

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA**

Alexandra Cristina Menis

**Representação de Soluções Homogêneas Contínuas de
Campos Vetoriais no Plano**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA

Alexandra Cristina Menis

Representação de Soluções Homogêneas Contínuas de
Campos Vetoriais no Plano

Tese apresentada ao Programa
de Pós-Graduação em Mate-
mática como parte dos requi-
sitos para a obtenção do título
de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie

São Carlos-SP
2015

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

M545rs Menis, Alexandra Cristina.
Representação de soluções homogêneas contínuas de
campos vetoriais no plano / Alexandra Cristina Menis. -- São
Carlos : UFSCar, 2015.
74 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos,
2015.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Campos vetoriais. 3.
Teorema de Baouendi-Treves. I. Título.

CDD: 515.353 (20^a)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado da candidata Alexandra Cristina Menis, realizada em 11/06/2015:

Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie
UFSCar

Prof. Dr. Adalberto Pañobianco Bergamasco
USP

Prof. Dr. Sérgio Luís Zani
USP

Prof. Dr. Jose Ruidival Soares dos Santos Filho
UFSCar

Prof. Dr. Gustavo Hoepfner
UFSCar

Aos meus pais Antonio e Vitória, e ao meu esposo Rafael.

Agradecimentos

Primeiramente sou grata a Deus pela minha vida e pelos bons caminhos que nela pude seguir.

Ao meu orientador Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie, agradeço pela oportunidade de trabalharmos juntos e por toda atenção, paciência e competência com que me orientou.

Aos membros da minha banca de defesa pública, Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho, Prof. Dr. Gustavo Hoepfner, Prof. Dr. Adalberto Panobianco Bergamasco e Prof. Dr. Sérgio Luís Zani, pela leitura do trabalho e pelas diversas sugestões e correções.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e a todos os professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos, pela minha formação e pelas amizades.

Agradeço à minha família, meus pais Antonio Sérgio e Vitória, meu irmão Gilson e meus avós Valdemar e Hilda, por me incentivarem durante o mestrado e o doutorado, e também por serem tão presentes, mesmo que muitas vezes não fisicamente.

Agradeço ao meu esposo Rafael, pelo amor e companheirismo que me completam, e pelo apoio nos momentos difíceis.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos condições para a validade do análogo ao Teorema de Mergelyan para soluções contínuas de um tipo de campo vetorial localmente integrável.

Em um domínio Ω no plano, consideramos um campo vetorial L que possui uma integral primeira em Ω da forma $Z(x, t) = x + i\varphi(x, t)$, onde $\varphi(x, t)$ é uma função suave a valores reais. Dada uma solução contínua u de $Lu = 0$ em Ω , nosso primeiro objetivo foi encontrar condições em Ω e em Z para a validade da fatoração

$$u = U \circ Z,$$

onde $U \in C^0(Z(\Omega)) \cap \mathcal{H}(\text{int}\{Z(\Omega)\})$.

Em seguida estudamos a fatoração no fecho de Ω . Assumimos que $u \in C^0(\overline{\Omega})$ e que a fronteira de Ω é analítica real, então mostramos em quais casos a condição $Z(p_1) = Z(p_2)$ implica que $u(p_1) = u(p_2)$, para $p_1, p_2 \in \overline{\Omega}$. Os casos são divididos de acordo com a geometria da fronteira nos pontos p_1 e p_2 . Quando Ω é compacto e temos $u = U \circ Z$ em $\overline{\Omega}$, obtemos que u é uniformemente aproximada por polinômios em Z sobre $\overline{\Omega}$.

Abstract

In this work we study conditions for the validity of the analogue of Mergelyan's theorem for continuous solutions of a type of locally integrable vector field.

On a domain Ω in the plane, we consider a vector field L that has a first integral on Ω of the form $Z(x, t) = x + i\varphi(x, t)$, where $\varphi(x, t)$ is a smooth, real-valued function. Given a continuous solution u of $Lu = 0$ on Ω , our first objective was to find conditions on Ω and Z for the validity of the factorization

$$u = U \circ Z,$$

where $U \in C^0(Z(\Omega)) \cap \mathcal{H}(\text{int}\{Z(\Omega)\})$.

We will next study this factorization on the closure of Ω . We assume that $u \in C^0(\overline{\Omega})$ and that the boundary of Ω is real analytic, then we show in which cases the condition $Z(p_1) = Z(p_2)$ implies that $u(p_1) = u(p_2)$, for $p_1, p_2 \in \overline{\Omega}$. The cases are divided according to the geometry of the boundary in the points p_1 and p_2 . When Ω is a compact set and $u = U \circ Z$ on $\overline{\Omega}$, we obtain that u is uniformly approximated by polynomials of Z on $\overline{\Omega}$.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Continuação Analítica	5
1.2 Continuação Analítica ao longo de Curvas	8
1.3 Espaços de Recobrimento	11
1.4 O Teorema de Aproximação de Baouendi-Treves	13
1.5 O Teorema de Aproximação para Cunhas	17
2 Soluções Contínuas de Campos Vetoriais Localmente Integráveis	20
2.1 Soluções Contínuas em Conjuntos Verticalmente Convexos	21
2.2 Comportamento na Fronteira	27
2.3 Soluções Contínuas em Conjuntos mais Gerais	32
2.4 Exemplo de Função Analítica Global com Ponto Singular em $Z(\Omega_z)$	43
2.5 Comportamento na Fronteira	45
A Espaços de Recobrimento	64
Referências Bibliográficas	74

Introdução

Trabalharemos com um campo vetorial localmente integrável L , definido sobre um domínio conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, do tipo

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{Z_t(x, t)}{Z_x(x, t)} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (0.0.1)$$

onde $Z(x, t) = x + i\varphi(x, t)$, com $\varphi(x, t)$ uma função suave a valores reais.

O primeiro objetivo desta tese é estabelecer sob quais condições uma função $u \in C^0(\Omega)$ que é solução homogênea de L pode ser escrita em Ω como

$$u = U \circ Z, \quad (0.0.2)$$

sendo U uma função contínua em $Z(\Omega)$ que é holomorfa no interior.

Como aplicação do Teorema de Aproximação de Baouendi-Treves obtemos que u se escreve localmente como (0.0.2). O Teorema de Aproximação diz que qualquer distribuição que seja solução homogênea de uma estrutura localmente integrável \mathcal{L} , pode expressar-se localmente como o limite de uma sequência de soluções suaves da forma $P_k \circ Z$, onde P_k são polinômios e Z é um conjunto completo de integrais primeiras de \mathcal{L} . E quando a solução é uma função contínua a convergência é uniforme. A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [BT].

Contudo a convergência dada pelo Teorema de Aproximação é de caráter local, e não é possível um controle sobre o aberto no qual ela se realiza.

O exemplo mais conhecido de campo vetorial localmente integrável é campo de Cauchy-Riemann

$$\bar{\partial} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

As soluções de $\bar{\partial}u = 0$ em Ω são exatamente as funções que são holomorfas em Ω . A função identidade $Z(x, t) = x + iy$ é uma integral primeira para $\bar{\partial}$, para essa escolha de Z as soluções de $\bar{\partial}u = 0$ satisfazem diretamente (0.0.2). Já no caso genérico, quando L é dado como (0.0.1), a dificuldade de obter (0.0.2) está ligada à complexidade da função $Z(x, t)$ e do domínio Ω .

Definimos as *fibras de Z* em um aberto $V \subset \Omega$ como as classes de equivalência dadas pela relação de equivalência ' $p \sim q$ se, e somente se, $Z(p) = Z(q)$ '. Quando uma função u se escreve como (0.0.2), temos que ela é constante nas fibras de Z sobre Ω .

Se $p, q \in \Omega$ satisfazem $Z(p) = Z(q)$, então $P(Z(p)) = P(Z(q))$ para todo polinômio P . Assim pelo Teorema de Aproximação, toda solução $u \in C(\Omega)$ de $Lu = 0$ é localmente constante nas fibras de Z . O que também nos permite dizer que existe uma função $U \in C(Z(V))$ tal que $u = U \circ Z$ em V . Logo toda solução contínua de $Lu = 0$ pode ser localmente fatorada como a composição com Z de uma função contínua em um subconjunto de $Z(\Omega)$. Nosso interesse é globalizar esta fatoração.

O conjunto $Z(V)$ pode ser irregular, mas caso seu interior seja não vazio então a convergência uniforme dos polinômios em Z dada pelo Teorema de Aproximação, garante que U é holomorfa em $\text{int}\{Z(V)\}$. Conceitualmente isto relaciona o estudo das soluções de $Lu = 0$ com o estudo das funções analíticas.

Explorar a validade de resultados clássicos de funções analíticas para as soluções homogêneas de L , tem sido um problema de interesse de alguns autores dentro da teoria de Equações Diferenciais Parciais. Lembramos que um campo vetorial localmente integrável tem sua forma local como L . Assim podemos citar [BH1], onde os autores verificam a validade de um resultado análogo ao Princípio de Reflexão de Schwarz para as soluções homogêneas de campos vetoriais complexos localmente integráveis no plano. Em [BH2] foi provada a Propriedade de F. e M. Riesz para as soluções homogêneas de campos vetoriais localmente integráveis com coeficientes suaves no plano. Em [BHS] é demonstrado um princípio de similaridade genérico para uma classe campos vetoriais localmente resolúveis no plano. Ainda, em [HT] o Teorema de Radó é estendido para campos vetoriais localmente resolúveis com coeficientes suaves em \mathbb{R}^N .

Abaixo enunciamos o Teorema de Mergelyan demonstrado originalmente em [Me], redemonstrado em [Ca].

Teorema 0.0.1. *(Mergelyan) Seja E um conjunto compacto no plano cujo complementar é conexo. Então toda função contínua em E que é analítica nos pontos interiores de E é limite uniforme de uma sequência de polinômios em E .*

Se fazemos $\Omega = \text{int}\{E\}$, então o Teorema de Mergelyan estabelece que as funções contínuas em $\bar{\Omega}$ que são solução de $\bar{\partial}u = 0$ em Ω , são uniformemente aproximadas por uma sequência de polinômios em $\bar{\Omega}$. Em comparação com o Teorema de Baouendi-Treves, que neste caso fornece uma aproximação para as soluções de $\bar{\partial}u = 0$ somente numa vizinhança de um ponto, o Teorema de Mergelyan é de certa forma mais forte.

Uma pergunta natural que surge é a validade de um análogo ao Teorema de Mergelyan para as soluções de $Lu = 0$. Com essa motivação o segundo problema estudado foi o comportamento das funções $u \in C^0(\bar{\Omega})$ que satisfazem (0.0.2) em Ω sobre a fronteira. Analisamos quando uma fatoração do tipo (0.0.2) em Ω implica na constância nas fibras de Z sobre $\bar{\Omega}$. Ou seja, se $u \in C^0(\bar{\Omega})$ e satisfaz (0.0.2) em Ω então é possível escrevermos

$$u = U \circ Z, \text{ em } \bar{\Omega} ?$$

Em geral isto não vale. Na seção 2.5 veremos através de exemplos que precisamos de hipóteses na geometria da fronteira de Ω . Para um dado ponto p na fronteira de Ω representamos o vetor tangente à fronteira em p por $\vec{v}(p)$. Lembrando que $Z(x, t) = x + i\varphi(x, t)$, vamos assumir que $\varphi(x, t)$ é uma função analítica real, então através de relações no produto escalar

$$\nabla\varphi(p) \cdot \vec{v}(p),$$

calculado nos pontos de uma fibra de Z , classificaremos a constância das fibras de Z das funções $u \in C^0(\bar{\Omega})$ que satisfazem (0.0.2).

Voltando ao Teorema de Mergelyan, vamos assumir que Ω é limitado e que $Z(\bar{\Omega})$ possui interior simplesmente conexo. Logo $Z(\bar{\Omega})$ é um conjunto compacto e seu complementar é conexo. Quando uma função $u \in C^0(\Omega)$ se fatora como $u = U \circ Z$ em $\bar{\Omega}$, onde $U \in C^0(Z(\bar{\Omega}))$ e é holomorfa no interior, então aplicando o próprio Teorema de Mergelyan obtemos que u é limite uniforme de uma sequência de polinômios P_j em Z . Esse resultado é o análogo ao Teorema de Mergelyan para as soluções de $Lu = 0$.

Mas observamos que este resultado não vale sempre, pois nem sempre é possível fatorar as soluções homogêneas de L como (0.0.2) em Ω . Primeiro falaremos sobre o caso bom. Um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é dito ser *verticalmente convexo* quando

$$(x_0, y_1), (x_0, y_2) \in \Omega \Rightarrow \{(x_0, y) : y_1 \leq y \leq y_2\} \subset \Omega.$$

Sob a hipótese Ω verticalmente convexo, provamos na Seção 2.1 que as soluções contínuas de $Lu = 0$ se escrevem como (0.0.2) em Ω . Também provamos que quando $u \in C^0(\bar{\Omega})$ a fatoração (0.0.2) acontece em $\bar{\Omega}$. Portanto, se $\text{int}\{Z(\bar{\Omega})\}$ é simplesmente conexo então temos o análogo ao Teorema de Mergelyan para este caso.

Quando Ω não é verticalmente convexo precisaremos incluir hipóteses adicionais. Primeiro assumiremos que a função $\varphi(x, t)$ é analítica real. Assumiremos também que Ω satisfaz uma condição dependendo da função $Z(x, t)$ (veja (2.3.4)).

A necessidade desta condição pode ser vista através do Exemplo 2.3.7.

Ainda supomos uma condição sobre as soluções. Dada uma solução $u \in C^0(\Omega)$ de $Lu = 0$, construímos uma função analítica global \mathbf{U} , formada por elementos de função que verificam a fatoração (0.0.2) de u . Então assumiremos que \mathbf{U} pode ser continuada ao longo de todas as curvas de $Z(\Omega)$. Depois destas restrições, quando $Z(\Omega)$ é simplesmente conexo demonstramos (0.0.2) em Ω . Como mencionamos acima, neste caso mais geral estudamos quando existe a constância nas fibras de Z sobre $\bar{\Omega}$.

A tese está dividida em dois capítulos, sendo o primeiro dedicado a introdução dos conceitos usados no trabalho e a apresentação dos resultados conhecidos que usaremos do decorrer do capítulo seguinte.

O segundo capítulo é onde desenvolvemos as técnicas que nos permitiram chegar nos resultados mencionados acima e onde os demonstramos. Na Seção 2.1 demonstramos que para conjuntos verticalmente convexos a fatoração desejada é sempre possível. Mostramos na Seção 2.2 que para esse tipo de conjunto a fatoração se dá no fecho.

Em seguida consideramos Ω um conjunto aberto conexo. Então quando $Z(\Omega)$ é simplesmente conexo, usamos continuações analíticas para obter que a fatoração (0.0.2) acontece em Ω para uma classe de soluções de $Lu = 0$. Apresentamos exemplos para comprovar que as hipóteses que assumimos para chegar as demonstrações são necessárias.

Na seção 2.5 assumimos que Ω é aberto conexo com fronteira analítica real. Então estudamos a constância nas fibras de Z das funções contínuas em $\bar{\Omega}$ que satisfazem (0.0.2) em Ω .

No final temos o Apêndice, que trata do problema de mostrar uma fatoração como (0.0.2) em espaços de recobrimento. Quando Ω e $Z(\Omega)$ são abertos conexos, mas não simplesmente conexos, nós consideramos seus recobrimentos universais. Dada $u \in C^0(\Omega)$ definimos a função $\tilde{u} = u \circ p$, onde p é a aplicação de recobrimento de Ω . Então quando u satisfaz $Lu = 0$ mostramos que vale uma fatoração do tipo (0.0.2) para a função \tilde{u} .

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo é em sua maior parte dedicado a apresentar as principais definições e alguns resultados conhecidos que serão usados no decorrer deste trabalho. As definições e os resultados apresentados nas seções 1.1 e 1.2 podem ser encontrados em [A] ou [C], por exemplo.

1.1 Continuação Analítica

Em Análise Complexa a ideia de continuação analítica está associada ao conceito de funções de múltiplos valores. Como exemplo de função de múltiplos valores podemos citar as funções $\log(z)$ e $\sqrt[n]{z}$, as quais não são unicamente determinadas por suas expressões analíticas, uma continuação de tais funções pode deixar de ser uma função no sentido usual. Nesta motivação, introduziremos nesta seção o conceito de ‘função analítica global’, que permite as funções ter vários ramos.

Definição 1.1.1. Um *elemento de função* é um par (f, G) , onde G é uma região conexa, e f é uma função analítica definida em G . Dizemos que dois elementos de função (f_1, G_1) e (f_2, G_2) são *continuação analítica direta* um do outro se $G_1 \cap G_2$ é não vazio e $f_1(z) = f_2(z)$ para todo $z \in G_1 \cap G_2$. Mais especificamente, (f_2, G_2) é uma continuação analítica direta de (f_1, G_1) para a região G_2 .

Não necessariamente deve existir uma continuação analítica direta de um elemento de função (f_1, G_1) , para uma região G_2 , mas se existir uma continuação então ela será única. Com efeito, suponha que (f_2, G_2) e (g_2, G_2) são duas continuações analíticas diretas de (f_1, G_1) , então $f_2 = g_2$ em $G_1 \cap G_2$, o que implica que $f_2 = g_2$ em todo G_2 .

Definição 1.1.2. Sejam (f_1, G_1) e (f_n, G_n) dois elementos de função. Se existir

uma cadeia de elementos de função

$$(f_1, G_1), (f_2, G_2), \dots, (f_n, G_n)$$

tal que (f_{k+1}, G_{k+1}) é continuação analítica direta de (f_k, G_k) , $k = 1, \dots, n - 1$, então dizemos que (f_n, G_n) é uma *continuação analítica* de (f_1, G_1) .

Ser continuação analítica define uma relação de equivalência no conjunto de todos os elementos de função. A demonstração deste fato é fácil e não será feita aqui.

Definição 1.1.3. Uma *função analítica global* é uma coleção não vazia \mathbf{F} de elementos de função, tal que quaisquer dois elementos de \mathbf{F} são continuação analítica por meio de uma cadeia cujos membros estão em \mathbf{F} .

Uma *função analítica global completa* é uma função analítica global que contém todas as continuações de todos os seus elementos. Também podemos ver uma função analítica global completa como uma classe de equivalência, pela relação ser continuação analítica no conjunto de todos os elementos de função.

O *conjunto base* de uma função analítica global é a união dos domínios de elementos de função pertencentes a ela.

Para um dado elemento de função (f, G) o *germe analítico de f em a* é a coleção de todos os elementos de função (g, D) tais que $a \in D$ e $f(z) = g(z)$, para todo z numa vizinhança de a . Denotamos o germe de f em a por $[f]_a$.

Observe que um elemento de função (f, G) dá origem a um germe $[f]_a$ para cada $a \in G$. Inversamente, todo germe $[f]_a$ é determinado por algum elemento de função (f, G) .

Definição 1.1.4. Para um aberto Ω em \mathbb{C} seja

$$\mathfrak{S}(\Omega) = \{[f]_z : z \in \Omega\}$$

Então definimos a aplicação $\rho : \mathfrak{S}(\Omega) \rightarrow \Omega$ por $\rho([f]_z) = z$. O conjunto $\mathfrak{S}(\Omega)$ é chamado de *feixe de germes de funções analíticas sobre Ω* . A aplicação ρ é chamada projeção de $\mathfrak{S}(\Omega)$ sobre Ω .

Note que, para que um germe $[f]_z$ esteja em $\mathfrak{S}(\Omega)$, não necessariamente, f deve ser definida em todo Ω , é exigido apenas que f seja definida e analítica em uma vizinhança de z .

Podemos ver o feixe $\mathfrak{S}(\Omega)$ como espaço topológico, com a seguinte caracterização de aberto:

Um conjunto $V \subseteq \mathfrak{S}(\Omega)$ é aberto se para todo $s_0 = [f]_{z_0} \in V$ existir um elemento de função (f, G) tal que:

- (i) $\rho(s_0) = z_0 \in G$.
- (ii) (f, G) determina o germe $[f]_{z_0}$ em z_0 .
- (iii) Todo germe $[f]_z$ determinado por (f, G) está em V .

Dado um elemento de função (f, G) defina

$$\Delta \doteq \{[f]_z, z \in G\}. \quad (1.1.1)$$

Então, diretamente da definição de aberto em $\mathfrak{S}(\Omega)$, temos que Δ é uma vizinhança aberta de s_0 . A restrição da projeção ρ para o aberto Δ , $\rho|_{\Delta} : \Delta \rightarrow G$, é um homeomorfismo. Logo, ρ é homeomorfismo local.

Em particular, nos interessa a caracterização das componentes do feixe $\mathfrak{S}(\Omega)$. Seja \mathfrak{S} o feixe de funções analíticas sobre \mathbb{C} . Então a seguir veremos que as componentes de \mathfrak{S} podem ser identificadas com as funções analíticas globais.

Seja $s_0 \in \mathfrak{S}$, então s_0 é determinado por um elemento de função (f_0, G_0) . Mostraremos que a componente de \mathfrak{S} que contém s_0 pode ser identificada com a função analítica global formada por todas as continuações analíticas de (f_0, G_0) .

Com efeito, se (f_1, G_1) é continuação analítica direta de (f_0, G_0) então considere os conjuntos Δ_0 e Δ_1 como em (1.1.1) para os elementos de função (f_0, G_0) e (f_1, G_1) . Então a intersecção $\Delta_0 \cap \Delta_1$ é não vazia. E, como imagens homeomorfas de conexos os conjuntos Δ_0 e Δ_1 também são conexos. Assim, a união $\Delta_0 \cup \Delta_1$ é um conjunto conexo.

Agora, para um elemento de função (f_n, G_n) , que pode ser obtido de (f_0, G_0) por uma cadeia de continuações analíticas diretas, repetimos o procedimento acima um número finito de vezes. Assim obtemos que Δ_0 e Δ_n pertencem a uma mesma componente conexa de \mathfrak{S} . Sugestivamente, chamaremos essa componente de $\mathfrak{S}(\mathbf{F})$.

Seja A o conjunto de todos os germes que podem ser determinados por uma continuação analítica de (f_0, G_0) , temos:

- $A \subset \mathfrak{S}(\mathbf{F})$.
- A é aberto, pois é uma união de abertos do tipo 1.1.1.
- A^c , o complementar de A em $\mathfrak{S}(\mathbf{F})$, também é aberto.

Para o terceiro item observe que, se $[g]_{\bar{z}} \in A^c$ então existe um elemento de função (g, G) , que determina $[g]_{\bar{z}}$, tal que todo germe $[g]_z$ determinado por (g, G) está em A^c , de onde obtemos que $[g]_{\bar{z}}$ é ponto interior de A^c .

Assim concluímos que $A = \mathfrak{S}(\mathbf{F})$.

Portanto, a componente $\mathfrak{S}(\mathbf{F})$ é o conjunto dos germes pertencentes a função analítica global \mathbf{F} .

Com essa identificação, agora vamos nos referir a $\mathfrak{S}(\mathbf{F})$ como *superfície de Riemann de \mathbf{F}* . O Teorema 1.1.5 nos diz que a função analítica global \mathbf{F} , formada pelas continuações analíticas de (f_0, G_0) , se torna uma função a valores singulares quando definida em $\mathfrak{S}(\mathbf{F})$.

Teorema 1.1.5. *Seja \mathbf{F} uma função analítica global completa e seja $(\mathfrak{S}(\mathbf{F}), \rho)$ sua superfície de Riemann. Se $\mathbf{F} : \mathfrak{S}(\mathbf{F}) \rightarrow \mathbb{C}$ é definida por*

$$\mathbf{F}([f]_z) = f(z)$$

então \mathbf{F} é uma função analítica em $\mathfrak{S}(\mathbf{F})$.

A demonstração do Teorema 1.1.5 pode ser encontrada em [C].

1.2 Continuação Analítica ao longo de Curvas

Definição 1.2.1. Sejam \mathbf{F} uma função analítica global e $(\mathfrak{S}(\mathbf{F}), \rho)$ sua superfície de Riemann. Dada $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ uma curva no plano complexo, uma outra curva $\bar{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathfrak{S}(\mathbf{F})$ é uma *continuação analítica de \mathbf{F} ao longo de γ* se

$$\rho \circ \bar{\gamma}(t) = \gamma(t), \quad \forall t \in [a, b].$$

Também chamamos tal curva $\bar{\gamma}$ de *levantamento de γ* para a superfície de Riemann $\mathfrak{S}(\mathbf{F})$.

Uma continuação ao longo de uma curva corresponde intuitivamente a mudar continuamente de germe.

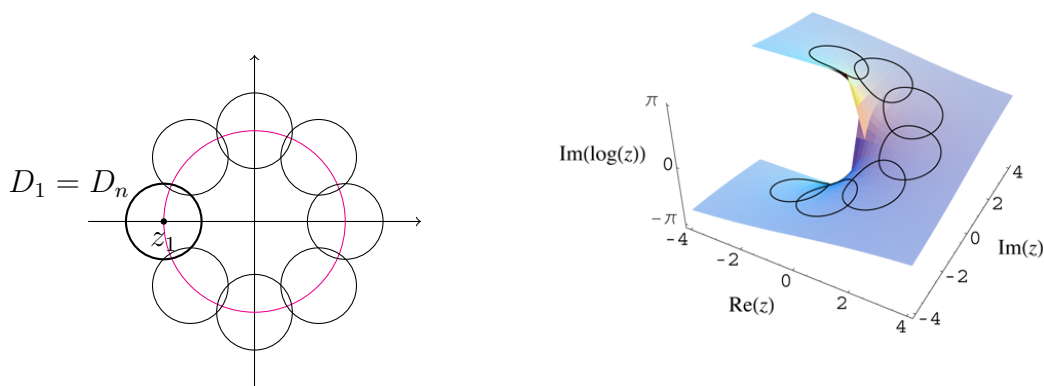
Para uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ e um dado germe $[f]_{\gamma(a)}$, no ponto inicial da curva $\gamma(a)$, uma *continuação analítica ao longo de γ com germe inicial $[f]_{\gamma(a)}$* é uma continuação analítica $\bar{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathfrak{S}(\mathbf{F})$ ao longo de γ tal que $\bar{\gamma}(a) = [f]_{\gamma(a)}$. E, chamamos o ponto $\bar{\gamma}(b)$ de *germe final* da continuação analítica.

Exemplo 1.2.2. Considere o elemento de função (ℓ_1, D_1) , onde D_1 é o disco com centro z_1 e raio r tal que $0 < r < |z_1|$, e a função ℓ_1 é um ramo do logaritmo em D_1 . Considere também discos $D_2, D_3, \dots, D_n = D_1$ onde $D_i \cap D_{i+1}$ é não vazio e seja ℓ_i um ramo do logaritmo definido em D_i tal que

$$\ell_i(z) = \ell_{i+1}(z), \quad z \in D_i \cap D_{i+1}.$$

Então o círculo C que passa por z_1 (ver a figura 1.1), possui levantamento com germe inicial $[\ell_1]_{z_1}$, a figura à direita representa o levantamento dos elementos de função.

Figura 1.1:



Ainda, neste exemplo uma curva que passa pela origem do plano complexo não possui um levantamento para a superfície de Riemann do logaritmo. Isso é devido a não ser possível definir uma função analítica sobre uma vizinhança da origem que seja continuação analítica do logaritmo.

Em geral, a existência de uma continuação de um dado germe ao longo de uma curva não é garantida. Ou, pode acontecer que exista uma continuação para algum germe inicial, mas não para todos. Porém, o seguinte teorema de unicidade é válido.

