UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

VALÉRIA NOGUEIRA BATISTA

UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Sorocaba
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

VALÉRIA NOGUEIRA BATISTA

Prof. Orientador: Dr. Wladimir Seixas

Sorocaba

2015

UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do título de mestre sob orientação do Professor Doutor Wladimir Seixas.

Sorocaba

2015

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Batista, Valéria Nogueira
B333p Uma proposta metodológica para o ensino das funções trigonométricas / Valéria Nogueira Batista. -- São Carlos : UFSCar, 2015.
189 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.

1. Funções Trigonométricas. 2. GeoGebra. 3. Modelagem matemática. 4. Tarefas exploratório-investigativas. 5. Materiais manipulativos. I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Valéria Nogueira Batista, realizada em 28/08/2015:

Wladimir Seixas

Prof. Dr. Wladimir Seixas
UFSCar

Prof. Dr. Sérgio Roberto Nobre
UNESP

Luciana T. Gomes

Profa. Dra. Luciana Takata Gomes
UFSCar

Dedico este trabalho aos meus pais
e principalmente a Deus por ter sempre
me colocado no caminho certo

AGRADECIMENTOS

A Deus que com Sua força inspiradora transformou os muitos obstáculos em meios para alcançar meus objetivos, assegurando tranquilidade mesmo nos momentos mais difíceis neste árduo período de estudos.

Ao meu amado esposo João por toda compreensão, apoio e incentivo.

Aos meus pais Daniel e Terezinha, dos quais sou imensamente grata por todo amor que sempre me devotaram. Especialmente a minha mãe, meu “porto seguro”, que com toda sua singeleza é para mim modelo de bondade e fortaleza.

A minha irmã Patrícia, mulher de fé, com quem tenho muito a aprender.

A minha querida sobrinha e afilhada Luisa, que pela sua pouca idade, ainda não tem a dimensão do quanto representa em minha vida.

Ao meu orientador professor Dr. Wladimir Seixas, que com todo seu conhecimento, dedicação e paciência contribuiu muito na elaboração deste trabalho.

Ao professor Dr. Paulo César Oliveira, que com sua vasta experiência na área da Educação Matemática, me conduziu no direcionamento desta proposta metodológica de trabalho.

Aos colegas do mestrado, pela colaboração e companheirismo. Especialmente ao Tiago Tozzi pela preciosa contribuição nas construções do GeoGebra.

A todos os amigos da Escola Estadual Coronel Pedro Dias de Campos, especialmente a diretora Edna Carriel, a coordenadora Kátia Nunes e a amiga Sandra Confortini pelas palavras de incentivo.

Aos meus queridos alunos participantes desta pesquisa, sem os quais não seria possível a realização deste estudo.

Ao Programa Bolsa Mestrado da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo pelo apoio financeiro e a supervisora Sandra Regina Gois dos Santos pelo seu competente trabalho junto aos bolsistas.

Sem a curiosidade que me move, que me inquieta,
que me insere na busca, não aprendo nem ensino.
- Paulo Freire

RESUMO

Esta pesquisa apresenta como foco principal o ensino das funções trigonométricas seno e cosseno. A proposta é organizar o ensino dessas funções, de forma a potencializar boas situações de aprendizagens aos alunos, que favoreçam a transição das razões trigonométricas no triângulo retângulo para a circunferência trigonométrica com o uso de materiais manipulativos e do software GeoGebra. Partindo dos pressupostos teóricos descritos nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio e no Currículo do Estado de São Paulo que procuram delinear para o professor, as habilidades e competências que seu aluno deve adquirir ao ser formado na educação básica, apresentam-se alternativas de ensino que visam contribuir para que os alunos percebam a necessidade e a aplicabilidade prática das Funções Trigonométricas. Analisando como essas funções são abordadas nos documentos curriculares e nos livros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD 2015), procurou-se desenvolver um trabalho de exploração e investigação incluindo a modelagem matemática e tendo como referencial as atividades exploratório-investigativas.

Palavras-chaves: Funções Trigonométricas. Geogebra. Modelagem Matemática. Tarefas Exploratório-Investigativas. Materiais manipulativos.

ABSTRACT

This research has focused primarily on teaching trigonometric sine and cosine functions. The proposal is to organize the teaching of these functions, in order to improve good learning situations to students, to encourage the transition of trigonometric ratios in right triangle to the trigonometric circle with the use of manipulative materials and GeoGebra software. Based on the theoretical assumptions described in the High School National Curriculum Standards and Curriculum of the State of São Paulo seeking to outline for the teacher, the skills and expertise that student must acquire to be made in basic education, are presented educational alternatives. It aims to help students understand the need and the practical applicability of Trigonometric Functions. Analyzing how these functions are covered in the curriculum documents and books of the National Textbook Program (PNLD 2015), we tried to develop a pioneering work and research including mathematical modeling and taking as reference the exploratory and investigative activities.

Key-words: Trigonometric functions. Geogebra. Mathematical Modeling. Exploratory-Investigative tasks. Manipulative materials.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A motivação para esta pesquisa surgiu a partir de uma pesquisa sobre as “Boas Práticas Docentes no Ensino da Matemática”, realizada pela Fundação Cesgranrio. A pesquisa de campo foi desenvolvida durante o ano de 2011, onde foram selecionados professores com bom desempenho no Processo de Promoção por Merecimento realizado em 2010 pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, cujas turmas de alunos tiveram desempenho considerados satisfatórios no Saresp dos anos de 2008, 2009 ou 2010. Os resultados da pesquisa deram origem a uma edição especial da Revista Nova Escola (2012) e um vídeo educativo de 1h12min, com exemplos de professores desempenhando práticas consideradas exemplares. Foram escolhidas 12 boas práticas docentes no ensino da Matemática, da qual eu fui uma das contempladas. Relendo o relatório final com os principais resultados obtidos com a pesquisa de campo realizada com 68 professores de matemática do Ensino Fundamental e Médio da Rede Estadual de São Paulo, nasceu o desejo de passar de “sujeito de pesquisa” para “professora pesquisadora”. Em 2013 ingressei no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos.

Minhas experiências em sala de aula como professora do Ensino Médio da Rede Pública Estadual do Estado de São Paulo, permitiram-me observar que os alunos encontram grandes dificuldades na aprendizagem da Trigonometria, por considerarem um conteúdo complicado e sem sentido. Tendo como referência essas percepções, optei por pesquisar e desenvolver uma proposta de ensino das Funções Trigonométricas a fim de promover uma aprendizagem com qualidade para os alunos, levando-os à compreensão dos conteúdos referentes ao tema e proporcionando o desenvolvimento do raciocínio e da autonomia durante a realização das tarefas propostas.

Esta pesquisa apresenta como foco principal o ensino das funções trigonométricas seno e cosseno, partindo do pressuposto de que na segunda série do Ensino Médio os alunos já adquiriram os conhecimentos referentes à trigonometria no triângulo retângulo. A proposta é organizar o ensino das funções trigonométricas, de forma a potencializar boas situações de aprendizagens aos alunos, que favoreçam a transição das razões trigonométricas no triângulo retângulo para a circunferência trigonométrica, com o uso de materiais manipulativos e do ambiente informatizado que serve de elemento motivador e facilita a construção das representações gráficas.

Tendo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 2002) como referência, busquei as orientações em relação ao ensino e a aprendizagem em Matemática. Os PCNEM recomendam que o ensino da Matemática deva criar condições para que os alunos desenvolvam a capacidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos para tirar conclusões, fazer investigações e argumentações, analisar fatos matemáticos para interpretar e compreender a sua realidade.

O Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2010), no qual também busquei fundamentos para o desenvolvimento do meu trabalho, propõe uma articulação entre as disciplinas e as atividades escolares de modo a promover o desenvolvimento de competências e habilidades, para que o aluno adquira a capacidade de agir, pensar e atuar no mundo.

> Tais competências e habilidades podem ser consideradas em uma perspectiva geral, isto é, no que têm de comum com as disciplinas e tarefas escolares ou no que têm de específico. Competências, nesse sentido, caracterizam modos de ser, de raciocinar e de interagir, que podem ser desprendidos das ações e das tomadas de decisão em contextos de problemas, de tarefas ou de atividades. Graças a elas, podemos inferir, hoje, se a escola como instituição está cumprindo devidamente o papel que se espera dela. (SÃO PAULO, 2010, p. 12)

Esta pesquisa parte dos pressupostos descritos nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio e no Currículo do Estado de São Paulo que procuram delinear para o professor, as habilidades e competências que seu aluno deve adquirir ao ser formado na educação básica.

Procurando alternativas que visam contribuir para que os alunos percebam a necessidade e a aplicabilidade prática das Funções Trigonométricas são motivos que sustentam a escolha deste tema para a minha pesquisa. Procurei conhecer como as Funções Trigonométricas, em particular as funções seno e cosseno são abordadas nos documentos curriculares que norteiam a educação básica para desenvolver um trabalho de exploração e investigação em matemática, pois segundo Lamonato e Passos (2011, p. 53) “a exploração-investigação matemática possibilita ao aluno pensar a partir de uma dinâmica que prevê observações, descobertas, erros, acertos e, fundamentalmente, decisões”. Ainda segundo essas autoras, as aulas exploratório-investigativas colocam o aluno como “descobridor, como aquele que procura evidências, regularidades e semelhanças e, a partir desses dados, elabora suas hipóteses e conjecturas, vai em busca de descobertas, justificando-as e socializando na sua comunidade, caracterizando um processo de negociação nas diversas etapas”. (LAMONATO; PASSOS, 2011, p. 55).

Os pressupostos apresentados na busca de uma aprendizagem com qualidade em funções trigonométricas instigaram-me a assumir a seguinte questão como norteadora da investigação: **Que intervenções poderão ser realizadas de modo a promover a aprendizagem das Funções Trigonométricas Seno e Cosseno no contexto de tarefas exploratório-investigativas em aulas de matemática?**

Para responder a essa questão, o trabalho de campo foi desenvolvido no primeiro semestre de 2014, tendo como sujeitos de pesquisa alunos da segunda série B do Ensino Médio da Escola Estadual Coronel Pedro Dias de Campos, situada no município de Capela do Alto, Estado de São Paulo.

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma: o capítulo 2 apresenta uma explanação sobre o ensino da Trigonometria na educação básica, a partir dos pressupostos teóricos dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 2002), das Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) e do Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2010). O capítulo traz ainda, uma análise sobre como o ensino da Trigonometria vem sendo abordado nos livros do Programa Nacional do Livro Didático 2015.

O capítulo 3 discorre sobre a metodologia da pesquisa tendo como referencial teórico as tarefas exploratório-investigativas.

O capítulo 4 tem por finalidade apresentar os participantes da pesquisa e a descrição e análise das tarefas exploratório-investigativas aplicadas. Ao iniciar cada tarefa são apresentados os conteúdos e temas envolvidos, as competências e habilidades almejadas, o tempo previsto e o material utilizado. A primeira tarefa faz uma revisão dos conceitos de raio e diâmetro e apresenta a fórmula do comprimento da circunferência, antes de iniciar a segunda tarefa sobre a circunferência trigonométrica. A terceira tarefa desenvolve o conceito de radiano e as medidas de arcos de circunferência. A quarta tarefa apresenta três atividades de modelagem matemática para introduzir o conceito de funções periódicas. A primeira atividade se baseou no livro *Funções para modelar: uma preparação para o cálculo* (CONNALLY et al., 2009), na qual foram aplicadas atividades sobre o movimento de uma roda-gigante que pode ser modelado por uma equação trigonométrica, tendo como referência uma das maiores rodas-gigantes do mundo, a *London Eye*. A segunda atividade propõe a construção de uma mini roda-gigante de papelão conforme o experimento sugerido no portal ime3 da Unicamp (SOARES, 2015), onde foram construídos os gráficos de duas funções: a altura da cadeirinha da roda-gigante em função do ângulo de giro e a altura da cadeirinha em função da distância percorrida. Na terceira atividade os alunos transformaram a roda-gigante de papelão num modelo de pistão, cujo funcionamento leva a uma aproximação da função cosseno. A quinta tarefa exploratório-investigativa apresenta três atividades de análise de funções trigonométricas construídas com a utilização do software GeoGebra. A primeira atividade denominada de “função polígono” tem por objetivo explorar os conceitos de periodicidade para uma função periódica. A segunda atividade apresenta duas construções no GeoGebra para explorar as propriedades das funções seno e cosseno. A terceira atividade apresenta as transformações que podem ocorrer nas funções trigonométricas quando se modificam os parâmetros A, B, C e D das funções do tipo $f(x) = A.sen(Bx+C)+D$ e $f(x) = A.cos(Bx+C)+D$. A sexta e última tarefa propõe construções de gráficos com lápis e papel das funções periódicas envolvendo senos e cossenos.

Finalmente, no último capítulo são apresentadas as reflexões sobre a experiência de ensino, destacando os benefícios que a proposta metodológica trouxe para a aprendizagem dos alunos.

2. A TRIGONOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Este capítulo traz uma explanação sobre o ensino da Trigonometria na educação básica, a partir dos pressupostos teóricos dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 2002), das Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) e do Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2010). Apresenta-se também uma análise sobre como o ensino da Trigonometria vem sendo abordado nos livros do Programa Nacional do Livro Didático 2015.

2.1. O ensino da Trigonometria nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio

As novas orientações para o Ensino Médio, constantes nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2002) na área das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias trazem três grandes conjuntos de competências a serem alcançadas durante esta etapa da escolaridade básica. São elas:

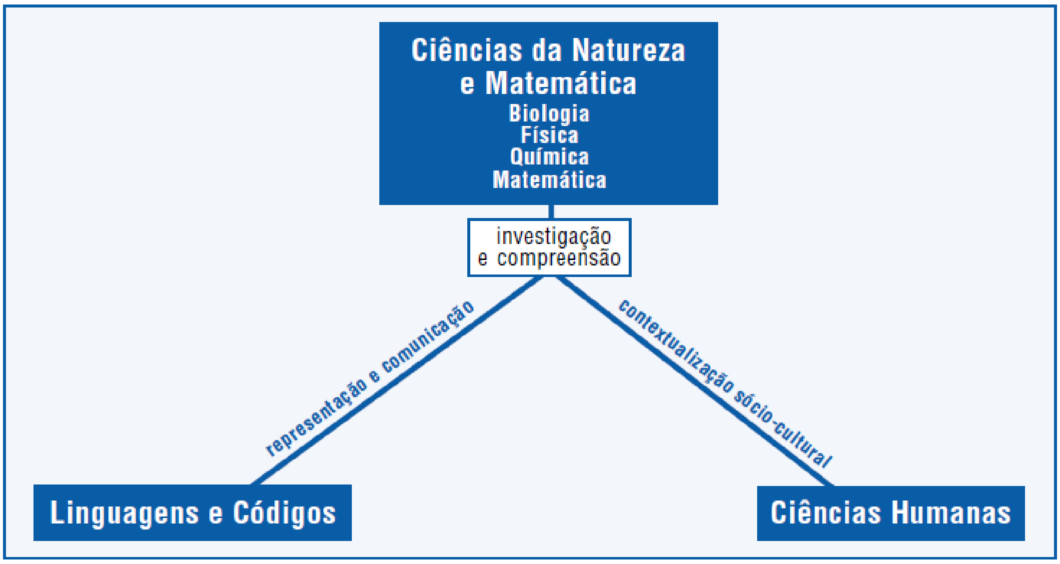
- A representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;

- A investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;

- A contextualização das ciências no âmbito sociocultural, na forma de análise crítica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico (BRASIL, 2002, p. 113).

A figura 1 expressa como a área das Ciências da Natureza e Matemática se articula com a área de Linguagens e Códigos, através das competências de representação e comunicação, e com a área de Ciências Humanas pelo desenvolvimento das competências de contextualização sociocultural. Pode-se observar também que as disciplinas da área se interligam por essas duas competências gerais e também pela de investigação e compreensão.

Figura 1 - Como as competências se articulam entre as áreas do conhecimento.



Fonte: BRASIL, 2002, p. 25.

O desenvolvimento das competências de representação e comunicação envolve em todas as disciplinas da área o desenvolvimento de várias outras competências, como se observa na figura 2.

Figura 2 - Competências de Representação e Comunicação.

Representação e comunicação
Símbolos, códigos e nomenclaturas Reconhecer e utilizar adequadamente na forma oral e escrita símbolos, códigos e nomenclatura da linguagem científica.
Articulação dos símbolos e códigos Ler, articular e interpretar símbolos e códigos em diferentes linguagens e representações: sentenças, equações, esquemas, diagramas, tabelas, gráficos e representações geométricas.
Análise e interpretação de textos e outras comunicações Consultar, analisar e interpretar textos e comunicações de ciência e tecnologia veiculados por diferentes meios.
Elaboração de comunicações Elaborar comunicações orais ou escritas para relatar, analisar e sistematizar eventos, fenômenos, experimentos, questões, entrevistas, visitas, correspondências.
Discussão e argumentação de temas de interesse Analisar, argumentar e posicionar-se criticamente em relação a temas de ciência e tecnologia.

Fonte: BRASIL, 2002, p. 27.

O conjunto de competências de investigação e compreensão é bastante amplo e constituído também por outras competências que devem ser desenvolvidas para a compreensão de diferentes processos naturais. Ver figura 3

Figura 3 - Competências de Investigação e Compreensão.

Investigação e compreensão
Estratégias para enfrentamento de situações-problema Identificar em dada situação-problema as informações ou variáveis relevantes e possíveis estratégias para resolvê-la.
Interações, relações e funções; invariantes e transformações Identificar fenômenos naturais ou grandezas em dado domínio do conhecimento científico, estabelecer relações; identificar regularidades, invariantes e transformações.
Medidas, quantificações, grandezas e escalas Selecionar e utilizar instrumentos de medição e de cálculo, representar dados e utilizar escalas, fazer estimativas, elaborar hipóteses e interpretar resultados.
Modelos explicativos e representativos Reconhecer, utilizar, interpretar e propor modelos explicativos para fenômenos ou sistemas naturais ou tecnológicos.
Relações entre conhecimentos disciplinares, interdisciplinares e interáreas Articular, integrar e sistematizar fenômenos e teorias dentro de uma ciência, entre as várias ciências e áreas de conhecimento.

Fonte: BRASIL, 2002, p. 30.

A contextualização no ensino das ciências abrange competências de inserção da ciência e suas tecnologias em um processo histórico, social e cultural com o reconhecimento e discussão de aspectos práticos e éticos da ciência no mundo contemporâneo. A figura 4 mostra como essas competências foram organizadas.

Figura 4 - Competências da Contextualização Sociocultural.

Contextualização sócio-cultural
Ciência e tecnologia na história Compreender o conhecimento científico e o tecnológico como resultados de uma construção humana, inseridos em um processo histórico e social.
Ciência e tecnologia na cultura contemporânea Compreender a ciência e a tecnologia como partes integrantes da cultura humana contemporânea.
Ciência e tecnologia na atualidade Reconhecer e avaliar o desenvolvimento tecnológico contemporâneo, suas relações com as ciências, seu papel na vida humana, sua presença no mundo cotidiano e seus impactos na vida social.
Ciência e tecnologia, ética e cidadania Reconhecer e avaliar o caráter ético do conhecimento científico e tecnológico e utilizar esses conhecimentos no exercício da cidadania.

Fonte: BRASIL, 2002, p. 32.

Segundo as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) (BRASIL, 2002), a maneira como se organizam as atividades e a sala de aula, a escolha de materiais didáticos apropriados e a metodologia de ensino é que permitirão o trabalho simultâneo dos conteúdos e competências. Neste sentido os PCN+ apontam o significado de cada competência no âmbito da Matemática, explicitando o que se espera do aluno em cada uma delas.

A seguir o detalhamento de quais competências serão desenvolvidas no ensino da Trigonometria.

- **Representação e comunicação:** identificar, transformar e traduzir adequadamente valores e unidades básicas apresentadas sob diferentes formas como ângulos em graus e radianos. Ler e interpretar dados ou informações apresentadas em diferentes linguagens e representações e traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra, como tabelas em gráficos ou equações. (BRASIL, 2002, p.114).

- **Investigação e Compreensão:** identificar as relações envolvidas e elaborar possíveis estratégias para enfrentar uma dada situação-problema: como por exemplo, para obter uma dada distância, fazer uso de propriedades trigonométricas, enquanto que para analisar a relação entre espaço e tempo no movimento de um objeto, optar pelo recurso algébrico das funções e suas representações gráficas. Reconhecer a existência de invariantes ou identidades que impõem as condições a serem utilizadas para analisar e resolver situações-problema; como por exemplo, a relação entre catetos e hipotenusa em qualquer triângulo retângulo; ou ainda a identidade fundamental da trigonometria. E identificar e fazer uso de diferentes formas e instrumentos

> apropriados para efetuar medidas ou cálculos, como é o caso do uso do transferidor para a medição de ângulos. (BRASIL, 2002, p.115 e 116).
>
> - **Contextualização Sociocultural:** compreender a construção do conhecimento matemático como um processo histórico, em estreita relação com as condições sociais, políticas e econômicas de uma determinada época, como por exemplo, ao se perceber a origem do uso das razões trigonométricas como resultado do avanço tecnológico do período das grandes navegações do século XVI, pode-se conceber a Matemática como instrumento para a solução de problemas práticos e que se desenvolve para muito além deles, ganhando a dimensão de ideias gerais para novas aplicações fora do contexto que deu origem a elas. (BRASIL, 2002, p.118).

Os conteúdos ou temas a serem trabalhados, devem ter importância científica e cultural e permitir uma articulação lógica entre diferentes ideias e conceitos, garantindo assim maior significação para a aprendizagem. Assim é possível o estabelecimento de relações de forma consciente para que o aluno desenvolva as competências descritas anteriormente. Nesta perspectiva os PCN+ propõem um conjunto de temas que podem ser sistematizados nos três eixos ou temas estruturadores, desenvolvidos de forma concomitante nas três séries do Ensino Médio:

1. Álgebra: números e funções.
2. Geometria e medidas.
3. Análise de dados.

Esta pesquisa dará uma maior ênfase ao tema 1: Álgebra, números e funções. Será possível explorar, com menor proporção, o tema 3, uma vez que foi utilizado o conceito de erro quadrático médio em uma atividade de modelagem de fenômenos periódicos.

Tema 1. Álgebra: números e funções

Para o desenvolvimento desse eixo, são propostas duas unidades temáticas: variação de grandezas e trigonometria.

O estudo das funções deve permitir ao aluno adquirir a linguagem algébrica necessária para expressar a relação entre as grandezas e modelar situações-problema, construindo desta forma modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da matemática. Portanto, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções (BRASIL, 2002, p.121).

Quanto ao estudo da Trigonometria, as orientações constantes nos PCN+ consideram que:

> Apesar da importância do tema, a trigonometria é apresentada desconectada das aplicações, investindo-se muito tempo no cálculo algébrico das identidades e equações em detrimento dos aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. O que deve ser assegurado são as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial, o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem aos fenômenos periódicos. Dessa forma, o estudo deve se ater às funções seno, cosseno e tangente com ênfase ao seu estudo na primeira volta do círculo trigonométrico e à perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas. Outro aspecto importante do estudo deste tema é o fato desse conhecimento ter sido responsável pelo avanço tecnológico em diferentes épocas, como é o caso do período das navegações ou, atualmente, na agrimensura, o que permite aos alunos perceberem o conhecimento matemático como forma de resolver problemas que os homens se propuseram e continuam se propondo (BRASIL, 2002, p. 122).

As unidades temáticas a serem desenvolvidas neste eixo envolvendo a Trigonometria são:

Variação de grandezas: noção de função, representação e análise gráfica; função seno, cosseno e tangente; taxa de variação de grandezas.

Nesta unidade as habilidades a serem desenvolvidas são:

- Reconhecer e utilizar a linguagem algébrica nas ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e fazendo conexões dentro e fora da matemática.
- Compreender o conceito de função, associando-os a exemplos da vida cotidiana.
- Associar diferentes funções a seus gráficos correspondentes.
- Ler e interpretar diferentes linguagens e representações envolvendo variações de grandezas.
- Identificar regularidades em expressões matemáticas e estabelecer relações entre variáveis (BRASIL, 2002, p.123).

Trigonometria: do triângulo retângulo; do triângulo qualquer; da primeira volta.

Nesta unidade as habilidades a serem desenvolvidas são:

- Utilizar e interpretar modelos para resolução de situações-problema que envolvam medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos.
- Compreender o conhecimento científico e tecnológico como resultado de uma construção humana em um processo histórico e social, reconhecendo o uso de relações trigonométricas em diferentes épocas e contextos sociais (BRASIL, 2002, p.123).

Em seguida os PCN+ apresentam uma proposta de organização dos temas e suas unidades, trabalhando concomitantemente os três temas estruturadores.

Figura 5 - Organização do trabalho escolar.

1ª série	2ª série	3ª série
1. Noção de função; funções analíticas e não-analíticas; análise gráfica; seqüências numéricas; função exponencial ou logarítmica. 1. Trigonometria do triângulo retângulo.	1. Funções seno, cosseno e tangente. 1. Trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta.	1. Taxas de variação de grandezas.
2. Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.	2. Geometria espacial: poliedros; sólidos redondos; propriedades relativas à posição; inscrição e circunscrição de sólidos. 2. Métrica: áreas e volumes; estimativas.	2. Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.
3. Estatística: descrição de dados; representações gráficas.	3. Estatística: análise de dados. 3. Contagem.	3. Probabilidade.

Fonte: BRASIL, 2002, p. 128.

A orientação é que no primeiro tema, a ênfase deve estar no conceito de função e em seu uso para modelar situações contextualizadas e na interpretação de gráficos. Em trigonometria é possível deter-se na resolução de problemas que usem as razões trigonométricas para cálculo de distâncias.

Os conteúdos no entanto devem ser articulados para que as competências almejadas possam se desenvolver. Para isto, a proposta dos PCN+ (BRASIL, 2002) privilegia o tratamento de situações-problema, preferencialmente tomadas em contexto real. A resolução de problemas é portanto a perspectiva metodológica escolhida nesta proposta, que articula os conteúdos em torno de temas estruturadores.

2.2. A Trigonometria nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio

As Orientações Curriculares Para o Ensino Médio – OCEM (Brasil, 2006) propõem que toda situação de ensino e aprendizagem deve agregar o desenvolvimento de habilidades que caracterizem o "pensar matematicamente", propiciando ao aluno um "fazer matemático" por meio de um processo investigativo que o auxilie na apropriação de conhecimento dando prioridade à qualidade do processo e não a quantidade de conteúdos a serem trabalhados. Em conformidade com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - PCNEM (2002) e os PCN+ (2002) o ensino da Matemática deve contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas ao conjunto de competências que são: representação e comunicação, investigação e compreensão e contextualização sociocultural. Neste sentido as OCEM apresentam orientações quanto a escolha dos conteúdos, a forma de trabalhar esses conteúdos, o projeto pedagógico e a organização curricular para que essas habilidades sejam alcançadas.

Ainda segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM (BRASIL, 2006), no que se refere ao estudo da Trigonometria, antes de abordar as funções trigonométricas, faz-se necessário introduzir as razões trigonométricas no triângulo retângulo, ressaltando que são as propriedades de semelhança de triângulos que dão sentido as definições. Segue-se então com as definições para as razões para ângulos de medidas entre 90º e 180º (Lei dos Senos e Cossenos). A transição do seno e do cosseno no triângulo retângulo (em que a medida do ângulo é dada em graus), para o seno e o cosseno definidos como as coordenadas de um ponto que percorre um arco do círculo de raio unitário com medidas em radianos, exige uma especial atenção por parte do professor. Segundo as OCEM, as funções trigonométricas devem ser entendidas como extensões das razões trigonométricas então definidas para ângulos com medidas entre 0º e 180º. Os alunos devem ter a oportunidade de traçar gráficos referentes às funções trigonométricas, aqui se entendendo que, quando se escreve $f(x) = sen(x)$, usualmente a variável x corresponde à medida do arco da circunferência tomada em radianos. As funções trigonométricas seno e cosseno também devem ser associadas aos fenômenos que apresentam comportamento periódico.

As Orientações Curriculares de Matemática para o Ensino Médio enfatizam que as fórmulas para $sen(a+b)$ e $cos(a + b)$ e as demais funções trigonométricas podem e devem ser colocadas em segundo plano, pois é essencial que o aluno aprenda significativamente as funções trigonométricas principais, priorizando desta forma, a qualidade e não a quantidade.

2.3. A Trigonometria no Currículo do Estado de São Paulo

O currículo básico para as escolas da Rede Estadual apresenta os princípios orientadores a fim de promover as competências indispensáveis ao enfrentamento dos desafios sociais, culturais e profissionais do mundo contemporâneo. Neste sentido os conteúdos de Matemática são considerados um meio para o desenvolvimento das competências de capacidade de expressão pessoal, de compreensão de fenômenos, de argumentação, de tomada de decisões, de problematização e enraizamento dos conteúdos estudados em diferentes contextos.

Segundo as orientações do Currículo todo o estudo da Trigonometria se enquadra nas relações de interdependência entre grandezas, desde as relações métricas no triângulo retângulo até as funções trigonométricas utilizadas para representar fenômenos periódicos. As funções trigonométricas nada mais são do que relações de interdependência que generalizam a ideia de proporcionalidade fundadora das noções de seno, cosseno e tangente, entre outras (SÃO PAULO, 2010, p. 44).

São apresentados os conteúdos referentes ao tema Trigonometria, com as respectivas habilidades a serem desenvolvidas ao longo das séries do Ensino Médio.

1ª série do Ensino Médio (4º bimestre)

Conteúdos: Razões Trigonométricas nos triângulos retângulos e resolução de triângulos não retângulos: Lei dos Senos e dos Cossenos.

- Saber usar de modo sistemático relações métricas fundamentais entre os elementos de triângulos retângulos, em diferentes contextos.
- Conhecer algumas relações métricas fundamentais em triângulos não retângulos, especialmente a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos.

2ª série do Ensino Médio (1º bimestre)

Conteúdo: Fenômenos Periódicos, Funções Trigonométricas, Equações e Inequações, Adição de Arcos.

- Reconhecer a periodicidade presente em alguns fenômenos naturais, associando-a às funções trigonométricas básicas.
- Conhecer as principais características das funções trigonométricas básicas (especialmente o seno, o cosseno e a tangente), sabendo construir seus gráficos e

aplicá-las em diversos contextos.

- Saber construir o gráfico de funções trigonométricas como $f(x) = a.sen(bx)+c$ a partir do gráfico de $f(x) = sen\ x$, compreendendo o significado das transformações associadas aos coeficientes a, b e c.
- Saber resolver equações e inequações trigonométricas simples, compreendendo o significado das soluções obtidas, em diferentes contextos.

3ª série do Ensino Médio (3º bimestre)

Conteúdo: Gráficos: funções trigonométricas, exponencial, logarítmica e polinomiais.

- Saber usar de modo sistemático as funções para caracterizar relações de interdependência, reconhecendo as funções de 1º e 2º graus, seno, cosseno, tangente, exponencial e logarítmica, com suas propriedades características.

2.3.1. Caderno do Professor de Matemática

O Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2014) na sua nova edição (2014-2017), foi criado pelo programa São Paulo Faz Escola e traz como base o conteúdo do Currículo Oficial do Estado de São Paulo. Os cadernos apresentam orientações didático-pedagógicas que possibilitam o desenvolvimento de competências e habilidades necessárias à melhoria da qualidade do ensino.

1ª Série do Ensino Médio

Na segunda metade do volume 2 são trabalhadas as razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente, de forma contextualizada em diferentes situações práticas.

A partir da ideia de associação da inclinação de uma rampa com a proporcionalidade nas razões entre os catetos de triângulos semelhantes, é consolidada a ideia de tangente; já as tabelas de cordas de Hiparco de Niceia (século II a. C.), usadas no cálculo de distâncias astronômicas, estimulam a aprofundar o estudo das funções seno e secante de um ângulo. Com a tangente, o seno e o secante são apresentadas o cosseno, a cossecante e a cotangente, que não passam das três primeiras funções aplicadas ao ângulo complementar de um ângulo dado. Posteriormente as seis razões trigonométricas terão o seu significado estendido para ângulos maiores de 90°. A partir da articulação entre a Geometria e a

Trigonometria o caderno apresenta o estudo das regularidades na inscrição e na circunscrição de polígonos e completa o volume com o estudo da Trigonometria nos triângulos não retângulos: Lei dos Senos e Lei dos Cossenos.

2ª Série do ensino Médio

O volume 1 do Caderno do Professor da segunda série do Ensino Médio, traz algumas orientações quanto ao estudo da Trigonometria, que apresenta a importante característica de estabelecer ligação, entre o eixo Geometria e Medidas e o eixo Número e Funções.

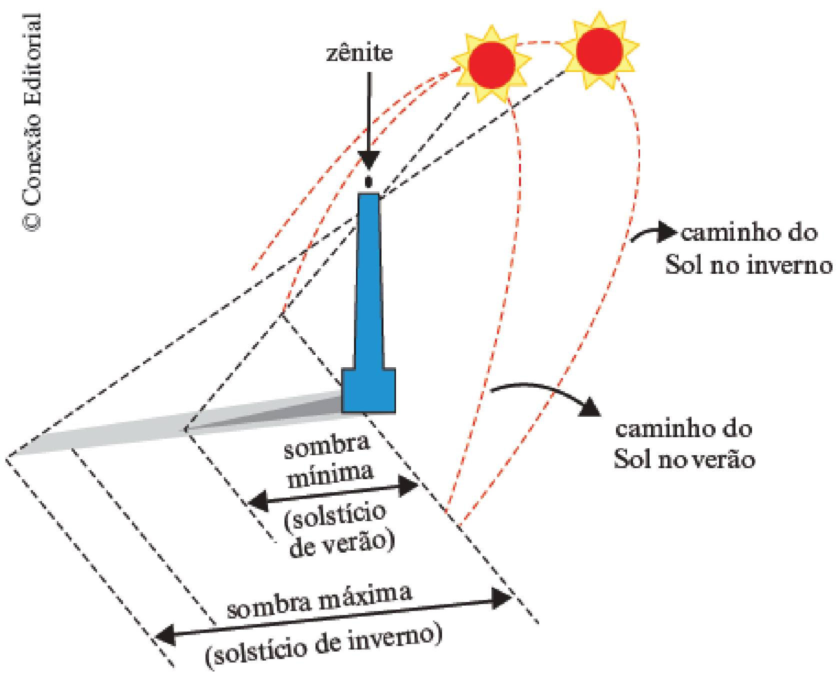
No eixo Geometria e Medidas a proporcionalidade é o elemento norteador, no início do estudo das funções trigonométricas é fundamental que a base conceitual da proporcionalidade esteja consolidada. Enquanto que o eixo Número e Funções têm por trás a ideia de periodicidade de determinados fenômenos e a possibilidade de modelá-los por intermédio de uma equação. São apresentadas quatro situações de aprendizagem a serem contempladas.

Situação de Aprendizagem 1 - O reconhecimento da periodicidade

Esta situação de aprendizagem propõe a modelagem de dois fenômenos periódicos: o movimento aparente do sol e o comprimento das sombras. O desenvolvimento desta situação de aprendizagem possibilita o reconhecimento da regularidade dos fenômenos envolvidos e a representação da variação observada através de gráficos cartesianos.

Inicialmente é apresentado aos alunos um pequeno texto sobre o movimento aparente do sol e o comprimento da sombra de uma estaca fincada verticalmente no solo, durante a passagem dos dias do ano.

Figura 6 - O movimento aparente do Sol e o comprimento das sombras.

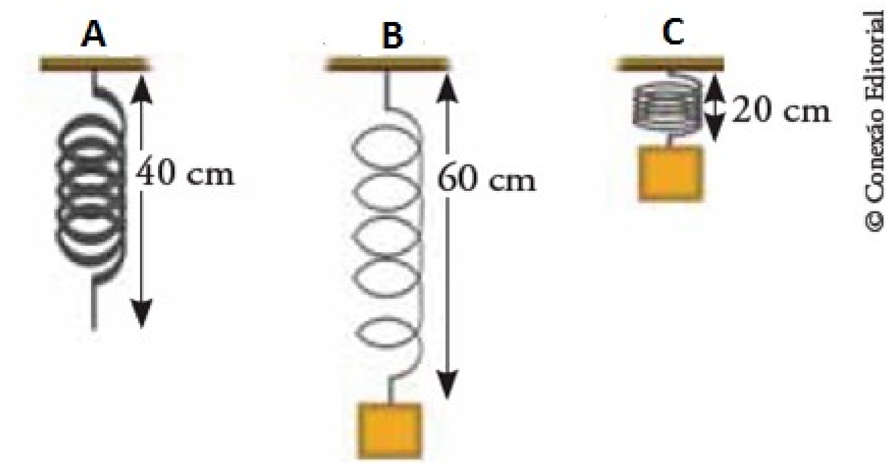


Fonte: SÃO PAULO, 2014, p. 14.

Em seguida os alunos devem desenhar um gráfico que represente o comprimento da sombra da estaca durante dois anos, sendo 60 cm o comprimento máximo da sombra e 30 cm o comprimento mínimo. Logo após são definidos os conceitos de amplitude, período e imagem do gráfico de uma função periódica, seguido de exercícios onde a proposta é construir um novo gráfico considerando que o comprimento da sombra da estaca é positivo pela manhã e negativo à tarde e diversos exercícios para determinar período, amplitude e imagem de funções periódicas. Quase finalizando a situação de aprendizagem é apresentada uma situação-problema onde é possível modelar a oscilação de uma mola a uma função periódica.

Atividade 6: Uma mola tem comprimento de 40 cm e está com uma de suas extremidades presa ao teto (A). Na extremidade livre da mola é colocado um bloco de metal, de tal maneira que a mola estique até que seu comprimento total atinja 60 cm (B). Se a mola for colocada a oscilar, seu comprimento variará entre um valor máximo e um valor mínimo (C).

Figura 7 - Posições relativas ao sistema massa-mola em três instantes.



Fonte: SÃO PAULO, 2014, p. 21 (adaptada pela pesquisadora).

a) Desenhe um gráfico para representar a variação no comprimento da mola, em 4 oscilações, começando pelo momento em que a mola está com seu comprimento mínimo. Lance os valores do comprimento no eixo vertical e coloque os valores de tempo no eixo horizontal, supondo que cada oscilação completa da mola demore 2 segundos. Complete:

Período:

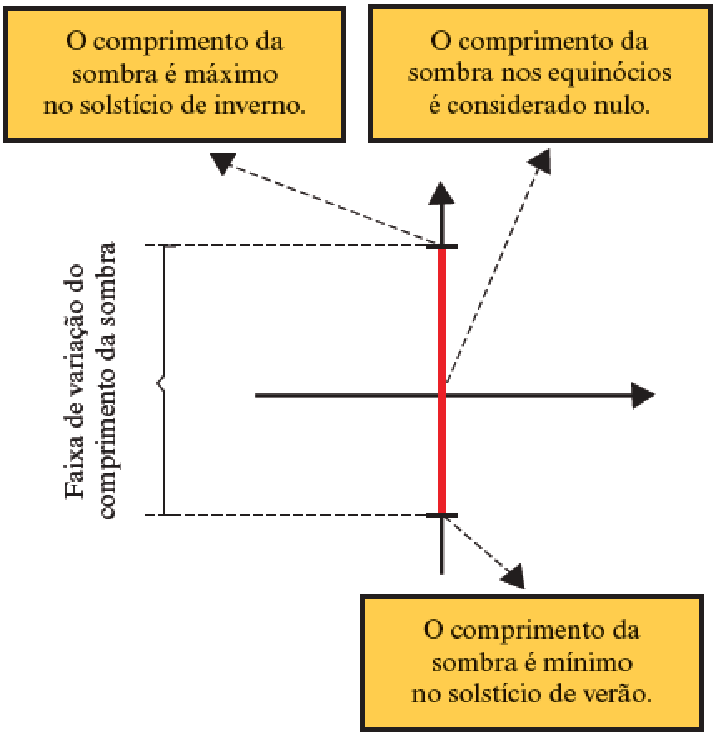
Amplitude:

No desenvolvimento desta situação de aprendizagem o professor pode sensibilizar os alunos quanto a observação de fenômenos periódicos que estão a sua volta e que podem ser representados por gráficos cartesianos que possuem, em muitos casos, o formato de uma onda.

Situação de Aprendizagem 2 - A periodicidade e o modelo da circunferência trigonométrica.

Nesta situação de aprendizagem é apresentado um modelo em que um ponto gira em torno de uma circunferência, dando a ideia do movimento aparente do Sol durante a passagem dos dias do ano. Essa associação permite ao aluno relacionar as razões trigonométricas do triângulo retângulo às medidas das projeções do ponto sobre os eixos coordenados e a possibilidade de esboçar situações reais por meio de equações que envolvam senos e cossenos. Espera-se que o aluno reconheça a circunferência trigonométrica de raio igual a 1 e identifique as extremidades finais de arcos com medidas entre 0º e 360º, em graus e posteriormente em radianos e associem arcos de medidas maiores que 360º aos côngruos na primeira determinação positiva. A apresentação dos gráficos das funções y=senx e y=cosx é apresentada concomitantemente ao estudo das equações e inequações, pois desta forma permite associações entre a periodicidade observada e o modelo matemático escolhido, permitindo que o estudo se desenvolva sobre contextos significativos para o aluno.

Figura 8 - Faixa de variação do comprimento da sombra.



Fonte: SÃO PAULO, 2014, p. 24.

Situação de Aprendizagem 3 – Gráficos de funções periódicas envolvendo senos e cossenos.

O objetivo desta situação de aprendizagem é fazer com que os alunos saibam desenhar o gráfico de uma função que envolva seno ou cosseno com base na sua representação algébrica, e por outro lado, que consigam escrever a sentença de um gráfico. Para isto são propostas situações para que os alunos construam os gráficos e reconheçam as propriedades das funções do tipo $y = C + A sen(Bx)$ e $y = C + A cos(Bx)$, comparando-as com as funções elementares $y = sen(x)$ e $y = cos(x)$ e avaliando as transformações sofridas com a inclusão das constantes A, B e C nas funções elementares.

Nesta situação de aprendizagem também é proposta a utilização de softwares livres como o *Graphmatica* ou o *Winplot* para desenhar gráficos de funções periódicas.

Situação de Aprendizagem 4 – Equações Trigonométricas.

O objetivo desta situação de aprendizagem é fazer com que os alunos entrem em contato com situações reais que implicam a resolução de equações trigonométricas. Foram selecionados quatro fenômenos periódicos possíveis de serem modelados por sentenças algébricas, o cálculo do período de claridade de uma cidade, a periodicidade da pressão sanguínea, a variação da temperatura e o fenômeno das marés. Segundo as orientações do Currículo, os gráficos e as equações envolvendo tangente e cotangente e algumas transformações trigonométricas especialmente a adição de arcos, não foram abordados neste caderno, mas merecem destaque no planejamento didático-pedagógico do professor.

3ª Série do ensino Médio

O Caderno do Professor, volume 2 da terceira série do Ensino Médio, explora novamente as funções trigonométricas desta vez inseridas no estudo geral das funções.

Situação de Aprendizagem 1 – Grandezas, interdependência: um panorama sobre funções.

A situação de aprendizagem 1, apresenta um panorama sobre funções, destacando as relações de interdependência entre grandezas. As funções trigonométricas são abordadas novamente, onde as situações que se referem a fenômenos periódicos apresentam grandezas que se repetem a cada novo período.

Situação de Aprendizagem 2 – Construção de Gráficos: Um Olhar “Funcional”.

Esta situação de aprendizagem, apresenta uma nova estratégia para a construção de gráficos das diversas funções, envolvendo translações, ampliações e reduções, como por exemplo a construção do gráfico de $f(x)=2 + sen(x)$, onde haverá um deslocamento do gráfico de $y = sen(x)$, duas unidades para cima na direção do eixo das ordenadas. Já na construção do gráfico de $f(x) = 3sen(x)$, a amplitude aumentará de 1 para 3 unidades, com os valores de $f(x)$ oscilando entre +3 e -3. Muitas outras construções são apresentadas nesta situação de aprendizagem. O que se espera é que o aluno seja capaz de decompor uma função em outras mais simples se valendo de transformações como deslocamentos verticais para cima e para baixo, deslocamentos horizontais para a direita e para a esquerda, inversões de sentidos, entre outras.

Situação de Aprendizagem 3 – As Três Formas Básicas de Crescimento ou Decrescimento, a Variação e a Variação da Variação.

A situação de aprendizagem 3 trata das formas básicas de crescimento e decrescimento de funções. Uma das atividades propostas é a construção dos gráficos das funções $f(x) = senx$ e $g(x) = cosx$ entre $x = 0$ e $x = 2\pi$ no mesmo sistema de coordenadas. Em seguida os alunos deverão identificar os intervalos em que $f(x)$ e $g(x)$ são crescentes e os intervalos em que são decrescentes, para então comparar os gráficos observando que os valores máximos de uma das funções ocorrem nos pontos em que a outra se anula e vice-versa e que as concavidades de $f(x)$ mudam nos pontos em que $g(x)$ assume valores extremos (máximo ou mínimo) e vice-versa em relação a g(x).

Neste volume 2 da 3ª série do Ensino Médio a retomada do tema Funções, tem o sentido de uma revisão e de uma complementação, com a utilização da linguagem e dos recursos instrumentais que as funções propiciam no tratamento e na modelagem de fenômenos naturais em diferentes contextos.

2.4. O ensino da Trigonometria nos livros didáticos

Através do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), o Ministério da Educação (MEC) distribui coleções de livros didáticos aos alunos da educação básica. Com o objetivo de subsidiar o trabalho pedagógico dos professores, o MEC faz uma avaliação das obras e após aprovação, publica o Guia de Livros Didáticos (BRASIL, 2014) com resenhas das coleções consideradas aprovadas, segundo critérios de avaliação estabelecidos em edital. Cabe aos professores das escolas a tarefa de escolher as coleções de livros que melhor contribuirão para a formação de seus alunos do Ensino Médio.

A seguir é apresentada uma análise de como o conteúdo de Trigonometria vem sendo abordado nas seis coleções de Matemática aprovadas pelo PNLD 2015 e a opção metodológica predominante em cada coleção.

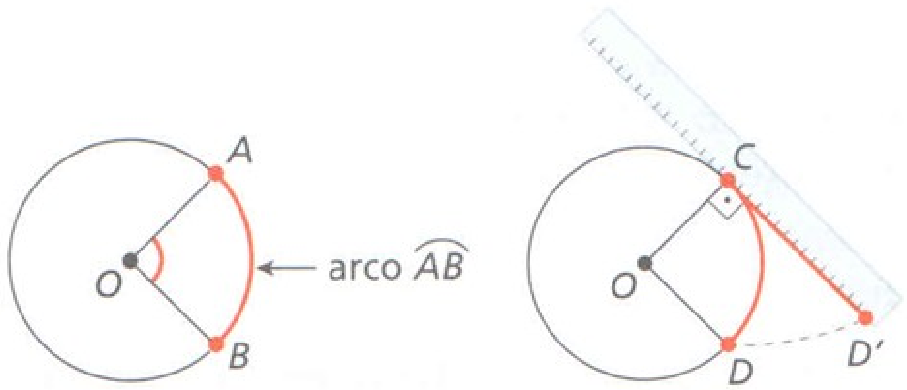
2.4.1. Conexões com a Matemática

Esta coleção de Fábio Martins de Leonardo da Editora Moderna (LEONARDO, 2013) aborda a trigonometria no triângulo retângulo no volume 1. No volume 2 são abordados os conteúdos da Trigonometria na circunferência e num triângulo qualquer (resolução de triângulos).

O capítulo 1 do segundo volume inicia definindo medida e comprimento de arcos e diferenciando medida angular de medida linear.

> Sempre que nos referirmos à medida de um arco, consideraremos, sua medida angular e usaremos como unidade de medida o grau ou o radiano. Quando nos referirmos ao seu comprimento, consideraremos sua medida linear e, nesse caso, usaremos unidades lineares de medida, como o metro, o centímetro, o milímetro etc. (LEONARDO, 2013, p. 9).

Figura 9 - Medida angular e medida linear de um arco de circunferência.



Fonte: LEONARDO, 2013, p. 9.

Na margem esquerda da página 10 do capítulo 1, o autor sugere ao professor a utilização de um software de Geometria interativa para realizar com os alunos uma atividade para verificar experimentalmente que a razão entre o comprimento C de uma circunferência e o seu diâmetro d é constante e aproximadamente igual a 3,14.

Logo após o autor define o grau e o radiano como unidades de medida de arcos e ângulos; a circunferência trigonométrica; o seno, cosseno e tangente de um arco. Antes de definir a relação fundamental da Trigonometria, o livro orienta sobre o uso de uma calculadora científica para determinar razões trigonométricas. Em seguida são apresentadas as equações e inequações trigonométricas e alguns exercícios propostos. O capítulo é finalizado com a Trigonometria em um triângulo qualquer e vários exercícios complementares.

O segundo capítulo apresenta as funções periódicas seno, cosseno e tangente e as funções inversas: arco seno, arco cosseno e arco tangente. São construídos alguns gráficos para analisar as alterações de domínio, imagem e amplitude que os parâmetros causam nas funções. Além de exercícios propostos de construção e análise de gráficos, é apresentado um exercício resolvido, R10 (LEONARDO, 2013, p.59), onde a função $f(x)=2+2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ foi construída passo a passo com o auxílio de um software de construção de gráficos, com o objetivo de mostrar as mudanças causadas por cada parâmetro. No último tópico do capítulo são apresentadas algumas aplicações das funções trigonométricas na modelagem matemática de fenômenos naturais periódicos. O exercício resolvido R13 (LEONARDO, 2013, p. 66) apresenta a expressão $h(t)=2+0{,}5\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ onde *t* é o tempo medido em horas e *h* é a altura da maré em certa cidade litorânea. E o exercício resolvido R14 (LEONARDO, 2013, p. 67) permite um trabalho interdisciplinar com Física, pois propõe encontrar uma equação para uma tensão elétrica produzida por um dispositivo. Na seção “Pesquisa e ação” (LEONARDO, 2013, p. 71) é sugerido um trabalho em grupo onde os alunos devem escolher um fenômeno periódico e produzir um vídeo documentário para compartilhar com os colegas. Entre os temas sugeridos para a realização do trabalho estão os fenômenos relacionados a Acústica, Astronomia, ciclo das marés, ciclo dos seres humanos, a migração das aves e a piracema dos peixes. A seção “Resolução comentada” (LEONARDO, 2013, p. 72-73) apresenta uma situação-problema envolvendo um determinado ciclo predador-presa e a seção “Compreensão de texto” (LEONARDO, 2013, p. 74-75) comenta sobre as ondas sonoras.

O terceiro capítulo intitulado “Complementos e aprofundamento” apresenta as demais razões trigonométricas: secante, cossecante e cotangente, as relações e identidades trigonométricas para estas razões trigonométricas, as equações e inequações, a adição de arcos e as fórmulas para arcos duplos.

