Universidade Federal de São Carlos – UFSCar

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia – CCET

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Mágicas Matemáticas como Metodologia de Ensino

Amanda Gouveia Alves

São Carlos

2015

Universidade Federal de São Carlos – UFSCar

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia – CCET

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Mágicas Matemáticas como Metodologia de Ensino

Amanda Gouveia Alves

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal de São Carlos, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio.

São Carlos

2015

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

A474mm Alves, Amanda Gouveia.
Mágicas matemáticas como metodologia de ensino / Amanda Gouveia Alves. -- São Carlos : UFSCar, 2015.
66 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Mágicas. 3. Ensino - aprendizagem. I. Título.

CDD: 510.7 (20ª)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Amanda Gouveia Alves, realizada em 29/05/2015:

Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio
UFSCar

Profa. Dra. Ires Dias
USP

Prof. Dr. Ivo Machado da Costa
UFSCar

Dedico este trabalho ao meu querido e falecido pai, Gilson Alves, que sempre me encantou com sua sabedoria e demonstrações de inúmeras "magias" da Matemática.

Agradecimentos

Agradeço inicialmente aos meus pais Gilson Alves e Eliane Rosa Gouveia Alves pela dedicação e empenho em minha vida profissional.

Agradeço ao companheirismo e empatia de Nelson Ferreira Netto que fortaleceram a minha dedicação a este trabalho.

Agradeço ao meu querido professor e orientador João Carlos Vieira Sampaio pela disponibilidade de repassar um pouco de sua imensa sabedoria e pela sua dedicação com este trabalho.

Agradeço por fim, às amigas de turma Maria Lucia Beltrami e Caroline Lameza Ramos pelo total apoio e companheirismo durante o curso.

Resumo

Estudos apontam que alunos dos Ensinos Fundamental e Médio possuem uma grande dificuldade de aprendizagem de conteúdos matemáticos. Este trabalho reúne alternativas didáticas, como mágicas matemáticas, para que o professor de matemática possa utilizá-las com o intuito de promover um maior interesse e encantamento de seus alunos com a Matemática e alguns de seus importantes conteúdos.

Palavras-chave: Matemática, Mágicas, Ensino-Aprendizagem.

Abstract

Studies show that students of elementary and high school have great difficulty in learning math concepts. This work brings together didactical alternatives, such as mathematical magic, so the math teacher can use them in order to promote greater interest and enchantment of their students with mathematics and some of its important contents.

Keywords: Mathematics, Magic, Teaching and Learning.

Índice de figuras

Sumário

Introdução

A Matemática no Ensino Fundamental é tida pelos alunos muitas vezes como algo distante da realidade em que vivem. A falta de interesse é algo bastante nítido e preocupante.

De acordo com Sanchez (2004) citado por Almeida (2006):

> Dificuldades originadas no ensino inadequado ou insuficiente, seja porque a organização do mesmo não está bem sequenciada, ou não se proporcionam elementos de motivação suficientes; seja porque os conteúdos não se ajustam às necessidades e ao nível de desenvolvimento do aluno, ou não estão adequados ao nível de abstração, ou não se treinam as habilidades prévias; seja porque a metodologia é muito pouco motivadora e muito pouco eficaz. (p. 174)

É importante que professores mostrem aos seus alunos que conteúdos matemáticos estão presentes no cotidiano, tanto em cálculos necessários no dia a dia, quanto no raciocínio lógico para resolução de problemas. É notável também que a Matemática não é uma disciplina isolada e pronta, pois é muito utilizada em todas as outras disciplinas e, é sempre muito útil, mudanças e adaptações na forma de ensinar de acordo com a turma e o contexto em que os alunos estão inseridos.

A preocupação na falta de interesse dos alunos, fez com que ocorresse a seguinte pergunta: “Quais metodologias poderiam fazer a diferença no ensino de conteúdos matemáticos?”.

O presente trabalho traz Mágicas Matemáticas como alternativas didáticas para os ensinos Fundamental e Médio, utilizando-se como Metodologia de pesquisa a Engenharia Didática.

A escolha do tema

No ano de 2013, a experiência de lecionar para alunos de 6ºs anos do Ensino Fundamental de uma escola municipal de Sertãozinho, São Paulo, foi muito construtiva. Após o conteúdo de potenciação, para descontrair e motivá-los a saber mais sobre potências, foi feita a mágica dos calendários mágicos do apagão, do livro "Mágicas Matemáticas e outros mistérios", de João Carlos Vieira Sampaio e Pedro Luiz Aparecido Malagutti, (Sampaio-Malagutti). A mágica consistia em um truque, baseado na representação binária de inteiros, para descobrir o dia do mês do aniversário de um participante.

Em 2014, foi desenvolvido o projeto desse trabalho com os alunos dos 7ºs anos, alunos que já conheciam a mágica dos calendários que havia sido feita com eles em 2013. Aproximadamente em maio, a mágica dos calendários foi feita novamente com eles, e muitos, lembrando-se do truque, pediram para fazê-lo com os outros colegas. Assim, foi percebido o quanto eles se interessavam por mágicas matemáticas, e o quanto isso poderia ajudá-los na aprendizagem de vários conteúdos matemáticos.

Em Julho de 2014, no final de uma última aula antes das férias, dois alunos muito animados fizeram uma "mágica". Eles pediram para todos pensarem em um número, faziam algumas operações com esse número, inclusive operações inversas, e o algoritmo resultava em 3. Reproduzindo a fala de um deles: "Professora, pense em um número! Multiplique esse número por 2. Some 6 ao resultado. Agora divide por 2 e tire o número que você pensou. Deu 3 não é?". Representando em equação, sendo x o número pensado, a sequência de cálculos mentais resulta em

$$(x \cdot 2 + 6) \div 2 - x = 3$$

Com o "truque", foi exibida para eles uma expressão em x do primeiro grau, sem usar essa denominação com eles, mostrando-lhes que poderiam escolher outros números no lugar de 2, 6 e 3. Foi feito um esquema como o de uma identidade, e escolhidos outros números para serem colocados no lugar da variável x para eles verem que sempre daria 3. Eles vibraram com a ideia e começaram a fazer um com o outro mudando os números.

Foi então que surgiu a pergunta: “Como mágicas matemáticas poderiam auxiliar os alunos na aprendizagem?” Assim, a leitura do livro “Mágicas Matemáticas e outros mistérios” começou a ser aprofundada.

O combinado com a turma foi que, ao ser terminado o conteúdo de números inteiros, seria iniciado o conteúdo de equações do primeiro grau, que então, seria muito importante que eles pesquisassem e inventassem mágicas para que fossem feitas algumas apresentações na turma. Eles ficaram muito animados com a ideia e dois dias depois um deles chegou com um baralho apresentando mágicas aos colegas. Fizeram então, uma apresentação de uma mágica. O truque consistia em pegar uma carta de um monte que seria então “descoberta” pelo mágico. Na primeira tentativa, ocorreu algum erro que não lhe permitiu descobrir a carta que havia sido pega. Já na segunda tentativa, o truque foi percebido: enquanto olhava e tentava “decorar” a carta que estava na mão, o mágico (aluno) olhou disfarçadamente a carta que seria colocada em cima da carta pega. Virando as cartas uma por uma, ele chegou e “descobriu” qual era a carta que havia sido pega. O mágico (aluno) foi elogiado, tendo dito que o truque tinha sido ótimo e que ele poderia pesquisar e inventar muito mais. Esse aluno se animou e muito!

Capítulo 1

A Engenharia Didática como metodologia de pesquisa em ensino

A Engenharia Didática é uma metodologia de ensino criada na França pela educadora Michèle Artigue na década de 80. Essa metodologia consiste em uma construção de engenheiro visando a utilização de uma sequência didática.

Segundo Artigue, citado por Almouloud e Silva (2012):

> Essas engenharias têm diversos objetivos: exploração de organizações matemáticas e/ou didáticas, testagem de hipóteses ou de construções teóricas, estudo do funcionamento de sistemas didáticos em dadas condições, produção de recursos(objetos de aprendizagem) para o ensino de um dado tema, construção de dispositivos de formação de professores, acompanhamento ou preparação da evolução de currículos locais ou globais, etc.

Uma sequência didática é elaborada a partir de passos ou etapas ligadas entre si com o propósito de tornar o aprendizado dos alunos mais eficiente.

1.1 A estruturação de uma sequência didática

Primeiramente, vejamos como uma sequência didática pode ser estruturada:

1º passo: O professor apresenta um projeto para os alunos contendo as tarefas e os estudos que irão realizar.

2º passo: O professor realiza uma investigação para descobrir os conhecimentos prévios dos alunos para então planejar um conteúdo adequado a ser explorado para a sequência didática. Essa investigação pode se dar por meio de atividades propostas aos alunos, conversas, produções de textos, etc.

3º passo: Atividades como exercícios e pesquisas, divididas em módulos, são realizadas com o intuito de ocorrer a superação das dificuldades apresentadas dos alunos. As atividades devem ser propostas e adaptadas de acordo com as particularidades da turma.

4º passo: Uma análise é feita para que se saiba o que os alunos aprenderam com o que foi planejado durante a sequência didática.

1.2 A Engenharia Didática e suas componentes

O trabalho do professor como um engenheiro se dá ao fato de que é necessário que ele tenha conhecimentos sólidos necessários, que encare carências no aprendizado dos alunos com teorias já formuladas ou, se necessário invente, adapte uma nova teoria. O professor é um pesquisador que procura as dificuldades de seus alunos e cria estratégias de ensino buscando sempre superar tais dificuldades.

I. O tema a ser explorado na Engenharia Didática

Essa etapa consiste na escolha de um tema e uma justificativa para tal escolha. O professor pode utilizar como justificativa do tema a dificuldade que os alunos encontraram no ensino/aprendizagem de conteúdos em sala de aula ou na relevância de certos conteúdos.

II. Análises prévias

Nessa etapa o professor/pesquisador faz uma análise sobre o modelo atual de ensino do conteúdo escolhido identificando em quais aspectos deve ocorrer uma nova adaptação, reorganização e aperfeiçoamento desse modelo. Essa análise é dividida em três níveis:

1. Epistemológico: compreende a possibilidade da construção e evolução do conhecimento que será pesquisado.
2. Didático: análise ao sistema de ensino e análise feita aos métodos pelo qual vem sendo construído o conhecimento.
3. Cognitivo: estudo feito para encontrar as principais dificuldades de aprendizagem dos alunos com esse conhecimento.

III. Concepção e análise a priori de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas em sala de aula

Dois tipos de variáveis serão utilizadas pelo professor: uma global, onde é explicado o objetivo e as propostas do trabalho, e outra local, onde são detalhadas as propostas e os recursos a serem utilizados.

IV. Hipóteses, experimentação, análise a posteriori e validação da engenharia

São formuladas hipóteses sobre o comportamento e o raciocínio dos alunos. Essas hipóteses são importantes para serem comparadas com os resultados finais da validação da engenharia. Nesse momento, o professor supõe alguns resultados que poderão ser encontrados durante a experimentação.

Na experimentação o professor coloca em prática sua proposta didática e corrige falhas se necessário. Nesse processo são descritas como ocorreu a proposta didática, quais recursos foram utilizados e como os alunos participaram.

A análise a posteriori é feita utilizando um conjunto de resultados coletados na experimentação. É analisado se ocorreu a validação das hipóteses formuladas na análise a priori.

Na validação da Engenharia Didática ocorre uma análise do que era pensado pelo professor anteriormente com as hipóteses formuladas e os resultados finais observados após a experimentação. São analisadas quais propostas foram válidas e quais podem ser modificadas para que sejam válidas, ocorrendo a sugestão das modificações necessárias.

A não validação de algumas propostas não implicam a invalidação da Engenharia, pois o professor ao sugerir certas modificações está ampliando seu conhecimento e maneiras de ensinar.

As propostas validadas não significa a verdade absoluta da formulação de novos métodos de ensino, pois as propostas são formuladas para apenas um grupo de alunos. As propostas são incentivos de novos métodos de ensino que devem ser adaptadas de acordo com cada contexto escolar.

Capítulo 2

Contexto escolar do professor e seus alunos

Os alunos, público alvo das propostas desse trabalho, são de uma escola municipal inserida em um bairro com poucos recursos na cidade de Sertãozinho, no estado de São Paulo. É uma escola nova, inaugurada no ano de 2012. Os alunos e a comunidade valorizam bastante o ensino e os recursos oferecidos por essa instituição.

A escola possui uma estruturação bastante adequada para o aprendizado, possuindo até o presente momento todos os recursos e materiais necessários para a realização deste trabalho, proporcionando aos alunos, como por exemplo, livros e computadores com acesso à internet para as pesquisas.

O trabalho foi realizado com alunos de 7º ano com bastante defasagem de aprendizagem de conteúdos matemáticos. Apesar das dificuldades, são alunos bastante interessados em aprender, principalmente quando são apresentadas novas propostas de ensino.

A professora autora deste trabalho procurou propostas pedagógicas adequadas que motivassem seus alunos de acordo com o contexto escolar destes. A necessidade dos alunos de lazer e entretenimento desse bairro, fez com que a exploração de brincadeiras como mágicas matemáticas os entretivessem ao mesmo tempo em que os ensinassem conteúdos matemáticos do currículo do 7º ano.

Capítulo 3

Um repertório de mágicas matemáticas com calendários, para uso em sala de aula

A descoberta de números ou soma de números envolvendo calendários em mágicas com truques aritméticos foram as atividades desenvolvidas nesse trabalho. Junto com estas, a recordação e o aprendizado de alguns conteúdos matemáticos elementares foram explorados.

Seguem algumas mágicas que podem ser utilizadas em sala de aula.

3.1 MÁGICA 1: Três dias consecutivos escolhidos serão adivinhados.

Conteúdos matemáticos a serem explorados: Equações; Progressões Aritméticas.

A mágica

O mágico pede para que o espectador escolha três dias consecutivos de um calendário. Pede-se então, que a pessoa diga a soma desses números. Sabendo a soma, o mágico revela quais foram os números escolhidos.

Vamos supor que foram escolhidos em segredo pelo espectador os números 13, 14 e 15 no calendário abaixo. A pessoa dirá que a soma foi 42.

Dom	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sab
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

Sabendo a soma, o mágico revela então os dias escolhidos.

O truque

O mágico faz mentalmente a divisão de 42 por 3, chegando em 14, que é o número central, descobrindo então, os três números consecutivos.

Elucidando

Seja S a soma dada dos três números consecutivos, e seja n o número central que será descoberto. Como os números são consecutivos, podemos escrevê-los como $n-1, n, n+1$.Então:

$$S = (n+1) + (n) + (n-1) = 3n$$

Logo $n = S/3$. Sabendo o número central n, o mágico revela os três números escolhidos pelo participante.

3.2 MÁGICA 2: Três datas consecutivas, de um dia preferido da semana, serão adivinhadas.

Conteúdos matemáticos a serem explorados: Equações; Progressões Aritméticas.

A mágica

O mágico pede para que o espectador pense no seu dia preferido da semana. Olhando para os números que aparecem na coluna do dia preferido, a pessoa deve escolher três números consecutivos dessa coluna e dizer a soma destes. Sabendo a soma, o mágico revelará quais números foram escolhidos.

Vamos supor que o dia preferido da semana da pessoa seja sábado e, que foram escolhidos os dias 5, 12 e 19 do calendário abaixo. A pessoa dirá que a soma foi 36.

Dom	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sab
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

O mágico faz mentalmente a divisão de 36 por 3, chegando em 12, que é o número central, descobrindo então os três números escolhidos.

Elucidando

Seja S a soma dos números escolhidos e seja n o número central. Como a distância entre um número e outro é de 7 unidades, podemos escrevê-los como $n - 7, n, n + 7$ e então:

$$S = (n - 7) + (n) + (n + 7) = 3n$$

Logo, $n = S/3$. Sabendo o número central n, o mágico revela os três números escolhidos pelo participante.

3.3 MÁGICA 3:A soma de quatro números escolhidos em um bloco 4×4 será descoberta.

Conteúdos matemáticos a serem explorados: Matrizes; Propriedades da adição; Progressões Aritméticas.

