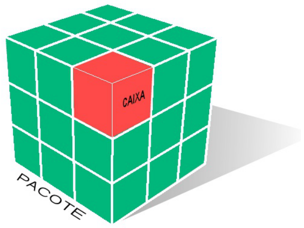


Figura 5.1: Figura ilustrativa do problema 1

De posse dos valores, espera-se que o aluno entenda que é necessário multiplicar 27 por 27, obtendo assim a resposta 729. Além disso, ele deve escrever esses fatores sob a forma de potência de mesma base para que assim reconheça que, se os expoentes dos fatores forem somados, resultará no expoente do resultado.

Problema 1: Dificuldades esperadas

Na primeira etapa do problema (cálculo do volume) é possível que alguns alunos encontrem dificuldade em recordar como calcular o volume de um cubo. Depois de calculados os dois volumes, é possível que alguns alunos somem os volumes ao invés de multiplicá-los, pois pode se tratar de um obstáculo epistemológico várias vezes presente no ensino de análise combinatória por exemplo. Outra dificuldade possível pode aparecer na manipulação de potência, por não recordarem do assunto.

Problema 2: Objetivos

No problema 2 da primeira situação, o aluno deve encontrar a quantidade de quadrados gerados ao final de dois processos de recorte, onde uma folha de papel é dobrada segundo a ilustração da figura. Na primeira etapa o aluno deve encontrar como resposta 4 quadrados. Em seguida deve encontrar mais 4 quadrados novos gerados a partir de cada quadrado obtido anteriormente. Dessa forma, espera-se que o aluno multiplique os resultados obtendo assim o total de quadrados, no caso são 16 quadrados. Seguindo o mesmo raciocínio do problema anterior, o aluno também deve expressar esses valores sob forma de potência de mesma base e assim verificar que o expoente do produto é igual a soma dos expoentes dos fatores.

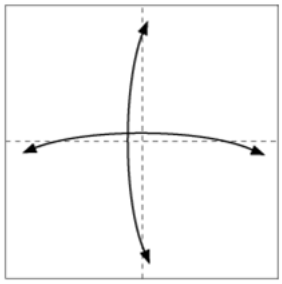


Figura 5.2: Figura ilustrativa do problema 2

Problema 2: Dificuldades esperadas

É esperado que alguns alunos encontrem as mesmas dificuldades do problema 1, salvo o cálculo de volume que neste problema não se aplica.

Problemas 3 e 4: Objetivos

Os problemas 3 e 4 são compostos de tabelas onde o aluno deve completá-las com o valor de cada potência e utilizar esses valores para os cálculos que são cobrados logo abaixo. O objetivo maior é fazer com que o aluno perceba a propriedade fundamental e recorra à tabela para observar os expoentes.

Problemas 3 e 4: Dificuldades esperadas

Acreditamos que não ocorram dificuldades com esses problemas.

5.3.2 Problemas da Situação 2: Visão geral de todos os problemas

Objetivos

Todos os problemas da situação 2 têm como objetivo principal tornar mais amigável a notação de função para representar a propriedade fundamental das potências que os alunos já conheciam de anos anteriores, isto é, $a^{m+n} = a^m.a^n$. Ao escrever $a^{m+n} = a^m.a^n$ podemos ser levados a pensar em uma função f com domínio no conjunto dos números Naturais e contradomínio o conjunto dos números reais, ou seja, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

definida por $f(n) = a^n$, para um dado número real fixo. Sendo assim, a propriedade fundamental das potências, escrita sob a notação de função, é expressa por $f(m+n) = f(m).f(n)$, que damos o nome de notação funcional.

Dificuldades esperadas

Acreditamos que duas grandes dificuldades podem aparecer nesses problemas. A primeira é a própria dificuldade que os alunos encontram com as funções de maneira geral, sua notação, domínio, contradomínio e imagem. A segunda dificuldade é relacionar as duas notações e perceber que ambas representam a mesma ideia, e esse é o ponto chave desses problemas.

5.4 Aplicação e Análise Posteriori

A Folha de Atividade 1 tem início com um problema que busca recordar a principal propriedade das potências já estudada em anos anteriores. Para isso, foi proposto aos alunos que resolvessem um problema de contagem, onde os mesmos deveriam encontrar a quantidade máxima de caixas cúbicas de cor vermelha que é possível armazenar dentro de uma sala em formato de cubo de aresta medindo 3 metros. Porém, estas caixas vermelhas estão contidas em pacotes maiores de cor verde, em formato de cubo de aresta medindo 1 metro.

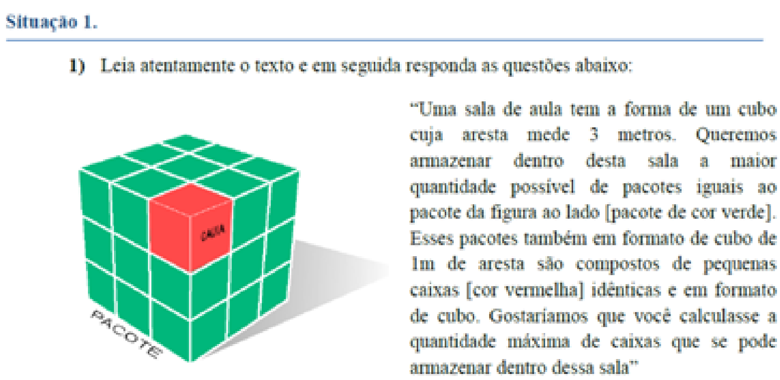
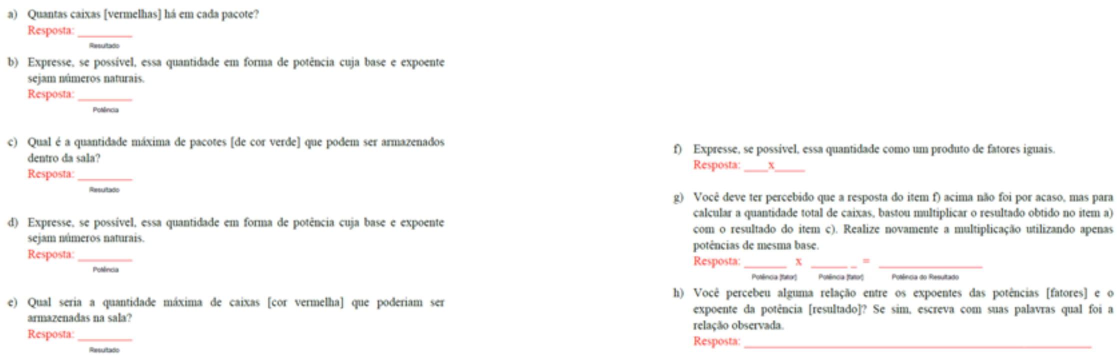


Figura 5.3: Figura ilustrativa do enunciado do problema 1

Em seguida, uma sequência de perguntas é sugerida, na intenção de conduzir o aluno ao resultado correto, e ao mesmo tempo, recordar os conceitos de potência.



a) Quantas caixas [vermelhas] há em cada pacote?
Resposta: ________
Resultado

b) Expresse, se possível, essa quantidade em forma de potência cuja base e expoente sejam números naturais.
Resposta: ________
Potência

c) Qual é a quantidade máxima de pacotes [de cor verde] que podem ser armazenados dentro da sala?
Resposta: ________
Resultado

d) Expresse, se possível, essa quantidade em forma de potência cuja base e expoente sejam números naturais.
Resposta: ________
Potência

e) Qual seria a quantidade máxima de caixas [cor vermelha] que poderiam ser armazenadas na sala?
Resposta: ________
Resultado

f) Expresse, se possível, essa quantidade como um produto de fatores iguais.
Resposta: ____x_____

g) Você deve ter percebido que a resposta do item f) acima não foi por acaso, mas para calcular a quantidade total de caixas, bastou multiplicar o resultado obtido no item a) com o resultado do item c). Realize novamente a multiplicação utilizando apenas potências de mesma base.
Resposta: ______ x ______ = ______________
Potência (fator) Potência (fator) Potência do Resultado

h) Você percebeu alguma relação entre os expoentes das potências [fatores] e o expoente da potência [resultado]? Se sim, escreva com suas palavras qual foi a relação observada.
Resposta: ______________________________

Figura 5.4: Figura ilustrativa do enunciado do problema 1

Os alunos apresentaram grande dificuldade nessa atividade por não dominarem satisfatoriamente conceitos da geometria espacial, até mesmo noção de figura espacial, pois, notamos que a maioria dos alunos contava apenas os cubos que estavam visíveis na figura, e, em alguns casos, contavam um a um, sem se utilizar do princípio multiplicativo, como era esperado na análise a priori. Outra dificuldade apresentada foi a não familiarização com este tipo de atividade. Alguns alunos tentavam encontrar a resposta final, antes mesmo seguirem os passos que os levariam ao resultado desejado, o que mostra falta de atividades desse tipo no currículo escolar. Salvo essas dificuldades, os alunos obtiveram um bom desempenho na resolução desse problema. Em alguns itens os alunos pediram o auxílio do professor.

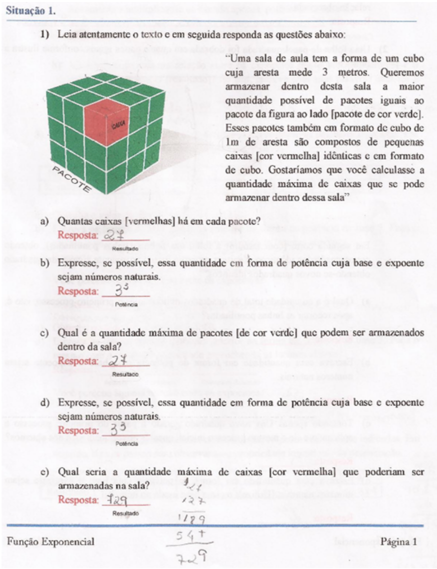
A tabela 5.1 mostra os resultados dessa atividade:

	1ª Série A
Acertaram	20
Cometeram algum erro	7

Tabela 5.1: Resultados do Problema 1 da Situação 1

Dos alunos que cometeram algum erro, dois deles não responderam o item (h), três deles erraram o item (g) ao expressar o resultado em forma de potência, colocando como resposta 3^4 em vez de 3^6 alem de errar a resposta do item (h) e dois deles erraram somente a resposta do item (h), colocando como resposta "Elas são de base 3.", quando na verdade ele deveria reconhecer a propriedade principal das potências.

Abaixo temos a atividade resolvida por uma dupla de alunos:



Situação 1.

1) Leia atentamente o texto e em seguida responda as questões abaixo:

"Uma sala de aula tem a forma de um cubo cuja aresta mede 3 metros. Queremos armazenar dentro desta sala a maior quantidade possível de pacotes iguais ao pacote da figura ao lado [pacote de cor verde]. Esses pacotes também em formato de cubo de 1m de aresta são compostos de pequenas caixas [cor vermelha] idênticas e em formato de cubo. Gostaríamos que você calculasse a quantidade máxima de caixas que se pode armazenar dentro dessa sala"

a) Quantas caixas [vermelhas] há em cada pacote?
Resposta: 27
Resultado

b) Expresse, se possível, essa quantidade em forma de potência cuja base e expoente sejam números naturais.
Resposta: 3^3
Potência

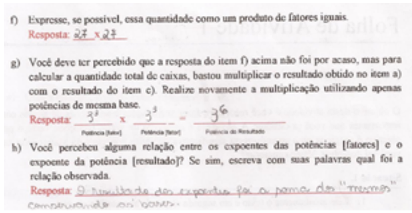
c) Qual é a quantidade máxima de pacotes [de cor verde] que podem ser armazenados dentro da sala?
Resposta: 27
Resultado

d) Expresse, se possível, essa quantidade em forma de potência cuja base e expoente sejam números naturais.
Resposta: 3^3
Potência

e) Qual seria a quantidade máxima de caixas [cor vermelha] que poderiam ser armazenadas na sala?
Resposta: 729
Resultado

27
×27
189
54+
729

Função Exponencial Página 1



f) Expresse, se possível, essa quantidade como um produto de fatores iguais.
Resposta: 27 x 27

g) Você deve ter percebido que a resposta do item f) acima não foi por acaso, mas para calcular a quantidade total de caixas, bastou multiplicar o resultado obtido no item a) com o resultado do item c). Realize novamente a multiplicação utilizando apenas potências de mesma base.
Resposta: 3^3 x 3^3 = 3^6
Potência [fator] Potência [fator] Potência do Resultado

h) Você percebeu alguma relação entre os expoentes das potências [fatores] e o expoente da potência [resultado]? Se sim, escreva com suas palavras qual foi a relação observada.
Resposta:

Figura 5.5: Problema 1 resolvido por uma dupla

O segundo problema proposto aos alunos na Folha de Atividade 1 é um problema de contagem, que busca recordar a principal propriedade das potências já estudada em anos anteriores. Para isso, foi proposto aos alunos que encontrassem o número total de quadrados gerados à partir de dois processos idênticos de recorte em uma folha de papel, como ilustra a figura abaixo.

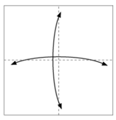
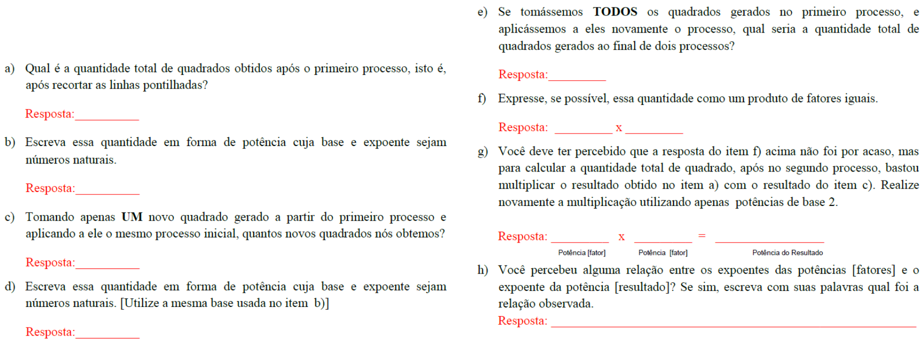


Figura 5.6: Figura ilustrativa do problema 2

Primeiramente, a folha de papel, em formato de quadrado, será recortada nas linhas pontilhadas, resultando assim, em quatro novos quadrados. Em seguida, o processo é repetido em apenas UM dos quadrados novos (menores), obtendo assim mais quatro quadrados ainda menores. O objetivo do problema é fazer com que o aluno encontre o total de quadrados obtidos quando se aplica o processo de recorte nos quatro quadrados gerados no primeiro processo. Com o intuito de conduzir os alunos a resposta correta, uma sequência de perguntas foi elaborada, buscando relacionar a situação descrita com o conceito de potência de expoente natural. A figura abaixo ilustra a sequência de perguntas.

Apenas alguns alunos apresentaram dificuldades na interpretação do pro-



a) Qual é a quantidade total de quadrados obtidos após o primeiro processo, isto é, após recortar as linhas pontilhadas?

Resposta:__________

b) Escreva essa quantidade em forma de potência cuja base e expoente sejam números naturais.

Resposta:__________

c) Tomando apenas **UM** novo quadrado gerado a partir do primeiro processo e aplicando a ele o mesmo processo inicial, quantos novos quadrados nós obtemos?

Resposta:__________

d) Escreva essa quantidade em forma de potência cuja base e expoente sejam números naturais. [Utilize a mesma base usada no item b)]

Resposta:__________

e) Se tomássemos **TODOS** os quadrados gerados no primeiro processo, e aplicássemos a eles novamente o processo, qual seria a quantidade total de quadrados gerados ao final de dois processos?

Resposta:__________

f) Expresse, se possível, essa quantidade como um produto de fatores iguais.

Resposta: __________ x __________

g) Você deve ter percebido que a resposta do item f) acima não foi por acaso, mas para calcular a quantidade total de quadrado, após no segundo processo, bastou multiplicar o resultado obtido no item a) com o resultado do item c). Realize novamente a multiplicação utilizando apenas potências de base 2.

Resposta: __________ x __________ = ________________

Potência [fator] Potência [fator] Potência do Resultado

h) Você percebeu alguma relação entre os expoentes das potências [fatores] e o expoente da potência [resultado]? Se sim, escreva com suas palavras qual foi a relação observada.

Resposta: ____

Figura 5.7: Figura ilustrativa do enunciado do problema 2

blema pedindo a orientação do professor, a grande maioria resolveu o problema sem grandes dificuldades. Outra dificuldade apresentada foi a não familiarização com este tipo de atividade. Alguns alunos tentavam encontrar a resposta final, antes mesmo seguirem os passos que os levariam ao resultado desejado, o que mostra falta de atividades desse tipo no currículo escolar. Salvo as dificuldades mencionadas, os alunos obtiveram um bom desempenho na resolução desse problema.

A tabela 5.2 mostra os resultados obtidos:

	1ª Série A
Acertaram	21
Cometeram algum erro	6

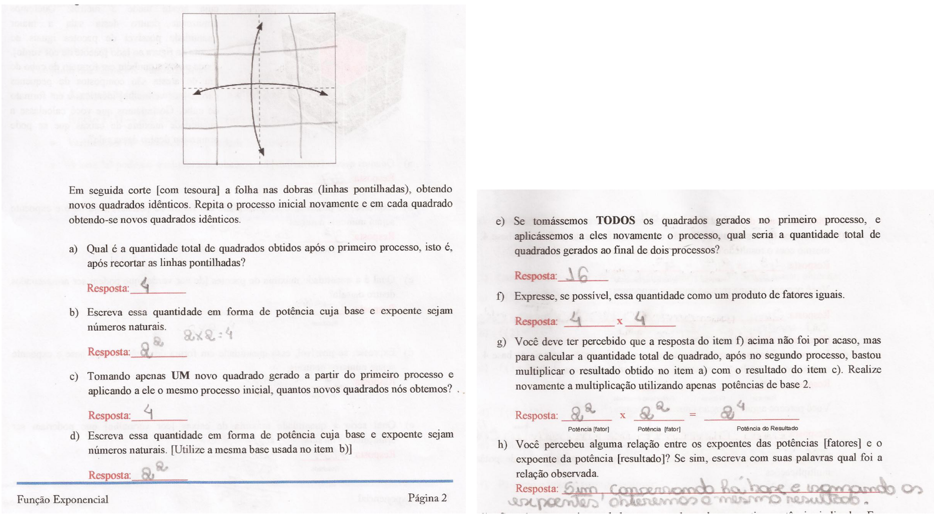
Tabela 5.2: Resultados do Problema 2 da Situação 1

Dos alunos que cometeram algum erro, dois deles não responderam o item (h), dois deles erraram o item (h) respondendo "Eles são de base 2", quando na verdade o aluno deveria responder se reconheceu alguma relação entre os expoentes das potências. Por fim, dois alunos erraram o item (c) respondendo que seriam encontrados 16 quadrados quando o processo for aplicado a apenas UM quadrado, o que mostra claramente o desejo de encontrar a resposta final antes da conclusão de todos os passos.

Abaixo temos a atividade resolvida por uma dupla de alunos:

O terceiro problema proposto aos alunos na Folha de Atividade 1 foi uma tabela onde os alunos deveriam completá-la com os resultados das potências pedidas.

Em seguida, alguns cálculos são pedidos com o objetivo de relacionar o



Em seguida corte [com tesoura] a folha nas dobras (linhas pontilhadas), obtendo novos quadrados idênticos. Repita o processo inicial novamente e em cada quadrado obtendo-se novos quadrados idênticos.

a) Qual é a quantidade total de quadrados obtidos após o primeiro processo, isto é, após recortar as linhas pontilhadas?

Resposta: 4

b) Escreva essa quantidade em forma de potência cuja base e expoente sejam números naturais.

$2 \times 2 = 4$

Resposta: 2^2

c) Tomando apenas **UM** novo quadrado gerado a partir do primeiro processo e aplicando a ele o mesmo processo inicial, quantos novos quadrados nós obtemos?

Resposta: 4

d) Escreva essa quantidade em forma de potência cuja base e expoente sejam números naturais. [Utilize a mesma base usada no item b)]

Resposta: 2^2

Função Exponencial Página 2

e) Se tomássemos **TODOS** os quadrados gerados no primeiro processo, e aplicássemos a eles novamente o processo, qual seria a quantidade total de quadrados gerados ao final de dois processos?

Resposta: 16

f) Expresse, se possível, essa quantidade como um produto de fatores iguais.

Resposta: 4 x 4

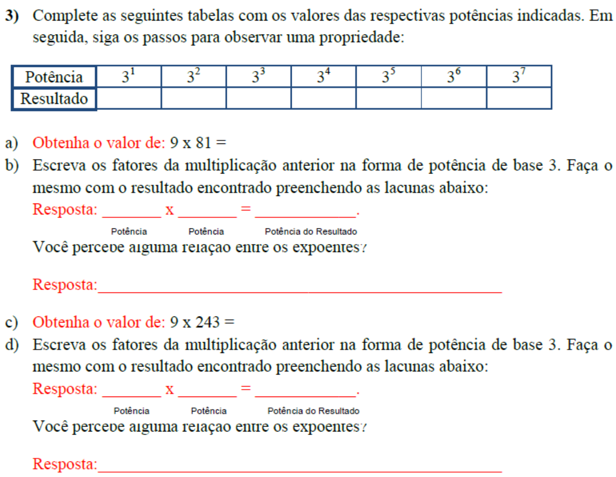
g) Você deve ter percebido que a resposta do item f) acima não foi por acaso, mas para calcular a quantidade total de quadrado, após no segundo processo, bastou multiplicar o resultado obtido no item a) com o resultado do item c). Realize novamente a multiplicação utilizando apenas potências de base 2.

Resposta: 2^2 (Potência [fator]) x 2^2 (Potência [fator]) = 2^4 (Potência do Resultado)

h) Você percebeu alguma relação entre os expoentes das potências [fatores] e o expoente da potência [resultado]? Se sim, escreva com suas palavras qual foi a relação observada.

Resposta: Sim, Conservando a base e somando os expoentes obteremos o mesmo resultado.

Figura 5.8: Problema 2 resolvido por uma dupla de alunos



3) Complete as seguintes tabelas com os valores das respectivas potências indicadas. Em seguida, siga os passos para observar uma propriedade:

Potência	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7
Resultado							

a) Obtenha o valor de: 9 x 81 =

b) Escreva os fatores da multiplicação anterior na forma de potência de base 3. Faça o mesmo com o resultado encontrado preenchendo as lacunas abaixo:

Resposta: _______ x _______ = ___________.

Potência Potência Potência do Resultado

Você percebe alguma relação entre os expoentes?

Resposta:_______________________________________

c) Obtenha o valor de: 9 x 243 =

d) Escreva os fatores da multiplicação anterior na forma de potência de base 3. Faça o mesmo com o resultado encontrado preenchendo as lacunas abaixo:

Resposta: _______ x _______ = ___________.

Potência Potência Potência do Resultado

Você percebe alguma relação entre os expoentes?

Resposta:_______________________________________

Figura 5.9: Figura ilustrativa do enunciado do problema 3

resultado das multiplicações realizadas com os resultados na forma de potência, fazendo com que os alunos percebam que a ideia central é a propriedade fundamental das potência.

Os alunos não apresentaram dificuldades na realização dessa tarefa.

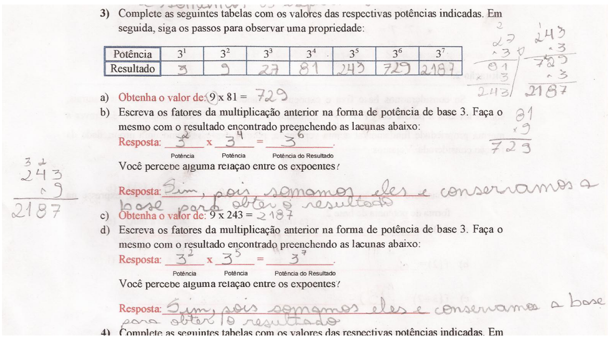
A tabela 5.3 mostra os resultados obtidos:

	1ª Série A
Acertaram	23
Cometeram algum erro	4

Tabela 5.3: Resultados do Problema 3 da Situação 1

Dos alunos que cometeram algum erro, dois deles erraram o item (b) expressando de maneira incorreta os fatores da multiplicação em forma de potência de mesma base, escrevendo $3^3.3^3 = 3^6$ quando o correto seria $3^2.3^4 = 3^6$. Esses mesmos alunos cometeram os mesmos erros no item (d), escrevendo $3^3.3^4 = 3^7$ quando o correto seria $3^2.3^5 = 3^7$. Outros dois alunos erraram o item (d), ao expressar de maneira incorreta o fator 243 em forma de potência de base 3, colocando como resposta $3^2.3^7 = 3^9$.

Abaixo temos o problema resolvido por uma dupla de alunos:


3) Complete as seguintes tabelas com os valores das respectivas potências indicadas. Em seguida, siga os passos para observar uma propriedade:

Potência	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7
Resultado	3	9	27	81	243	729	2187

a) Obtenha o valor de: 9 x 81 = 729

b) Escreva os fatores da multiplicação anterior na forma de potência de base 3. Faça o mesmo com o resultado encontrado preenchendo as lacunas abaixo:

Resposta: 3^2 x 3^4 = 3^6.
Potência Potência Potência do Resultado

Você percebe alguma relação entre os expoentes?

Resposta: Sim, pois somamos eles e conservamos a base para obter o resultado

c) Obtenha o valor de: 9 x 243 = 2187

d) Escreva os fatores da multiplicação anterior na forma de potência de base 3. Faça o mesmo com o resultado encontrado preenchendo as lacunas abaixo:

Resposta: 3^2 x 3^5 = 3^7.
Potência Potência Potência do Resultado

Você percebe alguma relação entre os expoentes?

Resposta: Sim, pois somamos eles e conservamos a base para obter o resultado

4) Complete as seguintes tabelas com os valores das respectivas potências indicadas. Em

Figura 5.10: Problema 3 resolvido por uma dupla de alunos

Para encerrar o bloco de problemas da Situação 1, temos, no problema 4, novamente uma tabela com os mesmos propósitos do problema 3, porém, o problema 3 tratava de potências de base igual a 3, e no problema 4 as potências são de base igual a 4.

Em seguida, alguns cálculos são pedidos com o objetivo de relacionar o resultado das multiplicações realizadas com os resultados na forma de potência, fazendo com que os alunos percebam que a ideia central é a propriedade fundamental das potência. Na alternativa (e), os alunos devem aplicar a propriedade que reconheceram nos itens anteriores.

Os alunos não apresentaram dificuldades na realização dessa tarefa.

A tabela 5.4 mostra os resultados obtidos:

	1ª Série A
Acertaram	21
Cometeram algum erro	6

Tabela 5.4: Resultados do Problema 4 da Situação 1

4) Complete as seguintes tabelas com os valores das respectivas potências indicadas. Em seguida, siga os passos para observar uma propriedade importante da potenciação.

Potência	4^1	4^2	4^3	4^4	4^5	4^6	4^7
Resultado							

a) Obtenha o valor de: 64 x 256 =

b) Escreva os fatores da multiplicação anterior na forma de potência de base 4. Faça o mesmo com o resultado encontrado preenchendo as lacunas abaixo:

Resposta: _______ x _______ = ___________.

Potência Potência Potência do Resultado

Você percebe alguma relação entre os expoentes?

Resposta:_______________________________________

c) Obtenha o valor de: 16 x 256 =

d) Escreva os fatores da multiplicação anterior na forma de potência de base 4. Faça o mesmo com o resultado encontrado preenchendo as lacunas abaixo:

Resposta: _______ x _______ = ___________.

Potência Potência Potência do Resultado

Você percebe alguma relação entre os expoentes?

Resposta:_______________________________________

e) Utilizando a regra que você descobriu acima, escreva na forma de potência as multiplicações:

- $3^4 . 3^7 =$
- $2^5 . 2^{10} =$
- $10^3 . 10^2 =$
- $7^4 . 7^2 =$
- $6^5 . 6^3 =$

Figura 5.11: Figura ilustrativa do enunciado do problema 4

Dos alunos que cometeram algum erro, todos eles (os seis alunos, isto é, três duplas) erraram no cálculo da potência 4^7. Dois deles erraram a tabela e dois deles erraram nos dois últimos itens da tabela.

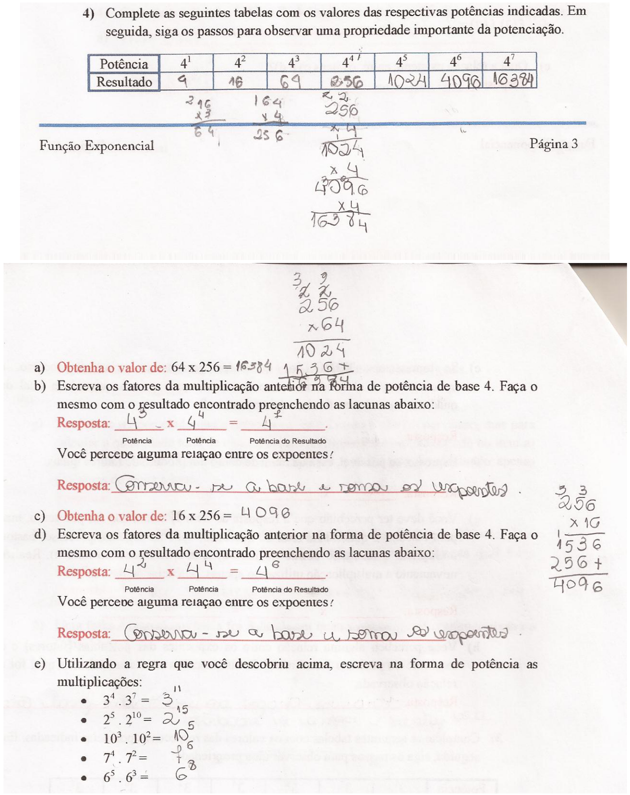
Na figura 5.12 temos o problema resolvido por uma dupla de alunos.

