UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

O Produto Tensorial Não-Abeliano de Grupos e Aplicações

Gustavo Cazzeri Innocencio Figueiredo

São Carlos - SP
Março de 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

O Produto Tensorial Não-Abeliano de Grupos e Aplicações

Gustavo Cazzeri Innocencio Figueiredo
Bolsista FAPESP, processo 2013/01245-7
Orientador: Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

São Carlos - SP
Março de 2015

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F475p Figueiredo, Gustavo Cazzeri Innocencio
O produto tensorial não-abeliano de grupos e aplicações / Gustavo Cazzeri Innocencio Figueiredo. -- São Carlos : UFSCar, 2015.
248 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.

1. Produto tensorial não-abeliano. 2. Funtor quadrático universal de Whitehead. 3. Teoria de homotopia. I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Gustavo Cazzeri Innocencio Figueiredo, realizada em 22/04/2015:

Edivaldo Lopes dos Santos

Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos
UFSCar

Dirceu Penteado

Prof. Dr. Dirceu Penteado
UFSCar

João Peres Vieira

Prof. Dr. João Peres Vieira
UNESP

Agradecimentos

Agradeço principalmente à minha família. Meus pais: Antonio Carlos Innocencio Figueiredo e Ana Maria Cazzeri Innocencio Figueiredo, pelo amor e incentivo permanentes, pelo apoio enorme, por serem pessoas exemplares e por me passarem uma educação maravilhosa. Também agradeço muito aos meus irmãos: Gabriel Cazzeri Innocencio Figueiredo e Guilherme Cazzeri Innocencio Figueiredo, pelo apoio e paciência e por diversas vezes terem me colocado de volta no trilho da vida.

Agradeço ao professor Dr. Edivaldo Lopes dos Santos, pela orientação, atenção gentil, paciência, dedicação e amizade.

Ao professor Marek Golasinski, pela imprescindível contribuição e valiosa ajuda em todos os tópicos desse trabalho.

A todos os meus professores do departamento de matemática da UNESP do campus de Rio Claro, especialmente ao professor Dr. Henrique Lazari e à professora Drª. Alice Kimie Miwa Libardi, pela orientação e amizade. Aos professores do departamento de matemática da UFSCar e também aos professores Ronald Brown e Irene Naomi Nakaoka, pela ajuda em certos pontos.

Agradeço aos amigos e colegas, presentes e ausentes, de todas as épocas.

Um agradecimento especial à minha namorada Caroline Aparecida Ferro, que esteve ao meu lado o tempo todo, com amor, carinho, paciência e dedicação, que não me deixou desististir nunca, sempre dando forças e incentivando a continuar, fazendo assim enorme diferença na qualidade final desse trabalho.

Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP - que deu suporte financeiro a esse trabalho.

Resumo

O quadrado tensorial não-abeliano $G \otimes G$ de um grupo G foi introduzido por R. K. Dennis [8] em uma busca por novos funtores de homologia tendo uma íntima relação com a K-teoria e é baseado no trabalho de C. Miller [14]. Após isso, R. Brown e J.-L. Loday [6] descobriram uma importância topológica para o quadrado tensorial, a saber, que o terceiro grupo de homotopia da suspensão de um espaço de Eilenberg MacLane $K(G,1)$ satisfaz $\pi_3\big(SK(G,1)\big) \cong ker(\kappa_1)$, em que $\kappa_1 : G \otimes G \to G$ é o "homomorfismo comutador": $\kappa_1(g \otimes h) = [g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$, $\forall g,h \in G$. Os autores também definiram o produto tensorial $G \otimes H$ de dois grupos quaisquer agindo "compativelmente" um no outro e mostraram que este aparece em um certo "quadrado cruzado universal". O objetivo desse trabalho é apresentar o produto tensorial de grupos não-abelianos, suas primeiras propriedades e a aplicação dele na teoria de homotopia.

Palavras chave: Produto tensorial não-abeliano. Funtor quadrático universal de Whitehead. Teoria de homotopia.

Abstract

The nonabelian tensor square $G \otimes G$ of a group G was introduced by R. K. Dennis [8] in a search for new homology functors having a close relationship to K-theory and it is based on the work of C. Miller [14]. Subsequently R. Brown and J.-L. Loday [6] discovered a topological significance for the tensor square, namely, that the third homotopy group of the suspension of an Eilenberg MacLane space $K(G,1)$ satisfies $\pi_3\big(SK(G,1)\big) \cong ker(\kappa_1)$, where $\kappa_1 : G \otimes G \to G$ is the "comutator homomorphism": $\kappa_1(g \otimes h) = [g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$, $\forall g,h \in G$. They also defined the tensor product $G \otimes H$ of two distinct groups acting "compatibly" on each other and showed that it arose in a certain "universal crossed square". The main purpose of this work is to present the first properties of the nonabelian tensor product of groups and its applications in homotopy theory.

Key words: Nonabelian tensor product. Whitehead universal quadratic functor. Homotopy theory.

Sumário

Símbolos

$\varnothing$	Conjunto vazio;
$a \in A$	O conjunto a pertence ao conjunto A, isto é, a é elemento de A;
$B \subset A$	O conjunto B é subconjunto do conjunto A;
$A \setminus B$	Conjunto de todos os elementos de A que não são elementos de B;
$\wp(X)$	Conjunto das partes do conjunto X, o conjunto que tem como elementos exatamente todos os subconjuntos de X;
$\cup\mathcal{F}$	União do conjunto $\mathcal{F}$, o conjunto que tem como elementos exatamente todos os elementos de todos os elementos de $\mathcal{F}$. O mesmo que $\bigcup\limits_{A\in\mathcal{F}} A$;
$\cap\mathcal{F}$	Intercessão do conjunto $\mathcal{F}$. O conjunto $\cap\mathcal{F} = \big\{a \in \cup\mathcal{F} \,:\, (\forall A)(A \in \mathcal{F} \longrightarrow a \in A)\big\}$. O mesmo que $\bigcap\limits_{A\in\mathcal{F}} A$;
$A \cup B$	O conjunto $\cup\{A, B\}$;
$A \cap B$	O conjunto $\cap\{A, B\}$;
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais. Visto como espaço topológico, tem a topologia usual (euclidiana);
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Visto como grupo, é o grupo aditivo dos racionais $(\mathbb{Q}, +)$;
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Visto como grupo, é o grupo aditivo dos inteiros $(\mathbb{Z}, +)$;
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\} \subset \mathbb{Z}$;
$\mathbb{N}^*$	Conjunto dos números naturais sem o zero, isto é, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$;
$\lvert t\rvert$	Valor absoluto do número $t \in \mathbb{R}$, isto é, se $t \geqslant 0$, então $\lvert t\rvert = t$, e se $t < 0$, então $\lvert t\rvert = -t$;
$mdc(n, m)$	Máximo divisor comum dos números $n, m \in \mathbb{Z}$;

$\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j$	O conjunto $\cup\{A_1, A_2, ..., A_n\} = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$, em que $n \in \mathbb{N}^*$;
$\bigcap\limits_{j=1}^{n} A_j$	O conjunto $\cap\{A_1, A_2, ..., A_n\} = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$, em que $n \in \mathbb{N}^*$;
$\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$	O conjunto $\cup\{A_1, A_2, ...\} = A_1 \cup A_2 \cup ...$;
$\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j$	O conjunto $\cap\{A_1, A_2, ...\} = A_1 \cap A_2 \cap ...$;
(a, b)	O par ordenado com primeira entrada a e segunda entrada b, isto é, o conjunto $(a, b) = \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}$;
$A\times B$	Conjunto de todos os pares ordenados com primeira entrada em A e segunda entrada em B, isto é, o conjunto $A \times B = \Big\{(a, b) \in \wp\big(\wp(A \cup B)\big) \,:\, a \in A \ \text{ e } \ b \in B\Big\}$;
$A\sqcup B$	União disjunta dos conjuntos A e B. O conjunto $A\sqcup B = (A\times\{0\}) \cup (B\times\{1\})$;
A^n	O conjunto $A^n = A^{n-1} \times A$, para $n \in \mathbb{N}^*$, com $n \geqslant 3$, em que $A^2 = A\times A$;
B^A	Conjunto de todas as funções do conjunto A no conjunto B, isto é, o conjunto de todos os subconjuntos de $A\times B$ que são funções;
$X^{\mathbb{N}^*}$	Conjunto das seqüências de elementos de X indexadas em $\mathbb{N}^*$, isto é, funções de $\mathbb{N}^*$ em X;
$\lvert X\rvert$	Cardinal do conjunto X;
$\aleph_0$	O menor cardinal infinito, isto é, o ordinal $\omega = \aleph_0 = \lvert\mathbb{N}\rvert$. Conforme a ocasião, identificamos ω com $\mathbb{N}$, os elementos de ω com os respectivos elementos de $\mathbb{N}$ e $X^{\mathbb{N}}$ com X^{ω}, qualquer que seja o conjunto X. Dessa forma, para todo conjunto X, também identificamos $X^n = X^{n-1} \times X$, para $n \in \mathbb{N}$, com $X^n \subset n \times X$, para o respectivo $n \in \omega$, com $n \geqslant 2$;
$im(f)$	Conjunto imagem da função f;
$f\vert_X$	Função f restrita ao conjunto X;
$f[X]$	Imagem do conjunto X pela função f, isto é, $f[X] = im(f\vert_X)$;
$f^{-1}[Y]$	Preimagem do conjunto Y pela função f;
$f \times g$	Função produto cartesiano das funções f e g;

ΠF	Produto cartesiano da função F. Sendo D o conjunto domínio da função F, então ΠF é o conjunto $\Pi F = \Big\{f \in [\cup\, im(F)]^D : (\forall x \in D)[f(x) \in F(x)]\Big\}$. Também denotamos $\Pi F = \Pi\, im(F) = \prod_{x\in D} F(x) = \prod_{x\in D} F_x$. Se D é enumerável, $D = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$, denotamos $\Pi F = \prod_{j=1}^{\infty} F(x_j)$. Se D é finito, $D = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, denotamos $\Pi F = \prod_{j=1}^{n} F(x_j)$. Se $F(x)$ for um grupo, $\forall x \in D$, então pode-se colocar em ΠF a estrutura usual de grupo de produto direto;
$Obj(\mathsf{K})$	Conjunto dos objetos da categoria K;
$Mor(\mathsf{K})$	Conjunto dos morfismos da categoria K;
$\mathsf{E} \leqslant \mathsf{C}$	A categoria E é subcategoria da categoria C;
$dom(f)$	Objeto domínio do morfismo f na categoria em questão;
$cod(f)$	Objeto codomínio do morfismo f na categoria em questão;
$Hom_{\mathsf{K}}(A, B)$	Subconjunto dos morfismos $f \in Mor(\mathsf{K})$ tais que $dom(f) = A$ e $cod(f) = B$, em que K é uma categoria;
$f : A \to B$	Morfismo pertencente ao conjunto $Hom_{\mathsf{K}}(A, B)$, para a categoria em questão K. Informalmente, pode se referir apenas a uma função (relação unívoca), elemento de $B^A \subset A \times B$;
$g \circ f$	Morfismo composição dos morfismos f e g na categoria em questão;
f^{-1}	Morfismo inverso do isomorfismo f na categoria em questão. Também pode se referir à relação inversa de uma relação (conjunto de pares ordenados) f;
id_X	Morfismo identidade do objeto X na categoria em questão. Informalmente, pode se referir à função identidade (conjunto diagonal) de um conjunto X;
$\mathsf{K}^{\to}$	Categoria de flechas da categoria K, a categoria que tem como objetos os morfismos de K, isto é, $Obj(\mathsf{K}^{\to}) = Mor(\mathsf{K})$ e tem como morfismos pares de morfismos de K que comutam quadrados, isto é, $Mor(\mathsf{K}^{\to}) = \cup\big\{Hom_{\mathsf{K}^{\to}}(f, g) : f, g \in Mor(\mathsf{K})\big\}$, em que, $\forall f, g \in Mor(\mathsf{K})$, definimos que $(u, v) \in Hom_{\mathsf{K}^{\to}}(f, g)$ se, e somente se, $dom(u) = dom(f)$, $cod(u) = dom(g)$, $dom(v) = cod(f)$, $cod(v) = cod(g)$ e $g \circ u = v \circ f$, $\forall u, v \in Mor(\mathsf{K})$;
Set	Categoria dos conjuntos e funções;
Grp	Categoria dos grupos e homomorfismos de grupos;

Ab	Categoria dos grupos abelianos e homomorfismos de grupos abelianos;
Top	Categoria dos espaços topológicos e funções contínuas;
Top^{+}	Categoria dos espaços topológicos com pontos marcados e funções contínuas que levam pontos marcados em pontos marcados;
Top_2^{+}	Categoria dos pares de espaços topológicos com pontos marcados;
Ad_3^{+}	Categoria das tríades de espaços topológicos com pontos marcados;
TH	Categoria de homotopia da categoria com uso topológico T, isto é, TH é a categoria quociente da categoria T pela relação de equivalência de homotopia entre seus morfismos;
XMod	Categoria de módulos cruzados de grupos e homomorfismos de módulos cruzados de grupos;
XSq	Categoria de quadrados cruzados de grupos e homomorfismos de quadrados cruzados de grupos;
$G \leqslant P$	G é subgrupo do grupo P;
$G \lhd P$	G é subgrupo normal do grupo P;
P/G	Grupo quociente do grupo P pelo subgrupo normal G;
$e_{_G}$	Elemento neutro do grupo G;
g^{-1}	Elemento inverso do elemento $g \in G$, em que G é um grupo;
$G \cong 0$	O grupo G é um grupo trivial, isto é, tem apenas um elemento, seu elemento neutro;
$Z(G)$	Centro do grupo G;
$Hom(G,H)$	Conjunto dos homomorfismos do grupo G no grupo H, isto é, $Hom(G,H) = Hom_{\mathsf{Grp}}(G,H)$;
$Aut(G)$	Grupo dos automorfismos do grupo G, isto é, o conjunto dos elementos de $Hom(G,G)$ que são isomorfismos;
$G \cong H$	O grupo G é isomorfo ao grupo H;
$ker(\phi)$	Núcleo do homomorfismo ϕ. Se G e H são grupos, $\phi \in Hom(H,G)$ e $e_{_G} \in G$ é o elemento neutro, então $ker(\phi) = \phi^{-1}[\{e_{_G}\}] \lhd H$;
$X \cdot Y$	O conjunto $X \cdot Y = \{xy \in G : x \in X \text{ e } y \in Y\}$, em que G é um grupo e $X, Y \in \wp(G)$. Também denotamos $X \cdot Y = XY$. Na notação aditiva, denotamos $X \cdot Y = X + Y$;

$x \cdot X$	O conjunto $\{x\} \cdot X$, em que G é um grupo, $x \in G$ e $X \in \wp(G)$. Também denotamos $x \cdot X = xX$. Na notação aditiva, denotamos $x \cdot X = x + X$;
$X \cdot x$	O conjunto $X \cdot \{x\}$, em que G é um grupo, $x \in G$ e $X \in \wp(G)$. Também denotamos $X \cdot x = Xx$. Na notação aditiva, denotamos $X \cdot x = X + x$;
$\mathbb{Z}_n$	O grupo aditivo dos inteiros módulo n, em que $n \in \mathbb{Z}$, isto é, $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;
$Sym(X)$	Grupo simétrico sobre o conjunto X, o grupo das permutações de elementos de X, isto é, funções bijetoras de X em X, com a operação de composição usual de funções. Se G é um grupo, então $Aut(G) \leqslant Sym(G)$;
f^{-1}	Função inversa de uma função $f \in Sym(X)$, em que X é um conjunto. Esta função inversa coincide com o elemento inverso de f no grupo $Sym(X)$;
$\langle X \rangle$	Subgrupo de G gerado pelo conjunto X, em que $X \subset G$ e G é um grupo;
$\langle X \rangle_N$	Subgrupo normal de G gerado pelo conjunto X (fecho normal de X em G), em que $X \subset G$ e G é um grupo;
$Sp(X)$	Fecho por produtos do conjunto X em G, em que $X \subset G$ e G é um grupo;
$\langle x \rangle$	O subgrupo $\langle \{x\} \rangle$ de G, gerado pelo conjunto $\{x\}$, em que $x \in G$ e G é um grupo. É o grupo cíclico gerado pelo elemento x;
F_A	Grupo livre sobre o conjunto A;
$\langle A \vert R \rangle$	Apresentação de um grupo com geradores no conjunto A e relatores no conjunto R, isto é, qualquer grupo isomorfo a $\langle A \vert R \rangle = F_A / \langle R \rangle_N$, em que $R \subset F_A$;

$\oplus F$	O subgrupo $\oplus F = \Big\{ f \in \Pi F \,:\, D \setminus f^{-1}[\mathcal{O}_F] \text{ é finito} \Big\} \leqslant \Pi F$, em que ΠF tem a estrutura de grupo usual de produto direto, D é o conjunto domínio da função F, $\mathcal{O}_F = \big\{ e_{F(x)} \in \cup\, im(F) \,:\, x \in D \big\}$ é o conjunto dos elementos neutros $e_{F(x)} \in F(x)$ e $F(x)$ é um grupo abeliano, $\forall x \in D$. Temos que ambos ΠF e $\oplus F$ são grupos abelianos e que $\oplus F = \Pi F$ se, e somente se, D é finito. Também denotamos $\oplus F = \oplus\, im(F) = \underset{x \in D}{\oplus} F(x) = \underset{x \in D}{\oplus} F_x$. Se D é enumerável, $D = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$, denotamos $\oplus F = \overset{\infty}{\underset{j=1}{\oplus}} F(x_j)$. Se D é finito, $D = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, denotamos $\oplus F = \overset{n}{\underset{j=1}{\oplus}} F(x_j)$;
$A \oplus B$	O grupo abeliano $\oplus F \cong A \times B$, com a estrutura de grupo usual de produto direto, em que A e B são grupos abelianos e F é a função $F = \{(1, A), (2, B)\}$;
$\mathbb{Q}_1$	Grupo dos racionais módulo 1, isto é, $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$;
$[g, h]$	Comutador dos elementos $g, h \in G$, com primeira entrada g e segunda entrada h, isto é, $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$, em que G é um grupo;
$\lfloor A, B \rfloor$	Conjunto de todos os comutadores com primeira entrada em A e segunda entrada em B, em que $A, B \in \wp(G)$ e G é um grupo;
$[A, B]$	Subgrupo gerado pelo conjunto $\lfloor A, B \rfloor$, isto é, $[A, B] = \langle \lfloor A, B \rfloor \rangle$, em que $A, B \in \wp(G)$ e G é um grupo;
G'	Subgrupo derivado do grupo G, isto é, $G' = [G, G]$;
G^{ab}	Grupo abelianizado do grupo G, isto é, $G^{ab} = G/G'$;
${}^{g}x$	Elemento $g \in G$ agindo no elemento $x \in X$ por alguma ação de grupos de G em X em questão, em que $g \in G$, $x \in X$, G é um grupo e X é um conjunto;
c^G	Ação por conjugação do grupo G. Por definição, temos que $c^G \in Hom\big(G, Aut(G)\big)$, em que $[c^G(g)](x) = c^G_g(x) = gxg^{-1}$, $\forall g, x \in G$;
c^P_{GH}	Restrição da conjugação do grupo P aos seus subconjuntos $G \subset P$ e $H \subset P$. Por definição, $c^P_{GH} : G \to H^H$ é tal que $c^P_{GH}(g) = [c^P(g)]\vert_H = c^P_g\vert_H$, $\forall g \in G$, em que $c^P \in Hom\big(P, Aut(P)\big)$ é a ação por conjugação de P. Se $G \leqslant P$ e $H \lhd P$, então $c^P_{GH} \in Hom\big(G, Aut(H)\big)$;
$(A \otimes_{\mathbb{Z}} B)_\beta$	Produto tensorial abeliano dos grupos abelianos ($\mathbb{Z}$-módulos) A e B, com a função bilinear β;

$(G\otimes H)_{\tau}^{(\theta,\xi)}$	Produto tensorial dos grupos G e H, com o pareamento cruzado τ, com respeito às ações $\theta : G \to Sym(H)$ e $\xi : H \to Sym(G)$;
$(G\wedge H)_{\varepsilon}$	Produto exterior dos grupos G e H, com o pareamento exterior ε;
$g \otimes h$	Gerador do produto tensorial, com primeira entrada g e segunda entrada h. Se $g\otimes h \in (G\otimes H)_{\tau}^{(\theta,\xi)}$, então $g\otimes h = \tau(g,h)$;
$g \wedge h$	Gerador do produto exterior, com primeira entrada g e segunda entrada h. Se $g\wedge h \in (G\wedge H)_{\varepsilon}$, então $g\wedge h = \varepsilon(g,h)$;
$S_{(\theta,\xi)}$	Conjunto das relações (relatores) usuais da definição de produto tensorial com respeito às ações $\theta : G \to Sym(H)$ e $\xi : H \to Sym(G)$, em que G e H são grupos e $S_{(\theta,\xi)} \subset F_{G\times H}$;
$\mathcal{P}_{(G,H,T)}^{(\theta,\xi)}$	Conjunto de todos os pareamentos cruzados $\tau : G\times H \to T$ com respeito às ações $\theta : G \to Sym(H)$ e $\xi : H \to Sym(G)$, tais que $T = (G\otimes H)_{\tau}^{(\theta,\xi)}$, em que G, H e T são grupos;
$\mathcal{Q}_{(G,H,E)}$	Conjunto de todos os pareamentos exteriores $\varepsilon : G\times H \to E$ tais que $E = (G\wedge H)_{\varepsilon}$, em que P e E são grupos, $G \lhd P$ e $H \lhd P$;
$T_{(G\times H,\theta,\xi)}$	Conjunto de todos os produtos tensoriais de G e H com algum pareamento cruzado com respeito às ações $\theta : G \to Sym(H)$ e $\xi : H \to Sym(G)$, em que G, H e T são grupos;
$E_{(G\times H,c_{GH}^{P},c_{HG}^{P})}$	Conjunto de todos os produtos exteriores de G e H com algum pareamento exterior, em que P e E são grupos, $G \lhd P$ e $H \lhd P$;
$(\alpha \otimes \beta)_{(Y,\tau)}^{(X,v)}$	Produto tensorial dos homomorfismos de grupos $\alpha : A \to G$ e $\beta : B \to H$, em que A, B, G, H, V e T são grupos, $\lambda : A \to Sym(B)$, $\kappa : B \to Sym(A)$, $\theta : G \to Sym(H)$ e $\xi : H \to Sym(G)$ são ações de grupos, $v : A\times B \to V$ é um pareamento cruzado com respeito à λ e κ, $\tau : G\times H \to T$ é um pareamento cruzado com respeito à θ e ξ, $X = (A\times B,\lambda,\kappa)$, $Y = (G\times H,\theta,\xi)$, $V = (A\otimes B)_{v}^{(\lambda,\kappa)}$ e $T = (G\otimes H)_{\tau}^{(\theta,\xi)}$. O homomorfismo de grupos $(\alpha \otimes \beta)_{(Y,\tau)}^{(X,v)} : (A\otimes B)_{v}^{(\lambda,\kappa)} \to (G\otimes H)_{\tau}^{(\theta,\xi)}$ induzido do produto cartesiano de homomorfismos de grupos $\alpha\times\beta : A\times B \to G\times H$, os quais preservam as ações envolvidas;

$(\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega)}_{(Y,\varepsilon)}$ Produto exterior dos homomorfismos de grupos $\alpha : A \to G$ e $\beta : B \to H$, em que J, P, W e E são grupos, $A \lhd J$, $B \lhd J$, $G \lhd P$, $H \lhd P$, $\omega : A \times B \to W$ e $\varepsilon : G \times H \to E$ são pareamentos exteriores, $X = (A \times B, c^J_{AB}, c^J_{BA})$, $Y = (G \times H, c^P_{GH}, c^P_{HG})$, $W = (A \wedge B)_\omega$ e $E = (G \wedge H)_\varepsilon$. O homomorfismo de grupos $(\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega)}_{(Y,\varepsilon)} : (A \wedge B)_\omega \to (G \wedge H)_\varepsilon$ induzido do produto cartesiano de homomorfismos de grupos $\alpha \times \beta : A \times B \to G \times H$, os quais preservam as restrições da conjugação e coincidem na intercessão $A \cap B$;

$J_2(G)$ O núcleo do homomorfismo comutador do produto tensorial $G \otimes G$, em que G é um grupo;

$M(G)$ O multiplicador de Schur do grupo G, aqui identificado como sendo o núcleo do homomorfismo comutador do produto exterior $G \wedge G$;

$\Delta\gamma$ A imagem do elemento $\gamma \in H^G$ pela função $\Delta : H^G \to H^{G \times G}$, em que G e H são grupos. Temos que $\Delta\gamma = \Delta(\gamma)$ e que $\Delta\gamma(a, b) = [\gamma(b)]^{-1} \cdot [\gamma(a)]^{-1} \cdot \gamma(ab)$, $\forall a, b \in G$, $\forall \gamma \in H^G$;

Γ^γ_A Grupo quadrático universal do grupo abeliano A, com a função quadrática γ;

$\gamma(a)$ Gerador do grupo quadrático universal de um grupo abeliano A, com a função quadrática γ. A imagem do elemento $a \in A$ pela função $\gamma : A \to \Gamma^\gamma_A$;

$\mathcal{V}_{(A,\Gamma)}$ Conjunto de todas as funções quadráticas $\gamma : A \to \Gamma$ tais que $\Gamma = \Gamma^\gamma_A$, em que A e Γ são grupos abelianos;

Q_A Conjunto de todos os grupos quadráticos universais de A com alguma função quadrática, em que A é um grupo abeliano;

$\Gamma^{\gamma\lambda}_f$ Homomorfismo de grupos abelianos $\Gamma^{\gamma\lambda}_f : \Gamma^\gamma_A \to \Gamma^\lambda_B$ induzido do homomorfismo de grupos abelianos $f : A \to B$, em que A e B são grupos abelianos, Γ^γ_A é o grupo quadrático universal de A com a função quadrática $\gamma : A \to \Gamma^\gamma_A$ e Γ^λ_B é o grupo quadrático universal de B com a função quadrática $\lambda : B \to \Gamma^\lambda_B$;

T_0 Funtor produto tensorial;

E_0 Funtor produto exterior;

$\mathsf{\Gamma}_0$ Funtor quadrático universal de Whitehead;

$X \approx Y$ O espaço topológico X é homeomorfo ao espaço topológico Y;

$[a, b]$ O intervalo real fechado $[a, b] \subset \mathbb{R}$, em que $a \leqslant b$. Visto como espaço topológico, tem a topologia induzida da topologia usual de $\mathbb{R}$;

$]a,b[$	O intervalo real aberto $]a,b[\subset\mathbb{R}$, em que $a\leqslant b$. Visto como espaço topológico, tem a topologia induzida da topologia usual de $\mathbb{R}$;
$[a,b[$	O intervalo real $[a,b[\subset\mathbb{R}$, fechado em a e aberto em b, em que $a\leqslant b$. Visto como espaço topológico, tem a topologia induzida da topologia usual de $\mathbb{R}$;
$]a,b]$	O intervalo real $]a,b]\subset\mathbb{R}$, aberto em a e fechado em b, em que $a\leqslant b$. Visto como espaço topológico, tem a topologia induzida da topologia usual de $\mathbb{R}$;
$\Vert x\Vert$	Norma usual (euclidiana) do ponto $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$, em que $n\in\mathbb{N}^*$. Temos que $\Vert x\Vert=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}x_j^2}$;
SX	Suspensão reduzida do espaço topológico com ponto marcado $(X,x_0)\in\mathrm{Top}^+$;
C_-X	Cone inferior de X;
C_+X	Cone superior de X;
$\pi_n(X,x_0)$	Grupo de homotopia absoluto n-dimensional do espaço com ponto marcado $(X,x_0)\in Obj(\mathrm{Top}^+)$, para $n\in\mathbb{N}^*$;
$\pi_0(X,x_0)$	Conjunto das classes de homotopia de morfismos de $Hom_{\mathrm{Top}^+}\big((\{-1,1\},1),(X,x_0)\big)$, em que $\{-1,1\}=S^0\subset\mathbb{R}$ tem a topologia induzida da topologia usual de $\mathbb{R}$;
$\pi_n(X,A,x_0)$	Grupo de homotopia relativo n-dimensional do par com ponto marcado $(X,A,x_0)\in Obj(\mathrm{Top}_2^+)$, para $n\in\mathbb{N}^*$ tal que $n\geqslant 2$;
$\pi_1(X,A,x_0)$	Conjunto das classes de homotopia de morfismos de $Hom_{\mathrm{Top}_2^+}\big(([-1,1],\{-1,1\},1),(X,A,x_0)\big)$, em que $[-1,1]=D^1\subset\mathbb{R}$ tem a topologia induzida da topologia usual de $\mathbb{R}$;
$\pi_n(X,A,B,x_0)$	Grupo de homotopia relativo n-dimensional da tríade com ponto marcado $(X,A,B,x_0)\in Obj(\mathrm{Ad}_3^+)$, para $n\in\mathbb{N}^*$ tal que $n\geqslant 3$;
$\pi_2(X,A,B,x_0)$	Conjunto das classes de homotopia de morfismos de $Hom_{\mathrm{Ad}_3^+}\Big(\big(D^2,S^1_+,S^1_-,(1,0)\big),(X,A,B,x_0)\Big)$;
$K(G,n)$	Espaço de Eilenberg-MacLane do tipo $K(G,n)$, isto é, qualquer espaço topológico X, com algum ponto marcado, tal que $\pi_nX\cong G$ e π_jX é unitário, $\forall j\in\mathbb{N}\setminus\{n\}$, em que $n\in\mathbb{N}$ e G é um grupo;
$\hookrightarrow$	Seta correspondente ao morfismo de inclusão de subconjuntos;

$\twoheadrightarrow$	Seta de morfismos que são epimorfismos na categoria em questão. Nesse trabalho todos os epimorfismos correspondem à funções que são sobrejetoras sobre o conjunto de chegada;
$\xrightarrow{\cong}$	Seta de morfismos que são isomorfismos na categoria em questão;
$\xrightarrow{=}$	Seta que representa o morfismo identidade do objeto correspondente na categoria em questão;
$\Longrightarrow$	Conectivo condicional de implicação lógica ("se __, então __"). Em alguns contextos de sentenças lógicas simbólicas, também pode ser denotado pela seta longa "$\longrightarrow$" ;
$\Longleftrightarrow$	Conectivo bicondicional de equivalência lógica ("__ se, e somente se, __"). Em alguns contextos de sentenças lógicas simbólicas, também pode ser denotado pela seta longa dupla "$\longleftrightarrow$" ;
$\forall$	Quantificador lógico universal ("para todo" ou "para qualquer");
$\exists$	Quantificador lógico existencial ("existe");
$\exists!$	Quantificador lógico existencial e de unicidade ("existe um único").

Introdução

O quadrado tensorial não-abeliano $G \otimes G$ de um grupo G foi introduzido por R. K. Dennis [8] em uma busca por novos funtores de homologia tendo uma íntima relação com a K-teoria. Este é baseado no trabalho de C. Miller [14], o qual trabalha com um objeto que depois viria a ser o quadrado exterior de um grupo.

É sabido que, em certo sentido, o funtor π_1 (grupo fundamental) induz uma equivalência nos 1-tipos homotópicos (espaços com grupos de homotopia localizados na dimensão 1), de modo que a categoria de grupos e homomorfismos modela completamente a categoria dos 1-tipos homotópicos. Whitehead criou então a categoria algébrica dos "módulos cruzados". Os trabalhos de Whitehead e MacLane mostraram que a categoria dos módulos cruzados, em um certo sentido, modela os 2-tipos homotópicos. Foi sugerida então uma maneira de generalizar este resultado para um número natural qualquer. Brown e Loday definiram n-cubos cruzados de grupos e cat^n-grupos e mostraram que, por meio de um teorema de van-Kampen generalizado, essas categorias modelam os $(n+1)$-tipos homotópicos.

Em seu trabalho conjunto, R. Brown e J.-L. Loday [6] descobriram uma importância topológica para o quadrado tensorial, a saber, que o terceiro grupo de homotopia da suspensão de um espaço de Eilenberg MacLane $K(G,1)$ satisfaz $\pi_3\big(SK(G,1)\big) \cong ker(\kappa_1)$, em que $\kappa_1 : G \otimes G \to G$ é o "homomorfismo comutador": $\kappa_1(g \otimes h) = [g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$, $\forall g,h \in G$. Os autores também definiram o produto tensorial $G \otimes H$ de dois grupos quaisquer agindo "compativelmente" um no outro e derivaram algumas de suas propriedades. Os 2-cubos cruzados, também chamados de "quadrados cruzados de grupos", contém certos objetos universais, nos quais aparecem produtos tensoriais não-abelianos. No final de nosso trabalho estudamos esses objetos, admitindo o teorema generalizado de van-Kampen, e derivamos alguns desses resultados.

Brown, Johnson e Robertson começam a estudar as propriedades puramente algébricas do produto tensorial não-abeliano no artigo [7] e são seguidos por muitos algebristas e topólogos. Podemos mencionar G. Ellis, R. Aboughazi, L.-C. Kappe, N. R. Rocco etc.

O objetivo desse trabalho é apresentar o produto tensorial de grupos não-abelianos de uma forma detalhada, derivando suas primeiras propriedades e, por fim, mostrando a aplicação citada desse conceito na teoria de homotopia. Também, estudamos o produto exterior e o funtor quadrático de Whitehead de maneira semelhante.

O primeiro capítulo de nosso trabalho lida com notações, certas propriedades de ações de grupos e definimos pareamentos cruzados de grupos, os quais agem um no outro, e pareamentos exteriores, quando essas ações são conjugações. O segundo capítulo é dedicado ao estudo detalhado do produto tensorial e suas propriedades imediatas, assim como sua estrutura funtorial. No terceiro capítulo fazemos o mesmo com os produtos exteriores e, no final, derivamos certas propriedades de ambos os produtos tensorial e exterior. O quarto capítulo é dedicado ao estudo do funtor quadrático universal de Whitehead. A ligação deste funtor com o produto tensorial é feita no final do capítulo 4. Por fim, no capítulo 5, apresentamos alguns conceitos de teoria de homotopia, os módulos cruzados de grupos, os quadrados cruzados de grupos, ligamos estes objetos com o produto tensorial não-abeliano e derivamos alguns dos resultados de teoria de homotopia que citamos.

Capítulo 1

Preliminares

Primeiramente deixamos estabelecido que usaremos tópicos básicos da teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel, com o axioma da escolha (ZFC) e algum axioma que nos garanta formarmos agregados maiores, que não existem em ZFC, como o "conjunto" de todos os grupos (ou de todos os grupos *pequenos*), para aplicações nas categorias que usaremos. Algum axioma sobre universos de Grothendieck ou mesmo alguma extensão conservativa de ZFC devem bastar e não nos preocuparemos mais com esses assuntos sobre fundamentos a partir de agora.

1.1 Ações de grupos

Sejam G um grupo, X um conjunto e $Sym(X)$ o grupo das permutações de X, isto é, $Sym(X)$ é o conjunto das funções bijetoras sobre X, com a operação de composição usual de funções. Uma ação de G em X pode ser definida como sendo um homomorfismo $\sigma : G \to Sym(X)$. Nesse caso, para todo $g \in G$, denotaremos a permutação $\sigma(g)$ por "σ_g" e, para todo $x \in X$, às vezes denotaremos $[\sigma(g)](x) = \sigma_g(x)$ por "${}^g x$".

Considerando a categoria Grp dos grupos e homomorfismos de grupos, fica claro que o conjunto de todas as ações de um grupo G em um conjunto X é $Hom_{\mathsf{Grp}}\big(G, Sym(X)\big)$. Quando não houver ambiguidade, denotaremos esse conjunto apenas por "$Hom\big(G, Sym(X)\big)$".

Sejam A e G grupos, X um conjunto e funções $\alpha : A \to G$ e $\sigma : G \to Sym(X)$. Se α é um homomorfismo e σ é uma ação de G em X, é claro que $\sigma \circ \alpha : A \to Sym(X)$ é uma ação de A em X.

Sejam G um grupo, $e = e_G \in G$ seu elemento neutro, X um conjunto e $\sigma : G \to Sym(X)$ uma ação. Note que o elemento neutro do grupo $Sym(X)$ é a função identidade $id_X : X \to X$ tal que $id_X(x) = x$, $\forall x \in X$. Daí, é claro que $\sigma(e_G) = id_X$. Utilizando a notação introduzida, $\forall a, g \in G$, $\forall x \in X$, temos que

- ${}^e x = [\sigma(e_G)](x) = id_X(x) = x$;

- ${}^{a}({}^{g}x) = [\sigma(a)]\big([\sigma(g)](x)\big) = [\sigma(a) \circ \sigma(g)](x) = [\sigma(ag)](x) = {}^{(ag)}x\,;$
- $\sigma_{g^{-1}} = \sigma(g^{-1}) = [\sigma(g)]^{-1} = \sigma_g^{-1}\,.$

Por isso, denotamos ${}^{a}({}^{g}x) = {}^{(ag)}x$ por "${}^{ag}x$", $\forall a, g \in G$, $\forall x \in X$.

Seja M um grupo. Como é usual, denotamos a sentença "N é subgrupo de M" por "$N \leqslant M$".

Sejam G um grupo e X um conjunto. A *ação trivial* de G em X é o homomorfismo trivial $t : G \to Sym(X)$, ou seja, $t(g) = id_X$, $\forall g \in G$. Isto é, a função constante $t = G \times \{id_X\}$. Assim, a imagem de t é o subgrupo trivial $\{id_X\} \leqslant Sym(X)$. Na notação introduzida, temos que $t_g = t(g) = id_X$ e ${}^{g}x = t_g(x) = id_X(x) = x$, $\forall g \in G$, $\forall x \in X$.

Sejam G e H grupos e $\sigma : G \to Sym(H)$ uma ação de G em H. Dizemos que σ é uma "*ação por automorfismos* de G em H" se, e somente se, $im(\sigma) \subset Aut(H)$, isto é, σ é um homomorfismo do tipo $\sigma : G \to Aut(H)$, em que $Aut(H)$ é o grupo dos automorfismos de H. Dessa forma, temos que $im(\sigma) \leqslant Aut(H) \leqslant Sym(H)$. Nesse caso, $\forall g \in G$, $\forall h, b \in H$, sendo $e_H \in H$ o elemento neutro de H, temos que

- ${}^{g}e_H = \sigma_g(e_H) = e_H\,;$
- ${}^{g}(hb) = \sigma_g(hb) = [\sigma_g(h)] \cdot [\sigma_g(b)] = ({}^{g}h)({}^{g}b);$
- ${}^{g}(h^{-1}) = \sigma_g(h^{-1}) = [\sigma_g(h)]^{-1} = ({}^{g}h)^{-1}.$

Por isso, denotamos ${}^{g}(hb) = ({}^{g}h)({}^{g}b)$ por "${}^{g}h\,{}^{g}b$" ou por "${}^{g}h \cdot {}^{g}b$" e denotamos ${}^{g}(h^{-1}) = ({}^{g}h)^{-1}$ por "${}^{g}h^{-1}$", $\forall g \in G$, $\forall h, b \in H$.

Seja G um grupo. O conjunto dos automorfismos do grupo G, representado na categoria dos grupos e homomorfismos de grupos (Grp) é melhor denotado por "$Aut_{\mathsf{Grp}}(G)$". Todavia, na grande maioria dos casos iremos denota-lo simplesmente por "$Aut(G)$".

É claro que o conjunto de todas as ações por automorfismos de um grupo G em um grupo H é $Hom_{\mathsf{Grp}}\big(G, Aut_{\mathsf{Grp}}(H)\big) = Hom\big(G, Aut(H)\big)$.

Note que toda ação trivial de um grupo em outro é uma ação por automorfismos.

Exemplo 1.1.1. Seja $\theta : \mathbb{Z}_2 \to (\mathbb{Z}_3)^{\mathbb{Z}_3}$ tal que $\theta(0) = id_{\mathbb{Z}_3}$, $[\theta(1)](0) = 0$, $[\theta(1)](1) = 2$ e $[\theta(1)](2) = 1$. É claro que $\theta(0)$ e $\theta(1)$ são bijetoras, isto é, temos que $\theta(0), \theta(1) \in Sym(\mathbb{Z}_3)$. Daí, $im(\theta) \subset Sym(\mathbb{Z}_3)$, ou seja, θ é da forma $\theta : \mathbb{Z}_2 \to Sym(\mathbb{Z}_3)$. Note que

- $[\theta(1) \circ \theta(1)](0) = \theta(1)\big([\theta(1)](0)\big) = [\theta(1)](0) = 0 = id_{\mathbb{Z}_3}(0);$
- $[\theta(1) \circ \theta(1)](1) = \theta(1)\big([\theta(1)](1)\big) = [\theta(1)](2) = 1 = id_{\mathbb{Z}_3}(1);$
- $[\theta(1) \circ \theta(1)](2) = \theta(1)\big([\theta(1)](2)\big) = [\theta(1)](1) = 2 = id_{\mathbb{Z}_3}(2).$

Dessa forma, $\theta(1) \circ \theta(1) = id_{\mathbb{Z}_3}$. Também,

- $\theta(0+0) = \theta(0) = id_{\mathbb{Z}_3} = id_{\mathbb{Z}_3} \circ id_{\mathbb{Z}_3} = \theta(0) \circ \theta(0)$;
- $\theta(1+0) = \theta(1) = \theta(1) \circ id_{\mathbb{Z}_3} = \theta(1) \circ \theta(0)$;
- $\theta(0+1) = \theta(1) = id_{\mathbb{Z}_3} \circ \theta(1) = \theta(0) \circ \theta(1)$;
- $\theta(1+1) = \theta(0) = id_{\mathbb{Z}_3} = \theta(1) \circ \theta(1)$.

Assim, temos que $\theta : \mathbb{Z}_2 \to Sym(\mathbb{Z}_3)$ é um homomorfismo, isto é, θ é uma ação de $\mathbb{Z}_2$ em $\mathbb{Z}_3$. Pela nossa notação, vamos escrever $\theta(0) = \theta_0$ e $\theta(1) = \theta_1$. Assim, $\theta_0 = id_{\mathbb{Z}_3} \in Aut(\mathbb{Z}_3)$. Agora observe que

- $\theta_1(0+0) = \theta_1(0) = 0 + \theta_1(0) = \theta_1(0) + \theta_1(0)$;
- $\theta_1(0+1) = \theta_1(1) = 0 + \theta_1(1) = \theta_1(0) + \theta_1(1)$;
- $\theta_1(0+2) = \theta_1(2) = 0 + \theta_1(2) = \theta_1(0) + \theta_1(2)$;
- $\theta_1(1+0) = \theta_1(1) = \theta_1(1) + 0 = \theta_1(1) + \theta_1(0)$;
- $\theta_1(1+1) = \theta_1(2) = 1 = 2 + 2 = \theta_1(1) + \theta_1(1)$;
- $\theta_1(1+2) = \theta_1(0) = 0 = 2 + 1 = \theta_1(1) + \theta_1(2)$;
- $\theta_1(2+0) = \theta_1(2) = \theta_1(2) + 0 = \theta_1(2) + \theta_1(0)$;
- $\theta_1(2+1) = \theta_1(0) = 0 = 1 + 2 = \theta_1(2) + \theta_1(1)$;
- $\theta_1(2+2) = \theta_1(1) = 2 = 1 + 1 = \theta_1(2) + \theta_1(2)$.

Ou seja, $\theta_1(n+m) = \theta_1(n) + \theta_1(m)$, $\forall n, m \in \mathbb{Z}_3$. Dessa forma, temos que θ_1 é um homomorfismo. Como θ_1 é bijetora, segue que $\theta_1 \in Aut(\mathbb{Z}_3)$. Daí, $im(\theta) \subset Aut(\mathbb{Z}_3)$, ou seja, θ é um homomorfismo da forma $\theta : \mathbb{Z}_2 \to Aut(\mathbb{Z}_3)$, isto é, $\theta \in Hom\big(\mathbb{Z}_2, Aut(\mathbb{Z}_3)\big)$, ou seja, θ é uma ação por automorfismos. Na nossa notação, como $\theta_0 = id_{\mathbb{Z}_3}$, temos que

- ${}^{0}0 = \theta_0(0) = id_{\mathbb{Z}_3}(0) = 0$;
- ${}^{0}1 = \theta_0(1) = id_{\mathbb{Z}_3}(1) = 1$;
- ${}^{0}2 = \theta_0(2) = id_{\mathbb{Z}_3}(2) = 2$.

isto é, ${}^{0}n = n$, $\forall n \in \mathbb{Z}_3$. Também,

- ${}^{1}0 = \theta_1(0) = 0 = -0$;
- ${}^{1}1 = \theta_1(1) = 2 = -1$;

- ${}^1 2 = \theta_1(2) = 1 = -2$,

isto é, ${}^1 n = \theta_1(n) = -n = -[id_{\mathbb{Z}_3}(n)] = (-id_{\mathbb{Z}_3})(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}_3$. Daí, $\theta_1 = -id_{\mathbb{Z}_3}$.

Exemplo 1.1.2. Sejam G um grupo e $c : G \to G^G$ tal que $[c(g)](x) = gxg^{-1}$, $\forall g, x \in G$. Note que $c(g) \in Sym(G)$, em que $[c(g)]^{-1} = c(g^{-1})$, $\forall g \in G$. De fato, $\forall g \in G$, $\forall x \in G$, temos que

$$\begin{aligned}
[c(g) \circ c(g^{-1})](x) &= [c(g)]\big([c(g^{-1})](x)\big) \\
&= [c(g)](g^{-1}xg) \\
&= g(g^{-1}xg)g^{-1} \\
&= (gg^{-1})x(gg^{-1}) \\
&= x \\
&= id_G(x) \\
&= x \\
&= (g^{-1}g)x(g^{-1}g) \\
&= g^{-1}(gxg^{-1})g \\
&= [c(g^{-1})](gxg^{-1}) \\
&= [c(g^{-1})]\big([c(g)](x)\big) \\
&= [c(g^{-1}) \circ c(g)](x).
\end{aligned}$$

Assim, $c(g) \circ c(g^{-1}) = id_G = c(g^{-1}) \circ c(g)$, $\forall g \in G$. Portanto, c é uma função da forma $c : G \to Sym(G)$. Temos também que c é um homomorfismo. Com efeito, $\forall a, g \in G$, $\forall x \in G$, temos que

$$\begin{aligned}
[c(ag)](x) = (ag)x(ag)^{-1} &= (ag)x(g^{-1}a^{-1}) \\
&= a(gxg^{-1})a^{-1} \\
&= [c(a)](gxg^{-1}) \\
&= [c(a)]\big([c(g)](x)\big) \\
&= [c(a) \circ c(g)](x).
\end{aligned}$$

Dessa forma, $c(ag) = c(a) \circ c(g)$, $\forall a, g \in G$. Ficamos com $c \in Hom\big(G, Sym(G)\big)$, isto é, c é uma ação de G em si mesmo. Na nossa notação, $c(g) = c_g$, $\forall g \in G$. Seja $g \in G$. Note que, $\forall x, y \in G$,

$$c_g(xy) = g(xy)g^{-1} = g(xg^{-1}gy)g^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1}) = c_g(x) \cdot c_g(y).$$

Daí, $c_g \in Aut(G)$, $\forall g \in G$, e, portanto, c é uma ação por automorfismos, $c \in Hom\big(G, Aut(G)\big)$. A ação c é chamada de "*ação por conjugação* do grupo G". Se G é abeliano, então $c_g(x) = gxg^{-1} = xgg^{-1} = x = id_G(x)$, $\forall g, x \in G$. Daí, $c_g = c(g) = id_G$, $\forall g \in G$, ou seja, c é o homomorfismo trivial de G em $Aut(G)$, isto é, c é a ação trivial de G em si mesmo. Geralmente denotamos a ação por conjugação de um grupo G por "c^G".

Observação 1.1.3. **(i)** Sejam G um grupo, X um conjunto, uma ação $\sigma : G \to Sym(X)$ e $c^G : G \to Aut(G)$ a ação por conjugação de G. Para todos $a, b \in G$, temos que $\sigma_{c_a^G(b)} \circ \sigma_a = \sigma_{aba^{-1}} \circ \sigma_a = \sigma_{aba^{-1}a} = \sigma_{ab} = \sigma_a \circ \sigma_b$;

(ii) Sejam G e H grupos, $f : G \to H$ um homomorfismo, $c^G : G \to Aut(G)$ a ação por conjugação de G e $c^H : H \to Aut(H)$ a ação por conjugação de H. Para todo $a \in G$, temos que $c^H_{f(a)} \circ f = f \circ c^G_a$. De fato, para todo $x \in G$, temos que

$$\begin{aligned}
[c^H_{f(a)} \circ f](x) &= c^H_{f(a)}\big(f(x)\big) \\
&= [f(a)] \cdot [f(x)] \cdot [f(a)]^{-1} \\
&= f(a) \cdot f(x) \cdot f(a^{-1}) \\
&= f(axa^{-1}) \\
&= f\big(c^G_a(x)\big) \\
&= (f \circ c^G_a)(x).
\end{aligned}$$

Isso significa que, para cada $a \in G$, o quadrado abaixo é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "c^G_a"'] & H \arrow[d, "c^H_{f(a)}"] \\
G \arrow[r, "f"'] & H
\end{tikzcd}$$

No caso da conjugação em G, note que ${}^{({}^a b)}g = {}^{(aba^{-1})}g = {}^a[{}^b({}^{a^{-1}}g)] = {}^{aba^{-1}}g$, $\forall a, b, g \in G$. Essa propriedade é importante para nosso estudo.

Definição 1.1.4. Sejam G e H grupos, $\theta : G \to Sym(H)$ e $\xi : H \to Sym(G)$ ações, $c^G : G \to Aut(G)$ a ação por conjugação de G e $c^H : H \to Aut(H)$ a ação por conjugação de H. Dizemos que "θ e ξ são *compatíveis*" se, e somente se,

(1) $\xi_{\theta_g(b)} = c^G_g \circ \xi_b \circ c^G_{g^{-1}}$, $\forall g \in G$, $\forall b \in H$;

(2) $\theta_{\xi_h(a)} = c^H_h \circ \theta_a \circ c^H_{h^{-1}}$, $\forall a \in G$, $\forall h \in H$.

Na definição acima, pelo exemplo 1.1.2, como $c^G_{g^{-1}} = (c^G_g)^{-1}$, $\forall g \in G$, e $c^H_{h^{-1}} = (c^H_h)^{-1}$, $\forall h \in H$, temos que θ e ξ são compatíveis se, e somente se,

(1) $\xi_{\theta_g(b)} = c^G_g \circ \xi_b \circ (c^G_g)^{-1}$, $\forall g \in G$, $\forall b \in H$;

(2) $\theta_{\xi_h(a)} = c^H_h \circ \theta_a \circ (c^H_h)^{-1}$, $\forall a \in G$, $\forall h \in H$.

Ou então, equivalentemente, θ e ξ são compatíveis se, e somente se,

(1) $\xi_{\theta_g(b)} \circ c^G_g = c^G_g \circ \xi_b$, $\forall g \in G$, $\forall b \in H$;

(2) $\theta_{\xi_h(a)} \circ c^H_h = c^H_h \circ \theta_a$, $\forall a \in G$, $\forall h \in H$.

Nessa última, podemos notar que as ações θ e ξ são compatíveis se, e somente se, $\forall a, g \in G$, $\forall b, h \in H$, os quadrados abaixo comutam:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\xi_b"] \arrow[d, "c^G_g"'] & G \arrow[d, "c^G_g"] \\ G \arrow[r, "\xi_{\theta_g(b)}"'] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, "c^H_h"'] & H \arrow[d, "c^H_h"] \\ H \arrow[r, "\theta_{\xi_h(a)}"'] & H \end{tikzcd}$$

Sejam $c^{Aut(G)} : Aut(G) \to Aut(G)$ a ação por conjugação do grupo $Aut(G)$ e $c^{Aut(H)} : Aut(H) \to Aut(H)$ a ação por conjugação do grupo $Aut(H)$. Note que as ações $\theta : G \to Sym(H)$ e $\xi : H \to Sym(G)$ são compatíveis se, e somente se, $\xi \circ \theta_g = c^{Aut(G)}_{c^G_g} \circ \xi$, $\forall g \in G$, e $\theta \circ \xi_h = c^{Aut(H)}_{c^H_h} \circ \theta$, $\forall h \in H$.

Pelo item (i) da observação 1.1.3, podemos observar que a conjugação é compatível consigo mesma.

Sejam G e H grupos, $\theta : G \to Sym(H)$ e $\xi : H \to Sym(G)$ ações, $c^G : G \to Aut(G)$ a ação por conjugação de G e $c^H : H \to Aut(H)$ a ação por conjugação de H. Observe que, se G é abeliano, pelo exemplo 1.1.2, temos que $c^G_g = id_G$, $\forall g \in G$. Assim, $\forall g \in G$, $\forall b \in H$, temos que $\xi_{\theta_g(b)} = c^G_g \circ \xi_b \circ c^G_{g^{-1}}$ se, e somente se, $\xi_{\theta_g(b)} = \xi_b$. Analogamente, se H é abeliano, pelo exemplo 1.1.2, temos que $c^H_h = id_H$, $\forall h \in H$. Assim, $\forall h \in H$, $\forall a \in G$, temos que $\theta_{\xi_h(a)} = c^H_h \circ \theta_a \circ c^H_{h^{-1}}$ se, e somente se, $\theta_{\xi_h(a)} = \theta_a$. Logo, se G e H são ambos abelianos, temos que θ e ξ são compatíveis se, e somente se, $\xi_{\theta_g(b)} = \xi_b$, $\forall g \in G$, $\forall b \in H$, e $\theta_{\xi_h(a)} = \theta_a$, $\forall h \in H$, $\forall a \in G$, isto é, se, e somente se, $\xi \circ \theta_g = \xi$, $\forall g \in G$, e $\theta \circ \xi_h = \theta$, $\forall h \in H$.

Proposição 1.1.5. Sejam G e H grupos e $\xi : H \to Sym(G)$ uma ação de H em G. Se ξ é a ação trivial e H é abeliano, então, para toda ação $\theta : G \to Sym(H)$ de G em H, temos que θ e ξ são compatíveis.

Demonstração: Sejam $c^G : G \to Aut(G)$ a ação por conjugação de G e $c^H : H \to Aut(H)$ a ação por conjugação de H. Como ξ é a ação trivial, então $\xi_y = id_G$, $\forall y \in H$. Assim, $\forall g \in G$, $\forall b \in H$, temos que

$$\xi_{\theta_g(b)} = id_G = c^G_g \circ (c^G_g)^{-1} = c^G_g \circ id_G \circ (c^G_g)^{-1} = c^G_g \circ \xi_b \circ c^G_{g^{-1}} .$$

Como H é abeliano, pelo exemplo 1.1.2 , temos que $c^H_h = id_H$, $\forall h \in H$. Daí, $\forall h \in H$, $\forall a \in G$, segue que

$$\theta_{\xi_h(a)} = \theta_{id_G(a)} = \theta_a = id_H \circ \theta_a \circ id_H = c^H_h \circ \theta_a \circ c^H_{h^{-1}} .$$

■

Exemplo 1.1.6. Sejam $\xi : \mathbb{Z}_3 \to Aut(\mathbb{Z}_2)$ a ação trivial de $\mathbb{Z}_3$ em $\mathbb{Z}_2$ e $\theta : \mathbb{Z}_2 \to Aut(\mathbb{Z}_3)$ a ação do exemplo 1.1.1. Como $\mathbb{Z}_3$ é abeliano, pela proposição 1.1.5 acima, temos que θ e ξ são ações compatíveis.

Proposição 1.1.7. Sejam B e C grupos, A um conjunto e ações $\beta : B \to Sym(A)$ e $\gamma : C \to Sym(A)$, isto é, β e γ são homomorfismos. Considere a estrutura de grupo de produto direto em $B \times C$ e uma função $\sigma : B \times C \to Sym(A)$ tal que $\sigma(b,c) = \beta(b) \circ \gamma(c)$, $\forall (b,c) \in B \times C$. São equivalentes:

(i) $\beta(b) \circ \gamma(c) = \gamma(c) \circ \beta(b)$, $\forall b \in B$, $\forall c \in C$;

(ii) σ é uma ação, isto é, $\sigma \in Hom\big(B \times C, Sym(A)\big)$.

No caso afirmativo, se A é um grupo e β e γ são ações por automorfismos, então σ também é uma ação por automorfismos.

Demonstração: [(i)⇒(ii)] Para todos $(b_1, c_1), (b_2, c_2) \in B \times C$, temos que

$$\begin{aligned}
\sigma\big((b_1, c_1) \cdot (b_2, c_2)\big) &= \sigma(b_1 b_2, c_1 c_2) \\
&= \beta(b_1 b_2) \circ \gamma(c_1 c_2) \\
&= [\beta(b_1) \circ \beta(b_2)] \circ [\gamma(c_1) \circ \gamma(c_2)] \\
&= \beta(b_1) \circ [\beta(b_2) \circ \gamma(c_1)] \circ \gamma(c_2) \\
&= \beta(b_1) \circ [\gamma(c_1) \circ \beta(b_2)] \circ \gamma(c_2) \\
&= [\beta(b_1) \circ \gamma(c_1)] \circ [\beta(b_2) \circ \gamma(c_2)] \\
&= \sigma(b_1, c_1) \circ \sigma(b_2, c_2).
\end{aligned}$$

[(ii)⇒(i)] Sejam $e_B \in B$ o elemento neutro de B e $e_C \in C$ o elemento neutro de C. Para todo $b \in B$ e todo $c \in C$, temos que

$$\begin{aligned}
\beta(b) \circ \gamma(c) &= \beta(b) \circ id_A \circ \gamma(c) \\
&= \beta(b) \circ (id_A \circ id_A) \circ \gamma(c) \\
&= \beta(b) \circ [\gamma(e_C) \circ \beta(e_B)] \circ \gamma(c) \\
&= [\beta(b) \circ \gamma(e_C)] \circ [\beta(e_B) \circ \gamma(c)] \\
&= \sigma(b, e_C) \circ \sigma(e_B, c) \\
&= \sigma\big((b, e_C) \cdot (e_B, c)\big) \\
&= \sigma(b \cdot e_B, e_C \cdot c) \\
&= \sigma(b, c) \\
&= \sigma(e_B \cdot b, c \cdot e_C) \\
&= \sigma\big((e_B, c) \cdot (b, e_C)\big) \\
&= \sigma(e_B, c) \circ \sigma(b, e_C) \\
&= [\beta(e_B) \circ \gamma(c)] \circ [\beta(b) \circ \gamma(e_C)] \\
&= [id_A \circ \gamma(c)] \circ [\beta(b) \circ id_A] \\
&= \gamma(c) \circ \beta(b).
\end{aligned}$$

Se β e γ são ações por automorfismos, como $Aut(A)$ é fechado por composições, $\forall (b, c) \in B \times C$, temos que $\sigma(b, c) = \beta(b) \circ \gamma(c) \in Aut(A)$. Assim, $im(\sigma) \subset Aut(A)$ e, portanto, σ é da forma $\sigma : B \times C \to Aut(A)$. Logo, σ é ação por automorfismos. ■

Lembremos alguns fatos. Sejam A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, X e Y conjuntos.

(i) As projeções coordenadas são as funções $p_1 : A_1 \times A_2 \to A_1$ e $p_2 : A_1 \times A_2 \to A_2$ tais que $p_1(a_1, a_2) = a_1$ e $p_2(a_1, a_2) = a_2$, $\forall (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$. Se A_1 e A_2 são grupos e $A_1 \times A_2$ tem a estrutura de grupo de produto direto, então p_1 e p_2 são epimorfismos;

(ii) Se A_1 e A_2 são grupos, $e_1 \in A_1$ é o elemento neutro de A_1 e $e_2 \in A_2$ é o elemento neutro de A_2, definimos as inclusões coordenadas como sendo as funções $i_1 : A_1 \to A_1 \times A_2$ e $i_2 : A_2 \to A_1 \times A_2$ tais que $i_1(a_1) = (a_1, e_2)$ e $i_2(a_2) = (e_1, a_2)$, $\forall a_1 \in A_1$, $\forall a_2 \in A_2$. As funções i_1 e i_2 são monomorfismos e inversas à direita das respectivas projeções coordenadas, isto é, $p_1 \circ i_1 = id_{A_1}$ e $p_2 \circ i_2 = id_{A_2}$. Também, $\forall (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$, temos que $(a_1, a_2) = i_1(a_1) \cdot i_2(a_2)$;

(iii) Para quaisquer funções $f_1 : X \to A_1$ e $f_2 : X \to A_2$ existe uma função $(f_1, f_2) : X \to A_1 \times A_2$ tal que $(f_1, f_2)(x) = \big(f_1(x), f_2(x)\big)$, $\forall x \in X$. Temos que $p_1 \circ (f_1, f_2) = f_1$, que $p_2 \circ (f_1, f_2) = f_2$ e que $(p_1, p_2) = id_{A_1 \times A_2}$. Assim, para quaisquer funções $g_1 : X \to A_1$ e $g_2 : X \to A_2$, temos que $(f_1, f_2) = (g_1, g_2)$ se, e somente se, $f_1 = g_1$ e $f_2 = g_2$. Também, para toda função $h : Y \to X$, temos que $(f_1, f_2) \circ h = (f_1 \circ h, f_2 \circ h)$. Ainda, se A_1 e A_2 são grupos e $A_1 \times A_2$ é o produto direto, então (f_1, f_2) é um homomorfismo se, e somente se, f_1 e f_2 são homomorfismos;

(iv) Para toda função $f : X \to A_1 \times A_2$, existem suas funções coordenadas $f_1 : X \to A_1$ e $f_2 : X \to A_2$ tais que $f = (f_1, f_2)$. Temos que $p_1 \circ f = f_1$ e que $p_2 \circ f = f_2$. Para toda função $h : Y \to X$, temos que $f \circ h = (f_1 \circ h, f_2 \circ h)$. Se A_1 e A_2 são grupos e $A_1 \times A_2$ é o produto direto, então f é um homomorfismo se, e somente se, f_1 e f_2 são homomorfismos;

(v) Para quaisquer funções $f_1 : A_1 \to B_1$ e $f_2 : A_2 \to B_2$ existe uma função $f_1 \times f_2 : A_1 \times A_2 \to B_1 \times B_2$ tal que $(f_1 \times f_2)(a_1, a_2) = \big(f_1(a_1), f_2(a_2)\big)$, $\forall (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$. Temos que $id_{A_1 \times A_2} = id_{A_1} \times id_{A_2} = (p_1, p_2)$. Se A_1 e A_2 são grupos, $A_1 \times A_2$ é o produto direto, $i_1 : A_1 \to A_1 \times A_2$ e $i_2 : A_2 \to A_1 \times A_2$ são as inclusões coordenadas e $q_1 : B_1 \times B_2 \to B_1$ e $q_2 : B_1 \times B_2 \to B_2$ são as projeções coordenadas, então $f_1 = q_1 \circ (f_1 \times f_2) \circ i_1$, $f_2 = q_2 \circ (f_1 \times f_2) \circ i_2$ e, portanto, $f_1 \times f_2$ é um homomorfismo se, e somente se, f_1 e f_2 são homomorfismos. Também, para quaisquer funções $g_1 : A_1 \to B_1$ e $g_2 : A_2 \to B_2$, temos que $f_1 \times f_2 = g_1 \times g_2$ se, e somente se, $f_1 = g_1$ e $f_2 = g_2$. Além disso, $(f_1 \times f_2)(a_1, a_2) = (i_1 \circ f_1)(a_1) \cdot (i_2 \circ f_2)(a_2)$, $\forall (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$;

(vi) Para quaisquer funções $A_1 \xrightarrow{f_1} B_1 \xrightarrow{g_1} C_1$ e $A_2 \xrightarrow{f_2} B_2 \xrightarrow{g_2} C_2$ temos que $(g_1 \times g_2) \circ (f_1 \times f_2) = (g_1 \circ f_1) \times (g_2 \circ f_2)$. Dessa forma, se $f_1 : A_1 \to B_1$ e $f_2 : A_2 \to B_2$ são bijetoras, com inversas $f_1^{-1} : B_1 \to A_1$ e $f_2^{-1} : B_2 \to A_2$, então $f_1 \times f_2$ é bijetora, com inversa $(f_1 \times f_2)^{-1} = f_1^{-1} \times f_2^{-1}$. Reciprocamente, se $f_1 \times f_2$ é bijetora e não-vazia, com inversa $(f_1 \times f_2)^{-1} : B_1 \times B_2 \to A_1 \times A_2$, então f_1 e f_2 são bijetoras e, se $f_1^{-1} : B_1 \to A_1$ e $f_2^{-1} : B_2 \to A_2$ são suas inversas, então $f_1^{-1} \times f_2^{-1} = (f_1 \times f_2)^{-1}$. Também, para quaisquer funções $h_1 : X \to A_1$ e $h_2 : X \to A_2$, temos que $(f_1 \times f_2) \circ (h_1, h_2) = (f_1 \circ h_1, f_2 \circ h_2)$.

Proposição 1.1.8. Sejam A um grupo, B e C conjuntos, $\alpha : A \to Sym(B)$ e $\delta : A \to Sym(C)$ ações e $\rho : A \to (B \times C)^{B \times C}$ tal que $\rho(a) = \alpha(a) \times \delta(a)$, $\forall a \in A$. Então, ρ é uma ação. Se B e C são grupos e, colocando em $B \times C$ a estrutura de produto direto, se α e δ são ações por automorfismos, então ρ também é.

Demonstração: Primeiramente, $\forall a \in A$, como $\alpha(a)$ e $\delta(a)$ são bijetoras, temos que $\rho(a) = \alpha(a) \times \delta(a)$ é bijetora, isto é, $\rho(a) \in Sym(B \times C)$. Assim, $im(\rho) \subset Sym(B \times C)$. Daí, ρ é da forma $\rho : A \to Sym(B \times C)$. Para todos

$a_1, a_2 \in A$, temos que

$$\begin{aligned}\rho(a_1 \cdot a_2) &= \alpha(a_1 \cdot a_2) \times \delta(a_1 \cdot a_2)\\ &= [\alpha(a_1) \circ \alpha(a_2)] \times [\delta(a_1) \circ \delta(a_2)]\\ &= [\alpha(a_1) \times \delta(a_1)] \circ [\alpha(a_2) \times \delta(a_2)]\\ &= \rho(a_1) \circ \rho(a_2).\end{aligned}$$

Assim, ρ é um homomorfismo, isto é, uma ação de A em $B \times C$. Além disso, se α e δ são ações por automorfismos, então, $\forall a \in A$, como $\alpha(a)$ e $\delta(a)$ são homomorfismos, então $\rho(a) = \alpha(a) \times \delta(a) \in Aut(B \times C)$. Assim, $im(\rho) \subset Aut(B \times C)$ e, portanto, ρ é um homomorfismo da forma $\rho : A \to Aut(B \times C)$, isto é, ρ é uma ação por automorfismos. ■

Sejam B e C grupos e suponha que esteja definida a estrutura de produto direto em $B \times C$. Sejam também $c^B : B \to Aut(B)$ a ação por conjugação de B, $c^C : C \to Aut(C)$ a ação por conjugação de C e $c^{B\times C} : B \times C \to Aut(B \times C)$ a ação por conjugação de $B \times C$. Então, $c^{B\times C}_{(b,s)} = c^B_b \times c^C_s$, $\forall b \in B$, $\forall s \in C$. De fato, $\forall (y, z) \in B \times C$, temos que

$$\begin{aligned}c^{B\times C}_{(b,s)}(y,z) &= (b,s) \cdot (y,z) \cdot (b,s)^{-1}\\ &= (b,s) \cdot (y,z) \cdot (b^{-1}, s^{-1})\\ &= (byb^{-1}, szs^{-1})\\ &= \big(c^B_b(y), c^C_s(z)\big)\\ &= (c^B_b \times c^C_s)(y,z).\end{aligned}$$

Sejam $\sigma : B \times C \to Sym(A)$ a ação da proposição 1.1.7 e $\rho : A \to Sym(B \times C)$ a ação da proposição 1.1.8. Usando nossa notação, $\forall b \in B$, $\forall s \in C$, temos que $\sigma_{(b,s)} = \beta_b \circ \gamma_s = \gamma_s \circ \beta_b$ e que $\rho_a = \alpha_a \times \delta_a$, $\forall a \in A$.

Proposição 1.1.9. Sejam A, B e C grupos, $\beta : B \to Sym(A)$, $\gamma : C \to Sym(A)$ e $\sigma : B \times C \to Sym(A)$ as ações da proposição 1.1.7 e $\alpha : A \to Sym(B)$, $\delta : A \to Sym(C)$ e $\rho : A \to Sym(B \times C)$ as ações da proposição 1.1.8. Suponha que α e β são compatíveis e que δ e γ são compatíveis. Então, são equivalentes:

(i) $\alpha = \alpha \circ \gamma_s$, $\forall s \in C$, e $\delta = \delta \circ \beta_b$, $\forall b \in B$;

(ii) ρ e σ são compatíveis.

Demonstração: [(i)⇒(ii)] Como α e β são compatíveis, temos que $\alpha_{\beta_b(a)} = c^B_b \circ \alpha_a \circ (c^B_b)^{-1}$ e que $\beta_{\alpha_a(b)} = c^A_a \circ \beta_b \circ (c^A_a)^{-1}$, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$. Também, como δ e γ são compatíveis, temos que $\delta_{\gamma_s(a)} = c^C_s \circ \delta_a \circ (c^C_s)^{-1}$ e que $\gamma_{\delta_a(s)} = c^A_a \circ \gamma_s \circ (c^A_a)^{-1}$, $\forall a \in A$, $\forall s \in C$. Além disso, como σ é uma ação, pela proposição 1.1.7, temos que $\beta_b \circ \gamma_s = \gamma_s \circ \beta_b$, $\forall b \in B$, $\forall s \in C$. Assim, para todo $a \in A$ e todo $(b,s) \in B \times C$, temos que

$$\begin{aligned}
\rho_{\sigma_{(b,s)}(a)} &= \rho\big(\sigma_{(b,s)}(a)\big) \\
&= \alpha\big(\sigma_{(b,s)}(a)\big) \times \delta\big(\sigma_{(b,s)}(a)\big) \\
&= \alpha\big((\beta_b \circ \gamma_s)(a)\big) \times \delta\big((\beta_b \circ \gamma_s)(a)(a)\big) \\
&= \alpha\big((\beta_b \circ \gamma_s)(a)\big) \times \delta\big((\gamma_s \circ \beta_b)(a)\big) \\
&= \alpha\Big(\beta_b\big(\gamma_s(a)\big)\Big) \times \delta\Big(\gamma_s\big(\beta_b(a)\big)\Big) \\
&= \alpha_{\beta_b(\gamma_s(a))} \times \delta_{\gamma_s(\beta_b(a))} \\
&= [c_b^B \circ \alpha_{\gamma_s(a)} \circ (c_b^B)^{-1}] \times [c_s^C \circ \delta_{\beta_b(a)} \circ (c_s^C)^{-1}] \\
&= (c_b^B \times c_s^C) \circ [\alpha_{\gamma_s(a)} \times \delta_{\beta_b(a)}] \circ [(c_b^B)^{-1} \times (c_s^C)^{-1}] \\
&= (c_b^B \times c_s^C) \circ [\alpha_{\gamma_s(a)} \times \delta_{\beta_b(a)}] \circ (c_b^B \times c_s^C)^{-1} \\
&= c_{(b,s)}^{B\times C} \circ [\alpha_{\gamma_s(a)} \times \delta_{\beta_b(a)}] \circ [c_{(b,s)}^{B\times C}]^{-1} \\
&= c_{(b,s)}^{B\times C} \circ \big[\alpha\big(\gamma_s(a)\big) \times \delta\big(\beta_b(a)\big)\big] \circ [c_{(b,s)}^{B\times C}]^{-1} \\
&= c_{(b,s)}^{B\times C} \circ [(\alpha \circ \gamma_s)(a) \times (\delta \circ \beta_b)(a)] \circ [c_{(b,s)}^{B\times C}]^{-1} \\
&= c_{(b,s)}^{B\times C} \circ [\alpha(a) \times \delta(a)] \circ [c_{(b,s)}^{B\times C}]^{-1} \\
&= c_{(b,s)}^{B\times C} \circ (\alpha_a \times \delta_a) \circ [c_{(b,s)}^{B\times C}]^{-1} \\
&= c_{(b,s)}^{B\times C} \circ \rho_a \circ [c_{(b,s)}^{B\times C}]^{-1} \,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho_a(b,s)} &= \sigma\big(\rho_a(b,s)\big) \\
&= \sigma\big((\alpha_a \times \delta_a)(b,s)\big) \\
&= \sigma\big(\alpha_a(b), \delta_a(s)\big) \\
&= \beta\big(\alpha_a(b)\big) \circ \gamma\big(\delta_a(s)\big) \\
&= \beta_{\alpha_a(b)} \circ \gamma_{\delta_a(s)} \\
&= [c_a^A \circ \beta_b \circ (c_a^A)^{-1}] \circ [c_a^A \circ \gamma_s \circ (c_a^A)^{-1}] \\
&= c_a^A \circ \beta_b \circ [(c_a^A)^{-1} \circ c_a^A] \circ \gamma_s \circ (c_a^A)^{-1} \\
&= c_a^A \circ \beta_b \circ id_A \circ \gamma_s \circ (c_a^A)^{-1} \\
&= c_a^A \circ \beta_b \circ \gamma_s \circ (c_a^A)^{-1} \\
&= c_a^A \circ \sigma_{(b,s)} \circ (c_a^A)^{-1} \,.
\end{aligned}$$

Daí, ρ e σ são compatíveis.

[(ii)⇒(i)] Como ρ e σ são compatíveis, temos que $\rho_{\sigma_{(b,s)}(a)} = c_{(b,s)}^{B\times C} \circ \rho_a \circ [c_{(b,s)}^{B\times C}]^{-1}$,

$\forall a \in A$, $\forall (b,s) \in B{\times}C$. Sejam $b \in B$, $s \in C$ e $a \in A$. Temos que

$$\begin{aligned}
c^{B\times C}_{(b,s)} \circ (\alpha_a \times \delta_a) \circ [c^{B\times C}_{(b,s)}]^{-1} &= c^{B\times C}_{(b,s)} \circ \rho_a \circ [c^{B\times C}_{(b,s)}]^{-1} \\
&= \rho_{\sigma_{(b,s)}(a)} \\
&= \rho\big(\sigma_{(b,s)}(a)\big) \\
&= \alpha\big(\sigma_{(b,s)}(a)\big) \times \delta\big(\sigma_{(b,s)}(a)\big) \\
&= \alpha\big((\beta_b \circ \gamma_s)(a)\big) \times \delta\big((\beta_b \circ \gamma_s)(a)\big) \\
&= \alpha\big((\beta_b \circ \gamma_s)(a)\big) \times \delta\big((\gamma_s \circ \beta_b)(a)\big) \\
&= \alpha\Big(\beta_b\big(\gamma_s(a)\big)\Big) \times \delta\Big(\gamma_s\big(\beta_b(a)\big)\Big) \\
&= \alpha_{\beta_b(\gamma_s(a))} \times \delta_{\gamma_s(\beta_b(a))} \\
&= \big[c^B_b \circ \alpha_{\gamma_s(a)} \circ (c^B_b)^{-1}\big] \times \big[c^C_s \circ \delta_{\beta_b(a)} \circ (c^C_s)^{-1}\big] \\
&= (c^B_b \times c^C_s) \circ \big[\alpha_{\gamma_s(a)} \times \delta_{\beta_b(a)}\big] \circ \big[(c^B_b)^{-1} \times (c^C_s)^{-1}\big] \\
&= (c^B_b \times c^C_s) \circ \big[\alpha_{\gamma_s(a)} \times \delta_{\beta_b(a)}\big] \circ (c^B_b \times c^C_s)^{-1} \\
&= c^{B\times C}_{(b,s)} \circ \big[\alpha_{\gamma_s(a)} \times \delta_{\beta_b(a)}\big] \circ [c^{B\times C}_{(b,s)}]^{-1}\,.
\end{aligned}$$

Assim, $\alpha_a \times \delta_a = \alpha_{\gamma_s(a)} \times \delta_{\beta_b(a)}$ e, portanto, $\alpha_a = \alpha_{\gamma_s(a)}$ e $\delta_a = \delta_{\beta_b(a)}$. Consequentemente, $\alpha(a) = \alpha_a = \alpha_{\gamma_s(a)} = \alpha\big(\gamma_s(a)\big) = (\alpha \circ \gamma_s)(a)$ e $\delta(a) = \delta_a = \delta_{\beta_b(a)} = \delta\big(\beta_b(a)\big) = (\delta \circ \beta_b)(a)$. Como a é qualquer, $\alpha = \alpha \circ \gamma_s$ e $\delta = \delta \circ \beta_b$. Como b e s são arbitrários, o resultado segue. ■

Sejam G e H grupos, $\theta : G \to Sym(H)$ e $\xi : H \to Sym(G)$ ações, $c^G : G \to Aut(G)$ a ação por conjugação de G e $c^H : H \to Aut(H)$ a ação por conjugação de H. Observe que, θ e ξ são compatíveis se, e somente se, $\forall g, x \in G$, $\forall h, y \in H$,

$$\begin{aligned}
{}^{({}^g h)}x &= {}^{\theta_g(h)}x \\
&= \xi_{\theta_g(h)}(x) \\
&= (c^G_g \circ \xi_h \circ c^G_{g^{-1}})(x) \\
&= c^G_g\Big(\xi_h\big(c^G_{g^{-1}}(x)\big)\Big) \\
&= c^G_g\big(\xi_h({}^{g^{-1}}x)\big) \\
&= c^G_g\big({}^h({}^{g^{-1}}x)\big) \\
&= {}^g\big[{}^h({}^{g^{-1}}x)\big]\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{({}^{h}g)}y &= {}^{\xi_h(g)}y \\
&= \theta_{\xi_h(g)}(y) \\
&= (c^H_h \circ \theta_g \circ c^H_{h^{-1}})(y) \\
&= c^H_h\Big(\theta_g\big(c^H_{h^{-1}}(y)\big)\Big) \\
&= c^H_h\big(\theta_g({}^{h^{-1}}y)\big) \\
&= c^H_h\big({}^{g}({}^{h^{-1}}y)\big) \\
&= {}^{h}\big[{}^{g}({}^{h^{-1}}y)\big]\,.
\end{aligned}$$

Dizendo de outra forma, G e H agem um no outro compativelmente se, e somente se, $\forall g, x \in G$, $\forall h, y \in H$,

$${}^{({}^{g}h)}x = {}^{g}\big[{}^{h}({}^{g^{-1}}x)\big] \qquad \text{e} \qquad {}^{({}^{h}g)}y = {}^{h}\big[{}^{g}({}^{h^{-1}}y)\big]\,.$$

Caso G e H sejam abelianos, eles agem um no outro compativelmente se, e somente se, $\forall g, x \in G$, $\forall h, y \in H$,

$${}^{({}^{g}h)}x = {}^{h}x \qquad \text{e} \qquad {}^{({}^{h}g)}y = {}^{g}y\,.$$

É fácil verificar que a ação trivial de G em H é compatível com a ação trivial de H em G, quaisquer que sejam os grupos G e H.

Como vimos acima, no caso de $G = H$, segue que a conjugação é compatível consigo mesma. Sempre que usarmos nossa notação e um elemento de um grupo estiver agindo sobre um elemento do mesmo grupo, esta será a ação por conjugação. Isto é, se tivermos um grupo G e elementos $a, x \in G$, tais que, em uma passagem, apareça o termo "${}^{a}x$", esse termo é o elemento $axa^{-1} \in G$.

Sejam G e H grupos, $\theta : G \to Sym(H)$ e $\xi : H \to Sym(G)$ ações, $c^G : G \to Aut(G)$ a ação por conjugação de G e $c^H : H \to Aut(H)$ a ação por conjugação de H. Na notação que estamos utilizando, temos que $\theta_g(h) = {}^{g}h$, que $\xi_h(g) = {}^{h}g$, que $c^G_g(x) = {}^{g}x = gxg^{-1}$ e que $c^H_h(y) = {}^{h}y = hyh^{-1}$, $\forall g, x \in G$, $\forall h, y \in H$. Como não iremos definir um produto entre elementos de G e elementos de H, podemos, sem ambiguidade, denotar o elemento ${}^{g}({}^{h}x) = c^G_g\big(\xi_h(x)\big) = g({}^{h}x)g^{-1}$ por "${}^{gh}x$" e também podemos denotar o elemento ${}^{h}({}^{g}y) = c^H_h\big(\theta_g(y)\big) = h({}^{g}y)h^{-1}$ por "${}^{hg}y$", $\forall g, x \in G$, $\forall h, y \in H$.

Nessa notação, G e H agem um no outro compativelmente se, e somente se, $\forall g, x \in G$, $\forall h, y \in H$,

$${}^{{}^{g}h}x = {}^{ghg^{-1}}x \qquad \text{e} \qquad {}^{{}^{h}g}y = {}^{hgh^{-1}}y\,.$$

Caso sejam ambos abelianos, G e H agem um no outro compativelmente se, e somente se, $\forall g, x \in G$, $\forall h, y \in H$,

$${}^{{}^{g}h}x = {}^{h}x \qquad \text{e} \qquad {}^{{}^{h}g}y = {}^{g}y\,.$$

Como a ação de G em si mesmo é a conjugação e a ação de H em si mesmo é a conjugação, $\forall x, g \in G$, $\forall h, y \in H$, temos que

$$ {}^{{}^{g}h}x = {}^{ghg^{-1}}x = {}^{g}[{}^{h}({}^{g^{-1}}x)] = {}^{g}[{}^{h}(g^{-1}xg)] = g[{}^{h}(g^{-1}xg)]g^{-1} = g\,{}^{h}(g^{-1}xg)\,g^{-1}\,; $$
$$ {}^{{}^{h}g}y = {}^{hgh^{-1}}y = {}^{h}[{}^{g}({}^{h^{-1}}y)] = {}^{h}[{}^{g}(h^{-1}yh)] = h[{}^{g}(h^{-1}yh)]h^{-1} = h\,{}^{g}(h^{-1}yh)\,h^{-1}\,. $$

Ainda, se a ação de H em G for uma ação por automorfismos, $\forall g, x \in G$, $\forall h \in H$, temos que

$$ {}^{{}^{g}h}x = {}^{ghg^{-1}}x = g\,{}^{h}(g^{-1}xg)\,g^{-1} = g({}^{h}g^{-1} \cdot {}^{h}x \cdot {}^{h}g)g^{-1} = (g\,{}^{h}g^{-1})\,{}^{h}x({}^{h}gg^{-1})\,. $$

Por fim, se a ação de G em H for uma ação por automorfismos, $\forall g \in G$, $\forall h, y \in H$, temos que

$$ {}^{{}^{h}g}y = {}^{hgh^{-1}}y = h\,{}^{g}(h^{-1}yh)\,h^{-1} = h({}^{g}h^{-1} \cdot {}^{g}y \cdot {}^{g}h)h^{-1} = (h\,{}^{g}h^{-1})\,{}^{g}y({}^{g}hh^{-1})\,. $$

Lembramos que, para todo grupo M e quaisquer elementos $a, b \in M$, o "*comutador* de a e b" é o produto $aba^{-1}b^{-1} \in M$, que é comumente denotado por "$[a, b]$". Usando isso como motivação, sendo G e H grupos, $\theta : G \to Sym(H)$ e $\xi : H \to Sym(G)$ ações, $c^{G} : G \to Aut(G)$ a ação por conjugação de G e $c^{H} : H \to Aut(H)$ a ação por conjugação de H, denotaremos o elemento ${}^{ghg^{-1}h^{-1}}x = {}^{g}\{{}^{h}[{}^{g^{-1}}({}^{h^{-1}}x)]\} = c^{G}_{g}\Big(\xi_{h}\Big(c^{G}_{g^{-1}}\big(\xi_{h^{-1}}(x)\big)\Big)\Big)$ por "${}^{[g,h]}x$" e denotaremos ${}^{hgh^{-1}g^{-1}}y = {}^{h}\{{}^{g}[{}^{h^{-1}}({}^{g^{-1}}y)]\} = c^{H}_{h}\Big(\theta_{g}\Big(c^{H}_{h^{-1}}\big(\theta_{g^{-1}}(y)\big)\Big)\Big)$ por "${}^{[h,g]}y$", $\forall g, x \in G$, $\forall h, y \in H$.

Note que ${}^{[g,h]}x = {}^{g}\{{}^{h}[{}^{g^{-1}}({}^{h^{-1}}x)]\} = g \cdot {}^{h}(g^{-1} \cdot {}^{h^{-1}}x \cdot g) \cdot g^{-1}$, $\forall g, x \in G$, $\forall h \in H$. Se ξ for ação por automorfismos, então, $\forall g, x \in G$, $\forall h \in H$,

$$ \begin{aligned} {}^{[g,h]}x &= g \cdot {}^{h}(g^{-1} \cdot {}^{h^{-1}}x \cdot g) \cdot g^{-1} \\ &= g \cdot {}^{h}g^{-1} \cdot {}^{hh^{-1}}x \cdot {}^{h}g \cdot g^{-1} \\ &= g \cdot {}^{h}g^{-1} \cdot {}^{\tilde{e}}x \cdot {}^{h}g \cdot g^{-1} \\ &= g \cdot {}^{h}g^{-1} \cdot x \cdot {}^{h}g \cdot g^{-1} \\ &= (g\,{}^{h}g^{-1})\,x\,({}^{h}g\,g^{-1})\,, \end{aligned} $$

em que $\tilde{e} = e_{H} \in H$ é o elemento neutro de H. Também, temos que ${}^{[h,g]}y = {}^{h}\{{}^{g}[{}^{h^{-1}}({}^{g^{-1}}y)]\} = h \cdot {}^{g}(h^{-1} \cdot {}^{g^{-1}}y \cdot h) \cdot h^{-1}$, $\forall g \in G$, $\forall h, y \in H$. Se θ for ação por automorfismos, então, $\forall g \in G$, $\forall h, y \in H$,

$$ \begin{aligned} {}^{[h,g]}y &= h \cdot {}^{g}(h^{-1} \cdot {}^{g^{-1}}y \cdot h) \cdot h^{-1} \\ &= h \cdot {}^{g}h^{-1} \cdot {}^{gg^{-1}}y \cdot {}^{g}h \cdot h^{-1} \\ &= h \cdot {}^{g}h^{-1} \cdot {}^{e}y \cdot {}^{g}h \cdot h^{-1} \\ &= h \cdot {}^{g}h^{-1} \cdot y \cdot {}^{g}h \cdot h^{-1} \\ &= (h\,{}^{g}h^{-1})\,y\,({}^{g}h\,h^{-1})\,, \end{aligned} $$

em que $e = e_{G} \in G$ é o elemento neutro de G.

1.2 Pareamentos cruzados e bihomomorfismos

Definição 1.2.1. Sejam G, H e K grupos, $\theta : G \to Sym(H)$ e $\xi : H \to Sym(G)$ ações, $c^G : G \to Aut(G)$ a ação por conjugação de G, $c^H : H \to Aut(H)$ a ação por conjugação de H e $\tau : G\times H \to K$ uma função. Dizemos que "τ é um *pareamento cruzado* (*crossed pairing* ou *biderivação*) com respeito a θ e ξ" se, e somente se,

(1) $\tau(ax, y) = \tau\big(c_a^G(x), \theta_a(y)\big) \cdot \tau(a, y)$, $\forall a, x \in G$, $\forall y \in H$;

(2) $\tau(x, by) = \tau(x, b) \cdot \tau\big(\xi_b(x), c_b^H(y)\big)$, $\forall x \in G$, $\forall b, y \in H$.

Sejam G, H e K grupos, $e_K \in K$ o elemento neutro de K e $\tau : G\times H \to K$ uma função tal que $\tau(x, y) = e_K$, $\forall x \in G$, $\forall y \in H$. Observe que, para quaisquer ações $\theta : G \to Sym(H)$ e $\xi : H \to Sym(G)$, temos que τ é um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ. Chamamos essa função de "o pareamento cruzado nulo".

Proposição 1.2.2. Sejam G, H e K grupos, $e_G \in G$ o elemento neutro de G, $e_H \in H$ o elemento neutro de H, $e_K \in K$ o elemento neutro de K, $\theta : G \to Sym(H)$ e $\xi : H \to Sym(G)$ ações e $\tau : G\times H \to K$ um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ. Temos que $\tau(e_G, h) = e_K = \tau(g, e_H)$, $\forall h \in H$, $\forall g \in G$.

Demonstração: Sejam $e = e_G \in G$ e $\tilde{e} = e_H \in H$ os elementos neutros e $c^G : G \to Aut(G)$ e $c^H : H \to Aut(H)$ as ações por conjugação de G e de H, respectivamente. Para todo $h \in H$, temos que

$$\begin{aligned}
e_K &= [\tau(e, h)]^{-1} \cdot \tau(e, h) \\
&= [\tau(e, h)]^{-1} \cdot \tau(e \cdot e, h) \\
&= [\tau(e, h)]^{-1} \cdot \tau\big(c_e(e), \theta_e(h)\big) \cdot \tau(e, h) \\
&= [\tau(e, h)]^{-1} \cdot \tau\big(id_G(e), id_H(h)\big) \cdot \tau(e, h) \\
&= [\tau(e, h)]^{-1} \cdot \tau(e, h) \cdot \tau(e, h) \\
&= \tau(e, h)\,.
\end{aligned}$$

Analogamente, para todo $g \in G$, temos que

$$\begin{aligned}
e_K &= [\tau(g, \tilde{e})]^{-1} \cdot \tau(g, \tilde{e}) \\
&= [\tau(g, \tilde{e})]^{-1} \cdot \tau(g, \tilde{e} \cdot \tilde{e}) \\
&= [\tau(g, \tilde{e})]^{-1} \cdot \tau(g, \tilde{e}) \cdot \tau\big(\xi_{\tilde{e}}(g), c_{\tilde{e}}^H(\tilde{e})\big) \\
&= \tau\big(id_G(g), id_H(\tilde{e})\big) \\
&= \tau(g, \tilde{e})\,.
\end{aligned}$$

■

Definição 1.2.3. Sejam G, H e K grupos e $\beta : G \times H \to K$ uma função. Dizemos que "β é um *bihomomorfismo*" se, e somente se,

(1) $\beta(ax, y) = \beta(a, y) \cdot \beta(x, y)$, $\forall a, x \in G$, $\forall y \in H$;

(2) $\beta(x, by) = \beta(x, b) \cdot \beta(x, y)$, $\forall x \in G$, $\forall b, y \in H$.

Sejam G, H e K grupos e $\beta : G \times H \to K$ uma função. Para cada $y \in H$, seja uma função $\beta_y : G \to K$ tal que $\beta_y(x) = \beta(x, y)$, $\forall x \in G$. Para cada $x \in G$, seja uma função $\beta_x : H \to K$ tal que $\beta_x(y) = \beta(x, y)$, $\forall y \in H$. É fácil ver que β é bihomomorfismo se, e somente se, β_y e β_x são homomorfismos, $\forall y \in H$, $\forall x \in G$.

Sejam G, H e K grupos, $e_K \in K$ o elemento neutro de K e $\beta : G \times H \to K$ uma função tal que $\beta(x, y) = e_K$, $\forall x \in G$, $\forall y \in H$. Observe que β é um bihomomorfismo. Chamamos essa função de "o bihomomorfismo nulo".

Observação 1.2.4. Sejam G, H e K grupos, $e_G \in G$ o elemento neutro de G, $e_H \in H$ o elemento neutro de H, $e_K \in K$ o elemento neutro de K e $\beta : G \times H \to K$ um bihomomorfismo. Temos que $\beta(e_G, h) = e_K = \beta(g, e_H)$, $\forall h \in H$, $\forall g \in G$. De fato, $\forall h \in H$, $\forall g \in G$, temos que

$$\begin{aligned}
\beta(e_G, h) &= e_K \cdot \beta(e_G, h) \\
&= [\beta(e_G, h)]^{-1} \cdot \beta(e_G, h) \cdot \beta(e_G, h) \\
&= [\beta(e_G, h)]^{-1} \cdot \beta(e_G \cdot e_G, h) \\
&= [\beta(e_G, h)]^{-1} \cdot \beta(e_G, h) \\
&= e_K \\
&= [\beta(g, e_H)]^{-1} \cdot \beta(g, e_H) \\
&= [\beta(g, e_H)]^{-1} \cdot \beta(g, e_H \cdot e_H) \\
&= [\beta(g, e_H)]^{-1} \cdot \beta(g, e_H) \cdot \beta(g, e_H) \\
&= e_K \cdot \beta(g, e_H) \\
&= \beta(g, e_H) \,.
\end{aligned}$$

Portanto, $e_K = \beta(e_G, e_H) \in im(\beta)$.

Observação 1.2.5. Sejam G, H e K grupos e $\beta : G \times H \to K$ um bihomomorfismo. Temos que $\beta(g^{-1}, h) = [\beta(g, h)]^{-1} = \beta(g, h^{-1})$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$. Com efeito, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$, pela observação anterior, temos que

$$\begin{aligned}
\beta(g, h) \cdot \beta(g^{-1}, h) &= \beta(g \cdot g^{-1}, h) \\
&= \beta(e_G, h) \\
&= e_K \\
&= \beta(g^{-1} \cdot g, h) \\
&= \beta(g^{-1}, h) \cdot \beta(g, h) \,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta(g,h)\cdot\beta(g,h^{-1}) &= \beta(g,h\cdot h^{-1})\\ &= \beta(g,e_H)\\ &= e_K=\beta(g,e_H)\\ &= \beta(g,h^{-1}\cdot h)\\ &= \beta(g,h^{-1})\cdot\beta(g,h)\,.\end{aligned}$$

Portanto, $[\beta(g,h)]^{-1}=\beta(g^{-1},h)\in im(\beta)$, $\forall g\in G$, $\forall h\in H$.

Seja K um grupo. Como é usual, denotamos a sentença "N é subgrupo normal de K" por "$N\lhd K$". Lembremos alguns fatos da teoria de grupos.

Observação 1.2.6. Sejam L um grupo, $e\in L$ o elemento neutro de L e $S\subset L$. O subgrupo de L gerado por S é $\langle S\rangle=\cap\{M\in\wp(L):S\subset M\leqslant L\}$. Temos que $S\subset\langle S\rangle\leqslant L$ e que $\langle S\rangle$ é o menor subgrupo de L que contém S, com respeito à ordem da inclusão "$\subset$". Por isso, $\forall V\subset L$, se $S\subset V\leqslant L$, então $\langle S\rangle\subset V$ e, portanto, $S\subset\langle S\rangle\leqslant V\leqslant L$. Além disso, $\langle S\rangle=S$ se, e somente se, $S\leqslant L$. É fácil mostrar que $\langle S\rangle=\{e\}$ se, e somente se, $S=\varnothing$ ou $S=\{e\}$. Isto é, $\langle S\rangle=\{e\}$ se, e somente se, $S\subset\{e\}$.

O fecho normal de S em L é $\langle S\rangle_N=\cap\{N\in\wp(L):S\subset N\lhd L\}$. Temos que $S\subset\langle S\rangle_N\lhd L$ e que $\langle S\rangle_N$ é o menor subgrupo normal de L que contém S, também com respeito à ordem da inclusão. Por isso, $\forall V\subset L$, se $S\subset V\lhd L$, então $\langle S\rangle\subset V$ e, portanto, $S\subset\langle S\rangle\lhd V\lhd L$. Além disso, $\langle S\rangle_N=S$ se, e somente se, $S\lhd L$. É fácil mostrar que $\langle S\rangle_N=\{e\}$ se, e somente se, $S=\varnothing$ ou $S=\{e\}$. Isto é, $\langle S\rangle_N=\{e\}$ se, e somente se, $S\subset\{e\}$.

O conjunto dos inversos de S é $S^{-1}=\{s^{-1}\in L:s\in S\}$. É fácil mostrar que $S^{-1}\subset S$ se, e somente se, $S^{-1}=S$. O fecho por produtos de S em L é o conjunto $Sp(S)=\{s_1\cdot s_2\cdot\ldots\cdot s_n\in L\ :\ n\in\mathbb{N}^*\ \text{e}\ s_1,s_2,\ldots,s_n\in S\}$. É claro que $S\subset Sp(S)$. Também temos que $Sp(S)=\varnothing$ se, e somente se, $S=\varnothing$ e que $Sp(S)=\{e\}$ se, e somente se, $S=\{e\}$.

Seja X um conjunto. Lembremos que o conjunto de todas as seqüências de elementos de X indexadas em $\mathbb{N}^*$ é o conjunto $X^{\mathbb{N}^*}$ de todas as funções de $\mathbb{N}^*$ em X. Seja $x\in X^{\mathbb{N}^*}$. É costume denotar a imagem $x(n)\in X$ de um número $n\in\mathbb{N}^*$ por "x_n" e a própria seqüência x por "$(x_1,x_2,x_3,\ldots)$".

Seja $V\subset L$ tal que $S\subset V$ e considere as propriedades:

(a) V é fechado por produtos, isto é,

$$(\forall u,v\in L)(u\in V\ \text{ e }\ v\in V\implies uv\in V)\,;$$

(b) $(\forall v,s\in L)(v\in V\ \text{ e }\ s\in S\implies vs\in V)$;

(c) $\left(\forall s\in S^{\mathbb{N}^*}\right)(\forall n\in\mathbb{N}^*)(s_1\cdot s_2\cdot\ldots\cdot s_{n-1}\cdot s_n\in V)$.

É claro que (a)⇒(b). Vamos mostrar que (b)⇒(c). Seja $s \in S^{\mathbb{N}^*}$. Como $im(s) \subset S \subset V$, é claro que $s_j \in V$, $\forall j \in \mathbb{N}^*$. Em particular, $s_1 \in V$. Por (b), $s_1 \cdot s_2 \in V$. Seja $j \in \mathbb{N}^*$ tal que $s_1 \cdot s_2 \cdot ... \cdot s_j \in V$. Novamente por (b), temos que $s_1 \cdot s_2 \cdot ... \cdot s_j \cdot s_{j+1} \in V$. Como j é arbitrário, pelo princípio da indução finita concluimos que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(s_1 \cdot s_2 \cdot ... \cdot s_{n-1} \cdot s_n \in V)$.

Agora, mostremos que a propriedade (c) implica $Sp(S) \subset V$. Seja $y \in Sp(S)$. Então, existem $s_1, s_2, ..., s_{n-1}, s_n \in S$ tais que $y = s_1 \cdot s_2 \cdot ... \cdot s_{n-1} \cdot s_n$. Considere a seqüência $(s_1, s_2, ..., s_{n-1}, s_n, s_n, s_n, s_n, ...) \in S^{\mathbb{N}^*}$. A propriedade (c) afirma que $s_1 \cdot s_2 \cdot ... \cdot s_{m-1} \cdot s_m \in V$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$. Tomando $m = n$, ficamos com $y = s_1 \cdot s_2 \cdot ... \cdot s_{n-1} \cdot s_n \in V$. Como y é qualquer, temos que $Sp(S) \subset V$.

Assim, ficamos com (a)⇒(b)⇒(c). O que nos fornece uma ferramenta útil: para mostrar que um determinado subconjunto $V \subset L$ satisfaz $Sp(S) \subset V$, é suficiente mostrar que $S \subset V$ e que V satisfaz qualquer uma das propriedades (a) ou (b) ou (c).

Outro fato importante é que $\langle S \rangle = Sp(\{e\} \cup S \cup S^{-1})$. Vamos mostrar isso. Sejam $S_0 = \{e\} \cup S \cup S^{-1}$ e $P = Sp(S_0)$. Como $e \in S_0$ e $S \subset S_0 \subset P$, temos que $e \in P$ (e, portanto, $P \neq \varnothing$) e que $S \subset P$. Note que $S_0^{-1} \subset S_0$. Assim, $S_0^{-1} = S_0$. Seja $k \in P$. Então, existem $s_1, s_2, ..., s_{n-1}, s_n \in S_0$ tais que $k = s_1 s_2 ... s_{n-1} s_n$. Daí, s_1^{-1}, s_2^{-1}, ..., s_{n-1}^{-1}, $s_n^{-1} \in S_0^{-1} = S_0$. Assim, $k^{-1} = (s_1 s_2 ... s_{n-1} s_n)^{-1} = s_n^{-1} s_{n-1}^{-1} ... s_2^{-1} s_1^{-1} \in P$. Sejam $a, b \in P$. Então, existem $s_1, ..., s_n, r_1, ..., r_m \in S_0$ tais que $a = s_1 ... s_n$ e $b = r_1 ... r_m$. Daí, $ab = s_1 ... s_n \cdot r_1 ... r_m \in P$. Dessa forma, $S \subset P \leqslant L$ e, portanto, $\langle S \rangle \subset P$. Note que $S_0 \subset \langle S \rangle$. Novamente, seja $k \in P$. Então, existem $s_1, ..., s_n \in S_0$ tais que $k = s_1 ... s_n$. Assim, $s_1, ..., s_n \in \langle S \rangle$ e, portanto, $k = s_1 ... s_n \in \langle S \rangle$. Daí, $P \subset \langle S \rangle$. Logo, $P = \langle S \rangle$.

Do parágrafo acima podemos concluir que, se $e \in S$ e $S^{-1} \subset S$, então $\{e\} \cup S \cup S^{-1} = S$ e, portanto, $\langle S \rangle = Sp(\{e\} \cup S \cup S^{-1}) = Sp(S)$.

Temos também que, $\langle S \rangle$ é abeliano se, e somente se, todos os elementos de S comutam entre si. Com efeito, se $\langle S \rangle$ é abeliano, então todos os elementos de $\langle S \rangle$ comutam entre si. Como $S \subset \langle S \rangle$, é claro que todos os elementos de S comutam entre si. Suponha que todos os elementos de S comutam entre si e sejam $a \in S$ e $c \in S^{-1}$. Então, existe $b \in S$ tal que $c = b^{-1}$. Temos que $ab = ba$. Daí,

$$\begin{aligned}
ac &= ab^{-1} \\
&= e \cdot (ab^{-1}) \\
&= (b^{-1}b) \cdot (ab^{-1}) \\
&= b^{-1}(ba)b^{-1} \\
&= b^{-1}(ab)b^{-1} \\
&= (b^{-1}a)(bb^{-1}) \\
&= (b^{-1}a) \cdot e \\
&= b^{-1}a \\
&= ca\,.
\end{aligned}$$

Portanto, todo elemento de S comuta com todo elemento de S^{-1}. Ou seja, todos os elementos de $S \cup S^{-1}$ comutam entre si. Como o elemento neutro comuta com todos os elementos de L, então todos os elementos de $S_0 = \{e\} \cup S \cup S^{-1}$ comutam entre si. Sejam $a, b \in \langle S \rangle = Sp(\{e\} \cup S \cup S^{-1})$. Então, existem $s_1, ..., s_n, r_1, ..., r_m \in S_0$ tais que $a = s_1...s_n$ e $b = r_1...r_m$. É claro que todos os elementos de $\{s_1, ..., s_n, r_1, ..., r_m\}$ comutam entre si. Portanto, $ab = s_1...s_n \cdot r_1...r_m = r_1...r_m \cdot s_1...s_n = ba$. Logo, $\langle S \rangle$ é abeliano.

Sejam G, H e K grupos e $\beta : G \times H \to K$ um bihomomorfismo. Temos que $[im(\beta)]^{-1} = im(\beta)$. De fato, $\forall z \in [im(\beta)]^{-1}$, existe $k \in im(\beta)$ tal que $z = k^{-1}$. Também, existem $g \in G$ e $h \in H$ tais que $k = \beta(g, h)$. Pela observação 1.2.5, temos que $z = k^{-1} = [\beta(g, h)]^{-1} = \beta(g^{-1}, h) \in im(\beta)$. Daí, $[im(\beta)]^{-1} \subset im(\beta)$. Pela observação 1.2.6, temos que $[im(\beta)]^{-1} = im(\beta)$. Na observação 1.2.4, vimos que $e_K \in im(\beta)$. Novamente pela observação 1.2.6, temos que $\langle im(\beta) \rangle = Sp\big(im(\beta)\big)$. Portanto, $\forall V \subset K$, para mostrarmos que $\langle im(\beta) \rangle \subset V$, basta mostrarmos que $im(\beta) \subset V$ e que vale alguma das propriedades (a) ou (b) ou (c) da observação 1.2.6, colocando $S = im(\beta)$.

Proposição 1.2.7. Sejam G, H e K grupos e $\beta : G \times H \to K$ um bihomomorfismo. Então, $\langle im(\beta) \rangle$ é abeliano.

Demonstração: Sejam $a, g \in G$ e $b, h \in H$. Com respeito aos itens da definição 1.2.3, usando (1) e depois (2), temos que

$$\beta(ag, bh) = \beta(a, bh) \cdot \beta(g, bh) = \beta(a, b) \cdot \beta(a, h) \cdot \beta(g, b) \cdot \beta(g, h)\,.$$

Com respeito à mesma definição, usando (2) e depois (1), temos que

$$\beta(ag, bh) = \beta(ag, b) \cdot \beta(ag, h) = \beta(a, b) \cdot \beta(g, b) \cdot \beta(a, h) \cdot \beta(g, h)\,.$$

Dessa forma, $\beta(a, b) \cdot \beta(a, h) \cdot \beta(g, b) \cdot \beta(g, h) = \beta(a, b) \cdot \beta(g, b) \cdot \beta(a, h) \cdot \beta(g, h)$ e, portanto, $\beta(a, h) \cdot \beta(g, b) = \beta(g, b) \cdot \beta(a, h)$. Assim, $\forall a, g \in G$, $\forall b, h \in H$, temos que $\beta(a, h) \cdot \beta(g, b) = \beta(g, b) \cdot \beta(a, h)$. Sejam $u, v \in im(\beta)$. Então, existem $a, g \in G$ e $b, h \in H$ tais que $u = \beta(a, h)$ e $v = \beta(g, b)$. Ficamos com $uv = \beta(a, h) \cdot \beta(g, b) = \beta(g, b) \cdot \beta(a, h) = vu$. Portanto, todos os elementos de $im(\beta)$ comutam entre si. Logo, pela observação 1.2.6, $\langle im(\beta) \rangle$ é abeliano. ∎

Sejam G, H e K grupos e $\beta : G \times H \to K$ um bihomomorfismo. Por causa da proposição acima, se G e H são abelianos, dizemos que "β é uma *função bilinear*".

Note que, na definição 1.2.1, se ambas as ações θ e ξ são as ações triviais, então uma função $\tau : G \times H \to K$ é um pareamento cruzado com respeito às ações triviais θ e ξ se, e somente se, é um bihomomorfismo. Além disso, se G e H são abelianos, então a função $\tau : G \times H \to K$ é um pareamento cruzado com respeito às ações triviais θ e ξ se, e somente se, é uma função bilinear.

Proposição 1.2.8. Sejam A, B, G, H, K e L grupos, $\phi : A \to G$, $\eta : B \to H$ e $\psi : K \to L$ homomorfismos e $\beta : G\times H \to K$ um bihomomorfismo. Então, $\beta \circ (\phi \times \eta)$ e $\psi \circ \beta$ também são bihomomorfismos.

Demonstração: Para todos $a, a_1, a_2 \in A$ e todos $b, b_1, b_2 \in B$, temos que

$$\begin{aligned}
[\beta \circ (\phi \times \eta)](a_1 \cdot a_2, b) &= \beta\big((\phi \times \eta)(a_1 \cdot a_2, b)\big) \\
&= \beta\big(\phi(a_1 \cdot a_2), \eta(b)\big) \\
&= \beta\big(\phi(a_1) \cdot \phi(a_2), \eta(b)\big) \\
&= \beta\big(\phi(a_1), \eta(b)\big) \cdot \beta\big(\phi(a_2), \eta(b)\big) \\
&= \beta\big((\phi \times \eta)(a_1, b)\big) \cdot \beta\big((\phi \times \eta)(a_2, b)\big) \\
&= [\beta \circ (\phi \times \eta)](a_1, b) \cdot [\beta \circ (\phi \times \eta)](a_2, b)\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\beta \circ (\phi \times \eta)](a, b_1 \cdot b_2) &= \beta\big((\phi \times \eta)(a, b_1 \cdot b_2)\big) \\
&= \beta\big(\phi(a), \eta(b_1 \cdot b_2)\big) \\
&= \beta\big(\phi(a), \eta(b_1) \cdot \eta(b_2)\big) \\
&= \beta\big(\phi(a), \eta(b_1)\big) \cdot \beta\big(\phi(a), \eta(b_2)\big) \\
&= \beta\big((\phi \times \eta)(a, b_1)\big) \cdot \beta\big((\phi \times \eta)(a, b_2)\big) \\
&= [\beta \circ (\phi \times \eta)](a, b_1) \cdot [\beta \circ (\phi \times \eta)](a, b_2)\,.
\end{aligned}$$

Também, $\forall g, g_1, g_2 \in G$, $\forall h, h_1, h_2 \in H$, temos que

$$\begin{aligned}
(\psi \circ \beta)(g_1 \cdot g_2, h) &= \psi\big(\beta(g_1 \cdot g_2, h)\big) \\
&= \psi\big(\beta(g_1, h) \cdot \beta(g_2, h)\big) \\
&= \psi\big(\beta(g_1, h)\big) \cdot \psi\big(\beta(g_2, h)\big) \\
&= (\psi \circ \beta)(g_1, h) \cdot (\psi \circ \beta)(g_2, h)\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\psi \circ \beta)(g, h_1 \cdot h_2) &= \psi\big(\beta(g, h_1 \cdot h_2)\big) \\
&= \psi\big(\beta(g, h_1) \cdot \beta(g, h_2)\big) \\
&= \psi\big(\beta(g, h_1)\big) \cdot \psi\big(\beta(g, h_2)\big) \\
&= (\psi \circ \beta)(g, h_1) \cdot (\psi \circ \beta)(g, h_2)\,.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 1.2.9. Sejam $\theta : \mathbb{Z}_2 \to Aut(\mathbb{Z}_3)$ e $\xi : \mathbb{Z}_3 \to Aut(\mathbb{Z}_2)$ as ações dos exemplos 1.1.1 e 1.1.6. Sejam também $c : \mathbb{Z}_2 \to Aut(\mathbb{Z}_2)$ a ação por conjugação de $\mathbb{Z}_2$ e $\tilde{c} : \mathbb{Z}_3 \to Aut(\mathbb{Z}_3)$ a ação por conjugação de $\mathbb{Z}_3$. Como $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_3$ são abelianos, temos que c é a ação trivial de $\mathbb{Z}_2$ em si mesmo e $\xi = \tilde{c}$ é a ação trivial de $\mathbb{Z}_3$ em si mesmo. Seja $\tau : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ tal que $\tau(n, m) = nm$ (multiplicação em $\mathbb{Z}_3$), $\forall n \in \mathbb{Z}_2$, $\forall m \in \mathbb{Z}_3$. Temos que $\tau(1,1) = 1$, que $\tau(1,2) = 2$ e que $\tau(0,0) = \tau(0,1) = \tau(0,2) = \tau(1,0) = 0$. Note que, $\forall x \in \mathbb{Z}_2$, $\forall b, y \in \mathbb{Z}_3$, temos que $\tau\big(\xi_b(x), \tilde{c}_b(y)\big) = \tau(x,y)$ e, $\forall a, x \in \mathbb{Z}_2$, $\forall y \in \mathbb{Z}_3$,

$$\tau\big(c_a(x), \theta_a(y)\big) = \begin{cases} \tau(x,y)\ , & \text{se } a = 0\,; \\ \tau(x,-y)\ , & \text{se } a = 1\,. \end{cases}$$

Portanto, pelo fato de $\mathbb{Z}_3$ ser um anel, $\forall x \in \mathbb{Z}_2$, $\forall b, y \in \mathbb{Z}_3$, temos que $\tau(x, b+y) = x(b+y) = xb + xy = \tau(x,b) + \tau(x,y) = \tau(x,b) + \tau\big(\xi_b(x), \tilde{c}_b(y)\big)$.

Seja $a \in \mathbb{Z}_2$. Se $a = 0$, $\forall x \in \mathbb{Z}_2$, $\forall y \in \mathbb{Z}_3$, ficamos com

$$\begin{aligned} \tau(a+x, y) &= \tau(0+x, y) \\ &= \tau(x,y) \\ &= xy \\ &= xy + 0 \\ &= xy + 0 \cdot y \\ &= xy + ay \\ &= \tau(x,y) + \tau(a,y) \\ &= \tau\big(c_a(x), \theta_a(y)\big) + \tau(a,y)\,. \end{aligned}$$

Se $a = 1$, temos a tabela abaixo:

a	x	$a+x$	y	$\tau(a+x,y)$	$\tau\big(c_a(x), \theta_a(y)\big)$	$\tau(a,y)$
1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	2	2	0	2
1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	2	1
1	1	0	2	0	1	2

Somando em $\mathbb{Z}_3$ os valores da sexta e sétima colunas, obtemos os valores mostrados na quinta coluna, isto é, temos que $\tau(a+x,y) = \tau\big(c_a(x), \theta_a(y)\big) + \tau(a,y)$, $\forall x \in \mathbb{Z}_2$, $\forall y \in \mathbb{Z}_3$.

Por fim, temos que $\tau(a+x,y) = \tau\big(c_a(x), \theta_a(y)\big) + \tau(a,y)$, $\forall a, x \in \mathbb{Z}_2$, $\forall y \in \mathbb{Z}_3$.

Logo, τ é um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ.

Exemplo 1.2.10. Sejam G um grupo, $c^G : G \to Aut(G)$ a ação por conjugação de G e $\kappa : G \times G \to G$ a função comutadora, isto é, $\kappa(x,y) = [x,y] = x\,y\,x^{-1}\,y^{-1}$, $\forall x, y \in G$. Então, κ é um pareamento cruzado com respeito a c^G e c^G. Com efeito,

$\forall a, x, b, y \in G$,

$$\begin{aligned}
\kappa\big(c_a^G(x), c_a^G(y)\big) \cdot \kappa(a, y) &= \kappa(axa^{-1}, aya^{-1}) \cdot \kappa(a, y) \\
&= [(axa^{-1})(aya^{-1})(axa^{-1})^{-1}(aya^{-1})^{-1}] \cdot (aya^{-1}y^{-1}) \\
&= axa^{-1}aya^{-1}ax^{-1}a^{-1}ay^{-1}a^{-1} \cdot aya^{-1}y^{-1} \\
&= axyx^{-1}a^{-1}y^{-1} \\
&= (ax)y(ax)^{-1}y^{-1} \\
&= \kappa(ax, y)\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa(x, b) \cdot \kappa\big(c_b^G(x), c_b^G(y)\big) &= \kappa(x, b) \cdot \kappa(bxb^{-1}, byb^{-1}) \\
&= (xbx^{-1}b^{-1}) \cdot [(bxb^{-1})(byb^{-1})(bxb^{-1})^{-1}(byb^{-1})^{-1}] \\
&= xbyx^{-1}y^{-1}b^{-1} \\
&= x(by)x^{-1}(by)^{-1} \\
&= \kappa(x, by)\,.
\end{aligned}$$

Na definição 1.2.1, temos que $\tau : G{\times}H \to K$ é um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ se, e somente se,

(1) $\tau(ax, y) = [\tau \circ (c_a^G \times \theta_a)](x, y) \cdot \tau(a, y)$, $\forall a, x \in G$, $\forall y \in H$;

(2) $\tau(x, by) = \tau(x, b) \cdot [\tau \circ (\xi_b \times c_b^H)](x, y)$, $\forall x \in G$, $\forall b, y \in H$.

Na nossa notação, $\tau : G{\times}H \to K$ é um pareamento cruzado com respeito às ações de G em H e de H em G se, e somente se, $\forall a, x \in G$, $\forall b, y \in H$,

$$\tau(ax, y) = \tau({}^a x, {}^a y) \cdot \tau(a, y) = \tau(axa^{-1}, {}^a y) \cdot \tau(a, y)\,;$$
$$\tau(x, by) = \tau(x, b) \cdot \tau({}^b x, {}^b y) = \tau(x, b) \cdot \tau({}^b x, byb^{-1})\,.$$

Proposição 1.2.11. Sejam G e H grupos, $\theta : G \to Sym(H)$ e $\xi : H \to Sym(G)$ ações compatíveis e funções $\tau_1 : G \times H \to G$ e $\tau_2 : G \times H \to H$ tais que $\tau_1(g, h) = g \cdot [\xi_h(g)]^{-1} = g \cdot ({}^h g)^{-1}$ e $\tau_2(g, h) = \theta_g(h) \cdot h^{-1} = {}^g h\, h^{-1}$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$. Temos que

(i) Se ξ é uma ação por automorfismos, então τ_1 é um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ;

(ii) Se θ é uma ação por automorfismos, então τ_2 é um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ.

Demonstração: (i) Para todos $a, x \in G$ e todos $b, y \in H$, temos que

$$
\begin{aligned}
\tau_1\big(c_a^G(x), \theta_a(y)\big) \cdot \tau_1(a, y) &= c_a^G(x) \cdot \big[\xi_{\theta_a(y)}\big(c_a^G(x)\big)\big]^{-1} \cdot a \cdot [\xi_y(a)]^{-1} \\
&= c_a^G(x) \cdot \{[\xi_{\theta_a(y)} \circ c_a^G](x)\}^{-1} \cdot a \cdot [\xi_y(a)]^{-1} \\
&= c_a^G(x) \cdot [(c_a^G \circ \xi_y)(x)]^{-1} \cdot a \cdot [\xi_y(a)]^{-1} \\
&= c_a^G(x) \cdot \big[c_a^G\big(\xi_y(x)\big)\big]^{-1} \cdot a \cdot [\xi_y(a)]^{-1} \\
&= c_a^G(x) \cdot c_a^G\big([\xi_y(x)]^{-1}\big) \cdot a \cdot [\xi_y(a)]^{-1} \\
&= c_a^G\big(x \cdot [\xi_y(x)]^{-1}\big) \cdot a \cdot [\xi_y(a)]^{-1} \\
&= a \cdot \{x \cdot [\xi_y(x)]^{-1}\} \cdot a^{-1} \cdot a \cdot [\xi_y(a)]^{-1} \\
&= a \cdot \{x \cdot [\xi_y(x)]^{-1}\} \cdot [\xi_y(a)]^{-1} \\
&= ax\,[\xi_y(x)]^{-1} \cdot [\xi_y(a)]^{-1} \\
&= (ax)\,[\xi_y(a) \cdot \xi_y(x)]^{-1} \\
&= (ax)\,[\xi_y(ax)]^{-1} \\
&= \tau_1(ax, y)\,.
\end{aligned}
$$

Usando o item (i) da observação 1.1.3, temos que

$$
\begin{aligned}
\tau_1(x, b) \cdot \tau_1\big(\xi_b(x), c_b^H(y)\big) &= x \cdot [\xi_b(x)]^{-1} \cdot \xi_b(x) \cdot \big[\xi_{c_b^H(y)}\big(\xi_b(x)\big)\big]^{-1} \\
&= x \cdot \big[\xi_{c_b^H(y)}\big(\xi_b(x)\big)\big]^{-1} \\
&= x \cdot \{[\xi_{c_b^H(y)} \circ \xi_b](x)\}^{-1} \\
&= x \cdot [(\xi_b \circ \xi_y)(x)]^{-1} \\
&= x \cdot [\xi_{by}(x)]^{-1} \\
&= \tau_1(x, by)\,.
\end{aligned}
$$

(ii) Para todos $a, x \in G$ e todos $b, y \in H$, usando novamente o item (i) da observação 1.1.3, temos que

$$
\begin{aligned}
\tau_2\big(c_a^G(x), \theta_a(y)\big) \cdot \tau_2(a, y) &= \theta_{c_a^G(x)}\big(\theta_a(y)\big) \cdot [\theta_a(y)]^{-1} \cdot \theta_a(y) \cdot y^{-1} \\
&= \theta_{c_a^G(x)}\big(\theta_a(y)\big) \cdot y^{-1} \\
&= [\theta_{c_a^G(x)} \circ \theta_a](y) \cdot y^{-1} \\
&= (\theta_a \circ \theta_x)(y) \cdot y^{-1} = \theta_{ax}(y) \cdot y^{-1} \\
&= \tau_2(ax, y)\,;
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\tau_2(x,b)\cdot\tau_2\big(\xi_b(x),c_b^H(y)\big) &= \theta_x(b)\cdot b^{-1}\cdot\theta_{\xi_b(x)}\big(c_b^H(y)\big)\cdot[c_b^H(y)]^{-1}\\
&= \theta_x(b)\cdot b^{-1}\cdot[\theta_{\xi_b(x)}\circ c_b^H](y)\cdot[c_b^H(y)]^{-1}\\
&= \theta_x(b)\cdot b^{-1}\cdot(c_b^H\circ\theta_x)(y)\cdot[c_b^H(y)]^{-1}\\
&= \theta_x(b)\cdot b^{-1}\cdot c_b^H\big(\theta_x(y)\big)\cdot[c_b^H(y)]^{-1}\\
&= \theta_x(b)\cdot b^{-1}\cdot c_b^H\big(\theta_x(y)\big)\cdot c_b^H(y^{-1})\\
&= \theta_x(b)\cdot b^{-1}\cdot c_b^H\big(\theta_x(y)\cdot y^{-1}\big)\\
&= \theta_x(b)\cdot b^{-1}\cdot b\cdot\{\theta_x(y)\cdot y^{-1}\}\cdot b^{-1}\\
&= \theta_x(b)\cdot\{\theta_x(y)\cdot y^{-1}\}\cdot b^{-1}\\
&= \theta_x(b)\cdot\theta_x(y)\cdot y^{-1}\cdot b^{-1}\\
&= \theta_x(b)\cdot\theta_x(y)\cdot(by)^{-1}\\
&= \theta_x(by)\cdot(by)^{-1}\\
&= \tau_2(x,by)\,.
\end{aligned}$$

■

Proposição 1.2.12. Sejam G, H, K e M grupos, $\theta : G \to Sym(H)$ e $\xi : H \to Sym(G)$ ações e $\tau : G\times H \to K$ um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ. Se $f : K \to M$ é um homomorfismo, então $f\circ\tau : G\times H \to M$ é um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ.