Analisando algumas características do volume 2, quanto a metodologia de ensino e aprendizagem adotada no conteúdo de Trigonometria na circunferência, observa-se que são apresentadas algumas questões contextualizadas nas práticas sociais e em outras áreas do conhecimento. A modelagem matemática é explorada em algumas explanações teóricas e em alguns exercícios resolvidos e propostos, no entanto, o Guia de Livros Didáticos do PNLD 2015, ressalta que “... não se esclarece que as funções trigonométricas são modelos abstratos que expressam as oscilações nos fenômenos reais apenas de modo aproximado” (BRASIL, 2014, p.26). A sistematização dos conceitos é realizada por meio de atividades em que predominam o uso de técnicas e procedimentos muito detalhados. A respeito disso o Guia de livros didáticos do PNLD 2015, pondera que o estudo das funções trigonométricas inclui boas escolhas conceituais, mas é muito extenso e detalhado, o que pode ser desestimulante para os alunos (BRASIL, 2014, p.26). Um aspecto positivo da obra é o incentivo ao uso de softwares matemáticos que são explorados em dois momentos: para se descobrir o valor de π e para a construção de gráficos de funções periódicas. Já a utilização da calculadora é sugerida apenas para determinar as razões trigonométricas. Neste aspecto, o Guia de Livros Didáticos do PNLD 2015, enfatiza que "... a prioridade é para os aspectos técnicos em detrimento dos pedagógicos, o que pouco contribui para a elaboração ou validação de conjecturas por parte dos alunos (BRASIL, 2014, p. 27). No volume 2 da coleção, a história da Matemática não é abordada no que se refere aos conteúdos da Trigonometria. No entanto, o maior diferencial desta coleção é o uso da tecnologia. Até mesmo a seção "Pesquisa e ação" ao final de alguns capítulos propõe uma pesquisa bem elaborada com incentivo ao uso de mídias para a socialização do trabalho.

Tabela 1 - Conexões com a Matemática – Quantidade de páginas relacionadas ao conteúdo de Trigonometria.

	Número de páginas		
	Total	Relacionadas à Trigonometria	%
Volume 1	295	18	6,1
Volume 2	319	85	26,6

FONTE: Elaborada pela pesquisadora.

Tabela 2 - Conexões com a Matemática - Características da abordagem da Trigonometria na Circunferência.

CARACTERÍSTICAS	QUANTIDADE
Contextualizações presente nas explanações teóricas e nos exercícios propostos e resolvidos.	25
Modelagem matemática presente nas explanações teóricas e nos exercícios propostos e resolvidos.	18
Atividades com uso da tecnologia	3
Contextualizações feitas com base na História da Matemática	0
Leitura e análise de textos que relacionam a Trigonometria a situações do cotidiano	1
Situações-problema desafiadoras	2
Desenvolvimento de experimentos para a introdução do conceito de funções periódicas.	0
Trabalhos em equipe.	1

FONTE: Elaborada pela pesquisadora.

Ressalta-se que em todas as tabelas referentes às características dos livros do PNLD quanto ao conteúdo de funções trigonométricas, existem redundâncias em alguns itens, uma vez que atividades sobre modelagem necessariamente são contextualizadas. Assim como os textos contextualizados que geralmente trazem situações envolvendo a modelagem de fenômenos periódicos bem como as situações-problema que se referem ao cotidiano.

2.4.2. Matemática: Contexto & Aplicações

Esta coleção da Editora Ática cujo autor é Luiz Roberto Dante, aborda no volume 1 a Trigonometria no triângulo retângulo: semelhança de triângulos, relações métricas e trigonométricas.

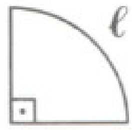
Na primeira unidade do segundo volume, os conteúdos abordados são: Trigonometria: resolução de triângulos quaisquer: lei dos senos e lei dos cossenos. Conceitos trigonométricos básicos: arcos e ângulos, circunferência trigonométrica, arcos côngruos. Funções trigonométricas: seno, cosseno, tangente, redução ao primeiro quadrante, ideia geométrica de tangente. Relações trigonométricas fundamentais: fórmulas da adição e subtração de arcos, fórmulas do arco duplo e do arco metade, equações trigonométricas.

O capítulo 2 do segundo volume da coleção traz o tema “Conceitos trigonométricos básicos”. Inicialmente é apresentado um texto que proporciona uma oportunidade do aluno entrar em contato com a história da Matemática, conhecendo como se deu o surgimento da Trigonometria. Em seguida são definidos os conceitos de arco, ângulo central e o comprimento de uma circunferência e imediatamente é proposta a seguinte atividade:

> Junte-se com um colega e respondam: se o comprimento de uma circunferência é 2π cm, qual seria o comprimento de um arco de:

Figura 10 - Relação entre medida de arco e ângulo central.

a) 180° (semicircunferência)? 

b) 90°(quadrante)? 

c) 120°? 

d) 240°? 

e) 60°? 

f) 30°? 

g) 270º? 

Fonte: DANTE, 2013, p.27 (adaptada pela pesquisadora).

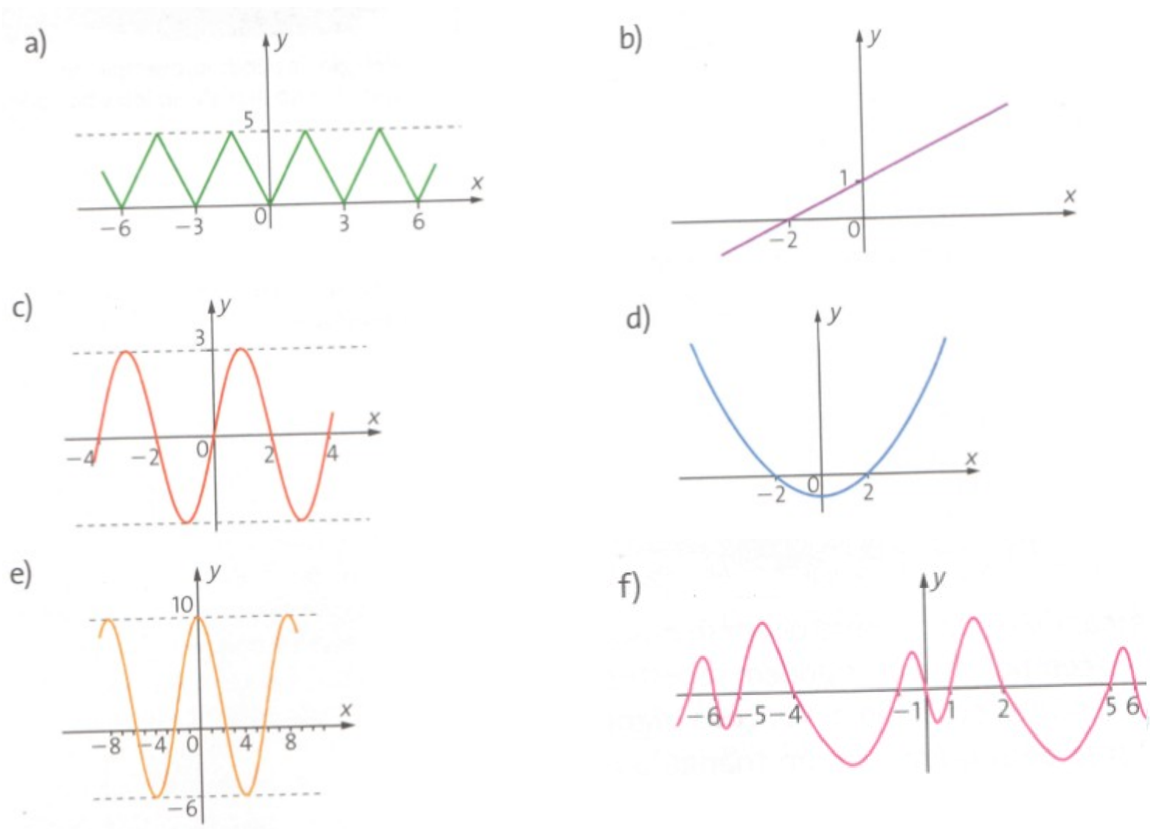
A nota de rodapé do livro do professor, comenta que “o objetivo desta atividade é que os alunos percebam que o comprimento do arco é diretamente proporcional à medida do arco (ângulo central)” (DANTE, 2013, P.27). Essa sistematização foi feita de modo muito precoce, pois quando é colocado que o comprimento da circunferência é 2π cm está implícito que o raio é 1, mas isso não ficou claro para o aluno, visto que a conceitualização de circunferência trigonométrica somente será feita posteriormente. Em seguida são apresentados os conceitos de grau e radiano como unidades para medir arcos de circunferência. A conceitualização de radiano foi enfatizada numa abordagem muito técnica, o que dificulta o entendimento do aluno. Em compensação o livro traz a sugestão de fazer as principais conversões entre grau e radiano mentalmente, sem recorrer à regra de três, o que torna o procedimento muito mais simples e agiliza as conversões. Em seguida são apresentadas as conceitualizações de circunferência trigonométrica e arcos côngruos, alguns exercícios resolvidos passo a passo e outros propostos.

No terceiro capítulo são apresentadas as funções trigonométricas associando-as ao movimento oscilatório do pêndulo de um relógio e logo em seguida o livro traz a seguinte atividade:

> Formem duplas com seus colegas, leiam o texto a seguir e faça o que se pede. Um fenômeno periódico é algo que se repete da mesma maneira, em intervalos regulares. A sequência dos dias da semana (segunda, terça, ..., sábado, domingo, segunda,

terça, ...) e dos meses do ano (janeiro, fevereiro, ..., novembro, dezembro, janeiro, ...) são periódicas. No caso dos dias da semana o período é de 7 dias, no dos meses do ano o período é de 12 meses. As funções também podem ser periódicas. Observem os gráficos das funções a seguir e tentem identificar quais representam funções periódicas. Nesse caso, qual é o período?

Figura 11 - Gráficos de funções.



Fonte: DANTE, 2013, p.36.

A atividade é importante para que os alunos consigam identificar a periodicidade de uma função, no entanto em nenhum momento são mencionadas as amplitudes das funções periódicas.

Neste mesmo capítulo são definidas as ideias de seno, cosseno e tangente de um número real, os valores notáveis do seno e do cosseno, a redução ao primeiro quadrante e os arcos maiores do que 360°. Após a apresentação de alguns poucos exercícios, o livro faz um estudo da função seno e cosseno, com a construção dos gráficos e a variação de sinal. Mais uma vez é reforçado o conceito de período, sem mencionar o conceito de amplitude.

Este capítulo traz uma observação bastante interessante de que a cossenoide não é uma nova curva, e sim uma senoide transladada π/2 unidade para a direita, fazendo com que a maioria dos aspectos relevantes da função cosseno seja a mesma da função seno, como:

domínio, imagem, período e o fato das duas funções não serem nem injetivas e nem sobrejetivas. Finaliza essa parte afirmando que as senoides são excelentes para descrever fenômenos periódicos e a maneira mais básica de associá-las a um fenômeno periódico é imaginar um ponto percorrendo toda a circunferência trigonométrica, sendo que a projeção desse ponto no eixo dos senos ou no eixo dos cossenos descreve o movimento periódico através de uma equação.

O autor define as funções senoidais do seguinte modo:

> Dessa forma podemos associar a qualquer movimento periódico uma função senoidal do tipo $f(x)=a+b.sen(cx+d)$ ou $f(x)=a+b.\cos(cx+d)$, cuja imagem é dada por $[a-|b|, a+|b|]$, e cujo período é dado por $\frac{2\pi}{|c|}$. Na descrição dos fenômenos periódicos, em geral se opta por valores b e c positivos, de forma que a imagem da senoide nesses casos passa a ser $[a-b;a+b]$ e o período fica sendo $\frac{2\pi}{|c|}$. (DANTE, 2013, p.49)

Após essa sistematização bastante complexa para o aluno, o autor apresenta um exercício resolvido com o objetivo de construir e analisar o gráfico da função *f(x)= 3 . sen x* em relação ao gráfico de *f(x) = sen x*. Há também um outro exercício proposto em que o fenômeno das marés é descrito através de uma senoide. Ao final do capítulo há uma sessão bastante interessante intitulada Matemática e Tecnologia, com orientações passo a passo para que o aluno instale o software GeoGebra. A proposta é a de que o aluno construa o gráfico da função *f(x) = sen x* e o gráfico da função *f(x) = a + b.sen (cx + d)*, com a opção de observar o que acontece com os gráficos quando se altera os valores dos coeficientes *a*, *b*, *c* e *d* dessas funções.

O capítulo 4 apresenta os seguintes conteúdos: relações fundamentais, identidades trigonométricas, fórmulas da adição, do arco duplo e do arco metade e as equações trigonométricas. Ao final do capítulo o livro traz uma série de questões contextualizadas de vestibulares e do Enem envolvendo alguns conteúdos da Trigonometria.

Segundo o Guia de Livros Didáticos PNLD 2015, a coleção “Contexto e aplicações” de Luiz Roberto Dante (DANTE, 2013), faz a sistematização dos conceitos de forma muito precoce, o que pode prejudicar a autonomia intelectual do aluno (BRASIL, 2014, p. 30). Este fato é percebido na página 27 do volume 2, na atividade para encontrar o comprimento de arcos de uma circunferência de comprimento 2π cm, sem ao menos definir circunferência trigonométrica. Em relação às funções trigonométricas o Guia de Livros

Didáticos PNLD 2015 ressalta que:

> Quanto às funções trigonométricas, destaca-se positivamente a atenção dedicada às funções obtidas por meio de mudanças de variável em que se toma como base as funções seno ou cosseno. Sabe-se que tais mudanças de variável fornecem famílias bem gerais de funções periódicas. Contudo, não se alerta para o fato de que essas funções são modelos matemáticos importantes, porém apenas aproximados dos fenômenos naturais (BRASIL, 2014, p. 34).

De fato, a seção “Matemática e tecnologia” (DANTE, 2013 p. 52) sugere a utilização do software livre GeoGebra para se perceber os efeitos causados pelos parâmetros a, b, c e d nos gráficos das funções seno e cosseno.

A contextualização dos conteúdos é apresentada com mais frequência nos exercícios resolvidos sendo pouco explorada nos exercícios propostos, entretanto os capítulos 2, 3 e 4 incluem uma seção específica em que se buscam relacionar os conteúdos estudados a outras áreas do conhecimento. A esse respeito o Guia de Livros Didáticos do PNLD 2015, enfatiza que:

> No que compete à metodologia de ensino e aprendizagem, os conteúdos são trabalhados por meio de situações contextualizadas, seguidas de explanações teóricas e de exercícios resolvidos ou propostos. Entretanto, as contextualizações sugeridas nas apresentações dos conteúdos são poucos utilizadas na sequência do texto. Este se caracteriza pela formalização precoce dos conceitos, o que limita a possibilidade de o aluno estabelecer suas próprias conclusões (BRASIL, 2014, p. 36).

No que se refere a História da Matemática, ela é abordada para iniciar um assunto, no entanto esse contexto não é utilizado no desenvolvimento dos conceitos. O maior diferencial desta obra são as seções “Pensando no ENEM”, “Vestibulares de Norte a Sul” e ainda no final do livro a seção “Caiu no ENEM”, onde são apresentadas a maioria das questões contextualizadas.

Tabela 3 - Contexto e Aplicações– Quantidade de páginas relacionadas ao conteúdo de Trigonometria.

	Número de páginas		
	Total	Relacionadas à Trigonometria	%
Volume 1	296	25	8,4
Volume 2	320	64	20

FONTE: Elaborada pela pesquisadora.

Tabela 4 - Contexto e Aplicações - Características da abordagem da Trigonometria na Circunferência.

CARACTERÍSTICAS	QUANTIDADE
Contextualizações presente nas explanações teóricas e nos exercícios propostos e resolvidos.	34
Modelagem matemática presente nas explanações teóricas e nos exercícios propostos e resolvidos.	18
Atividades com uso da tecnologia	1
Contextualizações feitas com base na História da Matemática	2
Leitura e análise de textos que relacionam a Trigonometria a situações do cotidiano	3
Situações-problema desafiadoras	0
Desenvolvimento de experimentos para a introdução do conceito de funções periódicas.	0
Trabalhos em equipe.	0

FONTE: Elaborada pela pesquisadora.

2.4.3. Matemática Paiva

A coleção Matemática Paiva da Editora Moderna, de autoria de Manoel Paiva, aborda a Trigonometria somente no volume 2. No primeiro capítulo do segundo volume é apresentada a “Trigonometria no triângulo retângulo” e no segundo capítulo a “Circunferência trigonométrica: seno e cosseno”. Na página de abertura do capítulo 2 é apresentado um pequeno texto associando a órbita circular de um satélite ao redor da Terra a um sistema cartesiano, porém em todo o desenvolvimento do capítulo, essa situação não foi mais explorada. Nesse capítulo foram abordados os seguintes conteúdos: unidades de medidas de arcos e ângulos, circunferência trigonométrica, seno e cosseno de um arco trigonométrico, redução ao primeiro quadrante, relação fundamental da Trigonometria, equações e inequações trigonométricas. Os conteúdos foram apresentados através de explanações teóricas e exemplos, seguidos de problemas resolvidos e de questões propostas. O capítulo se encerra com uma seção denominada “Matemática sem fronteiras” (PAIVA, 2013, p. 45), que traz um texto sobre as distâncias no sistema solar e algumas questões sobre o tema.

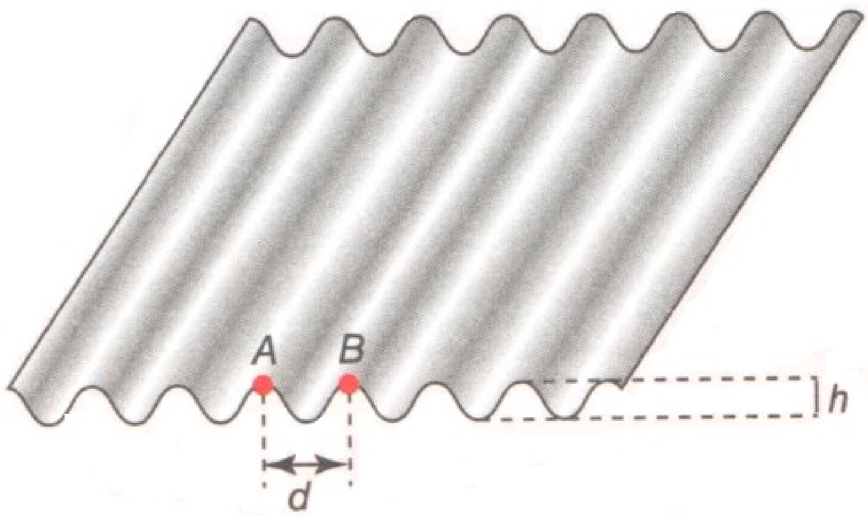
O conteúdo do terceiro capítulo é a tangente e as outras razões trigonométricas: secante, cossecante e cotangente. O capítulo inicia apresentando uma situação-problema envolvendo uma equação trigonométrica, que é resolvida na página 52. Na finalização do capítulo a seção “Matemática sem fronteiras” (PAIVA, 2013, p. 59) comenta sobre a utilização do teodolito.

O capítulo quatro sobre a adição de arcos e arcos duplos, inicia apresentando um problema para encontrar a distância entre um astronauta e a Terra. As definições de seno, cosseno e tangente da soma de arcos e do arco duplo são acompanhadas de exercícios resolvidos e propostos. Neste capítulo a seção “Matemática sem fronteiras” traz um texto sobre “A paralaxe estelar” (PAIVA, 2013, p. 69).

Somente no capítulo cinco é que são abordadas as funções trigonométricas e a resolução de triângulos. O texto de abertura do capítulo denominado “Discotecagem” (PAIVA, 2013, p. 70) explica como o DJ (*Disc Jockey*) controla o movimento periódico dos vinis e a velocidade das batidas das músicas.

Em seguida são apresentadas as funções *f(x) = sen x* e *g(x) = cos x*, para depois mencionar os movimentos periódicos, citando como exemplos a oscilação de um pêndulo, o movimento de um pistão de motor e a amplitude das marés. Entre os exercícios propostos há um bastante interessante sobre uma telha ondulada cujo perfil pode ser descrito pela função $f(x)=5\cos\frac{x}{2}$, onde *x* e *f(x)* indicam medidas em centímetros. Pede-se para calcular as medidas *h* e *d* indicadas na figura, considerando que A e B são cristas de ondas.

Figura 12 - Perfil de uma telha ondulada.



Fonte: PAIVA, 2013, p. 78

Após a apresentação da função *h(x) = tg x*, o último conteúdo abordado é a resolução de triângulos. Neste capítulo a seção “Roteiro de trabalho” (PAIVA, 2013, p. 88) propõe o uso de um software de construção de gráficos para analisar transformações nas funções seno e cosseno. A seção “Matemática sem fronteiras” (PAIVA, 2013, p. 91) comenta sobre a periodicidade do ciclo respiratório e propõe algumas atividades. Finalizando o capítulo é proposto um trabalho em equipe bastante interessante sobre fenômenos periódicos.

A coleção Matemática Paiva (PAIVA, 2013) explora bastante as conexões da matemática com outras áreas do conhecimento, procurando relacionar os conteúdos com situações significativas. Todos os capítulos são iniciados com textos e imagens relacionados ao conteúdo a ser trabalhado, acompanhados de discussões sobre o tema. A finalização de cada capítulo se dá com a seção “Matemática sem fronteiras” que traz textos interessantes relacionando o conteúdo trabalhado com aplicações da Matemática. Além disso a seção “Análise da resolução” apresenta a resolução incorreta de uma questão e solicita-se do aluno a identificação dos erros e sua correção e as seções “Roteiro de trabalho” e “Trabalho em equipe” apresentam sugestões de trabalhos em grupo, o que promove a interação entre os alunos e entre estes e o professor. Para o estudo das funções trigonométricas as atividades para exploração do computador e da calculadora são insuficientes.

Tabela 5 - Matemática Paiva – Quantidade de páginas relacionadas ao conteúdo de Trigonometria.

	Número de páginas		
	Total	Relacionadas à Trigonometria	%
Volume 1	304	0	0
Volume 2	320	87	27,18

FONTE: Elaborada pela pesquisadora.

Tabela 6 - Matemática Paiva - Características da abordagem da Trigonometria na Circunferência.

CARACTERÍSTICAS	**QUANTIDADE**
Contextualizações presente nas explanações teóricas e nos exercícios propostos e resolvidos.	44
Modelagem matemática presente nas explanações teóricas e nos exercícios propostos e resolvidos.	14
Atividades com uso da tecnologia	1
Contextualizações feitas com base na História da Matemática	1
Leitura e análise de textos que relacionam a Trigonometria a situações do cotidiano	5
Situações-problema desafiadoras	5
Desenvolvimento de experimentos para a introdução do conceito de funções periódicas.	0
Trabalhos em equipe.	5

FONTE: Elaborada pela pesquisadora.

2.4.4. Matemática: Ciência e Aplicações.

Nesta coleção de autoria de Iezzi et al. (2013), a Trigonometria no triângulo retângulo, é abordada no primeiro volume e dos dezesseis capítulos do segundo volume, cinco deles são dedicados à Trigonometria. O capítulo 1 sobre a Circunferência Trigonométrica, apresenta os conceitos de arcos e ângulos com suas unidades de medidas, e os números reais associados a pontos da circunferência trigonométrica. Ao final do capítulo a seção “Aplicações” (IEZZI et al, 2013, p. 20-21) traz um texto interessante com muitas ilustrações, explicando como o grego Eratóstenes conseguiu medir o comprimento da circunferência da Terra a partir das observações das sombras formadas pela luz solar. O segundo capítulo faz um estudo sobre as razões trigonométricas seno, cosseno, tangente, cotangente, cossecante e secante. Ao longo do capítulo há explicações sobre como usar a calculadora científica para calcular o seno e o cosseno de um arco qualquer, expresso em graus ou em radianos. O terceiro capítulo aborda a Trigonometria num triângulo qualquer e o quarto capítulo as Funções Trigonométricas, cuja introdução foi feita através do fenômeno periódico das marés, apresentando uma tabela onde constam as previsões para a maré alta e para a maré baixa durante três dias consecutivos de fevereiro de 2012, para o porto de Vitória, capital do Espírito Santo. Após definir arcos maiores que uma volta e propor alguns exercícios, as páginas 52 e 53 trazem dois exemplos de funções que apresentam comportamento periódico.

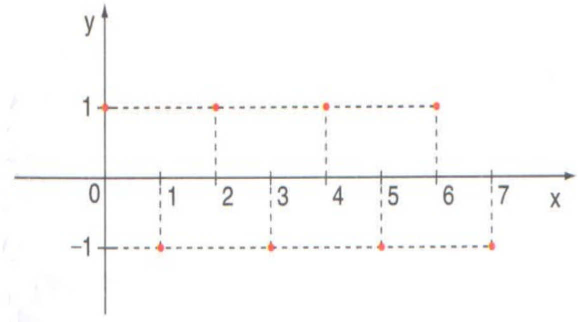
O exemplo 6, apresenta a função $f: N \longrightarrow Z$ definida pela lei $f(x) = (-1)^x$ e alguns valores que *f* assume à medida *x* que varia em *N*.

Figura 13 - Função definida pela lei $f(x) = (-1)^x$.

x	f(x)
0	1
1	−1
2	1
3	−1
4	1
5	−1
6	1
⋮	⋮

Fonte: IEZZI et al., 2013, p.52.

Figura 14 - Gráfico da função definida pela lei f(x) = $(-1)^x$.

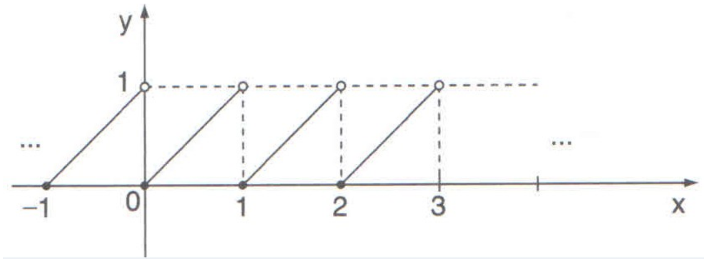


Fonte: IEZZI et al., 2013, p. 53.

Neste caso, quando *x* varia por duas unidades, o valor de *f(x)* se repete: *f(x) = f (x+2) = f (x+4) = f (x+6) = ...* O exemplo é bastante interessante, pois o aluno consegue perceber que o período da função é 2, tanto observando a tabela quanto o gráfico da função.

No exemplo 7, é apresentada a função $f: R \longrightarrow R$ definida por $f(x) = x - n$, em que *n* é o maior número inteiro que não supera *x* (ou seja, *n* é o maior número inteiro menor ou igual a *x*). Calculando alguns valores assumidos por *f* e observando o gráfico, o aluno percebe que o período da função é 1.

Figura 15 - Gráfico da função f(x) = x-n.



Fonte: IEZZI et al., 2013, p.53.

Nas atividades exploratório-investigativas descritas no capítulo 3 deste trabalho de pesquisa, também foram aplicados exercícios para descobrir o período de funções através da análise de tabelas ou gráficos.

Na página 60 do capítulo quatro, a seção “Aplicações” comenta sobre a trigonometria, a roda-gigante e os fenômenos periódicos, cuja altura *h* (em metros) da cadeira em relação ao solo a cada instante *t* (em segundos), é dada pela função $h(t) = 10 + 9 \cdot sen\left(t \cdot \frac{\pi}{60}\right)$. E na página 66 a seção “Aplicações” comenta sobre a trigonometria e o fenômeno das marés retomando o exemplo proposto na introdução do capítulo, onde a altura *h* da maré em metros em relação ao tempo *t* em horas, é dada pela função $h(t)=0{,}8+0{,}8\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$.

O capítulo 5 aborda as transformações trigonométricas da soma e diferença de dois arcos e as razões trigonométricas do arco duplo.

Na coleção Matemática Ciência e Aplicações de Iezzi et al. (2013), a contextualização é pouco explorada nos exercícios resolvidos e propostos. No entanto, as seções “Aplicações” apresentam textos que discutem apropriadamente o uso das noções matemáticas em outros contextos ou nas relações estabelecidas com a história da matemática, como é o caso das páginas 20 e 21 que apresentam um texto muito bem ilustrado contando como o grego Erastóstenes conseguiu medir o comprimento da circunferência da Terra. Quanto à tecnologia são exploradas apenas atividades com o uso da calculadora. A esse respeito o Guia de Livros Didáticos do PNLD 2015, ressalta que:

> Com relação aos recursos didáticos, observam-se atividades que envolvem calculadoras. Entretanto, seu potencial de uso não é devidamente explorado, restringindo-se, praticamente, ao de instrumento para fazer cálculos mais rapidamente (BRASIL, 2014, p. 54).

Os conteúdos da Trigonometria explorados na coleção não contemplam situações-problema desafiadoras e nem promovem o trabalho em grupo, não favorecendo portanto, o desenvolvimento de uma postura mais autônoma e crítica por parte do aluno.

Tabela 7 - Matemática Ciência e Aplicações – Quantidade de páginas relacionadas ao conteúdo de Trigonometria.

	Número de páginas		
	Total	Relacionadas à Trigonometria	%
Volume 1	320	17	5,3
Volume 2	320	70	21,9

FONTE: Elaborada pela pesquisadora.

Tabela 8 - Matemática: Ciência e Aplicações – Características da abordagem da Trigonometria na Circunferência.

CARACTERÍSTICAS	QUANTIDADE
Contextualizações presente nas explanações teóricas e nos exercícios propostos e resolvidos.	13
Modelagem matemática presente nas explanações teóricas e nos exercícios propostos e resolvidos.	4
Atividades com uso da tecnologia	2
Contextualizações feitas com base na História da Matemática	1
Leitura e análise de textos que relacionam a Trigonometria a situações do cotidiano	4
Situações-problema desafiadoras	0
Desenvolvimento de experimentos para a introdução do conceito de funções periódicas.	0
Trabalhos em equipe.	0

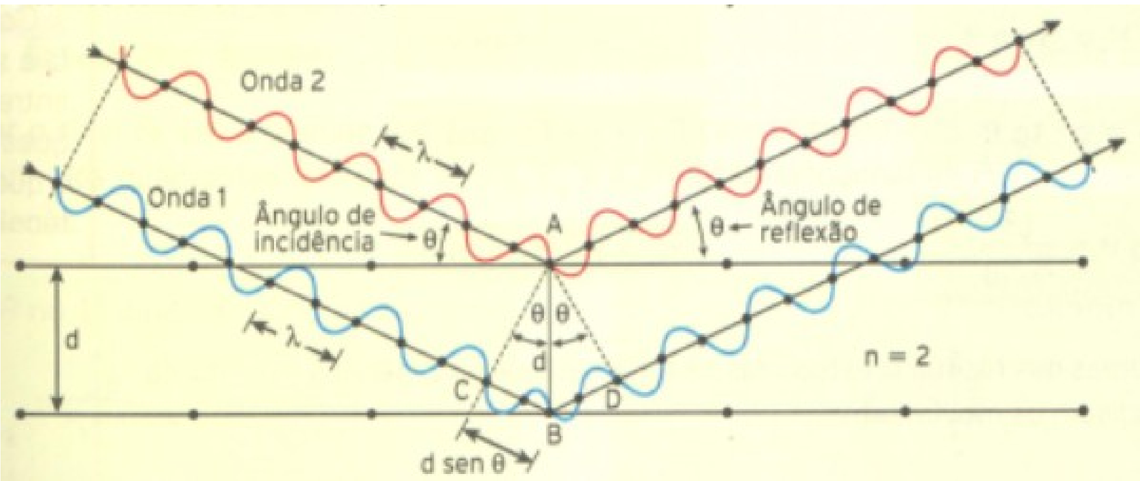
FONTE: Elaborada pela pesquisadora.

2.4.5. Matemática – Ensino Médio

Os livros da coleção Matemática Ensino Médio cujas autoras são Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz (SMOLE;DINIZ, 2013), contemplam os conteúdos de Trigonometria nos três volumes. O volume 1 apresenta a trigonometria do triângulo retângulo e as relações trigonométricas em um triângulo qualquer. O volume 2 traz o círculo trigonométrico; as funções, equações, inequações e relações trigonométricas. O volume 3 faz uma revisão das funções seno, cosseno e tangente; redução ao primeiro quadrante; arcos complementares e suplementares; com o objetivo de favorecer as relações com as funções, a geometria e os números complexos.

A unidade 1 do segundo volume, cujo tema é Trigonometria: arcos de circunferência e círculo trigonométrico, inicia com o texto “Trigonometria e Astronomia: uma só história” (SMOLE;DINIZ, 2013, p.10). O texto permite explorar a integração com a História e a Física (Astronomia), a medida que aborda a estreita relação entre a Astronomia e a Trigonometria, ao explicar como os primeiros astrônomos utilizaram a Trigonometria para entender o movimento de objetos celestes visíveis a olho nu. Em seguida é feita uma revisão das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente antes de definir arcos de circunferência, círculo trigonométrico e arcos côngruos. Após alguns exercícios e problemas propostos, a seção “Calculadora” (SMOLE; DINIZ, 2013, p.24) ensina a utilizar a dois modelos diferentes de calculadora científica para calcular seno, cosseno e tangente de arcos com suas medidas em graus ou radianos. A seção “Cálculo Rápido” (SMOLE; DINIZ, 2013, p.25) tem como finalidade desenvolver a habilidade do cálculo mental, entre os vários exercícios propostos há um de conversão de medidas de arcos de radianos para graus. A unidade 1 é encerrada com a seção "Conexão" apresentando o texto "A Trigonometria dos cristais" (SMOLE; DINIZ, 2013, p.27), que explica a teoria matemática sobre a difração dos raios X pelos cristais desenvolvida em 1912 por William Henry Bragg e seu filho.

Figura 16 - Representação da Lei de Bragg.



Fonte: SMOLE; DINIZ, 2013, p. 27.

A unidade 2 aborda as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente, desenvolvendo uma de cada vez, detalhando mais a primeira delas e deixando mais espaço para que o próprio aluno desenvolva o estudo das outras duas e se familiarize com as funções trigonométricas. A unidade apresenta ainda uma revisão das leis do seno e do cosseno, antes de apresentar a relação fundamental da Trigonometria e a relação entre tangente, seno e cosseno. A seção "Para saber mais" (SMOLE; DINIZ, 2013, p. 50), sugere o uso do software Winplot para perceber a movimentação no plano cartesiano do gráfico da função $h(x) = sen\ x - 1$. Em seguida são apresentados alguns exercícios resolvidos de construção de gráficos de algumas funções trigonométricas. A seção "Cálculo Rápido" (SMOLE; DINIZ, 2013, p. 58), traz exercícios de conteúdos diversos e apenas um deles se refere a trigonometria, pois sugere a construção de uma tabela com os valores de seno e cosseno de alguns arcos. A unidade se encerra com a conexão da Matemática com a Física, através do texto "As ondas que estimulam nossa audição".

A unidade 3 apresenta as equações, inequações e relações trigonométricas e encerra com o texto “O pêndulo de Foucault”, explicando como em 1851 Jean Bernard Léon Foucalt (1819-1868) conseguiu comprovar experimentalmente o movimento de rotação da Terra em torno do seu próprio eixo (SMOLE; DINIZ, 2013, p.74).

O terceiro volume da coleção faz uma revisão das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente e suas propriedades. A seção “Para saber mais” (SMOLE; DINIZ, 2013), traz a etimologia dos nomes das funções trigonométricas e a seção “Conexão” apresenta um texto sobre a declividade das vias públicas (SMOLE; DINIZ, 2013).

Tabela 9 - Matemática Ensino Médio – Quantidade de páginas relacionadas ao conteúdo de Trigonometria.

	Número de páginas		
	Total	Relacionadas à Trigonometria	%
Volume 1	304	37	12,17
Volume 2	320	66	20,6
Volume 3	320	22	6,9

FONTE: Elaborada pela pesquisadora.

Tabela 10 - Matemática Ensino Médio – Características da abordagem da Trigonometria na circunferência.

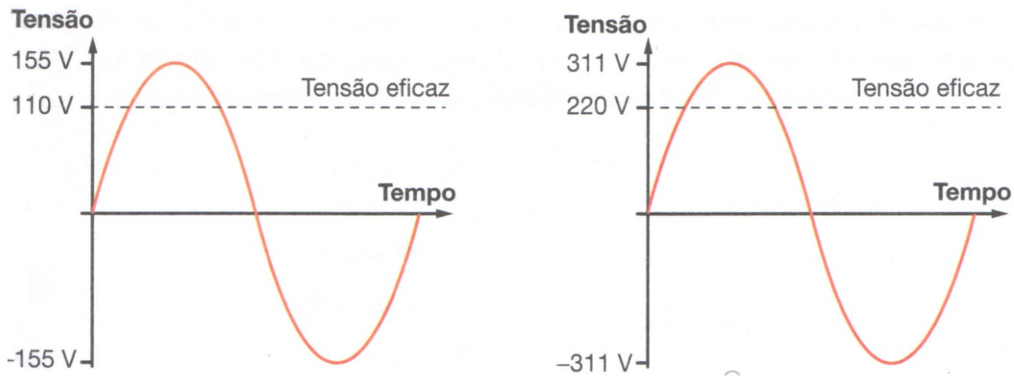
CARACTERÍSTICAS	**QUANTIDADE**
Contextualizações presente nas explanações teóricas e nos exercícios propostos e resolvidos.	14
Modelagem matemática presente nas explanações teóricas e nos exercícios propostos e resolvidos.	3
Atividades com uso da tecnologia	3
Contextualizações feitas com base na História da Matemática	5
Leitura e análise de textos que relacionam a Trigonometria a situações do cotidiano	7
Situações-problema desafiadoras	1
Desenvolvimento de experimentos para a introdução do conceito de funções periódicas.	0
Trabalhos em equipe.	0

FONTE: Elaborada pela pesquisadora.

2.4.6. Novo Olhar Matemática

O primeiro volume da coleção “Novo Olhar Matemática” da Editora FTD cujo autor é Joamir Souza (SOUZA, 2013), contempla a Trigonometria no triângulo retângulo e num triângulo qualquer. O segundo volume da coleção, traz no capítulo 1, a Trigonometria na Circunferência e as Funções Trigonométricas. Ao iniciar o capítulo, o volume apresenta um texto sobre a produção da energia elétrica pela Usina Hidrelétrica Itaipu Binacional e a forma como o sinal de corrente alternada chega a nossas casas. Este sinal de corrente elétrica é representado por um gráfico senoidal que corresponde a uma função periódica.

Figura 17 - Corrente alternada.



Fonte: SOUZA, 2013, p. 9.

Em seguida é apresentada a definição de arco de circunferência ressaltando que a medida de um arco não é o mesmo que o comprimento de um arco. “Enquanto a medida depende exclusivamente do ângulo central correspondente, o comprimento de um arco equivale a sua medida linear, dependendo do comprimento do raio da circunferência” (SOUZA, 2013, p.11). Desta forma, faz referência ao radiano como medida de arco da circunferência e sugere a regra de três como forma de se transformar a medida de um arco, dada em graus, para radianos, ou vice-versa. Após algumas atividades resolvidas, são propostas outras atividades contextualizadas envolvendo o comprimento da circunferência e a medida de arcos em graus e radianos. Após as definições de circunferência trigonométrica, arcos côngruos e redução ao primeiro quadrante, são propostos diversos exercícios para em seguida apresentar as funções trigonométricas seno e cosseno.

Ao finalizar o primeiro capítulo o livro traz diversas atividades contextualizadas, entre elas algumas situações-problema relacionando a Trigonometria a outras áreas do conhecimento.

Ressalta-se a atividade número 43 que apresenta a função $h(x)=A+B.\cos\left(\frac{2\pi.x}{365}\right)$, em que h expressa a quantidade de horas de duração do dia na cidade de Porto Alegre (RS), em função do número *x* de dias passados desde 21 de dezembro de 2012. As constantes *A* e *B* dependem da duração do dia nos solstícios de verão e de inverno naquela localidade.

Figura 18 - Duração do dia em Porto Alegre (RS).

Fonte: SOUZA, 2013, p. 34.

A atividade número 50 relaciona a respiração como um fenômeno cíclico em que o volume de ar nos pulmões de um indivíduo adulto saudável, do sexo masculino, em repouso, a partir de um instante inicial $t=0$ pode ser representado pela função $f(t)=2{,}65-0{,}25 \, . \, sen\left(\frac{2\pi}{5}t+\frac{\pi}{2}\right)$, sendo *t* o tempo em segundos e *f(t)* o volume de ar nos pulmões, em litros. Finalizando o capítulo é apresentada a seção "Explorando o Tema" que traz um texto bastante interessante sobre as ondas sonoras que são do tipo senoidal. No segundo capítulo são exploradas as fórmulas de transformação, relações e equações trigonométricas, intercaladas por atividades contextualizadas, dentre elas a atividade de número 30 sobre o ciclo cardíaco. Nessa atividade, inicialmente é apresentado um texto e em seguida a função $f(t)=95-25 \, sen\left(\frac{5\pi}{2}t+\frac{\pi}{2}\right)$, sendo *t* o tempo em segundos e *f(t)* a pressão sanguínea no instante *t* em milímetros de mercúrio. São propostas diversas questões envolvendo essa função. Na seção "Explorando o Tema" o texto faz referência a Astronomia, explicando como os astrônomos medem a distância em anos-luz entre as estrelas e a Terra. O capítulo se encerra propondo atividades complementares na sua maioria contextualizadas envolvendo as relações e equações trigonométricas. Ao final do volume 2, a seção "Acessando Tecnologias" (SOUZA, 2013, p. 280) ensina a instalar o GeoGebra e como construir uma circunferência trigonométrica para obter os valores do seno e do cosseno de alguns ângulos.

Em conformidade com o Currículo do Estado de São Paulo, na coleção Novo Olhar Matemática de Joamir Souza (SOUZA, 2013), o estudo detalhado das funções trigonométricas é limitado ao seno e ao cosseno. Na abordagem dos conteúdos da Trigonometria são feitas conexões significativas e diversificadas com outras áreas do conhecimento. O diferencial desta obra é, portanto, a quantidade de contextualização presente tanto na conceitualização dos conteúdos, como nas atividades resolvidas e propostas. Há também, uma grande quantidade de atividades contextualizadas que exploram a modelagem matemática, onde os conhecimentos da trigonometria são utilizados no dia a dia. Neste sentido o Guia de Livros Didáticos do PNLD 2015, enfatiza que:

> São frequentes e adequadas as contextualizações dos conteúdos matemáticos, tanto na apresentação inicial dos conceitos quanto nas atividades resolvidas e propostas. Esse é um ponto positivo da obra (BRASIL, 2014, p. 66)

As unidades iniciam-se com textos que visam contextualizar os tópicos a serem estudados e finalizam com as seções “Explorando o tema”, em que se busca integração entre a Matemática e outras áreas do conhecimento; “Refletindo sobre o Capítulo” com questionamentos ao aluno sobre o conteúdo estudado, “Atividades Complementares”, de revisão e articulação entre diversas áreas do conhecimento. Finalizando cada capítulo, as seções “Acessando Tecnologias” e “Ampliando seus Conhecimentos” trazem sugestões de softwares livres, livros e sites para o ensino e aprendizagem da Matemática. Nas atividades propostas é grande a quantidade de questões desafiadoras e quanto a história da matemática, “recorre-se apenas ao relato de eventos ou a biografias, sem que seus tópicos sejam empregados como recurso didático para a compreensão atual dos conceitos matemáticos” (BRASIL, 2014, p. 72).

Tabela 11 - Novo Olhar Matemática – Quantidade de páginas relacionadas ao conteúdo de Trigonometria.

	Número de páginas		
	Total	Relacionadas à Trigonometria	%
Volume 1	320	35	11
Volume 2	320	48	15

FONTE: Elaborada pela pesquisadora.

Tabela 12 - Novo Olhar Matemática – Características da abordagem da Trigonometria na circunferência.

CARACTERÍSTICAS	QUANTIDADE
Contextualizações presente nas explanações teóricas e nos exercícios propostos e resolvidos.	66
Modelagem matemática presente nas explanações teóricas e nos exercícios propostos e resolvidos.	24
Atividades com uso da tecnologia	1
Contextualizações feitas com base na História da Matemática	2
Leitura e análise de textos que relacionam a Trigonometria a situações do cotidiano	8
Situações-problema desafiadoras	8
Desenvolvimento de experimentos para a introdução do conceito de funções periódicas.	0
Trabalhos em equipe.	0

FONTE: Elaborada pela pesquisadora.

2.4.7. Considerações sobre a análise dos livros do PNLD 2015 quanto ao conteúdo de Trigonometria na circunferência

Geralmente na abordagem inicial dos conteúdos da Trigonometria, são propostos textos bastante interessantes com ilustrações que enriquecem a leitura, seguidos de questionamentos aos alunos. Os livros: Novo Olhar Matemática (SOUZA, 2013) e Matemática Ensino Médio (STOCCO, 2013) são os que apresentam a maior quantidade de textos relacionados a aplicações da trigonometria. Em todos os livros os conhecimentos de trigonometria são contextualizados de forma significativa, no que diz respeito a práticas sociais atuais e a outras áreas do conhecimento. No entanto, o livro Novo Olhar Matemática (SOUZA, 2013), é o que mais apresenta atividades com base na contextualização e na modelagem matemática das funções periódicas. O livro Matemática Ensino Médio (STOCCO, 2013) destaca-se por ser o que mais apresenta contextualizações com base na história da Matemática, para a compreensão dos conceitos de Trigonometria a partir do seu desenvolvimento histórico. Quanto ao uso dos recursos tecnológicos, as seis obras analisadas apresentam alguma sugestão quanto ao uso da calculadora ou do computador para o estudo da trigonometria. As coleções: Conexões com a Matemática (LEONARDO, 2013) e Matemática Ensino Médio (STOCCO, 2013), no entanto, são as que mais incentivam o uso de softwares livres e de suas aplicações no estudo das funções trigonométricas. Já a coleção que mais apresenta situações-problema desafiadoras é a Matemática Paiva (PAIVA, 2013), com problemas que necessitam de mais uma estratégia para a resolução, incentivando desta forma, o desenvolvimento da capacidade básica de pensamento autônomo e critico por parte do aluno. Apenas os livros das coleções Conexões com a Matemática (LEONARDO, 2013) e Matemática Paiva (PAIVA, 2013) incentivam o trabalho em equipe, sendo que este último sugere cinco trabalhos bem elaborados, incentivando desta forma, a interação entre os alunos e entre estes e o professor. A coleção Matemática Ensino Médio (STOCCO, 2013) traz boas indicações de leituras e sites para enriquecer os conteúdos de Trigonometria através das relações com outras áreas do conhecimento.

A metodologia adotada em todos os livros analisados, caracteriza-se por apresentar os conteúdos pela explanação teórica, seguida de atividades resolvidas e de propostas de aplicação. Diferentemente do Currículo do Estado de São Paulo, onde geralmente o conteúdo é iniciado com uma situação-problema contextualizada, procurando desenvolver as habilidades necessárias à construção do conhecimento. Em compensação todos os capítulos ou unidades dos livros analisados são iniciados com um texto seguido de reflexões sobre o tema, assim como no Currículo do Estado de São Paulo, onde o texto é o foco principal do processo de ensino e aprendizagem. Geralmente nos livros há um detalhamento na sistematização dos conteúdos e excesso de exercícios resolvidos e propostos. O Currículo do Estado de São Paulo prioriza a qualidade da aprendizagem e não a quantidade de conteúdos propostos em detrimento dos conceitos mais gerais.

Após confrontar o ensino da Trigonometria nos livros didáticos do PNDL 2015 com o Currículo do Estado de São Paulo, nasce esta proposta de trabalho que visa priorizar o ensino das funções trigonométricas seno e cosseno, através de atividades com caráter experimental, a serem descritas no capítulo 4 desta pesquisa. Estas atividades terão por finalidade introduzir o conceito das funções periódicas e o uso do software GeoGebra será utilizado para a complementar a aprendizagem dessas funções. A partir desta proposta é que será respondida a seguinte questão de investigação: **Que intervenções poderão ser realizadas de modo a promover a aprendizagem das Funções Trigonométricas Seno e Cosseno no contexto de tarefas exploratório-investigativas em aulas de matemática?**

3. METODOLOGIA DA PESQUISA

Para investigar que intervenções poderão ser realizadas de modo a promover a aprendizagem das funções trigonométricas seno e cosseno, optou-se por uma investigação da própria prática de natureza qualitativa, desenvolvida em ambiente exploratório-investigativo.

Lamonato e Passos (2011) alegam que a exploração-investigação matemática busca promover a aprendizagem, instigando nos alunos a produção e a criação. Pois segundo essas autoras, para investigar é preciso querer saber, questionar e procurar responder, explorar possibilidades e fazer conjecturas. No desenvolvimento das atividades exploratório-investigativas envolvendo as funções trigonométricas, seno e cosseno a que esta pesquisa se propõe, espera-se que o aluno vivencie todo o processo da descoberta na construção do seu conhecimento, descobrindo relações entre os objetos matemáticos e procurando identificar as respectivas propriedades.

3.1. Processos de uma investigação matemática

Segundo o trabalho realizado por Ponte; Brocardo; Oliveira (2013), a investigação matemática envolve quatro momentos principais. Primeiro ocorre o reconhecimento da situação, a exploração e a formulação de questões. Segue-se, em um segundo momento, um processo de formulação de conjecturas. É no terceiro momento que são realizados testes e possíveis aprimoramento das conjecturas. Finalmente, temos a argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado. Cada um desses momentos pode ocorrer simultaneamente em diversas situações, como as indicadas na tabela 13.

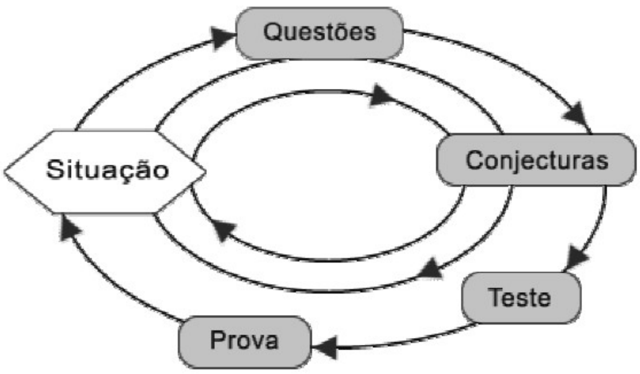
Tabela 13 - Momentos na realização de uma investigação.

Exploração e formulação de questões	• Reconhecer uma situação problemática • Explorar a situação problemática • Formular questões
Conjecturas	• Organizar dados • Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	• Realizar testes • Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	• Justificar uma conjectura • Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 21.

Uma importante característica da atividade de investigação, segundo Brocardo (2001, p.99), é a sua não linearidade, pois quando uma conjectura não é confirmada pelos testes realizados, é necessário a formulação de uma nova conjectura. Então, uma atividade de investigação não é caracterizada apenas pelos processos matemáticos envolvidos, mas também pelas interações entre eles, como podemos observar pelo esquema proposto por Oliveira[1] apud Brocardo (2001).

Figura 19 - A atividade de investigação.



Fonte: Oliveira[1] apud Brocardo (2001).