Teorema 1.2.3. *Duas continuações analíticas $\bar{\gamma}_1$ e $\bar{\gamma}_2$ de uma função analítica global \mathbf{F} ao longo da mesma curva γ são idênticas, ou $\bar{\gamma}_1(t) \neq \bar{\gamma}_2(t)$ para todo $t \in [a, b]$*

Em virtude do Teorema 1.2.3 uma continuação ao longo de uma curva é unicamente determinada por seu germe inicial. Portanto, especificado o germe inicial podemos nos referir como a continuação de tal germe.

Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é uma curva arbitrária e \mathbf{F} é uma dada função analítica global então vamos analisar o caso de um germe $[f]_{\gamma(a)} \in \mathbf{F}$ não ser continuável ao longo de γ . Para t_0 suficientemente próximo ao ponto a , de forma que a subcurva correspondente a $[a, t_0]$ está contida em uma região G , onde o elemento de função (f, G) determina $[f]_{\gamma(a)}$, então a continuação até t_0 é garantida.

Seja um número τ que satisfaz $a < \tau < b$, e tal que a continuação é possível para $t_0 < \tau$, mas impossível para $t_0 \geq \tau$. Em certo sentido a subcurva correspondente a $[a, \tau]$ leva a um ponto no qual \mathbf{F} cessa de ser definida. Isto significa que o

raio de convergência da série de potências que representa o germe de \mathbf{F} no ponto $\gamma(t)$ tende a zero, quando t tende a τ pela direita. Em particular, se \mathbf{F} é uma função analítica global completa, então dizemos que a subcurva leva a um *ponto singular de \mathbf{F}* .

Observação 1.2.4. Existe uma dualidade entre as continuações ao longo de curvas e as continuações por cadeias de elementos de função. Sendo assim, a segunda é uma forma mais simples para a compreensão da primeira.

Primeiro, considere uma cadeia de continuações analíticas diretas

$$(f_1, G_1), (f_2, G_2) \dots, (f_n, G_n). \quad (1.2.1)$$

Então é sempre possível conectar um ponto $\zeta_1 \in G_1$ a um ponto $\zeta_n \in G_n$ por meio de uma curva γ , a qual possui uma continuação $\bar{\gamma}$, com germe inicial $[f_1]_{\zeta_1}$ e germe final $[f_n]_{\zeta_n}$. Para mostrarmos esse fato considere a curva γ composta por subcurvas

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1},$$

onde γ_1 é uma curva contida em G_1 , que liga ζ_1 a um ponto $\zeta_2 \in G_1 \cap G_2$. Depois, γ_2 é uma curva contida em G_2 , que liga ζ_2 a um ponto $\zeta_3 \in G_2 \cap G_3$, e assim sucessivamente. Então definimos a continuação de γ

$$\bar{\gamma}(t) = [f_k]_{\gamma(t)},$$

quando $\gamma(t)$ corresponde a subcurva γ_k .

Inversamente, um levantamento gera uma cadeia de continuações analíticas diretas. De fato, seja $\bar{\gamma}$ uma dada continuação analítica ao longo da curva γ . Então todo germe $[f_k]_{\gamma(t)}$ determina um elemento de função (f_k, G_k) , onde $\gamma(t) \in G_k$. Assim, subdividimos o intervalo $[a, b]$ em $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]$ de forma que

$$\bar{\gamma}(t) = [f_k]_{\gamma(t)}, \quad t \in [t_{k-1}, t_k]$$

para a adequada escolha do elemento de função (f_k, G_k) . Dessa forma, não necessariamente, os elemento de função (f_k, G_k) e (f_{k+1}, G_{k+1}) serão continuação analítica direta. Mas, se restringimos os domínios G_k e G_{k+1} de forma que a intersecção $G_k \cap G_{k+1}$ seja apenas vizinhança do ponto $\gamma(t_k)$, então, depois das restrições, consecutivos elementos de função (f_k, G_k) se tornão continuação analítica direta.

Sejam z e w dois números complexos, e suponha que γ_1 e γ_2 são duas curvas, ambas com ponto inicial z e final w . Suponha ainda, que as duas curvas possuem levantamentos com germe inicial $[f]_z$. Se as curvas γ_1 e γ_2 forem iguais então os

levantamentos, com início em $[f]_z$, possuem germes finais iguais. Agora, se as curvas são distintas então os seus levantamentos geram cadeias de continuações analíticas diretas distintas. Assim os germes finais podem ser diferentes.

O Teorema de Monodromia estabelece condições para que duas curvas nas condições descritas acima, mesmo diferentes, possuam levantamentos com mesmo germe final.

Teorema 1.2.5 (Teorema de Monodromia). *Seja \mathbf{F} uma função analítica global. Suponha que γ_1 e γ_2 são curvas homotópicas em Ω , e suponha que um dado germe $[f]_{\gamma_1(a)} = [f]_{\gamma_2(a)}$ de \mathbf{F} no ponto inicial das curvas pode ser continuado ao longo de todas as curvas contidas em Ω . Então as continuações de $[f]_{\gamma_1(a)}$ ao longo de γ_1 e γ_2 levam ao mesmo germe no ponto final.*

Observação 1.2.6. *Como consequência do Teorema de Monodromia, temos que uma função analítica global, que pode ser continuada ao longo de todas as curvas de uma região simplesmente conexa, determina uma função a valores singulares nesta região, para uma dada escolha de germe inicial.*

Observação 1.2.7. *Na Seção 2.3 o Teorema de Monodromia será uma ferramenta importante. O usamos para mostrar que uma função analítica global que construiremos, na verdade é uma função a valores singulares quando impomos condições para que seu conjunto base seja simplesmente conexo.*

1.3 Espaços de Recobrimento

Para comodidade do leitor apresentaremos nesta seção alguns conceitos da teoria de Espaços de Recobrimento, que serão usados no decorrer do trabalho. Também enunciaremos alguns resultados conhecidos dessa teoria, para mais detalhes indicamos [M] e [K].

Definição 1.3.1. *Seja X um espaço topológico. Um espaço de recobrimento de X é um par (\tilde{X}, ρ) onde \tilde{X} é um espaço topológico conexo e ρ é uma aplicação contínua de \tilde{X} em X tal que:*

- para cada $x \in X$ existe uma vizinhança V de x tal que todas as componentes de $\rho^{-1}(V)$ são abertos de \tilde{X} , e ρ aplica cada componente de $\rho^{-1}(V)$ homeomorficamente sobre V .

Um tal conjunto V é chamado *aberto fundamental*.

Exemplo 1.3.2. *Considere $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ e $\rho : \mathbb{R} \rightarrow D$ definida por $\rho(t) = \exp(2\pi it)$, então (\mathbb{R}, ρ) é um espaço de recobrimento de D .*

Exemplo 1.3.3. Considere o conjunto $S^1 \times \mathbb{R}_+$ com coordenadas (\bar{x}, t) , onde $\bar{x} = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$. Então a aplicação $\rho : S^1 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ definida por

$$(\bar{x}, t) \mapsto \bar{x}t$$

torna o par $(S^1 \times \mathbb{R}_+, \rho)$ um espaço de recobrimento para $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Segundo a teoria de Continuações Analíticas o conjunto $S^1 \times \mathbb{R}_+$ é a superfície de Riemann correspondente a função logaritmo complexo.

Exemplo 1.3.4. Considere (f, G) um elemento de função que pode ser continuado ao longo de todos os caminhos de uma região Ω contida em \mathbb{C} , e seja $\mathfrak{S}(\mathbf{F})$ a componente do feixe $(\mathfrak{S}(\Omega), \rho)$ que contém $[f]_{z_0}$, para algum $z_0 \in G$. Então $(\mathfrak{S}(\mathbf{F}), \rho)$ é um espaço de recobrimento de Ω .

Definição 1.3.5. Seja $\rho : \tilde{X} \rightarrow X$ uma aplicação de recobrimento. Se f é uma função contínua de um espaço Y em X , então um *levantamento de f* é uma função $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ tal que $\rho \circ \tilde{f} = f$.

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \rho \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Agora enunciaremos o resultado conhecido como Lema do Levantamento. Usamos $\pi_1(X, x_0)$ para representar o *grupo fundamental de X com base em x_0* . Suponha que $f : Y \rightarrow X$ é uma aplicação contínua, com $f(y_0) = x_0$, então f_* representa o *homeomorfismo nos grupos fundamentais induzido por f* .

Teorema 1.3.6. (*Lema do Levantamento*) *Seja $\rho : \tilde{X} \rightarrow X$ uma aplicação de recobrimento, com $\rho(\tilde{x}_0) = x_0$. Seja $f : Y \rightarrow X$ uma aplicação contínua, com $f(y_0) = x_0$. Suponhamos que Y é conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos.*

Nestas condições, a aplicação f pode ser levantada para uma aplicação $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ tal que $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$, se, e somente se

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset \rho_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)).$$

Mais ainda, se tal levantamento existe então ele é unico.

Um espaço de recobrimento (\tilde{X}, ρ) de X é um *espaço de recobrimento universal* para X se \tilde{X} for um conjunto simplesmente conexo. Nem todos os espaços possuem um espaço de recobrimento universal. O Teorema 1.3.7 nos dá uma condição necessária e suficiente sobre um espaço para que este possua um recobrimento universal. A demonstração pode ser encontrada em [M].

Teorema 1.3.7. *Um espaço X possui um espaço de recobrimento universal se, e somente se, X é conexo por caminhos, localmente conexo por caminhos e semi-localmente simplesmente conexo.*

Observação 1.3.8. *Todo subconjunto aberto e conexo de \mathbb{C} possui a propriedade de ser conexo por caminhos, localmente conexo por caminhos e semilocalmente simplesmente conexo. Portanto, um subconjunto aberto e conexo de \mathbb{C} possui um espaço de recobrimento universal.*

1.4 O Teorema de Aproximação de Baouendi-Treves

Os conceitos e definições que introduziremos aqui são uma preparação para o objetivo da seção, que é enunciar o Teorema de Aproximação de Baouendi-Treves. O Teorema de Aproximação é provalmente o resultado mais importante da teoria de estruturas localmente integráveis. Intuitivamente, ele diz que as soluções de $\mathcal{L}u = 0$ são localmente aproximadas por polinômios em Z , onde \mathcal{L} é uma estrutura localmente integrável e Z um conjunto completo de integrais primeiras de \mathcal{L} .

Para nós Ω será um subconjunto aberto de \mathbb{R}^N . A aproximação dada pelo teorema tem caráter local, por isso basta nos restringirmos ao estudo de estruturas localmente integráveis sobre abertos de \mathbb{R}^N . Contudo, de igual modo podemos pensar em Ω como um aberto em uma variedade diferenciável de dimensão N .

Indicamos [BCH] para mais detalhes sobre a teoria apresentada a seguir.

Definição 1.4.1. O *fibrado tangente complexificado* de Ω é definido pela seguinte união disjunta

$$\mathbb{C}T\Omega = \bigcup_{p \in \Omega} \mathbb{C}T_p\Omega,$$

onde $\mathbb{C}T_p\Omega$ denota o conjunto de todos os vetores tangentes complexos em $p \in \Omega$.

Denotaremos, de maneira natural, o dual de $\mathbb{C}T\Omega$ por $\mathbb{C}T^*\Omega$.

Também podemos definir o conceito de subestrutura para $\mathbb{C}T\Omega$.

Definição 1.4.2. Um *subfibrado vetorial complexo* de $\mathbb{C}T\Omega$ de posto $n \leq N$ é uma união disjunta

$$\mathcal{V} = \bigcup_{p \in \Omega} \mathcal{V}_p \subset \mathbb{C}T\Omega$$

satisfazendo as seguintes condições:

- (i) Para todo $p \in \Omega$, \mathcal{V}_p é um subespaço vetorial de $\mathbb{C}T_p\Omega$ de dimensão n .

- (ii) Dado $p_0 \in \Omega$ existe um aberto U_0 contendo p_0 e campos vetoriais $L_1, \dots, L_n \in \mathfrak{X}(U_0)$ tal que L_{1p}, \dots, L_{np} geram \mathcal{V}_p para todo $p \in U_0$.

Definição 1.4.3. Dados um subfibrado vetorial complexo \mathcal{V} de $\mathbb{C}T\Omega$ e um aberto W de Ω , uma *seção de \mathcal{V} sobre W* é um elemento L de $\mathfrak{X}(W)$ tal que $L_p \in \mathcal{V}_p$ para todo $p \in W$.

Seja $\mathcal{V} = \cup_{p \in \Omega} \mathcal{V}_p$ um subfibrado vetorial complexo de $\mathbb{C}T\Omega$, com posto n , então para cada $p \in \Omega$ seja

$$\mathcal{V}_p^\perp = \{\lambda \in \mathbb{C}T_p^*\Omega : \lambda = 0 \text{ em } \mathcal{V}_p\}.$$

Então, $\mathcal{V}^\perp = \cup_{p \in \Omega} \mathcal{V}_p^\perp$ é um subfibrado vetorial complexo de $\mathbb{C}T^*\Omega$, de dimensão m , (ver Proposição I.4.4 de [BCH]). O subfibrado vetorial \mathcal{V} é ortogonal a \mathcal{V}^\perp .

Definição 1.4.4. Dizemos que um subfibrado vetorial complexo \mathcal{L} de $\mathbb{C}T\Omega$, de posto n , define uma *estrutura localmente integrável* se para cada ponto $p_0 \in \Omega$ existirem uma vizinhança aberta U_0 de p_0 e funções $Z_1, \dots, Z_m \in C^\infty(U_0)$, com $m + n = N$, tal que

$$\mathcal{L}_p^\perp = \text{span}\{dZ_{1p}, \dots, dZ_{mp}\}, \quad \forall p \in U_0.$$

O conjunto $\{Z_1, \dots, Z_m\}$ é chamado *conjunto completo de integrais primeiras de L* .

Teorema 1.4.5. *Seja \mathcal{L} uma estrutura localmente integrável com posto n definida em Ω . Então dado $p \in \Omega$ existem um sistema de coordenadas em p ,*

$$\{x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n\}$$

e funções suaves a valores reais ψ_1, \dots, ψ_m definidas numa vizinhança da origem satisfazendo

$$\psi_k(0, 0) = 0, \quad d_x \psi_k(0, 0) = 0, \quad k = 1, \dots, m,$$

tal que os diferenciais das funções

$$Z_k = x_k + i\psi_k(x, t), \quad k = 1, \dots, m,$$

geram \mathcal{L}^\perp numa vizinhança da origem.

O Teorema 1.4.5 é um resultado obtido pela combinação do Teorema I.10.1 e do Corolário I.10.2 de [BCH].

Definição 1.4.6. Seja \mathcal{L} uma estrutura localmente integrável sobre Ω . Uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é dita uma *solução homogênea de \mathcal{L}* e escrevemos $\mathcal{L}u = 0$ quando

$$Lu = 0, \text{ em } U \tag{1.4.1}$$

para toda seção local L de \mathcal{L} definida em um subconjunto aberto U de Ω .

Teorema 1.4.7 (Baouendi-Treves). *Seja \mathcal{L} uma estrutura localmente integrável em Ω e assumamos que dZ_1, \dots, dZ_m geram \mathcal{L}^\perp em Ω . Então toda vizinhança aberta $W \subset \Omega$ da origem contém uma outra vizinhança da origem, U , tal que toda solução $u \in C^1(W)$ de $\mathcal{L}u = 0$ em W é o limite uniforme, em U , de uma sequência de polinômios com coeficientes Z_1, \dots, Z_m .*

O Teorema 1.4.7 é uma versão do Teorema de Aproximação de Baouendi-Treves. Sua demonstração encontra-se em [BT], dela o autor assume que numa vizinhança da origem as funções Z_k s têm a forma

$$Z_k = x_k + i\psi_k(x, t), \tag{1.4.2}$$

onde $\psi_k(x, t)$ é uma função suave tal que $\psi(0, 0) = 0$ e $d_x\psi_k(0, 0) = 0$, isso é possível pelo Teorema 1.4.5. Também existe uma versão deste resultado para distribuições:

Uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(W)$ que satisfaz $\mathcal{L}u = 0$ em W é o limite em $\mathcal{D}'(U)$ de uma sequência de polinômios com coeficientes Z_1, \dots, Z_m .

Em particular, o Teorema 1.4.7 vale para funções contínuas.

Se $u \in C^0(W)$ é solução de $\mathcal{L}u = 0$ em W então u é o limite uniforme, em U , de uma sequência de polinômios com coeficientes Z_1, \dots, Z_m .

Uma consequência direta do resultado acima é a constância das soluções contínuas de $\mathcal{L}u = 0$ nas fibras de $Z = (Z_1, \dots, Z_m)$ sobre o aberto U . Se dois pontos $p, q \in U$ são tais que $Z(p) = Z(q)$, então $P(Z(p)) = P(Z(q))$ para qualquer polinômio P em m variáveis. Seja u uma função contínua que é solução de $\mathcal{L}u = 0$, então por u ser aproximação uniforme de polinômios em Z sobre o conjunto U , temos $u(p) = u(q)$.

Para concluirmos que $u(p) = u(q)$ usamos o fato de p e q estarem no conjunto onde a solução é aproximada por polinômios. Em geral, não é verdade que $Z(p) = Z(q)$ implica que $u(p) = u(q)$ para $p, q \in \Omega$ quaisquer.

Uma observação importante que fazemos é que no Teorema 1.4.7 a aproximação da solução é dada numa vizinhança de origem, porém dado um ponto $p \in \Omega$, se assumimos que as funções Z_k s possuem a forma (1.4.2) numa vizinhança de p , e que $d_x \psi_k(p) = 0$, então o Teorema 1.4.7 continua válido quando substituimos a origem por p . Por outro lado, pelo Teorema 1.4.5 sempre existe uma integral primeira em p satisfazendo (1.4.2) e de forma que $d_x \psi_k(p) = 0$.

Consideramos uma função definida em \mathbb{R}^2 , $Z(x, t) = x + i\varphi(x, t)$, onde $\varphi(x, t)$ é uma função suave a valores reais. Seja L o campo vetorial que tem $Z(x, t)$ como integral primeira num aberto Ω de \mathbb{R}^2 . Então um múltiplo de Z também é integral primeira de L . No próximo Lema, fixado um ponto p , mostramos a existência de uma integral primeira em p que é um múltiplo da função Z e satisfaz (1.4.2) para uma escolha adequada de coordenadas locais em p . Esse resultado será usado no Capítulo 2, com o objetivo de relacionar uma dada integral primeira com uma outra da forma $W(\xi, \tau) = \xi + i\psi(\xi, \tau)$, com $\psi_\xi(p) = 0$.

Lema 1.4.8. *Seja uma função $Z(x, t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $Z(x, t) = x + i\varphi(x, t)$, onde $\varphi(x, t)$ é uma função suave a valores reais. Então, para cada $p \in \mathbb{R}^2$ existem uma constante $c(p) \neq 0$ e um sistema de coordenadas (ξ, τ) , definido numa vizinhança de p , de forma que se $W(x, t) = c(p)Z(x, t)$ então nas coordenadas (ξ, τ) temos*

$$W(\xi, \tau) = \xi + i\psi(\xi, \tau),$$

onde $\psi(\xi, \tau)$ é uma função suave a valores reais que satisfaz $\psi_\xi(p) = 0$.

Demonstração. Fixado $p \in \mathbb{R}^2$. Primeiro se $\varphi_x(p) = 0$ então nada temos a fazer. Se $\varphi_x(p) \neq 0$ então tomamos

$$c(p) = 1 - i\varphi_x(p) \neq 0.$$

Fazendo $W(x, t) = c(p)Z(x, t)$ obtemos

$$W(x, t) = [1 - i\varphi_x(p)] [x + i\varphi(x, t)] = \underbrace{x + \varphi_x(p)\varphi(x, t)} + i \underbrace{[\varphi(x, t) - x\varphi_x(p)]}.$$

Considere a função

$$\xi(x, t) = x + \varphi_x(p)\varphi(x, t),$$

a derivada parcial de $\xi(x, t)$ com relação a x é

$$\xi_x(p) = 1 + \varphi_x(p)^2 \neq 0.$$

Então escolhemos as variáveis $\xi = \xi(x, t)$ e $\tau = t$. Assim a matriz jacobiana

de (ξ, τ) no ponto p é:

$$J(\xi, \tau)(p) = \begin{pmatrix} \xi_x(p) & \xi_t(p) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Então $\det [J(\xi, \tau)(p)] = \xi_x(p) \neq 0$, aplicando o Teorema da Função Inversa obtemos que (ξ, τ) é um sistema de coordenadas em alguma vizinhança de p . E, nas coordenadas (ξ, τ) a função W se escreve como

$$W(\xi, \tau) = \xi + i\psi(\xi, \tau),$$

onde $\psi(\xi, \tau) = \varphi(x(\xi, \tau), \tau) - x(\xi, \tau)\varphi_x(p)$. Agora, derivando $\psi(\xi, \tau)$ com relação à ξ no ponto p obtemos

$$\psi_\xi(p) = \varphi_x(p)x_\xi(p) - x_\xi(p)\varphi_x(p) = 0.$$

Como queríamos, assim o lema está provado. □

Observação 1.4.9. *No Lema 1.4.8 se a função $\varphi(x, t)$ for analítica real então a função ψ , que é a parte imaginária da integral primeira W , também será analítica real.*

1.5 O Teorema de Aproximação para Cunhas

Dizemos que um conjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é um *cone* (ou, para ser explícito, cone com vértice na origem) se

$$t \in \Gamma \Leftrightarrow \rho t \in \Gamma, \forall 0 < \rho < \infty.$$

Um conjunto $\Gamma_T \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $T > 0$, é chamado *cone truncado* se existir um cone Γ tal que $\Gamma_T = \Gamma \cap \{|t| < T\}$. Um cone truncado aberto é um cone truncado que é um conjunto aberto.

Um cone Γ' é um *subcone próprio* de Γ se $\overline{\Gamma'} \cap \{|t| = 1\}$ é um subconjunto próprio de Γ . Esta condição se traduz em Γ e Γ' serem cones com mesmo eixo onde Γ' tem abertura menor que Γ . Se Γ' é um subcone próprio de Γ e $T' < T$, dizemos que $\Gamma'_{T'}$ é um *subcone truncado* de Γ_T . Quando $n = 1$, um cone truncado é um intervalo da forma $(0, T)$ ou $(-T, 0)$, ou a união de ambos.

Seja $V \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto e $\Gamma_T \subset \mathbb{R}^n$ um cone truncado aberto, então o conjunto $V \times \Gamma_T$ é usualmente chamado *cunha com extremidade V* .

Considere uma estrutura localmente integrável \mathcal{L} com posto n em uma N -variedade ($N = m + n$), então assumamos que (x, t) são as coordenadas locais dadas

pelo Teorema 1.4.5, sobre uma vizinhança da origem. Sejam $B_x \subset \mathbb{R}^m$ uma bola centrada na origem e $\Gamma_T \subset \mathbb{R}^n$ um cone truncado, então assumimos que u é uma distribuição que satisfaz $\mathcal{L}u = 0$ num aberto que contém o fecho de $B_x \times \Gamma_T$. Nestas condições podemos afirmar que o traço

$$u|_{B_x \times \{t\}} = T_t u(x) = u(\cdot, t),$$

é bem definido e depende suavemente de $t \in \Gamma_T$ como uma aplicação a valores em $\mathcal{D}'(B_x)$, mas $u(x, 0)$ pode não ser definida. Contudo podemos assumir que

$$\lim_{t \rightarrow 0} T_t u \doteq bu,$$

existe em $\mathcal{D}'(B_x)$ quando $t \rightarrow 0$. Em outras palavras, assumimos que

$$u \in C^0(\Gamma_T \cup \{0\}, \mathcal{D}'(B_x)).$$

Ora, como $\Gamma_T \cup \{0\} \times B_x$ é relativamente compacto então, para algum $s \in \mathbb{R}$, temos

$$u \in C^0(\Gamma_T \cup \{0\}, L_{loc}^{2,s}(B_x)).$$

Usamos $L^{p,s}(B_x)$ para denotar o L^p -espaço de Sobolev de ordem $s \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$. Assim $L_{loc}^{2,s}(B_x)$ é o subespaço de $\mathcal{D}'(B_x)$ das distribuições u tais que $\psi u \in L^{2,s}(B_x)$ para alguma $\psi \in C_c^\infty(B_x)$.

No caso especial $p = 2$ o espaço $L^{p,s}$ também é eventualmente denotado por H^s .

A discussão acima tem o intuito de esclarecer as hipóteses do Teorema de Aproximação para Cunhas, agora estamos em condições de enunciá-lo.

Teorema 1.5.1. *Seja \mathcal{L} uma estrutura localmente integrável tal que Z_1, \dots, Z_m é um conjunto completo de integrais primeiras para \mathcal{L} numa vizinhança de $B_x \times \Gamma_T$. Então existem uma bola $B'_x \subset B_x$, concêntrica com B_x , e um subcone truncado Γ'_ρ de Γ_T tal que para toda $u \in C^0(\Gamma_T \cup \{0\}, L^p(B_x))$, $1 \leq p < \infty$, satisfazendo $\mathcal{L}u = 0$ temos*

$$E_\tau u(x, t) \rightarrow u(x, t) \text{ em } C^0(\Gamma'_\rho \cup \{0\}, L^p(B'_x)), \tau \rightarrow \infty.$$

O operador de aproximação $E_\tau u$ é definido por

$$E_\tau u(x, t) = (\tau/\pi)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t) - Z(x',0)]^2} u(x', 0) h(x') \det Z_x(x', 0) dx'.$$

Para a demonstração do Teorema 1.5.1 ver Teorema II.4.12 de [BCH].

No caso $N = 2$ temos que B_x é um intervalo contendo 0 e Γ_T é um intervalo da

forma $(0, T)$, ou $(-T, 0)$ ou a união de ambos. Ainda, se assumimos que a solução é uma função contínua, então a mesma técnica usada na prova do Teorema 1.5.1 pode ser adaptada para se mostrar o seguinte:

Teorema 1.5.2. *Seja L um campo vetorial localmente integrável sobre um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, com integral primeira $Z(x, t)$ numa vizinhança da origem. Então existem $\delta > 0$ e $\rho > 0$ tal que para toda $u \in C((-\epsilon, \epsilon) \times [0, T])$ satisfazendo $Lu = 0$ em $(-\epsilon, \epsilon) \times (0, T)$, temos*

$$E_\tau u(x, t) \rightarrow u(x, t) \text{ uniformemente em } (-\delta, \delta) \times [0, \rho), \tau \rightarrow \infty.$$

Agora, por uma aplicação do Teorema 1.5.2, obtemos o seguinte resultado:

Lema 1.5.3. *Sejam $\bar{\partial}$ o campo vetorial de Cauchy-Riemann e $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e conexo. Suponha que $u \in C^0(\bar{\Omega})$ e satisfaz $\bar{\partial}u = 0$ em Ω . Se $\Sigma \subset \partial\Omega$ é aberto e suave, e se $u = 0$ em Σ então $u \equiv 0$.*

Demonstração. Como Σ é não característica, existem coordenadas locais (x, t) nas quais Σ se escreve localmente como $(-1, 1) \times \{0\}$.

