Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

# Distribuições suportadas em um hiperplano e o espaço de Hardy $h^p(\mathbb{R}^n)$

Ronaldo Bressan Pes

Orientador: Luís Antônio Carvalho dos Santos

São Carlos
Agosto de 2015

# Distribuições suportadas em um hiperplano e o espaço de Hardy $h^p(\mathbb{R}^n)$

Ronaldo Bressan Pes

Orientador: Luís Antônio Carvalho dos Santos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de mestre em Matemática.

São Carlos
Agosto de 2015

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Pes, Ronaldo Bressan
P472d Distribuições suportadas em um hiperplano e o espaço de Hardy hp(Rn) / Ronaldo Bressan Pes. -- São Carlos : UFSCar, 2016.
110 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.

1. Distribuições com suporte compacto. 2. Hiperplano. 3. Espaços de Hardy. I. Título.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

## Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Ronaldo Bressan Pes, realizada em 26/08/2015:

Prof. Dr. Luis Antonio Carvalho dos Santos
UFSCar

Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie
UFSCar

Prof. Dr. Tiago Henrique Picon
FFCLRP/USP

Aos meus pais, Ereni e Gilberto.

Nem tão longe que eu não possa ver,
nem tão perto que eu possa tocar.
Nem tão longe que eu não possa crer,
que um dia chego lá.
Nem tão perto que eu possa acreditar,
que o dia já chegou [...]
(Humberto Gessinger)

# Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Gilberto e Ereni, e meu irmão, Robledo, pelos ensinamentos e incentivo. Às demais pessoas que compõem a minha família: ela é grande.

Ao Professor Luís Antônio Carvalho dos Santos pela orientação neste trabalho, o qual não seria possível realizar sem seu profissionalismo e dedicação. Agradeço também pela confiança.

Aos professores do DM, em especial, aos professores Jorge Guillermo Hounie, Tiago Henrique Picon e Gustavo Hoepfner pelas preciosas sugestões.

Aos professores da Universidade Federal de Santa Maria: Ricardo Fajardo, Márcio Miotto e Taísa Junges Miotto, pelo exemplo e incentivo. Mais que especial, ao professor João Batista Peneireiro, grande impulsor nos estudos de Matemática, pelo qual tenho imenso carinho e admiração.

Aos colegas de mestrado, especialmente, ao Marcos e Rodrigo, pela irmandade e apoio em todos os momentos. A todos meus amigos de Santa Maria que ajudaram a escrever parte desta história: Rian, Vanessa e Pedro. Estão em meu pensamento, agora. Ao Andrés, pelo apoio mesmo a distância. Ao Alisson e Éderson, por me acolherem em minha chegada em São Carlos. Também, aos meus amigos de Santiago do Boqueirão. Tão importante quanto, ao meu violão, amigo de longa data.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

# Resumo

O objetivo principal deste trabalho é estudar condições necessárias e suficientes para que uma distribuição, cujo suporte compacto está contido em um hiperplano, esteja no espaço de Hardy local $h^p(\mathbb{R}^n)$.

# Abstract

The main aim of this work is to study necessary and sufficient conditions for a distribution, whose compact support is contained in a hyperplane, to be in the local Hardy space $h^p(\mathbb{R}^n)$.

# Sumário

# Introdução

Considere em $\mathbb{R}^2$ a distribuição $\delta^{(m)}$ para um inteiro $m$ não-negativo fixado. A distribuição em questão é a derivada $m$-ésima da delta de Dirac. A mesma, além de possuir suporte compacto, está suportada em algum hiperplano de $\mathbb{R}^2$. Podemos mostrar que $\delta^{(m)} \in h^p(\mathbb{R}^2)$ se, e somente se,

$$p < \frac{2}{2+m},$$

onde $h^p(\mathbb{R}^2)$ denota o espaço de Hardy local.

A distribuição $\delta^{(m)}$ pertence a uma classe especial de distribuições: as distribuições suportadas em um hiperplano com suporte compacto. No caso de $\delta^{(m)}$, sabemos com precisão dizer quando ela está ou não no espaço $h^p(\mathbb{R}^2)$. Naturalmente, surgem perguntas que se estendem à distribuições nesta classe como, por exemplo: para uma distribuição $f$ qualquer, na mesma classe de $\delta^{(m)}$, que condições temos para garantir que $f$ esteja em $h^p(\mathbb{R}^n)$? Alguma condição necessária? Ou suficiente? Se sim, esta abrange em sua totalidade o maior intervalo no qual $p$ deve estar para que tal distribuição esteja em $h^p(\mathbb{R}^n)$? São perguntas como estas que motivam o presente trabalho. Na tentativa de respondê-las, dividiu-se o trabalho em três capítulos: Noções preliminares, Espaços de Hardy e Distribuições suportadas em um hiperplano e o espaço $h^p$.

O primeiro capítulo trata de apresentar tópicos da Teoria Elementar das Distribuições, a qual compõe peça fundamental em muitos estudos realizados em Análise Matemática. Por tamanha relevância é que se faz necessário seu desenvolvimento. Entre os conceitos estabelecidos neste, está o conceito de distribuição que, por definição, é um funcional linear contínuo definido sobre o espaço das funções em $C^\infty(\Omega)$, que possuem suporte compacto em $\Omega$, aberto de $\mathbb{R}^n$, também chamado de espaço das funções-teste, o qual denotamos por $C_c^\infty(\Omega)$. O estudo da continuidade de funcionais lineares definidos sobre $C_c^\infty(\Omega)$ é feito através da escolha de uma topologia para este espaço. A construção desta topologia é realizada por meio de uma família de seminormas e permeia a construção de topologias para espaços de Frechét, e pode ser encontrada com mais detalhes na referência [12].

A noção de suporte de uma distribuição também será estabelecida. Além disso, vamos estender, de modo único, distribuições cujo suporte é compacto a funcionais contínuos sobre $C^\infty(\Omega)$.

Particularmente, o interesse principal neste primeiro capítulo é o estudo de distribuições suportadas em um hiperplano de $\mathbb{R}^n$ cujo suporte é compacto. Entretanto, previamente a este estudo, tópicos como produto tensorial, operações com distribuições e distribuições temperadas são desenvolvidos, de modo a consolidar as bases prévias para o estudo de espaços de Hardy. Em meio a esse estudo, destaca-se um resultado no qual toda distribuição cujo suporte é compacto contido em um hiperplano, é escrita como soma de distribuições que atuam sobre funções-teste do hiperplano. Este resultado pode ser enunciado da seguinte maneira: Para $n \geq 2$, considere o hiperplano $\Pi$, dado por

$$\Pi = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \; x_n = 0\}.$$

Se $f$ é distribuição de ordem $K$ com suporte compacto tal que

$$\operatorname{supp} f \subset \Pi,$$

então existem $f_0, \dots, f_k$ distribuições em $\mathbb{R}^{n-1}$, com suporte compacto, tais que

$$f(\phi) = \sum_{i=0}^{K} \langle f_i \otimes \delta^{(i)}, \phi \rangle.$$

Além disso, cada $f_i$ possui ordem $K - i$.

Neste resultado, surge uma nova noção de ordem: *a ordem de uma distribuição na direção normal*. Em vista de que, na decomposição acima, a distribuição $f_K$ pode ser nula, consideremos $N$ como sendo o maior inteiro entre 0 e $K$ no qual $f_N$ é não-nula e nos referimos a $N$ por dizer a ordem de $f$ na direção normal.

Além disso, este resultado é um dos responsáveis por conectar o estudo de distribuições suportadas em um hiperplano com a Teoria dos Espaços de Hardy, uma vez que a condição necessária para que uma distribuição esteja em $h^p(\mathbb{R}^n)$ é dada em função da ordem da distribuição na direção normal.

O segundo capítulo é o passo intermediário entre distribuições suportadas em hiperplano cujo suporte é compacto com o estudo de condições para garantir se uma determinada distribuição nesta classe especial está em $h^p(\mathbb{R}^n)$. Por esta razão, é imprescindível estudar os espaços de Hardy. Neste, começamos pelo espaço $H^p(\mathbb{R}^n)$, para $0 < p \leq \infty$, que por definição é

$$H^p(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \; M_\Phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)\},$$

para $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, com integral não-nula, onde $M_\Phi f$ é dada por

$$M_\Phi f(x) = \sup_{t>0} |(f * \Phi_t)(x)|.$$

A Teoria dos Espaços de Hardy está ligada não somente ao estudo de funções maximais como também aos espaços $L^p$, e é através deste estudo que conseguimos reunir em um único teorema várias formas de caracterizar $H^p(\mathbb{R}^n)$: o Teorema de Caracterização

Maximal. No referido teorema, outras funções maximais são consideradas e não somente $M_\Phi f$. Sua demonstração é encontrada na referência [11] e, apesar de sua grande importância dentro da teoria, não a faremos aqui.

A importância de $H^p(\mathbb{R}^n)$ pode ser notada através da seguinte propriedade:

$$H^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n), \text{ se } p > 1.$$

Por se tratar de um resultado importante, este é um dos resultados que aqui se encontram. Para sua demonstração, destacou-se uma seção destinada ao *Operador Maximal de Hardy-Littlewood*, na qual, por meio da Interpolação de Marcinkiewicz, mostramos que este operador é do tipo forte $(p,p)$, para $p > 1$. Este último, entre outros, somados, permitiu concluir a igualdade entre $H^p(\mathbb{R}^n)$ e $L^p(\mathbb{R}^n)$, para $p > 1$.

Dentro do mesmo capítulo, o segundo passo dado após o estudo de $H^p(\mathbb{R}^n)$ foi o de estudar $h^p(\mathbb{R}^n)$, afinal, este compõe o espaço de Hardy de interesse maior no presente trabalho. Para $0 < p \leq \infty$, definimos $h^p(\mathbb{R}^n)$ de um modo similar ao espaço $H^p(\mathbb{R}^n)$, salvo que na função maximal $M_\Phi$ a trocamos pelo supremo tomado em $t \in (0,1)$, como segue:

$$h^p(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) :\ m_\Phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)\},$$

para $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, com integral não-nula, onde $m_\Phi f$ é dada por

$$m_\Phi f(x) = \sup_{0<t<1} |(f * \Phi_t)(x)|.$$

Assim como $H^p(\mathbb{R}^n)$, o espaço $h^p(\mathbb{R}^n)$ também possui um teorema de caracterização maximal que está atrelado ao estudo de outras funções maximais, muito embora, análogas às desenvolvidas no estudo de $H^p(\mathbb{R}^n)$. Entretanto, para ser construída uma condição necessária para que uma distribuição suportada em um hiperplano, com suporte compacto, esteja em $h^p(\mathbb{R}^n)$, vamos utilizar uma caracterização alternativa. Esta caracterização passa pela construção de uma família especial de funções-teste que, por sua vez, nos leva a uma nova função maximal: *a grande função maximal local* . A família, em questão, é a família das *funções-teste normalizadas*. É importante ressaltar que na construção desta família supomos $0 < p \leq 1$, o que significa que a condição necessária que será construída está restrita para $h^p(\mathbb{R}^n)$, com $0 < p \leq 1$.

Para uma distribuição temperada $f$, a grande função maximal local é dada por

$$m(f)(x) = \sup_{\varphi} |f(\varphi)|,$$

onde o supremo é tomado sobre a família das funções-teste normalizadas. Disso, decorre a seguinte caracterização:

Seja $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Então,

$$f \in h^p(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow m(f) \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Desse modo, para estudar quando uma distribuição $f$ está em $h^p(\mathbb{R}^n)$ basta verificar que $m(f)$ está em $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Por outro lado, a abordagem para construírmos uma condição suficiente para uma distribuição com suporte compacto, contido em um hiperplano, estar em $h^p(\mathbb{R}^n)$ é diferente da utilizada no artigo [3], no qual nos embasamos para construir a condição necessária, enquanto que nessa utilizamos [11].

Por fim, é no terceiro capítulo deste trabalho que estabelecemos tais condições. A primeira delas diz respeito a ordem da distribuição na direção normal, ao mesmo tempo que a segunda apenas sobre a ordem total da distribuição. Inicialmente, estudou-se a suficiência. No desenvolvimento do mesmo, foi assumido a existência de um conjunto $S$ particular que, dependendo de qual forma possui, produz hipóteses diferentes no teorema de suficiência.

No caso de uma distribuição $f$ que além de suportada no hiperplano $\Pi$ possui suporte compacto e ordem $m$, podemos considerar $S$, de modo mais geral, como sendo $[-\epsilon, \epsilon]^{n-1}$. Portanto, temos que

- $m < \frac{1}{p} - n \implies f \in h^p(\mathbb{R}^n)$.

O caso em que $S$ é simplesmente a origem, podemos aumentar o intervalo no qual $p$ se encontra, de modo a obter:

- $m < n\left(\frac{1}{p} - 1\right) \implies f \in h^p(\mathbb{R}^n)$.

Por outro lado, se $N$ é a ordem de $f$ na direção normal, temos:

- $f \in h^p(\mathbb{R}^n) \implies N < n\left(\frac{1}{p} - 1\right)$.

A partir daí, é possível constatar que para os casos em que $N = m$ e $S = \{0\}$, existe uma condição necessária e suficiente. Por outro lado, vamos mostrar, através de um exemplo em $\mathbb{R}^2$, que mesmo no caso $N = m$, mas $S = [0, 1]$, a condição de suficiência, aqui abordada, não contempla o maior intervalo possível no qual $p$ deve estar para que a distribuição esteja em $h^p(\mathbb{R}^2)$.

Capítulo

*1*

# Noções Preliminares

O presente capítulo aborda alguns dos tópicos básicos da teoria elementar das distribuições. Por definição, se $\Omega$ denota um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, o espaço das distribuições, $\mathcal{D}'(\Omega)$, consiste no espaço formado pelos funcionais lineares e contínuos agindo sobre o espaço das funções-teste $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sua topologia, definida a partir de uma família não enumerável de seminormas, é não metrizável. Esta topologia é conhecida como topologia do limite indutivo, construída a partir de uma sequência crescente de espaços de Fréchet. Nesta topologia é possível definir quando uma sequência é convergente e tratar a continuidade de uma distribuição simplesmente utilizando a definição de continuidade de funcionais lineares, caracterizando assim $\mathcal{D}'(\Omega)$ como o dual topológico de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Dentre os vários teoremas, aqui enunciados e demonstrados, destaca-se um resultado de decomposição que permite escrever uma distribuição, cujo suporte compacto está contido em um hiperplano, como soma de distribuições que se anulam no complementar do hiperplano. Esta decomposição, por conseguinte, leva ao conceito de ordem na direção normal de uma distribuição. O objetivo dos resultados prévios a este, além de se constituírem como fundamentais no desenvolvimento da teoria, visa também nos conduzir a demonstração deste importante resultado de decomposição.

Em suma, o objetivo desta seção consiste em dar suporte para o desenvolvimento do presente trabalho.

## 1.1 Elementos da Teoria de Distribuições

### 1.1.1 Funções-Teste

Seja $\mathbb{Z}_+$ o conjunto dos números inteiros não-negativos. Definimos $\mathbb{Z}_+^n$ como sendo o conjunto das $n$-uplas da forma $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, onde cada $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$. Um elemento de $\mathbb{Z}_+^n$ é chamado de *multíndice* e, geralmente, denotado por letras gregas.

Dado $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, define-se $|\alpha|$, lê-se módulo de $\alpha$, por

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Além disso, para $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, escrevemos $\alpha!$ para significar $\alpha_1! \dots \alpha_n!$. Ainda, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, dizemos que $\alpha \leq \beta$ se para todo $i = 1, \dots, n$ vale $\alpha_i \leq \beta_i$. Analogamente, define-se $\alpha < \beta$. Ambas não estebelecem uma relação de ordem total em $\mathbb{Z}_+^n$, pois em $\mathbb{Z}_+^2$, por exemplo, os elementos $(0,1)$ e $(1,0)$ não são comparáveis segundo esta relação.

Para multíndices $\alpha$ e $\beta$ tais que $\beta \leq \alpha$, definimos o coeficiente binomial

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!}.$$

Definimos também $\xi^\alpha \in \mathbb{R}$, dado $\xi \in \mathbb{R}^n$, por

$$\xi^\alpha = {\xi_1}^{\alpha_1} \dots {\xi_n}^{\alpha_n}.$$

Seja $(x_1, \dots, x_n)$ uma variável de $\mathbb{R}^n$. Para $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, denotamos

$$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}.$$

Em $\mathbb{R}^2$, por exemplo, se $\alpha = (2,1)$, então $\partial^{(2,1)} = \partial_{x_1}^2 \partial_{x_2}^1$.

Seja $\Omega$ aberto de $\mathbb{R}^n$. Dado $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ e dadas $f, g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, vale a Regra de Leibniz

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \partial^{\alpha - \beta} f \, \partial^\beta g.$$

Daqui em diante, $\Omega$ denotará um aberto de $\mathbb{R}^n$.

**Definição 1.1.1.** *Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Dizemos que $f$ é* ***localmente integrável*** *e denotamos $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ se, para todo compacto $K \subset \Omega$, vale que*

$$\int_K |f(x)| dx < \infty.$$

**Definição 1.1.2.** *Se $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, então definimos o* ***suporte*** *de $f$ como sendo o conjunto dos $x \in \Omega$, para os quais não existe vizinhaça aberta $U$ de $x$, onde $f|_U = 0$. Denotamos o suporte da função $f$ por* $\operatorname{supp} f$.

Note que o suporte de uma função $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ é um conjunto fechado de $\Omega$. O mesmo, ainda, pode não ser compacto (considere a função constante). Por outro lado, não é difícil encontrar funções em $L^1_{\text{loc}}$ cujo suporte é compacto.

Por exemplo, dado um compacto $K$ de $\mathbb{R}^n$, defina a função $\chi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\chi_K(x) = \begin{cases} 1, & x \in K \\ 0, & x \notin K \end{cases},$$

a qual recebe o nome de *função característica de $K$*.

Além de $\chi$ pertencer a $L^1_{\text{loc}}$, temos que $\operatorname{supp}\chi = K$. Contudo, a mesma não é contínua, tão pouco diferenciável. Pergunta-se: existem funções de classe $C^\infty$ cujo suporte é compacto? A resposta para esta pergunta é dada no seguinte resultado.

**Proposição 1.1.1.** *Existe função $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, não-negativa, de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ cujo suporte é compacto.*

*Demonstração.* Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} \exp^{-\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}.$$

A função $f$ é não-negativa e de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Para $x \in \mathbb{R}^n$, defina $\varphi(x) = f(1 - \|x\|^2)$. A função $\varphi$ cumpre as condições desejadas e vale ainda que

$$\operatorname{supp}\varphi = \overline{B}(0,1).$$

□

Isto nos motiva a seguinte definição.

**Definição 1.1.3.** *Seja $k \in \mathbb{Z}$. Definimos o espaço $C^k_{\text{c}}(\Omega)$ como sendo o espaço de funções $\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $C^k(\Omega)$ cujo suporte é um compacto de $\Omega$. O espaço das funções com suporte compacto em $\Omega$ e cujas derivadas de qualquer ordem são contínuas denota-se por $C^\infty_{\text{c}}(\Omega)$. Um elemento deste espaço é chamado de **função-teste**.*

Dadas $f$ e $g$ contínuas sobre $\mathbb{R}^n$, uma delas com suporte compacto, podemos definir a função

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Se $f$ e $g$ são funções-teste, a nova função $h$ também o será. Se definirmos $h$ por meio de uma operação entre duas funções, dadas em espaços em que a torne bem definida, esta operação terá propriedade regularizadora.

**Definição 1.1.4.** *Sejam $u \in C_{\text{c}}(\mathbb{R}^n)$ e $v \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Chamamos **convolução** de $u$ por $v$ e denotamos $u * v$, por*

$$u * v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)dy.$$

A próxima proposição traz informações sobre a regularidade da convolução, fornecendo, além disso, uma forma de como as derivadas se comportam perante tal operação.

**Proposição 1.1.2.** (i) *Se $u \in C^j_{\text{c}}(\mathbb{R}^n)$ e $v \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, então $u * v \in C^j(\mathbb{R}^n)$.*

(ii) *Se $u \in C^j_{\text{c}}(\mathbb{R}^n)$ e $v \in C^k(\mathbb{R}^n)$, então $u * v \in C^{j+k}(\mathbb{R}^n)$.*

*Demonstração.* Vamos utilizar o processo de indução para provar (i). Com efeito, suponha $j = 0$ e sejam $u \in C_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$ e $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \longrightarrow x_0$, mostraremos que

$$(u * v)(x_n) - (u * v)(x_0) \longrightarrow 0,$$

ou seja, $u * v$ é contínua em $x_0$. De fato, note inicialmente que

$$(u * v)(x_n) - (u * v)(x_0) = \int [(u(x_n - y) - u(x_0 - y)]v(y)dy.$$

Como $u \in C_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$ e $x_n \longrightarrow x_0$, considere $K$ um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ tal que $x_n - \operatorname{supp} u \subset K$, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Desta forma, temos que $u(x_n - \cdot\,)$ se anula fora de $K$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ e, portanto, $u(x_n - \cdot\,) \in C_{\mathrm{c}}(K)$. Da continuidade uniforme segue que dado $\epsilon = 1/\ell$, existe $\delta_\ell > 0$ tal que

$$|z - w| \leq \delta_\ell \Longrightarrow |u(z) - u(w)| \leq \frac{1}{\ell}.$$

Assim, para cada $\ell$ fixo, existe $n = n_\ell > 0$ tal que

$$|u(x_n - y) - u(x_0 - y)| \leq \frac{\chi_K(y)}{\ell},\ \forall\, n \geq n_\ell \text{ e } \forall\, y \in \mathbb{R}^n.$$

Desta forma, concluímos que

$$|(u * v)(x_n) - (u * v)(x_0)| \leq \frac{1}{\ell} \int_K |v(y)|\, dy \longrightarrow 0$$

quando $\ell \longrightarrow \infty$.

Suponha $j = 1$ e sejam $u \in C^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$ e $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Para mostrar que $u * v \in C^1$, basta verificar que as derivadas parciais existem e são contínuas. De fato, seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dado $h \in \mathbb{R}$, desde que $u \in C^1$, temos pela Fórmula de Taylor com resto integral que:

$$u(x_0 - y + he_i) = u(x_0 - y) + \int_0^1 \partial_i u(x_0 - y + the_i)h\, dt.$$

Disso, segue que

$$\frac{1}{h}[u * v(x_0 + he_i) - u * v(x_0)] = \int_0^1 \partial_i u(x_0 - y + the_i)\, dt.$$

Usando a continuidade uniforme da função $\partial_i u$ e fazendo $h \longrightarrow 0$ em ambos os membros da expressão acima, temos que

$$\partial_i(u * v) = \partial_i u * v.$$

Como $\partial_i u \in C^0_{\mathrm{c}}$ e $v \in L^1_{\mathrm{loc}}$, temos pelo caso $j = 0$ que $(\partial_i u) * v = \partial_i(u * v)$ e, portanto, $u * v \in C^1$. Suponha, agora, que para $0 \leq j \leq k$ valha a afirmação:

$$u \in C^j_{\mathrm{c}} \text{ e } v \in L^1_{\mathrm{loc}} \Longrightarrow u * v \in C^j,$$

e mostremos que

$$u \in C^{k+1}_{\mathrm{c}} \text{ e } v \in L^1_{\mathrm{loc}} \Longrightarrow u * v \in C^{k+1}.$$

Pela hipótese de indução, vale que $\partial^\alpha(u * v) = (\partial^\alpha u) * v$, para $|\alpha| \leq k$. Seja $\beta \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\beta| = k + 1$. Note que $\beta = (\beta - e_i) + e_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Se $u \in C^{k+1}_{\mathrm{c}}$, então $\partial_i u \in C^k$. Novamente, pela hipótese de indução, $(\partial_i u) * v \in C^k$. Além disso, $\partial^\alpha((\partial_i u) * v) = (\partial^\alpha \partial_i u) * v$, para $|\alpha| \leq k$. Como $|\beta - e_i| = k$, temos que

$$\begin{aligned}
(\partial^\beta u) * v &= (\partial^{\beta - e_i} \partial^{e_i} u) * v = \partial^{\beta - e_i}(\partial^{e_i} u) * v \\
&= \partial^{\beta - e_i}((\partial^i u) * v) = \partial^{\beta - e_i}(\partial^i)(u * v) \\
&= \partial^{\beta - e_i + e_i}(u * v) = \partial^\beta(u * v).
\end{aligned}$$

Daí, segue que $u * v \in C^{k+1}$, como queríamos demonstrar.

Para provar (ii), observe que se $v \in C^k$ então, em particular, $v \in L^1_{\mathrm{loc}}$. Por (i), temos que $u * v \in C^j$ e $\partial^\alpha(u * v) = (\partial^\alpha u) * v$, para $|\alpha| \leq j$. Analogamente, tem-se que $u * v \in C^k$. Ainda, como $\partial^\alpha u \in C^0 \subset L^1_{\mathrm{loc}}$, para $|\alpha| \leq j$, e $v \in C^k$, vale que $(\partial^\alpha u) * v \in C^k$. Mas, para $|\beta| \leq k$, temos que

$$\partial^\beta((\partial^\alpha u) * v) = \partial^\beta(\partial^\alpha(u * v)) = \partial^{\beta + \alpha}(u * v),$$

onde $|\beta + \alpha| \leq j + k$. Logo, $u * v \in C^{j+k}$.

$\square$

**Observação 1.1.1.** É importante ressaltar a importância da operação de convolução, presente também na demonstração da proposição precedente, no seguinte fato: se $u \in C^k_{\mathrm{c}}$ e $v \in L^1_{\mathrm{loc}}$, então

$$\partial^\alpha\ (u * v) = (\partial^\alpha u) * v,\ \forall\ |\alpha| \leq k.$$

Se, além disso, $v \in C^j_{\mathrm{c}}$, então

$$\partial^\alpha\ \partial^\beta\ (u * v) = (\partial^\alpha u) * (\partial^\beta v) =,\ \forall\ |\alpha| \leq k,\ \forall\ |\beta| \leq j.$$

**Proposição 1.1.3.** *Seja $0 \leq \phi \in C^\infty_{\mathrm{c}}$ tal que $\int \phi(x)\ dx = 1$. Se $u \in C^j_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$, segue que $u_\phi = u * \phi \in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$. Se $|\alpha| \leq j$, temos que*

$$\sup |\partial^\alpha u - \partial^\alpha u_\phi| \longrightarrow 0,$$

*quando* $\operatorname{supp} \phi \longrightarrow \{0\}$.

*Se $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$, então $v_\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $v_\phi \to v$ na norma $L^p(\mathbb{R}^n)$ se $p < \infty$.*

*Demonstração.* Se $u \in C_c^j(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_c^k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, então $u * \phi \in C^{j+k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e, portanto, $u_\alpha \in C^\infty$. Ainda, $u_\alpha$ possui suporte compacto, pois

$$\operatorname{supp} u * \phi \subseteq \operatorname{supp} u \ + \ \operatorname{supp} \phi.$$

Aqui, dizer que $\sup|\partial^\alpha u - \partial^\alpha u_\phi| \longrightarrow 0$ quando $\operatorname{supp}\phi \longrightarrow \{0\}$ significa que dado $\epsilon > 0$, existe $\phi \in C_c^\infty(B(0,\delta))$, para algum $\delta > 0$, implicando em $\sup|\partial^\alpha u - \partial^\alpha u_\phi| < \epsilon$. Inicialmente, mostremos o caso $\alpha = 0$.

Com efeito, sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que se

$$|x - (x - y)| = |y| < \delta,$$

então $|u(x) - u(x - y)| < \epsilon$, uma vez que $u$ é uniformemente contínua. Considere $\phi$ função-teste, não-negativa, suportada na bola $B(0, \delta)$ com integral igual a 1. Assim,

$$\begin{aligned}
|u(x) - u_\alpha(x)| &= |u(x) - (u * \phi)(x)| \\
&= |u(x) - \int u(x-y)\phi(y)dy| \\
&= |u(x)\int \phi(y)dy - \int u(x-y)\phi(y)dy| \\
&\le \int |(u(x) - u(x-y)||\phi(y)|dy \\
&= \int_{|y|\le\delta} |(u(x) - u(x-y)||\phi(y)|dy \\
&\le \sup\nolimits_{|y|\le\delta} |(u(x) - u(x-y)| \int \phi(y)\, dy \\
&= \sup\nolimits_{|y|\le\delta} |(u(x) - u(x-y)| \le \epsilon.
\end{aligned}$$

Suponha, agora, que $0 < |\alpha| \le j$. Temos que

$$\partial^\alpha u_\phi = \partial^\alpha(u * \phi) = (\partial^\alpha u) * \phi.$$

Defina $\tilde{u} = \partial^\alpha u$ e $\tilde{u}_\phi = \tilde{u} * \phi$. Pelo caso anterior, tem-se que

$$\sup|\tilde{u} - \tilde{u}_\phi| \longrightarrow 0,$$

quando $\operatorname{supp}\phi \longrightarrow \{0\}$.

Contudo, veja que

$$\sup|\tilde{u} - \tilde{u}_\phi| = \sup|\partial^\alpha u - \partial^\alpha u_\phi|.$$

Agora, $v_\phi \in L^p(\mathbb{R}^n)$, pois, pela Desigualdade de Young, temos que

$$\|v_\phi\|_{L^p} = \|v * \phi\|_{L^p} \leq \|v\|_{L^p}\|\phi\|_{L^1} = \|v\|_{L^p} < \infty.$$

Suponha $1 \leq p < \infty$. Como $L^p \subset L^1_{\text{loc}}$, $v \in L^1_{\text{loc}}$. Assim, a convolução $v_\phi$ está bem definida e, pela Proposição 1.1.2, $v_\phi \in C^\infty$.

Por fim, mostremos que $v_\phi \to v$ na norma $L^p(\mathbb{R}^n)$. De fato, seja $\eta \in C^0_{\text{c}}(\mathbb{R}^n)$ qualquer. Temos que

$$\begin{aligned} v - v_\phi &= v - v * \phi \\ &= v - \eta * \phi + \eta * \phi - \eta + \eta - v * \phi \\ &= (v - \eta) - (\eta - v) * \phi + (\eta - \eta * \phi). \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade triangular, segue que

$$\begin{aligned} \|v - v_\phi\|_{L^p} &\leq \|v - \eta\|_{L^p} + \|(\eta - v) * \phi\|_{L^p} + \|(\eta - \eta * \phi)\|_{L^p} \\ &\leq \|v - \eta\| + \|\eta - v\|_{L^p}\|\phi\|_{L^1} + \|\eta - \eta * \phi\|_{L^p} \\ &= (1 + \|\phi\|_{L^1})\|\eta - v\|_{L^p} + \|\eta - \eta * \phi\|_{L^p} \\ &= (1 + \|\phi\|_{L^1})\|\eta - v\|_{L^p} + \left(\int |\eta - \eta * \phi|^p dx\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Uma vez que o espaço das funções contínuas com suporte compacto, $C^0_{\text{c}}(\mathbb{R}^n)$, é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$, escolha $\eta \in C^0_{\text{c}}(\mathbb{R}^n)$ de modo que, dado $\epsilon > 0$, temos

$$\|\eta - v\|_{L^p} < \frac{\epsilon}{(1 + \|\phi\|_{L^1})}.$$

Além disso, defina $g = \eta_\phi - \eta$ tal que

$$\operatorname{supp} g \subseteq \operatorname{supp} \eta + \overline{B(0,1)} = K,$$

para toda $\phi$ tal que $\operatorname{supp} \phi \subseteq B(0,1)$. Pelo próprio teorema, temos que $g(x) \longrightarrow 0$ uniformemente.

Desse modo, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{\text{supp}\to\{0\}} \|v - v_\phi\|_{L^p} \leq &\lim_{\text{supp}\to\{0\}} (1 + \|\phi\|_{L^1})\|\eta - v\|_{L^p} \\ &+ \lim_{\text{supp}\to\{0\}} \left(\int |\eta - \eta * \phi|^p dx\right)^{1/p} \\ &< \epsilon, \qquad \forall \epsilon > 0. \end{aligned}$$

Logo, $v_\phi \to v$ na norma $L^p(\mathbb{R}^n)$.

$\square$

**Lema 1.1.1.** *Seja $f$ contínua em um intervalo $I$ e diferenciável fora de um conjunto fechado $F$, onde $f = 0$. Se $x \in F$ e $f'(y) \longrightarrow 0$ quando $y \in I \setminus F$ e $y \longrightarrow x$, então $f'(x)$ existe e $f'(x) = 0$.*

*Demonstração.* Ver [7]. □

A proposição que segue, apesar de sua extensa demonstração, possui consequências que serão importantes no decorrer deste texto, além de evidenciar, mais uma vez, a importância da convolução. Denotemos por $\Pi$ o hiperplano $\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t = 0\}$.

**Proposição 1.1.4.** *Sejam $v \in C^j(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\,dx = 1$, então a função*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} v(x - yt)\phi(y)dy$$

*satisfaz as seguintes propriedades:*

a) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Pi)$.

b) $t^k u(x,t) \in C^{k+j}(\mathbb{R}^{n+1})$ *para todo inteiro $k$ não-negativo.*

c)

$$\partial_t^i (t^k u(x,t))|_{t=0} = \begin{cases} 0, & se \quad i < k \\ k!\, v(x), & se \quad i = k. \end{cases}$$

*Demonstração.* a) Inicialmente, vamos mostrar que $u \in C(\mathbb{R}^{n+1})$. De fato, dado $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, seja $(x_n, t_n)$ tal que $(x_n, t_n) \longrightarrow (x,t)$. Uma vez que $v$ é contínua em $x$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon, x) > 0$ tal que

$$|y - x| \leq \delta \Longrightarrow |v(y) - v(x)| \leq \frac{\epsilon}{\|\phi\|_{L^1}}.$$

Seja $N > 0$ tal que $\|(x_n, t_n) - (x,t)\| \leq \delta/2R$, para todo $n \geq N$. Assim, se $n \geq N$, então

$$\begin{aligned} |(x_n - t_n y) - (x - ty)| &\leq |x_n - x| + |t_n - t||y| \\ &\leq |x_n - x| + |t_n - t|R \\ &\leq R(|x_n - x| + |t_n - t|) \\ &\leq 2R\|(x_n, t_n) - (x,t)\| \leq \delta. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |u(x_n, t_n) - u(x,t)| &\leq \int |v(x_n - t_n y) - v(x - ty)||\phi(y)|dy \\ &\leq \frac{\epsilon}{\|\phi\|_{L^1}} \|\phi\|_{L^1} = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, temos que $u \in C(\mathbb{R}^{n+1})$.

Vamos mostrar agora que $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Pi)$. Para tanto, é suficiente mostrarmos que $\partial^{\beta} u(x,t)$ é contínua sobre $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Pi$ para todo $\beta \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$. De fato, dado $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Pi$, observemos que

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} v(x - yt)\phi(y)\, dy = \int v(z) t^{-n} \phi\left(\frac{x-z}{t}\right) dz = (v * \phi_t)(x).$$

Assim, para $\beta = (\alpha, \gamma)$, com $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ e $\gamma \in \mathbb{Z}_+$, o resultado está provado se mostrarmos que

$$\partial_{(x,t)}^{\beta} u(x,t) = \partial_x^{\alpha}\, \partial_t^{\gamma} (v * \phi_t)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} v(y)\, \partial_x^{\alpha}\, \partial_t^{\gamma} (\phi_t(x-y))\, dy$$

é contínua em $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Pi$. Comecemos, primeiramente, estimando a derivada parcial na variável $t$. Afirmamos que

$$\partial_t\, u(x,t) = (v * \partial_t\, \phi_t)(x).$$

Com efeito, dado $x \in \mathbb{R}^n$, suponha $|x| < \delta$. Se $t > 0$, sabemos que $u(x,t) = (v * \phi_t)(x)$. Assim, temos

$$\frac{1}{h}[v * \phi_{t+h} - v * \phi_t](x) = \frac{1}{h}[v * (\phi_{t+h} - \phi_t)](x) = \left[ v * \left( \frac{\phi_{t+h} - \phi_t}{h} \right) \right](x).$$

Seja $K = \operatorname{supp}(\phi_{t+h} - \phi_t)$ e defina $L = B(0,\delta) - K$. Desse modo, se

$$\psi_h(y) = v(y) \frac{(\phi_{t+h} - \phi_t)(x-y)}{h} \chi_L(y),$$

então $\psi_h$ se anula fora do compacto $L$. De fato, dado $y$ fora de $L$, então $x - y \notin K$, pois se ocorresse $x - y \in K$, então

$$y = x - (x-y) \in L,$$

o que é um absurdo. Portanto, $\psi_h(y) = 0$.