Portanto, investigar significa formular questões sobre uma situação problemática, formular conjecturas, realizar testes que validem ou não essas conjecturas, provar as conjecturas que resistiram aos testes, de forma que as etapas do processo de investigação interajam entre si.

Segundo Ponte; Brocardo; Oliveira (2013) todo esse processo presente na realização de uma pesquisa, está ao alcance dos alunos na sala de aula de Matemática. E toda atividade matemática rica envolve necessariamente um trabalho investigativo, com o reconhecimento da situação, a formulação de questões, a formulação de conjecturas, teste e refinamento, argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado Ponte[2] et al. apud Ponte et al. (1998). A realização dessas etapas de uma investigação favorece o envolvimento ativo do aluno que é uma condição fundamental para a aprendizagem, pois o aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 23).

---

1 OLIVEIRA, H. Actividades de investigação na aula de Matemática: aspectos da prática do professor. Dissertação (Mestrado) – Universidade de Lisboa. Lisboa, 1998.

2 PONTE et al.. A relação professor-aluno na realização de investigações matemáticas. Lisboa: APM, 1999.

3.2. Investigações matemáticas na sala de aula

De forma geral, o trabalho investigativo na sala de aula envolve três fases: introdução da tarefa, realização da investigação e discussão dos resultados (PONTE, 2013, p. 25).

3.2.1. Introdução da tarefa

Na introdução da tarefa, o professor deve deixar muito claro o que pretende que os alunos desenvolvam. Geralmente é fornecida por escrito, mas sempre é necessária uma pequena introdução oral para garantir que todos os alunos entendam o objetivo da tarefa proposta. Ponte; Brocardo; Oliveira (2013) consideram que é fundamental que se crie um ambiente de aprendizagem favorável, onde o aluno consiga pensar, questionar, explorar suas ideias e exprimi-las tanto ao professor quanto aos colegas. Segundo estes autores:

> O aluno deve sentir que as suas ideias são valorizadas e que se espera que as discuta com os colegas, não sendo necessária a validação constante por parte do professor (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 28).

O professor deve informar aos alunos que eles podem contar com sua ajuda, mas que a atividade depende essencialmente da iniciativa de cada um. A fase introdutória da investigação deve ser relativamente breve para que os alunos não percam o interesse pela tarefa.

Na introdução de todas as tarefas realizadas durante esta investigação, procurou-se esclarecer aos alunos quais os objetivos a serem alcançados com a atividade proposta. Como os alunos não estavam habituados com aulas investigativas, em algumas vezes, se fez necessária a leitura do enunciado e uma breve explicação para garantir que todos os alunos compreendessem o que se esperava que realizassem.

3.2.2. Realização da investigação

Segundo Ponte; Brocardo; Oliveira (2013, p. 26), a prática que é mais utilizada em sala de aula é a realização da investigação em pequenos grupos e a discussão dos resultados em grande grupo. A esse respeito, Ponte et al. (1998a) discorrem que:

> Numa aula dedicada à realização de investigações, o trabalho em pequeno grupo e em grande grupo (turma) emergem como algo natural e complementar. O trabalho em pequeno grupo incentiva uma comunicação entre alunos e promove uma melhor

> explicitação das conjecturas e testes a realizar. O trabalho em grande grupo impõe uma formalização maior de raciocínio e incita alunos a uma postura mais madura na discussão com o professor e os colegas. (PONTE et al., 1998a, p. 12)

Na maioria das atividades desenvolvidas nesta pesquisa, optou-se por trabalhar em grupos. Nas atividades mais trabalhosas, que envolveu a utilização de materiais manipulativos, a opção foi organizar a turma em grupos grandes, com pelo menos 5 ou 6 alunos. Já nas atividades onde se utilizou a informática, a turma foi dividida em duplas ou em trios, para que todos tivessem acesso aos computadores disponíveis na sala de informática da escola.

Na etapa de exploração e formulação de questões, Ponte; Brocardo; Oliveira (2013) consideram que em um primeiro momento os alunos precisam se familiarizar com os dados e o sentido da tarefa proposta. Quando a proposta é de trabalho em grupo, sempre um ou mais alunos tomam a liderança, levando o grupo a focar em algumas ideias, o que potencializa o trabalho conjunto. Segundo esses autores, em muitas tarefas de investigação, os alunos organizam os dados antes de formular questões e, no entanto, nesse momento, já podem surgir conjecturas que levam à necessidade de fazer testes, podendo gerar ainda mais dados. No caso de tarefas em que se buscam regularidades, é comum, após o surgimento das primeiras questões e da formulação das primeiras conjecturas, que os alunos formulem outras questões e conjecturas semelhantes as anteriores.

Na etapa de formular e testar conjecturas é importante que os alunos façam o registro escrito de suas conjecturas, pois nesse momento eles se deparam com a necessidade de estabelecerem um consenso e explicitarem suas ideias. Normalmente os alunos encontram dificuldades na escrita e procuram se expressar em uma linguagem não-verbal, que se apoia nos gestos e na observação dos dados. No entanto, o professor deve estimular os registros escritos, que favorecem a análise do desempenho da turma e fornecem subsídios para o planejamento das próximas aulas.

O maior desafio encontrado nas aulas de investigação sobre as funções trigonométricas desta pesquisa, foi a dificuldade dos alunos em expressar matematicamente os resultados. Muitas vezes essa dificuldade exigiu da professora pesquisadora uma intervenção no sentido de ajudar o grupo a clarear suas ideias, para que conseguissem escrever o mais fielmente possível as justificativas de suas conjecturas.

Ponte; Brocardo; Oliveira (2013) salientam que é imprescindível que o professor esteja atento a todo esse processo de formulação e teste de conjecturas, para garantir a evolução dos alunos na realização das investigações. Portanto, é preciso que o professor apresente questões que os estimulem a pensar sobre o que estão realizando. A este respeito as Orientações Curriculares Para O Ensino Médio (2006), reforçam a necessidade de se,

> (...) colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentações lógico-dedutiva". (OCEM, 2006, p. 70).

Após formular e testar, chega o momento de justificar as conjecturas. Nesta etapa, segundo Ponte; Brocardo; Oliveira (2013), os alunos tendem a transformar suas conjecturas em conclusões sem passarem por um processo de justificação. Cabe ao professor insistir na realização de testes de conjecturas, mas alertá-los de que os sucessivos testes por si só não validam um resultado. Portanto é importante que o enunciado da tarefa dê indícios de que é preciso validar as conjecturas com expressões do tipo "justifique as relações" ou "as relações que percebeu se verificam sempre?". Segundo esses autores:

> A introdução da ideia de prova matemática pode ser feita gradualmente, restringindo-se, numa fase inicial e com os alunos mais novos, à procura de uma justificação aceitável, que se baseie num raciocínio plausível e nos conhecimentos que os alunos possuem. À medida que os alunos vão interiorizando a necessidade de justificarem as suas afirmações e que as suas ferramentas matemáticas vão sendo mais sofisticadas, vai-se tornando mais fácil realizarem pequenas provas matemáticas (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 38).

3.2.3. Discussão dos resultados

No momento de partilhar seus conhecimentos, os alunos têm a oportunidade de confrontar as suas estratégias, conjecturas e justificações, tendo o professor como o mediador que os estimula a comunicar os resultados mais significativos da investigação e a se questionarem mutuamente. É nesse momento de reflexão que os alunos devem ser alertados sobre a importância da justificação matemática das suas conjecturas, para que tenham condições de argumentar com seus pares. Ponte; Brocardo; Oliveira (2013, p. 41), reiteram que a fase de discussão é fundamental para que os alunos ganhem um entendimento mais rico do que significa investigar e desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação. Neste contexto, as investigações matemáticas favorecem boas discussões entre os alunos tornando as aulas bastante produtivas. Nas aulas investigativas a que esse trabalho se propôs, em algumas vezes o tempo para a realização das atividades teve que ser prolongado devido ao caráter divergente das investigações. Neste sentido, o momento da discussão dos resultados foi fundamental para que as riquezas das explorações desenvolvidas fossem compartilhadas com a turma.

3.3. O papel do professor numa aula de investigação

Brocardo (2001) considera que durante o desenvolvimento das atividades de investigação, cabe ao professor oferecer apoio à exploração realizada pelos alunos, de modo que suas intervenções não ultrapassem os impasses a que eles chegam, mas preservem a liberdade de exploração e estimule o confronto de opiniões nos grupos. Ponte; Brocardo, Oliveira (2013, p. 47) insistem que numa aula investigativa, o professor deve ter em mente dois objetivos: dar autonomia aos alunos para não lhes comprometer a autoria da investigação e garantir que o trabalho transcorra de forma que seja significativo do ponto de vista matemático. Dessa forma o professor deve desempenhar um conjunto de papéis no decorrer de uma aula investigativa: desafiar os alunos, avaliar o seu progresso, raciocinar matematicamente e apoiar o trabalho deles.

Numa aula de investigações é de fundamental importância que os alunos se sintam motivados, para isso o professor deve criar um ambiente propício, escolhendo questões desafiadoras e estimulando-os a assumirem uma postura mais interrogativa, mostrando-lhes como é possível interrogar matematicamente as situações e formulando boas questões.

Ao avaliar o progresso dos alunos, Pontes; Brocardo; Oliveira (2013) salientam que é fundamental o professor observar se os alunos já compreenderam a ideia de investigação. Essa observação deve acontecer desde a fase inicial, se os alunos compreenderam bem a tarefa e se a consideram como um desafio. Durante o desenrolar do trabalho nos pequenos grupos, o professor deve procurar compreender o raciocínio dos alunos, fazendo perguntas e pedindo explicações sobre seus registros, pois normalmente eles têm dificuldades em se expressar tanto na escrita como oralmente. Essa interação com os alunos permite que o professor verifique como está o andamento do trabalho e os apoie na condução da investigação procurando compreendê-los e evitando corrigir cada afirmação ou conceito matematicamente pouco correto. Durante o desenvolvimento do trabalho, se sentir necessidade, o professor pode fazer uma discussão intermediária com a turma para esclarecer eventuais dúvidas que perceber na maioria dos grupos.

Devido ao caráter aberto das investigações, o professor não tem condições de prever todas as explorações que podem surgir. Muitas vezes o aluno pode formular questões que o professor não pensou. Nesse momento o professor é levado a raciocinar matematicamente de modo espontâneo, “pensando em voz alta” (PONTES; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 50). Com essa atitude o professor contribui para que os alunos desenvolvam suas argumentações e compreendam melhor esse processo da investigação. O maior desafio para o professor, no entanto, é a justificação das conjecturas, que por vezes envolvem processos de prova bastante complexos, onde ele tem que avaliar rapidamente se será apropriado parar para pensar ou abordar a questão num momento posterior, motivando os alunos a justificarem suas afirmações. Nesta perspectiva Ponte; Brocardo; Oliveira, (2013) salientam:

> A realização de investigações proporciona, muitas vezes, o estabelecimento de conexões com outros conceitos matemáticos e até mesmo extra matemáticos. O professor precisa estar atento a tais oportunidades e, mesmo que não seja possível explorar cabalmente essas conexões, deve estimular os alunos a refletir sobre elas. Essa é mais uma das situações em que o professor dá evidência do que significa raciocinar matematicamente. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 51)

Ao apoiar os alunos na condução da aula, o professor deve assumir uma postura mais interrogativa. Quando os alunos colocam uma questão, a melhor estratégia é devolvê-la levando-os a pensarem melhor sobre o problema. Com essa atitude, o professor leva os alunos a compreenderem que o seu papel nas aulas de investigação é apoiá-los e não simplesmente validar os trabalhos deles. Muitas vezes, através de perguntas, o professor pode recordar conceitos anteriormente estudados e que serão utilizados pelos alunos para justificar suas conjecturas. Portanto além de apoiar os alunos, o professor deve questioná-los fazendo com que eles reflitam sobre os seus avanços e as estratégias utilizadas para atingir seus objetivos.

Finalmente para que as investigações possam ser realizadas com sucesso, o professor precisa conhecer muito bem a turma estabelecendo com eles um bom ambiente de aprendizagem, além de planejar e explorar antecipadamente as tarefas que serão propostas, pois uma aula investigativa é bastante imprevisível e o professor precisa ter certa flexibilidade de lidar com situações novas.

Durante as aulas de investigação sobre as funções trigonométricas, a professora pesquisadora procurou atender os grupos e recolher informações sobre o andamento das explorações, questionando e pedindo explicações sobre os registros, dada a grande limitação dos alunos em se expressar matematicamente.

Por vezes, principalmente nas atividades que envolveu a modelagem matemática, foi necessária a interrupção dos trabalhos para esclarecimentos de dúvidas, fazendo uma discussão intermediária dos resultados, para que a discussão final se tornasse mais enriquecedora. Durante todo o processo a professora pesquisadora assumiu uma postura mediadora procurando desafiar os alunos para motivá-los, estimulando a criatividade nas explorações.

4. CONSTRUÇÃO DA PROPOSTA PEDAGÓGICA

A pesquisa de campo foi realizada no primeiro semestre de 2014, tendo como sujeitos de pesquisa os alunos de uma turma de segunda série do Ensino Médio da Escola Estadual Coronel Pedro Dias de Campos, situada no município de Capela do Alto, Estado de São Paulo. O material de análise da pesquisa consta de relatórios do professor pesquisador, relatórios dos alunos e gravações em áudio e vídeo das aulas exploratório-investigativas.

Optou-se por aplicar as atividades tendo como prioridade as funções seno e cosseno, pois como recomendam as Orientações Curriculares para o Ensino Médio,

> (...) toda situação de ensino e aprendizagem deve agregar o desenvolvimento de habilidades que caracterizem o "pensar matematicamente". Nesse sentido, é preciso dar prioridade à qualidade do processo e não à quantidade de conteúdos a serem trabalhados. A escolha de conteúdos deve ser cuidadosa e criteriosa, propiciando ao aluno um "fazer matemático" por meio de um processo investigativo que o auxilie na apropriação de conhecimento. (BRASIL, 2006, p. 70).

A tabela 14 apresenta uma síntese das seis tarefas exploratório-investigativas contempladas por esta pesquisa e seus respectivos conteúdos:

Tabela 14 - Conteúdos das tarefas exploratório-investigativas.

Tarefa Exploratório-Investigativa	Conteúdo
O comprimento da circunferência	Raio, diâmetro e comprimento da circunferência.
A circunferência trigonométrica	Circunferência trigonométrica; medidas de arcos em graus; arcos congruentes.
O conceito de radiano	Medidas de arcos em radianos.
Modelando funções periódicas	Fenômenos periódicos; gráficos cartesianos de funções periódicas;
Analisando gráficos de funções construídas com o software GeoGebra	Gráficos cartesianos das funções *y* = *senx* e *y* = *cosx*; gráficos das funções do tipo $y = A\,sen\left(Bx + C\right) + D$ e $y = A\cos\left(Bx + C\right) + D$
Construindo gráficos de funções periódicas envolvendo senos e cossenos	Gráficos de funções do tipo $y = C + A\,sen\left(Bx\right)$ e $y = C + A\cos\left(Bx\right)$

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Como os alunos que fizeram parte deste trabalho de pesquisa não estavam familiarizados com as investigações matemáticas, decidiu-se por elaborar tarefas mais bem estruturadas, pois como consideram Porfírio e Oliveira[3] apud Brocardo (2001), "uma proposta muito aberta pode parecer de tal forma aos alunos que estes não se sintam desafiados a começar qualquer exploração".

4.1. A Escola e a Turma

A Escola Estadual Coronel Pedro Dias de Campos, está situada à Rua João Felipe, número 200, centro de Capela do Alto - SP. Teve sua data de instalação publicada no Diário Oficial do Estado de São Paulo no dia 28/08/1952 e em 08/03/1991 foi publicada a instalação do Ensino Médio. A escola recebeu o nome de Coronel Pedro Dias de Campos, em homenagem ao ilustre cidadão natural do povoado de Capela do Alto, na época pertencente ao município de Araçoiaba da Serra. Segundo historiadores, Pedro Dias de Campos foi alfabetizado aos 16 anos, quando se mudou para São Paulo e ingressou na Força Pública Paulista, hoje Polícia Militar do Estado de São Paulo. Seguiu na carreira militar chegando ao posto de Comandante Geral do Exército. Dedicou-se à esgrima, ao escotismo, à literatura e às obras assistencialistas com a mesma garra com que serviu o exército por mais de 40 anos.

Sendo muito procurada pela comunidade, a escola desenvolve muitos projetos dentro das diversas áreas do conhecimento para atender às necessidades dos alunos. É a única escola de Ensino Médio do município, contando atualmente com 21 classes, funcionando nos três períodos. No período da manhã funcionam 10 salas, sendo 6 salas de 2ª séries e 4 salas de 3ª séries. No período da tarde funcionam 7 salas de 1ª série e no período noturno funcionam 4 salas, sendo uma de 1ª série, uma de 2ª série e duas de 3ª série. Conta também com o Centro de Línguas (CEL), com três turmas de inglês e três de espanhol. Algumas salas são disponibilizadas para a Parceria com o Centro Paula Souza (ETEC), onde funcionam os cursos técnicos em administração de empresas, informática e logística. A Secretaria de Administração Penitenciária (SAP) mantém uma extensão da Escola Estadual Coronel Pedro Dias de Campos, dentro da unidade prisional e do centro de detenção provisória de Capela do Alto, oferecendo cursos de Ensino Fundamental e Médio.

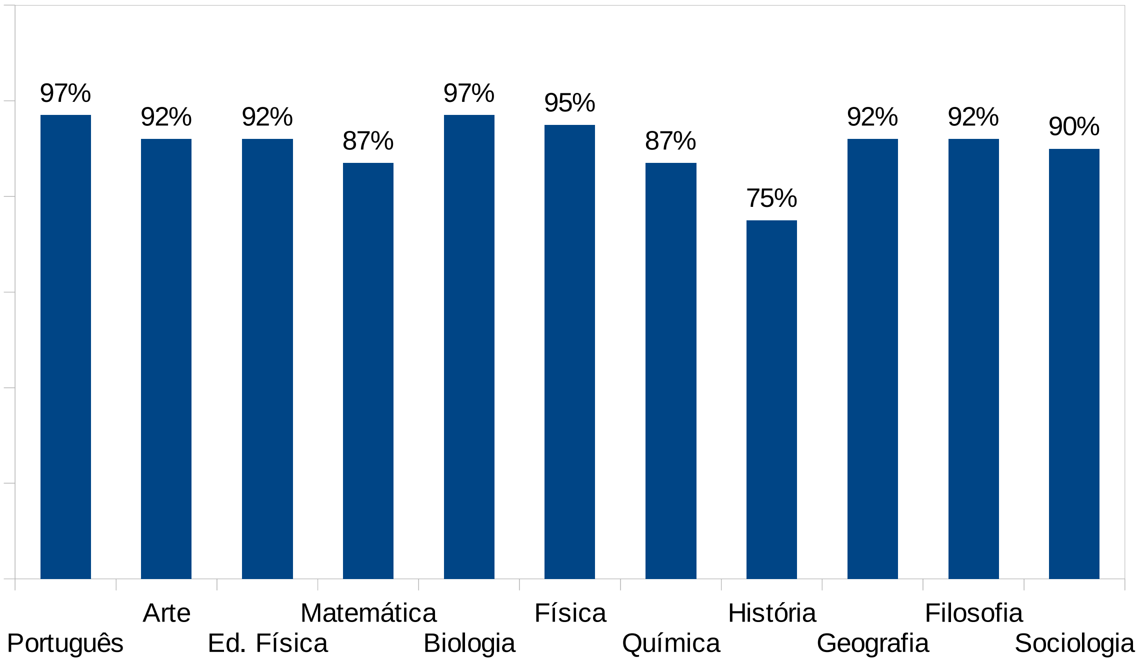
A escola conta com 12 salas de aula, uma sala de informática, duas salas de vídeo, auditório, sala de reflexão, sala de leitura, laboratório de Química, Física e Biologia e quadra coberta.

3 PORFÍRIO, J.; OLIVEIRA, H. Uma reflexão em torno das tarefas de investigação. In P. ABRANTES et al. (Orgs), Investigações matemáticas na aula e no currículo. Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e Associação de Professores de Matemática.

Apesar da escola se encontrar localizada no centro da cidade, grande parte da clientela atendida é da zona rural. A Unidade Escolar atende uma comunidade muito diversificada e marcada pela heterogeneidade quanto a formação escolar dos pais e responsáveis, a renda familiar, ao acesso a bens e serviços e a atividade profissional, entre outros. Como consequência dessa realidade, tem-se alunos cujos pais reconhecem a importância da escola, participam de forma ativa acompanhando a frequência, aproveitamento e educação dos seus filhos; no entanto há aqueles que se eximem do acompanhamento escolar dos filhos pelos motivos mais diversos. Destaca-se também a carência econômica e cultural do Município que faz com que os alunos se mostrem desinteressados ao longo do processo de aprendizagem, indo em busca de trabalho que traga algum auxílio financeiro para suas famílias. Diante dessa realidade apresentam baixo rendimento ou abandonam a escola.

Os alunos participantes da pesquisa, são os 37 alunos da segunda série B, do período da manhã do ano de 2014. A escolha da turma para a realização da investigação se deu pelo fato de ser composta por alunos que se destacavam na escola pela participação e rendimento satisfatório na maioria das disciplinas, como se pode observar pela figura 20.

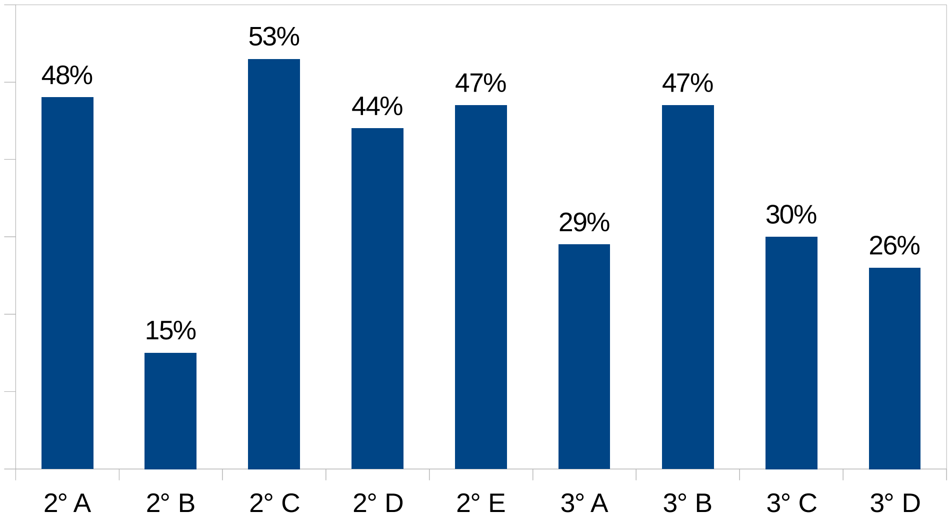
Figura 20 - Gráfico do rendimento da 2ª Série B - 1º Bimestre / 2014.



Fonte: Escola Estadual Cel. Pedro Dias de Campos.

A figura 21 mostra a porcentagem de alunos com pouca participação nas aulas, das turmas do período da manhã no primeiro bimestre de 2014. A 2ª série B continha a menor quantidade de alunos desinteressados pela aprendizagem.

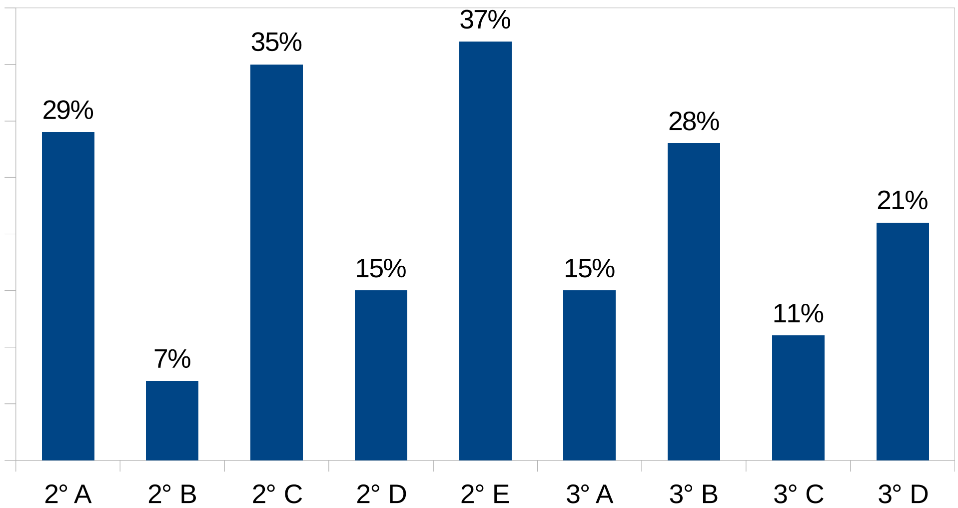
Figura 21 - Alunos com pouca participação nas aulas do período da manhã – 1º Bimestre – 2014.



Fonte: Escola Estadual Cel. Pedro Dias de Campos.

A não assiduidade dos alunos da segunda séria B também era satisfatória, apenas 7% dos alunos tinham problemas de excesso de faltas.

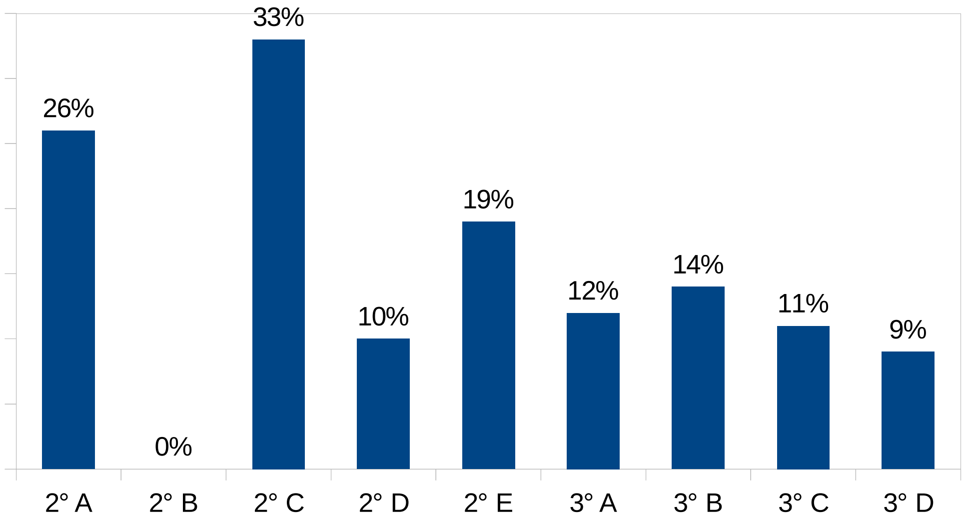
Figura 22 - Não assiduidade dos alunos da manhã – 1º Bimestre - 2014.



Fonte: Escola Estadual Cel. Pedro Dias de Campos.

Quanto aos problemas com indisciplina, a segunda série B era a única turma do período da manhã que não tinha alunos indisciplinados.

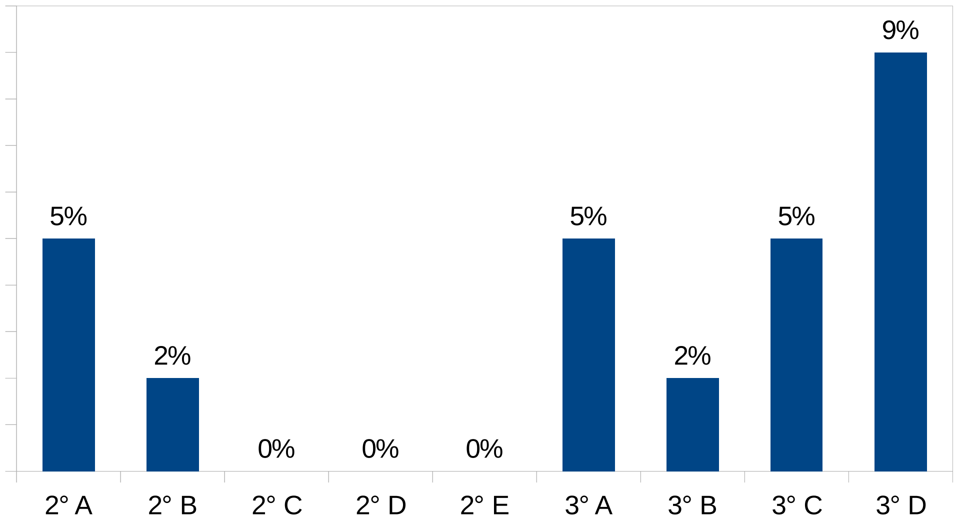
Figura 23 - Problemas de indisciplina dos alunos da manhã – 1º Bimestre/2014.



Fonte: Escola Estadual Cel. Pedro Dias de Campos.

Apenas um aluno da segunda série B tinha dificuldades de aprendizagem.

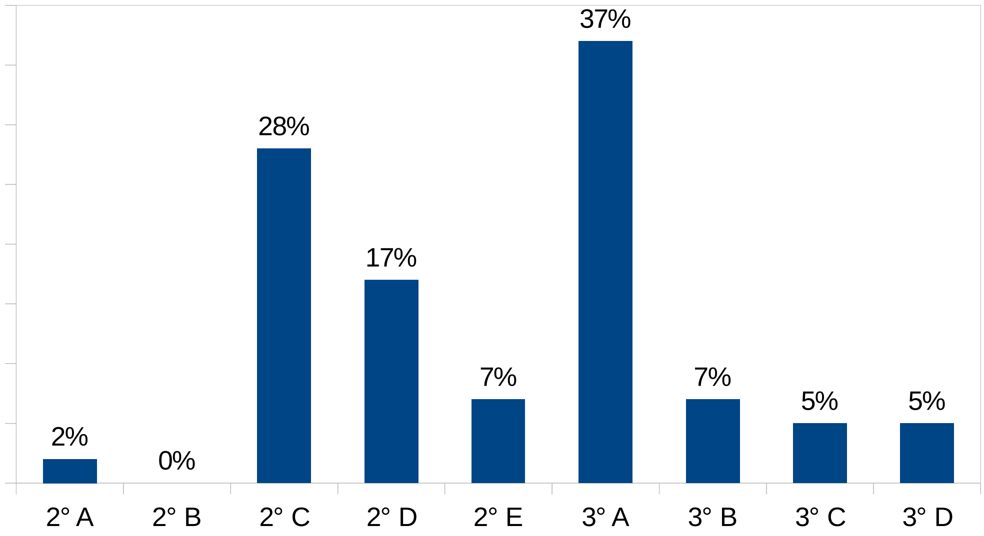
Figura 24 - Dificuldades de aprendizagem– Período da manhã – 1º Bimestre/2014.



Fonte: Escola Estadual Cel. Pedro Dias de Campos.

Atualmente, um dos grandes problemas enfrentados no cotidiano escolar, é o uso indevido do celular durante as aulas. A lei estadual proíbe o uso do celular no período das aulas. A segunda séria B não teve nenhuma ocorrência de uso de celular durante o 1º bimestre de 2014.

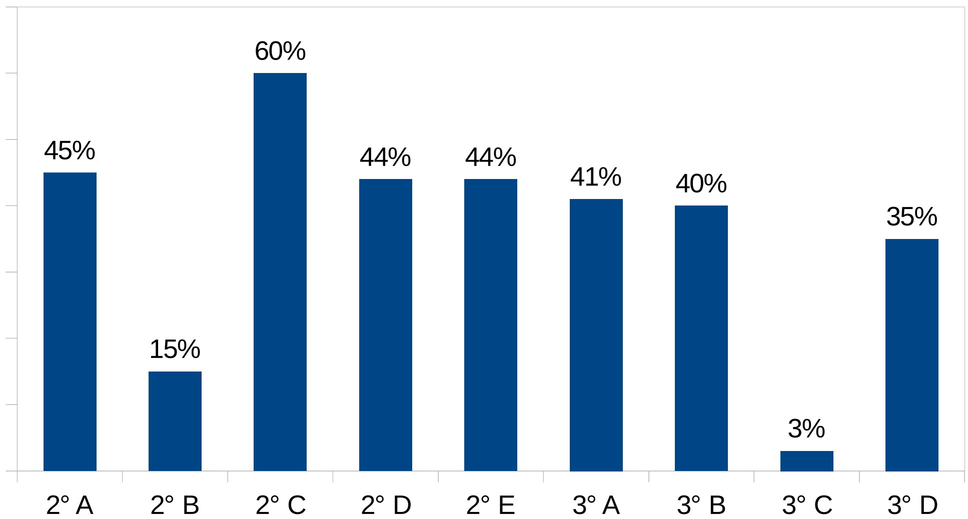
Figura 25 - Ocorrências com celular - 1º Bimestre/2014 – Período da manhã.



Fonte: Escola Coronel Pedro Dias de Campos.

Quanto a falta de responsabilidade, a segunda série B apresentou o segundo menor índice de alunos que deixaram de entregar trabalhos e faltaram em dias de provas por motivos não justificados.

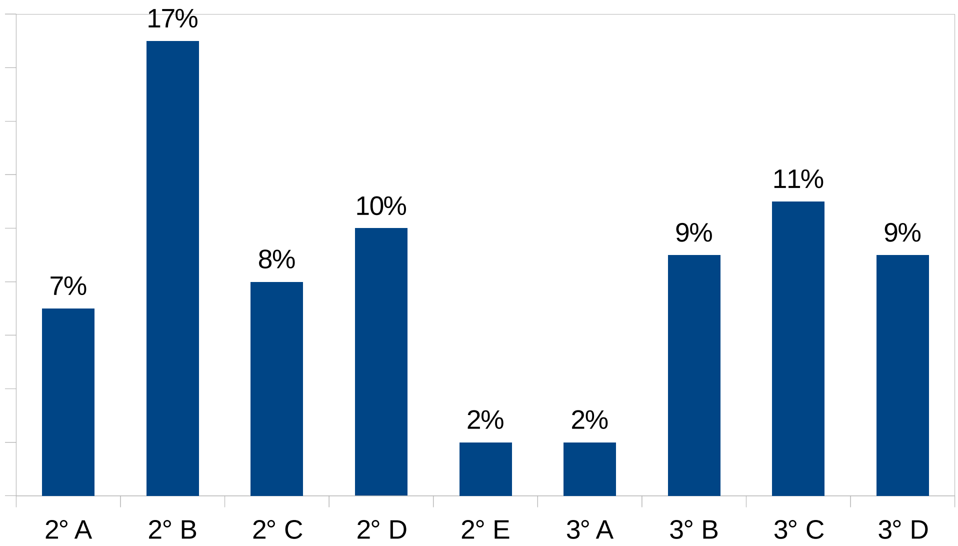
Figura 26 - Falta de responsabilidade - Alunos da manhã – 1º Bimestre 2014.



Fonte: Escola Coronel Pedro Dias de Campos.

Finalmente, a segunda série B apresentou a maior quantidade de alunos que se destacaram pelo excelente desempenho no primeiro bimestre de 2014.

Figura 27 - Alunos destaque do 1º Bimestre/2014 – Período da manhã.



Fonte: Escola Coronel Pedro Dias de Campos.

4.2. Tarefas exploratório-investigativas

Nesta seção estão descritas as tarefas exploratório-investigativas aplicadas e a análise dos resultados obtidos.

4.2.1. O comprimento da circunferência

Conteúdos e temas	Raio e diâmetro de uma circunferência; fórmula do comprimento da circunferência;
Competências e habilidades	Rever os conceitos de raio e diâmetro de uma circunferência. Compreender o significado de π como razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro. Encontrar a fórmula do perímetro de uma circunferência.
Tempo previsto	Três aulas de 50 minutos.
Material	Papel cartão, barbante, folha impressa, tesoura e régua.

Justificativa

Após a realização de uma prova de trigonometria no triângulo retângulo, onde havia uma questão cujo objetivo era descobrir a altura de um pino que possuía duas roldanas com os raios dados, percebeu-se que a maioria dos alunos desconheciam os conceitos de raio e diâmetro. A atividade proposta deveria então sanar essa dificuldade e explorar o conhecimento prévio dos alunos a respeito do comprimento de uma circunferência. Embora o conteúdo já tivesse sido ensinado no Ensino Fundamental, era importante recordá-lo e reforçá-lo, visto que estava por iniciar o estudo da circunferência trigonométrica.

Desenvolvimento da atividade

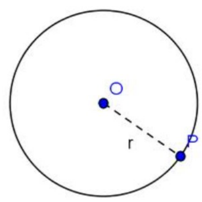
Os alunos, divididos em 9 grupos de quatro alunos, construíram 4 circunferências com raios diferentes. Mediram o raio, o diâmetro e com o auxílio de um barbante mediram o comprimento de cada uma delas. Em seguida preencheram uma tabela com os valores do raio, diâmetro, comprimento, o resultado da divisão do comprimento de cada circunferência pelo seu diâmetro e responderam as questões. Para finalizar a atividade a professora pesquisadora fez a socialização na lousa dos resultados encontrados pelos alunos.

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
DIRETORIA DE ENSINO DA REGIÃO DE VOTORANTIM
EE "CEL. PEDRO DIAS DE CAMPOS"
Rua João Felipe, nº 200-Centro - CEP: 18.195-000- Fone (15) 3267-1144/3267-1345-Capela do Alto - SP.
E-mail: e016913a@see.sp.gov.br

1ª TAREFA EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVA
O COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA

Atividade 1:

Uma circunferência é o lugar geométrico de todos os pontos que estão a uma mesma distância de um ponto dado. O ponto fixo dado é chamado de centro e a distância constante é o raio da circunferência. Vamos encontrar a expressão que determina o comprimento de uma circunferência.



Circunferências	Medida do raio:	Medida do diâmetro	Comprimento da circunferência	Resultado da divisão do comprimento da circunferência pelo diâmetro
1				
2				
3				
4				

Procedimentos:
Em grupos de 4 alunos, cada um deve construir em papel cartão uma circunferência com raio diferente das circunferências dos demais alunos do grupo. Destaquem o centro e o raio de cada uma, numerando-as de 1 a 4, em ordem crescente de tamanho de raio. Cada aluno deverá medir o raio da sua circunferência e com auxílio de um barbante, medir o comprimento da mesma. Em seguida o grupo deverá preencher a tabela de acordo com as medidas de cada circunferência:

Atividade 2:

a) Comparando os resultados das divisões dos comprimentos das circunferências pelos seus respectivos diâmetros, o que vocês perceberam?

b) Quanto mais precisas foram as medidas, mais o resultado da divisão do comprimento pelo diâmetro da circunferência, se aproxima de um número irracional bastante conhecido, já ensinado no Ensino Fundamental. De que número estamos nos referindo? Por que esse número é considerado um número irracional?

c) Encontrem uma expressão que determina o comprimento de uma circunferência qualquer.

Análise dos resultados obtidos

Participaram desta atividade 36 alunos. Ao iniciar a atividade já se percebeu a dificuldade por parte da maioria dos alunos quanto a conceitualização de diâmetro, o que se fez necessário a intervenção da professora pesquisadora nos grupos.

Na alternativa a), esperava-se que os alunos percebessem a proximidade do resultado da divisão do comprimento pelo diâmetro das diferentes circunferências. Dos nove grupos, sete perceberam essa proximidade, mas apenas um deles o associou ao número irracional π nesse primeiro momento. Já na alternativa b) oito grupos conseguiram associar o resultado da divisão do comprimento da circunferência pelo diâmetro ao número π. Ao serem questionados sobre a irracionalidade do número π, os grupos deram as seguintes respostas:

Grupo 1: É irracional porque não deu exato.

Grupo 2: Porque não pode ser obtido pela divisão de dois números inteiros.

Grupo 3: Porque ele é decimal.

Grupo 4: Porque ele é um número real que não pode ser dividido por dois números inteiros.

Grupo 5: Porque ele é dividido por número com vírgula.

Grupo 6: Porque não tem fim.

Grupos 7 e 8: Não responderam.

Grupo 9: É irracional porque é decimal.

Analisando as respostas, vemos que ainda muitos alunos associam o número π a um número decimal, apenas dois grupos conceituaram corretamente π como número irracional.

Na alternativa c) esperava-se que os alunos encontrassem uma expressão para calcular o comprimento de uma circunferência qualquer. Dos nove grupos quatro encontraram a fórmula correta, embora apenas um grupo realmente a deduziu a partir da tabela. Os outros três grupos confessaram que se lembraram da fórmula mas não sabiam deduzi-la. Após a socialização dos resultados a professora pesquisadora fez a dedução da fórmula na lousa e reforçou o conceito do número irracional π.

A aplicação da atividade foi bastante produtiva, pois era preciso que o conceito do número π e do comprimento da circunferência ficasse muito bem entendido pelos alunos, visto que posteriormente ao iniciar o estudo da circunferência trigonométrica e encontrar medidas de arcos de circunferência em radianos, costumava-se gerar muita confusão a respeito do número π. Portanto, as competências e habilidades pretendidas foram alcançadas.

4.2.2. A circunferência trigonométrica

Conteúdos e temas	Circunferência trigonométrica; medidas de arcos em graus; arcos congruentes.
Competências e habilidades	Reconhecer a circunferência trigonométrica e localizar a extremidade final de arcos dados em graus.
Tempo previsto	Duas aulas de 50 minutos.
Material	Folha impressa e transferidor.

Justificativa

Para estudar a periodicidade observada em muitos fenômenos naturais, é preciso criar um modelo matemático de um ponto que giram em torno de uma circunferência, conforme o caderno do professor do Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2014 p. 24-25). Para complementar essa ideia, foram desenvolvidas as atividades seguintes que apresentaram as noções de arcos côngruos, ângulos negativos e com mais de uma volta.

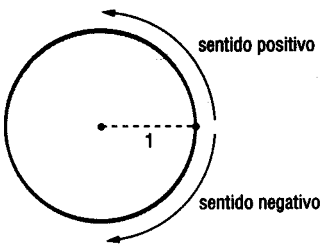
Desenvolvimento da atividade

Após breve explanação sobre a circunferência orientada, destacando o sistema cartesiano associado à circunferência e a divisão dos quadrantes, os alunos realizaram as atividades propostas individualmente.

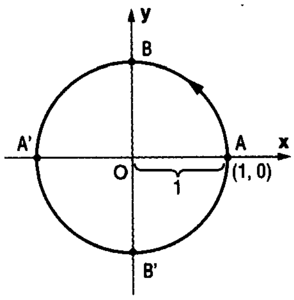
SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
DIRETORIA DE ENSINO DA REGIÃO DE VOTORANTIM
EE "CEL. PEDRO DIAS DE CAMPOS"
Rua João Felipe, nº 200-Centro - CEP: 18.195-000- Fone (15) 3267-1144/3267-1345-Capela do Alto - SP.
E-mail: e016913a@see.sp.gov.br

2ª TAREFA EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVA
A CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

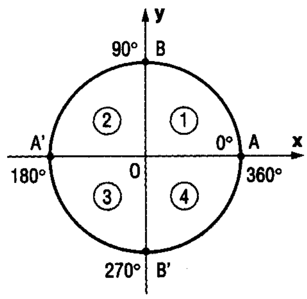
A circunferência trigonométrica é uma circunferência orientada, cujo raio é 1 unidade de comprimento e na qual o sentido positivo é o anti-horário.



Vamos associar um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, à circunferência de centro O, fixando o ponto A de coordenadas (1,0) como origem dos arcos.



Os eixos x e y dividem a circunferência em quatro partes congruentes chamadas quadrantes.

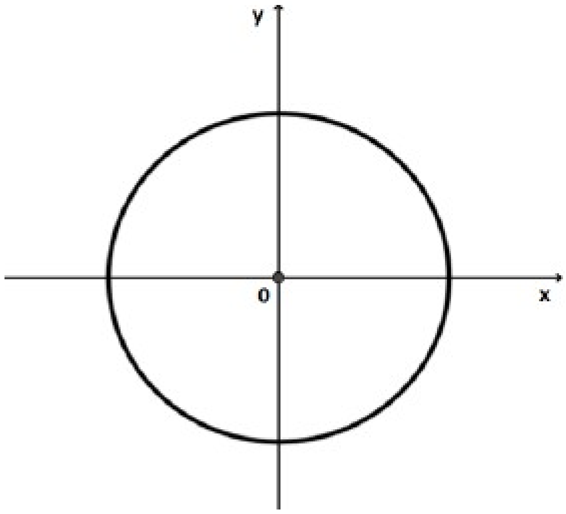


Atividade 1

	QUADRANTE	INTERVALO EM GRAUS
Complete a tabela ao lado, indicando os intervalos de variação, em graus, de cada quadrante.	1º Quadrante	
	2º Quadrante	
	3º Quadrante	
	4º Quadrante	

Atividade 2

Com o auxílio de um transferidor marque na circunferência trigonométrica os pontos que correspondem a extremidade dos arcos de: 15°, 30°, 60°, 75°, 120°, 150°, 225°, 240°, 330°, 420°, 480°, 540°, 600°, 750°, 780°, -135°, -210°, -225°.



a) Existem arcos cujas extremidades se posicionaram no mesmo ponto? Quais?

b) Existem arcos que deram mais de uma volta no círculo trigonométrico? Como você localizou o ponto onde se localiza a extremidade desses arcos?

c) O que podemos dizer sobre os ângulos -60°, -135° e -225°?

d) Os ângulos de 60° e 420° são côngruos. Observando suas posições no círculo trigonométrico, o que isso significa?

e) Dê exemplos de outros arcos côngruos.

f) Um ponto que descreve um ângulo de 1500° dá várias voltas, no sentido anti-horário de uma circunferência trigonométrica.

- Quantas voltas exatamente ele dá?
- Em que quadrante ele para?
- Dê exemplos de outros dois ângulos, aos quais ele poderia ser côngruo.

Análise dos resultados obtidos

Participaram desta atividade 37 alunos. A grande dificuldade inicial foi o uso do transferidor, onde uns alunos ajudaram os outros para que todos conseguissem localizar os arcos na circunferência. Todos os alunos responderam corretamente a questão número um, colocando o intervalo de variação em graus de cada quadrante. No item a) da segunda questão 65% dos alunos responderam corretamente, os demais deram respostas incompletas. No item b) esperava-se que os alunos explicassem os cálculos que realizaram para localizar a extremidade dos arcos com mais de uma volta. No entanto, apenas 59% conseguiram se expressar corretamente para descrever o raciocínio empregado. Vinte e sete por cento dos alunos, tiveram dificuldades em se expressar e 14% não responderam. Quanto ao item c), 92% dos alunos responderam corretamente que os ângulos são negativos por estarem no sentido horário e todos os alunos acertaram os demais itens. No item f) dois alunos deram exemplos de ângulos negativos: -210º e -300º como sendo côngruos ao ângulo de 1500º. Isto mostra que a realização das atividades proporcionou aos alunos a compreensão dos conceitos de arcos côngruos, ângulos negativos e também dos ângulos de mais de uma volta.

Como nas funções trigonométricas a variável x representa a medida de um arco em radianos, fez-se necessário a aplicação da atividade a seguir para introduzir o conceito de radiano.

4.2.3. O conceito de radiano

Conteúdos e temas	Medidas de arcos em radianos.
Competências e habilidades	Compreender o conceito de radiano e reconhecer arcos com medidas em radianos.
Tempo previsto	Três aulas de 50 minutos.
Material	Papel cartão, tesoura e barbante.

Justificativa

Na tarefa anterior, os arcos foram medidos em graus e não em radianos, pelo fato dos alunos conviverem com a ideia de ângulo de giro desde o Ensino Fundamental. No entanto, faz-se necessário neste momento, apresentar aos alunos a unidade radiano e a relação de conversão entre as unidades de medida de ângulos. Optou-se por desenvolver a atividade através de um experimento muito simples, mas que proporciona uma boa noção do que consiste a unidade radiano.

Desenvolvimento da atividade

Os alunos organizados em duplas construíram dois círculos com raios diferentes. Com o uso do barbante marcaram várias vezes a medida do raio e envolvendo a circunferência com o barbante marcado, puderam verificar a medida em radianos de um arco de 360 graus (uma volta completa) e 180 graus (meia volta de circunferência). Após a realização da atividade a professora pesquisadora fez a socialização dos resultados obtidos e a dedução da fórmula do comprimento de uma circunferência em radianos, da seguinte forma:

$$\frac{C}{D}=\pi$$

$$C = D \cdot \pi$$
$$C = 2 \cdot \pi \cdot r$$
$$C = 2 \cdot \pi \, 1 \, radiano$$
$$C = 2 \cdot \pi \, radiano$$

Em seguida foram trabalhadas as transformações de arcos de graus para radianos e de radianos para graus. Os alunos então construíram no caderno uma circunferência e fazendo uso do transferidor marcaram os arcos da primeira determinação positiva, dando as medidas em graus e radianos.

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
DIRETORIA DE ENSINO DA REGIÃO DE VOTORANTIM
EE "CEL. PEDRO DIAS DE CAMPOS"
Rua João Felipe, nº 200-Centro - CEP: 18.195-000- Fone (15) 3267-1144/3267-1345-Capela do Alto - SP.
E-mail: e016913a@see.sp.gov.br

3ª TAREFA EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVA
O CONCEITO DE RADIANO
(Experimento em duplas)

Material necessário: Papel cartão, tesoura, régua, compasso, barbante e caneta.

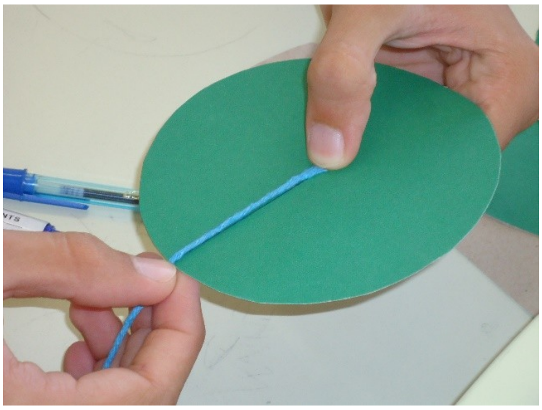
Desenvolvimento

A dupla deverá construir em papel cartão, dois círculos de raios diferentes. Os círculos deverão ser recortados, destacando-se os centros e seus respectivos raios. Em seguida cada aluno da dupla deverá sobrepor o barbante sobre o raio destacado e marcar alguns raios, tomando o cuidado de fazer com capricho as medições. Finalmente envolva o barbante com os raios marcados em volta do círculo e corte-o.

O arco de circunferência que possui a mesma medida do seu raio, denomina-se “radiano”. Após esta definição, vamos agora responder as seguintes questões:

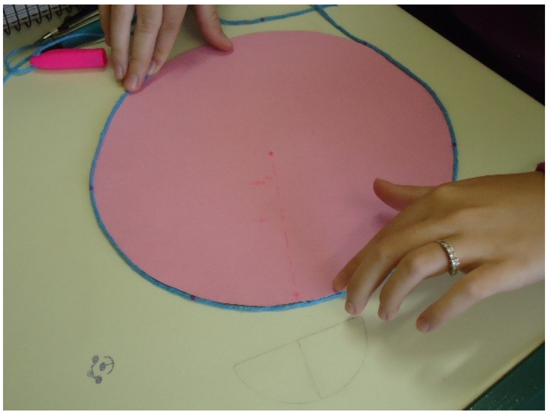
a) Fazendo uma estimativa, respondam: quantos radianos tem uma circunferência? Como vocês chegaram a essa conclusão?
b) E em meia circunferência quantos radianos existem?