A mágica

O mágico pede para o espectador escolher um bloco 4×4 de números de um calendário. Do bloco escolhido, a pessoa deve escolher quatro números, de modo que dois quaisquer não estejam em uma mesma linha e nem em uma mesma coluna, ou seja, na primeira linha escolher um número, na segunda linha escolher outro número que não esteja na mesma coluna do anterior, e assim por diante, e depois disso somá-los em segredo. O mágico pedirá que a pessoa diga o número que aparece na primeira linha e primeira coluna do bloco. Com isso, o mágico adivinhará a soma dos quatro números escolhidos.

Vamos supor que a pessoa tenha escolhido o bloco em azul abaixo e, tenha feito a soma em segredo, dos números em vermelho, ou seja, $S = 2 + 11 + 17 + 22 = 52$.

Dom	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sab
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

A pessoa mencionou o número 1 como o primeiro número da primeira linha e primeira coluna do bloco. Assim o mágico faz mentalmente a soma dos números da primeira coluna do bloco:

$S' = 1 + 8 + 15 + 22 = 46$, e acrescenta 6, ou seja, a soma obtida pela pessoa será$S = 52 = 46 + 6$, que pode ser escrita como:

$$S = (1 + \mathbf{1}) + (8 + \mathbf{3}) + (15 + \mathbf{2}) + (22 + \mathbf{0})$$
$$S = (1 + 8 + 15 + 22) + (\mathbf{1} + \mathbf{3} + \mathbf{2} + \mathbf{0}) = 46 + \mathbf{6} = 52.$$

Assim, a soma dos números escolhidos é a soma dos números da primeira coluna acrescida de 6 unidades, que é a soma dos quatro deslocamentos para a direita, em relação à primeira coluna, que serão de 0, 1, 2 ou 3 unidades, aplicados às quatro linhas, mas não necessariamente nesta ordem.

Elucidando

Seja S a soma dos números escolhidos pela pessoa, e sejam $X, Y, Z\ e\ W$ os números da primeira coluna. Sejam ainda X_1 o número escolhido na linha 1, Y_2 o número escolhido da linha 2, Z_3 o número escolhido na linha 3 e W_4 o número escolhido na linha 4. O quadrado 4×4 terá seus números distribuídos conforme uma matriz da forma

X			
Y			
Z			
W			

Como $X_1,\ Y_2,\ Z_3$ e W_4 são números tomados nas quatro diferentes colunas, teremos

$$X_1 = X + d_1$$
$$Y_2 = Y + d_2$$
$$Z_3 = Z + d_3$$
$$W_4 = W + d_4$$

sendo $d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4$ os acréscimos recebidos por $X,\ \ Y,\ Z,\ W$, de modo a definir X_1, Y_2, $Z_3,\ W_4$.

Esses quatro acréscimos fazem que os valores de $X_1,\ Y_2,\ Z_3,\ W_4$ sejam distribuídos nas quatro diferentes colunas. Assim sendo, os acréscimos $d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4$ são os quatro valores 0, 1, 2, 3, mas não necessariamente nesta ordem.

$$\begin{aligned} S &= X_1 + Y_2 + Z_3 + W_4 = (X + d_1) + (Y + d_2) + (Z + d_3) + (W + d_4) \\ &= (X + Y + Z + W) + (d_1 + d_2 + d_3 + d_4) \\ &= (X + Y + Z + W) + (0 + 1 + 2 + 3) = (X + Y + Z + W) + 6 \end{aligned}$$

O mágico calcula mentalmente o valor de $(X + Y + Z + W)$ acrescentando 6, descobrindo então a soma dos números escolhidos.

Elucidando um pouco mais

O bloco 4×4 encontrado no calendário tem as datas em sua diagonal principal seguindo o padrão

X			
	$Y+1$		
		$Z+2$	
			$W+3$

Assim, a soma dos números da diagonal principal é $X+Y+Z+W+6$, exatamente a soma a ser "adivinhada" pelo mágico.

Por outro lado, a mesma matriz também segue o padrão

X			
	$X+8$		
		$X+16$	
			$X+24$

pois, $Y+1$ designa uma data 8 dias após a data X, $Z+2$ uma data 16 dias após a data X, e $Z+3$ uma data 24 dias após. Assim sendo, temos que

$$X+Y+Z+W+6 = X+(X+8)+(X+16)+(X+24) = 4X+48$$

Esta soma também é a soma dos extremos da diagonal, multiplicada por 2:

$$4X+48 = 2 \cdot [X+(X+24)]$$

Ao ser informado sobre a data X, o mágico observa a data no outro extremo da diagonal, $X+24$, soma-o a X, e multiplica a soma por 2.

Outras variantes desta mágica podem ser exploradas. Por exemplo, se a soma, que é $4X+48$, é informada pelo participante, o mágico subtrai 48 e divide o resultado por 4, para "adivinhar" a data X, do início do bloco 4×4 escolhido pelo participante.

3.4 MÁGICA 4: A soma de cinco datas escolhidas ao acaso, uma de cada semana, será adivinhada.

Conteúdos matemáticos a serem explorados: Equações; Progressões Aritméticas.

A mágica

O mágico toma um calendário em que os dias são distribuídos em cinco linhas e pede para o espectador escolher um dia de cada semana, e pede que ele faça a soma desses números em segredo. O mágico pede para que a pessoa diga quantos domingos escolheu, quantas segundas, quantas terças e assim por diante. Fazendo anotações, o mágico irá descobrir a soma dos números escolhidos.

Vamos supor que a pessoa tenha escolhido os dias em destaque abaixo:

Dom	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sab
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

A soma será $S = 2 + 11 + 14 + 20 + 28 = 75$.

O mágico anota quantos domingos a pessoa disse, quantas segundas, quantas terças e assim por diante.

O mágico olha no calendário e localiza o número central, que no caso do nosso exemplo é o 16 e calcula $5 \cdot 16 = 80$. Com as anotações, para cada domingo mencionado o mágico subtrai 3, para cada segunda-feira, subtrai 2; para cada terça-feira, subtrai 1; as quartas-feiras são ignoradas; para cada quinta-feira, acrescenta 1; para cada sexta-feira, acrescenta 2 e para cada sábado, acrescenta 3.

No exemplo ilustrado pelo calendário anterior, em relação ao número inicial 80,

- Foi escolhido um domingo → o mágico subtrai 3
- Foram escolhidas duas segundas-feiras → o mágico subtrai 4
- Foi escolhida uma sexta-feira → o mágico acrescenta 2
- Foi escolhida uma quarta-feira → nada a acrescentar ou subtrair.

Assim, o mágico faz $80 - 3 - 4 + 2 = 75$, acertando então o valor da soma.

Elucidando

Pode-se pensar no calendário do exemplo como uma progressão aritmética de 35 termos, com primeiro termo -1, último termo 33 e razão 1:

Dom	**Seg**	**Ter**	**Qua**	**Qui**	**Sex**	**Sab**
-1	**0**	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	**31**	**32**	**33**

Assim, a soma será $S = 2 + 11 + 14 + 20 + 28$, que pode ser escrita: $S = (2 + \mathbf{0}) + (9 + \mathbf{2}) + (16 - \mathbf{2}) + (23 - \mathbf{3}) + (30 - \mathbf{2})$, que é a soma dos números que aparecem nas quartas-feiras (que é o mesmo que $16 \cdot 5$), fazendo os deslocamentos das unidades necessárias com relação à quarta-feira, que serão dados de acordo com as quantidades de domingos, segundas, terças, quintas, sextas e sábados.

Elucidando um pouco mais

Podemos considerar a progressão aritmética (PA) formada pelos números que aparecem nas quartas-feiras. E vamos supor os mesmos números escolhidos no exemplo anterior. Assim podemos pensar no calendário da seguinte forma:

Dom	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sab
			2 $x-14$			
			9 $x-7$		**11** $(x-7)+2$	
	14 $x-2$		**16** x			
20 $(x+7)-3$			**23** $x+7$			
	28 $(x+14)-2$		**30** $x+14$			

Partimos da soma da progressão aritmética,

$$S' = (x+14)+(x+7)+(x)+(x-7)+(x-14) = 5\cdot x$$

Assim, $5\cdot x$ é o número de referência inicial. Esta será a soma das datas escolhidas se o participante tiver escolhido somente as cinco quartas-feiras. Conforme o número datas escolhidas, à direita ou à esquerda, em relação à coluna das quartas-feiras, fazemos acréscimos ou decréscimos para obter a soma das datas escolhidas. Tal como elucidado no exemplo, para cada domingo mencionado o mágico subtrai 3, para cada segunda-feira, subtrai 2; para cada terça-feira, subtrai 1; as quartas-feiras são ignoradas; para cada quinta-feira, acrescenta 1; para cada sexta-feira, acrescenta 2 e para cada sábado, acrescenta 3.

3.5 MÁGICA 5: A data do mês do aniversário do participante será adivinhada.

Conteúdos matemáticos a serem explorados: Potenciação; Representação única de um número natural como uma potência de 2 ou soma de potências de 2.

Seguem os calendários preparados a serem utilizados. Datas nos quadros com fundo azul devem aparecer destacadas de algum modo, por exemplo com o fundo colorido ou com a datas sublinhadas. O calendário a ser utilizado deve ser de um mês de 31 dias, com cinco linhas de datas.

Calendário 1

Dom	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sab
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

Calendário 2

Dom	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sab
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

Calendário 3

Dom	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sab
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

Calendário 4

Dom	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sab
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

Calendário 5

Dom	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sab
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

A mágica

O mágico pede para uma pessoa pensar na data do seu aniversário. Em seguida, o mágico pergunta se o número está em destaque (com fundo azul) no calendário

1, se está em destaque no calendário 2, e assim por diante. Com a sequência de respostas o mágico descobre a data do aniversário dessa pessoa (apenas o dia – o mágico pergunta primeiramente em qual mês a pessoa faz aniversário).

Vamos supor que a data do aniversário da pessoa seja 14 de março. O dia 14 encontra-se em destaque nos calendários 2, 3 e 4. Assim, o mágico soma os primeiros números em destaque desses calendários, ou seja, faz $2 + 4 + 8 = 14$, descobrindo então que a pessoa faz aniversário dia 14.

Os números em destaque nos calendários, são aqueles que possuem em sua decomposição o primeiro número em destaque de cada calendário, ou seja, a potência de 2 correspondente.

Elucidando

Cada número natural possui representação única como uma potência de 2 ou como soma de potências de dois, distintas entre si. Seja$N$a data do aniversário da pessoa. Como $1 \leq N \leq 31$, $N = 2^0 \cdot a + 2^1 \cdot b + 2^2 \cdot c + 2^3 \cdot d + 2^4 \cdot e$, com a, b, c, d, e sendo 1 ou 0, dependendo se a potênciacorrespondente ao coeficiente encontra-se ou não na decomposição do número em parcelas de potências de 2. Notemos que $31 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$ é a maior soma possível das cinco potências, e é o único número que aparece destacado nos cinco calendários preparados.

Capítulo 4

Atividades com os alunos

4.1 Apresentando um repertório de mágicas aos alunos

As primeiras mágicas apresentadas aos alunos, foram as mágicas 1 e 2 apresentadas no capitulo 3, nas seções 3.1 e 3.2, que possuem como títulos: **"MÁGICA 1: Três dias consecutivos escolhidos serão adivinhados"** e **"MÁGICA 2: Três datas consecutivas, de um dia da semana preferido, serão adivinhadas".**

Ao fazer duas vezes a primeira mágica com dois alunos, um aluno do fundo da sala gritou "É só pegar a soma e dividir por três". Questionando este aluno qual o motivo da divisão por três, ele não soube explicar, então todos se entusiasmaram querendo desvendar os fundamentos do truque.

Antes de explicar o truque, a segunda mágica foi aplicada e os alunos perceberam que novamente deveriam dividir a soma por três. O truque foi explicado utilizando-se generalizações com a ideia de equações do primeiro grau, assunto já conhecido por eles.

Seguem alguns registros das atividades, em fotos.

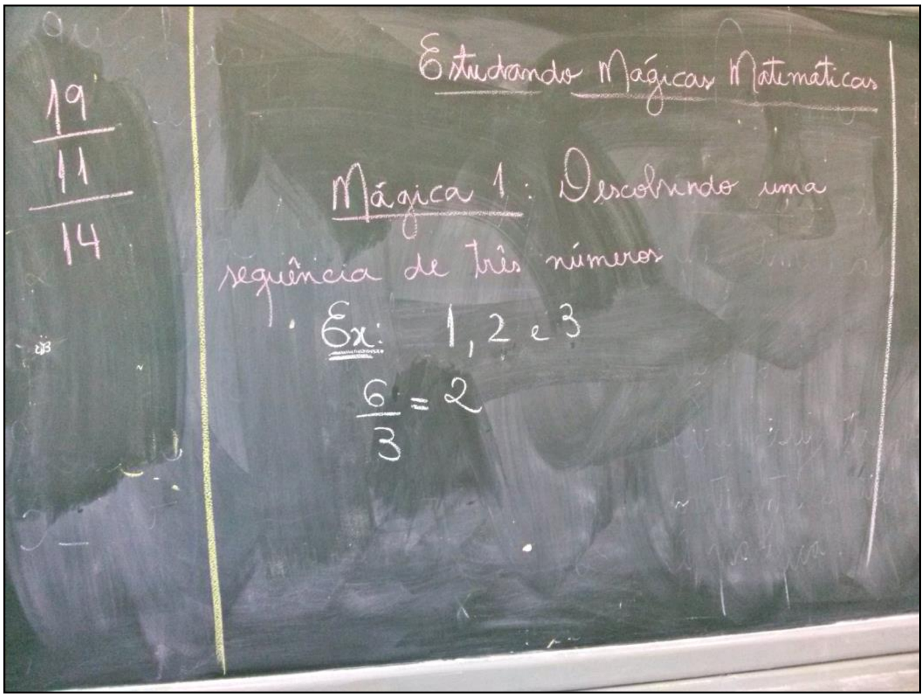


Figura 1. Descobrindo no quadro uma sequência de três inteiros consecutivos através da soma desses inteiros.

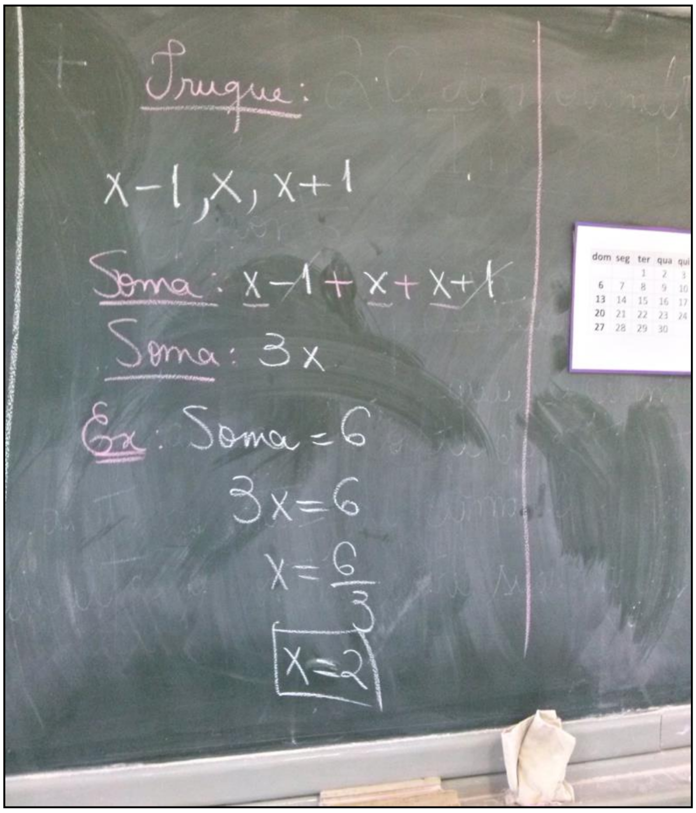


Figura 2. Estabelecendo no quadro uma justificativa algébrica do método de descoberta.