Demonstração: Sejam $c^G : G \to Aut(G)$ a ação por conjugação de G e $c^H : H \to Aut(H)$ a ação por conjugação de H. Para todos $a, x \in G$ e todos $b, y \in H$, temos que

$$\begin{aligned}
(f\circ\tau)(ax,y) &= f\big(\tau(ax,y)\big)\\
&= f\Big(\tau\big(c_a^G(x),\theta_a(y)\big)\cdot\tau(a,y)\Big)\\
&= f\Big(\tau\big(c_a^G(x),\theta_a(y)\big)\Big)\cdot f\big(\tau(a,y)\big)\\
&= (f\circ\tau)\big(c_a^G(x),\theta_a(y)\big)\cdot(f\circ\tau)(a,y)\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f\circ\tau)(x,by) &= f\big(\tau(x,by)\big)\\
&= f\Big(\tau(x,b)\cdot\tau\big(\xi_b(x),c_b^H(y)\big)\Big)\\
&= f\Big(\tau(x,b)\Big)\cdot f\Big(\tau\big(\xi_b(x),c_b^H(y)\big)\Big)\\
&= (f\circ\tau)(x,b)\cdot(f\circ\tau)\big(\xi_b(x),c_b^H(y)\big)\,.
\end{aligned}$$

■

Para quaisquer conjuntos A e B, existe uma função $\mu : A\times B \to B\times A$ tal que $\mu(a,b) = (b,a)$, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$. Note que μ é bijetora. Com efeito, sendo $\nu : B\times A \to A\times B$ tal que $\nu(b,a) = (a,b)$, $\forall b \in B$, $\forall a \in A$, temos que $(\mu\circ\nu)(b,a) = \mu\big(\nu(b,a)\big) = \mu(a,b) = (b,a) = id_{B\times A}(b,a)$, $\forall (b,a) \in B\times A$, e que $(\nu\circ\mu)(a,b) = \nu\big(\mu(a,b)\big) = \nu(b,a) = (a,b) = id_{A\times B}(a,b)$, $\forall (a,b) \in A\times B$. Daí, $\mu\circ\nu = id_{B\times A}$ e $\nu\circ\mu = id_{A\times B}$ e, portanto, μ e ν são bijetoras, com $\nu = \mu^{-1}$.

Para todo grupo K, temos a chamada "função de inversão" $i : K \to K$ tal que $i(k) = k^{-1}$, $\forall k \in K$. Claro que $i \in Sym(K)$. De fato, $\forall k \in K$, temos

$$(i\circ i)(k) = i\big(i(k)\big) = i(k^{-1}) = (k^{-1})^{-1} = k = id_K(k)\,.$$

Assim, $i^2 = i\circ i = id_K$. Logo, $i^{-1} = i$.

Proposição 1.2.13. Sejam G, H e K grupos, $\theta : G \to Sym(H)$ e $\xi : H \to Sym(G)$ ações, $\tau : G\times H \to K$ um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ, $i : K \to K$ e $\mu : H\times G \to G\times H$ tais que $i(k) = k^{-1}$, $\forall k \in K$, e $\mu(h,g) = (g,h)$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$. Então, $i\circ\tau\circ\mu : H\times G \to K$ é um pareamento cruzado com respeito a ξ e θ.

Demonstração: Sejam $c^G : G \to Aut(G)$ a ação por conjugação de G e $c^H : H \to Aut(H)$ a ação por conjugação de H. Para todos $a, x \in G$ e todos $b, y \in H$, temos que

$$\begin{aligned}
(i\circ\tau\circ\mu)(by,x) &= i\Big(\tau\big(\mu(by,x)\big)\Big)\\
&= i\big(\tau(x,by)\big)\\
&= i\Big(\tau(x,b)\cdot\tau\big(\xi_b(x),c^H_b(y)\big)\Big)\\
&= \big[\tau(x,b)\cdot\tau\big(\xi_b(x),c^H_b(y)\big)\big]^{-1}\\
&= \big[\tau\big(\xi_b(x),c^H_b(y)\big)\big]^{-1}\cdot[\tau(x,b)]^{-1}\\
&= i\Big(\tau\big(\xi_b(x),c^H_b(y)\big)\Big)\cdot i\big(\tau(x,b)\big)\\
&= i\bigg(\tau\Big(\mu\big(c^H_b(y),\xi_b(x)\big)\Big)\bigg)\cdot i\Big(\tau\big(\mu(b,x)\big)\Big)\\
&= (i\circ\tau\circ\mu)\big(c^H_b(y),\xi_b(x)\big)\cdot(i\circ\tau\circ\mu)(b,x)\,;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(i \circ \tau \circ \mu)(y, ax) &= i\Big(\tau\big(\mu(y, ax)\big)\Big) \\
&= i\big(\tau(ax, y)\big) \\
&= i\Big(\tau\big(c_a^G(x), \theta_a(y)\big) \cdot \tau(a, y)\Big) \\
&= \big[\tau\big(c_a^G(x), \theta_a(y)\big) \cdot \tau(a, y)\big]^{-1} \\
&= [\tau(a, y)]^{-1} \cdot \big[\tau\big(c_a^G(x), \theta_a(y)\big)\big]^{-1} \\
&= i\big(\tau(a, y)\big) \cdot i\Big(\tau\big(c_a^G(x), \theta_a(y)\big)\Big) \\
&= i\Big(\tau\big(\mu(y, a)\big)\Big) \cdot i\Bigg(\tau\Big(\mu\big(\theta_a(y), c_a^G(x)\big)\Big)\Bigg) \\
&= (i \circ \tau \circ \mu)(y, a) \cdot (i \circ \tau \circ \mu)\big(\theta_a(y), c_a^G(x)\big) .
\end{aligned}
$$

■

Proposição 1.2.14. Sejam A, B, G, H e K grupos, $\alpha : A \to G$ e $\beta : B \to H$ funções, $\lambda : A \to Sym(B)$, $\theta : G \to Sym(H)$, $\xi : H \to Sym(G)$ e $\kappa : B \to Sym(A)$ ações, $c^G : G \to Aut(G)$ a ação por conjugação de G, $c^H : H \to Aut(H)$ a ação por conjugação de H, $c^A : A \to Aut(A)$ a ação por conjugação de A, $c^B : B \to Aut(B)$ a ação por conjugação de B, $\tau : G \times H \to K$ um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ e $\hat{\tau} = \tau \circ (\alpha \times \beta)$. Valem

(i) Se $\alpha \in Hom(A, G)$ e $a \in A$ são tais que $\theta_{\alpha(a)} \circ \beta = \beta \circ \lambda_a$, então $\hat{\tau}(ax, y) = \hat{\tau}\big(c_a^A(x), \lambda_a(y)\big) \cdot \hat{\tau}(a, y)$, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$;

(ii) Se $\beta \in Hom(B, H)$ e $b \in B$ são tais que $\xi_{\beta(b)} \circ \alpha = \alpha \circ \kappa_b$, então $\hat{\tau}(x, by) = \hat{\tau}(x, b) \cdot \hat{\tau}\big(\kappa_b(x), c_b^B(y)\big)$, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$;

(iii) Se α e β são homomorfismos, $\theta_{\alpha(a)} \circ \beta = \beta \circ \lambda_a$, $\forall a \in A$, e $\xi_{\beta(b)} \circ \alpha = \alpha \circ \kappa_b$, $\forall b \in B$, então $\hat{\tau} = \tau \circ (\alpha \times \beta) : A \times B \to K$ é um pareamento cruzado com respeito a λ e κ;

(iv) Para todos $x, a, g \in G$ e todo $y \in H$, temos que

$$[\tau \circ (c_g^G \times \theta_g)](ax, y) = [\tau \circ (c_g^G \times \theta_g)]\big(c_a^G(x), \theta_a(y)\big) \cdot [\tau \circ (c_g^G \times \theta_g)](a, y) \, ;$$

(v) Para todo $x \in G$ e todos $y, b, h \in H$, temos que

$$[\tau \circ (\xi_h \times c_h^H)](x, by) = [\tau \circ (\xi_h \times c_h^H)](x, b) \cdot [\tau \circ (\xi_h \times c_h^H)]\big(\xi_b(x), c_b^H(y)\big) \, ;$$

(vi) Se θ e ξ são ações compatíveis e θ é ação por automorfismos, então $\tau \circ (c_g^G \times \theta_g) : G \times H \to K$ é pareamento cruzado com respeito a θ e ξ, $\forall g \in G$;

(vii) Se θ e ξ são ações compatíveis e ξ é ação por automorfismos, então $\tau \circ (\xi_h \times c^H_h) : G \times H \to K$ é pareamento cruzado com respeito a θ e ξ, $\forall h \in H$.

Demonstração: **(i)** Usando o item (ii) da observação 1.1.3, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, temos que

$$\begin{aligned}
\hat{\tau}(ax, y) &= [\tau \circ (\alpha \times \beta)](ax, y) \\
&= \tau\big((\alpha \times \beta)(ax, y)\big) \\
&= \tau\big(\alpha(ax), \beta(y)\big) \\
&= \tau\big(\alpha(a)\,\alpha(x), \beta(y)\big) \\
&= \tau\Big(c^G_{\alpha(a)}\big(\alpha(x)\big), \theta_{\alpha(a)}\big(\beta(y)\big)\Big) \cdot \tau\big(\alpha(a), \beta(y)\big) \\
&= \tau\big([c^G_{\alpha(a)} \circ \alpha](x), [\theta_{\alpha(a)} \circ \beta](y)\big) \cdot \tau\big(\alpha(a), \beta(y)\big) \\
&= \tau\big((\alpha \circ c^A_a)(x), (\beta \circ \lambda_a)(y)\big) \cdot \tau\big(\alpha(a), \beta(y)\big) \\
&= \tau\Big(\alpha\big(c^A_a(x)\big), \beta\big(\lambda_a(y)\big)\Big) \cdot \tau\big(\alpha(a), \beta(y)\big) \\
&= \tau\Big((\alpha \times \beta)\big(c^A_a(x), \lambda_a(y)\big)\Big) \cdot \tau\big((\alpha \times \beta)(a, y)\big) \\
&= [\tau \circ (\alpha \times \beta)]\big(c^A_a(x), \lambda_a(y)\big) \cdot [\tau \circ (\alpha \times \beta)](a, y) \\
&= \hat{\tau}\big(c^A_a(x), \lambda_a(y)\big) \cdot \hat{\tau}(a, y)\,.
\end{aligned}$$

(ii) Novamente usando o item (ii) da observação 1.1.3, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, temos que

$$\begin{aligned}
\hat{\tau}(x, by) &= [\tau \circ (\alpha \times \beta)](x, by) \\
&= \tau\big((\alpha \times \beta)(x, by)\big) \\
&= \tau\big(\alpha(x), \beta(by)\big) \\
&= \tau\big(\alpha(x), \beta(b)\,\beta(y)\big) \\
&= \tau\big(\alpha(x), \beta(b)\big) \cdot \tau\Big(\xi_{\beta(b)}\big(\alpha(x)\big), c^H_{\beta(b)}\big(\beta(y)\big)\Big) \\
&= \tau\big(\alpha(x), \beta(b)\big) \cdot \tau\big([\xi_{\beta(b)} \circ \alpha](x), [c^H_{\beta(b)} \circ \beta](y)\big) \\
&= \tau\big(\alpha(x), \beta(b)\big) \cdot \tau\big((\alpha \circ \kappa_b)(x), (\beta \circ c^B_b)(y)\big) \\
&= \tau\big(\alpha(x), \beta(b)\big) \cdot \tau\Big(\alpha\big(\kappa_b(x)\big), \beta\big(c^B_b(y)\big)\Big) \\
&= \tau\big((\alpha \times \beta)(x, b)\big) \cdot \tau\Big((\alpha \times \beta)\big(\kappa_b(x), c^B_b(y)\big)\Big) \\
&= [\tau \circ (\alpha \times \beta)](x, b) \cdot [\tau \circ (\alpha \times \beta)]\big(\kappa_b(x), c^B_b(y)\big) \\
&= \hat{\tau}(x, b) \cdot \hat{\tau}\big(\kappa_b(x), c^B_b(y)\big)\,.
\end{aligned}$$

(iii) É imediato de (i) e (ii).

(iv) Seja $g \in G$. Substituindo nas hipóteses, temos $A = G$, $B = H$, $\alpha = c^G_g \in Aut(G)$, $\beta = \theta_g$, $\lambda = \theta$, $\kappa = \xi$ e $\hat{\tau} = \tau \circ (c^G_g \times \theta_g)$. É claro que

$c_g^G \in Hom(G,G)$ e, usando o item (i) da observação 1.1.3, temos que $\theta_{c_g^G(a)} \circ \theta_g = \theta_g \circ \theta_a$, $\forall a \in G$. Portanto, usando o item (i) dessa proposição, vale $[\tau \circ (c_g^G \times \theta_g)](ax,y) = [\tau \circ (c_g^G \times \theta_g)]\big(c_a^G(x), \theta_a(y)\big) \cdot [\tau \circ (c_g^G \times \theta_g)](a,y)$, $\forall a, x \in G$, $\forall y \in H$. O resultado segue.

(v) Seja $h \in H$. Substituindo nas hipóteses, temos $A = G$, $B = H$, $\alpha = \xi_h$, $\beta = c_h^H \in Aut(H)$, $\lambda = \theta$, $\kappa = \xi$ e $\hat{\tau} = \tau \circ (\xi_h \times c_h^H)$. É claro que $c_h^H \in Hom(H,H)$ e, usando o item (i) da observação 1.1.3, temos que $\xi_{c_h^H(b)} \circ \xi_h = \xi_h \circ \xi_b$, $\forall b \in H$. Portanto, usando o item (ii) dessa proposição, vale $[\tau \circ (\xi_h \times c_h^H)](x,by) = [\tau \circ (\xi_h \times c_h^H)](x,b) \cdot [\tau \circ (\xi_h \times c_h^H)]\big(\xi_b(x), c_b^H(y)\big)$, $\forall x \in G$, $\forall b, y \in H$. O resultado segue.

(vi) Seja $g \in G$. Substituindo nas hipóteses, temos $A = G$, $B = H$, $\alpha = c_g^G$, $\beta = \theta_g$, $\lambda = \theta$, $\kappa = \xi$ e $\hat{\tau} = \tau \circ (c_g^G \times \theta_g)$. Como θ é ação por automorfismos, então $\theta_g \in Aut(H)$. Assim, $\theta_g \in Hom(H,H)$. Seja $b \in H$. Como θ e ξ são ações compatíveis, então $\xi_{\theta_g(b)} \circ c_g^G = c_g^G \circ \xi_b$. Portanto, usando o item (ii) dessa proposição, $\forall x \in G$, $\forall y \in H$, vale

$$\tau \circ (c_g^G \times \theta_g)](x,by) = [\tau \circ (c_g^G \times \theta_g)](x,b) \cdot [\tau \circ (c_g^G \times \theta_g)]\big(\xi_b(x), c_b^H(y)\big)\,.$$

Como b é arbitrário, $\forall x \in G$, $\forall b, y \in H$, temos que

$$[\tau \circ (c_g^G \times \theta_g)](x,by) = [\tau \circ (c_g^G \times \theta_g)](x,b) \cdot [\tau \circ (c_g^G \times \theta_g)]\big(\xi_b(x), c_b^H(y)\big)\,.$$

Além disso, pelo item (iv) dessa proposição, $\forall a, x \in G$, $\forall y \in H$, temos que

$$[\tau \circ (c_g^G \times \theta_g)](ax,y) = [\tau \circ (c_g^G \times \theta_g)]\big(c_g^G(x), \theta_g(y)\big) \cdot [\tau \circ (c_g^G \times \theta_g)](a,y)\,.$$

Logo, $\tau \circ (c_g^G \times \theta_g)$ é pareamento cruzado com respeito a θ e ξ.

(vii) Seja $h \in H$. Substituindo nas hipóteses, temos $A = G$, $B = H$, $\alpha = \xi_h$, $\beta = c_h^H$, $\lambda = \theta$, $\kappa = \xi$ e $\hat{\tau} = \tau \circ (\xi_h \times c_h^H)$. Como ξ é ação por automorfismos, então $\xi_h \in Aut(G)$. Assim, $\xi_h \in Hom(G,G)$. Seja $a \in G$. Como θ e ξ são ações compatíveis, então $\theta_{\xi_h(a)} \circ c_h^H = c_h^H \circ \theta_a$. Portanto, usando o item (i) dessa proposição, $\forall x \in G$, $\forall y \in H$, vale

$$[\tau \circ (\xi_h \times c_h^H)](ax,y) = [\tau \circ (\xi_h \times c_h^H)]\big(c_a^G(x), \theta_a(y)\big) \cdot [\tau \circ (\xi_h \times c_h^H)](a,y)\,.$$

Como a é arbitrário, $\forall a, x \in G$, $\forall y \in H$, temos que

$$[\tau \circ (\xi_h \times c_h^H)](ax,y) = [\tau \circ (\xi_h \times c_h^H)]\big(c_a^G(x), \theta_a(y)\big) \cdot [\tau \circ (\xi_h \times c_h^H)](a,y)\,.$$

Além disso, pelo item (v) dessa proposição, $\forall x \in G$, $\forall b, y \in H$, temos que

$$[\tau \circ (\xi_h \times c_h^H)](x,by) = [\tau \circ (\xi_h \times c_h^H)](x,b) \cdot [\tau \circ (\xi_h \times c_h^H)]\big(\xi_b(x), c_b^H(y)\big)\,.$$

Logo, $\tau \circ (\xi_h \times c_h^H)$ é pareamento cruzado com respeito a θ e ξ. ∎

Reenunciando a proposição 1.2.14 com mais detalhes, sejam A, B, G, H e K grupos, $\alpha : A \to G$ e $\beta : B \to H$ funções, $\lambda : A \to Sym(B)$, $\theta : G \to Sym(H)$, $\xi : H \to Sym(G)$ e $\kappa : B \to Sym(A)$ ações, $c^G : G \to Aut(G)$ a ação por conjugação de G, $c^H : H \to Aut(H)$ a ação por conjugação de H, $c^A : A \to Aut(A)$ a ação por conjugação de A, $c^B : B \to Aut(B)$ a ação por conjugação de B e $\tau : G{\times}H \to K$ um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ. Valem

(i) Se $\alpha \in Hom(A,G)$ e $a \in A$ são tais que $\theta_{\alpha(a)} \circ \beta = \beta \circ \lambda_a$, então, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$,

$$\begin{aligned}
[\tau \circ (\alpha{\times}\beta)](ax,y) &= [\tau \circ (\alpha{\times}\beta)]\big(c^A_a(x), \lambda_a(y)\big) \cdot [\tau \circ (\alpha{\times}\beta)](a,y) \\
&= [\tau \circ (\alpha{\times}\beta) \circ (c^A_a \times \lambda_a)](x,y) \cdot [\tau \circ (\alpha{\times}\beta)](a,y) \\
&= \{\tau \circ [(\alpha \circ c^A_a) \times (\beta \circ \lambda_a)\}(x,y) \cdot [\tau \circ (\alpha{\times}\beta)](a,y)\,;
\end{aligned}$$

(ii) Se $\beta \in Hom(B,H)$ e $b \in B$ são tais que $\xi_{\beta(b)} \circ \alpha = \alpha \circ \kappa_b$, então, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$,

$$\begin{aligned}
[\tau \circ (\alpha{\times}\beta)](x,by) &= [\tau \circ (\alpha{\times}\beta)](x,b) \cdot [\tau \circ (\alpha{\times}\beta)]\big(\kappa_b(x), c^B_b(y)\big) \\
&= [\tau \circ (\alpha{\times}\beta)](x,b) \cdot [\tau \circ (\alpha{\times}\beta) \circ (\kappa_b \times c^B_b)](x,y) \\
&= [\tau \circ (\alpha{\times}\beta)](x,b) \cdot \{\tau \circ [(\alpha \circ \kappa_b) \times (\beta \circ c^B_b)]\}(x,y)\,;
\end{aligned}$$

(iii) Se α e β são homomorfismos, $\theta_{\alpha(a)} \circ \beta = \beta \circ \lambda_a$, $\forall a \in A$, e $\xi_{\beta(b)} \circ \alpha = \alpha \circ \kappa_b$, $\forall b \in B$, então $\tau \circ (\alpha{\times}\beta) : A{\times}B \to K$ é um pareamento cruzado com respeito a λ e κ;

(iv) Para todos $x, a, g \in G$ e todo $y \in H$, temos que

$$\begin{aligned}
[\tau \circ (c^G_g \times \theta_g)](ax,y) &= [\tau \circ (c^G_g \times \theta_g)]\big(c^G_a(x), \theta_a(y)\big) \cdot [\tau \circ (c^G_g \times \theta_g)](a,y) \\
&= [\tau \circ (c^G_g \times \theta_g) \circ (c^G_a \times \theta_a)](x,y) \cdot [\tau \circ (c^G_g \times \theta_g)](a,y) \\
&= \{\tau \circ [(c^G_g \circ c^G_a) \times (\theta_g \circ \theta_a)]\}(x,y) \cdot [\tau \circ (c^G_g \times \theta_g)](a,y) \\
&= [\tau \circ (c^G_{ga} \times \theta_{ga})](x,y) \cdot [\tau \circ (c^G_g \times \theta_g)](a,y)\,;
\end{aligned}$$

(v) Para todos $x \in G$ e todos $y, b, h \in H$, temos que

$$\begin{aligned}
[\tau \circ (\xi_h \times c^H_h)](x,by) &= [\tau \circ (\xi_h \times c^H_h)](x,b) \cdot [\tau \circ (\xi_h \times c^H_h)]\big(\xi_b(x), c^H_b(y)\big) \\
&= [\tau \circ (\xi_h \times c^H_h)](x,b) \cdot [\tau \circ (\xi_h \times c^H_h) \circ (\xi_b \times c^H_b)](x,y) \\
&= [\tau \circ (\xi_h \times c^H_h)](x,b) \cdot \{\tau \circ [(\xi_h \circ \xi_b) \times (c^H_h \circ c^H_b)]\}(x,y) \\
&= [\tau \circ (\xi_h \times c^H_h)](x,b) \cdot [\tau \circ (\xi_{hb} \times c^H_{hb})](x,y)\,;
\end{aligned}$$

(vi) Se θ e ξ são ações compatíveis e θ é ação por automorfismos, então $\tau \circ (c^G_g \times \theta_g) : G{\times}H \to K$ é pareamento cruzado com respeito a θ e ξ, $\forall g \in G$;

(vii) Se θ e ξ são ações compatíveis e ξ é ação por automorfismos, então $\tau \circ (\xi_h \times c_h^H) : G \times H \to K$ é pareamento cruzado com respeito a θ e ξ, $\forall h \in H$.

No enunciado da proposição 1.2.14 acima, sejam $a \in A$ e $b \in B$. Na notação que introduzimos, a hipótese $\beta \circ \lambda_a = \theta_{\alpha(a)} \circ \beta$, como no item (i), é equivalente a termos $\beta({}^a y) = \beta\big(\lambda_a(y)\big) = (\beta \circ \lambda_a)(y) = [\theta_{\alpha(a)} \circ \beta](y) = \theta_{\alpha(a)}\big(\beta(y)\big) = {}^{\alpha(a)}\beta(y)$, $\forall y \in B$. Também, a hipótese $\alpha \circ \kappa_b = \xi_{\beta(b)} \circ \alpha$, como no item (ii), é equivalente a termos $\alpha({}^b x) = \alpha\big(\kappa_b(x)\big) = (\alpha \circ \kappa_b)(x) = [\xi_{\beta(b)} \circ \alpha](x) = \xi_{\beta(b)}\big(\alpha(x)\big) = {}^{\beta(b)}\alpha(x)$, $\forall x \in A$. Por isso, definimos:

Definição 1.2.15. Sejam A, B, G, H e K grupos, $\alpha : A \to G$ e $\beta : B \to H$ funções, $\lambda : A \to Sym(B)$, $\theta : G \to Sym(H)$, $\xi : H \to Sym(G)$ e $\kappa : B \to Sym(A)$ ações, $c^G : G \to Aut(G)$ a ação por conjugação de G, $c^H : H \to Aut(H)$ a ação por conjugação de H, $c^A : A \to Aut(A)$ a ação por conjugação de A, $c^B : B \to Aut(B)$ a ação por conjugação de B. Dizemos que "α e β *preservam as ações* λ, κ, θ e ξ" se, e somente se, $\theta_{\alpha(a)} \circ \beta = \beta \circ \lambda_a$, $\forall a \in A$, e $\xi_{\beta(b)} \circ \alpha = \alpha \circ \kappa_b$, $\forall b \in B$. Isto é, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, os quadrados abaixo comutam:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\kappa_b"] \arrow[d, "\alpha"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ G \arrow[r, "\xi_{\beta(b)}"'] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "\lambda_a"] \arrow[d, "\beta"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ H \arrow[r, "\theta_{\alpha(a)}"'] & H \end{tikzcd}$$

Dessa forma, podemos reenunciar a proposição 1.2.14 usando nossa notação, da seguinte forma: sejam A, B, G, H e K grupos tais que A age em B, B age em A, G age em H, H age em G e cada um deles age em si mesmo por conjugação. Sejam também $\alpha : A \to G$ e $\beta : B \to H$ funções e $\tau : G \times H \to K$ um pareamento cruzado com respeito às ações de G e H. Valem

(i) Se α é homomorfismo e $a \in A$ é tal que $\beta({}^a y) = {}^{\alpha(a)}\beta(y)$, $\forall y \in B$, então $\tau\big(\alpha(ax), \beta(y)\big) = \tau\big(\alpha({}^a x), \beta({}^a y)\big) \cdot \tau\big(\alpha(a), \beta(y)\big)$, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$;

(ii) Se β é homomorfismo e $b \in B$ é tal que $\alpha({}^b x) = {}^{\beta(b)}\alpha(x)$, $\forall x \in A$, então $\tau\big(\alpha(x), \beta(by)\big) = \tau\big(\alpha(x), \beta(b)\big) \cdot \tau\big(\alpha({}^b x), \beta({}^b y)\big)$, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$;

(iii) Se α e β são homomorfismos, $\beta({}^a y) = {}^{\alpha(a)}\beta(y)$, $\forall y \in B$, $\forall a \in A$, e $\alpha({}^b x) = {}^{\beta(b)}\alpha(x)$, $\forall x \in A$, $\forall b \in B$, então $\tau \circ (\alpha \times \beta) : A \times B \to K$ é um pareamento cruzado com respeito às ações de A e B;

(iv) Para todos $x, a, g \in G$ e todo $y \in H$, temos que $\tau\big({}^g(ax), {}^g y\big) = \tau({}^{ga}x, {}^{ga}y) \cdot \tau({}^g a, {}^g y)$;

(v) Para todos $x \in G$ e todos $y, b, h \in H$, temos que $\tau\big({}^h x, {}^h(by)\big) = \tau({}^h x, {}^h b) \cdot \tau({}^{hb}x, {}^{hb}y)$;

(vi) Se G e H agem um no outro compativelmente e a ação de G em H é ação por automorfismos, então $\tau({}^{g}\cdot, {}^{g}\cdot) : G{\times}H \to K$ é pareamento cruzado com respeito às ações de G e H, $\forall g \in G$;

(vii) Se G e H agem um no outro compativelmente e a ação de H em G é ação por automorfismos, então $\tau({}^{h}\cdot, {}^{h}\cdot) : G \times H \to K$ é pareamento cruzado com respeito às ações de G e H, $\forall h \in H$.

Na demonstração do próximo teorema a nossa notação exibe toda sua praticidade de cálculo.

Teorema 1.2.16. Sejam G, H e K grupos tais que G e H agem um no outro compativelmente com ações por automorfismos e cada um deles age em si mesmo por conjugação. Sejam também $e_{G} \in G$ o elemento neutro de G, $e_{H} \in H$ o elemento neutro de H, $e_{K} \in K$ o elemento neutro de K e $\tau : G{\times}H \to K$ um pareamento cruzado com respeito às ações de G e H. Valem

(i) Para todos $a, x \in G$ e todos $b, y \in H$, temos que

- $\tau(ax, y) = \tau({}^{a}x, {}^{a}y) \cdot \tau(a, y)\,;$
- $\tau(x, by) = \tau(x, b) \cdot \tau({}^{b}x, {}^{b}y)\,;$
- $\tau({}^{a}x, {}^{a}y) = \tau(ax, y) \cdot [\tau(a, y)]^{-1}\,;$
- $\tau({}^{b}x, {}^{b}y) = [\tau(x, b)]^{-1} \cdot \tau(x, by)\,.$

(ii) Para todos $g, a, x \in G$ e todos $h, b, y \in H$, temos que

- $\tau\big({}^{g}(ax), {}^{g}y\big) = \tau({}^{ga}x, {}^{ga}y) \cdot \tau({}^{g}a, {}^{g}y)\,;$
- $\tau\big({}^{g}x, {}^{g}(by)\big) = \tau({}^{g}x, {}^{g}b) \cdot \tau({}^{gb}x, {}^{gb}y)\,;$
- $\tau\big({}^{h}(ax), {}^{h}y\big) = \tau({}^{ha}x, {}^{ha}y) \cdot \tau({}^{h}a, {}^{h}y)\,;$
- $\tau\big({}^{h}x, {}^{h}(by)\big) = \tau({}^{h}x, {}^{h}b) \cdot \tau({}^{hb}x, {}^{hb}y)\,;$
- $\tau({}^{ga}x, {}^{ga}y) = \tau\big({}^{g}(ax), {}^{g}y\big) \cdot [\tau({}^{g}a, {}^{g}y)]^{-1}\,;$
- $\tau({}^{gb}x, {}^{gb}y) = [\tau({}^{g}x, {}^{g}b)]^{-1} \cdot \tau\big({}^{g}x, {}^{g}(by)\big)\,;$
- $\tau({}^{ha}x, {}^{ha}y) = \tau\big({}^{h}(ax), {}^{h}y\big) \cdot [\tau({}^{h}a, {}^{h}y)]^{-1}\,;$
- $\tau({}^{hb}x, {}^{hb}y) = [\tau({}^{h}x, {}^{h}b)]^{-1} \cdot \tau\big({}^{h}x, {}^{h}(by)\big)\,.$

(iii) Para todos $g, a, x \in G$ e todos $h, b, y \in H$, temos que

- $\tau\big({}^{g}(ax), {}^{g}y\big) = \tau({}^{g}a, {}^{gx}y) \cdot \tau({}^{g}x, {}^{g}y)\,;$
- $\tau\big({}^{g}x, {}^{g}(by)\big) = \tau({}^{g}x, {}^{g}y) \cdot \tau({}^{gy}x, {}^{g}b)\,;$
- $\tau\big({}^{h}(ax), {}^{h}y\big) = \tau({}^{h}a, {}^{hx}y) \cdot \tau({}^{h}x, {}^{h}y)\,;$
- $\tau\big({}^{h}x, {}^{h}(by)\big) = \tau({}^{h}x, {}^{h}y) \cdot \tau({}^{hy}x, {}^{h}b)\,;$

- $\tau({}^{g}a, {}^{gx}y) = \tau\big({}^{g}(ax), {}^{g}y\big) \cdot [\tau({}^{g}x, {}^{g}y)]^{-1}$;
- $\tau({}^{gy}x, {}^{g}b) = [\tau({}^{g}x, {}^{g}y)]^{-1} \cdot \tau\big({}^{g}x, {}^{g}(by)\big)$;
- $\tau({}^{h}a, {}^{hx}y) = \tau\big({}^{h}(ax), {}^{h}y\big) \cdot [\tau({}^{h}x, {}^{h}y)]^{-1}$;
- $\tau({}^{hy}x, {}^{h}b) = [\tau({}^{h}x, {}^{h}y)]^{-1} \cdot \tau\big({}^{h}x, {}^{h}(by)\big)$;
- $\tau(ax, y) = \tau(a, {}^{x}y) \cdot \tau(x, y)$;
- $\tau(x, by) = \tau(x, y) \cdot \tau({}^{y}x, b)$.

(iv) $\tau(e_G, h) = e_K = \tau(g, e_H)$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$;

(v) Para todos $x, g \in G$ e todos $y, h \in H$, temos que

- $[\tau({}^{g}x, {}^{g}y)]^{-1} = \tau({}^{g}x^{-1}, {}^{gx}y)$;
- $[\tau({}^{g}x, {}^{g}y)]^{-1} = \tau({}^{gy}x, {}^{g}y^{-1})$;
- $[\tau({}^{h}x, {}^{h}y)]^{-1} = \tau({}^{h}x^{-1}, {}^{hx}y)$;
- $[\tau({}^{h}x, {}^{h}y)]^{-1} = \tau({}^{hy}x, {}^{h}y^{-1})$;
- $[\tau(x, y)]^{-1} = \tau(x^{-1}, {}^{x}y)$;
- $[\tau(x, y)]^{-1} = \tau({}^{y}x, y^{-1})$;
- $[\tau(x^{-1}, {}^{x}y)]^{-1} = \tau(x, y)$;
- $[\tau({}^{y}x, y^{-1})]^{-1} = \tau(x, y)$.

(vi) $\tau({}^{ab}x, {}^{ab}y) = \tau(a, b) \cdot \tau({}^{ba}x, {}^{ba}y) \cdot [\tau(a, b)]^{-1}$, $\forall a, x \in G$, $\forall b, y \in H$;

(vii) $\tau({}^{[a,b]}g, {}^{[a,b]}h) = \tau(a, b) \cdot \tau(g, h) \cdot [\tau(a, b)]^{-1}$, $\forall a, g \in G$, $\forall b, h \in H$;

(viii) $\tau(g^{h}g^{-1}, y) = \tau(g, h) \cdot [\tau({}^{y}g, {}^{y}h)]^{-1}$, $\forall g \in G$, $\forall y, h \in H$;

(ix) $\tau(x, {}^{g}hh^{-1}) = \tau({}^{x}g, {}^{x}h) \cdot [\tau(g, h)]^{-1}$, $\forall x, g \in G$, $\forall h \in H$;

(x) $[\tau(g, h), \tau(a, b)] = \tau(g^{h}g^{-1}, {}^{a}bb^{-1})$, $\forall a, g \in G$, $\forall b, h \in H$.

Demonstração: **(i)** As duas primeiras igualdades dizem respeito à definição de pareamento cruzado, usando a nossa notação. As duas últimas são manipulações algébricas imediatas das primeiras.

(ii) São as igualdades do item (i) desse teorema aplicadas aos pareamentos cruzados obtidos nos itens (vi) e (vii) da proposição 1.2.14.

(iii) Usando a primeira igualdade do item (ii) desse teorema, temos que

$$
\begin{aligned}
\tau\big({}^{g}(ax), {}^{g}y\big) &= \tau\big({}^{g}[x(x^{-1}ax)], {}^{g}y\big) \\
&= \tau\big({}^{gx}(x^{-1}ax), {}^{gx}y\big) \cdot \tau({}^{g}x, {}^{g}y) \\
&= \tau\big({}^{gx}({}^{x^{-1}}a), {}^{gx}y\big) \cdot \tau({}^{g}x, {}^{g}y) \\
&= \tau\big({}^{g}a, {}^{gx}y\big) \cdot \tau({}^{g}x, {}^{g}y)\,.
\end{aligned}
$$

Usando a segunda igualdade do item (ii) desse teorema, temos que

$$\begin{aligned}\tau\big({}^{g}x, {}^{g}(by)\big) &= \tau\big({}^{g}x, {}^{g}[y(y^{-1}by)]\big)\\ &= \tau({}^{g}x, {}^{g}y)\cdot\tau\big({}^{gy}x, {}^{gy}(y^{-1}by)]\big)\\ &= \tau({}^{g}x, {}^{g}y)\cdot\tau\big({}^{gy}x, {}^{gy}({}^{y^{-1}}b)]\big)\\ &= \tau({}^{g}x, {}^{g}y)\cdot\tau({}^{gy}x, {}^{g}b)\,.\end{aligned}$$

Usando a terceira igualdade do item (ii) desse teorema, temos que

$$\begin{aligned}\tau\big({}^{h}(ax), {}^{h}y\big) &= \tau\big({}^{h}[x(x^{-1}ax)], {}^{h}y\big)\\ &= \tau\big({}^{hx}(x^{-1}ax), {}^{hx}y\big)\cdot\tau({}^{h}x, {}^{h}y)\\ &= \tau\big({}^{hx}({}^{x^{-1}}a), {}^{hx}y\big)\cdot\tau({}^{h}x, {}^{h}y)\\ &= \tau\big({}^{h}a, {}^{hx}y\big)\cdot\tau({}^{h}x, {}^{h}y)\,.\end{aligned}$$

Usando a quarta igualdade do item (ii) desse teorema, temos que

$$\begin{aligned}\tau\big({}^{h}x, {}^{h}(by)\big) &= \tau\big({}^{h}x, {}^{h}[y(y^{-1}by)]\big)\\ &= \tau({}^{h}x, {}^{h}y)\cdot\tau\big({}^{hy}x, {}^{hy}(y^{-1}by)]\big)\\ &= \tau({}^{h}x, {}^{h}y)\cdot\tau\big({}^{hy}x, {}^{hy}({}^{y^{-1}}b)]\big)\\ &= \tau({}^{h}x, {}^{h}y)\cdot\tau({}^{hy}x, {}^{h}b)\,.\end{aligned}$$

Dessa forma, estão demonstradas as quatro primeiras equações desse item. As quatro posteriores (da quinta à oitava) são manipulações algébricas simples dessas quatro primeiras. As duas últimas igualdades são casos particulares das quatro primeiras, por exemplo, tomando $g = e_G$ nas duas primeiras.

(iv) É a proposição 1.2.2.

(v) Usando o item (iv) e a primeira equação do item (ii), temos que

$$\begin{aligned}e_K &= \tau(e_G, {}^{g}y)\\ &= \tau({}^{g}e_G, {}^{g}y)\\ &= \tau\big({}^{g}(xx^{-1}), {}^{g}y\big)\\ &= \tau({}^{gx}x^{-1}, {}^{gx}y)\cdot\tau({}^{g}x, {}^{g}y)\\ &= \tau({}^{g}x^{-1}, {}^{gx}y)\cdot\tau({}^{g}x, {}^{g}y)\,.\end{aligned}$$

Daí, $[\tau({}^{g}x, {}^{g}y)]^{-1} = \tau({}^{g}x^{-1}, {}^{gx}y)$. Usando o item (iv) e a segunda equação do item (ii), temos que

$$\begin{aligned}e_K &= \tau({}^{g}x, e_H)\\ &= \tau({}^{g}x, {}^{g}e_H)\\ &= \tau({}^{g}x, {}^{g}e_H)\\ &= \tau\big({}^{g}x, {}^{g}(yy^{-1})\big)\\ &= \tau({}^{g}x, {}^{g}y)\cdot\tau({}^{gy}x, {}^{gy}y^{-1})\\ &= \tau({}^{g}x, {}^{g}y)\cdot\tau({}^{gy}x, {}^{g}y^{-1})\,.\end{aligned}$$

Daí, $[\tau({}^{g}x, {}^{g}y)]^{-1} = \tau({}^{gy}x, {}^{g}y^{-1})$. Usando o item (iv) e a terceira equação do item (ii), temos que

$$\begin{aligned} e_K &= \tau(e_G, {}^{h}y) \\ &= \tau({}^{h}e_G, {}^{h}y) \\ &= \tau\big({}^{h}(xx^{-1}), {}^{h}y\big) \\ &= \tau({}^{hx}x^{-1}, {}^{hx}y) \cdot \tau({}^{h}x, {}^{h}y) \\ &= \tau({}^{h}x^{-1}, {}^{hx}y) \cdot \tau({}^{h}x, {}^{h}y)\,. \end{aligned}$$

Daí, $[\tau({}^{h}x, {}^{h}y)]^{-1} = \tau({}^{h}x^{-1}, {}^{hx}y)$. Usando o item (iv) e a quarta equação do item (ii), temos que

$$\begin{aligned} e_K &= \tau({}^{h}x, e_H) \\ &= \tau({}^{h}x, {}^{h}e_H) \\ &= \tau\big({}^{h}x, {}^{h}(yy^{-1})\big) \\ &= \tau({}^{h}x, {}^{h}y) \cdot \tau({}^{hy}x, {}^{hy}y^{-1}) \\ &= \tau({}^{h}x, {}^{h}y) \cdot \tau({}^{hy}x, {}^{h}y^{-1})\,. \end{aligned}$$

Daí, $[\tau({}^{h}x, {}^{h}y)]^{-1} = \tau({}^{hy}x, {}^{h}y^{-1})$. Estão demonstradas as quatro primeiras equações desse item. As próximas duas igualdades (quinta e sexta) são casos particulares das quatro primeiras, por exemplo, tomando $g = e_G$ nas duas primeiras. As duas últimas igualdades (sétima e oitava) decorrem das duas anteriores (quinta e sexta, respectivamente), por meio de uma manipulação algébrica imediata.

(vi) Usando a primeira igualdade do item (i) e depois a segunda igualdade do item (ii) junto com a segunda igualdade do item (i), obtemos

$$\tau(ax, by) = \tau\big({}^{a}x, {}^{a}(by)\big) \cdot \tau(a, by) = \tau({}^{a}x, {}^{a}b) \cdot \tau({}^{ab}x, {}^{ab}y) \cdot \tau(a, b) \cdot \tau({}^{b}a, {}^{b}y)\,.$$

Agora, usando primeiramente a segunda igualdade do item (i) e depois a terceira igualdade do item (ii) junto com a primeira igualdade do item (i), obtemos

$$\tau(ax, by) = \tau(ax, b) \cdot \tau\big({}^{b}(ax), {}^{b}y\big) = \tau({}^{a}x, {}^{a}b) \cdot \tau(a, b) \cdot \tau({}^{ba}x, {}^{ba}y) \cdot \tau({}^{b}a, {}^{b}y)\,.$$

Igualando, ficamos com

$$\tau({}^{a}x, {}^{a}b) \cdot \tau({}^{ab}x, {}^{ab}y) \cdot \tau(a, b) \cdot \tau({}^{b}a, {}^{b}y) = \tau({}^{a}x, {}^{a}b) \cdot \tau(a, b) \cdot \tau({}^{ba}x, {}^{ba}y) \cdot \tau({}^{b}a, {}^{b}y)\,.$$

Assim,

$$\tau({}^{ab}x, {}^{ab}y) \cdot \tau(a, b) = \tau(a, b) \cdot \tau({}^{ba}x, {}^{ba}y)$$

e, portanto, temos que

$$\tau({}^{ab}x, {}^{ab}y) = \tau(a, b) \cdot \tau({}^{ba}x, {}^{ba}y) \cdot [\tau(a, b)]^{-1}\,.$$

(vii) Sejam $a, g \in G$ e $b, h \in H$. Tome

$$x = {}^{a^{-1}b^{-1}}g \in G \qquad \text{e} \qquad y = {}^{a^{-1}b^{-1}}h \in H\,.$$

Pelo item (vi) desse teorema, temos que

$$\tau({}^{ab}x, {}^{ab}y) = \tau(a,b)\cdot\tau({}^{ba}x, {}^{ba}y)\cdot[\tau(a,b)]^{-1}\,.$$

Substituindo, ficamos com

$$\begin{aligned}\tau\big({}^{ab}({}^{a^{-1}b^{-1}}g), {}^{ab}({}^{a^{-1}b^{-1}}h)\big) &= \tau(a,b)\cdot\tau\big({}^{ba}({}^{a^{-1}b^{-1}}g), {}^{ba}({}^{a^{-1}b^{-1}}h)\big)\cdot[\tau(a,b)]^{-1}\\ &= \tau(a,b)\cdot\tau(g,h)\cdot[\tau(a,b)]^{-1}\,.\end{aligned}$$

Isto é,

$$\tau({}^{[a,b]}g, {}^{[a,b]}h) = \tau({}^{aba^{-1}b^{-1}}g, {}^{aba^{-1}b^{-1}}h) = \tau(a,b)\cdot\tau(g,h)\cdot[\tau(a,b)]^{-1}\,.$$

(viii) Usando (nessa ordem) a primeira igualdade do item (i), a sexta igualdade do item (iii), a sétima igualdade do item (v), a segunda igualdade do item (ii), a quinta igualdade do item (v), o item (vi) e a terceira igualdade do item (v), temos que

$$\begin{aligned}\tau(g^h g^{-1}, y) &= \tau\big({}^g({}^h g^{-1}), {}^g y\big)\cdot\tau(g,y)\\ &= \tau({}^{gh}g^{-1}, {}^g y)\cdot\tau(g,y)\\ &= [\tau({}^g g^{-1}, {}^g h)]^{-1}\cdot\tau\big({}^g g^{-1}, {}^g(yh)\big)\cdot\tau(g,y)\\ &= [\tau(g^{-1}, {}^g h)]^{-1}\cdot\tau\big({}^g g^{-1}, {}^g(yh)\big)\cdot\tau(g,y)\\ &= \tau(g,h)\cdot\tau\big({}^g g^{-1}, {}^g(yh)\big)\cdot\tau(g,y)\\ &= \tau(g,h)\cdot\tau({}^g g^{-1}, {}^g y)\cdot\tau({}^{gy}g^{-1}, {}^{gy}h)\cdot\tau(g,y)\\ &= \tau(g,h)\cdot\tau(g^{-1}, {}^g y)\cdot\tau({}^{gy}g^{-1}, {}^{gy}h)\cdot\tau(g,y)\\ &= \tau(g,h)\cdot[\tau(g,y)]^{-1}\cdot\tau({}^{gy}g^{-1}, {}^{gy}h)\cdot\tau(g,y)\\ &= \tau(g,h)\cdot[\tau(g,y)]^{-1}\cdot\tau(g,y)\cdot\tau({}^{yg}g^{-1}, {}^{yg}h)\cdot[\tau(g,y)]^{-1}\cdot\tau(g,y)\\ &= \tau(g,h)\cdot\tau({}^{yg}g^{-1}, {}^{yg}h)\\ &= \tau(g,h)\cdot\tau({}^y g^{-1}, {}^{yg}h)\\ &= \tau(g,h)\cdot[\tau({}^y g, {}^y h)]^{-1}\,.\end{aligned}$$

(ix) Usando (nessa ordem) a segunda igualdade do item (i), o item (vi), a sexta igualdade do item (v), a nona igualdade do item (iii) e a primeira igualdade do item (i), temos que

$$\begin{aligned}
\tau(x, {}^{g}hh^{-1}) &= \tau\big(x, ({}^{g}h)h^{-1}\big) \\
&= \tau(x, {}^{g}h) \cdot \tau\big({}^{({}^{g}h)}x, {}^{({}^{g}h)}h^{-1}\big) \\
&= \tau(x, {}^{g}h) \cdot \tau({}^{ghg^{-1}}x, {}^{ghg^{-1}}h^{-1}) \\
&= \tau(x, {}^{g}h) \cdot \tau\big({}^{gh}({}^{g^{-1}}x), {}^{gh}({}^{g^{-1}}h^{-1})\big) \\
&= \tau(x, {}^{g}h) \cdot \tau(g,h) \cdot \tau\big({}^{hg}({}^{g^{-1}}x), {}^{hg}({}^{g^{-1}}h^{-1})\big) \cdot [\tau(g,h)]^{-1} \\
&= \tau(x, {}^{g}h) \cdot \tau(g,h) \cdot \tau({}^{h}x, {}^{h}h^{-1}) \cdot [\tau(g,h)]^{-1} \\
&= \tau(x, {}^{g}h) \cdot \tau(g,h) \cdot \tau({}^{h}x, h^{-1}) \cdot [\tau(g,h)]^{-1} \\
&= \tau(x, {}^{g}h) \cdot \tau(g,h) \cdot [\tau(x,h)]^{-1} \cdot [\tau(g,h)]^{-1} \\
&= \tau(xg, h) \cdot [\tau(x,h)]^{-1} \cdot [\tau(g,h)]^{-1} \\
&= \tau({}^{x}g, {}^{x}h) \cdot \tau(x,h) \cdot [\tau(x,h)]^{-1} \cdot [\tau(g,h)]^{-1} \\
&= \tau({}^{x}g, {}^{x}h) \cdot [\tau(g,h)]^{-1} .
\end{aligned}$$

(x) Usando o item (viii) e o item (vii), temos que

$$\begin{aligned}
\tau(g^{h}g^{-1}, {}^{a}bb^{-1}) &= \tau(g,h) \cdot \big[\tau\big({}^{({}^{a}bb^{-1})}g, {}^{({}^{a}bb^{-1})}h\big)\big]^{-1} \\
&= \tau(g,h) \cdot \big[\tau\big({}^{({}^{a}b)}({}^{b^{-1}}g), {}^{({}^{a}b)}({}^{b^{-1}}h)\big)\big]^{-1} \\
&= \tau(g,h) \cdot \big[\tau\big({}^{(aba^{-1})}({}^{b^{-1}}g), {}^{(aba^{-1})}({}^{b^{-1}}h)\big)\big]^{-1} \\
&= \tau(g,h) \cdot [\tau({}^{aba^{-1}b^{-1}}g, {}^{aba^{-1}b^{-1}}h)]^{-1} \\
&= \tau(g,h) \cdot \{\tau({}^{[a,b]}g, {}^{[a,b]}h)\}^{-1} \\
&= \tau(g,h) \cdot \{\tau(a,b) \cdot \tau(g,h) \cdot [\tau(a,b)]^{-1}\}^{-1} \\
&= \tau(g,h) \cdot \tau(a,b) \cdot [\tau(g,h)]^{-1} \cdot [\tau(a,b)]^{-1} \\
&= \big[\tau(g,h), \tau(a,b)\big] .
\end{aligned}$$

■

Sejam G, H e K grupos tais que G e H agem um no outro compativelmente com ações por automorfismos e cada um deles age em si mesmo por conjugação. Sejam também $e_G \in G$ o elemento neutro de G, $e_H \in H$ o elemento neutro de H, $e_K \in K$ o elemento neutro de K e $\tau : G \times H \to K$ um pareamento cruzado com respeito às ações de G e H. Pelo item (iv) teorema 1.2.16 acima, temos que $e_K = \tau(e_G, h) \in im(\tau)$. Para todo $g \in G$ e todo $h \in H$, pela quinta igualdade do item (v) do mesmo teorema acima, temos que

$$[\tau(g,h)]^{-1} = \tau(g^{-1}, {}^{g}h) = \tau\big(g^{-1}, \theta_g(h)\big) \in im(\tau) .$$

Daí, ficamos com $[im(\tau)]^{-1} = im(\tau)$. De fato, para todo $y \in [im(\tau)]^{-1}$, existe $k \in im(\tau)$ tal que $y = k^{-1}$. Também, existem $g \in G$ e $h \in H$ tais que $k = \tau(g,h)$. Daí,

$$y = k^{-1} = [\tau(g,h)]^{-1} = \tau(g^{-1}, {}^{g}h) = \tau\big(g^{-1}, \theta_g(h)\big) \in im(\tau) .$$

Assim, $[im(\tau)]^{-1} \subset im(\tau)$, que é equivalente a ser $[im(\tau)]^{-1} = im(\tau)$. Consequentemente, pela observação 1.2.6, ficamos com $\langle im(\tau)\rangle = Sp\big(im(\tau)\big)$. Portanto, $\forall\, V \subset K$, para mostrarmos que $\langle im(\tau)\rangle \subset V$, basta mostrarmos que $im(\tau) \subset V$ e que vale alguma das propriedades (a) ou (b) ou (c) da observação 1.2.6, colocando $S = im(\tau)$.

Corolário 1.2.17. Sejam G, H e K grupos tais que G e H agem um no outro compativelmente com ações por automorfismos e cada um deles age em si mesmo por conjugação. Seja também $\tau : G \times H \to K$ um pareamento cruzado com respeito às ações de G e H. Se a ação de G em H é a ação trivial ou se a ação de H em G é a ação trivial, então $\langle im(\tau)\rangle$ é abeliano.

Demonstração: Suponha que a ação de H em G é a ação trivial e sejam $u, v \in im(\tau)$. Então, existem $g, a \in G$ e $h, b \in H$ tais que $u = \tau(g,h)$ e $v = \tau(a,b)$. Pelos itens (x) e (iv) do teorema 1.2.16, temos que

$$\begin{aligned} [u,v] &= \big[\tau(g,h), \tau(a,b)\big] \\ &= \tau(g^h g^{-1}, {}^a b b^{-1}) \\ &= \tau(g g^{-1}, {}^a b b^{-1}) \\ &= \tau(e_G, {}^a b b^{-1}) \\ &= e_K\,. \end{aligned}$$

Assim, u e v comutam. Como u e v são quaisquer, todos os elementos de $im(\tau)$ comutam entre si e, portanto, temos que $\langle im(\tau)\rangle$ é abeliano.

Analogamente, suponha que a ação de G em H é a ação trivial e sejam $u, v \in im(\tau)$. Então, existem $g, a \in G$ e $h, b \in H$ tais que $u = \tau(g,h)$ e $v = \tau(a,b)$. Pelos itens (x) e (iv) do teorema 1.2.16, temos que

$$\begin{aligned} [u,v] &= \big[\tau(g,h), \tau(a,b)\big] \\ &= \tau(g^h g^{-1}, {}^a b b^{-1}) \\ &= \tau(g^h g^{-1}, b b^{-1}) \\ &= \tau(g^h g^{-1}, e_H) \\ &= e_K\,. \end{aligned}$$

Assim, u e v comutam. Como u e v são quaisquer, todos os elementos de $im(\tau)$ comutam entre si e, portanto, temos que $\langle im(\tau)\rangle$ é abeliano. ■

1.3 A categoria $\mathcal{C}$

Considere as categorias Set dos conjuntos e funções e Grp dos grupos e homomorfismos de grupos.

Seja um conjunto O formado por todas as ternas ordenadas $(G{\times}H, \theta, \xi)$ tais que $G, H \in Obj(\mathsf{Grp})$, $\theta \in Hom_{\mathsf{Grp}}\big(G, Sym(H)\big)$ e $\xi \in Hom_{\mathsf{Grp}}\big(H, Sym(G)\big)$. Isto é, O é o conjunto formado por todas as ternas ordenadas $(G{\times}H, \theta, \xi)$ tais que G e H são grupos e $\theta : G \to Sym(H)$ e $\xi : H \to Sym(G)$ são ações de grupos.

Para cada $X = (A \times B, \lambda, \kappa) \in O$ e cada $Y = (G \times H, \theta, \xi) \in O$, seja um conjunto Θ_{XY} formado por todos $\alpha{\times}\beta \in Hom_{\mathsf{Set}}(A{\times}B, G{\times}H)$ tais que $\alpha \in Hom_{\mathsf{Grp}}(A, G)$, $\beta \in Hom_{\mathsf{Grp}}(B, H)$ e que satisfazem

(i) $\theta_{\alpha(a)} \circ \beta = \beta \circ \lambda_a$, $\forall a \in A$;

(ii) $\xi_{\beta(b)} \circ \alpha = \alpha \circ \kappa_b$, $\forall b \in B$.

Isto é, Θ_{XY} é formado por todas as funções do tipo $\alpha{\times}\beta : A{\times}B \to G{\times}H$ tais que $\alpha : A \to G$ e $\beta : B \to H$ são homomorfismos de grupos que preservam as ações de A e B.

Sejam $X = (A \times B, \lambda, \kappa) \in O$ e $Y = (G \times H, \theta, \xi) \in O$. Se λ, κ, θ e ξ são as ações triviais, então Θ_{XY} é o conjunto de todas as funções do tipo $\alpha{\times}\beta : A{\times}B \to G{\times}H$ tais que $\alpha : A \to G$ e $\beta : B \to H$ são homomorfismos.

Proposição 1.3.1. Para todos $X, Y, Z \in O$, se $\alpha{\times}\beta \in \Theta_{XY}$ e $\gamma{\times}\delta \in \Theta_{YZ}$, então $(\gamma{\times}\delta) \circ (\alpha{\times}\beta) \in \Theta_{XZ}$.

Demonstração: Sejam $X = (A \times B, \lambda, \kappa)$, $Y = (G \times H, \theta, \xi)$ e $Z = (M \times N, \mu, \nu)$. É claro que $(\gamma \times \delta) \circ (\alpha \times \beta) = (\gamma \circ \alpha) \times (\delta \circ \beta)$ são elementos de $Hom_{\mathsf{Set}}(A{\times}B, M{\times}N)$ e que $\gamma \circ \alpha : A \to M$ e $\delta \circ \beta : B \to N$ são homomorfismos. Como $\alpha{\times}\beta \in \Theta_{XY}$, temos que $\theta_{\alpha(a)} \circ \beta = \beta \circ \lambda_a$, $\forall a \in A$, e $\xi_{\beta(b)} \circ \alpha = \alpha \circ \kappa_b$, $\forall b \in B$. Como $\gamma{\times}\delta \in \Theta_{YZ}$, temos que $\mu_{\gamma(g)} \circ \delta = \delta \circ \theta_g$, $\forall g \in G$, e $\nu_{\delta(h)} \circ \gamma = \gamma \circ \xi_h$, $\forall h \in H$. Assim, $\forall a \in A$, como $\alpha(a) \in G$, temos que

$$
\begin{aligned}
[\mu_{(\gamma\circ\alpha)(a)}] \circ (\delta \circ \beta) &= \mu_{\gamma(\alpha(a))} \circ (\delta \circ \beta) \\
&= [\mu_{\gamma(\alpha(a))} \circ \delta] \circ \beta \\
&= [\delta \circ \theta_{\alpha(a)}] \circ \beta \\
&= \delta \circ [\theta_{\alpha(a)} \circ \beta] \\
&= \delta \circ (\beta \circ \lambda_a) \\
&= (\delta \circ \beta) \circ \lambda_a \,.
\end{aligned}
$$

Também, $\forall b \in B$, como $\beta(b) \in H$, temos que

$$
\begin{aligned}
[\nu_{(\delta\circ\beta)(b)}] \circ (\gamma \circ \alpha) &= \nu_{\delta(\beta(b))} \circ (\gamma \circ \alpha) \\
&= [\nu_{\delta(\beta(b))} \circ \gamma] \circ \alpha \\
&= [\gamma \circ \xi_{\beta(b)}] \circ \alpha \\
&= \gamma \circ [\xi_{\beta(b)} \circ \alpha] \\
&= \gamma \circ (\alpha \circ \kappa_b) \\
&= (\gamma \circ \alpha) \circ \kappa_b \,.
\end{aligned}
$$

Logo, $(\gamma \circ \alpha) \times (\delta \circ \beta) \in \Theta_{XZ}$. ■

Proposição 1.3.2. Para todo $X = (A \times B, \lambda, \kappa)$ elemento de O, temos que $id_A \times id_B \in \Theta_{XX}$.

Demonstração: É claro que $id_A \times id_B \in Hom_{\mathsf{Set}}(A \times B, A \times B)$ e que $id_A \in Hom_{\mathsf{Grp}}(A, A)$ e $id_B \in Hom_{\mathsf{Grp}}(B, B)$. Para todo $a \in A$, temos que $\lambda_{id_A(a)} \circ id_B = \lambda_a \circ id_B = \lambda_a = id_B \circ \lambda_a$. Por fim, para todo $b \in B$, temos que $\kappa_{id_B(b)} \circ id_A = \kappa_b \circ id_A = \kappa_b = id_A \circ \kappa_b$. ■

Como a composição de funções é associativa, podemos construir uma categoria $\mathcal{C}$ tal que $Obj(\mathcal{C}) = O$ e, $\forall X, Y \in O$, $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) = \Theta_{XY}$.

Podemos também construir uma subcategoria cheia $\mathsf{C} \leqslant \mathcal{C}$, de forma que, para todo $X = (A \times B, \lambda, \kappa) \in Obj(\mathcal{C})$, definimos $X \in Obj(\mathsf{C})$ se, e somente se, λ e κ são ações compatíveis. Como essa subcategoria é cheia, temos que $Hom_{\mathsf{C}}(X, Y) = Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $\forall X, Y \in Obj(\mathsf{C})$.

Observe que, para todo $X = (A \times B, \lambda, \kappa) \in Obj(\mathcal{C})$, o morfismo identidade de X é $id_X = id_{(A \times B, \lambda, \kappa)} = id_A \times id_B \in Hom_{\mathcal{C}}(X, X)$.

Dizemos que a categoria $\mathcal{C}$ tem como objetos produtos cartesianos de grupos, munidos de ações de um no outro, e tem como morfismos produtos cartesianos de homomorfismos de grupos que preservam as ações. Note que qualquer produto cartesiano de homomorfismos preservam as ações triviais. Precisamente, se $X = (A \times B, \lambda, \kappa) \in Obj(\mathcal{C})$ e $Y = (G \times H, \theta, \xi) \in Obj(\mathcal{C})$, em que λ, κ, θ e ξ são ações triviais, então $X, Y \in Obj(\mathsf{C})$ e $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) = \big\{\alpha \times \beta \;:\; \alpha \in Hom_{\mathsf{Grp}}(A, G) \text{ e } \beta \in Hom_{\mathsf{Grp}}(B, H)\big\}$.

Reescrevemos o item (iii) da proposição 1.2.14 da seguinte maneira:

Proposição 1.3.3. Sejam K um grupo, $X = (A \times B, \lambda, \kappa) \in Obj(\mathcal{C})$, $Y = (G \times H, \theta, \xi) \in Obj(\mathcal{C})$ e $\tau : G \times H \to K$ um pareamento cruzado com respeito à θ e ξ. Para todo $\alpha \times \beta \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, temos que $\tau \circ (\alpha \times \beta) : A \times B \to K$ é um pareamento cruzado com respeito a λ e κ.

Podemos escrever os dois diagramas

$$(A \times B, \lambda, \kappa) \xrightarrow{\alpha \times \beta} (G \times H, \theta, \xi)$$

e

$$A \times B \xrightarrow{\alpha \times \beta} G \times H \xrightarrow{\tau} K$$

na forma simplificada abaixo.

$$(A \times B, \lambda, \kappa) \xrightarrow{\alpha \times \beta} (G \times H, \theta, \xi) \xrightarrow{\tau} K$$

O exemplo abaixo é uma releitura dos itens (vi) e (vii) da proposição 1.2.14.

Exemplo 1.3.4. Sejam $X = (G \times H, \theta, \xi) \in Obj(\mathsf{C})$, em que θ e ξ são ações por automorfismos, $c^G : G \to Aut(G)$ a ação por conjugação de G e $c^H : H \to Aut(H)$ a ação por conjugação de H. Então, $c^G_g \times \theta_g \in Hom_{\mathsf{C}}(X, X)$, $\forall g \in G$, e $\xi_h \times c^H_h \in Hom_{\mathsf{C}}(X, X)$, $\forall h \in H$. De fato, seja $g \in G$. Como c^G e θ são ações por automorfismos, então $c^G_g : G \to G$ e $\theta_g : H \to H$ são homomorfismos. Pelo item (i) da observação 1.1.3, temos que $\theta_{c^G_g(a)} \circ \theta_g = \theta_g \circ \theta_a$, $\forall a \in G$. Como θ e ξ são compatíveis, temos que $\xi_{\theta_g(b)} \circ c^G_g = c^G_g \circ \xi_b$, $\forall b \in H$. Assim, $c^G_g \times \theta_g \in Hom_{\mathsf{C}}(X, X)$. Agora, seja $h \in H$. Como ξ e c^H são ações por automorfismos, então $\xi_h : G \to G$ e $c^H_h : H \to H$ são homomorfismos. Como θ e ξ são compatíveis, temos que $\theta_{\xi_h(a)} \circ c^H = c^H \circ \theta_a$, $\forall a \in G$. Pelo item (i) da observação 1.1.3, temos que $\xi_{c^H_h(b)} \circ \xi_h = \xi_h \circ \xi_b$, $\forall b \in H$. Daí, $\xi_h \times c^H_h \in Hom_{\mathsf{C}}(X, X)$. Dessa forma, se K é um grupo e $\tau : G{\times}H \to K$ é um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ, então $\tau \circ (c^G_g \times \theta_g) : G{\times}H \to K$ e $\tau \circ (\xi_h \times c^H_h) : G{\times}H \to K$ também são pareamentos cruzados com respeito a θ e ξ, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$.

Assim, é claro que $(c^G_g \circ \xi_h) \times (\theta_g \circ c^H_h) = (c^G_g \times \theta_g) \circ (\xi_h \times c^H_h) \in Hom_{\mathsf{C}}(X, X)$ e que $(\xi_h \circ c^G_g) \times (c^H_h \circ \theta_g) = (\xi_h \times c^H_h) \circ (c^G_g \times \theta_g) \in Hom_{\mathsf{C}}(X, X)$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$. Daí, se K é um grupo e $\tau : G{\times}H \to K$ é um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ, então $\tau \circ [(c^G_g \circ \xi_h) \times (\theta_g \circ c^H_h)] : G{\times}H \to K$ e $\tau \circ [(\xi_h \circ c^G_g) \times (c^H_h \circ \theta_g)] : G{\times}H \to K$ também são pareamentos cruzados com respeito a θ e ξ, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$.

1.4 Pareamentos exteriores

Seja P um grupo. Como é usual, denotamos a sentença "N é subgrupo normal de P" por "$N \lhd P$". Lembramos que são equivalentes os itens abaixo:

- $N \lhd P$;
- $(\forall z \in P)(zNz^{-1} \subset N)$;
- $(\forall z \in P)(zNz^{-1} = N)$.

Seja $c^P : P \to Aut(P)$ a ação por conjugação de P. Note que $N \lhd P$ se, e somente se, $(\forall z \in P)(c^P_z[N] = N)$. De fato, $c^P_z[N] = zNz^{-1}$, $\forall z \in P$. Como conseqüência, para cada $z \in P$, o homomorfismo $c^P_z|_N : N \to P$ é da forma $c^P_z|_N : N \to N$, com $im(c^P_z|_N) = c^P_z[N] = zNz^{-1} = N$, isto é, $c^P_z|_N$ é sobrejetor em N. Também, $c^P_z|_N$ é injetor, pois c^P_z é injetor. Dessa forma, $c^P_z|_N \in Aut(N)$.

Sejam P um grupo, $G \leqslant P$, $H \lhd P$ e $c^P : P \to Aut(P)$ a ação por conjugação de P. Definimos uma função $c^P_{GH} : G \to Aut(H)$ de tal modo que $c^P_{GH}(x) = c^P_x|_H$, $\forall x \in G$. Assim, é imediato que $c^P_{GH} \in Hom\big(G, Aut(H)\big)$, isto é, c^P_{GH} é uma ação de G em H e, além disso, c^P_{GH} é uma ação por automorfismos. Dizemos que "a ação c^P_{GH} é uma restrição da conjugação c^P ao subgrupo G e ao subgrupo normal H".

Lembremos o seguinte fato: sejam X, Y, Z e W conjuntos, $A \subset X$, $B \subset Z$ e $\phi : X \to Y$ e $\psi : Z \to W$ funções. Se $im(\phi|_A) = \phi[A] \subset B$, então

$\phi[A] \subset Z$ e $\psi \circ (\phi|_A) : A \to W$ e $(\psi|_B) \circ (\phi|_A) : A \to W$ são funções e são iguais. Além disso, se $im(\phi) \subset Z$, então $\psi \circ \phi : X \to W$ é uma função e $(\psi \circ \phi)|_A = \psi \circ (\phi|_A)$. Basta notar que, nas composições, a imagem da função da direita está contida no domínio da função da esquerda em ambos os casos e que, no primeiro caso, $\forall x \in A$,

$$[(\psi|_B) \circ (\phi|_A)](x) = \psi|_B\big(\phi|_A(x)\big) = \psi\big(\phi|_A(x)\big) = [\psi \circ (\phi|_A)](x)$$

e, no segundo caso, $\forall x \in A$,

$$(\psi \circ \phi)|_A(x) = (\psi \circ \phi)(x) = \psi\big(\phi(x)\big) = \psi\big(\phi|_A(x)\big) = [\psi \circ (\phi|_A)](x)\,.$$

Ambos os casos são utilizados na demonstração do item (ii) da proposição abaixo.

Proposição 1.4.1. Sejam P um grupo, $G \lhd P$, $H \lhd P$, $c^G : G \to Aut(G)$ a ação por conjugação de G, $c^H : H \to Aut(H)$ a ação por conjugação de H, $c^P : P \to Aut(P)$ a ação por conjugação de P e $c^P_{GG} : G \to Aut(G)$, $c^P_{GH} : G \to Aut(H)$, $c^P_{HH} : H \to Aut(H)$ e $c^P_{HG} : H \to Aut(G)$ as ações definidas nos parágrafos acima. Temos que

(i) $c^P_{GG} = c^G$ e $c^P_{HH} = c^H$;

(ii) c^P_{GH} e c^P_{HG} são compatíveis.

Demonstração: (i) Seja $g \in G$. Para todo $x \in G$, temos que

$$[c^P_{GG}(g)](x) = (c^P_g|_G)(x) = c^P_g(x) = gxg^{-1} = c^G_g(x)\,.$$

Daí, $c^P_{GG}(g) = c^P_g = c^G(g)$. Como g é qualquer, ficamos com $c^P_{GG} = c^G$. Seja $h \in H$. Para todo $y \in H$, temos que

$$[c^P_{HH}(h)](y) = (c^P_h|_H)(y) = c^P_h(y) = hyh^{-1} = c^H_h(y)\,.$$

Daí, $c^P_{HH}(h) = c^H_h = c^H(h)$. Como h é qualquer, concluimos que $c^P_{HH} = c^H$.

(ii) Vamos denotar $\theta = c^P_{GH}$ e $\xi = c^P_{HG}$. Sejam $g \in G$ e $b \in H$. Temos que $\theta_g(b) = [c^P_{GH}(g)](b) = (c^P_g|_H)(b) = c^P_g(b) = gbg^{-1}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\xi_{\theta_g(b)} \circ c^G_g &= \xi_{gbg^{-1}} \circ c^G_g \\
&= \xi(gbg^{-1}) \circ c^G(g) \\
&= c^P_{HG}(gbg^{-1}) \circ c^P_{GG}(g) \\
&= (c^P_{gbg^{-1}}|_G) \circ (c^P_g|_G) \\
&= c^P_{gbg^{-1}} \circ (c^P_g|_G) \\
&= (c^P_{gbg^{-1}} \circ c^P_g)|_G \\
&= c^P_{gbg^{-1}g}|_G \\
&= c^P_{gb}|_G \\
&= (c^P_g \circ c^P_b)|_G \\
&= c^P_g \circ (c^P_b|_G) \\
&= (c^P_g|_G) \circ (c^P_b|_G) \\
&= c^P_{GG}(g) \circ c^P_{HG}(b) \\
&= c^G(g) \circ \xi(b) \\
&= c^G_g \circ \xi_b\,.
\end{aligned}$$

Sejam $a \in G$ e $h \in H$. Temos que

$$\xi_h(a) = [c^P_{HG}(h)](a) = (c^P_h|_G)(a) = c^P_h(a) = hah^{-1}\,.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\theta_{\xi_h(a)} \circ c^H_h &= \theta_{hah^{-1}} \circ c^H_h \\
&= \theta(hah^{-1}) \circ c^H(h) \\
&= c^P_{GH}(hah^{-1}) \circ c^P_{HH}(h) \\
&= (c^P_{hah^{-1}}|_H) \circ (c^P_h|_H) \\
&= c^P_{hah^{-1}} \circ (c^P_h|_H) \\
&= (c^P_{hah^{-1}} \circ c^P_h)|_H \\
&= c^P_{hah^{-1}h}|_H = c^P_{ha}|_H \\
&= (c^P_h \circ c^P_a)|_H \\
&= c^P_h \circ (c^P_a|_H) \\
&= (c^P_h|_H) \circ (c^P_a|_H) \\
&= c^P_{HH}(h) \circ c^P_{GH}(a) \\
&= c^H(h) \circ \theta(a) \\
&= c^H_h \circ \theta_a\,.
\end{aligned}$$

■

Definição 1.4.2. Sejam P e K grupos, $e_K \in K$ o elemento neutro de K, $G \lhd P$, $H \lhd P$, $c^P : P \to Aut(P)$ a ação por conjugação de P e $\varepsilon : G \times H \to K$ um pareamento cruzado com respeito a c^P_{GH} e c^P_{HG}. Dizemos que "ε é um *pareamento exterior* (*exterior pairing*)" se, e somente se, $\varepsilon(z,z) = e_K$, $\forall z \in G \cap H$.

Sejam P e K grupos, $e_K \in K$ o elemento neutro de K, $G \lhd P$, $H \lhd P$, $c^P : P \to Aut(P)$ a ação por conjugação de P e $\varepsilon : G \times H \to K$ uma função tal que $\varepsilon(x,y) = e_K$, $\forall x \in G$, $\forall y \in H$. Lembremos que, para quaisquer ações $\theta : G \to Sym(H)$ e $\xi : H \to Sym(G)$, ε é um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ. Dessa forma, ε é um pareamento cruzado com respeito a c^P_{GH} e c^P_{HG}. É claro que ε é um pareamento exterior.

Observação 1.4.3. Sejam P e K grupos, $e_P \in P$ o elemento neutro de P, $G \lhd P$, $H \lhd P$ e $c^P : P \to Aut(P)$ a ação por conjugação de P. Se $G \cap H = \{e_P\} \cong 0$, pela proposição 1.2.2, todo pareamento cruzado com respeito a c^P_{GH} e c^P_{HG} é um pareamento exterior.

Proposição 1.4.4. Sejam P e K grupos, $e_P \in P$ o elemento neutro de P, $e_K \in K$ o elemento neutro de K, $G \lhd P$, $H \lhd P$ e $\varepsilon : G \times H \to K$ um pareamento exterior. Temos que $\varepsilon(e_P, h) = e_K = \varepsilon(g, e_P)$, $\forall h \in H$, $\forall g \in G$.

Demonstração: Seja $c^P : P \to Aut(P)$ a ação por conjugação de P. Temos que $\varepsilon : G \times H \to K$ é um pareamento cruzado com respeito a c^P_{GH} e c^P_{HG}. O resultado segue da proposição 1.2.2. ■

Exemplo 1.4.5. Seja P um grupo, $e_P \in P$ o elemento neutro de P, $G \lhd P$, $H \lhd P$, $c^P : P \to Aut(P)$ a ação por conjugação de P e $\tilde{\kappa} : P \times P \to P$ a função comutadora, isto é, temos que $\tilde{\kappa}(u,v) = [u,v] = uvu^{-1}v^{-1}$, $\forall u, v \in P$. Dessa forma, sua restrição $\tilde{\kappa}|_{G\times H} : G \times H \to P$ é um pareamento cruzado com respeito às restrições da conjugação c^P_{GH} e c^P_{HG}. De fato, $\forall a, x \in G$, $\forall b, h \in H$, chamando $k = \tilde{\kappa}|_{G\times H}\big([c^G(a)](x), [c^P_{GH}(a)](y)\big) \cdot \tilde{\kappa}|_{G\times H}(a,y)$ e $k' = \tilde{\kappa}|_{G\times H}(x,b) \cdot \tilde{\kappa}|_{G\times H}\big([c^P_{HG}(b)](x), [c^H(b)](y)\big)$, temos que

$$\begin{aligned}
k &= \tilde{\kappa}\big([c^G(a)](x), [c^P_{GH}(a)](y)\big) \cdot \tilde{\kappa}(a,y) \\
&= \tilde{\kappa}\big(c^G_a(x), c^P_a|_H(y)\big) \cdot \tilde{\kappa}(a,y) \\
&= \tilde{\kappa}\big(c^G_a(x), c^P_a(y)\big) \cdot \tilde{\kappa}(a,y) = \tilde{\kappa}(axa^{-1}, aya^{-1}) \cdot \tilde{\kappa}(a,y) \\
&= [axa^{-1}, aya^{-1}] \cdot [a,y] \\
&= (axa^{-1}) \cdot (aya^{-1}) \cdot (axa^{-1})^{-1} \cdot (aya^{-1})^{-1} \cdot (aya^{-1}y^{-1}) \\
&= axa^{-1}aya^{-1}ax^{-1}a^{-1}ay^{-1}a^{-1}aya^{-1}y^{-1} \\
&= axyx^{-1}a^{-1}y^{-1} \\
&= (ax)y(ax)^{-1}y^{-1} \\
&= [ax, y] = \tilde{\kappa}(ax, y) \\
&= \tilde{\kappa}|_{G\times H}(ax, y)\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k' &= \tilde{\kappa}(x,b)\cdot\tilde{\kappa}\big([c^P_{HG}(b)](x),[c^H(b)](y)\big)\\
&= \tilde{\kappa}(x,b)\cdot\tilde{\kappa}\big(c^P_b|_G(x),c^H_b(y)\big)\\
&= \tilde{\kappa}(x,b)\cdot\tilde{\kappa}\big(c^P_b(x),c^H_b(y)\big)\\
&= \tilde{\kappa}(x,b)\cdot\tilde{\kappa}(bxb^{-1},byb^{-1})\\
&= [x,b]\cdot[bxb^{-1},byb^{-1}]\\
&= (xbx^{-1}b^{-1})\cdot(bxb^{-1})\cdot(byb^{-1})\cdot(bxb^{-1})^{-1}\cdot(byb^{-1})^{-1}\\
&= xbx^{-1}b^{-1}bxb^{-1}byb^{-1}bx^{-1}b^{-1}by^{-1}b^{-1}\\
&= xbyx^{-1}y^{-1}b^{-1} = x(by)x^{-1}(by)^{-1}\\
&= [x,by]=\tilde{\kappa}(x,by)\\
&= \tilde{\kappa}|_{G\times H}(x,by)\,.
\end{aligned}$$

Além disso, $\tilde{\kappa}|_{G\times H}$ é um pareamento exterior. Com efeito, $\forall z\in G\cap H$, temos que $\tilde{\kappa}|_{G\times H}(z,z)=\tilde{\kappa}(z,z)=[z,z]=z\,z^{-1}\,z\,z^{-1}=e_P\cdot e_P=e_P$. Em particular, se $G=H=P$, então a função comutadora $\tilde{\kappa}=\tilde{\kappa}|_{P\times P}=\tilde{\kappa}|_{G\times H}$ é um pareamento exterior e, nesse caso, o subgrupo gerado pela imagem de $\tilde{\kappa}$ é o subgrupo P', derivado de P, que é normal em P, $\langle im(\tilde{\kappa})\rangle = P'\lhd P$, e a função comutadora é um pareamento exterior de P da forma $\tilde{\kappa}:P\times P\to P'$.

Sejam P e K grupos, $e_K\in K$ o elemento neutro de K, $G\lhd P$, $H\lhd P$, $c^P:P\to Aut(P)$ a ação por conjugação de P, $c^G=c^P_{GG}:G\to Aut(G)$ a ação por conjugação de G, $c^H=c^P_{HH}:H\to Aut(H)$ a ação por conjugação de H e $t:P\to K$ o homomorfismo trivial, isto é, $t(z)=e_K$, $\forall z\in P$. Pelas definições 1.2.1 e 1.4.2, temos que $\varepsilon:G\times H\to K$ é um pareamento exterior se, e somente se,

(1) $\varepsilon(ax,y)=\big(\varepsilon\circ\{[c^G(a)]\times[c^P_{GH}(a)]\}\big)(x,y)\cdot\varepsilon(a,y)\,,\ \forall a,x\in G,\ \forall y\in H;$

(2) $\varepsilon(x,by)=\varepsilon(x,b)\cdot\big(\varepsilon\circ\{[c^P_{HG}(b)]\times[c^H(b)]\}\big)(x,y)\,,\ \forall x\in G,\ \forall b,y\in H;$

(3) $\varepsilon\circ[(id_P,id_P)|_{G\cap H}]=t|_{G\cap H}\,.$

Estes, por sua vez, são equivalentes, respectivamente, aos

(1) $\varepsilon(ax,y)=\{\varepsilon\circ[(c^G_a)\times(c^P_a|_H)]\}(x,y)\cdot\varepsilon(a,y)\,,\ \forall a,x\in G,\ \forall y\in H;$

(2) $\varepsilon(x,by)=\varepsilon(x,b)\cdot\{\varepsilon\circ[(c^P_b|_G)\times(c^H_b)]\}(x,y)\,,\ \forall x\in G,\ \forall b,y\in H;$

(3) $\varepsilon\circ[(id_P,id_P)|_{G\cap H}]=t|_{G\cap H}\,.$

os quais são equivalentes, respectivamente, aos

(1) $\varepsilon(ax,y)=\varepsilon\big(c^G_a(x),c^P_a(y)\big)\cdot\varepsilon(a,y)\,,\ \forall a,x\in G,\ \forall y\in H;$

(2) $\varepsilon(x,by)=\varepsilon(x,b)\cdot\varepsilon\big(c^P_b(x),c^H_b(y)\big)\,,\ \forall x\in G,\ \forall b,y\in H;$

(3) $\varepsilon \circ [(id_P, id_P)|_{G\cap H}] = t|_{G\cap H}$.

Na nossa notação, $\varepsilon : G\times H \to K$ é um pareamento exterior se, e somente se, $\forall a, x \in G$, $\forall b, y \in H$, $\forall z \in G \cap H$, temos que

(1) $\varepsilon(ax, y) = \varepsilon({}^a x, {}^a y) \cdot \varepsilon(a, y) = \varepsilon(axa^{-1}, aya^{-1}) \cdot \varepsilon(a, y)$;

(2) $\varepsilon(x, by) = \varepsilon(x, b) \cdot \varepsilon({}^b x, {}^b y) = \varepsilon(x, b) \cdot \varepsilon(bxb^{-1}, byb^{-1})$;

(3) $\varepsilon(z, z) = e_K$.

Proposição 1.4.6. Sejam P, K e L grupos, $G \lhd P$, $H \lhd P$ e $\varepsilon : G\times H \to K$ um pareamento exterior. Se $f : K \to L$ é um homomorfismo, então $f \circ \varepsilon : G\times H \to L$ é um pareamento exterior.

Demonstração: Sejam $c^P : P \to Aut(P)$ a ação por conjugação de P, $e_K \in K$ o elemento neutro de K e $e_L \in L$ o elemento neutro de L. Pela proposição 1.2.12, $f \circ \varepsilon$ é pareamento cruzado com respeito a c^P_{GH} e c^P_{HG}. Também, $\forall z \in G \cap H$, temos que $(f \circ \varepsilon)(z, z) = f\big(\varepsilon(z, z)\big) = f(e_K) = e_L$. Logo, $f \circ \varepsilon$ é pareamento exterior. ∎

Proposição 1.4.7. Sejam J, P e K grupos, $A \lhd J$, $B \lhd J$, $G \lhd P$, $H \lhd P$, $\alpha : A \to G$ e $\beta : B \to H$ funções, $c^J : J \to Aut(J)$ a ação por conjugação de J, $c^P : P \to Aut(P)$ a ação por conjugação de P, $c^J_{AA} = c^A : A \to Aut(A)$ a ação por conjugação de A, $c^J_{BB} = c^B : B \to Aut(B)$ a ação por conjugação de B, $c^P_{GG} = c^G : G \to Aut(G)$ a ação por conjugação de G, $c^P_{HH} = c^H : H \to Aut(H)$ a ação por conjugação de H e $c^J_{AB} : A \to Aut(B)$, $c^J_{BA} : B \to Aut(A)$, $c^P_{GH} : G \to Aut(H)$ e $c^P_{HG} : H \to Aut(G)$ as ações definidas nessa seção, isto é, $c^J_{AB}(a) = c^J_a|_B$, $\forall a \in A$, $c^J_{BA}(b) = c^J_b|_A$, $\forall b \in B$, $c^P_{GH}(g) = c^P_g|_H$, $\forall g \in G$, e $c^P_{HG}(h) = c^P_h|_G$, $\forall h \in H$. Sejam também $\varepsilon : G\times H \to K$ um pareamento exterior e $\hat{\varepsilon} = \varepsilon \circ (\alpha\times\beta) : A\times B \to K$. Valem

(i) Se $\alpha \in Hom(A, G)$ e $a \in A$ são tais que

$$\big[c^P_{GH}\big(\alpha(a)\big)\big] \circ \beta = [c^P_{\alpha(a)}|_H] \circ \beta = \beta \circ (c^J_a|_B) = \beta \circ [c^J_{AB}(a)]$$

então, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, temos que

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}(ax, y) &= \hat{\varepsilon}\big([c^A(a)](x), [c^J_{AB}(a)](y)\big) \cdot \hat{\varepsilon}(a, y)\\
&= \hat{\varepsilon}\big(c^A_a(x), (c^J_a|_B)(y)\big) \cdot \hat{\varepsilon}(a, y)\\
&= \hat{\varepsilon}\big(c^A_a(x), c^J_a(y)\big) \cdot \hat{\varepsilon}(a, y)\\
&= \hat{\varepsilon}(axa^{-1}, aya^{-1}) \cdot \hat{\varepsilon}(a, y)\,;
\end{aligned}$$

(ii) Se $\beta \in Hom(B,H)$ e $b \in B$ são tais que

$$\big[c^P_{HG}\big(\beta(b)\big)\big] \circ \alpha = [c^P_{\beta(b)}|_G] \circ \alpha = \alpha \circ (c^J_b|_A) = \alpha \circ [c^J_{BA}(b)]$$

então, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, temos que

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}(x,by) &= \hat{\varepsilon}(x,b)\cdot\hat{\varepsilon}\big([c^J_{BA}(b)](x),[c^B(b)](y)\big) \\ &= \hat{\varepsilon}(x,b)\cdot\hat{\varepsilon}\big((c^J_b|_A)(x),c^B_b(y)\big) \\ &= \hat{\varepsilon}(x,b)\cdot\hat{\varepsilon}\big(c^J_b(x),c^B_b(y)\big) \\ &= \hat{\varepsilon}(x,b)\cdot\hat{\varepsilon}(bxb^{-1},byb^{-1})\,; \end{aligned}$$

(iii) Se α e β são homomorfismos e, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$,

$$\big[c^P_{GH}\big(\alpha(a)\big)\big] \circ \beta = [c^P_{\alpha(a)}|_H] \circ \beta = \beta \circ (c^J_a|_B) = \beta \circ [c^J_{AB}(a)]$$

e

$$\big[c^P_{HG}\big(\beta(b)\big)\big] \circ \alpha = [c^P_{\beta(b)}|_G] \circ \alpha = \alpha \circ (c^J_b|_A) = \alpha \circ [c^J_{BA}(b)]\,,$$

então $\hat{\varepsilon} = \varepsilon \circ (\alpha\times\beta) : A\times B \to K$ é um pareamento cruzado com respeito a c^J_{AB} e c^J_{BA};

(iv) Se α e β são homomorfismos e, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$,

$$\big[c^P_{GH}\big(\alpha(a)\big)\big] \circ \beta = [c^P_{\alpha(a)}|_H] \circ \beta = \beta \circ (c^J_a|_B) = \beta \circ [c^J_{AB}(a)]\,,$$

$$\big[c^P_{HG}\big(\beta(b)\big)\big] \circ \alpha = [c^P_{\beta(b)}|_G] \circ \alpha = \alpha \circ (c^J_b|_A) = \alpha \circ [c^J_{BA}(b)]$$

e $\alpha|_{A\cap B} = \beta|_{A\cap B}$, então $\hat{\varepsilon} : A\times B \to K$ é um pareamento exterior;

(v) Para todo $g \in G$, temos que

$$\varepsilon \circ \big\{[c^G(g)] \times [c^P_{GH}(g)]\big\} = \varepsilon \circ [(c^G_g) \times (c^P_g|_H)] : G\times H \to K$$

é um pareamento exterior;

(vi) Para todo $h \in H$, temos que

$$\varepsilon \circ \big\{[c^P_{HG}(h)] \times [c^H(h)]\big\} = \varepsilon \circ [(c^P_h|_G) \times (c^H_h)] : G\times H \to K$$

é um pareamento exterior.

Demonstração: **(i)** Como ε é um pareamento cruzado com respeito a c^P_{GH} e c^P_{HG}, substituindo no enunciado da proposição 1.2.14, temos que $\theta = c^P_{GH}$, $\xi = c^P_{HG}$, $\lambda = c^J_{AB}$, $\kappa = c^J_{BA}$, $\tau = \varepsilon$ e $\hat{\tau} = \hat{\varepsilon}$. Por hipótese,

$$\begin{aligned} \theta_{\alpha(a)} \circ \beta &= \big[\theta\big(\alpha(a)\big)\big] \circ \beta \\ &= \big[c^P_{GH}\big(\alpha(a)\big)\big] \circ \beta \\ &= \beta \circ [c^J_{AB}(a)] \\ &= \beta \circ [\lambda(a)] \\ &= \beta \circ \lambda_a\,. \end{aligned}$$

Pelo item (i) da proposição 1.2.14, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, ficamos com

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}(ax, y) &= \hat{\varepsilon}\big(c_a^A(x), \lambda_a(y)\big) \cdot \hat{\varepsilon}(a, y) \\ &= \hat{\varepsilon}\big([c^A(a)](x), [\lambda(a)](y)\big) \cdot \hat{\varepsilon}(a, y) \\ &= \hat{\varepsilon}\big([c^A(a)](x), [c_{AB}^J(a)](y)\big) \cdot \hat{\varepsilon}(a, y)\,. \end{aligned}$$

(ii) Substituindo no enunciado da proposição 1.2.14 exatamente como fizemos no item (i) acima e usando nossa hipótese, temos que

$$\begin{aligned} \xi_{\beta(b)} \circ \alpha &= \big[\xi\big(\beta(b)\big)\big] \circ \alpha \\ &= \big[c_{HG}^P\big(\beta(b)\big)\big] \circ \alpha \\ &= \alpha \circ [c_{BA}^J(b)] \\ &= \alpha \circ [\kappa(b)] \\ &= \alpha \circ \kappa_b\,. \end{aligned}$$

Pelo item (ii) da proposição 1.2.14, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, ficamos com

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}(x, by) &= \hat{\varepsilon}(x, b) \cdot \hat{\varepsilon}\big(\kappa_b(x), c_b^B(y)\big) \\ &= \hat{\varepsilon}(x, b) \cdot \hat{\varepsilon}\big([\kappa(b)](x), [c^B(b)](y)\big) \\ &= \hat{\varepsilon}(x, b) \cdot \hat{\varepsilon}\big([c_{BA}^J(b)](x), [c^B(b)](y)\big)\,. \end{aligned}$$

(iii) É imediato dos itens (i) e (ii) acima.

(iv) Pelo item (iii) dessa proposição, temos que $\hat{\varepsilon}$ é um pareamento cruzado com respeito a c_{AB}^J e c_{BA}^J. Além disso, como ε é um pareamento exterior, $\forall z \in A \cap B$, temos que $\alpha(z) = \beta(z) \in G \cap H$ e, portanto, $\hat{\varepsilon}(z, z) = [\varepsilon \circ (\alpha \times \beta)](z, z) = \varepsilon\big((\alpha \times \beta)(z, z)\big) = \varepsilon\big(\alpha(z), \beta(z)\big) = e_K$. Logo, $\hat{\varepsilon} : A \times B \to K$ é um pareamento exterior.

(v) Seja $g \in G$. Substituindo novamente no enunciado da proposição 1.2.14, como fizemos no item (i) dessa demonstração, temos que $c_{GH}^P(g) = \theta(g) = \theta_g$. Pelo item (ii) da proposição 1.4.1, temos que $\theta = c_{GH}^P$ e $\xi = c_{HG}^P$ são compatíveis. Como $\theta = c_{GH}^P$ é ação por automorfismos, pelo item (vi) da proposição 1.2.14, temos que $\varepsilon \circ (c_g^G \times \theta_g) : G \times H \to K$ é pareamento cruzado com respeito a θ e ξ, isto é, $\varepsilon \circ \big\{[c^G(g)] \times [c_{GH}^P(g)]\big\} : G \times H \to K$ é pareamento cruzado com respeito a c_{GH}^P e c_{HG}^P. Seja $z \in G \cap H$. Temos que $[c_{GH}^P(g)](z) = (c_g^P|_H)(z) = c_g^P(z) = gzg^{-1} = c_g^G(z) = [c^G(g)](z)$ e, portanto, que

$$[c_{GH}^P(g)](z) = [c^G(g)](z) = gzg^{-1} \in gGg^{-1} \cap gHg^{-1} = G \cap H\,,$$

pois $gGg^{-1} = G$ e $gHg^{-1} = H$, já que $g \in G$ e $H \lhd P$. Como ε é pareamento exterior, ficamos com

$$\begin{aligned} \big(\varepsilon \circ \{[c^G(g)] \times [c_{GH}^P(g)]\}\big)(z, z) &= \varepsilon\big(\{[c^G(g)] \times [c_{GH}^P(g)]\}(z, z)\big) \\ &= \varepsilon\big([c^G(g)](z), [c_{GH}^P(g)](z)\big) \\ &= \varepsilon(gzg^{-1}, gzg^{-1}) \\ &= e_K\,. \end{aligned}$$

Logo, $\varepsilon \circ \{[c^G(g)] \times [c^P_{GH}(g)]\} : G\times H \to K$ é pareamento exterior.

(vi) Seja $h \in H$. Substituindo novamente no enunciado da proposição 1.2.14, como fizemos no item (i) dessa demonstração, temos que $c^P_{HG}(h) = \xi(h) = \xi_h$. Pelo item (ii) da proposição 1.4.1, temos que $\theta = c^P_{GH}$ e $\xi = c^P_{HG}$ são compatíveis. Como $\xi = c^P_{HG}$ é ação por automorfismos, pelo item (vii) da proposição 1.2.14, temos que $\varepsilon \circ (\xi_h \times c^H_h) : G\times H \to K$ é pareamento cruzado com respeito a θ e ξ, isto é, $\varepsilon \circ \{[c^P_{HG}(h)] \times [c^H(h)]\} : G\times H \to K$ é pareamento cruzado com respeito a c^P_{GH} e c^P_{HG}. Seja $z \in G \cap H$. Temos que $[c^P_{HG}(h)](z) = (c^P_h|_G)(z) = c^P_h(z) = hzh^{-1} = c^H_h(z) = [c^H(h)](z)$ e, portanto, que

$$[c^P_{HG}(h)](z) = [c^H(h)](z) = hzh^{-1} \in hGh^{-1} \cap hHh^{-1} = G \cap H\,,$$

pois $hGh^{-1} = G$ e $hHh^{-1} = H$, já que $G \lhd P$ e $h \in H$. Como ε é pareamento exterior, ficamos com

$$\begin{aligned}
\big(\varepsilon \circ \{[c^P_{HG}(h)] \times [c^H(h)]\}\big)(z,z) &= \varepsilon\big(\{[c^P_{HG}(h)] \times [c^H(h)]\}(z,z)\big)\\
&= \varepsilon\big([c^P_{HG}(h)](z), [c^H(h)](z)\big)\\
&= \varepsilon(hzh^{-1}, hzh^{-1})\\
&= e_K\,.
\end{aligned}$$

Logo, $\varepsilon \circ \{[c^P_{HG}(h)] \times [c^H(h)]\} : G\times H \to K$ é pareamento exterior. ■

Reenunciando a proposição 1.4.7 com outros detalhes, sejam J, P e K grupos, $A \lhd J$, $B \lhd J$, $G \lhd P$, $H \lhd P$, $\alpha : A \to G$ e $\beta : B \to H$ funções, $c^J : J \to Aut(J)$ a ação por conjugação de J, $c^P : P \to Aut(P)$ a ação por conjugação de P, $c^J_{AA} = c^A : A \to Aut(A)$ a ação por conjugação de A, $c^J_{BB} = c^B : B \to Aut(B)$ a ação por conjugação de B, $c^P_{GG} = c^G : G \to Aut(G)$ a ação por conjugação de G, $c^P_{HH} = c^H : H \to Aut(H)$ a ação por conjugação de H e $c^J_{AB} : A \to Aut(B)$, $c^J_{BA} : B \to Aut(A)$, $c^P_{GH} : G \to Aut(H)$ e $c^P_{HG} : H \to Aut(G)$ as ações definidas nessa seção e enunciadas na proposição citada. Sejam também $\varepsilon : G\times H \to K$ um pareamento exterior e $\hat{\varepsilon} = \varepsilon \circ (\alpha\times\beta) : A\times B \to K$. Valem

(i) Se $\alpha \in Hom(A,G)$ e $a \in A$ são tais que

$$\big[c^P_{GH}\big(\alpha(a)\big)\big] \circ \beta = [c^P_{\alpha(a)}|_H] \circ \beta = \beta \circ (c^J_a|_B) = \beta \circ [c^J_{AB}(a)]$$

então, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, temos que

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}(ax,y) &= \hat{\varepsilon}\big([c^A(a)](x), [c^J_{AB}(a)](y)\big) \cdot \hat{\varepsilon}(a,y)\\
&= \hat{\varepsilon}\big(\{[c^A(a)] \times [c^J_{AB}(a)]\}(x,y)\big) \cdot \hat{\varepsilon}(a,y)\\
&= \big(\hat{\varepsilon} \circ \{[c^A(a)] \times [c^J_{AB}(a)]\}\big)(x,y) \cdot \hat{\varepsilon}(a,y)\\
&= \{\hat{\varepsilon} \circ [(c^A_a) \times (c^J_a|_B)]\}(x,y) \cdot \hat{\varepsilon}(a,y)\\
&= \{\varepsilon \circ (\alpha\times\beta) \circ [(c^A_a) \times (c^J_a|_B)]\}(x,y) \cdot [\varepsilon \circ (\alpha\times\beta)](a,y)\\
&= \big(\varepsilon \circ \{(\alpha \circ c^A_a) \times [\beta \circ (c^J_a|_B)]\}\big)(x,y) \cdot [\varepsilon \circ (\alpha\times\beta)](a,y)\,;
\end{aligned}$$

(ii) Se $\beta \in Hom(B,H)$ e $b \in B$ são tais que

$$\big[c^P_{HG}\big(\beta(b)\big)\big] \circ \alpha = [c^P_{\beta(b)}|_G] \circ \alpha = \alpha \circ (c^J_b|_A) = \alpha \circ [c^J_{BA}(b)]$$

então, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, temos que

$$\begin{aligned}
\hat\varepsilon(x,by) &= \hat\varepsilon(x,b)\cdot\hat\varepsilon\big([c^J_{BA}(b)](x),[c^B(b)](y)\big)\\
&= \hat\varepsilon(x,b)\cdot\hat\varepsilon\big(\{[c^J_{BA}(b)]\times[c^B(b)]\}(x,y)\big)\\
&= \hat\varepsilon(x,b)\cdot\big(\hat\varepsilon\circ\{[c^J_{BA}(b)]\times[c^B(b)]\}\big)(x,y)\\
&= \hat\varepsilon(x,b)\cdot\{\hat\varepsilon\circ[(c^J_b|_A)\times(c^B_b)]\}(x,y)\\
&= [\varepsilon\circ(\alpha\times\beta)](x,b)\cdot\{\varepsilon\circ(\alpha\times\beta)\circ[(c^J_b|_A)\times(c^B_b)]\}(x,y)\\
&= [\varepsilon\circ(\alpha\times\beta)](x,b)\cdot\big(\varepsilon\circ\{[\alpha\circ(c^J_b|_A)]\times(\beta\circ c^B_b)\}\big)(x,y)\,;
\end{aligned}$$

(iii) Se α e β são homomorfismos e, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$,

$$\big[c^P_{GH}\big(\alpha(a)\big)\big] \circ \beta = [c^P_{\alpha(a)}|_H] \circ \beta = \beta \circ (c^J_a|_B) = \beta \circ [c^J_{AB}(a)]$$

e

$$\big[c^P_{HG}\big(\beta(b)\big)\big] \circ \alpha = [c^P_{\beta(b)}|_G] \circ \alpha = \alpha \circ (c^J_b|_A) = \alpha \circ [c^J_{BA}(b)]\,,$$

então $\hat\varepsilon = \varepsilon\circ(\alpha\times\beta) : A\times B \to K$ é um pareamento cruzado com respeito a c^J_{AB} e c^J_{BA} ;

(iv) Se α e β são homomorfismos e, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$,

$$\big[c^P_{GH}\big(\alpha(a)\big)\big] \circ \beta = [c^P_{\alpha(a)}|_H] \circ \beta = \beta \circ (c^J_a|_B) = \beta \circ [c^J_{AB}(a)]\,,$$

$$\big[c^P_{HG}\big(\beta(b)\big)\big] \circ \alpha = [c^P_{\beta(b)}|_G] \circ \alpha = \alpha \circ (c^J_b|_A) = \alpha \circ [c^J_{BA}(b)]$$

e $\alpha|_{A\cap B} = \beta|_{A\cap B}$, então $\hat\varepsilon : A\times B \to K$ é um pareamento exterior;

(v) e **(vi)** Para todo $g \in G$ e todo $h \in H$, temos que

$$\varepsilon\circ\{[c^G(g)]\times[c^P_{GH}(g)]\} = \varepsilon\circ[(c^G_g)\times(c^P_g|_H)] : G\times H \to K$$

e

$$\varepsilon\circ\{[c^P_{HG}(h)]\times[c^H(h)]\} = \varepsilon\circ[(c^P_h|_G)\times(c^H_h)] : G\times H \to K$$

são pareamentos exteriores.

No enunciado da proposição 1.4.7 acima, sejam $a \in A$ e $b \in B$. Na notação que introduzimos, a hipótese

$$\beta\circ[c^J_{AB}(a)] = \beta\circ(c^J_a|_B) = [c^P_{\alpha(a)}|_H]\circ\beta = \big[c^P_{GH}\big(\alpha(a)\big)\big]\circ\beta\,,$$

como no item (i), é equivalente a termos, $\forall y \in B$,

$$\begin{aligned}
\beta(aya^{-1}) &= \beta({}^{a}y) \\
&= \beta\big(c^J_a(y)\big) \\
&= \beta\big((c^J_a|_B)(y)\big) \\
&= \beta\big([c^J_{AB}(a)](y)\big) \\
&= \{\beta \circ [c^J_{AB}(a)]\}(y) \\
&= \big\{\big[c^P_{GH}\big(\alpha(a)\big)\big] \circ \beta\big\}(y) \\
&= \big[c^P_{GH}\big(\alpha(a)\big)\big]\big(\beta(y)\big) \\
&= [c^P_{\alpha(a)}|_H]\big(\beta(y)\big) \\
&= c^P_{\alpha(a)}\big(\beta(y)\big) \\
&= {}^{\alpha(a)}\beta(y) \\
&= \alpha(a)\beta(y)[\alpha(a)]^{-1} \\
&= \alpha(a)\beta(y)\alpha(a^{-1})\,.
\end{aligned}$$

Também, a hipótese $\alpha \circ [c^J_{BA}(b)] = \alpha \circ (c^J_b|_A) = [c^P_{\beta(b)}|_G] \circ \alpha = \big[c^P_{HG}\big(\beta(b)\big)\big] \circ \alpha$, como no item (ii), é equivalente a termos, $\forall x \in A$,

$$\begin{aligned}
\alpha(bxb^{-1}) &= \alpha({}^{b}x) \\
&= \alpha\big(c^J_b(x)\big) \\
&= \alpha\big((c^J_b|_A)(x)\big) \\
&= \alpha\big([c^J_{BA}(b)](x)\big) \\
&= \{\alpha \circ [c^J_{BA}(b)]\}(x) \\
&= \big\{\big[c^P_{HG}\big(\beta(b)\big)\big] \circ \alpha\big\}(x) \\
&= \big[c^P_{HG}\big(\beta(b)\big)\big]\big(\alpha(x)\big) \\
&= [c^P_{\beta(b)}|_G]\big(\alpha(x)\big) \\
&= c^P_{\beta(b)}\big(\alpha(x)\big) \\
&= {}^{\beta(b)}\alpha(x) \\
&= \beta(b)\alpha(x)[\beta(b)]^{-1} \\
&= \beta(b)\alpha(x)\beta(b^{-1})\,.
\end{aligned}$$

Dessa forma, podemos reenunciar a proposição 1.4.7 usando nossa notação, da seguinte forma: sejam J, P e K grupos, A e B subgrupos normais de J e G e H subgrupos normais de P tais que A age em B por conjugação, B age em A por conjugação, G age em H por conjugação, H age em G por conjugação e cada um deles age em si mesmo por conjugação. Sejam também $\alpha : A \to G$ e $\beta : B \to H$ funções e $\varepsilon : G \times H \to K$ um pareamento exterior. Valem

(i) Se α é homomorfismo e $a \in A$ é tal que, $\forall y \in B$,

$$\beta(aya^{-1}) = \beta({}^{a}y) = {}^{\alpha(a)}\beta(y) = \alpha(a)\beta(y)[\alpha(a)]^{-1} = \alpha(a)\beta(y)\alpha(a^{-1})\,,$$

então, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$,

$$\begin{aligned} \varepsilon\big(\alpha(ax), \beta(y)\big) &= \varepsilon\big(\alpha({}^a x), \beta({}^a y)\big) \cdot \varepsilon\big(\alpha(a), \beta(y)\big) \\ &= \varepsilon\big(\alpha(axa^{-1}), \beta(aya^{-1})\big) \cdot \varepsilon\big(\alpha(a), \beta(y)\big)\,; \end{aligned}$$

(ii) Se β é homomorfismo e $b \in B$ é tal que, $\forall x \in A$,

$$\alpha(bxb^{-1}) = \alpha({}^b x) = {}^{\beta(b)}\alpha(x) = \beta(b)\alpha(x)[\beta(b)]^{-1} = \beta(b)\alpha(x)\beta(b^{-1})\,,$$

então, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$,

$$\begin{aligned} \varepsilon\big(\alpha(x), \beta(by)\big) &= \varepsilon\big(\alpha(x), \beta(b)\big) \cdot \varepsilon\big(\alpha({}^b x), \beta({}^b y)\big) \\ &= \varepsilon\big(\alpha(x), \beta(b)\big) \cdot \varepsilon\big(\alpha(bxb^{-1}), \beta(byb^{-1})\big)\,; \end{aligned}$$

(iii) Se α e β são homomorfismos e, $\forall a, x \in A$, $\forall b, y \in B$,

$$\beta(aya^{-1}) = \beta({}^a y) = {}^{\alpha(a)}\beta(y) = \alpha(a)\beta(y)[\alpha(a)]^{-1} = \alpha(a)\beta(y)\alpha(a^{-1})$$

e

$$\alpha(bxb^{-1}) = \alpha({}^b x) = {}^{\beta(b)}\alpha(x) = \beta(b)\alpha(x)[\beta(b)]^{-1} = \beta(b)\alpha(x)\beta(b^{-1})\,,$$

então $\varepsilon \circ (\alpha \times \beta) : A \times B \to K$ é um pareamento cruzado com respeito às conjugações de A em B e de B em A;

(iv) Se α e β são homomorfismos e, $\forall a, x \in A$, $\forall b, y \in B$,

$$\beta(aya^{-1}) = \beta({}^a y) = {}^{\alpha(a)}\beta(y) = \alpha(a)\beta(y)[\alpha(a)]^{-1} = \alpha(a)\beta(y)\alpha(a^{-1})\,,$$

$$\alpha(bxb^{-1}) = \alpha({}^b x) = {}^{\beta(b)}\alpha(x) = \beta(b)\alpha(x)[\beta(b)]^{-1} = \beta(b)\alpha(x)\beta(b^{-1})$$

e $\alpha(w) = \beta(w)$, $\forall w \in A \cap B$, então $\varepsilon \circ (\alpha \times \beta) : A \times B \to K$ é um pareamento exterior;

(v) e **(vi)** Para todo $g \in G$ e todo $h \in H$, temos que

$$\varepsilon\ (g\_g^{-1}, g\_g^{-1}) = \varepsilon({}^g\cdot, {}^g\cdot) : G \times H \to K$$

e

$$\varepsilon(h\_h^{-1}, h\_h^{-1}) = \varepsilon({}^h\cdot, {}^h\cdot) : G \times H \to K$$

são pareamentos exteriores.

O próximo teorema é uma releitura do teorema 1.2.16 no caso de um produto exterior.

Teorema 1.4.8. Sejam P e K grupos, $e_P \in P$ o elemento neutro de P, $e_K \in K$ o elemento neutro de K e $G \lhd P$ e $H \lhd P$ agindo um no outro pelas restrições da conjugação de P. Seja também $\varepsilon : G \times H \to K$ um pareamento exterior. Valem

(i) Para todos $a, x \in G$ e todos $b, y \in H$, temos que

- $\varepsilon(ax, y) = \varepsilon({}^a x, {}^a y) \cdot \varepsilon(a, y) = \varepsilon(axa^{-1}, aya^{-1}) \cdot \varepsilon(a, y)$;
- $\varepsilon(x, by) = \varepsilon(x, b) \cdot \varepsilon({}^b x, {}^b y) = \varepsilon(x, b) \cdot \varepsilon(bxb^{-1}, byb^{-1})$;
- $\varepsilon(axa^{-1}, aya^{-1}) = \varepsilon({}^a x, {}^a y) = \varepsilon(ax, y) \cdot [\varepsilon(a, y)]^{-1}$;
- $\varepsilon(bxb^{-1}, byb^{-1}) = \varepsilon({}^b x, {}^b y) = [\varepsilon(x, b)]^{-1} \cdot \varepsilon(x, by)$.

(ii) Para todos $g, a, x \in G$ e todos $h, b, y \in H$, temos que

- $\varepsilon\big({}^g(ax), {}^g y\big) = \varepsilon({}^{ga}x, {}^{ga}y) \cdot \varepsilon({}^g a, {}^g y)$;
- $\varepsilon\big({}^g x, {}^g(by)\big) = \varepsilon({}^g x, {}^g b) \cdot \varepsilon({}^{gb}x, {}^{gb}y)$;
- $\varepsilon\big({}^h(ax), {}^h y\big) = \varepsilon({}^{ha}x, {}^{ha}y) \cdot \varepsilon({}^h a, {}^h y)$;
- $\varepsilon\big({}^h x, {}^h(by)\big) = \varepsilon({}^h x, {}^h b) \cdot \varepsilon({}^{hb}x, {}^{hb}y)$;
- $\varepsilon({}^{ga}x, {}^{ga}y) = \varepsilon\big({}^g(ax), {}^g y\big) \cdot [\varepsilon({}^g a, {}^g y)]^{-1}$;
- $\varepsilon({}^{gb}x, {}^{gb}y) = [\varepsilon({}^g x, {}^g b)]^{-1} \cdot \varepsilon\big({}^g x, {}^g(by)\big)$;
- $\varepsilon({}^{ha}x, {}^{ha}y) = \varepsilon\big({}^h(ax), {}^h y\big) \cdot [\varepsilon({}^h a, {}^h y)]^{-1}$;
- $\varepsilon({}^{hb}x, {}^{hb}y) = [\varepsilon({}^h x, {}^h b)]^{-1} \cdot \varepsilon\big({}^h x, {}^h(by)\big)$.

(iii) Para todos $g, a, x \in G$ e todos $h, b, y \in H$, temos que

- $\varepsilon\big({}^g(ax), {}^g y\big) = \varepsilon({}^g a, {}^{gx}y) \cdot \varepsilon({}^g x, {}^g y)$;
- $\varepsilon\big({}^g x, {}^g(by)\big) = \varepsilon({}^g x, {}^g y) \cdot \varepsilon({}^{gy}x, {}^g b)$;
- $\varepsilon\big({}^h(ax), {}^h y\big) = \varepsilon({}^h a, {}^{hx}y) \cdot \varepsilon({}^h x, {}^h y)$;
- $\varepsilon\big({}^h x, {}^h(by)\big) = \varepsilon({}^h x, {}^h y) \cdot \varepsilon({}^{hy}x, {}^h b)$;
- $\varepsilon({}^g a, {}^{gx}y) = \varepsilon\big({}^g(ax), {}^g y\big) \cdot [\varepsilon({}^g x, {}^g y)]^{-1}$;
- $\varepsilon({}^{gy}x, {}^g b) = [\varepsilon({}^g x, {}^g y)]^{-1} \cdot \varepsilon\big({}^g x, {}^g(by)\big)$;
- $\varepsilon({}^h a, {}^{hx}y) = \varepsilon\big({}^h(ax), {}^h y\big) \cdot [\varepsilon({}^h x, {}^h y)]^{-1}$;
- $\varepsilon({}^{hy}x, {}^h b) = [\varepsilon({}^h x, {}^h y)]^{-1} \cdot \varepsilon\big({}^h x, {}^h(by)\big)$;
- $\varepsilon(ax, y) = \varepsilon(a, {}^x y) \cdot \varepsilon(x, y) = \varepsilon(a, xyx^{-1}) \cdot \varepsilon(x, y)$;
- $\varepsilon(x, by) = \varepsilon(x, y) \cdot \varepsilon({}^y x, b) = \varepsilon(x, y) \cdot \varepsilon(yxy^{-1}, b)$.

(iv) $\varepsilon(e_P, h) = e_K = \varepsilon(g, e_P)$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$;

(v) Para todos $x, g \in G$ e todos $y, h \in H$, temos que

- $[\varepsilon({}^g x, {}^g y)]^{-1} = \varepsilon({}^g x^{-1}, {}^{gx} y)$;
- $[\varepsilon({}^g x, {}^g y)]^{-1} = \varepsilon({}^{gy} x, {}^g y^{-1})$;
- $[\varepsilon({}^h x, {}^h y)]^{-1} = \varepsilon({}^h x^{-1}, {}^{hx} y)$;
- $[\varepsilon({}^h x, {}^h y)]^{-1} = \varepsilon({}^{hy} x, {}^h y^{-1})$;
- $[\varepsilon(x, y)]^{-1} = \varepsilon(x^{-1}, {}^x y) = \varepsilon(x^{-1}, xyx^{-1})$;
- $[\varepsilon(x, y)]^{-1} = \varepsilon({}^y x, y^{-1}) = \varepsilon(yxy^{-1}, y^{-1})$;
- $[\varepsilon(x^{-1}, {}^x y)]^{-1} = \varepsilon(x, y)$;
- $[\varepsilon({}^y x, y^{-1})]^{-1} = \varepsilon(x, y)$.

(vi) $\varepsilon({}^{ab} x, {}^{ab} y) = \varepsilon(a, b) \cdot \varepsilon({}^{ba} x, {}^{ba} y) \cdot [\varepsilon(a, b)]^{-1}$, $\forall a, x \in G$, $\forall b, y \in H$;

(vii) $\varepsilon({}^{[a,b]} g, {}^{[a,b]} h) = \varepsilon(a, b) \cdot \varepsilon(g, h) \cdot [\varepsilon(a, b)]^{-1}$, $\forall a, g \in G$, $\forall b, h \in H$;

(viii) Para todo $g \in G$ e todos $y, h \in H$, temos que

$$\varepsilon([g, h], y) = \varepsilon(g{}^h g^{-1}, y) = \varepsilon(g, h) \cdot [\varepsilon({}^y g, {}^y h)]^{-1} = \varepsilon(g, h) \cdot [\varepsilon(ygy^{-1}, yhy^{-1})]^{-1} \, ;$$

(ix) Para todos $x, g \in G$ e todo $h \in H$, temos que

$$\varepsilon(x, [g, h]) = \varepsilon(x, {}^g h h^{-1}) = \varepsilon({}^x g, {}^x h) \cdot [\varepsilon(g, h)]^{-1} = \varepsilon(xgx^{-1}, xhx^{-1}) \cdot [\varepsilon(g, h)]^{-1} \, ;$$

(x) Para todos $a, g \in G$ e todos $b, h \in H$, temos que

$$[\varepsilon(g, h), \varepsilon(a, b)] = \varepsilon(g{}^h g^{-1}, {}^a b b^{-1}) = \varepsilon([g, h], [a, b]) \, ;$$

(xi) $[\varepsilon(u, v)]^{-1} = \varepsilon(v, u)$, $\forall u, v \in G \cap H$.

Demonstração: Do item (i) ao item (x) são as mesmas igualdades do teorema 1.2.16 sobre pareamentos cruzados, abrindo algumas expressões para o caso de produtos exteriores.

(xi) Seja $c^P : P \to Aut(P)$ a ação por conjugação de P. Primeiro note que $G \cap H \lhd P$ e, portanto, $c^P_z[G \cap H] = z(G \cap H)z^{-1} = G \cap H$, $\forall z \in P$. Assim, ${}^z w = c^P_z(w) \in G \cap H$, $\forall w \in G \cap H$, $\forall z \in P$. Em particular, ${}^m w = c^P_m(w) \in G \cap H$, $\forall m, w \in G \cap H$. Dessa forma, $\varepsilon({}^m w, {}^m w) = e_K$, $\forall m, w \in G \cap H$. Usando essa propriedade, é imediato que $\varepsilon\big({}^{uu}(u^{-1}v), {}^{uu}(u^{-1}v)\big) = e_K = \varepsilon(u, u) = \varepsilon(v, v)$, $\forall u, v \in G \cap H$, pois $uu = u^2 \in G \cap H$ e $u^{-1}v \in G \cap H$, $\forall u, v \in G \cap H$. Vamos usar essas igualdades e também, na ordem, a primeira e segunda igualdades do item (i), a segunda igualdade do item (ii) e a terceira e quarta igualdades do item (i). Sejam $u, v \in G \cap H$. Temos que

$$
\begin{aligned}
e_K &= \varepsilon(v, v) \\
&= \varepsilon(e_P \cdot v, e_P \cdot v) \\
&= \varepsilon\big((uu^{-1})v, (uu^{-1})v\big) \\
&= \varepsilon\big(u(u^{-1}v), u(u^{-1}v)\big) \\
&= \varepsilon\big({}^u(u^{-1}v), {}^u[u(u^{-1}v)]\big) \cdot \varepsilon\big(u, u(u^{-1}v)\big) \\
&= \varepsilon\big({}^u(u^{-1}v), {}^u[u(u^{-1}v)]\big) \cdot \varepsilon(u, u) \cdot \varepsilon\big({}^u u, {}^u(u^{-1}v)\big) \\
&= \varepsilon\big({}^u(u^{-1}v), {}^u u\big) \cdot \varepsilon\big({}^{uu}(u^{-1}v), {}^{uu}(u^{-1}v)\big) \cdot \varepsilon(u, u) \cdot \varepsilon\big({}^u u, {}^u(u^{-1}v)\big) \\
&= \varepsilon\big({}^u(u^{-1}v), {}^u u\big) \cdot e_K \cdot e_K \cdot \varepsilon\big({}^u u, {}^u(u^{-1}v)\big) \\
&= \varepsilon\big({}^u(u^{-1}v), {}^u u\big) \cdot \varepsilon\big({}^u u, {}^u(u^{-1}v)\big) \\
&= \varepsilon\big(u(u^{-1}v), u\big) \cdot [\varepsilon(u, u)]^{-1} \cdot [\varepsilon(u, u)]^{-1} \cdot \varepsilon\big(u, u(u^{-1}v)\big) \\
&= \varepsilon\big(u(u^{-1}v), u\big) \cdot e_K^{-1} \cdot e_K^{-1} \cdot \varepsilon\big(u, u(u^{-1}v)\big) \\
&= \varepsilon(v, u) \cdot \varepsilon(u, v)\,.
\end{aligned}
$$

Daí, $[\varepsilon(u, v)]^{-1} = \varepsilon(v, u)$. ■

Sejam P e K grupos, $e_P \in P$ o elemento neutro de P, $e_K \in K$ o elemento neutro de K e $G \lhd P$ e $H \lhd P$ agindo um no outro pelas restrições da conjugação de P. Seja também $\varepsilon : G \times H \to K$ um pareamento exterior. Pelo item (iv) e pela quinta igualdade do item (v) do teorema 1.4.8 acima, de forma análoga ao que fizemos para pareamentos cruzados, é fácil mostrar que $e_K \in im(\varepsilon)$ e que $[im(\varepsilon)]^{-1} = im(\varepsilon)$. Usando a observação 1.2.6, podemos concluir que $\langle im(\varepsilon) \rangle = Sp\big(im(\varepsilon)\big)$. Portanto, $\forall\, V \subset K$, para mostrarmos que $\langle im(\varepsilon) \rangle \subset V$, basta mostrarmos que $im(\varepsilon) \subset V$ e que vale alguma das propriedades (a) ou (b) ou (c) da observação 1.2.6, colocando $S = im(\varepsilon)$.

1.5 A categoria E

Considere novamente as categorias Set dos conjuntos e funções, Grp dos grupos e homomorfismos de grupos e as categoria C e $\mathcal{C}$ introduzidas anteriormente.

Para cada grupo P e cada par de subgrupos normais $G \lhd P$ e $H \lhd P$, sejam $c^P : P \to Aut(P)$ a ação por conjugação de P, $c^G = c^P_{GG} : G \to Aut(G)$ a ação por conjugação de G, $c^H = c^P_{HH} : H \to Aut(H)$ a ação por conjugação de H e $c^P_{GH} : G \to Aut(H)$ e $c^P_{HG} : H \to Aut(G)$ as ações de grupos definidas na seção anterior, isto é, $c^P_{GH}(g) = c^P_g|_H$ e $c^P_{HG}(h) = c^P_h|_G$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$.

Seja um subconjunto $\tilde{O} \subset Obj(\mathcal{C})$ formado por todos $(G \times H, \theta, \xi) \in Obj(\mathcal{C})$ tais que existe algum grupo P no qual $G \lhd P$ e $H \lhd P$ e tal que $\theta = c^P_{GH}$ e $\xi = c^P_{HG}$, em que $c^P : P \to Aut(P)$ é a ação por conjugação de P.

Também, para cada $X = (A \times B, \lambda, \kappa) \in \tilde{O}$ e cada $Y = (G \times H, \theta, \xi) \in \tilde{O}$, sejam J e P grupos nos quais $A \lhd J$, $B \lhd J$, $G \lhd P$ e $H \lhd P$ e tais que $\lambda = c^J_{AB}$,

$\kappa = c^J_{BA}$, $\theta = c^P_{GH}$ e $\xi = c^P_{HG}$, em que $c^J : J \to Aut(J)$ é a ação por conjugação de J e $c^P : P \to Aut(P)$ é a ação por conjugação de P, e seja um conjunto $\tilde{\Theta}_{XY}$ formado por todos $\alpha\times\beta \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ tais que $\alpha|_{A\cap B} = \beta|_{A\cap B}$. Ou seja, $\tilde{\Theta}_{XY}$ é formado por todas as funções do tipo $\alpha\times\beta : A\times B \to G\times H$ tais que $\alpha : A \to G$ e $\beta : B \to H$ são homomorfismos de grupos que satisfazem

(i) $\left[c^P_{GH}\big(\alpha(a)\big)\right] \circ \beta = \beta \circ \left[c^J_{AB}(a)\right], \forall a \in A;$

(ii) $\left[c^P_{HG}\big(\beta(b)\big)\right] \circ \alpha = \alpha \circ \left[c^J_{BA}(b)\right], \forall b \in B;$

(iii) $\alpha|_{A\cap B} = \beta|_{A\cap B}\,.$

ou, equivalentemente,

(i) $[c^P_{\alpha(a)}|_H] \circ \beta = \beta \circ (c^J_a|_B)\,, \forall a \in A;$

(ii) $[c^P_{\beta(b)}|_G] \circ \alpha = \alpha \circ (c^J_b|_A)\,, \forall b \in B;$

(iii) $\alpha(w) = \beta(w), \forall w \in A \cap B.$

isto é, que preservam as conjugações e que concordam em sua interseção.

Para todos $X, Y \in \tilde{O}$, é claro que $\tilde{\Theta}_{XY} \subset Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$. Sejam J e P grupos tais que $X = (A\times B, c^J_{AB}, c^J_{BA})$ e $Y = (G\times H, c^P_{GH}, c^P_{HG})$ e seja $e_J \in J$ o elemento neutro de J. Se $A\cap B = \{e_J\} \cong 0$, então $\tilde{\Theta}_{XY} = Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

Proposição 1.5.1. Para todos $X, Y, Z \in \tilde{O}$, se $\alpha\times\beta \in \tilde{\Theta}_{XY}$ e $\gamma\times\delta \in \tilde{\Theta}_{YZ}$, então $(\gamma\times\delta)\circ(\alpha\times\beta) \in \tilde{\Theta}_{XZ}$.

