UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Estudo de nova fórmula de Caracteres para Representações de Álgebras de Lie semissimples.

Gonzalo Emanuel Matías Gutierrez

São Carlos - SP
Agosto de 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática
Programa de Pós Graduação em Matemática

Estudo de nova fórmula de Caracteres para Representações de Álgebras de Lie semissimples.

Gonzalo E. M. Gutierrez

orientador: Dr. Professor Waldeck Schützer

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para obter o título de Mestre em Matemática

São Carlos - SP, Agosto de 2015

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

G984en

Gutierrez, Gonzalo Emanuel Matías.
Estudo de nova fórmula de caracteres para representações de Álgebra de Lie semissimples / Gonzalo Emanuel Matías Gutierrez. -- São Carlos : UFSCar, 2015.
112 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.

1. Lie, Algebra de. 2. Representações. 3. Weyl, Fórmula de. 4. Lie, grupos semi-simples de. I. Título.

CDD: 512.55 (20ª)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Gonzalo Emanuel Matías Gutierrez, realizada em 28/08/2015:

Waldeck Schutzer

Prof. Dr. Waldeck Schutzer
UFSCar

Prof. Dr. Humberto Luiz Talpo
UFSCar

Prof. Dr. Paulo Afonso Faria da Veiga
USP

A minha mãe Marta

Esta dissertação é especialmente dedicada a ti

Agradecimentos.

A minha mãe Marta L. Gaglioli, por me dar a vida, pela paciência dela, por acreditar em mim e porque ainda acredita em mim. Este logro é especialmente dedicado para ti. Para meus irmãos Nicolás, Mónica, Andréa, Daniel, Maurício, Luciano e meus cunhados Fabián, René e Mariana por todo o apoio brindado.

A toda minha família, que é o sustento principal de todas minhas metas, logres, e superações na minha vida.

Ao meu orientador, o Professor Dr. Waldeck Schützer pela sua orientação, seguimento e supervisão deste trabalho.

Mas todo trabalho de pesquisa é também fruto do reconhecimento e apoio vital que nos oferecem as pessoas que nos estimam, sem a qual não teríamos a força e energia para nos animar a crescer como pessoa e como profissionais. É por isso que este trabalho é dedicado em especial para meus amigos Jesus Arias, Juan Di Mauro e Luís Crespo pelo apoio moral fornecido para eu continuar com meus estudos. A minha professora Mónica Cruz, por ser uma grande pessoa e uma ótima professora, por todos os conselhos oferecidos e por me ajudar em momentos de necessidade na minha vida acadêmica. Seria injusto não mencionar o trabalho dela, [Cru11], pois tal trabalho me permitiu tomar a decisão de estudar álgebras de Lie como parte da minha formação profissional. Ao meu colega Fernando Augusto pelas sugestões feitas ao meu trabalho, que de algum modo, contribuíram no mesmo.

Aos meus professores e amigos da Universidade Nacional de Salta por todo o apoio brindado inicialmente para que eu tivesse aqui. Estou profundamente agradecido.

Aos meus professores, amigos e colegas do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos; que tal vez sem imaginar, contribuíram de alguma forma neste trabalho.

Finalmente, à CAPES, pelo apoio financeiro integral a este trabalho.

Todos aqueles que acham ter sido omitidos, desculpas pela minha distração, e por favor considerem-se parte deste logro. É minha intenção expressar meu maior profundo e sincero agradecimento a todos aqueles que com sua ajuda foram colaborando na realização deste trabalho.

Quero expressar nestas linhas meu compromisso em defender a educação publica e laica, seja tanto no meu país como aqui mesmo. E que as portas delas estejam abertas e disponíveis para o mundo todo, pois este logro pessoal teria sido impossível sem tais condições.

Gonzalo E. M. Gutierrez

Conteúdo

Agradecimentos v

Resumo ix

Abstract xi

Introdução xiii

1 Álgebras de Lie. 1

1.1 Introdução às Álgebras de Lie. 1
1.1.1 Álgebras. 1
1.1.2 Álgebras de Lie. 2
1.1.3 Álgebras Clássicas. 4
1.1.4 Homomorfismos. 6
1.1.5 Álgebra de Derivações. 6
1.1.6 Quocientes e os Teoremas de Isomorfismos. 7
1.1.7 Centralizadores e Normalizadores. 8
1.1.8 Representações de $\mathfrak{g}$. 10
1.2 Álgebras de Lie Solúveis e Nilpotentes. 10
1.2.1 Critérios de nilpotência. 13
1.2.2 Critérios de Solubilidade e Semissimplicidade. 17
1.2.2.1 Decomposição de Jordan-Chevalley. 19
1.2.2.2 Critérios de Cartan. 21
1.3 A decomposição abstrata de Jordan-Chevalley. 24
1.4 Módulos, Lema de Schur e Teorema de Weyl. 25
1.4.1 O Elemento de Casimir. 27
1.4.2 Teorema de Weyl. 29
1.5 Representações de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$. 29
1.6 Decomposição em espaços de raízes. 33
1.6.1 Subálgebras Torais. 33
1.6.2 Propriedades de Ortogonalidade. 36
1.6.3 Propriedades de Integralidade. 37
1.7 Sistemas de Raízes. 40
1.7.1 Exemplos. 43
1.7.2 Raízes simples. 44

1.7.2.1 Câmaras de Weyl 46
1.7.3 Pesos Abstratos. 48
1.7.4 Conjuntos Saturados de Pesos. 51

2 Teoria de Representações. 53
2.1 A Álgebra Universal Envolvente. 53
2.2 Representações. 56
2.2.1 O $\mathfrak{g}$-módulo cíclico. 58
2.2.2 Existência e Unicidade 60
2.2.3 Condições para dimensão finita. 61
2.3 Caracteres. 63
2.4 Fórmula de Caracteres de Weyl. 67
2.4.1 Uma fórmula para a dimensão de V^{λ}. 69
2.4.2 Demonstração da Proposição.2.4.1 72
2.4.3 Demonstração do Teorema.2.7 75
2.5 Observações do Capítulo. 78

3 Nova Fórmula de caracteres. Aplicações. 83
3.1 Introdução. 83
3.2 Classes de Conjuntos. 85
3.2.1 Uma função geradora para os $c_{\langle\Psi\rangle}$. 86
3.3 Nova Fórmula de caracteres. 86
3.3.1 Aplicações. 89
3.3.2 Fórmulas exatas para multiplicidades. 95
3.3.2.1 Espaço de Peso zero para representações de álgebras do tipo A_2. . . . 95
3.3.2.2 Espaço de Peso zero para representações de álgebras do tipo B_2. . . . 98
3.4 Demonstração dos Teoremas 3.2 e 3.3. 102
3.5 Conclusões. 109

Bibliografia 111

Resumo.

O objetivo deste trabalho é descrever formalmente as representações irredutíveis das álgebras de Lie semissimples $\mathfrak{g}$ de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, como também obter algumas fórmulas de multiplicidades que permitem calcular a dimensão dos espaços de peso da representação e também a quantidade de pesos.

Nesse sentido, a novidade deste trabalho é o estudo de uma nova fórmula de Caracteres, recentemente encontrada por Schützer [Sch12], e que se baseia em uma combinatória dada apenas em termos das raízes positivas não simples da álgebra de Lie.

Os principais resultados desse artigo são revistos e clarificados.

***Palavras chave*:** Álgebras de Lie, Álgebras de Lie Semissimples, Representações, Caractere, Fórmula de Weyl, Nova Fórmula de Caracteres, Fórmula de Multiplicidades.

Abstract.

The objective of this dissertation is descrive formally the irreducible representations of finite-dimensional semisimple Lie algebras $\mathfrak{g}$ over a field $\mathbb{F}$ algebraically closed with characteristic zero, as also get some multiplicity formulas that allow compute the dimension of the weight space in the representation and also the quantity of weight.

In this regard, the newness of this work is the study of a new characters formula, recently published by Schützer [Sch12], and this based in one combinatory given only in terms of not simple positive roots of the Lie algebra.

The main results of this dissertation are reviewed and clarified.

Key-Words: Lie Algebras, Semisimple Lie Algebras, Representations, Character, Weyl's Formula, Character new Formula, Multiplicity Formula.

Introdução.

Em poucas palavras, as álgebras de Lie são espaços vetoriais munidos de um produto não associativo denominado colchete de Lie. Tais álgebras surgiram naturalmente pelo estudo de objetos matemáticos denominados Grupos de Lie. Foi no ano 1873 que, Sophus Lie, um matemático Norueguês deu origem às ideias que conformam na atualidade a Teoria de Lie, com aportes posteriores de Weyl, Cartan, Chevalley, Killing, Serre, Harish-Chandra entre outros [JF10].

Os primeiros trabalhos de Lie tinham como ideia subjacente construir uma teoria de Grupos Contínuos, contemplando por sua vez a já existente Teoria de Grupos Discretos. O objetivo de Lie era desenvolver uma teoria capaz de unificar o estudo das simetrias na área das equações diferencias ordinárias e, para isso, Lie estudou as simetrias contínuas de objetos matemáticos conhecidos como Variedades.

Se bem que, os grupos que Lie analisou, não eram exatamente Grupos de Lie, uma vez que estavam definidos apenas localmente, foi Weyl quem pela primeira vez estudou sistematicamente grupos definidos de forma global.

As teorias de álgebras de Lie constituem hoje em dia uma das partes mais importantes da matemática moderna, dando suporte a numerosas aplicações no âmbito de outras ciências, como a física e astrofísica. O estudo da teoria estrutural geral das álgebras de Lie, em especial a classe das álgebras de Lie simples, foi essencialmente contemplada por Cartan e Killing no século XX, introduzindo importantes conceitos que ainda são intensamente utilizados por pesquisadores matemáticos atuais.

Ademais, é de vital importância analisar as representações das álgebras de Lie, pois uma representação permite descrever a álgebra mediante um espaço vetorial, fornecendo informações mais específicas da álgebra em si. Mais formalmente, dizer que há uma representação de uma álgebra $\mathfrak{g}$ é equivalente a dizer que há um homomorfismo entre $\mathfrak{g}$ e uma álgebra de automorfismos $\mathfrak{gl}(V)$ definidas sobre um espaço vetorial V. Pelo teorema da redutividade de Weyl, é possível limitarmos ao estudo das representações irredutíveis; isto é, sobre um espaço vetorial que não possui subespaços invariantes pela ação da álgebra via representação.

É conhecido que as representações irredutíveis de dimensão finita de uma álgebra de Lie semissimples são parametrizadas pelos seus pesos maximais e que, pelo teorema de Cartan, o peso maximal da representação ocorre com multiplicidade 1, i.e, a dimensão do espaço de peso maximal da representação.

Porém, existe a questão de qual é a multiplicidade de um espaço de peso arbitrário, e que é respondida mediante as fórmulas de Caracteres. A mais célebre de todas elas é sem duvida alguma a fórmula de caracteres de Weyl.

A fórmula de Weyl é uma ferramenta importante para entender a estrutura de uma representação irredutível de dimensão finita de uma álgebra de Lie semissimples, e uma importante aplicação é a fórmula dimensional de Weyl, que calcula, de modo relativamente simples, a dimensão total de uma representação sem que seja preciso calcular explicitamente as multiplicidades.

Várias outras fórmulas de caracteres foram descobertas ao longo do tempo, tais como as fórmulas clássicas de Freudenthal [FdV69] e Kostant [Kos59], e mais recentemente as fórmulas de Littelmann [Lit95], Sahi [Sah00], Cagliero e Tirao [CT04] e Schützer [Sch12].

Nosso estudo estará baseado no trabalho de Schützer [Sch12], e será realizado em três etapas, cada uma delas correspondendo a um capítulo. No capítulo 1, definiremos os conceitos de álgebras de Lie, homomorfismos, representações, entre outros, e apresentaremos os Teoremas clássicos de Lie, Engel, Cartan e Weyl. Na seção 1.5 vamos caraterizar as representações da álgebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$, que constituem o caso mais simples na teoria de representações de álgebras de Lie semissimples, e que é necessário para entender o estudo mais geral. Finalmente, na seção 1.6 veremos que toda álgebra de Lie semissimples $\mathfrak{g}$ de dimensão finita, e definidas sobre um corpo $\mathbb{F}$ algebricamente fechado de característica zero, possui a decomposição

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

em que $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} : \mathrm{ad}_h(x) = [h,x] = \alpha(h)x, \forall h \in \mathfrak{h}\}$ e $\alpha \in \mathfrak{h}^*$. Todos os conceitos desenvolvido neste capítulo seguem o livro clássico de [Hum78], como também as referências [EW00, Ale08, Hum78, Gra00].

O capítulo 2 consiste em Teoria de representações, novamente seguindo [Hum78], mas com alguns conceitos próprios de [FH91] e [Gra00]. Neste capítulo, veremos que toda representação irredutível de $\mathfrak{g}$ admite um único peso maximal λ, e podemos indicar tal representação por V^λ. Além disso, encontraremos a Fórmula de caracteres de Weyl como assim também a Fórmula Dimensional de Weyl:

$$\dim V^\lambda = \prod_{\alpha\in\Phi^+} \frac{(\lambda+\rho,\alpha)}{(\rho,\alpha)}.$$

Finalmente, a última etapa consiste no estudo de [Sch12]. É aqui que apresentaremos uma nova fórmula de caracteres proposta pelo autor do trabalho citado acima. Tal fórmula permite aplicações interessantes como o número de pesos na representação e novas fórmulas de recursão para multiplicidades.

Capítulo 1

Álgebras de Lie.

Neste Capítulo, revisaremos alguns conceitos e resultados clássicos da teoria de álgebras de Lie que serão necessários para o presente trabalho. A ideia é introduzir o estudo elementar das álgebras de Lie semissimples definidas sobre um corpo $\mathbb{F}$ algebricamente fechado e de característica zero, embora muitos dos conceitos que abordaremos fazem sentidos para corpos arbitrários.

Todas as propriedades clássicas apresentadas podem ser encontradas nas referências [EW00, Ale08, Hum78, Gra00].

1.1 Introdução às Álgebras de Lie.

1.1.1 Álgebras.

Definição 1.1.1. Uma álgebra sobre um corpo $\mathbb{F}$ é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial $\mathfrak{A}$ munido de uma aplicação bilinear

$$(x,y) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \longrightarrow xy \in \mathfrak{A}$$

usualmente chamada multiplicação.

Em particular, na seguinte seção, veremos que as álgebras de Lie são álgebras que satisfazem as propriedades (1) e (2) da definição 1.1.3 sobre o produto $[x,y]$.

Definição 1.1.2. Uma álgebra é unitária se existe um elemento $1 \in \mathfrak{A}$ (chamado unidade) tal que $1x = x = x1$ para qualquer $x \in \mathfrak{A}$. Uma álgebra $\mathfrak{A}$ é associativa se $(xy)z = x(yz)$ para quaisquer $x,y,z \in \mathfrak{A}$.

Alguns exemplos de álgebras associativas são:

1. O conjunto $\mathfrak{gl}(V)$ dos endomorfismos de um espaço vetorial V, possui uma estrutura de álgebra unitária e associativa com a multiplicação dada pela composição de endomorfismos.

2. Similarmente, o conjunto $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ das matrizes $n \times n$ sobre o corpo $\mathbb{F}$ é uma álgebra associativa unitária com a multiplicação usual de matrizes.

1.1.2 Álgebras de Lie.

Definição 1.1.3. Seja $\mathbb{F}$ um corpo. Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{F}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$, munido de uma aplicação bilinear, $[,]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$, denominada colchete de Lie, possuindo as seguintes propriedades:

1. $[x,x]=0$ para todo $x\in\mathfrak{g}$, isto é, o colchete é alternante.

2. $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$ para quaisquer $x,y,z\in\mathfrak{g}$, chamada identidade de Jacobi.

Observação 1.1.1. Como $[x+y,x+y]=[x,x]+[x,y]+[y,x]+[y,y]=0$, obtemos que

$$[x,y]=-[y,x],\forall x,y\in\mathfrak{g}.$$

Exemplos.

1. Seja $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ e considere $x=(x_1,x_2,x_3), y=(y_1,y_2,y_3)$. O produto vetorial

$$x\times y=(x_2y_3-x_3y_2,x_3y_1-x_1y_3,x_1y_2-x_2y_1)$$

define uma estrutura de álgebra de Lie em $\mathbb{R}^3$.

2. Todo espaço vetorial V possui um colchete de Lie definido trivialmente por $[x,y]=0$ para quaisquer $x,y\in V$. Esta estrutura de álgebra de Lie é chamada abeliana. Em particular o corpo $\mathbb{F}$ pode ser visto como uma álgebra de Lie abeliana unidimensional. De fato, é imediato que qualquer álgebra de Lie unidimensional é abeliana.

3. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$. Seja $\mathfrak{gl}(V)$ o conjunto de todos os endomorfismos (limitados) de V em V. Este é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ com as operações:

   a) $\forall x,y\in\mathfrak{gl}(V),\forall v\in V;\ (x+y)(v)=x(v)+y(v)$.

   b) $\forall x\in\mathfrak{gl}(V),\forall v\in V,\forall k\in\mathbb{F};\ (kx)(v)=kx(v)$.

   Definimos neste espaço vetorial o colchete de Lie como

$$[x,y]=xy-yx,\qquad\forall x,y\in\mathfrak{gl}(V)$$

   em que o produto xy representa a composição $x\circ y$. Tal colchete é chamado comutador.

4. Seja $\mathbb{F}$ um corpo e denotemos por $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ o espaço vetorial de todas as matrizes $n\times n$ sobre o corpo $\mathbb{F}$. Definimos neste espaço o seguinte colchete de Lie:

$$[x,y]=xy-yx\ \forall x,y\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$$

   em que xy é o produto usual de matrizes. Uma base para $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ é dada pelas matrizes $\{e_{ij}\}$ de tamanho $n\times n$ em que e_{ij} possui 1 na posição (i,j) e zero nas demais posições. Note que $e_{ij}e_{kl}=\delta_{jk}e_{il}$, portanto

$$[e_{ij},e_{kl}]=\delta_{jk}e_{il}-\delta_{li}e_{kj}$$

Este exemplo pode ser visto como o caso matricial do exemplo 3.

5. Seja $\mathfrak{t}(n,\mathbb{F})$ o subespaço vetorial de todas as matrizes triangulares superiores de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$. Então $\mathfrak{t}(n,\mathbb{F})$ é uma álgebra de Lie com o colchete de Lie como em $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$.

6. De maneira similar, seja $\mathfrak{n}(n,\mathbb{F})$ o subespaço vetorial de todas as matrizes triangulares estritamente superiores de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$. Então $\mathfrak{n}(n,\mathbb{F})$ é uma álgebra de Lie com o colchete de Lie como em $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$.

Observação 1.1.2. Se $\mathfrak{A}$ é uma álgebra associativa sobre o corpo $\mathbb{F}$, então podemos definir uma nova operação bilinear $[,]$ em $\mathfrak{A}$ por

$$[a,b] = ab - ba, \ \forall a,b \in \mathfrak{A}$$

Então, $\mathfrak{A}$ com aquele colchete, é uma álgebra de Lie. É usual indicar $\mathfrak{A}^-$ quando se deseja fazer referência a esta estrutura como álgebra de Lie. As álgebras de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ e $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ são casos especiais desta construção.

Definição 1.1.4. (Subálgebra de Lie) Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma subálgebra de Lie é um subespaço $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ tal que

$$[x,y] \in \mathfrak{h}, \ \forall x,y \in \mathfrak{h}.$$

Observação 1.1.3. Se $B = \{v_1,\dots,v_n\}$ é uma base de V, o endomorfismo $e_{ij} : V \to V$ é definido por $e_{ij}(v_k) = \delta_{jk} v_i$. Como espaço vetorial, essa base dá origem a um isomorfismo entre $\mathfrak{gl}(V)$ e $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$. Qualquer subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ será chamada álgebra de Lie linear.

Definição 1.1.5. (Ideal) Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Um subespaço vetorial $I \subset \mathfrak{g}$ tal que

$$[x,y] \in I, \ \forall x \in \mathfrak{g}, y \in I$$

é um Ideal da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Definição 1.1.6. (Centro de uma álgebra) Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, definimos o centro de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, como

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} : [x,y] = 0; \ \forall y \in \mathfrak{g}\}$$

Portanto, $\mathfrak{g}$ é uma álgebra abeliana se, e somente se, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. Além disso, entre as álgebras de Lie, muitas delas não possuem as propriedades mencionadas na definição 1.1.2. Em particular, teremos o seguinte resultado:

Proposição 1.1.1. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é associativa com respeito ao colchete (i.e, $[x,[y,z]] = [[x,y],z]$ para todo $x,y,z \in \mathfrak{g}$) se, e somente se, $\forall a,b \in \mathfrak{g}$; $[a,b] \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.*

Demonstração. De fato, pela identidade de Jacobi, $\forall x,y,z \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}
[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] &= 0 \\
\Leftrightarrow [x,[y,z]] - [[x,y]\,z] + [y,[z,x]] &= 0 \\
\Leftrightarrow [y,[z,x]] &= 0
\end{aligned}$$

Logo, $[y,[z,x]]=0,\ \forall x,y,z\in\mathfrak{g}\Leftrightarrow[z,x]\in\mathfrak{z}(\mathfrak{g}),\ \forall x,z\in\mathfrak{g}$.

$\square$

Construção de Ideais: Sejam I, J ideais de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ qualquer, então são ideais de $\mathfrak{g}$

1. a interseção $I\cap J$,
2. a soma $I+J=\{x+y : x\in I,\ y\in J\}$,
3. o produto $[I,J]=\operatorname{Span}\{[x,y] : x\in I,\ y\in J\}$.

1.1.3 Álgebras Clássicas.

Os exemplos mais importantes de toda a teoria de álgebras de Lie são denominadas álgebras de Lie clássicas e agrupam-se em quatro famílias diferentes: A_l, B_l, C_l e D_l com $l\geq 1$. Todas são construídas a partir de $\mathfrak{gl}(V)$ tal como é especificado a seguir:

A_l : Seja V um espaço vetorial de dimensão $\dim V=l+1$. Denotemos por $\mathfrak{sl}(V)$ o conjunto dos endomorfismos de V em V com traço igual a zero. Tal conjunto é um subespaço de $\mathfrak{gl}(V)$ e para quaisquer dois elementos $x,y\in\mathfrak{sl}(V)$, $[x,y]$ também possui traço zero. Logo, $\mathfrak{sl}(V)$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$.

Esta subálgebra chama-se Álgebra de Lie especial, cuja dimensão é $\dim\mathfrak{sl}(V)=(l+1)^2-1$. Uma base para $\mathfrak{sl}(l+1,\mathbb{F})$ é formada pelas matrizes $(l+1)\times(l+1)$ da forma $h_i=e_{i,i}-e_{i+1,i+1}$ $(1\leq i\leq l)$ e $e_{i,j}$ $(i\neq j)$.

B_l : Seja V um espaço vetorial de dimensão $\dim V=2l+1$. Consideremos a forma bilinear simétrica e não degenerada f definida pela matriz

$$S_f=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&I_l\\0&I_l&0\end{pmatrix}$$

em que I_l representa a matriz identidade de tamanho $l\times l$. A álgebra de Lie ortogonal ímpar $\mathfrak{o}(V)$ consiste de todos os endomorfismos $x:V\to V$ satisfazendo

$$f(x(v),w)=-f(v,x(w)) \tag{1.1.1}$$

Devido que podemos decompor um elemento $A\in\mathfrak{gl}(2l+1,\mathbb{F})$ da forma

$$A=\begin{pmatrix}\alpha&p&q\\u&a&b\\v&c&d\end{pmatrix}$$

em que $\alpha\in\mathbb{F}$, p,q são matrizes de $1\times l$, u,v são matrizes de $l\times 1$ e finalmente a,b,c,d são matrizes de $l\times l$. A condição $A^tS_f=-S_fA$ (outra forma de escrever 1.1.1) é equivalente que A satisfaça $\alpha=-\alpha$, $v^t=-p$, $u^t=-q$, $c^t=-c$, $b^t=-b$ e $d^t=-a^t$. Uma base para $\mathfrak{o}(2l+1,\mathbb{F})$ é dada pelas matrizes:

1. p, v: $e_{1,i+1} - e_{l+i+1,1}$, para $1 \leq i \leq l$
2. q, u: $e_{1,l+i+1} - e_{i+1,1}$, para $1 \leq i \leq l$
3. A, D: $e_{1+i,1+j} - e_{l+1+j,l+1+i}$, para $1 \leq i, j \leq l$
4. B: $e_{1+i,l+1+j} - e_{1+j,l+1+i}$, para $1 \leq i < j \leq l$
5. C: $e_{l+1+i,1+j} - e_{l+1+j,1+i}$, para $1 \leq i < j \leq l$

A dimensão de $\mathfrak{o}(2l+1,\mathbb{F})$ é $\dim \mathfrak{o}(2l+1,\mathbb{F}) = l + l + l^2 + \frac{2(l-1)l}{2} = 2l^2 + l$.

C_l : Seja V um espaço vetorial de dimensão $\dim V = 2l$. Consideremos a forma bilinear simétrica e não degenerada f definida pela matriz

$$S_f = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ -I_l & 0 \end{pmatrix}$$

em que I_l é a matriz identidade de tamanho $l \times l$. A álgebra de Lie $\mathfrak{sp}(V)$ consiste de todos os endomorfismos x de V em V satisfazendo

$$f(x(v), w) = -f(v, x(w)) \tag{1.1.2}$$

Do mesmo modo que fizemos anteriormente, podemos decompor um elemento $A \in \mathfrak{gl}(2l,\mathbb{F})$ da forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

em que a, b, c, d são matrizes de tamanho $l \times l$. A condição $A^t S_f = -S_f A$ é equivalente que A satisfaça $c^t = c$, $b^t = b$ e $d = -a^t$. Uma base para $\mathfrak{sp}(2l,\mathbb{F})$ é dada pelas matrizes:

1. Todas as matrizes diagonais da forma $e_{i,i} - e_{l+i,l+i}$, com $1 \leq i \leq l$
2. Todas as matrizes da forma $e_{i,i} - e_{l+j,l+i}$, com $1 \leq i \neq j \leq l$
3. Todas as matrizes da forma $e_{i,l+i}$, com $1 \leq i \leq l$
4. Todas as matrizes da forma $e_{i,l+j} + e_{j,l+i}$, com $1 \leq i < j \leq l$

Com um total de elementos $\dim \mathfrak{sp}(2l,\mathbb{F}) = l + (l^2 - l) + l + \frac{l(l-1)}{2} + l + \frac{l(l-1)}{2} = 2l^2 + l$

D_l : De maneira similar à família B_l, a álgebra de Lie ortogonal par $\mathfrak{o}(V)$, onde $\dim V = 2l$, é a álgebra definida pelo conjunto dos endomorfismos x de V em V que satisfazem

$$f(x(v), w) = -f(v, x(w)) \tag{1.1.3}$$

em que f é a forma bilinear simétrica e não degenerada definida pela matriz

$$M_f = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ I_l & 0 \end{pmatrix}$$

Uma base para a álgebra $\mathfrak{o}(2l,\mathbb{F})$ é formada pelas matrizes:

1. $e_{i,j} - e_{l+j,l+i}$ para $1 \leq i,\, j \leq l$.
2. $e_{i,j+l} - e_{j,l+i}$ para $1 \leq i < j \leq l$
3. $e_{l+i,j} - e_{l+j,i}$ para $1 \leq i < j \leq l$

Neste caso, a dimensão de $\mathfrak{o}(2l,\mathbb{F})$ é $\dim \mathfrak{o}(2l,\mathbb{F}) = 2l^2 - l$.

O número l é chamado de "posto" da álgebra.

1.1.4 Homomorfismos.

Definição 1.1.7. (Homomorfismo) Sejam $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ duas álgebras de Lie sobre o mesmo corpo $\mathbb{F}$. Dizemos que uma aplicação $\phi : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$ é um homomorfismo de álgebras de Lie se ϕ é uma aplicação linear que satisfaz

$$\phi\left([x,y]\right) = [\phi(x), \phi(y)]\,;\, \forall x,y \in \mathfrak{g}_1.$$

Em outras palavras, ϕ é homomorfismo se a imagem do colchete é igual ao colchete das imagens.

Note que o colchete de Lie no lado esquerdo é definido em $\mathfrak{g}_1$, enquanto o colchete do lado direito é definido em $\mathfrak{g}_2$. Um exemplo importante de homomorfismo entre álgebras de Lie é o homomorfismo adjunto:

Exemplo 1.1.1. Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie, definimos o Homomorfismo Adjunto como a aplicação

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

tal que $(\mathrm{ad}\,x)(y) := [x,y]$ para quaisquer $x,y \in \mathfrak{g}$.

Vejamos que efetivamente, ad é um homomorfismo. Com efeito, da bilinearidade do colchete, a aplicação $\mathrm{ad}\,x : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ é linear. Além disso, pela identidade de Jacobi, obtemos de forma imediata que

$$\mathrm{ad}\left([x,y]\right) = \mathrm{ad}\,x \circ \mathrm{ad}\,y - \mathrm{ad}\,y \circ \mathrm{ad}\,x$$

para quaisquer $x,y \in \mathfrak{g}$.

Quando $\phi : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$ denote um homomorfismo de álgebras de Lie, vamos simplesmente chamar ϕ de homomorfismo (tomando ambos termos como sinônimos), salvo menção contrária.

Definição 1.1.8. (Isomorfismo) Sejam $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ duas álgebras de Lie sobre o mesmo corpo $\mathbb{F}$. Um isomorfismo é simplesmente um homomorfismo bijetivo $\phi : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$.

Note que pela definição 1.1.6, $\ker(\mathrm{ad}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Além disso, para qualquer homomorfismo $\phi : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$ de álgebras de Lie, $\ker(\phi)$ é um ideal de $\mathfrak{g}_1$ e $\mathrm{img}(\phi)$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}_2$.

1.1.5 Álgebra de Derivações.

Definição 1.1.9. (Derivação) Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra sobre um corpo finito $\mathbb{F}$. Uma derivação D de $\mathfrak{A}$ é uma aplicação linear $D : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$ tal que

$$D(ab) = aD(b) + D(a)b$$

para todo $a, b \in \mathfrak{A}$. Chamamos $\mathrm{Der}\,\mathfrak{A}$ o conjunto de todas as derivações de $\mathfrak{A}$. Tal conjunto não é vazio, pois contém a aplicação nula, e é fechado pela adição e pela multiplicação por escalar. Resulta que $\mathrm{Der}\,\mathfrak{A}$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{A})$. Ademais, $\mathrm{Der}\,\mathfrak{A}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{A})$ já que se e, f são duas derivações, então

$$[e, f] = ef - fe$$

também é uma derivação. Com efeito,

$$\begin{aligned} D([e,f]) &= D(ef) - D(fe) \\ &= D(e)f + eD(f) - D(f)e - fD(e) \\ &= [D(e), f] + [e, D(f)] \end{aligned}$$

Observação 1.1.4. Nem sempre ef resulta ser uma derivação.

Observação 1.1.5. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e seja $x \in \mathfrak{g}$, então a aplicação $\mathrm{ad}x : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ é uma derivação de $\mathfrak{g}$; pois pela identidade de Jacobi temos que

$$(\mathrm{ad}x)[y,z] = [x,[y,z]] = [[x,y],z] + [y,[x,z]] = [\mathrm{ad}x(y), z] + [y, \mathrm{ad}x(z)]$$

para todo $y, z \in \mathfrak{g}$

1.1.6 Quocientes e os Teoremas de Isomorfismos.

Definição 1.1.10. (Álgebra quociente) Se I é um ideal de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, em particular é um subespaço de $\mathfrak{g}$. Consideremos as classes laterais (ou de equivalência) $z + I = \{z + x : x \in I\}$ para $z \in \mathfrak{g}$ e o espaço quociente

$$\mathfrak{g}/I = \{z + I : z \in \mathfrak{g}\}$$

Definimos neste espaço vetorial o colchete $[,]$ dado por

$$[w + I, z + I] := [w, z] + I$$

em que $[,]$ da direita é o colchete definido em $\mathfrak{g}$. Então, $\mathfrak{g}/I$ com tal colchete é uma álgebra de Lie, que usualmente chamamos álgebra quociente de $\mathfrak{g}$ sobre I.

Vejamos que o colchete definido acima está bem definido; isto é, não depende do representante da classe escolhida: Suponha que $w + I = w' + I$ e $z + I = z' + I$, então por um cálculo direto temos que $(w - w') \in I$ e $(z - z') \in I$. Pela bilinearidade do colchete temos que

$$[w', z'] = [w + (w' - w), z + (z' - z)] = [w, z] + [w' - w, z] + [w, z' - z] + [w' - w, z' - z]$$

onde os três últimos termos da soma estão em I por ser um ideal. Então

$$[w' + I, z' + I] = [w, z] + I$$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathfrak{h} \\
\mathfrak{g}/I \arrow[ur, "\tilde{\phi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 1.1.1: Diagrama comutativo para a propriedade (2) do teorema 1.1

mostrando a boa definição do colchete. Por último, aquele colchete verifica ser um colchete de Lie por estar definido em base ao colchete da álgebra $\mathfrak{g}$.

Podemos assim, generalizar os Teoremas de Isomorfismos de espaços vetoriais às álgebras de Lie, tal como no seguinte resultado.

Teorema 1.1. *Seja* $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ *duas álgebras de Lie.*

1. *Se* $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ *é um homomorfismo, então* $\mathfrak{g}/\ker\phi \cong \operatorname{img}\phi$.

2. *Se* I *é um ideal de* $\mathfrak{g}$*, com* $I \subset \ker\phi$*, então existe um único isomorfismo de álgebras de Lie* $\tilde{\phi} : \mathfrak{g}/I \longrightarrow \mathfrak{h}$ *tal que o diagrama da figura* 1.1.1 *resulta comutativo (*π *a projeção canônica sob* I*).*

3. *Se* I, J *são ideais, com* $I \subset J$*, então* J/I *é um ideal de* L/I *e* $(L/I)/(J/I) \cong L/J$.

4. *Se* I, J *são ideais, então* $I + J$ *é um ideal e* $(I+J)/J \cong I/(I \cap J)$.

Um exemplo importante de aplicação aos Teoremas de Isomorfismos é olhar que $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ é, de fato, quase todo $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$, tal como é determinado no exemplo a seguir:

Exemplo 1.1.2. Fixando um corpo $\mathbb{F}$ qualquer, definimos a aplicação $tr : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}$, a qual associa a cada matriz $n \times n$ seu traço. Tal aplicação é um homomorfismo, pois se $x, y \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ então sabemos da álgebra linear que tr é linear e que

$$\begin{aligned}
tr([x,y]) &= tr(xy - yx) = tr(xy) - tr(yx) = 0, \\
[tr(x), tr(y)] &= tr(x)tr(y) - tr(y)tr(x) = 0.
\end{aligned}$$

Aqui, o primeiro colchete é em $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ e o segundo colchete na álgebra de Lie $\mathbb{F}^-$. Além disso, o traço não é sobrejetivo e $\ker(tr) = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ é ideal de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$. Pelo teorema 1.1, temos que $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})/\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F}) \cong \mathbb{F}$, em que a classe de equivalência $x + \mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ consiste de todas as matrizes de $n \times n$ com traço igual a $tr(x)$. Em particular, isso mostra que $\dim \mathfrak{sl}(n,\mathbb{F}) = n^2 - 1$.

1.1.7 Centralizadores e Normalizadores.

Recordemos que se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie, então $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ é um ideal de $\mathfrak{g}$. De maneira análoga, é possível definir o centralizador de um conjunto A:

Definição 1.1.11. (centralizador) Seja A um subconjunto não vazio de $\mathfrak{g}$, definimos o centralizador de A como o conjunto:

$$\mathfrak{c}(A) = \{x \in \mathfrak{g} : [x,a] = 0 : \forall a \in A\}$$

Resulta que $\mathfrak{c}(A)$ é um subespaço de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ e, além disso, $\mathfrak{c}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Proposição 1.1.2. *Seja A um subconjunto não vazio de $\mathfrak{g}$. Então $\mathfrak{c}(A)$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração. Esta é uma consequência imediata da identidade de Jacobi. Com efeito, se $x, y \in \mathfrak{c}(A)$ e $a \in A$, então

$$[[x,y],a] = -[[y,a],x] - [[a,x],y] = 0$$

□

Proposição 1.1.3. *Se I é um ideal de $\mathfrak{g}$, então $\mathfrak{c}(I)$ é um ideal de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração. Para $c \in \mathfrak{c}(I)$, $x \in \mathfrak{g}$, $i \in I$, temos

$$[[c,x],i] \quad = \quad -[[x,i],c] - [[i,c],x] = 0$$

□

Proposição 1.1.4. *Seja $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ um homomorfismo sobrejetivo. Se $\mathfrak{z}$ denota o centro de $\mathfrak{g}$ então $\varphi(\mathfrak{z})$ está contido no centro de $\mathfrak{h}$.*

Demonstração. Com efeito, $\mathfrak{h} = \varphi(\mathfrak{g}) \Rightarrow [\mathfrak{h}, \varphi(\mathfrak{z})] = [\varphi(\mathfrak{g}), \varphi(\mathfrak{z})] = \varphi([\mathfrak{g}, \mathfrak{z}]) = \varphi(\{0\}) = 0$.

□

Definição 1.1.12. (Normalizador) Se $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$, definimos o normalizador de $\mathfrak{h}$ como

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g} : [x,v] \in \mathfrak{h}, \ \forall v \in \mathfrak{h}\}$$

O normalizador $\mathfrak{n}(\mathfrak{h})$ é um subespaço de $\mathfrak{g}$ contendo $\mathfrak{h}$ e, pela identidade de Jacobi, resulta uma subálgebra de $\mathfrak{g}$. Com isto, provamos a seguinte proposição:

Proposição 1.1.5. $\mathfrak{n}(\mathfrak{h})$ *é uma subálgebra de* $\mathfrak{g}$.

Observação 1.1.6. $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{n}(\mathfrak{h})$.

Exemplo 1.1.3. Consideremos $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ com base canônica dada por

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

As relações entre os comutadores resultam em

$$[h,x] = 2x, \ [h,y] = -2y, \ [x,y] = h \tag{1.1.4}$$

Portanto, vemos que a álgebra 1-dimensional $\mathbb{C}h$ é seu próprio normalizador[1].

[1] $\mathbb{C}h$ é chamada subálgebra de Cartan de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. As relações feitas em 1.1.4 tem um papel importante no estudo da estrutura e representações de álgebras de Lie semissimples. Para mais detalhes, ver por exemplo [EW00, Sec. 10.2] e [Hum78, Sec. 15.3]

1.1.8 Representações de $\mathfrak{g}$.

Definição 1.1.13. Uma representação de uma álgebra $\mathfrak{g}$ é um homomorfismo $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ em que V é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$. Dizemos que ϕ é representação de $\mathfrak{g}$ sobre V.

Por exemplo, recordemos que para $x \in \mathfrak{g}$, o operador linear $\operatorname{ad} x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ dado por $\operatorname{ad} x(y) = [x,y]$, $\forall y \in \mathfrak{g}$ é uma derivação de $\mathfrak{g}$. Como a aplicação $\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \to \operatorname{Der} \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ é um homomorfismo, dizemos que ad é uma representação de $\mathfrak{g}$ em si mesmo. Tal representação é chamada Representação Adjunta de $\mathfrak{g}$, e nestas condições, dizemos que $\mathfrak{g}$ age sobre si mesmo via $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$.

Proposição 1.1.6. $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ *é um ideal de* $\operatorname{Der} \mathfrak{g}$ *e* $\operatorname{Ker}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

1.2 Álgebras de Lie Solúveis e Nilpotentes.

Uma estratégia que tem demonstrado grande êxito é estudar a estrutura das álgebras de Lie através do estudo de seus ideais. Em certas ocasiões, é interessante o estudo de quanto podemos aproximar $\mathfrak{g}$ a uma álgebra de Lie abeliana. Questões como estas são respondidas mediante o estudo da solubilidade e nilpotência da álgebra $\mathfrak{g}$. Nesta seção, veremos algumas definições e propriedades envolvendo tais conceitos necessários para entender outros dados posteriormente no presente trabalho.

Definição 1.2.1. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, definimos a álgebra derivada $\mathfrak{g}'$ como a subálgebra de $\mathfrak{g}$ gerada por todos os colchetes $[x,y]$ tais que $x,y \in \mathfrak{g}$. Acostumamos denotar $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$.

Lema 1.2.1. *Seja I um ideal de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Então $\mathfrak{g}/I$ é abeliano se, e somente se, I contém a álgebra derivada $\mathfrak{g}'$.*

Demonstração. A álgebra $\mathfrak{g}/I$ é abeliana se, e somente se, para cada $x,y \in \mathfrak{g}$ temos

$$[x+I, y+I] = [x,y] + I = I$$

ou, equivalentemente, para todo $x,y \in \mathfrak{g}$, $[x,y] \in I$. Como I é um subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$, isto ocorre se, e somente se, o subespaço gerado pelos colchetes $[x,y]$ está contido em I. Logo $\mathfrak{g}' \subset I$.

□

Observação 1.2.1. O Lema acima afirma que a álgebra derivada $\mathfrak{g}'$ é o menor ideal de $\mathfrak{g}$ tal que a álgebra quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ resulta comutativa.

Definição 1.2.2. (Série derivada) Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ qualquer. Definimos a série derivada de $\mathfrak{g}$, indutivamente como sendo a sequência de ideais encaixantes

$$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}^{(1)} \supset \mathfrak{g}^{(2)} \supset \dots$$

em que $\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}' = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, $\mathfrak{g}^{(2)} = \left[\mathfrak{g}^{(1)},\mathfrak{g}^{(1)}\right], \dots, \mathfrak{g}^{(n)} = \left[\mathfrak{g}^{(n-1)},\mathfrak{g}^{(n-1)}\right]$ para $n \geq 2$

Observação 1.2.2. Como o produto de ideais é um ideal, então temos que $\mathfrak{g}^{(k)}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ (e não apenas um ideal de $\mathfrak{g}^{(k-1)}$) para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Com efeito, a álgebra derivada $\mathfrak{g}'$ é um ideal de $\mathfrak{g}$, pois

$$\begin{aligned}[[x,y],z] \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] &= \mathfrak{g}',\ \forall x,y,z \in \mathfrak{g} \\ \Longrightarrow [\mathfrak{g}',\mathfrak{g}] &\subset \mathfrak{g}'\end{aligned}$$

Por indução matemática, suponhamos que $\mathfrak{g}^{(i)}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$, para $i > 1$, logo

$$\left[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{(i+1)}\right] = \left[\mathfrak{g},\left[\mathfrak{g}^{(i)},\mathfrak{g}^{(i)}\right]\right]$$

Então, $\left[\mathfrak{g},\left[\mathfrak{g}^{(i)},\mathfrak{g}^{(i)}\right]\right] \subset \left[\mathfrak{g}^{(i)},\left[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{(i)}\right]\right] + \left[\mathfrak{g}^{(i)},\left[\mathfrak{g}^{(i)},\mathfrak{g}\right]\right] \subset \left[\mathfrak{g}^{(i)},\mathfrak{g}^{(i)}\right] = \mathfrak{g}^{(i+1)}$. Assim, $\mathfrak{g}^{(i+1)}$ também é ideal de $\mathfrak{g}$.

Definição 1.2.3. (Álgebra solúvel) Dizemos que uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão finita é solúvel se existir um $m \geq 1$ tal que $\mathfrak{g}^{(m)} = 0$.

A álgebra das matrizes triangulares superiores $\mathfrak{t}(n,\mathbb{F})$ e de todas as matrizes triangulares superiores estritas $\mathfrak{n}(n,\mathbb{F})$ são solúveis. Mas por exemplo, a álgebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ não é solúvel.

Quando $\mathfrak{g}$ é solúvel, a série derivada de $\mathfrak{g}$ fornece uma aproximação de $\mathfrak{g}$ por uma série finita de ideais com quocientes abelianos.

Lema 1.2.2. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e suponhamos que existam ideais*

$$\mathfrak{g} = I_0 \supset I_1 \supset \ldots \supset I_m = 0$$

tais que I_{k-1}/I_k são álgebras de Lie abelianas para $1 \leq k \leq m$, então $\mathfrak{g}$ é solúvel.

Demonstração. Aplicando o Lema 1.2.1 na hipótese (vendo I_k como uma álgebra), vamos mostrar por indução que $\mathfrak{g}^{(k)} \subset I_k$ para todo $1 \leq k \leq m$.
Como $\mathfrak{g}/I_1$ é abeliana, então $\mathfrak{g}' \subset I_1$. Suponhamos que $\mathfrak{g}^{(k-1)} \subset I_{k-1}$, para $k \geq 2$, como a álgebra de Lie I_{k-1}/I_k é abeliana, temos que $[I_{k-1},I_{k-1}] \subset I_k$. Mas também $\mathfrak{g}^{(k-1)} \subset I_{k-1}$ e portanto

$$\mathfrak{g}^{(k)} = \left[\mathfrak{g}^{(k-1)},\mathfrak{g}^{(k-1)}\right] \subset [I_{k-1},I_{k-1}] \subset I_k$$

Logo, $\mathfrak{g}^{(k)} \subset I_k$ e portanto $\mathfrak{g}^{(m)} = 0$.

□

Lema 1.2.3. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie.*

1. *Se $\mathfrak{g}$ é solúvel, então qualquer subálgebra e qualquer imagem homomorfa de $\mathfrak{g}$ também é solúvel.*

2. *Se $\mathfrak{g}$ possui um ideal solúvel I tal que $\mathfrak{g}/I$ é solúvel, então $\mathfrak{g}$ é solúvel.*

3. *Se I,J são ideais solúveis de $\mathfrak{g}$, então $I+J$ é um ideal solúvel de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração.

1. Se $\mathfrak{g}_1$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$, então para cada k é claro que $\mathfrak{g}_1^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{(k)}$. Assim, se $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ então tem-se $\mathfrak{g}_1^{(k)} = 0$ também. Similarmente, se $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{n}$ é qualquer epimorfismo de álgebras de Lie, é possível mostrar por indução que $\phi\left(\mathfrak{g}^{(i)}\right) = \mathfrak{n}^{(i)}$ e portanto $\mathfrak{n}$ resultaria solúvel.

2. Se $\mathfrak{g}/I$ é solúvel então para algum $m \geq 1$ temos que $(\mathfrak{g}/I)^{(m)} = 0$, e portanto $\mathfrak{g}^{(m)} \subset I$. Como I também é solúvel, existe algum $n \geq 1$ tal que $I^{(k)} = 0$. Logo $\left(\mathfrak{g}^{(m)}\right)^{(k)} = \mathfrak{g}^{(m+k)} \subset I^{(k)} = 0 \Longrightarrow \mathfrak{g}^{(m+k)} = 0$ e portanto $\mathfrak{g}$ é solúvel.

3. Pelo Teorema 1.1, temos que $(I+J)/I \cong J/(I \cap J)$ que é solúvel pelo ítem (1). Uma vez que I é solúvel, pelo ítem (2) o ideal J também é solúvel.

□

Corolário 1.2.1. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita. Existe um único ideal solúvel de $\mathfrak{g}$ que contém qualquer outro ideal de $\mathfrak{g}$.

Demonstração. Seja R um ideal solúvel com dimensão o maior possível. Suponhamos que I é qualquer outro ideal solúvel, pelo item (3) do Lema 1.2.3, $R+I$ também é um ideal solúvel. Agora $R \subset R+I$ e portanto $\dim R \leq \dim(R+I)$. Mas R foi escolhido de tal jeito que a dimensão dele seja o maior possível, logo $\dim R = \dim R + I$ e $R = R+I$. Portanto $I \subset R$.

□

O corolário acima mostra a existência de um único ideal solúvel maximal de $\mathfrak{g}$, denominado Radical de $\mathfrak{g}$ e denotado por $\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$. No caso em que $\operatorname{Rad}\mathfrak{g} = 0$, dizemos que $\mathfrak{g}$ é semissimples:

Definição 1.2.4. Uma álgebra de Lie não nula $\mathfrak{g}$ é semissimples se não possui ideais solúveis próprios não nulos, isto é, se $\operatorname{Rad}\mathfrak{g} = 0$.

Definição 1.2.5. Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é simples se seus únicos ideais são os triviais.

Lema 1.2.4. *Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie, então $\mathfrak{g}/\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$ é semissimples.*

Demonstração. Seja $\bar{J}$ um ideal solúvel de $\mathfrak{g}/\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$. Se $\bar{J}$ é não trivial, existe um ideal J de $\mathfrak{g}$ contendo $\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$ e tal que

$$\bar{J} = \{x + \operatorname{Rad}\mathfrak{g} : x \in J\} = \frac{J}{\operatorname{Rad}\mathfrak{g}}$$

Por definição, $\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$ é solúvel e $\bar{J} = J/\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$ é solúvel por hipótese. Portanto, pelo Lema 1.2.3 J também é solúvel, logo J está contido em $\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$ e, segue que $\operatorname{Rad}\mathfrak{g} = J$ e $\bar{J} = 0$. Então $\mathfrak{g}/\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$ é semissimples.

□

No caso que $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie não nula, temos a seguinte compatibilidade.

Proposição 1.2.1. *Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie simples, então $\mathfrak{g}$ é semissimples.*

Demonstração. Se $\mathfrak{g}$ é simples, a série derivada $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ é constante (supondo $\mathfrak{g}$ não abeliana) e portanto $\mathfrak{g}^{(i)} = \mathfrak{g}$ para qualquer $i \in \mathbb{N}$. Logo $\mathfrak{g}$ não é solúvel e portanto $\operatorname{Rad}\mathfrak{g} \neq \mathfrak{g}$. Mas $\operatorname{Rad}\mathfrak{g}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$, logo $\operatorname{Rad}\mathfrak{g} = \{0\}$.

□

Definição 1.2.6. Definimos a série central descendente de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ como

$$\mathfrak{g}^0 \supset \mathfrak{g}^1 \supset \mathfrak{g}^2 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}^k \supset \ldots$$

em que $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}', \ldots, \mathfrak{g}^k = \left[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}\right]$, $(k \geq 2)$. Como o produto de ideais é um ideal, $\mathfrak{g}^k$ é também um ideal de $\mathfrak{g}$ (e não apenas um ideal de $\mathfrak{g}^{k-1}$).