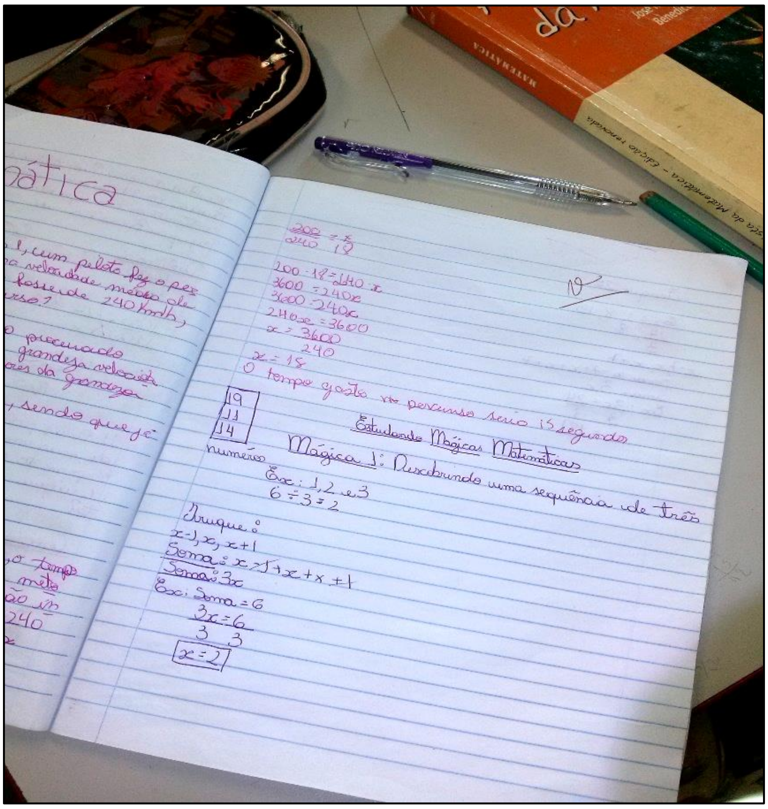


Figura 3. Anotações de aluno em aula de mágicas matemáticas.

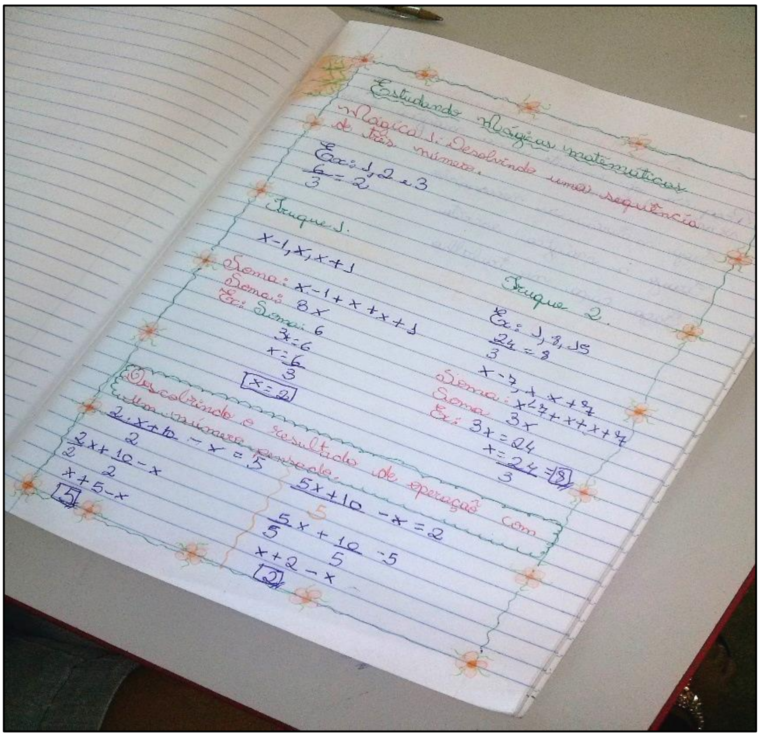


Figura 4. Anotações de aluno em aula de mágicas matemáticas.

Um aluno gostou tanto das mágicas que tentou descobrir novas mágicas como essas. Esse aluno conseguiu perceber que poderiam ser escolhidos três números em sequência na diagonal. Nesse caso, explicou ele, a sequência dos três números desconhecidos teria a forma $x-8, x, x+8$. Na figura 5, temos anotações de aluno sobre o assunto.

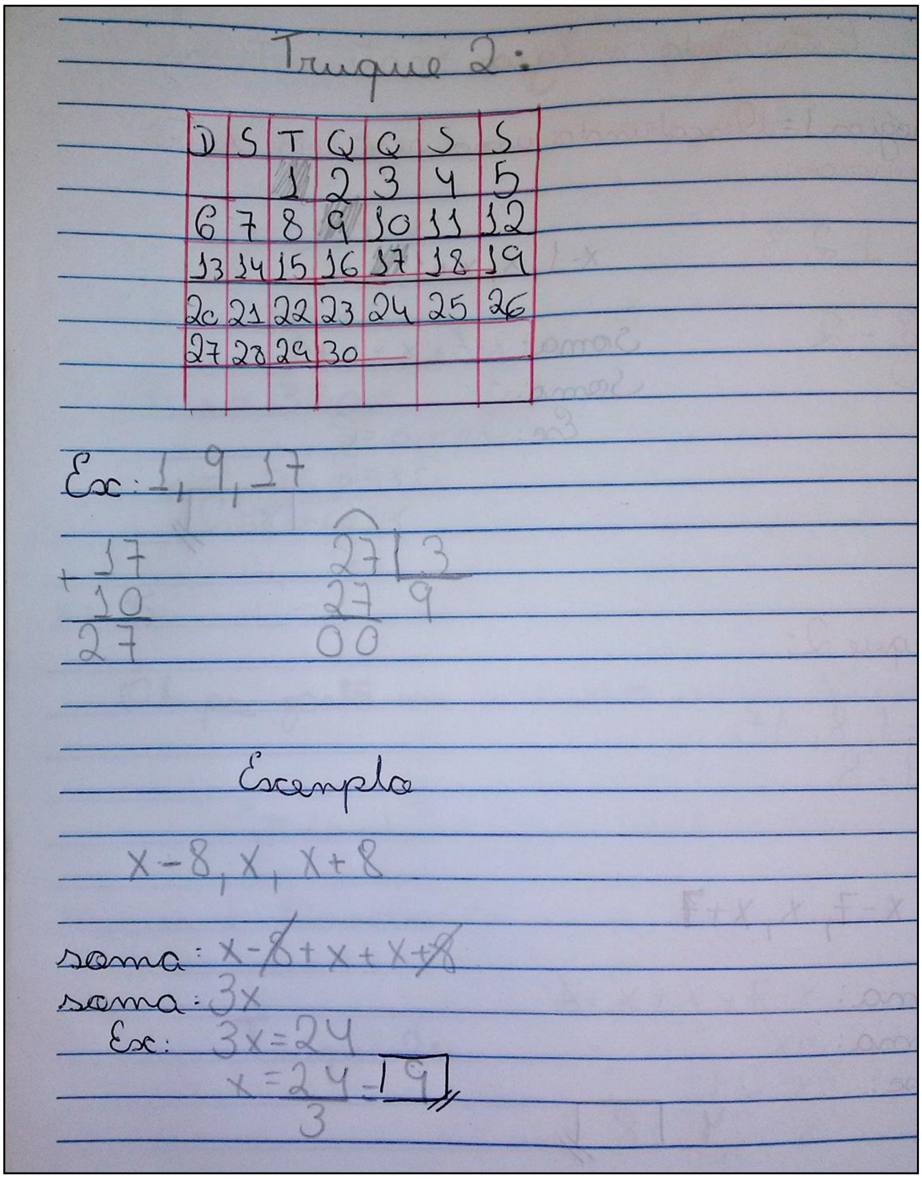


Figura 5. Anotações sobre mágica com números descoberta por aluno durante as atividades. Exemplo em que os números escolhidos em diagonal são 1, 9 e 17.

A apresentação dessas duas mágicas foi um incentivo para que trabalhos de pesquisa sobre mágicas matemáticas começassem a serem feitos pelos alunos. Foi proposto que grupos de alunos pesquisassem ou inventassem mágicas matemáticas e que fossem feitas apresentações das mágicas à classe e um trabalho escrito.

Alguns alunos ficaram bastante animados com a ideia e propuseram-se a realizá-la.

Foram dadas algumas explicações de como poderiam “inventar mágicas” utilizando equações ou manipulando expressões algébricas do primeiro grau. No primeiro exemplo abaixo, foi explicado que, o mágico deveria pedir que a pessoa pensasse em um número, multiplicasse-o por 2, adicionasse 10 ao produto e então dividisse o resultado por 2 e, desse novo resultado subtraísse o número pensado. O resultado em que a pessoa chegaria seria 5. Foi mostrado que, sendo x o número pensado, a sequência descrita de operações era traduzida pela expressão algébrica $\frac{2x+10}{2} - x$, e que assim poderiam ser escolhidos outros números e então que poderia ser inventada uma mágica só deles com manipulações análogas. Os alunos se entusiasmaram bastante e propuseram outras mágicas!

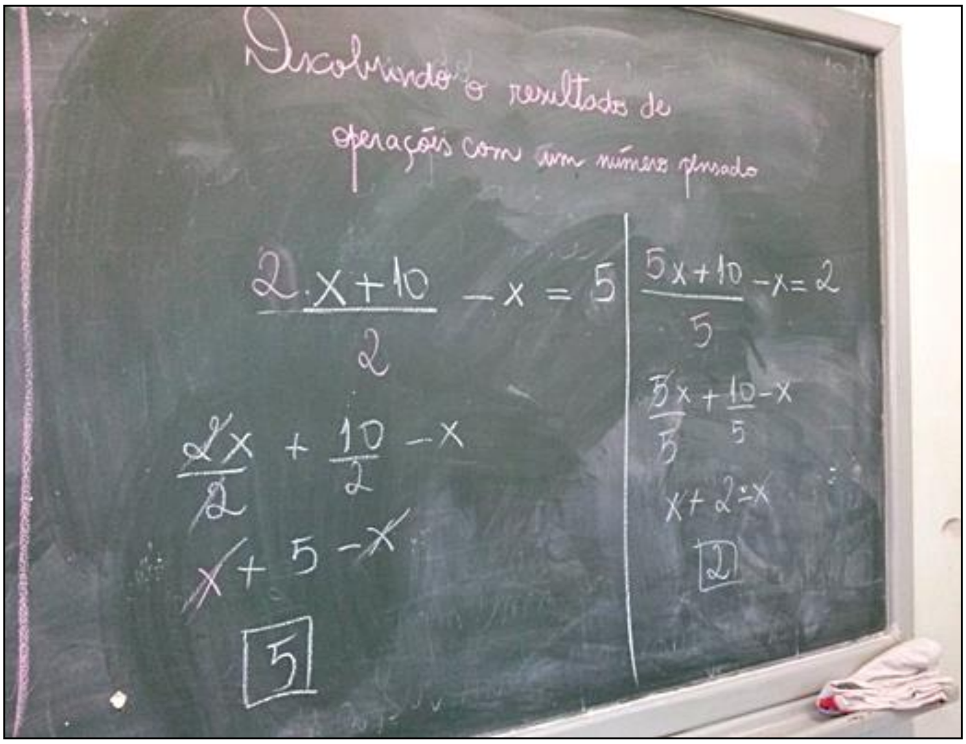


Figura 6. Explicação dada aos alunos. Sendo x o número pensado, uma sequência de operações aritméticas elementares sobre x tal como $\frac{2x+10}{2} - x$ resulta sempre em 5.

Durante essa aula, alguns alunos já começaram a trocar os números e tentaram também novas operações utilizando-se sempre a ideia de equações.

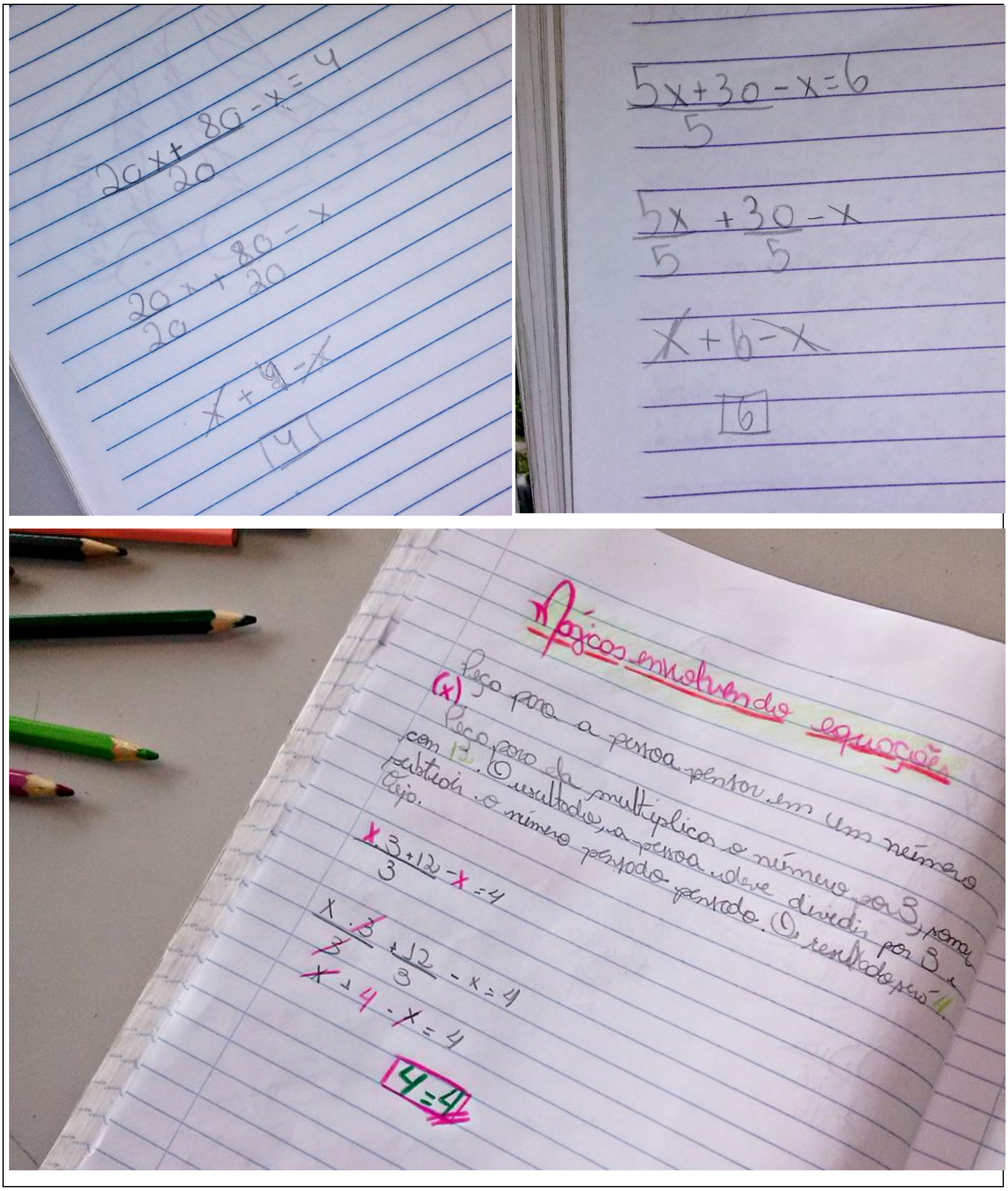


Figura 7. Alunos confeccionando mágicas de manipulações aritméticas sobre o "número pensado"x, que é subtraído ao final.