A maioria dos alunos conseguiu chegar até a resolução desse problema no dia 03/10, de modo que os exercícios da Situação 2 ficaram para o próximo encontro que ficou marcado para o dia 17/10. Na verdade, o segundo encontro deveria ser dia 10/10, porém, a escola realizou nesse dia várias atividades diferenciadas, dentre elas jogos, campeonatos, em comemoração ao dia das crianças, dia 12/10.

Vale lembrar que no segundo encontro, dia 17/10, apenas um dos alunos estava ausente, num total de 31 alunos, distribuídos em três trios e onze duplas.

Na Situação 2 da Folha de Atividade 2, temos todos os problemas com o mesmo objetivo central, que é tornar mais familiar a propriedade das funções exponenciais escrita na notação de função, isto é, ao escrever $a^{m+n} = a^m.a^n$ em termos de uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $f(n) = a^n$, sendo assim, a propriedade fundamental das potências, escrita sob a notação funcional, é expressa por $f(m+n) = f(m).f(n)$.

Assim, no primeiro problema da Situação 2, consideramos a base fixa e



4) Complete as seguintes tabelas com os valores das respectivas potências indicadas. Em seguida, siga os passos para observar uma propriedade importante da potenciação.

Potência	4^1	4^2	4^3	4^4	4^5	4^6	4^7
Resultado	4	16	64	256	1024	4096	16384

Função Exponencial Página 3

a) Obtenha o valor de: 64 x 256 = 16384

b) Escreva os fatores da multiplicação anterior na forma de potência de base 4. Faça o mesmo com o resultado encontrado preenchendo as lacunas abaixo:

Resposta: 4^3 x 4^4 = 4^7

Potência Potência Potência do Resultado

Você percebe alguma relação entre os expoentes?

Resposta: Conserva-se a base e soma os expoentes.

c) Obtenha o valor de: 16 x 256 = 4096

d) Escreva os fatores da multiplicação anterior na forma de potência de base 4. Faça o mesmo com o resultado encontrado preenchendo as lacunas abaixo:

Resposta: 4^2 x 4^4 = 4^6

Potência Potência Potência do Resultado

Você percebe alguma relação entre os expoentes?

Resposta: Conserva-se a base e soma os expoentes.

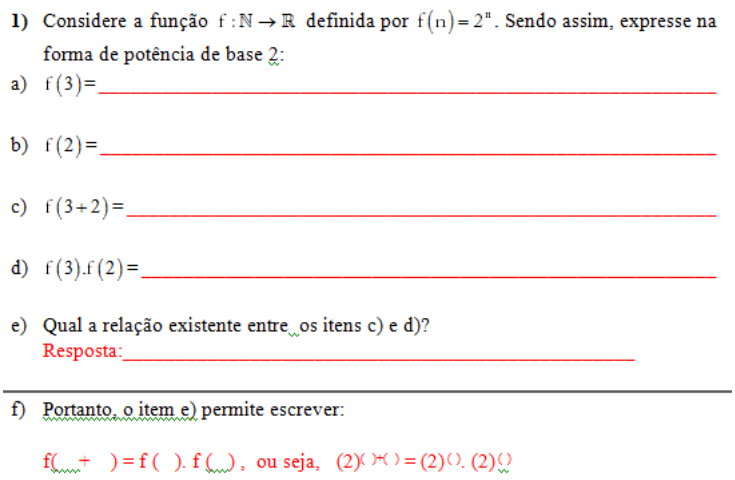
e) Utilizando a regra que você descobriu acima, escreva na forma de potência as multiplicações:

- $3^4 . 3^7 = 3^{11}$
- $2^5 . 2^{10} = 2^{15}$
- $10^3 . 10^2 = 10^5$
- $7^4 . 7^2 = 7^6$
- $6^5 . 6^3 = 6^8$

Figura 5.12: Problema 4 resolvido por uma dupla de alunos

expoente variando no conjunto dos números naturais e a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $f(n) = a^n$. Nosso objetivo é descrever a mesma propriedade fundamental verificada, porém, expressa como uma propriedade da função considerada. Para esse problema a base adotada foi $a = 2$.

A figura 5.13 ilustra o enunciado desse problema.



1) Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $f(n) = 2^n$. Sendo assim, expresse na forma de potência de base 2:

a) $f(3)=$__________

b) $f(2)=$__________

c) $f(3+2)=$__________

d) $f(3).f(2)=$__________

e) Qual a relação existente entre os itens c) e d)?

Resposta:__________

f) Portanto, o item e) permite escrever:

f(+) = f( ). f( ), ou seja, $(2)^{(\ )+(\ )} = (2)^{(\ )}.(2)^{(\ )}$

Figura 5.13: Figura ilustrativa do enunciado do problema 1 da segunda situação

Antes da resolução desse problema, uma pequena exposição em lousa foi realizada enfatizando os conceitos básicos de funções, bem como seu valor numérico, afim de que os alunos recordassem esses conceitos.

A grande maioria dos alunos não apresentou dificuldades na resolução desse problema.

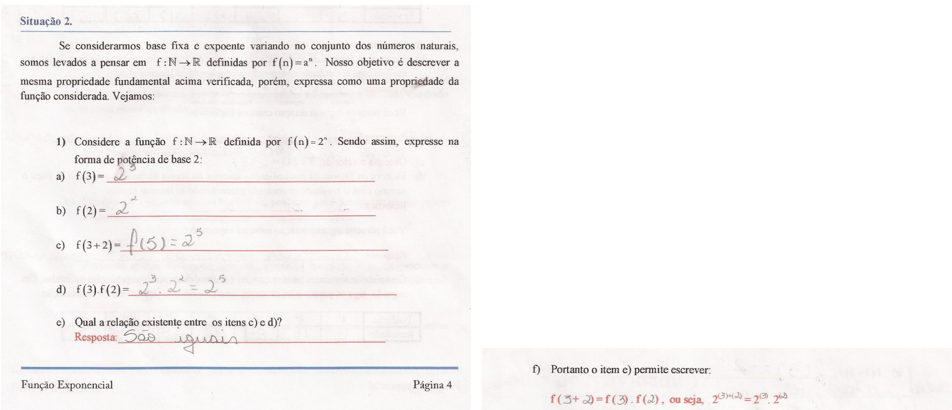
A tabela 5.5 mostra os resultados obtidos:

	1ª Série A
Acertaram	29
Cometeram algum erro	2

Tabela 5.5: Resultados do Problema 1 da Situação 2

Apenas uma dupla de alunos errou os itens (c) e (d) desse problema por não entender que $f(3+2) = 2^{3+2} = 2^5$, escrevendo como resposta do item (c) $f(3+2) = 2^3+2^2$, mostrando grande dificuldade no cálculo do valor numérico de uma função. No item (d), o aluno escreveu $f(3).f(2) = f(3.2) = 2^3.2^2 = 2^5$, mostrando novamente uma confusão com a propriedade da função e o produto de seus valores numéricos.

Na figura 5.14 temos o problema resolvido por uma dupla de alunos.


Situação 2.

Se considerarmos base fixa e expoente variando no conjunto dos números naturais, somos levados a pensar em $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(n)=a^n$. Nosso objetivo é descrever a mesma propriedade fundamental acima verificada, porém, expressa como uma propriedade da função considerada. Vejamos:

1) Considere a função $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ definida por $f(n)=2^n$. Sendo assim, expresse na forma de potência de base 2:

a) $f(3)=$ 2^3

b) $f(2)=$ 2^2

c) $f(3+2)=$ $f(5)=2^5$

d) $f(3).f(2)=$ $2^3.2^2=2^5$

e) Qual a relação existente entre os itens c) e d)?

Resposta: São iguais

Função Exponencial Página 4

f) Portanto o item e) permite escrever:

$f(3+2)=f(3).f(2)$, ou seja, $2^{(3)+(2)}=2^{(3)}.2^{(2)}$

Figura 5.14: Problema 1 da Situação 2 resolvido por uma dupla de alunos

Assim como no primeiro problema da Situação 2, o problema 2 considera base fixa e expoente variando no conjunto dos números naturais e a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $f(n) = a^n$. Nosso objetivo é descrever a mesma propriedade fundamental verificada, porém, expressa como uma propriedade da função considerada. Para esse problema a base adotada foi $a = 3$. A figura 5.15 ilustra o enunciado desse problema.

2) Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $f(n) = 3^n$. Sendo assim, obtenha:

a) $f(3) =$ ____________________________________

b) $f(2) =$ ____________________________________

c) $f(3+2) =$ ____________________________________

d) $f(3).f(2) =$ ____________________________________

e) Qual a relação existente entre os itens c) e d)?
Resposta:____________________________________

f) Portanto o item e) permite escrever:

$f(\ \ +\ \ ) = f(\ \ ) . f(\ \ )$, ou seja, $3^{(\ )+(\ )} = 3^{(\ )} . 3^{(\ )}$

Figura 5.15: Figura ilustrativa do enunciado do problema 2 da segunda situação

A grande maioria dos alunos não apresentou dificuldades na realização dessa tarefa. A tabela 5.6 os resultados obtidos nessa atividade:

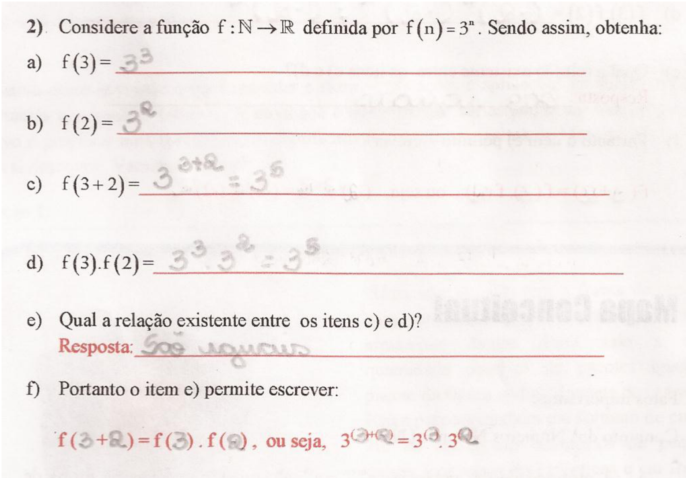
	1ª Série A
Acertaram	26
Cometeram algum erro	5

Tabela 5.6: Resultados do Problema 2 da Situação 2

Uma dupla e um trio de alunos cometeram o mesmo erro nesse problema, sendo o mesmo erro apresentado pelos alunos no problema anterior, isto é, o trio de alunos errou o item (c) desse problema por não entender a ideia de que $f(3+2) = 3^{3+2} = 3^5$, escrevendo como resposta do item (c) $f(3+2) = 3^3 + 3^2$, mostrando grande dificuldade no cálculo do valor numérico de uma função.

A figura 5.16 mostra o problema resolvido por uma dupla de alunos.

Como nos problemas anteriores da Situação 2, o problema 3 considera base fixa e expoente variando no conjunto dos números naturais e a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $f(n) = a^n$. Nosso objetivo é descrever a mesma propriedade fundamental verificada e



2) Considere a função $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(n)=3^n$. Sendo assim, obtenha:

a) $f(3)=$ 3^3

b) $f(2)=$ 3^2

c) $f(3+2)=$ $3^{3+2}=3^5$

d) $f(3).f(2)=$ $3^3.3^2=3^5$

e) Qual a relação existente entre os itens c) e d)?
Resposta: São iguais

f) Portanto o item e) permite escrever:

$f(3+2)=f(3).f(2)$, ou seja, $3^{3+2}=3^3.3^2$

Figura 5.16: Problema 2 da Situação 2 resolvido por uma dupla de alunos

expressa como uma propriedade da função considerada, porém, agora enfatizando que a base pode ser um número real negativo. Para esse problema a base adotada foi $a=-3$. A figura 5.17 ilustra o enunciado desse problema.

3) Considere a função $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(n)=(-3)^n$. Sendo assim, obtenha:

a) $f(3)=$ ____________________

b) $f(2)=$ ____________________

c) $f(3+2)=$ ____________________

d) $f(3).f(2)=$ ____________________

e) Qual a relação existente entre os itens c) e d)?
Resposta: ____________________

f) Portanto o item e) permite escrever:

$f(\ \ +\ \ )=f(\ \ ).f(\ \ )$, ou seja, $(-3)^{(\ )+(\ )}=(-3)^{(\ )}.(-3)^{(\ )}$

Figura 5.17: Figura ilustrativa do enunciado do problema 3 da segunda situação

Um número considerável de alunos apresentaram dificuldades na realização dessa tarefa. A tabela 5.7 mostra os resultados obtidos nessa atividade:

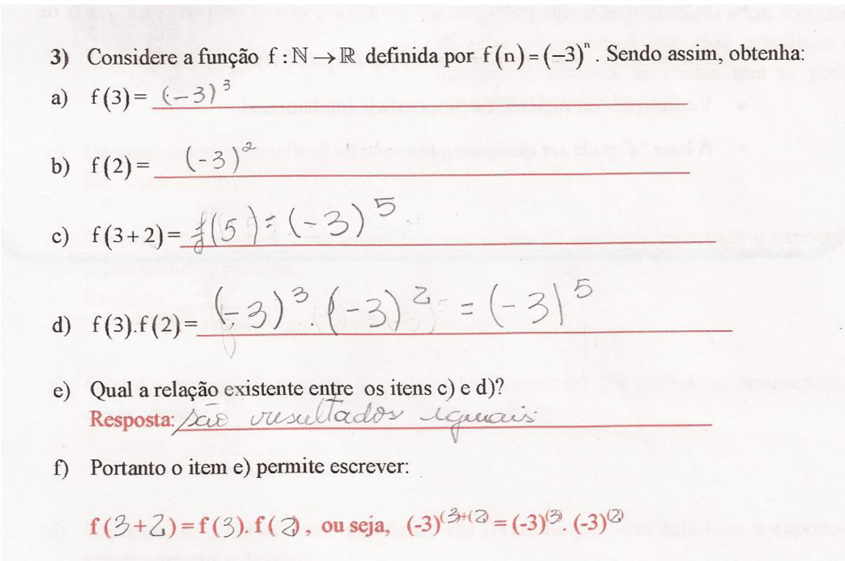
	1ª Série A
Acertaram	9
Cometeram algum erro	22

Tabela 5.7: Resultados do Problema 3 da Situação 2

Dos 22 alunos que cometeram algum erro, 15 cometeram o mesmo erro de não colocar entre parênteses a base negativa. Nesta análise, essa escrita foi considerada como erro, apesar de que para esse caso particular ($a = -3$), o resultado seria o mesmo, isto é, $-3^5 = (-3)^5$.

Dois alunos erraram o exercício completamente por considerar a base $a = 3$ e não $a = -3$, talvez por falta de atenção. Os cinco alunos restantes, foram os mesmo cinco alunos que cometeram os erros no problema anterior, ou seja, erraram o item (c) desse problema por não entenderem a ideia de que $f(3+2) = (-3)^{3+2} = (-3)^5$, escrevendo como resposta do item (c) $f(3+2) = (-3)^3 + (-3)^2 = (-3)^5$.

A figura 5.18 mostra o problema resolvido por uma dupla de alunos.


3) Considere a função $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ definida por $f(n)=(-3)^n$. Sendo assim, obtenha:

a) $f(3)=$ $(-3)^3$

b) $f(2)=$ $(-3)^2$

c) $f(3+2)=$ $f(5)=(-3)^5$

d) $f(3).f(2)=$ $(-3)^3.(-3)^2=(-3)^5$

e) Qual a relação existente entre os itens c) e d)?
Resposta: são resultados iguais

f) Portanto o item e) permite escrever:

$f(3+2)=f(3).f(2)$, ou seja, $(-3)^{(3+2)}=(-3)^{(3)}.(-3)^{(2)}$

Figura 5.18: Problema 3 da Situação 2 resolvido por uma dupla de alunos

Assim, finalizando a série de problemas da Situação 2, o problema 4 considera base fixa e expoente variando no conjunto dos números naturais e a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $f(n) = a^n$. Nosso objetivo é descrever a mesma propriedade fundamental verificada e expressa como uma propriedade da função considerada, porém, agora enfatizando que a base pode ser um número real negativo. Para esse problema a base adotada foi $a = -2$.

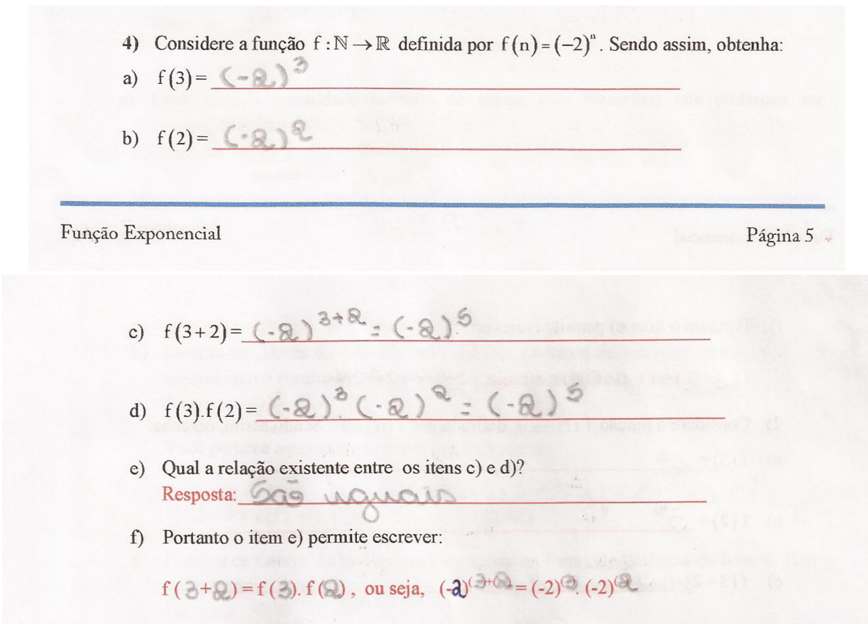
Comparado com o problema 3, as dificuldades apresentadas no problema 4 diminuíram, todavia grande parte dos alunos ainda erraram por não colocar entre parênteses a base negativa. A tabela 5.8 os resultados dessa atividade:

	1^a Série A
Acertaram	15
Cometeram algum erro	16

Tabela 5.8: Resultados do Problema 4 da Situação 2

Dos 16 alunos que cometeram algum erro, 11 cometeram o mesmo erro de não colocar entre parênteses a base negativa. Nesta análise, essa escrita foi considerada como erro, apesar de que para esse caso particular ($a = -2$), o resultado seria o mesmo, isto é, $-2^5 = (-2)^5$. Os cinco alunos restantes são os mesmos que cometeram os erros nos problemas anteriores, ou seja, erraram o item (c) do problema por não entenderem a ideia de que $f(3+2) = (-2)^{3+2} = (-2)^5$, escrevendo como resposta do item (c) $f(3+2) = (-2)^3 + (-2)^2 = (-2)^5$.

A figura 5.19 mostra o problema resolvido por uma dupla de alunos.


4) Considere a função $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ definida por $f(n)=(-2)^n$. Sendo assim, obtenha:

a) $f(3)=$ $(-2)^3$

b) $f(2)=$ $(-2)^2$

Função Exponencial Página 5

c) $f(3+2)=$ $(-2)^{3+2}=(-2)^5$

d) $f(3).f(2)=$ $(-2)^3.(-2)^2=(-2)^5$

e) Qual a relação existente entre os itens c) e d)?
Resposta: São iguais

f) Portanto o item e) permite escrever:

$f(3+2)=f(3).f(2)$, ou seja, $(-2)^{(3+2)}=(-2)^3.(-2)^2$

Figura 5.19: Problema 4 da Situação 2 resolvido por uma dupla de alunos

Além das duas situações presentes em cada Folha de Atividade, todas elas contêm em seu final um pequeno resumo das principais ideias exploradas durante a resolução da Folha de Atividade, que foi nomeado aqui de "O que você aprendeu?".

A figura 5.20 mostra o quadro "O que você aprendeu?"desta atividade.

O que você aprendeu?

Fatos importantes:

Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$)

- A propriedade das potências $a^{m+n} = a^m . a^n$, quando expressa na forma de função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e escrita como $f(m+n) = f(m).f(n)$.
- Verificações da validade da propriedade fundamental.
- A base "a" pode ser qualquer número real.

Figura 5.20: "O que você aprendeu?" da Folha de Atividade 1

5.5 Conclusão

Através da aplicação da Folha de Atividade 1 pudemos recordar os conceitos básicos das potências de expoente natural e base real juntamente com os conceitos básicos de função. Com os problemas presentes na Situação 2, os alunos perceberam que a propriedade fundamental das potências, a qual já era conhecida deles de anos anteriores, pode ser escrita utilizando a notação de função. Nosso objetivo é mostrar durante as demais atividades, que esta propriedade acaba sendo a propriedade fundamental que caracteriza uma função exponencial.

Queremos deixar claro que sabemos que não basta apenas esta propriedade para caracterização da função exponencial, precisamos também da hipótese da continuidade, mas, nesse nível enfatizamos mais a propriedade destacada.

Apesar de alguns alunos encontrarem dificuldades em conceitos exteriores aos apresentados nesta folha de atividade, acreditamos que esta alcançou os objetivos desejados, contribuindo para uma melhor entendimento da função exponencial.

Capítulo 6

Descrição e análise da Folha de Atividade 2

6.1 Introdução

Vimos que o objetivo principal da Folha de Atividade 1 foi destacar a principal propriedade das potências, ou seja, $a^{m+n} = a^m.a^n$, onde a base a é um número real e o expoente é um número natural. Porém, há uma análise a ser feita quando o expoente é igual a zero e isso implica que algumas considerações precisam ser feitas. Nesse sentido, intercalando entre uma Folha de Atividade e outra, foram elaboradas folhas explicativas denominadas de Complementos. Cada folha de complemento contém informações sobre fatos que merecem uma atenção especial, os quais não foram comentados durante a atividade em si. Assim, a primeira folha de complemento, cujo título é "Pensando em expoentes negativos", tem como objetivo principal, deixar claro ao aluno quais devem ser os possíveis valores de uma potência que tenha expoente igual a zero, e ainda mostrar que se a base a for nula, teremos uma função constantemente nula se definirmos $0^0 = 0$.

Para que os alunos compreendessem melhor os possíveis valores que uma potência de expoente igual a zero pode assumir, recorremos à representação funcional das potências, isto é, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida por $f(n) = a^n$, onde a propriedade fundamental das potências é representada por $f(m + n) = f(m).f(n)$. Assim, $a^0 = a^{0+0} = a^0.a^0 = (a^0)^2$. Nesse momento enfatizamos que o valor de a^0 é desconhecido. Chamando a^0 de y, os alunos foram desafiados a resolver a equação do segundo grau $y = y^2$, em que

$y = a^0 = f(0)$. Cada aluno recebeu uma folha de complemento que não foi recolhida, e neste caso, como tarefa deveria resolver a equação e completar os espaços em branco com os valores correspondentes. Os alunos deveriam encontrar $y = 0$ e $y = 1$ como raízes da equação obtida. Gostaríamos de destacar um fato crucial decorrente da escolha $a^0 = 0$. Se $a^0 = f(0) = 0$, então $a = a^1 = a^{1+0} = a^1.a^0 = a^1.0 = 0$. O fato crucial é que se eventualmente $a^0 = 0$, então necessariamente teríamos a própria base a igual a zero. Isto significa que se assumirmos $a^0 = 1$ necessariamente teremos $a \neq 0$, evitando a possibilidade da função ser identicamente nula. A figura 6.1 ilustra parte da atividade da folha de complemento 1.

1) Expresse $f(0) = a^0$ em função de a^0 completando as lacunas abaixo:

$$f(0) = a^0 = a^{(\_ + \_)} = a^{(\_)}.a^{(\_)} = \left[a^{(\_)}\right]^2 \qquad (1.4)$$

Logo fazendo $y = a^0$ em (1.4) obtermos a seguinte equação:

$$y = (\_\_)^2 \qquad (1.5)$$

2) Escreva uma equação equivalente a equação obtida em (1.5) e resolva essa equação. Em seguida complete as lacunas abaixo com os possíveis valores de y.

Resposta:

____

____

____

$$y = \_\_ \quad \text{ou} \quad y = \_\_ \qquad (1.6)$$

Isto significa que necessariamente:

$$a^0 = \_\_ \quad \text{ou} \quad a^0 = \_\_ \qquad (1.7)$$

Figura 6.1: Atividade da Folha de Complemento 1

Cada folha de complemento é entregue assim que uma atividade termina. A folha de complemento 1 foi entregue no dia 17/10/2012 e retomada no encontro seguinte, dia 24/10/2012 onde fizemos uma exposição em lousa sobre as ideias básicas do Complemento 1.

6.2 Resumo da Aplicação

No segundo encontro, dia 24/10/2012, todos os 32 alunos estavam presentes, sendo que a divisão em grupos foi de 4 trios e 10 duplas. Após as discussões a respeito das ideias contidas no complemento 1 e que consumiram o tempo de uma aula de 50 minutos, a Folha de Atividade 2 foi entregue aos alunos. Esta folha tem como objetivo principal estender a validade da propriedade fundamental da função exponencial, até então definida sobre o conjunto dos números naturais, para o conjunto números inteiros. O ponto principal é a definição de potências com expoente inteiro e negativo e a preservação da propriedade fundamental. A atividade é composta de duas situações, sendo que a Situação 1 foi realizada neste mesmo dia, utilizando mais uma aula de 50 minutos e totalizando nesse dia duas aulas de 50 minutos cada (incluindo o tempo utilizado com comentários da folha de complemento 1) e a Situação 2, terminada no dia 31/10/2012 utilizando uma aula de 50 minutos. Em resumo, a Folha de Atividade 2 durou, aproximadamente, 3 aulas de 50 minutos.

6.3 Análise a Priori: Expectativas sobre a Folha de Atividade 2

O objetivo central da Folha de Atividade 2 é estender a definição de potência de expoente natural para potência de expoente inteiro e negativo. Fazemos isso definindo convenientemente as potências de expoente negativo de modo que se mantenha a validade da propriedade fundamental, isto é, $a^{m+n} = a^m.a^n$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$. Vale lembrar, que nós estamos assumindo $a \neq 0$. Dessa forma, podemos justificar o que normalmente parece ser uma regra a ser decorada nas escolas, ou seja, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. Isto não é definição, mas sim uma consequência da propriedade fundamental das funções exponenciais. Nesse sentido, este trabalho tem, dentre seus objetivos, completar algumas lacunas existentes no atual ensino de função exponencial, e colaborar para que não somente os alunos, mas também possivelmente professores, possam se beneficiar dos conceitos e das ideias aqui explorados e fundamentados.

A Folha de Atividade 2 é composta de duas situações distintas. A primeira, através do diálogo entre dois estudantes, trata essencialmente da maneira mais conveniente de se definir uma potência de expoente inteiro e negativo. A segunda situação aborda a aplicação da definição elaborada na Situação 1. Vejamos os objetivos específicos de cada problema mencionado e as dificuldades esperadas.

6.3.1 Problemas da Situação 1

A situação 1 traz apenas um problema que contém um diálogo entre dois alunos discutindo sobre qual deve ser a melhor definição para uma potência de expoente inteiro e negativo, de modo que continue válida a propriedade fundamental das potências.

Problema 1: Objetivos

O objetivo principal desse problema é mostrar aos alunos uma forma de se definir uma potência de expoente inteiro e negativo, bem como uma maneira fácil de se encontrar o seu valor, recorrendo à conceitos já estabelecidos na atividade anterior.

Para encontrar o valor de 2^{-1}, os alunos A e B, em sua discussão, utilizam o fato de que $1 = 2^0 = 2^{1+(-1)} = 2^1.2^{-1}$ e, chamando de y o valor (desconhecido) de 2^{-1}, obtêm a seguinte equação do 1º grau: $2^1.y = 1$. O objetivo do diálogo é despertar nos alunos um comportamento investigativo aliado às descobertas dos alunos no diálogo, para juntos encontrarem uma nova propriedade das potências. A figura 6.2 ilustra o parte do diálogo dos alunos.

1) O grande segredo sobre a validade da propriedade para números inteiros é definir de forma adequada potência de expoente inteiro e negativo. Pensando em descobrir essa definição por tentativas, dois alunos discutiam a respeito desse assunto.

Observe o diálogo entre os dois alunos sobre qual deve ser o valor de 2^{-1}:

Aluno A: - Para encontrarmos o valor de 2^{-1}, podemos utilizar o fato de que $2^0 = 2^{-1+1}$. O que você acha?

Aluno B: - Mas você ainda não tem 2^{-1}, não entendi onde você quer chegar.