Demonstração: Como $\alpha\times\beta \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ e $\gamma\times\delta \in Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z)$, é claro que $(\gamma\times\delta)\circ(\alpha\times\beta) \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Z)$. Sejam J, P e L grupos tais que $X = (A\times B, c^J_{AB}, c^J_{BA})$, $Y = (G\times H, c^P_{GH}, c^P_{HG})$ e $Z = (M\times N, c^L_{MN}, c^L_{NM})$. Como $\alpha\times\beta \in \tilde{\Theta}_{XY}$ e $\gamma\times\delta \in \tilde{\Theta}_{YZ}$, temos que $\alpha(w) = \beta(w)$, $\forall w \in A\cap B$, e $\gamma(z) = \delta(z)$, $\forall z \in G\cap H$. Seja $w \in A\cap B$. Como $\alpha(w) \in G$, $\beta(w) \in H$ e $\alpha(w) = \beta(w)$, temos que $\alpha(w) = \beta(w) \in G\cap H$, e, portanto, $\forall w \in A\cap B$, que

$$(\gamma\circ\alpha)(w) = \gamma\big(\alpha(w)\big) = \delta\big(\alpha(w)\big) = \delta\big(\beta(w)\big) = (\delta\circ\beta)(w)\,.$$

Logo, $(\gamma\circ\alpha)\times(\delta\circ\beta) \in \tilde{\Theta}_{XZ}$. ■

Proposição 1.5.2. Para todo $X = (A\times B, c^J_{AB}, c^J_{BA})$ elemento de $\tilde{O}$, temos que $id_X = id_A \times id_B \in \tilde{\Theta}_{XX}$.

Demonstração: É claro que $id_A \times id_B = id_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X,X)$. Por fim, $\forall w \in A\cap B$, temos que $id_A(w) = w = id_B(w)$. ■

Desse modo, podemos formar uma subcategoria $\mathsf{E} \leqslant \mathcal{C}$ tal que $Obj(\mathsf{E}) = \tilde{O}$ e que, $\forall X, Y \in \tilde{O}$, definimos $Hom_{\mathsf{E}}(X,Y) = \tilde{\Theta}_{XY}$. Claro que, para todo $X = (A\times B, c^J_{AB}, c^J_{BA}) \in Obj(\mathsf{E})$, o morfismo identidade de X em E é o morfismo identidade de X em $\mathcal{C}$, $id_X = id_A \times id_B \in Hom_{\mathsf{E}}(X,X)$.

Pelo item (ii) da proposição 1.4.1, temos que $\mathsf{E} \leqslant \mathsf{C} \leqslant \mathcal{C}$.

Dizemos que a categoria E tem como objetos produtos cartesianos de subgrupos normais de algum grupo maior, munidos de ações que são as restrições da conjugação do grupo maior e tem como morfismos produtos cartesianos de homomorfismos que preservam as restrições da conjugação e que coincidem na interseção de seus domínios.

Para todo grupo G, note que $X = (G\times G, c^G, c^G) \in Obj(\mathsf{E})$. Sejam $Y = (A\times B, \lambda, \kappa) \in Obj(\mathsf{E})$ e $\alpha\times\beta \in Hom_{\mathsf{E}}(X,Y)$. Então, existe grupo J tal que $A \lhd J$, $B \lhd J$ e, se $c^J : J \to Aut(J)$ é a ação por conjugação de J, então $\lambda = c^J_{AB}$ e $\kappa = c^J_{BA}$ são suas restrições. Além disso, $\alpha = \alpha|_{G\cap G} = \beta|_{G\cap G} = \beta$ e, portanto, $im(\alpha) \leqslant A\cap B$.

Reescrevemos o item (iv) da proposição 1.4.7 da seguinte maneira:

Proposição 1.5.3. Sejam K um grupo, $X = (A\times B, c^J_{AB}, c^J_{BA}) \in Obj(\mathsf{E})$, $Y = (G\times H, c^P_{GH}, c^P_{HG}) \in Obj(\mathsf{E})$ e $\varepsilon : G\times H \to K$ um pareamento exterior. Para todo $\alpha\times\beta \in Hom_{\mathsf{E}}(X,Y)$, temos que $\varepsilon\circ(\alpha\times\beta) : A\times B \to K$ é um pareamento exterior.

Podemos escrever os dois diagramas

$$(A\times B, c^J_{AB}, c^J_{BA}) \xrightarrow{\alpha\times\beta} (G\times H, c^P_{GH}, c^P_{HG})$$

e

$$A\times B \xrightarrow{\alpha\times\beta} G\times H \xrightarrow{\varepsilon} K$$

na forma simplificada abaixo.

$$(A\times B, c^J_{AB}, c^J_{BA}) \xrightarrow{\alpha\times\beta} (G\times H, c^P_{GH}, c^P_{HG}) \xrightarrow{\varepsilon} K$$

O exemplo abaixo é uma releitura dos itens (v) e (vi) da proposição 1.4.7.

Exemplo 1.5.4. Sejam $X = (G\times H, c^P_{GH}, c^P_{HG}) \in Obj(\mathsf{E})$, $c^G : G \to Aut(G)$ a ação por conjugação de G e $c^H : H \to Aut(H)$ a ação por conjugação de H. Então, $[c^G(g)] \times [c^P_{GH}(g)] = (c^G_g) \times (c^P_g|_H) \in Hom_{\mathsf{E}}(X,X)$, $\forall g \in G$, e $[c^P_{HG}(h)] \times [c^H(h)] = (c^P_h|_G) \times (c^H_h) \in Hom_{\mathsf{E}}(X,X)$, $\forall h \in H$. De fato, sejam $g \in G$ e $h \in H$. Chamando $c^P_{GH} = \theta$ e $c^P_{HG} = \xi$, temos que θ e ξ são ações por automorfismos compatíveis. Pelo exemplo 1.3.4, temos que $c^G_g \times \theta_g$, $\xi_h \times c^H_h \in Hom_{\mathsf{C}}(X,X)$, isto é, $(c^G_g)\times(c^P_g|_H) = [c^G(g)]\times[c^P_{GH}(g)] = [c^G(g)]\times[\theta(g)] = c^G_g \times \theta_g \in Hom_{\mathsf{C}}(X,X)$ e $(c^P_h|_G)\times(c^H_h) = [c^P_{HG}(h)]\times[c^H(h)] = [\xi(h)]\times[c^H(h)] = \xi_h \times c^H_h \in Hom_{\mathsf{C}}(X,X)$. Para todo $w \in G\cap H$, temos que

$$[c^G(g)](w) = c^G_g(w) = gwg^{-1} = c^P_g(w) = c^P_g|_H(w) = [c^P_{GH}(g)](w)$$

e

$$[c^P_{HG}(h)](w) = c^P_h|_G(w) = c^P_h(w) = hwh^{-1} = [c^H(h)](w) = c^H_h(w)\,.$$

Consequentemente, $(c^G_g) \times (c^P_g|_H) = [c^G(g)] \times [c^P_{GH}(g)] \in Hom_{\mathsf{E}}(X,X)$ e $(c^P_h|_G) \times (c^H_h) = [c^P_{HG}(h)] \times [c^H(h)] \in Hom_{\mathsf{E}}(X,X)$.

Dessa forma, se K é um grupo e $\varepsilon : G\times H \to K$ é um pareamento exterior, então $\varepsilon \circ [(c^G_g) \times (c^P_g|_H)] = \varepsilon \circ \{[c^G(g)] \times [c^P_{GH}(g)]\} : G\times H \to K$ e $\varepsilon \circ [(c^P_h|_G) \times (c^H_h)] = \varepsilon \circ \{[c^P_{HG}(h)] \times [c^H(h)]\} : G\times H \to K$ também são pareamentos exteriores, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$.

Assim, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$, é claro que as compostas estão em $Hom_{\mathsf{E}}(X,X)$, $[(c^G_g)\circ(c^P_h|_G)]\times[(c^P_g|_H)\circ(c^H_h)] = [(c^G_g)\times(c^P_g|_H)]\circ[(c^P_h|_G)\times(c^H_h)] \in Hom_{\mathsf{E}}(X,X)$ e $[(c^P_h|_G)\circ(c^G_g)]\times[(c^H_h)\circ(c^P_g|_H)] = [(c^P_h|_G)\times(c^H_h)]\circ[(c^G_g)\times(c^P_g|_H)] \in Hom_{\mathsf{E}}(X,X)$, isto é,

$$\{[c^G(g)]\circ[c^P_{HG}(h)]\} \times \{[c^P_{GH}(g)]\circ[c^H(h)]\} =$$

$$= \{[c^G(g)] \times [c^P_{GH}(g)]\} \circ \{[c^P_{HG}(h)] \times [c^H(h)]\} \in Hom_{\mathsf{E}}(X,X)$$

e

$$\{[c^P_{HG}(h)]\circ[c^G(g)]\} \times \{[c^H(h)]\circ[c^P_{GH}(g)]\} =$$

$$= \{[c^P_{HG}(h)] \times [c^H(h)]\} \circ \{[c^G(g)] \times [c^P_{GH}(g)]\} \in Hom_{\mathsf{E}}(X,X)\,.$$

Daí, se K é um grupo e $\varepsilon : G\times H \to K$ é um pareamento exterior, então

$$\varepsilon\circ\{[(c^G_g)\circ(c^P_h|_G)]\times[(c^P_g|_H)\circ(c^H_h)]\} = \varepsilon\circ[(c^G_g)\times(c^P_g|_H)]\circ[(c^P_h|_G)\times(c^H_h)] : G\times H \to K$$

e

$$\varepsilon\circ\{[(c^P_h|_G)\circ(c^G_g)]\times[(c^H_h)\circ(c^P_g|_H)]\} = \varepsilon\circ[(c^P_h|_G)\times(c^H_h)]\circ[(c^G_g)\times(c^P_g|_H)] : G\times H \to K$$

também são pareamentos exteriores, isto é,

$$\varepsilon \circ \big(\{[c^G(g)]\circ[c^P_{HG}(h)]\} \times \{[c^P_{GH}(g)]\circ[c^H(h)]\}\big) =$$

$$= \varepsilon \circ \{[c^G(g)] \times [c^P_{GH}(g)]\} \circ \{[c^P_{HG}(h)] \times [c^H(h)]\} : G\times H \to K$$

e

$$\varepsilon \circ \big(\{[c^P_{HG}(h)]\circ[c^G(g)]\} \times \{[c^H(h)]\circ[c^P_{GH}(g)]\}\big) =$$

$$= \varepsilon \circ \{[c^P_{HG}(h)] \times [c^H(h)]\} \circ \{[c^G(g)] \times [c^P_{GH}(g)]\} : G\times H \to K$$

são pareamentos exteriores, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$.

Capítulo 2

O produto tensorial

2.1 Definições e primeiras propriedades

Definição 2.1.1. Sejam G, H e T grupos, $\theta : G \to Sym(H)$ e $\xi : H \to Sym(G)$ ações e $\tau : G \times H \to T$ um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ. Dizemos que "T é um *produto tensorial* (não-abeliano) de G e H com τ" se, e somente se, para todo grupo K e todo pareamento cruzado $\sigma : G \times H \to K$ com respeito a θ e ξ, existe um único homomorfismo $f : T \to K$ tal que $f \circ \tau = \sigma$, isto é, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} G \times H \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\sigma"'] & T \arrow[d, "f"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Na definição acima é usual pedir que as ações θ e ξ sejam ações por automorfismos e que sejam ações compatíveis entre si. Vamos prosseguir sem essas hipóteses por enquanto. Além disso, é possível definir estruturas ainda mais generalizadas, sem pedir que as ações de G e H em si mesmos sejam conjugações. Porém, esse não será nosso enfoque no presente trabalho.

Teorema 2.1.2. Sejam G, H e T grupos, $\theta : G \to Sym(H)$ e $\xi : H \to Sym(G)$ ações e $\tau : G \times H \to T$ um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ tais que T é um produto tensorial de G e H com τ. Então, $\langle im(\tau) \rangle = T$.

Demonstração: Sejam $K = \langle im(\tau) \rangle \leqslant T$, $i : K \hookrightarrow T$ a inclusão e $\sigma : G \times H \to K$ tal que $\sigma(g,h) = \tau(g,h)$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$. Temos que $im(i) = dom(i) = K$ e que σ e τ são a mesma função, mas dão origem a morfismos de conjuntos possivelmente distintos, dependendo de serem iguais ou distintos seus codomínios. Também, temos que $i \circ \sigma = \tau$. Como σ e τ são a mesma função, é claro que σ também é um pareamento cruzado com respeito a θ

e ξ. Por hipótese, existe um único homomorfismo $f : T \to K$ tal que $f \circ \tau = \sigma$, ou seja, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} G \times H \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\sigma"'] & T \arrow[d, "f"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Como i e f são homomorfismos, segue que $i \circ f : T \to T$ também é um homomorfismo. Além disso, $id_T : T \to T$ é claramente um homomorfismo. Ficamos com o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} G \times H \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, bend right, "\tau"'] & T \arrow[d, shift right, "id_T"'] \arrow[d, shift left, "i\circ f"] \\ & T \end{tikzcd}$$

É imediato que $id_T \circ \tau = \tau$. Além disso, temos que

$$(i \circ f) \circ \tau = i \circ (f \circ \tau) = i \circ \sigma = \tau\,.$$

Por hipótese novamente (unicidade), segue que $i \circ f = id_T$. Como id_T é sobrejetora em T, temos que i é sobrejetora em T e, portanto, $K = im(i) = T$. $\blacksquare$

Sejam X, Y e Z conjuntos e uma função $h \in Y^X \cap Z^X$, isto é, h é da forma $h : X \to Y$ e também da forma $h : X \to Z$. Assim, é claro que $im(h) \subset Y \cap Z$.

Corolário 2.1.3. Sejam G, H, T_1 e T_2 grupos, $\theta : G \to Sym(H)$ e $\xi : H \to Sym(G)$ ações e $\tau \in T_1^{G\times H} \cap T_2^{G\times H}$ uma função tais que $\tau : G\times H \to T_1$ e $\tau : G\times H \to T_2$ são pareamentos cruzados com respeito às mesmas ações θ e ξ, e ambos T_1 e T_2 são produtos tensoriais de G e H com τ. Então, $T_1 = T_2$.

Demonstração: $T_1 = \langle im(\tau) \rangle = T_2$. $\blacksquare$

Sejam G e H grupos e $\theta : G \to Sym(H)$ e $\xi : H \to Sym(G)$ ações. Pelo corolário anterior, se existe algum grupo T e alguma função $\tau : G\times H \to T$ tais que τ é um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ e T é um produto tensorial de G e H com τ, então T é o único produto tensorial de G e H com τ. Nesse caso iremos denotar o grupo T por "$(G\otimes H)_\tau^{(\theta,\xi)}$" ou por "$(G\otimes H)_\tau^{\theta,\xi}$" ou simplesmente por "$(G\otimes H)_\tau^{\theta\xi}$". Se as ações θ e ξ estiverem subentendidas, denotaremos $(G\otimes H)_\tau^{(\theta,\xi)}$ simplesmente por "$(G\otimes H)_\tau$".

Usando essa notação e o corolário 1.2.17, é claro que, se θ é a ação trivial ou ξ é a ação trivial, então $(G\otimes H)_\tau^{(\theta,\xi)}$ é abeliano.

Vamos relembrar a definição de produto tensorial para grupos abelianos ($\mathbb{Z}$-módulos) abaixo.

Definição 2.1.4. Sejam A, B e T grupos abelianos e $\beta : A{\times}B \to T$ uma função bilinear. Dizemos que "T é um *produto tensorial abeliano* de A e B com β" se, e somente se, para todo grupo abeliano C e toda função bilinear $\sigma : A{\times}B \to C$, existe um único homomorfismo $f : T \to C$ tal que $f \circ \beta = \sigma$, isto é, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} A{\times}B \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\sigma"'] & T \arrow[d, "f"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Nesse caso, sabemos que $\langle im(\beta)\rangle = T$ e a demonstração é idêntica à que escrevemos acima.

Sejam A, B, T_1 e T_2 grupos abelianos e $\beta \in T_1^{A\times B} \cap T_2^{A\times B}$ uma função tais que $\beta : A{\times}B \to T_1$ e $\beta : A{\times}B \to T_2$ são funções bilineares, e ambos T_1 e T_2 são produtos tensoriais abelianos de A e B com β. Então, é claro que $im(\beta) \subset T_1 {\cap} T_2$ e que $T_1 = \langle im(\beta)\rangle = T_2$. Por isso, se existe algum grupo abeliano T e alguma função $\beta : A \times B \to T$ tais que β é uma função bilinear e T é um produto tensorial abeliano de A e B com β, então T é o único produto tensorial abeliano de A e B com β. Nesse caso iremos denotar o grupo T por "$(A{\otimes}B)_\beta$" ou por "$(A \otimes_{\mathbb{Z}} B)_\beta$".

Sejam T um grupo, A e B grupos abelianos, $\lambda : A \to Aut(B)$ e $\kappa : B \to Aut(A)$ as ações triviais e $\tau : A \times B \to T$ um pareamento cruzado com respeito a λ e κ tais que $T = (A{\otimes}B)_\tau^{(\lambda,\kappa)}$. Pelo corolário 1.2.17, temos que T é abeliano e, portanto, τ é uma função bilinear. Vamos mostrar que existe $(A \otimes_{\mathbb{Z}} B)_\tau$ e que $(A \otimes_{\mathbb{Z}} B)_\tau = T = (A{\otimes}B)_\tau^{(\lambda,\kappa)}$. Seja L um grupo abeliano e $\sigma : A{\times}B \to L$ uma função bilinear. Daí, σ é um pareamento cruzado com respeito a λ e κ. Pela definição de produto tensorial, existe um único homomorfismo $f : (A{\otimes}B)_\tau^{(\lambda,\kappa)} \to L$ tal que $f \circ \tau = \sigma$. Como L e σ são arbitrários, T é um produto tensorial abeliano de A e B com τ. Pela unicidade, o resultado segue.

Teorema 2.1.5. Sejam G, H e T grupos, $\theta : G \to Sym(H)$ e $\xi : H \to Sym(G)$ ações e $\tau : G{\times}H \to T$ um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ tais que $T = (G{\otimes}H)_\tau^{(\theta,\xi)}$. Temos que

(i) Se K é um grupo isomorfo a T, em que $f : T \to K$ é um isomorfismo, então $f \circ \tau : G{\times}H \to K$ é um pareamento cruzado com respeito às ações θ e ξ e $K = (G{\otimes}H)_{f\circ\tau}^{(\theta,\xi)}$;

(ii) Se K é um grupo e $\sigma : G{\times}H \to K$ é um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ tais que $K = (G{\otimes}H)_\sigma^{(\theta,\xi)}$, então $K \cong T$ e, além disso, existe um único isomorfismo $f : T \to K$ tal que $\sigma = f \circ \tau$, isto é, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} G{\times}H \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\sigma"'] & T \arrow[d, "f"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Em símbolos:

(i) $(G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau} \xrightarrow[f]{\cong} K \implies K = (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{f\circ\tau}$;

(ii) $\big[\, \exists! f :\ (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau} \xrightarrow{\cong} (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\sigma} \,\big](\sigma = f\circ\tau)$;

(iii) $(G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau} \cong (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\sigma}$.

O item (iii) acima é uma particularização do item (ii) e diz respeito à unicidade da estrutura do produto tensorial, que é independente do pareamento cruzado e depende somente das ações de G e H.

Demonstração: (i) Pela proposição 1.2.12, temos que $f\circ\tau : G\times H \to K$ é um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ. Sejam M um grupo e $\sigma : G\times H \to M$ um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ. Por hipótese, existe um único homomorfismo $\varphi : T \to M$ tal que $\varphi\circ\tau = \sigma$.

$$\begin{tikzcd} G\times H \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, bend right, "\sigma"'] & T \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & K \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Como $f^{-1} : K \to T$ e $\varphi : T \to M$ são homomorfismos, segue que $\psi = \varphi\circ f^{-1} : K \to M$ também é homomorfismo. Temos que

$$\psi\circ(f\circ\tau) = (\varphi\circ f^{-1})\circ(f\circ\tau) = \varphi\circ(f^{-1}\circ f)\circ\tau = \varphi\circ id_T\circ\tau = \varphi\circ\tau = \sigma\,.$$

Seja $\mu : K \to M$ homomorfismo tal que $\mu\circ(f\circ\tau) = \sigma$. Daí, $\mu\circ f : T \to M$ é um homomorfismo tal que $(\mu\circ f)\circ\tau = \mu\circ(f\circ\tau) = \sigma$. Pela unicidade de φ, devemos ter $\varphi = \mu\circ f$. Assim, $\mu = \varphi\circ f^{-1} = \psi$. Dessa forma, existe um único homomorfismo $\psi : K \to M$ tal que $\psi\circ(f\circ\tau) = \sigma$, isto é, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} G\times H \arrow[r, "f\circ\tau"] \arrow[dr, "\sigma"'] & K \arrow[d, "\psi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Como M e σ são arbitrários, concluímos que $K = (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{f\circ\tau}$.

(ii) Pelas hipóteses, existem homomorfismos $\alpha : T \to K$ e $\beta : K \to T$ tais que $\alpha\circ\tau = \sigma$ e $\beta\circ\sigma = \tau$.

$$\begin{tikzcd} G\times H \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, bend right, "\sigma"'] & T \arrow[d, shift right, "\alpha"'] \\ & K \arrow[u, shift right, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

Temos que $\beta\circ\alpha : T\to T$ e $\alpha\circ\beta : K\to K$ são homomorfismos e, obviamente, $id_T : T\to T$ e $id_K : K\to K$ também são homomorfismos. Claro que $id_T\circ\tau=\tau$ e que $id_K\circ\sigma=\sigma$.

$$\begin{tikzcd} G\times H \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, bend right, "\tau"'] & T \arrow[d, shift right, "id_T"'] \arrow[d, shift left, "\beta\circ\alpha"] \\ & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G\times H \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, bend right, "\sigma"'] & K \arrow[d, shift right, "id_K"'] \arrow[d, shift left, "\alpha\circ\beta"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Temos que $(\beta\circ\alpha)\circ\tau=\beta\circ(\alpha\circ\tau)=\beta\circ\sigma=\tau$ e, portanto, $\beta\circ\alpha=id_T$. Também, $(\alpha\circ\beta)\circ\sigma=\alpha\circ(\beta\circ\sigma)=\alpha\circ\tau=\sigma$ e, assim, $\alpha\circ\beta=id_K$. Dessa forma, α e β são isomorfismos, com $\beta=\alpha^{-1}$. Ficamos com $K\cong T$.

Para satisfazer o enunciado, tome $f=\alpha$. Assim, $f : T\to K$ é um isomorfismo tal que $\sigma=\alpha\circ\tau=f\circ\tau$. Seja $\mu : T\to K$ um isomorfismo tal que $\sigma=\mu\circ\tau$.

$$\begin{tikzcd} G\times H \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, bend right, "\sigma"'] & T \arrow[d, shift right, "\mu"'] \arrow[d, shift left, "f"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Como T é produto tensorial de G e H com τ, σ é pareamento cruzado com respeito a θ e ξ e $f,\mu : T\to K$ são homomorfismos tais que $f\circ\tau=\sigma=\mu\circ\tau$, então, por definição (unicidade), temos que $\mu=f$.

Logo, existe um único isomorfismo $f : T\to K$ tal que $\sigma=f\circ\tau$. ■

Observação 2.1.6. Sejam G, H e T grupos, $Aut(T)$ o grupo dos automorfismos de T, $\theta : G\to Sym(H)$ e $\xi : H\to Sym(G)$ ações e $\tau : G\times H\to T$ um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ tais que T é o produto tensorial de G e H com τ. Pelo item (i) acima, temos que T também é o produto tensorial de G e H com $f\circ\tau$, $\forall f\in Aut(T)$. Em símbolos:

$$(G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau}=(G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{f\circ\tau}\ ,\quad \forall f\in Aut\big((G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau}\big)\,.$$

Ademais, para todo outro pareamento cruzado $\sigma : G\times H\to T$, com respeito às ações θ e ξ, tais que $T=(G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\sigma}$, pelo item (ii), existe um único $f\in Aut(T)$ tal que $\sigma=f\circ\tau$.

Como já sabemos da álgebra comutativa, o teorema 2.1.5 e a observação 2.1.6 também são válidos em sua versão abeliana.

Sejam G, H e T grupos, $\theta : G\to Sym(H)$ e $\xi : H\to Sym(G)$ ações e um conjunto $\mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T)}$ formado por todos os pareamentos cruzados $\tau : G\times H\to T$ com respeito às ações θ e ξ tais que $T=(G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau}$. É imediato que

$$\tau\in\mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T)} \iff T=(G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau}\,.$$

Vamos denotar temporariamente $P = \mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T)}$ e seja uma função $\Phi : Aut(T) \to (T^{G\times H})^P$ tal que $[\Phi(f)](\tau) = f \circ \tau$, $\forall \tau \in P$. Seja $f \in Aut(T)$. Temos que $\Phi(f)$ é da forma $\Phi(f) : P \to T^{G\times H}$. Pela observação acima, ficamos com $[\Phi(f)](\tau) = f \circ \tau \in P$, $\forall \tau \in P$. Assim, $im\big(\Phi(f)\big) \subset P$ e segue que $\Phi(f)$ é da forma $\Phi(f) : P \to P$. Portanto, $\Phi(f) \in P^P$, $\forall f \in Aut(T)$. Seja $f \in Aut(T)$. Como $f^{-1} \in Aut(T)$ temos que, $\forall \tau \in P$,

$$\begin{aligned}
[\Phi(f^{-1}) \circ \Phi(f)](\tau) &= [\Phi(f^{-1})]\big([\Phi(f)](\tau)\big) \\
&= [\Phi(f^{-1})](f \circ \tau) \\
&= f^{-1} \circ (f \circ \tau) \\
&= (f^{-1} \circ f) \circ \tau \\
&= id_T \circ \tau \\
&= \tau \\
&= id_P(\tau) \\
&= \tau \\
&= id_T \circ \tau \\
&= (f \circ f^{-1}) \circ \tau \\
&= f \circ (f^{-1} \circ \tau) \\
&= [\Phi(f)](f^{-1} \circ \tau) \\
&= [\Phi(f)]\big([\Phi(f^{-1})](\tau)\big) \\
&= [\Phi(f) \circ \Phi(f^{-1})](\tau)\,.
\end{aligned}$$

Assim, $\Phi(f^{-1}) \circ \Phi(f) = id_P = \Phi(f) \circ \Phi(f^{-1})$ e, portanto, $\Phi(f)$ é bijetora e $[\Phi(f)]^{-1} = \Phi(f^{-1})$. Como f é qualquer, $\Phi(f) \in Sym(P)$, $\forall f \in Aut(T)$. Daí, $im(\Phi) \subset Sym(P)$ e Φ é da forma $\Phi : Aut(T) \to Sym(P)$. Sejam $f_1, f_2 \in Aut(T)$. Temos que, $\forall \tau \in P$,

$$\begin{aligned}
[\Phi(f_1 \circ f_2)](\tau) &= (f_1 \circ f_2) \circ \tau \\
&= f_1 \circ (f_2 \circ \tau) \\
&= f_1 \circ \{[\Phi(f_2)](\tau)\} \\
&= [\Phi(f_1)]\big([\Phi(f_2)](\tau)\big) \\
&= [\Phi(f_1) \circ \Phi(f_2)](\tau)\,.
\end{aligned}$$

Então, $\Phi(f_1 \circ f_2) = \Phi(f_1) \circ \Phi(f_2)$, $\forall f_1, f_2 \in Aut(T)$. Dessa forma, Φ é um homomorfismo de $Aut(T)$ em $Sym(P)$, ou seja, Φ é uma ação de $Aut(T)$ em $P = \mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T)}$.

Seja $\tau \in P$. Pela observação anterior, para cada $\sigma \in P$, existe um único $f \in Aut(T)$ tal que $\sigma = f \circ \tau = [\Phi(f)](\tau)$. Decorre disso que a órbita de τ pela ação Φ é o conjunto todo $\mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T)}$.

Por essas considerações, concluimos que, se $\mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T)} \neq \varnothing$, então Φ é uma ação regular (livre e transitiva) e, portanto, fiel. Consequentemente, se $\mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T)} \neq \varnothing$, então $|Aut(T)| = |\mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T)}|$ e também, $\forall \tau \in T^{G\times H}$, temos que $\tau \in \mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T)}$ se, e somente se, $\mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T)} = \big\{ f \circ \tau \in T^{G\times H} \;:\; f \in Aut(T) \big\}$.

Logo, o conjunto $\mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T)}$ está totalmente determinado pelo conjunto $Aut(T)$ da seguinte forma: para todo $\tau \in T^{G\times H}$, são equivalentes:

- $T = (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau}$;
- $\tau \in \mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T)}$;
- $\mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T)} = \big\{ f \circ \tau \in T^{G\times H} \;:\; f \in Aut(T) \big\}$.

No caso de produtos tensoriais abelianos, já sabemos que, para cada par de grupos abelianos A e B, sempre existem algum grupo abeliano C e alguma função bilinear $\beta : A\times B \to C$ tais que $C = (A \otimes_{\mathbb{Z}} B)_\beta$ é o produto tensorial abeliano de A e B com β. Vamos mostrar que isso vale para o caso geral.

2.2 Existência do produto tensorial

Seja X um conjunto não-vazio. Usando apenas alguns poucos axiomas da teoria de conjuntos de Zermelo e Fraenkel, é relativamente simples mostrar que existem conjuntos e e X' tais que $e \notin X \cup X'$, e não é uma upla, X' é disjunto de X e tem mesma cardinalidade, $|X'| = |X|$. Assim, existe uma função bijetora $f : X \to X'$. Vamos denotar $f(x)$ por "x'", para todo $x \in X$.

O conjunto $A = X\cup X'$ é chamado de *alfabeto* e seus elementos são chamados de *letras*. O conjunto A^+ das *palavras* (*strings*) de elementos de A pode ser formalizado como sendo o conjunto de todas as uplas de elementos de A, isto é, $A^+ = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A^n$. Dessa forma, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, o conjunto A^n é chamado de "o conjunto das palavras de tamanho n". Claro que $A^n \subset A^+$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Por exemplo, dados $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$, a upla $(x_1, x_2', x_3', x_4) \in A^+$ é uma palavra de tamanho 4. Note que $e \notin A^+$. Definimos $A^* = A^+ \cup \{e\}$.

Definimos uma operação associativa $\mathfrak{c} : A^* \times A^* \to A^*$ de tal maneira que $\mathfrak{c}(e, w) = \mathfrak{c}(w, e) = w$, $\forall w \in A^*$, e $\forall (x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_m) \in A^+$ definimos $\mathfrak{c}\big((x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_m)\big) = (x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m)$. Dessa forma, $(A^*, \mathfrak{c})$ é um monóide, com elemento neutro e. A operação $\mathfrak{c}$ é chamada de "operação de concatenação".

O conjunto A^1 de todas as 1-uplas de elementos de A pode ser definido como sendo o próprio conjunto A, mas existem outras construções de A^+ nas quais isso não ocorre. Portanto, a priori não iremos supor que são iguais.

Uma palavra é chamada de uma *palavra reduzida* se, e somente se, não há pares consecutivos dos tipos $(..., x, x', ...)$ ou $(..., x', x, ...)$ nas entradas da palavra, qualquer que seja $x \in X$. Por convenção, dizemos que e é uma palavra reduzida e que tem tamanho zero. Note que toda palavra de tamanho zero ou um é uma palavra reduzida. O conjunto das palavras reduzidas será denotado por F.

Daí, $e \in F$ e $A^1 \subset F$. Podemos montar um algoritmo que toma uma palavra e vai retirando, um a um, todos os pares consecutivos dos tipos citados e depois denovo e denovo, iterativamente, até se chegar em uma palavra reduzida ou até apagar todas as letras da palavra. Vamos chamar esse algoritmo de "algoritmo de redução". Nesse caso, existe uma função $R : A^* \to F$ tal que R é sobrejetora em F e $R|_F = id_F$. Temos $R(e) = e \in F$ e, em geral, $R(w) = w$, $\forall w \in F$. Além disso, para todo $w \in A^*$, se o algoritmo de redução pára em uma palavra $\tilde{w} \in A^*$, então $\tilde{w} \in F$ e $R(w) = \tilde{w}$. Se o algoritmo de redução elimina todas as letras da palavra, então $R(w) = e$. Isso significa que toda palavra admite uma única palavra reduzida associada a ela e que o algoritmo de redução sempre pára (halt). Essas são afirmações fortes e que têm demonstrações avançadas e extensas. Não abordaremos esses assuntos aqui, mas podem ser estudados em um curso avançado de teoria combinatória de grupos.

Seja $\mu = R \circ \mathfrak{c}|_{F\times F}$. Pode-se mostrar que (F, μ) é um grupo, com elemento neutro e. Nesse caso, $e^{-1} = e$ e $(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)^{-1} = (x'_n, x'_{n-1}, ..., x'_2, x'_1)$, $\forall (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) \in F \cap A^+$, em que definimos $(x')' = x$, $\forall x \in A$. Seja $i : X \to F$ tal que $i(x) = (x) \in A^1 \subset F$, $\forall x \in X$. Para cada $x \in X$, note que $i(x) = (x)$ é uma 1-upla, mas, seguindo nossa convenção, não podemos supor que $i(x) = (x)$ seja elemento de X e muito menos que seja igual ao elemento $x \in X$. O fato importante é que, na categoria dos grupos e homomorfismos de grupos, F é um objeto livre sobre X com i. Isto é, para todo grupo K e toda função $j : X \to K$, existe um único homomorfismo (de grupos) $f : F \to K$ tal que $f \circ i = j$, isto é, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "j"'] & F \arrow[d, "f"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Dizemos que "F é um *grupo livre* sobre X com i". Pode-se mostrar que i é injetora e, portanto, temos que $|X| = |im(i)| = |i[X]|$. Também, temos que $\langle i[X] \rangle = \langle im(i) \rangle = F$. Disso resulta que F é o único grupo livre sobre X com i. Outro resultado é que F é finito se, e somente se, $X = \varnothing$ e, nesse caso, temos que $|X| = 0$, $F = \{e\} \cong 0$ e, portanto, $|F| = 1$ e $i = \varnothing$. Também, F é abeliano se, e somente se, $|X| \in \{0, 1\}$. Se $|X| = 1$, então existe $x_0 \in X$ tal que $X = \{x_0\}$ e, portanto, $F = \langle i(x_0) \rangle$ é cíclico infinito, isto é, $F \cong \mathbb{Z}$. Além disso, se $|X| \geqslant 2$, então o centro de F é trivial, $Z(F) = \{e\}$.

Também sabemos que, se $f : F \to K$ é um isomorfismo de grupos, então K é um grupo livre sobre X com $f \circ i$ e, portanto, $K = \langle im(f \circ i) \rangle = \big\langle f\big[i[X]\big]\big\rangle$, com $|X| = |i[X]| = \big|f\big[i[X]\big]\big|$. Daí, todo grupo isomorfo a F tem um conjunto de geradores de cardinalidade $|X|$. Pode-se mostrar que essa é a menor cardinalidade de qualquer conjunto gerador de K, isto é, se $S \subset K$ é um conjunto de geradores para K, $K = \langle S \rangle$, então $|X| \leqslant |S|$. Ou seja, o cardinal $|X|$ é o menor cardinal χ tal que K possui conjunto de geradores com cardinalidade χ. Por isso, dizemos que um subconjunto "$S \subset K$ é uma *base livre* para K" se, e somente se, $\langle S \rangle = K$ e $|S| = \chi$. Em outras palavras, uma base livre para um grupo K é um elemento minimal do conjunto de todos os subconjuntos geradores de K, com respeito à ordem de inclusão de conjuntos. Se tal base existe, a cardinalidade desta é denotada por "$rank(K)$". Daí, $rank(F) = |X|$.

Ademais, para todo conjunto Y, e toda função $f : X \to Y$, se J é o grupo livre sobre Y com $j : Y \to J$, então existe um único homomorfismo $\bar{f} : F \to J$ tal que $\bar{f} \circ i = j \circ f$, isto é, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & F \arrow[d, "\bar{f}"] \\ Y \arrow[r, "j"'] & J \end{tikzcd}$$

Se f é sobrejetora, então $\bar{f}$ é um epimorfismo. Se f é bijetora, então $\bar{f}$ é um isomorfismo. Daí, se $|Y| = |X|$, então J é isomorfo a F e, além disso, existe um único isomorfismo $\bar{f} : F \to J$ tal que $\bar{f} \circ i = j \circ f$.

Na realidade, temos um funtor covariante $\mathsf{F} : \mathsf{Set} \to \mathsf{Grp}$ tal que $\mathsf{F}(X)$ é o grupo livre (construido) sobre X com a função injetora $i : X \to \mathsf{F}(X)$ (construida) e, para toda função $f : X \to Y$, temos que $\mathsf{F}(f) : \mathsf{F}(X) \to \mathsf{F}(Y)$ é o único homomorfismo de grupos tal que $\mathsf{F}(f) \circ i = j \circ f$.

Se F é o grupo livre sobre X com $i : X \to F$ e Y é um conjunto de cardinalidade estritamente menor que X, $|Y| < |X|$, então existe alguma função injetora $j : Y \to X$ e não existe função sobrejetora de Y em X. Assim, j não é sobrejetora e, portanto, $X \setminus im(j) \neq \varnothing$. Seja $K = \langle i[X \setminus im(j)] \rangle_N$ o fecho normal de $X \setminus im(j)$ em F. Então, $K \lhd F$. Seja também $p : F \to F/K$ a projeção canônica. É relativamente fácil mostrar que F/K é o grupo livre sobre Y com $p \circ i \circ j : Y \to F/K$. Como $i \circ j : Y \to F$ é uma função e F é um grupo, existe um único homomorfismo $\varphi : F/K \to F$ tal que $\varphi \circ (p \circ i \circ j) = i \circ j$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "p \circ i \circ j"] \arrow[d, "j"'] & F/K \arrow[d, shift right, "\varphi"'] \\ X \arrow[r, "i"'] & F \arrow[u, shift right, "p"'] \end{tikzcd}$$

Como $id_{F/K} : F/K \to F/K$ e $p \circ \varphi : F/K \to F/K$ são homomorfismos, $id_{F/K} \circ (p \circ i \circ j) = p \circ i \circ j$ e $(p \circ \varphi) \circ (p \circ i \circ j) = p \circ (\varphi \circ p \circ i \circ j) = p \circ i \circ j$, então $p \circ \varphi = id_{F/K}$ é injetora. Daí, φ é um monomorfismo e, portanto, $F/K \cong im(\varphi) \leqslant F$.

Dizemos que um grupo K é livre se, e somente se, existe algum conjunto X e alguma função $j : X \to K$ tal que K é um grupo livre sobre X com j. Pode-se mostrar que um grupo K é livre se, e somente se, K tem uma base livre. Nesse caso, todas as bases para K tem mesma cardinalidade, que é $rank(K) = |X|$.

Dado um cardinal χ, todos os grupos livres sobre todos os conjuntos de cardinalidade χ, com quaisquer funções, são isomorfos entre si. Também, todo grupo isomorfo a um grupo livre sobre algum conjunto X de cardinalidade χ é um grupo livre sobre X, com alguma função injetora. Além disso, todo grupo isomorfo a um grupo livre sobre algum conjunto X de cardinalidade χ tem um conjunto de geradores de cardinalidade χ e qualquer outro conjunto de geradores de tal grupo tem cardinalidade maior ou igual a χ. Por essas propriedades, dizemos que, para cada conjunto X, existe um único grupo livre $F(X) = \mathsf{F}(X)$ (aquele construido) (a menos de isomorfismo) sobre X. Ou então, dizemos que, para cada cardinal χ, existe um único grupo livre $F_\chi = F(\chi)$ (a menos de isomorfismo). Também, dizemos que a classe de isomorfismo de $F(X)$ (ou qualquer um de seus elementos) é o grupo livre sobre X. Daí dizermos que todo grupo isomorfo a um grupo livre é livre. Por fim, devemos citar o importante teorema de Nielsen-Schreier, que afirma, entre outras coisas, que todo subgrupo de um grupo livre é livre.

Sejam G e H grupos. Consideremos o grupo livre $F = F(G \times H)$ sobre o conjunto $G \times H$, com a função injetora $i_0 : G \times H \to F$, munido da operação binária $\mu : F \times F \to F$ definida anteriormente. Às vezes iremos denotar o grupo livre F sobre $G \times H$ por "$F_{G\times H}$". Como é usual, vamos denotar $\mu(u, v)$ por "$u \cdot v$" ou por "uv", quaisquer que sejam $u, v \in F$.

Sejam $\theta : G \to Sym(H)$ e $\xi : H \to Sym(G)$ ações, $c^G : G \to Aut(G)$ a ação por conjugação de G, $c^H : H \to Aut(H)$ a ação por conjugação de H,
$S_1 = \Big\{ \Big((ax, y), (a, y)', \big(c^G_a(x), \theta_a(y)\big)' \Big) \in F \;:\; a, x \in G \text{ e } y \in H \Big\} =$
$= \Big\{ \big((ax, y)\big) \cdot \big((a, y)'\big) \cdot \Big(\big(c^G_a(x), \theta_a(y)\big)' \Big) \in F \;:\; a, x \in G \text{ e } y \in H \Big\} =$
$= \Big\{ i_0(ax, y) \cdot [i_0(a, y)]^{-1} \cdot \big[i_0\big(c^G_a(x), \theta_a(y)\big)\big]^{-1} \in F \;:\; a, x \in G \text{ e } y \in H \Big\} =$
$= \Big\{ i_0(ax, y) \cdot \big[i_0\big(c^G_a(x), \theta_a(y)\big) \cdot i_0(a, y)\big]^{-1} \in F \;:\; a, x \in G \text{ e } y \in H \Big\}$,
$S_2 = \Big\{ \Big((x, by), \big(\xi_b(x), c^H_b(y)\big)', (x, b)' \Big) \in F \;:\; x \in G \text{ e } b, y \in H \Big\} =$
$= \Big\{ \big((x, by)\big) \cdot \Big(\big(\xi_b(x), c^H_b(y)\big)' \Big) \cdot \big((x, b)'\big) \in F \;:\; x \in G \text{ e } b, y \in H \Big\} =$
$= \Big\{ i_0(x, by) \cdot \big[i_0\big(\xi_b(x), c^H_b(y)\big)\big]^{-1} \cdot [i_0(x, b)]^{-1} \in F \;:\; x \in G \text{ e } b, y \in H \Big\} =$
$= \Big\{ i_0(x, by) \cdot \big[i_0(x, b) \cdot i_0\big(\xi_b(x), c^H_b(y)\big)\big]^{-1} \in F \;:\; x \in G \text{ e } b, y \in H \Big\}$,
$S = S_1 \cup S_2$ e $\langle S \rangle_N = \cap\{N \in \wp(F) : S \subset N \lhd F\}$ o fecho normal de S em F. Claro que $S \subset \langle S \rangle_N \lhd F$. Sejam também $T_0 = F/\langle S \rangle_N$, $p_0 : F \to T_0$ a projeção canônica e $\tau_0 = p_0 \circ i_0 : G \times H \to T_0$. Dessa forma, p_0 é um epimorfismo e $p_0(w) = w \cdot \langle S \rangle_N = \langle S \rangle_N \cdot w$, $\forall w \in F$.

Assim, $\forall a, x \in G$, $\forall y \in H$, temos que

$$i_0(ax, y) \cdot \big[i_0\big(c^G_a(x), \theta_a(y)\big) \cdot i_0(a, y)\big]^{-1} \in S_1 \subset S \subset \langle S \rangle_N$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\tau_0(ax,y) &= (p_0\circ i_0)(ax,y)\\
&= p_0\big(i_0(ax,y)\big)\\
&= i_0(ax,y)\cdot \langle S\rangle_N\\
&= \big[i_0\big(c_a^G(x),\theta_a(y)\big)\cdot i_0(a,y)\big]\cdot \langle S\rangle_N\\
&= p_0\Big(i_0\big(c_a^G(x),\theta_a(y)\big)\cdot i_0(a,y)\Big)\\
&= p_0\Big(i_0\big(c_a^G(x),\theta_a(y)\big)\Big)\cdot p_0\big(i_0(a,y)\big)\\
&= (p_0\circ i_0)\big(c_a^G(x),\theta_a(y)\big)\cdot (p_0\circ i_0)(a,y)\\
&= \tau_0\big(c_a^G(x),\theta_a(y)\big)\cdot \tau_0(a,y)\,.
\end{aligned}$$

Também, $\forall x\in G$, $\forall b,y\in H$, temos que

$$i_0(x,by)\cdot\big[i_0(x,b)\cdot i_0\big(\xi_b(x),c_b^H(y)\big)\big]^{-1}\in S_2\subset S\subset \langle S\rangle_N$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\tau_0(x,by) &= (p_0\circ i_0)(x,by)\\
&= p_0\big(i_0(x,by)\big)\\
&= i_0(x,by)\cdot \langle S\rangle_N\\
&= \big[i_0(x,b)\cdot i_0\big(\xi_b(x),c_b^H(y)\big)\big]\cdot \langle S\rangle_N\\
&= p_0\Big(i_0(x,b)\cdot i_0\big(\xi_b(x),c_b^H(y)\big)\Big)\\
&= p_0\big(i_0(x,b)\big)\cdot p_0\Big(i_0\big(\xi_b(x),c_b^H(y)\big)\Big)\\
&= (p_0\circ i_0)(x,b)\cdot (p_0\circ i_0)\big(\xi_b(x),c_b^H(y)\big)\\
&= \tau_0(x,b)\cdot \tau_0\big(\xi_b(x),c_b^H(y)\big)\,.
\end{aligned}$$

Logo, $\tau_0=p_0\circ i_0$ é um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ.

Sejam K um grupo e $\sigma: G\times H\to K$ um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ. Como F é livre sobre $X=G\times H$, existe um único homomorfismo $\phi: F\to K$ tal que $\phi\circ i_0=\sigma$, isto é, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
G\times H \arrow[r, "i_0"] \arrow[dr, "\sigma"'] & F \arrow[d, "\phi"]\\
& K
\end{tikzcd}$$

Seja $e_K\in K$ o elemento neutro de K. Como σ é um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ. Temos que $\sigma(ax,y)=\sigma\big(c_a^G(x),\theta_a(y)\big)\cdot\sigma(a,y)$, $\forall a,x\in G$, $\forall y\in H$, e que $\sigma(x,by)=\sigma(x,b)\cdot\sigma\big(\xi_b(x),c_b^H(y)\big)$, $\forall x\in G$, $\forall b,y\in H$, isto é, temos que $\sigma(ax,y)\cdot\big[\sigma\big(c_a^{G}(x),\theta_a(y)\big)\cdot\sigma(a,y)\big]^{-1}=e_K$, $\forall a,x\in G$, $\forall y\in H$, e que $\sigma(x,by)\cdot\big[\sigma(x,b)\cdot\sigma\big(\xi_b(x),c_b^{H}(y)\big)\big]^{-1}=e_K$, $\forall x\in G$, $\forall b,y\in H$.

Seja $s\in S_1$. Por definição, existem $a,x\in G$ e $y\in H$ tais que $s=i_0(ax,y)\cdot\big[i_0\big(c_a^{G}(x),\theta_a(y)\big)\cdot i_0(a,y)\big]^{-1}$. Daí,

$$\begin{aligned}
\phi(s) &= \phi\Big(i_0(ax,y)\cdot\big[i_0\big(c_a^{G}(x),\theta_a(y)\big)\cdot i_0(a,y)\big]^{-1}\Big)\\
&= \phi\big(i_0(ax,y)\big)\cdot\phi\Big(\big[i_0\big(c_a^{G}(x),\theta_a(y)\big)\cdot i_0(a,y)\big]^{-1}\Big)\\
&= \phi\big(i_0(ax,y)\big)\cdot\Big[\phi\Big(i_0\big(c_a^{G}(x),\theta_a(y)\big)\cdot i_0(a,y)\Big)\Big]^{-1}\\
&= \phi\big(i_0(ax,y)\big)\cdot\Big[\phi\Big(i_0\big(c_a^{G}(x),\theta_a(y)\big)\Big)\cdot\phi\big(i_0(a,y)\big)\Big]^{-1}\\
&= (\phi\circ i_0)(ax,y)\cdot\big[(\phi\circ i_0)\big(c_a^{G}(x),\theta_a(y)\big)\cdot(\phi\circ i_0)(a,y)\big]^{-1}\\
&= \sigma(ax,y)\cdot\big[\sigma\big(c_a^{G}(x),\theta_a(y)\big)\cdot\sigma(a,y)\big]^{-1}\\
&= e_K\,.
\end{aligned}$$

Assim, $s\in ker(\phi)$. Como s é qualquer, ficamos com $S_1\subset ker(\phi)$.

Seja $s\in S_2$. Por definição, existem $x\in G$ e $b,y\in H$ tais que $s=i_0(x,by)\cdot\big[i_0(x,b)\cdot i_0\big(\xi_b(x),c_b^{H}(y)\big)\big]^{-1}$. Daí,

$$\begin{aligned}
\phi(s) &= \phi\Big(i_0(x,by)\cdot\big[i_0(x,b)\cdot i_0\big(\xi_b(x),c_b^{H}(y)\big)\big]^{-1}\Big)\\
&= \phi\big(i_0(x,by)\big)\cdot\phi\Big(\big[i_0(x,b)\cdot i_0\big(\xi_b(x),c_b^{H}(y)\big)\big]^{-1}\Big)\\
&= \phi\big(i_0(x,by)\big)\cdot\Big[\phi\Big(i_0(x,b)\cdot i_0\big(\xi_b(x),c_b^{H}(y)\big)\Big)\Big]^{-1}\\
&= \phi\big(i_0(x,by)\big)\cdot\Big[\phi\big(i_0(x,b)\big)\cdot\phi\Big(i_0\big(\xi_b(x),c_b^{H}(y)\big)\Big)\Big]^{-1}\\
&= (\phi\circ i_0)(x,by)\cdot\big[(\phi\circ i_0)(x,b)\cdot(\phi\circ i_0)\big(\xi_b(x),c_b^{H}(y)\big)\big]^{-1}\\
&= \sigma(x,by)\cdot\big[\sigma(x,b)\cdot\sigma\big(\xi_b(x),c_b^{H}(y)\big)\big]^{-1}\\
&= e_K\,.
\end{aligned}$$

Assim, $s\in ker(\phi)$. Como s é qualquer, temos que $S_2\subset ker(\phi)$.

Segue que $S=S_1\cup S_2\subset ker(\phi)$. Como $ker(\phi)\lhd F$ e $\langle S\rangle_N$ é o menor subgrupo normal de F que contém S, ficamos com $\langle S\rangle_N\subset ker(\phi)$. Pelo teorema do isomorfismo, existe um único homomorfismo $f:T_0\to K$ tal que $f\circ p_0=\phi$, isto é, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p_0"'] & K \\
T_0 \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Assim, $f \circ \tau_0 = f \circ (p_0 \circ i_0) = (f \circ p_0) \circ i_0 = \phi \circ i_0 = \sigma$.

Seja $\alpha : T_0 \to K$ um homomorfismo tal que $\alpha \circ \tau_0 = \sigma$. Então, $\sigma = \alpha \circ \tau_0 = \alpha \circ (p_0 \circ i_0) = (\alpha \circ p_0) \circ i_0$. Pela unicidade de ϕ, temos que $\alpha \circ p_0 = \phi$. Pela unicidade de f, ficamos com $\alpha = f$. Portanto, existe um único homomorfismo $f : T_0 \to K$ tal que $f \circ \tau_0 = \sigma$, ou seja, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} G\times H \arrow[r, "\tau_0"] \arrow[dr, "\sigma"'] & T_0 \arrow[d, "f"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Como K e σ são arbitrários, temos que $T_0 = F\big/\langle S\rangle_N$ é o produto tensorial de G e H com τ_0.

O conjunto S também é chamado de o conjunto das relações sobre o grupo livre F e, no nosso caso, será chamado de "o conjunto das relações das ações θ e ξ sobre o grupo livre $F_{G\times H}$" e também será denotado por "$S_{(\theta,\xi)}$", para deixar claro quais ações fazem parte das relações na construção do grupo quociente $F\big/\langle S\rangle_N$. Por sua vez, o grupo $F\big/\langle S\rangle_N$ é chamado de "o grupo gerado por $G\times H$ com relações dadas por S" e isso constitui uma apresentação para tal grupo, isto é, $F\big/\langle S\rangle_N = \langle G\times H \mid S\rangle$. Em nossa notação, $F\big/\langle S\rangle_N = F_{G\times H}\big/\langle S_{(\theta,\xi)}\rangle_N = \langle G\times H \mid S_{(\theta,\xi)}\rangle$.

Sendo $T_0 = F_{G\times H}\big/\langle S_{(\theta,\xi)}\rangle_N$, concluimos que $\tau_0 \in \mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T_0)}$, isto é, temos que $T_0 = F_{G\times H}\big/\langle S_{(\theta,\xi)}\rangle_N = (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau_0}$. Dessa forma, ficamos com $\mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T_0)} \neq \varnothing$. Chamando $P_0 = \mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T_0)}$, temos que a ação $\Phi_0 : Aut(T_0) \to Sym(P_0)$, definida analogamente como na seção anterior, é uma ação regular (livre e transitiva) e, portanto, fiel. Também, que $|Aut(T_0)| = |\mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T_0)}|$ e que, $\forall \tau \in T_0^{G\times H}$, temos que $\tau \in \mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T_0)}$ se, e somente se, $\mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T_0)} = \big\{f \circ \tau \in T_0^{G\times H} \ : \ f \in Aut(T_0)\big\}$. Em particular, $\mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T_0)} = \big\{f \circ \tau_0 \in T_0^{G\times H} \ : \ f \in Aut(T_0)\big\}$.

Vamos denotar $F_{G\times H}\big/\langle S_{(\theta,\xi)}\rangle_N = (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau_0}$ por "$(G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_0$" ou simplesmente por "$(G\otimes H)_0$", se as ações de G e H estiverem subentendidas.

Acabamos de mostrar que, dados grupos G e H e ações $\theta : G \to Sym(H)$ e $\xi : H \to Sym(G)$, sempre existe algum grupo T e algum pareamento cruzado $\tau : G\times H \to T$ com respeito a θ e ξ tais que $T = (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_\tau$. Esse é o teorema de existência do produto tensorial com respeito às ações dadas.

Considere a categoria $\mathcal{C}$. Para cada objeto $X = (G\times H, \theta, \xi) \in Obj(\mathcal{C})$, seja um conjunto $T_X = T_{(G\times H,\theta,\xi)}$ formado por todos os produtos tensoriais de G e H com algum pareamento cruzado com respeito a θ e ξ. Isto é, para todo grupo T, temos que $T \in T_X$ se, e somente se, $\mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T)} \neq \varnothing$, isto é, se, e somente se, existe algum $\tau \in \mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T)}$, que, por sua vez, acontece se, e somente se, $T = (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_\tau$.

Nessas últimas páginas mostramos que, para todo $X = (G\times H, \theta, \xi) \in Obj(\mathcal{C})$, temos $T_X \neq \varnothing$, pois $F_{G\times H}\big/\langle S_{(\theta,\xi)}\rangle_N = (G\otimes H)_0^{(\theta,\xi)} \in T_X = T_{(G\times H,\theta,\xi)}$.

Considere a categoria Grp dos grupos e homomorfismos. Como usual, dividimos o conjunto de todos os grupos em classes de isomorfismo e obtemos o conjunto quociente, $Obj(\mathsf{Grp})\big/\cong$, de $Obj(\mathsf{Grp})$ pela relação de equivalência, $\cong$, de isomorfismo de grupos. Para cada grupo $G \in Obj(\mathsf{Grp})$, vamos denotar por "$[G]$" a classe de equivalência de G com respeito à relação de equivalência $\cong$, isto é, $[G] \in Obj(\mathsf{Grp})\big/\cong$ é a classe de isomorfismo de G.

Seja $X = (G\times H, \theta, \xi) \in Obj(\mathcal{C})$. Pelo item (i) do teorema 2.1.5, se existe $T \in T_X$, então $[T] \subset T_X$. O item (ii) do mesmo teorema afirma que $T_X \subset [T]$, $\forall T \in T_X$. Portanto, sempre temos que $T_X = [T]$, $\forall T \in T_X$. Acima, mostramos que $(G\otimes H)_0^{(\theta,\xi)} \in T_X$. Logo, ficamos com $T_X = [(G\otimes H)_0^{(\theta,\xi)}]$.

Dessa forma, para todo $X = (G\times H, \theta, \xi) \in Obj(\mathcal{C})$, concluimos que

$$T_X = T_{(G\times H,\theta,\xi)} = \left[F_{G\times H}\big/\langle S_{(\theta,\xi)}\rangle_N\right] = [(G\otimes H)_0^{(\theta,\xi)}]\,.$$

Em termos de estrutura algébrica (classes de isomorfismo), todos os produtos tensoriais de T_X são os mesmos. Por isso, é usual dizermos que o produto tensorial de G e H com respeito às ações θ e ξ é o grupo $F_{G\times H}\big/\langle S_{(\theta,\xi)}\rangle_N = (G\otimes H)_0^{(\theta,\xi)}$, único, a menos de isomorfismo. Nesse caso, o denotamos por "$(G\otimes H)^{(\theta,\xi)}$". Se as ações de G e H estiverem subentendidas, o denotamos por "$(G\otimes H)_0$" ou simplesmente por "$G\otimes H$".

Para cada $X = (G\times H, \theta, \xi) \in Obj(\mathcal{C})$, podemos denotar qualquer elemento de $T_X = T_{(G\times H,\theta,\xi)}$ por "$(G\otimes H)^{(\theta,\xi)}$" ou simplesmente por "$G\otimes H$". Uma outra alternativa é denotar o próprio conjunto T_X por "$(G\otimes H)^{(\theta,\xi)}$" ou simplesmente por "$G\otimes H$" e chamar esse conjunto de "o produto tensorial de G e H com respeito às ações θ e ξ". No momento iremos usar a primeira alternativa.

Sejam G, H e T grupos abelianos e $\beta : G\times H \to T$ uma função bilinear tais que $T = (G\otimes_{\mathbb{Z}} H)_\beta$. Sejam também $\theta : G \to Aut(H)$ e $\xi : H \to Aut(G)$ as ações triviais. Assim, β é um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ. Vamos mostrar que existe o produto tensorial $(G\otimes H)_\beta^{(\theta,\xi)}$ e que $(G\otimes H)_\beta^{(\theta,\xi)} = T = (G\otimes_{\mathbb{Z}} H)_\beta$. Seja $T_0 = (G\otimes H)_{\tau_0}^{(\theta,\xi)} = (G\otimes H)_0^{(\theta,\xi)}$ o produto tensorial construido, isto é, $T_0 = F_{G\times H}\big/\langle S_{(\theta,\xi)}\rangle_N$, com $\tau_0 = p_0 \circ i_0 \in \mathcal{P}_{(G,H,T_0)}^{(\theta,\xi)}$. Como θ e ξ são triviais, $\tau_0 : G\times H \to T_0$ é uma função bilinear. Provamos anteriormente que existe o produto tensorial abeliano $(G\otimes_{\mathbb{Z}} H)_{\tau_0}$ e que $(G\otimes_{\mathbb{Z}} H)_{\tau_0} = (G\otimes H)_{\tau_0}^{(\theta,\xi)} = T_0$. Pela versão abeliana do teorema 2.1.5, analogamente ao item (ii), existe um único isomorfismo $f : T \to T_0$ tal que $f\circ\beta = \tau_0$. Como $f^{-1} : T_0 \to T$ é um isomorfismo, pelo item (i) do teorema 2.1.5, temos que $f^{-1}\circ\tau_0 : G\times H \to T$ é um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ e $T = (G\otimes H)_{f^{-1}\circ\tau_0}^{(\theta,\xi)} = (G\otimes H)_\beta^{(\theta,\xi)}$, como queríamos.

Provamos que, dados grupos G e H agindo um no outro, sempre existe o produto tensorial $G\otimes H$ com respeito às ações prefixadas e, se G e H são abelianos e as ações são as triviais, então esse produto tensorial se reduz ao produto tensorial abeliano (de $\mathbb{Z}$-módulos) já bem conhecido. Não apenas isomorfos, mas os próprios conjuntos (com as dadas funções bilineares) são os mesmos e, portanto, as definições são equivalentes. Isso significa que o produto tensorial aqui definido generaliza completamente o produto tensorial abeliano que conhecíamos. Esse resultado não deveria ser uma surpresa, pois a construção do produto tensorial $(G \otimes H)_0$ é exatamente a mesma construção (demonstração de existência) do produto tensorial abeliano (as relações são as mesmas no caso dos grupos serem abelianos e as ações triviais), apenas trocando o grupo livre sobre o conjunto $G \times H$ pelo grupo abeliano livre sobre este conjunto, introduzindo as relações de comutação (comutadores) nas relações do grupo livre, que serão redundantes, já que o pareamento cruzado formado já tornará abeliano o produto tensorial, pelas ações serem as triviais.

Sejam $X = (G \times H, \theta, \xi) \in Obj(\mathcal{C})$ e $G \otimes H \in T_X$. Chamamos os elementos de $G \otimes H$ de "*tensores*". Seja $\tau \in \mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,G\otimes H)}$. Denotaremos o tensor (gerador) $\tau(g,h) \in G \otimes H$ por "$g \otimes h$", quaisquer que sejam $g \in G$ e $h \in H$. Lembremos que $G \otimes H = \langle im(\tau) \rangle = Sp\big(im(\tau)\big)$. Portanto, para todo $t \in G \otimes H$, existem $t_1, ..., t_n \in im(\tau)$ tais que $t = t_1 \cdot ... \cdot t_n$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$. Daí, existem $g_1, ..., g_n \in G$ e $h_1, ..., h_n \in H$ tais que $t_j = \tau(g_j, h_j) = g_j \otimes h_j$, $\forall j \in \{1, ..., n\}$. Logo, $t = \tau(g_1, h_1) \cdot ... \cdot \tau(g_n, h_n) = (g_1 \otimes h_1) \cdot ... \cdot (g_n \otimes h_n)$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$.

Note que $\tau(ax, y) = \tau({}^a x, {}^a y)\, \tau(a, y) = \tau(axa^{-1}, {}^a y)\, \tau(a, y)$ e que $\tau(x, by) = \tau(x, b)\, \tau({}^b x, {}^b y) = \tau(x, b)\, \tau({}^b x, byb^{-1})$, $\forall a, x \in G$, $\forall b, y \in H$. Portanto, temos que $(ax) \otimes y = [({}^a x) \otimes ({}^a y)](a \otimes y) = [(axa^{-1}) \otimes ({}^a y)](a \otimes y)$ e que $x \otimes (by) = (x \otimes b)[({}^b x) \otimes ({}^b y)] = (x \otimes b)[({}^b x) \otimes (byb^{-1})]$, $\forall a, x \in G$, $\forall b, y \in H$.

Sem ambiguidades, podemos apresentar as relações do parágrafo anterior como sendo, $\forall a, x \in G$, $\forall b, y \in H$,

$$ax \otimes y = \big(c^G_a(x) \otimes \theta_a(y)\big)(a \otimes y) = ({}^a x \otimes {}^a y)(a \otimes y) = (axa^{-1} \otimes {}^a y)(a \otimes y)$$

e

$$x \otimes by = (x \otimes b)\big(\xi_b(x) \otimes c^H_b(y)\big) = (x \otimes b)({}^b x \otimes {}^b y) = (x \otimes b)({}^b x \otimes byb^{-1})\,.$$

Muito mais, temos a releitura de todas as igualdades do teorema 1.2.16, as quais enunciamos abaixo.

Teorema 2.2.1. Sejam G e H grupos agindo um no outro compativelmente com ações por automorfismos e cada um deles em si mesmo por conjugação. Sejam também $G \otimes H$ o produto tensorial de G e H com respeito às ações prefixadas, $e_G \in G$ o elemento neutro de G, $e_H \in H$ o elemento neutro de H e $e \in G \otimes H$ o elemento neutro de $G \otimes H$. Valem

(i) Para todos $a, x \in G$ e todos $b, y \in H$, temos que

- $ax \otimes y = ({}^a x \otimes {}^a y)(a \otimes y)\,;$
- $x \otimes by = (x \otimes b)({}^b x \otimes {}^b y)\,;$

- ${}^{a}x \otimes {}^{a}y = (ax \otimes y) \cdot (a \otimes y)^{-1}$;
- ${}^{b}x \otimes {}^{b}y = (x \otimes b)^{-1} \cdot (x \otimes by)$.

(ii) Para todos $g, a, x \in G$ e todos $h, b, y \in H$, temos que

- ${}^{g}(ax) \otimes {}^{g}y = ({}^{ga}x \otimes {}^{ga}y)({}^{g}a \otimes {}^{g}y)$;
- ${}^{g}x \otimes {}^{g}(by) = ({}^{g}x \otimes {}^{g}b)({}^{gb}x \otimes {}^{gb}y)$;
- ${}^{h}(ax) \otimes {}^{h}y = ({}^{ha}x \otimes {}^{ha}y)({}^{h}a \otimes {}^{h}y)$;
- ${}^{h}x \otimes {}^{h}(by) = ({}^{h}x \otimes {}^{h}b)({}^{hb}x \otimes {}^{hb}y)$;
- ${}^{ga}x \otimes {}^{ga}y = [{}^{g}(ax) \otimes {}^{g}y] \cdot ({}^{g}a \otimes {}^{g}y)^{-1}$;
- ${}^{gb}x \otimes {}^{gb}y = ({}^{g}x \otimes {}^{g}b)^{-1} \cdot [{}^{g}x \otimes {}^{g}(by)]$;
- ${}^{ha}x \otimes {}^{ha}y = [{}^{h}(ax) \otimes {}^{h}y] \cdot ({}^{h}a \otimes {}^{h}y)^{-1}$;
- ${}^{hb}x \otimes {}^{hb}y = ({}^{h}x \otimes {}^{h}b)^{-1} \cdot [{}^{h}x \otimes {}^{h}(by)]$.

(iii) Para todos $g, a, x \in G$ e todos $h, b, y \in H$, temos que

- ${}^{g}(ax) \otimes {}^{g}y = ({}^{g}a \otimes {}^{gx}y)({}^{g}x \otimes {}^{g}y)$;
- ${}^{g}x \otimes {}^{g}(by) = ({}^{g}x \otimes {}^{g}y)({}^{gy}x \otimes {}^{g}b)$;
- ${}^{h}(ax) \otimes {}^{h}y = ({}^{h}a \otimes {}^{hx}y)({}^{h}x \otimes {}^{h}y)$;
- ${}^{h}x \otimes {}^{h}(by) = ({}^{h}x \otimes {}^{h}y)({}^{hy}x \otimes {}^{h}b)$;
- ${}^{g}a \otimes {}^{gx}y = [{}^{g}(ax) \otimes {}^{g}y] \cdot ({}^{g}x \otimes {}^{g}y)^{-1}$;
- ${}^{gy}x \otimes {}^{g}b = ({}^{g}x \otimes {}^{g}y)^{-1} \cdot [{}^{g}x \otimes {}^{g}(by)]$;
- ${}^{h}a \otimes {}^{hx}y = [{}^{h}(ax) \otimes {}^{h}y] \cdot ({}^{h}x \otimes {}^{h}y)^{-1}$;
- ${}^{hy}x \otimes {}^{h}b = ({}^{h}x \otimes {}^{h}y)^{-1} \cdot [{}^{h}x \otimes {}^{h}(by)]$;
- $ax \otimes y = (a \otimes {}^{x}y)(x \otimes y)$;
- $x \otimes by = (x \otimes y)({}^{y}x \otimes b)$.

(iv) $e_{G} \otimes h = e = g \otimes e_{H}$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$;

(v) Para todos $x, g \in G$ e todos $y, h \in H$, temos que

- $({}^{g}x \otimes {}^{g}y)^{-1} = {}^{g}x^{-1} \otimes {}^{gx}y$;
- $({}^{g}x \otimes {}^{g}y)^{-1} = {}^{gy}x \otimes {}^{g}y^{-1}$;
- $({}^{h}x \otimes {}^{h}y)^{-1} = {}^{h}x^{-1} \otimes {}^{hx}y$;
- $({}^{h}x \otimes {}^{h}y)^{-1} = {}^{hy}x \otimes {}^{h}y^{-1}$;
- $(x \otimes y)^{-1} = x^{-1} \otimes {}^{x}y$;
- $(x \otimes y)^{-1} = {}^{y}x \otimes y^{-1}$;

- $(x^{-1} \otimes {}^{x}y)^{-1} = x \otimes y$;
- $({}^{y}x \otimes y^{-1})^{-1} = x \otimes y$.

(vi) ${}^{ab}x \otimes {}^{ab}y = (a \otimes b)({}^{ba}x \otimes {}^{ba}y)(a \otimes b)^{-1}$, $\forall a, x \in G$, $\forall b, y \in H$;

(vii) ${}^{[a,b]}g \otimes {}^{[a,b]}h = (a \otimes b)(g \otimes h)(a \otimes b)^{-1}$, $\forall a, g \in G$, $\forall b, h \in H$;

(viii) $g^h g^{-1} \otimes y = (g \otimes h)({}^{y}g \otimes {}^{y}h)^{-1}$, $\forall g \in G$, $\forall y, h \in H$;

(ix) $x \otimes {}^{g}hh^{-1} = ({}^{x}g \otimes {}^{x}h)(g \otimes h)^{-1}$, $\forall x, g \in G$, $\forall h \in H$;

(x) $[g \otimes h, a \otimes b] = g^h g^{-1} \otimes {}^{a}bb^{-1}$, $\forall a, g \in G$, $\forall b, h \in H$.

Podemos utilizar a definição e também essas igualdades para computar casos particulares de produtos tensoriais.

Exemplo 2.2.2. Sejam os grupos $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_3$ agindo um no outro com as ações do exemplo 1.1.1. Como $\mathbb{Z}_3$ age em $\mathbb{Z}_2$ trivialmente, pelo corolário 1.2.17, temos que $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3$ é abeliano. Pelo item (iv) acima, $0 \otimes 0 = 0 \otimes 1 = 0 \otimes 2 = 1 \otimes 0 = 0$. Então, $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 = \langle \{1 \otimes 1, 1 \otimes 2\} \rangle$. Mas,

$$1 \otimes 2 = 1 \otimes (1+1) = (1 \otimes 1) + ({}^{1}1 \otimes {}^{1}1) = (1 \otimes 1) + (1 \otimes 1)\,.$$

Assim, $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 = \langle 1 \otimes 1 \rangle$. Também, o elemento neutro de $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3$ é

$$0 = 0 \otimes 1 = (1+1) \otimes 1 = ({}^{1}1 \otimes {}^{1}1) + (1 \otimes 1) = (1 \otimes 2) + (1 \otimes 1) = (1 \otimes 1) + (1 \otimes 1) + (1 \otimes 1)\,.$$

Pelo exemplo 1.2.9, é um pareamento cruzado com respeito a essas ações a função $\tau : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ tal que $\tau(n, m) = nm$ (multiplicação em $\mathbb{Z}_3$), $\forall n \in \mathbb{Z}_2$, $\forall m \in \mathbb{Z}_3$. Por definição, existe um único homomorfismo $f : \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ tal que $f(n \otimes m) = \tau(n, m) = nm$. Se fosse $1 \otimes 1 = 0$, teríamos $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \cong 0$ e, portanto, seria $f = 0$ e teríamos $0 = f(1 \otimes 1) = 1 \cdot 1 = 1$, um absurdo. Daí, $1 \otimes 1 \neq 0$. Se fosse $(1 \otimes 1) + (1 \otimes 1) = 0$, teríamos $1 \otimes 1 = 0 + (1 \otimes 1) = (1 \otimes 1) + (1 \otimes 1) + (1 \otimes 1) = 0$, que não é o caso. Assim, $(1 \otimes 1) + (1 \otimes 1) \neq 0$. Se fosse $(1 \otimes 1) + (1 \otimes 1) = 1 \otimes 1$, teríamos $1 \otimes 1 = 0$, que também não acontece. Dessa forma, ficamos com $0 \neq 1 \otimes 2 \neq 1 \otimes 1 \neq 0$ e, portanto, $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 = \langle 1 \otimes 1 \rangle = \{\,0\,,\, 1 \otimes 1\,,\, 1 \otimes 2\,\}$, com $|\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3| = 3$. Logo, $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_3 \ncong 0 \cong \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_3$. Sabendo disso, é fácil mostrar que o homomorfismo f acima é um isomorfismo.

Nesse exemplo, temos dois grupos abelianos $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_3$ e uma das ações sendo a trivial, a saber, a ação de $\mathbb{Z}_3$ em $\mathbb{Z}_2$, e mesmo assim o produto tensorial difere do produto tensorial abeliano.

No exemplo acima, note que $\mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 = (\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3)^{(\theta,\xi)}_{f^{-1} \circ \tau}$, ou seja, $f^{-1} \circ \tau \in \mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3)}$. É claro que a função $\eta : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3$ tal que

$\eta(n,m) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}_2$, $\forall m \in \mathbb{Z}_3$, também é um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ, mas $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3$ não é um produto tensorial de $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_3$ com η, isto é, $\eta \notin \mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_3,\mathbb{Z}_2\otimes\mathbb{Z}_3)}$, já que $\langle im(\eta)\rangle \cong 0 \ncong \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3$. Com isso frisamos que, dados grupos G e H agindo um no outro compativelmente com ações por automorfismos, além de existir o produto tensorial $G\otimes H$, com respeito a algum pareamento cruzado com respeito a essas ações, podem também existir mais pareamentos cruzados do tipo $G\times H \to G\otimes H$ com respeito às mesmas ações, mas que não tornam $G\otimes H$ um produto tensorial de G e H com estes pareamentos. Ou seja, o grupo $G\otimes H$ é um produto tensorial com algum pareamento cruzado, mas pode não ser com outros.

Exemplo 2.2.3. Como provamos anteriormente, no caso dos grupos serem abelianos e as ações serem as triviais, o produto tensorial se reduz ao produto tensorial abeliano. Dessa forma, temos todos os exemplos comuns de produtos tensoriais abelianos da álgebra comutativa. Por exemplo, para todos $n, m, d \in \mathbb{N}^*$, se $\mathbb{Z}_n$ e $\mathbb{Z}_m$ agem trivialmente um no outro e $d = mdc(n,m)$, então $\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_d$. Também, $\forall n \in \mathbb{N}$, se $\mathbb{Z}_n$ e $\mathbb{Z}$ agem trivialmente um no outro, então $\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_n$.

Exemplo 2.2.4. Pelo item (iv) do teorema 2.2.1 acima, é claro que, para quaisquer grupos G e H agindo um no outro, se $G \cong 0$ ou $H \cong 0$, então $G\otimes H \cong 0$.

2.3 O funtor produto tensorial

Sejam $X = (A \times B, \lambda, \kappa) \in Obj(\mathcal{C})$, $Y = (G \times H, \theta, \xi) \in Obj(\mathcal{C})$, $\alpha \times \beta \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $V, T \in Obj(\mathsf{Grp})$, $v \in \mathcal{P}^{(\lambda,\kappa)}_{(A,B,V)}$ e $\tau \in \mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T)}$, ou seja, $V = (A\otimes B)^{(\lambda,\kappa)}_{v}$ e $T = (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau}$.

$$\begin{tikzcd}
(A\times B, \lambda, \kappa) \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\alpha\times\beta"'] & V \\
(G\times H, \theta, \xi) \arrow[r, "\tau"] & T
\end{tikzcd}$$

Pela proposição 1.3.3, temos que $\tau\circ(\alpha\times\beta) : A\times B \to T$ é um pareamento cruzado com respeito a λ e κ. Pela definição de produto tensorial, existe um único homomorfismo $\varphi : V \to T$ tal que $\varphi \circ v = \tau\circ(\alpha\times\beta)$. Vamos denotar o homomorfismo φ por "$(\alpha\otimes\beta)^{(X,v)}_{(Y,\tau)}$", por "$(\alpha\otimes\beta)^{X,v}_{Y,\tau}$" ou por "$(\alpha\otimes\beta)^{X_v}_{Y_\tau}$". Se as ações de A e B estiverem subentendidas, denotaremos $(\alpha\otimes\beta)^{(X,v)}_{(Y,\tau)}$ por "$(\alpha\otimes\beta)^{v}_{(Y,\tau)}$", por "$(\alpha\otimes\beta)^{v}_{Y,\tau}$" ou por "$(\alpha\otimes\beta)^{v}_{Y_\tau}$". Se as ações de G e H estiverem subentendidas, denotaremos $(\alpha\otimes\beta)^{(X,v)}_{(Y,\tau)}$ por "$(\alpha\otimes\beta)^{(X,v)}_{\tau}$", por "$(\alpha\otimes\beta)^{X,v}_{\tau}$" ou por "$(\alpha\otimes\beta)^{X_v}_{\tau}$". Se todas as ações estiverem subentendidas, denotaremos $(\alpha\otimes\beta)^{(X,v)}_{(Y,\tau)}$ por "$(\alpha\otimes\beta)^{v}_{\tau}$". Se, além disso, os pareamentos cruzados estiverem subentendidos, denotaremos $(\alpha\otimes\beta)^{(X,v)}_{(Y,\tau)}$ simplesmente por "$\alpha\otimes\beta$". Portanto, dados objetos $X = (A\times B, \lambda, \kappa) \in Obj(\mathcal{C})$ e

$Y = (G\times H, \theta, \xi) \in Obj(\mathcal{C})$, um morfismo $\alpha\times\beta \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ e grupos V e T tais que $v \in \mathcal{P}^{(\lambda,\kappa)}_{(A,B,V)}$ e $\tau \in \mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T)}$, existe um único homomorfismo $(\alpha\otimes\beta)^{(X,v)}_{(Y,\tau)} : (A\otimes B)^{(\lambda,\kappa)}_v \to (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_\tau$ tal que

$$[(\alpha\otimes\beta)^{(X,v)}_{(Y,\tau)}]\circ v = \tau\circ(\alpha\times\beta)\,.$$

Dizendo de outra maneira, todo diagrama da forma

$$\begin{array}{ccc} (A\times B,\lambda,\kappa) & \xrightarrow{v} & (A\otimes B)^{(\lambda,\kappa)}_v \\ {\scriptstyle\alpha\times\beta}\downarrow & & \\ (G\times H,\theta,\xi) & \xrightarrow{\tau} & (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_\tau \end{array}$$

no qual τ e v são pareamentos cruzados, pode ser completado para um quadrado comutativo:

$$\begin{array}{ccc} (A\times B,\lambda,\kappa) & \xrightarrow{v} & (A\otimes B)^{(\lambda,\kappa)}_v \\ {\scriptstyle\alpha\times\beta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle(\alpha\otimes\beta)^{(X,v)}_{(Y,\tau)}} \\ (G\times H,\theta,\xi) & \xrightarrow{\tau} & (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_\tau \end{array}$$

Para todo $a\in A$ e todo $b\in B$ o homomorfismo $(\alpha\otimes\beta)^{(X,v)}_{(Y,\tau)}$ aplicado em um gerador $a\otimes b\in V$ resulta em

$$\begin{aligned} [(\alpha\otimes\beta)^{(X,v)}_{(Y,\tau)}](a\otimes b) &= [(\alpha\otimes\beta)^{(X,v)}_{(Y,\tau)}]\big(v(a,b)\big) \\ &= \{[(\alpha\otimes\beta)^{(X,v)}_{(Y,\tau)}]\circ v\}(a,b) \\ &= [\tau\circ(\alpha\times\beta)](a,b) \\ &= \tau\big((\alpha\times\beta)(a,b)\big) \\ &= \tau\big(\alpha(a),\beta(b)\big) \\ &= \alpha(a)\otimes\beta(b)\,. \end{aligned}$$

Assim, é fácil ver que, se $\alpha: A\to G$ e $\beta: B\to H$ são sobrejetoras, então $(\alpha\otimes\beta)^{(X,v)}_{(Y,\tau)} : (A\otimes B)^{(\lambda,\kappa)}_v \to (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_\tau$ é sobrejetora. De fato, seja $t\in im(\tau)$. Assim, existem $g\in G$ e $h\in H$ tais que $t=\tau(g,h)$. Como α e β são sobrejetoras, existem $a\in A$ e $b\in B$ tais que $g=\alpha(a)$ e $h=\beta(b)$. Daí, $t=\tau(g,h)=g\otimes h=\alpha(a)\otimes\beta(b)=[(\alpha\otimes\beta)^{(X,v)}_{(Y,\tau)}](a\otimes b)\in im\big((\alpha\otimes\beta)^{(X,v)}_{(Y,\tau)}\big)$. Como t é qualquer, temos que $im(\tau)\subset im\big((\alpha\otimes\beta)^{(X,v)}_{(Y,\tau)}\big)\leqslant (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_\tau$. Assim, $(G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_\tau = \langle im(\tau)\rangle \leqslant \big\langle im\big((\alpha\otimes\beta)^{(X,v)}_{(Y,\tau)}\big)\big\rangle = im\big((\alpha\otimes\beta)^{(X,v)}_{(Y,\tau)}\big)\leqslant (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_\tau$ e, portanto, $im\big((\alpha\otimes\beta)^{(X,v)}_{(Y,\tau)}\big)=(G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_\tau$. Logo, $(\alpha\otimes\beta)^{(X,v)}_{(Y,\tau)}$ é sobrejetora.

Observação 2.3.1. Sejam $X=(A\times B,\lambda,\kappa)$, $Y=(G\times H,\theta,\xi)$ e $Z=(M\times N,\mu,\nu)$ objetos de $\mathcal{C}$, $\alpha\times\beta\in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $\gamma\times\delta\in Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z)$,

$V, T, L \in Obj(\mathsf{Grp})$, $v \in \mathcal{P}^{(\lambda,\kappa)}_{(A,B,V)}$, $\tau \in \mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T)}$ e $\eta \in \mathcal{P}^{(\mu,\nu)}_{(M,N,L)}$, ou seja, $V = (A \otimes B)^{(\lambda,\kappa)}_{v}$, $T = (G \otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau}$ e $L = (M \otimes N)^{(\mu,\nu)}_{\eta}$. Pelo parágrafo anterior, existem únicos homomorfismos $(\alpha \otimes \beta)^{(X,v)}_{(Y,\tau)} : V \to T$ e $(\gamma \otimes \delta)^{(Y,\tau)}_{(Z,\eta)} : T \to L$ tais que $[(\alpha \otimes \beta)^{(X,v)}_{(Y,\tau)}] \circ v = \tau \circ (\alpha \times \beta)$ e $[(\gamma \otimes \delta)^{(Y,\tau)}_{(Z,\eta)}] \circ \tau = \eta \circ (\gamma \times \delta)$.

$$
\begin{tikzcd}
(A \times B, \lambda, \kappa) \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\alpha\times\beta"'] & (A \otimes B)^{(\lambda,\kappa)}_{v} \arrow[d, "(\alpha\otimes\beta)^{(X,v)}_{(Y,\tau)}"] \\
(G \times H, \theta, \xi) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\gamma\times\beta"'] & (G \otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau} \arrow[d, "(\gamma\otimes\delta)^{(Y,\tau)}_{(Z,\eta)}"] \\
(M \times N, \mu, \nu) \arrow[r, "\eta"] & (M \otimes N)^{(\mu,\nu)}_{\eta}
\end{tikzcd}
$$

Também, $(\gamma \times \delta) \circ (\alpha \times \beta) = (\gamma \circ \alpha) \times (\delta \circ \beta) \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Z)$ e, portanto, existe um único homomorfismo $[(\gamma \circ \alpha) \otimes (\delta \circ \beta)]^{(X,v)}_{(Z,\eta)} : V \to L$ tal que $\{[(\gamma \circ \alpha) \otimes (\delta \circ \beta)]^{(X,v)}_{(Z,\eta)}\} \circ v = \eta \circ [(\gamma \circ \alpha) \times (\delta \circ \beta)]$. De V em L também temos o homomorfismo $[(\gamma \otimes \delta)^{(Y,\tau)}_{(Z,\eta)}] \circ [(\alpha \otimes \beta)^{(X,v)}_{(Y,\tau)}] : V \to L$.

$$
\begin{tikzcd}
(A \times B, \lambda, \kappa) \arrow[r, "v"] \arrow[d, "(\gamma\times\delta)\circ(\alpha\times\beta)"'] & (A \otimes B)^{(\lambda,\kappa)}_{v} \arrow[d, shift right, "{[(\gamma\circ\alpha)\otimes(\delta\circ\beta)]^{(X,v)}_{(Z,\eta)}}"'] \arrow[d, shift left, "{[(\gamma\otimes\delta)^{(Y,\tau)}_{(Z,\eta)}] \circ [(\alpha\otimes\beta)^{(X,v)}_{(Y,\tau)}]}"] \\
(M \times N, \mu, \nu) \arrow[r, "\eta"'] & (M \otimes N)^{(\mu,\nu)}_{\eta}
\end{tikzcd}
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
\left\{[(\gamma \otimes \delta)^{(Y,\tau)}_{(Z,\eta)}] \circ [(\alpha \otimes \beta)^{(X,v)}_{(Y,\tau)}]\right\} \circ v &= [(\gamma \otimes \delta)^{(Y,\tau)}_{(Z,\eta)}] \circ \left\{[(\alpha \otimes \beta)^{(X,v)}_{(Y,\tau)}] \circ v\right\} \\
&= [(\gamma \otimes \delta)^{(Y,\tau)}_{(Z,\eta)}] \circ [\tau \circ (\alpha \times \beta)] \\
&= \left\{[(\gamma \otimes \delta)^{(Y,\tau)}_{(Z,\eta)}] \circ \tau\right\} \circ (\alpha \times \beta) \\
&= [\eta \circ (\gamma \times \delta)] \circ (\alpha \times \beta) \\
&= \eta \circ [(\gamma \times \delta) \circ (\alpha \times \beta)] \\
&= \eta \circ [(\gamma \circ \alpha) \times (\delta \circ \beta)]\,.
\end{aligned}
$$

Pela unicidade de $[(\gamma \circ \alpha) \otimes (\delta \circ \beta)]^{(X,v)}_{(Z,\eta)}$, ficamos com

$$
[(\gamma \otimes \delta)^{(Y,\tau)}_{(Z,\eta)}] \circ [(\alpha \otimes \beta)^{(X,v)}_{(Y,\tau)}] = [(\gamma \circ \alpha) \otimes (\delta \circ \beta)]^{(X,v)}_{(Z,\eta)}\ .
$$

Observação 2.3.2. Sejam $X = (G{\times}H, \theta, \xi)$ um objeto de $\mathcal{C}$, o morfismo identidade $id_X = id_G{\times}id_H \in Hom_{\mathcal{C}}(X,X)$, grupos $T_1, T_2 \in Obj(\mathsf{Grp})$, $\tau_1 \in \mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T_1)}$ e $\tau_2 \in \mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T_2)}$, isto é, $T_1 = (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau_1}$ e $T_2 = (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau_2}$. Pelo item (ii) do teorema 2.1.5, existe um único isomorfismo $i : T_1 \to T_2$ tal que $\tau_2 = i \circ \tau_1$. Pelo parágrafo inicial, existe um único homomorfismo $(id_G \otimes id_H)^{(X,\tau_1)}_{(X,\tau_2)} : T_1 \to T_2$ tal que $[(id_G \otimes id_H)^{(X,\tau_1)}_{(X,\tau_2)}] \circ \tau_1 = \tau_2 \circ (id_G{\times}id_H)$.

$$\begin{tikzcd}
(G{\times}H,\theta,\xi) \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[d, "id_G\times id_H"'] & (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau_1} \arrow[d, shift right=3, "i"'] \arrow[d, shift left=3, "(id_G\otimes id_H)^{(X,\tau_1)}_{(X,\tau_2)}"] \\
(G{\times}H,\theta,\xi) \arrow[r, "\tau_2"] & (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau_2}
\end{tikzcd}$$

É claro que $i\circ\tau_1 = \tau_2 = \tau_2 \circ (id_G{\times}id_H)$. Daí, pela unicidade de $(id_G \otimes id_H)^{(X,\tau_1)}_{(X,\tau_2)}$, temos que $i = (id_G{\otimes}id_H)^{(X,\tau_1)}_{(X,\tau_2)}$. Assim, podemos reenunciar o item (ii) do teorema 2.1.5 da seguinte maneira: Sejam $X = (G{\times}H, \theta, \xi) \in Obj(\mathcal{C})$, $T_1, T_2 \in Obj(\mathsf{Grp})$, $\tau_1 \in \mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T_1)}$ e $\tau_2 \in \mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T_2)}$, isto é, $T_1 = (G{\otimes}H)^{(\theta,\xi)}_{\tau_1}$ e $T_2 = (G{\otimes}H)^{(\theta,\xi)}_{\tau_2}$. Então, o homomorfismo $(id_G \otimes id_H)^{(X,\tau_1)}_{(X,\tau_2)} : (G{\otimes}H)^{(\theta,\xi)}_{\tau_1} \to (G{\otimes}H)^{(\theta,\xi)}_{\tau_2}$ é um isomorfismo e, além disso, é o único isomorfismo de $(G{\otimes}H)^{(\theta,\xi)}_{\tau_1}$ em $(G{\otimes}H)^{(\theta,\xi)}_{\tau_2}$ tal que

$$\tau_2 = \tau_2 \circ (id_G{\times}id_H) = [(id_G \otimes id_H)^{(X,\tau_1)}_{(X,\tau_2)}] \circ \tau_1 \ ,$$

isto é, tal que o triângulo abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
 & (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau_1} \arrow[dd, "(id_G\otimes id_H)^{(X,\tau_1)}_{(X,\tau_2)}"] \\
(G{\times}H,\theta,\xi) \arrow[ur, "\tau_1"] \arrow[dr, "\tau_2"'] & \\
 & (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau_2}
\end{tikzcd}$$

Em particular, se $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, então $T_1 = T_2 = T$ e

$$(id_G \otimes id_H)^{(X,\tau_1)}_{(X,\tau_2)} = (id_G \otimes id_H)^{(X,\tau)}_{(X,\tau)} = id_T \in Aut(T)\,.$$

Sejam $\mathcal{K}$ uma categoria e $\mathcal{H}_{\mathcal{K}} = \big\{Hom_{\mathcal{K}}(X,Y) \ : \ X,Y \in Obj(\mathcal{K})\big\}$. Lembremos que

(i) $Mor(\mathcal{K}) = \bigcup \mathcal{H}_{\mathcal{K}}$;

(ii) Para todos $X,Y,Z,W \in Obj(\mathcal{K})$, se $X \neq Z$ ou $Y \neq W$, então $Hom_{\mathcal{K}}(X,Y) \cap Hom_{\mathcal{K}}(Z,W) = \varnothing$. Isto é, $\forall f \in Mor(\mathcal{K})$, existem únicos $X,Y \in Obj(\mathcal{K})$ tais que $f \in Hom_{\mathcal{K}}(X,Y)$.

Isto é, o conjunto $\mathcal{H}_{\mathcal{K}} \setminus \{\varnothing\}$ é uma partição de $Mor(\mathcal{K})$. Portanto, se para cada par de objetos $X, Y \in Obj(\mathcal{K})$ existirem um conjunto C_{XY} e uma função $F_{XY} : Hom_{\mathcal{K}}(X,Y) \to C_{XY}$, então fica bem-definida uma função $F : Mor(\mathcal{K}) \to \bigcup\limits_{X,Y} C_{XY}$, dada por $F = \bigcup\limits_{X,Y} F_{XY}$.

Para cada objeto $X = (G \times H, \theta, \xi) \in Obj(\mathcal{C})$, considere o pareamento cruzado $\tau_0 = p_0 \circ i_0$ com respeito às ações θ e ξ e o produto tensorial $(G \otimes H)_0^{(\theta,\xi)} = F_{G\times H}\big/\langle S_{(\theta,\xi)}\rangle_N = (G \otimes H)_{\tau_0}^{(\theta,\xi)}$ construidos na seção anterior. Seja uma função $\mathsf{T}_0^1 : Obj(\mathcal{C}) \to Obj(\mathsf{Grp})$ tal que $\mathsf{T}_0^1(G \times H, \theta, \xi) = (G \otimes H)_0^{(\theta,\xi)}$, $\forall (G \times H, \theta, \xi) \in Obj(\mathcal{C})$. Seja também uma função $\mathsf{T}_0^2 : Mor(\mathcal{C}) \to Mor(\mathsf{Grp})$ tal que, para todo par de objetos $X = (A \times B, \lambda, \kappa) \in Obj(\mathcal{C})$ e $Y = (G \times H, \theta, \xi) \in Obj(\mathcal{C})$ e todo morfismo $\alpha \times \beta \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$, tenhamos $\mathsf{T}_0^2(\alpha \times \beta) = (\alpha \otimes \beta)_{(Y,\tau_0)}^{(X,\upsilon_0)} \in Hom_{\mathsf{Grp}}\big((A \otimes B)_{\upsilon_0}^{(\lambda,\kappa)}, (G \otimes H)_{\tau_0}^{(\theta,\xi)}\big)$, em que υ_0 é o pareamento cruzado com respeito às ações λ e κ e τ_0 é o pareamento cruzado com respeito às ações θ e ξ construidos na seção anterior.

Teorema 2.3.3. Seja $\mathsf{T}_0 = (\mathsf{T}_0^1, \mathsf{T}_0^2)$, como definidos acima. Então, T_0 é um funtor covariante $\mathsf{T}_0 : \mathcal{C} \to \mathsf{Grp}$.

Demonstração: Note que, para todos os pares $X = (A \times B, \lambda, \kappa) \in Obj(\mathcal{C})$ e $Y = (G \times H, \theta, \xi) \in Obj(\mathcal{C})$ e todo morfismo $\alpha \times \beta \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$, temos que $\mathsf{T}_0^1(X) = (A \otimes B)_{\upsilon_0}^{(\lambda,\kappa)}$, que $\mathsf{T}_0^1(Y) = (G \otimes H)_{\tau_0}^{(\theta,\xi)}$ e que $\mathsf{T}_0^2(\alpha \times \beta) = (\alpha \otimes \beta)_{(Y,\tau_0)}^{(X,\upsilon_0)} \in Hom_{\mathsf{Grp}}\big((A \otimes B)_{\upsilon_0}^{(\lambda,\kappa)}, (G \otimes H)_{\tau_0}^{(\theta,\xi)}\big)$, isto é, temos que $\mathsf{T}_0^2(\alpha \times \beta) \in Hom_{\mathsf{Grp}}\big(\mathsf{T}_0^1(X), \mathsf{T}_0^1(Y)\big)$.

Sejam $X = (A \times B, \lambda, \kappa)$, $Y = (G \times H, \theta, \xi)$ e $Z = (M \times N, \mu, \nu)$ objetos de $\mathcal{C}$, $\alpha \times \beta \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ e $\gamma \times \delta \in Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z)$. Pela observação 2.3.1, temos que

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_0^2\big((\gamma \times \delta) \circ (\alpha \times \beta)\big) &= \mathsf{T}_0^2\big((\gamma \circ \alpha) \times (\delta \circ \beta)\big) \\ &= [(\gamma \circ \alpha) \otimes (\delta \circ \beta)]_{(Z,\eta_0)}^{(X,\upsilon_0)} \\ &= [(\gamma \otimes \delta)_{(Z,\eta_0)}^{(Y,\tau_0)}] \circ [(\alpha \otimes \beta)_{(Y,\tau_0)}^{(X,\upsilon_0)}] \\ &= [\mathsf{T}_0^2(\gamma \times \delta)] \circ [\mathsf{T}_0^2(\alpha \times \beta)] \in Hom_{\mathsf{Grp}}(V_0, L_0)\,, \end{aligned}$$

em que $(\alpha \otimes \beta)_{(Y,\tau_0)}^{(X,\upsilon_0)} \in Hom_{\mathsf{Grp}}(V_0, T_0)$, $(\gamma \otimes \delta)_{(Z,\eta_0)}^{(Y,\tau_0)} \in Hom_{\mathsf{Grp}}(T_0, L_0)$, $\tau_0 \in \mathcal{P}_{(G,H,T_0)}^{(\theta,\xi)}$, $\upsilon_0 \in \mathcal{P}_{(A,B,V_0)}^{(\lambda,\kappa)}$ e $\eta_0 \in \mathcal{P}_{(M,N,L_0)}^{(\mu,\nu)}$, isto é, temos que $V_0 = F_{A\times B}\big/\langle S_{(\lambda,\kappa)}\rangle_N = (A \otimes B)_{\upsilon_0}^{(\lambda,\kappa)}$, $T_0 = F_{G\times H}\big/\langle S_{(\theta,\xi)}\rangle_N = (G \otimes H)_{\tau_0}^{(\theta,\xi)}$ e $L_0 = F_{M\times N}\big/\langle S_{(\mu,\nu)}\rangle_N = (M \otimes N)_{\eta_0}^{(\mu,\nu)}$.

Sejam $X = (G \times H, \theta, \xi) \in Obj(\mathcal{C})$ e $id_G \times id_H = id_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X,X)$. Pela observação 2.3.2, temos que

$$\mathsf{T}_0^2(id_X) = \mathsf{T}_0^2(id_G \times id_H) = (id_G \otimes id_H)_{(X,\tau_0)}^{(X,\tau_0)} = id_{T_0} \in Hom_{\mathsf{Grp}}(T_0, T_0)\,,$$

em que $\tau_0 \in \mathcal{P}_{(G,H,T_0)}^{(\theta,\xi)}$, isto é, $T_0 = F_{G\times H}\big/\langle S_{(\theta,\xi)}\rangle_N = (G \otimes H)_{\tau_0}^{(\theta,\xi)} = \mathsf{T}_0^1(X)$, ou seja, $\mathsf{T}_0^2(id_X) = id_{\mathsf{T}_0^1(X)}$. ■

Como é usual, denotamos $\mathsf{T}_0^1(X)$ por "$\mathsf{T}_0(X)$" ou por "T_0X" e denotamos $\mathsf{T}_0^2(\alpha\times\beta)$ por "$\mathsf{T}_0(\alpha\times\beta)$", $\forall X \in Obj(\mathcal{C})$, $\forall \alpha\times\beta \in Mor(\mathcal{C})$.

Sejam A, B, G e H grupos tais que $A \cong G$ e $B \cong H$. Assim, existem $\alpha : A \to G$ e $\beta : B \to H$ isomorfismos. Considere os objetos $X = (A\times B, \lambda, \kappa) \in Obj(\mathsf{C})$ e $Y = (G\times H, \theta, \xi) \in Obj(\mathsf{C})$, em que λ, κ, θ e ξ são ações triviais. Como quaisquer homomorfismos preservam as ações triviais, temos que $\alpha\times\beta \in Hom_{\mathsf{C}}(X,Y)$. Como $\alpha\times\beta$ é bijetora, $\mathsf{T}_0(\alpha\times\beta) = (\alpha\otimes\beta)^{(X,v_0)}_{(Y,\tau_0)} : (A\otimes B)_0 \to (G\otimes H)_0$ é um isomorfismo e, portanto, $(A\otimes B)_0 \cong (G\otimes H)_0$. Logo, podemos dizer que, para todos A, B, G e H grupos tais que A e B agem um no outro, G e H agem um no outro e cada um age em si mesmo por conjugação, se $A \cong G$ e $B \cong H$, com isomorfismos que preservam as ações, então $A\otimes B \cong G\otimes H$.

Observação 2.3.4. Sejam $X = (A\times B, \lambda, \kappa)$ e $Y = (G\times H, \theta, \xi)$ objetos de $\mathcal{C}$, um morfismo $\alpha\times\beta \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$, grupos $V_1, V_2, T_1, T_2 \in Obj(\mathsf{Grp})$, $v_1 \in \mathcal{P}^{(\lambda,\kappa)}_{(A,B,V_1)}$, $v_2 \in \mathcal{P}^{(\lambda,\kappa)}_{(A,B,V_2)}$, $\tau_1 \in \mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T_1)}$ e $\tau_2 \in \mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T_2)}$, isto é, $V_1 = (A\otimes B)^{(\lambda,\kappa)}_{v_1}$, $V_2 = (A\otimes B)^{(\lambda,\kappa)}_{v_2}$, $T_1 = (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau_1}$ e $T_2 = (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau_2}$. Assim, existem únicos homomorfismos $\varphi_1 = (\alpha\otimes\beta)^{(X,v_1)}_{(Y,\tau_1)} : V_1 \to T_1$ e $\varphi_2 = (\alpha\otimes\beta)^{(X,v_2)}_{(Y,\tau_2)} : V_2 \to T_2$ tais que $\varphi_1 \circ v_1 = [(\alpha\otimes\beta)^{(X,v_1)}_{(Y,\tau_1)}] \circ v_1 = \tau_1 \circ (\alpha\times\beta)$ e $\varphi_2 \circ v_2 = [(\alpha\otimes\beta)^{(X,v_2)}_{(Y,\tau_2)}] \circ v_2 = \tau_2 \circ (\alpha\times\beta)$. Pela observação 2.3.2, os homomorfismos $i = (id_A \otimes id_B)^{(X,v_1)}_{(X,v_2)} : V_1 \to V_2$ e $j = (id_G \otimes id_H)^{(Y,\tau_1)}_{(Y,\tau_2)} : T_1 \to T_2$ são os únicos isomorfismos tais que $i \circ v_1 = [(id_A \otimes id_B)^{(X,v_1)}_{(X,v_2)}] \circ v_1 = v_2$ e $j \circ \tau_1 = [(id_G \otimes id_H)^{(Y,\tau_1)}_{(Y,\tau_2)}] \circ \tau_1 = \tau_2$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "v_1"] \arrow[dr, "v_2"'] \arrow[rrr, bend left, "\alpha\times\beta"] & V_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "i"] & T_1 \arrow[d, "j"] & Y \arrow[l, "\tau_1"'] \arrow[dl, "\tau_2"] \\
 & V_2 \arrow[r, "\varphi_2"'] & T_2 &
\end{tikzcd}$$

Nessas hipóteses, o quadrado central comuta:

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes B)^{(\lambda,\kappa)}_{v_1} \arrow[r, "(\alpha\otimes\beta)^{(X,v_1)}_{(Y,\tau_1)}"] \arrow[d, "(id_A\otimes id_B)^{(X,v_1)}_{(X,v_2)}"'] & (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau_1} \arrow[d, "(id_G\otimes id_H)^{(Y,\tau_1)}_{(Y,\tau_2)}"] \\
(A\otimes B)^{(\lambda,\kappa)}_{v_2} \arrow[r, "(\alpha\otimes\beta)^{(X,v_2)}_{(Y,\tau_2)}"'] & (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau_2}
\end{tikzcd}$$

$$[(\alpha\otimes\beta)^{(X,v_2)}_{(Y,\tau_2)}] \circ [(id_A \otimes id_B)^{(X,v_1)}_{(X,v_2)}] = [(id_G \otimes id_H)^{(Y,\tau_1)}_{(Y,\tau_2)}] \circ [(\alpha\otimes\beta)^{(X,v_1)}_{(Y,\tau_1)}] \, .$$

Vejamos. Pela proposição 1.3.3, temos que $\tau_2 \circ (\alpha \times \beta) : A \times B \to T_2$ é um pareamento cruzado com respeito às ações λ e κ. Daí, pela definição de produto tensorial, existe um único homomorfismo $\psi : V_1 \to T_2$ tal que $\psi \circ v_1 = \tau_2 \circ (\alpha \times \beta)$, isto é, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "v_1"] \arrow[dr, "\tau_2 \circ (\alpha \times \beta)"'] & V_1 \arrow[d, "\psi"] \\ & T_2 \end{tikzcd}$$

Por outro lado temos que $j \circ \varphi_1 : V_1 \to T_2$ e $\varphi_2 \circ i : V_1 \to T_2$ são homomorfismos tais que

$$(j \circ \varphi_1) \circ v_1 = j \circ (\varphi_1 \circ v_1) = j \circ [\tau_1 \circ (\alpha \times \beta)] = (j \circ \tau_1) \circ (\alpha \times \beta) = \tau_2 \circ (\alpha \times \beta)$$

e

$$(\varphi_2 \circ i) \circ v_1 = \varphi_2 \circ (i \circ v_1) = \varphi_2 \circ v_2 = \tau_2 \circ (\alpha \times \beta) \ .$$

Pela unicidade de ψ, ficamos com $j \circ \varphi_1 = \psi = \varphi_2 \circ i$.

A observação acima diz que, na categoria de flechas $\mathsf{Grp}^{\to}$, os objetos $(\alpha \otimes \beta)^{(X,v_1)}_{(Y,\tau_1)}, (\alpha \otimes \beta)^{(X,v_2)}_{(Y,\tau_2)} \in Obj(\mathsf{Grp}^{\to})$ são isomorfos, $(\alpha \otimes \beta)^{(X,v_1)}_{(Y,\tau_1)} \cong (\alpha \otimes \beta)^{(X,v_2)}_{(Y,\tau_2)}$, com isomorfismo

$$\Big((id_A \otimes id_B)^{(X,v_1)}_{(X,v_2)} \, , \, (id_G \otimes id_H)^{(Y,\tau_1)}_{(Y,\tau_2)} \Big) : (\alpha \otimes \beta)^{(X,v_1)}_{(Y,\tau_1)} \xrightarrow{\cong} (\alpha \otimes \beta)^{(X,v_2)}_{(Y,\tau_2)} \ .$$

Na conclusão da observação acima, temos uma fórmula

$$[(\alpha \otimes \beta)^{(X,v_2)}_{(Y,\tau_2)}] = [(id_G \otimes id_H)^{(Y,\tau_1)}_{(Y,\tau_2)}] \circ [(\alpha \otimes \beta)^{(X,v_1)}_{(Y,\tau_1)}] \circ [(id_A \otimes id_B)^{(X,v_1)}_{(X,v_2)}]^{-1} \ .$$

2.4 Ações de G e H em $G \otimes H$

Sejam G, H e T grupos, $\theta : G \to Sym(H)$ e $\xi : H \to Sym(G)$ ações e $\tau : G \times H \to T$ um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ tais que T é um produto tensorial de G e H com τ, isto é, $\tau \in \mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T)}$, que é equivalente a ser $T = (G \otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau}$. Sejam $c^G : G \to Aut(G)$ a ação por conjugação de G e $c^H : H \to Aut(H)$ a ação por conjugação de H. Para cada $g \in G$ e cada $h \in H$, sejam as funções $\alpha_g = \tau \circ (c^G_g \times \theta_g) : G \times H \to T$ e $\beta_h = \tau \circ (\xi_h \times c^H_h) : G \times H \to T$. Suponha que θ e ξ sejam compatíveis e que sejam ambas ações por automorfismos. Assim, pelos itens (vi) e (vii) da proposição 1.2.14, α_g e β_h são ambos pareamentos cruzados com respeito a θ e ξ, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$.

Pelo parágrafo acima, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$, existem únicos homomorfismos $\overline{\alpha_g}\,,\,\overline{\beta_h} : T \to T$ tais que $\overline{\alpha_g} \circ \tau = \alpha_g$ e $\overline{\beta_h} \circ \tau = \beta_h$.

$$\begin{tikzcd} G\times H \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\alpha_g"'] & T \arrow[d, "\overline{\alpha_g}"] \\ & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G\times H \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\beta_h"'] & T \arrow[d, "\overline{\beta_h}"] \\ & T \end{tikzcd}$$

Sejam $e = e_G \in G$ o elemento neutro de G e $\tilde{e} = e_H \in H$ o elemento neutro de H. Observe que $\alpha_e = \tau \circ (c_e^G \times \theta_e) = \tau \circ (id_G \times id_H) = \tau$ e que $\beta_{\tilde{e}} = \tau \circ (\xi_{\tilde{e}} \times c_{\tilde{e}}^H) = \tau \circ (id_G \times id_H) = \tau$. Como mostrado acima, existem únicos homomorfismos $\overline{\alpha_e}\,,\,\overline{\beta_{\tilde{e}}} : T \to T$ tais que $\overline{\alpha_e} \circ \tau = \alpha_e$ e $\overline{\beta_{\tilde{e}}} \circ \tau = \beta_{\tilde{e}}$. É claro que $id_T : T \to T$ é um homomorfismo.

$$\begin{tikzcd} G\times H \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, bend right, "\alpha_e"'] & T \arrow[d, shift right, "id_T"'] \arrow[d, shift left, "\overline{\alpha_e}"] \\ & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G\times H \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, bend right, "\beta_{\tilde{e}}"'] & T \arrow[d, shift right, "id_T"'] \arrow[d, shift left, "\overline{\beta_{\tilde{e}}}"] \\ & T \end{tikzcd}$$

Temos que $id_T \circ \tau = \tau = \alpha_e$ e $id_T \circ \tau = \tau = \beta_{\tilde{e}}$. Pela unicidade da definição de produto tensorial, segue que $\overline{\alpha_e} = id_T = \overline{\beta_{\tilde{e}}}$.

Agora, $\forall a, g \in G$, $\forall b, h \in H$, note que $\overline{\alpha_g} \circ \alpha_a = \alpha_{ga}$ e que $\overline{\beta_h} \circ \beta_b = \beta_{hb}$. De fato, $\forall a, g \in G$, $\forall b, h \in H$, temos que

$$\begin{aligned} \overline{\alpha_g} \circ \alpha_a &= \overline{\alpha_g} \circ [\tau \circ (c_a^G \times \theta_a)] \\ &= (\overline{\alpha_g} \circ \tau) \circ (c_a^G \times \theta_a) \\ &= \alpha_g \circ (c_a^G \times \theta_a) \\ &= [\tau \circ (c_g^G \times \theta_g)] \circ (c_a^G \times \theta_a) \\ &= \tau \circ [(c_g^G \times \theta_g) \circ (c_a^G \times \theta_a)] \\ &= \tau \circ [(c_g^G \circ c_a^G) \times (\theta_g \circ \theta_a)] \\ &= \tau \circ (c_{ga}^G \times \theta_{ga}) \\ &= \alpha_{ga}\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\beta_h} \circ \beta_b &= \overline{\beta_h} \circ [\tau \circ (\xi_b \times c_b^H)] \\ &= (\overline{\beta_h} \circ \tau) \circ (\xi_b \times c_b^H) \\ &= \beta_h \circ (\xi_b \times c_b^H) \\ &= [\tau \circ (\xi_h \times c_h^H)] \circ (\xi_b \times c_b^H) \\ &= \tau \circ [(\xi_h \times c_h^H) \circ (\xi_b \times c_b^H)] \\ &= \tau \circ [(\xi_h \circ \xi_b) \times (c_h^H \circ c_b^H)] \\ &= \tau \circ (\xi_{hb} \times c_{hb}^H) \\ &= \beta_{hb}\,. \end{aligned}$$

Sejam $a, g \in G$ e $b, h \in H$ e considere os pareamentos cruzados $\alpha_g = \tau \circ (c_g^G \times \theta_g)$, $\alpha_a = \tau \circ (c_a^G \times \theta_a)$, $\alpha_{ga} = \tau \circ (c_{ga}^G \times \theta_{ga})$, $\beta_h = \tau \circ (\xi_h \times c_h^H)$, $\beta_b = \tau \circ (\xi_b \times c_b^H)$ e $\beta_{hb} = \tau \circ (\xi_{hb} \times c_{hb}^H)$. Pelos parágrafos acima, existem únicos homomorfismos $\overline{\alpha_a}\,, \overline{\alpha_g}\,, \overline{\alpha_{ga}}\,, \overline{\beta_b}\,, \overline{\beta_h}\,, \overline{\beta_{hb}} : T \to T$ tais que $\overline{\alpha_g} \circ \tau = \alpha_g\,$, $\overline{\alpha_a} \circ \tau = \alpha_a\,$, $\overline{\alpha_{ga}} \circ \tau = \alpha_{ga}\,$, $\overline{\beta_h} \circ \tau = \beta_h\,$, $\overline{\beta_b} \circ \tau = \beta_b$ e $\overline{\beta_{hb}} \circ \tau = \beta_{hb}\,$.

$$\begin{tikzcd}
G \times H \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, bend right, "\alpha_{ga}"'] & T \arrow[d, shift right, "\overline{\alpha_{ga}}"'] \arrow[d, shift left, "\overline{\alpha_g} \circ \overline{\alpha_a}"] \\
 & T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \times H \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, bend right, "\beta_{hb}"'] & T \arrow[d, shift right, "\overline{\beta_{hb}}"'] \arrow[d, shift left, "\overline{\beta_h} \circ \overline{\beta_b}"] \\
 & T
\end{tikzcd}$$

Porém, temos que $(\overline{\alpha_g} \circ \overline{\alpha_a}) \circ \tau = \overline{\alpha_g} \circ (\overline{\alpha_a} \circ \tau) = \overline{\alpha_g} \circ \alpha_a = \alpha_{ga}$ e que $(\overline{\beta_h} \circ \overline{\beta_b}) \circ \tau = \overline{\beta_h} \circ (\overline{\beta_b} \circ \tau) = \overline{\beta_h} \circ \beta_b = \beta_{hb}\,$. Pela unicidade, ficamos com $\overline{\alpha_g} \circ \overline{\alpha_a} = \overline{\alpha_{ga}}$ e com $\overline{\beta_h} \circ \overline{\beta_b} = \overline{\beta_{hb}}\,$.

Sejam $g \in G$ e $h \in H$. Temos que

$$\overline{\alpha_g} \circ \overline{\alpha_{g^{-1}}} = \overline{\alpha_{gg^{-1}}} = \overline{\alpha_e} = id_T = \overline{\alpha_e} = \overline{\alpha_{g^{-1}g}} = \overline{\alpha_{g^{-1}}} \circ \overline{\alpha_g}$$

e

$$\overline{\beta_h} \circ \overline{\beta_{h^{-1}}} = \overline{\beta_{hh^{-1}}} = \overline{\beta_{\tilde{e}}} = id_T = \overline{\beta_{\tilde{e}}} = \overline{\beta_{h^{-1}h}} = \overline{\beta_{h^{-1}}} \circ \overline{\beta_h}\,.$$

Daí, $\overline{\alpha_g}\,, \overline{\beta_h} \in Sym(T)$, com $\overline{\alpha_{g^{-1}}} = (\overline{\alpha_g})^{-1}$ e com $\overline{\beta_{h^{-1}}} = (\overline{\beta_h})^{-1}$. Além disso, como $\overline{\alpha_g}$ e $\overline{\beta_h}$ são homomorfismos, ambos são isomorfismos de T em si mesmo, isto é, $\overline{\alpha_g}\,, \overline{\beta_h} \in Aut(T)$.

Assim, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$, podemos concluir que $\alpha_g = \overline{\alpha_g} \circ \tau \in \mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T)}$ e $\beta_h = \overline{\beta_h} \circ \tau \in \mathcal{P}^{(\theta,\xi)}_{(G,H,T)}$, ou seja, $T = (G \otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\alpha_g}$ e $T = (G \otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\beta_h}$.

Sejam $\tilde{\alpha} : G \to Aut(T)$ e $\tilde{\beta} : H \to Aut(T)$ tais que $\tilde{\alpha}(g) = \overline{\alpha_g}$ e $\tilde{\beta}(h) = \overline{\beta_h}\,$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$. Dessa forma, $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ são ações por automorfismos. De fato, $\forall a, g \in G$, $\forall b, h \in H$, temos que $\tilde{\alpha}(ga) = \overline{\alpha_{ga}} = \overline{\alpha_g} \circ \overline{\alpha_a} = \tilde{\alpha}(g) \circ \tilde{\alpha}(a)$ e que $\tilde{\beta}(hb) = \overline{\beta_{hb}} = \overline{\beta_h} \circ \overline{\beta_b} = \tilde{\beta}(h) \circ \tilde{\beta}(b)$. Portanto, $\tilde{\alpha} \in Hom\big(G, Aut(T)\big)$ e $\tilde{\beta} \in Hom\big(H, Aut(T)\big)$.

A ação de grupos $\tilde{\alpha} \in Hom\big(G, Aut(T)\big)$ é chamada de "a ação induzida por $\theta \in Hom\big(G, Aut(H)\big)$ de G em $T = (G \otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau}$" e dizemos que "a ação $\theta \in Hom\big(G, Aut(H)\big)$ de G em H induz a ação $\tilde{\alpha} \in Hom\big(G, Aut(T)\big)$". A ação de grupos $\tilde{\beta} \in Hom\big(H, Aut(T)\big)$ é chamada de "a ação induzida por $\xi \in Hom\big(H, Aut(G)\big)$ de G em $T = (G \otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau}$" e dizemos que "a ação $\xi \in Hom\big(H, Aut(G)\big)$ de G em H induz a ação $\tilde{\beta} \in Hom\big(H, Aut(T)\big)$". Também dizemos que as ações $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ são as induzidas pelas θ e ξ e que as ações θ e ξ induzem as ações $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$. É claro que somente podemos dizer que as ações θ e ξ induzem ações $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ se θ e ξ forem ações por automorfismos e compatíveis.

Usando nossa notação, ficamos com $\tilde{\alpha}(g) = \tilde{\alpha}_g = \overline{\alpha_g}$ e $\tilde{\beta}(h) = \tilde{\beta}_h = \overline{\beta_h}\,$,

$\forall g \in G$, $\forall h \in H$. Também, $\forall x, g \in G$, $\forall y, h \in H$, temos que

$$\begin{aligned}
{}^{g}(x \otimes y) &= \tilde{\alpha}_g(x \otimes y) \\
&= \overline{\alpha_g}(x \otimes y) \\
&= \overline{\alpha_g}\big(\tau(x,y)\big) \\
&= (\overline{\alpha_g} \circ \tau)(x,y) \\
&= \alpha_g(x,y) \\
&= [\tau \circ (c_g^G \times \theta_g)](x,y) \\
&= \tau\big((c_g^G \times \theta_g)(x,y)\big) \\
&= \tau\big(c_g^G(x), \theta_g(y)\big) \\
&= \tau({}^{g}x, {}^{g}y) \\
&= {}^{g}x \otimes {}^{g}y \\
&= (gxg^{-1}) \otimes {}^{g}y\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{h}(x \otimes y) &= \tilde{\beta}_h(x \otimes y) \\
&= \overline{\beta_h}(x \otimes y) \\
&= \overline{\beta_h}\big(\tau(x,y)\big) \\
&= (\overline{\beta_h} \circ \tau)(x,y) \\
&= \beta_h(x,y) \\
&= [\tau \circ (\xi_h \times c_h^H)](x,y) \\
&= \tau\big((\xi_h \times c_h^H)(x,y)\big) \\
&= \tau\big(\xi_h(x), c_h^H(y)\big) \\
&= \tau({}^{h}x, {}^{h}y) \\
&= {}^{h}x \otimes {}^{h}y \\
&= {}^{h}x \otimes (hyh^{-1})\,.
\end{aligned}$$

Em particular, $\forall x, g \in G$, $\forall y, h \in H$, temos as relações

$$ {}^{g}(x \otimes y) = {}^{g}x \otimes {}^{g}y \qquad \text{e} \qquad {}^{h}(x \otimes y) = {}^{h}x \otimes {}^{h}y\,. $$

Em geral, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$, como $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ são ações por automorfismos, $\forall t \in T = \langle im(\tau) \rangle = Sp\big(im(\tau)\big)$, existem $t_1, ..., t_n \in im(\tau)$ tais que $t = t_1 \cdot ... \cdot t_n$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$. Assim, existem $x_1, ..., x_n \in G$ e $y_1, ..., y_n \in H$ tais que $t_j = \tau(x_j, y_j) = x_j \otimes y_j$, $\forall j \in \{1, ..., n\}$. Portanto, $t = (x_1 \otimes y_1) \cdot ... \cdot (x_n \otimes y_n)$. Dessa forma, ficamos com

$$ {}^{g}t = {}^{g}[(x_1 \otimes y_1) \cdot ... \cdot (x_n \otimes y_n)] = {}^{g}(x_1 \otimes y_1) \cdot ... \cdot {}^{g}(x_n \otimes y_n) = ({}^{g}x_1 \otimes {}^{g}y_1) \cdot ... \cdot ({}^{g}x_n \otimes {}^{g}y_n) $$

e com

$$ {}^{h}t = {}^{h}[(x_1 \otimes y_1) \cdot ... \cdot (x_n \otimes y_n)] = {}^{h}(x_1 \otimes y_1) \cdot ... \cdot {}^{h}(x_n \otimes y_n) = ({}^{h}x_1 \otimes {}^{h}y_1) \cdot ... \cdot ({}^{h}x_n \otimes {}^{h}y_n)\,. $$

Lembramos que, $\forall g, x \in G$, $\forall h, y \in H$, as relações entre os geradores do produto tensorial são

$$gx \otimes y = ({}^{g}x \otimes {}^{g}y)(x \otimes y) \qquad \text{e} \qquad x \otimes hy = (x \otimes h)({}^{h}x \otimes {}^{h}y)\,.$$

Usando as ações introduzidas, $\forall g, x \in G$, $\forall h, y \in H$, podemos expressar essas relações na forma

$$gx \otimes y = {}^{g}(x \otimes y)(x \otimes y) \qquad \text{e} \qquad x \otimes hy = (x \otimes h)\,{}^{h}(x \otimes y)\,.$$

Portanto, $\forall g, x \in G$, $\forall h, y \in H$, temos as expressões explícitas para as ações nos geradores

$${}^{g}(x \otimes y) = (gx \otimes y)(x \otimes y)^{-1} \qquad \text{e} \qquad {}^{h}(x \otimes y) = (x \otimes h)^{-1}\,(x \otimes hy)\,.$$

Usando nossa notação e essas novas ações, podemos reescrever as igualdades do teorema 1.2.16 da seguinte maneira:

Teorema 2.4.1. Sejam G e H grupos agindo um no outro compativelmente com ações por automorfismos e cada um deles em si mesmo por conjugação. Sejam também $G \otimes H$ o produto tensorial de G e H com respeito às ações prefixadas, $e_G \in G$ o elemento neutro de G, $e_H \in H$ o elemento neutro de H e $e \in G \otimes H$ o elemento neutro de $G \otimes H$. Valem

(i) Para todos $a, x \in G$ e todos $b, y \in H$, temos que

- $ax \otimes y = {}^{a}(x \otimes y) \cdot (a \otimes y)\,;$
- $x \otimes by = (x \otimes b) \cdot {}^{b}(x \otimes y)\,;$
- ${}^{a}(x \otimes y) = (ax \otimes y) \cdot (a \otimes y)^{-1}\,;$
- ${}^{b}(x \otimes y) = (x \otimes b)^{-1} \cdot (x \otimes by)\,.$

(ii) Para todos $g, a, x \in G$ e todos $h, b, y \in H$, temos que

- ${}^{g}(ax \otimes y) = {}^{ga}(x \otimes y) \cdot {}^{g}(a \otimes y)\,;$
- ${}^{g}(x \otimes by) = {}^{g}(x \otimes b) \cdot {}^{gb}(x \otimes y)\,;$
- ${}^{h}(ax \otimes y) = {}^{ha}(x \otimes y) \cdot {}^{h}(a \otimes y)\,;$
- ${}^{h}(x \otimes by) = {}^{h}(x \otimes b) \cdot {}^{hb}(x \otimes y)\,;$
- ${}^{ga}(x \otimes y) = {}^{g}(ax \otimes y) \cdot {}^{g}(a \otimes y)^{-1}\,;$
- ${}^{gb}(x \otimes y) = {}^{g}(x \otimes b)^{-1} \cdot {}^{g}(x \otimes by)\,;$
- ${}^{ha}(x \otimes y) = {}^{h}(ax \otimes y) \cdot {}^{h}(a \otimes y)^{-1}\,;$
- ${}^{hb}(x \otimes y) = {}^{h}(x \otimes b)^{-1} \cdot {}^{h}(x \otimes by)\,.$

(iii) Para todos $g, a, x \in G$ e todos $h, b, y \in H$, temos que

- ${}^{g}(ax \otimes y) = {}^{g}(a \otimes {}^{x}y) \cdot {}^{g}(x \otimes y)\,;$
- ${}^{g}(x \otimes by) = {}^{g}(x \otimes y) \cdot {}^{g}({}^{y}x \otimes b)\,;$
- ${}^{h}(ax \otimes y) = {}^{h}(a \otimes {}^{x}y) \cdot {}^{h}(x \otimes y)\,;$
- ${}^{h}(x \otimes by) = {}^{h}(x \otimes y) \cdot {}^{h}({}^{y}x \otimes b)\,;$
- ${}^{g}(a \otimes {}^{x}y) = {}^{g}(ax \otimes y) \cdot {}^{g}(x \otimes y)^{-1}\,;$
- ${}^{g}({}^{y}x \otimes b) = {}^{g}(x \otimes y)^{-1} \cdot {}^{g}(x \otimes by)\,;$
- ${}^{h}(a \otimes {}^{x}y) = {}^{h}(ax \otimes y) \cdot {}^{h}(x \otimes y)^{-1}\,;$
- ${}^{h}({}^{y}x \otimes b) = {}^{h}(x \otimes y)^{-1} \cdot {}^{h}(x \otimes by)\,;$
- $ax \otimes y = (a \otimes {}^{x}y)(x \otimes y)\,;$
- $x \otimes by = (x \otimes y)({}^{y}x \otimes b)\,.$

(iv) $e_G \otimes h = e = g \otimes e_H$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$;

(v) Para todos $x, g \in G$ e todos $y, h \in H$, temos que

- ${}^{g}(x \otimes y)^{-1} = {}^{g}(x^{-1} \otimes {}^{x}y)\,;$
- ${}^{g}(x \otimes y)^{-1} = {}^{g}({}^{y}x \otimes y^{-1})\,;$
- ${}^{h}(x \otimes y)^{-1} = {}^{h}(x^{-1} \otimes {}^{x}y)\,;$
- ${}^{h}(x \otimes y)^{-1} = {}^{h}({}^{y}x \otimes y^{-1})\,;$
- $(x \otimes y)^{-1} = x^{-1} \otimes {}^{x}y = {}^{x}(x^{-1} \otimes y)\,;$
- $(x \otimes y)^{-1} = {}^{y}x \otimes y^{-1} = {}^{y}(x \otimes y^{-1})\,;$
- ${}^{x}(x^{-1} \otimes y)^{-1} = (x^{-1} \otimes {}^{x}y)^{-1} = x \otimes y\,;$
- ${}^{y}(x \otimes y^{-1})^{-1} = ({}^{y}x \otimes y^{-1})^{-1} = x \otimes y\,.$

(vi) ${}^{ab}(x \otimes y) = (a \otimes b) \cdot {}^{ba}(x \otimes y) \cdot (a \otimes b)^{-1}$, $\forall a, x \in G$, $\forall b, y \in H$;

(vii) ${}^{[a,b]}(g \otimes h) = (a \otimes b)(g \otimes h)(a \otimes b)^{-1}$, $\forall a, g \in G$, $\forall b, h \in H$;

(viii) $g^{h}g^{-1} \otimes y = (g \otimes h) \cdot {}^{y}(g \otimes h)^{-1}$, $\forall g \in G$, $\forall y, h \in H$

(ix) $x \otimes {}^{g}hh^{-1} = {}^{x}(g \otimes h) \cdot (g \otimes h)^{-1}$, $\forall x, g \in G$, $\forall h \in H$;

(x) $[g \otimes h, a \otimes b] = g^{h}g^{-1} \otimes {}^{a}bb^{-1}$, $\forall a, g \in G$, $\forall b, h \in H$.