Então, por Ω ser conexo, deve existir $T > 0$ tal que $(-1, 1) \times (0, T) \subset \Omega$ ou $(-1, 1) \times (-T, 0) \subset \Omega$. Suponha que acontece o primeiro, então segue do Teorema 1.5.2 que existem $\delta > 0$ e $\rho > 0$ tal que

$$E_\tau u(x, t) \rightarrow u(x, t) \text{ uniformemente em } (-\delta, \delta) \times [0, \rho), \tau \rightarrow \infty,$$

onde

$$E_\tau u(x, t) = (\tau/\pi)^{m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',0)]^2} u(x', 0) h(x') Z_x(x', 0) dx' = 0,$$

pois $u(x', 0) = 0$ em $(-\delta, \delta) \times \{0\} \subset \Sigma$. Logo $u = 0$ em $(-\delta, \delta) \times [0, \rho)$. Assim, por Ω ser conexo, temos $u \equiv 0$ em Ω . \square

Observação 1.5.4. *O Lema 1.5.3 também pode ser demonstrado através de resultados dentro da teoria de funções holomorfas, por exemplo usando o Teorema de Radó.*

Capítulo 2

Soluções Contínuas de Campos Vetoriais Localmente Integráveis

Fixamos que neste capítulo Ω denotará um subconjunto aberto e conexo de \mathbb{R}^2 . Considere uma função $Z(x, t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$Z(x, t) = x + i\varphi(x, t), \quad (2.0.1)$$

onde $\varphi(x, t)$ é uma função suave a valores reais. Trabalharemos com o campo vetorial localmente integrável definido em Ω por

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{Z_t(x, t)}{Z_x(x, t)} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{\varphi_t(x, t)}{(1 + i\varphi_x(x, t))} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.0.2)$$

Assim a função $Z(x, t)$ é uma integral primeira para L em Ω . Estudaremos a possibilidade de obter uma fatoração das soluções contínuas de $Lu = 0$ como

$$u = U \circ Z, \quad (2.0.3)$$

em Ω , com $U \in C(Z(\Omega))$ e holomorfa em $\text{int}\{Z(\Omega)\}$. Antes veremos que, como aplicação do Teorema de Aproximação de Baouendi-Treves, a forma (2.0.3) vale localmente. Para isto recordaremos a fórmula de aproximação e as condições envolvidas para a sua convergência. Suponha que $(0, 0) \in \Omega$, $Z(0, 0) = 0$ e $\varphi_x(0, 0) = 0$. Dada $u \in C(\Omega)$ consideramos a família de funções $\{E_\tau u\}$ que depende do parâmetro τ , $0 < \tau < \infty$, onde

$$E_\tau u(x, t) = (\tau/\pi)^{1/2} \int_{\mathbb{R}} \exp^{-\tau[Z(x, t) - Z(x', 0)]^2} u(x', 0) h(x') Z_x(x', 0) dx'.$$

A função $h(x) \in C_0^\infty(-R, R)$, onde $R > 0$ é tomado de forma que

$$|\varphi_x(x, t)| < \frac{1}{2}, \quad (x, t) \in [-R, R] \times [-R, R], \quad (2.0.4)$$

e $h(x) \equiv 1$ numa vizinhança de $|x| \leq R/2$. Usando a condição (2.0.4) é possível mostrar que $E_\tau u(x, t) \rightarrow u(x, t)$ quando $\tau \rightarrow \infty$ uniformemente em $|x| < R/4$ e $|t| < T < R$, se $T > 0$ é convenientemente pequeno.

A exponencial no integrando que define $E_\tau u$ é uma função inteira de Z , então $E_\tau u$ é solução homogênea de L . Podemos aproximar a exponencial na topologia de C^∞ por $P_k(Z(x, t) - Z(x', 0))$, onde P_k são os polinômios da soma parcial de grau k , da sua série de Taylor. Assim temos os polinômios em Z convergindo para u na topologia de C^∞ em $|x| < R/4$ e $|t| < T < R$.

Seja $p \in \Omega$, então não é possível aplicar diretamente o Teorema de Aproximação, pois a convergência acima está baseada no fato de Z e a derivada parcial com relação a primeira variável de φ se anularem no ponto. Contornaremos essa dificuldade usando o Lema 1.4.8. Pelo lema existe uma constante c , que depende apenas de p , tal que a função

$$W_p = cZ,$$

que é uma integral primeira de L , para uma escolha apropriada de coordenadas locais (ξ, t) em p , se escreve como

$$W_p(\xi, t) = \xi + i\psi(\xi, t),$$

onde $\psi(\xi, t)$ é uma função suave a valores reais que satisfaz $\psi_\xi(p) = 0$.

Agora o Teorema de Aproximação nos fornece uma vizinhança V de p e uma sequência de polinômios P_k , tal que $u(x, t)$ é o limite uniforme de $P_k \circ W_p$ em V , ou seja,

$$u(x, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k(W_p(x, t)), \quad (x, t) \in V,$$

então

$$u(x, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k(cZ(x, t)), \quad (x, t) \in V.$$

Definimos $U_p(z) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} P_k(cz)$, assim temos

$$u(x, t) = U_p \circ Z(x, t), \quad (x, t) \in V. \tag{2.0.5}$$

Por ser o limite uniforme de polinômios a função U_p é contínua em $Z(V)$ e holomorfa no seu interior. Portanto a fatoração (2.0.3) vale localmente.

2.1 Soluções Contínuas em Conjuntos Verticalmente Convexos

Começaremos estudando a validade da fatoração (2.0.3) para as soluções de $Lu = 0$, onde L é o campo vetorial (2.0.2), sobre um tipo de conjunto onde esse

estudo se torna mais simples, os conjuntos verticalmente convexos. Veremos que neste caso a fatoração é sempre possível.

Definição 2.1.1. Dizemos que um conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ é *verticalmente convexo* quando dados dois pontos $p_1 = (x_0, t_1)$ e $p_2 = (x_0, t_2)$ em Ω o segmento vertical que os uni, $\{(x_0, t) : t_1 \leq t \leq t_2\}$, está totalmente contido em Ω .

No lema a seguir assumiremos que uma função contínua $u(x, t)$ se escreve como a composição de Z com funções holomorfas sobre dois retângulos com intersecção não vazia. Então estenderemos a fatoração (2.0.5) para a união dos retângulos.

Lema 2.1.2. *Seja $Z(x, t)$ uma função como em (2.0.1) e seja $u(x, t)$ uma função contínua em Ω . Suponha que $R_1 = (a, b) \times [c_1, d_1]$ e $R_2 = (a, b) \times [c_2, d_2]$ são retângulos em Ω com intersecção não vazia, e suponha que existem funções U_1 e U_2 definidas em $Z(R_1)$ e $Z(R_2)$, respectivamente, que são holomorfas nos interiores e satisfazem:*

$$u(x, t) = U_i \circ Z(x, t), \quad (x, t) \in R_i, \quad i = 1, 2.$$

Então $U_1 \equiv U_2$ na intersecção $Z(R_1) \cap Z(R_2)$. Consequentemente, as funções U_1 e U_2 dão origem a uma função U contínua em $Z(R_1) \cup Z(R_2)$, holomorfa no interior e tal que

$$u(x, t) = U \circ Z(x, t), \quad (x, t) \in R_1 \cup R_2.$$

Demonstração. Nosso objetivo é mostrar que, se $Z(x_0, t_1) = Z(x_0, t_2)$, onde $(x_0, t_1) \in R_1$ e $(x_0, t_2) \in R_2$, então $U_1(Z(x_0, t_1)) = U_2(Z(x_0, t_2))$. Ou seja, os valores de U_1 e U_2 coincidem na imagem $z = Z(x_0, t_1) = Z(x_0, t_2)$.

Podemos assumir que $c_1 < c_2 \leq d_1 < d_2$. Primeiro vamos supor que a função $t \mapsto \varphi(x_0, t)$ é constante em $[c_1, d_1]$. Então

$$Z(x_0, t) = Z(x_0, d_1) \text{ e } U_1(Z(x_0, t)) = u(x_0, d_1), \quad c_1 \leq t \leq d_1.$$

Se $Z(x_0, s) = Z(x_0, d_1)$ para algum $s \in [c_2, d_2]$, então

$$U_2(Z(x_0, s)) = U_2(Z(x_0, d_1)) = u(x_0, d_1) = U_1(Z(x_0, d_1)),$$

disto temos que a função

$$U(Z(x_0, t)) = \begin{cases} U_1(Z(x_0, t)), & c_1 \leq t \leq d_1, \\ U_2(Z(x_0, t)), & c_2 \leq t \leq d_2, \end{cases}$$

é bem definida. Chegaremos a mesma conclusão se $t \mapsto \varphi(x_0, t)$ for constante em $[c_2, d_2]$.

Defina o conjunto

$$A = \{x \in (a, b) : M_2(x) > m_2(x) \text{ e } M_1(x) > m_1(x)\},$$

onde

$$M_1(x) = \sup_{c_1 \leq t \leq d_1} \varphi(x, t), \quad m_1(x) = \inf_{c_1 \leq t \leq d_1} \varphi(x, t),$$

$$M_2(x) = \sup_{c_2 \leq t \leq d_2} \varphi(x, t), \quad m_2(x) = \inf_{c_2 \leq t \leq d_2} \varphi(x, t).$$

Então A é um conjunto aberto em (a, b) , portanto é uma união de intervalos abertos. Como $R_1 \cap R_2$ é não vazio, para qualquer $x \in (a, b)$ temos

$$m_2(x) \leq \varphi(x, d_1) \leq M_1(x), \quad (2.1.1)$$

$$m_1(x) \leq \varphi(x, d_1) \leq M_2(x). \quad (2.1.2)$$

Seja I uma componente de A , e suponha que $m_2(x) = M_1(x)$ para algum $x \in I$. Então por (2.1.1) temos $m_2(x) = \varphi(x, d_1) = M_1(x)$.

Agora se $\varphi(x, t_1) = \varphi(x, t_2)$ para $t_1 \in [c_1, d_1]$ e $t_2 \in [c_2, d_2]$, então segue da inequação

$$\varphi(x, t_1) \leq M_1(x) = m_2(x) \leq \varphi(x, t_2),$$

que $\varphi(x, t_1) = \varphi(x, d_1) = \varphi(x, t_2)$. Logo

$$U_1(Z(x, t_1)) = U_1(Z(x, d_1)) = u(x, d_1) = U_2(Z(x, d_1)) = U_2(Z(x, t_2)).$$

Com isso obtemos que a função

$$U(Z(x, t)) = \begin{cases} U_1(Z(x, t)), & c_1 \leq t \leq d_1, \\ U_2(Z(x, t)), & c_2 \leq t \leq d_2, \end{cases}$$

é bem definida. Se $m_1(x) = M_2(x)$ para algum $x \in I$, então obtém-se a mesma conclusão. Considere um ponto $\tilde{x} \in I$, onde $m_2(\tilde{x}) < M_1(\tilde{x})$ e $m_1(\tilde{x}) < M_2(\tilde{x})$. Seja J um intervalo contendo \tilde{x} tal que para $x \in J$

$$m_2(x) < M_1(x) \text{ e } m_1(x) < M_2(x).$$

Temos a igualdade nos conjuntos

$$\{x + iy : x \in J, m_1(x) < y < M_1(x)\} \cap \{x + iy : x \in J, m_2(x) < y < M_2(x)\}$$

$$= \{x + iy : x \in J, m(x) < y < M(x)\}$$

onde $m(x) = \max(m_1(x), m_2(x))$ e $M(x) = \min(M_1(x), M_2(x))$. O que implica

que o primeiro é aberto, conexo e não vazio. Agora, temos que U_j é contínua sobre

$$\{x + iy : x \in J, m_j(x) \leq y \leq M_j(x)\},$$

holomorfa no seu interior, $j = 1, 2$. Além disso $U_1 \equiv U_2$ sobre a curva suave $\{x + i\varphi(x, d_1) : x \in J\}$ que está contida na intersecção

$$\{x + iy : x \in J, m_1(x) \leq y \leq M_1(x)\} \cap \{x + iy : x \in J, m_2(x) \leq y \leq M_2(x)\}.$$

Assim usando o Lema 1.5.3 concluímos que U_1 e U_2 coincidem na intersecção

$$\{x + iy : x \in J, m_1(x) < y < M_1(x)\} \cap \{x + iy : x \in J, m_2(x) < y < M_2(x)\}.$$

Portanto temos que U_1 e U_2 definem uma função holomorfa na união

$$\{x + iy : x \in J, m_1(x) < y < M_1(x)\} \cup \{x + iy : x \in J, m_2(x) < y < M_2(x)\} =$$

Como foram considerados todos os casos temos que as funções U_1 e U_2 dão origem a uma função U , que é contínua em $Z((a, b) \times [c_1, d_2])$, holomorfa no seu interior e $u(x, t) = U(Z(x, t))$ em $(a, b) \times [c_1, d_2]$. \square

Lema 2.1.3. *Suponha que Ω é um conjunto verticalmente convexo. Sejam $Z(x, t)$ uma função como em (2.0.1), e L o campo vetorial (2.0.2). Considere $u(x, t) \in C^0(\Omega)$ uma solução de $Lu = 0$ em Ω . Nestas condições, se $Z(p_1) = Z(p_2)$, para $p_1, p_2 \in \Omega$, então $u(p_1) = u(p_2)$.*

Demonstração. Sejam $p_1 = (x_0, t_1)$ e $p_2 = (x_0, t_2)$. Segue de Ω ser verticalmente convexo que

$$r = \{(x_0, t) : t_1 \leq t \leq t_2\} \subset \Omega.$$

Então tomamos uma cobertura de r por retângulos em Ω

$$R_1 = (a, b) \times [c_1, d_1], \dots, R_l = (a, b) \times [c_l, d_l],$$

satisfazendo $R_j \cap R_{j+1}$ não vazio, e tal que para cada j existe uma função U_j definida e contínua em $Z(R_j)$, holomorfa em $\text{int}\{Z(R_j)\}$ e satisfazendo

$$u(x, t) = U_j \circ Z(x, t), \quad (x, t) \in R_j.$$

A existência de tal cobertura vem da discussão feita na introdução do Capítulo 2, onde foi mostrado que localmente a solução u tem a forma 2.0.5. Por r ser compacto podemos escolher uma cobertura finita. Pelo Lema 2.1.2, as funções U_1 e U_2 dão origem a uma função contínua definida em $Z(R_1 \cup R_2)$, que é holomorfa

no seu interior. Chamamos $R_1^* = R_1 \cup R_2$, e U_1^* a função originada por U_1 e U_2 , assim

$$u(x, t) = U_1^* \circ Z(x, t), \quad (x, t) \in R_1^*.$$

Agora, $R_1^* \cap R_3$ é não vazio. Então usamos o mesmo argumento para obter uma nova função definida e contínua em $Z(R_1^* \cup R_3)$, holomorfa interior e tal que $u(x, t)$ é a composição desta com $Z(x, t)$ em $R_1^* \cup R_3$. Procedemos assim sucessivamente até o passo $l - 1$. Desta forma obtemos que existe uma função U definida e contínua em $Z(R_1 \cup \dots \cup R_l)$, holomorfa no interior e tal que

$$u(x, t) = U \circ Z(x, t), \quad (x, t) \in R_1 \cup \dots \cup R_l.$$

Assim, se $Z(p_1) = Z(p_2)$ então

$$u(p_1) = U \circ Z(p_1) = U \circ Z(p_2) = u(p_2).$$

como queríamos. □

Agora podemos enunciar o resultado mencionado no início da seção, a fatoração das soluções de L . Sua demonstração é uma aplicação do Lema 2.1.3.

Teorema 2.1.4. *Suponha que Ω é um conjunto verticalmente convexo. Sejam $Z(x, t)$ uma função como em (2.0.1), e L o campo vetorial (2.0.2). Considere $u(x, t) \in C^0(\Omega)$ uma solução de $Lu = 0$ em Ω . Então existe uma função U contínua em $Z(\Omega)$, holomorfa no interior de $Z(\Omega)$ e tal que*

$$u(x, t) = U \circ Z(x, t), \quad (x, t) \in \Omega.$$

Demonstração. Seja $p \in \Omega$ e seja $z = Z(p)$ então existem uma vizinhança V_p de p , e uma função U_p , definida e contínua em $Z(V_p)$ tal que

$$u(x, t) = U_p \circ Z(x, t), \quad (x, t) \in V_p.$$

Definimos a função U no ponto z por

$$U(z) \doteq U_p(z).$$

Pelo Lema (2.1.3) a função U é bem definida em $Z(\Omega)$. Ainda precisamos mostrar que U , assim definida, é holomorfa em $\text{int}\{Z(\Omega)\}$.

Seja $z_0 \in \text{int}\{Z(\Omega)\}$ e seja $p_0 = (x_0, t_0) \in \Omega$ tal que $Z(p_0) = z_0$. Temos que $\{(x_0, t) : t \in \mathbb{R}\} \cap \Omega$ é conexo, então $\{(x_0, t) : t \in \mathbb{R}\} \cap \Omega = x_0 \times I$, onde I é um intervalo. Considere a função $\varphi_{x_0} : I \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $\varphi_{x_0}(t) \doteq \varphi(x_0, t)$.

Se φ_{x_0} for monótona numa vizinhança de t_0 , então a função U_{p_0} é holomorfa em z_0 . Assim U é holomorfa em z_0 .

Se φ_{x_0} não for monótona em nenhuma vizinhança de t_0 , então t_0 é um extremo local da função φ_{x_0} . Por z_0 estar em $\text{int}\{Z(\Omega)\}$, o ponto t_0 não é extremo absoluto de φ_{x_0} . Então existe $\tilde{t} \in I$ tal que φ_{x_0} é monótona numa vizinhança de \tilde{t} e $Z(x_0, \tilde{t}) = Z(p_0)$.

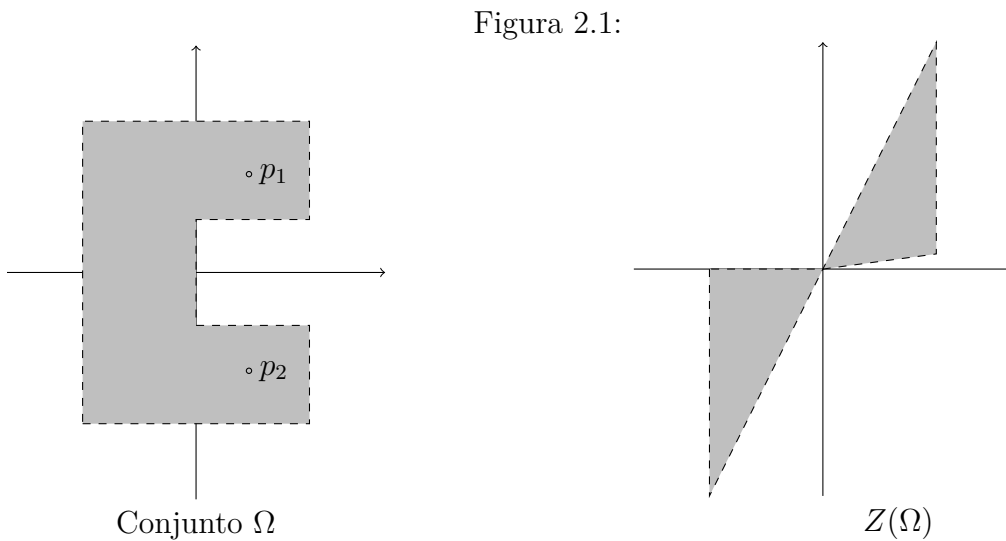
Seja $\tilde{p} = (x_0, \tilde{t})$, a função $U_{\tilde{p}}$ é holomorfa em $Z(\tilde{p}) = z_0$ e $U(z) = U_{\tilde{p}}(z)$ numa vizinhança de z_0 . Logo U é holomorfa em z_0 . \square

A seguir apresentamos um exemplo de conjunto não verticalmente convexo onde a conclusão do Teorema 2.1.4 não é verdade.

Exemplo 2.1.5. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ o conjunto aberto segundo a Figura (2.1), e seja

$$Z(x, t) = x + ixt^2.$$

Então $Z(0, t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Temos na figura (2.1) a imagem de $Z(\Omega)$, que é um conjunto conexo, porém $\text{int}\{Z(\Omega)\}$ é desconexo, formado por duas componentes conexas.



Definimos a função

$$u(x, t) = \begin{cases} Z(x, t), & (x, t) \in I \cap \Omega \\ 0, & (x, t) \in II \cap \Omega, III \cap \Omega, IV \cap \Omega \end{cases}$$

onde I, II, III e IV indicam o primeiro, o segundo, o terceiro e o quarto quadrantes. A função $u(x, t)$ é contínua em Ω . Considere o campo vetorial localmente integrável

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{Z_t(x, t)}{Z_x(x, t)} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Então a função $u(x, t)$ é solução de $Lu = 0$ no sentido das distribuições. De fato, seja $\phi(x, t)$ uma função teste, então

$$\begin{aligned} \langle Lu, \phi \rangle &= \langle u, -L\phi \rangle = - \int u(x, t)L\phi(x, t)d\sigma(x, t) = \\ &= - \int_I Z(x, t)L\phi(x, t)d\sigma(x, t) = \int_I LZ(x, t)\phi(x, t)d\sigma(x, t) = 0. \end{aligned}$$

Mas não é possível escrevermos

$$u(x, t) = U \circ Z(x, t), \quad (x, t) \in \Omega.$$

Se fosse possível teríamos que

$$Z(p_1) = Z(p_2) \Rightarrow u(p_1) = u(p_2), \quad p_1, p_2 \in \Omega.$$

Mas se tomamos $p_1 = (x_1, t_1) \in I \cap \Omega$ e $p_2 = (x_1, -t_1) \in IV \cap \Omega$ então temos $Z(p_1) = Z(p_2)$, enquanto que

$$u(p_1) = x_1 + ix_1t_1 \neq 0 = u(p_2).$$

Frisamos que no exemplo o conjunto $\text{int}\{Z(\Omega)\}$ é desconexo. Na seção 2.3 veremos que é possível mostrar a constância nas fibras de Z sobre uma classe de soluções de L sem assumir Ω verticalmente convexo, mas assumindo que o interior da imagem por Z de Ω é simplesmente conexo.

2.2 Comportamento na Fronteira

Nesta seção, como na anterior, Ω será um subconjunto de \mathbb{R}^2 verticalmente convexo e denotaremos por $\bar{\Omega}$ seu fecho. Sejam $Z(x, t)$ uma função como (2.0.1) e L o campo vetorial (2.0.2), então considere uma função $u \in C^0(\bar{\Omega})$, que é solução de $Lu = 0$ em Ω . Segundo o Teorema 2.1.4, u se fatora como

$$u = U \circ Z, \quad \text{em } \Omega$$

onde $U \in C^0(Z(\Omega))$, e é holomorfa em $\text{int}\{Z(\Omega)\}$. O objetivo desta seção é estender esse resultado para $\bar{\Omega}$, ou seja, mostraremos a existência de uma função $U \in C^0(Z(\bar{\Omega}))$, holomorfa no interior do mesmo, tal que

$$u = U \circ Z, \quad \text{em } \bar{\Omega}.$$

Precisaremos de alguns resultados preliminares, que serão enunciados a seguir.

As demonstrações da Proposição 2.2.1, do Lema 2.2.3 e do Corolário 2.2.4 podem ser encontradas em [BH1].

Proposição 2.2.1. *Seja $L = \frac{\partial}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial}{\partial x}$ um campo vetorial complexo C^1 definido num retângulo $(-R, R) \times (-R, R)$. Assuma que u é uma função contínua em $[0, R) \times (-R, R)$ que é solução de $Lu = 0$ em $(0, R) \times (-R, R)$. Suponha que $a(0, t) \equiv 0$. Então u se estende como solução contínua sobre uma vizinhança da origem.*

Observação 2.2.2. *A Proposição 2.2.1 continua válida se trasladamos a origem para um ponto $p_0 = (x_0, t_0)$. Nesse caso a enunciaríamos da seguinte forma:*

Seja $L = \frac{\partial}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial}{\partial x}$ um campo vetorial complexo C^1 definido sobre um retângulo R centrado em p_0 e com base paralela ao eixo x . Assuma que u é uma função que satisfaz $Lu = 0$ sobre a parte de R à direita da reta $x = x_0$, e é contínua até $x = x_0$. Suponha que $a(x_0, t) \equiv 0$ numa vizinhança de t_0 . Então u se estende como solução contínua sobre uma vizinhança de p_0 .

A demonstração, neste caso, segue inteiramente igual a feita em [BH1].

Lema 2.2.3. *Sejam $\psi(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^1 , e $v(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Assuma que:*

- (i) *se $\psi'(t) \equiv 0$ em $[r, s] \subset [a, b]$ então $v(r) = v(s)$;*
- (ii) *se $\psi'(r)\psi'(s) \neq 0$ e $\psi(r) = \psi(s)$ então $v(r) = v(s)$, $r, s \in (a, b)$;*
- (iii) *$\psi(a) = \psi(b)$.*

Então $v(a) = v(b)$.

Corolário 2.2.4. *Sejam $\psi(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^1 , e $v(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e seja $M = \sup \psi(t)$ e $m = \inf \psi(t)$. Assuma que:*

- (i) *se $\psi'(t) \equiv 0$ em $[r, s] \subset [a, b]$ então $v(r) = v(s)$;*
- (ii) *se $\psi'(r)\psi'(s) \neq 0$ e $m < \psi(r) = \psi(s) < M$ então $v(r) = v(s)$, $r, s \in (a, b)$;*
- (iii) *$\psi(a) = \psi(b)$*

Então $v(a) = v(b)$.

Segundo o Lema 2.1.3 da seção anterior, uma função $u \in C^0(\Omega)$ que é solução de $Lu = 0$ em Ω , é constante nas fibras de Z em Ω . Provaremos no Lema abaixo que quando $u \in C^0(\overline{\Omega})$ a constância nas fibras acontece no fecho.

Lema 2.2.5. *Suponha que Ω é um conjunto verticalmente convexo. Sejam $Z(x, t)$ uma função como em (2.0.1), e L o campo vetorial (2.0.2). Considere uma função $u(x, t) \in C^0(\overline{\Omega})$ que é solução de $Lu = 0$ em Ω . Nestas condições, se $Z(p_1) = Z(p_2)$ para $p_1, p_2 \in \overline{\Omega}$, então $u(p_1) = u(p_2)$.*

Demonstração. Sejam $p_1 = (x_0, t_1)$ e $p_2 = (x_0, t_2)$ em $\overline{\Omega}$ com $Z(p_1) = Z(p_2)$. Assumiremos que $t_1 < t_2$.

O conjunto Ω é verticalmente convexo, então seu fecho $\overline{\Omega}$ também possui essa propriedade. Sendo assim o conjunto $\{(x_0, t) : t_1 < t < t_2\}$ está contido em $\overline{\Omega}$.

Dividiremos a demonstração em dois casos.

Caso 1: Quando $\{(x_0, t) : t_1 < t < t_2\} \subset \Omega$.

Se p_1 e p_2 são pontos interiores então já sabemos que o resultado é verdade, mas essa hipótese está inclusa no *Caso 1*. Também pode acontecer de um dos dois pontos, ou os dois serem pontos da fronteira, não trataremos de forma separada essas condições. Suponha que $u(x, t)$ e $\varphi(x, t)$ são funções reais, então definimos as funções $\psi(t)$, $v(t) : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\psi(t) : t \mapsto \psi(t) \doteq \varphi(x_0, t),$$

$$v(t) : t \mapsto v(t) \doteq u(x_0, t),$$

mostraremos que $\psi(t)$ e $v(t)$ satisfazem as condições (i) e (ii) do Lema 2.2.3, a condição (iii) vem de $Z(p_1) = Z(p_2)$. Pelo modo com que foram definidas, $v(t)$ é contínua e $\psi(t)$ é suave.

