Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

A transformação vetorial de Ribaucour para subvariedades de curvatura constante.

Daniel da Silveira Guimarães

Orientador: *Prof. Dr. Ruy Tojeiro de Figueiredo Junior*

São Carlos
Junho de 2015

A transformação vetorial de Ribaucour para subvariedades de curvatura constante.

Daniel da Silveira Guimarães

Orientador: *Prof. Dr. Ruy Tojeiro de Figueiredo Junior*

Tese apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de doutor em Matemática.

São Carlos
Junho de 2015

Autor

Orientador

2000 *Mathematics Subject Classification.* 53B25.

Palavras chaves: Transformação vetorial de Ribaucour, subvariedade de curvatura seccional constante, subvariedade Lagrangiana, imersão isométrica horizontal.

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária/UFSCar

G963tv

Guimarães, Daniel da Silveira.
A transformação vetorial de Ribaucour para subvariedades de curvatura constante / Daniel da Silveira Guimarães -- São Carlos : UFSCar, 2015.
156 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.

1. Geometria diferencial. 2. Transformação de Ribaucour. 3. Espaços de curvatura constante. 4. Subvariedade Lagrangiana. 5. Imersão isométrica horizontal. I. Título.

CDD: 516.36 (20[a])

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Daniel da Silveira Guimarães, realizada em 09/06/2015:

Prof. Dr. Ruy Tojeiro de Figueiredo Junior
UFSCar

Prof. Dr. Marcos Dajczer
IMPA

Keti Tenenblat

Prof. Dr. Keti Tenenblat
UnB

Profa. Dra. Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves
IME-USP

Pedro Roitman

Prof. Dr. Pedro Roitman
UnB

"Retenhamos firmes a
confissão da nossa esperança;
porque fiel é o que prometeu."
(Hebreus 10,23)

"Você será um doutor!"
Frase proferida por minha
mãe na minha infância.
À minha mamãe.

Agradecimentos

Gostaria de expressar aqui meus sinceros agradecimentos: a Deus, por permitir mais esta conquista e por me iluminar a cada dia; aos meus pais Guimarães e Neusa (in memorian); à minha irmã Daniela; à minha esposa Fabiana; a toda a minha família; ao meu orientador Prof. Ruy Tojeiro pela orientação deste trabalho e pelo importante papel que, ao longo destes anos, exerceu em minha formação matemática; aos professores Keti Tenenblat, Marcos Dacjzer, Pedro Roitman e Rosa Chaves, pelas correções, sugestões e contribuições para a finalização deste trabalho, bem como pelos grandes incentivos para a pesquisa; aos colegas da UFSCar, pela amizade e apoio; em especial ao Samuel Canevari, Carlos Gonçalves e Sérgio Ura, que muito contribuíram para a construção e finalização deste trabalho; à Universidade Federal de Mato Grosso, aos colegas do Campus Universitário do Araguaia, que tornaram possível minha permanência na UFSCar durante todos estes anos e à CAPES, pelo suporte financeiro.

Resumo

Neste trabalho, obtemos uma redução da transformação vetorial de Ribaucour que preserva a classe das subvariedades de curvatura seccional constante de formas espaciais. Como consequência, é obtido um processo para gerar uma nova família de tais subvariedades a partir de uma dada. Provamos um teorema de decomposição para tal transformação, do qual decorre, em particular, o teorema clássico de permutabilidade para a transformação de Ribaucour de subvariedades de curvatura seccional constante. Mostramos ainda que k tais transformadas escalares de uma subvariedade de curvatura seccional constante c determinam um único k-cubo de Bianchi cujos vértices são todos subvariedades com a mesma curvatura seccional constante, cada uma das quais é dada por meio de fórmulas algébricas explícitas. Uma redução adicional de tal transformação é obtida para a classe de subvariedades Lagrangianas de dimensão n e curvatura seccional constante c de uma forma espacial complexa de dimensão n e curvatura seccional holomorfa 4c. Em particular, parametrizações explícitas, em termos de funções elementares, de exemplos com dimensão e curvatura arbitrária são fornecidos. Novamente, um Teorema de decomposição e uma versão do cubo de Bianchi para tal transformação são apresentados.

Abstract

In this work we obtain a reduction of the vectorial Ribaucour transformation that preserves the class of submanifolds with constant sectional curvature of space forms. As a consequence, a process is derived to generate a new family of such submanifolds starting from a given one. We prove a decomposition theorem for this transformation, from which the classical permutability theorem for the Ribaucour transformation of submanifolds with constant sectional curvature follows. Given k scalar Ribaucour transforms of a submanifold with constant sectional curvature, we prove the existence of a Bianchi k-cube all of whose vertices are submanifolds with the same constant sectional curvature, each of which is given by means of explicit algebraic formulas. A further reduction of the transformation is shown to preserve the class of Lagrangian submanifolds of dimension n and constant sectional curvature c of complex space forms of complex dimension n and constant holomorphic sectional curvature 4c. In particular, explicit parametrizations in terms of elementary functions of examples with arbitrary dimension and curvature are provided. A decomposition theorem and a version of the Bianchi cube for this transformation are also obtained.

Sumário

Introdução

O estudo de imersões isométricas $f : M^m(c) \to \mathbb{Q}^{m+p}(\tilde{c})$ de uma variedade Riemanniana $M^m(c)$ com curvatura seccional constante c e dimensão m em uma variedade Riemanniana completa e simplesmente conexa $\mathbb{Q}^{m+p}(\tilde{c})$ de curvatura seccional constante $\tilde{c}$ e dimensão $m + p$ tem despertado o interesse de várias gerações de geômetras.

Para $m \geq 3$, resultados fundamentais foram obtidos por E. Cartan, por meio de sua teoria de formas quadráticas exteriormente ortogonais. Em particular, Cartan mostrou que, se $c < \tilde{c}$, então $p \geq m - 1$ e, quando $p = m - 1$, então f possui fibrado normal plano. Este fato permite mostrar que existem localmente sistemas de coordenadas em $M^m(c)$ cujos campos coordenados são direções principais, o que, por sua vez, permite estabelecer uma correspondência entre tais imersões e as soluções de um sistema de equações diferenciais parciais não lineares, chamado de *equações generalizadas de sine-Gordon*, se $0 \neq c < \tilde{c}$, e *equações generalizadas da onda*, se $0 = c < \tilde{c}$ (ver [1], [2], [32], [33], [34]).

Resultados duais aos de Cartan foram obtidos mais tarde por J.D.Moore ([27]). Moore desenvolveu a teoria de formas bilineares Euclidianas com valores em espaços vetoriais munidos de formas bilineares $\langle \cdot, \cdot \rangle$ não-degeneradas, estendendo a teoria de formas quadráticas exteriormente ortogonais de Cartan, que corresponde ao caso em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é positivo-definida. Usando essa teoria, Moore reobteve um resultado devido a O'Neill [28], segundo o qual a segunda forma fundamental de uma imersão isométrica $f : M^m(c) \to \mathbb{Q}^{m+p}(\tilde{c})$, com $c > \tilde{c}$ e $p \leq m - 2$, se decompõe ortogonalmente como

$$\alpha^f = \sqrt{c - \tilde{c}}\langle \cdot, \cdot \rangle \eta + \gamma, \qquad (0.0.1)$$

em que η é um campo unitário normal a f. Um ponto $x \in M$ no qual α^f se decompõe como em (0.0.1) é denominado um *ponto fracamente umbílico* para f. Se todos os pontos $x \in M$ forem fracamente umbílicos para f, diz-se que f é *fracamente umbílica*. Para $p = m - 1$, Moore provou que se f não tem pontos fracamente umbílicos então f é holonômica, em particular tem fibrado normal plano. Isso permitiu mostrar que tais imersões estão em correspondência com as *equações generalizadas de Sinh-Gordon*, se $0 \neq c > \tilde{c}$, ou com as *equações generalizadas de Laplace* se $0 = c > \tilde{c}$ (ver [10]).

Posteriormente, Dajczer e Tojeiro mostraram em ([8]) que uma imersão isométrica $f \colon M^m(c) \to \mathbb{Q}^{m+p}(\tilde{c})$, com $c > \tilde{c}$ e $p \leq m - 2$ é, localmente em um subconjunto aberto e denso de M^m, uma composição $f = i \circ h$, em que $i\colon M^m(c) \to \mathbb{Q}^{m+1}(\tilde{c})$ é uma inclusão umbílica e $h\colon U \to \mathbb{Q}^{m+p}(\tilde{c})$ é uma imersão isométrica de um aberto $U \subset \mathbb{Q}^{m+1}(\tilde{c})$ contendo $i(M^m(c))$. O mesmo resultado é ainda válido se $p = m - 1$ e f é fracamente umbílica.

Com o intuito de produzir exemplos explícitos de imersões isométricas $f\colon M^m(c) \to \mathbb{Q}^{2m-1}(\tilde{c})$, $c > \tilde{c}$, sem pontos fracamente umbílicos, Dajczer e Tojeiro estenderam em ([12]) a transformação clássica de Ribaucour. Essa transformação permite obter, a partir de uma dada imersão isométrica com certas propriedades, parametrizações de uma família de novas imersões isométricas do mesmo tipo, em termos de soluções de um sistema linear de EDP´s. Em particular, começando-se com soluções triviais é possível, em muitos casos, encontrar as soluções do sistema linear de EDP´s e, então, obter exemplos explícitos de imersões com aquelas propriedades.

A transformação de Ribaucour foi também aplicada com sucesso para a construção de imersões isométricas Lagrangianas não totalmente geodésicas $f : M^n(c) \to \tilde{M}^n(4c)$. Uma imersão isométrica $f : M^n \to \tilde{M}^m$ de uma variedade Riemanniana n-dimensional em uma variedade de Kaehler de dimensão complexa m é *Lagrangiana* se $n = m$ e a estrutura quase complexa J de $\tilde{M}^m$ satisfaz $J(f_* T_p M) \subset N_f M(p)$ para todo $p \in M$.

Com o objetivo de descrever adequadamente a iteração de transformações escalares de Ribaucour, Dacjzer, Florit e Tojeiro definem em [7] a transformação vetorial de Ribaucour de uma subvariedade de $\mathbb{R}^N$, motivados por tal noção para sistemas ortogonais, estudada anteriormente por Lius e Manas em [24]. Em particular, os autores estendem um resultado clássico devido a Bianchi, conhecido como o *Teorema de permutabilidade*. É um fato conhecido que duas transformadas de Ribaucour de uma superfície determinam uma família a 1-parâmetro de tais transformadas, chamada de família associada às duas transformadas iniciais. Bianchi mostrou que existe uma outra família a 1-parâmetro de superfícies, a família conjugada, cada elemento da qual é uma transformada de Ribaucour de todos os elementos da família associada. Assim, cada elemento da família conjugada, a superfície original e suas duas transformadas iniciais formam uma quadra de superfícies, chamada um *quadrilátero de Bianchi*, cada elemento do qual é uma transformada de Ribaucour dos dois elementos adjacentes. Em [7] mostrou-se que, a partir de k tais transformadas escalares $f_1, \ldots, f_k$ de uma subvariedade f de $\mathbb{R}^N$ e de uma escolha genérica, para quaisquer $1 \leq i \neq j \leq k$, de uma imersão f_{ij} com a propriedade de que $\{f, f_i, f_j, f_{ij}\}$ forma um quadrilátero de Bianchi, existe um único cubo k-dimensional que tem f como um dos vértices, $f_1, \ldots, f_k$ como os vértices contíguos a esse, e $\{f_{ij}, 1 \leq i \neq j \leq k\}$ como os vértices adjacentes a esses últimos. Além disso, cada um dos vértices desse cubo é dado por meio de fórmulas algébricas explícitas.

Neste trabalho obtemos uma redução da transformação vetorial de Ribaucour que preserva a classe das subvariedades de curvatura seccional constante de formas espaciais. Tal redução fica determinada por um operador linear L de um espaço vetorial Euclidiano V, assim a chamamos de *L-transformação de Ribaucour*. No caso escalar, ou seja, quando

V tem dimensão um, a L-transformação reduz-se à redução da transformação escalar de Ribaucour para subvariedades de curvatura seccional constante obtida em [12]. Obtemos um teorema de decomposição para a L-transformação, do qual decorre, em particular, que uma L-transformação determinada por um tensor *simétrico* L é a iterada de $\dim V$ transformações escalares de Ribaucour do mesmo tipo. Em particular, mostramos que k tais transformadas escalares de uma subvariedade de curvatura seccional constante c determinam um único k-cubo de Bianchi cujos vértices são todos subvariedades com a mesma curvatura seccional constante, cada uma das quais é dada por meio de fórmulas algébricas explícitas. Observamos, por outro lado, que uma L-transformação determinada por um tensor *não*-simétrico L produz subvariedades com curvatura seccional constante que não são obtidas pela iteração de uma sequência de L-transformações de Ribaucour escalares.

Através de uma redução adicional da L-transformação, obtemos uma transformação que preserva a classe das subvariedades Lagrangianas de dimensão n com curvatura e índice de nulidade relativa nulos de $\mathbb{R}^{2n}$. Tal transformação fica expressa em termos de um novo operador linear P de um espaço vetorial Euclidiano V, assim a chamamos de *P-transformação de Ribaucour*. Determinamos as P-transformações que preservam a classe de subvariedades Lagrangianas de dimensão n com curvatura nula contidas em $\mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$, as quais são obtidas como levantamentos de subvariedades Lagrangianas de curvatura nula e dimensão $n-1$ de $\mathbb{CP}^{n-1}$.

Obtemos, mais geralmente, uma P-transformação para a classe de subvariedades de curvatura constante c e dimensão n que são *horizontais* com respeito à fibração de Hopf de $\mathbb{Q}^{2n+1}_\epsilon(c)$, a qual induz uma transformação para a classe das subvariedades Lagrangianas de dimensão n, curvatura c e índice de nulidade relativa nulo de um espaço complexo de dimensão (complexa) n e curvatura holomorfa constante $4c$. Obtemos ainda um teorema de decomposição para a P-transformação, do qual decorre, em particular, que uma P-transformação determinada por um tensor *simétrico* P é a iterada de $\dim V$ transformadas escalares de Ribaucour do mesmo tipo. Em particular, mostramos como obter, a partir de k P-transformadas escalares de uma subvariedade Lagrangiana de dimensão n com curvatura e índice de nulidade relativa nulos de $\mathbb{R}^{2n}$, fórmulas explícitas para uma família de novas subvariedades da mesma classe, a qual está em correspondência com os vértices de um cubo k-dimensional, do qual as k subvariedades iniciais são os vértices contíguos àquele associado à subvariedade dada. Um resultado análogo é obtido para a classe das subvariedades de curvatura constante c e dimensão n que são horizontais com respeito à fibração de Hopf de $\mathbb{Q}^{2n+1}_\epsilon(c)$.

A seguir fazemos uma breve explanação do conteúdo de cada capítulo. No capítulo 1, descrevemos a teoria básica de fibrados vetoriais e subvariedades, estabelecemos a correspondência entre certas classes de subvariedades com curvatura constante e fibrado normal plano e certos sistemas de EDP's, e mostramos alguns fatos básicos sobre subvariedades Lagrangianas e horizontais.

Para demonstrar, no Capítulo 4, a existência de L-transformadas de subvariedades com curvatura constante satisfazendo certas propriedades adicionais, é necessário provar a existência de soluções inversíveis de certo sistema de equações matriciais, cada uma das quais é um caso particular da chamada *equação de Sylvester* $AX + XB = C$ (ver [21], [22] e [25]). Com o intuito de mostrar tal resultado, fazemos no capítulo 2 um estudo minucioso da equação de Sylvester e de alguns de seus casos particulares. Por outro lado, para provar, no Capítulo 5, a existência de P-transformadas de subvariedades Lagrangianas e horizontais com curvatura constante, é necessário provar a existência e unicidade de soluções inversíveis de uma certa *equação de Lyapunov*, ou seja, de uma equação matricial do tipo $A^tX + XA = C$. Isso é feito na seção 2.4. Observamos que o problema de encontrar soluções inversíveis de tais equações matriciais tem sido explorado por vários matemáticos (ver [6], [14], [15], [20] e [36]).

No Capítulo 3, descrevemos a teoria da transformação escalar de Ribaucour e também a teoria da transformação vetorial de Ribaucour de subvariedades do $\mathbb{R}^N$. Boa parte dos resultados são dos trabalhos de Dajczer e Tojeiro. Finalizamos tal capítulo estendendo a transformação vetorial de Ribaucour para o caso em que o espaço ambiente tem curvatura seccional constante não nula e obtemos uma versão do teorema do cubo de Bianchi nesse contexto. Verificamos ainda que uma hipótese de tal resultado, feita em [7], é de fato desnecessária.

Os principais resultados deste trabalho estão nos capítulos 4 e 5. O Capítulo 4 contém os resultados sobre a L-transformação para subvariedades de curvatura seccional constante descritos anteriormente, enquanto no Capítulo 5 estão aqueles sobre a P-transformação para subvariedades Lagrangianas e horizontais com curvatura constante. Exemplos explícitos de subvariedades Lagrangianas de dimensão n com curvatura e índice de nulidade relativa nulos de $\mathbb{R}^{2n}$, assim como de subvariedades de curvatura constante c e dimensão n que são horizontais com respeito à fibração de Hopf de $\mathbb{Q}_\epsilon^{2n+1}(c)$, são obtidos no final do Capítulo 5 aplicando a P-transformação de Ribaucour.

No final do trabalho, incluímos um apêndice com alguns resultados conhecidos sobre a existência e unicidade de soluções de sistemas equações diferenciais parciais lineares e não lineares. Concluímos esta introdução sugerindo, ao leitor mais experiente em teoria de subvariedades e na teoria das transformações de Ribaucour, iniciar a leitura deste trabalho no Capítulo 4, recorrendo aos três primeiros capítulos sempre que necessário.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo são expostos alguns resultados necessários para os teoremas principais de nosso trabalho. Em toda a tese, M denota uma variedade Riemanniana n-dimensional de classe C^∞ cuja topologia é de Hausdorff e tem base enumerável.

1.1 Fibrados vetoriais

Para o estudo da transformação vetorial de Ribaucour são necessários alguns fatos sobre fibrados vetorias. Nesta seção, introduzimos tais fibrados e os conceitos de seção, conexão e tensor curvatura, dentre outros. Esta primeira parte encontra-se nos livros [5] e [23].

Definição 1.1.1. *Seja $\pi : E \to M$ uma aplicação diferenciável de classe C^∞ entre as variedades diferenciáveis E e M. Dizemos que (π, E, M) é um fibrado vetorial de posto k, se para cada $x \in M$,*

i) $E_x := \pi^{-1}(x)$ é um espaço vetorial real de dimensão k.

ii) existem uma vizinhança aberta U de x e um difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ que aplica E_y isomorficamente sobre $\mathbb{R}^k \approx \{y\} \times \mathbb{R}$, para cada $y \in U$.

Denotamos esse fibrado por $\pi : E \to M$, E ou por $E = \bigcup_{x\in M} E_x$.

As variedades E e M são chamadas de *espaço total* e *base*, respectivamente, e a aplicação π a *projeção*. Para cada $x \in M$, o espaço vetorial $E_x = \pi^{-1}(x)$ é chamado de *fibra* de π sobre x. A aplicação $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ é chamada de uma *trivialização local* e uma família de trivializações locais $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ tal que $\{U_\alpha\}$ é um aberto sobre M é dita um *atlas* do fibrado vetorial $\pi : E \to M$.

Como exemplos, temos o fibrado tangente $TM = \bigcup_{x\in M} T_xM$, o fibrado trivial $M \times \mathbb{R}^k = \bigcup_{x\in M} \mathbb{R}^k$, o fibrado de homomorfismos entre dois fibrados vetoriais E e F, dado por $Hom(E, F) = \bigcup_{x\in M} Hom(E_x, F_x)$, em que $Hom(E_x, F_x)$ é o espaço vetorial das aplicações lineares de E_x em F_x, o fibrado dual $E^* = Hom(E, \mathbb{R})$ e o fibrado induzido pela aplicação diferenciável $f : N \to M$, dado por $f^*E := \bigcup_{x\in N} E_{f(x)}$.

Dados dois fibrados $\pi_i : E_i \to M$, $1 \leq i \leq 2$, uma aplicação diferenciável $\alpha : E_1 \to E_2$ é chamada de um *morfismo de fibrados vetoriais* sobre M se aplica $\pi_1^{-1}(x)$ linearmente sobre $\pi_2^{-1}(x)$ para todo $x \in M$. Se α é uma bijeção, então α é dita um *isomorfismo* entre fibrados vetoriais.

Se $\pi : E \to M$ é um fibrado vetorial de posto k e $F \subset E$ é um subconjunto tal que a restrição $\pi_F : F \to M$ também tem a estrutura de um fibrado vetorial de posto j tal que a inclusão $i : F \to E$ é um morfismo entre fibrados vetoriais, então F é chamado um *subfibrado vetorial* de E.

Uma *seção* local ξ num fibrado E é uma aplicação C^∞ de um aberto U de M em E tal que $\pi \circ v = id_U$, ou seja, $v(x) \in E_x$ pata todo $x \in M$. Denotamos o conjunto das seções sobre U por $\Gamma(U, E)$, e abreviamos $\Gamma(M, E)$ por $\Gamma(E)$. O conjunto $\Gamma(E)$ é um módulo sobre o anel $C^\infty(M)$.

Uma seção $X : M \to TM$ do fibrado tangente $\pi : TM \to M$ de uma variedade diferenciável é um campo de vetores de M. O conjunto dessas seções é denotado por $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$. Se $f : N \to M$ é uma aplicação diferenciável e $\pi : E \to M$ é um fibrado vetorial, então uma seção $\xi \in \Gamma(f^*E)$ do fibrado induzido f^*E é também chamada de uma seção de E ao longo de f. Em particular, um campo vetorial ao longo de f é uma seção de f^*TM.

Dados uma trivialização local (U, φ) e uma seção $\xi \in \Gamma(E)$, existe uma aplicação diferenciável $\xi^\varphi : U \to \mathbb{R}^k$, chamada de *parte principal* de ξ com respeito a φ, tal que

$$\varphi(\xi(x)) = (x, \xi^\varphi(x)),\ \forall\ x \in U.$$

A diferenciabilidade de ξ é equivalente à diferenciabilidade de ξ^φ para cada trivialização local (U, φ). Em particular, a seção nula de E, fazendo corresponder a cada $x \in M$ a origem de E_x, é claramente diferenciável, pois sua parte principal com respeito a uma trivialização local é uma aplicação constante.

Temos o seguinte resultado

Proposição 1.1.2. *Sejam $\pi_1 : E \to M$ e $\pi_2 : F \to M$ fibrados vetoriais. Existe um isomorfismo de módulos entre $Hom(\Gamma(E), \Gamma(F))$ e $\Gamma(Hom(E, F))$.*

Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial de posto k. Um *referencial móvel* sobre um subconjunto aberto $U \subset M$ é um conjunto de k seções $\xi_1, ..., \xi_k \subset \Gamma(U, E)$ tal que $\{\xi_1(x), ..., \xi_k(x)\}$ é uma base de E_x para todo $x \in U$. Cada trivialização local (U, φ) de E determina um referencial móvel $\eta_1, ..., \eta_k$ sobre U por

$$\eta_i(x) = \varphi^{-1}(x, e_i),\ 1 \leq i \leq k,$$

em que $\{e_1, ..., e_k\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^k$. Reciprocamente, um referencial móvel $\xi_1, ..., \xi_k$ sobre U determina uma trivilização local $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ dada por

$$\varphi(e) = (\pi(e), \varphi_{\pi(e)}e),$$

em que, para cada $x \in U$, φ_x é o isomorfismo entre E_x e $\mathbb{R}^k$ determinado pela base $\{\xi_1(x), ..., \xi_k(x)\}$. Em outras palavras,

$$\varphi^{-1}(x, c^1, ..., c^k) = \sum_{i=1}^{k} c^i \xi_i(x).$$

Segue desse fato o seguinte Corolário

Lema 1.1.3. *Um fibrado vetorial de posto k é trivial se, e só se, admite um referencial móvel global.*

Seja $g : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to C^\infty(M)$ uma aplicação $C^\infty(M)$-bilinear, ou equivalentemente, uma seção de $Hom^2(E, \mathbb{R})$. Então g é dita uma *métrica pseudo-Riemanniana* sobre E se para todo $e \in E$ existe um $f \in E$ tal que $\pi(e) = \pi(f)$ e $g(e, f) \neq 0$. Se $g(e, e) > 0$ para todo $e \in E$, a métrica g é chamada de métrica Riemanniana sobre E. Um fibrado dotado com uma tal métrica g será chamado um *fibrado vetorial pseudo-Riemanniano*. Usando partições da unidade é possível mostrar que todo fibrado vetorial admite uma métrica Riemanniana.

Definição 1.1.4. Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial. Uma *conexão* em E é uma aplicação $\mathbb{R}$-bilinear

$$\begin{array}{rccc} \nabla^E & : & \Gamma(M) \times \Gamma(E) & \to & \Gamma(E), \\ & & (X, v) & \longmapsto & \nabla^E(X, v) := \nabla^E_X v, \end{array}$$

tal que

i) $\nabla^E_{fX} v = f \nabla^E_X v$,

ii) $\nabla^E_X f v = X(f) v + f \nabla^E_X v$.

Além disso, dizemos que tal conexão é compatível com a métrica g em E se

$$Xg(u, v) = g\left(\nabla^E_X u, v\right) + g\left(u, \nabla^E_X v\right), \; X \in \Gamma(M) \text{ e } u, v \in \Gamma(E).$$

Sabemos que $(\nabla^E_X v)(x)$ depende apenas dos valores de X em x e de v ao longo de uma curva $c : I \to M$ com $0 \in I$, $c(0) = x$ e $c'(0) = X_x$.

Alguns exemplos importantes de conexões: A conexão de Levi-Civita em TM, a qual é a única conexão em TM compatível com a métrica e simétrica ($\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] := XY - YX, \; X, Y \in \Gamma(M)$), e a conexão no fibrado trivial $M \times \mathbb{R}^k$, definida de modo que, para uma seção ξ dada por $\xi(x) = (x, f(x))$ para uma função suave $f : M \to \mathbb{R}^k$, a parte principal de $\nabla_X \xi$ é a função $X(f)$.

Uma seção $\xi \in \Gamma(U; E)$ é dita *paralela* sobre U se $\nabla_X \xi = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(U)$. No fibrado trivial com a conexão canônica dada no exemplo acima, essas seções são aquelas dadas por $\xi(x) = (x, c)$, $\forall x \in M$, em que c é uma constante.

Um subfibrado vetorial $F \subset E$ é *paralelo* se $\nabla_X \xi$ é uma seção de F para quaisquer $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \Gamma(F)$.

Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial com a conexão ∇ e seja $f : N \to M$ uma aplicação diferenciável. Então existe uma única conexão $f^*\nabla$ no fibrado induzido f^*E tal que

$$f^*\nabla_X(\xi \circ f) = \nabla_{f_*X}\xi$$

para quaisquer $X \in \mathfrak{X}(N)$ e $\xi \in \Gamma(E)$. Tal conexão é chamada de *conexão induzida*. Se γ é uma curva em M e $\xi \in \Gamma(E)$, denotamos $\gamma^*\nabla_{d/dt}(\xi \circ \gamma)$ simplesmente por $\nabla_{d/dt}\xi$.

Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial com uma conexão ∇. Dada uma curva $\gamma : J \to M$, para cada $a \in J$ e cada $e \in E_{\xi(a)}$ existe uma única seção η tal que η é paralela ao longo de γ e $\eta(a) = e$. Tal seção é chamada de *extensão paralela* de e ao longo de γ, e seu valor $\eta(b)$ em algum $b \in J$ o *transporte paralelo* de e de $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

Seja $G = Hom(E, F) = E^* \otimes F$. A derivada covariante $\nabla\zeta \in \Gamma(TM^* \otimes G) = Hom(\Gamma(T^*M), \Gamma(G))$ de uma seção $\zeta \in \Gamma(G)$ é definida por

$$\left(\nabla^G_X \zeta\right)(\xi) = \nabla^F_x \zeta(\xi) - \zeta(\nabla^E_X \xi),$$

para quaisquer $X \in \Gamma(TM)$ e $\xi \in \Gamma(E)$. Se $\omega \in \Gamma(T^*M \otimes E)$ é uma 1-forma sobre M^n com valores em E, então $\nabla\omega \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes E)$ é definida por

$$\nabla\omega(X, Y) := (\nabla^{T^*M \otimes E}_X \omega)(Y) = \nabla^E_X \omega(Y) - \omega(\nabla_X Y),$$

em que a conexão ∇ do lado direito da equação é a conexão de Levi-Civita de M^n.

A derivada exterior $d\omega \in \Gamma(\Lambda^2 T^*M \otimes E)$ de ω está relacionada com $\nabla\omega$ por

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y) &= \nabla\omega(X, Y) - \nabla\omega(Y, X) \\ &= \nabla^E_X \omega(Y) - \nabla^E_Y \omega(X) - \omega([X, Y]). \end{aligned}$$

A 1-forma ω é *fechada* se $d\omega = 0$. Se $\zeta \in \Gamma(E)$, então $\nabla\zeta = d\zeta \in \Gamma(T^*M \otimes E)$ é a 1-forma dada por $\nabla\zeta(X) = \nabla^E_X \zeta$.

Definição 1.1.5. Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial munido de uma conexão ∇^E. O *tensor de curvatura* de ∇^E é a aplicação

$$R^E : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(E)$$

definido por $R^E(X, Y) = [\nabla^E_X, \nabla^E_Y] - \nabla^E_{[X,Y]}$.

É fácil verificar que R é trilinear sobre $C^\infty(M)$. Assim, dados $X, Y \in \Gamma(TM)$ e $v \in \Gamma(E)$, para cada $x \in M$ o valor de $R(X, Y)v$ em x, depende somente dos valores de X, Y e v em x, ou seja, podemos considerar $R \in \Gamma(Hom(TM \times TM \times E; E))$. O tensor curvatura $\bar{R}$ da conexão induzida sobre f^*E é dado em qualquer ponto $x \in N$ por

$$\bar{R}(X,Y)e = R(f_*X, f_*Y)e,$$

para quaisquer $X, Y \in T_xN$ e para todo $e \in E_{f(x)}$.

Dizemos que uma conexão linear ∇ sobre o fibrado vetorial E é plana se $R^E \equiv 0$. Um fibrado vetorial dotado com uma tal conexão será chamado um *fibrado vetorial plano*. Tais fibrados admitem a seguinte caracterização.

Teorema 1.1.6. *Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial com uma conexão linear ∇. Então cada $e \in E$ admite uma extensão local paralela se, e só se, E é um fibrado vetorial plano.*

A versão global desse resultado é

Teorema 1.1.7. *Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial de posto k com uma conexão linear ∇ sobre uma variedade simplesmente conexa. São equivalentes:*

i) $R \equiv 0$,

ii) existe um referencial global paralelo $\xi_1, ..., \xi_k$,

iii) existe um isomorfismo paralelo $\Phi : E \to M \times \mathbb{R}^k$.

Como consequência, temos:

Corolário 1.1.8. *Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial pseudo-Riemanniano de posto k com uma conexão compatível linear ∇ sobre uma variedade simplesmente conexa. São equivalentes:*

i) $R \equiv 0$,

ii) existe um referencial ortonormal global paralelo $\xi_1, ..., \xi_k$,

iii) existe uma isometria paralela $\Phi : E \to M \times \mathbb{R}^k$.

Dadas $\zeta_1 \in \Gamma(E^* \otimes F)$ e $\zeta_2 \in \Gamma(F^* \otimes H)$, definimos $\zeta_2\zeta_1 \in \Gamma(E^* \otimes H)$ por

$$\zeta_2\zeta_1(\xi) = \zeta_2(\zeta_1(\xi)), \quad \xi \in \Gamma(E).$$

Para $\zeta \in \Gamma(E^* \otimes F)$, definimos $\zeta^t \in \Gamma(F^* \otimes E)$ por

$$\langle \zeta^t(\eta), \xi \rangle = \langle \eta, \zeta(\xi) \rangle, \quad \eta \in \Gamma(F) \text{ e } \xi \in \Gamma(E).$$

Resumimos no seguinte lema algumas propriedades elementares das derivadas covariante e exterior, as quais serão úteis no estudo da transformação vetorial de Ribaucour.

Lema 1.1.9. *Valem as seguintes afirmações:*

(i) Se $\zeta_1 \in \Gamma(E^* \otimes F)$ *e* $\zeta_2 \in \Gamma(F^* \otimes H)$*, então* $d(\zeta_2\zeta_1) = (d\zeta_2)\zeta_1 + \zeta_2(d\zeta_1)$.

(ii) Se $\zeta \in \Gamma(E^* \otimes F)$ *então* $d\zeta^t = (d\zeta)^t$.

(iii) Se $\xi \in \Gamma(E)$ *então* $d^2\xi(X,Y) = R^E(X,Y)\xi$.

(iv) Se $G = E^* \otimes F$ *e* $Z \in \Gamma(G)$ *então* $(R^G(X,Y)\zeta)(\xi) = R^F(X,Y)\zeta(\xi) - \zeta(R^E(X,Y)\xi)$.

Demonstração. i) Por um lado,

$$d(\zeta_2\zeta_1)(X)(\xi) = (\nabla_X^{E^*\otimes H}(\zeta_2\zeta_1))\xi = \nabla_X^H\zeta_2(\zeta_1(\xi)) - \zeta_2\zeta_1(\nabla_X^E\xi).$$

Por outro lado,

$$(d\zeta_2)(X)\zeta_1(\xi) = (\nabla_X^{F^*\otimes H}\zeta_2)(\zeta_1(\xi)) = \nabla_X^H\zeta_2(\zeta_1(\xi)) - \zeta_2(\nabla_X^F\zeta_1(\xi)),$$

e

$$\zeta_2(d\zeta_1)(X)\xi = \zeta_2(\nabla_X^{E^*\otimes F}\zeta_1)(\xi) = \zeta_2(\nabla_X^F\zeta_1(\xi) - \zeta_1(\nabla_X^F\xi)) = \zeta_2(\nabla_X^F\zeta_1(\xi)) - \zeta_2\zeta_1(\nabla_X^E\xi).$$

ii) Temos $d\zeta \in \Gamma(TM^* \otimes E^* \otimes F)$ e $d\zeta^t \in \Gamma(TM^* \otimes F^* \otimes E)$. Por um lado,

$$\begin{aligned}
\langle d\zeta^t(X)\eta, \xi\rangle &= \left\langle (\nabla_X^{F^*\otimes E}\zeta^t)(\eta), \xi\right\rangle = \left\langle \nabla_X^E\zeta^t\eta - \zeta^t(\nabla_X^F\eta), \xi\right\rangle \\
&= \left\langle \nabla_X^E\zeta^t\eta, \xi\right\rangle - \left\langle \zeta^t(\nabla_X^F\eta), \xi\right\rangle \\
&= X\left\langle \zeta^t\eta, \xi\right\rangle - \left\langle \zeta^t\eta, \nabla_X^E\xi\right\rangle - \left\langle \nabla_X^F\eta, \zeta\xi\right\rangle.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\left\langle (\nabla_X^{E^*\otimes F}\zeta)^t(\eta), \xi\right\rangle &= \left\langle \eta, (\nabla_X^{E^*\otimes F}\zeta)\xi\right\rangle = \left\langle \eta, \nabla_X^F\zeta(\xi) - \zeta(\nabla_X^E\xi)\right\rangle \\
&= \left\langle \eta, \nabla_X^F\zeta(\xi)\right\rangle - \left\langle \eta, \zeta(\nabla_X^E\xi)\right\rangle \\
&= X\left\langle \eta, \zeta(\xi)\right\rangle - \left\langle \nabla_X^F\eta, \zeta(\xi)\right\rangle - \left\langle \zeta^t(\eta), \nabla_X^E\xi\right\rangle.
\end{aligned}$$

iii) Temos

$$\begin{aligned}
d^2\xi(X,Y) &= dd\xi(X,Y) = \nabla d\xi(X,Y) - \nabla d\xi(Y,X) \\
&= (\nabla_X^{TM^*\otimes E}d\xi)(Y) - (\nabla_Y^{TM^*\otimes E}d\xi)(X) \\
&= \nabla_X^E d\xi(Y) - d\xi(\nabla_X Y) - \nabla_Y^E d\xi(X) + d\xi(\nabla_Y X) \\
&= \nabla_X^E\nabla_Y^E\xi - \nabla_Y^E\nabla_X^E\xi - \nabla_{\nabla_X Y}^E\xi + \nabla_{\nabla_Y X}^E\xi \\
&= R^E(X,Y)\xi.
\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
(R^{E^*\otimes F}(X,Y)\zeta)(\xi) &= (\nabla_X^{E^*\otimes F}\nabla_Y^{E^*\otimes F}\zeta)(\xi) - (\nabla_Y^{E^*\otimes F}\nabla_X^{E^*\otimes F}\zeta)(\xi) - (\nabla_{[X,Y]}^{E^*\otimes F}\zeta)(\xi)\\
&= \nabla_X^F(\nabla_Y^{E^*\otimes F}\zeta(\xi)) - \nabla_Y^{E^*\otimes F}\zeta(\nabla_X^E\xi) - \nabla_Y^F(\nabla_X^{E^*\otimes F}\zeta(\xi))\\
&\quad +\nabla_X^{E^*\otimes F}\zeta(\nabla_Y^E\xi) - \nabla_{[X,Y]}^F\zeta(\xi) + \zeta(\nabla_{[X,Y]}^E\xi)\\
&= \nabla_X^F(\nabla_Y^F\zeta(\xi) - \zeta(\nabla_Y^E\xi)) - \nabla_Y^F\zeta(\nabla_X^E\xi) + \zeta(\nabla_Y^F\nabla_X^E\xi)\\
&\quad -\nabla_Y^F(\nabla_X^F\zeta(\xi) - \zeta(\nabla_X^E\xi)) + \nabla_X^F\zeta(\nabla_Y^E\xi) - \zeta(\nabla_X^E\nabla_Y^E\xi)\\
&\quad -\nabla_{[X,Y]}^F\zeta(\xi) + \zeta(\nabla_{[X,Y]}^F\xi)\\
&= \nabla_X^F\nabla_Y^F\zeta(\xi) - \nabla_X^F\zeta(\nabla_Y^E\xi) - \nabla_Y^F\zeta(\nabla_X^E\xi) - \zeta(\nabla_Y^E\nabla_X^E\xi)\\
&\quad -\nabla_Y^F\nabla_X^F\zeta(\xi) + \nabla_Y^F\zeta(\nabla_X^E\xi)\\
&\quad +\nabla_X^F\zeta(\nabla_Y^F\xi) - \zeta(\nabla_X^E\nabla_Y^E\xi) - \nabla_{[X,Y]}^F\zeta(\xi) + \zeta(\nabla_{[X,Y]}^E\xi)\\
&= R^F(X,Y)\zeta(\xi) - \zeta(R^E(X,Y)\xi).
\end{aligned}$$

■

1.2 Teoria básica de subvariedades

Sejam M^n e $\tilde{M}^m$ variedades diferenciáveis com dimensões n e m, respectivamente. Dizemos que a aplicação diferenciável $f : M^n \to \tilde{M}^m$ é uma imersão se a diferencial $f_* : T_xM \to T_{f(x)}\tilde{M}$ é injetiva para todo $x \in M^n$. O número $p = m - n$ é chamado de codimensão de f. Em particular, f é uma hipersuperfície se $p = 1$.

Uma imersão $f : M^n \to \tilde{M}^m$ entre variedades Riemannianas com métricas $\langle .,.\rangle_M$ e $\langle .,.\rangle_{\tilde{M}}$ é uma *imersão isométrica* se

$$\langle X, Y\rangle_M = \langle f_*X, f_*Y\rangle_{\tilde{M}}, \tag{1.2.1}$$

para quaisquer $x \in M$ e X, Y em T_xM. Se $f : M^n \to \tilde{M}^m$ é uma imersão e $\langle .,.\rangle_{\tilde{M}}$ é uma métrica Riemanniana em $\tilde{M}$, então a métrica Riemanniana sobre M^n definida por (1.2.1) é chamada a métrica induzida por f, com respeito à qual f se torna uma imersão isométrica.

Denotamos por f^*TM o fibrado induzido por f sobre M^n, cuja fibra no ponto $x \in M^n$ é $T_{f(x)}\tilde{M}$. O complemento ortogonal de f_*T_xM em $T_{f(x)}\tilde{M}$ é chamado de *espaço normal* de f em x e é denotado por $N_fM(x)$. O fibrado $N_fM = \bigcup_{x\in M} N_fM(x)$ é chamado de *fibrado normal* de f.

A conexão de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ de $\tilde{M}^m$ induz naturalmente uma única conexão $\hat{\nabla}$ em $f^*T\tilde{M}$ tal que $\hat{\nabla}_X(Z\circ f) = \tilde{\nabla}_{f_*X}Z$, para quaisquer $x \in M^n$ e $X, Z \in T\tilde{M}$. Daqui por diante identificamos $\hat{\nabla}$ com $\tilde{\nabla}$.

Dados os campos de vetores $X, Y \in TM$, temos a decomposição ortogonal

$$\tilde{\nabla}_X f_*Y = (\tilde{\nabla}_X f_*Y)^\top + (\tilde{\nabla}_X f_*Y)^\perp,$$

nas componentes tangente e normal com respeito a f. É fácil mostrar que

$$\nabla_X Y = f_*^{-1}(\tilde{\nabla}_X f_* Y)^\top$$

coincide com a conexão de Levi-Civita em M.

A aplicação $\alpha : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(N_f M)$ definida por

$$\alpha_f(X,Y) = (\tilde{\nabla}_X f_* Y)^\perp,$$

é chamada de *segunda forma fundamental* de f, a qual pode ser considerada como uma seção em $Hom(TM, TM; N_f M)$. Dessa forma, temos a fórmula de Gauss

$$\tilde{\nabla}_X f_* Y = f_* \nabla_X Y + \alpha(X,Y).$$

O *primeiro espaço normal* $N_1^f(x)$ de f em $x \in M$ é definido como o subespaço do espaço normal $N_f M(x)$ dado por

$$N_1^f(x) = ger\{\alpha_f(X,Y);\ \forall\ X,Y \in T_x M\}.$$

O *operador de forma* A_ξ de f em $x \in M^n$ com respeito a $\xi \in N_x M$ é definido por

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle$$

para quaisquer $X, Y \in T_x M$. Assim, dados os campos de vetores $X, Y \in \Gamma(TM)$ e $\xi \in \Gamma(N_f M)$, temos

$$\left\langle \tilde{\nabla}_X \xi, f_* Y\right\rangle = -\left\langle \xi, \tilde{\nabla}_X f_* Y\right\rangle = -\langle \alpha(X,Y), \xi\rangle = -\langle A_\xi X, Y\rangle.$$

Logo, a componente tangente de $\tilde{\nabla}_X \xi$ é $-f_* A_\xi X$ e, assim, podemos considerar $A \in \Gamma(Hom(TM, N_f M; TM))$. A componente normal $\nabla_X^\perp \xi := (\tilde{\nabla}_X \xi)^\perp$ define uma conexão compatível em $N_f M$, chamada *conexão normal* de f. Assim, temos a *fórmula de Weingarten*

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -f_* A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi.$$

Denote $\tilde{R} = R^{\tilde{M}}$, $R^\perp = R^{N_f M}$, $R = R^M$, e $()^\perp$ e $()^\top$ as respectivas projeções em $N_f M$ e TM. A partir das fórmulas de Gauss e Weingarten, é possível mostrar as três importantes equações de segunda ordem

- *Equação de Gauss*: $\left(\tilde{R}(X,Y)Z\right)^\top = R(X,Y)Z - A_{\alpha(Y,Z)}X + A_{\alpha(X,Z)}Y.$

- *Equação de Codazzi:* $\left(\tilde{R}(X,Y)Z\right)^\perp = (\nabla_X^\perp \alpha)(Y,Z) - (\nabla_Y^\perp \alpha)(X,Z)$, equivalente a essa temos

$$\left(\tilde{R}(X,Y)\xi\right)^\perp = (\nabla_Y A)(X,\xi) - (\nabla_X A)(Y,\xi).$$

- *Equação de Ricci:* $(\tilde{R}(X,Y)\xi)^{\perp} = R^{\perp}(X,Y)\xi + \alpha(A_{\xi}X,Y) - \alpha(X,A_{\xi}Y)$.

Sejam K e $K^{\tilde{M}} = \tilde{K}$ as curvaturas seccionais de M e $\tilde{M}$, respectivamente. Segue da equação de Gauss que

$$K(\sigma) = \tilde{K}(\sigma) + \langle \alpha(X,X), \alpha(Y,Y) \rangle - ||\alpha(X,Y)||^2,$$

em que $\{X,Y\}$ é uma base ortonormal do plano σ tangente a M.

Se $\tilde{M}^m = \tilde{M}_c^m$ denota uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante c, a equação de Gauss se escreve

$$R(X,Y)Z = c(X \wedge Y)Z + A_{\alpha(Y,Z)}X - A_{\alpha(X,Z)}Y, \tag{1.2.2}$$

em que

$$(X \wedge Y)Z = \langle Y,Z \rangle X - \langle X,Z \rangle Y.$$

A equação de Codazzi tem as duas versões equivalentes

$$(\nabla_X^{\perp}\alpha)(Y,Z) = (\nabla_Y^{\perp}\alpha)(X,Z) \tag{1.2.3}$$

e

$$(\nabla_Y A)(X,\xi) = (\nabla_X A)(Y,\xi),$$

e a equação de Ricci se reduz a

$$(\tilde{R}(X,Y)\xi)^{\perp} = \alpha(X,A_{\xi}Y) - \alpha(A_{\xi}X,Y), \tag{1.2.4}$$

ou equivalentemente,

$$\left\langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta \right\rangle = \langle [A_{\xi}, A_{\eta}]X, Y \rangle .$$

Seja $f : M^n \to \tilde{M}^m$ uma imersão isométrica. O *subespaço de nulidade relativa* $\Delta(x) \subset T_xM$ de f em x é o subespaço

$$\Delta(x) = ker\alpha(x) = \{X \in T_xM;\ \alpha(X,Y) = 0 \text{ para todo } Y \in T_xM\},$$

e sua dimensão $\nu_f(x)$ é chamada de *índice de nulidade relativa* de f em x.

Nosso foco neste trabalho é estudar as imersões isométricas de variedades Riemannianas com curvatura seccional constante em espaços simplesmente conexos e completos $\mathbb{Q}^m(c)$ com curvatura seccional constante c, os quais são o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^m$ se $c = 0$, a esfera $\mathbb{S}_c^m$ se $c > 0$ e o espaço hiperbólico $\mathbb{H}_c^m$ se $c < 0$.

Uma demonstração do teorema a seguir encontra-se em [17]

Teorema 1.2.1. *(Teorema fundamental para subvariedades)*

i) *Existência: Sejam* M^n *uma variedade Riemanniana simplesmente conexa,* $\mathcal{E}$ *um fibrado vetorial Riemanianno de posto* p *em* M^n *com conexão compatível* $\nabla^{\mathcal{E}}$ *e tensor curvatura* $R^{\mathcal{E}}$*, seja ainda* $\alpha^{\mathcal{E}}$ *uma seção simétrica de* $Hom(TM\times TM,\mathcal{E})$*. Para cada* $\xi\in\Gamma(\mathcal{E})$*, defina* $A^{\mathcal{E}}_\xi\in\Gamma(Hom(TM,TM))$ *por*

$$\left\langle A^{\mathcal{E}}_\xi X,Y\right\rangle=\left\langle \alpha^{\mathcal{E}}(X,Y),\xi\right\rangle.$$

Suponha que $(\nabla^{\mathcal{E}},\alpha^{\mathcal{E}},A^{\mathcal{E}},R^{\mathcal{E}})$ *satisfaça a (1.2.2), (1.2.3) e (1.2.4). Então existe uma imersão isométrica* $f:M^n\to\mathbb{Q}(c)^{n+p}$ *e uma isometria* $\phi:\mathcal{E}\to N_fM$ *tal que* $\alpha_f=\phi\circ\alpha^{\mathcal{E}}$ *e* $\nabla^{\perp}\phi=\phi\nabla^{\mathcal{E}}$.

ii) *Unicidade: Sejam* $f,g:M^n\to\mathbb{Q}^{n+p}(c)$ *imersões isométricas. Suponha que exista um isometria* $\phi:N_fM\to N_gM$ *tal que*

$$\phi\circ\alpha_f=\alpha_g \ e\ \phi^f\nabla^{\perp}=^g\nabla^{\perp}\phi.$$

Então existe uma isometria $\tau:\mathbb{Q}^{n+p}(c)\to\mathbb{Q}^{n+p}(c)$ *tal que* $\tau\circ f=g$ *e* $\tau_*|_{N_fM}=\phi$.

Como consequência do Teorema fundamental das subvariedades, se $c<\tilde{c}$, existe uma imersão isométrica umbílica $i:\mathbb{Q}^{n+p}(\tilde{c})\to\mathbb{Q}^{n+p+1}(c)$. Com efeito, o endomorfismo $A=\sqrt{\tilde{c}-c}I$ satisfaz as equações de Gauss e Codazzi para uma imersão isométrica de $\mathbb{Q}^{n+p}(\tilde{c})$ em $\mathbb{Q}^{n+p+1}(c)$. De forma análoga, prova que se $c>\tilde{c}$, existe uma imersão isométrica umbílica $i:\mathbb{Q}^{n+p+1}(\tilde{c})\to\mathbb{L}^{n+p+1}(c)$, em que $\mathbb{L}^{n+p+1}(c)$ denota uma variedade Lorentziana geodesicamente completa e simplesmente conexa.

1.3 EDP's associadas às subvariedades de curvatura constante.

Nesta seção estudamos a correspondência que existe entre subvariedades de curvatura seccional constante c e fibrado normal plano de $\mathbb{Q}^{n+p}_s(\tilde{c})$ e soluções de certos sistemas de equações diferenciais parciais, em que $\mathbb{Q}^{n+p}_s(\tilde{c})$ é um *espaço pseudo-Riemanniano completo e simplesmente conexo de curvatura seccional constante* c *e índice* s. Quando $s=0$, usaremos simplesmente a notação $\mathbb{Q}^{n+p}(\tilde{c})$.

Lembramos que, segundo um resultado devido a Cartan, uma imersão isométrica $f:M^n(c)\to\mathbb{Q}^{2n-1}(\tilde{c})$, com $c<\tilde{c}$, tem necessariamente fibrado normal plano. O caso $c>\tilde{c}$ foi estudado posteriormente Moore, que mostrou que o mesmo resultado é válido nesse caso, desde que f não possua pontos fracamente umbílicos, ou seja, desde que em nenhum ponto x de M exista um vetor unitário $\delta\in N_fM(x)$ tal que $A^f_\delta=\sqrt{c-\tilde{c}}Id$.

Dada uma imersão isométrica $f:M^n\to\mathbb{Q}^{n+p}_s(c)$ de uma variedade Riemanniana, dizemos que $N^f_1(x)$ é *não degenerado* se $N^f_1(x)\cap N^f_1(x)^{\perp}=\{0\}$.

Em todo o trabalho, vamos usar a seguinte convenção de índices:

$$i, j, k \in \{1, ..., n\}, \;\; \alpha \in \{n+1, ..., p\} \text{ e } r, s \in \{1, ..., p\}.$$

A próxima Proposição foi enunciada e demonstrada em [10], e a forma aqui apresentada encontra-se no artigo [35].

Proposição 1.3.1. *Sejam $M^n(c)$ uma variedade Riemanniana e simplesmente conexa e $f : M^n(c) \to \mathbb{Q}_s^{n+p}(c)$ uma imersão isométrica com fibrado normal plano e $\nu_f \equiv 0$. Se $s \geq 1$, suponha que $N_1^f(x)$ seja não degenerado para todo $x \in M$. Nessas condições, $p \geq n$ e existem localmente um sistema de coordenadas principais $(u_1, ..., u_n)$ sobre $M^n(c)$, um referencial ortonormal $\xi_1, ..., \xi_p$ de $N_f M$ e funções diferenciáveis $v_1, ..., v_n$ e $h_{i\alpha}$, $1 \leq i \leq n$, $n+1 \leq \alpha \leq p$, com $v_1, ..., v_n$ positivas, tais que*

$$ds^2 = \sum_j v_j^2 du_j^2, \quad \alpha\left(\partial_i, \partial_j\right) = v_i \delta_{ij} \xi_i, \tag{1.3.1}$$

$$\nabla_{\partial_i} X_j = h_{ji} X_i, \;\; e \;\; \nabla^{\perp}_{\partial_i} \xi_s = h_{is} \xi_i, 1 \leq i \neq j \leq n, \;\; 1 \leq s \neq i \leq p, \tag{1.3.2}$$

em que $X_i = (1/v_i)(\partial_i)$, com $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u_i}$, e $h_{ij} = (1/v_i)\partial_i(v_j)$ para $i \neq j$. Além disso, o par (v, h), em que $v = (v_1, ..., v_n)$ e $h = (h_{is})$, satisfaz o sistema de equações diferenciais parciais

$$\begin{cases} i) \; \partial_j(v_i) = h_{ji} v_j, & ii) \; \partial_i(h_{ij}) + \partial_j(h_{ji}) + \sum_k h_{ki} h_{kj} + c v_i v_j = 0, \\ iii) \; \partial_j(h_{is}) = h_{ij} h_{js}, & iv) \; \epsilon_j \partial_j(h_{ij}) + \epsilon_i \partial_i(h_{ji}) + \sum_s \epsilon_s h_{is} h_{js} = 0, \end{cases} \tag{1.3.3}$$

em que $i \neq j$, $\{k, s\} \cap \{i, j\} = \emptyset$ e $\epsilon_s = \langle \xi_s, \xi_s \rangle$.

Reciprocamente, seja (v, h) uma solução de (1.3.3) em um subconjunto aberto e simplesmente conexo $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $v_i \neq 0$ em todos os pontos de U. Então existe uma imersão $f : U \to \mathbb{Q}_s^{n+p}(c)$ com fibrado normal plano, $\nu_f \equiv 0$, N_1^f não-degenerado de posto n e métrica induzida $ds^2 = \sum_i v_i^2 du_i^2$ de curvatura seccional constante c.

Demonstração. Como f tem fibrado normal plano, a equação de Ricci implica que

$$A_\xi A_\eta = A_\eta A_\xi, \; \forall \; \xi, \; \eta \in N_f M.$$

Assim, para cada ponto $x \in M$ existe uma base ortonormal $\{X_1, ..., X_n\}$ de $T_x M$ que diagonaliza A_ξ para todo $\xi \in N_f M(x)$, ou equivalentemente, $\alpha(X_i, X_j) = 0$ se $1 \leq i \neq j \leq n$. Em particular, como $\nu_f \equiv 0$, temos que $\eta_i := \alpha(X_i, X_i) \neq 0$. Portanto $p \leq dim(N_1^f) = n$. Além disso, $\langle \eta_i, \eta_j \rangle = 0$ pela equação de Gauss, e do fato de ser N_1^f não degenerado quando $s \geq 1$ temos que $\langle \eta_i, \eta_i \rangle \neq 0$ para $1 \leq i \leq n$. Portanto $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ é um conjunto ortogonal.

Assim, existem referenciais ortonormais $\{X_1, \ldots, X_n\}$ e $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ de TM e

N_fM, respectivamente, e funções diferenciáveis positivas $v_1, \dots, v_n$ tais que

$$\alpha(X_i, X_j) = \delta_{ij} v_i \xi_i, \ \ 1 \leq i \neq j \leq n.$$

É fácil verificar que as equações de Codazzi para f são equivalentes às seguintes equações
$i)$ $\nabla_{X_i} X_j = v_i^{-1} X_j(v_i) X_i, \ i \neq j,$
$ii)$ $\nabla^{\perp}_{X_i} \xi_j = v_i^{-1} X_i(v_j) \xi_i, \ i \neq j.$

Afirmamos que existem um referencial $\{\xi_{n+1}, ..., \xi_p\}$ de $N_1^{\perp}$ e funções suaves $\{g_{i\alpha}\}$ tais que

$$\nabla^{\perp}_{X_i} \xi_\alpha = g_{i\alpha} \xi_i, \tag{1.3.4}$$

ou seja, que $\left\langle \nabla^{\perp}_{Y} \xi_\alpha, \xi_\beta \right\rangle = 0$ se $\alpha \neq \beta$. Pelo Teorema 1.1.7, basta provar que o tensor de curvatura R^1 da conexão ∇^1 induzida por $\nabla^{\perp}$ em $(N_1^f)^{\perp}$ é identicamente nulo, e escolher $\{\xi_{n+1}, ..., \xi_p\}$ como um referencial paralelo com respeito a tal conexão. Seja Π_1 a projeção ortogonal de N_fM sobre $(N_1^f)^{\perp}$. Por (ii) temos

$$\nabla^1_{X_i} \xi_\alpha = \Pi_1(\nabla^{\perp}_{X_i} \xi_\alpha) = \nabla^{\perp}_{X_i} \xi_\alpha - \left\langle \nabla^{\perp}_{X_i} \xi_\alpha, \xi_i \right\rangle \xi_i,$$

e assim, para $i \neq j$,

$$\begin{aligned}
\nabla^1_{X_j} \nabla^1_{X_i} \xi_\alpha &= \Pi_1(\nabla^{\perp}_{X_j}(\nabla^1_{X_i} \xi_\alpha)) \\
&= \Pi_1\left(\nabla^{\perp}_{X_j}(\nabla^{\perp}_{X_i} \xi_\alpha - \left\langle \nabla^{\perp}_{X_i} \xi_\alpha, \xi_i \right\rangle \xi_i)\right) \\
&= \Pi_1\left(\nabla^{\perp}_{X_j} \nabla^{\perp}_{X_i} \xi_\alpha - X_j \left\langle \nabla^{\perp}_{X_i} \xi_\alpha, \xi_i \right\rangle \xi_i - \left\langle \nabla^{\perp}_{X_i} \xi_\alpha, \xi_i \right\rangle \nabla^{\perp}_{X_j} \xi_i\right) \\
&= \Pi_1(\nabla^{\perp}_{X_j} \nabla^{\perp}_{X_i} \xi_\alpha).
\end{aligned}$$

Portanto $R^1(X_i, X_j)\xi_\alpha = \Pi_1(R^{\perp}(X_i, X_j)\xi_\alpha) = 0$, o que mostra a afirmação.