Note que muitas dessas igualdades podem ser derivadas de outras, utilizando o fato de $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ serem ações por automorfismos.

No enunciado do teorema acima, se tivermos que G e H são subgrupos normais de algum grupo maior e as ações de G em H e de H em G são as restrições da conjugação desse grupo maior, então, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$, temos que

$$g^{h}g^{-1} = ghg^{-1}h^{-1} = [g, h] = ghg^{-1}h^{-1} = {}^{g}hh^{-1}\,.$$

Assim, os itens (viii), (ix) e (x) acima são escritos como os itens (viii)', (ix)' e (x)' abaixo:

(viii)' $[g,h]\otimes y = (g\otimes h)\cdot {}^{y}(g\otimes h)^{-1}$, $\forall g\in G$, $\forall y,h\in H$;

(ix)' $x\otimes [g,h] = {}^{x}(g\otimes h)\cdot (g\otimes h)^{-1}$, $\forall x,g\in G$, $\forall h\in H$;

(x)' $[g\otimes h, a\otimes b] = [g,h]\otimes [a,b]$, $\forall a,g\in G$, $\forall b,h\in H$.

Proposição 2.4.2. Sejam G, H e T grupos, $c^{T} : T\to Aut(T)$ a ação por conjugação de T, $\theta : G\to Aut(H)$ e $\xi : H\to Aut(G)$ ações por automorfismos compatíveis e $\tau : G\times H\to T$ um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ tais que $T=(G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau}$. As ações induzidas $\tilde{\alpha} : G\to Aut(T)$ e $\tilde{\beta} : H\to Aut(T)$ por θ e ξ são tais que

(i) ${}^{[a,b]}t = (a\otimes b)\cdot t\cdot (a\otimes b)^{-1} = c^{T}_{a\otimes b}(t)$, $\forall a\in G$, $\forall b\in H$, $\forall t\in T$;

(ii) $[\tilde{\alpha}_g, \tilde{\beta}_h] = \tilde{\alpha}_g\circ\tilde{\beta}_h\circ\tilde{\alpha}_{g^{-1}}\circ\tilde{\beta}_{h^{-1}} = c^{T}_{g\otimes h}$, $\forall g\in G$, $\forall h\in H$.

Demonstração: (i) Para cada $a\in G$ e cada $b\in H$, seja um conjunto $V_{(a,b)} = \left\{t\in T : {}^{[a,b]}t = (a\otimes b)\cdot t\cdot (a\otimes b)^{-1}\right\}$. Sejam $a\in G$ e $b\in H$. Seja $e_T\in T$ o elemento neutro de T. Temos que

$$\begin{aligned}
{}^{[a,b]}e_T &= {}^{aba^{-1}b^{-1}}e_T \\
&= {}^{a}\{{}^{b}[{}^{a^{-1}}({}^{b^{-1}}e_T)]\} \\
&= \tilde{\alpha}_a\Big(\tilde{\beta}_b\Big(\tilde{\alpha}_{a^{-1}}\big(\tilde{\beta}_{b^{-1}}(e_T)\big)\Big)\Big) \\
&= (\tilde{\alpha}_a\circ\tilde{\beta}_b\circ\tilde{\alpha}_{a^{-1}}\circ\tilde{\beta}_{b^{-1}})(e_T) \\
&= e_T \\
&= (a\otimes b)\cdot (a\otimes b)^{-1} \\
&= (a\otimes b)\cdot e_T\cdot (a\otimes b)^{-1}.
\end{aligned}$$

Assim, $e_T\in V_{(a,b)}$. Para todo $t\in T$, se $t\in V_{(a,b)}$, então

$$\begin{aligned}
{}^{[a,b]}(t^{-1}) &= {}^{aba^{-1}b^{-1}}(t^{-1}) \\
&= {}^{a}\big({}^{b}\{{}^{a^{-1}}[{}^{b^{-1}}(t^{-1})]\}\big) \\
&= \tilde{\alpha}_a\Big(\tilde{\beta}_b\Big(\tilde{\alpha}_{a^{-1}}\big(\tilde{\beta}_{b^{-1}}(t^{-1})\big)\Big)\Big) \\
&= (\tilde{\alpha}_a\circ\tilde{\beta}_b\circ\tilde{\alpha}_{a^{-1}}\circ\tilde{\beta}_{b^{-1}})(t^{-1}) \\
&= [(\tilde{\alpha}_a\circ\tilde{\beta}_b\circ\tilde{\alpha}_{a^{-1}}\circ\tilde{\beta}_{b^{-1}})(t)]^{-1} \\
&= \Big[\tilde{\alpha}_a\Big(\tilde{\beta}_b\Big(\tilde{\alpha}_{a^{-1}}\big(\tilde{\beta}_{b^{-1}}(t)\big)\Big)\Big)\Big]^{-1} \\
&= \big({}^{a}\{{}^{b}[{}^{a^{-1}}({}^{b^{-1}}t)]\}\big)^{-1} \\
&= \big({}^{aba^{-1}b^{-1}}t\big)^{-1} = \big({}^{[a,b]}t\big)^{-1} \\
&= [(a\otimes b)\cdot t\cdot (a\otimes b)^{-1}]^{-1} \\
&= (a\otimes b)\cdot t^{-1}\cdot (a\otimes b)^{-1}.
\end{aligned}$$

Assim, $t^{-1} \in V_{(a,b)}$. Para todos $u, v \in T$, se $u, v \in V_{(a,b)}$, então

$$\begin{aligned}
{}^{[a,b]}(uv) &= {}^{aba^{-1}b^{-1}}(uv) \\
&= {}^{a}\big({}^{b}\{{}^{a^{-1}}[{}^{b^{-1}}(uv)]\}\big) \\
&= \tilde{\alpha}_a\Big(\tilde{\beta}_b\Big(\tilde{\alpha}_{a^{-1}}\big(\tilde{\beta}_{b^{-1}}(uv)\big)\Big)\Big) \\
&= (\tilde{\alpha}_a \circ \tilde{\beta}_b \circ \tilde{\alpha}_{a^{-1}} \circ \tilde{\beta}_{b^{-1}})(uv) \\
&= (\tilde{\alpha}_a \circ \tilde{\beta}_b \circ \tilde{\alpha}_{a^{-1}} \circ \tilde{\beta}_{b^{-1}})(u) \cdot (\tilde{\alpha}_a \circ \tilde{\beta}_b \circ \tilde{\alpha}_{a^{-1}} \circ \tilde{\beta}_{b^{-1}})(v) \\
&= \tilde{\alpha}_a\Big(\tilde{\beta}_b\Big(\tilde{\alpha}_{a^{-1}}\big(\tilde{\beta}_{b^{-1}}(u)\big)\Big)\Big) \cdot \tilde{\alpha}_a\Big(\tilde{\beta}_b\Big(\tilde{\alpha}_{a^{-1}}\big(\tilde{\beta}_{b^{-1}}(v)\big)\Big)\Big) \\
&= {}^{a}\{{}^{b}[{}^{a^{-1}}({}^{b^{-1}}u)]\} \cdot {}^{a}\{{}^{b}[{}^{a^{-1}}({}^{b^{-1}}v)]\} \\
&= {}^{[a,b]}u \cdot {}^{[a,b]}v \\
&= [(a \otimes b) \cdot u \cdot (a \otimes b)^{-1}] \cdot [(a \otimes b) \cdot v \cdot (a \otimes b)^{-1}] \\
&= (a \otimes b) \cdot uv \cdot (a \otimes b)^{-1} .
\end{aligned}$$

Assim, $uv \in V_{(a,b)}$. Daí, $V_{(a,b)} \leqslant T$. Seja $t \in im(\tau)$. Assim, existem $g \in G$ e $h \in H$ tais que $t = \tau(g, h) = g \otimes h$. Pelo item (vii) da proposição 2.4.1, temos que ${}^{[a,b]}t = {}^{[a,b]}(g \otimes h) = (a \otimes b)(g \otimes h)(a \otimes b)^{-1} = (a \otimes b) \cdot t \cdot (a \otimes b)^{-1}$ e, portanto, $t \in V_{(a,b)}$. Como t é qualquer, ficamos com $im(\tau) \subset V_{(a,b)}$. Dessa forma, $T = \langle im(\tau)\rangle \leqslant \langle V_{(a,b)}\rangle = V_{(a,b)} \leqslant T$ e, assim, $V_{(a,b)} = T$. Daí, $\forall t \in T$, temos que ${}^{[a,b]}t = (a \otimes b) \cdot t \cdot (a \otimes b)^{-1}$. Como a e b são arbitrários, o resultado segue.

(ii) Sejam $g \in G$ e $h \in H$. Para todo $t \in T$, pelo item (i) dessa proposição, temos que

$$\begin{aligned}
[\tilde{\alpha}_g, \tilde{\beta}_h](t) &= \big[(\tilde{\alpha}_g) \circ (\tilde{\beta}_h) \circ (\tilde{\alpha}_g)^{-1} \circ (\tilde{\beta}_h)^{-1}\big](t) \\
&= (\tilde{\alpha}_g \circ \tilde{\beta}_h \circ \tilde{\alpha}_{g^{-1}} \circ \tilde{\beta}_{h^{-1}})(t) \\
&= \tilde{\alpha}_g\Big(\tilde{\beta}_h\Big(\tilde{\alpha}_{g^{-1}}\big(\tilde{\beta}_{h^{-1}}(t)\big)\Big)\Big) \\
&= {}^{g}\{{}^{h}[{}^{g^{-1}}({}^{h^{-1}}t)]\} \\
&= {}^{ghg^{-1}h^{-1}}t \\
&= {}^{[g,h]}t \\
&= (g \otimes h) \cdot t \cdot (g \otimes h)^{-1} \\
&= c^{T}_{g \otimes h}(t) .
\end{aligned}$$

■

Proposição 2.4.3. Sejam G, H e T grupos, $\theta : G \to Aut(H)$ e $\xi : H \to Aut(G)$ ações por automorfismos compatíveis e $\tau : G \times H \to T$ um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ tais que $T = (G \otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau}$. As ações induzidas $\tilde{\alpha} : G \to Aut(T)$ e $\tilde{\beta} : H \to Aut(T)$ por θ e ξ são tais que, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$,

(i) $\tilde{\alpha}_{\xi_h(g)} \circ \tilde{\beta}_h = \tilde{\beta}_h \circ \tilde{\alpha}_g$;

(ii) $\tilde{\beta}_{\theta_g(h)} \circ \tilde{\alpha}_g = \tilde{\alpha}_g \circ \tilde{\beta}_h$.

Demonstração: Considere $c^G : G \to Aut(G)$ a ação por conjugação de G e $c^H : H \to Aut(H)$ a ação por conjugação de H e sejam $g \in G$ e $h \in H$. Tomando $G = H$ e $f = \xi_h : G \to G$ no enunciado do item (ii) da observação 1.1.3, temos que $c^G_{\xi_h(g)} \circ \xi_h = \xi_h \circ c^G_g$. De novo, tomando $G = H$ e $f = \theta_g : H \to H$ no enunciado do item (ii) da observação 1.1.3, temos que $c^H_{\theta_g(h)} \circ \theta_g = \theta_g \circ c^H_h$. Também, como θ e ξ são compatíveis, temos que $\theta_{\xi_h(g)} \circ c^H_h = c^H_h \circ \theta_g$ e que $\xi_{\theta_g(h)} \circ c^G_g = c^G_g \circ \xi_h$. Note que $X = (G \times H, \theta, \xi) \in Obj(\mathsf{C})$. Pelo exemplo 1.3.4, temos que $(\xi_h \circ c^G_g) \times (c^H_h \circ \theta_g)$, $(c^G_g \circ \xi_h) \times (\theta_g \circ c^H_h) \in Hom_{\mathsf{C}}(X, X)$ e, portanto, que $\sigma_1 = \tau \circ [(\xi_h \circ c^G_g) \times (c^H_h \circ \theta_g)] : G \times H \to T$ e $\sigma_2 = \tau \circ [(c^G_g \circ \xi_h) \times (\theta_g \circ c^H_h)] : G \times H \to T$ são pareamentos cruzados com respeito a θ e ξ. Assim, existem únicos homomorfismos $\psi_1, \psi_2 : T \to T$ tais que $\psi_1 \circ \tau = \sigma_1$ e $\psi_2 \circ \tau = \sigma_2$. Observe que $\tilde{\alpha}_{\xi_h(g)} \circ \tilde{\beta}_h$, $\tilde{\beta}_h \circ \tilde{\alpha}_g$, $\tilde{\beta}_{\theta_g(h)} \circ \tilde{\alpha}_g$ e $\tilde{\alpha}_g \circ \tilde{\beta}_h$ são todos homomorfismos de T em T. Temos que

$$\begin{aligned}
[\tilde{\alpha}_{\xi_h(g)} \circ \tilde{\beta}_h] \circ \tau &= \tilde{\alpha}_{\xi_h(g)} \circ (\tilde{\beta}_h \circ \tau) \\
&= \tilde{\alpha}_{\xi_h(g)} \circ \beta_h \\
&= \tilde{\alpha}_{\xi_h(g)} \circ [\tau \circ (\xi_h \times c^H_h)] \\
&= [\tilde{\alpha}_{\xi_h(g)} \circ \tau] \circ (\xi_h \times c^H_h) \\
&= \alpha_{\xi_h(g)} \circ (\xi_h \times c^H_h) \\
&= \{\tau \circ [c^G_{\xi_h(g)} \times \theta_{\xi_h(g)}]\} \circ (\xi_h \times c^H_h) \\
&= \tau \circ \{[c^G_{\xi_h(g)} \times \theta_{\xi_h(g)}] \circ (\xi_h \times c^H_h)\} \\
&= \tau \circ \{[c^G_{\xi_h(g)} \circ \xi_h] \times [\theta_{\xi_h(g)} \circ c^H_h]\} \\
&= \tau \circ [(\xi_h \circ c^G_g) \times (c^H_h \circ \theta_g)] \\
&= \sigma_1 ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\tilde{\beta}_h \circ \tilde{\alpha}_g) \circ \tau &= \tilde{\beta}_h \circ (\tilde{\alpha}_g \circ \tau) \\
&= \tilde{\beta}_h \circ \alpha_g \\
&= \tilde{\beta}_h \circ [\tau \circ (c^G_g \times \theta_g)] \\
&= (\tilde{\beta}_h \circ \tau) \circ (c^G_g \times \theta_g) \\
&= \beta_h \circ (c^G_g \times \theta_g) \\
&= [\tau \circ (\xi_h \times c^H_h)] \circ (c^G_g \times \theta_g) \\
&= \tau \circ [(\xi_h \times c^H_h) \circ (c^G_g \times \theta_g)] \\
&= \tau \circ [(\xi_h \circ c^G_g) \times (c^H_h \circ \theta_g)] \\
&= \sigma_1 .
\end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{\alpha}_{\xi_h(g)} \circ \tilde{\beta}_h = \psi_1 = \tilde{\beta}_h \circ \tilde{\alpha}_g$. Também,

$$\begin{aligned}
[\tilde{\beta}_{\theta_g(h)} \circ \tilde{\alpha}_g] \circ \tau &= \tilde{\beta}_{\theta_g(h)} \circ (\tilde{\alpha}_g \circ \tau) \\
&= \tilde{\beta}_{\theta_g(h)} \circ \alpha_g \\
&= \tilde{\beta}_{\theta_g(h)} \circ [\tau \circ (c_g^G \times \theta_g)] \\
&= [\tilde{\beta}_{\theta_g(h)} \circ \tau] \circ (c_g^G \times \theta_g) \\
&= \beta_{\theta_g(h)} \circ (c_g^G \times \theta_g) \\
&= \{\tau \circ [\xi_{\theta_g(h)} \times c^H_{\theta_g(h)}]\} \circ (c_g^G \times \theta_g) \\
&= \tau \circ \{[\xi_{\theta_g(h)} \times c^H_{\theta_g(h)}] \circ (c_g^G \times \theta_g)\} \\
&= \tau \circ \{[\xi_{\theta_g(h)} \circ c_g^G] \times [c^H_{\theta_g(h)} \circ \theta_g]\} \\
&= \tau \circ [(c_g^G \circ \xi_h) \times (\theta_g \circ c_h^H)] \\
&= \sigma_2 \, ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\tilde{\alpha}_g \circ \tilde{\beta}_h) \circ \tau &= \tilde{\alpha}_g \circ (\tilde{\beta}_h \circ \tau) \\
&= \tilde{\alpha}_g \circ \beta_h \\
&= \tilde{\alpha}_g \circ [\tau \circ (\xi_h \times c_h^H)] \\
&= (\tilde{\alpha}_g \circ \tau) \circ (\xi_h \times c_h^H) \\
&= \alpha_g \circ (\xi_h \times c_h^H) \\
&= [\tau \circ (c_g^G \times \theta_g)] \circ (\xi_h \times c_h^H) \\
&= \tau \circ [(c_g^G \times \theta_g) \circ (\xi_h \times c_h^H)] \\
&= \tau \circ [(c_g^G \circ \xi_h) \times (\theta_g \circ c_h^H)] \\
&= \sigma_2 \, .
\end{aligned}$$

Logo, $\tilde{\beta}_{\theta_g(h)} \circ \tilde{\alpha}_g = \psi_2 = \tilde{\alpha}_g \circ \tilde{\beta}_h$. ■

No enunciado dessa última proposição, os itens (i) e (ii) podem ser equivalentemente escritos como

(i) $\tilde{\alpha}_{({}^h g)} = \tilde{\alpha}_{\xi_h(g)} = \tilde{\beta}_h \circ \tilde{\alpha}_g \circ (\tilde{\beta}_h)^{-1} = \tilde{\beta}_h \circ \tilde{\alpha}_g \circ \tilde{\beta}_{h^{-1}}$;

(ii) $\tilde{\beta}_{({}^g h)} = \tilde{\beta}_{\theta_g(h)} = \tilde{\alpha}_g \circ \tilde{\beta}_h \circ (\tilde{\alpha}_g)^{-1} = \tilde{\alpha}_g \circ \tilde{\beta}_h \circ \tilde{\alpha}_{g^{-1}}$.

Usando nossa notação, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$, $\forall t \in T$, temos que

$$\begin{aligned}
{}^{{}^h g}t &= {}^{({}^h g)}t \\
&= {}^{\xi_h(g)}t \\
&= \tilde{\alpha}_{\xi_h(g)}(t) \\
&= (\tilde{\beta}_h \circ \tilde{\alpha}_g \circ \tilde{\beta}_{h^{-1}})(t) \\
&= \tilde{\beta}_h\Big(\tilde{\alpha}_g\big(\tilde{\beta}_{h^{-1}}(t)\big)\Big) \\
&= \tilde{\beta}_h\big(\tilde{\alpha}_g({}^{h^{-1}}t)\big) \\
&= \tilde{\beta}_h\big({}^g({}^{h^{-1}}t)\big) \\
&= {}^h\big({}^g({}^{h^{-1}}t)\big) \\
&= {}^{hgh^{-1}}t\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{{}^g h}t &= {}^{({}^g h)}t \\
&= {}^{\theta_g(h)}t \\
&= \tilde{\beta}_{\theta_g(h)}(t) \\
&= (\tilde{\alpha}_g \circ \tilde{\beta}_h \circ \tilde{\alpha}_{g^{-1}})(t) \\
&= \tilde{\alpha}_g\Big(\tilde{\beta}_h\big(\tilde{\alpha}_{g^{-1}}(t)\big)\Big) \\
&= \tilde{\alpha}_g\big(\tilde{\beta}_h({}^{g^{-1}}t)\big) \\
&= \tilde{\alpha}_g\big({}^h({}^{g^{-1}}t)\big) \\
&= {}^g\big({}^h({}^{g^{-1}}t)\big) \\
&= {}^{ghg^{-1}}t\,.
\end{aligned}$$

Visualmente, essas igualdades são muito parecidas com aquelas que tratam da compatibilidade das ações θ e ξ. Às vezes cometemos o abuso de linguagem e dizemos que as ações induzidas $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ são compatíveis.

Capítulo 3

O produto exterior

3.1 Definições e primeiras propriedades

Sejam P e E grupos, $G \lhd P$, $H \lhd P$ e $c^P : P \to Aut(P)$ a ação por conjugação de P. Como feito anteriormente, podemos definir ações $c^P_{GG} : G \to Aut(G)$, $c^P_{GH} : G \to Aut(H)$, $c^P_{HH} : H \to Aut(H)$ e $c^P_{HG} : H \to Aut(G)$ de forma que $c^P_{GG}(g) = c^P_g|_G$ e $c^P_{GH}(g) = c^P_g|_H$, $\forall g \in G$, e $c^P_{HH}(h) = c^P_h|_H$ e $c^P_{HG}(h) = c^P_h|_G$, $\forall h \in H$. Dessa forma, $c^P_{GG} = c^G$ é a ação por conjugação de G, $c^P_{HH} = c^H$ é a ação por conjugação de H e as ações c^P_{GH} e c^P_{HG} são compatíveis. Essas ações são ações por automorfismos e são chamadas de restrições da conjugação de P.

Definição 3.1.1. Sejam P e E grupos, $G \lhd P$, $H \lhd P$ e $\varepsilon : G \times H \to K$ um pareamento exterior. Dizemos que "E é um *produto exterior* de G e H com ε" se, e somente se, para todo grupo K e todo pareamento exterior $\delta : G \times H \to K$, existe um único homomorfismo $f : E \to K$, tal que $f \circ \varepsilon = \delta$, isto é, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} G \times H \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\delta"'] & E \arrow[d, "f"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Definimos o produto exterior dos grupos $G \lhd P$ e $H \lhd P$ com uma propriedade universal em cima de pareamentos exteriores, que são pareamentos cruzados sobre as ações de restrição da conjugação. Poderíamos definir um pareamento exterior de uma forma mais geral, em que as ações, digamos $\theta : G \to Sym(H)$ e $\xi : H \to Sym(G)$, não são exatamente as restrições da conjugação, mas que, restritas ao subconjunto $G \cap H$ ajam como conjugações, isto é, $\theta_g|_{G\cap H} = c^G_g|_{G\cap H}$, $\forall g \in G$, e $\xi_h|_{G\cap H} = c^H_h|_{G\cap H}$, $\forall h \in H$. Porém, não iremos admitir essa maior generalidade no presente trabalho.

Teorema 3.1.2. Sejam P e E grupos, $G \lhd P$, $H \lhd P$ e $\varepsilon : G \times H \to E$ um pareamento exterior tais que E é um produto exterior de G e H com ε. Então, $\langle im(\varepsilon) \rangle = E$.

Demonstração: Sejam $K = \langle im(\varepsilon)\rangle \leqslant E$, $i : K \hookrightarrow E$ a inclusão e $\phi : G\times H \to K$ tal que $\phi(g,h) = \varepsilon(g,h)$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$. Temos que $im(i) = dom(i) = K$ e que ϕ e ε são a mesma função, mas dão origem a morfismos de conjuntos possivelmente distintos, dependendo de serem iguais ou distintos seus codomínios. Também, temos que $i \circ \phi = \varepsilon$. Como ϕ e ε são a mesma função, é claro que ϕ também é um pareamento exterior. Por hipótese, existe um único homomorfismo $f : E \to K$ tal que $f \circ \varepsilon = \phi$, ou seja, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} G\times H \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\phi"'] & E \arrow[d, "f"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Como i e f são homomorfismos, segue que $i \circ f : E \to E$ também é um homomorfismo. Além disso, $id_E : E \to E$ é claramente um homomorfismo.

$$\begin{tikzcd} G\times H \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, bend right, "\varepsilon"'] & E \arrow[d, shift right, "id_E"'] \arrow[d, shift left, "i\circ f"] \\ & E \end{tikzcd}$$

É imediato que $id_E \circ \varepsilon = \varepsilon$. Além disso, temos que

$$(i \circ f) \circ \varepsilon = i \circ (f \circ \varepsilon) = i \circ \phi = \varepsilon\,.$$

Por hipótese novamente (unicidade), segue que $i\circ f = id_E$. Como id_E é sobrejetora em E, temos que i é sobrejetora em E e, portanto, $K = im(i) = E$. ■

Corolário 3.1.3. Sejam P, E_1 e E_2 grupos, $G \lhd P$, $H \lhd P$ e $\varepsilon \in E_1^{G\times H} \cap E_2^{G\times H}$ uma função tais que $\varepsilon : G\times H \to E_1$ e $\varepsilon : G\times H \to E_2$ são pareamentos exteriores, e ambos E_1 e E_2 são produtos exteriores de G e H com ε. Então, $E_1 = E_2$.

Demonstração: $E_1 = \langle im(\varepsilon)\rangle = E_2$. ■

Seja P um grupo, $G \lhd P$ e $H \lhd P$. Pelo corolário anterior, se existe algum grupo E e alguma função $\varepsilon : G\times H \to E$ tais que ε é um pareamento exterior e E é um produto exterior de G e H com ε, então E é o único produto exterior de G e H com ε. Nesse caso iremos denotar o grupo E por "$(G\wedge H)_\varepsilon$". Se o pareamento exterior ε estiver subentendido, denotamos $(G\wedge H)_\varepsilon$ simplesmente por "$G\wedge H$".

Teorema 3.1.4. Sejam P e E grupos, $G \lhd P$, $H \lhd P$ e $\varepsilon : G\times H \to E$ um pareamento exterior tais que $E = (G\wedge H)_\varepsilon$. Temos que

(i) Se K é um grupo isomorfo a E, em que $f : E \to K$ é um isomorfismo, então $f \circ \varepsilon : G{\times}H \to K$ é um pareamento exterior e $K = (G{\wedge}H)_{f\circ\varepsilon}$;

(ii) Se K é um grupo e $\delta : G{\times}H \to K$ é um pareamento exterior tais que $K = (G{\wedge}H)_\delta$, então $K \cong E$ e, além disso, existe um único isomorfismo $f : E \to K$ tal que $f \circ \varepsilon = \delta$, isto é, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} G{\times}H \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\delta"'] & E \arrow[d, "f"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Em símbolos:

(i) $(G{\wedge}H)_\varepsilon \xrightarrow[f]{\cong} K \implies K = (G{\wedge}H)_{f\circ\varepsilon}$;

(ii) $\big[\, \exists! f :\ (G{\wedge}H)_\varepsilon \xrightarrow{\cong} (G{\wedge}H)_\delta \,\big](\delta = f \circ \varepsilon)$;

(iii) $(G{\wedge}H)_\varepsilon \cong (G{\wedge}H)_\delta$.

O item (iii) acima é uma particularização do item (ii) e diz respeito à unicidade da estrutura do produto exterior, que é independente do pareamento exterior.

Demonstração: (i) Pela proposição 1.4.6, temos que $f \circ \varepsilon : G{\times}H \to K$ é um pareamento exterior. Sejam M um grupo e $\delta : G{\times}H \to M$ um pareamento exterior. Por hipótese, existe um único homomorfismo $\varphi : E \to M$ tal que $\varphi \circ \varepsilon = \delta$. Ficamos com o diagrama:

$$\begin{tikzcd} G{\times}H \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, bend right, "\delta"'] & E \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & K \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Como $f^{-1} : K \to E$ e $\varphi : E \to M$ são homomorfismos, segue que $\psi = \varphi \circ f^{-1} : K \to M$ também é homomorfismo. Temos que

$$\psi \circ (f \circ \varepsilon) = (\varphi \circ f^{-1}) \circ (f \circ \varepsilon) = \varphi \circ (f^{-1} \circ f) \circ \varepsilon = \varphi \circ id_E \circ \varepsilon = \varphi \circ \varepsilon = \delta\,.$$

Seja $\mu : K \to M$ homomorfismo tal que $\mu \circ (f \circ \varepsilon) = \delta$. Daí, $\mu \circ f : E \to M$ é um homomorfismo tal que $(\mu \circ f) \circ \varepsilon = \mu \circ (f \circ \varepsilon) = \delta$. Pela unicidade de φ, devemos ter $\varphi = \mu \circ f$. Assim, $\mu = \varphi \circ f^{-1} = \psi$. Dessa forma, existe um único homomorfismo $\psi : K \to M$ tal que $\psi \circ (f \circ \varepsilon) = \delta$, isto é, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} G{\times}H \arrow[r, "f\circ\varepsilon"] \arrow[dr, "\delta"'] & K \arrow[d, "\psi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Como M e δ são arbitrários, concluímos que $K = (G{\wedge}H)_{f\circ\varepsilon}$.

(ii) Pelas hipóteses, existem homomorfismos $\alpha : E \to K$ e $\beta : K \to E$ tais que $\alpha\circ\varepsilon = \delta$ e $\beta\circ\delta = \varepsilon$.

$$\begin{tikzcd} G\times H \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, bend right, "\delta"'] & E \arrow[d, shift right, "\alpha"'] \\ & K \arrow[u, shift right, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

Temos que $\beta\circ\alpha : E \to E$ e $\alpha\circ\beta : K \to K$ são homomorfismos e, obviamente, $id_E : E \to E$ e $id_K : K \to K$ também são homomorfismos. Claro que $id_E\circ\varepsilon = \varepsilon$ e que $id_K\circ\delta = \delta$.

$$\begin{tikzcd} G\times H \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, bend right, "\varepsilon"'] & E \arrow[d, shift right, "id_E"'] \arrow[d, shift left, "\beta\circ\alpha"] \\ & E \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G\times H \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, bend right, "\delta"'] & K \arrow[d, shift right, "id_K"'] \arrow[d, shift left, "\alpha\circ\beta"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Temos que $(\beta\circ\alpha)\circ\varepsilon = \beta\circ(\alpha\circ\varepsilon) = \beta\circ\delta = \varepsilon$ e, portanto, $\beta\circ\alpha = id_E$, e que $(\alpha\circ\beta)\circ\delta = \alpha\circ(\beta\circ\delta) = \alpha\circ\varepsilon = \delta$ e, assim, $\alpha\circ\beta = id_K$. Dessa forma, α e β são isomorfismos, com $\beta = \alpha^{-1}$. Ficamos com $K \cong E$.

Para satisfazer o enunciado, tome $f = \alpha$. Assim, $f : E \to K$ é um isomorfismo tal que $\delta = \alpha\circ\varepsilon = f\circ\varepsilon$. Seja $\mu : E \to K$ um isomorfismo tal que $\mu\circ\varepsilon = \delta$.

$$\begin{tikzcd} G\times H \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, bend right, "\delta"'] & E \arrow[d, shift right, "\mu"'] \arrow[d, shift left, "f"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Como E é produto exterior de G e H com ε, δ é pareamento exterior e $f, \mu : E \to K$ são homomorfismos tais que $f\circ\varepsilon = \delta = \mu\circ\varepsilon$, então, por definição, temos que $\mu = f$.

Logo, existe um único isomorfismo $f : E \to K$ tal que $f\circ\varepsilon = \delta$. ■

Observação 3.1.5. Sejam P e E grupos, $G \lhd P$, $H \lhd P$, $Aut(E)$ o grupo dos automorfismos de E e $\varepsilon : G\times H \to E$ um pareamento exterior tais que E é o produto exterior de G e H com ε. Pelo item (i) acima, temos que E também é o produto exterior de G e H com $f\circ\varepsilon$, $\forall f \in Aut(E)$. Em símbolos:

$$(G{\wedge}H)_\varepsilon = (G{\wedge}H)_{f\circ\varepsilon} \ , \quad \forall f \in Aut\big((G{\wedge}H)_\varepsilon\big) \, .$$

Ademais, para todo outro pareamento exterior $\delta : G\times H \to E$ tal que $E = (G{\wedge}H)_\delta$, pelo item (ii), existe um único $f \in Aut(E)$ tal que $\delta = f\circ\varepsilon$.

Proposição 3.1.6. Sejam P, T e E grupos, $e_P \in P$ o elemento neutro de P, $G \lhd P$, $H \lhd P$, $c^P : P \to Aut(P)$ a conjugação de P, $\theta = c^P_{GH} : G \to Aut(H)$ e $\xi = c^P_{HG} : H \to Aut(G)$ as restrições de c^P, $\tau : G{\times}H \to T$ um pareamento cruzado com respeito a $\theta = c^P_{GH}$ e a $\xi = c^P_{HG}$ e $\varepsilon : G{\times}H \to E$ um pareamento exterior tais que $T = (G{\otimes}H)^{(\theta,\xi)}_{\tau}$ e $E = (G{\wedge}H)_{\varepsilon}$. Se $G \cap H = \{e_P\} \cong 0$, então $(G{\otimes}H)^{(\theta,\xi)}_{\tau} \cong (G{\wedge}H)_{\varepsilon}$.

Demonstração: Como ε é um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ, pela definição de produto tensorial, existe um único homomorfismo $\varphi : T \to E$ tal que $\varphi \circ \tau = \varepsilon$. Pela observação 1.4.3, τ é um pareamento exterior. Pela definição de produto exterior, existe um único homomorfismo $\psi : E \to T$ tal que $\psi \circ \varepsilon = \tau$.

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dd, shift left, "\varphi"] \\ G\times H \arrow[ur, "\tau"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & \\ & E \arrow[uu, shift left, "\psi"] \end{tikzcd}$$

É claro que $id_T : T \to T$, $id_E : E \to E$, $\psi \circ \varphi : T \to T$ e $\varphi \circ \psi : E \to E$ são homomorfismos.

$$\begin{tikzcd} G\times H \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, bend right, "\tau"'] & T \arrow[d, shift right, "\psi\circ\varphi"'] \arrow[d, shift left, "id_T"] \\ & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G\times H \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, bend right, "\varepsilon"'] & E \arrow[d, shift right, "\varphi\circ\psi"'] \arrow[d, shift left, "id_E"] \\ & E \end{tikzcd}$$

Temos que $id_T \circ \tau = \tau$ e que $(\psi\circ\varphi)\circ\tau = \psi\circ(\varphi\circ\tau) = \psi\circ\varepsilon = \tau$. Pela unicidade, $\psi \circ \varphi = id_T$. Também, $id_E \circ \varepsilon = \varepsilon$ e $(\varphi \circ \psi) \circ \varepsilon = \varphi \circ (\psi \circ \varepsilon) = \varphi \circ \tau = \varepsilon$. Novamente por unicidade, $\varphi \circ \psi = id_E$. Portanto, φ e ψ são isomorfismos, com $\psi = \varphi^{-1}$. Ficamos com $(G{\wedge}H)_{\varepsilon} = (G{\otimes}H)^{(\theta,\xi)}_{\varphi\circ\tau}$ e com $(G{\otimes}H)^{(\theta,\xi)}_{\tau} = (G{\wedge}H)_{\psi\circ\varepsilon}$. Em particular, $(G{\otimes}H)^{(\theta,\xi)}_{\tau} \cong (G{\wedge}H)_{\varepsilon}$. ∎

Exemplo 3.1.7. Sejam $r, s \in \mathbb{N}^*$ tais que r e s são primos entre si, isto é, $mdc(r,s) = 1$. Então, $\mathbb{Z}_r \cong \langle s\rangle \lhd \mathbb{Z}_{rs}$ e $\mathbb{Z}_s \cong \langle r\rangle \lhd \mathbb{Z}_{rs}$, com $\langle s\rangle \cap \langle r\rangle = \{0\} \cong 0$. Dessa forma, consideramos $\mathbb{Z}_r$ e $\mathbb{Z}_s$ como subgrupos normais de $\mathbb{Z}_{rs}$. Daí, $\mathbb{Z}_r \cap \mathbb{Z}_s = \{0\}$. Se $\mathbb{Z}_r$ e $\mathbb{Z}_s$ agem um no outro pelas restrições da conjugação de $\mathbb{Z}_{rs}$, como este último é abeliano, essas ações são as triviais. Pela proposição 3.1.6 acima, temos que $\mathbb{Z}_r{\wedge}\mathbb{Z}_s \cong \mathbb{Z}_r{\otimes}\mathbb{Z}_s \cong \mathbb{Z}_r{\otimes_{\mathbb{Z}}}\mathbb{Z}_s \cong \mathbb{Z}_1 \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cong 0$.

Exemplo 3.1.8. Sejam P um grupo abeliano, $G \leqslant P$ e $H \leqslant P$ e suponha que G e H agem um no outro pelas restrições da conjugação de P. Daí, é claro que G e H são abelianos, $G \lhd P$, $H \lhd P$ e que G e H agem um no outro trivialmente. Dessa forma, $G \otimes H \cong G \otimes_{\mathbb{Z}} H$. Se $G \cap H \cong 0$, então

$G\wedge H \cong G\otimes H \cong G\otimes_{\mathbb{Z}} H$. Além disso, se $G \cong \mathbb{Z}_n$ e $H \cong \mathbb{Z}_m$ para certos $n, m \in \mathbb{N}$, então $G\wedge H \cong G\otimes H \cong G\otimes_{\mathbb{Z}} H \cong \mathbb{Z}_d$, em que $d = mdc(n,m)$.

Sejam P e E grupos, $G \lhd P$, $H \lhd P$ e um conjunto $\mathcal{Q}_{(G,H,E)}$ formado por todos os pareamentos exteriores $\varepsilon : G\times H \to E$ tais que $E = (G\wedge H)_\varepsilon$. É imediato que

$$\varepsilon \in \mathcal{Q}_{(G,H,E)} \iff E = (G\wedge H)_\varepsilon \,.$$

Vamos denotar temporariamente $Q = \mathcal{Q}_{(G,H,E)}$ e seja uma função $\Psi : Aut(E) \to (E^{G\times H})^Q$ tal que $[\Psi(f)](\varepsilon) = f\circ\varepsilon$, $\forall \varepsilon \in Q$. Seja $f \in Aut(E)$. Temos que $\Psi(f)$ é da forma $\Psi(f) : Q \to E^{G\times H}$. Pela observação acima, ficamos com $[\Psi(f)](\varepsilon) = f\circ\varepsilon \in Q$, $\forall\varepsilon \in Q$. Assim, $im\big(\Psi(f)\big) \subset Q$ e segue que $\Psi(f)$ é da forma $\Psi(f) : Q \to Q$. Portanto, $\Psi(f) \in Q^Q$, $\forall f \in Aut(E)$. Seja $f \in Aut(E)$. Como $f^{-1} \in Aut(E)$, temos que, $\forall\varepsilon \in Q$,

$$\begin{aligned}
[\Psi(f^{-1})\circ\Psi(f)](\varepsilon) &= [\Psi(f^{-1})]\big([\Psi(f)](\varepsilon)\big)\\
&= [\Psi(f^{-1})](f\circ\varepsilon)\\
&= f^{-1}\circ(f\circ\varepsilon)\\
&= (f^{-1}\circ f)\circ\varepsilon\\
&= id_E\circ\varepsilon\\
&= \varepsilon\\
&= id_P(\varepsilon)\\
&= \varepsilon\\
&= id_E\circ\varepsilon\\
&= (f\circ f^{-1})\circ\varepsilon\\
&= f\circ(f^{-1}\circ\varepsilon)\\
&= [\Psi(f)](f^{-1}\circ\varepsilon)\\
&= [\Psi(f)]\big([\Psi(f^{-1})](\varepsilon)\big)\\
&= [\Psi(f)\circ\Psi(f^{-1})](\varepsilon)\,.
\end{aligned}$$

Assim, $\Psi(f^{-1})\circ\Psi(f) = id_P = \Psi(f)\circ\Psi(f^{-1})$ e, portanto, $\Psi(f)$ é bijetora e $[\Psi(f)]^{-1} = \Psi(f^{-1})$. Como f é qualquer, temos que $\Psi(f) \in Sym(Q)$, $\forall f \in Aut(E)$. Daí, $im(\Psi) \subset Sym(Q)$ e Ψ é da forma $\Psi : Aut(E) \to Sym(Q)$. Sejam $f_1, f_2 \in Aut(E)$. Temos que, $\forall\varepsilon \in Q$,

$$\begin{aligned}
[\Psi(f_1\circ f_2)](\varepsilon) &= (f_1\circ f_2)\circ\varepsilon\\
&= f_1\circ(f_2\circ\varepsilon)\\
&= f_1\circ\{[\Psi(f_2)](\varepsilon)\}\\
&= [\Psi(f_1)]\big([\Psi(f_2)](\varepsilon)\big)\\
&= [\Psi(f_1)\circ\Psi(f_2)](\varepsilon)\,.
\end{aligned}$$

Então, $\Psi(f_1 \circ f_2) = \Psi(f_1) \circ \Psi(f_2)$, $\forall f_1, f_2 \in Aut(E)$. Dessa forma, Ψ é um homomorfismo de $Aut(E)$ em $Sym(Q)$, ou seja, Ψ é uma ação de $Aut(E)$ em $Q = \mathcal{Q}_{(G,H,E)}$.

Seja $\varepsilon \in Q$. Pela observação acima, para cada $\delta \in Q$, existe um único $f \in Aut(E)$ tal que $\delta = f \circ \varepsilon = [\Psi(f)](\varepsilon)$. Decorre disso que a órbita de ε pela ação Ψ é o conjunto todo $\mathcal{Q}_{(G,H,E)}$.

Por essas considerações, concluimos que, se $\mathcal{Q}_{(G,H,E)} \neq \varnothing$, então Ψ é uma ação regular (livre e transitiva) e, portanto, fiel. Consequentemente, se $\mathcal{Q}_{(G,H,E)} \neq \varnothing$, então $|Aut(E)| = |\mathcal{Q}_{(G,H,E)}|$ e também, $\forall \varepsilon \in E^{G\times H}$, temos que $\varepsilon \in \mathcal{Q}_{(G,H,E)}$ se, e somente se, $\mathcal{Q}_{(G,H,E)} = \{ f \circ \varepsilon \in E^{G\times H} \ : \ f \in Aut(E) \}$.

Logo, o conjunto $\mathcal{Q}_{(G,H,E)}$ está totalmente determinado pelo conjunto $Aut(E)$ da seguinte forma: para todo $\varepsilon \in E^{G\times H}$, são equivalentes:

- $E = (G \wedge H)_\varepsilon$;
- $\varepsilon \in \mathcal{Q}_{(G,H,E)}$;
- $\mathcal{Q}_{(G,H,E)} = \{ f \circ \varepsilon \in E^{G\times H} \ : \ f \in Aut(E) \}$.

3.2 Existência do produto exterior

Sejam P um grupo, $G \lhd P$, $H \lhd P$, $c^P : P \to Aut(P)$ a ação por conjugação de P e as restrições da conjugação $c^G = c^P_{GG} : G \to Aut(G)$, $c^P_{GH} : G \to Aut(H)$, $c^H = c^P_{HH} : H \to Aut(H)$ e $c^P_{HG} : H \to Aut(G)$. Sejam também $F_{G\times H}$ o grupo livre sobre o conjunto $G\times H$, com a função injetora $i_0 : G\times H \to F_{G\times H}$, $S_{(c^P_{GH}, c^P_{HG})}$ o conjunto das relações sobre as ações c^P_{GH} e c^P_{HG}, $T_0 = F_{G\times H} \big/ \langle S_{(c^P_{GH}, c^P_{HG})} \rangle_N$ o grupo quociente e $p_0 : F_{G\times H} \to T_0$ a projeção canônica. Pela seção que trata da existência do produto tensorial, temos que $\tau_0 = p_0 \circ i_0 \in \mathcal{P}^{(c^P_{GH}, c^P_{HG})}_{(G,H,T_0)}$, ou seja,

$$T_0 = F_{G\times H} \big/ \langle S_{(c^P_{GH}, c^P_{HG})} \rangle_N = (G \otimes H)^{(c^P_{GH}, c^P_{HG})}_{\tau_0} .$$

Iremos deixar as ações c^P_{GH} e c^P_{HG} subentendidas e denotaremos $T_0 = (G \otimes H)_0$. Para todo $g \in G$ e todo $h \in H$, denotaremos o gerador $\tau_0(g,h) = g \otimes h$.

Considere $D = \tau_0[(G \cap H) \times (G \cap H)] \subset T_0$. Então,

$$D = \{ z \otimes z \in T_0 : z \in G \cap H \} = \{ \tau_0(z,z) \in T_0 : z \in G \cap H \} .$$

Seja $\langle D \rangle_N = \cap \{ N \in \wp(T) : D \subset N \lhd T_0 \}$ o fecho normal de D em T_0. Daí, $D \subset \langle D \rangle_N \lhd T_0$. Considere o grupo quociente $E_0 = T_0 / \langle D \rangle_N$, com a projeção canônica $q_0 : T_0 \to E_0$ e defina $\varepsilon_0 = q_0 \circ \tau_0 : G \times H \to E_0$. Dessa forma, q_0 é um epimorfismo e temos $q_0(t) = t \cdot \langle D \rangle_N = \langle D \rangle_N \cdot t$, $\forall t \in T_0$. Ademais, pela proposição 1.2.12, temos que ε_0 é um pareamento cruzado com respeito a c^P_{GH} e c^P_{HG}.

Seja $e \in E_0$ o elemento neutro de E_0. Daí, $e = \langle D \rangle_N$. Assim, $\forall z \in G \cap H$, temos que $\tau_0(z,z) = z \otimes z \in D \subset \langle D \rangle_N$ e, portanto,

$$\varepsilon_0(z,z) = (q_0 \circ \tau_0)(z,z) = q_0\big(\tau_0(z,z)\big) = \tau_0(z,z) \cdot \langle D \rangle_N = \langle D \rangle_N = e\,.$$

Desse modo, ε_0 é um pareamento exterior.

Sejam K um grupo, $e_K \in K$ o elemento neutro de K e $\delta : G \times H \to K$ um pareamento exterior. Como δ é um pareamento cruzado com respeito a c^P_{GH} e c^P_{HG}, pela definição de produto tensorial, existe um único homomorfismo $\psi : T_0 \to K$ tal que $\psi \circ \tau_0 = \delta$.

$$\begin{tikzcd} G \times H \arrow[r, "\tau_0"] \arrow[dr, "\delta"'] & T_0 \arrow[d, "\psi"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Seja $d \in D$. Então, existe $z \in G \cap H$ tal que $d = \tau_0(z,z)$. Assim, $\psi(d) = \psi\big(\tau_0(z,z)\big) = (\psi \circ \tau_0)(z,z) = \delta(z,z) = e_K$ e, portanto, $d \in ker(\psi)$, pois δ é pareamento exterior. Como d é qualquer, ficamos com $D \subset ker(\psi)$. Mas, $ker(\psi) \lhd T_0$ e $\langle D \rangle_N$ é o menor subgrupo normal de T_0 que contém D. Segue que $\langle D \rangle_N \subset ker(\psi)$. Pelo teorema do isomorfismo, existe um único homomorfismo $f : E_0 \to K$ tal que $f \circ q_0 = \psi$.

$$\begin{tikzcd} T_0 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "q_0"'] & K \\ E_0 \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Ficamos com $f \circ \varepsilon_0 = f \circ (q_0 \circ \tau_0) = (f \circ q_0) \circ \tau_0 = \psi \circ \tau_0 = \delta$.

Seja $\alpha : E_0 \to K$ um homomorfismo tal que $\alpha \circ \varepsilon_0 = \delta$. Então, $\delta = \alpha \circ \varepsilon_0 = \alpha \circ (q_0 \circ \tau_0) = (\alpha \circ q_0) \circ \tau_0$. Pela unicidade de ψ, temos que $\alpha \circ q_0 = \psi$. Pela unicidade de f, ficamos com $\alpha = f$. Portanto, existe um único homomorfismo $f : E_0 \to K$ tal que $f \circ \varepsilon_0 = \delta$, ou seja, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} G \times H \arrow[r, "\varepsilon_0"] \arrow[dr, "\delta"'] & E_0 \arrow[d, "f"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Como K e δ são arbitrários, temos que $E_0 = T_0/\langle D \rangle_N$ é o produto exterior de G e H com ε_0.

Dessa forma, como $T_0 = (G \otimes H)_0$, temos que $E_0 = T_0/\langle D \rangle_N = (G \wedge H)_{\varepsilon_0}$, isto é, $\varepsilon_0 \in \mathcal{Q}_{(G,H,E_0)}$. Às vezes denotaremos o produto exterior $(G \wedge H)_{\varepsilon_0}$ simplesmente por "$(G \wedge H)_0$".

Seja $e_T \in (G\otimes H)_0$ o elemento neutro de $(G\otimes H)_0$. Com o exposto nos parágrafos anteriores, podemos mostrar a proposição 3.1.6 de uma outra maneira. Sendo $G\cap H = \{e_P\}$, temos que $D = \{e_T\}$ e, portanto, que $\langle D\rangle_N = D = \{e_T\}$. Assim, $(G\wedge H)_0 = (G\otimes H)_0/\langle D\rangle_N = (G\otimes H)_0/\{e_T\} \cong (G\otimes H)_0$.

Chamando $Q_0 = \mathcal{Q}_{(G,H,E_0)}$, temos que $Q_0 \neq \varnothing$ e, portanto, a ação $\Psi_0 : Aut(E_0) \to Sym(Q_0)$ definida como na seção anterior, é uma ação regular (livre e transitiva) e, portanto, fiel. Consequentemente, $|Aut(E_0)| = |Q_0| = |\mathcal{Q}_{(G,H,E_0)}|$ e também, $\forall \varepsilon \in E_0^{G\times H}$, temos que $\varepsilon \in \mathcal{Q}_{(G,H,E_0)}$ se, e somente se, $\mathcal{Q}_{(G,H,E_0)} = \big\{ f\circ\varepsilon \in E_0^{G\times H} \ : \ f \in Aut(E_0)\big\}$. Em particular, $\mathcal{Q}_{(G,H,E_0)} = \big\{ f\circ\varepsilon_0 \in E_0^{G\times H} \ : \ f \in Aut(E_0)\big\}$.

Acabamos de mostrar que, dado um grupo P e subgrupos normais $G\lhd P$ e $H\lhd P$, sempre existe algum grupo E e algum pareamento exterior $\varepsilon : G\times H \to E$ tais que $E = (G\wedge H)_\varepsilon$. Esse é o teorema de existência do produto exterior.

Considere a categoria E. Para cada objeto $X = (G\times H, c^P_{GH}, c^P_{HG}) \in Obj(\mathsf{E})$, seja um conjunto $E_X = E_{(G\times H, c^P_{GH}, c^P_{HG})}$ formado por todos os produtos exteriores de G e H com algum pareamento exterior. Isto é, para todo grupo E, temos que $E \in E_X$ se, e somente se, $\mathcal{Q}_{(G,H,E)} \neq \varnothing$, isto é, se, e somente se, existe algum $\varepsilon \in \mathcal{Q}_{(G,H,E_0)}$, que, por sua vez, acontece se, e somente se, $E = (G\wedge H)_\varepsilon$. Nessas últimas páginas mostramos que, para todo $X = (G\times H, c^P_{GH}, c^P_{HG}) \in Obj(\mathsf{E})$, temos $E_X \neq \varnothing$, pois $(G\otimes H)_0/\langle D\rangle_N = (G\wedge H)_0 \in E_X = E_{(G\times H, c^P_{GH}, c^P_{HG})}$.

Considere a categoria Grp dos grupos e homomorfismos, com a relação de isomorfismo de grupos, e seja $X = (G\times H, c^P_{GH}, c^P_{HG}) \in Obj(\mathsf{E})$. Pelo item (i) do teorema 3.1.4, se existe $E \in E_X$, então $[E] \subset E_X$. O item (ii) do mesmo teorema afirma que $E_X \subset [E], \forall E \in E_X$. Portanto, sempre temos que $E_X = [E], \forall E \in E_X$. Acima, mostramos que $(G\wedge H)_0 \in E_X$. Logo, ficamos com $E_X = [(G\wedge H)_0]$.

Dessa forma, para todo $X = (G\times H, c^P_{GH}, c^P_{HG}) \in Obj(\mathsf{E})$, concluimos que

$$E_X = E_{(G\times H, c^P_{GH}, c^P_{HG})} = \big[(G\otimes H)_0/\langle D\rangle_N\big] = [(G\wedge H)_0]\,.$$

Em termos de estrutura algébrica (classes de isomorfismo), todos os produtos exteriores de E_X são os mesmos. Por isso, é usual dizermos que o produto exterior de G e H é o grupo $(G\otimes H)_0/\langle D\rangle_N = (G\wedge H)_0$, único, a menos de isomorfismo. Nesse caso, o denotamos simplesmente por "$G\wedge H$".

Para cada $X = (G\times H, c^P_{GH}, c^P_{HG}) \in Obj(\mathsf{E})$, podemos denotar qualquer elemento de E_X por "$G\wedge H$". Uma outra alternativa é denotar o próprio conjunto E_X por "$G\wedge H$" e chamar esse conjunto de "o produto exterior de G e H". No momento iremos usar a primeira alternativa.

Sejam $X = (G\times H, c^P_{GH}, c^P_{HG}) \in Obj(\mathsf{E})$, $G\wedge H \in E_X$ e $\varepsilon \in \mathcal{Q}_{(G,H,G\wedge H)}$. Denotaremos o gerador $\varepsilon(g,h) \in G\wedge H$ por "$g\wedge h$", quaisquer que sejam $g\in G$ e $h \in H$. Lembremos que $G\wedge H = \langle im(\varepsilon)\rangle = Sp\big(im(\varepsilon)\big)$. Portanto, para todo

$v \in G \wedge H = Sp\big(im(\varepsilon)\big)$, existem $v_1, ..., v_n \in im(\varepsilon)$ tais que $v = v_1 \cdot ... \cdot v_n$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$. Daí, existem $g_1, ..., g_n \in G$ e $h_1, ..., h_n \in H$ tais que $v_j = \varepsilon(g_j, h_j) = g_j \wedge h_j$, $\forall j \in \{1, ..., n\}$. Daí, $v = \varepsilon(g_1, h_1) \cdot ... \cdot \varepsilon(g_n, h_n)$, isto é, $v = (g_1 \wedge h_1) \cdot ... \cdot (g_n \wedge h_n)$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$.

Seja $e \in G \wedge H$ o elemento neutro. É claro que $z \wedge z = \varepsilon(z, z) = e$, $\forall z \in G \cap H$.

Note que $\varepsilon(ax, y) = \varepsilon({}^a x, {}^a y)\, \varepsilon(a, y) = \varepsilon(axa^{-1}, aya^{-1})\, \varepsilon(a, y)$ e que $\varepsilon(x, by) = \varepsilon(x, b)\, \varepsilon({}^b x, {}^b y) = \varepsilon(x, b)\, \varepsilon(bxb^{-1}, byb^{-1})$, $\forall a, x \in G$, $\forall b, y \in H$. Portanto, temos que $(ax) \wedge y = [({}^a x) \wedge ({}^a y)](a \wedge y) = [(axa^{-1}) \wedge (aya^{-1})](a \wedge y)$ e que $x \wedge (by) = (x \wedge b)[({}^b x) \wedge ({}^b y)] = (x \wedge b)[(bxb^{-1}) \wedge (byb^{-1})]$, $\forall a, x \in G$, $\forall b, y \in H$.

Sem ambiguidades, podemos apresentar as relações do parágrafo anterior como sendo, $\forall a, x \in G$, $\forall b, y \in H$,

$$ax \wedge y = ({}^a x \wedge {}^a y)(a \wedge y) = (axa^{-1} \wedge aya^{-1})(a \wedge y)$$

e

$$x \wedge by = (x \wedge b)({}^b x \wedge {}^b y) = (x \wedge b)(bxb^{-1} \wedge byb^{-1})\,.$$

Muito mais, temos a releitura de todas as igualdades do teorema 1.4.8, as quais enunciamos abaixo.

Teorema 3.2.1. Sejam $X = (G \times H, c^P_{GH}, c^P_{HG}) \in Obj(\mathsf{E})$, digamos com $G \lhd P$ e $H \lhd P$, $G \wedge H \in E_X$, $e_P \in P$ o elemento neutro de P e $e \in G \wedge H$ o elemento neutro de $G \wedge H$. Valem

(i) Para todos $a, x \in G$ e todos $b, y \in H$, temos que

- $ax \wedge y = ({}^a x \wedge {}^a y)(a \wedge y) = (axa^{-1} \wedge aya^{-1})(a \wedge y)\,;$
- $x \wedge by = (x \wedge b)({}^b x \wedge {}^b y) = (x \wedge b)(bxb^{-1} \wedge byb^{-1})\,;$
- $axa^{-1} \wedge aya^{-1} = {}^a x \wedge {}^a y = (ax \wedge y) \cdot (a \wedge y)^{-1}\,;$
- $bxb^{-1} \wedge byb^{-1} = {}^b x \wedge {}^b y = (x \wedge b)^{-1} \cdot (x \wedge by)\,.$

(ii) Para todos $g, a, x \in G$ e todos $h, b, y \in H$, temos que

- ${}^g(ax) \wedge {}^g y = ({}^{ga} x \wedge {}^{ga} y)({}^g a \wedge {}^g y)\,;$
- ${}^g x \wedge {}^g(by) = ({}^g x \wedge {}^g b)({}^{gb} x \wedge {}^{gb} y)\,;$
- ${}^h(ax) \wedge {}^h y = ({}^{ha} x \wedge {}^{ha} y)({}^h a \wedge {}^h y)\,;$
- ${}^h x \wedge {}^h(by) = ({}^h x \wedge {}^h b)({}^{hb} x \wedge {}^{hb} y)\,;$
- ${}^{ga} x \wedge {}^{ga} y = [{}^g(ax) \wedge {}^g y] \cdot ({}^g a \wedge {}^g y)^{-1}\,;$
- ${}^{gb} x \wedge {}^{gb} y = ({}^g x \wedge {}^g b)^{-1} \cdot [{}^g x \wedge {}^g(by)]\,;$
- ${}^{ha} x \wedge {}^{ha} y = [{}^h(ax) \wedge {}^h y] \cdot ({}^h a \wedge {}^h y)^{-1}\,;$
- ${}^{hb} x \wedge {}^{hb} y = ({}^h x \wedge {}^h b)^{-1} \cdot [{}^h x \wedge {}^h(by)]\,.$

(iii) Para todos $g, a, x \in G$ e todos $h, b, y \in H$, temos que

- ${}^{g}(ax) \wedge {}^{g}y = ({}^{g}a \wedge {}^{gx}y)({}^{g}x \wedge {}^{g}y)\,;$
- ${}^{g}x \wedge {}^{g}(by) = ({}^{g}x \wedge {}^{g}y)({}^{gy}x \wedge {}^{g}b)\,;$
- ${}^{h}(ax) \wedge {}^{h}y = ({}^{h}a \wedge {}^{hx}y)({}^{h}x \wedge {}^{h}y)\,;$
- ${}^{h}x \wedge {}^{h}(by) = ({}^{h}x \wedge {}^{h}y)({}^{hy}x \wedge {}^{h}b)\,;$
- ${}^{g}a \wedge {}^{gx}y = [{}^{g}(ax) \wedge {}^{g}y] \cdot ({}^{g}x \wedge {}^{g}y)^{-1}\,;$
- ${}^{gy}x \wedge {}^{g}b = ({}^{g}x \wedge {}^{g}y)^{-1} \cdot [{}^{g}x \wedge {}^{g}(by)]\,;$
- ${}^{h}a \wedge {}^{hx}y = [{}^{h}(ax) \wedge {}^{h}y] \cdot ({}^{h}x \wedge {}^{h}y)^{-1}\,;$
- ${}^{hy}x \wedge {}^{h}b = ({}^{h}x \wedge {}^{h}y)^{-1} \cdot [{}^{h}x \wedge {}^{h}(by)]\,;$
- $ax \wedge y = (a \wedge {}^{x}y)(x \wedge y) = (a \wedge xyx^{-1})(x \wedge y)\,;$
- $x \wedge by = (x \wedge y)({}^{y}x \wedge b) = (x \wedge y)(yxy^{-1} \wedge b)\,.$

(iv) $e_P \wedge h = e = g \wedge e_P$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$;

(v) Para todos $x, g \in G$ e todos $y, h \in H$, temos que

- $({}^{g}x \wedge {}^{g}y)^{-1} = {}^{g}x^{-1} \wedge {}^{gx}y\,;$
- $({}^{g}x \wedge {}^{g}y)^{-1} = {}^{gy}x \wedge {}^{g}y^{-1}\,;$
- $({}^{h}x \wedge {}^{h}y)^{-1} = {}^{h}x^{-1} \wedge {}^{hx}y\,;$
- $({}^{h}x \wedge {}^{h}y)^{-1} = {}^{hy}x \wedge {}^{h}y^{-1}\,;$
- $(x \wedge y)^{-1} = x^{-1} \wedge {}^{x}y = x^{-1} \wedge xyx^{-1}\,;$
- $(x \wedge y)^{-1} = {}^{y}x \wedge y^{-1} = yxy^{-1} \wedge y^{-1}\,;$
- $(x^{-1} \wedge {}^{x}y)^{-1} = x \wedge y\,;$
- $({}^{y}x \wedge y^{-1})^{-1} = x \wedge y\,.$

(vi) ${}^{ab}x \wedge {}^{ab}y = (a \wedge b)({}^{ba}x \wedge {}^{ba}y)(a \wedge b)^{-1}$, $\forall a, x \in G$, $\forall b, y \in H$;

(vii) ${}^{[a,b]}g \wedge {}^{[a,b]}h = (a \wedge b)(g \wedge h)(a \wedge b)^{-1}$, $\forall a, g \in G$, $\forall b, h \in H$;

(viii) Para todo $g \in G$ e todos $y, h \in H$, temos que

$$[g, h] \wedge y = g^{h}g^{-1} \wedge y = (g \wedge h)({}^{y}g \wedge {}^{y}h)^{-1} = (g \wedge h)(ygy^{-1} \wedge yhy^{-1})^{-1}\,;$$

(ix) Para todos $x, g \in G$ e todo $h \in H$, temos que

$$x \wedge [g, h] = x \wedge {}^{g}hh^{-1} = ({}^{x}g \wedge {}^{x}h)(g \wedge h)^{-1} = (xgx^{-1} \wedge xhx^{-1})(g \wedge h)^{-1}\,;$$

(x) $[g \wedge h, a \wedge b] = g^{h}g^{-1} \wedge {}^{a}bb^{-1} = [g, h] \wedge [a, b]$, $\forall a, g \in G$, $\forall b, h \in H$;

(xi) $(u \wedge v)^{-1} = v \wedge u\,,\ \forall u, v \in G \cap H$.

3.3 O funtor produto exterior

Sejam $X = (A\times B, c^J_{AB}, c^J_{BA}) \in Obj(\mathsf{E})$, $Y = (G\times H, c^P_{GH}, c^P_{HG}) \in Obj(\mathsf{E})$, $\alpha\times\beta \in Hom_{\mathsf{E}}(X,Y)$, $W, E \in Obj(\mathsf{Grp})$, $\omega \in \mathcal{Q}_{(A,B,W)}$ e $\varepsilon \in \mathcal{Q}_{(G,H,E)}$, ou seja, $W = (A\wedge B)_\omega$ e $E = (G\wedge H)_\varepsilon$.

$$\begin{tikzcd}
(A\times B, c^J_{AB}, c^J_{BA}) \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\alpha\times\beta"'] & W \\
(G\times H, c^P_{GH}, c^P_{HG}) \arrow[r, "\varepsilon"] & E
\end{tikzcd}$$

Pela proposição 1.5.3, temos que $\varepsilon\circ(\alpha\times\beta) : A\times B \to E$ é um pareamento exterior. Pela definição de produto exterior, existe um único homomorfismo $\varphi : W \to E$ tal que $\varphi\circ\omega = \varepsilon\circ(\alpha\times\beta)$. Vamos denotar o homomorfismo φ por "$(\alpha\wedge\beta)^{(X,\omega)}_{(Y,\varepsilon)}$", por "$(\alpha\wedge\beta)^{X,\omega}_{Y,\varepsilon}$" ou por "$(\alpha\wedge\beta)^{X\omega}_{Y\varepsilon}$". Se a categoria E estiver subentendida, denotaremos $(\alpha\wedge\beta)^{(X,\omega)}_{(Y,\varepsilon)}$ por "$(\alpha\wedge\beta)^{(A\times B,\omega)}_{(G\times H,\varepsilon)}$" ou por "$(\alpha\wedge\beta)^{A\times B,\omega}_{G\times H,\varepsilon}$". Se os grupos estiverem subentendidos, denotaremos $(\alpha\wedge\beta)^{(X,\omega)}_{(Y,\varepsilon)}$ por "$(\alpha\wedge\beta)^{\omega}_{\varepsilon}$".

Portanto, dizemos que, dados objetos $X = (A\times B, c^J_{AB}, c^J_{BA}) \in Obj(\mathsf{E})$ e $Y = (G\times H, c^P_{GH}, c^P_{HG}) \in Obj(\mathsf{E})$, um morfismo $\alpha\times\beta \in Hom_{\mathsf{E}}(X,Y)$ e grupos W e E tais que $\omega \in \mathcal{Q}_{(A,B,W)}$ e $\varepsilon \in \mathcal{Q}_{(G,H,E)}$, existe um único homomorfismo $(\alpha\wedge\beta)^{(X,\omega)}_{(Y,\varepsilon)} : (A\wedge B)_\omega \to (G\wedge H)_\varepsilon$ tal que

$$[(\alpha\wedge\beta)^{(X,\omega)}_{(Y,\varepsilon)}]\circ\omega = \varepsilon\circ(\alpha\times\beta)\,.$$

Dizendo de outra maneira, todo diagrama da forma

$$\begin{tikzcd}
(A\times B, c^J_{AB}, c^J_{BA}) \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\alpha\times\beta"'] & (A\wedge B)_\omega \\
(G\times H, c^P_{GH}, c^P_{HG}) \arrow[r, "\varepsilon"] & (G\wedge H)_\varepsilon
\end{tikzcd}$$

no qual ω e ε são pareamentos exteriores, pode ser completado para um quadrado comutativo:

$$\begin{tikzcd}
(A\times B, c^J_{AB}, c^J_{BA}) \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\alpha\times\beta"'] & (A\wedge B)_\omega \arrow[d, "(\alpha\wedge\beta)^{(X,\omega)}_{(Y,\varepsilon)}"] \\
(G\times H, c^P_{GH}, c^P_{HG}) \arrow[r, "\varepsilon"] & (G\wedge H)_\varepsilon
\end{tikzcd}$$

Para todo $a\in A$ e todo $b \in B$ o homomorfismo $(\alpha\wedge\beta)^{(X,\omega)}_{(Y,\varepsilon)}$ aplicado em um gerador $a \wedge b \in W$ resulta em

$$\begin{aligned}
[(\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega)}_{(Y,\varepsilon)}](a \wedge b) &= [(\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega)}_{(Y,\varepsilon)}]\big(\omega(a,b)\big) \\
&= \{[(\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega)}_{(Y,\varepsilon)}] \circ \omega\}(a,b) \\
&= [\varepsilon \circ (\alpha\times\beta)](a,b) \\
&= \varepsilon\big((\alpha\times\beta)(a,b)\big) \\
&= \varepsilon\big(\alpha(a),\beta(b)\big) \\
&= \alpha(a)\wedge\beta(b)\,.
\end{aligned}$$

Assim, é fácil ver que, se $\alpha : A \to G$ e $\beta : B \to H$ são sobrejetoras, então $(\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega)}_{(Y,\varepsilon)} : (A\wedge B)_\omega \to (G\wedge H)_\varepsilon$ é sobrejetora. De fato, seja $v \in im(\varepsilon)$. Assim, existem $g \in G$ e $h \in H$ tais que $v = \varepsilon(g,h)$. Como α e β são sobrejetoras, existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $g = \alpha(a)$ e $h = \beta(b)$. Daí, $v = \varepsilon(g,h) = g \wedge h = \alpha(a)\wedge\beta(b) = [(\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega)}_{(Y,\varepsilon)}](a \wedge b) \in im\big((\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega)}_{(Y,\varepsilon)}\big)$. Como v é qualquer, temos que $im(\varepsilon) \subset im\big((\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega)}_{(Y,\varepsilon)}\big) \leqslant (G\wedge H)_\varepsilon$. Assim, $(G\wedge H)_\varepsilon = \langle im(\varepsilon)\rangle \leqslant \big\langle im\big((\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega)}_{(Y,\varepsilon)}\big)\big\rangle = im\big((\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega)}_{(Y,\varepsilon)}\big) \leqslant (G\wedge H)_\varepsilon$ e, portanto, $im\big((\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega)}_{(Y,\varepsilon)}\big) = (G\wedge H)_\varepsilon$. Logo, $(\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega)}_{(Y,\varepsilon)}$ é sobrejetora.

Observação 3.3.1. Sejam $X = (A\times B, c^J_{AB}, c^J_{BA})$, $Y = (G\times H, c^P_{GH}, c^P_{HG})$ e $Z = (M\times N, c^L_{MN}, c^L_{NM})$ objetos de E, $\alpha\times\beta \in Hom_{\mathsf{E}}(X,Y)$, $\gamma\times\delta \in Hom_{\mathsf{E}}(Y,Z)$, $W, E, F \in Obj(\mathsf{Grp})$, $\omega \in \mathcal{Q}_{(A,B,W)}$, $\varepsilon \in \mathcal{Q}_{(G,H,E)}$ e $\eta \in \mathcal{Q}_{(M,N,F)}$, ou seja, $W = (A\wedge B)_\omega$, $E = (G\wedge H)_\varepsilon$ e $F = (M\wedge N)_\eta$. Pelo parágrafo anterior, existem únicos homomorfismos $(\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega)}_{(Y,\varepsilon)} : W \to E$ e $(\gamma \wedge \delta)^{(Y,\varepsilon)}_{(Z,\eta)} : E \to F$ tais que $[(\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega)}_{(Y,\varepsilon)}] \circ \omega = \varepsilon \circ (\alpha\times\beta)$ e $[(\gamma \wedge \delta)^{(Y,\varepsilon)}_{(Z,\eta)}] \circ \varepsilon = \eta \circ (\gamma\times\delta)$.

$$\begin{tikzcd}
(A\times B, c^J_{AB}, c^J_{BA}) \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\alpha\times\beta"'] & (A\wedge B)_\omega \arrow[d, "(\alpha\wedge\beta)^{(X,\omega)}_{(Y,\varepsilon)}"] \\
(G\times H, c^P_{GH}, c^P_{HG}) \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\gamma\times\beta"'] & (G\wedge H)_\varepsilon \arrow[d, "(\gamma\wedge\delta)^{(Y,\varepsilon)}_{(Z,\eta)}"] \\
(M\times N, c^L_{MN}, c^L_{NM}) \arrow[r, "\eta"] & (M\wedge N)_\eta
\end{tikzcd}$$

Também, $(\gamma\times\delta) \circ (\alpha\times\beta) = (\gamma \circ \alpha) \times (\delta \circ \beta) \in Hom_{\mathsf{E}}(X,Z)$ e, portanto, existe um único homomorfismo $[(\gamma \circ \alpha) \wedge (\delta \circ \beta)]^{(X,\omega)}_{(Z,\eta)} : W \to F$ tal que $\{[(\gamma \circ \alpha) \wedge (\delta \circ \beta)]^{(X,\omega)}_{(Z,\eta)}\} \circ \omega = \eta \circ [(\gamma \circ \alpha) \times (\delta \circ \beta)]$. De W em F também temos o homomorfismo $[(\gamma \wedge \delta)^{(Y,\varepsilon)}_{(Z,\eta)}] \circ [(\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega)}_{(Y,\varepsilon)}] : W \to F$.

$$\begin{tikzcd}
(A\times B, c^J_{AB}, c^J_{BA}) \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "(\gamma\times\delta)\circ(\alpha\times\beta)"'] & (A\wedge B)_\omega \arrow[d, shift right, "{[(\gamma\circ\alpha)\wedge(\delta\circ\beta)]^{(X,\omega)}_{(Z,\eta)}}"'] \arrow[d, shift left, "{[(\gamma\wedge\delta)^{(Y,\varepsilon)}_{(Z,\eta)}] \circ [(\alpha\wedge\beta)^{(X,\omega)}_{(Y,\varepsilon)}]}"] \\
(M\times N, c^L_{MN}, c^L_{NM}) \arrow[r, "\eta"'] & (M\wedge N)_\eta
\end{tikzcd}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\left\{[(\gamma \wedge \delta)^{(Y,\varepsilon)}_{(Z,\eta)}] \circ [(\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega)}_{(Y,\varepsilon)}]\right\} \circ \omega &= [(\gamma \wedge \delta)^{(Y,\varepsilon)}_{(Z,\eta)}] \circ \left\{[(\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega)}_{(Y,\varepsilon)}] \circ \omega\right\} \\
&= [(\gamma \wedge \delta)^{(Y,\varepsilon)}_{(Z,\eta)}] \circ [\varepsilon \circ (\alpha\times\beta)] \\
&= \left\{[(\gamma \wedge \delta)^{(Y,\varepsilon)}_{(Z,\eta)}] \circ \varepsilon\right\} \circ (\alpha\times\beta) \\
&= [\eta \circ (\gamma\times\delta)] \circ (\alpha\times\beta) \\
&= \eta \circ [(\gamma\times\delta) \circ (\alpha\times\beta)] \\
&= \eta \circ [(\gamma \circ \alpha) \times (\delta \circ \beta)] .
\end{aligned}$$

Pela unicidade de $[(\gamma \circ \alpha) \wedge (\delta \circ \beta)]^{(X,\omega)}_{(Z,\eta)}$, ficamos com

$$[(\gamma \wedge \delta)^{(Y,\varepsilon)}_{(Z,\eta)}] \circ [(\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega)}_{(Y,\varepsilon)}] = [(\gamma \circ \alpha) \wedge (\delta \circ \beta)]^{(X,\omega)}_{(Z,\eta)} .$$

Observação 3.3.2. Sejam $X = (G\times H, c^P_{GH}, c^P_{HG})$ um objeto de E, o morfismo $id_X = id_G \times id_H \in Hom_{\mathsf{E}}(X,X)$, grupos $E_1, E_2 \in Obj(\mathsf{Grp})$, $\varepsilon_1 \in \mathcal{Q}_{(G,H,E_1)}$ e $\varepsilon_2 \in \mathcal{Q}_{(G,H,E_2)}$, isto é, $E_1 = (G\wedge H)_{\varepsilon_1}$ e $E_2 = (G\wedge H)_{\varepsilon_2}$. Pelo item (ii) do teorema 3.1.4, existe um único isomorfismo $i : E_1 \to E_2$ tal que $\varepsilon_2 = i \circ \varepsilon_1$. Pelo parágrafo inicial, existe um único homomorfismo $(id_G \wedge id_H)^{(X,\varepsilon_1)}_{(X,\varepsilon_2)} : E_1 \to E_2$ tal que $[(id_G \wedge id_H)^{(X,\varepsilon_1)}_{(X,\varepsilon_2)}] \circ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \circ (id_G \times id_H)$.

$$\begin{tikzcd}
(G\times H, c^P_{GH}, c^P_{HG}) \arrow[r, "\varepsilon_1"] \arrow[d, "id_G\times id_H"'] & (G\wedge H)_{\varepsilon_1} \arrow[d, shift right, "i"'] \arrow[d, shift left, "(id_G\wedge id_H)^{(X,\varepsilon_1)}_{(X,\varepsilon_2)}"] \\
(G\times H, c^P_{GH}, c^P_{HG}) \arrow[r, "\varepsilon_2"] & (G\wedge H)_{\varepsilon_2}
\end{tikzcd}$$

É claro que $i \circ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_2 \circ (id_G \times id_H)$. Daí, pela unicidade de $(id_G \wedge id_H)^{(X,\varepsilon_1)}_{(X,\varepsilon_2)}$, temos que $i = (id_G \wedge id_H)^{(X,\varepsilon_1)}_{(X,\varepsilon_2)}$. Assim, podemos reenunciar o item (ii) do teorema 3.1.4 da seguinte maneira: Sejam $X = (G\times H, c^P_{GH}, c^P_{HG}) \in Obj(\mathsf{E})$, grupos E_1 e E_2 e $\varepsilon_1 \in \mathcal{Q}_{(G,H,E_1)}$ e $\varepsilon_2 \in \mathcal{Q}_{(G,H,E_2)}$, isto é, $E_1 = (G\wedge H)_{\varepsilon_1}$ e $E_2 = (G\wedge H)_{\varepsilon_2}$. Então, o homomorfismo $(id_G \wedge id_H)^{(X,\varepsilon_1)}_{(X,\varepsilon_2)} : (G{\wedge}H)_{\varepsilon_1} \to (G{\wedge}H)_{\varepsilon_2}$ é um isomorfismo e, além disso, é o único isomorfismo de $(G{\wedge}H)_{\varepsilon_1}$ em $(G{\wedge}H)_{\varepsilon_2}$ tal que

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2 \circ (id_G {\times} id_H) = [(id_G \wedge id_H)^{(X,\varepsilon_1)}_{(X,\varepsilon_2)}] \circ \varepsilon_1 \,,$$

isto é, tal que o triângulo abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
 & (G{\wedge}H)_{\varepsilon_1} \arrow[dd, "(id_G\wedge id_H)^{(X,\varepsilon_1)}_{(X,\varepsilon_2)}"] \\
(G{\times}H, c^P_{GH}, c^P_{HG}) \arrow[ur, "\varepsilon_1"] \arrow[dr, "\varepsilon_2"'] & \\
 & (G{\wedge}H)_{\varepsilon_2}
\end{tikzcd}$$

Em particular, se $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, então $E_1 = E_2 = E$ e

$$(id_G \wedge id_H)^{(X,\varepsilon_1)}_{(X,\varepsilon_2)} = (id_G \wedge id_H)^{(X,\varepsilon)}_{(X,\varepsilon)} = id_E \in Aut(E)\,.$$

Para cada objeto $X = (G \times H, c^P_{GH}, c^P_{HG}) \in Obj(\mathsf{E})$, considere o produto exterior construido na seção anterior, $E_0 = T_0/\langle D\rangle_N = (G \wedge H)_{\varepsilon_0}$, em que $T_0 = (G \otimes H)_0 = F_{G\times H}\big/\langle S_{(c^P_{GH},c^P_{HG})}\rangle_N = (G \otimes H)^{(c^P_{GH},c^P_{HG})}_{\tau_0} = (G \otimes H)^{(c^P_{GH},c^P_{HG})}_0$, $\tau_0 = p_0 \circ i_0 \in \mathcal{P}^{(c^P_{GH},c^P_{HG})}_{(G,H,T_0)}$ e $\varepsilon_0 = q_0 \circ \tau_0 \in \mathcal{Q}_{(G,H,E_0)}$. Seja $\mathsf{E}^1_0 : Obj(\mathsf{E}) \to Obj(\mathsf{Grp})$ uma função tal que $\mathsf{E}^1_0(G{\times}H, c^P_{GH}, c^P_{HG}) = (G{\wedge}H)_{\varepsilon_0}\,, \forall (G{\times}H, c^P_{GH}, c^P_{HG}) \in Obj(\mathsf{E})$. Seja também uma função $\mathsf{E}^2_0 : Mor(\mathsf{E}) \to Mor(\mathsf{Grp})$ tal que, para todo par de objetos $X = (A{\times}B, c^J_{AB}, c^J_{BA}) \in Obj(\mathsf{E})$ e $Y = (G{\times}H, c^P_{GH}, c^P_{HG}) \in Obj(\mathsf{E})$ e para todo morfismo $\alpha \times \beta \in Hom_{\mathsf{E}}(X,Y)$ entre eles, tenhamos $\mathsf{E}^2_0(\alpha \times \beta) = (\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega_0)}_{(Y,\varepsilon_0)} \in Hom_{\mathsf{Grp}}\big((A \wedge B)_{\omega_0}, (G \wedge H)_{\varepsilon_0}\big)$, em que ω_0 e ε_0 são os pareamentos exteriores construidos na seção anterior.

Teorema 3.3.3. Seja $\mathsf{E}_0 = (\mathsf{E}^1_0, \mathsf{E}^2_0)$, como definidos acima. Então, E_0 é um funtor covariante $\mathsf{E}_0 : \mathsf{E} \to \mathsf{Grp}$.

Demonstração: Note que, para todos $X = (A{\times}B, c^J_{AB}, c^J_{BA}) \in Obj(\mathsf{E})$ e $Y = (G \times H, c^P_{GH}, c^P_{HG}) \in Obj(\mathsf{E})$ e todo morfismo $\alpha{\times}\beta \in Hom_{\mathsf{E}}(X,Y)$, temos que $\mathsf{E}^1_0(X) = (A \wedge B)_{\omega_0}$, que $\mathsf{E}^1_0(Y) = (G \wedge H)_{\varepsilon_0}$ e que $\mathsf{E}^2_0(\alpha \times \beta) = (\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega_0)}_{(Y,\varepsilon_0)} \in Hom_{\mathsf{Grp}}\big((A \wedge B)_{\omega_0}, (G \wedge H)_{\varepsilon_0}\big)$, isto é, temos que $\mathsf{E}^2_0(\alpha{\times}\beta) \in Hom_{\mathsf{Grp}}\big(\mathsf{E}^1_0(X), \mathsf{E}^1_0(Y)\big)$.

Sejam $X = (A{\times}B, c^J_{AB}, c^J_{BA})$, $Y = (G{\times}H, c^P_{GH}, c^P_{HG})$ e $Z = (M{\times}N, c^L_{MN}, c^L_{NM})$ objetos de E, $\alpha{\times}\beta \in Hom_{\mathsf{E}}(X,Y)$ e $\gamma{\times}\delta \in Hom_{\mathsf{E}}(Y,Z)$. Pela observação 3.3.1, temos que

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}^2_0\big((\gamma{\times}\delta) \circ (\alpha{\times}\beta)\big) &= \mathsf{E}^2_0\big((\gamma \circ \alpha) \times (\delta \circ \beta)\big) \\
&= [(\gamma \circ \alpha) \wedge (\delta \circ \beta)]^{(X,\omega_0)}_{(Z,\eta_0)} \\
&= [(\gamma \wedge \delta)^{(Y,\varepsilon_0)}_{(Z,\eta_0)}] \circ [(\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega_0)}_{(Y,\varepsilon_0)}] \\
&= [\mathsf{E}^2_0(\gamma{\times}\delta)] \circ [\mathsf{E}^2_0(\alpha{\times}\beta)] \in Hom_{\mathsf{Grp}}(W_0, F_0)\,,
\end{aligned}$$

em que $(\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega_0)}_{(Y,\varepsilon_0)} \in Hom_{\mathsf{Grp}}(W_0, E_0)$, $(\gamma \wedge \delta)^{(Y,\varepsilon_0)}_{(Z,\eta_0)} \in Hom_{\mathsf{Grp}}(E_0, F_0)$, $\omega_0 \in \mathcal{Q}_{(A,B,W_0)}$, $\varepsilon_0 \in \mathcal{Q}_{(G,H,E_0)}$ e $\eta_0 \in \mathcal{Q}_{(M,N,F_0)}$, isto é, $W_0 = (A \wedge B)_{\omega_0}$, $E_0 = (G \wedge H)_{\varepsilon_0}$ e $F_0 = (M \wedge N)_{\eta_0}$.

Sejam $X = (G \times H, c^P_{GH}, c^P_{HG}) \in Obj(\mathsf{E})$ e $id_G \times id_H = id_X \in Hom_{\mathsf{E}}(X, X)$. Pela observação 3.3.2, temos que

$$\mathsf{E}^2_0(id_X) = \mathsf{E}^2_0(id_G \times id_H) = (id_G \wedge id_H)^{(X,\varepsilon_0)}_{(X,\varepsilon_0)} = id_{E_0} \in Hom_{\mathsf{Grp}}(E_0, E_0)\,,$$

em que $\varepsilon_0 \in \mathcal{Q}_{(G,H,E_0)}$, isto é, $E_0 = (G \wedge H)_{\varepsilon_0} = \mathsf{E}^1_0(X)$, ou seja, $\mathsf{E}^2_0(id_X) = id_{\mathsf{E}^1_0(X)}$.
■

Como é usual, denotamos $\mathsf{E}^1_0(X)$ por "$\mathsf{E}_0(X)$" ou por "E_0X" e denotamos $\mathsf{E}^2_0(\alpha \times \beta)$ por "$\mathsf{E}_0(\alpha \times \beta)$", $\forall X \in Obj(\mathsf{E})$, $\forall \alpha \times \beta \in Mor(\mathsf{E})$.

Sejam A, B, G e H grupos tais que $A \cong G$ e $B \cong H$. Assim, existem $\alpha : A \to G$ e $\beta : B \to H$ isomorfismos. Considere os objetos $X = (A \times B, c^J_{AB}, c^J_{BA}) \in Obj(\mathsf{E})$ e $Y = (G \times H, c^P_{GH}, c^P_{HG}) \in Obj(\mathsf{E})$. Se α e β preservam as restrições da conjugação e coincidem na intersecção $A \cap B$, então $\alpha \times \beta \in Hom_{\mathsf{E}}(X, Y)$ e, como $\alpha \times \beta$ é bijetora, então $\mathsf{E}_0(\alpha \times \beta) = (\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega_0)}_{(Y,\varepsilon_0)} : (A \wedge B)_0 \to (G \wedge H)_0$ é um isomorfismo e, portanto, $(A \wedge B)_0 \cong (G \wedge H)_0$. Dizendo de outra maneira, como a relação é funtorial, para que tenhamos $(A \wedge B)_0 \cong (G \wedge H)_0$ é suficiente que existam isomorfismos $\alpha : A \to G$ e $\beta : B \to H$ que preservam as restrições da conjugação e que coincidem na intersecção $A \cap B$. Claro que se os grupos forem subgrupos centrais, isto é, $A \leqslant Z(J)$, $B \leqslant Z(J)$, $G \leqslant Z(P)$ e $H \leqslant Z(P)$, então as restrições c^J_{AB} , c^J_{BA} , c^P_{GH} e c^P_{HG} são ações triviais e, como quaisquer homomorfismos preservam as ações triviais, para que $\alpha \times \beta \in Hom_{\mathsf{E}}(X, Y)$ seja um isomorfismo de E, basta que $\alpha|_{A \cap B} = \beta|_{A \cap B}$.

Observação 3.3.4. Sejam $X = (A \times B, c^J_{AB}, c^J_{BA})$ e $Y = (G \times H, c^P_{GH}, c^P_{HG})$ objetos de E, um morfismo $\alpha \times \beta \in Hom_{\mathsf{E}}(X, Y)$, grupos W_1, W_2, E_1 e E_2, $\omega_1 \in \mathcal{Q}_{(A,B,W_1)}$, $\omega_2 \in \mathcal{Q}_{(A,B,W_2)}$, $\varepsilon_1 \in \mathcal{Q}_{(G,H,E_1)}$ e $\varepsilon_2 \in \mathcal{Q}_{(G,H,E_2)}$, isto é, $W_1 = (A \wedge B)_{\omega_1}$, $W_2 = (A \wedge B)_{\omega_2}$, $E_1 = (G \wedge H)_{\varepsilon_1}$ e $E_2 = (G \wedge H)_{\varepsilon_2}$. Assim, existem únicos homomorfismos $\varphi_1 = (\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega_1)}_{(Y,\varepsilon_1)} : W_1 \to E_1$ e $\varphi_2 = (\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega_2)}_{(Y,\varepsilon_2)} : W_2 \to E_2$ tais que $\varphi_1 \circ \omega_1 = [(\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega_1)}_{(Y,\varepsilon_1)}] \circ \omega_1 = \varepsilon_1 \circ (\alpha \times \beta)$ e $\varphi_2 \circ \omega_2 = [(\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega_2)}_{(Y,\varepsilon_2)}] \circ \omega_2 = \varepsilon_2 \circ (\alpha \times \beta)$. Pela observação 3.3.2, os homomorfismos $i = (id_A \wedge id_B)^{(X,\omega_1)}_{(X,\omega_2)} : W_1 \to W_2$ e $j = (id_G \wedge id_H)^{(Y,\varepsilon_1)}_{(Y,\varepsilon_2)} : E_1 \to E_2$ são os únicos isomorfismos tais que $i \circ \omega_1 = [(id_A \wedge id_B)^{(X,\omega_1)}_{(X,\omega_2)}] \circ \omega_1 = \omega_2$ e

$j \circ \varepsilon_1 = [(id_G \wedge id_H)^{(Y,\varepsilon_1)}_{(Y,\varepsilon_2)}] \circ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \,.$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\omega_1"] \arrow[dr, "\omega_2"'] \arrow[rrr, bend left, "\alpha\times\beta"] & W_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "i"] & E_1 \arrow[d, "j"] & Y \arrow[l, "\varepsilon_1"'] \arrow[dl, "\varepsilon_2"] \\
& W_2 \arrow[r, "\varphi_2"'] & E_2 &
\end{tikzcd}$$

Nessas hipóteses, o quadrado central comuta:

$$\begin{tikzcd}
(A\wedge B)_{\omega_1} \arrow[r, "(\alpha\wedge\beta)^{(X,\omega_1)}_{(Y,\varepsilon_1)}"] \arrow[d, "(id_A\wedge id_B)^{(X,\omega_1)}_{(X,\omega_2)}"'] & (G\wedge H)_{\varepsilon_1} \arrow[d, "(id_G\wedge id_H)^{(Y,\varepsilon_1)}_{(Y,\varepsilon_2)}"] \\
(A\wedge B)_{\omega_2} \arrow[r, "(\alpha\wedge\beta)^{(X,\omega_2)}_{(Y,\varepsilon_2)}"'] & (G\wedge H)_{\varepsilon_2}
\end{tikzcd}$$

$$[(\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega_2)}_{(Y,\varepsilon_2)}] \circ [(id_A \wedge id_B)^{(X,\omega_1)}_{(X,\omega_2)}] = [(id_G \wedge id_H)^{(Y,\varepsilon_1)}_{(Y,\varepsilon_2)}] \circ [(\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega_1)}_{(Y,\varepsilon_1)}] \,.$$

Vejamos. Pela proposição 1.5.3, temos que $\varepsilon_2 \circ (\alpha\times\beta) : A\times B \to E_2$ é um pareamento exterior. Daí, pela definição de produto exterior, existe um único homomorfismo $\psi : W_1 \to E_2$ tal que $\psi \circ \omega_1 = \varepsilon_2 \circ (\alpha\times\beta)$, isto é, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
A\times B \arrow[r, "\omega_1"] \arrow[dr, "\varepsilon_2\circ(\alpha\times\beta)"'] & W_1 \arrow[d, "\psi"] \\
& E_2
\end{tikzcd}$$

Por outro lado temos que $j\circ\varphi_1 : W_1 \to E_2$ e $\varphi_2\circ i : W_1 \to E_2$ são homomorfismos e satisfazem

$$(j \circ \varphi_1) \circ \omega_1 = j \circ (\varphi_1 \circ \omega_1) = j \circ [\varepsilon_1 \circ (\alpha\times\beta)] = (j \circ \varepsilon_1) \circ (\alpha\times\beta) = \varepsilon_2 \circ (\alpha\times\beta)$$

e

$$(\varphi_2 \circ i) \circ \omega_1 = \varphi_2 \circ (i \circ \omega_1) = \varphi_2 \circ \omega_2 = \varepsilon_2 \circ (\alpha\times\beta) \,.$$

Pela unicidade de ψ, ficamos com $j \circ \varphi_1 = \psi = \varphi_2 \circ i \,.$

A observação acima diz que, na categoria de flechas $\mathsf{Grp}^{\to}$, os objetos $(\alpha\wedge\beta)^{(X,\omega_1)}_{(Y,\varepsilon_1)}$, $(\alpha\wedge\beta)^{(X,\omega_2)}_{(Y,\varepsilon_2)} \in Obj(\mathsf{Grp}^{\to})$ são isomorfos, $(\alpha\wedge\beta)^{(X,\omega_1)}_{(Y,\varepsilon_1)} \cong (\alpha\wedge\beta)^{(X,\omega_2)}_{(Y,\varepsilon_2)}$, com isomorfismo $\Big((id_A\wedge id_B)^{(X,\omega_1)}_{(X,\omega_2)} , (id_G\wedge id_H)^{(Y,\varepsilon_1)}_{(Y,\varepsilon_2)}\Big) : (\alpha\wedge\beta)^{(X,\omega_1)}_{(Y,\varepsilon_1)} \xrightarrow{\cong} (\alpha\wedge\beta)^{(X,\omega_2)}_{(Y,\varepsilon_2)}$.

Na conclusão da observação acima, temos uma fórmula

$$[(\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega_2)}_{(Y,\varepsilon_2)}] = [(id_G \wedge id_H)^{(Y,\varepsilon_1)}_{(Y,\varepsilon_2)}] \circ [(\alpha \wedge \beta)^{(X,\omega_1)}_{(Y,\varepsilon_1)}] \circ [(id_A \wedge id_B)^{(X,\omega_1)}_{(X,\omega_2)}]^{-1} \,.$$

Exemplo 3.3.5. Seja G um grupo. É claro que $G \lhd G$ e que as restrições da conjugação $c^G : G \to Aut(G)$ são elas mesmas a própria conjugação, isto é, $c^G_{GG} = c^G$. Sejam $(G\otimes G)_0$ o produto tensorial de G e G, com respeito à conjugação de G, vista como o par de suas restrições, e $(G\wedge G)_0$ o produto exterior, construidos explicitamente em seções e capítulos anteriores. Suponha que G seja cíclico finito, $G = \langle g_0\rangle$. Então, existe um isomorfismo $f : G \to \mathbb{Z}_n$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$. Assim, G e $(G\otimes G)_0$ são abelianos e c^G é a ação trivial. Como quaisquer homomorfismos preservam as ações triviais, temos que $f\times f \in Hom_{\mathsf{E}}(X,Y)$ é um isomorfismo em E, em que $X = (G\times G, c^G, c^G) \in Obj(\mathsf{E})$, $Y = (\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n, q, q) \in Obj(\mathsf{E})$ e $q : \mathbb{Z}_n \to Aut(\mathbb{Z}_n)$ é a ação trivial. Portanto, $\mathsf{T}_0(f\times f) = f\otimes f : (G\otimes G)_0 \to (\mathbb{Z}_n\otimes\mathbb{Z}_n)_0$ e $\mathsf{E}_0(f\times f) = f\wedge f : (G\wedge G)_0 \to (\mathbb{Z}_n\wedge\mathbb{Z}_n)_0$ são isomorfismos de grupos. Também, como sabemos do produto tensorial abeliano, temos que $(G\otimes G)_0 \cong G\otimes_{\mathbb{Z}} G = \langle g_0\otimes g_0\rangle \cong \mathbb{Z}_n$. Dessa forma, $(G\otimes G)_0 \cong (\mathbb{Z}_n\otimes\mathbb{Z}_n)_0$ e $(G\wedge G)_0 \cong (\mathbb{Z}_n\wedge\mathbb{Z}_n)_0$. Sejam $D = \{x\otimes x \in (G\otimes G)_0 : x \in G\}$ e $D_A = \{x\otimes x \in G\otimes_{\mathbb{Z}} G : x \in G\}$. Daí, como $g_0\otimes g_0 \in D$, temos que $\langle D\rangle_{\!N} = \langle D\rangle \cong \langle D_A\rangle = G\otimes_{\mathbb{Z}} G$ e, portanto, que

$$(G\wedge G)_0 = (G\otimes G)_0\big/\langle D\rangle_{\!N} \cong (G\otimes_{\mathbb{Z}} G)\big/(G\otimes_{\mathbb{Z}} G) \cong 0\,.$$

Se G é infinito, o argumento é o mesmo, trocando $\mathbb{Z}_n$ por $\mathbb{Z}$. Logo, se G é um grupo cíclico, então $G\wedge G \cong 0$.

3.4 Ações de G e H em $G\wedge H$

Seja P um grupo, $G\lhd P$, $H\lhd P$, $c^P : P \to Aut(P)$ a ação por conjugação de P e as suas restrições $c^P_{GG} : G \to Aut(G)$, $c^P_{GH} : G \to Aut(H)$, $c^P_{HH} : H \to Aut(H)$ e $c^P_{HG} : H \to Aut(G)$ de forma que $c^P_{GG}(g) = c^P_g|_G$ e $c^P_{GH}(g) = c^P_g|_H$, $\forall g \in G$, e $c^P_{HH}(h) = c^P_h|_H$ e $c^P_{HG}(h) = c^P_h|_G$, $\forall h \in H$. Portanto, $c^P_{GG} = c^G$ é a ação por conjugação de G, $c^P_{HH} = c^H$ é a ação por conjugação de H e as ações c^P_{GH} e c^P_{HG} são compatíveis. Seja também um grupo E e $\varepsilon : G\times H \to E$ um pareamento exterior tais que E é um produto exterior de G e H com ε, isto é, $\varepsilon \in \mathcal{Q}_{(G,H,E)}$, ou seja, $E = (G\wedge H)_\varepsilon$. Para cada $g \in G$ e cada $h \in H$, sejam as funções $\alpha_g = \varepsilon\circ\{[c^G(g)]\times[c^P_{GH}(g)]\} = \varepsilon\circ[(c^G_g)\times(c^P_g|_H)] : G\times H \to E$ e $\beta_h = \varepsilon\circ\{[c^P_{HG}(h)]\times[c^H(h)]\} = \varepsilon\circ[(c^P_h|_G)\times(c^H_h)] : G\times H \to E$. É claro que $\alpha_z = \beta_z$, $\forall z \in G\cap H$. Pelos itens (v) e (vi) da proposição 1.4.7, α_g e β_h são ambos pareamentos exteriores, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$.

Pelo parágrafo acima, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$, existem únicos homomorfismos $\overline{\alpha_g}, \overline{\beta_h} : E \to E$ tais que $\overline{\alpha_g}\circ\varepsilon = \alpha_g$ e $\overline{\beta_h}\circ\varepsilon = \beta_h$.

$$\begin{tikzcd} G\times H \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\alpha_g"'] & E \arrow[d, "\overline{\alpha_g}"] \\ & E \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G\times H \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\beta_h"'] & E \arrow[d, "\overline{\beta_h}"] \\ & E \end{tikzcd}$$

Pela unicidade, temos que $\overline{\alpha_z} = \overline{\beta_z}$, $\forall z \in G \cap H$.

Seja $e = e_P \in P$ o elemento neutro de P e observe que

$$\alpha_e = \varepsilon \circ \{[c^G(e)] \times [c^P_{GH}(e)]\} = \varepsilon \circ (id_G \times id_H) = \varepsilon$$

e

$$\beta_e = \varepsilon \circ \{[c^P_{HG}(e)] \times [c^H(e)]\} = \varepsilon \circ (id_G \times id_H) = \varepsilon\,.$$

Como mostrado acima, existem únicos homomorfismos $\overline{\alpha_e}$, $\overline{\beta_e} : E \to E$ tais que $\overline{\alpha_e} \circ \varepsilon = \alpha_e$ e $\overline{\beta_e} \circ \varepsilon = \beta_e$. É claro que $id_E : E \to E$ é um homomorfismo.

$$\begin{tikzcd} G\times H \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, bend right, "\alpha_e"'] & E \arrow[d, shift right, "id_E"'] \arrow[d, shift left, "\overline{\alpha_e}"] \\ & E \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G\times H \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, bend right, "\beta_{\tilde{e}}"'] & E \arrow[d, shift right, "id_E"'] \arrow[d, shift left, "\overline{\beta_e}"] \\ & E \end{tikzcd}$$

Temos que $id_E \circ \varepsilon = \varepsilon = \alpha_e$ e $id_E \circ \varepsilon = \varepsilon = \beta_e$. Pela unicidade da definição de produto exterior, segue que $\overline{\alpha_e} = id_E = \overline{\beta_e}$.

Agora, $\forall a, g \in G$, $\forall b, h \in H$, note que $\overline{\alpha_g} \circ \alpha_a = \alpha_{ga}$ e que $\overline{\beta_h} \circ \beta_b = \beta_{hb}$. De fato, $\forall a, g \in G$, $\forall b, h \in H$, temos que

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha_g} \circ \alpha_a &= \overline{\alpha_g} \circ \{\varepsilon \circ [(c^G_a) \times (c^P_a|_H)]\} \\
&= (\overline{\alpha_g} \circ \varepsilon) \circ [(c^G_a) \times (c^P_a|_H)] \\
&= \alpha_g \circ [(c^G_a) \times (c^P_a|_H)] \\
&= \{\varepsilon \circ [(c^G_g) \times (c^P_g|_H)]\} \circ [(c^G_a) \times (c^P_a|_H)] \\
&= \varepsilon \circ \{[(c^G_g) \times (c^P_g|_H)] \circ [(c^G_a) \times (c^P_a|_H)]\} \\
&= \varepsilon \circ \{(c^G_g \circ c^G_a) \times [(c^P_g|_H) \circ (c^P_a|_H)]\} \\
&= \varepsilon \circ \{(c^G_g \circ c^G_a) \times [(c^P_g \circ c^P_a)|_H]\} \\
&= \varepsilon \circ [(c^G_{ga}) \times (c^P_{ga}|_H)] \\
&= \alpha_{ga}\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\beta_h} \circ \beta_b &= \overline{\beta_h} \circ \{\varepsilon \circ [(c^P_b|_G) \times (c^H_b)]\} \\
&= (\overline{\beta_h} \circ \varepsilon) \circ [(c^P_b|_G) \times (c^H_b)] \\
&= \beta_h \circ [(c^P_b|_G) \times (c^H_b)] \\
&= \{\varepsilon \circ [(c^P_h|_G) \times (c^H_h)]\} \circ [(c^P_b|_G) \times (c^H_b)] \\
&= \varepsilon \circ \{[(c^P_h|_G) \times (c^H_h)] \circ [(c^P_b|_G) \times (c^H_b)]\} \\
&= \varepsilon \circ \{[(c^P_h|_G) \circ (c^P_b|_G)] \times (c^H_h \circ c^H_b)\} \\
&= \varepsilon \circ \{[(c^P_h \circ c^P_b)|_G] \times (c^H_h \circ c^H_b)\} \\
&= \varepsilon \circ [(c^P_{hb}|_G) \times (c^H_{hb})] \\
&= \beta_{hb}\,.
\end{aligned}$$

Sejam $a, g \in G$ e $b, h \in H$ e considere os pareamentos exteriores $\alpha_g = \varepsilon \circ [(c^G_g) \times (c^P_g|_H)]$, $\alpha_a = \varepsilon \circ [(c^G_a) \times (c^P_a|_H)]$, $\alpha_{ga} = \varepsilon \circ [(c^G_{ga}) \times (c^P_{ga}|_H)]$, $\beta_h = \varepsilon \circ [(c^P_h|_G) \times (c^H_h)]$, $\beta_b = \varepsilon \circ [(c^P_b|_G) \times (c^H_b)]$ e $\beta_{hb} = \varepsilon \circ [(c^P_{hb}|_G) \times (c^H_{hb})]$. Seguindo o procedimento dos parágrafos acima, existem únicos homomorfismos $\overline{\alpha_a}$, $\overline{\alpha_g}$, $\overline{\alpha_{ga}}$, $\overline{\beta_b}$, $\overline{\beta_h}$, $\overline{\beta_{hb}}$: $E \to E$ tais que $\overline{\alpha_g} \circ \varepsilon = \alpha_g$, $\overline{\alpha_a} \circ \varepsilon = \alpha_a$, $\overline{\alpha_{ga}} \circ \varepsilon = \alpha_{ga}$, $\overline{\beta_h} \circ \varepsilon = \beta_h$, $\overline{\beta_b} \circ \varepsilon = \beta_b$ e $\overline{\beta_{hb}} \circ \varepsilon = \beta_{hb}$.

$$\begin{tikzcd} G\times H \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, bend right, "\alpha_{ga}"'] & E \arrow[d, shift right, "\overline{\alpha_{ga}}"'] \arrow[d, shift left, "\overline{\alpha_g}\circ\overline{\alpha_a}"] \\ & E \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G\times H \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, bend right, "\beta_{hb}"'] & E \arrow[d, shift right, "\overline{\beta_{hb}}"'] \arrow[d, shift left, "\overline{\beta_h}\circ\overline{\beta_b}"] \\ & E \end{tikzcd}$$

Porém, temos que $(\overline{\alpha_g} \circ \overline{\alpha_a}) \circ \varepsilon = \overline{\alpha_g} \circ (\overline{\alpha_a} \circ \varepsilon) = \overline{\alpha_g} \circ \alpha_a = \alpha_{ga}$ e que $(\overline{\beta_h} \circ \overline{\beta_b}) \circ \varepsilon = \overline{\beta_h} \circ (\overline{\beta_b} \circ \varepsilon) = \overline{\beta_h} \circ \beta_b = \beta_{hb}$. Por unicidade, ficamos com $\overline{\alpha_g} \circ \overline{\alpha_a} = \overline{\alpha_{ga}}$ e $\overline{\beta_h} \circ \overline{\beta_b} = \overline{\beta_{hb}}$.

Sejam $g \in G$ e $h \in H$. Temos que

$$\overline{\alpha_g} \circ \overline{\alpha_{g^{-1}}} = \overline{\alpha_{gg^{-1}}} = \overline{\alpha_e} = id_E = \overline{\alpha_e} = \overline{\alpha_{g^{-1}g}} = \overline{\alpha_{g^{-1}}} \circ \overline{\alpha_g}$$

e que

$$\overline{\beta_h} \circ \overline{\beta_{h^{-1}}} = \overline{\beta_{hh^{-1}}} = \overline{\beta_e} = id_E = \overline{\beta_e} = \overline{\beta_{h^{-1}h}} = \overline{\beta_{h^{-1}}} \circ \overline{\beta_h}.$$

Daí, $\overline{\alpha_g}$, $\overline{\beta_h} \in Sym(E)$, com $\overline{\alpha_{g^{-1}}} = (\overline{\alpha_g})^{-1}$ e com $\overline{\beta_{h^{-1}}} = \big(\overline{\beta_h}\big)^{-1}$. Além disso, como $\overline{\alpha_g}$ e $\overline{\beta_h}$ são homomorfismos, ambos são isomorfismos de E em si mesmo, isto é, $\overline{\alpha_g}$, $\overline{\beta_h} \in Aut(E)$.

Daí, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$, podemos concluir que $\alpha_g = \overline{\alpha_g} \circ \varepsilon \in \mathcal{Q}_{(G,H,E)}$ e $\beta_h = \overline{\beta_h} \circ \varepsilon \in \mathcal{Q}_{(G,H,E)}$, ou seja, $E = (G \wedge H)_{\alpha_g}$ e $E = (G \wedge H)_{\beta_h}$.

Sejam $\hat{\alpha} : G \to Aut(E)$ e $\hat{\beta} : H \to Aut(E)$ tais que $\hat{\alpha}(g) = \overline{\alpha_g}$ e $\hat{\beta}(h) = \overline{\beta_h}$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$. Dessa forma, $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ são ações por automorfismos. De fato, $\forall a, g \in G$, $\forall b, h \in H$, temos que $\hat{\alpha}(ga) = \overline{\alpha_{ga}} = \overline{\alpha_g} \circ \overline{\alpha_a} = \hat{\alpha}(g) \circ \hat{\alpha}(a)$ e que $\hat{\beta}(hb) = \overline{\beta_{hb}} = \overline{\beta_h} \circ \overline{\beta_b} = \hat{\beta}(h) \circ \hat{\beta}(b)$. Portanto, $\hat{\alpha} \in Hom\big(G, Aut(E)\big)$ e $\hat{\beta} \in Hom\big(H, Aut(E)\big)$. Note que $\hat{\alpha}|_{G\cap H} = \hat{\beta}|_{G\cap H}$.

A ação de grupos $\hat{\alpha} \in Hom\big(G, Aut(E)\big)$ é chamada de "a ação induzida pela restrição da conjugação $c^P_{GH} \in Hom\big(G, Aut(H)\big)$ de G em $E = (G \wedge H)_\varepsilon$" e dizemos que "a restrição $c^P_{GH} \in Hom\big(G, Aut(H)\big)$ de G em H induz a ação $\hat{\alpha} \in Hom\big(G, Aut(E)\big)$". A ação de grupos $\hat{\beta} \in Hom\big(H, Aut(E)\big)$ é chamada de "a ação induzida pela restrição da conjugação $c^P_{HG} \in Hom\big(H, Aut(G)\big)$ de G em $E = (G \wedge H)_\varepsilon$" e dizemos que "a ação $c^P_{HG} \in Hom\big(H, Aut(G)\big)$ de G em H induz a ação $\hat{\beta} \in Hom\big(H, Aut(E)\big)$". Também dizemos que as ações $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ são as induzidas pelas restrições da conjugação e que as restrições da conjugação induzem as ações $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$.

Usando nossa notação, ficamos com $\hat{\alpha}(g) = \hat{\alpha}_g = \overline{\alpha_g}$ e $\hat{\beta}(h) = \hat{\beta}_h = \overline{\beta_h}$,

$\forall g \in G$, $\forall h \in H$. Também, $\forall x, g \in G$, $\forall y, h \in H$, temos que

$$\begin{aligned}
{}^{g}(x \wedge y) &= \hat{\alpha}_g(x \wedge y) \\
&= \overline{\alpha_g}(x \wedge y) \\
&= \overline{\alpha_g}\big(\varepsilon(x, y)\big) \\
&= (\overline{\alpha_g} \circ \varepsilon)(x, y) \\
&= \alpha_g(x, y) \\
&= \{\varepsilon \circ [(c_g^G) \times (c_g^P|_H)]\}(x, y) \\
&= \varepsilon\big([(c_g^G) \times (c_g^P|_H)](x, y)\big) \\
&= \varepsilon\big(c_g^G(x), c_g^P|_H(y)\big) \\
&= \varepsilon\big(c_g^G(x), c_g^P(y)\big) \\
&= \varepsilon(gxg^{-1}, gyg^{-1}) \\
&= \varepsilon({}^{g}x, {}^{g}y) \\
&= {}^{g}x \wedge {}^{g}y \\
&= (gxg^{-1}) \wedge (gyg^{-1})\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{h}(x \wedge y) &= \hat{\beta}_h(x \wedge y) \\
&= \overline{\beta_h}(x \wedge y) \\
&= \overline{\beta_h}\big(\varepsilon(x, y)\big) \\
&= (\overline{\beta_h} \circ \varepsilon)(x, y) \\
&= \beta_h(x, y) \\
&= \{\varepsilon \circ [(c_h^P|_G) \times (c_h^H)]\}(x, y) \\
&= \varepsilon\big([(c_h^P|_G) \times (c_h^H)](x, y)\big) \\
&= \varepsilon\big(c_h^P|_G(x), c_h^H(y)\big) \\
&= \varepsilon\big(c_h^P(x), c_h^H(y)\big) \\
&= \varepsilon(hxh^{-1}, hyh^{-1}) \\
&= \varepsilon({}^{h}x, {}^{h}y) \\
&= {}^{h}x \wedge {}^{h}y \\
&= (hxh^{-1}) \wedge (hyh^{-1})\,.
\end{aligned}$$

Em particular, $\forall x, g \in G$, $\forall y, h \in H$, temos as relações

$${}^{g}(x \wedge y) = {}^{g}x \wedge {}^{g}y \qquad \text{e} \qquad {}^{h}(x \wedge y) = {}^{h}x \wedge {}^{h}y\ .$$

Em geral, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$, como $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ são ações por automorfismos, $\forall v \in E = \langle im(\varepsilon) \rangle = Sp\big(im(\varepsilon)\big)$, existem $v_1, \ldots, v_n \in im(\varepsilon)$ tais que $v = v_1 \cdot \ldots \cdot v_n$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$. Assim, existem $x_1, \ldots, x_n \in G$ e $y_1, \ldots, y_n \in H$ tais que

$v_j = \varepsilon(x_j, y_j) = x_j \wedge y_j$, $\forall j \in \{1, ..., n\}$. Portanto, $v = (x_1 \wedge y_1) \cdot ... \cdot (x_n \wedge y_n)$. Dessa forma, ficamos com

$${}^g v = {}^g[(x_1 \wedge y_1) \cdot ... \cdot (x_n \wedge y_n)] = {}^g(x_1 \wedge y_1) \cdot ... \cdot {}^g(x_n \wedge y_n) = ({}^g x_1 \wedge {}^g y_1) \cdot ... \cdot ({}^g x_n \wedge {}^g y_n)$$

e com

$${}^h v = {}^h[(x_1 \wedge y_1) \cdot ... \cdot (x_n \wedge y_n)] = {}^h(x_1 \wedge y_1) \cdot ... \cdot {}^h(x_n \wedge y_n) = ({}^h x_1 \wedge {}^h y_1) \cdot ... \cdot ({}^h x_n \wedge {}^h y_n) .$$

Lembramos que, $\forall g, x \in G$, $\forall h, y \in H$, duas das relações entre os geradores do produto exterior são

$$gx \wedge y = ({}^g x \wedge {}^g y)(x \wedge y) \qquad \text{e} \qquad x \wedge hy = (x \wedge h)({}^h x \wedge {}^h y) .$$

Usando as ações introduzidas, $\forall g, x \in G$, $\forall h, y \in H$, podemos expressar essas relações na forma

$$gx \wedge y = {}^g(x \wedge y)(x \wedge y) \qquad \text{e} \qquad x \wedge hy = (x \wedge h)\, {}^h(x \wedge y) .$$

Portanto, $\forall g, x \in G$, $\forall h, y \in H$, temos as expressões explícitas para as ações nos geradores

$${}^g(x \wedge y) = (gx \wedge y)(x \wedge y)^{-1} \qquad \text{e} \qquad {}^h(x \wedge y) = (x \wedge h)^{-1}\, (x \wedge hy) .$$

Usando nossa notação e essas novas ações, reescrevemos as igualdades do teorema 3.2.1 da seguinte maneira:

Teorema 3.4.1. Seja P um grupo, $G \lhd P$, $H \lhd P$, $c^P : P \to Aut(P)$ a ação por conjugação de P e as suas restrições $c^P_{GH} : G \to Aut(H)$ e $c^P_{HG} : H \to Aut(G)$, de modo que $X = (G \times H, c^P_{GH}, c^P_{HG}) \in Obj(\mathsf{E})$. Sejam também $G \wedge H \in E_X$ o produto exterior de G e H, $e_P \in P$ o elemento neutro de P e $e \in G \wedge H$ o elemento neutro de $G \wedge H$. Valem

(i) Para todos $a, x \in G$ e todos $b, y \in H$, temos que

- $ax \wedge y = {}^a(x \wedge y) \cdot (a \wedge y)$;
- $x \wedge by = (x \wedge b) \cdot {}^b(x \wedge y)$;
- ${}^a(x \wedge y) = (ax \wedge y) \cdot (a \wedge y)^{-1}$;
- ${}^b(x \wedge y) = (x \wedge b)^{-1} \cdot (x \wedge by)$.

(ii) Para todos $g, a, x \in G$ e todos $h, b, y \in H$, temos que

- ${}^g(ax \wedge y) = {}^{ga}(x \wedge y) \cdot {}^g(a \wedge y)$;
- ${}^g(x \wedge by) = {}^g(x \wedge b) \cdot {}^{gb}(x \wedge y)$;
- ${}^h(ax \wedge y) = {}^{ha}(x \wedge y) \cdot {}^h(a \wedge y)$;

- ${}^{h}(x \wedge by) = {}^{h}(x \wedge b) \cdot {}^{hb}(x \wedge y)\,;$
- ${}^{ga}(x \wedge y) = {}^{g}(ax \wedge y) \cdot {}^{g}(a \wedge y)^{-1}\,;$
- ${}^{gb}(x \wedge y) = {}^{g}(x \wedge b)^{-1} \cdot {}^{g}(x \wedge by)\,;$
- ${}^{ha}(x \wedge y) = {}^{h}(ax \wedge y) \cdot {}^{h}(a \wedge y)^{-1}\,;$
- ${}^{hb}(x \wedge y) = {}^{h}(x \wedge b)^{-1} \cdot {}^{h}(x \wedge by)\,.$

(iii) Para todos $g, a, x \in G$ e todos $h, b, y \in H$, temos que

- ${}^{g}(ax \wedge y) = {}^{g}(a \wedge {}^{x}y) \cdot {}^{g}(x \wedge y)\,;$
- ${}^{g}(x \wedge by) = {}^{g}(x \wedge y) \cdot {}^{g}({}^{y}x \wedge b)\,;$
- ${}^{h}(ax \wedge y) = {}^{h}(a \wedge {}^{x}y) \cdot {}^{h}(x \wedge y)\,;$
- ${}^{h}(x \wedge by) = {}^{h}(x \wedge y) \cdot {}^{h}({}^{y}x \wedge b)\,;$
- ${}^{g}(a \wedge {}^{x}y) = {}^{g}(ax \wedge y) \cdot {}^{g}(x \wedge y)^{-1}\,;$
- ${}^{g}({}^{y}x \wedge b) = {}^{g}(x \wedge y)^{-1} \cdot {}^{g}(x \wedge by)\,;$
- ${}^{h}(a \wedge {}^{x}y) = {}^{h}(ax \wedge y) \cdot {}^{h}(x \wedge y)^{-1}\,;$
- ${}^{h}({}^{y}x \wedge b) = {}^{h}(x \wedge y)^{-1} \cdot {}^{h}(x \wedge by)\,;$
- $ax \wedge y = (a \wedge {}^{x}y)(x \wedge y) = (a \wedge xyx^{-1})(x \wedge y)\,;$
- $x \wedge by = (x \wedge y)({}^{y}x \wedge b) = (x \wedge y)(yxy^{-1} \wedge b)\,.$

(iv) $e_P \wedge h = e = g \wedge e_P$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$;

(v) Para todos $x, g \in G$ e todos $y, h \in H$, temos que

- ${}^{g}(x \wedge y)^{-1} = {}^{g}(x^{-1} \wedge {}^{x}y)\,;$
- ${}^{g}(x \wedge y)^{-1} = {}^{g}({}^{y}x \wedge y^{-1})\,;$
- ${}^{h}(x \wedge y)^{-1} = {}^{h}(x^{-1} \wedge {}^{x}y)\,;$
- ${}^{h}(x \wedge y)^{-1} = {}^{h}({}^{y}x \wedge y^{-1})\,;$
- $(x \wedge y)^{-1} = x^{-1} \wedge {}^{x}y = {}^{x}(x^{-1} \wedge y)\,;$
- $(x \wedge y)^{-1} = {}^{y}x \wedge y^{-1} = {}^{y}(x \wedge y^{-1})\,;$
- ${}^{x}(x^{-1} \wedge y)^{-1} = (x^{-1} \wedge {}^{x}y)^{-1} = x \wedge y\,;$
- ${}^{y}(x \wedge y^{-1})^{-1} = ({}^{y}x \wedge y^{-1})^{-1} = x \wedge y\,.$

(vi) ${}^{ab}(x \wedge y) = (a \wedge b) \cdot {}^{ba}(x \wedge y) \cdot (a \wedge b)^{-1}$, $\forall a, x \in G$, $\forall b, y \in H$;

(vii) ${}^{[a,b]}(g \wedge h) = (a \wedge b)(g \wedge h)(a \wedge b)^{-1}$, $\forall a, g \in G$, $\forall b, h \in H$;

(viii) Para todo $g \in G$ e todos $y, h \in H$, temos que

$$[g, h] \wedge y = g\,{}^{h}g^{-1} \wedge y = (g \wedge h) \cdot {}^{y}(g \wedge h)^{-1}\,;$$

(ix) Para todos $x, g \in G$ e todo $h \in H$, temos que

$$x \wedge [g,h] = x \wedge {}^g h h^{-1} = {}^x(g \wedge h) \cdot (g \wedge h)^{-1} \,;$$

(x) $[g \wedge h, a \wedge b] = g^h g^{-1} \wedge {}^a b b^{-1} = [g,h] \wedge [a,b] \,,\, \forall a, g \in G,\, \forall b, h \in H;$

(xi) $(u \wedge v)^{-1} = v \wedge u \,,\, \forall u, v \in G \cap H.$

Note que muitas dessas igualdades podem ser derivadas de outras, utilizando o fato de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ serem ações por automorfismos.