Se $\psi'(t) \equiv 0$ no intervalo $[r, s] \subset [t_1, t_2]$, então $\psi(t)$ é constante em $[r, s]$. Aplicando o Teorema 2.1.4, temos que $v(t)$ é constante em (r, s) . Então, pela continuidade de $v(t)$, temos $v(r) = v(s)$. Assim a condição (i) está satisfeita.

Para (ii) basta observarmos que como $\{(x_0, t) : t_1 < t < t_2\} \subset \Omega$ temos

$$r, s \in (t_1, t_2) \Rightarrow (x_0, r), (x_0, s) \in \Omega,$$

então usando o Teorema 2.1.4, obtemos

$$\varphi(x_0, r) = \varphi(x_0, s) \Rightarrow u(x_0, r) = u(x_0, s),$$

ou seja,

$$\psi(r) = \psi(s) \Rightarrow v(r) = v(s).$$

portanto (ii) também é satisfeita. Assim, segue do Lema 2.2.3 que $v(t_1) = v(t_2)$. Então $u(p_1) = u(p_2)$, neste caso. Em geral, $u(x, t)$ e $\varphi(x, t)$ são funções complexas, então usamos o Lema 2.2.3 nas partes real e imaginária de $\psi(t)$ e $v(t)$.

Caso 2: Quando $\{(x_0, t) : t_1 < t < t_2\}$ não está totalmente contido em Ω .

Neste caso uma parte da fronteira é um segmento que contém p_1 ou p_2 , ou ainda $\{(x_0, t); t_1 \leq t \leq t_2\} \subset \partial\Omega$. Assumiremos que a fronteira limita Ω pelo lado esquerdo.

Considere as funções $\psi(t)$ e $v(t)$ definidas no *Caso 1*. Agora mostraremos que $\psi(t)$ e $v(t)$ satisfazem as condições do Corolário 2.2.4. Começaremos mostrando (ii), considere pontos (x_0, r) e (x_0, s) , onde $t_1 < r < s < t_2$, tal que

$$\psi'(r) = \varphi_t(x_0, r) \neq 0, \quad \psi'(s) = \varphi_t(x_0, s) \neq 0,$$

$$m < \psi(r) = \lambda = \psi(s) < M,$$

onde

$$M = \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} \psi(t) = \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} \varphi(x_0, t), \quad m = \inf_{t_1 \leq t \leq t_2} \psi(t) = \inf_{t_1 \leq t \leq t_2} \varphi(x_0, t).$$

Pelo Teorema da Função Implícita existem funções suaves $r(x)$ e $s(x)$ e também um número $\epsilon > 0$, de forma que os gráficos

$$\{(x, r(x)) : x_0 \leq x < x_0 + \epsilon\}, \quad \{(x, s(x)) : x_0 \leq x < x_0 + \epsilon\}$$

que passam por (x_0, r) , (x_0, s) , respectivamente, cruzam $\partial\Omega$ transversalmente e

$$\varphi(x, r(x)) = \varphi(x, s(x)) = \lambda, \quad x_0 \leq x < x_0 + \epsilon.$$

Então, segue do Teorema 2.1.4 que $u(x, r(x)) = u(x, s(x))$ para $x_0 < x < x_0 + \epsilon$. Fazendo $x \searrow x_0$, obtemos

$$u(x_0, r) = u(x_0, s),$$

então $v(r) = v(s)$. Se a fronteira limita Ω pela direita então de forma análoga provamos que $v(r) = v(s)$.

Agora mostraremos o item (i). Suponha que $\psi'(t) \equiv 0$ em $[r, s] \subset [t_1, t_2]$. Relembrando, o campo vetorial L é

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{\varphi_t(x, t)}{1 + i\varphi_x(x, t)} \frac{\partial}{\partial x},$$

chamamos

$$a(x, t) = \frac{\varphi_t(x, t)}{1 + i\varphi_x(x, t)},$$

logo

$$a(x_0, t) = \frac{\varphi_t(x_0, t)}{1 + i\varphi_x(x_0, t)},$$

como $\psi'(t) = \varphi_t(x_0, t)$ temos $a(x_0, t) \equiv 0$ em $[r, s]$. Logo estamos nas condições da Proposição 2.2.1, então para cada $t_0 \in (r, s)$ temos que $u(x, t)$ se estende como solução contínua sobre uma vizinhança de (x_0, t_0) .

Como estamos supondo que $\psi'(t) \equiv 0$ em $[r, s]$, a função $\psi(t) = \varphi(x_0, t)$ é constante em $[r, s]$. Então aplicando o Teorema 2.1.4, temos que $u(x, t)$ é constante sobre os pontos (x_0, t) pertencentes a uma vizinhança de t_0 . Como a união destas vizinhanças cobre $\{(x_0, t), t \in (r, s)\}$, concluímos que $u(x_0, t)$ é constante em (r, s) . Disto, $u(x_0, r) = u(x_0, s)$. Então $v(r) = v(s)$. Assim a condição (i) está provada.

Enfim, segue do Corolário 2.2.4 que $v(t_1) = v(t_2)$, ou seja, $u(p_1) = u(p_2)$. \square

O próximo resultado generaliza o Teorema 2.1.4. Se supomos que a solução u é contínua em $\bar{\Omega}$ então como aplicação do Lema 2.2.5 podemos estender a fatoração de u para o fecho.

Teorema 2.2.6. *Suponha que Ω é um conjunto verticalmente convexo. Sejam $Z(x, t)$ uma função como em (2.0.1), e L o campo vetorial (2.0.2). Considere $u(x, t) \in C^0(\bar{\Omega})$ solução de $Lu = 0$ em Ω . Então existe uma função U definida e contínua em $Z(\bar{\Omega})$, holomorfa no interior de $Z(\bar{\Omega})$ e tal que*

$$u(x, t) = U \circ Z(x, t), \quad (x, t) \in \bar{\Omega}. \quad (2.2.1)$$

Demonstração. Já sabemos que $u = U \circ Z$ em Ω , onde U é uma função contínua em $Z(\Omega)$ que é holomorfa no interior. Se p é um ponto da fronteira então tomamos um sequência $(p_j) \subset \Omega$ tal que $p_j \rightarrow p$. Então

$$U(Z(p_j)) = u(p_j),$$

pela continuidade de $u(x, t)$ temos

$$U(Z(p_j)) \rightarrow u(p),$$

então definimos a função U no ponto $Z(p)$ por

$$U(Z(p)) \doteq u(p).$$

Pelo Lema 2.2.5, a função U fica bem definida em $Z(\bar{\Omega})$. \square

Em conjuntos não verticalmente convexos não será possível garantir uma fa-

toração como (2.2.1). Na seção 2.5 é feito um estudo pontual deste problema.

2.3 Soluções Contínuas em Conjuntos mais Gerais

Nesta seção consideramos um conjunto aberto e conexo Ω possivelmente não verticalmente convexo. Nosso objetivo será encontrar condições que nos permitam mostrar a constância das soluções contínuas de $Lu = 0$ nas fibras de $Z(x, t)$ sobre Ω . Para isso usaremos a Teoria de Continuação Analítica.

Considere a função

$$Z(x, t) = x + i\varphi(x, t), \quad (2.3.1)$$

onde $\varphi(x, t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função analítica real. Seja L o campo vetorial (2.0.2). Analisaremos o caso em que φ não depende de t . Neste caso o conjunto $Z(\Omega)$ é um gráfico de função de x ,

$$Z(\Omega) = \{x + i\varphi(x) : (x, t) \in \Omega\},$$

e $L = \partial/\partial t$.

Seja u uma solução contínua de L . Dado $p \in \Omega$, existem um retângulo $R = (a, b) \times (c, d)$ centrado em p , e uma função contínua U de forma que

$$u(x, t) = U(Z(x, t)), \quad (x, t) \in R,$$

então

$$u(x, t) = U(x + i\varphi(x)), \quad x \in (a, b).$$

A solução u não depende de t , logo $Z(p_1) = Z(p_2)$ implica que $u(p_1) = u(p_2)$. Portanto neste caso temos a fatoração (2.0.3) em Ω . O caso φ dependendo apenas de x é equivalente ao caso $\text{int}\{Z(\Omega)\}$ vazio. Portanto quando $\text{int}\{Z(\Omega)\}$ é vazio a fatoração (2.0.3) das soluções contínuas de L é sempre possível. Assim, o estudo da fatoração é interessante quando $\text{int}\{Z(\Omega)\}$ é não vazio.

No Exemplo 2.1.5 temos um conjunto Ω e uma função Z tais que $\text{int}\{Z(\Omega)\}$ é desconexo, e foi mostrada a existência de uma solução contínua do campo vetorial (2.0.2) que não possui a fatoração desejada. Para mostrar a fatoração vamos assumir que $\text{int}\{Z(\Omega)\}$ é conexo.

Mostraremos a seguir que como consequência de $\text{int}\{Z(\Omega)\}$ ser conexo, o conjunto $\text{int}\{Z(R)\}$ também é conexo, para $R \subset \Omega$ retângulo. Isto é importante porque assim o limite dos polinômios em Z , que aproximam uma solução de $Lu = 0$, é uma função holomorfa definida em um aberto conexo, ou seja, ‘um

elemento de função'.

Lema 2.3.1. *Seja $R = (a, b) \times (c, d)$ um retângulo contido em Ω , e seja $Z(x, t)$ uma função como em (2.3.1). Suponha que $\text{int}\{Z(\Omega)\}$ é conexo e não vazio então $\text{int}\{Z(R)\}$ é conexo.*

Demonstração. Podemos escrever

$$\text{int}\{Z(R)\} = \{x + iy : a < x < b, m(x) < y < M(x)\},$$

onde

$$m(x) = \inf_{c < t < d} \varphi(x, t), \quad M(x) = \sup_{c < t < d} \varphi(x, t), \quad a < x < b.$$

Suponha que exista $x_0 \in (a, b)$, tal que $m(x_0) = M(x_0)$. Então $\varphi(x_0, t)$ é constante para $c < t < d$. Como $\varphi(x, t)$ é analítica real, a função que fixa x_0 , $t \mapsto \varphi(x_0, t)$, também é analítica real. Logo $\varphi(x_0, t)$ deve ser constante para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso,

$$\{(x, t) \in \text{int}\{Z(\Omega)\} : x < x_0\} \text{ e } \{(x, t) \in \text{int}\{Z(\Omega)\} : x > x_0\}$$

seria uma cisão não trivial de $\text{int}\{Z(\Omega)\}$.

Logo, $m(x) < M(x)$ para todo $x \in (a, b)$. O que implica que $\text{int}\{Z(R)\}$ é conexo. \square

Observação 2.3.2. *Seja $Z(x, t)$ uma função como em (2.3.1), e L o campo vetorial (2.0.2). Suponha que $\text{int}\{Z(\Omega)\}$ é conexo e não vazio. Considere $u(x, t)$ uma função contínua em Ω , que é solução homogênea de L . Então, para cada $p \in \Omega$ existem um retângulo R centrado em p , com base paralela ao eixo x , e uma função U definida e contínua em $Z(R)$, que é holomorfa no aberto conexo $\text{int}\{Z(R)\}$, e satisfaz:*

$$u(x, t) = U \circ Z(x, t), \quad (x, t) \in R, \quad (2.3.2)$$

O par $(U, \text{int}\{Z(R)\})$ é um elemento de função em $Z(\Omega)$.

O lema que enunciaremos a seguir é muito parecido com o Lema 2.1.2 da Seção 2.1. A demonstração apresentada na Seção 2.1 poderia ser adaptada aqui, porém apresentaremos uma versão mais simples, que depende das hipóteses: $\varphi(x, t)$ analítica real e $\text{int}\{Z(\Omega)\}$ conexo.

O relevante para nós é que segue do Lema 2.3.3 e de seu Corolário, o qual está enunciado em seguida, que dois elementos de função nas condições da Observação 2.3.2 são uma continuação analítica direta um do outro, quando seus domínios vem de retângulos com intersecção não vazia.

Lema 2.3.3. *Sejam $u(x, t)$ uma função contínua em Ω e $Z(x, t)$ uma função como em (2.3.1). Suponha que $\text{int}\{Z(\Omega)\}$ é conexo e não vazio. Considere os retângulos $R_1 = (a, b) \times (c_1, d_1)$ e $R_2 = (a, b) \times (c_2, d_2)$ contidos em Ω , tal que a intersecção $R_1 \cap R_2$ é não vazia. E, suponha que existam funções U_1 e U_2 definidas em $Z(R_1)$ e $Z(R_2)$, respectivamente, holomorfas nos interiores e satisfazendo:*

$$u(x, t) = U_i \circ Z(x, t), \quad (x, t) \in R_i, \quad i = 1, 2.$$

Então $U_1 \equiv U_2$ na intersecção $\text{int}\{Z(R_1)\} \cap \text{int}\{Z(R_2)\}$.

Demonstração. A intersecção $R_1 \cap R_2$ é um retângulo aberto com base paralela ao eixo x em Ω . Sendo assim, o conjunto $\text{int}\{Z(R_1 \cap R_2)\}$ é conexo e não vazio. Já sabemos que $U_1 \equiv U_2$ em $Z(R_1 \cap R_2)$, e vale a inclusão

$$\text{int}\{Z(R_1 \cap R_2)\} \subset \text{int}\{Z(R_1)\} \cap \text{int}\{Z(R_2)\}.$$

Como U_1 e U_2 são funções holomorfas para provarmos o lema basta mostrarmos que o conjunto $\text{int}\{Z(R_1)\} \cap \text{int}\{Z(R_2)\}$ é conexo. Temos

$$\text{int}\{Z(R_1)\} \cap \text{int}\{Z(R_2)\} =$$

$$\{x + iy : a < x < b \text{ e } m_1(x) < y < M_1(x)\} \cap \{x + iy : a < x < b \text{ e } m_2(x) < y < M_2(x)\},$$

onde

$$M_1(x) = \sup_{c_1 < t < d_1} \varphi(x, t), \quad m_1(x) = \inf_{c_1 < t < d_1} \varphi(x, t),$$

$$M_2(x) = \sup_{c_2 < t < d_2} \varphi(x, t), \quad m_2(x) = \inf_{c_2 < t < d_2} \varphi(x, t).$$

Note que, para $(x, t) \in R_1 \cap R_2$ temos $m_2(x) \leq \varphi(x, t) \leq M_1(x)$ e $m_1(x) \leq \varphi(x, t) \leq M_2(x)$. Por $\varphi(x, t)$ ser analítica real, para todo $x \in (a, b)$

$$m_2(x) < M_1(x) \text{ e } m_1(x) < M_2(x).$$

Segue que podemos escrever

$$\text{int}\{Z(R_1)\} \cap \text{int}\{Z(R_2)\} = \{x + iy : a < x < b \text{ e } m(x) < y < M(x)\},$$

onde $m(x) = \max(m_1(x), m_2(x))$ e $M(x) = \min(M_1(x), M_2(x))$. Então $\text{int}\{Z(R_1)\} \cap \text{int}\{Z(R_2)\}$ é conexo e disto segue o resultado. \square

Corolário 2.3.4. *Sejam $u(x, t)$ uma função contínua em Ω , e $Z(x, t)$ uma função como em (2.3.1). Suponha que $\text{int}\{Z(\Omega)\}$ é conexo e não vazio. Considere retângulos R_1 e R_2 em Ω , ambos com base paralela ao eixo x , e tal que a intersecção*

$R_1 \cap R_2$ é não vazia. Suponha que existem funções U_1 e U_2 definidas em $Z(R_1)$ e $Z(R_2)$, respectivamente, holomorfas nos interiores e satisfazendo:

$$u(x, t) = U_i \circ Z(x, t), \quad (x, t) \in R_i, \quad i = 1, 2.$$

Então $U_1 \equiv U_2$ na intersecção $\text{int}\{Z(R_1)\} \cap \text{int}\{Z(R_2)\}$.

Demonstração. Sejam $p_1 = (x_1, t_1) \in R_1$ e $p_2 = (x_2, t_2) \in R_2$ com $Z(p_1) = Z(p_2)$. Então, $x_1 = x_2$. Podemos tomar novos retângulos $\tilde{R}_1 \subset R_1$, e $\tilde{R}_2 \subset R_2$, com $p_1 \in \tilde{R}_1$ e $p_2 \in \tilde{R}_2$, de forma que \tilde{R}_1 e \tilde{R}_2 possuem mesma base, e $\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2$ é não vazio.

Os retângulos \tilde{R}_1 e \tilde{R}_2 estão nas condições do Lema 2.3.3, logo

$$U_1(Z(p_1)) = U_2(Z(p_2)),$$

como queríamos. □

Observação 2.3.5. Nas condições do Corolário 2.3.4, temos que os elementos de função $(U_1, \text{int}\{Z(R_1)\})$ e $(U_2, \text{int}\{Z(R_2)\})$ são continuação analítica direta um do outro.

Fixada uma função $u \in C^0(\Omega)$ solução de $Lu = 0$, seguindo a Observação 2.3.2 obtemos uma coleção de elementos de função, onde cada elemento satisfaz a condição (2.3.2). No próximo resultado mostraremos que dois a dois esses elementos de função são continuação analítica. Isto implica que os elementos de função que satisfazem a condição (2.3.2) formam uma ‘função analítica global’.

Lema 2.3.6. Sejam $u(x, t)$ uma função contínua em Ω e $Z(x, t)$ função suave como em (2.3.1). Suponha que $\text{int}\{Z(\Omega)\}$ é conexo e não vazio. Sejam R_1 e R_2 retângulos abertos em Ω com base paralela ao eixo x , e suponha que existem funções U_1 e U_2 definidas em $Z(R_1)$ e $Z(R_2)$, respectivamente, holomorfas nos interiores e satisfazendo:

$$u(x, t) = U_i \circ Z(x, t), \quad (x, t) \in R_i, \quad i = 1, 2.$$

Nestas condições, se $u(x, t)$ for solução de $Lu = 0$, onde L é o campo vetorial (2.0.2), então os elementos de função $(U_1, \text{int}\{Z(R_1)\})$ e $(U_2, \text{int}\{Z(R_2)\})$ são continuação analítica um do outro.

Demonstração. Fixamos pontos $p_1 \in R_1$ e $p_2 \in R_2$. Então tomamos um caminho $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$, onde $\gamma(a) = p_1$ e $\gamma(b) = p_2$.

Segundo a Observação 2.3.2, para cada $p = \gamma(t)$ existem um retângulo Q centrado em p , e uma função U holomorfa em $\text{int}\{Z(Q)\}$ tal que

$$u(x, t) = U(Z(x, t)), \quad (x, t) \in Q.$$

Então escolhemos uma coleção finita destes retângulos Q_1, Q_2, \dots, Q_l , cobrindo o caminho $\gamma(t)$, que satisfaz:

$$Q_1 = R_1, \quad Q_l = R_2 \text{ e } Q_j \cap Q_{j+1} \neq \emptyset, \quad 1 \leq j \leq l-1.$$

Segue do Lema 2.3.4 que $(U_j, \text{int}\{Z(Q_j)\})$ e $(U_{j+1}, \text{int}\{Z(Q_{j+1})\})$ são continuação analítica direta um do outro, para $j = 1, \dots, l-1$. Logo temos a conclusão do lema. □

Seja $u \in C^0(\Omega)$ uma solução de $Lu = 0$ em Ω . Definimos a coleção

$$\mathcal{C} = \{(U_R, \text{int}\{Z(R)\}) : R \subset \Omega \text{ retângulo, e } u = U_R \circ Z, \text{ em } R\}, \quad (2.3.3)$$

A coleção \mathcal{C} é formada por elementos de função em $Z(\Omega)$, e seus elementos são continuação analítica um do outro. Então \mathcal{C} gera uma função analítica global em $Z(\Omega)$. O conjunto base de \mathcal{C} é um subconjunto de $Z(\Omega)$ (veja definição de conjunto base em Definição 1.1.3).

Nem sempre o conjunto base será $\text{int}\{Z(\Omega)\}$, como mostra o exemplo a seguir. No exemplo também apresentaremos uma solução contínua de $Lu = 0$ que não é constante nas fibras de Z sobre Ω .

Exemplo 2.3.7. Considere Ω o conjunto segundo a Figura 2.2. Fixamos os pontos

$$p_1 = (1, t_1), \quad p_2 = (1, t_2) \in \Omega.$$

Seja $\varphi(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(t) = t(t - t_2)^2(t - t_1)^2,$$

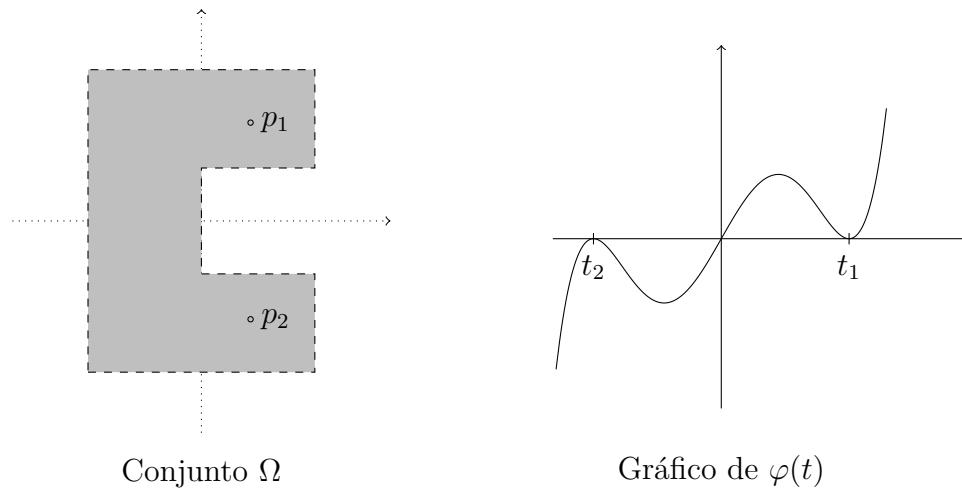
Na Figura (2.2) temos o gráfico de $\varphi(t)$. Então seja

$$Z(x, t) = x + i\varphi(t),$$

o campo vetorial (2.0.2) associado à $Z(x, t)$ é

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - i\varphi'(t)\frac{\partial}{\partial x}.$$

Figura 2.2:



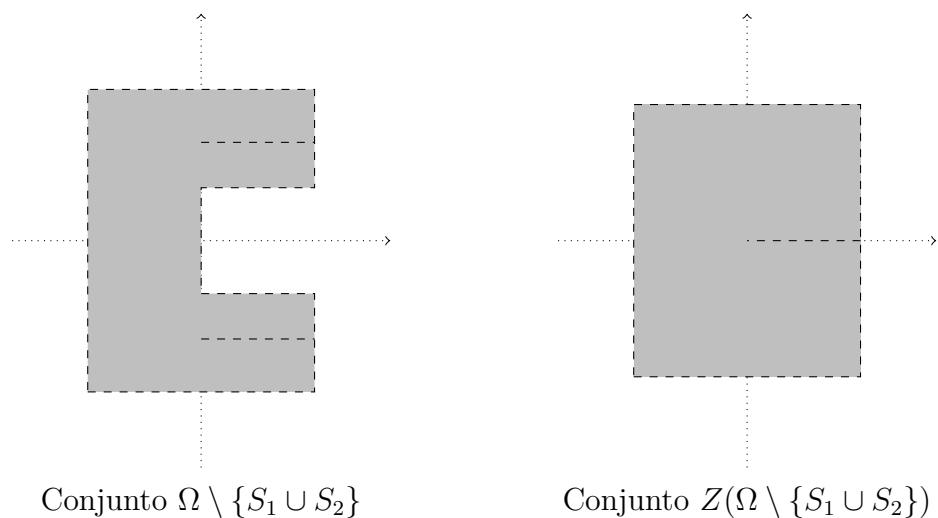
Neste caso o conjunto Ω não é verticalmente convexo. Aplicando Z na parte de Ω contida no primeiro quadrante obtemos que esta é dobrada na reta $t = t_1$, e levada sobre um retângulo do primeiro quadrante do plano complexo. E a reta $t = t_1$ é aplicada sobre o eixo real.

Enquanto que aplicando Z na parte de Ω contida no quarto quadrante obtemos que esta é dobrada em $t = t_2$, e levada sobre um retângulo do quarto quadrante do plano complexo. A reta $t = t_2$ é aplicada sobre o eixo real.

O conjunto $Z(\Omega)$ é um retângulo. Sejam

$$S_1 = \{(x, t_1) : x \geq 0\}, \quad S_2 = \{(x, t_2) : x \geq 0\}.$$

Figura 2.3:



Então o conjunto $Z(\Omega \setminus \{S_1 \cup S_2\})$ é um retângulo retirando um segmento que corresponde à $(x, 0)$ com $x \geq 0$, como podemos ver na figura 2.3. Logo,

$$Z(\Omega \setminus \{S_1 \cup S_2\}) \subset \mathbb{C} \setminus \{x \geq 0\}.$$

Assim existe um ramo da raiz quadrada que é bem definido neste conjunto. Considere a função $u(x, t)$ definida em $\Omega \setminus \{S_1 \cup S_2\}$ por

$$u(x, t) \doteq \sqrt{Z(x, t)}.$$

Observe que, se $(x, t_1) \in S_1$ então quando $t \rightarrow t_1$ e $t \neq t_1$ temos $Z(x, t) \rightarrow x$ por pontos do semiplano $y > 0$. E se $(x, t_2) \in S_2$ então quando $t \rightarrow t_2$ e $t \neq t_2$ temos $Z(x, t) \rightarrow x$ por pontos do semiplano $y < 0$.

Portanto podemos estender a função $u(x, t)$ continuamente para Ω , fazendo:

$$u(x, t_1) \doteq \lim_{t \rightarrow t_1} \sqrt{Z(x, t)},$$

$$u(x, t_2) \doteq \lim_{t \rightarrow t_2} \sqrt{Z(x, t)}.$$

A função $u(x, t)$ é a composição de uma função holomorfa com $Z(x, t)$ em $\Omega \setminus \{S_1 \cup S_2\}$, então é solução de L neste conjunto. Sendo assim pela continuidade de $u(x, t)$ em Ω , temos $Lu = 0$ em Ω .

No entanto quando $x > 0$ temos $Z(x, t_1) = Z(x, t_2) = x$, enquanto que $u(x, t_2) = u(x, t_1) + i2\pi$. Em particular $u(p_1) \neq u(p_2)$.

Neste exemplo o conjunto base da função analítica global definida por (2.3.3) é

$$\Omega \setminus \{S_1 \cup S_2\} \neq \Omega.$$

Temos

$$u(x, t) = U \circ Z(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \setminus \{S_1 \cup S_2\},$$

onde U é um ramo da raiz quadrada. Porém, como foi mostrado, não é possível obtermos uma fatoração do mesmo tipo no conjunto Ω inicial.

Agora dados um conjunto Ω e uma função $Z(x, t)$ segundo as condições descritas no início da Seção, vamos determinar o conjunto base de uma função analítica global dada por (2.3.3). O conjunto base neste caso não depende da solução u , depende apenas de Ω e de φ .

Seja $x_0 \in \mathbb{R}$, se $\{(x_0, t) : t \in \mathbb{R}\} \cap \Omega$ é não vazio, então a função $t \rightarrow \varphi(x_0, t)$ não é constante, e assume valores de máximo e mínimo locais em pontos isolados de Ω .

Considere o conjunto

$$C_{x_0} = \{(x_0, t') \in \Omega : t' \text{ é extremo local de } t \rightarrow \varphi(x_0, t)\}.$$

Suponha que $(x_0, t') \in C_{x_0}$, mas existe $p_0 = (x_0, t_0) \in \Omega \setminus C_{x_0}$ tal que $Z(p_0) = Z(x_0, t')$. Como p_0 não é extremo local existe um elemento de função na coleção (2.3.3), cujo ponto $z_0 = Z(p_0)$ pertence ao seu domínio. Logo, z_0 está no conjunto base de \mathcal{C} .