Figura 28 - Medindo o raio.



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Figura 29 - Quantidade de radianos.



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Análise dos resultados obtidos

Participaram desta atividade 36 alunos organizados em duplas. Através das medições com barbante, os alunos na sua maioria, chegaram próximos do resultado esperado, ou seja: a circunferência tem 6,28 radianos e a semicircunferência tem 3,14 radianos.

Algumas duplas mereceram destaque pela resposta que apresentaram.

Figura 30 - Resposta da dupla 1.

6 radianos mais 0,4 R, ou seja aproximadamente
6,4 R é igual a circunferencia inteira.

Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Ao serem questionados sobre a resposta, a dupla 1 explicou que o raio da circunferência construída por eles era de 5 cm. A circunferência toda tem 6 radianos e sobraram 2 cm. Se tivesse sobrado 2,5 cm, a circunferência teria 6,5 radianos. Como sobraram 2 cm, imaginaram então que a circunferência tivesse um total de 6,4 radianos.

Figura 31 - Resposta da dupla 2.

a) Uma Circunferência tem 6 radianos mais 1,8 cm (aproximadamente metade de 1 radiano.) Chegamos a essa conclusão fazendo o círculo em um papel cartão e com um barbante marcando os radianos.

b) Existem 3 radianos e 0,9 cm aproximadamente $\frac{1}{4}$ de 1 radiano.

Fonte: Arquivo da pesquisadora.

A dupla 2 explicou que uma das circunferências construídas tinha raio de 4 cm. O seu comprimento tinha 6 radianos inteiros e sobrava pouco menos da metade do raio (aproximadamente 1,8 cm). Então arredondaram para 6,5 radianos para a volta completa (360°) e 3,25 radianos (1 radiano mais ¼ de radiano) para meia volta (180°).

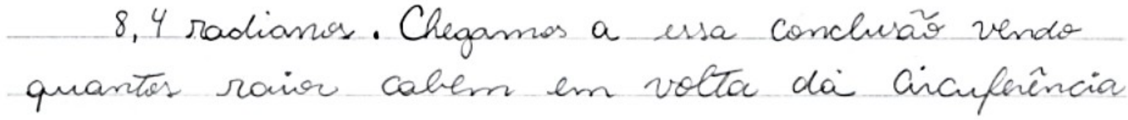
Figura 32 - Resposta da dupla 3.

6,333... radianos, Nós pegamos e medimos a circunferêncio que deu 6 radianos inteiros mais 1 cm. O raio é 3 cm, então deu 6,333...

Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Ao serem questionados sobre a resposta de 6,333... radianos, os alunos da dupla 3 explicaram que encontraram 6 radianos e mais uma sobra de aproximadamente um terço do raio. E a meia circunferência, segundo eles, tinha aproximadamente 3,15 radianos. Essa foi a resposta mais próxima encontrada para um arco de 180°.

Figura 33 - Resposta da dupla 4.


8,4 radianos. Chegamos a essa conclusão vendo quantos raios cabem em volta da Circuferência

Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Quando foram questionados a respeito da resposta de 8,4 radianos, a dupla 4 explicou que a circunferência tinha 6 radianos e mais uma sobra de 2,4 cm, logo somando dava 8,4 radianos. Nesse caso percebeu-se a grande confusão estabelecida pela dupla ao somar quantidade de radianos com um comprimento em centímetros.

Analisando as respostas dos alunos, notou-se que a maioria não conseguiu associar 360° com 6,28 radianos, mas chegaram próximos do resultado esperado. Todas as duplas perceberam que, embora as circunferências fossem de raios diferentes, sempre dava 6 radianos e alguma coisa. A grande dificuldade encontrada pelos alunos foi quantificar essa sobra, associando-a a uma parte do radiano. Muitos colocaram a sobra em centímetros, deixando como resposta 6 radianos e alguma quantidade de centímetros. O resultado esperado era de que os alunos percebessem que a circunferência mede 6 radianos e pouco mais de ¼ de radiano. Quando a explanação foi feita na lousa, eles compreenderam que se a circunferência tem um comprimento de $2.\pi.r$ e o raio corresponde a um arco de 1 radiano, então a circunferência tem $2.\pi$ radianos, ou seja aproximadamente 6,28 radianos. A atividade realizada foi bastante importante para que os alunos pudessem compreender de forma efetiva o significado de radiano e as medidas dos arcos de circunferência tendo o radiano como medida.

Antes de sistematizar o estudo das funções trigonométricas básicas, optou-se por apresentar aos alunos atividades com aplicações da trigonometria em situações práticas, a fim de aproximar o conteúdo de problemas com referência na realidade.

4.2.4. Modelando funções periódicas

Conteúdos e temas	Fenômenos periódicos; gráficos cartesianos de funções periódicas.
Competências e habilidades	Reconhecer a periodicidade presente em diferentes contextos; reconhecer as funções trigonométricas como modelagem de fenômenos periódicos; representar graficamente fenômenos periódicos por meio de gráficos cartesianos; utilizar software para a construção de gráficos; interpretar

	resultados e fazer inferências.
Tempo previsto	18 aulas de 50 minutos.
Material	Folha impressa, papelão, tampinhas de garrafa pet, cola, tesoura, régua, barbante, parafusos, porcas, arruelas, software GeoGebra.

Justificativa

O ensino das funções trigonométricas pode se tornar um conteúdo interessante no currículo do ensino médio devido à relação com outras áreas do conhecimento que estudam os movimentos periódicos. Procurou-se então, uma forma de trabalhar esse conteúdo, possibilitando a construção de conceitos através de relações com o cotidiano.

Desenvolvimento da Atividade

Num parque de diversões, pode-se observar o movimento de uma roda-gigante que pode ser modelado por uma equação trigonométrica. Pensando nesta perspectiva, e tendo como apoio o livro *Funções para modelar: uma preparação para o cálculo* (CONNALLY, et al., 2009) cujo capítulo seis: “Introdução a funções periódicas” trata de uma das maiores rodas-gigantes do mundo, a “London Eye” situada em Londres, foram adaptadas algumas atividades para a introdução do conceito de funções periódicas. A fim de enriquecer o conteúdo, foi proposta a construção de uma mini roda-gigante, conforme o experimento sugerido no portal ime3 da Unicamp (SOARES, 2015), que também teve como referência o livro de cálculo anteriormente citado.

Para complementar a noção de funções periódicas, foi proposta a transformação da mini roda-gigante em um pistão de motor, o qual ficou denominado “motorzinho”. Finalizando, foi utilizado o software de geometria dinâmica Geogebra para a construção dos gráficos correspondentes aos movimentos periódicos originados. A tabela 15 mostra de forma concisa como essas atividades foram agrupadas.

Tabela 15 - Atividades de Modelagem de Funções Trigonométricas.

ATIVIDADE 1: A roda-gigante mais famosa do mundo		
ETAPAS	**ATIVIDADES**	**DESCRIÇÃO**
1A	Conhecendo a "London Eye"	Construção do gráfico da altura em função do tempo quando se dá quatro voltas completas na roda-gigante.
1B	Preenchendo o gráfico da função	Reconhecimento da forma do gráfico de uma função periódica.
1C	Período e amplitude	Identificação do período e da amplitude de uma função periódica através da análise de gráficos e tabelas.
1D	Interpretando gráficos	Através da análise de gráficos dos movimentos de diferentes rodas-gigantes, reconhecer o sentido do movimento, o diâmetro da roda entre outros.
1E	Construindo gráficos	Construção de gráficos de rodas gigantes com diâmetros e velocidade de rotação diferentes.
ATIVIDADE 2: Mini roda-gigante		
ETAPAS	**ATIVIDADES**	**DESCRIÇÃO**
2A	Construção da mini roda-gigante	Construção da roda-gigante através de materiais manipulativos.
2B	Construção de gráficos no papel	Construção dos gráficos: (1) Altura em função do ângulo e (2) altura em função da distância percorrida e exercícios.
2C	Socialização	Atividades referentes ao gráfico da altura em função do ângulo.
2D	Encontrando a função que descreve o gráfico 1	Encontrar a função do gráfico da altura em função do ângulo.
2E	Encontrando a função que descreve o gráfico 2	Encontrar a função do gráfico da altura em função da distância percorrida.
2F	Construindo gráficos com o GeoGebra	Utilização do Geogebra para a construções dos gráficos da altura em função do ângulo e da altura em função da distância percorrida.
2G	Avaliação dos grupos	Os alunos farão uma auto avaliação da participação de cada aluno do grupo.
ATIVIDADE 3: Motorzinho		
ETAPAS	**ATIVIDADES**	**DESCRIÇÃO**
3A	Transformação da roda gigante em um pistão	Construção de um modelo de pistão a partir da roda gigante de papelão.
3B	Funcionando o motorzinho	Construção do gráfico da distância percorrida pelo pistão em função do ângulo de giro do virabrequim.
3C	Analisando simulação no GeoGebra.	Realização de atividades a partir de uma simulação do movimento do pistão construído no Geogebra.

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

ATIVIDADE 1 - "A roda–gigante mais famosa do mundo"

Com o objetivo de introduzir as funções periódicas, escolheu-se esta atividade envolvendo a roda-gigante "London Eye". O desenvolvimento da atividade possibilitou aos alunos reconhecer uma função periódica e encontrar seu período e amplitude.

Etapa 1A: Conhecendo a "London Eye".

Desenvolvimento da atividade

Inicialmente foi apresentado aos alunos um pequeno texto com as características da roda gigante mais famosa do mundo. No texto original as medidas estavam em pés, a professora pesquisadora então fez a conversão para metros, para facilitar o entendimento. Na situação-problema apresentada, os alunos se imaginaram embarcando na roda e dando 4 voltas completas no sentido anti-horário. Em seguida preencheram uma tabela com a altura em função do tempo em minutos e desenharam o gráfico da função.

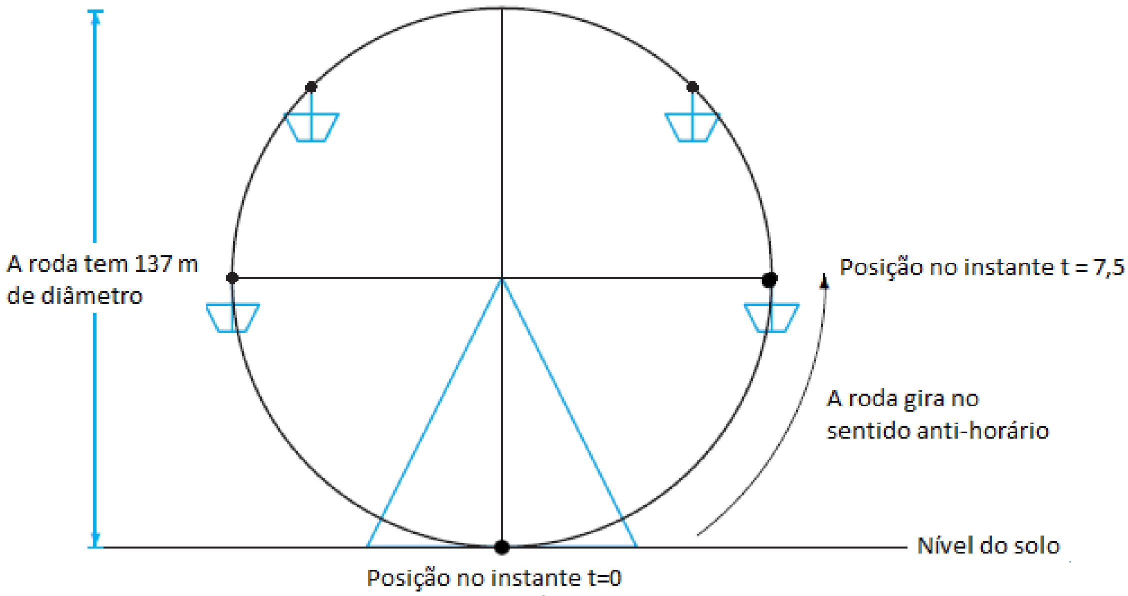
SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
DIRETORIA DE ENSINO DA REGIÃO DE VOTORANTIM
EE "CEL. PEDRO DIAS DE CAMPOS"
Rua João Felipe, nº 200-Centro - CEP: 18.195-000- Fone (15) 3267-1144/3267-1345-Capela do Alto - SP.
E-mail: e016913a@see.sp.gov.br

Atividade 1: "A Roda-Gigante Mais Famosa Do Mundo"

Etapa 1A: Conhecendo a "London Eye".

A roda-gigante "London Eye" está situada na margem sul do rio Tâmisa em Londres, mede aproximadamente 137 m de diâmetro e comporta até 800 visitantes em 32 cabines. Ela gira continuamente, sendo que a volta completa dura 30 minutos. Esse movimento é lento o suficiente para permitir que as pessoas embarquem ou desembarquem enquanto ela gira.

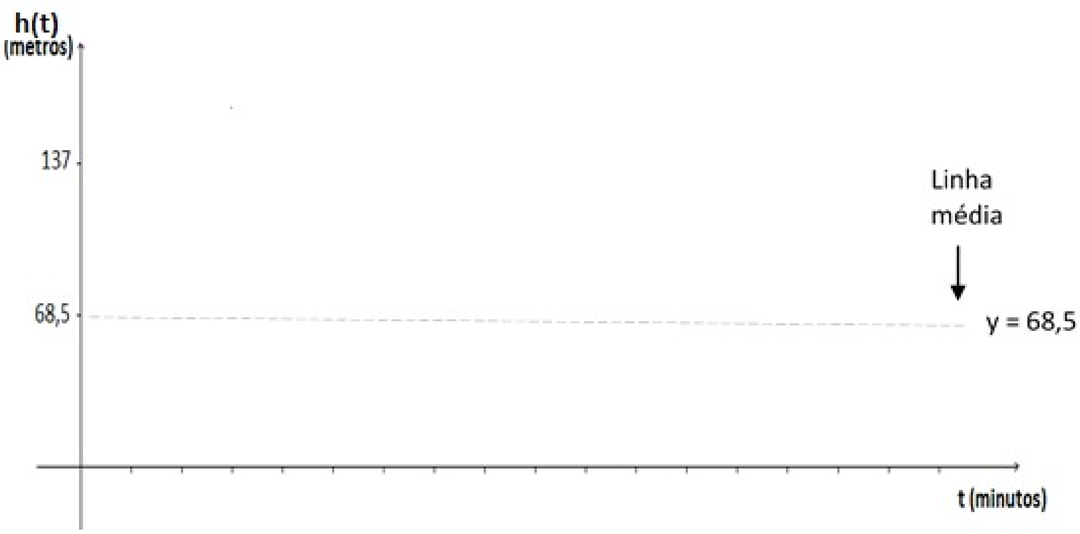
Suponha que você embarcou nessa roda-gigante no instante t=0, e deu quatro voltas completas. Seja $h=h(t)$ a sua altura acima do solo (não levando em conta a altura do seu assento), como uma função do número t de minutos. Supondo que a roda gire no sentido anti-horário, vamos calcular alguns valores de $h(t)$.



Desenhando o Gráfico da Função da Roda-Gigante

***t* (minutos)**	0	7,5	15	22,5	30	37,5	45	52,5	
***h(t)* (m)**									
***t* (minutos)**	60	67,5	75	82,5	90	97,5	105	112,5	120
***h(t)* (m)**									

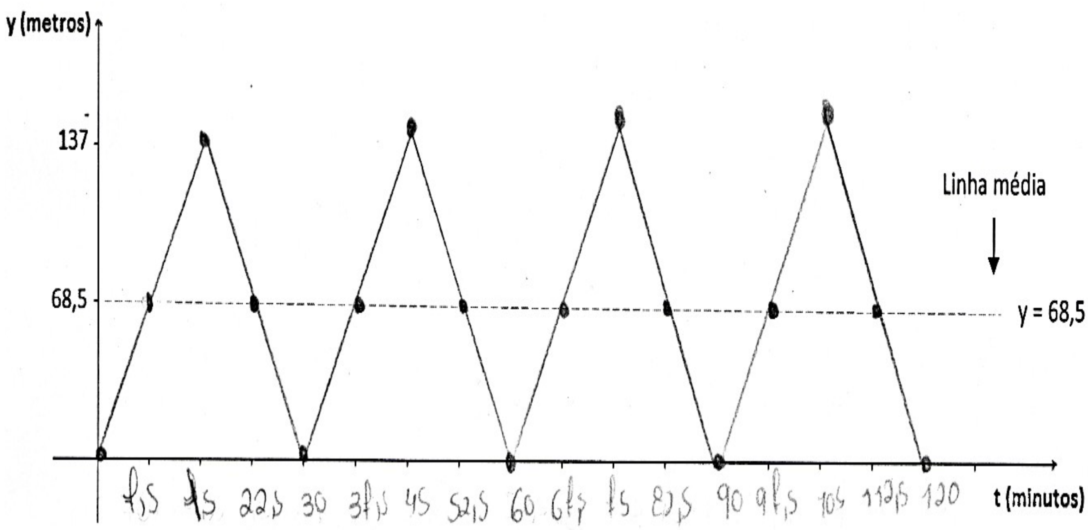
Que características tem o gráfico que você desenhou? ("com que ele se parece"?)



Análise dos resultados obtidos

A atividade individual teve a participação de 34 alunos que não tiveram dificuldades em interpretar o problema e preencher a tabela. Quanto a construção do gráfico, ninguém apresentou a forma característica do gráfico de uma função periódica. Vinte e oito alunos conectaram os pontos do gráfico por segmentos de retas (Figura 34).

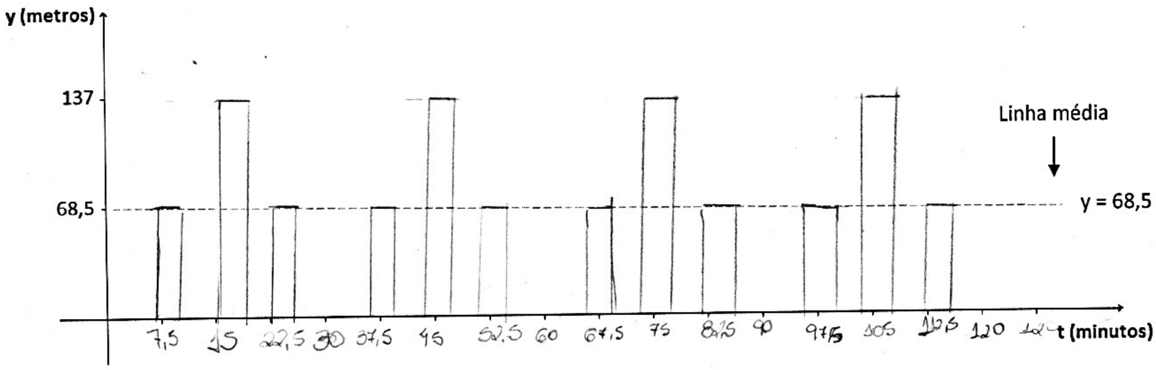
Figura 34 - Gráfico do aluno A.



Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Dois alunos fizeram gráficos de colunas para representar o movimento da roda-gigante (Figura 35).

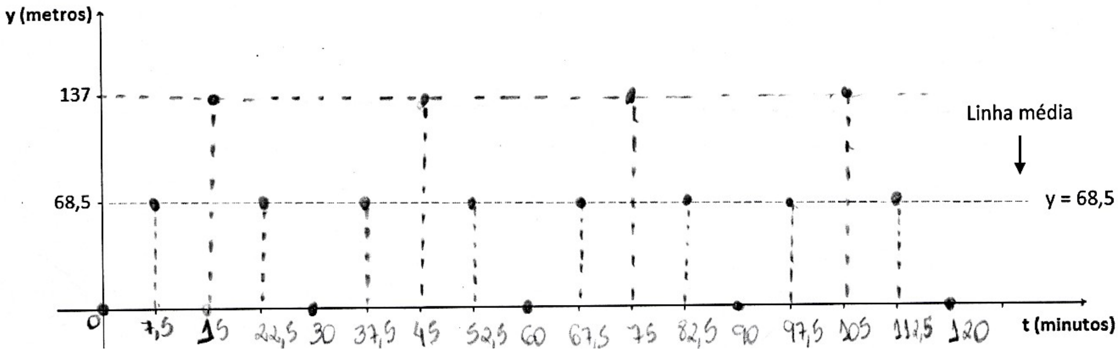
Figura 35 - Gráfico do aluno B.



Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Quatro alunos não ligaram os pontos do gráfico, como se pode observar pelo registro a seguir.

Figura 36 - Gráfico do aluno C.



Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Os alunos atribuíram as seguintes formas aos gráficos construídos por eles:

Tabela 16 - Formas dos gráficos atribuídos pelos alunos.

Forma do gráfico	Quantidade de alunos
Pirâmides	18
Montanha-russa	4
Triângulo	10
Prédio	1
Barras	1

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Os alunos participaram ativamente da realização da atividade como se pôde observar pelas conclusões de alguns deles.

- **Aluno 1:** Ao ser questionado se o seu gráfico estava correto, o aluno pensou e se deu conta que não iniciou o gráfico no zero. A professora pesquisadora complementou lembrando que quando se embarca na roda, a altura em relação ao chão é zero (não levando em conta a altura do assento).
- **Aluno 2:** O aluno percebeu que os valores da altura se repetiam na tabela e disse: "Se descobrirmos os três primeiros valores, saberemos todos os outros da tabela".
- **Aluno 3:** O aluno também percebeu a regularidade da tabela e argumentou: "A roda

deu a volta e a altura zerou. Com 37,5 minutos vai ser a mesma altura quando tinha se passado 7,5 minutos". Nesse caso, a professora pesquisadora percebeu que o aluno havia colocado na tabela, a altura máxima como sendo 68,5 m e não 137 m que é o diâmetro da roda, então perguntou-lhe: "A roda já deu uma volta completa e não atingiu a altura máxima? Onde está o erro? ". O aluno então percebeu que 68,5 m era o raio da roda-gigante e não o diâmetro e arrumou a tabela, dizendo: " É verdade, com 15 minutos atinge a altura máxima de 137 metros".

- **Aluno 4:** "Professora, divido a altura por quatro? " Então a professora pesquisadora explicou que o aluno estava confundindo com o tempo, este sim estava divido em quatro partes: 7,5 – 15 – 22,5 e 30 minutos, já a altura não. " Pense um pouco, em quantas partes iguais você deve dividir a altura? A altura aos 7,5 minutos não é igual à altura aos 22,5 minutos?" Ao que o aluno respondeu: "É mesmo professora, então divido em duas partes a altura".
- **Aluno 5:** "Essa tabela está muito lógica, é só copiar".
- **Aluno 6:** "Vai dar tudo igual, sempre vai ser a metade ou inteiro". Aqui o aluno se referia ao raio e ao diâmetro da roda.
- **Aluno 7:** "Indo de 7,5 em 7,5 vai dar sempre um valor constante". Ao ser questionado sobre o que ele chamava de constante, o aluno explicou: "A cada 7,5 minutos a altura aumenta 68,5 metros ou diminui 68,5 metros".
- **Aluno 8:** O aluno tentando explicar o formato do gráfico concluiu: "O gráfico vai ser como uma parábola! " Neste caso o aluno já se referia às curvas do gráfico fazendo uma associação à parábola, mesmo sem saber o verdadeiro formato de uma função periódica.
- **Aluno 9:** Ao perceber que o aluno estava encabulado, a professora pesquisadora perguntou o que o afligia e o aluno respondeu: " Professora, esse não parece bem um gráfico, nunca vi um gráfico assim. Estou acostumado com gráfico que vai sempre subindo". Provavelmente se referindo ao gráfico de uma função linear crescente.
- **Aluno 10:** "E eu estou acostumado com gráfico que tenha sempre evolução, esse daqui sobe e desce".
- **Aluno 11:** Finalmente, esse aluno deu uma olhadinha no caderno do aluno do currículo do Estado de São Paulo, que até o momento não havia sido iniciado e disse: " O gráfico está errado, olhem na apostila, está cheinho de gráfico assim... (fazendo o

formato de ondas com a mão) ”. Neste momento todos os alunos já haviam entregue a atividade.

A atividade proposta tinha como objetivo introduzir as funções periódicas, levando o aluno a reconhecer a regularidade da tabela e a periodicidade do gráfico da função. Os objetivos foram atingidos plenamente, pois os alunos não tiveram dificuldades em reconhecer a regularidade da tabela da altura em função do tempo, como se pode verificar pelos diálogos ocorridos durante a realização da atividade. Sem contar que os alunos se sentiram motivados com a roda-gigante que não para nunca. Foi bastante interessante perceber a estranheza deles em relação ao gráfico. Embora todos tivessem errado o formato do gráfico que deveria ter a forma de ondas, o formato do gráfico, apesar de incorreto, era algo inusitado para eles.

Etapa 1B: Esboçando o gráfico da função

Desenvolvimento da atividade

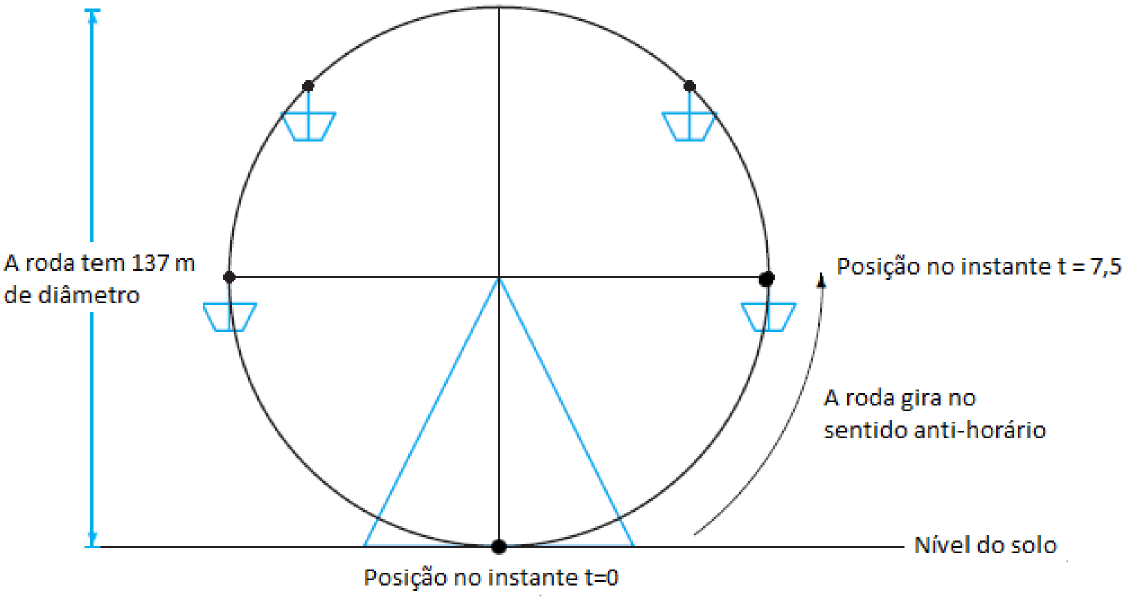
Esta atividade teve como objetivo mostrar aos alunos que não se pode conectar os pontos do gráfico por segmentos de reta, pois não existe proporcionalidade, justificando assim a não-linearidade do gráfico. A atividade iniciou propondo aos alunos que marcassem na circunferência da roda a posição 3,75 minutos após o embarque. A seguir os alunos foram orientados a fazer uma estimativa da altura do assento em relação ao solo, 3,75 minutos após o embarque. Neste caso, os alunos deveriam perceber que 7,5 minutos corresponde a um giro de 90°. Como 3,75 minutos é a metade de 7,5, deve corresponder a um giro de 45°. Para um giro de 45° a altura do assento em relação ao solo é menor que a metade do raio, ou seja, menor que 34,25 metros, uma vez que o raio da roda-gigante é 68,5 metros. Portanto, não há proporcionalidade. O gráfico não é composto por segmentos de reta, pois a taxa de variação da altura em relação ao ângulo não é constante. Pelo contrário a função cresce e decresce a cada 2π radianos. Em seguida, os alunos deveriam ser capazes de esboçar corretamente o gráfico da função em forma de ondas e explicar o porquê de não se conectar os pontos por segmentos de reta.

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
DIRETORIA DE ENSINO DA REGIÃO DE VOTORANTIM
EE "CEL. PEDRO DIAS DE CAMPOS"
Rua João Felipe, nº 200-Centro - CEP: 18.195-000- Fone (15) 3267-1144/3267-1345-Capela do Alto - SP.
E-mail: e016913a@see.sp.gov.br

Atividade 1: "A Roda-Gigante Mais Famosa Do Mundo"

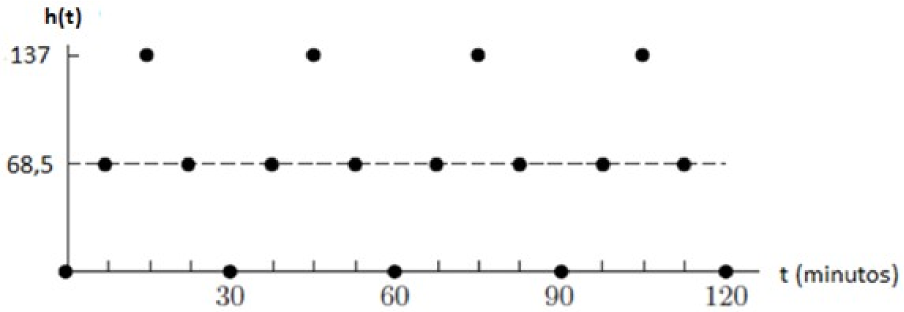
Etapa 1B: Esboçando o gráfico da função

1) Suponha que você embarcou na roda-gigante de Londres no instante t=0. Marque na circunferência a sua posição após 3,75 minutos do embarque.



2) Faça uma estimativa e indique a sua altura em relação ao solo 3,75 minutos após o embarque. A que conclusão você chegou?

3) Agora preencha o gráfico da função que você desenhou anteriormente. Você acha que os pontos devem ser conectados por retas? Por quê?

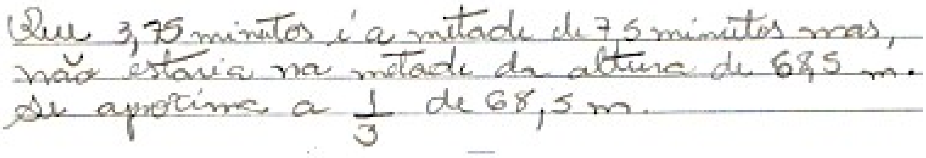


Análise dos resultados obtidos

Na primeira questão, dos 34 alunos que participaram, 32 acertaram a localização de 3,75 minutos na circunferência, pois usaram o transferidor para localizar o ângulo de 45°. Um aluno se esqueceu de marcar o tempo na circunferência e outro aluno marcou em lugar errado.

Na segunda questão, após localizar a posição em 3,75 minutos, 31 alunos projetaram o ponto da circunferência no eixo vertical e usando uma régua perceberam que a altura era menor que a metade do raio. Desses alunos, 16 disseram que a altura era aproximadamente um terço da medida do raio da circunferência, de acordo com o registro a seguir.

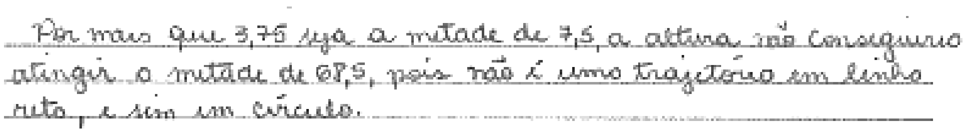
Figura 37- Reposta do aluno A.


Que 3,75 minutos é a metade de 7,5 minutos mas, não estaria na metade da altura de 68,5 m. Se aproxima a $\frac{1}{3}$ de 68,5 m.

Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Onze alunos responderam que 3,75 minutos é a metade de 7,5 minutos, mas que a altura era menor que a metade do raio da circunferência, só que não fizeram a estimativa de quanto era esse valor, como se pode observar pelo registro a seguir:

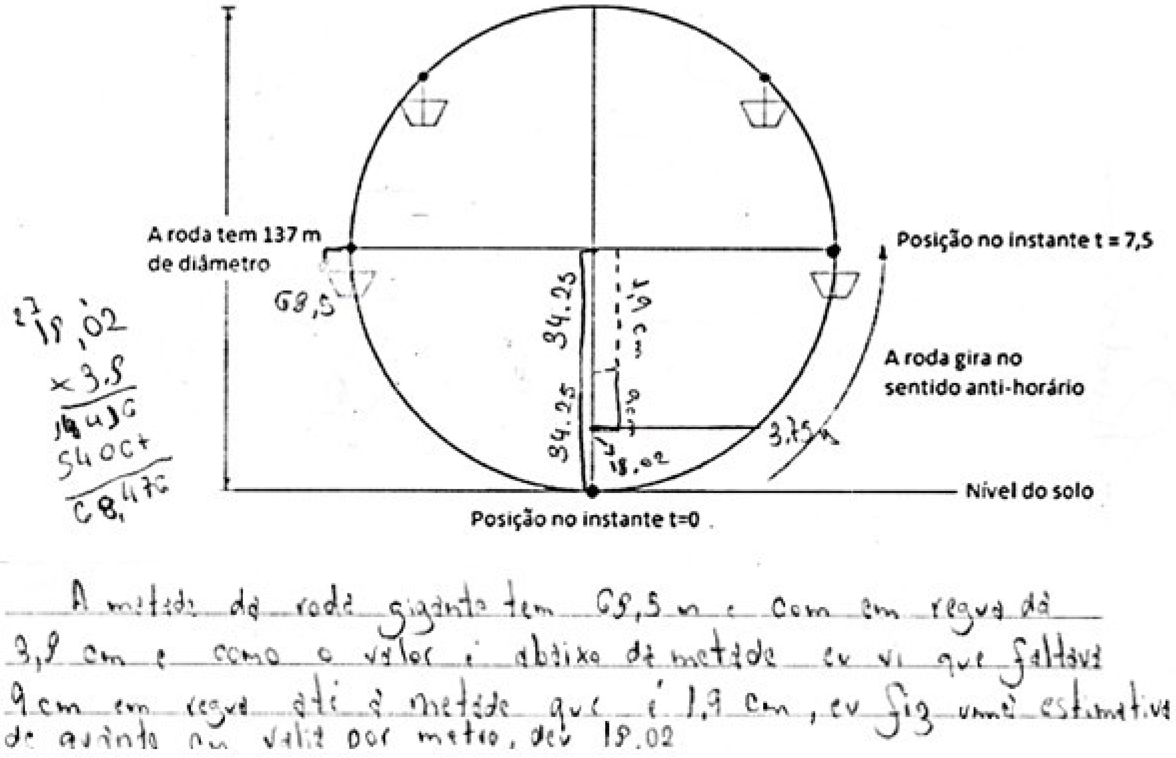
Figura 38 - Resposta do aluno B.


Por mais que 3,75 seja a metade de 7,5, a altura não conseguiria atingir a metade de 68,5, pois não é uma trajetória em linha reta, e sim um círculo.

Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Um aluno respondeu que a altura era de 30 metros e três alunos responderam que a altura era aproximadamente 18 metros. O registro a seguir mostra o raciocínio bastante interessante de um desses alunos.

Figura 39 - Resposta do aluno C

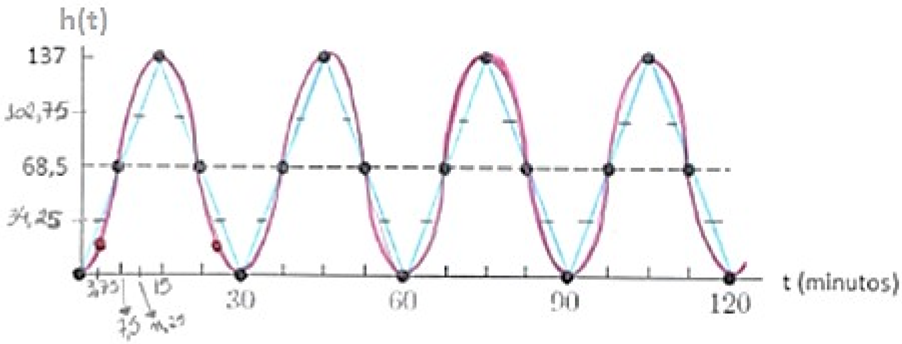


Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

O único erro que esse aluno cometeu foi a localização de 3,75 minutos, que podemos observar foi menor que 45°, exatamente por isso a resposta ficou incorreta. Se não fosse por esse engano a resposta ficaria bem próxima do esperado. O aluno mediu com a régua e percebeu que a distância representada pelo raio era de 3,8 cm e que a altura procurada era 1 cm, ou seja 0,9 cm (o aluno colocou 9 cm) abaixo da metade de 3,8 cm que é 1,9 cm. Com isso ele estimou 18,02 m que é a altura correspondente a 1 cm. Apenas três alunos não entenderam a questão e erraram.

Na questão número três, 31 alunos perceberam que não havia proporcionalidade e não poderiam conectar os pontos do gráfico por segmentos de reta e sim que o gráfico teria o formato de ondas. Dos 3 alunos que erraram a segunda questão, dois alunos perceberam o erro e corrigiram o gráfico. O aluno D refez o gráfico indicando mais alguns valores de tempo e altura nos eixos cartesianos (Figura 40).

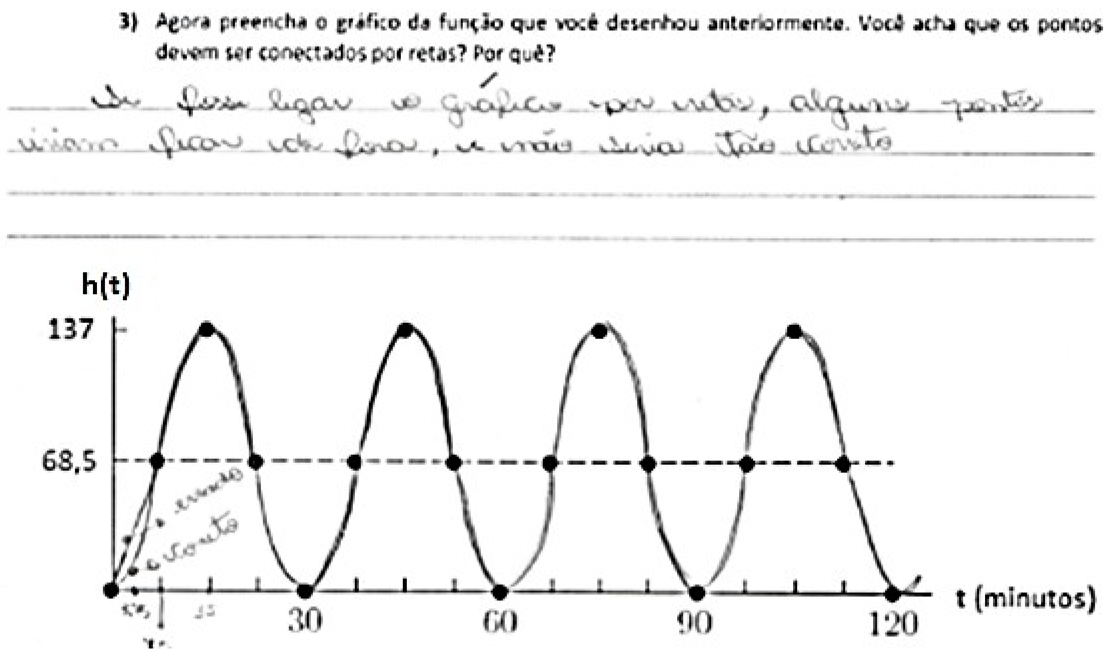
Figura 40 - Gráfico do aluno D.



Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

O aluno E percebeu que os pontos não poderiam ser ligados por segmentos de reta, como se pode verificar pela sua resposta na figura 41, onde fez questão de mostrar qual seria a localização correta do ponto no gráfico.

Figura 41- Gráfico do aluno E.



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Durante a socialização a professora pesquisadora perguntou em qual outro instante a altura em relação ao solo seria a mesma. Alguns alunos calcularam e responderam corretamente: 26,25 minutos.

Os objetivos propostos foram alcançados, pois os alunos compreenderam que não se pode conectar os pontos do gráfico por segmentos de reta, pois nas funções periódicas não existe proporcionalidade.

Diferentemente do Currículo do Estado de São Paulo e dos livros do PNLD 2015, onde no desenvolvimento dos conteúdos de Trigonometria, a escrita dos alunos é pouco explorada, nesta pesquisa procurou-se solicitar aos alunos que escrevessem os procedimentos adotados, justificando, representando ou esquematizando suas descobertas, permitindo desta forma, que refletissem sobre os procedimentos envolvidos na atividade proposta.

Etapa 1C: Reconhecendo o período e a amplitude de uma função periódica.

Desenvolvimento da atividade

O objetivo desta etapa foi introduzir a noção de período e amplitude de uma função periódica. Através de exercícios foram questionadas as características da tabela e do gráfico desenhado na atividade anterior. Posteriormente os alunos foram orientados a identificar o período de funções expressas através de gráficos e tabelas.

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
DIRETORIA DE ENSINO DA REGIÃO DE VOTORANTIM
EE "CEL. PEDRO DIAS DE CAMPOS"
Rua João Felipe, nº 200-Centro - CEP: 18.195-000- Fone (15) 3267-1144/3267-1345-Capela do Alto - SP.
E-mail: e016913a@see.sp.gov.br

Atividade 1: "A Roda-Gigante Mais Famosa Do Mundo"

Etapa 1C: Reconhecendo o período e a amplitude de uma função periódica

1) Observando os valores de h(t) na tabela, o que acontece após 30 minutos?

2) Se você der mais voltas completas na roda, os valores de h(t) continuarão se repetindo? Em que intervalo de tempo?

3) Que características tem o gráfico que você desenhou agora? ("com que ele se parece"?)

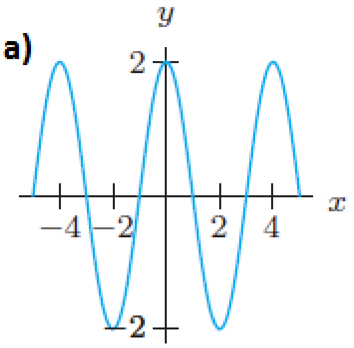
4) A função h da roda-gigante é periódica. O menor intervalo de tempo, durante o qual uma função completa um ciclo inteiro, é denominado período, que é representado graficamente como uma distância horizontal. Então qual é o período dessa função?

5) A amplitude de uma função periódica é a metade da distância vertical compreendida pelo gráfico, ou seja, é a distância entre o ponto de máximo (ou mínimo) e a linha média do gráfico. Então qual é a amplitude dessa função?

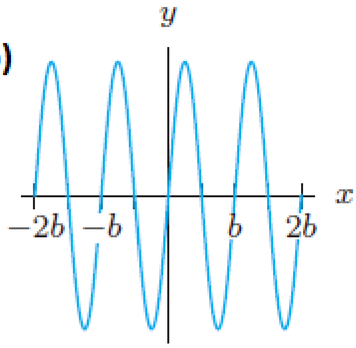
6) Chamamos de fenômenos periódicos aqueles que se repetem sempre após o mesmo intervalo de tempo. Muitos fenômenos ou situações que estão presentes em nosso dia a dia são periódicos, isto é, de tempos em tempos se repetem. Um exemplo de fenômeno periódico é o nascer e o pôr do sol. Pense em alguns outros exemplos de situações ou fenômenos à nossa volta que são periódicos.

7) Qual é o período das funções periódicas abaixo?

a)



b)



c)

t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	12	13	14	12	13	14	12

d)

z	1	11	21	31	41	51	61	71	81
$g(z)$	5	3	2	3	5	3	2	3	5

Análise dos resultados obtidos

Participaram desta atividade apenas 26 alunos. A frequência nesse dia foi baixa por se tratar de véspera de feriado municipal. A seguir a análise de cada questão da atividade.

Questão 1: Observando os valores de *h(t)* na tabela, o que acontece após 30 minutos?

Tabela 17 - Respostas da questão 1 – Etapa 1C.

Respostas	Quantidade de alunos
A roda dá uma volta completa	2
Volta para o ponto de partida	17
Os valores vão se repetindo	3
A roda faz mais um ciclo	1
A roda gira 360°:	1
A roda atingiu 137 metros	1
Aumenta e diminui 68,5 metros de altura:	1

Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Foi verificado que 17 alunos se referiram exatamente aos valores da altura zero na tabela depois de 30 minutos. De forma indireta 7 alunos também perceberam que depois de

30 minutos a altura é zero. Portanto quase todos os alunos perceberam a regularidade da tabela.

Questão 2: Se você der mais voltas completas na roda, os valores de h(t) continuarão se repetindo? Em que intervalo de tempo?

Tabela 18 - Respostas da questão 2 – Etapa 1C.

Respostas	Quantidade de alunos
De 30 em 30 minutos	21
De 15 em 15 minutos	3
De 7,5 em 7,5 minutos	2

Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

A maioria dos alunos (81%) percebeu que o intervalo de tempo em que os valores da altura se repetem é de 30 minutos. Portanto começaram a entender a periodicidade da função como algo que se repete num certo intervalo de tempo.

Questão 3: Que características tem o gráfico que você desenhou? (“com que ele se parece”?)

Nesta questão todos os alunos responderam que o gráfico tem a forma de ondas, pois já entenderam que na atividade anterior os pontos não poderiam ser conectados por retas.

Questão 4: A função *h* da roda-gigante é periódica. O menor intervalo de tempo, durante o qual uma função completa um ciclo inteiro, é denominado período, que é representado graficamente como uma distância horizontal. Então qual é o período dessa função?

Verificou-se que apenas dois alunos não se referiram aos valores da altura que se repetem de 30 em 30 minutos. Portanto, a maioria (92%) acertou o período da função.

Questão 5: A amplitude de uma função periódica é a metade da distância vertical compreendida pelo gráfico, ou seja, é a distância entre o ponto de máximo (ou mínimo) e a linha média do gráfico. Então qual é a amplitude dessa função?

Nesta questão 24 alunos (92%) também acertaram a amplitude da função. Dos dois alunos que erraram, um respondeu que a amplitude era de 137 metros (se esqueceu de dividir a distância vertical pela metade) e outro respondeu que a amplitude era de 30 minutos, confundindo com o período.

Questão 6: Chamamos de fenômenos periódicos aqueles que se repetem sempre após o mesmo intervalo de tempo. Muitos fenômenos ou situações que estão presentes em nosso dia a dia são periódicos, isto é, de tempos em tempos se repetem. Um exemplo de fenômeno periódico é o nascer e o pôr do sol. Pense em alguns outros exemplos de situações ou fenômenos à nossa volta que são periódicos.

As respostas desta questão foram bastante diversificadas, mas o importante foi verificar que todos os alunos entenderam o que era periodicidade de uma função. A seguir algumas respostas apresentadas:

- noite – ciclo menstrual – programa de tv – sol – relógio – fases da lua – cometa halley – ano – estações do ano – ritmos musicais - respiração – horas do dia – ano bissexto – quando tomamos remédio – aulas da semana - dias da semana, entre outras.

Questão 7: Qual é o período das funções periódicas abaixo?

No item a), 12 alunos responderam corretamente que o período da função era 4. Analisando as respostas erradas, verificou-se que nove alunos que responderam que o período era de 2, se equivocaram, pois, o eixo das abscissas estava dividido de dois em dois. Quatro alunos que responderam que o período era 5, observaram a distância horizontal abrangida pelo gráfico e apenas um aluno não soube responder.

No item b), os alunos tiveram dificuldades em identificar o período, pois o eixo das abscissas estava subdividido em expressões literais, o que dificultou o entendimento dos alunos. Quinze alunos responderam que o período era 0,5. Sete alunos responderam que o período era 1; um aluno respondeu que era 2b e 3 alunos não responderam. Portanto, ninguém acertou a questão.

No item c), 11 alunos responderam corretamente que o período era 3. Sete alunos disseram que o período era 2; sete alunos responderam que era 1 e um aluno não respondeu.

No item d), 11 alunos responderam que o período era 40, portanto acertaram. Sete alunos responderam que o período era 10; um aluno respondeu que era 4; cinco responderam que era 3; um aluno respondeu que o período era 2 e um aluno não respondeu.

O nível de dificuldade em encontrar o período da função na tabela, foi praticamente o mesmo que no gráfico. Nas tabelas muitos erros decorreram do fato dos alunos não terem associado o f(t) e o g(z) com a regularidade, pois no item c), 7 alunos responderam que o período era de 1 em 1 e no item d) os mesmos 7 alunos responderam que o período era de 10 em 10, ou seja, esses valores correspondem a escala nas variáveis t e z respectivamente.

A aplicação da atividade permitiu à professora pesquisadora perceber que ainda muitos alunos encontraram dificuldades na compreensão das relações entre as variáveis das funções. Portanto, foram necessárias algumas intervenções propondo atividades de retomada do tema funções para uma melhor compreensão das funções periódicas.

Etapa 1D: Interpretando Gráficos

Desenvolvimento da atividade

O objetivo da atividade foi levar o aluno a interpretar gráficos dos movimentos de diferentes rodas-gigantes, identificando as seguintes informações contidas nos gráficos:

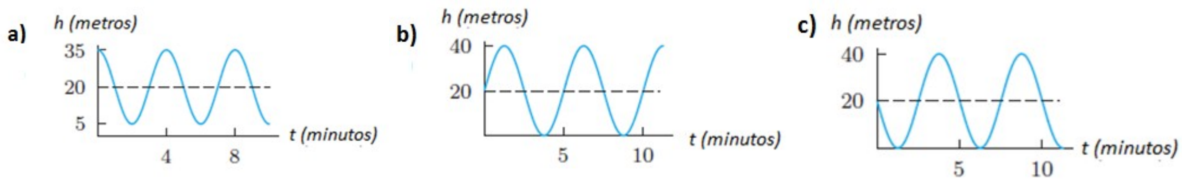
- Posição da cadeirinha no tempo zero;
- Sentido do movimento;
- Tempo necessário para completar uma volta;
- Diâmetro da roda-gigante;
- Altura em relação ao solo em que se embarca na roda;
- Intervalo de tempo em que o gráfico mostra a roda em movimento

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
DIRETORIA DE ENSINO DA REGIÃO DE VOTORANTIM
EE "CEL. PEDRO DIAS DE CAMPOS"
Rua João Felipe, nº 200-Centro - CEP: 18.195-000- Fone (15) 3267-1144/3267-1345-Capela do Alto - SP.
E-mail: e016913a@see.sp.gov.br

Atividade 1: "A Roda-Gigante Mais Famosa Do Mundo"

Etapa 1D: Interpretando gráficos

Para cada gráfico, determine o seguinte: sua posição e o sentido do movimento em t=0, quanto tempo a roda leva para completar uma volta inteira, o diâmetro da roda, em que altura acima do solo você embarca na roda e o intervalo de tempo durante o qual o gráfico mostra você andando na roda. A plataforma de embarque é nivelada com o ponto mais baixo da roda.