Proposição 3.4.2. Sejam P e E grupos, $c^E : E \to Aut(E)$ a ação por conjugação de E, $G \lhd P$, $H \lhd P$ e $\varepsilon : G \times H \to E$ um pareamento exterior tais que $E = (G \wedge H)_\varepsilon$. As ações induzidas $\hat{\alpha} : G \to Aut(E)$ e $\hat{\beta} : H \to Aut(E)$ pelas restrições da conjugação são tais que

(i) ${}^{[a,b]}v = (a \wedge b) \cdot v \cdot (a \wedge b)^{-1} = c^E_{a \wedge b}(v) \,,\, \forall a \in G,\, \forall b \in H,\, \forall v \in E;$

(ii) $[\hat{\alpha}_g, \hat{\beta}_h] = \hat{\alpha}_g \circ \hat{\beta}_h \circ \hat{\alpha}_{g^{-1}} \circ \hat{\beta}_{h^{-1}} = c^E_{g \wedge h} \,,\, \forall g \in G,\, \forall h \in H.$

Demonstração: (i) Para cada $a \in G$ e cada $b \in H$, seja um conjunto $V_{(a,b)} = \big\{ v \in E \;:\; {}^{[a,b]}v = (a \wedge b) \cdot v \cdot (a \wedge b)^{-1} \big\}$. Sejam $a \in G$ e $b \in H$. Seja $e_E \in E$ o elemento neutro de E. Temos que

$$\begin{aligned}
{}^{[a,b]}e_E &= {}^{aba^{-1}b^{-1}}e_E \\
&= {}^a\{{}^b[{}^{a^{-1}}({}^{b^{-1}}e_E)]\} \\
&= \hat{\alpha}_a\Big(\hat{\beta}_b\Big(\hat{\alpha}_{a^{-1}}\big(\hat{\beta}_{b^{-1}}(e_E)\big)\Big)\Big) \\
&= (\hat{\alpha}_a \circ \hat{\beta}_b \circ \hat{\alpha}_{a^{-1}} \circ \hat{\beta}_{b^{-1}})(e_E) \\
&= e_E \\
&= (a \wedge b) \cdot (a \wedge b)^{-1} \\
&= (a \wedge b) \cdot e_E \cdot (a \wedge b)^{-1} \,.
\end{aligned}$$

Assim, $e_E \in V_{(a,b)}$.

Para todo $v \in E$, se $v \in V_{(a,b)}$, então

$$\begin{aligned}
{}^{[a,b]}(v^{-1}) &= {}^{aba^{-1}b^{-1}}(v^{-1}) \\
&= {}^{a}\Big({}^{b}\big\{{}^{a^{-1}}\big[{}^{b^{-1}}(v^{-1})\big]\big\}\Big) \\
&= \hat{\alpha}_a\Bigg(\hat{\beta}_b\Big(\hat{\alpha}_{a^{-1}}\big(\hat{\beta}_{b^{-1}}(v^{-1})\big)\Big)\Bigg) \\
&= (\hat{\alpha}_a \circ \hat{\beta}_b \circ \hat{\alpha}_{a^{-1}} \circ \hat{\beta}_{b^{-1}})(v^{-1}) \\
&= [(\hat{\alpha}_a \circ \hat{\beta}_b \circ \hat{\alpha}_{a^{-1}} \circ \hat{\beta}_{b^{-1}})(v)]^{-1} \\
&= \Bigg[\hat{\alpha}_a\Bigg(\hat{\beta}_b\Big(\hat{\alpha}_{a^{-1}}\big(\hat{\beta}_{b^{-1}}(v)\big)\Big)\Bigg)\Bigg]^{-1} \\
&= \Big({}^{a}\big\{{}^{b}\big[{}^{a^{-1}}\big({}^{b^{-1}}v\big)\big]\big\}\Big)^{-1} \\
&= \big({}^{aba^{-1}b^{-1}}v\big)^{-1} \\
&= \big({}^{[a,b]}v\big)^{-1} \\
&= [(a \wedge b) \cdot v \cdot (a \wedge b)^{-1}]^{-1} \\
&= (a \wedge b) \cdot v^{-1} \cdot (a \wedge b)^{-1}.
\end{aligned}$$

Assim, $v^{-1} \in V_{(a,b)}$. Para todos $u, v \in E$, se $u, v \in V_{(a,b)}$, então

$$\begin{aligned}
{}^{[a,b]}(uv) &= {}^{aba^{-1}b^{-1}}(uv) \\
&= {}^{a}\Big({}^{b}\big\{{}^{a^{-1}}\big[{}^{b^{-1}}(uv)\big]\big\}\Big) \\
&= \hat{\alpha}_a\Bigg(\hat{\beta}_b\Big(\hat{\alpha}_{a^{-1}}\big(\hat{\beta}_{b^{-1}}(uv)\big)\Big)\Bigg) \\
&= (\hat{\alpha}_a \circ \hat{\beta}_b \circ \hat{\alpha}_{a^{-1}} \circ \hat{\beta}_{b^{-1}})(uv) \\
&= (\hat{\alpha}_a \circ \hat{\beta}_b \circ \hat{\alpha}_{a^{-1}} \circ \hat{\beta}_{b^{-1}})(u) \cdot (\hat{\alpha}_a \circ \hat{\beta}_b \circ \hat{\alpha}_{a^{-1}} \circ \hat{\beta}_{b^{-1}})(v) \\
&= \hat{\alpha}_a\Bigg(\hat{\beta}_b\Big(\hat{\alpha}_{a^{-1}}\big(\hat{\beta}_{b^{-1}}(u)\big)\Big)\Bigg) \cdot \hat{\alpha}_a\Bigg(\hat{\beta}_b\Big(\hat{\alpha}_{a^{-1}}\big(\hat{\beta}_{b^{-1}}(v)\big)\Big)\Bigg) \\
&= {}^{a}\big\{{}^{b}\big[{}^{a^{-1}}\big({}^{b^{-1}}u\big)\big]\big\} \cdot {}^{a}\big\{{}^{b}\big[{}^{a^{-1}}\big({}^{b^{-1}}u\big)\big]\big\} \\
&= {}^{[a,b]}u \cdot {}^{[a,b]}v \\
&= [(a \wedge b) \cdot u \cdot (a \wedge b)^{-1}] \cdot [(a \wedge b) \cdot v \cdot (a \wedge b)^{-1}] \\
&= (a \wedge b) \cdot uv \cdot (a \wedge b)^{-1}.
\end{aligned}$$

Assim, $uv \in V_{(a,b)}$. Daí, $V_{(a,b)} \leqslant E$. Seja $v \in im(\varepsilon)$. Assim, existem $g \in G$ e $h \in H$ tais que $v = \varepsilon(g,h) = g \wedge h$. Pelo item (vii) da proposição 3.4.1, temos que ${}^{[a,b]}v = {}^{[a,b]}(g \wedge h) = (a \wedge b)(g \wedge h)(a \wedge b)^{-1} = (a \wedge b) \cdot v \cdot (a \wedge b)^{-1}$ e, portanto, $v \in V_{(a,b)}$. Como v é qualquer, ficamos com $im(\varepsilon) \subset V_{(a,b)}$. Daí, $E = \langle im(\varepsilon) \rangle \leqslant \langle V_{(a,b)} \rangle = V_{(a,b)} \leqslant E$ e, assim, $V_{(a,b)} = E$. Dessa forma, $\forall v \in E$, temos que ${}^{[a,b]}v = (a \wedge b) \cdot v \cdot (a \wedge b)^{-1}$. Como a e b são arbitrários, o resultado segue.

(ii) Sejam $g \in G$ e $h \in H$. Para todo $v \in E$, pelo item (i) dessa proposição, temos que

$$
\begin{aligned}
[\hat{\alpha}_g, \hat{\beta}_h](v) &= \big[(\hat{\alpha}_g) \circ (\hat{\beta}_h) \circ (\hat{\alpha}_g)^{-1} \circ (\hat{\beta}_h)^{-1}\big](v) \\
&= (\hat{\alpha}_g \circ \hat{\beta}_h \circ \hat{\alpha}_{g^{-1}} \circ \hat{\beta}_{h^{-1}})(v) \\
&= \hat{\alpha}_g\Bigg(\hat{\beta}_h\Big(\hat{\alpha}_{g^{-1}}\big(\hat{\beta}_{h^{-1}}(v)\big)\Big)\Bigg) \\
&= {}^{g}\{{}^{h}[{}^{g^{-1}}({}^{h^{-1}}v)]\} \\
&= {}^{ghg^{-1}h^{-1}}v \\
&= {}^{[g,h]}v \\
&= (g \wedge h) \cdot v \cdot (g \wedge h)^{-1} \\
&= c^{E}_{g\wedge h}(v)\,.
\end{aligned}
$$

■

Proposição 3.4.3. Sejam P e E grupos, $G \lhd P$, $H \lhd P$ e $\varepsilon : G \times H \to E$ um pareamento exterior tais que $E = (G \wedge H)_{\varepsilon}$. Considere as restrições da conjugação de P e as ações induzidas por elas $\hat{\alpha} : G \to Aut(E)$ e $\hat{\beta} : H \to Aut(E)$. Temos que, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$,

(i) $\big[\hat{\alpha}\big([c^{P}_{HG}(h)](g)\big)\big] \circ \hat{\beta}_h = \hat{\beta}_h \circ \hat{\alpha}_g\,;$

(ii) $\big[\hat{\beta}\big([c^{P}_{GH}(g)](h)\big)\big] \circ \hat{\alpha}_g = \hat{\alpha}_g \circ \hat{\beta}_h\,.$

Demonstração: Considere $c^{G} : G \to Aut(G)$ a ação por conjugação de G e $c^{H} : H \to Aut(H)$ a ação por conjugação de H e sejam $g \in G$ e $h \in H$. Tomando $G = H$ e $f = c^{P}_{HG}(h) : G \to G$ no enunciado do item (ii) da observação 1.1.3, temos que

$$
\begin{aligned}
\big[c^{G}\big([c^{P}_{HG}(h)](g)\big)\big] \circ [c^{P}_{HG}(h)] &= \big\{c^{G}_{[c^{P}_{HG}(h)](g)}\big\} \circ [c^{P}_{HG}(h)] \\
&= [c^{P}_{HG}(h)] \circ (c^{G}_{g}) \\
&= [c^{P}_{HG}(h)] \circ [c^{G}(g)]\,.
\end{aligned}
$$

De novo, tomando $G = H$ e $f = c^{P}_{GH}(g) : H \to H$ no enunciado do item (ii) da observação 1.1.3, temos que

$$
\begin{aligned}
\big[c^{H}\big([c^{P}_{GH}(g)](h)\big)\big] \circ [c^{P}_{GH}(g)] &= \big\{c^{H}_{[c^{P}_{GH}(g)](h)}\big\} \circ [c^{P}_{GH}(g)] \\
&= [c^{P}_{GH}(g)] \circ (c^{H}_{h}) \\
&= [c^{P}_{GH}(g)] \circ [c^{H}(h)]\,.
\end{aligned}
$$

Também, como c^{P}_{GH} e c^{P}_{HG} são compatíveis, temos que

$$
\big[c^{P}_{GH}\big([c^{P}_{HG}(h)](g)\big)\big] \circ (c^{H}_{h}) = (c^{H}_{h}) \circ [c^{P}_{GH}(g)]
$$

e que

$$\big[c^P_{HG}\big([c^P_{GH}(g)](h)\big)\big] \circ (c^G_g) = (c^G_g) \circ [c^P_{HG}(h)]\,.$$

Note que $X = (G \times H, c^P_{GH}, c^P_{HG}) \in Obj(\mathsf{E})$. Pelo exemplo 1.5.4, temos que $\{[c^P_{HG}(h)] \circ [c^G(g)]\} \times \{[c^H(h)] \circ [c^P_{GH}(g)]\} \in Hom_{\mathsf{E}}(X,X)$ e que $\{[c^G(g)] \circ [c^P_{HG}(h)]\} \times \{[c^P_{GH}(g)] \circ [c^H(h)]\} \in Hom_{\mathsf{E}}(X,X)$ e, portanto, que $\delta_1 = \varepsilon \circ \big(\{[c^P_{HG}(h)] \circ [c^G(g)]\} \times \{[c^H(h)] \circ [c^P_{GH}(g)]\}\big) : G \times H \to E$ e $\delta_2 = \varepsilon \circ \big(\{[c^G(g)] \circ [c^P_{HG}(h)]\} \times \{[c^P_{GH}(g)] \circ [c^H(h)]\}\big) : G \times H \to E$ são pareamentos exteriores. Assim, existem únicos homomorfismos $\psi_1, \psi_2 : E \to E$ tais que $\psi_1 \circ \varepsilon = \delta_1$ e $\psi_2 \circ \varepsilon = \delta_2$. Observe que $\big[\hat{\alpha}\big([c^P_{HG}(h)](g)\big)\big] \circ \hat{\beta}_h = \hat{\alpha}_{[c^P_{HG}(h)](g)} \circ \hat{\beta}_h$, $\hat{\beta}_h \circ \hat{\alpha}_g$, $\big[\hat{\beta}\big([c^P_{GH}(g)](h)\big)\big] \circ \hat{\alpha}_g = \hat{\beta}_{[c^P_{GH}(g)](h)} \circ \hat{\alpha}_g$ e $\hat{\alpha}_g \circ \hat{\beta}_h$ são homomorfismos de E em E. Sendo $\nu = \big\{\big[\hat{\alpha}\big([c^P_{HG}(h)](g)\big)\big] \circ \hat{\beta}_h\big\} \circ \varepsilon$, temos que

$$\begin{aligned}
\nu &= \big\{\big[\hat{\alpha}\big([c^P_{HG}(h)](g)\big)\big] \circ \hat{\beta}_h\big\} \circ \varepsilon \\
&= \big[\hat{\alpha}\big([c^P_{HG}(h)](g)\big)\big] \circ (\hat{\beta}_h \circ \varepsilon) \\
&= \big[\hat{\alpha}\big([c^P_{HG}(h)](g)\big)\big] \circ \beta_h \\
&= \big[\hat{\alpha}\big([c^P_{HG}(h)](g)\big)\big] \circ \big(\varepsilon \circ \{[c^P_{HG}(h)] \times (c^H_h)\}\big) \\
&= \big\{\big[\hat{\alpha}\big([c^P_{HG}(h)](g)\big)\big] \circ \varepsilon\big\} \circ \{[c^P_{HG}(h)] \times (c^H_h)\} \\
&= \big\{\alpha_{[c^P_{HG}(h)](g)}\big\} \circ \{[c^P_{HG}(h)] \times (c^H_h)\} \\
&= \Big(\varepsilon \circ \big\{\big[c^G\big([c^P_{HG}(h)](g)\big)\big] \times \big[c^P_{GH}\big([c^P_{HG}(h)](g)\big)\big]\big\}\Big) \circ \{[c^P_{HG}(h)] \times (c^H_h)\} \\
&= \varepsilon \circ \Big(\big\{\big[c^G\big([c^P_{HG}(h)](g)\big)\big] \times \big[c^P_{GH}\big([c^P_{HG}(h)](g)\big)\big]\big\} \circ \{[c^P_{HG}(h)] \times (c^H_h)\}\Big) \\
&= \varepsilon \circ \Big(\big\{\big[c^G\big([c^P_{HG}(h)](g)\big)\big] \circ [c^P_{HG}(h)]\big\} \times \big\{\big[c^P_{GH}\big([c^P_{HG}(h)](g)\big)\big] \circ (c^H_h)\big\}\Big) \\
&= \varepsilon \circ \big(\{[c^P_{HG}(h)] \circ (c^G_g)\} \times \{(c^H_h) \circ [c^P_{GH}(g)]\}\big) \\
&= \delta_1\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\hat{\beta}_h \circ \hat{\alpha}_g) \circ \varepsilon &= \hat{\beta}_h \circ (\hat{\alpha}_g \circ \varepsilon) \\
&= \hat{\beta}_h \circ \alpha_g \\
&= \hat{\beta}_h \circ \big(\varepsilon \circ \{(c^G_g) \times [c^P_{GH}(g)]\}\big) \\
&= (\hat{\beta}_h \circ \varepsilon) \circ \{(c^G_g) \times [c^P_{GH}(g)]\} \\
&= \beta_h \circ \{(c^G_g) \times [c^P_{GH}(g)]\} \\
&= \big(\varepsilon \circ \{[c^P_{HG}(h)] \times (c^H_h)\}\big) \circ \{(c^G_g) \times [c^P_{GH}(g)]\} \\
&= \varepsilon \circ \big(\{[c^P_{HG}(h)] \times (c^H_h)\} \circ \{(c^G_g) \times [c^P_{GH}(g)]\}\big) \\
&= \varepsilon \circ \big(\{[c^P_{HG}(h)] \circ (c^G_g)\} \times \{(c^H_h) \circ [c^P_{GH}(g)]\}\big) \\
&= \delta_1\,.
\end{aligned}$$

Portanto, $\hat{\alpha}\big([c^P_{HG}(h)](g)\big) \circ \hat{\beta}_h = \psi_1 = \hat{\beta}_h \circ \hat{\alpha}_g$.

Também, sendo $\mu = \big\{ \big[\hat{\beta}\big([c^P_{GH}(g)](h)\big)\big] \circ \hat{\alpha}_g \big\} \circ \varepsilon$, temos que

$$
\begin{aligned}
\mu &= \big\{ \big[\hat{\beta}\big([c^P_{GH}(g)](h)\big)\big] \circ \hat{\alpha}_g \big\} \circ \varepsilon \\
&= \big[\hat{\beta}\big([c^P_{GH}(g)](h)\big)\big] \circ (\hat{\alpha}_g \circ \varepsilon) \\
&= \big[\hat{\beta}\big([c^P_{GH}(g)](h)\big)\big] \circ \alpha_g \\
&= \big[\hat{\beta}\big([c^P_{GH}(g)](h)\big)\big] \circ \big(\varepsilon \circ \{(c^G_g) \times [c^P_{GH}(g)]\}\big) \\
&= \big\{ \big[\hat{\beta}\big([c^P_{GH}(g)](h)\big)\big] \circ \varepsilon \big\} \circ \{(c^G_g) \times [c^P_{GH}(g)]\} \\
&= \big\{ \beta_{[c^P_{GH}(g)](h)} \big\} \circ \{(c^G_g) \times [c^P_{GH}(g)]\} \\
&= \Big(\varepsilon \circ \big\{ \big[c^P_{HG}\big([c^P_{GH}(g)](h)\big)\big] \times \big[c^H\big([c^P_{GH}(g)](h)\big)\big] \big\} \Big) \circ \{(c^G_g) \times [c^P_{GH}(g)]\} \\
&= \varepsilon \circ \Big(\big\{ \big[c^P_{HG}\big([c^P_{GH}(g)](h)\big)\big] \times \big[c^H\big([c^P_{GH}(g)](h)\big)\big] \big\} \circ \{(c^G_g) \times [c^P_{GH}(g)]\} \Big) \\
&= \varepsilon \circ \Big(\big\{ \big[c^P_{HG}\big([c^P_{GH}(g)](h)\big)\big] \circ (c^G_g) \big\} \times \big\{ \big[c^H\big([c^P_{GH}(g)](h)\big)\big] \circ [c^P_{GH}(g)] \big\} \Big) \\
&= \varepsilon \circ \big(\{(c^G_g) \circ [c^P_{HG}(h)]\} \times \{[c^P_{GH}(g)] \circ (c^H_h)\} \big) = \delta_2\,;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\hat{\alpha}_g \circ \hat{\beta}_h) \circ \varepsilon &= \hat{\alpha}_g \circ (\hat{\beta}_h \circ \varepsilon) \\
&= \hat{\alpha}_g \circ \beta_h \\
&= \hat{\alpha}_g \circ \big(\varepsilon \circ \{[c^P_{HG}(h)] \times (c^H_h)\}\big) \\
&= (\hat{\alpha}_g \circ \varepsilon) \circ \{[c^P_{HG}(h)] \times (c^H_h)\} \\
&= \alpha_g \circ \{[c^P_{HG}(h)] \times (c^H_h)\} \\
&= \big(\varepsilon \circ \{(c^G_g) \times [c^P_{GH}(g)]\}\big) \circ \{[c^P_{HG}(h)] \times (c^H_h)\} \\
&= \varepsilon \circ \big(\{(c^G_g) \times [c^P_{GH}(g)]\} \circ \{[c^P_{HG}(h)] \times (c^H_h)\}\big) \\
&= \varepsilon \circ \big(\{(c^G_g) \circ [c^P_{HG}(h)]\} \times \{[c^P_{GH}(g)] \circ (c^H_h)\}\big) \\
&= \delta_2\,.
\end{aligned}
$$

Logo, $\hat{\beta}\big([c^P_{GH}(g)](h)\big) \circ \hat{\alpha}_g = \psi_2 = \hat{\alpha}_g \circ \hat{\beta}_h$. ■

Os itens (i) e (ii) da proposição acima são equivalentemente escritos como

(i) $\hat{\beta}_h \circ \hat{\alpha}_g = \big[\hat{\alpha}_{c^P_h|_{G(g)}}\big] \circ \hat{\beta}_h = [\hat{\alpha}_{c^P_h(g)}] \circ \hat{\beta}_h = \hat{\alpha}_{hgh^{-1}} \circ \hat{\beta}_h\,;$

(ii) $\hat{\alpha}_g \circ \hat{\beta}_h = \big[\hat{\beta}_{c^P_g|_{H(h)}}\big] \circ \hat{\alpha}_g = [\hat{\beta}_{c^P_g(h)}] \circ \hat{\alpha}_g = \hat{\beta}_{ghg^{-1}} \circ \hat{\alpha}_g\,.$

e, portanto, também como

(i) $\hat{\alpha}_{hgh^{-1}} = \hat{\beta}_h \circ \hat{\alpha}_g \circ (\hat{\beta}_h)^{-1} = \hat{\beta}_h \circ \hat{\alpha}_g \circ \hat{\beta}_{h^{-1}}\;;$

(ii) $\hat{\beta}_{ghg^{-1}} = \hat{\alpha}_g \circ \hat{\beta}_h \circ (\hat{\alpha}_g)^{-1} = \hat{\alpha}_g \circ \hat{\beta}_h \circ \hat{\alpha}_{g^{-1}}\;.$

Usando nossa notação, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$, $\forall v \in E$, temos que

$$\begin{aligned}
{}^{{}^{h}g}v &= {}^{({}^{h}g)}v \\
&= {}^{[c^P_{HG}(h)](g)}v \\
&= \big[\hat{\alpha}\big([c^P_{HG}(h)](g)\big)\big](v) \\
&= [\hat{\alpha}(hgh^{-1})](v) \\
&= \hat{\alpha}_{hgh^{-1}}(v) \\
&= (\hat{\beta}_h \circ \hat{\alpha}_g \circ \hat{\beta}_{h^{-1}})(v) \\
&= \hat{\beta}_h\Big(\hat{\alpha}_g\big(\hat{\beta}_{h^{-1}}(v)\big)\Big) \\
&= \hat{\beta}_h\big(\hat{\alpha}_g({}^{h^{-1}}v)\big) \\
&= \hat{\beta}_h\big({}^{g}({}^{h^{-1}}v)\big) \\
&= {}^{h}\big({}^{g}({}^{h^{-1}}v)\big) \\
&= {}^{hgh^{-1}}v \ ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{{}^{g}h}v &= {}^{({}^{g}h)}v \\
&= {}^{[c^P_{GH}(g)](h)}v \\
&= \big[\hat{\beta}\big([c^P_{GH}(g)](h)\big)\big](v) \\
&= [\hat{\beta}(ghg^{-1})](v) \\
&= \hat{\beta}_{ghg^{-1}}(v) \\
&= (\hat{\alpha}_g \circ \hat{\beta}_h \circ \hat{\alpha}_{g^{-1}})(v) \\
&= \hat{\alpha}_g\Big(\hat{\beta}_h\big(\hat{\alpha}_{g^{-1}}(v)\big)\Big) \\
&= \hat{\alpha}_g\big(\hat{\beta}_h({}^{g^{-1}}v)\big) \\
&= \hat{\alpha}_g\big({}^{h}({}^{g^{-1}}v)\big) \\
&= {}^{g}\big({}^{h}({}^{g^{-1}}v)\big) \\
&= {}^{ghg^{-1}}v \ .
\end{aligned}$$

Visualmente, essas igualdades são muito parecidas com aquelas que tratam da compatibilidade das restrições c^P_{GH} e c^P_{HG}. Cometemos um abuso de linguagem e dizemos que as ações $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ são compatíveis.

3.5 Propriedades

Teorema 3.5.1. Sejam G, H, T_1 e T_2 grupos, $\theta : G \to Sym(H)$ e $\xi : H \to Sym(G)$ ações, $\tau_1 : G\times H \to T_1$ um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ e $\tau_2 : H\times G \to T_2$ um pareamento cruzado com respeito a ξ e θ tais que

$T_1 = (G \otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau_1}$ e $T_2 = (H \otimes G)^{(\xi,\theta)}_{\tau_2}$. Então, existe um isomorfismo $f : T_1 \xrightarrow{\cong} T_2$ tal que $f(g \otimes h) = (h \otimes g)^{-1}$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$.

Demonstração: Sejam as funções $i_1 : T_1 \to T_1$, $i_2 : T_2 \to T_2$ e $\mu : H \times G \to G \times H$ tais que $i_1(u) = u^{-1}$, $\forall u \in T_1$, $i_2(v) = v^{-1}$, $\forall v \in T_2$, e $\mu(h,g) = (g,h)$, $\forall (h,g) \in H \times G$. Então, $i_1 \in Sym(T_1)$, com $i_1 \circ i_1 = id_{T_1}$, $i_2 \in Sym(T_2)$, com $i_2 \circ i_2 = id_{T_2}$ e μ é bijetora, com inversa $\mu^{-1} : G \times H \to H \times G$ tal que $\mu^{-1}(g,h) = (h,g)$, $\forall (g,h) \in G \times H$.

$$\begin{tikzcd}
G \times H \arrow[r, "\tau_1"] & T_1 \arrow[r, "i_1"] & T_1 \\
H \times G \arrow[u, "\mu"] \arrow[r, "\tau_2"'] & T_2 \arrow[r, "i_2"'] & T_2
\end{tikzcd}$$

Pela proposição 1.2.13, $(i_1 \circ \tau_1 \circ \mu) : H \times G \to T_1$ é pareamento cruzado com respeito a ξ e θ e $(i_2 \circ \tau_2 \circ \mu^{-1}) : G \times H \to T_2$ é pareamento cruzado com respeito a θ e ξ. Por definição, existem únicos homomorfismos $\alpha : T_1 \to T_2$ e $\beta : T_2 \to T_1$ tais que $\alpha \circ \tau_1 = i_2 \circ \tau_2 \circ \mu^{-1}$ e $\beta \circ \tau_2 = i_1 \circ \tau_1 \circ \mu$.

$$\begin{tikzcd}
G \times H \arrow[r, "\tau_1"] & (G \otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau_1} \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "\alpha"] & (G \otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau_1} \\
H \times G \arrow[u, "\mu"] \arrow[r, "\tau_2"'] & (H \otimes G)^{(\xi,\theta)}_{\tau_2} \arrow[r, "i_2"'] \arrow[ur, "\beta"'] & (H \otimes G)^{(\xi,\theta)}_{\tau_2}
\end{tikzcd}$$

Como α e β são homomorfismos, $\forall u \in T_1$, $\forall v \in T_2$, temos que

$$(\alpha \circ i_1)(u) = \alpha\big(i_1(u)\big) = \alpha(u^{-1}) = [\alpha(u)]^{-1} = i_2\big(\alpha(u)\big) = (i_2 \circ \alpha)(u)$$

e que

$$(\beta \circ i_2)(v) = \beta\big(i_2(v)\big) = \beta(v^{-1}) = [\beta(v)]^{-1} = i_1\big(\beta(v)\big) = (i_1 \circ \beta)(v)\,.$$

Daí, $\alpha \circ i_1 = i_2 \circ \alpha$ e $\beta \circ i_2 = i_1 \circ \beta$.

As identidades $id_{T_1} : T_1 \to T_1$ e $id_{T_2} : T_2 \to T_2$ são homomorfismos tais que $id_{T_1} \circ \tau_1 = \tau_1$ e $id_{T_2} \circ \tau_2 = \tau_2$. Considere os homomorfismos $\beta \circ \alpha : T_1 \to T_1$ e $\alpha \circ \beta : T_2 \to T_2$.

$$\begin{tikzcd}
G \times H \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[dr, bend right, "\tau_1"'] & T_1 \arrow[d, shift right, "id_{T_1}"'] \arrow[d, shift left, "\beta\circ\alpha"] \\
& T_1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H \times G \arrow[r, "\tau_2"] \arrow[dr, bend right, "\tau_2"'] & T_2 \arrow[d, shift right, "id_{T_2}"'] \arrow[d, shift left, "\alpha\circ\beta"] \\
& T_2
\end{tikzcd}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
(\beta \circ \alpha) \circ \tau_1 &= \beta \circ (\alpha \circ \tau_1) \\
&= \beta \circ (i_2 \circ \tau_2 \circ \mu^{-1}) \\
&= (\beta \circ i_2) \circ (\tau_2 \circ \mu^{-1}) \\
&= (i_1 \circ \beta) \circ (\tau_2 \circ \mu^{-1}) \\
&= i_1 \circ (\beta \circ \tau_2) \circ \mu^{-1} \\
&= i_1 \circ (i_1 \circ \tau_1 \circ \mu) \circ \mu^{-1} \\
&= (i_1 \circ i_1) \circ \tau_1 \circ (\mu \circ \mu^{-1}) \\
&= id_{T_1} \circ \tau_1 \circ id_{G\times H} \\
&= \tau_1 \,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha \circ \beta) \circ \tau_2 &= \alpha \circ (\beta \circ \tau_2) \\
&= \alpha \circ (i_1 \circ \tau_1 \circ \mu) \\
&= (\alpha \circ i_1) \circ (\tau_1 \circ \mu) \\
&= (i_2 \circ \alpha) \circ (\tau_1 \circ \mu) \\
&= i_2 \circ (\alpha \circ \tau_1) \circ \mu \\
&= i_2 \circ (i_2 \circ \tau_2 \circ \mu^{-1}) \circ \mu \\
&= (i_2 \circ i_2) \circ \tau_2 \circ (\mu^{-1} \circ \mu) \\
&= id_{T_2} \circ \tau_2 \circ id_{H\times G} \\
&= \tau_2 \,.
\end{aligned}$$

Pela unicidade da definição de produto tensorial, ficamos com $\beta \circ \alpha = id_{T_1}$ e com $\alpha \circ \beta = id_{T_2}$. Assim, α e β são isomorfismos, com $\beta = \alpha^{-1}$. Tome $f = \alpha : (G \otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau_1} \xrightarrow{\cong} (H \otimes G)^{(\xi,\theta)}_{\tau_2}$. Assim, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$, temos que

$$\begin{aligned}
f(g \otimes h) &= f\big(\tau_1(g,h)\big) \\
&= \alpha\big(\tau_1(g,h)\big) \\
&= (\alpha \circ \tau_1)(g,h) \\
&= (i_2 \circ \tau_2 \circ \mu^{-1})(g,h) \\
&= i_2\Big(\tau_2\big(\mu^{-1}(g,h)\big)\Big) \\
&= i_2\big(\tau_2(h,g)\big) \\
&= i_2(h \otimes g) \\
&= (h \otimes g)^{-1} \,.
\end{aligned}$$

■

Complementando o teorema anterior, como $f : (G \otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau_1} \xrightarrow{\cong} (H \otimes G)^{(\xi,\theta)}_{\tau_2}$ é um isomorfismo de grupos, pelo item (i) do teorema 2.1.5, temos que

$f\circ\tau : G\times H \to (H\otimes G)^{(\xi,\theta)}_{\tau_2}$ é um pareamento cruzado com respeito às ações θ e ξ e $(H\otimes G)^{(\xi,\theta)}_{\tau_2} = (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{f\circ\tau_1}$.

Teorema 3.5.2. Sejam P, E_1 e E_2 grupos, $G \lhd P$, $H \lhd P$, $c^P : P \to Aut(P)$ a ação por conjugação de P, $c^P_{GH} : G \to Aut(H)$ e $c^P_{HG} : H \to Aut(G)$ as restrições de c^P, $\varepsilon_1 : G\times H \to E_1$ e $\varepsilon_2 : H\times G \to E_2$ pareamentos exteriores tais que $E_1 = (G\wedge H)_{\varepsilon_1}$ e $E_2 = (H\wedge G)_{\varepsilon_2}$. Então, existe um isomorfismo $f : E_1 \xrightarrow{\cong} E_2$ tal que $f(g\wedge h) = (h\wedge g)^{-1}$, $\forall g\in G$, $\forall h\in H$.

Demonstração: Sejam as funções $i_1 : E_1 \to E_1$, $i_2 : E_2 \to E_2$ e $\mu : H\times G \to G\times H$ tais que $i_1(u) = u^{-1}$, $\forall u\in E_1$, $i_2(v) = v^{-1}$, $\forall v \in E_2$, e $\mu(h,g) = (g,h)$, $\forall (h,g)\in H\times G$. Então, $i_1 \in Sym(E_1)$, com $i_1\circ i_1 = id_{E_1}$, $i_2\in Sym(E_2)$, com $i_2\circ i_2 = id_{E_2}$ e μ é bijetora, com inversa $\mu^{-1} : G\times H \to H\times G$ tal que $\mu^{-1}(g,h) = (h,g)$, $\forall (g,h)\in G\times H$.

$$\begin{tikzcd}
G\times H \arrow[r, "\varepsilon_1"] & E_1 \arrow[r, "i_1"] & E_1 \\
H\times G \arrow[u, "\mu"] \arrow[r, "\varepsilon_2"'] & E_2 \arrow[r, "i_2"'] & E_2
\end{tikzcd}$$

Pela proposição 1.2.13, $i_1\circ\varepsilon_1\circ\mu : H\times G \to E_1$ é pareamento cruzado com respeito a c^P_{HG} e c^P_{GH} e $i_2\circ\varepsilon_2\circ\mu^{-1} : G\times H \to E_2$ é pareamento cruzado com respeito a c^P_{GH} e c^P_{HG}. Sejam $e_1 \in E_1$ o elemento neutro de E_1 e $e_2\in E_2$ o elemento neutro de E_2. Como ε_1 e ε_2 são pareamentos exteriores, $\forall z\in G\cap H$, temos que $(i_1\circ\varepsilon_1\circ\mu)(z,z) = i_1\Big(\varepsilon_1\big(\mu(z,z)\big)\Big) = i_1\big(\varepsilon_1(z,z)\big) = i_1(e_1) = e_1^{-1} = e_1$ e $(i_2\circ\varepsilon_2\circ\mu^{-1})(z,z) = i_2\Big(\varepsilon_2\big(\mu^{-1}(z,z)\big)\Big) = i_2\big(\varepsilon_2(z,z)\big) = i_2(e_2) = e_2^{-1} = e_2$. Portanto, $i_1\circ\varepsilon_1\circ\mu$ e $i_2\circ\varepsilon_2\circ\mu^{-1}$ são pareamentos exteriores. Por definição, existem únicos homomorfismos $\alpha : E_1 \to E_2$ e $\beta : E_2\to E_1$ tais que $\alpha\circ\varepsilon_1 = i_2\circ\varepsilon_2\circ\mu^{-1}$ e $\beta\circ\varepsilon_2 = i_1\circ\varepsilon_1\circ\mu$.

$$\begin{tikzcd}
G\times H \arrow[r, "\varepsilon_1"] & (G\wedge H)_{\varepsilon_1} \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "\alpha"'] & (G\wedge H)_{\varepsilon_2} \\
H\times G \arrow[u, "\mu"] \arrow[r, "\varepsilon_2"'] & (H\wedge G)_{\varepsilon_2} \arrow[r, "i_2"'] \arrow[ur, "\beta"] & (H\wedge G)_{\varepsilon_2}
\end{tikzcd}$$

Como α e β são homomorfismos, $\forall u\in E_1$, $\forall v\in E_2$, temos que

$$(\alpha\circ i_1)(u) = \alpha\big(i_1(u)\big) = \alpha(u^{-1}) = [\alpha(u)]^{-1} = i_2\big(\alpha(u)\big) = (i_2\circ\alpha)(u)$$

e

$$(\beta\circ i_2)(v) = \beta\big(i_2(v)\big) = \beta(v^{-1}) = [\beta(v)]^{-1} = i_1\big(\beta(v)\big) = (i_1\circ\beta)(v)\,.$$

Daí, $\alpha \circ i_1 = i_2 \circ \alpha$ e $\beta \circ i_2 = i_1 \circ \beta$.

As identidades $id_{E_1} : E_1 \to E_1$ e $id_{E_2} : E_2 \to E_2$ são homomorfismos tais que $id_{E_1} \circ \varepsilon_1 = \varepsilon_1$ e $id_{E_2} \circ \varepsilon_2 = \varepsilon_2$. Considere os homomorfismos $\beta \circ \alpha : E_1 \to E_1$ e $\alpha \circ \beta : E_2 \to E_2$.

$$\begin{tikzcd} G \times H \arrow[r, "\varepsilon_1"] \arrow[dr, bend right, "\varepsilon_1"'] & E_1 \arrow[d, shift right, "id_{E_1}"'] \arrow[d, shift left, "\beta\circ\alpha"] \\ & E_1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H \times G \arrow[r, "\varepsilon_2"] \arrow[dr, bend right, "\varepsilon_2"'] & E_2 \arrow[d, shift right, "id_{E_2}"'] \arrow[d, shift left, "\alpha\circ\beta"] \\ & E_2 \end{tikzcd}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
(\beta \circ \alpha) \circ \varepsilon_1 &= \beta \circ (\alpha \circ \varepsilon_1) \\
&= \beta \circ (i_2 \circ \varepsilon_2 \circ \mu^{-1}) \\
&= (\beta \circ i_2) \circ (\varepsilon_2 \circ \mu^{-1}) \\
&= (i_1 \circ \beta) \circ (\varepsilon_2 \circ \mu^{-1}) \\
&= i_1 \circ (\beta \circ \varepsilon_2) \circ \mu^{-1} \\
&= i_1 \circ (i_1 \circ \varepsilon_1 \circ \mu) \circ \mu^{-1} \\
&= (i_1 \circ i_1) \circ \varepsilon_1 \circ (\mu \circ \mu^{-1}) \\
&= id_{E_1} \circ \varepsilon_1 \circ id_{G\times H} \\
&= \varepsilon_1\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha \circ \beta) \circ \varepsilon_2 &= \alpha \circ (\beta \circ \varepsilon_2) \\
&= \alpha \circ (i_1 \circ \varepsilon_1 \circ \mu) \\
&= (\alpha \circ i_1) \circ (\varepsilon_1 \circ \mu) \\
&= (i_2 \circ \alpha) \circ (\varepsilon_1 \circ \mu) \\
&= i_2 \circ (\alpha \circ \varepsilon_1) \circ \mu \\
&= i_2 \circ (i_2 \circ \varepsilon_2 \circ \mu^{-1}) \circ \mu \\
&= (i_2 \circ i_2) \circ \varepsilon_2 \circ (\mu^{-1} \circ \mu) \\
&= id_{E_2} \circ \varepsilon_2 \circ id_{H\times G} \\
&= \varepsilon_2\,.
\end{aligned}$$

Pela unicidade da definição de produto exterior, ficamos com $\beta \circ \alpha = id_{E_1}$ e com $\alpha \circ \beta = id_{E_2}$. Assim, α e β são isomorfismos, com $\beta = \alpha^{-1}$. Tome

$f=\alpha:(G\wedge H)_{\varepsilon_1}\xrightarrow{\cong}(H\wedge G)_{\varepsilon_2}$. Assim, $\forall g\in G$, $\forall h\in H$, temos que

$$\begin{aligned} f(g\wedge h) &= f\big(\varepsilon_1(g,h)\big)\\ &= \alpha\big(\varepsilon_1(g,h)\big)\\ &= (\alpha\circ\varepsilon_1)(g,h)\\ &= (i_2\circ\varepsilon_2\circ\mu^{-1})(g,h)\\ &= i_2\Big(\varepsilon_2\big(\mu^{-1}(g,h)\big)\Big)\\ &= i_2\big(\varepsilon_2(h,g)\big)\\ &= i_2(h\wedge g)\\ &= (h\wedge g)^{-1}\,. \end{aligned}$$

■

Complementando o teorema anterior, como $f:(G\wedge H)_{\varepsilon_1}\xrightarrow{\cong}(H\wedge G)_{\varepsilon_2}$ é um isomorfismo de grupos, pelo item (i) do teorema 2.1.5, temos que $f\circ\tau:G\times H\to(H\wedge G)_{\varepsilon_2}$ é um pareamento exterior e $(H\wedge G)_{\varepsilon_2}=(G\wedge H)_{f\circ\varepsilon_1}$.

Teorema 3.5.3. Sejam G, H e T grupos, $\theta:G\to Aut(H)$ e $\xi:H\to Aut(G)$ ações por automorfismos e compatíveis e $\tau:G\times H\to T$ um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ tais que $T=(G\otimes H)_{\tau}^{(\theta,\xi)}$. Sejam também $c^G:G\to Aut(G)$ a ação por conjugação de G, $c^H:H\to Aut(H)$ a ação por conjugação de H, $c^T:T\to Aut(T)$ a ação por conjugação de T e as ações induzidas $\tilde{\alpha}:G\to Aut(T)$ e $\tilde{\beta}:H\to Aut(T)$ por θ e ξ. Então, existem únicos homomorfismos $\lambda:T\to G$ e $\rho:T\to H$ tais que

(i) $\lambda(g\otimes h)=g\cdot[\xi_h(g)]^{-1}=g\,{}^hg^{-1}$, $\forall g\in G$, $\forall h\in H$;

(ii) $\rho(g\otimes h)=[\theta_g(h)]\cdot h^{-1}={}^gh\,h^{-1}$, $\forall g\in G$, $\forall h\in H$;

(iii) $\tilde{\alpha}\circ\lambda=c^T$;

(iv) $\tilde{\beta}\circ\rho=c^T$;

(v) $\lambda\circ\tilde{\alpha}_g=c^G_g\circ\lambda$, $\forall g\in G$;

(vi) $\rho\circ\tilde{\beta}_h=c^H_h\circ\rho$, $\forall h\in H$;

(vii) $\lambda(t)\otimes h=t\cdot[\tilde{\beta}_h(t)]^{-1}=t\,{}^ht^{-1}$, $\forall t\in T$, $\forall h\in H$;

(viii) $g\otimes\rho(t)=[\tilde{\alpha}_g(t)]\cdot t^{-1}={}^gt\,t^{-1}$, $\forall g\in G$, $\forall t\in T$;

(ix) ${}^gt=\tilde{\alpha}_g(t)=t$, $\forall t\in ker(\rho)$, $\forall g\in G$;

(x) ${}^ht=\tilde{\beta}_h(t)=t$, $\forall t\in ker(\lambda)$, $\forall h\in H$;

(xi) $[u,v] = \lambda(u) \otimes \rho(v)$, $\forall u, v \in T$.

Demonstração: **(i)** e **(ii)** Sejam as funções $\tau_1 : G \times H \to G$ e $\tau_2 : G \times H \to H$ tais que $\tau_1(g,h) = g \cdot [\xi_h(g)]^{-1} = g \cdot ({}^h g)^{-1}$ e $\tau_2(g,h) = [\theta_g(h)] \cdot h^{-1} = {}^g h\, h^{-1}$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$. Como θ e ξ são ações por automorfismos e compatíveis, pela proposição 1.2.11, temos que τ_1 e τ_2 são pareamentos cruzados com respeito a θ e ξ. Pela definição de produto tensorial, existem únicos homomorfismos $\lambda : T \to G$ e $\rho : T \to H$ tais que $\lambda \circ \tau = \tau_1$ e $\rho \circ \tau = \tau_2$.

$$\begin{tikzcd} G \times H \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\tau_1"'] & (G \otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau} \arrow[d, "\lambda"] \\ & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \times H \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\tau_2"'] & (G \otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau} \arrow[d, "\rho"] \\ & H \end{tikzcd}$$

Assim, $\lambda(g \otimes h) = \lambda\big(\tau(g,h)\big) = (\lambda \circ \tau)(g,h) = \tau_1(g,h) = g \cdot [\xi_h(g)]^{-1} = g \cdot ({}^h g)^{-1}$ e $\rho(g \otimes h) = \rho\big(\tau(g,h)\big) = (\rho \circ \tau)(g,h) = \tau_2(g,h) = [\theta_g(h)] \cdot h^{-1} = {}^g h\, h^{-1}$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$.

(iii) e **(iv)** Claro que $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ são homomorfismos, $\tilde{\alpha} \in Hom\big(G, Aut(T)\big)$ e $\tilde{\beta} \in Hom\big(H, Aut(T)\big)$. Pela proposição 1.2.11, as funções $\tau_1 : G \times H \to G$ e $\tau_2 : G \times H \to H$ acima são pareamentos cruzados com respeito a θ e ξ. Pela proposição 1.2.12, as compostas $\tilde{\alpha} \circ \tau_1 : G \times H \to Aut(T)$ e $\tilde{\beta} \circ \tau_2 : G \times H \to Aut(T)$ também são pareamentos cruzados com respeito a θ e ξ. Pela definição de produto tensorial, existem únicos homomorfismos $\varphi_1, \varphi_2 : T \to Aut(T)$ tais que $\varphi_1 \circ \tau = \tilde{\alpha} \circ \tau_1$ e $\varphi_2 \circ \tau = \tilde{\beta} \circ \tau_2$. Também temos os homomorfismos c^T, $\tilde{\alpha} \circ \lambda$, $\tilde{\beta} \circ \rho : T \to Aut(T)$.

$$\begin{tikzcd} & & T \arrow[dl, "\rho"'] \arrow[dd, "\lambda"] \arrow[dr, "c^T"] & \\ & H \arrow[rr, "\tilde{\beta}"'] & & Aut(T) \\ G \times H \arrow[uurr, "\tau"] \arrow[ur, "\tau_2"'] \arrow[rr, "\tau_1"'] & & G \arrow[ur, "\tilde{\alpha}"'] & \end{tikzcd}$$

Temos que $(\tilde{\alpha} \circ \lambda) \circ \tau = \tilde{\alpha} \circ (\lambda \circ \tau) = \tilde{\alpha} \circ \tau_1$ e, portanto, que $\varphi_1 = \tilde{\alpha} \circ \lambda$. Também, $(\tilde{\beta} \circ \rho) \circ \tau = \tilde{\beta} \circ (\rho \circ \tau) = \tilde{\beta} \circ \tau_2$ e, assim, $\varphi_2 = \tilde{\beta} \circ \rho$.

Usando o item (i) da proposição 2.4.3 e o item (ii) da proposição 2.4.2,

$\forall (g,h) \in G \times H$, temos que

$$
\begin{aligned}
(\tilde{\alpha} \circ \tau_1)(g,h) &= \tilde{\alpha}\big(\tau_1(g,h)\big) \\
&= \tilde{\alpha}\big(g \cdot [\xi_h(g)]^{-1}\big) \\
&= \tilde{\alpha}(g) \circ \tilde{\alpha}\big([\xi_h(g)]^{-1}\big) \\
&= \tilde{\alpha}(g) \circ \big[\tilde{\alpha}\big(\xi_h(g)\big)\big]^{-1} \\
&= \tilde{\alpha}_g \circ \big[\tilde{\alpha}_{\xi_h(g)}\big]^{-1} \\
&= \tilde{\alpha}_g \circ (\tilde{\beta}_h \circ \tilde{\alpha}_g \circ \tilde{\beta}_{h^{-1}})^{-1} \\
&= \tilde{\alpha}_g \circ \tilde{\beta}_h \circ \tilde{\alpha}_{g^{-1}} \circ \tilde{\beta}_{h^{-1}} \\
&= c^T_{g \otimes h} \\
&= c^T(g \otimes h) \\
&= c^T\big(\tau(g,h)\big) \\
&= (c^T \circ \tau)(g,h)\,.
\end{aligned}
$$

Assim, $c^T \circ \tau = \tilde{\alpha} \circ \tau_1$ e, portanto, $c^T = \varphi_1$. De novo, usando o item (ii) da proposição 2.4.3 e o item (ii) da proposição 2.4.2, $\forall (g,h) \in G \times H$, temos que

$$
\begin{aligned}
(\tilde{\beta} \circ \tau_2)(g,h) &= \tilde{\beta}\big(\tau_2(g,h)\big) \\
&= \tilde{\beta}\big(\theta_g(h) \cdot h^{-1}\big) \\
&= \tilde{\beta}\big(\theta_g(h)\big) \circ \tilde{\beta}(h^{-1}) \\
&= \tilde{\beta}_{\theta_g(h)} \circ \tilde{\beta}_{h^{-1}} \\
&= \tilde{\alpha}_g \circ \tilde{\beta}_h \circ \tilde{\alpha}_{g^{-1}} \circ \tilde{\beta}_{h^{-1}} \\
&= c^T_{g \otimes h} \\
&= c^T(g \otimes h) \\
&= c^T\big(\tau(g,h)\big) \\
&= (c^T \circ \tau)(g,h)\,.
\end{aligned}
$$

Assim, $c^T \circ \tau = \tilde{\beta} \circ \tau_2$ e, portanto, $c^T = \varphi_2$.

Logo, $\tilde{\alpha} \circ \lambda = \varphi_1 = c^T = \varphi_2 = \tilde{\beta} \circ \rho$.

(v) Seja $g \in G$. Como θ e ξ são compatíveis, $\forall (a,b) \in G \times H$, temos que

$$\begin{aligned}
[\tau_1 \circ (c_g^G \times \theta_g)](a,b) &= \tau_1\big((c_g^G \times \theta_g)(a,b)\big) \\
&= \tau_1\big(c_g^G(a), \theta_g(b)\big) \\
&= c_g^G(a) \cdot \big[\xi_{\theta_g(b)}\big(c_g^G(a)\big)\big]^{-1} \\
&= c_g^G(a) \cdot \{[\xi_{\theta_g(b)} \circ c_g^G](a)\}^{-1} \\
&= c_g^G(a) \cdot [(c_g^G \circ \xi_b)(a)]^{-1} \\
&= c_g^G(a) \cdot \big[c_g^G\big(\xi_b(a)\big)\big]^{-1} \\
&= c_g^G(a) \cdot c_g^G\big([\xi_b(a)]^{-1}\big) \\
&= c_g^G\big(a \cdot [\xi_b(a)]^{-1}\big) \\
&= c_g^G\big(\tau_1(a,b)\big) \\
&= (c_g^G \circ \tau_1)(a,b)\,.
\end{aligned}$$

Assim, $\tau_1 \circ (c_g^G \times \theta_g) = c_g^G \circ \tau_1$. Como τ_1 é um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ, pelo exemplo 1.3.4, segue que $\tau_1 \circ (c_g^G \times \theta_g) = c_g^G \circ \tau_1$ também é um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ. Portanto, existe um único homomorfismo $\psi : T \to G$ tal que $\psi \circ \tau = \tau_1 \circ (c_g^G \times \theta_g)$.

$$\begin{tikzcd}
G \times H \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\tau_1 \circ (c_g^G \times \theta_g)"'] & T \arrow[d, "\psi"] \\
& G
\end{tikzcd}$$

É claro que $\lambda \circ \tilde{\alpha}_g$, $c_g^G \circ \lambda : T \to G$ também são homomorfismos. Temos que

$$\begin{aligned}
(\lambda \circ \tilde{\alpha}_g) \circ \tau &= \lambda \circ (\tilde{\alpha}_g \circ \tau) \\
&= \lambda \circ \alpha_g \\
&= \lambda \circ [\tau \circ (c_g^G \times \theta_g)] \\
&= (\lambda \circ \tau) \circ (c_g^G \times \theta_g) \\
&= \tau_1 \circ (c_g^G \times \theta_g)\,.
\end{aligned}$$

Daí, $\lambda \circ \tilde{\alpha}_g = \psi$. Também, $(c_g^G \circ \lambda) \circ \tau = c_g^G \circ (\lambda \circ \tau) = c_g^G \circ \tau_1 = \tau_1 \circ (c_g^G \times \theta_g)$. Assim, $c_g^G \circ \lambda = \psi = \lambda \circ \tilde{\alpha}_g$.

(vi) Seja $h \in H$. Como θ e ξ são compatíveis, $\forall (a,b) \in G \times H$, temos que

$$\begin{aligned}
[\tau_2 \circ (\xi_h \times c_h^H)](a,b) &= \tau_2\big((\xi_h \times c_h^H)(a,b)\big) \\
&= \tau_2\big(\xi_h(a), c_h^H(b)\big) \\
&= \theta_{\xi_h(a)}\big(c_h^H(b)\big) \cdot [c_h^H(b)]^{-1} \\
&= [\theta_{\xi_h(a)} \circ c_h^H](b) \cdot c_h^H(b^{-1}) \\
&= (c_h^H \circ \theta_a)(b) \cdot c_h^H(b^{-1}) \\
&= c_h^H\big(\theta_a(b)\big) \cdot c_h^H(b^{-1}) \\
&= c_h^H\big(\theta_a(b) \cdot b^{-1}\big) \\
&= c_h^H\big(\tau_2(a,b)\big) \\
&= (c_h^H \circ \tau_2)(a,b)\,.
\end{aligned}$$

Assim, $\tau_2 \circ (\xi_h \times c_h^H) = c_h^H \circ \tau_2$. Como τ_2 é um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ, pelo exemplo 1.3.4, segue que $\tau_2 \circ (\xi_h \times c_h^H) = c_h^H \circ \tau_2$ também é um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ. Portanto, existe um único homomorfismo $\phi : T \to H$ tal que $\phi \circ \tau = \tau_2 \circ (\xi_h \times c_h^H)$.

$$\begin{tikzcd}
G \times H \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\tau_2 \circ (\xi_h \times c_h^H)"'] & T \arrow[d, "\phi"] \\
& H
\end{tikzcd}$$

É claro que $\rho \circ \tilde{\beta}_h\,,\ c_h^H \circ \rho : T \to G$ também são homomorfismos. Temos que

$$\begin{aligned}
(\rho \circ \tilde{\beta}_h) \circ \tau &= \rho \circ (\tilde{\beta}_h \circ \tau) \\
&= \rho \circ \beta_h \\
&= \rho \circ [\tau \circ (\xi_h \times c_h^H)] \\
&= (\rho \circ \tau) \circ (\xi_h \times c_h^H) \\
&= \tau_2 \circ (\xi_h \times c_h^H)\,.
\end{aligned}$$

Assim, $\rho \circ \tilde{\beta}_h = \phi$. Também, $(c_h^H \circ \rho) \circ \tau = c_h^H \circ (\rho \circ \tau) = c_h^H \circ \tau_2 = \tau_2 \circ (\xi_h \times c_h^H)$. Daí, $c_h^H \circ \rho = \phi = \rho \circ \tilde{\beta}_h$.

(vii) Para cada $h \in H$, seja $V_h = \big\{t \in T \ : \ \lambda(t) \otimes h = t \cdot [\tilde{\beta}_h(t)]^{-1}\big\}$. Sejam $h \in H$ e $t \in im(\tau)$. Existem $a \in G$ e $b \in H$ tais que $t = \tau(a,b) = a \otimes b$. Daí, pelo item (i) desse teorema e pelo item (viii) do teorema 2.4.1, temos que

$$\begin{aligned}
\lambda(t) \otimes h &= [\lambda(a \otimes b)] \otimes h \\
&= a\,{}^{b}a^{-1} \otimes h \\
&= (a \otimes b) \cdot {}^{h}(a \otimes b)^{-1} \\
&= t\,{}^{h}t^{-1} \\
&= t({}^{h}t)^{-1} \\
&= t \cdot [\tilde{\beta}_h(t)]^{-1}\,.
\end{aligned}$$

Assim, $t \in V_h$. Como t é qualquer, $im(\tau) \subset V_h$. Sejam $u, v \in V_h$. Então, $\lambda(u) \otimes h = u \cdot [\tilde{\beta}_h(u)]^{-1}$ e $\lambda(v) \otimes h = v \cdot [\tilde{\beta}_h(v)]^{-1}$. Daí, usando a primeira igualdade do item (i) do teorema 2.4.1 e o item (iii) desse teorema, ficamos com

$$\begin{aligned}
\lambda(uv) \otimes h &= [\lambda(u) \cdot \lambda(v)] \otimes h \\
&= {}^{\lambda(u)}[\lambda(v) \otimes h] \cdot [\lambda(u) \otimes h] \\
&= \big[\tilde{\alpha}_{\lambda(u)}\big(\lambda(v) \otimes h\big)\big] \cdot [\lambda(u) \otimes h] \\
&= \big\{\big[\tilde{\alpha}\big(\lambda(u)\big)\big]\big(v \cdot [\tilde{\beta}_h(v)]^{-1}\big)\big\} \cdot \{u \cdot [\tilde{\beta}_h(u)]^{-1}\} \\
&= \big\{[(\tilde{\alpha} \circ \lambda)(u)]\big(v \cdot [\tilde{\beta}_h(v)]^{-1}\big)\big\} \cdot \{u \cdot [\tilde{\beta}_h(u)]^{-1}\} \\
&= \big\{[c^T(u)]\big(v \cdot [\tilde{\beta}_h(v)]^{-1}\big)\big\} \cdot \{u \cdot [\tilde{\beta}_h(u)]^{-1}\} \\
&= \big[c_u^T\big(v \cdot [\tilde{\beta}_h(v)]^{-1}\big)\big] \cdot \{u \cdot [\tilde{\beta}_h(u)]^{-1}\} \\
&= \big[u \cdot \big(v \cdot [\tilde{\beta}_h(v)]^{-1}\big) \cdot u^{-1}\big] \cdot \{u \cdot [\tilde{\beta}_h(u)]^{-1}\} \\
&= u \cdot v \cdot [\tilde{\beta}_h(v)]^{-1} \cdot [\tilde{\beta}_h(u)]^{-1} \\
&= (uv) \cdot [\tilde{\beta}_h(u) \cdot \tilde{\beta}_h(v)]^{-1} \\
&= (uv) \cdot [\tilde{\beta}_h(uv)]^{-1}.
\end{aligned}$$

Daí, $uv \in V_h$. Como u e v são arbitrários, V_h é fechado por produtos. Pela observação 1.2.6, ficamos com $T = Sp\big(im(\tau)\big) \subset V_h$ e, portanto, $V_h = T$. Dessa forma, $\lambda(t) \otimes h = t \cdot [\tilde{\beta}_h(t)]^{-1}$, $\forall t \in T$. Como h é qualquer, o resultado segue.

(viii) Para cada $g \in G$, seja $V_g = \big\{t \in T \ : \ g \otimes \rho(t) = [\tilde{\alpha}_g(t)] \cdot t^{-1}\big\}$. Sejam $g \in G$ e $t \in im(\tau)$. Assim, existem $a \in G$ e $b \in H$ tais que $t = \tau(a, b) = a \otimes b$. Daí, pelo item (ii) desse teorema e pelo item (ix) do teorema 2.4.1, temos que

$$\begin{aligned}
g \otimes \rho(t) &= g \otimes [\rho(a \otimes b)] \\
&= g \otimes {}^{a}b\, b^{-1} \\
&= {}^{g}(a \otimes b) \cdot (a \otimes b)^{-1} \\
&= {}^{g}t\, t^{-1} \\
&= [\tilde{\alpha}_g(t)] \cdot t^{-1}.
\end{aligned}$$

Assim, $t \in V_g$. Como t é qualquer, $im(\tau) \subset V_g$. Sejam $u, v \in V_g$. Então, $g \otimes \rho(u) = [\tilde{\alpha}_g(u)] \cdot u^{-1}$ e $g \otimes \rho(v) = [\tilde{\alpha}_g(v)] \cdot v^{-1}$. Dessa forma, usando a segunda igualdade do item (i) do teorema 2.4.1 e o item (iv) desse teorema, ficamos com

$$
\begin{aligned}
g \otimes \rho(uv) &= g \otimes [\rho(u) \cdot \rho(v)] \\
&= [g \otimes \rho(u)] \cdot {}^{\rho(u)}[g \otimes \rho(v)] \\
&= [g \otimes \rho(u)] \cdot \big[\tilde{\beta}_{\rho(u)}\big(g \otimes \rho(v)\big)\big] \\
&= \big\{[\tilde{\alpha}_g(u)] \cdot u^{-1}\big\} \cdot \big\{\big[\tilde{\beta}\big(\rho(u)\big)\big]\big([\tilde{\alpha}_g(v)] \cdot v^{-1}\big)\big\} \\
&= \big\{[\tilde{\alpha}_g(u)] \cdot u^{-1}\big\} \cdot \big\{[(\tilde{\beta} \circ \rho)(u)]\big([\tilde{\alpha}_g(v)] \cdot v^{-1}\big)\big\} \\
&= \big\{[\tilde{\alpha}_g(u)] \cdot u^{-1}\big\} \cdot \big\{[c^T(u)]\big([\tilde{\alpha}_g(v)] \cdot v^{-1}\big)\big\} \\
&= \big\{[\tilde{\alpha}_g(u)] \cdot u^{-1}\big\} \cdot \big[c^T_u\big([\tilde{\alpha}_g(v)] \cdot v^{-1}\big)\big] \\
&= \big\{[\tilde{\alpha}_g(u)] \cdot u^{-1}\big\} \cdot \big(u \cdot \{[\tilde{\alpha}_g(v)] \cdot v^{-1}\} \cdot u^{-1}\big) \\
&= [\tilde{\alpha}_g(u)] \cdot [\tilde{\alpha}_g(v)] \cdot v^{-1} \cdot u^{-1} \\
&= [\tilde{\alpha}_g(uv)] \cdot (uv)^{-1} .
\end{aligned}
$$

Daí, $uv \in V_g$. Como u e v são arbitrários, V_g é fechado por produtos. Pela observação 1.2.6, temos que $T = Sp\big(im(\tau)\big) \subset V_g$. Assim, $V_g = T$. Portanto, $g \otimes \rho(t) = [\tilde{\alpha}_g(t)] \cdot t^{-1}$, $\forall t \in T$. Como g é qualquer, o resultado segue.

(ix) Sejam $e_T \in T$ o elemento neutro de T e $e_H \in H$ o elemento neutro de H. Usando o item (viii) desse teorema e o item (iv) do teorema 2.4.1, $\forall g \in G$, $\forall t \in ker(\rho)$, $e_T = g \otimes e_H = g \otimes \rho(t) = \tilde{\alpha}_g(t) \cdot t^{-1}$ e, portanto, $\tilde{\alpha}_g(t) = t$.

(x) Sejam $e_T \in T$ o elemento neutro de T e $e_G \in G$ o elemento neutro de G. Usando o item (vii) desse teorema e o item (iv) do teorema 2.4.1, $\forall h \in H$, $\forall t \in ker(\lambda)$, $e_T = e_G \otimes h = \lambda(t) \otimes h = t \cdot [\tilde{\beta}_h(t)]^{-1}$ e, portanto, $\tilde{\beta}_h(t) = t$.

(xi) Usando os itens (viii) e (iii) desse teorema, $\forall u, v \in T$, temos que

$$
\begin{aligned}
\lambda(u) \otimes \rho(v) &= \big[\tilde{\alpha}_{\lambda(u)}(v)\big] \cdot v^{-1} \\
&= \big\{\big[\tilde{\alpha}\big(\lambda(u)\big)\big](v)\big\} \cdot v^{-1} \\
&= \{[(\tilde{\alpha} \circ \lambda)(u)](v)\} \cdot v^{-1} \\
&= \{[c^T(u)](v)\} \cdot v^{-1} \\
&= [c^T_u(v)] \cdot v^{-1} \\
&= (u \cdot v \cdot u^{-1}) \cdot v^{-1} \\
&= uvu^{-1}v^{-1} \\
&= [u, v] .
\end{aligned}
$$

■

O item (ix) do teorema acima pode ser escrito como $\tilde{\alpha}_g|_{ker(\rho)} = id_{ker(\rho)}$, $\forall g \in G$, ou então, podemos dizer que $\tilde{\alpha}_g|_{ker(\rho)} : ker(\rho) \hookrightarrow T$ é a inclusão, $\forall g \in G$. O item (x) do mesmo teorema pode ser escrito como $\tilde{\beta}_h|_{ker(\lambda)} = id_{ker(\lambda)}$, $\forall h \in H$, ou então, podemos dizer que $\tilde{\beta}_h|_{ker(\lambda)} : ker(\lambda) \hookrightarrow T$ é a inclusão, $\forall h \in H$. Por isso, dizemos que $\tilde{\alpha}$ age trivialmente em $ker(\rho)$ e que $\tilde{\beta}$ age trivialmente em $ker(\lambda)$.

Ainda no contexto do enunciado do teorema acima, seja $\tilde{\kappa}_{T} : T \times T \to T'$ a função comutadora de T, isto é, $\tilde{\kappa}_{T}(u,v) = [u,v] = uvu^{-1}v^{-1} \in T' \lhd T$, $\forall u, v \in T$. O item (xi) desse teorema pode ser escrito como $\tilde{\kappa}_{T} = \tau \circ (\lambda \times \rho)$.

Note que, se ξ é ação trivial, então $\lambda = 0$ e, se θ é ação trivial, então $\rho = 0$. De fato, suponha que ξ é a ação trivial e sejam $e_{G} \in G$ o elemento neutro de G e $\sigma : G \times H \to G$ a função nula, isto é, $\sigma(g,h) = e_{G}$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$. Claro que σ é um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ. Assim, existe um único homomorfismo $\psi : T \to G$ tal que $\psi \circ \tau = \sigma$. Considere o homomorfismo nulo $0 : T \to G$, isto é, $0(t) = e_{G}$, $\forall t \in T$. Assim, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$, temos que $(\lambda \circ \tau)(g,h) = \lambda\big(\tau(g,h)\big) = \lambda(g \otimes h) = g \cdot [\xi_h(g)]^{-1} = g \cdot g^{-1} = e_{G} = \sigma(g,h)$ e que $(0 \circ \tau)(g,h) = 0\big(\tau(g,h)\big) = e_{G} = \sigma(g,h)$. Então, $\lambda \circ \tau = \sigma = 0 \circ \tau$ e, portanto, $0 = \psi = \lambda$. Analogamente, suponha que θ é a ação trivial e sejam $e_{H} \in H$ o elemento neutro de H, $\gamma : G \times H \to H$ e $0 : T \to H$ tais que $\gamma(g,h) = e_{H} = 0(t)$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$, $\forall t \in T$. Então, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$, temos que

$$\begin{aligned}
(\rho \circ \tau)(g,h) &= \rho\big(\tau(g,h)\big) \\
&= \rho(g \otimes h) \\
&= \theta_g(h) \cdot h^{-1} \\
&= h \cdot h^{-1} \\
&= e_{H} \\
&= \gamma(g,h) \\
&= e_{H} \\
&= 0\big(\tau(g,h)\big) \\
&= (0 \circ \tau)(g,h) \,.
\end{aligned}$$

Daí, $\rho \circ \tau = 0 \circ \tau$. Mas, como γ é um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ, existe um único homomorfismo $\phi : T \to H$ tal que $\phi \circ \tau = \gamma$. Logo, $0 = \phi = \rho$.

Exemplo 3.5.4. Sejam P, T e E grupos, $G \lhd P$, $H \lhd P$, $c^{P} : P \to Aut(P)$ a ação por conjugação de P e suas restrições $\theta = c^{P}_{GH} : G \to Aut(H)$ e $\xi = c^{P}_{HG} : H \to Aut(G)$. Então, θ e ξ são ações por automorfismos e compatíveis. Sejam também $\tau : G \times H \to T$ um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ tal que $T = (G \otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau}$, $\varepsilon : G \times H \to E$ um pareamento exterior tal que $E = (G \wedge H)_{\varepsilon}$, a função comutadora $\tilde{\kappa} : P \times P \to P'$ tal que $\tilde{\kappa}(a,b) = [a,b] = aba^{-1}b^{-1}$, $\forall a, b \in P$, e sua restrição $\tilde{\kappa}_{0} = \tilde{\kappa}|_{G \times H} : G \times H \to P'$. Pelo exemplo 1.4.5, $\tilde{\kappa}_{0}$ é um pareamento exterior e, em particular, um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ. Portanto, existem únicos homomorfismos $\kappa_{1} : T \to P'$ e $\kappa_{2} : E \to P'$ tais que $\kappa_{1} \circ \tau = \tilde{\kappa}_{0} = \kappa_{2} \circ \varepsilon$.

$$\begin{tikzcd}
(G \otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau} \arrow[dr, "\kappa_1"'] & G \times H \arrow[l, "\tau"'] \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\tilde{\kappa}_0"] & (G \wedge H)_{\varepsilon} \arrow[dl, "\kappa_2"] \\
& P' &
\end{tikzcd}$$

Temos que, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$,

$$\kappa_1(g \otimes h) = \kappa_1\big(\tau(g,h)\big) = (\kappa_1 \circ \tau)(g,h) = \tilde{\kappa}_0(g,h) = [g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$$

e

$$\kappa_2(g \wedge h) = \kappa_2\big(\varepsilon(g,h)\big) = (\kappa_2 \circ \varepsilon)(g,h) = \tilde{\kappa}_0(g,h) = [g,h] = ghg^{-1}h^{-1}\,.$$

Por isso também chamamos κ_1 e κ_2 de "os homomorfismos comutadores".

Para todo $g \in G$ e todo $h \in H$, note que

$$\tilde{\kappa}_0(g,h) = [g,h] = ghg^{-1}h^{-1} = (ghg^{-1}) \cdot h^{-1} \in (g \cdot H \cdot g^{-1}) \cdot h^{-1} = H \cdot h^{-1} = H$$

e

$$\tilde{\kappa}_0(g,h) = [g,h] = ghg^{-1}h^{-1} = g \cdot (hg^{-1}h^{-1}) \in g \cdot (h \cdot G \cdot h^{-1}) = g \cdot G = G\,,$$

pois $g, g^{-1} \in G$, $h, h^{-1} \in H$, $G \lhd P$ e $H \lhd P$. Assim, $im(\tilde{\kappa}_0) \subset G \cap H$ e a função $\tilde{\kappa}_0$ é da forma $\tilde{\kappa}_0 : G \times H \to P' \cap G \cap H$. Também, podemos escreve-la nas formas $\tilde{\kappa}_0 : G \times H \to G$ e $\tilde{\kappa}_0 : G \times H \to H$. Note que $P' \cap G \cap H \lhd P$. O diagrama comutativo anterior pode ser escrito como abaixo:

$$\begin{tikzcd}
(G \otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau} \arrow[dr, "\kappa_1"'] & G \times H \arrow[l, "\tau"'] \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\tilde{\kappa}_0"] & (G \wedge H)_{\varepsilon} \arrow[dl, "\kappa_2"] \\
& P' \cap G \cap H &
\end{tikzcd}$$

Se $G = H = P$, então $\tilde{\kappa}_0 = \tilde{\kappa}|_{G \times H} = \tilde{\kappa}|_{P \times P} = \tilde{\kappa}$. Nesse caso, temos que $P' = \langle im(\tilde{\kappa}) \rangle = \langle im(\tilde{\kappa}_0) \rangle = \langle im(\kappa_1 \circ \tau) \rangle \subset \langle im(\kappa_1) \rangle = im(\kappa_1)$ e que $P' = \langle im(\tilde{\kappa}) \rangle = \langle im(\tilde{\kappa}_0) \rangle = \langle im(\kappa_2 \circ \varepsilon) \rangle \subset \langle im(\kappa_2) \rangle = im(\kappa_2)$, pois $im(\kappa_1) \leqslant P'$ e $im(\kappa_2) \leqslant P'$, já que κ_1 e κ_2 são homomorfismos. Logo, se $G = H = P$, então $\kappa_1 : T \to P'$ e $\kappa_2 : E \to P'$ são epimorfismos.

Usando a demonstração dos itens (i) e (ii) do teorema 3.5.3 acima e a proposição 1.2.11, sejam as funções $\tau_1 : G \times H \to G$ e $\tau_2 : G \times H \to H$ tais que $\tau_1(g,h) = g \cdot [\xi_h(g)]^{-1}$ e $\tau_2(g,h) = \theta_g(h) \cdot h^{-1}$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$. Então, τ_1 e τ_2 são pareamentos cruzados com respeito às ações (por automorfismos) compatíveis $\theta = c^P_{GH}$ e $\xi = c^P_{HG}$. Note que, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$,

$$\begin{aligned}
\tau_1(g,h) &= g \cdot [\xi_h(g)]^{-1} \\
&= g \cdot \{[\xi(h)](g)\}^{-1} \\
&= g \cdot \{[c^P_{HG}(h)](g)\}^{-1} \\
&= g \cdot [c^P_h|_G(g)]^{-1} \\
&= g \cdot [c^P_h(g)]^{-1} \\
&= g \cdot (hgh^{-1})^{-1} \\
&= ghg^{-1}h^{-1} \\
&= [g,h] \\
&= \tilde{\kappa}_0(g,h)\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_2(g,h) &= [\theta_g(h)]\cdot h^{-1}\\ &= \{[\theta(g)](h)\}\cdot h^{-1}\\ &= \{[c^P_{GH}(g)](h)\}\cdot h^{-1}\\ &= [c^P_g|_H(h)]\cdot h^{-1}\\ &= [c^P_g(h)]\cdot h^{-1}\\ &= (ghg^{-1})\cdot h^{-1}\\ &= ghg^{-1}h^{-1}\\ &= [g,h]\\ &= \tilde{\kappa}_0(g,h)\,.\end{aligned}$$

Daí, $\tau_1 = \tilde{\kappa}_0 : G\times H \to G$ e $\tau_2 = \tilde{\kappa}_0 : G\times H \to H$. Por unicidade, ficamos com $\lambda = \kappa_1 = \rho : T \to P' \cap G \cap H \lhd P$.

Dessa forma, para as restrições da conjugação $\theta = c^P_{GH} : G \to Aut(H)$ e $\xi = c^P_{HG} : H \to Aut(G)$, e $T = (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau}$, existe um único homomorfismo $\kappa_1 : (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau} \to P' \cap G \cap H$ tal que

(i) $\kappa_1(g\otimes h) = g\cdot[\xi_h(g)]^{-1} = g\,{}^hg^{-1} = ghg^{-1}h^{-1} = [g,h]$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$;

(ii) Se $G = H = P$, então $\kappa_1 : (G\otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau} \to P'$ é epimorfismo;

(iii) $\tilde{\alpha}\circ\kappa_1 = c^T = \tilde{\beta}\circ\kappa_1$;

(iv) $\kappa_1\circ\tilde{\alpha}_g = c^G_g\circ\kappa_1$, $\forall g \in G$;

(v) $\kappa_1\circ\tilde{\beta}_h = c^H_h\circ\kappa_1$, $\forall h \in H$;

(vi) $\kappa_1(t)\otimes h = t\cdot[\tilde{\beta}_h(t)]^{-1} = t\,{}^ht^{-1}$, $\forall t \in T$, $\forall h \in H$;

(vii) $g\otimes\kappa_1(t) = \tilde{\alpha}_g(t)\cdot t^{-1} = {}^gt\,t^{-1}$, $\forall g \in G$, $\forall t \in T$;

(viii) ${}^gt = \tilde{\alpha}_g(t) = t$, $\forall t \in ker(\kappa_1)$, $\forall g \in G$;

(ix) ${}^ht = \tilde{\beta}_h(t) = t$, $\forall t \in ker(\kappa_1)$, $\forall h \in H$;

(x) $[u,v] = \kappa_1(u)\otimes\kappa_1(v)$, $\forall u,v \in T$.

Os itens (viii) e (ix) das propriedades acima podem ser escritos como $\tilde{\alpha}_g|_{ker(\kappa_1)} = id_{ker(\kappa_1)} = \tilde{\beta}_h|_{ker(\kappa_1)}$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$, ou então, podemos dizer que $\tilde{\alpha}_g|_{ker(\kappa_1)} : ker(\kappa_1) \hookrightarrow T$ e $\tilde{\beta}_h|_{ker(\kappa_1)} : ker(\kappa_1) \hookrightarrow T$ são inclusões, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$. Por isso, dizemos que $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ agem trivialmente em $ker(\kappa_1)$.

Ainda no contexto do enunciado do teorema acima, seja $\tilde{\kappa}_T : T\times T \to T'$ a função comutadora de T, isto é, $\tilde{\kappa}_T(u,v) = [u,v] = uvu^{-1}v^{-1} \in T' \lhd T$, $\forall u,v \in T$. O item (x) desse teorema pode ser escrito como $\tilde{\kappa}_T = \tau\circ(\kappa_1\times\kappa_1)$.

Para cada grupo K, vamos denotar o centro de K por "$Z(K)$". Lembrando que $Z(K) = \{z \in K : (\forall k \in K)(zk = kz)\}$ e que $Z(K) \lhd K$. Sendo $e_K \in K$ o elemento neutro de K, temos que $Z(K) = \{z \in K : (\forall k \in K)([z,k] = e_K)\}$.

É claro que $ker(\kappa_1) \lhd (G \otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau}$. Temos também que $ker(\kappa_1) \lhd Z\big((G \otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau}\big)$. De fato, sejam $e_P \in P$ o elemento neutro de P, $e_T \in T$ o elemento neutro de $T = (G \otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau}$ e $v \in ker(\kappa_1)$. Assim, $\forall t \in T$, pela propriedade (x) acima, temos que $[v,t] = \kappa_1(v) \otimes \kappa_1(t) = e_P \otimes \kappa_1(t) = e_T$. Portanto, $v \in Z(T)$. Daí, $ker(\kappa_1) \leqslant Z(T)$. Logo, $ker(\kappa_1) \lhd Z(T)$.

Seja $D = \{z \otimes z \in T : z \in G \cap H\}$. Então, $D \subset ker(\kappa_1) \lhd Z(T)$. De fato, $\forall d \in D$, existe $z \in G \cap H$ tal que $d = z \otimes z$. Dessa forma, ficamos com $\kappa_1(d) = \kappa_1(z \otimes z) = [z,z] = zzz^{-1}z^{-1} = e_P$. Assim, $d \in ker(\kappa_1)$.

Mostramos que, se os grupos G e H são subgrupos normais de algum grupo P e se as ações θ e ξ são as restrições da conjugação de P, então $\lambda = \rho = \kappa_1$ é o homomorfismo comutador do produto tensorial. Assim, é claro que, no teorema análogo ao 3.5.3 para o produto exterior, o homomorfismo comutador do produto exterior vai fazer o papel tanto de λ quanto de ρ.

Teorema 3.5.5. Sejam P e E grupos, $G \lhd P$, $H \lhd P$, $c^P : P \to Aut(P)$ a ação por conjugação de P, $c^E : E \to Aut(E)$ a ação por conjugação de E, $\theta = c^P_{GH} : G \to Aut(H)$ e $\xi = c^P_{HG} : H \to Aut(G)$ as restrições de c^P e $\varepsilon : G \times H \to E$ um pareamento exterior tais que $E = (G \wedge H)_\varepsilon$. Sejam também $c^G = c^P_{GG} : G \to Aut(G)$ a ação por conjugação de G, $c^H = c^P_{HH} : H \to Aut(H)$ a ação por conjugação de H e as ações induzidas $\hat{\alpha} : G \to Aut(E)$ e $\hat{\beta} : H \to Aut(E)$ por $\theta = c^P_{GH}$ e $\xi = c^P_{HG}$. Então, existe um único homomorfismo $\kappa_2 : E \to G \cap H \cap P'$ tal que

(i) $\kappa_2(g \wedge h) = [g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$;

(ii) Se $G = H = P$, então $\kappa_2 : (G \wedge H)_\varepsilon \to P'$ é um epimorfismo;

(iii) $\hat{\alpha} \circ \kappa_2 = c^E = \hat{\beta} \circ \kappa_2$;

(iv) $\kappa_2 \circ \hat{\alpha}_g = c^G_g \circ \kappa_2$, $\forall g \in G$;

(v) $\kappa_2 \circ \hat{\beta}_h = c^H_h \circ \kappa_2$, $\forall h \in H$;

(vi) $\kappa_2(v) \wedge h = v \cdot [\hat{\beta}_h(v)]^{-1} = v\, {}^h v^{-1}$, $\forall v \in E$, $\forall h \in H$;

(vii) $g \wedge \kappa_2(v) = \hat{\alpha}_g(v) \cdot v^{-1} = {}^g v\, v^{-1}$, $\forall g \in G$, $\forall v \in E$;

(viii) ${}^g v = \hat{\alpha}_g(v) = v$, $\forall v \in ker(\kappa_2)$, $\forall g \in G$;

(ix) ${}^h v = \hat{\beta}_h(v) = v$, $\forall v \in ker(\kappa_2)$, $\forall h \in H$;

(x) $[u,v] = \kappa_2(u) \wedge \kappa_2(v)$, $\forall u, v \in E$.

Demonstração: (i) Tome $\kappa_2 : E \to G \cap H \cap P'$ como no exemplo 3.5.4. Nesse exemplo, a função $\tilde{\kappa}_0 : G\times H \to G \cap H \cap P'$ é um pareamento exterior e, portanto, existe um único homomorfismo $\kappa_2 : E \to G \cap H \cap P'$ tal que $\kappa_2 \circ \varepsilon = \tilde{\kappa}_0$. Temos que $\kappa_2(g \wedge h) = [g, h]$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$.

(ii) No exemplo 3.5.4 está mostrado que, se $G = H = P$, então κ_2 é um epimorfismo.

(iii) Claro que $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ são homomorfismos, $\hat{\alpha} \in Hom\big(G, Aut(E)\big)$ e $\hat{\beta} \in Hom\big(H, Aut(E)\big)$. Como $\tilde{\kappa}_0 : G \times H \to G$ é um pareamento exterior, pela proposição 1.4.6, $\hat{\alpha} \circ \tilde{\kappa}_0 : G\times H \to Aut(E)$ também é um pareamento exterior. De novo, como $\tilde{\kappa}_0 : G\times H \to H$ é um pareamento exterior, pela proposição 1.4.6, $\hat{\beta}\circ\tilde{\kappa}_0 : G\times H \to Aut(E)$ também é um pareamento exterior. Pela definição de produto exterior, existem únicos homomorfismos $\varphi_1, \varphi_2 : E \to Aut(E)$ tais que $\varphi_1 \circ \varepsilon = \hat{\alpha} \circ \tilde{\kappa}_0$ e $\varphi_2 \circ \varepsilon = \hat{\beta} \circ \tilde{\kappa}_0$. Também temos os homomorfismos c^E, $\hat{\alpha} \circ \kappa_2$, $\hat{\beta} \circ \kappa_2 : E \to Aut(E)$.

$$\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[dl, "\kappa_2"] \arrow[dd, "\kappa_2"] \arrow[dr, "c^E"] & \\
 & H \arrow[rr, "\tilde{\beta}"] & & Aut(E) \\
G\times H \arrow[uurr, "\varepsilon"] \arrow[ur, "\tilde{\kappa}_0"] \arrow[rr, "\tilde{\kappa}_0"] & & G \arrow[ur, "\hat{\alpha}"] &
\end{tikzcd}$$

Temos que $(\hat{\alpha} \circ \kappa_2) \circ \varepsilon = \hat{\alpha} \circ (\kappa_2 \circ \varepsilon) = \hat{\alpha} \circ \tilde{\kappa}_0$ e, portanto, $\varphi_1 = \hat{\alpha} \circ \kappa_2$. Também, $(\hat{\beta} \circ \kappa_2) \circ \varepsilon = \hat{\beta} \circ (\kappa_2 \circ \varepsilon) = \hat{\beta} \circ \tilde{\kappa}_0$ e, assim, $\varphi_2 = \hat{\beta} \circ \kappa_2$.

Usando a segunda das maneiras alternativas de escrever o item (i) da proposição 3.4.3 e o item (ii) da proposição 3.4.2, $\forall (g, h) \in G\times H$, temos que

$$\begin{aligned}
(\hat{\alpha} \circ \tilde{\kappa}_0)(g, h) &= \hat{\alpha}\big(\tilde{\kappa}_0(g, h)\big) \\
&= \hat{\alpha}(ghg^{-1}h^{-1}) \\
&= \hat{\alpha}(g) \circ \hat{\alpha}(hg^{-1}h^{-1}) \\
&= \hat{\alpha}_g \circ \hat{\alpha}_{hg^{-1}h^{-1}} \\
&= \hat{\alpha}_g \circ (\hat{\beta}_h \circ \hat{\alpha}_{g^{-1}} \circ \hat{\beta}_{h^{-1}}) \\
&= \hat{\alpha}_g \circ \hat{\beta}_h \circ \hat{\alpha}_{g^{-1}} \circ \hat{\beta}_{h^{-1}} \\
&= c^E_{g\wedge h} \\
&= c^E(g \wedge h) \\
&= c^E\big(\varepsilon(g, h)\big) \\
&= (c^E \circ \varepsilon)(g, h)\,.
\end{aligned}$$

Assim, $c^E \circ \varepsilon = \hat{\alpha} \circ \tilde{\kappa}_0$ e, portanto, $c^E = \varphi_1$. De novo, usando a segunda das maneiras alternativas de escrever o item (ii) da proposição 3.4.3 e o item (ii) da proposição 3.4.2, $\forall (g,h) \in G \times H$, temos que

$$\begin{aligned}
(\hat{\beta} \circ \tilde{\kappa}_0)(g,h) &= \hat{\beta}\big(\tilde{\kappa}_0(g,h)\big) \\
&= \hat{\beta}(ghg^{-1}h^{-1}) \\
&= \hat{\beta}(ghg^{-1}) \circ \hat{\beta}(h^{-1}) \\
&= \hat{\beta}_{ghg^{-1}} \circ \hat{\beta}_{h^{-1}} \\
&= (\hat{\alpha}_g \circ \hat{\beta}_h \circ \hat{\alpha}_{g^{-1}}) \circ \hat{\beta}_{h^{-1}} \\
&= c^E_{g \wedge h} \\
&= c^E(g \wedge h) \\
&= c^E\big(\varepsilon(g,h)\big) \\
&= (c^E \circ \varepsilon)(g,h)\,.
\end{aligned}$$

Assim, $c^E \circ \varepsilon = \hat{\beta} \circ \tilde{\kappa}_0$ e, portanto, $c^E = \varphi_2$. Logo, $\hat{\alpha} \circ \kappa_2 = \varphi_1 = c^E = \varphi_2 = \hat{\beta} \circ \kappa_2$.

(iv) Escrevendo $\theta = c^P_{GH}$ e $\xi = c^P_{HG}$ para facilitar a notação, observe que $\theta_g = \theta(g) = c^P_{GH}(g) = c^P_g|_H$ e, portanto, que $\theta_g(h) = c^P_g|_H(h) = c^P_g(h) = ghg^{-1}$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$. Também, que $\xi_h = \xi(h) = c^P_{HG}(h) = c^P_h|_G$ e, assim, que $\xi_h(g) = c^P_h|_G(g) = c^P_h(g) = hgh^{-1}$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$. Seja $g \in G$. Como $\theta = c^P_{GH}$ e $\xi = c^P_{HG}$ são compatíveis, $\forall (a,b) \in G \times H$, temos que

$$\begin{aligned}
[\tilde{\kappa}_0 \circ (c^G_g \times \theta_g)](a,b) &= \tilde{\kappa}_0\big((c^G_g \times \theta_g)(a,b)\big) \\
&= \tilde{\kappa}_0\big(c^G_g(a), \theta_g(b)\big) \\
&= [c^G_g(a)] \cdot [\theta_g(b)] \cdot [c^G_g(a)]^{-1} \cdot [\theta_g(b)]^{-1} \\
&= (gag^{-1}) \cdot (gbg^{-1}) \cdot (gag^{-1})^{-1} \cdot (gbg^{-1})^{-1} \\
&= (gag^{-1}) \cdot (gbg^{-1}) \cdot (ga^{-1}g^{-1}) \cdot (gb^{-1}g^{-1}) \\
&= gaba^{-1}b^{-1}g^{-1} \\
&= g \cdot (aba^{-1}b^{-1}) \cdot g^{-1} \\
&= g \cdot \tilde{\kappa}_0(a,b) \cdot g^{-1} \\
&= c^G_g\big(\tilde{\kappa}_0(a,b)\big) \\
&= (c^G_g \circ \tilde{\kappa}_0)(a,b)\,.
\end{aligned}$$

Assim, $\tilde{\kappa}_0 \circ (c^G_g \times \theta_g) = c^G_g \circ \tilde{\kappa}_0$. Como $\tilde{\kappa}_0$ é um pareamento exterior, pelo exemplo 1.5.4, segue que $\tilde{\kappa}_0 \circ (c^G_g \times \theta_g) = c^G_g \circ \tilde{\kappa}_0 : G \times H \to G$ também é um pareamento exterior. Portanto, existe um único homomorfismo $\psi : E \to G$ tal que $\psi \circ \varepsilon = \tilde{\kappa}_0 \circ (c^G_g \times \theta_g)$.

$$\begin{tikzcd}
G \times H \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\tilde{\kappa}_0 \circ (c^G_g \times \theta_g)"'] & E \arrow[d, "\psi"] \\
& G
\end{tikzcd}$$

É claro que $\kappa_2 \circ \hat{\alpha}_g$, $c_g^G \circ \kappa_2 : E \to G$ também são homomorfismos. Temos que

$$\begin{aligned}(\kappa_2 \circ \hat{\alpha}_g) \circ \varepsilon &= \kappa_2 \circ (\hat{\alpha}_g \circ \varepsilon) \\ &= \kappa_2 \circ \alpha_g \\ &= \kappa_2 \circ [\varepsilon \circ (c_g^G \times \theta_g)] \\ &= (\kappa_2 \circ \varepsilon) \circ (c_g^G \times \theta_g) \\ &= \tilde{\kappa}_0 \circ (c_g^G \times \theta_g)\,.\end{aligned}$$

Assim, $\kappa_2 \circ \hat{\alpha}_g = \psi$. Também, temos que

$$(c_g^G \circ \kappa_2) \circ \varepsilon = c_g^G \circ (\kappa_2 \circ \varepsilon) = c_g^G \circ \tilde{\kappa}_0 = \tilde{\kappa}_0 \circ (c_g^G \times \theta_g)\,.$$

Daí, $c_g^G \circ \kappa_2 = \psi = \kappa_2 \circ \hat{\alpha}_g$.

(v) Novamente, como na demonstração do item (iv) acima, iremos facilitar a notação para as ações $\theta = c_{GH}^P$ e $\xi = c_{HG}^P$. Seja $h \in H$. Como θ e ξ são compatíveis, $\forall (a,b) \in G \times H$, temos que

$$\begin{aligned}[\tilde{\kappa}_0 \circ (\xi_h \times c_h^H)](a,b) &= \tilde{\kappa}_0\big((\xi_h \times c_h^H)(a,b)\big) \\ &= \tilde{\kappa}_0\big(\xi_h(a), c_h^H(b)\big) \\ &= [\xi_h(a)] \cdot [c_h^H(b)] \cdot [\xi_h(a)]^{-1} \cdot [c_h^H(b)]^{-1} \\ &= (hah^{-1}) \cdot (hbh^{-1}) \cdot (hah^{-1})^{-1} \cdot (hbh^{-1})^{-1} \\ &= (hah^{-1}) \cdot (hbh^{-1}) \cdot (ha^{-1}h^{-1}) \cdot (hb^{-1}h^{-1}) \\ &= haba^{-1}b^{-1}h^{-1} \\ &= h \cdot (aba^{-1}b^{-1}) \cdot h^{-1} \\ &= h \cdot \tilde{\kappa}_0(a,b) \cdot h^{-1} \\ &= c_h^H\big(\tilde{\kappa}_0(a,b)\big) \\ &= (c_h^H \circ \tilde{\kappa}_0)(a,b)\,.\end{aligned}$$

Assim, $\tilde{\kappa}_0 \circ (\xi_h \times c_h^H) = c_h^H \circ \tilde{\kappa}_0$. Como $\tilde{\kappa}_0$ é um pareamento exterior, pelo exemplo 1.5.4, segue que $\tilde{\kappa}_0 \circ (\xi_h \times c_h^H) = c_h^H \circ \tilde{\kappa}_0 : G \times H \to H$ também é um pareamento exterior. Portanto, existe um único homomorfismo $\phi : E \to H$ tal que $\phi \circ \varepsilon = \tilde{\kappa}_0 \circ (\xi_h \times c_h^H)$.

$$\begin{tikzcd} G \times H \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\tilde{\kappa}_0 \circ (\xi_h \times c_h^H)"'] & E \arrow[d, "\phi"] \\ & H \end{tikzcd}$$

É claro que $\kappa_2 \circ \hat{\beta}_h$, $c_h^H \circ \kappa_2 : E \to H$ também são homomorfismos. Temos que

$$\begin{aligned}(\kappa_2 \circ \hat{\beta}_h) \circ \varepsilon &= \kappa_2 \circ (\hat{\beta}_h \circ \varepsilon) \\ &= \kappa_2 \circ \beta_h \\ &= \kappa_2 \circ [\varepsilon \circ (\xi_h \times c_h^H)] \\ &= (\kappa_2 \circ \varepsilon) \circ (\xi_h \times c_h^H) \\ &= \tilde{\kappa}_0 \circ (\xi_h \times c_h^H)\,.\end{aligned}$$

Assim, $\kappa_2 \circ \hat{\beta}_h = \phi$. Também, $(c_h^H \circ \kappa_2) \circ \varepsilon = c_h^H \circ (\kappa_2 \circ \varepsilon) = c_h^H \circ \tilde{\kappa}_0 = \tilde{\kappa}_0 \circ (\xi_h \times c_h^H)$. Assim, $c_h^H \circ \kappa_2 = \phi = \kappa_2 \circ \hat{\beta}_h$.

(vi) Para cada $h \in H$, seja $V_h = \big\{v \in E \;:\; \kappa_2(v) \wedge h = v \cdot [\hat{\beta}_h(v)]^{-1}\big\}$. Sejam $h \in H$ e $v \in im(\varepsilon)$. Existem $a \in G$ e $b \in H$ tais que $v = \varepsilon(a,b) = a \wedge b$. Daí, pelo item (i) desse teorema e pelo item (viii) do teorema 3.4.1, temos que

$$\begin{aligned}
\kappa_2(v) \wedge h &= [\kappa_2(a \wedge b)] \wedge h \\
&= [a,b] \wedge h \\
&= (a \wedge b) \cdot {}^{h}(a \wedge b)^{-1} \\
&= v\, {}^{h}v^{-1} \\
&= v({}^{h}v)^{-1} \\
&= v \cdot [\hat{\beta}_h(v)]^{-1}.
\end{aligned}$$

Assim, $v \in V_h$. Como v é qualquer, $im(\varepsilon) \subset V_h$. Sejam $u, v \in V_h$. Então, $\kappa_2(u) \wedge h = u \cdot [\hat{\beta}_h(u)]^{-1}$ e $\kappa_2(v) \wedge h = v \cdot [\hat{\beta}_h(v)]^{-1}$. Daí, usando a primeira igualdade do item (i) do teorema 3.4.1 e o item (iii) desse teorema, ficamos com

$$\begin{aligned}
\kappa_2(uv) \wedge h &= [\kappa_2(u) \cdot \kappa_2(v)] \wedge h \\
&= {}^{\kappa_2(u)}[\kappa_2(v) \wedge h] \cdot [\kappa_2(u) \wedge h] \\
&= \big[\hat{\alpha}_{\kappa_2(u)}\big(\kappa_2(v) \wedge h\big)\big] \cdot [\kappa_2(u) \wedge h] \\
&= \big\{\big[\hat{\alpha}\big(\kappa_2(u)\big)\big]\big(v \cdot [\hat{\beta}_h(v)]^{-1}\big)\big\} \cdot \{u \cdot [\hat{\beta}_h(u)]^{-1}\} \\
&= \big\{[(\hat{\alpha} \circ \kappa_2)(u)]\big(v \cdot [\hat{\beta}_h(v)]^{-1}\big)\big\} \cdot \{u \cdot [\hat{\beta}_h(u)]^{-1}\} \\
&= \big\{[c^E(u)]\big(v \cdot [\hat{\beta}_h(v)]^{-1}\big)\big\} \cdot \{u \cdot [\hat{\beta}_h(u)]^{-1}\} \\
&= \big[c_u^E\big(v \cdot [\hat{\beta}_h(v)]^{-1}\big)\big] \cdot \{u \cdot [\hat{\beta}_h(u)]^{-1}\} \\
&= \big[u \cdot \big(v \cdot [\hat{\beta}_h(v)]^{-1}\big) \cdot u^{-1}\big] \cdot \{u \cdot [\hat{\beta}_h(u)]^{-1}\} \\
&= u \cdot v \cdot [\hat{\beta}_h(v)]^{-1} \cdot [\hat{\beta}_h(u)]^{-1} \\
&= (uv) \cdot [\hat{\beta}_h(u) \cdot \hat{\beta}_h(v)]^{-1} \\
&= (uv) \cdot [\hat{\beta}_h(uv)]^{-1}.
\end{aligned}$$

Assim, $uv \in V_h$. Como u e v são arbitrários, V_h é fechado por produtos. Pela observação 1.2.6, temos que $E = Sp\big(im(\varepsilon)\big) \subset V_h$. Daí, $V_h = E$. Portanto, $\kappa_2(v) \wedge h = v \cdot [\hat{\beta}_h(v)]^{-1}$, $\forall v \in E$. Como h é qualquer, o resultado segue.

(vii) Para cada $g \in G$, seja $V_g = \big\{v \in E \;:\; g \wedge \kappa_2(v) = [\hat{\alpha}_g(v)] \cdot v^{-1}\big\}$. Sejam $g \in G$ e $v \in im(\varepsilon)$. Assim, existem $a \in G$ e $b \in H$ tais que $v = \varepsilon(a,b) = a \wedge b$. Daí, pelo item (i) desse teorema e pelo item (ix) do teorema 3.4.1, temos que

$$g \wedge \kappa_2(v) = g \wedge [\kappa_2(a \wedge b)] = g \wedge [a,b] = {}^{g}(a \wedge b) \cdot (a \wedge b)^{-1} = {}^{g}v\, v^{-1} = [\hat{\alpha}_g(v)] \cdot v^{-1}.$$

Assim, $v \in V_g$. Como v é qualquer, $im(\varepsilon) \subset V_g$. Sejam $u, v \in V_g$. Então, $g \wedge \kappa_2(u) = [\hat{\alpha}_g(u)] \cdot u^{-1}$ e $g \wedge \kappa_2(v) = [\hat{\alpha}_g(v)] \cdot v^{-1}$. Daí, usando a segunda igualdade do item (i) do teorema 3.4.1 e o item (iii) desse teorema, ficamos com

$$\begin{aligned}
g \wedge \kappa_2(uv) &= g \wedge [\kappa_2(u) \cdot \kappa_2(v)] \\
&= [g \wedge \kappa_2(u)] \cdot {}^{\kappa_2(u)}[g \wedge \kappa_2(v)] \\
&= [g \wedge \kappa_2(u)] \cdot \big[\hat{\beta}_{\kappa_2(u)}\big(g \wedge \kappa_2(v)\big)\big] \\
&= \{[\hat{\alpha}_g(u)] \cdot u^{-1}\} \cdot \big\{\big[\hat{\beta}\big(\kappa_2(u)\big)\big]\big([\hat{\alpha}_g(v)] \cdot v^{-1}\big)\big\} \\
&= \{[\hat{\alpha}_g(u)] \cdot u^{-1}\} \cdot \big\{[(\hat{\beta} \circ \kappa_2)(u)]\big([\hat{\alpha}_g(v)] \cdot v^{-1}\big)\big\} \\
&= \{[\hat{\alpha}_g(u)] \cdot u^{-1}\} \cdot \big\{[c^E(u)]\big([\hat{\alpha}_g(v)] \cdot v^{-1}\big)\big\} \\
&= \{[\hat{\alpha}_g(u)] \cdot u^{-1}\} \cdot \big[c^E_u\big([\hat{\alpha}_g(v)] \cdot v^{-1}\big)\big] \\
&= \{[\hat{\alpha}_g(u)] \cdot u^{-1}\} \cdot \big(u \cdot \{[\hat{\alpha}_g(v)] \cdot v^{-1}\} \cdot u^{-1}\big) \\
&= [\hat{\alpha}_g(u)] \cdot [\hat{\alpha}_g(v)] \cdot v^{-1} \cdot u^{-1} \\
&= [\hat{\alpha}_g(uv)] \cdot (uv)^{-1}\,.
\end{aligned}$$

Assim, $uv \in V_g$. Como u e v são arbitrários, V_g é fechado por produtos. Pela observação 1.2.6, temos que $E = Sp\big(im(\varepsilon)\big) \subset V_g$. Daí, $V_g = E$. Portanto, $g \wedge \kappa_2(v) = [\hat{\alpha}_g(v)] \cdot v^{-1}$, $\forall v \in E$. Como g é qualquer, o resultado segue.

(viii) Sejam $e_E \in E$ o elemento neutro de E e $e_P \in P$ o elemento neutro de P. Usando o item (vii) desse teorema e o item (iv) do teorema 3.4.1, $\forall g \in G$, $\forall v \in ker(\kappa_2)$, $e_E = g \wedge e_P = g \wedge \kappa_2(v) = \hat{\alpha}_g(v) \cdot v^{-1}$ e, portanto, $\hat{\alpha}_g(v) = v$.

(ix) Sejam $e_E \in E$ o elemento neutro de E e $e_P \in P$ o elemento neutro de P. Usando o item (vi) desse teorema e o item (iv) do teorema 3.4.1, $\forall h \in H$, $\forall v \in ker(\kappa_2)$, $e_E = e_P \wedge h = \kappa_2(v) \wedge h = v \cdot [\hat{\beta}_h(v)]^{-1}$ e, portanto, $\hat{\beta}_h(v) = v$.

(x) Usando os itens (vii) e (iii) desse teorema, $\forall u, v \in E$, temos que

$$\begin{aligned}
\kappa_2(u) \wedge \kappa_2(v) &= \big[\hat{\alpha}_{\kappa_2(u)}(v)\big] \cdot v^{-1} \\
&= \big\{\big[\hat{\alpha}\big(\kappa_2(u)\big)\big](v)\big\} \cdot v^{-1} \\
&= \{[(\hat{\alpha} \circ \kappa_2)(u)](v)\} \cdot v^{-1} \\
&= \{[c^E(u)](v)\} \cdot v^{-1} \\
&= [c^E_u(v)] \cdot v^{-1} \\
&= (u \cdot v \cdot u^{-1}) \cdot v^{-1} \\
&= uvu^{-1}v^{-1} \\
&= [u, v]\,.
\end{aligned}$$

■

Note que $im(\kappa_2) \leqslant G \cap H$ e que $\hat{\alpha}|_{G\cap H} = \hat{\beta}|_{G\cap H}$ e, portanto, uma das igualdades do item (iii) é trivialmente satisfeita, a saber $\hat{\alpha} \circ \kappa_2 = \hat{\beta} \circ \kappa_2$.

Os itens (viii) e (ix) do teorema acima podem ser escritos como $\hat{\alpha}_g|_{ker(\kappa_2)} = id_{ker(\kappa_2)} = \hat{\beta}_h|_{ker(\kappa_2)}$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$, ou então, podemos dizer que $\hat{\alpha}_g|_{ker(\kappa_2)} : ker(\kappa_2) \hookrightarrow E$ e $\hat{\beta}_h|_{ker(\kappa_2)} : ker(\kappa_2) \hookrightarrow E$ são inclusões, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$. Por isso, dizemos que $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ agem trivialmente em $ker(\kappa_2)$.

Ainda no contexto do enunciado do teorema acima, seja $\tilde{\kappa}_E : E\times E \to E'$ a função comutadora de E, isto é, $\tilde{\kappa}_E(u,v) = [u,v] = uvu^{-1}v^{-1} \in E' \lhd E, \forall u, v \in E$. O item (x) desse teorema pode ser escrito como $\tilde{\kappa}_E = \varepsilon \circ (\kappa_2 \times \kappa_2)$.

Definição 3.5.6. Sejam G, T e E grupos, $c^G : G \to Aut(G)$ a ação por conjugação de G, $\theta : G \to Sym(G)$ e $\xi : G \to Sym(G)$ ações, $\tau : G{\times}G \to T$ um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ tal que $T = (G{\otimes}G)^{(\theta,\xi)}_{\tau}$ e $\varepsilon : G{\times}G \to E$ um pareamento exterior tal que $E = (G{\wedge}G)_{\varepsilon}$.

- Dizemos que "T é o *quadrado tensorial* de G com τ" se, e somente se, $\theta = \xi = c^G$. Nesse caso, θ e ξ são ações por automorfismos e são compatíveis e denotamos $(G{\otimes}G)^{(\theta,\xi)}_{\tau}$ por "$(G{\otimes}G)^{cG}_{\tau}$" ou, mais comumente, por "$(G{\otimes}G)_{\tau}$".

- Dizemos que "E é o *quadrado exterior* de G com ε". Nesse caso, θ e ξ são as restrições de c^G, que são ela própria, $c^G_{GG} = c^G$.

No caso dos quadrados tensorial e exterior, usando o contexto do exemplo 3.5.4, a restrição da função comutadora é ela própria, $\tilde{\kappa}_0 = \tilde{\kappa} : G \times G \to G'$, os homomorfismos comutadores $\kappa_1 : (G{\otimes}G)_{\tau} \to G'$ e $\kappa_2 : (G{\wedge}G)_{\varepsilon} \to G'$ são epimorfismos que satisfazem $\kappa_1 \circ \tau = \tilde{\kappa} = \kappa_2 \circ \varepsilon$. Também, os homomorfismos $\lambda : (G{\otimes}G)_{\tau} \to G$ e $\rho : (G{\otimes}G)_{\tau} \to G$ do teorema 3.5.3 são iguais, $\lambda = \rho = \kappa_1$ e o diagrama fica na forma:

$$\begin{tikzcd}
(G{\otimes}G)_{\tau} \arrow[dr, "\kappa_1"'] & G{\times}G \arrow[l, "\tau"'] \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\tilde{\kappa}"] & (G{\wedge}G)_{\varepsilon} \arrow[dl, "\kappa_2"] \\
& G' &
\end{tikzcd}$$

no qual, $G' = \langle im(\tilde{\kappa})\rangle = im(\kappa_1) = im(\kappa_2) \lhd G$.

Seja G um grupo. No caso dos quadrados tensorial e exterior, a única ação considerada é a conjugação $c^G : G \to Aut(G)$. Seja $X = (G\times G, c^G, c^G)$. Como $X \in Obj(\mathsf{E}) \subset Obj(\mathsf{C}) \subset Obj(\mathcal{C})$, $\mathsf{T}_0(X) = (G{\otimes}G)_0 \cong (G{\otimes}G)_{\tau} = T$, $\forall \tau \in \mathcal{P}^{(cG,cG)}_{(G,H,T)}$ e $\mathsf{E}_0(X) = (G{\wedge}G)_0 \cong (G{\wedge}G)_{\varepsilon} = E$, $\forall \varepsilon \in \mathcal{Q}_{(G,H,E)}$, então denotamos os quadrados tensorial e exterior apenas por "$G\otimes G$" e "$G{\wedge}G$".

Denotamos $ker(\kappa_2)$ por "$M(G)$" e, no caso do quadrado tensorial, denotamos $ker(\kappa_1)$ por "$J_2(G)$". O grupo $M(G)$ na literatura é chamado de "o *multiplicador de Schur* do grupo G". É claro que $M(G) \lhd G{\wedge}G$. Como provado no exemplo 3.5.4, temos que $J_2(G) \lhd G{\otimes}G$ e que $J_2(G) \lhd Z(G{\otimes}G)$. Também, temos que $M(G) \lhd Z(G{\wedge}G)$. De fato, sejam $e_P \in P$ o elemento neutro de P, $e \in G{\wedge}G$ o elemento neutro de $G{\wedge}G$ e $v \in ker(\kappa_2)$. Assim, $\forall u \in G{\wedge}G$, pelo item (x) do teorema 3.5.5 acima, temos que $[v,u] = \kappa_2(v) \wedge \kappa_2(u) = e_P \wedge \kappa_2(u) = e$. Portanto, $v \in Z(G{\wedge}G)$. Daí, $ker(\kappa_2) \leqslant Z(G{\wedge}G)$. Assim, $ker(\kappa_2) \lhd Z(G{\wedge}G)$. Logo, as sequências exatas abaixo são chamadas de "extensões centrais".

$$0 \to J_2(G) \hookrightarrow G{\otimes}G \overset{\kappa_1}{\twoheadrightarrow} G' \to 0 \qquad\qquad 0 \to M(G) \hookrightarrow G{\wedge}G \overset{\kappa_2}{\twoheadrightarrow} G' \to 0$$

Pelo exemplo 3.5.4, temos que a diagonal $D = \{g\otimes g \in G\otimes G \ : \ g \in G\}$ é tal que $D \subset J_2(G) = ker(\kappa_1) \lhd Z(G\otimes G)$. Como $(G\wedge G)_0 = (G\otimes G)_0 \big/ \langle D\rangle_N$, podemos considerar a projeção canônica $(G\otimes G)_0 \twoheadrightarrow (G\wedge G)_0$ e a composição $G\otimes G \xrightarrow{\cong} (G\otimes G)_0 \twoheadrightarrow (G\wedge G)_0 \xrightarrow{\cong} G\wedge G$. Essa composição será chamada de "o epimorfismo natural" $G\otimes G \twoheadrightarrow G\wedge G$.

Observação 3.5.7. Sejam K um grupo e subconjuntos $R \subset K$ e $S \subset K$. Definimos $\lfloor R, S\rfloor = \{[r,s] = rsr^{-1}s^{-1} \in K \ : \ r \in R \text{ e } s \in S\}$. Denotamos o subgrupo $[R,S] = \langle \lfloor R,S\rfloor\rangle$. Nessa notação, temos que $K' = [K,K] \lhd K$. Lembremos que o grupo abelianizado de K é o grupo quociente $K^{ab} = K/K'$, que é um grupo abeliano. Se K é um grupo livre, então K^{ab} é um grupo abeliano livre. Seja $e_K \in K$ o elemento neutro de K. Note que $\lfloor R,S\rfloor = \varnothing$ se, e somente se, $R = \varnothing$ ou $S = \varnothing$. Nesse caso, $[R,S] = \langle \lfloor R,S\rfloor\rangle = \{e_K\}$.

Sejam P um grupo e $\tilde{\kappa} : P\times P \to P'$ a função comutadora de P, isto é, $\tilde{\kappa}(a,b) = [a,b] = aba^{-1}b^{-1}, \forall a,b \in P$. Sejam $G \lhd P$, $H \lhd P$ e a restrição da função comutadora $\tilde{\kappa}_0 = \tilde{\kappa}|_{G\times H} : G\times H \to P'$. Pela notação introduzida, temos que $\lfloor G,H\rfloor = im(\tilde{\kappa}_0) \subset im(\tilde{\kappa}) = \lfloor P,P\rfloor$. Ficamos com

$$[G,H] = \langle \lfloor G,H\rfloor\rangle = \langle im(\tilde{\kappa}_0)\rangle \leqslant \langle im(\tilde{\kappa})\rangle = \langle \lfloor P,P\rfloor\rangle = [P,P] = P'\,.$$

Também, $im(\tilde{\kappa}_0) \subset G$. De fato, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$, como $g^{-1} \in G$ e $G \lhd P$, temos que $h\cdot G\cdot h^{-1} = G$ e, portanto,

$$\tilde{\kappa}_0(g,h) = [g,h] = ghg^{-1}h^{-1} = g\cdot(hg^{-1}h^{-1}) \in g\cdot(h\cdot G\cdot h^{-1}) = g\cdot G = G\,.$$

Daí, $\lfloor G,H\rfloor = im(\tilde{\kappa}_0) \subset G$ e, assim, $[G,H] \leqslant G$. Segue que $[G,H] \leqslant G\cap P'$. Como $\tilde{\kappa}_0$ é um pareamento exterior, temos que $[G,H] = \langle im(\tilde{\kappa}_0)\rangle = Sp\big(im(\tilde{\kappa}_0)\big)$ e que, $\forall a,x \in G$, $\forall y \in H$, pela terceira igualdade do item (i) do teorema 1.4.8,

$$\begin{aligned}
a\cdot\tilde{\kappa}_0(x,y)\cdot a^{-1} &= a\cdot[x,y]\cdot a^{-1}\\
&= a\cdot(xyx^{-1}y^{-1})\cdot a^{-1}\\
&= axyx^{-1}y^{-1}a^{-1}\\
&= axa^{-1}aya^{-1}ax^{-1}a^{-1}ay^{-1}a^{-1}\\
&= (axa^{-1})\cdot(aya^{-1})\cdot(ax^{-1}a^{-1})\cdot(ay^{-1}a^{-1})\\
&= (axa^{-1})\cdot(aya^{-1})\cdot(axa^{-1})^{-1}\cdot(aya^{-1})^{-1}\\
&= [axa^{-1}, aya^{-1}]\\
&= \tilde{\kappa}_0(axa^{-1}, aya^{-1})\\
&= \tilde{\kappa}_0(ax,y)\cdot[\tilde{\kappa}_0(a,y)]^{-1}\\
&= [ax,y]\cdot[a,y]^{-1}\,.
\end{aligned}$$

Para cada $a \in G$, seja um conjunto $V_a = \{z \in P \ : \ aza^{-1} \in [G,H]\}$. Sejam $a \in G$ e $z \in \lfloor G,H\rfloor = im(\tilde{\kappa}_0)$. Daí, existem $x \in G$ e $y \in H$ tais que $z = [x,y] = \tilde{\kappa}_0(x,y)$. Pela igualdade fornecida acima,

$$aza^{-1} = a\cdot\tilde{\kappa}_0(x,y)\cdot a^{-1} = [ax,y]\cdot[a,y]^{-1} \in [G,H]\,,$$

pois $[ax, y], [a, y]^{-1} \in [G, H]$, já que $ax \in G$, $y \in H$ e $[a, y] \in [G, H] \leqslant P$. Assim, $z \in V_a$. Como z é qualquer, temos $\lfloor G, H \rfloor = im(\tilde{\kappa}_0) \subset V_a$. Sejam $u, v \in V_a$. Então, $aua^{-1}, ava^{-1} \in [G, H]$ e, portanto,

$$a \cdot (uv) \cdot a^{-1} = a \cdot (ua^{-1}av) \cdot a^{-1} = (aua^{-1}) \cdot (ava^{-1}) \in [G, H] .$$

Assim, $uv \in V_a$. Como u e v são arbitrários, V_a é fechado por produtos. Assim, $[G, H] = \langle im(\tilde{\kappa}_0) \rangle = Sp\big(im(\tilde{\kappa}_0)\big) \subset V_a$. Dessa forma, $aza^{-1} \in [G, H]$, $\forall z \in [G, H]$, isto é, $a \cdot [G, H] \cdot a^{-1} \subset [G, H]$. Como a é qualquer e $[G, H] \leqslant G$, ficamos com $[G, H] \lhd G \leqslant G \cap P'$. Logo, $[G, H] \lhd G \cap P'$.

Sejam G um grupo, F um grupo livre e $N \lhd F$ tais que $G \cong F/N$ e considere G agindo trivialmente em $\mathbb{Z}$, com segundo grupo de homologia $H_2(G, \mathbb{Z})$. Como $F \lhd F$, pela observação acima, $[N, F] \lhd N \cap F' = N \cap [F, F]$. No trabalho de C. Miller [14], há isomorfismos

$$M(G) \cong H_2(G, \mathbb{Z}) \cong \frac{N \cap [F, F]}{[N, F]} = \frac{N \cap F'}{[N, F]} ,$$

em que a igualdade $M(G) \cong \frac{N \cap F'}{[N,F]}$ é chamada de "fórmula de Hopf". Além disso, a classe de isomorfismo de $M(G)$ depende apenas de G e não de sua apresentação.

Proposição 3.5.8. Sejam G e T grupos e $\tau : G \times G \to T$ um pareamento cruzado com respeito à conjugação de G tal que $T = (G \otimes G)_\tau$ é o quadrado tensorial de G com τ. Então, $cg \otimes cg = g \otimes g = gc \otimes gc$, $\forall c \in G'$, $\forall g \in G$.

Demonstração: Seja $\tilde{\kappa} : G \times G \to G'$ a função comutadora. Então, $\tilde{\kappa}$ é um pareamento cruzado com respeito à conjugação de G, $im(\tilde{\kappa}) = \lfloor G, G \rfloor$ e $Sp\big(im(\tilde{\kappa})\big) = \langle im(\tilde{\kappa}) \rangle = \langle \lfloor G, G \rfloor \rangle = [G, G] = G' \lhd G$. Sejam $V = \{c \in G \ : \ (\forall g \in G)(cg \otimes cg = g \otimes g)\}$ e $a, b, g \in G$. Pelo exemplo 3.5.4, temos que $g \otimes g \in ker(\kappa_1) \lhd Z(T)$. Usando, nessa ordem, a nona e a décima igualdades do item (iii), a segunda igualdade do item (i) e os itens (viii)', (ix)' e (x)' do teorema 2.4.1, temos que

$$
\begin{aligned}
[a,b]g \otimes [a,b]g &= \{[a,b] \otimes {}^{g}([a,b]g)\} \cdot (g \otimes [a,b]g) \\
&= \{[a,b] \otimes g([a,b]g)g^{-1}\} \cdot (g \otimes [a,b]g) \\
&= ([a,b] \otimes g[a,b]) \cdot (g \otimes [a,b]g) \\
&= ([a,b] \otimes g[a,b]) \cdot (g \otimes g) \cdot ({}^{g}g \otimes [a,b]) \\
&= ([a,b] \otimes g[a,b]) \cdot (g \otimes g) \cdot (ggg^{-1} \otimes [a,b]) \\
&= ([a,b] \otimes g[a,b]) \cdot (g \otimes g) \cdot (g \otimes [a,b]) \\
&= ([a,b] \otimes g) \cdot {}^{g}([a,b] \otimes [a,b]) \cdot (g \otimes g) \cdot (g \otimes [a,b]) \\
&= (a \otimes b) \cdot {}^{g}(a \otimes b)^{-1} \cdot {}^{g}[a \otimes b, a \otimes b] \cdot (g \otimes g) \cdot {}^{g}(a \otimes b) \cdot (a \otimes b)^{-1} \\
&= (a \otimes b) \cdot {}^{g}(a \otimes b)^{-1} \cdot {}^{g}e_{T} \cdot (g \otimes g) \cdot {}^{g}(a \otimes b) \cdot (a \otimes b)^{-1} \\
&= (a \otimes b) \cdot {}^{g}(a \otimes b)^{-1} \cdot (g \otimes g) \cdot {}^{g}(a \otimes b) \cdot (a \otimes b)^{-1} \\
&= (g \otimes g) \cdot (a \otimes b) \cdot {}^{g}(a \otimes b)^{-1} \cdot {}^{g}(a \otimes b) \cdot (a \otimes b)^{-1} \\
&= (g \otimes g) \cdot (a \otimes b) \cdot {}^{g}[(a \otimes b)^{-1} \cdot (a \otimes b)] \cdot (a \otimes b)^{-1} \\
&= (g \otimes g) \cdot (a \otimes b) \cdot {}^{g}e_{T} \cdot (a \otimes b)^{-1} \\
&= (g \otimes g) \cdot (a \otimes b) \cdot (a \otimes b)^{-1} \\
&= (g \otimes g) \cdot e_{T} \\
&= g \otimes g\,,
\end{aligned}
$$

pois $[a\otimes b, a\otimes b] = (a\otimes b)\cdot(a\otimes b)\cdot(a\otimes b)^{-1}\cdot(a\otimes b)^{-1} = e_T$, em que $e_T \in T$ é o elemento neutro de T. Como g é qualquer, temos que $[a,b] \in V$. Como a e b são arbitrários, $\lfloor G,G \rfloor = im(\tilde{\kappa}) \subset V$. Sejam $u,v \in V$. Então, $ux\otimes ux = x\otimes x = vx\otimes vx$, $\forall x \in G$. Seja $g \in G$. Então, $(uv)g \otimes (uv)g = u(vg) \otimes u(vg) = vg \otimes vg = g\otimes g$. Como g é qualquer, temos que $uv \in V$. Como u e v são arbitrários, V é fechado por produtos e, portanto, $G' = \langle im(\tilde{\kappa})\rangle = Sp\big(im(\tilde{\kappa})\big) \subset V$. Consequentemente, $cg \otimes cg = g\otimes g$, $\forall c \in G'$, $\forall g \in G$.

Agora, sejam $U = \{c \in G \ : \ (\forall g \in G)(gc\otimes gc = g\otimes g)\}$ e $a,b,g \in G$. Temos que $g\otimes g \in Z(T)$. Usando, nessa ordem, a primeira e a segunda igualdades do item (i) e os itens (viii)', (ix)' e (x)' do teorema 2.4.1, temos que

$$\begin{aligned}
g[a,b] \otimes g[a,b] &= {}^g([a,b] \otimes g[a,b]) \cdot (g \otimes g[a,b]) \\
&= {}^g\{([a,b] \otimes g) \cdot {}^g([a,b] \otimes [a,b])\} \cdot (g \otimes g) \cdot {}^g(g \otimes [a,b]) \\
&= {}^g\{(a \otimes b) \cdot {}^g(a \otimes b)^{-1} \cdot {}^g[a \otimes b, a \otimes b]\} \cdot (g \otimes g) \cdot {}^g[{}^g(a \otimes b) \cdot (a \otimes b)^{-1}] \\
&= {}^g[(a \otimes b) \cdot {}^g(a \otimes b)^{-1} \cdot {}^g e_T] \cdot (g \otimes g) \cdot {}^g[{}^g(a \otimes b) \cdot (a \otimes b)^{-1}] \\
&= {}^g[(a \otimes b) \cdot {}^g(a \otimes b)^{-1}] \cdot (g \otimes g) \cdot {}^g[{}^g(a \otimes b) \cdot (a \otimes b)^{-1}] \\
&= (g \otimes g) \cdot {}^g[(a \otimes b) \cdot {}^g(a \otimes b)^{-1}] \cdot {}^g[{}^g(a \otimes b) \cdot (a \otimes b)^{-1}] \\
&= (g \otimes g) \cdot {}^g[(a \otimes b) \cdot {}^g(a \otimes b)^{-1} \cdot {}^g(a \otimes b) \cdot (a \otimes b)^{-1}] \\
&= (g \otimes g) \cdot {}^g\{(a \otimes b) \cdot {}^g[(a \otimes b)^{-1} \cdot (a \otimes b)] \cdot (a \otimes b)^{-1}\} \\
&= (g \otimes g) \cdot {}^g[(a \otimes b) \cdot {}^g e_T \cdot (a \otimes b)^{-1}] \\
&= (g \otimes g) \cdot {}^g[(a \otimes b) \cdot e_T \cdot (a \otimes b)^{-1}] \\
&= (g \otimes g) \cdot {}^g[(a \otimes b) \cdot (a \otimes b)^{-1}] \\
&= (g \otimes g) \cdot {}^g e_T \\
&= (g \otimes g) \cdot e_T \\
&= g \otimes g\,.
\end{aligned}$$

Como g é qualquer, temos que $[a,b] \in U$. Como a e b são arbitrários, $\lfloor G,G \rfloor = im(\tilde{\kappa}) \subset U$. Sejam $u,v \in U$. Então, $xu \otimes xu = x \otimes x = xv \otimes xv$, $\forall x \in G$. Seja $g \in G$. Então, $g(uv) \otimes g(uv) = (gu)v \otimes (gu)v = gu \otimes gu = g \otimes g$. Como g é qualquer, temos que $uv \in U$. Como u e v são arbitrários, U é fechado por produtos e, portanto, $G' = \langle im(\tilde{\kappa}) \rangle = Sp\big(im(\tilde{\kappa})\big) \subset U$. Dessa forma, $gc \otimes gc = g \otimes g$, $\forall c \in G'$, $\forall g \in G$.