Obtemos de (i) que

$$\begin{aligned}
[v_i X_i, v_j X_j] &= v_i X_i(v_j) X_j + v_i v_j \nabla_{X_i} X_j - v_j X_j(v_i) X_i - v_j v_i \nabla_{X_j} X_i \\
&= 0, \ i \neq j.
\end{aligned}$$

Dessa forma, existe localmente um sistema de coordenadas $(u_1, ..., u_n)$ sobre $M^n(c)$ com $\partial_i = v_i X_i$ para $1 \leq i \leq n$. Novamente por (i) temos

$$\nabla_{X_i} X_j = v_i^{-1} X_j(v_i) X_i = v_i^{-1} v_j^{-1} \partial_j(v_i) X_i = v_i^{-1} h_{ji} X_i,$$

o que implica a primeira equação em (1.3.2). A segunda equação em (1.3.2), para $1 \leq s \leq n$, segue de (ii), pois

$$v_i^{-1} \nabla^{\perp}_{\partial_i} \xi_s = v_i^{-1} X_i(v_j) \xi_i = v_i^{-1} v_i^{-1} \partial_i(v_j) \xi_i = v_i^{-1} h_{ij} \xi_i.$$

Para $n+1 \leq s \leq p$, tal equação é consequência de (1.3.4), definindo $h_{is} = v_i^{-1} g_{is}$.

Agora vamos mostrar que (v,h) satisfaz ao sistema (1.3.3). Da segunda equação em (1.3.2) temos

$$\begin{aligned}
0 &= R^{\perp}\left(\partial_i, \partial_j\right) \xi_i = \nabla^{\perp}_{\partial_i} \nabla^{\perp}_{\partial_j} \xi_i - \nabla^{\perp}_{\partial_j} \nabla^{\perp}_{\partial_i} \xi_i \\
&= \partial_i(h_{ji}) \xi_j + h_{ji} \nabla^{\perp}_{\partial_i} \xi_j - \nabla^{\perp}_{\partial_j} \left(- \textstyle\sum_{s \neq i} \epsilon_s h_{is} \epsilon_i \xi_s \right) \\
&= \partial_i(h_{ji}) \xi_j + h_{ji} h_{ij} \xi_i + \textstyle\sum_{s \neq i} \epsilon_s \partial_j(h_{is}) \epsilon_i \xi_s + \sum_{s \neq i} \epsilon_s h_{is} \epsilon_i \nabla^{\perp}_{\partial_j} \xi_s \\
&= \partial_i(h_{ji}) \xi_j + h_{ji} h_{ij} \xi_i + \textstyle\sum_{j \neq s \neq i} \epsilon_s \partial_j(h_{is}) \epsilon_i \xi_s + \partial_j(h_{ij}) \epsilon_j \epsilon_i \xi_j \\
&\quad + \textstyle\sum_{j \neq s \neq i} \epsilon_s h_{is} \epsilon_i h_{js} \xi_j + h_{ij} \epsilon_j \epsilon_i \nabla^{\perp}_{\partial_j} \xi_j \\
&= \partial_i(h_{ji}) \xi_j + h_{ji} h_{ij} \xi_i + \textstyle\sum_{j \neq s \neq i} \epsilon_s \partial_j(h_{is}) \epsilon_i \xi_s + \partial_j(h_{ij}) \epsilon_j \epsilon_i \xi_j \\
&\quad + \textstyle\sum_{j \neq s \neq i} \epsilon_s h_{is} \epsilon_i h_{js} \xi_j - h_{ij} \epsilon_i \sum_{s \neq j} \epsilon_s h_{js} \xi_s.
\end{aligned}$$

Fazendo o produto interno com ξ_j e ξ_s, obtemos respectivamente (iv) e (iii) de (1.3.3).

Usando que $\nabla_{\partial_i} X_i = \sum_{k \neq i} \langle \nabla_{\partial_i} X_i, X_k \rangle X_k = -\sum_{k \neq i} h_{ki} X_k$, obtemos, por um lado, que

$$\begin{aligned}
R(\partial_i, \partial_j) X_i &= \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} X_i - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} X_i \\
&= \nabla_{\partial_i} (h_{ij} X_j) + \nabla_{\partial_j} (\textstyle\sum_{k \neq i} h_{ki} X_k) \\
&= \partial_i(h_{ij}) X_j + h_{ij} h_{ji} X_i + \textstyle\sum_{j \neq k \neq i} \partial_j(h_{ki}) X_k + \sum_{j \neq k \neq i} h_{ki} h_{kj} X_j \\
&\quad + \partial_i(h_{ji}) X_j - h_{ji} \textstyle\sum_{k \neq j} h_{kj} X_k \\
&= \partial_i(h_{ij}) X_j + \textstyle\sum_{j \neq k \neq i} \partial_j(h_{ki}) X_k + \sum_{j \neq k \neq i} h_{ki} h_{kj} X_j \\
&\quad + \partial_j(h_{ji}) X_j - h_{ji} \textstyle\sum_{i \neq k \neq j} h_{kj} X_k.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como ds^2 tem curvatura seccional constante c, temos que

$$R(\partial_i, \partial_j) X_i = c \left(\partial_i \wedge \partial_j\right) X_i = -c v_i \partial_j,$$

logo a equação (ii) de (1.3.3) é satisfeita. Observamos que a equação (iii) de (1.3.3) decorre também de

$$R(\partial_i, \partial_j) X_k = 0, \ i \neq j \neq k \neq i.$$

Reciprocamente, considere U com a métrica $ds^2 = \sum_i v_i^2 du_i^2$. Definindo $X_i = (1/v_i)\partial_i$, segue a primeira equação em (1.3.2). De (i), (ii) e (iii) em (1.3.3) decorre que ds^2 tem curvatura seccional constante c. Seja $M^n = \{U, ds^2\}$. Para concluir a demonstração a partir do Teorema fundamental das subvariedades, considere o fibrado vetorial trivial $E = M^n \times \mathbb{R}^p$, em que $\mathbb{R}^p = span\{e_1, ..., e_p\}$ é dotado com o produto interno

$$\langle e_r, e_s \rangle = \epsilon_r \delta_{rs}.$$

Agora, defina a conexão ∇' em E por

$$\nabla'_{\partial_i} e_s = h_{is} e_i, \ i \neq s.$$

Decorre de (iii) e (iv) em (1.3.3) que essa conexão é plana. Defina $\alpha_f \in C^\infty(Hom(TM \times TM, E))$ por

$$\alpha_f\,(\partial_i, \partial_j) = v_i \delta_{ij} e_i.$$

É imediato que α satisfaz a equação de Gauss para uma imersão isométrica de $M^n(c)$ em $\mathbb{Q}_s^{n+p}(c)$. As equações de Codazzi seguem de (i) e as equações de Ricci são satisfeitas pois ∇' é plana e α é ortogonalmente diagonalizável. ∎

O sistema (1.3.3) é um sistema de Bourlet (ver Apêndice A.2), resolvendo as equações (ii) e (iv) para $\partial_j(h_{ji})$ e $\partial_j(h_{ij})$, respectivamente, supondo $i > j$. Como u_i é paramétrica para v_i, h_{ir} e h_{ij}, $i > j$, as soluções do sistema (1.3.3) dependem de $n + n(n-1) + n(n-p) = np$ funções arbitrárias de uma variável.

Seja $\mathbb{Q}_{\epsilon_0}^{n+p}(\tilde{c})$ uma variedade Riemanniana ou Lorentziana, conforme $\epsilon_0 = 0$ ou $\epsilon_0 = 1$. Em [10], Dacjzer e Tojeiro caracterizam, em termos da solução associada de (1.3.3), as imersões isométricas f tais que $f(M^n(c))$ está contida em alguma hipersuperfície umbílica $\mathbb{Q}^{n+p-1}(\tilde{c})$ de $\mathbb{Q}_{\epsilon_0}^{n+p}(c)$ com curvatura constante $\tilde{c}$. Antes de enunciar tal resultado, afirmamos que existem localmente funções v_α tais que

$$\partial_j(v_\alpha) = h_{j\alpha} v_j.$$

De fato, usando as equações (i) e (iii) temos

$$\begin{aligned}
\partial_i(h_{j\alpha} v_j) &= \partial_i(h_{j\alpha}) v_j + h_{j\alpha} \partial_i(v_j) = h_{ji} h_{i\alpha} v_j + h_{j\alpha} h_{ij} v_i \\
&= h_{i\alpha} \partial_j(v_i) + \partial_j(h_{i\alpha}) v_i = \partial_j(h_{i\alpha} v_i).
\end{aligned}$$

Chamamos (V, h), com $V = (v_1, ..., v_n, v_{n+1}, ..., v_p)$, uma solução estendida do sistema (1.3.3). Temos

Proposição 1.3.2. *Existe uma hipersuperfície umbílica $\mathbb{Q}^{n+p-1}(\tilde{c}) \subset \mathbb{Q}_{\epsilon_0}^{n+p}(c)$ tal que $f(M^n(c)) \subset \mathbb{Q}^{n+p-1}(\tilde{c})$ se, e só se, existe uma solução estendida do sistema (1.3.3) satisfazendo a*

$$\sum_{r=1}^{p} v_r^2 = \frac{1}{\tilde{c} - c}. \tag{1.3.5}$$

Além disso, a equação (iv) de (1.3.3) segue de (1.3.5).

Agora, considere a imersão isométrica $f : M^n(0) \to \mathbb{S}^{2n-1}$. Sabemos, pelo resultado de Cartan mencionado no início desta seção, que f tem fibrado normal plano, logo $i \circ f$ tem fibrado normal plano e índice de nulidade relativa nula, em que $i \colon \mathbb{S}^{2n-1} \to \mathbb{R}^{2n}$ é a inclusão canônica. Temos a seguinte consequência das Proposições 1.3.1 e 1.3.2.

Corolário 1.3.3. *Sejam $M^n(0)$ uma variedade simplesmente conexa e $f : M^n(0) \to \mathbb{R}^{2n}$ uma imersão isométrica com fibrado normal plano e $\nu_f \equiv 0$. Nessas condições, existem localmente um sistema de coordenadas principais em $M^n(0)$ com $ds^2 = \sum_j v_j^2 du_j$, $v_j > 0$ e um referencial normal ortonormal $(\xi_1, ..., \xi_n)$ satisfazendo as equações (1.3.1) e (1.3.2). Além disso, o par (v, h) satisfaz o sistema (1.3.3) com $\epsilon_k = 1$, $\forall k$ e $c = 0$. E ainda, $f(M^n(0)) \subset \mathbb{S}^{2n-1}$ se e somente se, $\sum_i v_i^2 = 1$.*

Reciprocamente, seja (v, h) uma solução de (1.3.3) sobre um subconjunto aberto e simplesmente conexo $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $v_i(x) \neq 0$ para todo $x \in U$. Então existe uma imersão $f : U \to \mathbb{R}^{2n}$ com fibrado normal plano, $\nu_f \equiv 0$ e métrica induzida plana $ds^2 = \sum_i v_i^2 du_i$.

Agora, seja $f : M^n(c) \to \mathbb{Q}_s^{n+p}(\tilde{c})$ uma imersão isométrica com fibrado normal plano com $c \neq \tilde{c}$ tal que

$$\theta_i = \langle \alpha_f(X_i, X_i), \alpha_f(X_i, X_i) \rangle + \tilde{c} - c \neq 0, \text{ para } 1 \leq i \leq n, \tag{1.3.6}$$

para um referencial ortonormal de direções principais $\{X_1, ..., X_n\}$. Seja ainda $g = i_{\tilde{c}}^{c} \circ f$, em que $i_{\tilde{c}}^{c}$ é a inclusão umbílica de $\mathbb{Q}_s^{n+p}(\tilde{c})$ em $\mathbb{Q}_{s+\epsilon_0}^{n+p+1}(c)$ e $\epsilon_0 = 0$ ou 1 conforme $c < \tilde{c}$ ou $c > \tilde{c}$, respectivamente. Sabemos que

$$\alpha_g(X, Y) = \alpha_f(X, Y) + \sqrt{|\tilde{c} - c|}\, \langle X, Y \rangle\, e, \tag{1.3.7}$$

com e normal a $i_{\tilde{c}}^{c}$ e $\langle e, e \rangle = \frac{(\tilde{c}-c)}{|\tilde{c}-c|}$. Assim, $N_g M$ é plano e como

$$\langle \alpha_g(X_i, X_j), \alpha_g(X_i, X_j) \rangle = \delta_{ij}\theta_i,$$

temos que (1.3.6) é equivalente ao fibrado N_1^g ser não degenerado. Observe para $s = 0$ e $c < \tilde{c}$ que N_1^g é não degenerado se $f : M^n(c) \to \mathbb{Q}^{n+p}(\tilde{c})$ não possui pontos fracamente umbílicos.

Assim, g satisfaz as hipóteses da Proposição 1.3.1, logo existe localmente um sistema de coordenadas $(u_1, ..., u_n)$ em $M^n(c)$ cujas curvas coordenadas são as linhas de curvatura de g. Seja $\xi_1, ..., \xi_p$ um referencial ortonormal paralelo de $N_f M$ e defina as funções V_{is}, $i = 1, ..., n$, $s = 1, ..., p$, por

$$A_{\xi_s} X_i = v_i^{-1} V_{is} X_i,$$

equivalentemente

$$\alpha\left(\partial_i, \partial_j\right) = \sum_{r=1}^{p} \epsilon_r \delta_{ij} v_i V_{ir} \xi_r, \tag{1.3.8}$$

sendo $v_1, ..., v_n$ como na Proposição (1.3.1). Sejam $V = (V_{ir}) \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$ e $\hat{V} \in M_{(p+1)\times n}(\mathbb{R})$ definida por

$$\hat{V}_{ir} = V_{ir}, \text{ para } 1 \leq r \leq p, \text{ e } \hat{V}_{i(p+1)} = \sqrt{|c - \tilde{c}|} v_i.$$

Seja ainda $\mathbb{O}_s^t(p \times n)$ o subespaço em $M_{p\times n}(\mathbb{R})$ de todas as matrizes V satisfazendo a

$V^tJV = \tilde{J}$, com $J_{ij} = \epsilon_i\delta_{ij}$ e $\tilde{J}_{ij} = \tilde{\epsilon}_i\delta_{ij}$, ϵ_i sendo -1 para s de indice $1, ..., p$ e 1 para os outros, e o $\tilde{\epsilon}_i$ sendo -1 para t de indices $1, ..., n$ e 1 para outros.

Assim, temos a seguinte Proposição dada em [12]

Proposição 1.3.4. *Nas condições acima, a tripla (v, h, V) associada a f com respeito a um referencial normal ortonormal e paralelo $\xi_1, ..., \xi_p$ satisfaz o seguinte sistema de equações diferenciais parciais*

$$\begin{cases} i)\ \partial_i(v_j) = h_{ij}v_i & ii)\ \partial_k(V_{ir}) = h_{ki}V_{kr}, \\ iii)\ \partial_i(h_{ij}) + \partial_j(h_{ji}) + \sum_k h_{ki}h_{kj} + \frac{c}{|\tilde{c}-c|}v_iv_j = 0, & iv)\ \partial_j(h_{ik}) = h_{ij}h_{jk}, \end{cases} \tag{1.3.9}$$

em que $i \neq j \neq k \neq i$. Além disso, a matriz $\hat{V} \in \mathbb{O}^t_{s+\epsilon_0}((p+1) \times n)$, em que $\epsilon_0 = 0$ ou 1 de acordo com $\tilde{c} > c$ ou $\tilde{c} < c$, respectivamente, e t é o número de índices tal que $\theta_i < 0$.

Reciprocamente, suponha $\tilde{c} \neq c$ e que (v, h, V) seja uma solução de (1.3.9) sobre um subconjunto aberto e simplesmente conexo $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\hat{V} \in \mathbb{O}^t_{s+\epsilon_0}((p+1) \times n)$ e $v_i(x) \neq 0$ para todo $x \in U$. Então existe uma imersão isométrica $f : U \to \mathbb{Q}^{n+p}_s(\tilde{c})$ com $\theta_i < 0$ para o índice t, que tem (v, h, V) como tripla associada e cuja métrica induzida $ds^2 = \sum_i v_i^2 du_i^2$ tem curvatura seccional constante c.

Demonstração. Definindo h_{ij} por $\partial_j(v_i) = h_{ji}v_i,\ i \neq j$, como vimos na Proposição 1.3.1, as equações (iii) e (iv) expressam o fato da métrica $ds^2 = \sum_i v_i^2 du_i^2$ ter curvatura constante c. A equação (ii) segue da equação Codazzi de f calculadas com respeito aos referenciais $\xi_1, ..., \xi_p$ e $X_1, ..., X_n$. Para a última afirmação, observe que

$$c\,(\partial_i \wedge \partial_j)\,X_i = -cv_i\partial_j.$$

Agora, como $\alpha_f(\partial_i, \partial_i) = \sum_r \epsilon_r \langle \alpha_f(\partial_i, \partial_i), \xi_r\rangle \xi_r = \sum_r \epsilon_r \langle A_{\xi_r}\partial_i, \partial_i\rangle \xi_r = \sum_r \epsilon_r V_{ir}v_i\xi_r$, temos

$$A_{\alpha_f(\partial_i,\partial_i)}\partial_j = \sum_r V_{ir}v_i\epsilon_r A_{\xi_r}\partial_j = \sum_r v_i\epsilon_r V_{ir}V_{jr}X_j.$$

Substituindo essas informações na equação de Gauss

$$cv_iv_j = \tilde{c}v_iv_j + \sum_r \epsilon_r V_{ir}V_{jr},$$

implicando que $\epsilon_0(\tilde{c} - c)V_{ip+1}V_{jp+1} + \sum_r \epsilon_r V_{ir}V_{jr} = 0$. Agora, pela equação (1.3.7) temos

$$\begin{aligned} v_i^{-2}\tilde{\epsilon}_i &= \langle \alpha_g(X_i, X_i), \alpha_g(X_i, X_i)\rangle \\ &= \langle \alpha_f(X_i, X_i), \alpha_f(X_i, X_i)\rangle + (\tilde{c} - c)\epsilon_0 = \textstyle\sum_r \epsilon_r(v_i^{-1}V_{ir})^2 + (\tilde{c} - c)\epsilon_0. \end{aligned}$$

Logo

$$\tilde{\epsilon}_i = \sum_r \epsilon_r V_{ir}^2 + (\tilde{c} - c)\epsilon_0 v_i^2 = \sum_r \epsilon_r V_{ir}^2 + \epsilon_0 V_{ip+1}^2.$$

Reciprocamente, seja (v, h, V) uma solução do sistema (1.3.9) em um subconjunto aberto e simplesmente conexo U. Como antes, (iii) e (iv) implicam que a métrica $ds^2 = \sum_i v_i^2 du_i^2$ tem curvatura constante c. Sejam $M^n(c) = (U, ds^2)$ e $E = M^n(c) \times \mathbb{R}^{p+1}$ o fibrado trivial sobre $M^n(c)$, sendo $\mathbb{R}^{p+1} = ger\{e_1, ..., e_{p+1}\}$ com o produto interno

$$\langle e_s, e_r \rangle = \epsilon_r \delta_{sr},$$

em que $\epsilon_{p+1} = \epsilon_0$. Defina $\alpha \in Hom(TM \times TM, E)$ por

$$\alpha = \sum_r^{p+1} \epsilon_r \langle A_{e_r}\ ,\ \rangle e_r, \text{ com } A_{e_r}\partial_i = v_i^{-1} V_{ir} \partial_i. \tag{1.3.10}$$

O fato de $\hat{V} \in \mathbb{O}^t_{s+\epsilon_0}((p+1) \times n)$ com o produto interno acima definido, implica que α satisfaz a equação de Gauss para uma imersão isométrica em $\mathbb{Q}^{n+p+1}_{s+\epsilon_0}(c)$. Defina uma conexão ∇' em E exigindo que $e_1, ..., e_{p+1}$ seja um referencial paralelo com relação a ∇'. Então as equações de Ricci são tivialmente satisfeitas e as equações de Codazzi seguem da equação (ii). Portanto, existe uma imersão isométrica $g : M^n(c) \to \mathbb{Q}^{n+p}_{s+\epsilon_0}(c)$ cuja segunda forma fundamental é dada por (1.3.10), com primeiro fibrado normal com posto n, e cuja métrica induzida sobre cada primeiro fibrado normal tem índice t.

Agora, como e_{p+1} é um campo normal pararelo e $A^g_{e_{p+1}} = \sqrt{|\tilde{c} - c|}I$, temos que $g(U)$ está contido em uma hipersuperfícies umbílica $\mathbb{Q}^{n+p}_s(\tilde{c})$ e, como uma imersão isométrica em $\mathbb{Q}^{n+p}_s(\tilde{c})$, g tem (v, h, V) como tripla associada com respeito as mesmas coordenadas e o mesmo $\{e_1, ..., e_p\}$. ∎

1.4 Subvariedades Lagrangianas

Uma *estrutura quase complexa* em uma variedade diferenciável real M é um tensor J do tipo $(1, 1)$ satisfazendo $J^2 = -I$, em que I denota o tensor identidade. Uma variedade diferenciável munida de uma estrutura quase complexa é chamada uma *variedade quase complexa*. Uma *variedade de Kaehler* é uma variedade quase complexa munida de uma métrica Riemanniana tal que a estrutura quase complexa J de M é um tensor ortogonal paralelo com respeito à conexão de Levi-Civita de M. Assim, as seguintes propriedades são satisfeitas

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle$$

e

$$(\nabla_X J)(Y) = \nabla_X JY - J\nabla_X Y = 0,$$

para quaisquer $X, Y \in TM$.

A curvatura seccional holomorfa de uma variedade de Kaehler M segundo o plano gerado por $X \in TM$ e JX é definida por

$$K(X, JX) = \frac{R(X, JX, JX, X)}{||X||^4},$$

em que R é o tensor de curvatura de M. É um fato conhecido que uma variadade de Kaehler completa e simplesmente conexa de dimensão complexa n com curvatura seccional constante holomorfa $4c$ é holomorficamente isométrica ao espaço Euclidiano complexo $\mathbb{C}^n$, ao espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^n(4c)$ ou ao espaço hiperbólico complexo $\mathbb{CH}^n(4c)$, conforme seja $c = 0$, $c > 0$ ou $c < 0$, respectivamente.

Uma imersão isométrica $f : M^n \to \tilde{M}^m$ de uma variedade Riemanniana n-dimensional em uma variedade de Kaehler de dimensão m é *totalmente real* se a estrutura quase complexa J de $\tilde{M}^m$ satisfaz

$$J(f_* T_p M) \subset N_f M(p)$$

para todo $p \in M$. Se, além disso, $n = m$, diz-se que f é *Lagrangiana*. Comparando as componentes tangente e normal de

$$\tilde{\nabla}_X J f_* Y = J \tilde{\nabla}_X f_* Y,$$

obtemos que

$$\nabla^{\perp}_X J f_* Y = J f_* \nabla_X Y \tag{1.4.1}$$

e

$$-f_* A^f_{Jf_*Y} X = J \alpha_f(X, Y) \tag{1.4.2}$$

para quaisquer $X, Y \in \Gamma(TM)$. Segue de (1.4.1) que

$$R^{\perp}(X, Y) J f_* Z = J f_* R(X, Y) Z. \tag{1.4.3}$$

1.4.1 Subvariedades Lagrangianas com curvatura nula

Nesta subseção, baseada em [11], fazemos uma breve discussão sobre as imersões isométricas Lagrangianas $f : M^n(0) \to \mathbb{C}^n$. Inicialmente, observamos a seguinte consequência imediata da equação (1.4.3).

Corolário 1.4.1. *Seja $f : M^n \to \mathbb{C}^n$ uma imersão isométrica Lagrangiana. Então M^n tem curvatura nula se, e somente se, f tem fibrado normal plano.*

O próximo resultado caracteriza as imersões isométricas Lagrangianas $f : M^n(0) \to \mathbb{C}^n$ em termos das soluções associadas do sistema (1.3.3).

Teorema 1.4.2. *Sejam $f : M^n(0) \to \mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ uma imersão isométrica e (v, h) a solução do sistema (1.3.3) associada a f. Então f é Lagrangiana se, e só se, $h = h^t$.*

Demonstração. Suponhamos que f seja Lagrangiana com respeito a uma estrutura quase-complexa J de $\mathbb{C}^n$. Por um lado, temos pelo Corolário 1.3.3 e pela equação (1.4.2) que

$$-f_* A_{Jf_*X_i} X_i = J\alpha\left(X_i, X_i\right) = J v_i^{-1} \xi_i = v_i^{-1} J\xi_i,$$

e por outro

$$A_{Jf_*X_i} X_i = A_{\sum_j \langle Jf_*X_i, \xi_j \rangle \xi_j} X_i = \sum_j \langle Jf_*X_i, \xi_j \rangle A_{\xi_j} X_i = \langle Jf_*X_i, \xi_i \rangle v_i^{-1} X_i.$$

Segue-se que, a menos de sinal,

$$Jf_*X_i = \xi_i \text{ e } J\xi_i = -f_*X_i. \tag{1.4.4}$$

Decorre das equações (1.3.2) e (1.4.1) que

$$h_{ij} = \left\langle \nabla^\perp_{\partial_i} \xi_j, \xi_i \right\rangle = \left\langle \nabla^\perp_{\partial_i} Jf_*X_j, Jf_*X_i \right\rangle = \langle \nabla_{\partial_i} X_j, X_i \rangle = h_{ji}.$$

Reciprocamente, suponha que a solução (v, h) de (1.3.3) associada a $f : M^n(0) \to \mathbb{R}^{2n}$ seja tal que h é simétrica. Defina $J \in \Gamma(f^*T\mathbb{R}^{2n})$ por (1.4.4). Usando a simetria de h e (1.3.2) obtemos que

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X_i} Jf_*X_j &= \tilde{\nabla}_{X_i} \xi_j = v_i^{-1} \nabla^\perp_{\partial_i} \xi_j - f_* A_{\xi_j} X_i \\
&= v_i^{-1} h_{ji} \xi_i = v_i^{-1} h_{ij} Jf_*X_i \\
&= J(f_* \nabla_{X_i} X_j + \alpha(X_i, X_j)) \\
&= J\tilde{\nabla}_{X_i} f_*X_j
\end{aligned}$$

se $i \neq j$, enquanto

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X_i} Jf_*X_i &= \tilde{\nabla}_{X_i} \xi_i = v_i^{-1} \nabla^\perp_{\partial_i} \xi_i - f_* A_{\xi_i} X_i \\
&= v_i^{-1} \textstyle\sum_{k \neq i} h_{ki} \xi_k - v_i^{-1} X_i \\
&= v_i^{-1} \textstyle\sum_{k \neq i} h_{ik} Jf_*X_k + v_i^{-1} J\xi_i \\
&= J(f_* \nabla_{X_i} X_i + \alpha(X_i, X_i)) \\
&= J\tilde{\nabla}_{X_i} X_i.
\end{aligned}$$

De forma análoga, obtemos que

$$\tilde{\nabla}_{X_i} J\xi_j = J\tilde{\nabla}_{X_i} \xi_j$$

para quaisquer $1 \leq i \neq j \leq n$. Assim, J é paralelo com respeito à conexão induzida em $f^*T\mathbb{R}^{2n}$, logo define uma estrutura quase-complexa em $\mathbb{R}^{2n}$ com respeito à qual f é Lagrangiana.

∎

A partir do Corolário 1.3.3 e do Teorema 1.4.2 obtemos o seguinte resultado.

Corolário 1.4.3. *Sejam $M^n(0)$ uma variedade simplesmente conexa e $f : M^n(0) \to \mathbb{R}^{2n}$ uma imersão isométrica Lagrangiana tal que $\nu_f \equiv 0$ (resp., tal que $f(M^n(0) \subset \mathbb{S}^{2n-1})$). Nessas condições, existem localmente um sistema de coordenadas principal $(u_1, ..., u_n)$ sobre $M^n(0)$ e funções diferenciáveis não-negativas $v_1, ..., v_n$, tais que*

$$ds^2 = \sum_j v_j^2 du_j^2, \quad \alpha\,(\partial_i, \partial_j) = \delta_{ij} J \partial_i,$$

em que $v = (v_1, ..., v_n)$ e $h = (h_{ij})$ satisfazem o seguinte sistema de equações diferenciais parciais

$$\begin{cases} i)\ \partial_j(v_i) = h_{ji} v_j, & ii)\ \sum_k \partial_k(h_{ij}) = 0, \\ iii)\ \partial_k(h_{ij}) = h_{ik} h_{jk}, & \end{cases} \tag{1.4.5}$$

(resp., i), ii), iii) de (1.4.5) e iv) $\partial_i v_i = -\sum_{j \neq i} h_{ij} v_j$), com $i \neq j \neq k \neq i$.

Reciprocamente, seja (v, h) uma solução do sistema acima em um subconjunto aberto e simplesmente conexo $U \subset \mathbb{R}^n$ no qual $v_i \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$ (resp., com condições iniciais em $x_0 \in U$ tal que $\sum_i v_i^2(x_0) = 1$). Seja $(f, Y_1, ..., Y_n)$, com $f, Y_i : U \to \mathbb{C}^n$, uma solução do sistema de EDP's

$$\begin{cases} i)\ \partial_i(f) = v_i Y_i & ii)\ \partial_j(Y_i) = h_{ij} Y_j,\ i \neq j, \\ iii)\ \partial_i(Y_i) = -\sum_{k \neq i} h_{ki} Y_k + i Y_i, & \end{cases} \tag{1.4.6}$$

com condições iniciais $(Y_1(u_0), ..., Y_n(u_0))$, em algum ponto $u = u_0 \in U$, escolhidas satisfazendo

$$\langle Y_i(u_0), Y_j(u_0) \rangle = \langle i Y_i(u_0), Y_j(u_0) \rangle = 0,\ i \neq j,\ \langle Y_i(u_0), Y_i(u_0) \rangle = 1.$$

Então a imersão $f : U \to \mathbb{C}^n$ é Lagrangiana, tem métrica induzida $ds^2 = \sum_i v_i^2 du_i$ com curvatura seccional constante nula e $\nu_f \equiv 0$ (resp., $f(U) \subset \mathbb{S}^{2n-1}$).

Demonstração. A ida segue da Proposição 1.3.1 e do Teorema 1.4.2 (resp., a equação (v) segue derivando (1.3.5) e usando (i)). Para a recíproca, seja $\{Y_1, \ldots, Y_n, f\}$ uma solução do sistema (1.4.6) e defina $f_{ij} = \langle Y_i, Y_j \rangle$ e $g_{ij} = \langle i Y_i, Y_j \rangle$. Temos que $\{f_{ij}, g_{ij}\}$ é uma solução do sistema de EDP's

$$\begin{cases} i)\ \partial_a f_{ij} = h_{ia} f_{aj} + f_{ia} h_{aj}, & ii)\ \partial_i f_{ij} = -\sum_{k \neq i} h_{ki} f_{kj} + g_{ij} + h_{ji} f_{ii}, \\ iii)\ \partial_i f_{ii} = -2 \sum_{k \neq i} h_{ki} f_{ki}, & \\ \text{iv)}\ \partial_s g_{ij} = h_{is} g_{sj} + g_{is} h_{sj}, & \text{v)}\ \partial_i g_{ij} = -\sum_{k \neq i} h_{ki} g_{kj} - f_{ij}, \\ \text{vi)}\ \partial_j g_{ij} = -\sum_{k \neq j} h_{kj} g_{ik} - f_{ij}, & \end{cases}$$

com $i \neq s \neq j$, e $i \neq j$ em (ii), (iv), (v) e (iv). Observe que $\bar{f}_{ij} = \delta_{ij}$ e $\bar{g}_{ij} = 0$ é uma solução desse sistema. Pela unicidade de soluções satisfazendo condições iniciais escolhidas, temos que $f_{ij} = \delta_{ij}$ e $g_{ij} = 0$.

Segue de $\partial_i f = f_*\partial_i = v_i Y_i$, com $v_i(x) \neq 0$ para todo $x \in U$, e $\langle Y_i, Y_j\rangle = 0,\ \forall i, j$, que f é uma imersão isométrica e $ds^2 = \sum_i v_i^2 du_i^2$. Além disso, de $\langle Y_i, iY_j\rangle = 0,\ \forall i, j$, definindo J por $JY_j = iY_j$, segue como no Teorema 1.4.2 que f é Lagrangiana.

Temos da equação $\nabla_{\partial_i} X_j = h_{ji} X_i$ que $\alpha_f(\partial_i, \partial_j) = 0$ e $v_i^{-1}\alpha_f(\partial_i, \partial_i) = \alpha_f(\partial_i, X_i) = iY_i$, assim

$$\alpha_f(\partial_i, \partial_j) = \delta_{ij} J(f_*\partial_i),$$

e

$$R(\partial_i, \partial_j)X_k = (\tilde{R}(\partial_i, \partial_j)X_k)^\top = 0.$$

Portanto, ds^2 tem curvatura seccional nula.

Para a recíproca no caso (v, h) ser solução de (1.4.5) e (v) com condições iniciais em $x_0 \in U$ tal que $\sum_i v_i^2(x_0) = 1$, basta observar que $\partial_j\left(\sum_i v_i^2\right) = 0,\ 1 \leq i, j \leq n$ e usar o Corolário 1.3.3.

■

Dadas uma imersão isométrica $F : M^{n-1} \to \mathbb{CP}^{n-1}$ e a projeção de Hopf $\pi : \mathbb{S}^{2n-1} \to \mathbb{CP}^{n-1}$, o produto de fibras

$$M^n = \{\{x\} \times \pi^{-1}(F(x)) \in M^{n-1} \times \mathbb{S}^{2n-1}(1)\}$$

é uma subvariedade imersa em $M^{n-1} \times \mathbb{S}^{2n-1}(1)$ de dimensão n, e a projeção $f : M^n \to \mathbb{S}^{2n-1}$ é uma imersão, chamada de levantamento de F por π. Temos o seguinte resultado obtido em [9].

Teorema 1.4.4. *Seja $f\colon M^n(0) \to \mathbb{R}^{2n}$ uma imersão isométrica Lagrangiana. Então $f(M^n(0)) \subset \mathbb{S}^{2n-1}(1)$ se e somente se, f é o levantamento pela projeção de Hopf $\pi : \mathbb{S}^{2n-1} \to \mathbb{CP}^{n-1}$ de uma imersão isométrica Lagrangiana $F : M^{n-1}(0) \to \mathbb{CP}^{n-1}$.*

1.4.2 Imersões isométricas horizontais

Seja $\mathbb{C}_\epsilon^{n+1}$ o espaço complexo $(n + 1)$-dimensional com a métrica pseudo-Euclideana

$$g_\epsilon = \epsilon dz_1 d\bar{z}_1 + \sum_{j=2}^{n+1} dz_j d\bar{z}_j,\ \epsilon = \pm 1,$$

e seja

$$S_\epsilon^{2n+1}(c) = \{z \in \mathbb{C}_\epsilon^{n+1} :\ g_\epsilon(z, z) = \frac{1}{c},\ \epsilon c > 0\}$$

a *esfera Euclidiana* ou o *espaço anti-de-Sitter* de dimensão (2n+1) e curvatura seccional constante c, conforme seja $\epsilon = 1$ ou $\epsilon = -1$, respectivamente.

O grupo $\mathbb{S}^1$ age isometricamente em $\mathbb{S}^{2n+1}_\epsilon$ por

$$\lambda(z_1, ..., z_{n+1}) = (\lambda z_1, ..., \lambda z_{n+1}),$$

em que $\lambda \in \mathbb{S}^1$ e $(z_1, ..., z_n, z_{n+1}) \in \mathbb{S}^{2n+1}_\epsilon \subset \mathbb{R}^{2n+2}_\epsilon \approx \mathbb{C}^{n+1}_\epsilon$. As órbitas dessa ação são círculos máximos de $\mathbb{S}^{2n+1}_\epsilon$, os quais são as curvas integrais do campo de vetores

$$\xi = \widetilde{J}\eta, \tag{1.4.7}$$

em que $\eta/\sqrt{|c|}$ é o vetor posição de $\mathbb{S}^{2n+1}_\epsilon(c)$ e $\widetilde{J}$ é a estrutura complexa usual de $\mathbb{C}^{n+1}_\epsilon$ definida pela multiplicação por i.

Considere o tensor $\phi \in \Gamma(T\mathbb{S}^{2n+1*}_\epsilon \otimes T\mathbb{S}^{2n+1}_\epsilon)$ dado por

$$\widetilde{J}X = \phi X - \epsilon \langle X, \xi\rangle \eta \tag{1.4.8}$$

para todo $X \in T\mathbb{S}^{2n+1}_\epsilon$. Algumas propriedades elementares de ϕ são reunidas na seguinte proposição.

Proposição 1.4.5. *Seja $\bar{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{S}^{2n+1}_\epsilon(c)$. Temos*

$$\begin{cases} i)\ \phi\xi = 0, \quad ii)\ \langle \phi, \xi\rangle = 0, \quad iii)\ \bar{\nabla}\xi = \sqrt{|c|}\phi, \\ iv)\ \phi^2 X = -X + \epsilon \langle X, \xi\rangle \xi, \quad v)\ \langle \phi X, \phi Y\rangle = \langle X, Y\rangle - \epsilon \langle X, \xi\rangle \langle Y, \xi\rangle, \\ vi)\ \bar{\nabla}_X \phi Y = \phi \bar{\nabla}_X Y - \epsilon\sqrt{|c|}(\langle X, Y\rangle \xi - \langle Y, \xi\rangle X). \end{cases}$$

Demonstração. (i) e (ii) são consequências imediatas da Definição (1.4.8). Como

$$\sqrt{|c|}\tilde{J}X = \tilde{J}(-A_\eta X) = \tilde{J}(\tilde{\nabla}_X \eta) = \tilde{\nabla}_X(\tilde{J}\eta) = \tilde{\nabla}_X \xi,$$

em que $\tilde{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{R}^{2n+2}_\epsilon$, temos

$$\sqrt{|c|}\phi X = \tilde{\nabla}_X \xi + \epsilon\sqrt{|c|}\langle X, \xi\rangle \eta = \bar{\nabla}_X \xi + \alpha_i(X, \xi) + \epsilon\sqrt{|c|}\langle X, \xi\rangle \eta = \bar{\nabla}_X \xi,$$

para todo $X \in T\mathbb{S}^{2n+1}_\epsilon$. Assim, vale (iii).

Para (iv), usando que

$$\phi X = \tilde{J}X + \epsilon\langle X, \xi\rangle\eta,$$

juntamente com (ii), obtemos que

$$\begin{aligned} \phi^2 X &= \tilde{J}\phi X + \epsilon\langle \phi X, \xi\rangle\eta \\ &= \tilde{J}\phi X \\ &= \tilde{J}(\tilde{J}X + \epsilon\langle X, \xi\rangle\eta) \\ &= -X + \epsilon\langle X, \xi\rangle\xi. \end{aligned}$$

As afirmações em (v) e (vi) decorrem, respectivamente, do fato de que $\tilde{J}$ é um operador ortogonal e do fato de que $\tilde{J}$ é paralelo com respeito a $\tilde{\nabla}$. ∎

O espaço das órbitas $\widetilde{M}^n(4c)$ da ação de S^1 em $\mathbb{S}^{2n+1}_\epsilon$ é o *espaço projetivo complexo* $\mathbb{CP}^n(4c)$ ou o *espaço hiperbólico complexo* $\mathbb{CH}^n(4c)$, conforme seja $\epsilon = 1$ ou $\epsilon = -1$, respectivamente. A aplicação quociente

$$\begin{array}{rccl} \pi & : & \mathbb{S}^{2n+1}_\epsilon & \longrightarrow & \widetilde{M}^n(4c) \\ & & z & \longmapsto & [z], \end{array}$$

é conhecida como a *projeção de Hopf*. O espaço quociente $\widetilde{M}^n(4c)$ tem uma estrutura Riemanniana caracterizada pelo fato de tornar a projeção de Hopf uma submersão Riemanniana. O tensor ϕ induz uma estrutura quase-complexa J em $\widetilde{M}^n(4c)$, dada por

$$J \circ \pi_* = \pi_* \circ \phi,$$

com respeito à qual $\widetilde{M}^n(4c)$ é uma variedade de Kaehler com curvatura seccional holomorfa constante $4c$.

Uma imersão isométrica $f : M \to \mathbb{S}^{2n+1}_\epsilon(c)$ é *horizontal* se o campo de vetores em $\mathbb{S}^{2n+1}_\epsilon$ definido em (1.4.7) satisfaz $\xi(f(x)) \in N_f M(x)$ para todo $x \in M^n$. O seguinte resultado devido a Reckziegel ([30] e [29]) mostra que o estudo das imersões isométricas horizontais $f : M \to \mathbb{S}^{2n+1}_\epsilon(c)$ é equivalente àquele das imersões isométricas Lagrangianas $g : M \to \tilde{M}^n(4c)$.

Teorema 1.4.6. *Se $f : M^n \to \mathbb{S}^{2n+1}_\epsilon(c)$ é horizontal então $g = \pi \circ f$ é Lagrangiana. Reciprocamente, seja $g : M \to \tilde{M}^n(4c)$ uma imersão isométrica Lagrangiana e seja $(x_0, y_0) \in M \times \mathbb{S}^{2n+1}_\epsilon(c)$ algum dado inicial com $g(x_0) = \pi(y_0)$. Então, existem uma variedade Riemanniana $\hat{M}$, uma aplicação de recobrimento isométrica $\tau : \hat{M} \to M$, uma imersão isométrica horizontal $\hat{f} : \hat{M} \to \mathbb{S}^{2n+1}_\epsilon(c)$ e um ponto $\hat{x} \in \hat{M}$ tal que $\pi \circ \hat{f} = g \circ \tau$, $\tau(\hat{x}) = x_0$ e $\hat{f}(\hat{x}) = y_0$.*

O próximo teorema reúne alguns dos fatos sobre imersões isométricas horizontais necessários para os resultados deste trabalho.

Teorema 1.4.7. *Para uma imersão isométrica horizontal $f : M \to \mathbb{S}^{2n+1}_\epsilon(c)$ valem:*
i) f é anti-invariante com respeito a ϕ, isto é, $\phi(f_* T_x M) \subset N_f M(x)$ para todo $x \in M$.
ii) $N_1^f(x) \subset \{\xi(x)\}^\perp$ para todo $x \in M^n$ e

$$\phi \alpha_f(X, Y) = -f_* A_{\phi f_* Y} X, \text{ para quaisquer } X, Y \in \Gamma(TM). \tag{1.4.9}$$

iii) A conexão normal e o tensor curvatura normal de f satisfazem

$$\begin{aligned}\nabla^{\perp}_X \phi f_* Y = \phi f_* \nabla_X Y - \epsilon\sqrt{|c|}\,\langle X, Y\rangle\,\xi,\\ R^{\perp}(X,Y)\xi = 0,\\ \left\langle R^{\perp}(X,Y)\phi f_* Z, \phi f_* W\right\rangle = \langle R(X,Y)Z, W\rangle - c(\langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle).\end{aligned} \tag{1.4.10}$$

Demonstração. Por (i), (ii), (iii), (iv) e (v) da Proposição 1.4.5 e pela fórmula de Gauss temos, por um lado, que

$$\left\langle \phi(f_*X), \phi^2(f_*Y)\right\rangle = \langle f_*X, \phi(f_*Y)\rangle - \epsilon\,\langle f_*X, \xi\rangle\,\langle \phi(f_*Y), \xi\rangle = \langle f_*X, \phi(f_*Y)\rangle\,. \tag{1.4.11}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\langle \phi(f_*X), \phi^2(f_*Y)\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{|c|}}\left\langle \bar\nabla_X\xi, -f_*Y + \epsilon\,\langle f_*Y, \xi\rangle\,\xi\right\rangle = -\tfrac{1}{\sqrt{|c|}}\left\langle \bar\nabla_X\xi, f_*Y\right\rangle\\ &= \tfrac{1}{\sqrt{|c|}}\,\langle f_*A_\xi X, f_*Y\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{|c|}}\,\langle \alpha(X,Y), \xi\rangle\,.\end{aligned}$$

Assim,

$$\langle \alpha_f(X,Y), \xi\rangle = \sqrt{|c|}\,\langle f_*X, \phi f_*Y\rangle \tag{1.4.12}$$

para quaisquer $X, Y \in \Gamma(TM)$. Da equação (1.4.8) segue que o lado direito da equação (1.4.12) é anti-simétrico com respeito a X e Y. Como o lado esquerdo de (1.4.12) é simétrico com respeito a X e Y, obtemos que

$$\langle \alpha(X,Y), \xi\rangle = 0 = \sqrt{|c|}\,\langle f_*X, \Phi f_*Y\rangle \ \text{ para quaisquer } X, Y.$$

Dessa equação obtemos (i) e a primeira parte de (ii). Comparando as partes normal e tangente de (vi) na Proposição 1.4.5, obtemos a equação (1.4.9) e a primeira equação em (1.4.10). A segunda fórmula segue da equação de Ricci e de $A_\xi = 0$. Para a última equação, temos pela primeira que

$$\begin{aligned}R^{\perp}(X,Y)\phi f_*Z &= \nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y\phi f_*Z - \nabla^{\perp}_Y\nabla^{\perp}_X\phi f_*Z - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\phi f_*Z\\ &= \nabla^{\perp}_X\left(\phi f_*\nabla_Y Z - \epsilon\sqrt{|c|}\,\langle Y, Z\rangle\,\xi\right) - \nabla^{\perp}_Y\left(\phi f_*\nabla_X Z - \epsilon\sqrt{|c|}\,\langle X, Z\rangle\,\xi\right)\\ &\quad - \left(\phi f_*\nabla_{[X,Y]}Z - \epsilon\sqrt{|c|}\,\langle [X,Y], Z\rangle\,\xi\right)\\ &= \phi f_*\nabla_X\nabla_Y Z - \epsilon\sqrt{|c|}\,\langle X, \nabla_Y Z\rangle\,\xi - \epsilon\sqrt{|c|}X(\langle Y, Z\rangle)\xi - \epsilon\sqrt{|c|}\,\langle Y, Z\rangle\,\nabla^{\perp}_X\xi\\ &\quad -\phi f_*\nabla_Y\nabla_X Z + \epsilon\sqrt{|c|}\,\langle Y, \nabla_X Z\rangle\,\xi + \epsilon\sqrt{|c|}Y(\langle X, Z\rangle)\xi + \epsilon\sqrt{|c|}\,\langle X, Z\rangle\,\nabla^{\perp}_Y\xi\\ &\quad -\phi f_*\nabla_{[X,Y]}Z + \epsilon\sqrt{|c|}\,\langle [X,Y], Z\rangle\,\xi.\end{aligned}$$

Agora, a equação segue fazendo o produto com ϕW e pelas equações (ii), (iii) e (v) da

Proposição 1.4.5 da seguinte forma

$$\begin{aligned}\left\langle R^{\perp}(X,Y)\phi f_*Z,\phi f_*W\right\rangle &= \langle R(X,Y)Z,W\rangle-\epsilon\sqrt{|c|}\,\langle Y,Z\rangle\left\langle \nabla^{\perp}_X\xi,\phi f_*W\right\rangle\\ &\quad +\epsilon\sqrt{|c|}\,\langle X,Z\rangle\left\langle \nabla^{\perp}_Y\xi,\phi f_*W\right\rangle\\ &= \langle R(X,Y)Z,W\rangle-\epsilon\sqrt{|c|}\sqrt{|c|}\,\langle Y,Z\rangle\langle\phi f_*X,\phi f_*W\rangle\\ &\quad +\epsilon\sqrt{|c|}\sqrt{|c|}\,\langle X,Z\rangle\langle\phi f_*Y,\phi f_*W\rangle\\ &= \langle R(X,Y)Z,W\rangle-c(\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle-\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle).\end{aligned}$$

■

1.4.3 Subvariedade horizontais de curvatura constante

A fim de obter uma correspondência entre imersões isométricas horizontais $f: M^n(c)\to\mathbb{S}^{2n+1}_{\epsilon}(c)$ e soluções de um sistema de equações diferenciais parciais, começamos com a sequinte consequência da Proposição 1.3.1.

Corolário 1.4.8. *Suponha que $M^n(c)$ seja simplesmente conexa e seja $f: M^n(c)\to\mathbb{S}^{2n+1}_{\epsilon}(c)$ uma imersão isométrica com fibrado normal plano e $\nu_f\equiv 0$. Suponha que o primeiro espaço normal de f seja Riemanniano se $c<0$. Então existem localmente um sistema de coordenadas principais $(u_1,...,u_n)$ sobre $M^n(c)$, um referencial ortonormal de vetores normais $\xi_1,...,\xi_{n+1}$ e funções diferenciáveis $v_1>0,...,v_n>0,\rho_1,...,\rho_n$ tais que*

$$ds^2=\sum_i v_i^2du_i^2,\quad \alpha_f\left(\partial_i,\partial_j\right)=v_i\delta_{ij}\xi_i, \tag{1.4.13}$$

e

$$\nabla_{\partial_i}X_j=h_{ji}X_i,\ \nabla^{\perp}_{\partial_i}\xi_j=h_{ij}\xi_i, i\neq j,\ \nabla^{\perp}_{\partial_i}\xi_{n+1}=\rho_i\xi_i, \tag{1.4.14}$$

em que $X_i=(1/v_i)(\partial_i)$ e $h_{ij}=(1/v_i)\partial_i(v_j)$ para $i\neq j$. Além disso, a tripla (v,h,ρ), em que $v=(v_1,...,v_n)$, $h=(h_{ij})$ e $\rho=(\rho_1,...,\rho_n)$, satisfaz o seguinte sistema de equações diferenciais parciais

$$\begin{cases} i)\ \partial_j(v_i)=h_{ji}v_j,\quad ii)\ \partial_j(h_{ik})=h_{ij}h_{jk},\quad iii)\ \partial_j(\rho_i)=h_{ij}\rho_j\\ iv)\ \partial_i(h_{ij})+\partial_j(h_{ji})+\sum_k h_{ki}h_{kj}+cv_iv_j=0,\\ v)\ \partial_j(h_{ij})+\partial_i(h_{ji})+\sum_k h_{ik}h_{jk}+\epsilon\rho_i\rho_j=0,\ \epsilon=\frac{c}{|c|},\ i\neq j\neq k\neq i.\end{cases} \tag{1.4.15}$$

Reciprocamente, seja (v,h,ρ) uma solução de (1.4.15) em um subconjunto aberto e simplesmente conexo $U\subset\mathbb{R}^n$ tal que $v_i\neq 0$ em todos os pontos. Então existe uma imersão $f: U\to\mathbb{S}^{2n+1}_{\epsilon}(c)$ com fibrado normal plano, $\nu_f\equiv 0$, N_1^f Riemanniano de posto n e métrica induzida $ds^2=\sum_i v_i^2du_i^2$ de curvatura seccional constante c.

Demonstração. A primeira parte e as equações (i), (ii) e (iv) do sistema (1.3.3) são consequências direta da Proposição 1.3.1. Mostremos que (v,h,ρ) sastifazem (iii) e (v) de (1.4.15). De $\nabla^{\perp}_{\partial_i}\xi_i \perp \xi_i$ temos que $\nabla^{\perp}_{\partial_i}\xi_i = -\sum_{k\neq i} h_{ik}\xi_k - \epsilon\rho_i\xi_{n+1}$ e assim

$$\begin{aligned}
0 &= R^{\perp}\left(\partial_i, \partial_j\right)\xi_i = \nabla^{\perp}_{\partial_i}\nabla^{\perp}_{\partial_j}\xi_i - \nabla^{\perp}_{\partial_j}\nabla^{\perp}_{\partial_i}\xi_i \\
&= \partial_i(h_{ji})\xi_j + h_{ji}\nabla^{\perp}_{\partial_i}\xi_j + \textstyle\sum_{k\neq i}\partial_j(h_{ik})\xi_k + \sum_{j\neq k\neq i} h_{ik}\nabla^{\perp}_{\partial_j}\xi_k + h_{ij}\nabla^{\perp}_{\partial_j}\xi_j \\
&\quad +\epsilon\partial_j(\rho_i)\xi_{n+1} + \epsilon\rho_i\nabla^{\perp}_{\partial_j}\xi_{n+1} \\
&= \partial_i(h_{ji})\xi_j + h_{ji}h_{ij}\xi_i + \textstyle\sum_{k\neq i}\partial_j(h_{ik})\xi_k + \sum_{j\neq k\neq i} h_{ik}h_{jk}\xi_j - h_{ij}\sum_{k\neq j} h_{jk}\xi_k - \epsilon h_{ij}\rho_j\xi_{n+1} \\
&\quad +\epsilon\partial_j(\rho_i)\xi_{n+1} + \epsilon\rho_i\rho_j\xi_j,
\end{aligned}$$

obtendo as equações (iii) e (v) de (1.4.15). De

$$R^{\perp}\left(\partial_i, \partial_j\right)\xi_{n+1} = 0,$$

obtemos novamente a equação (iii) de (1.4.15).

A recíproca é também consequência direta da Proposição 1.3.1.

■

O resultado seguinte mostra que imersões isométricas horizontais $f : M^n(c) \to \mathbb{S}^{2n+1}_{\epsilon}(c)$ satisfazem as hipóteses da proposição anterior.

Corolário 1.4.9. *Uma imersão isométrica horizontal $f : M^n \to \mathbb{S}^{2n+1}_{\epsilon}(c)$ tem fibrado normal plano se, e somente se, M^n tem curvatura seccional constante c.*

O próximo teorema caracteriza as triplas (v, h, ρ) associadas a imersões isométricas horizontais $f : M^n(c) \to \mathbb{S}^{2n+1}_{\epsilon}(c)$.

Teorema 1.4.10. *A imersão isométrica $f : M^n(c) \to \mathbb{S}^{2n+1}_{\epsilon}(c)$ é horizontal se, e somente se, sua tripla (v, h, ρ) associada satisfaz*

$$h_{ij} = h_{ji} \text{ e } \rho_i = \sqrt{|c|}v_i. \tag{1.4.16}$$

Demonstração. Sejam $X_1, ..., X_n$ um referencial ortonormal de direções principais e $\xi_1, ..., \xi_{n+1}$ um referencial ortonormal normal como no Corolário 1.4.8. Pela parte (ii) do Teorema 1.4.7, temos

$$f_* A_{\phi f_* X_i} X_i = \phi\alpha(X_i, X_i) = v_i^{-2}\phi\alpha\left(\partial_i, \partial_i\right) = v_i^{-2}\phi v_i \delta_{ii}\xi_i = v_i^{-1}\phi\xi_i.$$

Por outro lado,

$$f_* A_{\phi f_* X_i} X_i = f_*\left(\sum_j \left\langle \phi f_* X_i, \xi_j \right\rangle A_{\xi_j} X_i + \left\langle \phi f_* X_i, \xi_{n+1} \right\rangle A_{\xi_{n+1}} X_i\right) = \left\langle \phi f_* X_i, \xi_i \right\rangle v_i^{-1} f_* X_i,$$

logo $\phi\xi_i = \left\langle \phi f_* X_i, \xi_i \right\rangle f_* X_i$. Por (v) da Proposição 1.4.5 temos

$$||\phi(\xi_i)||^2 = \left\langle \phi\xi_i, \phi\xi_i \right\rangle = \left\langle \xi_i, \xi_i \right\rangle - \epsilon\left\langle \xi_i, \xi \right\rangle\left\langle \xi_i, \xi \right\rangle = 1,$$

e assim,
$$\phi f_* X_i = \pm \xi_i. \tag{1.4.17}$$
Além disso, temos também por (ii) do Teorema 1.4.7 que $\xi_{n+1} = \pm \xi \circ f := \xi_f$.