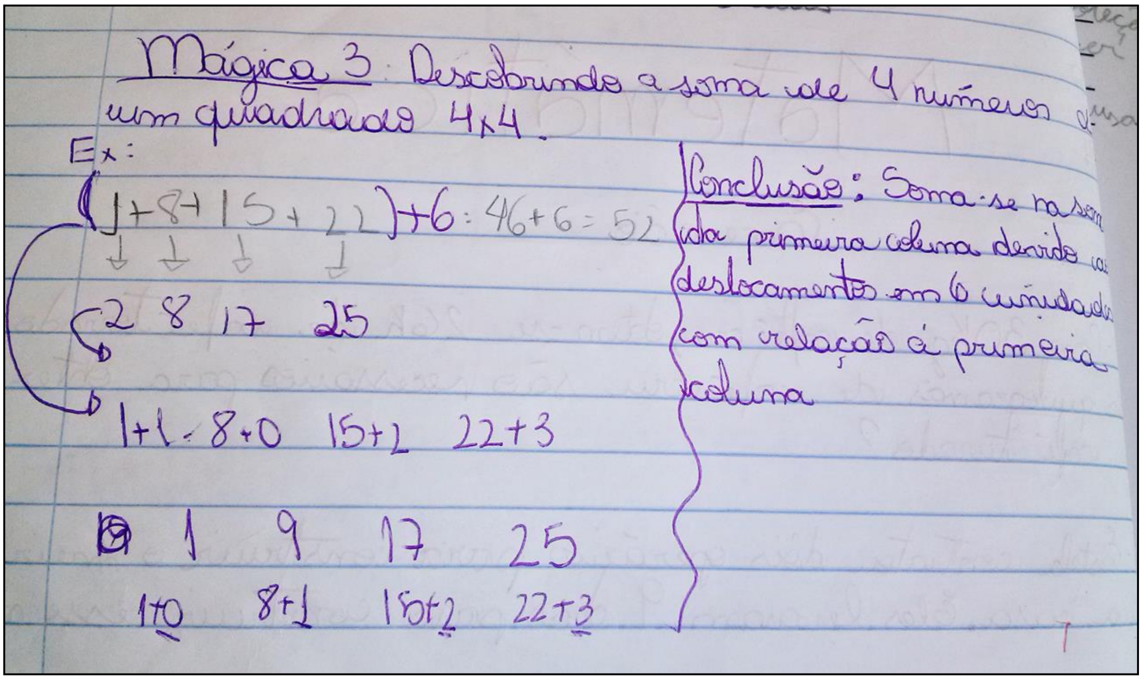
Essa aula de incentivo para que os alunos preparassem suas próprias mágicas foi muito produtiva. Muitos comentaram que “era muito legal brincar com equações”. Foi dado uma semana de prazo para que os alunos fizessem o trabalho de pesquisa e descrição da mágica.

Na aula posterior a essa, novas mágicas foram apresentadas aos alunos. As mágicas apresentadas são as dadas no capítulo 3, seções 3.3 e 3.4, que possuem como títulos **“MÁGICA 3: A soma de quatro números escolhidos em um bloco 4×4 será descoberta”** e **“MÁGICA 4: A soma de cinco datas escolhidas ao acaso, uma de cada semana, será adivinhada”.**

A realização dessas mágicas foi levada a termo para que os alunos percebessem que outras mágicas poderiam ser feitas com calendários, sendo que a explicação matemática dessas mágicas foi pouco explorada. A ideia de deslocamento em unidades,usada na justificativa da MÁGICA 4, foi algo bastante abstrato para os alunos.

O conteúdo matemática envolvido, mesmo tendo sido pouco explorado, não fez com que o encantamento por essas mágicas fosse menor.Os alunos vibraram com as descobertas, muitos queriam aprender os truques e fazer com os colegas.

Apesar de várias explicações, eles tiveram bastante dificuldade em entender o desenvolvimento e o truque matemático dessas duas mágicas. Segue um registro em imagens, nas Figuras 8 e 9, de anotações de alunos sobre as MÁGICAS 3 e 4.



Mágica 3: Descobrindo a soma de 4 números de um quadrado 4x4.

Ex:

(1+8+15+22)+6 = 46+6 = 52

2 8 17 25

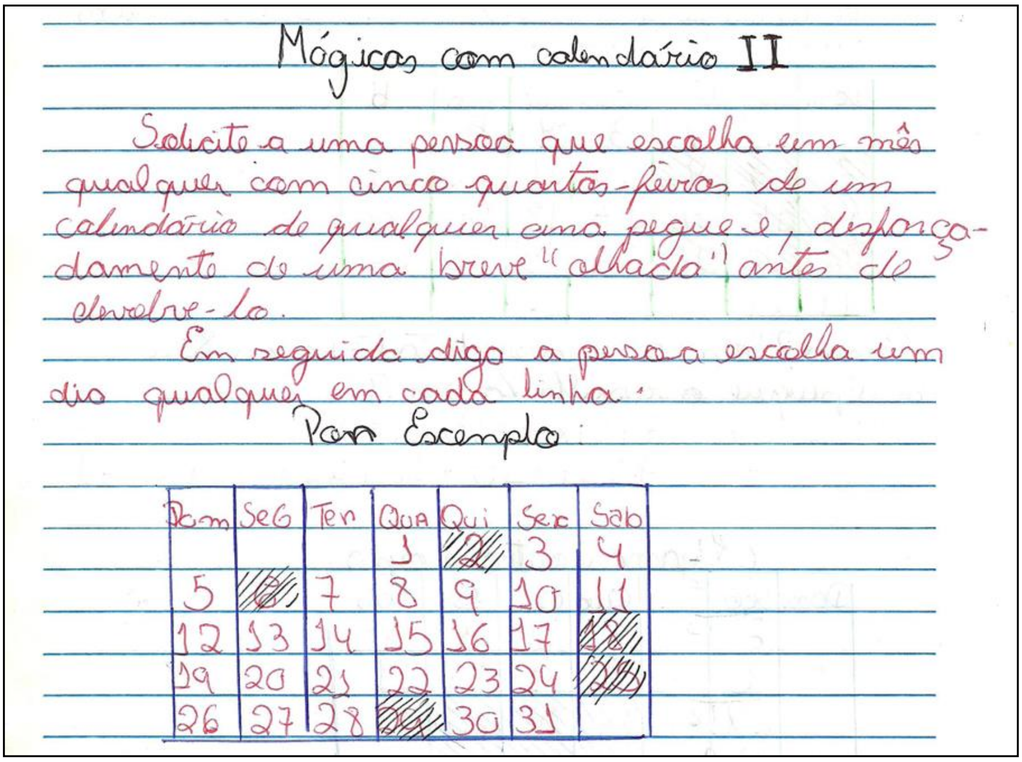
1+1 8+0 15+2 22+3

1 9 17 25

1+0 8+1 15+2 22+3

Conclusão: Soma-se na soma da primeira coluna devido ao deslocamento em 6 unidades com relação à primeira coluna

Figura 8. Anotações de aluno sobre a aritmética por trás da MÁGICA 3.



Mágicas com calendário II

Solicite a uma pessoa que escolha um mês qualquer com cinco quartas-feiras de um calendário de qualquer ano pegue e, disfarçadamente dê uma breve "olhada" antes de devolve-lo.

Em seguida digo a pessoa a escolha um dia qualquer em cada linha.

Por Escemplo:

Dom	SeG	Ter	QuA	Qui	Sex	Sab
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Figura 9. Anotações de aluno sobre a aritmética por trás da MÁGICA 4.

4.2 Estimulando o aprendizado dos alunos mediante atividades investigativas

A orientação para que fossem feitos trabalhos com mágicas era de que cada aluno deveria pesquisar uma mágica aritmética, trazê-la por escrito, e preparar uma apresentação aos colegas.

A seguir, faremos uma descrição sucinta de alguns trabalhos apresentados.

Mágica nº 1: Descobrindo o resultado de operações feitas com um número pensado.

Um aluno escreveu de forma bastante peculiar e clara a explicação dessa mágica proposta por mim. Ele utilizou algumas particularidades envolvendo alguns conceitos matemáticos já conhecidos por ele. Alguns desses conceitos foram: paridade dos números, divisibilidade, dobro, metade e expressões do primeiro grau.

Resumidamente, esse aluno propôs uma adivinhação na qual a pessoa participante pensava em um número, multiplicava-o por 2, somava 100 ao resultado, depois dividia a soma por 2 e subtraía o número pensado. O resultado "mágico" seria 50.

Algebricamente, explicou o aluno, sendo x o número pensado por uma outra pessoa, a sequência de manipulações aritméticas equivalia a calcular

$$[(2 \cdot x + 100) \div 2] - x = 50$$

Seguem registros desse trabalho em imagem na Figura 10.

Mágica com números:

Primeiramente você pede para a pessoa escolher um número de 1 a 10:

Ex: número 8

Depois você pede para ela multiplicar por 2, mas da para escolher qualquer numero para multiplicar ex: 2, 4, 6, 7 etc...

8 · 2

Depois disso peça que a pessoa some com um numero par de um a mil : ex: 100

8 · 2 + 100

Depois você pede para ela dividir o resultado pelo mesmo número da multiplicação, que nesse caso é o numero 2

Ex

8 · 2 + 100 ÷ 2

Depois disso você fala para a pessoa subtrair o número que ela escolheu pelo o resultado.

Ex:

(8 · 2 + 100) ÷ 2 - 8 =

E o resultado vai ser a metade do numero que eu mandei somar, que nesse caso é o 100, e o resultado vai ser 50. Sempre que o numero que eu mando somar é sempre par. Porque nesse caso foi multiplicado e dividido por 2.

8 · 2 + 100 ÷ 2 - 8 = 50

Figura 10. Descrição minuciosa de aluno sobre mágica aritmética descoberta por ele.

Utilizando a mesma ideia escrita por esse aluno, o professor sugeriu que esse aluno e um outro colega se juntassem para propor mais operações com o número pensado e descobrir o resultado.

Eles propuseram uma adivinhação em que utilizavam uma subtração extra e a atividade foi muito produtiva pois fizeram um bom treinamento em cálculos mentais.

Resumidamente, a adivinhação proposta por eles consistia em pedir ao participante pensar em um número x, e depois desenvolver uma expressão tal como

$$(x \cdot 2 + 24 - 20) \div 2 - x$$

permitindo ao mágico "adivinhar" o resultado que seria 2.

A Figura 11 a seguir ilustra anotações de várias propostas feitas pelo par de alunos.

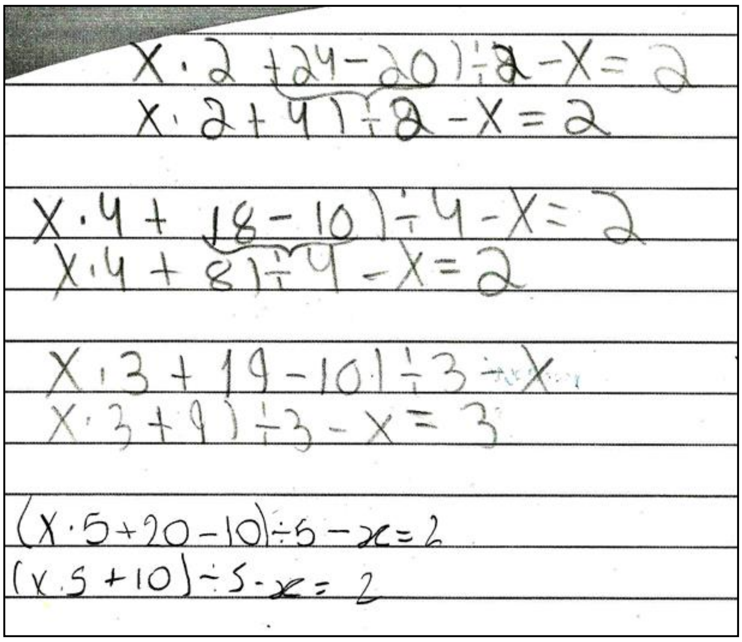
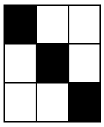


Figura 11. Explicações algébricas de várias mágicas do tipo "pense um número e... ao final subtraia o número pensado".

Mágica nº 2. Mágicas com calendários: descobrindo três números em sequência na diagonal ou cinco números consecutivos.

O trabalho de um outro aluno foi explorar novas mágicas com o calendário apresentado aos alunos. Ele pede que a pessoa escolha e calcule a soma de três números consecutivos em uma diagonal qualquer ou de cinco dias consecutivos. É possível ao mágico descobrir os números escolhidos quando for informado sobre a soma. Fez alguns exemplos, utilizou a ideia de equação, de sequências e explicou de sua forma como poderiam ser feitas essas mágicas.

Ele notou que, no calendário, três números consecutivos de uma diagonal (diagonal principal de uma matriz) da forma



podem ser representados por $x - 8, x, x + 8$, sendo x o dia central. A soma desses números é igual a $3x$.

Já uma sequência de cinco dias consecutivos tem a forma

$$x - 2, x - 1, x, x + 1, x + 2$$

e portanto tem soma $5x$.

Na Figuras 12 e 13 ilustramos anotações do aluno.

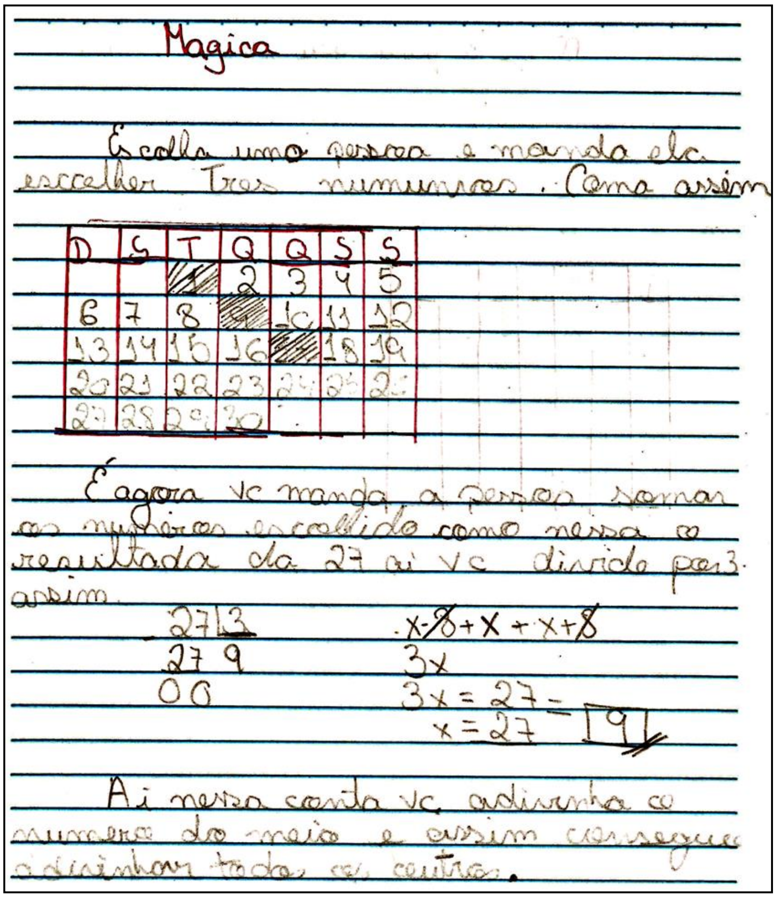
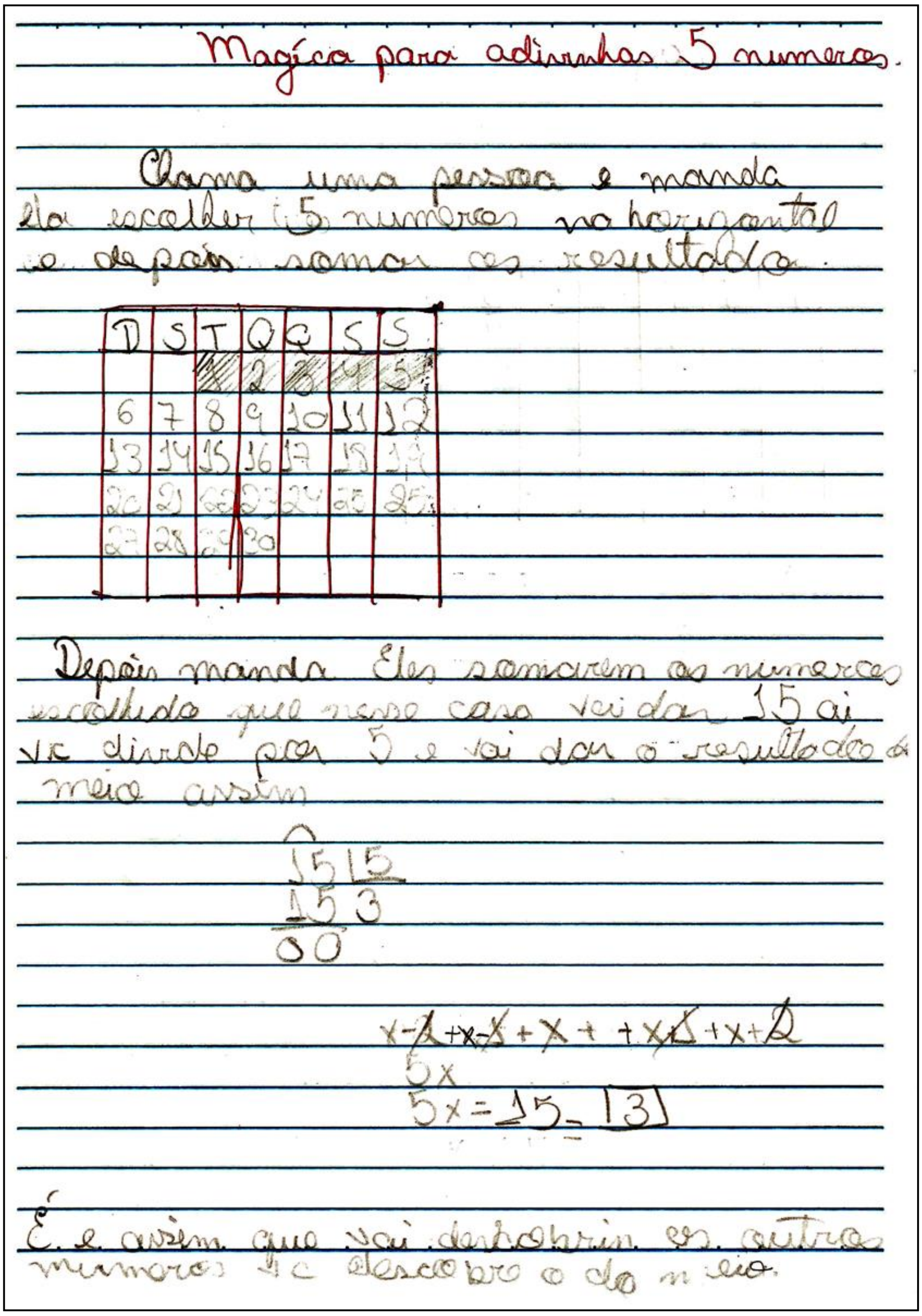