Fazendo $h \longrightarrow 0$, temos que

$$\psi_h(y) \longrightarrow v(y)\, \partial_t\, \phi_t(x-y)\, \chi_L(y).$$

Além disso, $|\psi_h(y)| \leq M|v\chi_L|(y)$, para todo $y$ e $M|v\chi_L| \in L^1$. Ainda,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi_h(y)| dy \leq M \int_L |v(y)| dy < \infty.$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\frac{1}{h}[v * \phi_{t+h} - v * \phi_t](x) \longrightarrow (v * \partial_t \phi_t)(x),\ h \longrightarrow 0.$$

Note ainda que

$$
\begin{aligned}
\partial_t\, \phi_t(x) &= \partial_t\, t^{-n} \phi\left(\frac{x}{t}\right) \\
&= -n\, t^{-n-1} \phi\left(\frac{x}{t}\right) + t^{-n}\, \partial_t\, \phi\left(\frac{x}{t}\right) \\
&= -n\, t^{-n-1} \phi\left(\frac{x}{t}\right) + t^{-n} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j} \phi\left(\frac{x}{t}\right) \frac{\partial}{\partial t} \frac{x_j}{t}\right] \\
&= -n\, t^{-n-1} \phi\left(\frac{x}{t}\right) - t^{-n} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j} \phi\left(\frac{x}{t}\right) \frac{x_j}{t^2}\right] \\
&= -n\, t^{-n-1} \phi\left(\frac{x}{t}\right) - t^{-n} \nabla\phi\left(\frac{x}{t}\right) \cdot \frac{x}{t^2} \\
&= -n\, t^{-n-1} \phi\left(\frac{x}{t}\right) - t^{-n-1} \nabla\phi\left(\frac{x}{t}\right) \cdot \frac{x}{t} \\
&= t^{-n-1} \left[-n\phi\left(\frac{x}{t}\right) - \nabla\phi\left(\frac{x}{t}\right) \cdot \frac{x}{t}\right] \\
&= \frac{1}{t} \left\{t^{-n} \left[-n\phi\left(\frac{x}{t}\right) - \nabla\phi\left(\frac{x}{t}\right) \cdot \frac{x}{t}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{t} \left\{t^{-n} \left[\psi\left(\frac{x}{t}\right)\right]\right\} \\
&= \frac{1}{t} \psi_t(x),
\end{aligned}
$$

onde $\psi$ é a função $C_c^\infty$, dada por

$$\psi(x) = -n\phi(x) - \nabla\phi(x) \cdot x.$$

Deste modo, vemos que

$$\partial_t u(x,t) = \left(v * \frac{1}{t}\psi_t\right)(x).$$

A seguir, vamos utilizar a seguinte notação: seja $\psi^{(0)} = \phi$ e $\psi^{(\ell)} = -n\psi^{(\ell-1)} - \nabla\psi^{(\ell-1)}(x) \cdot x$, para todo $\ell \geq 1$. Assim, derivando parcialmente a função $u(x,t)$, $\gamma$-vezes com respeito a variável $t$, obtemos a seguinte expressão

$$\partial_t^\gamma u(x,t) = \left(v * \sum_{j=1}^{\gamma} p_j(t) \psi_t^{(\ell)}\right)(x),$$

sendo $p_j(t)$ funções racionais da variável $t$, suaves para todo $t \neq 0$. Por outro lado, se $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, segue da Proposição 1.1.2 que

$$\partial_x^\alpha\, \partial_t^\gamma u(x,t) = \left(v * \sum_{j=1}^{\gamma} t^{-|\alpha|} p_j(t)\, \partial_x^\alpha \left(\psi_t^{(\ell)}\right)\right)(x)$$

mostrando assim que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Pi)$.

b) Vamos, agora, utilizar o princípio de indução a fim de mostrar que $t^k u(x,t) \in C^{k+j}(\mathbb{R}^{n+1})$ para todo inteiro $k$ não-negativo. Com efeito, suponha $k=0$ e mostremos que $u \in C^j(\mathbb{R}^{n+1})$. Derivando sob o sinal de integração, temos

$$\partial_t u(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i v(x-ty)(-y_i)\phi(y)dy.$$

Mais geral, tem-se

$$\partial_t^l u(x,t) = (-1)^l \sum_{|\beta|=l} \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\beta v(x-ty) y^\beta \phi(y)dy.$$

Portanto, para $\alpha = (\gamma, l) \in \mathbb{Z}_+^n \times \mathbb{Z}_+$, com $|\alpha| \leq j$, obtemos

$$\partial^\alpha u(x,t) = \partial_x^\gamma \partial_t^l u(x,t) = (-1)^l \sum_{|\beta|=l} \int_{\mathbb{R}^n} \partial^{\gamma+\beta} v(x-ty)\ y^\beta \phi(y)\ dy.$$

Uma vez que $|\gamma+\beta| = |\gamma|+|\beta| = |\gamma|+l = |\alpha| \leq j$ e $v \in C^j$, temos que $\partial^{\gamma+\beta}v$ é contínua. Além disso, $y^\beta\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Portanto, $\partial^\alpha u$ é contínua e finalmente $u \in C^j(\mathbb{R}^{n+1})$.

Seja $k \geq 1$ e suponha que $t^l u(x,t) \in C^{l+j}(\mathbb{R}^{n+1})$ para $l = 0, 1, \ldots, k-1$ e mostremos que o mesmo vale para $l = k$. Note, inicialmente, que para $t \neq 0$ vale

$$t^k u(x,t) = t^k |t|^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} v(y)\phi((x-y)/t)\, dy.$$

Assim, diferenciando sob o sinal de integração e retornando as coordenadas iniciais, obtemos as seguintes expressões

$$\partial_{x_i}(t^k u(x,t)) = t^{k-1} \int_{\mathbb{R}^n} v(x-ty)\, \partial_i\, \phi(y)\, dy, \tag{1.1}$$

e

$$\partial_t(t^k u(x,t)) = t^{k-1} \int_{\mathbb{R}^n} v(x-ty)[(k-n)\phi(y) - \sum_{i=1}^{n} \partial_i\, \phi(y) y_i]\, dy. \tag{1.2}$$

Para a prova da equação (1.1), note que

$$\begin{aligned}
\partial_{x_i}(t^k u(x,t)) &= t^k |t|^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} v(y) \partial_{x_i}(\phi((x-y)/t))\, dy \\
&= t^{k-1} |t|^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} v(y)(\partial_i \phi)((x-y)/t))\, dy \\
&= t^{k-1} \int_{\mathbb{R}^n} v(x-ty)(\partial_i \phi)(y)\, dy.
\end{aligned}$$

Para a prova da equação (1.2), podemos supor, sem perda de generalidade, que $t > 0$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
\partial_t(t^k u(x,t)) &= \partial_t(t^{k-n}\int_{\mathbb{R}^n} v(y)\phi((x-y)/t)\,dy)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} v(y)[(k-n)t^{k-n-1}\phi((x-y)/t) - t^{k-n-2}\sum_{i=1}^n \partial_i\,\phi((x-y)/t)(x_i-y_i)]\,dy\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} v(x-ty)[(k-n)t^{k-1}\phi(z) - t^{k-1}\sum_{i=1}^n \partial_i\,\phi(y)(y_i)]\,dy\\
&= t^{k-1}\int_{\mathbb{R}^n} v(x-ty)[(k-n)\phi(z) - \sum_{i=1}^n \partial_i\,\phi(y)(y_i)]\,dy.
\end{aligned}
$$

O próximo passo consiste em mostrar que as equações (1.1) e (1.2) ocorrem inclusive para $t=0$. Seja $f(t) = t^k u(x,t)$ para algum $x \in \mathbb{R}^n$ fixo. Note que $f(t)$ é uma função contínua nos reais e diferenciável para todo $t \neq 0$. Consideremos os seguintes casos:

**Caso 1:** $k=1$. Neste caso, provaremos que as seguintes identidades ocorrem para $t=0$.

$$
\begin{aligned}
\partial_{x_i}(tu(x,t)) &= \int_{\mathbb{R}^n} v(x-ty)\partial_i\,\phi(y)\,dy,\\
\partial_t(tu(x,t)) &= \int_{\mathbb{R}^n} v(x-ty)\left[(1-n)\phi(y) - \sum_{i=1}^n \partial_i\,\phi(y)y_i\right]\,dy.
\end{aligned}
$$

Para a prova da primeira equação, notemos que

$$
\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} v(x-ty)\partial_i\phi(y)\,dy = v(x)\int_{\mathbb{R}^n}\partial_i\,\phi(y)\,dy = 0. \tag{1.3}
$$

Por outro lado,

$$
\partial_{x_i}(tu(x,t)) = t\partial_{x_i}(u(x,t)) = t\,t^{-1}\int_{\mathbb{R}^n} v(x-ty)\partial_i\phi(y)\,dy \to 0, \quad t\to 0. \tag{1.4}
$$

Assim, segue de (1.3) e (1.4) a validade da primeira equação em $t=0$.

Para a prova da segunda equação, seja $\Phi(x) = (1-n)\phi(x) - \sum_{i=1}^n \partial_i\phi(x)x_i$. Então, $\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x)\,dx = 1$. Logo,

$$
\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} v(x-ty)\Phi(y)\,dy = v(x)\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y)\,dy = v(x). \tag{1.5}
$$

Por outro lado, seja $x \in \mathbb{R}^n$ fixo e defina $f(t) = tu(x,t)$. Tal função possui as seguintes propriedades: $f(0) = 0$ e, além disso,

$$
\partial_t(tu(x,t))|_{t=0} = f'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} u(x,t) = v(x). \tag{1.6}
$$

Logo, segue de (1.5) e (1.6) a validade da segunda equação em $t=0$. Finalizando, assim, a prova neste caso.

**Caso 2:** $k \geq 2$. Neste caso, o passo mais importante é mostrar que a equação (1.2) vale para $t = 0$. De fato, seja $x \in \mathbb{R}^n$ um ponto fixado e defina a função $h(t) = t^k u(x,t)$. Observe que a função $h(t)$ é contínua nos reais e diferenciável para todo $t \neq 0$ e $h(0) = 0$. Além disso, segue da seguinte estimativa

$$\lim_{t\to 0} h'(t) = \lim_{t\to 0} t^{k-1} \int_{\mathbb{R}^n} v(x-ty)[(k-n)\phi(y) - \sum_{i=1}^{n} \partial_i \, \phi(y) y_i] \, dy = 0$$

e do Lema 1.1.1 que

$$\partial_t (t^k u(x,t))|_{t=0} = 0,$$

como queríamos demonstrar. Completando assim a prova das identidades neste caso.

Portanto, segue das identidades (1.1) e (1.2), agora válidas em $\mathbb{R}^{n+1}$, que as derivadas de primeira ordem $\partial_t(t^k u(x,t))$ e $\partial_i(t^k u(x,t))$, sendo $i = 1, 2 \ldots, n$, escrevem-se como funções da forma $t^{k-1}u(x,t)$ que, pela hipótese de indução, são de classe $C^{j+k-1}(\mathbb{R}^{n+1})$, provando que a função $t^k u(x,t) \in C^{j+k}(\mathbb{R}^{n+1})$ finalizando, assim, a prova do item b).

Para a prova do item c), recordamos que devemos mostrar as seguintes identidades

$$\begin{cases} \partial_t^i (t^k u(x,t))|_{t=0} = 0, & i < k \\ \partial_t^k (t^k u(x,t))|_{t=0} = k! v(x), & i = k \end{cases}.$$

Defina $\mathcal{A}$ como sendo a seguinte família de funções:

$$\mathcal{A} = \{u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} v(x-ty) \, \phi(y) \, dy, \text{ com } \phi \in C_c^\infty(B(0,1)), \int \phi = 1\}.$$

Recorde que, anteriormente, foi mostrado que

$$\partial_t (t^k u(x,t)) = t^{k-1} \int_{\mathbb{R}^n} v(x-ty) \left[ (k-n)\phi(y) - \sum_{i=1}^{n} \partial_{y_i} \, \phi(y) y_i \right] dy.$$

Além disso, note que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[ (k-n)\phi(y) - \sum_{i=1}^{n} \partial_{y_i} \phi(y) y_i \right] dy = k.$$

Portanto, podemos escrever

$$\partial_t (t^k u(x,t)) = k \, t^{k-1} \int_{\mathbb{R}^n} v(x-ty) \, \eta_1(y) dy,$$

onde

$$\eta_1(y) = \frac{1}{k} \left[ (k-n)\phi(y) - \sum_{i=1}^{n} \partial_{y_i} \phi(y) y_i \right],$$

a qual é $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\int \eta_1(x) dx = 1$.

Defina $u_1$ por

$$u_1(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} v(x-ty)\eta_1(y)dy,$$

a qual pertence a família $\mathcal{A}$. Além disso, vale

$$\partial_t u(x,t) = -\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^n} v(x-ty)\left[n\phi(y) + \sum_{i=1}^{n} \partial_{y_i}\phi(y)y_i\right] dy.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\partial_t^2(t^k u(x,t)) &= \partial_t(kt^{k-1}u_1(x,t)) \\
&= k(k-1)t^{k-2}u_1(x,t) + kt^{k-1}\partial_t u_1(x,t) \\
&= k(k-1)t^{k-2}\int v(x-ty)\eta_1(y)dy \\
&+ kt^{k-1}\left\{-\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^n} v(x-ty)\left[n\eta_1(y) + \sum_{i=1}^{n}\partial_{y_i}\eta_1(y)y_i\right] dy\right\} \\
&= k(k-1)t^{k-2}\int_{\mathbb{R}^n} v(x-ty)\eta_1(y)dy \\
&- kt^{k-2}\left\{\int_{\mathbb{R}^n} v(x-ty)\left[n\eta_1(y) + \sum_{i=1}^{n}\partial_{y_i}\eta_1(y)y_i\right] dy\right\} \\
&= kt^{k-2}\int_{\mathbb{R}^n} v(x-ty)\left((k-1-n)\eta_1(y)dy - \sum_{i=1}^{n}\partial_{y_i}\eta_1(y)y_i\right) dy \\
&= k(k-1)t^{k-2}\int_{\mathbb{R}^n} v(x-ty)\eta_2(y)dy \\
&= k(k-1)t^{k-2}u_2(x,t),
\end{aligned}$$

onde $\eta_2$ é dada por

$$\eta_2(y) = \frac{1}{k-1}\left[((k-1)-n)\eta_1(y) - \sum_{i=1}^{n}\partial_{y_i}\eta_1(y)y_i\right],$$

e, assim como $u_1$, $u_2$ é definida por

$$u_2(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} v(x-ty)\ \eta_2(y)\ dy.$$

Note que a aplicação $\eta_2$ satisfaz as mesmas propriedades de $\eta_1$, ou seja, $\eta_2$ é função-teste e $\int \eta_2(x)dx = 1$, o que torna $u_2$ uma aplicação de $\mathcal{A}$.

De forma mais geral, definimos $\eta_j$, para $j = 1, \ldots, k$, por

$$\eta_j(y) = \frac{1}{k-(j-1)}\left[((k-(j-1))-n)\eta_{j-1}(y) - \sum_{i=1}^{n}\partial_{y_i}\eta_{j-1}(y)y_i\right],$$

e, naturalmente, ficam definidas

$$u_j(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} v(x - ty)\ \eta_j(y)\ dy.$$

Vamos mostrar que $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_j(x)dx = 1$, para todo $j = 1, \ldots, k$, mostrando, portanto, que cada $u_j \in \mathcal{A}$.

Não é difícil verificar o caso $j = 1$. Desse modo, suponha que para $j = 1, \ldots, l$, para $l < k$, tenha-se que integral de $\eta_j$ é 1. Mostremos que o mesmo vale para $j = l + 1$.

De fato,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \eta_{l+1}(y)dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{k-l} \left[ ((k-l)) - n)\eta_l(y) - \sum_{i=1}^{n} \partial_{y_i}\eta_l(y)y_i \right] dy \\
&= \frac{(k-l)-n}{k-l} \int_{\mathbb{R}^n} \eta_l(y)dy - \frac{1}{k-l} \sum_{i=1}^{n} \int \partial_{y_i}\eta_l(y)y_i dy \\
&= \frac{(k-l)-n}{k-l} \int_{\mathbb{R}^n} \eta_l(y)dy + \frac{1}{k-l} \sum_{i=1}^{n} \int \eta_l(y)\partial_{y_i}y_i dy \\
&= \frac{(k-l)-n}{k-l} \int_{\mathbb{R}^n} \eta_l(y)dy + \frac{n}{k-l} \int \eta_l(y)dy \\
&= \left[ \frac{(k-l)-n}{k-l} + \frac{n}{k-l} \right] \int_{\mathbb{R}^n} \eta_l(y)dy \\
&= \left[ \frac{[(k-l)-n]+n}{k-l} \right] \int_{\mathbb{R}^n} \eta_l(y)dy \\
&= \frac{[(k-l)-n]+n}{k-l} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Dado isto, afirmemos que:

$$\partial_t^j(t^k u(x,t)) = k(k-1)\ldots(k-(j-1))\ t^{k-j}u_j(x,t),\ \forall\ j = 1, \ldots, k. \tag{1.7}$$

Assumindo (1.7), temos que para $j = k$ vale

$$\partial_t^k\ (t^k\ u(x,t)) = k(k-1)\ldots(k-(k-1))t^{k-k}u_k(x,t) = k!\ u_k(x,t).$$

Além disso, note que $u(x,t)|_{t=0} = v(x)$, para toda $u \in \mathcal{A}$. Portanto,

$$\partial_t^k(t^k u(x,t))|_{t=0} = k!\ v(x).$$

Agora, para todo $j < k$, temos

$$\partial_t^j(t^k u(x,t)) = c_{k,j}\, t^{k-j}u_j(x,t).$$

Segue, claramente, daí que

$$\partial_t^j(t^k u(x,t))|_{t=0} = c_{k,j}\, t^{k-j} u_j(x,t)|_{t=0} = 0.$$

Finalmente, vamos mostrar (1.7). De fato, note que a afirmação já foi mostrada tanto para $j = 1$ quanto para $j = 2$. Suponhamos que a mesma seja válida para $j = 1, ..., l-1$, para $l - 1 < k$ e mostremos que é válida para $j = l$.

Com efeito,

$$\begin{aligned}
&\partial_t^l(t^k u(x,t)) = \partial_t(\partial_t^{l-1}\, t^k\, u(x,t)) \\
&= \partial_t[k(k-1)\dots(k-(l-2))\, t^{k-(l-1)}\, u_{l-1}(x,t)] \\
&= k(k-1)\dots(k-(l-2))(k-(l-1))\, t^{k-l}\, u_{l-1}(x,t) \\
&+k(k-1)\dots(k-(l-2))\, t^{k-(l-1)}\partial_t\, u_{l-1}(x,t) \\
&= k(k-1)\dots(k-(l-2))(k-(l-1))\, t^{k-l}\, u_{l-1}(x,t) \\
&+k(k-1)\dots(k-(l-2))\, t^{k-(l-1)} \left\{-\tfrac{1}{t}\int v(x-ty)\left[n\, \eta_{l-1}(y) + \sum_{i=1}^{n} \partial_{y_i}\eta_{l-1}(y)y_i\right] dy\right\} \\
&= k(k-1)\dots(k-(l-2))(k-(l-1))\, t^{k-l}\, u_{l-1}(x,t) \\
&-k(k-1)\dots(k-(l-2))\, t^{k-l} \left\{\int v(x-ty)\left[n\, \eta_{l-1}(y) + \sum_{i=1}^{n} \partial_{y_i}\eta_{l-1}(y)y_i\right] dy\right\} \\
&= k(k-1)\dots(k-(l-2))(k-(l-1))\, t^{k-l}\, \int v(x-ty)\, \eta_l(y)dy \\
&= k(k-1)\dots(k-(l-2))(k-(l-1))\, t^{k-l}\, u_l(x,t),
\end{aligned}$$

concluindo (1.7) para $t \neq 0$. Uma análise análoga a desenvolvida para mostrar a identidade (1.2) para $t = 0$, conclui (1.7) para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, o que encerra a demonstração.

□

**Corolário 1.1.1.** *Dada arbitrária $u_j \in C^{k-j}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq j \leq k$, pode-se encontrar $u \in C^k(\mathbb{R}^{n+1})$ tal que*

$$\partial_t^j u(x,t)|_{t=0} = u_j(x),\ \forall\, j = 0, \dots, k.$$

*Demonstração.* Vamos utilizar o processo de indução. Para $r = 0, 1, \dots, k$ considere a seguinte propriedade

$$P(r) : u_j \in C^{k-j}(\mathbb{R}^n), 0 \leq j \leq r \Longrightarrow \exists\, u^r \in C^k(\mathbb{R}^n)\ :\ \partial_t^j u^r(x,t)|_{t=0} = u_j(x),\ j = 0, \dots, r.$$

Mostremos, inicialmente, que $P(0)$ é verdadeira. Defina $u^0(x,t) = u_0(x)$, a qual é de classe $C^k(\mathbb{R}^n)$. Além disso, note que

$$\partial_t^0 u^0(x,t)|_{t=0} = u_0(x),$$

mostrando $P(0)$.

Suponha, agora, $P(r-1)$ verdadeira e mostremos $P(r)$. De fato, sejam $u_0, u_1, \dots, u_r$ funções dadas tais que $u_j \in C^{k-j}(\mathbb{R}^n)$.

Por hipótese, existe uma função $u^{r-1} \in C^k(\mathbb{R}^{n+1})$ tal que

$$\partial_t^j u^{r-1}(x,t)|_{t=0} = u_j(x), \quad j = 0, 1, \ldots, r-1.$$

Vamos agora encontrar uma função $U(x,t)$ de classe $C^k(\mathbb{R}^{n+1})$ solução do seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \partial_t^j U(x,t)|_{t=0} = 0, & j < r \\ \partial_t^j U(x,t)|_{t=0} = u_r(x) - \partial_t^j u^{r-1}(x,0), & j = r \end{cases}.$$

Defina inicialmente funções $v_r$ e $v$ como segue

$$v_r(x) = u_r(x) - \partial_t^r u^{r-1}(x,t)|_{t=0} \text{ e } v = \frac{v_r}{r!}.$$

Como $u^{r-1} \in C^k(\mathbb{R}^{n+1})$ e, portanto, $\partial_t^r u^{r-1} \in C^{k-r}(\mathbb{R}^{n+1})$ e pelo fato de $u_r \in C^{k-r}(\mathbb{R}^n)$, temos que as funções $v_r$ e $v$ são de classe $C^{k-r}(\mathbb{R}^n)$. A seguir, tome $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, dx = 1$, e defina a função $V(x,t)$ por

$$V(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} v_r(x - ty)\phi(y)\, dy.$$

Graças a Proposição 1.1.4, temos que $t^r\ V \in C^{(k-r)+r} = C^k(\mathbb{R}^{n+1})$ e é solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \partial_t^j\ t^r\ V(x,t)|_{t=0} = 0, & j < r \\ \partial_t^j\ t^r\ V(x,t)|_{t=0} = r!\ v(x), & j = r \end{cases}.$$

Seja $U(x,t) = t^r\ V(x,t)$ e defina a função $u^r(x,t)$ por $u^r(x,t) = u^{r-1}(x,t) + U(x,t)$. Então, vemos que $u^r \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e, além disso, satisfaz as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \partial_t^r u^r(x,t)|_{t=0} &= \partial_t^r (u^{r-1}(x,t) + U(x,t))|_{t=0} \\ &= \partial_t^r u^{r-1}(x,t)|_{t=0} + u_r(x) - \partial_t^r u^{r-1}(x,t)|_{t=0} = u_r(x), \end{aligned}$$

e se $j < r$, então

$$\partial_t^j u^r(x,t)|_{t=0} = \partial_t^j (u^{r-1}(x,t) + U(x,t))|_{t=0} = u_j(x),$$

completando assim a prova do corolário. □

Decorre deste corolário uma versão para multíndices que, posteriormente, será usado no Teorema 1.2.1. Para a demonstração do corolário abaixo, fixe $m$ e $n$, números naturais, e suponha que $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ sendo $N = m + n$. Assim, temos que:

**Corolário 1.1.2.** *Seja $\psi \in C^{k-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$, $0 \le |\alpha| \le k$, então existe $\phi \in C^k(\mathbb{R}^N)$, tal que*

$$\partial_x^\alpha\ \phi(x,y)|_{x=0} = \psi(y),\ \forall\ |\alpha| \le k.$$

*Demonstração.* Dado $\alpha = (j_1, ..., j_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, tal que $|\alpha| = j_1 + \cdots + j_m \leq k$ seja $\psi \in C^{k-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$. Se $k_1 \doteq k - (j_m + \cdots + j_2)$ então $k_1 = k - |\alpha| + j_1$ implicando que $k - |\alpha| = k_1 - j_1 \geq 0$. Deste modo, segue que $\psi \in C^{k_1 - j_1}(\mathbb{R}^n)$. Como $0 \leq j_1 \leq k_1$, temos pelo Corolário 1.1.1 que existe $\phi_1 \in C^{k_1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ tal que

$$\partial_{x_1}^{j_1} \phi_1(x_1, y)|_{x_1=0} = \psi(y).$$

Seja $k_2 \doteq k - (j_m + ... + j_3)$. Então, $k_2 = k_1 + j_2$ mostrando que $k_1 = k_2 - j_2 \geq 0$ e que $\phi_1 \in C^{k_2 - j_2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ com $0 \leq j_2 \leq k_2$. Novamente, pelo Corolário 1.1.1, existe $\phi_2 \in C^{k_2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ tal que

$$\partial_{x_2}^{j_2} \phi_2(x_1, x_2, y)|_{x_2=0} = \phi(x_1, y).$$

Como $j_1 \leq k_2 - j_2$, temos que

$$\partial_{x_1}^{j_1} \partial_{x_2}^{j_2} \phi_2(x_1, x_2, y)|_{x_2=0} = \partial_{x_1}^{j_1} \phi(x_1, y),$$

de onde concluímos que

$$\partial_{x_1}^{j_1} \partial_{x_2}^{j_2} \phi_2(x_1, x_2, y)|_{x_1=x_2=0} = \partial_{x_1}^{j_1} \phi(x_1, y)|_{x_1=0} = \psi(y).$$

Continuando com este processo e definindo $k_\ell \doteq k_{\ell-1} + j_\ell$, $\ell = 1, \ldots, m$ sendo $k_0 \doteq k - |\alpha|$, vamos encontrar uma aplicação $\phi_\ell \in C^{k_\ell}(\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^n)$ tal que

$$\partial_{x_1}^{j_1} \partial_{x_2}^{j_2} \ldots \partial_{x_{\ell-1}}^{j_{\ell-1}} \phi_{\ell-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{\ell-1}, y)|_{x_1=x_2=\cdots=x_{\ell-1}=0} = \psi(y).$$

Desse modo, sendo $\ell = m$ e $k_\ell = k$, existe $\phi_m \in C^k(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ de modo que

$$\partial_{x_1}^{j_1} \ldots \partial_{x_m}^{j_m} \phi_m(x_1, ..., x_m, y)|_{x_1=\ldots=x_m=0} = \psi(y).$$

Assim, se $\phi = \phi_m$ e $x = (x_1, ..., x_m)$, temos portanto que

$$\partial_x^\alpha \phi(x, y)|_{x=0} = \psi(y),$$

como queríamos demonstrar.

□

**Observação 1.1.2.** Note que se $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, podemos encontrar $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ sob as mesmas condições do corolário acima, uma vez que $k$ é arbitrário.

Muitas vezes, em Teoria das Distribuições, deseja-se substituir uma função por outra com suporte compacto sem que as propriedades da função dada sejam perdidas em algum conjunto compacto. Isto é feito através de uma multiplicação por uma "função corte" construída como segue:

**Proposição 1.1.5.** *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto aberto e $K$ compacto de $\Omega$. Então existe $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ com $0 \leq \phi \leq 1$ tal que $\phi \equiv 1$ em uma vizinhaça de $K$.*

*Demonstração.* Desde que $K$ é compacto, temos que

$$d(K, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) = \inf\{|x-y|;\ x \in K,\ y \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega\} > 0.$$

Assim, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$|x-y| \geq 4\epsilon,\ \forall x\ \in K, \forall\, y \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega.$$

Defina, para cada $r > 0$,

$$K_r = \{x \in \Omega\ :\ |x-y| \leq r,\ \text{para algum}\, y \in K\}.$$

Se $x \in K$, então $|x-x| = 0 < r$ e, portanto, $x \in K_r$, isto é, $K \subset K_r$. Mais que isso, $K_r$ é vizinhança de $K$, para todo $r > 0$. Seja $v$ a função característica de $K_{2\epsilon}$. Em particular, $v \equiv 1$ em $K$, já que $K \subset K_{2\epsilon}$. Considere $\chi \in C_c^\infty(B(0,1))$ tal que $\int \chi = 1$. Assim, fica definida $\chi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\chi(x/\epsilon)$, a qual é suportada em $B(0,\epsilon)$ e $\int \chi_\epsilon = 1$. Defina $\phi = v * \chi_\epsilon$.

*Afirmação* : $\operatorname{supp}\phi \subset K_{3\epsilon}$. De fato, note que

$$\begin{aligned}\operatorname{supp} &\subset \operatorname{supp} v + \operatorname{supp}\chi_\epsilon \\ &= K_{2\epsilon} + \overline{B}(0,\epsilon).\end{aligned}$$

Segue daí que, se $x \in \operatorname{supp}\phi$, então $x = x_1 + x_2$, para algum $x_1 \in K_{2\epsilon}$ e para algum $x_2 \in \overline{B}(0,\epsilon)$. Existe, portanto, $y \in K$ tal que $|x_1 - y| \leq 2\epsilon$. Assim, $x \in K_{3\epsilon}$, pois

$$|x-y| = |(x_1+x_2)-y| = |(x_1-y)+x_2| \leq |x_1-y| + |x_2| \leq 2\epsilon + \epsilon = 3\epsilon.$$

Como $K_{3\epsilon} \subset \Omega$, temos que $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Resta mostrar que $0 \leq \phi \leq 1$ e que $\phi \equiv 1$ em $K_\epsilon$. Com efeito,

$$0 \leq \phi(x) = \int v(x-y)\chi_\epsilon(y)dy = \int_{K_{2\epsilon}} \chi_\epsilon(y)dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\epsilon(y)dy = 1.$$

Por fim,

$$\begin{aligned}(1-\phi)(x) &= 1-\phi(x) = (1*\chi_\epsilon)(x) - (v*\chi_\epsilon)(x) \\ &= [(1-v)*\chi_\epsilon](x) = \int \chi_\epsilon(x-y)(1-v)(y)dy \\ &= \int_{|x-y|\leq\epsilon} \chi_\epsilon(x-y)(1-v)(y)dy = 0 \ \Leftrightarrow\ v = 1 \ \Leftrightarrow\ y \in K_{2\epsilon}.\end{aligned}$$

Se $x \in K_\epsilon$, então existe $z \in K$ tal que $|x - z| \leq \epsilon$. Logo,

$$|y - z| = |(y - x) + (x - z)| \leq |y - x| + |x - z| \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon,$$

isto é, $y \in K_{2\epsilon}$. Portanto, $\phi \equiv 1$ em $K_\epsilon$.

$\square$

Para referência futura, uma informação adicional sobre $\phi$, como construída no teorema prévio, é dada pelo corolário abaixo.

**Corolário 1.1.3.** *Para todo multíndice $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ existe uma constante $C_\alpha > 0$, dependente de $\alpha$, tal que*

$$\|\partial^\alpha \phi\|_{L^\infty} \leq C_\alpha \epsilon^{-|\alpha|}.$$

*Demonstração.* De fato, dado $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, derivando sob o sinal de integração obtemos

$$|\partial^\alpha \phi(x)| = |\partial^\alpha (v * \chi_\epsilon)(x)| = |[v * \partial^\alpha(\chi_\epsilon)](x)|.$$

Passando a desigualdade para o integrando no produto convolução e usando o fato de que $v$ é a função característica do compacto $K_{2\epsilon}$, temos que

$$|\partial^\alpha \phi(x)| \leq \int_{K_{2\epsilon}} |\partial^\alpha(\chi_\epsilon)(x - y)| dy = \int_{K_{2\epsilon}} \epsilon^{-n} \epsilon^{-|\alpha|} \big| (\partial^\alpha \chi) \left( (x - y)/\epsilon \right) \big| dy.$$

Efetuando a mudança de variável $y = x - \epsilon z$, obtemos

$$|\partial^\alpha \phi(x)| \leq \int_{K_{2\epsilon}} \epsilon^{-|\alpha|} |\partial^\alpha \chi(z)| dz \leq (\sup_{z \in K_{2\epsilon}} |\partial^\alpha \chi(z)|) |K_{2\epsilon}| \epsilon^{-|\alpha|} = C_\alpha \epsilon^{-|\alpha|},$$

como queríamos demonstrar. $\square$

**Exemplo 1.1.1.** Dado $N > 0$ existe uma função $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$\psi(t) = \begin{cases} t^N/N!, & t \in [-1/2, 1/2] \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}.$$

e, além disso, para cada $M > 0$ existe uma constante $c_M > 0$, dependente de $M$, tal que

$$\sum_{\ell=0}^{M} \|\psi^{(\ell)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq c_M.$$

Com efeito, considere, na Proposição 1.1.5, o caso particular em que $\Omega = (-1, 1)$ e $K = [-1/2, 1/2]$. Então, existe $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ com $0 \leq \phi \leq 1$ tal que $\phi \equiv 1$ em vizinhaça de $K$. De modo natural, estenda $\phi$ sobre $\mathbb{R}$, considerando $\phi = 0$ fora de $(-1, 1)$. Temos, neste caso, que $\epsilon = 1/8$. Se $0 \leq \ell \leq M$, então, pelo Corolário 1.1.3,

$$\|\phi^{(\ell)}\|_{L^\infty} \leq c\, 8^M.$$

Além disso, considere
$$f(t) = \frac{t^N}{N!}$$
e, portanto,
$$\|f^{(\ell)}\|_{L^\infty(-1,1)} \leq 1,\ \forall\, \ell \leq M.$$
Defina $\psi = f\ \phi$. Então, $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e
$$\psi(t) = \begin{cases} t^N/N!,\ t \in [-1/2, 1/2] \\ 0,\ |t| > 1 \end{cases}.$$
Além disso, pela Regra de Leibniz, obtemos
$$\|\psi^{(\ell)}\|_{L^\infty} = \|\psi^{(\ell)}\|_{L^\infty(-1,1)} \leq \sum_{i=0}^{\ell} \begin{pmatrix} \ell \\ i \end{pmatrix} \|f^{(\ell-i)}\|_{L^\infty(-1,1)}\ \|\phi^{(\ell)}\|_{L^\infty} \leq \sum_{i=0}^{\ell} \begin{pmatrix} \ell \\ i \end{pmatrix} c\, 8^M = c_\ell,$$
para $0 \leq \ell \leq M$. Tome $c_M = \max c_\ell$, concluindo o exemplo.

### 1.1.2 Distribuições

Um dos objetivos deste capítulo é estudarmos funcionais lineares contínuos definidos sobre $C_c^\infty(\Omega)$. Entretanto, a noção de continuidade para estes é garantida pela escolha de uma topologia para o espaço das funções-teste. De forma despretenciosa, segue aqui alguns fatos e definições que levam à noção (desejada, convenientemente) de convergência em $C_c^\infty(\Omega)$.

**Definição 1.1.5.** *Sejam $E$ um espaço vetorial sobre um corpo $K$ e $\tau$ uma topologia sobre $E$ tais que as aplicações abaixo sejam contínuas*
$$\begin{aligned} (x,y) \in E \times E &\longmapsto x + y \in E \\ (\lambda, x) \in K \times E &\longmapsto \lambda x \in E. \end{aligned}$$

*Neste caso, dizemos que $(E, \tau)$ é um* ***espaço vetorial topológico*** *.*

**Definição 1.1.6.** *Sejam $E$ espaço vetorial e $p : E \longmapsto [0, +\infty)$ uma aplicação. Dizemos que a aplicação $p$ é* ***seminorma*** *sobre $E$ se para todo $x, y \in E$ e todo $\lambda \in K$ vale*

(i) *$p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$;*

(ii) *$p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.*

**Definição 1.1.7.** *Seja $(p_k)_{k\geq 1}$ uma família enumerável de seminormas definidas sobre $E$, onde $E$ é espaço vetorial. Dizemos que $(p_k)_{k\geq 1}$ é* ***separável*** *se*
$$p_k(x) = 0,\ \forall\, k \Rightarrow x = 0.$$

Seja $E$ um espaço vetorial munido de uma família $(p_k)_{k\geq 1}$ enumerável de seminormas, separável. Obtemos, portanto, uma topologia em $E$, gerada por vizinhanças dadas por intersecções finitas de semibolas da forma

$$B_p(x_0, r) = \{x \in E;\ p(x - x_0) < r\},$$

o que torna $E$ um espaço vetorial topológico.

Se essa topologia é metrízável e $E$ é completo segundo esta métrica, dizemos que $E$ é um *espaço de Fréchet*.

**Exemplo 1.1.2.** Fixado $m \in \mathbb{Z}_+$, seja $K$ compacto de $\Omega$. Para cada $j = 1, 2, \ldots$, defina $K_j$ como sendo

$$K_j = \{x \in \mathbb{R}^n;\ d(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \geq 1/j\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| \leq j\}.$$

Note que

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \ \text{ e } \ K_j \subset\subset K_{j+1},$$

isto é, $\overline{K_j} \subset K_{j+1}$. Dada $\phi \in C^m(\Omega)$, definimos

$$p_j(\phi) = \sup_{|\alpha|\leq m} \sup_{K_j} |\partial^\alpha \phi(x)|.$$

O conjunto $(p_j)_{j\geq 1}$ constitui uma família enumerável de seminormas separável e, além disso, $C^m(\Omega)$ é espaço de Fréchet.

O mesmo se conclui para $C^\infty(\Omega)$ se considerarmos $(p_{j,m})_{\substack{j\geq 1\\ m\in\mathbb{Z}_+}}$, a família de seminormas definida como no exemplo acima. Assim, definimos:

**Definição 1.1.8.** *Dada uma sequência $\{\phi_j\}$ de funções em $C^m(\Omega)$, dizemos que $\phi_j$* ***converge a zero em*** *$C^m(\Omega)$, e escrevemos $\phi_j \longrightarrow 0$ em $C^m(\Omega)$, se para todo compacto $K$*

$$\partial^\alpha \phi_j(x) \longrightarrow 0 \ \text{ uniformemente em } \ K,\ \forall\, |\alpha| \leq m.$$

**Definição 1.1.9.** *Dada uma sequência $\{\phi_j\}$ de funções em $C^\infty(\Omega)$, dizemos que $\phi_j$* ***converge a zero em*** *$C^\infty(\Omega)$, e escrevemos $\phi_j \longrightarrow 0$ em $C^\infty(\Omega)$, se para todo compacto $K$*

$$\partial^\alpha \phi_j(x) \longrightarrow 0 \ \text{ uniformemente em } \ K,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

**Definição 1.1.10.** *Um funcional linear $u : C^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$* ***é contínuo*** *se existem um compacto $K$ de $\Omega$, uma constante $C > 0$ e $m \in \mathbb{Z}_+$ tais que*

$$|u(\phi)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_K |\partial^\alpha \phi(x)|,\ \forall\, \phi \in C^\infty(\Omega). \tag{1.8}$$

**Exemplo 1.1.3.** Seja $K$ compacto de $\Omega$. Denotemos por $C_K^\infty(\Omega)$ o conjunto dado por

$$C_K^\infty(\Omega) = \{\phi \in C_c^\infty(\Omega);\ \operatorname{supp}\phi \subseteq K\}.$$

Consideremos novamente a família de compactos $K_j$, como no exemplo prévio. Cada $C_{K_j}^\infty(\Omega)$ é um espaço de Fréchet com a família de seminormas $(p_{K_j,m})_{m\geq 1}$ definidas por

$$p_{K_j,m}(\phi) = \sup_{|\alpha|\leq m} \sup_{K_j} |\partial^\alpha \phi(x)|.$$

Por vezes, escreveremos $C_c^\infty(K)$ para denotar $C_K^\infty(\Omega)$.