Questão a)	
Posição em t=0	
Sentido do movimento em t=0	
Tempo para completar uma volta inteira	
Diâmetro da roda	
Altura acima do solo em que você embarca na roda	
Intervalo de tempo em que você anda na roda	
Questão b)	
Posição em t=0	
Sentido do movimento em t=0	
Tempo para completar uma volta inteira	
Diâmetro da roda	
Altura acima do solo em que você embarca na roda	
Intervalo de tempo em que você anda na roda	
Questão c)	
Posição em t=0	
Sentido do movimento em t=0	
Tempo para completar uma volta inteira	
Diâmetro da roda	
Altura acima do solo em que você embarca na roda	
Intervalo de tempo em que você anda na roda	

Análise dos resultados obtidos

Trinta e dois alunos participaram desta atividade. Tabulando as respostas dos alunos nas questões tem-se a tabela 19:

Tabela 19 - Resultados da atividade “Interpretando gráficos”.

Questão A:		
Itens	**Quantidade de acertos:**	**Porcentagem**
Posição	32	100%
Sentido	29	91%
Tempo de uma volta	30	94%
Diâmetro	28	88%
Altura do embarque	28	88%
Intervalo de tempo	13	41%
Questão B:		
Itens	**Quantidade de acertos:**	**Porcentagem**
Posição	32	100%
Sentido	24	75%
Tempo de uma volta	24	75%
Diâmetro	30	94%
Altura do embarque	21	66%
Intervalo de tempo	18	56%
Questão C:		
Itens	**Quantidade de acertos:**	**Porcentagem**
Posição	32	100%
Sentido	28	88%
Tempo de uma volta	27	84%
Diâmetro	25	78%
Altura do embarque	21	66%
Intervalo de tempo	24	75%

Fonte: Elaborada pela Pesquisadora.

Verificou-se que os alunos não encontraram maiores dificuldades na interpretação dos gráficos. Somente para encontrar o intervalo de tempo em que o gráfico mostra a roda em movimento é que tiveram um pouco mais de dificuldade. Nesse caso, eles tiveram que fazer uma estimativa do intervalo do eixo das abscissas que mostrava o tempo em que a roda-gigante permanecia em movimento. Entre os alunos que participaram desta atividade, 50% deles responderam que a maior dificuldade encontrada foi estimar o intervalo que mostra a roda em movimento.

Etapa 1E: Construindo gráficos

Desenvolvimento da atividade

A atividade proposta teve como objetivo a construção de gráficos do movimento de rodas gigantes com diâmetros e velocidades de rotações diferentes com a identificação do período e amplitude das funções.

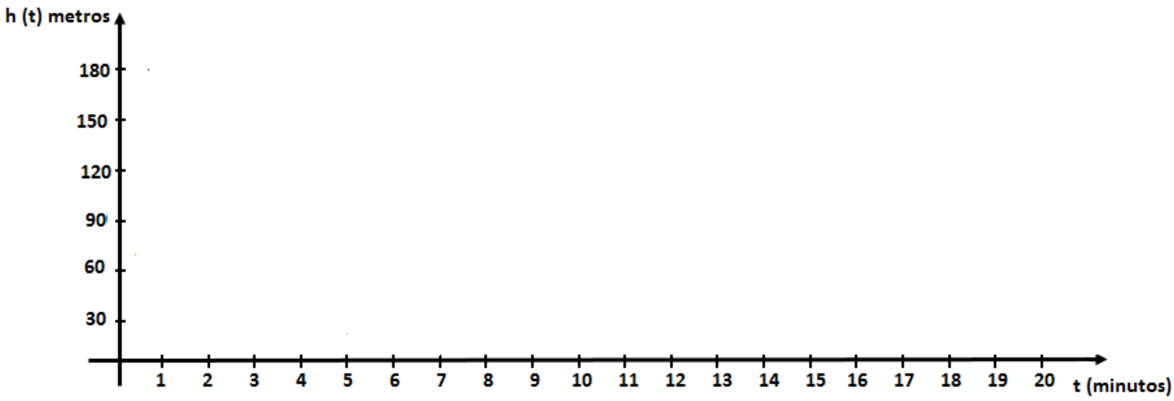
SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
DIRETORIA DE ENSINO DA REGIÃO DE VOTORANTIM
EE "CEL. PEDRO DIAS DE CAMPOS"
Rua João Felipe, nº 200-Centro - CEP: 18.195-000- Fone (15) 3267-1144/3267-1345-Capela do Alto - SP.
E-mail: e016913a@see.sp.gov.br

Atividade 1: “A Roda-Gigante Mais Famosa Do Mundo”

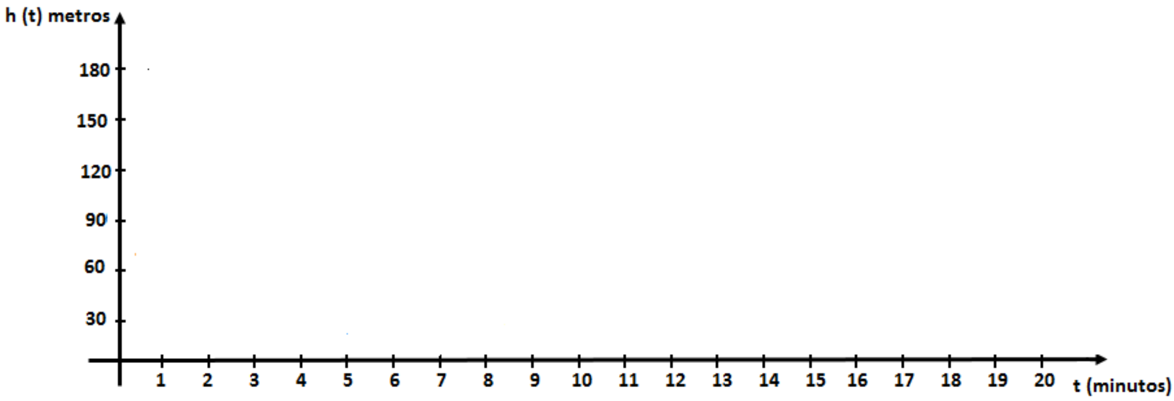
Etapa 1E: Construindo gráficos

Supondo que você embarque na roda-gigante de Londres, desenhe o gráfico da sua altura acima do solo h(t), t minutos depois que a roda começar a girar, identificando o período, a amplitude e a linha média em cada caso abaixo:

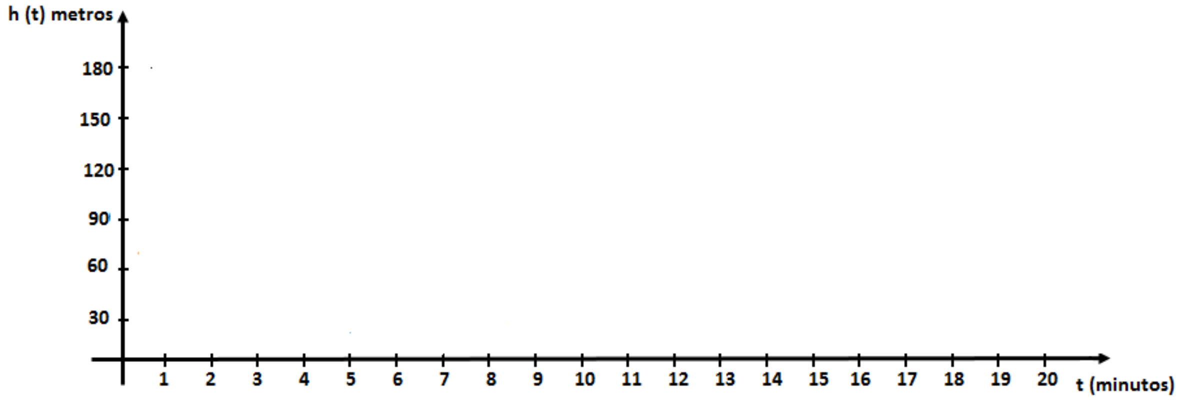
a) A velocidade de rotação da roda-gigante é aumentada. A roda, agora, completa uma volta inteira a cada dez minutos. Você desembarca quando atinge o solo, após ter percorrido duas voltas completas.



b) Tudo igual ao item anterior, exceto o fato de que agora a roda tem um diâmetro de 180 metros.



c) Agora a roda-gigante de Londres, cujo diâmetro é de aproximadamente 137 metros, está girando com o dobro da velocidade, ou seja: completa uma volta inteira a cada 5 minutos.

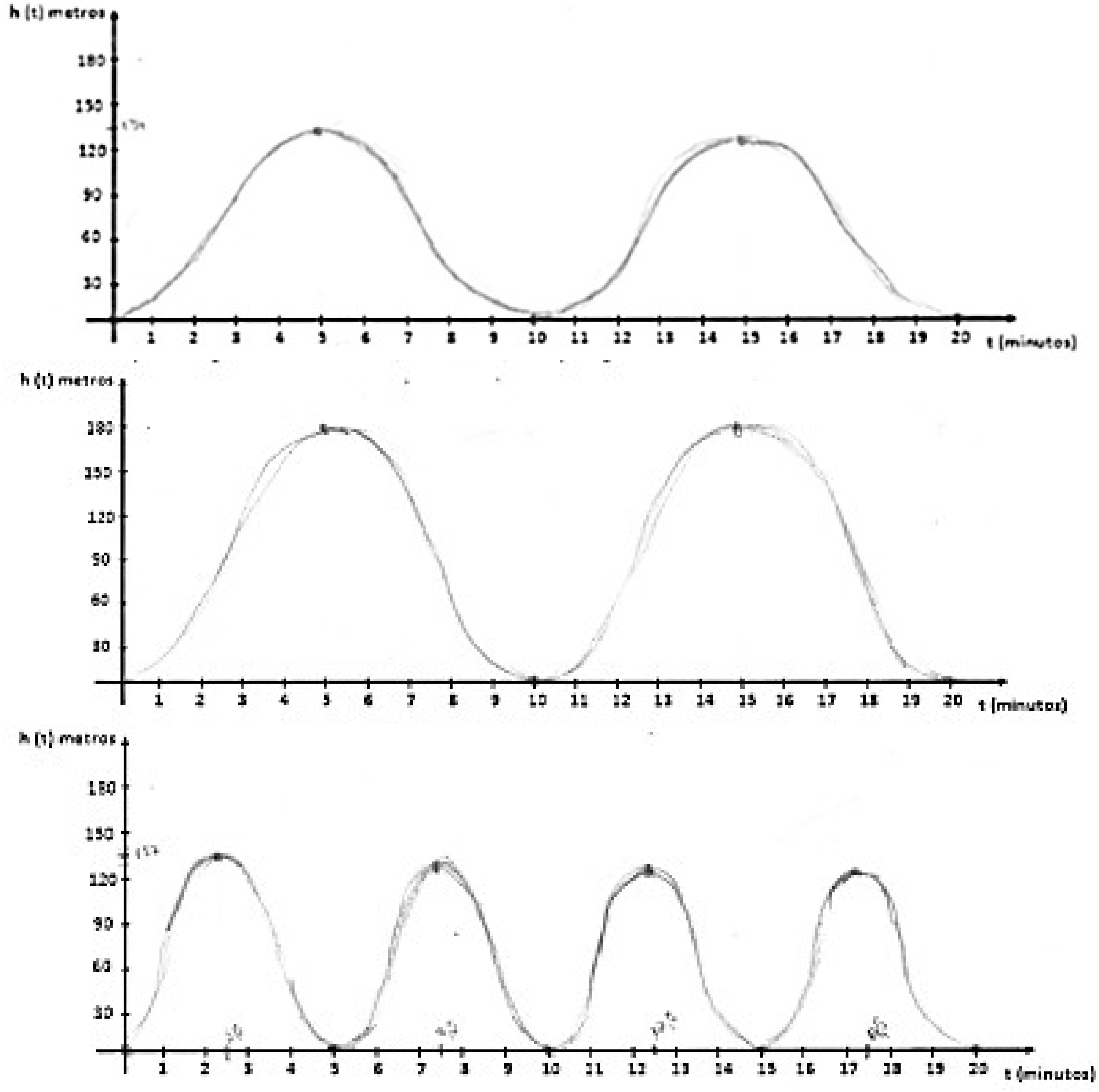


d) Comparando os gráficos construídos nos itens a e b, o que você observou?
e) Comparando os gráficos construídos nos itens a e c, o que você observou?

Análise dos resultados obtidos

Participaram desta atividade 35 alunos, na qual todos desenharam os gráficos corretamente. Aqueles que encontraram dificuldades pediram ajuda aos colegas e à professora pesquisadora. Dos 35 alunos, 11 indicaram corretamente o período e a amplitude em cada gráfico, 2 alunos destacaram o período e não indicaram a amplitude e 22 alunos se esqueceram de indicar o período e a amplitude nos gráficos. Ver figura 42.

Figura 42 - Gráficos da atividade 1E elaborados por alunos.



Fonte: Arquivo da Pesquisadora

A seguir foram analisadas algumas respostas dos alunos quanto à questão D.

Questão D: Comparando os gráficos construídos nos itens a e b, o que você observou?

<u>Aluno 1</u>:

Comparando os gráficos construídos nos itens **a e b**, o que você observou? O diametro da B é maior que da A. Amplitude B: 90, Amplitude A: 67,5, Periodo são iguais Pois o tempo não mudou.

O aluno mostrou que compreende os conceitos de período e amplitude.

Aluno 2:

Comparando os gráficos construídos nos itens **a** e **b**, o que você observou? A e maior que o B por causa do diametro.

Neste caso o aluno não especificou se tratava-se do período ou amplitude. Então a professora pesquisadora o questionou:

Professora: Quando você disse “A maior que B”, o que mudou: o período ou a amplitude?

Aluno 2: A amplitude.

Aluno 3:

Comparando os gráficos construídos nos itens **a** e **b**, o que você observou? Quanto maior o alturo, mais longo ficaro o grafico

Professora: Quando você disse “mais longo ficará o gráfico”, o que você quis dizer?

Aluno 3: Que a amplitude ficou maior.

Professora: E o que você tem a dizer sobre o período?

Aluno 3: O período ficou igual, porque o tempo não mudou.

Aluno 4:

Comparando os gráficos construídos nos itens **a** e **b**, o que você observou? que apesar do diametro ser diferente, os dois graficos concluem a volta em 10 min.

Professora: O que você tem a dizer a respeito do período e da amplitude dos dois gráficos?

Aluno 4: A amplitude é diferente por causa do diâmetro, mas o período é igual porque o tempo de uma volta é igual.

Analisando as respostas dos alunos, verificou-se que na questão D, 7 alunos perceberam a diferença entre os diâmetros e que os gráficos ficaram diferentes, porém não mencionaram a palavra “amplitude”. Neste caso, embora a noção de amplitude diferente foi bem observada, a nomenclatura ainda não foi incorporada. Esses alunos perceberam que o período era igual, mas não mencionaram o fato. Notou-se que os que disseram que “a única diferença era o diâmetro”, perceberam que o período era igual.

A seguir foram analisadas algumas respostas dos alunos quanto à questão E.

Questão E: Comparando os gráficos construídos nos itens a e c, o que você observou?

Aluno 2:

Comparando os gráficos construídos nos itens **a e c**, o que você observou? que o C os angulos ficaram mais proximo.

Professora: Como assim: “ficaram mais próximos”?

Aluno 2: É que as ondas ficaram mais juntas no gráfico c.

Professora: Isso quer dizer que houve mudança no período ou na amplitude?

Aluno 2: Acho que é o período que mudou.

Aluno 3:

Comparando os gráficos construídos nos itens **a e c**, o que você observou? são parecidos so mudo a largura do gráfico

Professora: Isso quer dizer que houve mudança no período ou na amplitude?

Aluno 3: No período.

Aluno 4:

Comparando os gráficos construídos nos itens **a e c**, o que você observou? que quando o grafico A completa uma volta o C ja completou 2.

Professora: Isso quer dizer que houve mudança no período ou na amplitude?

Aluno 4: Mudou o período, a amplitude é igual.

Na questão E, percebeu-se que 11 alunos já estão bem familiarizados com os termos amplitude e período. Verificou-se também que 11 alunos entenderam a diferença entre os gráficos, mas ainda não mencionaram os termos período e amplitude. Dos 11 alunos que acertaram, cinco deles ou mencionaram período ou amplitude. Uns disseram que a amplitude ficou igual, mas não mencionaram o período, outros mencionaram que o período diminuiu, mas não mencionaram a amplitude. Os demais (6 alunos), ao invés de período e amplitude, mencionaram termos do tipo: “diâmetro iguais” (se referindo a amplitude); “o gráfico C dá mais voltas” (se referindo ao período); “os gráficos são parecidos”; “só muda a largura do gráfico” (também se referindo ao período). Desses 6 alunos é interessante observar que quatro deles perceberam o fato da roda do item C dar duas voltas enquanto que a roda do item A dá uma volta apenas. Alguns também citaram que a roda C tem velocidade maior.

Concluindo, verificou-se que em torno de 32% dos alunos já se familiarizaram com os termos período e amplitude e já o utilizam de forma correta. Trinta e três por cento dos alunos, perceberam as diferenças entre os gráficos, mas ainda não utilizaram os termos período e amplitude. E 35% dos alunos ainda não sabem a diferença entre período e amplitude e tem dificuldades para interpretar gráficos.

Analisando os livros do PNLD 2015 e o Currículo do Estado de São Paulo, observou-se a inexistência de atividades de caráter experimental com uso de materiais manipulativos que propiciem aos alunos realizar investigações matemáticas em sala de aula. Pensando nesta perspectiva, procurou-se por alternativas metodológicas para o ensino das funções trigonométricas com as atividades de construção da “mini roda-gigante” e do “motorzinho”.

ATIVIDADE 2: Mini roda-gigante

Com o objetivo de reafirmar o conceito de periodicidade das funções trigonométricas e os conceitos de período e amplitude, foi proposta uma atividade lúdica em grupos que, como todo trabalho em grupo, favorece a integração e a colaboração entre os alunos. Após a confecção da roda-gigante, os alunos construíram gráficos no papel e no ambiente informatizado. A utilização de um software de geometria dinâmica, contribuiu para uma compreensão mais eficaz das propriedades das funções periódicas, pois os alunos puderam identificar de maneira dinâmica o comportamento dos dados obtidos no experimento.

Etapa 2A: Construção da mini roda-gigante

Desenvolvimento da atividade

Na primeira etapa da atividade 2, foi proposta a construção de uma mini roda-gigante, tendo como apoio o experimento do portal Matemática Multimída (ime3) da Unicamp (SOARES, 2015). Para o desenvolvimento do trabalho a turma foi dividida em 6 grupos, que permaneceram os mesmos até o final das cinco etapas desta atividade. Foram necessárias duas aulas para esta construção.

Material utilizado:

Papelão;

4 tampinhas de garrafa pet: (3 de uma mesma cor e 1 de cor diferente)

Tesoura;

Régua;

Cola branca;

Cola quente;

Compasso;

Barbante;

Um lápis.

Instruções:

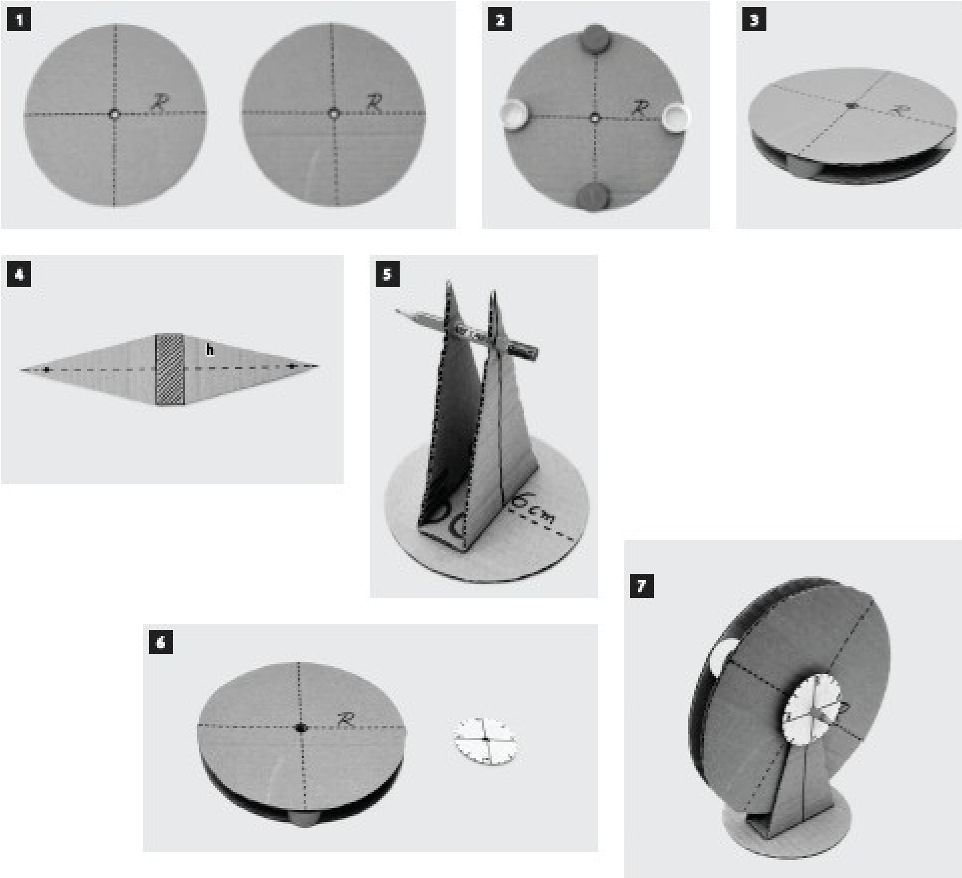
Os grupos receberam uma folha com instruções sobre os passos da construção. Cada grupo optou por uma medida de raio da roda-gigante. Os grupos ficaram organizados conforme a tabela 20.

Tabela 20 - Organização dos grupos.

Grupos	**Quantidade de alunos**	**Raio**
I	8	5 cm
II	6	10 cm
III	6	10 cm
IV	6	10 cm
V	7	15 cm
VI	4	15 cm

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Figura 43 - Instruções para a construção da mini roda-gigante.

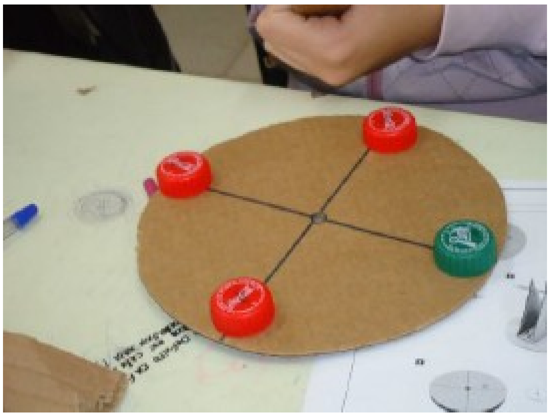


Fonte: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1033 (adaptada pela pesquisadora).

Figura 44 - Início da construção.

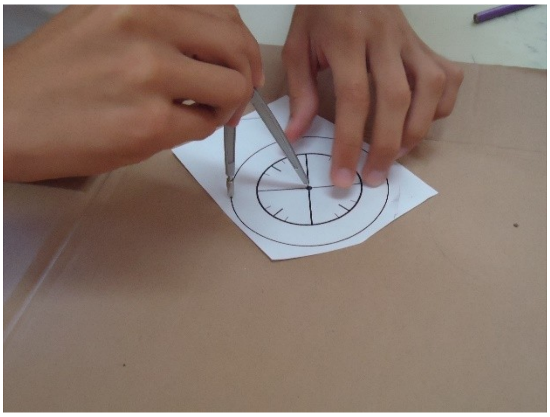
Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Figura 45 - Colando as tampinhas.



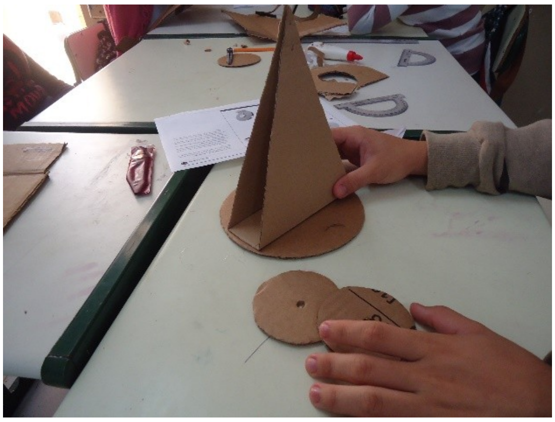
Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Figura 46 - Desenhando o mini-transferidor.



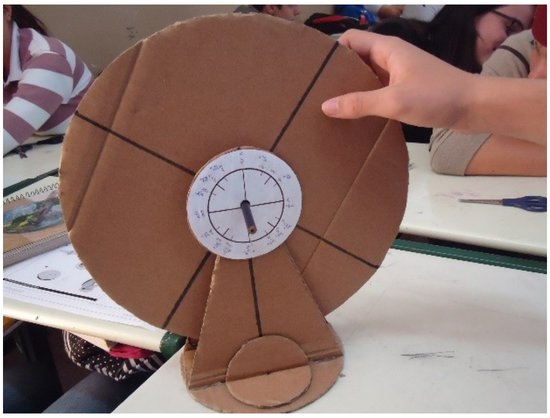
Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Figura 47 - Preparando a base.



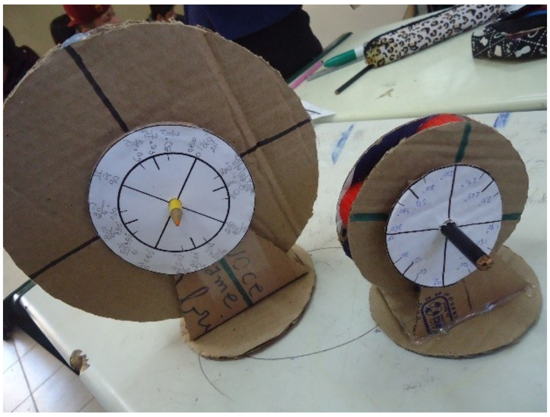
Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Figura 48 - Roda–gigante de 15 cm de raio.



Fonte : Arquivo da pesquisadora.

Figura 49 - Rodas de 10 e 5 cm de raio.



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Etapa 2B – Construção de gráficos no papel

Desenvolvimento da atividade

Após a construção da roda-gigante, os grupos construíram dois gráficos no papel milimetrado. O gráfico 1 era o gráfico do ângulo de giro da cadeirinha em função da altura em relação ao solo. O gráfico 2 era da altura da cadeirinha em relação a distância percorrida pela mesma. Antes de iniciar a construção do gráfico 1, os alunos tinham que girar a cadeirinha nos graus indicados na tabela e medir com a régua a altura da cadeirinha em relação à base. Para o gráfico 2, os alunos tinham que medir com um barbante a distância percorrida pela cadeirinha de acordo com os mesmos ângulos. Nesta etapa da atividade os alunos puderam aprimorar também a conversão de ângulos de graus para radianos, fazendo as conversões através da regra de três. Na segunda volta alguns alunos preferiram acrescentar 2π ao ângulo, como por exemplo: 390° = 360° + 30° = 2π+π/6=13π/6 radianos.

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
DIRETORIA DE ENSINO DA REGIÃO DE VOTORANTIM
EE "CEL. PEDRO DIAS DE CAMPOS"
Rua João Felipe, nº 200-Centro - CEP: 18.195-000- Fone (15) 3267-1144/3267-1345-Capela do Alto - SP.
E-mail: e016913a@see.sp.gov.br

Atividade 2: "Mini roda-gigante"

Etapa 2A: Construção da mini roda-gigante

1) Qual é o raio da roda-gigante que vocês construíram?

2) Complete a tabela preenchendo com os valores obtidos após duas voltas na roda-gigante. Em seguida utilize papel milimetrado para construir os seguintes gráficos: gráfico 1 (Altura x Ângulo) e gráfico 2 (Altura x Comprimento).

Ângulo		**Altura**	**Comprimento**
Graus	**Radianos**		

Para medir a altura da cadeirinha conforme o giro, os alunos usaram uma régua

(Figura 50). Alguns grupos mediram até a base da roda e outros até a carteira, ou seja, consideraram também a espessura do papelão da base. Para medir a altura na segunda volta da roda, os alunos, percebendo a periodicidade, apenas copiaram os valores que se repetiam para a altura.

Figura 50 - Encontrando a altura.

Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Para medir a distância com o barbante, os alunos encontraram mais dificuldades, muitas vezes precisaram da ajuda dos colegas para segurar o barbante no contorno da roda. Nesse caso, na segunda volta, foram acrescentando a medida do comprimento da roda (Figura 51).

Figura 51 - Encontrando a distância.

Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Após a construção dos gráficos, os alunos preencheram uma folha de questões onde deveriam reconhecer as características dos gráficos, os períodos e amplitudes de cada um e encontrar a altura da cadeirinha em relação aos ângulos dados. O objetivo da questão número 4 é recordar o conceito de ângulos de mais de uma volta, além de reforçar a transformação de ângulos de radianos para graus.

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
DIRETORIA DE ENSINO DA REGIÃO DE VOTORANTIM
EE "CEL. PEDRO DIAS DE CAMPOS"
Rua João Felipe, nº 200-Centro - CEP: 18.195-000- Fone (15) 3267-1144/3267-1345-Capela do Alto - SP.
E-mail: e016913a@see.sp.gov.br

Atividade 2: "Mini roda-gigante"

Etapa 2B: Construção dos gráficos no papel

1) Qual o diâmetro da roda gigante que o grupo construiu?

2) Que características possuem os gráficos construídos?

3) Indique o período e a amplitude de cada gráfico:

Gráfico	Período	Amplitude
1		
2		

4) Em relação ao gráfico 1 (altura x ângulo), que altura teremos quando o ângulo for de:

a) 1080°? b) 810°? c) 25π/6 ? d) 13π/3 ?
e) 1200°? f) 1800°? g) 25π/4 ? h) 31π/6 ?

Análise dos resultados obtidos

A tabela 21 apresenta os valores para o cálculo do comprimento da roda gigante para os diversos grupos de alunos.

Tabela 21 - Comprimento da roda gigante.

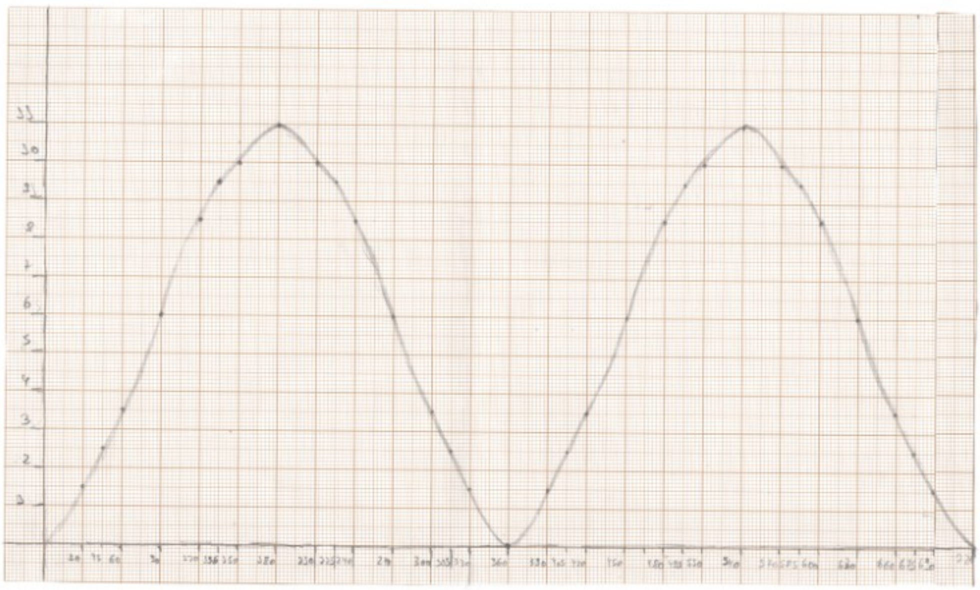
Grupos	Diâmetro	Comprimento (medida com barbante)	Cálculo do Comprimento ($2\pi r$)
I	5 cm	31,5 cm	31,4 cm
II	10 cm	66,7 cm	62,8 cm
III	10 cm	68 cm	62,8 cm
IV	10 cm	63,5 cm	62,8 cm
V	15 cm	96 cm	94,2 cm
VI	15 cm	90 cm	94,2 cm

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

O grupo que chegou mais próximo do comprimento da circunferência foi o grupo I, os demais grupos tiveram maiores diferenças devido a imprecisão da medida com barbante. A seguir são apresentados os gráficos construídos por cada grupo e os comentários sobre as respostas das questões.

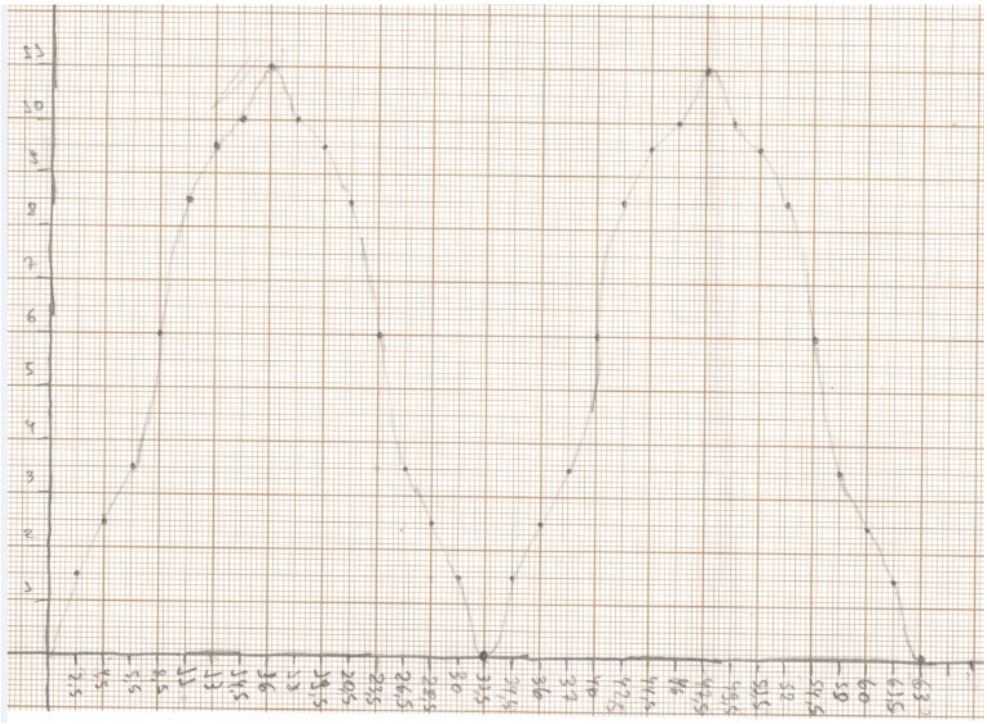
Na primeira questão, os alunos do grupo I confundiram raio com diâmetro ao responder que o diâmetro da roda-gigante construída por eles era de 5 cm. Na segunda questão, ao descreverem os gráficos construídos, responderam apenas que os gráficos tinham forma de ondas. Quanto à terceira questão, acertaram o período e amplitude dos gráficos, já na quarta questão erraram todas as transformações de radianos para graus, acertando apenas os itens onde as medidas estavam em graus. Quando o grupo considerou giro de 0°, 360° e 720°, colocaram a altura da cadeirinha como sendo zero, ou seja: não consideraram a altura da cadeirinha em relação à base da roda-gigante que era de 0,7 cm (Figuras 52 e 53).

Figura 52 - “Altura x Ângulo” para o grupo I.



Fonte : Arquivo da pesquisadora.

Figura 53 - “Altura x Distância Percorrida” para o grupo I.

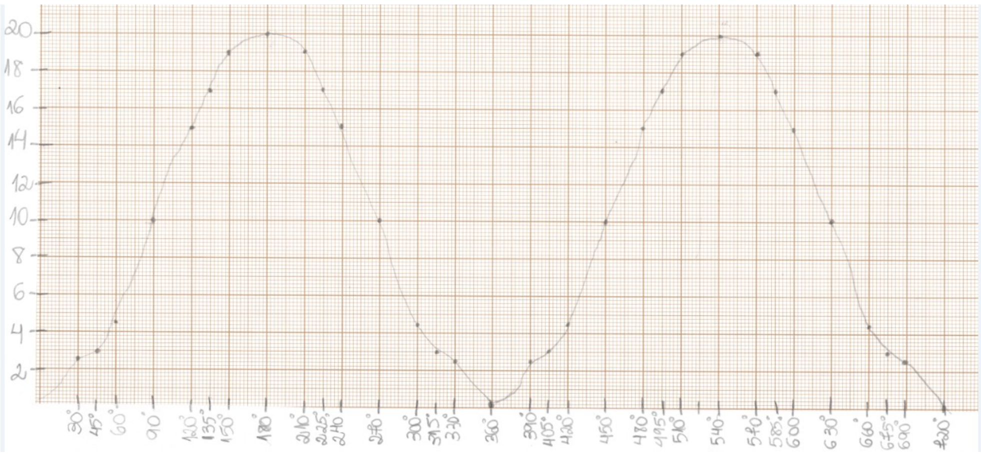


Fonte: Arquivo da pesquisadora.

No gráfico 2, verifica-se que o formato não ficou muito próximo de ondas, mas percebe-se a periodicidade nas duas voltas da roda-gigante (Figura 53).

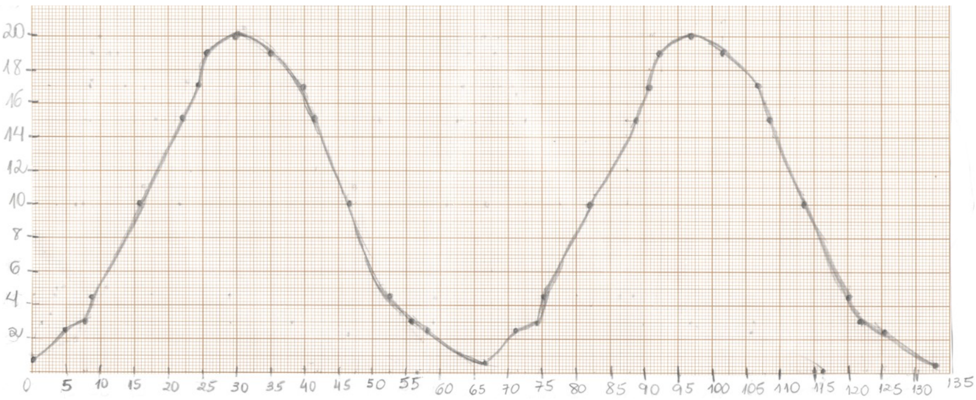
O grupo II, acertou o diâmetro da roda-gigante (questão 1) e descreveu as características dos gráficos como sendo “periódicos depois de uma volta inteira, pois os dois gráficos ficaram parecidos” (questão 2). Na terceira questão erraram o período e amplitude do gráfico 2 e na quarta questão erraram dois exercícios de conversão de radianos para graus. Verifica-se que nos dois gráficos (Figuras 54 e 55), o grupo II considerou a altura máxima como sendo 20 cm, sendo que deveria 20,7 cm, já que a altura da cadeirinha em relação à base da roda era de 0,7 cm. Apenas no segundo gráfico (Figura 55) o grupo considerou a altura do embarque e não começou o gráfico na altura zero.

Figura 54 - “Altura x Ângulo” para o grupo II.



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

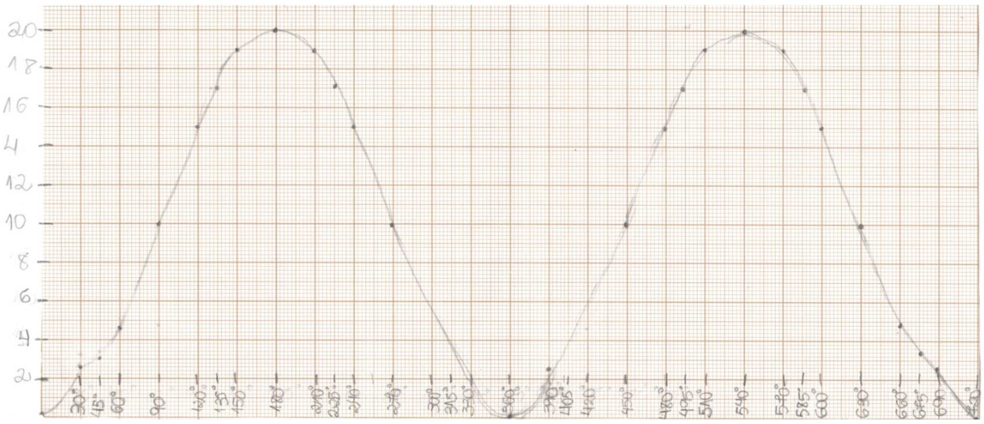
Figura 55 - “Altura x Distância Percorrida” para o grupo II.



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

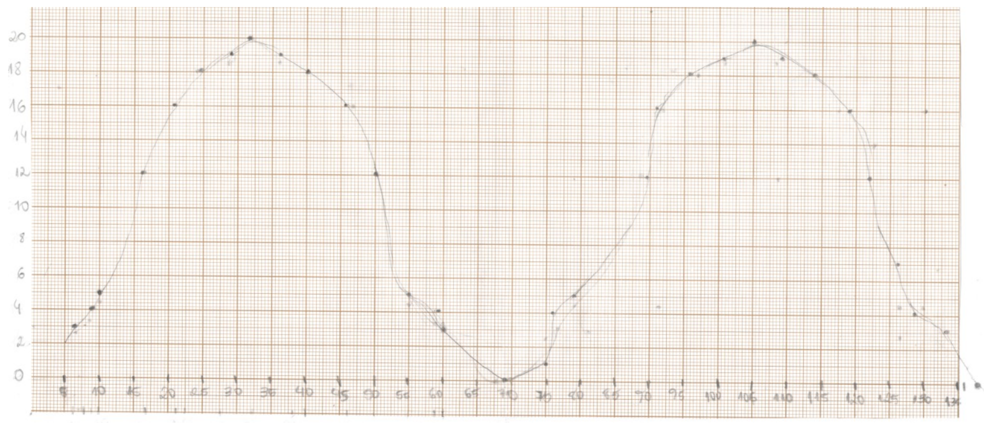
O grupo III se perdeu um pouco na construção do gráfico 2 (Figura 57), pois pularam a distância em relação ao ângulo de 450°. O erro foi corrigido no momento da construção dos gráficos no ambiente informatizado. Na resposta da questão 1, confundiram raio com diâmetro ao responder que o diâmetro da roda-gigante era 10 cm. Na segunda questão descreveram o formato dos gráficos da seguinte forma: “Os dois gráficos têm a mesma amplitude e os pontos de mínimos e máximos se encontram no mesmo lugar”. Os alunos colocaram que os dois gráficos tinham a mesma amplitude, o que é de fato, mas erraram o valor da amplitude, pois colocaram 20 ao invés de 10, ou seja: esqueceram que a amplitude da função é a metade da distância vertical.

Figura 56 - “Altura x Ângulo” para o grupo III.



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

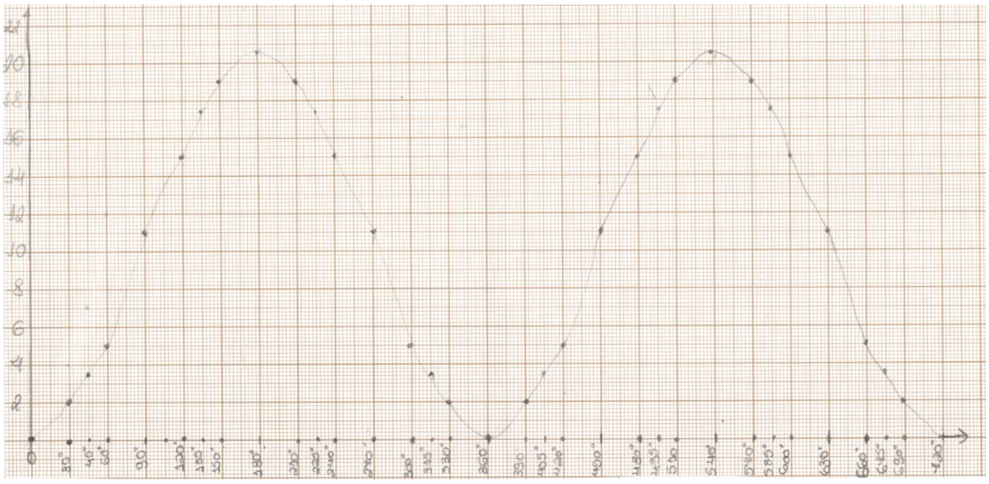
Figura 57 - “Altura x Distância Percorrida” para o grupo III



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

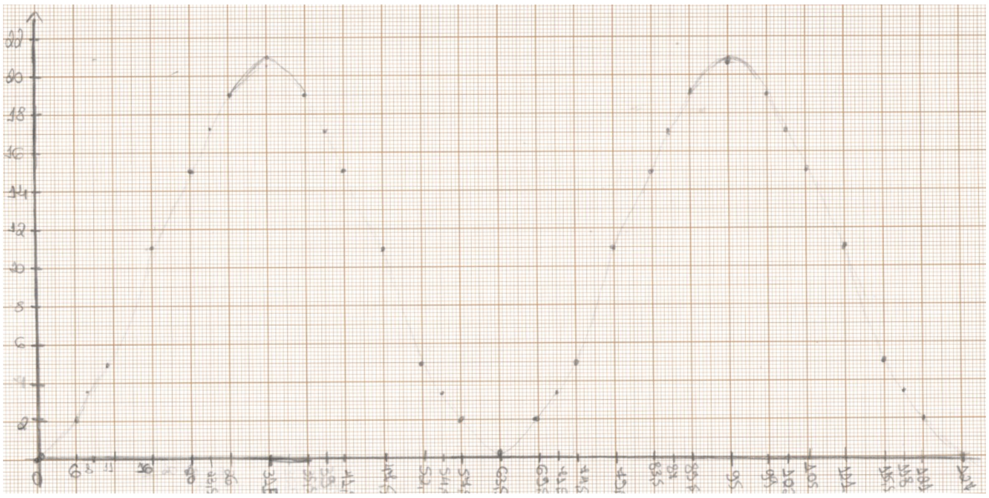
Embora o grupo IV tivesse começado o gráfico na altura zero, sem considerar a altura da cadeirinha em relação à base, não se esqueceram de incluir esse valor para encontrar a altura máxima, no caso 21 centímetros (Figuras 58 e 59). O grupo IV respondeu corretamente qual era o diâmetro da roda (questão 1) mas erraram o período dos gráficos, acertando apenas a amplitude (questão 3). Acertaram todos os exercícios da questão 4. Quanto as características dos gráficos escreveram que “os dois têm o mesmo modelo”. Ao serem questionados quanto a essa afirmação, explicaram que os dois gráficos repetem o formato da onda, se referindo a periodicidade da função.

Figura 58 - “Altura x Ângulo” para o grupo IV.



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

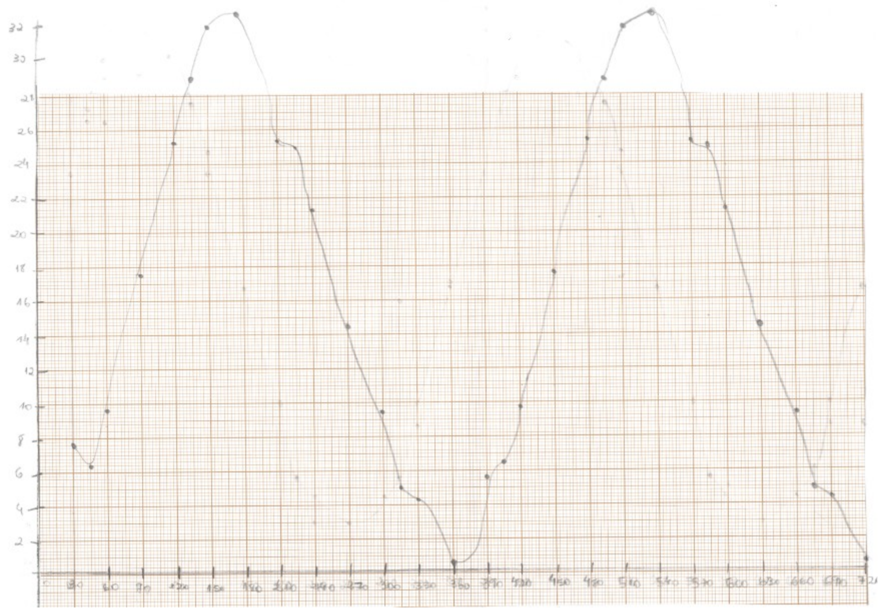
Figura 59 - “Altura x Distância Percorrida” para o grupo IV.



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

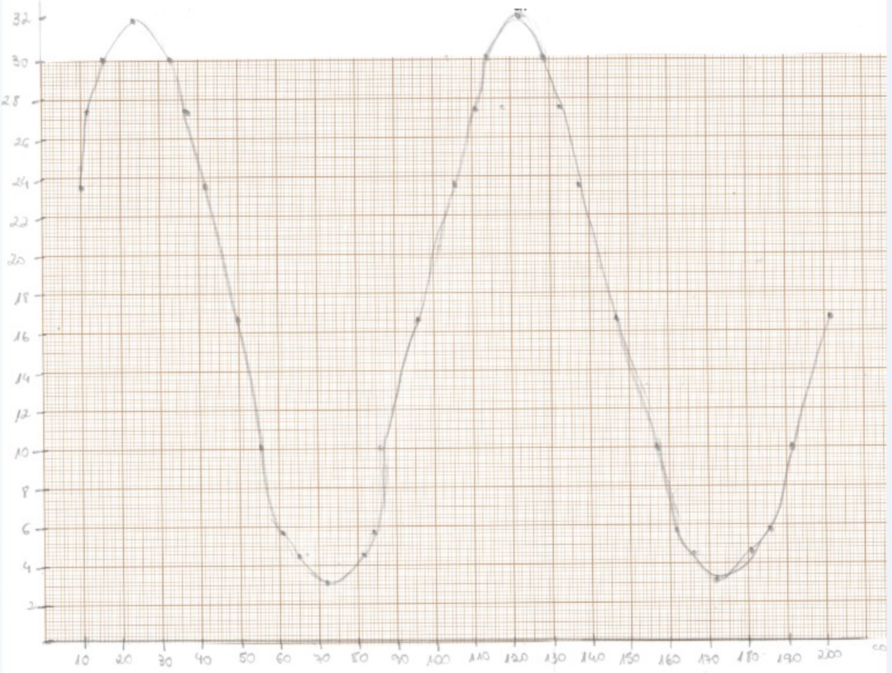
No primeiro gráfico (Figura 60), o grupo V não localizou a altura em relação ao ângulo de zero grau e localizou errado o ponto referente ao ângulo de 30°. Já no segundo gráfico (Figura 61) o grupo errou a localização de todos os pontos. A roda gigante construída pelo grupo tinha uma altura de 2,3 cm em relação à base, por isso a altura máxima alcançada pela cadeirinha foi de 32,3 cm. Apesar do grupo ter considerado essa diferença no ponto de máximo, erraram a localização do ponto de mínimo. Acertaram o diâmetro da roda (questão 1) e descreveram as características do gráfico como “sendo em ondas” (questão 2). Acertaram somente o período do gráfico 1 e erraram as amplitudes pois colocaram 14,5 ao invés de 15 cm (questão 3). Quanto aos exercícios da questão 4, os alunos acertaram todas as conversões de radianos para graus e fizeram corretamente a redução ao primeiro quadrante, mas colocaram valores errados para as alturas.