Figura 12. Anotações de aluno sobre a mágica de adivinhação de três números consecutivos escolhidos secretamente na diagonal de um calendário.



Mágica para adivinhas 5 numeros.

Chama uma pessoa e manda ela escolher 5 numeros no horizontal e depois somar os resultado.

D	S	T	Q	Q	S	S
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	25
27	28	29	30			

Depois manda Eles somarem os numeros escolhido que nesse caso vai dar 15 ai vc divide por 5 e vai dar o resultado do meio assim

$$\begin{array}{r|l} 15 & 5 \\ \underline{15} & 3 \\ 00 & \end{array}$$

$$x-\cancel{2}+x-\cancel{1}+x+\ +x+\cancel{1}+x+\cancel{2}$$

$$5x$$

$$5x=15 - \boxed{3}$$

É e assim que vai descobrir os outros numeros se descobre o do meio.

Figura 13. Anotações de aluno sobre a mágica de adivinhação de cinco números consecutivos escolhidos secretamente em um calendário.

Mágica nº 3. Mágicas com calendários: descobrindo a soma dos números de um quadrado 3×3 a partir do menor desses números.

Um aluno pesquisou e encontrou uma mágica que consistia em descobrir a soma dos números de um quadrado 3×3 de um calendário, escolhidos por uma pessoa, após ter sido informado sobre o primeiro (menor) desses números. Utilizando as mesmas ideias das mágicas feitas com eles, esse aluno utilizou as ideias de equação e de sequência.

Ele notou que um quadrado 3×3 de um calendário é tal que a soma de todos os números é 9 vezes o número central. Podemos notar que, se o número menor é x, então o número central é $x + 8$, e assim a soma de todos os números do quadrado é $9 \cdot (x + 8)$.

Uma explicação mais clara seria a de que os números de um quadrado 3×3 de um calendário obedecem ao padrão

$a - 8$	$a - 7$	$a - 6$
$a - 1$	a	$a + 1$
$a + 6$	$a + 7$	$a + 8$

e portanto a soma de todos eles é igual a $9a$. Sendo $x = a - 8$ o primeiro dia da tabela, o dia central será $x + 8$, e a soma de todos os números será $9a = 9(x + 8)$. Na Figura 14 exibimos anotações do aluno.

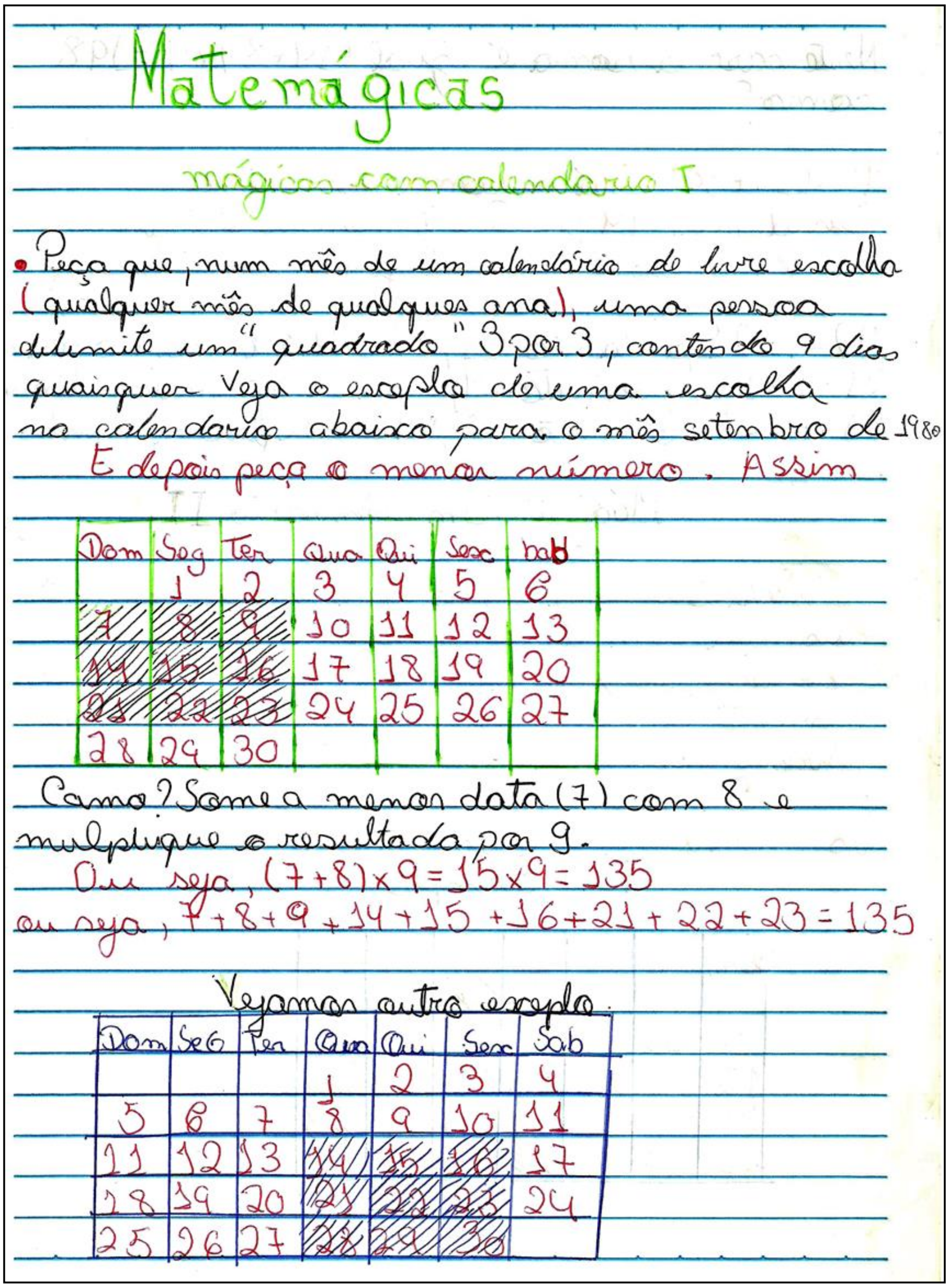


Figura 14. Anotações de aluno sobre a mágica do bloco 3×3 de um calendário

Mágica nº 4. Descobrindo o resultado de operações com um número pensado utilizando-se a multiplicação por 9.

Essa mágica foi muito interessante pelo fato de ter sido diferente de todas as outras já vistas pelos alunos. O aluno que a pesquisou utilizou conceitos de múltiplos e operações aritméticas básicas de inteiros.

A mágica consistia em pedir que o espectador pensasse em um número de 1 a 9 e multiplicasse esse número por 9. Caso o produto possuísse dois algarismos, solicita-se que o espectador calculasse a soma desses algarismos. Do resultado deveria ser subtraído 5, e esse novo resultado seria multiplicado por 4. O "mágico" então anunciava que o resultado era 16. A explicação do aluno, focou-se em mostrar que o resultado seria sempre 16 para qualquer número escolhido pelo espectador. Na Figura 15, temos as anotações do aluno sobre o assunto.

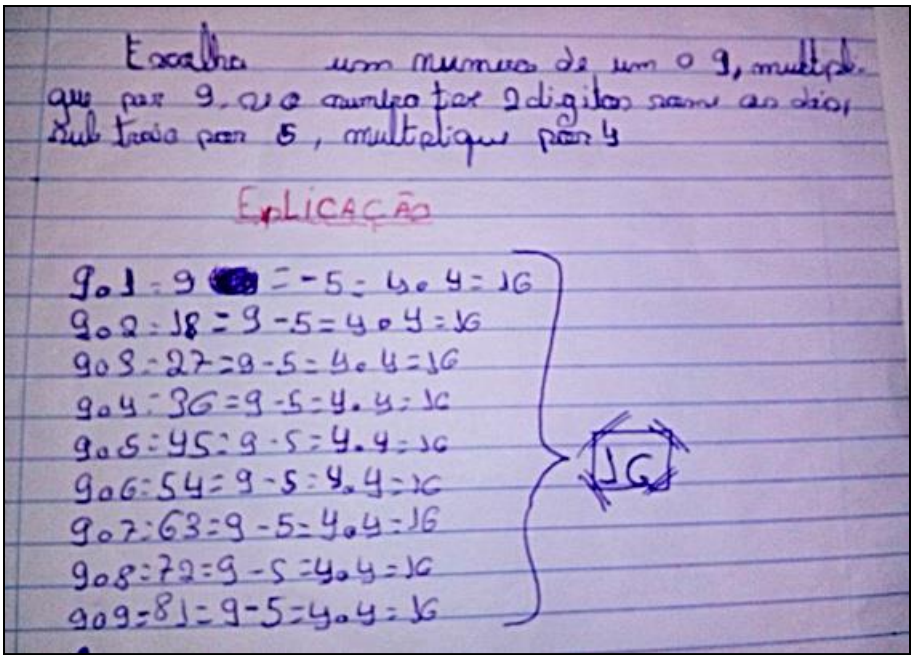


Figura 15. Anotações de um aluno sobre mágica aritmética utilizando a tabuada de multiplicação por 9.

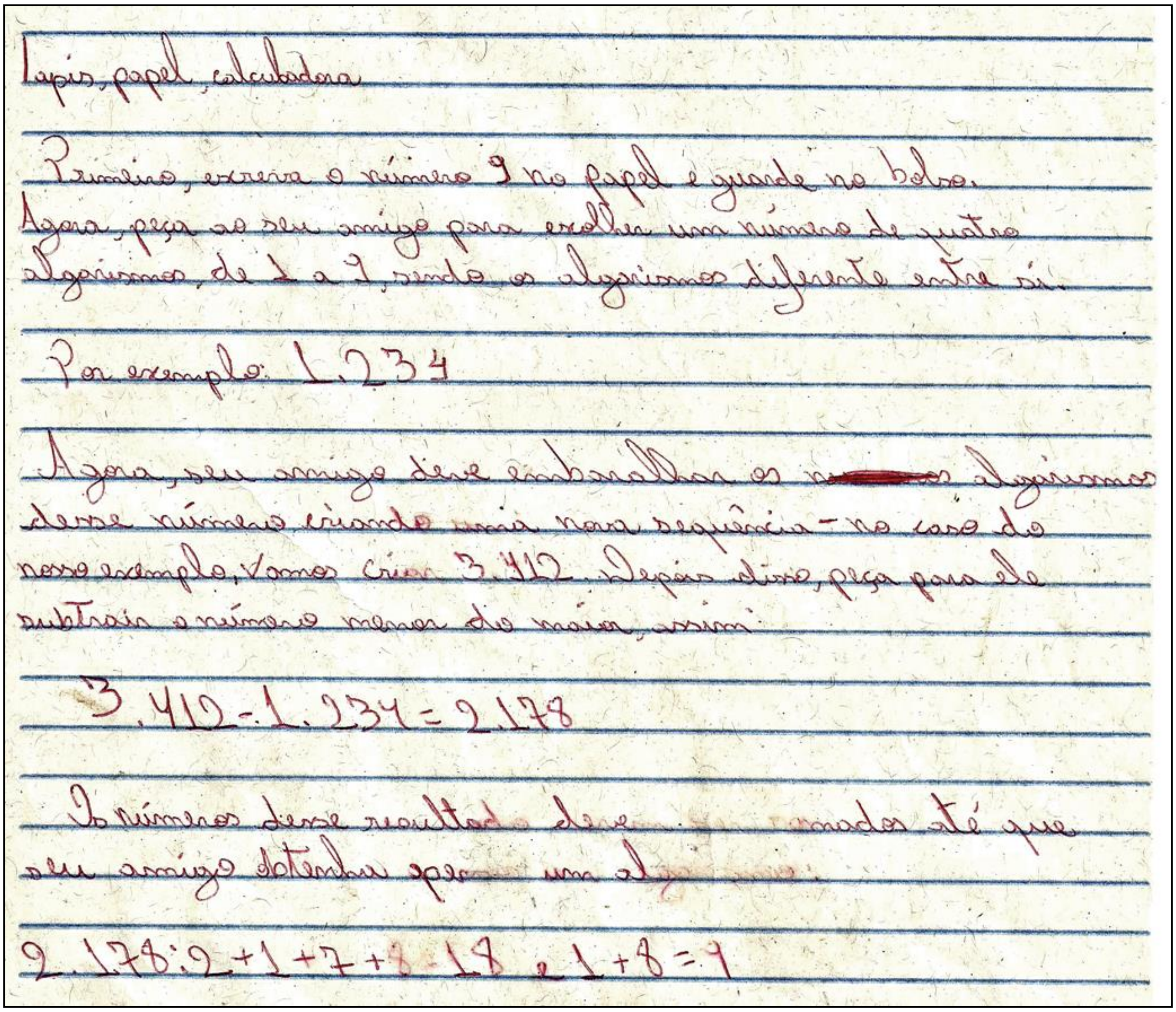
Para os alunos, a explicação de mostrar que dava certo para todos os números de 1 a 9 bastou. Eles consideraram que esta foi uma boa demonstração do truque.

Mágica nº 5. Descobrindo um resultado a partir de uma subtração de dois números de mesmos quatro algarismos distintos entre si.

Esta mágica, apresentada por um aluno, consiste em pedir que o espectador escolha um número com quatro algarismos distintos. O algarismo zero não deve ser utilizado. A pessoa deve formar um novo número utilizando os mesmos quatro algarismos do anterior e calcular a diferença entre o maior e o menor destes dois números. A soma dos algarismos do resultado deve ser calculada, e se tiver mais de um algarismo, a soma do resultado deve ser calculada novamente até que o resultado tenha um único algarismo. O aluno afirmou que o resultado final é sempre 9.