Queremos agora munir $C_c^\infty(\Omega)$ com uma topologia. Note que

$$C_c^\infty(\Omega) = \bigcup_{j=1}^{\infty} C_{K_j}^\infty(\Omega).$$

Se considerarmos a família $(p_{K_j,m})_{\substack{j\geq 1,\\ m\in\mathbb{Z}_+}}$, acabamos obtendo a topologia de $C^\infty(\Omega)$. Munimos, portanto, $C_c^\infty(\Omega)$ com a topologia mais fina que torna as inclusões

$$i_j : C_c^\infty(K_j) \longrightarrow C_c^\infty(\Omega)$$

contínuas.

Portanto, definimos:

**Definição 1.1.11.** *Dada uma sequência $\{\phi_j\}$ de funções em $C_c^\infty(\Omega)$, dizemos que $\phi_j$* ***converge a zero em*** $C_c^\infty(\Omega)$*, e escrevemos $\phi_j \longrightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, se*

(i) *existe compacto $K$ de $\Omega$ tal que* $\operatorname{supp}\phi_j \subseteq K$, $\forall\, j$;

(ii) $\partial^\alpha\phi_j(x) \longrightarrow 0$ *uniformemente, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.*

**Definição 1.1.12.** *Um funcional linear $u : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ é contínuo se, e somente se, dado compacto $K$, existem constante $C > 0$ e $m \in \mathbb{Z}_+$ tais que*

$$|u(\phi)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup |\partial^\alpha \phi(x)|,\ \forall\, \phi \in C_c^\infty(K). \tag{1.9}$$

**Definição 1.1.13.** *Um funcional $u : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ é chamado de* ***distribuição*** *se o mesmo for linear e contínuo. O espaço das distribuições é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

O estudo e criação da Teoria das Distribuições originou-se nas mãos do matemático francês Laurent Schwartz que por seu primoroso trabalho foi laureado com a Medalha Fields. Schwartz denotava o espaço das funções-teste simplesmente por escrever $\mathcal{D}(\Omega)$, o que justifica a notação $\mathcal{D}'(\Omega)$ para o seu dual topológico.

Por vezes, para denotar a distribuição $u$ agindo em uma função-teste $\phi$ vamos usar $\langle u, \phi\rangle$ no lugar de $u(\phi)$.

**Exemplo 1.1.4.** Fixada $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, defina $T_f : C^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ pondo

$$T_f(\phi) = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx,$$

a qual está bem definida e, além disso, define uma distribuição, pois

$$\|T_f(\phi)\| \leq c\,\|\phi\|_{L^\infty}.$$

Portanto, toda função localmente integrável define uma distribuição. Identificamos, assim, cada função de $L^1_{\mathrm{loc}}$ com uma distribuição e, por esta razão, dada $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ não a distinguiremos da distribuição $T_f$ a ela associada. Além de $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, por meio desta identificação, estão também contemplados seus subspaços como $C(\Omega), C^k(\Omega), C^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega), L^p(\Omega)$, entre outros.

**Proposição 1.1.6.** *Um funcional linear $u : C^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ é distribuição se, e somente se, for sequencialmente contínuo, ou seja,*

$$\forall\ \phi_j \in C^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega),\ \phi_j \longrightarrow 0 \text{ em } C^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega) \Longrightarrow u(\phi_j) \longrightarrow 0 \text{ em } \mathbb{C}. \tag{1.10}$$

*Demonstração.* Suponha $u$ distribuição e seja $\{\phi_j\}$ sequência de funções em $C^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega)$ convergindo a zero. Portanto, existe compacto $K$ no qual cada $\phi_j$ está suportada. Por (1.9), existem constantes $C > 0$ e inteiro não-negativo $m$ tais que

$$|u(\phi_j)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup|\partial^\alpha \phi_j(x)|,\ \forall\ \phi_j \in C^\infty_{\mathrm{c}}(K).$$

Desde que todas as derivadas de $\phi_j$ convergem uniformemente a zero e, em particular, as de ordem menor ou igual que $m$, obtemos que $u(\phi_j) \longrightarrow 0$ em $\mathbb{C}$.

Reciprocamente, suponha que (1.9) não seja válida, isto é, existe compacto $K$ de $\Omega$ para o qual (1.9) não vale para quaisquer que sejam $C > 0$ e $m \in \mathbb{Z}_+$. Assim, para cada $j \in \mathbb{Z}_+$, existe $\phi_j \in C^\infty_{\mathrm{c}}(K)$ tal que

$$|u(\phi_j)| > j \sum_{|\alpha|\leq j} \sup|\partial^\alpha \phi_j(x)| \geq 0.$$

Além disso, suponhamos que $u(\phi_j) = 1$ para todo $j$. Portanto,

$$0 \leq \sum_{|\alpha|\leq j} \sup|\partial^\alpha \phi_j(x)| < \frac{1}{j},\ \forall\ j,$$

implicando que as derivadas de $\phi_j$ convergem uniformemente a zero quando $j \longrightarrow 0$. Logo, $\phi_j \longrightarrow 0$ em $C^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega)$ ao mesmo tempo que $u(\phi_j)$ permanece constante a medida que $j$ cresce, contrariando a hipótese. Logo, $u$ é distribuição, como queríamos demonstrar.

□

**Definição 1.1.14.** *Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dizemos que $u$ é de* ***ordem menor ou igual que m*** *se existe constante $m \in \mathbb{Z}_+$ tal que para todo compacto $K$, exista constante $C > 0$, dependendo de $K$, de modo que*

$$|u(\phi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |\partial^\alpha \phi(x)|, \ \forall \ \phi \in C_c^\infty(K). \tag{1.11}$$

*Ainda, dizemos que $u$ possui* ***ordem m*** *se $m$ é o menor inteiro satisfazendo* (1.11). *Denotamos o espaço das distribuições de ordem menor ou igual que $m$ e o espaço das distribuições de ordem $m$ por $\mathcal{D}'^{(m)}(\Omega)$ e $\mathcal{D}'^{m}(\Omega)$, respectivamente.*

**Exemplo 1.1.5.** Fixado $x_0 \in \Omega$, temos que o funcional $\delta_{x_0} : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$, definido por

$$\delta_{x_0}(\phi) = \phi(x_0), \ \forall \ \phi \in C_c^\infty(\Omega), \tag{1.12}$$

define uma distribuição. Além disso, a mesma possui ordem zero.

**Exemplo 1.1.6.** Considere $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{r_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ uma enumeração dos racionais no intervalo $[0,1]$. Defina $f$ da seguinte forma:

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \, \delta_{r_j}.$$

Temos que $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. De fato, considere a soma parcial

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} \, \delta_{r_j},$$

a qual é distribuição, uma vez que é soma finita de distribuições. Ainda, dada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, temos que para todo $\ell$ e $k$ naturais, com $\ell \leq k$, vale que

$$|\langle s_k, \phi\rangle - \langle s_\ell, \phi\rangle| = \Big| \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^j}\phi(r_j) - \sum_{j=1}^{\ell} \frac{1}{2^j}\phi(r_j) \Big| \leq \|\phi\|_{L^\infty} \sum_{j=\ell+1}^{k} \frac{1}{2^j} \longrightarrow 0$$

quando $\ell, k \longrightarrow \infty$. Isto mostra que a sequência das somas parciais $\langle s_n, \phi\rangle$ é de Cauchy e, portanto, $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Além disso, vale

$$|\langle f, \phi\rangle| \leq C\|\phi\|_{L^\infty},$$

ou seja, $f$ possui ordem nula.

A distribuição no Exemplo 1.1.5 constitui um importante exemplo dentro da teoria das distribuições e por esta razão, devido ao físico Paul Dirac, recebe o nome de *delta de Dirac centrada em $x_0$*. Quando $x_0 = 0$, denotamos-a por $\delta$ e nos referimos a ela simplesmente por dizer *delta de Dirac*.

**Observação 1.1.3.** Munimos $\mathcal{D}'(\Omega)$ com a topologia fraca*, ou seja, a topologia gerada pelas seminormas

$$\|u\|_\phi = |u(\phi)|, \ \forall \ \phi \in C_c^\infty(\Omega),$$

que, por sua vez, nos dá a seguinte noção de convergência (pontual):

$$u_j \longrightarrow 0 \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \Longleftrightarrow u_j(\phi) \longrightarrow 0 \text{ em } \mathbb{C}.$$

Na seção anterior definimos o suporte de uma função localmente integrável. Uma vez que a mesma é uma distribuição, desejamos que, se existir (e existe) uma noção de suporte de distribuição, esta coincida com a noção de suporte de uma função em $L^1_{\text{loc}}$.

Antes disso, precisamos estabelecer algumas noções prévias como, por exemplo, a restrição de uma distribuição por um aberto. Outra noção é a ferramenta conhecida por partição da unidade.

**Lema 1.1.2.** *Sejam $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ abertos de $\mathbb{R}^n$ e*

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{k} \Omega_j.$$

*Se $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, então existem $\phi_1, \ldots, \phi_k$ tais que $\phi_i \in C_c^\infty(\Omega_i)$, para $i = 1, \ldots, k$, e*

$$\phi = \sum_{j=1}^{k} \phi_j. \tag{1.13}$$

*Demonstração.* Dada $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos que o suporte de $\phi$ é compacto. Pelo Teorema de Borel-Lebesgue, existem compactos $K_1, \ldots, K_k$, tais que $K_j \subseteq \Omega_j$, para $j = 1, \ldots, k$, e

$$\operatorname{supp} \phi \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} K_j.$$

Para cada $j = 1, ..., k$, considere, pela Proposição 1.1.5, $\psi_j \in C_c^\infty(\Omega_j)$ tal que $\psi_j \equiv 1$ em uma vizinhança de $K_j$. Defina $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k$, por

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= \phi(x)\psi_1(x) \\
\phi_2(x) &= \phi(x)\psi_2(x)(1 - \psi_1)(x) \\
&\vdots \\
\phi_k(x) &= \phi(x)\psi_n(x)(1 - \psi_{k-1})(x) \ldots (1 - \psi_1)(x)
\end{aligned}$$

Temos que $\operatorname{supp} \phi_j \subseteq \Omega_j$, pois $\operatorname{supp} \phi_j \subseteq \psi_j$. Além disso, temos que

$$-\phi(x) + \sum_{j=1}^{k} \phi_j(x) = \phi(x) \prod_{j=1}^{k} (1 - \psi_j)(x).$$

Se $x \in K_j$, para algum $j = 1, \ldots, k$, então $\psi_j(x) = 1$. Por outro lado, se $x \notin K_j$, para todo $j = 1, \ldots, k$, então $x \notin \operatorname{supp} \phi$ e, portanto, $\phi(x) = 0$. Logo,

$$\phi = \sum_{j=1}^{k} \phi_j.$$

□

**Definição 1.1.15.** *Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Para $U$ aberto de $\Omega$, definimos a **restrição de** $u$ **ao aberto** $U$ como sendo*

$$u|_U(\phi) = u(\phi), \ \forall \ \phi \in C_c^\infty(U).$$

**Teorema 1.1.1.** *Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é tal que para cada $x \in \Omega$, existe aberto $U$, $x \in U$, com $u|_U = 0$, então $u = 0$.*

*Demonstração.* Seja $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Uma vez que $\operatorname{supp} \phi$ é compacto, existem $U_1, \ldots, U_k$ tal que

$$u|_{U_j} = 0, \ \forall \ j = 1, \ldots, k \ \text{ e } \operatorname{supp} \phi \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} U_j.$$

Pelo Lema 1.1.2 existem $\phi_j \in C_c^\infty(U_j)$ satisfazendo (1.13) e tais que $\operatorname{supp} \phi_j \subseteq U_j$, para $j = 1, \ldots, k$ . Portanto,

$$u(\phi) = \sum_{j=1}^{k} u(\phi_j) = 0$$

Desde que $\phi$ é arbitrária, concluímos que $u = 0$.

□

**Definição 1.1.16.** *Dada uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definimos o **suporte de** $u$, e denotamos* $\operatorname{supp} u$*, como sendo o conjunto dos $x \in \Omega$, tais que não existe vizinhaça de $x$ na qual $u$ seja nula.*

Note que o suporte de uma distribuição é um conjunto fechado relativo a $\Omega$. Além disso, se $u$ é uma distribuição, então o complementar do suporte de $u$, $\Omega \setminus \operatorname{supp} u$, é o maior aberto no qual ela se anula.

**Definição 1.1.17.** *Dada uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, dizemos que $u$ **é de suporte compacto** se o suporte de $u$ é compacto e denotamos por $\mathcal{E}'(\Omega)$ o espaço das distribuições cujo suporte é compacto.*

A própria delta de Dirac é um exemplo de distribuição cujo suporte é compacto, uma vez que ela está suportada na origem, como veremos mais adiante.

**Exemplo 1.1.7.** Considere a distribuição dada no Exemplo 1.1.6. A distribuição em questão pertence a $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$. Mais que isso, temos que

$$\operatorname{supp} f = [0, 1].$$

Com efeito, como veremos adiante, o suporte da delta de Dirac centrada em $r_j$ é o próprio $\{r_j\}$. Daí, segue que

$$\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \operatorname{supp} \delta_{r_j} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{r_j\} \subset \mathbb{Q} \cap [0,1] \subset [0,1].$$

Por outro lado, para mostrar que $[0,1] \subset \operatorname{supp} f$, seja $x \in [0,1]$. Qualquer vizinhança aberta $U$ de $x$ contém racionais $r_j \in [0,1]$. Portanto, $f$ restrita a $U$ é não-nula. Logo, não existe vizinhança de $x$ na qual $f$ se anula, isto é, $x \in \operatorname{supp} f$, concluindo a inclusão desejada.

Em Teoria das Distribuições, muitas vezes, estamos interessados em estender distribuições a funcionais lineares contínuos sobre algum espaço. Por exemplo, é possível estender uma distribuição a um funcional linear contínuo definido sobre $C^{\infty}(\Omega)$? Se é possível, sob quais condições?

É com o intuito de responder estas questões que apresentemos os seguintes resultados.

**Proposição 1.1.7.** *Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então, $u$ pode ser estendido a um funcional linear $\tilde{u}$ definido sobre*

$$\{\varphi \in C^{\infty}(\Omega) : \operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} \varphi \subset\subset \Omega\}$$

*de maneira única, satisfazendo:*

(i) $\tilde{u}(\varphi) = 0, \ \forall \ \varphi \in C^{\infty}(\Omega)$ *tal que* $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} \varphi = \emptyset$*;*

(ii) $\tilde{u}(\varphi) = u(\varphi), \quad \forall \ \varphi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\Omega)$.

*Demonstração.* Mostremos, inicialmente, a unicidade de tal extensão.

Seja $\varphi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\Omega)$ tal que $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} \varphi \subset\subset \Omega$. Defina $K = \operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} \varphi$, o qual é compacto. Desse modo, pela Proposição 1.1.5, existe $\psi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\Omega)$, $\psi \equiv 1$ em uma vizinhaça $U$ de $K$. Além disso, temos que

$$\varphi = \varphi\psi + (1-\psi)\varphi = \varphi_0 + \varphi_1.$$

Desde que $\operatorname{supp} \varphi_0 \subset \operatorname{supp} \psi$, obtemos que $\varphi_0 \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\Omega)$. Ainda, $\varphi_1 \in C^{\infty}(\Omega)$ e vale que

$$\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} \varphi_1 = \emptyset.$$

De fato, se $x \in \operatorname{supp} \varphi_1$, então existe $x_n \in \Omega$ com $\varphi_1(x_n) \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $x_n \longrightarrow x$. Portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_n) = (1-\psi(x_n))\varphi(x_n) \neq 0 &\Longrightarrow \varphi(x_n) \neq 0 \ \text{ e } \ \psi(x_n) \neq 1 \\ &\Longrightarrow x_n \in (\Omega \setminus U) \cap \operatorname{supp} \varphi_1, \ \forall \ n. \end{aligned}$$

Assim, como $(\Omega \setminus U) \cap \operatorname{supp}\varphi_1$ é fechado em $\Omega$ e $x_n \longrightarrow x$, obtemos que $x \in (\Omega \setminus U) \cap \operatorname{supp}\varphi_1$. Ainda, desde que $x \in \Omega \setminus U$ e $K \subset U$, então $x \notin K = \operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp}\varphi$ e, portanto, $x \notin \operatorname{supp} u$, mostrando que $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp}\varphi_1 = \emptyset$. Seja $E = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp}\varphi \subset\subset \Omega\}$. Suponha, portanto, que exista $\tilde{u} : E \longrightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo as condições (i) e (ii). Desse modo, para toda $\varphi \in E$, temos

$$\tilde{u}(\varphi) = \tilde{u}(\varphi_0 + \varphi_1) = \tilde{u}(\varphi_0) + \tilde{u}(\varphi_1) = \tilde{u}(\varphi_0) = u(\varphi_0).$$

Daí, se existe $\tilde{u_1}$ tal qual $\tilde{u}$, então

$$\tilde{u_1}(\varphi) = u(\varphi_0) = \tilde{u}(\varphi),\ \forall \varphi \in E,$$

ou seja, $\tilde{u_1} = \tilde{u}$, mostrando a unicidade. Para mostrar a existência, dada $\varphi \in E$, escrevemos $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, onde $\varphi_0 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\varphi_1 \in C^\infty(\Omega)$ tal que $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp}\varphi_1 = \emptyset$. Assim, defina $\tilde{u} : E \longrightarrow \mathbb{C}$, por

$$\tilde{u}(\varphi) = u(\varphi_0).$$

Sejam $\phi_0 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\phi_1 \in C^\infty(\Omega)$ como $\varphi_0$ e $\varphi_1$, respectivamente, e tais que

$$\varphi = \phi_0 + \phi_1.$$

Defina $\chi = \varphi_0 - \phi_0$. Daí, segue que $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$. Por outro lado, temos também que $\chi = \varphi_1 - \phi_1$, que implica em $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp}\chi = \emptyset$. Assim,

$$\tilde{u}(\chi) = \tilde{u}(\chi + 0) = u(\chi) = 0 \Longrightarrow \tilde{u}(\varphi) = u(\varphi_0) = u(\phi_0) = \tilde{u}(\varphi),$$

mostrando que $\tilde{u}$ está bem definida.

Agora, se $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ tal que $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} = \emptyset$, então $\varphi = 0 + \varphi_1$, onde $\varphi_0 = 0$ e $\varphi_1 = \varphi$. Portanto, $\tilde{u}(\varphi) = 0$. Logo, $\tilde{u}$ satisfaz (i). Se $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, então $\varphi = \varphi_0 + 0$, onde $\varphi_0 = \varphi$. Assim, $\tilde{u}(\varphi) = u(\varphi_0) = u(\varphi)$, mostrando a condição (ii).

□

**Corolário 1.1.4.** *Se $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, então $u$ é estendido de maneira única a um funcional linear sobre $C^\infty(\Omega)$ satisfazendo* (i) *e* (ii) *como na proposição acima.*

*Demonstração.* Se $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, então

$$\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp}\varphi \subset\subset \Omega,\ \forall\, \varphi \in C^\infty(\Omega).$$

Temos, portanto, que $E$, como na Proposição 1.1.7, coincide com $C^\infty(\Omega)$. Logo, $u$ é estendido unicamente a um funcional linear sobre $C^\infty(\Omega)$ obdecendo as condições (i) e (ii). □

Mais que isso, temos a seguinte proposição:

**Proposição 1.1.8.** *$\mathcal{E}'(\Omega)$ é o dual topológico de $C^\infty(\Omega)$ com a topologia definida pelas seminormas*

$$\varphi \mapsto \|\varphi\|_{m,K} = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_K |\partial^\alpha \varphi|,$$

*onde $K$ percorre todos os compactos de $\Omega$ e $m \in \mathbb{Z}_+$.*

*Demonstração.* Seja $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Pelo corolário anterior, $u$ admite uma única extensão linear sobre $C^\infty(\Omega)$. Vamos denotar tal extensão pela própria $u$. Além disso, considere $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$, com $\psi \equiv 1$ em uma vizinhança de $\operatorname{supp} u$. Assim, para toda $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, escrevemos

$$\varphi = \varphi\psi + (1-\psi)\varphi.$$

Desde que $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp}(1-\psi)\varphi = \emptyset$, temos que $u(\varphi) = u(\varphi\psi)$. Para $K = \operatorname{supp}\psi$, existe $C > 0$ e $m \in \mathbb{Z}_+$, tais que

$$|u(\phi)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup |\partial^\alpha \phi|, \; \forall \phi \in C_c^\infty(K).$$

Em particular, $\operatorname{supp}\varphi\,\psi \subset \operatorname{supp}\psi = K$. Portanto, pela Regra de Leibniz, obtemos que

$$|u(\varphi)| = |u(\varphi\psi)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_K |\partial^\alpha(\varphi\psi)| \leq C' \sum_{|\beta|\leq m} \sup_K |\partial^\beta \varphi| = C'\|\varphi\|_{m,K},$$

isto é, $u$ é um funcional linear contínuo sobre $C^\infty(\Omega)$. Reciprocamente, seja $v$ um funcional linear contínuo em $C^\infty(\Omega)$. Então, existe compacto $L$ e constantes $C > 0$ e $m \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$|v(\phi)| \leq C\|\phi\|_{m,L} = C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_L |\partial^\alpha \phi|, \; \forall \phi \in C^\infty(\Omega). \tag{1.14}$$

Se $u = v|_{C_c^\infty(\Omega)}$, então $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Com efeito, $u$ é linear, uma vez que $v$ o é. Agora, dada sequência $\phi_j \longrightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, existe compacto $K$ que contém o suporte de cada $\phi_j$. Caso $L \cap K = \emptyset$, note que

$$\sup_L |\partial^\alpha \phi_j| = 0. \tag{1.15}$$

Se $L \cap K \neq \emptyset$, temos que

$$\sup_L |\partial^\alpha \phi_j| = \sup_{L\cap K} |\partial^\alpha \phi_j| \leq \sup_K |\partial^\alpha \phi_j|. \tag{1.16}$$

Em ambos os casos, usando a estimativa (1.14) combinada com (1.15) e (1.16), respectivamente, para cada $\phi_j$ e fazendo $j \longrightarrow \infty$, temos que $u(\phi_j) \longrightarrow 0$ em $\mathbb{C}$, mostrando a continuidade de $u$.

Resta mostrar que $u$ possui suporte compacto. Para tanto, mostremos que $\operatorname{supp} u \subseteq L$. De fato, se $x \notin L$, então existe $\delta > 0$, tal que $B(x,\delta) \subset \Omega \setminus L$. Assim, para toda

$\varphi \in C_c^\infty(B(x,\delta))$, vale

$$|u(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_{m,L} = C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_L |\partial^\alpha \varphi| = 0.$$

Portanto, $u(\varphi) = 0$, para toda $\varphi \in C_c^\infty(B(x,\delta))$, isto é, $x \notin \operatorname{supp} u$. Logo, $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$.

□

Da mesma forma como as distribuições de suporte compacto podem ser estendidas a funcionais lineares sobre funções de classe $C^\infty$, podemos também estender as distribuições de ordem finita sobre um espaço de funções, cujo suporte é compacto, sem exigir muito da regularidade destas.

**Proposição 1.1.9.** *Se $u \in \mathcal{D}'^{(m)}(\Omega)$, então $u$ pode ser estendida a um funcional linear definido sobre $C_c^m(\Omega)$.*

*Demonstração.* Seja $u \in \mathcal{D}'^{(m)}$. Temos que para todo compacto $K$ existe $C > 0$, tal que

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup |\partial^\alpha \varphi|, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(K).$$

Fixe $\varphi \in C_c^m(\Omega)$ e seja $K$ compacto de $\Omega$. Temos que existe compacto $L$ de modo que $K \subset L$ e $\operatorname{supp} \varphi \subset L$. Pela Proposição 1.1.3, existe $\{\varphi_j\} \subset C_c^\infty(L)$ tal que

$$\sup |\partial^\alpha \varphi_j - \partial^\alpha \varphi| \longrightarrow 0, \ \forall \ |\alpha| \leq m. \tag{1.17}$$

Portanto, definimos

$$\tilde{u}(\varphi) = \lim_{j\longrightarrow\infty} u(\varphi_j). \tag{1.18}$$

Tal limite existe, pois dados $j, \ell \in \mathbb{N}$, temos que

$$|u(\varphi_j) - u(\varphi_\ell)| = |u(\varphi_j - \varphi_\ell)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup |\partial^\alpha(\varphi_j - \varphi_\ell)|. \tag{1.19}$$

Fazendo $j, \ell \longrightarrow \infty$, temos, por (1.17) e (1.19), que $\{u(\varphi_j)\}$ é sequência de Cauchy e, uma vez que $\mathbb{C}$ é completo, o limite em (1.18) existe. Ainda, suponha que exista $\{\varphi_j'\} \subset C_c^\infty(L)$, assim como $\{\varphi_j\}$, isto é,

$$\sup |\partial^\alpha \varphi_j' - \partial^\alpha \varphi| \longrightarrow 0, \ \forall \ |\alpha| \leq m.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |u(\varphi_j') - u(\varphi_j)| = |u(\varphi_j' - \varphi_j)| &\leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup |\partial^\alpha(\varphi_j' - \varphi)| + \sup |\partial^\alpha(\varphi_j - \varphi)| \\ &\longrightarrow 0, \ \text{quando} \ j \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Então, $\lim u(\varphi_j) = \lim u(\varphi'_j)$, o que mostra a boa definição de $u$. Ainda, para cada $j \in \mathbb{N}$, vale, em particular, já que $\operatorname{supp} \varphi_j \subset L$, que

$$|u(\varphi_j)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |\partial^\alpha \varphi_j|. \tag{1.20}$$

Fazendo $j \longrightarrow \infty$, em (1.20), vem que

$$|\tilde{u}(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |\partial^\alpha \varphi|, \ \forall \ \varphi \in C^m_{\mathrm{c}}(\Omega).$$

Portanto, $\tilde{u}$ pertence ao dual topológico de $C^m_{\mathrm{c}}(\Omega)$.

□

**Definição 1.1.18.** *Dado $m \in \mathbb{Z}_+$, definimos o espaço das distribuições com suporte compacto, cuja ordem é menor igual que $m$, denotado por $\mathcal{E}'^{(m)}$, ou seja,*

$$\mathcal{E}'^{(m)} = \mathcal{E}' \cap \mathcal{D}'^{(m)}.$$

Nos teoremas que seguem, não distinguiremos a distribuição de sua extensão. O teorema a seguir reune, em sua essência, as duas últimas proposições.

**Teorema 1.1.2.** *Se $u \in \mathcal{E}'^{(m)}(\Omega)$, então $u$ pode ser estendida a um funcional linear contínuo sobre $C^m(\Omega)$.*

*Demonstração.* Seja $u \in \mathcal{E}'^{(m)}(\Omega)$. Por definição, $u \in \mathcal{D}'^{(m)}(\Omega)$ e $\operatorname{supp} u$ é compacto. Vamos denotar a extensão linear de $u$ sobre $C^m_{\mathrm{c}}(\Omega)$, dada na proposição prévia, pela própria $u$. Considere $\psi \in C^m_{\mathrm{c}}(\Omega)$, com $\psi \equiv 1$ em uma vizinhança $U$ do suporte de $u$. Assim, dada $\varphi \in C^m(\Omega)$, escrevemos

$$\varphi = \varphi\psi + (1 - \psi)\varphi = \varphi_0 + \varphi_1,$$

com $\varphi_0 \in C^m_{\mathrm{c}}(\Omega)$ e $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} \varphi_1 = \emptyset$. Defina, portanto,

$$\tilde{u}(\varphi) = u(\varphi_0).$$

Da mesma forma, como na Proposição 1.1.7, mostra-se que $\tilde{u}$ está bem definida. Ainda, como $\operatorname{supp} \psi\varphi \subseteq \operatorname{supp} \psi$, existe $C > 0$, tal que

$$|\tilde{u}(\varphi)| = |u(\psi\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |\partial^\alpha(\psi\varphi)| \leq C' \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |\partial^\alpha \varphi|, \ \forall \ \varphi \in C^m(\Omega),$$

mostrando que $u$ está no dual topológico de $C^m(\Omega)$.

□

Vamos dar agora um exemplo de uma família de distribuições cujo suporte é compacto e, além disso, a ordem é finita.

**Exemplo 1.1.8.** Fixado $y \in \mathbb{R}^n$, defina, para $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $u_\alpha : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$u_\alpha(\phi) = \partial^\alpha \phi(y).$$

O conjunto $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n}$ constitui uma família especial de distribuições que satisfaz as condições do teorema acima, pois cada $u_\alpha$ é distribuição de ordem finita e com suporte compacto. Mais que isso, temos que $u_\alpha$ é de ordem $|\alpha|$ e $\operatorname{supp} u_\alpha = \{y\}$.

Com efeito, suponhamos, inicialmente, que $\alpha = 0$. Convenientemente, neste caso, denotemos $u_\alpha$ por $\delta_y$. Facilmente, obtemos que $\delta_y$ é distribuição de ordem 0, pois

$$|\delta_y(\phi)| = |\phi(y)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\phi(x)|.$$

Agora, vamos mostrar que:

a) $\{y\} \subset \operatorname{supp} \delta_y$ ;

b) $\operatorname{supp} \delta_y \subset \{y\}$.

Para mostrar a), suponha que $x \notin \operatorname{supp} \delta_y$ e mostremos que $x \neq y$. Temos que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\delta_y(\phi) = 0, \ \forall \ \phi \in C_c^\infty(B(x, \epsilon)).$$

Se ocorresse que $x = y$, então dada vizinhança qualquer $U$ de $x$ e tal que $U \subset B(x, \epsilon)$, considere $\varphi \in C_c^\infty(B(x, \epsilon))$, de modo que $\varphi \equiv 1$ em $U$. Logo,

$$\delta_y(\varphi) = \varphi(y) = 1 \neq 0,$$

o que é um absurdo. Logo, a inclusão em a) está satisfeita.

Por outro lado, para provar b), dado $x \in \mathbb{R}^n$, suponha $x \neq y$ e vamos mostrar que $x \notin \operatorname{supp} \delta_y$. De fato, seja $0 < \epsilon < |x - y|$. Para toda $\phi \in C_c^\infty(B(x, \epsilon))$, tem-se

$$\delta_y(\varphi) = \varphi(y) = 0.$$

Portanto, vale b). Logo, $\operatorname{supp} \delta_y = \{y\}$.

Mostremos as inclusões equivalentes aos itens a) e b) para $u_\alpha$, no caso em que $\alpha \neq 0$. Para a), seja $x_0 \notin \operatorname{supp} u_\alpha$ e vamos mostrar que $x_0 \neq y$. Temos que existe $U$ vizinhança aberta de $x_0$ tal que

$$u_\alpha(\phi) = 0, \ \forall \ \phi \in C_c^\infty(U).$$

Suponha que $x_0 = y$. Seja $\psi \in C_c^\infty(U)$, com $\psi \equiv 1$ em vizinhança de $x_0$. Defina $\phi \in C_c^\infty(U)$, por

$$\phi(x) = x^\alpha \psi(x).$$

Temos, pela Regra de Leibniz, que

$$\partial^\alpha \phi(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \partial^\beta x^\alpha \partial^{\alpha-\beta} \psi(x) = \sum_{\beta=\alpha} \psi(x) + \sum_{\beta<\alpha} C_{\beta,\alpha} x^{\alpha-\beta} \partial^{\alpha-\beta} \psi(x).$$

Portanto,

$$u_\alpha(\phi) = \partial^\alpha \phi(y) = \sum_{\beta=\alpha} \psi(y) = |\alpha| \neq 0,$$

contradizendo o fato de $x_0$ pertencer ao suporte de $u_\alpha$. Para a outra inclusão, seja $x \in \operatorname{supp} u_\alpha$. Suponha que $x \neq y$ e, portanto, considere uma bola centrada em $x$ a qual não contém $y$. Claramente, temos que $u_\alpha$ se anula nesta vizinhaça de $x$, contrariando o fato de $x$ estar no suporte de $u_\alpha$. Conclui-se, daí, que $\operatorname{supp} u_\alpha = \{y\}$.

Resta mostrar que $u_\alpha$ tem ordem $|\alpha|$. É claro que

$$|u_\alpha(\phi)| = |\partial^\alpha \phi(y)| \leq \sum_{\beta \leq \alpha} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\beta \phi(x)|,$$

isto é, $u_\alpha$ tem ordem menor ou igual que $|\alpha|$.

Vamos mostrar que $u_\alpha \notin \mathcal{D}'^{(|\alpha|-1)}$. De fato, seja $\psi \in C_c^\infty(B(0,1))$ tal que $\psi(0) = 1$. Para $r > 0$ fixado, defina

$$\varphi_r(x) = (x-y)^\alpha \psi\left(\frac{x-y}{r}\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} u_\alpha(\varphi_r) = \partial^\alpha \varphi_r(y) &= \partial^\alpha (x-y)^\alpha \psi\left(\frac{x-y}{r}\right) \\ &= \sum_{\beta \leq \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \partial^\beta (x-y)^\alpha \partial^{\alpha-\beta} \psi\left(\frac{x-y}{r}\right). \end{aligned}$$

Mas,

$$\partial^\beta (x-y)^\alpha|_{x=y} = \begin{cases} 0, & \beta < \alpha \\ \alpha!, & \beta = \alpha \end{cases}.$$

Logo,

$$u_\alpha(\varphi_r) = \alpha!\ \psi(0) = \alpha!,\ \forall\, r > 0. \tag{1.21}$$

Suponha, agora, $|\beta| < |\alpha|$. Temos, a partir da Regra de Leibniz, que

$$\sup |\partial^\beta \varphi_r(x)| \leq C\, r^{|\alpha|-|\beta|}. \tag{1.22}$$

Fazendo $r \longrightarrow 0$, temos que $\sup |\partial^\beta \varphi_r(x)| \longrightarrow 0$. A partir das equações (1.22) e (1.21), mostramos que existe compacto $L = \overline{B}(0,1)$ e $\psi \in C_c^\infty(B(0,1))$ tais que, para qualquer

$C > 0$, não vale a seguinte estimativa:

$$|u(\psi)| \leq C \sum_{|\beta| \leq |\alpha|-1} \sup |\partial^{\beta}\psi|,$$

isto é, $u_\alpha \notin \mathcal{D}'^{(|\alpha|-1)}$, concluindo que $u_\alpha$ tem ordem $|\alpha|$.

Vamos denotar $u_\alpha$, como no exemplo acima, por $\delta_y^{(\alpha)}$. Portanto, acabamos de mostrar que $\delta_y^{(\alpha)}$ está suportada em $\{y\}$ e possui ordem $|\alpha|$. Reciprocamente, se $u$ é uma distribuição de ordem $k$ e $\operatorname{supp} u = \{y\}$, então

$$u(\phi) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \delta_y^{(\alpha)}(\phi), \ \forall\, \phi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty},$$

para algumas constantes $a_\alpha \in \mathbb{C}$.

Este é o assunto do próximo teorema.

**Lema 1.1.3.** *Se $u \in \mathcal{E}'$ com ordem menor ou igual a $k$ e se $\phi \in C^k$, é tal que*

$$\partial^\alpha\, \phi(x) = 0, \ \forall\, |\alpha| \leq k, \ \forall\, x \in \operatorname{supp} u,$$

*então $u(\phi) = 0$.*

*Demonstração.* Recordemos que $u(\phi)$ está definida para toda $\phi \in C_{\mathrm{c}}^{k}$. Ainda, existe uma única extensão de $u$ para toda $\phi \in C^k$, para as quais $u(\phi) = 0$ quando $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} \phi = \emptyset$. Se $K$ é vizinhança de $\operatorname{supp} u$, vale, além disso, que

$$|u(\phi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_K |\partial^\alpha \phi|, \ \forall\, \phi \in C^k.$$

Pela Proposição 1.1.5, podemos considerar $\phi_\epsilon \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}$, $\quad \phi_\epsilon \equiv 1$, em vizinhança de $\operatorname{supp} u$, tal que $\phi_\epsilon$ se anula fora de

$$M_\epsilon = \{y : \ |y - x| \leq \epsilon, \ \text{para algum}\, x \in \operatorname{supp}\},$$

e

$$|\partial^\alpha \phi_\epsilon| \leq C\epsilon^{-|\alpha|}, \ \forall\, |\alpha| \leq k.$$

Afirmemos que $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp}(1 - \phi_\epsilon)\phi = \emptyset$. De fato, dado $x \in \operatorname{supp} u$, vamos mostrar que o mesmo não está em $\operatorname{supp}(1 - \phi_\epsilon)$. Temos que existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta)$ esteja contida em vizinhaça de $x$ na qual $\phi_\epsilon \equiv 1$. Assim,

$$(1 - \phi_\epsilon)(y)\phi(y) = 0, \ \forall\, y \in B(x, \delta).$$

Logo, $x \notin \operatorname{supp}(1 - \phi_\epsilon)\phi$.