A razão da série central provem do fato que $\mathfrak{g}^k/\mathfrak{g}^{k+1}$ está contido no centro de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{k+1}$.

Definição 1.2.7. Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ diz-se nilpotente se existe $k \geq 1$ tal que $\mathfrak{g}^k = 0$.

Exemplos.

1. A álgebra das matrizes triangulares superiores estritas $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$.

2. Uma álgebra de Lie nilpotente é solúvel.

3. Um exemplo clássico de uma álgebra de Lie que é solúvel mas não nilpotente é a álgebra das matrizes triangulares superiores $\mathfrak{t}(n, \mathbb{F})$ para $n \geq 2$.

Lema 1.2.5.

1. *Se $\mathfrak{g}$ é nilpotente, então toda subálgebra de $\mathfrak{g}$ é nilpotente.*

2. *Se $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ é nilpotente, então $\mathfrak{g}$ é nilpotente.*

3. *Se $\mathfrak{g}$ é nilpotente e não nula, então $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq 0$.*

Demonstração. A parte (1) segue da definição. Para a parte (2), por indução temos que:

$$\left(\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})}\right)^k = \frac{\mathfrak{g}^k}{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})}$$

Como $(\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))^m$ é zero para algum m, segue que $\mathfrak{g}^m$ está contido em $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ e portanto temos $\mathfrak{g}^{m+1} = 0$. Finalmente, para (3), se $\mathfrak{g}$ é nilpotente então $\mathfrak{g}^k = 0$ e $\mathfrak{g}^{k-1} \neq 0$ para algum k. Portanto, $\mathfrak{g}^{k-1} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, seguindo assim que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq 0$.

□

1.2.1 Critérios de nilpotência.

Definição 1.2.8. Considerando $\phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, definimos a sequência $\left\{\phi^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ de endomorfismos em V indutivamente como:

$$\begin{aligned}
\phi^{(0)} &= id \\
\phi^{(1)} &= \phi \\
&\vdots \\
\phi^{(n)} &= \phi^{(n-1)} \circ \phi, \ \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Dizemos que ϕ é nilpotente se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\phi^{(n)} = 0$.

Definição 1.2.9. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{F}$. Dizemos que $x \in \mathfrak{g}$ é ad-nilpotente quando $\operatorname{ad} x \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ é nilpotente.

Por exemplo, tomando $\mathfrak{g} = \mathfrak{d}(n, \mathbb{F}) = \{a \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) : a\, é\, diagonal\}$ então para todo $a \in \mathfrak{g}$ temos que $\operatorname{ad} a = 0$ e portanto a é ad-nilpotente.

A condição de nilpotência para $\mathfrak{g}$ equivale dizer que $\operatorname{ad} x_1 \operatorname{ad} x_2 \ldots \operatorname{ad} x_n(y) = 0$ para todo $x_1, x_2, \ldots, x_n, y \in \mathfrak{g}$. Em particular, $(\operatorname{ad} x)^{(n)} = 0$, para todo $x \in \mathfrak{g}$, mostrando que $\operatorname{ad} x$ é um endomorfismo nilpotente de índice n. Logo, se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie nilpotente então todo elemento $x \in \mathfrak{g}$ é ad-nilpotente. Ocorre que a recíproca também é verdadeira, e tal resultado é conhecido como Teorema de Engel.

Teorema 1.2. *(Teorema de Engel) Se todos os elementos de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ são ad-nilpotentes, então $\mathfrak{g}$ é uma álgebra nilpotente.*

Para provar o Teorema, vamos necessitar dos seguintes fatos.

Lema 1.2.6. *Seja $x \in \mathfrak{gl}(V)$ um operador nilpotente, então $\operatorname{ad} x$ é nilpotente.*

Demonstração. Associamos a x dois endomorfismos de $\operatorname{End}(V)$; as translações $\lambda_x(y) = xy$ à esquerda e à direita $\rho_x(y) = yx$. Observe que $\operatorname{ad} x = \lambda_x - \rho_x$. Resulta que ambos operadores comutam entre si, pois

$$(\lambda_x \circ \rho_x)(y) = \lambda_x(yx) = x(yx) = (\lambda_x(y)) \circ x = (\rho_x \circ \lambda_x)(y)$$

Ademais, como existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^{(n)} = 0$, obtemos que $\lambda_x^{(n)}(y) = x^n y = 0$ e $\rho_x^{(n)}(y) = yx^n = 0$, isto é, ambos operadores também são nilpotentes. Pelo Teorema binomial,

$$\begin{aligned}
(\operatorname{ad} x)^{(2n)} &= (\lambda_x - \rho_x)^{(2n)} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \lambda_x^k (-\rho_x)^{2n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} \lambda_x^k (-\rho_x)^{2n-k} + \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} \lambda_x^k (-\rho_x)^{2n-k} \\
&= 0
\end{aligned}$$

pois $(\rho_x)^{(2n-k)} = 0$ para $k \leq n$ e $(\lambda_x)^{(k)} = 0$ para $k > n$. Portanto, $\operatorname{ad} x$ é nilpotente.

□

Lema 1.2.7. *(Lema de Engel) Seja $\mathfrak{g}$ uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$, com $V \neq 0$ um espaço vetorial de dimensão finita. Se todos os elementos de $\mathfrak{g}$ são operadores nilpotentes, então existe um vetor não nulo $v \in V$ tal que $\mathfrak{g} \centerdot v = 0$.*

Demonstração. Vamos aplicar indução sobre a dimensão de $\mathfrak{g}$. Para $\dim \mathfrak{g} = 0$ ou $\dim \mathfrak{g} = 1$ não há nada que provar. Portanto, assumimos que $\dim \mathfrak{g} = n > 1$ e o Teorema vale para qualquer subálgebra de $\mathfrak{gl}(W)$ de dimensão menor do que n, em que W é qualquer espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$.

Como $\mathfrak{g}$ age sobre si mesma via ad, pelo Lema 1.2.6 temos que $\operatorname{ad} x$ é um operador nilpotente para todo $x \in \mathfrak{g}$. Considerando $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$, pelo mesmo argumento, $\mathfrak{h}$ age sobre $\mathfrak{g}$ (via ad) e sobre o espaço $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Portanto, pelo Teorema de isomorfismo, para cada $x \in \mathfrak{h}$ podemos definir o operador $\overline{\operatorname{ad}} x : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ como

$$\overline{\operatorname{ad}} x(y + \mathfrak{h}) = \operatorname{ad} x(y) + \mathfrak{h}$$

Tal operador está bem definido sobre $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, e além disso, $\overline{\mathrm{ad}}x$ é um operador nilpotente. Logo a aplicação $\overline{\mathrm{ad}} : z \longmapsto \overline{\mathrm{ad}}z$ é um homomorfismo de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ e $\overline{\mathfrak{h}} = \overline{\mathrm{ad}}\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ consistindo de operadores nilpotentes em $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Como $\dim \overline{\mathfrak{h}} \leq \dim \mathfrak{h} < \dim \mathfrak{g}$ pela hipótese de indução aplicada a $\overline{\mathfrak{h}}$ e $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, existe $x+\mathfrak{h}$ com $x \notin \mathfrak{h}$ tal que $\overline{\mathfrak{h}} \boldsymbol{.} (x+\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Logo, existe $x \notin \mathfrak{h}$ com $[x,\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ mostrando que $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.

Suponhamos agora que $\mathfrak{m}$ é uma subálgebra própria maximal de $\mathfrak{g}$. Segue que $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{g}$ e $\mathfrak{m}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{m}$ é maximal, $\operatorname{codim}\mathfrak{m} = 1$ e

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{F}z$$

para $z \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{m}$. Como $\dim \mathfrak{m} < \dim \mathfrak{g}$, novamente pela hipótese de indução existe um autovetor comum em V para todo elemento em $\mathfrak{m}$. Isto é, o subespaço $W = \{v \in V : \mathfrak{m} \boldsymbol{.} v = 0\}$ é não nulo. Vejamos que W é estável por $\mathfrak{g}$. Com efeito, seja $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{m}$ e $w \in W$; então

$$y(x(w)) = (y \circ x)(w) = (x \circ y)(w) - [x,y](w) = 0$$

pois $x(y(w)) = 0$ e $[x,y] \in \mathfrak{m} \Rightarrow x(w) \in W$. Escolha $z \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{m}$ como acima, de modo que z admite um vetor $v \in W$ tal que $z \boldsymbol{.} v = 0$ (pois z é um operador nilpotente em V e por restrição também é nilpotente em W). Como $\mathfrak{m}$ também anula v, segue que $\mathfrak{g}$ anula v, i.e, $\mathfrak{g} \boldsymbol{.} v = 0$.

$\square$

Demonstração de 1.2: Vamos mostrar que se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie tal que $\mathrm{ad}x$ é nilpotente para todo $x \in \mathfrak{g}$ então $\mathfrak{g}$ é nilpotente. Por indução sobre a dimensão de $\mathfrak{g}$, os casos $\dim \mathfrak{g} = 0$ e $\dim \mathfrak{g} = 1$ são triviais.

Suponhamos que o resultado seja válido para álgebras de Lie de dimensão menor do que $\dim \mathfrak{g} = n$. Como $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ que consiste somente de operadores nilpotentes, pelo Lema de Engel, existe um elemento não nulo $z \in \mathfrak{g}$ tal que $\mathrm{ad}x(z) = 0$, $\forall x \in \mathfrak{g}$ e portanto z pertence ao centro $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$. Logo $\mathfrak{z} \neq 0$.

Consideremos a álgebra quociente $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ e seja $\mathrm{ad}_{\mathfrak{z}}$ a representação adjunta, então:

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{z}}(x+\mathfrak{z})(y+\mathfrak{z}) = [x+\mathfrak{z}, y+\mathfrak{z}] = [x,y]+\mathfrak{z}$$

Logo, para cada $x \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{z}}(x+\mathfrak{z})$ é um operador nilpotente sobre $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ e por hipótese de indução (pois $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{z} < \dim \mathfrak{g}$) temos que a álgebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ é nilpotente. Pelo Lema 1.2.5, $\mathfrak{g}$ é nilpotente.

$\square$

Definição 1.2.10. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre um corpo $\mathbb{F}$. Dizemos que uma cadeia de subespaços

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$$

é uma bandeira se $\dim V_i = i$. Dizemos que um operador $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ estabiliza uma bandeira se $T(V_i) \subset V_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Apresentamos a seguir algumas consequências do Teorema de Engel:

Corolário 1.2.2. Se $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$ (com $\dim V < \infty$ e $V \neq 0$) contendo somente operadores nilpotentes, então $\mathfrak{g}$ estabiliza alguma bandeira em V. Ademais, vale $\mathfrak{g} \centerdot V_i \subsetneq V_{i-1}$ para todo $1 \leq i \leq n = \dim V$. Em outras palavras, existe uma base de V tal que qualquer endomorfismo em $\mathfrak{g}$ possui representação matricial em $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$.

Demonstração. Vamos usar indução sobre a dimensão de V. Os casos $\dim V = 0$ ou $\dim V = 1$ resultam triviais, pois o único elemento nilpotente sobre V é o próprio 0. Suponhamos que $\dim V = n$ e o resultado é válido para qualquer espaço de dimensão menor do que n. Pelo lema 1.2.7, existe $0 \neq v \in V$ tal que $\mathfrak{g} \centerdot v = 0$ e consideremos $V_1 = \mathbb{F}v$. Temos que V_1 é $\mathfrak{g}$-invariante, e além disso, $\mathfrak{g}$ age sobre o espaço quociente $W = \frac{V}{V_1}$ via

$$x \centerdot (v + V_1) = x \centerdot v + V_1, \forall x \in \mathfrak{g}, v \in V$$

Como $x^{(n)} = 0$ para algum n então $x^{(n)} \centerdot (v + V_1) = V_1$ no quociente W. Logo, a imagem de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{gl}(W)$ também contém somente operadores nilpotentes. Como $\dim W < \dim V$ pela hipóteses de indução, $\mathfrak{g}$ estabiliza uma bandeira em W, digamos:

$$\frac{V_1}{V_1} = W_0 \subset W_1 \subset \ldots \subset W_{n-1} = W$$

com $\mathfrak{g} \centerdot W_i \subset W_{i-1}$. Pelo Teoremas de isomorfismos, existem subespaços $V_2, \ldots, V_n$ de V contendo V_1 tais que $W_i = V_{i+1}/V_1$. Como $\dim W_i = i$ e $\dim W_i = \dim V_{i+1} - \dim V_1$, segue-se que $\dim V_{i+1} = i + 1$; em particular, $\dim V_n = n = \dim V$ e portanto $V_n = V$.
Como $x \centerdot W_i \subset W_{i-1}, \forall x \in \mathfrak{g}$, para cada $v_{i+1} \in V_{i+1}$ existem $v_1, \tilde{v}_1 \in V_1$ e $v_i \in V_i$ tais que

$$\begin{aligned} x \centerdot (v_{i+1} + v_1) &= v_i + \tilde{v}_1, \\ \Longrightarrow x \centerdot v_{i+1} + x \centerdot \lambda v &= v_i + \tilde{v}_1. \end{aligned}$$

Mas $x \centerdot \lambda v = 0$, então $x \centerdot v_{i+1} = v_i + \tilde{v}_1 \in V_i$ e portanto $x \centerdot V_{i+1} \subset V_i$. A conclusão final é válida notando que se $T \in \mathrm{End}(\mathbb{F}, V)$ é um endomorfismo que estabiliza uma bandeira $0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$ e $B = \{v_1, \ldots, v_n\}, B_i = \{v_1, \ldots, v_i\}$ são bases para V e V_i respectivamente, então $[T]_B$ tem a forma

$$[T]_B = \begin{bmatrix} * & * & \ldots & * \\ 0 & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & * \end{bmatrix}$$

□

Corolário 1.2.3. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie nilpotente e $K \subset \mathfrak{g}$ um ideal não nulo. Então $K \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ é não trivial. Em particular, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq 0$.

Demonstração. Consideremos a aplicação

$$\psi : x \in \mathfrak{g} \longmapsto \mathrm{ad}\, x_{|K} \in \mathfrak{gl}(K)$$

que simplesmente denota a restrição da representação adjunta de $\mathfrak{g}$ em K. Portanto, dizemos que $\mathfrak{g}$ age sobre K via representação adjunta. Como $\mathfrak{g}$ é nilpotente, temos que $\psi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(K)$ deve conter somente endomorfismos nilpotentes de K. Pelo Lema de Engel existe um vetor $0 \neq v \in K$ tal que $\psi(\mathfrak{g}) \centerdot v = 0 \Longrightarrow \mathrm{ad}x_{|K}(v) = [x,v] = 0$. Logo, $[\mathfrak{g}, v] = 0$ e $v \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

□

1.2.2 Critérios de Solubilidade e Semissimplicidade.

Vamos demonstrar alguns resultados sobre solubilidade que são similares aos feitos para nilpotência. Daqui em diante, salvo menção contrária, $\mathbb{F}$ será sempre um corpo algebricamente fechado e de característica zero. Para o caso em que $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ é uma subálgebra solúvel, temos o seguinte Teorema, cuja demonstração é semelhante ao Lema de Engel.

Teorema 1.3. *Seja $\mathfrak{g}$ uma subálgebra de Lie solúvel de $\mathfrak{gl}(V)$, com V um espaço vetorial não nulo de dimensão finita. Então V contém um autovetor comum para $\mathfrak{g}$.*

Demonstração. Tal como no Lema de Engel, vamos usar indução sobre a dimensão de $\mathfrak{g}$. Os casos $\dim \mathfrak{g} = 0$ ou $\dim \mathfrak{g} = 1$ resultam triviais.

1. Existe um ideal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ de codimensão 1. Com efeito, como $\dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] < \dim \mathfrak{g}$, se $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ tem codimensão 1 pode ser escolhido como $\mathfrak{h}$. Caso contrário, dado que todo subespaço S contendo $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ é um ideal de $\mathfrak{g}$, escolha um de codimensão 1 e chame-o $\mathfrak{h}$. Logo $\dim \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}} = 1$.

2. Vejamos que, usando a hipótese indutiva, $\mathfrak{h}$ admite um autovetor comum. Com efeito, se $\mathfrak{h} = 0$, então $\mathfrak{g}$ é abeliano de dimensão 1 e qualquer vetor de uma base de autovetores para $\mathfrak{g}$ finaliza a demonstração. Se $\mathfrak{h} \neq 0$, como $\mathfrak{h}$ é solúvel, existe $v \in V$ tal que $x \centerdot v = \lambda(x) v$, $\forall x \in \mathfrak{h}$ e $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

3. Seja W o subespaço
$$W = \{w \in V : x \centerdot w = \lambda(x) w,\ \forall x \in \mathfrak{h}\} \neq 0$$
W é um subespaço estável sobre a ação de $\mathfrak{g}$. Com efeito, sejam $w \in W$, $x \in \mathfrak{g}$ e $y \in \mathfrak{h}$ arbitrário, então
$$yx \centerdot w = xy \centerdot w - [x,y] \centerdot w = \lambda(y) x \centerdot w - \lambda([x,y]) w$$
Provemos que $\lambda([x,y]) = 0$, $\forall y \in \mathfrak{h}$, seguindo assim que $x \centerdot w \in W$. Seja $0 \neq w \in W$ fixado, consideremos o menor inteiro $n \in \mathbb{N}$ tal que $\{w, x \centerdot w, \ldots, x^{(n-1)} \centerdot w\}$ é linearmente independente. Definamos $W_i = \mathrm{Span}\{w, x \centerdot w, \ldots, x^{(i-1)} \centerdot w\}$ com $W_0 = 0$, $\dim W_n = n$ e $W_n = W_{n+i}$ $\forall i \geq 0$. Portanto, $x \centerdot W_n \subset W_n$.

   Afirmamos que, relativa à base $\{w, x \centerdot w, \ldots, x^{(n-1)} \centerdot w\}$ de W_n, $y \in \mathfrak{h}$ é representado por uma matriz triangular superior com entradas diagonais igual a $\lambda(y)$. Com efeito, dado $y \in \mathfrak{h}$,
$$\begin{aligned} yx^i \centerdot w &= yxx^{i-1} \centerdot w - xyx^{i-1} \centerdot w + xyx^{i-1} \centerdot w \\ &= [y,x] x^{i-1} \centerdot w + xyx^{i-1} \centerdot w \\ &= xyx^{i-1} \centerdot w - [x,y] x^{i-1} \centerdot w \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Isto permite dar lugar à equação de congruência

$$yx^i \centerdot w \equiv \lambda(y)\, x^i \centerdot w \qquad \bmod W_i \tag{1.2.2}$$

permitindo escrever $y \in \mathfrak{h}$ na base de W_n como

$$[y]_{W_n} = \begin{pmatrix} \lambda(y) & * & * & * \\ 0 & \lambda(y) & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & \lambda(y) \end{pmatrix}$$

e cujo traço é $\mathrm{tr}_{W_n}(y) = n\lambda(y)$. Como $[y,x] \in \mathfrak{h}$ então a fórmula anterior também vale para $[y,x]$.

Dado que tanto x como y estabilizam W_n, $[x,y]$ age sobre W_n como o comutador de dois endomorfismo de W_n e portanto

$$n\lambda([x,y]) = \mathrm{tr}_{W_n}([x,y]) = \mathrm{tr}([x_{W_n}, y_{W_n}]) = 0$$

pois $\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 0$ e $\mathrm{tr}(AB - BA) = 0 \Longrightarrow \lambda([x,y]) = 0,\ \forall y \in \mathfrak{h}$.

4. Finalmente, encontramos em W um autovetor comum z para $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{F}z$. Com efeito, escrevendo $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{F}z$ para algum $z \in \mathfrak{g}$ temos que a restrição $\tilde{z} = z_W$ é um endomorfismo em W e portanto existe um autovetor $w \in W$. Agora, vejamos que tal autovetor funciona: Se $x \in \mathfrak{g}$ e $\tilde{x}$ representa a restrição de x em $\mathfrak{h}$ então temos que

$$x.w = \lambda(\tilde{x}).w + rz(w),\ \ r \in \mathbb{F}, x \in \mathfrak{g}$$

e por ser $\mathbb{F}$ é algebricamente fechado, existe solução para $rz = \mu x$. Logo w é o autovalor procurado.

$\square$

Uma aplicação do Teorema 1.3, é o Teorema de Lie, garantindo que qualquer operador de uma subálgebra solúvel de $\mathfrak{gl}(V)$ possui representação matricial triangular superior.

Teorema 1.4. *(Teorema de Lie) Seja $\mathfrak{g}$ uma subálgebra solúvel de $\mathfrak{gl}(V)$ com $\dim V < \infty$. Então $\mathfrak{g}$ estabiliza alguma bandeira em V. Em outras palavras, as matrizes de $\mathfrak{g}$ relativas a uma certa base de V são triangulares superiores.*

Corolário 1.2.4. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra solúvel de dimensão finita. Então existe uma cadeia de ideais

$$0 = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$$

com $\dim \mathfrak{g}_i = i$

Demonstração. Como $\mathfrak{g}$ age sobre si mesma via representação adjunta e $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(V)$ é solúvel, segue que $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ estabiliza algum bandeira em $\mathfrak{g}$. Digamos

$$0 = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$$

com $\dim \mathfrak{g}_i = i$. Mas $\mathrm{ad}\, \mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{g}_i \Longrightarrow [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_i$ e portanto os $\mathfrak{g}_i$ são ideais.

□

Corolário 1.2.5. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra solúvel. Então qualquer $x \in \mathfrak{g}'$ é ad-nilpotente. Em particular, a álgebra derivada $\mathfrak{g}'$ é nilpotente.

Demonstração. Pelo corolário 1.2.4 existe uma cadeia de ideais

$$0 = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$$

com $\dim \mathfrak{g}_i = i$. Escolha uma base $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ para $\mathfrak{g}$ e seja $V_i = \mathrm{Span}\{x_1, \ldots, x_i\}$. Pelo Teorema de Lie, $[\mathrm{ad}x]_B \in \mathfrak{t}(n, \mathbb{F})$, e além disso, $[\mathfrak{t}(n, \mathbb{F}), \mathfrak{t}(n, \mathbb{F})] \subset \mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$, logo $\mathrm{ad}x$ é nilpotente. Finalmente, pelo Teorema de Engel, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é nilpotente.

□

Proposição 1.2.2. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre o corpo $\mathbb{F}$. Então $\mathfrak{g}$ é solúvel se e somente se $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é nilpotente.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Pelo Teorema de Engel e pelo Cor.1.2.5.

($\Longleftarrow$) Por indução matemática, é possível mostrar que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^n \supset \mathfrak{g}^{(n+1)}$ e como $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é nilpotente, necessariamente $\mathfrak{g}^{(n+1)} = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

□

1.2.2.1 Decomposição de Jordan-Chevalley.

A seguir, revisaremos o conceito da decomposição de Jordan-Chevalley de um operador linear sobre um $\mathbb{F}$-espaço vetorial V de dimensão finita de característica arbitrária. O leitor pode encontrar todas estas propriedades com mais detalhes nas referências [EW00, Hum78]. É nesta seção, por exemplo, a importância de $\mathbb{F}$ ser um corpo algebricamente fechado, pelo simples fato de poder contar com todos os autovalores de qualquer endomorfismo $x \in \mathrm{End}(V)$.

Recordemos que um operados $x \in \mathrm{End}(V)$ é semissimples se as raízes do seu polinômio minimal sobre $\mathbb{F}$ são todas distintas. Equivalentemente, x é semissimples se, e somente se, x é diagonalizável.

Quando dois operadores semissimples comutam entre si, dizemos que são simultaneamente diagonalizáveis logo, a sua soma também é semissimples. Por fim, se $W \subset V$ é qualquer subespaço de V e $x \in \mathrm{End}(V)$ é semissimples, então $x(W) \subset W$, e além disso, a restrição de x a W é semissimples. Além disso, para qualquer $x \in \mathrm{End}(V)$, V admite uma base em relação à forma canônica de Jordan de x. Por exemplo,

$$x = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_3(\lambda_1) & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) \end{pmatrix} = J_3(\lambda_1) \oplus J_2(\lambda_2)$$

A decomposição de Jordan-Chevalley consiste basicamente em decompor o endomorfismo $x \in \mathrm{End}(V)$ como soma de duas matrizes $x = x_s + x_n$, em que x_s é semissimples e x_n é nilpotente. Formalmente:

Proposição 1.2.3. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e $x \in \mathrm{End}(V)$*

1. *Existem únicos operadores $x_s, x_n \in \mathrm{End}(V)$ satisfazendo $x = x_s + x_n$. Ademais, x_s, x_n comutam entre si.*

2. *Existem polinômios $p(t), q(t)$ em uma indeterminada, sem termo constante e tais que*

$$x_s = p(x), x_n = q(x).$$

   Em particular, x_s e x_n comutam com qualquer outro endomorfismo comutável com x.

3. *Se $A \subset B \subset V$ são subespaços de V e $x(B) \subset A$, então x_s e x_n também satisfazem a mesma relação.*

Demonstração. Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ os autovalores de x, $\prod_{i=1}^{l}(t-\alpha_i)^{m_i}$ seu polinômio característico e $V_i = \ker(x - \alpha_i 1)^{m_i}$. Então cada V_i e estável sobre x, $V = \oplus V_i$, e a restrição de x a V_i possui polinômio característico $(t-\alpha_i)^{m_i}$. Uma vez que os fatores $(t-\alpha_i)^{m_i}$ são primos entre si, o Teorema Chinês do Resto garante a existência de um polinômio $p(t)$ satisfazendo as congruências

$$\begin{aligned} p(t) &\equiv \alpha_i \quad \mod (t-\alpha_i)^{m_i}, 1 \leq i \leq l \\ p(x) &\equiv 0 \quad \mod t \end{aligned}$$

em que a última congruência é redundante quando algum dos autovalores de x for nulo, mas deve ser considerada para garantir que $p(x)$ possua termo constante zero. Sejam $q(t) = t - p(t)$, $x_s = p(x)$ e $x_n = q(x)$. Como $p(t)$ e $q(t)$ são polinômios em x, então x_s e x_n comutam entre si, e com qualquer outro endomorfismo que comuta com x. Além disso, x_s e x_n estabilizam qualquer subespaço de V estável sobre x, particularmente os V_i, e x_s age diagonalmente sobre V_i por escalar α_i. Por definição, $x_n = x - x_s$ é nilpotente (pois todos seus autovalores são nulos). O item (3) é claro, uma vez que $p(t)$ e $q(t)$ possuem termo constante zero.

Resta apenas provar a unicidade da decomposição (item (1)). Suponhamos então que $x = \tilde{x}_s + \tilde{x}_n$ representa outra decomposição de x, então temos $x_s - \tilde{x}_s = \tilde{x}_n - x_n$. Ora, o lado direito desta igualdade é nilpotente, enquanto o lado esquerdo é semissimples ($\tilde{x}_s, \tilde{x}_n, x_s$ e x_n comutam entre si, pois são polinômios em x), portanto deve ser identicamente nula, isto é, $\tilde{x}_s = x_s$ e $\tilde{x}_n = x_n$.

□

O operador x_s é chamado parte semissimples de x e o operador x_n parte nilpotente de x. A decomposição $x = x_s + x_n$ é chamada decomposição de Jordan-Chevalley de x, ou simplesmente decomposição de Jordan de x. Uma propriedade importante é que a decomposição de um endomorfismo é preservada por representação adjunta:

Lema 1.2.8. *Seja $x \in \operatorname{End} V$ com $\dim V < \infty$ tal que $x = x_s + x_n$ é sua decomposição de Jordan. Então $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} x_s + \operatorname{ad} x_n$ é a decomposição de Jordan para $\operatorname{ad} x$ em $\operatorname{End}(\operatorname{End}(V))$.*

Demonstração. Claramente, $\operatorname{ad} x_s$ e $\operatorname{ad} x_n$ são respectivamente semissimples e nilpotente, e comutam entre si, pois $[\operatorname{ad} x_s, \operatorname{ad} x_n] = \operatorname{ad}[x_s, x_n] = 0$. Pelo item (1) da proposição 1.2.3, necessariamente $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} x_s + \operatorname{ad} x_n$ é a decomposição para $\operatorname{ad} x$.

□

1.2.2.2 Critérios de Cartan.

Para quaisquer $x, y \in \mathfrak{g}$, sabemos que a aplicação $\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y$ (por abuso de notação, denotada como $\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y$) é um operador sobre $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ e portanto podemos considerar seu traço.

Definição 1.2.11. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre um corpo $\mathbb{F}$. A forma de Killing sobre $\mathfrak{g}$ é a aplicação $\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{F}$

$$\kappa(x, y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y)$$

Observação 1.2.3. A forma de Killing κ é uma forma bilinear simétrica e associativa, no sentido que

$$\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z]).$$

A verificação fica a cargo do leitor.

Exemplo 1.2.1. Consideremos $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ gerada por $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ com as relações $[h, x] = 2x$, $[h, y] = -2y$, $[x, y] = h$. Seja $\{x, h, y\}$ uma ordenação da base mencionada, então a forma de Killing é dada por

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resulta que, a forma de Killing sobre um ideal I de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ coincide com a restrição da forma de Killing dada em $\mathfrak{g}$, tal como podemos apreciar no seguinte Lema:

Lema 1.2.9. *Seja I um ideal de $\mathfrak{g}$ e κ a forma de Killing em $\mathfrak{g}$. Se $\kappa_{|I \times I}$ é a restrição de κ sobre I e κ_I a forma de Killing em I, então $\kappa_I = \kappa_{|I \times I}$.*

Demonstração. Com efeito, se W é um subespaço de um espaço vetorial de dimensão finita V e φ é um endomorfismo de V em W, então $\operatorname{tr} \varphi = \operatorname{tr}\left(\varphi_{|W}\right)$. Como $\forall x, y \in I$, o endomorfismo $\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y$ leva $\mathfrak{g}$ em I, seu traço $\kappa(x, y)$ deve coincidir com o traço $\kappa_I(x, y)$ de $(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y)_{|I} = \operatorname{ad} x_{|I} \operatorname{ad} y_{|I}$.

□

O radical de uma forma bilinear simétrica B é o subespaço de $\mathfrak{g}$ definido por

$$S = \{x \in \mathfrak{g} : B(x,y) = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\}$$

Dizemos que B é não degenerada quando $S = 0$. Equivalentemente, isso ocorre se o determinante da matriz associada a B em relação a uma base fixa de $\mathfrak{g}$ é não nulo.

Exemplo 1.2.2. O determinante da forma de Killing dada pelo exemplo 1.2.1 é -128. Portanto a forma de Killing é não degenerada.

O nosso objetivo é mostrar o Teorema de Cartan para semissimplicidade. No entanto, este resultado requer um Critério de Cartan para solubilidade (C.f. [Hum78, Sec. 4.3]) cujo enunciado é apresentado a seguir.

Teorema 1.5. *(Critério de Cartan para solubilidade) Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{F}$. Então $\mathfrak{g}$ é solúvel se e somente se $\kappa(x,y) = 0$ para todo $x \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, $y \in \mathfrak{g}$.*

Esboço da Demonstração.

Primeiro, consideremos V qualquer espaço vetorial de dimensão finita e $x \in \operatorname{End} V$, com decomposição de Jordan $x = x_s + x_n$. Então, $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} x_s + \operatorname{ad} x_n$ é a decomposição de Jordan para $\operatorname{ad} x$ em $\operatorname{End}(\operatorname{End}(V))$.

Com efeito, claramente $\operatorname{ad} x_s$ e $\operatorname{ad} x_n$ são operadores semissimples e nilpotente que comutam entre si, pois $[\operatorname{ad} x_s, \operatorname{ad} x_n] = \operatorname{ad}[x_s,x_n] = 0$. Pelo item (1) da proposição 1.2.3, necessariamente $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} x_s + \operatorname{ad} x_n$ é a decomposição para $\operatorname{ad} x$.

Segundo, afirmamos que se $A \subset B \subset \mathfrak{gl}(V)$ são dois subespaços e M o conjunto dado por

$$M = \{x \in \mathfrak{gl}(V) : [x,B] \subset A\},$$

então, qualquer $x \in M$ tal que $\operatorname{tr}(xy) = 0, \forall y \in M$ é nilpotente.

Finalmente, é possível demonstrar o critério de Cartan para solubilidade, e somente é necessário considerar o caso que $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$:

Para a implicação direta, se $\mathfrak{g}$ é solúvel, pelo Teorema de Lie podemos escolher uma base para V tal que todas as matrizes em $\mathfrak{g}$ são triangulares superiores. Logo, $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{t}(n,\mathbb{F})$ com $\dim V = n$. Ademais, $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{n}(n,\mathbb{F}) \Longrightarrow [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\mathfrak{g} \subset \mathfrak{n}(n,\mathbb{F})\mathfrak{t}(n,\mathbb{F}) \subset \mathfrak{n}(n,\mathbb{F})$ e como $\operatorname{tr}(x) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{n}(n,\mathbb{F})$ segue que $\operatorname{tr}(xy) = 0$ para todo $x \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, $y \in \mathfrak{g}$.

Reciprocamente, vejamos que $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ é nilpotente. Consideremos para isso $A = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, $B = \mathfrak{g}$ e $M = \{x \in \mathfrak{gl}(V) : [x,\mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\} \supset \mathfrak{g}$. Definindo as ações

$$\begin{aligned} [x,y] \centerdot z &= xyz - yxz, \\ x \centerdot [y,z] &= xyz - xzy, \end{aligned}$$

podemos ver que $\operatorname{tr}([x,y] \centerdot z) = \operatorname{tr}(x \centerdot [y,z])$.

Se $[x,y]$ é um gerador de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ e $z \in M$, então $\operatorname{tr}([x,y] \centerdot z) = \operatorname{tr}(x \centerdot [y,z]) = \operatorname{tr}([y,z] \centerdot x) = 0$ pela hipótese. Logo, $[x,y]$ é nilpotente e pelo Teorema de Engel, $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ é nilpotente.

$\square$

Teorema 1.6. *(Critério de Cartan para Semissimplicidade) Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{F}$. Então $\mathfrak{g}$ é semissimples se e somente se a forma de Killing κ é não degenerada.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponha que $\operatorname{Rad}\mathfrak{g} = 0$ e seja S o radical da forma de Killing κ. Pela definição de S, temos que $\kappa(x,y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}x\operatorname{ad}y) = 0, \forall x \in [S,S], y \in S$ e pelo Teorema de Cartan resulta que S é solúvel. Segue que $S \subset \operatorname{Rad}\mathfrak{g} = 0$ e assim κ é não degenerada.
($\Longleftarrow$) Suponha agora que κ é não degenerada, logo $S = \{0\}$. Consideremos um ideal abeliano I de $\mathfrak{g}$ e sejam $x \in I$, $y \in \mathfrak{g}$, então $\operatorname{ad}x\operatorname{ad}y$ leva $\mathfrak{g}$ em I e $(\operatorname{ad}x\operatorname{ad}y)^2$ leva $\mathfrak{g}$ em $[I,I] = 0$. Ou seja, $\operatorname{ad}x\operatorname{ad}y$ é nilpotente. Consequentemente, os autovalores de $\operatorname{ad}x\operatorname{ad}y$ são todos nulos, e $\kappa(x,y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}x\operatorname{ad}y) = 0$ mostrando assim que $I \subset S$. Como κ é não degenerada, temos que $\mathfrak{g}$ não contém nenhum ideal abeliano não nulo, logo $\mathfrak{g}$ é semissimples.

□

O seguinte resultado torna mais precisa a caracterização de uma álgebra de Lie semissimples e seus ideais.

Teorema 1.7. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples. Então existem ideais simples $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_t$ tais que*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_t$$

Além disso, todo ideal simples de $\mathfrak{g}$ coincide com algum dos $\mathfrak{g}_i$.

Demonstração. Consideremos $I \subset \mathfrak{g}$ qualquer ideal arbitrário e seja

$$I^{\perp} = \{x \in \mathfrak{g} : \kappa(x,y) = 0, \forall y \in I\}$$

Como κ é associativa, $I^{\perp}$ também é um ideal de $\mathfrak{g}$. Agora, pelo Teorema de Cartan aplicado na álgebra I resulta que

$$I \cap I^{\perp} = \{x \in I : \kappa(x,y) = 0, \forall y \in I\}$$

é solúvel, logo deve ser 0. Portanto, devemos de ter $\mathfrak{g} = I \oplus I^{\perp}$. Usando indução sobre $\dim\mathfrak{g}$ obtemos a decomposição desejada

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_t \quad (\star)$$

Com efeito, se $\mathfrak{g}$ não é simples, então $\mathfrak{g}$ contém um ideal minimal não nulo $\mathfrak{g}_1$ de modo que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1^{\perp}$ e com $\mathfrak{g}_1$ simples (pela sua minimalidade). Aplicando a hipótese de indução a $\mathfrak{g}_1^{\perp}$ obtemos $(\star)$.

Por último, seja I um ideal simples arbitrário de $\mathfrak{g}$. Então $[I,\mathfrak{g}] \subset I$ também é um ideal de $\mathfrak{g}$ e como $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ segue $[I,\mathfrak{g}] = I$. Mas

$$0 \neq I = [I, \mathfrak{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_t] = \bigoplus [I, \mathfrak{g}_k]$$

donde uns deles tem que ser não nulo. Por exemplo, $I \subset [I,\mathfrak{g}_i]$, assim $I \subset \mathfrak{g}_i$ e portanto $I = \mathfrak{g}_i$

□

Corolário 1.2.6. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples. Então $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$.

1.3 A decomposição abstrata de Jordan-Chevalley.

Vamos estender a noção da decomposição de Jordan-Chevalley para álgebras de Lie gerais. Isto é possível quando $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie semissimples de dimensão finita. Mas primeiramente, precisamos de uma propriedade sobre $\mathbb{F}$-álgebras associativas gerais:

Proposição 1.3.1. *Seja* $\mathfrak{A}$ *uma* $\mathbb{F}$*-álgebra de dimensão finita. Então* $\operatorname{Der}\mathfrak{A}$ *contém as partes semissimples e nilpotentes de todos seus elementos.*

Demonstração. Com efeito, considere $\delta = \sigma + \mu \in \operatorname{Der}\mathfrak{A}$, em que $\sigma, \mu \in \operatorname{End}\mathfrak{A}$ são as partes semissimples e nilpotente de δ respectivamente; basta mostrar que $\sigma \in \operatorname{Der}\mathfrak{A}$. Pelo teorema da decomposição primária, $\mathfrak{A}$ é soma direta dos subespaços

$$\mathfrak{A}_a = \left\{ x \in \mathfrak{A} : (\delta - a.1)^k x = 0, \ para\, algum\, k = k(a) \right\},$$

em que $a \in \mathbb{F}$, e quase todos os $\mathfrak{A}_a$ são nulos com exceção de um número finito deles. Além disso, σ age diagonalmente sobre $\mathfrak{A}_a$ para todo a. Usando indução, é possível mostrar que vale a fórmula binomial

$$(\delta - (a+b).1)^n (xy) = \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \left((\delta - a.1)^{n-i} x \right) \left((\delta - b.1)^i y \right) \qquad (\star)$$

para todo $x, y \in \mathfrak{A}$. Sejam $x \in \mathfrak{A}_a$, $y \in \mathfrak{A}_b$, então $(\delta - a.1)^k x = 0$ e $(\delta - b.1)^l y = 0$ para alguns k, l. Tomando $n \geq k + l$ e aplicando $(\star)$ obtemos $(\delta - (a+b).1)^n (xy) = 0 \Longrightarrow xy \in \mathfrak{A}_{a+b}$ e desse modo $\sigma(xy) = (a+b)xy$.

Por outro lado, $x(\sigma y) + (\sigma x) y = (a+b)xy = \sigma(xy)$ e portanto σ é uma derivação em $\mathfrak{A}_{a+b}$. Como a soma $\mathfrak{A} = \oplus \mathfrak{A}_a$, tem-se

$$\sigma(xy) = x(\sigma y) + (\sigma x) y \ \forall x, y \in \mathfrak{A}$$

e portanto σ é uma derivação em $\mathfrak{A}$.

□

Observação 1.3.1. $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ é um ideal de $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$. Com efeito, sejam $\delta \in \operatorname{Der}\mathfrak{g}$ e $x, y \in \mathfrak{g}$, então

$$[\delta, \operatorname{ad} x](y) = \delta \operatorname{ad} x(y) - \operatorname{ad} x(\delta y) = [\delta x, y] = \operatorname{ad}(\delta x)(y)$$

e $[\delta, \operatorname{ad} x] \in \operatorname{ad}(\mathfrak{g})$.

Portanto, como a forma de Killing é não degenerada em álgebras de Lie semissimples, podemos provar que toda derivação é interna[2]:

Teorema 1.8. *Se* $\mathfrak{g}$ *é semissimples, então* $\operatorname{ad}\mathfrak{g} = \operatorname{Der}\mathfrak{g}$*, isto é, toda derivação de* $\mathfrak{g}$ *é interna.*

Demonstração. Como $\mathfrak{g}$ é semissimples, temos que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ e portanto $\ker \operatorname{ad} = 0$. Pelo Teorema de isomorfismo, $M = \operatorname{ad}\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}$ e portanto M tem a forma de Killing κ_M não degenerada. Pela observação feita acima, M é um ideal de $D = \operatorname{Der}\mathfrak{g}$. Pelo lema 1.2.9, $\kappa_M = \kappa_{D|_{M\times M}}$.

[2]Qualquer elemento de $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ é chamado derivação interna

Tomando $I = M^{\perp} = \{\delta \in D : \kappa_D(\delta, \mathrm{ad}\,x) = 0,\ \forall x \in \mathfrak{g}\}$ expressamos $D = M \oplus I$ como uma soma ortogonal de ideais e pela associatividade da forma de Killing, se $[\delta, \mathrm{ad}\,x] \in [I, M]$ e $\mu \in D$ então

$$\kappa([\delta, \mathrm{ad}\,x], \mu) = \kappa(\delta, [\mathrm{ad}\,x, \mu]) = 0$$

mostrando que $[I, M] = 0$. Finalmente, se $\delta \in I$, então $\mathrm{ad}(\delta x) = [\delta, \mathrm{ad}\,x] = 0$ e, consequentemente, $\delta = 0$ pela injetividade de ad. Logo $M = D$.

□

Este resultado permite introduzir uma decomposição de Jordan-Chevalley (ou decomposição de Jordan) numa álgebra de Lie semissimples arbitraria $\mathfrak{g}$, denominada decomposição abstrata de Jordan. Com efeito, como

$$\mathfrak{g} \cong \mathrm{ad}\,\mathfrak{g} = \mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$$

e $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$ contém todas as partes semissimples e nilpotentes de seus operadores, cada $x \in \mathfrak{g}$ determina únicos $s, n \in \mathfrak{g}$ tais que $x = s + n$; com s ad-semissimples, n ad-nilpotente e $[s, n] = 0$. Muitas vezes escrevemos $s = x_s$ e $n = x_n$ e chamamos por abuso de notação partes semissimples e nilpotentes de x.

1.4 Módulos, Lema de Schur e Teorema de Weyl.

Nesta seção denotaremos $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples sobre um corpo $\mathbb{F}$ algebricamente fechado de característica zero. odas as representações consideradas são de dimensão finita, exceto menção contrária. Agora, o nosso estudo trata das álgebras de Lie semissimples $\mathfrak{g}$ mediante suas representações. Se bem que qualquer álgebra de Lie semissimples pode ser construída por cópias de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$, este estudo será feito na próxima seção. Vamos enunciar o Teorema de Weyl sobre a redutividade completa das representações de álgebras de Lie semissimples e, como consequência, a preservação da decomposição de Jordan.

Definição 1.4.1. Um espaço vetorial V sobre $\mathbb{F}$ munido de uma operação $\centerdot : \mathfrak{g} \times V \longrightarrow V$, $(x, v) \mapsto x \centerdot v$, é um $\mathfrak{g}$-módulo se para todo $x, y \in \mathfrak{g}$ e todo $v \in V$, tivermos satisfeita as seguintes condições:

$(M1)$ $(ax + by) \centerdot v = ax \centerdot v + by \centerdot v$.

$(M2)$ $x \centerdot (av + bw) = ax \centerdot v + bx \centerdot w$.

$(M3)$ $[x, y] \centerdot v = x \centerdot y \centerdot v - y \centerdot x \centerdot v$.

Denotamos um $\mathfrak{g}$-módulo simplesmente como V ou $(V, \centerdot)$ fazendo referência à ação de $\mathfrak{g}$.

Observação 1.4.1. A operação $\centerdot : \mathfrak{g} \times V \longrightarrow V$ definida anteriormente é chamada de ação de $\mathfrak{g}$ sobre o espaço V e, em alguns casos, acostumamos denotar por abuso de notação $x \centerdot v = xv$. Notar que $(M1)$ e $(M2)$ equivale dizer que a aplicação $\centerdot : \mathfrak{g} \times V \longrightarrow V$ é bilinear. Quando $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é uma representação de $\mathfrak{g}$, então a aplicação $\centerdot : \mathfrak{g} \times V \longrightarrow V$ dada por $x \centerdot v = \varphi(x)(v)$ define uma ação de $\mathfrak{g}$ em V. Logo, V pode ser visto como um $\mathfrak{g}$-módulo via representação.

Por outro lado, se $\centerdot : \mathfrak{g} \times V \longrightarrow V$ é uma ação de $\mathfrak{g}$ em V, então para cada $x \in \mathfrak{g}$ a aplicação $v \mapsto x \centerdot v$ define um endomorfismo ρ_x em V e $\varphi : x \in \mathfrak{g} \longrightarrow \rho_x \in \mathfrak{gl}(V)$ é uma representação de $\mathfrak{g}$.

Fazendo abuso de notação, denotamos ρ_x simplesmente por x e assim consideramos x como um elemento de $\mathfrak{g}$ ou um endomorfismo de V (via representação).

Observação 1.4.2. Os módulos e as representações de álgebras de Lie são duas formas equivalentes de descrever a mesma estrutura.

Definição 1.4.2. Se W é um subespaço de V tal que $\mathfrak{g}\,\centerdot\, W \subset W$ (i.e, W é $\mathfrak{g}$-invariante), então dizemos que W é um $\mathfrak{g}$-submódulo de V. Um $\mathfrak{g}$-módulo $V \neq 0$ que admite apenas os $\mathfrak{g}$-submódulos triviais 0 e V é chamado de ***irredutível***. Caso contrário, se V se escreve como soma direta de $\mathfrak{g}$-submódulos não triviais, dizemos que V (ou a representação $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$) é ***completamente redutível.***

Definição 1.4.3. (Homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos) Uma aplicação linear $\varphi : V \longrightarrow W$ entre dois $\mathfrak{g}$-módulos V e W é um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos, ou $\mathfrak{g}$-homomorfismo[3], se

$$\varphi(x\,\centerdot\, v) = x\,\centerdot\,\varphi(v),\, \forall x \in \mathfrak{g},\, v \in V.$$

Isto equivale a dizer que o diagrama da Figura 1.4.1 resulta comutativo, i.e, $\rho_x \circ \varphi = \varphi \circ \rho_x$, $\forall x \in \mathfrak{g}$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "x"'] & W \arrow[d, "x"] \\ V \arrow[r, "\varphi"] & W \end{tikzcd}$$

Figura 1.4.1: $\mathfrak{g}$-homomorfismo

Denotaremos por $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,W)$ o espaço dos $\mathfrak{g}$-homomorfismos entre V e W. Em particular $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,V) = \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$.

Claramente $\ker\varphi$ e $\mathrm{img}\,\varphi$ são $\mathfrak{g}$-submódulos de V e W respectivamente. Além disso, se W é um $\mathfrak{g}$-submódulo de V, a ação de $\mathfrak{g}$ sobre V induz de maneira natural uma ação de $\mathfrak{g}$ sobre o quociente V/W mediante

$$x\,\centerdot\,(v+W) = x\,\centerdot\, v + W$$

Exemplo 1.4.1. Seja $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de uma álgebra solúvel $\mathfrak{g}$. Sabemos que $\varphi(\mathfrak{g})$ é solúvel em $\mathfrak{gl}(V)$ e portanto existe um $v \in V$ que é autovetor para todo elemento de $\varphi(\mathfrak{g})$, i.e,

$$\varphi(x)\,\centerdot\, v = \lambda(x)\, v,\ \forall x \in \mathfrak{g}$$

Isto mostra que existe uma subrepresentação 1-dimensional para $\mathfrak{g}$.

Exemplo 1.4.2. Suponha que I é um ideal de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Então I trata-se de um submódulo do $\mathfrak{g}$-módulo $\mathfrak{g}$ via representação adjunta. O quociente $\mathfrak{g}/I$ torna-se um $\mathfrak{g}$-módulo via a ação

$$x\,\centerdot\,(y+I) = (\mathrm{ad}\,x)(y) + I = [x,y] + I$$

e assim $\mathfrak{g}/I$ pode ser visto como $\mathfrak{g}/I$-módulo via sua representação adjunta.

[3]Alguns autores costumam chamar a φ de $\mathfrak{g}$-equivariante ou $\mathfrak{g}$-linear.

Note que se $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é uma representação de $\mathfrak{g}$ e $\theta : V \longrightarrow V$ é um $\mathfrak{g}$-homomorfismo, então $\theta \circ \phi(x)(v) = \phi(x) \circ \theta(v)$ e portanto θ deve comutar com todo $\phi(x)$.