Logo, $cg \otimes cg = g \otimes g = gc \otimes gc$, $\forall c \in G'$, $\forall g \in G$, como queríamos. ■

Lema 3.5.9. Sejam G, H e T grupos, $e_T \in T$ o elemento neutro de T e $\beta : G \times H \to T$ um bihomomorfismo. Assim, $\forall g \in G$, $\forall c \in G'$, $\forall h \in H$, $\forall d \in H'$, temos que $\beta(c,h) = e_T = \beta(g,d)$.

Demonstração: Para cada $h \in H$, seja $V_h = \{c \in G \;:\; \beta(c,h) = e_T\}$. Sejam $h \in H$ e $c \in \lfloor G,G \rfloor$. Então, existem $a,b \in G$ tais que $c = [a,b]$. Como $\langle im(\beta) \rangle$ é abeliano, usando as observações 1.2.4 e 1.2.5, temos que

$$\begin{aligned}
\beta(c,h) &= \beta([a,b],h) \\
&= \beta(aba^{-1}b^{-1},h) \\
&= \beta(a,h) \cdot \beta(b,h) \cdot \beta(a^{-1},h) \cdot \beta(b^{-1},h) \\
&= \beta(a,h) \cdot \beta(b,h) \cdot [\beta(a,h)]^{-1} \cdot [\beta(b,h)]^{-1} \\
&= \beta(a,h) \cdot [\beta(a,h)]^{-1} \cdot \beta(b,h) \cdot [\beta(b,h)]^{-1} \\
&= e_T \cdot e_T \\
&= e_T\,.
\end{aligned}$$

Assim, $c \in V_h$. Como c é qualquer, $\lfloor G, G\rfloor \subset V_h$. Sejam $u, v \in V_h$. Então, $\beta(u,h) = e_T = \beta(v,h)$. Daí, $\beta(uv,h) = \beta(u,h)\cdot\beta(v,h) = e_T\cdot e_T = e_T$ e, portanto, $uv \in V_h$. Como u e v são arbitrários, V_h é fechado por produtos. Dessa forma, $G' = Sp\big(\lfloor G,G\rfloor\big) \subset V_h$. Daí, $\beta(c,h) = e_T$, $\forall c \in G'$. Como h é qualquer, temos que $\beta(c,h) = e_T$, $\forall c \in G'$, $\forall h \in H$.

Para cada $g \in H$, seja $V_g = \{d \in H \ :\ \beta(g,d) = e_T\}$. Sejam $g \in G$ e $d \in \lfloor H,H\rfloor$. Então, existem $a, b \in H$ tais que $d = [a,b]$. Como $\langle im(\beta)\rangle$ é abeliano, usando as observações 1.2.4 e 1.2.5, temos que

$$\begin{aligned}
\beta(g,d) &= \beta(g,[a,b])\\
&= \beta(g, aba^{-1}b^{-1})\\
&= \beta(g,a)\cdot\beta(g,b)\cdot\beta(g,a^{-1})\cdot\beta(g,b^{-1})\\
&= \beta(g,a)\cdot\beta(g,b)\cdot[\beta(g,a)]^{-1}\cdot[\beta(g,b)]^{-1}\\
&= \beta(g,a)\cdot[\beta(g,a)]^{-1}\cdot\beta(g,b)\cdot[\beta(g,b)]^{-1}\\
&= e_T\cdot e_T\\
&= e_T\,.
\end{aligned}$$

Assim, $d \in V_g$. Como d é qualquer, $\lfloor H,H\rfloor \subset V_g$. Sejam $u, v \in V_g$. Então, $\beta(g,u) = e_T = \beta(g,v)$. Daí, $\beta(g,uv) = \beta(g,u)\cdot\beta(g,v) = e_T\cdot e_T = e_T$ e, portanto, $uv \in V_g$. Como u e v são arbitrários, V_g é fechado por produtos. Dessa forma, $H' = Sp\big(\lfloor H,H\rfloor\big) \subset V_g$. Portanto, $\beta(g,c) = e_T$, $\forall d \in H'$. Como g é qualquer, temos que $\beta(g,c) = e_T$, $\forall d \in H'$, $\forall g \in G$.

Logo, $\beta(c,h) = e_T = \beta(g,d)$, $\forall g \in G$, $\forall c \in G'$, $\forall h \in H$, $\forall d \in H'$. ■

Teorema 3.5.10. Sejam G, H e T grupos, A um grupo abeliano, $\theta : G \to Sym(H)$ e $\xi : H \to Sym(G)$ ações, $\tau : G{\times}H \to T$ um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ tal que $T = (G{\otimes}H)^{(\theta,\xi)}_{\tau}$ e $\sigma : G^{ab}{\times}H^{ab} \to A$ uma função bilinear tal que $A = (G^{ab}{\otimes}_{\mathbb{Z}}H^{ab})_{\sigma}$. Se θ e ξ são ações triviais, então T é abeliano, τ é um bihomomorfismo e $T \cong A$, isto é,

$$(G{\otimes}H)^{(\theta,\xi)}_{\tau} \cong (G^{ab}{\otimes}_{\mathbb{Z}}H^{ab})_{\sigma}\ .$$

Demonstração: Sejam $p : G \to G^{ab} = G/G'$ e $q : H \to H^{ab} = H/H'$ as projeções canônicas e $\theta^{ab} : G^{ab} \to Aut(H^{ab})$ e $\xi^{ab} : H^{ab} \to Aut(G^{ab})$ as ações triviais. Então, θ e ξ são compatíveis e θ^{ab} e ξ^{ab} são compatíveis. Portanto, $X = (G{\times}H, \theta, \xi) \in Obj(\mathsf{C})$ e $Y = (G^{ab}{\times}H^{ab}, \theta^{ab}, \xi^{ab}) \in Obj(\mathsf{C})$. Como p e q são epimorfismos e quaisquer homomorfismos preservam as ações triviais, temos que $p\times q : G{\times}H \to G^{ab}{\times}H^{ab}$ é um epimorfismo e que $p\times q \in Hom_{\mathsf{C}}(X,Y)$. Como $\sigma : G^{ab}{\times}H^{ab} \to A$ é uma função bilinear, então σ é um pareamento cruzado com respeito a θ^{ab} e ξ^{ab}. Assim, pela proposição 1.3.3, $\sigma\circ(p\times q) : G{\times}H \to A$ é um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ. Daí, existe um único homomorfismo

$\varphi : T \to A$ tal que $\varphi \circ \tau = \sigma \circ (p \times q)$.

$$\begin{tikzcd} G \times H \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "p\times q"'] & (G \otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau} \arrow[d, "\varphi"] \\ G^{ab} \times H^{ab} \arrow[r, "\sigma"'] & (G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab})_{\sigma} \end{tikzcd}$$

Pelos parágrafos precedentes ao teorema 3.5.3, os homomorfismos $\lambda : T \to G$ e $\rho : T \to H$ são nulos e, portanto, $ker(\lambda) = T = ker(\rho)$. Sejam $\tilde{\alpha} : G \to Aut(T)$ e $\tilde{\beta} : H \to Aut(T)$ as ações induzidas por θ e ξ. Pelos itens (ix) e (x) do teorema 3.5.3, ${}^{g}t = \tilde{\alpha}_g(t) = t$ e ${}^{h}t = \tilde{\beta}_h(t) = t$, $\forall t \in T$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$. Isto é, $\tilde{\alpha}_g = id_T = \tilde{\beta}_h$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$. Ou seja, $\tilde{\alpha} : G \to Aut(T)$ e $\tilde{\beta} : H \to Aut(T)$ são as ações triviais. Além disso, pelo corolário 1.2.17, temos que T é abeliano e que τ é um bihomomorfismo.

Seja um conjunto

$$\delta = \Big\{ r \in (G^{ab} \times H^{ab}) \times T \ : \ (\exists g \in G)(\exists h \in H)\Big[r = \Big(\big(p(g), q(h)\big), \tau(g,h) \Big) \Big] \Big\} .$$

É claro que δ é uma relação $\delta \subset (G^{ab} \times H^{ab}) \times T$. Seja D o domínio de δ. Assim, $D \subset G^{ab} \times H^{ab}$. Seja $k \in G^{ab} \times H^{ab}$. Então, existem $m \in G^{ab}$ e $n \in H^{ab}$ tais que $k = (m, n)$. Como p e q são sobrejetoras, existem $g \in G$ e $h \in H$ tais que $m = p(g) = g \cdot G'$ e $n = q(h) = h \cdot H'$. Daí, $\big((m,n), \tau(g,h)\big) = \Big(\big(p(g), q(h)\big), \tau(g,h)\Big) \in \delta$ e, portanto, $k = (m,n) \in D$. Como k é qualquer, temos que $G^{ab} \times H^{ab} \subset D$. Assim, $D = G^{ab} \times H^{ab}$. Sejam $e_T \in T$ o elemento neutro de $T = (G \otimes H)^{(\theta,\xi)}_{\tau}$ e $(k,u), (\ell, v) \in \delta$ tais que $k = \ell$. Então, $k, \ell \in D = G^{ab} \times H^{ab}$. Daí, existem $g_1, g_2 \in G$ e $h_1, h_2 \in H$ tais que $k = \big(p(g_1), q(h_1)\big)$ e $\ell = \big(p(g_2), q(h_2)\big)$. Dessa forma, $\Big(\big(p(g_1), q(h_1)\big), u\Big) = (k, u) \in \delta$ e, portanto, $u = \tau(g_1, h_1)$. Também, $\Big(\big(p(g_2), q(h_2)\big), v\Big) = (\ell, v) \in \delta$ e, assim, $v = \tau(g_2, h_2)$. Mas, temos que $\big(p(g_1), q(h_1)\big) = k = \ell = \big(p(g_2), q(h_2)\big)$ e, portanto,

$$g_1 \cdot G' = p(g_1) = p(g_2) = g_2 \cdot G'$$

e

$$h_1 \cdot H' = q(h_1) = q(h_2) = h_2 \cdot H' .$$

Daí, $g_2^{-1} \cdot g_1 \in G'$ e $h_1 \cdot h_2^{-1} \in H'$. Como τ é bihomomorfismo, pelo lema 3.5.9, temos que $\tau(g_1, h_1 \cdot h_2^{-1}) = e_T = \tau(g_2^{-1} \cdot g_1, h_2)$. Assim, usando as observações

1.2.4 e 1.2.5, temos que

$$\begin{aligned}
u &= \tau(g_1, h_1) \\
&= e_T \cdot \tau(g_1, h_1) \cdot e_T \\
&= \tau(g_2, h_2) \cdot [\tau(g_2, h_2)]^{-1} \cdot \tau(g_1, h_1) \cdot [\tau(g_1, h_2)]^{-1} \cdot \tau(g_1, h_2) \\
&= \tau(g_2, h_2) \cdot \tau(g_2^{-1}, h_2) \cdot \tau(g_1, h_1) \cdot \tau(g_1, h_2^{-1}) \cdot \tau(g_1, h_2) \\
&= \tau(g_2, h_2) \cdot \tau(g_2^{-1}, h_2) \cdot \tau(g_1, h_1 \cdot h_2^{-1}) \cdot \tau(g_1, h_2) \\
&= \tau(g_2, h_2) \cdot \tau(g_2^{-1}, h_2) \cdot e_T \cdot \tau(g_1, h_2) \\
&= \tau(g_2, h_2) \cdot \tau(g_2^{-1}, h_2) \cdot \tau(g_1, h_2) \\
&= \tau(g_2, h_2) \cdot \tau(g_2^{-1} \cdot g_1, h_2) \\
&= \tau(g_2, h_2) \cdot e_T \\
&= \tau(g_2, h_2) \\
&= v\,.
\end{aligned}$$

Como (k, u) e (ℓ, v) são quaisquer, δ é uma função da forma $\delta : G^{ab} \times H^{ab} \to T$ tal que $\delta(gG', hH') = \tau(g, h) = g \otimes h$, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$. Vamos mostrar que δ é bilinear. Com efeito, como τ é bihomomorfismo, $\forall g, g_1, g_2 \in G$, $\forall h, h_1, h_2 \in H$, temos que

$$\begin{aligned}
\delta(g_1G' \cdot g_2G', hH') &= \delta\big((g_1g_2)G', hH'\big) \\
&= \tau(g_1g_2, h) \\
&= \tau(g_1, h) \cdot \tau(g_2, h) \\
&= \delta(g_1G', hH') \cdot \delta(g_2G', hH')\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta(gG', h_1H' \cdot h_2H') &= \delta\big(gG', (h_1h_2)H'\big) \\
&= \tau(g, h_1h_2) \\
&= \tau(g, h_1) \cdot \tau(g, h_2) \\
&= \delta(gG', h_1H') \cdot \delta(gG', h_2H')\,.
\end{aligned}$$

Dessa forma, existe um único homomorfismo $\psi : A \to T$ tal que $\psi \circ \sigma = \delta$.

$$\begin{tikzcd}
G^{ab} \times H^{ab} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "\delta"'] & (G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab})_\sigma \arrow[d, "\psi"] \\
& (G \otimes H)_\tau^{(\theta,\xi)}
\end{tikzcd}$$

Além disso, $\forall g \in G$, $\forall h \in H$, temos que

$$[\delta \circ (p \times q)](g, h) = \delta\big((p \times q)(g, h)\big) = \delta\big(p(g), q(h)\big) = \delta(gG', hH') = \tau(g, h)\,.$$

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ \delta)(gG', hH') &= \varphi\big(\delta(gG', hH')\big) \\
&= \varphi\big(\tau(g,h)\big) \\
&= (\varphi \circ \tau)(g,h) \\
&= [\sigma \circ (p \times q)](g,h) \\
&= \sigma\big((p \times q)(g,h)\big) \\
&= \sigma\big(p(g), q(h)\big) \\
&= \sigma(gG', hH')\,.
\end{aligned}$$

Assim, $\delta \circ (p \times q) = \tau$ e $\varphi \circ \delta = \sigma$. Sejam $id_T : T \to T$ e $id_A : A \to A$ os homomorfismos identidades. É claro que $id_T \circ \tau = \tau$ e que $id_A \circ \sigma = \sigma$. Também, temos os homomorfismos $\psi \circ \varphi : T \to T$ e $\varphi \circ \psi : A \to A$. Estes são tais que

$$\begin{aligned}
(\psi \circ \varphi) \circ \tau &= \psi \circ (\varphi \circ \tau) \\
&= \psi \circ [\sigma \circ (p \times q)] \\
&= (\psi \circ \sigma) \circ (p \times q) \\
&= \delta \circ (p \times q) \\
&= \tau
\end{aligned}$$

e $(\varphi \circ \psi) \circ \sigma = \varphi \circ (\psi \circ \sigma) = \varphi \circ \delta = \sigma$. Por unicidade, $\psi \circ \varphi = id_T$ e $\varphi \circ \psi = id_A$. Dessa forma, φ e ψ são isomorfismos, com $\psi = \varphi^{-1}$. Logo, $T \cong A$. ■

Observação 3.5.11. Sejam A, B e C grupos e considere a estrutura de grupo de produto direto em $A \times B$, em $A \times C$ e em $B \times C$. Sejam ações por automorfismos $\alpha : A \to Aut(B)$, $\beta : B \to Aut(A)$, $\delta : A \to Aut(C)$, $\gamma : C \to Aut(A)$, $\omega : B \to Aut(C)$ e $\lambda : C \to Aut(B)$ tais que ω e λ são ações triviais, α e β são compatíveis, δ e γ são compatíveis, $\beta_b \circ \gamma_s = \gamma_s \circ \beta_b$, $\alpha = \alpha \circ \gamma_s$ e $\delta = \delta \circ \beta_b$, $\forall b \in B$, $\forall s \in C$. Daí, $\omega_b = id_C$ e $\lambda_s = id_B$, $\forall b \in B$, $\forall s \in C$. Pela proposição 1.1.7, temos uma ação por automorfismos $\sigma : B \times C \to Aut(A)$ tal que $\sigma_{(b,s)} = \beta_b \circ \gamma_s = \gamma_s \circ \beta_b$, $\forall b \in B$, $\forall s \in C$. Pela proposição 1.1.8, temos ações por automorfismos $\rho : A \to Aut(B \times C)$, $\chi : B \to Aut(A \times C)$ e $\xi : C \to Aut(A \times B)$ tais que $\rho_a = \alpha_a \times \delta_a$, $\chi_b = \beta_b \times \omega_b = \beta_b \times id_C$ e $\xi_s = \gamma_s \times \lambda_s = \gamma_s \times id_B$, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, $\forall s \in C$. Pela proposição 1.1.9, temos que ρ e σ são compatíveis.

Sejam T_1, T_2 e T_3 grupos, $\tau_1 \in \mathcal{P}^{(\alpha,\beta)}_{(A,B,T_1)}$, $\tau_2 \in \mathcal{P}^{(\delta,\gamma)}_{(A,C,T_2)}$ e $\tau_3 \in \mathcal{P}^{(\rho,\sigma)}_{(A,B\times C,T_3)}$. Temos que $T_1 = (A \otimes B)^{(\alpha,\beta)}_{\tau_1}$, $T_2 = (A \otimes C)^{(\delta,\gamma)}_{\tau_2}$ e que $T_3 = [A \otimes (B \times C)]^{(\rho,\sigma)}_{\tau_3}$. Sejam $\tilde{\alpha} : A \to Aut(T_1)$ e $\tilde{\beta} : B \to Aut(T_2)$ as ações por automorfismos induzidas de α e β, $\tilde{\delta} : A \to Aut(T_2)$ e $\tilde{\gamma} : C \to Aut(T_2)$ as ações por automorfismos induzidas de δ e γ e $\tilde{\rho} : A \to Aut(T_3)$ e $\tilde{\sigma} : B \times C \to Aut(T_3)$ as ações por automorfismos induzidas de ρ e σ. Assim, temos $\tilde{\alpha}_a \circ \tau_1 = \tau_1 \circ (c^A_a \times \alpha_a)$, $\tilde{\beta}_b \circ \tau_1 = \tau_1 \circ (\beta_b \times c^B_b)$, $\tilde{\delta}_a \circ \tau_2 = \tau_2 \circ (c^A_a \times \delta_a)$, $\tilde{\gamma}_s \circ \tau_2 = \tau_2 \circ (\gamma_s \times c^C_s)$, $\tilde{\rho}_a \circ \tau_3 = \tau_3 \circ (c^A_a \times \rho_a)$ e $\tilde{\sigma}_{(b,s)} \circ \tau_3 = \tau_3 \circ [\sigma_{(b,s)} \times c^{B\times C}_{(b,s)}] = \tau_3 \circ [(\beta_b \circ \gamma_s) \times (c^B_b \times c^C_s)]$, $\forall a \in A$, $\forall (b,s) \in B \times C$.

Sejam $X_1 = (A \times B, \alpha, \beta) \in Obj(\mathsf{C})$ e $X_2 = (A \times C, \delta, \gamma) \in Obj(\mathsf{C})$. Temos que, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, $\forall s \in C$,

- $\delta_{\beta_b(a)} \circ \omega_b = \delta\big(\beta_b(a)\big) \circ id_C = (\delta \circ \beta_b)(a) = \delta(a) = id_C \circ \delta_a = \omega_b \circ \delta_a\,;$
- $\gamma_{\omega_b(s)} \circ \beta_b = \gamma_{id_C(s)} \circ \beta_b = \gamma_s \circ \beta_b = \beta_b \circ \gamma_s = \sigma_{(b,s)}\,;$
- $\alpha_{\gamma_s(a)} \circ \lambda_s = \alpha\big(\gamma_s(a)\big) \circ id_B = (\alpha \circ \gamma_s)(a) = \alpha(a) = id_B \circ \alpha_a = \lambda_s \circ \alpha_a\,;$
- $\beta_{\lambda_s(b)} \circ \gamma_s = \beta_{id_B(b)} \circ \gamma_s = \beta_b \circ \gamma_s = \gamma_s \circ \beta_b = \sigma_{(b,s)}\,.$

Assim, γ_s e $\lambda_s = id_B$ são automorfismos que preservam as ações de A e B e β_b e $\omega_b = id_C$ são automorfismos que preservam as ações de A e C, isto é, $\xi_s = \gamma_s \times \lambda_s = \gamma_s \times id_B \in Hom_{\mathsf{C}}(X_1, X_1)$ e $\chi_b = \beta_b \times \omega_b = \beta_b \times id_C \in Hom_{\mathsf{C}}(X_2, X_2)$ são automorfismos, $\forall b \in B$, $\forall s \in C$. Portanto, temos automorfismos $(\gamma_s \otimes \lambda_s)^{(X_1,\tau_1)}_{(X_1,\tau_1)} = (\gamma_s \otimes id_B)^{(X_1,\tau_1)}_{(X_1,\tau_1)} \in Aut(T_1)$ e $(\beta_b \otimes \omega_b)^{(X_2,\tau_2)}_{(X_2,\tau_2)} = (\beta_b \otimes id_C)^{(X_2,\tau_2)}_{(X_2,\tau_2)} \in Aut(T_2)$, $\forall b \in B$, $\forall s \in C$.

Sejam $\tilde{\xi} : C \to Aut(T_1)$ e $\tilde{\chi} : B \to Aut(T_2)$ funções tais que $\tilde{\xi}(s) = (\gamma_s \otimes \lambda_s)^{(X_1,\tau_1)}_{(X_1,\tau_1)}$ e $\tilde{\chi}(b) = (\beta_b \otimes \omega_b)^{(X_2,\tau_2)}_{(X_2,\tau_2)}$, $\forall s \in C$, $\forall b \in B$. Assim, $\forall s, z \in C$, $\forall b, y \in B$,

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi}(s \cdot z) &= (\gamma_{sz} \otimes \lambda_{sz})^{(X_1,\tau_1)}_{(X_1,\tau_1)} \\
&= [(\gamma_s \circ \gamma_z) \otimes (\lambda_s \circ \lambda_z)]^{(X_1,\tau_1)}_{(X_1,\tau_1)} \\
&= [(\gamma_s \otimes \lambda_s)^{(X_1,\tau_1)}_{(X_1,\tau_1)}] \circ [(\gamma_z \otimes \lambda_z)^{(X_1,\tau_1)}_{(X_1,\tau_1)}] \\
&= \tilde{\xi}(s) \circ \tilde{\xi}(z)\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\chi}(b \cdot y) &= (\beta_{by} \otimes \omega_{by})^{(X_2,\tau_2)}_{(X_2,\tau_2)} \\
&= [(\beta_b \circ \beta_y) \otimes (\omega_b \circ \omega_y)]^{(X_2,\tau_2)}_{(X_2,\tau_2)} \\
&= [(\beta_b \otimes \omega_b)^{(X_2,\tau_2)}_{(X_2,\tau_2)}] \circ [(\beta_y \otimes \omega_y)]^{(X_2,\tau_2)}_{(X_2,\tau_2)} \\
&= \tilde{\chi}(b) \circ \tilde{\chi}(y)\,.
\end{aligned}$$

Dessa forma, $\tilde{\xi} \in Hom\big(C, Aut(T_1)\big)$ e $\tilde{\chi} \in Hom\big(B, Aut(T_2)\big)$, isto é, $\tilde{\xi}$ é uma ação por automorfismos de C em $T_1 = (A \otimes B)^{(\alpha,\beta)}_{\tau_1}$ e $\tilde{\chi}$ é uma ação por automorfismos de B em $T_2 = (A \otimes C)^{(\delta,\gamma)}_{\tau_2}$. Se $\tilde{\xi}$ é trivial, então, $\forall s \in C$,

$$\tau_1 = id_{T_1} \circ \tau_1 = \tilde{\xi}_s \circ \tau_1 = [(\gamma_s \otimes \lambda_s)^{(X_1,\tau_1)}_{(X_1,\tau_1)}] \circ \tau_1 = \tau_1 \circ (\gamma_s \times \lambda_s) = \tau_1 \circ (\gamma_s \times id_B)\,.$$

Se $\tilde{\chi}$ é trivial, então, $\forall b \in B$,

$$\tau_2 = id_{T_2} \circ \tau_2 = \tilde{\chi}_b \circ \tau_2 = [(\beta_b \otimes \omega_b)^{(X_2,\tau_2)}_{(X_2,\tau_2)}] \circ \tau_2 = \tau_2 \circ (\beta_b \times \omega_b) = \tau_2 \circ (\beta_b \times id_C)\,.$$

Agora, note que, se γ é trivial, então, $\forall s \in C$, $\forall \tau_1' \in \mathcal{P}^{(\alpha,\beta)}_{(A,B,T_1)}$, vale

$$\tau_1' \circ (\gamma_s \times id_B) = \tau_1' \circ (id_A \times id_B) = \tau_1' \circ id_{A \times B} = \tau_1'\,.$$

Analogamente, se β é trivial, então, $\forall b \in B$, $\forall \tau_2' \in \mathcal{P}^{(\delta,\gamma)}_{(A,C,T_2)}$, vale

$$\tau_2' \circ (\beta_b \times id_C) = \tau_2' \circ (id_A \times id_C) = \tau_2' \circ id_{A\times C} = \tau_2 \,.$$

Dessa forma, vamos supor que $\tau_1 \in \mathcal{P}^{(\alpha,\beta)}_{(A,B,T_1)}$ e $\tau_2 \in \mathcal{P}^{(\delta,\gamma)}_{(A,C,T_2)}$ são tais que $\tau_1 \circ (\gamma_s \times id_B) = \tau_1$, $\forall s \in C$, e que $\tau_2 \circ (\beta_b \times id_C) = \tau_2$, $\forall b \in B$. Como vimos acima, para que isso aconteça, é suficiente que γ e β sejam triviais.

Consequentemente, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, $\forall s \in C$,

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_a \circ \tau_1 \circ (\gamma_s \times id_B) &= \tilde{\alpha}_a \circ \tau_1 \\
&= \tau_1 \circ (c^A_a \times \alpha_a) \\
&= \tau_1 \circ (\gamma_s \times id_B) \circ (c^A_a \times \alpha_a) \\
&= \tau_1 \circ [(\gamma_s \circ c^A_a) \times (id_B \circ \alpha_a)] \\
&= \tau_1 \circ [(\gamma_s \circ c^A_a) \times \alpha_a] \\
&= \tau_1 \circ \{[c^A_{\gamma_s(a)} \circ \gamma_s] \times \alpha_a\}\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}_b \circ \tau_1 \circ (\gamma_s \times id_B) &= \tilde{\beta}_b \circ \tau_1 \\
&= \tau_1 \circ (\beta_b \times c^B_b) \\
&= \tau_1 \circ (\gamma_s \times id_B) \circ (\beta_b \times c^B_b) \\
&= \tau_1 \circ [(\gamma_s \circ \beta_b) \times (id_B \circ c^B_b)] \\
&= \tau_1 \circ [(\gamma_s \circ \beta_b) \times c^B_b] \\
&= \tau_1 \circ [(\beta_b \circ \gamma_s) \times c^B_b]\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta}_a \circ \tau_2 \circ (\beta_b \times id_C) &= \tilde{\delta}_a \circ \tau_2 \\
&= \tau_2 \circ (c^A_a \times \delta_a) \\
&= \tau_2 \circ (\beta_b \times id_C) \circ (c^A_a \times \delta_a) \\
&= \tau_2 \circ [(\beta_b \circ c^A_a) \times (id_C \circ \delta_a)] \\
&= \tau_2 \circ [(\beta_b \circ c^A_a) \times \delta_a] \\
&= \tau_2 \circ \{[c^A_{\beta_b(a)} \circ \beta_b] \times \delta_a\}\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_s \circ \tau_2 \circ (\beta_b \times id_C) &= \tilde{\gamma}_s \circ \tau_2 \\
&= \tau_2 \circ (\gamma_s \times c^C_s) \\
&= \tau_2 \circ (\beta_b \times id_C) \circ (\gamma_s \times c^C_s) \\
&= \tau_2 \circ [(\beta_b \circ \gamma_s) \times (id_C \circ c^C_s)] \\
&= \tau_2 \circ [(\beta_b \circ \gamma_s) \times c^C_s] \\
&= \tau_2 \circ [(\gamma_s \circ \beta_b) \times c^C_s]\,.
\end{aligned}$$

Considere a estrutura de grupo de produto direto para $T_1 \times T_2$. No contexto dos últimos parágrafos, seja uma função $\theta : A \times (B \times C) \to T_1 \times T_2$ tal que

$\theta\big(a,(b,s)\big) = \big(\tau_1(a,b),\tau_2(a,s)\big) = (a\otimes b, a\otimes s)$, $\forall a \in A$, $\forall (b,s) \in B\times C$. Com as hipóteses acima, vamos provar que θ é um pareamento cruzado com respeito às ações ρ e σ. De fato, $\forall a,x \in A$, $\forall (b,s),(y,t) \in B\times C$, temos que

$$\begin{aligned}
\theta\big(ax,(b,s)\big) &= \big(\tau_1(ax,b),\tau_2(ax,s)\big)\\
&= \Big(\tau_1\big(c_a^A(x),\alpha_a(b)\big)\cdot\tau_1(a,b)\ ,\ \tau_2\big(c_a^A(x),\delta_a(s)\big)\cdot\tau_2(a,s)\Big)\\
&= \Big(\tau_1\big(c_a^A(x),\alpha_a(b)\big)\ ,\ \tau_2\big(c_a^A(x),\delta_a(s)\big)\Big)\cdot\big(\tau_1(a,b),\tau_2(a,s)\big)\\
&= \theta\Big(c_a^A(x)\ ,\ \big(\alpha_a(b),\delta_a(s)\big)\Big)\cdot\theta\big(a,(b,s)\big)\\
&= \theta\big(c_a^A(x)\ ,\ (\alpha_a\times\delta_a)(b,s)\big)\cdot\theta\big(a,(b,s)\big)\\
&= \theta\big(c_a^A(x),\rho_a(b,s)\big)\cdot\theta\big(a,(b,s)\big)\,.
\end{aligned}$$

Sendo $\varpi = \theta\big(x\ ,\ (b,s)\cdot(y,t)\big)$, temos que

$$\begin{aligned}
\varpi &= \theta\big(x\ ,\ (b,s)\cdot(y,t)\big)\\
&= \theta\big(x,(by,st)\big)\\
&= \big(\tau_1(x,by),\tau_2(x,st)\big)\\
&= \Big(\tau_1(x,b)\cdot\tau_1\big(\beta_b(x),c_b^B(y)\big)\ \ ,\ \tau_2(x,s)\cdot\tau_2\big(\gamma_s(x),c_s^C(t)\big)\Big)\\
&= \big(\tau_1(x,b),\tau_2(x,s)\big)\cdot\Big(\tau_1\big(\beta_b(x),c_b^B(y)\big)\ ,\ \tau_2\big(\gamma_s(x),c_s^C(t)\big)\Big)\\
&= \big(\tau_1(x,b),\tau_2(x,s)\big)\cdot\Big(\tau_1\big((\beta_b\times c_b^B)(x,y)\big)\ ,\ \tau_2\big((\gamma_s\times c_s^C)(x,t)\big)\Big)\\
&= \big(\tau_1(x,b),\tau_2(x,s)\big)\cdot\big([\tau_1\circ(\beta_b\times c_b^B)](x,y)\ ,\ [\tau_2\circ(\gamma_s\times c_s^C)](x,t)\big)\\
&= \big(\tau_1(x,b),\tau_2(x,s)\big)\cdot\big(\{\tau_1\circ[(\beta_b\circ\gamma_s)\times c_b^B]\}(x,y)\ ,\ \{\tau_2\circ[(\beta_b\circ\gamma_s)\times c_s^C]\}(x,t)\big)\\
&= \big(\tau_1(x,b),\tau_2(x,s)\big)\cdot\Big(\tau_1\big([(\beta_b\circ\gamma_s)\times c_b^B](x,y)\big)\ ,\ \tau_2\big([(\beta_b\circ\gamma_s)\times c_s^C](x,t)\big)\Big)\\
&= \big(\tau_1(x,b),\tau_2(x,s)\big)\cdot\Big(\tau_1\big((\beta_b\circ\gamma_s)(x),c_b^B(y)\big)\ ,\ \tau_2\big((\beta_b\circ\gamma_s)(x),c_s^C(t)\big)\Big)\\
&= \theta\big(x,(b,s)\big)\cdot\theta\Big((\beta_b\circ\gamma_s)(x),\big(c_b^B(y),c_s^C(t)\big)\Big)\\
&= \theta\big(x,(b,s)\big)\cdot\theta\big((\beta_b\circ\gamma_s)(x),(c_b^B\times c_s^C)(y,t)\big)\\
&= \theta\big(x,(b,s)\big)\cdot\theta\big(\sigma_{(b,s)}(x),c_{(b,s)}^{B\times C}(y,t)\big)\,.
\end{aligned}$$

Logo, existe um único homomorfismo $\varphi : T_3 \to T_1\times T_2$ tal que $\varphi\circ\tau_3 = \theta$.

$$\begin{tikzcd}
A\times(B\times C) \arrow[rr, "\tau_3"] \arrow[dr, "\theta"'] & & {[A\otimes(B\times C)]_{\tau_3}^{(\rho,\sigma)}} \arrow[dl, "\varphi"] \\
& (A\otimes B)_{\tau_1}^{(\alpha,\beta)}\times(A\otimes C)_{\tau_2}^{(\delta,\gamma)} &
\end{tikzcd}$$

Observação 3.5.12. Continuando no contexto e nas hipóteses da observação 3.5.11 acima, sejam $e_B \in B$ o elemento neutro de B, $e_C \in C$ o elemento neutro de C e funções $j : A{\times}B \to T_3$ e $k : A{\times}C \to T_3$ tais que $j(a,b) = \tau_3\big(a,(b,e_C)\big)$ e $k(a,s) = \tau_3\big(a,(e_B,s)\big)$, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, $\forall s \in C$. Então, $\forall a, x \in A$, $\forall b, y \in B$, $\forall s, z \in C$,

$$\begin{aligned}
j(ax,y) &= \tau_3\big(ax,(y,e_C)\big)\\
&= \tau_3\big(c_a^A(x),\rho_a(y,e_C)\big)\cdot\tau_3\big(a,(y,e_C)\big)\\
&= \tau_3\big(c_a^A(x),(\alpha_a\times\delta_a)(y,e_C)\big)\cdot\tau_3\big(a,(y,e_C)\big)\\
&= \tau_3\Big(c_a^A(x),\big(\alpha_a(y),\delta_a(e_C)\big)\Big)\cdot\tau_3\big(a,(y,e_C)\big)\\
&= \tau_3\Big(c_a^A(x),\big(\alpha_a(y),e_C\big)\Big)\cdot\tau_3\big(a,(y,e_C)\big)\\
&= j\big(c_a^A(x),\alpha_a(y)\big)\cdot j(a,y)\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j(x,by) &= \tau_3\big(x,(by,e_C)\big)\\
&= \tau_3\big(x,(b\cdot y,e_C\cdot e_C)\big)\\
&= \tau_3\big(x,(b,e_C)\cdot(y,e_C)\big)\\
&= \tau_3\big(x,(b,e_C)\big)\cdot\tau_3\big(\sigma_{(b,e_c)}(x),c^{B\times C}_{(b,e_c)}(y,e_C)\big)\\
&= \tau_3\big(x,(b,e_C)\big)\cdot\tau_3\big((\beta_b\circ\gamma_{e_c})(x),(c_b^B\times c_{e_c}^C)(y,e_C)\big)\\
&= \tau_3\big(x,(b,e_C)\big)\cdot\tau_3\big((\beta_b\circ id_A)(x),(c_b^B\times id_C)(y,e_C)\big)\\
&= \tau_3\big(x,(b,e_C)\big)\cdot\tau_3\Big(\beta_b(x),\big(c_b^B(y),id_C(e_C)\big)\Big)\\
&= \tau_3\big(x,(b,e_C)\big)\cdot\tau_3\Big(\beta_b(x),\big(c_b^B(y),e_C\big)\Big)\\
&= j(x,b)\cdot j\big(\beta_b(x),c_b^B(y)\big)\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k(ax,z) &= \tau_3\big(ax,(e_B,z)\big)\\
&= \tau_3\big(c_a^A(x),\rho_a(e_B,z)\big)\cdot\tau_3\big(a,(e_B,z)\big)\\
&= \tau_3\big(c_a^A(x),(\alpha_a\times\delta_a)(e_B,z)\big)\cdot\tau_3\big(a,(e_B,z)\big)\\
&= \tau_3\Big(c_a^A(x),\big(\alpha_a(e_B),\delta_a(z)\big)\Big)\cdot\tau_3\big(a,(e_B,z)\Big)\\
&= \tau_3\Big(c_a^A(x),\big(e_B,\delta_a(z)\big)\Big)\cdot\tau_3\big(a,(e_B,z)\Big)\\
&= k\big(c_a^A(x),\delta_a(z)\big)\cdot k(a,z)\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k(x,sz) &= \tau_3\big(x,(e_B,sz)\big)\\
&= \tau_3\big(x,(e_B\cdot e_B\,,\ s\cdot z)\big)\\
&= \tau_3\big(x,(e_B,s)\cdot(e_B,z)\big)\\
&= \tau_3\big(x,(e_B,s)\big)\cdot\tau_3\big(\sigma_{(e_B,s)}(x),c^{B\times C}_{(e_B,s)}(e_B,z)\big)\\
&= \tau_3\big(x,(e_B,s)\big)\cdot\tau_3\big((\beta_{e_B}\circ\gamma_s)(x),(c^B_{e_B}\times c^C_s)(e_B,z)\big)\\
&= \tau_3\big(x,(e_B,s)\big)\cdot\tau_3\big((id_A\circ\gamma_s)(x),(id_B\times c^C_s)(e_B,z)\big)\\
&= \tau_3\big(x,(e_B,s)\big)\cdot\tau_3\big(\gamma_s(x),(id_B\times c^C_s)(e_B,z)\big)\\
&= \tau_3\big(x,(e_B,s)\big)\cdot\tau_3\Big(\gamma_s(x),\big(id_B(e_B),c^C_s(z)\big)\Big)\\
&= \tau_3\big(x,(e_B,s)\big)\cdot\tau_3\Big(\gamma_s(x),\big(e_B,c^C_s(z)\big)\Big)\\
&= k(x,s)\cdot k\big(\gamma_s(x),c^C_s(z)\big)\,.
\end{aligned}$$

Assim, j é um pareamento cruzado com respeito a α e β e k é um pareamento cruzado com respeito a δ e γ. Daí, existem únicos homomorfismos $\psi_1 : T_1 \to T_3$ e $\psi_2 : T_2 \to T_3$ tais que $\psi_1 \circ \tau_1 = j$ e $\psi_2 \circ \tau_2 = k$

$$\begin{tikzcd}
A\times B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\tau_1"'] & {[A\otimes(B\times C)]^{(\rho,\sigma)}_{\tau_3}} & A\times C \arrow[l, "k"'] \arrow[d, "\tau_2"] \\
(A\otimes B)^{(\alpha,\beta)}_{\tau_1} \arrow[ur, "\psi_1"'] & & (A\otimes C)^{(\delta,\gamma)}_{\tau_2} \arrow[ul, "\psi_2"]
\end{tikzcd}$$

No artigo [7] de Brown, Johnson e Robertson, os autores mostram que o homomorfismo $\varphi : [A\otimes(B\times C)]^{(\rho,\sigma)}_{\tau_3} \to (A\otimes B)^{(\alpha,\beta)}_{\tau_1} \times (A\otimes C)^{(\delta,\gamma)}_{\tau_2}$ da observação 3.5.11 é um isomorfismo, exibindo o homomorfismo inverso de φ. Para isso, usam os homomorfismos $\psi_1 : (A\otimes B)^{(\alpha,\beta)}_{\tau_1} \to [A\otimes(B\times C)]^{(\rho,\sigma)}_{\tau_3}$ e $\psi_2 : (A\otimes C)^{(\delta,\gamma)}_{\tau_2} \to [A\otimes(B\times C)]^{(\rho,\sigma)}_{\tau_3}$ da observação 3.5.12. Como o produto direto não é um coproduto em Grp, algumas propriedades de comutação entre elementos das imagens de ψ_1 e ψ_2 devem ser demonstradas para que estas induzam φ^{-1}. Feito isso, obtêm uma propriedade distributiva:

$$[A\otimes(B\times C)]^{(\rho,\sigma)}_{\tau_3} \cong (A\otimes B)^{(\alpha,\beta)}_{\tau_1} \times (A\otimes C)^{(\delta,\gamma)}_{\tau_2}\ .$$

Capítulo 4

O funtor quadrático universal de Whitehead

4.1 Funções quadráticas

Sejam G e H grupos. Definimos "o *operador delta* de G em H" como sendo a função $\Delta : H^G \to H^{G\times G}$ tal que $[\Delta(\gamma)](a,b) = [\gamma(b)]^{-1} \cdot [\gamma(a)]^{-1} \cdot \gamma(a \cdot b)$, $\forall a,b \in G$, $\forall \gamma \in H^G$. Para todo $\gamma \in H^G$ e todos $a,b \in G$, iremos denotar $\Delta(\gamma)$ por "$\Delta\gamma$" e $[\Delta(\gamma)](a,b)$ por "$\Delta\gamma(a,b)$". Assim, temos que $\gamma(ab) = \gamma(a) \cdot \gamma(b) \cdot \Delta\gamma(a,b)$, $\forall a,b \in G$, $\forall \gamma \in H^G$. Sejam $\gamma \in H^G$ e $e_H \in H$ o elemento neutro de H. Dizemos que "$\Delta\gamma$ é *nulo*" se, e somente se, $\Delta\gamma(a,b) = e_H$, $\forall a,b \in G$. Para cada $\gamma \in H^G$, note que $\gamma \in Hom(G,H)$ se, e somente se, $\Delta\gamma$ é nulo. Observe também que $im(\Delta\gamma) \subset \langle im(\gamma)\rangle$ e, portanto, que $im(\Delta\gamma) \subset \langle im(\Delta\gamma)\rangle \leqslant \langle im(\gamma)\rangle \leqslant H$, $\forall \gamma \in H^G$. Daí, se $\langle im(\gamma)\rangle$ é abeliano, então $\langle im(\Delta\gamma)\rangle$ também é abeliano.

Proposição 4.1.1. Sejam A,G, H e K grupos, $e_G \in G$ o elemento neutro de G, $e_H \in H$ o elemento neutro de H, $\phi \in Hom(A,G)$, $\psi \in Hom(H,K)$ e $\gamma \in H^G$. Temos que

(i) $\Delta(\psi \circ \gamma) = \psi \circ \Delta\gamma\,;$

(ii) $\Delta(\gamma \circ \phi) = \Delta\gamma \circ (\phi \times \phi)\,;$

(iii) Se $\Delta\gamma$ é bihomomorfismo, então $\langle im(\Delta\gamma)\rangle$ é abeliano, $\gamma(e_G) = e_H$ e $\Delta(\psi \circ \gamma)$ e $\Delta(\gamma \circ \phi)$ são bihomomorfismos.

Demonstração: **(i)** Para todo $(a,b) \in G \times G$,

$$\begin{aligned}
[\Delta(\psi \circ \gamma)](a,b) &= [(\psi \circ \gamma)(b)]^{-1} \cdot [(\psi \circ \gamma)(a)]^{-1} \cdot (\psi \circ \gamma)(ab) \\
&= \big[\psi\big(\gamma(b)\big)\big]^{-1} \cdot \big[\psi\big(\gamma(a)\big)\big]^{-1} \cdot \psi\big(\gamma(ab)\big) \\
&= \psi\big([\gamma(b)]^{-1}\big) \cdot \psi\big([\gamma(a)]^{-1}\big) \cdot \psi\big(\gamma(ab)\big) \\
&= \psi\big([\gamma(b)]^{-1} \cdot [\gamma(a)]^{-1} \cdot \gamma(ab)\big) \\
&= \psi\big(\Delta\gamma(a,b)\big) \\
&= (\psi \circ \Delta\gamma)(a,b)\,.
\end{aligned}$$

(ii) Para todo $(a,b) \in G \times G$,

$$\begin{aligned}
[\Delta(\gamma \circ \phi)](a,b) &= [(\gamma \circ \phi)(b)]^{-1} \cdot [(\gamma \circ \phi)(a)]^{-1} \cdot (\gamma \circ \phi)(ab) \\
&= \big[\gamma\big(\phi(b)\big)\big]^{-1} \cdot \big[\gamma\big(\phi(a)\big)\big]^{-1} \cdot \gamma\big(\phi(ab)\big) \\
&= \big[\gamma\big(\phi(b)\big)\big]^{-1} \cdot \big[\gamma\big(\phi(a)\big)\big]^{-1} \cdot \gamma\big(\phi(a) \cdot \phi(b)\big) \\
&= \Delta\gamma\big(\phi(a), \phi(b)\big) \\
&= \Delta\gamma\big((\phi \times \phi)(a,b)\big) \\
&= [\Delta\gamma \circ (\phi \times \phi)](a,b)\,.
\end{aligned}$$

(iii) As funções $\Delta(\psi \circ \gamma) = \psi \circ \Delta\gamma$ e $\Delta(\gamma \circ \phi) = \Delta\gamma \circ (\phi \times \phi)$ são bihomomorfismos pela proposição 1.2.8 e o grupo $\langle im(\Delta\gamma)\rangle$ é abeliano pela proposição 1.2.7. Como $\Delta\gamma$ é um bihomomorfismo, pela proposição 1.2.4, temos que

$$\begin{aligned}
e_H &= \Delta\gamma(e_G, e_G) \\
&= [\gamma(e_G)]^{-1} \cdot [\gamma(e_G)]^{-1} \cdot \gamma(e_G \cdot e_G) \\
&= [\gamma(e_G)]^{-1} \cdot [\gamma(e_G)]^{-1} \cdot \gamma(e_G) \\
&= [\gamma(e_G)]^{-1}\,.
\end{aligned}$$

Assim, $\gamma(e_G) = e_H^{-1} = e_H$. ■

Sejam G e H grupos, $e_G \in G$ o elemento neutro de G, $e_H \in H$ o elemento neutro de H e $\gamma \in H^G$. Temos que, $\forall g \in G$,

$$\Delta\gamma(g, e_G) = [\gamma(e_G)]^{-1} \cdot [\gamma(g)]^{-1} \cdot \gamma(g \cdot e_G) = [\gamma(e_G)]^{-1} \cdot [\gamma(g)]^{-1} \cdot \gamma(g) = [\gamma(e_G)]^{-1}\,.$$

Dessa forma, $e_H = \Delta\gamma(g, e_G) \cdot \gamma(e_G) = \gamma(e_G) \cdot \Delta\gamma(g, e_G)$.

Proposição 4.1.2. Sejam G e H grupos, $e_H \in H$ o elemento neutro de H e $\gamma \in H^G$. São equivalentes:

(i) $\langle im(\gamma)\rangle$ é abeliano e $\Delta\gamma$ é bihomomorfismo;

(ii) $\gamma(abc) \cdot [\gamma(bc)]^{-1} \cdot [\gamma(ac)]^{-1} \cdot [\gamma(ab)]^{-1} \cdot \gamma(a) \cdot \gamma(b) \cdot \gamma(c) = e_H\,,\ \forall a,b,c \in G.$

Demonstração: [(i)⇒(ii)] Para todos $a, b, c \in G$, temos que

$$\begin{aligned}
[\gamma(bc)]^{-1} \cdot [\gamma(a)]^{-1} \cdot \gamma(abc) &= \Delta\gamma(a, bc) \\
&= \Delta\gamma(a, b) \cdot \Delta\gamma(a, c) \\
&= \{[\gamma(b)]^{-1} \cdot [\gamma(a)]^{-1} \cdot \gamma(ab)\} \cdot \{[\gamma(c)]^{-1} \cdot [\gamma(a)]^{-1} \cdot \gamma(ac)\}\,.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\gamma(abc) &= \gamma(a) \cdot \gamma(bc) \cdot [\gamma(b)]^{-1} \cdot [\gamma(a)]^{-1} \cdot \gamma(ab) \cdot [\gamma(c)]^{-1} \cdot [\gamma(a)]^{-1} \cdot \gamma(ac) \\
&= [\gamma(c)]^{-1} \cdot [\gamma(b)]^{-1} \cdot [\gamma(a)]^{-1} \cdot \gamma(ab) \cdot \gamma(ac) \cdot \gamma(bc)\,.
\end{aligned}$$

Assim, $\gamma(abc) \cdot [\gamma(bc)]^{-1} \cdot [\gamma(ac)]^{-1} \cdot [\gamma(ab)]^{-1} \cdot \gamma(a) \cdot \gamma(b) \cdot \gamma(c) = e_H$.

[(ii)⇒(i)] Seja $e_G \in G$ o elemento neutro de G. Note que

$$\begin{aligned}
e_H &= \gamma(e_G \cdot e_G \cdot e_G) \cdot [\gamma(e_G \cdot e_G)]^{-1} \cdot [\gamma(e_G \cdot e_G)]^{-1} \cdot [\gamma(e_G \cdot e_G)]^{-1} \cdot \gamma(e_G) \cdot \gamma(e_G) \cdot \gamma(e_G) \\
&= \gamma(e_G) \cdot [\gamma(e_G)]^{-1} \cdot [\gamma(e_G)]^{-1} \cdot [\gamma(e_G)]^{-1} \cdot \gamma(e_G) \cdot \gamma(e_G) \cdot \gamma(e_G) \\
&= \gamma(e_G)\,.
\end{aligned}$$

Sejam $a, c \in G$, temos que (colocando $b = e_G$ na hipótese (ii))

$$\begin{aligned}
e_H &= \gamma(a \cdot e_G \cdot c) \cdot [\gamma(e_G \cdot c)]^{-1} \cdot [\gamma(ac)]^{-1} \cdot [\gamma(a \cdot e_G)]^{-1} \cdot \gamma(a) \cdot \gamma(e_G) \cdot \gamma(c) \\
&= \gamma(ac) \cdot [\gamma(c)]^{-1} \cdot [\gamma(ac)]^{-1} \cdot [\gamma(a)]^{-1} \cdot \gamma(a) \cdot e_H \cdot \gamma(c) \\
&= \gamma(ac) \cdot [\gamma(c)]^{-1} \cdot [\gamma(ac)]^{-1} \cdot \gamma(c)\,.
\end{aligned}$$

Daí,

$$e_H = e_H^{-1} = \{\gamma(ac) \cdot [\gamma(c)]^{-1} \cdot [\gamma(ac)]^{-1} \cdot \gamma(c)\}^{-1} = [\gamma(c)]^{-1} \cdot \gamma(ac) \cdot \gamma(c) \cdot [\gamma(ac)]^{-1}\,.$$

Assim, $\gamma(ac) = [\gamma(c)]^{-1} \cdot \gamma(ac) \cdot \gamma(c)$, isto é, $\gamma(c) \cdot \gamma(ac) = \gamma(ac) \cdot \gamma(c)$. Como a e c são quaisquer, temos que $\gamma(c) \cdot \gamma(ac) = \gamma(ac) \cdot \gamma(c)$, $\forall a, c \in G$.

Sejam $b, h \in im(\gamma)$. Então, existem $c, d \in G$ tais que $b = \gamma(c)$ e $h = \gamma(d)$. Daí, colocando $dc^{-1} = a$ na expressão que obtemos acima,

$$bh = \gamma(c) \cdot \gamma(d) = \gamma(c) \cdot \gamma\big((dc^{-1})c\big) = \gamma\big((dc^{-1})c\big) \cdot \gamma(c) = \gamma(d) \cdot \gamma(c) = hb\,.$$

Como h e b são quaisquer, temos que todos os elementos de $im(\gamma)$ comutam entre si. Pela observação 1.2.6, segue que $\langle im(\gamma)\rangle$ é abeliano. Dessa forma, podemos rearranjar a expressão da hipótese (ii) e, $\forall a, b, c \in G$, temos que

$$\begin{aligned}
[\gamma(ab)]^{-1} \cdot \gamma(abc) &= [\gamma(c)]^{-1} \cdot [\gamma(b)]^{-1} \cdot [\gamma(a)]^{-1} \cdot \gamma(ac) \cdot \gamma(bc) \\
&= [\gamma(a)]^{-1} \cdot \gamma(ac) \cdot [\gamma(c)]^{-1} \cdot [\gamma(b)]^{-1} \cdot \gamma(bc) \\
&= \{[\gamma(a)]^{-1} \cdot \gamma(ac)\} \cdot \{[\gamma(c)]^{-1} \cdot [\gamma(b)]^{-1} \cdot \gamma(bc)\} \\
&= \{[\gamma(a)]^{-1} \cdot \gamma(ac)\} \cdot \Delta\gamma(b, c)\,.
\end{aligned}$$

Daí, $\forall a, b, c \in G$, ficamos com

$$\begin{aligned}
\Delta\gamma(ab, c) &= [\gamma(c)]^{-1} \cdot [\gamma(ab)]^{-1} \cdot \gamma(abc) \\
&= [\gamma(c)]^{-1} \cdot \{[\gamma(a)]^{-1} \cdot \gamma(ac)\} \cdot \Delta\gamma(b, c) \\
&= \{[\gamma(c)]^{-1} \cdot [\gamma(a)]^{-1} \cdot \gamma(ac)\} \cdot \Delta\gamma(b, c) \\
&= \Delta\gamma(a, c) \cdot \Delta\gamma(b, c)\,.
\end{aligned}$$

Rearranjando novamente a expressão da hipótese (ii), $\forall a, b, c \in G$, temos que

$$\begin{aligned}
[\gamma(bc)]^{-1} \cdot \gamma(abc) &= [\gamma(c)]^{-1} \cdot [\gamma(b)]^{-1} \cdot [\gamma(a)]^{-1} \cdot \gamma(ab) \cdot \gamma(ac) \\
&= [\gamma(b)]^{-1} \cdot \gamma(ab) \cdot [\gamma(c)]^{-1} \cdot [\gamma(a)]^{-1} \cdot \gamma(ac) \\
&= \{[\gamma(b)]^{-1} \cdot \gamma(ab)\} \cdot \{[\gamma(c)]^{-1} \cdot [\gamma(a)]^{-1} \cdot \gamma(ac)\} \\
&= \{[\gamma(b)]^{-1} \cdot \gamma(ab)\} \cdot \Delta\gamma(a, c)\,.
\end{aligned}$$

Assim, $\forall a, b, c \in G$, ficamos com

$$\begin{aligned}
\Delta\gamma(a, bc) &= [\gamma(bc)]^{-1} \cdot [\gamma(a)]^{-1} \cdot \gamma(abc) \\
&= [\gamma(a)]^{-1} \cdot [\gamma(bc)]^{-1} \cdot \gamma(abc) \\
&= [\gamma(a)]^{-1} \cdot \{[\gamma(b)]^{-1} \cdot \gamma(ab)\} \cdot \Delta\gamma(a, c) \\
&= \{[\gamma(a)]^{-1} \cdot [\gamma(b)]^{-1} \cdot \gamma(ab)\} \cdot \Delta\gamma(a, c) \\
&= \{[\gamma(b)]^{-1} \cdot [\gamma(a)]^{-1} \cdot \gamma(ab)\} \cdot \Delta\gamma(a, c) \\
&= \Delta\gamma(a, b) \cdot \Delta\gamma(a, c)\,.
\end{aligned}$$

Logo, $\Delta\gamma$ é um bihomomorfismo. ■

Sejam G e H grupos, $e_H \in H$ o elemento neutro de H e $\gamma \in H^G$ tal que $\gamma(g) = e_H$, $\forall g \in G$. Ou seja, $\gamma = G \times \{e_H\}$ é a função nula $\gamma = 0$. Daí, temos que $\gamma \in Hom(G, H)$ e que $\Delta\gamma$ é nulo, isto é, $\Delta\gamma = (G \times G) \times \{e_H\}$ é a função nula $\Delta\gamma = 0$. Nesse caso, é claro que $\Delta\gamma$ é um bihomomorfismo. Também, temos que $im(\gamma) = \{e_H\} = \langle im(\gamma)\rangle$ é abeliano (trivial). Além disso, a função nula satisfaz a seguinte condição, $\gamma(g^{-1}) = e_H = \gamma(g)$, $\forall g \in G$.

Definição 4.1.3. Sejam G um grupo, H um grupo abeliano e $\gamma \in H^G$. Dizemos que "γ é uma *função quadrática*" se, e somente se, $\Delta\gamma$ é bihomomorfismo e $\gamma(g^{-1}) = \gamma(g)$, $\forall g \in G$.

Pelo parágrafo acima da definição, a função nula é uma função quadrática.

Sejam G um grupo, H um grupo abeliano e $\gamma \in H^G$ uma função quadrática. É claro que $\langle im(\gamma)\rangle$ é abeliano. Pela proposição 4.1.2, temos que $\gamma(abc) - \gamma(bc) - \gamma(ac) - \gamma(ab) + \gamma(a) + \gamma(b) + \gamma(c) = 0$, $\forall a, b, c \in G$, em que usamos a notação aditiva para o grupo abeliano H e, por essa notação, $0 \in H$ é o elemento neutro de H. Escrevendo de outra forma a expressão anterior, temos que $\gamma(abc) + \gamma(a) + \gamma(b) + \gamma(c) = \gamma(bc) + \gamma(ac) + \gamma(ab)$, $\forall a, b, c \in G$. Seja $e_G \in G$ o elemento neutro de G. Pelo item (iii) da proposição 4.1.1, temos que $\gamma(e_G) = 0$.

Proposição 4.1.4. Sejam A e G grupos, H e K grupos abelianos, $\phi : A \to G$ e $\psi : H \to K$ homomorfismos e $\gamma : G \to H$ uma função quadrática. Então, $\gamma \circ \phi : A \to H$ e $\psi \circ \gamma : G \to K$ são funções quadráticas.

Demonstração: Para todo $g \in G$, temos que

$$(\gamma \circ \phi)(g^{-1}) = \gamma\big(\phi(g^{-1})\big) = \gamma\big([\phi(g)]^{-1}\big) = \gamma\big(\phi(g)\big) = (\gamma \circ \phi)(g)$$

e

$$(\psi \circ \gamma)(g^{-1}) = \psi\big(\gamma(g^{-1})\big) = \psi\big(\gamma(g)\big) = (\psi \circ \gamma)(g)\,.$$

Pela proposição 4.1.1, temos que $\Delta(\psi \circ \gamma) = \psi \circ \Delta\gamma$ e $\Delta(\gamma \circ \phi) = \Delta\gamma \circ (\phi \times \phi)$ são bihomomorfismos. ■

Exemplo 4.1.5. Seja $(R, +, \cdot)$ um anel comutativo. Então, $(R, +)$ é um grupo abeliano. Cometeremos o abuso de linguagem usual e iremos nos referir ao "anel R" e ao "grupo abeliano R". Considere a função $\lambda : R \to R$ tal que $\lambda(r) = r \cdot r = r^2$, $\forall r \in R$. Então, $\forall r, s \in R$,

$$\begin{aligned} \Delta\lambda(r, s) &= \lambda(r + s) - \lambda(r) - \lambda(s) \\ &= (r + s)^2 - r^2 - s^2 \\ &= (r + s)(r + s) - r^2 - s^2 \\ &= (r^2 + rs + sr + s^2) - r^2 - s^2 \\ &= 2rs\,. \end{aligned}$$

Daí, $\Delta\lambda$ é bilinear. De fato, $\forall r, s, r_1, r_2, s_1, s_2 \in R$, temos que

$$\Delta\lambda(r_1 + r_2, s) = 2(r_1 + r_2)s = 2r_1 s + 2r_2 s = \Delta\lambda(r_1, s) + \Delta\lambda(r_2, s)$$

e

$$\Delta\lambda(r, s_1 + s_2) = 2r(s_1 + s_2) = 2rs_1 + 2rs_2 = \Delta\lambda(r, s_1) + \Delta\lambda(r, s_2)\,.$$

Além disso, temos que λ é uma função quadrática. Com efeito, $\forall r \in R$, temos que $\lambda(-r) = (-r)^2 = (-r)(-r) = r^2 = \lambda(r)$.

Observação 4.1.6. Sejam G um grupo, H um grupo abeliano e $\gamma \in H^G$ uma função quadrática. Assim, $\Delta\gamma : G \times G \to H$ é um bihomomorfismo. Daí, $\forall g, g_1, g_2, ..., g_{n-1}, g_n \in G$, temos que

$$\begin{aligned} \Delta\gamma(g_1 \cdot g_2 \cdot ... \cdot g_{n-1} \cdot g_n\,,\, g) &= \Delta\gamma(g_1, g) + \Delta\gamma(g_2, g) + ... + \Delta\gamma(g_{n-1}, g) + \Delta\gamma(g_n, g) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Delta\gamma(g_k, g)\,. \end{aligned}$$

Da mesma forma, $\forall a, a_1, a_2, ..., a_{m-1}, a_m \in G$, temos que

$$\begin{aligned} \Delta\gamma(a\,,\, a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{m-1} \cdot a_m) &= \Delta\gamma(a, a_1) + \Delta\gamma(a, a_2) + ... + \Delta\gamma(a, a_{m-1}) + \Delta\gamma(a, a_m) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \Delta\gamma(a, a_j)\,. \end{aligned}$$

Consequentemente, $\forall g_1, ..., g_n, a_1 ..., a_m \in G$, temos que

$$\begin{aligned}
\Delta\gamma(g_1 \cdot ... \cdot g_n \,,\, a_1 \cdot ... \cdot a_m) &= \sum_{k=1}^{n} \Delta\gamma(g_k \,,\, a_1 \cdot ... \cdot a_m) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{m} \Delta\gamma(g_k, a_j) \right] \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \Delta\gamma(g_k, a_j)\,.
\end{aligned}$$

Para todos $a, g \in G$ e todos $n, m \in \mathbb{N}^*$, usando essa última igualdade (colocando $a = a_1 = a_2 = ... = a_{m-1} = a_m$ e $g = g_1 = g_2 = ... = g_{n-1} = g_n$), temos que

$$\begin{aligned}
\Delta\gamma(g^n, a^m) &= \Delta\gamma(g_1 \cdot ... \cdot g_n \,,\, a_1 \cdot ... \cdot a_m) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \Delta\gamma(g_k, a_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \Delta\gamma(g, a) \\
&= n\, m\, \Delta\gamma(g, a)\,.
\end{aligned}$$

Na notação multiplicativa, essa igualdade fica

$$\Delta\gamma(g^n, a^m) = [\Delta\gamma(g, a)]^{nm} = \{[\Delta\gamma(g, a)]^n\}^m$$

e podemos intercambiar todos os expoentes, para dentro e para fora dos parênteses, em qualquer um dos argumentos.

Voltemos à notação multiplicativa por um momento. Sejam $e_G \in G$ o elemento neutro de G, $e_H \in H$ o elemento neutro de H, $g, a \in G$ e $r, s \in \mathbb{Z}$. Se $r, s \in \mathbb{N}^*$, pelo parágrafo acima, $\Delta\gamma(g^r, a^s) = \{[\Delta\gamma(g, a)]^r\}^s$. Se $s = 0$, então

$$\Delta\gamma(g^r, a^s) = \Delta\gamma(g^r, a^0) = \Delta\gamma(g^r, e_G) = e_H = \{[\Delta\gamma(g, a)]^r\}^0 = \{[\Delta\gamma(g, a)]^r\}^s\,.$$

Se $r = 0$, então

$$\Delta\gamma(g^r, a^s) = \Delta\gamma(g^0, a^s) = \Delta\gamma(e_G, a^s) = e_H = e_H^s = \{[\Delta\gamma(g, a)]^0\}^s = \{[\Delta\gamma(g, a)]^r\}^s\,.$$

Se $r > 0$ e $s < 0$, então $s = -|s|$, com $|s| > 0$. Daí, pelo parágrafo acima,

$$\begin{aligned}
\Delta\gamma(g^r, a^s) &= \Delta\gamma\big(g^r, a^{-|s|}\big) \\
&= \Delta\gamma\Big(g^r, \big(a^{|s|}\big)^{-1}\Big) \\
&= \big[\Delta\gamma\big(g^r, a^{|s|}\big)\big]^{-1} \\
&= \big(\{[\Delta\gamma(g, a)]^r\}^{|s|}\big)^{-1} \\
&= \{[\Delta\gamma(g, a)]^r\}^{-|s|} \\
&= \{[\Delta\gamma(g, a)]^r\}^s\,.
\end{aligned}$$

Se $r < 0$ e $s > 0$, então $r = -|r|$, com $|r| > 0$. Daí, pelo parágrafo acima,

$$\begin{aligned}
\Delta\gamma(g^r, a^s) &= \Delta\gamma\big(g^{-|r|}, a^s\big) \\
&= \Delta\gamma\Big(\big(g^{|r|}\big)^{-1}, a^s\Big) \\
&= \big[\Delta\gamma\big(g^{|r|}, a^s\big)\big]^{-1} \\
&= \Big(\big\{[\Delta\gamma(g,a)]^{|r|}\big\}^s\Big)^{-1} \\
&= \Big(\big\{[\Delta\gamma(g,a)]^{-1}\big\}^{|r|}\Big)^s \\
&= \big\{[\Delta\gamma(g,a)]^{-|r|}\big\}^s \\
&= \{[\Delta\gamma(g,a)]^r\}^s\,.
\end{aligned}$$

Se $r < 0$ e $s < 0$, então $s = -|s|$ e $r = -|r|$, com $|s| > 0$ e $|r| > 0$. Daí, pelo parágrafo acima,

$$\begin{aligned}
\Delta\gamma(g^r, a^s) &= \Delta\gamma\big(g^{-|r|}, a^{-|s|}\big) \\
&= \Delta\gamma\Big(\big(g^{|r|}\big)^{-1}, \big(a^{|s|}\big)^{-1}\Big) \\
&= \Big[\Delta\gamma\Big(g^{|r|}, \big(a^{|s|}\big)^{-1}\Big)\Big]^{-1} \\
&= \big\{\big[\Delta\gamma\big(g^{|r|}, a^{|s|}\big)\big]^{-1}\big\}^{-1} \\
&= \big[\big(\{[\Delta\gamma(g,a)]^{|r|}\}^{|s|}\big)^{-1}\big]^{-1} \\
&= \Big[\big(\{[\Delta\gamma(g,a)]^{-1}\}^{|r|}\big)^{|s|}\Big]^{-1} \\
&= \Big(\big\{[\Delta\gamma(g,a)]^{-|r|}\big\}^{|s|}\Big)^{-1} \\
&= \big\{[\Delta\gamma(g,a)]^{-|r|}\big\}^{-|s|} \\
&= \{[\Delta\gamma(g,a)]^r\}^s\,.
\end{aligned}$$

Portanto, $\forall a, g \in G$, $\forall r, s \in \mathbb{Z}$, temos que

$$\Delta\gamma(g^r, a^s) = \{[\Delta\gamma(g,a)]^r\}^s = [\Delta\gamma(g,a)]^{rs}$$

e podemos intercambiar todos os expoentes, para dentro e para fora dos parênteses, em qualquer um dos argumentos. Na notação aditiva, $\forall a, g \in G$, $\forall r, s \in \mathbb{Z}$, temos que

$$\Delta\gamma(g^r, a^s) = s\,r\,\Delta\gamma(g,a) = r\,s\,\Delta\gamma(g,a)$$

e podemos intercambiar todos os coeficientes multiplicativos de $\mathbb{Z}$, para dentro e para fora dos parênteses, tornando-os expoentes, em qualquer um dos argumentos. Em particular, $\forall a, g \in G$, $\forall r \in \mathbb{Z}$, temos que

$$\Delta\gamma(g^r, a) = r\,\Delta\gamma(g,a) = \Delta\gamma(g, a^r)\,.$$

Um fato que pode ser mostrado facilmente pelo princípio de indução finita é que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, vale

$$\sum_{j=1}^{n} j = 1 + 2 + ... + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2} \ .$$

Assim, $\forall n \in \mathbb{N}$, se $n \geqslant 2$, então $n - 1 \geqslant 1$ e, portanto, $n - 1 \in \mathbb{N}^*$. Assim,

$$\sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{(n-1)[(n-1)+1]}{2} = \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2 - n}{2} \ .$$

Daí, $2 \cdot \sum_{j=1}^{n-1} j = n^2 - n$ e obtemos $n + \left(2 \cdot \sum_{j=1}^{n-1} j\right) = n^2$. Vamos usar esse resultado na demonstração do item (x) do teorema abaixo.

Teorema 4.1.7. Sejam G um grupo, H um grupo abeliano, $e \in G$ o elemento neutro de G e $\gamma \in H^G$ uma função quadrática. Temos que

(i) $\Delta\gamma(a, b) = \gamma(ab) - \gamma(a) - \gamma(b)$, $\forall a, b \in G$;

(ii) $\Delta\gamma$ é bihomomorfismo;

(iii) $\gamma(g^{-1}) = \gamma(g)$, $\forall g \in G$;

(iv) $\gamma(e) = 0$;

(v) $\gamma(abc) + \gamma(a) + \gamma(b) + \gamma(c) = \gamma(ab) + \gamma(ac) + \gamma(bc)$, $\forall a, b, c \in G$;

(vi) Se G é abeliano, então $\Delta\gamma$ é simétrica;

(vii) $\gamma(g^2) = 4\,\gamma(g)$, $\forall g \in G$;

(viii) $\Delta\gamma(g, g) = 2\,\gamma(g)$, $\forall g \in G$;

(ix) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n \geqslant 2$, então, $\forall g_1, ..., g_n \in G$, temos que

$$\gamma(g_1 \cdot ... \cdot g_n) = \sum_{k=1}^{n} \gamma(g_k) + \sum_{j=2}^{n} \left[\sum_{k=1}^{j-1} \Delta\gamma(g_k, g_j)\right] = \sum_{k} \gamma(g_k) + \sum_{k<j} \Delta\gamma(g_k, g_j)\,;$$

(x) Para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos que $\gamma(g^n) = n^2\,\gamma(g)$, $\forall g \in G$;

(xi) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n \geqslant 2$, então, $\forall g_1, ..., g_n \in G$, $\forall r_1, ..., r_n \in \mathbb{Z}$, temos que

$$\gamma(g_1^{r_1} \cdot ... \cdot g_n^{r_n}) = \sum_{k=1}^{n} r_k^2\, \gamma(g_k) + \sum_{j=2}^{n} \left[\sum_{k=1}^{j-1} r_k\, r_j\, \Delta\gamma(g_k, g_j)\right] = \sum_{k} r_k^2\, \gamma(g_k) + \sum_{k<j} r_k\, r_j\, \Delta\gamma(g_k, g_j)\,;$$

(xii) Suponha que G seja abeliano e que todo elemento $g \in G$ tenha ordem finita $o_g \in \mathbb{N}$. Se, $(\forall g \in G)(\exists b \in G)\big(g = o_g b = b^{o_g}\big)$, então $\gamma = 0$.

Demonstração: Os itens (i), (ii) e (iii) são as definições. Os itens (iv) e (v) foram mostrados no parágrafo acima da proposição 4.1.4.

(vi) Usando a notação multiplicativa original, como G e H são grupos abelianos, $\forall a, b \in G$, temos que

$$\Delta\gamma(a,b) = [\gamma(b)]^{-1} \cdot [\gamma(a)]^{-1} \cdot \gamma(ab) = [\gamma(a)]^{-1} \cdot [\gamma(b)]^{-1} \cdot \gamma(ba) = \Delta\gamma(b,a)\,.$$

(vii) Para todo $g \in G$, usando os itens (iii), (iv) e (v) desse teorema (colocando $a = b = g$ e $c = g^{-1}$), temos que

$$\gamma(g \cdot g \cdot g^{-1}) + \gamma(g) + \gamma(g) + \gamma(g^{-1}) = \gamma(g \cdot g) + \gamma(g \cdot g^{-1}) + \gamma(g \cdot g^{-1})\,.$$

Assim, $\gamma(g) + \gamma(g) + \gamma(g) + \gamma(g) = \gamma(g^2) + \gamma(e) + \gamma(e) = \gamma(g^2) + 0 + 0 = \gamma(g^2)$ e, portanto, $\gamma(g^2) = 4\,\gamma(g)$.

(viii) Usando os itens (i) e (vii) desse teorema, temos que

$$\Delta\gamma(g,g) = \gamma(g \cdot g) - \gamma(g) - \gamma(g) = \gamma(g^2) - 2\,\gamma(g) = 4\,\gamma(g) - 2\,\gamma(g) = 2\,\gamma(g)\,.$$

(ix) Pelo item (i) desse teorema, para quaisquer $g_1, g_2 \in G$, temos que

$$\begin{aligned} \gamma(g_1 \cdot g_2) &= \gamma(g_1) + \gamma(g_2) + \Delta\gamma(g_1, g_2) \\ &= \sum_{k=1}^{2} \gamma(g_k) + \sum_{k=1}^{1} \Delta\gamma(g_k, g_2) \\ &= \sum_{k=1}^{2} \gamma(g_k) + \sum_{j=2}^{2} \left[\sum_{k=1}^{j-1} \Delta\gamma(g_k, g_j) \right]. \end{aligned}$$

Assim, é verdadeira a sentença abaixo

$$\forall g_1, g_2 \in G\,, \quad \gamma(g_1 \cdot g_2) = \sum_{k=1}^{2} \gamma(g_k) + \sum_{j=2}^{2} \left[\sum_{k=1}^{j-1} \Delta\gamma(g_k, g_j) \right]. \qquad \circledast$$

Seja um subconjunto $\Bbbk \subset \mathbb{N}$ formado por todos os $n \in \mathbb{N}$ tais que, se $n \geqslant 2$, então, $\forall g_1, ..., g_n \in G$, temos que $\gamma(g_1 \cdot ... \cdot g_n) = \sum_{k=1}^{n} \gamma(g_k) + \sum_{j=2}^{n} \left[\sum_{k=1}^{j-1} \Delta\gamma(g_k, g_j) \right]$.

Por vacuidade, temos que $0, 1 \in \Bbbk$. Pela sentença $\circledast$ acima, temos que $2 \in \Bbbk$.

Sejam $m \in \Bbbk$ e suponha que $m + 1 \geqslant 2$.

Se $m + 1 = 2$, então, como visto acima, $m + 1 \in \Bbbk$. Seja $m + 1 \geqslant 3$. Assim, $m \geqslant 2$. Como $m \in \Bbbk$ e $m \geqslant 2$, então, $\forall g_1, ..., g_m \in G$, temos que $\gamma(g_1 \cdot ... \cdot g_m) = \sum_{k=1}^{m} \gamma(g_k) + \sum_{j=2}^{m} \left[\sum_{k=1}^{j-1} \Delta\gamma(g_k, g_j) \right]$. Sejam $g_1 \cdot ... \cdot g_m \cdot g_{m+1} \in G$.

Pelos itens (i) e (ii) e pela observação anterior ao enunciado desse teorema, chamando $h = \gamma(g_1 \cdot ... \cdot g_m \cdot g_{m+1})$, temos que

$$\begin{aligned}
h &= \gamma(g_1 \cdot ... \cdot g_m \cdot g_{m+1}) \\
&= \gamma\big((g_1 \cdot ... \cdot g_m) \cdot g_{m+1}\big) \\
&= \gamma(g_1 \cdot ... \cdot g_m) + \gamma(g_{m+1}) + \Delta\gamma(g_1 \cdot ... \cdot g_m \, , \, g_{m+1}) \\
&= \left\{ \sum_{k=1}^{m} \gamma(g_k) + \sum_{j=2}^{m} \left[\sum_{k=1}^{j-1} \Delta\gamma(g_k, g_j) \right] \right\} + \gamma(g_{m+1}) + \left[\sum_{k=1}^{m} \Delta\gamma(g_k, g_{m+1}) \right] \\
&= \left[\sum_{k=1}^{m} \gamma(g_k) \right] + \gamma(g_{m+1}) + \sum_{j=2}^{m} \left[\sum_{k=1}^{j-1} \Delta\gamma(g_k, g_j) \right] + \left[\sum_{k=1}^{m} \Delta\gamma(g_k, g_{m+1}) \right] \\
&= \left[\sum_{k=1}^{m+1} \gamma(g_k) \right] + \sum_{j=2}^{m} \left[\sum_{k=1}^{j-1} \Delta\gamma(g_k, g_j) \right] + \sum_{j=m+1}^{m+1} \left[\sum_{k=1}^{j-1} \Delta\gamma(g_k, g_j) \right] \\
&= \left[\sum_{k=1}^{m+1} \gamma(g_k) \right] + \sum_{j=2}^{m+1} \left[\sum_{k=1}^{j-1} \Delta\gamma(g_k, g_j) \right] .
\end{aligned}$$

Como g_1, g_2, ..., g_m e g_{m+1} são quaisquer, provamos que, se $m+1 \geqslant 2$, então $\gamma(g_1 \cdot ... \cdot g_m \cdot g_{m+1}) = \left[\sum_{k=1}^{m+1} \gamma(g_k) \right] + \sum_{j=2}^{m+1} \left[\sum_{k=1}^{j-1} \Delta\gamma(g_k, g_j) \right]$, $\forall g_1, ..., g_m, g_{m+1} \in G$. Ou seja, mostramos que $m+1 \in \mathbb{k}$.

Como m é arbitrário, pelo princípio da indução finita, segue que $\mathbb{k} = \mathbb{N}$, como queríamos.

(x) Seja $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \geqslant 2$. Para todo $g \in G$, pelos itens (viii) e (ix) (colocando $g = g_1 = g_2 = ... = g_{n-1} = g_n$) e pelo parágrafo imediatamente anterior ao enunciado desse teorema, temos que

$$\begin{aligned}
\gamma(g^n) &= \gamma(g_1 \cdot ... \cdot g_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \gamma(g_k) + \sum_{j=2}^{n} \left[\sum_{k=1}^{j-1} \Delta\gamma(g_k, g_j) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \gamma(g) + \sum_{j=2}^{n} \left[\sum_{k=1}^{j-1} \Delta\gamma(g, g) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \gamma(g) + \sum_{j=2}^{n} \left[\sum_{k=1}^{j-1} 2\,\gamma(g) \right] \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} 1 \right) \gamma(g) + \left[2 \cdot \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{k=1}^{j-1} 1 \right) \right] \gamma(g) \\
&= n\,\gamma(g) + \left[2 \cdot \sum_{j=2}^{n} (j-1) \right] \gamma(g) \\
&= n\,\gamma(g) + \left(2 \cdot \sum_{j=1}^{n-1} j \right) \gamma(g) \\
&= \left[n + \left(2 \cdot \sum_{j=1}^{n-1} j \right) \right] \gamma(g) \\
&= n^2\,\gamma(g) .
\end{aligned}$$

Portanto, mostramos que, $\forall n \in \mathbb{Z}$, se $n \geqslant 2$, então $\gamma(g^n) = n^2\,\gamma(g)$, $\forall g \in G$.

Seja $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leqslant -2$. Então, $n = -|n|$, com $|n| \geqslant 2$. Usando o item (iii) o que demonstramos logo acima nesse teorema, $\forall g \in G$, temos que $\gamma(g^n) = \gamma\big(g^{-|n|}\big) = \gamma\Big(\big(g^{|n|}\big)^{-1}\Big) = \gamma\big(g^{|n|}\big) = |n|^2\,\gamma(g) = n^2\,\gamma(g)$. Também, $\forall g \in G$, $\gamma(g^1) = \gamma(g) = 1 \cdot \gamma(g) = 1^2 \cdot \gamma(g)$ e, $\forall g \in G$, usando o item (iii) novamente, $\gamma(g^{-1}) = \gamma(g) = 1 \cdot \gamma(g) = (-1)^2 \cdot \gamma(g)$. Por fim, $\forall g \in G$, usando o item (iv) desse teorema, $\gamma(g^0) = \gamma(e) = 0 = 0 \cdot \gamma(g) = 0^2 \cdot \gamma(g)$.

(xi) Usando os itens (ix) e (x) e a observação anterior ao enunciado desse teorema, $\forall n \in \mathbb{N}$, se $n \geqslant 2$, então, $\forall g_1, ..., g_n \in G$, $\forall r_1, ..., r_n \in \mathbb{Z}$, temos que $\gamma(g_1^{r_1} \cdot ... \cdot g_n^{r_n}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \gamma(g_k^{r_k}) + \sum\limits_{j=2}^{n} \left[\sum\limits_{k=1}^{j-1} \Delta\gamma(g_k^{r_k}, g_j^{r_j})\right] = \sum\limits_{k=1}^{n} r_k\,\gamma(g_k) + \sum\limits_{j=2}^{n} \left[\sum\limits_{k=1}^{j-1} r_k\, r_j\, \Delta\gamma(g_k, g_j)\right]$.

(xii) Sejam $e \in G$ o elemento neutro de G e $g \in G$. Então, existe $b \in G$ tal que $g = o_g b$. É claro que $o_g g = e$. Pelo item (viii) e pela observação anterior a esse teorema, temos que

$$2\,\gamma(g) = \Delta\gamma(g, g) = \Delta\gamma(g, o_g b) = o_g\, \Delta\gamma(g, b) = \Delta\gamma(o_g g, b) = \Delta\gamma(e, b) = 0\,.$$

Como g é qualquer, segue que $2\,\gamma(g) = 0$, $\forall g \in G$. Seja $g \in G$. Então, existe $b \in G$ tal que $g = o_g b$. Pelo que acabamos de mostrar, $2\,\gamma(b) = 0$. Se o_g é par, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $o_g = 2m$. Daí, pelo item (x) desse teorema,

$$\gamma(g) = \gamma(o_g b) = \gamma(2m\, b) = (2m)^2\,\gamma(b) = 4m^2\,\gamma(b) = 2m^2[2\,\gamma(b)] = 2m^2 \cdot 0 = 0$$

Como g é arbitrário, mostramos que todo elemento $g \in G$ de ordem par satisfaz $\gamma(g) = 0$. Seja $g \in G$ de ordem ímpar. Então, $o_g g = e$, o_g é ímpar e $2\,\gamma(g) = 0$. Daí, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $o_g = 2m + 1$. Usando novamente o item (x) desse teorema, ficamos com

$$\begin{aligned}
0 &= \gamma(e) \\
&= \gamma(o_g g) \\
&= \gamma\big((2m+1)g\big) \\
&= (2m+1)^2\,\gamma(g) \\
&= (4m^2 + 4m + 1)\,\gamma(g) \\
&= 4m^2\,\gamma(g) + 4m\,\gamma(g) + 1\,\gamma(g) \\
&= 2m^2[2\,\gamma(g)] + 2m[2\,\gamma(g)] + \gamma(g) \\
&= 2m^2 \cdot 0 + 2m \cdot 0 + \gamma(g) \\
&= 0 + 0 + \gamma(g) \\
&= \gamma(g)\,.
\end{aligned}$$

Portanto, $\gamma(g) = 0$, $\forall g \in G$. Logo, $\gamma = 0$. ∎

No enunciado do teorema 4.1.7 acima, será importante estabelecer a notação no caso do domínio da função quadrática ser um grupo abeliano. Usaremos a notação aditiva.

Teorema 4.1.8. Sejam A e H grupos abelianos e $\gamma \in H^G$ uma função quadrática. Temos que

(i) $\Delta\gamma(a,b) = \gamma(a+b) - \gamma(a) - \gamma(b)$, $\forall a, b \in A$;

(ii) $\Delta\gamma$ é uma função bilinear simétrica;

(iii) $\gamma(-a) = \gamma(a)$, $\forall a \in A$;

(iv) $\gamma(0) = 0$;

(v) $\gamma(a+b+c)+\gamma(a)+\gamma(b)+\gamma(c) = \gamma(a+b)+\gamma(a+c)+\gamma(b+c)$, $\forall a, b, c \in A$;

(vi) $\gamma(2a) = 4\,\gamma(a)$, $\forall a \in A$;

(vii) $\Delta\gamma(a,a) = 2\,\gamma(a)$, $\forall a \in A$;

(viii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n \geqslant 2$, então, $\forall a_1, ..., a_n \in A$, temos que

$$\gamma\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \gamma(a_k) + \sum_{j=2}^{n} \left[\sum_{k=1}^{j-1} \Delta\gamma(a_k, a_j)\right] = \sum_{k} \gamma(a_k) + \sum_{k<j} \Delta\gamma(a_k, a_j)\,;$$

(ix) Para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos que $\gamma(na) = n^2\,\gamma(a)$, $\forall a \in A$;

(x) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n \geqslant 2$, então, $\forall a_1, ..., a_n \in A$, $\forall r_1, ..., r_n \in \mathbb{Z}$, temos que

$$\gamma\Big(\sum_{k=1}^{n} r_k\, a_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} r_k^2\,\gamma(a_k) + \sum_{j=2}^{n} \left[\sum_{k=1}^{j-1} r_k\, r_j\, \Delta\gamma(a_k, a_j)\right] = \sum_{k} r_k^2\,\gamma(a_k) + \sum_{k<j} r_k\, r_j\, \Delta\gamma(a_k, a_j)\,;$$

(xi) Se todo elemento $a \in A$ tem ordem finita $o_a \in \mathbb{N}$ e se, $\forall a \in A$, existe $b \in A$ tal que $a = o_a b$, então $\gamma = 0$.

4.2 Grupos quadráticos universais

Definição 4.2.1. Sejam A e Γ grupos abelianos e $\gamma : A \to \Gamma$ uma função quadrática. Dizemos que "Γ é um *grupo quadrático universal* para A com γ" se, e somente se, para todo grupo abeliano B e toda função quadrática $\delta : A \to B$, existe um único homomorfismo $f : \Gamma \to B$ tal que $f \circ \gamma = \delta$, isto é, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "\delta"'] & \Gamma \arrow[d, "f"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Teorema 4.2.2. Sejam A e Γ grupos abelianos e $\gamma : A \to \Gamma$ uma função quadrática tais que Γ é um grupo quadrático universal para A com γ. Então, $\langle im(\gamma)\rangle = \Gamma$.

Demonstração: Sejam $K = \langle im(\gamma)\rangle \leqslant \Gamma$, $i : K \hookrightarrow \Gamma$ a inclusão e $\delta : A \to K$ tal que $\delta(a) = \gamma(a)$, $\forall a \in A$. Temos que $im(i) = dom(i) = K$, que K é abeliano e que δ e γ são a mesma função, mas dão origem a morfismos de conjuntos possivelmente distintos, dependendo de serem iguais ou distintos seus codomínios. Também, temos que $i \circ \delta = \gamma$. Como δ e γ são a mesma função, é claro que δ também é uma função quadrática. Por hipótese, existe um único homomorfismo $f : \Gamma \to K$ tal que $f \circ \gamma = \delta$, ou seja, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "\delta"'] & \Gamma \arrow[d, "f"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Como i e f são homomorfismos, segue que $i \circ f : \Gamma \to \Gamma$ também é um homomorfismo. Além disso, $id_\Gamma : \Gamma \to \Gamma$ é claramente um homomorfismo. Ficamos com o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, bend right, "\gamma"'] & \Gamma \arrow[d, shift right, "id_\Gamma"'] \arrow[d, shift left, "i\circ f"] \\ & \Gamma \end{tikzcd}$$

É imediato que $id_\Gamma \circ \gamma = \gamma$. Além disso, temos que

$$(i \circ f) \circ \gamma = i \circ (f \circ \gamma) = i \circ \delta = \gamma\,.$$

Por hipótese novamente (unicidade), segue que $i \circ f = id_\Gamma$. Como id_Γ é sobrejetora em Γ, temos que i é sobrejetora em Γ e, portanto, $K = im(i) = \Gamma$. ■

Corolário 4.2.3. Sejam A, Γ_1 e Γ_2 grupos abelianos e $\gamma \in \Gamma_1^A \cap \Gamma_2^A$ uma função tais que $\gamma : A \to \Gamma_1$ e $\gamma : A \to \Gamma_2$ são funções quadráticas e ambos Γ_1 e Γ_2 são grupos quadráticos universais para A com γ. Então, $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

Demonstração: $\Gamma_1 = \langle im(\gamma)\rangle = \Gamma_2$. ■

Seja A um grupo abeliano. Pelo corolário anterior, se existe algum grupo abeliano Γ e alguma função $\gamma : A \to \Gamma$ tais que γ é uma função quadrática e Γ é um grupo quadrático universal para A com γ, então Γ é o único grupo quadrático universal para A com γ. Nesse caso, iremos denotar o grupo Γ por "Γ_A^γ". Se a função quadrática estiver subentendida, denotaremos Γ_A^γ simplesmente por "Γ_A", por "$\Gamma(A)$" ou por "ΓA".

Pelo item (xi) do teorema 4.1.8, se todo elemento $a \in A$ tem ordem finita $o_a \in \mathbb{N}$ e se, $\forall a \in A$, existe $b \in A$ tal que $a = o_a b$, então $\gamma = 0$. Daí, se existe o grupo quadrático universal Γ_A^γ, então $\Gamma_A^\gamma = \langle im(\gamma) \rangle \cong 0$.

Um exemplo para o parágrafo acima é o grupo trivial $A \cong 0$. Vamos mostrar que existe um grupo abeliano Γ e uma função quadrática $\gamma : A \to \Gamma$ tal que $\Gamma = \Gamma_A^\gamma$. Tome $\Gamma \cong 0$, que é abeliano. A função nula $\gamma = 0 : A \to \Gamma$ é quadrática, como já mostramos. Seja B um grupo abeliano e $\delta : A \to B$ uma função quadrática. Como $A \cong 0$ e $\delta(0) = 0$, temos que $\delta = 0$. O único elemento de $Hom(\Gamma, B)$ é o homomorfismo nulo $0 : \Gamma \to B$. É claro que $0 \circ \gamma = 0 = \delta$. Como B e δ são quaisquer, temos que $\Gamma_A^\gamma = \Gamma \cong 0$.

Vale ressaltar que, no aspecto conjuntista, como existem infinitos conjuntos, também existem infinitos grupos triviais. No parágrafo acima, consideramos um específico grupo trivial A e mostramos que qualquer outro grupo trivial 0 é um grupo quadrático universal para A, cada um com sua respectiva função nula $A \to 0$, que é quadrática. No aspecto de estrutura algébrica, todos são o mesmo: o grupo trivial. Esse resultado é geral.

Teorema 4.2.4. Sejam A e Γ grupos abelianos e $\gamma : A \to \Gamma$ uma função quadrática tais que $\Gamma = \Gamma_A^\gamma$. Temos que

(i) Se K é um grupo isomorfo a Γ, em que $f : \Gamma \to K$ é um isomorfismo, então K é abeliano, $f \circ \gamma : A \to K$ é uma função quadrática e $K = \Gamma_A^{f \circ \gamma}$;

(ii) Se K é um grupo abeliano e $\delta : A \to K$ é uma função quadrática tais que $K = \Gamma_A^\delta$, então $K \cong \Gamma$ e, além disso, existe um único isomorfismo $f : \Gamma \to K$ tal que $\delta = f \circ \gamma$, isto é, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "\delta"'] & \Gamma \arrow[d, "f"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Em símbolos:

(i) $\Gamma_A^\gamma \xrightarrow[f]{\cong} K \implies K = \Gamma_A^{f \circ \gamma}$;

(ii) $\left[\, \exists! f : \Gamma_A^\gamma \xrightarrow{\cong} \Gamma_A^\delta \right] (\delta = f \circ \gamma)$;

(iii) $\Gamma_A^\gamma \cong \Gamma_A^\delta$.

O item (iii) acima é uma particularização do item (ii) e diz respeito à unicidade da estrutura do grupo quadrático universal, que é independente da função quadrática e depende somente do grupo abeliano A.

Demonstração: (i) É claro que K é abeliano. Pela proposição 4.1.4, temos que $f \circ \gamma : A \to K$ é uma função quadrática. Sejam M um grupo abeliano e

$\delta : A \to M$ uma função quadrática. Por hipótese, existe um único homomorfismo $\varphi : \Gamma \to M$ tal que $\varphi \circ \gamma = \delta$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, bend right, "\delta"'] & \Gamma \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & K \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Como $f^{-1} : K \to \Gamma$ e $\varphi : \Gamma \to M$ são homomorfismos, segue que $\psi = \varphi \circ f^{-1} : K \to M$ também é homomorfismo. Temos que

$$\psi \circ (f \circ \gamma) = (\varphi \circ f^{-1}) \circ (f \circ \gamma) = \varphi \circ (f^{-1} \circ f) \circ \gamma = \varphi \circ id_\Gamma \circ \gamma = \varphi \circ \gamma = \delta\,.$$

Seja $\mu : K \to M$ homomorfismo tal que $\mu \circ (f \circ \gamma) = \delta$. Daí, $\mu \circ f : \Gamma \to M$ é um homomorfismo tal que $(\mu \circ f) \circ \gamma = \mu \circ (f \circ \gamma) = \delta$. Pela unicidade de φ, devemos ter $\varphi = \mu \circ f$. Assim, $\mu = \varphi \circ f^{-1} = \psi$. Dessa forma, existe um único homomorfismo $\psi : K \to M$ tal que $\psi \circ (f \circ \gamma) = \delta$, isto é, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f\circ\gamma"] \arrow[dr, "\delta"'] & K \arrow[d, "\psi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Como M e δ são arbitrários, concluímos que $K = \Gamma^\delta_A$.

(ii) Pelas hipóteses, existem homomorfismos $\alpha : \Gamma \to K$ e $\beta : K \to \Gamma$ tais que $\alpha \circ \gamma = \delta$ e $\beta \circ \delta = \gamma$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, bend right, "\delta"'] & \Gamma \arrow[d, shift right, "\alpha"'] \\ & K \arrow[u, shift right, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

Temos que $\beta \circ \alpha : \Gamma \to \Gamma$ e $\alpha \circ \beta : K \to K$ são homomorfismos e, obviamente, $id_\Gamma : \Gamma \to \Gamma$ e $id_K : K \to K$ também são homomorfismos. Claro que $id_\Gamma \circ \gamma = \gamma$ e que $id_K \circ \delta = \delta$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, bend right, "\gamma"'] & \Gamma \arrow[d, shift right, "id_\Gamma"'] \arrow[d, shift left, "\beta\circ\alpha"] \\ & \Gamma \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, bend right, "\delta"'] & K \arrow[d, shift right, "id_K"'] \arrow[d, shift left, "\alpha\circ\beta"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Temos que $(\beta\circ\alpha)\circ\gamma = \beta\circ(\alpha\circ\gamma) = \beta\circ\delta = \gamma$ e, portanto, $\beta\circ\alpha = id_\Gamma$. Também, $(\alpha \circ \beta) \circ \delta = \alpha \circ (\beta \circ \delta) = \alpha \circ \gamma = \delta$ e, assim, $\alpha \circ \beta = id_K$. Dessa forma, α e β são isomorfismos, com $\beta = \alpha^{-1}$. Ficamos com $K \cong \Gamma$.

Para satisfazer o enunciado, tome $f = \alpha$. Assim, $f : \Gamma \to K$ é um isomorfismo tal que $\delta = \alpha \circ \gamma = f \circ \gamma$. Seja $\mu : \Gamma \to K$ um isomorfismo tal que

$\delta = \mu \circ \gamma$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, bend right, "\delta"'] & \Gamma \arrow[d, shift right, "\mu"'] \arrow[d, shift left, "f"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Como Γ é o grupo quadrático universal para A com γ, δ é uma função quadrática e $f, \mu : \Gamma \to K$ são homomorfismos tais que $f \circ \gamma = \delta = \mu \circ \gamma$, então, por definição (unicidade), temos que $\mu = f$.

Logo, existe um único isomorfismo $f : \Gamma \to K$ tal que $\delta = f \circ \gamma$. ■

Observação 4.2.5. Sejam A e Γ grupos abelianos, $Aut(\Gamma)$ o grupo dos automorfismos de Γ e $\gamma : A \to \Gamma$ uma função quadrática tais que Γ é o grupo quadrático universal para A com γ. Pelo item (i) acima, temos que Γ também é o grupo quadrático universal para A com $f \circ \gamma$, $\forall f \in Aut(\Gamma)$. Em símbolos:

$$\Gamma_A^\gamma = \Gamma_A^{f\circ\gamma} \ , \quad \forall f \in Aut(\Gamma_A^\gamma)\,.$$

Ademais, para toda outra função quadrática $\delta : A \to \Gamma$ tais que $\Gamma = \Gamma_A^\delta$, pelo item (ii), existe um único $f \in Aut(\Gamma)$ tal que $\delta = f \circ \gamma$.

Sejam A e Γ grupos abelianos e um conjunto $\mathcal{V}_{(A,\Gamma)}$ formado por todas as funções quadráticas $\gamma : A \to \Gamma$ tais que $\Gamma = \Gamma_A^\gamma$. É imediato que

$$\gamma \in \mathcal{V}_{(A,\Gamma)} \iff \Gamma = \Gamma_A^\gamma\,.$$

Vamos denotar temporariamente $V = \mathcal{V}_{(A,\Gamma)}$ e seja uma função $F : Aut(\Gamma) \to (\Gamma^A)^V$ tal que $[F(f)](\gamma) = f \circ \gamma$, $\forall \gamma \in V$. Seja $f \in Aut(\Gamma)$. Temos que $F(f)$ é da forma $F(f) : V \to \Gamma^A$. Pela observação acima, ficamos com $[F(f)](\gamma) = f \circ \gamma \in V$, $\forall \gamma \in V$. Assim, $im\big(F(f)\big) \subset V$ e segue que $F(f)$ é da forma $F(f) : V \to V$. Portanto, $F(f) \in V^V$, $\forall f \in Aut(\Gamma)$. Seja $f \in Aut(\Gamma)$.

Como $f^{-1} \in Aut(\Gamma)$, $\forall \gamma \in V$, temos que

$$\begin{aligned}
[F(f^{-1}) \circ F(f)](\gamma) &= [F(f^{-1})]\big([F(f)](\gamma)\big) \\
&= [F(f^{-1})](f \circ \gamma) \\
&= f^{-1} \circ (f \circ \gamma) \\
&= (f^{-1} \circ f) \circ \gamma \\
&= id_\Gamma \circ \gamma \\
&= \gamma \\
&= id_V(\gamma) \\
&= \gamma \\
&= id_\Gamma \circ \gamma \\
&= (f \circ f^{-1}) \circ \gamma \\
&= f \circ (f^{-1} \circ \gamma) \\
&= [F(f)](f^{-1} \circ \gamma) \\
&= [F(f)]\big([F(f^{-1})](\gamma)\big) \\
&= [F(f) \circ F(f^{-1})](\gamma)\,.
\end{aligned}$$

Assim, $F(f^{-1}) \circ F(f) = id_V = F(f) \circ F(f^{-1})$ e, portanto, $F(f)$ é bijetora e $[F(f)]^{-1} = F(f^{-1})$. Como f é qualquer, temos que $F(f) \in Sym(V)$, $\forall f \in Aut(\Gamma)$. Daí, $im(F) \subset Sym(V)$ e F é da forma $F : Aut(\Gamma) \to Sym(V)$. Sejam $f_1, f_2 \in Aut(\Gamma)$. Temos que, $\forall \gamma \in V$,

$$\begin{aligned}
[F(f_1 \circ f_2)](\gamma) &= (f_1 \circ f_2) \circ \gamma \\
&= f_1 \circ (f_2 \circ \gamma) \\
&= f_1 \circ \{[F(f_2)](\gamma)\} \\
&= [F(f_1)]\big([F(f_2)](\gamma)\big) \\
&= [F(f_1) \circ F(f_2)](\gamma)\,.
\end{aligned}$$

Então, $F(f_1 \circ f_2) = F(f_1) \circ F(f_2)$, $\forall f_1, f_2 \in Aut(\Gamma)$. Dessa forma, F é um homomorfismo de $Aut(\Gamma)$ em $Sym(V)$, ou seja, F é uma ação de $Aut(\Gamma)$ em $V = \mathcal{V}_{(A,\Gamma)}$.

Seja $\gamma \in V$. Pela observação acima, para cada $\delta \in V$, existe um único $f \in Aut(\Gamma)$ tal que $\delta = f \circ \gamma = [F(f)](\gamma)$. Decorre disso que a órbita de γ pela ação F é o conjunto todo $V = \mathcal{V}_{(A,\Gamma)}$.

Por essas considerações, concluimos que, se $\mathcal{V}_{(A,\Gamma)} \neq \varnothing$, então F é uma ação regular (livre e transitiva) e, portanto, fiel. Consequentemente, se $\mathcal{V}_{(A,\Gamma)} \neq \varnothing$, então $|Aut(\Gamma)| = |\mathcal{V}_{(A,\Gamma)}|$ e também, $\forall \gamma \in \Gamma^A$, temos que $\gamma \in \mathcal{V}_{(A,\Gamma)}$ se, e somente se, $\mathcal{V}_{(A,\Gamma)} = \big\{ f \circ \gamma \in \Gamma^A \ :\ f \in Aut(\Gamma) \big\}$.

Logo, o conjunto $\mathcal{V}_{(A,\Gamma)}$ está totalmente determinado pelo conjunto $Aut(\Gamma)$ da seguinte forma: para todo $\gamma \in \Gamma^A$, são equivalentes:

- $\Gamma = \Gamma^\gamma_A$;

- $\gamma \in \mathcal{V}_{(A,\Gamma)}$;
- $\mathcal{V}_{(A,\Gamma)} = \big\{ f \circ \gamma \in \Gamma^A \ : \ f \in Aut(\Gamma) \big\}$.

4.3 Existência dos grupos quadráticos universais

Sejam A um grupo abeliano, F_A o grupo livre sobre o conjunto A com a função $i_0 : A \to F_A$, os conjuntos $Y_1 = \big\{ i_0(a) \cdot [i_0(-a)]^{-1} \in F_A \ : \ a \in A \big\}$, $Y_2 = \Big\{ i_0(a+b+c) \cdot [i_0(b+c)]^{-1} \cdot [i_0(a+c)]^{-1} \cdot [i_0(a+b)]^{-1} \cdot i_0(a) \cdot i_0(b) \cdot i_0(c) \in F_A \ : \ a,b,c \in A \Big\}$, $Y = Y_1 \cup Y_2$ e $\langle Y \rangle_N = \cap \{ N \in \wp(F_A) : Y \subset N \lhd F_A \}$ o fecho normal de Y em F_A. Então, i_0 é injetora e $Y \subset \langle Y \rangle_N \lhd F_A$. Sejam também $\Gamma_0 = F_A / \langle Y \rangle_N$, $p_0 : F_A \to \Gamma_0$ a projeção canônica e $\gamma_0 = p_0 \circ i_0 : A \to \Gamma_0$. Dessa forma, p_0 é um epimorfismo e $p_0(w) = w \cdot \langle Y \rangle_N = \langle Y \rangle_N \cdot w$, $\forall w \in F_A$.

Seja $e \in \Gamma_0$ o elemento neutro de Γ_0. Então, $e = \langle Y \rangle_N$. Temos que $i_0(a+b+c) \cdot [i_0(b+c)]^{-1} \cdot [i_0(a+c)]^{-1} \cdot [i_0(a+b)]^{-1} \cdot i_0(a) \cdot i_0(b) \cdot i_0(c) \in Y_2 \subset Y \subset \langle Y \rangle_N$. Assim, $\gamma_0(a+b+c) \cdot [\gamma_0(b+c)]^{-1} \cdot [\gamma_0(a+c)]^{-1} \cdot [\gamma_0(a+b)]^{-1} \cdot \gamma_0(a) \cdot \gamma_0(b) \cdot \gamma_0(c) =$
$= (p_0 \circ i_0)(a+b+c) \cdot [(p_0 \circ i_0)(b+c)]^{-1} \cdot [(p_0 \circ i_0)(a+c)]^{-1} \cdot [(p_0 \circ i_0)(a+b)]^{-1} \cdot (p_0 \circ i_0)(a) \cdot (p_0 \circ i_0)(b) \cdot (p_0 \circ i_0)(c) =$
$= p_0\big(i_0(a+b+c)\big) \cdot \big[p_0\big(i_0(b+c)\big)\big]^{-1} \cdot \big[p_0\big(i_0(a+c)\big)\big]^{-1} \cdot \big[p_0\big(i_0(a+b)\big)\big]^{-1} \cdot p_0\big(i_0(a)\big) \cdot p_0\big(i_0(b)\big) \cdot p_0\big(i_0(c)\big) =$
$= p_0\big(i_0(a+b+c)\big) \cdot p_0\big([i_0(b+c)]^{-1}\big) \cdot p_0\big([i_0(a+c)]^{-1}\big) \cdot p_0\big([i_0(a+b)]^{-1}\big) \cdot p_0\big(i_0(a)\big) \cdot p_0\big(i_0(b)\big) \cdot p_0\big(i_0(c)\big) =$
$= p_0\Big(i_0(a+b+c) \cdot [i_0(b+c)]^{-1} \cdot [i_0(a+c)]^{-1} \cdot [i_0(a+b)]^{-1} \cdot i_0(a) \cdot i_0(b) \cdot i_0(c) \Big) =$
$= \big\{ i_0(a+b+c) \cdot [i_0(b+c)]^{-1} \cdot [i_0(a+c)]^{-1} \cdot [i_0(a+b)]^{-1} \cdot i_0(a) \cdot i_0(b) \cdot i_0(c) \big\} \cdot \langle Y \rangle_N =$
$= \langle Y \rangle_N = e$, $\forall a,b,c \in A$. Daí, pela proposição 4.1.2, temos que $\langle im(\gamma_0) \rangle$ é abeliano e que $\Delta\gamma_0$ é um bihomomorfismo. É claro que $\langle im(\gamma_0) \rangle \leqslant \Gamma_0$. Como $p_0 : F_A \to \Gamma_0$ é um epimorfismo, temos que

$$\Gamma_0 = im(p_0) = p_0[F_A] = p_0[\langle im(i_0) \rangle] \subset \langle p_0[im(i_0)] \rangle = \langle im(p_0 \circ i_0) \rangle = \langle im(\gamma_0) \rangle .$$

Daí, $\Gamma_0 = \langle im(\gamma_0) \rangle$ é abeliano.

Também, $\forall a \in A$, temos que $i_0(a) \cdot [i_0(-a)]^{-1} \in Y_1 \subset Y \subset \langle Y \rangle_N$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \gamma_0(a) &= (p_0 \circ i_0)(a) \\ &= p_0\big(i_0(a)\big) \\ &= i_0(a) \cdot \langle Y \rangle_N \\ &= i_0(-a) \cdot \langle Y \rangle_N \\ &= p_0\big(i_0(-a)\big) \\ &= (p_0 \circ i_0)(-a) \\ &= \gamma_0(-a) . \end{aligned}$$

Daí, $\gamma_0 : A \to \Gamma_0$ é uma função quadrática.

Sejam B um grupo abeliano e $\delta : A \to B$ uma função quadrática. Portanto, $\forall a \in A$, temos que $\delta(a) = \delta(-a)$, isto é, $\delta(a) - \delta(-a) = 0$. Também, $\forall a,b,c \in A$,

$\delta(a+b+c) - \delta(b+c) - \delta(a+c) - \delta(a+b) + \delta(a) + \delta(b) + \delta(c) = 0$. Como F_A é um objeto livre sobre A com $i_0 : A \to F_A$, existe um único homomorfismo $f : F_A \to B$ tal que $f \circ i_0 = \delta$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_0"] \arrow[dr, "\delta"'] & F_A \arrow[d, "f"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Seja $y \in Y_1$. Então, existe $a \in A$ tal que $y = i_0(a) \cdot [i_0(-a)]^{-1}$. Assim,

$$\begin{aligned} f(y) &= f\big(i_0(a) \cdot [i_0(-a)]^{-1}\big) \\ &= f\big(i_0(a)\big) + f\big([i_0(-a)]^{-1}\big) \\ &= f\big(i_0(a)\big) - f\big(i_0(-a)\big) \\ &= (f \circ i_0)(a) - (f \circ i_0)(-a) \\ &= \delta(a) - \delta(-a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

e, portanto, $y \in ker(f)$. Como y é qualquer, ficamos com $Y_1 \subset ker(f)$. Seja $y \in Y_2$. Então, existem $a, b, c \in A$ tais que

$$y = i_0(a+b+c) \cdot [i_0(b+c)]^{-1} \cdot [i_0(a+c)]^{-1} \cdot [i_0(a+b)]^{-1} \cdot i_0(a) \cdot i_0(b) \cdot i_0(c)\,.$$

Assim, $f(y) = f\big(i_0(a{+}b{+}c)\cdot[i_0(b{+}c)]^{-1}\cdot[i_0(a{+}c)]^{-1}\cdot[i_0(a{+}b)]^{-1}\cdot i_0(a)\cdot i_0(b)\cdot i_0(c)\big) =$
$= f\big(i_0(a+b+c)\big) + f\big([i_0(b+c)]^{-1}\big) + f\big([i_0(a+c)]^{-1}\big) + f\big([i_0(a+b)]^{-1}\big) + f\big(i_0(a)\big) + f\big(i_0(b)\big) + f\big(i_0(c)\big) =$
$= f\big(i_0(a{+}b{+}c)\big) - f\big(i_0(b{+}c)\big) - f\big(i_0(a{+}c)\big) - f\big(i_0(a{+}b)\big) + f\big(i_0(a)\big) + f\big(i_0(b)\big) + f\big(i_0(c)\big) =$
$= (f \circ i_0)(a+b+c) - (f \circ i_0)(b+c) - (f \circ i_0)(a+c) - (f \circ i_0)(a+b) + (f \circ i_0)(a) + (f \circ i_0)(b) + (f \circ i_0)(c) =$
$= \delta(a+b+c) - \delta(b+c) - \delta(a+c) - \delta(a+b) + \delta(a) + \delta(b) + \delta(c) = 0$ e, assim, $y \in ker(f)$. Como y é arbitrário, temos que $Y_2 \subset ker(f)$. Portanto, ficamos com $Y = Y_1 \cup Y_2 \subset ker(f) \lhd F_A$. Dessa forma, $\langle Y \rangle_N \subset ker(f)$. Portanto, temos que $\langle Y \rangle_N \lhd ker(f) \lhd F_A$. Pelo teorema do isomorfismo, existe um único homomorfismo $h : \Gamma_0 \to B$ tal que $h \circ p_0 = f$.

$$\begin{tikzcd} F_A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_0"'] & B \\ \Gamma_0 \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Ficamos com $h \circ \gamma_0 = h \circ (p_0 \circ i_0) = (h \circ p_0) \circ i_0 = f \circ i_0 = \delta$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_0"] \arrow[dr, "\delta"'] & F_A \arrow[r, two heads, "p_0"] \arrow[d, "f"] & \Gamma_0 \arrow[dl, "h"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Seja $\alpha : \Gamma_0 \to B$ um homomorfismo tal que $\alpha \circ \gamma_0 = \delta$. Então, $\delta = \alpha \circ \gamma_0 = \alpha \circ (p_0 \circ i_0) = (\alpha \circ p_0) \circ i_0$. Pela unicidade de f, temos que $\alpha \circ p_0 = f$. Pela unicidade de h, ficamos com $\alpha = h$. Portanto, existe um único homomorfismo $h : \Gamma_0 \to B$ tal que $h \circ \gamma_0 = \delta$, ou seja, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma_0"] \arrow[dr, "\delta"'] & \Gamma_0 \arrow[d, "h"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Como Γ_0 é abeliano e B e δ são arbitrários, temos que $F_A/\langle Y \rangle_N = \Gamma_0 = \Gamma_A^{\gamma_0}$ é o grupo quadrático universal para A com γ_0. Iremos denotar esse grupo quadrático universal $F_A/\langle Y \rangle_N = \Gamma_0 = \Gamma_A^{\gamma_0}$ por "Γ_A^0".

Pela construção acima, temos que $\gamma_0 \in \mathcal{V}_{(A,\Gamma_0)}$. Dessa forma, ficamos com $\mathcal{V}_{(A,\Gamma_0)} \neq \varnothing$. Daí, a ação $F_0 : Aut(\Gamma_0) \to Sym(\mathcal{V}_{(A,\Gamma_0)})$, definida analogamente como na seção anterior, é uma ação regular (livre e transitiva) e, portanto, fiel. Segue que $|Aut(\Gamma_0)| = |\mathcal{V}_{(A,\Gamma_0)}|$ e que, $\forall \gamma \in (\Gamma_0)^A$, temos que $\gamma \in \mathcal{V}_{(A,\Gamma_0)}$ se, e somente se, $\mathcal{V}_{(A,\Gamma_0)} = \big\{ f \circ \gamma \in (\Gamma_0)^A \; : \; f \in Aut(\Gamma_0) \big\}$. Em particular, $\mathcal{V}_{(A,\Gamma_0)} = \big\{ f \circ \gamma_0 \in (\Gamma_0)^A \; : \; f \in Aut(\Gamma_0) \big\}$.

Acabamos de mostrar que, dado um grupo abeliano A, sempre existe algum grupo abeliano Γ e alguma função quadrática $\gamma : A \to \Gamma$ tais que $\Gamma = \Gamma_A^{\gamma}$. Esse é o teorema de existência do grupo quadrático universal.

Agora sim, pelo item (xi) do teorema 4.1.8, para todo grupo abeliano A, podemos dizer que, se todo elemento $a \in A$ tem ordem finita $o_a \in \mathbb{N}$ e se, $\forall a \in A$, existe $b \in A$ tal que $a = o_a b$, então $\Gamma_A^{\gamma} \cong 0$.

Exemplo 4.3.1. Considere o grupo aditivo dos racionais $\mathbb{Q}$. Então, $\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Q}$, pois $\mathbb{Q}$ é abeliano. Seja $\mathbb{Q}_1$ o grupo dos racionais módulo 1, isto é, $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Para cada $r \in \mathbb{Q}$, denotamos $r + \mathbb{Z}$ por "$\bar{r}$". Dessa forma, o elemento neutro de $\mathbb{Q}_1$ é $\mathbb{Z} = 0 + \mathbb{Z} = \bar{0} = \bar{n} = n + \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{Z}$. Temos que $\mathbb{Q}_1$ é um grupo abeliano infinito. Mais especificamente, considerando $J = [0, 1[\, \subset \mathbb{R}$ o intervalo unitário real, fechado em zero e aberto em um, segue que, $\forall r \in \mathbb{Q}$, existe um único $s \in J \cap \mathbb{Q}$ tal que $\bar{r} = \bar{s}$. Daí, $|\mathbb{Q}_1| = |J \cap \mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Para cada $a \in \mathbb{Q}_1$, existe $r \in J \cap \mathbb{Q}$ tal que $a = r + \mathbb{Z} = \bar{r}$. Daí, existem $n \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{N}^*$ tais que

$r = \frac{n}{m}$, com $0 \leqslant r = \frac{n}{m} < 1$, ou seja, $0 \leqslant n < m$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} a &= \sum_{j=1}^{m} (r + \mathbb{Z}) \\
&= \Big(\sum_{j=1}^{m} r\Big) + \mathbb{Z} \\
&= \Big[\Big(\sum_{j=1}^{m} 1\Big) \cdot r\Big] + \mathbb{Z} \\
&= (m \cdot r) + \mathbb{Z} \\
&= \Big(m \cdot \frac{n}{m}\Big) + \mathbb{Z} \\
&= n + \mathbb{Z} \\
&= \mathbb{Z} \\
&= \bar{0}\,.
\end{aligned}$$

Daí, $o_a \in \mathbb{N}^*$. Portanto, todo elemento de $\mathbb{Q}_1$ tem ordem finita. Seja $a \in \mathbb{Q}_1$, com ordem $o_a \in \mathbb{N}^*$. Novamente, como mostramos, existem $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $a = \frac{n}{m} + \mathbb{Z}$, com $0 \leqslant n < m$. Daí, $\big(\frac{n}{o_a m}\big) + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}_1$ e
$o_a \big[\big(\frac{n}{o_a m}\big) + \mathbb{Z}\big] = \sum_{j=1}^{o_a} \big[\big(\frac{n}{o_a m}\big) + \mathbb{Z}\big] = \Big(\sum_{j=1}^{o_a} \frac{n}{o_a m}\Big) + \mathbb{Z} = \big(o_a \frac{n}{o_a m}\big) + \mathbb{Z} = \big(\frac{n}{m}\big) + \mathbb{Z} = a\,.$
Dessa forma, para todo grupo abeliano Γ e toda função quadrática $\gamma : \mathbb{Q}_1 \to \Gamma$, temos que $\gamma = 0$. Logo, $\Gamma^{\gamma}_{\mathbb{Q}_1} \cong 0$.

Para cada grupo abeliano A, seja um conjunto Q_A formado por todos os grupos quadráticos universais de A com alguma função quadrática. Isto é, para todo grupo abeliano Γ, temos que $\Gamma \in Q_A$ se, e somente se, $\mathcal{V}_{(A,\Gamma)} \neq \varnothing$, isto é, se, e somente se, existe algum $\gamma \in \mathcal{V}_{(A,\Gamma)}$, que, por sua vez, acontece se, e somente se, $\Gamma = \Gamma^{\gamma}_{A}$. Nessas últimas páginas mostramos que, para todo grupo abeliano A, temos $Q_A \neq \varnothing$, pois $\Gamma^{0}_{A} \in Q_A$.

Considere a categoria Ab dos grupos abelianos e homomorfismos. Como usual, dividimos o conjunto de todos os grupos abelianos em classes de isomorfismo e obtemos o conjunto quociente, $Obj(\mathsf{Ab})/\cong$, de $Obj(\mathsf{Ab})$ pela relação de equivalência, $\cong$, de isomorfismo de grupos. Para cada grupo abeliano $A \in Obj(\mathsf{Ab})$, vamos denotar por "$[A]$" a classe de equivalência de A com respeito à relação de equivalência $\cong$, isto é, $[A] \in Obj(\mathsf{Ab})/\cong$ é a classe de isomorfismo de A.

Seja A um grupo abeliano. Pelo item (i) do teorema 4.2.4, se existe $\Gamma \in Q_A$, então $[\Gamma] \subset Q_A$. O item (ii) do mesmo teorema afirma que $Q_A \subset [\Gamma]$, $\forall \Gamma \in Q_A$. Portanto, sempre temos que $Q_A = [\Gamma]$, $\forall \Gamma \in Q_A$. Acima, mostramos que $\Gamma^{0}_{A} \in Q_A$. Logo, ficamos com $Q_A = [\Gamma^{0}_{A}]$. Em termos de estrutura algébrica (classes de isomorfismo), todos os grupos quadráticos universais de Q_A são os mesmos. Por isso, é usual dizermos que o grupo quadrático universal de A é Γ^{0}_{A}, único, a menos de isomorfismo.

Sejam A e Γ grupos abelianos e $\gamma : A \to \Gamma$ uma função quadrática tais que $\Gamma = \Gamma_A^\gamma$. Assim, $\Gamma = \langle im(\gamma) \rangle$. Daí, para todo $x \in \Gamma$, existem $x_1, ..., x_n \in im(\gamma)$ e $r_1, ..., r_n \in \mathbb{Z}$ tais que $x = r_1 x_1 + ... + r_n x_n = \sum\limits_{j=1}^{n} r_j x_j$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$. Daí, existem $a_1, ..., a_n \in A$ tais que $x_j = \gamma(a_j)$, $\forall j \in \{1, ..., n\}$. Logo, $x = r_1 \gamma(a_1) + ... + r_n \gamma(a_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} r_j \gamma(a_j)$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplo 4.3.2. Sejam R um anel comutativo e denotemos também por R seu grupo abeliano associado. Seja Γ um grupo abeliano e $\gamma : R \to \Gamma$ uma função quadrática tal que $\Gamma = \Gamma_R^\gamma$. Considere a função quadrática $\lambda : R \to R$ do exemplo 4.1.5. Assim, $\lambda(r) = r^2$, $\forall r \in R$. Por definição, existe um único homomorfismo $\varphi : \Gamma_R^\gamma \to R$ tal que $\varphi \circ \gamma = \lambda$.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "\lambda"'] & \Gamma_R^\gamma \arrow[d, "\varphi"] \\ & R \end{tikzcd}$$

Dessa forma, $\forall r \in R$, temos que $\varphi\big(\gamma(r)\big) = (\varphi \circ \gamma)(r) = \lambda(r) = r^2$. Pelo parágrafo acima, $\forall x \in \Gamma_R^\gamma$, existem $r_1, ..., r_n \in R$ e $c_1, ..., c_n \in \mathbb{Z}$ tais que $x = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j \gamma(r_j)$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$. Assim,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi\Big(\sum_{j=1}^{n} c_j \gamma(r_j)\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \varphi\big(c_j \gamma(r_j)\big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi\big(\gamma(r_j)\big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_j (\varphi \circ \gamma)(r_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda(r_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_j r_j^2 . \end{aligned}$$

Exemplo 4.3.3. Seja $R = \mathbb{Q}$ o anel dos números racionais no contexto do exemplo 4.3.2 acima. Defina uma função $f : \mathbb{Q} \to \Gamma_{\mathbb{Q}}^\gamma$ tal que $f\big(\frac{p}{q}\big) = pq\, \gamma\big(\frac{1}{q}\big)$, $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\forall q \in \mathbb{Z}^*$. Assim, $\forall r, s \in \mathbb{Q}$, existem $n, p \in \mathbb{Z}$ e $m, q \in \mathbb{Z}^*$ tais que

$r = \frac{p}{q}$ e $s = \frac{n}{m}$. Daí,

$$\begin{aligned} f(r+s) &= f\big(\tfrac{p}{q} + \tfrac{n}{m}\big) \\ &= f\big(\tfrac{pm+nq}{qm}\big) \\ &= (pm+nq)qm\,\gamma\big(\tfrac{1}{qm}\big) \\ &= (pqm^2 + nmq^2)\,\gamma\big(\tfrac{1}{qm}\big) \\ &= pqm^2\,\gamma\big(\tfrac{1}{qm}\big) + nmq^2\,\gamma\big(\tfrac{1}{qm}\big) \\ &= pq\,\gamma\big(m\tfrac{1}{qm}\big) + nm\,\gamma\big(q\tfrac{1}{qm}\big) \\ &= pq\,\gamma\big(\tfrac{1}{q}\big) + nm\,\gamma\big(\tfrac{1}{m}\big) \\ &= f\big(\tfrac{p}{q}\big) + f\big(\tfrac{n}{m}\big) \\ &= f(r) + (s)\,. \end{aligned}$$

Portanto, f é um homomorfismo. Temos que, $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\forall q \in \mathbb{Z}^*$,

$$\begin{aligned} (\varphi \circ f)\big(\tfrac{p}{q}\big) &= \varphi\Big(f\big(\tfrac{p}{q}\big)\Big) \\ &= \varphi\Big(pq\,\gamma\big(\tfrac{1}{q}\big)\Big) \\ &= pq\,\varphi\Big(\gamma\big(\tfrac{1}{q}\big)\Big) \\ &= pq\,(\varphi \circ \gamma)\big(\tfrac{1}{q}\big) \\ &= pq\,\lambda\big(\tfrac{1}{q}\big) \\ &= pq\,\big(\tfrac{1}{q}\big)^2 \\ &= pq\tfrac{1}{q^2} \\ &= \tfrac{p}{q} \\ &= id_{\mathbb{Q}}\big(\tfrac{p}{q}\big)\,. \end{aligned}$$

Assim, $\varphi \circ f = id_{\mathbb{Q}}$. Também, $\forall r \in \mathbb{Q}$, existem $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$ tais que $r = \frac{p}{q}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} (f \circ \lambda)(r) &= f\big(\lambda(r)\big) \\ &= f(r^2) \\ &= f\Big(\big(\tfrac{p}{q}\big)^2\Big) \\ &= f\big(\tfrac{p^2}{q^2}\big) \\ &= p^2q^2\,\gamma\big(\tfrac{1}{q^2}\big) \\ &= (pq)^2\,\gamma\big(\tfrac{1}{q^2}\big) \\ &= \gamma\big(pq\tfrac{1}{q^2}\big) \\ &= \gamma\big(\tfrac{p}{q}\big) \\ &= \gamma(r)\,. \end{aligned}$$

Dessa forma, temos que $f \circ \lambda = \gamma$. Vamos denotar a função identidade de $\Gamma_{\mathbb{Q}}^{\gamma}$ por "id_Γ". É claro que $\Gamma_{\mathbb{Q}}^{\gamma}$ é abeliano, que id_Γ é um homomorfismo e que $id_\Gamma \circ \gamma = \gamma$. Como f e φ são homomorfismos, então $f \circ \varphi : \Gamma_{\mathbb{Q}}^{\gamma} \to \Gamma_{\mathbb{Q}}^{\gamma}$ também é um homomorfismo. Temos que $(f \circ \varphi) \circ \gamma = f \circ (\varphi \circ \gamma) = f \circ \lambda = \gamma$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, bend right, "\gamma"'] & \Gamma_{\mathbb{Q}}^{\gamma} \arrow[d, shift right, "id_\Gamma"'] \arrow[d, shift left, "f\circ\varphi"] \\ & \Gamma_{\mathbb{Q}}^{\gamma} \end{tikzcd}$$

Por unicidade, ficamos com $f \circ \varphi = id_\Gamma$. Daí, φ e f são isomorfismos, com $\varphi^{-1} = f$. Logo, $\Gamma_{\mathbb{Q}}^{\gamma} \cong \mathbb{Q}$.