Esta mágica foi entregue por um aluno na última aula, em que os alunos estavam fazendo exercícios de recuperação, então não foi possível apresentar a eles uma explicação.

Na Figura 16, exibimos as anotações feitas pelo aluno.



Lapis, papel, calculadora

Primeiro, escreva o número 9 no papel e guarde no bolso.
Agora, peça ao seu amigo para escolher um número de quatro algarismos, de 1 a 9, sendo os algarismos diferentes entre si.

Por exemplo: 1.234

Agora, seu amigo deve embaralhar os algarismos desse número criando uma nova sequência - no caso do nosso exemplo, vamos criar 3.412. Depois disso, peça para ele subtrair o número menor do maior, assim:

3.412 - 1.234 = 2.178

Os números desse resultado deve[illegible] somados até que seu amigo obtenha ape[illegible] um alg[illegible].

2.178: 2 + 1 + 7 + 8 = 18 e 1 + 8 = 9

Figura 16. Anotações de um aluno ilustrando o fato de que a diferença entre dois números que tenham os mesmos algarismos é um múltiplo de 9.

Os fundamentos dos truques matemáticos dessas duas últimas mágicas estão descritos no Apêndice.

Capítulo 5

Conclusões

O início de um estudo da álgebra é um conteúdo matemático de extrema importância aos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental. A introdução de um novo significado para as letras torna-se bastante abstrato aos alunos dificultando muitas vezes a interpretação e a formulação de situações-problemas envolvendo equações do primeiro grau.

Inicialmente as operações com letras foi vista pelos alunos como algo muito abstrato e com pouco significado. Após um estudo feito dessas novas operações, foi introduzido o conceito de "fórmulas matemáticas" com a utilização de situações-problemas mostrando que as letras representavam números que poderiam variar dependendo da situação. Com isso, os alunos sentiram-se mais motivados em conhecer mais as operações com letras, consequentemente foi introduzido o conceito de equação de 1º grau. Foi feito um estudo de situações-problemas com traduções algébricas mostrando a importância do estudo de equações. Ainda assim, existia a necessidade de uma maior motivação no aprendizado desses conteúdos, surgindo então, a ideia de explorar mágicas matemáticas envolvendo tais conteúdos.

A proposta de mágicas matemáticas no aprendizado, fez com que algumas hipóteses fossem levantadas antes da experimentação. Esperava-se que:

1) A ideia de equação de 1º grau fosse explorada nas mágicas 1 e 2, e que a apresentação dessas mágicas estimulasse a criatividade dos alunos fazendo com que eles fossem capazes de "inventar" suas próprias mágicas.

2) O truque (ideia de deslocamento de unidades) envolvido na mágica 3 fosse compreendido pelos alunos.

3) A apresentação de todas as mágicas encantasse os alunos, e que a mágica 4 mostrasse aplicações de diversos conteúdos matemáticos, mesmo que estes ainda não tivessem sido aprendidos por eles.

4) As mágicas levadas pelos alunos, fossem na maioria, apenas novas reproduções da sugestão de invenção dada a eles, o que faria com que a ideia de equação fosse mais aprofundada.

5) Os alunos se encantassem mais com a Matemática motivando o aprendizado dos conteúdos propostos, e que uma valorização maior fosse dada a essa disciplina tida muitas vezes por eles como sendo de pouco significado.

Com a experimentação muitas das hipóteses foram validadas. Após o trabalho com mágicas, exercícios de resoluções de equações foram dados aos alunos, e todos sentiram-se mais motivados em resolvê-los. A interpretação e a tradução algébrica dos alunos foram novamente exploradas mostrando uma melhora significativa nestas.

A ideia de deslocamento em unidades na mágica 3 foi pouco compreendida pelos alunos, mostrando que ainda há uma falta de abstração e compreensão sobre localização e distâncias entre os números.

Os alunos realmente encantaram-se com as mágicas e mostraram bastante vontade de aprender novos conceitos matemáticos para entender alguns truques. Foi comentado e relembrado com eles a ideia de sequência, que seria um assunto mais detalhado no Ensino Médio, e que este era o conteúdo utilizado no truque da mágica 4. Muitos alunos se mostraram ansiosos.

Alguns alunos levaram suas próprias mágicas “inventadas” utilizando equações, mas a surpresa foi que muitos fizeram pesquisas e encontraram novas mágicas. Este interesse mostrou mais uma vez o encantamento deles com as mágicas. É notável o fato de que os alunos gostaram muito das mágicas.

Ao final das atividades, foi feita a seguinte pergunta para os alunos: **“O que as apresentações das mágicas matemáticas trouxeram para você? Ajudou no aprendizado de conteúdos como Equações do 1º grau?”**.

Descrevemos a seguir, com retoques ortográficos, as respostas dadas por alguns dos alunos e alunas.

Aluno 1:

> Mais aprendizado serve para aplicar mais sabedoria para os alunos.
> Sim, ajudou porque você está ali fazendo sua lição, de repente a professora chega com uma coisa nova para você saber mais. Uma coisa

que você nem sabia que existia está ali para você aprender. A matemática é como o mundo. A matemática é tudo.

Aluno 2:

A mágica me incentivou a pesquisar na internet para saber mais matemática.

Aluno 3:

As mágicas matemáticas me ajudaram com muitas contas e mais outras coisas. Também com essas mágicas eu aprendi truques novos para mostrar aos meus familiares.

E também essas mágicas me ajudam a desenvolver mais coisas, como fazer mais contas, também ajudaram a responder contas que eu não sabia como fazia, e foi isso.

Aluno 4:

Foi bom porque ajudou bastante nas lições e também foi muito legal brincar com a matemática.

E também motivou a querer saber mais sobre elas, aprendê-las de uma forma divertida.

Aluno 5:

Sim, agora me sinto motivado, com as mágicas as minhas notas em matemática melhoraram muito e eu não sabia que dava para fazer mágicas com matemática.

Aluno 6:

Me ajudou muito, eu me motivei nas lições de matemática e mudou meu desempenho.

Aluno 7:

Essas mágicas me incentivaram e nessas mágicas no começo eu não gostei muito delas. Agora esses dias elas me surpreenderam, aprendi a pesquisar e inventar mágica, e a mágica com números nunca tinha visto lá onde morava. E a matemática aprendi mais, da professora, gostei, foi uma das melhores. Obrigado Amanda.

Aluno 8:

Me ajudou mais em pensar e nas contas que vou ainda fazer na vida.

Ela também me motivou a pesquisar na internet para como fazer essas mágicas. Achei que não era divertido, mas quando fiz pela primeira vez gostei muito.

Nunca achei que a matemática era usada para isso em mágica.

Aluno 9:

As apresentações das mágicas ajudaram em muitas coisas.

Pois eu não sabia que tinha como fazer mágicas com a matemática.

A professora explicou e nos ensinou muito bem como fazer.

É muito divertido, dá para brincar com os vizinhos, amigos e família.

Todos nós adoramos as mágicas.

A mágica me ajudou bastante.

Pesquisei bastante sobre as mágicas na matemática.

Nas próximas figuras, encerrando este trabalho, são exibidos registros das respostas dos alunos em imagens.

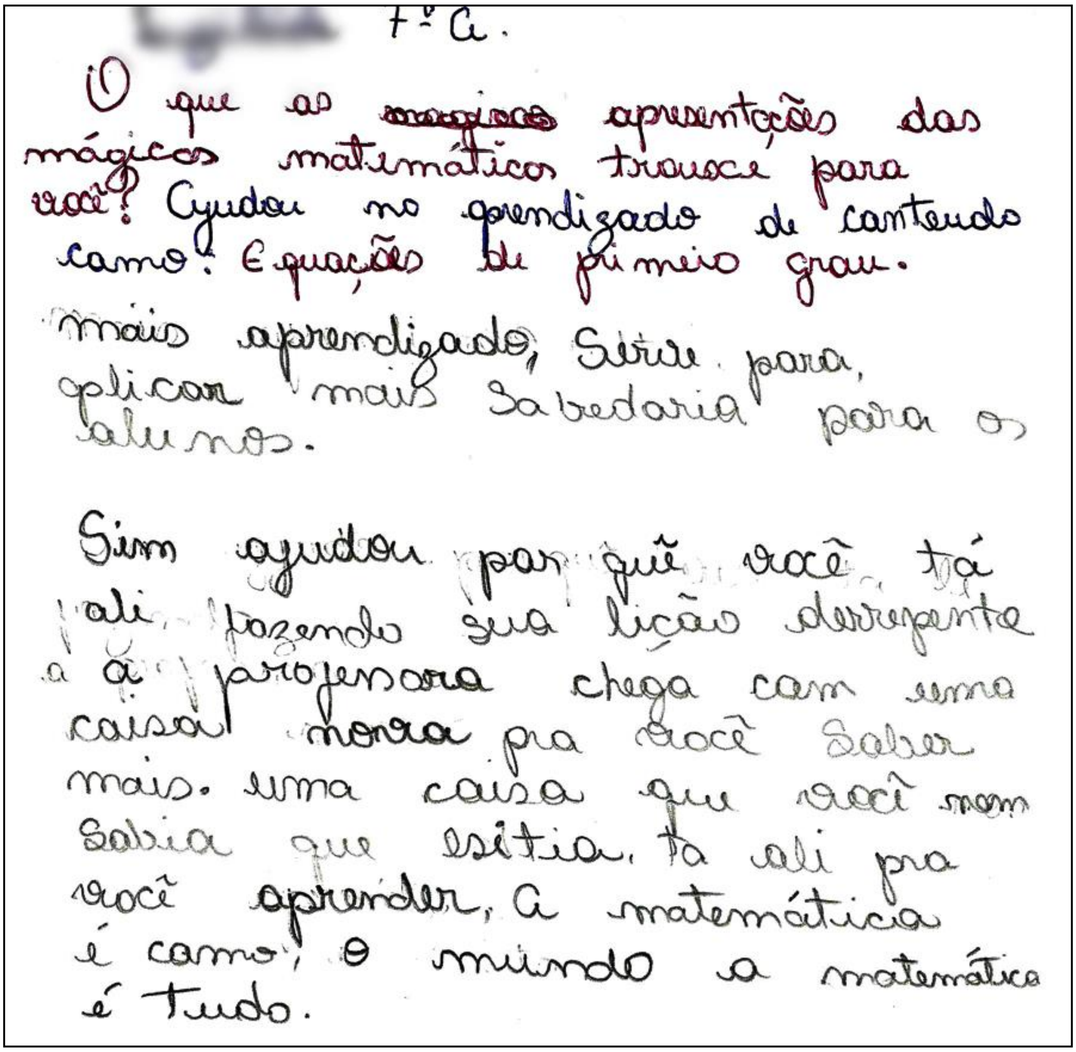


Figura 17. Resposta de aluno à pergunta formulada ao final das atividades.

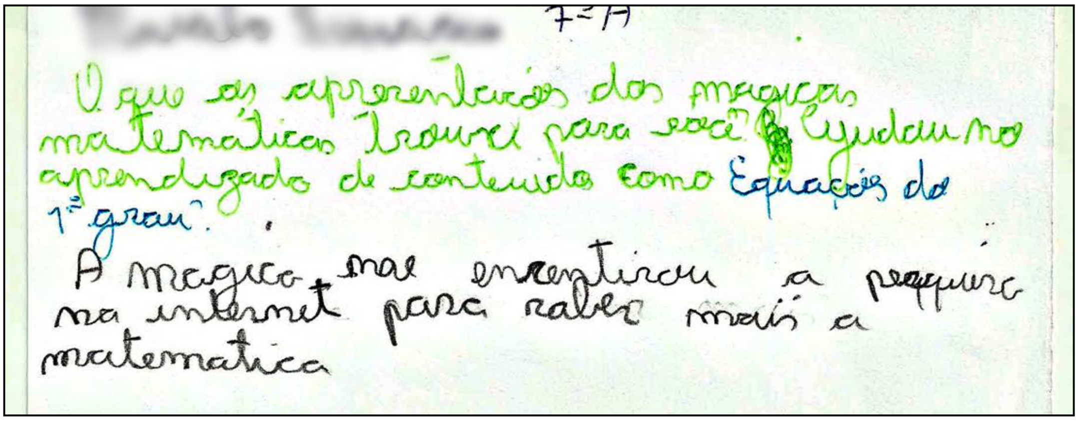
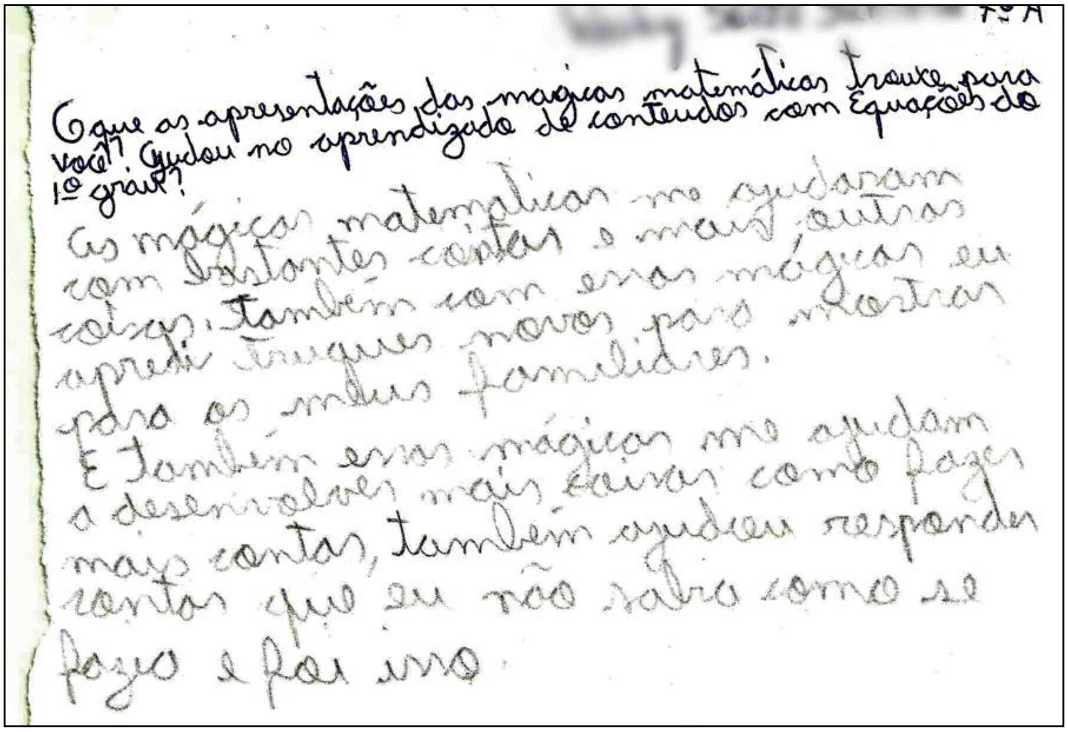


Figura 18. Resposta de aluno à pergunta formulada ao final das atividades.