Suponha agora que $\theta : V \longrightarrow W$ é um $\mathfrak{g}$-homomorfismo de módulos irredutíveis. Como $\operatorname{img}\theta$ é um submódulo de W e $\ker\theta$ é um submódulo de V, necessariamente tem que ser $\ker\theta = 0$ e $\operatorname{img}\theta = W$. Acabamos de provar a seguinte proposição

Proposição 1.4.1. *Qualquer $\mathfrak{g}$-homomorfismo entre representações irredutíveis de $\mathfrak{g}$ é um isomorfismo.*

O seguinte Lema, cuja demonstração pode ser encontrada em [EW00], garante que os únicos endomorfismos sobre um $\mathfrak{g}$-módulo irredutível são os escalares:

Lema 1.4.1. *(Schur) Seja $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação irredutível. Então o centralizador de $\phi(\mathfrak{g})$ é formado pelos escalares, i.e, os únicos $\mathfrak{g}$-homomorfismos que comutam com todos os $\phi(x)$, $(x \in \mathfrak{g})$, são os escalares.*

Em particular, quando V é um $\mathfrak{g}$-módulo irredutível, o espaço $\operatorname{End}_{\mathfrak{g}} V$ é um anel de divisão. Quando V é um $\mathfrak{g}$-módulo, o espaço das formas bilineares $V^* = \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, \mathbb{F})$ é um $\mathfrak{g}$-módulo via a ação

$$\forall f \in V^*, v \in V,\ (x \centerdot f)(v) = -f(x \centerdot v).$$

Basta somente verificar a propriedade $M3$ da definição. Com efeito

$$\begin{aligned}([x,y] \centerdot f)(v) &= -f(xy \centerdot v - yx \centerdot v)\\ &= (x \centerdot (y \centerdot f))(v) - (y \centerdot (x \centerdot f))(v)\\ &= (x \centerdot (y \centerdot f) - y \centerdot (x \centerdot f))(v)\end{aligned}$$

e portanto $[x,y] \centerdot f = x \centerdot (y \centerdot f) - y \centerdot (x \centerdot f)$.
Se V, W são espaços vetoriais, denotemos o produto tensorial $V \otimes W$ por

$$V \otimes W = \operatorname{Span}\{v \otimes w :\ v \in V, w \in W\}$$

Recordemos que se $\{v_1, \ldots, v_n\}, \{w_1, \ldots, w_l\}$ são bases de V e W respectivamente, então $V \otimes W$ admite como base $\left\{v_i \otimes w_j :\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq l\right\}$ e, no caso que, V, W são $\mathfrak{g}$-módulos, então $V \otimes W$ é um $\mathfrak{g}$-módulo via derivação $x \centerdot (v \otimes w) = x \centerdot v \otimes w + v \otimes x \centerdot w$, $\forall x \in \mathfrak{g}, v \in V, w \in W$ (Cf. [Hum78]).

1.4.1 O Elemento de Casimir.

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples e seja $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação fiel de $\mathfrak{g}$, ou seja, φ injetiva. Definimos a forma bilinear simétrica $\omega(x,y) = \operatorname{tr}(\varphi(x)\varphi(y))$ em $\mathfrak{g}$. Resulta que ω é associativa em relação ao colchete e seu radical $S = \operatorname{Rad}\omega$ é um ideal de $\mathfrak{g}$. Como φ é fiel, pelo Teorema de isomorfismo temos que $S \cong \varphi(S)$.

Observação 1.4.3. S é um ideal solúvel de $\mathfrak{g}$.

Com efeito, para $[x,y] \in [S,S] \subset S$ e $z \in S$ resulta imediato que $\operatorname{tr}(\varphi([x,y])\varphi(z)) = 0$. Logo, pelo teorema 1.5, $\varphi(S)$ é solúvel. Pela injetividade de φ, S é solúvel.

Como $\mathfrak{g}$ é semissimples, necessariamente $S = \{0\}$. Logo, ω é não degenerada. No caso em que $V = \mathfrak{g}$ e $\varphi = \mathrm{ad}$ é a representação adjunta, resulta que ω coincide com a forma de Killing κ.

Seja $\{x_1, \ldots, x_n\}$ uma base ordenada para $\mathfrak{g}$ e $\{y_1, \ldots, y_n\}$ a base dual correspondente com relação à ω, i.e, tal que $\omega(x_i, y_j) = \delta_{i,j}$. Para $x \in \mathfrak{g}$ escrevemos

$$[x, x_i] = \sum_j a_{ij} x_j, \qquad [x, y_i] = \sum_j b_{ij} y_j$$

Mediante a associatividade de ω, é possível provar que $a_{i,k} = -b_{k,i}$. Com efeito,

$$a_{ik} = \sum_j a_{ij} \omega(x_j, y_k) = \omega([x, x_i], y_k) = -\omega([x_i, x], y_k) = \omega(x_i, [x, y_k]) = -b_{ki}.$$

Se $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é qualquer representação de $\mathfrak{g}$, escrevemos

$$c_\varphi = \sum_i \varphi(x_i) \varphi(y_i) \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V).$$

Usando a identidade $[x, yz] = [x, y] z + y [x, z]$ em $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ e o fato que $a_{i,j} = -b_{k,i}$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\left[\varphi(x), c_\varphi\right] &= \sum_i [\varphi(x), \varphi(x_i) \varphi(y_i)] \\
&= \sum_i [\varphi(x) . \varphi(x_i)] \varphi(y_i) + \sum_i \varphi(x_i) [\varphi(x), \varphi(y_i)] \\
&= \sum_{i,j} a_{i,j} \varphi(x_j) \varphi(y_i) + \sum_{i,j} b_{i,j} \varphi(x_i) \varphi(y_i) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

E portanto, c_φ é um endomorfismo que comuta com todos os elementos de $\varphi(\mathfrak{g})$. Fixada uma base para $\mathfrak{g}$, vamos simplesmente denotar c_φ por c.

Definição 1.4.4. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre um corpo $\mathbb{F}$ algebricamente fechado e seja V um $\mathfrak{g}$-módulo fiel[4] com representação associada $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$. Definimos o Elemento de Casimir associado a φ como o operador linear $c : V \longrightarrow V$ da forma

$$c(v) = \sum_i x_i \centerdot (y_i \centerdot v)$$

Na linguagem de representações, $c = \sum_i \varphi(x_i) \varphi(y_i)$.

Lema 1.4.2. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre um corpo $\mathbb{F}$ algebricamente fechado e seja V um $\mathfrak{g}$-módulo fiel com representação associada $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$.*

1. *A aplicação linear $c : V \longrightarrow V$ é um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos.*

2. $\mathrm{tr}(c) = \dim \mathfrak{g}$. *Em particular, se φ é irredutível, c é igual a* $\dim \mathfrak{g} / \dim V$.

Demonstração. (1)foi feito acima. Para (2), simplesmente

$$\mathrm{tr}(c) = \sum_i \mathrm{tr}(\varphi(x_i), \varphi(y_i)) = \sum_i \omega(x_i, y_i) = \dim \mathfrak{g}$$

[4]Vamos dizer que V é um $\mathfrak{g}$-módulo fiel quando a representação associada $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é injetiva.

A conclusão final é dada pelo lema 1.4.1.

□

1.4.2 Teorema de Weyl.

O Teorema de Weyl é uma ferramenta essencial para o estudo das representações de álgebras de Lie semissimples, pois ele nos permite reduzir ao estudo das representações irredutíveis. A prova do teorema é técnica e não será feita, o leitor interessado poderá encontrar a mesma nas referências [EW00, Hum78, Gra00].

Teorema 1.9. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples sobre um corpo $\mathbb{F}$ algebricamente fechado e de característica zero. Qualquer $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita é completamente redutível.*

Como aplicação do Teorema de Weyl, temos a preservação de Jordan-Chevalley compatível com as representações de $\mathfrak{g}$

Teorema 1.10. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado $\mathbb{F}$ e $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ uma álgebra de Lie linear semissimples sobre $\mathbb{F}$. Então $\mathfrak{g}$ contém as partes semissimples e nilpotente de todos seus elementos em $\mathfrak{gl}(V)$. Particularmente, as decomposições de Jordan usual e abstrata em $\mathfrak{g}$ coincidem.*

Demonstração. Veja [Hum78, Sec. 6.4].

□

Corolário 1.4.1. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples e $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de dimensão finita. Se $x = s + n$ é a decomposição de Jordan abstrata de $x \in \mathfrak{g}$, então $\varphi(x) = \varphi(s) + \varphi(n)$ é a decomposição de Jordan de $\varphi(x)$.

1.5 Representações de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$.

As representações de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ constituem o caso mais simples da teoria de representações de álgebras de Lie semissimples. Adiante, veremos que toda álgebra de Lie semissimples de dimensão finita é constituída de cópias de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$, de modo que, estudar suas representações é útil para o estudo das representações de $\mathfrak{g}$.

Nesta seção, $\mathbb{F}$ é um corpo algebricamente fechado de característica zero, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ e $\{x,h,y\}$ a base canônica de $\mathfrak{g}$ tal que

$$[h,x] = 2x;\ [x,y] = h;\ [h,y] = -2y$$

Consideremos inicialmente V um $\mathfrak{g}$-módulo arbitrário de dimensão finita. Como h é diagonal (semissimples), pelo corolário 1.4.1 h age diagonalmente sobre V. Obtendo assim a decomposição

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{F}} V_\lambda \tag{1.5.1}$$

em que $V_\lambda = \{v \in V : h\mathbin{.}v = \lambda v\}$. Observemos que $V_\lambda \neq 0$ se, e só se, λ é um autovalor de h. Como $\dim V < \infty$, necessariamente a soma 1.5.1 é finita. Estes autovalores λ são denominados **pesos,** e o espaço V_λ associado é chamado espaço de peso.

Uma pergunta natural neste momento é como agem x, y sobre os respectivos espaços de pesos. A resposta é dada pelo seguinte Lema:

Lema 1.5.1. *Se $v \in V_\lambda$ então $x \centerdot v \in V_{\lambda+2}$ e $y \centerdot v \in V_{\lambda-2}$*

Demonstração. Basta usar a relação $M3$ na definição 1.4.1 de Módulo. Com efeito,

$$\begin{aligned} h \centerdot x \centerdot v &= x \centerdot h \centerdot v + [h,x] \centerdot v \\ &= x \centerdot (\lambda v) + 2x \centerdot v \\ &= (\lambda+2) x \centerdot v \end{aligned}$$

e portanto $x \centerdot v$ é um autovetor de h associado ao autovalor $(\lambda+2)$. Com o mesmo raciocínio mostramos que $y \centerdot v$ é um autovetor de h associado ao autovalor $(\lambda-2)$.

□

Podemos mostrar que x e y são operadores nilpotentes. Com efeito:

$$x^n \centerdot v = x^{n-1} \centerdot (x \centerdot v) \in V_{\lambda+2n}$$

Mas $\dim V < \infty$, e portanto, tem que existir n tal que $V_{\lambda+2n} = 0$, logo x é nilpotente. A mesma ideia é aplicada a y.

Em particular, uma vez que a soma 1.5.1 é finita, existe $\lambda \in \mathbb{F}$ tal que $V_\lambda \neq 0$ mas $V_{\lambda+2} = 0$. Para tal λ, todo vetor de V_λ não nulo é chamado **vetor maximal** de peso λ. Em geral, qualquer vetor $v \in V_\lambda$ anulado por x é chamado vetor maximal de peso λ.

Uma consequência da ação proveniente do Lema acima é que no caso em que V é irredutível, os pesos que aparecem na decomposição 1.5.1 devem ser todos congruentes módulo 2. De fato, se λ_0 é qualquer um deles, então o subespaço

$$W = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V_{\lambda_0+2n}$$

é estável sob a ação de $\mathfrak{g}$ (basta ver para os elementos da base de $\mathfrak{g}$), ou seja, é um $\mathfrak{g}$-submódulo e como V é irredutível, $W = V$.

Suponha agora que V é irredutível, $v_0 \in V_\lambda$ é um vetor maximal de peso λ e defina indutivamente $v_{-1} = 0$, $v_i = \frac{1}{i!} y^i \centerdot v_0$, $i \geq 0$, logo, $i v_i = y \centerdot v_{i-1}$. O seguinte Lema, nos permite dizer uma propriedade importante do peso λ.

Lema 1.5.2. *Para os v_i definidos acima, verifica-se:*

1. $h \centerdot v_i = (\lambda - 2i) v_i$
2. $y \centerdot v_i = (i+1) v_{i+1}$
3. $x \centerdot v_i = (\lambda - i + 1) v_{i-1}$, $i \geq 0$

Demonstração. Observe que por indução sobre i e pelo Lema 1.5.1, $h \centerdot \left(x^i \centerdot v_0\right) = (\lambda+2i) x^i \centerdot v_0$ e $h \centerdot \left(y^i \centerdot v_0\right) = (\lambda-2i) y^i \centerdot v_0$. Logo, (1) segue deste fato. (2) é por definição. Para provar (3), aplicamos indução sobre i; para $i=0$ é imediato. Suponhamos que o resultado seja válido para $i-1$ com $i>0$. Logo,

$$\begin{aligned} ix\centerdot v_i &= x\centerdot y\centerdot v_{i-1} \\ &= [x,y]\centerdot v_{i-1}+y\centerdot x\centerdot v_{i-1} \\ &= h\centerdot v_{i-1}+y\centerdot x\centerdot v_{i-1} \\ &= (\lambda-2(i-1))\,v_{i-1}+(\lambda-i+2)\,(i-1)\,v_{i-1} \\ &= i\,(\lambda-i+1)\,v_{i-1} \end{aligned}$$

Dividindo por i, segue o resultado.

$\square$

Note que a propriedade (1) mostra que os v_i são autovetores de h correspondentes aos diferentes autovalores $(\lambda-2i)$ diferentes. Logo, os vetores v_i não nulos são linearmente independentes.

Seja $m\in\mathbb{Z}$ o menor inteiro não negativo tal que $v_m\neq 0$, $v_{m+1}=0$ (por razões obvias $v_{m+i}=0$ para $i\geq 1$) e definimos o subespaço V^m gerado por $\{v_0,\dots,v_m\}$, que resulta um $\mathfrak{g}$-submódulo de V. Como V é irredutível, necessariamente $V=V^m$ e portanto $\dim V=m+1$. Olhando o ítem (3) no Lema para $i=m+1$

$$0=x\centerdot v_{m+1}=(\lambda-m)\,v_m,$$

concluímos que $\lambda=m$. Logo, o peso λ de um vetor maximal é necessariamente um inteiro não negativo. Chamamos tal $\lambda=m$ de peso máximo de V e denotamos por V_m o único subespaço[5] na decomposição 1.5.1 cujos vetores são todos maximais de peso máximo m.

Corolário 1.5.1. Considere V um $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$-módulo irredutível. Então o peso λ do vetor máximo v é um inteiro $m\geq 0$ e os elementos $v_0,\dots v_m$ dados pelo Lema 1.5.2 são linearmente independentes, com $v_i=0$ para $i>m$.

Note que pelo ítem (1) no Lema 1.5.2, cada peso μ ocorre com multiplicidade 1 e V_μ são unidimensionais. Como V determina um único peso maximal m com $\dim V=m+1$, o vetor máximo em V é único exceto escalares. A classificação das representações de $\mathfrak{g}$ se resume no seguinte Teorema com seu respectivo corolário:

Teorema 1.11. *Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo irredutível*

1. *Em relação a h, V é soma direta de espaços pesos V_α com $\alpha=-m,-m+2,\dots,m-2,m$, com* $\dim V=m+1$ *e* $\dim V_\alpha=1$.

2. *V admite um único vetor maximal, a menos de múltiplos escalares, cujo peso máximo é m.*

3. *Há exatamente um $\mathfrak{g}$-módulo irredutível (a menos de isomorfismo) para cada possível dimensão $m+1$, denotado V^m, $m\geq 0$.*

Corolário 1.5.2. Seja $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(2,\mathbb{F})$ e V qualquer $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita. Então os pesos de V são todos inteiros, cada um ocorrendo juntamente com seu oposto um número igual de vezes. Além disso, em qualquer decomposição de V em soma direta de $\mathfrak{g}$-módulos irredutíveis, o número de parcelas é

[5] A unicidade é garantida pelo fato de V ser irredutível. Ver os exemplos 1.5.3 e 1.5.4 para mais detalhes.

exatamente $\dim V_0 + \dim V_1$. Se os pesos de V ocorrem todos com a mesma paridade e todos com multiplicidade 1, então V é irredutível.

Demonstração. Todas as primeiras consequências foram mencionadas anteriormente. Para a última, como V pode ser expresso como soma direta de submódulos irredutíveis; em cada W submódulo irredutível da decomposição, existe uma única ocorrência do autovalor 0 ou do autovalor 1 (mas não ambos). Por tal motivo, $\dim V_0 + \dim V_1$ representa a quantidade de parcelas na decomposição de V.

□

Proposição 1.5.1. *Todo $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$-módulo de dimensão finita é isomorfo a uma soma direta de submódulos V^m.*

Demonstração. Pelo Teorema de Weyl, todo módulo é soma direta de submódulos irredutíveis, mas qualquer submódulo irredutível é isomorfo a V^m para algum $m \geq 1$.

□

Assim, temos as ferramentas necessárias para identificar algumas representações (módulos) de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$:

Exemplo 1.5.1. Seja $V = \mathbb{F}$ o $\mathfrak{g}$-módulo trivial de dimensão 1. Então $\mathfrak{g}\,.\,v = 0, \forall v \in V$. Como $h\,.\,v = 0$ temos que $V^0 = V$.

Exemplo 1.5.2. Seja $V = \mathbb{F}\times\mathbb{F}$ o $\mathfrak{g}$-módulo canônico com base $\bar{x} = (1,0)$ e $\bar{y} = (0,1)$. Então

$$h\,.\,\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{x}$$

$$h\,.\,\bar{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\bar{y}$$

Logo, $\bar{x}$ tem peso 1 e $\bar{y}$ tem peso -1. O peso máximo claramente é 1 e além disso

$$V = V_{-1} \oplus V_1 \cong \mathbb{F}\bar{x} \oplus \mathbb{F}\bar{y}$$

com $V^1 = \mathrm{Span}\{\bar{x},\bar{y}\} = V$.

Exemplo 1.5.3. Seja $V = \mathfrak{g}$ considerando $\mathfrak{g}$ como $\mathfrak{g}$-módulo pela representação adjunta. Sabemos que um vetor máximo é anulado por x. Basta tomar $v_0 = x$ e consequentemente $v_1 = y\,.\,v_0 = -h$, $v_2 = \frac{1}{2}y\,.\,v_1 = -y$. Obtendo assim o conjunto $\{v_0, v_1, v_2\}$ que forma uma base para V, os correspondentes pesos são

$$\begin{aligned} h\,.\,v_0 &= [h,x] = 2x = 2v_0 \\ h\,.\,v_1 &= [h,-h] = 0v_1 \\ h\,.\,v_2 &= [h,-y] = 2y = -2v_2 \end{aligned}$$

A decomposição em espaços de pesos resulta:

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_2$$

com $V^2 = \text{Span}\{v_0, v_1, v_2\} = \mathfrak{g}$.

Exemplo 1.5.4. (Cf. [Hum78, Exerc. 7.2]) Considere $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{F})$. Escrevamos $\mathfrak{h}$ com soma direta de $\mathfrak{g}$-módulos irredutíveis com relação à representação adjunta. Seja β a base canônica de $\mathfrak{h}$ dada por

$$\beta = \{e_{31}, e_{32}, e_{21}, h_1 = e_{11} - e_{22}, h_2 = e_{22} - e_{33}, e_{12}, e_{23}, e_{13}\}$$

É natural observar que $\mathfrak{g}$ mergulha dentro de $\mathfrak{h}$; Com efeito, basta considerar os elementos

$$\{h = h_1, x = e_{12}, y = e_{21}\}$$

que formam uma base para $\mathfrak{g}$.

Notemos que $x \centerdot e_{12} = 0$, portanto e_{12} é o vetor maximal v_0. Como $h \centerdot e_{12} = 2e_{12}$ resulta que v_0 é maximal de peso 2 que gera um subespaço isomorfo a V^2.

$$v_0 = e_{12},\, v_1 = y \centerdot v_0 = e_{22} - e_{11},\, v_2 = \frac{1}{2} y \centerdot v_1 = -e_{21}$$

$$\Longrightarrow V^2 \cong \text{Span}\{e_{12}, e_{22} - e_{11}, e_{21}\} \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$$

Seguindo a mesma ideia, como $h \centerdot e_{13} = e_{13}$ e $x \centerdot e_{13} = 0$, logo e_{13} é um vetor maximal de peso máximo 1. Aplicando o Lema, $v_0 = e_{13}$, $v_1 = y \centerdot e_{13} = e_{23}$ e $V^1 \cong \text{Span}\{e_{13}, e_{23}\}$. De forma similar, $V^1 \cong \text{Span}\{e_{32}, e_{31}\}$ e $V^0 \cong \text{Span}\{e_{22} - e_{33}\}$, assim

$$\mathfrak{h} \cong V^0 \oplus V^1 \oplus V^1 \oplus V^2$$

1.6 Decomposição em espaços de raízes.

Nesta seção, $\mathfrak{g}$ denota uma álgebra de Lie semissimples sobre um corpo $\mathbb{F}$ algebricamente fechado de característica zero. Vamos estudar detalhadamente a estrutura de $\mathfrak{g}$ através da sua representação adjunta. Neste caso, porém, não contamos com um único elemento diagonal h tal como em $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$, permitindo decompor a representação numa soma direta de espaços de pesos. No entanto, é possível utilizar uma subálgebra $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, que tem papel análogo ao de h, e que os pesos serão funcionais lineares em $\mathfrak{h}^*$.

1.6.1 Subálgebras Torais.

Como $\mathfrak{g}$ é semissimples, pelo Teorema de Engel (Teor. 1.2), $\mathfrak{g}$ não pode consistir inteiramente de elementos nilpotentes. Isto significa que $\mathfrak{g}$ admite elementos semissimples que geram subálgebras de $\mathfrak{g}$, denominadas subálgebras Torais.

Definição 1.6.1. Uma subálgebra $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{g}$ gerada por elementos semissimples é chamada subálgebra toral de $\mathfrak{g}$.

Notemos que uma subálgebra toral $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ é uma subálgebra abeliana consistindo de elementos semissimples (Cf. [Ale08]), tal como mencionamos no seguinte resultado:

Lema 1.6.1. *Seja* $\mathfrak{t}$ *uma subálgebra toral de uma álgebra de Lie semissimples* $\mathfrak{g}$*. Então* $\mathfrak{t}$ *é abeliana.*

Demonstração. Seja $x \in \mathfrak{t}$ qualquer, queremos mostrar que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}} x = 0$. Como x é semissimples e $\mathbb{F}$ é algebricamente fechado e de característica zero, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}} x$ age diagonalmente sobre $\mathfrak{t}$. Isto se reduz a mostrar que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}} x$ não tem autovalores não nulos.

Suponha que $z = \mathrm{ad}_{\mathfrak{t}} x(y) = ay$ para algum $a \in \mathbb{F}$ e $y \in \mathfrak{t}$. Note que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}} y(z) = 0$ e portanto z é autovetor de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}(y)$ correspondente ao autovalor 0.

Como $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}} y$ também é diagonalizável, podemos escrever x como combinação linear de autovetores de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}} y$. Com efeito, se $\mathfrak{t} = \oplus_{i=1}^{k} \mathfrak{t}_{\lambda_i}$ com $\mathfrak{t}_{\lambda_i} = \ker(\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}} y - \lambda_i I)$ e $\lambda_1 = 0$, temos que

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n; \; x_i \in \mathfrak{t}_{\lambda_i}$$

Deste modo, $z = \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k \Longrightarrow 0 = \mathrm{ad}_{\mathfrak{t}} y(z) = \lambda_2^2 x_2 + \ldots + \lambda_k^2 x_k$, com $\lambda_i^2 \neq 0$. Portanto, $x_i = 0$ para $2 \leq i \leq k$ implicando que $x = x_1$, $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0$ e finalmente $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}} x = 0$.

□

Vamos denotar por $\mathfrak{h}$ uma subálgebra toral maximal de $\mathfrak{g}$, a qual é abeliana pelo Lema 1.6.1. Em particular $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h}$ é uma família de endomorfismos diagonalizáveis que comutam entre si. Um resultado clássico da álgebra linear nos garante que endomorfismos com essa propriedade são simultaneamente diagonalizáveis. Isto equivale dizer que $\mathfrak{g}$ se decompõe como soma direta de subespaços

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} : \mathrm{ad}\, h(x) = \alpha(h)x, \forall h \in \mathfrak{h}\}$$

em que $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, e notemos que $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}_0$. O conjunto de todos os $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ não nulos tais que $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ é denotado por Φ e tais elementos são chamados **raízes** de $\mathfrak{g}$ em relação a $\mathfrak{h}$. Uma vez que o conjunto Φ satisfaz as propriedades que serão mencionadas na seção 1.7, dizemos que Φ é um **Sistema de raízes de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{h}^*$**.

A seguinte propriedade pode ser encontrada em [Hum78, Prop. 8.2], e garante que o centralizador de $\mathfrak{h}$ coincide com ela mesma, em outras palavras:

Proposição 1.6.1. *Seja $\mathfrak{h}$ uma subálgebra toral maximal de $\mathfrak{g}$. Então $\mathfrak{h} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.*

Pelo fato que $\mathfrak{g}$ é de dimensão finita, Φ é um conjunto finito. Contudo, podemos escrever a decomposição de $\mathfrak{g}$ em espaços de raízes:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \tag{1.6.1}$$

Exemplo 1.6.1. Considere $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{F})$, com base canônica dada no exemplo 1.5.4. Pode ser verificado que $\mathfrak{h} = \mathrm{Span}\{h_1 = e_{11} - e_{22}, h_2 = e_{22} - e_{33}\}$ é uma subálgebra toral maximal de $\mathfrak{g}$. Para encontrar os respectivos $\alpha_i = \alpha(h_i)$, note que

$$\begin{aligned}
[h_1, e_{12}] &= 2e_{12} \\
[h_2, e_{12}] &= -e_{12} \\
[h_1, e_{13}] &= e_{13} \\
[h_2, e_{13}] &= e_{13} \\
[h_1, e_{23}] &= -e_{23} \\
[h_2, e_{23}] &= 2e_{23}
\end{aligned}$$

Basta tomar $\alpha_1 = (2,-1)$, $\alpha_2 = (1,1)$, $\alpha_3 = (-1,2) \in \mathfrak{h}^*$ e obtemos

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_{-\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_3} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_3}$$

e o conjunto de raízes[6] para $\mathfrak{g}$ resulta $\Phi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3\} \subset \mathfrak{h}^*$

Exemplo 1.6.2. Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ com base canônica dada pelas matrizes $h_i = e_{i,i} - e_{i+1,i+1}$ $(1 \leq i < n)$ e $e_{i,j}$ $(i \leq i \neq j \leq n)$. Então os h_i geram uma subálgebra toral maximal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ e por cálculos diretos, como os feitos no exemplo 1.6.1, podemos mostrar que essa base determina uma decomposição de $\mathfrak{g}$ em espaços de raízes.

Pode ser mostrado que Φ não depende da escolha de $\mathfrak{h}$ (Cf. [Hum78, Cap IV, V]). Mas por razões de interesses deste trabalho e uma quantidade razoável de teoria, vamos assumir como verdadeiro este resultado daqui em diante.

Proposição 1.6.2. *Para todo $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$, $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. Se $\alpha \neq 0$ e $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, então $\operatorname{ad} x$ é nilpotente. Além disso, se $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$ e $\alpha + \beta \neq 0$, então $\mathfrak{g}_\alpha$ é ortogonal a $\mathfrak{g}_\beta$ com relação à forma de Killing κ de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração. Sejam $h \in \mathfrak{h}$, $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $y \in \mathfrak{g}_\beta$, usando a identidade de Jacobi temos que

$$\operatorname{ad} h([x,y]) = [[h,x],y] + [x,[h,y]] = \alpha(h)[x,y] + \beta(h)[x,y] = (\alpha+\beta)(h)[x,y],$$

provando a primeira afirmação. A segunda afirmação é consequência imediata da primeira e do fato de Φ ser finito, pois $\mathfrak{g}_{n\alpha+\beta} = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Para provar a última afirmação, consideremos $h \in \mathfrak{h}$ tal que $(\alpha+\beta)(h) \neq 0$. Então para todo $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $y \in \mathfrak{g}_\beta$, pela associatividade de κ escrevemos

$$\kappa([h,x],y) = -\kappa([x,h],y) = -\kappa(x,[h,y]),$$

ou seja, $\alpha(h)\kappa(x,y) = -\beta(h)\kappa(x,y)$ e portanto $(\alpha+\beta)(h)\kappa(x,y) = 0$. Logo $\kappa(x,y) = 0$.

□

Corolário 1.6.1. A restrição da forma de Killing de $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ é não degenerada.

Demonstração. Como $\mathfrak{g}$ é semissimples, κ é não degenerada. Por outro lado, $\mathfrak{g}_0$ é ortogonal a $\mathfrak{g}_\alpha$ para todo $\alpha \in \Phi$. Se $x \in \mathfrak{g}_0$ é ortogonal a $\mathfrak{g}_0$ então $\kappa(x,\mathfrak{g}) = 0$ impondo que $x = 0$.

□

Notemos que se $t \in \mathfrak{h}$, podemos definir uma aplicação linear $\alpha_t : \mathfrak{h} \mapsto \mathbb{F}$ dada por

$$h \mapsto \kappa(t,h).$$

Pelo fato que κ é uma aplicação bilinear não degenerada, $\phi : t \in \mathfrak{h} \longmapsto \alpha_t \in \mathfrak{h}^*$ é uma aplicação linear com núcleo 0. Portanto, ϕ é um isomorfismo entre $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{h}^*$. Isto permite identificar qualquer funcional

[6] Tal conjunto conforma um sistema de raízes para $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{F})$ (Cf. Sec. 1.7)

$\alpha \in \mathfrak{h}^*$ com um único $t_\alpha \in \mathfrak{h}$ satisfazendo

$$\alpha(h) = \kappa(t_\alpha, h), \ \forall h \in \mathfrak{h} \tag{1.6.2}$$

Em particular, Φ corresponde ao conjunto $\{t_\alpha : \alpha \in \Phi\} \subset \mathfrak{h}$.

1.6.2 Propriedades de Ortogonalidade.

O objetivo desta seção é obter informação precisa da decomposição em espaços de raízes, como assim também do conjunto de raízes Φ. A seguinte proposição nos fornece propriedades de ortogonalidade entre os espaços de raízes:

Proposição 1.6.3. *São verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. Φ *gera* $\mathfrak{h}^*$.
2. *Se* $\alpha \in \Phi$ *então* $-\alpha \in \Phi$.
3. *Se* $\alpha \in \Phi, x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ *então* $[x,y] = \kappa(x,y)t_\alpha$ *com* t_α *definido em* 1.6.2.
4. *Para toda* $\alpha \in \Phi$, $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ *é unidimensional com base* t_α.
5. $\alpha(t_\alpha) = \kappa(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$ *para qualquer raiz* $\alpha \in \Phi$.
6. *Se* $\alpha \in \Phi$ *e* x_α *é qualquer elemento não nulo de* $\mathfrak{g}_\alpha$*, então existe* $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ *tal que* $\{x_\alpha, h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha], y_\alpha\}$ *forma uma base para uma subálgebra de* $\mathfrak{g}$ *isomorfa à álgebra* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$.
7. $h_\alpha = 2\frac{t_\alpha}{\kappa(t_\alpha,t_\alpha)}$, $h_\alpha = -h_{-\alpha}$ *e* $\alpha(h_\alpha) = 2$.

Demonstração.

(1) Suponha que Φ não gera $\mathfrak{h}^*$, i.e, $\langle\Phi\rangle \subsetneq \mathfrak{h}^*$. Logo, a soma $\langle\Phi\rangle \oplus \langle\Phi\rangle^\perp = \mathfrak{h}^*$ é não trivial. Assim, existe $0 \neq h \in \mathfrak{h}$ tal que $\alpha(h) = 0$ para todo $\alpha \in \Phi$, o qual implica que para todo $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $[h,x] = \alpha(h)x = 0$. Portanto, $[h,\mathfrak{g}_\alpha] = 0, \forall \alpha \in \Phi$, o que por sua vez significa $[h,\mathfrak{g}] = 0$. Ou seja, existe $0 \neq h \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, que é impossível (pois $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ quando $\mathfrak{g}$ é semissimples).

(2) Seja $\alpha \in \Phi$ tal que $-\alpha \notin \Phi$. Isto implica que $\mathfrak{g}_{-\alpha} = 0$ e pela Proposição 1.6.2 teríamos que $\kappa\left(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta\right) = 0$ para todo $\beta \in \mathfrak{h}^*$. Mas então $\kappa(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}) = 0$ o qual obriga que $\mathfrak{g}_\alpha = 0$ (pois κ é não degenerada) obtendo um absurdo.

(3) Sejam $\alpha \in \Phi, x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Escolhendo $h \in \mathfrak{g}$ sabemos que há um único $t_\alpha \in \mathfrak{h}$ tal que $\alpha(h) = \kappa(t_\alpha, h)$. Assim

$$\begin{aligned}
\kappa(h,[x,y] - \kappa(x,y)t_\alpha) &= \kappa(h,[x,y]) - \kappa(x,y)\kappa(h,t_\alpha) \\
&= \kappa([h,x],y) - \alpha(h)\kappa(x,y) \\
&= \alpha(h)\kappa(x,y) - \alpha(h)\kappa(x,y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Como $[x,y] \in \mathfrak{h}$ e κ é não degenerada em $\mathfrak{h}$, necessariamente $[x,y] = \kappa(x,y)t_\alpha$.

(4) Basta mostrar que se $\alpha \in \Phi$, então $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \neq 0$. Certamente, $\kappa(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}) \neq 0$, pois do contrario, como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \bigoplus_{\beta \neq \alpha} \mathfrak{g}_\beta$$

e $\kappa(\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{g}_\alpha) = 0$ para $\beta \neq \alpha$, então teríamos que $\kappa(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}) = 0$, o que contradiz o fato de κ ser não degenerada. Em particular, existem $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tais que $\kappa(x,y) \neq 0$ e, consequentemente, $0 \neq [x,y] = \kappa(x,y)t_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$. Ou seja, $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ é unidimensional.

(5) Suponhamos que $\alpha(t_\alpha) = 0$, então para todo $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ temos que $[t_\alpha, x] = [t_\alpha, y] = 0$. Pelo item (4), podemos encontrar $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tais que $\kappa(x,y) \neq 0$. Substituindo x ou y por algum múltiplo deles, é possível assumir que $\kappa(x,y) = 1$, e pelo ítem (3), $[x,y] = \kappa(x,y)t_\alpha = t_\alpha$. Esto mostra que o subespaço S de $\mathfrak{g}$ gerado por $\{x, t_\alpha, y\}$ é uma álgebra solúvel isomorfa a $\mathrm{ad}_\mathfrak{g} S \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Como, todo elemento $s \in [S,S]$ é $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$-nilpotente (pelo corolário 1.2.5), temos que $\mathrm{ad}_\mathfrak{g} t_\alpha$ é nilpotente. Mas $\mathrm{ad}_\mathfrak{g} t_\alpha$ é semissimples, logo

$$\mathrm{ad}_\mathfrak{g} t_\alpha = 0 \Rightarrow [t_\alpha, \mathfrak{g}] = 0 \Rightarrow 0 \neq t_\alpha \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0,$$

o que é absurdo.

(6) Dado $0 \neq x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, consideremos a equação $\kappa(x_\alpha, y) = \frac{2}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)}$. Como κ é não degenerada e $\kappa(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}) \neq 0$, existe $0 \neq y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que

$$\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = \frac{2}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)}$$

Definindo $h_\alpha = \frac{2t_\alpha}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)}$, pelo ítem (3) temos $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$. Mas também

$$[h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha, \ [h_\alpha, y_\alpha] = -2y_\alpha,$$

pois $t_\alpha \in \mathfrak{h}$. Assim $S_\alpha = \mathrm{Span}\{x_\alpha, h_\alpha, y_\alpha\} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$.

(7) Finalmente, recordando a definição de t_α, este ítem fica imediato.

□

Observação 1.6.1. $h_\alpha = \frac{2t_\alpha}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)} \in \mathfrak{h}$ pelo fato que $t_\alpha \in \mathfrak{h}$.

1.6.3 Propriedades de Integralidade.

Para cada par de raízes $\{\alpha, -\alpha\}$, a Proposição 1.6.3 nos fornece uma subálgebra S_α de $\mathfrak{g}$ isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$. Fixemos inicialmente uma raiz $\alpha \in \Phi$ e consideremos M o subespaço gerado por $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ junto com todos os espaços de raízes $\mathfrak{g}_{c\alpha}$ para $c \in \mathbb{F}^*$. Pela Proposição 1.6.2, M é claramente um S_α-submódulo de $\mathfrak{g}$ contendo o próprio S_α. Ademais, se $h \in \mathfrak{h}$ então $h_\alpha \centerdot h = [h_\alpha, h] = 0$, e se $x \in \mathfrak{g}_{c\alpha}$, então $h_\alpha \centerdot x = [h_\alpha, x] = c\alpha(h_\alpha)x = 2cx$. Pelo Teorema 1.11, os pesos de h_α em M são 0 e $2c$. Em particular, todos os c devem ser múltiplos inteiros de $1/2$.

Agora, seja $h \in \ker\alpha$ em $\mathfrak{h}$, como $\mathfrak{h} = \ker\alpha \oplus \mathbb{F}h_\alpha$ (i.e, $\dim\ker\alpha = \dim\mathfrak{h} - 1$) e

$$\begin{aligned} [x_\alpha, h] &:= -\alpha(h)x_\alpha = 0 \\ [y_\alpha, h] &:= \alpha(h)x_\alpha = 0 \end{aligned}$$

S_α age trivialmente sobre $\ker\alpha$. Por sua vez, S_α resulta em si mesmo um S_α-submódulo irredutível de M. Logo, S_α junto com $\mathfrak{h}$, contabilizam todas as ocorrências do peso 0 para h_α (pois $\alpha(h_\alpha) = 2$). Com isto, se esgotam também todas as possíveis ocorrências de pesos pares para M. Portanto, os únicos pesos pares para M são $0, \pm 2$.

Isto significa que $2\alpha \notin \Phi$, caso contrário teríamos uma ocorrência do peso 4 o qual é impossível. Por este mesmo argumento, $\frac{1}{2}\alpha$ não pode ser uma raiz, e consequentemente, 1 não pode ocorrer como peso de h_α em M (assim como nenhum peso ímpar). Pelo corolário 1.5.2, resulta $M = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} = \mathfrak{h} + S_\alpha$ (a soma não é direta, pois $S_\alpha \cap \mathfrak{h} = \mathbb{F}\mathfrak{h}_\alpha$). Particularmente, o peso 2 ocorre com multiplicidade 1 donde $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ e S_α fica unicamente determinada como a subálgebra de $\mathfrak{g}$ gerada por $\mathfrak{g}_\alpha$ e $\mathfrak{g}_{-\alpha}$. Além disso, os únicos possíveis valores de c são ± 1, donde os únicos possíveis múltiplos de α são $\pm\alpha$.

Vamos examinar como age S_α sobre os espaços de raízes $\mathfrak{g}_\beta$ com $\beta \neq \pm\alpha$. Notemos que, aplicando a ação de S_α, cada espaço unidimensional $\mathfrak{g}_{\beta+i\alpha}$ é levado em $\mathfrak{g}_{\beta+(i-1)\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{\beta+i\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{\beta+(i+1)\alpha}$ respectivamente. Portanto, $K = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+i\alpha}$ é um S_α-submódulo de $\mathfrak{g}$, consistindo inteiramente de espaços de raízes unidimensionais, e correspondentes aos diferentes pesos inteiros não nulos $\beta(h_\alpha) + 2i$ (em que $i \in \mathbb{Z}$ e $\beta + i\alpha \in \Phi$). De modo que, estes são todos pares ou ímpares, dependendo do valor de $\beta(h_\alpha)$, e os pesos 0 e 1 não podem ocorrer simultaneamente em K como pesos desta forma. Logo, estes formam uma cadeia finita e contígua, mais precisamente, os pesos de K formam uma progressão aritmética de razão 2, a saber

$$\beta(h_\alpha) - 2r, \ldots, \beta(h_\alpha), \ldots, \beta(h_\alpha) + 2q \quad (\star)$$

em que r, q são inteiros não negativos tais que $\beta - r\alpha$ e $\beta + q\alpha$ sejam raízes. Pelo corolário 1.5.2, K resulta um S_α-submódulo irredutível e a cadeia $(\star)$ é simétrica, i.e, $\beta(h_\alpha) + 2q = -(\beta(h_\alpha) - 2r)$, ou seja $\beta(h_\alpha) = q - r$. Denominamos a correspondente cadeia de raízes

$$\beta - r\alpha, \ldots, \beta, \ldots \beta - q\alpha \quad (**)$$

uma α-cadeia por β. Finalmente, observamos que se $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Phi$, então $0 \neq [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, donde $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. Em resumo:

Proposição 1.6.4.

1. *Se* $\alpha \in \Phi$ *então* $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$. *Em particular,* $S_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha} + \mathfrak{h}_\alpha$ *onde* $\mathfrak{h}_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ *e dado* $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ *não nulo existe um único* $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ *que satisfaz* $h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$

2. *Se* $\alpha \in \Phi$ *então* $\pm\alpha$ *são os únicos possíveis múltiplos de* α *em* Φ.

3. *Se* $\alpha, \beta \in \Phi$ *então* $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ *e* $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Phi$.

4. *Se* $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Phi$, *então* $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

5. *Sejam* $\alpha, \beta \in \Phi$, *com* $\beta \neq \pm\alpha$. *Sejam* r, q *respectivamente, maior e o menor inteiro não negativo para os quais* $\beta - r\alpha, \beta + q\alpha$ *sejam raízes. Então* $\beta + i\alpha \in \Phi$ *para todo* $-r \leq i \leq q$ *e* $\beta(h_\alpha) = r - q$.

6. $\mathfrak{g}$ *é gerada pelos espaços de raízes* $\mathfrak{g}_\alpha$.

Chamamos Inteiros de Cartan aos números $\beta(h_\alpha) = 2\kappa(t_\beta, t_\alpha)/\kappa(t_\alpha, t_\alpha)$. Como κ é não degenerada sob $\mathfrak{g}$, é possível transferir a forma de Killing para $\mathfrak{h}^*$ definindo $(\alpha, \beta) = \kappa(t_\alpha, t_\beta)$ para todo $\alpha, \beta \in \Phi$. Como os inteiros de Cartan aparecem com frequência, é usual definir o funcional

$$\langle \beta, \alpha \rangle = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)},$$

o qual é linear apenas na primeira variável. Pelo fato que Φ gera $\mathfrak{h}^*$, é possível escolher uma base $\tilde{\Phi} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\} \subset \Phi$ de $\mathfrak{h}^*$ formado apenas por raízes, e tal que, qualquer outra raiz $\beta \in \Phi$ pode ser expressa de maneira única como $\beta = \sum_{i=1}^{l} c_i \alpha_i$ com $c_i \in \mathbb{F}$. Logo

$$\langle \beta, \alpha_j \rangle = \sum_{i=1}^{l} \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle c_i, \ \forall 1 \leq j \leq l,$$

cujos coeficientes são os inteiros de Cartan (em particular são racionais) e a matriz $(\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle)_{1 \leq i,j \leq l}$ é invertível, pois os α_i formam uma base e a forma bilinear $(,)$ é não degenerada. Em consequência, o sistema $\beta = \sum_{i=1}^{l} c_i \alpha_i$ admite soluções racionais, i.e, $c_i \in \mathbb{Q}$.

Com isto, mostramos que o $\mathbb{Q}$-subespaço vetorial $E_{\mathbb{Q}}$ de $\mathfrak{h}^*$ gerado por todas as raízes tem $\mathbb{Q}$-dimensão $l = \dim_{\mathbb{F}} \mathfrak{h}^*$. Em outras palavras, todas as raízes estão no $\mathbb{Q}$-espaço vetorial $E_{\mathbb{Q}}$ gerado por $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$. Além disso, para todo $\alpha, \beta \in \Phi$ temos que $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}$ e a forma bilinear $(,) : E_{\mathbb{Q}} \times E_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$ é simétrica e definida positiva em $E_{\mathbb{Q}}$ (Cf. [Hum78, Sec. 8.5]). Com efeito, para qualquer $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, temos que

$$(\lambda, \lambda) = \kappa(t_\lambda, t_\lambda) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} t_\lambda \operatorname{ad} t_\lambda) =_{(1)} \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(t_\lambda)^2 \ =_{(2)} \ \sum_{\alpha \in \Phi} (\alpha, \lambda)^2,$$

em que a igualdade (1) é valida porque t_λ age trivialmente sobre $\mathfrak{h}$, e como multiplicação sobre cada espaço unidimensional $\mathfrak{g}_\alpha$ por escalar $\alpha(t_\lambda)$. Portanto, como $\operatorname{ad} t_\lambda$ é diagonalizável, segue que o traço de $\operatorname{ad} t_\lambda \operatorname{ad} t_\lambda$ é simplesmente a soma do produto dos elementos da diagonal. A igualdade (2) é válida pela equação 1.6.2. Logo, como a forma de Killing é não degenerada, $(,)$ é definida positiva, i.e,

$$(\lambda, \lambda) = \sum_{\alpha \in \Phi} (\alpha, \lambda)^2 \in \mathbb{Q}^+ \Leftrightarrow \lambda \neq 0$$

e portanto, $(,)$ define um produto interno em $E_{\mathbb{Q}}$.

Seja $E = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} E_{\mathbb{Q}}$ o espaço vetorial real obtido através da extensão do corpo $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$. O produto interno de $E_{\mathbb{Q}}$ se estende canonicamente para E, tornando este um espaço euclideano. Observe que Φ contém uma base para E e que $\dim_{\mathbb{R}} E = l$.

Recordemos que uma reflexão em E é uma transformação linear ortogonal fixando pontualmente algum hiperplano (i.e, algum subespaço de codimensão 1) e levando qualquer vetor ortogonal a esse hiperplano em seu oposto. Assim, observamos que todo $\alpha \in \Phi$ define uma reflexão σ_α em E através da expressão

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha$$

que claramente fixa pontualmente o hiperplano $P_\alpha = \{\beta \in E : (\beta, \alpha) = 0\}$ e leva α em $-\alpha$. Desta forma, o ítem (3) da Proposição 1.6.4, é equivalente a dizer que Φ é invariante por reflexões σ_α $(\alpha \in \Phi)$. Em resumidas palavras, o seguinte Teorema menciona os fatos básicos de Φ:

Teorema 1.12. *Sejam $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Phi$ e E como acima. Então*

$(R1)$ *Φ é finito, gera E e $0 \notin \Phi$.*

$(R2)$ *Os únicos possíveis múltiplos de $\alpha \in \Phi$ são $\pm\alpha$.*

$(R3)$ *Se $\alpha \in \Phi$ então Φ é invariante pela reflexão σ_α.*

$(R4)$ *Se $\alpha, \beta \in \Phi$ então $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$ (inteiros de Cartan).*

Por último, definimos uma **subálgebra de Cartan** (em resumidas palavras, *CSA*) de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ como uma álgebra nilpotente tal que seu normalizador é ela mesma.

Notemos que se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra semissimples sobre um corpo $\mathbb{F}$ com $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$, então uma subálgebra toral maximal $\mathfrak{h}$ é abeliana e além disso $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Com efeito, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ e $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_\alpha] = \mathfrak{g}_\alpha, \forall\, \alpha \in \Phi$. Desta forma, temos o seguinte resultado, omitindo sua demonstração:

Teorema 1.13. *(Cf. [Hum78, Cor. 15.3]) Se $\mathfrak{g}$ é semissimples, então as únicas CSA de $\mathfrak{g}$ são precisamente as subálgebras Torais maximais de $\mathfrak{g}$.*

Exemplo 1.6.3. Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ e $\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{F} \right\}$, então $\mathfrak{h}$ é subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ gerada por $h = \operatorname{Diag}(1, -1)$. De fato, como $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$, claramente $\mathfrak{h}$ é abeliana. Tomando $A \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ temos que

$$[h, A] = [h, ax + bh + cy] = 2ax - 2cy \in \mathfrak{h} \Leftrightarrow a = c = 0$$

Portanto, $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

1.7 Sistemas de Raízes.

Nesta seção, as propriedades $(R1)$-$(R4)$ do teorema 1.12 serão consideradas axiomas sobre um subconjunto Φ de um espaço euclideano[7] E. Damos início a seção, definindo quando um subconjunto $\Phi \subset E$ é chamado espaço de Raízes:

Definição 1.7.1. Um subconjunto Φ sobre um espaço euclideano E é um sistema de raízes sobre E, se são satisfeita as propriedades $(R1)$-$(R4)$ do teorema 1.12.

O número $l = \dim_{\mathbb{R}} E$ é o posto de Φ, assim, temos estabelecida uma correspondência $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \longmapsto (E, \Phi)$. Pode ser mostrado (Cf. [Hum78, Cap. IV, V]) que tal correspondência independe da escolha de $\mathfrak{h}$ e, além disso, é uma aplicação injetiva. Dentro dos interesses deste trabalho, e por razões de brevidade, vamos assumir como verdadeiro este resultado daqui em diante.

Definimos o **Grupo de Weyl** $\mathscr{W}$ como o subgrupo de $GL(E)$ gerado por todas as reflexões σ_α, em que $\alpha \in \Phi$. Por $(R3)$, $\mathscr{W}$ age como um grupo de permutações sobre Φ e por $(R1)$, é um conjunto finito que gera E. Isto permite identificar $\mathscr{W}$ como um subgrupo do grupo simétrico sobre Φ.

[7] Um espaço euclideano é simplesmente um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno.

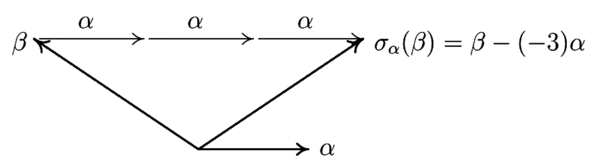


Figura 1.7.1: Nesta figura, $\langle \beta, \alpha \rangle = -3$ e $\sigma_\alpha(\beta) = \beta + 3\alpha \in \Phi$. Veremos também que $\beta + \alpha \in \Phi$, $\beta + 2\alpha \in \Phi$ e a figura corresponde ao sistema de raízes do tipo G_2.