Aluno A: - Se a propriedade principal continua valendo e como $2^0 = 1$, então $1 = 2^0 = 2^{1+(-1)} = 2^1.2^{-1}$, ou seja, $2^1.2^{-1} = 1$.

Aluno B: - Ah! Já entendi. Como 2^{-1} é um valor desconhecido, e é o valor que estamos procurando, vamos chamá-lo de y, isto é, ficaremos com a seguinte equação $2^1.\ y = 1$ e vamos procurar descobrir quanto esse y deve valer, pois, essa equação é conhecida e fácil de resolver. E você, sabe calcular o valor de y?

a) O aluno B, em sua segunda fala, encontra uma equação que permite encontrar o valor de y, o qual deve ser o valor de 2^{-1}, e, além disso, diz que essa equação é fácil de ser resolvida. Você seria capaz de resolver essa equação e determinar o valor de y?
Resposta:

Figura 6.2: Enunciado do Problema 1 da primeira situação

No item (a), os estudantes são desafiados a encontrar a raiz da equação $2^1.y = 1$, descobrindo assim o valor da potência 2^{-1}. No item (b), os alunos são desafiados a repetir o processo anterior, descobrindo o valor de 2^{-2}, raiz da equação $2^2.y = 1$, isto é, o objetivo é encontrar a raiz dessa equação. Finalizando a ideia, o item (c) generaliza o argumento para uma base $a \neq 0$ qualquer e para um expoente $m \in \mathbb{N}$ qualquer, trazendo em seu enunciado a identidade $a^m.a^{-m} = a^0 = 1$. Assim, partindo da identidade fornecida no enunciado e seguindo a mesma linha de raciocínio dos itens anteriores, o desafio desse item é obter a equação $a^m.y = 1$ e resolvê-la, encontrando assim o valor de $y = a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$, ou seja, que a^{-m} é o inverso multiplicativo de a^m.

Problema 1: Dificuldades esperadas

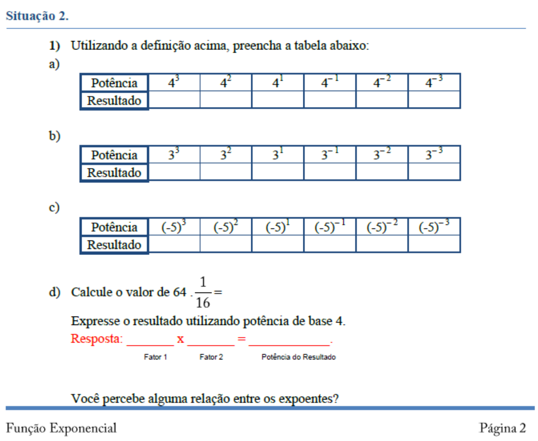
Acreditamos que possivelmente ocorram dificuldades com relação a interpretação do diálogo, por se tratar de uma transposição da ideia abstrata de expoente negativo para uma situação mais próxima do mundo real, visto que não é comum encontrarmos problemas nos quais o conceito de expoente negativo seja abordado do concreto para o abstrato. Além disso, tivemos grande dificuldade na elaboração desse problema por nos depararmos exatamente com essa questão, isto é, a potência de expoente negativo é uma maneira alternativa de se representar uma fração cujo numerador é igual a 1 e o denominador uma potência de expoente natural, o que se torna um fator dificultador quando tentamos elaborar um problema contextualizado envolvendo essa ideia, pois, para o aluno, é mais comum a representação $\dfrac{1}{8}$ do que 2^{-3}, fato esse que pode ser observado em avaliações internas e externas, onde os erros cometidos em problemas envolvendo expoentes negativos são comuns.

6.3.2 Problemas da Situação 2

Os problemas da Situação 2 estão divididos em três etapas a saber: a primeira etapa (problema 1) contém problemas que abordam dois aspectos básicos, o da aplicabilidade da propriedade observada na situação anterior, isto é, potência de expoente inteiro e negativo $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$, ao mesmo tempo trabalhando com a verificação da validade da propriedade fundamental das potências, ou seja, problemas que fazem com que os alunos percebam que, com a definição obtida, a propriedade fundamental $a^{m+n} = a^m.a^n$ ainda continua válida. A segunda etapa da Situação 2 (problemas 2 e 3) se resume a problemas que abordam a representação funcional das potências, vistas agora como uma função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^*$ definida por $f(n) = a^n$, onde $a \in \mathbb{R}^*$ e que também apontam para a validade da propriedade fundamental das potências. A terceira e última etapa traz um problema (problema 4) que aborda especificamente a aplicabilidade da definição formulada na Situação 1.

Problema 1: Objetivos

O problema 1 é composto de sete itens dos quais os três primeiros, (a) , (b) e (c) são tabelas com duas linhas e várias colunas, onde na primeira linha estão dispostas potências de mesma base às quais os respectivos resultados devem ser colocados na segunda linha, com o objetivo de aplicabilidade da definição de potência de expoente negativo. Baseando-se nos dados das tabelas, os alunos devem responder os demais itens que induzem a verificação da validade da propriedade fundamental das potências, mesmo para expoentes inteiros. A figura 6.3 mostra a organização das tabelas.


Situação 2.

1) Utilizando a definição acima, preencha a tabela abaixo:

a)

Potência	4^3	4^2	4^1	4^{-1}	4^{-2}	4^{-3}
Resultado						

b)

Potência	3^3	3^2	3^1	3^{-1}	3^{-2}	3^{-3}
Resultado						

c)

Potência	$(-5)^3$	$(-5)^2$	$(-5)^1$	$(-5)^{-1}$	$(-5)^{-2}$	$(-5)^{-3}$
Resultado						

d) Calcule o valor de $64 \cdot \frac{1}{16} =$

Expresse o resultado utilizando potência de base 4.

Resposta: ______ x ______ = __________.

Fator 1 Fator 2 Potência do Resultado

Você percebe alguma relação entre os expoentes?

Função Exponencial Página 2

Figura 6.3: Enunciado do Problema 1 da segunda situação

Problema 1: Dificuldades esperadas

Possivelmente poderão ocorrer dificuldades onde tanto o expoente como a base são números negativos, gerando uma possível confusão com a “regra dos sinais”utilizada para a multiplicação, que por sinal é um conhecimento que deve servir como base para o estudo de potências de base negativa (esse assunto faz parte do cronograma da 6ª série/7º ano do Ensino Fundamental do Estado de São Paulo).

Problemas 2 e 3: Objetivos

Os problema 2 e 3 abordam o assunto de potência de expoente negativo segundo a representação funcional das potências, vistas agora como uma função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^*$ definida por $f(n) = a^n$, onde $a \in \mathbb{R}^*$. O objetivo e tornar familiar a representação funcional de potências e ao mesmo tempo reforçar a validade da propriedade fundamental das potências representada pela notação funcional $f(m + n) = f(m).f(n)$ agora com domínio no conjunto dos números Inteiros. Na verdade, esta propriedade caracteriza a função exponencial, juntamente com a hipótese da continuidade. Outro objetivo desse problema, e não menos importante, é mostrar que até o presente momento (onde o domínio de nossa função é conjunto dos Números Inteiros), a base a pode ser qualquer número real não nulo.

Problemas 2 e 3: Dificuldades esperadas

Novamente acreditamos que as dificuldades que possam aparecer estejam relacionadas com a "regra dos sinais", utilizada na multiplicação. Esta dificuldade tende a aparecer mais neste problema, visto que em todos os itens a serem calculados, tanto base como expoente, são números inteiros negativos.

Problema 4: Objetivos

O problema 4 se resume na aplicabilidade da propriedade deduzida na Situação 1, isto é, $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$.

Problema 4: Dificuldades esperadas

Esperamos encontrar as mesmas dificuldades que já foram apontadas nos problemas anteriores.

6.4 Aplicação e Análise Posteriori

A atividade 2 se inicia com o problema que contém o diálogo entre dois alunos A e B, que buscam encontrar por tentativas, qual deve ser a melhor definição para 2^{-1}. A figura 6.4 mostra um trecho do diálogo entre os dois alunos:

Em seguida, três itens são propostos aos alunos com, a finalidade de conduzí-los ao resultado generalizado da definição de potências de expoente inteiro negativo.

Alguns alunos apresentaram dificuldades no momento de resolver a equação $2^1.y = 1$, não conseguindo associar essa equação com a equação do primeiro grau $2y = 1$, a qual eles já conheciam e sabiam resolver sem problemas. A impressão que nos causou é que os alunos reconhecem $2y = 1$ como uma equação do primeiro grau, porém, não

1) O grande segredo sobre a validade da propriedade para números inteiros é definir de forma adequada potência de expoente inteiro e negativo. Pensando em descobrir essa definição por tentativas, dois alunos discutiam a respeito desse assunto.

Observe o diálogo entre os dois alunos sobre qual deve ser o valor de 2^{-1}:

Aluno A: - Para encontrarmos o valor de 2^{-1}, podemos utilizar o fato de que $2^0 = 2^{-1+1}$. O que você acha?

Aluno B: - Mas você ainda não tem 2^{-1}, não entendi onde você quer chegar.

Aluno A: - Se a propriedade principal continua valendo e como $2^0 = 1$, então $1 = 2^0 = 2^{1+(-1)} = 2^1.2^{-1}$, ou seja, $2^1.2^{-1} = 1$.

Aluno B: - Ah! Já entendi. Como 2^{-1} é um valor desconhecido, e é o valor que estamos procurando, vamos chamá-lo de y, isto é, ficaremos com a seguinte equação $2^1.\ y = 1$ e vamos procurar descobrir quanto esse y deve valer, pois, essa equação é conhecida e fácil de resolver. E você, sabe calcular o valor de y?

a) O aluno B, em sua segunda fala, encontra uma equação que permite encontrar o valor de y, o qual deve ser o valor de 2^{-1}, e, além disso, diz que essa equação é fácil de ser resolvida. Você seria capaz de resolver essa equação e determinar o valor de y?
Resposta:

Figura 6.4: Enunciado do Problema 1 da primeira situação

a) O aluno B, em sua segunda fala, encontra uma equação que permite encontrar o valor de y, o qual deve ser o valor de 2^{-1}, e, além disso, diz que essa equação é fácil de ser resolvida. Você seria capaz de resolver essa equação e determinar o valor de y?
Resposta:

b) De acordo com o aluno A, podemos ter ainda $2^2.2^{-2} = 2^0 = 1$. Sendo assim, repetindo o processo anterior sugerido pelo aluno B em sua segunda fala, ou seja, chamando a potência desconhecida 2^{-2} de y encontraremos a equação $2^2.y = 1$.
Você seria capaz de resolver essa equação e determinar o valor de y?
Resposta:

c) Proceda da mesma forma, utilizando o fato de que $a^m.a^{-m} = a^0 = 1$, para descobrir quanto vale a^{-m}. Para isso, repetindo o raciocínio do aluno B vamos chamar a^{-m} de y. Com isso encontraremos a equação ______________. Você seria capaz de resolver essa equação e determinar o valor de y?
Resposta:

Com base nas atividades realizadas nos itens anteriores, descobrimos qual deve ser a definição para a^{-m}, ou seja, chegamos a conclusão que a^{-m} é a solução da equação $a^m.\ y = 1$, isto é:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Figura 6.5: Enunciado do Problema 1 da primeira situação

reconhecem, à primeira vista, $2^1.y = 1$ como uma equação do primeiro grau. Ao que parece, o expoente da potência 2^1 acaba levando o aluno a duvidar se equação em questão é mesmo do primeiro grau, e o caso se agrava quando escrevemos uma equação do tipo $2^2.y = 1$. Provavelmente esse seja o motivo que originou as dificuldades em reconhecer tais equações como equações do primeiro grau. Talvez seria melhor escrever a equação como $2y = 1$ e $4y = 1$, provavelmente isso reduziria essa dificuldade, que por sua vez não era esperada para esse problema. Apesar dessa dificuldade, os alunos obtiveram bons resultados na resolução desse problema.

A tabela 6.1 mostra os resultados dessa atividade:

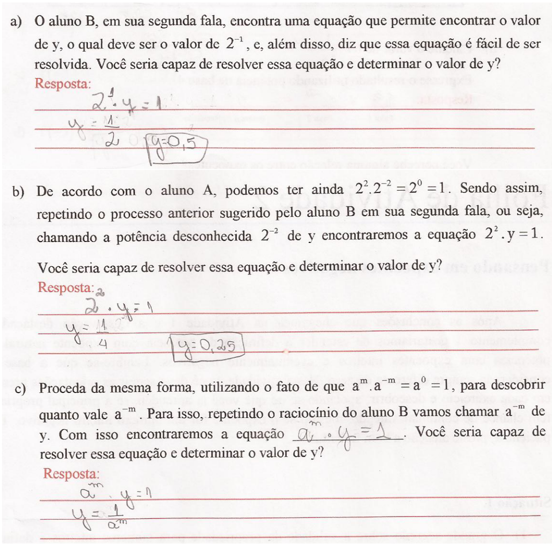
Dos alunos que cometeram algum erro, três deles não souberam resolver as

	1ª Série A
Acertaram	25
Cometeram algum erro	7

Tabela 6.1: Resultados do Problema 1 da Situação 1

equações $2y = 1$ e $4y = 1$, colocando como respostas $y = 2$ e $y = 4$, respectivamente. Esses mesmos alunos não conseguiram obter a equação do item (c). Os demais alunos que cometeram erro, não conseguiram montar a equação que respondia o item (c).

Abaixo temos a atividade resolvida por uma dupla de alunos:



a) O aluno B, em sua segunda fala, encontra uma equação que permite encontrar o valor de y, o qual deve ser o valor de 2^{-1}, e, além disso, diz que essa equação é fácil de ser resolvida. Você seria capaz de resolver essa equação e determinar o valor de y?

Resposta:

$2^1 . y = 1$

$y = \frac{1}{2}$ $\boxed{y=0,5}$

b) De acordo com o aluno A, podemos ter ainda $2^2.2^{-2} = 2^0 = 1$. Sendo assim, repetindo o processo anterior sugerido pelo aluno B em sua segunda fala, ou seja, chamando a potência desconhecida 2^{-2} de y encontraremos a equação $2^2 . y = 1$.

Você seria capaz de resolver essa equação e determinar o valor de y?

Resposta:

$2^2 . y = 1$

$y = \frac{1}{4}$ $\boxed{y=0,25}$

c) Proceda da mesma forma, utilizando o fato de que $a^m.a^{-m} = a^0 = 1$, para descobrir quanto vale a^{-m}. Para isso, repetindo o raciocínio do aluno B vamos chamar a^{-m} de y. Com isso encontraremos a equação $a^m . y = 1$. Você seria capaz de resolver essa equação e determinar o valor de y?

Resposta:

$a^m . y = 1$

$y = \frac{1}{a^m}$

Figura 6.6: Problema 1 resolvido por uma dupla

A Situação 2 se inicia com um problema que conta com três tabelas para serem completadas, fazendo uso da propriedade acima descoberta. De posse dos valores da tabela, isto é, depois de completarem todos os valores das tabelas, uma sequência de perguntas é sugerida, induzindo os alunos a perceberem que a propriedade fundamental ainda continua valendo, mesmo quando se trata de expoentes inteiros e negativos. A figura 6.7 ilustra a organização das tabelas:

A figura a seguir ilustra os demais itens que compõem o problema 1 da segunda situação:

Como era esperado na análise a priori, vários alunos apresentaram dificul-

Situação 2.

1) Utilizando a definição acima, preencha a tabela abaixo:

a)

Potência	4^3	4^2	4^1	4^{-1}	4^{-2}	4^{-3}
Resultado						

b)

Potência	3^3	3^2	3^1	3^{-1}	3^{-2}	3^{-3}
Resultado						

c)

Potência	$(-5)^3$	$(-5)^2$	$(-5)^1$	$(-5)^{-1}$	$(-5)^{-2}$	$(-5)^{-3}$
Resultado						

d) Calcule o valor de $64 \cdot \frac{1}{16} =$

Expresse o resultado utilizando potência de base 4.

Resposta: ______ x ______ = __________.

Fator 1 Fator 2 Potência do Resultado

Você percebe alguma relação entre os expoentes?

Função Exponencial Página 2

Figura 6.7: Enunciado do Problema 1 da segunda situação

e) Calcule o valor de $27 \cdot \frac{1}{3} =$

Expresse o resultado utilizando potência de base 3.

Resposta: ______ x ______ = __________.

Fator 1 Fator 2 Potência do Resultado

Você percebe alguma relação entre os expoentes?

Resposta:____

f) Calcule o valor de $\frac{1}{25} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) =$

Expresse esse resultado utilizando potência de base (-5).

Resposta: ______ x ______ = __________.

Fator 1 Fator 2 Potência do Resultado

Você percebe alguma relação entre os expoentes?

Resposta:____

g) Você percebeu alguma relação entre os expoentes dos fatores e o expoente do resultado nos itens d), e) e f) ? A propriedade observada nas tabelas da Atividade 1 continua valendo?

Resposta:

____

____

____

Figura 6.8: Enunciado do Problema 1 da segunda situação

dades no item (c) desse problema, por se tratar de base negativa. É provável que esses alunos já traziam consigo essa dificuldade, por não assimilarem significativamente esse conteúdo quando o mesmo foi ensinado.

A tabela 6.2 mostra os resultados dessa atividade:

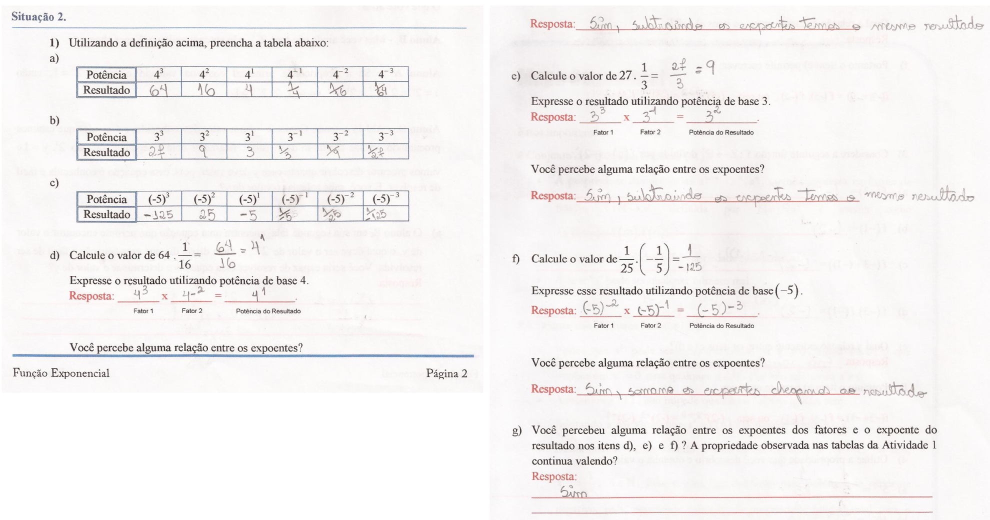
Dos 19 alunos que cometeram algum erro, 15 deles cometeram erro de sinal nas potências do item (c), mas não cometeram erros conceituais no que diz respeito ao cálculo das potências de expoente negativo. Porém, desse grupo de 15 alunos, 6 alunos fizeram confusão com a “regra dos sinais”, utilizada na multiplicação e o sinal

	1ª Série A
Acertaram tudo	13
Cometeram algum erro	19

Tabela 6.2: Resultados do Problema 1 da Situação 2

dos expoentes negativos, basicamente pensaram que, quando o expoente for um número positivo, o resultado da potência também deverá ser positivo, e quando o expoente da potência for um número negativo, o resultado da potência deverá ser negativo, colocando como resposta, por exemplo, $(-5)^3 = -125$, $(-5)^2 = -25$, $(-5)^1 = -5$, $(-5)^{-1} = \frac{1}{5}$, $(-5)^{-2} = \frac{1}{25}$ e $(-5)^{-3} = \frac{1}{125}$, mostrando a confusão entre os sinais da base e do expoente. Em alguns casos, os alunos simplesmente ignoram o sinal de subtração das bases e calculam as potências sem se preocupar com o sinal. Percebe-se também, que não há um padrão de respostas, estas variam muito e as dificuldades também. Porém, nosso objetivo central é a definição de função exponencial, e não temos como objetivo fundamentar e nem catalogar esse tipo de dificuldade. Os demais erros apresentados, foram relativos ao sinal do expoente nos itens (d), (e) e (f), em alguns casos, os expoentes das potências apareciam sem o sinal de subtração, acarretando em uma soma incorreta para o expoente do produto.

Abaixo temos a atividade resolvida por uma dupla de alunos:



Situação 2.

1) Utilizando a definição acima, preencha a tabela abaixo:

a)

Potência	4^3	4^2	4^1	4^{-1}	4^{-2}	4^{-3}
Resultado	64	16	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$

b)

Potência	3^3	3^2	3^1	3^{-1}	3^{-2}	3^{-3}
Resultado	27	9	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

c)

Potência	$(-5)^3$	$(-5)^2$	$(-5)^1$	$(-5)^{-1}$	$(-5)^{-2}$	$(-5)^{-3}$
Resultado	-125	25	-5	$\frac{1}{-5}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{-125}$

d) Calcule o valor de $64 \cdot \frac{1}{16} = \frac{64}{16} = 4^1$

Expresse o resultado utilizando potência de base 4.

Resposta: 4^3 x 4^{-2} = 4^1.

Fator 1 Fator 2 Potência do Resultado

Você percebe alguma relação entre os expoentes?

Função Exponencial Página 2

Resposta: Sim, subtraindo os expoentes temos o mesmo resultado

e) Calcule o valor de $27 \cdot \frac{1}{3} = \frac{27}{3} = 9$

Expresse o resultado utilizando potência de base 3.

Resposta: 3^3 x 3^{-1} = 3^2.

Fator 1 Fator 2 Potência do Resultado

Você percebe alguma relação entre os expoentes?

Resposta: Sim, subtraindo os expoentes temos o mesmo resultado

f) Calcule o valor de $\frac{1}{25} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{-125}$

Expresse esse resultado utilizando potência de base (-5).

Resposta: $(-5)^{-2}$ x $(-5)^{-1}$ = $(-5)^{-3}$.

Fator 1 Fator 2 Potência do Resultado

Você percebe alguma relação entre os expoentes?

Resposta: Sim, somamo os expoentes chegamos ao resultado

g) Você percebeu alguma relação entre os expoentes dos fatores e o expoente do resultado nos itens d), e) e f) ? A propriedade observada nas tabelas da Atividade 1 continua valendo?

Resposta:

Sim

Figura 6.9: Problema 1 resolvido por uma dupla

O problema 2 da segunda situação aborda o assunto das potências de expoente inteiro e negativo segundo a notação funcional, isto é, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^*$ definida por

$f(n) = a^n$, com $a \in \mathbb{R}^*$. O objetivo central é a familiarização com o uso dessa notação e reforçar a ideia de que a base a pode ser qualquer número real não nulo, seja ele negativo ou positivo. Alguns alunos apresentaram dificuldades com a notação, não compreendendo que $f(-3+(-2)) = f(-5)$, ao que parece, estes alunos não estavam seguros de que poderiam realizar as operações contidas entre parênteses, e, em alguns casos, colocando como resposta $(-5)^{-3-2}$.

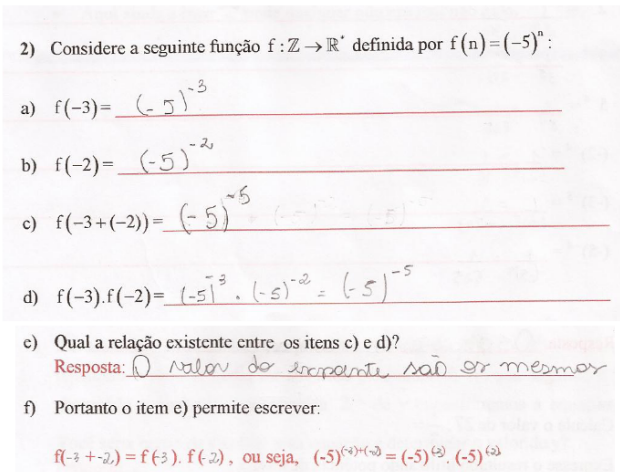
A tabela 6.3 mostra os resultados dessa atividade:

	1ª Série A
Acertaram tudo	22
Cometeram algum erro	10

Tabela 6.3: Resultados do Problema 2 da Situação 2

Dos alunos que cometeram algum erro, quatro deles responderam tudo corretamente, porém, no momento de preencher as lacunas em vermelho com os respectivos expoentes, esqueceram de colocar o sinal de subtração em todos os expoentes que preencheram. Os outros seis alunos, cometeram erros por não saber que poderiam realizar as operações dentro dos parênteses, como mencionado acima.

Abaixo temos a atividade resolvida por uma dupla de alunos:


2) Considere a seguinte função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^*$ definida por $f(n) = (-5)^n$:

a) $f(-3) = (-5)^{-3}$

b) $f(-2) = (-5)^{-2}$

c) $f(-3+(-2)) = (-5)^{-5}$

d) $f(-3).f(-2) = (-5)^{-3} . (-5)^{-2} = (-5)^{-5}$

e) Qual a relação existente entre os itens c) e d)?
Resposta: O valor do expoente são os mesmos

f) Portanto o item e) permite escrever:

$f(-3 + -2) = f(-3).\ f(-2)$, ou seja, $(-5)^{(-3)+(-2)} = (-5)^{(-3)}.\ (-5)^{(-2)}$

Figura 6.10: Problema 2 resolvido por uma dupla

Assim como no problema 2, o problema 3 da segunda situação aborda o assunto das potências de expoente inteiro e negativo segundo a notação funcional, isto é, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^*$ definida por $f(n) = a^n$, com $a \in \mathbb{R}^*$. O objetivo central é a familiarização com o uso dessa notação e reforçar a ideia de que a base a pode ser quaquer número real não nulo, seja ele negativo ou positivo. Alguns alunos apresentaram dificuldades com a notação, não compreendendo que $f(-3 + (-1)) = f(-4)$, ao que parece, estes alunos não estavam seguros de que poderiam realizar as operações contidas entre parênteses, e, em alguns casos, colocando como resposta $(-2)^{-3-1}$. De maneira geral, as dificuldades apresentadas nesse problema foram as mesmas apresentadas no problema anterior, visto que a diferença entre os dois problemas se dá somente pela escolha da base a.

A tabela 6.4 mostra os resultados dessa atividade:

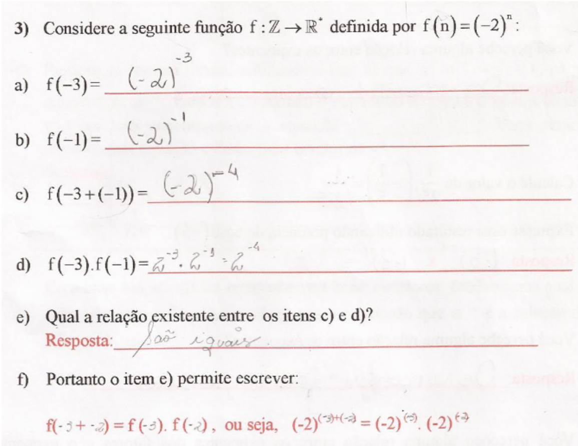
	1ª Série A
Acertaram tudo	22
Cometeram algum erro	10

Tabela 6.4: Resultados do Problema 3 da Situação 2

Dos alunos que cometeram algum erro, quatro deles responderam tudo corretamente, porém, no momento de preencher as lacunas em vermelho com os respectivos expoentes, esqueceram de colocar o sinal de subtração em todos os expoentes que preencheram. Os outros seis alunos, cometeram erros por não saber que poderiam realizar as operações dentro dos parênteses, como mencionado acima.

Abaixo temos a atividade resolvida por uma dupla de alunos:

Encerrando o bloco de problemas que compõem a Situação 2 e, por consequência, a Folha de Atividade 2, temos o problema 4 no qual os alunos devem simplesmente aplicar a definição de potência de expoente inteiro e negativo, deduzida na Situação 1. Os resultados dessa atividade foram catalogados de duas formas diferentes. A primeira utilizando como critério de correção a aplicação correta da definição de potência de expoente inteiro e negativo, sem levar em consideração os erros de sinais, e a segunda considerando os erros de sinais nas bases negativas.



3) Considere a seguinte função $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}^{*}$ definida por $f(n)=(-2)^{n}$:

a) $f(-3)=$ $(-2)^{-3}$

b) $f(-1)=$ $(-2)^{-1}$

c) $f(-3+(-1))=$ $(-2)^{-4}$

d) $f(-3).f(-1)=$ $2^{-3}\cdot 2^{-1}=2^{-4}$

e) Qual a relação existente entre os itens c) e d)?
Resposta: São iguais.

f) Portanto o item e) permite escrever:

$f(-3+-2)=f(-3).f(-2)$, ou seja, $(-2)^{(-3)+(-2)}=(-2)^{(-3)}.(-2)^{(-2)}$

Figura 6.11: Problema 3 resolvido por uma dupla

A tabela 6.5 mostra os resultados da atividade considerando a aplicação correta da definição:

	1ª Série A
Acertaram	26
Cometeram algum erro	6

Tabela 6.5: Resultados do Problema 4 da Situação 2

Dos seis alunos que cometeram esse erro, três deixaram a atividade em branco e os demais erraram totalmente calculando as potências como se os expoentes fossem números inteiros e positivos.