Figura 60 - "Altura x Ângulo" para o grupo V.



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

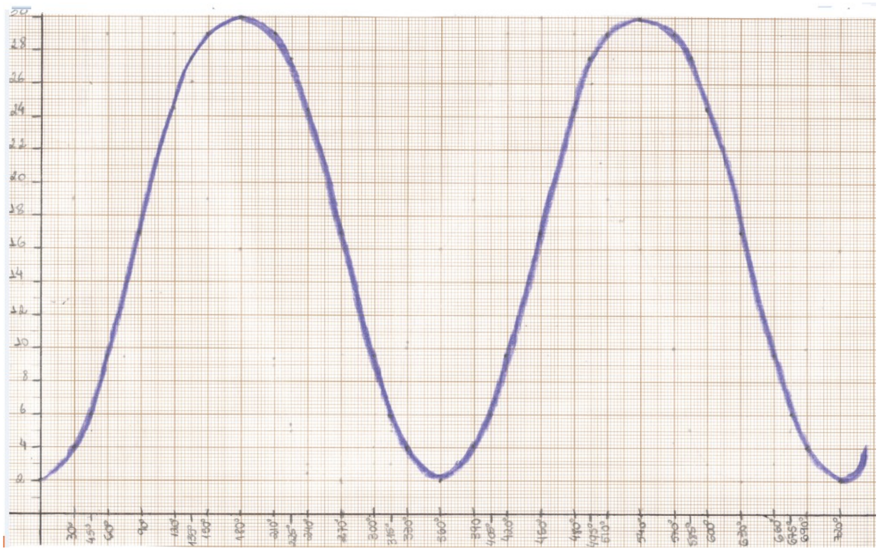
Figura 61 - "Altura x Distância Percorrida" para o grupo V.



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

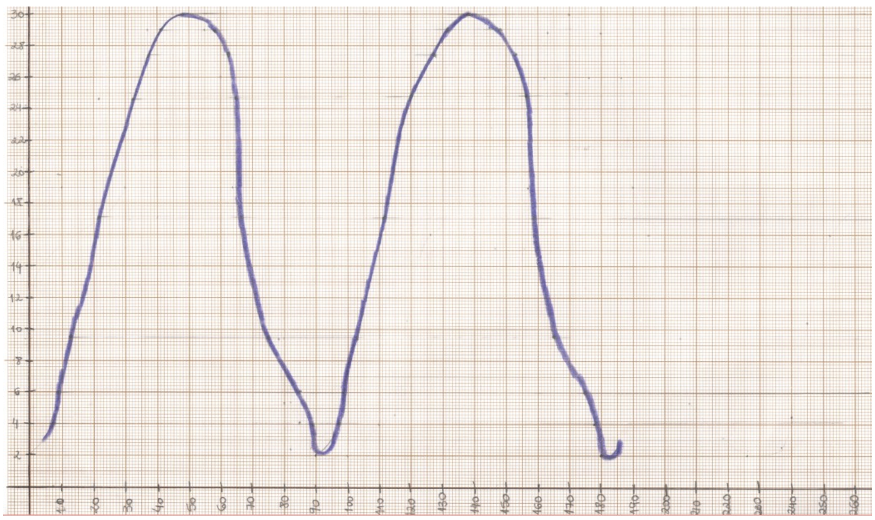
O grupo VI considerou a altura de 2 cm em relação à base, mas se esqueceu de considerar esse valor na altura máxima, que deveria ser de 32 cm, como se pode observar pelos gráficos construídos (Figuras 62 e Erro: Origem da referência não encontrada). Acertaram o diâmetro da roda (questão 1) e descreveram muito bem a periodicidade do gráfico da seguinte forma: “quando chegam em determinado ponto os valores começam a se repetir tornando o gráfico periódico” (questão 2). Acertaram apenas o período do primeiro gráfico, as amplitudes de ambos os gráficos (questão 3) e todos os exercícios da questão 4.

Figura 62 - “Altura x Ângulo” para o grupo VI.



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Figura 63 - “Altura x Distância Percorrida” para o grupo VI.



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

A tabela 22 mostra o desempenho dos grupos na construção dos gráficos.

Tabela 22 - Avaliação do desempenho dos grupos.

Gráfico 1: "Altura x Ângulo"	**Informaram corretamente**
Altura do embarque	33%
Altura máxima	50%
Localização dos pontos	83%
Gráfico 2: "Altura x Distância Percorrida"	**Informaram corretamente**
Altura do embarque	50%
Altura máxima	50%
Localização dos pontos	67%
Questões	**Informaram corretamente**
Diâmetro	67%
Periodicidade dos gráficos	83%
Período do gráfico 1	83%
Período do gráfico 2	33%
Amplitude do gráfico 1	83%
Amplitude do gráfico 2	67%
Conversões de radianos para graus	67%
Reduções ao primeiro quadrante	67%

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Praticamente a metade dos grupos atentou para o detalhe de que na construção dos gráficos tinham que considerar a altura da cadeirinha antes da roda começar a girar e que essa distância deveria ser considerada na altura máxima dos gráficos. Verifica-se também que a maioria dos alunos não teve dificuldades em localizar os pontos no gráfico e que 33% dos grupos ainda confundem raio com diâmetro, talvez por falta de atenção. Somente um grupo não reconheceu a periodicidade dos gráficos corretamente. Os alunos tiveram mais facilidade em encontrar o período no gráfico 1 do que no gráfico 2, talvez pela familiaridade com os ângulos de uma volta do que com o comprimento. Nota-se também que ainda 33% dos grupos têm dificuldades em transformar ângulos de radianos para graus e em reduzir os ângulos ao primeiro quadrante. Após essa observação foram apresentados aos alunos, exercícios para sanar essas dificuldades encontradas.

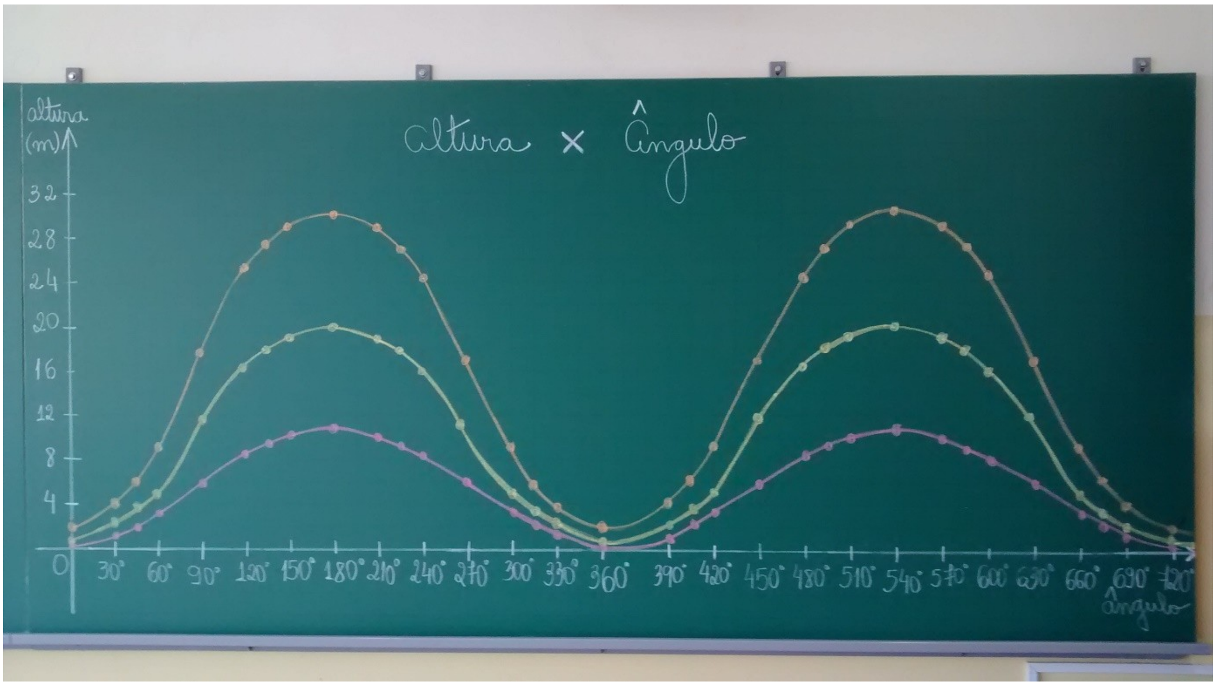
Após serem exploradas as funções periódicas, foram apresentadas aos alunos as funções $y = sen\ (x)$ e $y = cos\ (x)$ e suas características.

Etapa 2C – Socialização

Desenvolvimento da atividade

Nesta etapa do trabalho, três grupos de rodas-gigantes com raios diferentes, desenharam na lousa os gráficos da altura em função do ângulo no mesmo eixo cartesiano (Figura 64). Foi possível então comparar os gráficos das rodas-gigantes de raios, 5 cm, 10 cm e 15 cm.

Figura 64 - Comparando os gráficos da altura em função do ângulo para os diversos grupos.



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Antes de iniciar a atividade a professora pesquisadora recordou a nomenclatura dos eixos coordenados, a abscissa e a ordenada, para que os alunos não tivessem dificuldades em responder as questões. Os objetivos da atividade era de que os alunos reconhecessem os pontos de máximo e mínimo das funções e com isso pudessem perceber que embora os raios das rodas-gigantes fossem diferentes, os pontos de máximo e mínimo tinham as mesmas abscissas respectivamente. Com isso, esperava-se que os alunos notassem que os períodos das funções eram iguais. Somente as amplitudes eram diferentes, pois quanto maior o valor do raio, mais "alongado verticalmente" ficava o gráfico. Esperava-se também que os alunos identificassem os intervalos de crescimento e decrescimento da função e a reconhecessem como sendo uma função do cosseno.

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
DIRETORIA DE ENSINO DA REGIÃO DE VOTORANTIM
EE "CEL. PEDRO DIAS DE CAMPOS"
Rua João Felipe, nº 200-Centro - CEP: 18.195-000- Fone (15) 3267-1144/3267-1345-Capela do Alto - SP.
E-mail: e016913a@see.sp.gov.br

Atividade 2: "Mini roda-gigante"

Etapa 2C: Socialização

Observando os gráficos "Altura x Ângulo" de três rodas-gigantes com raios diferentes, construídos num mesmo eixo, responda as questões:

1) Em quais pontos da abscissa (eixo x) estão os valores de mínimo da função?

2) E em quais pontos da abscissa estão os valores de máximo?

3) Por que os mínimos e máximos estão no mesmo ponto da abscissa?

4) Observando que entre a altura mínima e a altura máxima há uma altura intermediária que é atingida duas vezes em cada volta, quanto mede essa altura intermediária?

5) Essas funções são periódicas? O que você entende por período?

6) As funções crescem e decrescem? Em que intervalo?

7) Observando os valores da ordenada (eixo y) dos pontos de máximo, percebemos que a abscissa desses pontos varia. Explique porque isso acontece.

8) Aumentando a medida do raio da roda-gigante, quais as transformações sofridas pelos gráficos?

9) O que é amplitude de uma função periódica?

10) O gráfico da função 1 (Altura x Ângulo) se parece com alguma função trigonométrica já estudada? Qual?

Análise dos resultados obtidos

A tabela 23 mostra a quantidade de grupos que acertaram cada questão.

Tabela 23 - Quantidade de acertos dos grupos.

Questão	Quantidade de Grupos que acertaram
1	5
2	4
3	4
4	6
5	5
6	3
7	6
8	3
9	4
10	1

Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

A seguir é apresentada uma análise individual para cada grupo:

Grupo I: Na questão 8, o grupo respondeu que “aumentando o raio da roda-gigante, os gráficos ficam mais alongados”. Eles ainda não associaram essa transformação à amplitude do gráfico. Na questão 10, associaram o gráfico 1, a uma função periódica, mas não especificaram qual delas.

Grupo II: Esse foi o grupo que melhor definiu os conceitos de período e amplitude e o único que acertou a questão 10 ao associar o gráfico 1 à cossenoide.

Grupo III: Na questão 8, o grupo respondeu que aumentando o raio da roda-gigante o gráfico “mudará todos os valores”, mas não especificou que valores são esses. No caso: a amplitude. E na questão 10 associaram o gráfico 1 ao gráfico da parábola. Apesar de terem definido corretamente as funções periódicas na questão 5, ainda não a reconhecem no gráfico.

Grupo IV: Na questão 6, o grupo respondeu que a função “cresce e decresce de 21 em 21”. Eles não levaram em consideração o eixo x para fazer essa análise e sim a altura máxima atingida pela cadeirinha da roda-gigante. O grupo mostrou que ainda tem dificuldades para definir amplitude, pois responderam que “é o tamanho da roda-gigante”. Apesar de definirem corretamente uma função periódica na questão 5, na questão 10 associaram o gráfico 1 a uma função trigonométrica chamada “Pitágoras”.

Grupo V: Esse foi o grupo com o pior desempenho. Não conseguiram conceituar as funções periódicas. Não identificaram os intervalos em que a função cresce e decresce. Tiveram dificuldades em explicar porque nos gráficos os pontos máximos e mínimo têm a mesma abscissa. Neste caso, responderam que “a altura dos gráficos é a mesma”, sendo que as alturas são diferentes e os ângulos é que são iguais. O grupo respondeu que o gráfico se parece com o gráfico do seno.

Grupo VI: O grupo teve um bom desempenho, erraram apenas as questões 8 e 10. Na questão 8, não perceberam que a transformação ocorrida nos gráficos é a amplitude e na questão 10 não reconheceram o gráfico como uma função periódica, pois responderam que se parecia com uma parábola.

Analisando o desempenho dos grupos, nota-se que os alunos apresentaram maiores dificuldades em identificar os intervalos em que a função cresce e decresce e que a principal diferença entre os gráficos é a amplitude. A questão com menor quantidade de acertos foi a número 10, pois os alunos ainda têm dificuldades em identificar o gráfico da função trigonométrica cosseno. Isso era esperado, visto que os alunos ainda não aprenderam as possíveis transformações nos gráficos das funções trigonométricas elementares.

Etapa 2D – Determinando a função que descreve o gráfico 1

Desenvolvimento da atividade

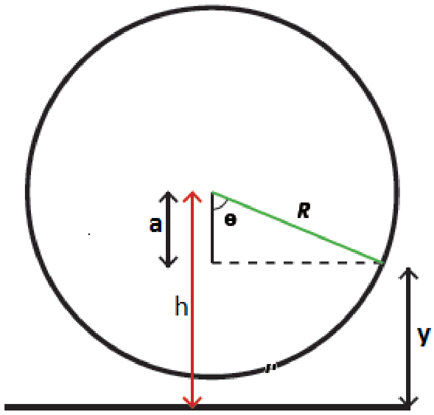
Nesta etapa o objetivo principal era que os alunos determinassem a função que descreve o gráfico 1 (altura x ângulo). Na questão 1, esperava-se que os alunos utilizassem a relação trigonométrica do cosseno para relacionar o cateto a com o raio R do triângulo retângulo formado, ou seja: $a = R.\cos\theta$. Na questão 2, esperava-se que eles observassem que a altura da cadeirinha em relação ao chão (y) é a diferença entre a distância do centro da circunferência até o chão (h) e o cateto do triângulo retângulo, encontrando $y = h - R.\cos\theta$. Nas questões 3 e 4, os alunos deveriam encontrar a altura da cadeirinha após determinados giros através da fórmula determinada anteriormente e que comparassem os resultados obtidos nos cálculos com as medições realizadas por eles.

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
DIRETORIA DE ENSINO DA REGIÃO DE VOTORANTIM
EE "CEL. PEDRO DIAS DE CAMPOS"
Rua João Felipe, nº 200-Centro - CEP: 18.195-000- Fone (15) 3267-1144/3267-1345-Capela do Alto - SP.
E-mail: e016913a@see.sp.gov.br

Atividade 2: “Mini roda-gigante”

Etapa 2D: “Determinando a função que descreve o gráfico 1”

Considere ***R*** como o raio da roda-gigante, ***h*** como a distância da base que sustenta a roda-gigante ao centro do disco e θ como o ângulo de deslocamento da cadeira e y como a altura da cadeirinha em relação à base da roda-gigante.



1) Use uma das funções trigonométricas estudadas para encontrar o valor do cateto ***a*** relacionando-o com o ângulo θ e o raio ***R***.

2) Tente encontrar a função geral que descreve a relação “a altura em função do ângulo”, considerando a altura (y) quando a cadeirinha dá um giro de $\theta°$.

3) Com o auxílio de uma calculadora científica, use a função que descreve o gráfico para encontrar a altura da cadeirinha após um giro de:

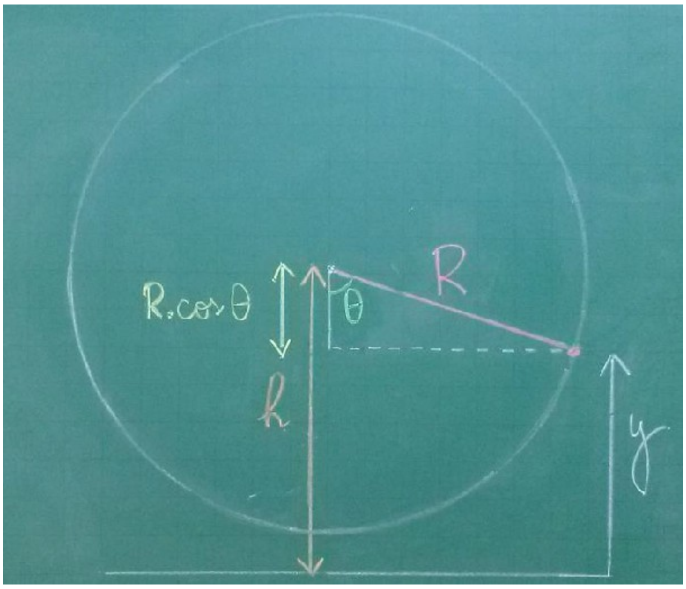
a) 30°	d) 150°	g) 390°
b) 60°	e) 240°	h) 450°
c) 90°	f) 360°	i) 600°

4) Comparando os resultados obtidos após os cálculos, com os valores da altura medidos com a régua, quais as conclusões do grupo?

Análise dos resultados obtidos

Questões 1 e 2: Os alunos encontraram dificuldades na resolução das questões 1 e 2, foi então necessária a intervenção da professora pesquisadora que explicou na lousa (Figura 65), os passos necessários para a obtenção da função que descreve o gráfico da altura em função do ângulo.

Figura 65 - Determinando a lei de associação da função "Altura X Ângulo".

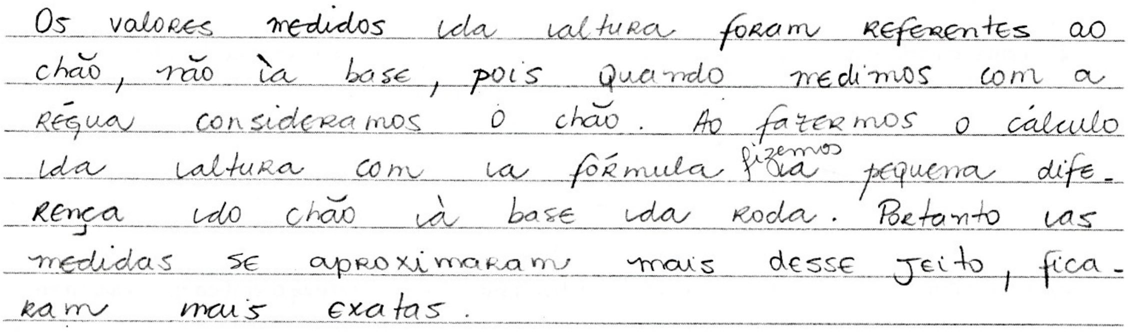


Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Questão 3: O grupo 1 foi o único em que os alunos encontraram dificuldades no manuseio da calculadora científica. De modo geral todos os grupos acertaram praticamente todos os cálculos.

Questão 4: Para os grupos 1, 3, 4 e 5 os valores da altura encontrados através dos cálculos ficaram próximos aos valores obtidos pelas medições efetuadas. Os alunos do grupo 2 fizeram as medições das alturas das cadeirinhas em relação ao chão, incluindo a base da roda gigante. Como na fórmula, a altura é referente a base, encontraram pequenas diferenças nos cálculos, de acordo com o registro mostrado na figura 66.

Figura 66 - Resposta do grupo 2 para a questão 4.

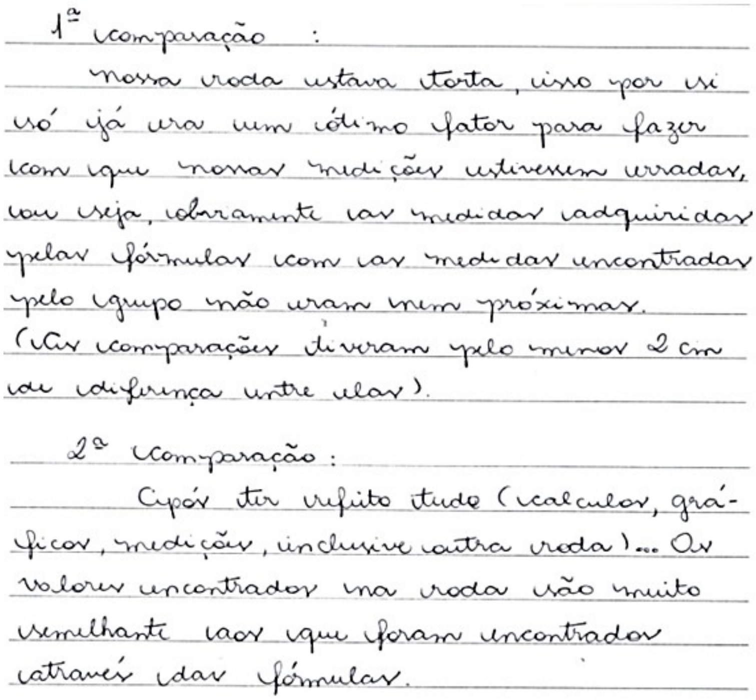


Os valores medidos da altura foram referentes ao
chão, não à base, pois quando medimos com a
régua consideramos o chão. Ao fazermos o cálculo
da altura com a fórmula fizemos a pequena dife-
rença do chão à base da roda. Portanto as
medidas se aproximaram mais desse jeito, fica-
ram mais exatas.

Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Os alunos do grupo 6 construíram uma roda gigante que ficou torta, o que causou uma diferença de 2 cm nas medidas. O grupo optou por refazer a roda e nesta segunda versão, os resultados dos cálculos ficaram mais próximos aos das medições (Figura 67).

Figura 67 - Resposta da questão 4 para o grupo VI.


1ª comparação:
Nossa roda estava torta, isso por si só já era um ótimo fator para fazer com que nossas medições estivessem erradas, ou seja, obviamente as medidas adquiridas pelas fórmulas com as medidas encontradas pelo grupo não eram nem próximas. (As comparações deram pelo menos 2 cm de diferença entre elas).

2ª comparação:
Após ter refeito tudo (calculos, grá-ficos, medições, inclusive outra roda)... Os valores encontrados na roda são muito semelhantes aos que foram encontrados através das fórmulas.

Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Neste caso, percebe-se o empenho do grupo em fazer com que os valores encontrados com as medições se aproximassem dos valores encontrados através das fórmulas das funções.

A aplicação desta etapa da atividade foi bastante importante para o reconhecimento da periodicidade presente em contextos do cotidiano. Quando os alunos fizeram os cálculos das alturas em relação aos ângulos usando a fórmula, perceberam que os resultados ficaram muito próximos das medições com a régua. Comprovando assim, que a trajetória da cadeirinha da roda gigante pode ser descrita por uma função trigonométrica.

Etapa 2E – Determinando a função que descreve o gráfico 2

Desenvolvimento da atividade

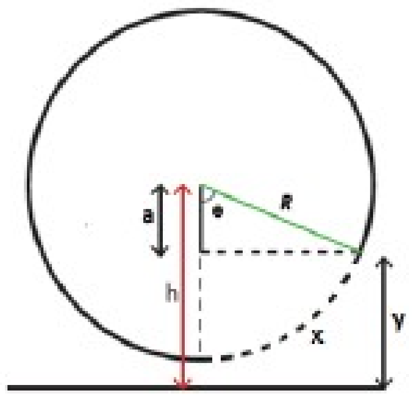
O objetivo desta etapa era induzir os alunos a encontrarem a fórmula que descreve o gráfico da altura em função da distância percorrida pela cadeirinha. Na questão 1 esperava-se que os alunos utilizassem a fórmula do comprimento da circunferência para encontrar a distância de uma volta completa da cadeirinha. Na questão 2, os alunos deveriam calcular quantos graus gira a cadeirinha quando percorre 1 cm. Com essas informações, esperava-se que ao responder a questão 3, percebessem que poderiam obter a fórmula da altura em função da distância percorrida pela cadeirinha. Após encontrarem a lei de associação da função, poderiam usar a fórmula (questão 4) para determinar algumas alturas e compará-las com as alturas anteriormente obtidas quando usaram barbante para medir a distância percorrida pela cadeirinha.

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
DIRETORIA DE ENSINO DA REGIÃO DE VOTORANTIM
EE "CEL. PEDRO DIAS DE CAMPOS"
Rua João Felipe, nº 200-Centro - CEP: 18.195-000- Fone (15) 3267-1144/3267-1345-Capela do Alto - SP.
E-mail: e016913a@see.sp.gov.br

Atividade 2: "Mini roda-gigante"

Etapa 2E: "Determinando a função que descreve o gráfico 2"

Considere **R** como o raio da roda-gigante, **h** como a distância da base que sustenta a roda-gigante ao centro do disco, θ como o ângulo de deslocamento da cadeira,**x** como a distância percorrida pela cadeira e **y** como a altura da cadeirinha em relação ao chão.



Considerando a roda-gigante construída pelo grupo, responda as questões:

1) Quando a cadeirinha dá uma volta completa na roda, qual é a distância percorrida pela mesma? Como vocês chegaram a esse resultado?
2) Quando a cadeirinha percorre 1 centímetro, esse giro corresponde a um ângulo de quantos graus? Como encontraram o resultado?
3) Agora que vocês já sabem quantos graus a cadeirinha gira quando se desloca 1 centímetro, tentem reescrever a fórmula encontrada na etapa anterior, para encontrar a altura (y) da cadeirinha em função da distância percorrida (x).
4) Com uma calculadora científica utilizem a fórmula para encontrar algumas distâncias percorridas pela cadeirinha. Comparem com a medida que obtiveram com o barbante.

Análise dos resultados obtidos

Questão 1: Para responder esta questão, 4 grupos utilizaram a fórmula do comprimento da circunferência e 2 grupos usaram a medida com o barbante, obtendo valores aproximados.

Questão 2: Um grupo utilizou a regra de três, os demais dividiram 360 graus pelo comprimento da roda.

Questão 3: Nesta questão, todos os grupos encontraram dificuldades, necessitando de explicações mais detalhadas para que conseguissem escrever a fórmula.

Questão 4: Alguns grupos encontraram dificuldades no uso da calculadora científica para determinar as alturas.

Com o desenvolvimento destas etapas, os alunos perceberam que a altura da cadeirinha em relação ao chão pôde ser encontrada de duas formas diferentes: tanto utilizando o ângulo, como a distância percorrida pela cadeirinha. Puderam comparar valores da altura encontrados pelas duas fórmulas e perceberam pequenas diferenças nas medições com o uso da régua e do barbante.

Para consolidar as percepções dos alunos, optou-se por utilizar o ambiente informatizado. Com a contribuição do software de geometria dinâmica GeoGebra, foi possível construir os gráficos das funções e comparar de forma mais efetiva os valores das alturas encontrados pelos alunos, com os reais valores calculados através das fórmulas.

Etapa 2F – Construindo gráficos com o GeoGebra

Desenvolvimento da atividade: Optou-se por trabalhar na própria sala de aula organizada em grupos, com uso de notebooks e da lousa digital. Todos os alunos puderam participar mais ativamente na construção dos gráficos, o que não seria possível na sala de informática, pela disposição dos computadores. Quatro grupos trouxeram notebooks, e os demais foram providenciados pela professora pesquisadora e pela escola. Inicialmente os alunos foram apresentados ao GeoGebra e após breve explicação na lousa digital, começaram a construir os gráficos.

Para a construção do gráfico da altura em função do ângulo, inicialmente os alunos preencheram a planilha com os valores da abscissa (ângulo) na coluna A e da ordenada (altura) na coluna B. Em seguida localizaram os pontos, criando o gráfico. Para comparar os valores, os alunos se utilizaram da fórmula para desenhar o gráfico e verificar se as medições que fizeram se aproximaram dos valores reais da altura da cadeirinha. Para a construção do gráfico da altura em função da distância percorrida, os procedimentos foram os mesmos, exceto na coluna A onde deveriam digitar os valores das distâncias percorridas pela cadeirinha.

Através da construção dos gráficos com o GeoGebra, os alunos puderam comparar os gráficos construídos no ambiente papel, com os gráficos construídos no ambiente informatizado.

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
DIRETORIA DE ENSINO DA REGIÃO DE VOTORANTIM
EE "CEL. PEDRO DIAS DE CAMPOS"
Rua João Felipe, nº 200-Centro - CEP: 18.195-000- Fone (15) 3267-1144/3267-1345-Capela do Alto - SP.
E-mail: e016913a@see.sp.gov.br

Atividade 2: “Mini roda-gigante”

Etapa 2F: “Construindo gráficos com o GeoGebra”

Observações: Antes de iniciar a construção dos gráficos, faça os procedimentos seguintes:

Abra o software Geogebra;
Clique em Opções/avançado
Clique em Preferências/janela de visualização
Clique em Básico
Clique em: x mín: -1 x máx: 13 - ymín: -5 y máx: 30
Clique em Eixo x e escolha a unidade π e feche a janela
Clique com o botão direito na tela e coloque a opção malha.

Construção do Gráfico 1:

Clique em Exibir/planilha
Digite os valores dos ângulos (em radianos) na coluna A e os valores da altura na coluna B para plotar os pontos do gráfico.
Selecione a tabela e clique com o botão direito em criar lista de pontos
Selecione os pontos na janela de visualização e clique com o botão direito em exibir rótulo.
Está pronto o gráfico 1. Vocês podem mudar a cor e o tamanho dos pontos clicando em propriedades com o botão direito.
Vamos agora digitar no campo de entrada a função y = h – Rcos(x), de acordo com a função do gráfico 1 que vocês construíram.
Não esqueçam de salvar.

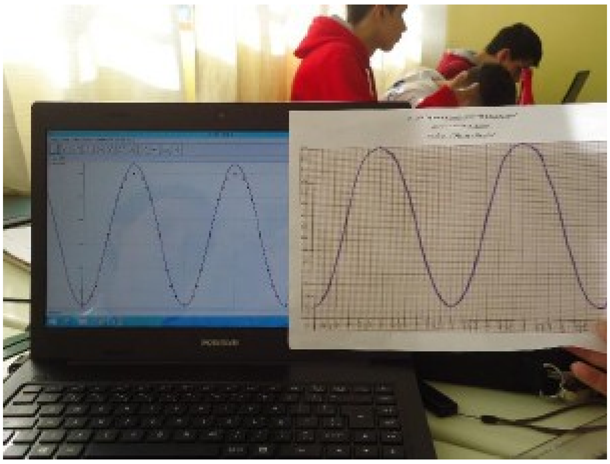
Construção do Gráfico 2:

Abra uma nova página
Clique em Opções/avançado
Clique em Preferências/janela de visualização
Clique em Básico
Clique em x mín: -5x máx: (depende do diâmetro da roda) Y mín: -5 y máx: 30
Feche a janela
Clique em Exibir/planilha
Digite os valores das distâncias na coluna A e os valores da altura na coluna B para plotar os pontos do gráfico.
Selecione a tabela e clique com o botão direito em criar lista de pontos
Selecione os pontos na janela de visualização e clique com o botão direito em exibir rótulo.
Vamos agora digitar no campo de entrada a função $y = h - R.cos(2\pi x/2\pi R)$, de acordo com a função do gráfico 2 que vocês construíram.
O gráfico 2 está pronto. Não se esqueçam de salvá-lo.

Questões

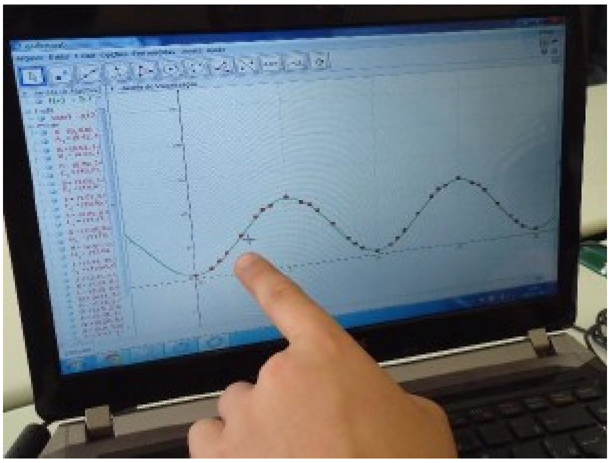
1) Comparando os gráficos construídos no papel com os gráficos construídos no Geogebra, a que conclusões o grupo chegou?
2) O grupo encontrou dificuldades na construção dos gráficos no ambiente informatizado? Quais?

Figura 68 - Grupo VI comparando os gráficos.



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Figura 69 - Grupo I observando os pontos do gráfico 1.



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

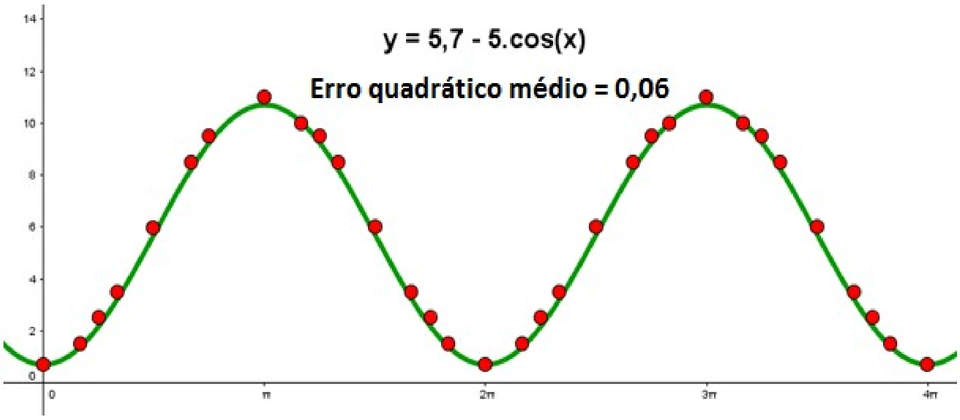
Análise dos resultados obtidos

De forma geral os grupos não encontraram muitas dificuldades na construção dos gráficos. Relataram que os gráficos construídos com o GeoGebra ficaram muito parecidos com os construídos no papel. Apenas o grupo 1 relatou que o gráfico 2 apresentou as maiores diferenças em relação ao gráfico construído no Geogebra. O grupo 2 encontrou dificuldades para trocar a cor dos pontos plotados no gráfico e relataram que as linhas não passaram exatamente em cima dos pontos.

Os alunos elegeram os gráficos que melhor se aproximaram da realidade. Ao expor todos os gráficos, os alunos decidiram após algumas discussões, que o melhor gráfico 1 foi o construído pelo grupo 1 e o grupo 4 foi o que construiu o melhor gráfico 2. Para confirmar ou não a "impressão" dos alunos, optou-se por calcular o erro quadrático médio das medidas realizadas por eles. Após explicações intuitivas sobre o significado da medida do erro quadrático médio, (lembrando que o conteúdo de Estatística é abordado na 3ª série), os alunos voltaram ao ambiente informatizado e continuaram a preencher a planilha com mais duas colunas. Além das colunas A e B, onde foram digitados os valores referentes a ordenada e a abscissa, a coluna C foi preenchida pela fórmula do gráfico e a coluna D pelo quadrado dos desvios. Finalmente os alunos obtiveram o erro quadrático médio de cada gráfico.

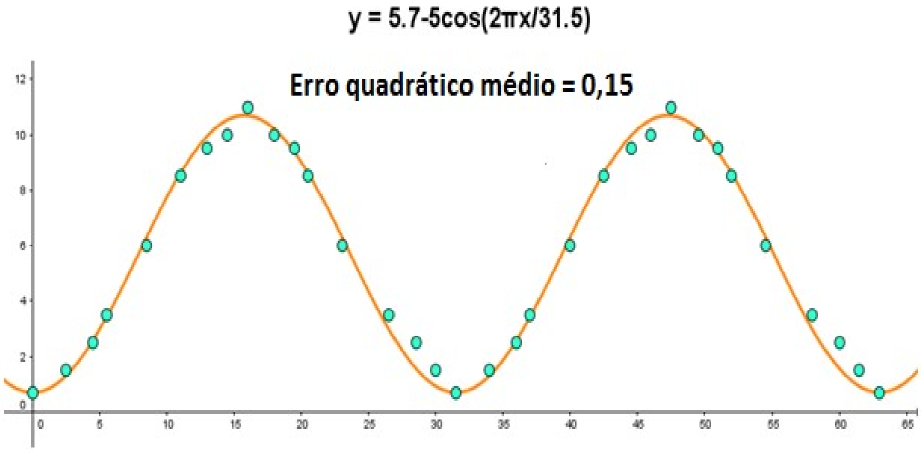
A seguir apresentam-se os gráficos 1 e 2 dos grupos com as respectivas fórmulas e cálculo do erro quadrático médio para os dados experimentais e teóricos.

Figura 70 - Gráfico 1 (Altura X Ângulo) para o grupo I.



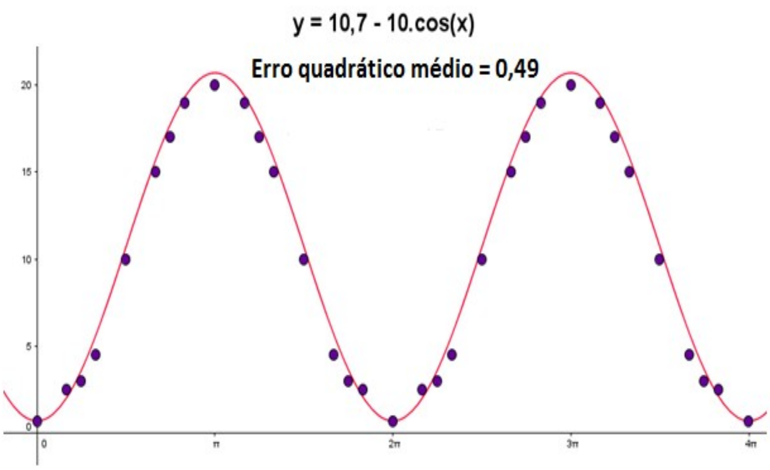
Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Figura 71 - Gráfico 2 (Altura X Distância Percorrida) para o grupo I.



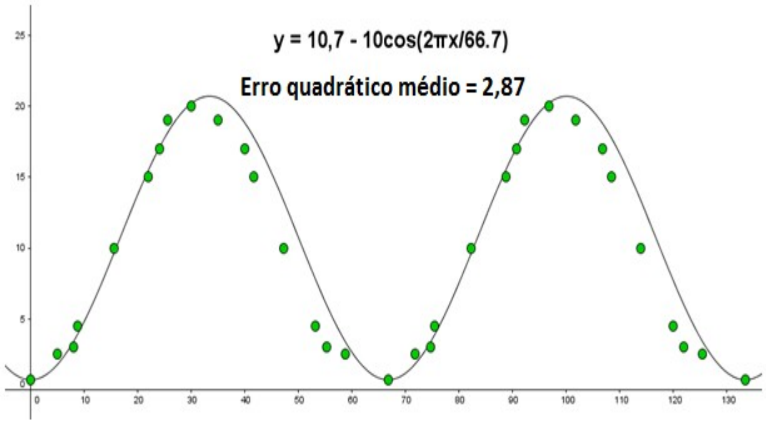
Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Figura 72 - Gráfico 1 (Altura X Ângulo) para o grupo II.



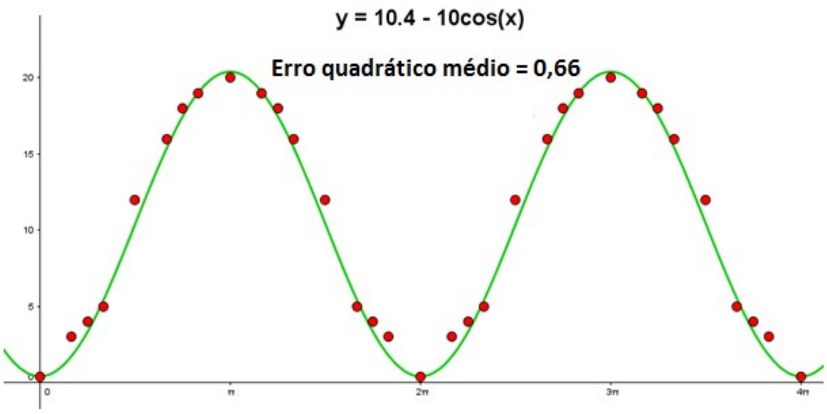
Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Figura 73 - Gráfico 2 (Altura X Distância Percorrida) para o grupo II.



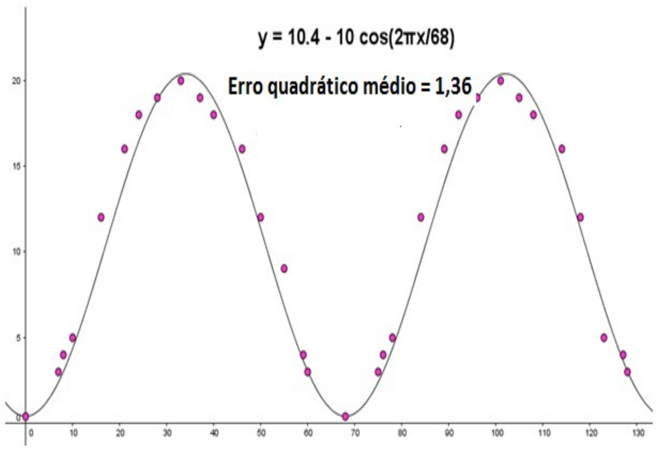
Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Figura 74 - Gráfico 1 (Altura X Ângulo) para o grupo III.



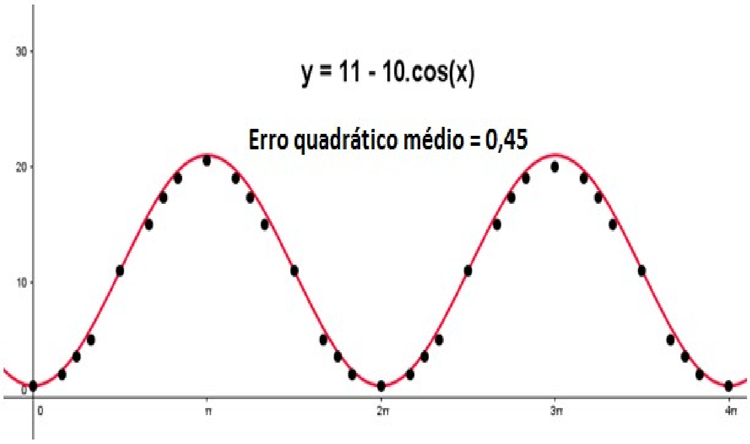
Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Figura 75 - Gráfico 2 (Altura X Distância Percorrida) para o grupo III.



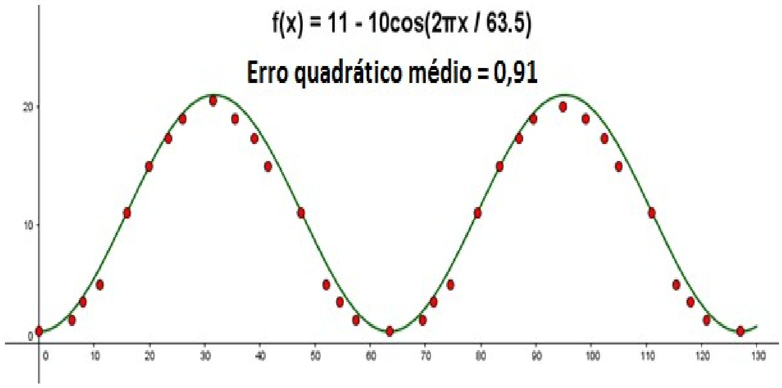
Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Figura 76 - Gráfico 1 (Altura X Ângulo) para o grupo IV.



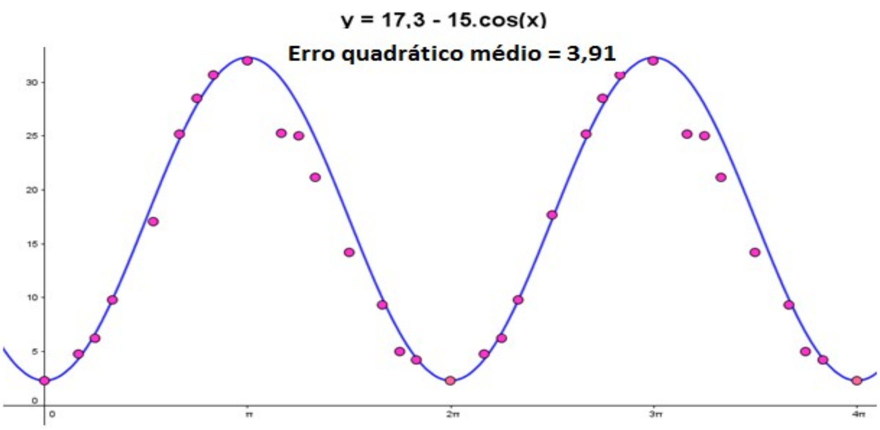
Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Figura 77 - Gráfico 2 (Altura X Distância Percorrida) para o grupo IV.



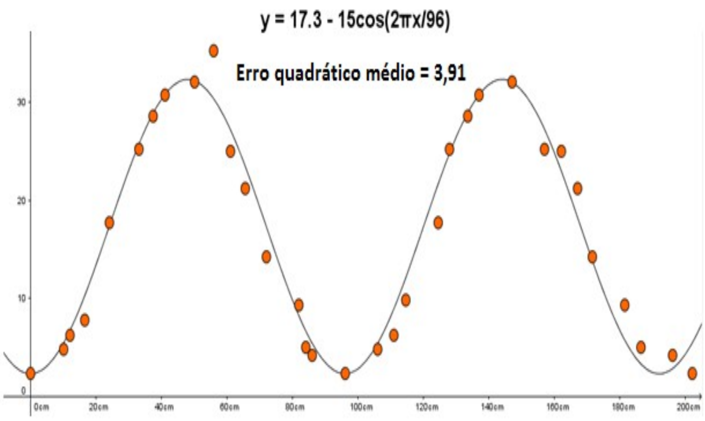
Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Figura 78 - Gráfico 1 (Altura X Ângulo) para o grupo V.



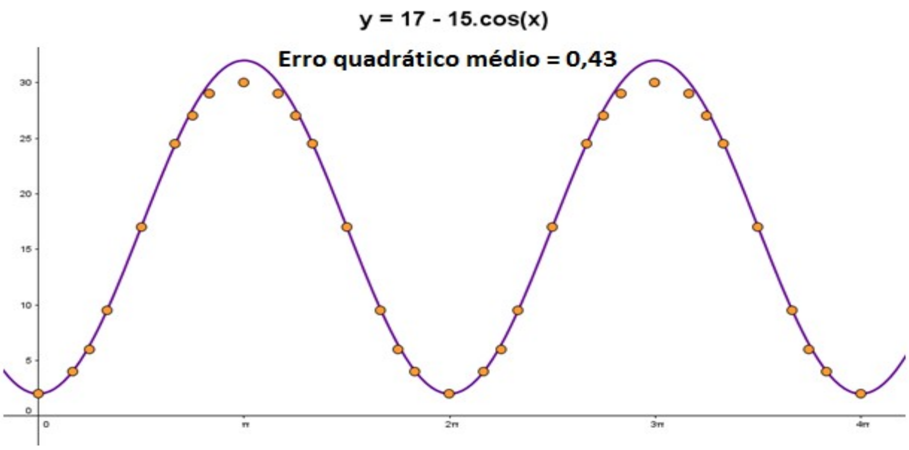
Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Figura 79 - Gráfico 2 (Altura X Distância Percorrida) para o grupo V.



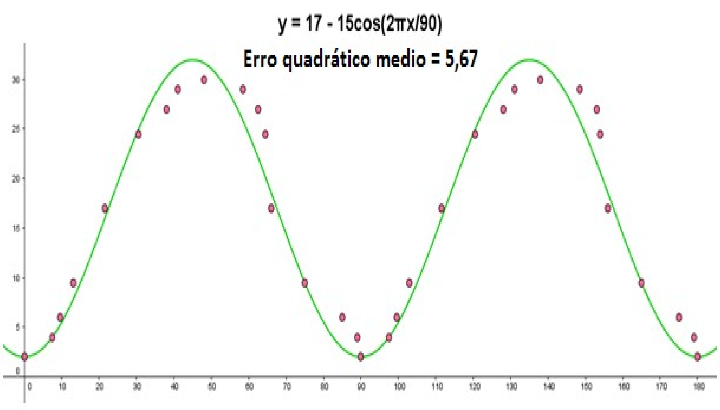
Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Figura 80 - Gráfico 1 (Altura X Ângulo) para o grupo VI.



Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Figura 81 - Gráfico 2 (Altura X Distância Percorrida) para o grupo VI.



Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

A tabela 24 apresenta os valores do erro quadrático médio para cada gráfico construído pelos grupos.

Tabela 24 - Erro quadrático médio dos gráficos construídos pelos grupos.

GRÁFICOS	ERRO QUADRÁTICO MÉDIO DOS GRUPOS					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Altura x Ângulo	0,06	0,49	0,66	0,45	3,91	0,43
Altura x Distância Percorrida	0,15	2,87	1,36	0,91	3,91	5,67

Fonte: Elaborada pela Pesquisadora.

O cálculo do erro quadrático médio ajudou os alunos a confirmar o melhor desempenho do grupo 1 na construção do gráfico da Altura x Ângulo (menor erro quadrático médio). Embora visualmente o gráfico "Altura x Distância Percorrida" do grupo 4 ficou melhor que o do grupo 1, o gráfico do grupo 1 tem mais pontos posicionados em cima da linha que o do grupo 4. Neste caso, o erro quadrático médio do grupo 4 foi de 0,91, enquanto que o do grupo 1 foi de 0,45. Portanto, o grupo 1 foi o que obteve as medidas mais precisas para a construção de ambos os gráficos no papel.