4.4 O funtor quadrático universal

Sejam A, B, Γ e Λ grupos abelianos, $f : A \to B$ um homomorfismo, $\gamma \in \mathcal{V}_{(A,\Gamma)}$ e $\lambda \in \mathcal{V}_{(B,\Lambda)}$, ou seja, $\Gamma = \Gamma_A^{\gamma}$ e $\Lambda = \Gamma_B^{\lambda}$. Pela proposição 4.1.4, temos que $\lambda \circ f : A \to \Lambda$ é uma função quadrática. Pela definição do grupo quadrático universal, existe um único homomorfismo $\varphi : \Gamma \to \Lambda$ tal que $\varphi \circ \gamma = \lambda \circ f$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "f"'] & \Gamma \arrow[d, "\varphi"] \\ B \arrow[r, "\lambda"'] & \Lambda \end{tikzcd}$$

Vamos denotar o homomorfismo φ por "$\Gamma_f^{\gamma\lambda}$", por "$\Gamma_\lambda^\gamma(f)$" ou por "$\Gamma_\lambda^\gamma f$" e o chamamos de "o *homomorfismo induzido* de f nos grupos quadráticos universais". Se as funções quadráticas de A e B estiverem subentendidas, denotaremos $\Gamma_f^{\gamma\lambda}$ por "$\Gamma(f)$" ou por "Γf".

Portanto, dados A e B grupos abelianos, com grupos quadráticos universais Γ_A^γ e Γ_B^λ, com as funções quadráticas $\gamma : A \to \Gamma_A^\gamma$ e $\lambda : B \to \Gamma_B^\lambda$, respectivamente, e um homomorfismo $f : A \to B$, então existe um único homomorfismo $\Gamma_f^{\gamma\lambda} : \Gamma_A^\gamma \to \Gamma_B^\lambda$ tal que $\Gamma_f^{\gamma\lambda} \circ \gamma = \lambda \circ f$.

Dizendo de outra maneira, todo diagrama da forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "f"'] & \Gamma_A^\gamma \\ B \arrow[r, "\lambda"'] & \Gamma_B^\lambda \end{tikzcd}$$

no qual γ e λ são funções quadráticas, pode ser completado para um quadrado comutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma} & \Gamma_A^{\gamma} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma_f^{\gamma\lambda}} \\ B & \xrightarrow[\lambda]{} & \Gamma_B^{\lambda} \end{array}$$

Seja $x \in \Gamma_A^{\gamma}$. Então, existem $a_1, ..., a_n \in A$ e $r_1, ..., r_n \in \mathbb{Z}$ tais que $x = r_1\,\gamma(a_1) + ... + r_n\,\gamma(a_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} r_j\,\gamma(a_j)$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$. Daí, temos que

$$\begin{aligned} \Gamma_f^{\gamma\lambda}(x) &= \Gamma_f^{\gamma\lambda}\Big(\sum_{j=1}^{n} r_j\,\gamma(a_j)\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \Gamma_f^{\gamma\lambda}\big(r_j\,\gamma(a_j)\big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} r_j\,\Gamma_f^{\gamma\lambda}\big(\gamma(a_j)\big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} r_j\,(\Gamma_f^{\gamma\lambda}\circ\gamma)(a_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} r_j\,(\lambda\circ f)(a_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} r_j\,\lambda\big(f(a_j)\big)\,. \end{aligned}$$

Assim, é fácil ver que, se $f : A \to B$ é sobrejetora, então $\Gamma_f^{\gamma\lambda} : \Gamma_A^{\gamma} \to \Gamma_B^{\lambda}$ é sobrejetora. De fato, seja $y \in \Gamma_B^{\lambda}$. Assim, existem $b_1, ..., b_n \in B$ e $r_1, ..., r_n \in \mathbb{Z}$ tais que $y = \sum\limits_{j=1}^{n} r_j\,\lambda(b_j)$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$. Como f é sobrejetora, existem $a_1, ..., a_n \in A$ tais que $b_j = f(a_j)$, $\forall j \in \{1, ..., n\}$. Daí,

$$\begin{aligned} y &= \sum_{j=1}^{n} r_j\,\lambda\big(f(a_j)\big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} r_j\,(\lambda\circ f)(a_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} r_j\,(\Gamma_f^{\gamma\lambda}\circ\gamma)(a_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} r_j\,\Gamma_f^{\gamma\lambda}\big(\gamma(a_j)\big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \Gamma_f^{\gamma\lambda}\big(r_j\,\gamma(a_j)\big) \\ &= \Gamma_f^{\gamma\lambda}\Big(\sum_{j=1}^{n} r_j\,\gamma(a_j)\Big) \in im(\Gamma_f^{\gamma\lambda})\,. \end{aligned}$$

Como y é qualquer, temos que $im(\Gamma_f^{\gamma\lambda}) \subset \Gamma_B^{\lambda}$. Logo, $\Gamma_B^{\lambda} = im(\Gamma_f^{\gamma\lambda})$ e, portanto, $\Gamma_f^{\gamma\lambda}$ é sobrejetora.

Observação 4.4.1. Sejam A, B e C grupos abelianos, com grupos quadráticos universais Γ_A^{γ}, Γ_B^{δ} e Γ_C^{λ}, com funções quadráticas $\gamma : A \to \Gamma_A^{\gamma}$, $\delta : B \to \Gamma_B^{\delta}$ e $\lambda : C \to \Gamma_C^{\lambda}$, respectivamente. Sejam também homomorfismos $\alpha : A \to B$ e

$\beta : B \to C$. Daí, $\beta \circ \alpha : A \to C$ também é um homomorfismo. Pelo parágrafo anterior, existem únicos homomorfismos $\Gamma_{\alpha}^{\gamma\delta} : \Gamma_A^{\gamma} \to \Gamma_B^{\delta}$, $\Gamma_{\beta}^{\delta\lambda} : \Gamma_B^{\delta} \to \Gamma_C^{\lambda}$ e $\Gamma_{\beta\circ\alpha}^{\gamma\lambda} : \Gamma_A^{\gamma} \to \Gamma_C^{\lambda}$ tais que $\Gamma_{\alpha}^{\gamma\delta} \circ \gamma = \delta \circ \alpha$, $\Gamma_{\beta}^{\delta\lambda} \circ \delta = \lambda \circ \beta$ e $\Gamma_{\beta\circ\alpha}^{\gamma\lambda} \circ \gamma = \lambda \circ (\beta \circ \alpha)$. Mas, $\Gamma_{\beta}^{\delta\lambda} \circ \Gamma_{\alpha}^{\gamma\delta} : \Gamma_A^{\gamma} \to \Gamma_C^{\lambda}$ também é um homomorfismo tal que

$$
\begin{aligned}
(\Gamma_{\beta}^{\delta\lambda} \circ \Gamma_{\alpha}^{\gamma\delta}) \circ \gamma &= \Gamma_{\beta}^{\delta\lambda} \circ (\Gamma_{\alpha}^{\gamma\delta} \circ \gamma) \\
&= \Gamma_{\beta}^{\delta\lambda} \circ (\delta \circ \alpha) \\
&= (\Gamma_{\beta}^{\delta\lambda} \circ \delta) \circ \alpha \\
&= (\lambda \circ \beta) \circ \alpha \\
&= \lambda \circ (\beta \circ \alpha)\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dd, bend right=60, "\beta\circ\alpha"'] & \Gamma_A^{\gamma} \arrow[d, "\Gamma_{\alpha}^{\gamma\delta}"] \arrow[dd, bend left=80, shift left, "\Gamma_{\beta\circ\alpha}^{\gamma\lambda}"'] \arrow[dd, bend left=90, shift left=3, "\Gamma_{\beta}^{\delta\lambda}\circ\Gamma_{\alpha}^{\gamma\delta}"] \\
B \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\beta"'] & \Gamma_B^{\delta} \arrow[d, "\Gamma_{\beta}^{\delta\lambda}"] \\
C \arrow[r, "\lambda"] & \Gamma_C^{\lambda}
\end{tikzcd}
$$

Portanto, pela unicidade de $\Gamma_{\beta\circ\alpha}^{\gamma\lambda}$, ficamos com $\Gamma_{\beta\circ\alpha}^{\gamma\lambda} = \Gamma_{\beta}^{\delta\lambda} \circ \Gamma_{\alpha}^{\gamma\delta}$.

Observação 4.4.2. Sejam A, Γ_1 e Γ_2 grupos abelianos e $\gamma_1 : A \to \Gamma_1$ e $\gamma_2 : A \to \Gamma_2$ funções quadráticas tais que $\Gamma_1 = \Gamma_A^{\gamma_1}$ e $\Gamma_2 = \Gamma_A^{\gamma_2}$. Considere o homomorfismo identidade $id_A : A \to A$. Pelo item (ii) do teorema 4.2.4, existe um único isomorfismo $i : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ tal que $i \circ \gamma_1 = \gamma_2$. Pelas considerações iniciais, existe um único homomorfismo $\Gamma_{id_A}^{\gamma_1\gamma_2} : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ tal que $\Gamma_{id_A}^{\gamma_1\gamma_2} \circ \gamma_1 = \gamma_2 \circ id_A$.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, "id_A"'] & \Gamma_A^{\gamma_1} \arrow[d, shift right, "i"'] \arrow[d, shift left, "\Gamma_{id_A}^{\gamma_1\gamma_2}"] \\
A \arrow[r, "\gamma_2"'] & \Gamma_A^{\gamma_2}
\end{tikzcd}
$$

É claro que $i \circ \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_2 \circ id_A$. Daí, pela unicidade de $\Gamma_{id_A}^{\gamma_1\gamma_2}$, temos que $i = \Gamma_{id_A}^{\gamma_1\gamma_2}$. Assim, podemos reenunciar o item (ii) do teorema 4.2.4 da seguinte maneira: sejam A, Γ_1 e Γ_2 grupos abelianos e $\gamma_1 : A \to \Gamma_1$ e $\gamma_2 : A \to \Gamma_2$ funções quadráticas tais que $\Gamma_1 = \Gamma_A^{\gamma_1}$ e $\Gamma_2 = \Gamma_A^{\gamma_2}$. Então, o homomorfismo $\Gamma_{id_A}^{\gamma_1\gamma_2} : \Gamma_A^{\gamma_1} \to \Gamma_A^{\gamma_2}$ é um isomorfismo e, além disso, é o único isomorfismo de $\Gamma_A^{\gamma_1}$

em $\Gamma_A^{\gamma_2}$ tal que $\gamma_2 = \gamma_2 \circ id_A = \Gamma_{id_A}^{\gamma_1\gamma_2} \circ \gamma_1$, isto é, tal que o triângulo abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} & \Gamma_A^{\gamma_1} \arrow[dd, "\Gamma^{\gamma_1\gamma_2}_{id_A}"] \\ A \arrow[ur, "\gamma_1"] \arrow[dr, "\gamma_2"'] & \\ & \Gamma_A^{\gamma_2} \end{tikzcd}$$

Em particular, se $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, então $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ e

$$\Gamma_{id_A}^{\gamma_1\gamma_2} = \Gamma_{id_A}^{\gamma\gamma} = id_\Gamma \in Aut(\Gamma)\,.$$

Para cada grupo abeliano A, considere a função quadrática $\gamma_0 = p_0 \circ i_0$ e o grupo quadrático universal $\Gamma_0 = F_A/\langle Y\rangle_N = \Gamma_A^{\gamma_0} = \Gamma_A^0$ construidos na seção anterior. Sejam funções $\mathsf{\Gamma}_0^1 : Obj(\mathsf{Ab}) \to Obj(\mathsf{Ab})$ e $\mathsf{\Gamma}_0^2 : Mor(\mathsf{Ab}) \to Mor(\mathsf{Ab})$ tais que $\mathsf{\Gamma}_0^1(A) = \Gamma_A^{\gamma_0} = \Gamma_A^0$, $\forall A \in Obj(\mathsf{Ab})$, e $\mathsf{\Gamma}_0^2(f) = \Gamma_f^{\gamma_0\lambda_0} \in Hom_{\mathsf{Ab}}(\Gamma_0, \Lambda_0)$, $\forall f \in Hom_{\mathsf{Ab}}(A, B)$, em que $\gamma_0 : A \to \Gamma_0$ é a função quadrática construida de modo que $\Gamma_0 = \Gamma_A^{\gamma_0}$ e $\lambda_0 : B \to \Lambda_0$ é a função quadrática construida de modo que $\Lambda_0 = \Gamma_B^{\lambda_0}$.

Teorema 4.4.3. Seja $\mathsf{\Gamma}_0 = (\mathsf{\Gamma}_0^1, \mathsf{\Gamma}_0^2)$, como definidos acima. Então, $\mathsf{\Gamma}_0$ é um funtor covariante $\mathsf{\Gamma}_0 : \mathsf{Ab} \to \mathsf{Ab}$.

Demonstração: Para todos $A, B \in Obj(\mathsf{Ab})$ e todo $f \in Hom_{\mathsf{Ab}}(A, B)$, note que $\mathsf{\Gamma}_0^2(f) = \Gamma_f^{\gamma_0\lambda_0} \in Hom_{\mathsf{Ab}}(\Gamma_A^{\gamma_0}, \Gamma_B^{\lambda_0}) = Hom_{\mathsf{Ab}}\big(\mathsf{\Gamma}_0^1(A), \mathsf{\Gamma}_0^1(B)\big)$.

Sejam A, B e C grupos abelianos, com funções quadráticas γ_0, δ_0 e λ_0 e grupos quadráticos universais $\Gamma_A^{\gamma_0}$, $\Gamma_B^{\delta_0}$ e $\Gamma_C^{\lambda_0}$, respectivamente, como construidos na seção anterior. Daí, $\mathsf{\Gamma}_0^1(A) = \Gamma_A^{\gamma_0}$, $\mathsf{\Gamma}_0^1(B) = \Gamma_B^{\delta_0}$ e $\mathsf{\Gamma}_0^1(C) = \Gamma_C^{\lambda_0}$. Sejam também $\alpha \in Hom_{\mathsf{Ab}}(A, B)$ e $\beta \in Hom_{\mathsf{Ab}}(B, C)$. Pela observação 4.4.1, temos que $\mathsf{\Gamma}_0^2(\beta \circ \alpha) = \Gamma_{\beta\circ\alpha}^{\gamma_0\lambda_0} = \Gamma_\beta^{\delta_0\lambda_0} \circ \Gamma_\alpha^{\gamma_0\delta_0} = [\mathsf{\Gamma}_0^2(\beta)] \circ [\mathsf{\Gamma}_0^2(\alpha)]$.

Sejam $A \in Obj(\mathsf{Ab})$, com função quadrática γ_0 e grupo quadrático universal $\Gamma = \Gamma_A^{\gamma_0}$, como construidos na seção anterior. Daí, $\mathsf{\Gamma}_0^1(A) = \Gamma_A^{\gamma_0}$. Sejam também $id_A \in Hom_{\mathsf{Ab}}(A, A)$ e $id_\Gamma \in Hom_{\mathsf{Ab}}(\Gamma, \Gamma)$ os homomorfismos identidades. Pela observação 4.4.2, temos que $\mathsf{\Gamma}_0^2(id_A) = \Gamma_{id_A}^{\gamma_0\gamma_0} = id_\Gamma = id_{\Gamma_A^{\gamma_0}} = id_{\mathsf{\Gamma}_0^1(A)}$. ■

Como é usual, denotamos $\mathsf{\Gamma}_0^1(A)$ por "$\mathsf{\Gamma}_0(A)$", por "$\mathsf{\Gamma}_0\, A$", por "$\Gamma_0(A)$" ou por "$\Gamma_0\, A$" e denotamos $\mathsf{\Gamma}_0^2(f)$ por "$\mathsf{\Gamma}_0(f)$", por "$\mathsf{\Gamma}_0\, f$", por "$\Gamma_0(f)$" ou por "$\Gamma_0\, f$", $\forall A \in Obj(\mathsf{Ab})$, $\forall f \in Mor(\mathsf{Ab})$.

Sejam A e B grupos tais que A é abeliano e $A \cong B$. Assim, B é abeliano e existe $\alpha : A \to B$ isomorfismo. Dessa forma, temos que $\mathsf{\Gamma}_0(\alpha) : \mathsf{\Gamma}_0(A) \to \mathsf{\Gamma}_0(B)$ é um isomorfismo e, portanto, $\mathsf{\Gamma}_0(A) \cong \mathsf{\Gamma}_0(B)$. Se γ_0 é a função quadrática construida para A tal que $\mathsf{\Gamma}_0(A) = \Gamma_A^{\gamma_0}$ e δ_0 é a função quadrática construida para B tal que $\mathsf{\Gamma}_0(B) = \Gamma_B^{\delta_0}$, então $\Gamma_A^{\gamma_0} \cong \Gamma_B^{\delta_0}$.

Observação 4.4.4. Sejam A, B, Γ_1, Γ_2, Ω_1 e Ω_2 grupos abelianos, $\gamma_1 : A \to \Gamma_1$, $\gamma_2 : A \to \Gamma_2$, $\omega_1 : B \to \Omega_1$ e $\omega_2 : B \to \Omega_2$ funções quadráticas tais que $\Gamma_1 = \Gamma_A^{\gamma_1}$, $\Gamma_2 = \Gamma_A^{\gamma_2}$, $\Omega_1 = \Gamma_B^{\omega_1}$ e $\Omega_2 = \Gamma_B^{\omega_2}$. Seja também $f : A \to B$ um homomorfismo. Assim, existem únicos homomorfismos $\phi_1 = \Gamma_f^{\gamma_1\omega_1} : \Gamma_1 \to \Omega_1$ e $\phi_2 = \Gamma_f^{\gamma_2\omega_2} : \Gamma_2 \to \Omega_2$ tais que $\phi_1 \circ \gamma_1 = \omega_1 \circ f$ e $\phi_2 \circ \gamma_2 = \omega_2 \circ f$. Pela observação 4.4.2, existem únicos isomorfismos $i = \Gamma_{id_A}^{\gamma_1\gamma_2} : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ e $j = \Gamma_{id_B}^{\omega_1\omega_2} : \Omega_1 \to \Omega_2$ tais que $i \circ \gamma_1 = \gamma_2$ e $j \circ \omega_1 = \omega_2$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[dr, "\gamma_2"'] \arrow[rrr, bend left, "f"] & \Gamma_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, "i"'] & \Omega_1 \arrow[d, "j"] & B \arrow[l, "\omega_1"'] \arrow[dl, "\omega_2"] \\
& \Gamma_2 \arrow[r, "\phi_2"'] & \Omega_2 &
\end{tikzcd}$$

Nessas hipóteses, o quadrado central comuta:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_A^{\gamma_1} \arrow[r, "\Gamma_f^{\gamma_1\omega_1}"] \arrow[d, "\Gamma_{id_A}^{\gamma_1\gamma_2}"'] & \Gamma_B^{\omega_1} \arrow[d, "\Gamma_{id_B}^{\omega_1\omega_2}"] \\
\Gamma_A^{\gamma_2} \arrow[r, "\Gamma_f^{\gamma_2\omega_2}"'] & \Gamma_B^{\omega_2}
\end{tikzcd}$$

$$\Gamma_f^{\gamma_2\omega_2} \circ \Gamma_{id_A}^{\gamma_1\gamma_2} = \Gamma_{id_B}^{\omega_1\omega_2} \circ \Gamma_f^{\gamma_1\omega_1} .$$

Vejamos. Pela proposição 4.1.4, temos que $\omega_2 \circ f : A \to \Omega_2$ é uma função quadrática. Daí, pela definição do grupo quadrático universal, existe um único homomorfismo $\psi : \Gamma_1 \to \Omega_2$ tal que $\psi \circ \gamma_1 = \omega_2 \circ f$, isto é, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[dr, "\omega_2\circ f"'] & \Gamma_1 \arrow[d, "\psi"] \\
& \Omega_2
\end{tikzcd}$$

Por outro lado, temos que $j\circ\phi_1 : \Gamma_1 \to \Omega_2$ e $\phi_2\circ i : \Gamma_1 \to \Omega_2$ são homomorfismos e satisfazem $(j \circ \phi_1) \circ \gamma_1 = j \circ (\phi_1 \circ \gamma_1) = j \circ (\omega_1 \circ f) = (j \circ \omega_1) \circ f = \omega_2 \circ f$ e $(\phi_2 \circ i) \circ \gamma_1 = \phi_2 \circ (i \circ \gamma_1) = \phi_2 \circ \gamma_2 = \omega_2 \circ f$. Pela unicidade de ψ, ficamos com $j \circ \phi_1 = \psi = \phi_2 \circ i$.

A observação acima diz que, na categoria de flechas $\mathsf{Ab}^{\to}$, os objetos $\Gamma_f^{\gamma_1\omega_1}, \Gamma_f^{\gamma_2\omega_2} \in Obj(\mathsf{Ab}^{\to})$ são isomorfos, $\Gamma_f^{\gamma_1\omega_1} \cong \Gamma_f^{\gamma_2\omega_2}$, com isomorfismo $(i, j) = (\Gamma_{id_A}^{\gamma_1\gamma_2}, \Gamma_{id_B}^{\omega_1\omega_2}) : \Gamma_f^{\gamma_1\omega_1} \xrightarrow{\cong} \Gamma_f^{\gamma_2\omega_2}$.

Na conclusão da observação acima, temos uma fórmula

$$\Gamma_f^{\gamma_2\omega_2} = \Gamma_{id_B}^{\omega_1\omega_2} \circ \Gamma_f^{\gamma_1\omega_1} \circ (\Gamma_{id_A}^{\gamma_1\gamma_2})^{-1} .$$

4.5 Propriedades

Seja J um conjunto. Como estamos admitindo o axioma da escolha, equivalentemente temos o teorema de Zermelo da boa-ordenação. Assim, existe alguma boa-ordem "$\leqslant$" para J que, em particular, é uma ordem total. Como usual, definimos a relação de ordem estrita introduzindo o símbolo "$<$" de modo que, $\forall i, j \in J$, temos $i < j$ se, e somente se, $i \leqslant j$ e $i \neq j$. Chamamos de "o *bloco triangular inferior* de J" o conjunto $D_J = \big\{(i,j) \in J{\times}J \;:\; i < j\big\}$. Se J é finito, então D_J também é finito. Especificamente, se $|J| \in \{0,1\}$, então $D_J = \varnothing$ e, se $|J| = n \in \mathbb{N}^*$, então $|D_J| = \frac{n(n-1)}{2} \in \mathbb{N}$.

Seja K um grupo abeliano livre. Lembremos que uma base livre para K é um elemento minimal do conjunto de todos os subconjuntos de K que geram K. Nesse caso são equivalentes:

- $S \subset K$ é uma base livre para K;
- $\langle S\rangle = K$ e S é linearmente independente, isto é, $\forall r_1, ..., r_n \in \mathbb{Z}$, $\forall s_1, ..., s_n \in S$, se $s_1, ..., s_n$ são distintos e $\sum\limits_{k=1}^{n} r_k\, s_k = 0$, então $r_k = 0$, $\forall k \in \{1, ..., n\}$;
- Para todo $k \in K$, se $k \neq 0$, então existem únicos $r_1, ..., r_n \in \mathbb{Z}^*$ e únicos $s_1, ..., s_n \in S$ distintos tais que $k = \sum\limits_{k=1}^{n} r_k\, s_k$.

Teorema 4.5.1. Sejam A e Γ grupos abelianos e $\gamma : A \to \Gamma$ uma função quadrática tal que $\Gamma = \Gamma_A^\gamma$. Sejam também J um conjunto totalmente ordenado e D_J seu bloco triangular inferior. Se $J \cap D_J = \varnothing$ e A é o grupo abeliano livre sobre J com a função $\mu : J \to A$, então Γ_A^γ é o grupo abeliano livre sobre $J \cup D_J$, com a função $(\gamma \circ \mu) \cup [\Delta\gamma \circ (\mu{\times}\mu)|_{D_J}] : J \cup D_J \to \Gamma_A^\gamma$. Desse modo, o conjunto $im(\gamma \circ \mu) \,\cup\, \Delta\gamma\big[(\mu{\times}\mu)[D_J]\big]$ é uma base livre para Γ_A^γ.

Demonstração: Sejam B o grupo abeliano livre sobre $J \cup D_J$ com a função $\nu : J \cup D_J \to B$ e considere as funções $\gamma \circ \mu : J \to \Gamma$, $\tau = (\mu{\times}\mu)|_{D_J} : D_J \to A{\times}A$ e $\Delta\gamma \circ \tau : D_J \to \Gamma$. Daí, $\Delta\gamma\big[(\mu\times\mu)[D_J]\big] = im(\Delta\gamma \circ \tau)$. Como $J \cap D_J = \varnothing$, então o conjunto $\{J, D_J\}$ é uma partição de $J \cup D_J$. Assim, fica bem-definida uma função $f = (\gamma \circ \mu) \cup (\Delta\gamma \circ \tau) : J \cup D_J \to \Gamma$. Pela propriedade universal, existe um único homomorfismo $\varphi : B \to \Gamma$ tal que $\varphi \circ \nu = f$.

$$\begin{tikzcd} J \cup D_J \arrow[r, "\nu"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "\varphi"] \\ & \Gamma \end{tikzcd}$$

É claro que $\varphi \circ \nu|_J = f|_J = \gamma \circ \mu$ e que $\varphi \circ \nu|_{D_J} = f|_{D_J} = \Delta\gamma \circ \tau$.

Temos também que μ e ν são injetoras, que $im(\mu)$ é uma base livre para A e que $im(\nu)$ é uma base livre para B. Daí, $\forall a \in A$, se $a \neq 0$, então existem únicos $r_1, ..., r_n \in \mathbb{Z}^*$ e únicos $j_1, ..., j_n \in J$ distintos tais que $a = \sum_{k=1}^{n} r_k\, \mu(j_k)$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$. Definimos uma função $\delta : A \to B$ tal que $\delta(0) = 0$ e $\delta\Big(\sum_{k=1}^{n} r_k\, \mu(j_k)\Big) = \sum_{k=1}^{n} r_k^2\, \nu(j_k) + \sum_{\ell=2}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} r_k\, r_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] = \sum_{k} r_k^2\, \nu(j_k) + \sum_{k<\ell} r_k\, r_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)$, $\forall r_1, ..., r_n \in \mathbb{Z}^*$, $\forall j_1, ..., j_n \in J$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}^*$. Podemos escrever $\delta\Big(\sum_{k=1}^{n} r_k\, \mu(j_k)\Big) = \sum_{k=1}^{n} r_k^2\, \nu|_J(j_k) + \sum_{\ell=2}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} r_k\, r_\ell\ \nu|_{D_J}(j_k, j_\ell)\Big]$. Também, nessa definição está implícita a seguinte convenção: para $n = 1 \in \mathbb{N}^*$, definimos o símbolo $\sum_{\ell=2}^{1}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} r_k\, r_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] = 0$. Para $n \geqslant 2$ a definição desse símbolo de somatório é recursiva, como usual. Portanto, temos que $\delta\big(r\, \mu(j)\big) = r^2\, \nu(j)$, $\forall r \in \mathbb{Z}$, $\forall j \in J$. Em particular, $(\delta \circ \mu)(j) = \delta\big(\mu(j)\big) = \delta\big(1 \cdot \mu(j)\big) = 1^2 \cdot \nu(j) = \nu(j) = \nu|_J(j)$, $\forall j \in J$. Assim, $\delta \circ \mu = \nu|_J$. Seja $(i, j) \in D_J$. Então, $i, j \in J$ e $i < j$. Daí, $i \neq j$. Tome $m = 2$, $t_1 = 1 = t_2$, $i_1 = i$ e $i_2 = j$. Daí, $\mu(i) + \mu(j) = \sum_{k=1}^{m} t_k\, \mu(i_k)$. Como $\mu(i) + \mu(j) \in A$ e $im(\mu)$ é linearmente independente, então $\mu(i) + \mu(j) \neq 0$ e, portanto, existem únicos $r_1, ..., r_n \in \mathbb{Z}^*$ e únicos $j_1, ..., j_n \in J$ distintos tais que $\mu(i) + \mu(j) = \sum_{k=1}^{n} r_k\, \mu(j_k)$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$. Como i_1 e i_2 são distintos e t_1 e t_2 são não-nulos, por unicidade, ficamos com $n = m = 2$, $r_k = t_k$ e $j_k = i_k$, $\forall k \in \{1, ..., n\} = \{1, 2\}$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\delta\big(\mu(i) + \mu(j)\big) &= \delta\Big(\sum_{k=1}^{n} r_k\, \mu(j_k)\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} r_k^2\, \nu(j_k) + \sum_{\ell=2}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} r_k\, r_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] \\
&= \sum_{k=1}^{m} t_k^2\, \nu(i_k) + \sum_{\ell=2}^{m}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} t_k\, t_\ell\ \nu(i_k, i_\ell)\Big] \\
&= \sum_{k=1}^{2} 1^2 \cdot \nu(i_k) + \sum_{\ell=2}^{2}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} 1 \cdot 1 \cdot \nu(i_k, i_\ell)\Big] \\
&= \nu(i_1) + \nu(i_2) + \nu(i_1, i_2) \\
&= \nu(i) + \nu(j) + \nu(i, j)\,.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
(\Delta\delta \circ \tau)(i, j) &= \Delta\delta\big(\tau(i, j)\big) \\
&= \Delta\delta\big((\mu \times \mu)|_{D_J}(i, j)\big) \\
&= \Delta\delta\big((\mu \times \mu)(i, j)\big) \\
&= \Delta\delta\big(\mu(i), \mu(j)\big) \\
&= \delta\big(\mu(i) + \mu(j)\big) - \delta\big(\mu(i)\big) - \delta\big(\mu(j)\big) \\
&= [\nu(i) + \nu(j) + \nu(i, j)] - (\delta \circ \mu)(i) - (\delta \circ \mu)(j) \\
&= \nu(i) + \nu(j) + \nu(i, j) - \nu(i) - \nu(j) \\
&= \nu(i, j) \\
&= \nu|_{D_J}(i, j)\,.
\end{aligned}$$

Como (i,j) é qualquer, ficamos com $\Delta\delta\circ\tau=\nu|_{D_J}$.

Seja $a\in A$. Se $a=0$, então

$$(\varphi\circ\delta)(a)=\varphi\big(\delta(a)\big)=\varphi\big(\delta(0)\big)=\varphi(0)=0=\gamma(0)\,.$$

Se $a\neq 0$, então existem únicos $r_1,\ldots,r_n\in\mathbb{Z}^*$ e únicos $j_1,\ldots,j_n\in J$ distintos tais que $a=\sum\limits_{k=1}^{n}r_k\,\mu(j_k)$, para algum $n\in\mathbb{N}^*$. Daí, pela propriedade (ix) do teorema 4.1.7, temos que

$$\begin{aligned}
(\varphi\circ\delta)(a) &= \varphi\big(\delta(a)\big)\\
&= \varphi\Big(\delta\Big(\sum_{k=1}^{n}r_k\,\mu(j_k)\Big)\Big)\\
&= \varphi\Big(\sum_{k=1}^{n}r_k^2\,\nu(j_k)+\sum_{\ell=2}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1}r_k\,r_\ell\;\nu(j_k,j_\ell)\Big]\Big)\\
&= \varphi\Big(\sum_{k=1}^{n}r_k^2\,\nu(j_k)\Big)+\varphi\Big(\sum_{\ell=2}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1}r_k\,r_\ell\;\nu(j_k,j_\ell)\Big]\Big)\\
&= \sum_{k=1}^{n}r_k^2\,\varphi\big(\nu(j_k)\big)+\sum_{\ell=2}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1}r_k\,r_\ell\;\varphi\big(\nu(j_k,j_\ell)\big)\Big]\\
&= \sum_{k=1}^{n}r_k^2\,\varphi\big(\nu|_J(j_k)\big)+\sum_{\ell=2}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1}r_k\,r_\ell\;\varphi\big(\nu|_{D_J}(j_k,j_\ell)\big)\Big]\\
&= \sum_{k=1}^{n}r_k^2\,(\varphi\circ\nu|_J)(j_k)+\sum_{\ell=2}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1}r_k\,r_\ell\;(\varphi\circ\nu|_{D_J})(j_k,j_\ell)\Big]\\
&= \sum_{k=1}^{n}r_k^2\;f|_J(j_k)+\sum_{\ell=2}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1}r_k\,r_\ell\;f|_{D_J}(j_k,j_\ell)\Big]\\
&= \sum_{k=1}^{n}r_k^2\,(\gamma\circ\mu)(j_k)+\sum_{\ell=2}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1}r_k\,r_\ell\;(\Delta\gamma\circ\tau)(j_k,j_\ell)\Big]\\
&= \sum_{k=1}^{n}r_k^2\,\gamma\big(\mu(j_k)\big)+\sum_{\ell=2}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1}r_k\,r_\ell\;\Delta\gamma\big(\tau(j_k,j_\ell)\big)\Big]\\
&= \sum_{k=1}^{n}r_k^2\,\gamma\big(\mu(j_k)\big)+\sum_{\ell=2}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1}r_k\,r_\ell\;\Delta\gamma\big((\mu\times\mu)|_{D_J}(j_k,j_\ell)\big)\Big]\\
&= \sum_{k=1}^{n}r_k^2\,\gamma\big(\mu(j_k)\big)+\sum_{\ell=2}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1}r_k\,r_\ell\;\Delta\gamma\big((\mu\times\mu)(j_k,j_\ell)\big)\Big]\\
&= \sum_{k=1}^{n}r_k^2\,\gamma\big(\mu(j_k)\big)+\sum_{\ell=2}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1}r_k\,r_\ell\;\Delta\gamma\big(\mu(j_k),\mu(j_\ell)\big)\Big]\\
&= \gamma\Big(\sum_{k=1}^{n}r_k\,\mu(j_k)\Big)\\
&= \gamma(a)\,.
\end{aligned}$$

Como a é arbitrário, ficamos com $\varphi\circ\delta=\gamma$.

Para todos $a,b,c\in A$, se $0\in\{a,b,c\}$, então vale a seguinte igualdade $\delta(a+b+c)+\delta(a)+\delta(b)+\delta(c)=\delta(a+b)+\delta(a+c)+\delta(b+c)$. De fato, sem perda de generalidade, suponha que $c = 0$. Então,

$$\begin{aligned}
\delta(a+b+c) + \delta(a) + \delta(b) + \delta(c) &= \delta(a+b+0) + \delta(a) + \delta(b) + \delta(0) \\
&= \delta(a+b) + \delta(a) + \delta(b) + 0 \\
&= \delta(a+b) + \delta(a) + \delta(b) \\
&= \delta(a+b) + \delta(a+0) + \delta(b+0) \\
&= \delta(a+b) + \delta(a+c) + \delta(b+c)\,.
\end{aligned}$$

Agora, $\forall a, b, c \in A$, se $0 \notin \{a, b, c\}$, vamos mostrar que também vale a igualdade $\delta(a+b+c) + \delta(a) + \delta(b) + \delta(c) = \delta(a+b) + \delta(a+c) + \delta(b+c)$. Primeiramente, existem únicos $\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n, \tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_m, \tilde{z}_1, ..., \tilde{z}_q \in \mathbb{Z}^*$, $a_1, ..., a_n \in im(\mu)$ distintos, $b_1, ..., b_m \in im(\mu)$ distintos e $c_1, ..., c_q \in im(\mu)$ distintos tais que $a = \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{x}_k\, a_k$, $b = \sum\limits_{k=1}^{m} \tilde{y}_k\, b_k$ e $c = \sum\limits_{k=1}^{q} \tilde{z}_k\, c_k$, para certos $n, m, q \in \mathbb{N}^*$. Seja $\{a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m, c_1, ..., c_q\} = S = \{s_1, ..., s_p\} \subset im(\mu)$, em que $s_1, ..., s_p$ são distintos entre si. Então, existem únicos $j_1, ..., j_p \in J$ distintos tais que $s_k = \mu(j_k)$, $\forall k \in \{1, ..., p\}$. Também, temos que $\langle S \rangle \leqslant A$, que S é uma base livre de $\langle S \rangle$, que $rank(\langle S \rangle) = p \in \mathbb{N}^*$ é finito, que $3 \leqslant n + m + q \leqslant p$ e que $a, b, c \in \langle S \rangle$. Assim, $a+b+c$, $a+b$, $a+c$, $b+c \in \langle S \rangle$. Seja $u \in \langle S \rangle$. Então, existem únicos $r_1, ..., r_p \in \mathbb{Z}$ tais que $u = \sum\limits_{k=1}^{p} r_k\, s_k = \sum\limits_{k=1}^{p} r_k\, \mu(j_k)$. Afirmamos que $\delta(u) = \delta\Big(\sum\limits_{k=1}^{p} r_k\, s_k\Big) = \sum\limits_{k=1}^{p} r_k^2\, \nu(j_k) + \sum\limits_{\ell=2}^{p}\Big[\sum\limits_{k=1}^{\ell-1} r_k\, r_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] = \sum\limits_{k} r_k^2\, \nu(j_k) + \sum\limits_{k<\ell} r_k\, r_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)$. De fato, se $u = 0$, por definição $\delta(u) = 0$. Também, por unicidade, temos que $r_k = 0$, $\forall k \in \{1, ..., p\}$, e a igualdade é trivial. Se $u \neq 0$, então existem únicos $t_1, ..., t_n \in \mathbb{Z}^*$ e únicos $i_1, ..., i_n \in J$ distintos tais que $u = \sum\limits_{k=1}^{n} t_k\, \mu(i_k)$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$. Como $u \neq 0$, os coeficientes $r_1, ..., r_p$ não são todos nulos. Sem perda de generalidade, suponha que $r_1, ..., r_m$ são exatamente todos os coeficientes não-nulos da representação de u em S, para algum $m \in \mathbb{N}^*$, com $m \leqslant p$. Daí, $u = \sum\limits_{k=1}^{m} r_k\, \mu(j_k)$. Por unicidade e por serem $j_1, ..., j_m$ distintos entre si e $r_1, ..., r_m$ todos não-nulos, temos que $n = m \leqslant p$, $t_k = r_k$ e $i_k = j_k$, $\forall k \in \{1, ..., n\}$. Dessa forma, pela definição de δ e apagando os termos com coeficientes nulos, ficamos com

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p} r_k^2\, \nu(j_k) + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} r_k\, r_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] &= \sum_{k=1}^{n} r_k^2\, \nu(j_k) + \sum_{\ell=2}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} r_k\, r_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] \\
&= \sum_{k=1}^{n} t_k^2\, \nu(i_k) + \sum_{\ell=2}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} t_k\, t_\ell\ \nu(i_k, i_\ell)\Big] \\
&= \delta\Big(\sum_{k=1}^{n} t_k\, \mu(i_k)\Big) \\
&= \delta(u)\,.
\end{aligned}$$

Informalmente, dizemos que “completamos a fórmula para $\delta(u)$ com termos multiplicados por coeficientes nulos, até que estejam todos os elementos de S no somatório”.

Existem únicos $x_1, ..., x_p, y_1, ...y_p, z_1, ..., z_p \in \mathbb{Z}$ tais que $a = \sum\limits_{k=1}^{p} x_k\, \mu(j_k)$, $b = \sum\limits_{k=1}^{p} y_k\, \mu(j_k)$ e $c = \sum\limits_{k=1}^{p} z_k\, \mu(j_k)$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\delta(a+b) &= \delta\Big(\sum_{k=1}^{p} x_k\, \mu(j_k) + \sum_{k=1}^{p} y_k\, \mu(j_k)\Big) \\
&= \delta\Big(\sum_{k=1}^{p} (x_k + y_k)\, \mu(j_k)\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{p} (x_k + y_k)^2\, \nu(j_k) + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} (x_k + y_k)(x_\ell + y_\ell)\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] \\
&= \sum_{k=1}^{p} x_k^2\, \nu(j_k) + \sum_{k=1}^{p} y_k^2\, \nu(j_k) + 2\sum_{k=1}^{p} x_k\, y_k\ \nu(j_k) + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} x_k\, x_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] + \\
&\quad + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} x_k\, y_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} y_k\, x_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} y_k\, y_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] \\
&= \delta(a) + \delta(b) + 2\sum_{k=1}^{p} x_k\, y_k\ \nu(j_k) + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} x_k\, y_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} y_k\, x_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big]\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta(a+c) &= \delta\Big(\sum_{k=1}^{p} x_k\, \mu(j_k) + \sum_{k=1}^{p} z_k\, \mu(j_k)\Big) \\
&= \delta\Big(\sum_{k=1}^{p} (x_k + z_k)\, \mu(j_k)\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{p} (x_k + z_k)^2\, \nu(j_k) + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} (x_k + z_k)(x_\ell + z_\ell)\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] \\
&= \sum_{k=1}^{p} x_k^2\, \nu(j_k) + \sum_{k=1}^{p} z_k^2\, \nu(j_k) + 2\sum_{k=1}^{p} x_k\, z_k\ \nu(j_k) + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} x_k\, x_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] + \\
&\quad + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} x_k\, z_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} z_k\, x_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} z_k\, z_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] \\
&= \delta(a) + \delta(c) + 2\sum_{k=1}^{p} x_k\, z_k\ \nu(j_k) + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} x_k\, z_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} z_k\, x_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big]\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta(b+c) &= \delta\Big(\sum_{k=1}^{p} y_k\, \mu(j_k) + \sum_{k=1}^{p} z_k\, \mu(j_k)\Big) \\
&= \delta\Big(\sum_{k=1}^{p} (y_k + z_k)\, \mu(j_k)\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{p} (y_k + z_k)^2\, \nu(j_k) + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} (y_k + z_k)(y_\ell + z_\ell)\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] \\
&= \sum_{k=1}^{p} y_k^2\, \nu(j_k) + \sum_{k=1}^{p} z_k^2\, \nu(j_k) + 2\sum_{k=1}^{p} y_k\, z_k\ \nu(j_k) + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} y_k\, y_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] \\
&\quad + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} y_k\, z_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} z_k\, y_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} z_k\, z_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] \\
&= \delta(b) + \delta(c) + 2\sum_{k=1}^{p} y_k\, z_k\ \nu(j_k) + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} y_k\, z_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} z_k\, y_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big]\,;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\delta(a+b+c) &= \delta\Big(\sum_{k=1}^{p} x_k\,\mu(j_k) + \sum_{k=1}^{p} y_k\,\mu(j_k) + \sum_{k=1}^{p} z_k\,\mu(j_k)\Big) \\
&= \delta\Big(\sum_{k=1}^{p} (x_k + y_k + z_k)\,\mu(j_k)\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{p} (x_k + y_k + z_k)^2\,\nu(j_k) + \\
&\quad + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} (x_k + y_k + z_k)(x_\ell + y_\ell + z_\ell)\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] \\
&= \sum_{k=1}^{p} x_k^2\,\nu(j_k) + \sum_{k=1}^{p} y_k^2\,\nu(j_k) + \sum_{k=1}^{p} z_k^2\,\nu(j_k) + \\
&\quad + 2\sum_{k=1}^{p} x_k\,y_k\,\nu(j_k) + 2\sum_{k=1}^{p} x_k\,z_k\,\nu(j_k) + 2\sum_{k=1}^{p} y_k\,z_k\,\nu(j_k) + \\
&\quad + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} x_k\,x_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} x_k\,y_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} x_k\,z_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] + \\
&\quad + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} y_k\,x_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} y_k\,y_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} y_k\,z_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] + \\
&\quad + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} z_k\,x_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} z_k\,y_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} z_k\,z_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] \\
&= \delta(a) + \delta(b) + \delta(c) + \\
&\quad + 2\sum_{k=1}^{p} x_k\,y_k\,\nu(j_k) + 2\sum_{k=1}^{p} x_k\,z_k\,\nu(j_k) + 2\sum_{k=1}^{p} y_k\,z_k\,\nu(j_k) + \\
&\quad + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} x_k\,y_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} x_k\,z_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} y_k\,x_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] + \\
&\quad + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} y_k\,z_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} z_k\,x_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} z_k\,y_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big].
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\delta(a+b) + \delta(a+c) + \delta(b+c) &= \delta(a) + \delta(b) + \delta(c) + \\
&\quad + \delta(a) + \delta(b) + \delta(c) + 2\sum_{k=1}^{p} x_k\,y_k\ \nu(j_k) + \\
&\quad + 2\sum_{k=1}^{p} x_k\,z_k\ \nu(j_k) + 2\sum_{k=1}^{p} y_k\,z_k\ \nu(j_k) + \\
&\quad + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} x_k\,y_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} x_k\,z_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] + \\
&\quad + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} y_k\,x_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} y_k\,z_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] + \\
&\quad + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} z_k\,x_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] + \sum_{\ell=2}^{p}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} z_k\,y_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] \\
&= \delta(a) + \delta(b) + \delta(c) + \delta(a+b+c)\,.
\end{aligned}
$$

Portanto, pela proposição 4.1.2, $\Delta\delta$ é bilinear.

Seja $a \in A$. Se $a = 0$, então $\delta(-a) = \delta(-0) = \delta(0) = 0 = \delta(0) = \delta(a)$. Se $a \neq 0$, então existem únicos $r_1, ..., r_n \in \mathbb{Z}^*$ e únicos $j_1, ..., j_n \in J$ distintos tais que $a = \sum\limits_{k=1}^{n} r_k\, \mu(j_k)$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$. Daí, $-a = -\sum\limits_{k=1}^{n} r_k\, \mu(j_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-r_k)\, \mu(j_k)$. Também temos que $-a \neq 0$ e, portanto, existem únicos $t_1, ..., t_m \in \mathbb{Z}^*$ e únicos $i_1, ..., i_m \in J$ distintos tais que $-a = \sum\limits_{k=1}^{m} t_k\, \mu(i_k)$, para algum $m \in \mathbb{N}^*$. Como $j_1, ..., j_n$ são distintos e $-r_1, ..., -r_n$ são todos não-nulos, concluimos que $m = n$, $t_k = -r_k$ e $i_k = j_k$, $\forall k \in \{1, ..., n\}$. Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
\delta(-a) &= \delta\Big(\sum_{k=1}^{m} t_k\, \mu(i_k)\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{m} t_k^2\ \nu(i_k) + \sum_{\ell=2}^{m}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} t_k\, t_\ell\ \nu(i_k, i_\ell)\Big] \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-r_k)^2\, \nu(j_k) + \sum_{\ell=2}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} (-r_k)(-r_\ell)\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] \\
&= \sum_{k=1}^{n} r_k^2\, \nu(j_k) + \sum_{\ell=2}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} r_k\, r_\ell\ \nu(j_k, j_\ell)\Big] \\
&= \delta(a)\,.
\end{aligned}
$$

Assim, δ é uma função quadrática e, portanto, existe um único homomorfismo $\psi : \Gamma \to B$ tal que $\psi \circ \gamma = \delta$.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "\delta"'] & \Gamma \arrow[d, "\psi"] \\
& B
\end{tikzcd}
$$

Ficamos com os homomorfismos $id_B\,,\ \psi \circ \varphi : B \to B$ e $id_\Gamma\,,\ \varphi \circ \psi : \Gamma \to \Gamma$.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, bend right, "\gamma"'] & \Gamma \arrow[d, shift right, "id_\Gamma"'] \arrow[d, shift left, "\varphi\circ\psi"] \\
& \Gamma
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
J \cup D_J \arrow[r, "\nu"] \arrow[dr, bend right, "\nu"'] & B \arrow[d, shift right, "id_B"'] \arrow[d, shift left, "\psi\circ\varphi"] \\
& B
\end{tikzcd}
$$

É claro que $id_B \circ \nu = \nu$ e que $id_\Gamma \circ \gamma = \gamma$. Usando o item (i) da proposição

4.1.1, temos que

$$\begin{aligned}
(\psi \circ \varphi) \circ \nu &= \psi \circ (\varphi \circ \nu) \\
&= \psi \circ f \\
&= \psi \circ [(f|_J) \cup (f|_{D_J})] \\
&= (\psi \circ f|_J) \cup (\psi \circ f|_{D_J}) \\
&= [\psi \circ (\gamma \circ \mu)] \cup [\psi \circ (\Delta\gamma \circ \tau)] \\
&= [(\psi \circ \gamma) \circ \mu] \cup [(\psi \circ \Delta\gamma) \circ \tau] \\
&= (\delta \circ \mu) \cup [\Delta(\psi \circ \gamma) \circ \tau] \\
&= (\nu|_J) \cup (\Delta\delta \circ \tau) \\
&= (\nu|_J) \cup (\nu|_{D_J}) \\
&= \nu\,.
\end{aligned}$$

Assim, por unicidade, $\psi \circ \varphi = id_B$. Também, $(\varphi \circ \psi) \circ \gamma = \varphi \circ (\psi \circ \gamma) = \varphi \circ \delta = \gamma$. Novamente, por unicidade, ficamos com $\varphi \circ \psi = id_\Gamma$. Dessa forma, φ e ψ são isomorfismos, com $\psi = \varphi^{-1}$. Logo, $B \cong \Gamma$.

Como φ é um isomorfismo, é injetora e leva base em base. Daí, $\varphi[im(\nu)]$ é uma base livre de Γ. Como ν é injetora e $J \cap D_J = \varnothing$, então $im(\nu) = \nu[J] \cup \nu[D_J]$, em que $\nu[J] \cap \nu[D_J] = \varnothing$. Assim,

$$\begin{aligned}
\varphi[im(\nu)] &= \varphi\big[\nu[J] \cup \nu[D_J]\big] \\
&= \varphi\big[\nu[J]\big] \cup \varphi\big[\nu[D_J]\big] \\
&= im(\varphi \circ \nu|_J) \cup im(\varphi \circ \nu|_{D_J}) \\
&= im(f|_J) \cup im(f|_{D_J}) \\
&= im(\gamma \circ \mu) \cup im(\Delta\gamma \circ \tau) \\
&= im(\gamma \circ \mu) \cup \Delta\gamma\big[(\mu \times \mu)[D_J]\big]\,.
\end{aligned}$$

■

A afirmação mais fraca do teorema acima é que, se $J \cap D_J = \varnothing$, então $\Gamma^{\gamma}_{F(J)} \cong F(J \cup D_J)$. Nesse caso, só nos interessa as cardinalidades de J e de D_J. Assim, podemos considerar J disjunto de D_J, pois é fácil criar um conjunto com a mesma cardinalidade de J e disjunto de D_J. Ou então, para admitirmos uma classe maior de conjuntos, podemos enunciar o teorema na forma $\Gamma^{\gamma}_{F(J)} \cong F(J \sqcup D_J)$, em que $J \sqcup D_J$ é a união disjunta.

A afirmação mais forte do teorema acima é um método de encontrarmos uma base livre para o grupo quadrático universal Γ^{γ}_{A} se soubermos uma para A.

Exemplo 4.5.2. Como $\mathbb{Z}$ é livre, com base $\{1\}$, temos que $\Gamma^{\gamma}_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}$, em que $\{\gamma(1)\}$ é uma base de $\Gamma^{\gamma}_{\mathbb{Z}}$. Também, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é livre, com elemento neutro $(0,0)$ e base $\{(1,0),(0,1)\}$. Ordenamos $(0,1) < (1,0)$. Temos que

$$\begin{aligned}\Delta\gamma\big((0,1),(1,0)\big) &= \gamma\big((0,1)\cdot(1,0)\big) - \gamma(0,1) - \gamma(1,0)\\ &= \gamma(0,0) - \gamma(0,1) - \gamma(1,0)\\ &= -[\gamma(0,1)+\gamma(1,0)]\end{aligned}$$

Daí, $\Gamma^{\gamma}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, em que

$$\big\{\gamma(1,0),\gamma(0,1),\Delta\gamma\big((0,1),(1,0)\big)\big\} = \{\gamma(1,0),\gamma(0,1),-[\gamma(1,0)+\gamma(0,1)]\}$$

é uma base de $\Gamma^{\gamma}_{\mathbb{Z}}$. Daí, $\{\gamma(1,0),\gamma(0,1),\gamma(1,0)+\gamma(0,1)\}$ é uma base de $\Gamma^{\gamma}_{\mathbb{Z}}$. Em geral, $\Gamma^{\gamma}_{\mathbb{Z}^n} \cong \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Proposição 4.5.3. Sejam A, B, Γ e Λ grupos abelianos, $\gamma : A \to \Gamma$ e $\lambda : B \to \Lambda$ funções quadráticas tais que $\Gamma = \Gamma^{\gamma}_{A}$ e $\Lambda = \Gamma^{\lambda}_{B}$. Sejam também $f : A \to B$ um homomorfismo e $\Gamma^{\gamma\lambda}_{f} : \Gamma \to \Lambda$ seu homomorfismo induzido.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "f"'] & \Gamma^{\gamma}_{A} \arrow[d, "\Gamma^{\gamma\lambda}_{f}"] \\ B \arrow[r, "\lambda"'] & \Gamma^{\lambda}_{B} \end{tikzcd}$$

Temos que

(i) $\gamma[ker(f)] \subset ker(\Gamma^{\gamma\lambda}_{f}) \lhd \Gamma^{\gamma}_{A}$;

(ii) $\Delta\gamma\big[A\times ker(f)\big] \subset ker(\Gamma^{\gamma\lambda}_{f})$;

(iii) $\Delta\gamma\big[ker(f)\times A\big] \subset ker(\Gamma^{\gamma\lambda}_{f})$.

Daí, $\gamma[ker(f)] \cup \Delta\gamma\big[A\times ker(f)\big] \cup \Delta\gamma\big[ker(f)\times A\big] \subset ker(\Gamma^{\gamma\lambda}_{f}) \lhd \Gamma^{\gamma}_{A}$.

Demonstração: **(i)** Para todo $x \in \gamma[ker(f)]$, existe $a \in ker(f)$ tal que $x = \gamma(a)$. Como λ é quadrática,

$$\Gamma^{\gamma\lambda}_{f}(x) = \Gamma^{\gamma\lambda}_{f}\big(\gamma(a)\big) = (\Gamma^{\gamma\lambda}_{f}\circ\gamma)(a) = (\lambda\circ f)(a) = \lambda\big(f(a)\big) = \lambda(0) = 0\,.$$

Portanto, $x \in ker(\Gamma^{\gamma\lambda}_{f})$.

(ii) Como γ e λ são quadráticas, temos que $\Delta\gamma$ e $\Delta\lambda$ são bilineares. Como f e $\Gamma^{\gamma\lambda}_{f}$ são homomorfismos, pela proposição 4.1.1, segue que

$\Gamma_f^{\gamma\lambda} \circ \Delta\gamma = \Delta(\Gamma_f^{\gamma\lambda} \circ \gamma) = \Delta(\lambda \circ f) = \Delta\lambda \circ (f \times f)$ é bilinear. Assim, $\forall y \in \Delta\gamma\big[A\times ker(f)\big]$, existem $a \in A$ e $x \in ker(f)$, tais que $y = \Delta\gamma(a, x)$. Daí,

$$\begin{aligned} \Gamma_f^{\gamma\lambda}(y) &= \Gamma_f^{\gamma\lambda}\big(\Delta\gamma(a,x)\big) \\ &= (\Gamma_f^{\gamma\lambda} \circ \Delta\gamma)(a,x) \\ &= [\Delta\lambda \circ (f\times f)](a,x) \\ &= \Delta\lambda\big((f\times f)(a,x)\big) \\ &= \Delta\lambda\big(f(a), f(x)\big) \\ &= \Delta\lambda\big(f(a), 0\big) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Portanto, $y \in ker(\Gamma_f^{\gamma\lambda})$.

(iii) Usando a demonstração do item (ii) acima, $\forall y \in \Delta\gamma\big[ker(f)\times A\big]$, existem $a \in ker(f)$ e $x \in A$, tais que $y = \Delta\gamma(a, x)$. Daí,

$$\begin{aligned} \Gamma_f^{\gamma\lambda}(y) &= \Gamma_f^{\gamma\lambda}\big(\Delta\gamma(a,x)\big) \\ &= (\Gamma_f^{\gamma\lambda} \circ \Delta\gamma)(a,x) \\ &= [\Delta\lambda \circ (f\times f)](a,x) \\ &= \Delta\lambda\big((f\times f)(a,x)\big) \\ &= \Delta\lambda\big(f(a), f(x)\big) \\ &= \Delta\lambda\big(0, f(x)\big) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Portanto, $y \in ker(\Gamma_f^{\gamma\lambda})$. ■

Sejam A, B, Γ e Λ grupos abelianos, $\gamma : A \to \Gamma$ e $\lambda : B \to \Lambda$ funções quadráticas tais que $\Gamma = \Gamma_A^\gamma$ e $\Lambda = \Gamma_B^\lambda$. Sejam também $f : A \to B$ um homomorfismo, $\Gamma_f = \Gamma_f^{\gamma\lambda} : \Gamma \to \Lambda$ seu homomorfismo induzido, $D \subset A$ e $K \subset ker(f)$ tais que $\langle D\rangle = A$ e $\langle K\rangle = ker(f)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "f"'] & \Gamma_A^\gamma \arrow[d, "\Gamma_f^{\gamma\lambda}"] \\ B \arrow[r, "\lambda"'] & \Gamma_B^\lambda \end{tikzcd}$$

Como $D \subset A$ e $D \times K \subset A \times ker(f)$, pela proposição 4.5.3, temos que $\gamma[K] \cup \Delta\gamma[D\times K] \subset \gamma[ker(f)] \cup \Delta\gamma\big[A\times ker(f)\big] \subset ker(\Gamma_f^{\gamma\lambda})$. Daí, ficamos com $\langle \gamma[K] \cup \Delta\gamma[D\times K]\rangle \leqslant ker(\Gamma_f^{\gamma\lambda})$. Seja $\Gamma_0 = \langle \gamma[K] \cup \Delta\gamma[D \times K]\rangle$. Como Γ é abeliano, temos que $\Gamma_0 \lhd ker(\Gamma_f^{\gamma\lambda}) \lhd \Gamma$. É claro que, $\forall d \in D$, $\forall x, v \in K$, temos que $\gamma(x) \in \Gamma_0$ e que $\Delta\gamma(d, v) \in \Gamma_0$. Também, $\forall d \in D$, $\forall x, v \in K$, $\forall r, s \in \mathbb{Z}$, temos que $r\,\gamma(x) \in \Gamma_0$ e que $s\,\Delta\gamma(d, v) \in \Gamma_0$. Daí, para quaisquer

$n, m \in \mathbb{N}^*$, $\forall d_1, ..., d_m \in D$, $\forall x_1, ..., x_n, v_1, ..., v_m \in K$, $\forall r_1, ..., r_n, s_1, ..., s_m \in \mathbb{Z}$, temos que $\sum\limits_{k=1}^{n} r_k\, \gamma(x_k) \in \Gamma_0$ e que $\sum\limits_{k=1}^{m} s_k\, \Delta\gamma(d_k, v_k) \in \Gamma_0$. Consequentemente, para todos $n, m \in \mathbb{N}^*$, $\forall d_1, ..., d_m \in D$, $\forall x_1, ..., x_n, v_1, ..., v_m \in K$, $\forall r_1, ..., r_n, s_1, ..., s_m \in \mathbb{Z}$, temos que $\sum\limits_{k=1}^{n} r_k\, \gamma(x_k) + \sum\limits_{k=1}^{m} s_k\, \Delta\gamma(d_k, v_k) \in \Gamma_0$.

Primeiramente, note que $\gamma[ker(f)] \subset \Gamma_0$.

De fato, seja $x \in ker(f) = \langle K \rangle$. Assim, existem $x_1, ..., x_n \in K$ e $r_1, ..., r_n \in \mathbb{Z}$ tais que $x = \sum\limits_{k=1}^{n} r_k\, x_k$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$. Daí,

$$\gamma(x) = \gamma\Big(\sum_{k=1}^{n} r_k\, x_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} r_k^2\, \gamma(x_k) + \sum_{\ell=2}^{n} \Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} r_k\, r_\ell\, \Delta\gamma(x_k, x_\ell)\Big].$$

Mas, para todo $k \in \{1, ..., n\}$, é claro que $x_k \in A = \langle D \rangle$. Daí, para cada $k \in \{1, ..., n\}$, existe algum $q = q_k \in \mathbb{N}^*$ dependendo de k e existem $d_1^k, ..., d_q^k \in D$ e $t_1^k, ..., t_q^k \in \mathbb{Z}$ tais que $x_k = \sum\limits_{j=1}^{q} t_j^k\, d_j^k$. Dessa forma, ficamos com

$$\begin{aligned}\gamma(x) &= \sum_{k=1}^{n} r_k^2\, \gamma(x_k) + \sum_{\ell=2}^{n} \Big[\sum_{k=1}^{\ell-1} r_k\, r_\ell\, \Delta\gamma\Big(\sum_{j=1}^{q} t_j^k\, d_j^k\,,\, x_\ell\Big)\Big] \\ &= \sum_{k=1}^{n} r_k^2\, \gamma(x_k) + \sum_{\ell=2}^{n} \Big\{\sum_{k=1}^{\ell-1} \Big[\sum_{j=1}^{q} r_k\, r_\ell\, t_j^k\, \Delta\gamma(d_j^k, x_\ell)\Big]\Big\} \in \Gamma_0\,.\end{aligned}$$

pois $d_j^k \in D$, $\forall j \in \{1, ..., q_k\}$, e $x_k, x_\ell \in K$, $\forall k, \ell \in \{1, ..., n\}$. Como x é qualquer, concluimos o que queríamos.

Agora, observe que $\Delta\gamma[A \times ker(f)] \subset \Gamma_0$.

Com efeito, sejam $a \in A = \langle D \rangle$ e $x \in ker(f) = \langle K \rangle$. Assim, existem $x_1, ..., x_n \in K$, $d_1, ..., d_m \in D$ e $r_1, ..., r_n, s_1, ..., s_m \in \mathbb{Z}$ tais que $x = \sum\limits_{\ell=1}^{n} r_\ell\, x_\ell$ e $a = \sum\limits_{k=1}^{m} s_k\, d_k$, para certos $n, m \in \mathbb{N}^*$. Daí,

$$\Delta\gamma(a, x) = \Delta\gamma\Big(\sum_{k=1}^{m} s_k\, d_k\,,\, \sum_{\ell=1}^{n} r_\ell\, x_\ell\Big) = \sum_{k=1}^{m} \Big[\sum_{\ell=1}^{n} s_k\, r_\ell\, \Delta\gamma(d_k, x_\ell)\Big] \in \Gamma_0\,,$$

pois $d_k \in D$, $\forall k \in \{1, ..., m\}$, e $x_\ell \in K$, $\forall \ell \in \{1, ..., n\}$.

Assim, é fácil ver que, $\forall a, x \in A$, se $x \in ker(f)$, então $\gamma(a + x) - \gamma(a) \in \Gamma_0$. De fato, $\forall a \in A$, $\forall x \in ker(f)$, temos que $\gamma(a+x) - \gamma(a) = \Delta\gamma(a, x) + \gamma(x) \in \Gamma_0$, pois $\Delta\gamma(a, x) \in \Delta\gamma[A \times ker(f)] \subset \Gamma_0$ e $\gamma(x) \in \gamma[ker(f)] \subset \Gamma_0$. Como classes laterais, isso significa que $\gamma(a + x) + \Gamma_0 = \gamma(a) + \Gamma_0$, $\forall a \in A$, $\forall x \in ker(f)$.

Note que, $\forall a, c \in A$, como $f : A \to B$ é homomorfismo, se $f(a) = f(c)$, então existe $x \in ker(f)$ tal que $c = a + x$. Com efeito, tomando $x = c - a$, temos que $c = a + (c - a) = a + x$ e que $f(x) = f(c - a) = f(c) - f(a) = 0$ e, portanto, que $x \in ker(f)$. Assim, $\gamma(c) + \Gamma_0 = \gamma(a + x) + \Gamma_0 = \gamma(a) + \Gamma_0$. Concluimos que, $\forall a, c \in A$, se $f(a) = f(c)$, então as classes laterais coincidem $\gamma(c) + \Gamma_0 = \gamma(a) + \Gamma_0$.

Além disso, como $\Gamma_0 \leqslant ker(\Gamma_f)$, pelo teorema do isomorfismo, existe um único homomorfismo $g : \Gamma/\Gamma_0 \to \Lambda$ tal que $g \circ p = \Gamma_f$, em que $p : \Gamma \twoheadrightarrow \Gamma/\Gamma_0$ é a projeção canônica.

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "\Gamma_f"] \arrow[d, "p"'] & \Lambda \\ \Gamma/\Gamma_0 \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Como $\Gamma_f \circ \gamma = \lambda \circ f$, temos que $g \circ p \circ \gamma = \Gamma_f \circ \gamma = \lambda \circ f$. Também, temos que $ker(g) = ker(\Gamma_f)/\Gamma_0$ e que $g(z + \Gamma_0) = g\big(p(z)\big) = (g \circ p)(z) = \Gamma_f(z)$, $\forall z \in \Gamma$. Vamos denotar o grupo quociente Γ/Γ_0 por "Γ^*".

Agora, suponha que o homomorfismo $f : A \to B$ seja uma função sobrejetora em B, isto é, f é um epimorfismo de grupos. Novamente iremos utilizar uma afirmação equivalente ao axioma da escolha, a saber, que toda função sobrejetora tem uma inversa à direita, ou, equivalentemente, que a relação inversa $f^{-1} \subset B \times A$ tem um subconjunto que é uma função e tem mesmo domínio. Seja $u : B \to A$ uma inversa a direita de f. Então, $u \subset f^{-1}$, o domínio de u é $im(f) = B$ e $f \circ u = id_B$. Dessa forma, também temos que u é uma função injetora.

Para todo $m \in \mathbb{N}^*$, todos $b_1, ..., b_m \in B$ e todos $s_1, ..., s_m \in \mathbb{Z}$, temos que

$$\begin{aligned} f\Big(u\Big(\sum_{k=1}^{m} s_k\, b_k\Big)\Big) &= (f \circ u)\Big(\sum_{k=1}^{m} s_k\, b_k\Big) \\ &= id_B\Big(\sum_{k=1}^{m} s_k\, b_k\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{m} s_k\, b_k \\ &= \sum_{k=1}^{m} s_k\, id_B(b_k) \\ &= \sum_{k=1}^{m} s_k\, (f \circ u)(b_k) \\ &= \sum_{k=1}^{m} s_k\, f\big(u(b_k)\big) \\ &= f\Big(\sum_{k=1}^{m} s_k\, u(b_k)\Big)\,. \end{aligned}$$

Pelos parágrafos acima,

$$\begin{aligned}
(p\circ\gamma)\Big(u\Big(\sum_{k=1}^{m} s_k\, b_k\Big)\Big) &= p\Big(\gamma\Big(u\Big(\sum_{k=1}^{m} s_k\, b_k\Big)\Big)\Big)\\
&= \gamma\Big(u\Big(\sum_{k=1}^{m} s_k\, b_k\Big)\Big) + \Gamma_0\\
&= \gamma\Big(\sum_{k=1}^{m} s_k\, u(b_k)\Big) + \Gamma_0\\
&= p\Big(\gamma\Big(\sum_{k=1}^{m} s_k\, u(b_k)\Big)\Big)\\
&= (p\circ\gamma)\Big(\sum_{k=1}^{m} s_k\, u(b_k)\Big)\,.
\end{aligned}$$

Seja $\delta = p\circ\gamma\circ u : B \to \Gamma^*$. Daí, $\forall m\in\mathbb{N}^*$, $\forall b_1,\dots,b_m\in B$, $\forall s_1,\dots,s_m\in\mathbb{Z}$, temos que

$$\begin{aligned}
\delta\Big(\sum_{k=1}^{m} s_k\, b_k\Big) &= (p\circ\gamma\circ u)\Big(\sum_{k=1}^{m} s_k\, b_k\Big)\\
&= (p\circ\gamma)\Big(u\Big(\sum_{k=1}^{m} s_k\, b_k\Big)\Big)\\
&= (p\circ\gamma)\Big(\sum_{k=1}^{m} s_k\, u(b_k)\Big)\\
&= p\Big(\gamma\Big(\sum_{k=1}^{m} s_k\, u(b_k)\Big)\Big)\,.
\end{aligned}$$

Em particular, $\forall a,b,c\in A$, como γ é quadrática, colocando $\varpi = \delta(a+b+c)$, temos que

$$\begin{aligned}
\varpi &= \delta(a+b+c)\\
&= (p\circ\gamma\circ u)(a+b+c)\\
&= p\Big(\gamma\big(u(a+b+c)\big)\Big)\\
&= p\Big(\gamma\big(u(a)+u(b)+u(c)\big)\Big)\\
&= p\Big(\gamma\big(u(a)+u(b)\big)+\gamma\big(u(a)+u(c)\big)+\gamma\big(u(b)+u(c)\big)-\gamma\big(u(a)\big)-\gamma\big(u(b)\big)-\gamma\big(u(c)\big)\Big)\\
&= p\Big(\gamma\big(u(a+b)\big)+\gamma\big(u(a+c)\big)+\gamma\big(u(b+c)\big)-\gamma\big(u(a)\big)-\gamma\big(u(b)\big)-\gamma\big(u(c)\big)\Big)\\
&= p\Big(\gamma\big(u(a+b)\big)\Big)+p\Big(\gamma\big(u(a+c)\big)\Big)+p\Big(\gamma\big(u(b+c)\big)\Big)+\\
&\quad -p\Big(\gamma\big(u(a)\big)\Big)-p\Big(\gamma\big(u(b)\big)\Big)-p\Big(\gamma\big(u(c)\big)\Big)\\
&= (p\circ\gamma\circ u)(a+b)+(p\circ\gamma\circ u)(a+c)+(p\circ\gamma\circ u)(b+c)+\\
&\quad -(p\circ\gamma\circ u)(a)-(p\circ\gamma\circ u)(b)-(p\circ\gamma\circ u)(c)\\
&= \delta(a+b)+\delta(a+c)+\delta(b+c)-\delta(a)-\delta(b)-\delta(c)\,.
\end{aligned}$$

Portanto, pela proposição 4.1.2, $\Delta\delta$ é bilinear.

Também, $\forall b \in B$, temos que

$$\begin{aligned}
\delta(-b) &= (p \circ \gamma \circ u)(-b) \\
&= (p \circ \gamma)\big(u(-b)\big) \\
&= (p \circ \gamma)\big(-u(b)\big) \\
&= p\Big(\gamma\big(-u(b)\big)\Big) \\
&= p\Big(\gamma\big(u(b)\big)\Big) \\
&= (p \circ \gamma \circ u)(b) \\
&= \delta(b)\,.
\end{aligned}$$

Portanto, $\delta : B \to \Gamma^*$ é uma função quadrática. Assim, existe um único homomorfismo $h : \Lambda \to \Gamma^*$ tal que $h \circ \lambda = \delta = p \circ \gamma \circ u$.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "\delta"'] & \Lambda \arrow[d, "h"] \\
& \Gamma^*
\end{tikzcd}$$

Ficamos com os homomorfismos $id_\Lambda\,,\ g \circ h : \Lambda \to \Lambda$ tais que $id_\Lambda \circ \lambda = \lambda$ e

$$\begin{aligned}
(g \circ h) \circ \lambda &= g \circ (h \circ \lambda) \\
&= g \circ \delta \\
&= g \circ (p \circ \gamma \circ u) \\
&= (g \circ p) \circ (\gamma \circ u) \\
&= \Gamma_f \circ (\gamma \circ u) \\
&= (\Gamma_f \circ \gamma) \circ u \\
&= (\lambda \circ f) \circ u \\
&= \lambda \circ (f \circ u) \\
&= \lambda \circ id_B \\
&= \lambda\,.
\end{aligned}$$

Por unicidade, temos que $g \circ h = id_\Lambda$.

Agora, $\forall a \in A$, note que $f\Big(u\big(f(a)\big)\Big) = (f \circ u)\big(f(a)\big) = id_B\big(f(a)\big) = f(a)$ e, portanto, $\gamma\Big(u\big(f(a)\big)\Big) + \Gamma_0 = \gamma(a) + \Gamma_0$. Assim,

$$\begin{aligned}
[(p\circ\gamma)\circ(u\circ f)](a) &= (p\circ\gamma)\big((u\circ f)(a)\big)\\
&= (p\circ\gamma)\Big(u\big(f(a)\big)\Big)\\
&= p\bigg(\gamma\Big(u\big(f(a)\big)\Big)\bigg)\\
&= \gamma\Big(u\big(f(a)\big)\Big) + \Gamma_0\\
&= \gamma(a) + \Gamma_0\\
&= p\big(\gamma(a)\big)\\
&= (p\circ\gamma)(a)\,.
\end{aligned}$$

Daí, $(p\circ\gamma)\circ(u\circ f) = p\circ\gamma$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
(h\circ g)\circ(p\circ\gamma) &= h\circ(g\circ p)\circ\gamma\\
&= h\circ\Gamma_f\circ\gamma\\
&= h\circ(\Gamma_f\circ\gamma)\\
&= h\circ(\lambda\circ f)\\
&= (h\circ\lambda)\circ f\\
&= \delta\circ f\\
&= (p\circ\gamma\circ u)\circ f\\
&= (p\circ\gamma)\circ(u\circ f)\\
&= p\circ\gamma\,.
\end{aligned}$$

Seja $\zeta\in\Gamma^*$. Como $p:\Gamma\to\Gamma^*$ é epimorfismo, existe $x\in\Gamma$ tal que $\zeta = p(x) = x+\Gamma_0$. Mas, $\Gamma = \langle im(\gamma)\rangle$. Assim, existem $r_1,\dots,r_n\in\mathbb{Z}$ e $x_1,\dots,x_n\in im(\gamma)$ tais que $x = \sum_{k=1}^{n} r_k\,x_k$. Daí, para cada $k\in\{1,\dots,n\}$, existe $a_k\in A$ tal que $x_k = \gamma(a_k)$. Portanto, $x = \sum_{k=1}^{n} r_k\,\gamma(a_k)$. Dessa forma, $\zeta = p(x) = p\Big(\sum_{k=1}^{n} r_k\,\gamma(a_k)\Big) = \sum_{k=1}^{n} r_k\,p\big(\gamma(a_k)\big) = \sum_{k=1}^{n} r_k\,(p\circ\gamma)(a_k)$. Assim,

$$\begin{aligned}
(h\circ g)(\zeta) &= (h\circ g)\Big(\sum_{k=1}^{n} r_k\,(p\circ\gamma)(a_k)\Big)\\
&= \sum_{k=1}^{n} r_k\,(h\circ g)\big((p\circ\gamma)(a_k)\big)\\
&= \sum_{k=1}^{n} r_k\,[(h\circ g)\circ(p\circ\gamma)](a_k)\\
&= \sum_{k=1}^{n} r_k\,(p\circ\gamma)(a_k)\\
&= \zeta\\
&= id_{\Gamma^*}(\zeta)\,.
\end{aligned}$$

Como ζ é arbitrário, temos que $h \circ g = id_{\Gamma^*}$.

Logo, g e h são isomorfismos, $h = g^{-1}$ e $\Lambda \cong \Gamma^* = \Gamma/\Gamma_0$. Como g é injetora, também temos que $0 \cong ker(g) = ker(\Gamma_f)\big/\Gamma_0$. Como o elemento neutro de Γ^* é Γ_0, ficamos com $ker(\Gamma_f)\big/\Gamma_0 = \{\Gamma_0\}$. Portanto, $\Gamma_0 = ker(\Gamma_f)$. De fato, $\forall z \in ker(\Gamma_f)$, temos que $z + \Gamma_0 \in ker(\Gamma_f)\big/\Gamma_0 = \{\Gamma_0\}$. Daí, $z + \Gamma_0 = \Gamma_0$ e, portanto, $z = z - 0 \in \Gamma_0$.

Logo, $ker(\Gamma_f) = \Gamma_0 = \langle \gamma[K] \cup \Delta\gamma[D \times K] \rangle$ e provamos o seguinte resultado:

Proposição 4.5.4. Sejam A, B, Γ e Λ grupos abelianos, $\gamma : A \to \Gamma$ e $\lambda : B \to \Lambda$ funções quadráticas tais que $\Gamma = \Gamma^\gamma_A$ e $\Lambda = \Gamma^\lambda_B$. Sejam também $f : A \to B$ um epimorfismo, $\Gamma^{\gamma\lambda}_f : \Gamma \to \Lambda$ seu epimorfismo induzido, $D \subset A$ e $K \subset ker(f)$ tais que $\langle D \rangle = A$ e $\langle K \rangle = ker(f)$. Então, $ker(\Gamma^{\gamma\lambda}_f) = \langle \gamma[K] \cup \Delta\gamma[D \times K] \rangle$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "f"'] & \Gamma^\gamma_A \arrow[d, "\Gamma^{\gamma\lambda}_f"] \arrow[dr, bend left, "p"] & \\
B \arrow[r, "\lambda"'] & \Gamma^\lambda_B & \frac{\Gamma^\gamma_A}{ker(\Gamma^{\gamma\lambda}_f)} \arrow[l, "\cong"]
\end{tikzcd}$$

No diagrama acima, temos $\frac{\Gamma^\gamma_A}{ker(\Gamma^{\gamma\lambda}_f)} = \frac{\Gamma}{\Gamma_0} = \Gamma^* \cong \Lambda = \Gamma^\lambda_B$.

Seja B um grupo abeliano. Dizemos que "o grupo B tem apresentação abeliana $\langle J | K \rangle$" se, e somente se, B é isomorfo ao quociente $A/\!\langle K \rangle$, em que A é o grupo abeliano livre sobre J e $K \subset A$. Se A é o grupo abeliano livre sobre J e $K \subset A$, definimos $\langle J | K \rangle = A/\!\langle K \rangle$.

Corolário 4.5.5. Sejam B um grupo abeliano, com o grupo quadrático universal Γ^λ_B, com a função quadrática $\lambda : B \to \Gamma^\lambda_B$ e com apresentação abeliana $B \cong \langle J | K \rangle = A/\!\langle K \rangle$, em que A é o grupo abeliano livre sobre J, com a função $\mu : J \to A$, e $K \subset A$. Suponha que J esteja totalmente ordenado por alguma boa-ordem estrita qualquer e seja D_J seu bloco triangular inferior. Considere também o grupo quadrático universal Γ^γ_A do grupo abeliano A, com a função quadrática $\gamma : A \to \Gamma^\gamma_A$. Se $J \cap D_J = \varnothing$, então, Γ^λ_B tem apresentação abeliana

$$\Gamma^\lambda_B \cong \Big\langle im(\gamma \circ \mu) \cup \Delta\gamma\big[(\mu \times \mu)[D_J]\big] \,\Big|\, \gamma[K] \cup \Delta\gamma\big[\mu[J] \times K\big] \Big\rangle .$$

Demonstração: Sejam $C = \langle J | K \rangle = A/\!\langle K \rangle$, com grupo quadrático universal Γ^ω_C, com a função quadrática $\omega : C \to \Gamma^\omega_C$, a projeção canônica $f : A \twoheadrightarrow C$ e $u : C \to B$ um isomorfismo. Daí, f é um epimorfismo e $ker(f) = \langle K \rangle$. Pela seção anterior, existem únicos homomorfismos $\Gamma^{\omega\lambda}_u : \Gamma^\omega_C \to \Gamma^\lambda_B$ e $\Gamma^{\gamma\omega}_f : \Gamma^\gamma_A \to \Gamma^\omega_C$ tais que $\Gamma^{\omega\lambda}_u \circ \omega = \lambda \circ u$ e $\Gamma^{\gamma\omega}_f \circ \gamma = \omega \circ f$. Além disso, $\Gamma^{\omega\lambda}_u$ é um isomorfismo e $\Gamma^{\gamma\omega}_f$ é um epimorfismo.

Pelo teorema 4.5.1, Γ_A^γ é o grupo livre sobre o conjunto $J \cup D_J$, com a função $(\gamma \circ \mu) \cup [\Delta\gamma \circ (\mu{\times}\mu)|_{D_J}] : J \cup D_J \to \Gamma_A^\gamma$. Assim, $(\gamma \circ \mu) \cup [\Delta\gamma \circ (\mu{\times}\mu)|_{D_J}]$ é uma função injetora, com imagem $N = im(\gamma \circ \mu) \cup \Delta\gamma\big[(\mu{\times}\mu)[D_J]\big]$ tal que N é uma base livre para $\Gamma_A^\gamma = \langle N \rangle$. Como $\langle \mu[J] \rangle = A$, pela proposição 4.5.4, temos que $ker(\Gamma_f^{\gamma\omega}) = \big\langle \gamma[K] \cup \Delta\gamma\big[\mu[J] \times K\big] \big\rangle$ e que $\Gamma^* = \frac{\Gamma_A^\gamma}{ker(\Gamma_f^{\gamma\omega})} \cong \Gamma_C^\omega$.

$$\begin{tikzcd}
J \arrow[r, "\mu"] & A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "f"'] & \Gamma_A^\gamma \arrow[d, "\Gamma_f^{\gamma\omega}"] \arrow[dr, bend left, "p"] & \\
& C \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "u"', "\cong"] & \Gamma_C^\omega \arrow[d, "\Gamma_u^{\omega\lambda}", "\cong"'] & \frac{\Gamma_A^\gamma}{ker(\Gamma_f^{\gamma\omega})} \arrow[l, "\cong"'] \\
& B \arrow[r, "\lambda"'] & \Gamma_B^\lambda &
\end{tikzcd}$$

No diagrama acima, $p : \Gamma_A^\gamma \twoheadrightarrow \Gamma^*$ é a projeção canônica.

Como $\Gamma_B^\lambda \cong \Gamma_C^\omega \cong \Gamma^* = \frac{\Gamma_A^\gamma}{ker(\Gamma_f^{\gamma\omega})} = \Big\langle N \,\Big|\, \gamma[K] \cup \Delta\gamma\big[\mu[J] \times K\big] \Big\rangle$, o resultado segue. ■

Exemplo 4.5.6. Seja A um grupo abeliano, gerado por um elemento $a \in A$ e com um único relator $ma \in A$, em que $m \in \mathbb{N}^*$. Ou seja, $A \cong \mathbb{Z}_m$. Sejam Γ_A^γ seu grupo quadrático universal, com a função quadrática $\gamma : A \to \Gamma_A^\gamma$. Pelo corolário acima, Γ_A^γ é gerado por um elemento $\gamma(a) \in \Gamma_A^\gamma$, e tem os relatores $\gamma(ma) = m^2\,\gamma(a)$ e $\Delta\gamma(a, ma) = m\,\Delta\gamma(a, a) = 2m\,\gamma(a)$. Isto é, $m^2\,\gamma(a) = 0$ e $2m\,\gamma(a) = 0$, isto é, $d\,\gamma(a) = 0$, em que $d = mdc(m^2, 2m)$. Como $d = m$, se m é ímpar e $d = 2m$, se m é par, então $\Gamma_A^\gamma = \langle \gamma(a) \,|\, m\,\gamma(a) \rangle$, se m é ímpar e $\Gamma_A^\gamma = \langle \gamma(a) \,|\, 2m\,\gamma(a) \rangle$, se m é par. Ou seja, temos

$$\mathsf{\Gamma}_0(\mathbb{Z}_m) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_m\,, & m \text{ ímpar ;} \\ \mathbb{Z}_{2m}\,, & m \text{ par .} \end{cases}$$

Teorema 4.5.7. Sejam J um conjunto bem-ordenado, D_J seu bloco triangular inferior, $\{A_p\}_{p\in J}$ uma família de grupos abelianos, cada um com seu grupo quadrático universal $\Gamma_p = \Gamma(A_p)$, com sua respectiva função quadrática $\gamma_p : A_p \to \Gamma_p$. Sejam também a soma direta dessa família de grupos $A = \bigoplus_{p\in J} A_p$, com seu grupo quadrático universal $\Gamma = \Gamma(A)$, com a função quadrática $\gamma : A \to \Gamma$. A cada par $(i, j) \in D_J$, seja $A_i \otimes_{\mathbb{Z}} A_j$ o produto tensorial abeliano de A_i com A_j, com a função bilinear $\beta_{ij} : A_i \times A_j \to A_i \otimes_{\mathbb{Z}} A_j$. Assim, temos que

$$\Gamma\Big(\bigoplus_{p\in J} A_p\Big) \cong \Big[\bigoplus_{p\in J} \Gamma(A_p)\Big] \oplus \Big[\bigoplus_{i<j} (A_i \otimes_{\mathbb{Z}} A_j)\Big] .$$

Em que indicamos a soma direta no conjunto D_J por meio do subscrito "$i<j$" acima, no qual está implícito a indexação em J.

Demonstração: Para cada $p \in J$, seja o monomorfismo $\imath_p : A_p \to A$ "inclusão nas coordenadas" e, para cada par $(i,j) \in D_J$, seu produto cartesiano $\imath_i \times \imath_j : A_i \times A_j \to A \times A$. Assim, para cada $p \in J$ e cada $(i,j) \in D_J$, como $\Delta\gamma : A \times A \to \Gamma$ é bilinear, então $\Delta\gamma \circ (\imath_i \times \imath_j) : A_i \times A_j \to \Gamma$ é bilinear. Daí, existem únicos homomorfismos $\Gamma(\imath_p) = \bar{\imath}_p : \Gamma_p \to \Gamma$ e $\sigma_{ij} : A_i \otimes_{\mathbb{Z}} A_j \to \Gamma$ tais que $\bar{\imath}_p \circ \gamma_p = \gamma \circ \imath_p$ e $\sigma_{ij} \circ \beta_{ij} = \Delta\gamma \circ (\imath_i \times \imath_j)$.

$$\begin{tikzcd} A_p \arrow[r, "\gamma_p"] \arrow[d, "\imath_p"'] & \Gamma_p \arrow[d, "\bar{\imath}_p"] \\ A \arrow[r, "\gamma"'] & \Gamma \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A_i \times A_j \arrow[r, "\beta_{ij}"] \arrow[d, "\imath_i \times \imath_j"'] & A_i \otimes_{\mathbb{Z}} A_j \arrow[d, "\sigma_{ij}"] \\ A \times A \arrow[r, "\Delta\gamma"'] & \Gamma \end{tikzcd}$$

Diferentemente de Grp, em Ab a soma direta (produto direto) é um coproduto e, portanto, esses homomorfismos induzem um homomorfismo

$$\psi = (\oplus_p \bar{\imath}_p) \oplus (\oplus_{i<j} \sigma_{ij}) : (\oplus_p \Gamma_p) \oplus [\oplus_{i<j} (A_i \otimes_{\mathbb{Z}} A_j)] \to \Gamma$$

tal que, sem repetir os termos,

$$\begin{aligned} \psi\Big(\sum_{p\in J} r_p\, \gamma_p(a_p) + \sum_{i<j} s_{ij}\,(a_i \otimes a_j)\Big) &= [(\oplus_p \bar{\imath}_p) \oplus (\oplus_{i<j} \sigma_{ij})]\Big(\sum_{p\in J} r_p\, \gamma_p(a_p) + \sum_{i<j} s_{ij}\,(a_i \otimes a_j)\Big) \\ &= \sum_{p\in J} r_p\, \bar{\imath}_p\big(\gamma_p(a_p)\big) + \sum_{i<j} s_{ij}\, \sigma_{ij}(a_i \otimes a_j) \\ &= \sum_{p\in J} r_p\, \bar{\imath}_p\big(\gamma_p(a_p)\big) + \sum_{i<j} s_{ij}\, \sigma_{ij}\big(\beta_{ij}(a_i, a_j)\big) \\ &= \sum_{p\in J} r_p\, (\bar{\imath}_p \circ \gamma_p)(a_p) + \sum_{i<j} s_{ij}\, (\sigma_{ij} \circ \beta_{ij})(a_i, a_j) \\ &= \sum_{p\in J} r_p\, (\gamma \circ \imath_p)(a_p) + \sum_{i<j} s_{ij}\, [\Delta\gamma \circ (\imath_i \times \imath_j)](a_i, a_j) \\ &= \sum_{p\in J} r_p\, \gamma\big(\imath_p(a_p)\big) + \sum_{i<j} s_{ij}\, \Delta\gamma\big(\imath_i(a_i), \imath_j(a_j)\big) \\ &= \sum_{p\in J} r_p\, \gamma(a_p) + \sum_{i<j} s_{ij}\, \Delta\gamma(a_i, a_j)\,. \end{aligned}$$

Admitindo a repetição dos termos, ficamos com

$$\psi\Big(\sum_{p\in J} \gamma_p(a_p) + \sum_{i<j} (a_i \otimes a_j)\Big) = \sum_{p\in J} \gamma(a_p) + \sum_{i<j} \Delta\gamma(a_i, a_j)\,.$$

Seja também $\delta : A \to (\oplus_p \Gamma_p) \oplus [\oplus_{i<j} (A_i \otimes_{\mathbb{Z}} A_j)]$ tal que, sem repetir termos,

$$\delta\Big(\sum_{p\in J} r_p\, a_p\Big) = \sum_{p\in J} r_p^2\, \gamma_p(a_p) + \sum_{i<j} r_i\, r_j\, (a_i \otimes a_j)\,.$$

Escrevendo os termos admitindo repetições, ficamos com

$$\delta\Big(\sum_{p\in J} a_p\Big) = \sum_{p\in J} \gamma_p(a_p) + \sum_{i<j} (a_i \otimes a_j)\,.$$

Da mesma forma que fizemos para a função δ definida na demonstração do teorema 4.5.1, podemos demonstrar que $\Delta\delta$ é bilinear. É fácil ver que $\delta(-x) = \delta(x)$, $\forall x \in A$. Assim, δ é quadrática e, portanto, existe um único homomorfismo $\varphi : \Gamma \to (\oplus_p \Gamma_p) \oplus [\oplus_{i<j}(A_i \otimes_{\mathbb{Z}} A_j)]$ tal que $\varphi \circ \gamma = \delta$. Assim,

$$\begin{aligned}
(\psi \circ \delta)\Big(\sum_{p\in J} a_p\Big) &= \psi\bigg(\delta\Big(\sum_{p\in J} a_p\Big)\bigg) \\
&= \psi\Big(\sum_{p\in J}\gamma_p(a_p) + \sum_{i<j}(a_i \otimes a_j)\Big) \\
&= \sum_{p\in J}\gamma(a_p) + \sum_{i<j}\Delta\gamma(a_i, a_j) \\
&= \gamma\Big(\sum_{p\in J} a_p\Big).
\end{aligned}$$

Daí, $\psi \circ \delta = \gamma$. Portanto, $(\psi \circ \varphi) \circ \gamma = \psi \circ (\varphi \circ \gamma) = \psi \circ \delta = \gamma$ e, por unicidade, $\psi \circ \varphi = id_\Gamma$. Também, temos que

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ \psi)\Big(\sum_{p\in J}\gamma_p(a_p) + \sum_{i<j}(a_i \otimes a_j)\Big) &= \varphi\bigg(\psi\Big(\sum_{p\in J}\gamma_p(a_p) + \sum_{i<j}(a_i \otimes a_j)\Big)\bigg) \\
&= \varphi\Big(\sum_{p\in J}\gamma(a_p) + \sum_{i<j}\Delta\gamma(a_i, a_j)\Big) \\
&= \sum_{p\in J}\varphi\big(\gamma(a_p)\big) + \sum_{i<j}\varphi\big(\Delta\gamma(a_i, a_j)\big) \\
&= \sum_{p\in J}(\varphi \circ \gamma)(a_p) + \sum_{i<j}(\varphi \circ \Delta\gamma)(a_i, a_j) \\
&= \sum_{p\in J}(\varphi \circ \gamma)(a_p) + \sum_{i<j}[\Delta(\varphi \circ \gamma)](a_i, a_j) \\
&= \sum_{p\in J}\delta(a_p) + \sum_{i<j}\Delta\delta(a_i, a_j) \\
&= \delta\Big(\sum_{p\in J} a_p\Big) \\
&= \sum_{p\in J}\gamma_p(a_p) + \sum_{i<j}(a_i \otimes a_j) \\
&= id\Big(\sum_{p\in J}\gamma_p(a_p) + \sum_{i<j}(a_i \otimes a_j)\Big).
\end{aligned}$$

Dessa forma, $\varphi \circ \psi = id$ é o homomorfismo identidade de $(\oplus_p \Gamma_p) \oplus [\oplus_{i<j}(A_i \otimes_{\mathbb{Z}} A_j)]$. Assim, ψ e φ são isomorfismos, com $\varphi = \psi^{-1}$. Logo, $\Gamma \cong (\oplus_p \Gamma_p) \oplus [\oplus_{i<j}(A_i \otimes_{\mathbb{Z}} A_j)]$, como queríamos. ■

Seja G um grupo e $G^{ab} = G/G'$ o abelianizado de G. Vamos denotar um elemento de G^{ab} por $\bar{g} = g \cdot G' = G' \cdot g$, $\forall g \in G$. Considere o grupo G agindo em si mesmo por conjugação e seja $G \otimes G$ o quadrado tensorial de G, com o pareamento cruzado $\tau_0 : G \times G \to G \otimes G$ com respeito à conjugação de G, ambos construidos em capítulos anteriores. Sejam também $\Gamma(G^{ab}) = \mathsf{\Gamma}_0(G^{ab})$ o grupo quadrático universal de G^{ab}, com a função quadrática $\gamma_0 : G^{ab} \to \Gamma(G^{ab})$ construidos anteriormente. Então, $G\otimes G = \langle im(\tau_0)\rangle = Sp\big(im(\tau_0)\big)$ e $\Gamma(G^{ab}) = \langle im(\gamma_0)\rangle$.

Seja um conjunto $\delta \subset G^{ab}\times(G\otimes G)$ tal que, $\forall g \in G$, $\forall t \in G\otimes G$, temos que $(\bar{g}, t) \in \delta$ se, e somente se, existe $a \in \bar{g}$ tal que $t = \tau_0(a, a) = a\otimes a$, isto é, se, e somente se, $t = a\otimes a$ e $\bar{a} = \bar{g}$. É claro que, $\forall g \in G$, temos $(\bar{g}, g\otimes g) \in \delta$ e, portanto, $\bar{g} \in dom(\delta)$. Assim, $G^{ab} \subset dom(\delta)$. Daí, $dom(\delta) = G^{ab}$. Sejam $g \in G$ e $u, v \in G\otimes G$ tais que $(\bar{g}, u), (\bar{g}, v) \in \delta$. Então, existem $a, b \in \bar{g} = g \cdot G'$ tais que $u = a\otimes a$ e $v = b\otimes b$. Assim, existem $c, d \in G'$ tais que $a = g \cdot c$ e $b = g \cdot d$. Pela proposição 3.5.8, temos que $u = a\otimes a = gc\otimes gc = g\otimes g = gd\otimes gd = b\otimes b = v$. Como u e v são quaisquer, δ é uma função da forma $\delta : G^{ab} \to G\otimes G$ tal que $\delta(\bar{g}) = g\otimes g$, $\forall g \in G$.

Sejam $e \in G$ o elemento neutro de G e $\kappa_1 : G\otimes G \to G'$ o homomorfismo comutador do quadrado tensorial. Então, $ker(\kappa_1) = J_2(G) \lhd Z(G\otimes G) \lhd G\otimes G$ e $\kappa_1(a\otimes b) = [a, b] = aba^{-1}b^{-1}$, $\forall a, b \in G$. Note que $im(\delta) \subset J_2(G)$. De fato, $\forall g \in G$, temos que $\kappa_1\big(\delta(\bar{g})\big) = \kappa_1(g\otimes g) = ggg^{-1}g^{-1} = e$. Daí, $\delta(\bar{g}) \in ker(\kappa_1) = J_2(G)$. Portanto, δ é uma função da forma $\delta : G^{ab} \to J_2(G)$ e $J_2(G)$ é um grupo abeliano.

Pelas quinta e sexta igualdades do item (v) do teorema 2.4.1, $\forall g \in G$, temos que

$$\begin{aligned}
\delta(-\bar{g}) &= \delta\big(\overline{g^{-1}}\big)\\
&= g^{-1}\otimes g^{-1}\\
&= g^{-1}\otimes gg^{-1}g^{-1}\\
&= g^{-1}\otimes {}^{g}(g^{-1})\\
&= (g\otimes g^{-1})^{-1}\\
&= (ggg^{-1}\otimes g^{-1})^{-1}\\
&= ({}^{g}g\otimes g^{-1})^{-1}\\
&= [(g\otimes g)^{-1}]^{-1}\\
&= g\otimes g\\
&= \delta(\bar{g})\,.
\end{aligned}$$

Como sabemos, G age trivialmente em $J_2(G) = ker(\kappa_1)$ e todo elemento de $J_2(G)$ comuta com todo elemento de $G\otimes G$. Portanto, $\forall a, b, c \in G$, colocando

$\varpi = \delta(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})+\delta(\bar{a})+\delta(\bar{b})+\delta(\bar{c})$, temos que

$$\begin{aligned}
\varpi &= \delta(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})+\delta(\bar{a})+\delta(\bar{b})+\delta(\bar{c}) \\
&= \delta\big(\overline{abc}\big)\cdot\delta(\bar{a})\cdot\delta(\bar{b})\cdot\delta(\bar{c}) \\
&= (abc\otimes abc)\cdot\delta(\bar{a})\cdot\delta(\bar{b})\cdot\delta(\bar{c}) \\
&= {}^{a}(bc\otimes abc)\cdot(a\otimes abc)\cdot\delta(\bar{a})\cdot\delta(\bar{b})\cdot\delta(\bar{c}) \\
&= {}^{a}[(bc\otimes a)\cdot{}^{a}(bc\otimes bc)]\cdot(a\otimes a)\cdot{}^{a}(a\otimes bc)\cdot\delta(\bar{a})\cdot\delta(\bar{b})\cdot\delta(\bar{c}) \\
&= {}^{a}(bc\otimes a)\cdot{}^{a^2}(bc\otimes bc)\cdot(a\otimes a)\cdot{}^{a}(a\otimes bc)\cdot\delta(\bar{a})\cdot\delta(\bar{b})\cdot\delta(\bar{c}) \\
&= {}^{a}(bc\otimes a)\cdot{}^{a^2}\delta(\overline{bc})\cdot\delta(\bar{a})\cdot{}^{a}(a\otimes bc)\cdot\delta(\bar{a})\cdot\delta(\bar{b})\cdot\delta(\bar{c}) \\
&= {}^{a}(bc\otimes a)\cdot\delta(\overline{bc})\cdot\delta(\bar{a})\cdot{}^{a}(a\otimes bc)\cdot\delta(\bar{a})\cdot\delta(\bar{b})\cdot\delta(\bar{c}) \\
&= {}^{a}[{}^{b}(c\otimes a)\cdot(b\otimes a)]\cdot\delta(\overline{bc})\cdot\delta(\bar{a})\cdot{}^{a}(a\otimes bc)\cdot\delta(\bar{a})\cdot\delta(\bar{b})\cdot\delta(\bar{c}) \\
&= {}^{ab}(c\otimes a)\cdot{}^{a}(b\otimes a)\cdot\delta(\overline{bc})\cdot\delta(\bar{a})\cdot{}^{a}(a\otimes bc)\cdot\delta(\bar{a})\cdot\delta(\bar{b})\cdot\delta(\bar{c}) \\
&= {}^{ab}(c\otimes a)\cdot{}^{a}(b\otimes a)\cdot\delta(\overline{bc})\cdot\delta(\bar{a})\cdot{}^{a}[(a\otimes b)\cdot{}^{b}(a\otimes c)]\cdot \\
&\quad\cdot\delta(\bar{a})\cdot\delta(\bar{b})\cdot\delta(\bar{c}) \\
&= {}^{ab}(c\otimes a)\cdot{}^{a}(b\otimes a)\cdot\delta(\overline{bc})\cdot\delta(\bar{a})\cdot{}^{a}(a\otimes b)\cdot{}^{ab}(a\otimes c)\cdot \\
&\quad\cdot\delta(\bar{a})\cdot\delta(\bar{b})\cdot\delta(\bar{c}) \\
&= {}^{ab}(c\otimes a)\cdot{}^{a}(b\otimes a)\cdot\delta(\overline{bc})\cdot[(a\otimes a)\cdot{}^{a}(a\otimes b)]\cdot{}^{ab}(a\otimes c)\cdot \\
&\quad\cdot\delta(\bar{a})\cdot\delta(\bar{b})\cdot\delta(\bar{c}) \\
&= {}^{ab}(c\otimes a)\cdot{}^{a}(b\otimes a)\cdot\delta(\overline{bc})\cdot(a\otimes ab)\cdot{}^{ab}(a\otimes c)\cdot \\
&\quad\cdot\delta(\bar{a})\cdot\delta(\bar{b})\cdot\delta(\bar{c}) \\
&= {}^{ab}(c\otimes a)\cdot{}^{a}(b\otimes a)\cdot\delta(\bar{b})\cdot\delta(\overline{bc})\cdot(a\otimes ab)\cdot \\
&\quad\cdot{}^{ab}(a\otimes c)\cdot\delta(\bar{a})\cdot\delta(\bar{c}) \\
&= {}^{ab}(c\otimes a)\cdot{}^{a}(b\otimes a)\cdot{}^{a^2}\delta(\bar{b})\cdot\delta(\overline{bc})\cdot(a\otimes ab)\cdot \\
&\quad\cdot{}^{ab}(a\otimes c)\cdot\delta(\bar{a})\cdot\delta(\bar{c}) \\
&= {}^{ab}(c\otimes a)\cdot{}^{a}(b\otimes a)\cdot{}^{a^2}(b\otimes b)\cdot\delta(\overline{bc})\cdot(a\otimes ab)\cdot \\
&\quad\cdot{}^{ab}(a\otimes c)\cdot\delta(\bar{a})\cdot\delta(\bar{c}) \\
&= {}^{ab}(c\otimes a)\cdot{}^{a}[(b\otimes a)\cdot{}^{a}(b\otimes b)]\cdot\delta(\overline{bc})\cdot(a\otimes ab)\cdot \\
&\quad\cdot{}^{ab}(a\otimes c)\cdot\delta(\bar{a})\cdot\delta(\bar{c}) \\
&= {}^{ab}(c\otimes a)\cdot{}^{a}(b\otimes ab)\cdot\delta(\overline{bc})\cdot(a\otimes ab)\cdot \\
&\quad\cdot{}^{ab}(a\otimes c)\cdot\delta(\bar{a})\cdot\delta(\bar{c}) \\
&= {}^{ab}(c\otimes a)\cdot[{}^{a}(b\otimes ab)\cdot(a\otimes ab)]\cdot\delta(\overline{bc})\cdot \\
&\quad\cdot{}^{ab}(a\otimes c)\cdot\delta(\bar{a})\cdot\delta(\bar{c}) \\
&= {}^{ab}(c\otimes a)\cdot(ab\otimes ab)\cdot\delta(\overline{bc})\cdot{}^{ab}(a\otimes c)\cdot\delta(\bar{a})\cdot\delta(\bar{c}) \\
&= {}^{ab}(c\otimes a)\cdot\delta(\overline{ab})\cdot\delta(\overline{bc})\cdot{}^{ab}(a\otimes c)\cdot\delta(\bar{a})\cdot\delta(\bar{c}) \\
&= \delta(\overline{ab})\cdot\delta(\overline{bc})\cdot{}^{ab}(c\otimes a)\cdot{}^{ab}(a\otimes c)\cdot\delta(\bar{a})\cdot\delta(\bar{c})\,.
\end{aligned}$$

Usando o item (vi) do teorema 2.4.1, continuamos as igualdades:

$$
\begin{aligned}
\varpi &= \delta(\overline{ab}) \cdot \delta(\overline{bc}) \cdot {}^{ab}(c \otimes a) \cdot {}^{ab}(a \otimes c) \cdot \delta(\bar{a}) \cdot \delta(\bar{c}) \\
&= \delta(\overline{ab}) \cdot \delta(\overline{bc}) \cdot (a \otimes b) \cdot {}^{ba}(c \otimes a) \cdot (a \otimes b)^{-1} \cdot \\
&\quad \cdot (a \otimes b) \cdot {}^{ba}(a \otimes c) \cdot (a \otimes b)^{-1} \cdot \delta(\bar{a}) \cdot \delta(\bar{c}) \\
&= \delta(\overline{ab}) \cdot \delta(\overline{bc}) \cdot (a \otimes b) \cdot {}^{ba}(c \otimes a) \cdot {}^{ba}(a \otimes c) \cdot \\
&\quad \cdot (a \otimes b)^{-1} \cdot \delta(\bar{a}) \cdot \delta(\bar{c}) \\
&= \delta(\overline{ab}) \cdot \delta(\overline{bc}) \cdot (a \otimes b) \cdot {}^{ba}(c \otimes a) \cdot \delta(\bar{c}) \cdot {}^{ba}(a \otimes c) \cdot \\
&\quad \cdot (a \otimes b)^{-1} \cdot \delta(\bar{a}) \\
&= \delta(\overline{ab}) \cdot \delta(\overline{bc}) \cdot (a \otimes b) \cdot {}^{ba}(c \otimes a) \cdot {}^{ba^2}\delta(\bar{c}) \cdot \\
&\quad \cdot {}^{ba}(a \otimes c) \cdot (a \otimes b)^{-1} \cdot \delta(\bar{a}) \\
&= \delta(\overline{ab}) \cdot \delta(\overline{bc}) \cdot (a \otimes b) \cdot {}^{ba}(c \otimes a) \cdot {}^{ba^2}(c \otimes c) \cdot \\
&\quad \cdot {}^{ba}(a \otimes c) \cdot (a \otimes b)^{-1} \cdot \delta(\bar{a}) \\
&= \delta(\overline{ab}) \cdot \delta(\overline{bc}) \cdot (a \otimes b) \cdot {}^{ba}[(c \otimes a) \cdot {}^{a}(c \otimes c)] \cdot \\
&\quad \cdot {}^{ba}(a \otimes c) \cdot (a \otimes b)^{-1} \cdot \delta(\bar{a}) \\
&= \delta(\overline{ab}) \cdot \delta(\overline{bc}) \cdot (a \otimes b) \cdot {}^{ba}(c \otimes ac) \cdot \\
&\quad \cdot {}^{ba}(a \otimes c) \cdot (a \otimes b)^{-1} \cdot \delta(\bar{a}) \\
&= \delta(\overline{ab}) \cdot \delta(\overline{bc}) \cdot (a \otimes b) \cdot {}^{ba}(c \otimes ac) \cdot \\
&\quad \cdot \delta(\bar{a}) \cdot {}^{ba}(a \otimes c) \cdot (a \otimes b)^{-1} \\
&= \delta(\overline{ab}) \cdot \delta(\overline{bc}) \cdot (a \otimes b) \cdot {}^{ba}(c \otimes ac) \cdot \\
&\quad \cdot {}^{b}\delta(\bar{a}) \cdot {}^{ba}(a \otimes c) \cdot (a \otimes b)^{-1} \\
&= \delta(\overline{ab}) \cdot \delta(\overline{bc}) \cdot (a \otimes b) \cdot {}^{ba}(c \otimes ac) \cdot \\
&\quad \cdot {}^{b}(a \otimes a) \cdot {}^{ba}(a \otimes c) \cdot (a \otimes b)^{-1} \\
&= \delta(\overline{ab}) \cdot \delta(\overline{bc}) \cdot (a \otimes b) \cdot {}^{ba}(c \otimes ac) \cdot \\
&\quad \cdot {}^{b}[(a \otimes a) \cdot {}^{a}(a \otimes c)] \cdot (a \otimes b)^{-1} \\
&= \delta(\overline{ab}) \cdot \delta(\overline{bc}) \cdot (a \otimes b) \cdot {}^{ba}(c \otimes ac) \cdot \\
&\quad \cdot {}^{b}(a \otimes ac) \cdot (a \otimes b)^{-1} \\
&= \delta(\overline{ab}) \cdot \delta(\overline{bc}) \cdot (a \otimes b) \cdot {}^{ba}(c \otimes ac) \cdot {}^{b}(a \otimes ac) \cdot (a \otimes b)^{-1} \\
&= \delta(\overline{ab}) \cdot \delta(\overline{bc}) \cdot (a \otimes b) \cdot {}^{b}[{}^{a}(c \otimes ac) \cdot (a \otimes ac)] \cdot (a \otimes b)^{-1} \\
&= \delta(\overline{ab}) \cdot \delta(\overline{bc}) \cdot (a \otimes b) \cdot {}^{b}(ac \otimes ac) \cdot (a \otimes b)^{-1} \\
&= \delta(\overline{ab}) \cdot \delta(\overline{bc}) \cdot (a \otimes b) \cdot {}^{b}\delta(\overline{ac}) \cdot (a \otimes b)^{-1} \\
&= \delta(\overline{ab}) \cdot \delta(\overline{bc}) \cdot (a \otimes b) \cdot \delta(\overline{ac}) \cdot (a \otimes b)^{-1} \\
&= \delta(\overline{ab}) \cdot \delta(\overline{ac}) \cdot \delta(\overline{bc}) \cdot (a \otimes b) \cdot (a \otimes b)^{-1} \\
&= \delta(\overline{ab}) \cdot \delta(\overline{ac}) \cdot \delta(\overline{bc}) \\
&= \delta(\bar{a} + \bar{b}) + \delta(\bar{a} + \bar{c}) + \delta(\bar{b} + \bar{c}).
\end{aligned}
$$

Assim, pela proposição 4.1.2, $\Delta\delta : G^{ab} \times G^{ab} \to J_2(G)$ é bilinear. Portanto,

$\delta : G^{ab} \to J_2(G)$ é quadrática. Como $J_2(G)$ é abeliano, existe um único homomorfismo $\psi : \Gamma(G^{ab}) \to J_2(G)$ tal que $\psi \circ \gamma_0 = \delta$, isto é, $\forall g \in G$,

$$\psi\big(\gamma_0(\bar{g})\big) = (\psi \circ \gamma_0)(\bar{g}) = \delta(\bar{g}) = g \otimes g\,.$$

$$\begin{tikzcd} G^{ab} \arrow[r, "\gamma_0"] \arrow[dr, "\delta"'] & \Gamma(G^{ab}) \arrow[d, "\psi"] \\ & J_2(G) \end{tikzcd}$$

Podemos escrever ψ na forma $\psi : \Gamma(G^{ab}) \to G \otimes G$ e temos que $im(\psi) \leqslant J_2(G) \lhd Z(G \otimes G)$ e, portanto, $im(\psi) \lhd G \otimes G$. Também, $\kappa_1 \circ \psi = 0$. Seja $D = \{g \otimes g \ : \ g \in G\} = im(\delta)$. Então, $G \wedge G \cong \frac{G \otimes G}{\langle D \rangle_N}$. Como $D = im(\delta) \subset im(\psi) \lhd G \otimes G$, temos que $\langle D \rangle_N \subset im(\psi)$. Como ψ é um homomorfismo e $\Gamma(G^{ab}) = \langle im(\gamma_0) \rangle$, temos que

$$\begin{aligned} im(\psi) &= \psi[\Gamma(G^{ab})] \\ &= \psi\big[\langle im(\gamma_0) \rangle\big] \\ &= \psi\big[\langle \gamma_0[G^{ab}] \rangle\big] \\ &= \big\langle \psi\big[\gamma_0[G^{ab}]\big] \big\rangle \\ &= \langle (\psi \circ \gamma_0)[G^{ab}] \rangle \\ &= \langle im(\psi \circ \gamma_0) \rangle \\ &= \langle im(\delta) \rangle \\ &= \langle D \rangle \subset \langle D \rangle_N\,. \end{aligned}$$

Assim, $im(\psi) = \langle D \rangle_N$ e temos que $G \wedge G \cong \frac{G \otimes G}{im(\psi)}$. Portanto, temos o epimorfismo natural do capítulo anterior $G \otimes G \twoheadrightarrow \frac{G \otimes G}{im(\psi)} \cong G \wedge G$. Dessa forma, temos um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ \Gamma(G^{ab}) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "="] & J_2(G) \arrow[r] \arrow[d, hook] & M(G) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\ \Gamma(G^{ab}) \arrow[r, "\psi"] & G \otimes G \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads, "\kappa_1"] & G \wedge G \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\kappa_2"] & 0 \\ & G' \arrow[r, "="] \arrow[d] & G' \arrow[d] & \\ & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

no qual as linhas são exatas e as colunas são extensões centrais.

Capítulo 5

Aplicação em homotopia

Vamos admitir uma certa familiaridade com a teoria de homotopia clássica, relembrando apenas alguns pontos para esclarecer o assunto que abordaremos. Essa aplicação é um resultado particular de um teorema geral do tipo Seifert-van Kampen sobre n-cubos de espaços topológicos e n-cubos cruzados de grupos, exposto pelos autores R. Brown e J.-L. Loday no artigo "*Van Kampen theorems for diagrams of spaces*" [6].

5.1 Preliminares topológicas

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathbb{R}^n$ o conjunto das n-uplas de números reais, munido da norma euclidiana, da métrica gerada por essa norma e da topologia gerada por essa métrica. Para todos $n, m \in \mathbb{N}^*$, se $n < m$, iremos considerar $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$, sempre que for conveniente. Nesse caso, as uplas de $\mathbb{R}^n$ serão consideradas uplas de $\mathbb{R}^m$ tendo últimas $m - n$ coordenadas nulas. No caso $n = 1$, consideramos $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ o intervalo real unitário fechado, munido com a topologia do subespaço. Adicionamos a isso o espaço $\mathbb{R}^0 = \{1\} = \{(1, 0, 0, 0, ...)\}$ no qual consideramos a topologia do subespaço, que é a discreta, única topologia possível para um conjunto unitário.

Considere $n \geqslant 2$, $p_0 = (1, 0, 0, ..., 0, 0) \in \mathbb{R}^n$ e os subespaços:

- $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \|x\| \leqslant 1\}$, o disco fechado unitário;
- $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \|x\| = 1\}$, a esfera fechada unitária;
- $S^{n-1}_+ = \{(x_1, ..., x_n) \in S^{n-1} \,:\, x_n \geqslant 0\}$, o hemisfério superior;
- $S^{n-1}_- = \{(x_1, ..., x_n) \in S^{n-1} \,:\, x_n \leqslant 0\}$, o hemisfério inferior;
- $S^{n-2} = \{(x_1, ..., x_n) \in S^{n-1} \,:\, x_n = 0\}$, o equador.

Sejam X e Y espaços topológicos. Denotaremos por "$X \approx Y$" a sentença "X é homeomorfo a Y".

Observe que $p_0 \in S^{n-2} = S^{n-1}_+ \cap S^{n-1}_-$, $S^{n-1}_+ \subset S^{n-1}$, $S^{n-1}_- \subset S^{n-1}$, $S^{n-1} = \partial D^n \subset D^n$ e que $S^0 = \{-1,1\} \approx \{0,1\} = \partial I$ tem a topologia discreta e não tem equador. No caso $n=1$ definimos $D^1 = [-1,1] \approx I$ e, no caso $n=0$, definimos $D^0 = \mathbb{R}^0$.

A categoria dos espaços topológicos e funções contínuas será denotada por "Top", enquanto que a categoria dos espaços topológicos com pontos marcados será denotada por "Top$^+$". Esta é a categoria que tem como objetos pares ordenados, cuja primeira entrada é um espaço topológico e a segunda entrada é um ponto deste espaço. Tem como morfismos funções contínuas cuja imagem de um ponto marcado é outro ponto marcado. Repare que o espaço vazio é objeto de Top, mas não pode ser primeira entrada de um objeto de Top$^+$. Note que qualquer um dos subespaços mencionados acima (na primeira entrada), junto com p_0 (na segunda entrada), são objetos de Top$^+$. As 3-uplas (X, A, a) nas quais X é um espaço topológico e $a \in A \subset X$ são chamadas de "pares com ponto marcado". Sejam (X, A, a) e (Y, B, b) pares com ponto marcado e uma função contínua $f : X \to Y$. Dizemos que f é um morfismo de pares com ponto marcado se, e somente se, $f[A] \subset B$ e $f(a) = b$. A categoria denotada por "Top$^+_2$" tem como objetos pares com pontos marcados e como morfismos os morfismos de pares com pontos marcados. Alguns exemplos de pares são $(\mathbb{R}, I, 1)$, $\big(S^2, S^2_+, (1,0)\big)$, $\big(D^3, S^2, (1,0)\big)$ etc. Uma "tríade de espaços topológicos com ponto marcado" é uma 4-upla (X, A, B, p) na qual X é um espaço topológico, A e B são subespaços de X e $p \in A \cap B$. Sejam (X, A, B, p) e (Y, U, V, q) tríades e $f : X \to Y$ uma função contínua. Dizemos que f é um morfismo de tríades se, e somente se, $f[A] \subset U$, $f[B] \subset V$ e $f(p) = q$. A categoria das tríades e morfismos de tríades será denotada por "Ad$^+_3$". Uma tríade (X, A, B, p) na qual $B \subset A$ é chamada de uma "terna (ou tripla) de espaços". Definindo os morfismo de maneira óbvia, obtemos uma subcategoria Top$^+_3$ de Ad$^+_3$. As generalizações para quaisquer $n \in \mathbb{N}^*$ são imediatas. São exemplos de tríades $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R}, 0)$, $(\mathbb{R}, [0,3], [1,4], 2)$, $\big(D^3, S^2_-, S^2_+, (1,0)\big)$ etc.

Seja $(X, a) \in Obj(\text{Top}^+)$, os intervalos reais fechados $[-1,1]$, $[-1,0]$ e $[0,1] = I$, cada um munido com a topologia do subespaço da usual de $\mathbb{R}$, e considere a topologia produto nos conjuntos $X \times [-1,1]$, $X \times [-1,0]$ e $X \times I$. Seja o espaço topológico quociente

$$SX = \frac{X \times [-1,1]}{(X \times \{-1\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (\{a\} \times [-1,1])}$$

subespaços $C_-X = \big\{[(x,t)] \in SX \,:\, t \leqslant 0\big\}$ e $C_+X = \big\{[(x,t)] \in SX \,:\, t \geqslant 0\big\}$ e o ponto $[(a,0)] \in SX$. Note que $[(a,t)] = [(a,0)]$, $\forall t \in [-1,1]$, que $\big(SX, C_-X, C_+X, [(a,0)]\big)$ é uma tríade, que $C_-X \cup C_+X = SX$ e que $C_-X \cap C_+X = \big\{[(x,t)] \in SX \,:\, t = 0\big\} \approx X$. O subespaço C_-X é chamado de "cone inferior de X" e o subespaço C_+X é chamado de "cone superior de X". A classe de isomorfismo do par $\big(SX, [(a,0)]\big)$ em Top$^+$ é chamada de "suspensão (reduzida) de X", a classe de isomorfismo do par $\big(C_+X, [(a,0)]\big)$ em Top^+ é chamado de "cone de X".

Uma homotopia é uma função contínua do tipo $h : X \times I \to Y$ tal que X e Y são espaços topológicos. Dada uma homotopia $h : X \times I \to Y$, para cada $t \in I$, temos uma função contínua $h_t : X \to Y$ tal que $h_t(x) = h(x,t)$, $\forall x \in X$. Para cada $t \in I$, também chamamos a função h_t de uma "homotopia".

Sejam $f, g : X \to Y$ funções contínuas. Dizemos que "f é homotópica a g", e denotamos isso por "$f \sim g$", se, e somente se, existe alguma homotopia $h : X{\times}I \to Y$ tal que $h_0 = f$ e $h_1 = g$. Nesse caso, dizemos que "f é homotópica a g por h" (ou "via h") e denotamos isso por "$f \sim_h g$". Também, dizemos que "para cada $t \in I$, a função f é continuamente deformada nas homotopias h_t, desde $h_0 = f$ até $h_1 = g$". Dada uma homotopia $h : X \times I \to Y$ é óbvio que $h_0 \sim_h h_1$. A relação de homotopia é uma relação de equivalência e as classes de equivalência são chamadas de "classes de homotopia". Denotamos o conjunto de todas as classes de homotopias de funções contínuas de X em Y por "$[X, Y]$". Note que $[X, Y] = Hom_{\mathrm{Top}}(X, Y)\big/\!\sim$.