Usando a primeira equação em (1.4.10) e a equação (1.4.14) temos

$$h_{ij} = \left\langle \nabla^{\perp}_{\partial_i} \xi_j, \xi_i \right\rangle = \left\langle \nabla^{\perp}_{\partial_i} \phi f_* X_j, \phi f_* X_i \right\rangle = \left\langle \phi f_* \nabla^{\perp}_{\partial_i} X_j, \phi f_* X_i \right\rangle = \langle \nabla_{\partial_i} X_j, X_i \rangle = h_{ji},$$

e

$$\rho_i = \left\langle \nabla^{\perp}_{\partial_i} \xi_{n+1}, \xi_i \right\rangle = \left\langle \nabla^{\perp}_{\partial_i} \xi, \phi f_* X_i \right\rangle = -\left\langle \nabla^{\perp}_{\partial_i} \phi f_* X_i, \xi \right\rangle = \left\langle \epsilon \sqrt{|c|} v_i \langle X_i, X_i \rangle \xi, \xi \right\rangle = \sqrt{|c|} v_i.$$

Reciprocamente, suponha que a solução (v, h, ρ) do sistema (1.4.15) associada a $f : M^n(c) \to \mathbb{S}^{2n+1}_{\epsilon}$ satisfaça (1.4.16). Seja $F = i \circ f$ a composição de f com a inclusão umbílica i de $\mathbb{S}^{2n+1}_{\epsilon}(c)$ em $\mathbb{C}^{n+1}_{\epsilon}$. Defina uma estrutura complexa $\tilde{J}$ em $F^* T\mathbb{C}^{n+1}_{\epsilon}$ por

$$\tilde{J} F_* X_i = \xi_i \text{ e } \tilde{J}(\sqrt{|c|} F) = \xi_{n+1}. \tag{1.4.18}$$

Denote por $\tilde{\nabla}$ a derivada em $\mathbb{C}^{n+1}_{\epsilon}$. Pela simetria de h e (1.4.14) temos

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X_i} \tilde{J} F_* X_j &= \nabla^{\perp}_{X_i} \xi_j - F_* A^F_{\xi_j} X_i \\
&= h_{ij} \xi_i = h_{ji} \tilde{J}(F_* X_i) \\
&= \tilde{J}(F_* \nabla_{X_i} X_j + \alpha_F(X_i, X_j)) \\
&= \tilde{J}(\tilde{\nabla}_{X_i} X_j),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X_i} \tilde{J} F_* X_i &= \nabla^{\perp}_{X_i} \xi_i - F_* A^F_{\xi_i} X_i = -\textstyle\sum_k h_{ki} \xi_k - v_i^{-1} F_* X_i \\
&= -\textstyle\sum_k h_{ik} \tilde{J} F_* X_k - v_i^{-1} \tilde{J} \xi_i \\
&= \tilde{J}(F_* \nabla_{X_i} X_i + \alpha_F(X_i, X_i)) \\
&= \tilde{J}(\tilde{\nabla}_{X_i} X_i).
\end{aligned}$$

De forma análoga
$$\tilde{\nabla}_{X_i} \tilde{J} \xi_j = \tilde{J} \tilde{\nabla}_{X_i} \xi_j, \ \forall i, j.$$
Usando que $\rho_i = \sqrt{|c|} v_i$ obtemos de (1.4.14) que

$$\tilde{\nabla}_{X_i} \tilde{J}(\sqrt{|c|} F) = \tilde{\nabla}_{X_i} \xi_{n+1} = \sqrt{|c|} \xi_i = \tilde{J}(\sqrt{|c|} F_* X_i) = \tilde{J} \tilde{\nabla}_{X_i} \sqrt{|c|} F.$$

Portanto, $\tilde{J}$ é paralelo com respeito a $\tilde{\nabla}$ ao longo de F, e portanto é a restrição a $TM \oplus N_F M$ de uma estrutura quase complexa em $\mathbb{C}^{n+1}_{\epsilon}$.

Fazendo ϕ a projeção de $\tilde{J}$ em $T\mathbb{S}^{2n+1}_{\epsilon}$, temos pela equação (1.4.18) que

$$\tilde{J}(X) = \phi(X) - \epsilon \langle X, \xi_{n+1} \rangle \sqrt{|c|} F.$$

Como $\xi_{n+1} \in N_1^{f\perp}$, temos que f é horizontal.

■

Corolário 1.4.11. *Seja $f : M^n(c) \to \mathbb{S}_\epsilon^{2n+1}(c)$ uma imersão isométrica horizontal com $\nu_f \equiv 0$. Então, existe localmente um sistema de coordenadas $(u_1, ..., u_n)$ sobre $M^n(c)$ com*

$$ds^2 = \sum_i v_i^2 du_i^2, \ v_i > 0 \ e \ \alpha_f(\partial_i, \partial_j) = \delta_{ij}\phi\partial_i,$$

em que $v = (v_1, ..., v_n)$ e $h = (h_{ij})$ satisfazem o sistema de equações diferenciais parciais

$$\begin{cases} i) \ \partial_j(v_i) = h_{ji}v_j, & ii) \ \sum_k \partial_k(h_{ij}) + cv_iv_j = 0, \\ iii) \ \partial_k(h_{ij}) = h_{ik}h_{jk}, \ h_{ij} = h_{ji}, \ i \neq j \neq k \neq i. \end{cases} \tag{1.4.19}$$

Reciprocamente, seja (v, h) uma solução de (1.4.19) sobre um subconjunto aberto e simplesmente conexo $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $v_i(x) \neq 0$ para todo $x \in U$. Seja $(F, Y_1, ..., Y_n)$, com $F, Y_i : U \to \mathbb{C}_\epsilon^{n+1}$, uma solução do sistema de EDP's

$$\begin{cases} i) \ \partial_i(F) = v_iY_i & ii) \ \partial_j(Y_i) = h_{ij}Y_j, \ i \neq j, \\ iii) \ \partial_i(Y_i) = -\sum_{k\neq i} h_{ki}Y_k + iY_i - cv_iF, \end{cases} \tag{1.4.20}$$

com condições iniciais $(F(u_0), Y_1(u_0), ..., Y_n(u_0))$, em algum ponto $u = u_0 \in U$, escolhidas satisfazendo

$$\langle Y_i(u_0), Y_j(u_0)\rangle = \langle iY_i(u_0), Y_j(u_0)\rangle = 0, \ i \neq j, \ \langle Y_i(u_0), Y_i(u_0)\rangle = 1,$$
$$\langle F(u_0), Y_i(u_0)\rangle = \langle iF(u_0), Y_i(u_0)\rangle = 0 \ e \ \langle F(u_0), F(u_0)\rangle = \tfrac{1}{c}.$$

Então $F(U) \subset \mathbb{S}_\epsilon^{2n+1}(c) \subset \mathbb{C}_\epsilon^{n+1}$ e a imersão $f : U \to \mathbb{S}_\epsilon^{2n+1}(c)$, dada por $F = i \circ f$, é horizontal e tem métrica induzida $ds^2 = \sum v_i^2 du_i$ com curvatura seccional constante c.

Demonstração. A ida é uma consequência do Corolário 1.4.8 e do Teorema 1.4.10. Para a recíproca, seja $\{Y_1, \ldots, Y_n, F\}$ uma solução do sistema (1.4.20) e defina $f_{ij} = \langle Y_i, Y_j\rangle$, $g_{ij} = \langle iY_i, Y_j\rangle$, $r_i = \langle F, Y_i\rangle$, $t_i = \langle iF, Y_i\rangle$ e $l = \langle F, F\rangle$. Temos que $\{f_{ij}, g_{ij}, r_i, t_i, l\}$ é uma solução do seguinte sistema de EDP's

$$\begin{cases} i) \ \partial_a f_{ij} = h_{ia}f_{aj} + f_{ia}h_{aj}, & ii) \ \partial_i f_{ij} = -\sum_{k\neq i} h_{ki}f_{kj} + g_{ij} - cv_ir_j + h_{ji}f_{ii}, \\ iii) \ \partial_i f_{ii} = -2\sum_{k\neq i} h_{ki}f_{ki} - 2cv_ir_i, & \\ \text{iv}) \ \partial_s g_{ij} = h_{is}g_{sj} + g_{is}h_{sj}, & \text{v}) \ \partial_i g_{ij} = -\sum_{k\neq i} h_{ki}g_{kj} - f_{ij} - cv_it_j, \\ \text{vi}) \ \partial_j g_{ij} = -\sum_{k\neq j} h_{kj}g_{ik} - f_{ij} + cv_jt_i, & \text{v}ii) \ \partial_s r_i = v_sf_{si} + h_{is}r_s, \\ \text{v}iii) \ \partial_i r_i = v_if_{ii} - \sum_{k\neq i} h_{ki}r_k - t_i - cv_il, & i\text{x}) \ \partial_s t_i = v_sg_{si} - h_{is}t_s, \\ \text{x}) \ \partial_i t_i = \sum_{k\neq i} h_{ki}t_k + r_i, & \text{x}i) \ \partial_s l = 2v_sr_s, \end{cases}$$

com $i \neq s \neq j$, e $i \neq j$ em (ii), (iv), (v) e (vi). Observe que $\bar{f}_{ij} = \delta_{ij}$, $\bar{g}_{ij} = 0 = \bar{r}_i = \bar{t}_i$ e

$\bar{l} = 1/c$ é uma solução desse sistema. Pela unicidade de soluções satisfazendo condições iniciais escolhidas, segue que $f_{ij} = \delta_{ij}$ e $g_{ij} = 0 = r_i = t_i$ e $l = 1/c$.

Segue de $\partial_i F = F_* \partial_i = v_i Y_i$, com $v_i(x) \neq 0$ para todo $x \in U$, e $\langle Y_i, Y_j \rangle = 0,\ \forall i, j$, que F é uma imersão isométrica e $ds^2 = \sum_i v_i^2 du_i^2$. Além disso, de $\langle F, F \rangle = 1/c$ temos $F(U) \subset \mathbb{S}^{2n+1}_\epsilon(c) \subset \mathbb{C}^{n+1}_\epsilon$. Agora, de $\langle Y_i, iY_j \rangle = 0 = \langle iF, Y_j \rangle = \langle F, iY_j \rangle,\ \forall i, j$, temos, definindo $\tilde{J}$ por $\tilde{J}Y_j = iY_j,\ \forall j$ e $\tilde{J}F = iF$, que F é horizontal.

Temos da equação $\nabla_{\partial_i} X_j = h_{ji} X_i$ que $\alpha_F(\partial_i, \partial_j) = 0$ e $v_i^{-1}\alpha_F(\partial_i, \partial_i) = \alpha_F(\partial_i, X_i) = iY_i - cv_iF$, assim

$$\alpha_f(\partial_i, \partial_j) = \delta_{ij}\phi(F_*\partial_i),$$

e

$$R(\partial_i, \partial_j)X_k = (\tilde{R}(\partial_i, \partial_j)X_k)^\top = c(\partial_i \wedge \partial_j)X_k = -\delta_{ik} c v_i \partial_j.$$

Portanto, ds^2 tem curvatura seccional constante c.

■

Capítulo 2

As equações matriciais

Neste capítulo discutimos alguns resultados de Álgebra Linear que são usados nas demonstrações dos principais teoremas deste trabalho. Tais resultados envolvem a equação matricial

$$AX + XB = C,$$

conhecida como a *equação de Sylvester*, e alguns de seus casos particulares.

2.1 A equação de Sylvester

Nesta seção expomos os resultados obtidos em [22] sobre a existência de soluções para a equação de Sylvester

$$AX + XB = C. \tag{2.1.1}$$

Tais resultados fornecem, em particular, condições necessárias e suficientes sobre as matrizes $A \in M_n(\mathbb{C})$ e $B \in M_m(\mathbb{C})$ para que a equação (2.1.1) possua uma única solução $X \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ qualquer que seja a matriz $C \in M_{n,m}(\mathbb{C})$.

Mais geralmente, dadas as matrizes $A \in M_n(\mathbb{C})$ e $B \in M_m(\mathbb{C})$, são obtidas condições necessárias e suficientes sobre uma matriz $C \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ para que a equação (2.1.1) possua uma solução $X \in M_{n,m}(\mathbb{C})$.

Fazemos também uma breve discussão sobre formas explícitas de soluções da equação (2.1.1) obtidas por Ma e Hu/Cheng em [25] e [21], respectivamente.

2.1.1 A aplicação $X \longmapsto AX + XB$.

Dadas as matrizes $A \in M_n(\mathbb{C})$ e $B \in M_m(\mathbb{C})$, consideremos a aplicação linear

$$\begin{array}{rcccc} \Psi = \Psi_{A,B} & : & M_{n,m}(\mathbb{C}) & \longmapsto & M_{n,m}(\mathbb{C}) \\ & & X & \longrightarrow & AX + XB. \end{array} \tag{2.1.2}$$

Nosso primeiro objetivo é obter uma base para o núcleo de Ψ.

Para isso, lembramos inicialmente que um bloco de Jordan é uma matriz da forma

$$J_1(\alpha) = [\alpha] \text{ e } J_m(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{bmatrix}_{m\times m} \qquad \text{para } m > 1$$

Dada $A \in M_n(\mathbb{C})$, existe uma matriz inversível $P = (a_{11}, ..., a_{1n_1}, \dots, a_{p1}, ..., a_{pn_p}) \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $P^{-1}AP$ tem a forma canônica de Jordan $J_{n_1}(\alpha_1) \oplus ... \oplus J_{n_p}(\alpha_p)$, em que $\sigma(A) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ é o espectro de A. Assim, temos

$$(A - \alpha_i I_n)a_{ir} = a_{i,r-1}$$

para $r = 1, 2, ..., n_i$, com $a_{i0} = 0$.

Definição 2.1.1. Para cada $i = 1, \dots, p$, os vetores $a_{i1}, ..., a_{in_i}$ são chamados de *autovetores generalizados* de A associados ao bloco de Jordan $J_{n_i}(\alpha_i)$.

Proposição 2.1.2. *Sejam $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in_i}$ e $z_{j1}, z_{j2}, ..., z_{jm_i}$ os respectivos autovetores generalizados associados aos blocos de Jordan $J_{n_i}(-\alpha_i)$ de $-A$ e $J_{m_j}(\beta_j^*)$ de B^*, com $i = 1, ..., p$ e $j = 1, ..., q$. Para $k = 1, 2, ..., \mu_{ij} = min(n_i, m_j)$, defina*

$$X_{ijk} = a_{ik}z_{j1}^* + a_{i,k-1}z_{j2}^* + ... + a_{i1}z_{jk}^*.$$

Então, o conjunto

$$\{X_{ijk} : \ \alpha_i + \beta_j = 0, \ k = 1, 2, ..., \mu_{ij}\} \tag{2.1.3}$$

é uma base para $ker\Psi$.

Demonstração. Verifiquemos inicialmente que X_{ijk} pertence a $ker\Psi$. De fato,

$$\begin{aligned} \Psi(X_{ij1}) &= Aa_{i1}z_{j1}^* + a_{i1}z_{j1}^*B = Aa_{i1}z_{j1}^* + a_{i1}(B^*z_{j1})^* \\ &= \alpha_i a_{i1}z_{j1}^* + \beta_j a_{i1}z_{j1}^* = (\alpha_i + \beta_j)a_{i1}z_{j1}^* = 0, \\ \Psi(X_{ij2}) &= A(a_{i2}z_{j1}^* + a_{i1}z_{j2}^*) + (a_{i2}z_{j1}^* + a_{i1}z_{j2}^*)B \\ &= \alpha_i a_{i2}z_{j1}^* - a_{i1}z_{j1}^* + \alpha_i a_{i1}z_{j2}^* + \beta_j a_{i2}z_{j1}^* + a_{i1}z_{j1}^* + \beta_j a_{i1}z_{j2}^* \\ &= (\alpha_i + \beta_j)(a_{i2}z_{j1}^* + a_{i1}z_{j2}^*) = 0, \end{aligned}$$

e, para $k = 3, ..., \mu_{ij}$, temos

$$\begin{aligned}
\Psi(X_{ijk}) &= A(a_{ik}z_{j1}^* + a_{i,k-1}z_{j2}^* + ... + a_{i1}z_{jk}^*) + (a_{ik}z_{j1}^* + a_{i,k-1}z_{j2}^* + ... + a_{i1}z_{jk}^*)B \\
&= \Big(Aa_{ik}z_{j1}^* + a_{i,k-1}z_{j2}^*B\Big) + \Big(Aa_{ik-1}z_{j2}^* + a_{i,k-2}z_{j3}^*B\Big) + ... \\
&+ \Big(Aa_{i3}z_{jk-2}^* + a_{i,2}z_{jk-1}^*B\Big) + \Big(Aa_{i2}z_{jk-1}^* + a_{i1}z_{jk}^*B\Big) + Aa_{i1}z_{jk}^* + a_{ik}z_{j1}^*B \\
&= \Big(\alpha_i a_{ik}z_{j1}^* + \beta_j a_{i,k-1}z_{j2}^*\Big) + \Big(\alpha_i a_{ik-1}z_{j2}^* + \beta_j a_{i,k-2}z_{j3}^*\Big) + ... \\
&+ \Big(\alpha_i a_{i3}z_{jk-2}^* + \beta_j a_{i,2}z_{jk-1}^*\Big) + \Big(\alpha_i a_{i2}z_{jk-1}^* + \beta_j a_{i1}z_{jk}^*\Big) + \alpha_i a_{i1}z_{jk}^* + \beta_j a_{ik}z_{j1}^* \\
&= (\alpha_i + \beta_j)a_{ik}z_{j1}^* + (\alpha_i + \beta_j)a_{i,k-1}z_{j2}^* + (\alpha_i + \beta_j)a_{i,k-2}z_{j3}^* + ... \\
&+ (\alpha_i + \beta_j)a_{i,2}z_{jk-1}^* + (\alpha_i + \beta_j)a_{i1}z_{jk}^* \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Mostremos agora que o conjunto em (2.1.3) gera o núcleo de Ψ. Como os conjuntos $\{a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in_i},\ i = 1, ..., p\}$ e $\{z_{j1}, z_{j2}, ..., z_{jm_i},\ j = 1, ..., q\}$ são bases de $M_{n,1}(\mathbb{C})$ e $M_{m,1}(\mathbb{C})$, respectivamente, o conjunto de nm matrizes

$$\{a_{ir}z_{js}^* = a_{ir} \otimes z_{js}^*,\ i = 1, 2, ..., p,\ j = 1, 2, ..., q,\ r = 1, 2, ..., n_i \text{ e } s = 1, 2, ..., m_j\} \quad (2.1.4)$$

é linearmente independente e, assim, gera o espaço das matrizes $M_{n,m}(\mathbb{C})$.

Dada $X \in ker(\Psi) \subset M_{n,m}(\mathbb{C})$, escrevemos $X = \sum_{i,r,j,s} C_{i,r,j,s}a_{ir}z_{js}^*$, e pomos $C_{i,r+1,j,s} = 0$ quando $r = n_i$ e $C_{i,r,j,s+1} = 0$ quando $s = m_j$. Usando que

$$\Psi(a_{ir}z_{js}^*) = (\alpha_i + \beta_j)a_{ir}z_{js}^* - a_{i,r-1}z_{js}^* + a_{ir}z_{j,s-1},$$

com $a_{i,0} = z_{j,0} = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
0 =&\Psi(X) = \Psi(\sum_{i,r,j,s} C_{i,r,j,s} a_{ir} z_{js}^*) \\
=& \sum_{i,r,j,s} C_{i,r,j,s}(\alpha_i + \beta_j) a_{ir} z_{js}^* - \sum_{i,r,j,s} C_{i,r,j,s} a_{i,r-1} z_{js}^* + \sum_{i,r,j,s} C_{i,r,j,s} a_{ir} z_{j,s-1}^* \\
=& \sum_{i,1,j,1} \left(C_{i,1,j,1}(\alpha_i + \beta_j)\right) a_{i1} z_{j1}^* + \sum_{i,1,j,s\neq 1} \Big(C_{i,1,j,s}(\alpha_i + \beta_j) a_{i1} z_{js}^* + C_{i,1,j,s} a_{i1} z_{j,s-1}^*\Big) \\
&+ \sum_{i,r\neq 1,j,1} \Big(C_{i,r,j,1}(\alpha_i + \beta_j) a_{ir} z_{j1}^* - C_{i,r,j,1} a_{i,r-1} z_{j1}^*\Big) \\
&+ \sum_{i,r\neq 1,j,s\neq 1} \Big(C_{i,r,j,s}(\alpha_i + \beta_j) a_{ir} z_{js}^* - C_{i,r,j,s} a_{i,r-1} z_{js}^* + C_{i,r,j,s} a_{ir} z_{j,s-1}^*\Big) \\
=& \sum_{i,1,j,1} \left(C_{i,1,j,1}(\alpha_i + \beta_j) - C_{i,2,j,1} + C_{i,1,j,2}\right) a_{i1} z_{j1}^* \\
&+ \sum_{i,1,j,s\neq 1} \left(C_{i,1,j,s}(\alpha_i + \beta_j) - C_{i,2,j,s} + C_{i,1,j,s+1}\right) a_{i1} z_{js}^* \\
&+ \sum_{i,r\neq 1,j,1} \left(C_{i,r,j,1}(\alpha_i + \beta_j) - C_{i,r+1,j,1} + C_{i,r,j,2}\right) a_{ir} z_{j1}^* \\
&+ \sum_{i,r\neq 1,j,s\neq 1} \left(C_{i,r,j,s}(\alpha_i + \beta_j) - C_{i,r+1,j,s} + C_{i,r,j,s+1}\right) a_{ir} z_{js}^* \\
=& \sum_{i,r,j,s} \left(C_{i,r,j,s}(\alpha_i + \beta_j) - C_{i,r+1,j,s} + C_{i,r,j,s+1}\right) a_{ir} z_{js}^* \\
=& \sum_{\bar{i},r,\bar{j},s} \Big(-C_{\bar{i},r+1,\bar{j},s} + C_{\bar{i},r,\bar{j},s+1}\Big) a_{\bar{i}r} z_{\bar{j}s}^* \\
&+ \sum_{i,r,j,s} \left(C_{i,r,j,s}(\alpha_i + \beta_j) - C_{i,r+1,j,s} + C_{i,r,j,s+1}\right) a_{ir} z_{js}^*,
\end{aligned}$$

com $\{i,j\}$ e $\{\bar{i},\bar{j}\}$ satisfazendo, respectivamente, a $\alpha_i + \beta_j \neq 0$ e $\alpha_{\bar{i}} + \beta_{\bar{j}} = 0$.

Como o conjunto (2.1.4) é linearmente independente, temos

$$C_{\bar{i},r,\bar{j},s+1} = C_{\bar{i},r+1,\bar{j},s},$$

e

$$C_{i,r,j,s}(\alpha_i + \beta_j) - C_{i,r+1,j,s} + C_{i,r,j,s+1} = 0. \tag{2.1.5}$$

Segue da primeira equação acima que

$$C_{\bar{i},k,\bar{j},1} = C_{\bar{i},k-1,\bar{j},2} = ... = C_{\bar{i},1,\bar{j},k}, \text{ com } k = 1, 2, ..., \mu_{\bar{i}\bar{j}},$$

e

$$C_{\bar{i},t,\bar{j},m_{\bar{j}}} = C_{\bar{i},t-1,\bar{j},m_{\bar{j}+1}} = 0 = C_{\bar{i},n_{\bar{i}},\bar{j},l-1} = C_{\bar{i},n_{\bar{i}}+1,\bar{j},l} \text{ com } t, l > 1.$$

Além disso, supondo $m_{\bar{j}} \geq l > n_{\bar{i}}$, temos

$$C_{\bar{i}1\bar{j}l} = C_{\bar{i},2,\bar{j},l-1} = ... = C_{\bar{i},n_{\bar{i}},\bar{j},l-(n_{\bar{i}}-1)} = 0,$$

pois $(l-(n_{\bar{i}}-1)) = l - n_{\bar{i}} + 1 > 1$.

Para $\{\bar{i},\bar{j}\}$ com $\alpha_{\bar{i}} + \beta_{\bar{j}} = 0$, segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{r,s} C_{\bar{i},r,\bar{j},s} a_{\bar{i}r} z^*_{\bar{j}s} =& C_{\bar{i},1,\bar{j},1} a_{\bar{i}1} z^*_{\bar{j}1} + C_{\bar{i},2,\bar{j},1} a_{\bar{i}2} z^*_{\bar{j}1} + ... + C_{\bar{i},n_{\bar{i}},\bar{j},1} a_{\bar{i}n_{\bar{i}}} z^*_{\bar{j}1} \\
&+ C_{\bar{i},1,\bar{j},2} a_{\bar{i}1} z^*_{\bar{j}2} + C_{\bar{i},2,\bar{j},2} a_{\bar{i}2} z^*_{\bar{j}2} + ... + C_{\bar{i},n_{\bar{i}},\bar{j},2} a_{\bar{i},n_{\bar{i}}} z^*_{\bar{j}2} \\
&+ ... + C_{\bar{i},1,\bar{j},m_{\bar{j}}} a_{\bar{i}1} z^*_{\bar{j}m_{\bar{j}}} + C_{\bar{i},2,\bar{j},m_{\bar{j}}} a_{\bar{i}2} z^*_{\bar{j}m_{\bar{j}}} + ... + C_{\bar{i},n_{\bar{i}},\bar{j},m_{\bar{j}}} a_{\bar{i}n_{\bar{i}}} z^*_{\bar{j}m_{\bar{j}}} \\
=& C_{\bar{i},1,\bar{j},1} a_{\bar{i}1} z^*_{\bar{j}1} + C_{\bar{i},2,\bar{j},1}(a_{\bar{i}2} z^*_{\bar{j}1} + a_{\bar{i}1} z^*_{\bar{j}2}) + ... \\
&+ C_{\bar{i},k,\bar{j},1}(a_{\bar{i}k} z^*_{\bar{j}1} + a_{\bar{i},k-1} z^*_{\bar{j}2} + ... + a_{\bar{i}1} z^*_{\bar{j}k}) \\
=& \sum_{\bar{i},r,\bar{j},s} C_{\bar{i},r,\bar{j},s} X_{\bar{i}\bar{j}k}, \text{ com } k = 1,2,...,\mu_{\bar{i}\bar{j}}.
\end{aligned}$$

Resta mostrar que $C_{itjl} = 0$ para todo par $\{i,j\}$ com $\alpha_i + \beta_j \neq 0$, $t = 1,2,...,n_i$ e $l = 1,2,...,m_j$. De (2.1.5), temos as relações

$$\begin{aligned}
&C_{i,n_i,j,l}(\alpha_i + \beta_j) = C_{i,n_i+1,j,l} - C_{i,n_i,j,l+1} = -C_{i,n_i,j,l+1}, \\
&C_{i,n_i,j,l+1}(\alpha_i + \beta_j) = -C_{i,n_i,j,l+2}, \\
&... \\
&C_{i,n_i,j,m_j-1}(\alpha_i + \beta_j) = -C_{i,n_i,j,m_j}, \\
&C_{i,n_i,j,m_j}(\alpha_i + \beta_j) = -C_{i,n_i,j,m_j+1} = 0,
\end{aligned}$$

as quais implicam que $C_{i,n_i,j,l} = 0$ para $l = 1,2,...,m_j$. Temos ainda que

$$\begin{aligned}
&C_{i,n_i-1,j,l}(\alpha_i + \beta_j) = C_{i,n_i,j,l} - C_{i,n_i-1,j,l+1} = -C_{i,n_i-1,j,l+1}, \\
&C_{i,n_i-1,j,l+1}(\alpha_i + \beta_j) = -C_{i,n_i-1,j,l+2}, \\
&... \\
&C_{i,n_i-1,j,m_j-1}(\alpha_i + \beta_j) = -C_{i,n_i-1,j,m_j}, \\
&C_{i,n_i-1,j,m_j}(\alpha_i + \beta_j) = -C_{i,n_i-1,j,m_j+1} = 0,
\end{aligned}$$

logo $C_{i,n_i-1,j,l} = 0$ para $l = 1,2,...,m_j$. Por indução, supondo que $C_{i,n_i-t,j,l} = 0$ para $l = 1,2,...,m_j$, temos

$$\begin{aligned}
&C_{i,n_i-(t-1),j,l}(\alpha_i + \beta_j) = C_{i,n_i-t,j,l} - C_{i,n_i-(t-1),j,l+1} = -C_{i,n_i-(t-1),j,l+1}, \\
&C_{i,n_i-(t-1),j,l+1}(\alpha_i + \beta_j) = C_{i,n_i-(t-1),j,l+1} - C_{i,n_i-(t-1),j,l+2} = -C_{i,n_i-(t-1),j,l+2}, \\
&... \\
&C_{i,n_i-(t-1),j,m_j}(\alpha_i + \beta_j) = -C_{i,n_i-(t-1),j,m_j+1} = 0,
\end{aligned}$$

portanto $C_{i,n_i-(t-1),j,l} = 0$ para $l = 1,2,...,m_j$.

Assim,

$$X = \sum_{i,r,j,s} C_{i,r,j,s} X_{ijk} \text{ com } k = 1, 2, ..., \mu_{ij} \text{ e } \alpha_i + \beta_j = 0.$$

Finalmente, o fato de que (2.1.3) é linearmente independente decorre imediatamente de (2.1.4) ser linearmente independente.

■

Corolário 2.1.3. *Sejam $A \in M_n(\mathbb{C})$, $B \in M_m(\mathbb{C})$. Então a equação (2.1.1) tem uma única solução $X \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ para qualquer $C \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ se, e só se, $\sigma(A) \cap \sigma(-B) = \emptyset$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.1.2, a condição $\sigma(A) \cap \sigma(-B) = \emptyset$ é necessária e suficiente para que a aplicação $\Psi_{A,B}$ em (2.1.2) seja injetiva, e portanto bijetiva. ■

Dadas $A \in M_n(\mathbb{C})$ e $B \in M_m(\mathbb{C})$, não necessariamente satisfazendo $\sigma(A) \cap \sigma(-B) = \emptyset$, descrevemos a seguir condições necessárias e suficientes sobre $C \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ para que a equação de Sylvester (2.1.1) possua alguma solução $X \in M_{n,m}(\mathbb{C})$.

Dadas $X, Y \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, definimos seu produto interno (X, Y) por

$$(X, Y) = trX^*Y,$$

em que trZ representa o traço da matriz Z. Afirmamos que a aplicação adjunta de $\Psi_{A,B}$, definida em (2.1.2), com respeito a tal produto interno é a aplicação linear

$$\begin{array}{rcccc} \Psi_{A^*,B^*} & : & M_{n,m}(\mathbb{C}) & \longmapsto & M_{n,m}(\mathbb{C}) \\ & & X & \longrightarrow & A^*X + XB^*. \end{array}$$

De fato, para quaisquer $X, Y \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ temos

$$\begin{aligned} (\Psi_{A,B}X, Y) - (X, \Psi_{A^*,B^*}Y) &= tr(AX + XB)^*Y - trX^*(A^*Y + YB^*) \\ &= tr(A^* - A^*)YX^* - tr(B^* - B^*)X^*Y \\ &= 0. \end{aligned}$$

Corolário 2.1.4. *Sejam $A \in M_n(\mathbb{C})$ e $B \in M_m(\mathbb{C})$, e sejam $w_{i1}, w_{i2}, ..., w_{in_i}$, $i = 1, ..., p$, e $b_{j1}, b_{j2}, ..., b_{jm_i}$, $j = 1, ..., q$, os respectivos autovetores generalizados de $-A^*$ e B associados aos blocos de Jordan $J_{n_i}(-\alpha_i^*)$ e $J_{m_j}(\beta_j)$. Dada $C \in M_{n,m}(\mathbb{C})$, a equação de Sylvester (2.1.1) possui uma solução $X \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ se, e somente se, sempre que $\alpha_i + \beta_j = 0$*

tivermos

$$\begin{aligned}
&w_{i1}^* C b_{j1} = 0,\\
&w_{i2}^* C b_{j1} + w_{i1}^* C b_{j2} = 0,\\
&w_{i3}^* C b_{j1} + w_{i2}^* C b_{j2} + w_{i1}^* C b_{j3} = 0,\\
&...\\
&w_{i\mu_{ij}}^* C b_{j,1} + w_{i,\mu_{ij}-1}^* C b_{j2} + ... + w_{i1}^* C b_{j\mu_{ij}} = 0.
\end{aligned}$$

Demonstração. A equação de Sylvester (2.1.1) possui uma solução $X \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ se, e somente se, $C \in \Psi_{A,B}(M_{n,m}(\mathbb{C})) = (ker(\Psi_{A^*,B^*}))^{\perp}$.

Para $i = 1, ..., p$, $j = 1, ..., q$ e $k = 1, 2, ..., \mu_{ij}$, defina

$$Y_{ijk} = w_{ik} b_{j1}^* + w_{i,k-1} b_{j2}^* + ... + w_{i1} b_{jk}^*.$$

Pela Proposição 2.1.2, o conjunto

$$Y = \{Y_{ijk} : \ \alpha_i + \beta_j = 0, \ k = 1, 2, ..., \mu_{ij}\}$$

é uma base para $ker(\Psi_{A^*,B^*})$. Portanto, $C \in \Psi_{A,B}(M_{n,m}(\mathbb{C}))$ se, e somente se,

$$\begin{aligned}
0 = (Y_{ijk}, C) &= tr(b_{j1} w_{ik}^* + b_{j2} w_{i,k-1}^* + ... + b_{jk} w_{i1}^*) C\\
&= tr(b_{j1} w_{ik}^* C) + tr(b_{j2} w_{i,k-1}^* C) + ... + tr(b_{jk} w_{i1}^* C)\\
&= tr(w_{ik}^* C b_{j1}) + tr(w_{i,k-1}^* C b_{j2}) + ... + tr(w_{i1}^* C b_{jk})\\
&= w_{ik}^* C b_{j1} + w_{i,k-1}^* C b_{j2} + ... + w_{i1}^* C b_{jk}
\end{aligned}$$

para qualquer $Y_{ijk} \in Y$. ∎

2.1.2 Soluções explícitas

Nesta subseção descrevemos soluções explícitas da equação

$$AX - XB = C. \tag{2.1.6}$$

As ideias aqui expostas são dos trabalhos [25] e [21]. No primeiro, sem hipóteses adicionais sobre os espectros de A e B, são obtidas soluções particulares explícitas particionadas com relação aos blocos de Jordan de A e B. No segundo, supondo-se que ambas as matrizes A e B sejam reais e satisfaçam a condição $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$, obtém-se uma expressão para a única solução de (2.1.6) como um polinômio nas matrizes A, B e C.

O método de Ma

Sejam $J_A = S^{-1}AS$ e $J_B = R^{-1}BR$ as formas de Jordan de A e B, respectivamente. Se X é uma solução de (2.1.6), definindo $Z = SXR^{-1}$ e $\tilde{C} = SCR^{-1}$, temos

$$\tilde{C} = SCR^{-1} = SAS^{-1}SXR^{-1} - SXR^{-1}RBR^{-1} = J_A Z - ZJ_B,$$

ou seja, Z é uma solução da equação

$$J_A Z - ZJ_B = \tilde{C}. \tag{2.1.7}$$

Reciprocamente, se Z satisfaz (2.1.7) então $X = S^{-1}ZR$ é uma solução de (2.1.6). Assim, é suficiente considerar a equação (2.1.7).

Sejam $J_{n_i}(\alpha_i)$, $i \in \{1, 2, ..., p\}$, e $J_{m_j}(\beta_j)$, $j \in \{1, 2, ..., q\}$, os respectivos blocos de J_A e J_B. Escrevendo a matriz Z particionada por

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & ... & Z_{1q} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ Z_{p1} & \dots & Z_{pq} \end{bmatrix} \text{ e } \tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & ... & \tilde{C}_{1q} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{C}_{p1} & \dots & \tilde{C}_{pq} \end{bmatrix}, \tag{2.1.8}$$

em que $Z_{ij} \in M_{n_i,m_j}$, segue que (2.1.7) é equivalente ao conjunto de pq equações matriciais

$$J_{n_i}(\alpha_i)Z_{ij} - Z_{ij}J_{m_j}(\beta_j) = \tilde{C}_{ij}, \tag{2.1.9}$$

com $i \in \{1, ..., p\}$ e $j \in \{1, ..., q\}$.

Proposição 2.1.5. *Suponha que a equação (2.1.9) possua solução.*

(i) Se $\alpha_i - \beta_j \neq 0$, então uma solução particular é dada por

$$Z_{ij} = \sum_{n=0}^{n_i+m_j-2} (\alpha_i - \beta_j)^{-(n+1)}(-1)^n \sum_{\sigma+\tau=n} (-1)^\tau \begin{pmatrix} n \\ \tau \end{pmatrix} J_{n_i}(0)^\sigma \tilde{C}_{ij} J_{m_j}(0)^\tau \text{ se } i \neq j.$$

(ii) Se $\alpha_i - \beta_j = 0$, então uma solução particular é dada por Z_{ij}, em que os elementos (z_{kl}) de Z_{ij} e (c_{lk}) de $\tilde{C}_{ij}$, $k = 1, ..., n_i$, $l = 1, ..., m_j$, estão relacionados por

$$\begin{aligned} c_{k,l} &= z_{k+1,l} - z_{k,l-1}, \\ c_{k1} &= z_{k+1,1}, \\ c_{n_i,l} &= -z_{\alpha_i,l-1}, \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

para $k = 1, 2, ..., n_i - 1$, $l = 2, ..., m_j$, sendo z_{1,β_j} arbitrário.

Demonstração. De (2.1.9), temos

$$(\alpha_i - \beta_j)Z_{ij} = \tilde{C}_{ij} - J_{n_i}(0)Z_{ij} + Z_{ij}J_{m_j}(0). \tag{2.1.11}$$

Mutiplicando ambos os lados de (2.1.11) por $\beta_j - \alpha_i$, segue que

$$\begin{aligned}(\alpha_i-\beta_j)^2 Z_{ij} =&(\alpha_i-\beta_j)\tilde{C}_{ij} - (\alpha_i-\beta_j)J_{n_i}(0)Z_{ij} + (\alpha_i-\beta_j)Z_{ij}J_{m_j}(0)\\ =&(\alpha_i-\beta_j)\tilde{C}_{ij} - J_{n_i}(0)\tilde{C}_{ij} + J_{n_i}(0)^2 Z_{ij} - J_{n_i}(0)Z_{ij}J_{m_j}(0)\\ &+\tilde{C}_{ij}J_{m_j}(0) - J_{n_i}(0)Z_{ij}J_{m_j}(0) + Z_{ij}J_{m_j}(0)^2\\ =&(\alpha_i-\beta_j)\tilde{C}_{ij} - J_{n_i}(0)\tilde{C}_{ij} + J_{n_i}(0)^2 Z_{ij} - 2J_{n_i}(0)Z_{ij}J_{m_j}(0)\\ &+\tilde{C}_{ij}J_{m_j}(0) + Z_{ij}J_{m_j}(0)^2.\end{aligned}$$

Repetindo o processo, temos

$$\begin{aligned}(\alpha_i-\beta_j)^3 Z_{ij} =&(\alpha_i-\beta_j)^2\tilde{C}_{ij} - (\alpha_i-\beta_j)J_{n_i}(0)\tilde{C}_{ij} + (\alpha_i-\beta_j)\tilde{C}_{ij}J_{m_j}(0) + (\alpha_i-\beta_j)J_{n_i}(0)^2 Z_{ij}\\ &-2(\alpha_i-\beta_j)J_{n_i}(0)Z_{ij}J_{m_j}(0) + (\alpha_i-\beta_j)Z_{ij}J_{m_j}(0)^2\\ =&(\alpha_i-\beta_j)^2\tilde{C}_{ij} - (\alpha_i-\beta_j)J_{n_i}(0)\tilde{C}_{ij} + (\alpha_i-\beta_j)\tilde{C}_{ij}J_{m_j}(0)\\ &+J_{n_i}(0)^2\tilde{C}_{ij} - J_{n_i}(0)^3 Z_{ij} + J_{n_i}(0)^2 Z_{ij}J_{m_j}(0) - 2J_{n_i}(0)\tilde{C}_{ij}J_{m_j}(0)\\ &+2J_{n_i}(0)^2 Z_{ij}J_{m_j}(0) - 2J_{n_i}(0)Z_{ij}J_{m_j}(0)^2\\ &+\tilde{C}_{ij}J_{m_j}(0)^2 - J_{n_i}(0)Z_{ij}J_{m_j}(0)^2 + Z_{ij}J_{m_j}(0)^3\\ =&(\alpha_i-\beta_j)^2\tilde{C}_{ij} - (\alpha_i-\beta_j)J_{n_i}(0)\tilde{C}_{ij} + (\alpha_i-\beta_j)\tilde{C}_{ij}J_{m_j}(0)\\ &+J_{n_i}(0)^2\tilde{C}_{ij} - 2J_{n_i}(0)\tilde{C}_{ij}J_{m_j}(0) + \tilde{C}_{ij}J_{m_j}(0)^2 - J_{n_i}(0)^3 Z_{ij}\\ &-3J_{n_i}(0)Z_{ij}J_{m_j}(0)^2 + 3J_{n_i}(0)^2 Z_{ij}J_{m_j}(0) + Z_{ij}J_{m_j}(0)^3\end{aligned}$$

Repetindo r vezes esse procedimento, obtemos por indução que

$$\begin{aligned}(\beta_j-\alpha_i)^r Z_{ij} =&\sum_{n=0}^{r-1}(\beta_j-\alpha_i)^{r-1-n}(-1)^n\sum_{\sigma+\tau=n}(-1)^\tau\binom{n}{\tau}J_{n_i}(0)^\sigma\tilde{C}_{ij}J_{m_j}(0)^\tau\\ &+(-1)^{r+1}\sum_{\sigma+\tau=r}(-1)^\tau\binom{r}{\tau}J_{n_i}(0)^\sigma Z_{ij}J_{m_j}(0)^\tau.\end{aligned}$$

Supondo ser a afirmação verdadeira e escolhendo $r = n_i + m_j - 1$ temos $\sigma \geq n_i$ ou $\tau \geq m_j$, pois se $\sigma < n_i$ e $\tau < m_j$ então $\sigma + \tau \leq n_i - 1 + m_j - 1 = n_i + m_j - 2 < r$. Logo o segundo membro da equação acima é nulo. Dividindo ambos os lados por $(\alpha_i + \beta_j)^r$ obtemos a equação desejada.

Mostremos a afirmação por indução. Já vimos acima que é válida para $r = 1, 2$ e

3. Supondo válida para r, temos por (2.1.11) que

$$
\begin{aligned}
(\alpha_i-\beta_j)^{r+1}Z_{ij} =& \sum_{n=0}^{r-1}(\alpha_i-\beta_j)^{r-n}(-1)^n \sum_{\sigma+\tau=n}(-1)^\tau \begin{pmatrix} n \\ \tau \end{pmatrix} J_{n_i}(0)^\sigma \tilde{C}_{ij} J_{m_j}(0)^\tau \\
&+(-1)^r \sum_{\sigma+\tau=r}(-1)^\tau \begin{pmatrix} r \\ \tau \end{pmatrix} J_{n_i}(0)^\sigma (\alpha_i-\beta_j) Z_{ij} J_{m_j}(0)^\tau \\
=& \sum_{n=0}^{r-1}(\alpha_i-\beta_j)^{r-n}(-1)^n \sum_{\sigma+\tau=n}(-1)^\tau \begin{pmatrix} n \\ \tau \end{pmatrix} J_{n_i}(0)^\sigma \tilde{C}_{ij} J_{m_j}(0)^\tau \\
&+(-1)^r \sum_{\sigma+\tau=r}(-1)^\tau \begin{pmatrix} r \\ \tau \end{pmatrix} J_{n_i}(0)^\sigma \left(\tilde{C}_{ij}-J_{n_i}(0)Z_{ij}+Z_{ij}J_{m_j}(0)\right) J_{m_j}(0)^\tau \\
=& \sum_{n=0}^{r-1}(\alpha_i-\beta_j)^{r-n}(-1)^n \sum_{\sigma+\tau=n}(-1)^\tau \begin{pmatrix} n \\ \tau \end{pmatrix} J_{n_i}(0)^\sigma \tilde{C}_{ij} J_{m_j}(0)^\tau \\
&+(-1)^{r+1} \sum_{\sigma+\tau=r+1}(-1)^\tau \begin{pmatrix} r+1 \\ \tau \end{pmatrix} J_{n_i}(0)^\sigma Z_{ij} J_{m_j}(0)^\tau \\
&+(\alpha_i-\beta_j)^{r-r}(-1)^r \sum_{\sigma+\tau=r}(-1)^\tau \begin{pmatrix} r \\ \tau \end{pmatrix} J_{n_i}(0)^\sigma \tilde{C}_{ij} J_{m_j}(0)^\tau \\
=& \sum_{n=0}^{r}(\alpha_i-\beta_j)^{r-n}(-1)^n \sum_{\sigma+\tau=n}(-1)^\tau \begin{pmatrix} n \\ \tau \end{pmatrix} J_{n_i}(0)^\sigma \tilde{C}_{ij} J_{m_j}(0)^\tau \\
&+(-1)^{r+1} \sum_{\sigma+\tau=r+1}(-1)^\tau \begin{pmatrix} r+1 \\ \tau \end{pmatrix} J_{n_i}(0)^\sigma Z_{ij} J_{m_j}(0)^\tau.
\end{aligned}
$$

Agora, para $\alpha_i-\beta_j=0$, fazendo $Z_{ij}=Y$ e também $k=1,...,n_i-1$ e $l=2,...,m_j$ temos

$$
[J_{n_i}(0)Y]_{kl} = \begin{cases} y_{k+1,l}, & \text{se } k=1,...,n_i-1,\ l=1,...,m_j, \\ 0, & \text{se } k=n_i,\ l=1,...,m_j, \end{cases}
$$

e

$$
[YJ_{m_j}(0)]_{kl} = \begin{cases} y_{k,l-1}, & \text{se } k=1,...,n_i,\ 2=1,...,m_j, \\ 0, & \text{se } k=1,...,n_i,\ l=1. \end{cases}
$$

Assim, $[J_{n_i}(0)Y-YJ_{m_j}(0)]_{kl}=[\tilde{C}_{ii}]_{kl}$ se, e só se, vale (2.1.10).

∎

Corolário 2.1.6. *Sejam A e B matrizes simétricas tais que $\sigma(A)\cap\sigma(B)=\emptyset$. Sejam $J_A=S^{-1}AS$ e $J_B=R^{-1}BR$ as formas de Jordan de A e B, respectivamente, e defina $\tilde{C}=SCR^{-1}$. Então, uma solução particular de (2.1.6) é dada por $X=SZR^{-1}$, em que*

$$
z_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_i-\beta_j}\tilde{c}_{ij} & \textit{para } i\neq j, \\ \textit{qualquer para } i=j. \end{cases}
$$

O método de Hu/Cheng

Suponhamos agora que as matrizes A e B sejam reais e satisfaçam a condição

$$\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset.$$

Vamos apresentar nesta subseção a expressão obtida em [21] para a (única) solução de (2.1.6) como um polinômio nas matrizes A, B e C.

Lema 2.1.7. *Suponha que X seja solução da equação (2.1.6). Então, para todo $k \geq 1$*

$$A^k X - XB^k = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} C B^i. \tag{2.1.12}$$

Demonstração. Usamos indução. Para $k = 1$, a equação acima reduz-se a (2.1.6). Suponha que (2.1.12) seja válida para $k = N$, isto é

$$A^N X - XB^N = \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-1-i} C B^i. \tag{2.1.13}$$

Multiplicando (2.1.13) pela esquerda por A e pela direita por B, e somando as equações obtidas, obtemos

$$A^{N+1} X - AXB^N - XB^{N+1} + A^N XB = A \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-1-i} C B^i + \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-1-i} C B^i B.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
A^{N+1}X - XB^{N+1} &= \textstyle\sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i}CB^i + \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-1-i}CB^{i+1} + AXB^N - A^N XB \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i}CB^i + \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-1-i}CB^{i+1} - A(A^{N-1}X - XB^{N-1})B \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i}CB^i + \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-1-i}CB^{i+1} - A\left(\sum_{i=0}^{N-2} A^{N-2-i}CB^i\right)B \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i}CB^i + \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-1-i}CB^{i+1} - \sum_{i=0}^{N-2} A^{N-1-i}CB^{i+1} \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i}CB^i + CB^N \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i}CB^i.
\end{aligned}$$

■

Proposição 2.1.8. *Se $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$, então a equação de Sylvester (2.1.6) possui uma única solução, a qual é dada por*

$$X = q(A)^{-1} \eta(A, C, B), \tag{2.1.14}$$

em que $q(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 + b_0$ *é o polinômio característico de* B *e*

$$\eta(A, C, B) = \sum_{k=1}^{m} b_k \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} C B^i.$$

Em particular, X *é um polinômio nas matrizes* A*,* B *e* C*.*

Demonstração. Suponha que X seja uma solução de (2.1.6). Usando o Lema 2.1.7, obtemos

$$\begin{aligned} \eta(A,C,B) &= \textstyle\sum_{k=1}^{m} b_k(A^kX - XB^k) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{m} b_k A^k X + b_0 X - \left(\sum_{k=1}^{m} b_k X B^k + b_0 X\right) \\ &= q(A)X - Xq(B) = q(A)X, \end{aligned}$$

logo

$$q(A)X = \eta(A, C, B). \tag{2.1.15}$$

Por outro lado, se X satisfaz (2.1.15), então

$$\begin{aligned} q(A)(AX - XB) &= A(q(A)X) - (q(A)X)B = A\eta(A,C,B) - \eta(A,C,B)B \\ &= \left(A \sum_{i=0}^{m} b_i \sum_{j=0}^{i-1} A^{i-1-j} C B^j - \sum_{i=0}^{m} b_i \sum_{j=0}^{i-1} A^{i-1-j} C B^j B\right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{m} b_i \sum_{j=0}^{i-1} A^{i-j} C B^j - \sum_{i=0}^{m} b_i \sum_{j=0}^{i-1} A^{i-1-j} C B^{j+1}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{m} b_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} A^{i-j} C B^j - \sum_{j=0}^{i-1} A^{i-1-j} C B^{j+1}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{m} b_i (A^i C - C B^i) = \sum_{i=0}^{m} b_i A^i C - C \sum_{i=0}^{m} b_i B^i \\ &= q(A)C - Cq(B) = q(A)C. \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ os autovalores de A. Como $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$, temos que $q(\alpha_i) \neq 0$ para $1 \leq i \leq p$. Portanto $q(A)$ é não singular, pois nenhum de seus autovalores $q(\alpha_1), ..., q(\alpha_p)$ se anula. Decorre de (2.1.15) e (2.1.16) que X é solução de (2.1.6) se, e somente se, X é dada por (2.1.14).

Para a última afirmação, como $\eta(A, C, B)$ é um polinômio em A, B e C, basta mostrar que $q(A)^{-1}$ é um polinômio de A. Para isso, seja $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ o polinômio característico de $q(A)$, com $c_n = 1$. Temos que

$$0 \neq det(q(A)) = det(q(A) - 0I) = c_0$$

e, pelo Teorema de Cayley-Hamilton,

$$f(q(A)) = \sum_{k=1}^{n} c_k [q(A)]^k + c_0 I_n = 0.$$

Assim,

$$q(A)\left(-\frac{1}{c_0}\sum_{k=1}^{n} c_i[q(A)]^{k-1}\right) = I_n.$$

Portanto

$$q(A)^{-1} = -\frac{1}{c_0}\sum_{k=1}^{n} c_i[q(A)]^{k-1},$$

o qual é um polinômio em $q(A)$, e a afirmação segue do fato de que $q(A)$ é também um polinômio em A. ■

2.2 A equação $XA - A^tX = C$.

Nesta seção usamos os resultados da seção anterior para mostrar alguns fatos sobre a equação matricial

$$XA - A^tX = C$$

que serão necessários nas demonstrações dos principais teoremas do Capítulo 4 sobre a transformação de Ribaucour vetorial para subvariedades de curvatura seccional constante.

2.2.1 Unicidade de soluções com $X \in \mathbb{A}_n(\mathbb{R})$ e $C \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$

A seguir, vamos obter condições necessárias e suficientes sobre a matriz A para que a equação

$$XA - A^tX = C$$

admita *no máximo* uma solução $X \in \mathbb{A}_n(\mathbb{R})$ para cada $C \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$. Equivalentemente, vamos encontrar condições necessárias e suficientes sobre A para que seja injetiva a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \Psi_{-A^t,A}|_{\mathbb{A}_n(\mathbb{R})} : & \mathbb{A}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{S}_n(\mathbb{R}) \\ & X & \longmapsto & XA - A^tX. \end{array} \tag{2.2.1}$$

Definição 2.2.1. Uma matriz é *não depreciativa* ("non-derogatory", em inglês) se seu polinômio característico concide com seu polinômio minimal. Um operador linear é não depreciativo se sua matriz em relação a alguma (e, portanto, a qualquer) base é não depreciativa.

Lembramos que a multiplicidade geométrica de um autovalor α de um operador linear A é a dimensão de $ker(A - \alpha I)$.

Proposição 2.2.2. *Uma matriz é não depreciativa se, e somente se, todos os seus autovalores possuem multiplicidade geométrica 1.*

Demonstração. Para cada autovalor α de uma matriz A, o expoente do fator $(x - \alpha)$ no polinômio característico de A, ou seja, a multiplicidade algébrica, é a soma das ordens dos blocos de Jordan correspondentes a α. Por outro lado, o expoente de $(x-\alpha)$ no polinômio minimal é a maior ordem de um bloco de Jordan associado a α. Portanto, tais expoentes coincidem se, e somente se, existe um único bloco de Jordan associado a α. A proposição decorre então do fato de que o número de blocos de Jordan associados ao autovalor α coincide com sua multiplicidade geométrica. ■

Corolário 2.2.3. *Uma matriz $A \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$ é não depreciativa se, e somente se, possui n autovalores (reais) distintos.*

Proposição 2.2.4. *Dada $A \in M_n(\mathbb{C})$, defina*

$$\begin{array}{rcccc} \Psi_{-A^t,A} & : & M_n(\mathbb{C}) & \longmapsto & M_n(\mathbb{C}) \\ & & X & \longrightarrow & XA - A^tX. \end{array}$$

Então $dim(ker(\Psi_{-A^t,A})) \geq n$. Além disso, são equivalentes:

(i) *A é uma matriz não depreciativa;*

(ii) *$dim(ker\Psi_{-A^t,A}) = n$;*

(iii) *$\Psi_{-A^t,A}|_{\mathbb{A}_n(\mathbb{C})} : \mathbb{A}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{S}_n(\mathbb{C})$ é injetiva.*

Demonstração. Observamos inicialmente que $X \in ker\Psi_{-A^t,A}$ se, e somente se, $Z = (S^{-1})^tXS^{-1} \in ker\Psi_{-J_A^t,J_A}$, em que $J_A = SAS^{-1}$ é a forma canônica de Jordan de A. De fato, a equação

$$0 = XA - A^tX$$

é equivalente a

$$0 = (S^{-1})^tXS^{-1}SAS^{-1} - (S^{-1})^tA^tS^t(S^{-1})^tXS^{-1} = (S^{-1})^tXS^{-1}J_A - J_A^t(S^{-1})^tXS^{-1},$$

ou seja, a

$$0 = ZJ_A - J_A^tZ. \tag{2.2.2}$$

Particionando a matriz Z em blocos

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & ... & Z_{1p} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ Z_{p1} & \cdots & Z_{pp} \end{bmatrix}, \tag{2.2.3}$$

em que $Z_{ij} \in M_{n_i,n_j}$ para $i,\ j \in \{1,2,...,p\}$, temos que a equação (2.2.2) é equivalente ao conjunto de p^2 equações matriciais lineares

$$\Psi_{-J_{n_i}^t(\alpha_i),J_{n_j}(\alpha_j)}(Z_{ij}) = Z_{ij}J_{n_j}(\alpha_j) - J_{n_i}^t(\alpha_i)Z_{ij} = 0,\ i,j \in \{1,2,...,p\}. \tag{2.2.4}$$

Se $\alpha_i - \alpha_j \neq 0$ para $i \neq j$, temos pelo Corolário 2.1.3 que $Z_{ij} = 0$. Caso contrário, pelo mesmo corolário existiria $Z_{ij} \neq 0$ no núcleo de $\Psi_{-J_{n_i}^t(\alpha_i),J_{n_j}(\alpha_j)}$.