Daí, segue que $u((1-\phi_\epsilon)\phi)=0$. Desde que $u=(\phi_\epsilon)\phi+(1-\phi_\epsilon)\phi$, temos que

$$u(\phi)=u(\phi_\epsilon\phi).$$

Desde que $u\in\mathcal{D}'$ e é de ordem menor ou igual que $k$, temos que para qualquer compacto $K$, existe $C>0$ tal que

$$|u(\varphi)|\leq C\sum_{|\alpha|\leq k}\sup|\partial^\alpha\varphi|,\ \forall\ \varphi\in C^k(K).$$

Em particular, a estimativa acima vale para $K=M_\epsilon$ e para $\varphi=\phi_\epsilon\phi$, cujo suporte está contido em $K$. Desse modo, se $0<\epsilon<1$, temos

$$\begin{aligned}
|u(\phi)|=|u(\phi_\epsilon\phi)| &\leq C\sum_{|\alpha|\leq k}\sup_{M_\epsilon}|\partial^\alpha(\phi_\epsilon\phi)|\\
&\leq C'\sum_{|\alpha|\leq k}\sum_{\beta+\gamma=\alpha}\sup_{M_\epsilon}|\partial^\beta\phi_\epsilon\partial^\gamma\phi|\\
&\leq C''\sum_{|\beta+\gamma|\leq k}\sup_{M_\epsilon}|\partial^\beta\phi_\epsilon||\partial^\gamma\phi|\\
&\leq C'''\sum_{|\beta|+|\gamma|\leq k}\epsilon^{-|\beta|}\sup_{M_\epsilon}|\partial^\gamma\phi|\\
&\leq C'''\sum_{|\gamma|\leq k-|\beta|}\epsilon^{|\gamma|-k}\sup_{M_\epsilon}|\partial^\gamma\phi|\\
&\leq C'''\sum_{|\gamma|\leq k}\epsilon^{|\gamma|-k}\sup_{M_\epsilon}|\partial^\gamma\phi|\\
&= C'''\sum_{|\gamma|=k}\sup_{M_\epsilon}|\partial^\gamma\phi|+C'''\sum_{|\gamma|<k}\epsilon^{|\gamma|-k}\sup_{M_\epsilon}|\partial^\gamma\phi|.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que $\epsilon^{|\gamma|-k}\sup_{M_\epsilon}|\partial^\gamma\phi|\longrightarrow 0$, quando $\epsilon\longrightarrow 0$. Com efeito, suponha $|\gamma|=k$. Desde que $\partial^\gamma\phi$ é uniformemente contínua, dado $\delta>0$, existe $\delta'>0$ tal que se $|z-w|<\delta'$, então $|\partial^\gamma\phi(z)-\partial^\gamma\phi(w)|<\delta$. Assim, para todo $\epsilon<\delta'$ e para cada $y\in M_\epsilon$, existe $x_y\in\operatorname{supp}u$ tal que

$$|y-x_y|<\epsilon<\delta',$$

o que implica em

$$|\partial^\gamma\phi(y)|=|\partial^\gamma\phi(y)-\partial^\gamma\phi(x_y)|<\delta.$$

Isso mostra que $\sup_{M_\epsilon}|\partial^\gamma\phi|\longrightarrow 0$, quando $\epsilon\longrightarrow 0$. Quando $|\gamma|<k$, temos também que dado $y\in M_\epsilon$, existe $x\in\operatorname{supp}u$ tal que

$$|y-x_y|<\epsilon.$$

Fixados $y$ e $x$, defina $\eta : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, por

$$\eta(t) = \partial^\gamma \phi(x + t(y - x)).$$

Aplicando a fórmula de Taylor para $\eta$, temos

$$\eta(t) = \eta(0) + \eta'(0)t + \eta''(0)\frac{t^2}{2!} + ... + \eta^{k-|\gamma|-1}(0)\frac{t^{k-|\gamma|-1}}{(k-|\gamma|-1)!} + \eta^{k-|\gamma|}(s)\frac{t^{k-|\gamma|}}{(k-|\gamma|)!},$$

para $s \in (0, t)$. Note que

$$\eta(0) = \eta'(0) = \eta''(0) = ... = \eta^{k-|\gamma|-1}(0) = 0.$$

Assim, para $t = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \eta(1) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^{k-|\gamma|} \partial^\gamma \phi(x + s(y-x)) \frac{1}{(k-|\gamma|)!} \\ &= \partial^\alpha \phi(x + s(y-x)) \frac{(y-x)^\beta}{(k-|\gamma|)!}, \end{aligned}$$

onde $|\alpha| = k$ e $|\beta| = k - |\gamma|$. Portanto,

$$\begin{aligned} \epsilon^{|\gamma|-k} \sup_{M_\epsilon} |\partial^\gamma \phi| &= \epsilon^{|\gamma|-k} \sup_{M_\epsilon} |\eta(1)| \\ &= \epsilon^{|\gamma|-k} \sup_{M_\epsilon} \left| \partial^\alpha \phi(x + s(y-x)) \frac{(y-x)^\beta}{(k-|\gamma|)!} \right| \\ &\leq \epsilon^{|\gamma|-k} \sup_{M_\epsilon} \sup_{0<s<1} \left| \partial^\alpha \phi(x + s(y-x)) \frac{(y-x)^\beta}{(k-|\gamma|)!} \right| \\ &= \epsilon^{|\gamma|-k} \sup_{M_\epsilon} \sup_{0<s<1} |\partial^\alpha \phi(x + s(y-x))| \left| \frac{(y-x)^\beta}{(k-|\gamma|)!} \right| \\ &\leq \epsilon^{|\gamma|-k} \sup_{M_\epsilon} \sup_{0<s<1} |\partial^\alpha \phi(x + s(y-x))| \frac{|y-x|^{|\beta|}}{(k-|\gamma|)!} \\ &\leq \epsilon^{|\gamma|-k} \sup_{M_\epsilon} \sup_{0<s<1} |\partial^\alpha \phi(x + s(y-x))| \frac{|y-x|^{k-|\gamma|}}{(k-|\gamma|)!} \\ &= \frac{1}{(k-|\gamma|)!} \sup_{M_\epsilon} \sup_{0<s<1} |\partial^\alpha \phi(x + s(y-x))| \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0, \end{aligned}$$

pois $|\alpha| = k$. Logo, $u(\phi) = 0$.

$\square$

**Teorema 1.1.3.** *Se $u$ é uma distribuição de ordem $k$ tal que* $\operatorname{supp} u = \{y\}$, *então $u$ é da forma*

$$u(\phi) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \delta^{(\alpha)}(\phi), \ \forall \ \phi \in C^k,$$

*para constantes $a_\alpha \in \mathbb{C}$.*

*Demonstração.* Dada $\phi \in C^k$, temos, pela expansão em Taylor em torno de $y$, que

$$\phi(x) = \phi(y + (x-y)) = \sum_{|\alpha| \leq k} \partial^\alpha \phi(y) \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!} + \Psi(x),$$

onde

$$\Psi(x) = (k+1) \int_0^1 (1-t)^k \sum_{|\alpha|=k+1} \partial^\alpha \phi(y + t(x-y)) \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!} dt.$$

Temos que $\partial^\beta \Psi(y) = 0, \quad \forall \quad |\beta| \leq k$. Pelo lema prévio, temos que $u(\Psi) = 0$. Portanto, a linearidade de $u$ fornece

$$\begin{aligned} u(\phi) &= u \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \partial^\alpha \phi(y) \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!} \right) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} \partial^\alpha \phi(y) \; u \left( \frac{(\cdot - y)^\alpha}{\alpha!} \right) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \; \partial^\alpha \phi(y) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \; u_\alpha(\phi), \end{aligned}$$

onde $a_\alpha = u\left(\frac{(\cdot - y)^\alpha}{\alpha!}\right) \in \mathbb{C}$.

□

Recorde que, como mencionado inicialmente, estamos interessados em estudar distribuições cujo suporte, além de compacto, está contido em um hiperplano. Mais que isso, estamos interessados em apresentar um resultado de decomposição, análogo ao teorema prévio, mas para esta classe particular de distribuições.

Antes de realizarmos efetivamente este passo, vamos estabelecer algumas ferramentas da Teoria das Distribuições, entre elas o produto tensorial.

### 1.1.3 Operações com distribuições

Considere o operador linear $L : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow C_c^\infty(\Omega)$. Suponhamos que $L$ é contínuo no sentido que se $\phi_j$ converge a zero em $C_c^\infty(\Omega)$, então $L(\phi_j)$ converge a zero em $C_c^\infty(\Omega)$.

**Definição 1.1.19.** *Definimos o* ***transposto formal de*** *$L$ como sendo o operador $L^t : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow C_c^\infty(\Omega)$ que satisfaz*

$$\int (L\varphi)\psi dx = \int \varphi(L^t\psi) dx, \; \forall \; \phi, \psi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{1.23}$$

**Exemplo 1.1.9.** Seja $L : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow C_c^\infty(\Omega)$, dado por

$$L(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \ \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Temos que o transposto formal de L é dado por

$$L^t(\varphi) = -\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi = -L(\varphi), \ \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

De modo mais geral, temos:

**Exemplo 1.1.10.** Dado $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, defina $L = \partial^\alpha$. Portanto, obtemos que

$$L^t = (-1)^{|\alpha|} L.$$

**Exemplo 1.1.11.** Seja $f \in C^\infty(\Omega)$. Defina o operador $L$ pelo produto de $f$ por $\varphi$, para toda função $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, isto é,

$$L(\varphi) = f\varphi.$$

Neste caso, o transposto formal de $L$ é o próprio, ou seja, $L^t = L$.

**Observação 1.1.4.** Seja $L : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow C_c^\infty(\Omega)$ operador linear contínuo e $L^t$ seu transposto formal. Podemos estender $L$, de maneira única, a um operador

$$\tilde{L} : \mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

da seguinte forma: se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, então

$$\langle \tilde{L}u, \varphi \rangle = \langle u, L^t\varphi \rangle, \ \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Vamos usar o próprio $L$ para denotar $\tilde{L}$.

Assim, para $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, decorre dos exemplos acima bem como da prévia observação que:

- $\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle$ (derivação)
- $\langle fu, \varphi \rangle = \langle u, f\varphi \rangle$ (produto por uma função $C^\infty$)

**Exemplo 1.1.12.** Seja $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$H(x) = \begin{cases} 1, \ x > 0 \\ 0, \ x \leq 0 \end{cases},$$

que está em $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

$H$ é chamada *Função de Heaviside.* Para cada $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, temos que

$$\langle H', \varphi\rangle = -\langle H, \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \langle \delta, \varphi\rangle,$$

isto é, $H' = \delta$.

**Exemplo 1.1.13.** Seja $\Phi : \Omega \longrightarrow \Omega$ um difeomorfismo de classe $C^\infty$. Defina $L : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow C_c^\infty(\Omega)$ por

$$L(\varphi) = \varphi \circ \Phi.$$

O operador $L$ é linear e contínuo em $C_c^\infty(\Omega)$. Além disso, temos que

$$\int_\Omega (L\varphi(x))\psi(x)dx = \int_\Omega \varphi(\Phi(x))\psi(x)dx = \int_\Omega \varphi(y)\psi(\Phi^{-1}(y))|J(\Phi^{-1})|dy.$$

Definimos, portanto, o transposto formal de $L$ por

$$L^t(\phi) = |J(\Phi^{-1})|\phi \circ \Phi^{-1}.$$

Segue, daí, dois casos particulares de difeomorfismos: translação e reflexão.

**Exemplo 1.1.14.** Fixe $a \in \mathbb{R}^n$. Defina $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por $\Phi(x) = x - a$. Assim, por considerar $L$ como no exemplo anterior, temos que

$$L(\varphi) = \varphi_a,$$

onde $\varphi_a(x) = \varphi(x - a)$. Daí, para $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, definimos $u_a$ dada por

$$\langle u_a, \varphi\rangle = \langle u, \varphi \circ \Phi^{-1}\rangle = \langle u, \varphi_{-a}\rangle. \tag{1.24}$$

**Exemplo 1.1.15.** Defina $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por $\Phi(x) = -x$. Denotemos por $\check{\varphi}$ a função

$$\check{\varphi}(x) = \varphi(-x).$$

Assim, para $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\langle \check{u}, \varphi\rangle = \langle u, \check{\varphi}\rangle. \tag{1.25}$$

Somam-se, portanto, à derivação de distribuição e produto por função $C^\infty$ as seguintes operações:

- $\langle u_a, \varphi\rangle = \langle u, \varphi_{-a}\rangle$ (translação)
- $\langle \check{u}, \varphi\rangle = \langle u, \check{\varphi}\rangle$ (reflexão)

Queremos, agora, dar uma noção de produto convolução entre uma função-teste e uma distribuição. Vamos pensar, inicialmente, o produto entre $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C^\infty_{\text{c}}(\mathbb{R}^n)$. Temos que

$$(u * \varphi)(x) = \int u(y)\varphi(x-y)dy = \int u(y)\check{\varphi}(y-x)dy = \int u(y)\check{\varphi}_x(y)dy = \langle u, \check{\varphi}_x \rangle.$$

Isto nos motiva a seguinte definição:

**Definição 1.1.20.** *Sejam $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C^\infty_{\text{c}}(\mathbb{R}^n)$. Definimos o produto convolução de $u$ por $\varphi$ como sendo*

$$(u * \varphi)(x) = \langle u, \check{\varphi}_x \rangle. \tag{1.26}$$

**Exemplo 1.1.16.** Para toda $\varphi \in C^\infty_{\text{c}}(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$(\delta * \varphi)(x) = \langle \delta, \check{\varphi}_x \rangle = \check{\varphi}_x(0) = \check{\varphi}(-x) = \varphi(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

isto é, $\delta * \varphi = \varphi$. Em outras palavras, a delta de Dirac atua como elemento neutro na convolução.

**Proposição 1.1.10.** *Seja $\phi$ função-teste, $\phi \geq 0$, com integral $1$. Dada $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, definimos para $\epsilon > 0$*

$$u_\epsilon = u * \phi_\epsilon.$$

*Então, $u_\epsilon \longrightarrow u$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, quando $\epsilon \longrightarrow 0$.*

*Demonstração.* Dada $\psi \in C^\infty_{\text{c}}(\mathbb{R}^n)$, vamos mostrar que

$$\langle u_\epsilon, \psi \rangle \longrightarrow \langle u, \psi \rangle,$$

quando $\epsilon \longrightarrow 0$. Observe, inicialmente, que

$$(u * \check{\psi})(0) = \langle u, \check{\check{\psi}}_0 \rangle = \langle u, \psi \rangle.$$

Daí,

$$\langle u_\epsilon, \psi \rangle = (u_\epsilon * \check{\psi})(0) = (u * \phi_\epsilon) * \check{\psi})(0) = \langle u, \check{\phi} * \psi \rangle.$$

Mas, pela Proposição 1.1.3, $\check{\phi} * \psi \longrightarrow \psi$ em $C^\infty_{\text{c}}(\mathbb{R}^n)$ quando $\epsilon \longrightarrow 0$. Portanto, $\langle u_\epsilon, \psi \rangle \longrightarrow \langle u, \psi \rangle$.

□

### 1.1.4 Produto Tensorial

Sejam $\Omega_j$ aberto de $\mathbb{R}^{n_j}$ e $u_j \in C(\Omega_j)$, para $j = 1, 2$. Definimos o *produto tensorial* de $u_1$ por $u_2$ como sendo a função $u_1 \otimes u_2 \in C(\Omega_1 \times \Omega_2)$ dada por

$$(u_1 \otimes u_2)(x_1, x_2) = u_1(x_1)u_2(x_2).$$

O objetivo, aqui, é definir o produto tensorial entre duas distribuições.

**Observação 1.1.5.** Note que se $\varphi_j \in C_c^\infty(\Omega_j)$, $j = 1, 2$, então

$$\langle (u_1 \otimes u_2), (\varphi_1 \otimes \varphi_2) \rangle = u_1(\varphi_1) u_2(\varphi_2).$$

**Lema 1.1.4.** *Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$. Se $\phi \in C^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$, $\Omega_i$ aberto de $\mathbb{R}^{n_i}$, e se existe um compacto $K \subset \Omega_1$ tal que $\phi(x_1, x_2) = 0$ para $x_1 \notin K$, então a aplicação $I_\phi$ dada por*

$$I_\phi(x_2) = u(\phi(\cdot\,, x_2))$$

*é $C^\infty$ e satisfaz*

$$\partial_{x_2}^\alpha\, I_\phi(x_2) = u(\partial_{x_2}^\alpha\, \phi(\cdot\,, x_2)).$$

*Demonstração.* Ver [7]. □

**Teorema 1.1.4.** *Seja $u_j \in C(\Omega_j)$, para $j = 1, 2$. Então, existe $u \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ tal que*

$$\langle u, (\varphi_1 \otimes \varphi_2) \rangle = u_1(\varphi_1) u_2(\varphi_2),\ \forall\ \varphi_j \in C_c^\infty(\Omega_j), j = 1, 2.$$

*Além disso, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$,*

$$u(\varphi) = \langle u_1, \langle u_2, \varphi(x_1, \cdot\,) \rangle \rangle \tag{1.27}$$

$$u(\varphi) = \langle u_2, \langle u_1, \varphi(\cdot\,, x_2) \rangle \rangle. \tag{1.28}$$

*Demonstração.* Vamos mostrar, inicialmente, a unicidade. Para tanto, vamos demonstrar a seguinte afirmação:

$$\langle u, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle = 0,\ \forall\ \varphi_j \in C_c^\infty(\Omega_j), j = 1, 2 \Longrightarrow u = 0.$$

Seja $\psi_j \in C_c^\infty(\Omega_j)$,$\psi \geq 0$, com integral não-nula, para $j = 1, 2$. Para $\epsilon > 0$, defina

$$\Psi_\epsilon = (\psi_1)_\epsilon \otimes (\psi_2)_\epsilon.$$

Ainda, seja $U_j \subset \Omega_j$ aberto com fecho compacto em $\Omega_j$ e considere $\chi_j \in C_c^\infty(\Omega_j)$, $\chi \equiv 1$ em uma vizinhança de $U_j$, $j = 1, 2$.

Pela proposição anterior, temos que $(\chi_1 \otimes \chi_2) u * \Psi_\epsilon \longrightarrow (\chi_1 \otimes \chi_2) u$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$. Mas, por hipótese, $(\chi_1 \otimes \chi_2) u * \Psi_\epsilon = 0$ para $\epsilon$ suficientemente pequeno. Logo,

$$(\chi_1 \otimes \chi_2) u = 0$$

e, portanto,

$$u|_{U_1 \times U_2} = 0,\ \forall\ U_j \subset \Omega_j, j = 1, 2,$$

implicando em $u = 0$.

Agora, se $u_1$ e $u_2$ são distribuições que satisfazem as condições do teorema, aplique o argumento anterior para $u_2 - u_1$, donde seguirá que $u_1 = u_2$, mostrando a unicidade.

Para demonstrar a existência, considere $K_j$ compacto de $\Omega_j, j = 1, 2$. Assim, desde que $u_j$ está em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_j})$, existem constantes $C_j > 0$ e $m_j$, inteiro não-negativo, tais que

$$|u_j(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m_j} \sup |\partial^\alpha \varphi|, \ \forall \ \varphi \in C_c^\infty(K_j), j = 1, 2. \tag{1.29}$$

Para $\varphi \in C_c^\infty(K_1 \times K_2)$ defina

$$I_\varphi(x_1) = u_2(\varphi(x_1, \cdot\,)).$$

Pelo Lema 1.1.4, temos que $I_\varphi \in C_c^\infty(K_1)$ e vale que

$$(\partial_{x_1}^\alpha I_\varphi)(x_1) = u_2(\partial^\alpha \varphi(x_1, \cdot\,)).$$

Daí, pela continuidade de $u_2$, temos que

$$|(\partial_{x_1}^\alpha I_\varphi)(x_1)| \leq C \sum_{|\beta| \leq m_j} \sup |\partial_{x_2}^\beta \partial_{x_1}^\alpha \varphi|, \ \forall \ \varphi \in C_c^\infty(K_j), j = 1, 2. \tag{1.30}$$

Definimos, portanto, $u : C_c^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2) \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$u(\varphi) = u_1(I_\varphi).$$

Juntando (1.29) e (1.30), para $j = 1$, garantimos a continuidade de $u$ e, ainda, (1.28) é satisfeita por definição. Analogamente, definimos $\tilde{u}$ de modo que (1.28) esteja satisfeita e concluímos, então, que $u = \tilde{u}$ por observar que ambas coincidem em funções $\varphi_1 \otimes \varphi_2$.

□

Motivados pelo teorema prévio, definimos:

**Definição 1.1.21.** *Dada $u_j \in \mathcal{D}'(\Omega_j)$, para $j = 1, 2$, existe única $u \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ tal que*

$$\begin{aligned} u(\varphi) &= \langle u_1, \langle u_2, \varphi(x_1, \cdot\,)\rangle\rangle \\ u(\varphi) &= \langle u_2, \langle u_1, \varphi(\cdot\,, x_2)\rangle\rangle. \end{aligned}$$

*Definimos o* ***produto tensorial*** *de $u_1$ por $u_2$, e denotamos $u_1 \otimes u_2$, por*

$$u = u_1 \otimes u_2.$$

**Observação 1.1.6.** Dada $u_j \in \mathcal{D}'(\Omega_j)$, para $j = 1, 2$, vale que

$$\sup u_1 \otimes u_2 = \sup u_1 \times \sup u_2.$$

### 1.1.5 Distribuições Temperadas

Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então definimos a *transformada de Fourier* de $f$ por

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx,\ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

onde $x\cdot\xi$ denota $x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$.

Note que se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{f}$ é contínua e limitada, pois

$$\sup |\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}.$$

Podemos definir um operador sobre $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ que para cada $f$ associa a sua transformada de Fourier. Ocorre que se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, sua transformada $\hat{\phi}$ não tem suporte compacto sempre que $\phi \neq 0$, não nos permitindo estender este a um operador contínuo sobre $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ de modo que o mesmo possua um transposto formal. Devemos, portanto, buscar um espaço que contenha $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e que seja invariante pela transformação de Fourier. O espaço que buscamos é o espaço das funções de decrescimento rápido no infinito, chamado de *Espaço de Schwartz.* Em outras palavras

**Definição 1.1.22.** *Definimos o espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ como sendo o subspaço de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ formado pelas funções $\varphi$ tais que*

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| < \infty,\ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

**Observação 1.1.7.** Vale que:

1. $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

2. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é espaço de Fréchet com a topologia gerada pelas seminormas.

$$\|\varphi\|_{m,\alpha} = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup |(1+|x|^2)^m \partial^\alpha \varphi(x)|.$$

   A convergência segundo essa topologia é dada por

$$\varphi_j \longrightarrow 0 \text{ em } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow x^\beta \partial^\alpha \phi_j(x) \longrightarrow 0 \text{ uniformemente, } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n. \quad (1.31)$$

3. $\varphi(x) = e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, mas não tem suporte compacto.

4. O espaço de Schwartz é fechado para derivações e multiplicação por polinônmio.

5. Ainda, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

Agora, defina $\mathfrak{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ o operador dado por

$$\mathfrak{F}(\varphi) = \hat{\varphi}.$$

Tanto a boa definição deste operador quanto sua continuidade está assegurada pelo seguinte teorema:

**Teorema 1.1.5.** *A transformada de Fourier é um operador contínuo de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e vale:*

a) $\widehat{D^\alpha\varphi}(\xi) = \xi^\alpha\hat{\varphi}(\xi)$;

b) $\mathfrak{F}(x^\alpha\varphi(x))(\xi) = (-1)^{|\alpha|}D_\xi^\alpha\hat{\varphi}(\xi)$,

*onde* $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n}$, *sendo* $D_j = -i\,(\partial/\partial x_j)$.

*Demonstração.* Vamos provar b). De fato, note inicialmente que

$$D_\xi^\alpha e^{-x\cdot\xi} = (-1)^{|\alpha|}x^\alpha e^{-x\cdot\xi}.$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned} D_\xi^\alpha\hat{\varphi}(\xi) &= D_\xi^\alpha \int e^{-x\cdot\xi}\varphi(x)dx \\ &= (-1)^{|\alpha|}\int x^\alpha e^{-x\cdot\xi}\varphi(x)dx \\ &= (-1)^{|\alpha|}\mathfrak{F}(x^\alpha\varphi(x))(\xi), \end{aligned}$$

provando *b*). Para provar a), integramos por partes $|\alpha|$ vezes:

$$\begin{aligned} \widehat{D^\alpha\varphi}(\xi) &= \int e^{-x\cdot\xi}D^\alpha\varphi(x)dx \\ &= (-1)^{|\alpha|}\int D_x^\alpha(e^{-x\cdot\xi})\varphi(x)dx \\ &= (-1)^{|\alpha|}\int(-1)^{|\alpha|}\xi^\alpha(e^{-x\cdot\xi})\varphi(x)dx \\ &= \xi^\alpha\int(e^{-x\cdot\xi})\varphi(x)dx \\ &= \xi^\alpha\hat{\varphi}(\xi), \end{aligned}$$

mostrando a).

Vamos mostrar, agora, que se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, dada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, pois $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ e a transformada de Fourier de uma função integrável é contínua.

De a) e b), temos que

$$\xi^\alpha D_\xi^\beta\hat{\varphi}(\xi) = (-1)^{|\beta|}\xi^\alpha\mathfrak{F}(x^\beta\varphi(x))(\xi) = (-1)^\beta\mathfrak{F}(D_x^\alpha[x^\beta\varphi(x)])(\xi).$$

Logo,

$$\sup|\xi^\alpha D_\xi^\beta\hat{\varphi}(\xi)| \leq \|D_x^\alpha[x^\beta\varphi(x)]\|_{L^1} < \infty,$$

isto é, $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Por fim, vamos mostrar que $\mathfrak{F}$ é contínuo, isto é, se para toda sequência $\varphi_j$ de funções em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, vale que

$$\varphi_j \longrightarrow 0 \text{ em } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \hat{\varphi}_j \longrightarrow 0 \text{ em } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

De fato, seja $\varphi_j \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ convergindo a zero em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então,

$$\begin{aligned} |\xi^\alpha D_\xi^\beta \hat{\varphi}_j(\xi)| &\leq \int |D_x^\alpha(x^\beta \varphi_j(x))|dx \\ &\leq (\sup|(1+|x|^{2n})D_x^\alpha(x^\beta\varphi_j(x))|) \int \frac{1}{1+|x|^{2n}}dx \\ &\leq c_n \sup|(1+|x|^{2n})D_x^\alpha(x^\beta\varphi_j(x))| \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

uniformemente em $\xi \in \mathbb{R}^n$, implicando em que $\hat{\varphi}_j \longrightarrow 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, mostrando que a transformada de Fourier é contínuo.

□

Ainda, é possível mostrarmos que, além de contínuo, o operador $\mathfrak{F}$ é inversível (ver [8]). Portanto, enunciemos o seguinte teorema:

**Teorema 1.1.6.** *A transformada de Fourier $\mathfrak{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é continuamente inversível e*

$$\mathfrak{F}^{-1}\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\cdot\xi}\varphi(\xi)d\xi.$$

**Proposição 1.1.11.** *Se $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $\phi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e, além disso, vale*

$$\widehat{\phi * \psi} = \hat{\phi}\,\hat{\psi}. \tag{1.32}$$

*Demonstração.* Ver [9]

□

**Definição 1.1.23.** *Definimos o espaço das **distribuições temperadas**, e denotamos por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, como sendo o espaço dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ou seja, o espaço dos funcionais lineares $u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ tais que existem $C > 0$ e $m \in \mathbb{Z}_+$, com*

$$|\langle u, \varphi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup|(1+|x|^2)\partial^\alpha\varphi(x)|, \ \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{1.33}$$

**Observação 1.1.8.** A continuidade de um funcional linear definido sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pode ser verificada por meio de continuidade sequencial, isto é, a continuidade segundo (1.33) é equivalente a

$$\varphi_j \longrightarrow 0 \text{ em } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \langle u, \varphi_j\rangle \longrightarrow 0 \text{ em } \mathbb{C}.$$

## 1.2 Distribuições suportadas em um hiperplano

O estudo de distribuições suportadas em um hiperplano é um dos pontos centrais no desenvolvimento deste trabalho. Aqui, vamos nos restringir a distribuições suportadas num hiperplano, cujo o suporte é compacto. Existe uma gama de distribuições incluídas nesta classe. A saber:

**Exemplo 1.2.1.** Considere a distribuição delta de Dirac sobre o $\mathbb{R}^n$. Como visto no Exemplo 1.1.8, a delta de Dirac está suportada na origem, constituindo-se trivialmente como um exemplo de distribuição com suporte compacto, o qual está contido no seguinte conjunto:

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \; x_n = 0\},$$

que, por sua vez, é hiperplano de $\mathbb{R}^n$. É claro que há outros hiperplanos que contém o suporte de $\delta$. De fato, todo hiperplano de $\mathbb{R}^n$ que contém a origem contém também o suporte de $\delta$.

**Exemplo 1.2.2.** Fixe $m$ inteiro não-negativo. Em $\mathbb{R}^2$, considere a distribuição $f$, dada por $f = \delta \otimes \delta^{(m)}$.

Temos que

$$\operatorname{supp} \delta \otimes \delta^{(m)} = \operatorname{supp} \delta \times \operatorname{supp} \delta^{(m)} = \{(0,0)\} \subset \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; x_2 = 0\},$$

mostrando que $f$ pertence a classe das distribuições suportadas num hiperplano cujo suporte é compacto.

**Exemplo 1.2.3.** Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, suportada na bola unitária centrada na origem. Fixado $m$ inteiro não-negativo, defina

$$f = \phi \otimes \delta^{(m)}.$$

De modo análogo ao exemplo anterior, mostra-se que $f$ está suportada no hiperplano $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; x_2 = 0\}$.

**Exemplo 1.2.4.** Seja $u$ a seguinte distribuição:

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \, \delta_{r_j},$$

como no Exemplo 1.1.6 em que $\{r_j : \; j \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Em $\mathbb{R}^2$, defina a distribuição $f$, dada por

$$f = u \otimes \delta^{(m)},$$

para $m$ inteiro não-negativo fixado. Recorde que no Exemplo 1.1.7 mostramos que $\operatorname{supp} u = [0,1]$.

Portanto, temos que

$$\operatorname{supp} f = [0,1] \times \{0\} \subset \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ x_2 = 0\}.$$

O próximo teorema pode ser visto como uma generalização do Teorema 1.1.3. Vamos denotar por $\Pi$ o conjunto

$$\Pi = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} :\ t = 0\}.$$

**Teorema 1.2.1.** *Seja $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n+1})$ de ordem $k$ com* $\sup f \subset \Pi$. *Então, existem $f_0, f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ tais que*

$$f(\phi) = \sum_{i=1}^{k} f_i(\phi_i),\ \forall\, \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}),$$

*com $\phi_i(x) = \partial_t^i \phi(x,0)$. Além disso, cada $f_i$ é de ordem $k - i$.*

*Demonstração.* Dada $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, pela fórmula de Taylor com resto integral, obtemos

$$\phi(x,t) = \sum_{i=0}^{k} \partial_t^i \phi(x,0) \frac{t^i}{i!} + R(x,t).$$

O resto integral $R$ é tal que $\partial_{(x,t)}^\gamma R(x,t) = 0$ sobre o suporte de $f$, para todo $|\gamma| \leq k$, implicando, pelo Lema 1.1.3, que $f(R) = 0$. Assim, utilizando a linearidade de $f$, temos que

$$f(\phi) = \sum_{i=0}^{k} f\left(\partial_t^i \phi(x,0) \frac{t^i}{i!}\right). \tag{1.34}$$

Dada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, defina para $i = 0, 1, \cdots, k$

$$f_i(\psi) = f\left(\psi(x) \frac{t^i}{i}\right),$$

a qual define uma distribuição. De fato, dado subconjunto compacto $K$ de $\mathbb{R}^n$, seja $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ suportada em $K$. Considere $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ com $\eta(0) = 1$. Suponha que $\operatorname{supp} \eta = [-\delta, \delta]$, para algum $\delta > 0$. Logo,

$$\psi(x)\frac{t^i}{i} = \psi(x)\frac{t^i}{i}\eta(t) + (1 - \eta(t))\psi(x)\frac{t^i}{i} = \phi_1(x,t) + \phi_2(x,t),$$

obtendo que $\operatorname{supp} \phi_2 \cap \operatorname{supp} f = \emptyset$ e, portanto, $f(\phi_2) = 0$, isto é,

$$f\left(\psi(x)\frac{t^i}{i}\right) = f(\phi_1).$$

Além disso, note que $\operatorname{supp} \phi_1 \subset K \times [-\delta, \delta]$, compacto que denotaremos por $L$. Desde que

$f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$, existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}|f_i(\psi)| = |f(\phi_1)| &\leq C \sum_{|\gamma|\leq k} \sup_L |\partial^\gamma_{(x,t)}\phi_1(x,t)| \\ &\leq C \sum_{|\alpha|+\ell\leq k} \sup_K |\partial^\alpha_x \psi(x)| \sup_{[-\delta,\delta]} \left|d^\ell_t(t^i/i!\,\eta(t))\right| \\ &\leq C' \sum_{|\alpha|\leq k-\ell} \sup_K |\partial^\alpha_x \psi(x)|,\end{aligned}$$

mostrando que $f_i \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Mais que isso, temos o seguinte

$$\operatorname{supp} f_i \times \{0\} \subset \operatorname{supp} f,$$

ou seja, cada $f_i$ possui suporte compacto e se anulam fora do hiperplano $\Pi$. Para demonstrar este fato, vamos verificar a inclusão

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \operatorname{supp} f_i \times \{0\}.$$

Com efeito, seja $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \operatorname{supp} f$. Basta mostrar que $x_0 \notin \operatorname{supp} f_i$ ou $t_0 \neq 0$. Portanto, suponha $t_0 = 0$ e mostremos que $x_0$ não pode pertencer ao suporte de $f_i$. Desde que $(x_0, t_0) \notin \operatorname{supp} f$, existe $\delta > 0$ tal que

$$B((x_0, t_0), \delta) \cap \operatorname{supp} f = \emptyset.$$

Considere $B(x_0, \delta)$ a bola em $\mathbb{R}^n$ de raio $\delta > 0$ centrada em $x_0$ e seja $\psi \in C^\infty_c(B(x_0, \delta))$. Com isso, defina

$$\phi(x,t) = \psi(x)\frac{t^i}{i!},$$

a qual está suportada em $B(x_0, \delta) \times \mathbb{R}$. Mas, $B(x_0, \delta) \times \mathbb{R} \cap \operatorname{supp} f = \emptyset$, implicando em que $f(\phi) = 0$. Por outro lado, aplicando a definição de $f_i$, obtemos

$$f_i(\psi) = f(\phi) = 0,\ \forall\, \phi \in C^\infty_c(B(x_0, \delta)),$$

isto é, $x_0 \notin \operatorname{supp} f_i$. Isso conclui o fato de que $f_i \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Agora, se em (1.34), definimos

$$\phi_i(x) = \partial^i_t \phi(x, 0),$$

usando novamente a definição de cada $f_i$, temos que

$$f(\phi) = \sum_{i=0}^k f_i(\phi_i),$$

obtendo a decomposição como no enunciado do Teorema.

Resta mostrar que cada $j = 0, 1 \cdots, k$ $f_j$ é de ordem $k - j$, isto é, dado compacto $L$ de $\mathbb{R}^n$ e $\psi \in C_c^\infty(L)$, existe $C > 0$ tal que

$$|f_j(\psi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k-j} \sup_L |\partial^\alpha \psi(x)|.$$

Com efeito, dada $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, existe $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ satisfazendo

(i) $\Phi(x, t) = \psi(x) \frac{t^j}{j!} + o(|t|^{k+1})$;

(ii) Se $K_0 = \operatorname{supp} f = K_0^{'} \times \{0\}$, então existem compacto $\tilde{K}$ de $\mathbb{R}^n$ e $C > 0$ tais que

$$\sum_{|\gamma| \leq k} \sup_{K_0} |\partial^\gamma \Phi(x, t)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k-j} \sup_{\tilde{K}} |\partial^\alpha \psi(x)|.$$

De fato, fixado $j = 0, 1, \cdots, k$ e dada $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, defina

$$u_0 = 0, \cdots, u_{j-1} = 0, u_j = \psi, u_{j+1} = 0, \cdots, u_k = 0$$

e observe que $u_i \in C^{k-i}(\mathbb{R}^n)$ para $i = 0, \cdots, k$, ou seja, estamos sob as hipóteses do Corolário 1.1.1. Aplicando este, obtemos $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ tal que

$$\partial_t^i \Phi(x, 0) = u_i(x) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \psi(x), & i = j \end{cases}.$$

Além disso, existem $\tilde{K}$, compacto de $\mathbb{R}^n$, e constante $C > 0$ tais que

$$\begin{aligned} \sum_{|\gamma| \leq k} \sup_{K_0} |\partial^\gamma \Phi(x, t)| &\leq C \sum_{i=0}^{k} \sum_{|\alpha| \leq k-i} \sup_{\tilde{K}} |\partial^\alpha u_i(x)| \\ &\leq C \sum_{|\alpha| \leq k-j} \sup_{\tilde{K}} |\partial^\alpha u_j(x)| \\ &= C \sum_{|\alpha| \leq k-j} \sup_{\tilde{K}} |\partial^\alpha \psi(x)|, \end{aligned}$$

implicando no item (ii). Já o item (i) decorre da expansão em Taylor de $\Phi$ na variável $t$, pois, neste caso, obtemos

$$\Phi(x, t) = \sum_{i=0}^{k} \partial_t^i \Phi(x, 0) \frac{t^i}{i!} + R(x, t) = \psi(x) \frac{t^j}{j!} + R(x, t),$$

onde $R(x, t)$ denota o resta integral de Taylor, que é da ordem de $k + 1$, isto é, $R(x, t) = o(|t|^{k+1})$ quando $t \longrightarrow 0$.