Dizemos que dois sistema de raízes Φ, Φ' sobre respectivos espaços euclideanos E e E' são isomorfos se existir um isomorfismo de espaços vetoriais $\phi : E \to E'$ (não necessariamente uma isometria), que leva Φ em Φ' e, ademais, $\langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ para todo $\alpha, \beta \in \Phi$. Segue que

$$\begin{aligned}
\left(\sigma_{\phi(\alpha)} \circ \phi\right)(\beta) &= \phi(\beta) - \langle \phi(\beta), \phi(\alpha) \rangle \phi(\alpha) \\
&= \phi(\beta) - \langle \beta, \alpha \rangle \phi(\alpha) \\
&= \phi(\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha) \\
&= (\phi \circ \sigma_\alpha)(\beta)
\end{aligned}$$

obtendo a correspondência bijetora $\sigma_\alpha \mapsto \sigma_{\phi(\alpha)} = \phi \circ \sigma_\alpha \circ \phi^{-1}$, para todo $\alpha \in \Phi$. Portanto, existe um isomorfismo natural $\sigma \mapsto \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}$ entre os grupos de Weyl $\mathscr{W}$ e $\mathscr{W}'$ de Φ e Φ' respectivamente.

Lema 1.7.1. *Seja Φ um conjunto finito de geradores de E e suponhamos que Φ seja invariante por todas as reflexões σ_α ($\alpha \in \Phi$). Se Φ é invariante por $\sigma \in GL(E)$, isto é, fixa pontualmente um hiperplano P de E e leva algum $\alpha \in \Phi$ no seu oposto $-\alpha \in \Phi$, então $\sigma = \sigma_\alpha$.*

Demonstração. É fácil ver que, para todo $\alpha \in \Phi$, $\sigma_\alpha^{-1} = \sigma_\alpha$. Consideremos $\tau = \sigma\sigma_\alpha$, então $\tau(\alpha) = \alpha$ e $\tau(\Phi) = \Phi$. Além disso, τ age como identidade no subespaço $\mathbb{R}\alpha$ como também no quociente $E/\mathbb{R}\alpha$. Assim, 1 é o único autovalor de τ e o polinômio minimal de τ divide $(x-1)^l$ (em que $l = \dim E$). Por outro lado, se $\beta \in \Phi$, nem todos os vetores $\beta, \tau(\beta), \ldots, \tau^k(\beta)$ (em que $k \geq \mathrm{Card}\Phi$) podem ser distintos, logo alguma potência de τ fixa β. Escolhamos k suficientemente grande para que τ^k fixe todos os $\beta \in \Phi$. Como Φ gera E, τ^k fixa alguma base contida em Φ e portanto $\tau^k = 1$. Consequentemente, o polinômio minimal de τ é exatamente $(x-1) = \mathrm{mdc}\left(x^k - 1, (x-1)^l\right)$, assim $\tau = 1$.

$\square$

Lema 1.7.2. *Seja Φ um sistema de raízes em E com grupo de Weyl $\mathscr{W}$. Se $\sigma \in GL(E)$ deixa Φ invariante, então $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(\alpha)}$ para todo $\alpha \in \Phi$, e $\langle \beta, \alpha \rangle = \langle \sigma(\beta), \sigma(\alpha) \rangle$ para todo $\alpha, \beta \in \Phi$.*

Demonstração. Como $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi$, temos que $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\sigma(\beta)) = \sigma\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi$, pois σ deixa invariante Φ. Esta igualdade é equivalente a $\sigma(\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha) = \sigma(\beta) - \langle \beta, \alpha \rangle \sigma(\alpha) \in \Phi$. Como $\sigma|_\Phi$ age transitivamente sobre Φ, concluímos que $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$ deixa Φ invariante. Ademais, $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$ fixa o hiperplano $\sigma(P_\alpha)$ e leva $\sigma(\alpha)$ em $-\sigma(\alpha)$. Pelo lema 1.7.1, temos que $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(\alpha)}$. A prova finaliza comparando a equação acima com a equação $\sigma_{\sigma(\alpha)}(\sigma(\beta)) = \sigma(\beta) - \langle \sigma(\beta), \sigma(\alpha) \rangle \sigma(\alpha)$.

$\square$

Pelo lema acima, um automorfismo de Φ é, precisamente, um automorfismo de E fixando Φ, e portanto podemos ver $\mathscr{W}$ como um subgrupo de $\mathrm{Aut}\Phi$, portanto $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(\alpha)}$ para quaisquer $\alpha \in \Phi$ e

$\sigma \in \mathscr{W}$. Algumas vezes, além de considerar o elemento $\alpha \in E$, vamos precisar definir $\alpha^\vee = 2\alpha/(\alpha,\alpha)$ e chamaremos $\Phi^\vee = \{\alpha^\vee : \alpha \in \Phi\}$ o dual de Φ.

O axioma $(R4)$ impõe uma limitação nos possíveis ângulos que podem acontecer entre pares de raízes $\{\alpha,\beta\}$. Recordemos que o cosseno do ângulo θ entre dois vetores $\alpha,\beta \in E$ é dado pela fórmula $\|\alpha\|\,\|\beta\|\cos\theta = (\alpha,\beta)$, resulta que

$$\langle\beta,\alpha\rangle = \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = 2\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}\cos\theta \Rightarrow \langle\alpha,\beta\rangle\langle\beta,\alpha\rangle = 4\cos^2\theta \in \mathbb{Z}^+$$

Como $0 \leq \cos^2 \leq 1$ e $\langle\alpha,\beta\rangle, \langle\beta,\alpha\rangle$ têm o mesmo sinal, podemos dar o seguinte resultado

Proposição 1.7.1. *Suponha que Φ é um sistema de Raízes no espaço real com produto interno E. Seja $\alpha,\beta \in E$ e $\beta \neq \pm\alpha$ (não proporcionais). Então $\langle\alpha,\beta\rangle\langle\beta,\alpha\rangle \in \{0,1,2,3\}$*

Todas as possibilidades estão listadas na tabela 1.7.1 quando $\beta \neq \pm\alpha$ e $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$. A partir da informação contida na tabela 1.7.1 é possível obter um critério simples, porém muito útil, expresso no Lema 1.7.3.

$\langle\alpha,\beta\rangle$	$\langle\beta,\alpha\rangle$	θ	$\frac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2}$
0	0	$\pi/2$	indefinido
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	2
-1	-2	$3\pi/4$	2
1	3	$\pi/6$	3
-1	-3	$5\pi/6$	3

Tabela 1.7.1: Relações entre raízes, ângulos e comprimento

Lema 1.7.3. *Sejam $\alpha,\beta \in \Phi$ com $\alpha \neq \pm\beta$.*

1. *Se o ângulo entre α e β é estritamente agudo (i.e $(\alpha,\beta) > 0$) então $\alpha - \beta \in \Phi$.*

2. *Se o ângulo entre α e β é estritamente obtuso (i.e $(\alpha,\beta) < 0$) então $\alpha + \beta \in \Phi$*

Demonstração. Inicialmente, notemos que (α,β) e $\langle\alpha,\beta\rangle$ têm o mesmo sinal. A tabela mostra que $\langle\alpha,\beta\rangle$ ou $\langle\beta,\alpha\rangle$ é igual a ±1. Se $\langle\alpha,\beta\rangle = \pm1$ então $\sigma_\beta(\alpha) = \alpha \mp \beta \in \Phi$; similarmente, se $\langle\beta,\alpha\rangle = \pm1$ então $\sigma_\alpha(\beta) = \beta \mp \alpha \in \Phi$. Portanto, $\sigma_{\beta-\alpha}(\beta-\alpha) = \alpha - \beta \in \Phi$. A segunda afirmação segue aplicando a primeira para $-\beta$ no lugar de β.

□

Como aplicação, sejam α,β duas raízes não proporcionais e consideremos a α-cadeia por β, isto é, todas as raízes da forma $\beta + i\alpha$, $i \in \mathbb{Z}$. Sejam r,q os maiores inteiros não negativos tais que $\beta - r\alpha$ e $\beta + q\alpha$ são raízes. Assim como na proposição 1.6.4, podemos mostrar que a cadeia de raízes

$$\beta - r\alpha, \ldots, \beta, \ldots, \beta + q\alpha \tag{1.7.1}$$

é uma progressão aritmética de razão α ininterrupta. Do contrário, se existirem inteiros $-r \leq p < s \leq q$ tais que $\beta + p\alpha \in \Phi$, $\beta + (p+1)\alpha \notin \Phi$, $\beta + (s-1)\alpha \notin \Phi$ e $\beta + s\alpha \in \Phi$, pelo Lema 1.7.3 devemos ter simultaneamente $(\alpha, \beta + p\alpha) \geq 0$ e $(\alpha, \beta + s\alpha) \leq 0$. Isto resulta um absurdo, pois $p < s$ e $(\alpha, \alpha) > 0$.

Notemos que σ_α apenas adiciona ou subtrai um múltiplo de α (possivelmente 0) a qualquer raiz, e portanto a cadeia é invariante por σ_α. Como $\sigma_\alpha(\beta + i\alpha) = \beta - i\alpha - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha$ $(-r \leq i \leq q)$, cada elemento da cadeia refletida por α é exatamente o respectivo da progressão

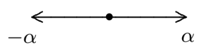
$$\beta - q\alpha - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha, \ldots, \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha, \ldots, \beta + r\alpha - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha \tag{1.7.2}$$

Como as cadeias 1.7.1 e 1.7.2 devem coincidir (pois Φ é invariante por σ_α), geometricamente σ_α reverte os elementos da cadeia original. Em particular, $\sigma_\alpha(\beta + q\alpha) = \beta - q\alpha - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha = \beta - r\alpha$ e $\langle \beta, \alpha \rangle = r - q$. Isto implica, pela tabela 1.7.1, que uma α-cadeia por β tem no máximo comprimento 4. Logo, qualquer α-cadeia por β contém no máximo 4 raízes.

1.7.1 Exemplos.

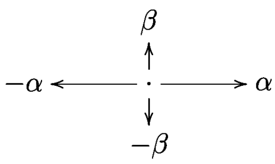
Quando o posto $l = \dim E$ do sistema de Raízes Φ é menor ou igual que 2, podemos representá-lo simplesmente desenhando uma figura, conforme veremos a seguir:

Exemplo 1.7.1. Suponha que $l = 1$. Em vista de $(R2)$, a única possibilidade no caso unidimensional para um sistema de Raízes é do tipo A_1,



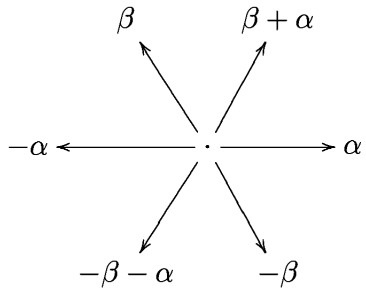
Exemplo 1.7.2. Suponha agora $l = 2$, notemos que $(R3)$ determina a constância do ângulo entre duas raízes adjacentes quaisquer. Pela tabela 1.7.1, esse ângulo pode ser qualquer um dos quatro ângulos $\pi/2$, $\pi/3$ (ou $2\pi/3$), $\pi/4$ (ou $3\pi/4$), $\pi/6$ (ou $5\pi/6$). Com exceção do primeiro ângulo, o comprimento relativo entre as raízes fica determinado pela propriedade $(R4)$. Portanto, a menos de múltiplos escalares, há exatamente quatro sistemas de raízes com posto 2, representados na figura abaixo, para cada um desses ângulos respectivamente.

† Suponhamos que $\theta = \frac{\pi}{2}$. As únicas possíveis raízes para este sistema são $\pm\alpha, \pm\beta$, e seu diagrama é:



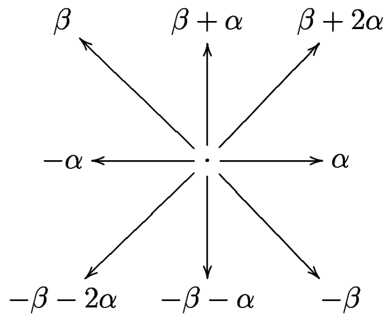
Tais sistemas de raízes são do tipo $A_1 \times A_1$ e corresponde à álgebra clássica $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$.

† Suponhamos que $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Pelo Lema 1.7.3, $\alpha + \beta$ também é uma raiz. Logo Φ tem *seis* raízes como mostramos na seguinte figura:



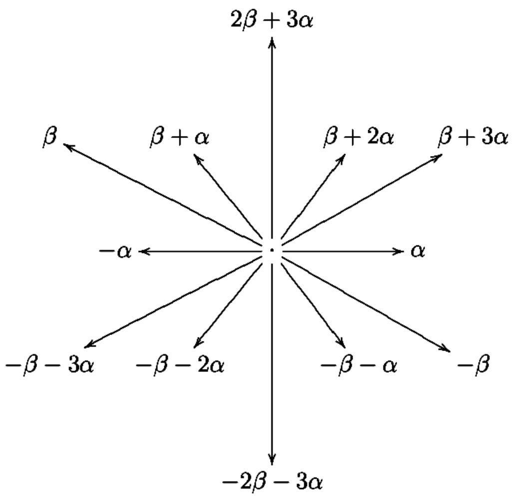
Tais sistemas de raízes são do tipo A_2 e corresponde à álgebra clássica $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{F})$.

† Suponhamos que $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Temos que $\alpha+\beta$ também é uma raiz e aplicando σ_α a β obtemos que $2\alpha+\beta$ é outra raiz. Logo Φ deve ter a forma:



Tais sistemas de Raízes são do tipo B_2 e corresponde à álgebra $\mathfrak{o}(5,\mathbb{F})$.

† Finalmente, se $\theta = \frac{5\pi}{6}$ então $\alpha+\beta$ é uma raiz. O leitor pode provar que Φ deve ter a forma:



Tais sistemas de raízes são do tipo G_2.

1.7.2 Raízes simples.

Seja Φ um sistema de raízes de posto l num espaço euclideano E com grupo de Weyl $\mathscr{W}$. Como Φ contém geradores de E, em particular deve conter uma base para E. Vamos escolher aquelas bases com uma propriedade adicional a mais, que serão chamadas de base para Φ.

Definição 1.7.2. Um subconjunto $\Delta \subset \Phi$ é uma base para Φ se

$(B1)$ Δ é uma base para E no sentido usual,

$(B2)$ Qualquer raiz $\beta \in \Phi$ é escrita como $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$, em que os coeficientes k_α são todos não negativos ou todos não positivos.

Qualquer raiz de Δ é chamada raiz simples. O cardinal de Δ necessariamente é l devido à propriedade $(B1)$ e a expressão para $\beta \in \Phi$ dada em (B_2) é única.

Definição 1.7.3. Definimos a altura de $\beta \in \Phi$ simplesmente como $\operatorname{ht}\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha$. Se $\operatorname{ht}\beta \geq 0$ (respec. $\operatorname{ht}\beta \leq 0$) dizemos que β é uma raiz positiva (respec. negativa) e escrevemos $\beta \succ 0$ (respec. $\beta \prec 0$).

Assim, Δ define uma relação de ordem parcial em E mediante $\beta \prec \alpha \Longleftrightarrow \alpha - \beta$ é uma soma de raízes positivas (equivalentemente, de raízes simples) ou $\alpha = \beta$. Desse modo, Φ é expresso como a união disjunta de todas as raízes positivas Φ^+ e as raízes negativas Φ^- respectivamente. Qualquer **sistema de raízes Φ admite uma base** (Cf [Hum78, Sec. 10.1]) e reparemos que as raízes α e β dos exemplos 1.7.1 e 1.7.2 formam uma base para seus respectivos Φ. Apresentamos a seguir, uma série de propriedades muito úteis envolvendo as raízes simples.

Lema 1.7.4. *Para todo $\alpha, \beta \in \Delta$, $\alpha \neq \beta$, temos $(\beta, \alpha) \leq 0$ e $\alpha - \beta \notin \Phi$.*

Demonstração. Se $(\beta, \alpha) > 0$ então $\alpha - \beta \in \Phi$, contradizendo a condição $(B2)$. □

Lema 1.7.5. *Seja α uma raiz simples. Então σ_α permuta as raízes positivas distintas de α.*

Demonstração. Seja $\beta \in \Phi^+ - \{\alpha\}$, então $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \gamma$ em que $k_\gamma \in \mathbb{Z}^+$. Claramente $\beta \neq \pm\alpha$ e $k_\gamma > 0$ para algum $\gamma \neq \alpha$. Logo, o coeficiente de γ em $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha$ ainda é k_γ. Em outras palavras, $\sigma_\alpha(\beta)$ tem ao menos um coeficiente positivo (em relação a Δ) e $\sigma_\alpha(\beta)$ necessariamente tem que ser positiva. Além disso, $\sigma_\alpha(\beta) \neq \alpha$, pois α tem como imagem $-\alpha$. □

Corolário 1.7.1. Seja $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\beta \succ 0} \beta$. Então $\sigma_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$, para todo $\alpha \in \Delta$.

Lema 1.7.6. *Seja $\alpha \succ 0$ não simples, então existe uma raiz simples $\beta \in \Delta$ tal que $\alpha - \beta \in \Phi^+$.*

Esboço da Demonstração.

Seja $\alpha \in \Phi^+ \setminus \Delta$, então temos que $\alpha = \sum\limits_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \gamma$, $k_\gamma \in \mathbb{Z}^+$ e $k_\gamma > 0$ para algum $\gamma \in \Delta$. Logo

$$\begin{aligned} 0 < (\alpha, \alpha) &= \left(\alpha, \sum_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \gamma\right) \\ &= \sum_{\gamma \in \Delta} k_\gamma (\alpha, \gamma) \end{aligned}$$

em que $k_\gamma > 0$ e $(\alpha, \gamma) > 0$ para algum $\gamma \in \Delta$. Logo, pelo lema 1.7.3, temos que $\alpha - \gamma \in \Phi$. Além disso, $\alpha - \gamma$ necessariamente é uma raiz positiva por tratar-se de uma combinação linear de raízes simples com coeficientes inteiros não negativos. □

Corolário 1.7.2. Seja $\beta \in \Phi^+$, então $\beta = \alpha_1 + \ldots + \alpha_t$ (não necessariamente única) com $\alpha_i \in \Delta$ e cada $\alpha_1 + \ldots + \alpha_i \in \Phi^+$.

Um sistema de raízes Φ é **irredutível** se não pode ser particionado numa união disjunta de dois subconjuntos próprios Φ_1, Φ_2 tais que cada raiz de Φ_1 é ortogonal a todas as raízes de Φ_2. Por exemplo, A_1, A_2, B_2, G_2 são irredutíveis, enquanto que $A_1 \times A_1$ não é irredutível. Se Δ é uma base para Φ, afirmamos que Φ é irredutível se, e somente se, não é possível particionar Δ da maneira prescrita acima.

Quando Φ é irredutível, contendo dois comprimentos distintos de raízes, distinguiremos as raízes em raízes curtas e longas. Por convenção, se Φ tiver um único comprimento de raiz (Ex. $A_1 \times A_1$), estas serão ditas longas.

Lema 1.7.7. *Seja Φ irredutível. Então $\mathscr{W}$ age irredutivelmente sobre E. Particularmente, uma $\mathscr{W}$-órbita de uma raiz α, $\mathscr{W}_\alpha = \{\sigma(\alpha) : \sigma \in \mathscr{W}\}$, gera E.*

Demonstração. Seja $\alpha \in \Phi$ e $\mathscr{W}_\alpha = \{\sigma(\alpha) : \sigma \in \mathscr{W}\}$ a $\mathscr{W}$-órbita de α em E. O subespaço de E gerado por $\mathscr{W}_\alpha$ é claramente $\mathscr{W}$-invariante e portanto, a segunda afirmação segue como consequência imediata da primeira.

Para provar a primeira afirmação, consideremos um subespaço não nulo e $\mathscr{W}$-invariante E' e seja E'' seu complemento ortogonal. Então,

$$E = E' \oplus E''$$

e ademais, E'' também é $\mathscr{W}$-invariante. Se $\alpha \in \Phi$, então podemos afirmar que $\alpha \in E'$ ou $E' \subset P_\alpha$; em efeito, suponhamos que $\sigma_\alpha(E') \subset E'$. Se $E' \nsubseteq P_\alpha$, existe $\lambda \in E \setminus P_\alpha$ tal que $\sigma_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha \rangle \alpha \in E'$, mas como $\lambda \notin P_\alpha$ então $\langle \lambda, \alpha \rangle \neq 0$ e portanto, $\alpha \in E'$. Logo, $E' = E$ pois Φ gera E.

Portanto, cada raiz está num subespaço ou no outro, particionando Φ em dois subconjuntos mutuamente ortogonais.

□

1.7.2.1 Câmaras de Weyl

Note também que as raízes Φ particionam o espaço E (mediante os hiperplanos P_α) em regiões conexas e disjuntas $E \setminus (\bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha)$. Cada uma das regiões é chamada de **Câmara de Weyl** de E. Dizemos que $\gamma \in E$ é uma ação **regular** se $\gamma \in E \setminus (\bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha)$, caso contrário (se $\gamma \in P_\alpha$ para algum α) vamos dizer que γ é **singular**. Logo, qualquer $\gamma \in E$ regular pode só pertencer a uma única câmara de Weyl, denotada por $\mathfrak{C}(\gamma)$ (ver Figura 1.7.2).

Para γ regular definimos o conjunto $\Phi^+(\gamma) = \{\alpha \in \Phi : (\alpha, \gamma) > 0\}$. Desta forma temos também que $\Phi = \Phi^+(\gamma) \cup (-\Phi^+(\gamma))$. Dizemos que $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ é decomponível se $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ com $\beta_i \in \Phi^+(\gamma)$, caso contrário, dizemos que α é indecomponível. Chamamos Câmara de Weyl Fundamental à câmara $\mathfrak{C}(\Delta) = \{\gamma \in E : (\gamma, \alpha) > 0, \forall \alpha \in \Delta\}$. Por último, o seguinte Teorema mostra como age o grupo de Weyl $\mathscr{W}$ no espaço E.

Teorema 1.14. *Seja Δ uma base de Φ.*

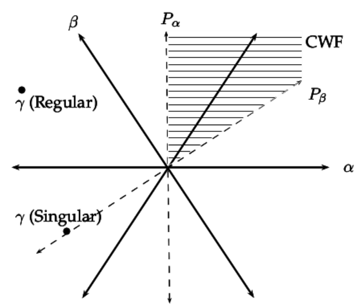


Figura 1.7.2: Câmaras de Weyl para $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{F})$

1. *Se $\gamma \in E$ é regular, então existe $\sigma \in \mathscr{W}$ tal que $(\sigma(\gamma),\alpha) > 0$ para todo $\alpha \in \Delta$, isto é, $\mathscr{W}$ age transitivamente sobre câmaras de Weyl.*

2. *Se Δ' é uma outra base de Φ, então $\sigma(\Delta') = \Delta$ para algum $\sigma \in \Delta$. Logo $\mathscr{W}$ age transitivamente sobre bases.*

3. *Se α é qualquer raiz, então existe $\sigma \in \mathscr{W}$ tal que $\sigma(\alpha) \in \Delta$.*

4. *$\mathscr{W}$ é gerado por $\{\sigma_\alpha : \alpha \in \Delta\}$, i.e, por reflexões simples.*

5. *Se $\sigma(\Delta) = \Delta$, $\sigma \in \mathscr{W}$, então $\sigma = 1$.*

Demonstração. Veja [Hum78, Sec. 10.3].

□

Uma vez que qualquer $\sigma \in \mathscr{W}$ pode ser escrito como $\sigma = \sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}\dots\sigma_{\alpha_t}$ com $\alpha_i \in \Delta$ e t minimal, é possível definir o comprimento de σ relativo a Δ como $l(\sigma) = t$. Portanto, $l(1) = 0$. Formalmente:

Definição 1.7.4. Uma expressão reduzida para $\sigma \in \mathscr{W}$ é uma fatorização de σ como produto de k reflexões simples $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_k$ com k minimal. O número k é chamado comprimento de σ e denotado por $l(\sigma)$. Definimos $n(\sigma)$ como o número de raízes positivas $\alpha \in \Phi^+$ tais que $\sigma(\alpha) \prec 0$.

Lema 1.7.8. *Para qualquer $\sigma \in \mathscr{W}$, a igualdade $l(\sigma) = n(\sigma)$ é válida.*

Esboço da Demonstração.

Sabemos que qualquer reflexão simples leva exatamente uma raiz positiva em raiz negativa, permutando as demais raízes positivas. Portanto, o produto de k reflexões simples pelo menos deve levar k raízes positivas em raízes negativas, i.e, $n(\sigma) \leq l(\sigma)$.

Para provar o lema, vamos aplicar indução sobre $n(\sigma)$. Os casos $\sigma = 0$ e $\sigma = 1$ são triviais. É suficiente mostrar que se σ é produto de $k+1$ reflexões simples $\sigma = \sigma_0\sigma_1 \dots \sigma_k$ e $n(\sigma) < k+1$, então sua expressão não é reduzida. Para isso, suponhamos que a expressão é reduzida, então $\tau = \sigma_1 \dots \sigma_k$ também é reduzida de comprimento k.

Pela indução sobre k, temos que $l(\tau) = n(\tau) = k$. Portanto, τ leva k raízes positivas em raízes negativas, e como $n(\sigma) < k+1$, a última reflexão $\sigma_0 = \sigma_\alpha$ leva alguma destas raízes negativas novamente em raiz positiva. Tal raiz deve ser $-\alpha$, que é igual a $\tau(\beta)$ para alguma raiz $\beta \in \Phi^+$.

Mas isso mostra que existe σ_i na expressão de τ em que β permanece com o mesmo sinal até σ_i, e depois muda de sinal que novamente é mantido até o final. Em outras palavras:

$$\tau = \sigma_1 \dots \sigma_i \dots \sigma_k = g\sigma_i h,$$

em que $h(\beta) = \alpha_i \in \Delta$, $\sigma_i = \sigma_{\alpha_i}$ e $g(\alpha_i) = \alpha$. Logo,

$$\tau(\beta) = g\sigma_i h(\beta) = g\sigma_i(\alpha_i) = g(-\alpha_i) = -\alpha$$

Mas $g(\alpha_i) = \alpha$ implica que $g\sigma_i g^{-1} = \sigma_{g(\alpha_i)} = \sigma_\alpha$, e portanto

$$\sigma = \sigma_\alpha \tau = \sigma_\alpha g\sigma_i h = gh,$$

mostrando que a expressão original para σ não é reduzida.

□

Lema 1.7.9. *Seja $\lambda, \mu \in \overline{\mathfrak{C}}(\Delta)$ tais que $\sigma\lambda = \mu$ para algum $\sigma \in \mathscr{W}$. Então σ é produto de reflexões simples que fixam λ. Em particular, $\lambda = \mu$*

Demonstração. Vamos usar indução sobre $l(\sigma)$:

- † Para o caso $l(\sigma) = 0$ temos que $\sigma = 1$ e $\lambda = \mu$.

- † Suponhamos que $l(\sigma) > 0$. Então pelo lema anterior, σ deve levar alguma raiz positiva em negativa. Portanto, σ não pode levar todas as raízes simples em positivas (i.e, ao menos uma raiz simples é levada numa raiz negativa).

  Tomemos $\alpha \in \Delta$ tal que $\sigma(\alpha) \prec 0$, logo $0 \geq (\mu, \sigma(\alpha)) = \left(\sigma^{-1}(\mu), \alpha\right) = (\lambda, \alpha) \geq 0$ (pois $\lambda, \mu \in \overline{\mathfrak{C}}(\Delta)$). Isto implica que $(\lambda, \alpha) = 0$, logo $\sigma_\alpha(\lambda) = \lambda - \underbrace{\langle \lambda, \alpha \rangle}_{0} \alpha = \lambda$ e $(\sigma\sigma_\alpha)(\lambda) = \sigma(\lambda) = \mu$ com $l(\sigma\sigma_\alpha) = l(\sigma) - 1 < l(\sigma)$.

  Pela hipótese de indução, $\sigma\sigma_\alpha$ é produto de reflexões simples que fixam λ. Logo σ também.

□

1.7.3 Pesos Abstratos.

Seja Φ um sistema de raízes sobre um espaço euclideano E com produto interno $(,)$ e grupo de Weyl $\mathscr{W}$. Definimos

$$\Lambda = \left\{ \gamma \in E : \langle \gamma, \alpha \rangle = 2\frac{(\gamma, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in \Phi \right\} = \left\{ \gamma \in E : \langle \gamma, \alpha \rangle = 2\frac{(\gamma, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in \Delta \right\}$$

o reticulado de Pesos e cada elemento $w \in \Lambda$ é denominado peso. Definimos o reticulado de raízes de Φ como o subgrupo Λ_r de Λ gerado por Φ, i.e.

$$\Lambda_r = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}} \Phi = \{k_1\alpha_1 + \ldots + k_l\alpha_l : \alpha_i \in \Phi, k_i \in \mathbb{Z}\}$$

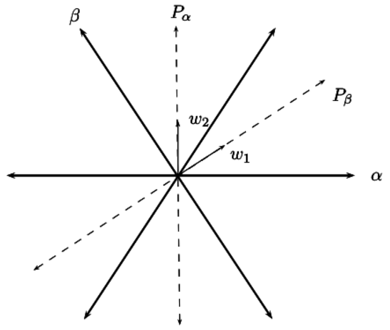


Figura 1.7.3: Representação geométrica dos pesos fundamentais para a álgebra $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{F})$

Qualquer peso de $\overline{\mathfrak{C}}(\Delta)$, em que $\mathfrak{C}(\Delta)$ é a câmara fundamental de Weyl, é chamado **peso dominante**, portanto um peso $w \in E$ é dominante quando $\langle w, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}^+, \forall \alpha \in \Delta$. Denotamos o conjunto dos pesos dominante por Λ^+. No entanto, quando $\langle w, \alpha \rangle \in \mathbb{N}$, dizemos que w é fortemente dominante.

Suponhamos que $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$, seja $\{\omega_1, \ldots, \omega_l\}$ a base dual de $\Delta^\vee = \left\{\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_l^\vee\right\}$ com $\alpha_i^\vee = 2\frac{\alpha_i}{(\alpha_i,\alpha_i)}$. Então, por definição $\left\langle \omega_i, \alpha_j \right\rangle = \delta_{i,j}$ e cada ω_i é chamado **pesos fundamental** (ou **pesos dominante fundamental**). Notemos que $\sigma_{\alpha_i}\omega_j = \omega_j - \delta_{i,j}\alpha_i$ e considerando $\omega \in E$ arbitrário, com $m_i = \langle \omega, \alpha_i \rangle$, então $0 = \langle \omega - \sum m_i\omega_i, \alpha \rangle$ para cada raiz simples α. Provando que $\omega = \sum m_i\omega_i$ e os pesos fundamentais conformam uma base para E. Logo Λ é um reticulado com base $\{\omega_i\}_{i=1}^{l}$ e $\omega \in \Lambda^+$ se e somente se $m_i \geq 0$ (Figura 1.7.3 no caso A_2).

É claro que qualquer elemento no reticulado de raízes Λ_r também pertence ao reticulado de pesos Λ. Pela teoria de reticulados, Λ/Λ_r é um grupo finito, conhecido como **grupo fundamental** de Φ e seu cardinal $|\Lambda/\Lambda_r|$ é o índice de conexão.

Definimos a **matriz de Cartan** relativo à base ordenada $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ como a matriz

$$\mathscr{C} \quad = \quad \left(\left\langle \alpha_i, \alpha_j \right\rangle\right)_{1\leq i,j\leq l} = \left(\left(\alpha_i, \alpha_j^\vee\right)\right)_{1\leq i,j\leq l}.$$

Notemos que escrevendo $\alpha_i = \sum_j m_{i,j}\omega_j$, então $\langle \alpha_i, \alpha_k \rangle = \sum_j m_{i,j}\left\langle \omega_j, \alpha_k \right\rangle = \sum_j m_{i,j}\delta_{j,k} = m_{i,k}$, ou seja cada $m_{i,j}$ é o coeficiente da matriz de Cartan. Em outras palavras, $\mathscr{C}$ representa a matriz de mudança de base de pesos à base de raízes simples. Além disso, como o grupo de Weyl $\mathscr{W}$ age transitivamente sobre bases Δ de Φ (C.f. Teorema 1.14), a matriz de Cartan independe da escolha de Δ (mais depende da ordem escolhida), e além disso, a matriz de Cartan é não singular pois Δ é uma base de E no sentido usual.

Observação 1.7.1. A matriz de Cartan $\mathscr{C} = \left(\left\langle \alpha_i, \alpha_j \right\rangle\right)_{1\leq i,j\leq l}$ possui as seguinte propriedades imediatas:

† As entradas da diagonal são todas iguais a 2.

† As entradas fora da diagonal têm valores $0, -1, -2$ ou -3. No caso que $\left\langle \alpha_i, \alpha_j \right\rangle = -2$ ou -3, então $\left\langle \alpha_j, \alpha_i \right\rangle = -1$.

† Pode-se mostrar que $|\det\mathscr{C}| = |\Lambda/\Lambda_r|$.

Exemplo 1.7.3. Suponhamos que $\dim E = 2$ e $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ com $\|\alpha_1\| \leq \|\alpha_2\|$. Então, as únicas possíveis matrizes de Cartan são:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

que corresponde às álgebras do tipo A_2, B_2 e G_2 respectivamente.

Lema 1.7.10. *Cada peso é conjugado sobre $\mathscr{W}$ a um único peso dominante. Se w é dominante, então $\sigma w \prec w$ para todo $\sigma \in \mathscr{W}$. Se w é fortemente dominante, então $\sigma w = w$ somente quando $\sigma = id$ (Cf. Fig.* 1.7.4*).*

Esboço da Demonstração.
Pelo Teorema 1.14, tomando $\omega \in \Lambda$ sabemos que existe $\sigma \in \mathscr{W}$ tal que $\nu = \sigma\omega \in \Lambda^+$ (pois $\mathscr{W}$ preserva Λ). Pelo Lema 1.7.9, se existir outro $\tilde{\nu} = \tilde{\sigma}\omega \in \Lambda^+$ então $\tilde{\sigma}\sigma^{-1}\nu = \tilde{\nu}$ o qual implicaria que $\tilde{\nu} = \nu$. Logo ν é único.
Para o resto da demonstração, basta estender a ordem parcial $\omega \succ \nu \Leftrightarrow \omega - \nu = \sum$ *raizes positivas* para todo E por

$$\omega \succ \nu \Leftrightarrow \omega - \nu = \sum_{i=1}^{l} k_i \alpha_i, \;\; k_i \in \mathbb{R}^+$$

□

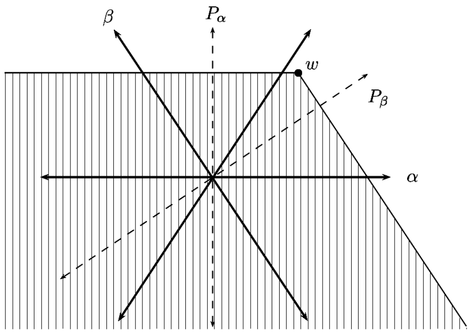


Figura 1.7.4: Interpretação geométrica do Lema1.7.10. A zona pintada indica onde podem pertencer os pesos $\sigma w \prec w$.

Lema 1.7.11. *Seja $\omega \in \Lambda^+$, então* $\mathrm{Card}\{\mu \in \Lambda^+ : \mu \prec \omega\} < \infty$.

Demonstração. Seja $\omega \in \Lambda^+$ fixado e provemos que o número de pesos dominantes $\mu \prec \omega$ é finito. Por hipótese temos que $\omega + \mu \in \Lambda^+$ e $\omega - \mu$ é soma de raízes simples com coeficientes naturais. Logo, $0 \leq (\omega + \mu, \omega - \mu) = (\omega, \omega) - (\mu, \mu)$. Deste modo, u pertence ao conjunto $A = \{x \in E : (w,w) \geq (x,x)\}$. Note que A é a preimagem do conjunto $[0, (\omega, \omega)]$ pela função contínua $f : x \in E \mapsto (x,x) \in \mathbb{R}^+$, logo A é compacto. Considerando o conjunto discreto Λ^+, segue-se que $A \cap \Lambda^+$ ainda é compacto (pois é fechado e limitado). Vejamos então que $A \cap \Lambda^+$ é finito: tomando $z \in \Lambda^+$, existe uma vizinhança B_z de z tal que $\Lambda^+ \cap B_z = \{z\}$ e deste modo construímos a cobertura por abertos $\{B_z\}_{z \in \Lambda^+}$ para $A \cap \Lambda^+$. Segue-se que $A \cap \Lambda^+$ é finito.

□

Lema 1.7.12. *Vale $\rho = \sum_i^l \omega_i$. Consequentemente, ρ é fortemente dominante.*

Demonstração. Seja $\sigma_i = \sigma_{\alpha_i}$ com $\alpha_i \in \Delta$, então temos que $\sigma_i(\rho) = \rho - \alpha_i$ e $\sigma_i^2(\rho) = \rho$. Desta forma

$$(\rho - \alpha_i, \alpha_i) = (\sigma_i(\rho), \alpha_i) = \left(\sigma_i^2(\rho), \sigma_i(\alpha_i)\right) = (\rho, -\alpha_i) = -(\rho, \alpha_i)$$

então obtemos que $(\rho, \alpha_i) - (\alpha_i, \alpha_i) = -(\rho, \alpha_i) \Rightarrow \langle \rho, \alpha_i \rangle = 1$ e assim $\rho = \sum_i^l \langle \rho, \alpha_i \rangle \omega_i$. Em particular $\langle \rho, \alpha_i \rangle > 0$ para todo $1 \leq i \leq l$ e $\rho \in \Lambda^+ \cap \mathfrak{C}(\Delta)$. Segue que ρ é fortemente dominante.

$\square$

1.7.4 Conjuntos Saturados de Pesos.

Dizemos que um subconjunto Π de Λ é saturado quando $\forall\, \omega \in \Pi, \alpha \in \Phi$ e $0 \leq i \leq \langle \omega, \alpha \rangle$ temos que $\omega - i\alpha \in \Pi$. Logo, qualquer conjunto saturado Π é automaticamente estável por $\mathscr{W}$, i.e, $\mathscr{W} \centerdot \Pi \subset \Pi$. Além disso, dizemos que Π tem peso máximo $\omega \in \Lambda^+$ se $\omega \in \Pi$ e $\mu \prec \omega$ para todo $\mu \in \Pi$. Temos assim os seguintes fatos sobre conjuntos saturados (Cf. [Hum78, Sec. 13.4]).

Lema 1.7.13. *Um conjunto saturado de pesos possuindo um peso máximo w necessariamente deve ser finito.*

Lema 1.7.14. *Seja Π um conjunto saturado de pesos com peso máximo ω. Se $\mu \in \Lambda^+$ é tal que $\mu \prec \omega$ então $\mu \in \Pi$.*

Lema 1.7.15. *Seja Π um conjunto saturado de pesos, com peso máximo w. Se $\mu \in \Pi$, então $(\mu + \rho, \mu + \rho) \leq (\omega + \rho, \omega + \rho)$. A igualdade acontece somente quando $\mu = \omega$.*

Capítulo 2

Teoria de Representações.

Vamos estudar as representações de uma álgebra de Lie semissimples $\mathfrak{g}$ numa forma mais geral. Primeiramente, na seção 2.1, o corpo $\mathbb{F}$ pode ser arbitrário e associaremos a cada álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{F}$ uma álgebra associativa $U_{\mathfrak{g}}$ com identidade (em geral de dimensão infinita) que seja gerada o mais livre possível. Tal álgebra é conhecida como álgebra universal envolvente associada a $\mathfrak{g}$, e representa uma ferramenta importante na teoria de representações. Finalmente, enunciaremos o Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt[1] que permite obter uma base explicita de $U_{\mathfrak{g}}$ por meio de uma base de $\mathfrak{g}$.

Posteriormente, na seção 2.2, veremos conceitos próprios da teoria de representações. Para esta seção, $\mathfrak{g}$ denotará uma álgebra de Lie semissimples de dimensão finita definida sobre um corpo $\mathbb{F}$ algebricamente fechado de característica zero, $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan (CSA) de $\mathfrak{g}$ fixa, Φ o sistema de raízes, $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ uma base para Φ e $\mathscr{W}$ o grupo de Weyl. O objetivo principal da seção será o estudo de $\mathfrak{g}$-módulos de dimensão finita e, pelo Teorema da redutividade completa de Weyl, vamos poder assumir $\mathfrak{g}$-módulos irredutíveis. Muito destes conceitos são generalizações dos já mencionados na seção 1.5, tomando eles como exemplos referentes nesta seção.

Este capítulo termina com a seção 2.4, na qual trataremos da Fórmula de caracteres de Weyl para representações de Álgebras de Lie semissimples. O objetivo principal dessa seção será provar a fórmula da dimensão de Weyl para uma representação irredutível V^{λ} de peso maximal λ de uma álgebra de Lie semissimples $\mathfrak{g}$, abordando por sua vez, alguns exemplos de aplicações. A notação a ser empregada será a mesma das seções 2.1 e 2.2, exceto menção contrária.

2.1 A Álgebra Universal Envolvente.

A álgebra universal envolvente de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um par $(U_{\mathfrak{g}}, i)$ consistindo de uma álgebra associativa com unidade $U_{\mathfrak{g}}$ e de uma aplicação linear $i : \mathfrak{g} \longrightarrow U_{\mathfrak{g}}$ satisfazendo

1. Para todo $x, y \in \mathfrak{g}$, $i([x,y]) = i(x)\, i(y) - i(y)\, i(x)$

2. A propriedade universal: Para cada par (A, j) consistindo de uma álgebra associativa A com unidade e de uma aplicação linear $j : \mathfrak{g} \longrightarrow A$ satisfazendo (1), existe um único homomorfismo de álgebras $\varphi : U_{\mathfrak{g}} \longrightarrow A$ tornando o seguinte diagrama comutativo:

[1] Pelos objetivos do presente trabalho, omitiremos a demonstração deste Teorema. No entanto, a mesma pode ser encontrada nas referências [Gra00, Jac79, Hum78] como também em [Var84, Gar11, SW14].

$$\begin{tikzcd} & U_{\mathfrak{g}} \arrow[dd, "\varphi"] \\ \mathfrak{g} \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & \\ & A \end{tikzcd}$$

Quando um objeto é construído a partir da propriedade universal, este é único salvo isomorfismo. Portanto, é necessário somente construir um exemplo concreto a fim de garantir a existência desse objeto.

Definição 2.1.1. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre um corpo $\mathbb{F}$. Definimos, para cada $n \geq 0$, a sequência

$$T^n(\mathfrak{g}) = \begin{cases} \mathbb{F} & n = 0 \\ \mathfrak{g} & n = 1 \\ \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{g} \ (n\text{-vezes}) & n > 1 \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Definimos a álgebra tensorial de $\mathfrak{g}$ como $T(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n(\mathfrak{g})$.

Podemos mostrar que $T(\mathfrak{g})$ é uma álgebra sobre $\mathbb{F}$ associativa com identidade e, algumas vezes, acostumamos escrever $T(\mathfrak{g}) = \mathbb{F} \oplus \mathfrak{g} \oplus \left(\mathfrak{g}^{\otimes 2}\right) \oplus \left(\mathfrak{g}^{\otimes 3}\right) \oplus \cdots$ Notemos que se $\{x_k\}_{k \in K}$ é uma base ordenada para $\mathfrak{g}$, então o conjunto $\{1, x_{k_1} \otimes \cdots \otimes x_{k_s} : k_s \in K, \forall s \in \mathbb{N}\}$ é uma base para $T(\mathfrak{g})$. Cada elemento da forma $x_{k_1} \otimes \cdots \otimes x_{k_s}$ é chamado monômio e, no caso que $k_1 \leq \cdots \leq k_s$, $x_{k_1} \otimes \cdots \otimes x_{k_s}$ é chamado monômio canônico.

Seja J um ideal bilateral de $T(\mathfrak{g})$ gerado por todos os elementos da forma $x \otimes y - y \otimes x - [x,y]$, $\forall x, y \in \mathfrak{g}$ e definimos $U_{\mathfrak{g}} = T(\mathfrak{g})/J$ com $\pi : T(\mathfrak{g}) \longrightarrow U_{\mathfrak{g}}$ a projeção canônica. Observamos que J não contém os escalares $T^0(\mathfrak{g}) = \mathbb{F}$ e portanto, claramente $\pi(\mathbb{F}) \cong \mathbb{F}$.

Proposição 2.1.1. *Seja $i : \mathfrak{g} \longrightarrow U_{\mathfrak{g}}$ a restrição de π a $T^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. Então $(U_{\mathfrak{g}}, i)$ é uma álgebra universal envolvente de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração. Com efeito, seja (A, j) conforme à definição. A propriedade universal de $T(\mathfrak{g})$ nos fornece um único homomorfismo de álgebras $k : T(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$ tal que $k(x) = j(x)$, $\forall x \in \mathfrak{g}$. I.e, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} & T(\mathfrak{g}) \arrow[dd, "k"] \\ \mathfrak{g} \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & \\ & A \end{tikzcd}$$

Notemos que simplesmente k é uma extensão de j a todo $T(\mathfrak{g})$. Além disso

$$k(x \otimes y - y \otimes x - [x,y]) = k(x)k(y) - k(y)k(x) - k([x,y]) = 0$$

Ou seja, $J \subset \ker k$. Logo, pelo Teorema de isomorfismos existe um único $\mathbb{F}$-homomorfismo de álgebras $\varphi : U_{\mathfrak{g}} \longrightarrow A$ tal que $\varphi \circ \pi = k$, isto é, $\varphi \circ i = j$.

□

$$\begin{tikzcd}
 & T(\mathfrak{g}) \arrow[r, "k"] \arrow[dd, "\pi"] & A \\
\mathfrak{g} \arrow[ur, "i"] \arrow[dr] & & \\
 & U_{\mathfrak{g}} \arrow[uur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Denotamos $i(x_{k_1} \otimes \cdots \otimes x_{k_s})$ por $x_{k_1} \cdots x_{k_s}$. É possível reordenar os produtos em $U_{\mathfrak{g}}$ para escrever os elementos como somas de monômios nos geradores, na ordem que desejamos. Por exemplo, se $x, y, z \in \mathfrak{g}$, então em $U_{\mathfrak{g}}$ vale a igualdade

$$xzy = xzy - xyz + xyz = xyz + [x,z]\,y$$

Podemos considerar que o monômio xzy não esta ordenado, mas é possível escrever ele como xyz (que esta ordenado) mais os termos de menor grau (pois $[x,z] \in \mathfrak{g} \Rightarrow [x,z]\,y$ é de grau 2).

O resultado que ordena e generaliza tal argumento é o Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt[2], cuja demonstração encontramos em [Hum78, Sec. 17.4] e [Jac79, Gar11].

Teorema 2.1. *(Poincaré-Birkhoff-Witt) Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie (não necessariamente de dimensão finita) e $\{x_k\}_{k\in K}$ uma base ordenada de $\mathfrak{g}$ pelo conjunto de índices K. Então os monômios do tipo $x_{i_1} \cdots x_{i_s}$ para $i_1 \leq \ldots \leq i_s$, formam uma base de $U_{\mathfrak{g}}$. Em particular, se $\mathfrak{g}$ tem dimensão finita e $\{x_1, \cdots, x_n\}$ é uma base para $\mathfrak{g}$, então os monômios da forma $x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$ com $m_i \geq 0$, formam uma base para $U_{\mathfrak{g}}$.*

Observação 2.1.1. Se $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ são duas subálgebras de $\mathfrak{g}$ tais que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ como espaço vetorial (i.e, não requirimos que $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_2$ comutem) e se $\{b_1, b_2, \cdots\}$,$\{c_1, c_2, \cdots\}$ são bases para $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ respectivamente, então pelo teorema PBW temos que

$$\{b_{i_1} b_{i_2} \cdots b_{i_s} : i_1 \leq \cdots \leq i_s\}, \{c_{j_1} c_{j_2} \cdots c_{j_t} : j_1 \leq \cdots \leq j_t\}$$

formam uma base para $U_{\mathfrak{g}_1}$ e $U_{\mathfrak{g}_2}$ respectivamente. Consequentemente, o conjunto dos produtos $\left\{b_{i_1} b_{i_2} \cdots b_{i_s} c_{j_1} c_{j_2} \cdots c_{j_t}\right\}$ é uma base para $U_{\mathfrak{g}_1} \otimes U_{\mathfrak{g}_2} \cong U_{\mathfrak{g}}$.

Exemplo 2.1.1. Consideremos a álgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ com base canônica ordenada $\{x, h, y\}$ em que

$$[x,y] = h;\ [h,x] = 2x;\ [h,y] = -2y$$

respectivamente. Então, $U_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})}$ é a $\mathbb{F}$-álgebra associativa com base $\left\{x^a h^b y^c : a, b, c \geq 0\right\}$, em que x, h, y denotam três símbolos (por abuso de notação) satisfazendo as relações:

[2]O leitor poderá observar que o enunciado do Teorema oferecido neste trabalho é diferente do [Hum78], em que o autor mostra o teorema 2.1 como um corolário de um outro teorema mais geral. Atualmente, muitos autores optam por colocar como teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt o mesmo que nós estamos enunciando. Na referência [SW14] poderemos encontrar explicações mais detalhadas do teorema, como também propriedades sobre outras álgebras.

$$xy - yx = h;\ hx - xh = 2x;\ hy - yh = -2y$$

respectivamente.

2.2 Representações.

Consideremos V um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita e $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de $\mathfrak{g}$ sobre V. Temos que $\rho(\mathfrak{h})$ é uma subálgebra abeliana de $\mathfrak{gl}(V)$ contendo somente operadores semissimples, portanto são simultaneamente diagonalizáveis. Pelo teorema 1.10, $\mathfrak{h}$ age diagonalmente sobre V. Assim

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda \tag{2.2.1}$$

em que $V_\lambda = \{v \in V : h\centerdot v = \lambda(h)v, \forall h \in \mathfrak{h}\}$ são subespaços de V bem definidos. Quando $V_\lambda \neq 0$, chamamos V_λ de espaço de peso λ de V, e λ é chamado peso de V.

Observação 2.2.1. Notemos que 2.2.1 é realmente uma soma direta pelo fato que autovetores correspondentes a autovalores distintos são linearmente independentes.

Exemplo 2.2.1. Como $\mathfrak{g}$ age em si própria via representação adjunta, segundo o feito na seção 1.6, temos que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

é a decomposição em espaços de pesos neste caso.

Exemplo 2.2.2. Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$, $V = V^m$ uma representação irredutível com peso máximo $m \in \mathbb{Z}^+$ de $\mathfrak{g}$. Os espaços pesos são justamente V_k com $k = -m, -m+2, \ldots, m-2, m$, pois $\mathfrak{h} \cong \mathbb{F}$.