Etapa 2G – Avaliação dos grupos

Para finalizar os alunos fizeram uma auto avaliação da participação de cada aluno do grupo em cada uma das etapas da Atividade 2: Mini Roda-Gigante. Para efeito dessa avaliação o trabalho foi dividido em três etapas: a primeira era a construção da roda gigante; a segunda era a construção dos gráficos no papel e a terceira era a construção dos gráficos com o GeoGebra. Os alunos deveriam dar notas aos integrantes do grupo em cada etapa do trabalho avaliando a participação em cada momento das atividades propostas conforme as orientações a seguir:

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
DIRETORIA DE ENSINO DA REGIÃO DE VOTORANTIM
EE "CEL. PEDRO DIAS DE CAMPOS"
Rua João Felipe, nº 200-Centro - CEP: 18.195-000- Fone (15) 3267-1144/3267-1345-Capela do Alto - SP.
E-mail: e016913a@see.sp.gov.br

Atividade 2: "Mini roda-gigante" - Avaliação dos grupos

O grupo deverá avaliar a participação de cada integrante em cada etapa do trabalho, levando em consideração a participação individual em todos os momentos do desenvolvimento do trabalho, como descritos a seguir:

Etapa 1- Construção da roda-gigante

✓ O(a) aluno(a) colaborou na execução da roda gigante?

- ✓ Trouxe material, ajudou a medir, cortar, colar?

Etapa 2 – Construções de gráficos no papel

Como foi a participação do(a) aluno(a) nos vários momentos do desenvolvimento da etapa 2B?

(tabela, gráficos e atividades)

- ✓ Colaboração na medição da altura com a régua;
- ✓ Colaboração na medição do comprimento com uso de barbante;
- ✓ Preenchimento da tabela;
- ✓ Construção do gráfico 1 no papel milimetrado;
- ✓ Construção do gráfico 2 no papel milimetrado;
- ✓ Realização das atividades 1, 2, 3 e 4
- ✓ Cálculo das transformações de radianos para graus;

(socialização)

- ✓ Realização das 10 atividades referentes ao gráfico 1;
- ✓ Colaboração nas conclusões do grupo.

(Função do gráfico 1 e 2)

- ✓ Realização das atividades de 1 a 4;
- ✓ Uso de calculadora científica para responder as questões;
- ✓ Conclusão do grupo na questão 4.

Etapa 3- Construções de Gráficos com o GeoGebra:

- ✓ Colaboração na realização dos gráficos no software GeoGebra.

Integrantes do grupo:		**Etapa 1** **Construção da roda-gigante** **(3,0)**	**Etapa 2** **Construção de gráficos no papel** **(5,0)**	**Etapa 3** **Construção de gráficos no GeoGebra** **(2,0)**	**Nota**
NOME	**Nº**				
Desempenho médio do grupo:					

A realização da atividade foi bastante produtiva. Os alunos se engajaram na construção na roda-gigante e participaram ativamente em todas as atividades propostas. Delegar aos alunos a avaliação da atividade, proporcionou-lhes a oportunidade de refletir sobre a participação de cada aluno do grupo diante dos critérios pré-estabelecidos, onde puderam comparar suas ações com o que se esperava deles. Colocá-los nessa situação de confronto, de tomada de decisão, onde cada aluno teve que se posicionar e defender a sua participação, argumentando e justificando suas atitudes na realização de cada etapa da atividade, foi uma experiência bastante rica no processo de aprendizagem, pois desenvolveu a responsabilidade e a autonomia.

ATIVIDADE 3: Motorzinho

Com o objetivo de apresentar mais um exemplo de modelagem matemática utilizando as funções periódicas, os alunos transformaram as rodas-gigantes num modelo de pistão, cujo funcionamento leva a uma aproximação da função cosseno. A atividade foi organizada em três etapas.

Etapa 3A: "Transformando a roda gigante num pistão"

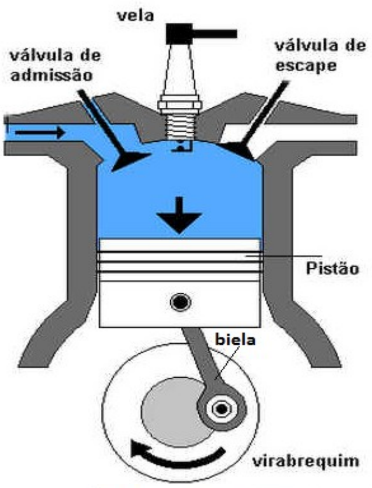
Desenvolvimento da Atividade

Nesta primeira etapa os alunos transformaram a roda gigante construída num modelo de pistão, que foi denominado "motorzinho". Para a realização desta atividade, os alunos foram organizados em grupos, permanecendo os mesmos seis grupos que realizaram a atividade da mini roda-gigante. Os grupos receberam uma folha com instruções sobre os passos da construção (Figura 82).

Figura 82 - Passo-a-passo para a construção do “motorzinho”.

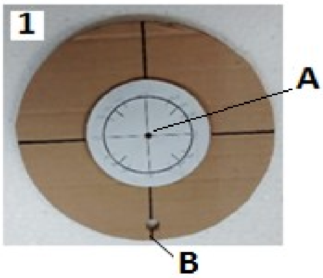
SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
DIRETORIA DE ENSINO DA REGIÃO DE VOTORANTIM
EE "CEL. PEDRO DIAS DE CAMPOS"
Rua João Felipe, nº 200-Centro - CEP: 18.195-000- Fone (15) 3267-1144/3267-1345-Capela do Alto - SP.
E-mail: e016913a@see.sp.gov.br

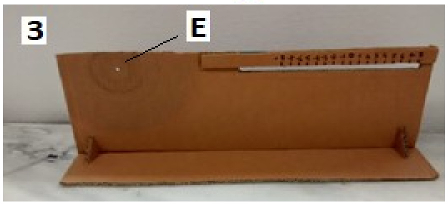
A CONTRUÇÃO DO “MOTORZINHO” PASSO-A-PASSO:

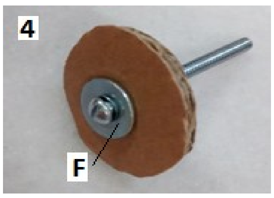


Pistão de um motor é uma peça cilíndrica normalmente feita de alumínio, ou liga de alumínio, que se move no interior do cilindro dos motores de explosão. O motor de explosão ou motor de combustão interna, é amplamente utilizado para movimentar automóveis, ônibus, caminhões, etc. Vamos transformar a mini roda-gigante num modelo de pistão.

Material necessário: Papelão, 3 parafusos, 4 porcas, 8 arruelas, cola, tesoura e régua.







Instruções:

1– Retire as tampinhas da roda-gigante e cole os discos com o mini-transferidor para formar a roda do pistão (virabrequim). Faça os furos **A** e **B**.

2- Recorte um retângulo de papelão para formar a biela. Faça os furos **C** e **D**.

3- Recorte dois retângulos e cole-os para formar a base. Faça uma abertura por onde a biela vai correr. Faça o furo **E.**

4- Faça um pequeno círculo para servir de apoio para a biela e coloque o parafuso com as arruelas e a porca.

5- Parafuse **B** com **C, A** com **E** e **D** com **F.** Gire a roda para fazer uma régua graduada com valores negativos e positivos, simetricamente opostos, conforme a distância percorrida pelo pistão.

Fonte: Elaborada pela Pesquisadora.

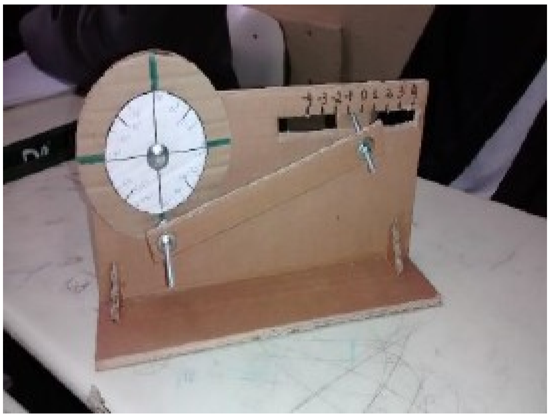
Figura 83 - Grupo 4 testando o “motorzinho”.

Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Figura 84 - Grupo 5 parafusando a biela.

Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Figura 85 - “motorzinho” pronto – Grupo 1.



Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Figura 86 - “motorzinho” pronto – Grupo 6.

Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Etapa 3B: “Funcionando o motorzinho”

Desenvolvimento da atividade

Os alunos construíram o gráfico da distância percorrida pela extremidade da barra em função do ângulo de giro da roda, utilizando papel quadriculado. Após a construção do gráfico, eles responderam uma atividade onde tiveram que indicar o período e a amplitude da função obtida, associando-a a uma função aproximada do cosseno.

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
DIRETORIA DE ENSINO DA REGIÃO DE VOTORANTIM
EE "CEL. PEDRO DIAS DE CAMPOS"
Rua João Felipe, nº 200-Centro - CEP: 18.195-000- Fone (15) 3267-1144/3267-1345-Capela do Alto - SP.
E-mail: e016913a@see.sp.gov.br

Etapa 3B: "Funcionando o motorzinho"

Preencha a tabela com as posições encontradas pelo deslocamento da extremidade da barra de acordo com os ângulos de rotação da roda. Em seguida, utilizando papel quadriculado, construa o gráfico da função obtida.

Ângulo da roda	Posição da barra
0	
$\frac{\pi}{2}$	
π	
$\frac{3\pi}{2}$	
2π	
$\frac{5\pi}{2}$	
3π	
$\frac{7\pi}{2}$	
4π	

Observando o gráfico construído, responda as questões abaixo:

a) A função é periódica? Qual o seu período?

b) Qual a amplitude da função obtida?

c) Essa função se parece com alguma função trigonométrica estudada? Qual?

Figura 87 - Fazendo o “motorzinho” funcionar.

Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Figura 88 - Preenchendo a tabela.

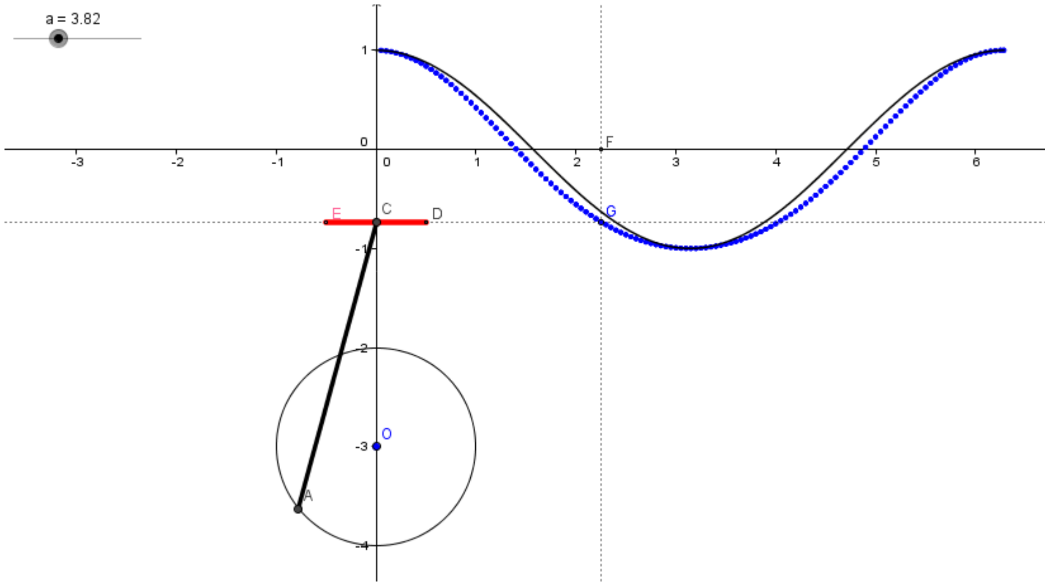
Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Etapa 3C: “Analisando simulação no Geogebra”

Desenvolvimento da atividade

Na terceira e última etapa, 36 alunos organizados em duplas, tiveram acesso a um modelo de pistão construído no GeoGebra (Figura 89).

Figura 89 - Gráfico formado pela movimentação do pistão.



Fonte: Elaborada pela Pesquisadora.

Dado o nível de complexidade da construção, os alunos tiveram acesso a construção pronta para utilizar na realização da atividade. A seguir é apresentado o protocolo de construção do “motorzinho” no GeoGebra.

Protocolo de Construção do “motorzinho” no GeoGebra:

1- Crie um controle deslizante a no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ com incremento de 0.05

2- Crie o ponto O=(0, -3)

3- Desenhe o círculo c de centro O e raio 1

4- Crie o ponto A=(cos(a), sin(a)-3)

5- Desenhe o círculo d com centro A e raio 3 (se desejar, com o ponteiro do mouse sobre o círculo, acione o botão da direita e clique sobre “Exibir objeto” para que a circunferência não seja mostrada).

6- Defina os pontos B pela interseção de d com o eixo y acima do ponto O.

7- Crie o segmento b de A a B

8- Desenhe o círculo e com centro B e raio 0,5

9- Desenhe a reta b passando por B e perpendicular ao eixo y

10- Crie os pontos C e D, interseção de e e b

11- Desenhe o segmento g de C a D

12- Crie o ponto E= $\left(a-\frac{\pi}{2},0\right)$

13- Desenhe a reta h passando por E e perpendicular ao eixo x

14- Crie o ponto F, interseção de b e h. Clique com o botão da direita do mouse no ponto F e habilite o rastro.

15- Crie a função p(x)=Função[cos(x), 0,2*pi]

16- Clique com o botão da direita no controle deslizante a e solicite a animação.

Ao animar a construção, os alunos puderam observar o gráfico da função que se formou com a movimentação do pistão. O gráfico representado em linha contínua, é o gráfico da função cosseno. O gráfico em linha pontilhada foi se formando pela movimentação do pistão e representa o gráfico da função $y_\theta=-y_c+r\cos\theta\pm\sqrt{a^2-r^2\operatorname{sen}^2\theta}$. Nesta etapa os alunos devem reconhecer o período e a amplitude do gráfico e aproximar o gráfico a uma função periódica conhecida. Na observação da construção do gráfico da função, eles tinham que compará-lo ao gráfico do cosseno e observar que ficaram muito próximos, embora a função não fosse exatamente o cosseno. A demonstração da função $y_\theta=-y_c+r\cos\theta\pm\sqrt{a^2-r^2\operatorname{sen}^2\theta}$ encontra-se no Apêndice A.

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
DIRETORIA DE ENSINO DA REGIÃO DE VOTORANTIM
EE "CEL. PEDRO DIAS DE CAMPOS"
Rua João Felipe, nº 200-Centro - CEP: 18.195-000- Fone (15) 3267-1144/3267-1345-Capela do Alto - SP.
E-mail: e016913a@see.sp.gov.br

Etapa 3C: "Analisando simulação no GeoGebra"

Abra o arquivo contendo um modelo de pistão construído no software GeoGebra. No canto superior esquerdo clique com o botão direito no controle deslizante a e marque a opção "animar". Observe o gráfico em linha pontilhada que se forma enquanto o ponto A percorre a circunferência e responda as questões.

a) Observando o gráfico pontilhado indique o período e a amplitude do gráfico.

b) Qual é a função cujo gráfico está em linha contínua?

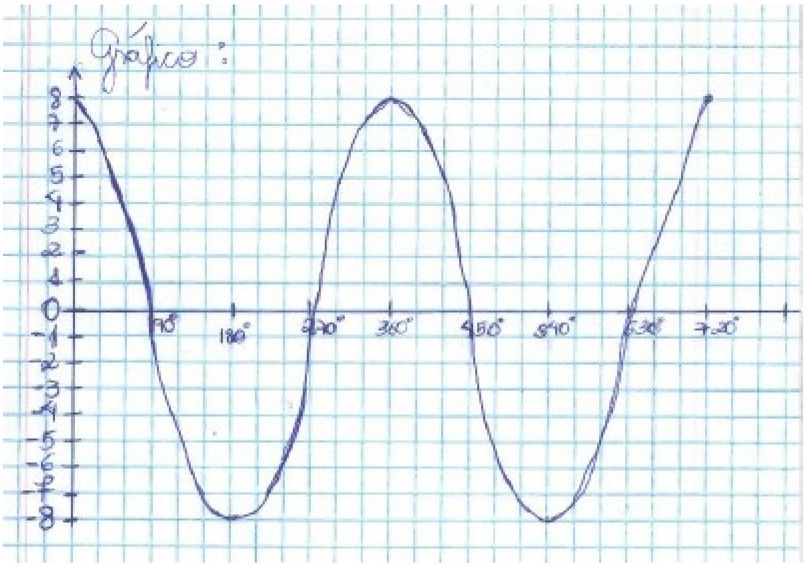
c) Comparando os dois gráficos, qual a sua conclusão?

Análise dos resultados obtidos

<u>Etapa 3B:</u>

Nas questões a) e b) da etapa 3B, somente um dos grupos confundiu período com amplitude. Colocaram o período como sendo 8, mas essa era a amplitude do gráfico (Figura 90).

Figura 90 - Gráfico construído por um dos grupos.



Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Na amplitude o mesmo grupo de alunos colocou como resposta, “180° em 180°”. Ao serem questionados, perceberam o engano e corrigiram os erros, colocando que o período era 360°.

Na questão c), um grupo respondeu que a função obtida com o funcionamento do motorzinho é uma função periódica apenas. Já os demais grupos responderam que o gráfico da função obtida é muito próximo do gráfico da função cosseno.

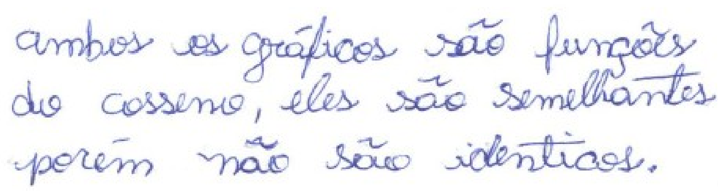
<u>Etapa 3C:</u>

Observando o gráfico pontilhado, 68% dos alunos responderam corretamente a questão A, cujo período da função obtida pelo movimento do pistão era de aproximadamente 6,28 ou 2π. Os demais 32% tiveram um pouco de dificuldade em indicar o período. Como no gráfico o eixo das abscissas estava dividido de uma em uma unidade, os alunos fizeram estimativas quanto ao período. As respostas da questão a) foram: 6,23 (uma dupla); 6,14 (uma dupla); 6,25 (uma dupla) e 6 (duas duplas). Esses alunos não perceberam que poderiam descobrir o período observando o controle deslizante a, cujo intervalo começava no 1,57 e terminava no 7,85. A diferença é exatamente 6,28.

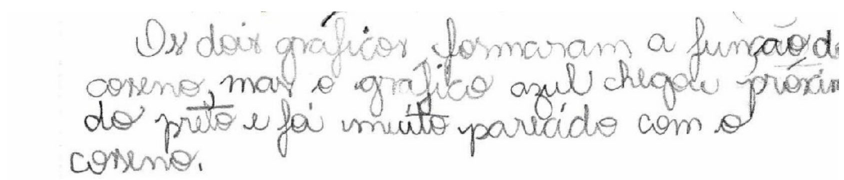
Quanto a questão b), todos os alunos acertaram, respondendo que o gráfico contínuo era o da função cosseno.

Na questão c) os alunos deveriam comparar os dois gráficos e tirar conclusões. De forma geral todas as duplas perceberam se tratar de uma aproximação do gráfico do cosseno, como se pode observar por algumas respostas a seguir:

Dupla 1:


ambos os gráficos são funções do cosseno, eles são semelhantes porém não são idênticos.

Dupla 2:


Os dois gráficos formaram a função d cosseno, mas o gráfico azul chegou próxim do preto e foi muito parecido com o cosseno.

A aplicação da atividade contemplou as habilidades propostas inicialmente, pois os alunos tiveram a oportunidade de perceber que qualquer movimento periódico pode ser descrito por uma função trigonométrica.

As atividades propostas a seguir, foram realizadas a partir de modelos de funções periódicas construídas com o auxílio do software GeoGebra. Optou-se por utilizar o ambiente informatizado a fim de reforçar as propriedades das funções trigonométricas seno e cosseno, para em seguida propor a construção de gráficos no papel.

4.2.5. Analisando gráficos de funções construídas com o software GeoGebra

Conteúdos e temas	Gráficos cartesianos das funções *y = sen(x)* e *y = cos(x)*; gráficos das funções do tipo *y = A.sen(Bx+C)+D* e *y = A.cos(Bx+C)+D.*
Competências e habilidades	Explorar as propriedades das funções trigonométricas seno e cosseno.
Tempo previsto	4 aulas de 50 minutos.
Material	Construções no GeoGebra.

Justificativa

Antes de iniciar a situação de aprendizagem 3 do caderno do aluno do Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2014), optou-se por utilizar o software GeoGebra para a análise de gráficos das funções seno e cosseno. Desta forma os alunos teriam mais facilidade na construção dos gráficos no papel a partir de uma tabela de valores, visto que já teriam observado as propriedades dessas funções trigonométricas através do software. Esta penúltima tarefa exploratório-investigativa, teve como objetivos: reforçar o conhecimento a respeito do período e amplitude das funções seno e cosseno; fazer o estudo do sinal dessas funções; analisar as transformações sofridas pelos gráficos quando se alteram alguns parâmetros das funções.

A tarefa foi organizada em três atividades:

Atividade 1: Função "Polígono"

Atividade 2: Funções Seno e Cosseno

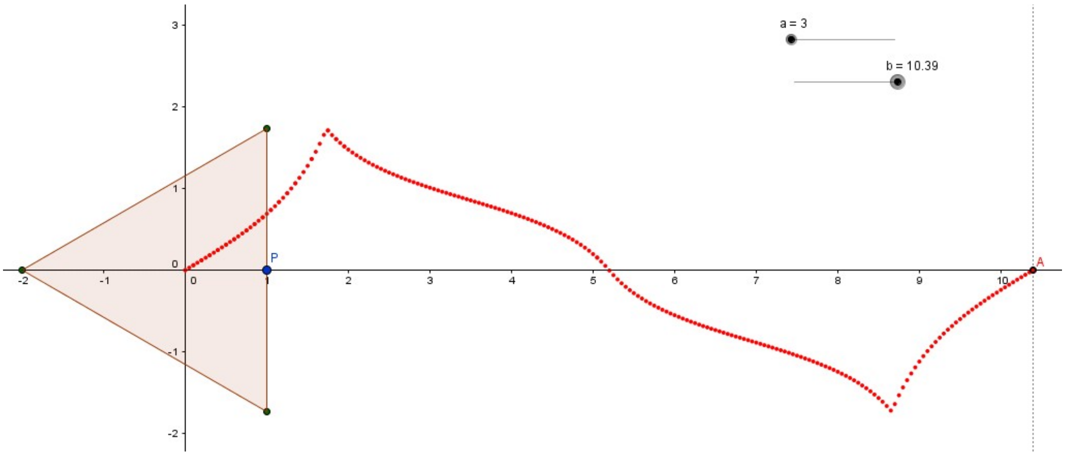
Atividade 3: Analisando Transformações nos Gráficos das Funções Trigonométricas

Atividade 1: Função polígono

Desenvolvimento da atividade

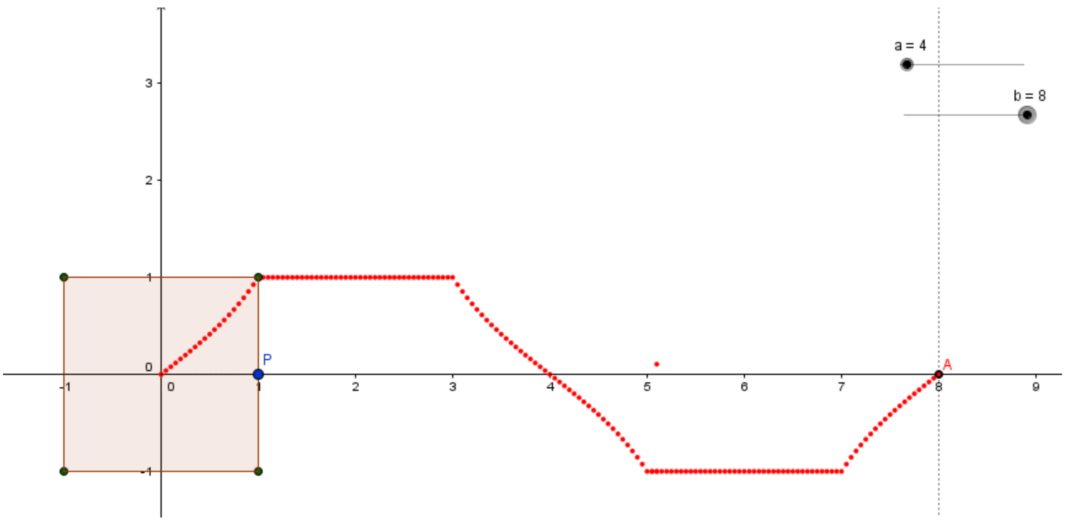
Esta atividade se baseou no trabalho de Demir (2012). Participaram 32 alunos divididos em duplas ou em trios, totalizando 14 grupos. A atividade denominada de "função polígono" apresentou uma construção no software GeoGebra, com as seguintes características: o controle deslizante a fornece o número de lados do polígono, indo desde o triângulo até o icoságono; o controle deslizante b desenha o gráfico que se forma com a movimentação, no sentido anti-horário, de um ponto que se move ao longo dos lados do polígono. A função definida é aquela que associa a distância percorrida por um ponto ao longo dos lados de um polígono, à posição vertical do ponto. O objetivo da atividade proposta era de novamente explorar os conceitos de periodicidade para uma função periódica. Ao final os alunos deveriam observar que ao aumentar o número de lados, o gráfico da função iria se aproximar do gráfico de uma função trigonométrica já abordada. Este resultado é esperado uma vez que a circunferência pode ser vista como um processo limite para um polígono de infinitos lados e a função trigonométrica seno também tem seu gráfico descrito em função do comprimento e altura (ver seção 4.2.4 – Atividade 2 – Etapa 2E).

Figura 91 - Função polígono (triângulo).



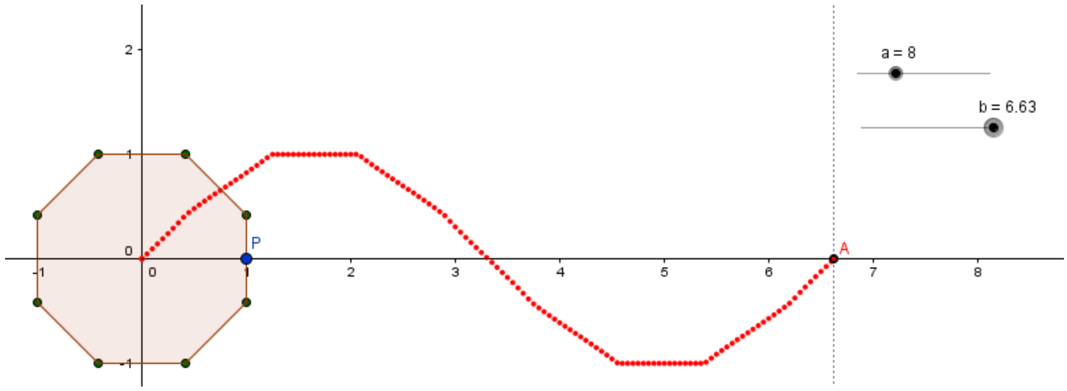
Fonte: Elaborado pela Pesquisadora.

Figura 92 - Função polígono (quadrado).



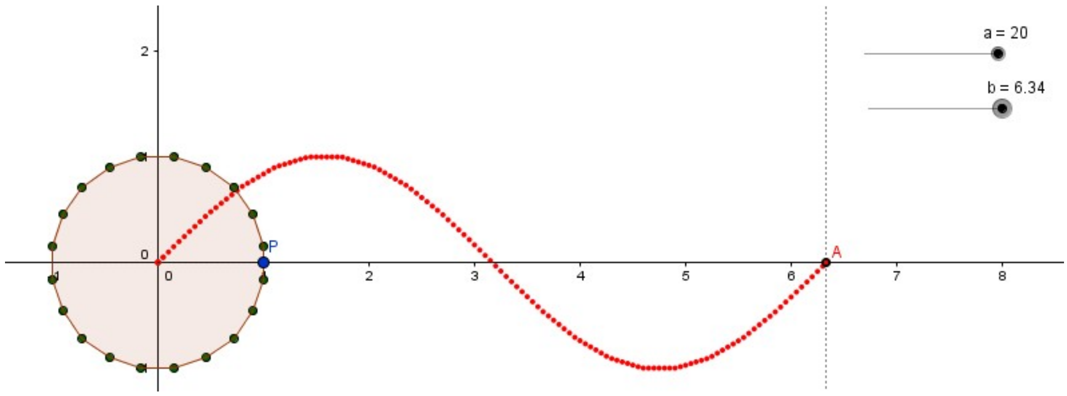
Fonte: Elaborado pela Pesquisadora.

Figura 93 - Função polígono (octógono).



Fonte: Elaborado pela Pesquisadora.

Figura 94 - Função polígono (icoságono).



Fonte: Elaborado pela Pesquisadora.

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
DIRETORIA DE ENSINO DA REGIÃO DE VOTORANTIM
EE "CEL. PEDRO DIAS DE CAMPOS"
Rua João Felipe, nº 200-Centro - CEP: 18.195-000- Fone (15) 3267-1144/3267-1345-Capela do Alto - SP.
E-mail: e016913a@see.sp.gov.br

Atividade 1: "Função Polígono"

Observando a construção vemos que foram construídos vários polígonos nos eixos cartesianos. O controle deslizante a determina o número de lados do polígono, desde o triângulo até o polígono de 20 lados. O controle deslizante b movimenta o ponto P no sentido anti-horário ao longo dos lados dos polígonos construídos. O ponto A percorre o gráfico da função cuja entrada é a distância percorrida pelo ponto P e a saída é a posição vertical do ponto P.

Estando o controle deslizante a na posição 3, clique com o botão direito sobre o controle deslizante b e clique em animar. Observe a movimentação do ponto P ao longo dos lados do triângulo e a movimentação do ponto A formando o gráfico da função. Faça o mesmo procedimento para outros polígonos. A seguir responda as questões.

1) Aumente para 4 o número de lados do polígono colocando o controle deslizante a na posição 4. Movimente o controle deslizante b de modo que o ponto P percorra duas unidades ao longo do quadrado. Quais as coordenadas do ponto A no gráfico da função?

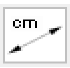
2) Quando o ponto P percorre quatro unidades ao longo do quadrado, quais as coordenadas do ponto A no gráfico da função?

3) Coloque o controle deslizante a na posição 5. Qual o nome do polígono formado?

4) Quais as coordenadas do ponto A no gráfico, após o ponto P ter percorrido todos os lados do polígono de 6 lados? Como se chama esse polígono?

5) No polígono de 10 lados, quando o ponto P tem coordenadas (-1, 0), quais as coordenadas do ponto A?

6) Quais as coordenadas do ponto A no gráfico, após o ponto P ter percorrido todos os lados do polígono de 10 lados? Você sabe como se chama esse polígono?

7) Use a ferramenta 

(distância, comprimento ou perímetro) para encontrar o perímetro de cada polígono e preencha a tabela abaixo.

POLÍGONO Nº de lados	**GRÁFICO DA FUNÇÃO**	
	Perímetro	**Distância horizontal no eixo x**
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		

8) Você percebe alguma relação entre o perímetro dos polígonos e os gráficos das funções?

9) Quanto maior o número de lados do polígono, mais ele se aproxima de uma figura geométrica. Qual?

10) Qual o perímetro de uma circunferência de raio igual a 1?

11) Aumentando o número de lados dos polígonos quais as transformações ocorridas nos gráficos das funções? Comente suas observações.

Análise dos resultados obtidos

A tabela 25 mostra o desempenho dos grupos na realização da atividade.

Tabela 25 - Desempenho dos grupos - Atividade: Função Polígono.

Nº da questão	Acertos
1	86%
2	86%
3	93%
4	86%
5	86%
6	79%
7	93%
8	79%
9	93%
10	93%
11	57%

Fonte: Elaborada pela Pesquisadora.

Na questão número 4 as coordenadas do ponto A eram (6,93; 0). Alguns grupos colocaram (7, 0), pois não olharam para a janela de álgebra que indicava as coordenadas corretas do ponto A.

Na questão número 8, esperava-se que os alunos percebessem que o perímetro do polígono é exatamente o período da função, ou seja: a distância horizontal do gráfico ao longo do eixo x. A seguir algumas respostas que se aproximaram do esperado.

Grupo 1: "Sim, o perímetro é o tanto que os dois pontos irão se mover na reta".

Os alunos se referiram aos pontos A que forma o gráfico e o ponto C que corre ao longo do eixo x. Portanto, perceberam que o perímetro é igual a distância do gráfico ao longo do eixo x.

Grupo 2: “O ponto x de A corresponde ao perímetro da figura”.

Neste caso os alunos mencionaram o fato da abscissa do ponto A, (após ter percorrido todo o gráfico), ser igual ao perímetro.

Grupo 3: “O gráfico da função vai aumentando os lados e o perímetro vai diminuindo”.

Esses alunos cometeram um equívoco ao mencionar “gráfico da função” ao invés de “polígono”, mas perceberam que quanto maior o número de lados dos polígonos, menor será o perímetro. No entanto, ainda não mencionaram a relação com o gráfico da função.

Grupo 4: “Quanto mais lados tiver mais próximo fica de chegar a 2π (6,28)”.

Aqui os alunos perceberam que aumentando o número de lados, o perímetro se aproxima de 6,28, mas também não o associaram ao gráfico da função.

Grupo 5: “As coordenadas do eixo x são parecidas com os perímetros”.

O grupo percebeu que quando o ponto P percorre todo o gráfico, a abscissa de A no gráfico é exatamente o perímetro do polígono.

Grupo 6: “Conforme muda-se o número de lados, o gráfico vai ficando menor, acompanhando o número do perímetro”.

Grupo 7: “Conforme aumenta-se o número de lados, o tamanho do gráfico vai diminuindo (sentido horizontal), acompanhando o perímetro.

Os dois grupos perceberam que quanto maior o número de lados do polígono, o período do gráfico vai diminuindo. Esse período é exatamente o perímetro do polígono.

Grupo 8: “O perímetro dá a distância do ciclo do polígono”

Neste caso os alunos perceberam a relação entre o perímetro e o período do gráfico, mas não conseguiram se expressar corretamente.

Grupo 9: O perímetro é o tanto que o ponto irá se mover na reta”.

Esses alunos assim como os alunos do grupo 1, fizeram menção de forma indireta ao período, quando mencionam a distância percorrida no eixo x.

Grupo 10: "O valor da coordenada do ponto A é igual ao perímetro".

Aqui também se percebe que os alunos fazem a ligação entre o perímetro e a distância percorrida pelo ponto A.

Grupo 11: "Quanto maior o polígono, mais o perímetro fica perto de 6,28, que é igual ao eixo x".

Neste caso, os alunos perceberam que aumentando o número de lados o perímetro se aproxima do período da função, que é 6,28.

A seguir algumas repostas incorretas, onde os alunos não relacionaram o polígono com o gráfico.

Grupo 12: "Quanto maior o número de lados, fica menor o perímetro".

Grupos 13 e 14: "Quanto maior o número de lados, forma-se um círculo."

Verifica-se que 11 grupos perceberam a relação entre o perímetro do polígono e o gráfico da função. No entanto, tiveram dificuldades em se expressar, pois nenhum dos grupos mencionou o período da função.

Na questão 11, esperava-se que os alunos percebessem que conforme aumenta o número de lados do polígono, o gráfico vai ficando em formato de onda, caracterizando então a função seno, cujo período é 2π. A seguir algumas respostas que se aproximaram do esperado.

Grupo 1: "Os gráficos quanto maior o número de lados, mais arredondado fica, aproximando de 2π o eixo x".

Grupo 2: "Quanto maior o número de lados, mais vai se aproximando da circunferência de 2π".

Nestes dois casos há uma menção ao gráfico, cujo período se aproxima de 2π".

Grupo 3: "Quanto mais lados tiver o polígono mais parecido fica com uma onda".

Neste caso, os alunos mencionaram apenas a forma do gráfico.

Grupo 4: "O local do ponto A são semelhantes ao perímetro do polígono (eixo x)"

Grupo 5: "Conforme aumenta o número de lados, vai ficando em forma de onda perfeita".

Grupo 6: "O perímetro vai se aproximando de 6,28 e o comprimento no gráfico forma o período".

Neste caso, se esqueceram de colocar que o período se aproxima do valor 6,28.

Grupo 7: "Conforme aumentava o número de lados, vai diminuindo o perímetro até chegar a 6,28 assim formando o período da função".

Esta foi considerada a melhor resposta.

Finalmente, oito grupos fizeram alguma menção relacionando o perímetro ao período do gráfico, mas tiveram dificuldades em se expressar. Apenas um grupo mencionou o período da função e ninguém associou o gráfico ao gráfico da função seno. No momento da socialização algumas perguntas foram feitas aos alunos como as que seguem:

_ "Vocês percebem que aumentando o número de lados do polígono, o gráfico da função se modifica?"

_ "Quanto mais aumentamos o número de lados do polígono, mais o seu perímetro se aproxima de qual valor?"

_ "Qual a forma do gráfico que se obtém aumentando o número de lados ao máximo possível?"

_" O gráfico nesse caso, se parece com alguma função trigonométrica estudada?

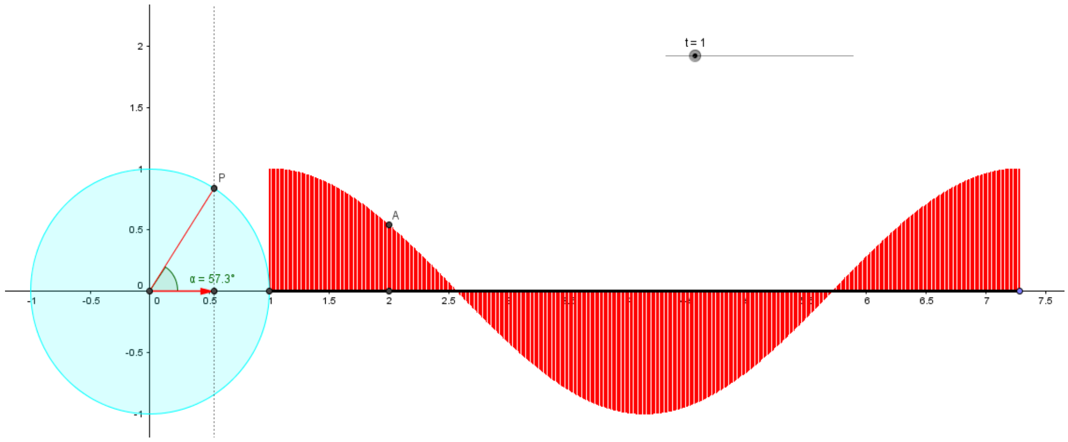
Na socialização dos resultados, as dúvidas foram esclarecidas e as habilidades inicialmente esperadas foram atingidas.

Atividade 2: Funções Seno e Cosseno

Desenvolvimento da atividade

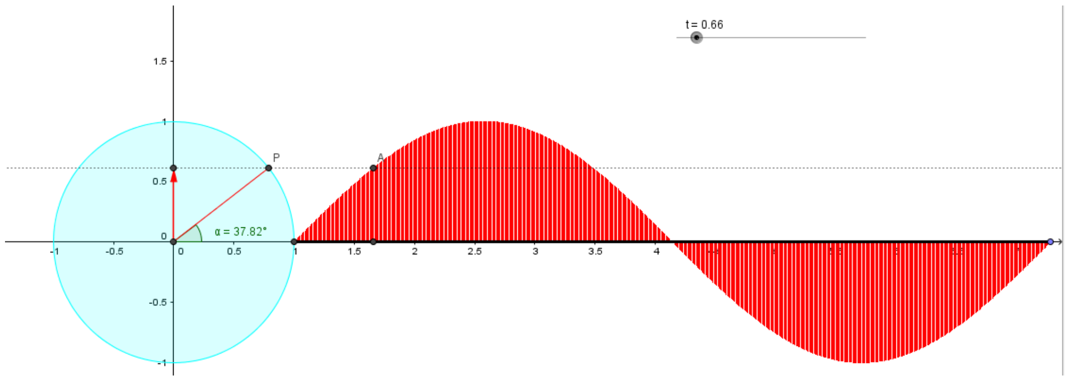
Nesta etapa, os 37 alunos organizados em 15 grupos, foram apresentados a duas construções no GeoGebra contendo a circunferência trigonométrica. Enquanto um ponto P percorre a circunferência, um vetor percorre os eixos cartesianos horizontal, no caso do cosseno (Figura 95) ou vertical no caso do seno (Figura 96). Ao mesmo tempo o gráfico da função vai sendo formado. O objetivo da atividade era levar os alunos a perceberem semelhanças e diferenças entre as funções seno e cosseno e também relacionar com a função polígono vista anteriormente.

Figura 95 - Gráfico da Função Cosseno.



Fonte: Elaborada pela Pesquisadora.

Figura 96 - Gráfico da Função Seno.



Fonte: Elaborada pela Pesquisadora.

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
DIRETORIA DE ENSINO DA REGIÃO DE VOTORANTIM
EE "CEL. PEDRO DIAS DE CAMPOS"
Rua João Felipe, nº 200-Centro - CEP: 18.195-000- Fone (15) 3267-1144/3267-1345-Capela do Alto - SP.
E-mail: e016913a@see.sp.gov.br

Atividade 2: "Funções Seno e Cosseno"

1) Abra a construção número 1, clique com o botão direito sobre o controle deslizante ***t*** e marque "animar". Observe o que acontece e responda as questões:

1.1) Enquanto o ponto **P** percorre a circunferência trigonométrica no sentido anti-horário, o vetor vermelho (↑) percorre qual dos eixos cartesianos?

1.2) Qual é o intervalo de variação do vetor vermelho?

1.3) Enquanto o ponto **P** percorre a circunferência, o ponto **A** percorre o gráfico da função. Qual é o ponto de máximo dessa função?

1.4) E o ponto de mínimo?

1.5) Considerando que *amplitude* de uma função periódica é a metade da distância entre os valores de máximo e mínimo, qual é a amplitude dessa função?

1.6) Escreva o conjunto imagem da função.

1.7) Quando o ponto **P** dá uma volta completa na circunferência, qual é a medida em graus desse ângulo? E qual a medida em radianos?

1.8) Qual a distância horizontal ocupada pelo gráfico da função?

1.9) Considerando que período de uma função é o intervalo em que o seu gráfico se repete, qual é o período da função obtida?

1.10) Qual é o nome dessa função?

1.11) Em quais quadrantes o seno de um ângulo é positivo?

1.12) E em quais quadrantes o seno de um ângulo é negativo?

1.13) Preencha a tabela ao lado:

Ângulo	Valor do seno
0º	
90º	
180º	
270º	
360º	

2) Abra a construção número 2, clique com o botão direito sobre o controle deslizante ***t*** e marque "animar". Observe o que acontece e responda as questões:

2.1) Enquanto o ponto **P** percorre a circunferência trigonométrica no sentido anti-horário, o vetor vermelho (↑) percorre qual dos eixos cartesianos?

2.2) Qual é o intervalo de variação do vetor vermelho?

2.3) Enquanto o ponto **P** percorre a circunferência, o ponto **A** percorre o gráfico da função. Qual é o ponto de máximo dessa função?

2.4) E o ponto de mínimo?

2.5) Considerando que *amplitude* de uma função periódica é a metade da distância entre os valores de máximo e mínimo, qual é a amplitude dessa função?

2.6) Escreva o conjunto imagem da função.

2.7) Quando o ponto **P** dá uma volta completa na circunferência, qual é a medida em graus desse ângulo? E qual a medida em radianos?

2.8) Qual a distância horizontal ocupada pelo gráfico da função?

2.9) Considerando que período de uma função é o intervalo em que o seu gráfico se repete, qual é o período da função obtida?

2.10) Qual é o nome dessa função?

2.11) Em quais quadrantes o cosseno de um ângulo é positivo?

2.12) E em quais quadrantes o cosseno de um ângulo é negativo?

2.13) Preencha a tabela abaixo:

Ângulo	**Valor do cosseno**
0º	
90º	
180º	
270º	
360º	

3) Escreva sobre diferenças e semelhanças entre as funções Seno e Cosseno

Análise dos resultados obtidos

As maiores dificuldades encontradas foram em relação a amplitude, período e imagem das funções.

Apenas 53% dos grupos acertaram o valor da amplitude das funções. Vinte por cento dos grupos responderam que a amplitude era 0,5, pois pensaram no ponto médio do intervalo [0 ,1]. Vinte e sete por cento dos grupos responderam que a amplitude era zero, pois pensaram no ponto médio do intervalo [1 ,−1].

Quanto à distância horizontal ocupada pelo gráfico (questão 1.8) e o período (questão 1.9), somente 67% dos grupos acertaram. Treze por cento dos grupos responderam que a distância horizontal ocupada pelo gráfico era de 7,28. Neste caso, consideraram a abscissa do ponto C indicada na janela de álgebra. Esses alunos esqueceram que o gráfico começou no ponto (1, 0), e teriam que ter descontado uma unidade na distância horizontal.

Vinte por cento dos grupos responderam que a distância era de 7,5, pois no eixo x estava visível o valor 7,5. Mesmo o gráfico acabando antes, pensaram que esse era o valor da distância horizontal ocupada pelo gráfico. Trinta e três por cento dos alunos acreditavam que o período da função seno fosse 4,25, imaginando que esse fosse o ponto onde o gráfico corta o eixo x. O corte no eixo x se dá no ponto 3,14 pois o seno de 180° é zero. No gráfico do cosseno houve grande melhora nas respostas, pois 100% dos grupos acertaram o período.

Já em relação a imagem dos gráficos, apenas 40% dos grupos acertaram, os demais tiveram algum erro na notação do conjunto. Nota-se então a grande dificuldade em se expressar algebricamente, visto que o conteúdo de Teoria dos Conjuntos não é mais contemplado no Ensino Médio pelo Currículo do Estado de São Paulo.

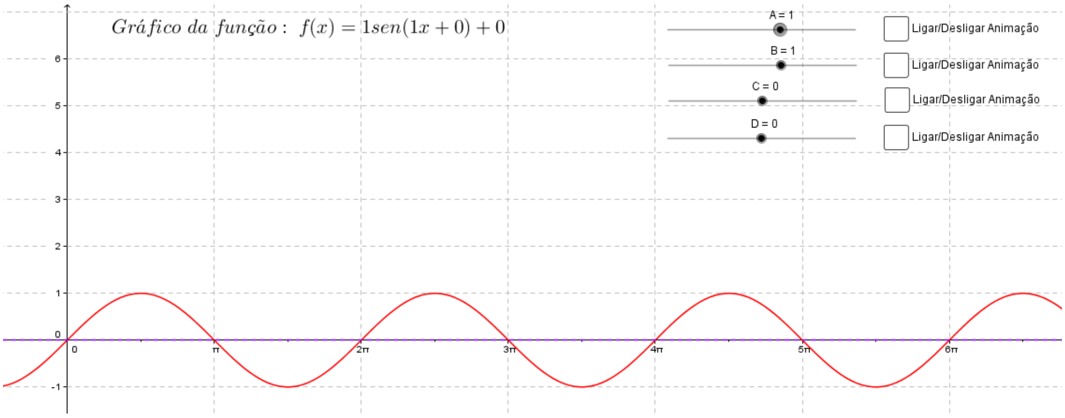
Alguns poucos alunos ainda confundem alguns valores de seno e cosseno de 0°, 90°, 180°, 270° e 360°. As demais questões tiveram excelente índice de acertos.

Atividade 3: Analisando transformações nos gráficos das Funções Trigonométricas

Desenvolvimento da atividade

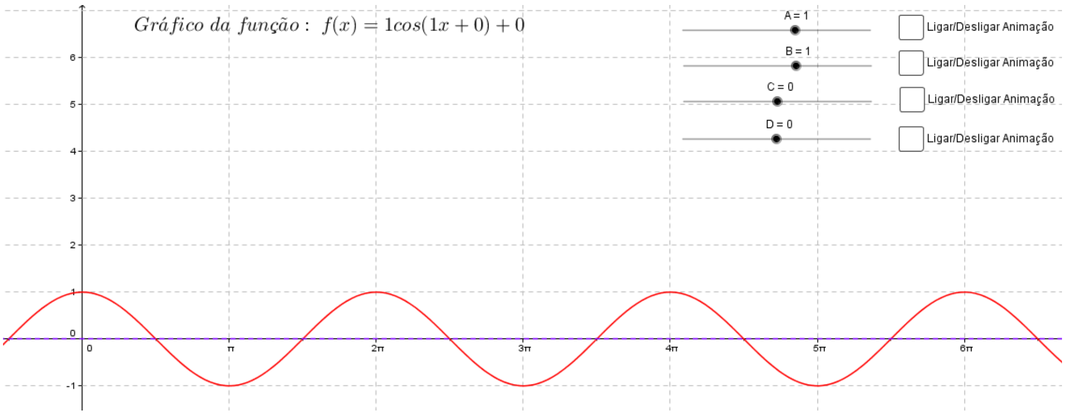
O objetivo desta atividade era apresentar as transformações que podem ocorrer nas funções trigonométricas seno e cosseno quando se modificam os parâmetros A, B, C e D das funções do tipo $y = A.sen(Bx+C)+D$ e $y = A.cos(Bx+C)+D$. Trinta e seis alunos organizados em duplas ou trios, analisaram dois arquivos contendo construções das funções descritas acima, onde poderiam animar qualquer um dos parâmetros A, B, C ou D, ligando ou desligando os botões localizados à direita do gráfico. Desta forma, puderam observar quais transformações cada parâmetro provoca no gráfico da função.

Figura 97 - Gráfico da função $y = A.sen(Bx+C)+D$.



Fonte: Elaborada pela Pesquisadora.

Figura 98 - Gráfico da função *y = A.cos(Bx+C)+D.*



Fonte: Elaborada pela Pesquisadora.

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
DIRETORIA DE ENSINO DA REGIÃO DE VOTORANTIM
EE "CEL. PEDRO DIAS DE CAMPOS"
Rua João Felipe, nº 200-Centro - CEP: 18.195-000- Fone (15) 3267-1144/3267-1345-Capela do Alto - SP.
E-mail: e016913a@see.sp.gov.br

Atividade 3: Analisando transformações nos gráficos das funções trigonométricas

1) Abram o arquivo da Função Seno e observe a construção da função *y = A.sen(Bx+C)+D* onde os parâmetros A, B, C e D provocam transformações no gráfico da função.

1.1) Cliquem no botão à direita para ligar a animação do controle deslizante ***A*** e observem as transformações ocorridas no gráfico da função. O que vocês observam?

1.2) Quando ***A*** é igual a zero, o que ocorre com o gráfico da função?

1.3) E quando ***A*** for menor que zero, o que vocês observam?

1.4) Desliguem a animação do **A** e liguem a animação do ***B.*** Quais transformações vocês observam que ocorrem no gráfico da função?