Agora, dados compacto $L$ de $\mathbb{R}^n$ e $\psi \in C_c^\infty(L)$, existe $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ e compacto $\tilde{K}$

atendendo as condições (i) e (ii). Assim, de (i) decorre que

$$f(\Phi) = f(\psi(x)\, t^j/j!) = f_j(\psi).$$

Portanto, pela contiuidade de $f$ e de (ii), obtemos

$$|f_j(\psi)| = |f(\Phi)| \leq C \sum_{|\gamma|\leq k} \sup_{K_0} |\partial^\gamma \Phi(x,t)| \leq C' \sum_{|\alpha|\leq k-j} \sup_{\tilde{K}} |\partial^\alpha \psi(x)|$$

e, portanto, $f_j$ tem ordem $k_j$. □

**Observação 1.2.1.** Observe que dada a caracterização de $\phi_i$ acima, podemos reescrever $f$ da seguinte forma:

$$f(\phi) = \sum_{i=0}^{k} \langle f_i \otimes \delta^{(i)}, \phi\rangle.$$

**Definição 1.2.1.** *Considere $f$ nas condições do Teorema acima e seja $0 \leq N \leq k$ o maior inteiro tal que $f_N$ é não-nula. Neste caso, dizemos que $N$ é* ***a ordem de $f$ na direção normal****.*

Decorre daí que se $k$ é a ordem de $f$ e $N$ a ordem na direção normal, então $N \leq k$.

**Exemplo 1.2.5.** É possível mostrar, de modo similar ao Exemplo 1.1.8, que $f = \delta \otimes \delta^{(m)}$ possui ordem $m$. Ainda, pela própria forma que $f$ assume, conclui-se que a ordem de $f$ na direção normal é $m$, pois

$$f(\phi) = \langle \delta \otimes \delta^{(m)}, \phi\rangle = \sum_{i=0}^{m} \langle f_i \otimes \delta^{(i)}, \phi\rangle \Longrightarrow f_m = \delta \;\text{ e }\; f_i = 0, \text{ quando } i \neq m.$$

O mesmo se conclui para as distribuições nos exemplos 1.2.3 e 1.2.4.

**Exemplo 1.2.6.** Considere a distribuição $f = \delta^{(1)} \otimes \delta^{(m)}$. Tal distribuição tem ordem $m+1$. Suponhamos que

$$f = \sum_{i=0}^{m+1} f_i \otimes \delta^{(i)}.$$

Daí, segue que $f_m = \delta^{(1)}$ e $f_i = 0$, para todo $i \neq m$. Então, a ordem de $f$ na direção normal é $m$ ao mesmo tempo que a ordem total de $f$ é $m+1$.

Mais geral, temos:

**Exemplo 1.2.7.** Para $\ell$ e $m$ inteiros não-negativos fixados, defina $f = \delta^{(\ell)} \otimes \delta^{(m)}$, a qual possui ordem $m + \ell$. Vamos supor que

$$f = \sum_{i=0}^{m+\ell} f_i \otimes \delta^{(i)}.$$

Portanto, temos que:

$$f_i = \left\{ \begin{array}{cc} \delta^{(\ell)}, & i = m \\ 0, & \text{c-c} \end{array} \right. ,$$

mostrando que a ordem de $f$ na direção normal é $m$.

O último resultado, aqui apresentado, nos permitirá conectar o estudo de distribuições suportadas em um hiperplano com a Teoria de Espaços de Hardy. Além disso, é por meio deste que a condição necessária que desejamos encontrar é estabelecida. Entretanto, há um caminho que devemos percorrer para esta conexão estar satisfeita e, para isso, é necessário que estudemos alguns tópicos referente aos Espaços de Hardy.

Capítulo 2

# Espaços de Hardy

O estudo de espaços de Hardy se originou durante os anos de 1910 e 1920 no contexto de séries de Fourier e análise complexa em uma variável. Com o decorrer do tempo, este estudo se consolidou em uma teoria rica que ganhou importância em outros contextos da matemática, somando ao desenvolvimento de tópicos como funções maximais, integrais singulares e espaços $L^p$.

Os espaços de Hardy consistem de distribuições temperadas definidas em $\mathbb{R}^n$ que podem ser caracterizados por mais de uma maneira. A caracterização destes permeia o estudo de funções maximais e é reunida em um único teorema, conhecido por Teorema de Caracterização Maximal.

Aqui, além de estudarmos $H^p(\mathbb{R}^n)$, apresentaremos a versão local do mesmo, o espaço $h^p(\mathbb{R}^n)$. É no contexto deste espaço que um dos objetivos deste trabalho será consolidado. Embora associado a este há um teorema de caracterização maximal, estaremos interessados em uma maneira alternativa de caracterizá-lo.

## 2.1 Caracterização Maximal de $H^p(\mathbb{R}^n)$

Considere o operador de Laplace em $\mathbb{R}^{n+1}$, denotado por $\Delta$, o qual é dado por

$$\Delta = \partial_t^2 + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2. \tag{2.1}$$

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aberto, dizemos que $u$ de classe $C^2(\Omega)$ é *harmônica* sobre $\Omega$ se $\Delta u = 0$. Agora, dado $x \in \mathbb{R}^n$, defina

$$P(x) = \frac{c_n}{(1+|x|^2)^{(n+1)/2}}, \tag{2.2}$$

onde $c_n$ é uma constante positiva que torna a integral de $P$ igual a 1. Esta função é conhecida como o *Núcleo de Poisson* para o semiplano superior $\mathbb{R}_+^{n+1}$, que é definido por

$$\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ t > 0\}. \tag{2.3}$$

O Núcleo de Poisson aparece quando considerado o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^{n+1}_+ \\ u = f \text{ em } \partial\mathbb{R}^{n+1}_+ \end{cases}, \tag{2.4}$$

onde $\partial\mathbb{R}^{n+1}_+$ denota a fronteira de $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Se $f \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, então a solução para o problema (2.4) é dada por

$$u(x,t) = (f * P_t)(x), \tag{2.5}$$

sendo $P_t(x) = t^{-n}P(x/t)$.

Note que $u$, dada em (2.5), além de ser harmônica em $\mathbb{R}^{n+1}_+$ é também de classe $C^\infty$, uma vez que o operador de Laplace é hipoelítico, isto é, se $v$ é solução de $\Delta v = g$, com $g \in C^\infty$, então $v \in C^\infty$. Contudo, o estudo dos espaços de Hardy impõe uma restrição na classe de funções $f$ para que o produto $f * P_t$ esteja bem definido. Por esta razão, trabalha-se na classe das distribuições limitadas.

**Definição 2.1.1.** *Dizemos que $u$ é uma **distribuição limitada** se $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e se para toda $\varphi \in \mathcal{S}$, tem-se que $u * \phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

**Observação 2.1.1.** Se $u$ é uma distribuição limitada e $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então é possível definir o produto convolução $u * h$ no sentido das distribuições. De fato, se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então

$$\langle u * h, \phi\rangle = \langle u * \check{\phi}, \check{h}\rangle = \int (f * \check{\phi})(x)\check{h}(x)dx, \tag{2.6}$$

onde $\check{\phi}(x) = \phi(-x)$.

Além disso, $u * h$ é uma distribuição limitada.

**Proposição 2.1.1.** *Seja $P$ o núcleo de Poisson para o semiplano superior. Se $f$ é distribuição limitada, então, para cada $t > 0$, $f * P_t \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

*Demonstração.* Para $k \in \mathbb{N}$, defina os seguintes espaços:

$$L^\infty_k = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n);\ \partial^\alpha u \in L^\infty(\mathbb{R}^n),\ \forall\, |\alpha| \leq k\}$$

e

$$L^\infty_\infty = \bigcap_k L^\infty_k.$$

Note que $L^\infty_\infty \subset L^\infty \cap C^\infty$. Agora, uma vez que $\hat{P}(\xi) = e^{-|\xi|}$, a qual deixa de ser diferenciável na origem, temos que $\hat{P} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema 1.1.6, podemos escolher $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que sua transformada satisfaça:

$$\hat{\varphi} = \begin{cases} 1, & |\xi| \leq 1 \\ 0, & |\xi| > 2 \end{cases}.$$

Assim, escrevemos:

$$\begin{aligned}\hat{P}(\xi)(\xi) &= \hat{P}(\xi) + \hat{\varphi}(\xi)\hat{P}(\xi) - \hat{\varphi}(\xi)\hat{P}(\xi) \\ &= \hat{\varphi}(\xi)\hat{P}(\xi) + (1 - \hat{\varphi}(\xi))\hat{P}(\xi).\end{aligned}$$

Note que $\hat{P}$ tem decaimento rápido no infinito no complementar da origem. Ainda, numa vizinhaça da origem $1-\hat{\varphi}$ é a função nula que, por sua vez, pertence ao espaço de Schwartz. Mais que isso, temos $(1-\hat{\varphi})\hat{P} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e, portanto, novamente pelo Teorema 1.1.6, existe $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\hat{\psi} = (1 - \hat{\varphi})\hat{P}.$$

Logo, pela Proposição 1.1.11, obtemos

$$\begin{aligned}\hat{P}(\xi) &= \hat{\varphi}(\xi)\hat{P}(\xi) + \hat{\psi}(\xi) \\ &= (\widehat{\varphi * P})(\xi) + \hat{\psi}(\xi) \\ &= (\widehat{\varphi * P + \psi})(\xi)\end{aligned}$$

e, portanto,

$$P = \varphi * P + \psi.$$

Além disso, se $f$ é distribuição limitada, temos

$$f * P_t = f * (\varphi * P + \psi)_t = f * (\varphi_t * P_t) + f * \psi_t$$

Agora, note que

$$f * (\varphi_t * P_t) = f * (P_t * \varphi_t) = (f * P_t) * \varphi_t.$$

Desde que $f$ é distribuição limitada, $P_t \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos que $f * (\varphi_t * P_t) \in L^\infty_\infty$. Além disso, $f * \psi_t \in L^\infty_\infty$. Portanto, $f * P_t \in L^\infty \cap C^\infty$.

$\square$

Portanto, se $u$ é uma distribuição limitada, podemos definir

$$u(x,t) = (u * P_t)(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \text{ e } t > 0, \tag{2.7}$$

a qual, para cada $t > 0$ fixo, é distribuição limitada. Além disso, fixado $t > 0$, definimos $u^*$ por

$$u^*(x) = \sup_{|y-x|<t} |u(y,t)|,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.8}$$

que chamamos de *função maximal não-tangencial.*

Agora, para toda $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\Phi \in \mathcal{S}$, definimos a *função maximal radial* de $f$, denotada por $M_\Phi f$, que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ associa

$$M_\Phi f(x) = \sup_{t>0} |(f * \Phi_t)(x)|. \tag{2.9}$$

Dado $N \in \mathbb{N}$ defina a seguinte família de funções

$$\mathcal{F}_N = \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ : \ \|\varphi\|_{\alpha,\beta} \doteq \|x^\alpha D^\beta \varphi\|_{L^\infty} \leq 1, \ \forall \ |\alpha|, |\beta| \leq N\}. \tag{2.10}$$

Desse modo, definimos a *grande função maximal* de $f$ por

$$\mathcal{M}_{\mathcal{F}_N} f(x) = \sup_{\varphi \in \mathcal{F}_N} M_\varphi f(x). \tag{2.11}$$

Agora, estamos sob condições de enunciar o Teorema de Caracterização Maximal de $H^p(\mathbb{R}^n)$, o qual pode ser encontrado na referência [11].

**Teorema 2.1.1.** *Sejam $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $0 < p \leq \infty$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\exists \quad \Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *com* $\int \Phi(x)dx \neq 0$ *tal que* $M_\Phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $\exists\, \mathcal{F}_N$ *tal que* $\mathcal{M}_{\mathcal{F}_N} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(iii) $f$ *é distribuição limitada e* $f^* \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Portanto, motivados pelo teorema prévio definimos:

**Definição 2.1.2.** *Para $0 < p \leq \infty$ definimos o* ***espaço de Hardy****, denotado por $H^p(\mathbb{R}^n)$, como sendo o espaço das distribuições temperadas $f$ que para a qual esteja satisfeita alguma das três propriedades do Teorema 2.1.1.*

**Observação 2.1.2.** Uma quarta condição pode ser acrescentada ao Teorema 2.1.1, que consiste em trocar $\exists$ por $\forall$ na condição (i). De fato, suponha que (i) seja válida para alguma $\Phi_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Seja $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ arbitrária. Dada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, vamos mostrar que

$$M_\Phi f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Desde que (i) $\Longrightarrow$ (ii), existe, portanto, $\mathcal{F}_N$ tal que $\mathcal{M}_{\mathcal{F}_N} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Tomemos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que $\epsilon\Phi \in \mathcal{F}_N$. Assim, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\epsilon M_\Phi f(x) = \epsilon \sup_{t>0} |(f * \Phi)(x)| = M_{\epsilon\Phi} f(x) \leq \mathcal{M}_{\mathcal{F}_N} f(x),$$

implicando que $M_\Phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Além das funções maximais, aqui apresentadas, está a função maximal de Hardy-Littlewood, que devido sua relevância destaca-se a seguinte seção.

## 2.2 A Função Maximal de Hardy-Littlewood

Esta seção dedicar-se-á a estudar quando o operador de Hardy-Littlewood é limitado sobre algum espaço, o que pode ser encontrado em [4]. Garantir a limitação deste operador se faz importante, dado que a mesma possibilitará mostrar que o espaço de Hardy, $H^p(\mathbb{R}^n)$, para $1 < p \leq \infty$, coincide com o espaço $L^p(\mathbb{R}^n)$.

**Definição 2.2.1.** *Dado $x \in \mathbb{R}^n$, seja $B(x,r)$ a bola de $\mathbb{R}^n$ de centro $x$ e raio $r > 0$. Denotemos por $|B(x,r)|$ a medida de Lebesgue de $B(x,r)$. Dada $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, definimos a **função maximal de Hardy-Littlewood de f** por*

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy. \tag{2.12}$$

*Além disso, referimos-nos a $f \mapsto Mf$ por dizer o **operador maximal de Hardy-Littlewood**.*

### 2.2.1 Interporlação de Marcinkiewicz

A limitação do operador de Hardy-Littlewood, definido sobre algum espaço conveniente, está ligada com a noção de operadores do tipo fraco e/ou forte. Essa noção é dada pela seguinte definição:

**Definição 2.2.2.** *Sejam $(X,\mu)$ e $(Y,\nu)$ espaços de medida e $T : L^p(X,\mu) \longrightarrow M(Y,\nu)$, onde $M(Y,\nu)$ denota o espaço das funções complexas definidas sobre $Y$, $\nu$-mensuráveis. Dizemos que $T$ é **fraco** $(p,q)$, $q < \infty$, se para todo $\lambda > 0$*

$$\nu(\{y \in Y \ : \ |Tf(y)| > \lambda\}) \leq \left( \frac{C\|f\|_{L^p}}{\lambda} \right)^q, \tag{2.13}$$

*e dizemos que ele é **fraco** $(p,\infty)$ se o mesmo for um operador limitado de $L^p(X,\mu)$ em $L^\infty(Y,\nu)$.*

*Dizemos que $T$ é **forte** $(p,q)$ se ele for limitado de $L^p(X,\mu)$ em $L^q(Y,\nu)$.*

**Observação 2.2.1.** Uma consequência da definição é que se $T$ é um operador forte $(p,q)$, então ele é fraco $(p,q)$. De fato, dado $\lambda > 0$, seja

$$E_\lambda = \{y \in Y \ : \ |Tf(y)| > \lambda\}.$$

Para todo $y \in E_\lambda$ , tem-se que

$$\left| \frac{Tf(y)}{\lambda} \right|^q > 1,$$

se $q < \infty$. Então,

$$\nu(E_\lambda) = \int_{E_\lambda} d\nu \leq \int_{E_\lambda} \left| \frac{Tf(y)}{\lambda} \right|^q d\nu \leq \frac{1}{\lambda^q} \int |Tf(y)|^q d\nu = \left( \frac{C\|Tf\|_{L^q}}{\lambda} \right)^q \leq \left( \frac{C\|f\|_{L^p}}{\lambda} \right)^q.$$

**Lema 2.2.1.** *Seja $E \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mensurável e suponha que*

$$E \subset B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_N,$$

*onde cada $B_j$ denota uma bola de $\mathbb{R}^n$. Então, existe uma subcoleção $B_1^{'}$, $B_2^{'}$, ..., $B_M^{'}$ tal que*

(i) $B_j^{'} \cap B_i^{'} = \emptyset$ ;

(ii) $\sum\limits_{i=1}^{M} |B_i^{'}| \geq C|E|$,

*$C$ é uma constante que depende apenas da dimensão.*

*Demonstração.* Vamos reordenar a coleção $\{B_i\}_{i=1}^N$ do seguinte modo: $B_i = B(x_i, r_i)$, com $r_1 \geq \cdots \geq r_N$. Seja $B_1^{'} = B_1$ e defina

$$\mathcal{O}_1 = \{B_j : \ B_j \cap B_1^{'} = \emptyset\}.$$

Há duas possibilidades: $\mathcal{O}_1 = \emptyset$ ou $\mathcal{O}_1 \neq \emptyset$. Se $\mathcal{O}_1 = \emptyset$, então $B_j \cap B_1^{'} \neq \emptyset$, para todo $j = 1, \ldots, N$. Além disso, temos que

$$B_j \subset B(x_1, 3r_1).$$

Defina, portanto, $(B_1^{'})^* = B(x_1, 3r_1)$. Ainda,

$$E \subset (B_1^{'})^*$$

e, portanto,

$$|E| \leq 3^n |B_1^{'}|.$$

Agora, se $\mathcal{O}_1 \neq \emptyset$, seja $B_{j_0} \in \mathcal{O}_1$ de modo que

$$\operatorname{diam} B_{j_0} = \max\{\operatorname{diam} B_j : \ B_j \in \mathcal{O}_1\},$$

e defina $B_2^{'} = B_{j_0}$. Neste caso, defina

$$\mathcal{O}_2 = \{B_j \in \mathcal{O}_1 : \ B_j \cap B_2^{'} = \emptyset\}.$$

Novamente, temos que: $\mathcal{O}_2 = \emptyset$ ou $\mathcal{O}_2 \neq \emptyset$. Se ocorrer o primeiro caso, isto é, $\mathcal{O}_2 = \emptyset$, temos que

$$B_j \subset (B_2^{'})^*, \ \forall \ B_j \in \mathcal{O}_1,$$

onde $(B_2^{'})^* = B_{j_0}(x_{j_0}, 3r_{j_0})$. Daí,

$$E \subset (B_1^{'})^* \cup (B_2^{'})^*$$

e, portanto,

$$|E| \leq 3^n(|B_1^{'}| + |B_2^{'}|).$$

Seguindo este processo, vamos encontrar uma subcoleção $\{B_1^{'}, \ldots, B_M^{'}\}$ e uma sequência de conjuntos $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_{M+1}$ satisfazendo:

$$\{B_j\}_{j=1}^N = \left( \bigcup_{j=1}^M \{B_j \in \mathcal{O}_j \,:\, B_j \cap B_j^{'} \neq \emptyset\} \right) \cup \mathcal{O}_{M+1},$$

de modo que $\mathcal{O}_j \neq \emptyset$, para $j = 1, \ldots M$. Decorre daí que

$$E \subset (B_1^{'})^* \cup \ldots (B_M^{'})^*,$$

implicando que

$$|E| \leq 3^n \sum_{j=1}^M |B_j^{'}|,$$

como queríamos demonstrar.

□

**Teorema 2.2.1.** *O operador maximal de Hardy-Littlewood é do tipo fraco* $(1,1)$ *e forte* $(\infty, \infty)$.

*Demonstração.* Seja $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então, $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$ q. t. p. em $x$. Portanto,

$$|Mf(x)| = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy \leq \|f\|_{L^\infty} \text{ q. t. p. em } x$$

Recorde que

$$\|Mf\|_{L^\infty} = \inf\{\alpha > 0 \,:\, |\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |Mf(x)| > \alpha\}| = 0\}.$$

Logo, $\|Mf\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$ e, portanto, $M$ é forte $(\infty, \infty)$. Para mostrar que $Mf$ é fraco $(1,1)$, considere $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $E_\lambda$, dado por

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Mf(x) > \lambda > 0\}.$$

Uma propriedade da medida de Lebesgue garante que

$$|E_\lambda| = \sup\{|K| \,:\, K \subset E_\lambda, K \text{ compacto}\}.$$

Se $x \in E_\lambda$, então existe $r_x > 0$ tal que

$$\frac{1}{|B(x,r_x)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy > \lambda. \tag{2.14}$$

Seja $K$ compacto com $K \subset E_\lambda$. Para cada $x \in K$, existe $r_x > 0$ no qual (2.14) ocorre. Logo,

$$K \subseteq B(x_1, r_1) \cup \ldots B(x_N, r_N),$$

onde, para cada $x_i$, $i = 1, \ldots, N$, vale (2.14). Pelo Lema 2.2.1, existe uma subcoleção $\{B_i^{'}\}_{i=1}^{M}$ de $\{B(x_i, r_i)\}_{i=1}^{N}$, satisfazendo

(i) $B_j^{'} \cap B_i^{'} = \emptyset$;

(ii) $\sum_{i=1}^{M} |B_i^{'}| \geq C|K|$,

para algum $C > 0$. Então,

$$|K| \leq \frac{1}{C}\sum_{j=1}^{M} |B_j^{'}| \leq \frac{1}{\lambda C}\sum_{j=1}^{M} \int_{B_j^{'}} |f(y)|dy \leq \frac{1}{\lambda C}\int_{\cup_{j=1}^{M} B_j^{'}} |f(y)|dy \leq \frac{1}{\lambda C}\|f\|_{L^1},\ \forall\ K.$$

Portanto, $|E_\lambda| \leq C^{'}\|f\|_{L^1}/\lambda$, isto é, o operado maximal de Hardy-Littlewood é fraco $(1,1)$. □

**Observação 2.2.2.** Decorre deste teorema e da Observação 2.2.1 que o operador maximal de Hardy-Littlewood é fraco $(\infty, \infty)$. Agora, apesar do mesmo ser fraco $(1,1)$, como recém visto, o mesmo não é forte $(1,1)$. Isto se deve ao fato de que existe $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ cuja imagem não está em $L^1(\mathbb{R}^n)$, como mostra a seguinte proposição.

**Proposição 2.2.1.** *Se $f = \chi_{B(0,1)}$, então $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.*

*Demonstração.* Veja, inicialmente, que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, pois

$$\int |f(x)|dx = \int_{B(0,1)} dx = |B(0,1)| < \infty.$$

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, temos que $B(0,1) \subseteq B(x, |x|+1)$. Vamos mostrar que $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$. De fato,

$$\begin{aligned} Mf(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy \\ &\geq \frac{1}{|B(x,|x|+1)|}\int_{B(x,|x|+1)} |f(y)|dy \\ &\geq \frac{1}{|B(x,|x|+1)|}\int_{B(x,|x|+1)\cap B(0,1)} dy \\ &= \frac{|B(0,1)|}{|B(x,|x|+1)|}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$Mf(x) \geq \frac{|B(0,1)|}{|B(x,|x|+1)|} = \frac{c_n}{c_n(|x|+1)^n} = \frac{1}{(|x|+1)^n}.$$

Suponha, agora, que $1 < |x| \leq R$. Assim,

$$|x| + 1 < 2|x| \Leftrightarrow (|x|+1)^n < (2|x|)^n \Leftrightarrow \frac{1}{(2|x|)^n} < \frac{1}{(|x|+1)^n}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} Mf(x) > \frac{2^{-n}}{|x|^n} \Longrightarrow \int_{0<|x|\leq R} Mf(x)dx &\geq \int_{0<|x|\leq R} \frac{2^{-n}}{|x|^n}dx \\ &= 2^{-n}|S^{n-1}| \int_1^R \frac{\rho^{n-1}}{\rho^n}d\rho \\ &= 2^{-n}|S^{n-1}| \ln R. \end{aligned}$$

Desde que $R$ é arbitrário, fazendo $R \to \infty$, temos que $2^{-n}|S^{n-1}| \ln R \to \infty$ e, portanto, $\|Mf\|_{L^1} = \infty$.

□

O seguinte passo é demonstrar o Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz o qual nos permitirá mostrar que o operador maximal de Hardy-Littlewood é forte $(p,p)$ para $1 < p \leq \infty$. Para tanto, necessitamos, previamente, de algumas definições e resultados auxiliares.

**Definição 2.2.3.** *Seja $(X, \mu)$ um espaço de medida e seja $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mu$-mensurável. Chamamos $\omega_f : (0,\infty) \longrightarrow [0,\infty]$, dada por*

$$\omega_f(\lambda) = \mu(\{x \in X \ : \ |f(x)| > \lambda\}),$$

*de **função distribuição** de $f$ associada a medida $\mu$.*

**Proposição 2.2.2.** *Seja $\phi : [0,\infty] \longrightarrow [0,\infty]$ diferenciável, crescente e tal que $\phi(0) = 0$. Então,*

$$\int_X \phi(|f(x)|)d\mu = \int_0^\infty \phi'(\lambda)\omega_f(\lambda)d\lambda.$$

*Demonstração.* Primeiro, notemos o seguinte

$$\int_X \phi(|f(x)|)d\mu = \int_X \int_0^{|f(x)|} \phi'(\lambda)d\lambda d\mu.$$

Por outro lado, defina

$$\chi(x,\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda < |f(x)| \\ 0, & \lambda \geq |f(x)| \end{cases}.$$

Desse modo, usando o Teorema de Fubini, temos que

$$\begin{aligned}
\int_X \int_0^{|f(x)|} \phi^{'}(\lambda) d\lambda d\mu &= \int_X \int_{\mathbb{R}} \phi^{'}(\lambda)\chi(x,\lambda) d\lambda d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_X \phi^{'}(\lambda)\chi(x,\lambda) d\mu d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi^{'}(\lambda) \left[ \int_X \chi(x,\lambda) d\mu \right] d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi^{'}(\lambda) \left[ \int_{\{x \in X \,:\, |f(x)| > \lambda\}} d\mu \right] d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi^{'}(\lambda) \omega_f(\lambda) d\lambda,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

□

**Observação 2.2.3.** Dado $1 < p < \infty$, defina $\phi(\lambda) = \lambda^p$ e observe que $\phi$ satisfaz as condições da proposição acima. Se $f \in L^p(X,\mu)$, então

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_X \phi(|f(x)|) d\mu = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \omega(\lambda) d\lambda.$$

Portanto,

$$\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \omega(\lambda) d\lambda.$$

**Lema 2.2.2.** *Se $p_1 < p < p_2$, então para toda $f \in L^p$ existem $f_j \in L^{p_j}$, $j = 1,2$, tais que*

$$f = f_1 + f_2.$$

*Demonstração.* Suponha $p_1 < p < p_2$ e $f \in L^p$. Defina $f_1$ e $f_2$ do seguinte modo

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \geq 1 \\ 0, & 0 \leq |f(x)| < 1 \end{cases}$$

e

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq |f(x)| < 1 \\ 0, & |f(x)| > 1 \end{cases}$$

Claramente, temos $f = f_1 + f_2$. Resta mostrar que $f_i \in L^{p_i}$, para $i = 1,2$. Com efeito,

$$\|f_1\|_{L^{p_1}}^{p_1} = \int |f_1(x)|^{p_1} dx = \int_{\{x\,;\,|f(x)| \geq 1\}} |f(x)|^{p_1} dx \leq \int_{\{x\,;\,|f(x)| \geq 1\}} |f(x)|^p dx \leq \|f\|_{L^p}^p < \infty.$$

Analogamente, temos

$$\|f_2\|_{L^{p_2}}^{p_2} = \int |f_2(x)|^{p_2} dx = \int_{\{x\,;\,|f(x)|\leq 1\}} |f(x)|^{p_2} dx \leq \int_{\{x\,;\,|f(x)|\leq 1\}} |f(x)|^{p} dx \leq \|f\|_{L^p}^p < \infty,$$

concluindo a prova.

□

**Corolário 2.2.1.** *Se $p_1 < p < p_2$, então para cada $\lambda > 0$ e toda $f \in L^p$, existem $f_j^\lambda \in L^{p_j}, j = 1, 2$, tais que*

(i) $f = f_1^\lambda + f_2^\lambda$

(ii) $f(x) = f_1^\lambda$, se $|f(x)| > \lambda$ ;

(iii) $f(x) = f_2^\lambda$, se $0 < |f(x)| \leq \lambda$.

*Demonstração.* Dados $\lambda > 0$ e $f \in L^p$, para $p \in (p_1, p_2)$, seja $E_\lambda = \{x \;:\; |f(x)| > \lambda\}$. Defina $f_1^\lambda$ e $f_2^\lambda$ do seguinte modo

$$f_1^\lambda(x) = f(x)\chi_{E_\lambda}(x) \text{ e } f_2^\lambda(x) = f(x)(1 - \chi_{E_\lambda}(x)).$$

Daí, decorrem os itens (i), (ii) e (iii). Por fim, se $F_1 = E_\lambda$ e $F_2 = E_\lambda^c$, temos

$$\begin{aligned}
\|f_i\|_{L^{p_i}}^{p_i} &= \int_{F_i} |f(x)|^{p_i} dx \\
&= \lambda^{p_i} \int_{F_i} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p_i} dx \\
&= \lambda^{p_i - p} \int_{F_i} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p_i} dx \\
&\leq \lambda^{p_i - p} \int_{F_i} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p} dx \\
&\leq \lambda^{p_i - p} \|f\|_{L^p}^p \;<\; \infty,
\end{aligned}$$

para $i = 1, 2$. Logo, $f_i^\lambda \in L^{p_i}, i = 1, 2$. □

**Definição 2.2.4.** *Um operador $T$ definido no espaço das funções mensuráveis é dito **sublinear** se*

(i) $|T(f_1 + f_2)(x)| \leq |Tf_1(x)| + |Tf_2(x)|$;

(ii) $|T(\alpha f)(x)| \leq |\alpha||Tf(x)|$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}$.

Dada esta definição, estamos agora em plenas condições de enunciar e demonstrar o Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz:

**Teorema 2.2.2** (Interpolação de Marcinkiewicz). *Sejam $(X,\mu)$ e $(Y,\nu)$ espaços de medida, $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$ e seja*

$$T : L^{p_1}(X,\mu) + L^{p_2}(X,\mu) \longrightarrow M(Y,\mu)$$

*operador sublinear, onde $M(Y,\mu)$ denota o espaço das funções complexas $\mu$-mensuráveis.*

*Suponha $T$ fraco $(p_1,p_1)$ e fraco $(p_2,p_2)$. Então, $T$ é forte $(p,p)$, para todo $p \in (p_1,p_2)$, isto é, existe $C = C(p,p_1,p_2) > 0$ tal que*

$$\|Tf\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p},\ \forall\, f \in L^p(X,\mu).$$

*Demonstração.* Dado $p \in (p_1,p_2)$, seja $f \in L^p(X,\mu)$. Pelo Corolário 2.2.1, temos para cada $\lambda > 0$ que $f_i^\lambda \in L^{p_i}(X,\mu), j = 1,2$, quando

$$f_1^\lambda = f\chi_{\{x\in X\,:\,|f(x)|\,>\,c\lambda\}} \quad \text{e} \quad f_2^\lambda = f\chi_{\{x\in X\,:\,|f(x)|\,\leq\,c\lambda\}}, \tag{2.15}$$

onde $C$ é uma constante que será fixada depois. Temos que

$$\omega_{Tf}(\lambda) \leq \omega_{Tf_1^\lambda}\left(\frac{\lambda}{2}\right) + \omega_{Tf_2^\lambda}\left(\frac{\lambda}{2}\right). \tag{2.16}$$

Com efeito, defina $E_\lambda$ e $E_\lambda^i$, para $i = 1,2$, por

$$E_\lambda = \{x \in X \ : \ |Tf(x)| > \lambda\} \quad \text{e} \quad E_\lambda^i = \{x \in X \ : \ |Tf_i^\lambda(x)| > \lambda/2\}.$$

Para mostrar (2.16), basta verificar que $E_\lambda = E_\lambda^1 \cup E_\lambda^2$. De fato, se $x \notin E_\lambda^1 \cup E_\lambda^2$, então

$$|Tf_i^\lambda(x)| \leq \frac{\lambda}{2},\ i = 1,2.$$

Usando a sublinearidade do operador $T$, temos que

$$|Tf(x)| \leq \lambda,$$

concluindo a inclusão desejada e, portanto, a desigualdade (2.16).

Como $T$ é fraco $(1,1)$, seja $A_1$ tal que

$$\omega_{Tf_1^\lambda}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \leq \left(\frac{2A_1\|f_1^\lambda\|_{L^{p_1}}}{\lambda}\right)^{p_1}. \tag{2.17}$$

Agora, suponha $p_2 = \infty$. Portanto, $T$ é fraco $(\infty,\infty)$. Escolhemos $C = 1/A_2$, onde $A_2$ é tal que

$$\|Tf_2^\lambda\|_{L^\infty} \leq A_2\|f_2^\lambda\|_{L^\infty}.$$

Neste caso, temos que $\omega_{Tf_2^\lambda}(\lambda/2)=0$. De fato, note que

$$|f_2^\lambda(x)| = |f(x)| \leq C\lambda \Rightarrow \|f_2^\lambda\|_{L^\infty} \leq C\lambda = \frac{\lambda}{(2A_2)} \Rightarrow \|Tf_2^\lambda\|_{L^\infty} \leq \frac{\lambda}{2},$$

isto é,

$$\inf\{\alpha > 0 \ : \ \mu(\{x \in X \ : \ |Tf_2^\lambda(x)| > \alpha\})\} \leq \frac{\lambda}{2}.$$

Daí, segue que existe $\alpha > 0$ tal que $\mu(\{x \in X \ : \ |Tf_2^\lambda(x)| > \alpha\}) = 0$ e $\alpha < \lambda/2$. Seja $E = \{x \in X \ : \ |Tf_2^\lambda(x)| > \alpha\}$. Assim, para todo $x \in X \setminus E$, tem-se

$$|Tf_2^\lambda(x)| \leq \alpha < \frac{\lambda}{2}. \tag{2.18}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\omega_{Tf_2^\lambda}(\lambda/2) &= \mu(\{x \in X \ : \ |Tf_2^\lambda(x)| > \lambda/2\}) \\
&= \mu(\{x \in E \ : \ |Tf_2^\lambda(x)| > \lambda/2\}) + \mu(\{x \in X \setminus E \ : \ |Tf_2^\lambda(x)| > \lambda/2\}) \\
&\leq \mu(E) + \mu(F) = \mu(F),
\end{aligned}$$

onde $F = \{x \in X \setminus E \ : \ |Tf_2^\lambda(x)| > \lambda/2\}$. Mas $F = \emptyset$, pois do contrário, isto é, se existisse $x \in F$, então $x \in X \setminus E$ e

$$|Tf_2^\lambda(x)| > \lambda/2,$$

o que contraria (2.18). Logo, $\mu(F) = 0$ e, portanto, $\omega_{Tf_2^\lambda}(\lambda/2) = 0$.

Vamos mostrar que $T$ é fraco $(p,p)$, isto é, que existe constante $c > 0$ tal que

$$\|Tf\|_{L^p} \leq c\, \|f\|_{L^p}.$$

De fato, considere $\chi$ dada por

$$\chi(x,\lambda) = \begin{cases} 1, & C\lambda < |f(x)| \\ 0, & C\lambda \geq |f(x)| \end{cases}.$$

Assim, usando a Observação 2.2.3 e a desigualdade (2.17), obtemos

$$\|Tf\|_{L^p}^p \leq p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \omega_{Tf_1^\lambda}(\lambda/2) d\lambda \tag{2.19}$$

$$= (2A_1)^{p_1} p \int_0^\infty \lambda^{p-p_1-1} \int |f(x)|^{p_1} \chi(x,\lambda) d\mu \, d\lambda. \tag{2.20}$$

Ainda, pelo Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{L^p}^p &\leq (2A_1)^{p_1} p \int |f(x)|^{p_1} \int_0^\infty \lambda^{p-p_1-1} \chi(x,\lambda) d\lambda \, d\mu \\
&= (2A_1)^{p_1} p \int |f(x)|^{p_1} \int_0^{2A_1|f(x)|} \lambda^{p-p_1-1} \chi(x,\lambda) d\lambda \, d\mu \\
&= (2A_1)^{p_1} p \int |f(x)|^{p_1} \left[ \frac{\lambda^{p-p_1}}{p-p_1} \right]_0^{2A_1|f(x)|} d\mu \\
&= (2A_1)^{p_1} p \int |f(x)|^{p_1} \frac{(2A_1|f(x)|)^{p-p_1}}{p-p_1} \, d\mu \\
&= \frac{(2A_1)^p}{p-p_1} p \, \|f\|_{L^p}^p,
\end{aligned}$$

mostrando, neste caso, que $T$ é forte $(p,p)$.

Vamos, agora, mostrar o mesmo no caso em que $p_2 < \infty$. De fato, seja $A_2$ tal que

$$\omega_{Tf_2^\lambda}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \leq \left(\frac{2A_2\|f_2^\lambda\|_{L^{p_2}}}{\lambda}\right)^{p_2}, \tag{2.21}$$

o qual existe uma vez que $T$ é fraco $(p_2,p_2)$. Assim como em (2.20), temos

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{L^p}^p &\leq (2A_1)^{p_1} p \int_0^\infty \lambda^{p-p_1-1} \int |f(x)|^{p_1} \chi(x,\lambda) d\mu \, d\lambda \\
&\quad + (2A_2)^{p_2} p \int_0^\infty \lambda^{p-p_2-1} \int |f(x)|^{p_2} (1-\chi(x,\lambda)) d\mu \, d\lambda \\
&= (2A_1)^{p_1} p \int |f(x)|^{p_1} \int_0^\infty \lambda^{p-p_1-1} \chi(x,\lambda) d\lambda \, d\mu \\
&\quad + (2A_2)^{p_2} p \int |f(x)|^{p_2} \int_0^\infty \lambda^{p-p_2-1} (1-\chi(x,\lambda)) d\lambda \, d\mu
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{L^p}^p \leq (2A_1)^{p_1} p \int |f(x)|^{p_1} \int_0^{|f(x)|/C} \lambda^{p-p_1-1} d\lambda \, d\mu \\
+ (2A_2)^{p_2} p \int |f(x)|^{p_2} \int_{|f(x)|/C}^\infty \lambda^{p-p_2-1} d\lambda \, d\mu.
\end{aligned}$$

Como $p - p_i - 1 \neq -1$ e $p - p_2 < 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{L^p}^p &\leq \frac{(2A_1)^{p_1}}{(p-p_1)\, C^{p-p_1}}\, p\, \|f\|_{L^p}^p \\
&+ (2A_2)^{p_2} p \int |f(x)|^{p_2} \int\limits_{|f(x)|/C}^{\infty} \left[ \lim_{k\longrightarrow\infty} \frac{k^{p-p_2}}{p-p_2} + \frac{|f(x)|^{p-p_2}}{C^{p-p_2}(p_2-p)} \right] d\mu \\
&= \frac{(2A_1)^{p_1}}{(p-p_1)C^{p-p_1}}\, p\, \|f\|_{L^p}^p + \frac{(2A_2)^{p_1}}{(p_2-p)C^{p-p_2}}\, p\, \|f\|_{L^p}^p \\
&= \left[ \frac{(2A_1)^{p_1}}{(p-p_1)C^{p-p_1}}\, p + \frac{(2A_2)^{p_1}}{(p_2-p)C^{p-p_2}}\, p \right] \|f\|_{L^p}^p,
\end{aligned}$$

donde-se conclui que $T$ é forte $(p, p)$, como queríamos demonstrar.