Exemplo 2.2.3. Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ e $V = \mathfrak{g}$. Então $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_2$, seguindo o que foi feito na seção 1.6.

Não necessariamente a igualdade da soma 2.2.1 é válida quando $\dim V = \infty$. No entanto, a soma $V' = \oplus V_\lambda$ ainda é direta e $V' \subset V$. Além disso, V' é sempre um $\mathfrak{g}$-submódulo de V. Assim, se V é irredutível, necessariamente $V' = V$ e portanto V possui ao menos um espaço de peso. O seguinte Lema generaliza o lema 1.5.1 da seção 1.5.

Lema 2.2.1. *Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo arbitrário.*

1. *$\mathfrak{g}_\alpha$ transforma V_λ em $V_{\lambda+\alpha}$* ($\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $\alpha \in \Phi$).

2. *$V' = \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$ é direta e V' é um $\mathfrak{g}$-submódulo de V.*

3. *Se* $\dim V < \infty$*, então $V = V'$.*

Demonstração.

(1) Consideremos $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $v \in V_\lambda$ e $h \in \mathfrak{h}$. Então

$$\begin{aligned} h \centerdot (x \centerdot v) &= x \centerdot (h \centerdot v) + [h,x] \centerdot v \\ &= x \centerdot (\lambda(h) v) + \alpha(h) x \centerdot v \\ &= (\lambda + \alpha)(h) x \centerdot v \end{aligned}$$

e portanto $xv \in \lambda + \alpha$.

(2) Segue da Observação 2.2.1. Além disso, observe que em (1), mostramos que V' é invariante para cada $\mathfrak{g}_\alpha$, ou seja, que V' é invariante para $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$. Portanto, V' é um $\mathfrak{g}$-submódulo de V.

(3) Finalmente, no caso $\dim V < \infty$, segue do fato que qualquer espaço vetorial pode ser expresso como soma direta do seus autoespaços.

□

Definição 2.2.1. Um vetor maximal de peso λ é um vetor não nulo $v_\lambda \in V_\lambda$ tal que $\mathfrak{g}_\alpha \centerdot v_\lambda = 0, \forall \alpha \in \Delta$ (i.e, $\alpha \succ 0$).

Notemos que a definição acima depende da escolha de Δ. Por exemplo, se $\mathfrak{g}$ é simples e consideramos $\mathfrak{g}$ como um $\mathfrak{g}$-módulo via representação adjunta, então se $\beta \in \Phi$ é uma raiz maximal relativa a Δ, qualquer elemento de $\mathfrak{g}_\beta$ é um vetor maximal. Com efeito, como

$$\mathfrak{g}_\alpha \centerdot \mathfrak{g}_\beta \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta},$$

para $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_\beta$, $h \in \mathfrak{h}$ temos que

$$h \centerdot [x,y] = h \centerdot xy - h \centerdot yx = (\alpha + \beta)(h)[x,y]$$

com $\alpha + \beta \succ \beta$, o que é impossível. Então necessariamente $[x,y] = 0$.

Definição 2.2.2. Seja Φ um sistema de raízes associado a $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, com base Δ respectivamente. Definimos a subálgebra de Borel $\mathfrak{b}$ correspondente a $\mathfrak{h}$ e Δ como a subálgebra

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \succ 0} \mathfrak{g}_\alpha$$

Se definimos $\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha \succ 0} \mathfrak{g}_\alpha$, resulta que $\mathfrak{n}_+$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$ nilpotente[3] pelo simples fato que $\mathfrak{g}$ possui uma quantidade finita de raízes e $\left[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta\right] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ se $\alpha + \beta$ é uma raiz ou zero caso contrário. Além disso, vale o seguinte resultado

Proposição 2.2.1. *$\mathfrak{b}$ é a subálgebra solúvel maximal de $\mathfrak{g}$*

Demonstração. Temos que $\mathfrak{b}/\mathfrak{n}_+ \cong \mathfrak{h}$ com $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{n}_+$ solúveis. Pelo Lema 1.2.3, concluímos que $\mathfrak{b}$ é solúvel. Por outro lado, consideremos uma outra subálgebra $\mathfrak{s} \supsetneq \mathfrak{b} \supset \mathfrak{h}$. Logo, $\mathfrak{h}$ age diagonalmente em $\mathfrak{s}$ e portanto existe $\alpha \in \Phi^+$ tal que $\mathfrak{g}_{-\alpha} \subset \mathfrak{s}$. Deste modo, $\mathfrak{s}$ contém uma subálgebra simples isomorfa a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ que não é solúvel e, consequentemente, $\mathfrak{s}$ não pode ser solúvel.

□

[3] Uma mesma observação pode ser feita na subálgebra $\mathfrak{n}_- = \bigoplus_{\alpha \prec 0} \mathfrak{g}_\alpha$. Notemos também que $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{b}$.

No caso $\dim V = \infty$, podem não existir os vetores maximais. No entanto, se $\dim V < \infty$ e consideramos a subálgebra de Borel $\mathfrak{b}$ (que é solúvel), pelo teorema de Lie, $\mathfrak{b}$ admite um autovetor comum v tal que $x \centerdot v = \lambda(x) v, \forall x \in \mathfrak{b}$. Como $\mathfrak{n}_+$ é nilpotente, e portanto todo elemento de $\mathfrak{n}_+$ é nilpotente, pelo teorema de Engel, $x \centerdot v = 0, \forall x \in \mathfrak{n}_+$. Logo v é vetor maximal no sentido da definição acima.

Observação 2.2.2. Pelas propriedades de Integralidade (Cf. Prop. 1.6.4) sabemos que cada $\mathfrak{g}_\alpha$ é unidimensional. Assim, dado $0 \neq x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, para ver que v_λ é um vetor maximal de peso $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, basta somente ver que $x_\alpha \centerdot v_\lambda = 0$ para cada $\alpha \in \Delta$ (i.e, $\alpha \succ 0$).

2.2.1 O $\mathfrak{g}$-módulo cíclico.

Para o estudo dos $\mathfrak{g}$-módulos irredutíveis de dimensão finita resulta útil o estudo de uma classe de **$\mathfrak{g}$-módulos gerados por um vetor maximal**, dando assim a seguinte definição.

Definição 2.2.3. (módulo cíclico) Seja v_λ um vetor maximal de peso λ e seja $U_\mathfrak{g}$ a álgebra universal envolvente de $\mathfrak{g}$. Definimos o $\mathfrak{g}$-módulo cíclico de peso máximo λ como $V = U_\mathfrak{g} \centerdot v_\lambda$. Neste caso, chamamos v_λ do vetor cíclico de peso máximo λ.

É claro que V pode ser visto como uma representação de $\mathfrak{g}$. Ademais, como consequência do Teorema PBW sobre a álgebra envolvente, V é gerado pelos elementos da forma $a_1 a_2 \dots a_m \centerdot v_\lambda$ em que $a_i \in \mathfrak{g}$. Obtemos assim, as seguintes proposições:

Proposição 2.2.2. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra semissimples, $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan e Φ^+ as raízes positivas. Então $U_{\mathfrak{n}_+}$, $U_\mathfrak{h}$ e $U_{\mathfrak{n}_-}$ são subálgebras de $U_\mathfrak{g}$ e além disso,*

$$U_\mathfrak{g} \cong U_{\mathfrak{n}_-} \otimes U_\mathfrak{h} \otimes U_{\mathfrak{n}_+} \cong U_{\mathfrak{n}_-} \otimes U_\mathfrak{b}$$

como $U_{\mathfrak{n}_-}$-módulo à esquerda e como $U_\mathfrak{b}$-módulo à direita.

Demonstração. Consequência do Teorema PBW (Cf. Teor. 2.1 e Obs. 2.1.1).

□

Proposição 2.2.3. *Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo cíclico com vetor cíclico v_λ de peso máximo λ e consideremos $\Phi^+ = \{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$ as raízes positivas em Φ. Então V é gerado pelos elementos da forma $y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_m}^{i_m} \centerdot v_\lambda$ com $i_j \in \mathbb{Z}^+$ e $y_\beta \in \mathfrak{g}_{-\beta}$. Em particular, V é a soma direta do seus espaços de pesos.*

Demonstração. Como $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{b}$, pela proposição 2.2.2 segue que

$$U_\mathfrak{g} \cong U_{\mathfrak{n}_-} \otimes U_\mathfrak{b}.$$

Vamos denotar $U_{\mathfrak{n}_-} \otimes U_\mathfrak{b}$ por $U_{\mathfrak{n}_-} U_\mathfrak{b}$, assim

$$V = U_\mathfrak{g} \centerdot v_\lambda \cong U_{\mathfrak{n}_-} U_\mathfrak{b} \centerdot v_\lambda \cong U_{\mathfrak{n}_-} \mathbb{F} v_\lambda \cong U_{\mathfrak{n}_-} \centerdot v_\lambda,$$

pois v_λ é autovalor comum de $\mathfrak{b}$. Mas uma base para $U_{\mathfrak{n}_-}$ é formada pelos monômios da forma $y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_m}^{i_m}$, $i_j \in \mathbb{Z}^+$ com $y_\beta \in \mathfrak{g}_{-\beta}$.

□

A seguinte Proposição justifica o nome de peso máximo em λ.

Proposição 2.2.4. *Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo cíclico com vetor cíclico v_λ de peso máximo λ e consideremos $\Phi^+ = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ as raízes positivas em Φ. Então os pesos μ que aparecem em V são da forma $\mu = \lambda - \sum_{i=1}^{l} k_i\alpha_i$ com $k_i \in \mathbb{Z}^+$. Além disso, para cada peso μ, $\dim V_\mu < \infty$ e $\mu \prec \lambda$.*

Demonstração. Seja $w = y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_m}^{i_m} \centerdot v_\lambda$ tal que $i_j \in \mathbb{Z}^+$. Temos que para $h \in \mathfrak{h}$,

$$\begin{aligned} h \centerdot w &= h \centerdot \left(y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_m}^{i_m} \centerdot v_\lambda \right) \\ &= y_{\beta_1} h y_{\beta_1}^{i_1 - 1} \cdots y_{\beta_m}^{i_m} \centerdot v_\lambda + \left[h, y_{\beta_1} \right] y_{\beta_1}^{i_1 - 1} \cdots y_{\beta_m}^{i_m} \centerdot v_\lambda \\ &= y_{\beta_1} h y_{\beta_1}^{i_1 - 1} \cdots y_{\beta_m}^{i_m} \centerdot v_\lambda - \beta_1 (h) w \end{aligned}$$

Seguindo a mesma ideia, temos $h \centerdot w = \lambda(h) w - \sum_{j=1}^{m} i_j \beta_j (h) w = \left(\lambda - \sum_{j=1}^{m} i_j \beta_j \right)(h) w$ e $w \in V_\mu$, em que $\mu = \lambda - \sum_{j=1}^{m} i_j \beta_j$. Em particular, $\mu \prec \lambda$.

$\square$

Finalizamos a seção, apresentando o seguinte Teorema que engloba as principais propriedades do peso máximo λ. A demonstração pode ser encontrada em [Hum78, Sec 10.3], no entanto, as duas primeiras são efetivamente as Proposições 2.2.3 e 2.2.4 já mencionadas.

Teorema 2.2. *Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo cíclico com vetor cíclico v_λ de peso maximal λ e $\Phi^+ = \{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$ as raízes positivas em Φ. Então*

1. *O conjunto $\left\{ y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_m}^{i_m} \centerdot v_\lambda : y_{\beta_j} \in \mathfrak{g}_{-\beta_j}, i_j \in \mathbb{Z}^+ \right\}$ gera V.*

2. *Qualquer peso μ de V possui a forma $\mu = \lambda - \sum_{i=1}^{l} k_i\alpha_i$ com $k_i \in \mathbb{Z}^+$.*

3. *Para cada $\mu \in \mathfrak{h}^*$, $\dim V_\mu < \infty$ e $\dim V_\lambda = 1$.*

4. *Cada submódulo de V é soma direta do seus espaços de pesos (e são os únicos).*

5. *V é um $\mathfrak{g}$-módulo indecomponível, ou seja, V é não trivial e qualquer soma direta $V = V_1 \oplus V_2$ implica que $V_1 = 0$ ou $V_2 = 0$. Ademais, V admite um único submódulo maximal próprio e um único quociente irredutível correspondente.*

6. *Qualquer imagem homomorfa de V também é um $\mathfrak{g}$-módulo cíclico de peso máximo λ.*

Corolário 2.2.1. Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo cíclico de vetor cíclico v_λ e peso máximo λ. Suponhamos ademais que V é irredutível, então v_λ é o único vetor maximal em V exceto escalares não nulos.

Demonstração. Se $w_{\tilde{\lambda}}$ é outro vetor maximal de peso $\tilde{\lambda}$, então $U_{\mathfrak{g}} \centerdot w_{\tilde{\lambda}} = V$ pela irredutibilidade de V. Temos assim que $\lambda \prec \tilde{\lambda}$ mas pelo ítem (2) do Teorema, $\tilde{\lambda} \prec \lambda$ e portanto $\lambda = \tilde{\lambda}$. Finalmente, pelo ítem (3), segue-se que $w_{\tilde{\lambda}}$ é proporcional a v_λ.

$\square$

2.2.2 Existência e Unicidade

Nesta seção vamos ver que dado $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, existe um, e somente um (exceto isomorfos), $\mathfrak{g}$-módulo cíclico irredutível de peso máximo λ (possivelmente de dimensão infinita).

Teorema 2.3. *(Unicidade) Seja V e W dois $\mathfrak{g}$-módulos cíclico de peso máximo λ, com V e W irredutíveis. Então $V \cong W$.*

Demonstração. Consideremos $v_\lambda \in V_\lambda$, $w_\lambda \in W_\lambda$ vetores cíclicos (maximais) de peso λ e definamos $X = V \oplus W$, $x_\lambda = (v_\lambda, w_\lambda)$. Claramente x_λ é um vetor maximal de peso λ do $\mathfrak{g}$-módulo X. Tomemos $Y = U_\mathfrak{g} \centerdot x_\lambda$ o submódulo de X, que é um $\mathfrak{g}$-módulo cíclico de peso máximo λ. A seguir, consideremos as projeções canônicas:

$$\pi_1 : Y \longrightarrow V, \quad \pi_2 : Y \longrightarrow W$$

Sabemos que π_1 e π_2 são homomorfismos de $\mathfrak{g}$-módulos, e ademais,

$$\begin{aligned} 0 &\neq \operatorname{img}\pi_1 \subset V \Rightarrow \operatorname{img}\pi_1 = V, \\ 0 &\neq \operatorname{img}\pi_2 \subset W \Rightarrow \operatorname{img}\pi_2 = W. \end{aligned}$$

Uma vez que Y é indecomponível, podemos supor W como o único submódulo maximal de Y com quociente irredutível Y/W. Pelo ítem (5) do Teorema 2.2, temos que

$$\begin{aligned} Y/W &\cong Y/\ker\pi_2 \cong W, \\ Y/W &\cong Y/\ker\pi_2 \cong Y/\ker\pi_1 \cong V. \end{aligned}$$

Logo, $V \cong W$.

□

Vejamos agora a existência, consideremos $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ e definamos um $\mathfrak{b}$-módulo sobre um espaço vetorial unidimensional isomorfo a $\mathbb{F}$: Seja $\mathfrak{b}$ a subálgebra de Borel de $\mathfrak{g}$ relativa a $\mathfrak{h}$ e Δ e seja D_λ o espaço unidimensional sobre $\mathbb{F}$ gerado por v_λ. Definamos uma ação de $\mathfrak{b}$ em D_λ dada por

$$\begin{aligned} x_\alpha \centerdot v_\lambda &= 0, \forall x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, \forall \alpha \succ 0 \\ h \centerdot v_\lambda &= \lambda(h) v_\lambda, \forall h \in \mathfrak{h}. \end{aligned}$$

Equivalentemente, $(h + \sum_{\alpha \succ 0} x_\alpha) \centerdot v_\lambda = h \centerdot v_\lambda = \lambda(h) v_\lambda$ Notemos que D_λ é um $\mathfrak{b}$-módulo, e além disso, tal ação permite ver D_λ como um $U_\mathfrak{b}$-módulo.

Definição 2.2.4. Definimos o módulo de Verma com respeito a λ como $M_\lambda = U_\mathfrak{g} \otimes_{U_\mathfrak{b}} D_\lambda$.

Proposição 2.2.5. *O elemento $1 \otimes v_\lambda \in M_\lambda$ é um vetor maximal de peso máximo λ que gera M_λ. Além disso, $M_\lambda \cong U_{\mathfrak{n}_-} \otimes \mathbb{F}$ como espaço vetorial e como um $U_{\mathfrak{n}_-}$-módulo.*

Demonstração. Como $U_\mathfrak{g} \cong U_{\mathfrak{n}_-} \otimes U_\mathfrak{b}$ (pelo Teorema PBW) então segue que

$$\begin{aligned} M_\lambda &= U_\mathfrak{g} \otimes_{U_\mathfrak{b}} D_\lambda \cong (U_{\mathfrak{n}_-} \otimes U_\mathfrak{b}) \otimes_{U_\mathfrak{b}} D_\lambda \\ &\cong U_{\mathfrak{n}_-} \otimes (U_\mathfrak{b} \otimes_{U_\mathfrak{b}} D_\lambda) \\ &\cong U_{\mathfrak{n}_-} \otimes D_\lambda \end{aligned}$$

Logo, M_λ é um $\mathfrak{g}$-módulo cíclico de peso máximo λ e vetor cíclico $1 \otimes v_\lambda$. Como $D_\lambda \cong \mathbb{F}$, temos assim que $M_\lambda \cong U_{\mathfrak{n}_-} \otimes \mathbb{F}$ e M_λ pode ser visto como um $U_{\mathfrak{n}_-}$-módulo

$\square$

Corolário 2.2.2. Se $\{y_1, \ldots, y_m\}$ é uma base de N_Δ^- como espaço vetorial, então o conjunto $\left\{y_1^{n_1} \ldots y_m^{n_m} \otimes v_\lambda : (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}_0^m\right\}$ é uma base de M_λ como espaço vetorial.

Outra maneira de definir o módulo de Verma M_λ é considerando o ideal à esquerda J de $U_\mathfrak{g}$ gerado pelos elementos da forma $\{x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha : \alpha \succ 0\} \cup \{h - \lambda(h) : h \in \mathfrak{h}\}$. Logo $M_\lambda \cong U_\mathfrak{g}/J$ e $v_\lambda \cong 1 \otimes v_\lambda$ corresponde à classe 1 em $U_\mathfrak{g}/J$. Temos demonstrado o seguinte Teorema

Teorema 2.4. *(Existência) Seja $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, então existe um $\mathfrak{g}$-módulo cíclico irredutível V^λ de peso máximo λ.*

Demonstração. Tome M_λ especificado anteriormente. Pelo ítem (5) do Teorema 2.2, existe um único submódulo maximal $Y(\lambda)$ tal que o quociente $M_\lambda/Y(\lambda)$ é irredutível. Assim, basta tomar $V^\lambda = M_\lambda/Y(\lambda)$.

$\square$

2.2.3 Condições para dimensão finita.

Vimos que para qualquer peso $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, o $\mathfrak{g}$-módulo cíclico $M_\lambda = U_\mathfrak{g} \otimes_{U_\mathfrak{b}} D_\lambda$ é de peso máximo λ, e cujo quociente V^λ pelo único submódulo próprio maximal de M_λ é o módulo irredutível de peso maximal λ. Nesta seção, queremos determinar sobre que condições V^λ é um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita.

Recordemos também que se V é um $\mathfrak{g}$-módulo irredutível de dimensão finita, então pelo teorema de Lie, existe um autovetor maximal comum na subálgebra solúvel (maximal) de Borel $\mathfrak{b}$, digamos v_λ. Logo, o $\mathfrak{g}$-módulo cíclico $U_\mathfrak{g} \centerdot v_\lambda$ de peso máximo λ é um submódulo de V. Mas como V é um $\mathfrak{g}$-módulo irredutível, necessariamente tem que ser todo V. Portanto, pelo teorema de existência e unicidade dados acima, V é isomorfo a V^λ.

Portanto, qualquer $\mathfrak{g}$-módulo irredutível de dimensão finita é um $\mathfrak{g}$-módulo cíclico irredutível de peso máximo λ (para algum $\lambda \in \mathfrak{h}^*$). Ademais, recordemos que para cada $x_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in \Delta$ existe um único $y_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ tal que $S_{\alpha_i} = \mathrm{Span}\{x_i, h_i = [x_i, y_i], y_i\} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$. Contudo, o seguinte Teorema oferece a condição que, sobre irredutibilidade, os pesos $\lambda(h_i)$ são inteiros não negativos.

Teorema 2.5. *Se V é um $\mathfrak{g}$-módulo irredutível de dimensão finita e peso máximo λ, então $\lambda(h_i) \in \mathbb{Z}^+$ para todo $1 \leq i \leq l$.*

Demonstração. Sabemos que $V \cong V^\lambda$. Além disso, como V é um $\mathfrak{g}$-módulo, resulta por restrição ser também um S_{α_i}-módulo. Portanto, os autovalores de h_i em V devem ser todos inteiros. Se v_λ é um vetor maximal de peso máximo λ com relação a $\mathfrak{g}$, então claramente v_λ é um vetor maximal com relação a S_{α_i} de peso máximo $\lambda(h_i)$. Assim, $\lambda(h_i) \in \mathbb{Z}^+$ e isto mostra que $\{\lambda(h_1), \ldots, \lambda(h_l)\}$ são inteiros não negativos para a base $\{h_1, \ldots, h_l\}$ de $\mathfrak{h}$.

$\square$

Proposição 2.2.6. *Se V é um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita gerado por um vetor maximal v_λ, então V é irredutível.*

Demonstração. Por hipótese, $V = U_{\mathfrak{g}} \centerdot v_\lambda$. suponhamos que V_1 é um $\mathfrak{g}$-submódulo próprio de V, pelo Teorema de Weyl existe um outro submódulo V_2 tal que $V = V_1 \oplus V_2$. Mas como V é gerado por um vetor maximal v_λ, pelo item (5) do Teorema 2.2 ele é indecomponível. Portanto $V_1 = 0$ e V é irredutível. □

Observação 2.2.3. Sabemos que para $\alpha_i \in \Delta$ existe $t_i \in \mathfrak{h}$ tal que $\alpha_i(h) = \kappa(t_i, h), \forall h \in \mathfrak{h}$ e além disso $h_i = 2t_i/\kappa(t_i,t_i)$. Como também existe $t_\lambda \in \mathfrak{h}$ tal que $\lambda(h) = \kappa(t_\lambda, h), \forall h \in \mathfrak{h}$, então

$$\langle \lambda, \alpha_i \rangle = 2\frac{\kappa(t_\lambda, t_i)}{\kappa(t_i,t_i)} = \kappa\left(t_\lambda, 2\frac{t_i}{\kappa(t_i,t_i)}\right) = \kappa(t_\lambda, h_i) = \lambda(h_i) \in \mathbb{Z}.$$

Logo $\langle \lambda, \alpha_i \rangle \in \mathbb{Z}$.

Consequentemente, os pesos que ocorrem em um módulo de dimensão finita também são pesos no sentido da teoria abstrata desenvolvida na Seção 1.7.3. Notemos que o peso máximo λ de V^λ é dominante (considerando $\dim V^\lambda < \infty$). Para evitar ambiguidade, vamos continuar chamando qualquer elemento de $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ de peso, enquanto um funcional linear $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tal que $\lambda(h_i) \in \mathbb{Z}$ é chamado de **peso integral**. Se todos os $\lambda(h_i)$ são inteiros não negativos, então λ é denominado **peso dominante integral**. Vamos denotar Λ o conjunto de todos os pesos integrais, que formam um reticulado no espaço $\mathfrak{h}^*$, e Λ^+ o conjunto dos **pesos dominantes integrais** (funcionais dominantes integrais). Por outro lado, se V é um $\mathfrak{g}$-módulo, $\Pi(V)$ denotará o conjunto de todos seus pesos. Quando $V = V^\lambda$, simplesmente denotaremos $\Pi(\lambda)$.

O seguinte teorema, cuja demonstração é longa e técnica[4], permite dar uma condição suficiente para decidir quando um $\mathfrak{g}$-módulo irredutível é de dimensão finita.

Teorema 2.6. *Se $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ é um peso dominante integral, então o $\mathfrak{g}$-módulo irredutível V^λ é de dimensão finita e o conjunto $\Pi(\lambda)$ é permutado por $\mathscr{W}$, com $\dim V_\mu = \dim V_{\sigma\mu}$ para todo $\sigma \in \mathscr{W}$.*

Por um momento denotemos $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_l\}$ a base de pesos fundamentais com relação a Δ, isto é, $\langle \omega_i, \alpha_j \rangle = \delta_{i,j}$. Recordemos que um conjunto Π de pesos integrais $\mu = \sum_{i=1}^{l} k_i\omega_i$ é saturado se, para cada $\beta \in \Phi$ e quaisquer inteiros $0 \leq m \leq \langle \mu, \beta \rangle$, temos que $\mu - m\beta \in \Pi$. Como qualquer raiz é combinação linear de raízes simples, isso se reduz para $\beta = \alpha_i$ e $0 \leq m \leq n_i = \langle \mu, \alpha_i \rangle$. Podemos enunciar a seguinte proposição:

Proposição 2.2.7. *Se $\lambda \in \Lambda^+$, então o conjunto $\Pi(\lambda)$ é saturado. Em particular, uma condição necessária e suficiente para que $\mu \in \Lambda$ esteja em $\Pi(\lambda)$ é que μ e todos seus conjugados por $\mathscr{W}$ sejam $\prec \lambda$.*

Esboço da Demonstração.

Consideremos $\lambda \in \Lambda^+$ e V^λ a representação irredutível de peso máximo λ correspondente. Sejam $\mu \in \Pi(\lambda)$ e $\alpha \in \Phi$. Pelo Lema 2.2.1, o subespaço W gerado por todos os espaços de peso $V_{\mu+i\alpha}$, $i \in \mathbb{Z}$, é invariante por S_α. Pelo Teorema da redução completa de Weyl e pelo Lema 1.5.1, os pesos em $\Pi(\lambda)$ da forma $\mu + i\alpha$ devem formar uma cadeia convexa (**α-cadeia** μ) onde σ_α reverte tal cadeia. Portanto, existem $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que a **α-cadeia** μ resulta

$$\mu - r\alpha, \ldots, \mu, \ldots, \mu + q\alpha$$

[4] A demonstração deste teorema pode ser encontrada nas referências [Hum78, Sec. 21.2] e [JF10, Sec. 13.6].

com $\langle \mu, \alpha \rangle = q - r$. A última conclusão é valida pelo fato de V^λ é uma representação irredutível.

$\square$

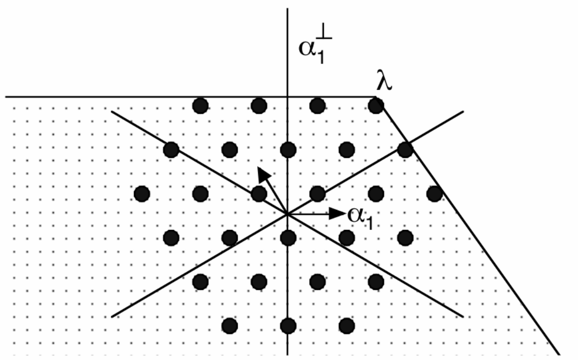


Figura 2.2.1: Quando λ é um peso maximal, Π deve estar contido na região sinalada, tal como é mostrado nesta figura. Como Π é $\mathscr{W}$-invariante, obtemos os pontos marcados.

Observação 2.2.4. Em resumo, quando λ é um peso dominante integral, então V^λ tem dimensão finita e o conjunto do seus pesos $\Pi(\lambda)$ é um subconjunto finito de Λ.

2.3 Caracteres.

Consideremos $\Lambda \subset \mathfrak{h}^*$ o reticulado de pesos definido previamente. Podemos ver que Λ é um subgrupo de $\mathfrak{h}^*$ relativo à soma, e que qualquer peso $\lambda \in \Lambda$ é escrito como $\mathbb{Z}$-combinação linear dos pesos dominantes fundamentais, tal como foi observado na seção 1.7.3. A seguir, definiremos o caractere formal de uma representação de dimensão finita V de $\mathfrak{g}$, e mencionaremos algumas propriedades que este possui. No entanto, precisamos previamente recordar algumas definições de álgebra em geral:

Definição 2.3.1. Seja G um grupo abeliano e $\{e_i\}_{i\in I}$ uma família arbitraria de elementos de G. Dizemos que tal família é uma base para G se é não-vazia e todo elemento $x \in \mathrm{G}$ pode ser escrito de maneira única como

$$x = \sum x_i e_i$$

com $x_i \in \mathbb{Z}$ e $x_i = 0$ exceto possivelmente numa quantidade finita de índices.

Assim, um grupo abeliano G é livre se possui base neste sentido e portanto $\mathrm{G} \cong \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}$. Desta forma podemos observar que Λ é grupo abeliano livre com base os pesos fundamentais $\{\omega_1, \ldots, \omega_l\}$.

Definição 2.3.2. (Álgebra de Grupo) Seja R um anel comutativo e G um grupo abeliano. Consideremos o conjunto

$$\mathrm{R}[\mathrm{G}] = \left\{ \sum_{x\in \mathrm{G}} a_x x : \, a_x \in \mathrm{R}, \, a_x = 0 \; q.s \right\}$$

em que $q.s$ significa quase sempre, isto é, exceto por uma quantidade finita. Definimos a adição em $\mathrm{R}[\mathrm{G}]$ como

$$\left(\sum_{x\in \mathrm{G}} a_x x \right) + \left(\sum_{y\in \mathrm{G}} b_y y \right) = \left(\sum_{x\in \mathrm{G}} (a_x + b_x) x \right)$$

e o produto que resulta a extensão por linearidade do produto de G dado por

$$\left(\sum_{x\in \mathrm{G}} a_x x\right)\left(\sum_{y\in \mathrm{G}} b_y y\right) = \left(\sum_{z\in \mathrm{G}}\left(\sum_{xy=z} a_x b_y\right) z\right).$$

Portanto, $\mathrm{R}[\mathrm{G}]$ é um anel com unidade $1.e$ (onde e é o neutro em G) e todo elemento neste anel é escrito de maneira única em termo dos elementos de G. Chamamos $\mathrm{R}[\mathrm{G}]$ de álgebra de grupo.

Contudo, vamos considerar a álgebra de grupo $\mathbb{F}[\Lambda]$. Aditivamente, $\mathbb{F}[\Lambda]$ é um grupo abeliano livre gerado pelos elementos de Λ. No entanto, é possível dar a Λ uma estrutura multiplicativa simplesmente considerando a correspondência injetiva $\lambda \in \Lambda \longmapsto e^{\lambda}$, e desta maneira definir $\mathbb{F}[\Lambda]$ como o conjunto de todas as expressões formais $f \in \mathbb{F}[\Lambda]$ da forma

$$f = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda e^{\lambda} : a_\lambda \in \mathbb{F}, a_\lambda = 0\ q.s$$

junto com a relação $e^{\lambda}e^{\mu} = e^{\lambda+\mu}$ e elemento identidade e^0. Assim, por definição, $\left\{e^{\lambda} : \lambda \in \Lambda\right\}$ é uma base para $\mathbb{F}[\Lambda]$ e cada e^{λ} é denominada expressão formal em λ.
$\mathbb{F}[\Lambda]$ é uma álgebra associativa e comutativa com elemento identidade definindo o produto por convolução, i.e:

$$(fg)(\mu) = \sum_{\nu+\theta=\mu} f(\nu)\, g(\theta)$$

O grupo de Weyl $\mathscr{W}$ age naturalmente sobre $\mathbb{F}[\Lambda]$ via

$$w\centerdot\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda e^{\lambda}\right) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda e^{w(\lambda)},\ w \in \mathscr{W}$$

isto é, $w\centerdot f(\lambda) = f(w\centerdot\lambda), \forall w \in \mathscr{W}, f \in \mathbb{F}[\Lambda]$. Portanto, $\mathbb{F}[\Lambda]$ é um $\mathscr{W}$-módulo.

Para cada $\lambda \in \Lambda$, é possível ver a expressão formal e^{λ} como a função caraterística em λ, i.e,

$$e^{\lambda}(\mu) = \begin{cases} 1, & \mu = \lambda \\ 0, & \mu \neq \lambda \end{cases}$$

Logo, $e^0(\mu) = 1$ somente quando $\mu = 0$.

Observação 2.3.1. Seja $x_i = e^{\omega_i}$, em que $\{\omega_i : 1 \leq i \leq l\}$ é a base de pesos fundamentais relativa à Δ. Como qualquer $\mu \in \Lambda^+$ pode ser escrito de maneira única como $\mu = \sum_i m_i\lambda_i$ e os m_i são todos inteiros não negativos, a expressão formal $e^{\mu} = \prod_i x_i^{m_i}$ representa um polinômio nas variáveis x_i. Portanto, podemos identificar $\mathbb{F}[\Lambda^+] \cong \mathbb{F}[x_1,\ldots,x_l]$, em que $\mathbb{F}[x_1,\ldots,x_l]$ denota o anel de polinômios nas variáveis x_i contido no anel de séries formais $\mathbb{F}[[x_1,\ldots,x_l]]$ com coeficientes em $\mathbb{F}$.

Do mesmo modo, se $\mu \in \Lambda$ é escrito como $\mu = \sum_i m_i\omega_i$ e os m_i são todos não negativos ou todos não positivos, é possível identificar $\mathbb{F}[\Lambda] \cong \mathbb{F}(x_1,\ldots,x_l)$ em que $\mathbb{F}(x_1,\ldots,x_l)$ representa o corpo de frações com coeficientes em $\mathbb{F}$ contido no anel das séries formais de Laurent

$$\mathbb{F}\langle\langle x_1,\ldots,x_l\rangle\rangle = Frac(\mathbb{F}[[x_1,\ldots,x_l]]) = \left\{\frac{f}{g} : f,g \in \mathbb{F}[[x_1,\ldots,x_l]],\ g \neq 0\right\}$$

Definição 2.3.3. (Caractere Formal) Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples e V um $\mathfrak{g}$-módulo sobre $\mathfrak{g}$, ambos de dimensão finita. Para cada peso μ de V, seja $m_\mu = \dim V_\mu \in \mathbb{Z}^+$ a dimensão do espaço de peso V_μ. Definimos o caractere formal $\chi_V \in \mathbb{F}[\Lambda]$ de V como o elemento

$$\chi_V = \sum_{\mu \in \Lambda} m_\mu e^\mu$$

Tal elemento esta bem definido pelo fato que quase todos os m_μ's são nulos. Além disso, quando V é um $\mathfrak{g}$-módulo irredutível de peso máximo λ então o caractere formal resulta ser

$$\chi_\lambda = \sum_{\mu \in \Pi(\lambda)} m_\lambda(\mu) e^\mu$$

pelo simples fato que $m_\lambda(\mu) = 0$ quando $\mu \notin \Pi(\lambda)$.

Observação 2.3.2. Se consideramos V qualquer $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita, pelo Teorema de Weyl e pelas propriedades mencionadas na seção 2.2.2, essencialmente existe uma única decomposição $V = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V^{\lambda_t}$ com $\lambda_i \in \Lambda^+$. Logo $\chi_V = \sum_{i=1}^{t} \chi_{\lambda_i}$ pode ser chamado caractere formal para V. Notemos também que cada $\sigma \in \mathscr{W}$ fixa χ_V pelo fato que σ permuta os espaços de pesos em cada somando irredutível de V (Cf. Teor. 2.6).

Exemplo 2.3.1. Consideremos a álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$. Se V^λ é um $\mathfrak{g}$-módulo irredutível de peso máximo λ e $\mu \in \Pi(\lambda)$, então necessariamente $\mu = \lambda - i\alpha$ com $0 \le i \le m = \langle \lambda, \alpha \rangle$ e $\alpha \in \Phi^+$e assim $\Pi(\lambda) = \{\lambda, \lambda - \alpha, \ldots, \lambda - m\alpha\}$. Segue que o caractere formal para V^λ é

$$\chi_\lambda = e^\lambda + e^{\lambda-\alpha} + \ldots + e^{\lambda - m\alpha}$$

Observação 2.3.3. Considerando o mesmo exemplo acima, recordemos que se V^λ é uma representação irredutível de $\mathfrak{g}$, segundo o obtido na seção 1.5, os únicos pesos que aparecem na representação V^λ são $\Pi(\lambda) = \{-\lambda, -\lambda+2, \ldots, \lambda-2, \lambda\}$ e todos eles com multiplicidade 1. Portanto, podemos ver o caractere para V^λ como

$$\chi_\lambda = e^{-\lambda} + e^{-\lambda+2} + \ldots + e^{\lambda-2} + e^\lambda$$

Proposição 2.3.1. *(Cf. [Ser78, Pag. 63])*

1. *χ_V é invariante pela ação do grupo de Weyl $\mathscr{W}$.*

2. *$\chi_{U\oplus V} = \chi_U + \chi_V$ e $\chi_{U\otimes V} = \chi_U \boldsymbol{\cdot} \chi_V$.*

Demonstração.
(1) Sabemos que $w \boldsymbol{\cdot} e^\mu = e^{w(\mu)}$ e $\dim V_\mu = \dim V_{w(\mu)}$ para todo $w \in \mathscr{W}$. Logo

$$\begin{aligned} w \boldsymbol{\cdot} \chi_V &= w \boldsymbol{\cdot} \left(\sum_{\mu \in \Lambda} m_\mu e^\mu \right) = \sum_{\mu \in \Lambda} m_\mu e^{w(\mu)} \\ &= \sum_{\nu \in \Lambda} m_{w^{-1}(\nu)} e^\nu = \sum_{\nu \in \Lambda} m_\nu e^\nu \end{aligned}$$

em que $\nu = w(\mu)$ e ν, μ são tomados no mesmo conjunto. Logo $w \boldsymbol{\cdot} \chi_V = \chi_V$.

(2) Para a primeira afirmação, observemos que $(U \oplus V)_\mu = U_\mu \oplus V_\mu$ e portanto,

$$\dim (U \oplus V)_\mu = \dim U_\mu + \dim V_\mu$$

Logo, segue por definição. Para a segunda, se $\Pi(V)$ representa o conjunto de todos os pesos de V, então

$$\Pi(U \otimes V) = \{\mu + \nu : \mu \in \Pi(U), \nu \in \Pi(V)\}$$

uma vez que a ação de $\mathfrak{h}$ é por derivação em $U \otimes V$. Consequentemente

$$(U \otimes V)_\mu = \bigoplus_{\mu = \alpha + \beta} U_\alpha \otimes V_\beta$$

e $\dim (U \otimes V)_\mu = \sum\limits_{\mu = \alpha + \beta} \dim U_\alpha \dim V_\beta \Longrightarrow \chi_{U \otimes V} = \chi_U \cdot \chi_V$.

□

Finalizamos a presente seção mostrando que qualquer elemento de $\mathbb{F}[\Lambda]$ fixado pelo grupo de Weyl $\mathscr{W}$ pode ser escrito de maneira única como combinação $\mathbb{Z}$-linear de caracteres, tal como se enuncia na seguinte proposição:

Proposição 2.3.2. *Seja $f = \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) e^\lambda \in \mathbb{F}[\Lambda]$ fixada por todos os elementos do grupo de Weyl $\mathscr{W}$. Então f pode ser expresso de forma única como uma combinação linear com coeficientes inteiros dos χ_λ tais que $\lambda \in \Lambda^+$.*

Demonstração. Consideremos $f = c_{\lambda_1} e^{\lambda_1} + \ldots + c_{\lambda_m} e^{\lambda_m} \in \mathbb{F}[\Lambda]$ fixada por $\mathscr{W}$, com $c_{\lambda_i} \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq m$. Defina o conjunto M_f de todos os $\mu \in \Lambda^+$ tais que $\mu \prec \lambda_i$ para aqueles $\lambda_i \in \Lambda^+$ com $c_{\lambda_i} \neq 0$. Pelo Lema 1.7.11 sabemos que M_f é finito. Vamos aplicar indução sobre o número de elementos de M_f.

Se $M_f = \emptyset$, então $f = 0$. De fato, suponha que $f \neq 0$ e seja $\lambda_k \in \Lambda$ tal que $c_{\lambda_k} \neq 0$, pelo Teorema 1.14 existe $w \in \mathscr{W}$ tal que $w \cdot \lambda_k \in \Lambda^+$. Como f é invariante pela ação de $\mathscr{W}$ e a expressão de f é única, concluímos que se $f \neq 0$, então algum dos λ_i é dominante com $c_{\lambda_1} \neq 0$. Logo, se λ_s é o menor destes, temos que $\lambda_s \in M_f$ implicando que $M_f \neq \emptyset$.

Tomemos agora $\gamma \in \Lambda^+$ o máximo dos $\lambda \in \Lambda^+$ tais que $c_\lambda \neq 0$ e definamos $g = f - c_\lambda \chi_\lambda$ (note que g satisfaz as hipóteses da proposição). Vejamos que $M_g \subsetneq M_f$, com efeito, seja

$$g = \underbrace{c_{\lambda_1} e^{\lambda_1} + \ldots + c_{\lambda_n} e^{\lambda_n} + c_\gamma e^\gamma}_{f} + \theta - c_\gamma \underbrace{\left(m_{\beta_1} e^{\beta_1} + \ldots + m_{\beta_k} e^{\beta_k} + c_\gamma e^\gamma + \omega \right)}_{\chi_\gamma}$$

com θ e ω são as partes não-nulas de f e χ_γ, respectivamente, em que não aparecem os pesos dominantes e os c_{λ_i} e m_{β_j} são não nulos. Tomemos $x \in M_g$, logo $x \in \Lambda^+$ e $x \prec \lambda_i, \beta_j$ com $c_{\lambda_i} \neq 0$ e $m_{\beta_j} \neq 0$. Isto implica que $x \prec \gamma$ (pois os pesos dominantes que aparecem em χ_γ são todos menores que γ) e portanto, $x \in M_f$. Mas, $\gamma \notin M_g$ devido que $\gamma \succ \lambda_i, \beta_j$. Assim, $M_g \subsetneq M_f$

Por indução aplicado em M_g, a proposição é válida para g e consequentemente, também resulta válida para f.

Vejamos agora que a expressão é única. Com efeito, suponhamos que f admite duas expressões

$$a_1\chi_{\lambda_1}+\ldots+a_n\chi_{\lambda_n}=b_1\chi_{\beta_1}+\ldots+b_m\chi_{\beta_m} \quad (\star)$$

em que $m\geq n, \lambda_1\succ\ldots\succ\lambda_n$ e $\beta_1\succ\ldots\succ\beta_m$. Inicialmente, note que os pesos que ocorrem do lado esquerdo de $(\star)$ também devem ocorrer do lado direito, pois os elementos χ_λ são escritos de maneira única como combinação dos e^π's.

Portanto, o peso mais alto que ocorre do lado esquerdo de $(\star)$ também deve ocorrer do lado direito. Assim, $\lambda_1=\beta_1$ e consequentemente $a_1=b_1$, pois o coeficiente de e^{λ_1} é a_1e de e^{β_1} é b_1. Subtraindo $a_1e^{\lambda_1}$ de ambos lados e aplicando o mesmo raciocínio, encontramos que $\lambda_2=\beta_2$ e $a_2=b_2$. Por repetição de tal procedimento, segue-se que $\lambda_i=\beta_i$ e $a_i=b_i$ para $1\leq i\leq n$, com $b_k=0$ para $n<k\leq m$. Portanto a expressão de f é única.

$\square$

2.4 Fórmula de Caracteres de Weyl.

Vamos seguir denotando $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples com $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan, Φ o sistema de raízes e $\Delta=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_l\}$ uma base para Φ. Pelos Teoremas 2.3, 2.4 e 2.6, as representações irredutíveis de dimensão finita de $\mathfrak{g}$ estão em correspondência 1-1 com os pesos dominantes integrais do sistema de raízes Φ. Então, se V é uma representação irredutível de dimensão finita e peso maximal λ, resulta que $V\cong V^\lambda$ e V pode ser escrito como soma direta do seus espaços de pesos $\left\{V_\mu : \mu\in\Lambda\right\}$. Além disso, V é gerado por algum vetor maximal $v_\lambda\in V_\lambda$ tal que $\mathfrak{g}_\alpha\centerdot v_\lambda=0, \forall\alpha\in\Phi^+$.

Consideremos a álgebra de grupo $\mathbb{F}[\Lambda]$ gerada pelas expressões formais $\left\{e^\lambda : \lambda\in\Lambda\right\}$ com a relação $e^\mu e^\nu=e^{\mu+\nu}$ e elemento neutro e^0. Cada e^λ pode ser considerada como a função caraterística em λ,

$$e^\lambda(\mu)=\begin{cases}1, & \mu=\lambda\\ 0, & \mu\neq\lambda\end{cases}$$

Contudo, é possível enunciar a fórmula de Weyl por meio do seguinte teorema:

Teorema 2.7. *Seja $\lambda\in\Lambda^+$ e $\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\succ 0}\alpha$. Então*

$$\left(\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}(-1)^{l(\sigma)}e^{\sigma(\rho)}\right)\chi_\lambda=\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}(-1)^{l(\sigma)}e^{\sigma(\lambda+\rho)}$$

A demonstração será dada na seção 2.4.3

Exemplo 2.4.1. Consideremos a álgebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ com base canônica dada pelas matrizes

$$h=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, y=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

e $\mathfrak{h}=\mathrm{Span}\{h\}$ é a subálgebra de Cartan para $\mathfrak{g}$, $\Phi=\{\pm 2\}$, $\Delta=\{2\}$ e $\rho=1$. O grupo de Weyl é gerado pelas reflexões $\{1,\sigma\}$, em que $\sigma(m)=-m$ para qualquer inteiro m e $\Lambda=\mathbb{Z}$. Suponhamos que V^λ é uma representação irredutível de peso máximo λ, podemos aplicar a fórmula de Weyl para ver quais são os pesos que aparecem na representação V^λ; por um lado temos que

$$\left(\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}(-1)^{l(\sigma)}e^{\sigma(\rho)}\right)\chi_\lambda=\left(\sum_{\sigma\in\{1,-1\}}(-1)^{l(\sigma)}e^{\sigma(\rho)}\right)\chi_\lambda$$

em que $\sum_{\sigma\in\{1,-1\}}(-1)^{l(\sigma)}e^{\sigma(\rho)}=e^\rho-e^{-\rho}=e^1-e^{-1}$. Logo, os lados esquerdo, LE, e direito, LD, da fórmula de Weyl são reduzidos a:

$$\begin{aligned} LE &= \left(\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}(-1)^{l(\sigma)}e^{\sigma(\rho)}\right)\chi_\lambda=\left(e^1-e^{-1}\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}m_\lambda(n)e^n\right)\\ LD &= \left(\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}(-1)^{l(\sigma)}e^{\sigma(\lambda+\rho)}\right)=e^{\lambda+1}-e^{-\lambda-1}. \end{aligned}$$

Aplicando a definição de convolução e avaliando num inteiro k, obtemos que

$$LE(k)=\sum_{p+q=k}\left(e^1-e^{-1}\right)(p)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}m_\lambda(n)e^n(q)\right)$$

e os únicos termos não-nulos são quando $(p=1,q=k-1)$ e $(p=-1,q=k+1)$. Portanto

$$LE(k)=m_\lambda(k-1)-m_\lambda(k+1).$$

Mas pela equação LD, temos que

$$LE(k)=\begin{cases}1, & k=\lambda+1\\ -1, & k=-\lambda-1\\ 0, & \text{caso contrario}\end{cases}$$

Portanto, para $k\neq-\lambda-1,\ \lambda+1$,

$$m_\lambda(k-1)=m_\lambda(k+1).$$

Podemos observar que, para diferentes valores de k, valem as seguintes igualdades:

$$\begin{array}{ll} \vdots & \vdots\\ k=\lambda+0: & m_\lambda(\lambda-1)=m_\lambda(\lambda+1)\\ k=\lambda+2: & m_\lambda(\lambda+1)=m_\lambda(\lambda+3)\\ k=\lambda+3: & m_\lambda(\lambda+2)=m_\lambda(\lambda+4)\\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Em forma geral, se $k=\lambda+2s+1$ com $s\in\mathbb{N}$, então por indução vale

$$m_\lambda(\lambda+2s)=m_\lambda(\lambda+2)$$

e de maneira análoga, se $k=\lambda+2s$ então $m_\lambda(\lambda+2s+1)=m_\lambda(\lambda+1)$. Similarmente,

$$m_\lambda(\lambda-2s-1)=m_\lambda(\lambda+1).$$

Obtemos assim, as seguintes cadeias de igualdades:

$$\begin{aligned} m_\lambda(\lambda+2) &= m_\lambda(\lambda+4) = m_\lambda(\lambda+6)\ldots \\ \ldots = m_\lambda(\lambda-3) &= m_\lambda(\lambda-1) = m_\lambda(\lambda+1) = m_\lambda(\lambda+3) = \ldots \end{aligned}$$

Como V^λ é uma representação irredutível de dimensão finita para $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ de peso máximo λ, todos eles são zeros. Ademais, como $\dim V_\lambda = \dim V_{-\lambda} = 1$, tomando $k = \lambda+1$, obtemos

$$m_\lambda(\lambda) - m_\lambda(\lambda+2) = 1 \Longrightarrow m_\lambda(\lambda+2) = 0$$

De maneira análoga, para $k = -\lambda - m \neq -\lambda - 1$ obtemos que

$$\ldots = m_\lambda(-\lambda-6) = m_\lambda(-\lambda-4) = m_\lambda(-\lambda-2),$$

$$\ldots m_\lambda(-\lambda-3) = m_\lambda(-\lambda-1) = m_\lambda(-\lambda+1) = m_\lambda(-\lambda+3) = \ldots$$

Portanto, todos aqueles dados acimas são zeros. Logo,

$$m_\lambda(-\lambda) = m_\lambda(-\lambda+2) = \ldots = m_\lambda(\lambda-2) = m_\lambda(\lambda) = 1$$

ou equivalentemente

$$m_\lambda(n) = \begin{cases} 1, & n \in \{-\lambda, -\lambda+2, \ldots, \lambda-2, \lambda\} \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Em outras palavras, isto permite concluir de outra maneira o resultado da seção 1.5 usando somente a fórmula de caracteres de Weyl. Além disso,

$$\chi_\lambda = \sum_{n\in\mathbb{Z}} m_\lambda(n)\, e^n = e^{-\lambda} + e^{-\lambda+2} + \ldots + e^{\lambda-2} + e^\lambda.$$

2.4.1 Uma fórmula para a dimensão de V^λ.

Seja V^λ a representação irredutível de peso maximal λ para $\mathfrak{g}$. Usando a fórmula de caracteres de Weyl, é possível obter uma outra fórmula que permite calcular a dimensão de V^λ, tal como enunciamos na seguinte proposição:

Proposição 2.4.1. *Se λ é um peso dominante integral e V^λ a representação irredutível de $\mathfrak{g}$, então*

$$\dim V^\lambda = \frac{\prod\limits_{\alpha\succ 0}(\lambda+\rho,\alpha)}{\prod\limits_{\alpha\succ 0}(\rho,\alpha)} = \frac{\prod\limits_{\alpha\succ 0}\langle\lambda+\rho,\alpha\rangle}{\prod\limits_{\alpha\succ 0}\langle\rho,\alpha\rangle}.$$

A mesma será demonstrada na seção 2.4.2, a seguir damos alguns exemplos de aplicações à fórmula:

Exemplo 2.4.2. (Tipo A_1) Consideremos $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$. Temos que $\alpha = 2$ e $\lambda_1 = \frac{1}{2}\alpha = \rho$ é o peso fundamental. Logo, se $\lambda = m\omega_1$ é qualquer peso dominante, temos

$$\dim V^\lambda = \frac{\langle \lambda + \frac{1}{2}\alpha, \alpha\rangle}{\langle \frac{1}{2}\alpha, \alpha\rangle} = m+1$$

Exemplo 2.4.3. (Tipo A_2) Consideremos $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{F})$. Temos que $\alpha_1 = (2,-1)$ e $\alpha_2 = (-1,2)$ na base dos pesos fundamentais $\{\omega_1, \omega_2\}$, $\Phi^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2\}$ e $\rho = \alpha_1 + \alpha_2$.