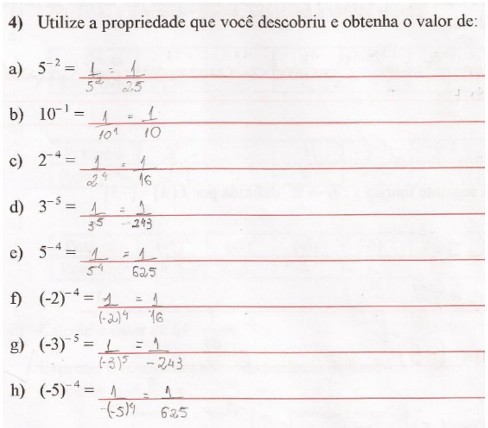
Vejamos agora a tabela 6.6 que mostra os resultados considerando os erros com sinais nas bases negativas, onde os seis alunos mencionados acima não foram considerados:

	1ª Série A
Acertaram tudo	15
Cometeram algum erro	11

Tabela 6.6: Resultados do Problema 4 da Situação 2

Dos onze alunos que cometeram erros de sinais, todos ignoraram o sinal de subtração das bases calculando as potências como se fossem de base positiva, porém, todos aplicaram a definição corretamente.

Abaixo temos a atividade resolvida por uma dupla de alunos:



4) Utilize a propriedade que você descobriu e obtenha o valor de:

a) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

b) $10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}$

c) $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

d) $3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$

e) $5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625}$

f) $(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$

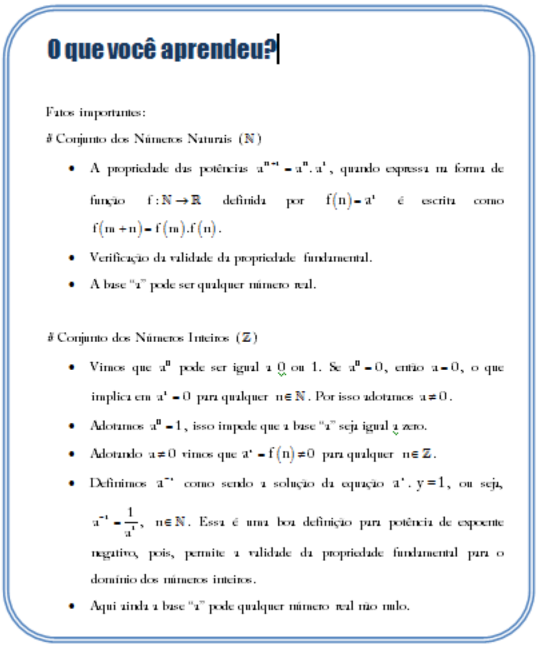
g) $(-3)^{-5} = \frac{1}{(-3)^5} = \frac{1}{-243}$

h) $(-5)^{-4} = \frac{1}{(-5)^4} = \frac{1}{625}$

Figura 6.12: Problema 4 resolvido por uma dupla

Assim como na Folha de Atividde 1, a Folha de Atividade 2 também contém em seu final um pequeno resumo das principais ideias exploradas durante a resolução da Folha de Atividade, que chamamos de “O que você aprendeu?”.

A figura 6.13 mostra o quadro “O que você aprendeu?”desta atividade.



O que você aprendeu?

Fatos importantes:

Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$)

- A propriedade das potências $a^{m+n} = a^m . a^n$, quando expressa na forma de função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(n) = a^n$ é escrita como $f(m+n) = f(m).f(n)$.
- Verificação da validade da propriedade fundamental.
- A base “a” pode ser qualquer número real.

Conjunto dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$)

- Vimos que a^0 pode ser igual a 0 ou 1. Se $a^0 = 0$, então $a = 0$, o que implica em $a^n = 0$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Por isso adotamos $a \neq 0$.
- Adotamos $a^0 = 1$, isso impede que a base “a” seja igual a zero.
- Adotando $a \neq 0$ vimos que $a^n = f(n) \neq 0$ para qualquer $n \in \mathbb{Z}$.
- Definimos a^{-n} como sendo a solução da equação $a^n . y = 1$, ou seja, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Essa é uma boa definição para potência de expoente negativo, pois, permite a validade da propriedade fundamental para o domínio dos números inteiros.
- Aqui ainda a base “a” pode qualquer número real não nulo.

Figura 6.13: “O que você aprendeu?”da Folha de Atividade 2

6.5 Conclusão

Na Folha de Atividade 2, mais especificamente na Folha Complemento 1, pudemos explorar quais os possíveis valores de a^0, para um número real a qualquer. Vimos também que a^0 pode ser igual a 0 ou 1, e que se $a^0 = 0$, então $a = 0$, o que implica em $a^n = 0$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Como não estamos interessados na função identicamente nula, adotamos $a \neq 0$ e $a^0 = 1$. A Situação 1 da Folha de Atividade 2, nos permitiu explorar a maneira adequada de definir uma potência de expoente inteiro e negativo, definindo-a como a raiz da equação $a^m.y = 1$ onde $y = a^{-m}$, deixando claro que a^{-m} é o inverso multiplicativo de a^m. Esta é uma boa definição e nos permite manter válida a propriedade fundamental das potências explorada nos exercícios da Situação 2, propriedade esta que caracteriza as funções exponenciais juntamente com a hipótese da continuidade.

Acreditamos que esses detalhes são de extrema importância quando se ensina função exponencial, pois se eventualmente não há possibilidades de comentar esses fatos quando se trabalha com potências pela primeira vez (o que é óbvio, pois alunos de 6º e 7º anos do Ensino Fundamental ainda não conhecem equações de 2º grau), por que não explorá-los no Ensino Médio? São questões como essas que podem ser justificadas utilizando argumentos que todos conhecem, como por exemplo, no caso da justificativa da escolha de $a^0 = 1$ e de $a \neq 0$, o conceito de raiz de uma equação do segundo grau resolve o problema. Porém, o que podemos perceber nas análises dos livros didáticos, esse tipo de justificativa dificilmente é encontrada em livros para o Ensino Médio, pelo contrário, encontramos erros conceituais. São questões como essas que nos motivaram a escrever sobre esse tema, afim de poder contribuir para um preenchimento dessa e de outras lacunas presentes no ensino de função exponencial.

Capítulo 7

Descrição e análise da Folha de Atividade 3

7.1 Introdução

Vimos que o objetivo principal da Folha de Atividade 2 foi estender a definição de potência de expoente natural para potência de expoente inteiro e negativo. Fizemos isso definindo convenientemente as potências de expoente negativo de modo que se mantenha a validade da propriedade fundamental, isto é, $a^{m+n} = a^m.a^n$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$. O objetivo da Folha de Atividade 3 é fazer a extensão da propriedade fundamental, definida agora sobre o conjunto dos números racionais, ou seja, $a^{r+s} = a^r.a^s$ para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$. Porém, para alcançar esse objetivo, alguns fatos extremamente importantes devem ser observados. Tais observações foram reunidas na Folha de Complemento 2, cujo título é "Justificativa para a escolha de base estritamente positiva", que foi entregue aos alunos no terceiro encontro, dia 31/10/2012, na segunda aula desse encontro, visto que a primeira aula foi dedicada ao término da Situação 2 da Folha de Atividade 2. Os alunos foram orientados a ler a Folha de Complemento 2, e após a leitura em grupo, discutir juntamente com o professor as ideias ali contidas. Vejamos quais foram os pontos destacados na Folha de Complemento 2.

Admitindo que seja possível estender a validade da propriedade fundamental para o conjunto dos números racionais, podemos ver que se $r \in \mathbb{Q}$, então $a^r = a^{\frac{r}{2}+\frac{r}{2}} = a^{\frac{r}{2}}.a^{\frac{r}{2}}$ (o que nem sempre é verdade no conjuto dos números inteiros, isto é, não podemos garantir que a metade de um número inteiro ainda continua sendo um número inteiro). Chamando de b o valor de $a^{\frac{r}{2}}$, teremos $a^r = a^{\frac{r}{2}+\frac{r}{2}} = a^{\frac{r}{2}}.a^{\frac{r}{2}} = b.b = b^2$. Isto implica que para qualquer $r \in \mathbb{Q}$, existe um $b \in \mathbb{R}$, tal que $a^r = b^2$. Daí, podemos concluir que como $b^2 \geq 0$ para qualquer $b \in \mathbb{R}$, então $a^r \geq 0$ para qualquer $r \in \mathbb{Q}$. Entretanto, considerando o fato de que $a^r.a^{-r} = a^0 = 1$, isto implica que $a^r \neq 0$ para qualquer que seja $r \in \mathbb{Q}$. Dessa forma podemos concluir que, como $a^r = b^2 \geq 0$ e $a^r \neq 0$, então $a^r > 0$ para qualquer que seja $r \in \mathbb{Q}$. O objetivo central dessa argumentação, presente na Folha de Complemento 2, é chamar a atenção dos alunos para o fato de que, para que seja possível estender a propriedade fundamental para o conjunto dos números racionais, obrigatoriamente devemos adotar a base $a > 0$, já que $a^r > 0$ para qualquer $r \in \mathbb{Q}$, em outras palavras, perdemos a liberdade para a escolha dos valores da base, nos restringindo agora somente a valores estritamente positivos. As discussões em grupo e comentários realizados sobre a Folha de Complemento 2 consumiram o tempo de uma aula de 50 minutos, finalizando o encontro do dia 31/10/2012. A Folha de Complemento 2 foi apenas informativa, não contendo nenhum tipo de exercício ou tarefa para casa.

A figura 7.1 ilustra parte da atividade da folha de complemento 2.

Complemento

Justificativa para escolha de base estritamente positiva.

Vimos na Folha de Atividade 2 que, após uma boa definição de potência com expoente negativo, pudemos estender a propriedade fundamental, válida para o conjunto dos números naturais, para o conjunto dos números inteiros. GOSTARÍAMOS que essa extensão fosse feita para o conjunto dos números racionais. Porém, logo de início devemos observar alguns fatos extremamente importantes para alcançarmos nosso objetivo:
O primeiro é que a base sempre será diferente de 0 e um segundo fato é que $a^0 = 1$. Acreditando que possamos estender a PROPRIEDADE FUNDAMENTAL da função exponencial para o conjunto dos números racionais, observamos:

Se r é um número racional, isto é, $r \in \mathbb{Q}$, então admitindo que seja possível estender a propriedade para esse conjunto, podemos ver que $a^r = a^{\frac{r}{2}+\frac{r}{2}} = a^{\frac{r}{2}}.a^{\frac{r}{2}}$. Chamando de $b = a^{\frac{r}{2}}$, então teremos $a^r = a^{\frac{r}{2}+\frac{r}{2}} = a^{\frac{r}{2}}.a^{\frac{r}{2}} = b.b = b^2$. Isto implica que, para qualquer $r \in \mathbb{Q}$ existe um $b \in \mathbb{R}$, tal que $a^r = b^2$. Daí, podemos concluir que $a^r \geq 0$, já que $b^2 \geq 0$ para todo $b \in \mathbb{R}$.

Figura 7.1: Parte da Folha de Complemento 2

Acreditamos que esse assunto deve ser comentado, e que alunos do Ensino Médio têm condições de compreender o motivo pelo qual precisamos adotar uma base positiva, dependendo do domínio que estamos trabalhando quando se define uma função exponencial. A justificativa para essa exigência, a qual acabamos de comentar no parágrafo acima, não é mencionada em nenhum dos livros didáticos que foram analisados.

A Folha de Atividade 3 traz, em resumo, vários problemas que buscam despertar nos alunos um espírito mais crítico e de investigação matemática. Seguindo a mesma linha de raciocínio da Folha de Atividade 2, a Folha de Atividade 3 é composta de duas situações. A primeira situação traz um diálogo entre dois jovens discutindo sobre qual deve ser a maneira mais conveniente de se definir uma potência de expoente racional, em particular, utilizando na discussão a potência $9^{\frac{1}{2}}$. Em resumo, a Situação 1 destaca que a forma de se definir uma potência da forma $a^{\frac{1}{m}}$ com $m \neq 0$ de modo que a propriedade fundamental continue válida, é assumir que $a^{\frac{1}{m}} = y$, onde y é a raiz positiva da equação $y^m = a$, pois como $1 = \dfrac{m}{m} = \underbrace{\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m} + ... + \dfrac{1}{m}}_{m\,vezes}$, então $a = a^1 = a^{\frac{m}{m}} = a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+...+\frac{1}{m}} = \underbrace{a^{\frac{1}{m}}.a^{\frac{1}{m}}.\ldots.a^{\frac{1}{m}}}_{m\,vezes}$, e, como chamamos de y o valor de $a^{\frac{1}{m}}$, teremos a equação $y^m = a$. Vale lembrar que a notação $a^{\frac{1}{m}}$ significa a mesma coisa que a notação $\sqrt[m]{a}$, o que acaba sendo um ponto importante do trabalho, pois foi possível estabelecer e explicitar as relações existentes entre a função exponencial e o conceito de radiciação. Além disso, os problemas da Situação 1 conduzem os alunos à conclusão de que para qualquer número racional $r = \dfrac{n}{m}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $m \neq 0$ teremos $a^r = a^{\frac{n}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n = y^n$, e que definindo dessa forma as potências de expoente racional, a propriedade fundamental das funções exponenciais ainda continua valendo, ou seja, a função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(r) = a^r$, com $a > 0$, satisfaz a propriedade $f(r+s) = f(r).f(s)$ para quaisquer que sejam $r, s \in \mathbb{Q}$.

Todavia, um ponto importante dessa extensão ainda não foi esclarecido, isto é, como obter o valor da raiz positiva da equação $y^m = a$, utilizada na definição de potências de expoente fracionário? Para isso, resolvemos elaborar a Folha de Atividade 4 em uma planilha do Microsoft Excel, onde esta traz um algoritmo simples, mas muito eficiente, para encontrar o valor exato ou aproximado da raiz positiva da equação $y^m = a$. Os detalhes da Folha de Atividade 4 juntamente com o algoritmo serão comentados no próximo capítulo.

7.2 Resumo da Aplicação

No terceiro encontro, dia 31/10/2012, todos os 32 alunos estavam presentes, sendo que a divisão em grupos foi de 4 trios e 10 duplas. Durante a primeira aula desse encontro, os alunos terminaram os problemas da Situação 2 da Folha de Atividade 2, e na segunda aula, as ideias da folha de complemento 2 foram discutidas em grupo encerrando o terceiro encontro.

No quarto encontro, dia 07/11/2012, todos os 32 alunos estavam presentes, sendo que a divisão em grupos foi de 4 trios e 10 duplas. A Folha de Atividade 3 tomou o tempo das duas aulas desse encontro, e foi terminada nesse mesmo dia. Em resumo, a Folha de Atividade 3 durou, em sua totalidade 3 aulas de 50 minutos cada, incluindo o tempo utilizado com para a discussão das ideias contidas na folha de complemento 2.

7.3 Análise a Priori: Expectativas sobre a Folha de Atividade 3

O objetivo central da Folha de Atividade 3 é estender a definição de potência de expoente inteiro para potência de expoente racional. Fazemos isso definindo convenientemente as potências de expoente fracionário de modo que se mantenha a validade da propriedade fundamental das funções exponenciais, isto é, $a^{r+s} = a^r.a^s$ para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$. Ressaltamos que na folha de complemento 2, ficou claro que essa extensão só tem sentido se adotarmos a base $a > 0$. Assim, podemos justificar que, como consequência da extensão da propriedade fundamental para o conjunto dos números racionais, as potências de expoente fracionário do tipo $\dfrac{m}{n}$ com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$ podem ser expressas da forma $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$. Vale lembrar que isto não é definição, mas sim uma consequência da propriedade fundamental das funções exponenciais.

A Folha de Atividade 3 é composta de duas situações distintas. A primeira traz apenas um problema que contém um diálogo entre dois jovens, discutindo sobre qual deve ser a melhor maneira de se definir uma potência de expoente fracionário, de modo a garantir a validade da propriedade fundamental, buscando dar um significado, por exemplo, para a potência $9^{\frac{1}{2}}$, bem como a relação existente entre a definição escolhida e o conceito de radiciação. A segunda situação contém problemas que abordam a aplicação da definição deduzida na Situação 1, sobretudo, utilizando a notação funcional, isto é, uma função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(r) = a^r$, com $a > 0$. Vejamos os objetivos específicos de cada problema e as dificuldades esperadas.

7.3.1 Problemas da Situação 1

A Situação 1 traz apenas um problema que contém um diálogo entre dois jovens discutindo sobre qual deve ser a melhor definição para uma potência de expoente racional, de modo que continue válida a propriedade fundamental das potências.

Problema 1: Objetivos

O objetivo principal desse problema é mostrar uma maneira de se obter o valor da potência $9^{\frac{1}{2}}$, recorrendo a representação funcional, para uma função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(r) = 9^r$. O problema mostra aos alunos que, ao utilizar a propriedade fundamental afim de obter o valor de $9^{\frac{1}{2}}$, devemos resolver uma equação do segundo grau do tipo $y^2 = 9$, onde $y = 9^{\frac{1}{2}}$. O problema enfatiza que as raízes da equação $y^2 = 9$ são $y = \pm 3$, mas como já foi visto na Folha de Complemento 2, a função $f(r) = 9^r$ nunca pode assumir valores negativos, assim o único valor possível para $9^{\frac{1}{2}}$ é $y = 9^{\frac{1}{2}} = 3$. Outro ponto de destaque no problema é o fato de que tanto $9^{\frac{1}{2}}$ quanto $\sqrt{9}$ são formas diferentes de se representar o mesmo número, que no caso é a solução positiva da equação $y^2 = 9$. Após essa discussão, seis itens são propostos aos alunos procurando dar continuidade à discussão.

O item (a) explora os conhecimentos prévios dos alunos sobre o conceito de radiciação, em particular, espera que os alunos respondam que significado tem para eles (alunos) a notação $\sqrt{9}$. No item (b), os alunos são desafiados a repetir o raciocínio utilizado pelos jovens no enunciado do problema para, então, representar $9^{\frac{1}{3}}$ utilizando radicais. O desafio do item (c) é obter a representação de $9^{\frac{2}{3}}$ a partir da representação de $9^{\frac{1}{3}}$ e estabelecer a relação entre essa representação e o conceito de potência de expoente fracionário que eles conheceram quando estudaram radiciação. Ainda neste item, esperamos que os alunos utilizem a propriedade fundamental, já explorada nas atividades anteriores. No item (d), os alunos são desafiados a repetir o raciocínio utilizado pelos jovens no enunciado do problema para, então, representar a potência $9^{\frac{1}{4}}$ e, em seguida, representar $9^{\frac{3}{4}}$ a partir da representação de $9^{\frac{1}{4}}$, utilizando a propriedade fundamental. O objetivo dos itens (e) e (f) é generalizar a definição de potência de expoente racional para qualquer número racional da forma $\frac{n}{m}$, com m, $n \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$. A figura 7.2 ilustra parte do enunciado deste problema.

1) Com relação ao problema de estender a validade da propriedade fundamental para o conjunto dos números racionais, vejamos novamente o diálogo entre dois jovens, tentando agora, descobrir qual deve ser o valor ideal para $a^{\frac{1}{2}}$, esperando ser possível continuar satisfazendo a propriedade fundamental:

Aluno A: - Nós vimos que, dependendo do valor que a potência assumir, a propriedade fundamental será preservada. Então, se tomarmos $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definida por $f(r) = 9^r$, teremos:

$f(1) = 9^1 = 9$, mas por outro lado, $f(1) = 9^1 = 9^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} . 9^{\frac{1}{2}}$, isto é, $9^{\frac{1}{2}} . 9^{\frac{1}{2}} = 9$.

A questão essencial é:

Qual deve ser o valor de $9^{\frac{1}{2}}$?

Indicando por y o valor de $9^{\frac{1}{2}}$, isto é, substituindo $9^{\frac{1}{2}}$ por y, ou seja, $y = 9^{\frac{1}{2}}$ teremos a seguinte equação $\underbrace{9^{\frac{1}{2}}}_{y} . \underbrace{9^{\frac{1}{2}}}_{y} = 9 \Leftrightarrow y . y = 9 \Leftrightarrow y^2 = 9$.

Aluno B: - A equação $y^2 = 9$ é uma equação do segundo grau, cujo discriminante é positivo, portanto admite duas raízes reais e distintas que podem ser obtidas através da "fórmula de Bháskara". Resolvendo encontramos como raízes $y = \pm\sqrt{9} = \pm 3$. Não é isso? Mas, por outro lado, como já foi visto, a função exponencial $f(r) = 9^r$ nunca pode assumir valores negativos, pois o domínio de nossa função é o conjunto dos números racionais, então a única chance é tomarmos $y = \sqrt{9} = 3$.

Aluno A: - Mas se a gente substituir o valor $r = \frac{1}{2}$ direto em $f(r) = 9^r$ olha o que dá:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 9^{\frac{1}{2}}$$

Figura 7.2: Parte do enunciado do Problema 1 da primeira situação

Problema 1: Dificuldades esperadas

Acreditamos que as possíveis dificuldades esperadas para esse problema e seus itens estejam relacionadas à interpretação do diálogo inicial, pois para responder com facilidade todos os itens, é necessário compreender bem o raciocínio apresentado no diálogo entre os jovens e, além disso, também é importante que se tenha um bom entendimento sobre como a propriedade fundamental pode ser aplicada.

7.3.2 Problemas da Situação 2

A Situação 2 traz dois problemas que abordam a aplicabilidade da definição deduzida na Situação 1, por meio da representação funcional. Vale lembrar que nos problemas dessa situação, a base das funções foram escolhidas convenientemente para que os alunos pudessem, possivelmente, calcular o valor das potências, mesmo não sendo uma exigência do problema.

Problema 1: Objetivos

O problema 1 trata especialmente da aplicabilidade da definição deduzida na Situação 1, para uma função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, definida por $f(r) = 64^r$.

Problema 1: Dificuldades esperadas

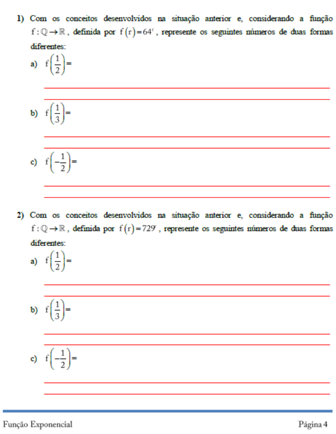
Acreditamos que possam ocorrer dificuldades no item (c) desse problema que, por se tratar de um valor negativo, o aluno deverá aplicar também a definição explorada na Folha de Atividade 2, que também é válida no conjunto dos Números Racionais.

Problema 2: Objetivos

O problema 2 trata especialmente da aplicabilidade da definição deduzida na Situação 1, para uma função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, definida por $f(r) = 729^r$.

Problema 2: Dificuldades esperadas

Acreditamos que possam ocorrer dificuldades no item (c) desse problema que, por se tratar de um valor negativo, o aluno deverá aplicar também a definição explorada na Folha de Atividade 2, que também é válida no conjunto dos Números Racionais. A figura 7.3 ilustra o enunciado de ambos os problemas:



1) Com os conceitos desenvolvidos na situação anterior e, considerando a função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, definida por $f(r) = 64^r$, represente os seguintes números de duas formas diferentes:

a) $f\left(\frac{1}{2}\right) =$

b) $f\left(\frac{1}{3}\right) =$

c) $f\left(-\frac{1}{2}\right) =$

2) Com os conceitos desenvolvidos na situação anterior e, considerando a função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, definida por $f(r) = 729^r$, represente os seguintes números de duas formas diferentes:

a) $f\left(\frac{1}{2}\right) =$

b) $f\left(\frac{1}{3}\right) =$

c) $f\left(-\frac{1}{2}\right) =$

Função Exponencial Página 4

Figura 7.3: Enunciado dos problemas da segunda situação

7.4 Aplicação e Análise Posteriori

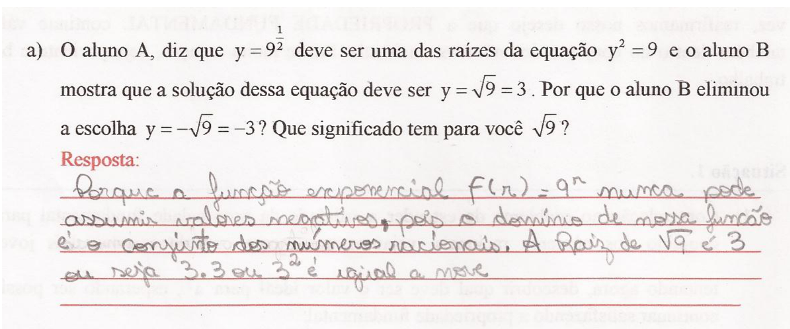
A Folha de Atividade 3 se inicia com o problema que contém o diálogo entre os dois jovens, buscando encontrar a definição correta para a potência $9^{\frac{1}{2}}$. Vamos analisar as respostas dos alunos item por item, começando com o item (a).

No item (a), os alunos deveriam responder por que o aluno B eliminou a escolha $y = -\sqrt{9} = -3$, e que significado tem para ele (aluno) a notação $\sqrt{9}$. A tabela 7.1 mostra os resultados desse item:

	1ª Série A
Responderam corretamente	20
Erraram ou não souberam responder	12

Tabela 7.1: Resultados do item (a) do Problema 1

Dos 12 alunos que cometeram algum erro na resposta desse item, dois deles responderam que raiz quadrada de um número é o mesmo que dividir esse número por 2. Dos 10 alunos restantes que também cometeram erros, estes não souberam responder o item. A figura 7.4 traz esse item resolvido por uma dupla de alunos:


a) O aluno A, diz que $y = 9^{\frac{1}{2}}$ deve ser uma das raízes da equação $y^2 = 9$ e o aluno B mostra que a solução dessa equação deve ser $y = \sqrt{9} = 3$. Por que o aluno B eliminou a escolha $y = -\sqrt{9} = -3$? Que significado tem para você $\sqrt{9}$?

Resposta:
Porque a função exponencial $f(x) = 9^x$ nunca pode assumir valores negativos, pois o domínio de nossa função é o conjunto dos números racionais. A Raiz de $\sqrt{9}$ é 3 ou seja 3.3 ou 3^2 é igual a nove

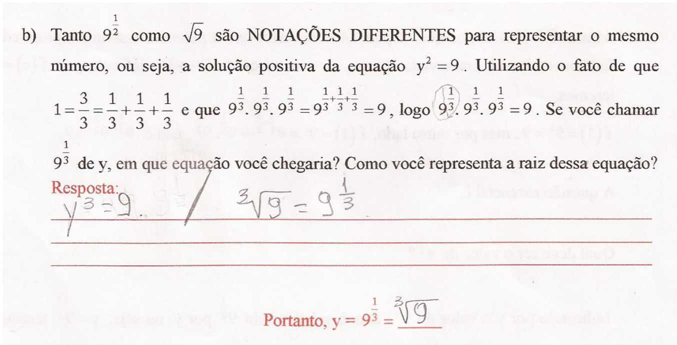
Figura 7.4: Item (a) do problema 1 resolvido por uma dupla

O item (b) propõe os alunos que utilizem as dicas fornecidas no exercício, chamando de y o valor de $9^{\frac{1}{3}}$, obtendo assim a seguinte equação $y^3 = 9$. Em seguida, representar utilizando radicais a raiz dessa equação, isto é, a potência $9^{\frac{1}{3}}$. A tabela 7.2 mostra os resultados desse item:

	1ª Série A
Responderam corretamente	21
Cometeram algum erro	11

Tabela 7.2: Resultados do item (b) do Problema 1

Dos 11 alunos que cometeram algum erro, 9 deles responderam o item parcialmente correto, pois souberam representar a raiz da equação escrevendo $\sqrt[3]{9}$ ou $9^{\frac{1}{3}}$. Porém, estes alunos não escreveram a equação $y^3 = 9$ como era pedido neste item. Os outros dois alunos que cometeram erro escreveram a equação corretamente, porém, não representaram corretamente sua raiz, colocando como resposta $y = 9$. A figura 7.5 traz esse item resolvido por uma dupla de alunos:


b) Tanto $9^{\frac{1}{2}}$ como $\sqrt{9}$ são NOTAÇÕES DIFERENTES para representar o mesmo número, ou seja, a solução positiva da equação $y^2 = 9$. Utilizando o fato de que $1 = \frac{3}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ e que $9^{\frac{1}{3}}.\,9^{\frac{1}{3}}.\,9^{\frac{1}{3}} = 9^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 9$, logo $9^{\frac{1}{3}}.\,9^{\frac{1}{3}}.\,9^{\frac{1}{3}} = 9$. Se você chamar $9^{\frac{1}{3}}$ de y, em que equação você chegaria? Como você representa a raiz dessa equação?