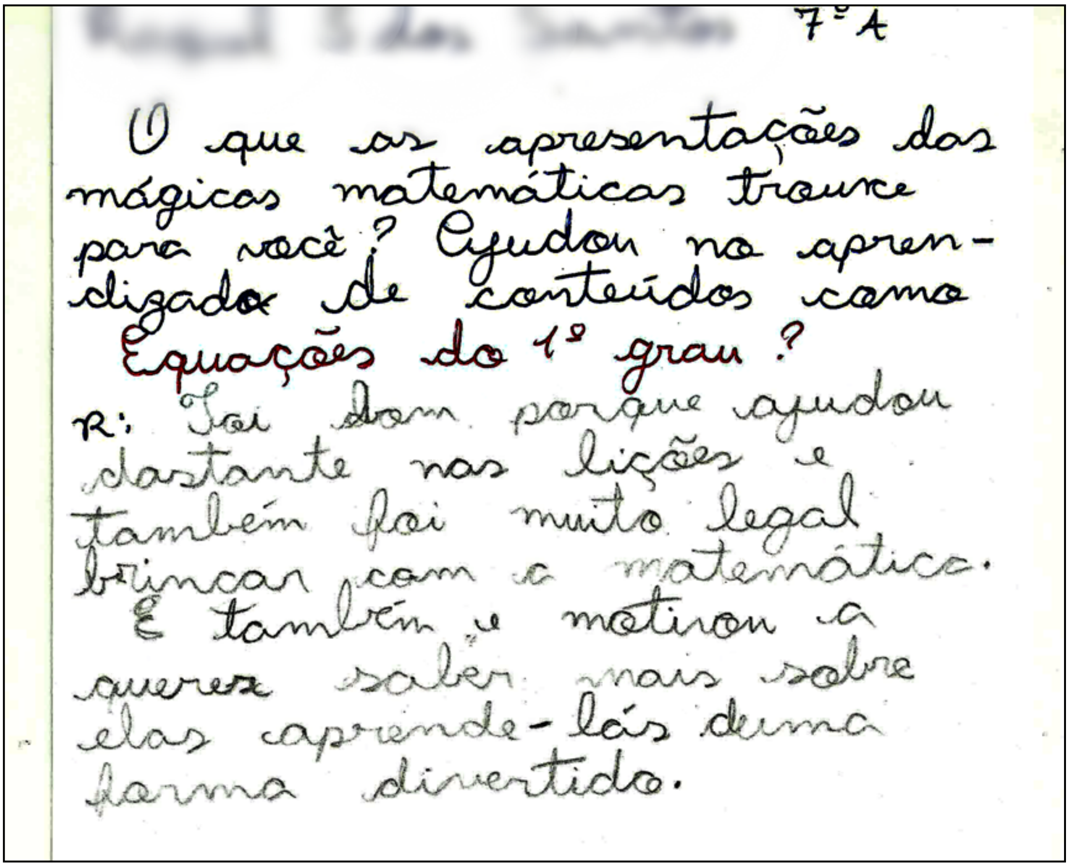


7º A

O que as apresentações das mágicas matemáticas trouxe para você? Ajudou no aprendizado de conteúdos com Equações do 1º grau?

As mágicas matemáticas me ajudaram com bastantes contas e mais outras coisas. também com essas mágicas eu aprendi truques novos para mostrar para os meus familiares.
E também essas mágicas me ajudam a desenvolver mais coisas como fazer mais contas, também ajudou responder contas que eu não sabia como se fazia e foi isso.

Figura 19. Resposta de aluno à pergunta formulada ao final das atividades.

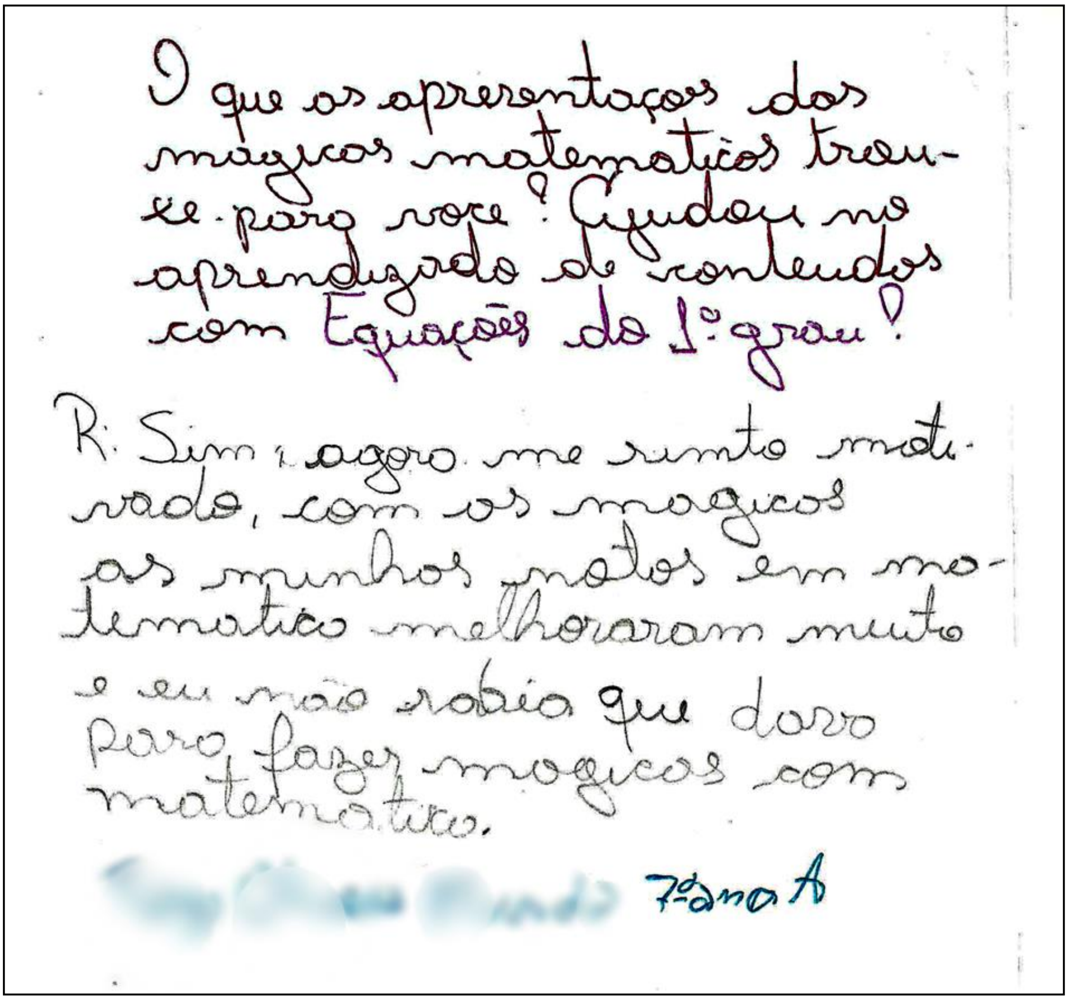


7º A

O que as apresentações das mágicas matemáticas trouxe para você? Ajudou no aprendizado de conteúdos como Equações do 1º grau?

R: Foi bom porque ajudou bastante nas lições e também foi muito legal brincar com a matemática.
E também e motivou a querer saber mais sobre elas aprende-lás duma forma divertido.

Figura 20. Resposta de aluno à pergunta formulada ao final das atividades.

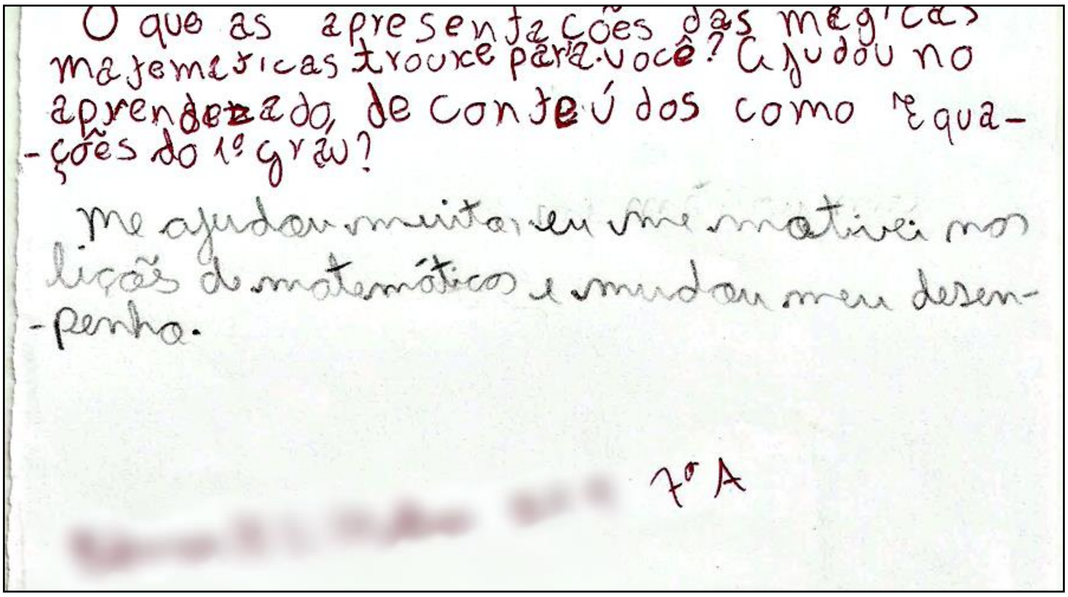


O que as apresentaçoes dos magicos matematicos trou-xe para voce? Ajudou no aprendizado de conteudos com Equações do 1º grau?

R: Sim, agora me sinto moti-vado, com os magicos as minhas notas em ma-tematica melhoraram muito e eu não sabia que dava para fazer magicas com matematica.

7º ano A

Figura 21. Resposta de aluno à pergunta formulada ao final das atividades.

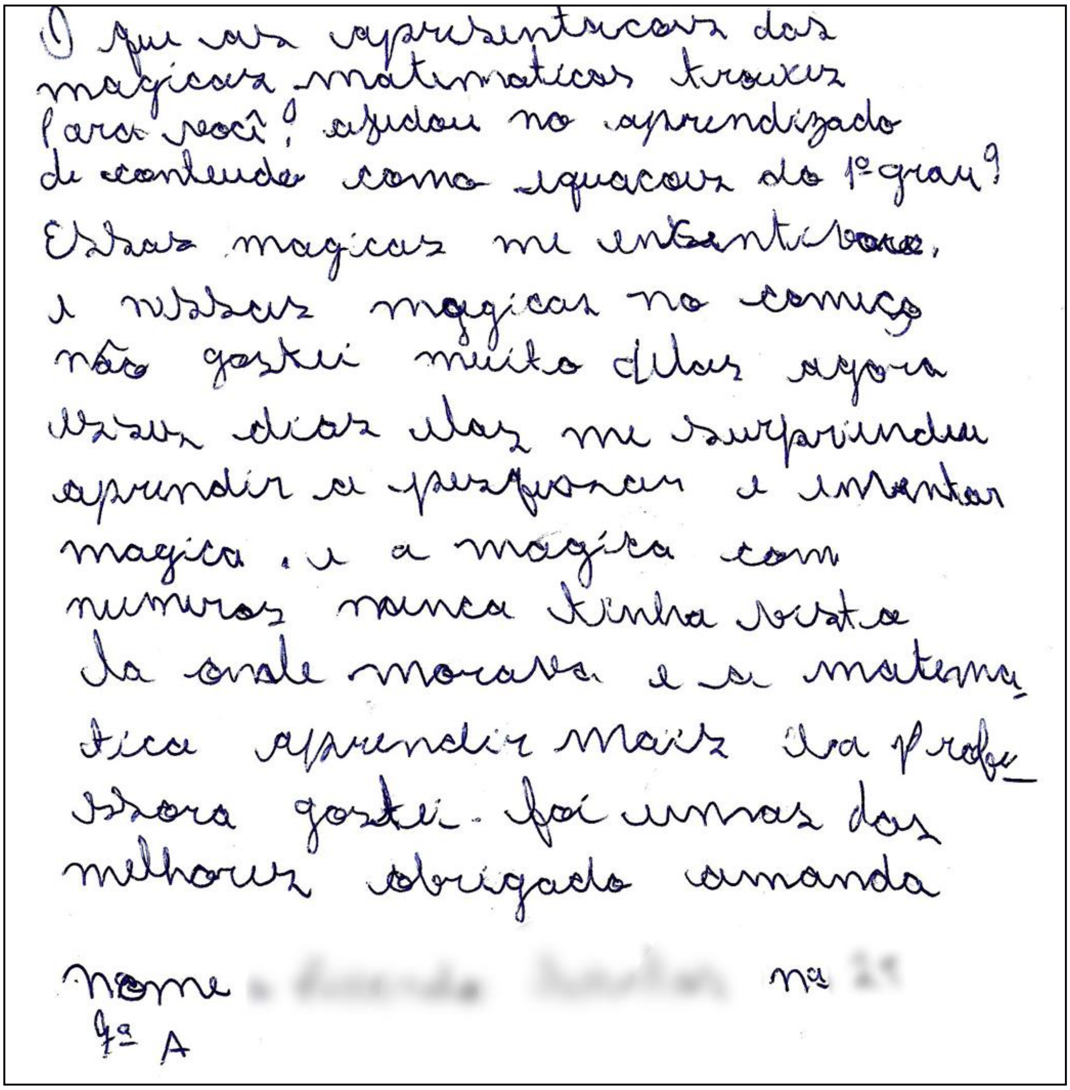


O que as apresentações das mágicas matematicas trouxe para você? Ajudou no aprendizado de conteúdos como Equa-ções do 1º grau?

Me ajudou muito, eu me motivei nas lições de matemáticas e mudou meu desem-penho.

7º A

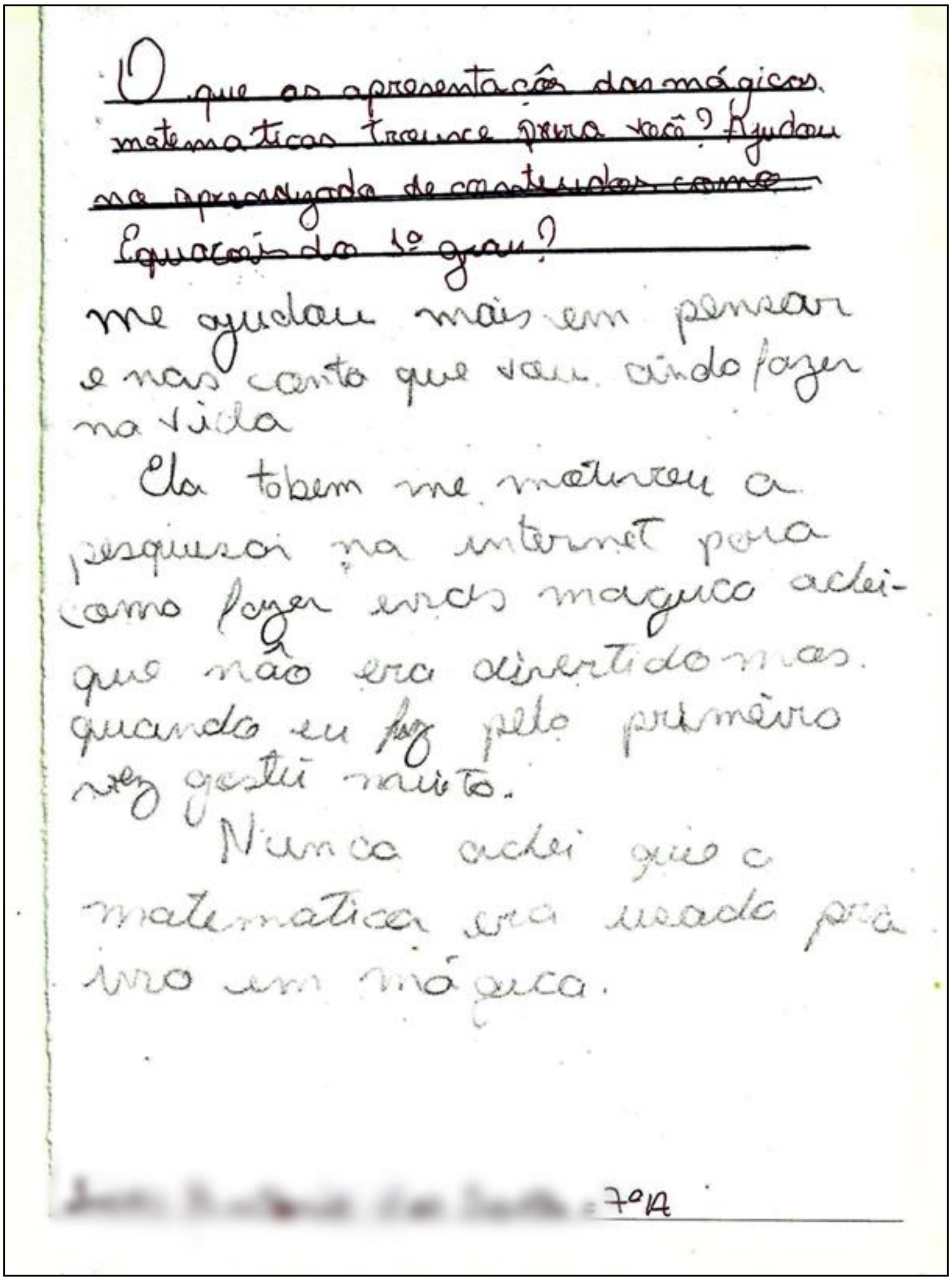
Figura 22. Resposta de aluno à pergunta formulada ao final das atividades.