1.5) Quando ***B*** é menor que zero, o que acontece com o gráfico da função?

1.6) Desliguem a animação de ***B*** e coloquem o controle deslizante nos valores indicados na tabela, preenchendo-a com os valores do período da função em cada caso.

Parâmetro B	Período
½	
1	
2	
4	

a) Quando dobramos o valor do parâmetro ***B***, o que acontece com o período da função?

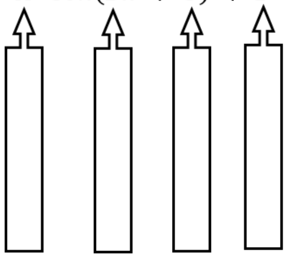
b) Quando reduzimos pela metade o valor do parâmetro ***B***, o que acontece com o período da função?

1.7) Cliquem no botão à direita para animar o controle deslizante ***C.*** Quais as transformações ocorridas no gráfico da função?

1.8) Desliguem a animação de ***C***, liguem a animação de ***D.*** Quais as transformações ocorridas no gráfico da função?

1.9) Agora que vocês já sabem as transformações ocorridas no gráfico do seno, indiquem que tipo de transformação cada parâmetro provoca no gráfico da função.

$$f(x) = A \cdot sen(Bx + C) + D$$



1.10) Abram o arquivo da Função Cosseno e observem a construção da função *y = A.cos(Bx+C)+D* onde os parâmetros A, B, C e D provocam transformações no gráfico da função. Liguem as animações dos parâmetros e observem. A que conclusão vocês chegaram?

Análise dos resultados obtidos

Para fazer a análise das questões, as respostas dos grupos foram representadas em tabelas.

Questão 1.1 - Cliquem no botão à direita para ligar a animação do controle deslizante A e observem as transformações ocorridas no gráfico da função. O que vocês observam?

Tabela 26 - Índice de respostas por grupos.

Respostas	Porcentagem
“aumenta e diminui na vertical”	7%
“aumenta e diminui no eixo y¨”	13%
“ponto máximo é 5 e mínimo é -5”	13%
“varia a amplitude”	20%
“vai de -5 a 5”	20%
“o gráfico aumenta e diminui”	27%

Fonte: Elaborada pela Pesquisadora.

Analisando as respostas dadas, verifica-se que os grupos perceberam que o parâmetro A da função modifica a amplitude do gráfico. Poucos grupos mencionaram a palavra amplitude, para os demais ficou implícito que eles estavam fazendo referência a amplitude do gráfico.

Questão 1.2 - Quando A é igual a zero, o que ocorre com o gráfico da função?

Tabela 27 - Índice de respostas por grupos.

Respostas	Porcentagem
“seno igual a zero”	6%
“perde o formato de onda e fica em linha reta”	14%
Não responderam	14%
“linha reta”	33%
“zero no eixo x”	33%

Fonte: Elaborada pela Pesquisadora.

No momento da socialização os grupos foram questionados da seguinte forma:

- “ Quando A for igual a zero, a função continua a ser periódica? Que tipo de função teríamos então? ”

Alguns grupos responderam que a função se torna constante. Eles perceberam que quando o gráfico perde o formato de onda, a função deixa de ser periódica e passa a ser uma função constante, cujo gráfico é uma reta, nesse caso coincidente com o eixo x.

Questão 1.3 - E quando A for menor que zero, o que vocês observam?

Tabela 28 - Índice de respostas por grupos.

Respostas	Porcentagem
“a amplitude aumenta e o seno fica positivo”	7%
“as cristas das ondas se tornam vales e vice e versa”	7%
“tudo que era positivo fica negativo”	13%
“os pontos do gráfico ficam positivo”	20%
Respostas em branco	26%
“gráfico inverte de lado”	27%

Fonte: Elaborada pela Pesquisadora.

Dos 15 grupos que realizaram a atividade, quatro deles se referiram a inversão no sentido do gráfico. Dois grupos se referiram ao fato de que os valores positivos se tornam negativos e um grupo descreveu corretamente a inversão das cristas e vales das ondas do gráfico.

Portanto, 47% dos grupos analisados perceberam a transformação ocorrida no gráfico quando o parâmetro A se torna negativo.

Questão 1.4 - Desliguem a animação do A e liguem a animação do B. Quais transformações vocês observam que ocorrem no gráfico da função?

Tabela 29 - Índice de respostas por grupos.

Respostas	Porcentagem
“se move na horizontal pelo eixo x”	7%
“diminui o [illegible] mas a altura é a mesma”	7%
“período se alarga quando chega no zero”	7%
“aumenta e diminui na horizontal”	7%
“estica e encolhe”	13%
“varia o período”	13%
“forma várias ondas”	13%
“período varia entre positivo e negativo”	13%
“o período aumenta e diminui”	20%

Fonte: Elaborada pela Pesquisadora.

Dos 15 grupos, 7 deram as respostas que mais se aproximaram do esperado, que era relatar que o período da função varia quando se altera o parâmetro B da função. Apenas 4 grupos não perceberam a transformação ocorrida.

<u>Questão 1.5</u> - Quando B é menor que zero, o que acontece com o gráfico da função?

Tabela 30 - Índice de respostas por grupos.

Questão 5	
Respostas	**Porcentagem**
“cristas e vales se invertem”	7%
“inverte a posição”	27%
Respostas erradas	66%

Fonte: Elaborada pela Pesquisadora.

Neste caso, apenas 5 grupos perceberam a inversão do gráfico, pois tiveram mais dificuldades para a visualização da transformação.

<u>Questão 1.6.a</u> - Quando dobramos o valor do parâmetro B, o que acontece com o período da função?

Tabela 31 - Índice de respostas por grupos.

Respostas	Porcentagem
“ondas se agrupam”	6%
“quanto maior o parâmetro, maior o período”	7%
“diminui a função”	7%
“diminui a metade”	80%

Fonte: Elaborada pela Pesquisadora.

Doze grupos perceberam que dobrando o parâmetro B, o período diminui pela metade.

Questão 1.6.b - Quando reduzimos pela metade o valor do parâmetro B, o que acontece com o período da função?

Tabela 32 - Índice de respostas por grupos.

Respostas	Porcentagem
“período aumenta”	20%
Respostas erradas	27%
“dobra o período”	53%

Fonte: Elaborada pela Pesquisadora.

Oito grupos responderam corretamente, pois perceberam que quando se reduz o parâmetro B pela metade, o período dobra. Três grupos observaram que o período aumenta, mas não mencionaram de quanto é esse aumento. Quatro grupos deram respostas completamente erradas. Portanto, 73% dos alunos deram respostas próximas do esperado.

Questão 1.7 - Cliquem no botão à direita para animar o controle deslizante C. Quais as transformações ocorridas no gráfico da função?

Tabela 33 - Índice de respostas por grupos.

Respostas	Porcentagem
“ocorre deslocamento horizontal”	13%
“vai de um lado para o outro”	13%
“vai da esquerda para a direita e vice versa”	20%
“ocorre deslocamento pelo eixo horizontal”	20%
Respostas erradas	34%

Fonte: Elaborada pela Pesquisadora.

Em geral, 66% dos grupos conseguiram perceber que ocorre um deslocamento no sentido horizontal.

Questão 1.8 – Desliguem a animação de C, liguem a animação de D. Quais as transformações ocorridas no gráfico da função?

Tabela 34 - Índice de respostas por grupos.

Respostas	Porcentagem
“vai do -5 ao +5”	14%
“sobe pelo eixo x”	19%
“ocorre deslocamento vertical”	20%
“vai para cima e para baixo”	47%

Fonte: Elaborada pela Pesquisadora.

Dez grupos responderam corretamente, dois grupos colocaram o intervalo de variação mas não especificaram em qual eixo e três grupos ainda confundiram o eixo x com o eixo y.

Questão 1.9 - Agora que vocês já sabem as transformações ocorridas no gráfico do seno, indiquem que tipo de transformação cada parâmetro provoca no gráfico da função.

A tabela 35 apresenta as respostas dos alunos em relação as alterações que os parâmetros A, B, C e D provocam nos gráficos das funções seno e cosseno.

Tabela 35 - Respostas dos grupos.

	Respostas	**Quantidade de grupos**
Parâmetro A	Amplitude	14
	Para cima e para baixo	1
Parâmetro B	Período	13
	Se expande e se agrupa	1
	Estica e encolhe na horizontal	1
Parâmetro C	Esquerda e direita	6
	Altera o eixo x	4
	Período	2
	Horizontal	3
Parâmetro D	Sobe e desce	5
	Máximos e mínimos se alteram	2
	Eixo x	2
	Eixo y	2
	Vertical	3
	Para cima e para baixo	1

Fonte: Elaborada pela Pesquisadora.

Analisando as respostas, percebe-se que apenas dois grupos erraram as transformações provocadas pelo parâmetro C ao responder que altera o período e pelo parâmetro D quando disseram que altera o eixo x. Os demais grupos acertaram todas as transformações ocorridas nos gráficos das funções.

Questão 1.10 - Abram o arquivo da Função Cosseno e observem a construção da função $y =$

A.cos(Bx+C)+D onde os parâmetros A, B, C e D provocam transformações no gráfico da função. Liguem as animações dos parâmetros e observem. A que conclusão vocês chegaram?

Quando os alunos exploraram as animações do cosseno, compreenderam que valiam as mesmas relações do seno, como se pode verificar pelo registro a seguir.

Que ele faz os mesmos movimentos das funções do seno.

A aplicação da atividade foi bastante produtiva, pois os alunos ao explorar as animações possíveis dos parâmetros, compreenderam todos as transformações sofridas pelos gráficos das funções trigonométricas seno e cosseno. Desta forma estavam mais aptos a construir os gráficos que compõem a situação de aprendizagem 3 do caderno do aluno que foram descritas a seguir.

4.2.6. Construindo gráficos de funções periódicas envolvendo senos e cossenos

Conteúdos e temas	Gráficos de funções do tipo $y = C + A.senBx$ ou $y = C + AcosBx$.
Competências e habilidades	Construir o gráfico de uma função trigonométrica dada a equação que a representa; identificar alguns parâmetros importantes do modelo ondulatório para a descrição matemática de fenômenos periódicos; determinar a equação da função representada por um gráfico dado.
Tempo previsto	06 aulas de 50 minutos.
Material	Caderno do aluno do Currículo do Estado de São Paulo – 2ª Série do Ensino Médio – Volume 1.

Justificativa

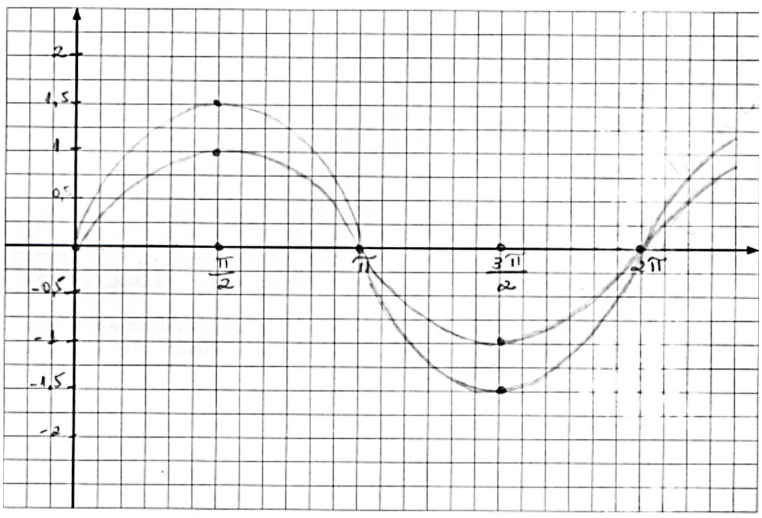
Como o tratamento das funções trigonométricas costumam gerar dificuldades aos alunos, foram aplicadas as atividades de construção de gráficos da situação de aprendizagem 3 do caderno do aluno, a fim de intensificar o reconhecimento das funções trigonométricas e suas propriedades.

Desenvolvimento da atividade

Após analisar as funções trigonométricas anteriormente construídas no GeoGebra, 36 alunos realizaram individualmente as atividades pertencentes à situação de aprendizagem 3 do primeiro volume do caderno do aluno. Nessa situação de aprendizagem os alunos construíram gráficos e confirmaram as propriedades das funções do tipo *y = C + AsenBx* e *y = C + AcosBx*, comparando-as com as funções elementares *y = senx* e *y = cosx*. Para cada função apresentada, os alunos completaram uma tabela de valores previamente escolhidos e em seguida, utilizando uma malha quadriculada e um sistema de eixos cartesianos, construíram e analisaram os gráficos de algumas funções trigonométricas.

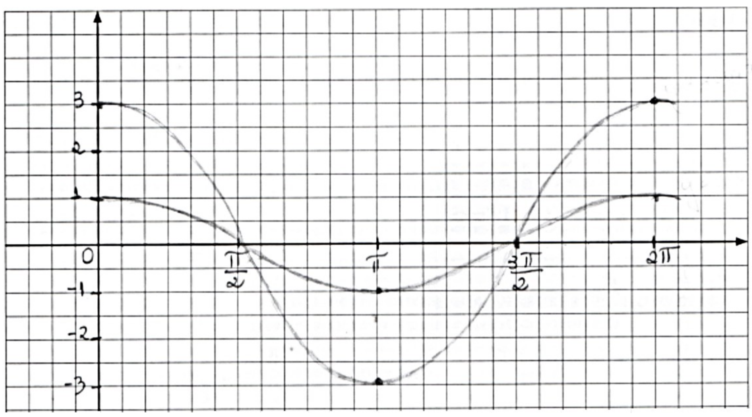
Atividade 1: Os alunos construíram os gráficos das funções y = senx e y = 1,5 senx (Figura 99) e os gráficos das funções y = cosx e y = 3 cosx (Figura 100)

Figura 99 - Gráficos das funções y = senx e y = 1,5 senx.



Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Figura 100 - Gráficos das funções y = cosx e y = 3 cosx.

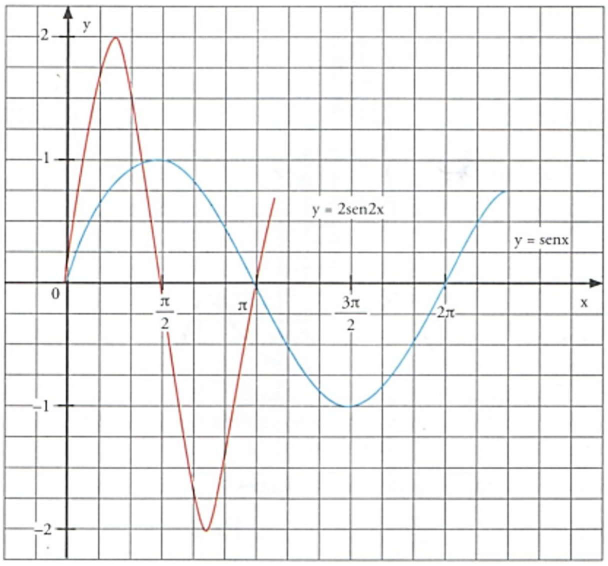


Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Atividades 2 e 3: Nestas atividades os alunos identificaram a diferença entre os gráficos das funções *y = senx* e *y = Asenx* e a diferença entre os gráficos das funções *y = cosx* e *y = Acosx*, onde *A* é um número diferente de zero.

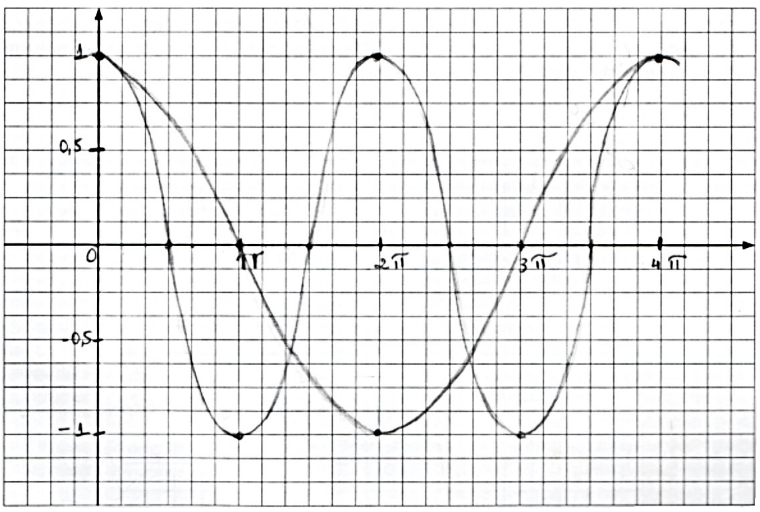
Atividade 4: Observando os gráficos das funções *y = senx* e *y = 2sen2x* (Figura 101) os alunos construíram os gráficos das funções *y = cosx* e *y = cos(x/2)*, no intervalo [0,4π], (Figura 102).

Figura 101 - Gráficos das funções y = senx e y = 2sen2x.



Fonte: SÃO PAULO, 2014, p. 41.

Figura 102 - Gráficos das funções y = cosx e y = cos(x/2).

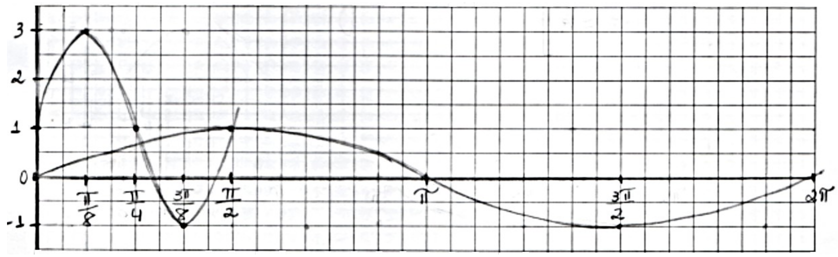


Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Atividade 5: Nesta atividade os alunos escreveram as diferenças entre os gráficos das funções *y = cosx* e *y = cos(x/2).*

Atividade 6: Inicialmente os alunos construíram os gráficos das funções y = senx e y = 1 + 2sen4x em um único sistema de eixos coordenados (Figura 103).

Figura 103 - Gráficos das funções y = senx e y = 1 + 2sen4x.



Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Em seguida preencheram uma tabela de comparação entre os dois gráficos (Tabela 36).

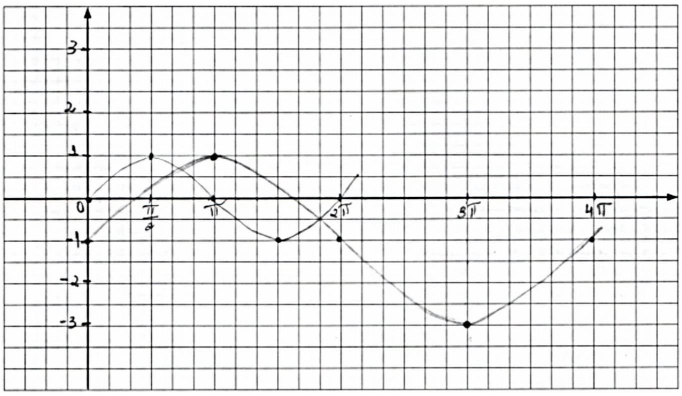
Tabela 36 - Comparação entre os gráficos das funções y = senx e y = 1 + 2sen4x.

	y = sen(x)	y = 1+ 2 sen(4x)
Período	2π	2π/4 = π/2
Imagem	[-1,+1]	[-1,3]
Amplitude	1	2

Fonte: SÃO PAULO, 2014, p. 45.

Atividade 7: Após construírem os gráficos das funções *y = senx* e *y = -1 + 2sen(x/2)*, (Figura 104), os alunos preencheram uma tabela comparando os dois gráficos construídos (Tabela 37).

Figura 104 - Gráficos das funções y = senx e y = -1 + 2sen(x/2).



Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Tabela 37 - Comparação entre os gráficos das funções y = senx e y = -1 + 2sen(x/2).

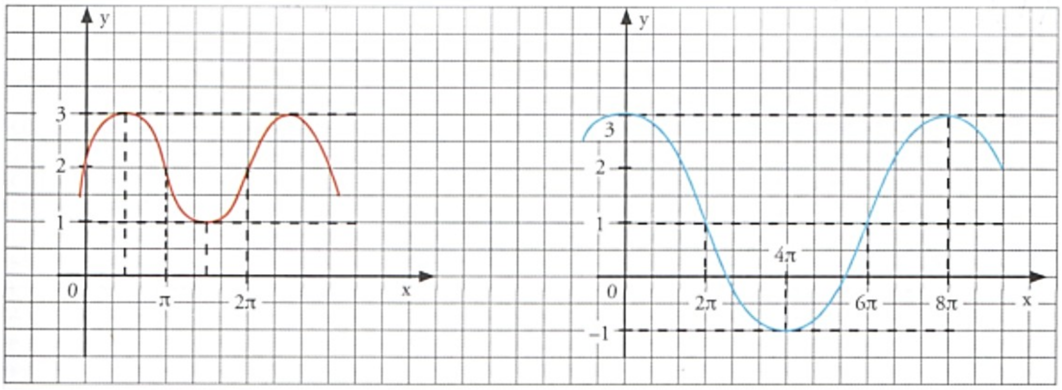
	y = sen(x)	y = -1+ 2 sen(x/2)
Período	2π	$2\pi/(1/2) = 4\pi$
Imagem	[-1,+1]	[-3,+1]
Amplitude	1	2

Fonte: SÃO PAULO, 2014, p. 46.

Atividade 8: Nesta atividade os alunos descreveram a diferença entre os gráficos das funções *y = senx* e *y = -1 + 2sen(x/2)*.

Atividade 9: Observando os gráficos (Figura 105) os alunos escreveram: o período, a amplitude e o conjunto imagem de cada função.

Figura 105 - Gráficos das funções y = 2+senx e y =1 + 2cos(x/4).

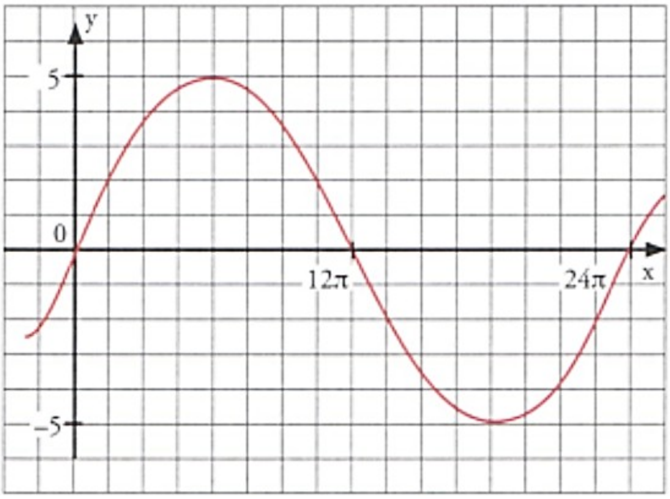


Fonte: Fonte: SÃO PAULO, 2014, p. 46 (Adaptada pela Pesquisadora).

Atividade 10: Os alunos escreveram as sentenças das funções associadas aos gráficos representados na atividade anterior.

Atividade 11: Foi apresentado um gráfico de uma função do tipo *y = AsenBx* (Figura 106). Os alunos tiveram que encontrar os valores de A e de B e escrever a equação da função.

Figura 106 - Função y = 5 sen(x/12).



Fonte: SÃO PAULO, 2014, p. 4.

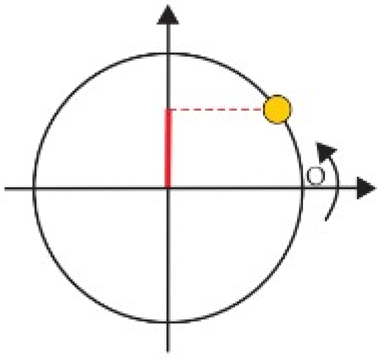
Atividades de 12 a 20: Foram sugeridos softwares livres como o *Graphmatica* e o *Winplot* para a construção e análise de gráficos de funções trigonométricas envolvendo o seno e o cosseno.

Atividade 21: Nesta atividade é solicitado ao aluno que escreva o domínio, a imagem e o período das funções $y = 2\ sen(2\pi x)$, $y = cos(\pi x/2)$ e $y = 1+3\ sen(\pi x/4)$.

Atividade 22: Nesta atividade os alunos resolveram a seguinte situação-problema:

Um pequeno corpo gira em torno de uma circunferência de raio 4 cm, no sentido indicado, completando uma volta a cada 2 segundos. Considerando que o corpo parte do ponto O assinalado na figura, determine a equação matemática que permite calcular a medida da projeção do ponto sobre o eixo vertical e, em seguida, desenhe o gráfico cartesiano representativo da equação obtida.

Figura 107 - Corpo girando em torno de uma circunferência.



Fonte: SÃO PAULO, 2014.

Análise dos resultados obtidos

A maioria dos alunos não teve grandes dificuldades para construir os gráficos e avaliar as transformações que as constantes A, B e C impõem aos gráficos das funções elementares. Na terceira etapa da atividade anterior os alunos compreenderam as transformações que podem ocorrer nas funções trigonométricas seno e cosseno quando se modificam os parâmetros A, B, C e D das funções do tipo. $f(x) = A.sen(Bx+C) + D$ e $f(x) = A.cos(Bx+C) + D$. Portanto, para a realização da situação de aprendizagem 3, os alunos já estavam familiarizados com as propriedades dessas funções.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa foi desenvolvida com o objetivo de responder a seguinte questão: que intervenções poderão ser realizadas de modo a promover a aprendizagem das Funções Trigonométricas Seno e Cosseno no contexto de tarefas exploratório-investigativas em aulas de matemática? Para responder a esta questão, será feita uma análise sobre quais competências e habilidades foram geradas no aprendizado dos alunos, com a aplicação das seis tarefas exploratório-investigativas do trabalho de campo desta pesquisa, comparando com o que é proposto nos livros didáticos e nos documentos curriculares.

Na primeira tarefa exploratório-investigativa sobre o comprimento da circunferência, a principal habilidade a ser desenvolvida era encontrar a fórmula do comprimento da circunferência, revendo os conceitos de raio e diâmetro e compreendendo o significado do número π. Os resultados obtidos foram totalmente satisfatórios, pois as habilidades e competências pretendidas foram alcançadas e ainda gerou uma discussão interessante sobre a irracionalidade do número π.

A aplicação da segunda tarefa exploratório-investigativa sobre a circunferência trigonométrica teve por finalidade desenvolver as seguintes habilidades e competências: reconhecer a circunferência trigonométrica e saber localizar a extremidade final de ângulos dados em graus. Embora os resultados obtidos tenham sido satisfatórios, esta tarefa permitiu identificar que 27% dos alunos tinham dificuldades de se expressar matematicamente ao tentar explicar como localizaram a extremidade de arcos com mais de uma volta e 14 % nem tentaram explicar. Essa dificuldade inicial detectada viria a aparecer novamente em outras atividades desenvolvidas.

Na terceira tarefa sobre o conceito de radiano, a habilidade a ser desenvolvida era de que os alunos compreendessem o significado de radiano e reconhecessem arcos com medidas em radianos. Através de um simples experimento com utilização de barbante para envolver a circunferência e encontrar a quantidade de radianos que cabem em sua volta, os alunos desenvolveram as habilidades pretendidas. Novamente se evidenciou a dificuldade de se expressar ao quantificar a parte decimal do número de radianos que cabem em volta da circunferência, como se pode observar pelas escritas dos alunos anteriormente citadas.

Os objetivos da quarta tarefa exploratório-investigativa sobre modelagem de funções periódicas, foram desenvolver as seguintes competências e habilidades: reconhecer a periodicidade presente em diferentes contextos; reconhecer as funções trigonométricas como modelagem de fenômenos periódicos; representar graficamente fenômenos periódicos por meio de gráficos cartesianos; utilizar software para a construção de gráficos; interpretar resultados e fazer inferências. Esta tarefa foi dividida em três atividades.

O tema da primeira atividade foi a famosa roda-gigante de Londres, com a finalidade de introduzir as funções periódicas. O formato do gráfico da altura da cadeirinha em função do tempo em que a roda-gigante permanecia em movimento, gerou boas discussões até os alunos compreenderem a não-linearidade do gráfico de uma função periódica. A aplicação da atividade foi importante, pois levou-os a fazerem estimativas da altura da cadeirinha 3,75 minutos após o embarque, gerando raciocínios interessantes por parte de alguns alunos que elaboraram estratégias para justificar a resolução da situação-problema. A etapa 1C desta atividade teve por objetivo introduzir os conceitos de período e amplitude de uma função periódica, através da interpretação de gráficos e tabelas. A frequência no dia da aplicação foi baixa, apenas 70% dos alunos da turma compareceram à escola. Esse fato viria a prejudicar o desempenho dos alunos na etapa 1E, na qual teriam que identificar o período e a amplitude de gráficos originados pelos movimentos de diferentes rodas-gigantes. Com a realização da atividade ficou evidente a dificuldade dos alunos em se expressar matematicamente para justificar o raciocínio empregado na resolução da situação-problema da etapa 1B. Além disso, os alunos também tiverem dificuldades em identificar o período de uma função representada numa tabela, por apresentarem dificuldades na compreensão das relações entre as variáveis das funções. Por conta desse fato, foi necessário realizar uma revisão do conceito de função.

No Currículo do Estado de São Paulo e em todos os livros didáticos do PNLD 2015 que foram analisados, a modelagem das funções periódicas se fez presente. Alguns livros até apresentaram uma quantidade considerável de situações contextualizadas. Segundo o caderno do professor do Currículo do Estado de São Paulo:

> Um processo completo de modelagem de determinado fenômeno envolve a observação da ocorrência deste, a tomada de dados, que normalmente exige a representação cartesiana dos dados obtidos, e, finalmente, exige a obtenção de uma sentença matemática que se ajusta aos dados experimentais. Por consequência, a sentença obtida poderá ser aplicada a novas situações, que venham a ocorrer em condições semelhantes às observadas durante o experimento realizado. (SÃO PAULO, 2014, p. 39)

No entanto, nem no Currículo e nem nos livros analisados foram constatadas atividades de caráter experimental. Nesta pesquisa optou-se por desenvolver atividades de modelagem matemática através de dois experimentos utilizando materiais manipulativos.

Na segunda atividade denominada “mini roda-gigante” os alunos organizados em grupos confeccionaram uma roda-gigante de papelão (etapa 2A). Através do movimento da roda-gigante foi possível construir dois gráficos: o gráfico da altura da cadeirinha em função do ângulo e da altura em função da distância percorrida pela cadeirinha (etapa 2B). Através dos gráficos foram explorados novamente a periodicidade da função e os conceitos de período e amplitude. Na etapa 2C da atividade, o objetivo principal era de que os alunos percebessem que, embora as rodas-gigantes tivessem raios diferentes, os gráficos da altura em função do ângulo tinham o mesmo período, somente as amplitudes é que eram diferentes. Metade dos grupos teve essa percepção, embora apenas um grupo usou o termo “amplitude”. Verificou-se ainda a dificuldade dos alunos em reconhecer a amplitude do gráfico de uma função trigonométrica. Esta etapa da atividade ainda possibilitou estudar os intervalos de crescimento e decrescimento da função. Nas etapas 2D e 2E os alunos encontraram as fórmulas dos gráficos que descrevem a altura em função do ângulo e a altura em função da distância percorrida, respectivamente. Apesar dos alunos terem encontrado dificuldades na dedução das fórmulas, foi importante reconhecerem as funções que descrevem a trajetória da roda-gigante e verificar que os valores da altura encontrados através da fórmula eram próximos dos valores encontrados pelas medições realizadas. A etapa 2F teve por finalidade a comparação dos gráficos construídos com lápis e papel, com os gráficos construídos através do software GeoGebra. Os alunos fizeram a comparação visualmente para eleger os gráficos que mais se aproximaram dos valores reais e através do cálculo do erro quadrático médio, puderam fazer a confirmação. Finalmente a última etapa da atividade (etapa 2G) teve por objetivo a auto avaliação dos grupos, onde os mesmos tiveram que atribuir nota a cada integrante pela sua participação em todas as etapas da atividade da mini roda-gigante. Foi uma experiência muito enriquecedora por permitir que os alunos refletissem sobre suas condutas e chegassem num consenso em relação as notas dos integrantes do grupo.

Na terceira atividade os alunos tiveram a oportunidade de mais uma vez, se deparar com uma função trigonométrica que descreve um fenômeno periódico. A roda-gigante construída por eles foi transformada num modelo de pistão de motor denominado “motorzinho”, cujo funcionamento levou a uma aproximação da função cosseno. Utilizando papel quadriculado, os alunos construíram o gráfico da distância percorrida pela extremidade da barra em função do ângulo de giro da roda, onde foi possível novamente retomar os conceitos de período e amplitude. Em seguida tiveram acesso a um modelo de pistão construído no GeoGebra onde puderam observar o gráfico da função que se formou com a movimentação do pistão.

Os experimentos foram desenvolvidos em grupos, assim como muitas das atividades pertencentes a esta pesquisa. Interagir com os colegas em uma atividade compartilhada possibilitou desenvolver as habilidades como refletir, argumentar, explicitar as próprias ideias, compreender as ideias dos outros, entre outras.

Todos os livros didáticos do PNLD 2015 apresentam sugestões de uso dos recursos tecnológicos. Alguns sugerem apenas o uso da calculadora científica e outros a utilização de softwares livres no estudo das funções trigonométricas. Das seis obras analisadas, duas apresentam sugestões de uso do GeoGebra e uma sugere a utilização do software *Winplot*. Nesta pesquisa optou-se pela utilização do GeoGebra. Por ser um software de geometria dinâmica que permite construir e explorar objetos geométricos e algébricos interativamente, possibilitou ensinar as funções trigonométricas com mais propriedade.

A quinta tarefa exploratório-investigativa permitiu aos alunos analisar gráficos de funções construídas com o software GeoGebra. Esta tarefa foi dividida em três atividades.

A primeira atividade denominada de “função polígono” teve por objetivo explorar novamente os conceitos de periodicidade para uma função periódica. Os alunos observaram uma construção no GeoGebra, na qual ao aumentar o número de lados do polígono, o gráfico da função se aproximava do gráfico da função seno. Observou-se novamente a grande dificuldade da maioria dos alunos em se expressar matematicamente.

O objetivo da segunda atividade era levar os alunos a perceberem semelhanças e diferenças entre as funções seno e cosseno e também relacionar com a função polígono vista anteriormente, através de duas construções no GeoGebra. As maiores dificuldades encontradas foram em relação a amplitude, período e imagem das funções. Percebeu-se a grande dificuldade na representação do conjunto imagem, talvez pelo fato da Teoria dos Conjuntos não ser um conteúdo contemplado no Currículo do Estado de São Paulo. Quanto ao período e imagem das funções, apesar de terem sido abordados em muitas outras atividades, boa parte dos alunos ainda continuaram errando, muitas vezes por falta de atenção.

A última atividade a ser realizada no ambiente informatizado contemplou as transformações que podem ocorrer nas funções trigonométricas, quando se alteram alguns parâmetros dessas funções. No livro Matemática: Contexto & Aplicações (DANTE, 2013, p.

53), há uma atividade semelhante. Inicialmente é ensinado como instalar o GeoGebra e em seguida como construir alguns gráficos trigonométricos com uso da ferramenta controle deslizante, para inserir os parâmetros a, b, c e d. Desta forma é possível observar os efeitos causados por esses parâmetros no gráfico da função $f(x) = a + bsen(cx + d)$, apenas trocando os valores dos parâmetros. A atividade que foi elaborada para esta pesquisa teve a vantagem de ser possível animar os gráficos, ligando ou desligando botões localizados à direita da tela correspondentes aos parâmetros a, b, c e d e assim poder observar melhor as transformações provocadas nos gráficos. Os alunos tiveram um bom desempenho nas respostas das questões referentes a atividade.

Na sexta e última tarefa exploratório-investigativa do trabalho de campo desta pesquisa, foram desenvolvidas as atividades pertencentes a situação de aprendizagem 3 do volume 1 do caderno do aluno do Currículo do Estado de São Paulo. Era necessário sair do ambiente informatizado e retornar ao ambiente papel para avaliar se realmente, a aprendizagem das transformações dos gráficos das funções trigonométricas tinha sido assimilada. Através das atividades os alunos construíram gráficos dadas as equações que os representavam e determinaram as equações das funções representadas por um gráfico dado. A maioria dos alunos não teve grandes dificuldades para construir os gráficos e avaliar as transformações que as constantes A, B e C impõem aos gráficos das funções elementares. As atividades com uso do GeoGebra realizadas nesta pesquisa, apresentaram um parâmetro a mais: A, B, C e D para observar as transformações nos gráficos das funções.

As tarefas exploratório-investigativas constantes nesta pesquisa tiveram como objetivo principal desenvolver as competências de representação e comunicação e as competências de interpretação e compreensão constantes nos Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (BRASIL, 2002).

Em relação a representação e comunicação, foram exploradas as seguintes competências:

- Ler, articular e interpretar tabelas e gráficos.

  Em todas as tarefas realizadas a interpretação esteve muito presente, seja nas respostas aos questionamentos, no preenchimento das tabelas, na construção dos gráficos ou na observação das animações dos gráficos construídos no GeoGebra. Alguns livros didáticos exploram com bastante ênfase a leitura e interpretação de textos, trazendo textos interessantes com ilustrações enriquecedoras de aplicações da Trigonometria em muitos contextos. Desenvolvendo desta forma as competências de articular, integrar e sistematizar fenômenos e teorias dentro de uma ciência, entre as várias ciências e áreas do conhecimento que são propostas pelos PCNEM (BRASIL, 2002, p. 30). No Currículo do Estado de São Paulo o texto também é o foco principal do processo de ensino e aprendizagem. Esta pesquisa não apresentou textos, no entanto, a interpretação de textos foi contemplada nos enunciados de muitas atividades.

- Elaborar comunicações orais ou escritas.

  A comunicação oral ou escrita foi bastante explorada na tarefa de modelagem matemática, principalmente para relatar, analisar e sistematizar os experimentos da mini roda-gigante e do motorzinho. Tanto a comunicação oral entre os pares na formulação de conjecturas como a comunicação escrita para justiçar as conjecturas.

Em relação a interpretação e compreensão, foram exploradas as seguintes competências:

- Estratégias para enfrentamento de situações-problemas.

  Na etapa 1B, da atividade sobre roda-gigante London Eye, os alunos tiveram que explicar a não-linearidade do gráfico da altura da cadeirinha em função do tempo em que a roda permanecia em movimento. Para fazer essa justificativa, eles elaboraram estratégias que mostrassem que nesse caso, os pontos do gráfico não poderiam ser conectados por segmentos de retas.

- Interações, relações e funções: invariantes e transformações.

  Como o foco desta pesquisa foram as funções periódicas, essas competências foram exploradas em praticamente todo o trabalho desenvolvido. Destacam-se aqui as atividades de análise das funções seno e cosseno onde foi possível perceber as transformações dos gráficos causadas pelos parâmetros das funções.

- Medidas, quantificações, grandezas e escalas.

  Para a realização da atividade da mini roda-gigante, os alunos utilizaram transferidor e régua para fazer medidas, representaram os dados em tabelas e utilizaram escalas para desenhar gráficos. Fizeram estimativas, elaboraram hipóteses e interpretaram resultados em muitas das atividades realizadas.

- Modelos explicativos e representativos.

Nas atividades de modelagem de fenômenos periódicos constantes nesta pesquisa, os alunos reconheceram que os movimentos causados pela rotação da mini roda-gigante e pelo funcionamento do motorzinho são aproximações de funções trigonométricas.

Segundo as Orientações Curriculares Para o Ensino Médio – OCEM (BRASIL, 2006), é essencial que o aluno aprenda significativamente as funções trigonométricas principais: seno, cosseno e tangente. O Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2010), reitera que na segunda série do Ensino Médio o aluno deve conhecer as principais características das funções trigonométricas básicas (especialmente o seno, o cosseno e a tangente), sabendo construir seus gráficos e aplicá-las em diversos contextos. No entanto, o caderno do professor e do aluno não contemplam atividades envolvendo a função tangente. Nesta pesquisa a função tangente também não foi trabalhada, visto que as senóides é que são utilizadas para descrever fenômenos periódicos, que é o foco principal deste trabalho.

Por conta da professora pesquisadora ter um histórico de docência com os alunos participantes desta pesquisa, criou-se um ambiente favorável de aprendizagem no decorrer das aulas investigativas, onde os alunos tinham a oportunidade de pensar, explorar suas ideias e compartilhar com os colegas e com a professora. Ao iniciar cada tarefa, a professora pesquisadora sempre fazia uma pequena introdução oral para esclarecer os objetivos e garantir que os alunos entendessem a atividade que iriam desenvolver.

A maioria das atividades foram realizadas em grupos. Nas atividades referentes aos experimentos da mini roda-gigante e do motorzinho os grupos permaneceram os mesmos, o que estreitou os laços de amizades e até gerou um ambiente saudável de competição, principalmente na comparação dos gráficos da roda-gigante ao eleger o grupo que fez os gráficos que melhor se aproximaram dos gráficos obtidos com as fórmulas das funções. Em alguns desses grupos ficou evidente a liderança que um ou mais alunos exerceram sobre os demais. Geralmente esse é um ponto positivo que potencializa o trabalho conjunto, mas as vezes alguns alunos se acomodam deixando o líder decidir sozinho. Foi o que aconteceu com o grupo 1 da atividade da mini roda-gigante que era formado por 8 meninos. Ficou evidente nesse grupo a liderança de um dos alunos, onde os demais se acomodaram, a ponto de exigir da professora pesquisadora constantes intervenções para que os outros alunos do grupo também participassem de forma mais ativa no desenvolvimento das atividades.

Em geral a professora pesquisadora procurou intervir nos grupos, questionando o raciocínio dos alunos para que refletissem sobre o que estavam fazendo e pedindo explicações sobre os registros, pois observou-se grandes dificuldades em se expressar matematicamente, tanto na escrita como oralmente. Em algumas vezes os alunos se valeram da linguagem gestual para tentar explicar suas ideias, como foi o caso de um aluno que tentou explicar o formato do gráfico da função periódica fazendo gestos com as mãos em forma de ondas. Durante todo o processo da aprendizagem a professora pesquisadora incentivou os registros escritos tanto individualmente como aqueles obtidos pelo consenso das ideias do grupo para que favorecessem a análise do desempenho dos alunos e o planejamento das próximas aulas.

O momento da socialização dos resultados ao término de cada atividade, foi sempre fundamental para que as descobertas dos alunos fossem compartilhadas e as dúvidas esclarecidas. Esses momentos foram muito enriquecedores, pois percebeu-se uma participação mais ativa dos alunos quando se tratou de formalizar algo que exigiu deles um tempo maior de reflexões e descobertas.

No percurso do ensino e aprendizagem das funções trigonométricas, esta pesquisa fez o processo inverso do que propõe o Caderno do Professor do Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2014, p. 40). Segundo o caderno do professor, inicialmente é proposta a construção de gráficos no papel quadriculado por meio de uma tabela de valores, para depois utilizar um software de construção e finalmente trabalhar com modelagens matemáticas. Nesta pesquisa optou-se por trabalhar inicialmente com a modelagem matemática, para depois utilizar o software para a construção de gráficos e só então construí-los através de uma tabela de valores. Desta forma, os alunos ficaram mais motivados, visto que de imediato já perceberam a utilidade das funções trigonométricas para descrever fenômenos periódicos, como os descritos nos experimentos da mini roda-gigante e do motorzinho. Pela experiência da professora pesquisadora trabalhando com o currículo a alguns anos, se tornava custoso para os alunos construírem tantos gráficos, para depois estudarem a modelagem matemática. Além do mais, ao se propor analisar construções de gráficos construídos através de um software, a fim de compreender as transformações sofridas pelas funções, para somente depois construir os gráficos no papel, foi mais proveitoso do ponto de vista da aprendizagem dos alunos. Desta forma assimilaram melhor as transformações que os parâmetros provocam nas funções elementares seno e cosseno e construíram os gráficos no papel com mais facilidade.

Após estas considerações chega o momento de responder à questão norteadora desta pesquisa. As aulas de natureza exploratório-investigativas podem sim ser grandes aliadas no ensino das Funções Trigonométricas Seno e Cosseno, se subsidiadas pela modelagem matemática e com o uso dos recursos da tecnologia. A partir das investigações em sala de aula, os alunos tiveram a oportunidade de indagar, argumentar, discutir, descobrir significados, fazer estimativas, além de desenvolver competências como autonomia e cooperação. A utilização de materiais manipuláveis nas aulas de matemática, constituiu um meio privilegiado de permitir explorações de conceitos matemáticos de forma lúdica, tendo como referência a realidade.

Esta experiência de ensino contribuiu e muito para o aperfeiçoamento profissional desta professora e pesquisadora, por ter permitido observar os benefícios que uma mudança na estrutura das aulas podem trazer não somente para a aprendizagem das funções trigonométricas, como para a aprendizagem de outros conteúdos matemáticos.

Acredita-se que este trabalho possa servir de inspiração, para a elaboração de muitas outras ricas experiências que podem ser desenvolvidas através das tarefas exploratório-investigativas, quanto a modelagem de fenômenos periódicos, como os movimentos de um pêndulo simples, as oscilações do tipo massa-mola, as ondas sonoras entre outras experiências em que a Matemática seja vivenciada pelos alunos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio** (Ciência da natureza, matemática e tecnologia). Brasília, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura (Secretaria de Educação Básica). **Orientações Curriculares para o Ensino Médio - Volume 2**. Brasília, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura (Secretaria de Educação Básica). **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura (Secretaria de Educação Básica). **Guia de livros didáticos: PNLD 2015: Matemática: ensino médio**. Brasília, 2014.

BROCARDO, J. **As investigações na aula de Matemática: um projecto curricular no 8º ano**. 2001. Tese (Doutorado) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2001.

CONNALLY, E. A. et al. **Funções para modelar: uma preparação para o cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

DANTE, L.R. **Matemática: contexto e aplicações**. 2ª. Ed. São Paulo: Ática, 2013.

DEMIR, O. **Student's Concept Development and Understanding of Sine and Cosine Functions: A New Theoretical and Educational Approach**. Dissertação (Mestrado) – Universiteit van Amsterdam, Amsterdam, 2012.

IEZZI, G. et. al. **Matemática: ciência e aplicações**. 7ª. Ed., São Paulo: Saraiva, 2013.

LAMONATO, M.; PASSOS, C.L.B. Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática: reflexões para o ensino de Matemática. Zetetiké – FE/Unicamp, v. 19, n. 36, Jul/Dez, 2011.

LEONARDO, F.M. **Conexões com a Matemática**. 2ª. Ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PAIVA, M. **Matemática: Paiva**. 2ª. Ed., São Paulo: Moderna, 2013.

PONTE, J.P. et al. **A relação professor-aluno na realização de investigações matemáticas**. Lisboa: APM, 1999.

PONTE, J.P. et al. **O trabalho do professor numa aula de investigação matemática**. Quadrante, 7(2), 41-70, 1998.

PONTE, J.P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 3 Ed., Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

REVISTA NOVA ESCOLA. Boas Práticas Docentes no Ensino da Matemática. Edição Especial no. 10, Junho de 2012, São Paulo: Fundação Victor Civita – Editora Abril, 2012.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias**. São Paulo: SEE, 2010.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias**. 1ª. Ed. Atualizada, São Paulo: SEE, 2012.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Caderno do professor de Matemática**. São Paulo: SEE, 2014.

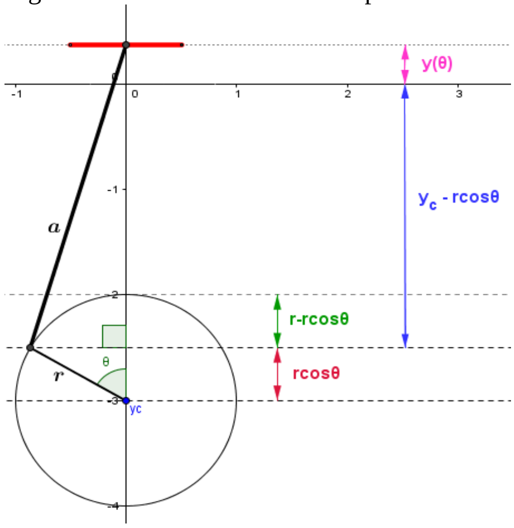
SOARES, M.Z.M.C. **A Roda Gigante**. Guia do Professor. M^3 Matemática Multimídia. UNICAMP. Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1033. Acesso em: 01/07/2015.

SOUZA, J.R. **Novo olhar Matemática: 2**, 2ª. Ed., São Paulo: FTD, 2013.

STOCCO, K. S.; DINIZ, M.I. **Matemática ensino médio 2,** 8ª. Ed., São Paulo: Saraiva, 2013.

APÊNDICE – DEMONSTRAÇÃO DA FÓRMULA GERAL DO MOTORZINHO

Figura 108 - Modelo matemático para mortozinho.



Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

$$a^2 = (rsen\theta)^2 + (y_c - rcos\theta + y_\theta)^2$$

$$a^2 = r^2 sen^2\theta + y_c^2 - y_c rcos\theta + y_c y_\theta - y_c rcos\theta + r^2 cos^2\theta - rcos\theta\, y_\theta + y_\theta y_c - y_\theta rcos\theta + y_\theta^2$$

$$a^2 = r^2 sen^2\theta + y_c^2 - 2 y_c rcos\theta + 2 y_c y_\theta + r^2 \cos^2\theta - 2 y_\theta rcos\theta + y_\theta^2$$

$$0 = -a^2 + r^2 (sen^2\theta + cos^2\theta) + y_c^2 - 2 y_c rcos\theta + y_\theta (2 y_c - 2 rcos\theta) + y_\theta^2$$

$$0 = -a^2 + r^2 + y_c^2 - 2 y_c rcos\theta + (2 y_c - 2 rcos\theta)\, y_\theta + y_\theta^2$$

$$y_\theta = \frac{-(2 y_c - 2 rcos\theta) \pm \sqrt{(2 y_c - 2 rcos\theta)^2 - 4(-a^2 + r^2 + y_c^2 - 2 y_c rcos\theta)}}{2}$$

$$y_\theta = \frac{-2 y_c + 2 rcos\theta \pm \sqrt{4 y_c^2 - 8 y_c rcos\theta + 4 r^2 cos^2\theta - 4 r^2 - 4 y_c^2 + 4 a^2 + 8 y_c rcos\theta}}{2}$$

$$y_\theta = \frac{-2 y_c + 2 rcos\theta \pm \sqrt{4 r^2 cos^2\theta - 4 r^2 + 4 a^2}}{2}$$

$$y_\theta = \frac{2(-y_c + rcos\theta) \pm \sqrt{4 r^2 (\cos^2\theta - 1) + 4 a^2}}{2}$$

$$y_\theta = \frac{2(-y_c + rcos\theta) \pm \sqrt{-4 r^2 sen^2\theta + 4 a^2}}{2}$$

$$y_\theta = \frac{2(-y_c + rcos\theta) \pm \sqrt{4(-r^2 sen^2\theta + a^2)}}{2}$$

$$y_\theta = -y_c + rcos\theta \pm \sqrt{a^2 - r^2 sen^2\theta}$$