Resposta: $y^3 = 9$. / $\sqrt[3]{9} = 9^{\frac{1}{3}}$

Portanto, $y = 9^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9}$

Figura 7.5: Item (b) do problema 1 resolvido por uma dupla

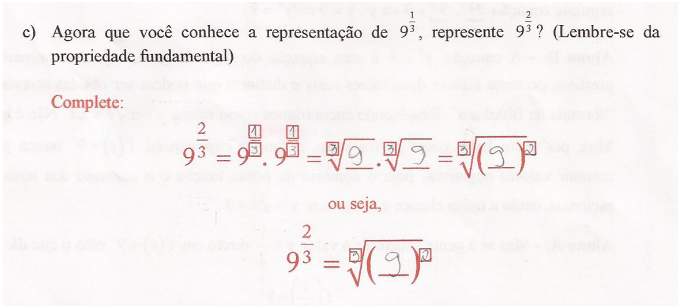
O item (c) desafiava os alunos a representar, através de radicais, a potência $9^{\frac{2}{3}}$ a partir da representação de $9^{\frac{1}{3}}$ obtida no item anterior, através do uso da propriedade fundamental. A tabela 7.3 mostra os resultados desse item:

	1ª Série A
Responderam corretamente	28
Cometeram algum erro	4

Tabela 7.3: Resultados do item (c) do Problema 1

Dos quatro alunos que cometeram algum erro, todos inverteram a ordem dos números na representação, colocando como índice o numerador das frações e como expoente o denominador das frações, ao que parece, por falta de atenção. A figura 7.6

traz esse item resolvido por uma dupla de alunos:


c) Agora que você conhece a representação de $9^{\frac{1}{3}}$, represente $9^{\frac{2}{3}}$? (Lembre-se da propriedade fundamental)

Complete:

$$9^{\frac{2}{3}} = 9^{\frac{1}{3}} \cdot 9^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{(9)^{2}}$$

ou seja,

$$9^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(9)^{2}}$$

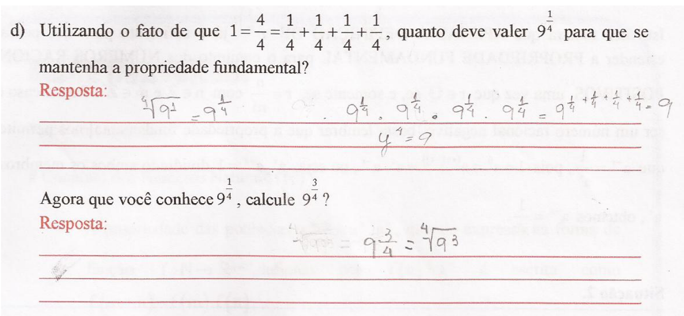
Figura 7.6: Item (c) do problema 1 resolvido por uma dupla

No item (d) os alunos deveriam utilizar a propriedade fundamental, juntamente com o fato de que $1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ e com isso representar a potência $9^{\frac{1}{4}}$ utilizando radicais. Ainda nesse item, os alunos deveriam representar a potência $9^{\frac{3}{4}}$ a partir da representação de $9^{\frac{1}{4}}$, fazendo o uso da propriedade fundamental. A tabela 7.4 mostra os resultados desse item:

	1ª Série A
Responderam corretamente	26
Cometeram algum erro	6

Tabela 7.4: Resultados do item (d) do Problema 1

Dos seis alunos que cometeram algum erro, todos fizeram confusão com a dica do exercício, escrevendo a equação $y^4 = 1$ em vez de $y^4 = 9$, e como não conseguiram representar $9^{\frac{1}{4}}$, também não conseguiram representar $9^{\frac{3}{4}}$. A figura 7.7 traz esse item resolvido por uma dupla de alunos:


d) Utilizando o fato de que $1 = \frac{4}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, quanto deve valer $9^{\frac{1}{4}}$ para que se mantenha a propriedade fundamental?

Resposta: $\sqrt[4]{9^1} = 9^{\frac{1}{4}}$ $\quad 9^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{\frac{1}{4}} = 9^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = 9$

$y^4 = 9$

Agora que você conhece $9^{\frac{1}{4}}$, calcule $9^{\frac{3}{4}}$?

Resposta: $9^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{9^3}$

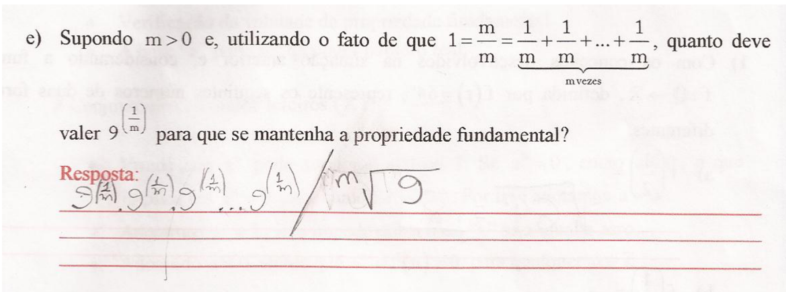
Figura 7.7: Item (d) do problema 1 resolvido por uma dupla

O item (e) busca generalizar o argumento utilizado no item (d), para uma fração da forma $\dfrac{1}{m}$ com m natural e $m \neq 0$, buscando encontrar a representação de $9^{\frac{1}{m}}$ utilizando o mesmo raciocínio dos itens anteriores. A tabela 7.5 mostra os resultados desse item:

	1ª Série A
Responderam corretamente	30
Cometeram algum erro	2

Tabela 7.5: Resultados do item (e) do Problema 1

Dos dois alunos que cometeram erro, estes escreveram apenas a equação $y^m = 9$ mas não representando sua raiz. A figura 7.8 traz esse item resolvido por uma dupla de alunos:


e) Supondo $m>0$ e, utilizando o fato de que $1=\frac{m}{m}=\underbrace{\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\ldots+\frac{1}{m}}_{m\,vezes}$, quanto deve valer $9^{\left(\frac{1}{m}\right)}$ para que se mantenha a propriedade fundamental?

Resposta: $9^{\left(\frac{1}{m}\right)} \cdot 9^{\left(\frac{1}{m}\right)} \cdot 9^{\left(\frac{1}{m}\right)} \ldots 9^{\left(\frac{1}{m}\right)} \,/\, \sqrt[m]{9}$

Figura 7.8: Item (e) do problema 1 resolvido por uma dupla

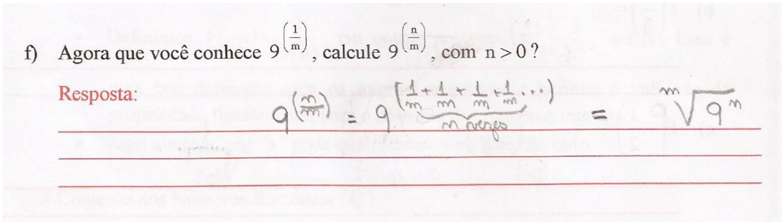
O item (f) busca generalizar o argumento utilizado no item anterior para uma fração qualquer $\dfrac{n}{m}$ com $m, n \in \mathbb{N}^*$. A tabela 7.6 mostra os resultados desse item:

	1ª Série A
Responderam corretamente	30
Cometeram algum erro	2

Tabela 7.6: Resultados do item (f) do Problema 1

Dos dois alunos que cometeram erros, estes inverteram a ordem dos números colocando o numerador da fração no índice do radical e o denominador da fração como expoente da base. Grande parte dos alunos resolveu esse problema de maneira mais direta, percebendo a relação existente entre potência de expoente fracionário e o conceito de radiciação.

A figura 7.9 traz esse item resolvido por uma dupla de alunos:


f) Agora que você conhece $9^{\left(\frac{1}{m}\right)}$, calcule $9^{\left(\frac{n}{m}\right)}$, com $n > 0$?

Resposta: $9^{\left(\frac{m}{m}\right)} = 9^{\left(\underbrace{\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\frac{1}{m}\cdots}_{m \text{ vezes}}\right)} = \sqrt[m]{9^m}$

Figura 7.9: Item (f) do problema 1 resolvido por uma dupla

Na segunda situação que compõe a Folha de Atividade 3, temos dois problemas que abordam, especialmente, a aplicabilidade da definição de potência de expoente racional, explorada na situação anterior.

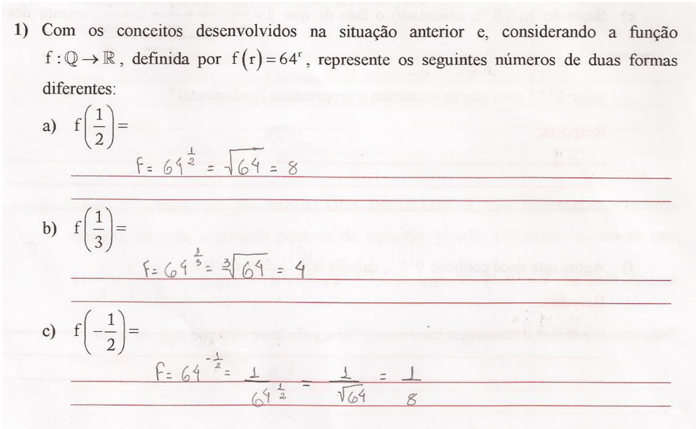
O problema 1 da Situação 2, trata de uma função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definida por $f(r) = 64^r$, onde é proposto aos alunos que obtenham o valor numérico da função aplicada aos seguintes números racionais: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \text{e} -\frac{1}{2}$. A tabela 7.7 mostra os resultados desse item:

	1ª Série A
Responderam corretamente	23
Cometeram algum erro	9

Tabela 7.7: Resultados do problema 1 da Situação 2

Dos nove alunos que cometeram algum erro, sete deles cometeram o mesmo erro no item (c) desse problema, isto é, obter o valor de $f\left(-\frac{1}{2}\right)$. Os mesmos ignoraram o sinal de subtração da fração, colocando como resposta $\sqrt{64} = 8$. Apenas dois dos nove alunos que cometeram erros tentaram aplicar a definição de potência de expoente inteiro e, em seguida, a definição de potência de expoente racional. Porém, esta mesma dupla errou ao expressar sua resposta como $\left(\sqrt{64}\right)^{-1} = -8$.

A figura 7.10 traz esse problema resolvido por uma dupla de alunos:



1) Com os conceitos desenvolvidos na situação anterior e, considerando a função $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$, definida por $f(r)=64^r$, represente os seguintes números de duas formas diferentes:

a) $f\left(\frac{1}{2}\right)=$

$f = 64^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8$

b) $f\left(\frac{1}{3}\right)=$

$f = 64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$

c) $f\left(-\frac{1}{2}\right)=$

$f = 64^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{64^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{64}} = \frac{1}{8}$

Figura 7.10: Problema 1 resolvido por uma dupla

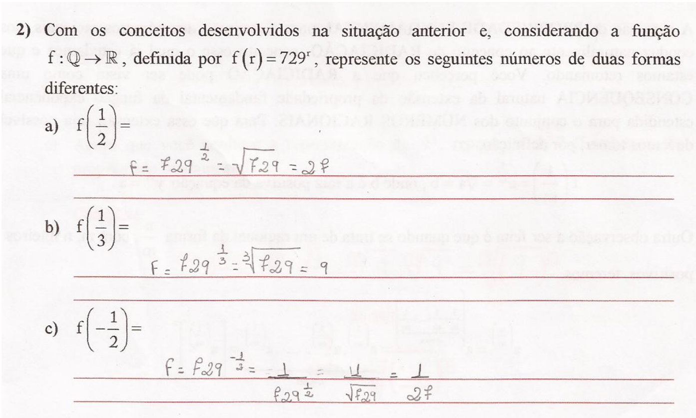
O problema 2 da Situação 2, trata de uma função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definida por $f(r) = 729^r$, onde é proposto aos alunos que obtenham o valor numérico da função aplicada aos seguintes números racionais: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \text{e} -\frac{1}{2}$. A tabela 7.8 mostra os resultados desse item:

	1ª Série A
Responderam corretamente	23
Cometeram algum erro	9

Tabela 7.8: Resultados do problema 2 da Situação 2

Dos nove alunos que cometeram algum erro, sete deles cometeram o mesmo erro no item (c) desse problema, isto é, obter o valor de $f\left(-\frac{1}{2}\right)$. Os mesmos ignoraram o sinal de subtração da fração, colocando como resposta $\sqrt{729} = 27$. Apenas dois dos nove alunos que cometeram erros tentaram aplicar a definição de potência de expoente inteiro e, em seguida, a definição de potência de expoente racional. Porém, esta mesma dupla errou ao expressar sua resposta como $\left(\sqrt{729}\right)^{-1} = -27$. A figura 7.11 traz esse problema resolvido por uma dupla de alunos.

Seguindo o mesmo padrão das demais folhas de atividade, a Folha de Atividade 3 também contém em seu final um pequeno resumo das principais ideias exploradas durante a resolução da Folha de Atividade, que chamamos de “O que você aprendeu?”.



2) Com os conceitos desenvolvidos na situação anterior e, considerando a função $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$, definida por $f(r)=729^r$, represente os seguintes números de duas formas diferentes:

a) $f\left(\frac{1}{2}\right)=$

$f = 729^{\frac{1}{2}} = \sqrt{729} = 27$

b) $f\left(\frac{1}{3}\right)=$

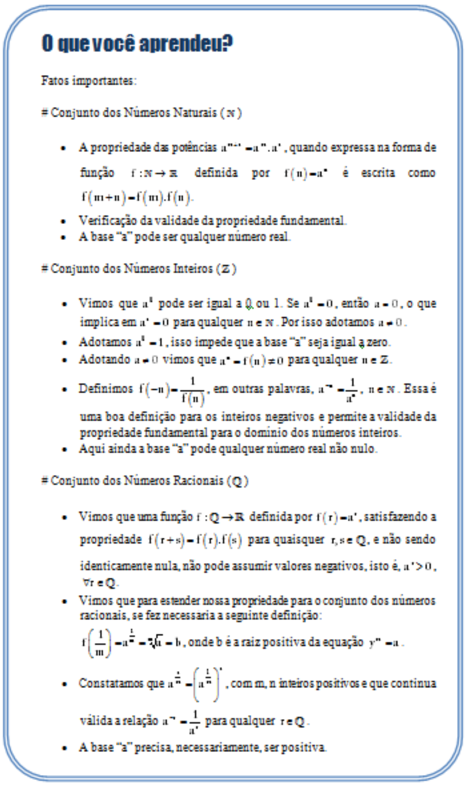
$f = 729^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{729} = 9$

c) $f\left(-\frac{1}{2}\right)=$

$f = 729^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{729^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{729}} = \frac{1}{27}$

Figura 7.11: Problema 2 resolvido por uma dupla

A figura 7.12 mostra o quadro “O que você aprendeu?”desta atividade.



O que você aprendeu?

Fatos importantes:

Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$)

- A propriedade das potências $a^{m+n} = a^m . a^n$, quando expressa na forma de função $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ definida por $f(n)=a^n$ é escrita como $f(m+n)=f(m).f(n)$.
- Verificação da validade da propriedade fundamental.
- A base “a” pode ser qualquer número real.

Conjunto dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$)

- Vimos que a^0 pode ser igual a 0 ou 1. Se $a^0=0$, então $a=0$, o que implica em $a^n=0$ para qualquer $n\in\mathbb{N}$. Por isso adotamos $a\neq 0$.
- Adotamos $a^0=1$, isso impede que a base “a” seja igual a zero.
- Adotando $a\neq 0$ vimos que $a^n=f(n)\neq 0$ para qualquer $n\in\mathbb{Z}$.
- Definimos $f(-n)=\frac{1}{f(n)}$, em outras palavras, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, $n\in\mathbb{N}$. Essa é uma boa definição para os inteiros negativos e permite a validade da propriedade fundamental para o domínio dos números inteiros.
- Aqui ainda a base “a” pode qualquer número real não nulo.

Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$)

- Vimos que uma função $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ definida por $f(r)=a^r$, satisfazendo a propriedade $f(r+s)=f(r).f(s)$ para quaisquer $r,s\in\mathbb{Q}$, e não sendo identicamente nula, não pode assumir valores negativos, isto é, $a^r>0$, $\forall r\in\mathbb{Q}$.
- Vimos que para estender nossa propriedade para o conjunto dos números racionais, se fez necessária a seguinte definição:
  $f\left(\frac{1}{m}\right)=a^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{a}=b$, onde b é a raiz positiva da equação $y^m=a$.
- Constatamos que $a^{\frac{n}{m}}=\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n$, com m, n inteiros positivos e que continua válida a relação $a^{-r}=\frac{1}{a^r}$ para qualquer $r\in\mathbb{Q}$.
- A base “a” precisa, necessariamente, ser positiva.

Figura 7.12: “O que você aprendeu?”da Folha de Atividade 3

7.5 Conclusão

Na Folha da Atividade 3, mais especificamente na Folha de Complemento, vimos que, admitindo ser possível estender a propriedade fundamental para o conjunto dos números racionais, $a^r = a^{\frac{r}{2}+\frac{r}{2}} = a^{\frac{r}{2}}.\, a^{\frac{r}{2}} = b.b = b^2 \geq 0$, mas como $a^s.\, a^{-s} = a^0 = 1$, logo

$a^s \neq 0$ para qualquer $s \in \mathbb{Q}$. Daí concluímos que $a^r = b^2 > 0$ para qualquer $r \in \mathbb{Q}$. Em outras palavras, perdemos a liberdade da escolha da base, nos restringindo a valores estritamente positivos, para que assim seja possível estender a propriedade fundamental para o conjunto dos números racionais. Esse argumento justifica a escolha de uma base positiva, dependendo do domínio, quando se define função exponencial, porém, justificativas como essa raramente são encontradas nos livros didáticos voltados ao Ensino Médio. Vimos também na Folha de Atividade 3, que a maneira mais conveniente de se definir uma potência de expoente fracionário do tipo $a^{\frac{1}{m}}$ é adotar seu valor igual à raiz positiva da equação $y^m = a$, já que $\underbrace{a^{\frac{1}{m}}.a^{\frac{1}{m}}.\ldots.a^{\frac{1}{m}}}_{m\ vezes} = a^{\frac{m}{m}} = a$. Além de ser uma boa definição, esta ainda possibilita justificar a relação íntima existente entre o conceito de potência de expoente racional e o conceito de radiciação, isto é, que $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$, com $m \neq 0$. Esta relação costuma ser apresentada nos livros didáticos voltados ao Ensino Médio como mais uma regra a ser decorada. Vimos ainda que, utilizando a propriedade fundamental, podemos generalizar essa definição para qualquer fração do tipo $\dfrac{n}{m}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $m \neq 0$, podendo então deduzir o fato de que $a^{\frac{n}{m}} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$ e que ainda continua válida a relação $a^r.a^{-r} = 1$ para qualquer $r \in \mathbb{Q}$.

Apenas uma pergunta ainda não foi respondida nessa atividade: como encontrar a raiz positiva da equação $y^m = a$? Como já foi comentado anteriormente, desenvolvemos a Folha de Atividade 4 em uma planilha eletrônica. Esta contém um algoritmo simples, porém de grande utilidade, baseado no Teorema dos Intervalos Encaixantes, que possibilita encontrar o valor exato, ou com a aproximação que se queira, da raiz positiva da equação $y^m = a$. Porém, os detalhes da Folha de Atividade 4 e sua aplicação serão comentados no próximo capítulo.

Capítulo 8

Descrição e análise da Folha de Atividade 4

8.1 Introdução

Vimos que o objetivo principal da Folha de Atividade 3 foi estender a definição de potência de expoente inteiro para potência de expoente racional. Fizemos isso definindo convenientemente as potências da forma $a^{\frac{1}{m}}$, com $m \neq 0$, como sendo a raiz positiva da equação $y^m = a$, e por consequência definimos $a^{\frac{n}{m}}$ como y^n, preservando a validade da propriedade fundamental, isto é, $a^{r+s} = a^r.a^s$ para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$. Porém, não foram oferecidas ferramentas para a obtenção da raiz da equação $y^m = a$. Nesse contexto é que se faz interessante o uso de um método prático (aqui chamado de Algoritmo) para o cálculo do valor aproximado de y, que para nós representa o valor da potência $a^{\frac{1}{m}}$. Certamente, o cálculo dessa raiz por meio de uma calculadora, ou qualquer outro software matemático seria direto e consequentemente muito menos trabalhoso, porém, achamos muito importante que o aluno entenda o mecanismo e que tenha em mãos uma ferramenta simples e de fácil compreensão, para que com ela possa compreender melhor o valor exato ou aproximado dessa raiz. Esta foi nossa razão fundamental de desenvolver o algoritmo. O método apresentado na Folha de Atividade 4 é baseado em um resultado da análise matemática denominado Teorema dos Intervalos Encaixantes. Em linhas gerais, o teorema nos garante que podemos ir “cercando”o número que queremos calcular fazendo aproximações por falta e por excesso.

A Folha de Atividade 4 é um tanto diferente das demais que já foram aplicadas, principalmente por não se tratar de uma folha, mas sim, uma planilha eletrônica contendo três planilhas eletrônicas diferentes. A primeira planilha, cujo título é "Introdução", contém as informações necessárias para que os alunos possam entender como o algoritmo funciona. A segunda planilha, cujo título é "Algoritmo", contém o Algoritmo em si, onde os alunos podem encontrar o valor aproximado (ou exato em alguns casos) da raiz positiva de uma equação do tipo $y^m = a$. Vale lembrar que todas as planilhas foram protegidas com senha, e somente algumas células escolhidas ficaram sem proteção, para que os alunos pudessem digitar os valores ou alterar o expoente/resultado da equação presente na planilha algoritmo. Decidimos tomar essa medida, pois, se eventualmente um aluno, sem querer, alterasse o conteúdo de uma célula, o algoritmo não funcionaria corretamente. Por fim, a terceira planilha, cujo título é "Atividades", contém dois problemas para serem resolvidos com o auxílio do algoritmo fornecido. Vamos detalhar o conteúdo de cada uma das planilhas, começando pela planilha "Introdução".

8.2 A planilha de Introdução

A planilha "Introdução"consiste em apresentar o método que será utilizado para determinar a raiz positiva da equação $y^m = a$, que em linhas gerais consiste em ir "cercando"o número que queremos calcular, aproximando-se dele por falta e por excesso. Na verdade o método busca encontrar o único número pertencente a uma sequência decrescente de intervalos fechados e limitados, cujos comprimentos tendem a zero. Consideremos o seguinte exemplo: obter uma aproximação decimal do valor da potência $4^{\frac{1}{3}}$, isto é, calcular um valor "suficientemente"aproximado[1] da única raiz positiva da equação $y^3 = 4$. Assim, o nosso método consiste, inicialmente, em determinarmos dois números inteiros e consecutivos de tal forma que o cubo do primeiro seja menor ou, no máximo, igual que 4 e o cubo do segundo seja maior do que 4. Nesse nosso exemplo, é bem simples ver que os números são 1 e 2, pois, $1 = 1^3 < 4 < 2^3 = 8$. Se um dos cubos encontrados em cada processo for igual a 4 o processo se encerra, caso contrário continuamos até um certo ponto, pois, esse processo geralmente é infinito, neste caso, por uma questão de escolha, adotaremos como resposta final, a aproximação por falta. Como vimos $1 < 4 < 8$, então

[1]Na Folha de Atividade 4 orientamos os alunos a utilizarem 8 casas decimais nas aproximações.

$\sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{8}$, ou seja, $1 < y < 2$. Logo, encontramos o primeiro intervalo que contém a raiz que estamos procurando. Em seguida, esse intervalo encontrado é subdividido em 10 subintervalos iguais. Os pontos de sub-divisão desse intervalo inicial são os números:

$$1,0 - 1,1 - 1,2 - 1,3 - 1,4 - 1,5 - 1,6 - 1,7 - 1,8 - 1,9 - 2,0$$

Nosso objetivo agora é saber entre qual dupla de números decimais "consecutivos" está y, solução positiva da equação $y^3 = 4$. Fazemos isso por aproximação, elevando cada um desses números ao cubo, e é por esse motivo que achamos conveniente montar uma planilha eletrônica, pois assim poderíamos deixar os cálculos mais extensos para a planilha executar. Feitos os cálculos, obtemos a seguinte tabela de valores:

$(1,0)^3 =$	1
$(1,1)^3 =$	1,331
$(1,2)^3 =$	1,728
$(1,3)^3 =$	2,197
$(1,4)^3 =$	2,744
$(1,5)^3 =$	3,375
$(1,6)^3 =$	4,096
$(1,7)^3 =$	4,913
$(1,8)^3 =$	5,832
$(1,9)^3 =$	6,859
$(2,0)^3 =$	8

Tabela 8.1: Cubo dos pontos de divisão do intervalo inicial

As linhas destacadas em verde nos permitem ver que o número 4 está entre os valores 3,375 e 4,096, isto é , $3,375 < 4 < 4,096$, e isso nos permite sentir claramente que o y que estamos procurando está entre 1,5 e 1,6, isto é, $1,5 < y < 1,6$. Encontramos assim um novo intervalo [[1,5 ; 1,6]] que contém y, esse intervalo tem comprimento 10 vezes menor que o primeiro [1 ; 2], pois, seu comprimento $\left(\frac{1}{10}\right)$ é 10 vezes menor que o comprimento do primeiro intervalo (de comprimento igual a 1) que havíamos determinado.

Repetindo o mesmo processo com esse novo intervalo, isto é, subdividindo-o em 10 partes iguais e elevando ao cubo todos os números encontrados (com o auxílio da planilha eletrônica) encontramos um novo intervalo de valores que contém y. A tabela 8.2 ilustra os valores encontrados.

$(1,50)^3 =$	3,375
$(1,51)^3 =$	3,442951
$(1,52)^3 =$	3,511808
$(1,53)^3 =$	3,581577
$(1,54)^3 =$	3,652264
$(1,55)^3 =$	3,723875
$(1,56)^3 =$	3,796416
$(1,57)^3 =$	3,869893
$(1,58)^3 =$	3,944312
$(1,59)^3 =$	4,019679
$(1,60)^3 =$	4,096000

Tabela 8.2: Cubo dos pontos de divisão do segundo intervalo

Notamos claramente que a raiz que estamos procurando está entre 1,58 e 1,59, isto é, $1,58 < y < 1,59$. Encontramos um novo intervalo de comprimento $\left(\dfrac{1}{10^2}\right)$ que é 100 vezes menor que o primeiro intervalo encontrado. Estamos literalmente "cercando" a raiz procurada. Este processo pode ser repetido quantas vezes forem necessárias, obtendo, cada vez, uma melhor aproximação para o valor de y. Vale lembrar que o erro cometido, quando adotamos como resposta a aproximação por falta, é da ordem de $\dfrac{1}{10^n}$, onde n é o número de passos. Exemplificando: 1,58 é um valor aproximado (por falta, porque é menor que a raiz procurada), então nós dizemos que 1,58 é a (quase) raiz cúbica de 4, onde a diferença entre o valor exato e a aproximação 1,58 é menor que 1/100.

8.3 A planilha Algoritmo

A planilha Algoritmo será o local utilizado para a realização dos cálculos extensos, que ficarão por conta das funções e aplicações matemáticas aplicadas aos conteúdos de determinadas células da planilha eletrônica. Procuramos desenvolver a planilha da forma mais iterativa possível, a começar com a equação a ser resolvida. Na planilha, as células F3, G2, H3 e I3 todas juntas formam uma equação, que por uma escolha arbitrária é $y^3 = 4$. Entretanto, é possível alterar os valores das células G2 e I3, que contêm, respectivamente, os valores do expoente e do resultado. A figura 8.1 ilustra a equação.

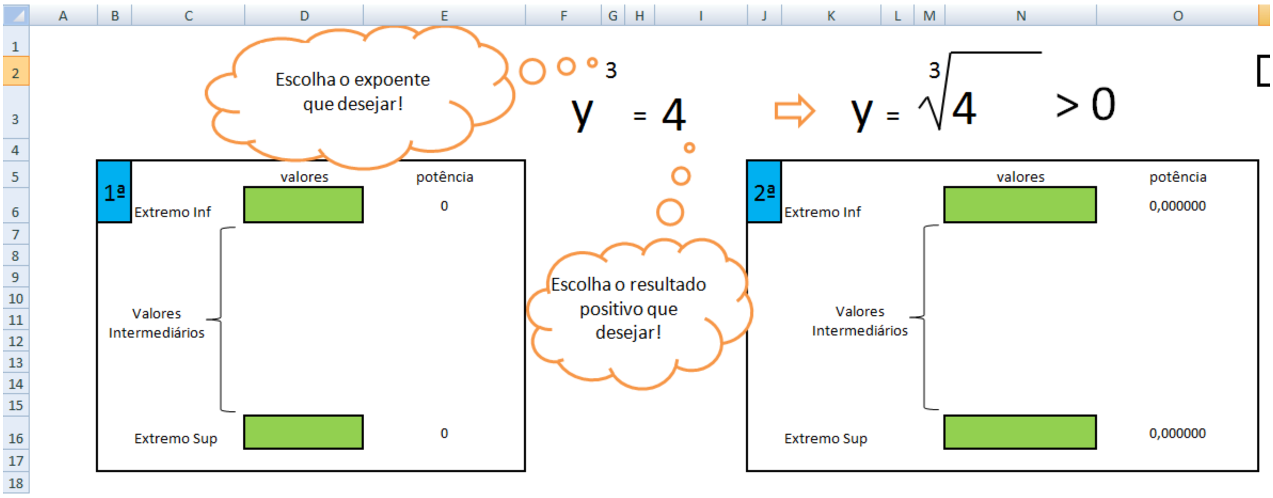


Figura 8.1: Equação da planilha Algoritmo

A célula M2 possui o mesmo valor da G2, que corresponde ao índice da raiz n-ésima e a célula N3 possui o mesmo valor da célula I3, que corresponde ao valor do radicando. Dessa forma, quando o aluno altera o valor do expoente da equação ou seu resultado, automaticamente se alteram o índice e o radicando da raiz n-ésima ao lado.