Resta analisar a equação (2.2.4) com $i = j$. Fazendo $J_{n_i}(\alpha_i) = \alpha_i I + J_{n_i}(0)$, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= Z_{ii}J_{n_i}(\alpha_i) - J^t_{n_i}(\alpha_i)Z_{ii} = \alpha_i Z_{ii} + Z_{ii}J_{n_i}(0) - \alpha_i Z_{ii} - J^t_{n_i}(0)Z_{ii} \\ &= Z_{ii}J_{n_i}(0) - J^t_{n_i}(0)Z_{ii}. \end{aligned}$$

Chamando $Z_{ii} = Y = [y_{kl}]$ temos que $[YJ_r(0)]_{kl} = y_{k,l-1}$ e $[J^t_r(0)Y]_{kl} = y_{k-1,l}$ para $k, l = 1, 2, ..., n_i$, onde $y_{k,0} = y_{0,l} = 0$. Então

$$[YJ_{n_i}(0) - J_{n_i}(0)^t Y]_{kl} = 0$$

se, e somente se, $y_{k,l-1} - y_{k-1,l} = 0$ para $k, l \in \{1, .., n_i\}$ ou $y_{k,l+1} = y_{k+1,l}$ para $k, l \in \{0, ..., n_i - 1\}$, ou seja, Y satisfaz a equação acima se, e somente se,

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & y_{1n_i} \\ 0 & 0 & \dots & y_{1n_i} & y_{2n_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & y_{1n_i} & \dots & y_{n_i-2,n_i} & y_{n_i-1,n_i} \\ y_{1n_i} & y_{2n_i} & \dots & y_{n_i-1,n_i} & y_{n_in_i} \end{bmatrix},$$

e isto implica que a dimensão de $ker(\Psi_{-J^t_{n_i}(\alpha_i),J_{n_i(\alpha_i)}})$ é n_i. Agora, defina

$$\begin{aligned} \Xi \;=\; & \{X \in M^n(\mathbb{C});\ X = S^tZS \text{ com } Z \text{ particionado por } Z_{ij} \in M_{n_i,m_j}\ i, j \in \{1, 2, ..., p\}, \\ & \text{satisfazendo a } Z_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j \text{ e } Z_{ii} \text{ tal que } (Z_{ii})_{k,l+1} = (Z_{ii})_{k+1,l} \text{ para} \\ & k, l \in \{0, ..., n_i - 1\} \text{ com } (Z_{ii})_{k,0} = (Z_{ii})_{0,l} = 0\}. \end{aligned}$$

Temos que $dim(\Xi) = \sum_i n_i = n$ e que $\Xi \subset ker(\Psi_{-A^t,A})$, portanto

$$dim(ker(\Psi_{-A^t,A})) \geq dim(\Xi) = n.$$

Provemos as equivalências

i) $\Rightarrow$ ii): De fato, se A é não depreciativa então $\alpha_i - \alpha_j \neq 0$ para $i \neq j$, e assim $Z_{ij} = 0$ se $i \neq j$, o que implica que $ker(\Psi_{-A^t,A}) = \Xi$, ou seja,

$$dim(ker(\Psi_{-A^t,A})) = dim(\Xi) = n.$$

ii) $\Rightarrow$ iii): Se $X \neq 0$ pertence a $ker\Psi_{-A^t,A} \cap \mathbb{A}_n(\mathbb{C})$, então $Z = (S^t)^{-1}XS^{-1} \neq 0$ pertence a $\mathbb{A}_n(\mathbb{C})$. Afirmamos que $\Xi \cap \mathbb{A}_n(\mathbb{C}) = \{0\}$ e, portanto,

$$dim(ker\Psi_{-A^t,A}) > n,$$

o que é uma contradição. Para mostrar a afirmação, observe que $Z_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e Z_{ii} é especial da forma $(Z_{ii})_{k,l+1} = (Z_{ii})_{k+1,l}$ para $k, l \in \{0, ..., n_i - 1\}$, com $(Z_{ii})_{0,l} = (Z_{ii})_{k,0}$. Por outro lado, por ser Z_{ii} anti-simétrica, temos que $(Z_{ii})_{l,k+1} = -(Z_{ii})_{l+1,k}$ para algum

$k+1 \neq l$ e $l+1 \neq k$, e ainda $(Z_{ii})_{kk} = 0$, o que implica que $(Z_{ii})_{k+1,l} = 0$ e $(Z_{ii})_{kk} = 0$, ou seja, $Z = 0$, donde $X = 0$. Observe que, se Z_{ii} tem ordem 1, a afirmação é ainda verdadeira.

iii) $\Rightarrow$ i): Supondo que (i) não valha, ou seja, que existam $i, j \in \{1, ..., p\}$ tais que $i \neq j$ e $\alpha_i = \alpha_j$. Mostremos que existe Z não nulo em

$$ker(\Psi_{-A^t,A}) \cap \mathbb{A}_n(\mathbb{C}).$$

Pelo Corolário 2.1.3, existe $Z_{ij} \neq 0$ satisfazendo a equação (2.2.4). Tome Z particionado como em (2.2.3) com a condição de que $Z_{ji} = -Z_{ij}^t$ e $Z_{lk} = 0$ para $l \neq i$ ou $k \neq j$. Assim, $Z \neq 0$ pertence a

$$ker(\Psi_{-J_A^t,J_A}) \cap \mathbb{A}_n(\mathbb{C}),$$

pois (2.2.4) implica que

$$Z_{ji}J_{n_i}(\alpha_i) - J_{n_j}(\alpha_j)^t Z_{ji} = -Z_{ij}^t J_{n_i}(\alpha_i) + J_{n_j(\alpha_j)}^t Z_{ij}^t = (Z_{ij}J_{n_j}(\alpha_j) - J_{n_i}(\alpha_i)^t Z_{ij})^t = 0.$$

Logo, $X = S^t Z S \neq 0$ pertence a

$$ker(\Psi_{-A^t,A}) \cap \mathbb{A}_n(\mathbb{C}).$$

■

Corolário 2.2.5. *Sejam $A \in M_n(\mathbb{R})$ e*

$$\begin{array}{rcccc} \Psi_{-A^t,A}|_{M_n(\mathbb{R})} & : & M_n(\mathbb{R}) & \longmapsto & M_n(\mathbb{R}) \\ & & X & \longrightarrow & XA - A^tX. \end{array}$$

Então A é não depreciativa se, e somente se,

$$ker(\Psi_{-A^t,A}|_{M_n(\mathbb{R})}) \cap \mathbb{A}_n(\mathbb{R}) = \{0\},$$

ou seja, a restrição

$$\Psi_{-A^t,A}|_{\mathbb{A}_n(\mathbb{R})} \;:\; \mathbb{A}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$$

é injetiva.

Demonstração. Temos que $X = X_1 + iX_2 \in ker(\Psi_{-A^t,A}) \cap \mathbb{A}_n(\mathbb{C})$ se, e somente se, $X_1, X_2 \in \mathbb{A}_n(\mathbb{R})$ e $X_1, X_2 \in ker(\Psi_{-A^t,A}|_{M_n(\mathbb{R})})$, ou seja, se e somente se $X_1, X_2 \in ker(\Psi_{-A^t,A}|_{M_n(\mathbb{R})}) \cap \mathbb{A}_n(\mathbb{R})$. Assim, o resultado decorre da Proposição 2.2.4. ■

2.2.2 Existência de soluções com $X \in \mathbb{A}_n(\mathbb{R})$ e $C \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$

Vimos, na subseção anterior, que uma condição necessária e suficiente sobre a matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ para que a equação

$$XA - A^t X = C \tag{2.2.5}$$

admita *no máximo* uma solução $X \in \mathbb{A}_n(\mathbb{R})$ para cada $C \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$ é que A seja uma matriz não depreciativa. Nesta subseção, supondo $A \in M_n(\mathbb{R})$ não depreciativa, encontraremos condições necessárias e suficientes sobre a matriz $C \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$ para que a equação (2.2.5) admita *alguma* solução $X \in \mathbb{A}_n(\mathbb{R})$, a qual é, portanto, necessariamente única.

Em outras palavras, vamos encontrar condições necessárias e suficientes para que uma matriz $C \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$ pertença à imagem da aplicação (2.2.1), com $A \in M_n(\mathbb{R})$ não depreciativa.

Na proposição seguinte, denotamos por $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ o produto interno hermitiano canônico em $\mathbb{C}^n$, definido por

$$\langle z, w\rangle = z_1\bar{w}_1 + \ldots + z_n\bar{w}_n$$

para quaisquer $z = (z_1, \ldots, z_n)$ e $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$.

Corolário 2.2.6. *Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$ não depreciativa, sejam $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in_i}$ e w_{j1},w_{j2},..., w_{jm_i} os autovetores generalizados de A associados aos blocos de Jordan $J_{n_i}(\alpha_i)$ e $J_{m_j}(\zeta_j + i\beta_j)$, respectivamente, com $i = 1, ..., p$ e $j = 1, ..., q$. Então $C \in M_n(\mathbb{R})$ pertence a $\Psi_{-A^t,A}(M_n(\mathbb{R}))$ se, e somente se,*

$$\textstyle\sum_{r=0}^{k-1}\langle a_{i,k-r}, Ca_{i,r+1}\rangle = 0,\ \ i = 1, ..., p \ \textit{e}\ k = 1, 2, ..., n_i \tag{2.2.6}$$

e

$$\textstyle\sum_{r=0}^{l-1}\langle w_{j,l-r}, C\bar{w}_{j,r+1}\rangle = 0,\quad j = 1, ..., q \ \textit{e}\ l = 1, 2, ..., m_j \tag{2.2.7}$$

Além disso, se $C \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$, então as equações (2.2.6) e (2.2.7) são também as condições necessárias e suficientes para que C pertença a $\Psi_{-A^t,A}(\mathbb{A}_n(\mathbb{R}))$.

Demonstração. Como A e C são matrizes reais, temos que $C \in \Psi_{-A^t,A}(M_n(\mathbb{R}))$ se, e somente se, $C \in \Psi_{-A^t,A}(M_n(\mathbb{C})) = (ker(\Psi_{-A,A^t}))^{\perp}$. Pela Proposição 2.1.2, o conjunto com n elementos

$$\Delta := \{Y_{ik}, Y_{jl}, \bar{Y}_{jl},\ k = 1, 2, ..., n_i \text{ e } l = 1, 2, ..., m_j\},$$

em que

$$Y_{ik} = a_{ik}a_{i1}^t + a_{i,k-1}a_{i2}^t + ... + a_{i1}a_{ik}^t,\ \ i = 1, ..., p \text{ e } k = 1, 2, ..., n_i,$$

e

$$Y_{jl} = w_{jl}w_{j1}^t + w_{j,l-1}w_{j2}^t + ... + w_{j1}w_{jl}^t,\ \ j = 1, ..., q \text{ e } l = 1, 2, ..., m_j,$$

constitue uma base para $ker(\Psi_{-A,A^t})$. Portanto, $C \in \Psi_{-A^t,A}(M_n(\mathbb{R}))$ se, e somente se, para quaisquer $i = 1, ..., p$, $k = 1, 2, ..., n_i$, $j = 1, ..., q$ e $l = 1, 2, ..., m_j$, tivermos

$$(Y_{ik}, C) = 0 = (Y_{jl}, C),$$

uma vez que $(\bar{Y}_{jl}, C) = \overline{(Y_{jl}, C)}$. Para $i = 1, ..., p$ e $k = 1, 2, ..., n_i$, temos

$$\begin{aligned} (Y_{ik}, C) &= trY_{ik}^* C \\ &= tr(a_{i1}a_{ik}^t + a_{i2}a_{i,k-1}^t + ... + a_{ik}a_{i1}^t)C \\ &= a_{ik}^t C a_{i1} + a_{i,k-1}^t C a_{i2} + ... + a_{i1}^t C a_{ik}. \\ &= \langle a_{ik}, Ca_{i1}\rangle + \langle a_{i,k-1}, Ca_{i2}\rangle + \cdots + \langle a_{i1}, Ca_{ik}\rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado, para $j = 1, ..., q$ e $l = 1, 2, ..., m_j$, temos

$$\begin{aligned} (Y_{jl}, C) &= trY_{jl}^* C \\ &= tr(\bar{w}_{j1}w_{jl}^* + \bar{w}_{j2}w_{j,l-1}^* + ... + \bar{w}_{jl}w_{j1}^*)C \\ &= w_{jl}^* C\bar{w}_{j1} + w_{jl-1}^* C\bar{w}_{j2} + ... + w_{j1}^* C\bar{w}_{jl} \\ &= \langle w_{jl}, C\bar{w}_{j1}\rangle + \langle w_{jl-1}, C\bar{w}_{j2}\rangle + \cdots + \langle w_{j1}, C\bar{w}_{jl}\rangle, \end{aligned}$$

o que mostra a primeira afirmação. Para a última, observe inicialmente que $\Psi_{-A^t,A}(\mathbb{A}_n(\mathbb{R})) \subset \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$ e $\Psi_{-A^t,A}(\mathbb{S}_n(\mathbb{R})) \subset \mathbb{A}_n(\mathbb{R})$. Portanto, se $C \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$ pertence a $\Psi_{-A^t,A}(M_n(\mathbb{R}))$, isto é, $C = \Psi_{-A^t,A}(T)$ para alguma $T \in (M_n(\mathbb{R}))$, então

$$C = \Psi_{-A^t,A}(T_s) + \Psi_{-A^t,A}(T_a),$$

logo $\Psi_{-A^t,A}(T_s) = 0$, pois C e $\Psi_{-A^t,A}(T_a)$ pertencem a $\mathbb{S}_n(\mathbb{R})$, enquanto $\Psi_{-A^t,A}(T_s) \in \mathbb{A}_n(\mathbb{R})$. Portanto $C = \Psi_{-A^t,A}(T_a) \in \Psi_{-A^t,A}(\mathbb{A}_n(\mathbb{R}))$. ■

Corolário 2.2.7. *Sejam $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica com n autovalores (reais) distintos, e $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset M_{n,1}(\mathbb{R})$ uma base ortonormal de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ formada por autovetores de A. Denote $P = (a_1, \ldots, a_n) \in M_n(\mathbb{R})$. Então*

$$\Psi_{-A^t,A}(M_n(\mathbb{R})) = PD_0P^t = \{P^tBP \,:\, B \in D_0\},$$

em que D_0 é o subespaço de $M_n(\mathbb{R})$ formado pelas matrizes cujos elementos da diagonal são todos nulos. Em particular, $\Psi_{-A^t,A}(\mathbb{A}_n(\mathbb{R})) = PD_0^sP^t$, em que $D_0^s = D_0 \cap \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$.

Demonstração. Como A é simétrica, a base Δ na demonstração da proposição anterior reduz-se a $\Delta = \{a_1, \ldots, a_n\}$, logo as condições (2.2.6) e (2.2.7) para que $C \in M_n(\mathbb{R})$ pertença a $\Psi_{-A^t,A}(M_n(\mathbb{R}))$ tornam-se

$$\langle a_i, Ca_i\rangle = 0, \;\; i = 1, \ldots, n,$$

ou seja, $(P^tCP)_{ii} = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Assim, $C \in \Psi_{-A^t,A}(M_n(\mathbb{R}))$ se, e somente se, $P^tCP \in D_0$, ou seja, $C \in PD_0P^t$. Quanto à última afirmação, temos que $C \in \Psi_{-A^t,A}(\mathbb{A}_n(\mathbb{R}))$ se, e somente se, $C \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R}) \cap \Psi_{-A^t,A}(M_n(\mathbb{R}))$, ou seja, $C \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$ e $P^tCP \in D_0$, o que por sua vez é equivalente a $P^tCP \in D_0^s$, ou ainda, a $C \in PD_0^sP^t$. ■

2.2.3 Soluções explícitas

Nesta subseção, exibimos soluções explícitas da equação

$$XA - A^tX = C \tag{2.2.8}$$

como casos particulares das soluções da equação (2.1.6) descritas na Proposição 2.1.9.

Seja $J_A = S^{-1}AS$ a forma de Jordan de A. Então, a equação (2.2.8) é equivalente a

$$ZJ_A - J_A^tZ = \tilde{C}, \tag{2.2.9}$$

com $Z = (S^{-1})^tXS^{-1}$ e $\tilde{C} = (S^{-1})^tCS^{-1}$. Particionando Z e $\tilde{C}$ pelos blocos de Jordan de A como em (2.1.8), segue que (2.2.9) é equivalente ao conjunto de p^2 equações matriciais lineares

$$\Psi|_{-J^t_{n_i}(\alpha_i),J_{n_j}(\alpha_j)} = Z_{ij}J_{n_j}(\alpha_j) - J^t_{n_i}(\alpha_i)Z_{ij} = \tilde{C}_{ij},\ i,j \in \{1,2,...,p\}. \tag{2.2.10}$$

Proposição 2.2.8. *Suponha que a equação (2.2.10) possua solução.*

(i) Se $\alpha_i - \alpha_j \neq 0$, então

$$Z_{ij} = \sum_{n=0}^{n_i+n_j-2} (\alpha_i - \alpha_j)^{-(n+1)}(-1)^{n+1} \sum_{\sigma+\tau=n} (-1)^\tau \begin{pmatrix} n \\ \tau \end{pmatrix} J^t_{n_i}(0)^\sigma \tilde{C}_{ij} J_{n_j}(0)^\tau. \tag{2.2.11}$$

(i) Se $\alpha_i - \alpha_j = 0$, os elementos (z_{kl}) de Z_{ij} e (c_{lk}) de $\tilde{C}_{ij}$ estão relacionados por

$$c_{k,l} = z_{k,l-1} - z_{k-1,l}, \tag{2.2.12}$$

para $k = 1,2,...,n_i,\ l = 1,2,...,n_j$ e $z_{k,0} = z_{0,l} = 0$.

Corolário 2.2.9. *Sejam $A \in M_n(\mathbb{C})$ não depreciativa, $J_A = S^{-1}AS$ sua forma de Jordan e $C = S^t\tilde{C}S$ uma matriz para a qual a equação (2.2.8) admite soluções. Então, uma solução particular de (2.2.8) é $X = S^tZS$, sendo Z_{ij} dadas pela equação (2.2.11) e os elementos (z_{kl}) de Z_{ii} e (c_{lk}) de $\tilde{C}_{ii}$ relacionados por (2.2.12), com $k,l = 1,...,n_i$. Além disso, se $C \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$ e $A \in M_n(\mathbb{R})$, então $X_a \in M_n(\mathbb{R})$, e esta é a única solução de (2.2.8) pertencente a $\mathbb{A}_n(\mathbb{R})$.*

Demonstração. A primeira afirmação é consequência direta da Proposição 2.2.8. Para a segunda afirmação, como $\Psi_{-A^t,A}(X) = C$ e $C \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$, temos também que $\Psi_{A^t,A}(X_a) =$

C. Por outro lado, sendo A e C reais, temos que

$$C = \Psi_{-A^t,A}(X_a) = \Psi_{-A^t,A}(Re(X_a)) + i\Psi_{-A^t,A}(Im(X_a)),$$

logo $\Psi_{-A^t,A}(Im(X_a)) = 0$. Sendo A não depreciativa, isto implica que $Im(X_a) = 0$, ou seja, X_a é real e é, portanto, a única solução de (2.2.8) pertencente a $\mathbb{A}_n(\mathbb{R})$. ■

Corolário 2.2.10. *Sejam $A \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica com n autovalores distintos e $a_1, \ldots, a_n \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ uma base ortonormal de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ formada por autovetores de A. Denote $S = (a_1, \ldots, a_n) \in M_n(\mathbb{R})$, e seja $C \in SD_0S^t = \{SBS^t \,:\, B \in D_0\}$, em que D_0 é o subespaço de $M_n(\mathbb{R})$ formado pelas matrizes cujos elementos da diagonal são todos nulos. Então, uma solução particular de (2.2.8) é $X = S^tZS$, em que $Z = [z_{ij}]$, com*

$$z_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_i - \alpha_j}\widetilde{c}_{ij} \text{ para } i \neq j, \\ 0, \text{ para } i = j \end{cases}$$

e $\widetilde{C} = [\widetilde{c}_{ij}] = S^tCS$. Além disso, se $C \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$ então $X \in \mathbb{A}_n(\mathbb{R})$, e esta é a única solução de (2.2.8) pertencente a $\mathbb{A}_n(\mathbb{R})$.

2.3 Um sistema de equações matriciais

O objetivo desta seção é provar o seguinte resultado, que será necessário na demonstração do principal teorema do quarto capítulo.

Proposição 2.3.1. *Seja $A \in M_m(\mathbb{R})$ não depreciativa. Para cada $i = 1, ..., p$ (resp., $j = 1, ..., q$), sejam $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in_i}$ (resp., $w_{j1}, w_{j2}, ..., w_{jm_j}$) os autovetores generalizados de A associados ao bloco de Jordan $J_{n_i}(\alpha_i)$ (resp., $J_{m_j}(\alpha_j)$) de A correspondente ao autovalor real (resp., complexo) α_i (resp., α_j). Dados $c, \tilde{c} \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathbb{M}_{1\times m}(\mathbb{R})$, $\nu \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ e $\beta \in \mathbb{M}_{p\times m}(\mathbb{R})$, as seguintes afirmações são válidas sobre o sistema de equações matriciais*

$$\begin{cases} X + X^t = \nu^t\nu + \beta^t\beta + \tilde{c}\psi^t\psi \\ XA + A^tX^t = \beta^t\beta - (c - \tilde{c})\psi^t\psi. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

(i) O sistema (2.3.1) possui uma solução $X \in M_m(\mathbb{R})$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{r=0}^{k_i-1}(1-\alpha_i)\langle\beta a_{i,k_i-r}, \beta a_{i,r+1}\rangle - \tfrac{1}{2}\langle\beta a_{i,k_i-r-1}, \beta a_{i,r+1}\rangle - \tfrac{1}{2}\langle\beta a_{i,k_i-r}, \beta a_{ir}\rangle \\ -\alpha_i\langle\nu a_{i,k_i-r}, \nu a_{i,r+1}\rangle - \tfrac{1}{2}\langle\nu a_{i,k_i-r-1}, \nu a_{i,r+1}\rangle - \tfrac{1}{2}\langle\nu a_{i,k_i-r}, \nu a_{ir}\rangle \\ -((c-\tilde{c}) + \alpha_i\tilde{c})\psi a_{i,k_i-r}\psi a_{i,k_i+1} - \tfrac{1}{2}\tilde{c}\psi a_{i,k_i-r-1}\psi a_{i,r+1} \\ -\tfrac{1}{2}\tilde{c}\psi a_{i,k_i-r}\psi a_{ir} = 0 \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

e

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{r=0}^{k_j-1}(1-\alpha_j)\langle\beta\omega_{j,k_j-r},\beta\bar{\omega}_{j,r+1}\rangle &- \tfrac{1}{2}\langle\beta\omega_{j,k_j-r-1},\beta\bar{\omega}_{j,r+1}\rangle - \tfrac{1}{2}\langle\beta\omega_{j,k_j-r},\beta\bar{\omega}_{jr}\rangle\\ &-\alpha_j\langle\nu\omega_{j,k_j-r},\nu\bar{\omega}_{j,r+1}\rangle - \tfrac{1}{2}\langle\nu\omega_{j,k_j-r-1},\nu\bar{\omega}_{j,r+1}\rangle - \tfrac{1}{2}\langle\nu\omega_{j,k_j-r},\nu\bar{\omega}_{jr}\rangle\\ &-((c-\tilde{c})+\tilde{c}\alpha_j)\psi\omega_{j,k_j-r}\psi\bar{\omega}_{j,r+1} - \tfrac{1}{2}\tilde{c}\psi\omega_{j,k_j-r-1}\psi\bar{\omega}_{j,r+1}\\ &-\tfrac{1}{2}\tilde{c}\psi\omega_{j,k_j-r}\psi\bar{\omega}_{j,r} = 0,\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

para quaisquer $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$, $1 \leq k_i \leq n_i$ *e* $1 \leq k_j \leq n_j$.

(ii) Se as condições acima são satisfeitas, a solução X *é única; explicitamente,*

$$X = X_s + X_a,$$

com $2X_s = \nu^t\nu + \beta^t\beta + \tilde{c}\psi^t\psi$ *e* X_a *a única solução em* $\mathbb{A}_m(\mathbb{R})$*, dada pelo Corolário 2.2.9, da equação matricial*

$$XA - A^tX = D_s,$$

em que D_s *é a parte simétrica da matriz* $D = (I-A^t)\beta^t\beta - A\nu^t\nu - ((c-\tilde{c})I + \tilde{c}A^t)\psi^t\psi$.

Demonstração. Sejam $X_s = \frac{1}{2}(X + X^t)$ e $X_a = \frac{1}{2}(X - X^t)$ as partes simétrica e antisimétrica de X, respectivamente. Então X é uma solução do sistema (2.3.1) se, e só se,

$$2X_s = \nu^t\nu + \beta^t\beta + \tilde{c}\psi^t\psi \text{ e } X_aA - A^tX_a = D_s,$$

ou seja, D_s pertence à imagem de

$$\begin{array}{rccc}\Psi_{-A^t,A} & : & \mathbb{A}_m(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{S}_m(\mathbb{R}),\\ & & X_a & \mapsto & X_aA - A^tX_a.\end{array}$$

Pelo Corolário 2.2.6, como A é não-depreciativa, isso ocorre se, e só se, D_s satisfaz as equações (2.2.6) e (2.2.7), as quais são equivalentes às equações (2.3.2) e (2.3.3). Além disso, X_a está unicamente determinada pelo Corolário 2.2.9.

■

Corolário 2.3.2. *Sejam* $A \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$ *uma matriz simétrica com* n *autovalores distintos* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *e* $a_1, \ldots, a_n \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ *uma base ortonormal de* $M_{n,1}(\mathbb{R})$ *formada por autovetores de* A*. Então o sistema de equações matriciais (2.3.1) possui uma solução* $X \in M_m(\mathbb{R})$ *se, e somente se,*

$$(1-\alpha_i)||\beta a_i||^2 - \alpha_i||\nu a_i||^2 - ((c-\tilde{c}) + \alpha_i\tilde{c})\psi^2(a_i) = 0,\ 1 \leq i \leq m.$$

Se tais equações são satisfeitas, a solução X *de (2.3.1) é necessariamente única, e dada explicitamente por*

$$X = X_s + X_a,$$

com $2X_s = \nu^t\nu + \beta^t\beta + \tilde{c}\psi^t\psi$ *e* X_a *a única solução em* $\mathbb{A}_m(\mathbb{R})$*, dada pelo Corolário 2.2.10, da equação matricial*

$$XA - A^tX = D_s,$$

em que D_s *é a parte simétrica da matriz* $D = (I - A^t)\beta^t\beta - A\nu^t\nu - ((c-\tilde{c})I + \tilde{c}A^t)\psi^t\psi$.

2.3.1 Existência de soluções inversíveis

Para as aplicações à transformação vetorial de Ribaucour de subvariedades com curvatura seccional constante c de $\mathbb{Q}^{n+p}(\tilde{c})$, precisamos estudar a existência de soluções *inversíveis* do sistema de equações matriciais 2.3.1. Inicialmente mostramos o seguinte resultado preliminar.

Lema 2.3.3. *Nas condições da Proposição 2.3.1, seja* (ψ, ν, β) *uma tripla satisfazendo (2.3.2) e (2.3.3). Suponha que uma das condições abaixo ocorra:*

(a) $\tilde{c} \geq 0$*;*

(b) $\tilde{c} < 0$ *e* $c \in (-\infty, \tilde{c}) \cup (0, \infty)$.

Então $\ker X = \ker X^t \subset S$*, em que*

$$S = \begin{cases} \ker\nu \cap \ker\beta, & se\ \ \tilde{c} = c = 0; \\ \ker\psi \cap \ker\nu \cap \ker\beta, & se\ \ (c, \tilde{c}) \neq (0,0), \end{cases}$$

Além disso, $A(\ker X) \subset \ker X$*. Em particular,* X *é inversível se*

$$E_{\alpha_i} \cap S = \{0\} = E_{\alpha_j} \cap S^c$$

para quaisquer $1 \leq i \leq p$ *e* $1 \leq j \leq q$*, em que* S^c *denota o complexificado de* S.

Demonstração. Subtraindo a segunda equação de (2.3.1) da primeira obtemos

$$X(I - A) + (I - A^t)X^t = \nu^t\nu + c\psi^t\psi.$$

Segue que, para qualquer $u \in kerX^t$,

$$0 = ||\beta u||^2 + ||\nu u||^2 + \tilde{c}\psi^2(u) = ||\beta u||^2 - (c - \tilde{c})\psi^2(u) = ||\nu u||^2 + c\psi^2(u).$$

Como $\tilde{c} \geq 0$ ou $\tilde{c} < 0$ e $c \in (\tilde{c}, 0) \cup (0, \infty)$, obtemos que

$$kerX^t \subset S.$$

Decorre então de (2.3.1) que $\ker X = \ker X^t$. Usando isto, segue de (2.3.1) que $A(\ker X) \subset \ker X$. A última afirmação segue, uma vez que $\ker X \subset S$.

∎

Definição 2.3.4. Uma tripla de matrizes (ψ, ν, β) é dita *A-admissível* se satisfaz (2.3.2) e (2.3.3) e a (única) solução X de (2.3.1) é inversível. Se V, W_1, W_2 são espaços vetoriais e $A : V \to V$, $\psi : V \to \mathbb{R}$, $\nu : V \to W_1$ e $\beta : V \to W_2$ são transformações lineares, dizemos que (ψ, ν, β) é A-admissível se a (única) solução $X\colon V \to V$ de (2.3.1) é inversível.

O seguinte resultado estabelece condições sob as quais uma tripla A-admissível existe.

Teorema 2.3.5. *Seja $A \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ não depreciativa. Então existe uma tripla (ψ, ν, β) A-admissível se uma das condições abaixo é satisfeita:*

(i) $\tilde{c} < 0$ *e* $c \in [\tilde{c}, 0]$, *ou* $c = \tilde{c} = 0$;

(ii) $\tilde{c} > 0$, *ou* $\tilde{c} = 0$ *e* $c \neq 0$, *ou* $c \in (-\infty, \tilde{c}) \cup (0, \infty)$ *e A não possui autovalores reais com multiplicidade algébrica ímpar.*

Além disso, se $\tilde{c} > 0$, ou $\tilde{c} = 0$ e $c \neq 0$, ou $\tilde{c} < 0$ e $c \in (-\infty, \tilde{c}) \cup (0, \infty)$, e A possui autovalores reais com multiplicidade algébrica ímpar, uma tal tripla existe se, e só se, todos esses autovalores pertencem a

$$Z(c,\tilde{c}) = \begin{cases} [\ell, 0] \cup [0,1] \ \ \textit{se} \ \ c \geq \tilde{c} > 0, \\ \{\ell\} \cup [0,1] \ \ \textit{se} \ \ 0 \leq c < \tilde{c}, \\ [0,1] \cup [1,\ell] \ \ \textit{se} \ \ c < 0 \ \ \textit{e} \ \ \tilde{c} > 0, \\ (-\infty, \ell] \cup [0,1] \cup [1,\infty) \ \ \textit{se} \ \ c < \tilde{c} < 0, \\ (-\infty, 1] \cup [\ell, \infty) \ \ \textit{se} \ \ \tilde{c} < 0 \ \ \textit{e} \ \ c > 0, \\ (-\infty, 1] \ \ \textit{se} \ \ c > 0 \ \ \textit{e} \ \ \tilde{c} = 0, \\ [0\ , \infty) \ \ \textit{se} \ \ c < 0 \ \ \textit{e} \ \ \tilde{c} = 0, \end{cases} \tag{2.3.4}$$

com $\ell = 1 - \frac{c}{\tilde{c}}$.

Demonstração. Como na Proposição 2.3.1, para cada $i = 1, ..., p$ (resp., $j = 1, ..., q$) sejam $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in_i}$ (resp., $w_{j1}, w_{j2}, ..., w_{jm_j}$) os autovetores generalizados de A associados ao bloco de Jordan $J_{n_i}(\alpha_i)$ (resp., $J_{m_j}(\alpha_j)$) de A correspondente ao autovalor real (resp., complexo) α_i (resp., α_j).

Denotamos

$$\psi(a_{ik_i}) = y_{ik_i},\ \psi(R_{w_{jk_j}}) = y^R_{jk_j},\ \psi(I_{w_{jk_j}}) = y^I_{jk_j},\ \nu(a_{ik_i}) = Y_{ik_i},\ \nu(R_{w_{jk_j}}) = Y^R_{jk_j},$$
$$\nu(I_{w_{jk_j}}) = Y^I_{jk_j},\ \beta(a_{ik_i}) = \xi_{ik_i}, \beta(R_{w_{jk_j}}) = \xi^R_{jk_j} \text{ e } \beta(I_{w_{jk_j}}) = \xi^I_{jk_j}.$$

Observe que a tripla (ψ, β, ν) satisfaz (2.3.2) e (2.3.3) se, e só se, para cada autovalor real α_i de A, os dados $y_{ik_i}, Y_{ik_i}, \xi_{ik_i}$, com $1 \leq i \leq p$, $1 \leq k_i \leq n_i$ e $0 = y_{i0} =$

$Y_{i0} = \xi_{i0}$, satisfazem as equações

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{r=0}^{k_i-1} (1-\alpha_i)\langle \xi_{i,k_i-r}, \xi_{i,r+1}\rangle - \tfrac{1}{2}\langle \xi_{i,k_i-r-1}, \xi_{i,r+1}\rangle - \tfrac{1}{2}\langle \xi_{i,k_i-r}, \xi_{ir}\rangle \\
-\alpha_i \langle Y_{i,k_i-r}, Y_{i,r+1}\rangle - \tfrac{1}{2}\langle Y_{i,k_i-r-1}, Y_{i,r+1}\rangle - \tfrac{1}{2}\langle Y_{i,k_i-r}, Y_{ir}\rangle \\
-((c-\tilde{c}) + \alpha_i \tilde{c}) y_{i,k_i-r} y_{i,r+1} - \tfrac{1}{2}\tilde{c} y_{i,k_i-r-1} y_{i,r+1} \\
-\tfrac{1}{2}\tilde{c} y_{i,k_i-r} y_{ir} = 0
\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

e, para cada autovalor complexo α_j de A, os dados $y^R_{jk_j}, y^I_{jk_j}, Y^R_{jk_j}, Y^I_{jk_j}, \xi^R_{jk_j}, \xi^I_{jk_j}$, com $1 \leq j \leq q,\ 1 \leq k_j \leq n_j$ e $0 = y_{j0} = y^R_{j0} = y^I_{j0} = Y_{j0} = Y^R_{j0} = Y^I_{j0} = \xi_{j0} = \xi^R_{j0} = \xi^I_{j0}$, satisfazem as equações

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{r=0}^{k_j-1} \Big\{ \left\langle \xi^R_{j,k_j-r}, \xi^R_{j,r+1}\right\rangle - \left\langle \xi^I_{j,k_j-r}, \xi^I_{j,r+1}\right\rangle - (c-\tilde{c})(y^R_{j,k_j-r} y^R_{j,r+1} - y^I_{j,k_j-r} y^I_{j,r+1}) \\
&\quad -R_{\alpha_j}\Big(\left\langle \xi^R_{j,k_j-r}, \xi^R_{j,r+1}\right\rangle - \left\langle \xi^I_{j,k_j-r}, \xi^I_{j,r+1}\right\rangle + \left\langle Y^R_{j,k_j-r}, Y^R_{j,r+1}\right\rangle - \left\langle Y^I_{j,k_j-r}, Y^I_{j,r+1}\right\rangle \\
&\quad +\tilde{c} y^R_{j,k_j-r} y^R_{j,r+1} - \tilde{c} y^I_{j,k_j-r} y^I_{j,r+1}\Big) \\
&\quad -\tfrac{1}{2}\Big[\left\langle \xi^R_{j,k_j-r-1}, \xi^R_{j,r+1}\right\rangle + \left\langle \xi^R_{j,k_j-r}, \xi^R_{j,r}\right\rangle - \left\langle \xi^I_{j,k_j-r-1}, \xi^I_{j,r+1}\right\rangle - \left\langle \xi^I_{j,k_j-r}, \xi^I_{j,r}\right\rangle \\
&\quad + \left\langle Y^R_{j,k_j-r-1}, Y^R_{j,r+1}\right\rangle + \left\langle Y^R_{j,k_j-r}, Y^R_{j,r}\right\rangle - \left\langle Y^I_{j,k_j-r-1}, Y^I_{j,r+1}\right\rangle - \left\langle Y^I_{j,k_j-r}, Y^I_{j,r}\right\rangle \\
&\quad +\tilde{c}(y^R_{j,k_j-r-1} y^R_{j,r+1} + y^R_{j,k_j-r} y^R_{j,r} - y^I_{j,k_j-r-1} y^I_{j,r+1} - y^I_{j,k_j-r} y^I_{j,r})\Big] \\
&\quad +I_{\alpha_j}\Big(\left\langle \xi^R_{j,k_j-r}, \xi^I_{j,r+1}\right\rangle + \left\langle \xi^I_{j,k_j-r}, \xi^R_{j,r+1}\right\rangle + \left\langle Y^R_{j,k_j-r}, Y^I_{j,r+1}\right\rangle + \left\langle Y^I_{j,k_j-r}, Y^R_{j,r+1}\right\rangle \\
&\quad +\tilde{c}(y^R_{j,k_j-r} y^I_{j,r+1} + y^I_{j,k_j-r} y^R_{j,r+1})\Big)\Big\} \\
&\quad = 0, \\
&\textstyle\sum_{r=0}^{k_j-1} \Big\{ \left\langle \xi^R_{j,k_j-r}, \xi^I_{j,r+1}\right\rangle + \left\langle \xi^I_{j,k_j-r}, \xi^R_{j,r+1}\right\rangle + (c-\tilde{c})(y^R_{j,k_j-r} y^I_{j,r+1} + y^I_{j,k_j-r} y^R_{j,r+1}) \\
&\quad -I_{\alpha_j}\Big(\left\langle \xi^R_{j,k_j-r}, \xi^R_{j,r+1}\right\rangle - \left\langle \xi^I_{j,k_j-r}, \xi^I_{j,r+1}\right\rangle + \left\langle Y^R_{j,k_j-r}, Y^R_{j,r+1}\right\rangle - \left\langle Y^I_{j,k_j-r}, Y^I_{j,r+1}\right\rangle \\
&\quad +\tilde{c}(y^R_{j,k_j-r} y^R_{j,r+1} - y^I_{j,k_j-r} y^I_{j,r+1})\Big) \\
&\quad -R_{\alpha_j}\Big(\left\langle \xi^R_{j,k_j-r}, \xi^I_{j,r+1}\right\rangle + \left\langle \xi^I_{j,k_j-r}, \xi^R_{j,r+1}\right\rangle + \left\langle Y^R_{j,k_j-r}, Y^I_{j,r+1}\right\rangle + \left\langle Y^I_{j,k_j-r}, Y^R_{j,r+1}\right\rangle \\
&\quad +\tilde{c}(y^R_{j,k_j-r} y^I_{j,r+1} + y^I_{j,k_j-r} y^R_{j,r+1})\Big) \\
&\quad -\tfrac{1}{2}\Big[\left\langle \xi^R_{j,k_j-r-1}, \xi^I_{j,r+1}\right\rangle + \left\langle \xi^R_{j,k_j-r}, \xi^I_{j,r}\right\rangle + \left\langle \xi^I_{j,k_j-r-1}, \xi^R_{j,r+1}\right\rangle + \left\langle \xi^I_{j,k_j-r}, \xi^R_{j,r}\right\rangle \\
&\quad + \left\langle Y^R_{j,k_j-r-1}, Y^I_{j,r+1}\right\rangle + \left\langle Y^R_{j,k_j-r}, Y^I_{j,r}\right\rangle + \left\langle Y^I_{j,k_j-r-1}, Y^R_{j,r+1}\right\rangle + \left\langle Y^I_{j,k_j-r}, Y^R_{j,r}\right\rangle \\
&\quad +\tilde{c}(y^R_{j,k_j-r-1} y^I_{j,r+1} + y^R_{j,k_j-r} y^I_{j,r} + y^I_{j,k_j-r-1} y^R_{j,r+1} + y^I_{j,k_j-r} y^R_{j,r})\Big]\Big\} \\
&\quad = 0.
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Em particular, para $k_i = 1$ a equação (2.3.5) é

$$(1-\alpha_i)||\xi_{i1}||^2 - \alpha_i ||Y_{i1}||^2 - ((c-\tilde{c}) + \alpha_i \tilde{c})\, y^2_{i1} = 0. \tag{2.3.7}$$

Inicialmente consideramos os casos em que c e $\tilde{c}$ satisfazem uma das condições do Lema 2.3.3. Dividiremos a demonstração em uma série de afirmações:

Afirmação 1: Dado $i \in \{1, \ldots, p\}$, fazendo $0 = y_{i0} = Y_{i0} = \xi_{i0} = 0$, é possível escolher $y_{ik_i}, Y_{ik_i}, \xi_{ik_i}$, para $1 \leq i \leq p$, $1 \leq k_i \leq n_i$, de modo que as equações (2.3.5) sejam satisfeitas e tais que $(y_{i1}, Y_{i1}, \xi_{i1}) \neq (0,0,0)$, ou seja, $E_{\alpha_i} \cap S = \{0\}$, se, e só se, uma das seguintes possibilidades ocorre:

(a) $c = 0 = \tilde{c}$;

(b) $(c, \tilde{c}) \neq (0,0)$ e $\alpha_i \in Z(c, \tilde{c})$.

Existe uma tripla $(y_{i1}, Y_{i1}, \xi_{i1}) \neq (0,0,0)$ satisfazendo (2.3.7) a menos que os coeficientes $(1-\alpha_i)$, $-\alpha_i$ e $-((c-\tilde{c}) + \alpha_i \tilde{c})$ sejam todos positivos ou todos negativos. Diremos que os coeficientes satisfazem a condicão CS (condição de sinal) caso nenhuma dessas duas possibilidades ocorra. Observe que um ou mais dos coeficientes são nulos se $\alpha_i = 1$ ou/e $\alpha_i = -\frac{c}{\tilde{c}} + 1$, ou $\alpha_i = 0$, ou $\tilde{c} = c = 0$, e que em todos esses casos CS ocorre.

Para $\alpha_i \in (0,1)$, os coeficientes $(1-\alpha_i)$ e $-\alpha_i$ têm sinais diferentes, e assim CS vale nesses casos. Resta analisar o sinal quando $\alpha_i \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, $\alpha_i \neq -\frac{c}{\tilde{c}} + 1$, para os casos em que $\tilde{c} > 0$, $\tilde{c} = 0$ e $c \neq 0$, e $\tilde{c} < 0$ e $c \in (-\infty, \tilde{c}) \cup (0, \infty)$.

Para isso, definimos

$$\kappa : -[(c-\tilde{c}) + \alpha_i \tilde{c}] \text{ e } \ell := -\frac{c}{\tilde{c}} + 1.$$

Temos

$$\tilde{c} > 0,\ \kappa > 0\ (< 0) \Leftrightarrow \alpha_i < \ell\ (> \ell),$$
$$\tilde{c} < 0,\ \kappa < 0\ (> 0) \Leftrightarrow \alpha_i < \ell\ (> \ell).$$

Vamos primeiro supor que $\alpha_i \in (-\infty, 0)$, caso em que $(1-\alpha_i)$ e $-\alpha_i$ são positivos. Considere as possibilidades:

i) $c \geq \tilde{c} > 0$: Temos $\ell \in (-\infty, 0]$, e a condição CS ocorre se e só se, $\alpha_i \in (\ell, 0)$.

ii) $0 < c < \tilde{c}$: Temos $\ell > 0$, e a condição CS não ocorre.

iii) $c < 0$ e $\tilde{c} > 0$: Temos $\ell > 1$, e a condição CS não ocorre.

iv) $c < \tilde{c} < 0$: Temos $\ell \in (-\infty, 0]$ e CS ocorre se e só se $\alpha_i \in (-\infty, \ell)$.

v) $\tilde{c} < 0$ e $c > 0$: Temos $\ell > 1$, e ocorre CS.

vi) $c > 0$ e $\tilde{c} = 0$: Temos $\kappa = -c < 0$, e a condição CS ocorre.

(vii) $c < 0$ e $\tilde{c} = 0$: Temos $\kappa = -c > 0$, e a condição CS não ocorre.

Agora, se $\alpha_i \in (1, \infty)$, então $(1-\alpha_i)$ e $-\alpha_i$ são negativos. Considere os casos:

i) $c \geq \tilde{c} > 0$: Temos $\ell \in (-\infty, 0]$, e a condição CS não ocorre.

ii) $0 \leq c < \tilde{c}$: Temos $\ell \in (0, 1]$, e a condição CS não ocorre.

iii) $c < 0$ e $\tilde{c} > 0$: Temos $\ell > 1$, e a condição CS ocorre se e só se, $\alpha_i \in (1, \ell)$.

iv) $c < \tilde{c} < 0$: Temos $\ell \in (-\infty, 0]$ e CS ocorre.

v) $\tilde{c} < 0$ e $c > 0$: Temos $\ell > 1$, e ocorre CS se e só se $\alpha_i \in (\ell, \infty)$.

vi) $c > 0$ e $\tilde{c} = 0$: Temos $\kappa = -c < 0$, e a condição CS não ocorre.

(vii) $c < 0$ e $\tilde{c} = 0$: Temos $\kappa = -c > 0$, e a condição CS ocorre.

Assim, para $\tilde{c} = c = 0$ a condição CS sempre ocorre, e para os casos $\tilde{c} > 0$, $\tilde{c} = 0$ e $c \neq 0$, e $\tilde{c} < 0$ e $c \in (-\infty, \tilde{c}) \cup (0, \infty)$, ela ocorre se, e só se, α_i satisfaz a equação (2.3.4).

Tomando qualquer soluçao não trivial de (2.3.7) e substituindo na equação (2.3.5) com $k_i = 2$, temos a equação de um hiperplano. Tome uma solução não trivial dessa equação e substitua na equação (2.3.5) para $k_i = 3$, obtendo novamente a equação de um hiperplano, cuja solução é novamente tomada não trivial. Seguindo esse raciocínio, obtemos uma solução para todas as equações.

Afirmação 2: Se $i \in \{1, \ldots, p\}$ é tal que α_i tem multiplicidade algébrica par e $\alpha_i \notin Z(c, \tilde{c})$, fazendo $y_{i0} = Y_{i0} = \xi_{i0} = 0$ é possível escolher $y_{ik_i}, Y_{ik_i}, \xi_{ik_i}$, com $1 \leq k_i \leq n_i$, de modo que as equações (2.3.5) sejam satisfeitas e de modo que $a_{i1} \notin \ker X$, ou seja, $E_{\alpha_i} \cap \ker X = \{0\}$.

De $\alpha_i \neq Z(c, \tilde{c})$, segue que (2.3.7) só admite a solução trivial. Para $k_i = 2$, podemos tomar ξ_{i2}, Y_{i2} e y_{i2} quaisquer de modo que (2.3.5) seja satisfeita. Para $k_i = 3$, devemos ter $\xi_{ij} = Y_{ij} = y_{ij} = 0$, com $j = 1, 2$ e ξ_{i3}, Y_{i3} e y_{i3} quaisquer como solução de (2.3.5). É fácil verificar que $\xi_{il} = Y_{il} = y_{il} = 0$ para $l \leq k_i = n_i/2$ são as únicas soluções do sistema dado pelas equações (2.3.5), podendo ser ξ_{il}, Y_{il} e y_{il} quaisquer para $l > k_i$. Portanto, considerando as soluções $\beta(a_{il}) = \nu(a_{il}) = \psi(a_{il}) = 0$ para $l \leq k_i = n_i/2$ e $\beta(a_{il})$, $\nu(a_{il})$ e $\psi(a_{il})$ não todos nulos para $l > k_i$, temos de (2.3.1) que

$$\langle X a_{i1}, a_{i1} \rangle = 0 \tag{2.3.8}$$

e, novamente pela equação (2.3.1),

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (XA + A^t X^t - \beta^t \beta + (c - \tilde{c}) \psi^t \psi) a_{i1}, a_{jl} \rangle = \alpha_i \langle X a_{i1}, a_{jl} \rangle + \langle X^t a_{i1}, \alpha_j a_{jl} + a_{j,l-1} \rangle \\ &= (\alpha_i - \alpha_j) \langle X a_{i1}, a_{jl} \rangle - \langle X a_{i1}, a_{j,l-1} \rangle \;\; i \neq j, \;\; a_{j,0} = 0, \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

e

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (XA + A^t X^t - \beta^t \beta + (c - \tilde{c}) \psi^t \psi) a_{i1}, w_{jl} \rangle = \alpha_i \langle X a_{i1}, w_{jl} \rangle + \langle X^t a_{i1}, \alpha_j w_{jl} + w_{j,l-1} \rangle \\ &= (\alpha_i - \bar{\alpha}_j) \langle X a_{i1}, w_{jl} \rangle - \langle X a_{i1}, w_{j,l-1} \rangle \;\; i \neq j, \;\; a_{j,0} = 0 \text{ e } w_{j,0} = 0. \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle (XA + A^tX^t - \beta^t\beta + (c-\tilde{c})\psi^t\psi)a_{i1}, a_{il} \right\rangle = \alpha_i \left\langle Xa_{i1}, a_{il} \right\rangle + \left\langle X^t a_{i1}, \alpha_i a_{il} + a_{i,l-1} \right\rangle \\ &= -\left\langle Xa_{i1}, a_{i,l-1} \right\rangle . \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

Assim, como A é não depreciativa, segue que

$$\left\langle Xa_{i1}, a_{il} \right\rangle = 0, \quad 1 \le l \le n_i - 1$$

e

$$\left\langle Xa_{i1}, a_{jl} \right\rangle = \left\langle Xa_{i1}, R_{w_{jl}} \right\rangle = \left\langle Xa_{i1}, I_{w_{jl}} \right\rangle = 0, \quad 1 \le l \le n_i.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle (X_aA - A^tX_a - D_s)a_{il}, a_{it} \right\rangle = \alpha_i \left\langle X_a a_{il}, a_{it} \right\rangle + \left\langle X_a a_{i,l-1}, a_{it} \right\rangle - \alpha_i \left\langle X_a a_{il}, a_{it} \right\rangle \\ &\quad - \left\langle X_a a_{il}, a_{i,t-1} \right\rangle - \left\langle D_s a_{il}, a_{it} \right\rangle, \ 1 \le l, t \le n_i, \end{aligned}$$

em que $D = (I - A^t)\beta^t\beta - A\nu^t\nu - ((c-\tilde{c})I + \tilde{c}A^t)\psi^t\psi$, logo

$$\left\langle X_a a_{i,l-1}, a_{it} \right\rangle - \left\langle X_a a_{il}, a_{i,t-1} \right\rangle = \left\langle D_s a_{il}, a_{it} \right\rangle, \ 1 \le l, t \le n_i. \tag{2.3.12}$$

Dessa equação de recorrência e de $D_s(a_{il}) = 0$ para $l \le n_i/2$, obtemos que

$$\begin{aligned} \left\langle Xa_{i1}, a_{in_i} \right\rangle &= \left\langle X_a a_{i2}, a_{i,n_i-1} \right\rangle + \left\langle D_s a_{i2}, a_{i,n_i} \right\rangle \\ &= \left\langle X_a a_{i2}, a_{i,n_i-1} \right\rangle = ... = \left\langle X_a a_{i,n_i/2}, a_{i,n_i/2+1} \right\rangle \\ &= \frac{\left\langle D_s a_{i,n_i/2+1}, a_{i,n_i/2+1} \right\rangle}{2}, \end{aligned}$$

pois

$$\left\langle D_s a_{i,n_i/2+1}, a_{i,n_i/2+1} \right\rangle = \left\langle X_a a_{i,n_i/2}, a_{i,n_i/2+1} \right\rangle - \left\langle X_a a_{i,n_i/2+1}, a_{i,n_i/2} \right\rangle = 2\left\langle X_a a_{i,n_i/2}, a_{i,n_i/2+1} \right\rangle,$$

ou seja,

$$\left\langle Xa_{i1}, a_{in_i} \right\rangle = \left\langle X_a a_{i,n_i/2}, a_{i,n_i/2+1} \right\rangle = \frac{\left\langle D_s a_{i,n_i/2+1}, a_{i,n_i/2+1} \right\rangle}{2}.$$

Como $\beta(a_{il}),\ \nu(a_{il})$ e $\psi(a_{il})$ não são todas nulas para $l > n_i/2$, temos

$$\begin{aligned} \left\langle D_s a_{i,n_i/2+1}, a_{i,n_i/2+1} \right\rangle &= (1-\alpha_i)||\beta(a_{i,n_i/2+1}||^2 - ((c-\tilde{c}) - \alpha_i\tilde{c})\psi^2(a_{i,n_i/2+1}) \\ &\quad -\alpha_i||\nu a_{i,n_i/2+1}||^2 \\ &= (1-\alpha_i)||\xi_{i,n_i/2+1}||^2 - ((c-\tilde{c}) - \alpha_i\tilde{c})y^2_{i,n_i/2+1} - \alpha_i||Y_{i,n_i/2+1}||^2 \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Assim, $a_{i1} \notin ker(X)$.

Afirmação 3: Se $j \in \{1, \dots, q\}$, fazendo $y_{j0} = y_{j0}^R = y_{j0}^I = Y_{j0} = Y_{j0}^R = Y_{j0}^I = \xi_{j0} = \xi_{j0}^R = \xi_{j0}^I = 0$, é possível escolher $y_{jk_j}^R, y_{jk_j}^I, Y_{jk_j}^R, Y_{jk_j}^I, \xi_{jk_j}^R, \xi_{jk_j}^I$, com $1 \le k_j \le n_j$, de modo que as equações (2.3.6) sejam satisfeitas e tais que $w_{j1} \notin S^c$, ou seja, $E_{\alpha_j} \cap S^c = \{0\}$.

Duas hiperesferas se interceptam se a distância d entre os dois centros e os respectivos raios r_1 e r_2 satisfazem a relação

$$|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2.$$

Dessa forma, para a equação com $k_j = 1$, tome os vetores $\xi_{j1}^R,\ \xi_{j1}^I,\ y_{j1}^R,\ y_{j1}^I,\ Y_{j1}^I$ não nulos de forma que se interceptem as hiperesferas do $\mathbb{R}^n$ dadas por

$$\begin{aligned}
R_{\alpha_j}||Y_{j1}^R||^2 - 2I_{\alpha_j}\left\langle Y_{j1}^R, Y_{j1}^I\right\rangle &= (1 - R_{\alpha_j})\left(||\xi_{j1}^R||^2 - ||\xi_{j1}^I||^2\right) \\
&\quad - \left((c - \tilde{c}) + R_{\alpha_j}\tilde{c}\right)\left({y_{j1}^R}^2 - {y_{j1}^I}^2\right) \\
&\quad + R_{\alpha_j}||Y_{j1}^I|| + 2I_{\alpha_j}\left\langle \xi_{j1}^R, \xi_{j1}^I\right\rangle + 2\tilde{c}I_{\alpha_j}y_{j1}^R y_{j1}^I, \\
I_{\alpha_j}||Y_{j1}^R||^2 + 2R_{\alpha_j}\left\langle Y_{j1}^R, Y_{j1}^I\right\rangle &= 2(1 - R_{\alpha_j})\left\langle \xi_{j1}^R, \xi_{j1}^I\right\rangle + 2\left((c - \tilde{c}) - \tilde{c}R_{\alpha_j}\right)y_{j1}^R y_{j1}^I \\
&\quad - I_{\alpha_j}\left(||\xi_{j1}^R||^2 - ||\xi_{j1}^I||^2\right) + I_{\alpha_j}||Y_{j1}^I||^2 - \tilde{c}I_{\alpha_j}\left((y_{j1}^R)^2 - (y_{j1}^I)^2\right).
\end{aligned}$$

Para a solução, basta tomar Y_{j1}^R não nulo nessa interseção.

Para a equação com $k_j = 2$, como $\xi_{j1}^R,\ \xi_{j1}^I,\ y_{j1}^R,\ y_{j1}^I,\ Y_{j1}^I,\ Y_{j1}^R$ estão fixados, temos as seguintes equações de hiperplanos em $\mathbb{R}^{2(p+n+1)}$

$$\begin{aligned}
&\left\langle \xi_{j2}^R, I_{\alpha_j}\xi_{j1}^I + (1 - R_{\alpha_j})\xi_{j1}^R\right\rangle + \left\langle \xi_{j2}^I, I_{\alpha_j}\xi_{j1}^R - (1 - R_{\alpha_j})\xi_{j1}^I\right\rangle \\
&\qquad + y_{j2}^R\left(-\left((c - \tilde{c}) - R_{\alpha_j}\tilde{c}\right)y_{j1}^R + I_{\alpha_j}\tilde{c}y_{j1}^I\right) + y_{j2}^I\left(-\left((c - \tilde{c}) - R_{\alpha_j}\tilde{c}\right)y_{j1}^I + I_{\alpha_j}\tilde{c}y_{j1}^R\right) \\
&\qquad + \left\langle Y_{j2}^R, I_{\alpha_j}Y_{j1}^I - R_{\alpha_j}Y_{j1}^R\right\rangle + \left\langle Y_{j2}^I, I_{\alpha_j}Y_{j1}^R + R_{\alpha_j}Y_{j1}^I\right\rangle \\
&\qquad - \tfrac{1}{2}\left(||\xi_{j1}^R||^2 + ||Y_{j1}^R||^2 - ||\xi_{j1}^I||^2 - ||Y_{j1}^I||^2 + \tilde{c}(y_{j1}^I)^2 - \tilde{c}(y_{j1}^R)^2\right) = 0 \\
&\left\langle \xi_{j2}^R, (1 - R_{\alpha_j})\xi_{j1}^I - I_{\alpha_j}\xi_{j1}^R\right\rangle + \left\langle \xi_{j2}^I, (1 - R_{\alpha_j})\xi_{j1}^R + I_{\alpha_j}\xi_{j1}^I\right\rangle \\
&\qquad\quad + y_{j2}^R\left(\left((c - \tilde{c}) - \tilde{c}R_{\alpha_j}\right)y_{j1}^I - \tilde{c}I_{\alpha_j}y_{j1}^R\right) + y_{j2}^I\left(\left((c - \tilde{c}) - \tilde{c}R_{\alpha_j}\right)y_{j1}^R + \tilde{c}I_{\alpha_j}y_{j1}^I\right) \\
&\qquad\quad + \left\langle Y_{j2}^R, -R_{\alpha_j}Y_{j1}^I - I_{\alpha_j}Y_{j1}^R\right\rangle + \left\langle Y_{j2}^I, -R_{\alpha_j}Y_{j1}^R + I_{\alpha_j}Y_{j1}^I\right\rangle \\
&\qquad\quad - \left\langle \xi_{j1}^R, \xi_{j1}^I\right\rangle - \left\langle Y_{j1}^R, Y_{j1}^I\right\rangle - \tilde{c}\left(y_{j1}^R y_{j1}^I + y_{j1}^I y_{j1}^R\right) = 0.
\end{aligned}$$

As i-ésimas coordenadas de $(\xi_{j2}^R)^i$ e $(\xi_{j2}^I)^i$ no primeiro hiperplano são, respectivamente,

$$I_{\alpha_j}(\xi_{j1}^I)^i + (1 - R_{\alpha_j})(\xi_{j1}^R)^i \text{ e } I_{\alpha_j}(\xi_{j1}^R)^i - (1 - R_{\alpha_j})(\xi_{j1}^I)^i,$$

e no segundo hiperplano são, respectivamente,

$$(1 - R_{\alpha_j})(\xi_{j1}^I)^i - I_{\alpha_j}(\xi_{j1}^R)^i \text{ e } (1 - R_{\alpha_j})(\xi_{j1}^R)^i + I_{\alpha_j}(\xi_{j1}^I)^i.$$

Agora, como

$$\left((I_{\alpha_j}(\xi_{j1}^I)^i + (1-R_{\alpha_j})(\xi_{j1}^R)^i)\right)^2 = -\left((1-R_{\alpha_j})(\xi_{j1}^I)^i - I_{\alpha_j}(\xi_{j1}^R)^i\right)^2$$

se, e só se,

$$\left((1-R_{\alpha_j})^2 + I_{\alpha_j}^2\right)\left((\xi_{j1}^R)^2 + (\xi_{j1}^I)^2\right) = 0,$$

e essa não ocorre, temos que os dois hiperplanos se interceptam. Assim, basta tomar um ponto não nulo nessa interseção. Por indução, suponha escolhidos todos os elementos com índices $1, ..., k_{j-1}$. Observe que as equações em (2.3.6) são equivalentes às equações

$$\begin{aligned}
&\left\langle \xi_{jk_j}^R, I_{\alpha_j}\xi_{j1}^I + (1-R_{\alpha_j})\xi_{j1}^R \right\rangle + \left\langle \xi_{jk_j}^I, I_{\alpha_j}\xi_{j1}^R - (1-R_{\alpha_j})\xi_{j1}^I \right\rangle \\
&\qquad + y_{jk_j}^R \left(-\left((c-\tilde{c}) - R_{\alpha_j}\tilde{c}\right) y_{j1}^R + I_{\alpha_j}\tilde{c} y_{j1}^I\right) + y_{jk_j}^I \left(-\left((c-\tilde{c}) - R_{\alpha_j}\tilde{c}\right) y_{j1}^I + I_{\alpha_j}\tilde{c} y_{j1}^R\right) \\
&\qquad + \left\langle Y_{jk_j}^R, I_{\alpha_j} Y_{j1}^I - R_{\alpha_j} Y_{j1}^R \right\rangle + \left\langle Y_{jk_j}^I, I_{\alpha_j} Y_{j1}^R + R_{\alpha_j} Y_{j1}^I \right\rangle \\
&\qquad + A\left(\xi_{j1}^R, Y_{j1}^R, \xi_{j1}^I, Y_{j1}^I, y_{j1}^I, y_{j1}^R, ..., \xi_{jk_{j-1}}^R, Y_{jk_{j-1}}^R, \xi_{jk_{j-1}}^I, Y_{jk_{j-1}}^I, y_{jk_{j-1}}^I, y_{jk_{j-1}}^R\right) = 0 \\
&\left\langle \xi_{jk_j}^R, (1-R_{\alpha_j})\xi_{j1}^I - I_{\alpha_j}\xi_{j1}^R \right\rangle + \left\langle \xi_{jk_j}^I, (1-R_{\alpha_j})\xi_{j1}^R + I_{\alpha_j}\xi_{j1}^I \right\rangle \\
&\qquad\quad + y_{jk_j}^R \left(\left((c-\tilde{c}) - \tilde{c}R_{\alpha_j}\right) y_{j1}^I - \tilde{c} I_{\alpha_j} y_{j1}^R\right) + y_{jk_j}^I \left(\left((c-\tilde{c}) - \tilde{c}R_{\alpha_j}\right) y_{j1}^R + \tilde{c} I_{\alpha_j} y_{j1}^I\right) \\
&\qquad\quad + \left\langle Y_{jk_j}^R, -R_{\alpha_j} Y_{j1}^I - I_{\alpha_j} Y_{j1}^R \right\rangle + \left\langle Y_{jk_j}^I, -R_{\alpha_j} Y_{j1}^R + I_{\alpha_j} Y_{j1}^I \right\rangle \\
&\qquad\quad + B\left(\xi_{j1}^R, Y_{j1}^R, \xi_{j1}^I, Y_{j1}^I, y_{j1}^I, y_{j1}^R, ..., \xi_{jk_{j-1}}^R, Y_{jk_{j-1}}^R, \xi_{jk_{j-1}}^I, Y_{jk_{j-1}}^I, y_{jk_{j-1}}^I, y_{jk_{j-1}}^R\right) = 0,
\end{aligned}$$

em que

$$A\left(\xi_{j1}^R, Y_{j1}^R, \xi_{j1}^I, Y_{j1}^I, y_{j1}^I, y_{j1}^R, ..., \xi_{jk_{j-1}}^R, Y_{jk_{j-1}}^R, \xi_{jk_{j-1}}^I, Y_{jk_{j-1}}^I, y_{jk_{j-1}}^I, y_{jk_{j-1}}^R\right)$$

e

$$B\left(\xi_{j1}^R, Y_{j1}^R, \xi_{j1}^I, Y_{j1}^I, y_{j1}^I, y_{j1}^R, ..., \xi_{jk_{j-1}}^R, Y_{jk_{j-1}}^R, \xi_{jk_{j-1}}^I, Y_{jk_{j-1}}^I, y_{jk_{j-1}}^I, y_{jk_{j-1}}^R\right),$$

são funções reais envolvendo os dados anteriores. De maneira análoga, temos que tais hiperplanos se interceptam, e assim segue a afirmação.