Agora defina o conjunto

$$C'_{x_0} = \{(x_0, t') \in C_{x_0} : \forall (x_0, t'') \in \Omega, \varphi(x_0, t'') = \varphi(x_0, t') \Rightarrow (x_0, t'') \in C_{x_0}\}.$$

Então seja

$$\Omega_Z \doteq \Omega \setminus \left\{ \bigcup_{x_0 \in \mathbb{R}} C'_{x_0} \right\}, \quad (2.3.4)$$

desta forma a função analítica global dada por (2.3.3) está definida em $Z(\Omega_Z)$ como função de múltiplos valores.

Observação 2.3.8. *O conjunto $Z(\Omega_Z)$ é aberto. De fato, seja $p_0 = (x_0, t_0) \in \Omega_Z$, no caso em que t_0 não é ponto extremo de $t \rightarrow \varphi(x_0, t)$, o ponto $Z(p_0)$ é interior de $Z(\Omega_Z)$.*

Caso contrário, se p_0 é ponto extremo de $t \rightarrow \varphi(x_0, t)$, então existe $q \in \Omega_Z$ tal que $Z(q) = Z(p)$ e q não é extremo. Então também neste caso, $Z(p)$ é ponto interior de $Z(\Omega_Z)$.

Como consequência, $Z(\Omega)$ é aberto quando $\Omega = \Omega_Z$. Mas não vale a recíproca, no Exemplo 2.3.7 temos $Z(\Omega)$ aberto e $\Omega \neq \Omega_Z$.

Sabemos que o conjunto Ω_Z é o conjunto base para as funções analíticas globais obtidas pela coleção \mathcal{C} , dada em (2.3.3). Para conjuntos simplesmente conexos o Teorema de Monodromia (veja Teorema 1.2.5) é uma ferramenta, que nos permite identificar se uma função de múltiplos valores é uma função no sentido usual.

Dada uma solução contínua de $Lu = 0$, através da teoria desenvolvida até esse momento temos uma função analítica global \mathbf{U} tal que localmente escrevemos

$$u = U \circ Z, \quad (U, z) \in \mathbf{U}.$$

Precisamos mostrar a existência de uma função U em $Z(\Omega)$ que torne válida a igualdade acima em Ω_Z . Neste contexto, a demonstração de nosso resultado mais expressivo será uma aplicação do Teorema de Monodromia a teoria que temos desenvolvido. Podemos enunciá-lo como segue.

Teorema 2.3.9. *Seja $Z(x, t) = x + i\varphi(x, t)$, onde $\varphi(x, t)$ é uma função analítica real e seja L o campo vetorial (2.0.2). Suponha que $\Omega = \Omega_z$, onde Ω_z está definido em (2.3.4), suponha também que $Z(\Omega)$ é simplesmente conexo. Dada $u(x, t)$ uma solução contínua de $Lu = 0$ em Ω , consideramos a função analítica global \mathbf{U} que localmente satisfaz $u(x, t) = \mathbf{U} \circ Z(x, t)$.*

Ainda, assumamos que cada germe (U, z) pertencente a \mathbf{U} pode ser continuado ao longo de toda curva $\gamma : [a, b] \rightarrow Z(\Omega)$, com $\gamma(a) = z$.

Então sob essas hipóteses, se $Z(p_1) = Z(p_2)$ para $p_1, p_2 \in \Omega$, então $u(p_1) = u(p_2)$. Consequentemente, temos $u(x, t) = \mathbf{U} \circ Z(x, t)$ em Ω .

Demonstração. Seja

$$z = Z(p_1) = Z(p_2) \in Z(\Omega),$$

vamos considerar os germes (U_1, z) e (U_2, z) pertencentes a função analítica global \mathbf{U} , que são determinados por elementos de funções (U_1, G_1) e (U_2, G_2) , satisfazendo:

$$u(x, t) = U_i \circ Z(x, t), \quad (x, t) \in V_i,$$

onde V_i são abertos em Ω , $i = 1, 2$.

Então tomamos uma cadeia de continuações analíticas diretas entre os elementos de função (U_1, G_1) e (U_2, G_2) . Segundo a Observação 1.2.4, uma cadeia de continuações analíticas diretas gera uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow Z(\Omega)$, que é fechada em z . O levantamento da curva γ para a superfície de Riemann $\mathfrak{S}(\mathbf{U})$, com germe inicial (U_1, z) , tem (U_2, z) como germe final.

Como estamos supondo que $Z(\Omega)$ é simplesmente conexo, a curva fechada γ é homotópica ao ponto z em $Z(\Omega)$. Olhamos o ponto z como uma curva em $Z(\Omega)$. Então o levantamento de z para $\mathfrak{S}(\mathbf{U})$ possui germes inicial e final iguais, (U_1, z) . Assim, segue do Teorema de Monodromia (veja Teorema 1.2.5) que as continuações ao longo das curvas γ e z com início em (U_1, z) tem mesmo germe final. O que implica na igualdade $(U_1, z) = (U_2, z)$, e então segue que

$$u(p_1) = \mathbf{U}(z) = \mathbf{U}(z) = u(p_2).$$

Assim temos a constância nas fibras de Z sobre Ω . Portanto, a função analítica global \mathbf{U} na verdade é uma função no sentido usual. \square

A seguir apresentaremos um exemplo em que o conjunto $Z(\Omega_z)$ não é simplesmente conexo, e existe uma solução contínua de $Lu = 0$ que não é constante nas fibras de Z sobre Ω_z . O que mostra que não vale a conclusão do Teorema 2.3.9 quando não temos a hipótese $Z(\Omega_z)$ simplesmente conexo.

Exemplo 2.3.10. Seja L o campo vetorial 2.0.2, com integral primeira $Z(x, t) = x + i\varphi(t)$, onde

$$\varphi(t) = (t - t_1)^2(t - t_2)(t - t_3)^2,$$

e $t_1 < t_2 < t_3$. Considere Ω o conjunto segundo a Figura 2.4.

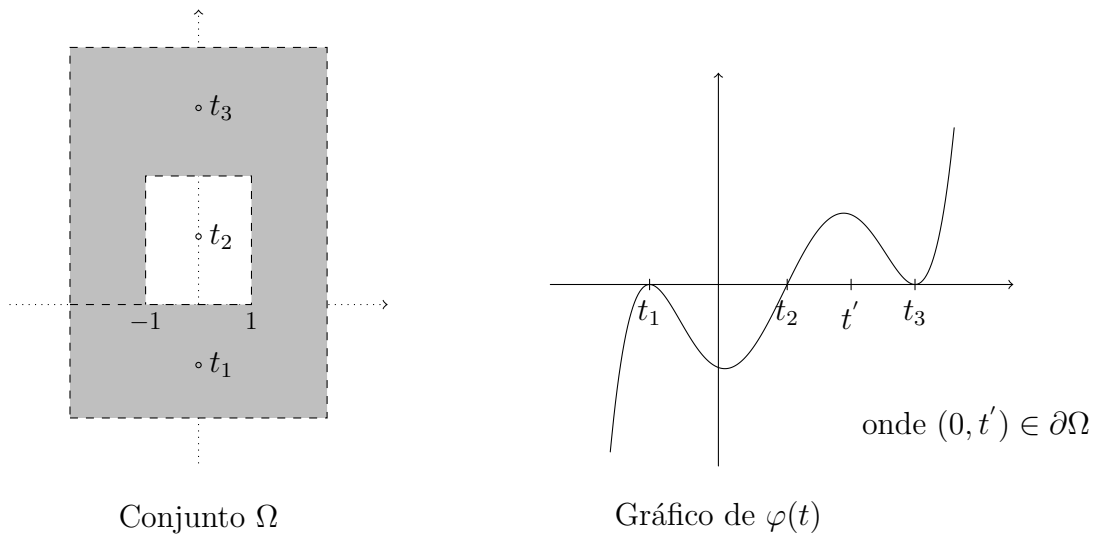
Associada a qualquer solução contínua de $Lu = 0$ temos uma coleção \mathcal{C} , que é definida em (2.3.3). A função $t \rightarrow \varphi(t)$ possui ponto de máximo local em t_1 e mínimo local em t_3 . Em t_2 a função $\varphi(t)$ é localmente bijeção, temos

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = \varphi(t_3) = 0.$$

Além disso, se $\varphi(t) = 0$ então $t = t_1, t = t_2$ ou $t = t_3$. Observe pela definição de Ω , que $(x, t_2) \notin \Omega$ quando $-1 < x < 1$. Então nenhum domínio da coleção \mathcal{C} intercepta $\{(x, 0) : -1 < x < 1\}$.

A imagem de Ω por Z é um retângulo, logo $\text{int}\{Z(\Omega)\}$ é simplesmente conexo. Mas o conjunto $Z(\Omega_Z)$ não é simplesmente conexo (veja figura 2.5), onde Ω_Z está definido em (2.3.4).

Figura 2.4:

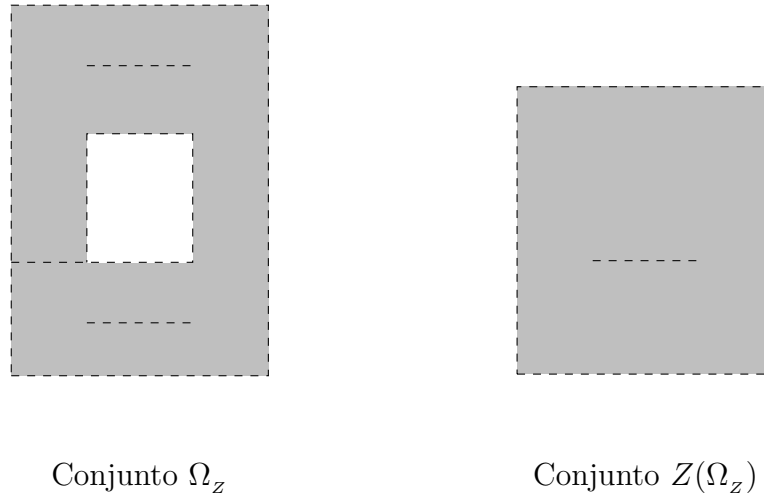


A seguir definiremos uma função contínua que é solução de $Lu = 0$ em Ω , e tal que não existe uma função U que torne válida a igualdade

$$u(x, t) = U \circ Z(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_Z.$$

Note que para todo retângulo $R \subset \Omega$, o conjunto $\text{int}\{Z(R)\}$ não contém um segmento passando pela origem. Assim existem ramos da raiz quadrada definidos em $\text{int}\{Z(R)\}$. Os pares $(f_R(z), \text{int}\{Z(R)\})$, onde $f_R(z)$ é um ramo da

Figura 2.5:



raiz quadrada são elementos de função em $Z(\Omega_z)$. Assim tomamos uma coleção

$$\mathcal{C}^* = \{(f_R(z), \text{int}\{Z(R)\})\}, \text{ onde } R \subset \Omega \text{ retângulo, e } (*) \text{ é válido}$$

(*) se $R_1 \cap R_2$ é não vazio então $f_1(z) = f_2(z)$ em $\text{int}\{Z(R_1)\} \cap \text{int}\{Z(R_2)\}$.

Então para $(f_R(z), \text{int}\{Z(R)\}) \in \mathcal{C}^*$ definimos

$$u(x, t) \doteq f_R(Z(x, t)), \quad (x, t) \in R,$$

a função $u(x, t)$ é bem definida e contínua em Ω_z . Pelo limite a estendemos continuamente para Ω , como foi feito no Exemplo 2.3.7.

Tal função $u(x, t)$ satisfaz $Lu = 0$ em Ω . Mas a função analítica global gerada pela raiz quadrada não é uma função a valores singulares no conjunto $Z(\Omega_z)$.

Observação 2.3.11. *Entre as hipótese do Teorema 2.3.9 temos:*

Cada germe (U, z) pertencente a função analítica global U pode ser continuado ao longo de toda curva $\gamma : [a, b] \rightarrow Z(\Omega)$, com $\gamma(a) = z$.

Precisamos desta condição para usarmos o Teorema de Monodromia. Na seção 2.4 veja um exemplo onde tal condição não ocorre.

2.4 Exemplo de Função Analítica Global com Ponto Singular em $Z(\Omega_Z)$

Apresentaremos aqui um exemplo de função analítica global que não é contínua ao longo de todas as curvas contidas em seu conjunto base.

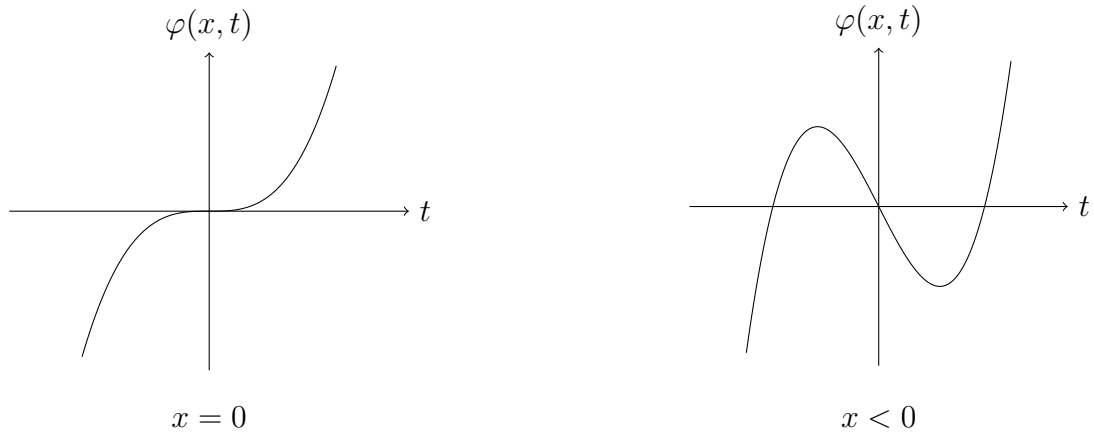
Exemplo 2.4.1. O conjunto Ω será o conjunto aberto limitado à esquerda pela curva $x = -3t^2$. Considere a função $Z(x, t) = x + i\varphi(x, t)$, onde $\varphi(x, t) = t(x + t^2)$. Então observe que:

Quando $x \geq 0$, a função $t \mapsto \varphi(x, t)$ é uma bijeção;

Quando $x < 0$, o polinômio $t(x + t^2)$ possui três raízes reais, $0, -\sqrt{-x}$ e $\sqrt{-x}$.

Na figura 2.6 temos os gráficos da função $t \mapsto \varphi(x, t)$, considerando os dois casos.

Figura 2.6:



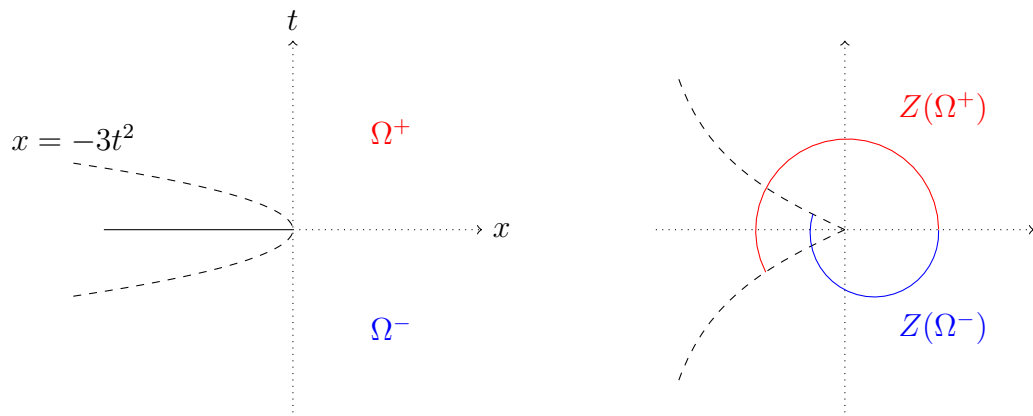
Assim, $Z(x, t)$ é localmente bijeção em Ω . Pois, para $x < 0$ temos $\varphi_t(x, t) = 0$ se, e somente se, $x = -3t^2$.

Se consideramos $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$, onde $\Omega^+ = \Omega \cap \{t \geq 0\}$ e $\Omega^- = \Omega \cap \{t \leq 0\}$. As imagens de Ω^+ e Ω^- por Z se transpassam, de forma que $Z(\Omega)$ é o plano complexo furado, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Seja L o campo vetorial (2.0.2). Para todo retângulo $R \subset \Omega$, o conjunto $Z(R)$ não contém um segmento passando pela origem. Seja $R_0 \subset \Omega$ retângulo aberto, definimos

$$u(x, t) = U_0(Z(x, t)), \quad (x, t) \in R_0$$

Figura 2.7:



onde U_0 é um ramo da raiz quadrada definido em R_0 . Fixado o elemento de função $(U_0, Z(R_0))$, podemos cobrir Ω por retângulos abertos, e escolher ramos do logaritmo na imagem por Z de cada retângulo satisfazendo:

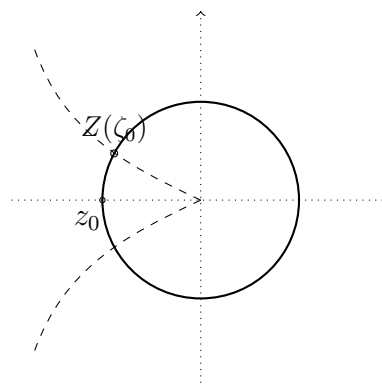
- Se $R_1 \cap R_2$ é não vazio então $U_1(z) = U_2(z)$ na intersecção $Z(R_1) \cap Z(R_2)$;
- Todo par $(U_R, Z(R))$ é continuação analítica de $(U_0, Z(R_0))$.

Desta forma, a função

$$u(x, t) = U_R \circ Z(x, t), \quad (x, t) \in R,$$

é bem definida em Ω e satisfaz $Lu = 0$. Os elementos de função $(U_R, Z(R))$ formam uma função analítica global U em $Z(\Omega)$.

Figura 2.8:



Agora seja $\zeta_0 = (x, t)$ com $t < 0$, um ponto na fronteira de Ω , e seja c o círculo de centro 0 e raio $|Z(\zeta_0)|$. Então considere um elemento de função $(U_R, Z(R))$,

com $z_0 = (-|Z(\zeta_0)|, 0) \in Z(R)$ e $R \subset \Omega^-$. Assim o elemento (U_R, R) não possui continuação analítica de \mathbf{U} ao longo de c , pois a continuação cessa de ser definida em $Z(\zeta_0)$.

Neste exemplo embora os domínios dos elementos de função da coleção \mathcal{C} , definida em (2.3.3), cubram o conjunto $Z(\Omega)$, a função analítica global \mathbf{U} não é continuável ao longo de todas as curvas de $Z(\Omega)$.

2.5 Comportamento na Fronteira

Nesta seção Ω denotará um subconjunto aberto simplesmente conexo de \mathbb{R}^2 cuja fronteira é uma curva de Jordan analítica real. Considere novamente uma função $Z(x, t)$ definida em \mathbb{R}^2 da forma

$$Z(x, t) = x + i\varphi(x, t), \quad (2.5.1)$$

onde $\varphi(x, t)$ é uma função analítica real. Considere também o campo vetorial definido em Ω por:

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{\varphi_t(x, t)}{1 + i\varphi_x(x, t)} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.5.2)$$

Seja $u(x, t)$ uma função contínua em $\bar{\Omega}$ que satisfaz

$$u = U \circ Z, \text{ em } \Omega, \text{ onde } U \in C^0(Z(\Omega)) \cap \mathcal{H}(\text{int}\{Z(\Omega)\}), \quad (2.5.3)$$

onde $\mathcal{H}(X)$ representa o conjunto das funções holomorfas em X . A função $u(x, t)$ é solução homogênea de L em Ω , e segue diretamente de sua representação que $u(x, t)$ é constante nas fibras de Z sobre Ω , ou seja, $Z(p_1) = Z(p_2)$ implica que $u(p_1) = u(p_2)$ para $p_1, p_2 \in \Omega$.

Para uma função $u(x, t)$ como acima, nós analizaremos sob quais condições a constância nas fibras de Z se dá no fecho de Ω . Então para determinar em quais situações $p_1, p_2 \in \partial\Omega$ com $Z(p_1) = Z(p_2)$, implica que $u(p_1) = u(p_2)$, nós vamos determinar quando é possível encontrar sequências (p_j) e (q_j) em Ω , onde $p_j \rightarrow p_1, q_j \rightarrow p_2$ e $Z(p_j) = Z(q_j), j = 1, 2, \dots$. Nessas condições

$$u(p_j) = U(Z(p_j)) = U(Z(q_j)) = u(q_j),$$

então fazendo $j \rightarrow \infty$ obtemos $u(p_1) = u(p_2)$.

Sejam $p_1, p_2 \in \partial\Omega$ satisfazendo $Z(p_1) = Z(p_2)$. Então as seguintes afirmações são equivalentes

- (I) Existem sequências $(p_j), (q_j) \subset \Omega$, onde $p_j \rightarrow p_1, q_j \rightarrow p_2$ e $Z(p_j) = Z(q_j), j = 1, 2, \dots$

(II) Para quaisquer duas vizinhanças V_1 de p_1 e V_2 de p_2 , o conjunto $Z(V_1 \cap \Omega) \cap Z(V_2 \cap \Omega)$ é não vazio.

Vamos mostrar que (I) implica (II). Sejam V_1 vizinhança de p_1 e V_2 vizinhança de p_2 , então existe j_0 tal que

$$p_j \in \Omega \cap V_1, \quad q_j \in \Omega \cap V_2, \quad \text{para } j > j_0.$$

Como $Z(p_j) = Z(q_j)$ temos

$$Z(p_j) \in Z(V_1 \cap \Omega) \cap Z(V_2 \cap \Omega), \quad j > j_0.$$

Logo a intersecção é não vazia.

Agora, (II) implica (I). Sejam $B_{1/j}(p_1)$ a bola de centro p_1 e raio $\frac{1}{j}$, e $B_{1/j}(p_2)$ a bola de centro p_2 e raio $\frac{1}{j}$. Então existe $z \in Z(B_{1/j}(p_1) \cap \Omega) \cap Z(B_{1/j}(p_2) \cap \Omega)$. Assim

$$z = Z(p_j), \quad \text{onde } p_j \in B_{1/j}(p_1) \cap \Omega,$$

$$z = Z(q_j), \quad \text{onde } q_j \in B_{1/j}(p_2) \cap \Omega.$$

Fazendo $j = 1, 2, \dots$ obtemos sequências (p_j) e (q_j) em Ω , onde $p_j \rightarrow p_1$, $q_j \rightarrow p_2$ quando $j \rightarrow \infty$, e $Z(p_j) = Z(q_j)$. Assim a equivalência está provada.

Antes de começarmos os casos de fronteira, temos no lema abaixo o caso em que um ponto interior e outro na fronteira possuem mesma imagem por Z .

Lema 2.5.1. *Sejam $Z(x, t)$ uma função como em (2.5.1), e $u(x, t)$ uma função contínua em $\bar{\Omega}$ tal que $u(x, t) = U \circ Z(x, t)$, $(x, t) \in \Omega$, onde U é uma função contínua em $Z(\Omega)$, e holomorfa no interior. Neste caso, se os pontos $p_1 \in \Omega$ e $p_2 \in \partial\Omega$ satisfazem $Z(p_1) = Z(p_2)$, então $u(p_1) = u(p_2)$.*

Demonstração. Seja uma sequência $(p_j) \subset \Omega$ tal que $p_j \rightarrow p_2$. Logo, $u(p_j) \rightarrow u(p_2)$. Por outro lado, temos $Z(p_j) \rightarrow Z(p_2) = Z(p_1)$. Então, usando a continuidade de U em $Z(\Omega)$ temos

$$u(p_j) = U \circ Z(p_j) \rightarrow U \circ Z(p_1) = u(p_1).$$

Assim pela unicidade do limite, $u(p_1) = u(p_2)$. □

Assumiremos que a fronteira de Ω é parametrizada pela curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\gamma(s) = (x(s), t(s))$, onde γ é uma curva de Jordan analítica real. Considere os pontos $p_1 = \gamma(s_1)$, para algum $s_1 \in I$, e $p_2 = \gamma(s_2)$, para algum $s_2 \in I$, assim consideramos as condições:

$$\left. \begin{aligned} \nabla\varphi(p_1)\cdot\gamma'(s_1) &\neq 0 \\ \nabla\varphi(p_2)\cdot\gamma'(s_2) &\neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{E1})$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla\varphi(p_1)\cdot\gamma'(s_1) &= 0 \\ \nabla\varphi(p_2)\cdot\gamma'(s_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{E2})$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla\varphi(p_1)\cdot\gamma'(s_1) &\neq 0 \\ \nabla\varphi(p_2)\cdot\gamma'(s_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{E3})$$

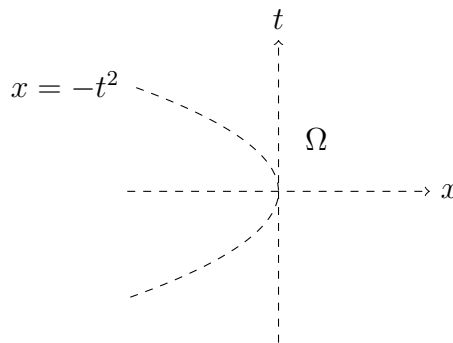
Através delas obteremos uma caracterização de quando $Z(p_1) = Z(p_2)$ implica que $u(p_1) = u(p_2)$, onde $u(x, t) \in C^0(\overline{\Omega})$ se escreve como (2.5.3).

Primeiro vamos supor que os vetores $\gamma'(s_1)$ e $\gamma'(s_2)$ são não verticais então apresentaremos contraexemplos para (E1) e (E2), em seguida veremos através de um lema que quando (E3) é satisfeita temos $u(p_1) = u(p_2)$.

Contraexemplo 2.5.2. Seja Ω o conjunto aberto limitado à esquerda pela curva $x = -t^2$ (veja Figura 2.9). Considere a função

$$Z(x, t) = x + i\varphi(x, t), \quad \varphi(x, t) = t(x + t^2).$$

Figura 2.9:



Observe que $Z(-t^2, t) = -t^2 + i0$, então a curva $x = -t^2$ é levada por Z sobre o semieixo real negativo. E temos $Z(\Omega) = \mathbb{C} \setminus \{x \leq 0\}$. Logo a função

$$u(x, t) \doteq \sqrt{Z(x, t)},$$

onde \sqrt{z} é o ramo principal da raiz quadrada, é bem definida em $Z(\Omega)$ e satisfaz $Lu = 0$ em Ω , onde L é o campo vetorial 2.0.2.

Além disso podemos estender $u(x, t)$ continuamente para $\overline{\Omega}$ pelo limite.

O vetor tangente à fronteira de Ω tem a forma $\vec{v} = (-2t, 1)$. Tomamos os pontos $p_1 = (-t^2, t)$ e $p_2 = (-t^2, -t)$, onde $t \neq 0$, então \vec{v} é não vertical em p_1 e p_2 . Temos $Z(-t^2, t) = Z(-t^2, -t) = -t^2$, porém $u(p_1) \neq u(p_2)$.

Como $\varphi(-t^2, t) = 0$ para todo t , a condição (E2) é satisfeita nos pontos da fronteira de Ω .