De posse da equação, o aluno deve encontrar um par de números inteiros e consecutivos para formar o primeiro intervalo que contém y, de modo que o extremo inferior seja menor, ou no máximo igual, ao resultado da equação e o extremo superior seja maior que o resultado da equação. No caso da equação $y^3 = 4$, os números são 1 e 2, como já vimos anteriormente, pois 1 é o maior número inteiro que elevado ao cubo é menor ou igual a 4. Esses números devem ser digitados nas células D6 e D16, respectivamente. As células compreendidas entre D6 e D16 formam a partição do intervalo, isto é, esses valores são os pontos de subdivisão do intervalo em 10 partes iguais, aplicando à célula D7 a fórmula $D_{i+1} = D_i + 0,1$ para $i = \{7, 8, \ldots, 15\}$ obtemos os seguintes valores

$$1,0 - 1,1 - 1,2 - 1,3 - 1,4 - 1,5 - 1,6 - 1,7 - 1,8 - 1,9 - 2,0$$

Entretanto, devemos aplicar às células que contêm os pontos de subdivisão uma formatação condicional, para evitar que todos os pontos de subdivisão apareçam antes que seja digitado o extremo superior. Assim, a formatação condicional muda a cor da fonte dessas células para a cor branca sempre que D16 for igual a zero, isto impede que o texto fique visível, já que o preenchimento das células foi alterado para a cor branca. Dessa forma, os pontos de subdivisão voltam a cor preta no momento em que o valor de D16 for digitado.

A coluna E, da célula E6 até a E16, faz o cálculo do cubo (para o caso do nosso exemplo) dos pontos de subdivisão através da fórmula $E_{i+1} = E_i^{(G2)}$ para $i = \{6, 7, \ldots, 16\}$. Dessa forma, o aluno deve procurar o maior dos números cujo seja menor ou igual a 4 e observar na coluna D o ponto de subdivisão correspondente e o imediatamente maior do que ele. Estes pontos de subdivisão serão, respectivamente, o extremo inferior e o extremo superior do próximo intervalo que contém y. A figura 8.2 ilustra essa situação.

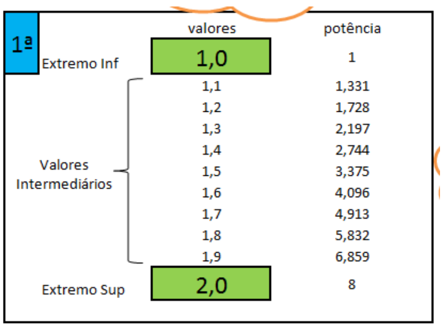


Figura 8.2: Primeira etapa do algoritmo

Os dois pontos de subdivisão devem ser digitados, respectivamente nas células N6 e N16 da segunda etapa, para que a planilha construa os pontos de subdivisão desse novo intervalo e o aluno possa fazer a pesquisa dentre os cubos presentes na coluna M, para encontrar novamente os pontos de subdivisão adequados que serão extremos do novo intervalo que contém y. No caso dessa planilha, esse processo é repetido oito vezes, obtendo uma aproximação decimal de oito casas decimais, que por opção, é a aproximação por falta.

8.4 A planilha Atividades

A planilha atividades traz especificamente dois problemas para serem resolvidos com o auxílio do algoritmo. O primeiro problema conta com quatro equações para serem resolvidas, são elas $y^5 = 7$, $y^4 = 53$, $y^3 = 220$ e $y^8 = 343$. A frente de cada equação, existe um campo denominado "valor aproximado de y", onde o aluno deve digitar a resposta[2] encontrada no final do oitavo processo. O segundo problema traz um texto que faz referência a história do problema da duplicação do cubo, e como exercício, pede aos alunos que obtenham, utilizando o algoritmo, o valor aproximado da raiz cúbica de 2.

8.5 Resumo da Aplicação

No quinto encontro, dia 14/11/2012, todos os 32 alunos estavam presentes. A aplicação da Folha de Atividade 4 ocorreu no laboratório de Informática da E.E. prof° João Caetano da Rocha. O laboratório dispõe de 12 computadores, sendo assim, os alunos foram divididos em 8 trios e 4 duplas. A Folha de Atividade 4 tomou o tempo das duas aulas desse encontro, e foi terminada nesse mesmo dia.

8.6 Análise a Priori: Expectativas sobre a Folha de Atividade 4

De modo geral, todos os problemas presentes na planilha eletrônica, bem como seu conteúdo informativo, tem como objetivo principal oferecer uma aprendizagem significativa, no que diz respeito à resolução de equações do tipo $y^m = a$, com $a > 0$, em outras palavras, calcular com uma aproximação significativa, o valor da $\sqrt[n]{a}$ para um dado $a > 0$. Com relação ao problema 1, da planilha de atividades, era esperado por nós que os alunos encontrassem algumas dificuldades iniciais, no momento em que deveriam obter os dois inteiros consecutivos, que serão os extremos do primeiro intervalo que contém y. A segunda dificuldade acreditamos pode aparecer no momento em que o aluno deve observar em qual intervalo o resultado da equação se enco ntra, e, em seguida, observar na primeira coluna, os números que serão extremos do novo intervalo que contém y. Outra dificuldade que pode aparecer, é quando o extremo do novo intervalo coincide com o extremo do intervalo anterior. Isso pode gerar uma dúvida no momento em que o aluno busca as informações, pois esses valores não recebem a devida atenção por não estar em destaque, e sim quase que "escondido"na primeira linha da tabela de valores.

[2] A princípio ficou combinado com os alunos que seria adotada como resposta a aproximação por falta.

No problema 2, acreditamos que uma dificuldade em potencial seria o fato de que o aluno deve reformular o problema, visto que é pedido a ele que calcule o valor aproximado de $\sqrt[3]{2}$ e que na planilha não há campos para preenchimento dessa forma, e sim, na forma de equação $y^m = a$. Assim, o aluno deve entender que, encontrar o valor de $\sqrt[3]{2}$, é o mesmo que encontrar a raiz positiva da equação $y^3 = 2$. Acreditamos que nessa transição, entre a notação e a escrita em forma de equação, podem haver dúvidas.

8.7 Aplicação e Análise Posteriori

De início os alunos foram orientados para que juntos, nos grupos, fizessem a leitura das informações contidas na planilha "Introdução". Após a leitura, os alunos foram questionados pelo professor, que perguntou se todos haviam entendido a explicação contida no texto que acabaram de ler. Vários alunos responderam que não haviam entendido e dessa forma, o mais conveniente naquele momento, era fazer uma explicação em lousa, com um exemplo numérico. Assim foi feito, uma explicação expositiva na lousa da sala de informática, para que os alunos entendessem o procedimento geral envolvido na planilha. A figura 8.3 ilustra o momento em que os grupos faziam a leitura.

Com o início da resolução dos problemas propostos, pudemos observar que algumas das dificuldades relatadas na análise a priori foram confirmadas. A primeira delas foi no momento em que um grupo de alunos ficou em dúvida sobre quais números colocar para iniciar o processo, isto é, ficaram em dúvida sobre quais números colocar como extremos do primeiro intervalo que contém y. Porém, outros grupos se utilizaram de um "artifício"para encontrar os extremos do primeiro intervalo: testar alguns valores na planilha e verificar se os resultados obtidos estavam próximos do resultado apresentado na equação. Outra dificuldade confirmada foi quando o extremo do intervalo coincide com o extremo do intervalo anterior, como no caso da equação do item (c), ou seja, $y^3 = 220$, onde o extremo inferior do segundo intervalo coincide com o extremo inferior do primeiro intervalo. Outra dificuldade observada, que também era esperada por nós na análise a priori, apareceu no momento em que dois grupos de alunos não conseguiam encontrar o resultado da equação na coluna de valores criada pela planilha, em outras palavras, os alunos erraram a certa altura do algoritmo e colocaram um valor incorreto como extremo de um dos novos intervalos, o que ocasionou um erro no cálculo. Como os

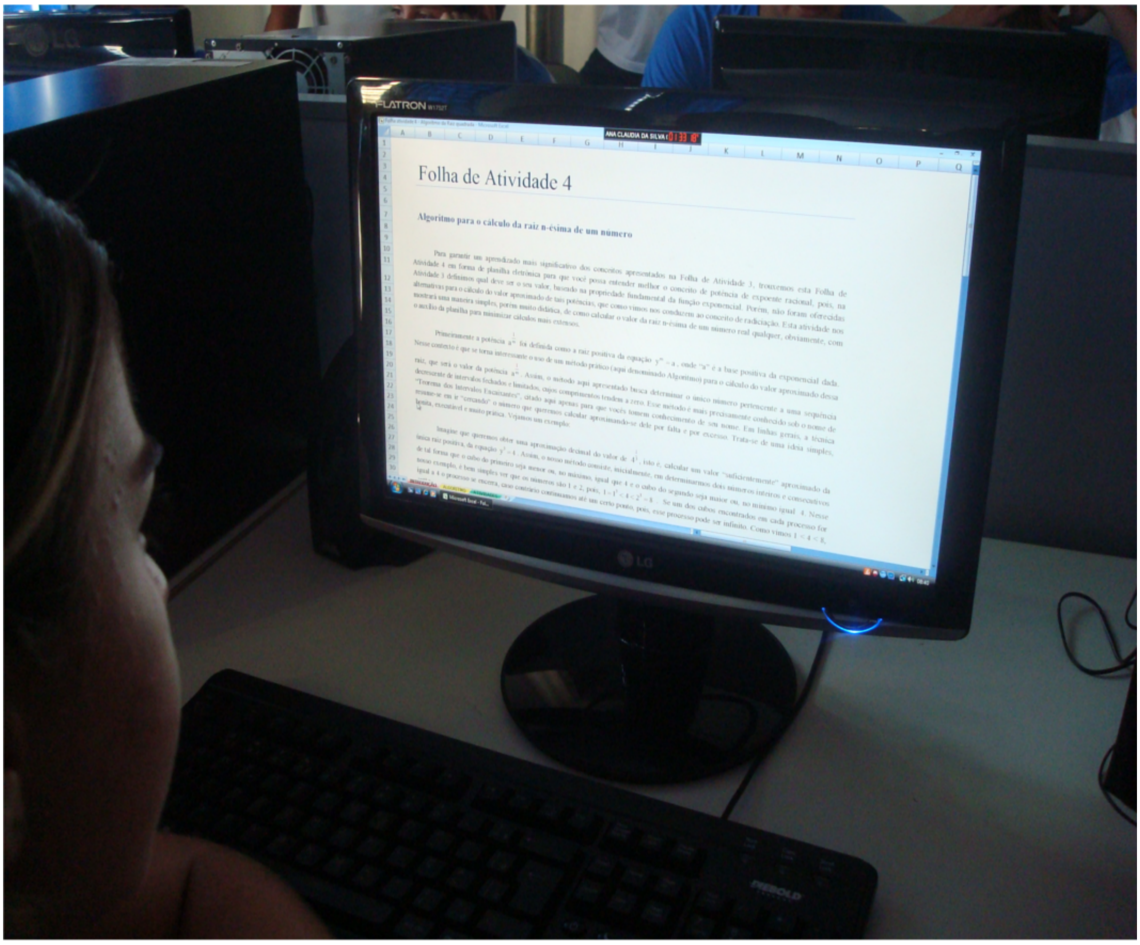


Figura 8.3: Leitura da Planilha Introdução

extremos extavam incorretos, os valores mostrados pela planilha eram todos maiores que o resultado mostrado pela equação, mostrando que há certa dificuldade na visualização dos valores corretos na coluna da esquerda (extremos do novo intervalo). A figura 8.4 e 8.5 ilustram alguns momentos da aplicação desta atividade.

8.8 Conclusão

Na Folha de Atividade 4, colocamos a disposição dos alunos um método simples, porém, muito prático, de como obter o valor exato ou aproximado da raiz n-ésima de um dado número real $a > 0$, encontrando por aproximações sucessivas, a raiz positiva da equação $y^m = a$. Fizemos isso utilizando-se do recurso das planilhas eletrônicas, de uma maneira iterativa e baseada no Teorema dos Intervalos Encaixantes. Acreditamos que os objetivos por nós delineados foram atingidos, apesar das dificuldades encontradas na aplicação,

Figura 8.4: Aplicação da Atividade

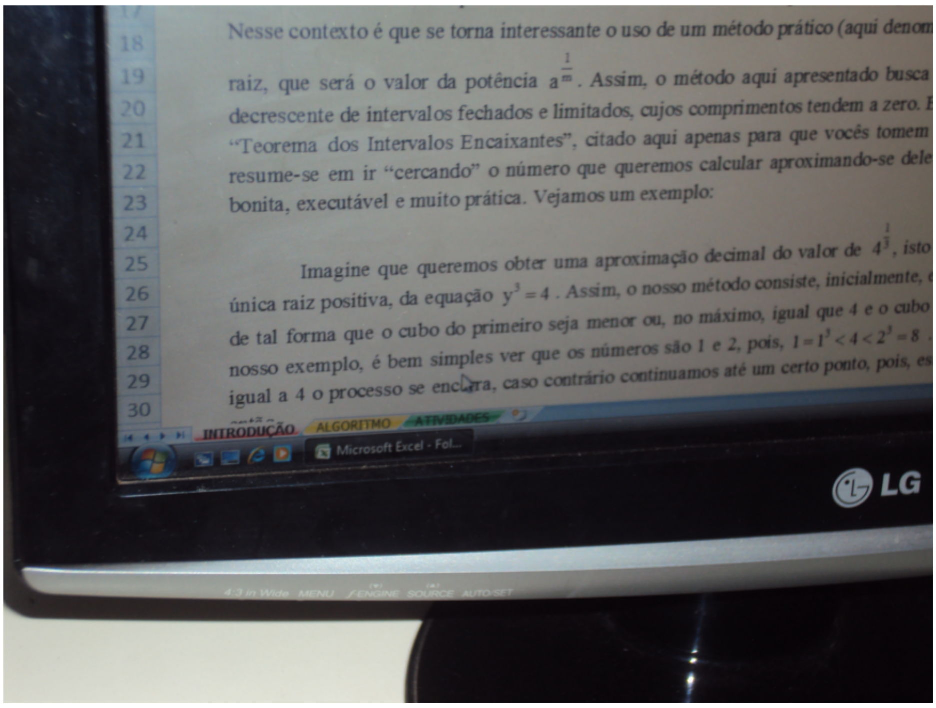


Figura 8.5: Aplicação da Atividade

devido ao espaço físico reduzido da sala de informática da escola, todos entenderam de fato como as calculadoras realizam o cálculo aproximado ou exato de tais raízes, além de terem contato com o valor aproximado de algumas delas não tendo em mãos somente a representação de um número, mas sim ter uma noção de seu valor aproximado até certo número de casas decimais, o que para nós é o mais importante.

Capítulo 9

Descrição e análise da Folha de Atividade 5

9.1 Introdução

Vimos na atividade anterior um método que possibilita obter o valor aproximado de uma potência de expoente racional do tipo $a^{\frac{1}{m}}$, isto é, obter o valor (aproximado) da raiz positiva da equação $y^m = a$, ou seja, $y = a^{\frac{1}{m}}$. Agora, queremos que fique claro o que significa uma potência cujo expoente é um número irracional, isto é, que significado tem a notação $2^{\sqrt{3}}$ por exemplo? Para ajudar a responder a essa e outras perguntas é que elaboramos uma nova planilha, agora voltada para o cálculo de potências cujos expoentes são números irracionais. Vejamos, primeiramente, em quais conceitos matemáticos a planilha se baseia e, em seguida, como ela funciona.

Sabemos que todo número real admite uma representação decimal. Essa representação pode ser finita ou infinita, e no caso se der infinita ainda temos duas possibilidades: periódica ou não periódica. Sendo assim, qualquer número real, seja ele racional ou irracional, possui uma representação decimal. Então, quando escrevemos $2^{\sqrt{3}}$ devemos ter em mente que o número real $\sqrt{3}$ possui uma representação decimal, que por sua vez é infinita e não periódica. Como $\sqrt{3}$ possui infinitas casas decimais, é impossível, na prática, escrevê-lo em uma folha de papel com todas as suas casas decimais. Para tanto, utilizamos aproximações razoáveis quando queremos expressá-lo utilizando sua representação decimal. Por exemplo: podemos escrever $\sqrt{3}$, aproximadamente, utilizando

14 casas decimais, isto é, $\sqrt{3} \approx 1,73205080756887$ (lembrando que a planilha eletrônica que estamos utilizando tem um limite máximo de 14 casas decimais). Existem softwares que tornam essas aproximações mais precisas, mas, o que temos já mais do que suficiente. Assim, nossa planilha fará uso da representação decimal do expoente para o calcular o valor aproximado, por falta ou por excesso, da potência desejada. Vejamos como isso é feito por meio de um exemplo.

Vamos calcular o valor aproximado de $2^{\sqrt{3}}$. Como podemos fazer isso? Primeiramente, devemos encontrar um par de números inteiros consecutivos de tal forma que o menor deles seja o maior número natural menor ou, no máximo, igual a $\sqrt{3}$ e o maior deles seja o menor número natural maior que $\sqrt{3}$, que para o nosso exemplo são os números 1 e 2, pois, como veremos na Folha de Complemento 5, cujo título é "Os valores da base a", a função exponencial que possui base maior do que 1 é uma função crescente, e isto nos permite escrever que como $1 < \sqrt{3} < 2 \Rightarrow 2^1 < 2^{\sqrt{3}} < 2^2$. Daí, concluímos que $2 < 2^{\sqrt{3}} < 4$ e nesse caso o erro é menor ou no máximo igual a 2 (resultado de $4-2$). Para o próximo passo, observamos a representação decimal do número $\sqrt{3}$. Utilizando somente uma casa decimal, vemos que $1 < 1,7 < \sqrt{3} < 1,8 < 2 \Rightarrow 1 < \dfrac{17}{10} < \sqrt{3} < \dfrac{18}{10} < 2$, então teremos $2^1 < 2^{\frac{17}{10}} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{\frac{18}{10}} < 2^2$. Para calcular o valor de $2^{\frac{17}{10}}$ devemos fazer $\left(2^{\frac{1}{10}}\right)^{17}$, isto é multiplicar $2^{\frac{1}{10}}$ por ele mesmo 17 vezes, mas, já sabemos calcular o valor aproximado de $2^{\frac{1}{10}}$, como vimos na Folha de Atividade 4. Logo, basta multiplicar o valor encontrado por ele mesmo 17 vezes. Entretanto, este procedimento é muito longo e, consequentemente, exige um tempo grande. Portanto, para calcularmos os valores de $2^{\frac{17}{10}}$ e de $2^{\frac{18}{10}}$ nos valemos da planilha eletrônica, a qual já possui um procedimento interno que realiza esses cálculos. Isso reduzirá nosso trabalho com cálculos mais extensos. Votando ao nosso exemplo, utilizando a planilha eletrônica para calcular as potências $2^{\frac{17}{10}}$ e $2^{\frac{18}{10}}$ obtemos os seguintes valores aproximados (com 14 casas decimais): 3,24900958542494 e 3,48220225318450. Assim, $3,24900958542494 < 2^{\sqrt{3}} < 3,48220225318450$, e, nesse caso, nosso erro é no máximo 0,2331926677596 (resultado de $3,48220225318450 - 3,24900958542494$). Para diminuirmos ainda mais nosso erro, basta avançar uma casa decimal na representação decimal do número $\sqrt{3}$. Utilizando somente duas casas decimais, vemos que $1 < 1,7 < 1,73 < \sqrt{3} < 1,74 < 1,8 < 2 \Rightarrow 1 < \dfrac{17}{10} < \dfrac{173}{100} < \sqrt{3} < \dfrac{174}{100} < \dfrac{18}{10} < 2$, então teremos $2^1 < 2^{\frac{17}{10}} < 2^{\frac{173}{100}} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{\frac{174}{100}} < 2^{\frac{18}{10}} < 2^2$. Para calcular o valor de $2^{\frac{173}{100}}$ devemos fazer

$\left(2^{\frac{1}{100}}\right)^{173}$, isto é, multiplicar $2^{\frac{1}{100}}$ por ele mesmo 173 vezes. Portanto, para calcularmos os valores de $2^{\frac{173}{100}}$ e $2^{\frac{174}{100}}$ utilizaremos a planilha eletrônica. Voltando ao nosso exemplo, utilizando a planilha para calcular as potências $2^{\frac{173}{100}}$ e $2^{\frac{174}{100}}$ obtemos os seguintes valores aproximados (com 14 casas decimais): 3,31727818325777 e 3,34035167771348. Assim, $3,31727818325777 < 2^{\sqrt{3}} < 3,34035167771348$ e, nesse caso, nosso erro é no máximo 0,0230734944557 (resultado de $3,34035167771348 - 3,31727818325777$). Fica claro que o que estamos construindo é uma sequência decrescente de intervalos fechados e limitados, cujos comprimentos tendem a zero, em outras palavras, estamos utilizando o Teorema dos Intervalos Encaixantes.

9.2 Funcionamento da Planilha

Vimos como podemos proceder para calcular o valor aproximado de uma potência cujo expoente é um número irracional tendo sua representação decimal. Vejamos como a planilha foi desenvolvida para efetuar os cálculos mais extensos e como ela contribui para um melhor entendimento de tais potências.

A pasta de trabalho (arquivo) entregue aos alunos, é composta de quatro planilhas diferentes, sendo que a primeira contém as três atividades que deverão ser realizadas, e as demais são reservadas para a resolução de cada uma das três atividades propostas. A figura 9.1 ilustra as atividades a serem realizadas. Diferentemente da planilha desenvolvida anteriormente, onde os alunos resolvem todas as atividades em apenas uma planilha, achamos melhor separar cada atividade em uma planilha diferente, proporcionando um espaço maior para resolução dos exercícios, além de conservar os registros feitos pelos alunos em cada atividade, ao passo que na atividade 4, o aluno deve apagar todos os dados para realizar novamente os cálculos do novo exercício. Isto não ocorre nesta planilha.

O aluno deve clicar sobre um dos botões verdes para escolher a atividade que deseja fazer. Cada uma dessas células (pintadas de cor verde) contém um hiperlink para a planilha correta onde as informações relativas a esta atividade serão digitadas. Por exemplo: digamos que o aluno clique sobre a atividade 2. Automaticamente, o aluno será conduzido à tela correspondente a planilha “Atividade 2”, que será utilizada para

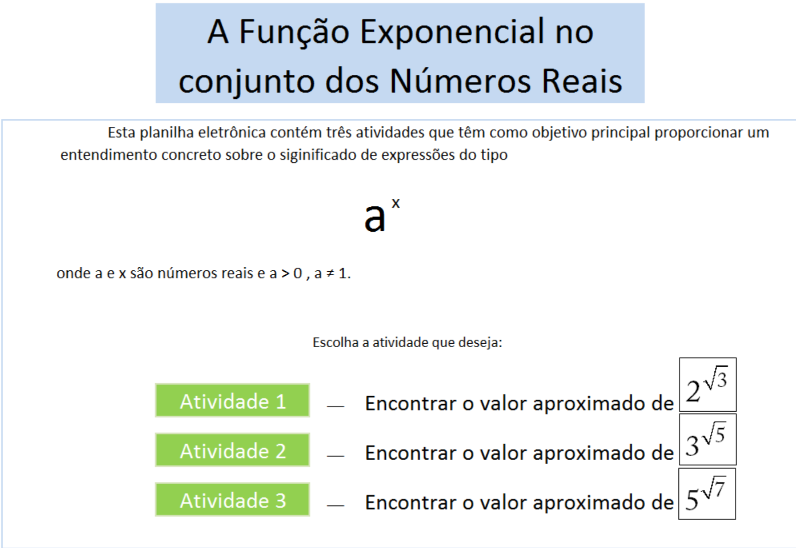


Figura 9.1: Atividades propostas

resolver a atividade 2, ou seja, na Atividade 2 o aluno deve obter o valor aproximado de $3^{\sqrt{5}}$. Como necessitamos da representação decimal do número $\sqrt{5}$, então o aluno deve digitar nas células D6 e D8, respectivamente, os valores da base 3 e e do expoente $\sqrt{5}$ (no caso dessa planilha, todos os expoentes são raízes quadradas não exatas, dessa forma o aluno somente deve digitar o radicando, que no caso é o número 5). A figura 9.2 ilustra parte da planilha.

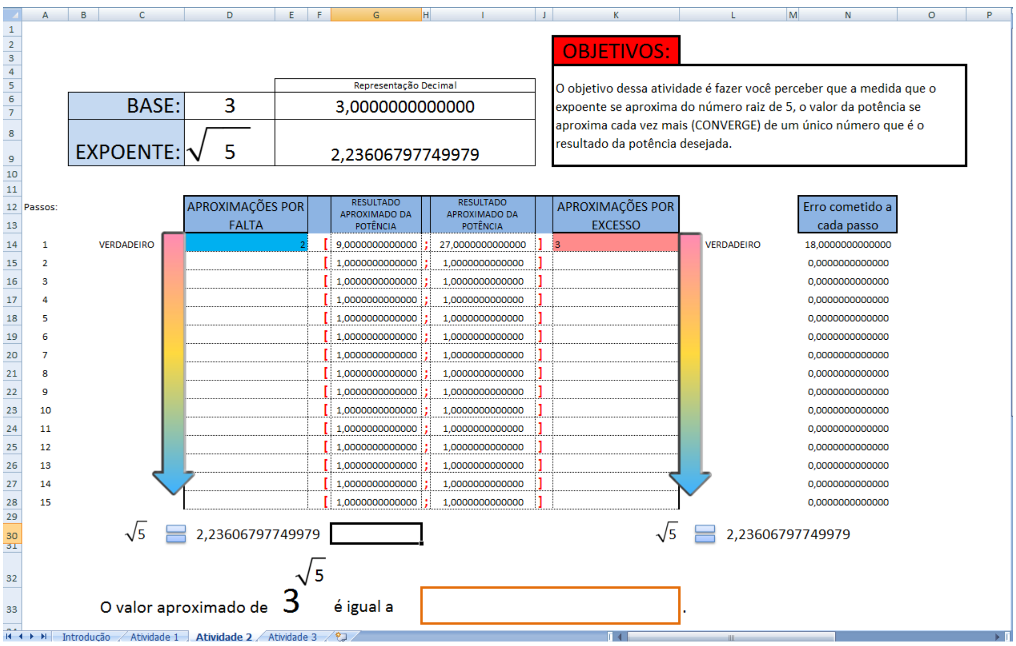


Figura 9.2: Planilha contendo as informações sobre a Atividade 2

Como podemos ver na figura 9.2, a célula E6 e E8 contém as representações decimais da base e do expoente, respectivamente. Para obter tais representações decimais, primeiramente aumentamos o número de casas decimais dessas células ao máximo, isto é, 14 casas decimais. Em seguida, a célula E6 foi definida como sendo igual ao resultado de D6 e a célula E8, foi definida como sendo "=RAIZ(D8)", isto é, o valor da raiz quadrada do radicando digitado na célula D8[1]. As células F32 e E33 têm o mesmo valor das células D8 e D6, respectivamente. Isso torna a planilha mais interativa, pois quando o aluno digita os valores da base (3) e do radicando do expoente (5), automaticamente a planilha monta a potência desejada, acompanhada da seguinte frase: "O valor aproximado de $3^{\sqrt{5}}$ é igual a". Exatamente à frente da frase, está o campo onde o aluno deve digitar o valor aproximado encontrado após efetuar os cálculos. A figura 9.3 mostra mais detalhes dessa parte da planilha.

Figura 9.3: A potência desejada

Como podemos observar ainda na figura 9.3, há também um campo onde o aluno deve digitar o erro encontrado em sua aproximação, bem como o botão voltar, que ao ser clicando, leva o aluno, através de um hiperlink, até a primeira planilha que contém as atividades, para que o mesmo possa escolher uma atividade diferente para resolver. Mais adiante daremos mais detalhes sobre o erro das aproximações.

Continuando a análise das células que compõem a planilha, temos, na parte central da planilha, uma grande tabela com várias colunas, onde cada coluna tem uma função diferente. Vamos começar pela coluna A, na célula A12. Esta célula, contém o texto "Passos", seguindo logo abaixo dela, os números naturais de 1 a 15. Esses números correspondem ao número de passos que serão realizados até obtermos a aproximação com 14 casas decimais, ou seja, um passo para cada casa decimal que queremos calcular. Na coluna D temos as aproximações por falta, mais especificamente, da célula D14 à D28. Estas células devem ser preenchidas com as aproximações por falta do expoente em

[1] O símbolo de radical presente na célula D8 é apenas uma figura, não é um operador da planilha eletrônica

questão, em outras palavras, o aluno deve encontrar o maior número natural menor, ou no máximo igual, a $\sqrt{5}$, que no caso é o número 2, e digitá-lo na célula D14, para começar o processo. Este número será o extremo inferior do primeiro intervalo. Em seguida, o aluno deve encontrar o menor número inteiro maior que $\sqrt{5}$, que no caso será o número 3, e digitá-lo na célula K14, pois na coluna K temos as aproximações por excesso, mais especificamente da célula K14 à K28. Este número será o extremo superior do primeiro intervalo que contém o valor da potência que estamos procurando. Feito isso, o aluno deve avançar na representação decimal de $\sqrt{5}$ e encontrar o maior número racional que possua apenas uma casa decimal que é menor, ou no máximo igual, a $\sqrt{5}$, que no caso é o número racional 2,2. Este número será o extremo inferior do novo intervalo que é 10 vezes menor que o intervalo anterior e também contém a potência que estamos procurando. Em seguida, o aluno deve encontrar o menor número racional que possua apenas uma casa decimal que seja maior que $\sqrt{5}$, que no caso é o número racional 2,3. Estes dois valores, 2,2 e 2,3, devem ser digitados, respectivamente, nas células D15 e K15, formando o segundo intervalo, que é 10 vezes menor que o primeiro.