Afirmação 4: Se $i \in \{1, \ldots, p\}$ é tal que α_i tem multiplicidade ímpar e $\alpha_i \notin Z(c, \tilde{c})$, então $a_{i1} \in \ker X$.

Segue de $\alpha_i \notin Z(c, \tilde{c})$ que (2.3.7) só admite a solução trivial. Para $k_i = 2$, podemos tomar ξ_{i2}, Y_{i2} e y_{i2} quaisquer de modo que (2.3.5) seja satisfeita. Para $k_i = 3$ devemos ter $\xi_{ij} = Y_{ij} = y_{ij} = 0$, com $j = 1, 2$ e ξ_{i3}, Y_{i3} e y_{i3} quaisquer como solução de (2.3.5). É fácil verificar que $\xi_{il} = Y_{il} = y_{il} = 0$ para $l \leq k_i = (n_i + 1)/2$ são as únicas soluções do sistema dado pelas equações (2.3.5), podendo ser ξ_{il}, Y_{il} e y_{il} quaisquer para $l > k_i$, os quais tomamos não nulos. Para essa solução, temos como na Afirmação 2 as equações (2.3.8), (2.3.9), (2.3.10), (2.3.11) e (2.3.12). Segue dessas equações e do fato de A ser não depreciativa que $\langle Xa_{i1}, a_{il}\rangle = 0,\ 1 \leq l \leq n_i - 1$ e $\langle Xa_{i1}, a_{jl}\rangle = \left\langle Xa_{i1}, R_{w_{jl}}\right\rangle = \left\langle Xa_{i1}, I_{w_{jl}}\right\rangle = 0,\ 1 \leq l \leq n_i$.

Da equação (2.3.12) e do fato de que $D_s(a_{il}) = 0$ para $l \leq (n_i+1)/2$, segue que

$$\begin{aligned}\langle X_a a_{i1}, a_{in_i}\rangle &= \langle X_a a_{i2}, a_{i,n_i-1}\rangle + \langle D_s a_{i2}, a_{in_i}\rangle \\ &= \langle X_a a_{i2}, a_{i,n_i-1}\rangle = ... = \left\langle X_a a_{i,(n_i+1)/2}, a_{i,(n_i+1)/2}\right\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto $a_{i1} \in ker(X)$.

Tendo em vista o Lema 2.3.3, as afirmações do teorema para os valores de c e $\tilde{c}$ nas hipóteses de tal lema decorrem das Afirmações 1-4 acima. Para finalizar a demonstração do teorema, basta verificar a existência de uma tripla A-admissível (ψ, ν, β) no caso em que $\tilde{c} < 0$ e $c \in [\tilde{c}, 0]$. Para isso, vamos supor, sem perda de generalidade, que $p < n$. Tome uma matriz $\beta \in M_{p\times m}(\mathbb{R})$ com a propriedade de que nenhum dos vetores $Re(w_{j1})$ e $Im(w_{j1})$ pertença ao núcleo de β e tal que $a_{i1} \in ker\beta$ somente se $\alpha_i = -\frac{c}{\tilde{c}} + 1$. Seja $\nu \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ a matriz

$$\nu = \begin{bmatrix} \lambda P\beta \\ 0 \end{bmatrix}.$$

em que P é uma matriz ortogonal de ordem p, $\lambda \in \mathbb{R}/\{0\}$ e $0 \in M_{(n-p)\times m}(\mathbb{R})$. Nessas condições, $ker\nu = ker\beta$ e $\nu^t\nu = \lambda^2\beta^t\beta$. A partir dessas matrizes e da base de Jordan de A, vamos mostrar ser possível obter ψ de modo que as equações (2.3.2) e (2.3.3) sejam satisfeitas. Nesse caso, essas equações são equivalentes a

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{r=0}^{k_i-1}(1-\alpha_i(1+\lambda^2))\langle\xi_{i,k_i-r},\xi_{i,r+1}\rangle - \frac{1}{2}(1+\lambda^2)\langle\xi_{i,k_i-r-1},\xi_{i,r+1}\rangle - \frac{1}{2}(1+\lambda^2)\langle\xi_{i,k_i-r},\xi_{ir}\rangle \\ &\qquad -((c-\tilde{c})+\alpha_i\tilde{c})y_{i,k_i-r}y_{i,r+1} - \frac{1}{2}\tilde{c}y_{i,k_i-r-1}y_{i,r+1} \\ &\qquad -\frac{1}{2}\tilde{c}y_{i,k_i-r}y_{ir} = 0,\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

com $0 = y_{i0} = \xi_{i0}$, e para α_j complexo, as equações

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{r=0}^{k_j-1} \Big\{(1+\lambda^2)\left\langle \xi^R_{j,k_j-r}, \xi^R_{j,r+1}\right\rangle - (1+\lambda^2)\left\langle \xi^I_{j,k_j-r}, \xi^I_{j,r+1}\right\rangle \\
&\qquad -(c-\tilde{c})(y^R_{j,k_j-r}y^R_{j,r+1} - y^I_{j,k_j-r}y^I_{j,r+1}) \\
&\qquad -R_{\alpha_j}\Big((1+\lambda^2)\left\langle \xi^R_{j,k_j-r}, \xi^R_{j,r+1}\right\rangle - (1+\lambda^2)\left\langle \xi^I_{j,k_j-r}, \xi^I_{j,r+1}\right\rangle \\
&\qquad +\tilde{c}y^R_{j,k_j-r}y^R_{j,r+1} - \tilde{c}y^I_{j,k_j-r}y^I_{j,r+1}\Big) - \tfrac{1}{2}\Big[(1+\lambda^2)\left\langle \xi^R_{j,k_j-r-1}, \xi^R_{j,r+1}\right\rangle \\
&\qquad +(1+\lambda^2)\left\langle \xi^R_{j,k_j-r}, \xi^R_{j,r}\right\rangle - (1+\lambda^2)\left\langle \xi^I_{j,k_j-r-1}, \xi^I_{j,r+1}\right\rangle - (1+\lambda^2)\left\langle \xi^I_{j,k_j-r}, \xi^I_{j,r}\right\rangle \\
&\qquad +\tilde{c}(y^R_{j,k_j-r-1}y^R_{j,r+1} + y^R_{j,k_j-r}y^R_{j,r} - y^I_{j,k_j-r-1}y^I_{j,r+1} - y^I_{j,k_j-r}y^I_{j,r})\Big] \\
&\qquad +I_{\alpha_j}\Big((1+\lambda^2)\left\langle \xi^R_{j,k_j-r}, \xi^I_{j,r+1}\right\rangle + (1+\lambda^2)\left\langle \xi^I_{j,k_j-r}, \xi^R_{j,r+1}\right\rangle \\
&\qquad +\tilde{c}(y^R_{j,k_j-r}y^I_{j,r+1} + y^I_{j,k_j-r}y^R_{j,r+1})\Big)\Big\} \\
&\qquad = 0, \\
&\textstyle\sum_{r=0}^{k_j-1} \Big\{(1+\lambda^2)\left\langle \xi^R_{j,k_j-r}, \xi^I_{j,r+1}\right\rangle + (1+\lambda^2)\left\langle \xi^I_{j,k_j-r}, \xi^R_{j,r+1}\right\rangle \\
&\qquad +(c-\tilde{c})(y^R_{j,k_j-r}y^I_{j,r+1} + y^I_{j,k_j-r}y^R_{j,r+1}) \\
&\qquad -I_{\alpha_j}\Big((1+\lambda^2)\left\langle \xi^R_{j,k_j-r}, \xi^R_{j,r+1}\right\rangle - (1+\lambda^2)\left\langle \xi^I_{j,k_j-r}, \xi^I_{j,r+1}\right\rangle \\
&\qquad +\tilde{c}(y^R_{j,k_j-r}y^R_{j,r+1} - y^I_{j,k_j-r}y^I_{j,r+1})\Big) - R_{\alpha_j}\Big((1+\lambda^2)\left\langle \xi^R_{j,k_j-r}, \xi^I_{j,r+1}\right\rangle \\
&\qquad +(1+\lambda^2)\left\langle \xi^I_{j,k_j-r}, \xi^R_{j,r+1}\right\rangle + \tilde{c}(y^R_{j,k_j-r}y^I_{j,r+1} + y^I_{j,k_j-r}y^R_{j,r+1})\Big) \\
&\qquad -\tfrac{1}{2}\Big[(1+\lambda^2)\left\langle \xi^R_{j,k_j-r-1}, \xi^I_{j,r+1}\right\rangle + (1+\lambda^2)\left\langle \xi^R_{j,k_j-r}, \xi^I_{j,r}\right\rangle \\
&\qquad +(1+\lambda^2)\left\langle \xi^I_{j,k_j-r-1}, \xi^R_{j,r+1}\right\rangle + (1+\lambda^2)\left\langle \xi^I_{j,k_j-r}, \xi^R_{j,r}\right\rangle \\
&\qquad +\tilde{c}(y^R_{j,k_j-r-1}y^I_{j,r+1} + y^R_{j,k_j-r}y^I_{j,r} + y^I_{j,k_j-r-1}y^R_{j,r+1} + y^I_{j,k_j-r}y^R_{j,r})\Big]\Big\} \\
&\qquad = 0,
\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

com $0 = y_{j0} = y^R_{j0} = y^I_{j0} = \xi_{j0} = \xi^R_{j0} = \xi^I_{j0}$.

Observe que a equação (2.3.13) para $k_i = 1$ é a equação da quádrica

$$\Big(1 - \alpha_i(1+\lambda^2)\Big)\,||\xi_{i1}||^2 - ((c-\tilde{c}) + \alpha_i\tilde{c})\,y^2_{i1} = 0.$$

Essa quádrica admite solução não trivial se $(1-\alpha_i(1+\lambda^2))$ e $-((c-\tilde{c})+\alpha_i\tilde{c})$ têm sinais opostos ou ambos são nulos ou se $\alpha_i(1+\lambda^2) = 1$ ou se $(c-\tilde{c})+\alpha_i\tilde{c} = 0$. Nesse último caso é possível tomar uma solução não trivial porque β foi tomado com $\beta(a_{i1}) = \xi_{i1} = 0$ se $(c-\tilde{c}) + \alpha_i\tilde{c} = 0$.

Vamos verificar que para uma escolha adequada de λ, sempre é possível escolher uma solução não nula dessa quádrica. Definindo

$$\kappa : [(c-\tilde{c}) + \alpha_i\tilde{c}] \text{ e } \ell := -\frac{c}{\tilde{c}} + 1,$$

esses dois coeficientes têm o sinais opostos se e só se

$$(1-\alpha_i)\kappa > \alpha_i\kappa\lambda^2. \tag{2.3.15}$$

De $\tilde{c} < 0$ e $\tilde{c} \leq c \leq 0$ temos que $\ell \in [0,1]$ e $\kappa > 0$ (< 0) se e só se, $\alpha_i < \ell$ $(> \ell)$. Observe ainda que $\kappa > 0$ (< 0), vale (2.3.15) se e só se, $\alpha_i\lambda^2 < 1 - \alpha_i$ $(> 1 - \alpha_i)$.

Vamos analisar os casos

i) $\alpha_i \in (-\infty, 0)$, temos $\kappa > 0$ e vale (2.3.15), pois $\alpha_i\lambda^2 < 1 - \alpha_i$.

ii) $\alpha_i \in (0, \ell)$, temos $\kappa > 0$, e vale (2.3.15) se e só se, $\lambda^2 < \frac{1}{\alpha_i} - 1$.

iii) $\alpha_i \in (\ell, 1)$, temos $\kappa < 0$, e vale (2.3.15) se e só se, $\lambda^2 > \frac{1}{\alpha_i} - 1$.

iv) $\alpha_i \in [1, \infty)$, temos $\kappa < 0$ e vale (2.3.15).

Em todos os casos, para a condição (2.3.15) ser satisfeita, basta tomar um valor adequado para λ. Assim, de modo análogo às Afirmações 1 e 3, podemos tomar uma solução não trivial para o sistema (2.3.13) e (2.3.14), ou seja, podemos definir ψ na base de Jordan de A a partir dessas equações com $a_{i1}, R(w_{j1}), I(w_{j1}) \notin ker\beta \cap ker\psi$, qualquer i e j, e assim,

$$E_{\alpha_i} \cap S = \{0\} = E_{\alpha_j} \cap S^c, \tag{2.3.16}$$

em que S^c denota o complexificado de $S = ker\beta \cap ker\psi$.

Agora, de (2.3.1) temos

$$X(A - I) + (A^t - I)X^t = \lambda^2\beta^t\beta + c\psi^t\psi,$$

logo, segue novamente de (2.3.1), para qualquer $u \in kerX^t$ que

$$0 = (1 + \lambda^2)||\beta u||^2 + \tilde{c}\psi^2(u) = ||\beta u||^2 - (c - \tilde{c})\psi^2(u) = \lambda^2||\beta u||^2 + c\psi^2(u).$$

Decorre dessas equações o seguinte sistema

$$\begin{cases} ||\beta u||^2 - (c - \tilde{c})\psi^2(u) = 0, \\ (1 + \lambda^2)||\beta u||^2 + \tilde{c}\psi^2(u) = 0. \end{cases}$$

Fazendo a escolha de $\lambda \neq \frac{1}{\ell} - 1$, esse sistema admite somente a solução trivial $||\beta u|| = \psi(u) = 0$, e assim, vale

$$kerX^t \subset S. \tag{2.3.17}$$

Dessarte, por (2.3.1) $kerX = kerX^t$. Usando isto, decorre de (2.3.1) que $A(kerX) \subset kerX$. A inversibilidade de X segue de (2.3.16) e (2.3.17).

■

Para o caso particular em que A é simétrica, temos o seguinte corolário.

Corolário 2.3.6. *Seja $A \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ simétrica com m autovalores distintos $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.*

(i) Se c e $\tilde{c}$ satisfazem uma das condições do Lema 2.3.3, então uma tripla (ψ, ν, β) é A-admissível se, e só se, $E_{\alpha_i} \cap S = \{0\}$ para todo $1 \leq i \leq m$. Além disso, uma tal

tripla existe sempre se $c = 0 = \tilde{c}$ e, caso contrário, isso ocorre se,e só se, $\alpha_i \in Z(c, \tilde{c})$ para todo $1 \leq i \leq m$.

(ii) Se $\tilde{c} < 0$ e $c \in [\tilde{c}, 0]$, uma tripla A-admissível (ψ, ν, β) sempre existe.

Demonstração. O fato de que a tripla (ψ, ν, β) é A-admissível se $E_{\alpha_i} \cap S = \{0\}$ para todo $1 \leq i \leq m$ é consequência do Lema 2.3.3. Para mostrar que essa condição é também necessária, observe que, se $a_i \in S$, em que a_i é um autovetor de A associado a α_i, então (2.3.1) implica que

$$\langle Xa_i, a_i \rangle = \langle X_a a_i, a_i \rangle = -\langle X_i, X_a a_i \rangle = -\langle X_a a_i, a_i \rangle = -\langle Xa_i, a_i \rangle,$$

logo $\langle Xa_i, a_i \rangle = 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (XA + A^t X^t - \beta^t \beta - (c - \tilde{c})\psi^t \psi) a_i, a_j \rangle = \alpha_i \langle Xa_i, a_j \rangle + \langle X^t a_i, \alpha_j a_j \rangle \\ &= (\alpha_i - \alpha_j) \langle Xa_i, a_j \rangle \ \ \forall\ i \neq j, \end{aligned}$$

portanto $Xa_i = 0$.

A última afirmação em (i), assim como aquela em (ii), decorre do Teorema 2.3.5.

■

2.4 A equação de Lyapunov

Dada $A \in M_n(\mathbb{C})$, a equação

$$A^t X + XA = C \tag{2.4.1}$$

é conhecida como a *equação de Lyapunov.* O seguinte resultado é um caso particular do Corolário 2.1.3.

Teorema 2.4.1. *Dada $A \in M_n(\mathbb{C})$, a equação de Lyapunov (2.4.1) possui uma única solução $X \in M_n(\mathbb{C})$ para qualquer $C \in M_n(\mathbb{C})$ se, e somente se, $\sigma(A) \cap (-\sigma(A)) = \emptyset$.*

A seguinte consequência do teorema anterior será necessária no Teorema 2.4.5.

Corolário 2.4.2. *Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ satisfaz $\sigma(A) \cap (-\sigma(A)) = \emptyset$, então a equação (2.4.1) possui uma única solução $X \in M_n(\mathbb{R})$ para qualquer $C \in M_n(\mathbb{R})$, a qual pertence a $A_n(\mathbb{R})$ (respectivamente, $S_n(\mathbb{R})$) caso $C \in A_n(\mathbb{R})$ (respectivamente, $C \in S_n(\mathbb{R})$).*

Demonstração. Se $\sigma(A) \cap (-\sigma(A)) = \emptyset$, decorre do Teorema 2.4.1 que a aplicação

$$\begin{aligned} \Psi_{A^t,A} \colon M_n(\mathbb{C}) &\to M_n(\mathbb{C}) \\ X &\mapsto A^t X + XA. \end{aligned}$$

é um isomorfismo. Para $A \in M_n(\mathbb{R})$, a aplicação $\Psi_{A^t,A}$ deixa $M_n(\mathbb{R})$ invariante, o que mostra a primeira afirmação. A segunda decorre do fato de que $\Psi_{A^t,A}$ também deixa $A_n(\mathbb{R})$ e $S_n(\mathbb{R})$ invariantes. ■

Uma forma explícita para a solução da equação (2.4.1) pode ser obtida a partir da Proposição (2.1.5). Uma outra forma explícita para a solução de (2.4.1), para a qual não é necessário decompô-la em blocos, é consequência da Proposição 2.1.8.

Corolário 2.4.3. *Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ satisfaz $\sigma(A) \cap (-\sigma(A)) = \emptyset$, então a (única) solução da equação (2.4.1) é dada por*

$$X = q_{-A}(A)^{-1}\eta(A, C), \tag{2.4.2}$$

sendo

$$q_{-A}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k, \ a_n = 1,$$

o polinômio característico de $-A$, e

$$\eta(A, C) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (A^t)^{k-1-i} C A^i.$$

Além disso, tal solução é um polinômio em A e C.

Demonstração. A afirmação decorre imediatamente da Proposição 2.1.8 substituindo A e B por A^t e $-A$, respectivamente. ∎

No Corolário 2.4.3, se acrescentarmos a hipótese de A ser simétrica, obtemos a solução dada no Corolário 2.1.6. Temos também uma solução sem a necessidade de particionar em blocos.

Proposição 2.4.4. *Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é simétrica e $\sigma(A) \cap \sigma(-A) = \emptyset$, então a única solução de (2.4.1) é dada por*

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i a_i^t C (A^t + \alpha_i I)^{-1},$$

em que $a_1, \ldots, a_n$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores de A, com respectivos autovalores $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Demonstração. Observe que $det(A + \alpha_i I) = p_A(-\alpha_i) \neq 0$, uma vez que $\sigma(A) \cap \sigma(-A) = \emptyset$. Afirmamos que $\sum_{i=1}^{n} a_i a_i^t = I$. De fato, para qualquer $x = \sum_j x_j a_j$ temos

$$\sum_{i=1}^{n} a_i a_i^t \sum_j x_j a_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_j x_j a_i \delta_{ij} = \sum_i x_i a_i = x.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} AX + XA^t &= A\sum_{i=1}^n a_i a_i^t C(A^t+\alpha_i I)^{-1} + \sum_{i=1}^n a_i a_i^t C(A^t+\alpha_i I)^{-1}A^t \\ &= A\sum_{i=1}^n a_i a_i^t C(A^t+\alpha_i I)^{-1} + \sum_{i=1}^n a_i a_i^t C(A^t+\alpha_i I)^{-1}(A^t+\alpha_i I) \\ &\quad -\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i a_i^t C(A^t+\alpha_i I)^{-1} \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i a_i^t C(A^t+\alpha_i I)^{-1} + \sum_{i=1}^n a_i a_i^t C - \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i a_i^t C(A^t+\alpha_i I)^{-1} \\ &= C. \end{aligned}$$

■

2.4.1 Propriedades da solução de uma equação de Lyapunov

Nesta seção, estudamos certas propriedades da solução de uma equação de Lyapunov que surge ao aplicar a transformação de Ribaucour vetorial às subvariedades Lagrangianas com curvatura constante c de espaços complexos com curvatura holomorfa constante $4c$.

Proposição 2.4.5. *Seja $P \in M_m(\mathbb{R})$ tal que $\sigma(P) \cap (-\sigma(P)) = \emptyset$. Dados $c \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathbb{M}_{1\times m}(\mathbb{R})$ e $\nu \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, seja X a única solução da equação de Lyapunov*

$$X^t P + P^t X^t = -T\rho, \tag{2.4.3}$$

em que $T = -P^t - (P^t)^{-1}$ e $\rho = P^t Q P$, com $Q = \nu^t\nu + c\psi^t\psi$. Então X satisfaz

$$X + X^t = Q + \rho \tag{2.4.4}$$

e

$$TX - X^t T^t = 0. \tag{2.4.5}$$

Além disso,

$$XL + L^t X^t = \rho,$$

em que $L = (P^2 + I)^{-1}P^2$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} (Q+\rho)P + P^t(Q+\rho) + 2T\rho &= (Q+\rho)P + P^t(Q+\rho) - 2P^t\rho - 2QP \\ &= -QP + \rho P + P^t Q - P^t\rho \\ &= (-QP+\rho P) - (-QP+\rho P)^t \end{aligned}$$

é uma matriz anti-simétrica, logo $(Q+\rho)/2$ é a (única) solução da equação de Lyapunov

$$XP + P^t X = -(T\rho)_s,$$

ou seja, $(Q+\rho)/2$ é a parte simétrica da (única) solução de (2.4.3), o que mostra (2.4.4).

Mostremos que X satisfaz (2.4.5). De fato, usando (2.4.4) e (2.4.3) obtemos

$$\begin{aligned} TX - X^tT^t &= -P^tX - (P^t)^{-1}X + X^tP + X^tP^{-1} \\ &= -P^tX - (P^t)^{-1}X - P^tX^t - T\rho + X^tP^{-1} \\ &= -P^tX - (P^t)^{-1}X - P^tX^t - T\rho - (P^t)^{-1}X^t - (P^t)^{-1}T\rho P^{-1} \\ &= -P^t(X + X^t) - (P^t)^{-1}(X + X^t) + P^t\rho + (P^t)^{-1}\rho + \rho P^{-1} + (P^t)^{-2}\rho P^{-1} \\ &= -P^t(Q + \rho) - (P^t)^{-1}(Q + \rho) + P^t\rho + (P^t)^{-1}\rho + \rho P^{-1} + (P^t)^{-2}\rho P^{-1} \\ &= -P^tQ - (P^t)^{-1} + P^tQ + (P^t)^{-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Observe agora que

$$T^t = -P - P^{-1} = -P^{-1}(I + P^2).$$

Como $\sigma(P) \cap (-\sigma(P)) = \emptyset$, temos que $-1 \notin \sigma(P^2)$, logo T é inversível e

$$T^tL = -P. \tag{2.4.6}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} T(XL + L^tX^t) &= TXL + TL^tX^t = X^tT^tL + TL^tX^t \\ &= -X^tP - P^tX^t = T\rho. \end{aligned}$$

∎

Soluções inversíveis de 2.4.3

Nas aplicações da transformação vetorial de Ribaucour às subvariedades Lagrangianas com curvatura constante c de espaços complexos com curvatura holomorfa constante $4c$, precisamos estudar a existência de soluções inversíveis da equação de Liapounov 2.4.3.

Definição 2.4.6. Seja $P \in M_m(\mathbb{R})$ tal que $\sigma(P) \cap (-\sigma(P)) = \emptyset$. Se $c = 0$ (resp., $c \neq 0$), dizemos que $\nu \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ (resp., o par (ψ, ν), com $\psi \in \mathbb{M}_{1\times m}(\mathbb{R})$ e $\nu \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$) é P-*admissível* se a (única) solução $X = X(\nu, \psi, c)$ (resp., $X = X(\nu)$) de (2.4.3) é inversível. Se V e W_1 são espaços vetoriais, $P : V \to V$, $\psi : V \to \mathbb{R}$ e $\nu : V \to W_1$ são transformações lineares e $c = 0$ (resp., $c > 0$), dizemos que ν (resp., o par (ψ, ν)) é P-admissível se a (única) solução $X : V \to V$ de (2.4.3) é inversível.

A existência de uma matriz ν (resp., um par (ψ, ν)) P-admissível quando $c = 0$ (resp., $c \neq 0$), é assegurada pelo seguinte resultado.

Proposição 2.4.7. *Seja $P \in M_m(\mathbb{R})$ tal que $\sigma(P) \cap (-\sigma(P)) = \emptyset$.*

i) Se $c > 0$, então o par (ψ, ν) é P-admissível se, e só se, $E_\alpha \cap S = \{0\}$ (resp., $E_\alpha \cap S^c \neq \{0\}$) para todo autovetor real (resp., complexo) α de P, em que $S = ker\psi \cap ker\nu$ e S^c é o complexificado de S.

ii) Se $c = 0$, então ν é P-admissível se, e só se, $E_\alpha \cap ker\nu = \{0\}$ (resp., $E_\alpha \cap (ker\nu)^c \neq \{0\}$) para todo autovetor real (resp., complexo) α de P, em que $(ker\nu)^c$ é o complexificado de $ker\nu$.

iii) Se $c < 0$, então
a) se $E_\alpha \cap ker\nu = \{0\}$ (resp., $E_\alpha \cap (ker\nu)^c = \{0\}$) para todo autovetor real (resp., complexo) α de P, então existe $\epsilon > 0$ tal que (ψ, ν) é P-admissível se $|\psi| < \epsilon$.
b) se $E_\alpha \cap ker\psi = \{0\}$ (resp., $E_\alpha \cap (ker\psi)^c = \{0\}$) para todo autovetor real (resp., complexo) α de P, em que $(ker\psi)^c$ é o complexificado de $ker\psi$, então existe $\epsilon > 0$ tal que (ψ, ν) é P-admissível se $|\nu| < \epsilon$.

Demonstração. i) Suponha que (ψ, ν) satisfaça $E_\alpha \cap S = \{0\}$ (respectivamente, $E_\alpha \cap S^c = \{0\}$) para todo autovalor real (respectivamente, complexo) α de P. Temos da equação (2.4.4) que

$$u^t(X + X^t)u = u^t(\nu^t\nu + c\psi^t\psi + P^t\nu^t\nu P + cP^t\psi^t\psi P)u.$$

Assim, para qualquer $u \in kerX^t$ obtemos que

$$0 = ||\nu u||^2 + c(\psi u)^2 + ||\nu P u||^2 + c(\psi P u)^2.$$

Como $c > 0$, concluímos que $u \in S$, logo

$$kerX^t \subset S.$$

Decorre de (2.4.4) que $kerX^t = kerX$ e, por (2.4.3),

$$P(\ker X) \subset \ker X.$$

Como $\ker X \subset S$, segue que $\ker X = \{0\}$ se $E_\alpha \cap S = \{0\}$ (respectivamente, $E_\alpha \cap S^c = \{0\}$) para todo autovalor real (respectivamente, complexo) α de P.

Reciprocamente, suponha que exista um autovalor real α_i de P tal que $a_{i1} \in E_{\alpha_i} \cap S$, $a_{i1} \neq 0$. Então

$$\left\langle X^t a_{i1}, a_{i1} \right\rangle = 0,$$

e, pela equação (2.3.1),

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (X^tP + P^tX^t + T\rho)a_{i1}, a_{jl} \rangle = \alpha_i \langle a_{i1}, Xa_{jl} \rangle + \langle a_{i1}, X(\alpha_j a_{jl} + a_{j,l-1}) \rangle \\ &= (\alpha_i + \alpha_j) \langle a_{i1}, Xa_{jl} \rangle - \langle a_{i1}, Xa_{j,l-1} \rangle \;\; i \neq j, \;\; a_{j,0} = 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (X^tP + P^tX^t + T\rho)a_{i1}, w_{jl} \rangle = \alpha_i \langle a_{i1}, Xw_{jl} \rangle + \langle a_{i1}, X(\alpha_j w_{jl} + w_{j,l-1}) \rangle \\ &= (\alpha_i + \bar{\alpha}_j) \langle a_{i1}, Xw_{jl} \rangle - \langle a_{i1}, Xw_{j,l-1} \rangle \;\; i \neq j, \;\; a_{j,0} = 0 \text{ e } w_{j,0} = 0. \end{aligned}$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (X^tP + P^tX^t + T\rho)a_{i1}, a_{il}\rangle = \alpha_i \langle a_{i1}, Xa_{il}\rangle + \langle a_{i1}, X(\alpha_i a_{il} + a_{i,l-1})\rangle \\ &= 2\alpha_i \langle a_{i1}, Xa_{il}\rangle - \langle a_{i1}, Xa_{i,l-1}\rangle\,,\ a_{j,0} = 0. \end{aligned}$$

Dessas equações obtemos que $a_{i1} \in kerX^t$. De forma análoga se mostra que $\ker X \neq \{0\}$ se $E_\alpha \cap S^c \neq \{0\}$ para algum autovalor complexo de P.

ii) Esse caso segue de maneira análoga ao anterior, substituindo $c > 0$ por $c = 0$ e S por $ker\nu$.

iii) Observe que a única solução $X(\nu, \psi, c)$ de (2.4.3), a qual é dada por (2.4.2), depende continuamente de (ψ, ν, c). Vamos inicialmente demonstrar (a). Fazendo $\psi = 0$ temos análogo ao caso $c = 0$ que $X(\nu, 0, c)$ é inversível se $E_\alpha \cap ker\nu = \{0\}$ (resp., $E_\alpha \cap (ker\nu)^c = \{0\}$) para todo autovetor real (resp., complexo) α de P. Assim, existe $\epsilon > 0$ tal que $X(\nu, \psi, c)$ é inversível para todo ψ com $||\psi|| < \epsilon$.

Para (b), fazendo $\nu = 0$, segue como no caso $c > 0$ com $\nu = 0$, que $X(0, \psi, c)$ é inversível desde que $E_\alpha \cap ker\psi = \{0\}$ (resp., $E_\alpha \cap (ker\psi)^c = \{0\}$), para todo autovetor real (resp., complexo) α de P. Assim, existe $\epsilon > 0$ tal que $X(\nu, \psi, c)$ é inversível para todo ν com $||\nu|| < \epsilon$. ∎

Capítulo 3

A transformação de Ribaucour

O objetivo deste capítulo é apresentar parte da teoria das transformações de Ribaucour. Essas transformações têm proporcionado, em particular, uma ferramenta importante para a construção de exemplos de subvariedades pertencentes a uma certa classe. Baseamo-nos aqui nos trabalhos de M. Dajczer e R. Tojeiro, que em [12] e [13] introduzem a transformação escalar de Ribaucour para subvariedades de dimensão e codimensão quaisquer em um espaço forma pseudo-Riemanniana de curvatura seccional constante c e índice s, em [11] e [35] as utilizam no estudo de subvariedades Lagrangianas com curvatura seccional constante c de formas espaciais complexas com curvatura holomorfa $4c$, e em [7], junto com L. Florit, estudam a transformação vetorial de Ribaucour.

3.1 A transformação escalar de Ribaucour

Nesta seção, expomos uma resenha sobre a teoria da transformação escalar de Ribaucour para subvariedades de dimensão e codimensão quaisquer em $\mathbb{Q}_s^{n+p}(\tilde{c})$.

Classicamente, duas superfícies em $\mathbb{R}^3$ estão relacionadas por uma transformação de Ribaucour quando existe um difeomorfismo entre elas preservando as linhas de curvatura tal que as retas normais em pontos correspondentes se interceptam em um ponto que está equidistante de ambos.

Esta noção foi estendida por Dajczer e Tojeiro em [13] para imersões isométricas $f : M^n \to \mathbb{Q}_s^{n+p}(\tilde{c})$ como segue. Primeiramente, dada uma imersão isométrica $f : M^n \to \mathbb{R}_s^{n+p} := \mathbb{Q}_s^{n+p}(0)$, dizemos que uma imersão $\tilde{f} : \tilde{M}^n \to \mathbb{R}_s^{n+p}$, em que $\tilde{M}^n$ é a variedade M^n com a métrica induzida por $\tilde{f}$, é uma *transformada escalar de Ribaucour de f* quando existe uma isometria de fibrados vetoriais $\mathcal{P} : f^*T\mathbb{R}_s^{n+p} \to \tilde{f}^*T\mathbb{R}_s^{n+p}$, uma seção suave $\omega \in \Gamma((f^*T\mathbb{R}_s^{n+p})^*)$ e um tensor simétrico D sobre M^n tais que $||f - \tilde{f}|| \neq 0$ em todos os pontos de M^n,

(a) $\mathcal{P}(Z) - Z = \omega(Z)(f - \tilde{f})$ para todo $Z \in f^*T\mathbb{R}_s^{n+p}$ e

(b) $\tilde{f}_* = \mathcal{P} \circ f_* \circ D$.

Quando $\tilde{c} \neq 0$, seja $i : \mathbb{Q}_s^{n+p}(\tilde{c}) \to \mathbb{R}_{s+\epsilon_0}^{n+p+1}$ a inclusão umbílica, em que $\epsilon_0 = 0$ ou 1, conforme seja $\tilde{c} > 0$ ou $\tilde{c} < 0$, respectivamente. Sejam $F = i \circ f : M^n \to \mathbb{R}_{s+\epsilon_0}^{n+p+1}$ e

$\tilde{F} = i \circ \tilde{f} : \tilde{M}^n \to \mathbb{R}^{n+p+1}_{s+\epsilon_0}$. Então, $\tilde{f}$ é uma transformada de Ribaucour de f se $\tilde{F}$ é uma transformada de Ribaucour de F determinada por $(\mathcal{P}, D, \omega)$ tal que $\mathcal{P}(F) = \tilde{F}$ e $\omega(F) = -1$. Geometricamente, é fácil verificar que, para qualquer $Z \in T_{f(x)}\mathbb{Q}^{n+p}_s$, as geodésicas de $\mathbb{Q}^{n+p}_s(c)$ que passam por $f(x)$ e $\tilde{f}(x)$ e são tangentes a Z e $\mathcal{P}(Z)$, respectivamente, se interceptam em um ponto equidistante de $f(x)$ e $\tilde{f}(x)$.

A condição (b) implica que a isometria $\mathcal{P}$ preserva as direções tangentes e, portanto, as direções normais. O fato de que a correspondência entre as direções tangentes é dada por um tensor simétrico está relacionada com a exigência, na definição clássica, de que o difeomorfismo entre as superfícies deve preservar as linhas de curvatura. Mais precisamente, essa condição implica que, para qualquer direção normal ξ, existe um referencial ortonormal comum de direções principais para f e $\tilde{f}$ em relação a ξ e $\mathcal{P}(\xi)$, respectivamente, como mostram as Proposições 3.3.3 e 3.3.10 a seguir.

O seguinte resultado, provado em [13], estende a parametrização clássica de transformações de Ribaucour de uma superfície (ver [3] e [16]).

Teorema 3.1.1. *Sejam $f : M^n \to \mathbb{Q}^{n+p}_s(\tilde{c})$ uma imersão isométrica, com M^n simplesmente conexa, e $\tilde{f} : \tilde{M}^n \to \mathbb{Q}^{n+p}_s(\tilde{c})$ uma transformada de Ribaucour de f com dados $(\mathcal{P}, D, \delta)$. Então existem $\varphi \in C^\infty(M)$ e $\beta \in \Gamma(N_f M)$ satisfazendo*

$$\alpha_f(\nabla\varphi, X) + \nabla^\perp_X \beta = 0 \textit{ para todo } X \in TM, \tag{3.1.1}$$

tais que

$$\tilde{F} = F - 2\nu\varphi\mathcal{G}, \tag{3.1.2}$$

em que $\mathcal{G} = F_*\nabla\varphi + \beta + \tilde{c}\varphi F$ e $\nu = \langle \mathcal{G}, \mathcal{G} \rangle^{-1}$. Além disso,

$$\mathcal{P} = I - 2\nu\mathcal{G}\mathcal{G}^*,\ D = I - 2\nu\varphi\Phi^{\tilde{c}}_{\varphi,\beta} \textit{ e } \omega = -\varphi^{-1}\mathcal{G}^*, \tag{3.1.3}$$

sendo

$$\Phi^{\tilde{c}}_{\varphi,\beta} = Hess\varphi + \tilde{c}\varphi I - A^f_\beta,$$

Reciprocamente, dado (φ, β) satisfazendo (3.1.1) tal que $\varphi\nu(x) \neq 0$ para todo $x \in M$, sejam $U \subset M^n$ um subconjunto aberto em que o tensor D dado por (3.1.3) é inversível, e defina $\tilde{F} : U \to \mathbb{R}^{n+p+1}_{s+\epsilon_0}$ por (3.1.2). Então $\tilde{F} = i \circ \tilde{f}$, em que $\tilde{f}$ é uma transformada de Ribaucour de $f|_U$.

Além disso, suponha que M^n tenha curvatura seccional constante c. Se $\tilde{M}^n$ também tem curvatura seccional constante c e $n \geq 3$, então existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$Hess\ \varphi - (1 - C)A^f_\beta + (\tilde{c} + C(c - \tilde{c}))\,\varphi I = 0 \tag{3.1.4}$$

e

$$\vartheta^{-1} - C\left(\langle \beta, \beta \rangle - (c - \tilde{c})\varphi^2\right) = 0. \tag{3.1.5}$$

Reciprocamente, se (φ, β) satisfaz (3.1.4) então o lado esquerdo de (3.1.5) é uma *constante $K \in \mathbb{R}$. Se as condições iniciais em (3.1.1) e (3.1.4) são escolhidas de forma que $K = 0$, então $\tilde{M}^n$ também tem curvatura seccional constante c.*

Pelo Teorema 3.1.1, qualquer transformada de Ribaucour de f é determinada por um par (φ, β) satisfazendo (3.1.1) tal que $\varphi\vartheta \neq 0$. Denotamos por $\mathscr{D}(f)$ o conjunto de tais soluções. Além disso, dois pares (φ, β) e (φ', β') dão origem à mesma transformada de Ribaucour de f se, e somente se, $(\varphi, \beta) = \lambda(\varphi', \beta')$ para algum $\lambda \neq 0$. $\bar{\mathscr{D}}(f)$ será o conjunto das classes de equivalência de tais pares sob a relação de equivalência definida pela equação anterior. A transformada de Ribaucour de f determinada por $\omega \in \bar{\mathscr{D}}(f)$ é denotada por $\mathcal{R}_\omega(f)$. Defina

$$\mathscr{D}_{\varphi,\beta}(f) = \{(\varphi', \beta') \in \mathscr{D}(f) : \; [\Phi_{\varphi',\beta'}, \Phi_{\varphi,\beta}] = 0\}.$$

Dado $\omega = [(\varphi, \beta)]$ e $\omega' = [(\varphi', \beta')] \in \bar{\mathscr{D}}(f)$ com $(\varphi', \beta') \in \mathscr{D}_{\varphi,\beta}(f)$, definimos a reta projetiva $\ell = \ell_{\omega,\omega'}$ por

$$\ell = \{[c(\varphi, \beta) + c'(\varphi', \beta')]; \; c, c' \in \mathbb{R}\}.$$

Chamamos de *família associada* a ℓ, e denotamos por $\mathcal{R}_\ell(f)$, a família a um parâmetro de transformadas de Ribaucour de f determinada pelos elementos de ℓ.

O Teorema 3.1.1 produz o seguinte resultado para imersões isométricas $f : M^n(c) \to \mathbb{Q}_s^{n+p}(c)$ dadas na Proposição 1.3.1. A demonstração de tal resultado está em [35].

Teorema 3.1.2. *Qualquer transformada de Ribaucour $\tilde{f} : \tilde{M}^n(c) \to \mathbb{Q}_s^{n+p}(c)$ de f é dada por*

$$\tilde{F} := i \circ \tilde{f} = F - 2\varphi\nu \left(\sum_i \gamma_i F_* X_i + \sum_s \beta_s \xi_s + c\varphi F \right), \tag{3.1.6}$$

em que $(\varphi, \gamma_1, ..., \gamma_n, \beta_1, ..., \beta_p)$ é uma solução do sistema de primeira ordem completamente integrável

$$\begin{cases} i) \; \partial_i(\varphi) = v_i\gamma_i, \quad ii) \; \partial_i(\gamma_j) = h_{ji}\gamma_i, \; i \neq j, \\ iii) \; \partial_i(\gamma_i) = (1 - C)\beta_i - \sum_{j \neq i} h_{ji}\gamma_j - cv_i\varphi, \\ iv) \; \epsilon_s\partial_i(\beta_s) = \epsilon_i h_{is}\beta_i, \; i \neq s, \quad v) \; \partial_i(\beta_i) = -\gamma_i - \sum_{s \neq i} h_{is}\beta_s. \end{cases} \tag{3.1.7}$$

e $\nu^{-1} := \sum_i \gamma_i^2 + \sum_s \epsilon_s\beta_s^2 + c\varphi^2$, satisfazendo

$$\nu^{-1} - C \sum_s \epsilon_s \beta_s^2 = 0. \tag{3.1.8}$$

Além disso, o par $(\tilde{v}, \tilde{h})$ associado a $\tilde{f}$ é dado por

$$\tilde{v}_i = v_i + \frac{2\varphi\epsilon_i\beta_i}{\sum_s \epsilon_s\beta_s^2}, \quad \tilde{h}_{is} = h_{is} + \frac{2\epsilon_s\gamma_i\beta_s}{\sum_s \epsilon_s\beta_s^2}.$$

Reciprocamente, para qualquer solução $(\varphi, \gamma_1, ..., \gamma_n, \beta_1, ..., \beta_p)$ de (3.1.7), o lado esquerdo *de (3.1.8) é uma constante $K \in \mathbb{R}$. Escolhendo a condição inicial em (3.1.7) para que $K = 0$, seja U um aberto simplesmente conexo em que $\tilde{v}_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n$, e seja $\tilde{F}$ definido por (3.1.6). Então $\tilde{F} = i \circ \tilde{f}$, em que $\tilde{f}$ é uma transformada de Ribaucour de $f|_U$ cuja métrica induzida tem cuvartura seccional constante c.*

Aplicando o Teorema 3.1.1 para imersões isométricas $f : M^n(c) \to \mathbb{Q}_s^{n+p}(\tilde{c})$, $c \neq \tilde{c}$, que satisfazem as hipóteses da Proposição 1.3.4, obtém-se, de maneira análoga, uma parametrização das transformadas de Ribaucour de f em termos das soluções de um sistema linear de EDP´s (ver Teorema 9 em [12]).

A partir do Teorema 3.1.2 com $c = 0$ e do Teorema 1.4.2, Dajczer e Tojeiro obtêm em [11] as parametrizações das transformadas de Ribaucour de uma imersão isométrica Lagrangiana $f : M^n(0) \to \mathbb{R}^{2n}$ que são também Lagrangianas e têm métrica induzida com curvatura seccional nula.

Teorema 3.1.3. *Seja $f : M^n(0) \to \mathbb{C}^n$ uma imersão isométrica Lagrangiana. Então qualquer transformada de Ribaucour Lagrangiana $\tilde{f} : \tilde{M}^n(0) \to \mathbb{C}^n$ de f é dada por*

$$\tilde{f} = f - \frac{2D(D+i)\varphi}{(1+D^2)\sum_k \gamma_k^2} \sum_j \gamma_j f_* X_j, \ D \in \mathbb{R}, \tag{3.1.9}$$

em que (φ, γ) é uma solução do sistema linear completamente integrável

$$\left\{ \ i) \ \partial_i(\varphi) = v_i \gamma_i, \ ii) \ \partial_i(\gamma_j) = h_{ji}\gamma_i, \ i \neq j, \ iii) \ \partial_i(\gamma_i) = -D\gamma_i - \textstyle\sum_{j \neq i} h_{ji}\gamma_j. \right. \tag{3.1.10}$$

Além disso, o par $(\tilde{v}, \tilde{h})$ associado a $\tilde{f}$ é dado por

$$\tilde{v}_i = v_i + \frac{2D\varphi}{\sum_k \gamma_k^2}\gamma_i, \ \tilde{h}_{ij} = h_{ij} + \frac{2D}{\sum_k \gamma_k^2}\gamma_i\gamma_j.$$

Reciprocamente, dada uma solução (φ, γ) de (3.1.10), seja U um subconjunto aberto em que $\tilde{v}_i$ não se anula para $1 \leq i \leq n$. Então $\tilde{f}$ definida em U por (3.1.9) é uma transformada de Ribaucour Lagrangiana de $f|_U$ com métrica induzida de curvatura seccional nula.

Para imersões isométricas horizontais, R. Tojeiro obtém em [35], a partir dos Teoremas 3.1.2 e 1.4.10, o seguinte resultado.

Teorema 3.1.4. *Seja $f : M^n(c) \to \mathbb{S}_\epsilon^{2n+1}(c)$ uma imersão isométrica horizontal com $\nu_f \equiv 0$. Então qualquer transformada de Ribaucour horizontal $\tilde{f} : \tilde{M}^n(c) \to \mathbb{S}_\epsilon^{2n+1}(c)$ de f é dada por*

$$\tilde{F} = i \circ \tilde{f} = F - \frac{2D(D+i)\varphi}{(1+D^2)\left(\sum_i \gamma_i^2 + c\varphi^2\right)} \left(\sum_i \gamma_i F_* X_i + c\varphi F \right), \tag{3.1.11}$$

em que $(\varphi, \gamma) = (\varphi, \gamma_1, ..., \gamma_n)$ *é uma solução do sistema linear completamente integrável*

$$\Big\{ \; i)\ \partial_i(\varphi) = v_i\gamma_i,\ \ ii)\ \partial_i(\gamma_j) = h_{ji}\gamma_i,\ \ i \neq j,\ \ iii)\ \partial_i(\gamma_i) = -D\gamma_i - \textstyle\sum_{j\neq i} h_{ji}\gamma_j - cv_i\varphi,\ \ D \neq 0. \tag{3.1.12}$$

Além disso, o par $(\tilde{v}, \tilde{h})$ *associado a* $\tilde{f}$ *é dado por*

$$\tilde{v}_i = v_i + \frac{2D\varphi}{\sum_k \gamma_k^2 + c\varphi^2}\gamma_i,\ \ \tilde{h}_{ij} = h_{ij} + \frac{2D}{\sum_k \gamma_k^2 + c\varphi^2}\gamma_i\gamma_j.$$

Reciprocamente, dada uma solução (φ, γ) *de (3.1.12), seja* U *um subconjunto aberto em que* $\tilde{v}_i$ *não se anula para* $1 \leq i \leq n$ *e seja* $\tilde{F}$ *definida em* U *por (3.1.11). Então* $\tilde{F} = i \circ \tilde{f}$*, em que* $\tilde{f}$ *é uma transformada de Ribaucour horizontal de* $f|_U$ *cuja métrica induzida tem curvatura seccional constante* c*.*

3.2 A transformação de Combescure

Uma ferramenta importante para o estudo da transformação vetorial de Ribaucour é a transformação de Combescure, cuja definição e propriedades básicas são apresentadas a seguir.

Proposição 3.2.1. *Sejam* $E,\ F$ *fibrados vetoriais Riemannianos e* $\omega \in \Gamma(T^*M \otimes E)$*. Seja ainda* $\Phi \in \Gamma(T^*M \otimes (F^* \otimes TM))$ *uma 1-forma fechada tal que*

$$\nabla\omega(X, \Phi_u Y) = \nabla\omega(Y, \Phi_u X) \text{ para todo } u \in \Gamma(F),$$

com $\Phi_u X = \Phi(X)(u)$*. Então a 1-forma* $\rho = \rho(\omega, \Phi) \in \Gamma(T^*M \otimes (F^* \otimes E))$ *definida por* $\rho(X)(u) = \omega(\Phi_u X)$ *é também fechada.*

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned}
\nabla\rho(X,Y)(u) &= \Big((\nabla_X^{TM^*\otimes F^*\otimes E}\rho)(Y)\Big)(u) = (\nabla_X^{F^*\otimes E}\rho(Y))u - (\rho(\nabla_X Y))(u) \\
&= \nabla_X^E(\rho(Y)(u)) - \rho(Y)(\nabla_X^F u) - \rho(\nabla_X Y)u \\
&= \nabla_X^E\omega(\Phi_u Y) - \omega(\Phi_{\nabla_X^F u}Y) - \omega(\Phi_u\nabla_X Y) \\
&= (\nabla_X^{TM^*\otimes E}\omega)(\Phi_u(Y)) + \omega(\nabla_X\Phi_u(Y)) - \omega(\Phi_{\nabla_X^F u}Y) - \omega(\Phi_u\nabla_X Y) \\
&= \nabla\omega(X, \Phi_u Y) + \omega(\nabla_X^{TM}\Phi_u(Y) - \Phi_{\nabla_X^F u}Y - \Phi_u(\nabla_X^{TM}Y)) \\
&= \nabla\omega(X, \Phi_u Y) + \omega\left((\nabla_X^{TM^*\otimes F^*\otimes TM}\Phi)(Y)\right)(u) \\
&= \nabla\omega(X, \Phi_u Y) + \omega(\nabla\Phi(X,Y)u)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\nabla\rho(X,Y)(u) = \nabla\omega(X, \Phi_u Y) + \omega(\nabla\Phi(X,Y)u). \tag{3.2.1}$$

Assim,

$$d\rho(X,Y)(u) = \nabla\rho(X,Y)u - \nabla\rho(Y,X)u = 0, \ \forall u \in \Gamma(F).$$

■

Temos a seguinte consequência dessa Proposição.

Corolário 3.2.2. *Nas condições da Proposição 3.2.1, se M^n é simplesmente conexa e E, F são fibrados vetoriais planos, existe $\Omega(\omega,\Phi) \in \Gamma(F^* \otimes E)$ tal que*

$$d\Omega(\omega,\Phi)(X)(u) = \rho(X)(u) = \omega(\Phi_u X) \text{ para quaisquer } X \in TM \text{ e } u \in \Gamma(F).$$

Demonstração. Por (iv) do Lema 1.1.9 $H = F^* \otimes E$ é também plano. Segue dos Corolários 1.1.3 e 1.1.8 que existem um referencial global de seções paralelas $\xi_1, ..., \xi_n$ em H e uma isometria $\Phi : H \to M \times \mathbb{R}^n$ que em cada ponto

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & H_x & \to & M_x \times \mathbb{R}^n \\ & & e & \to & (x, (a_1(x), ..., a_n(x)), \end{array}$$

com $e = \sum a_i(x)\xi_i(x)$, tal que $\Phi\nabla^H = \nabla^{M\times\mathbb{R}^n}\Phi$. Assim,

$$\rho \in Hom(\Gamma(TM), \Gamma(H)) \cong Hom(\Gamma(TM), C^\infty(M, R^n)).$$

Olhando $\rho = (\rho_1, ..., \rho_n)$ com $\rho_i : T_xM \to \mathbb{R}$, temos de M ser simplesmente conexa e ρ ser fechada que ρ é exata, e assim segue o resultado.

■

Em todo o trabalho, usamos a mesma notação para o espaço vetorial Euclidiano V, ou seja, o espaço vetorial V dotado de um produto interno, e o fibrado vetorial trivial $E = M \times V$ sobre M^n.

Proposição 3.2.3. *Sejam $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}_s$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana simplesmente conexa, V um espaço vetorial Euclidiano e $\Phi \in \Gamma(T^*M \otimes V^* \otimes TM)$. Nessas condições, existe $\mathcal{F} \in \Gamma(V^* \otimes f^*T\mathbb{R}^{n+p}_s)$ tal que*

$$d\mathcal{F}(X)(v) = f_*\Phi_v(X) \text{ para quaisquer } X \in \Gamma(TM) \text{ e } v \in \Gamma(V), \tag{3.2.2}$$

se e somente se, Φ é fechado e satisfaz a

$$\alpha(X, \Phi_v Y) = \alpha(\Phi_v X, Y) \text{ para todo } v \in \Gamma(V), \tag{3.2.3}$$

em que $\alpha : TM \times TM \to N_fM$ é a segunda forma fundamental de f.

Demonstração. Aplicando (3.2.1) para $f_* \in \Gamma(T^*M \otimes f^*T\mathbb{R}^{n+p}_s)$ e $\Phi \in \Gamma(T^*M \otimes V^* \otimes TM)$ obtemos que a 1-forma $\rho = \rho(f_*, \Phi) \in \Gamma(T^*M \otimes V^* \otimes f^*T\mathbb{R}^{n+p}_s)$ definida por

$$\rho(X)(u) = f_*(\Phi_u X)$$

satisfaz a

$$\begin{aligned}
\nabla\rho(X,Y)(u) &= \nabla f_*(X,\Phi_u Y) + f_*(\nabla\Phi(X,Y)u)\\
&= (\nabla_X^{TM^*\otimes f^*T\mathbb{R}_s^{n+p}} f_*)(\Phi_u Y) + f_*(\nabla\Phi(X,Y)u)\\
&= \nabla_X^{f^*T\mathbb{R}_s^{n+p}} f_*(\Phi_u Y) - f_*\nabla_X^{TM}\Phi_u Y + f_*(\nabla\Phi(X,Y)u)\\
&= \alpha(X,\Phi_u Y) + f_*\nabla_X^{TM}(\Phi_u Y) - f_*\nabla_X^{TM}\Phi_u Y + f_*(\nabla\Phi(X,Y))(u)\\
&= \alpha(X,\Phi_u Y) + f_*(\nabla\Phi(X,Y)u).
\end{aligned}$$

Portanto, Φ fechada e (3.2.3) são condições necessárias e suficientes para ρ ser fechado. O resultado segue do Corolário 3.2.2, já que $f^*T\mathbb{R}_s^{n+p}$ e V são planos.