Contraexemplo 2.5.3. Seja Ω como no Exemplo 2.5.2 (veja Figura 2.9). Considere a função

$$Z(x, t) = x + i\varphi(x, t), \quad \varphi(x, t) = t^3 + xt + x.$$

Seja $\gamma(s) = (-s^2, s)$ uma parametrização da fronteira de Ω . Aplicando Z sobre a curva $\gamma(s)$ temos

$$Z(\gamma(s)) = Z(-s^2, s) = -s^2 - is^2.$$

Portanto a curva $\gamma(s)$ é levada por $Z(x, t)$ sobre a semirreta $\{(x, x) : x \leq 0\}$. E temos $Z(\Omega) = \mathbb{C} \setminus \{(x, x) : x \leq 0\}$.

Defina a função $u(x, t) \doteq R \circ Z(x, t)$, $(x, t) \in \Omega$, onde R é o ramo da raiz quadrada definido em $\mathbb{C} \setminus \{(x, x) : x \leq 0\}$. A função $u(x, t)$ assim definida pode ser estendida para $\bar{\Omega}$ pelo limite.

Calculando o produto interno entre o vetor gradiente de $\varphi(x, t)$ aplicado ao ponto $\gamma(s)$ e o vetor $\gamma'(s)$ temos

$$\nabla\varphi(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) = (s + 1, 2s^2) \cdot (-2s, 1) = -2s.$$

Logo, $\nabla\varphi(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) \neq 0$ se $s \neq 0$. Tomamos os pontos $p_1 = \gamma(1) = (-1, 1)$ e $p_2 = \gamma(-1) = (-1, -1)$ então temos a condição (E1) satisfeita, os vetores $\gamma'(s_1)$ e $\gamma'(s_2)$ são não verticais, e $Z(p_1) = Z(p_2)$. Mas $u(p_1) \neq u(p_2)$.

Abaixo temos um lema técnico, que será usado na demonstração do resultado que o segue.

Lema 2.5.4. *Sejam as funções $y_1, y_2 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por $y_1(x) = ax + r(x)$, onde $a \neq 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{|x|} = 0$, e $y_2(x) = a_k x^k + r_k(x)$, onde $a_k \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$ e $k \geq 2$, e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r_k(x)}{|x|^k} = 0$. Então existe $0 < \delta < \epsilon$ tal que ocorre uma das seguintes situações:*

- $y_1(x) < y_2(x)$ em $(-\delta, 0)$ e $y_2(x) < y_1(x)$ em $(0, \delta)$;
- $y_2(x) < y_1(x)$ em $(-\delta, 0)$ e $y_1(x) > y_2(x)$ em $(0, \delta)$.

Demonstração. Demonstraremos o resultado assumindo que $a_k > 0$ e $a > 0$. Os outros casos devem ser analisados separadamente, não os faremos aqui pois as demonstrações são análogas. Seja $0 < \rho < \min(a, a_k)$ então existe $\delta' > 0$ tal que

$$-\rho|x| < r(x) < \rho|x|, \quad |x| < \delta',$$

$$-\rho|x|^k < r_k(x) < \rho|x|^k, \quad |x| < \delta'.$$

Seja $x \in (0, \delta')$ então

$$\begin{aligned} y_1(x) - y_2(x) &= ax + r(x) - a_k x^k - r_k(x) \geq ax - \rho|x| - a_k x^k - \rho|x|^k \\ &= (a - \rho)x - (a_k + \rho)x^k. \end{aligned}$$

Considere o polinômio $p(x) = cx - dx^k$, onde $c = a - \rho > 0$ e $d = a_k + \rho > 0$. Quando k é par temos $p(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$ ou $x = \sqrt[k-1]{c/d} > 0$. Quando k é ímpar temos $p(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$, $x = \sqrt[k-1]{c/d} > 0$, ou $x = -\sqrt[k-1]{c/d} < 0$.

Pelo estudo do sinal de $p(x)$, temos $p(x) > 0$ para $x \in (0, \sqrt[k-1]{c/d})$. Logo, se $\delta_1 = \min(\delta', \sqrt[k-1]{c/d})$ então $y_1(x) > y_2(x)$ para $x \in (0, \delta_1)$.

Agora seja $x \in (-\delta', 0)$, então

$$y_2(x) - y_1(x) = a_k x^k + r_k(x) - ax - r(x) \geq a_k x^k - \rho|x|^k - ax - \rho|x|.$$

Quando k é par temos

$$y_2(x) - y_1(x) \geq (a_k - \rho)x^k - (a - \rho)x,$$

seja $p(x) = ex^k - fx$, onde $e = a_k - \rho > 0$ e $f = a - \rho > 0$, então $p(x)$ tem como raízes 0 e $\sqrt[k-1]{e/f} > 0$. Então $p(x) > 0$ para $x \in (-\infty, 0)$. Portanto, $y_2(x) > y_1(x)$ para $x \in (-\delta', 0)$.

Quando k é ímpar temos

$$y_2(x) - y_1(x) \geq (a_k + \rho)x^k - (a - \rho)x,$$

seja $p(x) = ex^k - fx$, onde $e = a_k + \rho > 0$ e $f = a - \rho > 0$, então as raízes de $p(x)$ são 0 , $\sqrt[k-1]{e/f}$, $-\sqrt[k-1]{e/f}$. Então temos $p(x) > 0$ para $x \in (-\sqrt[k-1]{e/f}, 0)$. Portanto, $y_2(x) > y_1(x)$ para $x \in (-\sqrt[k-1]{e/f}, 0)$.

Escolhemos $\delta = \min(\delta_1, \sqrt[k-1]{e/f})$, assim segue que

$$y_1(x) < y_2(x), \quad x \in (-\delta, 0),$$

$$y_2(x) < y_1(x), \quad x \in (0, \delta).$$

□

Lema 2.5.5. *Sejam $Z(x, t)$ uma função como em (2.5.1), e $u(x, t)$ uma função contínua em $\bar{\Omega}$ tal que $u(x, t) = U \circ Z(x, t)$, $(x, t) \in \Omega$, onde U é uma função contínua em $Z(\Omega)$, e holomorfa no interior. Suponha que os vetores tangentes à fronteira de Ω nos pontos p_1 e p_2 , $\gamma'(s_1)$ e $\gamma'(s_2)$, são não verticais, e suponha que vale a condição*

$$\left. \begin{aligned} \nabla\varphi(p_1) \cdot \gamma'(s_1) &\neq 0 \\ \nabla\varphi(p_2) \cdot \gamma'(s_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{E3})$$

Então $Z(p_1) = Z(p_2)$ implica que $u(p_1) = u(p_2)$.

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor que $p_1 = (0, t_1)$, $p_2 = (0, t_2)$, e $Z(p_1) = Z(p_2) = 0$. Pela hipótese nos vetores tangentes escrevemos $\gamma'(s_j) = (x'(s_j), t'(s_j))$, com $x'(s_j) \neq 0$, $j = 1, 2$. Lembramos que a fronteira de Ω é parametrizada pela curva analítica real $\gamma(s) = (x(s), t(s))$.

Defina a curva

$$\sigma(s) \doteq Z \circ \gamma(s) = x(s) + i\varphi(\gamma(s)),$$

ou por identificação $\sigma(s) = (x(s), y(s))$, onde $y(s) = \varphi(\gamma(s))$. Derivando $y(s)$ obtemos

$$y'(s) = \varphi_x(\gamma(s))x'(s) + \varphi_t(\gamma(s))t'(s) = \nabla\varphi(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s).$$

Como $x'(s_1) \neq 0$, usando o Teorema da Função Inversa, obtemos a existência de uma inversa analítica real para $x(s)$ numa vizinhança de s_1 . Denotamos essa inversa por $s_1(x)$, que é uma função definida numa vizinhança de 0 tal que $s_1(0) = s_1$. Assim a curva $\sigma(s)$, para s próximo a s_1 , pode ser parametrizada como o gráfico de função

$$G_1 = \{(x, y_1(x)) : |x| < \delta_1\},$$

onde $y_1(x) = y \circ s_1(x)$, e segue de (E3) que

$$y_1'(0) = (y \circ s_1)'(0) = y'(s_1(0))s_1'(0) = [\nabla\varphi(p_1) \cdot \gamma'(s_1)] s_1'(0) \neq 0.$$

Então usando a Fórmula de Taylor de ordem 1, para x numa vizinhança de 0 escrevemos

$$y_1(x) = ax + r(x),$$

onde $a = y_1'(0)$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{|x|} = 0$. Logo $y_1(x)$ é uma aproximação de ordem 1 de uma função afim.

Como $x'(s_2) \neq 0$ a função $x(s)$ possui uma inversa analítica real numa vizinhança de s_2 . Seja $s_2(x)$ essa inversa, que é definida numa vizinhança de 0 e $s_2(0) = s_2$. Então $\sigma(s)$, para s próximo a s_2 , pode ser parametrizada como o gráfico de função

$$G_2 = \{(x, y_2(x)) : |x| < \delta_2\},$$

onde $y_2(x) = y \circ s_2(x)$ e

$$y_2'(0) = (y \circ s_2)'(0) = y'(s_2)s_2'(0) = [\nabla\varphi(p_2) \cdot \gamma'(s_2)] s_2'(0) = 0.$$

A função $y_2(x)$ se anula de ordem finita na origem. Com efeito, caso contrário escrevendo $y_2(x)$ como série de Taylor em 0, teremos $y_2(x) = 0$ para x numa vizinhança de 0. Logo $y(s) = 0$ para s numa vizinhança de s_2 , e então pela analiticidade $y(s) \equiv 0$. O que contradiz $y'(s_1) \neq 0$. Seja k o menor número natural tal que $y_2^{(k)}(0) \neq 0$. Usando a Fórmula de Taylor, para x numa vizinhança de 0, escrevemos

$$y_2(x) = a_k x^k + r_k(x), \quad a_k \neq 0, \quad k \geq 2,$$

onde $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r_k(x)}{|x|^k} = 0$.

Dado $\epsilon > 0$ sejam $Q_1 = (-\epsilon, \epsilon) \times (t_1 - \epsilon, t_1 + \epsilon)$ e $Q_2 = (-\epsilon, \epsilon) \times (t_2 - \epsilon, t_2 + \epsilon)$.

Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno a curva $\gamma(s)$ divide Q_j em duas componentes. Como o vetor $\gamma'(s_j)$ é não vertical uma das componentes fica acima de $\gamma(s)$ a denotaremos por Q_j^+ , e a outra componente fica abaixo de $\gamma(s)$ a denotaremos por Q_j^- , $j = 1, 2$. Ainda, diminuindo ϵ se necessário, podemos assumir que $t_j - \epsilon < t(s) < t_j + \epsilon$, se $x(s) \in (-\epsilon, \epsilon)$, $j = 1, 2$.

Temos que $Q_1 \cap \Omega$ é igual a Q_1^+ ou Q_1^- , também $Q_2 \cap \Omega$ é igual a Q_2^+ ou Q_2^- . Para simplificar as notações assumiremos que

$$Q_1^- = Q_1 \cap \Omega, \quad Q_2^+ = Q_2 \cap \Omega. \tag{2.5.4}$$

Assim $u(x, t)$ está definida nos conjuntos Q_1^- e Q_2^+ .

Seja $x \in (-\epsilon, \epsilon)$ então existe s tal que $x = x(s)$ e $\gamma(s) = (x(s), t(s)) \in Q_1$. Então definimos

$$m_1(x) = m_1(x(s)) \doteq \inf_{t_1 - \epsilon < y < t(s)} \varphi(x(s), y),$$

$$M_1(x) = M_1(x(s)) \doteq \sup_{t_1 - \epsilon < y < t(s)} \varphi(x(s), y).$$

Também existe s tal que $x = x(s)$ e $\gamma(s) = (x(s), t(s)) \in Q_2$. Então definimos

$$m_2(x) = m_2(x(s)) \doteq \inf_{t(s) < y < t_2 + \epsilon} \varphi(x(s), y),$$

$$M_2(x) = M_2(x(s)) \doteq \sup_{t(s) < y < t_2 + \epsilon} \varphi(x(s), y).$$

Suponha que $m_1(0) = M_1(0)$, assim $\varphi(0, t) = 0$ em $[t_1 - \epsilon, t_1]$. Então como a função $t \rightarrow \varphi(0, t)$ é analítica, temos $\varphi(0, t) \equiv 0$. Em particular, $\varphi(0, t) \equiv 0$ em $[t_2, t_2 + \epsilon]$.

Sejam as sequências $p_j \rightarrow p_1$ e $q_j \rightarrow p_2$, onde $p_j = (0, t_j) \in Q_1^-$ e $q_j = (0, \tilde{t}_j) \in Q_2^+$. Então $Z(p_j) = Z(q_j) = 0$. Logo

$$u(p_j) = U(Z(p_j)) = U(Z(q_j)) = u(q_j),$$

fazendo $j \rightarrow \infty$ temos $u(p_1) = u(p_2)$. Analogamente quando $m_2(0) = M_2(0)$ temos $u(p_1) = u(p_2)$.

Podemos assumir que $m_1(0) < M_1(0)$ e $m_2(0) < M_2(0)$, e também que $\epsilon > 0$ é pequeno de forma que $m_1(x) < M_1(x)$ e $m_2(x) < M_2(x)$ para $x \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Os conjuntos $Z(Q_1^-)$ e $Z(Q_2^+)$ tem os seus interiores dados por

$$\{x + iy : -\epsilon < x < \epsilon, m_1(x) < y < M_1(x)\},$$

$$\{x + iy : -\epsilon < x < \epsilon, m_2(x) < y < M_2(x)\}.$$

Precisamos mostrar que $Z(Q_1^-) \cap Z(Q_2^+)$ é não vazio. Temos

$$\{x + iy : -\epsilon < x < \epsilon, m(x) < y < M(x)\} \subseteq Z(Q_1^-) \cap Z(Q_2^+),$$

onde $m(x) = \max(m_1(x), m_2(x))$ e $M(x) = \min(M_1(x), M_2(x))$. Então basta mostrarmos que existe $x_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$ tal que $m(x_0) < M(x_0)$.

Aplicando o Lema 2.5.4 para as função $y_1(x)$ e $y_2(x)$, obtemos que existe $0 < \delta < \epsilon$ tal que ocorre uma das seguintes situações:

$$(\star) \quad y_1(x) < y_2(x) \text{ em } (-\delta, 0) \text{ e } y_2(x) < y_1(x) \text{ em } (0, \delta);$$

$$(\star\star) \quad y_2(x) < y_1(x) \text{ em } (-\delta, 0) \text{ e } y_1(x) > y_2(x) \text{ em } (0, \delta).$$

Assumiremos que vale a condição (\star) . Quando $|x| < \epsilon$ temos $(x, y_1(x)) \in \overline{Z(Q_1^-)}$ e $(x, y_2(x)) \in \overline{Z(Q_2^+)}$, então

$$m_1(x) \leq y_1(x) \leq M_1(x), \quad m_2(x) \leq y_2(x) \leq M_2(x),$$

segue que

$$m_1(x) \leq y_1(x) < y_2(x) \leq M_2(x), \quad x \in (-\delta, 0),$$

$$m_2(x) \leq y_2(x) < y_1(x) \leq M_1(x), \quad x \in (0, \delta).$$

Portanto

$$m_1(x) < M_2(x), x \in (-\delta, 0) \text{ e } m_2(x) < M_1(x), x \in (0, \delta). \quad (2.5.5)$$

Suponha que existe $0 < x_0 < \delta$ tal que $m(x_0) = m_2(x_0)$. Então $m(x_0) < M_2(x_0)$, e por (2.5.5) temos $m(x_0) < M_1(x_0)$. Logo, $m(x_0) < M(x_0)$.

Agora, suponhamos que $m(x) = m_1(x)$ para todo $0 < x < \delta$, nesse caso se existir $0 < x_0 < \delta$ tal que $M(x_0) = M_1(x_0)$ ou $m(x_0) < M_2(x_0)$, teremos $m(x_0) < M(x_0)$.

Por outro lado, se $M(x) = M_2(x)$ e $m(x) \geq M_2(x)$ para todo $0 < x < \delta$, então $m_1(x) = m(x) \geq M_2(x)$ para $0 < x < \delta$. De onde temos $m_1(0) \geq M_2(0)$. E segue de (2.5.5) que $m_1(0) \leq M_2(0)$, logo $m_1(0) = M_2(0)$. Então

$$m_2(0) < M_2(0) = m_1(0),$$

logo existe um intervalo J em 0 tal que $m(x) = m_1(x)$ para $x \in J$. Seja $x_0 < 0$ em J então $m(x_0) < M_1(x_0)$, e por (2.5.5) temos $m(x_0) < M_2(x_0)$. Logo, $m(x_0) < M(x_0)$.

Assim concluímos que dado $\epsilon > 0$ existe $x_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$ tal que $m(x_0) < M(x_0)$. Quando as funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ satisfazem a condição $(\star\star)$, então através de um procedimento análogo chegaremos a mesma conclusão.

Tomamos uma sequência de números reais positivos $\epsilon_j \rightarrow 0$. Então sejam

$$Q_{1j} = (-\epsilon_j, \epsilon_j) \times (t_1 - \epsilon_j, t_1 + \epsilon_j), \quad Q_{2j} = (-\epsilon_j, \epsilon_j) \times (t_2 - \epsilon_j, t_2 + \epsilon_j),$$

temos $Z(Q_{1j} \cap \Omega) \cap Z(Q_{2j} \cap \Omega)$ não vazio. Então, para cada j existem $p_j \in Q_{1j} \cap \Omega$ e $q_j \in Q_{2j} \cap \Omega$, onde $Z(p_j) = Z(q_j)$. Logo $u(p_j) = u(q_j)$. Quando $j \rightarrow \infty$ temos $p_j \rightarrow p_1$ e $q_j \rightarrow p_2$, então pela continuidade de $u(x, t)$ temos $u(p_1) = u(p_2)$. □

A seguir assumimos que os vetores $\gamma'(s_1)$ e $\gamma'(s_2)$ são verticais, então também analisaremos em quais situações temos $Z(p_1) = Z(p_2)$ implica $u(p_1) = u(p_2)$, quando $u(x, t) \in C^0(\bar{\Omega})$ é uma função que satisfaz (2.5.3).

Lema 2.5.6. *Sejam $Z(x, t)$ uma função como em (2.5.1), e $u(x, t)$ uma função contínua em $\bar{\Omega}$ tal que $u(x, t) = U \circ Z(x, t)$, $(x, t) \in \Omega$, onde U é uma função contínua em $Z(\Omega)$, e holomorfa no interior. Suponha que os vetores tangentes à fronteira de Ω nos pontos p_1 e p_2 , $\gamma'(s_1)$ e $\gamma'(s_2)$, são verticais com mesmo sentido, e suponha que vale a condição*

$$\left. \begin{aligned} \nabla\varphi(p_1) \cdot \gamma'(s_1) &\neq 0 \\ \nabla\varphi(p_2) \cdot \gamma'(s_2) &\neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (E1)$$

Então $Z(p_1) = Z(p_2)$ implica que $u(p_1) = u(p_2)$.

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor que $p_1 = (0, t_1)$, $p_2 = (0, t_2)$ e $Z(p_1) = Z(p_2) = 0$.

Temos $\gamma'(s_i) = (0, t'(s_i))$, onde $t'(s_i) \neq 0$, $i = 1, 2$. Então segue de (E1) que $\varphi_t(p_1) \neq 0$ e $\varphi_t(p_2) \neq 0$.

Como o Ω é conexo e $\gamma(s)$ parametriza sua fronteira, a curva $\gamma(s)$ não possui alto intersecção. Assim, o fato de $\gamma'(s_1)$ e $\gamma'(s_2)$ possuírem mesmo sentido implica que $\gamma(s)$ limita Ω em p_1 e p_2 pelo mesmo lado. Assuma que $\gamma(s)$ limita Ω em p_1 e p_2 pelo lado esquerdo. Usando o Teorema da Função Implícita, obtemos funções suaves $t_1(x)$, $t_2(x)$ e um número $\epsilon > 0$ de forma que sobre os gráficos suaves

$$C_1 = \{(x, t_1(x)) : 0 < x < \epsilon\}, \quad C_2 = \{(x, t_2(x)) : 0 < x < \epsilon\} \subset \Omega,$$

temos $\varphi(x, t)$ identicamente igual à 0.

Dessa forma podemos tomar sequências $(x_j, t_1(x_j)) \in C_1$ e $(x_j, t_2(x_j)) \in C_2$, com $(x_j, t_1(x_j)) \rightarrow p_1$ e $(x_j, t_2(x_j)) \rightarrow p_2$. Assim $Z(x_j, t_1(x_j)) = Z(x_j, t_2(x_j)) = x_j$. Logo, $u(x_j, t_1(x_j)) = u(x_j, t_2(x_j))$. Então pela continuidade de $u(x, t)$ em $\bar{\Omega}$ concluímos que $u(p_1) = u(p_2)$. \square

Assumindo todas as hipóteses do Lema 2.5.6, exceto $\gamma'(s_1)$ e $\gamma'(s_2)$ com mesmo sentido, podemos construir um contraexemplo para o lema. De fato, suponha que $\gamma'(s_1)$ e $\gamma'(s_2)$ possuem sentidos opostos, então considere um conjunto Ω com pontos $p_1 = (0, t_1)$ e $p_2 = (0, t_2)$ tal que existem vizinhanças V_1 de p_1 e V_2 de p_2 que satisfazem

$$V_1 \cap \Omega \subset \{(x, t), x < 0\}, \quad V_2 \cap \Omega \subset \{(x, t), x > 0\}.$$

Logo, para qualquer aplicação Z definida em (2.3.1), a intersecção $Z(V_1 \cap \Omega) \cap Z(V_2 \cap \Omega)$ é vazia. Dessa forma, restringindo o conjunto Ω se necessário, é possível escolhermos $Z(x, t)$ de forma que $Z(p_1) = Z(p_2) = 0$, e existe uma curva suave $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ passando pela origem, com $r(s) \rightarrow \infty$ quando $s \rightarrow \infty$, tal que $Z(\Omega) \subset \mathbb{C} \setminus \{r(s), s \in \mathbb{R}\}$. Numa vizinhança de 0 a curva $r(s)$ pode ser escolhida como sendo a curva que limita $Z(V_2 \cap \Omega)$, que é analítica real. Então a função

$$u(x, t) = U \circ Z(x, t),$$

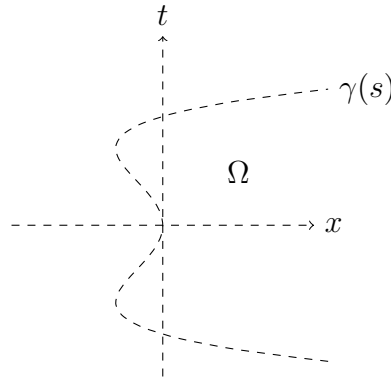
onde $U(z)$ é o ramo da raiz quadrada definido em $\mathbb{C} \setminus \{r(s), s \in \mathbb{R}\}$, é bem definida em Ω e $u(p_1) \neq u(p_2)$.

Abaixo apresentamos um contraexemplo para a condição (E2).

Contraexemplo 2.5.7. Considere o polinômio $x(s) = s^2(s + 1)(s - 1)$, então $x(s) = 0$ se, e somente se, $s = 0$, $s = -1$ ou $s = 1$. E, $x(s) \leq 0$ para $-1 \leq s \leq 1$.

Considere a curva $\gamma(s) = (x(s), s)$, e Ω o conjunto limitado pela esquerda por $\gamma(s)$ (veja Figura 2.10).

Figura 2.10:



Definimos a aplicação $Z(x, t) = x + i\varphi(x, t)$, onde $\varphi(x, t) = t(x - t^2(t + 1)(t - 1))$. Aplicando Z sobre $\gamma(s)$ obtemos

$$Z(\gamma(s)) = Z(x(s), s) = x(s) + is(x(s) - s^2(s + 1)(s - 1)) = x(s) + i0,$$

portanto a imagem de $\gamma(s)$ por Z está contida no eixo real.

Note que para $(x, t) \in \Omega$ temos

$$x - t^2(t + 1)(t - 1) = x - x(t) > 0,$$

pois a curva $\gamma(s)$ limita Ω pelo lado esquerdo. Logo

$$(x, t) \in \Omega, t > 0 \Rightarrow \varphi(x, t) = t(x - t^2(t + 1)(t - 1)) > 0;$$

$$(x, t) \in \Omega, t < 0 \Rightarrow \varphi(x, t) = t(x - t^2(t + 1)(t - 1)) < 0.$$

Como $\{(x, 0), x < 0\} \cap \Omega = \emptyset$ temos $Z(\Omega) \subset \mathbb{C} \setminus \{x \leq 0\}$. A função

$$u(x, t) = \sqrt{Z(x, t)},$$

onde \sqrt{z} é o ramo principal da raiz quadrada, é bem definida em Ω . Se L é o campo vetorial (2.5.2), então $u(x, t)$ é solução homogênea de L em Ω .

Seja $p_0 \in \partial\Omega$, sempre existe o limite

$$\lim_{p \rightarrow p_0} u(p) = \lim_{p \rightarrow p_0} \sqrt{Z(p)}, p \in \Omega,$$

assim podemos estender $u(x, t)$ continuamente para $\bar{\Omega}$. Por simplicidade também vamos nos referir a extensão por $u(x, t)$.

Devidando $x(s)$ obtemos $x'(s) = 4s^3 - 2s$. Logo, $x'(s) = 0$ se, e somente se, $s = 0$, $s = -\sqrt{1/2}$ ou $s = \sqrt{1/2}$. Nos pontos

$$p_1 = (x(-\sqrt{1/2}), -\sqrt{1/2}), \quad p_2 = (x(\sqrt{1/2}), \sqrt{1/2}),$$

o vetor tangente à fronteira é vertical. Temos

$$\nabla\varphi(p_1) \cdot \gamma'(-\sqrt{1/2}) = \nabla\varphi(p_2) \cdot \gamma'(\sqrt{1/2}) = 0,$$

ou seja, p_1 e p_2 satisfazem (E2). Porém $Z(p_1) = Z(p_2)$ e $u(p_1) \neq u(p_2)$.

Lema 2.5.8. *Sejam $Z(x, t)$ uma função como em (2.5.1), e $u(x, t)$ uma função contínua em $\bar{\Omega}$ tal que $u(x, t) = U \circ Z(x, t)$, $(x, t) \in \Omega$, onde U é uma função contínua em $Z(\Omega)$, e holomorfa no interior. Suponha que os vetores tangentes à fronteira de Ω nos pontos p_1 e p_2 , $\gamma'(s_1)$ e $\gamma'(s_2)$, são verticais com mesmo sentido, e suponha que vale a condição*

$$\left. \begin{array}{l} \nabla\varphi(p_1) \cdot \gamma'(s_1) \neq 0 \\ \nabla\varphi(p_2) \cdot \gamma'(s_2) = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{E3})$$

Então $Z(p_1) = Z(p_2)$ implica que $u(p_1) = u(p_2)$.

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor que $p_1 = (0, t_1)$, $p_2 = (0, t_2)$ e $Z(p_1) = Z(p_2) = 0$. Pela hipótese nos vetores tangentes escrevemos $\gamma'(s_j) = (0, t'(s_j))$, com $t'(s_j) \neq 0$, $j = 1, 2$.