Como podemos observar, estamos criando uma sequência decrescente de intervalos fechados, encontrando a cada passo, uma melhor aproximação para a potência desejada. As colunas G e I, contém os valores das potências calculadas pela planilha, e serão os resultados aproximados da potência, as aproximações por falta e por excesso, respectivamente. A coluna G, mais especificamente da célula G14 à G28, calcula as potências dos expoentes digitados nas células da coluna D, através da fórmula $(D6)^{(D_i)}$, com $i = \{14, 15, \ldots, 28\}$. O mesmo ocorre para a coluna I, mais especificamente da célula I14 à I28, onde a planilha calcula as potências dos expoentes digitados nas células da coluna K, através da fórmula $(D6)^{(K_i)}$, com $i = \{14, 15, \ldots, 28\}$.

Na coluna N, mais especificamente a célula N12, contém o seguinte texto: "Erro cometido a cada passo". Esta coluna calcula os erros máximos cometidos a cada passo. Logo abaixo da célula N13, da célula N14 à N28, estão os erros cometidos em cada passo, que foram definidos como sendo a diferença entre o extremo superior e o extremo inferior de cada intervalo. Foi combinado com os alunos que o resultado aproximado da potência seria o da aproximação por falta com 14 casas decimais, isto é, o resultado apresentado ao final do 15º passo pela célula G28. Lembrando que esta planilha também foi protegida por senha para que os alunos não alterassem eventualmente as configurações iniciais da planilha, o que tornaria inviável a sua aplicação.

As células C30 e D30 também são interativas, isto é, também assumem, respectivamente, os valores do radicando e da representação decimal do expoente que foram digitados no início da atividade. O mesmo ocorre nas células K30 e L30, respectivamente. O objetivo, neste caso, é mostrar que as aproximações por falta e por excesso se aproximam cada vez mais do número $\sqrt{5}$.

Um ponto crucial no desenvolvimento dessa planilha, foi a ideia de introduzir alertas de verificação com as mensagens de "VERDADEIRO"ou "FALSO"ao lado de cada célula digitada nas aproximações, isto é, aparentemente, as colunas C e L estão vazias, porém, isso não é verdade. Estas colunas, mais especificamente, da célula C14 à C28, e no caso da coluna L, da célula L14 à L28, estão alimentadas com funções "SE". Se eventualmente o aluno digitar algum número que não faz parte da representação decimal do expoente em questão, a mensagem de FALSO aparecerá na coluna ao lado. Porém, se o número digitado estiver correto, a mensagem de VERDADEIRO aparecerá na coluna ao lado. Veremos mais adiante, mais especificamente, na Análise a Posteriori, que sem esta ferramenta a aplicação dessa atividade seria inviável.

Para desenvolver a ferramenta de verificação, utilizamos a função "SE", presente no conjunto de funções da planilha. Nesta função SE, definimos as seguintes ações:

- **Células da coluna C:** SE $D_i = 0$, ENTÃO " "(o programa não faz nada). Caso contrário, isto é, SE $D_i \neq 0$, ENTÃO abrimos uma nova função SE para verificar se o valor digitado está correto. Na nova função SE, SE $D_i = \dfrac{INT\left((E8) * 10^{A_{i-1}}\right)}{10^{A_{i-1}}}$ ENTÃO mensagem de VERDADEIRO, caso contrário, isto é, $D_i \neq \dfrac{INT\left((E8) * 10^{A_{i-1}}\right)}{10^{A_{i-1}}}$ ENTÃO mensagem de FALSO, isto para $i = \{14, 15, \ldots, 28\}$. Vale lembrar que no caso de $i = 14$, $A_{i-1} = A_{13} = 0$, pois a célula está vazia e que a função INT( ) faz parte do conjunto de funções da planilha eletrônica e é a função que retorna a parte inteira de um número.

- **Células da coluna L:** SE $K_i = 0$, ENTÃO " "(o programa não faz nada). Caso contrário, isto é, SE $K_i \neq 0$, ENTÃO abrimos uma nova função SE para verificar se o valor digitado está correto. Na nova função SE, SE $K_i = \dfrac{INT\left((E8) * 10^{A_{i-1}}\right) + 1}{10^{A_{i-1}}}$ ENTÃO mensagem de VERDADEIRO, caso contrário, isto é, $K_i \neq \dfrac{INT\left((E8) * 10^{A_{i-1}}\right) + 1}{10^{A_{i-1}}}$ ENTÃO mensagem de FALSO, isto para $i = \{14, 15, \ldots, 28\}$. Vale lembrar que no caso de $i = 14$, $A_{i-1} = A_{13} = 0$, pois a célula está vazia e que a função INT( ) faz parte do conjunto de funções da planilha eletrônica e é a função que retorna a parte inteira de um número.

A figura 9.4 ilustra a planilha completa até o 6º passo.

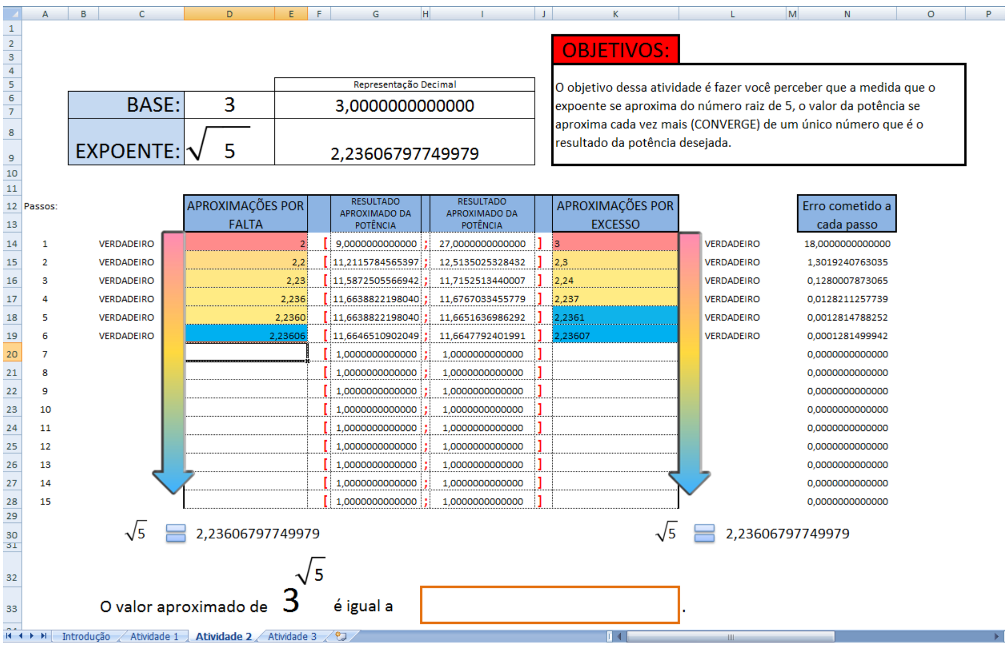


Figura 9.4: Planilha completa até o 6º passo

9.3 Resumo da Aplicação

No sexto encontro, dia 21/11/2012, todos os 32 alunos estavam presentes. A aplicação da Folha de Atividade 5 ocorreu no laboratório de Informática da E.E. profº João Caetano da Rocha. O laboratório dispõe de 12 computadores, sendo assim, os alunos foram divididos em 8 trios e 4 duplas. A Folha de Atividade 5 tomou o tempo das duas aulas desse encontro, e foi terminada nesse mesmo dia.

9.4 Análise a Priori: Expectativas sobre a Folha de Atividade 5

Acreditamos que a primeira dificuldade que os alunos podem encontrar ao realizar essa atividade pela primeira vez, é no momento que devem descobrir os extremos do primeiro intervalo, isto é, no primeiro passo. Porém, possivelmente alguns alunos poderão observar a representação decimal do expoente, e concluir que a parte inteira da representação decimal do expoente coincide exatamente com o extremo inferior do primeiro intervalo. Assim, para encontrar o extremo superior, basta adicionar uma unidade no extremo inferior que é a parte inteira da representação decimal do expoente.

Outra dificuldade que alguns alunos podem encontrar, é no momento em que têm que avançar na representação decimal do expoente para então, encontrar o extremo inferior do segundo intervalo. Porém, a dificuldade maior pode aparecer quando os alunos tentarem encontrar o extremo superior do segundo intervalo, pois devem encontrar um número racional que é $\frac{1}{10}$ maior que o racional encontrado anteriormente. Dificuldades com números decimais são comuns no ensino de Matemática do Estado de São Paulo, como pode ser facilmente verificado através das avaliações internas e externas, tais como SARESP, Prova Brasil, entre outras. Tais dificuldades tendem a aumentar, a medida que os alunos avançam na representação decimal do expoente, por exemplo, podem surgir dúvidas como qual é o número racional que tem o mesmo número de casas decimais que 2,23606 e é um centésimo de milésimo maior do que ele.

Um erro que pode ser cometido, com menor frequência, por alguns alunos é no momento de explicitar a resposta da atividade, isto é, digitar o valor aproximado no campo correspondente. Pode acontecer que, como os alunos foram desafiados a digitar corretamente os extremos de cada intervalo até obter um total de 14 casas decimais após a vírgula, isso pode fazer com que o aluno pense que o número que estamos procurando é exatamente o último número digitado por ele, e acabar colocando este número como resposta para a atividade, quando na verdade, este número é a representação decimal do expoente, e não da potência procurada. Porém, o que pode acontecer com maior frequência, é quando o aluno está transcrevendo o valor aproximado da potência e erra ao digitar os números. Este tipo de erro pode ser facilmente prevenido, tornando iterativa, também, a célula que deverá conter o valor da aproximação. Por exemplo: o valor da aproximação da potência é, por convenção, o extremo inferior do último intervalo da planilha, mais precisamente, o resultado contido na célula G28. Assim, basta que a célula que deve conter a resposta, que no nosso caso é a célula H33, tenha o mesmo valor que a célula G28, isto é, "H33=G28". Entretanto, conhecendo as falhas presentes no ensino de números decimais, preferimos deixar para o aluno a tarefa de digitar manualmente a resposta encontrada, bem como o valor do erro máximo, afim de tentar diminuir a resistência que os alunos têm em estudar e fazer cálculos com os números decimais que possuem várias ordens decimais.

9.5 Aplicação e Análise Posteriori

A aplicação teve início com a entrega da Folha de Complemento 4, cujo título é "Base teórica para a Folha de Atividade 5 (Expoentes Reais)". Esta folha de complemento, contém todas as informações necessárias para que os alunos possam entender o funcionamento da planilha eletrônica, assim como os conceitos matemáticos nela inseridos. A leitura da Folha de Complemento 4 foi feita em grupo, e após a leitura, uma breve exposição das ideias ali contidas foi feita pelo professor, pois nem todos os alunos entenderam o processo somente com a leitura das orientações. A exposição foi feita na lousa da sala de informática, seguida de um pequeno exemplo de como os alunos deveriam proceder para iniciar o primeiro passo da planilha.

Após a exposição, os grupos começaram a trabalhar em busca das respostas das atividades propostas. Todos os grupos resolveram as atividades na ordem em que elas apareceram, o que não era uma regra, visto que poderiam escolher qual atividade queriam resolver primeiro.

Logo de início, observamos que um grupo de alunos teve dificuldade para iniciar o processo, isto é, para encontrar os dois primeiros números a serem digitados para formar o primeiro intervalo que contém a potência procurada, como já era previsto na Análise a Priori. O grupo então foi orientado pelo professor a retomar os conceitos estudados na atividade anterior, para que procurassem relacionar as atividades e entender que o processo de aproximações feito na atividade anterior, poderia ser utilizado para encontrar os números a serem digitados, isto é, encontrar um par de números inteiros e consecutivos, tais que o menor deles seja o maior número inteiro que é menor, ou no máximo igual, a $\sqrt{3}$ e o maior deles seja o menor inteiro que é maior que $\sqrt{3}$. Com isso os alunos recordaram de como haviam procedido na atividade anterior e continuaram a resolver a atividade.

O que pudemos perceber depois de alguns minutos que os grupos começaram a trabalhar, que todos os grupos perceberam que ficava relativamente simples a resolução quando acompanhavam a representação decimal do expoente em questão. Somente apareciam algumas dificuldades no momento em que deveriam digitar o segundo número, por exemplo, vejamos a Atividade 1 que tinha como objetivo encontrar o valor aproximado da potência $2^{\sqrt{3}}$: nesta atividade, o primeiro número que o aluno deve digitar no 4º passo é 1,732. Nesse momento surgiam dúvidas sobre qual deve ser o segundo número a ser digitado ainda no 4º passo, que no caso é o número 1,733. Surgiam perguntas entre os grupos do tipo: "Quem vem depois do 1,732?", mostrando que o conteúdo referente ao conjunto dos números racionais não foi bem assimilado por eles.

Um fator de extrema importância na aplicação e na aplicabilidade dessa atividade, foi a introdução dos alertas de VERDADEIRO e FALSO ao lado das células que receberiam os valores digitados. No dia da aplicação, ficou claro que muitos alunos verificavam sozinhos o que estava errado na digitação, pois já haviam sido avisados pela planilha que o valor digitado era falso. Isso facilitou muito a aplicação, e acreditamos que sem esse recurso a aplicação de uma planilha como essa pode se tornar inviável, visto que podem surgir inúmeras dúvidas ao mesmo tempo, e o professor não conseguiria atender todos os alunos em um intervalo de tempo de apenas duas aulas. Certamente, sem o recurso de alerta, uma atividade como essa tomaria o tempo de, aproximadamente, 4 aulas de 50 minutos.

Todos os grupos conseguiram terminar todas as atividades e encontraram os valores aproximados cobrados nas atividades. A figura 9.5 ilustra o momento em que os alunos faziam a leitura da Folha de Complemento 4.

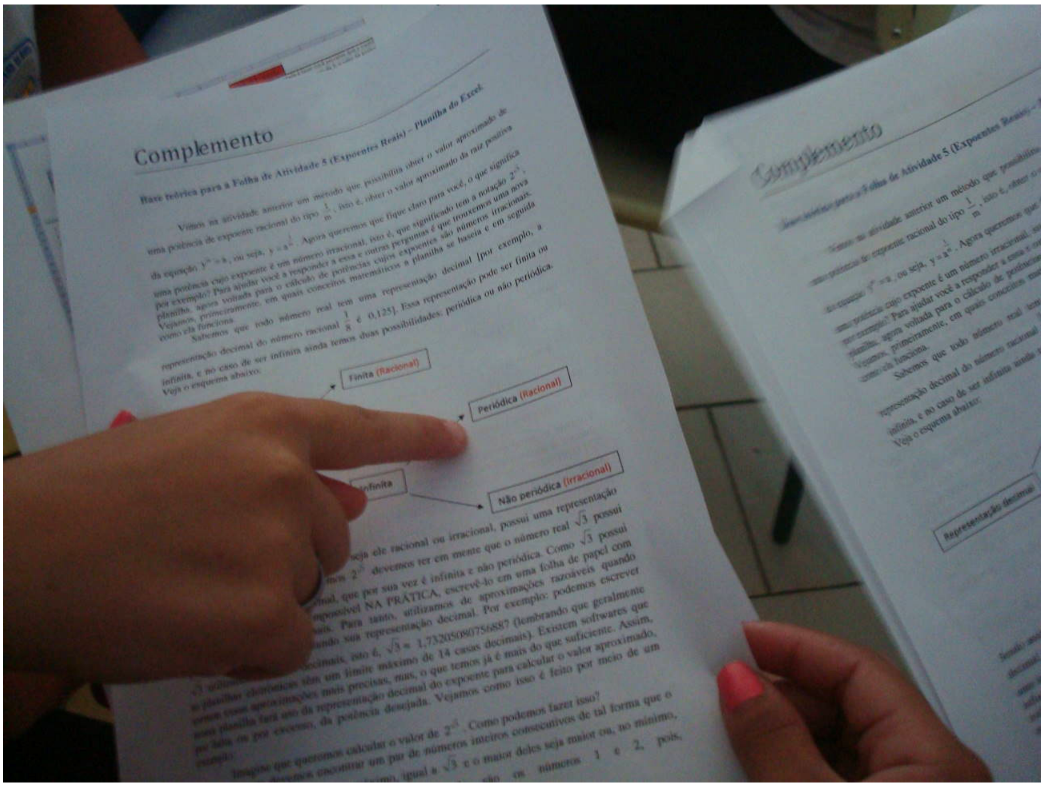


Figura 9.5: Leitura da Folha de Complemento

Figura 9.6: Grupo de alunos resolvendo as atividades

9.6 Conclusão

Na Folha de Atividade 5 (planilha eletrônica), disponibilizamos aos alunos um método prático de como obter o valor aproximado de uma potência cujo expoente é um número real, mais precisamente, expoentes da forma $\sqrt{p}$, com $p \in \mathbb{N}$. Isso possibilitou um melhor entendimento sobre esse tipo de potência, não deixando aos alunos somente a representação de um número, mais sim um breve contato com seu valor aproximado e um bom entendimento de como as calculadoras científicas e softwares matemáticos procedem para calcular tais potências com certo grau de aproximação. Acreditamos que o objetivo dessa atividade foi contemplado e que podemos, com ela e as demais atividades propostas neste trabalho, proporcionar um aprendizado mais concreto ao conceito de função exponencial, desde o domínio mais simples, o conjunto dos números naturais, até o mais complexo o conjunto dos números reais. Com isso procuramos reduzir as falhas no processo de ensino-aprendizagem desse assunto, bem como preencher as lacunas presentes na formação dos professores de matemática do Ensino Médio.

Capítulo 10

Aplicações da Função Exponencial

10.1 Introdução

Neste capítulo reunimos uma série de aplicações da função exponencial em diferentes situações, onde o aumento ou a diminuição de uma grandeza é proporcional ao valor da grandeza em um dado instante. Procuramos dividir os problemas em temas, fazendo uma breve introdução ao tema de que trata a aplicação e, em seguida, a discussão de um problema prático sobre o tema abordado.

10.2 Juros Contínuos

Voltemos ao problema mencionado por [2, p. 41], encontrado em um tablete de argila da Mesopotâmia, datado de 1700 a.C., que propõe: "Qual é o tempo necessário para que uma soma em dinheiro dobre de valor, quando aplicada a uma taxa de 20% de juros composta anualmente?". Podemos observar claramente que a solução do problema, apesar de ser logarítmica, é proveniente da equação $(1,2)^x = 2$, que é uma equação exponencial. Imaginemos agora um caso geral, onde teremos C_0 o capital em questão, i a taxa de juros e t o número de anos. Deste modo, teremos após t anos um montante

$$M = C_0(1+i)^t$$

Porém, em alguns bancos, o juros acumulado não é calculado apenas uma vez, mas várias vezes por ano. Se, por exemplo, uma taxa anual de juros de 5% é composta semestralmente, o banco usará metade da taxa de juros anual como taxa por período. Desta forma, em um ano o capital de R$100,00 será composto duas vezes, cada vez a uma taxa de 2,5%. Assim, teremos:

$$100.(1,025)^2 = 105,0625$$

cerca de seis centavos a mais do que o mesmo dinheiro renderia se fosse composto anualmente a 5%. Generalizando a fórmula do cálculo do montante (M) para n composições anuais, teremos a seguinte equação:

$$M = C_0 \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt} \tag{10.1}$$

Para simplificar as coisas, vamos assumir que $i = 100\% = 1$. Com isso, nossa equação fica

$$M = C_0 \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{t} \tag{10.2}$$

Assumiremos sem demonstração que é convergente a sequência $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, para $n \geq 1$, então existe o limite $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, que por definição foi batizado de e, uma importante constante da matemática, um número irracional, cujo valor aproximado é $2,71828182845904523536...$[1]. Voltando a equação 10.2, temos

$$M = C_0.e^t \tag{10.3}$$

Podemos ir além, fazendo uma mudança de variável na expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, chamando de α a fração $\frac{1}{n}$, teremos que quando $n \to \infty$, $\alpha \to 0$. Assim, nosso limite pode ser reescrito como

$$\lim_{\alpha\to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \tag{10.4}$$

Dessa forma, voltando a equação 10.1, e substituindo a equação 10.4, teremos:

$$M = C_0 (1 + i\alpha)^{\frac{t}{\alpha}} \tag{10.5}$$

Escrevendo $u = i\alpha$, temos $\frac{1}{\alpha} = \frac{i}{u}$. Assim, substituindo em 10.5:

$$M = C_0 (1 + u)^{\frac{it}{u}} = C_0 \left[(1 + u)^{\frac{1}{u}}\right]^{it} = C_0.e^{it} \tag{10.6}$$

Portanto, um investidor exigente desejará que seu capital seja capitalizado a cada instante, pois obterá maior rentabilidade. Quando isso ocorre, o montante $(C + J)$

[1]Para mais informações sobre a história do número e consulte [2]

deve ser calculado pela função

$$M(t) = C_0.e^{it}$$

que é uma função do tipo exponencial.

Voltando agora ao problema do papiro modificado: Suponhamos que o capital seja aplicado a taxa de **juros contínuos** de 20% ao ano, em quanto tempo este capital será dobrado?

Resolução: Neste caso temos $i = 20\% = 0,2$. Devemos encontrar o número t de anos de modo que $C_0 e^{0,2t} = 2C_0$, ou seja, $e^{0,2t} = 2$. Segue que, calculando o logaritmo natural em ambos os membros, $0,2t = \ln 2$, de onde temos que

$$t = \frac{\ln 2}{0,2} = \frac{0,693}{0,2} = 3,46$$

Obviamente devemos ter em mãos o valor aproximado de $\ln 2$, o que nos proporciona encontrar um valor aproximando do tempo necessário para que o capital investido dobre de valor, ou seja, aproximadamente três anos e meio. A figura 10.1 ilustra o aspecto do gráfico da função $M(t) = C_0 e^{it}$.

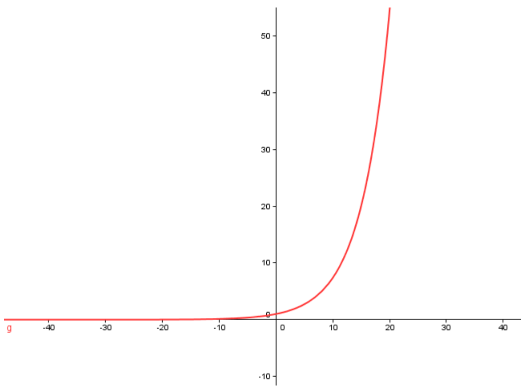


Figura 10.1: Aspecto do gráfico da função $M(t) = C_0 e^{0,2t}$

Sugestão de problema (FUVEST - 2013): Quando se divide o Produto Interno Bruto (PIB) de um país pela sua população, obtém-se a renda per capita desse país. Suponha que a população de um país cresça à taxa constante de 2% ao ano. Para que sua renda per capita dobre em 20 anos, o PIB deve crescer anualmente à taxa constante de, aproximadamente,

(Dado: $\sqrt[20]{2} \approx 1,035$)

a) 4,2%

b) 5,6%

c) 6,4%

d) 7,5%

e) 8,9%

10.3 Decaimento Radioativo

Existem alguns átomos na natureza que são instáveis, isto é, possuem uma tendência natural de se desintegrarem com o tempo, é o caso do rádio, do urânio, entre outros. Estes átomos são classificados como radioativos, por emitirem partículas transformando-se em outra substância não radioativa. Com o passar do tempo, devido a emissão de partículas, a massa da substância original diminui, ao passo que a massa da sustância transformada aumenta. Isto se dá de tal forma que, num determinado instante, a quantidade de matéria que se desintegra é proporcional à massa da substância original presente no corpo naquele dado instante. Digamos que uma determinada substância radioativa se desintegre a uma taxa constante por unidade de tempo, que chamaremos de α. Sendo M_0 a massa inicial da substância radioativa, então para cada instante t, teremos:

$$M = M_0\left(1-\alpha\right)^t \tag{10.7}$$

Procurando uma melhor aproximação para a situação descrita, podemos imaginar que a desintegração ocorre em intervalos de $\dfrac{1}{n}$ unidades de tempo. Assim, a taxa de desintegração em cada intervalo seria de $\dfrac{\alpha}{n}$. Fazendo n tender ao infinito, e as modificações na equação 10.7, teremos:

$$M = \lim_{n\to\infty} M_0\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{tn} \tag{10.8}$$

Fazendo novamente uma substituição de variável, chamando de u a fração $-\dfrac{\alpha}{n}$, então $\dfrac{1}{n} = -\dfrac{u}{\alpha}$, e quando $n \to \infty$, $u \to 0$. Substituindo na equação 10.8:

$$M = \lim_{u\to 0} M_0\left(1+u\right)^{-\frac{\alpha t}{u}} = M_0 \lim_{u\to 0}\left[\left(1+u\right)^{\frac{1}{u}}\right]^{-\alpha t} = M_0.e^{-\alpha t} \tag{10.9}$$

Assim, a função que fornece a massa da substância decorridos t unidades de tempo depois do início da desintegração é:

$$M(t) = M_0.e^{-\alpha t} \tag{10.10}$$

Na prática, a constante α fica determinada a partir de um número básico, chamado de meia-vida da substância, que seria o tempo necessário para que sua massa se reduzisse a metade.

O carbono-14, indicado por C^{14}, é um isótopo radioativo do carbono, formado na terra devido ao bombardeio de raios cósmicos. Através dos tempos, a quantidade de C^{14} na atmosfera tem-se mantido constate, porque sua produção compensa sua desintegração. Os seres vivos absorvem e perdem C^{14} de modo que, em cada espécie, a taxa de C^{14} também se mantém constante. Quando um ser vivo morre, a absorção cessa, porém a desintegração não. Este fato pode ser usado para determinar a idade de um fóssil ou de um objeto muito antigo feito de madeira, por exemplo. Sabendo que o tempo de meia-vida do C^{14} é de 5570 anos, aplicando a função $M = M(t)$ da equação 10.10, teremos: $M_0 e^{-\alpha t_0} = \dfrac{1}{2} M_0$, ou seja, $e^{-\alpha t_0} = \dfrac{1}{2}$. Segue que, calculando o logaritmo natural em ambos os membros, $-\alpha t_0 = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$, de onde temos que

$$\alpha = \frac{-\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{t_0} = \frac{\ln(2)}{t_0} = \frac{0,6931}{5570} = 0,00012444$$

Assim, vejamos como esse conhecimento pode ser utilizado: Num castelo inglês existe uma velha mesa redonda que muitos afirmavam ser a famosa Távola Redonda do rei Artur. Por meio de um instrumento que mede a radioatividade, constatou-se que a massa de C^{14} hoje existente na mesa é de 0,894 vezes a massa de C^{14} que existe em pedaço de madeira viva de mesma massa da mesa. Será mesmo a mesa do famoso rei Artur?

Resolução: Aplicando a equação 10.10, teremos: $0,894M_0 = M_0 e^{-\alpha t}$, ou seja, $0,894 = e^{-\alpha t}$. Calculando o logaritmo natural em ambos os membros da igualdade teremos:

$$t = -\frac{\ln(0,894)}{0,00012444} = \frac{0,1121}{0,0001244} = 901$$

Se a mesa fosse mesmo do rei Artur, ela deveria ter mais de 1500 anos. A figura 10.2 ilustra o aspecto do gráfico da função $M(t) = M_0.e^{-\alpha t}$.

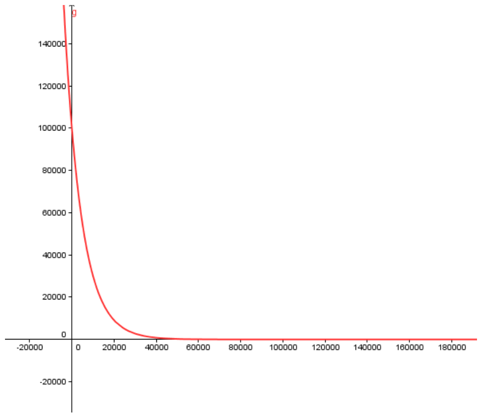


Figura 10.2: Aspecto do gráfico da função $M(t) = M_0e^{-0,0012444t}$

Sugestão de problema: (FUVEST - 2012): Uma substância radioativa sofre desintegração ao longo do tempo, de acordo com a relação $m(t) = ca^{-kt}$, em que a é um número real positivo, t é dado em anos, m(t) é a massa da substância em gramas e c, k são constantes positivas. Sabe-se que m_0 gramas dessa substância foram reduzidos a 20% em 10 anos. A que porcentagem de m_0 ficará reduzida a massa dessa substância em 20 anos?

a) 10%

b) 5%

c) 4%

d) 3%

e) 2%

Com relação ao exercício anterior, supondo que $a = e$, obtenha o valor da constante k. Considere $\ln 5 = 1,609$.