■

A aplicação $\mathcal{F}$ dada na Proposição 3.2.3 é chamada de *transformada de Combescure* de f determinada por Φ se

$$\langle \Phi_v X, Y\rangle = \langle X, \Phi_v Y\rangle \ \text{ para todo } v \in \Gamma(V). \tag{3.2.4}$$

Proposição 3.2.4. *Sejam $f : M^n \to \mathbb{R}_s^{n+p}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana simplesmente conexa, V um espaço vetorial Euclidiano e $\Phi \in \Gamma(T^*M \otimes V^* \otimes TM)$ fechada satisfazendo a (3.2.3). Para $\mathcal{F} \in \Gamma(V^* \otimes f^*T\mathbb{R}_s^{n+p})$ satisfazendo (3.2.2) escreva*

$$\mathcal{F} = f_*\omega^t + \beta, \tag{3.2.5}$$

em que $\omega \in \Gamma(T^*M \otimes V)$ e $\beta \in \Gamma(V^* \otimes N_fM)$. Então (ω,β) satisfaz a equação

$$\alpha(X,\omega^t(v)) + (\nabla_X^{V^*\otimes N_fM}\beta)v = 0 \ \text{ para qualquer } v \in \Gamma(V), \tag{3.2.6}$$

e Φ é dado por

$$\Phi_v X := \Phi(X)(v) = (\nabla_X^{V^*\otimes TM}\omega^t)v - A_{\beta(v)}X. \tag{3.2.7}$$

Reciprocamente, se $\omega \in \Gamma(T^*M \otimes V)$ e $\beta \in \Gamma(V^* \otimes N_fM)$ satisfazem (3.2.6), então (3.2.2) vale para $\mathcal{F}$ e Φ dados, respectivamente, por (3.2.5) e (3.2.7). Em particular, Φ é fechada e vale (3.2.3). Além disso, Φ satisfaz (3.2.4) se, e somente se, $\omega = d\varphi$ para algum $\varphi \in \Gamma(V)$.

Demonstração. Temos que $d\mathcal{F} \in \Gamma(T^*M \otimes V^* \otimes f^*T\mathbb{R}_s^{n+p})$ é dada por

$$\begin{aligned}
d\mathcal{F}(X)(v) &= (\nabla_X^{V^*\otimes f^*T\mathbb{R}_s^{n+p}}\mathcal{F})v = \nabla_X^{f^*T\mathbb{R}_s^{n+p}}\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(\nabla_X^V v)\\
&= \nabla_X^{f^*T\mathbb{R}_s^{n+p}} f_*\omega^t(v) + \nabla_X^{f^*T\mathbb{R}_s^{n+p}}\beta(v) - f_*\omega^t(\nabla_X^V v) - \beta(\nabla_X^V v)\\
&= f_*\nabla_X\omega^t(v) + \alpha(X,\omega^t(v)) - f_*A_{\beta(v)}X + \nabla_X^\perp\beta(v) - f_*\omega^t(\nabla_X^V v) - \beta(\nabla_X^V v)\\
&= \alpha(X,\omega^t(v)) + (\nabla_X^{V^*\otimes N_fM}\beta)v + f_*\left((\nabla_X^{V^*\otimes TM}\omega^t)(v) - A_{\beta(v)}X\right).
\end{aligned}$$

Assim, (3.2.2) é satisfeita se, e somente se, vale (3.2.6) e Φ é dada por (3.2.7).

Reciprocamente, temos pela Proposição 3.2.3 que Φ é fechada e vale (3.2.3). Resta verificar a última afirmação. Temos

$$\langle \Phi_v X, Y\rangle = \left\langle (\nabla_X^{V^*\otimes TM}\omega^t)v - A_{\beta(v)}X, Y\right\rangle,$$

mas

$$\begin{aligned}
\left\langle (\nabla_X^{V^*\otimes TM}\omega^t)v, Y\right\rangle &= \langle \nabla_X \omega^t(v), Y\rangle - \left\langle \omega^t(\nabla_X^V v), Y\right\rangle \\
&= X\langle \omega^t(v), Y\rangle - \langle \omega^t(v), \nabla_X Y\rangle - \left\langle \omega^t(\nabla_X^V v), Y\right\rangle \\
&= X\langle v, \omega(Y)\rangle - \langle v, \omega(\nabla_X Y)\rangle - \left\langle \nabla_X^V v, \omega(Y)\right\rangle \\
&= \left\langle \nabla_X^V v, \omega(Y)\right\rangle + \left\langle v, \nabla_X^V \omega(Y)\right\rangle - \langle v, \omega(\nabla_X Y)\rangle - \left\langle \nabla_X^V v, \omega(Y)\right\rangle \\
&= \left\langle v, (\nabla_X^{T^*M\otimes V}\omega)Y\right\rangle = \langle v, \nabla\omega(X,Y)\rangle,
\end{aligned}$$

logo

$$\langle \Phi_v X, Y\rangle = \langle v, \nabla\omega(X,Y)\rangle - \left\langle A_{\beta(v)}X, Y\right\rangle. \tag{3.2.8}$$

Portanto, Φ satisfaz (3.2.4) se, e somente se, ω é uma 1-forma fechada, e portanto exata, uma vez que M^n é simplesmente conexa.

∎

A Proposição 8 em [7] é enunciada a seguir em uma forma adequada aos nossos propósitos.

Proposição 3.2.5. *Sejam $f : M^n \to \mathbb{R}_s^{n+p}$ uma imersão isométrica, com M^n simplesmente conexa, e V um espaço vetorial Euclidiano. Sejam $\omega \in \Gamma(T^*M \otimes V)$ e $\beta \in \Gamma(V^* \otimes N_f M)$ satisfazendo a equação (3.2.6) e considere Φ e $\mathcal{F}$ dadas respectivamentes por (3.2.7) e (3.2.5). São equivalentes*

i) $\nabla\omega(X, \Phi_v Y) = \nabla\omega(Y, \Phi_v X)$, *para todo* $v \in \Gamma(V)$,

ii) $\langle \Phi_u X, \Phi_v Y\rangle = \langle \Phi_v X, \Phi_u Y\rangle$ *para todo* $u, v \in \Gamma(V)$.

iii) Existe $\Omega = \Omega(\omega, \Phi) \in \Gamma(V^* \otimes V)$ *satisfazendo* $d\Omega(X)(v) = \omega(\Phi_v X)$ *para todo* $v \in \Gamma(V)$.

Neste caso,

$$d\Omega = \mathcal{F}^t d\mathcal{F} \tag{3.2.9}$$

e

$$\Omega + \Omega^t = \mathcal{F}^t\mathcal{F}, \tag{3.2.10}$$

a menos de uma seção paralela de $\Gamma(V^* \otimes V)$.

Demonstração. Pela equação (3.2.8) temos

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_u X, \Phi_v Y\rangle &= \langle u, \nabla\omega(X, \Phi_v Y)\rangle - \left\langle A_{\beta(u)}X, \Phi_v Y\right\rangle \\
&= \langle u, \nabla\omega(X, \Phi_v Y)\rangle - \langle \alpha(X, \Phi_v Y), \beta(u)\rangle,
\end{aligned}$$

e assim, usando (3.2.3) temos (i) se e só se vale (ii). Pela Proposição 3.2.4 Φ é fechada, logo, pela equação (3.2.1), ocorre (i) se e só se, $\omega\Phi \in \Gamma(TM^* \otimes V^* \otimes V)$ é fechada, equivalentemente, pelo Corolário 3.2.2, existe uma seção $\Omega \in Gl(V)$ tal que $d\Omega = \omega\Phi$.

A equação (3.2.9) segue de $\mathcal{F}^t d\mathcal{F}(X)v = \mathcal{F}^t f_* \Phi_v(X) = \omega\Phi_v(X)$. Agora, para $x_0 \in M$ e Ω_0 fixos, cuja parte simétrica $(\Omega_0)_s = \frac{1}{2}\mathcal{F}^t(x_0)\mathcal{F}(x_0)$, temos ainda pelo Corolário 3.2.2 a existência de uma única seção Ω satisfazendo (3.2.9) e (3.2.10) com $\Omega(x_0) = \Omega_0$.

■

3.3 A transformação vetorial de Ribaucour

Esta seção é também baseada em [7] e tem por objetivo definir a transformada vetorial de Ribaucour para subvariedades e apresentar algumas de suas propriedades.

3.3.1 Propriedades básicas

Para a definição da transformada vetorial de Ribaucour para subvariedades Euclidianas, seja

$$\mathcal{D}(f) = \Big\{(\varphi, \beta) \text{ solução de (3.2.6) com } \omega = d\varphi, \text{ tal que } \Phi, \text{ dada em (3.3.21), satisfaz}$$

$$\langle \Phi_u X, \Phi_v Y\rangle = \langle \Phi_v X, \Phi_u Y\rangle\,, \text{ para todo } u, v \in \Gamma(V) \text{ e } X, Y \in \Gamma(TM)\Big\}.$$

Definição 3.3.1. Sejam $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+p}_s$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana simplesmente conexa e V um espaço vetorial Euclidiano. Sejam $\varphi \in \Gamma(V)$, $\beta \in \Gamma(V^* \otimes N_f M)$ em $\mathcal{D}(f)$, e $\Omega \in \Gamma(Gl(V))$ uma solução do sistema completamente integrável de primeira ordem (3.2.9) e (3.2.10), em que $\mathcal{F} = f_*\omega^t + \beta$. Então a aplicação $\tilde{f}\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+p}_s$ dada por

$$\tilde{f} = f - \mathcal{F}\Omega^{-1}\varphi \tag{3.3.1}$$

restrita ao subconjunto $\tilde{M}^n$ de pontos regulares munido com a métrica induzida por $\tilde{f}$, é chamada a *transformada vetorial de Ribaucour* de f determinada por (φ, β, Ω), e é denotada por $\mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega}(f)$.

Observação 3.3.2. (i) Se o par (φ, β) satisfaz a equação (3.2.6), temos pela Proposição 3.2.5 que a existência de Ω satisfazendo a (3.2.9) é equivalente a

$$\langle \Phi_u X, \Phi_v Y\rangle = \langle \Phi_v X, \Phi_u Y\rangle\,, \text{ para todo } u, v \in \Gamma(V) \text{ e } X, Y \in \Gamma(TM).$$

(ii) Se $dimV = 1$, $(1/2)\Omega = \langle \mathcal{F}, \mathcal{F}\rangle$ com $\mathcal{F} = f_*\nabla\varphi + \beta$ e a parametrização (3.3.1) reduz-se à parametrização da transformada escalar de Ribaucour dada em (3.1.2). Neste caso, como Ω é determinado por φ e β, podemos escrever $\tilde{f} = \mathcal{R}_{\varphi,\beta}(f)$ em vez de $\tilde{f} = \mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega}(f)$.

Proposição 3.3.3. *(i) A aplicação de fibrados* $\mathcal{P} \in \Gamma((f^*T\mathbb{R}^{n+p}_s)^* \otimes \tilde{f}^*T\mathbb{R}^{n+p}_s)$ *dada por*

$$\mathcal{P} = I - \mathcal{F}\Omega^{-1}\mathcal{F}^t \tag{3.3.2}$$

é uma isometria de fibrados e

$$\tilde{f}_* = \mathcal{P}f_*D, \tag{3.3.3}$$

em que $D = I - \Phi_{\Omega^{-1}\varphi} \in \Gamma(T^*M \otimes TM)$. *Em particular, as métricas* $\langle\ ,\ \rangle$ *e* $\langle\ ,\ \rangle^\sim$ *induzidas por* f *e* $\tilde{f}$*, respectivamente, estão relacionadas por*

$$\langle\ ,\ \rangle^\sim = D^*\langle\ ,\ \rangle.$$

(ii) As conexões normais e as segundas formas fundamentais de f *e* $\tilde{f}$ *estão relacionadas por*

$$\tilde{\nabla}^\perp_X \mathcal{P}\xi = \mathcal{P}\nabla^\perp_X \xi \tag{3.3.4}$$

e

$$\tilde{A}_{\mathcal{P}\xi} = D^{-1}(A_\xi + \Phi_{\Omega^{-1}\beta^t\xi}),$$

ou equivalentemente,

$$\tilde{\alpha}(X,Y) = \mathcal{P}(\alpha(X,DY) + \beta(\Omega^{-1})^t\Phi(X)^tDY). \tag{3.3.5}$$

(iii) As conexões de Levi-Civita das métricas $\langle\ ,\ \rangle$ *e* $\langle\ ,\ \rangle^\sim$ *estão relacionadas por*

$$D\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X DY - (\Phi(X)\Omega^{-1}\omega - (\Phi(X)\Omega^{-1}\omega)^t)(DY).$$

Demonstração. i) Para provar que $\mathcal{P}$ é uma isometria, basta mostrar que $\mathcal{P}^t\mathcal{P} = I$. Mas por (3.2.10)

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^t\mathcal{P} &= (I - \mathcal{F}\Omega^{-1}\mathcal{F}^t)^t(I - \mathcal{F}\Omega^{-1}\mathcal{F}^t) = (I - \mathcal{F}(\Omega^{-1})^t\mathcal{F}^t)(I - \mathcal{F}\Omega^{-1}\mathcal{F}^t)\\
&= I - \mathcal{F}\Omega^{-1}\mathcal{F}^t - \mathcal{F}(\Omega^{-1})^t\mathcal{F}^t + \mathcal{F}(\Omega^{-1})^t\mathcal{F}^t\mathcal{F}\Omega^{-1}\mathcal{F}^t\\
&= I - \mathcal{F}\Omega^{-1}\mathcal{F}^t - \mathcal{F}(\Omega^{-1})^t\mathcal{F}^t + \mathcal{F}(\Omega^{-1})^t\Omega\Omega^{-1}\mathcal{F}^t + \mathcal{F}(\Omega^{-1})^t\Omega^t\Omega^{-1}\mathcal{F}^t\\
&= I - \mathcal{F}\Omega^{-1}\mathcal{F}^t - \mathcal{F}(\Omega^{-1})^t\mathcal{F}^t + \mathcal{F}(\Omega^{-1})^t\mathcal{F}^t + \mathcal{F}\Omega^{-1}\mathcal{F}^t\\
&= I.
\end{aligned}$$

Para a segunda parte temos de (3.2.2), (3.2.5) e (3.2.9) que

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_*X &= f_*X - \nabla_X(\mathcal{F}\Omega^{-1}\varphi) = f_*X - d\mathcal{F}(X)\Omega^{-1}\varphi - \mathcal{F}d(\Omega^{-1})\varphi - \mathcal{F}\Omega^{-1}d\varphi(X)\\
&= f_*X - f_*\Phi_{\Omega^{-1}\varphi}(X) + \mathcal{F}\Omega^{-1}d\Omega(X)\Omega^{-1}\varphi - \mathcal{F}\Omega^{-1}\omega(X)\\
&- f_*(I - \Phi_{\Omega^{-1}\varphi})X + \mathcal{F}\Omega^{-1}\mathcal{F}^t d\mathcal{F}(X)\Omega^{-1}\varphi - \mathcal{F}\Omega^{-1}\mathcal{F}^t f_*X\\
&= f_*DX + \mathcal{F}\Omega^{-1}\mathcal{F}^t f_*\Phi_{\Omega^{-1}\varphi}X - \mathcal{F}\Omega^{-1}\mathcal{F}^t f_*X\\
&= f_*DX - \mathcal{F}\Omega^{-1}\mathcal{F}^t f_*DX\\
&= \mathcal{P}f_*DX.
\end{aligned}$$

Considere a métrica $\langle\ ,\ \rangle^{\sim} = D^*\langle\ ,\ \rangle$, temos

$$\begin{aligned}
\left\langle \tilde{f}_*X, \tilde{f}_*Y \right\rangle_{\mathbb{R}^{n+p}_s} &= \langle \mathcal{P}f_*DX, \mathcal{P}f_*DY\rangle = \langle DX, DY\rangle_{TM}\\
&= \langle (I - \Phi_{\Omega^{-1}\varphi})X, (I - \Phi_{\Omega^{-1}\varphi})Y\rangle\\
&= \langle X, Y\rangle - \langle X, \Phi_{\Omega^{-1}\varphi}Y\rangle - \langle \Phi_{\Omega^{-1}\varphi}X, Y\rangle + \langle \Phi_{\Omega^{-1}\varphi}X, \Phi_{\Omega^{-1}\varphi}Y\rangle\\
&= \langle X, Y\rangle - \langle \Phi_{\Omega^{-1}\varphi}X, Y\rangle - \langle \Phi_{\Omega^{-1}\varphi}X, Y\rangle + \langle \Phi_{\Omega^{-1}\varphi}\Phi_{\Omega^{-1}\varphi}X, Y\rangle\\
&= \langle D^2X, Y\rangle_M = \langle X, Y\rangle^{\sim}.
\end{aligned}$$

Se D é inversível em uma vizinhança de x_0 então $\tilde{f}^*$ será também injetiva nessa vizinhança e assim, $\tilde{f}$ será uma imersão isométrica com a métrica induzida $\langle\ ,\ \rangle^{\sim}$.

ii) Para qualquer $\xi \in N_fM$ temos de (3.2.2) que

$$\begin{aligned}
-\tilde{f}_*\tilde{A}_{\mathcal{P}\xi}X + \tilde{\nabla}^{\perp}_X\mathcal{P}\xi &= (\bar{\nabla}^{\tilde{f}^*T\mathbb{R}^{n+p}}_X\mathcal{P}\xi)^{\top} + (\bar{\nabla}^{\tilde{f}^*T\mathbb{R}^{n+p}}_X\mathcal{P}\xi)^{\perp}\\
&= \bar{\nabla}^{\tilde{f}^*T\mathbb{R}^{n+p}}_X\mathcal{P}\xi = \bar{\nabla}_X\xi - \bar{\nabla}_X\mathcal{F}\Omega^{-1}\mathcal{F}^t\xi\\
&= -f_*A_\xi X + \nabla^{\perp}_X\xi - d\mathcal{F}(X)\Omega^{-1}\mathcal{F}^t\xi + \mathcal{F}\Omega^{-1}d\Omega(X)\Omega^{-1}\mathcal{F}^t\xi\\
&\quad -\mathcal{F}\Omega^{-1}d\mathcal{F}^t(X)\xi - \mathcal{F}\Omega^{-1}\mathcal{F}^t\bar{\nabla}_X\xi\\
&= -f_*A_\xi X + \nabla^{\perp}_X\xi - f_*\Phi(X)\Omega^{-1}\mathcal{F}^t\xi + \mathcal{F}\Omega^{-1}\mathcal{F}^t f_*\Phi(X)\Omega^{-1}\mathcal{F}^t\xi\\
&\quad -\mathcal{F}\Omega^{-1}\mathcal{F}^t(-f_*A_\xi X + \nabla^{\perp}_X\xi)\\
&= \mathcal{P}(\nabla^{\perp}_X\xi) - \mathcal{P}(f_*A_\xi X) - \mathcal{P}(f_*\Phi(X)\Omega^{-1}\mathcal{F}^t\xi)\\
&= \mathcal{P}(\nabla^{\perp}_X\xi) - \mathcal{P}f_*(A_\xi X - \Phi_{\Omega^{-1}\beta^t\xi}(X)).
\end{aligned}$$

iii) Denote por $\bar{\nabla}$ a derivada de $\mathbb{R}^{n+p}_s$. De (3.3.3) temos, por um lado, que

$$\bar{\nabla}_X\mathcal{P}f_*DY = \bar{\nabla}_X\tilde{f}_*Y = \tilde{f}_*\tilde{\nabla}_XY + \tilde{\alpha}(X,Y) = \mathcal{P}f_*D\tilde{\nabla}_XY + \tilde{\alpha}(X,Y). \qquad (3.3.6)$$

Por outro lado, usando (3.2.2), (3.2.9) e (3.3.2) e observando que $\mathcal{F}^t f_* = \omega$, temos

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_X \mathcal{P} f_* DY &= \bar{\nabla}_X (f_* DY - \mathcal{F}\Omega^{-1}\mathcal{F}^t f_* DY) \\
&= f_* \nabla_X DY + \alpha(X, DY) - d\mathcal{F}(X)\Omega^{-1}\mathcal{F}^t f_* DY + \mathcal{F}\Omega^{-1} d\Omega(X)\Omega^{-1}\mathcal{F}^t f_* DY \\
&\quad -\mathcal{F}\Omega^{-1} d\mathcal{F}^t(X) f_* DY - \mathcal{F}\Omega^{-1}\mathcal{F}^t(f_* \nabla_X DY + \alpha(X, DY)) \\
&= \mathcal{P} f_* \nabla_X DY + \mathcal{P}\alpha(X, DY) - \mathcal{P} f_* \Phi(X)\Omega^{-1}\omega(DY) - \mathcal{F}\Omega^{-1}\Phi(X)^t DY.
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Agora, segue de (3.2.10) que

$$\mathcal{P}\mathcal{F}v = \mathcal{F}v - \mathcal{F}\Omega^{-1}\mathcal{F}^t\mathcal{F}v = -\mathcal{F}\Omega^{-1}\Omega^t v,$$

e assim,

$$\mathcal{P}\mathcal{F}(\Omega^t)^{-1}\Phi(X)^t DY = -\mathcal{F}\Omega^{-1}\Phi(X)^t DY. \tag{3.3.8}$$

Mas

$$\begin{aligned}
-\mathcal{F}(\Omega^t)^{-1}\Phi(X)^t DY &= -\Big(f_*\omega^t((\Omega^t)^{-1}\Phi(X)^t DY) + \beta((\Omega^t)^{-1}\Phi(X)^t DY)\Big) \\
&= -\Big(f_*(\Phi(X)\Omega^{-1}\omega)^t(DY) + \beta((\Omega^t)^{-1}\Phi(X)^t DY)\Big).
\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Portanto, o resultado segue substituindo (3.3.8) e (3.3.9) em (3.3.7), comparando com (3.3.6) e tomando a componente tangente.

■

Proposição 3.3.4. *A tripla* $(\tilde{\varphi}, \tilde{\beta}, \tilde{\Omega}) = (\Omega^{-1}\varphi, \mathcal{P}\beta(\Omega^{-1})^t, \Omega^{-1})$ *satisfaz as condições da Definição 3.3.1 com respeito a* f, *e* $f = \mathcal{R}_{\tilde{\varphi},\tilde{\beta},\tilde{\Omega}}(\tilde{f})$. *Além disso,* $\tilde{\mathcal{F}} = \tilde{f}_*(d\tilde{\varphi})^t + \tilde{\beta}$ *e* $\tilde{\Phi} = \Phi(d\tilde{\varphi}, \tilde{\beta})$ *são dadas, respectivamente, por*

$$\tilde{\mathcal{F}} = -\mathcal{F}\Omega^{-1} \ \text{ e } \ D\tilde{\Phi}_v = -\Phi_{\Omega^{-1}v}, \ \forall v \in V.$$

Demonstração. Como

$$\tilde{\omega} = d\tilde{\varphi} = d(\Omega^{-1}\varphi) = -\Omega^{-1}d\Omega\Omega^{-1}\varphi + \Omega^{-1}d\varphi = -\Omega^{-1}\omega\Phi_{\Omega^{-1}\varphi} + \Omega^{-1}\omega = \Omega^{-1}\omega D,$$

temos

$$\Big\langle \tilde{\omega}^t(v), X \Big\rangle^{\sim} = \Big\langle v, \Omega^{-1}\omega(DX) \Big\rangle = \Big\langle \omega^t(\Omega^{-1})^t v, DX \Big\rangle = \Big\langle D^{-1}\omega^t(\Omega^{-1})^t v, X \Big\rangle^{\sim},$$

e assim,

$$D\tilde{\omega}^t = \omega^t(\Omega^{-1})^t. \tag{3.3.10}$$

Agora, segue de (3.3.5) e (3.3.10) que

$$\tilde{\alpha}(X, \tilde{\omega}^t(v)) = \mathcal{P}(\alpha(X, \omega^t(\Omega^{-1})^t v)) + \beta(\Omega^{-1})^t\Phi(X)^t\omega^t(\Omega^{-1})^t v),$$

e de (3.3.4)

$$\begin{aligned}
(\nabla_X^{V^*\otimes N^{\tilde f}\tilde M}\tilde\beta)v &= \tilde\nabla_X^\perp\tilde\beta(v)-\tilde\beta(\nabla_X^V v)\\
&= \mathcal{P}\left(\nabla_X^\perp\beta(\Omega^{-1})^t v-\beta(\Omega^{-1})^t\nabla_X^V v\right)\\
&= \mathcal{P}\left((\nabla_X^{V^*\otimes N_f M}\beta)(\Omega^{-1})^t v-\beta(\Omega^{-1})^t\Phi(X)^t\omega^t(\Omega^{-1})^t v\right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\tilde\alpha(X,\tilde\omega^t(v))+(\nabla_X^{V^*\otimes N_f\tilde M}\tilde\beta)v=0 \text{ para todo } v\in\Gamma(V).$$

Doravante, por (3.2.10), (3.3.3) e (3.3.10) temos

$$\tilde{\mathcal{F}}=\tilde f_*\tilde\omega^t+\tilde\beta=\mathcal{P}\left(f_*\omega^t(\Omega^{-1})^t+\beta(\Omega^{-1})^t\right)=(I-\mathcal{F}\Omega^{-1}\mathcal{F}^t)\mathcal{F}(\Omega^{-1})^t=-\mathcal{F}\Omega^{-1}.$$

Assim, segue de (3.2.9) e (3.2.10) que

$$\tilde{\mathcal{F}}^t d\tilde{\mathcal{F}}=(\Omega^{-1})^t\mathcal{F}^t d\mathcal{F}\Omega^{-1}-(\Omega^{-1})^t\mathcal{F}^t\mathcal{F}\Omega^{-1}d\Omega\Omega^{-1}=d\tilde\Omega,$$

e

$$\tilde{\mathcal{F}}^t\tilde{\mathcal{F}}=(\Omega^{-1})^t\mathcal{F}^t\mathcal{F}\Omega^{-1}=\tilde\Omega+\tilde\Omega^t.$$

Portanto,

$$\mathcal{R}_{\tilde\varphi,\tilde\beta,\tilde\Omega}(\tilde f)=\tilde f-\tilde{\mathcal{F}}\tilde\Omega^{-1}\tilde\varphi=f-\mathcal{F}\Omega^{-1}\varphi-(-\mathcal{F}\Omega^{-1})\Omega\Omega^{-1}\varphi=f.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\tilde f_*\tilde\Phi_v(X) &= d\tilde{\mathcal{F}}(X)v=-d\mathcal{F}(X)\Omega^{-1}v+\mathcal{F}\Omega^{-1}d\Omega(X)\Omega^{-1}v\\
&= -f_*\Phi_{\Omega^{-1}v}(X)+\mathcal{F}\Omega^{-1}\mathcal{F}^t f_*\Phi_{\Omega^{-1}v}(X)=-\mathcal{P}f_*\Phi_{\Omega^{-1}v}(X)\\
&= -\tilde f_* D^{-1}\Phi_{\Omega^{-1}v}(X).
\end{aligned}$$

■

3.3.2 O Teorema da decomposição

Uma propriedade básica da transformação vetorial de Ribaucour é o seguinte teorema de decomposição obtido em [7], o qual estende um resultado semelhante de [24] para o caso de sistemas ortogonais.

Teorema 3.3.5. *Seja $\mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega}(f)\colon \tilde M^n\to\mathbb{R}_s^{n+p}$ uma transformada vetorial de Ribaucour de $f\colon M^n\to\mathbb{R}_s^{n+p}$ determinada por (φ,β,Ω) como na Definição 3.3.1. Para uma decomposição ortogonal $V=V_1\oplus V_2$, defina*

$$\varphi_j=\pi_{V_j}\circ\varphi,\quad \beta_j=\beta|_{V_j}\ \ e\ \ \Omega_{ij}=\pi_{V_i}\circ\Omega|_{V_j}\in\Gamma(V_j^*\otimes V_i),\ \ 1\le i,j\le 2. \tag{3.3.11}$$

Suponha que Ω_{jj} *seja inversível e defina* $\mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega}(\varphi_i,\beta_i,\Omega_{ii}) := (\bar{\varphi}_i,\bar{\beta}_i,\bar{\Omega}_{ii})$ *por*

$$\bar{\varphi}_i = \varphi_i - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j, \quad \bar{\beta}_i = \mathcal{P}_j(\beta_i - \beta_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t) \quad e \quad \bar{\Omega}_{ii} = \Omega_{ii} - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji},$$

$1 \leq i \neq j \leq 2$, *em que* $\mathcal{P}_j = I - \mathcal{F}_j\Omega_{jj}^{-1}\mathcal{F}_j^t$. *Então as triplas* $(\varphi_j,\beta_j,\Omega_{jj})$ *e* $(\bar{\varphi}_i,\bar{\beta}_i,\bar{\Omega}_{ii})$ *satisfazem as condições da Definição 3.3.1 com respeito a* f *e* f_j*, respectivamente, e*

$$\mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega}(f) = \mathcal{R}_{\bar{\varphi}_i,\bar{\beta}_i,\bar{\Omega}_{ii}}(\mathcal{R}_{\varphi_j,\beta_j,\Omega_{jj}}(f)).$$

Demonstração. É fácil verificar que $(\varphi_j,\beta_j,\Omega_{jj}),\ 1 \leq j \leq 2$, satisfaz as condições da Definição 3.3.1 com respeito a f.

Vamos agora provar que $(\bar{\varphi}_i,\bar{\beta}_i,\bar{\Omega}_{ii})$ satisfazem as condições da Definição 3.3.1 com respeito a f_j para $1 \leq i \neq j \leq 2$. Para a equação (3.2.6) observe que

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_i(X) &= d\bar{\varphi}_i(X) = d\varphi_i(X) - d\Omega_{ij}(X)\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j + \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}d\Omega_{jj}(X)\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}d\varphi_j(X)\\
&= \omega_i(X) - \mathcal{F}_i^t d\mathcal{F}_j(X)\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j + \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\mathcal{F}_j^t d\mathcal{F}_j^t(X)\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\omega_j(X)\\
&= \omega_i(X) - \mathcal{F}_i^t f_*\Phi^j(X)\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j + \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\mathcal{F}_j^t f_*\Phi^j(X)\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\omega_j(X)\\
&= \omega_i(X) - \omega_i(\Phi^j_{\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j}(X)) + \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\omega_j(\Phi^j_{\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j}X) - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\omega_j(X)\\
&= \omega_i(D_jX) - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\omega_j(D_jX),
\end{aligned}$$

em que $D_j = I - \Phi^j_{\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\omega}_i^t(v_i), X\rangle_j &= \langle v_i, \bar{\omega}_i(X)\rangle = \left\langle v_i, \omega_i(D_jX) - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\omega_j(D_jX)\right\rangle\\
&= \langle D_j\omega_i^t v_i, X\rangle_f - \left\langle D_j\omega_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t v_i, X\right\rangle_f\\
&= \left\langle \omega_i^t v_i - \omega_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t v_i, D_j^{-1}X\right\rangle_j\\
&= \left\langle D_j^{-1}(\omega_i^t v_i - \omega_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}v_i), X\right\rangle_j, \ \forall\ X \in TM,
\end{aligned}$$

obtemos que

$$D_j\bar{\omega}_i^t = \omega_i^t - \omega_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t. \tag{3.3.12}$$

Logo por (3.3.5)

$$\begin{aligned}
\alpha_j(X,\bar{\omega}_i^t(v_i)) &= \alpha_j(X, D_j^{-1}(\omega_i^t(v_i) - \omega_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t v_i))\\
&= \mathcal{P}_j\Big(\alpha(X,\omega_i^t v_i) - \alpha(X,\omega_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t v_i) + \beta_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Phi^j(X)^t\omega_i^t v_i\\
&\quad -\beta_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Phi^j(X)^t\omega_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t v_i\Big),
\end{aligned}$$

com $\mathcal{P}_j = I - \mathcal{F}_j\Omega_{jj}^{-1}\mathcal{F}_j^t$. Por outro lado, temos por (3.3.4) e de $d\Omega_{ij}^t = \Phi^j(X)^t\omega_i^t$ que

$$
\begin{aligned}
(\nabla_X^{V^*\otimes N_{f_j}M}\bar{\beta}_i)v_i &= \nabla_X^{N_{f_j}M}\bar{\beta}_i(v_i) - \bar{\beta}_i(\nabla_X^V v_i)\\
&= \nabla_X^{\perp}\mathcal{P}_j\left((\beta_i - \beta_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t)v_i\right) - \mathcal{P}_j\left(\beta_i - \beta_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t\right)(\nabla_X^V v_i)\\
&= \mathcal{P}_j\left(\nabla_X^{\perp}\beta_i(v_i) - \nabla_X^{\perp}\beta_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t v_i - \beta_i(\nabla_X^V v_i) - \beta_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t(\nabla_X^V v_i)\right)\\
&= \mathcal{P}_j\left((\nabla_X^{V^*\otimes N_f M}\beta_i)v_i - (\nabla_X\beta_j)(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t v_i - \beta_j d(\Omega_{jj}^{-1})^t(X)\Omega_{ij}^t v_i\right.\\
&\quad \left. -\beta_j(\Omega_{jj}^{-1})^t d\Omega_{ij}^t(X)v_i\right)\\
&= \mathcal{P}_j\left(\nabla_X^{V^*\otimes N_f M}\beta_i(v_i) - (\nabla_X^{V^*\otimes N_f M}\beta_j)(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t v_i\right.\\
&\quad \left. +\beta_j(\Omega_{jj}^{-1})^t(\Phi^j(X))^t\omega_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t v_i - \beta_j(\Omega_{jj}^{-1})^t(\Phi^j(X))^t\omega_i^t v_i\right).
\end{aligned}
$$

Dessa forma

$$
\begin{aligned}
\alpha_j(X,\bar{\omega}_i^t(v_i)) + (\nabla_X^{V^*\otimes N_{f_j}M}\bar{\beta}_i)(v_i) &= \mathcal{P}_j\left(\alpha(X,\omega_i^t v_i) + (\nabla_X^{V^*\otimes N_f M}\beta_j)v_i\right.\\
&\quad \left. -\alpha(X,\omega_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t v_i) - (\nabla_X^{V^*\otimes N_f M}\beta_j)(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t v_i\right)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Agora, por (3.3.3) e (3.3.12) temos

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathcal{F}}_i &= f_{j*}\bar{\omega}_i^t + \bar{\beta}_i = \mathcal{P}_j f_* D_j\bar{\omega}_i^t + \mathcal{P}_j(\beta_i - \beta_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t)\\
&= \mathcal{P}_j\left(f_*\omega_i^t - f_*\omega_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t + \beta_j - \beta_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t)\right)\\
&= \mathcal{P}_j(\mathcal{F}_i - \mathcal{F}_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t) = \mathcal{F}_i - \mathcal{F}_j\Omega_{jj}^{-1}\mathcal{F}_j^t\mathcal{F}_i - \mathcal{F}_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t + \mathcal{F}_j\Omega_{jj}^{-1}\mathcal{F}_j^t\mathcal{F}_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t\\
&= \mathcal{F}_i - \mathcal{F}_j\Omega_{jj}^{-1}\mathcal{F}_j^t\mathcal{F}_i - \mathcal{F}_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t + \mathcal{F}_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t + \mathcal{F}_j\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ij}^t\\
&= \mathcal{F}_i - \mathcal{F}_j\Omega_{jj}^{-1}(\Omega_{ji} + \Omega_{ij}^t) + \mathcal{F}_j\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ij}^t = \mathcal{F}_i - \mathcal{F}_j\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji}.
\end{aligned}
\tag{3.3.13}
$$

Então

$$
d\bar{\mathcal{F}}_i = d\mathcal{F}_i - d\mathcal{F}_j\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji} + \mathcal{F}_j\Omega_{jj}^{-1}d\Omega_{jj}\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji} - \mathcal{F}_j\Omega_{jj}^{-1}d\Omega_{ji}.
$$

Usando que $d\Omega_{ji} = \mathcal{F}_j^t d\mathcal{F}_i,\ d\Omega_{jj} = \mathcal{F}_j^t d\mathcal{F}_j$ e $\mathcal{F}_i^t \mathcal{F}_j = \Omega_{ij} + \Omega_{ji}^t$, obtemos

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{F}}_i^t d\bar{\mathcal{F}}_i &= (\mathcal{F}_i - \mathcal{F}_j\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji})^t d\bar{\mathcal{F}}_i = (\mathcal{F}_i^t - \Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\mathcal{F}_j^t)d\bar{\mathcal{F}}_i \\
&= \mathcal{F}_i^t d\mathcal{F}_i - \mathcal{F}_i^t d\mathcal{F}_j\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji} + \mathcal{F}_i^t\mathcal{F}_j\Omega_{jj}^{-1}d\Omega_{jj}\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji} - \mathcal{F}_i^t\mathcal{F}_j\Omega_{jj}^{-1}d\Omega_{ji} \\
&\quad -\Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\mathcal{F}_j^t d\mathcal{F}_i + \Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\mathcal{F}_j^t d\mathcal{F}_j\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji} - \Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\mathcal{F}_j^t\mathcal{F}_j\Omega_{jj}^{-1}d\Omega_{jj}\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji} \\
&\quad +\Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\mathcal{F}_j^t\mathcal{F}_j\Omega_{jj}^{-1}d\Omega_{ji} \\
&= d\Omega_{ii} - d\Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji} + \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}d\Omega_{jj}\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji} + \Omega_{ji}^t\Omega_{jj}^{-1}d\Omega_{jj}\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji} \\
&\quad -\Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}d\Omega_{ji} - \Omega_{ji}^t\Omega_{jj}^{-1}d\Omega_{ji} - \Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t d\Omega_{ji} + \Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t d\Omega_{jj}\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji} \\
&\quad -\Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{jj}\Omega_{jj}^{-1}d\Omega_{jj}\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji} - \Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{jj}^t\Omega_{jj}^{-1}d\Omega_{jj}\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji} \\
&\quad +\Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{jj}\Omega_{jj}^{-1}d\Omega_{ji} + \Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{jj}^t\Omega_{jj}^{-1}d\Omega_{ji} \\
&= d\Omega_{ii} - d\Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji} + \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}d\Omega_{jj}\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji} - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}d\Omega_{ji} \\
&= d(\Omega_{ii} - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji}) \\
&= d\bar{\Omega}_{ii}.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{F}}_i^t\bar{\mathcal{F}}_i &= (\mathcal{F}_i^t - \Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\mathcal{F}_j^t)(\mathcal{F}_i - \mathcal{F}_j\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji}) \\
&= \mathcal{F}_i^t\mathcal{F}_i - \mathcal{F}_i^t\mathcal{F}_j\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji} - \Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\mathcal{F}_j^t\mathcal{F}_i + \Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\mathcal{F}_j^t\mathcal{F}_j\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji} \\
&= \Omega_{ii} + \Omega_{ii}^t - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji} - \Omega_{ji}^t\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji} - \Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ji} \\
&\quad -\Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t + \Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{jj}\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji} + \Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{jj}^t\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji} \\
&= (\Omega_{ii} - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji}) + (\Omega_{ii}^t - \Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t) \\
&= \bar{\Omega}_{ii} + \bar{\Omega}_{ii}^t.
\end{aligned}$$

Isto completa a prova que $(\bar{\varphi}_i, \bar{\beta}_i, \bar{\Omega}_{ii})$ satisfazem as condições da Definição 3.3.1 com respeito a f_j.

Escreva $\Omega \in \Gamma(Gl(V))$ na notação matricial

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix}.$$

Como Ω e Ω_{ii} são inversíveis, temos as seguintes fórmulas desenvolvidas por Hans Bolz (1923) e Tadeusz Banachiewicz (1937),

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} \Omega_{11}^{-1} + \Omega_{11}^{-1}\Omega_{12}\bar{\Omega}_{22}^{-1}\Omega_{21}\Omega_{11}^{-1} & -\Omega_{11}^{-1}\Omega_{12}\bar{\Omega}_{22}^{-1} \\ -\bar{\Omega}_{22}^{-1}\Omega_{21}\Omega_{11}^{-1} & \bar{\Omega}_{22}^{-1} \end{pmatrix},$$

ou

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\Omega}_{11}^{-1} & -\bar{\Omega}_{11}^{-1}\Omega_{12}\Omega_{22}^{-1} \\ -\Omega_{22}^{-1}\Omega_{12}\bar{\Omega}_{11}^{-1} & \Omega_{22}^{-1} + \Omega_{22}^{-1}\Omega_{21}\bar{\Omega}_{11}^{-1}\Omega_{12}\Omega_{22}^{-1} \end{pmatrix},$$

e assim, $\bar{\Omega}_{ii}$ é inversível para $1 \leq i \leq 2$. Em particular,

$$\bar{\Omega}_{ii}^{-1} = \Omega_{ii}^{-1} + \Omega_{ii}^{-1}\Omega_{ij}\bar{\Omega}_{jj}^{-1}\Omega_{ji}\Omega_{ii}^{-1} \text{ e } -\Omega_{ii}^{-1}\Omega_{ij}\bar{\Omega}_{jj}^{-1} = -\bar{\Omega}_{ii}^{-1}\Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}, \tag{3.3.14}$$

e podemos escrever

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\Omega}_{11}^{-1} & -\bar{\Omega}_{11}^{-1}\Omega_{12}\Omega_{22}^{-1} \\ -\bar{\Omega}_{22}^{-1}\Omega_{21}\Omega_{11}^{-1} & \bar{\Omega}_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega}(f) &= f - \mathcal{F}\Omega^{-1}\varphi = f - \mathcal{F}(\bar{\Omega}_{11}^{-1}\varphi_1 - \bar{\Omega}_{11}^{-1}\Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}\varphi_2 - \bar{\Omega}_{22}^{-1}\Omega_{21}\Omega_{11}^{-1}\varphi_1 + \bar{\Omega}_{22}^{-1}\varphi_2) \\ &= f - \mathcal{F}\left(\bar{\Omega}_{11}^{-1}(\varphi_1 - \Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}\varphi_2) + \bar{\Omega}_{22}^{-1}(\varphi_2 - \Omega_{21}\Omega_{11}^{-1}\varphi_1)\right) \\ &= f - \mathcal{F}|_{V_1}\bar{\Omega}_{11}^{-1}(\varphi_1 - \Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}\varphi_2) - \mathcal{F}|_{V_2}\bar{\Omega}_{22}^{-1}(\varphi_2 - \Omega_{21}\Omega_{11}^{-1}\varphi_1) \\ &= f - \mathcal{F}_1\bar{\Omega}_{11}^{-1}(\varphi_1 - \Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}\varphi_2) - \mathcal{F}_2\bar{\Omega}_{22}^{-1}(\varphi_2 - \Omega_{21}\Omega_{11}^{-1}\varphi_1). \end{aligned}$$

Por outro lado, por (3.3.13) e (3.3.14), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\tilde{\varphi}_i,\tilde{\beta}_i,\tilde{\Omega}_{ii}}(f_j) &= f_j - \bar{\mathcal{F}}_i\bar{\Omega}_{ii}^{-1}\bar{\varphi}_i = f - \mathcal{F}_j\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j - (\mathcal{F}_i - \mathcal{F}_j\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji})\bar{\Omega}_{ii}^{-1}(\varphi_i - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j) \\ &= f - (\mathcal{F}_j\Omega_{jj}^{-1} - \mathcal{F}_i\bar{\Omega}_{ii}^{-1}\Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1} + \mathcal{F}_j\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji}\bar{\Omega}_{ii}^{-1}\Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1})\varphi_j \\ &\quad -(\mathcal{F}_i\bar{\Omega}_{ii}^{-1} - \mathcal{F}_j\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji}\bar{\Omega}_{ii}^{-1})\varphi_i \\ &= f - (\mathcal{F}_j\bar{\Omega}_{jj}^{-1} - \mathcal{F}_i\bar{\Omega}_{ii}^{-1}\Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1})\varphi_j - (\mathcal{F}_i\bar{\Omega}_{ii}^{-1} - \mathcal{F}_j\bar{\Omega}_{jj}^{-1}\Omega_{ji}\Omega_{ii}^{-1})\varphi_i \\ &= f - \mathcal{F}_j\bar{\Omega}_{jj}^{-1}(\varphi_j - \Omega_{ji}\Omega_{ii}^{-1}\varphi_i) - \mathcal{F}_i\bar{\Omega}_{ii}^{-1}(\varphi_i - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j). \end{aligned}$$

Concluímos que $\mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega}(f) = \mathcal{R}_{\bar{\varphi}_i,\bar{\beta}_i,\bar{\Omega}_{ii}}(f_j)$ para $1 \leq i \neq j \leq 2$.

■

O Teorema 3.3.5 implica que qualquer transformada vetorial de Ribaucour cujos dados associados (φ, β, Ω) estão definidos sobre o espaço vetorial V pode ser obtida como a iterada de $k = \dim V$ transformadas escalares de Ribaucour.

Temos a seguinte consequência

Corolário 3.3.6. *Seja $f_i = \mathcal{R}_{\varphi_i,\beta_i,\Omega_{ii}}(f) : M_i^n \to \mathbb{R}_s^{n+p}$, $1 \leq i \leq 2$, transformada vetorial de Ribaucour de $f : M^n \to \mathbb{R}_s^{n+p}$ determinada por $(\varphi_i, \beta_i, \Omega_{ii})$ como na Definição 3.3.1. Suponha ainda que o tensores $\Phi^i = \Phi(d\varphi_i, \beta_i)$, $1 \leq i \leq 2$, satisfaçam*

$$[\Phi^i_{v_i}, \Phi^j_{v_j}] = 0 \textit{ para todo } v_i \in V_i \textit{ e } v_j \in V_j,\ 1 \leq i \neq j \leq 2.$$

Considere $\mathcal{F}_i = f_*(d\varphi_i)^t + \beta_i$, $1 \leq i \leq 2$. Então existe $\Omega_{ij} \in \Gamma(V_j^* \otimes V_i)$, $1 \leq i \neq j \leq 2$ tal que

$$d\Omega_{ij} = \mathcal{F}_i^t d\mathcal{F}_j \textit{ e } \mathcal{F}_i^t\mathcal{F}_j = \Omega_{ij} + \Omega_{ji}^t, \tag{3.3.15}$$

e tal que $\varphi \in \Gamma(V)$, $\beta \in \Gamma(V^* \otimes N_f M)$, $\Omega \in \Gamma(V^* \otimes V)$ definidos por (3.3.11) para $V =$

$V_1 \oplus V_2$ satisfazem a condição da Definição 3.3.1 (e, portanto ocorre a útlima conclusão do Teorema 3.3.5).

Demonstração. Como ω_j e β_j satisfazem a equação

$$\alpha(X, \omega_i^t(v_i)) + (\nabla_X^{V_i \otimes N_f M} \beta_i) v_i = 0, \text{ para todo } v_i \in \Gamma(V_i),$$

temos pela Proposição 3.2.4 que $\alpha(X, \Phi_{v_j}^j Y) = \alpha(Y, \Phi_{v_j}^j X)$. Portanto, segue de (3.2.8)

$$\left\langle \Phi_{v_i}^i X, \Phi_{v_j}^j Y \right\rangle = \left\langle v_i, \nabla\omega_i(X, \Phi_{v_j}^j Y) \right\rangle - \left\langle \alpha(X, \Phi_{v_j}^j Y), \beta_i(v_i) \right\rangle.$$

Logo pela equação (3.2.1), $\omega_i \Phi^j$ é fechado e assim, pelo Corolário 3.2.2 existe $\Omega_{ij} \in \Gamma(V_j^* \otimes V_i)$ satisfazendo $d\Omega_{ij}(X) v_j = \omega_i \Phi_{v_j}^j(x)$. Por outro lado,

$$\mathcal{F}_i^t d\mathcal{F}_j(X) v_j = \mathcal{F}_i^t f_* \Phi_{v_j}^j X = \omega_i(\Phi_{v_j}^j X) \text{ para todo } v_j \in \Gamma(V_j),$$

e segue a primeira equação de (3.3.15). Finalmente, escolhendo em $x_0 \in M$ a parte simétrica de $(\Omega_{ij})(x_0)$ como $\mathcal{F}_i^t \mathcal{F}_j(x_0)$, temos a segunda equação de (3.3.15).

Agora, é imediato checar que $\varphi \in \Gamma(V)$, $\beta \in \Gamma(V^* \otimes N_f M)$, $\Omega \in \Gamma(V^* \otimes V)$ definidos por (3.3.11) para $V = V_1 \oplus V_2$ satisfazem as condições da Definição 3.3.1 com respeito a f se e somente se, o mesmo é esperado para $(\varphi_i, \beta_i, \Omega_{ii})$ e vale (3.3.15).

■

3.3.3 A transformação vetorial de Ribaucour em $\mathbb{Q}_s^N(\tilde{c})$

Nesta seção estendemos a transformação vetorial de Ribaucour para subvariedades de $\mathbb{Q}_s^{n+p}(\tilde{c})$. Dada uma imersão isométrica $f : M^n \to \mathbb{Q}_s^{n+p}(\tilde{c})$, com $\tilde{c} \neq 0$, considere

$$F = i \circ f : M^n \to \mathbb{R}_{s+\epsilon_0}^{n+p+1},$$

em que $i : \mathbb{Q}_s^{n+p}(\tilde{c}) \to \mathbb{R}_{s+\epsilon_0}^{n+p+1}$ é uma inclusão umbílica e $\epsilon_0 = 0$ ou 1, conforme seja $\tilde{c} > 0$ ou $\tilde{c} < 0$, respectivamente.

Começamos com a seguinte extensão da Proposição 3.2.4.

Proposição 3.3.7. *Sejam $f : M^n \to \mathbb{Q}_s^{n+p}(\tilde{c})$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana simplesmente conexa e V um espaço vetorial Euclidiano. Seja $\Phi \in \Gamma(T^*M \otimes V^* \otimes TM)$ uma 1-forma fechada satisfazendo*

$$\langle \Phi_v X, Y \rangle = \langle X, \Phi_v Y \rangle \tag{3.3.16}$$

e

$$\alpha_f(X, \Phi_v Y) = \alpha_f(Y, \Phi_v X) \text{ para todo } v \in \Gamma(V). \tag{3.3.17}$$

Para $\mathcal{G} \in \Gamma(V^* \otimes f^*T\mathbb{R}^{n+p+1}_{s+\epsilon_0})$ *satisfazendo*

$$d\mathcal{G}(X)v = F_*\Phi_v(X), \tag{3.3.18}$$

escreva

$$\mathcal{G} = f_*\omega^t + \widetilde{\beta}, \tag{3.3.19}$$

em que $\omega \in \Gamma(T^*M \otimes V)$ *e* $\widetilde{\beta} \in \Gamma(V^* \otimes N_F M)$. *Então existem* $\varphi \in \Gamma(V)$, $\beta \in \Gamma(V^* \otimes N_f M)$ *e* $v_0 \in V$ *tais que* $(\omega = d\varphi, \beta)$ *satisfaz (3.2.6) e*

$$\tilde{\beta} = \beta + \tilde{c}F(\varphi^t + v_0^t). \tag{3.3.20}$$

Além disso,

$$\Phi_v X = (\nabla_X^{V^* \otimes TM}\omega^t)v - A^F_{\tilde{\beta}(v)}X. \tag{3.3.21}$$

Reciprocamente, se $\varphi \in \Gamma(V)$ *e* $\beta \in \Gamma(V^* \otimes N_f M)$ *são tais que* $(\omega = d\varphi, \beta)$ *satisfaz (3.2.6), então valem (3.3.16) e (3.3.18) para* $\mathcal{G}$ *e* Φ *dados, respectivamente, por (3.3.19) e (3.3.21), com*

$$\tilde{\beta} = \beta + \tilde{c}F\varphi^t. \tag{3.3.22}$$

Em particular, Φ *é uma* 1*-forma fechada e vale (3.3.17).*

Demonstração. Sabemos que

$$\alpha_F(X,Y) = \alpha_f(X,Y) - \tilde{c}\langle X,Y\rangle F. \tag{3.3.23}$$

Aplicando a Proposição 3.2.4 para F, temos

$$\alpha_F(\omega^t(v),X) + (\nabla_X^{V^* \otimes N_F M}\widetilde{\beta})v = 0,$$

com $\widetilde{\beta} = \beta + F\psi^t$ para algum $\psi \in \Gamma(V)$. Logo, de (3.3.23)

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha_F(\omega^t(v),X) + (\nabla_X^{V^* \otimes N_F M}\widetilde{\beta})v \\
&= \alpha_f(\omega^t(v),X) - \tilde{c}\langle\omega^t(v),X\rangle F + {}^F\nabla^\perp_X((\beta - F\psi^t)v) - \beta(\nabla_X v) - F\psi^t(\nabla_X v) \\
&= \alpha_f(\omega^t(v),X) - \tilde{c}\langle v,\omega(X)\rangle F + \nabla^\perp_X\beta(v) + X(\psi^t(v))F - \beta(\nabla_X v) - F\psi^t(\nabla_X v) \\
&= \alpha_f(\omega^t(v),X) - \tilde{c}\langle v,\omega(X)\rangle F + \nabla^\perp_X\beta(v) - \beta(\nabla_X v) + \langle d\psi(X),v\rangle F \\
&= \alpha_f(\omega^t(v),X) + (\nabla_X^{V^* \otimes N_f M}\beta)v - \langle\tilde{c}\omega(X) - d\psi(X),v\rangle F.
\end{aligned}$$

Assim, (ω,β) satisfaz a equação (3.2.6). Por (3.2.8), a 1-forma ω é fechada, e por ser a variedade simplesmente conexa, existe $\varphi \in \Gamma(V)$ tal que $\omega = d\varphi$. Logo, existe $v_0 \in V$ tal que $\psi = \tilde{c}(\varphi + v_0)$, o qua implica (3.3.20).

Reciprocamente, dado (ω,β) satisfazendo a equação (3.2.6) com $d\varphi = \omega$ e tomando $\widetilde{\beta} = \beta + \widetilde{c}F\varphi^t$, temos

$$\begin{aligned} \alpha_F(\omega^t(v), X) + (\nabla_X^{V^*\otimes N_F M}\widetilde{\beta})v &= \alpha_f(\omega^t(v), X) + (\nabla_X^{V^*\otimes N_f M}\beta)v \\ &\quad -\widetilde{c}\left\langle \omega^t(v), X\right\rangle F + \widetilde{c}\left\langle d\varphi(X), v\right\rangle F \\ &= 0, \end{aligned}$$

e as conclusões seguem da Proposição 3.2.4.

■

De (3.3.23), temos que

$$\begin{aligned} \left\langle A^F_{\widetilde{\beta}(v)}X, Y\right\rangle &= \left\langle \alpha_F(X,Y), \widetilde{\beta}(v)\right\rangle = \left\langle \alpha_f(X,Y), \beta(v)\right\rangle - \widetilde{c}^2\varphi^t(v)\left\langle X, Y\right\rangle \tfrac{1}{\widetilde{c}} \\ &= \left\langle (A^f_{\beta(v)} - \widetilde{c}\varphi^t(v)I)X, Y\right\rangle, \end{aligned}$$

ou seja,

$$A^F_{\widetilde{\beta}(v)} = A^f_{\beta(v)} - \widetilde{c}\varphi^t(v)I.$$

Assim, (3.3.21) é dado por

$$\Phi_v X = (\nabla_X^{V^*\otimes TM}\omega^t)v - A^f_{\beta(v)}(X) + \widetilde{c}\varphi^t(v)X. \tag{3.3.24}$$

Dados uma imersão isométrica $f : M^n \to \mathbb{Q}_s^{n+p}(\tilde{c})$ e uma solução (φ, β) de (3.2.6) com $\omega = d\varphi$, defina

$$\mathcal{D}(f) = \Big\{(\varphi,\beta) \text{ solução de (3.2.6) com } \omega = d\varphi, \text{ tal que } \Phi \text{ dado em (3.3.24)}$$
$$\text{satisfaz } \left\langle \Phi_u X, \Phi_v Y\right\rangle = \left\langle \Phi_v X, \Phi_u Y\right\rangle, \ \forall u, v \in \Gamma(V) \text{ e } \forall X, Y \in \Gamma(TM)\Big\}.$$

Para $(\varphi, \beta) \in \mathcal{D}(f)$ temos, usando as Proposições 3.3.7 e 3.2.5, que $(\varphi, \tilde{\beta}, \Omega)$, com $\tilde{\beta}$ dado (3.3.22), satisfaz as condições da Definição 3.3.1 para F. Além disso, supondo que $\tilde{F}$ seja uma imersão, para a isometria $\mathcal{P}$ definida por $\mathcal{P} = I - \mathcal{G}\Omega^{-1}\mathcal{G}^t$ temos

$$\mathcal{P}(F) = F - \mathcal{G}\Omega^{-1}\mathcal{G}^t F = F - \mathcal{G}\Omega^{-1}\varphi = \widetilde{F},$$

e assim

$$\frac{1}{\tilde{c}} = \left\langle F, F\right\rangle = \left\langle \mathcal{P}(F), \mathcal{P}(F)\right\rangle = \left\langle \tilde{F}, \tilde{F}\right\rangle,$$

ou seja, existe $\tilde{f} : M^n \to \mathbb{Q}_s^{n+p}(\tilde{c})$ tal que $\tilde{F} = \mathcal{R}_{\varphi,\tilde{\beta},\Omega}(F) = i \circ \tilde{f}$. Assim, temos o seguinte resultado

Proposição 3.3.8. *Sejam $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_s^{n+p}(\widetilde{c})$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana simplesmente conexa e V um espaço vetorial Euclidiano. Sejam $\varphi \in \Gamma(V)$*

e $\beta \in \Gamma(V^* \otimes N_f M)$ *tais que* $(\varphi, \beta) \in \mathcal{D}(f)$. *Então existe* $\Omega \in \Gamma(Gl(V))$ *tal que*

$$d\Omega = \mathcal{G}^t d\mathcal{G} \tag{3.3.25}$$

e

$$\Omega + \Omega^t = \mathcal{G}^t \mathcal{G} = \omega\omega^t + \beta^t\beta + \tilde{c}\varphi\varphi^t. \tag{3.3.26}$$

Além disso, seja $\tilde{F}\colon\, M^n \to \mathbb{R}^{n+p+1}_{s+\epsilon_0}$ *definida por*

$$\tilde{F} = \mathcal{R}_{\varphi,\tilde{\beta},\Omega}(F) = F - \mathcal{G}\Omega^{-1}\varphi,$$

em que $\tilde{\beta} = \beta + \tilde{c}F\varphi^t$. *Então existe* $\tilde{f} : M^n \to \mathbb{Q}^{n+p}_s(\tilde{c})$ *tal que* $\tilde{F} = i \circ \tilde{f}$.