□

**Corolário 2.2.2.** *Se $p > 1$, então o operador maximal de Hardy-Littlewood é forte $(p, p)$.*

*Demonstração.* Decorre do Teorema 2.2.1 e do Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz, recém provado, o resultado desejado. □

**Observação 2.2.4.** Seja $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então,

$$\begin{aligned}
Mh(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |h(y)| dy \\
&= \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(x,r)} |h(y)| dy \\
&= \sup_{r>0} \frac{r^n}{|B(0,r)|} \int_{B(0,1)} |h(x+rw)| dw \\
&= \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,1)|} \int_{B(0,1)} |h(x+rw)| dw \\
&= \sup_{r>0} \int |h(x+rw)| \frac{\chi_{B(0,1)}(w)}{|B(0,1)|} dw \\
&= \sup_{r>0} \int |h(x-y)| \frac{r^{-n}\chi_{B(0,1)}(y/r)}{|B(0,1)|} dy \\
&= \sup_{r>0} (h * f_r)(x),
\end{aligned}$$

onde $f = \chi_{B(0,1)}/|B(0,1)|$.

**Observação 2.2.5.** Seja $f$ uma função mensurável. Definimos a *menor majorante radial não-crescente* de $f$ por

$$\psi(x) = \sup_{|x|\leq|y|} |f(y)|. \tag{2.22}$$

Então, $\psi(x)$ é radial, não-crescente e

$$|f(x)| \leq \psi(x), \; \forall\, x.$$

**Proposição 2.2.3.** *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e suponha que existe uma função radial, não-crescente, $\psi(r)$ tal que*

(i) $|f(x)| \leq \psi(x)$;

(ii) $\int \psi(x)dx = A < \infty$.

*Então, para toda $h \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, vale que*

$$\sup_{t>0} |(h * f_t)(x)| \leq AMh(x).$$

*Demonstração.* Vamos supor, sem perda de generalidade, que $f \geq 0$, é radial, não-crescente e tal que

$$\int f(x)dx = A.$$

Seja, para $r > 0$, o conjunto $C_r = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ r/2 \leq |x| \leq r\}$. Então,

$$\int_{C_r} f(r)dx \leq \int_{C_r} f(x)dx \leq \int_{C_r} f(r/2)dx,$$

ou, ainda,

$$|C_r|f(r) \leq \int_{C_r} f(x)dx \leq |C_r|f(r/2).$$

Como

$$|C_r| = |B(0,r)| - |B(0,r/2)| = r^n|B(0,1)| - (r/2)^n|B(0,1)| = r^n(1-2^{-n})|B(0,1)| = Cr^n,$$

temos que

$$Cr^n f(r) \leq \int_{C_r} f(x)dx \leq Cr^n f(r/2).$$

Observe que

$$\lim_{\substack{r\longrightarrow 0,\\ r\longrightarrow\infty}} \int_{C_r} f(x)dx = 0.$$

Daí,

$$\lim_{\substack{r\longrightarrow 0,\\ r\longrightarrow\infty}} r^n f(r) = 0. \tag{2.23}$$

Pela observação anterior, basta mostrar que

$$\int |h(x-y)|\frac{1}{\epsilon}f\left(\frac{y}{\epsilon}\right)dy \leq A\sup_{r>0}\frac{1}{|B(0,1)|}\int |h(x-ry)|\chi_{B(0,1)}(y)dy. \tag{2.24}$$

Basta mostrar (2.24) para $x = 0$ e para toda $h \in L^p(\mathbb{R}^n)$, isto é,

$$\int |h(-y)|\frac{1}{\epsilon}f\left(\frac{y}{\epsilon}\right)dy \leq A\sup_{r>0}\frac{1}{|B(0,1)|}\int |h(-ry)|\chi_{B(0,1)}(y)dy,$$

pois $H = h \circ \tau_x \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $H(x) = h(0)$, onde $\tau_x(y) = x - y$. Uma vez que $\check{h}(y) = h(-y)$ está em $L^p(\mathbb{R}^n)$, basta que provemos

$$\int |h(y)| \frac{1}{\epsilon} f\left(\frac{y}{\epsilon}\right) dy \leq A \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,1)|} \int |h(ry)| \chi_{B(0,1)}(y) dy,$$

que, por mudança de coordenadas, corresponde a

$$\int |h(y)| \frac{1}{\epsilon} f\left(\frac{y}{\epsilon}\right) dy \leq A \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,r)|} \int |h(y)| dy = AMh(0).$$

Ainda, equivalentemente,

$$(|h| * f_\epsilon)(0) \leq \left( \int f(x) dx \right) Mh(0). \tag{2.25}$$

Por fim, para mostrar (2.25) basta verificar

$$(|h| * g)(0) \leq \left( \int g(x) dx \right) Mh(0), \ \forall\, h \in L^n(\mathbb{R}^n), \tag{2.26}$$

para toda $g$ tal como $f$, isto é, $g \geq 0$, radial, não-crescente cuja a integral seja $A$, já que basta tomar $g = f_\epsilon$. Vamos mostrar, portanto, a desigualdade (2.26). Com efeito,

$$\begin{aligned}
\int |h(y)| g(y) dy &= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} |h(t\theta)| g(t) t^{n-1} d\sigma(\theta) dt \\
&= \int_0^\infty g(t) t^{n-1} \left[ \int_{S^{n-1}} |h(t\theta)| d\sigma(\theta) \right] \\
&= \int_0^\infty g(t) t^{n-1} \lambda(t) dt,
\end{aligned}$$

onde $\lambda$ é dada por

$$\lambda(t) = \int_{S^{n-1}} |h(t\theta)| d\sigma(\theta).$$

Defina $\Lambda$ por

$$\Lambda(t) \doteq \int_{|x|<t} |h(x)| dx = \int_0^t \int_{S^{n-1}} |h(r\theta)| r^{n-1} d\sigma(\theta) dr = \int_0^t r^{n-1} \lambda(r) dr.$$

Usando o fato de que $C^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$, podemos aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo para obter

$$\Lambda^{'}(t) = t^{n-1} \lambda(t).$$

Então,

$$\int |h(y)|g(y)dy = \int_0^\infty g(t)\Lambda^{'}(t)dt = \lim_{\substack{\epsilon\longrightarrow 0,\\ N\longrightarrow\infty}} \int_\epsilon^N g(t)\Lambda^{'}(t)dt.$$

Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}\int |h(y)|g(y)dy &= \lim_{\substack{\epsilon\longrightarrow 0,\\ N\longrightarrow\infty}} \left[ t^n g(t)\frac{\Lambda(t)}{t^n}\Bigg|_\epsilon^N - \int_\epsilon^N t^n g'(t)\frac{\Lambda(t)}{t^n}dt \right] \\ &= \lim_{\substack{\epsilon\longrightarrow 0,\\ N\longrightarrow\infty}} \left[ N^n g(N)\frac{\Lambda(N)}{N^n} - \epsilon^n g(\epsilon)\frac{\Lambda(\epsilon)}{\epsilon^n} - \int_\epsilon^N t^n g'(t)\frac{\Lambda(t)}{t^n}dt \right].\end{aligned}$$

Mas,

$$\frac{\Lambda(t)}{t^n} = \frac{1}{t^n}\int_{|x|\geq t} |h(x)|dx = \frac{|B(0,1)|}{|B(0,t)|}\int_{B(0,t)} \int |h(x)|dx \leq |B(0,1)|Mh(0).$$

Assim, segue de (2.23) que

$$\begin{aligned}\int |h(y)|g(y)dy &\leq \lim_{\substack{\epsilon\longrightarrow 0,\\ N\longrightarrow\infty}} \int_\epsilon^N t^n g'(t)\frac{\Lambda(t)}{t^n}dt \\ &\leq |B(0,1)|Mh(0) \lim_{\substack{\epsilon\longrightarrow 0,\\ N\longrightarrow\infty}} \int_\epsilon^N t^n(-g'(t))dt.\end{aligned}$$

Novamente, integrando por partes e usando (2.23), temos

$$\begin{aligned}\int |h(y)|g(y)dy &\leq |B(0,1)|Mh(0) \lim_{\substack{\epsilon\longrightarrow 0,\\ N\longrightarrow\infty}} \left[ -t^n g(t)\Bigg|_\epsilon^N + \int_\epsilon^N nt^{n-1}g(t))dt \right] \\ &\leq |B(0,1)|Mh(0)\int_0^\infty nt^{n-1}g(t))dt.\end{aligned}$$

Finalizando, como $n|B(0,1)| = |S^{n-1}|$, então

$$\begin{aligned}(|h| * g)(0) = \int |h(y)|g(y)dy &\leq |B(0,1)|Mh(0)\int_0^\infty nt^{n-1}g(t))dt \\ &= Mh(0)\int_0^\infty \int_{S^{n-1}} g(t)t^{n-1}d\sigma(\theta)dt \\ &= Mh(0)\int g(x)dx = AMh(0).\end{aligned}$$

□

**Observação 2.2.6.** É uma consequência desta proposição que

$$\sup_{t>0} |u(x,t)| \leq Mh(x), \tag{2.27}$$

onde $u(x,t) = (h * P_t)(x)$, para toda $h \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. De fato, note que a própria função núcleo de Poisson para o semiplano superior satisfaz as propriedades de $\psi$, isto é, $P$ é radial, não-crescente e, além disso, sua integral é 1.

Uma desigualdade similar ainda é possível se considerarmos o cone $\Gamma^a_{x_0}$ definido do seguinte modo:

$$\Gamma^a_{x_0} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \ : \ |x - x_0| < at\}, \tag{2.28}$$

fixados $a > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Tal desigualdade é assunto da próxima proposição. Antes da mesma, enunciemos e demonstremos o seguinte lema:

**Lema 2.2.3.** *Seja $P$ o núcleo de Poisson para o semiplano superior $R^{n+1}_+$. Então, fixado $a > 0$, existe $A(a) > 0$ tal que*

$$P(\xi + \eta) \leq A(a)P(\eta),$$

*para todo $\eta$ e todo $|\xi| < a$.*

*Demonstração.* Seja $\eta$ qualquer e $\xi$ tal que $|\xi| < a$. Se $P(\xi + \eta) \leq P(\eta)$, então o lema está provado. Suponha, portanto, que

$$\frac{P(\xi + \eta)}{P(\eta)} > 1. \tag{2.29}$$

Note que a composição $\ln \circ P$ está bem definida uma vez que $P > 0$. Pela Desigualdade do Valor Médio, temos

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{P(\eta+\xi)}{P(\eta)}\right) = \ln P(\eta+\xi) - \ln P(\eta) &\leq |\xi| \sup_{0<t<1} |(\ln \circ P)'(\eta + t\xi)| \\
&= |\xi| \sup_{0<t<1} |\ln' P(\eta + t\xi) P'(\eta + t\xi)| \\
&\leq a \sup_{0<t<1} \frac{1}{|P(\eta + t\xi)|} |\nabla P(\eta + t\xi)|.
\end{aligned}$$

Dado $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, recordemos que

$$P(x) = c_n[1 + (x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2]^{-(n+1)/2}.$$

Daí, segue que

$$\partial_{x_i} P(x) = -\frac{c_n(n+1)x_i}{(1+|x|^2)^{(n+1)/2}} \implies |\nabla P(x)| = \frac{c_n(n+1)}{(1+|x|^2)^{(n+3)/2}} |x|.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{P(\eta+\xi)}{P(\eta)}\right) &\leq a \sup_{0<t<1} \frac{(1+|\eta+t\xi|^2)^{(n+1)/2}}{c_n} \frac{c_n(n+1)|\eta+t\xi|}{(1+|\eta+t\xi|^2)^{(n+3)/2}} \\
&= a(n+1) \sup_{0<t<1} \frac{|\eta+t\xi|^2}{1+|\eta+t\xi|^2}.
\end{aligned}$$

Há duas possibilidades: $|\eta| > 2a$ ou $|\eta| \leq 2a$. No primeiro caso, temos que

$$\begin{aligned}
2a < |\eta| \leq |\eta+t\xi| + |\xi| \leq |\eta+t\xi| + a &\Longrightarrow a < |\eta+t\xi|, \ \forall\, t \in (0,1) \\
&\Longrightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^2 < \left(\frac{1}{|\eta+t\xi|}\right)^2, \ \forall\, t \in (0,1).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{P(\eta+\xi)}{P(\eta)}\right) &\leq a(n+1) \sup_{0<t<1} \frac{1}{1+|\eta+t\xi|^2} \\
&\leq a(n+1) \sup_{0<t<1} \frac{1}{a^2} \\
&= \frac{n+1}{a}.
\end{aligned}$$

Se $|\eta| \leq 2a$, então

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{P(\eta+\xi)}{P(\eta)}\right) \leq a(n+1) \sup_{0<t<1} |\eta+t\xi| &\leq a(n+1) \sup_{0<t<1} |\eta| + t|\xi| \\
&\leq a(n+1) \sup_{0<t<1} 2a + ta \\
&\leq (n+1)3a^2.
\end{aligned}$$

Tomando $\ln A(a) = \max\{(n+1)/a, (n+1)3a^2\}$. Daí, temos que

$$\ln\left(\frac{P(\eta+\xi)}{P(\eta)}\right) \leq \ln A(a) \Longrightarrow P(\xi+\eta) \leq A(a)P(\eta),$$

como queríamos provar.

$\square$

**Proposição 2.2.4.** *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, para $1 \leq p \leq \infty$. Considere, além disso, $u$ dada por*

$$u(x,t) = (P_t * f)(x).$$

*Então, para cada $a > 0$ fixado, existe constante $A(a) > 0$ tal que*

$$\sup_{(x,s)\in\Gamma^a_{x_0}} |u(x,s)| \leq A(a)Mf(x_0). \tag{2.30}$$

*Demonstração.* Fixado $a > 0$, seja $(x, s) \in \Gamma^a_{x_0}$, isto é, $|x - x_0| < as$. Defina $z = x - x_0$ e, portanto, $|z|/s < a$. Daí,

$$\begin{aligned} u(x,s) = u(z+x_0,s) = (P_s * f)(z+x_0) &= \int P_s(z+x_0-y)f(y)dy \\ &= s^{-n}\int P\left(\frac{z+x_0-y}{s}\right)f(y)dy \\ &= s^{-n}\int P\left(\frac{x_0-y}{s}+\frac{z}{s}\right)f(y)dy. \end{aligned}$$

Usando o Lema 2.2.3 para $\eta = (x_0 - y)/s$ e $\xi = z/s$, obtemos

$$\begin{aligned} |u(x,s)| &\leq A(a)s^{-n}\int P\left(\frac{x_0-y}{s}\right)|f(y)|dy \\ &= A(a)\int P_s(x_0-y)|f(y)|dy \\ &= A(a)(P_s * |f|)(x_0) \\ &\leq A(a)\sup_{s>0}(P_s * |f|)(x_0) \\ &= A(a)Mf(x_0),\ \forall\,(x,s) \in \Gamma^a_{x_0}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sup_{(x,s)\in\Gamma^a_{x_0}} |u(x,s)| \leq A(a)Mf(x_0),$$

como desejado.

□

**Observação 2.2.7.** Resgatando a definição de $u^*$, em (2.8), obtemos a partir da Proposição 2.2.4 que

$$u^*(x) = \sup_{(y,s)\in\Gamma^1_x} |u(y,s)| \leq AMf(x). \tag{2.31}$$

As ferramentas prévias permitem, por fim, enunciar e demonstrar uma propriedade importante dos Espaços de Hardy.

**Teorema 2.2.3.** *Se $1 < p \leq \infty$, então $H^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$.*

*Demonstração.* Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, vamos mostrar que $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, pelo Corolário 2.2.2, o operador de Hardy-Littlewood é forte $(p, p)$, ou seja, existe $C > 0$ tal que

$$\|Mf\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}.$$

Da equação (2.31), temos

$$\|u^*\|_{L^p} = \left(\int |u^*(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq A_p\|Mf\|_{L^p} \leq A_pC\|f\|_{L^p}.$$

Logo, $u^* \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e pelo item (iii) do Teorema 2.1.1, segue que $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$, concluindo a primeira inclusão.

Por outro lado, dada $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$, vamos mostrar que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. De fato, considere $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ cuja integral é não-nula. Portanto, $M_\phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Para cada $t > 0$ fixo, $f * \phi_t \in L^p(\mathbb{R}^n)$, pois $f * \phi_t \leq M_\phi f$. Em outras palavras,

$$\|f * \phi_t\|_{L^p} \leq c < \infty \Longrightarrow f * \phi_t \in \{g \in L^p(\mathbb{R}^n) \ : \ \|g\|_{L^p} \leq c\}.$$

Pelo Teorema de Kakutani, sabemos que a bola fechada em um espaço reflexivo é compacta na topologia fraca. Assim, existem $f_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e sequência $t_j = 1/n_j \longrightarrow 0$ quando $j \longrightarrow \infty$, tais que $f * \phi_{1/n_j}$ converge fracamente a $f_0$ e, portanto, $f * \phi_{1/n_j}$ converge a $f_0$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Por outro lado, desde que $\{\phi_{1/n_j}\}_j$ constitui uma aproximação da identidade, temos que $f * \phi_{1/n_j}$ converge a $f$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Logo, pela unicidade do limite em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, obtemos que $f = f_0$, implicando em $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. □

**Observação 2.2.8.** Além de concluírmos que estes espaços coincidem quando $p > 1$, temos que $H^1(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Ainda, vale que se $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int f(x)dx = 0.$$

Esta e outras propriedades do espaço $H^p(\mathbb{R}^n)$ são encontradas em [11]. Aqui, encerra o breve estudo realizado sobre $H^p(\mathbb{R}^n)$. O seguinte passo é estudar o espaço localizável de Hardy $h^p(\mathbb{R}^n)$.

## 2.3 O espaço de Hardy local $h^p(\mathbb{R}^n)$

Seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int \phi(x)dx \neq 0$ e defina para $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ a seguinte função

$$m_\phi f(x) = \sup_{0<t<1} |(f * \phi_t)(x)|. \tag{2.32}$$

**Definição 2.3.1.** *Definimos, para* $0 < p \leq \infty$*, o* ***Espaço de Hardy local****, denotado por* $h^p(\mathbb{R}^n)$*, como sendo o conjunto*

$$h^p(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \ m_\phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)\}. \tag{2.33}$$

Segue da definição a seguinte proposição:

**Proposição 2.3.1.** *$H^p(\mathbb{R}^n) \subset h^p(\mathbb{R}^n)$.*

*Demonstração.* Se $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$, então $M_\phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para qualquer $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com integral não-nula.

Além disso,

$$m_\phi f(x) \leq M_\phi f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow \|m_\phi f\|_{L^p} \leq \|M_\phi f\|_{L^p} < \infty$$

mostrando que $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$. □

Veremos mais adiante que para verificar se uma distribuição temperada $f$ está em $h^p(\mathbb{R}^n)$, basta existir uma função $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, com integral não-nula, de modo que $m_\phi f$ esteja em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Desse modo, vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 2.3.1.** Considere na reta a distribuição delta de Dirac e seja $\phi \in C_c^\infty([-1,1])$ cuja integral é não-nula. Note que

$$(\delta * \phi_t)(x) = \langle \delta, \phi_t(x - \cdot\,)\rangle = \phi_t(x) = t^{-1}\phi\left(\frac{x}{t}\right),\ \forall\, t \in (0,1).$$

Temos que $\phi(x/t)$ se anula se $|x| \geq t$. Assuma, portanto, $|x| < t$. Então,

$$t^{-1}\phi\left(\frac{x}{t}\right) \leq |x|^{-1}\phi\left(\frac{x}{t}\right) \Longrightarrow (m_\phi\delta)^p(x) \leq |x|^{-p}\|\phi\|_{L^\infty}^p,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Assim, temos que

$$\int_{\mathbb{R}} (m_\phi\delta)^p(x)dx \leq \|\phi\|_{L^\infty}^p \int_{-1}^{1} |x|^{-p}dx = 2\|\phi\|_{L^\infty}^p \int_0^1 |x|^{-p}dx < \infty$$

se, e somente se, $-p+1 > 0$, isto é, $p < 1$. Logo,

$$\delta \in h^p(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow 0 < p < 1.$$

Um pouco mais geral, temos:

**Exemplo 2.3.2.** Fixado $m$ inteiro não-negativo, considere a distribuição $\delta^{(m)}$ em $\mathbb{R}$. Da mesma forma, como no exemplo anterior, temos que

$$(\delta^{(m)} * \phi_t)(x) = t^{-(1+m)}\, \partial_y^m \phi\left(\frac{x}{t}\right),\ \forall\, t \in (0,1)$$

e, portanto,

$$(m_\phi\delta)^p(x) \leq |x|^{-p(1+m)}\|\partial_y^m\phi\|_{L^\infty}^p,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}} (m_\phi\delta^m)^p(x)dx \leq 2\|\partial_y^m\phi\|_{L^\infty}^p \int_0^1 x^{-p(1+m)}dx < \infty$$

se, e somente se, $-p(1+m)+1 > 0$, ou seja, $p < 1/(1+m)$. Portanto,

$$\delta^{(m)} \in h^p(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow 0 < p < \frac{1}{1+m}.$$

**Exemplo 2.3.3.** Em $\mathbb{R}^2$, considere $f = \delta \otimes \delta^{(m)}$, uma vez fixado $m$ inteiro não-negativo. Vamos investigar para quais valores de $p > 0$ ocorre

$$\int_{\mathbb{R}^2} m_\phi(f)^p(z)dz < \infty,$$

para $\phi \in C_c^\infty(B(0,1))$ com integral não-nula. Com efeito, temos que

$$(f * \phi_t)(x,y) = t^{-2-m}\, \partial_y^m \phi\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right).$$

Desde que $\phi \in C_c^\infty(B(0,1))$, vamos supor que $\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right) \in B(0,1)$ e, portanto, $(x,y) \in B(0,t)$. Daí, obtemos que

$$t^{-2-m} < |(x,y)|^{-2-m}.$$

Assim,

$$|(f * \phi_t)(x,y)| < |(x,y)|^{-2-m} \|\partial_y^m \phi\|_{L^\infty},\ \forall\, t \in (0,1)$$

e, portanto,

$$m_\phi(f)^p(x,y) < c\, |(x,y)|^{-(2+m)p},\ \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Integrando em ambos os lados na desigualdade acima e usando coordenadas polares, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} m_\phi(f)^p(z)dz &\leq c \int_{B(0,1)} |z|^{-(2+m)p} dz \\
&\leq c \int_0^1 \int_{S^1} \rho\rho^{-(2+m)p} d\sigma d\rho \\
&= c_n \int_0^1 \rho^{1-(2+m)p} d\rho < \infty
\end{aligned}$$

se, e somente se, $1 - (2+m)p + 1 > 0$, isto é,

$$p < \frac{2}{2+m}.$$

Portanto,

$$f \in h^p(\mathbb{R}^2) \Longleftrightarrow p < \frac{2}{2+m}.$$

**Exemplo 2.3.4.** Em $\mathbb{R}^2$, considere a distribuição dada por $f = u \otimes \delta^{(m)}$, onde $u$ é a distribuição do Exemplo 1.1.6, a recordar:

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}\, \delta_{r_j}.$$

Assim, para $\phi \in C_c^\infty(B(0,1))$, obtemos

$$[(u \otimes \delta^{(m)}) * \phi_t](x,y) = t^{-2-m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}\, \partial_y^m \phi\left(\frac{x-r_j}{t}, \frac{y}{t}\right),\ \forall\, t \in (0,1).$$

Como $\phi$ se anula fora de $B(0,1)$, vamos supor

$$\left|\left(\frac{x-r_j}{t}, \frac{y}{t}\right)\right| < 1 \Longrightarrow |(x-r_j, y)| < t.$$

Ainda,

$$|[(u \otimes \delta^{(m)}) * \phi_t](x,y)| \leq \|\partial_y^m \phi\|_{L^\infty}\, t^{-2-m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}.$$

Mas,

$$t^{(-2-m)p} < |(x-r_j,y)|^{(-2-m)p}.$$

Se $z = (x,y)$, então

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} (m_\phi u \otimes \delta^{(m)})^p(z)dz &\leq c\, \|\partial_y^m \phi\|_{L^\infty}^p \int\limits_{\{z:\, |z-(r_j,0)|<1\}} |z-(r_j,0)|^{(-2-m)p} dz \\ &= c\, \|\partial_y^m \phi\|_{L^\infty}^p \int\limits_{B(0,1)} |z|^{(-2-m)p} dz < \infty\end{aligned}$$

se, e somente se, $1-(2+m)p+1>0$, ou seja,

$$p < \frac{2}{2+m}.$$

Logo, $f \in h^p(\mathbb{R}^2)$ se, e somente se,

$$p < \frac{2}{2+m},$$

concluindo o exemplo.

Assim como para o espaço $H^p$ há também uma caracterização maximal para a versão local $h^p$. Entretanto, antes de enunciá-la, é necessário observar que para realizar o estudo deste espaço, vamos definir funções maximais análogas àquelas definidas no estudo de $H^p$.

Com efeito, dados $N \in \mathbb{Z}_+$ e $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, defina a seguinte função

$$m_{\mathcal{F}_N} f(x) \doteq \sup_{\varphi \in \mathcal{F}_N} m_\varphi f(x), \tag{2.34}$$

onde $\mathcal{F}_N$ é dado em 2.10.

Além disso, para cada $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, definimos a função maximal

$$m_\phi^* f(x) = \sup_{\substack{|x-y|<t,\\ 0<t<1}} |(f * \phi_t)(y)|. \tag{2.35}$$

**Observação 2.3.1.** Seja $S$ a seguinte faixa:

$$S = \{(x,t) \in R^{n+1} :\ 0 < t < 1\},$$

e considere o seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta u(x,t) = 0 \text{ em } S \\ u(x,1) = f_1,\ u(x,0) = f_0 \end{cases}, \tag{2.36}$$

com $f_1$ e $f_2$ contínuas tais que se anulam no infinito.

Se $P_t^0$ é o núcleo de Poisson para $S$ e $P_t^1(x) = P_{1-t}^0(x)$, então

$$u(x,t) = (P_t^0 * f_0)(x) + (P_t^1 * f_1)(x)$$

é solução do problema de Dirichlet (2.36). Além disso, vale que $P_t^0 \longrightarrow \delta$ quando $t \longrightarrow 0$ e $P_t^1 \longrightarrow \delta$ quando $t \longrightarrow 1$.

**Teorema 2.3.1.** *Seja $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $0 < p < \infty$. São equivalentes:*

(i) $\forall\ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *com* $\int \phi(x)dx \neq 0$ *tal que* $m_\phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*;*

(ii) $\exists\ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *com* $\int \phi(x)dx \neq 0$ *tal que* $m_\phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*;*

(iii) $\exists\ N$ *suficientemente grande tal que* $m_{\mathcal{F}_N} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*;*

(iv) $\forall\ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $m_\phi^* f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*;*

(v) $\sup_{\substack{|\cdot-y|<t,\\ 0<t<1}} |(P_t * f)(y)| \in L^p(\mathbb{R}^n)$*, onde* $P_t = P_t^0 + P_t^1$*.*

Portanto, para que uma distribuição temperada esteja em $h^p$, basta que uma das condições acima estejam satisfeitas. Por outro lado, há uma outra maneira de caracterizá-lo, a qual será importante no decorrer deste trabalho.

### 2.3.1 Uma caracterização alternativa de $h^p(\mathbb{R}^n)$

**Definição 2.3.2.** *Para $x \in \mathbb{R}^n$ e $m \in \mathbb{Z}_+$, seja*

$$K_m(x) \doteq \{\phi \in C_c^\infty(B(x,r)), r < 1, \|D^\alpha \phi\|_{L^\infty} \leq r^{-(n+|\alpha|)}\ \forall\ |\alpha| \leq m\}.$$

**Definição 2.3.3.** *Dada $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, definimos a função maximal $f_m^*$ por*

$$f_m^*(x) = \sup_{\phi \in K_m(x)} |\langle f, \phi \rangle|. \tag{2.37}$$

É possível caracterizar o espaço $h^p$ segundo a função maximal definida acima: Uma ditribuição temperada $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ está em $h^p(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, existe $N \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f_N^* \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Entretanto, buscamos uma caracterização similar a esta com respeito a outra função maximal como segue:

**Definição 2.3.4.** *Para $0 < p \leq 1$, definimos o número $N_p$ como sendo a parte inteira de*

$$n\left(\frac{1}{p} - 1\right). \tag{2.38}$$

*Em outra palavras, $N_p$ é o maior inteiro menor ou igual que $n(1/p - 1)$.*

A definição acima permite considerarmos a função maximal $f^*_{N_p+1}$. Agora, na função maximal que queremos construir, em vez de tomarmos o supremo sobre a família de funções em $K_{N_p+1}(x)$, fixado $x \in \mathbb{R}^n$, tomaremos o supremo sobre a família das funções-teste normalizadas, isto é:

**Definição 2.3.5.** *Dado $x \in \mathbb{R}^n$, se a função $\varphi_r^x$ é de classe $C^\infty$, está suportada numa bola de raio $r \leq 1$ contendo $x$ e, além disso, satisfaz*

$$|\partial^\alpha \varphi| \leq r^{-n-|\alpha|}, \ \forall \ |\alpha| \leq N_p + 1, \tag{2.39}$$

*então $\varphi_r^x$ é chamada de **função-teste normalizada**.*

Desse modo, definimos:

**Definição 2.3.6.** *Para uma distribuição temperada $f$, seja $m(f)$ dada por*

$$m(f)(x) \doteq \sup_{\varphi_r^x} |f(\varphi_r^x)|. \tag{2.40}$$

*A aplicação $m(f)$ é chamada de **grande função maximal local**.*

Com isso, a caracterização alternativa a qual dá nome a esta subsessão é dada pelo seguinte teorema:

**Teorema 2.3.2.** *Seja $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Então, $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, $m(f) \in L^p(\mathbb{R}^n)$.*

*Demonstração.* Suponha que $m(f) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e vamos mostrar que $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$. Para tanto, considere $\phi \in C_c^\infty(B(0,1))$ com integral não-nula. Para cada $t \in (0,1)$ e $x \in \mathbb{R}^n$, defina

$$\psi_{x,t}(y) = t^{-n}\phi\left(\frac{x-y}{t}\right).$$

Assim,

$$(f * \phi_t)(x) = \langle f, \psi_{x,t} \rangle.$$

Seja $c > 0$ de modo que se $\psi = \psi_{x,t}/c$, então

$$\|\partial^\alpha \psi\|_{L^\infty} \leq t^{-(n+|\alpha|)},\ \forall\ |\alpha| \leq N_p + 1.$$

Note que o suporte de $\psi$ está contido em $B(x,t)$. Portanto, $\psi$ é função-teste normalizada. Assim,

$$|(f * \phi_t)(x)| \leq c|f(\psi)| \leq m(f)(x),\ \forall\ t \in (0,1) \Longrightarrow m_\phi(f)(x) \leq m(f)(x),\ \forall\ x,$$

e, portanto,

$$\|m_\phi(f)\|_{L^p} \leq \|m(f)\|_{L^p} < \infty,$$

mostrando que $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$.

Reciprocamente, suponha $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$. Então, existe $N \in \mathbb{Z}_+$ suficientemente grande tal que $m_{\mathcal{F}_N}(f) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Na verdade, $N_p + 1$ cumpre esta condição. Portanto, $m_{\mathcal{F}_{N_p+1}} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Seja $\phi$ função-teste normalizada e seja $\psi_{x,t}(y) = t^n \phi(x - ty)$, para $t \in (0,1)$. Então,

$$f(\phi) = (f * (\psi_{x,t})_t)(x).$$

Ainda, o suporte de $\psi_{x,t}$ está contido em $B(0,2)$. Note também que

$$|y^\beta D^\alpha \psi_{x,t}(y)| \leq 2^{|\beta|},\ \forall\ |\alpha|, |\beta| \leq N_p + 1.$$

Se $c = \max_{|\beta| \leq N_p+1} 2^{|\beta|}$, então $\psi = \psi_{x,t}/c \in \mathcal{F}_{N_p+1}$. Portanto,

$$\begin{aligned} |f(\phi)| \leq c\, m_{\mathcal{F}_{N_p+1}}(f)(x) &\Longrightarrow m(f)(x) \leq c\, m_{\mathcal{F}_{N_p+1}}(f)(x) \\ &\Longrightarrow \|m(f)\|_{L^p} \leq c\, \|m_{\mathcal{F}_{N_p+1}}(f)\|_{L^p} < \infty, \end{aligned}$$

concluindo a prova.

□

Em vista da caracterização acima, o estudo de investigar se uma determinada distribuição pertence a $h^p(\mathbb{R}^n)$ está conectado diretamente com a grande função maximal local. Nesta direção, vamos agora aprofundar nosso estudo na elaboração de condições para que uma determinada distribuição esteja em $h^p(\mathbb{R}^n)$.

Capítulo

3

# Distribuições suportadas em um hiperplano e o espaço $h^p$

Dada uma distribuição com suporte compacto contido em um hiperplano, estudaremos neste capítulo condições para que esta distribuição esteja em $h^p(\mathbb{R}^n)$. De modo mais específico, exibiremos duas condições: uma suficiente e outra necessária. A primeira delas nos dará informação sobre a ordem total da distribuição enquanto que a segunda a ordem na direção normal.

Comecemos pelo estudo da suficiência.

## 3.1 Uma condição suficiente

Suponha $f$ uma distribuição em $\mathbb{R}^n$ com suporte compacto. Assumimos que, associado a ela, exista um conjunto $S$ fechado tal que, fora de $S$, a distribuição $f$ é dada por uma função localmente integrável $f(x)$ cujo tamanho é controlado em termos da distância de $x$ a $S$. Mais precisamente, assumimos que:

i. Para $x \notin S$, temos que $|f(x)| \leq c\, d(x)^{-M}$, onde $d(x) = \operatorname{dist}(x, S)$ e $M > 0$ fixado.

Vamos supor, além disso, que:

ii. Seja $S_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n :\ d(x) \leq \delta\}$. Então, existe $r > 0$ tal que $|S_\delta| \leq c\, \delta^r$ quando $\delta \longrightarrow 0$. Assuma também que $|S_\delta| < c$, $\forall\, \delta \leq 2$.

Vejamos alguns exemplos de conjuntos $S$ satisfazendo as condições acima:

**Exemplo 3.1.1.** Considere a distribuição delta de Dirac. Podemos considerar $S$, o conjunto associado a delta, como sendo a origem, isto é, $S = \{0\}$. Neste caso, temos claramente que ela, fora de $S$, é $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, uma vez que se anula em $\mathbb{R}^n \setminus S$. Ainda, dado $\delta > 0$, note que $S_\delta = B(0, \delta)$. Portanto, $r = n$, pois

$$|S_\delta| = c_n\, \delta^n.$$

Analogamente, podemos considerar $S = \{0\}$ para as distribuições $\delta \otimes \delta^{(m)}$ e $\phi \otimes \delta^{(m)}$, como nos exemplos 1.2.2 e 1.2.3, respectivamente.

**Exemplo 3.1.2.** Sejam $f = u \otimes \delta^{(m)}$, com

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}\,\delta_{r_j}$$

a distribuição do Exemplo 1.1.6, com $\{r_j : j \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ e $S = [0,1]$. Então, $f$ é localmente integrável fora de $S$, da mesma forma como a delta de Dirac.

Para $\delta > 0$, defina $R_\delta = [-\delta, 1+\delta] \times [-\delta, \delta]$. Note que $S_\delta \subset R_\delta$. Portanto, temos que

$$|S_\delta| \leq |R_\delta| = (\delta + (1+\delta))\,(2\delta) \leq c\,\delta,$$

se $\delta < 1$. Assim, $r = 1$.

No próximo exemplo exibiremos um conjunto que não satisfaz a condição ii, mostrando que esta condição não é artificial e, sim, necessária.