Qualquer peso dominante λ pode ser expresso na base de pesos como $\lambda = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ com $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^+$. Como $\langle \alpha_1, \alpha_2\rangle = -1$ então $-2(\alpha_1,\alpha_2) = (\alpha_2,\alpha_2)$, fazendo a normalização $(\alpha_2,\alpha_2) = 2$ resulta que $(\alpha_1,\alpha_2) = -1$. Logo,

$$\tilde{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

representa a matriz dos produtos (α_i,α_j) e funciona como a métrica no espaço de raízes. Como neste caso a matriz de Cartan $\mathscr{C}$ coincide com $\tilde{\mathscr{C}}$, resulta que $\langle,\rangle = (,)$ e o operador $\langle,\rangle$ é bilinear. Assim,

$$\begin{aligned} (\lambda+\rho,\alpha_1) &= (m_1\omega_1 + m_2\omega_2, \alpha_1) + (\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1) \\ &= m_1 + 2 - 1 = m_1 + 1 \\ (\lambda+\rho,\alpha_2) &= m_2 + 1 \\ (\lambda+\rho,\alpha_1+\alpha_2) &= m_1 + m_2 + 2 \end{aligned}$$

Logo,

$$\dim V^\lambda = \frac{(m_1+1)(m_2+1)(m_1+m_2+2)}{2}.$$

Exemplo 2.4.4. (Tipo A_3) Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4,\mathbb{F})$, com matriz de Cartan $\mathscr{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, e raízes simples $\alpha_1 = (2,-1,0)$, $\alpha_2 = (-1,2,-1)$ e $\alpha_3 = (0,-1,2)$ expressa na base de pesos fundamentais. Usando a base para $\mathfrak{h}$ formada pelas matrizes $h_i = e_{i,i} - e_{i+1,i+1}$ podemos calcular as demais raízes positivas (similar ao exemplo 1.6.1) resultando

$$\Phi^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+\alpha_3\}$$

Logo $\rho = \frac{3}{2}(\alpha_1+\alpha_3) + 2\alpha_2$. Seja $\lambda = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ um peso dominante expresso na base dos pesos fundamentais. Similar ao exemplo 2.4.3, é possível mostrar que a matriz $\tilde{\mathscr{C}}$ dos produtos (α_i,α_j) coincide com a matriz de Cartan $\mathscr{C}$. Logo, o operador $\langle,\rangle$ pode ser tratado como a forma bilinear $(,)$. Portanto,

$$\begin{aligned} (\lambda+\rho,\alpha_1) &= m_1 + \tfrac{3}{2}((\alpha_1,\alpha_1) + (\alpha_3,\alpha_1)) + 2(\alpha_2,\alpha_1) = m_1 + 1 \\ (\lambda+\rho,\alpha_2) &= m_2 + 1 \\ (\lambda+\rho,\alpha_3) &= m_3 + 1 \\ (\lambda+\rho,\alpha_1+\alpha_2) &= m_1 + m_2 + 2 \\ (\lambda+\rho,\alpha_2+\alpha_3) &= m_2 + m_3 + 2 \\ (\lambda+\rho,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) &= m_1 + m_2 + m_3 + 3 \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
(\rho,\alpha_1)=(\rho,\alpha_2)=(\rho,\alpha_3) &= 1\\
(\rho,\alpha_1+\alpha_2)=(\rho,\alpha_2+\alpha_3) &= 2\\
(\rho,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) &= 3
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\dim V^\lambda = \frac{(m_1+1)(m_2+1)(m_3+1)(m_1+m_2+2)(m_2+m_3+2)(m_1+m_2+m_3+3)}{3\cdot 2^2}.$$

Exemplo 2.4.5. (Tipo B_2) Seja $\mathfrak{g}=\mathfrak{o}(3,\mathbb{F})$ que consiste das matrizes x de 3×3 satisfazendo $xs=-xs^t$ onde

$$s=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Sabemos que esta álgebra possui duas raízes simples $\Delta=\{\alpha_1,\alpha_2\}$ e raízes positivas $\Phi^+=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+2\alpha_2\}$ (escolhemos α_2 a raiz mais curta de modo que coincida com o feito na seção 1.7.1).

A matriz de Cartan é $\mathscr{C}=\begin{pmatrix}2&-2\\-1&2\end{pmatrix}$ com $\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle=-\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle=\langle\alpha_2,\alpha_2\rangle$ e $\rho=\frac{3}{2}\alpha_1+2\alpha_2$. Seja $\lambda=m_1\omega_1+m_2\omega_2$ um peso dominante expresso na base de pesos fundamentais.

Como $\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle=-2\Rightarrow(\alpha_1,\alpha_2)=-(\alpha_2,\alpha_2)$, fazendo a normalização $(\alpha_2,\alpha_2)=2$ obtemos que $(\alpha_1,\alpha_2)=-2$ e de maneira similar para $\langle\alpha_2,\alpha_1\rangle=-1$ obtemos que $(\alpha_1,\alpha_1)=4$. Assim, a matriz dos produtos (α_i,α_j) resulta $\tilde{\mathscr{C}}=\begin{pmatrix}4&-2\\-2&2\end{pmatrix}$ e assim

$$\begin{aligned}
(\lambda+\rho,\alpha_1) &= 2(m_1+1)\\
(\lambda+\rho,\alpha_2) &= m_2+1\\
(\lambda+\rho,\alpha_1+\alpha_2) &= 2m_1+m_2+3\\
(\lambda+\rho,\alpha_1+2\alpha_2) &= 2(m_1+m_2+2)
\end{aligned}$$

De modo similar, $(\rho,\alpha_1)=1,(\rho,\alpha_2)=2,(\rho,\alpha_1+\alpha_2)=3,(\rho,\alpha_1+2\alpha_2)=4$ e pela fórmula da dimensão de Weyl, resulta

$$\dim V^\lambda=\frac{(m_1+1)(m_2+1)(2m_1+m_2+3)(m_1+m_2+2)}{3!}.$$

Exemplo 2.4.6. (Tipo excepcional G_2) Consideremos a matriz de Cartan $\mathscr{C}=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}$, por cálculos similares aos feitos no exemplo 2.4.5, temos que

$$\Phi^+=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2,2\alpha_1+\alpha_2,3\alpha_1+\alpha_2,3\alpha_1+2\alpha_2\}.$$

Logo, pela fórmula dimensional de Weyl obtemos

$$\dim V^\lambda=\frac{(m_1+1)(m_1+m_2+2)(2m_1+3m_2+5)(m_1+2m_2+3)(m_1+3m_2+4)(m_2+1)}{5!},$$

em que $\lambda = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ é um peso dominante.

2.4.2 Demonstração da Proposição.2.4.1

Seja $\omega : \Lambda \to \mathbb{F}[\Lambda]$ a função definida por

$$\omega(\mu) = \sum_{\sigma \in \mathscr{W}} (-1)^{l(\sigma)} e^{\sigma(\mu)}. \tag{2.4.1}$$

Definição 2.4.1. Definimos a função de Weyl como o operador $q : \Lambda \to \mathbb{F}[\Lambda]$ dado por

$$q = \prod_{\alpha \succ 0} \left(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}\right),$$

em que $\prod$ denota o produto de convolução.

Proposição 2.4.2. *A função de Weyl satisfaz as seguintes propriedades*

1. $q = e^{\rho} \prod_{\alpha \succ 0} \left(e^0 - e^{-\alpha}\right)$

2. $\forall \sigma \in \mathscr{W}$, $\sigma(q) = (-1)^{l(\sigma)} q$ *(propriedade de alternância)*

Demonstração. (1) Como $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \succ 0} \alpha$ e para $\alpha_1, \alpha_2 \in \Phi^+$ vale $e^{\frac{\alpha_1}{2}} e^{\frac{\alpha_2}{2}} = e^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}$, obtemos que $e^{\rho} = \prod_{\alpha \succ 0} e^{\frac{\alpha}{2}}$. Mas também $\left(e^0 - e^{-\alpha}\right) e^{\alpha/2} = e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}$, seguindo assim o resultado.

(2) É suficiente provar a propriedade quando $\sigma = \sigma_\alpha$ com $\alpha \in \Delta$, i.e, $l(\sigma) = 1$. Como σ permuta todas as demais raízes positivas diferente de α, leva α em $-\alpha$ e $\sigma_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$, então

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(q) &= e^{\rho-\alpha}\left(e^0 - e^{\alpha}\right) \prod_{\alpha \neq \beta \succ 0} \left(e^0 - e^{-\beta}\right) \\ &= e^{\rho}\left(e^{-\alpha} - e^0\right) \prod_{\alpha \neq \beta \succ 0} \left(e^0 - e^{-\beta}\right) \\ &= -q. \end{aligned}$$

Logo, $\sigma_\alpha(q) = -q$.

□

Proposição 2.4.3. $q = \omega(\rho)$.

Demonstração. Mostremos primeiro que q pode ser expresso como combinação linear de elementos da forma $c_\beta \omega(\beta)$ com os β's fortemente dominantes e $c_\beta \neq 0$. Com efeito, seja $A : \mathbb{F}[\Lambda] \longrightarrow \mathbb{F}[\Lambda]$ definida como

$$A(p) = \sum_{\sigma \in \mathscr{W}} (-1)^{l(\sigma)} \sigma(p), \ \forall p \in \mathbb{F}[\Lambda],$$

e notemos que $A(e^{\mu}) = \omega(\mu)$ para todo $\mu \in \Lambda$. Além disso, é possível escrever $q = \sum a_\lambda e^{\lambda}$ para $\lambda \in \mathbb{F}$.
(a) $A(p)$ é alternado para todo $p \in \mathbb{F}[\Lambda]$. Com efeito, para qualquer $s \in \mathscr{W}$ temos que:

$$s\,.\,A(p) = \sum_{\sigma \in \mathscr{W}} (-1)^{l(\sigma)} s\sigma(p) = (-1)^{l(s)} \sum_{\sigma \in \mathscr{W}} (-1)^{l(\sigma s)} \sigma s(p) = (-1)^{l(s)} A(p).$$

(b) Como $\sigma(q) = (-1)^{l(\sigma)} q$, segue que $A(q) = \sum\limits_{\sigma \in \mathscr{W}} (-1)^{l(\sigma)^2} q = |\mathscr{W}| q$.

(c) Finalmente, por ser q alternado, segue que:

$$q = \frac{A(q)}{|\mathscr{W}|} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{\sigma \in \mathscr{W}} \frac{(-1)^{l(\sigma)}}{|\mathscr{W}|} a_\lambda e^{\sigma(\lambda)} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{a_\lambda}{|\mathscr{W}|} \omega(\lambda).$$

Logo, q é combinação linear dos elementos $\omega(\lambda)$. Mas também, $\omega(\lambda) = \pm\omega(\sigma \centerdot \lambda), \forall \sigma \in \mathscr{W}$ pelo item (a) demonstrado. Pelo Lema 1.7.10, existe $\beta = \sigma \centerdot \lambda$ dominante, tal que $\omega(\lambda) = \pm\omega(\beta)$. Substituindo $\omega(\lambda)$ por $\pm\omega(\beta)$, se for necessário, obtemos que q é combinação linear dos e^λ com todos os λ dominantes.

Agora, se existir uma raiz simples $\alpha_i \in \Delta$ tal que $\lambda(h_i) = 0$, ie, $\sigma_i(\lambda) = \lambda$, então

$$\omega(\lambda) = (-1)^{l(\sigma_i)} \omega(\sigma_i \centerdot \lambda) = -\omega(\lambda)$$

e teríamos que $\omega(\lambda) = 0$. Logo, $\lambda(h_i) > 0$ e λ é fortemente dominante.

Por fim, vamos provar que $q = \omega(\rho)$. Por um lado, pela definição de q, é possível escrever q como combinação linear dos e^μ onde

$$\mu = \rho - \sum_{\alpha \succ 0} \delta_\alpha \alpha \qquad (\star)$$

com $\delta_\alpha = 0$ ou $\delta_\alpha = 1$. Além disso, para qualquer $\sigma \in \mathscr{W}$, temos que $\sigma(\mu)$ tem a mesma estrutura que $(\star)$. Com efeito, basta tomar reflexões simples σ_i e ver que

$$\sigma_i(\mu) = (\rho - \alpha_i) - \sum_{\alpha \succ 0} \eta_\alpha \alpha$$

com $\eta_\alpha = 1$ no caso $\delta_\alpha = 0$ e $\eta_\alpha = 0$ no caso $\delta_\alpha = 1$. Deste modo, é possível escolher os μ's, se for necessário, fortemente dominantes e tal que $q = \sum_\mu c_\mu \omega(\mu)$ (pelo item (c) mostrado acima). Como cada μ é fortemente dominante, $\mu = \sum_{i=1}^l k_i \omega_i$ onde os ω_i's são os pesos fundamentais e $k_i \geq 1$. Além disso, $\rho = \sum_{i=1}^l \omega_i$ e $\rho - \mu \prec 0$, i.e $(\rho - \mu, \alpha_i) \leq 0$ para todo $\alpha_i \in \Delta$. Consequentemente:

$$0 \leq (\rho - \mu, \rho - \mu) = \left(\rho - \mu, \sum_{\alpha \succ 0} \delta_\alpha \alpha\right) = \sum_{\alpha \succ 0} \delta_\alpha (\rho - \mu, \alpha) \leq 0 \Longrightarrow \rho = \mu.$$

Isto mostra que $q = c\omega(\rho)$ para alguma constante c. Voltando à definição de q, temos:

$$q = e^\rho + comb\ linear\ de\ e^\lambda; \lambda \prec \rho,$$

segue que $c = 1 \Longrightarrow q = \omega(\rho)$.

□

Observação 2.4.1. De maneira similar ao mostrado na Proposição 2.4.2, é possível mostrar que $q = e^{-\rho} \prod\limits_{\alpha \succ 0} \left(e^\alpha - e^0\right)$ (Cf. [FH91, Gra00]). Ademais, é usual escrever $e^0 = 1$.

Desta forma, a fórmula de Weyl é representada como

$$\omega(\rho) \chi_\lambda = \omega(\rho + \lambda) \tag{2.4.2}$$

Pela Proposição 2.4.3, temos que $\omega(\rho) = e^{-\rho} \prod_{\alpha \succ 0} (e^{\alpha} - 1)$. Devido que V^{λ} se decompõe como soma direta do seus espaços de peso, resulta que $\dim V^{\lambda} = \sum_{\mu \in \Pi(\lambda)} m_{\lambda}(\mu)$; notemos que $\dim V^{\lambda}$ é soma dos coeficientes do caractere χ_{λ}. Definamos $v : f = \sum_{\mu \in \Lambda} c_{\mu} e^{\mu} \in \mathbb{F}[\Lambda] \mapsto \sum_{\mu \in \Lambda} c_{\mu} \in \mathbb{F}$; tal função v pode ser estendida a um homomorfismo de álgebras $\mathbb{F}[\Lambda] \mapsto \mathbb{F}$ bem definido. Queremos aplicar a função v no caractere χ_{λ} de modo de obter uma expressão em função de λ. Pela definição de convolução, resulta claro que

$$v(fg) = v(f)\, v(g)$$

Fixando uma raiz $\alpha \in \Phi$, a transformação $\eta_{\alpha} : e^{\mu} \mapsto (\mu, \alpha)\, e^{\mu}$ pode ser estendida a um endomorfismo $\eta_{\alpha} : \mathbb{F}[\Lambda] \to \mathbb{F}[\Lambda]$ que resulta uma derivação sob convolução, i.e,

$$\eta_{\alpha}(fg) = \eta_{\alpha}(f)\, g + f \eta_{\alpha}(g),\ \forall f, g \in \mathbb{F}[\Lambda]$$

Para demonstrar isso, recordemos que $\{e^{\mu} : \mu \in \Lambda\}$ gera $\mathbb{F}[\Lambda]$. Além disso,

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha}(e^{\mu} e^{\nu}) &= \eta_{\alpha}\left(e^{\mu+\nu}\right) = (\mu+\nu, \alpha)\, e^{\mu+\nu} \\ &= ((\mu, \alpha)\, e^{\mu})\, e^{\nu} + ((\nu, \alpha)\, e^{\nu})\, e^{\mu} \\ &= \eta_{\alpha}(e^{\mu})\, e^{\nu} + e^{\mu} \eta_{\alpha}(e^{\nu}) \end{aligned}$$

e cada η_{β} comuta com qualquer outro. Pelo fato que cada η_{β} é uma derivação, obtemos que

$$\eta_{\beta}\left(\prod_{\alpha \in \Phi} (e^{\alpha} - 1)\right) = \left[(\beta, \beta)\left(e^{\beta} - 1\right)\right] \prod_{\alpha \neq \beta} (e^{\alpha} - 1) + \left(e^{\beta} - 1\right) \eta_{\beta}\left(\prod_{\alpha \neq \beta} (e^{\alpha} - 1)\right)$$

Similarmente, se $\eta^{*} = \prod_{\alpha \in \Phi'} \eta_{\alpha} \in \operatorname{End}(\mathbb{F}[\Lambda])$ onde $\Phi' \subset \Phi^{+}$, então cada termo na expressão $\eta^{*}\left(\prod_{\alpha \in \Phi} (e^{\alpha} - 1)\right)$ tem algum fator da forma $(e^{\alpha} - 1)$. Definindo $\eta = \prod_{\alpha \succ 0} \eta_{\alpha} \in \operatorname{End}(\mathbb{F}[\Lambda])$, é possível fazer a mesma observação que η^{*}. Com tais observações feitas, aplicando o endomorfismo η em ambos lados da fórmula de Weyl, obtemos

$$\begin{aligned} \eta(\omega(\lambda+\rho)) &= \eta(\omega(\rho)\, \chi_{\lambda}) \\ &= \eta(\omega(\rho))\, \chi_{\lambda} + \omega(\rho)\, \eta(\chi_{\lambda}) \\ &= \eta(\omega(\rho))\, \chi_{\lambda} + K \end{aligned}$$

e em cada termo de K aparece um fator da forma $e^{\alpha} - 1$. Aplicando o homomorfismo v, temos

$$\begin{aligned} v \circ \eta(\omega(\lambda+\rho)) &= v(\eta(\omega(\rho))\, \chi_{\lambda} + K) \\ &= v(\eta(\omega(\rho))\, \chi_{\lambda}) + \underbrace{v(K)}_{0} \\ &= v(\eta(\omega(\rho)))\, v(\chi_{\lambda}) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow v(\chi_{\lambda}) = \frac{v \circ \eta(\omega(\lambda+\rho))}{v \circ \eta(\omega(\rho))} \tag{2.4.3}$$

Portanto, só faltam expressões para o numerador e o denominador de 2.4.3. Por uma parte, temos que $\eta_\alpha(e^\rho) = (\rho,\alpha)e^\rho$, logo,

$$\begin{aligned} \eta(e^\rho) &= \prod_{\alpha\succ 0}(\rho,\alpha)e^\rho \\ \Rightarrow v\circ\eta(e^\rho) &= \prod_{\alpha\succ 0}(\rho,\alpha) \end{aligned}$$

Tomando $\sigma\in\mathscr{W}$ e usando o fato que o grupo de Weyl preserva o produto interno $(,)$, temos a seguinte expressão similar:

$$v\circ\eta\left(e^{\sigma(\rho)}\right) = \prod_{\alpha\succ 0}(\sigma(\rho),\alpha) = \prod_{\alpha\succ 0}\left(\rho,\sigma^{-1}(\alpha)\right).$$

Como σ^{-1} leva $l(\sigma) = l\left(\sigma^{-1}\right)$ raízes positivas em raízes negativas, permutando as demais, segue que

$$\begin{aligned} \prod_{\alpha\succ 0}\left(\rho,\sigma^{-1}(\alpha)\right) &= (-1)^{l(\sigma)}\prod_{\alpha\succ 0}(\rho,\alpha) \\ \Longrightarrow v\circ\eta(\omega(\rho)) &= \sum_{\sigma\in\mathscr{W}}(-1)^{l(\sigma)}v\circ\eta\left(e^{\sigma(\rho)}\right) \\ &= \sum_{\sigma\in\mathscr{W}}(-1)^{l(\sigma)}\prod_{\alpha\succ 0}\left(\rho,\sigma^{-1}(\alpha)\right) \\ &= \sum_{\sigma\in\mathscr{W}}(-1)^{l(\sigma)^2}\prod_{\alpha\succ 0}(\rho,\alpha) \\ &= |\mathscr{W}|\prod_{\alpha\succ 0}(\rho,\alpha) \end{aligned}$$

Similarmente, $v\circ\eta(\omega(\lambda+\rho)) = |\mathscr{W}|\prod_{\alpha\succ 0}(\lambda+\rho,\alpha)$ e assim

$$\dim V^\lambda = \frac{\prod_{\alpha\succ 0}(\lambda+\rho,\alpha)}{\prod_{\alpha\succ 0}(\rho,\alpha)} \tag{2.4.4}$$

e multiplicando pelo fator $\prod_{\alpha\succ 0}\frac{2}{(\alpha,\alpha)}$ obtemos finalmente que

$$\dim V^\lambda = \frac{\prod_{\alpha\succ 0}\langle\lambda+\rho,\alpha\rangle}{\prod_{\alpha\succ 0}\langle\rho,\alpha\rangle}$$

2.4.3 Demonstração do Teorema.2.7

Vamos demonstrar a fórmula de caracteres de Weyl. Para isso, assumiremos a fórmula das multiplicidades de Freudenthal (Cf. [FH91],[Gra00],[Hum78]) sem demonstração:

Proposição 2.4.4. *Seja V^λ uma representação irredutível de peso maximal $\lambda\in\Lambda^+$ para $\mathfrak{g}$. Se $\mu\in\Lambda$, então a multiplicidade $m_\lambda(\mu)$ de μ em V^λ é dada por*

$$(\lambda,\lambda+2\rho)m_\mu = \sum_{\alpha\in\Phi}\sum_{j=0}^{\infty}(\mu+j\alpha,\alpha)m_{\mu+j\alpha} + (\mu,\mu)m_\mu$$

Observação 2.4.2. Como V^{λ} é uma representação irredutível de peso maximal λ, usando a proposição 2.2.7 como assim também o fato que $\Pi(\lambda)$ é finito, a somatória em j na equação acima é finita mesmo com j variando até ∞.

Consideremos o espaço euclideano $E = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} E_{\mathbb{Q}}$ gerado pelas raízes Φ, tal como vimos na seção 1.6, e o produto tensorial $\mathbb{F}[\Lambda] \otimes_{\mathbb{F}} E$. Os elementos de $\mathbb{F}[\Lambda]$ agem neste espaço via

$$a \centerdot \left(\sum_i b_i \otimes v_i \right) = \sum_i ab_i \otimes v_i$$

em que $a, b_i \in \mathbb{F}[\Lambda]$, $v_i \in E$, e ab_i denota o produto por convolução de $\mathbb{F}[\Lambda]$.

Estendemos a forma bilinear $(,)$ para $\mathbb{F}[\Lambda] \otimes_{\mathbb{F}} E$ do seguinte modo:

$$\begin{array}{rc} (,): & \mathbb{F}[\Lambda] \otimes_{\mathbb{F}} E \times \mathbb{F}[\Lambda] \otimes_{\mathbb{F}} E \longrightarrow \mathbb{F}[\Lambda] \\ & (a \otimes v, b \otimes w) = (v, w)\, ab \end{array}$$

em que os parenteses do lado direito denotam a forma bilinear em E. Em particular temos que $\left(\lambda_1 \otimes e^{\beta_1}, \lambda_2 \otimes e^{\beta_2}\right) = (\lambda_1, \lambda_2)\, e^{\beta_1 + \beta_2}$. Definimos o gradiente em $\mathbb{F}[\Lambda]$ como a aplicação linear

$$\begin{array}{rccc} \nabla: & \mathbb{F}[\Lambda] & \longrightarrow & \mathbb{F}[\Lambda] \\ & e^{\mu} & \longmapsto & e^{\mu} \otimes \mu \end{array}$$

e o Laplaciano de $\mathbb{F}[\Lambda]$ como a aplicação linear

$$\begin{array}{rccc} \Delta: & \mathbb{F}[\Lambda] & \longrightarrow & \mathbb{F}[\Lambda] \\ & e^{\mu} & \longmapsto & (\mu, \mu)\, e^{\mu} \end{array}$$

O leitor pode verificar facilmente que valem as relações

$$\begin{aligned} \nabla(fg) &= f\nabla(g) + g\nabla(f) \\ \Delta(fg) &= f\Delta(g) + g\Delta(f) + 2(\nabla(f), \nabla(g)) \end{aligned}$$

o que de certo modo justifica a nomenclatura adotada para tais operadores. Por exemplo

$$\begin{aligned} \nabla(e^{\mu} e^{\nu}) = \nabla(e^{\mu+\nu}) &= e^{\mu} e^{\nu} \otimes (\mu + \nu) \\ &= e^{\mu} e^{\nu} \otimes \mu + e^{\mu} e^{\nu} \otimes \nu \\ &= e^{\nu} \nabla(e^{\mu}) + e^{\mu} \nabla(e^{\nu}) \end{aligned}$$

Agora, seja V uma representação irredutível de dimensão finita para $\mathfrak{g}$ de peso máximo λ. Como $\sum\limits_{\alpha \in \Phi} \alpha = 0$, segue que $\sum\limits_{\alpha \in \Phi} (\mu, \alpha)\, m_{\mu} = 0$. Pela Proposição 2.4.4,

$$(\lambda, \lambda + 2\rho)\, m_{\mu} = \sum_{\alpha \in \Phi} \sum_{j=0}^{\infty} (\mu + j\alpha, \alpha)\, m_{\mu + j\alpha} + (\mu, \mu)\, m_{\mu},$$

multiplicando a ambos lados da igualdade por e^{μ} e somando sobre todo $\mu \in \Lambda$ obtemos que

$$(\lambda, \lambda + 2\rho)\,\chi_\lambda = \sum_{\mu\in\Lambda}\sum_{\alpha\in\Phi}\sum_{j=0}^{\infty}(\mu + j\alpha, \alpha)\, m_{\mu+j\alpha}e^{\mu} + \Delta(\chi_\lambda) \tag{2.4.5}$$

Por outro lado, $\prod_{\alpha\in\Phi}(e^{\alpha}-1) = \prod_{\alpha\succ 0}(e^{\alpha}-1)\prod_{\alpha\succ 0}(e^{-\alpha}-1) = \varepsilon q^2$ onde $\varepsilon = \pm 1$. Multiplicando 2.4.5 por εq^2 temos

$$\begin{aligned}
\varepsilon q^2\left((\lambda,\lambda+2\rho)\,\chi_\lambda - \Delta(\chi_\lambda)\right) &= \sum_{\mu\in\Lambda}\sum_{\alpha\in\Phi}\sum_{j=0}^{\infty}(\mu+j\alpha,\alpha)\,m_{\mu+j\alpha}e^{\mu}\prod_{\beta\in\Phi}\left(e^{\beta}-1\right)\\
&= \sum_{\mu\in\Lambda}\sum_{\alpha\in\Phi}\sum_{j=0}^{\infty}(\mu+j\alpha,\alpha)\,m_{\mu+j\alpha}\left(e^{\mu+\alpha}-e^{\mu}\right)\prod_{\beta\neq\alpha}\left(e^{\beta}-1\right)\\
&= \sum_{\alpha\in\Phi}\prod_{\beta\neq\alpha}\left(e^{\beta}-1\right)e^{\alpha}\sum_{\mu\in\Lambda}\left(\sum_{j=0}^{\infty}(\mu+j\alpha,\alpha)\,m_{\mu+j\alpha}-\right.\\
&\quad\left.-\sum_{j=0}^{\infty}(\mu+(j+1)\,\alpha,\alpha)\,m_{\mu+(j+1)\alpha}\right)e^{\mu} \qquad (2.4.6)\\
&= \sum_{\alpha\in\Phi}\prod_{\beta\neq\alpha}\left(e^{\beta}-1\right)e^{\alpha}\sum_{\mu\in\Lambda}m_{\mu}\,(\mu,\alpha)\,e^{\mu}\\
&= \left(\sum_{\alpha\in\Phi}\alpha\otimes\prod_{\beta\neq\alpha}\left(e^{\beta}-1\right)e^{\alpha}, \sum_{\mu\in\Lambda}\mu\otimes m_{\mu}e^{\mu}\right)\\
&= \left(\varepsilon\nabla\left(q^2\right), \nabla(\chi_\lambda)\right) = 2\varepsilon q\,(\nabla(q), \nabla(\chi_\lambda))\\
&= \varepsilon q\,(\Delta(q\chi_\lambda) - \chi_\lambda\Delta(q) - q\Delta(\chi_\lambda))
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$(\lambda,\lambda+2\rho)\,\chi_\lambda q^2 - q^2\Delta(\chi_\lambda) = q\,(\Delta(q\chi_\lambda) - \chi_\lambda\Delta(q) - q\Delta(\chi_\lambda)) \tag{2.4.7}$$

Observação 2.4.3. Na igualdade 2.4.6 fizemos uma substituição do tipo $\mu = \nu - \alpha$.

Como $q \neq 0$ e $\mathbb{F}[\Lambda]$ é domínio de integridade[5], podemos dividir 2.4.7 por q e obter

$$(\lambda,\lambda+2\rho)\,\chi_\lambda q = \Delta(q\chi_\lambda) - \chi_\lambda\Delta(q)\,.$$

Chamando $f = q\chi_\lambda$, a última expressão equivale a

$$(\lambda,\lambda+2\rho)\,f = \Delta(f) - \chi_\lambda\Delta(q)\,. \tag{2.4.8}$$

Como $q = \sum_{\sigma\in\mathscr{W}}(-1)^{l(\sigma)}e^{\sigma(\rho)}$ e devido que $(\sigma(\rho), \sigma(\rho)) = (\rho,\rho)$, podemos escrever $\Delta(q) = (\rho,\rho)\,q$. Portanto, usando a equação 2.4.8 e que $(\lambda,\lambda+2\rho) = (\lambda+\rho,\lambda+\rho)$ mostramos que

$$\Delta(f) = (\lambda+\rho,\lambda+\rho)\,f.$$

[5]Recordemos que um domínio de integridade não admite divisores de zero.

Pelas definições de χ_λ e q, $f = \chi_\lambda q$ é uma combinação linear de termos da forma $e^{\mu+\sigma(\rho)}$. Portanto,

$$\begin{aligned}\Delta\left(e^{\mu+\sigma(\rho)}\right) &= (\mu+\sigma(\rho),\mu+\sigma(\rho))\,e^{\mu+\sigma(\rho)}\\ &= \left(\sigma^{-1}(\mu)+\rho,\sigma^{-1}(\mu)+\rho\right)e^{\mu+\sigma(\rho)}\end{aligned}$$

Isto mostra que $e^{\mu+\sigma(\rho)}$ é autovetor de Δ com autovalor $\left(\sigma^{-1}(\mu)+\rho,\sigma^{-1}(\mu)+\rho\right)$. Mas também mostramos que f é autovetor de Δ com autovalor $(\lambda+\rho,\lambda+\rho)$, e como autovetores correspondentes a autovalores diferentes são linearmente independentes segue que

$$\left(\sigma^{-1}(\mu)+\rho,\sigma^{-1}(\mu)+\rho\right) = (\lambda+\rho,\lambda+\rho)$$

para algum $\mu \in \Lambda$ e $w \in \mathscr{W}$.

Pelo Lema 1.7.15, $\sigma^{-1}(\mu) = \lambda \Rightarrow \mu = \sigma(\lambda)$. Logo, f é combinação linear de termos da forma $e^{\sigma(\lambda+\rho)}$. Como χ_λ é $\mathscr{W}$-simétrico e q e $\mathscr{W}$-alternado, temos que f é alternado.

Pelo mesmo argumento usado na proposição 2.4.2, f é escrita como combinação linear de $A(e^\mu)$ com μ fortemente dominante. Logo, $\sigma = 1$ (pois $\sigma(\lambda+\rho)$ é fortemente dominante se e somente se $\sigma = 1$).

Desta forma, $f = \eta A\left(e^{\lambda+\rho}\right) = \eta \sum_{\sigma\in\mathscr{W}} (-1)^{l(\sigma)} e^{\sigma(\lambda+\rho)}$ para algum η, onde o coeficiente de $e^{\lambda+\rho}$ é justamente η. Ao mesmo tempo, o coeficiente de $e^{\lambda+\rho}$ em f é 1, segue que $\eta = 1$ e por fim $f = A\left(e^{\lambda+\rho}\right)$.

2.5 Observações do Capítulo.

Observação 1.

Uma prova analítica para a fórmula dimensional de Weyl pode ser encontrada em [FH91, Pag. 403]. Esta baseia-se no desenvolvimentos de séries de Taylor em que e^μ surge como uma função exponencial. faremos aqui um esboço dessa prova.

Consideremos e^μ como o operador $e^\mu : t \mapsto e^{t(\mu,\rho)}$, $\forall \mu \in \Lambda$ que possui desenvolvimento em série de Taylor dado por

$$e^{t(\mu,\rho)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} t^i (\mu,\rho)^i.$$

Definimos $A(e^\mu) = \sum_{\sigma\in\mathscr{W}} \operatorname{sg}(\sigma) e^{\sigma(\mu)}$ e para $\nu \in \Lambda$ fixo, o operador $\zeta_\nu : \mathbb{F}[\Lambda] \longrightarrow \mathbb{F}[[t]]$

$$\zeta_\nu(e^\mu) = e^{t(\mu,\nu)}.$$

Notemos aqui que $\zeta_\nu(e^\mu)$ necessariamente é um elemento em $\mathbb{F}[[t]]$. É fácil de provar que

$$\zeta_\rho(A(e^\mu)) = \zeta_\mu(A(e^\rho)). \tag{2.5.1}$$

Chamando $q = A(e^{\rho})$, a expressão 2.5.1 fica escrita como $\zeta_{\mu}(q) = \zeta_{\rho}(A(e^{\mu})), \forall \mu \in \Lambda$. Logo,

$$\begin{aligned}
\zeta_{\rho}(A(e^{\mu})) &= \zeta_{\mu}(e^{-\rho}) \prod_{\alpha\in\Phi^+} \left(\zeta_{\mu}(e^{\alpha}-1)\right) \\
&= \exp(-(\rho,\mu)t) \prod_{\alpha\in\Phi^+} (\exp(-(\alpha,\mu)t)-1) \\
&= \prod_{\alpha\in\Phi^+} \left(\exp\left(\tfrac{1}{2}t(\alpha,\mu)\right) - \exp\left(-\tfrac{1}{2}t(\alpha,\mu)\right)\right)
\end{aligned}$$

e considerando $N = \mathrm{Card}(\Phi^+)$ é possível escrever (Cf. [FH91, Pag. 403])

$$\zeta_{\rho}(A(e^{\mu})) = \left(\prod_{\alpha\in\Phi^+}(\alpha,\mu)\right) t^N + \textit{termos de maior grau em } t.$$

Portanto, para $\mu = \lambda$ e $\mu = \lambda+\rho$, da fórmula de caracteres de Weyl obtemos que

$$\chi_{\lambda} = \frac{\zeta_{\rho}\left(A\left(e^{\lambda+\rho}\right)\right)}{\zeta_{\rho}(A(e^{\rho}))} = \frac{\prod_{\alpha\in\Phi^+}(\alpha,\lambda+\rho)}{\prod_{\alpha\in\Phi^+}(\alpha,\rho)} + \textit{termos de grau positivo em } t.$$

Tomando limite quando $t \to 0$ em ambas expressões, resulta

$$\chi_{\lambda} \to \dim V^{\lambda} = \frac{\prod_{\alpha\in\Phi^+}(\alpha,\lambda+\rho)}{\prod_{\alpha\in\Phi^+}(\alpha,\rho)}.$$

Observação 2.

Observamos que nos exemplos exemplos 2.4.3 e 2.4.4 dados anteriormente, a matriz de Cartan $\mathscr{C}$ coincidia com a matriz dos produtos $\tilde{\mathscr{C}}$. Na realidade isso vale para qualquer álgebra do tipo A_l $(l \geq 2)$; Com efeito, pelo fato que a matriz de Cartan $\mathscr{C}$ de uma álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ é simétrica e as raízes simples $\alpha \in \Delta$ obtidas a partir da matriz de Cartan apresentam o mesmo comprimento (α,α), é possível escolher a normalização $(\alpha,\alpha) = 2$ de tal jeito que

$$\langle\beta,\alpha\rangle = 2\frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = (\beta,\alpha), \forall \beta,\alpha \in \Delta.$$

Portanto, as componentes da matriz de Cartan resultam ser os produtos $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle = (\alpha_i,\alpha_j)$ o qual permite dizer que $\mathscr{C} = \tilde{\mathscr{C}}$. No entanto, tal propriedade não é válida, por exemplo, para famílias de álgebras do tipo B_l, C_l ou para a excepcional G_2 (pois as raízes apresentam dois comprimentos diferentes, e $\mathscr{C}$ deixa de ser simétrica).

Observação 3.

Consideremos novamente a família A_l, com $l \geq 1$. Pela observação 2 sabemos que $\mathscr{C} = \tilde{\mathscr{C}}$ e $\langle,\rangle = (,)$. Isto permite simplificar os cálculos de $(\lambda+\rho,\alpha)$ quando λ é um peso dominante integral e $\alpha \in \Phi^+$.

Com efeito, seja $\Delta = \{\alpha_i : 1 \leq i \leq l\}$, $\lambda = \sum_{i=1}^{l} m_i\omega_i$ expresso na base de pesos fundamentais e $\alpha = \sum_{i=1}^{l} k_i\alpha_i$ uma raiz positiva; então

$$\begin{aligned}
(\lambda+\rho,\alpha) &= \left(\sum_{i=1}^{l}(m_i+1)\,\omega_i, \sum_{j=1}^{l}k_j\alpha_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}(m_i+1)\,k_j\,(\omega_i,\alpha_j) \\
&= \sum_{i=1}^{l}m_ik_i+\mathrm{ht}\,(\alpha)
\end{aligned}$$

Usando a construção de sistemas de raízes dada em [Hum78, Sec. 12.1] ou [FS97, pag. 121] podemos obter informação da estrutura das raízes positivas e de $\mathrm{ht}\,(\alpha)$.

Seja $\{e_1,\ldots,e_{l+1}\}$ uma base ortonormal para $\mathbb{R}^{l+1}$, então $\Phi=\left\{e_i-e_j : i\neq j\right\}$ é um sistema de raízes no espaço euclideano $E=\langle e_1+\ldots+e_{l+1}\rangle^{\perp}$. Como os $\alpha_i=e_i-e_{i+1}$, $1\leq i\leq l$, são linearmente independentes e além disso

$$\alpha=e_i-e_j=(e_i-e_{i+1})+\ldots+(e_{j-1}-e_j)=\alpha_i+\ldots+\alpha_{j-1},\ i<j$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\Delta &= \{e_i-e_{i+1} : 1\leq i\leq l\} \\
\Phi^{+} &= \left\{e_i-e_j : 1\leq i<j\leq l+1\right\}\cup\Delta
\end{aligned}$$

podem ser escolhidos como uma base para Φ e as raízes positivas de Φ, respectivamente. Com tal construção, qualquer $\alpha\in\Phi^{+}$ é expressa como uma combinação da forma $\alpha=\alpha_i+\ldots+\alpha_{j-1}$ com $i<j$ e portanto $\mathrm{ht}\,(\alpha)=j-i$. Equivalentemente, se $\alpha\in\Phi^{+}$ e $\mathrm{ht}\,(\alpha)=k$, então existe $1\leq i\leq l$ tal que $i-k-1\leq l+1$ e

$$\alpha=\alpha_i+\ldots+\alpha_{i+k-1}.$$

Portanto, $\mathrm{ht}\,(\alpha)$ representa a quantidade de raízes simples usadas na combinação linear dada acima. Podemos usar a mesma construção quando $\alpha_i\in\Delta$ está expressa na base de pesos fundamentais; assim

$$\begin{aligned}
(\lambda+\rho,\alpha) &= \sum_{i=1}^{l}m_ik_i+\mathrm{ht}\,(\alpha) && (2.5.2)\\
&= \sum_{i=1}^{l}m_ik_i+k && (2.5.3)\\
(\rho,\alpha) &= k. && (2.5.4)
\end{aligned}$$

Representando $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{l}k_i\alpha_i\in\Phi^{+}$ em que $k_i\in\{0,1\}$ e $\lambda=\sum\limits_{i=1}^{l}m_i\omega_i$ um peso dominante expresso na base de pesos fundamentais, a dimensão de V^{λ} resulta

$$\dim V^{\lambda} = \frac{\prod\limits_{\alpha\in\Phi^{+}} \left(\sum\limits_{\substack{1\leq i\leq l \\ k_i\neq 0}} m_i + \mathrm{ht}(\alpha) \right)}{\prod\limits_{\alpha\in\Phi^{+}} \mathrm{ht}(\alpha)}.$$

Exemplo 2.5.1. (Tipo A_4) Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(5,\mathbb{F})$, aplicando a observação 3 obtemos que

$$\begin{aligned} \Phi^{+} &= \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4, \\ &\quad \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\} \end{aligned}$$

Se $\lambda = (m_1,m_2,m_3,m_4)$ é um peso dominante integral expresso na base de pesos fundamentais, segue-se que $\dim V^{\lambda} = p/q$ com

$$\begin{aligned} p &= (m_1+1)(m_2+1)(m_3+1)(m_4+1)(m_1+m_2+2)(m_2+m_3+2)(m_3+m_4+2)\,. \\ &\quad (m_1+m_2+m_3+3)(m_2+m_3+m_4+3)(m_1+m_2+m_3+m_4+4) \\ q &= 2^3\cdot 3^2\cdot 4 \end{aligned}$$

Capítulo 3

Nova Fórmula de caracteres. Aplicações.

O objetivo deste capítulo é apresentar a fórmula de caracteres descoberta por Schützer [Sch12]. Iremos estudar algumas propriedades e aplicações dessa nova fórmula de caracteres para representações de dimensão finita de álgebras de Lie semissimples $\mathfrak{g}$ de dimensão finita.

Uma das novidades dessa fórmula consiste na determinação exata do número de pesos numa representação e outra na obtenção de fórmulas exatas para multiplicidades.

3.1 Introdução.

Consideremos $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ algebricamente fechado de caraterística zero. Seja $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan e $\mathfrak{h}^*$ o seu espaço dual, Φ o sistema de raízes de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{h}^*$ com base $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l\}$ e Φ^+, Φ^- as raízes positivas e negativas de Φ respectivamente. Denotemos E o $\mathbb{R}$-espaço euclideano de Δ em $\mathfrak{h}^*$ com a forma bilinear, simétrica e definida positiva $(,)$ tal como na seção 1.6.3, Λ_r o reticulado de raízes de $\mathfrak{g}$ gerado pelas $\mathbb{Z}$-combinações lineares de Δ e Λ o reticulado de pesos de $\mathfrak{g}$ gerado pelas $\mathbb{Z}$-combinações lineares dos pesos fundamentais $\{\omega_1, \ldots, \omega_l\}$, respectivamente.

Seja $\Lambda^+ \subset \Lambda$ o conjunto convexo cujos elementos são denominados pesos dominantes, i.e, se $\lambda \in \Lambda^+$ então $\langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0$ para todo $\alpha \in \Phi$. O conjunto dos $\lambda \in \Lambda$ tais que $\langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$ são chamados pesos integrais e consideramos a ordenação parcial em Λ: $\mu \prec \lambda \Leftrightarrow \lambda - \mu$ é soma (possivelmente zero) de raízes positivas. Denotaremos $\mathscr{W}$ o grupo de Weyl de Φ gerado pelas reflexões simples tal como na seção 1.7.

Para cada peso dominante integral $\lambda \in \Lambda^+$, denotemos V^λ a representação irredutível de peso máximo λ, que resulta um espaço vetorial de dimensão finita e seus pesos $\Pi(\lambda) \subset \Lambda$ formam um conjunto saturado de pesos no sentido dado em 1.7.4.

Consideraremos a álgebra de grupo $\mathbb{F}[\Lambda]$ com base $\{e^\mu : \mu \in \Lambda\}$, em que cada e^μ denota a função $t \mapsto e^{t(\mu,\rho)}$, $\rho = \frac{1}{2}\left(\sum\limits_{\alpha \succ 0} \alpha\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i$ e o grupo de Weyl $\mathscr{W}$ age naturalmente sobre $\mathbb{F}[\Lambda]$ via $w \centerdot e^\mu = e^{w(\mu)}, \forall w \in \mathscr{W}$. Denotaremos por $\mathbb{F}[\Lambda]^{\mathscr{W}}$ o conjunto dos elementos em $\mathbb{F}[\Lambda]$ que são fixos pela ação do grupo de Weyl $\mathscr{W}$. Contudo, vamos começar o capítulo dando as seguintes definições:

Definição 3.1.1. Para cada peso $\lambda \in \Lambda$, definimos $w_\lambda \in \mathscr{W}$ como o único elemento no grupo de Weyl tal que $w_\lambda(\lambda+\rho)$ é dominante. Definimos $\overline{\lambda} = w_\lambda(\lambda+\rho)-\rho$.

Tanto a existência como a unicidade de w_λ é garantida pelo Lema 1.7.10. Notemos que no caso λ dominante, resulta $w_\lambda = 1$ e $\overline{\lambda} = \lambda-\rho+\rho = \lambda$. Se $\lambda+\rho$ é regular, então $\overline{\lambda}$ resulta dominante.

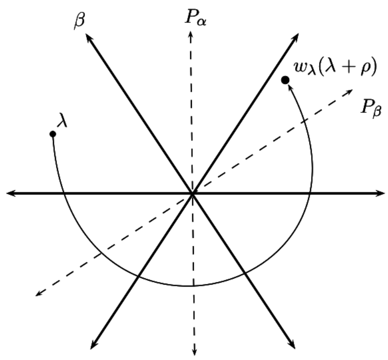


Figura 3.1.1: Interpretação geométrica da definição 3.1.1

Definição 3.1.2. Para cada peso λ, definimos o sinal de λ como

$$\varepsilon_\lambda = \begin{cases} (-1)^{l(w_\lambda)} & \lambda+\rho \ \mathit{regular} \\ 0 & q.o.c \end{cases}$$

Definição 3.1.3. Seja λ qualquer peso de Λ. Definimos o caractere $\tilde{\chi}_\lambda = \varepsilon_\lambda \chi_{\overline{\lambda}}$.

Do mesmo modo, observemos que quando λ é dominante, então $\overline{\lambda} = \lambda$ e $\tilde{\chi}_\lambda$ simplesmente é χ_λ. No caso $\lambda+\rho$ regular, $\tilde{\chi}_\lambda = \pm\chi_{\overline{\lambda}}$ e para $\lambda+\rho$ singular, $\tilde{\chi}_\lambda = 0$.

Aplicando a definição de caractere formal, é natural ver que $\tilde{\chi}_\lambda = \sum_{\mu\in\Lambda} \varepsilon_\lambda m_{\overline{\lambda}}(\mu) e^\mu$; isto mostra que $\tilde{m}_\lambda(\mu) := \varepsilon_\lambda m_{\overline{\lambda}}(\mu)$. Vamos definir agora o girdle como o elemento de $\mathbb{F}[\Lambda]$ similar ao caractere, mas com a exceção que todos os coeficientes que acompanham os e^μ são exatamente 1.