Definição 3.3.9. Sejam $D = I - \Phi_{\Omega^{-1}\varphi}$, com Φ dada por (3.3.24), e

$$\tilde{M}^n = \{x \in M^n;\ D(x) \ \text{ é inversível}\}.$$

A imersão isométrica $\tilde{f}|_{\tilde{M}^n} : \tilde{M}^n \to \mathbb{Q}^{n+p}_s(\tilde{c})$, em que $\tilde{f} : M^n \to \mathbb{Q}^{n+p}_s(\tilde{c})$ é dada pela Proposição 3.3.8 e $\tilde{M}^n$ é munido com a métrica $D^*\langle\ ,\ \rangle$, é chamada uma *transformada vetorial de Ribaucour* de $f : M^n \to \mathbb{Q}^{n+p}_s(\tilde{c})$.

Temos o seguinte resultado similar à Proposição 3.3.3

Proposição 3.3.10. *As conexões normais e as segundas formas fundamentais de* f *e* $\tilde{f}$ *estão relacionadas por*

(i) $\widetilde{\nabla}^{\perp}_X \mathcal{P}\xi = \mathcal{P}(i_*\nabla^{\perp}_X\xi)$,

(ii) $A^{\widetilde{f}}_{\mathcal{P}\xi} = D^{-1}(A^f_\xi + \Phi_{\Omega^{-1}\beta^t\xi})$, *ou equivalentemente,*

$$\alpha_{\widetilde{f}}(X,Y) = \mathcal{P}(\alpha_f(X, DY) + \beta(\Omega^{-1})^t\Phi(X)DY), \tag{3.3.27}$$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned}
-\widetilde{F}_* A^{\widetilde{f}}_{\mathcal{P}\xi}X + i_*{}^{\widetilde{f}}\nabla^{\perp}_X\mathcal{P}\xi &= (\widetilde{\nabla}_X\mathcal{P}\xi)^{\top} + (\widetilde{\nabla}_X\mathcal{P}\xi)^{\perp} = \widetilde{\nabla}_X\mathcal{P}\xi \\
&= \widetilde{\nabla}_X\xi - \widetilde{\nabla}_X\mathcal{G}\Omega^{-1}\mathcal{G}^t\xi \\
&= -F_*A^f_\xi X + i_*{}^f\nabla^{\perp}_X\xi - d\mathcal{G}(X)\Omega^{-1}\mathcal{G}^t\xi + \mathcal{G}\Omega^{-1}d\Omega(X)\Omega^{-1}\mathcal{G}^t\xi \\
&\quad -\mathcal{G}\Omega^{-1}d\mathcal{G}^t(X)\xi - \mathcal{G}\Omega^{-1}\mathcal{G}^t\widetilde{\nabla}_X\xi \\
&= -F_*A^f_\xi X + i_*{}^f\nabla^{\perp}_X\xi - F_*\Phi(X)\Omega^{-1}\mathcal{G}^t\xi + \mathcal{G}\Omega^{-1}\mathcal{G}^t d\mathcal{G}(X)\Omega^{-1}\mathcal{G}^t\xi \\
&\quad -\mathcal{G}\Omega^{-1}\Phi(X)^t F^t_*\xi + \mathcal{G}\Omega^{-1}\mathcal{G}^t F_*A^f_\xi X - \mathcal{G}\Omega^{-1}\mathcal{G}^t i_*\nabla^{\perp}_X\xi \\
&= -\mathcal{P}(F_*A^f_\xi X) - \mathcal{P}(F_*\Phi(X)\Omega^{-1}\beta^t\xi) + \mathcal{P}(i_*{}^f\nabla^{\perp}_X\xi) \\
&= -\widetilde{F}_*D^{-1}A^f_\xi X - \widetilde{F}_*D^{-1}\Phi(X)\Omega^{-1}\beta^t\xi + \mathcal{P}(i_*{}^f\nabla^{\perp}_X\xi),
\end{aligned}$$

e assim, obtemos (i) e (ii).

■

3.3.4 O Teorema da decomposição em $\mathbb{Q}_s^N(\tilde{c})$

Nesta subseção, mostramos dois resultados que são consequências do Teorema 3.3.5 e do Corolário 3.3.6.

Corolário 3.3.11. *Seja $\mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega}(f) : \tilde{M}^n \to \mathbb{Q}_s^{n+p}(\tilde{c})$ uma transformada vetorial de Ribaucour de $f : M^n \to \mathbb{Q}_s^{n+p}(\tilde{c})$ como na Definição 3.3.9, determinada pela tripla (φ, β, Ω), dada na Proposição 3.3.8. Para uma decomposição ortogonal $V = V_1 \oplus V_2$, defina $(\varphi_j, \beta_j, \Omega_{ij})$ por*

$$\varphi_j = \pi_{V_j} \circ \varphi, \quad \beta_j = \beta|_{V_j} \ \ e \ \ \Omega_{ij} = \pi_{V_i} \circ \Omega|_{V_j} \in \Gamma(V_j^* \otimes V_i), \ \ 1 \leq i, j \leq 2. \tag{3.3.28}$$

Suponha que Ω_{jj} seja inversível e defina $\mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega}(\varphi_i, \beta_i, \Omega_{ii}) := (\bar{\varphi}_i, \bar{\beta}_i, \bar{\Omega}_{ii})$ por

$$\bar{\varphi}_i = \varphi_i - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j, \quad \bar{\beta}_i = \mathcal{P}_j(\beta_i - \beta_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t) \quad e \quad \bar{\Omega}_{ii} = \Omega_{ii} - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji}, \tag{3.3.29}$$

$1 \leq i \neq j \leq 2$, em que $\mathcal{P}_j = I - \mathcal{G}_j\Omega_{jj}^{-1}\mathcal{G}_j^t$. Nessas condições, as triplas $(\varphi_j, \beta_j, \Omega_{jj})$ e $(\bar{\varphi}_i, \bar{\beta}_i, \bar{\Omega}_{ii})$ satisfazem as condições da Proposição 3.3.8 com respeito a f e f_j, respectivamente, em que $F_j = i \circ f_j$, e vale

$$\mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega}(f) = \mathcal{R}_{\bar{\varphi}_i,\bar{\beta}_i,\bar{\Omega}_{ii}}(\mathcal{R}_{\varphi_j,\beta_j,\Omega_{jj}}(f)). \tag{3.3.30}$$

Demonstração. Primeiramente, definindo $\tilde{\beta}_j = \tilde{\beta}|_{V_j} = \beta_j + \tilde{c}F\varphi_j^t$, $j = 1, 2$, segue do Teorema 3.3.5 que as triplas $(\varphi_j, \tilde{\beta}_j, \Omega_{jj})$ e $(\bar{\varphi}_i, \bar{\tilde{\beta}}_i, \bar{\Omega}_{ii})$ satisfazem as condições da Definição 3.3.1 com respeito a F e F_j, respectivamente, e

$$\mathcal{R}_{\varphi,\tilde{\beta},\Omega}(F) = \mathcal{R}_{\bar{\varphi}_i,\bar{\tilde{\beta}}_i,\bar{\Omega}_{ii}}(\mathcal{R}_{\varphi_j,\tilde{\beta}_j,\Omega_{jj}}(F)). \tag{3.3.31}$$

Assim, a tripla $(\varphi_j, \beta_j, \Omega_{jj})$ satisfaz as condições da Proposição 3.3.8 com respeito a f. E ainda, como

$$\begin{aligned} \tilde{\bar{\beta}}_i &= \bar{\beta}_i + \tilde{c}F_j\bar{\varphi}_i^t = \mathcal{P}_j\left(\beta_i + \tilde{c}F\varphi_i^t + \beta_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij} + \tilde{c}F\varphi_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t\right) \\ &= \mathcal{P}_j\left(\tilde{\beta}_i + \tilde{\beta}_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t\right) = \bar{\tilde{\beta}}_i, \end{aligned}$$

temos que $(\bar{\varphi}_i, \bar{\beta}_i, \bar{\Omega}_{ii})$ satisfaz as condições da Proposição 3.3.8 com respeito a f_j, em que $F_j = i \circ f_j$ e que existe $\bar{f}_i : M^n \to \mathbb{Q}_s^{n+p}(\tilde{c})$ com $\mathcal{R}_{\bar{\varphi}_i,\tilde{\bar{\beta}}_i,\bar{\Omega}_{ii}}(F_j) = i \circ \bar{f}_i$. Logo, a equação (3.3.30) segue da equação (3.3.31).

■

Corolário 3.3.12. *Seja $f_i = \mathcal{R}_{\varphi_i,\beta_i,\Omega_{ii}}(f) : M_i^n \to \mathbb{Q}_s^{n+p}(\tilde{c})$, $1 \leq i \leq 2$, transformada vetorial de Ribaucour de $f : M^n \to \mathbb{Q}_s^{n+p}(\tilde{c})$ determinada por $(\varphi_i, \beta_i, \Omega_{ii})$ como na Proposição 3.3.8. Suponha ainda que os tensores $\Phi^i = \Phi(\varphi_i, d\varphi_i, \beta_i)$, $1 \leq i \leq 2$, satisfaçam*

$$[\Phi^i_{v_i}, \Phi^j_{v_j}] = 0 \ \ para\ todo\ v_i \in V_i \ \ e\ v_j \in V_j, \ \ 1 \leq i \neq j \leq 2.$$

Considere $\mathcal{G}_i = f_*(d\varphi_i)^t + \beta_i + \tilde{c}F\varphi_i^t,\ 1 \leq i \leq 2$. *Então existe* $\Omega_{ij} \in \Gamma(V_j^* \otimes V_i),\ 1 \leq i \neq j \leq 2$ *tal que*

$$d\Omega_{ij} = \mathcal{G}_i^t d\mathcal{G}_j \ \text{ e } \ \mathcal{G}_i^t \mathcal{G}_j = \Omega_{ij} + \Omega_{ji}^t, \tag{3.3.32}$$

e tal que $\varphi \in \Gamma(V)$ *e* $\beta \in \Gamma(V^* \otimes N_f M)$ *e* $\Omega \in \Gamma(V^* \otimes V)$ *definidos por (3.3.28) para* $V = V_1 \oplus V_2$ *satisfazem as condições da Proposição 3.3.8 (e, portanto ocorre a útlima conclusão do Corolário 3.3.11).*

3.3.5 O cubo de Bianchi

Um *quadrilátero de Bianchi* é um conjunto formado por quatro imersões isométricas $f_i : M_i \to \mathbb{Q}_s^{n+p}(\tilde{c}),\ 1 \leq i \leq 4$, cada uma das quais é uma transformada de Ribaucour das imersões precedente e subsequente (pensadas como pontos em um círculo orientado), e os tensores de Codazzi associados comutam.

Um *k-cubo de Bianchi*, $k \geq 2$, é uma $(k+1)-$upla $(\mathcal{C}_0, ..., \mathcal{C}_k)$, em que cada $\mathcal{C}_i,\ 0 \leq i \leq k$, é uma família com $\binom{k}{i}$ elementos de imersões isométricas $f_i : M_i \to \mathbb{Q}_s^{n+p}(\tilde{c})$, tal que $\mathcal{C}_0 = \{f\}$, cada elemento de $\mathcal{C}_1$ é uma transformada de Ribaucour de f e, para qualquer $\widehat{f} \in \mathcal{C}_{s+1},\ 1 \leq s \leq k-1$, existem únicos elementos $\widehat{f}_1, ..., \widehat{f}_{s+1} \in \mathcal{C}_s$ satisfazendo as seguintes condições:
(i) $\widehat{f}$ é uma transformada de Ribaucour de $\widehat{f}_j,\ 1 \leq j \leq m$.
(ii) Para cada par de índices $1 \leq i \neq j \leq s+1$ existe um único elemento $\widehat{f}_{ij} \in \mathcal{C}_{s-1}$ tal que $\{\widehat{f}_{ij}, \widehat{f}_i, \widehat{f}_j, \widehat{f}\}$ é um quadrilátero de Bianchi.

O seguinte resultado foi provado em [7].

Teorema 3.3.13. *Sejam* $f : M^n \to \mathbb{Q}_s^{n+p}(\tilde{c})$ *uma imersão isométrica e* $f_1, ..., f_k$ *transformadas de Ribaucour de* f *tais que nenhuma delas pertence à família associada a duas quaisquer das outras. Para cada par* $\{i,j\},\ 1 \leq i \neq j \leq k$, *seja* $f_{ij} : M_{ij}^n \to \mathbb{Q}_s^{n+p}(\tilde{c})$ *uma imersão isométrica tal que* $\{f_{ij}, f_i, f_j, f\}$ *seja um quadrilátero de Bianchi. Então, para uma escolha genérica das imersões* f_{ij} *nessas condições, existe um único k-cubo de Bianchi* $(\mathcal{C}_0, ..., \mathcal{C}_k)$ *tal que* $\mathcal{C}_0 = \{f\},\ \mathcal{C}_1 = \{f_1, ..., f_k\}$ *e* $\mathcal{C}_2 = \{f_{ij}\}_{1 \leq i \neq j \leq k}$.

Demonstração. Vamos primeiramente provar a existência. Escreva $f_i = \mathcal{R}_{\varphi_i, \beta_i}(f),\ 1 \leq i \leq k$. Para cada par $\{i,j\} \subset \{1, ..., k\}$ com $i < j$, defina $\varphi^{ij} \in \Gamma(\mathbb{R}^2)$ e $\beta^{ij} \in \Gamma((\mathbb{R}^2)^* \otimes N_f M)$ por

$$\varphi^{ij} = (\varphi_i, \varphi_j) \text{ e } \beta^{ij} = dx_1 \otimes \beta_i + dx_2 \otimes \beta_j.$$

Por ser $\{f_{ij}, f_i, f_j, f\}$ um quadrilátero de Bianchi, existe $\Omega^{ij} \in Gl(\mathbb{R}^2)$ com

$$\Omega^{ij} = \begin{bmatrix} \Omega_{ii} & \Omega_{ij} \\ \Omega_{ji} & \Omega_{jj} \end{bmatrix},$$

em que $\Omega_{rr} = \frac{1}{2}\langle \mathcal{G}_r, \mathcal{G}_r \rangle$, com $\mathcal{G}_r = f_*(d\varphi_r)^t + \beta_r + \tilde{c}F\varphi_r^t$ e $r \in \{i,j\}$, tal que $(\varphi^{ij}, \beta^{ij}, \Omega^{ij})$ satisfaz as condições da Proposição 3.3.8 com respeito a f e $f_{ij} = \mathcal{R}_{\varphi^{ij}, \beta^{ij}, \Omega^{ij}}(f)$.

Defina $\varphi \in \Gamma(\mathbb{R}^k)$, $\beta \in \Gamma((\mathbb{R}^k)^* \otimes N_f M)$ e $\Omega \in \Gamma((\mathbb{R}^k)^* \otimes \mathbb{R}^k)$ por

$$\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_k),\ \ \beta = \sum_{i=1}^{k} dx_i \otimes \beta_i$$

e

$$\Omega = (\Omega_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}\,. \tag{3.3.33}$$

É fácil verificar que φ e β pertencem a $\mathcal{D}(f)$ e que Ω satisfaz as equações (3.3.25) e (3.3.26), com $\mathcal{G} : \mathbb{R}^k \to f^*T\mathbb{Q}_s^{n+p}(\tilde{c})$ dado por $\mathcal{G} = \sum_{i=1}^{k} dx_i \otimes \mathcal{G}_i$.

Agora, fazemos precisa a hipótese da escolha "genérica". A saber, exigimos que nenhum dos menores principais de Ω sejam nulos, em que Ω é considerada uma matriz quadrada $(k \times k)$. Isto é, para qualquer multi-índice $\alpha = \{i_1, ..., i_r\} \subset \{1, ..., k\}$, a submatriz Ω_α, formada escolhendo-se de Ω as colunas e linhas com índices em α, tem determinante diferente de zero. Desta forma, a própria matriz Ω é inversível e a tripla (φ, β, Ω) satisfaz as condições da Proposição 3.3.8 com respeito a f.

Doravante, para tal $\alpha = \{i_1, ..., i_r\} \subset \{1, ..., k\}$, considere

$$\varphi^\alpha = (\varphi_{i1}, ..., \varphi_{ir}),\ \ \beta^\alpha = \sum_{j=1}^{r} dx_{i_j} \otimes \beta_{i_j} \text{ e } \Omega^\alpha = \Omega_\alpha.$$

Definimos $\mathcal{C}_r$ como a família de $\binom{k}{r}$ elementos formada pelas transformadas vetoriais de Ribaucour $\mathcal{R}_{\varphi^\alpha,\beta^\alpha,\Omega^\alpha}(f)$.

Dada $\hat{f} = \mathcal{R}_{\varphi^\alpha,\beta^\alpha,\Omega^\alpha}(f) \in \mathcal{C}_{s+1},\ 1 \leq s \leq k-1$ e $\alpha = \{i_1, ..., i_{s+1}\} \subset \{1, ..., k\}$, sejam $\alpha_1, ..., \alpha_{s+1}$ os $(s+1)$ multi-índices com s elementos que estão contidos em α. Para cada $j = 1, ..., s+1$ escreva $\alpha = \alpha_j \cup \{i_j\}$. Então, pelo Corolário 3.3.11,

$$\hat{f}_j = \mathcal{R}_{\varphi^{\alpha_j},\beta^{\alpha_j},\Omega^{\alpha_j}}(f) \in \mathcal{C}_s \text{ e } \hat{f} = \mathcal{R}_{\bar{\varphi}_{i_j},\bar{\beta}_{i_j}}(\hat{f}_j).$$

Além disso, para cada par $\{\alpha_i, \alpha_j\}$, considere $\alpha_{ij} = \alpha_i \cap \alpha_j$ e seja $\hat{f}_{ij} = \mathcal{R}_{\varphi^{\alpha_{ij}},\beta^{\alpha_{ij}},\Omega^{\alpha_{ij}}}(f)$. Então, $\hat{f}_{ij} \in \mathcal{C}_{s-1}$ e $\{\hat{f}_{ij}, \hat{f}_i, \hat{f}_j, \hat{f}\}$ é um quadrilátero de Bianchi.

É fácil verificar que a afirmação sobre a unicidade segue da unicidade para $k = 3$. Como nenhuma das transformadas pertence à família associada a duas quaisquer das outras, em [18] temos a justificativa dessa unicidade usando um argumento elementar baseado na versão do Teorema de Miquel para quatro circunferências.

■

Proposição 3.3.14. *Sejam $f : M^n \to \mathbb{Q}^{n+p}(\tilde{c})$ uma imersão isométrica e $f_1, ..., f_k$ transformadas de Ribaucour de f, determinadas por (φ_i, β_i), $1 \leq i \leq k$, $k \leq n+p$. Suponha que a imagem de $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_k) : M \to \mathbb{R}^k$ gere o $\mathbb{R}^k$ e que $\mathcal{G} : \mathbb{R}^k \to f^*T\mathbb{Q}^{n+p}(\tilde{c})$, dada por*

$$\mathcal{G} = \sum_{i=1}^{k} dx_i \otimes (f_* \nabla \varphi_i + \beta_i + \tilde{c} F \varphi^t),$$

seja injetiva. Então

i) f_l *não pertence à família associada a* $\{f_i, f_j\}$ *para quaisquer* $i, j, l \in \{1, ..., k\}$.

ii) No Teorema 3.3.13, se $\tilde{c} \geq 0$, *a imersão* f_{ij} *pode ser escolhida arbitrariamente satisfazendo a condição de que* $\{f_{ij}, f_i, f_j, f\}$ *seja um quadrilátero de Bianchi.*

Demonstração. (i) é uma consequência direta das hipóteses. Para (ii), definindo Ω como em (3.3.33), temos de $\mathcal{G}$ ser injetiva que $\Omega + \Omega^t = 2\Omega_s = \mathcal{G}^t\mathcal{G}$ é positiva definida para $\tilde{c} \geq 0$, e assim, o determinante de Ω é positivo. De fato, por ser uma matriz real, Ω tem autovalores reais ou par de complexos conjugados, e como o determinante de Ω é o produto de seus autovalores, basta mostrar que todos os seus autovalores têm parte real positiva. Sejam α um autovalor de Ω (complexo em geral) e u o correspondente autovetor (também complexo), temos de $\bar{u}^t\Omega_s u + \overline{\bar{u}^t\Omega_s u} = 2\bar{u}^t\Omega_s u > 0$ e $\bar{u}^t\Omega_a u + \overline{\bar{u}^t\Omega_a u} = 0$ que $Re(\bar{u}^t\Omega u) = Re(\bar{u}^t\Omega_s u + \bar{u}^t\Omega_a u) > 0$. Logo, por $\bar{u}^t\Omega u = \alpha||u||^2$, segue que $Re\alpha > 0$.

Doravante, afirmamos que todos os menores principais de Ω são positivos. Pelo critério de Sylvester, a parte simétrica $\Omega_s > 0$ é equivalente a todos os seus menores principais do canto superior esquerdo serem positivos, os quais são chamados menores principais de canto. Pela primeira afirmação, os respectivos menores principais de Ω são positivos. Finalmente, basta observar que todos os menores principais podem ser permutados em posições de menores principais de canto, e que a parte simétrica da nova matriz é ainda positivo definida.

Portanto, a imersão f_{ij} pode ser escolhida arbitrariamente satisfazendo a condição de que $\{f_{ij}, f_i, f_j, f\}$ seja um quadrilátero de Bianchi.

■

Capítulo 4

A $L-$Transformação de Ribaucour

Neste capítulo, obtemos uma redução da transformação vetorial de Ribaucour que preserva a classe das subvariedades de curvatura seccional constante de formas espaciais. Tal redução fica determinada por um operador linear L de um espaço vetorial Euclidiano V, assim a chamamos de L-transformação de Ribaucour. No caso escalar, ou seja, quando V tem dimensão um, a L-transformação reduz-se à redução da transformação escalar de Ribaucour para subvariedades de curvatura seccional constante obtida em [12]. Obtemos um teorema de decomposição para a L-transformação, do qual decorre, em particular, que uma L-transformação determinada por um tensor *simétrico* L é a iterada de dim V transformações escalares de Ribaucour do mesmo tipo. Em particular, mostramos como obter, a partir de k tais transformadas escalares de uma subvariedade de curvatura seccional constante c, fórmulas algébricas explícitas para uma família de novas subvariedades da mesma classe, a qual está em correspondência com os vértices de um cubo k-dimensional, do qual as k subvariedades iniciais são os vértices contíguos àquele associado à subvariedade dada.

4.1 A L-transformação para subvariedades de curvatura constante.

Antes de definir a $L-$transformação, mostraremos alguns resultados preliminares.

Sejam $f : M^n \to \mathbb{Q}_s^{n+p}(\tilde{c})$ uma imersão isométrica e $\mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega}(f) : M^n \to \mathbb{Q}_s^{n+p}(\tilde{c})$ sua transformada vetorial de Ribaucour determinada pela tripla (φ, β, Ω), segundo a Definição 3.3.9. Denotaremos por $\tilde{M}^n$ a variedade M^n munida com a métrica induzida por $\tilde{f}$. Primeiramente, iremos relacionar os tensores de curvatura de M^n e $\tilde{M}^n$.

Defina os tensores $S \in \Gamma(N_fM^* \otimes V)$ e $U \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes End(TM))$ por

$$S = \Omega^{-1}\beta^t$$

e

$$U(X,Y) = \Phi(X) \circ S \circ (A(Y) + \frac{1}{2}\Phi(Y) \circ S)^t.$$

Dado $T \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes End(TM))$, defina $\hat{T} \in \Gamma(\mathcal{A}_2(T^*M) \otimes \mathcal{A}(TM))$ por

$$\hat{T}(X,Y) = (T(X,Y) - T(X,Y)^t) - (T(Y,X) - T(Y,X)^t).$$

Proposição 4.1.1. *Os tensores de curvatura de M^n e $\tilde{M}^n$ estão relacionados por*

$$D \circ \tilde{R}(X,Y) = (R(X,Y) + \hat{U}(X,Y) + \tilde{c}\,(DX \wedge DY) - \tilde{c}\,(X \wedge Y)) \circ D. \tag{4.1.1}$$

Demonstração. Pela Proposição 3.3.10, temos

$$\begin{aligned} D\tilde{A}_{\tilde{\alpha}(Y,Z)}(X) &= D\tilde{A}(X)\mathcal{P}\,(\alpha(Y,DZ) + \beta(\Omega^{-1})^t\Phi(Y)^tDZ) \\ &= A(X)(\alpha(Y,DZ) + \beta(\Omega^{-1})^t\Phi(Y)^tDZ) \\ &\quad +\Phi(X)(\Omega^{-1}\beta^t(\alpha(Y,DZ) + \beta(\Omega^{-1})^t\Phi(Y)^tDZ)). \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Denote por $\bar{R}$ o tensor de curvatura de $\mathbb{Q}_s^{n+p}(\tilde{c})$. Obtemos de (4.1.2) e das equações de Gauss para f e $\tilde{f}$ que

$$\begin{aligned} D \circ \tilde{R}(X,Y)Z &= D\tilde{A}_{\tilde{\alpha}(Y,Z)}X - D\tilde{A}_{\tilde{\alpha}(X,Z)}Y + D(\bar{R}(X,Y)Z)^t \\ &= A_{\alpha(Y,DZ)}X + A(X)S^t\Phi(Y)^tDZ + \Phi(X)SA(Y)^tDZ \\ &\quad +\Phi(X)SS^t\Phi(Y)^tDZ - A_{\alpha(X,DZ)}Y - A(Y)S^t\Phi(X)^tDZ \\ &\quad -\Phi(Y)SA(X)^tDZ - \Phi(Y)SS^t\Phi(X)^tDZ \\ &\quad +\tilde{c}\,(\langle Y,Z\rangle^\sim DX - \langle X,Z\rangle^\sim DY) \\ &= R(X,Y)DZ - \tilde{c}\,(X \wedge Y)\,DZ \\ &\quad + \left(\Phi(X)S\left(A(Y) + \tfrac{1}{2}\Phi(Y)S\right)^t\right)DZ \\ &\quad - \left(\Phi(X)S\left(A(Y) + \tfrac{1}{2}\Phi(Y)S\right)^t\right)^t DZ \\ &\quad - \left(\Phi(Y)S\left(A(X) + \tfrac{1}{2}\Phi(X)S\right)^t\right)DZ \\ &\quad + \left(\Phi(Y)S\left(A(X) + \tfrac{1}{2}\Phi(X)S\right)^t\right)^t DZ + \tilde{c}\,(DX \wedge DY)\,DZ \\ &= R(X,Y)DZ - \tilde{c}\,(X \wedge Y)\,DZ + \hat{U}(X,Y)DZ + \tilde{c}\,(DX \wedge DY)\,DZ. \end{aligned}$$

■

Defina agora $\rho \in \Gamma(V^* \otimes V)$ e $\Psi \in \Gamma(T^*M \otimes V^* \otimes TM)$ por

$$\rho = \beta^t\beta - (c - \tilde{c})\varphi\varphi^t \tag{4.1.3}$$

e

$$\Psi(Y) = A(Y)\beta + (c-\tilde{c})Y\varphi^t + \frac{1}{2}\Phi(Y)\Omega^{-1}\rho. \tag{4.1.4}$$

Lema 4.1.2. *Se M^n tem curvatura constante c, então o mesmo vale para $\tilde{M}^n$ se, e só se, $\hat{Q}$ é identicamente nulo, em que $Q \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes End(TM))$ é dado por*

$$Q(X,Y) = \Phi(X) \circ \Omega^{-1} \circ \Psi(Y)^t. \tag{4.1.5}$$

Demonstração. Observe que $\tilde{M}^n$ tem curvatura seccional constante c se, e só se,

$$\begin{aligned} D\tilde{R}(X,Y)Z &= cD(\langle Y,Z\rangle^{\sim}X - \langle X,Z\rangle^{\sim}Y) \\ &= cD(\langle DY,DZ\rangle X - \langle DX,DZ\rangle Y) \\ &= c(DX\wedge DY)DZ. \end{aligned}$$

Decorre da Proposição 4.1.1, e do fato de M^n ter curvatura seccional constante c, que

$$\begin{aligned} D\circ\tilde{R}(X,Y) - c(DX\wedge DY)\circ D &= (R(X,Y) - \tilde{c}(X\wedge Y) + \hat{U}(X,Y) \\ &\quad +\tilde{c}(DX\wedge DY) - c(DX\wedge DY))\circ D \\ &= ((c-\tilde{c})(X\wedge Y) - (c-\tilde{c})(DX\wedge DY) \\ &\quad +\hat{U}(X,Y))\circ D. \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Agora, usando que $D = I - \Phi_{\Omega^{-1}\varphi}$, obtemos

$$\begin{aligned} X\wedge Y - DX\wedge DY &= XY^t - YX^t - DX(DY)^t + DY(DX)^t \\ &= X(\Phi(Y)\Omega^{-1}\varphi)^t + (\Phi(X)\Omega^{-1}\varphi)Y^t - (\Phi(X)\Omega^{-1}\varphi)(\Phi(Y)\Omega^{-1}\varphi)^t \\ &\quad -Y(\Phi(X)\Omega^{-1}\varphi)^t - (\Phi(Y)\Omega^{-1}\varphi)X^t + (\Phi(Y)\Omega^{-1}\varphi)(\Phi(X)\Omega^{-1}\varphi)^t \\ &= \Phi(X)\Omega^{-1}\varphi\left(Y - (1/2)\Phi(Y)\Omega^{-1}\varphi\right)^t \\ &\quad -\Phi(Y)\Omega^{-1}\varphi\left(X - (1/2)\Phi(X)\Omega^{-1}\varphi\right)^t \\ &\quad -\left(\Phi(X)\Omega^{-1}\varphi\left(Y - (1/2)\Phi(Y)\Omega^{-1}\varphi\right)^t\right)^t \\ &\quad +\left(\Phi(Y)\Omega^{-1}\varphi\left(X - (1/2)\Phi(X)\Omega^{-1}\varphi\right)^t\right)^t \\ &= \hat{H}(X,Y), \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

com $H(X,Y) = \Phi(X)\Omega^{-1}\varphi(Y - \frac{1}{2}\Phi(Y)\Omega^{-1}\varphi)^t$. Segue de (4.1.6) e (4.1.7) que

$$D\circ\tilde{R}(X,Y) - c(DX\wedge DY)\circ D = (\hat{U}(X,Y) + (c-\tilde{c})\hat{H}(X,Y))\circ D.$$

O resultado segue, uma vez que

$$\begin{aligned}
U(X,Y)+(c-\tilde{c})H(X,Y) &= \Phi(X)\Omega^{-1}\beta^t(A(Y)+\tfrac{1}{2}\Phi(Y)\Omega^{-1}\beta^t)^t \\
&\quad +(c-\tilde{c})\Phi(X)\Omega^{-1}\varphi(Y-\tfrac{1}{2}\Phi(Y)\Omega^{-1}\varphi)^t \\
&= \tfrac{1}{2}\Phi(X)\Omega^{-1}(\beta^t\beta-(c-\tilde{c})\varphi\varphi^t)(\Omega^{-1})^t\Phi(Y)^t \\
&\quad +\Phi(X)\Omega^{-1}\beta^t A(Y)^t+(c-\tilde{c})\Phi(X)\Omega^{-1}\varphi Y^t \\
&= \Phi(X)\circ\Omega^{-1}\circ\Psi(Y)^t \\
&= Q(X,Y).
\end{aligned}$$

■

Com o objetivo de obter uma redução da transformação vetorial de Ribaucour que preserve a classe das subvariedades de curvatura seccional constante, mostramos inicialmente o seguinte lema.

Lema 4.1.3. *Sejam $f: M^n(c)\to\mathbb{Q}_s^{n+p}(\tilde{c})$, com $M^n(c)$ simplesmente conexa, uma imersão isométrica satisfazendo as condições da Proposição 1.3.1 ou da Proposição 1.3.4, conforme seja $c=\tilde{c}$ ou $c\neq\tilde{c}$, respectivamente, e (v,h) e (v,h,V) as respectivas soluções dos sistemas dados nessas proposições. Seja L um endomorfismo linear inversível de um espaço vetorial Euclidiano V. Nessas condições, valem as seguintes afirmações:*

(i) Fixados $x_0\in U$ e $\varphi^0,\gamma_1^0,...,\gamma_n^0,\beta_1^0,...,\beta_p^0\in V$, existe uma única solução do sistema

$$\mathcal{R}_0=\begin{cases} i)\ \partial_i(\varphi)=v_i\gamma_i,\quad ii)\ \partial_i(\gamma_j)=h_{ji}\gamma_i,\ i\neq j\\ iii)\ \partial_i(\gamma_i)=-\sum_{j\neq i}h_{ji}\gamma_j-((L^t)^{-1}-I)\epsilon_i\beta_i-cv_i\varphi\\ iv)\ \epsilon_s\partial_i(\beta_s)=\epsilon_i h_{is}\beta_i,\ i\neq s,\quad v)\ \partial_i(\beta_i)=-\gamma_i-\sum_{s\neq i}h_{is}\beta_s.\end{cases}$$

se $c=\tilde{c}$, ou do sistema

$$\mathcal{R}_{c-\tilde{c}}=\begin{cases} i)\ \partial_i(\varphi)=v_i\gamma_i,\quad ii)\ \partial_i(\gamma_j)=h_{ji}\gamma_i,\ i\neq j\\ iii)\ \partial_i(\gamma_i)=-\sum_{j\neq i}h_{ji}\gamma_j-((L^t)^{-1}-I)\sum_s V_{is}\beta_s\quad-((L^t)^{-1}(c-\tilde{c})+\tilde{c})\,v_i\varphi,\\ iv)\ \partial_i(\beta_s)=-\epsilon_s V_{is}\gamma_i,\quad i\neq s,\end{cases}$$

se $c\neq\tilde{c}$, tal que $\varphi(x_0)=\varphi^0$, $\gamma_i(x_0)=\gamma_i^0$ e $\beta_j(x_0)=\beta_j^0$ para quaisquer $1\leq i\leq n$ e $1\leq j\leq p$.

(ii) Se $(\varphi,\gamma_1,...,\gamma_n,\beta_1,...,\beta_r)$ é uma solução de $\mathcal{R}_0$ ou $\mathcal{R}_{c-\tilde{c}}$, conforme seja $c=\tilde{c}$ ou $c\neq\tilde{c}$, respectivamente, então $\omega=d\varphi\in\Gamma(TM^*\otimes V)$ e $\beta\in\Gamma(V^*\otimes N_fM)$, definido por

$$\beta_x(v)=\sum_s\langle\beta_s(x),v\rangle\,\xi_s, \tag{4.1.8}$$

satisfazem a equação (3.2.6), o tensor Φ *dado por (3.3.24) satisfaz*

$$\Phi(Y)L + A(Y)\beta + (c - \tilde{c})Y\varphi^t = 0 \tag{4.1.9}$$

e $\omega(\partial_i) = v_i\gamma_i$ *para* $1 \leq i \leq n$. *Reciprocamente, se* φ *é tal que* $\omega = d\varphi$ *e* β *satisfazem (3.2.6) e (4.1.9), então* $(\varphi, \gamma_1, ..., \gamma_n, \beta_1, ..., \beta_r)$ *é uma solução de* $\mathcal{R}_0$ *ou* $\mathcal{R}_{c-\tilde{c}}$, *conforme* $c = \tilde{c}$ *ou* $c \neq \tilde{c}$, *respectivamente, em que* $\gamma_i = v_i^{-1}\omega(\partial_i)$ *para* $1 \leq i \leq n$ *e* $\beta_j = \epsilon_j \beta^t(\xi_j)$ *para* $1 \leq j \leq p$.

(iii) Se (ω, β), *com* $\omega = d\varphi$, *satisfaz (3.2.6) e* $\Omega \in \Gamma(V^* \otimes V)$ *satisfaz a equação (3.3.25), então existe uma seção paralela* $K \in \Gamma(V^* \otimes V)$ *tal que*

$$\Omega L + L^t\Omega^t - \rho = K,$$

com ρ *dado por (4.1.3).*

Demonstração. (i) Escrevendo ambos os sistemas $\mathcal{R}_0$ e $\mathcal{R}_{c-\tilde{c}}$ na forma (A.1.1), é imediato verificar, usando o fato de que (v, h) e (v, h, V) são as respectivas soluções dos sistemas (1.3.3) da Proposião 1.3.1 e (1.3.9) da Proposição 1.3.4, conforme seja $c = \tilde{c}$ ou $c \neq \tilde{c}$, respectivamente, que as equações de compatibilidade (A.1.2) dos respectivos sistemas $\mathcal{R}_0$ ou $\mathcal{R}_{c-\tilde{c}}$ são satisfeitas. Assim, a afirmação decorre do Apêndice A.1.

(ii) Dividimos a demonstração em dois casos.

- $c = \tilde{c}$;
  Inicialmente, temos de $\varphi \in C^\infty(M)$ e $\gamma_i = \omega(X_i)$ para $1 \leq i \leq n$, e de (1.3.1) e (1.3.2), que

$$\begin{aligned}
&\alpha(\partial_i, \omega^t(v)) + (\nabla^{V^*\otimes N^fM}_{\partial_i}\beta)v \\
&\quad = \textstyle\sum_j \langle \gamma_j, v\rangle \alpha(\partial_i, X_j) + \nabla^\perp_{\partial_i}(\sum_s \langle \beta_s, v\rangle \xi_s) - \beta(\nabla^V_{\partial_i} v) \\
&\quad = \langle \gamma_i, v\rangle \xi_i + \textstyle\sum_s \langle \partial_i(\beta_s), v\rangle \xi_s + \sum_s \langle \beta_s, \nabla_{\partial_i} v\rangle \xi_s + \sum_s \langle \beta_s, v\rangle \nabla^\perp_{\partial_i}\xi_s \\
&\qquad - \textstyle\sum_s \langle \beta_s, \nabla_{\partial_i} v\rangle \xi_s \\
&\quad = \langle \gamma_i, v\rangle \xi_i + \textstyle\sum_s \langle \partial_i(\beta_s), v\rangle \xi_s + \sum_{s\neq i} \langle \beta_s, v\rangle h_{is}\xi_i + \langle \beta_i, v\rangle \nabla^\perp_{\partial_i}\xi_i \\
&\quad = \langle \gamma_i, v\rangle \xi_i + \textstyle\sum_s \langle \partial_i(\beta_s), v\rangle \xi_s + \sum_{s\neq i} \langle \beta_s, v\rangle h_{is}\xi_i - \langle \beta_i, v\rangle \sum_{s\neq i} \epsilon_i\epsilon_s h_{is}\xi_s \\
&\quad = \Big\langle \Big(\gamma_i + \textstyle\sum_{s\neq i} \beta_s h_{is} + \partial_i(\beta_i)\Big), v\Big\rangle \xi_i + \Big\langle \sum_{s\neq i} (\partial_i(\beta_s) - \epsilon_i\epsilon_s h_{is}\beta_i), v\Big\rangle \xi_s.
\end{aligned}$$

  Portanto, $\alpha(\partial_i, \omega^t(v)) + (\nabla^{V^*\otimes N^fM}_{\partial_i}\beta)v = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$ se, e somente se, as equações (iv) e (v) de $\mathcal{R}_0$ são satisfeitas.

  Vamos verificar a equivalência para equação (4.1.9), com Φ dado por (3.3.24). Temos por (1.3.2) que

$$\begin{aligned}
\Phi_v(\partial_i) &= \Phi(\partial_i)v = \left(\nabla^{V^*\otimes TM}_{\partial_i}\omega^t\right)v - A_{\beta(v)}\partial_i + c\varphi^t(v)\partial_i \\
&= \nabla_{\partial_i}\omega^t(v) - \omega^t\left(\nabla^V_{\partial_i}v\right) - A_{\beta(v)}\partial_i + c\varphi^t(v)\partial_i \\
&= \textstyle\sum_{j\neq i}\langle\partial_i(\gamma_j), v\rangle X_j + \langle\partial_i(\gamma_i), v\rangle X_i + \sum_{j\neq i}\langle\gamma_j, v\rangle\nabla_{\partial_i}X_j \\
&\quad + \langle\gamma_i, v\rangle\nabla_{\partial_i}X_i - \textstyle\sum_s\langle\beta_s, v\rangle A_{\xi_s}\partial_i + c\varphi^t(v)\partial_i \\
&= \textstyle\sum_{j\neq i}\langle\partial_i(\gamma_j), v\rangle X_j + \langle\partial_i(\gamma_i), v\rangle X_i + \sum_{j\neq i}\langle\gamma_j, v\rangle h_{ji}X_i \\
&\quad - \langle\gamma_i, v\rangle\textstyle\sum_{j\neq i}h_{ji}X_j - \langle\beta_i, v\rangle\epsilon_iX_i + cv_i\langle\varphi, v\rangle X_i. \\
&= \textstyle\sum_{j\neq i}\langle\partial_i(\gamma_j) - h_{ji}\gamma_i, v\rangle X_j \\
&\quad + \left\langle\partial_i(\gamma_i) + \textstyle\sum_{j\neq i}\gamma_jh_{ji} - \epsilon_i\beta_i + cv_i\varphi, v\right\rangle X_i.
\end{aligned}$$

Logo, por um lado, temos por (ii) em $\mathcal{R}_0$ que

$$\Phi_v(\partial_i) = \left\langle B^0_i, v\right\rangle X_i, \tag{4.1.10}$$

com B^0_i dado por

$$B^0_i = \partial_i(\gamma_i) + \sum_{j\neq i}\gamma_jh_{ji} - \epsilon_i\beta_i + cv_i\varphi.$$

Por outro lado, pela Proposição 3.3.7, Φ_v é auto adjunto e comuta com o operador de forma, logo $\{X_1, ..., X_n\}$ também diagonaliza Φ_v, e assim, vale (4.1.10).

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\Phi(\partial_i)Lv + A_{\beta(v)}\partial_i \\
= &\langle B^0_i, Lv\rangle X_i + \textstyle\sum_s\langle\beta_s, v\rangle A_{\xi_s}\partial_i \\
= &\langle B^0_i, Lv\rangle X_i + \langle\beta_i, v\rangle\epsilon_iX_i \\
= &\langle L^tB^0_i + \epsilon_i\beta_i, v\rangle X_i.
\end{aligned}$$

Concluímos, se vale (ii) e (iii) de $\mathcal{R}_0$, então vale a equação (4.1.9), e reciprocamente, se $(\omega = d\varphi, \beta)$ satifaz a (3.2.6), então vale (ii) de $\mathcal{R}_0$ e a equação (4.1.9) é condição suficiente para (iii) de $\mathcal{R}_0$. Assim, temos (ii) para o caso de $c = \tilde{c}$.

- $c \neq \tilde{c}$;
  De (1.3.8)

$$\begin{aligned}
&\alpha(\partial_i, \omega^t(v)) + (\nabla^{V^*\otimes N^fM}_{\partial_i}\beta)v \\
&\qquad = \textstyle\sum_j\langle\gamma_j, v\rangle\alpha(\partial_i, X_j) + \nabla^\perp_{\partial_i}(\sum_s\langle\beta_s, v\rangle\xi_s) - \beta(\nabla^V_{\partial_i}v) \\
&\qquad = \langle\gamma_i, v\rangle\textstyle\sum_s\epsilon_sV_{is}\xi_s + \sum_s\langle\partial_i(\beta_s), v\rangle\xi_s + \sum_s\langle\beta_s, \nabla_{\partial_i}v\rangle\xi_s - \sum_s\langle\beta_s, \nabla_{\partial_i}v\rangle\xi_s \\
&\qquad = \textstyle\sum_s\langle(\gamma_iV_{is}\epsilon_s + \partial_i(\beta_s)), v\rangle\xi_s.
\end{aligned}$$

Portanto, $\alpha(\partial_i, \omega^t(v)) + (\nabla^{V^*\otimes N^fM}_{\partial_i}\beta)v = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$ se, e somente se, a equação (iv) de $\mathcal{R}_{c-\tilde{c}}$ é satisfeita.

Para a equivalência de (4.1.9), temos

$$\begin{aligned}
\Phi_v(\partial_i) &= \Phi(\partial_i)v = \left(\nabla^{V^*\otimes TM}_{\partial_i}\omega^t\right)v - A_{\beta(v)}\partial_i + \tilde{c}\partial_i\varphi^t(v) \\
&= \nabla_{\partial_i}\omega^t(v) - \omega^t\left(\nabla^V_{\partial_i}v\right) - A_{\beta(v)}\partial_i + \tilde{c}\partial_i\varphi^t(v) \\
&= \textstyle\sum_{j\neq i}\langle\partial_i(\gamma_j), v\rangle X_j + \langle\partial_i(\gamma_i), v\rangle X_i + \sum_{j\neq i}\langle\gamma_j, v\rangle\nabla_{\partial_i}X_j \\
&\quad + \langle\gamma_i, v\rangle\nabla_{\partial_i}X_i - \textstyle\sum_s\langle\beta_s, v\rangle A_{\xi_s}\partial_i + \tilde{c}v_iX_i\varphi^t(v) \\
&= \textstyle\sum_{j\neq i}\langle\partial_i(\gamma_j), v\rangle X_j + \langle\partial_i(\gamma_i), v\rangle X_i + \sum_{j\neq i}\langle\gamma_j, v\rangle h_{ji}X_i \\
&\quad - \langle\gamma_i, v\rangle\textstyle\sum_{j\neq i}h_{ji}X_j - \sum_s\langle\beta_s, v\rangle V_{is}X_i + \tilde{c}v_iX_i\varphi^t(v). \\
&= \textstyle\sum_{j\neq i}\langle(\partial_i(\gamma_j) - \gamma_ih_{ji}), v\rangle X_j \\
&\quad + \left\langle\left(\partial_i(\gamma_i) + \textstyle\sum_{j\neq i}\gamma_jh_{ji} - \sum_s\beta_sV_{is} + \tilde{c}v_i\varphi\right), v\right\rangle X_i.
\end{aligned}$$

Logo, por um lado, temos por (ii) em $\mathcal{R}_{c-\tilde{c}}$ que

$$\begin{aligned}
\Phi_v(\partial_i) &= \langle\partial_i(\gamma_i), v\rangle X_i + \textstyle\sum_{j\neq i}\langle\gamma_j, v\rangle h_{ji}X_i - \sum_s\langle\beta_s, v\rangle V_{is}X_i + \tilde{c}v_i\varphi^t(v)X_i \\
&= \left\langle\partial_i(\gamma_i) + \textstyle\sum_{j\neq i}h_{ji}\gamma_j - \sum_s\beta_sV_{is} + \tilde{c}v_i\varphi, v\right\rangle X_i \\
&= \langle B_i, v\rangle X_i,
\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

em que $B_i = \partial_i(\gamma_i) + \sum_{j\neq i}h_{ji}\gamma_j - \sum_s\beta_sV_{is} + \tilde{c}v_i\varphi$. Por outro lado, pela Proposição 3.3.7 Φ_v é auto adjunto e comuta com o operador forma, logo $\{X_1, ..., X_n\}$ também diagonaliza Φ_v, e assim, vale (4.1.11).

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\Phi(\partial_i)Lv + A(\partial_i)\beta(v) + (c-\tilde{c})\partial_i\varphi^t(v) \\
&\qquad = \langle B_i, Lv\rangle X_i + \textstyle\sum_s\langle\beta_s, v\rangle V_{is}X_i + (c-\tilde{c})v_i\varphi^t(v)X_i \\
&\qquad = \langle L^tB_i + \textstyle\sum_s\beta_sV_{is} + (c-\tilde{c})v_i\varphi, v\rangle X_i.
\end{aligned}$$

Concluímos, se vale (ii) e (iii) de $\mathcal{R}_{c-\tilde{c}}$, então vale a equação (4.1.9), e reciprocamente, se $(\omega = d\varphi, \beta)$ satifaz a (3.2.6), então vale a equação (ii) e a equação (4.1.9) é condição suficiente para (iii) de $\mathcal{R}_{c-\tilde{c}}$. Assim, temos (ii) para o caso de $c \neq \tilde{c}$.

(iii) Defina $\mathcal{G} = f_*\omega^t + \beta + \tilde{c}F\varphi^t$. Usando (3.2.6), (3.3.18), (3.3.19) e (3.3.25), temos

$$\begin{aligned} d(\Omega L + L^t\Omega^t - \rho)(X) &= \omega\Phi(X)L + L^t\Phi(X)^t\omega^t - d\beta^t(X)\beta - \beta^t d\beta(X) \\ &\quad +(c-\tilde{c})\omega(X)\varphi^t + (c-\tilde{c})\varphi\omega(X)^t \\ &= \omega\Phi(X)L + L^t\Phi(X)^t\omega^t + \omega(A(X)\beta + (c-\tilde{c})X\varphi^t) \\ &\quad +(A(X)\beta + (c-\tilde{c})X\varphi^t)^t\omega^t \\ &= \omega(\Phi(X)L + A(X)\beta + (c-\tilde{c})X\varphi^t) \\ &\quad +(\omega(\Phi(X)L + A(X)\beta + (c-\tilde{c})X\varphi^t))^t \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Definição 4.1.4. Sejam $f : M^n(c) \to \mathbb{Q}_s^{n+p}(\tilde{c})$ uma imersão isométrica e L um endomorfismo inversível de um espaço vetorial Euclidiano V. Uma transformada vetorial de Ribaucour $\tilde{f} = \mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega}(f)$ de f, determinada por (φ, β, Ω) como na Definição 3.3.9, é uma *L-transformada vetorial de Ribaucour* de f, ou simplesmente, uma *L-transformada* de f, se valem

$$\Phi(Y)L + A(Y)\beta + (c-\tilde{c})Y\varphi^t = 0, \tag{4.1.12}$$

e

$$\Omega L + L^t\Omega^t = \rho, \tag{4.1.13}$$

em que $\omega = d\varphi$ e ρ é dado por (4.1.3). Escrevemos $\tilde{f} = \mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega,L}(f)$

A existência de $L-$transformadas de Ribaucour para $s = 0$ é assegurada pelo seguinte resultado.

Teorema 4.1.5. *Seja $f : M^n(c) \to \mathbb{Q}^{n+p}(\tilde{c})$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana simplesmente conexa satisfazendo as condições da Proposição 1.3.1 ou da Proposição 1.3.4, conforme seja $c = \tilde{c}$ ou $c \neq \tilde{c}$, respectivamente. Seja L um endomorfismo inversível e não depreciativo de um espaço vetorial Euclidiano V, cujos autovalores com multiplicidade algébrica ímpar, caso existam, satisfaçam a (2.3.4). Então, dados $x_0 \in M$ e uma tripla (ψ_0, ν_0, β_0) L-admissível, com $\psi_0 \in V^*$, $\nu_0 \in V^* \otimes T_{x_0}M$ e $\beta_0 \in V^* \otimes N_fM(x_0)$, existem uma vizinhança aberta U de x_0 e uma única $L-$transformada $\tilde{f} = \mathcal{R}_{\varphi,\beta,L}(f|_U)$ de $f|_U$ tal que $\varphi(x_0) = \psi_0^t$, $\omega(x_0) = \nu_0^t$ e $\beta(x_0) = \beta_0$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.1.3, existem uma vizinhança aberta U contendo x_0, $\varphi\colon U \to V$ diferenciável e $\beta \in \Gamma(V^* \otimes N_fU)$, satisfazendo as equações (3.2.6) e (4.1.12), tais que $\varphi(x_0) = \psi_0^t$, $\beta(x_0) = \beta_0$ e $\omega(x_0) = \nu_0^t$, em que $\omega = d\varphi$.

Como $L : V \to V$ é um endomorfismo inversível e não depreciativo, e a tripla

(ψ_0, ν_0, β_0) é L-admissível, decorre da Proposição 2.3.1 que o sistema de equações

$$\begin{cases} X + X^t = \omega(x_0)\omega^t(x_0) + \beta^t(x_0)\beta(x_0) + \tilde{c}\varphi(x_0)\varphi^t(x_0) \\ XL + L^t X^t = \beta(x_0)^t\beta(x_0) - (c - \tilde{c})\varphi(x_0)\varphi^t(x_0), \end{cases}$$

possui uma única solução $X = \Omega_0$, a qual é inversível.

Por outro lado, pelo Lema 4.1.3, o tensor Φ dado por (3.3.24) satisfaz (4.1.12). Como f tem fibrado normal plano, temos que

$$\langle \Phi_u X, \Phi_v Y \rangle = \langle \Phi_v X, \Phi_u Y \rangle$$

para quaisquer $u, v \in V$ e $X, Y \in TM$. Logo, pela Proposição 3.3.8 existe uma única $\Omega \in \Gamma(U; End(V))$ satisfazendo (3.3.25) com $\Omega(x_0) = \Omega_0$. Decorre de (iii) do Lema 4.1.3 que Ω satisfaz (4.1.13), assim $\tilde{f} = \mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega}(f|_U)$ é uma $L-$transformada de $f|_U$.

■

O próximo teorema justifica nosso interesse na $L-$transformação.

Teorema 4.1.6. *Seja $f\colon M^n(c) \to \mathbb{Q}_s^{n+p}(\tilde{c})$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana e seja $\tilde{f} = \mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega,L}(f)\colon M^n \to \mathbb{Q}_s^{n+p}(\tilde{c})$ uma $L-$transformada de f. Então a métrica induzida em M^n por $\tilde{f}$ tem também curvatura seccional constante c.*

Demonstração. Pelo Lema 4.1.2, basta provar que $\hat{Q} \equiv 0$, em que

$$Q \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes End(TM))$$

é dado pela equação (4.1.5). De (4.1.12) temos que

$$\Psi(Y) = \Phi(Y)\Omega^{-1}\left(\frac{\rho}{2} - \Omega L\right),$$

e assim

$$Q(X,Y) = \Phi(X)\Omega^{-1}\left(\frac{\rho}{2} - L^t\Omega^t\right)(\Omega^{-1})^t\Phi(Y)^t.$$

Logo, por (4.1.13)

$$\begin{aligned} \hat{Q}(X,Y) &= \Phi(X)\Omega^{-1}(\tfrac{\rho}{2} - L^t\Omega^t)(\Omega^{-1})^t\Phi(Y)^t - \Phi(Y)\Omega^{-1}\left(\tfrac{\rho}{2} - \Omega L\right)(\Omega^{-1})^t\Phi(X)^t \\ &\quad -\Phi(Y)\Omega^{-1}\left(\tfrac{\rho}{2} - L^t\Omega^t\right)(\Omega^{-1})^t\Phi(X)^t + \Phi(X)\Omega^{-1}\left(\tfrac{\rho}{2} - \Omega L\right)(\Omega^{-1})^t\Phi(Y)^t \\ &= \Phi(X)\Omega^{-1}\left(\rho - \Omega L - L^t\Omega^t\right)(\Omega^{-1})^t\Phi(Y)^t \\ &\quad -\Phi(Y)\Omega^{-1}\left(\rho - \Omega L - L^t\Omega^t\right)(\Omega^{-1})^t\Phi(X)^t \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Proposição 4.1.7. *Seja $f : M^n(c) \to \mathbb{Q}_s^{n+p}(\tilde{c})$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana simplesmente conexa satisfazendo as condições da Proposição 1.3.1 ou da*

Proposição 1.3.4, conforme seja $c = \tilde{c}$ ou $c \neq \tilde{c}$, respectivamente. Se $c = \tilde{c}$ (resp. $c \neq \tilde{c}$), sejam $\{\xi_1, \ldots, \xi_p\}$ o referencial de $N_f M$ e (v, h) (resp., (v, h, V)) o par (resp., tripla) associado a f. Se $\tilde{f} = \mathcal{R}_{\varphi,\beta,L}(f)$ é uma $L-$transformada de f, então $\{\widetilde{\xi}_1, ..., \widetilde{\xi}_p\}$, com

$$\widetilde{\xi}_r = \mathcal{P}(\xi_r - \sum_s \epsilon_r \left\langle \beta_r, L^{-1}\Omega^{-1}\beta_s \right\rangle \xi_s), \tag{4.1.14}$$

é um referencial ortonormal de $N_{\tilde{f}}M$ satisfazendo as condições das referidas proposições, e o par $(\widetilde{v}, \widetilde{h})$ associado a $\widetilde{f}$ para $c = \tilde{c}$ é dado por

$$\widetilde{v}_j = v_j + \epsilon_j \left\langle \beta_j, L^{-1}\Omega^{-1}\varphi \right\rangle \text{ e } \widetilde{h}_{ir} = h_{ir} + \epsilon_r \left\langle \beta_r, L^{-1}\Omega^{-1}\mathcal{G}^t F_* X_i \right\rangle. \tag{4.1.15}$$

Para $c \neq \tilde{c}$, a tripla $(\tilde{v}, \tilde{h}, \tilde{V})$ associada a $\widetilde{f}$ é dada por

$$\widetilde{v}_j = v_j - \left\langle B_j, \Omega^{-1}\varphi \right\rangle, \ \widetilde{h}_{ij} = h_{ij} - \left\langle B_j, \Omega^{-1}\mathcal{G}^t F_* X_i \right\rangle \text{ e } \tilde{V}_{ir} = V_{ir} + \left\langle B_i, \Omega^{-1}\beta_r \right\rangle, \tag{4.1.16}$$

em que $B_i = -(L^t)^{-1} \left(\sum_s \epsilon_s \beta_s V_{is} - (c - \tilde{c}) v_i \varphi\right)$.