10.4 Resfriamento de um corpo

Uma situação análoga ao decaimento radioativo é a de um objeto aquecido, colocado num grande meio mais frio, cuja grande massa faz com que a temperatura desse meio permaneça constante, sem ser afetada pelo calor transmitido pelo corpo mais quente. A *lei do resfriamento de Newton* afirma que, nessas condições, a diferença de temperatura D, entre o objeto e o meio que o contém, decresce com uma taxa de variação que é proporcional à própria diferença. Como no caso do decaimento radioativo, esta lei pode ser expressa pela seguinte equação: chamando de D_0 a diferença entre as temperaturas no instante $t = 0$, e $D(t)$ esta diferença num dado instante t, tem-se $D(t) = D_0 e^{-\alpha t}$, onde a constante α depende do material de que é constituída a superfície do objeto. Vejamos um exemplo de aplicação dessa lei.

Num certo dia, a temperatura ambiente era de 30°C. A água que fervia numa panela, 5 minutos depois de ter apagado o fogo, tem a temperatura de 65°C. Quanto tempo depois de apagado o fogo a água atingirá a temperatura de 38°C?

Resolução: No momento em que se apagou o fogo ($t = 0$), a temperatura da água era de 100°C e a do ambiente 30°C. Logo, $D_0 = 100 - 30 = 70$. Assim, aplicando a lei de Newton, $D(t) = 70e^{-\alpha t}$. Para determinar α, basta utilizar a informação dada no problema, isto é:

$$D(5) = 70e^{-5\alpha} = 65 - 30 = 35$$

Portanto, teremos $e^{-5\alpha} = \frac{35}{70} = \frac{1}{2}$. Calculando o logaritmo natural em ambos os membros da igualdade, teremos:

$$-5\alpha = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \Rightarrow \alpha = \frac{\ln 2}{5} = \frac{0,698}{5} = 0,1386$$

Queremos encontrar o valor de t, de tal forma que a temperatura final seja igual a 38°C, ou seja, que $D(t) = 38 - 30 = 8$. Substituindo na lei de Newton, teremos: $70e^{-0,1386t} = 8$. Novamente calculando o logaritmo natural em ambos os membros da igualdade, teremos:

$$-0,1386t = \ln\left(\frac{8}{70}\right) \Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{70}{8}\right)}{0,1386} = \frac{2,1691}{0,1386} = 15,65$$

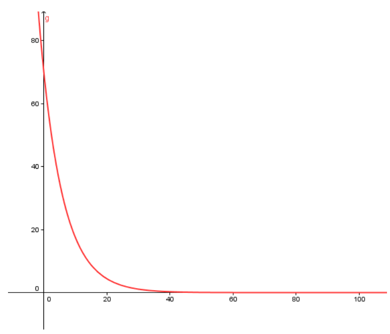


Figura 10.3: Aspecto do gráfico da função $D(t) = 70e^{-0,1386t}$

Assim, a água atingirá a temperatura de 38ºC após 15,65 minutos, pouco mais de 15 minutos e meio. A figura 10.3 ilustra o aspecto do gráfico da função $D(t) = D_0 e^{-\alpha t}$ para os valores encontrados nesse exemplo.

Sugestão de problema: O corpo de uma vítima de assassinato foi descoberto às 23 horas. O perito chegou às 23h30min e imediatamente mediu a temperatura do cadáver, que era de 34,8ºC. Uma hora mais tarde, ele mediu a temperatura outra vez e encontrou 34,1ºC. A temperatura do quarto era mantida constante a 20ºC. Use a lei do resfriamento de Newton para estimar a hora em que se deu a morte. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva é de 36,5ºC. Para mais problemas e aplicações consulte [17].

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL. Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN+: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.* Brasília, 2012, 144 p.

[2] MAOR, E. *e: a história de um número.* [S.l.]: Editora Record, RJ, 2008.

[3] EVES, H. *Introdução à História da Matemática.* [S.l.]: Editora Unicamp, SP, 2007.

[4] CAJORI, F. *A History Of The Mathematical Notations.* [S.l.]: The Open Court Company, 1928.

[5] MACEDO, J. C. A. *Determinação experimental da função que modela o escoamento de um líquido.* Dissertação (Mestrado) — UFSCar, SP, 2010.

[6] ZUFFI, E. M.; PACCA, J. L. A. O conceito de função e sua linguagem para os professores de matemática e de ciências. *Revista Ciência e Educação*, 2002.

[7] LIMA, E. L. *A Matemática do Ensino Médio.* [S.l.]: SBM, RJ, 2006.

[8] SÃO PAULO (ESTADO). Secretaria da Educação (SEE). *Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias* - São Paulo, 2010, 72 p.

[9] SÃO PAULO (ESTADO). Secretaria da Educação (SEE). *Caderno do aluno: matemática, Ensino Médio - 1ª série, vol. 3* - São Paulo, 2008, 48 p.

[10] RIBEIRO, J. *Ciência, Linguagem e Tecnologia.* [S.l.]: Editora Scipione, 2010.

[11] PAIVA, M. *Matemática Paiva.* [S.l.]: Editora Moderna, 2010.

[12] SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. *Matemática Ensino Médio.* [S.l.]: Editora Saraiva, 2008.

[13] DANTE, L. R. *Matemática: Contextos e Aplicações.* [S.l.]: Editora Ática, 2010.

[14] FREITAS, J. L. M. Teoria das situações didáticas. *Educação Matemática: uma nova introdução*, EDUC - Editora da PUC - SP, 2010.

[15] ALMOULOUD, S. A. *Fundamentos da Didática da Matemática.* [S.l.]: Editora UFPR - PR, 2010.

[16] MACHADO, S. D. A. Engenharia didática. *Educação Matemática: uma nova introdução*, EDUC - Editora da PUC - SP, 2010.

[17] LIMA, E. L. *Logaritmos.* [S.l.]: SBM, RJ, 2010.

[18] LIMA, E. L. *Curso de análise.* [S.l.]: IMPA, RJ, 2004.

[19] NERI, C. *Curso de Análise Real.* [S.l.]: UFRJ, RJ, 2010.

[20] PATERLINI, R. *A aritmética dos números reais.* [S.l.]: UFSCar, SP.

Estrutura dos números reais

.1 Introdução

Este apêndice foi escrito com objetivo de orientar o professor, uma vez que, em nossa opinião, o conjunto dos números reais tem uma estrutura de difícil compreensão, principalmente para quem nunca estudou essa estrutura ou não teve oportunidade de ver sua construção. Por exemplo, quando falamos em $\sqrt{2}$, apesar de ser um número algébrico e de fácil construção geométrica, via régua e compasso, sua representação decimal possui infinitas casas decimais. Trata-se de uma série cujo termo geral sabemos que existe, porém, não o explicitamos.

Geralmente quando introduzimos esse conceito, os alunos aceitam que $\sqrt{2}$ possui infinitas casas decimais sem questionar. Entretanto, aí há uma questão que requer conhecimento mais profundo. Nós descrevemos no capítulo 8 um processo para a determinação dessa expansão decimal até um certo número de casas decimais, com auxílio da planilha eletrônica para minimizar o trabalho com cálculos e evitar possíveis erros. Em resumo, $\sqrt{2}$ pode ser visto como o limite de uma sequência crescente de números racionais limitada superiormente. A existência desse limite é, em última análise, consequência do axioma da completividade dos números reais que mencionaremos mais adiante. Esse é o axioma que vai permitir compreender o "ingênuo" teorema dos intervalos encaixantes.

O conjunto dos números reais munido das operações de adição e multiplicação tem uma estrutura de corpo ordenado completo. Abaixo detalharemos esse conceito.

.2 Corpos

Definição 1. *Seja K um conjunto munido de duas operações chamadas adição e multiplicação da seguinte maneira: para quaisquer x, $y \in K$, a adição e a multiplicação fazem corresponder, respectivamente, a sua soma $x + y \in K$ e seu produto $x.y \in K$. Dizemos que a terna $(K, +, .)$ é um corpo se valem as seguintes propriedades:*

(A1) Para quaisquer x, y, $z \in K$, $(x + y) + z = x + (y + z)$ (Associatividade da adição)

(A2) $\exists x \in K$ tal que $x + y = y$, $\forall y \in K$ (Existência do elemento neutro da adição). O elemento neutro x será denotado por 0 e chamado de zero.

(A3) *Para qualquer* $x \in K$, $\exists y \in K$ *tal que* $x + y = 0$ *(Existência de elemento oposto). O elemento* y *que é o oposto de* x *será denotado por* $-x$.

(A4) *Para quaisquer* $x, y \in K$, $x + y = y + x$ *(Comutatividade da adição)*

(M1) *Para quaisquer* $x, y, z \in K$, $(x.y).z = x.(y.z)$ *(Associatividade da multiplicação)*

(M2) $\exists x \in K - \{0\}$ *tal que* $x.y = y$, $\forall y \in K$ *(Existência do elemento neutro da multiplicação). O elemento neutro* x *será denotado por* 1 *e chamado de um.*

(M3) *Para qualquer* $x \in K - \{0\}$, $\exists y \in K$ *tal que* $x.y = 1$ *(Existência de elemento inverso). O elemento* y *que é o inverso de* x *será denotado por* x^{-1}.

(M4) *Para quaisquer* $x, y \in K$, $x.y = y.x$ *(Comutatividade da multiplicação)*

(D) *Para quaisquer* $x, y, z \in K$, $\quad x.(y + z) = (x.y) + (x.z)$ *(Distributiva da multiplicação em relação a adição)*

Definição 2. *Seja* K *um conjunto e* $\leq \subset K \times K$ *uma relação sobre* K. *Notação: geralmente usamos a notação* $x \leq y$ *para denotarmos que o par* (x, y) *pertence à relação* $\leq$. *Diz-se que* $\leq$ *é uma relação de ordem parcial sobre* K *se as seguintes propriedades forem verificadas:*

O1) *se* $x \in K$, *então* $x \leq x$ *(reflexiva).*

O2) *dados* $x, y \in K$, *se* $x \leq y$ *e* $y \leq x$, *então* $x = y$ *(antissimétrica).*

O3) *dados* $x, y, z \in K$, *se* $x \leq y$ *e* $y \leq z$, *então,* $x \leq z$ *(transitiva).*

Definição 3 (Relação de ordem total)**.** *Uma relação de ordem parcial* $\leq$ *sobre* K *é chamada de relação de ordem total sobre* K *se também satisfizer a seguinte propriedade:*

O4) *dados* $x, y \in K$, *então* $x \leq y$ *ou* $y \leq x$.

Definição 4 (Corpo ordenado)**.** *Sejam* $(K, +, .)$ *um corpo e* $\leq$ *uma relação de ordem total sobre* K. *Diz-se que* $(K, +, ., \leq)$ *é um corpo ordenado se as seguintes condições forem satisfeitas:*

OA) *dados* $x, y, z \in K$, *se* $x \leq y$, *então* $x + z \leq y + z$ *(compatibilidade da relação de ordem com a operação de adição).*

OM) *dados* $x, y, z \in K$, *se* $x \leq y$ *e* $0 \leq z$, *então* $x.z \leq y.z$ *(compatibilidade da relação de ordem com a operação de multiplicação).*

Definição 5. *Seja* $(K, +, ., \leq)$ *um corpo ordenado e sejam* $x, y \in K$*. Se* $x \leq y$*, dizemos que* x *é menor ou igual a* y *ou ainda* y *é maior ou igual que* x *e indicamos por* $y \geq x$*. Se* $x \leq y$ *e* $x \neq y$*, então dizemos que* x *é estritamente menor do que* y*, ou ainda que* y *é estritamente maior do que* x *e indicamos, respectivamente por* $x < y$ *ou* $y > x$*. Esta última é chamada de relação de ordem estrita.*

Definição 6 (Conjunto limitado superiormente)**.** *Seja* K *um conjunto munido de uma relação de ordem parcial* $\leq$ *e* $\emptyset \neq A \subset K$*. Dizemos que* A *é limitado superiormente se existe* $s \in K$ *tal que* $a \leq s$ *para todo* $a \in A$*. Caso* A *seja limitado superiormente por* s*, este passa a ser chamado de limitante superior de* A*, ou cota superior de* A*. Caso contrário,* A *é ilimitado superiormente.*

Definição 7 (Conjunto limitado inferiormente)**.** *Seja* K *um conjunto munido de uma relação de ordem parcial e* $\emptyset \neq A \subset K$*. Dizemos que* A *é limitado inferiormente se existe* $i \in K$ *tal que* $a \geq i$ *para todo* $a \in A$*. Caso* A *seja limitado inferiormente por* i*, este passa a ser chamado de limitante inferior de* A*, ou cota inferior de* A*. Caso contrário,* A *é ilimitado inferiormente.*

Um conjunto A é dito limitado se é limitado superiormente e inferiormente, caso contrário, A é chamado ilimitado.

Definição 8 (Supremo)**.** *Seja* $(K, \leq)$ *um conjunto não vazio e totalmente ordenado. Seja* $A \subset K$ *um conjunto não vazio e limitado superiormente. Denominamos de supremo de* A *um elemento* s *pertencente a* K *(caso exista) satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) $a \leq s$ *para todo* $a \in A$ *(*s *é cota superior);*

(ii) se r *é cota superior de* A*, então* $s \leq r$ *(*s *é a menor cota superior);*

então dizemos que s *é supremo de* A*, e escrevemos* $\sup A = s$*.*

Definição 9 (Ínfimo)**.** *Seja* $(K, \leq)$ *um conjunto não vazio e totalmente ordenado. Seja* $A \subset K$ *um conjunto não vazio e limitado inferiormente. Denominamos de ínfimo de* A *um elemento* i *pertencente a* K *(caso exista) satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) $a \geq i$ *para todo* $a \in A$ *(*i *é cota inferior);*

(ii) se r *é cota inferior de* A*, então* $i \geq r$ *(*i *é a maior cota inferior);*

então dizemos que i *é ínfimo de* A*, e escrevemos* $\inf A = i$*.*

Definição 10. *Um corpo ordenado K é chamado completo se, e somente se, satisfaz o seguinte axioma (chamado Axioma da Completividade):*

(AC): Todo subconjunto, de K, não vazio e limitado superiormente admite supremo.

Portanto, todo corpo ordenado e completo satisfaz os seguintes 16 axiomas a saber: A1, A2, A3, A4, M1, M2, M3, M4, D, O1, O2, O3, O4, OA, OM e o AC. Um fato importante é que, a menos de um isomorfismo, existe um único corpo ordenado completo, em outras palavras, dois corpos ordenados completos são sempre isomorfos. Afirmamos sem demonstração que existe um corpo ordenado completo. Uma vez que este é único a menos de isomorfismos passaremos a chamá-lo de corpo dos números reais e o indicaremos pelo símbolo clássico $\mathbb{R}$.

Num dado corpo ordenado, existe a importante noção de intervalo, a qual é utilizada em quase todos os anos do Ensino Médio.

Definição 11 (Intervalos)**.** *Dados um corpo ordenado K e $a, b \in K$, com $a \leq b$. Um intervalo é um subconjunto de K de qualquer uma das formas abaixo:*

i) $[a; b] = \{x \in K | a \leq x \leq b\}$

ii) $[a; b) = \{x \in K | a \leq x < b\}$

iii) $(a; b] = \{x \in K | a < x \leq b\}$

iv) $(a; b) = \{x \in K | a < x < b\}$

v) $(-\infty; b] = \{x \in K | x \leq b\}$

vi) $(-\infty; b) = \{x \in K | x < b\}$

vii) $[a; +\infty) = \{x \in K | x \geq a\}$

viii) $(a; +\infty) = \{x \in K | x > a\}$

ix) $(-\infty; +\infty) = K$

Os intervalos (i), (v) e (vii) são chamados de fechados, e (iv), (vi) e (viii) são chamados de abertos. O intervalo (ii) é chamado de fechado à esquerda e aberto à direita, já o intervalo (iii) é chamado de aberto à esquerda e fechado à direita. O intervalo (ix) pode ser considerado tanto aberto como fechado.

Ainda podemos considerar o caso em que $a = b$, nesse caso, o intervalo $[a; a]$ consiste em um único ponto a, que juntamente com o conjunto vazio são chamados de *intervalos degenerados.*

Destacaremos a seguir, alguns teoremas importantes que são consequências do axioma da completividade dos números reais.

Teorema 1. *Em um corpo ordenado K, seja $\widetilde{N} = \{n.1 \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, onde $1 \in K$ é o elemento neutro da multiplicação em K, as três afirmações são equivalentes:*

(i) $\widetilde{N} \subset K$ *é ilimitado superiormente;*

(ii) dados $a, b \in K$, *com* $a > 0$, *existe* $n \in \widetilde{N}$ *tal que* $n.a > b$;

(iii) dado qualquer $a > 0$ *em* K, *existe* $n \in \widetilde{N}$ *tal que* $0 < \dfrac{1}{n} < a$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii). Como $\widetilde{N}$ é ilimitado, dados $a > 0$ e b em K, existe um $n \in \widetilde{N}$ tal que $\dfrac{b}{a} < n$ e, portanto, $n.a > b$. Para provar que (ii) $\Rightarrow$ (iii), dado $a > 0$, existe, devido a (ii), um $n \in \widetilde{N}$, tal que $n.a > 1$, então $0 < \dfrac{1}{n} < a$. Finalmente, mostramos que (iii) $\Rightarrow$ (i). Dado qualquer $b > 0$ existe, devido a (iii), um $n \in \widetilde{N}$ tal que $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{b}$, ou seja, $n > b$. Assim, nenhum elemento $s > 0$ em K pode ser cota superior de $\widetilde{N}$. Logo, $\widetilde{N}$ é ilimitado superiormente.

Definição 12. *Um corpo ordenado K é chamado arquimediano quando nele é válida qualquer uma das três condições citadas no Teorema 1.*

Teorema 2. *O conjunto dos números reais é arquimediano.*

Demonstração. Essa afirmação é consequência do axioma da completividade dos números reais, pois supondo que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ fosse limitado superiormente, pelo axioma, existiria $s \in \mathbb{R}$, $s = \sup \mathbb{N}$, tal que $n+1 \leq s$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue então que $n \leq s-1$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $s-1$ é cota superior de $\mathbb{N}$, e como $s-1 \leq s$, $\mathbb{N}$ não admitiria supremo em $\mathbb{R}$, o que contraria o axioma da completividade dos números reais. Logo, $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente.

Nem todos os corpos são arquimedianos como podemos ver em [18, p. 66] exemplo 6.

Teorema 3 (dos intervalos encaixantes). *Se $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de intervalos encaixantes, isto é, $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.*

Demonstração. De acordo com a definição de intervalo, podemos ver que $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Como isso ocorre para todo $n \in \mathbb{N}$, então podemos escrever:

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$$

Chamando de A o conjunto dos a_n, A é limitado superiormente, pois para quaisquer m, $n \in \mathbb{N}$, $n \leq n+m$, então $a_n \leq a_{m+n}$. Por outro lado, $m \leq m+n$, então $b_{m+n} \leq b_m$. Assim, $a_n \leq a_{m+n} \leq b_{m+n} \leq b_m$, o que equivale dizer que $a_n \leq b_m$, para $\forall m$, $n \in \mathbb{N}$.

Desta forma, pelo axioma da completividade dos números reais, existe s tal que $s = \sup A$, já que A é não vazio e limitado superiormente. Então $a_n \leq s$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. E ainda, como b_n é cota superior de A, então $s \leq b_n$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Concluímos então que $a_n \leq s \leq b_n$ para $\forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, $s \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$. E como o $\lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$, o número s é o único número que satisfaz essa condição.

Teorema 4. *Para todo número real $a > 0$ e para todo número natural $n \geq 2$, existe um único número real estritamente positivo b tal que $b^n = a$. Esse número b é denominado raiz n-ésima de a e é denotado por $\sqrt[n]{a}$, ou por $\sqrt{a}$ quando $n = 2$.*

Demonstração. Seja $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^n < a\}$. Como $0 \in A$, então $A \neq \emptyset$, e seja $y = a + 1 > 0$. Podemos ver que y é uma cota superior de A, pois sendo x um elemento qualquer de A, se $x \leq 0$, então $x < y$ para qualquer $x \in A$, já que y é positivo. Se $x > 0$, então como $y^n = (a+1)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} a + 1 \geq na + 1 \geq a$, já que $n \geq 2$. Dessa forma, $x^n < a \leq y^n$ o que resulta que $x^n < y^n$, ou seja, que $y^n - x^n > 0 \Rightarrow (y - x).(y^{n-1} + y^{n-2}.x + \cdots + y.x^{n-2} + x^{n-1}) > 0$ e já que $y^{n-1} + y^{n-2}.x + \cdots + y.x^{n-2} + x^{n-1} > 0$ por se tratar de parcelas todas positivas, então $y - x > 0 \Rightarrow y > x$ para qualquer $x \in A$. Com isso mostramos que y é um cota superior de A. Assim, pelo axioma da completividade dos números reais, A admite supremo em $\mathbb{R}$. Sendo $b = \sup A$, vamos mostrar que $b^n = a$.

Suponhamos primeiramente que $b^n < a$. Seja $h \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < h < 1, \quad h < \frac{a - b^n}{(b+1)^n - b^n}$$

Temos então que $(b+h)^n = b^n + \binom{n}{1} b^{n-1} h + \binom{n}{2} b^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n-2} b^2 h^{n-2} + \binom{n}{n-1} b h^{n-1} + \binom{n}{n} h^n \leq b^n + \binom{n}{1} b^{n-1} h + \binom{n}{2} b^{n-2} h + \cdots + \binom{n}{n-2} b^2 h + \binom{n}{n-1} b h + \binom{n}{n} h =$
$= b^n + h \left[\binom{n}{1} b^{n-1} + \binom{n}{2} b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-2} b^2 + \binom{n}{n-1} b + \binom{n}{n} \right] = b^n + h \left[(b+1)^n - b^n \right] <$
$< b^n + a - b^n = a$

Portanto, se $(b+h)^n < a$ então $b + h \in A$, contrariando o fato de que b é o supremo de A.

Suponhamos agora que $b^n > a$. Seja $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < k < 1, \quad k < \frac{b^n - a}{(b+1)^n - b^n}$$

Temos então que
$(b-k)^n = b^n - \binom{n}{1} b^{n-1} k + \binom{n}{2} b^{n-2} k^2 - \cdots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} b k^{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n} k^n =$
$= b^n - k \left[\binom{n}{1} b^{n-1} - \binom{n}{2} b^{n-2} k + \cdots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} b k^{n-2} + (-1)^n \binom{n}{n} k^{n-1} \right] \geq$
$\geq b^n - k \left[\binom{n}{1} b^{n-1} + \binom{n}{2} b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-2} b^2 + \binom{n}{n-1} b + \binom{n}{n} \right] = b^n - k \left[(b+1)^n - b^n \right] >$
$> b^n - (b^n - a) = a$

Como $(b-k)^n > a > x^n$, então $(b-k)^n > x^n \Rightarrow (b-k)^n - x^n > 0$, o que implica que $([b-k]-x).((b-k)^{n-1} + (b-k)^{n-2}x + \dots (b-k)x^{n-2} + x^{n-1}) > 0$. Como o segundo membro é positivo, pois se trata de uma soma de parcelas todas positivas, então $(b-k) - x > 0 \Rightarrow b - k > x$ para qualquer $x \in A$. Isso mostra que $b-k$ é uma cota superior de A, mas como $b-k < b$, isso contraria o fato de que b é o supremo de A. Logo, $b^n = a$.

Para verificar a unicidade basta tomar $b_1^n = a$ e $b_2^n = a$. Supondo que $b_1 < b_2$, aplicando a propriedade de compatibilidade entre a multiplicação e a relação de ordem, teríamos $b_1^n < b_2^n$, uma vez que $0 < b_1$, o que não é possível, já que ambos são iguais a a. O mesmo ocorre supondo $b_2 < b_1$. Logo, $b_1 = b_2$.

Algumas referências utilizadas foram [18], [19], [20].

.3 Continuidade

.3.1 Introdução

Apesar de não fazer parte do currículo do Ensino Médio, resolvemos aqui expor alguns lemas e teoremas que justificam a continuidade da função exponencial no domínio dos reais. Nas atividades aplicadas aos alunos, não mencionamos o conceito de continuidade, apenas demos uma pequena ideia de como o Axioma da Completividade dos números reais pode garantir a existência das raízes n-ésimas, por exemplo. Nosso objetivo aqui, é dar subsídios aos professores de matemática que buscam melhorar suas aulas sobre função exponencial.

.3.2 Continuidade da função exponencial

Mostraremos aqui que seja $a > 0$ um número real, a função exponencial de base a e domínio real é contínua. Para isso faremos uso de um conjunto de lemas e definições apresentadas abaixo:

Lema 1 (Desigualdade de Bernoulli)**.** *Para todo número real $x > 0$ e qualquer que seja o inteiro $n \geq 2$, temos que $(1+x)^n > 1 + nx$.*

Demonstração: Da fórmula do desenvolvimento do binômio de Newton, temos $(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + x^n$. Como $\binom{n}{1} = n$ e como $\binom{n}{i}x^i > 0$ para todo i, segue a desigualdade.

Lema 2. *Seja $a > 0$ um número real. Dado $\epsilon > 0$, existe um inteiro positivo n tal que $|a^{\frac{1}{n}} - 1| < \epsilon$.*

Demonstração: Se $a = 1$ a afirmação é clara. Suponhamos $a > 1$. Seja n um inteiro positivo tal que $n > \dfrac{(a-1)}{\epsilon}$. Então $a < 1 + n\epsilon$. Em virtude da Desigualdade de Bernoulli (Lema 1) temos $(1+n\epsilon) \leq (1+\epsilon)^n$, logo $a < (1+\epsilon)^n \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} < 1 + \epsilon \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} - 1 < \epsilon \Rightarrow |a^{\frac{1}{n}} - 1| < \epsilon$. Suponhamos agora que $0 < a < 1$.

Como $\dfrac{1}{a} > 1$, existe um inteiro positivo n tal que $\left|\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right| < \epsilon$. Como $0 < \dfrac{1}{n}$ temos $a^{\frac{1}{n}} < a^0 = 1$. Portanto, $\left|\dfrac{1}{a^{\frac{1}{n}}} - 1\right| < \epsilon \Rightarrow |1 - a^{\frac{1}{n}}| < \epsilon a^{\frac{1}{n}} < \epsilon \Rightarrow |a^{\frac{1}{n}} - 1| < \epsilon$, o que termina a demonstração.

Definição 13. *Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é contínua em $x \in A$ quando, dado $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $y \in A$ e $|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon$. Dizemos que f é contínua em A quando for contínua em todo $x \in A$.*

Lema 3. *Seja $a > 0$ um número real. Dado $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $h \in \mathbb{R}$ e $|h| < \delta \Rightarrow |a^h - 1| < \epsilon$.*

Demonstração: Se $a = 1$ a afirmação é clara. Suponhamos $a > 1$ e seja $\epsilon > 0$. Como já foi observado no Lema 2, existe um inteiro positivo n tal que $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \epsilon$. Se $0 \leq h < \dfrac{1}{n}$ temos $0 < a^h - 1 < a^{\frac{1}{n}} - 1 < \epsilon$, o que implica que $|a^h - 1| < \epsilon$. Se $-\left(\dfrac{1}{n}\right) < h < 0 \Rightarrow 0 < -h < \dfrac{1}{n}$, então teremos $|a^{-h} - 1| < \epsilon \Rightarrow \left|\left(\dfrac{1}{a^h}\right) - 1\right| < \epsilon \Rightarrow |1 - a^h| < \epsilon a^h < \epsilon$, o que implica que $|a^h - 1| < \epsilon$. Tomando $\delta = \dfrac{1}{n}$ temos que $|h| < \delta \Rightarrow |a^h - 1| < \epsilon$.
Suponhamos agora que $0 < a < 1$. Dado $\epsilon > 0$, seja $\epsilon' = \epsilon a$. Como $\dfrac{1}{a} > 1$, existe $\delta > 0$ tal que $|h| < \delta \Rightarrow \left|\left(\dfrac{1}{a}\right)^h - 1\right| < \epsilon'$. Podemos assumir que $\delta < 1$. Então $-1 < -\delta < h \Rightarrow a^h < a^{-1}$. Portanto, $|h| < \delta \Rightarrow \left|\dfrac{1}{a^h} - 1\right| < \epsilon' \Rightarrow |1 - a^h| < \epsilon' a^h < \epsilon' a^{-1} = \dfrac{\epsilon'}{a} = \epsilon$, o que termina a demonstração.

Teorema 5. *Para todo número real $a > 0$ é contínua a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$.*

Demonstração: Fixemos $x \in \mathbb{R}$. Dado $\epsilon > 0$, seja $\epsilon' = \dfrac{\epsilon}{a^x}$. Em virtude do Lema 3, existe um $\delta > 0$ tal que $|h| < \delta \Rightarrow |a^h - 1| < \epsilon'$. Então se $y \in \mathbb{R}$ e $|y - x| < \delta$ temos $|a^y - a^x| < a^x|a^{y-x} - 1| < a^x\epsilon' = \epsilon$. Assim, provamos que f é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, f é contínua.

Um estudo completo sobre a função exponencial pode ser encontrada no belíssimo texto [20], de onde essas informações foram adaptadas.