Seja T uma categoria. Dizemos que T é uma "categoria com uso topológico" se, e somente se, existe algum funtor fiel $F : \mathsf{T} \to \mathrm{Top}$. Nesse caso, dados objetos $A, B \in Obj(\mathsf{T})$, dizemos que uma homotopia $h : F(A) \times I \to F(B)$ é uma "homotopia relativa à categoria T" se, e somente se, $h_t \in F[Hom_{\mathsf{T}}(A, B)]$, $\forall t \in I$. Ou seja, da mesma forma que, para uma homotopia $h : X \times I \to Y$, temos que "para cada $t \in I$, a função h_0 é continuamente deformada nas homotopias (contínuas) h_t, desde h_0 até h_1", no caso da homotopia relativa à categoria T, temos que, "para cada $t \in I$, o morfismo $F^{-1}(h_0)$ é continuamente deformado nos morfismos $F^{-1}(h_t)$, desde $F^{-1}(h_0)$ até $F^{-1}(h_1)$". Dizendo de outra forma, se pudermos denotar as próprias funções contínuas como sendo morfismos da categoria T, dizemos que uma homotopia $h : F(A) \times I \to F(B)$ é relativa à categoria T se, e somente se, $h_t \in Hom_{\mathsf{T}}(A, B)$, $\forall t \in I$. Dados morfismos $\beta, \gamma \in Hom_{\mathsf{T}}(A, B)$, dizemos que "$\beta$ é homotópico a γ" (ou então que "$F(\beta)$ é homotópico a $F(\gamma)$ relativamente a T") se, e somente se, existe alguma homotopia $h : F(A) \times I \to F(B)$ relativa à categoria T, tal que $F^{-1}(h_0) = \beta$ e $F^{-1}(h_1) = \gamma$, ou seja, se existe alguma homotopia $h : F(A) \times I \to F(B)$ tal que $h_t \in F[Hom_{\mathsf{T}}(A, B)]$, $\forall t \in I$, $F^{-1}(h_0) = \beta$ e $F^{-1}(h_1) = \gamma$. A relação de homotopia (relativa a T) é uma relação de equivalência no conjunto $Hom_{\mathsf{T}}(A, B)$ e as classes de equivalência são chamadas de "classes de homotopia de $Hom_{\mathsf{T}}(A, B)$" ou então "classes de homotopia de $Hom_{\mathrm{Top}}\big(F(A), F(B)\big)$, relativa a T". Exemplos: duas funções contínuas $f, g : X \to Y$ são homotópicas relativamente a Top se, e somente se, são homotópicas. Dois morfismos de pares $f, g : (X, a) \to (Y, b)$ são homotópicos relativamente a Top^+ se, e somente se, existe alguma homotopia $h : X \times I \to Y$ tal que $h_0 = f$, $h_1 = g$ e $h_t : (X, a) \to (X, b)$ é um morfismo de pares, $\forall t \in I$, isto é, $h_t(a) = b$, $\forall t \in I$. Dois morfismos de tríades $f, g : (X, A, B, p) \to (Y, U, V, q)$ são homotópicos relativamente a Ad_3^+ se, e somente se, existe alguma homotopia $h : X \times I \to Y$ tal que $h_0 = f$,

$h_1 = g$ e $h_t : (X, A, B, p) \to (Y, U, V, q)$ é um morfismo de tríades, $\forall t \in I$, isto é, $h_t[A] \subset U$, $h_t[B] \subset V$ e $h_t(p) = q$, $\forall t \in I$.

Por exemplo, dado um espaço topológico X, em Top_2^+, a notação para o espaço de laços com ponto marcado $a \in X$ é $\Omega_a(X) = Hom_{\mathrm{Top}_2^+}\big((I, \partial I, 1), (X, \{a\}, a)\big)$, em que $\partial I = \{0, 1\}$.

Seja T uma categoria com uso topológico e suponha que, para cada par de objetos $A, B \in Obj(\mathsf{T})$, definimos uma relação de homotopia no conjunto $Hom_{\mathsf{T}}(A, B)$, como descrita no parágrafo acima. Dessa forma, outra propriedade da homotopia relativa a T é que, $\forall A, B, C \in Obj(\mathsf{T})$, $\forall \alpha, \beta \in Hom_{\mathsf{T}}(A, B)$, $\forall \gamma, \delta \in Hom_{\mathsf{T}}(B, C)$, se $\alpha \sim \beta$ e $\gamma \sim \delta$, então $\gamma \circ \alpha \sim \delta \circ \beta$. Essa propriedade nos possibilita quocientarmos a categoria T pela relação de homotopia, isto é, criamos uma nova categoria TH que tem como objetos os objetos de T e tem como morfismos as classes de homotopia de morfismos de T. A propriedade nos permite definir a composição desses morfismos nos representantes $[\gamma] \circ [\alpha] = [\gamma \circ \alpha]$. Os representantes de isomorfismos da categoria TH são chamados de "equivalências de homotopia". Explico: o morfismo $[\alpha] \in Hom_{\mathsf{TH}}(A, B)$ é um isomorfismo se, e somente se, existe seu inverso $[\beta] = [\alpha]^{-1} \in Hom_{\mathsf{TH}}(B, A)$ que satisfaz $[\alpha \circ \beta] = [\alpha] \circ [\beta] = [id_B]$ e $[\beta \circ \alpha] = [\beta] \circ [\alpha] = [id_A]$, ou seja, $\alpha \circ \beta \sim id_A$ e $\beta \circ \alpha \sim id_B$. A notação clássica é $Hom_{\mathsf{TH}}(A, B) = [A, B]$, o conjunto de todas as classes de homotopia de morfismos de $Hom_{\mathsf{T}}(A, B)$. É claro que $[A, B] = Hom_{\mathsf{TH}}(A, B) = Hom_{\mathsf{T}}(A, B) \big/ \sim$. Ademais, dizemos que dois objetos "$A, B \in Obj(\mathsf{T})$ são *homotopicamente equivalentes*" (têm o mesmo tipo de homotopia) se, e somente se, são isomorfos em TH.

Os diagramas comutativos de TH são chamados de "diagramas comutativos em homotopia". Geralmente denotamos os morfismos em tais diagramas sem os colchetes, ou seja, colocamos um representante de cada classe como marcador. Por exemplo, um quadrado comutativo em TH do tipo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "{[\alpha]}"] \arrow[d, "{[\gamma]}"'] & B \arrow[d, "{[\beta]}"] \\ C \arrow[r, "{[\delta]}"'] & D \end{tikzcd}$$

geralmente é denotado como

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ C \arrow[r, "\delta"'] & D \end{tikzcd}$$

como se fosse um diagrama de T, o que pode causar alguma confusão, pois tal diagrama em T, assim como em Top ou em Set, que significa que $\beta \circ \alpha = \delta \circ \gamma$, agora em TH, significa que $[\beta \circ \alpha] = [\beta] \circ [\alpha] = [\delta] \circ [\gamma] = [\delta \circ \gamma]$ ou seja, significa apenas que $\beta \circ \alpha \sim \delta \circ \gamma$. Para evitar algum equívoco, às vezes dizemos que, em T, "o diagrama comuta *a menos de homotopia*".

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e o espaço com ponto marcado $E^n = (S^n, p_0) \in Obj(\mathrm{Top}^+)$. Para todo espaço com ponto marcado $E = (X, x_0) \in Obj(\mathrm{Top}^+)$, denotamos o conjunto $[E^n, E] = Hom_{\mathrm{Top}^+\mathsf{H}}(E^n, E) = Hom_{\mathrm{Top}^+}(E^n, E)\big/\!\sim$ por "$\pi_n E = \pi_n(X, x_0)$" ou por "$\pi_n X$". Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathfrak{c}^n_{x_0} : S^n \to X$ tal que $\mathfrak{c}^n_{x_0}(y) = x_0$, $\forall y \in S^n$. Ou seja, a função constante $\mathfrak{c}^n_{x_0} = S^n \times \{x_0\}$. Então, $[\mathfrak{c}^n_{x_0}] \in \pi_n(X, x_0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. O primeiro resultado interessante é que X é conexo por caminhos se, e somente se, $\pi_0(X, x_0) = \{[\mathfrak{c}^0_{x_0}]\}$. Na realidade, $|\pi_0(X, x_0)|$ é a cardinalidade do conjunto das componentes conexas de X. Dado um espaço com ponto marcado (X, x_0), para cada $n \geqslant 1$, é usual construir o produto (concatenação) de morfismos de $Hom_{\mathrm{Top}^+}\big((S^n, p_0), (X, x_0)\big)$, o qual induz uma operação binária em $\pi_n(X, x_0)$ de modo que este se torna um grupo, chamado de "grupo de homotopia (absoluto) n-dimensional de (X, x_0)". Ademais, se $n \geqslant 2$, este grupo é abeliano. Para $n = 1$, o grupo $\pi_1(X, x_0)$ é chamado de "o grupo fundamental de X, com ponto marcado x_0". Nesse caso, temos funtores $\pi_0 : \mathrm{Top}^+ \to \mathsf{Set}$, $\pi_1 : \mathrm{Top}^+ \to \mathsf{Grp}$ e $\pi_n : \mathrm{Top}^+ \to \mathsf{Ab}$, $\forall n \geqslant 2$.

Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, e o par $P^n = (D^n, S^{n-1}, p_0) \in Obj(\mathrm{Top}^+_2)$. Para todo par com ponto marcado $P = (X, A, x_0) \in Obj(\mathrm{Top}^+_2)$, denotamos o conjunto $[P^n, P] = Hom_{\mathrm{Top}^+_2\mathsf{H}}(P^n, P) = Hom_{\mathrm{Top}^+_2}(P^n, P)\big/\!\sim$ por "$\pi_n P = \pi_n(X, A, x_0)$" ou por "$\pi_n(X, A)$". Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, seja $\varkappa^n_{x_0} : D^n \to X$ tal que $\varkappa^n_{x_0}(y) = x_0$, $\forall y \in D^n$. Ou seja, a função constante $\varkappa^n_{x_0} = D^n \times \{x_0\}$. Então, $[\varkappa^n_{x_0}] \in \pi_n(X, A, x_0)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Dado um par de espaços com ponto marcado (X, A, x_0), para cada $n \geqslant 2$, é usual construir o produto (concatenação) de morfismos de $Hom_{\mathrm{Top}^+_2}\big((D^n, S^{n-1}, p_0), (X, A, x_0)\big)$, o qual induz uma operação binária em $\pi_n(X, A, x_0)$ de modo que este se torna um grupo, chamado de "grupo de homotopia (relativo) n-dimensional de (X, A, x_0)". Pode-se mostrar (e geometricamente é fácil ver) que, $\forall n \in \mathbb{N}$, se $n \geqslant 2$, então $\pi_n(X, \{x_0\}, x_0) \cong \pi_n(X, x_0)$. Ademais, $\pi_n(X, A, x_0)$ é um grupo abeliano, $\forall n \geqslant 3$. Nesse caso, temos funtores $\pi_1 : \mathrm{Top}^+_2 \to \mathsf{Set}$, $\pi_2 : \mathrm{Top}^+_2 \to \mathsf{Grp}$ e $\pi_n : \mathrm{Top}^+_2 \to \mathsf{Ab}$, $\forall n \geqslant 3$.

Combinando os grupos de homotopia relativos e os absolutos, as inclusões $(A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$ e $(X, \{x_0\}, x_0) \hookrightarrow (X, A, x_0)$ induzem a chamada "seqüência exata do par"

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \pi_n A \to \pi_n X \to \pi_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} \pi_1 A \to \pi_1 X \to \pi_1(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_0 A \to \pi_0 X$$

na qual os homomorfismos $\partial_n : \pi_n(X, A) \to \pi_{n-1} A$ são conectantes.

Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, e a tríade $T^n = (D^n, S^{n-1}_-, S^{n-1}_+, p_0) \in Obj(\mathrm{Ad}^+_3)$. Para toda tríade $T = (X, A, B, x_0) \in Obj(\mathrm{Ad}^+_3)$, denotamos o conjunto $[T^n, T] = Hom_{\mathrm{Ad}^+_3\mathsf{H}}(T^n, T) = Hom_{\mathrm{Ad}^+_3}(T^n, T)\big/\!\sim$ por "$\pi_n T = \pi_n(X, A, B, x_0)$" ou por "$\pi_n(X, A, B)$". Note que, $\forall n \in \mathbb{N}$, se $n \geqslant 2$, então $[\varkappa^n_{x_0}] \in \pi_n(X, A, B, x_0)$. Também, $\forall n \in \mathbb{N}$, se $n \geqslant 2$, então

$$Hom_{\mathrm{Ad}^+_3}\big((D^n, S^{n-1}_-, S^{n-1}_+, p_0), (X, A, A, x_0)\big) = Hom_{\mathrm{Top}^+_2}\big((D^n, S^{n-1}, p_0), (X, A, x_0)\big)$$

e, portanto, $\pi_n(X, A, A, x_0) = \pi_n(X, A, x_0)$, $\forall n \geqslant 2$. Dada uma tríade com ponto marcado $(X, A, B, x_0) \in Obj(\mathrm{Ad}^+_3)$, para cada $n \geqslant 3$, pode-se construir o produto (concatenação) de morfismos de $Hom_{\mathrm{Ad}_3^+}\big((D^n, S_-^{n-1}, S_+^{n-1}, p_0), (X, A, B, x_0)\big)$, o qual induz uma operação binária em $\pi_n(X, A, B, x_0)$ de modo que este se torna um grupo, chamado de "grupo de homotopia n-dimensional da tríade (X, A, B, x_0)". Temos que $\pi_n(X, A, B, x_0)$ é um grupo abeliano, $\forall n \geqslant 4$. Nesse caso, temos funtores $\pi_2 : \mathrm{Ad}_3^+ \to \mathsf{Set}$, $\pi_3 : \mathrm{Ad}_3^+ \to \mathsf{Grp}$ e $\pi_n : \mathrm{Ad}_3^+ \to \mathsf{Ab}$, $\forall n \geqslant 4$.

As inclusões $(A, A \cap B, x_0) \hookrightarrow (X, B, x_0)$ e $(X, \{x_0\}, B, x_0) \hookrightarrow (X, A, B, x_0)$ induzem a chamada "seqüência exata da tríade"

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, A \cap B) \to \pi_n(X, B) \to \pi_n(X, A, B) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} \pi_1(A, A \cap B) \to \pi_1(X, B)$$

na qual os homomorfismos $\partial_n : \pi_n(X, A, B) \to \pi_{n-1}(A, A \cap B)$ são conectantes.

Um espaço topológico X é chamado de n-conexo se, e somente se, $\pi_j X$ é um conjunto unitário, $\forall j \in \{0, 1, ..., n\}$. Note que $\pi_0 X$ ser unitário implica X ser conexo por caminhos e, $\forall n \geqslant 1$, ser $\pi_n X$ unitário, significa ser $\pi_n X \cong 0$. Seja G um grupo. O espaço X é chamado de um espaço de Eilenberg-MacLane do tipo $K(G, n)$ se, e somente se, $\pi_n X \cong G$ e $\pi_j X$ é unitário, $\forall j \neq n$.

Sejam X um espaço topológico e A um subespaço com ponto marcado. Na teoria de homotopia existem ações por automorfismos $\pi_1 A \to Aut(\pi_n X)$, $\forall n \geqslant 1$, e $\pi_1 A \to Aut\big(\pi_n(X, A)\big)$, $\forall n \geqslant 2$. Se B é outro subespaço e se tivermos um ponto marcado em $A \cap B$, então existem ações por automorfismos $\pi_1(A \cap B) \to Aut\big(\pi_n(X, A, B)\big)$, $\forall n \geqslant 3$. A ação de $\pi_1 X$ em si mesmo reduz-se à ação por conjugação. Analogamente, a ação induzida na composição $\pi_2(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_1 A \to Aut\big(\pi_2(X, A)\big)$ é a ação por conjugação de $\pi_2(X, A)$, em que $\partial = \partial_2$ é o homomorfismo conectante da seqüência do par. Em nossa notação, temos que ${}^{\partial a}b = aba^{-1}$, $\forall a, b \in \pi_2(X, A)$.

Sejam E, B e Y espaços topológicos, $p : E \to B$ uma função contínua e $i_0 : Y \to Y \times I$ tal que $i_0(y) = (y, 0)$, $\forall y \in Y$. Dizemos que p tem a propriedade de levantamento de homotopia para o espaço Y se, e somente se, para toda homotopia $h : Y \times I \to B$ e toda função contínua $f : Y \to E$, se $p \circ f = h \circ i_0$, então existe homotopia $\tilde{h} : Y \times I \to E$ tal que $\tilde{h} \circ i_0 = f$ e $p \circ \tilde{h} = h$. Isto é, se o quadrado abaixo (sem a flecha tracejada) comuta, então existe a flecha tracejada e o diagrama continua comutativo em todos os caminhos possíveis:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, dotted, "\tilde{h}"] & B \end{tikzcd}$$

Uma função contínua $p : E \to B$ que tem a propriedade de levantamento de homotopia para todo espaço Y é chamada de uma "fibração (de Hurewicz)". Nesse caso, o espaço B é chamado de "o espaço base de p" e o espaço E é chamado de "o espaço total de p". Dado $b \in B$, o subespaço $F_b = p^{-1}[\{b\}] \subset E$ é chamado de "a fibra de p no ponto b" e o diagrama $F_b \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ é chamado de "uma seqüência de fibração de p". É importante dizer que, $\forall b_1, b_2 \in B$, se b_1 e b_2 estão na mesma componente conexa de B, então F_{b_1} e F_{b_2} são homotopicamente equivalentes, isto é, são isomorfos em Top$\mathsf{H}$.

A definição é análoga para morfismos de espaços com ponto marcado $(E, e_0), (B, b_0) \in Obj(\mathrm{Top}^+)$ e $p \in Hom_{\mathrm{Top}^+}\big((E, e_0), (B, b_0)\big)$. Assim, temos uma fibra canônica $F = p^{-1}[\{b_0\}] \subset E$ e, portanto, chamamos F de "a fibra de p" e os diagramas $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ e $(F, e_0) \hookrightarrow (E, e_0) \xrightarrow{p} (B, b_0)$ são ambos chamados de "a seqüência de fibração de p". É claro que $e_0 \in F$ e este fica sendo o ponto marcado da fibra F. Um fato importante é que essa inclusão induz isomorfismos $\pi_n(E, F) \cong \pi_n B$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, e portanto, usando a seqüência do par, obtemos a seqüência exata longa da fibração

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \pi_n F \to \pi_n E \to \pi_n B \xrightarrow{\partial} \cdots \to \pi_1 E \to \pi_1 B \xrightarrow{\partial} \pi_0 F \to \pi_0 E$$

Podemos montar uma categoria K da seguinte forma: $Obj(\mathsf{K}) = Mor(\mathrm{Top}^+)$ e, para cada par $f, g \in Obj(\mathsf{K})$, definimos

$$Hom_{\mathsf{K}}(f, g) = Hom_{\mathrm{Top}^+}\big(dom(f), dom(g)\big) \times Hom_{\mathrm{Top}^+}\big(cod(f), cod(g)\big)$$

em que cada espaço tem seu ponto marcado, o qual estamos omitindo, e definimos $(w, t) \circ (u, v) = (w \circ u, t \circ v)$, para todos $f \xrightarrow{(u,v)} g \xrightarrow{(w,t)} h$. A associatividade da operação de composição assim definida é imediata. Note que $id_f = \big(id_{dom(f)}, id_{cod(f)}\big)$, $\forall f \in Obj(\mathsf{K})$. Podemos pensar nos objetos e morfismos de K como se fossem quadrados (não necessariamente comutativos) de funções contínuas que respeitam pontos marcados

$$\begin{tikzcd} dom(f) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\cdots(u,v)\cdots>"] & dom(g) \arrow[d, "g"] \\ cod(f) \arrow[r, "v"'] & cod(g) \end{tikzcd}$$

Para cada $f \in Obj(\mathsf{K})$ sejam

- $Hom_{\mathrm{Top}}\big(I, cod(f)\big)$ o espaço dos caminhos (contínuos) de I em $cod(f)$, equipado com a topologia compacto-aberta;
- $dom(f) \times Hom_{\mathrm{Top}}\big(I, cod(f)\big)$ equipado com a topologia produto;
- $E_f = \big\{(x, \gamma) \in dom(f) \times Hom_{\mathrm{Top}}\big(I, cod(f)\big) \ : \ \gamma(0) = f(x)\big\}$ equipado com a topologia do subespaço de $dom(f) \times Hom_{\mathrm{Top}}\big(I, cod(f)\big)$;
- uma função $p_f : E_f \to cod(f)$ tal que $p_f(x, \gamma) = \gamma(1)$, $\forall (x, \gamma) \in E_f$.

Pode-se mostrar que p_f é uma fibração de Hurewicz. Sejam os pontos marcados $d_0 \in dom(f)$ e $c_0 \in cod(f)$. Assim, o espaço E_f tem o ponto marcado natural $(d_0, \mathfrak{c}_{c_0}) \in E_f$, em que $\mathfrak{c}_{c_0} : I \to cod(f)$ é tal que $\mathfrak{c}_{c_0}(t) = c_0$, $\forall t \in I$, isto é, o caminho constante $\mathfrak{c}_{c_0} = I \times \{c_0\}$. Seja $F_f = p_f^{-1}[\{c_0\}]$ a fibra de p_f no ponto c_0. Como $F_f \subset E_f$, equipe F_f com a topologia induzida de E_f. Portanto, o diagrama $F_f \hookrightarrow E_f \overset{p_f}{\to} cod(f)$ é a seqüência de fibração de p_f. O espaço topológico F_f é chamado de "a *fibra de homotopia* de f". Temos que

$$F_f = \big\{(x,\gamma) \in dom(f) \times Hom_{\mathrm{Top}}\big(I, cod(f)\big) \ : \ \gamma(0) = f(x) \quad \text{e} \quad \gamma(1) = c_0\big\}\,.$$

Também, podemos criar um funtor covariante $F : \mathsf{K} \to \mathrm{Top}^+$ da seguinte forma: para cada $f \in Obj(\mathsf{K})$ defina $F(f) = \big(F_f, (d_0, \mathfrak{c}_{c_0})\big) \in Obj(\mathrm{Top}^+)$, em que F_f é a fibra de homotopia de f. Para cada $(u,v) : f \to g$, defina $F(u,v) : F(f) \to F(g)$ de modo que $[F(u,v)](x,\gamma) = \big(u(x), v \circ \gamma\big)$, $\forall (x,\gamma) \in F_f$. Sejam $a_0 \in dom(g)$ e $b_0 \in cod(g)$ os pontos marcados. Ficamos com $F(u,v) \in Hom_{\mathrm{Top}^+}\big(F(f), F(g)\big)$, pois

$$[F(u,v)](d_0, \mathfrak{c}_{c_0}) = \big(u(d_0), v \circ \mathfrak{c}_{c_0}\big) = (a_0, \mathfrak{c}_{b_0})\,,$$

em que $\mathfrak{c}_{b_0} : I \to cod(g)$ é tal que $\mathfrak{c}_{b_0}(t) = b_0$, $\forall t \in I$, isto é, o caminho constante $\mathfrak{c}_{b_0} = I \times \{b_0\}$. Nesse contexto, para facilitar a notação, também iremos denotar $F(f)$ por "F_f".

Usando essa construção, sejam $(X, x_0), (Y, y_0) \in Obj(\mathrm{Top}^+)$ e o morfismo $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$. Ou seja, $dom(f) = (X, x_0)$ e $cod(f) = (Y, y_0)$. Nos parágrafos acima, substituimos $d_0 = x_0$ e $c_0 = y_0$. Considere o subespaço $\tilde{X}_f = \big\{(x,\gamma) \in E_f \ : \ \gamma = \mathfrak{c}_{f(x)}\big\}$ e F_f a fibra de homotopia de f. Assim, temos a seqüência de fibração $F_f \hookrightarrow E_f \overset{p_f}{\to} Y$. Pode-se mostrar que $\tilde{X}_f$ é homeomorfo a X e que é um retrato por deformação de E_f. Daí, E_f, $\tilde{X}_f$ e X têm todos o mesmo tipo de homotopia e, portanto, $\pi_n X \cong \pi_n \tilde{X}_f \cong \pi_n E_f$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Pela composição do diagrama $F_f \hookrightarrow E_f \overset{\sim}{\to} \tilde{X}_f \overset{\sim}{\to} X \overset{\sim}{\to} \tilde{X}_f \overset{\sim}{\to} E_f \overset{p_f}{\to} Y$, em que as setas marcadas com um símbolo "$\sim$" são equivalências de homotopia, obtemos o diagrama $F_f \to X \to Y$ de $\mathrm{Top}^+\mathsf{H}$. Ou seja, em $\mathrm{Top}^+\mathsf{H}$, substituimos a função contínua $(X, x_0) \overset{f}{\to} (Y, y_0)$ por uma fibração $(X, x_0) \xrightarrow{p_f} (Y, y_0)$ e, portanto, obtemos a seqüência exata longa

$$\cdots \overset{\partial}{\to} \pi_n F_f \to \pi_n X \to \pi_n Y \overset{\partial}{\to} \cdots \to \pi_1 X \to \pi_1 Y \overset{\partial}{\to} \pi_0 F_f \to \pi_0 X$$

Seja $n \in \mathbb{N}^*$. Uma função contínua (ou morfismo de espaços com ponto marcado) $f : X \to Y$ é chamada de n-conexa se, e somente se, sua fibra de homotopia F_f é um espaço $(n-1)$-conexo. Ou seja, $\pi_j F_f \cong 0$, $\forall j < n$. Lembrando que $\pi_0 F_f \cong 0$ significa apenas que $\pi_0 F_f$ é um conjunto unitário, que contém apenas a classe de homotopia da função constante. Como pode-se ver pela seqüência mostrada acima, essa propriedade é equivalente a termos $\pi_j X \cong \pi_j Y$, $\forall j < n$, e um epimorfismo $\pi_n X \twoheadrightarrow \pi_n Y$.

Agora, seja um quadrado em Top$^+$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "v"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Usando o funtor $F : \mathsf{K} \to \text{Top}^+$ e denotando $F(f) = F_f$, $F(g) = F_g$, $F(u) = F_u$, $F(v) = F_v$, $F(u,v) = \psi$, $F(f,g) = \varphi$, $F_\varphi = F(\varphi)$ e $F_\psi = F(\psi)$, completamos o quadrado para um diagrama nas fibrações (em Top$^+\mathsf{H}$)

$$\begin{tikzcd} & F_\varphi \arrow[dr, bend right] & & \\ F_\psi \arrow[dr, bend left] & & F_u \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & F_v \arrow[d] \\ & F_f \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "v"] \\ & F_g \arrow[r] & X \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Temos que $\varphi(a,\omega) = \big(f(a), g \circ \omega\big)$ e que $\psi(a,\beta) = \big(u(a), v \circ \beta\big)$, $\forall a \in A$, $\forall \omega \in Hom_{\text{Top}^+}(I,X)$, $\forall \beta \in Hom_{\text{Top}^+}(I,B)$. Um resultado da teoria nos mostra que, se o quadrado inicial comuta, então os outros dois quadrados comutam e F_φ e F_ψ têm o mesmo tipo de homotopia. Denotamos por F um objeto isomorfo a F_φ e F_ψ em Top$^+\mathsf{H}$ e obtemos um diagrama comutativo em homotopia

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d] & F_u \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & F_v \arrow[d] \\ F_f \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "v"] \\ F_g \arrow[r] & X \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

e, portanto, obtemos um diagrama comutativo em Grp

$$\begin{tikzcd} \pi_1 F \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1 F_u \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1 F_v \arrow[d] \\ \pi_1 F_f \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1 A \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1 B \arrow[d] \\ \pi_1 F_g \arrow[r] & \pi_1 X \arrow[r] & \pi_1 Y \end{tikzcd}$$

do qual extraimos o quadrado comutativo

$$\begin{tikzcd} \pi_1 F \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1 F_u \arrow[d] \\ \pi_1 F_f \arrow[r] & \pi_1 A \end{tikzcd}$$

que é chamado de "o quadrado fundamental" do quadrado inicial.

Sejam X um espaço topológico e $A \subset X$ um subespaço com um ponto marcado $x_0 \in A$. Um fato importante é que a inclusão $i : A \hookrightarrow X$ induz isomorfismos nos grupos de homotopia $\pi_{n+1}(X, A) \cong \pi_n F_i$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Para essa inclusão, a seqüência exata longa da fibração fica

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \pi_n F_i \to \pi_n A \to \pi_n X \xrightarrow{\partial} \cdots \to \pi_1 A \to \pi_1 X \xrightarrow{\partial} \pi_0 F_i \to \pi_0 A$$

Uma construção usada no livro "Introduction to Homotopy Theory" de M. Arkowitz [1] é a seguinte: sejam X um espaço topológico, A e B subespaços de X e F_i a fibra de homotopia da inclusão $i : A \hookrightarrow X$. Defina $E(X; A, B)$ como sendo o conjunto dos caminhos (contínuos) que partem de um ponto de A e chegam em um ponto de B. Equipe $E(X; A, B)$ com a topologia do subespaço de $Hom_{\mathrm{Top}}(I, X)$ e este último com a topologia compacto-aberta. Então, os grupos de homotopia da tríade (X, A, B, x_0) podem ser escritos como $\pi_n(X, A, B) = \pi_{n-1}\big(E(X; B, \{x_0\}), E(X; C, \{x_0\})\big)$, no qual $x_0 \in C = A \cap B$ e $X = A \cup B$. Porém, a projeção na segunda coordenada $F_i \to E(X; A, \{x_0\})$, $(a, \alpha) \mapsto \alpha$ tem uma inversa $E(X; A, \{x_0\}) \to F_i$, $\alpha \mapsto \big(\alpha(0), \alpha\big)$ e, portanto, $F_i \approx E(X; A, \{x_0\})$. Daí, se os morfismos do quadrado comutativo

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "a"] \\ B \arrow[r, "b"'] & X \end{tikzcd}$$

são inclusões, então

$$\pi_3(X; A, B) = \pi_3(X; B, A) = \pi_2\big(E(X; B, \{x_0\}), E(X; C, \{x_0\})\big) \cong \pi_2(F_a, F_g) \cong \pi_1 F$$

e o quadrado fundamental se identifica com o quadrado comutativo

$$\begin{tikzcd} \pi_3(X; A, B) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_2(B, C) \arrow[d] \\ \pi_2(A, C) \arrow[r] & \pi_1 C \end{tikzcd}$$

no qual os morfismos são os homomorfismos conectantes das respectivas seqüências longas.

Por fim, citamos os produtos de Whitehead. Os produtos de Whitehead originais são funções do tipo $w_{k\ell} : \pi_k X \times \pi_\ell X \to \pi_{k+\ell-1} X$, para cada par $k, \ell \in \mathbb{N}^*$. Por exemplo, $w_{1k} : \pi_1 X \times \pi_k X \to \pi_k X$ é tal que $w_{1k}(a,b) = {}^a b b^{-1}$, $\forall k \geqslant 1$, em que a ação de $\pi_1 X$ em $\pi_k X$ é a usual. Em particular, w_{11} é a função comutadora de $\pi_1 X$. Existem muitas generalizações desses produtos que também são chamados de "produtos de Whitehead". Vamos citar dois casos importantes para nosso estudo, que aparecem no artigo "Products in homotopy theory", de A. L. Blakers e W. S. Massey [2]. Sejam X um espaço topológico, A e B subespaços de X e um ponto marcado $x_0 \in A \cap B$. Os produtos aos quais nos referimos são funções do tipo $w_{k\ell} : \pi_k(B, A\cap B) \times \pi_\ell(A, A \cap B) \to \pi_{k+\ell-1}(X, A, B)$, para cada par $k, \ell \in \mathbb{N}^*$. Sejam os homomorfismos conectantes de cada seqüência longa $\partial : \pi_r(X, A, B) \to \pi_{r-1}(A, A \cap B)$, $\partial' : \pi_r(X, A, B) \to \pi_{r-1}(B, A \cap B)$, $\tilde{\partial} : \pi_k(A, A \cap B) \to \pi_{k-1}(A \cap B)$ e $\tilde{\partial}' : \pi_\ell(B, A \cap B) \to \pi_{\ell-1}(A \cap B)$. Então, $\partial w_{k\ell}(a,b) = [w_{k-1,\ell}(\tilde{\partial}' a, b)]^{-1}$ e $\partial' w_{k\ell}(a,b) = [w_{k,\ell-1}(a, \tilde{\partial} b)]^{(-1)^{k-1}}$, $\forall a \in \pi_k(B, A \cap B)$, $\forall b \in \pi_\ell(A, A \cap B)$. Para nosso estudo, é mais interessante o caso $\tau = w_{22} : \pi_2(B, A \cap B) \times \pi_2(A, A \cap B) \to \pi_3(X, A, B)$. Temos que $\tau(ax, y) = {}^{\tilde{\partial}' a}[\tau(x,y)] \cdot \tau(a, y)$ e $\tau(x, by) = \tau(x, b) \cdot {}^{\tilde{\partial} b}[\tau(x,y)]$, $\forall a, x \in \pi_2(B, A \cap B)$, $\forall b, y \in \pi_2(A, A \cap B)$. Também, se $f : (X, A, B, x_0) \to (Y, C, D y_0)$ é um morfismo de tríades, então vamos denotar os homomorfismos induzidos (aplicações dos respectivos funtores nesses morfismos) por $f_* : \pi_r(X, A, B) \to \pi_r(Y, C, D)$, $f'_* : \pi_k(B, A \cap B) \to \pi_k(D, C \cap D)$ e $f''_* : \pi_\ell(A, A \cap B) \to \pi_\ell(C, C \cap D)$. Dessa forma, temos que $f_*\big(w_{k\ell}(a,b)\big) = w_{k\ell}\big(f'_*(a), f''_*(b)\big)$, $\forall a \in \pi_k(B, A \cap B)$, $\forall b \in \pi_\ell(A, A \cap B)$. Por essa última igualdade, ficamos com $\tau(ax, y) = \tau\big({}^{\tilde{\partial}' a}x, {}^{\tilde{\partial}' a}y\big) \cdot \tau(a, y)$ e com $\tau(x, by) = \tau(x, b) \cdot \tau\big({}^{\tilde{\partial} b}x, {}^{\tilde{\partial} b}y\big)$, $\forall a, x \in \pi_2(B, A \cap B)$, $\forall b, y \in \pi_2(A, A \cap B)$. Como as ações dadas pelas composições $\pi_2(B, A \cap B) \xrightarrow{\tilde{\partial}'} \pi_1(A \cap B) \to Aut\big(\pi_2(B, A \cap B)\big)$ e $\pi_2(A, A \cap B) \xrightarrow{\tilde{\partial}} \pi_1(A \cap B) \to Aut\big(\pi_2(A, A \cap B)\big)$ são conjugações, temos que $\tau = w_{22}$ é um pareamento cruzado com respeito às ações dadas pelas composições $\pi_2(B, A \cap B) \xrightarrow{\tilde{\partial}'} \pi_1(A \cap B) \to Aut\big(\pi_2(A, A \cap B)\big)$ e $\pi_2(A, A \cap B) \xrightarrow{\tilde{\partial}} \pi_1(A \cap B) \to Aut\big(\pi_2(B, A \cap B)\big)$.

O outro caso são funções $w_{k\ell} : \pi_k(X, A) \times \pi_\ell A \to \pi_{k+\ell-1}(X, A)$, para cada par $k, \ell \in \mathbb{N}^*$. O caso de nosso interesse é $w_{21} : \pi_2(X, A) \times \pi_1 A \to \pi_2(X, A)$. Nesse caso, temos que $\tilde{\partial}' w_{21}(a, c) = [w_{11}(\tilde{\partial}' a, c)]^{-1}$, $\forall a \in \pi_2(X, A)$, $\forall c \in \pi_1 A$.

5.2 Módulos cruzados e quadrados cruzados de grupos

Para cada grupo R, vamos denotar por $c^R : R \to Aut(R)$ a ação por conjugação de R.

Definição 5.2.1. Um módulo cruzado de grupos é uma 4-upla (M, N, μ, θ) na qual M e N são grupos, $\mu : M \to N$ e $\theta : N \to Aut(M)$ são homomorfismos (isto é, θ é uma ação por automorfismos de N em M) tais que $\theta \circ \mu = c^M$ e $\mu \circ \theta_y = c_y^N \circ \mu$, $\forall y \in N$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "c^M"] \arrow[d, "\mu"'] & Aut(M) \\ N \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\theta_y"] \arrow[d, "\mu"'] & M \arrow[d, "\mu"] \\ N \arrow[r, "c_y^N"'] & N \end{tikzcd}$$

Seja (M, N, μ, θ) um módulo cruzado de grupos. Usando a nossa notação para ações de grupos, $\forall a, b \in M$, $\forall y \in N$, temos que

$${}^{\mu(a)}b = \theta_{\mu(a)}(b) = \big[\theta\big(\mu(a)\big)\big](b) = [(\theta \circ \mu)(a)](b) = [c^M(a)](b) = c_a^M(b) = {}^a b = aba^{-1}$$

e

$$\mu({}^y a) = \mu\big(\theta_y(a)\big) = (\mu \circ \theta_y)(a) = (c_y^N \circ \mu)(a) = c_y^N\big(\mu(a)\big) = y \cdot \mu(a) \cdot y^{-1} .$$

Por exemplo, se N é um grupo, $M \lhd N$, $\mu : M \hookrightarrow N$ é a inclusão e $\theta = c_{NM}^N : N \to Aut(M)$ é a restrição da conjugação de N, isto é, $\theta(y) = c_y^N|_M$, $\forall y \in N$, então (M, N, μ, θ) é um módulo cruzado de grupos.

Sejam G, H e T grupos, $\theta : G \to Aut(H)$ e $\xi : H \to Aut(G)$ ações por automorfismos e compatíveis e $\tau : G \times H \to T$ um pareamento cruzado com respeito a θ e ξ tais que $T = (G \otimes H)_\tau^{(\theta,\xi)}$ é o produto tensorial de G e H com τ. Sejam $\tilde{\theta} : G \to Aut(T)$ e $\tilde{\xi} : H \to Aut(T)$ as ações por automorfismos induzidas por θ e ξ e $\lambda : T \to G$ e $\rho : T \to H$ os homomorfismos do teorema 3.5.3. Pelos itens (iv), (v), (vi) e (vii) deste teorema, temos que $(T, G, \lambda, \tilde{\theta})$ e $(T, H, \rho, \tilde{\xi})$ são módulos cruzados de grupos.

Sejam X um espaço topológico, A um subespaço e $x_0 \in A$ um ponto marcado. Considere o homomorfismo conectante da seqüência exata do par $\partial : \pi_2(X, A) \to \pi_1 A$, e a ação usual $\theta : \pi_1 A \to Aut\big(\pi_2(X, A)\big)$. Então, a 4-upla $\big(\pi_2(X, A), \pi_1 A, \partial, \theta\big)$ é um módulo cruzado de grupos.

Seja $X = (M, N, \mu, \theta)$ um módulo cruzado de grupos. É útil pensar em X como um diagrama unidimensional (aresta) " $M \xrightarrow{\mu} N$ " no qual N age em M por $\theta : N \to Aut(M)$, N age em si mesmo pela conjugação $c^N : N \to Aut(N)$, M age em si mesmo pela composição $M \xrightarrow{\mu} N \xrightarrow{\theta} Aut(M)$ e M age em N pela composição $M \xrightarrow{\mu} N \xrightarrow{c^N} Aut(N)$. Assim, M também age em si mesmo pela conjugação, pois $\theta \circ \mu = c^M$. Daí, ficamos com M e N agindo em si mesmos por conjugação e um no outro pelas ações $\theta : N \to Aut(M)$ e $c^N \circ \mu : M \to Aut(N)$.

Temos que θ e $c^N \circ \mu$ são compatíveis. De fato, $\forall m \in M$, $\forall n \in N$,

$$\begin{aligned}
\theta_{(c^N \circ \mu)_m(n)} &= \theta\big((c^N \circ \mu)_m(n)\big) \\
&= \theta\big([(c^N \circ \mu)(m)](n)\big) \\
&= \theta\Big(\big[c^N\big(\mu(m)\big)\big](n)\Big) \\
&= \theta\big(c^N_{\mu(m)}(n)\big) \\
&= \theta\big([\mu(m)] \cdot n \cdot [\mu(m)]^{-1}\big) \\
&= \theta\big(\mu(m)\big) \circ \theta(n) \circ \theta\big([\mu(m)]^{-1}\big) \\
&= \theta\big(\mu(m)\big) \circ \theta(n) \circ \big[\theta\big(\mu(m)\big)\big]^{-1} \\
&= (\theta \circ \mu)(m) \circ \theta(n) \circ [(\theta \circ \mu)(m)]^{-1} \\
&= c^M(m) \circ \theta(n) \circ [c^M(m)]^{-1} \\
&= c^M_m \circ \theta_n \circ (c^M_m)^{-1}\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(c^N \circ \mu)_{\theta_n(m)} &= (c^N \circ \mu)\big(\theta_n(m)\big) \\
&= (c^N \circ \mu \circ \theta_n)(m) \\
&= (c^N \circ c^N_n \circ \mu)(m) \\
&= c^N\Big(c^N_n\big(\mu(m)\big)\Big) \\
&= c^N\big(n \cdot \mu(m) \cdot n^{-1}\big) \\
&= c^N(n) \circ c^N\big(\mu(m)\big) \circ c^N\big(n^{-1}\big) \\
&= c^N_n \circ (c^N \circ \mu)(m) \circ c^N_{n^{-1}} \\
&= c^N_n \circ (c^N \circ \mu)(m) \circ (c^N_n)^{-1}\,.
\end{aligned}$$

Definição 5.2.2. Sejam (T, G, λ, θ) e (M, N, μ, ξ) módulos cruzados de grupos e $\alpha : T \to M$ e $\beta : G \to N$ homomorfismos. Dizemos que o par (α, β) é um morfismo de módulos cruzados de grupos se, e somente se, $\mu \circ \alpha = \beta \circ \lambda$ e α e β preservam as ações θ e ξ, isto é, $\xi_{\beta(g)} \circ \alpha = \alpha \circ \theta_g$, $\forall g \in G$.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\lambda"'] & M \arrow[d, "\mu"] \\
G \arrow[r, "\beta"'] & N
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\theta_g"] \arrow[d, "\alpha"'] & T \arrow[d, "\alpha"] \\
M \arrow[r, "\xi_{\beta(g)}"'] & M
\end{tikzcd}$$

Sejam (T, G, λ, θ), (M, N, μ, ξ) e (E, H, ν, ζ) módulos cruzados de grupos e $\alpha : T \to M$, $\beta : G \to N$, $\gamma : M \to E$ e $\delta : N \to H$ homomorfismos. Pela definição anterior, é fácil mostrar que, se (α, β) e (γ, δ) são morfismos de módulos cruzados de grupos, então $(\gamma \circ \alpha\,,\, \delta \circ \beta)$ também é um morfismo de módulos cruzados de grupos. Dessa forma, podemos criar uma categoria XMod que tem por objetos módulos cruzados de grupos e por morfismos os morfismos de módulos cruzados de grupos, na qual definimos a composição de morfismos coordenada a coordenada, isto é, $(\gamma, \delta) \circ (\alpha, \beta) = (\gamma \circ \alpha\,,\, \delta \circ \beta)$. Assim, os morfismos identidade são pares de identidades.

Sejam (M, P, μ, ξ) e (N, P, ν, ζ) módulos cruzados de grupos. Podemos representar os dois módulos cruzados pelo diagrama "$M \xrightarrow{\mu} P \xleftarrow{\nu} N$" ou como uma "quina" ou "canto":

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\mu"] \\ N \arrow[r, "\nu"'] & P \end{tikzcd}$$

Os módulos cruzados de grupos que compartilham todos os mesmos grupos de quina P são chamados de P-módulos cruzados. Os morfismos canônicos entre esses módulos cruzados são da forma $(\alpha, id_P) : (M, P, \mu, \xi) \to (N, P, \nu, \zeta)$ e podemos representa-los apenas por $\alpha : M \to N$. É claro que $\nu \circ \alpha = \mu$ e $\zeta_p \circ \alpha = \alpha \circ \xi_p\,,\, \forall p \in P$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\mu"'] & N \arrow[d, "\nu"] \\ & P \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\xi_p"] \arrow[d, "\alpha"'] & M \arrow[d, "\alpha"] \\ N \arrow[r, "\zeta_p"'] & N \end{tikzcd}$$

Assim, para cada grupo P, podemos formar uma subcategoria XMod_P de XMod contendo como objetos os P-módulos cruzados e como morfismos os morfismos canônicos entre eles.

Sejam (M, P, μ, ξ) e (N, P, ν, ζ) P-módulos cruzados de grupos. Temos mais uma ação por automorfismos de M em N e mais uma ação por automorfismos de N em M, a saber, $\zeta \circ \mu : M \to Aut(N)$ e $\xi \circ \nu : N \to Aut(M)$. Vamos mostrar que essas ações são compatíveis. De fato, $\forall m \in M$, $\forall n \in N$, temos que

$$\begin{aligned}
(\xi \circ \nu)_{(\zeta \circ \mu)_m(n)} &= (\xi \circ \nu)\big((\zeta \circ \mu)_m(n)\big) \\
&= (\xi \circ \nu)\big([(\zeta \circ \mu)(m)](n)\big) \\
&= (\xi \circ \nu)\Big(\big[\zeta\big(\mu(m)\big)\big](n)\Big) \\
&= (\xi \circ \nu)\big(\zeta_{\mu(m)}(n)\big) \\
&= [\xi \circ \nu \circ \zeta_{\mu(m)}](n) \\
&= [\xi \circ c^P_{\mu(m)} \circ \nu](n) \\
&= \xi\Big(c^P_{\mu(m)}\big(\nu(n)\big)\Big) \\
&= \xi\Big([\mu(m)] \cdot [\nu(n)] \cdot [\mu(m)]^{-1}\Big) \\
&= \xi\big(\mu(m)\big) \circ \xi\big(\nu(n)\big) \circ \xi\big([\mu(m)]^{-1}\big) \\
&= \xi\big(\mu(m)\big) \circ \xi\big(\nu(n)\big) \circ \big[\xi\big(\mu(m)\big)\big]^{-1} \\
&= (\xi \circ \mu)(m) \circ (\xi \circ \nu)(n) \circ [(\xi \circ \mu)(m)]^{-1} \\
&= c^M(m) \circ (\xi \circ \nu)(n) \circ [c^M(m)]^{-1} \\
&= c^M_m \circ (\xi \circ \nu)_n \circ (c^M_m)^{-1}\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\zeta \circ \mu)_{(\xi \circ \nu)_n(m)} &= (\zeta \circ \mu)\big((\xi \circ \nu)_n(m)\big) \\
&= (\zeta \circ \mu)\big([(\xi \circ \nu)(n)](m)\big) \\
&= (\zeta \circ \mu)\Big(\big[\xi\big(\nu(n)\big)\big](m)\Big) \\
&= (\zeta \circ \mu)\big(\xi_{\nu(n)}(m)\big) \\
&= [\zeta \circ \mu \circ \xi_{\nu(n)}](m) \\
&= [\zeta \circ c^P_{\nu(n)} \circ \mu](m) \\
&= \zeta\Big(c^P_{\nu(n)}\big(\mu(m)\big)\Big) \\
&= \zeta\big([\nu(n)] \cdot [\mu(m)] \cdot [\nu(n)]^{-1}\big) \\
&= \zeta\big(\nu(n)\big) \circ \zeta\big(\mu(m)\big) \circ \zeta\big([\nu(n)]^{-1}\big) \\
&= \zeta\big(\nu(n)\big) \circ \zeta\big(\mu(m)\big) \circ \big[\zeta\big(\nu(n)\big)\big]^{-1} \\
&= (\zeta \circ \nu)(n) \circ (\zeta \circ \mu)(m) \circ [(\zeta \circ \nu)(n)]^{-1} \\
&= c^N(n) \circ (\zeta \circ \mu)(m) \circ [c^N(n)]^{-1} \\
&= c^N_n \circ (\zeta \circ \mu)_m \circ (c^N_n)^{-1}\,.
\end{aligned}$$

Como $\zeta \circ \mu$ e $\xi \circ \nu$ são ações compatíveis e a conjugação de P é compatível consigo mesma, temos que $X = (M \times N, \zeta \circ \mu, \xi \circ \nu) \in Obj(\mathsf{C})$ e que $Y = (P \times P, c^P, c^P) \in Obj(\mathsf{C})$. Note que $\mu \times \nu \in Hom_{\mathsf{C}}(X, Y)$. De fato, $\nu \circ (\zeta \circ \mu)_m = \nu \circ \zeta_{\mu(m)} = c^P_{\mu(m)} \circ \nu$ e $\mu \circ (\xi \circ \nu)_n = \mu \circ \xi_{\nu(n)} = c^P_{\nu(n)} \circ \mu$,

$\forall m \in M$, $\forall n \in N$. Agora vamos mostrar que $\xi_p \times \zeta_p \in Hom_{\mathsf{C}}(X,X)$, $\forall p \in P$. Com efeito, $\forall p \in P$, $\forall m \in M$, $\forall n \in N$,

$$\begin{aligned}
(\zeta \circ \mu)_{\xi_p(m)} &= (\zeta \circ \mu)\big(\xi_p(m)\big) \\
&= (\zeta \circ \mu \circ \xi_p)(m) \\
&= (\zeta \circ c_p^P \circ \mu)(m) \\
&= \zeta\Big(c_p^P\big(\mu(m)\big)\Big) \\
&= \zeta\big(p \cdot \mu(m) \cdot p^{-1}\big) \\
&= \zeta(p) \circ \zeta\big(\mu(m)\big) \circ \zeta(p^{-1}) \\
&= \zeta(p) \circ (\zeta \circ \mu)(m) \circ [\zeta(p)]^{-1} \\
&= \zeta_p \circ (\zeta \circ \mu)_m \circ (\zeta_p)^{-1};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\xi \circ \nu)_{\zeta_p(n)} &= (\xi \circ \nu)\big(\zeta_p(n)\big) \\
&= (\xi \circ \nu \circ \zeta_p)(n) \\
&= (\xi \circ c_p^P \circ \nu)(n) \\
&= \xi\Big(c_p^P\big(\nu(n)\big)\Big) \\
&= \xi\big(p \cdot \nu(n) \cdot p^{-1}\big) \\
&= \xi(p) \circ \xi\big(\nu(n)\big) \circ \xi(p^{-1}) \\
&= \xi(p) \circ (\xi \circ \nu)(n) \circ [\xi(p)]^{-1} \\
&= \xi_p \circ (\xi \circ \nu)_n \circ (\xi_p)^{-1}.
\end{aligned}$$

Daí, $(\zeta \circ \mu)_{\xi_p(m)} \circ \zeta_p = \zeta_p \circ (\zeta \circ \mu)_m$ e $(\xi \circ \nu)_{\zeta_p(n)} \circ \xi_p = \xi_p \circ (\xi \circ \nu)_n$.

Sejam (M,P,μ,ξ) e (N,P,ν,ζ) P-módulos cruzados de grupos, como no diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[d, "\mu"] \\
N \arrow[r, "\nu"'] & P
\end{tikzcd}$$

Temos que

- $\xi \circ \mu = c^M$;
- $\zeta \circ \nu = c^N$;
- $\mu \circ \xi_p = c_p^P \circ \mu$, $\forall p \in P$;
- $\nu \circ \zeta_p = c_p^P \circ \nu$, $\forall p \in P$;
- $(M \times P, c^P \circ \mu, \xi) \in Obj(\mathsf{C})$;
- $(N \times P, c^P \circ \nu, \zeta) \in Obj(\mathsf{C})$;

- $X = (M \times N, \zeta \circ \mu, \xi \circ \nu) \in Obj(\mathsf{C})$;
- $Y = (P \times P, c^P, c^P) \in Obj(\mathsf{C})$;
- $\mu \times \nu \in Hom_{\mathsf{C}}(X, Y)$;
- $\xi_p \times \zeta_p \in Hom_{\mathsf{C}}(X, X)$, $\forall p \in P$.

Definição 5.2.3. Um quadrado cruzado de grupos é uma 12-upla

$$(L, M, N, P, \lambda, \rho, \mu, \nu, \theta, \xi, \zeta, \tau)$$

na qual L, M, N e P são grupos, $\lambda : L \to M$, $\rho : L \to N$, $\mu : M \to P$, $\nu : N \to P$, $\theta : P \to Aut(L)$, $\xi : P \to Aut(M)$ e $\zeta : P \to Aut(N)$ são homomorfismos e $\tau : M \times N \to L$ é uma função tais que $\mu \circ \lambda = \nu \circ \rho = \omega$

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\rho"'] \arrow[dr, "\omega"] & M \arrow[d, "\mu"] \\ N \arrow[r, "\nu"'] & P \end{tikzcd}$$

e que satisfazem os axiomas

(i) λ preserva as ações θ e ξ, isto é, $\lambda \circ \theta_p = \xi_p \circ \lambda$, $\forall p \in P$. Ou seja, λ é equivariante com respeito às ações θ e ξ;

(ii) ρ preserva as ações θ e ζ, isto é, $\rho \circ \theta_p = \zeta_p \circ \rho$, $\forall p \in P$. Ou seja, ρ é equivariante com respeito às ações θ e ζ;

(iii) (M, P, μ, ξ), (N, P, ν, ζ) e (L, P, ω, θ) são módulos cruzados de grupos, isto é,

- $\xi \circ \mu = c^M$;
- $\zeta \circ \nu = c^N$;
- $\theta \circ \omega = c^L$;
- $\mu \circ \xi_p = c^P_p \circ \mu$, $\forall p \in P$;
- $\nu \circ \zeta_p = c^P_p \circ \nu$, $\forall p \in P$;
- $\omega \circ \theta_p = c^P_p \circ \omega$, $\forall p \in P$.

(iv) $\tau \circ (\xi_p \times \zeta_p) = \theta_p \circ \tau$, $\forall p \in P$;

(v) $(\lambda \circ \tau)(m, n) = m \cdot [\xi_{\nu(n)}(m)]^{-1}$, $\forall m \in M$, $\forall n \in N$;

(vi) $(\rho \circ \tau)(m, n) = [\zeta_{\mu(m)}(n)] \cdot n^{-1}$, $\forall m \in M$, $\forall n \in N$;

(vii) $\tau\big(\lambda(\ell), n\big) = \ell \cdot [\theta_{\nu(n)}(\ell)]^{-1}$, $\forall \ell \in L$, $\forall n \in N$;

(viii) $\tau\big(m, \rho(\ell)\big) = [\theta_{\mu(m)}(\ell)] \cdot \ell^{-1}$, $\forall \ell \in L$, $\forall m \in M$;

(ix) $\tau(mx, y) = [\theta_{\mu(m)} \circ \tau](x, y) \cdot \tau(m, y)$, $\forall m, x \in M$, $\forall n \in N$;

(x) $\tau(x, ny) = \tau(x, n) \cdot [\theta_{\nu(n)} \circ \tau](x, y)$, $\forall m \in M$, $\forall n, y \in N$.

Na definição acima, é claro que ξ é uma ação por automorfismos de P em M, que ζ é uma ação por automorfismos de P em N e que θ é uma ação por automorfismos de P em L. Combinando os itens (iv) e (ix), $\forall m, x \in M$, $\forall n \in N$, temos que

$$\begin{aligned}
\tau(mx, y) &= [\theta_{\mu(m)} \circ \tau](x, y) \cdot \tau(m, y) \\
&= \{\tau \circ [\xi_{\mu(m)} \times \zeta_{\mu(m)}]\}(x, y) \cdot \tau(m, y) \\
&= \big\{\tau \circ \big[\xi\big(\mu(m)\big) \times \zeta\big(\mu(m)\big)\big]\big\}(x, y) \cdot \tau(m, y) \\
&= \{\tau \circ [(\xi \circ \mu)(m) \times (\zeta \circ \mu)(m)]\}(x, y) \cdot \tau(m, y) \\
&= \{\tau \circ [c^M(m) \times (\zeta \circ \mu)(m)]\}(x, y) \cdot \tau(m, y) \\
&= \{\tau \circ [c^M_m \times (\zeta \circ \mu)_m]\}(x, y) \cdot \tau(m, y) \\
&= \tau\big([c^M_m \times (\zeta \circ \mu)_m](x, y)\big) \cdot \tau(m, y) \\
&= \tau\big(c^M_m(x), (\zeta \circ \mu)_m(y)\big) \cdot \tau(m, y)\,.
\end{aligned}$$

Combinando os itens (iv) e (x), $\forall m \in M$, $\forall n, y \in N$, temos que

$$\begin{aligned}
\tau(x, ny) &= \tau(x, n) \cdot [\theta_{\nu(n)} \circ \tau](x, y) \\
&= \tau(x, n) \cdot \{\tau \circ [\xi_{\nu(n)} \times \zeta_{\nu(n)}]\}(x, y) \\
&= \tau(x, n) \cdot \big\{\tau \circ \big[\xi\big(\nu(n)\big) \times \zeta\big(\nu(n)\big)\big]\big\}(x, y) \\
&= \tau(x, n) \cdot \{\tau \circ [(\xi \circ \nu)(n) \times (\zeta \circ \nu)(n)]\}(x, y) \\
&= \tau(x, n) \cdot \tau\big([(\xi \circ \nu)(n) \times (\zeta \circ \nu)(n)](x, y)\big) \\
&= \tau(x, n) \cdot \tau\big([(\xi \circ \nu)(n)](x), [(\zeta \circ \nu)(n)](y)\big) \\
&= \tau(x, n) \cdot \tau\big([(\xi \circ \nu)(n)](x), [c^N(n)](y)\big) \\
&= \tau(x, n) \cdot \tau\big((\xi \circ \nu)_n(x), c^N_n(y)\big)\,.
\end{aligned}$$

Portanto, em vista do item (iv), os itens (ix) e (x) da definição são equivalentes ao item (xi) abaixo:

(xi) A função $\tau : M \times N \to L$ é um pareamento cruzado com respeito às ações $\zeta \circ \mu : M \to Aut(N)$ e $\xi \circ \nu : N \to Aut(M)$.

Usando nossa notação para ações de grupos, reescrevemos os itens da definição acima no formato abaixo:

(i) $\lambda({}^{p}\ell) = {}^{p}[\lambda(\ell)]$, $\forall \ell \in L$, $\forall p \in P$;

(ii) $\rho({}^{p}\ell) = {}^{p}[\rho(\ell)]$, $\forall \ell \in L$, $\forall p \in P$;

(iii) Para todos $m \in M$, $n \in N$, $p \in P$ e $\ell \in L$, temos que

- ${}^{\mu(m)}x = mxm^{-1}$;
- ${}^{\nu(n)}y = nyn^{-1}$;
- ${}^{\mu(\lambda(\ell))}z = \ell z \ell^{-1} = {}^{\nu(\rho(\ell))}z$;
- $\mu({}^{p}m) = p \cdot \mu(m) \cdot p^{-1}$;
- $\nu({}^{p}n) = p \cdot \nu(n) \cdot p^{-1}$;
- $\mu\big(\lambda({}^{p}\ell)\big) = p \cdot \mu\big(\lambda(\ell)\big) \cdot p^{-1} = p \cdot \nu\big(\rho(\ell)\big) \cdot p^{-1} = \nu\big(\rho({}^{p}\ell)\big)$.

(iv) $\tau({}^{p}m, {}^{p}n) = {}^{p}[\tau(m,n)]$, $\forall m \in M$, $\forall n \in N$, $\forall p \in P$;

(v) $\lambda\big(\tau(m,n)\big) = m\, {}^{\nu(n)}m^{-1}$, $\forall m \in M$, $\forall n \in N$;

(vi) $\rho\big(\tau(m,n)\big) = {}^{\mu(m)}n\, n^{-1}$, $\forall m \in M$, $\forall n \in N$;

(vii) $\tau\big(\lambda(\ell), n\big) = \ell\, {}^{\nu(n)}\ell^{-1}$, $\forall \ell \in L$, $\forall n \in N$;

(viii) $\tau\big(m, \rho(\ell)\big) = {}^{\mu(m)}\ell\, \ell^{-1}$, $\forall \ell \in L$, $\forall m \in M$;

(ix) $\tau(mx, y) = {}^{\mu(m)}[\tau(x,y)] \cdot \tau(m,y) = \tau({}^{\mu(m)}x, {}^{\mu(m)}y) \cdot \tau(m,y)$, $\forall m, x \in M$, $\forall n \in N$;

(x) $\tau(x, ny) = \tau(x,n) \cdot {}^{\nu(n)}[\tau(x,y)] = \tau(x,n) \cdot \tau({}^{\nu(n)}x, {}^{\nu(n)}y)$, $\forall m \in M$, $\forall n, y \in N$.

Sejam $Q = (L, M, N, P, \lambda, \rho, \mu, \nu, \theta, \xi, \zeta, \tau)$ um quadrado cruzado de grupos e $\omega = \mu \circ \lambda = \nu \circ \rho$. Pelo fato de (M, P, μ, ξ), (N, P, ν, ζ) e (L, P, ω, θ) serem módulos cruzados de grupos, temos que os grupos L, M, N e P agem em si mesmos por conjugação e uns nos outros compativelmente (dois a dois).

Sejam $e_M \in M$ o elemento neutro de M, $e_N \in N$ o elemento neutro de N e $e_L \in L$ o elemento neutro de L. Então, $\tau(e_M, n) = e_L = \tau(m, e_N)$, $\forall m \in M$, $\forall n \in N$. Dessa forma, pelo item (viii), M age trivialmente em $ker(\rho)$. De fato, $\forall \ell \in ker(\rho)$, $\forall m \in M$, temos que $e_L = \tau(m, e_N) = \tau\big(m, \rho(\ell)\big) = [\theta_{\mu(m)}(\ell)] \cdot \ell^{-1}$ e, portanto, $(\theta \circ \mu)_m(\ell) = \theta_{\mu(m)}(\ell) = \ell$. Também, pelo item (vii), N age trivialmente em $ker(\lambda)$. Com efeito, $\forall \ell \in ker(\lambda)$, $\forall n \in N$, temos que $e_L = \tau(e_M, n) = \tau\big(\lambda(\ell), n\big) = \ell \cdot [\theta_{\nu(n)}(\ell)]^{-1}$ e, portanto, que $(\theta \circ \nu)_n(\ell) = \theta_{\nu(n)}(\ell) = \ell$. Isto é, ${}^{\mu(m)}\ell = \ell$, $\forall m \in M$, $\forall \ell \in ker(\rho)$, e ${}^{\nu(n)}\ell = \ell$, $\forall n \in N$, $\forall \ell \in ker(\lambda)$.

Como exemplo, sejam P um grupo, $M \lhd P$ e $N \lhd P$. Então, $M \cap N \lhd P$, o que implica $M \cap N \lhd M \lhd P$ e $M \cap N \lhd N \lhd P$. Sejam $\lambda : M \cap N \hookrightarrow M$, $\rho : M \cap N \hookrightarrow N$, $\mu : M \hookrightarrow P$ e $\nu : N \hookrightarrow P$ as inclusões, $c^P : P \to Aut(P)$ a ação por conjugação de P e suas restrições $\xi = c^P_{PM} : P \to Aut(M)$, $\zeta = c^P_{PN} : P \to Aut(N)$ e $\theta = c^P_{P,M\cap N} : P \to Aut(M \cap N)$. Sejam também $\kappa : P \times P \to P'$ a função comutadora, isto é, $\kappa(a,b) = [a,b] = aba^{-1}b^{-1}$, $\forall a, b \in P$, e sua restrição $\tau = \kappa|_{M\times N} : M \times N \to P'$. Então, $im(\tau) \subset P' \cap M \cap N$ e τ é da forma $\tau : M \times N \to M \cap N$. Assim, a 12-upla $(M \cap N, M, N, P, \lambda, \rho, \mu, \nu, \theta, \xi, \zeta, \tau)$ é um quadrado cruzado de grupos.

Sejam T um grupo, (M, P, μ, ξ) e (N, P, ν, ζ) módulos cruzados de grupos e $\tau : M \times N \to T$ um pareamento cruzado com respeito às ações $\zeta \circ \mu$ e $\xi \circ \nu$, de modo que $T = (M \otimes N)^{(\zeta\circ\mu,\xi\circ\nu)}_{\tau}$ é o produto tensorial de M e N com τ. Assim, temos que $\xi \circ \mu = c^M$, que $\zeta \circ \nu = c^N$ e que $\mu \circ \xi_p = c^P_p \circ \mu$ e $\nu \circ \zeta_p = c^P_p \circ \nu$, $\forall p \in P$. Também, todas as ações envolvidas são ações por automorfismos, $(M \times P\,,\, c^P \circ \mu\,,\, \xi) \in Obj(\mathsf{C})$, $(N \times P\,,\, c^P \circ \nu\,,\, \zeta) \in Obj(\mathsf{C})$, $X = (M \times N\,,\, \zeta \circ \mu\,,\, \xi \circ \nu) \in Obj(\mathsf{C})$, $Y = (P \times P, c^P, c^P) \in Obj(\mathsf{C})$, $\mu \times \nu \in Hom_{\mathsf{C}}(X, Y)$ e $\xi_p \times \zeta_p \in Hom_{\mathsf{C}}(X, X)$, $\forall p \in P$.

Sejam as funções $\tau_1 : M \times N \to M$ e $\tau_2 : M \times N \to N$ tais que, $\forall m \in M$, $\forall n \in N$,

$$\tau_1(m,n) = m \cdot [(\xi \circ \nu)_n(m)]^{-1} = m \cdot [\xi_{\nu(n)}(m)]^{-1}$$

e

$$\tau_2(m,n) = [(\zeta \circ \mu)_m(n)] \cdot n^{-1} = [\zeta_{\mu(m)}(n)] \cdot n^{-1}\,.$$

Como $\zeta\circ\mu$ e $\xi\circ\nu$ são ações por automorfismos e são compatíveis, pela proposição 1.2.11, τ_1 e τ_2 são pareamentos cruzados com respeito às ações $\zeta \circ \mu$ e $\xi \circ \nu$. Pela demonstração do item (i) do teorema 3.5.3, os homomorfismos $\lambda : T \to M$ e $\rho : T \to N$ desse teorema são tais que $\lambda\circ\tau = \tau_1$ e $\rho\circ\tau = \tau_2$. Como $\mu : M \to P$ e $\nu : N \to P$ são homomorfismos, pela proposição 1.2.12, $\mu \circ \tau_1 : M \times N \to P$ e $\nu \circ \tau_2 : M \times N \to P$ também são pareamentos cruzados com respeito às ações $\zeta \circ \mu$ e $\xi \circ \nu$. Seja $\kappa : P \times P \to P'$ a função comutadora, isto é, $\kappa(p,q) = [p,q] = pqp^{-1}q^{-1}$, $\forall p, q \in P$. Pelo exemplo 1.4.5, κ é um pareamento cruzado com respeito à conjugação de P. Como $\mu\times\nu \in Hom_{\mathsf{C}}(X, Y)$, temos que $\kappa\circ(\mu\times\nu) : M\times N \to P$ também é um pareamento cruzado com respeito às ações $\zeta \circ \mu$ e $\xi \circ \nu$. Na realidade, temos que $\mu \circ \tau_1 = \kappa \circ (\mu\times\nu) = \nu \circ \tau_2$. De fato,

$\forall m \in M$, $\forall n \in N$, temos que

$$
\begin{array}{rcl}
(\mu \circ \tau_1)(m,n) & = & \mu\big(\tau_1(m,n)\big) \\
& = & \mu\big(m \cdot [\xi_{\nu(n)}(m)]^{-1}\big) \\
& = & \mu(m) \cdot \mu\big([\xi_{\nu(n)}(m)]^{-1}\big) \\
& = & \mu(m) \cdot \big[\mu\big(\xi_{\nu(n)}(m)\big)\big]^{-1} \\
& = & \mu(m) \cdot \{[\mu \circ \xi_{\nu(n)}](m)\}^{-1} \\
& = & \mu(m) \cdot \{[c^{P}_{\nu(n)} \circ \mu](m)\}^{-1} \\
& = & \mu(m) \cdot \big[c^{P}_{\nu(n)}\big(\mu(m)\big)\big]^{-1} \\
& = & \mu(m) \cdot \{[\nu(n)] \cdot [\mu(m)] \cdot [\nu(n)]^{-1}\}^{-1} \\
& = & \mu(m) \cdot \{[\nu(n)] \cdot [\mu(m)]^{-1} \cdot [\nu(n)]^{-1}\} \\
& = & [\mu(m)] \cdot [\nu(n)] \cdot [\mu(m)]^{-1} \cdot [\nu(n)]^{-1} \\
& = & [\mu(m), \nu(n)] \\
& = & \kappa\big(\mu(m), \nu(n)\big) \\
& = & \kappa\big((\mu \times \nu)(m,n)\big) \\
& = & [\kappa \circ (\mu \times \nu)](m,n)\,;
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
(\nu \circ \tau_2)(m,n) & = & \nu\big(\tau_2(m,n)\big) \\
& = & \nu\big([\zeta_{\mu(m)}(n)] \cdot n^{-1}\big) \\
& = & \nu\big(\zeta_{\mu(m)}(n)\big) \cdot \nu(n^{-1}) \\
& = & [\nu \circ \zeta_{\mu(m)}](n) \cdot [\nu(n)]^{-1} \\
& = & [c^{P}_{\mu(m)} \circ \nu](n) \cdot [\nu(n)]^{-1} \\
& = & \big[c^{P}_{\mu(m)}\big(\nu(n)\big)\big] \cdot [\nu(n)]^{-1} \\
& = & \{[\mu(m)] \cdot [\nu(n)] \cdot [\mu(m)]^{-1}\} \cdot [\nu(n)]^{-1} \\
& = & [\mu(m)] \cdot [\nu(n)] \cdot [\mu(m)]^{-1} \cdot [\nu(n)]^{-1} \\
& = & [\mu(m), \nu(n)] \\
& = & \kappa\big(\mu(m), \nu(n)\big) \\
& = & \kappa\big((\mu \times \nu)(m,n)\big) \\
& = & [\kappa \circ (\mu \times \nu)](m,n)\,.
\end{array}
$$

Ficamos com os homomorfismos $\mu \circ \lambda\,,\ \nu \circ \rho : T \to P$.

$$
\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, bend right, "\kappa\circ(\mu\times\nu)"'] & T \arrow[d, shift right, "\nu\circ\rho"'] \arrow[d, shift left, "\mu\circ\lambda"] \\
& P
\end{tikzcd}
$$

$$(\mu \circ \lambda) \circ \tau = \mu \circ (\lambda \circ \tau) = \mu \circ \tau_1 = \kappa \circ (\mu \times \nu) = \nu \circ \tau_2 = \nu \circ (\rho \circ \tau) = (\nu \circ \rho) \circ \tau\,.$$

Pela unicidade, na propriedade universal do produto tensorial, temos que $\mu \circ \lambda = \nu \circ \rho$. Seja $\omega = \mu \circ \lambda = \nu \circ \rho$.

Como vimos anteriormente, $X = (M \times N\,,\, \zeta \circ \mu\,,\, \xi \circ \nu) \in Obj(\mathsf{C})$. Seja $p \in P$. Como $\xi_p \times \zeta_p \in Hom_{\mathsf{C}}(X, X)$, temos que $\tau \circ (\xi_p \times \zeta_p) : M \times N \to T$ é um pareamento cruzado com respeito às ações $\zeta \circ \mu$ e $\xi \circ \nu$. Portanto, existe um único homomorfismo $\overline{\theta_p} : T \to T$ tal que $\overline{\theta_p} \circ \tau = \tau \circ (\xi_p \times \zeta_p)$.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\tau \circ (\xi_p \times \zeta_p)"'] & (M \otimes N)_\tau^{(\zeta\circ\mu, \xi\circ\nu)} \arrow[d, "\overline{\theta_p}"] \\ & (M \otimes N)_\tau^{(\zeta\circ\mu, \xi\circ\nu)} \end{tikzcd}$$

Seja $e = e_P \in P$ o elemento neutro de P. Daí,

$$\overline{\theta_e} \circ \tau = \tau \circ (\xi_e \times \zeta_e) = \tau \circ (id_M \times id_N) = \tau \circ id_{M \times N} = \tau\,.$$

Como $id_T \circ \tau = \tau$, por unicidade, $\overline{\theta_e} = id_T$.

Para todos $p, q \in P$, temos que

$$\begin{aligned} \overline{\theta_{pq}} \circ \tau &= \tau \circ (\xi_{pq} \times \zeta_{pq}) \\ &= \tau \circ [\xi(pq) \times \zeta(pq)] \\ &= \tau \circ \{[\xi(p) \circ \xi(q)] \times [\zeta(p) \circ \zeta(q)]\} \\ &= \tau \circ \{[\xi(p) \times \zeta(p)] \circ [\xi(q) \times \zeta(q)]\} \\ &= \tau \circ (\xi_p \times \zeta_p) \circ (\xi_q \times \zeta_q) \\ &= \overline{\theta_p} \circ \tau \circ (\xi_q \times \zeta_q) \\ &= \overline{\theta_p} \circ \overline{\theta_q} \circ \tau \\ &= (\overline{\theta_p} \circ \overline{\theta_q}) \circ \tau\,. \end{aligned}$$

Por unicidade, $\overline{\theta_{pq}} = \overline{\theta_p} \circ \overline{\theta_q}$. Daí, $\forall p \in P$,

$$\overline{\theta_p} \circ \overline{\theta_{p^{-1}}} = \overline{\theta_{pp^{-1}}} = \overline{\theta_e} = id_T = \overline{\theta_e} = \overline{\theta_{p^{-1}p}} = \overline{\theta_{p^{-1}}} \circ \overline{\theta_p}$$

e, portanto, $\overline{\theta_p}$ e $\overline{\theta_{p^{-1}}}$ são isomorfismos, com $(\overline{\theta_p})^{-1} = \overline{\theta_{p^{-1}}}$. Dessa forma, $\overline{\theta_p} \in Aut(T)$, $\forall p \in P$.

Seja $\theta : P \to Aut(T)$ tal que $\theta(p) = \overline{\theta_p}$, $\forall p \in P$. Daí, $\forall p, q \in P$, $\theta(pq) = \overline{\theta_{pq}} = \overline{\theta_p} \circ \overline{\theta_q} = \theta(p) \circ \theta(q)$. Assim, $\theta \in Hom\big(P, Aut(T)\big)$, ou seja, θ é uma ação por automorfismos de P em T. Pela nossa notação, temos que $\theta_p = \theta(p) = \overline{\theta_p}$, $\forall p \in P$. Portanto, $\theta_p \circ \tau = \tau \circ (\xi_p \times \zeta_p)$, $\forall p \in P$.

Como $\zeta \circ \mu$ e $\xi \circ \nu$ são ações por automorfismos e são compatíveis, estão bem-definidas suas ações induzidas no produto tensorial, que denotaremos por $\overline{\zeta\mu} : M \to Aut(T)$ e $\overline{\xi\nu} : N \to Aut(T)$. Para todo $m \in M$ e todo $n \in N$, temos que

$$(\overline{\zeta\mu})_m \circ \tau = \tau \circ [c_m^M \times (\zeta \circ \mu)_m] = \tau \circ [c_m^M \times \zeta_{\mu(m)}]$$

e

$$(\overline{\xi\nu})_n \circ \tau = \tau \circ [(\xi \circ \nu)_n \times c^N_n] = \tau \circ [\xi_{\nu(n)} \times c^N_n]\,.$$

Sejam $m \in M$ e $n \in N$. Ficamos com $\theta_{\mu(m)} = \theta\big(\mu(m)\big) \in Aut(T)$, com $\theta_{\nu(n)} = \theta\big(\nu(n)\big) \in Aut(T)$, com $(\overline{\zeta\mu})_m \in Aut(T)$ e com $(\overline{\xi\nu})_n \in Aut(T)$.

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, bend right, "\tau\circ[c^M_m\times\zeta_{\mu(m)}]"'] & T \arrow[d, shift right, "\theta_{\mu(m)}"'] \arrow[d, shift left, "(\overline{\zeta\mu})_m"] \\ & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, bend right, "\tau\circ[\xi_{\nu(n)}\times c^N_n]"'] & T \arrow[d, shift right, "\theta_{\nu(n)}"'] \arrow[d, shift left, "(\overline{\xi\nu})_n"] \\ & T \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{\mu(m)} \circ \tau &= \tau \circ [\xi_{\mu(m)} \times \zeta_{\mu(m)}] \\
&= \tau \circ \big[\xi\big(\mu(m)\big) \times \zeta_{\mu(m)}\big] \\
&= \tau \circ [(\xi \circ \mu)(m) \times \zeta_{\mu(m)}] \\
&= \tau \circ [c^M(m) \times \zeta_{\mu(m)}] \\
&= \tau \circ [c^M_m \times \zeta_{\mu(m)}] \\
&= (\overline{\zeta\mu})_m \circ \tau\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{\nu(n)} \circ \tau &= \tau \circ [\xi_{\nu(n)} \times \zeta_{\nu(n)}] \\
&= \tau \circ \big[\xi_{\nu(n)} \times \zeta\big(\nu(n)\big)\big] \\
&= \tau \circ [\xi_{\nu(n)} \times (\zeta \circ \nu)(n)] \\
&= \tau \circ [\xi_{\nu(n)} \times c^N(n)] \\
&= \tau \circ [\xi_{\nu(n)} \times c^N_n] \\
&= (\overline{\xi\nu})_n \circ \tau\,.
\end{aligned}$$

Por unicidade, $\theta_{\mu(m)} = (\overline{\zeta\mu})_m$ e $\theta_{\nu(n)} = (\overline{\xi\nu})_n$. Como m e n são quaisquer, ficamos com $(\theta \circ \mu)(m) = \theta\big(\mu(m)\big) = \theta_{\mu(m)} = (\overline{\zeta\mu})_m = \overline{\zeta\mu}(m)$, $\forall m \in M$, e com $(\theta \circ \nu)(n) = \theta\big(\nu(n)\big) = \theta_{\nu(n)} = (\overline{\xi\nu})_n = \overline{\xi\nu}(n)$, $\forall n \in N$. Assim, $\theta \circ \mu = \overline{\zeta\mu}$ e $\theta \circ \nu = \overline{\xi\nu}$. Dessa forma, pelo item (iii) do teorema 3.5.3, temos que $\theta \circ \omega = \theta \circ (\mu \circ \lambda) = (\theta \circ \mu) \circ \lambda = \overline{\zeta\mu} \circ \lambda = c^T$. Alternativamente, pelo item (iv) do teorema 3.5.3, temos que $\theta \circ \omega = \theta \circ (\nu \circ \rho) = (\theta \circ \nu) \circ \rho = \overline{\xi\nu} \circ \rho = c^T$.

Seja $\kappa : P{\times}P \to P'$ a função comutadora e $c^P : P \to Aut(P)$ a conjugação de P. Observe que $\kappa\circ(c^{P}_{p}\times c^{P}_{p})=c^{P}_{p}\circ\kappa$, $\forall p\in P$. De fato, $\forall p,q,r\in P$,

$$\begin{aligned}
[\kappa\circ(c^{P}_{p}\times c^{P}_{p})](q,r) &= \kappa\big((c^{P}_{p}\times c^{P}_{p})(q,r)\big)\\
&= \kappa\big(c^{P}_{p}(q),c^{P}_{p}(r)\big)\\
&= \kappa(pqp^{-1},prp^{-1})\\
&= [pqp^{-1},prp^{-1}]\\
&= (pqp^{-1})(prp^{-1})(pqp^{-1})^{-1}(prp^{-1})^{-1}\\
&= (pqp^{-1})(prp^{-1})(pq^{-1}p^{-1})(pr^{-1}p^{-1})\\
&= pqp^{-1}prp^{-1}pq^{-1}p^{-1}pr^{-1}p^{-1}\\
&= pqrq^{-1}r^{-1}p^{-1}\\
&= p(qrq^{-1}r^{-1})p^{-1}\\
&= c^{P}_{p}(qrq^{-1}r^{-1})\\
&= c^{P}_{p}([q,r])\\
&= c^{P}_{p}\big(\kappa(q,r)\big)\\
&= (c^{P}_{p}\circ\kappa)(q,r)\,.
\end{aligned}$$

Temos $X=(M\times N\,,\,\zeta\circ\mu\,,\,\xi\circ\nu)\in Obj(\mathsf{C})$, $Y=(P\times P,c^{P},c^{P})\in Obj(\mathsf{C})$ e $\mu\times\nu\in Hom_{\mathsf{C}}(X,Y)$. Seja $p\in P$. Como $\xi_p\times\zeta_p\in Hom_{\mathsf{C}}(X,X)$, temos que $(\mu\times\nu)\circ(\xi_p\times\zeta_p)\in Hom_{\mathsf{C}}(X,Y)$. Como κ é um pareamento cruzado com respeito a c^{P}, pela proposição 1.3.3, temos que $\kappa\circ(\mu\times\nu)\circ(\xi_p\times\zeta_p)$ é um pareamento cruzado com respeito às ações $\zeta\circ\mu$ e $\xi\circ\nu$. Também,

$$\begin{aligned}
\kappa\circ(\mu\times\nu)\circ(\xi_p\times\zeta_p) &= \kappa\circ[(\mu\circ\xi_p)\times(\nu\circ\zeta_p)]\\
&= \kappa\circ[(c^{P}_{p}\circ\mu)\times(c^{P}_{p}\circ\nu)]\\
&= \kappa\circ(c^{P}_{p}\times c^{P}_{p})\circ(\mu\times\nu)\\
&= c^{P}_{p}\circ\kappa\circ(\mu\times\nu)\,.
\end{aligned}$$

Daí, $c^{P}_{p}\circ\kappa\circ(\mu\times\nu):M\times N\to P$ é um pareamento cruzado com respeito às ações $\zeta\circ\mu$ e $\xi\circ\nu$. Temos homomorfismos $c^{P}_{p}\circ\omega\,,\,\omega\circ\theta_p:T\to P$.

$$\begin{tikzcd}
M\times N \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, bend right, "c^{P}_{p}\circ\kappa\circ(\mu\times\nu)"'] & T \arrow[d, shift right, "c^{P}_{p}\circ\omega"'] \arrow[d, shift left, "\omega\circ\theta_p"] \\
 & P
\end{tikzcd}$$

Estes são tais que $(c^{P}_{p}\circ\omega)\circ\tau=c^{P}_{p}\circ\mu\circ\lambda\circ\tau=c^{P}_{p}\circ\mu\circ\tau_1=c^{P}_{p}\circ\kappa\circ(\mu\times\nu)$ ou, alternativamente, $(c^{P}_{p}\circ\omega)\circ\tau=c^{P}_{p}\circ\nu\circ\rho\circ\tau=c^{P}_{p}\circ\nu\circ\tau_2=c^{P}_{p}\circ\kappa\circ(\mu\times\nu)$.

Também,

$$\begin{aligned}
(\omega \circ \theta_p) \circ \tau &= \mu \circ \lambda \circ \theta_p \circ \tau \\
&= \mu \circ \lambda \circ \tau \circ (\xi_p \times \zeta_p) \\
&= \mu \circ \tau_1 \circ (\xi_p \times \zeta_p) \\
&= \kappa \circ (\mu \times \nu) \circ (\xi_p \times \zeta_p) \\
&= c_p^P \circ \kappa \circ (\mu \times \nu)\,.
\end{aligned}$$

Ou, alternativamente,

$$\begin{aligned}
(\omega \circ \theta_p) \circ \tau &= \nu \circ \rho \circ \theta_p \circ \tau \\
&= \nu \circ \rho \circ \tau \circ (\xi_p \times \zeta_p) \\
&= \nu \circ \tau_2 \circ (\xi_p \times \zeta_p) \\
&= \kappa \circ (\mu \times \nu) \circ (\xi_p \times \zeta_p) \\
&= c_p^P \circ \kappa \circ (\mu \times \nu)\,.
\end{aligned}$$

Por unicidade, ficamos com $c_p^P \circ \omega = \omega \circ \theta_p$. Como p é arbitrário, temos que $c_p^P \circ \omega = \omega \circ \theta_p$, $\forall p \in P$.

Concluimos que $\omega : T \to P$ e $\theta : P \to Aut(T)$ são homomorfismos tais que $\theta \circ \omega = c^T$ e $c_p^P \circ \omega = \omega \circ \theta_p$, $\forall p \in P$. Logo, (T, P, ω, θ) é um P-módulo cruzado de grupos.

Considere novamente as funções $\tau_1 : M \times N \to M$ e $\tau_2 : M \times N \to N$ tais que, $\forall m \in M$, $\forall n \in N$,

$$\tau_1(m,n) = m \cdot [(\xi \circ \nu)_n(m)]^{-1} = m \cdot [\xi_{\nu(n)}(m)]^{-1}$$

e

$$\tau_2(m,n) = [(\zeta \circ \mu)_m(n)] \cdot n^{-1} = [\zeta_{\mu(m)}(n)] \cdot n^{-1}\,.$$

Para todo $p \in P$ e todo $(m,n) \in M \times N$,

$$
\begin{aligned}
[\tau_1 \circ (\xi_p \times \zeta_p)](m,n) &= \tau_1\big((\xi_p \times \zeta_p)(m,n)\big) \\
&= \tau_1\big(\xi_p(m), \zeta_p(n)\big) \\
&= [\xi_p(m)] \cdot \big[\xi_{\nu(\zeta_p(n))}\big(\xi_p(m)\big)\big]^{-1} \\
&= [\xi_p(m)] \cdot \big[\xi_{(\nu\circ\zeta_p)(n)}\big(\xi_p(m)\big)\big]^{-1} \\
&= [\xi_p(m)] \cdot \big[\xi_{(c_p^P\circ\nu)(n)}\big(\xi_p(m)\big)\big]^{-1} \\
&= [\xi_p(m)] \cdot \big[\xi_{c_p^P(\nu(n))}\big(\xi_p(m)\big)\big]^{-1} \\
&= [\xi_p(m)] \cdot \big[\xi_{p\cdot\nu(n)\cdot p^{-1}}\big(\xi_p(m)\big)\big]^{-1} \\
&= [\xi_p(m)] \cdot \{[\xi_{p\cdot\nu(n)\cdot p^{-1}} \circ \xi_p](m)\}^{-1} \\
&= [\xi_p(m)] \cdot [\xi_{p\cdot\nu(n)\cdot p^{-1}\cdot p}(m)]^{-1} \\
&= [\xi_p(m)] \cdot [\xi_{p\cdot\nu(n)}(m)]^{-1} \\
&= [\xi_p(m)] \cdot \{[\xi_p \circ \xi_{\nu(n)}](m)\}^{-1} \\
&= [\xi_p(m)] \cdot \big[\xi_p\big(\xi_{\nu(n)}(m)\big)\big]^{-1} \\
&= [\xi_p(m)] \cdot \big\{\xi_p\big([\xi_{\nu(n)}(m)]^{-1}\big)\big\} \\
&= \xi_p(m) \cdot \xi_p\big([\xi_{\nu(n)}(m)]^{-1}\big) \\
&= \xi_p\big(m \cdot [\xi_{\nu(n)}(m)]^{-1}\big) \\
&= \xi_p\big(\tau_1(m,n)\big) \\
&= (\xi_p \circ \tau_1)(m,n)\,;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\tau_2 \circ (\xi_p \times \zeta_p)](m,n) &= \tau_2\big((\xi_p \times \zeta_p)(m,n)\big) \\
&= \tau_2\big(\xi_p(m), \zeta_p(n)\big) \\
&= \big[\zeta_{\mu(\xi_p(m))}\big(\zeta_p(n)\big)\big] \cdot [\zeta_p(n)]^{-1} \\
&= \big[\zeta_{(\mu\circ\xi_p)(m)}\big(\zeta_p(n)\big)\big] \cdot [\zeta_p(n)]^{-1} \\
&= \big[\zeta_{(c_p^P\circ\mu)(m)}\big(\zeta_p(n)\big)\big] \cdot [\zeta_p(n)]^{-1} \\
&= \big[\zeta_{c_p^P(\mu(m))}\big(\zeta_p(n)\big)\big] \cdot [\zeta_p(n)]^{-1} \\
&= \big[\zeta_{p\cdot\mu(m)\cdot p^{-1}}\big(\zeta_p(n)\big)\big] \cdot [\zeta_p(n)]^{-1} \\
&= \big\{[\zeta_{p\cdot\mu(m)\cdot p^{-1}} \circ \zeta_p](n)\big\} \cdot [\zeta_p(n)]^{-1} \\
&= \big\{[\zeta_{p\cdot\mu(m)\cdot p^{-1}\cdot p}](n)\big\} \cdot [\zeta_p(n)]^{-1} \\
&= \big\{[\zeta_{p\cdot\mu(m)}](n)\big\} \cdot [\zeta_p(n)]^{-1} \\
&= \big\{[\zeta_p \circ \zeta_{\mu(m)}](n)\big\} \cdot [\zeta_p(n)]^{-1} \\
&= \big[\zeta_p\big(\zeta_{\mu(m)}(n)\big)\big] \cdot [\zeta_p(n^{-1})] \\
&= \zeta_p\big(\zeta_{\mu(m)}(n)\big) \cdot \zeta_p(n^{-1}) \\
&= \zeta_p\big([\zeta_{\mu(m)}(n)] \cdot n^{-1}\big) \\
&= \zeta_p\big(\tau_2(m,n)\big) \\
&= (\zeta_p \circ \tau_2)(m,n)\,.
\end{aligned}
$$

Assim, $\tau_1 \circ (\xi_p \times \zeta_p) = \xi_p \circ \tau_1$ e $\tau_2 \circ (\xi_p \times \zeta_p) = \zeta_p \circ \tau_2$, $\forall p \in P$.

Seja $p \in P$. Como $\xi_p : M \to M$ e $\zeta_p : N \to N$ são homomorfismos e τ_1 e τ_2 são pareamentos cruzados com respeito às ações $\zeta \circ \mu$ e $\xi \circ \nu$, então $\xi_p \circ \tau_1 = \tau_1 \circ (\xi_p \times \zeta_p)$ e $\zeta_p \circ \tau_2 = \tau_2 \circ (\xi_p \times \zeta_p)$ também são pareamentos cruzados com respeito às ações $\zeta \circ \mu$ e $\xi \circ \nu$. Alternativamente, como $X = (M \times N\,, \zeta\circ\mu\,, \xi\circ\nu) \in Obj(\mathsf{C})$ e $\xi_p \times \zeta_p \in Hom_{\mathsf{C}}(X,X)$, temos que $\tau_1 \circ (\xi_p \times \zeta_p) = \xi_p \circ \tau_1$ e $\tau_2 \circ (\xi_p \times \zeta_p) = \zeta_p \circ \tau_2$ também são pareamentos cruzados com respeito às ações $\zeta\circ\mu$ e $\xi\circ\nu$. Temos homomorfismos $\xi_p \circ \lambda\,, \lambda\circ\theta_p : T \to M$ e $\zeta_p \circ \rho\,, \rho \circ \theta_p : T \to N$.

$$
\begin{tikzcd}
M\times N \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, bend right, "\xi_p\circ\tau_1"'] & T \arrow[d, shift right, "\xi_p\circ\lambda"'] \arrow[d, shift left, "\lambda\circ\theta_p"] \\
 & M
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
M\times N \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, bend right, "\zeta_p\circ\tau_2"'] & T \arrow[d, shift right, "\zeta_p\circ\rho"'] \arrow[d, shift left, "\rho\circ\theta_p"] \\
 & N
\end{tikzcd}
$$

Estes são tais que

$$
\begin{aligned}
(\lambda \circ \theta_p) \circ \tau &= \lambda \circ \theta_p \circ \tau \\
&= \lambda \circ \tau \circ (\xi_p \times \zeta_p) \\
&= \tau_1 \circ (\xi_p \times \zeta_p) \\
&= \xi_p \circ \tau_1 \\
&= \xi_p \circ (\lambda \circ \tau) \\
&= (\xi_p \circ \lambda) \circ \tau\,;
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
(\rho \circ \theta_p) \circ \tau &= \rho \circ \theta_p \circ \tau \\
&= \rho \circ \tau \circ (\xi_p \times \zeta_p) \\
&= \tau_2 \circ (\xi_p \times \zeta_p) \\
&= \zeta_p \circ \tau_2 \\
&= \zeta_p \circ (\rho \circ \tau) \\
&= (\zeta_p \circ \rho) \circ \tau\,.
\end{aligned}$$

Por unicidade, ficamos com $\lambda \circ \theta_p = \xi_p \circ \lambda$ e com $\rho \circ \theta_p = \zeta_p \circ \rho$. Como p é qualquer, temos que λ é equivariante com respeito às ações θ e ξ e que ρ é equivariante com respeito às ações θ e ζ.

Note que, $\forall m \in M$, $\forall n \in N$,

$$(\lambda \circ \tau)(m,n) = \tau_1(m,n) = m \cdot [\xi_{\nu(n)}(m)]^{-1}$$

e

$$(\rho \circ \tau)(m,n) = \tau_2(m,n) = [\zeta_{\mu(m)}(n)] \cdot n^{-1}\,.$$

Anteriormente, mostramos que $(\overline{\zeta\mu})_m = \theta_{\mu(m)}$, $\forall m \in M$, e que $(\overline{\xi\nu})_n = \theta_{\nu(n)}$, $\forall n \in N$. Daí, pelos itens (vii) e (viii) do teorema 3.5.3, $\forall t \in T$, $\forall n \in N$, $\forall m \in M$, temos que

$$\tau\big(\lambda(t), n\big) = \lambda(t) \otimes n = t \cdot [(\overline{\xi\nu})_n(t)]^{-1} = t \cdot [\theta_{\nu(n)}(t)]^{-1}$$

e que

$$\tau\big(m, \rho(t)\big) = m \otimes \rho(t) = [(\overline{\zeta\mu})_m(t)] \cdot t^{-1} = [\theta_{\mu(m)}(t)] \cdot t^{-1}\,.$$

Logo, a 12-upla $\Big((M \otimes N)_\tau^{(\zeta\circ\mu,\xi\circ\nu)}, M, N, P, \lambda, \rho, \mu, \nu, \theta, \xi, \zeta, \tau\Big)$ é um quadrado cruzado de grupos.

Definição 5.2.4. Sejam $X = (L, M, N, P, \lambda, \rho, \mu, \nu, \theta, \xi, \zeta, \tau)$ e $X' = (L', M', N', P', \lambda', \rho', \mu', \nu', \theta', \xi', \zeta', \tau')$ quadrados cruzados de grupos. Um morfismo de quadrados cruzados de grupos de X em X' é uma 4-upla $\varphi = (\varphi_L, \varphi_M, \varphi_N, \varphi_P)$ na qual $\varphi_L : L \to L'$, $\varphi_M : M \to M'$, $\varphi_N : N \to N'$ e $\varphi_P : P \to P'$ são homomorfismos tais que $\lambda' \circ \varphi_L = \varphi_M \circ \lambda$, $\rho' \circ \varphi_L = \varphi_N \circ \rho$, $\nu' \circ \varphi_N = \varphi_P \circ \nu$, $\mu' \circ \varphi_M = \varphi_P \circ \mu$, $\xi'_{\varphi_P(p)} \circ \varphi_M = \varphi_M \circ \xi_p$, $\zeta'_{\varphi_P(p)} \circ \varphi_N = \varphi_N \circ \zeta_p$,

$\theta'_{\varphi_P(p)} \circ \varphi_L = \varphi_L \circ \theta_p$ e $\varphi_L \circ \tau = \tau' \circ (\varphi_M \times \varphi_N)$.

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[rr, "\varphi_L"] \arrow[dr, "\lambda"] \arrow[dd, "\rho"'] & & L' \arrow[dr, "\lambda'"] \arrow[dd, "\rho'"' near start] & \\
& M \arrow[rr, "\varphi_M" near start] \arrow[dd, "\mu" near start] & & M' \arrow[dd, "\mu'"] \\
N \arrow[rr, "\varphi_N"' near end] \arrow[dr, "\nu"'] & & N' \arrow[dr, "\nu'"] & \\
& P \arrow[rr, "\varphi_P"'] & & P'
\end{tikzcd}
$$

Ou seja, os homomorfismos φ_L, φ_M, φ_N e φ_P ligam os vértices dos quadrados cruzados, formando um cubo tal que todas as suas faces são quadrados comutativos e, além disso, esses homomorfismos preservam as ações de P e P' e comutam com os pareamentos cruzados.

Sejam

$$X = (L, M, N, P, \lambda, \rho, \mu, \nu, \theta, \xi, \zeta, \tau)\,,$$
$$X' = (L', M', N', P', \lambda', \rho', \mu', \nu', \theta', \xi', \zeta', \tau')$$

e

$$X'' = (L'', M'', N'', P'', \lambda'', \rho'', \mu'', \nu'', \theta'', \xi'', \zeta'', \tau'')$$

quadrados cruzados de grupos, $\varphi = (\varphi_L, \varphi_M, \varphi_N, \varphi_P)$ um morfismo de quadrados cruzados de grupos de X em X' e $\psi = (\psi_L, \psi_M, \psi_N, \psi_P)$ um morfismo de quadrados cruzados de grupos de X' em X''. É fácil mostrar que a 4-upla $(\psi_L \circ \varphi_L, \psi_M \circ \varphi_M, \psi_N \circ \varphi_N, \psi_P \circ \varphi_P)$ é um morfismo de quadrados cruzados de grupos de X em X''. Assim, criamos uma categoria XSq que tem como objetos os quadrados cruzados de grupos e como morfismos os morfismos de quadrados cruzados de grupos, na qual a composição de morfismos é definida coordenada a coordenada $(\psi_L, \psi_M, \psi_N, \psi_P) \circ (\varphi_L, \varphi_M, \varphi_N, \varphi_P) = (\psi_L \circ \varphi_L, \psi_M \circ \varphi_M, \psi_N \circ \varphi_N, \psi_P \circ \varphi_P)$. Dessa forma, os morfismos identidades são as 4-uplas formadas pelas identidades em cada grupo.

Dados T um grupo, (M, P, μ, ξ) e (N, P, ν, ζ) módulos cruzados de grupos e $\tau : M \times N \to T$ um pareamento cruzado com respeito às ações $\zeta \circ \mu$ e $\xi \circ \nu$, de modo que $T = (M \otimes N)_\tau^{(\zeta\circ\mu, \xi\circ\nu)}$ é o produto tensorial de M e N com τ, como fizemos acima, podemos construir um quadrado cruzado de grupos $U = \Big((M \otimes N)_\tau^{(\zeta\circ\mu, \xi\circ\nu)}, M, N, P, \lambda, \rho, \mu, \nu, \theta, \xi, \zeta, \tau\Big)$. Dizemos que o quadrado cruzado U é "universal", querendo dizer que, para todo quadrado cruzado de grupos $Q = (L', M', N', P', \lambda', \rho', \mu', \nu', \theta', \xi', \zeta', \tau')$, se os módulos cruzados de grupos das arestas são iguais, $(M', P', \mu', \xi') = (M, P, \mu, \xi)$ e $(N', P', \nu', \zeta') = (N, P, \nu, \zeta)$, então existe um único morfismo de quadrados cruzados de grupos $\varphi = (\varphi_L, \varphi_M, \varphi_N, \varphi_P) : U \to Q$ tal que $\varphi_M = id_M$,

$\varphi_N = id_N$ e $\varphi_P = id_P$. De fato, como $(M', P', \mu', \xi') = (M, P, \mu, \xi)$ e $(N', P', \nu', \zeta') = (N, P, \nu, \zeta)$, temos que $\tau' : M \times N \to L$ é um pareamento cruzado com respeito às ações $\zeta \circ \mu$ e $\xi \circ \nu$. Daí, existe um único homomorfismo $\varphi_L : T \to L$ tal que $\varphi_L \circ \tau = \tau' = \tau' \circ id_{M\times N} = \tau' \circ (id_M \times id_N)$.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\tau'"'] & T \arrow[d, "\varphi_L"] \\ & L \end{tikzcd}$$

o morfismo procurado é $\varphi = (\varphi_L, id_M, id_N, id_P)$.

A propriedade do quadrado cruzado $U = \begin{pmatrix} T & M \\ N & P \end{pmatrix}$ ser universal é equivalente à propriedade do quadrado comutativo de quadrados cruzados de grupos abaixo

$$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \arrow[r] \arrow[d] & \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & P \end{pmatrix} \arrow[d] \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N & P \end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix} T & M \\ N & P \end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

ser um pushout de XSq, em que denotamos os quadrados cruzados de grupos menores sem as flechas entre eles.

Como último exemplo, sejam X um espaço topológico e A e B subespaços de X, com um ponto marcado $x_0 \in A \cap B = P$. Considere as ações usuais $\xi : \pi_1 P \to Aut\big(\pi_2(B, P)\big)$, $\zeta : \pi_1 P \to Aut\big(\pi_2(A, P)\big)$ e $\theta : \pi_1 P \to Aut\big(\pi_3(X, A, B)\big)$ e também $\rho = \partial : \pi_3(X, A, B) \to \pi_2(A, P)$, $\lambda = \partial' : \pi_3(X, A, B) \to \pi_2(B, P)$, $\nu = \tilde{\partial} : \pi_2(A, P) \to \pi_1 P$ e $\mu = \tilde{\partial}' : \pi_2(B, P) \to \pi_1 P$ os homomorfismos conectantes das respectivas sequências exatas longas. Pela natureza desses homomorfismos conectantes (os representantes das classes são levados por ∂ e ∂' em classes com representantes dados pelas restrições aos respectivos hemisférios e $\tilde{\partial}$ e $\tilde{\partial}'$ levam representantes nas restrições às fronteiras dos discos), é claro que $\mu \circ \lambda = \nu \circ \rho = \omega$. Temos que $\big(\pi_2(B, P), \pi_1 P, \mu, \xi\big)$, $\big(\pi_2(A, P), \pi_1 P, \nu, \zeta\big)$ e $\big(\pi_2(X, A, B), \pi_1 P, \omega, \theta\big)$ são $\pi_1 P$-módulos cruzados de grupos. Seja também $\tau = w_{22} : \pi_2(B, P) \times \pi_2(A, P) \to \pi_3(X, A, B)$ o produto generalizado de Whitehead mencionado anteriormente. Como vimos, τ é um pareamento cruzado com respeito às ações $\zeta \circ \mu$ e $\xi \circ \nu$. Pelas propriedades desse produto com respeito aos homomorfismos induzidos e aos homomorfismos conectantes, é rotina verificar que são satisfeitos os axiomas de quadrados cruzados de grupos, de modo que $\big(\pi_3(X, A, B), \pi_2(B, P), \pi_2(A, P), \pi_1 P, \lambda, \rho, \mu, \nu, \theta, \xi, \zeta, \tau\big)$ é um quadrado cruzado de grupos.

Como comentado anteriormente, o quadrado acima se identifica com o quadrado fundamental

$$\begin{tikzcd} \pi_1 F \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1 F_u \arrow[d] \\ \pi_1 F_f \arrow[r] & \pi_1 P \end{tikzcd}$$

do quadrado das inclusões abaixo

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "v"] \\ A \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

em que $P = A \cap B$ e F é um objeto de Top^+ com mesmo tipo de homotopia da fibra de homotopia dos morfismos $F_u \to F_v$ e $F_f \to F_g$. Tal quadrado fundamental também tem estrutura de quadrado cruzado de grupos, como pode-se verificar.

5.3 Resultados

Como mostrado nos trabalhos de Brown e Loday, existem funtores que transformam n-cubos de espaços com pontos marcados em n-cubos cruzados de grupos. Pelo teorema generalizado de Seifert-van Kampen desses autores, esses funtores preservam certos colimites entre essas categorias. No nosso caso particular, quadrados de espaços pontuados são levados em quadrados cruzados de grupos e, sob certas hipóteses, os pushouts de $\mathrm{Top}^+\mathsf{H}$ são levados em pushouts de XSq. O teorema abaixo é exatamente nosso caso de interesse.

Teorema 5.3.1. Sejam Q o quadrado comutativo de Top^+ abaixo à esquerda e ΠQ seu quadrado fundamental abaixo à direita

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & A \arrow[d, "v"] \\ B \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1 F \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1 F_u \arrow[d] \\ \pi_1 F_f \arrow[r] & \pi_1 C \end{tikzcd}$$

Então, ΠQ comuta e tem estrutura de quadrado cruzado de grupos. Além disso, se u e f induzem funções sobrejetoras $\pi_0 C \twoheadrightarrow \pi_0 B$ e $\pi_0 C \twoheadrightarrow \pi_0 A$ e Q é um pushout de homotopia, então o espaço F é conexo por caminhos e ΠQ é universal. Dessa forma, a função de quadrados cruzados de grupos $\tau : \pi_1 F_u \times \pi_1 F_f \to \pi_1 F$ induz um isomorfismo $\pi_1 F_u \otimes \pi_1 F_f \cong \pi_1 F$.

No teorema acima, F_u e F_f são as fibras de homotopia de $u : C \to B$ e de $f : C \to A$, respectivamente, e F é um objeto de Top^+ com mesmo tipo de homotopia das fibras de homotopia dos morfismos $F_u \to F_v$ e $F_f \to F_g$. O produto tensorial é não-abeliano e a função de quadrados cruzados de grupos $\tau : \pi_1 F_u \times \pi_1 F_f \to \pi_1 F$ é um pareamento cruzado com respeito às ações dadas pelas composições $\pi_1 F_u \to \pi_1 C \to Aut(\pi_1 F_f)$ e $\pi_1 F_f \to \pi_1 C \to Aut(\pi_1 F_u)$, nas quais as ações são dadas pela estrutura de quadrado cruzado de grupos. Observe que, com as nossas considerações da seção anterior, o teorema está quase totalmente demonstrado. A única afirmação que é necessário provar é justamente o teorema generalizado de Seifert-van Kampen de Brown e Loday em dimensão dois, a saber, que o funtor $\Pi : \mathrm{Top}^+\mathsf{H} \to \mathsf{XSq}$ preserva colimites (pushouts).

No caso do quadrado Q ser um quadrado de inclusões e $C = A \cap B$, todos os espaços com o mesmo ponto marcado, então mostramos na seção anterior que o quadrado fundamental ΠQ pode ser identificado com o quadrado cruzado de grupos

$$\begin{array}{ccc} \pi_3(X,A,B) & \longrightarrow & \pi_2(B,C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_2(A,C) & \longrightarrow & \pi_1 C \end{array}$$

no qual os morfismos são os homomorfismos conectantes da respectiva seqüência exata longa e a função $\tau = w_{22} : \pi_2(B,C) \times \pi_2(A,C) \to \pi_3(X,A,B)$ é o produto generalizado de Whitehead, que é um pareamento cruzado com respeito às ações dadas pelas composições $\pi_2(B,C) \to \pi_1 C \to Aut\big(\pi_2(A,C)\big)$ e $\pi_2(A,C) \to \pi_1 C \to Aut\big(\pi_2(B,C)\big)$ e, portanto, induz um homomorfismo $\pi_2(B,C) \otimes \pi_2(A,C) \to \pi_3(X,A,B)$.

Corolário 5.3.2. Sejam X um espaço topológico, com subespaços $A \subset X$ e $B \subset X$ e um ponto marcado $x_0 \in A \cap B = C$ e considere o quadrado comutativo de Top^+

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & A \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ B & \xrightarrow[g]{} & X \end{array}$$

no qual as funções são inclusões. Suponha X, A, B e C sejam conexos por caminhos e que u e f induzem epimorfismos $\pi_1 C \twoheadrightarrow \pi_1 B$ e $\pi_1 C \twoheadrightarrow \pi_1 A$, respectivamente. Então, as inclusões de pares $(A,C) \hookrightarrow (X,B)$ e $(B,C) \hookrightarrow (X,A)$ induzem epimorfismos $\pi_2(A,C) \twoheadrightarrow \pi_2(X,B)$ e $\pi_2(B,C) \twoheadrightarrow \pi_2(X,A)$ e o produto generalizado de Whitehead $\tau = w_{22} : \pi_2(B,C) \times \pi_2(A,C) \to \pi_3(X,A,B)$ induz um isomorfismo $\pi_2(B,C) \otimes \pi_2(A,C) \cong \pi_3(X,A,B)$.

Seja (X, x_0) um espaço com ponto marcado e considere a suspensão SX e os cones inferior e superior de X, C_-X e C_+X, respectivamente. Tomando o nível $t = 0$ nesses espaços, obtemos um subespaço homeomorfo a X e, portanto, podemos considerar X como sendo um subespaço de todos eles. Dessa forma, temos que $X = C_-X \cap C_+X$. Como os cones são espaços contráteis, temos que $\pi_n(C_-X) \cong 0 \cong \pi_n(C_+X)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Uma parte de cada seqüência exata longa para os pares (C_-X, X) e (C_+X, X) é

$$\cdots \to \pi_{n+1}(C_-X) \to \pi_{n+1}(C_-X, X) \to \pi_n X \to \pi_n(C_-X) \to \cdots$$

e

$$\cdots \to \pi_{n+1}(C_+X) \to \pi_{n+1}(C_+X, X) \to \pi_n X \to \pi_n(C_+X) \to \cdots$$

as quais, portanto, nos fornecem $\pi_{n+1}(C_-X, X) \cong \pi_n X \cong \pi_{n+1}(C_+X, X)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

A mesma seqüência aplicada ao par (SX, C_-X) tem uma parte

$$\cdots \to \pi_n(C_-X) \to \pi_n(SX) \to \pi_n(SX, C_-X) \to \pi_{n-1}(C_-X) \to \cdots$$

a qual nos fornece $\pi_n(SX) \cong \pi_n(SX, C_-X)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Agora, uma parte da seqüência exata longa para a tríade (SX, C_+X, C_-X) é

$$\cdots \to \pi_3(C_+X, X) \to \pi_3(SX, C_-X) \to \pi_3(SX; C_+X, C_-X) \to \pi_2(C_+X, X) \to \pi_2(SX, C_-X) \to \cdots$$

Substituindo o que conseguimos acima, obtemos uma seqüência exata

$$\cdots \to \pi_2 X \to \pi_3(SX) \to \pi_3(SX; C_+X, C_-X) \to \pi_1 X \to \pi_2(SX) \to \cdots$$

Seja $G = \pi_1 X$. Aplicando o corolário 5.3.2, temos que

$$G \otimes G = \pi_1 X \otimes \pi_1 X \cong \pi_2(C_+X, X) \otimes \pi_2(C_-X, X) \cong \pi_3(SX; C_+X, C_-X).$$

De fato, vamos denotar $\pi_3(SX, C_+X, C_-X) = \pi_3$, $\pi_2(C_+X, X) = \pi_2^+$ e $\pi_2(C_-X, X) = \pi_2^-$. Temos o quadrado cruzado de grupos

$$\begin{tikzcd}
\pi_3 \arrow[r, "\partial'"] \arrow[d, "\partial"'] & \pi_2^+ \arrow[d, "\tilde{\partial}'"] \\
\pi_2^- \arrow[r, "\tilde{\partial}"'] & G
\end{tikzcd}$$

com as ações $\xi : G \to Aut(\pi_2^+)$ e $\zeta : G \to Aut(\pi_2^-)$ e a função dada pelo produto generalizado de Whitehead $w_{22} : \pi_2^+ \times \pi_2^- \to \pi_3$. Seja $\tau_1 : \pi_2^+ \times \pi_2^- \to \pi_2^+ \otimes \pi_2^-$ o pareamento cruzado com respeito às ações $\zeta \circ \tilde{\partial}'$ e $\xi \circ \tilde{\partial}$, construido na seção correspondente à existência do produto tensorial, tal que $\pi_2^+ \otimes \pi_2^- = (\pi_2^+ \otimes \pi_2^-)_{\tau_1}^{(\zeta\circ\tilde{\partial}', \xi\circ\tilde{\partial})}$. Seja $\tau_0 : G \times G \to G \otimes G$ o pareamento cruzado com respeito à conjugação de G, construido na seção acima citada, tal que

$G{\otimes}G = (G{\otimes}G)_{\tau_0}$, isto é, $G{\otimes}G = (G{\otimes}G)_0$. Como mostrado anteriormente, $\zeta\circ\tilde{\partial}'$ e $\xi\circ\tilde{\partial}$ são ações compatíveis e $\tilde{\partial}'{\times}\tilde{\partial} : \pi_2^+ \times \pi_2^- \to G{\times}G$ é um morfismo da categoria C. Portanto, existe seu produto tensorial $\tilde{\partial}'\otimes\tilde{\partial} : \pi_2^+ \otimes \pi_2^- \to G{\otimes}G$, com respeito às ações e pareamentos cruzados envolvidos, tal que $(\tilde{\partial}'\otimes\tilde{\partial})\circ\tau_1 = \tau_0\circ(\tilde{\partial}'\times\tilde{\partial})$.

$$\begin{tikzcd}
\pi_2^+ \times \pi_2^- \arrow[r, "\tilde{\partial}'\times\tilde{\partial}"] \arrow[d, "\tau_1"'] & G\times G \arrow[d, "\tau_0"] \\
\pi_2^+ \otimes \pi_2^- \arrow[r, "\tilde{\partial}'\otimes\tilde{\partial}"'] & G\otimes G
\end{tikzcd}$$

Como $\tilde{\partial}' : \pi_2^+ \to G$ e $\tilde{\partial} : \pi_2^- \to G$ são os isomorfismos que derivamos acima, provenientes das seqüências exatas dos cones, então $\tilde{\partial}'\times\tilde{\partial}$ é bijetora e, portanto, um isomorfismo da categoria C. Como a construção é funtorial, é claro que $\tilde{\partial}'\otimes\tilde{\partial} : \pi_2^+ \otimes \pi_2^- \to G\otimes G$ é um isomorfismo, como queríamos.

Como o produto generalizado de Whitehead $w_{22} : \pi_2^+ \times \pi_2^- \to \pi_3$ é um pareamento cruzado com respeito às ações $\zeta\circ\tilde{\partial}'$ e $\xi\circ\tilde{\partial}$, existe um único homomorfismo $w : \pi_2^+ \otimes \pi_2^- \to \pi_3$ tal que $w\circ\tau_1 = w_{22}$.

$$\begin{tikzcd}
\pi_2^+ \times \pi_2^- \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[dr, "w_{22}"'] & \pi_2^+ \otimes \pi_2^- \arrow[d, "w"] \\
 & \pi_3
\end{tikzcd}$$

Pelo corolário 5.3.2, w é um isomorfismo de grupos. Seja $\kappa_1 : G\otimes G \twoheadrightarrow G'$ o epimorfismo comutador do produto tensorial. Ficamos com o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\pi_2^+ \otimes \pi_2^- \arrow[rr, "\tilde{\partial}'\otimes\tilde{\partial}"] \arrow[d, "w"'] & & G\otimes G \arrow[d, "\kappa_1"] \\
\pi_3 \arrow[r, "\partial'"'] & \pi_2^+ \arrow[r, "\tilde{\partial}'"'] & G
\end{tikzcd}$$

Pelas propriedades do produto generelizado de Whitehead que citamos, $\forall a \in \pi_2^+$,

$\forall b \in \pi_2^-$, temos que

$$\begin{aligned}
(\tilde{\partial}' \circ \partial' \circ w)(a \otimes b) &= (\tilde{\partial}' \circ \partial' \circ w)\big(\tau_1(a,b)\big)\\
&= (\tilde{\partial}' \circ \partial' \circ w \circ \tau_1)(a,b)\\
&= (\tilde{\partial}' \circ \partial' \circ w_{22})(a,b)\\
&= \tilde{\partial}'\big(\partial' w_{22}(a,b)\big)\\
&= \tilde{\partial}'\Big(\big[w_{21}(a,\tilde{\partial}b)\big]^{(-1)^1}\Big)\\
&= \tilde{\partial}'\Big(\big[w_{21}(a,\tilde{\partial}b)\big]^{-1}\Big)\\
&= [\tilde{\partial}' w_{21}(a,\tilde{\partial}b)]^{-1}\\
&= \{[w_{11}(\tilde{\partial}'a,\tilde{\partial}b)]^{-1}\}^{-1}\\
&= w_{11}(\tilde{\partial}'a,\tilde{\partial}b)\\
&= (\tilde{\partial}'a)(\tilde{\partial}b)(\tilde{\partial}'a)^{-1}(\tilde{\partial}b)^{-1}\\
&= \kappa_1(\tilde{\partial}'a \otimes \tilde{\partial}b)\\
&= [\kappa_1 \circ (\tilde{\partial}' \otimes \tilde{\partial})](a \otimes b)\,.
\end{aligned}$$

Por unicidade, ficamos com $\tilde{\partial}' \circ \partial' \circ w = \kappa_1 \circ (\tilde{\partial}' \otimes \tilde{\partial})$, ou seja, o diagrama acima comuta. Temos o homomorfismo $\tilde{\partial}' \circ \partial' : \pi_3(SX, C_+X, C_-X) \to G = \pi_1 X$ e o isomorfismo $(\tilde{\partial}' \otimes \tilde{\partial}) \circ w^{-1} : \pi_3(SX, C_+X, C_-X) \to G \otimes G$, de modo que $\kappa_1 \circ [(\tilde{\partial}' \otimes \tilde{\partial}) \circ w^{-1}] = \tilde{\partial}' \circ \partial'$, ou seja, o triângulo abaixo comuta

$$\begin{tikzcd}
\pi_3(SX, C_+X, C_-X) \arrow[rr, "\tilde{\partial}' \circ \partial'"] \arrow[dr, "(\tilde{\partial}' \otimes \tilde{\partial}) \circ w^{-1}"'] & & \pi_1 X \\
& G \otimes G \arrow[ur, "\kappa_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Portanto, temos o diagrama comutativo abaixo, no qual a primeira linha é exata

$$\begin{tikzcd}
\pi_2 X \arrow[r] & \pi_3(SX) \arrow[r] & \pi_3(SX, C_+X, C_-X) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \pi_1 X \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_2(SX) \\
& & G \otimes G \arrow[r, "\kappa_1"'] & G &
\end{tikzcd}$$

Agora, suponha que $\pi_2 X \cong 0$ e, no diagrama acima, denote $\pi_3(SX) = S$, $\pi_3(SX, C_+X, C_-X) = \pi$, $G \otimes G = T$, $0 : \pi_2 X \to S$, $\alpha : S \to \pi$, $\beta = \tilde{\partial}' \circ \partial' : \pi \to G$, $\mu = (\tilde{\partial}' \otimes \tilde{\partial}) \circ w^{-1} : \pi \to T$ e $k = \kappa_1 : T \to G$. Ficamos com o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0"] & S \arrow[r, "\alpha"] & \pi \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\mu"'] & G \\
& & T \arrow[ur, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

no qual a linha de cima é exata e $\mu : \pi \to T$ é um isomorfismo. Daí, $ker(\alpha) = im(0) \cong 0$. Pelo primeiro teorema do isomorfismo, temos que $S \cong \frac{S}{ker(\alpha)} \cong im(\alpha) = ker(\beta)$. Sejam $e_G \in G$ o elemento neutro de G e $x \in \mu[ker(\beta)]$. Assim, existe $a \in ker(\beta)$ tal que $x = \mu(a)$. Daí, $k(x) = k\big(\mu(a)\big) = (k \circ \mu)(a) = \beta(a) = e_G$. Portanto, $x \in ker(k)$. Como x é qualquer, $\mu[ker(\beta)] \subset ker(k)$. Seja $y \in ker(k)$. Como μ é um isomorfismo, é sobrejetora. Assim, existe $b \in \pi$ tal que $y = \mu(b)$. Temos que $\beta(b) = (k \circ \mu)(b) = k\big(\mu(b)\big) = k(y) = e_G$. Dessa forma, $b \in ker(\beta)$. Portanto, $y = \mu(b) \in \mu[ker(\beta)]$. Como y é arbitrário, ficamos com $ker(k) \subset \mu[ker(\beta)]$. Segue que $ker(k) = \mu[ker(\beta)]$. Assim, $\mu|_{ker(\beta)}$ é um homomorfismo da forma $\mu|_{ker(\beta)} : ker(\beta) \to ker(k)$, com imagem igual a $ker(k)$. Como $\mu : \pi \to T$ é um isomorfismo, temos que $\mu|_{ker(\beta)} : ker(\beta) \to ker(k)$ também é um isomorfismo. Consequentemente, $S \cong ker(\beta) \cong ker(k)$. Voltando à notação original, ficamos com $\pi_3(SX) \cong ker(\kappa_1) = J_2(G)$. Em particular, se X é um espaço de Eilenberg-MacLane $X \approx K(G,1)$, então $\pi_2 X \cong 0$ e temos o resultado principal

$$\pi_3 SK(G,1) \cong ker(\kappa_1) = J_2(G)\,.$$

Como uma aplicação desse resultado, podemos calcular $\pi_3 S^2$ de uma maneira alternativa, sem utilizar a fibração de Hopf. Considerando os pontos marcados $(1,0) \in S^1$ e $(1,0,0) \in S^2$, temos que $S^1 \approx K(\mathbb{Z},1)$ e que S^2 é a suspensão de S^1, isto é, $S^2 \approx SS^1$. Usando o resultado principal acima, temos que $\pi_3 S^2 \cong \pi_3(SS^1) \cong \pi_3 SK(\mathbb{Z},1) \cong J_2(\mathbb{Z}) = ker(\kappa_1)$, em que $\kappa_1 : \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ é o homomorfismo comutador do produto tensorial. Temos que $\kappa_1(n \otimes m) = [n,m] = n + m - n - m = 0$, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$. Por unicidade, temos que $\kappa_1 = 0$ e, portanto, que $J_2(\mathbb{Z}) = ker(\kappa_1) = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$. Segue que $\pi_3 S^2 \cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$ é o quadrado tensorial de $\mathbb{Z}$. Como $\mathbb{Z}$ é abeliano, a conjugação de $\mathbb{Z}$ é a ação trivial. Usando o teorema 3.5.10, ficamos com $\pi_3 S^2 \cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{ab} \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$. Logo, $\pi_3 S^2 \cong \mathbb{Z}$.

Referências Bibliográficas

[1] Arkowitz, M. *Introduction to Homotopy Theory.* Nova Iorque: Springer-Verlag, 2011. 357 p.

[2] Blakers, A. L, Massey. W. S., Products in Homotopy Theory, *Ann. of Math.* 58, No. 2 (1953), 295-324.

[3] Blakers, A. L, Massey. W. S., The Homotopy Groups of a Triad I, *Ann. of Math.* 53, No. 1 (1951), 161-205.

[4] Blakers, A. L, Massey. W. S., The Homotopy Groups of a Triad II, *Ann. of Math.* 55, No. 1 (1952), 192-201.

[5] Blakers, A. L, Massey. W. S., The Homotopy Groups of a Triad III, *Ann. of Math.* 58, No. 3 (1953), 409-417.

[6] Brown, R., Loday, J.-L., Van Kampen theorems for diagrams of spaces, *Topology* 26, No. 3 (1987), 311-335.

[7] Brown, R., Johnson, D. L., Robertson, E. F., Some computations of nonabelian tensor product of groups, *J. Algebra* 111, No. 1 (1987), 177-202.

[8] Dennis, R. K., In search of new homology functors having a close relationship to K-theory, *Cornell University preprint* (1976).

[9] Hatcher, A. *Algebraic Topology.* Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 556 p.

[10] Hungerford, T. W. *Algebra.* Nova Iorque: Springer-Verlag, 2003. 504 p.

[11] Kappe, L.-C., Nonabelian tensor products of groups: the commutator connection, Proc. Groups St. Andrews 1997 at Bath, London Math. Soc. Lecture Notes 261, 447-454, (1999).

[12] May, J. P. *A Concise Course in Algebraic Topology.* Chicago: Footprint Books, University of Chicago Press, 1999. 247 p.

[13] McDermott, A., The nonabelian tensor product of groups: Computations and structural results, tese de PhD, National Univ. of Ireland, Galway (1998).

[14] Miller, C., The second homology group of a group, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 588-595.

[15] Nakaoka, I. N., Sobre o produto tensorial não abeliano de grupos, dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas (1994).

[16] Robinson, D. J. S. *A Course in the theory of groups*. Nova Iorque: Springer-Verlag, 1994. 504 p.

[17] Rotman, J. J. *An Introduction to Algebraic Topology*. Nova Iorque: Springer-Verlag, 1998. 452 p.

[18] Vieira, R. V., Topologia algébrica não-abeliana, dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo (USP), São Paulo (2013).

[19] Whitehead, J. H. C., A certain exact sequence, *Ann. of Math.* 52, No. 1 (1950), 51-110.