O que as apresentacoes das
magicas matematicas trouxe
para você? ajudou no aprendizado
de conteudo como equacoes do 1º grau?
Estas magicas me encantarão.
e nessas magicas no começo
não gostei muito delas agora
esses dias elas me surpreendeu
aprender a perfomar e inventar
magica. e a magica com
numeros nunca tinha visto
la onde morava e a matema-
tica aprender mais da profe-
ssora gostei foi umas das
melhores obrigado amanda

nome [redacted] nº [redacted]
7ª A

Figura 23. Resposta de aluno à pergunta formulada ao final das atividades.



O que as apresentaçôes das mágicas matematicas trouxe para você? Ajudou na aprendizagem de conteudos como Equações do 1º grau?

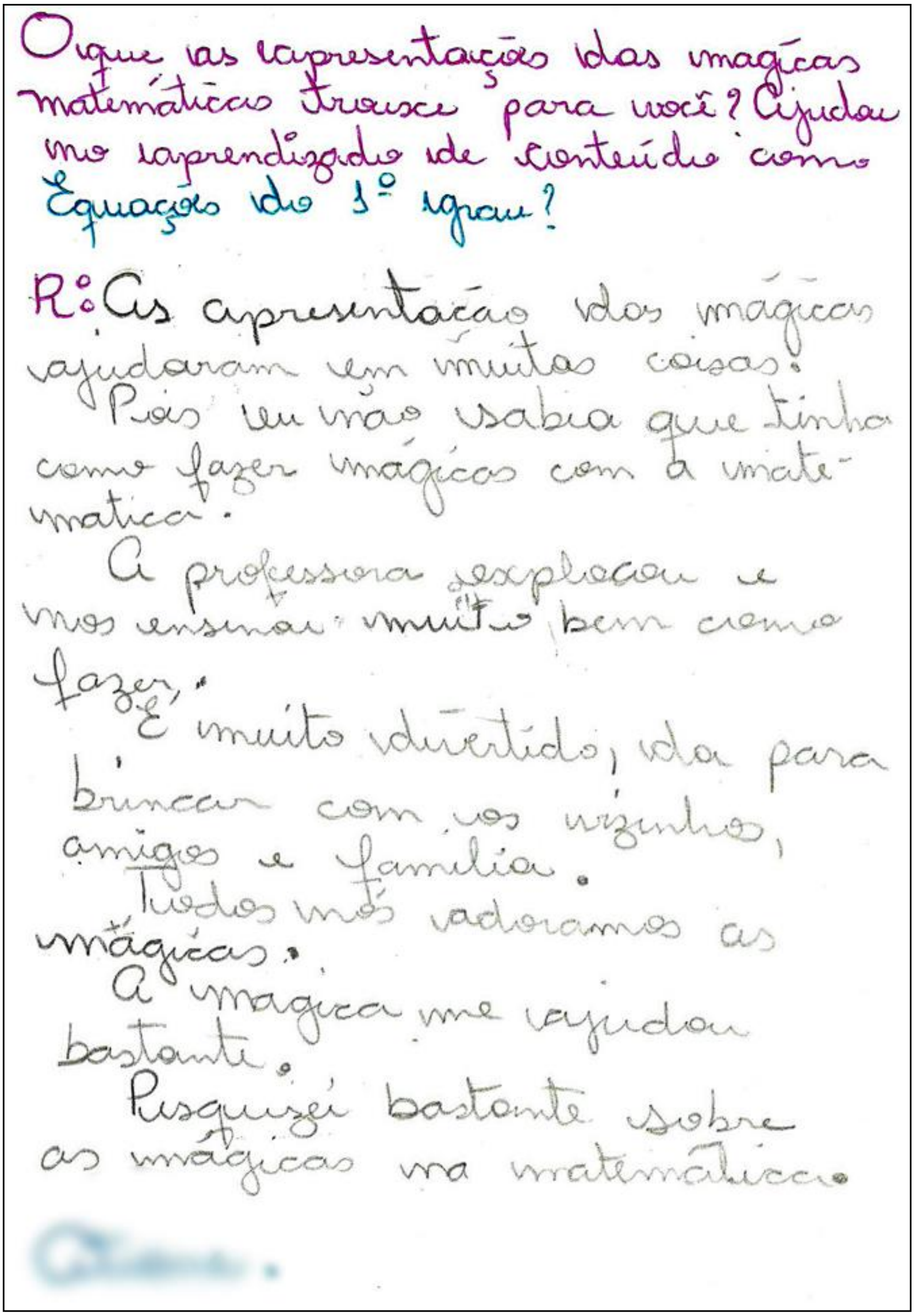
me ajudou mais em pensar e nas conto que vou aindo fazer na vida

Ela tobem me motivou a pesquisar na internet para como fazer essas magica achei que não era divertido mas quando eu fiz pelo primeiro vez gostei muito.

Nunca achei que a matematica era usada pra isso em mágica.

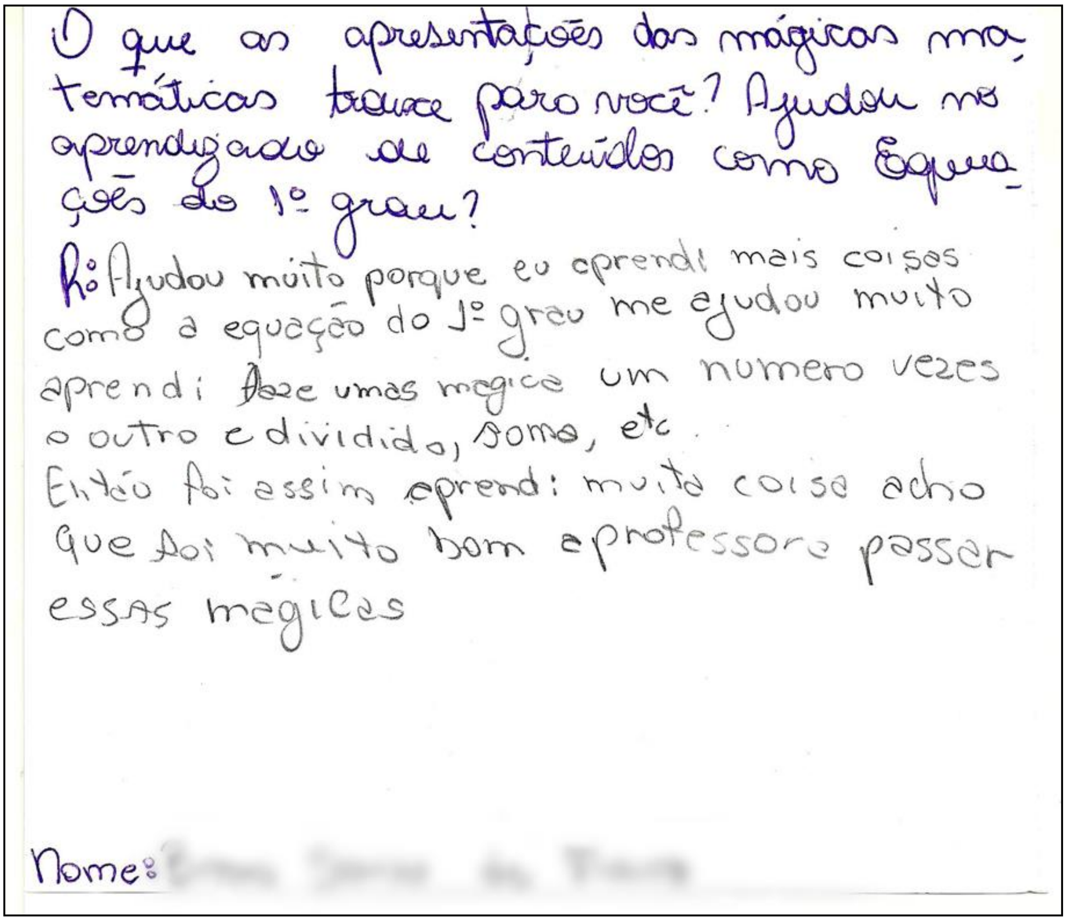
[redacted] 7ºA

Figura 24. Resposta de aluno à pergunta formulada ao final das atividades.


O que as apresentações das mágicas matemáticas trouxe para você? Ajudou no aprendizado de conteúdo como Equações do 1º grau?

R: As apresentacão dos mágicas ajudaram em muitas coisas.
Pois eu não sabia que tinha como fazer mágicas com a matemática.
A professora explicou e nos ensinou muito bem como fazer.
É muito divertido, dá para brincar com os vizinhos, amigos e família.
Todos nós adoramos as mágicas.
A mágica me ajudou bastante.
Pesquisei bastante sobre as mágicas na matemática.

Figura 25. Resposta de aluno à pergunta formulada ao final das atividades.



O que as apresentações das mágicas ma-
temáticas trouxe para você? Ajudou no
aprendizado de conteúdos como Equa-
ções do 1º grau?

R: Ajudou muito porque eu aprendi mais coisas
como a equação do 1º grau me ajudou muito
aprendi fez umas magica um numero vezes
o outro e dividido, soma, etc.
Então foi assim aprendi muita coisa acho
que foi muito bom a professora passar
essas magicas

Nome:

Figura 26. Resposta de aluno à pergunta formulada ao final das atividades.

Referências Bibliográficas

[Almeida] Cínthia Soares de Almeida. *Dificuldades de aprendizagem em Matemática e a percepção dos professores em relação a fatores associados ao insucesso nesta área.* Trabalho de Conclusão de Curso de Matemática da Universidade Católica de Brasília, 2006.

[Artigue], Michèle Artigue. *Engenharia Didática*. In: BRUN, Jean. *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996, p.193-217.

[Almouloud e Silva], Saddo Ag Almouloud e Maria José Ferreira da Silva. *Engenharia didática: evolução e diversidade*. Florianópolis, 2012.

[Sampaio-Malagutti] João Carlos Vieira Sampaio e Pedro Luiz Aparecido Malagutti. *Mágicas, matemática e outros mistérios.* São Carlos: EdUFSCar, 2008.

Apêndice

Resultados matemáticos utilizados em algumas das mágicas apresentadas nesse trabalho

Um número natural e a soma dos seus algarismos deixam o mesmo resto na divisão por 9.

1º) Seja $\boldsymbol{a}$ um número natural e $\sum(\boldsymbol{a})$ a soma dos algarismos de $\boldsymbol{a}$. Podemos mostrar que $\boldsymbol{a} - \sum(\boldsymbol{a})$ é divisível por 9.

Considere $a = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + \cdots + a_n \cdot 10^n$Assim,

$a - \sum(a) = (a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_n \cdot 10^n)$.

$-(a_0 + a_1 + a_2 + ... \, a_n)$

$a - \sum(a) = (10 - 1)a_1 + (10^2 - 1)a_2 + ... + (10^n - 1)a_n$

$a - \sum(a) = 9\, a_1 + 99\, a_2 + ... + 99...9\, a_n$

$a - \sum(a) = 9k$, com $k \in \mathbb{N}$.

Portanto, $a - \sum a$ é divisível por 9.

2º) Como $\boldsymbol{a} - \sum(\boldsymbol{a})$ é sempre divisível por 9, para todo $\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}$, temos que $\boldsymbol{a}$ e $\sum(\boldsymbol{a})$ possuem o mesmo resto na divisão por 9.

Consideremos $a = 9 \cdot q_1 + r_1$ e$\sum(a) = 9 \cdot q_2 + r_2$, sendo q_1 e r_1 o quociente e o resto da divisão de a por 9, e sendo q_2 e r_2 o quociente e o resto da divisão de $\sum(a)$ por 9.

Pelo resultado anterior, $a - \sum(a)$ é divisível por 9.

$$a - \sum(a) = (9 \cdot q_1 + r_1) - (9 \cdot q_2 + r_2)$$

Assim,

$$(9 \cdot q_1 + r_1) - (9 \cdot q_2 + r_2) = 9k$$

$$9(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2) = 9k$$

Logo $r_1 - r_2$ deve ser um múltiplo de 9. Mas $0 \leq r_1 \leq 8$ e$0 \leq r_2 \leq 8$ pois são restos de divisões por 9, restando então que $r_1 - r_2 = 0$. Portanto, $r_1 = r_2$.

Na quarta mágica do Capítulo 4 apresentada por um aluno, de título "**Descobrindo o resultado de operações com um número pensado utilizando-se a multiplicação por 9",** o resultado matemático utilizado é o de que um número e a soma de seus algarismos possuem o mesmo resto na divisão por 9. Vejamos.

Seja a o número natural escolhido pelo espectador com 1$\leq a \leq 9$. Fazendo $9 \cdot a$, e chamando $N = 9a$, encontra-se um múltiplo de 9, ou seja, N possui resto 0 na divisão por 9. Pelos resultados anteriores, o novo número encontrado calculando-se a soma dos algarismos de N também terá resto 0 na divisão por 9. Como o menor número que possui resto 0 na divisão por 9 é ele próprio, chega-se sempre a um 9. E então, o mágico pede para a pessoa subtrair 5, ou seja, subtrair 5 de 9, e depois multiplicar o resultado por 4, ou seja, calcular4×4 chegando sempre em 16.

Na quinta mágica do Capítulo 4 apresentada por um aluno, de título "**Descobrindo um resultado a partir de uma subtração de dois números de mesmos quatro algarismos distintos entre si**", o truque matemático utilizado é a junção dos dois resultados propostos anteriormente. Vejamos.

Seja $N = a_0a_1a_2a_3$um número formado por 4 algarismos distintos entre si, escolhido pelo espectador, algarismos estes de 1 a 9. Considere $S = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$.

Seja agora N' o novo número formado pelos mesmos algarismos de N. Pelos resultados anteriores, Ne S possuem o mesmo resto na divisão por 9. De forma análoga, N' e S também possuem o mesmo resto na divisão por 9. Assim, N e N' possuem o mesmo resto na divisão por 9. Logo, quando o espectador faz $N - N'$, ele estará encontrando um múltiplo de 9. Este múltiplo de 9 encontrado, possui resto 0 na divisão por 9, assim como a soma de seus algarismos. Tomando a soma dos algarismos sucessivamente, quantas vezes forem necessárias, o espectador chegará em um único algarismo, o 9.

Todo número natural tem uma representação única como soma de potências de 2 distintas entre si

Seja n um número inteiro positivo. Tomamos a maior potência de 2 que "cabe" em n, ou seja,2^mé a maior potência de 2 tal que$2^m \leq n$, sendo$m \in \mathbb{N}$.

Calculamos $n - 2^m$. Novamente tomamos a maior potência de 2 que cabe em$n - 2^m$.Seja essa nova potência igual a 2^p. Assim 2^pé menor que 2^m, pois senão, em n caberia $2^m + 2^m$ que é o mesmo que 2^{m+1} que é uma potência de 2 maior que 2^m, o que não é possível. Fazendo o mesmo processo sucessivas vezes, sendo que sempre será subtraída uma potência menor das já subtraídas, chegamos eventualmente à diferença $n - 2^m - 2^p - \cdots - 2^k$ sendo igual a zero, ou seja, $n = 2^m + 2^p + \cdots + 2^k$.

Por exemplo, tomando $n = 28$, temos 16 como a maior potência de 2 que "cabe" em n. Calculamos $28 - 16 = 12$, e agora teremos 8 como a maior potência de 2 que "cabe" em 12. Finalmente chegamos a $12 - 8 = 4$ e o algoritmo termina, nos dando 28 como sendo $28 = 16 + 8 + 4 = 2^4 + 2^3 + 2^2$.

Assim, todo número inteiro positivo pode ser representado por uma potência de 2 ou como soma de potências de 2, distintas entre si. A representação é única, pois a maior potência de 2 tomada em cada etapa é única.

A mágica 5 descrita no Capítulo 3 utiliza o fato de que todo número inteiro positivo possui representação única como soma de potências de 2, distintas entre si.