Definição 3.1.4. Seja $\lambda \in \Lambda^+$ um peso dominante. Definimos o girdle de λ como o elemento de $\mathbb{F}[\Lambda]$ dado por

$$\Theta_\lambda = \sum_{\mu\in\Pi(\lambda)} e^\mu.$$

Como $\{e^\mu : \mu \in \Lambda\}$ forma uma base para $\mathbb{F}[\Lambda]$, temos que Θ_λ pode ser vista como a função caraterística sobre $\Pi(\lambda)$. Notemos também que Θ_λ está bem definido pelo fato que $\Pi(\lambda)$ é um conjunto finito (Cf. Sec. 1.7.4). Ademais, Θ_λ permanece fixa pela ação do grupo de Weyl $\mathscr{W}$, isto segue do fato que $\mathscr{W}\centerdot\Pi(\lambda) \subset \Pi(\lambda)$. Logo, pela Proposição 2.3.2, Θ_λ pode ser escrita de maneira única como $\mathbb{Z}$-combinação linear dos caracteres χ_μ, $\mu \prec \lambda$; i.e,

$$\Theta_\lambda = \sum_{\mu\prec\lambda} c_{\lambda,\mu}\chi_\mu.$$

onde a soma é sobre todos os pesos dominantes $\mu \in \Pi(\lambda)$ e $c_{\lambda,\mu} \in \mathbb{Z}$. Mas $\chi_\lambda = 1$, pois $\dim V_\lambda = 1$;

logo

$$\Theta_\lambda = \chi_\lambda + \sum_{\mu \lneq \lambda} c_{\lambda,\mu}\chi_\mu.$$

3.2 Classes de Conjuntos.

Definição 3.2.1. Seja Δ as raízes simples. Denotaremos por $\Delta' = \Phi^+ \setminus \Delta$ o conjunto de raízes positivas não simples.

Definição 3.2.2. Seja Ψ qualquer subconjunto de Δ', Definimos $\langle\Psi\rangle$ como a soma de todos os elementos de Ψ. Para cada $\Psi \subset \Delta'$, definimos $\mathscr{F}_\Psi$ a coleção de todos os subconjuntos Υ de Δ' tais que $\langle\Upsilon\rangle = \langle\Psi\rangle$.

É imediato ver que $\Psi \in \mathscr{F}_\Psi$. Além disso, podemos particionar o conjunto $\mathscr{F}_\Psi$ em $\mathscr{F}^0_\Psi$ e $\mathscr{F}^1_\Psi$ segundo cada elemento de $\mathscr{F}_\Psi$ possua uma quantidade par ou ímpar de elementos.

Definição 3.2.3. Seja $\Psi \subset \Delta'$ e consideremos $\mathscr{F}_\Psi = \mathscr{F}^0_\Psi \cup \mathscr{F}^1_\Psi$ como acima. Definimos $c_{\langle\Psi\rangle} = \left|\mathscr{F}^0_\Psi\right| - \left|\mathscr{F}^1_\Psi\right|$ que representa a diferença entre todas as possíveis maneiras de escrever $\langle\Psi\rangle$ como uma soma par de raízes de Δ' e todas as possíveis maneiras de escrever $\langle\Psi\rangle$ como uma soma ímpar de raízes de Δ', sem repetições.

Definição 3.2.4. Definimos $\mathscr{F}$ como a união de todos os $\langle\Psi\rangle$ para qualquer subconjunto não-vazio $\Psi \subset \Delta'$.

Exemplos:

Tipo A_2**:** Seja $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ e $\Phi^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2\}$; logo $\Delta' = \{\alpha_1+\alpha_2\}$ e como o único subconjunto não vazio de Δ' é ele mesmo, resulta que $\mathscr{F} = \Delta'$ com $c_{\alpha_1+\alpha_2} = -1$.

Tipo B_2**:** Seja $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ e $\Phi^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+2\alpha_2\}$ (escolhendo α_2 a raiz mais curta). Logo, $\Delta' = \{\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+2\alpha_2\}$, e portanto, $\mathscr{F} = \{\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+2\alpha_2, 2\alpha_1+3\alpha_2\}$ em que $c_{\alpha_1+\alpha_2} = -1$, $c_{\alpha_1+2\alpha_2} = -1$ e $c_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 1$ respectivamente.

Tipo G_2**:** Seja $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ e $\Phi^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2, 2\alpha_1+\alpha_2, 3\alpha_1+\alpha_2, 3\alpha_1+2\alpha_2\}$ (escolhendo α_1 a raiz mais curta). Logo, $\Delta' = \{\alpha_1+\alpha_2, 2\alpha_1+\alpha_2, 3\alpha_1+\alpha_2, 3\alpha_1+2\alpha_2\}$, e portanto,

$$\begin{aligned}\mathscr{F} \;=\; & \{\alpha_1+\alpha_2, 2\alpha_1+\alpha_2, 3\alpha_1+\alpha_2, 3\alpha_1+2\alpha_2\\ & 4\alpha_1+2\alpha_2, 4\alpha_1+3\alpha_2, 5\alpha_1+2\alpha_2, 5\alpha_1+3\alpha_2, 6\alpha_1+3\alpha_2\\ & 6\alpha_1+4\alpha_2, 7\alpha_1+4\alpha_2, 8\alpha_1+4\alpha_2, 9\alpha_1+5\alpha_2\}\end{aligned}$$

Por exemplo, tomando $\Psi = \{3\alpha_1+2\alpha_2\}$ obtemos

$$\mathscr{F}_{\{3\alpha_1+2\alpha_2\}} = \{\{3\alpha_1+2\alpha_2\}\} \cup \{\{\alpha_1+\alpha_2, 2\alpha_1+\alpha_2\}\},$$

logo, $c_{3\alpha_1+2\alpha_2} = 1-1 = 0$. Similarmente, se $\Psi = \{3\alpha_1+\alpha_2, 3\alpha_1+2\alpha_2\}$ então

$$\mathscr{F}^0_\Psi = \{\{3\alpha_1+\alpha_2, 3\alpha_1+2\alpha_2\}\}, \mathscr{F}^1_{\langle\Psi\rangle} = \{\{\alpha_1+\alpha_2, 2\alpha_1+\alpha_2, 3\alpha_1+\alpha_2\}\}$$

e portanto $c_{\langle\Psi\rangle} = 1-1 = 0$.

Tipo A_3: Seja $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ e $\Delta' = \{\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\}$. Logo,

$$\begin{aligned}\mathscr{F} &= \{\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\\ &\quad \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3, 2\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3\\ &\quad 2\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3\}\end{aligned}$$

em que $c_{\langle\Psi\rangle} = 1$ para $\langle\Psi\rangle \in \{\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3, 2\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3\}$ e $c_{\langle\Psi\rangle} = -1$ para os demais.

3.2.1 Uma função geradora para os $c_{\langle\Psi\rangle}$.

Consideremos agora o produto da forma

$$\prod_{\alpha\in\Delta'}\left(1-e^{-\alpha}\right) \in \mathbb{F}[\Lambda] \tag{3.2.1}$$

Em base às definições 3.2.2 e 3.2.3, é possível escrever a expressão 3.2.1 da forma

$$\prod_{\alpha\in\Delta'}\left(1-e^{-\alpha}\right) = 1 + \sum_{\Psi\subset\Delta'}(-1)^{|\Psi|}e^{-\langle\Psi\rangle} = 1 + \sum_{\langle\Psi\rangle\in\mathscr{F}} c_{\langle\Psi\rangle}e^{-\langle\Psi\rangle} \tag{3.2.2}$$

Isso quer dizer que a equação 3.2.1 é uma função geradora para os $c_{\langle\Psi\rangle}$. Como $\mathscr{F}$ contém todos os $\langle\Psi\rangle$, para qualquer subconjunto $\Psi\subset\Delta'$, então uma limitação superior para 3.2.2 é $2^{|\Delta'|}$.

Exemplo 3.2.1. Consideremos o tipo B_2. Nos já vimos que $\mathscr{F} = \{\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+2\alpha_2, 2\alpha_1+3\alpha_2\}$, logo

$$\prod_{\alpha\in\Delta'}\left(1-e^{-\alpha}\right) = \left(1-e^{-(\alpha_1+\alpha_2)}\right)\left(1-e^{-(\alpha_1+2\alpha_2)}\right) = 1-e^{-(\alpha_1+\alpha_2)}-e^{-(\alpha_1+2\alpha_2)}-e^{-(2\alpha_1+3\alpha_2)}$$

Exemplo 3.2.2. Consideremos o tipo G_2. Então

$$\begin{aligned}\prod_{\alpha\in\Delta'}\left(1-e^{-\alpha}\right) &= \left(1-e^{-(\alpha_1+\alpha_2)}\right)\left(1-e^{-(2\alpha_1+\alpha_2)}\right)\left(1-e^{-(3\alpha_1+\alpha_2)}\right)\left(1-e^{-(3\alpha_1+2\alpha_2)}\right)\\ &\quad 1-e^{\alpha_1+\alpha_2}-e^{2\alpha_1+\alpha_2}-e^{3\alpha_1+\alpha_2}+e^{4\alpha_1+2\alpha_2}+e^{4\alpha_1+3\alpha_2}+\\ &\quad +e^{5\alpha_1+2\alpha_2}+e^{5\alpha_1+3\alpha_2}-e^{6\alpha_1+4\alpha_2}-e^{7\alpha_1+4\alpha_2}-e^{8\alpha_1+4\alpha_2}+e^{9\alpha_1+5\alpha_2}\end{aligned}$$

Notemos que, neste exemplos, as somas $3\alpha_1+2\alpha_2$ e $6\alpha_1+3\alpha_2$ não aparecem, uma vez que eles são cancelados pelas mudanças de sinais $c_{\langle\Psi\rangle}$ tais como foram mencionados anteriormente.

3.3 Nova Fórmula de caracteres.

Estamos em condições de enunciar o resultado principal dado por [Sch12]. Vamos também mencionar algumas aplicações oferecidas pela fórmula, tais como a determinação exata do número de pesos numa representação e a obtenção de fórmulas exatas para multiplicidades. Em particular, fórmulas fechadas para calcular a dimensão do espaço de peso zero numa representação irredutível V^λ para determinadas famílias de álgebras semissimples, e que somente depende do parâmetro λ. A seguir, enunciamos o teorema:

Teorema 3.1. *(Nova Fórmula de caracteres) Seja $\lambda \in \Lambda$ qualquer peso dominante integral. Então*

$$\chi_\lambda = \Theta_\lambda - \sum_{\langle\Psi\rangle\in\mathscr{F}} c_{\langle\Psi\rangle}\tilde{\chi}_{\lambda-\langle\Psi\rangle}. \tag{3.3.1}$$

Ademais, para cada $\langle\Psi\rangle \in \mathscr{F}$ tal que $\tilde{\chi}_{\lambda-\langle\Psi\rangle} \neq 0$, temos que $\overline{\lambda - \langle\Psi\rangle} \prec \lambda$.

A demonstração do Teorema 3.1 é técnica e dividida em três etapas. A primeira etapa, consiste em provar o Teorema 3.2, a segunda etapa em provar o Teorema 3.3 e finalmente a última etapa, em provar o teorema 3.4. Para a primeira etapa, provaremos primeiro que a fórmula de Weyl também vale para o caractere $\tilde{\chi}_\lambda$. A segunda etapa precisa de conceitos de variável complexa e séries de Laurent. Enquanto na última etapa, precisamos de conceitos que demandam uma quantidade razoável de teoria, tais como cohomologia de Kostant, a qual não será desenvolvida neste trabalho, portanto o Teorema 3.4 será considerado válido, mas todos os detalhes da demonstração podem ser achados nas referências [Sch04] e [Sch12].

Teorema 3.2. *Se λ é um peso dominante integral, então vale a seguinte identidade:*

$$\sum_{\sigma\in\mathscr{W}} \sigma \centerdot \frac{e^\lambda}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta}(1-e^{-\alpha})} = \chi_\lambda + \sum_{\langle\Psi\rangle\in\mathscr{F}} c_{\langle\Psi\rangle}\tilde{\chi}_{\lambda-\langle\Psi\rangle}. \tag{3.3.2}$$

Teorema 3.3. *Se λ é um peso dominante integral, então vale a seguinte identidade:*

$$\sum_{\sigma\in\mathscr{W}} \sigma \centerdot \frac{e^\lambda}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta}(1-e^{-\alpha})} = \Theta_\lambda. \tag{3.3.3}$$

Teorema 3.4. *Se λ é um peso dominante integral então, para cada $\langle\Psi\rangle \in \mathscr{F}$ tal que $\tilde{\chi}_{\lambda-\langle\Psi\rangle} \neq 0$, temos que $\overline{\lambda - \langle\Psi\rangle} \prec \lambda$.*

Notemos que todos os coeficientes $c_{\langle\Psi\rangle}$ da equação 3.3.1 podem ser negativos. É interessante de observar que:

Teorema 3.5. *Se λ é um peso dominante integral, então*

$$\chi_\lambda = \Theta_\lambda + \sum_{\mu\lneq\lambda} d_{\lambda\mu}\Theta_\mu,$$

em que todos os $d_{\lambda\mu}$ são inteiros não negativos e $\mu \in \Pi(\lambda)\setminus\{\lambda\}$ é dominante.

Para provar o Teorema 3.5, primeiramente precisamos provar alguns resultados adicionais. Além disso, denotaremos:

† $\Pi(\lambda)^+ = \Pi(\lambda)\cap\Lambda^+$,

† Λ^{++} o conjunto dos pesos fortemente dominantes,

† $M_\lambda(c) = \{\mu \in \Pi(\lambda) : m_\lambda(\mu) = c\}$ e $\Pi(\lambda, c) = \Pi(\lambda)\setminus M_\lambda(c)$,

† Para todo $\mu \in \Pi(\lambda)^+$, em que $\mu \lneq \lambda$, $\Pi(\mu, c) = \Pi(\mu) \cap \Pi(\lambda, c)$.

Notemos que, por ser $\Pi(\lambda)$ um conjunto saturado de pesos, aplicando a proposição 2.2.7 obtemos uma contenção estrita entre os conjuntos saturados $\Pi(\mu)$ e $\Pi(\lambda)$ tal como é enunciado na seguinte proposição:

Proposição 3.3.1. *Seja* $\mu \in \Pi(\lambda)^+ \setminus \{\lambda\}$, *então* $\Pi(\mu) \subsetneq \Pi(\lambda)$.

Lema 3.3.1. *Seja* $\mu \in \Pi(\lambda)^+$, *em que* λ *é dominante integral. Se* $\langle \mu, \alpha \rangle > 0$ *para alguma* $\alpha \in \Delta$, *então* $m_\lambda(\mu - \alpha) \geq m_\lambda(\mu)$.

Demonstração. Consideremos $S_\alpha = \langle x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha \rangle$ a respectiva copia de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ em $\mathfrak{g}$. Sabemos que, se V denota a representação irredutível de dimensão finita para $\mathfrak{g}$ de peso maximal λ, a ação de $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ leva V_μ em $V_{\mu-\alpha}$. Tomemos $v \in V_\mu$ não-nulo, como $h_{-\alpha} = -h_\alpha$, podemos assumir que $\mu(h_\alpha) > 0$ (o caso $\mu(h_\alpha) = 0$ resultara trivial), pois $\Pi(\lambda)$ é $\mathscr{W}$-invariante e $\dim V_\mu = V_{\sigma(\mu)}$ para todo $\sigma \in \mathscr{W}$. Iterando o lema 2.2.1, existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $y_\alpha^r \cdot v$, caso seja não-nulo, é um vetor de peso de V com respectivo peso $\mu - r\alpha$. Assim,

$$h_\alpha \cdot y_\alpha^r \cdot v = (\langle \mu, \alpha \rangle - 2r)\, y_\alpha^r \cdot v$$

Mas usando a representação de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ mediante a S_α correspondente, com $r = \mu(h_\alpha) = \langle \mu, \alpha \rangle$, os vetores $v, y_\alpha \cdot v, y_\alpha^2 \cdot v, \cdots, y_\alpha^r \cdot v$ são não-nulos e portanto formam um conjunto linearmente independente. Logo a aplicação

$$y_\alpha : V_\mu \longrightarrow V_{\mu-\alpha}$$

é injetiva, e portanto, $\dim V_{\mu-\alpha} \geq \dim V_\mu$, ou seja, $m_\lambda(\mu - \alpha) \geq m_\lambda(\mu)$.

□

Observação 3.3.1. Outra alternativa para demostrar o lema 3.3.1 é usar o fato que, nas condições do lema, os pesos para a subrepresentação $S_\alpha \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ formam uma cadeia ininterrupta da forma $\lambda - 2r$, com $r = \langle \mu, \alpha \rangle$.

Corolário 3.3.1. Se $\mu \in \Pi(\lambda) \cap \Lambda^{++}$ e $\alpha \in \Delta$, então $m_\lambda(\mu - \alpha) \geq m_\lambda(\mu)$.

Demonstração do Teorema 3.5*:* Pelas definições do caractere e do girdle, para $\mu \in \Pi(\lambda) \setminus \{\lambda\}$ temos que $m_\lambda(\mu) \geq 1$ e

$$\begin{aligned} \chi_\lambda - \Theta_\lambda &= \sum_{\nu \in \Pi(\lambda)} m_\lambda(\nu) e^\nu - \sum_{\nu \in \Pi(\lambda)} e^\nu \\ &= \sum_{\nu \in \Pi(\lambda,1)} [m_\lambda(\nu) - 1] e^\nu \end{aligned}$$

em que $m_\lambda(\nu) - 1 > 0$ para todo $\nu \in \Pi(\lambda, 1)$. Pela proposição 3.3.1, $\Pi(\nu) \setminus \Pi(\lambda) = \emptyset$ para qualquer $\nu \in \Pi(\lambda, 1)$ dominante e, usando a proposição 2.2.7, é possível provar também que $\Pi(\nu) \setminus \Pi(\lambda, 1) = \emptyset$.

A seguir, escolhemos $\mu \in \Pi(\lambda, 1)$ tal que $d_{\lambda\mu} = \min\{m_\lambda(\nu) - 1 : \nu \in \Pi(\lambda, 1)\}$, e podemos supor que μ é dominante (pois $\Pi(\lambda)$ é saturado), então

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu\in\Pi(\lambda,1)} [m_\lambda(\nu) - 1] e^\nu - d_{\lambda\mu}\Theta_\mu &= \sum_{\nu\in\Pi(\lambda,1)} [m_\lambda(\nu) - 1] e^\nu - \sum_{\nu\in\Pi(\mu)} d_{\lambda\mu} e^\nu \\
&= \sum_{\nu\in\Pi(\mu)} \left[m_\lambda(\nu) - d_{\lambda\mu} - 1\right] e^\nu - \sum_{\nu\in\Pi(\lambda,1)\setminus\Pi(\mu)} [m_\lambda(\nu) - 1] e^\nu \\
&= (*)
\end{aligned}$$

Mas $\Pi(\lambda, 1) \setminus \Pi(\mu) = \emptyset$ pela escolha de μ, caso contrario, se existir $\nu \in \Pi(\lambda, 1) \setminus \Pi(\mu)$ (podemos supor ν dominante), então por um lado $m_\lambda(\nu) > 1$ e por outro $\nu \gneq \mu$. Logo, pela aplicação do lema 3.3.1 teríamos que $m_\lambda(\mu) \geq m_\lambda(\nu)$ e $d_{\lambda\mu} \geq m_\lambda(\nu) - 1$, contradizendo nossa escolha de μ. Portanto,

$$(*) \quad = \sum_{\nu\in\Pi(\mu)} \left[m_\lambda(\nu) - d_{\lambda\mu} - 1\right] e^\nu = \sum_{\nu\in\Pi(\mu,c)} \left[m_\lambda(\nu) - d_{\lambda\mu} - 1\right] e^\nu$$

em que $m_\lambda(\nu) - d_{\lambda\mu} - 1 > 0$ para todo $\nu \in \Pi(\mu, c)$ e $c = d_{\lambda\mu} + 1 = m_\lambda(\mu)$. Assim,

$$\chi_\lambda \quad = \quad \Theta_\lambda + d_{\lambda\mu}\Theta_\mu + \sum_{\nu\in\Pi(\mu,c)} \left[m_\lambda(\nu) - d_{\lambda\mu} - 1\right] e^\nu$$

Fazendo o mesmo raciocínio com os demais μ, considerando os respectivos $\Pi(\mu, c)$, chegara um momento que não sera possível subtrair mais nada. Obtendo no processo final a soma

$$\chi_\lambda \quad = \quad \Theta_\lambda + \sum_{\mu \lneq \lambda} d_{\lambda\mu}\Theta_\mu.$$

□

Vamos reproduzir as demonstrações dos Teoremas 3.2 e 3.3 que estão disponível nas referências citadas, adicionando alguns detalhes das mesmas. Isso será feito na seção 3.4, dando a seguir algumas consequências e aplicações.

3.3.1 Aplicações.

Corolário 3.3.2. Se λ é qualquer peso dominante integral e μ é qualquer outro peso em $\Pi(\lambda)$, então a dimensão do espaço de peso V_μ é dada por

$$m_\lambda(\mu) = 1 - \sum_{\langle\Psi\rangle\in\mathscr{F}} c_{\langle\Psi\rangle}\tilde{m}_{\lambda-\langle\Psi\rangle}(\mu). \tag{3.3.4}$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.1, sabemos que

$$\chi_\lambda = \Theta_\lambda - \sum_{\langle\Psi\rangle\in\mathscr{F}} c_{\langle\Psi\rangle}\tilde{\chi}_{\lambda-\langle\Psi\rangle}.$$

Com base nas definições de χ_λ e de Θ_λ, temos que

$$\sum_{\mu\in\Lambda} m_\lambda(\mu)\, e^\mu = \sum_{\mu\in\Lambda} e^\mu - \sum_{\langle\Psi\rangle\in\mathscr{F}} c_{\langle\Psi\rangle} \sum_{\mu\in\Lambda} \tilde{m}_{\lambda-\langle\Psi\rangle}(\mu)\, e^\mu$$

e portanto, $m_\lambda(\mu) = 1 - \sum_{\langle\Psi\rangle\in\mathscr{F}} c_{\langle\Psi\rangle}\tilde{m}_{\lambda-\langle\Psi\rangle}(\mu)$.

$\square$

O corolário acima apresenta uma recursão linear que expressa a multiplicidade $m_\lambda(\mu)$ como uma combinação linear das multiplicidades do mesmo peso μ mas de representações menores (pois $\overline{\lambda-\langle\Psi\rangle} \prec \lambda$ pelo Teorema). Portanto, resulta uma maneira útil de calcular recursivamente multiplicidades de peso μ.

Exemplo 3.3.1. Consideremos as álgebras do tipo A_2. Sabemos que $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\Delta' = \{\alpha_1+\alpha_2\}$, $\mathscr{F} = \{\{\alpha_1+\alpha_2\}\}$ e $c_{\alpha_1+\alpha_2} = 1$. Consideremos $\lambda = 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = (4,1)$ que é fortemente dominante, aplicando o corolário acima,

$$m_{(4,1)}(0,0) = 1 - c_{\alpha_1+\alpha_2}\tilde{m}_{\lambda-\alpha_1-\alpha_2}(0,0) = 1 + \tilde{m}_{(3,0)}(0,0)$$

Uma vez que $(3,0)+\rho = (4,1)$ é dominante integral, segue que $\varepsilon_{(3,0)} = 1$, como assim também $\overline{m}_{(3,0)}(0,0) = m_{(3,0)}(0,0)$. Logo

$$m_{(4,1)}(0,0) = 1 + m_{(3,0)}(0,0)$$

Por outro lado, $m_{(3,0)}(0,0) = 1 - c_{\alpha_1+\alpha_2}\tilde{m}_{(3,0)-\alpha_1-\alpha_2}(0,0) = 1$, pois $(3,0)-\alpha_1-\alpha_2+\rho = (3,0)$ não é regular. Portanto,

$$m_{(4,1)}(0,0) = 2$$

Vamos ver que, usando o corolário 3.3.8, obtemos

$$m_{(4,1)}(0,0) = 2\left(\frac{2}{3}\cos 2\pi + \frac{1}{3}\right) = 2$$

Notemos ademais que $\tilde{m}_{\lambda-\langle\Psi\rangle}(\mu) := \varepsilon_{\lambda-\langle\Psi\rangle} m_{\overline{\lambda-\langle\Psi\rangle}}(\mu)$, substituindo a expressão na fórmula 3.3.4 podemos ver que

$$m_\lambda(\mu) = 1 - \sum_{\langle\Psi\rangle\in\mathscr{F}} c_{\langle\Psi\rangle}\varepsilon_{\lambda-\langle\Psi\rangle} m_{\overline{\lambda-\langle\Psi\rangle}}(\mu).$$

Recordemos que $m_{\overline{\lambda-\langle\Psi\rangle}}(\mu)$ representa a dimensão do espaço de peso μ na representação irredutível $V^{\overline{\lambda-\langle\Psi\rangle}}$, para qualquer $\langle\Psi\rangle \in \mathscr{F}$. O seguinte fato, ainda mais interessante, permite conhecer a quantidade de pesos $\Pi(\lambda)$ na representação V^λ.

Corolário 3.3.3. Se λ é um peso dominante integral, então

$$|\Pi(\lambda)| = \dim V^\lambda + \sum_{\langle\Psi\rangle\in\mathscr{F}} c_{\langle\Psi\rangle}\varepsilon_{\lambda-\langle\Psi\rangle} \dim V^{\overline{\lambda-\langle\Psi\rangle}}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.1, sabemos que

$$\Theta_\lambda = \chi_\lambda + \sum_{\langle\Psi\rangle\in\mathscr{F}} c_{\langle\Psi\rangle}\tilde{\chi}_{\lambda-\langle\Psi\rangle}$$

em que $e^\mu(t) := e^{t(\mu,\rho)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n(\mu,\rho)^n$. Aplicando as definições para $\Theta_\lambda, \tilde{\chi}_{\lambda-\langle\Psi\rangle}$ e χ_λ obtemos

$$\sum_{\mu\in\Pi(\lambda)} e^\mu = \sum_{\mu\in\Lambda}\left[m_\lambda(\mu)e^\mu + \sum_{\langle\Psi\rangle\in\mathscr{F}} c_{\langle\Psi\rangle}\varepsilon_{\lambda-\langle\Psi\rangle}m_{\overline{\lambda-\langle\Psi\rangle}}(\mu)e^\mu\right] \qquad (\star)$$

Definindo $\zeta_\rho(e^\mu) := e^\mu(t)$, temos que $\zeta_\rho(e^\mu) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$ e tomando limite em ambos lados de $(\star)$,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\left(\sum_{\mu\in\Pi(\lambda)} e^\mu\right) &= |\Pi(\lambda)| \\
\lim_{t\to 0}\left(\sum_{\mu\in\Pi(\lambda)} m_\lambda(\mu)e^\mu\right) &= \dim V^\lambda \\
\lim_{t\to 0}\left(\sum_{\mu\in\Lambda} m_{\overline{\lambda-\langle\Psi\rangle}}(\mu)e^\mu\right) &= \dim V^{\overline{\lambda-\langle\Psi\rangle}}.
\end{aligned}$$

Pois notemos que, para qualquer $\overline{\lambda} \prec \lambda$,

$$\chi_{\overline{\lambda}} = \sum_{\mu\in\Lambda} m_{\overline{\lambda}}(\mu)e^\mu = \sum_{\mu\in\Pi(\overline{\lambda})} m_{\overline{\lambda}}(\mu)e^\mu.$$

Segue que $|\Pi(\lambda)| = \dim V^\lambda + \sum_{\langle\Psi\rangle\in\mathscr{F}} c_{\langle\Psi\rangle}\varepsilon_{\lambda-\langle\Psi\rangle}\dim V^{\overline{\lambda-\langle\Psi\rangle}}$.

□

Notemos que se $\lambda = (m_1,\ldots,m_l)$ é expresso na base de pesos fundamentais, então pela fórmula dimensional de Weyl (Cf. prop. 2.4.1) $\dim V^\lambda = \prod_{\alpha\succ 0}(\lambda+\rho,\alpha)/(\rho,\alpha)$ pode ser visto como um polinômio nas variáveis $m_1,\ldots,m_l$. Similarmente para $\dim V^{\overline{\lambda-\langle\Psi\rangle}}$, pois $\overline{\lambda-\langle\Psi\rangle}$ é dominante para qualquer seja $\langle\Psi\rangle\in\mathscr{F}$. Logo o corolário acima garante que no caso λ dominante, $|\Pi(\lambda)|$ é um polinômio nas variáveis $m_1,\ldots,m_l$.

Exemplo 3.3.2. Consideremos o exemplo 3.3.1, em que $\lambda = (4,1)$ e $\lambda-\alpha_1-\alpha_2 = (3,0)$. Pelo corolário acima, a quantidade de pesos na representação V^λ é:

$$|\Pi(\lambda)| = \dim V^{(4,1)} - \dim V^{(3,0)}.$$

Aplicando a fórmula dimensional de Weyl,

$$\begin{aligned}
\dim V^{(4,1)} &= \frac{(4+1)(1+1)(4+1+2)}{2} = 35 \\
\dim V^{(3,0)} &= \frac{(3+1)(0+1)(3+0+2)}{2} = 10
\end{aligned}$$

seguindo que $|\Pi(\lambda)| = 25$.

Podemos generalizar o exemplo anterior para qualquer peso fortemente dominante $\lambda = (p,q)$ com $p,q > 0$. Com efeito, sabemos que $\mathscr{F} = \{\alpha_1+\alpha_2\}$, $\alpha_1+\alpha_2 = (1,1)$ na base de pesos fundamentais, e $c_{\alpha_1+\alpha_2} = -1$. Portanto, aplicando a formula dimensional de Weyl:

$$\begin{aligned} |\Pi(p,q)| &= \dim V^{(p,q)} - \dim V^{\overline{(p,q)}} \\ &= \tfrac{(p+1)(q+1)(p+q+2)}{2} - \tfrac{pq(p+q)}{2} \\ &= \binom{p+q+2}{2} + pq. \end{aligned}$$

Desta forma, enunciamos o seguinte corolário:

Corolário 3.3.4. Seja $\lambda = (p,q)$ um peso fortemente dominante para uma representação irredutível V^λ de $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{F})$. Então, a quantidade de pesos que ocorrem na representação é dada por:

$$\begin{aligned} |\Pi(p,q)| &= \dim V^{(p,q)} - \dim V^{(p-1,q-1)} \\ &= \binom{p+q+2}{2} + pq. \end{aligned}$$

Similarmente, podemos encontrar um polinômio que permite obter a quantidade de pesos que ocorrem numa representação irredutível de $\mathfrak{sl}(4,\mathbb{F})$. Com efeito, seja $\lambda = (p,q,r)$ um peso fortemente dominante, $\alpha_1 = (2,-1,0)$, $\alpha_2 = (-1,2,-1)$, $\alpha_3 = (0,-1,2)$ e

$$\mathscr{F} = \{(1,1,-1),(-1,1,1),(1,0,1),(0,2,0),(0,1,2),(2,1,0),(1,2,1)\}$$

Então, é fácil ver que

$$\begin{aligned} \lambda - \mathscr{F} = \{&(p-1,q-1,r+1),(p+1,q-1,r-1),(p-1,q,r-1), \\ &(p,q-2,r),(p,q-1,r-2),(p-2,q-1,r),(p-1,q-2,r-1)\} \end{aligned}$$

e $c_{\langle\Psi\rangle} = \{-1,-1,-1,1,1,1,-1\}$ respectivamente (tal como foi visto na seção 3.2). Aplicando a fórmula dimensional de Weyl para cada representação V^λ, V^μ, $\mu \in \lambda - \mathscr{F}$ temos:

$$\begin{aligned} V^{(p,q,r)} &= \frac{(p+1)(q+1)(r+1)(p+2+q)(q+2+r)(p+q+r+3)}{12} \\ V^{(p-1,q-1,r+1)} &= \frac{pq(r+2)(p+q)(q+2+r)(p+2+q+r)}{12} \\ V^{(p+1,q-1,r-1)} &= \frac{(p+2)qr(p+2+q)(q+r)(p+2+q+r)}{12} \\ V^{(p-1,q,r-1)} &= \frac{p(q+1)r(p+1+q)(q+r+1)(p+1+q+r)}{12} \\ \vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\ V^{(p-1,q-2,r-1)} &= \frac{p(q-1)r(p-1+q)(q-1+r)(p-1+q+r)}{12} \end{aligned}$$

Portanto, aplicando o corolário 3.3.3, podemos enunciar o seguinte corolário:

Corolário 3.3.5. Seja $\lambda = (p,q,r)$ um peso fortemente dominante para uma representação irredutível V^λ de $\mathfrak{sl}(4,\mathbb{F})$. Então, a quantidade de pesos que ocorrem na representação é dada pelo polinômio:

$$
\begin{aligned}
|\Pi(\lambda)| &= 1+\frac{1}{6}p^3+\frac{11}{6}r+\frac{2}{3}q^3+\frac{1}{6}r^3+qr^2+r^2+6pqr+\frac{11}{6}p+\frac{7}{3}q \\
&\quad +4pq+3pr+4qr+p^2q+2pq^2+\frac{3}{2}p^2r+p^2+2q^2r+2q^2+\frac{3}{2}pr^2
\end{aligned}
$$

A tabela 3.3.1 mostra as quantidades de pesos que ocorrem na representação $V^{k\rho}$ para diferentes valores de $k \in \mathbb{N}$.

λ	ρ	2ρ	3ρ	4ρ	5ρ	6ρ	7ρ	8ρ	9ρ	10ρ
$\mathfrak{sl}(4,\mathbb{F})$	38	201	586	1289	2406	4033	6266	9201	12934	17561
$\mathfrak{sl}(5,\mathbb{F})$	291	3081	13531	39801	93051	187441	340131	571281	904051	136460

Tabela 3.3.1: Número de pesos na representação $V^{k\rho}$ para $\mathfrak{sl}(4,\mathbb{F})$ e $\mathfrak{sl}(5,\mathbb{F})$ respectivamente.

Para o caso geral em A_n, $(n \geq 2)$, usando os conceitos desenvolvidos nas seções 2.5 e 3.2, podemos encontrar um polinômio que permite calcular a quantidade de pesos $|\Pi(\lambda)|$ de qualquer representação irredutível de dimensão finita V^{λ} de $\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{F})$, tal como é detalhado no seguinte algoritmo:

Algorithm 3.1: Quantidade de Pesos

Data: Posto da álgebra, $n \in \mathbb{N}$
Result: Polinômio para $|\Pi(\lambda)|$
Definir $\lambda = (p_1, \ldots p_n)$ o peso máximo da representação V^{λ} (fortemente dominante);
Calcular $\Delta' := \left\{\alpha_i + \ldots + \alpha_{j-1} : 1 \leq i < j \leq n+1\right\}$;
Calcular os conjuntos $\mathscr{F}$ e $\left\{C_{\langle\Psi\rangle} : \langle\Psi\rangle \in \mathscr{F}\right\}$ usando $\prod\limits_{\alpha\in\Delta'} (1-e^{-\alpha})$;
$\rho = (1, \ldots, 1)$;
Definir $\tilde{\mathscr{F}} := \{\lambda - \langle\Psi\rangle : \langle\Psi\rangle \in \mathscr{F}\}$;
for $i := 1 \ldots \left|\tilde{\mathscr{F}}\right|$ **do**
  $DW[i] := DimWeyl(\mu_i)$;
  $DW[0] := DimWeyl(\lambda)$;
$P := DW[0]$;
for $i := 1 \ldots \left|\tilde{\mathscr{F}}\right|$ **do**
  $P = P + C_i * DW[i]$;
return $|\Pi(\lambda)| = P$

Por exemplo, vamos usar o algoritmo 3.1 para obter um polinômio $P(\lambda)$, que permite calcular a quantidade de pesos que ocorrem numa representação V^{λ} de $\mathfrak{sl}(5,\mathbb{F})$. Com efeito, seja λ um peso fortemente dominante, expresso na base de pesos fundamentais, e sejam

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= (2,-1,0,0) \\
\alpha_2 &= (-1,2,-1,0) \\
\alpha_3 &= (0,-1,2,-1) \\
\alpha_4 &= (0,0,-1,2)
\end{aligned}
$$

as raízes simples, também expressas na base de pesos fundamentais. Neste caso, temos que:

$$\begin{aligned}
\Delta' &= \{\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\} \\
&= \{[1,1,-1,0],[-1,1,1,-1],[0,-1,1,1],[1,0,1,-1],[-1,1,0,1],[1,0,0,1]\} \\
\mathscr{F} &= \{\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4, \\
&\quad \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4, 2\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3, \ldots, 3\alpha_1+4\alpha_2+4\alpha_3+4\alpha_4\}
\end{aligned}$$

com $|\mathscr{F}|=45$. Aplicando a fórmula dimensional de Weyl, para cada $\mu=(p,q,r,s)\in\{\lambda\}\cup\lambda-\mathscr{F}$, e aplicando o corolário 3.3.3, podemos enunciar o seguinte corolário:

Corolário 3.3.6. Seja $\lambda=(p,q,r,s)$ um peso fortemente dominante para uma representação irredutível V^λ de $\mathfrak{sl}(5,\mathbb{F})$. Então, a quantidade de pesos que ocorrem na representação é dada pelo polinômio:

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \left(\frac{2}{3}s+\frac{5}{12}+\frac{1}{2}r+\frac{1}{3}q)\right)p^3+\left(q^2+\left(\frac{5}{2}+4s+3r\right)q+\frac{9}{4}r^2+\frac{3}{2}s^2+\frac{5}{2}s+\frac{35}{24}\right)p^2 \\
&+\left(\frac{25}{12}+\frac{7}{3}r+\frac{17}{6}s\right)q^3+\left(\left(10s+4s^2+\frac{65}{12}\right)r+\frac{25}{12}+\frac{2}{3}s^3+\frac{5}{2}s^2+\frac{25}{6}s\right)p \\
&+\left(\frac{4}{3}q^3+(8s+5+6r)q^2+\left(9r^2+(15+24s)r+6s^2+10s+\frac{35}{6}\right)q+\frac{17}{6}r^3\right)p \\
&+\left(\frac{4}{3}s+\frac{25}{12}\right)r^3+\left(s^2+5s+\frac{85}{24}\right)r^2+\left(4r^2+\left(\frac{15}{2}+9s\right)r+\frac{25}{4}s+\frac{85}{24}+\frac{9}{4}s^2\right)q^2 \\
&+\left(\frac{7}{3}r^3+\left(6s+\frac{15}{2}\right)r^2+\left(15s+\frac{25}{3}+3s^2\right)r+\frac{15}{4}s^2+\frac{35}{12}+\frac{1}{2}s^3+\frac{65}{12}s\right)q \\
&+\left(8s+\frac{25}{4}\right)r^2p+\left(\frac{1}{3}s^3+\frac{5}{2}s^2+\frac{35}{12}+\frac{35}{6}s\right)r+1+\frac{1}{24}s^4+\frac{25}{12}s+\frac{5}{12}s^3+\frac{35}{24}s^2 \\
&+\left(\frac{15}{4}+6s\right)rp^2+\frac{1}{24}p^4+\frac{11}{24}q^4+\frac{11}{24}r^4
\end{aligned}$$

A tabela 3.3.1 mostra as quantidades de pesos que ocorrem na representação $V^{k\rho}$ para diferentes valores de $k\in\mathbb{N}$. Do mesmo modo, usando as fórmulas de Weyl para B_2 e G_2 dadas na seção 2.4.1, e aplicando o corolário 3.3.3, obtemos o seguinte resultado:

Corolário 3.3.7. Consideremos as famílias de álgebras B_2 e G_2

† Se $\lambda=(p,q)$ um peso fortemente dominante para uma representação irredutível V^λ de B_2. Então, a quantidade de pesos ocorrentes em V^λ é dada pelo polinômio

$$P(p,q)=1+2p+2q+2p^2+q^2+4pq$$

† Similarmente, se $\lambda=(p,q)$ um peso fortemente dominante para uma representação irredutível V^λ de G_2. Então, a quantidade de pesos ocorrentes em V^λ é dada pelo polinômio

$$P(p,q)=1+3p+3q+3p^2+9q^2+12pq$$

A tabela 3.3.2 mostra as quantidades de pesos que ocorrem na representação $V^{k\rho}$, nas álgebras do tipo B_2 e G_2, respectivamente, para diferentes valores de $k \in \mathbb{N}$.

λ	ρ	2ρ	3ρ	4ρ	5ρ	6ρ	7ρ	8ρ	9ρ	10ρ
B_2	12	37	76	129	196	277	372	481	604	741
G_2	31	109	235	409	631	901	1219	1585	1999	2461

Tabela 3.3.2: Número de pesos na representação $V^{k\rho}$ para B_2 e G_2 respectivamente.

3.3.2 Fórmulas exatas para multiplicidades.

Pelo Teorema 3.1, é possível obter as fórmulas de caracteres para as primeiras álgebras de Lie semissimples de posto pequeno. Na tabela 3.3.3 estão listadas tais fórmulas

Álgebra	Fórmula de Caracteres
A_2	$\chi_\lambda = \Theta_\lambda + \tilde{\chi}_{\lambda-\rho}$
B_2	$\chi_\lambda = \Theta_\lambda + \tilde{\chi}_{\lambda-\alpha_1-\alpha_2} + \tilde{\chi}_{\lambda-\alpha_1-2\alpha_2} - \tilde{\chi}_{\lambda-2\alpha_1-3\alpha_2}$
G_2	$\chi_\lambda = \Theta_\lambda + \tilde{\chi}_{\lambda-\alpha_1-\alpha_2} + \tilde{\chi}_{\lambda-2\alpha_1-\alpha_2} + \tilde{\chi}_{\lambda-3\alpha_1-\alpha_2} - \tilde{\chi}_{\lambda-4\alpha_1-2\alpha_2} - \tilde{\chi}_{\lambda-4\alpha_1-3\alpha_2} - \tilde{\chi}_{\lambda-5\alpha_1-2\alpha_2} - \tilde{\chi}_{\lambda-5\alpha_1-3\alpha_2} + \tilde{\chi}_{\lambda-6\alpha_1-4\alpha_2} + \tilde{\chi}_{\lambda-7\alpha_1-4\alpha_2} + \tilde{\chi}_{\lambda-8\alpha_1-4\alpha_2} - \tilde{\chi}_{\lambda-9\alpha_1-5\alpha_2}$
A_3	$\chi_\lambda = \Theta_\lambda + \tilde{\chi}_{\lambda-\alpha_1-\alpha_2} + \tilde{\chi}_{\lambda-\alpha_2-\alpha_3} + \tilde{\chi}_{\lambda-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} - \tilde{\chi}_{\lambda-\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3} - \tilde{\chi}_{\lambda-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3} - \tilde{\chi}_{\lambda-2\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3} + \tilde{\chi}_{\lambda-2\alpha_1-3\alpha_2-2\alpha_3}$

Tabela 3.3.3: Fórmulas de Caracteres para álgebras de Lie semissimples de posto < 4

As vezes, é interessante conhecer a dimensão do espaço de peso zero de uma representação irredutível de peso máximo λ. Isto é devido ao seguinte fato:

Proposição 3.3.2. *O espaço de peso zero de uma representação de $\mathfrak{g}$ é também uma representação para o grupo de Weyl $\mathscr{W}$ de $\mathfrak{g}$. A dimensão de tal representação é justamente a multiplicidade do espaço de peso zero V_0^λ da representação V^λ.*

3.3.2.1 Espaço de Peso zero para representações de álgebras do tipo A_2.

Quando λ é um peso dominante integral, a tabela 3.3.3 mostra que $\chi_\lambda = \Theta_\lambda + \tilde{\chi}_{\lambda-\rho}$, em que $\tilde{\chi}_{\lambda-\rho} = \varepsilon_{\lambda-\rho}\chi_{\overline{\lambda-\rho}} \neq 0$ se, e somente se, $(\lambda-\rho)+\rho = \lambda$ é regular. Logo, λ fortemente dominante.

Se expressamos $\lambda = (p,q)$ na base de pesos fundamentais, então $p,q > 0$. Sobre estas condições, necessariamente $\varepsilon_{\lambda-\rho} = 1$, pois $w_\lambda = 1$. Segue que $\overline{\lambda-\rho} = \lambda-\rho$ e que

$$\chi_\lambda = \Theta_\lambda + \chi_{\lambda-\rho}.$$

De maneira similar, suponhamos que $\lambda-\rho = (p-1,q-1)$ é fortemente dominante, então

$$\chi_{\lambda-\rho} = \Theta_{\lambda-\rho} + \chi_{\lambda-2\rho}$$

e por indução concluímos que:

Corolário 3.3.8. Para as álgebras de Lie do tipo A_2, se λ é um peso dominante integral, então

$$\chi_\lambda = \sum_{k\geq 0} \Theta_{\lambda - k\rho},$$

em que a soma é sobre todos os inteiros não negativos tais que, com exceção de $k = 0$, $\lambda - k\rho$ é fortemente dominante. Se $\lambda = (p,q)$, então a condição é simplesmente $k = 0,1,\ldots,\min(p,q)$.

Seja $\tilde{m}_\lambda(0) = a_\lambda$ e consideremos novamente a fórmula de recorrência $\chi_\lambda = \Theta_\lambda + \tilde{\chi}_{\lambda-\rho}$. Para $\alpha_1 = (2,-1)$ e $\alpha_2 = (-1,2)$ expressas na base de pesos fundamentais, então $\rho = \alpha_1 + \alpha_2$ e assim a fórmula anterior é escrita como $\chi_\lambda = \Theta_\lambda + \tilde{\chi}_{\lambda-\alpha_1-\alpha_2}$.

Pela definição do girdle, obtemos a seguinte fórmula de recorrência para as multiplicidades do espaço de peso zero:

$$a_{p,q} = \delta_{p,q} + a_{p-1,q-1} \quad p,q \geq 1 \tag{3.3.5}$$

em que $\delta_{p,q} = 1$ quando $(0,0) \in \Pi(p,q)$ ou $\delta_{p,q} = 0$ caso contrário e $\lambda = (p,q)$. Sabemos que o peso zero pertence à representação $V^{(p,q)}$ se, e somente se, $\lambda \in \Lambda_r$; i.e, $\lambda = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ com $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Logo

$$\begin{cases} p = 2k_1 - k_2 \\ q = -k_1 + 2k_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{1}{3}(2p+q) \\ k_2 = \frac{1}{3}(p+2q) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2p+q \equiv 0 \mod 3 \\ p+2q \equiv 0 \mod 3 \end{cases}$$

Ou seja, $\lambda \in \Lambda_r \Leftrightarrow p \equiv q \mod 3 \Leftrightarrow p+k \equiv q+k \mod 3, \forall k \in \mathbb{Z}$. Portanto, $\delta_{p,q}$ satisfaz

$$\delta_{p,q} = \delta_{p-1,q-1};\ \delta_{3p,0} = 1 = \delta_{0,3q},\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\delta_{0,0} = 1;\ \delta_{0,1} = \delta_{0,2} = \delta_{1,0} = \delta_{2,0} = 0$$

Vamos ver qual é a função geradora para $\delta_{p,q}$. Seja $F(x,y) := \sum_{p,q\geq 0} \delta_{p,q} x^p y^q$, então

$$\begin{aligned} \sum_{p,q\geq 0} \delta_{p+1,q+1} x^p y^q &= \sum_{p,q\geq 0} \delta_{p,q} x^p y^q \\ \frac{1}{xy} \sum_{p,q\geq 0} \delta_{p+1,q+1} x^{p+1} y^{q+1} &= F(x,y) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\sum_{p,q\geq 0} \delta_{p+1,q+1} x^{p+1} y^{q+1} &= \sum_{p,q\geq 0} \delta_{p+1,q} x^{p+1} y^{q} - \sum_{p\geq 0} \delta_{p+1,0} x^{p+1} y^{0} \\
&= \sum_{p,q\geq 0} \delta_{p,q} x^{p} y^{q} - \sum_{q\geq 0} \delta_{0,q} x^{0} y^{q} - \sum_{p\geq 0} \delta_{p,0} x^{p} y^{0} + \delta_{0,0} \\
&= F(x,y) - \sum_{q\geq 0} \delta_{0,q} y^{q} - \sum_{p\geq 0} \delta_{p,0} x^{p} + 1 \\
&= F(x,y) - \sum_{q\geq 0} y^{3q} - \sum_{p\geq 0} x^{3p} + 1 \\
&= F(x,y) - \frac{1}{1-y^3} - \frac{1}{1-x^3} + 1
\end{aligned}$$

mostrando que $xyF(x,y) = F(x,y) - \frac{1}{1-y^3} - \frac{1}{1-x^3} + 1$. Ou seja, a função geradora de $\delta_{p,q}$ é

$$F(x,y) = \frac{x^2y^2 + xy + 1}{(1-y^3)(1-x^3)}.$$

A tabela 3.3.4 mostra a forma de $\delta_{p,q}$ vista como uma matriz infinita com linhas enumeradas por p e colunas enumeradas por q. Portanto,

$$\delta_{p,q} = \frac{2}{3}\cos\frac{2\pi}{3}(p-q) + \frac{1}{3}.$$

p,q	0	1	2	3	4	5	6	$\dots$
0	1	0	0	1	0	0	1	$\dots$
1	0	1	0	0	1	0	0	$\dots$
2	0	0	1	0	0	1	0	$\dots$
3	1	0	0	1	0	0	1	$\dots$
4	0	1	0	0	1	0	0	$\dots$
5	0	0	1	0	0	1	0	$\dots$
6	0	0	0	1	0	0	1	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Tabela 3.3.4: valores de $\delta_{p,q}$

Como $a_{p+1,q+1} = \delta_{p,q} + a_{p,q}$ para $p,q \geq 0$, chamando $G(x,y) := \sum_{p,q\geq 0} a_{p,q} x^p y^q$ e por argumentos similares aos feitos para $\delta_{p,q}$ temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{p,q\geq 0} a_{p+1,q+1} x^p y^q &= F(x,y) + G(x,y) \\
\Rightarrow \frac{1}{xy}\left[G(x,y) - \sum_{p\geq 0} a_{p,0} x^p - \sum_{q\geq 0} a_{0,q} y^q + a_{0,0}\right] &= F(x,y) + G(x,y) \qquad (3.3.6)
\end{aligned}$$

Por outro lado, $\delta_{0,3q} = 1 \Rightarrow a_{1,3q+1} = 1 + a_{0,3q}, \forall q \geq 0$ é $\delta_{3p,0} = 1 \Rightarrow a_{3p+1,1} = 1 + a_{3p,0}, \forall p \geq 0$. Notemos também que $\delta_{0,0} = a_{0,0} = 1$ e $a_{1,0} = a_{2,0} = a_{0,1} = a_{0,2} = 0$, pois $0 \notin \Pi(\lambda)$ em tais casos.