Definimos a curva

$$\sigma(s) \doteq Z \circ \gamma(s) = x(s) + i\varphi(\gamma(s)),$$

por identificação temos $\sigma(s) = (x(s), y(s))$, onde $y(s) = \varphi(\gamma(s))$. Pela relação (E3) temos $y'(s_1) = \nabla\varphi(p_1) \cdot \gamma'(s_1) \neq 0$, portanto a curva $\sigma(s)$, para s próximo de s_1 , pode ser parametrizada pelo gráfico

$$G_1 = \{(x_1(y), y) : |y| < \delta_1\},$$

onde $x_1(y)$ é a composição de $x(s)$ com um difeomorfismo analítico, $x_1(0) = 0$ e $x_1'(0) = 0$. A função $x_1(y)$ se anula de ordem infinita em 0, ou seu desenvolvimento em 0 tem a forma

$$x_1(y) = y^{k_1} \alpha(y), \quad \alpha(0) \neq 0, \quad (2.5.6)$$

onde $\alpha(y)$ é uma função analítica real definida numa vizinhança de 0, e k_1 é o

menor número natural tal que $x_1^{(k_1)}(0) \neq 0$, então $k_1 \geq 2$.

Quando $x_1(y)$ se anula de ordem infinita em 0, vale o mesmo para $x(s)$ em s_2 , de onde temos $x(s) \equiv 0$. O que implica que Ω é verticalmente convexo, e neste caso já sabemos $u(x, t)$ é constante nas fibras de $Z(x, t)$ sobre $\bar{\Omega}$, ver Lema 2.2.6.

Suponha que $x_1(y)$ é como em (2.5.6). Por (E3) temos $\varphi_t(p_1) \neq 0$, logo a aplicação Z é difeomorfismo sobre uma vizinhança de p_1 . Assim, se V_1 é uma vizinhança de p_1 sobre a qual Z é difeomorfo, então G_1 limita o conjunto $Z(V_1 \cap \Omega)$. Vamos assumir que $\gamma(s)$ limita Ω em p_1 pela esquerda, neste caso G_1 limita $Z(V_1 \cap \Omega)$ pela esquerda também. Como o vetor tangente à fronteira tem mesmo sentido nos pontos p_1 e p_2 , a curva $\gamma(s)$ também limita Ω em p_2 pela esquerda.

Agora analisaremos a imagem por Z de Ω próximo de p_2 . Primeiro, para s próximo de $s_2 = t_2$, a curva $\gamma(s)$ tem a forma $\gamma(s) = (x(s), s)$, onde $x(s_2) = 0$ e $x'(s_2) = 0$. O caso $x(s) \equiv 0$ já foi visto, suponha que existe $k_2 \geq 2$ tal que $x^{(k_2)}(s_2) \neq 0$, então o desenvolvimento de $x(s)$ em s_2 tem da forma

$$x(s) = (s - s_2)^{k_2} \beta(s), \quad \beta(s_2) \neq 0,$$

onde $\beta(s)$ é uma função analítica real definida numa vizinhança de s_2 .

Considere a curva $\tilde{\gamma}(s) : (s_2 - \delta, s_2 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\tilde{\gamma}(s) = (\tilde{x}(s), s)$, onde

$$\tilde{x}(s) = (s - s_2)^2 |\beta(s)|.$$

Diminuindo $\delta > 0$ se necessário, teremos $\tilde{\gamma}(s) \subset \bar{\Omega}$. Com efeito, se $|s - s_2| < 1$ temos

$$(s - s_2)^{k_2} \beta(s) \leq (s - s_2)^2 |\beta(s)|,$$

suponha que $\gamma(s)$ se representa como $(x(s), s)$ em $(s_2 - \delta', s_2 + \delta')$, onde $0 < \delta' < 1$. Assim a curva $\gamma(s)$ fica à esquerda de $\tilde{\gamma}(s)$. O conjunto Ω é limitado por $\gamma(s)$ pelo lado esquerdo em $p_2 = \gamma(s_2) = \tilde{\gamma}(s_2)$, então existe $\epsilon > 0$ tal que a faixa

$$F = \{(x(s), y) : -\delta' \leq s \leq \delta', \quad s \leq y \leq s + \epsilon\},$$

está contida em $\bar{\Omega}$. Então podemos escolher $\delta > 0$ de forma que $\tilde{\gamma}(s) \subset F$ para $s \in (s_2 - \delta, s_2 + \delta)$, e $\beta(s) \neq 0$ para $s \in [s_2 - \delta, s_2 + \delta]$.

Para (u, v) numa vizinhança de p_2 escrevemos

$$\varphi(u, v) = \varphi(p_2) + \varphi_x(p_2)u + \varphi_t(p_2)(v - s_2) + O(u^2 + (v - s_2)^2),$$

onde $O(u^2 + (v - s_2)^2)$ se anula de ordem 2 quando $(u, v) \rightarrow (0, s_2)$. Substituindo

em $(\tilde{x}(s), s)$ temos

$$\varphi(\tilde{x}(s), s) = c\tilde{x}(s) + O(\tilde{x}(s)^2 + (s - s_2)^2).$$

Logo, para s próximo de s_2

$$|\varphi(\tilde{x}(s), s)| \leq |c||\tilde{x}(s)| + |\tilde{x}(s)|^2 + |s - s_2|^2. \quad (2.5.7)$$

Pela expressão de $\tilde{x}(s)$ temos $|s - s_2|^2 = \frac{1}{|\beta(s)|} \tilde{x}(s)$. Como $\tilde{x}(s_2) = 0$, fazendo $b = \min\{|c|, 1, 1/|\beta(s)| : s \in (s_2 - \delta, s_2 + \delta)\}$ temos

$$|\varphi(\tilde{x}(s), s)| \leq b|\tilde{x}(s)|,$$

para s próximo de s_2 . Portanto, $Z(\tilde{\gamma}(s)) = \tilde{x}(s) + i\varphi(\tilde{x}(s), s)$, está contida no cone $C = \{x + iy : 0 \leq x \leq \sup \tilde{x}(s), |y| \leq bx\}$. Enquanto que $C \setminus \{0\}$ está contido no interior do conjunto limitado pela esquerda por G_1 .

Temos $Z(\tilde{\gamma}(s_2)) = 0$, se V_1 é uma vizinhança de p_1 tal que G_1 limita $Z(V_1 \cap \Omega)$, existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$Z(\tilde{\gamma}(s)) \subset Z(V_1 \cap \Omega), \quad 0 < |s - s_2| < \delta_0. \quad (2.5.8)$$

Tomamos uma sequência de números reais positivos $\epsilon_j \rightarrow 0$. Para cada j sejam $Q_{1j} = (-\epsilon_j, \epsilon_j) \times (t_1 - \epsilon_j, t_1 + \epsilon_j)$ e $Q_{2j} = (-\epsilon_j, \epsilon_j) \times (t_2 - \epsilon_j, t_2 + \epsilon_j)$. Segue de (2.5.8) que existe s_j tal que

$$\tilde{\gamma}(s_j) \in Q_{2j}, \quad Z(\tilde{\gamma}(s_j)) \in Z(Q_{1j} \cap \Omega).$$

Então $Z(\tilde{\gamma}(s_j)) = Z(p_j)$ para algum $p_j \in Q_{1j} \cap \Omega$. Aplicando o Lema 2.5.1 temos $u(\tilde{\gamma}(s_j)) = u(p_j)$. Fazendo $j \rightarrow \infty$ temos $p_j \rightarrow p_1$ e $\tilde{\gamma}(s_j) \rightarrow p_2$, pela continuidade de $u(x, t)$ temos $u(p_1) = u(p_2)$. \square

No Lema 2.5.8 quando os vetores tangentes à fronteira nos pontos p_1 e p_2 têm sentidos opostos é possível construir um contraexemplo. Abaixo do Lema 2.5.6 damos uma ideia de como seria o contraexemplo para este lema, onde também assumimos os tangentes com mesmo sentido. A ideia para a construção de um contraexemplo aqui é análoga à feita para o Lema 2.5.6.

Agora falta apenas o caso de pontos na fronteira com mesma imagem por Z , onde o tangente à fronteira é vertical em um dos pontos e não vertical no outro. Neste sentido temos o resultado abaixo.

Lema 2.5.9. *Sejam $Z(x, t)$ uma função como em (2.5.1), e $u(x, t)$ uma função contínua em $\bar{\Omega}$ tal que $u(x, t) = U \circ Z(x, t)$, $(x, t) \in \Omega$, onde U é uma função*

contínua em $Z(\Omega)$, e holomorfa no interior. Suponha que o vetor tangente à fronteira de Ω no ponto p_1 , $\gamma'(s_1)$, é vertical, e o vetor tangente à fronteira no ponto p_2 , $\gamma'(s_2)$, é não vertical, e suponha que

$$\nabla\varphi(p_1) \cdot \gamma'(s_1) \neq 0. \quad (2.5.9)$$

Então $Z(p_1) = Z(p_2)$ implica que $u(p_1) = u(p_2)$.

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor que $p_1 = (0, t_1)$, $p_2 = (0, t_2)$ e $Z(p_1) = Z(p_2) = 0$. Pela hipótese nos vetores tangentes escrevemos $\gamma'(s_1) = (0, t'(s_1))$, com $t'(s_1) \neq 0$, e $\gamma'(s_2) = (x'(s_2), t'(s_2))$, com $x'(s_2) \neq 0$.

Considere a curva

$$\sigma(s) \doteq Z \circ \gamma(s) = x(s) + i\varphi(\gamma(s)),$$

então podemos ver $\sigma(s)$ como $\sigma(s) = (x(s), y(s))$, onde $y(s) = \varphi(\gamma(s))$. Derivando $y(s)$ obtemos

$$y'(s) = \nabla\varphi(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s),$$

segue de (2.5.9) que $y'(s_1) \neq 0$. Então, pelo Teorema da Função Inversa, $y(s)$ possui uma inversa analítica real numa vizinhança de s_1 . Assim a curva $\sigma(s)$, para s próximo à s_1 , pode ser parametrizada pelo gráfico de função

$$G_1 = \{(x_1(y), y), |y| < \delta_1\},$$

onde $x_1(y)$ é a composição de $x(s)$ com um difeomorfismo analítico, $x_1(0) = 0$ e $x_1'(0) = 0$. Logo, $x_1(s) \equiv 0$ ou existe $k \geq 2$ tal que $x_1^{(k)}(0) \neq 0$. Quando $x_1(y) \equiv 0$ temos $x(s) \equiv 0$, neste caso Ω é verticalmente convexo, então $u(p_1) = u(p_2)$. Suponha que $x_1(y) \not\equiv 0$, o desenvolvimento de $x_1(y)$ em 0 tem a forma

$$x_1(y) = y^k \rho(y), \quad \rho(0) \neq 0,$$

onde $\rho(y)$ é uma função analítica real definida numa vizinhança de 0.

De (2.5.9) temos $\varphi_t(p_1) \neq 0$, então $Z(x, t)$ é difeomorfismo numa vizinhança de p_1 . Assim G_1 limita Z em Ω perto de p_1 .

Por outro lado, como $x'(s_2) \neq 0$ a curva $\sigma(s)$, para s próximo de s_2 , pode ser parametrizada pelo gráfico de função

$$G_2 = \{(x, y_2(x)), |x| < \delta_2\},$$

onde $y_2(x)$ é a composição de $y(s)$ com um difeomorfismo analítico tal que $y_2(0) = 0$. Além disso a função $y_2(x)$ deve se anular de ordem finita em 0. Com efeito,

se $y_2(x)$ se anular de ordem infinita em 0, então vale o mesmo para $y(s)$. Pela analiticidade, $y(s) \equiv 0$ o que contradiz $y'(s_1) \neq 0$.

Assim existe $l \geq 1$ tal que $y_2^{(l)}(0) \neq 0$. O desenvolvimento de $y_2(x)$ em 0 tem a forma

$$y_2(x) = x^l \beta(x), \quad \beta(0) \neq 0,$$

onde $\beta(x)$ é uma função análtica real definida numa vizinhança de 0.

Portanto G_2 intercepta G_1 transversalmente em 0. Seja V_1 é uma vizinhança de p_1 então sabemos que G_1 limita $Z(V_1 \cap \Omega)$, assim existe $\delta > 0$ de forma que

$$(x, y_2(x)) \in Z(V_1 \cap \Omega), \quad 0 < x < \delta, \quad \text{ou} \quad (x, y_2(x)) \in Z(V_1 \cap \Omega), \quad -\delta < x < 0. \quad (2.5.10)$$

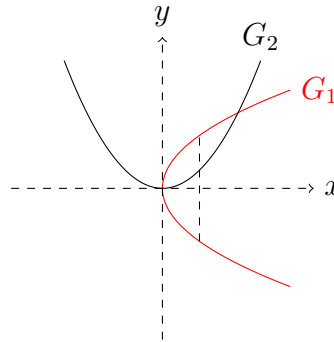
Tomamos uma sequência de números reais positivos $\epsilon_j \rightarrow 0$. Sejam

$$Q_{1j} = (-\epsilon_j, \epsilon_j) \times (t_1 - \epsilon_j, t_1 + \epsilon_j), \quad Q_{2j} = (-\epsilon_j, \epsilon_j) \times (t_2 - \epsilon_j, t_2 + \epsilon_j).$$

Para cada j fixado segue de (2.5.10) que existe $(x_j, y_2(x_j)) \in Z(Q_{1j} \cap \Omega)$, onde $(x_j, y_2(x_j)) = Z(q_j)$, para algum $q_j \in Q_{2j} \cap \bar{\Omega}$. Então $Z(q_j) = Z(p_j)$, para algum $p_j \in Q_{1j} \cap \Omega$. Assim usando o Lema 2.5.1 temos $u(q_j) = u(p_j)$.

Quando fazemos $j \rightarrow \infty$ temos $p_j \rightarrow p_1$ e $q_j \rightarrow p_2$, logo pela continuidade de $u(x, t)$ temos $u(p_1) = u(p_2)$.

Figura 2.11:



□

Observação 2.5.10. Nas hipóteses do Lema 2.5.9 temos pontos p_1 e p_2 , onde $\gamma'(s)$ é vertical em p_1 e não vertical em p_2 , neste caso a condição

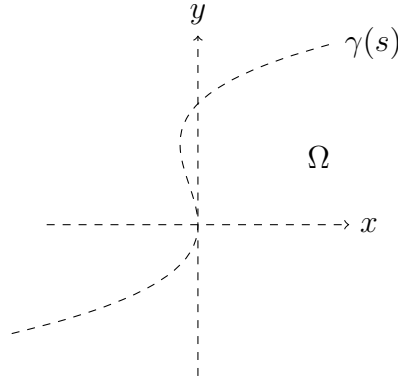
$$\nabla\varphi(p_1) \cdot \gamma'(s_1) \neq 0,$$

engloba as condições (E1) e (E3). Portanto, segundo o Lema 2.5.9, quando $\gamma'(s_1)$ é vertical e $\gamma'(s_2)$ não vertical, e se verificam as condições (E1) ou (E3) então temos $Z(p_1) = Z(p_2)$ implica que $u(p_1) = u(p_2)$.

A seguir apresentaremos um contraexemplo para pontos de fronteira p_1 e p_2 , onde $\gamma'(s)$ é vertical em p_1 e não vertical em p_2 e vale (E2).

Contraexemplo 2.5.11. Considere a função $x(s) = s^2(s - 1)$. Seja Ω o subconjunto de \mathbb{R}^2 limitado pelo lado esquerdo pela curva $\gamma(s) = (x(s), s)$.

Figura 2.12:



Seja $Z(x, t) = x + i\varphi(x, t)$, onde $\varphi(x, t) = t(x - t^2(t - 1))$. Assim aplicando $Z(x, t)$ sobre a curva $\gamma(s)$ obtemos

$$Z(\gamma(s)) = x(s) + i0.$$

Por $\varphi(\gamma(s)) \equiv 0$, temos que $\nabla\varphi(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) = 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

Temos $x'(s) = 3s^2 - 2s$. Assim, $x'(s) = 0$ se, e somente se, $s = 0$ ou $s = 2/3$. Escolhemos o ponto $p_1 = (x(2/3), 2/3)$, então o vetor tangente à fronteira em p_1 é vertical. Em seguida escolhemos $p_2 \in \partial\Omega$ de forma que $Z(p_1) = Z(p_2)$. Seja $p_2 = (x(-1/3), -1/3)$. O vetor tangente à $\gamma(s)$ em p_2 é não vertical.

Como $\gamma(s)$ limita Ω pela esquerda, para $(x, t) \in \Omega$ temos:

$$x - t^2(t - 1) = x - x(t) > 0.$$

Logo,

$$(x, t) \in \Omega, t > 0 \Rightarrow \varphi(x, t) = t(x - t^2(t - 1)) > 0,$$

$$(x, t) \in \Omega, t < 0 \Rightarrow \varphi(x, t) = t(x - t^2(t - 1)) < 0.$$

A intersecção $\Omega \cap \{(x, 0), x < 0\}$ é vazia, então $Z(\Omega) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{x \leq 0\}$. Logo, a função

$$u(x, t) = \sqrt{Z(x, t)},$$

onde \sqrt{z} é o ramo principal da raiz quadrada, é bem definida em Ω . Pelo limite podemos a estender continuamente para $\bar{\Omega}$, e temos $u(p_1) \neq u(p_2)$.

Dentro do caso que estamos analisando ainda resta uma condição (E3') dada por

$$\left. \begin{aligned} \nabla\varphi(p_1) \cdot \gamma'(s_1) &= 0 \\ \nabla\varphi(p_2) \cdot \gamma'(s_2) &\neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{E3'})$$

Sob essa condição temos no contraexemplo abaixo uma função $u(x, t) \in C^0(\overline{\Omega})$ satisfazendo 2.5.3, tal que $Z(p_1) = Z(p_2)$ não implica que $u(p_1) = u(p_2)$ para pontos p_1 e p_2 na fronteira.

Contraexemplo 2.5.12. Considere Ω o conjunto limitado pelo lado esquerdo pela curva $\gamma(s) = (x(s), s)$, onde $x(s) = (s + 1)(s - 1)^2$. Seja

$$Z(x, t) = x + i\varphi(x, t), \quad \varphi(x, t) = t(x - (t + 1)(t - 1)^2) + x.$$

Então

$$Z(\gamma(s)) = Z(x(s), s) = x(s) + i[s(x(s) - (s + 1)(s - 1)^2) + x(s)] = x(s) + ix(s).$$

Logo, $Z(x, t)$ aplica a curva $\gamma(s)$ sobre uma semirreta em $\{(x, t) : x = t\}$.

Como a curva $\gamma(s)$ limita Ω pela esquerda, para $(x, t) \in \Omega$ temos :

$$x - (t + 1)(t - 1)^2 = x - x(t) > 0.$$

Logo

$$(x, t) \in \Omega, \quad t > 0 \Rightarrow t[x - (t + 1)(t - 1)^2] > 0, \quad \text{e } \varphi(x, t) > x,$$

$$(x, t) \in \Omega, \quad t < 0 \Rightarrow t[x - (t + 1)(t - 1)^2] < 0, \quad \text{e } \varphi(x, t) < x.$$

Temos $x(0) = 1$, e a intersecção $\{(x, 0) : x \leq 1\} \cap \Omega$ é vazia. Então $Z(\Omega) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{(x, x), x \leq 1\}$. Logo, a função

$$u(x, t) = \sqrt{Z(x, t) - 1},$$

onde \sqrt{z} é o ramo da raiz quadrada definido em $\mathbb{C} \setminus \{(x, x), x \leq 0\}$, é bem definida em Ω . Como nos demais exemplos é possível estender $u(x, t)$ continuamente para $\overline{\Omega}$.

Sejam $p_1 = \gamma(1) = (0, 1)$ e $p_2 = \gamma(-1) = (0, -1)$ então $\gamma'(1)$ é vertical, $\gamma'(-1)$ é não vertical e

$$\nabla\varphi(p_1) \cdot \gamma'(1) = \varphi_t(p_1) = 0, \quad \nabla\varphi(p_2) \cdot \gamma'(-1) = 4.$$

Porém $Z(p_1) = Z(p_2)$ e $u(p_1) \neq u(p_2)$.

Como consequência dos resultados obtidos nesta seção temos uma caracterização da constância nas fibras de Z sobre $\bar{\Omega}$. O resultado que enunciaremos a seguir é a conclusão do estudo desenvolvido no decorrer na seção.

Teorema 2.5.13. *Seja Ω subconjunto aberto simplesmente conexo de \mathbb{R}^2 cuja fronteira é uma curva de Jordan analítica real. Sejam $Z(x, t)$ uma função como em (2.5.1), e $u \in C^0(\bar{\Omega})$ tal que $u(x, t) = U \circ Z(x, t)$, $(x, t) \in \Omega$, onde U é uma função contínua em $Z(\Omega)$, e holomorfa no interior. Considere pontos p_1 e p_2 na fronteira de Ω então valem seguintes afirmações:*

- (i) *Se o vetor tangente à fronteira é não vertical em p_1 e p_2 e as condições (E1) ou (E2) são satisfeitas, então $Z(p_1) = Z(p_2)$ não implica que $u(p_1) = u(p_2)$.*
- (ii) *Se o vetor tangente à fronteira é não vertical em p_1 e p_2 e a condição (E3) é satisfeita então $Z(p_1) = Z(p_2)$ implica $u(p_1) = u(p_2)$.*
- (iii) *Se o vetor tangente à fronteira é vertical com mesmo sentido em p_1 e p_2 e as condições (E1) ou (E3) são satisfeitas então $Z(p_1) = Z(p_2)$ implica $u(p_1) = u(p_2)$.*
- (iv) *Se o vetor tangente à fronteira é vertical em p_1 e p_2 , mas os sentidos são opostos, e as condições (E1) ou (E3) são satisfeitas, então $Z(p_1) = Z(p_2)$ não implica que $u(p_1) = u(p_2)$.*
- (v) *Se o vetor tangente à fronteira é vertical em p_1 e p_2 e a condição (E2) é satisfeita, então $Z(p_1) = Z(p_2)$ não implica que $u(p_1) = u(p_2)$.*
- (vi) *Se o tangente à fronteira é vertical em p_1 e não vertical em p_2 e as condições (E1) ou (E3) são satisfeitas então $Z(p_1) = Z(p_2)$ implica $u(p_1) = u(p_2)$.*
- (vii) *Se o tangente à fronteira é vertical em p_1 e não vertical em p_2 e a condição (E2) é satisfeita, então $Z(p_1) = Z(p_2)$ não implica que $u(p_1) = u(p_2)$.*
- (viii) *Se o tangente à fronteira é não vertical em p_1 e vertical em p_2 e a condição (E3) é satisfeita, então $Z(p_1) = Z(p_2)$ não implica que $u(p_1) = u(p_2)$.*

Demonstração. Para a prova do item (i) veja Contraexemplo 2.5.2 e Contraexemplo 2.5.3. Para o item (ii) veja o Lema 2.5.5. Para o item (iii) veja o Lema 2.5.6 e o Lema 2.5.8. Para o item (iv) veja a discussão após o Lema 2.5.6. Para o item (v) veja Contraexemplo 2.5.7. Para o item (vi) veja o Lema 2.5.9. Para o item (vii) veja Contraexemplo 2.5.11. Para o item (viii) veja Contraexemplo 2.5.12.

□

Apêndice A

Espaços de Recobrimento

Como no Capítulo 2 denotaremos um subconjunto aberto e conexo de \mathbb{R}^2 por Ω . Consideramos também uma função $Z(x, t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$Z(x, t) = x + i\varphi(x, t),$$

onde $\varphi(x, t)$ é uma função analítica real. Aqui exigiremos ainda que o conjunto $Z(\Omega)$ seja aberto e conexo. Assim, se

$$\{(x_0, t) : t \in \mathbb{R}\} \cap \Omega \neq \emptyset$$

então a função $t \mapsto \varphi(x_0, t)$ não assumi extremos absolutos em Ω . Quando os conjuntos Ω e $Z(\Omega)$ são abertos podemos considerar seus recobrimentos universais, sejam

- $p : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ a aplicação de recobrimento universal de Ω ;
- $q : \tilde{X} \rightarrow Z(\Omega)$ a aplicação de recobrimento universal de $Z(\Omega)$.

Lembramos que por definição os espaços de recobrimento $\tilde{\Omega}$ e \tilde{X} são simplesmente conexos.

Seja L o campo vetorial localmente integrável sobre Ω dado por

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{\varphi_t(x, t)}{1 + i\varphi_x(x, t)} \frac{\partial}{\partial x}.$$

A partir do campo vetorial L definiremos um campo vetorial sobre o espaço de recobrimento $\tilde{\Omega}$. O conjunto Ω é uma variedade analítica, por isso a aplicação de recobrimento é localmente difeomorfismo. Seja $b_0 \in \tilde{\Omega}$, então tomamos um aberto B em $\tilde{\Omega}$, com $b_0 \in B$, tal que a aplicação de recobrimento restrita ao conjunto B ,

$$p|_B : B \rightarrow p(B),$$

é difeomorfismo. Então, definimos o seguinte campo vetorial sobre B

$$\tilde{L}_B \doteq d(p|_B)^{-1}L. \quad (\text{A.0.1})$$

Para cada $b \in \tilde{\Omega}$ escolhemos uma vizinhança B , onde é possível definir o campo vetorial \tilde{L}_B , como em (A.0.1). Sejam B_1 e B_2 conjuntos abertos em $\tilde{\Omega}$, onde \tilde{L}_1 e \tilde{L}_2 são os respectivos campos vetoriais dadas como (A.0.1) em B_1 e B_2 . Se a intersecção $B_1 \cap B_2$ é não vazia então temos $\tilde{L}_1 = \tilde{L}_2$ em $B_1 \cap B_2$. Isso devido à $p|_{B_1} = p|_{B_2}$ em $B_1 \cap B_2$.

Dessa forma temos definido um campo vetorial \tilde{L} em $\tilde{\Omega}$, que localmente satisfaz (A.0.1).

Dada uma função contínua $u(x, t)$ em Ω , definimos a função contínua \tilde{u} em $\tilde{\Omega}$ por:

$$\tilde{u}(b) \doteq u \circ p(b). \quad (\text{A.0.2})$$

Quando $u(x, t)$ é solução de $Lu = 0$ em Ω , então na Seção 2.3 mostramos a existência de uma função analítica global \mathbf{U} em $\text{int}\{Z(\Omega)\}$ tal que localmente escrevemos

$$u(x, t) = U \circ Z(x, t), \quad (U, z) \in \mathbf{U}.$$

Sob a condição de que \mathbf{U} é continuável ao longo de todas as curvas de $\text{int}\{Z(\Omega)\}$, foi mostrado no Teorema 2.3.9 que $u(x, t)$ se fatora como acima globalmente, quando $\text{int}\{Z(\Omega)\}$ é simplesmente conexo.

Aqui não assumiremos a hipótese $\text{int}\{Z(\Omega)\}$ simplesmente conexo, então sabemos pelo Exemplo 2.3.10 que não vale o mesmo resultado. Nosso objetivo agora será mostrar que a função \tilde{u} se fatora globalmente como a composição de uma função holomorfa com uma integral primeira de \tilde{L} .

Começaremos mostrando que \tilde{u} é solução homogênea do campo vetorial \tilde{L} em $\tilde{\Omega}$.