**Exemplo 3.1.3.** Dado $n \in \mathbb{N}$, defina

$$a_n = \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

A sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a zero e seja $S$ o conjunto dado por

$$S = \{a_n :\; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\},$$

que é fechado. Note que, pelo Teorema do Valor Médio, obtemos

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{\xi}\frac{1}{\ln(n+1)\ln(n+2)} > \frac{1}{(n+2)}\frac{1}{\ln(n+1)\ln(n+2)} \doteq \epsilon_n, \tag{3.1}$$

para algum $\xi \in (n+1, n+2)$. Defina $\delta_n = \epsilon_n/2$ e veja que $\delta_n$ converge a zero quando $n \longrightarrow \infty$. Fixado $n \in \mathbb{N}$, defina para $i \leq n$ o intervalo $A_i = (a_i - \delta_n, a_i + \delta_n)$ e note que

$$A_i \cap A_j = \emptyset,\; \forall\, i \neq j,\; i,j \leq n. \tag{3.2}$$

De fato, suponha, por absurdo, que exista $y \in A_i \cap A_j$, para $i \neq j$ e $i,j \leq n$. Daí, segue que

$$|a_i - a_j| < \epsilon_n$$

e, assim, por (3.1), obtemos

$$|a_i - a_j| < |a_n - a_{n+1}|. \tag{3.3}$$

Agora, suponha $i > j$ e note, por outro lado, que

$$|a_i - a_j| = |a_i - a_{i-1}| + \cdots + |a_{j+1} - a_j| \geq c\,|a_n - a_{n+1}| \geq |a_n - a_{n+1}|,$$

para algum $c \geq 1$, uma vez que

$$|a_\ell - a_{\ell+1}| \geq |a_n - a_{n+1}|,\ \forall\, \ell \leq n,$$

contradizendo (3.3), mostrando (3.2). Defina, assim, $S_{\delta_n}$ por

$$S_{\delta_n} = \{x \in \mathbb{R} :\ d(x, S) \leq \delta_n\}.$$

Não é difícil ver que

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j \subset S_{\delta_n}. \tag{3.4}$$

Assim, por (3.2) e (3.4), temos que

$$|S_{\delta_n}| \geq \Big|\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big| = \sum_{j=1}^{n} |A_j| = n\,\epsilon_n.$$

Seja $0 < r < 1$ arbitrário fixo. Temos que

$$\begin{aligned}\frac{|S_{\delta_n}|}{{\delta_n}^r} \geq 2\,n\,{\delta_n}^{1-r} &= 2\,n\left[\frac{1}{(n+2)}\frac{1}{\ln(n+1)\ln(n+2)}\right]^{1-r}\\ &\geq c\,n^r\frac{1}{\ln(n+2)^{2(1-r)}},\ \forall\, n \geq 2.\end{aligned}$$

Via L'hospital, mostra-se que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} c\,n^r \frac{1}{\ln(n+2)^{2(1-r)}} = c \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{r\,(n+2)^{2(1-r)}}{n^{1-r}} = \infty,$$

provando que não existem constantes $r > 0$ e $c > 0$ de modo que $|S_{\delta_n}|/{\delta_n}^r \leq c$ quando $n \longrightarrow \infty$. Portanto, a condição ii não é satisfeita por $S$.

O próximo teorema nos dá uma condição suficiente para uma distribuição $f$ com suporte compacto estar em $h^p(\mathbb{R}^n)$.

**Teorema 3.1.1.** *Seja $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $S$ um conjunto fechado de $\mathbb{R}^n$, associado com $f$, como no enunciado acima. Seja $m$ a ordem da distribuição. Se*

$$p < \frac{r+1}{\max\{M, m+n\}}, \tag{3.5}$$

*então $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$.*

*Demonstração.* Sejam $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $S$ conjunto fechado de $\mathbb{R}^n$, associado com $f$. Para mostrar que $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$, vamos mostrar que $m_\phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, para $\phi \in C_c^\infty(B(0,1))$, não-negativa, com integral igual a 1. Para tanto, fixe $\ell > 0$ arbitrário e seja $x \in \mathbb{R}^n \setminus S$.

Suponhamos que $d(x) \leq \ell$. Neste caso, mostraremos que

$$m_\phi f(x) = \sup_{0<t<1} |(f * \phi_t)(x)| \leq \frac{c}{d(x)^{\max\{M,m+n\}}}.$$

Com efeito, dado $t \in (0,1)$, há duas possibilidades: $2t \leq d(x)$ ou $2t > d(x)$. Se ocorrer a primeira, isto é, $2t \leq d(x)$, temos que se $y \in B(x,t)$, então $d(y) \geq d(x)/2$, pois como existe $z_0 \in S$ tal que $d(y) = |y - z_0|$, segue que

$$d(x) \leq |x - z_0| \leq |x - y| + |y - z_0| < t + d(y) \leq \frac{d(x)}{2} + d(y).$$

Isto quer dizer que todo elemento da bola $B(x,t)$ está fora de $S$ e, portanto, o tamanho de $f$ é controlada em $B(x,t)$. Daí,

$$\begin{aligned} |(f * \phi_t)(x)| &\leq \int_{B(x,t)} |f(y)||\phi_t(x-y)|dy \\ &\leq \int \frac{c}{d(y)^M} \phi_t(x-y)dy \\ &\leq c \left(\frac{d(x)}{2}\right)^{-M} \|\phi_t\|_{L^1} \\ &= \frac{2^M c}{d(x)^M}, \end{aligned}$$

concluindo que

$$\sup_{0\,<\,t\,<\,d(x)/2} |(f * \phi_t)(x)| \leq \frac{2^M c}{d(x)^M}.$$

Desde que $d(x)/\ell \leq 1$ e $M \leq \max\{M, m+n\}$, temos que

$$\left(\frac{d(x)}{\ell}\right)^M \geq \left(\frac{d(x)}{\ell}\right)^{\max\{M,m+n\}} \Longrightarrow d(x)^M \geq \ell^{M-\max\{M,m+n\}} d(x)^{\max\{M,m+n\}}.$$

Portanto,

$$\sup_{0\,<\,t\;\;d(x)/2} |(f * \phi_t)(x)| \leq \frac{c_{\ell,M,m,n}}{d(x)^{\max\{M,m+n\}}}. \tag{3.6}$$

Suponha, agora, $d(x) < 2t$. Desde que $f$ é de ordem finita $m$, existe $A > 0$, tal que

$$|(f * \phi_t)(x)| \leq \frac{A}{t^{m+n}} < \frac{A}{d(x)/2^{m+n}} = \frac{A\;2^{m+n}}{d(x)^{m+n}}.$$

Portanto,

$$\sup_{d(x)/2\,<\,t\,<\,1} |(f * \phi_t)(x)| \leq \frac{A\;2^{m+n}}{d(x)^{m+n}}.$$

Como $m+n \leq \max\{M, m+n\}$, obtemos

$$d(x)^{m+n} \geq \ell^{(n+m)-\max\{M,m+n\}} d(x)^{\max\{M,m+n\}}$$

e, portanto,

$$\sup_{d(x)/2 < t < 1} |(f * \phi_t)(x)| \leq \frac{c_{\ell,M,m,n}}{d(x)^{\max\{M,m+n\}}}. \tag{3.7}$$

Logo, por (3.6) e (3.7), conclui-se

$$m_\phi f(x) = \sup_{0<t<1} |(f * \phi_t)(x)| \leq \frac{c}{d(x)^{\max\{M,m+n\}}}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus S, \text{ com } d(x) \leq \ell. \tag{3.8}$$

Suponha, agora, $d(x) > \ell$. Neste caso, vamos mostrar que

$$m_\phi f(x) \leq \frac{c}{d(x)^M}.$$

De fato, fixemos $\ell = 2$. Temos, portanto, que $d(x) > 2 > 2t$, para todo $t \in (0,1)$. Além disso, mais uma vez, temos que $B(x,t) \subset B(x, d(x)/2)$. Daí, usando que $\phi_t(x - \cdot\,)$ está suportada na bola $B(x,t)$, temos que

$$|(f * \phi_t)(x)| \leq \int_{B(x,t)} \frac{c}{d(y)^M} \phi_t(x-y)dy \leq \frac{c\, 2^M}{d(x)^M}, \ \forall\, t \in (0,1)$$

e, portanto,

$$m_\phi f(x) \leq \frac{c\, 2^M}{d(x)^M}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus S \text{ com } d(x) > 2. \tag{3.9}$$

Defina $K$ como sendo o compacto $\overline{\operatorname{supp} f + B(0,1)}$, o qual satisfaz

$$\operatorname{supp} m_\phi f \subset K,$$

dado que $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Assim, note que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (m_\phi f)^p(x)dx \leq \int_{\{x:\, d(x) \leq 2\}} (m_\phi f)^p(x)dx + \int_{\{x:\, d(x)>2\} \cap K} (m_\phi f)^p(x)dx = I + J.$$

Vamos estimar $I$ e $J$. Comecemos por $J$. Pela desigualdade (3.9), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\{x:\, d(x)>2\} \cap K} (m_\phi f)^p(x)dx &\leq c^p\, 2^{pM} \int_{\{x:\, d(x)>2\} \cap K} d(x)^{-pM} dx \\
&\leq c^p\, |\{x \in K :\ d(x) > 2\}| \\
&\leq c^p\, |K| < \infty.
\end{aligned}$$

Por fim, estimemos $I$. Pela condição ii, existem constantes $r > 0$ e $c > 0$ tais que

$$|S_\rho| \leq c\rho^r, \text{ para } \rho \longrightarrow 0.$$

Além disso, $|S_\rho| \leq c$, para $0 < \rho \leq 2$. Por hipótese, temos que

$$p < \frac{r+1}{\max\{M, m+n\}}.$$

Seja $q = p\max\{M, m+n\}$. Então, $r + 1 - q > 0$. Utilizando (3.8), obtemos

$$\int_{\{x:\, d(x)\leq 2\}} (m_\phi f)^p(x)dx \leq c^p \int_{\{x:\, d(x)\leq 2\}} d(x)^{-q}dx.$$

Mas veja que

$$\begin{aligned}
\int_{\{x:\, d(x)\leq 2\}} d(x)^{-q}dx &= \int_0^2 \int_{\{x:\, d(x)=\rho\}} \rho^{-q}dxd\rho \\
&= \int_0^2 \rho^{-q}|\{x:\ d(x) = \rho\}|d\rho \\
&\leq \int_0^2 \rho^{-q}|S_\rho|d\rho.
\end{aligned}$$

Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, dado pela condição ii, segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\{x:\, d(x)\leq 2\}} d(x)^{-q}dx &\leq \int_0^\epsilon \rho^{-q}|S_\rho|d\rho + \int_\epsilon^2 \rho^{-q}|S_\rho|d\rho \\
&\leq c\int_0^\epsilon \rho^{-q}\rho^r d\rho + c\int_\epsilon^2 \rho^{-q}d\rho \\
&= c\int_0^2 \rho^{r-q}d\rho + A \\
&= \frac{2^{r-q+1}}{r-q+1} + A < \infty,
\end{aligned}$$

completando a prova do teorema.

□

A condição suficiente que buscamos decorre do teorema acima, isto é, quando nos restringimos a classe das distribuições suportadas em um hiperplano, cujo suporte é compacto, obtemos a seguinte condição de suficiência:

**Teorema 3.1.2.** *Seja $f$ uma distribuição com suporte compacto contido no hiperplano $\Pi$ e seja $m$ sua ordem. Se*

$$m < \frac{1}{p} - n,$$

*então $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$.*

*Demonstração.* Seja $f$ distribuição com suporte compacto contido no hiperplano $\Pi$. Suponha que $f$ está suportada no cubo $[-1,1]^{n-1}$.

Defina $S = \Pi \cap [-1,1]^{n-1}$. Temos que $S$ é um conjunto fechado. Além disso, fora deste, $f$ é nula e, portanto, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus S)$.

Seja $R_\delta = [-1-\delta, 1+\delta]^{n-1} \times [-\delta, \delta]$. Note que $S_\delta \subset R_\delta$. Portanto, temos que

$$|S_\delta| \leq |R_\delta| = (2\,(1+\delta))^{n-1}\, 2\delta \leq c\,\delta^1,$$

se $\delta < 1$. Neste caso, $r = 1$.

Sendo $r = 1$, vamos escolher $M = 1$, uma vez que, neste caso particular, esta escolha oferece o maior intervalo no qual $p$ pode estar. Desse modo,

$$m < \frac{1}{p} - n \Longrightarrow p < \frac{1}{n+m} = \frac{1}{\max\{1, n+m\}} < \frac{r+1}{\max\{M, n+m\}},$$

implicando, pelo Teorema 3.1.1, que $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$.

□

Se na demonstração deste teorema considerarmos o caso particular em que $S = \{0\}$, podemos flexibilizar a hipótese do seguinte modo:

**Teorema 3.1.3.** *Seja $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ suportada em $S = \{0\}$ e seja $m$ sua ordem. Se*

$$m < n\left(\frac{1}{p} - 1\right),$$

*então $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$.*

*Demonstração.* Já vimos que, neste caso, $r = n$. Novamente, escolha $M = 1$. Assim,

$$m < n\left(\frac{1}{p} - 1\right) \Longrightarrow p < \frac{n}{n+m} = \frac{r}{\max\{M, n+m\}} < \frac{r+1}{\max\{M, n+m\}},$$

implicando, pelo Teorema 3.1.1, que $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$.

□

## 3.2 Uma condição necessária

Nossa meta, agora, é cumprir um dos objetivos estabelecidos no começo deste trabalho. O primeiro passo nesta direção, é dar os detalhes da construção de uma partição da unidade subordinada a uma família finita de cubos especial. A saber:

**Definição 3.2.1.** *Fixe $j = 0, 1, \ldots$ e defina para $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ o cubo*

$$Q^j_\alpha = [\alpha_1 2^{-j}, (\alpha_1+1)2^{-j}] \times \cdots \times [\alpha_{n-1}2^{-j}, (\alpha_{n-1}+1)2^{-j}]. \tag{3.10}$$

*Nestas condições, $Q_\alpha^j$ é chamado de* ***cubo diádico****.*

Além disso, definimos:

**Definição 3.2.2.** *Dado um cubo $Q$, definimos o* ***cubo duplicado de*** *$Q$, denotado por $2Q$, como sendo o cubo cujo centro coincide com o centro de $Q$ e o comprimento de sua aresta é o dobro do comprimento de aresta de $Q$.*

**Observação 3.2.1.** Seja $Q_\alpha^j$ um cubo diádico. Note que o comprimento de aresta de $Q_\alpha^j$ é $2^{-j}$. Portanto, o cubo duplicado $2Q_\alpha^j$ tem comprimento de aresta $2^{-j+1}$.

Ainda, fixado $j = 0, 1, \ldots$, considere a família $\{Q_\alpha^j\}_{\alpha\in\Lambda_j}$, onde

$$\Lambda_j = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{Z}_+^{n-1} \ : \ 0 \leq \alpha_i \leq 2^j - 1, i = 1, \ldots, n-1\}. \tag{3.11}$$

Note que a cardinalidade deste conjunto é $2^{jn}$. Além disso, se $Q = [0,1]^{n-1}$, então

$$Q = \bigcup_{\alpha\in\Lambda_j} Q_\alpha^j, \tag{3.12}$$

isto é, a família $\{Q_\alpha^j\}_{\alpha\in\Lambda_j}$ é uma decomposição de $Q$ para cada $j$ fixado.

**Proposição 3.2.1.** *Existe partição da unidade $\{\eta_\alpha^j\}_{\alpha\in\Lambda_j}$ subordinada a família $\{2Q_\alpha^j\}_{\alpha\in\Lambda_j}$ de modo que*

$$|\partial^\gamma \eta_\alpha^j| \leq c\, 2^{j|\gamma|}, \ \forall\ |\gamma| \leq N_p + 1, \ \forall\ \alpha \in \Lambda_j. \tag{3.13}$$

*Demonstração.* Seja $Q_0$ o cubo unitário em $\mathbb{R}^{n-1}$ centrado na origem. Vamos considerar $0 \leq \varphi \leq A$ função-teste de modo que

$$\begin{cases} \varphi(x') = A, & x' \in Q_0 \\ \varphi(x') = 0, & x' \notin 2Q_0 \end{cases},$$

onde $A$ é uma constante positiva que logo após será fixada. Para cada $\alpha \in \Lambda_j$, defina $\psi_\alpha^j$ por

$$\psi_\alpha^j(x') = \varphi\left(\frac{x' - c_\alpha^j}{2^{-j}}\right),$$

sendo $c_\alpha^j$ é o centro do cubo $Q_\alpha^j$. A mesma satisfaz

$$\begin{cases} \psi_\alpha^j(x') = A, & x' \in Q_\alpha^j \\ \psi_\alpha^j(x') = 0, & x' \notin 2Q_\alpha^j \end{cases}.$$

Além disso, note que

$$|\partial^\gamma \psi_\alpha^j| \leq (2^{-j})^{-|\gamma|} \|\partial^\gamma \varphi\|_{L^\infty} \leq 2^{j|\gamma|} A_\gamma, \tag{3.14}$$

onde $A_\gamma = \|\partial^\gamma \varphi\|_{L^\infty}$.

Se $|\gamma| \leq N_p + 1$, então seja $A = \max_{|\gamma|\leq N_p+1} A_\gamma$ e defina, portanto,

$$\varphi_\alpha^j(x') = \frac{\psi_\alpha^j(x')}{A}.$$

A função $\varphi_\alpha^j$ satisfaz

$$\begin{cases} \varphi_\alpha^j(x') = 1, & x' \in Q_\alpha^j \\ \varphi_\alpha^j(x') = 0, & x \notin 2Q_\alpha^j \\ |\partial^\gamma \varphi_\alpha^j| \leq 2^{j|\gamma|}, & \forall\, |\gamma| \leq N_p + 1 \end{cases}.$$

Suponha que $\Lambda_j = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^{2^{jn}}\}$. Defina, portanto, a família $\{\eta_\alpha^j\}_{\alpha\in\Lambda_j}$ do seguinte modo

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha^1}^j &= \varphi_{\alpha^1}^j \\ \eta_{\alpha^2}^j &= \varphi_{\alpha^2}^j(1 - \varphi_{\alpha^1}^j) \\ &\vdots \\ \eta_{\alpha^{2^{jn}}}^j &= \varphi_{\alpha^{2^{jn}}}^j(1 - \varphi_{\alpha^{2^{jn}-1}}^j)\ldots(1 - \varphi_{\alpha^1}^j). \end{aligned}$$

Daí,

$$\operatorname{supp} \eta_{\alpha^i}^j \subset \operatorname{supp} \varphi_{\alpha^i}^j \subset 2Q_{\alpha^i}^j.$$

Além disso,

$$\sum_1^{2^{jn}} \eta_{\alpha^i}^j(x') = 1 - \prod_1^{2^{jn}}(1 - \varphi_{\alpha^i}^j).$$

Se $x' \in Q$, então existe $i \in \{1, \ldots, 2^{jn}\}$ tal que $x' \in Q_{\alpha^i}^j$. Assim, $\varphi_{\alpha^i}^j(x') = 1$ e, portanto,

$$\sum_1^{2^{jn}} \eta_{\alpha^i}^j(x') = 1.$$

Observe também que se $|\gamma| \leq N_p + 1$, então

$$\begin{aligned} |\partial^\gamma \eta_{\alpha^1}^j(x')| &\leq 2^{jn} \\ |\partial^\gamma \eta_{\alpha^2}^j(x')| &\leq c_1\, 2^{jn} \\ |\partial^\gamma \eta_{\alpha^2}^j(x')| &\leq c_2\, 2^{jn} \\ &\vdots \\ |\partial^\gamma \eta_{\alpha^{2^{jn}}}^j(x')| &\leq c_{2^{jn}-1}\, 2^{jn}. \end{aligned}$$

Seja $c = \max_{1\leq j\leq 2^{jn}-1}\{c_j, 1\}$. Portanto,

$$|\partial^\gamma \eta_\alpha^j| \leq c\, 2^{j|\gamma|},\ \forall\, |\gamma| \leq N_p + 1,\ \forall\, \alpha \in \Lambda_j,$$

concluindo a prova da proposição.

$\square$

Nesta seção, vamos fixar $n \geq 2$ e escrever $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Aqui, $\Pi$ denotará o hiperplano de $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\Pi = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x_n = 0\}.$$

Vimos no Teorema 1.2.1 que se $f$ é uma distribuição em $\mathbb{R}^n$ de ordem $k$ com suporte compacto em $\Pi$, então a mesma pode ser escrita como:

$$f(\phi) = \sum_{j=0}^{k} f_j(\phi_j),$$

onde cada $f_j$ é uma distribuição com suporte compacto e ordem $k-j$ em $\mathbb{R}^{n-1}$, e

$$\phi_j(x') = \partial_{x_n}^j \phi(x', 0).$$

Para os resultados e exemplos que seguem, vamos fixar $N$ como sendo a ordem de $f$ na direção normal.

**Lema 3.2.1.** *Seja $f$ uma distribuição em $\mathbb{R}^n$ com suporte compacto em $\Pi$, e seja $N$ a ordem na direção normal. Então, para $0 < p \leq 1$, a função local maximal $m(f)$ satisfaz*

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} m(f)^p(x', x_n) dx' \geq c \, {x_n}^{n-1-(n+N)p}, \tag{3.15}$$

*para todo $x_n > 0$ suficientemente pequeno e algum $c > 0$.*

*Demonstração.* O primeiro passo da prova consiste em construir uma função-teste normalizada $\Phi$ de tal modo que $f(\Phi)$ dependa apenas de $f_N$. Com efeito, escrevemos

$$f(\phi) = \sum_{j=0}^{N} f_j(\phi_j),$$

onde $N$ é a ordem de $f$ na direção normal. Vamos assumir, por simplicidade, que

$$\operatorname{supp} f \subset \operatorname{int} Q, \tag{3.16}$$

onde $Q$ é o produto de $[0,1]$ por ele mesmo $n-1$ vezes. Desde que $f_N$ é não-nula, existe uma função-teste tal que

$$f_N(\phi) = \epsilon > 0.$$

Podemos supor que $\operatorname{supp} \phi \subset \operatorname{int} Q$. De fato, seja $\eta$ função-teste suportada em $\operatorname{int} Q$ e tal que $\eta \equiv 1$ em uma vizinhança do suporte de $f_N$. Temos que

$$\phi = \phi\, \eta + (1-\eta)\phi$$

e, portanto,

$$f_N(\phi) = f_N(\phi\,\eta) + f_N((1-\eta)\phi).$$

Mas,

$$f_N((1-\eta)\phi) = 0,$$

uma vez que $\eta \equiv 1$ numa vizinhança do suporte de $f_N$ e que $\operatorname{supp} f_N \subset \operatorname{int} Q$. Logo,

$$f_N(\phi) = f_N(\phi\,\eta),$$

e, assim, podemos reconsiderar $\phi\,\eta$ no lugar de $\phi$.

Trocando $\epsilon$ se necessário, normalizemos $\phi$ de modo que

$$\sup_{|\gamma|\leq N_p+1} |\partial_{x'}^{\gamma}\,\phi| \leq 1, \tag{3.17}$$

Fixado $j = 0, 1, \ldots,$ considere a família $\{Q_\alpha^j\}_{\alpha\in\Lambda_j}$, sendo $Q_\alpha^j$ e $\Lambda_j$ como em (3.10) e (3.11), respectivamente. Assim, pela proposição anterior, associamos para cada $j$ à família $\{2Q_\alpha^j\}_{\alpha\in\Lambda_j}$ uma partição da unidade $\{\eta_\alpha^j\}_{\alpha\in\Lambda_j}$ onde cada $\eta_\alpha^j \in C_c^\infty(2Q_\alpha^j)$, $0 \leq \eta_\alpha^j \leq 1$ e

$$\sum_{\alpha\in\Lambda_j} \eta_\alpha^j(x') = 1,\ \forall\, x' \in Q, \tag{3.18}$$

e tal que

$$|\partial_{x'}^{\gamma}\,\eta_\alpha^j| \leq c\, 2^{j|\gamma|},\ \forall\, |\gamma| \leq N_p + 1, \tag{3.19}$$

para alguma constante $c > 0$.

Dado $\gamma \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ tal que $|\gamma| \leq N_p + 1$, temos que

$$|\partial_{x'}^{\gamma}\, [2^{j(n-1)}\phi(x')\,\eta_\alpha^j(x')]| \leq 2^{j(n-1)} \sum_{\beta\leq\gamma} \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \end{pmatrix} |\partial_{x'}^{\gamma-\beta}\phi(x')||\partial_{x'}^{\beta}\eta_\alpha^j(x')|.$$

Agora, desde que $|\gamma-\beta|, |\beta| \leq N_p + 1$, usando (3.17) e (3.19), obtemos

$$\begin{aligned} |\partial_{x'}^{\gamma}\, [2^{j(n-1)}\phi(x')\,\eta_\alpha^j(x')]| &\leq c\, 2^{j(n-1)} \sum_{\beta\leq\gamma} \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \end{pmatrix} 2^{j|\beta|} \\ &\leq c\, 2^{j(n-1)} \sum_{\beta\leq\gamma} \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \end{pmatrix} 2^{j|\gamma|} \\ &= 2^{j(n-1+|\gamma|)} c_{\gamma,\beta}, \end{aligned}$$

onde

$$c_{\gamma,\beta} = c \sum_{\beta\leq\gamma} \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \end{pmatrix} > 0.$$

Portanto, defina

$$\phi_\alpha^j = A_{n,p}\, 2^{j(n-1)} \phi\, \eta_\alpha^j,$$

onde $A_{n,p} = c_{\gamma,\beta}^{-1}$. Logo, devemos ter que

$$|\partial_{x'}^\gamma \phi_\alpha^j| \leq 2^{j(n-1+|\gamma|)},\ \forall\, |\gamma| \leq N_p + 1. \tag{3.20}$$

Ainda, temos que

$$\operatorname{supp} \phi_\alpha^j \subset 2Q_\alpha^j.$$

Como no Exemplo 1.1.1, considere a função suave de uma variável tal que

$$\begin{cases} t^N/N!, & t \in [-1/2, 1/2] \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}. \tag{3.21}$$

com

$$\left|\left(\frac{d}{dt}\right)^m \psi(t)\right| \leq b_{n,p},\ \forall\, m \leq N_p + 1, \tag{3.22}$$

onde $b_{n,p}$ é uma constante positiva que depende apenas de $n$ e $p$. Defina $\psi_j(t) = 2^j \psi(2^j t)$. Assim, para todo $m \leq N_p + 1$, obtemos que

$$\left|\left(\frac{d}{dt}\right)^m \psi_j(t)\right| = 2^j \left|\left(\frac{d}{dt}\right)^m \psi(2^j t)\right| \leq b_{n,p}\, 2^{j(m+1)}. \tag{3.23}$$

Além disso, note que

$$\operatorname{supp} \psi_j \subseteq [-2^{-j}, 2^{-j}].$$

Agora, dado $\beta = (\gamma, m) \in \mathbb{Z}_+^n$ com $|\beta| \leq N_p + 1$, note que

$$\begin{aligned} |\partial^\beta[\phi_\alpha^j(x')\psi_j(x_n)]| &= |\partial_{x'}^\gamma\, \phi_\alpha^j(x')||d_{x_n}^m\, \psi_j(x_n)| \\ &\leq 2^{j(n-1+|\gamma|)}\, b_{n,p}\, 2^{j(m+1)} \\ &= b_{n,p}\, 2^{j(n+|\beta|)}. \end{aligned}$$

Seja $c > 0$ de modo que $c\, b_{n,p}\, 2^{j(n+|\beta|)}$ seja menor ou igual que $(2^{-j}\sqrt{n})^{-(n+|\beta|)}$. Daí,

$$c = c_{n,p} \leq \frac{(\sqrt{n})^{-(n+|\beta|)}}{b_{n,p}}.$$

Dessa modo, defina

$$\Phi_\alpha^j(x) = c_{n,p}\, \phi_\alpha^j(x')\, \psi_j(x_n),$$

e pela escolha de $c_{n,p}$ temos que

$$|\partial^\beta \Phi_\alpha^j(x)| \leq (2^{-j}\sqrt{n})^{-(n+|\beta|)},\ \forall\, |\beta| \leq N_p + 1. \tag{3.24}$$

Observe que

$$\operatorname{supp} \Phi_\alpha^j = \operatorname{supp} \phi_\alpha^j \times \operatorname{supp} \psi_j \subset 2Q_\alpha^j \times [-2^{-j}, 2^{-j}]. \tag{3.25}$$

Note, além disso, que $2Q_\alpha^j \times [-2^{-j}, 2^{-j}]$ é um cubo cuja aresta tem comprimento $2^{-j+1}$ e, portanto, seu diâmetro é $2^{-j}\sqrt{n}$. Se $C_\alpha^j$ é o centro deste cubo, então

$$2Q_\alpha^j \times [-2^{-j}, 2^{-j}] \subset B(C_\alpha^j, 2^{-j}\sqrt{n}).$$

Portanto, a função $\Phi_\alpha^j$ cumpre as seguintes propriedades:

(i) $\Phi_\alpha^j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;

(ii) $|\partial^\beta \Phi_\alpha^j| \leq r^{-(n+|\beta|)}$, $\forall\ |\beta| \leq N_p + 1$, $r = (2^{-j}\sqrt{n})$ ;

(iii) $\operatorname{supp} \Phi_\alpha^j \subset B(C_\alpha^j, r)$,

ou seja, $\Phi_\alpha^j$ satisfaz as condições de uma função-teste normalizada para $x \in 2Q_\alpha^j \times [-2^{-j}, 2^{-j}]$. Agora, note que

$$f(\Phi_\alpha^j) = c_{n,p}\ 2^{j(N+1)} f_N(\phi_\alpha^j). \tag{3.26}$$

De fato,

$$f(\Phi_\alpha^j) = c_{n,p} f(\phi_\alpha^j(x')\ \psi_j(x_n)) = c_{n,p} \sum_{i=0}^{N-1} f_i((\Phi_\alpha^j)_i) + c_{n,p} f_N((\Phi_\alpha^j)_N),$$

onde $(\Phi_\alpha^j)_i = \partial_{x_n}^i \Phi_\alpha^j(x', 0) = \phi_\alpha^j(x')\ d_{x_n}^i \psi_j(0)$, para $i = 0, \ldots, N$. Como $\psi(t) = t^N/N!$ em uma vizinhança pequena de $x_n = 0$, temos que

$$d_{x_n}^i \psi_j(x_n)|_{x_n=0} = 2^{j(N+1)} \frac{t^{(N-i)}}{(N-i)!}|_{x_n=0} = 0, \text{ se } i < N$$

e

$$d_{x_n}^N \psi_j(x_n)|_{x_n=0} = 2^{j(N+1)}.$$

Daí,

$$f(\Phi_\alpha^j) = c_{n,p}\ 2^{j(N+1)} f_N(\phi_\alpha^j),$$

mostrando (3.26).

O passo seguinte é mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} m(f)^p(x', x_n) dx' \geq c\ {x_n}^{n-1-(n+N)p}, \tag{3.27}$$

para todo $x_n > 0$ suficientemente pequeno e algum $c > 0$. De fato, se $x \in 2Q_\alpha^j \times [-2^{-j}, 2^{-j}]$, então

$$m(f)(x) \geq |f(\Phi_\alpha^j)| \geq c_{n,p} 2^{j(N+1)} |f_N(\phi_\alpha^j)| \chi_{2Q_\alpha^j \times [-2^{-j}, 2^{-j}]}(x)$$

e, portanto,

$$m(f)^p(x) \geq \left(c_{n,p}2^{j(N+1)}|f_N(\phi_\alpha^j)|\right)^p \chi_{2Q_\alpha^j \times [-2^{-j},2^{-j}]}(x). \tag{3.28}$$

Note que para todo $j = 0, 1, \ldots$ temos que

$$\sum_{\alpha \in \Lambda_j} f_N(\phi_\alpha^j) = A_{n,p} 2^{j(n-1)} \epsilon, \tag{3.29}$$

pois

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha \in \Lambda_j} f_N(\phi_\alpha^j) &= \sum_{\alpha \in \Lambda_j} f_N(A_{n,p}\, 2^{j(n-1)} \phi\, \eta_\alpha^j) \\
&= A_{n,p}\, 2^{j(n-1)} f_N\left(\phi \sum_{\alpha \in \Lambda_j} \eta_\alpha^j\right) \\
&= A_{n,p}\, 2^{j(n-1)} f_N(\phi) \\
&= A_{n,p}\, 2^{j(n-1)} \epsilon.
\end{aligned}$$

Para $x_n > 0$ suficientemente pequeno, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in [2^{-(j+1)}, 2^{-j}] \doteq I_j$. Assim, por (3.28), segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n-1}} m(f)^p(x', x_n) dx' &\geq \int_{\bigcup_{\alpha \in \Lambda_j} 2Q_\alpha^j} m(f)^p(x', x_n) dx' \\
&\geq \int_{\bigcup_{\alpha \in \Lambda_j} 2Q_\alpha^j} (c_{n,p} 2^{j(N+1)} |f_N(\phi_\alpha^j)|)^p \chi_{2Q_\alpha^j \times [-2^{-j},2^{-j}]}(x', x_n) dx' \\
&\geq \sum_{\alpha \in \Lambda_j} \int_{2Q_\alpha^j} (c_{n,p} 2^{j(N+1)} |f_N(\phi_\alpha^j)|)^p \chi_{2Q_\alpha^j \times [-2^{-j},2^{-j}]}(x', x_n) dx' \\
&= c_{n,p}\, 2^{pj(N+1)} \sum_{\alpha \in \Lambda_j} |f_N(\phi_\alpha^j)|^p \int_{2Q_\alpha^j} \chi_{2Q_\alpha^j \times [-2^{-j},2^{-j}]}(x', x_n) dx' \\
&= c_{n,p}\, 2^{pj(N+1)} \sum_{\alpha \in \Lambda_j} |f_N(\phi_\alpha^j)|^p \int_{2Q_\alpha^j} \chi_{2Q_\alpha^j}(x')\, \chi_{[-2^{-j},2^{-j}]}(x_n) dx' \\
&= c_{n,p}\, 2^{pj(N+1)} \sum_{\alpha \in \Lambda_j} |f_N(\phi_\alpha^j)|^p\, |2Q_\alpha^j|\, \chi_{[-2^{-j},2^{-j}]}(x_n) \\
&\geq c_{n,p}\, 2^{pj(N+1)} \sum_{\alpha \in \Lambda_j} |f_N(\phi_\alpha^j)|^p\, |Q_\alpha^j|\, \chi_{I_j}(x_n) \\
&= c_{n,p}\, 2^{pj(N+1)} 2^{-j(n-1)} \sum_{\alpha \in \Lambda_j} |f_N(\phi_\alpha^j)|^p\, \chi_{I_j}(x_n).
\end{aligned}$$

Desde que $0 < p \leq 1$, então

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} m(f)^p(x', x_n) dx' \geq c_{n,p}\, 2^{pj(N+1)} 2^{-j(n-1)} \left(\sum_{\alpha \in \Lambda_j} |f_N(\phi_\alpha^j)|\right)^p \chi_{I_j}(x_n)$$

que, por (3.29), obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} m(f)^p(x',x_n)dx' &\geq c_{n,p}\ A_{n,p}\ 2^{pj(N+1)}\ 2^{-j(n-1)}2^{jp(n-1)}\ \epsilon^p\ \chi_{I_j}(x_n)\\ &= c_{n,p}\ A_{n,p}\ \epsilon^p\ 2^{-j(n-1-p(n+N))}\ \chi_{I_j}(x_n).\end{aligned}$$

Agora, seja $I \doteq n-1-p(n+N)$. Então, $I \geq 0$ ou $I < 0$.

Se $I \geq 0$, então ${x_n}^I \leq 2^{-jI}$, uma vez que $x_n \leq 2^{-j}$. Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} m(f)^p(x',x_n)dx' \geq c_{n,p}\ A_{n,p}\ \epsilon^p\ {x_n}^{n-1-p(n+N)} = C_{n,p,\epsilon}\ {x_n}^{n-1-p(n+N)}.$$

Se $I < 0$, então $I = -J$, para algum $J > 0$. Desde que $2^{-(j+1)} \leq x_n$, temos que $2^{-(j+1)J} \leq {x_n}^J$. Portanto,

$$2^{-jI}2^{-I} = 2^{-(j+1)^I} \geq {x_n}^I \Longrightarrow 2^{-jI} \geq 2^I {x_n}^I.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} m(f)^p(x',x_n)dx' &\geq c_{n,p}\ A_{n,p}\ \epsilon^p\ 2^{n-1-p(n+N)}\ {x_n}^{n-1-p(n+N)}\\ &= C_{n,p,\epsilon,N}\ {x_n}^{n-1-p(n+N)},\end{aligned}$$

o que completa a prova do lema.

□

**Teorema 3.2.1.** *Seja $f$ uma distribuição em $\mathbb{R}^n$ com suporte compacto contido em $\Pi$ tal que $N$ é a ordem de $f$ na direção normal. Suponha $0 < p \leq 1$. Se $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$, então*

$$N < n\left(\frac{1}{p}-1\right).$$

*Demonstração.* Vamos provar este resultado via redução ao absurdo. Com efeito, suponha que $N \geq n\left(\frac{1}{p}-1\right)$. Daí, tem-se que $n-1-(n+N)p \leq -1$. Ainda, para $0 < \epsilon \leq x_n < 1$, temos que

$${x_n}^{n-1-(n+N)p} \geq {x_n}^{-1}.$$

Pelo Lema 3.2.1, obtemos

$$\int_\epsilon^1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} m(f)^p(x',x_n)dx'dx_n \geq c\int_\epsilon^1 {x_n}^{n-1-(n+N)p}dx_n \geq c\int_\epsilon^1 {x_n}^{-1}dx_n \longrightarrow \infty,$$

quando $\epsilon \longrightarrow 0$, mostrando que $m(f)^p$ não é localmente integrável próximo a $x_n = 0$, contradizendo o fato de $f$ estar em $h^p(\mathbb{R}^n)$.

□

É claro que o teorema acima é válido para distribuições cuja ordem coincide com a ordem na direção normal. Entretanto, será consequência da proposição que segue que o Teorema 3.2.1 não se verifica com $N$ trocado por $K$, a ordem total da distribuição.

Dizer que o mesmo não é válido quando trocado a ordem de $f$ pela ordem na direção normal é equivalente a dizer que existe uma distribuição $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$, suportada num hiperplano, tal que

$$K \geq n\left(\frac{1}{p} - 1\right),$$

sendo $K$ a ordem de $f$.

Na proposição que seguirá, exibiremos $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$ sob as mesmas condições do teorema, salvo que $K$, a ordem de $f$, será de tal modo que

$$K \geq N_p.$$

Assim, se considerarmos o caso em que $n(1/p - n) \in \mathbb{Z}_+$, então $N_p = n(1/p - n)$, exibindo, portanto, o exemplo desejado.