Ademais, os pesos dominantes da forma $\lambda = (p,0)$ e $\lambda = (0,q)$ correspondem a $\varepsilon_{\lambda-\rho} = 0$. Logo,

$$a_{p,0} = \delta_{p,0},\ a_{0,q} = \delta_{0,q}\ \forall\, p,q \geq 0.$$

Em particular, $a_{3p,0} = 1 = a_{0,3q}\ \forall\, p,q \geq 0$ com os demais casos iguais a zero. Seguindo em 3.3.6, é possível ver que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{xy}\left[G(x,y) - \sum_{p\geq 0} x^{3p} - \sum_{q\geq 0} y^{3q} + 1\right] &= F(x,y) + G(x,y)\\
\frac{1}{xy}\left[G(x,y) - \frac{1}{1-x^3} - \frac{1}{1-y^3} + 1\right] &= F(x,y) + G(x,y)\\
\Longrightarrow G(x,y) &= \frac{1 + x^2y^2 + xy}{(1-xy)(1-y^3)(1-x^3)}.
\end{aligned}$$

Notemos que, $a_{1,3q+1} = 2 = a_{3p+1,1}, \forall\, p,q \geq 0$ e $a_{p,q} \neq 0 \Leftrightarrow \delta_{p,q} \neq 0$ por definição. A tabela 3.3.5 corresponde a diferentes valores de $a_{p,q}$ respectivamente. Portanto,

$$a_{p,q} = [\min(p,q)+1]\,\delta_{p,q} = [\min(p,q)+1]\left[\frac{2}{3}\cos\frac{2\pi}{3}(p-q) + \frac{1}{3}\right].$$

p,q	0	1	2	3	4	5	6	$\ldots$
0	1	0	0	1	0	0	1	$\ldots$
1	0	2	0	0	2	0	0	$\ldots$
2	0	0	3	0	0	3	0	$\ldots$
3	1	0	0	4	0	0	4	$\ldots$
4	0	2	0	0	5	0	0	$\ldots$
5	0	0	3	0	0	6	0	$\ldots$
6	0	0	0	4	0	0	7	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Tabela 3.3.5: valores de $a_{p,q}$

Enunciamos assim o seguinte corolário:

Corolário 3.3.9. Se $\lambda = (p,q)$ é um peso dominante expresso na base de pesos fundamentais, então

$$m_{(p,q)}(0,0) = [\min(p,q)+1]\,\delta_{p,q} = [\min(p,q)+1]\left[\frac{2}{3}\cos\frac{2\pi}{3}(p-q) + \frac{1}{3}\right]. \tag{3.3.7}$$

3.3.2.2 Espaço de Peso zero para representações de álgebras do tipo B_2.

Consideremos agora $\lambda = (p,q)$ e $\alpha_1 = (2,-2)$, $\alpha_2 = (-1,2)$, $\rho = (1,1)$. Pela tabela 3.3.3 sabemos que

$$\chi_{(p,q)} = \Theta_{(p,q)} + \tilde{\chi}_{(p-1,q)} + \tilde{\chi}_{(p,q-2)} - \tilde{\chi}_{(p-1,q-2)}. \tag{3.3.8}$$

Chamando $a_{p,q} = m_{(p,q)}(0,0)$ e tomando $p \geq 1, q \geq 2$ temos que $(p-1,q)+\rho$, $(p,q-2)+\rho$, $(p-1,q-2)+\rho$ são fortemente dominantes e portanto $\varepsilon_{(p-1,q)} = \varepsilon_{(p,q-2)} = \varepsilon_{(p-1,q-2)} = 1$. Obtemos assim a seguinte recorrência nas multiplicidades:

$$a_{p,q} = \delta_{p,q} + a_{p-1,q} + a_{p,q-2} - a_{p-1,q-2},\ \forall\, p \geq 1, q \geq 2$$

em que $\delta_{p,q} = 1$ no caso que $0 \in \Pi(\lambda)$ e $\delta_{p,q} = 0$ qualquer outro caso. Como $0 \in \Pi(\lambda)$ se e, somente se, $(p,q) = k_1(2,-2) + k_2(-1,2)$, segue-se que

$$0 \in \Pi(\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} p+q \equiv 0 \mod 2 \\ p+2q \equiv 0 \mod 2 \end{cases} \Leftrightarrow q \equiv 0 \mod 2 \Leftrightarrow q := 2q$$

Logo $0 \in \Pi(\lambda) \Leftrightarrow \lambda = (p, 2q), \forall\, p, q \geq 0$. Deste modo, temos as seguinte recorrências na função $\delta_{p,q}$:

$$\delta_{p,q+2} = \delta_{p,q},\ \forall\, p,q \geq 0$$

$$\delta_{p,0} = 1;\ \delta_{p,1} = 0,\ \forall\, p \geq 0$$

p,q	0	1	2	3	4	5	6	$\ldots$
0	1	0	1	0	1	0	1	$\ldots$
1	1	0	1	0	1	0	1	$\ldots$
2	1	0	1	0	1	0	1	$\ldots$
3	1	0	1	0	1	0	1	$\ldots$
4	1	0	1	0	1	0	1	$\ldots$
5	1	0	1	0	1	0	1	$\ldots$
6	1	0	1	0	1	0	1	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Tabela 3.3.6: valores de $\delta_{p,q}$

Vejamos agora qual é a função geradora para $\delta_{p,q}$. Seja $F(x,y) := \sum\limits_{p,q\geq 0} \delta_{p,q} x^p y^q$, logo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y^2}\left(\sum_{p,q\geq 0} \delta_{p,q+2} x^p y^{q+2}\right) &= F(x,y) \\
\Longrightarrow y^2 F(x,y) &= \sum_{p,q\geq 0} \delta_{p,q+2} x^p y^{q+2} \\
&= \sum_{p,q\geq 0} \delta_{p,q} x^p y^q - \sum_{p\geq 0} \delta_{p,1} x^p y - \sum_{p\geq 0} \delta_{p,0} x^p \\
&= \sum_{p,q\geq 0} \delta_{p,2q} x^p y^{2q} - \sum_{p\geq 0} x^p \\
&= \frac{1}{(1-x)(1-y^2)} - \frac{1}{1-x}
\end{aligned}$$

Portanto, $F = F(x,y) = \frac{1}{(1-x)(1-y^2)}$. Como $a_{p+1,q+2} = \delta_{p,q} + a_{p,q+2} + a_{p+1,q} - a_{p,q}$, se definimos $G = G(x,y) := \sum\limits_{p,q\geq 0} a_{p,q} x^p y^q$ podemos observar que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{xy^2}\sum_{p,q\geq 0} a_{p+1,q+2}x^{p+1}y^{q+2} &= F+\frac{1}{y^2}\sum_{p,q\geq 0} a_{p,q+2}x^p y^{q+2}+\frac{1}{x}\sum_{p,q\geq 0} a_{p+1,q}x^{p+1}y^q - G \\
\frac{1}{xy^2}\left[G-E_1-E_2+a_{0,0}\right] &= F+\frac{1}{y^2}\left[G-E_1\right]+\frac{1}{x}\left[G-E_2\right]-G
\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

em que E_1 e E_2 dependem de x e y respectivamente. Para obter as expressões correspondentes a E_1 e E_2, estudamos os casos particulares $\lambda=(p,0)$ e $\lambda=(0,q)$.

† Para $\lambda=(p,0)$,

$$\begin{aligned}
\chi_{(p,0)} &= \Theta_{(p,0)}+\tilde{\chi}_{(p-1,0)}+\tilde{\chi}_{(p,-2)}+\tilde{\chi}_{(p-1,-2)} \\
& \Theta_{(p,0)}+\varepsilon_{(p-1,0)}\chi_{\overline{(p-1,0)}}+\varepsilon_{(p,-2)}\chi_{\overline{(p,-2)}}+\varepsilon_{(p-1,-2)}\chi_{\overline{(p-1,-2)}}
\end{aligned}$$

Ademais, $(p-1,0)+\rho$, $(p,-2)+\rho$ e $(p-1,-2)+\rho$ são todos regulares se $p\geq 1$ e os respectivos ε_μ são diferentes de zero. Como as segundas componentes de $(p,-2)+\rho$ e $(p-1,-2)+\rho$ são negativas, segue que eles são conjugados a algum outro peso de Λ via σ_2. Com efeito, é fácil de ver que $(p,-2)+\rho \xmapsto{\sigma_2} (p-1,0)+\rho$ e $(p-1,-2)+\rho \xmapsto{\sigma_2} (p-2,0)+\rho$ com ambas conjugações dominantes quando $p>1$. Deste modo:

$$\begin{aligned}
p>1:\ \chi_{(p,0)} &= \Theta_{(p,0)}+\chi_{(p-1,0)}-\chi_{(p-1,0)}+\chi_{(p-2,0)} \\
&= \Theta_{(p,0)}+\chi_{(p-2,0)}
\end{aligned}$$

então $a_{p,0}=1+a_{p-2,0}$ para $p>1$ e $a_{0,0}=a_{1,0}=1$. Equivalentemente $a_{p+2,0}=1+a_{p,0}$ para $p\geq 0$ e $a_{0,0}=a_{1,0}=1$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2}\sum_{p\geq 0} a_{p+2,0}x^{p+2} &= \sum_{p\geq 0} x^p+\sum_{p\geq 0} a_{p,0}x^p \\
\Longrightarrow \frac{1}{x^2}\left[\sum_{p\geq 0} a_{p,0}x^p-a_{1,0}x-a_{0,0}\right] &= \sum_{p\geq 0} x^p+\sum_{p\geq 0} a_{p,0}x^p \\
\Longrightarrow \frac{1}{x^2}\left[E_1(x)-a_{1,0}x-a_{0,0}\right] &= \frac{1}{1-x}+E_1(x) \\
\Longrightarrow E_1(x) &= \frac{1}{(1+x)(1-x)^2}
\end{aligned}$$

† Similarmente, para $\lambda=(0,q)$, temos $a_{0,q+2}=\delta_{0,q}+a_{0,q}$ e

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y^2}\sum_{q\geq 0} a_{0,q+2}y^{q+2} &= \sum_{q\geq 0}\delta_{0,q}y^q+\sum_{q\geq 0}a_{0,q}y^q\\
\Longrightarrow \frac{1}{y^2}\left[\sum_{q\geq 0}a_{0,q}y^q-a_{0,1}y-a_{0,0}\right] &= \frac{1}{1-y^2}+E_2(y)\\
\frac{1}{y^2}\left[E_2(y)-1\right] &= \frac{1}{1-y^2}+E_2(y)\\
\Longrightarrow \left(1-y^2\right)E_2(y) &= \frac{y^2}{1-y^2}+1=\frac{1}{1-y^2}\\
\Longrightarrow E_2(y) &= \frac{1}{\left(1-y^2\right)^2}.
\end{aligned}$$

Continuando em 3.3.9, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{xy^2}\left[G-\frac{1}{(1+x)(1-x)^2}-\frac{1}{\left(1-y^2\right)^2}+1\right] &= \frac{1}{(1-x)\left(1-y^2\right)}+\frac{1}{y^2}\left[G-\frac{1}{(1+x)(1-x)^2}\right]\\
&\quad +\frac{1}{x}\left[G-\frac{1}{\left(1-y^2\right)^2}\right]-G\\
\Longrightarrow G(x,y) &= \frac{xy^2+1}{(1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)^2}.
\end{aligned}$$

Tal expressão admite uma decomposição da forma $G(x,y)=\frac{1}{4(1+x)(1-y^2)}+\frac{1}{4(1-x)(1-y^2)}+\frac{1+y^2}{2(1-x)^2(1-y^2)^2}$ (Cf. [Sch04]). Os primeiros dois termos correspondem ao produto de duas séries geométricas. No entanto, o último termo respeita a forma

$$\frac{1}{(1-z)^k}=\sum_{n\geq 0}\binom{n+k-1}{k-1}z^n,\ \forall k\in\mathbb{N}.$$

Então, $G(x,y)=\sum_{p,q\geq 0}\frac{(-1)^p+1}{4}x^py^{2q}+\sum_{p,q\geq 0}\frac{(p+1)(q+1)}{2}\left(1+y^2\right)x^py^{2q}$ e, como

$$\begin{aligned}
\sum_{p,q\geq 0}\frac{(p+1)(q+1)}{2}\left(1+y^2\right)x^py^{2q} &= \sum_{p,q\geq 0}\frac{(p+1)(q+1)}{2}x^py^{2q}+\sum_{p,q\geq 0}\frac{(p+1)(q+1)}{2}x^py^{2(q+1)}\\
&= \sum_{p,q\geq 0}\frac{(p+1)(q+1)}{2}x^py^{2q}+\sum_{p,q\geq 0}\frac{(p+1)q}{2}x^py^{2q}\\
&= \sum_{p,q\geq 0}\left[\frac{(p+1)(2q+1)}{2}\right]x^py^{2q}.
\end{aligned}$$

Finalmente, $G(x,y)=\sum_{p,q\geq 0}\left[\frac{(-1)^p+1}{4}+\frac{(p+1)(2q+1)}{2}\right]x^py^{2q}$. Assim,

$$m_{(p,2q)}(0,0)=\left[\frac{(-1)^p+1}{4}+\frac{(p+1)(2q+1)}{2}\right].$$

p,q	0	1	2	3	4	5	6	$\dots$
0	1	0	2	0	3	0	4	$\dots$
1	1	0	3	0	5	0	7	$\dots$
2	2	0	5	0	8	0	11	$\dots$
3	2	0	5	0	10	0	14	$\dots$
4	3	0	8	0	13	0	18	$\dots$
5	3	0	9	0	15	0	21	$\dots$
6	4	0	10	0	18	0	25	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Tabela 3.3.7: valores de $a_{p,q}$

Considerando os casos quando q é ímpar, podemos dar o seguinte corolário:

Corolário 3.3.10. Seja $\lambda = (p,q)$ um peso dominante integral. Então

$$m_{(p,q)}(0,0) = \left[\frac{(-1)^p+1}{4} + \frac{(p+1)(q+1)}{2}\right]\frac{1+(-1)^q}{2}.$$

3.4 Demonstração dos Teoremas 3.2 e 3.3.

Consideremos a função $\omega : \Lambda \longrightarrow \mathbb{F}[\Lambda]$ dada por

$$\omega(\mu) = \sum_{\sigma \in \mathscr{W}} (-1)^{l(\sigma)} e^{\sigma(\mu)}$$

Vamos denotar $a_\mu = \omega(\mu)$ e recordemos que, pela Proposição 2.4.3, $a_\rho = \prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - e^{-\alpha})$. A função a_ρ é conhecida como denominador de Weyl, ou função de Weyl. Contudo, provaremos que a fórmula de Weyl é válida para o caractere $\tilde{\chi}_\lambda$, apresentando assim o seguinte Teorema:

Teorema 3.6. *Se λ é um peso integral qualquer, então*

$$a_\rho \tilde{\chi}_\lambda = a_{\lambda+\rho}. \tag{3.4.1}$$

Demonstração. Primeiro, observemos que a_μ é $\mathscr{W}$-alternado; i.e, $\sigma \centerdot a_\mu = a_{\sigma(\mu)} = (-1)^{l(\sigma)} a_\mu$. Isto segue pelo fato que reflexões simples σ_i em $\mathscr{W}$ levam α_i em $-\alpha_i$ e permuta todas as demais raízes positivas $\Phi^+ \setminus \{\alpha\}$ (tal como foi provado na proposição 2.4.2).

Se λ é um peso dominante, obtemos a fórmula de Weyl usual e não há nada que provar. Suponhamos então que λ não é dominante e $\lambda + \rho$ não seja regular, existe assim $\alpha \in \Delta$ tal que $\sigma_\alpha(\lambda + \rho) = \lambda + \rho$. Logo,

$$
\begin{aligned}
a_{\sigma_\alpha(\lambda+\rho)} = a_{\lambda+\rho} &= \sum_{\sigma\in\mathscr{W}} (-1)^{l(\sigma)} e^{\sigma\sigma_\alpha(\lambda+\rho)} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathscr{W}} (-1)^{l(\sigma\sigma_\alpha)} e^{\sigma(\lambda+\rho)} \\
&= (-1)^{l(\sigma_\alpha)} \sum_{\sigma\in\mathscr{W}} (-1)^{l(\sigma)} e^{\sigma(\lambda+\rho)} \\
&= -a_{\lambda+\rho},
\end{aligned}
$$

pois recordemos que $\det(\sigma) = (-1)^{l(\sigma)} \Longrightarrow (-1)^{l(\sigma\sigma_\alpha)} = \det(\sigma)\det(\sigma_\alpha) = -(-1)^{l(\sigma)}$, mostrando assim que $a_{\lambda+\rho} = 0$. Mas o lado esquerdo de 3.4.1 é zero por definição. Finalmente, se $\lambda+\rho$ é regular, então $\overline{\lambda} = w_\lambda(\lambda+\rho)-\rho$ é dominante integral e

$$
\begin{aligned}
a_{\lambda+\rho} &= \sum_{\sigma\in\mathscr{W}} (-1)^{l(\sigma)} e^{\sigma(\lambda+\rho)} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathscr{W}} (-1)^{l(\sigma w_\lambda)} e^{\sigma w_\lambda(\lambda+\rho)} \\
&= (-1)^{l(w_\lambda)} \sum_{\sigma\in\mathscr{W}} (-1)^{l(\sigma)} e^{\sigma(\overline{\lambda}+\rho)} \\
&= (-1)^{l(w_\lambda)} a_{\overline{\lambda}+\rho}.
\end{aligned}
$$

Pela fórmula de Weyl usual, temos que

$$
\begin{aligned}
a_{\lambda+\rho} = (-1)^{l(w_\lambda)} a_{\overline{\lambda}+\rho} &= a_\rho (-1)^{l(w_\lambda)} \chi_{\overline{\lambda}} \\
&= a_\rho \tilde{\chi}_\lambda.
\end{aligned}
$$

□

Tal como na observação 2.3.1, é possível ver cada expressão formal $e^{-\alpha_i}$ como um elemento no anel de frações $\mathbb{F}(e^{-\alpha_1}, e^{-\alpha_2}, \ldots, e^{-\alpha_l})$ contido no anel de séries formais de Laurent $\mathbb{F}\langle\langle e^{-\alpha_1}, e^{-\alpha_2}, \ldots, e^{-\alpha_l}\rangle\rangle$, e como qualquer raiz $\alpha \in \Lambda_r$ é escrita como combinação inteira das raízes $\{\alpha_i\}_{i=1}^{l}$, resulta que $e^{-\alpha} \in \mathbb{F}(e^{-\alpha_1}, e^{-\alpha_2}, \ldots, e^{-\alpha_l})$.

Usando a correspondência $e^{-\alpha_i} \cong x_i$, se $\alpha = \sum_{i=1}^{l} k_i\alpha_i$ então $e^{-\alpha} \cong \prod_{i=1}^{l} x_i^{k_i}$ que é um polinômio de Laurent nas indeterminadas x_i. Além disso, adotaremos as seguinte convenções de expansão:

$$
\left(1-e^{-\alpha}\right) = \begin{cases} 1+e^{-\alpha}+e^{-2\alpha}+\ldots, & \alpha \succ 0 \\ -e^{-\alpha}-e^{-2\alpha}-\ldots, & \alpha \prec 0 \end{cases}
$$

Demonstração do Teorema 3.2: Com as considerações feitas, temos

$$
\begin{aligned}
\underbrace{a_\rho\left(\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}\sigma\centerdot\frac{e^\lambda}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta}(1-e^{-\alpha})}\right)}_{(\star)} &= \sum_{\sigma\in\mathscr{W}}(-1)^{l(\sigma)}\sigma\centerdot\left(a_\rho\frac{e^\lambda}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta}(1-e^{-\alpha})}\right)\\
&= \sum_{\sigma\in\mathscr{W}}(-1)^{l(\sigma)}\sigma\centerdot\left(e^{\lambda+\rho}\prod_{\alpha\in\Delta'}\left(1-e^{-\alpha}\right)\right)\\
&= \sum_{\sigma\in\mathscr{W}}(-1)^{l(\sigma)}\sigma\centerdot\left(e^{\lambda+\rho}\left(1+\sum_{\langle\Psi\rangle\in\mathscr{F}}c_{\langle\Psi\rangle}e^{-\langle\Psi\rangle}\right)\right)\\
&= a_{\lambda+\rho}+\sum_{\langle\Psi\rangle\in\mathscr{F}}c_{\langle\Psi\rangle}\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}(-1)^{l(\sigma)}e^{\sigma(\lambda+\rho-\langle\Psi\rangle)}\\
&= a_{\lambda+\rho}+\sum_{\langle\Psi\rangle\in\mathscr{F}}c_{\langle\Psi\rangle}a_{\lambda-\langle\Psi\rangle+\rho}\\
&= a_\rho\chi_\lambda+a_\rho\sum_{\langle\Psi\rangle\in\mathscr{F}}c_{\langle\Psi\rangle}\tilde{\chi}_{\lambda-\langle\Psi\rangle}\\
&= \underbrace{a_\rho\left(\chi_\lambda+\sum_{\langle\Psi\rangle\in\mathscr{F}}c_{\langle\Psi\rangle}\tilde{\chi}_{\lambda-\langle\Psi\rangle}\right)}_{(\star\star)}.
\end{aligned}
$$

Comparando $(\star)$ e $(\star\star)$ segue o resultado.

□

Definição 3.4.1. Seja $\sigma\in\mathscr{W}$, definimos $\Phi_\sigma=\sigma^{-1}(\Phi^-)\cap\Phi^+$ como o conjunto de todas as raízes positivas que são levadas em raízes negativas pela ação de σ. Similarmente, definimos $\Delta_\sigma=\Phi_\sigma\cap\Delta$ o conjunto de todas as raízes simples que são levadas em raízes negativas e $\Delta'_\sigma=\Delta\setminus\Delta_\sigma$ seu complementar. Denotaremos por $K_{\sigma\lambda}$ o cone semiaberto gerado pelos vetores linearmente independentes $\sigma(\alpha),(\alpha\in\Delta_\sigma)$ e $-\sigma(\alpha),(\alpha\in\Delta'_\sigma)$ com vértice em $\sigma(\lambda)$, formalmente:

$$
K_{\sigma\lambda} = \left\{\sigma(\lambda)+\sum_{\alpha\in\Delta_\sigma}k_\alpha\sigma(\alpha)-\sum_{\alpha\in\Delta'_\sigma}k_\alpha\sigma(\alpha)\right\}, \tag{3.4.2}
$$

em que $k_\alpha\in\mathbb{N}$ quando $\alpha\in\Delta_\sigma$ e $k_\alpha\in\mathbb{Z}^+$ quando $\alpha\in\Delta'_\sigma$.

Exemplo 3.4.1. Consideremos o caso $\sigma=1$, $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ e λ dominante integral. Então $\Delta_\sigma=\emptyset$ e $\Delta'_\sigma=\Delta=\{\alpha_1,\alpha_2\}$ e $K_\lambda=\{\lambda-k_1\alpha_1-k_2\alpha_2: k_1,k_2\in\mathbb{Z}^+\}$. A Figura 3.4.1 mostra uma interpretação geométrica de K_λ para este exemplo.

Lema 3.4.1. *Seja λ um peso dominante integral. Se $\mu\in\Pi(\lambda)\cap K_{\sigma\lambda}$ então $\sigma=1$.*

Demonstração. Sabemos que $\mu\in\Pi(\lambda)$ se e somente se $\sigma(\mu)\prec\lambda$ para todo $\sigma\in\mathscr{W}$. Com efeito, se $\mu\in\Pi(\lambda)$ então $\sigma(\mu)\in\Pi(\lambda)$, pois $\Pi(\lambda)$ é $\mathscr{W}$-invariante e, ademais, $\sigma(\mu)\prec\lambda$ pela definição de $\Pi(\lambda)$. Reciprocamente, suponhamos que $\sigma(\mu)\prec\lambda$ para todo $\sigma\in\mathscr{W}$, pela proposição 2.2.7 segue a afirmação. Equivalentemente, isso implica que

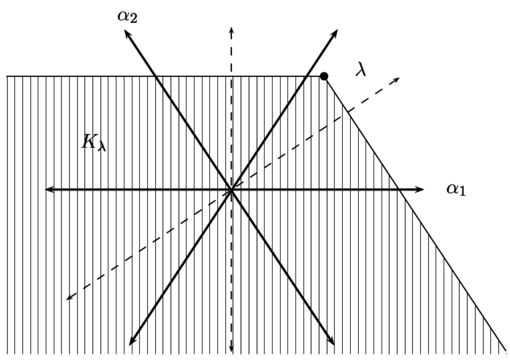


Figura 3.4.1: Conjunto K_λ do exemplo 3.4.1

$$\lambda - \sigma(\mu) \quad = \quad \sum_{\alpha \in \Delta} k_{\alpha,\sigma}\alpha; \quad k_{\alpha,\sigma} \in \mathbb{Z}^+, \forall \sigma \in \mathscr{W}$$

Portanto, $\mu \in \Pi(\lambda)$ se, e somente se, $\mu = \sigma(\lambda) - \sum_{\alpha \in \Delta} k_{\alpha,\sigma^{-1}}\sigma(\alpha)$; $k_{\alpha,\sigma} \in \mathbb{Z}^+, \forall \sigma \in \mathscr{W}$. Logo,

$$\mu \quad = \sigma(\lambda) + \sum_{\alpha \in \Delta_\sigma} \left(-k_{\alpha,\sigma^{-1}}\right)\sigma(\alpha) - \sum_{\alpha \in \Delta'_\sigma} k_{\alpha,\sigma^{-1}}\sigma(\alpha)$$

que claramente não pertence a $K_{\sigma\lambda}$ exceto quando $\sigma = 1$.

□

Algumas observações prévias:

1. Quando $\alpha \in \Delta_\sigma$, temos que $\left(1 - e^{-\sigma(\alpha)}\right)^{-1} = -e^{\sigma(\alpha)} - e^{2\sigma(\alpha)} - e^{3\sigma(\alpha)} - \dots$

2. Similarmente, quando $\alpha \in \Delta'_\sigma$, temos que $\left(1 - e^{-\sigma(\alpha)}\right)^{-1} = 1 + e^{-\sigma(\alpha)} + e^{-2\sigma(\alpha)} + e^{-3\sigma(\alpha)} + \dots$

3. Denotaremos $\mathbb{Z}_+^{|\Delta|} = \{k = (k_1, \dots, k_n) : n = |\Delta|, k_i \in \mathbb{Z}^+\}$.

4. Definimos $\delta_{\sigma\lambda} : \Lambda \longrightarrow \{0,1\}$ a função característica em $K_{\sigma\lambda}$, i.e, $\delta_{\sigma\lambda}(\mu) = 1$ se $\mu \in K_{\sigma\lambda}$ e $\delta_{\sigma\lambda}(\mu) = 0$ caso contrário.

Proposição 3.4.1. *Consideremos a série formal $\sum_{\mu \in \mathscr{W}} c_{\lambda\mu}e^\mu$ que é a expansão formal de*

$$\sum_{\sigma \in \mathscr{W}} \sigma \cdot \frac{e^\lambda}{\prod_{\alpha \in \Delta}\left(1 - e^{-\alpha}\right)}. \tag{3.4.3}$$

Com as convenções estabelecidas para expansão de $(1 - e^{-\alpha})$, o coeficiente $c_{\lambda\mu}$ de e^μ na expansão é igual a $c_{\lambda\mu} = \sum_{\sigma \in \mathscr{W}} (-1)^{|\Delta_\sigma|}\delta_{\sigma\lambda}(\mu)$.

Demonstração. Como Δ é um conjunto linearmente independente, podemos resolver a equação

$$\mu = \sigma(\lambda) + \sum_{\alpha\in\Delta_\sigma} (k_\alpha+1)\,\sigma(\alpha) - \sum_{\alpha\in\Delta'_\sigma} k_\alpha \sigma(\alpha),$$

unicamente para $k = (k_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$. Por cálculo formal simples, mostramos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma\in\mathscr{W}} \sigma \centerdot \frac{e^\lambda}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta}(1-e^{-\alpha})} &= \sum_{\sigma\in\mathscr{W}} e^{\sigma(\lambda)} \prod_{\alpha\in\Delta_\sigma}\left(1-e^{-\sigma(\alpha)}\right)^{-1} \prod_{\alpha\in\Delta_\sigma}\left(1-e^{-\sigma(\alpha)}\right)^{-1} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathscr{W}} e^{\sigma(\lambda)} \prod_{\alpha\in\Delta_\sigma}\left(-e^{\sigma(\alpha)}\sum_{k_\alpha=0}^{\infty} e^{k_\alpha\sigma(\alpha)}\right) \prod_{\alpha\in\Delta'_\sigma}\left(\sum_{k_\alpha=0}^{\infty} e^{-k_\alpha\sigma(\alpha)}\right) \\
&= \sum_{\sigma\in\mathscr{W}} (-1)^{|\Delta_\sigma|} e^{\sigma(\lambda)} \prod_{\alpha\in\Delta_\sigma}\left(e^{\sigma(\alpha)}\sum_{k_\alpha=0}^{\infty} e^{k_\alpha\sigma(\alpha)}\right) \prod_{\alpha\in\Delta'_\sigma}\left(\sum_{k_\alpha=0}^{\infty} e^{-k_\alpha\sigma(\alpha)}\right) \\
&=_{(4)} \sum_{\sigma\in\mathscr{W}} (-1)^{|\Delta_\sigma|} \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^{|\Delta|}} \exp\left(\sigma(\lambda) + \sum_{\alpha\in\Delta_\sigma}(k_\alpha+1)\,\sigma(\alpha) - \sum_{\alpha\in\Delta'_\sigma} k_\alpha\sigma(\alpha)\right) \\
&=_{(5)} \sum_{\sigma\in\mathscr{W}} (-1)^{|\Delta_\sigma|} \sum_{\mu\in K_{\sigma\lambda}} e^\mu \\
&= \sum_{\sigma\in\mathscr{W}} \sum_{\mu\in K_{\sigma\lambda}} (-1)^{|\Delta_\sigma|} e^\mu \\
&= \sum_{\mu\in\Lambda}\left(\sum_{\sigma\in\mathscr{W}} (-1)^{|\Delta_\sigma|}\,\delta_{\sigma\lambda}(\mu)\right) e^\mu,
\end{aligned}$$

provando que os $c_{\lambda\mu}$ são de forma específica. Pelo lema 3.4.1, se $\mu\in\Pi(\lambda)$ então $\sigma = 1$ e portanto

$$c_{\lambda\mu} = (-1)^0\,\delta_\lambda(\mu) = 1.$$

□

Observação 3.4.1. A passagem da equação (4) à equação (5) é válida pelo fato que qualquer $\mu\in\Lambda$ da forma

$$\mu = \sigma(\lambda) + \sum_{\alpha\in\Delta_\sigma}(k_\alpha+1)\,\sigma(\alpha) - \sum_{\alpha\in\Delta'_\sigma} k_\alpha\sigma(\alpha);\, k_\alpha\in\mathbb{Z}^+, \forall\alpha\in\Delta$$

pertence a $K_{\sigma\lambda}$ por definição.

Notemos que, neste ponto, temos a seguinte identidade formal:

$$\sum_{\sigma\in\mathscr{W}} \sigma \centerdot \frac{e^\lambda}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta}(1-e^{-\alpha})} = \Theta_\lambda + \sum_{\mu\in\Lambda\setminus\Pi(\lambda)} c_{\lambda\mu} e^\mu \tag{3.4.4}$$

A seguir, queremos provar que $c_{\lambda\mu} = 0$ quando $\mu\in\Lambda\setminus\Pi(\lambda)$. Vamos usar alguns conceitos de variável complexa relacionados com séries de potência. O leitor possivelmente precisará recordar as seguintes propriedades:

Teste da Raiz. *Seja* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-P)^k$ *uma série de potência em* $\mathbb{C}$*, com* $\{a_k\}$ *uma sequência de números complexos. O raio de convergência da série é*

$$\frac{1}{\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}}$$

se $\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} > 0$*, ou* $+\infty$ *se* $\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = 0$.

Teorema 1. *Seja* $\sum_{j=(j_1,\ldots,j_n)} c_j (z-\zeta)^j$ *uma série de potência em* $\mathbb{C}^n$*. Existem números reais positivos (possivelmente* $+\infty$*)* ε_k, $1 \le k \le n$ *tais que a série converge no polidisco*

$$P = \{|z_k - \zeta_k| < \varepsilon_k : 1 \le k \le n\} \subset \mathbb{C}^n$$

e converge uniformemente sobre qualquer subconjunto compacto $K \subset P$ *de* $\mathbb{C}^n$.

Contudo, enunciamos o seguinte lema:

Lema 3.4.2. *Para cada* $\sigma \in \mathscr{W}$ *e* $\lambda \in \Lambda$*, a série formal*

$$\sum_{\sigma\in\mathscr{W}} (-1)^{|\Delta_\sigma|} \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^{|\Delta|}} \exp\left(\sigma(\lambda) + \sum_{\alpha\in\Delta_\sigma} (k_\alpha+1)\,\sigma(\alpha) - \sum_{\alpha\in\Delta'_\sigma} k_\alpha \sigma(\alpha)\right) \tag{3.4.5}$$

converge absolutamente à função racional

$$\frac{e^{\sigma(\lambda)}}{\prod_{\alpha\in\Delta}\left(1-e^{-\sigma(\alpha)}\right)} \tag{3.4.6}$$

no polidisco unitário $U \subset \mathbb{C}^l$ *nas variáveis* $e^{-\alpha_j}$ *com* $1 \le j \le l$ *e* $|\Delta| = l$*. Além disso, o lado direito de* 3.4.4 *converge ao lado esquerdo absolutamente no disco unitário* $\mathbb{C}^l$.

Demonstração. Consideremos $\sigma(\alpha_j) = \sigma_{1j}\alpha_1 + \ldots + \sigma_{lj}\alpha_l$ expresso na base de raízes, em que σ_{ij} são todos inteiros não negativos ou todos inteiros não positivos. Para um j fixo, como $\alpha_j > 0$, temos que $\sigma_{ij} \le 0$ (se $\sigma\alpha_j \prec 0$) ou $\sigma_{ij} \ge 0$ (se $\sigma\alpha_j \succ 0$).

Notemos também que, se $\alpha \in \Delta_\sigma$ então $(k_\alpha+1)\,\sigma(\alpha)$ admite somente termos não positivos, e $\alpha \in \Delta'_\sigma$ então $k_\alpha\sigma(\alpha)$ admite somente termos não negativos. Portanto, é imediato ver que os termos em 3.4.5 envolve somente potências inteiras não negativas de $x_j = e^{-\alpha_j}$. Enquanto 3.4.6 pode ser escrita como:

$$\frac{e^{\sigma(\lambda)}}{\prod_{\alpha\in\Delta_\sigma}\left(1-e^{-\sigma(\alpha)}\right)\prod_{\alpha\in\Delta'_\sigma}\left(1-e^{-\sigma(\alpha)}\right)}.$$

Ademais, na série 3.4.5, todos os termos tem como fator comum a expressão formal $\exp\left(\sigma(\lambda) + \sum_{\alpha\in\Delta_\sigma}\sigma(\alpha)\right)$. Isolando este fator, a expressão restante é uma série multigeométrica nas variáveis x_j, que converge absolutamente no polidisco unitário $U \subset \mathbb{C}^l$ e uniformemente sobre qualquer subconjunto compacto $K \subset U$. Portanto, 3.4.5 converge a

$$(-1)^{|\Delta_\sigma|}\frac{\exp\left(\sigma(\lambda) + \sum_{\alpha\in\Delta_\sigma}\sigma(\alpha)\right)}{\prod_{\alpha\in\Delta_\sigma}\left(1-e^{\sigma(\alpha)}\right)\prod_{\alpha\in\Delta'_\sigma}\left(1-e^{-\sigma(\alpha)}\right)}. \tag{3.4.7}$$

Dividindo o numerador e denominador por $(-1)^{|\Delta_\sigma|}\exp\left(\sum_{\alpha\in\Delta_\sigma}\sigma(\alpha)\right)=\prod\limits_{\alpha\in\Delta_\sigma}\left(-e^{\sigma(\alpha)}\right)$, temos que

$$\begin{aligned}
(-1)^{|\Delta_\sigma|}\frac{\exp\left(\sigma(\lambda)+\sum_{\alpha\in\Delta_\sigma}\sigma(\alpha)\right)}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta_\sigma}\left(1-e^{\sigma(\alpha)}\right)\prod\limits_{\alpha\in\Delta'_\sigma}\left(1-e^{-\sigma(\alpha)}\right)} &= \frac{e^{\sigma(\lambda)}\prod\limits_{\alpha\in\Delta_\sigma}\left(-e^{\sigma(\alpha)}\right)}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta_\sigma}\left(1-e^{\sigma(\alpha)}\right)\prod\limits_{\alpha\in\Delta'_\sigma}\left(1-e^{-\sigma(\alpha)}\right)}\\
&= \frac{e^{\sigma(\lambda)}\prod\limits_{\alpha\in\Delta_\sigma}\left(-e^{\sigma(\alpha)}\right)\prod\limits_{\alpha\in\Delta_\sigma}\left(-e^{-\sigma(\alpha)}\right)}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta_\sigma}\left(-e^{-\sigma(\alpha)}\right)\prod\limits_{\alpha\in\Delta_\sigma}\left(1-e^{\sigma(\alpha)}\right)\prod\limits_{\alpha\in\Delta'_\sigma}\left(1-e^{-\sigma(\alpha)}\right)}\\
&= \frac{e^{\sigma(\lambda)}}{\left(\prod\limits_{\alpha\in\Delta_\sigma}\left(-e^{-\sigma(\alpha)}\right)\prod\limits_{\alpha\in\Delta_\sigma}\left(1-e^{\sigma(\alpha)}\right)\right)\prod\limits_{\alpha\in\Delta'_\sigma}\left(1-e^{-\sigma(\alpha)}\right)}\\
&= \frac{e^{\sigma(\lambda)}}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta_\sigma}\left(1-e^{-\sigma(\alpha)}\right)\prod\limits_{\alpha\in\Delta'_\sigma}\left(1-e^{-\sigma(\alpha)}\right)}\\
&= \frac{e^{\sigma(\lambda)}}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta}\left(1-e^{-\sigma(\alpha)}\right)}.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$(-1)^{|\Delta_\sigma|}\frac{\exp\left(\sigma(\lambda)+\sum_{\alpha\in\Delta_\sigma}\sigma(\alpha)\right)}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta_\sigma}\left(1-e^{\sigma(\alpha)}\right)\prod\limits_{\alpha\in\Delta'_\sigma}\left(1-e^{-\sigma(\alpha)}\right)} = \frac{e^{\sigma(\lambda)}}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta}\left(1-e^{-\sigma(\alpha)}\right)}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\Theta_\lambda+\sum_{\mu\in\Lambda\setminus\Pi(\lambda)}c_{\lambda\mu}e^\mu &= \sum_{\mu\in\Lambda}c_{\lambda\mu}e^\mu\\
&= \sum_{\mu\in\Lambda}\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}(-1)^{|\Delta_\sigma|}\delta_{\sigma\lambda}(\mu)e^\mu\\
&= \sum_{\sigma\in\mathscr{W}}(-1)^{|\Delta_\sigma|}\sum_{\mu\in\Lambda}\delta_{\sigma\lambda}(\mu)e^\mu
\end{aligned}$$

e para $\mu\in K_{\sigma\lambda}$ (pois $\delta_{\sigma\lambda}(\mu)=0$ se $\mu\notin K_{\sigma\lambda}$) temos que

$$\mu=\sigma(\lambda)+\sum_{\alpha\in\Delta_\sigma}(k_\alpha+1)\sigma(\alpha)-\sum_{\alpha\in\Delta'_\sigma}k_\alpha\sigma(\alpha),$$

para um único $k=(k_\alpha)\in\mathbb{Z}_+^{|\Delta|}$, então

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_+^{|\Delta|}}\exp\left(\sigma(\lambda)+\sum_{\alpha\in\Delta_\sigma}(k_\alpha+1)\sigma(\alpha)-\sum_{\alpha\in\Delta'_\sigma}k_\alpha\sigma(\alpha)\right)=\sum_{\mu\in K_{\sigma\lambda}}e^\mu.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}(-1)^{|\Delta_\sigma|}\sum_{k\in\mathbb{Z}_+^{|\Delta|}}\exp\left(\sigma(\lambda)+\sum_{\alpha\in\Delta_\sigma}(k_\alpha+1)\,\sigma(\alpha)-\sum_{\alpha\in\Delta'_\sigma}k_\alpha\sigma(\alpha)\right) &= \sum_{\sigma\in\mathscr{W}}\frac{e^{\sigma(\lambda)}}{\prod_{\alpha\in\Delta}\left(1-e^{-\sigma(\alpha)}\right)}\\
&= \sum_{\sigma\in\mathscr{W}}(-1)^{|\Delta_\sigma|}\sum_{\mu\in K_{\sigma\lambda}}e^{\mu}\\
&= \sum_{\sigma\in\mathscr{W}}\sum_{\mu\in\Lambda}(-1)^{|\Delta_\sigma|}\delta_{\sigma\lambda}(\mu)\,e^{\mu}\\
&= \Theta_\lambda+\sum_{\mu\in\Lambda\setminus\Pi(\lambda)}c_{\lambda\mu}e^{\mu}
\end{aligned}$$

concluindo a afirmação final do lema.

□

Finalmente, concluímos a demonstração do teorema 3.3 mostrando a seguinte proposição:

Proposição 3.4.2. *Se λ é um peso dominante integral e $\mu\notin\Pi(\lambda)$ então $c_{\lambda\mu}=0$.*

Demonstração. Pelo lema 3.4.2, sabemos que em 3.4.4, a função racional do lado esquerdo tem uma representação em séries de potências no polidisco unitário $U\subset\mathbb{C}^l$ dada pelo lado direito. Por outro lado, pelo teorema 3.2, a mesma expressão racional é formalmente igual (e portanto convergente em U) a um polinômio de Laurent (segundo o lado direito do teorema 3.2, pois χ_λ é representado como um polinômio de Laurent, uma vez que $\Pi(\lambda)$ é finito, e da mesma forma para $\chi_{\overline{\lambda-\langle\Psi\rangle}}$ quando $\lambda-\langle\Psi\rangle+\rho$ é regular). Pela unicidade da expressão, concluímos que ambas série e polinômio coincidem, e portanto, o lado direito de 3.4.4 é suportado somente para $\mu\in\Pi(\lambda)$ como era de esperar.

□

3.5 Conclusões.

Esta nova fórmula de caracteres para representações irredutíveis de dimensão finita de álgebras de Lie semissimples, além de ser uma fórmula de recursão, em que o caractere de uma determinada representação V^λ de peso maximal λ está em função das representações de pesos menores, oferece aplicações muito interessantes e importante, tais como conhecer o número exato de pesos numa representação irredutível V^λ e a obtenção de fórmulas exatas para multiplicidades.

Também foi possível a obtenção de fórmulas fechadas para a dimensão do espaço de peso zero de uma representação irredutível V^λ para determinadas famílias de álgebras semissimples, e que somente depende das coordenadas de λ na base de pesos fundamentais, oferecendo uma ferramenta importante para outras aplicações na teoria de representações, pois tal espaço funciona como uma representação do grupo de Weyl $\mathscr{W}$ de $\mathfrak{g}$.

Algumas vezes foi necessário implementar livrarias em Maple e Java, com o objetivo de obter informações concretas para algumas álgebras $\mathfrak{g}$, como também de suas representações. No entanto, ainda existem questões muito interessantes, como por exemplo a obtenção de fórmulas exatas para multiplicidades para diferentes famílias de álgebras de Lie semissimples.

Outras questões abertas na área, e que seguem sendo objetos atuais de pesquisa, tem que ver com problemas de Cohomologia e restrição de representações de grupos de Lie. Apresentando a seguir, um resumo de uma delas:

Cohomologia e restrição de representações de grupos de Lie.

Seja G um grupo de Lie compacto, T um toro maximal e B um subgrupo de Borel de G. Seja $\hat{T}$ o conjunto dos pesos de T. Se H é um subgrupo redutivo de G, escolhemos um toro maximal T_H de H contido em T. Denotemos com $\hat{\imath} : \hat{T} \to \hat{T}_H$ a projeção entre os correspondentes espaços de pesos. Seja $\hat{T}_H^+ \subset \hat{T}_H$ o conjunto dos pesos dominantes de H (correspondentes a $B \cap H$).

Dado $\lambda \in \hat{T}_H^+$, denotemos com $\pi_{H,\lambda}$ a representação irredutível de H de peso máximo λ e $\hat{T}_{H,\lambda} \subset \hat{T}_H$ o conjunto dos pesos de $\pi_{H,\lambda}$. Se $\rho_H \in \hat{T}_H^+$ a semissoma das raízes positivas de H, K um subgrupo redutivo fixo de G que contem T e $\lambda \in \hat{T}_G^+$. Afirma-se que $\pi_{G,\lambda}|_K$ é completamente redutível e que existe um politopo convexo (ver [Kir84])

$$P_\lambda^{G,K} \subset \hat{\imath}(\hat{T}_{G,\lambda}) \cap \hat{T}_K^+,$$

denominado politopo de Kirwan, tal que

$$\pi_{G,\lambda}|_K \bigoplus_{\mu \in P_\lambda^{G,K}} a_\mu \, \pi_{K,\mu},$$

em que $a_\mu \geq 0$ é a multiplicidade de $\pi_{K,\mu}$. Na verdade, se $\mu \in P_\lambda^{G,K}$ então excepcionalmente $a_\mu = 0$ (tais pesos são chamados gaps do branching), i.e, $P_\lambda^{G,K}$ é quase o conjunto que descreve os pesos $\mu \in T_{G,\lambda} \cap \hat{T}_K^+$ tais que $a_\mu > 0$.

Uma possível direção de trabalho é tentar descrever as faces de $P_\lambda^{G,K}$. Por mais que existem fórmulas explícitas para a_μ (que são justamente as fórmulas de multiplicidades), usualmente é difícil determinar o conjunto $P_\lambda^{G,K}$, e mais difícil ainda, descrever exatamente o conjunto dos pesos $\mu \in \hat{T}_{G,\lambda} \cap \hat{T}_K$ tais que $a_\mu > 0$. Como está enunciado, o problema resulta muito geral. Por exemplo, este problema no caso particular em que $G = G_0 \times G_0$ e $K = diag(G_0) \subset G$ consiste em descrever as faces do politopo que descreve a descomposição do produto tensorial das representações irredutíveis de G_0.

Bibliografia

[FS97] Jürgen Fuchs and Christoph Schweigert, *Symmetries, Lie Algebras and Representations*, Cambridge University Press, 1997.

[TY05] Patrice Tauvel and RupertW. T. Yu, *Lie Algebras and Algebraic Groups*, Springer-Verlag, New York, 2005.

[FH91] William Fulton and Joe Harris, *Representation Theory, A First Course*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[JF10] Patricia Jancsa and Marco Farinati, *Grupos y Álgebras de Lie*, Universidad Nacional de Cordoba; FAMAF, 2010.

[SW14] Anne V. Shepler and Sarah Witherspoon, *Poincaré-Birkhoff-Witt Theorems*, http://arxiv.org/pdf/1404.6497v1.pdf, May 2014.

[EW00] Karin Erdmann and Mark J. Wildon, *Introduction to Lie Algebras*, Springer Undergraduate Mathematics Series, 2000.

[CT04] Leandro Cagliero and Paulo Tirao, *A Closed Formula for Weight Multiplicities of Representations of Sp2(C)*, manuscripta math **115** (2004), 417–426.

[OV94] A.L. Onishchik and E. B. Vinberg, *Lie Groups and Lie Algebras III. Structure of Lie Groups and Lie Algebras*, vol. 41, Springer-Verlag, 1994.

[Cai14] Yuanqing Cai, *Notes On Representation Theory*, https://www2.bc.edu/yuanqing-cai/Notes/BGG.pdf, November 29 2014.

[Sah00] S. Sahi, *A new formula for Weight Multiplicities and Characters*, Duke Math. Jour. **101** (2000), no. 1, 77–84.

[Cru11] Mónica Nancy Cruz, *Cohomologia de Algebras de Lie 3-pasos Nilpotentes Graduadas y la Conjetura del Rango Toral*, Master's thesis, Universidad Nacional de Salta, Facultad de Ciencias Exactas, 2011.

[Gra00] De Graaf, *Lie Algebras. Theory and Algorithms*, Nort-Holland, 2000.

[Ser78] Jean Pierre Serre, *Complex Semisimple Lie Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1978.

[Kir84] F. Kirwan, *Convexity properties of the moment mapping III*, Invent. Math. **77** (1984), 547–552.

[Mar10] Luis San Martin, *Álgebras de Lie.*, Editorial Unicamp, 2010.

[Kos59] B Kostant, *A Formula for the Multiplicity of a Weight*, Trans. Amer. Math. Soc. **93** (1959), 53–73.

[Gar11] Paul Garrett, *The Poincaré-Birkhoff-Witt Theorem*, http://www.math.umn.edu/, April 2011.

[Gal10] Joseph A. Gallian, *Contemporary Abstract Algebra*, Brooks Cole, Cengage Learning, 2010.

[Kos61] Bertram Kostant, *Lie Algebra Cohomology and the Generalized Borel-Weil Theorem*, Ann. of Math. **74** (1961), no. 2, 329–387.

[Jac79] Nathan Jacobson, *Lie Algebras*, Dover Publications, 1979.

[Sch12] Waldeck Schützer, *A New Character Formula for Lie Algebras and Lie Groups*, Journal of Lie Theory **22** (2012), 817–838.

[Sch04] ______, *On Some Combinatorial Aspects of Representation Theory*, Ph.D. thesis, New Brunswick Rutgers, The State University of New Jersey, 2004.

[Kir76] Alexander Kirillov, *Elements of the Theory of Representations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1976.

[Hum78] James E. Humphreys, *Intruduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag, New York, 1978.

[Ale08] Jr. Alexander Kirillov, *An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*, Cambridge University Press, 2008.

[Lit95] P Littelmann, *Paths and Root Operator in Representation Theory*, Ann. Math. **142** (1995), no. 3, 499–525.

[FdV69] H. Freudenthal and H. de Vries, *Linear Lie Groups*, vol. 35, Academic Press, New York, 1969.

[Var84] V. S. Varadarajan, *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations*, Springer-Verlag, New York, 1984.