Proposição A.0.14. *Sejam $Z(x, t)$ uma função dada por (2.3.1) e L é o campo vetorial (2.0.2). Se $u(x, t) \in C^0(\Omega)$ é solução de $Lu = 0$ em Ω , então a função $\tilde{u} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ definida em (A.0.2) é solução de $\tilde{L}\tilde{u} = 0$ em $\tilde{\Omega}$, onde \tilde{L} é o campo vetorial (A.0.1).*

Demonstração. Seja $p : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ o recobrimento universal de Ω . Tomamos um subconjunto aberto B de $\tilde{\Omega}$ tal que $p|_B : B \rightarrow p(B)$ é difeomorfismo. Para $b \in B$ temos

$$\tilde{L}\tilde{u}(b) = \tilde{L}(u \circ p)(b) = d(p|_B)^{-1}(b)L(u \circ p)(b),$$

agora como $Lu = 0$, e a projeção p é difeomorfismo em B , temos

$$L(u \circ p)(b) = 0, \quad b \in B.$$

Segue que

$$\tilde{L}\tilde{u}(b) = 0, \quad b \in B.$$

Podemos cobrir o espaço de recobrimento $\tilde{\Omega}$ por abertos B com essa propriedade, portanto segue o resultado. \square

A seguir mostraremos que o campo vetorial \tilde{L} é localmente integrável. Para isso precisamos de uma candidata a integral primeira.

Dada $Z(x, t) = x + i\varphi(x, t)$ uma função como em (2.3.1), definimos a função

$$\begin{aligned} \hat{Z} : \tilde{\Omega} &\rightarrow \tilde{X} \\ b &\mapsto \hat{Z}(b) \doteq Z \circ p(b) \end{aligned} \tag{A.0.3}$$

Como o conjunto $\tilde{\Omega}$ é simplesmente conexo, para todo $b \in \tilde{\Omega}$ o grupo fundamental $\pi_1(\tilde{\Omega}, b)$ é formado apenas pelo elemento neutro. Então o Lema do Levantamento (veja Lema 1.3.6), nos garante a existência de uma única aplicação

$$\tilde{Z} : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{X} \tag{A.0.4}$$

satisfazendo:

- (i) se $q(\tilde{z}_0) = z_0$, e $\hat{Z}(b_0) = z_0$ então $\tilde{Z}(b_0) = \tilde{z}_0$;
- (ii) o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{X} & \\ \tilde{Z} \nearrow & \downarrow q & \\ \tilde{\Omega} & \xrightarrow{\hat{Z}} & X \end{array} \quad \hat{Z} = q \circ \tilde{Z}$$

Ou também, $Z \circ p = q \circ \tilde{Z}$, quando consideramos o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\tilde{Z}} & \tilde{X} \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ \tilde{\Omega} & \xrightarrow{Z} & X \end{array}$$

A aplicação \tilde{Z} é chamada de levantamento de \hat{Z} para a variedade \tilde{X} . A próxima proposição nos diz que um levantamento \tilde{Z} , como acima, é uma integral primeira para o campo vetorial \tilde{L} .

Proposição A.0.15. *Sejam $Z(x, t)$ uma função dada por (2.3.1) e \tilde{L} o campo vetorial dado localmente por (A.0.1). Se $\tilde{Z} : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{X}$ é um levantamento de $Z \circ p$ para \tilde{X} , então para todo $b \in \tilde{\Omega}$ temos*

$$\tilde{L}_b^\perp = \text{span}\{d\tilde{Z}_b\}.$$

Demonstração. A dimensão real de \tilde{X} é 2 então precisamos mostrar que:

- (i) $\tilde{L}\tilde{Z} = 0$;
- (ii) $d\tilde{Z}_b \neq 0$ para todo $b \in \tilde{\Omega}$.

Segue da Proposição A.0.14 que $\tilde{L}(Z \circ p) = 0$.

Seja $b_0 \in \tilde{\Omega}$ então $\tilde{Z}(b_0) \in \tilde{X}$. Considerando $q : \tilde{X} \rightarrow Z(\Omega)$ aplicação de recobrimento, tomamos um aberto $\tilde{B} \subset \tilde{X}$, com $\tilde{Z}(b_0) \in \tilde{B}$ e tal que a restrição $q|_{\tilde{B}} : \tilde{B} \rightarrow q(\tilde{B})$ é difeomorfismo.

Pela continuidade de \tilde{Z} existe $B \subset \tilde{\Omega}$ aberto, com $b_0 \in B$, tal que $\tilde{Z}(B) \subset \tilde{B}$. Então para todo $b \in B$ temos

$$\tilde{Z}(b) = (q|_{\tilde{B}})^{-1} \circ Z(p(b)), \quad (\text{A.0.5})$$

assim, como $(q|_{\tilde{B}})^{-1}$ é difeomorfismo e $\tilde{L}(Z \circ p) = 0$, concluímos que $\tilde{L}\tilde{Z}(b_0) = 0$. Como $b_0 \in \tilde{\Omega}$ foi tomado genérico temos $\tilde{L}\tilde{Z} = 0$ em $\tilde{\Omega}$. Assim temos mostrado o item (i).

Agora, segue de (A.0.5) e por $d(Z \circ p)_b \neq 0$ que

$$d\tilde{Z}_b = d \left[(q|_{\tilde{B}})^{-1} \circ Z \circ p \right]_b \neq 0, \quad b \in B.$$

Logo $d\tilde{Z}_{b_0} \neq 0$. Novamente $b_0 \in \tilde{\Omega}$ é genérico, portanto temos $d\tilde{Z}_b \neq 0$ para todo $b \in \tilde{\Omega}$. E o item (ii) está provado. \square

Nosso próximo passo será demonstrar que para uma dada função $u \in C^0(\Omega)$ solução de $Lu = 0$, a função $\tilde{u} = u \circ p$ pode ser escrita localmente como:

$$\tilde{u}(b) = \tilde{U} \circ \tilde{Z}(b), \quad b \in B \subset \tilde{\Omega},$$

onde \tilde{U} é uma função contínua em $\tilde{Z}(B)$ que é holomorfa no interior.

Lema A.0.16. *Sejam $Z(x, t)$ uma função dada por (2.3.1) e L o campo vetorial (2.0.2). Considere os recobrimentos universais $p : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ e $q : \tilde{X} \rightarrow Z(\Omega)$, então seja \tilde{Z} o levantamento da função $Z \circ p$ para \tilde{X} . Considere também $u(x, t) \in C^0(\Omega)$ uma solução de $Lu = 0$ em Ω .*

Sob essas condições, se $\tilde{u} = u \circ p$ então para cada $b_0 \in \tilde{\Omega}$ existem uma vizinhança B de b_0 , e uma função \tilde{U} definida em $\tilde{Z}(B)$, holomorfa no interior, tal que

$$\tilde{u}(b) = \tilde{U} \circ \tilde{Z}(b), \quad b \in B. \quad (\text{A.0.6})$$

Demonstração. Seja V uma vizinhança de b_0 tal que a restrição, $p|_V : V \rightarrow p(V)$, é difeomorfismo. Então $p(V) \subset \Omega$ é aberto com $p(b) \in p(V)$.

Segue do Teorema de Aproximação de Baouendi-Treves que existem um aberto $W \subset \Omega$ com $p(b) \in W$, e uma função H , holomorfa em $\text{int}\{Z(W)\}$ tal que

$$u(x, t) = H \circ Z(x, t), \quad (x, t) \in W.$$

Tomamos $B = p^{-1}(W \cap p(V))$, então para $b \in B$ temos

$$\tilde{u}(b) = u \circ p(b) = H \circ Z \circ p(b) = H \circ q \circ \tilde{Z}(b) = \tilde{U} \circ \tilde{Z}(b),$$

onde a função $\tilde{U} = H \circ q$ está definida em $\tilde{Z}(B)$ e é holomorfa em $\text{int}\{\tilde{Z}(B)\}$. \square

Lema A.0.17. *Nas condições do Lema A.0.16, para cada $b_0 \in \tilde{\Omega}$, existem um retângulo R , centrado em b_0 , com $\text{int}\{\tilde{Z}(R)\}$ conexo não vazio, e uma função \tilde{U} contínua em $\tilde{Z}(R)$, que é holomorfa no seu interior, tal que*

$$\tilde{u}(b) = \tilde{U} \circ \tilde{Z}(b), \quad b \in R.$$

Demonstração. Fixado $b_0 \in \tilde{\Omega}$, a aplicação de recobrimento $p : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2$ é difeomorfismo numa vizinhança V de b_0 . Então podemos identificar os pontos de V com as coordenadas (x, t) do plano. Assim escrevemos

$$Z \circ p(x, t) = x + i\varphi(x, t), \quad (x, t) \in V \quad (\text{A.0.7})$$

onde $\varphi(x, t)$ é analítica real em V . Então para $R \subset V$ retângulo, segue do Lema 2.3.1 que $\text{int}\{Z \circ p(R)\}$ é conexo.

Agora, seja $\tilde{V} \subset \tilde{X}$ tal que $\tilde{Z}(b_0) \in \tilde{V}$ e $q|_{\tilde{V}}$ é difeomorfismo. Pela continuidade de \tilde{Z} podemos tomar um retângulo $R \subset V$ centrado em b_0 , pequeno de forma que $\tilde{Z}(R) \subset \tilde{V}$.

$$\begin{array}{ccc} b_0 \in R & \xrightarrow{\tilde{Z}} & \tilde{V} \\ & \searrow Z \circ p & \downarrow q|_{\tilde{V}} \\ & & q(\tilde{V}) \end{array}$$

Como $Z \circ p(R) = q \circ \tilde{Z}(R)$ temos

$$\text{int}\{Z \circ p(R)\} = \text{int}\{q \circ \tilde{Z}(R)\},$$

de onde obtemos que $\text{int}\{q \circ \tilde{Z}(R)\}$ é conexo. Assim, segue de $q|_{\tilde{V}}$ ser difeomorfismo que $\text{int}\{\tilde{Z}(R)\}$ é conexo.

Por fim, para valer a relação (A.0.6) em R , o tomamos na vizinhança B do Lema A.0.16. Então

$$\tilde{u}(b) = \tilde{U} \circ \tilde{Z}(b), \quad b \in R.$$

Assim está provado o resultado. □

Segue diretamente do Lema A.0.17 o seguinte corolário.

Corolário A.0.18. *Nas condições do Lema (A.0.16), para cada $b_0 \in \tilde{\Omega}$ existem um retângulo R , centrado em b_0 , e uma função \tilde{U} definida em $\tilde{Z}(R)$, tal que o par (\tilde{U}, \tilde{R}) é um elemento de função em \tilde{X} , onde $\tilde{R} = \text{int}\{\tilde{Z}(R)\}$, e a seguinte relação é satisfeita*

$$\tilde{u}(b) = \tilde{U} \circ \tilde{Z}(b), \quad b \in R.$$

Dada uma função $u \in C^0(\Omega)$ solução de $Lu = 0$ em Ω , seja $\tilde{u} = u \circ p$. Então usando o Corolário A.0.18 definimos a família de elementos de função sobre o conjunto $\tilde{Z}(\tilde{\Omega})$

$$\mathcal{F} = \{(\tilde{U}, \tilde{R}), \text{ onde } \tilde{R} = \text{int}\{\tilde{Z}(R)\}, \text{ e } \tilde{u} = \tilde{U} \circ \tilde{Z} \text{ em } R\}, \quad (\text{A.0.8})$$

onde R é aberto conexo de $\tilde{\Omega}$, e \tilde{U} é uma função contínua em $\tilde{Z}(R)$ que é holomorfa no interior.

Observação A.0.19. *Com algumas adaptações resultados análogos ao Lema 2.3.3, e aos Corolários 2.3.4 e 2.3.5 valem para os elementos da família \mathcal{F} . A conclusão destes resultados é que elementos de função pertencentes à uma família parecida com \mathcal{F} são continuação analítica direta, quando são a imagem por Z de retângulos com intersecção não vazia. No caso a função $Z(x, t)$ possui uma forma especial,*

$$Z(x, t) = x + i\varphi(x, t),$$

com $\varphi(x, t)$ função analítica real. Aqui a função \tilde{Z} não possui essa forma, porém o leitor pode conferir nas demonstrações destes Lemas, que esta forma foi usada apenas para garantir que o interior da imagem por $Z(x, t)$ de retângulos é conexo. Segundo o Lema A.0.17 para retângulos $R \subset \tilde{\Omega}$ pequenos temos $\text{int}\{\tilde{Z}(R)\}$ conexo.

Considere os elementos de função

$$(U_1, \text{int}\{\tilde{Z}(R_1)\}), (U_2, \text{int}\{\tilde{Z}(R_2)\}) \in \mathcal{F}, \text{ onde } R_1 \cap R_2 \neq \emptyset.$$

Então, observando que a aplicação de recobrimento $q : \tilde{X} \rightarrow Z(\Omega)$ é difeomorfismo sobre $\text{int}\{\tilde{Z}(Q_1)\} \cap \text{int}\{\tilde{Z}(Q_2)\}$, temos que este é um conjunto conexo não vazio.

Assim de forma análoga ao que foi feito no Capítulo 2 para os resultados citados, pode-se provar que os elementos de função $(U_1, \text{int}\{\tilde{Z}(R_1)\})$ e $(U_2, \text{int}\{\tilde{Z}(R_2)\})$ são continuação analítica direta um do outro.

O Lema abaixo é uma versão do Lema 2.3.6 para o caso dos elementos de função de \mathcal{F} . Ele nos diz que os elementos de função de \mathcal{F} são continuação analítica um do outro. Levando em conta a Observação A.0.19, a demonstração aqui é análoga a feita no Lema 2.3.6, por isso não a faremos.

Lema A.0.20. *Sejam $Z(x, t)$ uma função dada por (2.3.1) e L o campo vetorial (2.0.2). Considere $u(x, t) \in C^0(\Omega)$ uma solução de $Lu = 0$ em Ω , então seja $\tilde{u} = u \circ p$. Então quaisquer dois elementos de função pertencentes à família \mathcal{F} dada em (A.0.8) são continuação analítica.*

Pelo Lema A.0.20 a família \mathcal{F} gera uma função analítica global \tilde{U} em $\tilde{Z}(\tilde{\Omega})$ e podemos escrever localmente

$$\tilde{u} = \tilde{U} \circ \tilde{Z}, \quad (\tilde{U}, z) \in \mathcal{F}.$$

Gostaríamos que os elementos de função da família \mathcal{F} formassem uma função analítica global onde o conjunto base fosse $\tilde{Z}(\tilde{\Omega})$. Então restringiremos a classe dos conjuntos Ω com que trabalharemos. Lembrando que estamos considerando que Ω e Z satisfazem $Z(\Omega)$ é aberto.

Agora também precisaremos que a união dos domínios dos elementos de função de \mathcal{F} seja igual à $\tilde{Z}(\tilde{\Omega})$.

Seja $b \in \tilde{\Omega}$. Suponha que existe $R \subset \tilde{\Omega}$ aberto tal que $\tilde{Z}(b) \in \text{int}\{\tilde{Z}(R)\}$, então $q(\tilde{Z}(b)) \in \text{int}\{q(\tilde{Z}(R))\}$. Como $\text{int}\{Z(p(R))\} = \text{int}\{q(\tilde{Z}(R))\}$ temos $Z(p(b)) = q(\tilde{Z}(b)) \in \text{int}\{Z(p(R))\}$. Logo $p(b) \in \Omega_z$, onde Ω_z é um subconjunto de Ω definido em (2.3.4).

Desta forma concluímos que se $\tilde{Z}(\tilde{\Omega})$ é o conjunto base de \mathcal{F} então $\Omega = \Omega_z$. Inversamente, se $\Omega = \Omega_z$ então $\tilde{Z}(\tilde{\Omega})$ é o conjunto base de \mathcal{F} .

Lema A.0.21. *Sejam $Z(x, t)$ uma função dada por (2.3.1) e L o campo vetorial (2.0.2). Considere os recobrimentos universais $p : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ e $q : \tilde{X} \rightarrow Z(\Omega)$. Considere também uma função $u(x, t) \in C^0(\Omega)$ solução de $Lu = 0$, então seja \mathcal{F} a família definida em (A.0.8). Então um elemento de função $(\tilde{U}, \tilde{R}) \in \mathcal{F}$ gera um elemento de função $(U, q(\tilde{R}))$ em $Z(\Omega)$ onde*

$$u(x, t) = U \circ Z(x, t), \quad (x, t) \in p(R).$$

Demonstração. Podemos escrever $\tilde{R} = \text{int}\{\tilde{Z}(R)\}$, onde R é um retângulo aberto em $\tilde{\Omega}$ tal que

$$\tilde{u} = \tilde{U} \circ \tilde{Z}, \text{ em } R.$$

Ainda podemos escolher R pequeno de forma que $p|_R$ seja difeomorfismo e q seja difeomorfismo sobre um aberto contendo $\tilde{Z}(R)$.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\tilde{Z}} & \tilde{R} = \tilde{Z}(R) \\ p|_R \downarrow & & \downarrow q|_V \\ p(R) & \xrightarrow{Z} & q(V) \end{array}$$

Assim, $q(\tilde{R}) \subset Z(\Omega)$ é aberto conexo. Para $(x, t) \in p(R)$ temos

$$u(x, t) = u \circ p(p^{-1}(x, t)) = \tilde{u}(p^{-1}(x, t)).$$

A seguir usamos a forma $\tilde{u} = \tilde{U} \circ \tilde{Z}$ em R , onde $\tilde{U} = H \circ q$, H é uma função holomorfa em $\text{int}\{Z(p(R))\}$ (veja demonstração do Lema A.0.16). Então

$$\tilde{u}(p^{-1}(x, t)) = \tilde{U} \circ \tilde{Z}(p^{-1}(x, t)) = H \circ q \circ \tilde{Z}(p^{-1}(x, t)) = H \circ Z \circ p(p^{-1}(x, t)) = H \circ Z(x, t).$$

Logo, $(H, q(\tilde{R}))$ é um elemento de função em $Z(\Omega)$, onde $u(x, t) = H \circ Z(x, t)$ em $p(R)$. \square

O próximo passo será construir uma família de elementos de função cuja união de seus domínios cobre \tilde{X} , para assim usarmos o fato de \tilde{X} ser simplesmente conexo.

Fixada $Z(x, t)$ uma função como em (2.3.1), seja $u(x, t) \in C^0(\Omega)$ uma solução de $Lu = 0$.

Tomamos $\tilde{x} \in \tilde{X}$ com $q(\tilde{x}) = x \in Z(\Omega)$, então $x = Z \circ p(b)$ para algum $b \in \tilde{\Omega}$. Então pelo Lema do Levantamento existe uma função contínua $\tilde{Z} : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{X}$ tal que

$$\tilde{Z}(b) = \tilde{x}, \quad Z \circ p = q \circ \tilde{Z}.$$

Temos uma família de elementos de função \mathcal{F} como em (A.0.8) associada à $\tilde{u} = u \circ p$. Tal que existe $(\tilde{U}, \tilde{R}) \in \mathcal{F}$, onde $\tilde{x} \in \tilde{R} = \text{int}\{\tilde{Z}(R)\}$ para $R \subset \tilde{\Omega}$ retângulo. Isto segue de $\Omega = \Omega_z$.

A seguir definimos uma nova família de elementos de função em \tilde{X} , seja

$$\tilde{\mathcal{F}} = \{(\tilde{U}, \text{int}\{\tilde{Z}(R)\}), \tilde{Z} \text{ é algum levantamento de } Z \circ p, \tilde{u} = \tilde{U} \circ \tilde{Z} \text{ em } R\} \tag{A.0.9}$$

A primeira observação sobre a família $\tilde{\mathcal{F}}$ é que ela foi definida de forma que a união dos domínios dos seus elementos seja \tilde{X} . Também podemos notar que dado

um levantamento de $Z \circ p$ temos uma família \mathcal{F} , então toda família dada como (A.0.8) está contida em $\tilde{\mathcal{F}}$.

Agora relembando os resultados obtidos na Seção 2.3, dada $u \in C^0(\Omega_z)$ solução de $Lu = 0$, temos mostrado a existência de uma função analítica global \mathbf{U} definida em $Z(\Omega_z)$ onde

$$u = U \circ Z, \text{ para } (U, z) \in \mathbf{U}. \quad (\text{A.0.10})$$

Assumiremos que cada germe (U, z) em \mathbf{U} pode ser continuado ao longo de toda curva $\gamma : [a, b] \rightarrow Z(\Omega_z)$ com $\gamma(a) = z$. Diremos que uma função analítica global que satisfaz tal condição sobre um determinado conjunto é *continuada ao longo de todas as curvas* deste conjunto. Sob essa condição, veremos que $\tilde{\mathcal{F}}$ é continuada ao longo de todas as curvas de \tilde{X} .

Lema A.0.22. *Sejam uma função $Z(x, t)$ como em (2.3.1) e L o campo vetorial (2.0.2). Dada uma função $u(x, t) \in C^0(\Omega)$ solução de $Lu = 0$, assumamos que a função analítica \mathbf{U} que torna válida (A.0.10), pode ser continuada ao longo de todas as curvas de $Z(\Omega)$. Então a família de elementos de função $\tilde{\mathcal{F}}$ definida em (A.0.9) é uma função analítica global.*

Demonstração. Precisamos mostrar que dois elementos genéricos de $\tilde{\mathcal{F}}$ são continuação analítica um do outro.

Sejam $(\tilde{U}_1, \text{int}\{\tilde{Z}_1(R)\})$, $(\tilde{U}_2, \text{int}\{\tilde{Z}_2(Q)\}) \in \tilde{\mathcal{F}}$. Então tomamos abertos V_1, V_2, \dots, V_n em \tilde{X} tal que ocorre as seguintes condições:

- (i) $\text{int}\{\tilde{Z}_1(R)\} \subset V_1$ e $\text{int}\{\tilde{Z}_2(Q)\} \subset V_n$.
- (ii) $V_i \cap V_{i+1}$ é não vazio.
- (iii) As restrições da aplicação de recobrimento $q|_{V_i} : V_i \rightarrow q(V_i)$ são difeomorfismos.

Segundo o Lema A.0.21 podemos ver $(\tilde{U}_1, \text{int}\{\tilde{Z}_1(R)\})$ como um elemento de função em $Z(\Omega)$, onde

$$u = (q|_{V_1})^{-1} \circ \tilde{U} \circ Z, \text{ em } R$$

No primeiro passo consideramos uma cadeia de continuações analíticas diretas em $q(V_1)$, cujo primeiro membro é $(\tilde{U}_1, \text{int}\{\tilde{Z}_1(R)\})$ e o último é (U_{l1}, Q_{l1}) , onde $Q_{l1} \in q(V_1) \cap q(V_2)$. Ainda, tomamos os elementos da cadeia da forma $(U, \text{int}\{Z(B)\})$, onde B é retângulo aberto em Ω e

$$u = U \circ Z \text{ em } B, \quad (\text{A.0.11})$$

Desta forma podemos considerar o levantamento por $(q|_{V_1})^{-1}$ de tal cadeia. Assim os levantamentos são elementos de $\tilde{\mathcal{F}}$, pois (A.0.11) implica em uma fatoração de \tilde{u} como a composição de \tilde{Z} com uma função holomorfa. A cadeia dos levantamentos em V_1 é uma continuação analítica por elementos de $\tilde{\mathcal{F}}$ de $(\tilde{U}_1, \text{int}\{\tilde{Z}_1(R)\})$ no levantamento de (U_{l1}, Q_{l1}) .

No segundo passo consideramos o último elemento da cadeia anterior, ou seja, o levantamento de (U_{l1}, Q_{l1}) que está em V_2 . Então, como no passo anterior, tomamos uma cadeia de continuações analíticas diretas em $q(V_2)$ entre (U_{l1}, Q_{l1}) e um elemento (U_{l2}, Q_{l2}) , onde $Q_{l2} \in q(V_2) \cap q(V_3)$. De forma que cada elemento da cadeia satisfaz (A.0.11).

Então levantando tal cadeia por $(q|_{V_2})^{-1}$ obtemos uma continuação analítica por elementos de $\tilde{\mathcal{F}}$ entre o levantamento de (U_{l1}, Q_{l1}) e o levantamento de (U_{l2}, Q_{l2}) .

Procedemos assim sucessivamente até o passo n , no qual obteremos que o levantamento de um elemento de função (U_{ln}, Q_{ln}) em $V_{n-1} \cap V_n$ é continuação analítica por uma cadeia de elementos de $\tilde{\mathcal{F}}$ de $(\tilde{U}_2, \text{int}\{\tilde{Z}_2(Q)\})$. Então pela propriedade de transitividade de ser continuação analítica temos que $(\tilde{U}_1, \text{int}\{\tilde{Z}_1(R)\})$ e $(\tilde{U}_2, \text{int}\{\tilde{Z}_2(Q)\})$ são continuação analítica em \tilde{X} .

Portanto concluímos que $\tilde{\mathcal{F}}$ é uma função analítica global. \square

Observação A.0.23. *Na demonstração do Lema A.0.22, o fato de U ser contínua ao longo de todas as curvas de $Z(\Omega)$ implica que $\tilde{\mathcal{F}}$ também possui essa propriedade no espaço de recobrimento \tilde{X} .*

Conclusão: Seja $u \in C^0(\Omega)$ solução de $Lu = 0$. Quando $Z(\Omega)$ é um conjunto aberto não simplesmente conexo, nós não podemos garantir uma fatoração em u do tipo $u = U \circ Z$, onde Z é uma integral primeira de L . Porém definimos a função $\tilde{u} = u \circ p$, no espaço de recobrimento universal $\tilde{\Omega}$ de Ω , então construímos uma função analítica global $\tilde{\mathcal{F}}$ em \tilde{X} , o espaço de recobrimento universal de $Z(\Omega)$. Como \tilde{X} é simplesmente conexo, segue do Teorema de Monodromia que $\tilde{\mathcal{F}}$ é uma função no sentido usual em \tilde{X} . Assim pela definição de $\tilde{\mathcal{F}}$ temos

$$\tilde{u} = \tilde{\mathcal{F}} \circ \tilde{Z}, \text{ em } \tilde{\Omega}.$$

Em palavras, temos uma fatoração em \tilde{u} como a composição de \tilde{Z} com uma função holomorfa. Quando Ω é simplesmente conexo e $Z(\Omega)$ não é, então temos

$$u = \tilde{\mathcal{F}} \circ \tilde{Z},$$

onde \tilde{Z} é o levantamento de Z para \tilde{X} .

Referências Bibliográficas

- [A] Ahlfors, L. V.; *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1970.
- [BT] Baouendi, M. S. e Treves, F.; *A property of the functions and distributions annihilated by a locally integrable system of complex vector fields*, Ann. of Math. **113** (1981), 387-421.
- [BCH] Berhanu, S., Cordaro, P. D. e Hounie, J.; *An Introduction to Involutive Structures*, Cambridge University Press, 2008.
- [BH2] Berhanu, S. e Hounie, J.; *An F. and M. Riesz theorem for planar vector fields*, Math. Ann. **320** (2001), 463-485.
- [BH1] Berhanu, S. e Hounie, J.; *On vector fields in the plane with the reflection property*, Trans. Amer. Math. Soc. **366** (2014) 1703-1723.
- [BHS] Berhanu, S., Hounie, J. e Santiago, P.; *A similarity principle for complex vector fields and applications*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001) 1661-1675.
- [Ca] Carleson, L.; *Mergelyan's theorem on uniform polynomial approximation*, Math. Scand. **15** (1964), 167-175.
- [C] Conway, J. B.; *Functions of One Complex Variable I*, Springer, 1978.
- [HT] Hounie, J. e Tavares, J.; *Radó's theorem for locally solvable vector fields*, Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), 829-836.
- [K] Kosniowski, C.; *A First Course in Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 1980.
- [Me] Mergelyan, S. N.; *Uniform approximations to functions of a complex variable*, Amer. Math. Soc. Transl. **101** (1954). Reeditado em A. M. S. Translations, Serie 1, Vol 3 (1962) 295-391.
- [M] Munkres, J.; *Topology*, Prentice Hall, 2000.