Previamente a esta, apresentemos um resultado essencial em sua demonstração, que diz respeito a construção de funções com momento nulo.

**Proposição 3.2.2.** *Dado um cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ e um inteiro positivo $M$, existe $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, suportada em $Q$, tal que*

$$\int \Phi(x)\, x^\alpha dx = 0, \ \forall\, |\alpha| \leq M.$$

*Demonstração.* Suponha que $Q = [-a, a]^n$ e seja $\psi \in C_c^\infty([-a, a])$ não-nula. Defina

$$\Phi_0(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{M+1} \psi(t),$$

a qual é função-teste e está suportada no cubo $[-a, a]$.

Assim, se $\Phi(x) = \Phi_0(x_1) \ldots \Phi_0(x_n)$, então além de $\Phi \in C_c^\infty(Q)$, vale que

$$\int \Phi(x)\, x^\alpha dx = 0, \ \forall\, |\alpha| \leq M.$$

Com efeito, note, inicialmente, que dado $0 \leq j \leq M$ tem-se

$$\int \Phi_0(t) t^j dt = \int \left(\frac{d}{dt}\right)^{M+1} \psi(t) t^j dt = (-1)^j\, j! \int \left(\frac{d}{dt}\right)^{M+1-j} \psi(t) dt = 0, \qquad (3.30)$$

sendo $M + 1 - j > 0$.

Daí, dado $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ com $|\alpha| \leq M$, temos que cada $\alpha_i \leq M$. Assim, pelo Teorema de Fubini, utilizando (3.30), o resultado desejado. □

O resultado acima permite a construção de uma família de funções com momento nulo com as seguintes propriedades:

**Observação 3.2.2.** Em $\mathbb{R}^{n-1}$, seja $Q_j$ o cubo de centro $c_j$ e comprimento de aresta $\delta_j$, para cada $j = 1, 2, \ldots$. Vamos construir $a_j$ função-teste suportada em $Q_j$ satisfazendo as seguintes propriedades:

$$\|a_j\|_{L^\infty} \leq c\, {\delta_j}^{1-n/p},$$
$$\int a_j(x')(x')^\alpha dx' = 0,$$

para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ com $|\alpha| \leq N_p$ e algum $c > 0$ que independe de $j$. Além disso,

$$\int a_j(x')(x_1 - (c_j)_1)^{N_p+1} dx' = C_n\, {\delta_j}^{n-n/p+N_p+1},$$

para algum $C_n > 0$. Aqui, $(c_j)_1$ denota a primeira coordenada de $c_j$.

Com efeito, seja $Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$ o cubo unitário centrado na origem. Pela Proposição 3.2.2, existe $b$ função-teste suportada em $Q$ tal que

$$\int b(x')(x')^\alpha dx' = 0,\ \forall\ |\alpha| \leq N_p.$$

Para cada $j = 1, 2, \ldots$, defina

$$b_j(x') = b\left(\frac{x' - c_j}{\delta_j}\right).$$

Então, $b_j$ é suave e está suportada em $Q_j$. Além disso, se $|\alpha| \leq N_p$, então

$$\begin{aligned}
\int b_j(x')(x')^\alpha dx' &= \int b\left(\frac{x' - c_j}{\delta_j}\right)(x')^\alpha dx' \\
&= {\delta_j}^{n-1} \int b(y')(\delta_j\, y' + c_j)^\alpha dy' \\
&= {\delta_j}^{n-1} \sum_{\beta \leq \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} (\delta_j, \ldots, \delta_j)^{\alpha-\beta}\, (c_j)^\beta \int b(y')(y')^{\alpha-\beta} dy' \\
&= 0. \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

Assim, defina

$$a_j(x') = {\delta_j}^{1-n/p}\, b_j(x').$$

Vamos supor que $\delta_j \leq 1$. Portanto,

$$\|a_j\|_{L^\infty} \leq {\delta_j}^{1-n/p}\, \|b\|_{L^\infty} \leq c\, {\delta_j}^{1-n/p}.$$

Por (3.31), temos que

$$\int a_j(x')(x')^\alpha dx' = 0,\ \forall\ |\alpha| \leq N_p. \qquad (3.32)$$

Finalmente, usando o Binômio de Newton e (3.32), obtemos

$$\begin{aligned}
\int a_j(x')(x_1-(c_j)_1)^{N_p+1}dx' &= \sum_{i=0}^{N_p+1}\binom{N_p+1}{i}(c_j)_1{}^{N_p+1-i}\int a_j(x')(x_1)^i\,dx'\\
&= \int a_j(x')(x_1)^{N_p+1}\,dx'\\
&= \delta_j{}^{1-n/p}\int b_j(x')(x_1)^{N_p+1}\,dx'\\
&= \delta_j{}^{1-n/p+N_p+1+n-1}\int b(x')(x_1)^{N_p+1}\,dx'\\
&= C_n\,\delta_j{}^{n-n/p+N_p+1},
\end{aligned}$$

completando a construção desejada.

**Observação 3.2.3.** Para $j=0,1,\dots,$ considere $Q_j$ como na observação prévia. Vamos construir uma sequência de funções $\varphi_j\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\varphi_j(x',0)$ suportada em $2Q_j$, satisfazendo

$$|\partial^\alpha\,\varphi_j| \;\le\; C_{n,p},\ \forall\,|\alpha|\le N_p-1,\ \text{e} \tag{3.33}$$
$$\varphi_j(x',0) \;=\; \frac{1}{(N_p+1)!}(x_1-(c_j)_1)^{N_p+1}\delta_j{}^{-2}\ \text{sobre}\ Q_j. \tag{3.34}$$

De fato, seja $\phi_j\in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ com $\phi_j\equiv 1$ em uma vizinhaça de $Q_j$ e suportada em $2Q_j$. Pelo Corolário 1.1.3, temos que

$$|\partial^\alpha\phi_j|\le C\,\delta_j{}^{-|\alpha|},\ \forall\,|\alpha|\le N_p-1. \tag{3.35}$$

Dado $x=(x',x_n)\in\mathbb{R}^n$, defina $\varphi_j(x)$ por

$$\varphi_j(x)=\phi_j(x')\,\frac{1}{(N_p+1)!}(x_1-(c_j)_1)^{N_p+1}\delta_j{}^{-2}, \tag{3.36}$$

a qual pertence a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Claramente, temos que a função $x'\mapsto\varphi_j(x',0)$ é suportada em $2Q_j$. Além disso, desde que $\phi_j\equiv 1$ sobre $Q_j$, obtemos (3.34).

Resta mostrar que $\varphi_j$ satisfaz (3.33). Com efeito, dado $\gamma=(\alpha,\ell)\in\mathbb{Z}_+^{n-1}\times\mathbb{Z}_+$ com $|\gamma|\le N_p-1$, temos pela Regra de Leibniz que

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha\varphi_j(x) &= \frac{\delta_j{}^{-2}}{(N_p+1)!}\sum_{\beta\le\alpha}C_{\alpha,\beta}\,\partial_{x'}^{\alpha-\beta}\,\phi_j(x')\partial_{x'}^{\beta}[(x_1-(c_j)_1)^{N_p+1}]\\
&= \frac{\delta_j{}^{-2}}{(N_p+1)!}\sum_{\beta_1e_1\le\alpha}C_{\alpha,\beta}\,\partial_{x'}^{\alpha-\beta_1e_1}\phi_j(x')\,d_{x_1}^{\beta_1}[(x_1-(c_j)_1)^{N_p+1}]\\
&= \frac{C_p\,\delta_j{}^{-2}}{(N_p+1)!}\sum_{\beta_1e_1\le\alpha}C_{\alpha,\beta}\,\partial_{x'}^{\alpha-\beta_1e_1}\phi_j(x')(x_1-(c_j)_1)^{N_p+1-\beta_1},
\end{aligned}$$

onde $C_p = (N_p + 1)\, N_p \ldots (N_p + 1 - (\beta_1 - 1))$.

Aplicando o valor absoluto acima e usando (3.35), temos que

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha \varphi_j| &\leq C{\delta_j}^{-2}{\delta_j}^{-|\alpha-\beta_1 e_1|}|(x_1 - (c_j)_1)|^{N_p+1-\beta_1} \\
&\leq C_{p,n}\ {\delta_j}^{|\beta_1 e_1 - \alpha| + N_p - 1 - \beta_1} \\
&\leq C_{p,n},
\end{aligned}$$

uma vez que $|\beta_1 e_1 - \alpha| + N_p - 1 - \beta_1 \geq 0$, já que $|\alpha| \leq N_p - 1$. Desse modo, $\varphi_j$ satisfaz (3.33) e, portanto, as três condições desejadas.

**Proposição 3.2.3.** *Para $0 < p < 1$, existe uma distribuição $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$ com suporte compacto contido em um hiperplano, tal que a ordem $K$ de $f$ satisfaz*

$$K \geq N_p,$$

*onde $N_p$ é a parte inteira de $n(1/p - 1)$.*

*Demonstração.* Tome o hiperplano $\Pi$ como no teorema anterior. Em $\mathbb{R}^{n-1}$, considere cubos $Q_j$ com centros $c_j$ e comprimento de lado $\delta_j$, tais que os cubos duplicados $2Q_j$ são dois-a-dois disjuntos e

$$\sum \delta_j < \infty. \tag{3.37}$$

Pela Observação 3.2.2, podemos considerar funções $a_j$ de $n-1$ variáveis suportadas em $Q_j$ e satisfazendo

$$\|a_j\|_{L^\infty} \leq {\delta_j}^{1-n/p}, \tag{3.38}$$

$$\int a_j(x')(x')^\alpha dx' = 0, \tag{3.39}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ com $|\alpha| \leq N_p$, e

$$\int a_j(x')(x - (c_j)_1)^{N_p+1} dx' = C_n\ {\delta_j}^{n-n/p+N_p+1}, \tag{3.40}$$

para algum $C_n > 0$.

Defina os funcionais lineares $\tau_j$ sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ por

$$\tau_j(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} a_j(x')\ \varphi(x', 0) dx', \tag{3.41}$$

para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Para cada $j = 1, 2, \ldots,\ \tau_j$ é funcional linear contínuo. De fato, pela expansão em Taylor de $\varphi(x', 0)$ em torno de $c_j$, temos que

$$\varphi(x', 0) = \sum_{|\alpha| \leq N_p} \partial_{x'}^\alpha\ \varphi(c_j, 0)\ \frac{(x' - c_j)^\alpha}{\alpha!} + R_p(x'),$$

onde

$$R_p(x') = (N_p+1)\int_0^1 (1-t)^{N_p} \sum_{|\alpha|=N_p+1} \partial_{x'}^{\alpha}\, \varphi(c_j + t(x'-c_j),0)\, \frac{(x'-c_j)^{\alpha}}{\alpha!}\, dt.$$

Multiplicando por $a_j$ na equação acima e integrando sobre $\mathbb{R}^{n-1}$, obtemos que

$$\begin{aligned}\tau_j(\varphi) &= \sum_{|\alpha|\le N_p} \frac{1}{\alpha!}\partial_{x'}^{\alpha}\, \varphi(c_j,0) \int a_j(x')(x'-c_j)^{\alpha} dx' \\ &\quad + (N_p+1)\int_0^1 (1-t)^{N_p} \sum_{|\alpha|=N_p+1} \frac{1}{\alpha!}\partial_{x'}^{\alpha}\, \varphi(c_j+t(x'-c_j),0) \int a_j(x')(x'-c_j)^{\alpha} dx' dt.\end{aligned}$$

Observe que se $|\alpha| \le N_p$, então

$$\begin{aligned}\int a_j(x')(x'-c_j)^{\alpha} dx' &= \int a_j(x') \sum_{\beta\le\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} (x')^{\alpha-\beta}(c_j)^{\beta} dx' \\ &= \sum_{\beta\le\alpha}^{N_p} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} (c_j)^{\beta} \int a_j(x')(x')^{\alpha-\beta} dx' \\ &= 0,\end{aligned}$$

por (3.39), uma vez que $|\alpha-\beta| \le N_p$. Daí, segue que

$$\begin{aligned}|\tau_j(\varphi)| &\le \frac{(N_p+1)}{(N_p+1)!}\int_0^1 (1-t)^{N_p} \sum_{|\alpha|=N_p+1} \|\partial_{x'}^{\alpha}\varphi\|_{L^\infty} \int_{Q_j} |a_j(x')||(x'-c_j)|^{N_p+1} dx' dt \\ &\le \frac{(N_p+1)}{(N_p+1)!}\int_0^1 (1-t)^{N_p} \sum_{|\alpha|=N_p+1} \|\partial_{x'}^{\alpha}\varphi\|_{L^\infty} \|a_j\|_{L^\infty} |Q_j| \left(\sqrt{n-1}\,\delta_j\right)^{N_p+1} dt \\ &\le c \sum_{|\alpha|=N_p+1} \|\partial_{x'}^{\alpha}\varphi\|_{L^\infty} {\delta_j}^{1-n/p}\, \delta^{n-1} \left(\sqrt{n-1}\,\delta_j\right)^{N_p+1} \\ &\le c \sum_{|\alpha|=N_p+1} \|\partial_{x'}^{\alpha}\varphi\|_{L^\infty}\, {\delta_j}^{1-n/p+n-1+N_p+1} \\ &= c\, {\delta_j}^{n-n/p+N_p+1} \sum_{|\alpha|=N_p+1} \|\partial_{x'}^{\alpha}\varphi\|_{L^\infty} \\ &\le c\, {\delta_j}^{n-n/p+N_p+1}\, \|\varphi\|_{c^{N_p+1}}.\end{aligned}$$

Agora, como $n(1/p-1) < N_p+1$, temos que $n - n/p + N_p + 1 > 0$. Ainda, por (3.37), $\delta_j \longrightarrow 0$ e, portanto, ${\delta_j}^{n-n/p+N_p+1} \longrightarrow 0$. Desse modo, ${\delta_j}^{n-n/p+N_p+1}$ é limitado. Logo,

$$|\tau_j(\varphi)| = c\, {\delta_j}^{n-n/p+N_p+1} \|\varphi\|_{c^{N_p+1}} \le c_{n,p}\, \|\varphi\|_{c^{N_p+1}}. \tag{3.42}$$

Portanto, cada $\tau_j \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Assim, defina $f_j = \sum_{i=1}^{j} \lambda_i \tau_i \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, onde a sequência $\{\lambda_j\}$ é escolhida de modo que

$$\sum {\lambda_j}^p < \infty \ \text{ e } \ \frac{\lambda_j}{\delta_j} \longrightarrow \infty, \tag{3.43}$$

quando $j \longrightarrow \infty$. Por exemplo, $\delta_j = 2^{-j}$ e $\lambda_j = j^{-(1+1/p)}$. Decorre daí que

$$\sum \lambda_j < \infty.$$

Note que para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\sum_{i=1}^{j} \lambda_i |\tau_i(\varphi)| \leq c_{n,p} \, \|\varphi\|_{C^{N_p+1}} \sum_{i=1}^{j} \lambda_i < \infty,$$

o que mostra que a sequência monótona crescente $\{f_j(\varphi)\}$ é limitada e, portanto, convergente. Defina, portanto,

$$f = \lim_{i \longrightarrow \infty} f_i \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

isto é,

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \tau_j.$$

Note que dada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ podemos escrever cada $\tau_j$ da seguinte maneira:

$$\tau_j(\varphi) = \langle a_j \otimes \delta, \varphi \rangle$$

e, então,

$$f = \sum_j \lambda_j \ (a_j \otimes \delta),$$

o que nos permite ver, de forma mais clara, que $f$ tem suporte compacto e, além disso, está contido no hiperplano $\Pi$.

Para ver que a ordem de $f$ é ao menos $N_p$, tome a sequência de funções $\varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, como na Observação 3.2.3, com $\varphi_j(x', 0)$ suportada em $2Q_j$, satisfazendo

$$|\partial^\alpha \varphi_j| \leq C, \ \forall \, |\alpha| \leq N_p - 1, \text{ e} \tag{3.44}$$

$$\varphi_j(x', 0) = \frac{1}{(N_p+1)!}(x_1 - (c_j)_1)^{N_p+1} {\delta_j}^{-2} \text{ sobre } Q_j. \tag{3.45}$$

Desde que $a_i$ é suportada no cubo $Q_i$ e $\varphi_j$ é suportada em $2Q_j$, os quais são disjuntos se $i \neq j$, segue que

$$\int_{Q_i} a_i(x') \varphi_j(x', 0) dx' = 0, \ \forall \, i \neq j.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
f(\varphi_j) &= \sum_i \lambda_i \int_{Q_i} a_i(x')\varphi_j(x',0)dx' \\
&= \sum_{i\neq j} \lambda_i \int_{Q_i} a_i(x')\varphi_j(x',0)dx' + \lambda_j \int_{Q_j} a_j(x')\varphi_j(x',0)dx' \\
&= \lambda_j \int_{Q_j} a_j(x')\varphi_j(x',0)dx'.
\end{aligned}$$

Portanto, usando (3.40) e (3.45), obtemos

$$\begin{aligned}
f(\varphi_j) &= \frac{1}{(N_p+1)!}\ \lambda_j\ \delta^{-2} \int_{Q_j} a_j(x')(x_1-(c_j)_1)^{N_p+1}dx' \\
&= \frac{1}{(N_p+1)!}\ \lambda_j\ \delta^{-2}C_n\ {\delta_j}^{n-n/p+N_p+1} \\
&= \frac{1}{(N_p+1)!}\ \lambda_j\ C_n\ {\delta_j}^{n-n/p+N_p-1} \\
&= c_{n,p}\ \lambda_j\ {\delta_j}^{n-n/p+N_p-1}.
\end{aligned}$$

Note que $n - n/p + N_p - 1 < 0$. Por (3.43), $\lambda_j\ {\delta_j}^{n-n/p+N_p-1} \longrightarrow \infty$, quando $j \longrightarrow \infty$. Daí,

$$f(\varphi_j) \longrightarrow \infty, \text{ quando } j \longrightarrow \infty. \tag{3.46}$$

Se $f$ tivesse ordem menor que $N_p$, então existiria uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
|f(\varphi_j)| &\leq C \sum_{|\beta|,|\alpha|\leq N_p-1} \sup|\partial^\alpha \varphi_j(x)| \\
&\leq C \sum_{|\beta|,|\alpha|\leq N_p-1} \|\partial^\alpha \varphi_j\|_{L^\infty} \\
&\leq C_{n,p} < \infty,
\end{aligned}$$

o que contradiz (3.46). Logo, a ordem de $f$ é maior ou igual a $N_p$.

Finalmente, para ver que $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$, considere a grande função maximal local $m(f)$. É suficiente mostrar que

$$\|m(\tau_j)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C,$$

uniformemente em $j$, pois dado $x \in \mathbb{R}^n$ considere $\varphi_r^x$ função-teste normalizada suportada numa bola de raio $0 < r \leq 1$ contendo $x$. Assim,

$$|f(\varphi_r^x)| \leq \sum_j \lambda_j |\tau_j(\varphi_r^x)| \leq \sum_j \lambda_j\ m(\tau_j)(x).$$

Portanto,

$$m(f)^p(x) \leq \left(\sum_j \lambda_j \; m(\tau_j)(x)\right)^p \leq \sum_j \lambda_j^p \; m(\tau_j)^p(x), \; \forall \; x \in \mathbb{R}^n.$$

Integrando ambos os lados na desigualdade acima, temos

$$\begin{aligned}
\int m(f)^p(x)dx &\leq \int \sum_j \lambda_j^p \; m(\tau_j)^p(x)dx \\
&\leq \sum_j \int \lambda_j^p \; m(\tau_j)^p(x)dx \\
&\leq \sum_j \lambda_j^p \; \|m(\tau_j)\|_{L^p}^p \\
&\leq C \sum_j \lambda_j^p < \infty.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que a função maximal $m(\tau_j)$ é limitada uniformemente na norma $L^p$. Com efeito, tome $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n$ e considere $\varphi_t^x$ função-teste normalizada suportada numa bola de raio $0 < t \leq 1$ contendo $x$. Então,

$$\varphi_t^x \neq 0$$

somente se $t > |x_n|/2$, pois dado $y' \in \mathbb{R}^{n-1}$, suponha $t \leq |x_n|/2$. Então

$$|(y', 0) - (x', x_n)| = |(y' - x', x_n)| \geq |x_n| \geq 2t \Rightarrow (y', 0) \notin B(x, 2t) \Rightarrow (y', 0) \notin \operatorname{supp} \varphi_t^x$$

e, portanto, $\varphi_t^x(y', 0) = 0$. Além disso, a função $\phi_t^{x'}(y') = t \;\varphi_t^x(y', 0)$ é função-teste normalizada em $\mathbb{R}^{n-1}$. De fato, seja $\alpha \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ com $|\alpha| \leq N_p + 1$, então

$$|\partial_{y'}^\alpha \phi_t^{x'}(y')| = t \; |\partial_{y'}^\alpha \; \varphi_t^x(y', 0)| \leq t \; \|\partial_{y'}^\alpha \varphi_t^x\|_{L^\infty} \leq t \; t^{-(n+|\alpha|)} = t^{-(n-1+|\alpha|)}$$

e o suporte da função $\phi_t^{x'}$ está contido na projeção, sobre $\mathbb{R}^{n-1}$, do suporte de $\varphi_t^x$ e, portanto, está contido em uma bola que contém $x'$. Daí,

$$\begin{aligned}
|\tau_j(\varphi_t^x)| \;&\leq\; \frac{1}{t} \int |a_j(y')\phi_t^{x'}(y')|dy' \leq \frac{1}{t} \; |a_j(\phi_t^{x'})| \\
&\leq\; \frac{1}{t} \; m_{\mathbb{R}^{n-1}}(a_j)(x') \leq \frac{2}{x_n} \; m_{\mathbb{R}^{n-1}}(a_j)(x')
\end{aligned}$$

e, assim,

$$m(\tau_j)(x) \leq \frac{2}{x_n} \; m_{\mathbb{R}^{n-1}}(a_j)(x'),$$

onde $m_{\mathbb{R}^{n-1}}$ denota a grande função maximal local sobre $\mathbb{R}^{n-1}$.

Integrando ambos os lados sobre $2Q_j \times [-\delta_j, \delta_j]$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{2Q_j\times[-\delta_j,\delta_j]} m(\tau_j)^p(x)dx &\leq \int_{2Q_j\times[-\delta_j,\delta_j]} \left(\frac{2}{x_n}\right)^p m_{\mathbb{R}^{n-1}}(a_j)^p(x')dx \\ &= 2^p \int_{-\delta_j}^{\delta_j} x_n{}^{-p} \int_{2Q_j} m_{\mathbb{R}^{n-1}}(a_j)^p(x')dx'dx_n.\end{aligned}$$

Uma vez que $0 < p < 1$, temos que $p' = 2/p > 1$. Desse modo, aplicando a Desigualdade de Hölder para $p'$ e $q'$ conjugados, onde $1/q' = 1 - p/2$, temos que

$$\begin{aligned}\int_{2Q_j} m_{\mathbb{R}^{n-1}}(a_j)^p(x')dx' &\leq \left(\int_{2Q_j} (m_{\mathbb{R}^{n-1}}(a_j)^p)^{2/p}(x')dx'\right)^{p/2} \left(\int_{2Q_j} 1dx'\right)^{1-p/2} \\ &\leq \|m_{\mathbb{R}^{n-1}}(a_j)\|_{L^2}^p \; |2Q_j|^{1-p/2} \\ &= 2^{n-1} \; \|m_{\mathbb{R}^{n-1}}(a_j)\|_{L^2}^p \; |Q_j|^{1-p/2}.\end{aligned}$$

Desde que $m_{\mathbb{R}^{n-1}}$ é limitado sobre $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$, existe constante $C > 0$ tal que

$$\|m_{\mathbb{R}^{n-1}}(a_j)\|_{L^2}^p \leq C\|(a_j)\|_{L^2}^p, \; \forall \; j \in \mathbb{N}.$$

Vamos mostrar que

$$\int_{2Q_j\times[-\delta_j,\delta_j]} m(\tau_j)^p(x)dx \leq c_{n,p}. \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}\int_{2Q_j\times[-\delta_j,\delta_j]} m(\tau_j)^p(x)dx &\leq 2^p \; 2^{n-1} \; \|m_{\mathbb{R}^{n-1}}(a_j)\|_{L^2}^p \; |Q_j|^{1-p/2} \int_{-\delta_j}^{\delta_j} x_n{}^{-p}dx_n \\ &\leq c_{n,p} \; |Q_j|^{1-p/2} \; \delta_j{}^{1-p} \; \|a_j\|_{L^2}^p \\ &= c_{n,p} \; |Q_j|^{1-p/2} \; \delta_j{}^{1-p} \left(\int_{Q_j} |a_j(y')|^2 dy'\right)^{p/2} \\ &\leq c_{n,p} \; |Q_j|^{1-p/2} \; \delta_j{}^{1-p} \; |Q_j|^{p/2} \; \|a_j\|_{L^\infty}^p \\ &\leq c_{n,p} \; |Q_j|^{1-p/2} \; \delta_j{}^{1-p} \; |Q_j|^{p/2} \; \delta_j{}^{p-n} \\ &= c_{n,p} \; |Q_j| \; \delta_j{}^{1-n} \\ &= c_{n,p} \; \delta_j{}^{n-1} \; \delta_j{}^{1-n} \\ &= c_{n,p}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{2Q_j\times[-\delta_j,\delta_j]} m(\tau_j)^p(x)dx \leq c_{n,p}. \tag{3.48}$$

Vamos, agora, mostrar que o mesmo ocorre, mas fora de $2Q_j \times [-\delta_j, \delta_j]$. Com efeito, dados $x = (x', x_n) \notin 2Q_j \times [-\delta_j, \delta_j]$ e $\varphi_t^x$ função-teste normalizada como acima, por (3.42), temos que

$$\begin{aligned}|\tau_j(\varphi_t^x)| &\leq c_{n,p}\ {\delta_j}^{n-n/p+N_p+1}\|\varphi\|_{C^{N_p+1}}\\ &\leq c_{n,p}\ t^{-n-(N_p+1)}{\delta_j}^{n-n/p+N_p+1}.\end{aligned}$$

Afirmemos que existe constante $c > 0$ tal que

$$c\,|x-(c_j,0)|^{-n-(N_p+1)} \geq t^{-n-(N_p+1)}. \tag{3.49}$$

De fato, denote por $|y|_M$ a norma do máximo e, portanto, $B_M(y,r)$ significará a bola de centro $y$ e raio $r$ segundo esta norma. Não é difícil ver que

$$(1/\sqrt{n})\ |y| \leq |y|_M.$$

Além disso, vale também que

$$B(x,t) \subset B_M(x,t).$$

Seja $x_0$ o centro da bola na qual $\varphi_t^x$ está suportada, a qual contém $x$. Daí,

$$|x-x_0|_M < t. \tag{3.50}$$

Seja $(y',0)$ de modo que $(y',0) \in B(x_0,t)$ e $y' \in Q_j$, pois do contrário $\tau_j(\varphi_t^x) = 0$. Assim,

$$|(y',0)-x_0|_M < t \tag{3.51}$$

$$|y'-c_j|_M \leq \delta_j. \tag{3.52}$$

Usando a desigualdade triangular e as desigualdades (3.50), (3.52) e (3.52), obtemos

$$\begin{aligned}|x-(c_j,0)|_M &\leq |x-x_0|_M + |(y',0)-x_0|_M + |(y',0)-(c_j,0)|_M\\ &\leq 2t + |y'-c_j|_M\\ &\leq 2t+\delta_j. \end{aligned}\tag{3.53}$$

Se $x \notin 2Q_j \times [-\delta_j,\delta_j]$, então $x' \notin 2Q_j$ ou $x_n \notin [-\delta_j,\delta_j]$. Suponha que $x_n \notin [-\delta_j,\delta_j]$, isto é, $|x_n| > \delta_j$. Vamos supor que $2t \geq |x_n|$, uma vez que $\varphi_t^x \neq 0$ somente se $t \geq |x_n|/2$. Desse modo,

$$2t > \delta_j. \tag{3.54}$$

Assim, por (3.53) e (3.54), obtemos

$$|x-(c_j,0)|_M < 4t. \tag{3.55}$$

Agora, supondo $x' \notin 2Q_j$, temos que

$$2\,\delta_j < |x' - c_j|_M \leq |x - (c_j, 0)|_M \Rightarrow \delta_j < \frac{|x - (c_j, 0)|_M}{2}$$

e, novamente por (3.53), segue que

$$|x - (c_j, 0)|_M < 4t. \tag{3.56}$$

Como mostra (3.55) e (3.56), nos dois casos obtemos $|x - (c_j, 0)|_M < 4t$. Então,

$$(1/\sqrt{n})|x - (c_j, 0)| \leq |x - (c_j, 0)|_M < 4t \Rightarrow c_{n,p}\,|x - (c_j, 0)|^{-n-(N_p+1)} > t^{-n-(N_p+1)}.$$

Decorre daí que

$$|\tau_j(\varphi_t^x)| \leq c_{n,p}\,\delta_j{}^{n-n/p+N_p+1}\,|x - (c_j, 0)|^{-n-(N_p+1)}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q_j \times [-\delta_j, \delta_j]} m(\tau_j)^p(x)dx &\leq c_{n,p}\,\delta_j{}^{pn-n+p(N_p+1)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q_j \times [-\delta_j, \delta_j]} |x - (c_j, 0)|^{-pn-p(N_p+1)}dx \\ &\leq c_{n,p}\,\delta_j{}^{pn-n+p(N_p+1)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B((c_j,0),t)} |x - (c_j, 0)|^{-pn-p(N_p+1)}dx,\end{aligned}$$

já que $B((c_j, 0), t) \subset 2Q_j \times [-\delta_j, \delta_j]$. Agora,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n \setminus B((c_j,0),t)} |x - (c_j, 0)|^{-pn-p(N_p+1)}dx &= \int_{\delta_j}^{\infty} \int_{S^{n-1}} \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{pn+p(N_p+1)}} d\sigma d\rho \\ &= |S^{n-1}| \lim_{r \longrightarrow \infty} \int_{\delta_j}^{r} \rho^{n-1-pn-p(N_p+1)} d\rho \\ &= |S^{n-1}|\, \lim_{r \longrightarrow \infty} \frac{r^{n-pn-p(N_p+1)}}{n - pn - p(N_p+1)} \\ &- |S^{n-1}|\, \frac{\delta_j{}^{n-pn-p(N_p+1)}}{n - pn - p(N_p+1)} \\ &= |S^{n-1}|\, \frac{\delta_j{}^{n-pn-p(N_p+1)}}{-n + pn + p(N_p+1)} \\ &= c_{n,p}\,\delta_j{}^{n-pn-p(N_p+1)}.\end{aligned}$$

Note que aqui foi usado que $n - pn - p(N_p + 1) < 0$, uma vez que $n(1/p - 1) < N_p + 1$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q_j \times [-\delta_j, \delta_j]} m(\tau_j)^p(x)dx \leq c_{n,p}. \tag{3.57}$$

De (3.48) e (3.57), conclui-se que

$$\int_{\mathbb{R}^n} m(\tau_j)^p(x)dx \le c_{n,p},$$

isto é, $\|m(\tau_j)\|_{L^p}$ é limitada uniformemente em $j$, mostrando, por fim, que $f$ está em $h^p(\mathbb{R}^n)$.

□

Vamos agora, por meio de dois exemplos, pôr em contraste os teoremas 3.1.2, 3.2.1 e 3.1.3.

**Exemplo 3.2.1.** Seja $f = \delta \otimes \delta^{(m)}$. Pelo Exemplo 1.2.5, temos que a ordem de $f$ na direção normal é $m$. Desse modo, do Teorema 3.2.1, obtemos que se $f \in h^p(\mathbb{R}^2)$, então

$$m < 2\left(\frac{1}{p} - 1\right)$$

que, por sua vez, implica em

$$p < \frac{2}{2+m}.$$

Agora, pelo Teorema 3.1.3, segue que se

$$m < 2\left(\frac{1}{p} - 1\right) \ \left(\Longleftrightarrow p < \frac{2}{2+m}\right),$$

então $f \in h^p(\mathbb{R}^2)$.

A aplicação de ambos os teoremas está de acordo com o que vimos no Exemplo 2.3.3.

A comparação realizada entre os teoremas 3.1.3 e 3.2.1 no Exemplo 3.2.1 pode ser evidenciada de modo mais geral no seguinte teorema:

**Teorema 3.2.2.** *Sejam $f$ distribuição suportada no conjunto $S = \{0\}$ e $N$ a ordem de $f$. Suponha que tanto ordem total de $f$ quanto ordem na direção normal coincidam. Então, $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se,*

$$N < n\left(\frac{1}{p} - 1\right).$$

*Demonstração.* Suponha que $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$. Desde que $f$ está suportada em $S = \{0\}$, está, portanto, suportada em $\Pi = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x_n = 0\}$. Ainda, como a ordem de $f$ coincide com ordem na direção normal, temos, pelo Teorema 3.2.1, que:

$$N < n\left(\frac{1}{p} - 1\right).$$

A recíproca segue imediatamente do Teorema 3.1.3. □

Por outro lado, o exemplo que segue mostra que o Teorema 3.2.1 não abrange o maior intervalo no qual $p$ deve estar para que $f$ esteja em $h^p$.

**Exemplo 3.2.2.** Considere $f$ a distribuição dada por

$$f = u \otimes \delta^{(m)},$$

onde $u$ é a distribuição do Exemplo (1.1.6), dada por

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}\, \delta_{r_j},$$

com $\{r_j \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Recorde que, neste caso, como visto no Exemplo 1.2.5, $N = m$.

Assim, pelo Teorema 3.2.1, temos que se $f \in h^p(\mathbb{R}^2)$, então

$$m < 2\left(\frac{1}{p} - 1\right) \Longrightarrow p < \frac{2}{2+m}.$$

Por outro lado, do Teorema 3.1.2 segue que se

$$m < \frac{1}{p} - 2$$

que é equivalente a

$$p < \frac{1}{2+m},$$

então $f \in h^p(\mathbb{R}^2)$.

Entretanto, vimos no Exemplo 2.3.3 que $f \in h^p(\mathbb{R}^2)$ se, e somente se,

$$p < \frac{2}{2+m}.$$

A questão de que Teorema 3.1.2 não abrange o maior intervalo no qual $p$ deve estar para que $f$ esteja em $h^p$, está no fato de que o mesmo não nos fornece informação sobre o que ocorre quando

$$\frac{1}{2+m} \leq \; p \; < \frac{2}{2+m},$$

intervalo no qual sabemos que, para $p$ neste, $f \in h^p$.

Além de $H^p(\mathbb{R}^n)$ e $h^p(\mathbb{R}^n)$, também compõem a lista de espaços de Hardy os espaços $h^p_r(\Omega)$ e $h^p_z(\Omega)$, onde $\Omega$ é um domínio de $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave. Estes espaços são definidos da seguinte forma:

**Definição 3.2.3.** *Considere $\Omega$ um domínio (aberto e conexo) limitado em $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave. Definimos os espaços $h^p_r(\Omega)$ e $h^p_z(\Omega)$ por*

$$\begin{aligned} h^p_r(\Omega) &= \{f \in \mathcal{D}'(\Omega);\ \exists\, F \in h^p(\mathbb{R}^n),\ F|_{\Omega} = f\} \text{ e} \\ h^p_z(\Omega) &= \{f \in \mathcal{D}'(\Omega);\ \exists\, F \in h^p(\mathbb{R}^n),\ F|_{\Omega} = f \text{ e } F|_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}} = 0\}. \end{aligned}$$

Claramente, $h_z^p(\Omega) \subset h_r^p(\Omega)$. Foi mostrado em [1] que na verdade $h_z^p(\Omega) = h_r^p(\Omega)$, para valores de $p$ com

$$\frac{n}{n+(j+1)} < p < \frac{n}{n+j},\ j = 0, 1, \ldots.$$

Em [3], foi verificado que isso não é verdade quando $n(1/p - 1)$ é um inteiro, isto é,

$$n(1/p - 1) = j \Leftrightarrow p = \frac{n}{n+j},\ j = 0, 1, \ldots.$$

Em outras palavras, se $p = 1, \frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+2}, \ldots$, então

$$h_r^p(\Omega) \neq h_z^p(\Omega).$$

A demonstração deste resultado é uma aplicação, não imediata, da condição necessária estabelecida no Teorema 3.2.1.

# Referências Bibliográficas


[1] Chang, D. C.; Dafni, G.; Stein, E. M.; *Hardy spaces, BMO, and boundary value problems for the Laplacian on a smooth domain in* $\mathbb{R}^n$, Trans. Amer. Math. Soc., nº 4, p. 1605-1661, 1999.

[2] Chang, D. C.; Krantz, S. G.; Stein, E. M.; *$H^p$ Theory on a smooth domain in $\mathbb{R}^N$ and elliptic boundary value problems*, J. Funct. Anal. 114, nº 2, p. 286-347, 1993.

[3] Dafni, G.; *Distributions supported in a hypersurface and local $h^p$*, Proceedings of the Amer. Math. Soc. 126, nº 10, p. 2933-2943, 1998.

[4] Duoandikoetxea, J.; *Fourier analysis*, Amer. Math. Soc., 2000.

[5] Folland, G. B.; *Real Analysis: modern techniques and their applications*, 2ª Ed., John Wiley and Sons, 1999.

[6] Goldberg, D.; *A local version of real Hardy spaces*, Duke Math J. 46, p. 27-42, 1979.

[7] Hörmander, L. ; *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[8] Hounie, J. G.; *Teoria Elementar das Distribuições*, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[9] Lerner, N.; *Lecture Notes on Real Analysis*, Universit´e Pierre et Marie Curie, Paris, 2008.

[10] Rudin, W.; *Real and complex analysis*, 3ª Ed. ,McGraw-hill, Madison, 1987.

[11] Stein, E. M.; *Harmonic Analysis: Real-variable Methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princenton University Press, Princenton, New Jersey, 1993.

[12] Treves, F.; *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Academic Press, Lafayette, Indiana, 1967.