Demonstração. Faremos a demonstração para o caso em que $c = \tilde{c}$, sendo aquela para o caso $c \neq \tilde{c}$ análoga. Segue de (4.1.10) que

$$\begin{aligned} D\partial_i &= \partial_i - \Phi_{\Omega^{-1}\varphi}\partial_i = v_i X_i - B^{0t}_i \Omega^{-1}\varphi X_i \\ &= v_i X_i + \epsilon_i \left\langle \beta_i, L^{-1}\Omega^{-1}\varphi \right\rangle X_i \\ &= \widetilde{v}_i X_i, \end{aligned} \tag{4.1.17}$$

logo

$$\tilde{f}_*\partial_i = \mathcal{P} f_* D\partial_i = \tilde{v}_i \mathcal{P} f_* X_i.$$

Portanto,

$$\langle \partial_i, \partial_i \rangle^{\sim} = \left\langle \tilde{f}_*\partial_i, \tilde{f}_*\partial_i \right\rangle = \langle \mathcal{P} f_* D\partial_i, \mathcal{P} f_* D\partial_i \rangle = \tilde{v}_i^2,$$

e a primeira equação em (4.1.15) segue da Definição 3.3.9. Usando (1.3.1), (3.3.27), (4.1.8), (4.1.10) e (4.1.17), obtemos para $1 \leq i \leq n$ que

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\widetilde{v}_i}\left[\alpha_{\widetilde{f}}(\partial_i, \partial_i)\right] &= \tfrac{1}{\widetilde{v}_i}\left[\mathcal{P}\left(\alpha\left(\partial_i, D\partial_i\right) + \beta(\Omega^{-1})^t \Phi\left(\partial_i\right)^t D\partial_i\right)\right] \\ &= \tfrac{1}{\widetilde{v}_i}\left[\mathcal{P}\left(\widetilde{v}_i \xi_i + \widetilde{v}_i \beta(\Omega^{-1})^t \Phi\left(\partial_i\right)^t X_i\right)\right] \\ &= \mathcal{P}\left(\xi_i + v_i^{-1} \textstyle\sum_s \left\langle \beta_s, (\Omega^{-1})^t \Phi\left(\partial_i\right)^t \partial_i \right\rangle \xi_s\right) \\ &= \mathcal{P}\left(\xi_i + v_i^{-1} \textstyle\sum_s \left\langle \Phi(\partial_i)\Omega^{-1}\beta_s, \partial_i \right\rangle \xi_s\right) \\ &= \mathcal{P}\left(\xi_i + \textstyle\sum_s \left\langle B_i^0, \Omega^{-1}\beta_s \right\rangle \xi_s\right) \\ &= \mathcal{P}\left(\xi_i - \textstyle\sum_s \epsilon_i \left\langle \beta_i, L^{-1}\Omega^{-1}\beta_s \right\rangle \xi_s\right) \\ &= \widetilde{\xi}_i. \end{aligned}$$

Por outro lado, segue de (i) da Proposição 3.3.10, (1.3.2), (3.3.18), (3.3.25), (4.1.10) e (v) de $\mathcal{R}_0$ que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}^{\perp}_{\partial_i}\tilde{\xi}_r &= \widetilde{\nabla}^{\perp}_{\partial_i}\mathcal{P}\left(\xi_r - \textstyle\sum_s \epsilon_r \left\langle \beta_r, L^{-1}\Omega^{-1}\beta_s\right\rangle \xi_s\right)\\
&= \mathcal{P}\left[\nabla^{\perp}_{\partial_i}\left(\xi_r - \textstyle\sum_s \epsilon_r \left\langle \beta_r, L^{-1}\Omega^{-1}\beta_s\right\rangle \xi_s\right)\right]\\
&= \mathcal{P}\Big[\nabla^{\perp}_{\partial_i}\xi_r - \textstyle\sum_s \epsilon_r\partial_i \left\langle \beta_r, L^{-1}\Omega^{-1}\beta_s\right\rangle \xi_s\\
&\quad - \textstyle\sum_{s\neq i} \epsilon_r \left\langle \beta_r, L^{-1}\Omega^{-1}\beta_s\right\rangle \nabla^{\perp}_{\partial_i}\xi_s - \epsilon_r \left\langle \beta_r, L^{-1}\Omega^{-1}\beta_i\right\rangle \nabla^{\perp}_{\partial_i}\xi_i\Big]\\
&= \mathcal{P}\Big[\nabla^{\perp}_{\partial_i}\xi_r - \textstyle\sum_s \epsilon_r \left\langle \partial_i(\beta_r), L^{-1}\Omega^{-1}\beta_s\right\rangle \xi_s + \textstyle\sum_s \epsilon_r \left\langle \beta_r, L^{-1}\Omega^{-1}d\Omega(\partial_i)\Omega^{-1}\beta_s\right\rangle \xi_s\\
&\quad - \textstyle\sum_{s\neq i} \epsilon_r \left\langle \beta_r, L^{-1}\Omega^{-1}\partial_i(\beta_s)\right\rangle \xi_s - \epsilon_r \left\langle \beta_r, L^{-1}\Omega^{-1}\partial_i(\beta_i)\right\rangle \xi_i\\
&\quad - \textstyle\sum_{s\neq i} \epsilon_r \left\langle \beta_r, L^{-1}\Omega^{-1}\beta_s\right\rangle \nabla^{\perp}_{\partial_i}\xi_s - \epsilon_r \left\langle \beta_r, L^{-1}\Omega^{-1}\beta_i\right\rangle \nabla^{\perp}_{\partial_i}\xi_i\Big]\\
&= \mathcal{P}\big[h_{ir}\xi_i - \textstyle\sum_s \epsilon_i \left\langle h_{ir}\beta_i, L^{-1}\Omega^{-1}\beta_s\right\rangle \xi_s\\
&\quad - \textstyle\sum_s \epsilon_r\epsilon_i \left\langle \beta_i, L^{-1}\Omega^{-1}\beta_s\right\rangle \left\langle \beta_r, L^{-1}\Omega^{-1}\omega(X_i)\right\rangle \xi_s - \textstyle\sum_{s\neq i} \epsilon_r\epsilon_s\epsilon_i \left\langle \beta_r, L^{-1}\Omega^{-1}h_{is}\beta_i\right\rangle \xi_s\\
&\quad -\epsilon_r \Big\langle \beta_r, L^{-1}\Omega^{-1}(-\gamma_i - \textstyle\sum_{s\neq i} h_{is}\beta_s)\Big\rangle \xi_i - \textstyle\sum_{s\neq i} \epsilon_r \left\langle \beta_r, L^{-1}\Omega^{-1}\beta_s\right\rangle h_{is}\xi_i\\
&\quad +\epsilon_r \left\langle \beta_r, L^{-1}\Omega^{-1}\beta_i\right\rangle \textstyle\sum_{s\neq i} h_{is}\epsilon_i\epsilon_s\xi_s\Big]\\
&= \mathcal{P}\big[h_{ir}\xi_i - \textstyle\sum_s \epsilon_i \left\langle h_{ir}\beta_i, L^{-1}\Omega^{-1}\beta_s\right\rangle \xi_s\\
&\quad - \textstyle\sum_s \epsilon_r\epsilon_i \left\langle \beta_i, L^{-1}\Omega^{-1}\beta_s\right\rangle \left\langle \beta_r, L^{-1}\Omega^{-1}\omega(X_i)\right\rangle \xi_s + \epsilon_r \left\langle \beta_r, L^{-1}\Omega^{-1}\gamma_i\right\rangle \xi_i\\
&= (h_{ir} + \epsilon_r \left\langle \beta_r, L^{-1}\Omega^{-1}\omega(X_i)\right\rangle)\mathcal{P}[\xi_i - \textstyle\sum_s \epsilon_i \left\langle \beta_i, L^{-1}\Omega^{-1}\beta_s\right\rangle \xi_s]\\
&= \tilde{h}_{ir}\tilde{\xi}_i.
\end{aligned}$$

■

Corolário 4.1.8. *Sejam (v,h) e $(\varphi,\gamma_1,...,\gamma_n,\beta_1,...,\beta_{N-n})$ soluções de (1.3.3) e $\mathcal{R}_0$, respectivamente. Então $(\tilde{v},\widetilde{h})$ dado em (4.1.15) é uma nova solução de (1.3.3).*

Demonstração. Suponha que (v,h) e $(\varphi,\gamma_1,...,\gamma_n,\beta_1,...,\beta_{N-n})$ estejam definidas sobre um subconjunto simplesmente conexo U com $v_i(x)$ e $\tilde{v}_i(x)$ diferentes de zero para $\forall\ x\in U$ e $1\leq i\leq n$. Pela Proposição 1.3.1 existe uma imersão $f: U\rightarrow Q^N_s(c)$ com (v,h) como par associado. Pela Proposição 4.1.5 $(\varphi,\gamma_1,...,\gamma_n,\beta_1,...,\beta_{N-n})$ dá origem a um $L-$transformada $\tilde{f}: U\rightarrow \mathbb{Q}^N_s(c)$ de f cujo par associado é $(\tilde{v},\tilde{h})$. Então $(\tilde{v},\tilde{h})$ é uma nova solução de (1.3.3) pela Proposição 1.3.1. Para o caso geral, temos de $\partial_i B_j = h_{ij}Bi$

$$\begin{aligned}
\partial_i(\widetilde{v}_j) &= \partial_i(v_j - B^t_j\Omega^{-1}\varphi) = \partial_i(v_j) - h_{ij}B^t_i\Omega^{-1}\varphi + B^t_j\Omega^{-1}\partial_i(\Omega)\Omega^{-1}\varphi - B^t_j\Omega^{-1}\partial_i(\varphi)\\
&= \partial_i(v_j) - h_{ij}B^t_i\Omega^{-1}\varphi + B^t_j\Omega^{-1}\mathcal{F}^tf_*\Phi_{\Omega^{-1}\varphi}\left(\partial_i\right)\Omega^{-1}\varphi - B^t_j\Omega^{-1}\partial_i(\varphi)\\
&= \partial_i(v_j) - h_{ij}B^t_i\Omega^{-1}\varphi + B^t_j\Omega^{-1}\mathcal{F}^tB^t_i\Omega^{-1}\varphi f_*X_i + B^t_j\Omega^{-1}\mathcal{F}^tf_*\partial_i\\
&= (v_i - B^t_i\Omega^{-1}\varphi)(v_i^{-1}\partial_i(v_j) - B^t_j\Omega^{-1}\mathcal{F}^tf_*X_i) = \widetilde{v}_i(h_{ij} - B^t_j\Omega^{-1}\mathcal{F}^tf_*X_i)\\
&= \widetilde{h}_{ij}\widetilde{v}_i.
\end{aligned}$$

As outras equações seguem de maneira análoga.

■

Temos também

Corolário 4.1.9. *Sejam (v,h,V) e (φ,γ,β) soluções de (1.3.9) e $\mathcal{R}_{c-\tilde{c}}$, respectivamente.*

Então $(\tilde{v}, \tilde{h}, \tilde{V})$ dados por (4.1.16) é uma nova solução de (1.3.9).

Proposição 4.1.10. *Seja $\tilde{f} = \mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega,L}(f)$ uma L-transformada de Ribaucour de f. Definindo*

$$\tilde{\varphi} = \Omega^{-1}\varphi, \ \ , \tilde{\beta} = \mathcal{P}\beta(\Omega^{-1})^t \ \ e \ \tilde{\Omega} = \Omega^{-1}$$

temos que $f = \mathcal{R}_{\tilde{\varphi},\tilde{\beta},\tilde{\Omega},L^t}(\tilde{f})$ é uma L^t-transformada de $\tilde{f}$.

Demonstração. Pela Proposição 3.3.4, $F = \mathcal{R}_{\tilde{\varphi},\tilde{\tilde{\beta}},\tilde{\Omega}}(\tilde{F})$ é uma transformada vetorial de Ribaucour de $\tilde{F}$, em que $\tilde{\tilde{\beta}} = \tilde{\beta} + \tilde{c}\tilde{F}\tilde{\varphi}^t$, e assim, pela Proposição 3.3.8, $f = \mathcal{R}_{\tilde{\varphi},\tilde{\beta},\tilde{\Omega}}(\tilde{f})$ é uma transformada vetorial de Ribaucour de $\tilde{f}$.

Agora, segue de (4.1.13) que

$$L(\Omega^t)^{-1} + \Omega^{-1}L^t = \Omega^{-1}\rho(\Omega^t)^{-1}.$$

Logo, por (4.1.12)

$$\begin{aligned} D\tilde{\Phi}(X)L^t v + DA^{\tilde{f}}(X)\tilde{\beta}v + (c-\tilde{c})DX\tilde{\varphi}^t v \\ &= -\Phi_{\Omega^{-1}L^t v}X + \left(A_{\beta(\Omega^{-1})^t v}X + \Phi_{\Omega^{-1}\beta^t\beta(\Omega^{-1})^t v}X\right) \\ &\quad +(c-\tilde{c})DX\varphi^t(\Omega^{-1})^t v \\ &= \Phi_{L(\Omega^{-1})^t v}X - \Phi_{\Omega^{-1}\rho(\Omega^{-1})^t v}X + A_{\beta(\Omega^{-1})^t v}X + \Phi_{\Omega^{-1}\beta^t\beta(\Omega^{-1})^t v}X \\ &\quad +(c-\tilde{c})X\varphi^t(\Omega^t)^{-1}v - (c-\tilde{c})\Phi(X)\Omega^{-1}\varphi\varphi^t(\Omega^{-1})^t v \\ &= 0. \end{aligned}$$

Além disso,

$$L\tilde{\Omega}^t + \tilde{\Omega}L^t = \Omega^{-1}\beta^t\mathcal{P}^t\mathcal{P}\beta(\Omega^t)^{-1} - (c-\tilde{c})\Omega^{-1}\varphi\varphi^t(\Omega^{-1})^t = \tilde{\beta}^t\tilde{\beta} - (c-\tilde{c})\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}^t.$$

∎

4.2 O Teorema de decomposição para a L-transformação.

Nesta seção obtemos o teorema de decomposição para a $L-$transformação de subvariedades de $\mathbb{Q}^{n+p}(\tilde{c})$. Iniciamos com o seguinte lema.

Lema 4.2.1. *Sob as hipóteses do Corolário 3.3.11, o tensor*

$$\bar{\Phi}_i(X) = \nabla_X\bar{\omega}_i^t - A^j(X)\bar{\beta}_i + \tilde{c}X\bar{\varphi}_i^t$$

satisfaz

$$D_j\bar{\Phi}_i(X) = \Phi_i(X) - \Phi_j(X)\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji}. \tag{4.2.1}$$

Demonstração. Primeiramente calculemos $\bar{\omega}_i = d\bar{\varphi}_i$. Temos

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_i(X) &= \omega_i(X) - d\Omega_{ij}(X)\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j + \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}d\Omega_{jj}(X)\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\omega_j(X)\\ &= \omega_i(X) - \omega_i(\Phi_j(X)\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j) + \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\omega_j(\Phi_j(X)\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j) - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\omega_j(X)\\ &= \omega_i(D_jX) - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\omega_j(D_jX), \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

em que $D_j = I - \Phi^j_{\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j}$. Então

$$\begin{aligned}\langle\bar{\omega}_i^t(v_i), X\rangle_j &= \langle v_i, \omega_i(D_jX) - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\omega_j(D_jX)\rangle\\ &= \langle D_j\omega_i^t(v_i) - D_j\omega_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t(v_i), X\rangle\\ &= \langle\omega_i^t(v_i) - \omega_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t(v_i), D_j{}^{-1}X\rangle_j,\end{aligned}$$

em que $\langle\ ,\ \rangle_j$ denota a métrica induzida por f_j. Usando que $D_j{}^{-1}$ é simétrico com respeito a $\langle\ ,\ \rangle_j$, obtemos

$$D_j\bar{\omega}_i^t = \omega_i^t - \omega_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t.$$

Então

$$\begin{aligned}D_j(\nabla_X\bar{\omega}_i^t)(v_i) &= D_j\nabla_X^j\bar{\omega}_i^t(v_i) - D_j\bar{\omega}_i^t(\nabla_X^{V_i}v_i)\\ &= \nabla_X^j\omega_i^t(v_i) - \nabla_X^j\omega_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t(v_i) - \Phi_j(X)\Omega_{jj}^{-1}\omega_j\omega_i^t(v_i)\\ &\quad +\Phi_j(X)\Omega_{jj}^{-1}\omega_j\omega_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t(v_i) + \omega_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Phi_j(X)^t\omega_i^t(v_i)\\ &\quad -\omega_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Phi_j(X)^t\omega_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t(v_i) + \omega_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t(\nabla_X^{V_i}v_i) - \omega_i^t(\nabla_X^{V_i}v_i).\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}-\nabla_X^j\omega_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t(v_i) + \omega_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t(\nabla_X^{V_i}v_i) &= -(\nabla_X\omega_j^t)(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t(v_i)\\ &\quad +\omega_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Phi_j(X)^t\omega_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t(v_i) - \omega_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Phi_j(X)^t\omega_i^t(v_i).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}D_j(\nabla_X\bar{\omega}_i^t)(v_i) &= (\nabla_X\omega_i^t)(v_i) - (\nabla_X\omega_j^t)(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t(v_i) - \Phi_j(X)\Omega_{jj}^{-1}\omega_j\omega_i^t(v_i)\\ &\quad +\Phi_j(X)\Omega_{jj}^{-1}\omega_j\omega_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t(v_i).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}-D_jA^j_{\bar{\beta}_i(v_i)}X &= -A_{\beta_i(v_i)}X + A_{\beta_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t(v_i)}X - \Phi_j(X)\Omega_{jj}^{-1}\beta_j^t\beta_i(v_i)\\ &\quad +\Phi_j(X)\Omega_{jj}^{-1}\beta_j^t\beta_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t(v_i)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} D_j(X)\bar{\varphi}_i^t &= D_j(X)(\varphi - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j)^t \\ &= (X - \Phi_j(X)\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j)(\varphi_i^t - \varphi_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t) \\ &= X\varphi_i^t - X\varphi_i^t(\Omega_{jj}^{-1})^t{\Omega_{ij}}^t - \Phi_j(X)\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j\varphi_i^t \\ &\quad +\Phi_j(X)\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j\varphi_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} D_j\bar{\Phi}_i(X)v_i = \Phi_i(X)v_i &- \Phi_j(X)(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t(v_i) - \Phi_j(X)\Omega_{jj}^{-1}\omega_j\omega_i^t(v_i) \\ &+\Phi_j(X)\Omega_{jj}^{-1}\omega_j\omega_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t(v_i) - \Phi_j(X)\Omega_{jj}^{-1}\beta_j^t\beta_i(v_i) \\ &+\Phi_j(X)\Omega_{jj}^{-1}\beta_j^t\beta_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t(v_i) \\ &-\Phi_j(X)\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j\varphi_i^t + \Phi_j(X)\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j\varphi_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t. \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

Usando que $\mathcal{G}_j^t\mathcal{G}_j = \omega_j\omega_j^t + \beta_j^t\beta_j + \tilde{c}\varphi_j\varphi_j^t$ e $\mathcal{G}_j^t\mathcal{G}_i = \omega_j\omega_i^t + \beta_j^t\beta_i + \tilde{c}\varphi_j\varphi_i^t$, obtemos

$$\begin{aligned} (\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t + \Omega_{jj}^{-1}\omega_j\omega_i^t - \Omega_{jj}^{-1}\omega_j\omega_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{jj}^t + \Omega_{jj}^{-1}\beta_j^t\beta_i - \Omega_{jj}^{-1}\beta_j^t\beta_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t \\ -\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j\varphi_i^t + \Omega_{jj}^{-1}\varphi_j\varphi_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t \\ = (\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t + \Omega_{jj}^{-1}\mathcal{G}_j^t\mathcal{G}_i - \Omega_{jj}^{-1}\mathcal{G}_j^t\mathcal{G}_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t \\ = (\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t + \Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ij}^t + \Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ii} - (\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t - \Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ij}^t \\ = \Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ii}. \end{aligned}$$

Substituindo em (4.2.3) obtemos (4.2.1).

■

Teorema 4.2.2. *Seja $f\colon M^n(c) \to \mathbb{Q}^{n+p}(\tilde{c})$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana e seja $\mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega,L}(f)\colon \tilde{M}^n \to \mathbb{Q}^{n+p}(\tilde{c})$ uma L-transformada de f tal que $L = L_1 \oplus L_2$ com respeito a uma decomposição ortogonal $V = V_1 \oplus V_2$. Considere φ_j, β_j, Ω_{ij} como em (3.3.28) e sejam $\mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega}(\varphi_i, \beta_i, \Omega_{ii}) := (\bar{\varphi}_i, \bar{\beta}_i, \bar{\Omega}_{ii})$ dados por (3.3.29). Suponha que $\tilde{c} \geq 0$, ou que $\tilde{c} < 0$ e $c \in (-\infty, \tilde{c}) \cup (0, \infty)$. Então $(\varphi_j, \beta_j, \Omega_{jj}, L_j)$ define uma L_j-transformada de f para $1 \leq j \leq 2$, $(\bar{\varphi}_i, \bar{\beta}_i, \bar{\Omega}_{ii}, L_i)$ uma L_i-transformada de f_j para $1 \leq i \neq j \leq 2$, e*

$$\mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega,L}(f) = \mathcal{R}_{\bar{\varphi}_i,\bar{\beta}_i,\bar{\Omega}_{ii},L_i}(\mathcal{R}_{\varphi_j,\beta_j,\Omega_{jj},L_j}(f)). \tag{4.2.4}$$

As mesmas conclusões valem se $\tilde{c} < 0$ e $c \in [\tilde{c}, 0]$, desde que Ω_{jj} seja inversível para $1 \leq j \leq 2$.

Demonstração. Como $\mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega}(f)$ é uma L- transformada de f, temos que

$$\Phi(X)L + A(X)\beta + (c - \tilde{c})X\varphi^t = 0$$

e

$$\Omega L + L^t\Omega^t - \rho = 0,$$

com ρ dado por (4.1.3). Desde que $L = L_1 \oplus L_2$, essas equações são equivalentes às equações

$$\Theta_{L_j}(X) := \Phi_j(X)L_j + A(X)\beta_j + (c-\tilde{c})X\varphi_j^t = 0,$$

e

$$\Omega_{ii}L_i + L_i^t\Omega_{ii}^t - \left(\beta_i^t\beta_i - (c-\tilde{c})\varphi_i\varphi_i^t\right) = 0, \quad \Omega_{ij}L_j + L_i^t\Omega_{ji}^t - \left(\beta_i^t\beta_j - (c-\tilde{c})\varphi_i\varphi_j^t\right) = 0,$$

$1 \leq i, j \leq 2$.

Além disso, $(\varphi^t, \omega^t, \beta)$ é L-admissível. Se $\tilde{c} \geq 0$, ou se $\tilde{c} < 0$ e $c \in (-\infty, \tilde{c}) \cup (0, \infty)$, decorre do Teorema 2.3.5 e da Afirmação 1 de sua demonstração, que $E_\alpha \cap S = \{0\}$ (respectivamente, $E_\alpha \cap S^c = \{0\}$) se α for um autovalor real de L com multiplicidade algébrica ímpar (respectivamente, autovalor complexo). Isto implica que $E_{\alpha_j} \cap S_j = \{0\}$ (respectivamente, $E_{\alpha_j} \cap S_j^c = \{0\}$), em que E_{α_j} é o autoespaço de L_j com α_j sendo um autovalor real com multiplicidade algébrica ímpar (respectivamente, autovalor complexo),

$$S_j = \begin{cases} \ker \omega_j^t \cap \ker \beta_j, & \text{se } c = \tilde{c} = 0, \\ \ker \varphi_j^t \cap \ker \omega_j^t \cap \ker \beta_j, & \text{se } (c, \tilde{c}) \neq (0, 0). \end{cases}$$

e S_j^c o complexificado de S_j. Assim, novamente pelo Teorema 2.3.5 e a Afirmação 1, temos que $(\varphi_j^t, \omega_j^t, \beta_j^t)$ é L_j-admissível, ou seja, Ω_{jj} é inversível. Portanto, pelo Teorema 3.3.5 e segundo a Definição 4.1.4, f_j é uma L_j-transformada de f.

Para $\tilde{c} < 0$ e $c \in [\tilde{c}, 0]$, f_j é uma L_j-transformada de f desde que Ω_{jj} seja inversível.

Para mostrar que $(\bar{\varphi}_i, \bar{\beta}_i, \bar{\Omega}_{ii}, L_i)$ produz uma L_i-transformada de f_j para $1 \leq i \neq j \leq 2$, devemos provar que

$$\bar{\Theta}_i(X) := \bar{\Phi}_i(X)L_i + A^j(X)\bar{\beta}_i + (c-\tilde{c})X\bar{\varphi}_i^t = 0$$

e

$$\bar{\Omega}_{ii}L_i + L_i^t\bar{\Omega}_{ii}^t - \left(\bar{\beta}_i^t\bar{\beta}_i - (c-\tilde{c})\bar{\varphi}_i\bar{\varphi}_i^t\right) = 0.$$

Temos, por (4.2.1), que

$$\begin{aligned}
D_j\bar{\Theta}_i(X) &= D_j\bar{\Phi}_i(X)L_i + D_jA^j(X)\bar{\beta}_i + (c-\tilde{c})D_jX\bar{\varphi}_i^t \\
&= \Phi_i(X)L_i - \Phi_j(X)\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji}L_i + D_jA^j(X)\mathcal{P}_j(\beta_i - \beta_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t) \\
&\quad +(c-\tilde{c})D_j(X)(\varphi_i - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j)^t \\
&= \Phi_i(X)L_i - \Phi_j(X)\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji}L_i + A(X)(\beta_i - \beta_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t) \\
&\quad +\Phi_j(X)(\Omega_{jj}^{-1}\beta_j^t(\beta_i - \beta_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t) \\
&\quad +(c-\tilde{c})(X - \Phi_j(X)\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j)(\varphi_i^t - \varphi_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t) \\
&= \Phi_i(X)L_i + A(X)\beta_i + (c-\tilde{c})X\varphi_i^t - \Phi_j(X)\Omega_{jj}^{-1}(\Omega_{ji}L_i - \beta_j^t\beta_i + (c-\tilde{c})\varphi_j\varphi_i^t) \\
&\quad +(\Phi_j(X)\Omega_{jj}^{-1}(-\beta_j^t\beta_j + (c-\tilde{c})\varphi_j\varphi_j^t) - A(X)\beta_j - (c-\tilde{c})X\varphi_j^t)(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t) \\
&= \Phi_j(X)\Omega_{jj}^{-1}L_j^t\Omega_{ij}^t - \Phi_j(X)\Omega_{jj}^{-1}L_j^t\Omega_{jj}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t = 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
&\bar{\Omega}_{ii}L_i + L_i^t\bar{\Omega}_{ii}^t - (\bar{\beta}_i^t\bar{\beta}_i - (c-\tilde{c})\bar{\varphi}_i\bar{\varphi}_i^t) \\
&\quad = (\Omega_{ii} - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji})L_i + L_i^t(\Omega_{ii}^t - \Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t) \\
&\quad -(\beta_i^t - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\beta_j^t)(\beta_i - \beta_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t) + (c-\tilde{c})(\varphi_i - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j)(\varphi_i^t - \varphi_j^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t) \\
&\quad = \Omega_{ii}L_i + L_i^t\Omega_{ii}^t - \beta_i^t\beta_i + (c-\tilde{c})\varphi_i\varphi_i^t - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}(\Omega_{ji}L_i - \beta_j^t\beta_i + (c-\tilde{c})\varphi_j\varphi_i^t) \\
&\quad -(L_i^t\Omega_{ji}^t - \beta_i^t\beta_j + (c-\tilde{c})\varphi_i\varphi_j^t)(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}(\beta_j^t\beta_j - (c-\tilde{c})\varphi_j\varphi_j^t)(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t \\
&\quad = \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}L_j^t\Omega_{ij}^t + \Omega_{ij}L_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}(\Omega_{jj}L_j + L_j^t\Omega_{jj}^t)(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t = 0.
\end{aligned}$$

A igualdade (4.2.4) segue do Teorema 3.3.5.

■

Dados $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$, com $L_1 \neq L_2$, dizemos que um conjunto $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ de imersões isométricas $f_i : M_i(c) \to \mathbb{Q}^{n+p}(\tilde{c})$, $1 \leq i \leq 4$, é um (L_1, L_2)-*quadrilátero de Bianchi* se, para cada uma delas, ambas as imersões precedente e subsequente (pensadas como pontos em um círculo orientado) são, respectivamente, L_l e L_t transformadas de Ribaucour dessa, com $t \neq l \in \{1, 2\}$, e os tensores de Codazzi associados às transformações comutam.

Como consequência do Teorema 4.2.2, obtemos a seguinte proposição provada em [12] (veja o Teorema 18 em [12]).

Proposição 4.2.3. *Seja $f : M^n(c) \to \mathbb{Q}^{n+p}(\tilde{c})$ uma imersão isométrica. Suponha que $\tilde{c} \geq 0$, ou que $\tilde{c} < 0$ e $c \in (-\infty, \tilde{c}) \cup (0, \infty)$. Dados $L_1 \neq L_2 \in \mathbb{R}$, seja*

$$f_r = \mathcal{R}_{\varphi_r, \beta_r}(f) : M^n(c) \to \mathbb{Q}^{n+p}(\tilde{c})$$

uma L_r-transformada escalar de Ribaucour de f, com $1 \leq r \leq 2$. Se $[A_{\beta_1}, A_{\beta_2}] = 0$, então existe uma única imersão $\tilde{f}\colon M^n(c) \to \mathbb{Q}^{n+p}(\tilde{c})$ tal que $\{f, f_1, f_2, \tilde{f}\}$ forma um

(L_1, L_2)-quadrilátero de Bianchi.

Demonstração. Temos pela equação (3.1.4) que

$$\Phi_r := \Phi_{\varphi_r,\beta_r}(X) = \frac{1}{L_r}\left(-A(X)\beta_r - (c-\tilde{c})X\varphi_r\right), \tag{4.2.5}$$

com $\beta_r \in N_f M$ e $\varphi_r \in C^\infty(M),\ r = 1,2$. Como $[A_{\beta_1}, A_{\beta_2}] = 0$, segue que $[\Phi_1, \Phi_2] = 0$. Assim, o Corolário 3.3.12 garante a existência de $\Omega_{12},\ \Omega_{21} \in C^\infty(M)$ satisfazendo as equações em (3.3.32) com $\mathcal{G}_r = F_*(\nabla\varphi_r) + \beta_r + \tilde{c}F\varphi_r,\ r = 1,2$, em que $F = i \circ f$ e $i\colon \mathbb{Q}^{n+p}(\tilde{c}) \to \mathbb{R}^{n+p+1}_{\epsilon_0}$ é a inclusão umbílica. Além disso,

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \text{ e } \beta = dx_1 \otimes \beta_1 + dx_2 \otimes \beta_2,$$

pertencem a $\mathcal{D}^{\tilde{c}}(f)$ e

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{bmatrix},$$

em que $\Omega_{rr} = \frac{1}{2}\left\langle \mathcal{G}_r, \mathcal{G}_r \right\rangle,\ r = 1,2$, satisfaz as equações (3.3.25) e (3.3.26), para $V = \mathbb{R}^2$ e

$$\mathcal{G} = dx_1 \otimes \mathcal{G}_1 + dx_2 \otimes \mathcal{G}_2.$$

Agora, definindo $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $Le_i = L_i e_i,\ 1 \leq i \leq 2$, temos que a quadra $(\varphi, \beta, \Omega, L)$ satisfaz a equação (4.1.12), a qual é equivalente a (4.2.5). Para a equação (4.1.13), basta observar que tal equação é equivalente às equações

$$\begin{aligned} 0 &= 2L_r\Omega_{rr} - \rho_{rr} \\ &= L_r\left(||\beta_r||^2 + ||\nabla\varphi_r||^2 + \tilde{c}\varphi_r^2\right) - ||\beta_r||^2 + (c-\tilde{c})\varphi_r^2 \\ &= (L_r - 1)||\beta_r||^2 + \left((c-\tilde{c}) + L_r\tilde{c}\right)\varphi_r^2 + L_r||\nabla\varphi_r||^2,\ r = 1,2, \end{aligned}$$

e

$$\Omega_{ij}L_j + L_i\Omega_{ji} - \rho_{ij} = 0,\ i,j \in \{1,2\},$$

em que $\rho_{ij} = \langle\beta_i, \beta_j\rangle - (c-\tilde{c})\varphi_i\varphi_j$. A primeira é justamente a equação (3.1.5) e, para que valha a segunda, escrevendo $\Omega = \frac{1}{2}\mathcal{G}^t\mathcal{G} + \Omega_a$, basta tomar, em um ponto $x_0 \in M^n$,

$$-(\Omega_a(x_0))_{21} = (\Omega_a(x_0))_{12} = \frac{1}{L_2 - L_1}\left(\rho_{12}(x_0) - \frac{1}{2}(L_2 + L_1)\left\langle \mathcal{G}_1(x_0), \mathcal{G}_2(x_0)\right\rangle\right).$$

Vamos verificar a inversibilidade de Ω. Como Ω_{rr} é não nulo para $r = 1,2$, segue que φ_r e β_r são também não nulos para $c \neq \tilde{c}$ ou que β_r é não nulo para $c = \tilde{c}$, e em ambos os casos, $E_{L_r} \cap ker\varphi^t \cap ker\beta = \{0\}$, em que E_{L_r} é o autoespaço do operador L associado ao autovalor L_r. Logo, de (ii) do Corolário 2.3.6 temos que $(\varphi^t, \omega^t, \beta)$ é L-admissível, ou seja, Ω é inversível. Assim, conforme as Definições 3.3.9 e 4.1.4, $\tilde{f} = \mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega}(f)$ é uma L-transformada de f.

Definindo $\mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega}(\varphi_i, \beta_i, \Omega_{ii}) := (\bar{\varphi}_i, \bar{\beta}_i, \bar{\Omega}_{ii})$ por (3.3.29) temos, pelo Teorema

4.2.2, que $\mathcal{R}_{\bar{\varphi}_i,\bar{\beta}_i,\bar{\Omega}_{ii}}(f_j)$ é uma L_i-transformada de f_j, e que vale a equação (4.2.4), e assim, pela Proposição 4.1.10, $\{f, f_1, f_2, \tilde{f}\}$ é um $(L_1, L_2)-$quadrilátero de Bianchi.

Para a unicidade, temos de $\{f, f_1, f_2, \tilde{f}\}$ ser um (L_1, L_2)-quadrilátero de Bianchi que f_i é uma L_i-transformada de f, com $i = 1, 2$, e que $\tilde{f}$ é uma L_j-transformada de f_i, $1 \leq i \neq j \leq 2$, e portanto, por (4.2.4), $\tilde{f}$ é uma L-transformada vetorial de f.

■

4.2.1 O L-Cubo

Para cada $r \in \{1, ..., k\}$, considere o conjunto de multi-índices

$$\Lambda_r = \{\alpha_r = \{i_1, ..., i_r\} \subset \{1, ..., k\} \,:\, \alpha_r \,\text{com}\; r \text{ elementos distintos}\}.$$

Dados $L_1, ..., L_k \in \mathbb{R}$, com $L_i \neq L_j$ para quaisquer $1 \leq i \neq j \leq k$, um $(L_1, ..., L_k)$-*cubo de Bianchi* é uma $(k+1)$-upla $(\mathcal{C}_0, ..., \mathcal{C}_k)$, em que cada $\mathcal{C}_r$ é uma família com $\binom{k}{r}$ elementos de imersões isométricas $f_{\alpha_r} : M^n(c) \to \mathbb{Q}^{n+p}(\tilde{c})$ indexada em Λ_r, satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) Dada $\hat{f} = f_{\alpha_{s+1}} \in \mathcal{C}_{s+1}$, se $\alpha_{s+1} = \alpha_s \cup \{i_j\}$ então $\hat{f}$ é uma L_{i_j}-transformada de $f_{\alpha_s} \in \mathcal{C}_s$.

(ii) Se $\alpha_{s+1} = \alpha_{s-1} \cup \{i_l, i_j\}$, então o quadrilátero $\{f_{\alpha_{s-1}}, f_{\alpha_{s-1}\cup\{i_l\}}, f_{\alpha_{s-1}\cup\{i_j\}}, f_{\alpha_{s+1}}\}$ é um (L_{i_l}, L_{i_j})-quadrilátero de Bianchi.

Teorema 4.2.4. *Seja $f : M^n(c) \to \mathbb{Q}^{n+p}(\tilde{c})$ uma imersão isométrica. Suponha que $\tilde{c} \geq 0$, ou que $\tilde{c} < 0$ e $c \in (-\infty, \tilde{c}) \cup (0, \infty)$. Para cada $1 \leq i \leq k$, seja*

$$f_i = \mathcal{R}_{\varphi_i,\beta_i}(f) : M^n(c) \to \mathbb{Q}^{n+p}(\tilde{c})$$

uma L_i-transformada de Ribaucour de f, com $L_i \neq L_j$, $i \neq j$. Se $[A_{\beta_i}, A_{\beta_j}] = 0$, $i \neq j$ e f_i não pertence à família associada a $\{f_j, f_l\}$ quaisquer que sejam $1 \leq i \neq j \neq l \neq i \leq k$, então existe um único $(L_1, ..., L_k)-$cubo de Bianchi $(\mathcal{C}_0, ..., \mathcal{C}_k)$ tal que $\mathcal{C}_0 = \{f\}$ e $\mathcal{C}_1 = \{f_1, ..., f_k\}$.

Demonstração. Vamos primeiramente provar a existência. Pela Proposição 4.2.3, para quaisquer $i, j \in \{1, ..., k\}$ com $i \neq j$, existe uma única $\tilde{f}_{ij} = \mathcal{R}_{\varphi^{ij},\beta^{ij},\Omega^{ij},L^{ij}}(f)$ tal que $\{\tilde{f}_{ij}, f_i, f_j, f\}$ é um (L_i, L_j)-quadrilátero de Bianchi. Assim, ficam determinados os conjuntos $\mathcal{C}_0 = \{f\}$, $\mathcal{C}_1 = \{f_1, ..., f_k\}$ e $\mathcal{C}_2 = \{f_{ij},\; 1 \leq i \neq j \leq k\}$.

Com respeito à base ortonormal $\{e_1, ..., e_k\}$ defina L por $Le_i = L_i e_i,\; 1 \leq i \leq k$, ou seja,

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & L_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & ... & L_k \end{bmatrix}.$$

Defina ainda $\varphi \in \Gamma(\mathbb{R}^k)$, $\beta \in \Gamma((\mathbb{R}^k)^* \otimes N_f M)$ e $\Omega \in \Gamma((\mathbb{R}^k)^* \otimes \mathbb{R}^k)$ por

$$\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_k), \;\; \beta = \sum_{i=1}^{k} dx_i \otimes \beta_i \tag{4.2.6}$$

e

$$\Omega = \sum_{i=1}^{k} \Omega_{ii} dx_i \otimes e_i + \sum_{i<j} \left(\left\langle \Omega^{ij}(e_1), e_2 \right\rangle dx_i \otimes e_j + \left\langle \Omega^{ij}(e_2), e_1 \right\rangle dx_j \otimes e_i \right). \tag{4.2.7}$$

É fácil verificar que $(\varphi, \beta) \in \mathcal{D}^{\tilde{c}}$ e que Ω satisfaz as equações (3.3.25) e (3.3.26), com

$$\mathcal{G} = \sum_{i=1}^{k} dx_i \otimes (f_* \nabla \varphi_i + \beta_i + \tilde{c} F \varphi_i^t).$$

As equações (4.1.12) e (4.1.13) são equivalentes às equações

$$\Phi_j(X) L_j + A(X)\beta_j + (c - \tilde{c}) X \varphi_j^t = 0, \tag{4.2.8}$$

e

$$2\Omega_{ii} L_i - \rho_{ii} = 0, \;\;\; \Omega_{ij} L_j + L_i \Omega_{ji} - \rho_{ij} = 0, \tag{4.2.9}$$

$1 \le i \ne j \le k$. A equação (4.2.8) e a primeira equação em (4.2.9) são justamente as equações (3.1.4) e (3.1.5) com $C_i = 1/L_i$, $1 \le i \le k$. A segunda equação em (4.2.9) segue do fato de que

$$\Omega_{ij}(x_0) = \frac{1}{L_j - L_i} \left(\rho_{ij}(x_0) - L_i \left\langle \mathcal{G}_i(x_0), \mathcal{G}_j(x_0) \right\rangle \right),$$

para algum $x_0 \in M$, como visto na demonstração da Proposição 4.2.3.

Para a inversibilidade de Ω, temos de Ω_{ll} ser não nulo $l = 1, 2, .., k$, que φ_l e β_l são também não nulos para $c \ne \tilde{c}$ ou que β_l é não nulo para $c = \tilde{c}$, e em ambos os casos $E_{L_l} \cap ker\varphi^t \cap ker\beta = \{0\}$, para $l = 1, 2, ..., k$. Logo, de (ii) do Corolário 2.3.6 temos que $(\varphi^t, \omega^t, \beta)$ é L-admissível, ou seja, Ω é inversível. Portanto, pelas Definições 3.3.9 e 4.1.4 temos $\mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega,L}(f)$.

Agora, para qualquer $\alpha_r = \{i_1, ..., i_r\} \in \Lambda_r$, considere a submatriz Ω_{α_r} de Ω obtida escolhendo -se as colunas e linhas de Ω com índices em α_r. Defina

$$\varphi^{\alpha_r} = (\varphi_{i1}, ..., \varphi_{ir}), \;\; \beta^{\alpha_r} = \sum_{j=1}^{r} dx_{i_j} \otimes \beta_{i_j}, \;\; \Omega^{\alpha_r} = \Omega_{\alpha_r} \text{ e } L^{\alpha_r} = \begin{bmatrix} L_{i_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & L_{i_2} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & ... & L_{i_r} \end{bmatrix}. \tag{4.2.10}$$

Definimos $\mathcal{C}_r$ como a família de $\binom{k}{r}$ elementos de L^{α_r}-transformadas de f.

Dada $f_{\alpha_{s+1}} = \mathcal{R}_{\varphi^{\alpha_{s+1}},\beta^{\alpha_{s+1}},\Omega^{\alpha_{s+1}},L^{\alpha_{s+1}}}(f) \in \mathcal{C}_{s+1}$, $1 \leq s \leq k-1$ e $\alpha_{s+1} = \{i_1, ..., i_{s+1}\} \subset \{1, ..., k\}$, se $\alpha_{s+1} = \alpha_{s-1} \cup \{i_l, i_j\}$, temos pelo Teorema 4.2.2 que

$$f_{\alpha_{s-1}\cup\{i_t\}} = \mathcal{R}_{\varphi^{\alpha_{s-1}\cup\{i_t\}},\beta^{\alpha_{s-1}\cup\{i_t\}},\Omega^{\alpha_{s-1}\cup\{i_t\}},L^{\alpha_{s-1}\cup\{i_t\}}}(f) \in \mathcal{C}_s,\ t \in \{l, j\},$$

e $f_{\alpha_{s+1}} = \mathcal{R}_{\bar{\varphi}_{i_y},\bar{\beta}_{i_y},L_{i_y}}(f_{\alpha_{s-1}\cup\{i_t\}})$, $t \neq y$ em $\{l, j\}$. Novamente pelo Teorema 4.2.2, $f_{\alpha_{s-1}\cup\{i_t\}} = \mathcal{R}_{\varphi_{i_t},\beta_{i_t},L_{i_t}}(f_{\alpha_{s-1}})$. Portanto,

$$f_{\alpha_{s+1}} = \mathcal{R}_{\bar{\varphi}_{i_t},\bar{\beta}_{i_t},L_{i_t}}(\mathcal{R}_{\varphi_{i_y},\beta_{i_y},L_{i_y}}(f_{\alpha_{s-1}})),\ t \neq y \text{ em } \{l, j\},$$

e assim, $\{f_{\alpha_{s-1}}, f_{\alpha_{s-1}\cup\{i_l\}}, f_{\alpha_{s-1}\cup\{i_j\}}, f_{\alpha_{s+1}}\}$ é um (L_{i_l}, L_{i_j})-quadrilátero de Bianchi.

A unicidade segue do Teorema 3.3.13.

$\blacksquare$

Capítulo 5

A P-transformação de Ribaucour

Neste capítulo obtemos uma transformação para a classe das subvariedades Lagrangianas de dimensão n com curvatura e índice de nulidade relativa nulos de $\mathbb{R}^{2n}$. Tal transformação é obtida por uma redução da L-transformação estudada no capítulo anterior, expressa em termos de um operador linear P de um espaço vetorial Euclidiano V, a qual chamamos de P-transformação. Determinamos as P-transformações que preservam a classe de subvariedades Lagrangianas de dimensão n com curvatura nula contidas em $\mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$, as quais são obtidas como levantamentos de subvariedades Lagrangianas de curvatura nula e dimensão $n-1$ de $\mathbb{CP}^{n-1}$. Obtemos, mais geralmente, uma P-transformação para a classe de subvariedades de curvatura constante c e dimensão n de $\mathbb{S}_\epsilon^{2n+1}(c)$ que são horizontais com respeito à fibração de Hopf de $\mathbb{S}_\epsilon^{2n+1}(c)$, a qual induz uma transformação para a classe das subvariedades Lagrangianas de dimensão n, curvatura c e índice de nulidade relativa nulo de um espaço complexo de dimensão (complexa) n e curvatura holomorfa constante $4c$. Obtemos ainda um teorema de decomposição para a P-transformação, do qual decorre, em particular, que uma P-transformação determinada por um tensor *simétrico* P é a iterada de $\dim V$ transformadas escalares de Ribaucour do mesmo tipo. Em particular, mostramos como obter, a partir de k P-transformadas escalares de uma subvariedade Lagrangiana de dimensão n com curvatura e índice de nulidade relativa nulos de $\mathbb{R}^{2n}$, fórmulas explícitas para uma família de novas subvariedades da mesma classe, a qual está em correspondência com os vértices de um cubo k-dimensional, do qual as k subvariedades iniciais são os vértices contíguos àquele associado à subvariedade dada. Um resultado análogo é obtido para a classe das subvariedades de curvatura constante c e dimensão n que são horizontais com respeito à fibração de Hopf de $\mathbb{S}_\epsilon^{2n+1}(c)$.

5.1 A P-transformação de subvariedades Lagrangianas com curvatura nula.

Com o intuito de introduzir a P-transformação para a classe das imersões isométricas Lagrangianas $f\colon M^n(0) \to \mathbb{R}^{2n}$ com $\nu_f \equiv 0$, mostramos inicialmente a seguinte proposição.

Proposição 5.1.1. *Sejam $f\colon M^n(0) \to \mathbb{R}^{2n}$ uma imersão isométrica Lagrangiana com $\nu_f \equiv 0$, $(u_1, \ldots, u_n)$ coordenadas principais em um aberto $U \subset M^n(0)$ dadas pelo Corolário 1.4.3 e (v, h) a solução associada do sistema (1.4.5). Seja $P : V \to V$ um operador linear inversível de um espaço vetorial Euclidiano V. Então valem as seguintes afirmações:*

(i) Fixados $x_0 \in U$ e $\varphi^0, \gamma_1^0, \ldots, \gamma_n^0 \in V$, existe uma única solução $(\varphi, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ do sistema

$$\begin{cases} i)\ \partial_i(\varphi) = v_i\gamma_i, & ii)\ \partial_i(\gamma_i) = -(P^t)^{-1}\gamma_i - \sum_{j\neq i}\gamma_j h_{ij}, \\ iii)\ \partial_i(\gamma_j) = h_{ij}\gamma_i\ j \neq i. \end{cases} \tag{5.1.1}$$

tal que $\varphi(x_0) = \varphi^0$ e $\gamma_i(x_0) = \gamma_i^0$ para todo $1 \leq i \leq n$.

(ii) Se $(\varphi, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ é uma solução de (5.1.1), então $\omega = d\varphi$ satisfaz

$$\alpha(X, \omega^t(v)) + Jf_*\left((\nabla_X^{V^*\otimes TM}\omega^t)Pv\right) = 0, \tag{5.1.2}$$

e $\omega(\partial_i) = v_i\gamma_i$ para $1 \leq i \leq n$. Reciprocamente, se φ é tal que $\omega = d\varphi$ satisfaz (5.1.2), então $(\varphi, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ é uma solução de (5.1.1), em que $\gamma_i = v_i^{-1}\omega(\partial_i)$ para $1 \leq i \leq n$.

(iii) Se

$$\beta = Jf_*\omega^t P, \tag{5.1.3}$$

então φ é tal que $\omega = d\varphi$ satisfaz a (5.1.2) se, e só se, (φ, β) satisfaz (3.2.6).

(iv) Se (φ, β) satisfaz (3.2.6), então $(\varphi, \beta) \in \mathcal{D}(f)$ e o tensor definido em (3.2.7) satisfaz

$$\Phi(X)(P^2 + I)^{-1}P^2 = -A(X)\beta,\ \forall\ X \in TM. \tag{5.1.4}$$

(v) Se $(\varphi, \beta) \in \mathcal{D}(f)$ e Ω satisfaz (3.2.9), então existe uma seção paralela $K \in \Gamma(V^*\otimes V)$ tal que

$$\Omega^t P + P^t\Omega^t + T\rho = K,$$

em que $T = -P^t - (P^t)^{-1}$ e $\rho = P^t\omega\omega^t P$.

Demonstração. (i) Escrevendo o sistema (5.1.1) na forma (A.1.1), é imediato verificar, usando o fato de (v, h) ser uma solução de (1.4.5) e a simetria de $h = (h_{ij})$, que as equações de compatibilidade (A.1.2) desse sistema são satisfeitas. Assim, a afirmação decorre do Apêndice A.1.

(ii) Observe inicialmente que, se $\varphi \in C^\infty(M)$ e $\gamma_i = \omega(X_i)$ para $1 \le i \le n$ então, dada uma seção paralela $v \in \Gamma(V)$, temos

$$\begin{aligned}
\left(\nabla^{V^*\otimes TM}_{\partial_i}\omega^t\right) Pv &= \nabla_{\partial_i}\omega^t(Pv)\\
&= \sum_j \nabla_{\partial_i}\langle \omega^t(Pv), X_j\rangle X_j\\
&= \sum_j \nabla_{\partial_i}\langle \gamma_j, Pv\rangle X_j\\
&= \sum_{j\neq i}\langle \partial_i(\gamma_j), Pv\rangle X_j + \sum_{j\neq i}\langle \gamma_j, Pv\rangle \nabla_{\partial_i}X_j\\
&\quad + \langle \partial_i(\gamma_i), Pv\rangle X_i + \langle \gamma_i, Pv\rangle \nabla_{\partial_i}X_i\\
&= \sum_{j\neq i}\langle \partial_i(\gamma_j) - h_{ji}\gamma_i, Pv\rangle X_j + \langle \partial_i(\gamma_i) + \sum_{j\neq i} h_{ij}\gamma_j, Pv\rangle X_i.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\alpha(\partial_i, \omega^t(v)) &= \langle \omega^t(v), X_i\rangle \alpha(\partial_i, X_i)\\
&= \langle \gamma_i, v\rangle \xi_i\\
&= \langle \gamma_i, v\rangle J f_* X_i
\end{aligned}$$

para todo $1 \le i \le n$. Portanto,

$$\alpha\left(\partial_i, \omega^t(v)\right) + J f_*\left(\nabla^{V^*\otimes TM}_{\partial_i}\omega^t\right) Pv = 0$$

para todo $1 \le i \le n$ se, e somente se, as equações (ii) e (iii) de (5.1.1) são satisfeitas.

(iii) Usando (1.4.1), para cada $v \in \Gamma(V)$ temos

$$\begin{aligned}
(\nabla^{V^*\otimes N_fM}_X \beta)v &= \nabla^{N_fM}_X \beta(v) - \beta(\nabla^V_X v)\\
&= \nabla^{N_fM}_X J f_*\omega^t(Pv) - J f_*\omega^t P(\nabla^V_X v)\\
&= J f_*\left(\nabla^{TM}_X \omega^t(Pv) - \omega^t P(\nabla^V_X v)\right)\\
&= J f_*\left((\nabla^{V^*\otimes TM}_X \omega^t) Pv\right),
\end{aligned}$$

logo (φ, β) satisfaz (3.2.6) se, e só se, φ satisfaz (5.1.2).

(iv) Como f é Lagrangiana, para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ temos que

$$-f_* A_{Jf_*Y} X = J\alpha(X, Y),$$

logo

$$f_*^t J A(X)^t Y = f_*^t J\alpha(X, Y) = -f_*^t f_* A_{Jf_*Y} X = -A(X) J f_* Y.$$

Portanto,

$$f_*^t JA(X)^t = -A(X)Jf_* \tag{5.1.5}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Por outro lado, a equação (5.1.2) pode ser reescrita como

$$Jf_* d\omega^t(X)P = -A(X)^t\omega^t,$$

ou equivalentemente,

$$d\omega^t(X)P = f_*^t JA(X)^t\omega^t. \tag{5.1.6}$$

Em particular,

$$\begin{aligned} \omega d\omega^t(X)P &= \omega f_*^t JA(X)^t\omega^t \\ &= -\omega A(X)Jf_*\omega^t \\ &= P^t d\omega(X)\omega^t. \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

Além disso, se β é dado por (5.1.3), decorre de (5.1.5) e (5.1.6) que

$$\begin{aligned} A(X)\beta &= A(X)Jf_*\omega^t P \\ &= -f_*^t JA(X)^t\omega^t P \\ &= -d\omega^t(X)P^2. \end{aligned}$$

Portanto, o tensor

$$\Phi(X)v = (\nabla_X\omega^t)v - A_{\beta(v)}X = d\omega^t(X)v - A(X)\beta(v)$$

satisfaz

$$\Phi(X) = d\omega^t(X)(P^2 + I) \tag{5.1.8}$$

e, assim, vale (5.1.4).
(v) Pelas equações (5.1.8) e (5.1.7)

$$P^t\Phi(X)^t\omega^t = ((P^t)^2 + I)P^t d\omega(X)\omega^t = ((P^t)^2 + I)\omega d\omega^t(X)P.$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} d(\Omega^t P + P^t\Omega^t + T\rho)(X) &= \Phi(X)^t\omega^t P + P^t\Phi(X)^t\omega^t - (P^t)^2 d\omega(X)\omega^t P - d\omega(X)\omega^t P \\ &\quad -(P^t)^2\omega d\omega^t(X)P - \omega d\omega^t(X)P \\ &= \Phi(X)^t\omega^t P - ((P^t)^2 + I)d\omega(X)\omega^t P \\ &\quad +P^t\Phi(X)^t\omega^t - ((P^t)^2 + I)\omega d\omega^t(X)P \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Corolário 5.1.2. *Sejam $f\colon M^n(0) \to \mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ uma imersão isométrica Lagrangiana com $\nu_f \equiv 0$, $(u_1, \ldots, u_n)$ coordenadas principais em um aberto $U \subset M^n(0)$ dadas pelo Corolário 1.4.3 e (v, h) a solução associada do sistema (1.3.3) e da equação (1.3.5). Seja $P : V \to V$ um operador linear inversível de um espaço vetorial Euclidiano V. Então valem as seguintes afirmações:*

(i) Fixados $x_0 \in U$ e $\gamma_1^0, \ldots, \gamma_n^0 \in V$, existe uma única solução $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ do sistema

$$\begin{cases} i)\ \partial_i(\gamma_i) = -(P^t)^{-1}\gamma_i - \sum_{j\neq i} \gamma_j h_{ij}, \\ ii)\ \partial_i(\gamma_j) = h_{ij}\gamma_i\ j \neq i. \end{cases} \tag{5.1.9}$$

tal que $\gamma_i(x_0) = \gamma_i^0$ para todo $1 \leq i \leq n$.

(ii) Se $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ é uma solução de (5.1.9), então $\omega(\partial_j) = v_j\gamma_j$ satisfaz (5.1.2), para $1 \leq i \leq n$. Reciprocamente, se ω satisfaz (5.1.2), então $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ é uma solução de (5.1.9), em que $\gamma_i = v_i^{-1}\omega(\partial_i)$ para $1 \leq i \leq n$.

(iii) Se ω satisfaz (5.1.2), então

$$\varphi = -P^t\omega \sum_i \partial_i$$

satisfaz $d\varphi = \omega$.

Demonstração. iii) Basta verificar que $\partial_i\varphi = \omega(\partial_i)$. Derivando a equação (1.3.5) e usando (i) do sistema (1.3.3), temos

$$\partial_i(v_i) = -\sum_{r\neq i} h_{ir}v_r.$$

Logo, por (i) e (ii) de (5.1.9)

$$\begin{aligned} \partial_i(\varphi) &= -P^t \textstyle\sum_{i\neq j} (\partial_i(\gamma_j)v_j + \gamma_j\partial_i(v_j) - P^t\partial_i(\gamma_i)v_i - P^t\gamma_i\partial_i(v_i)) \\ &= -P^t \textstyle\sum_{i\neq j} (h_{ij}\gamma_j v_j + \gamma_j h_{ij} v_i) + P^t(P^t)^{-1}\gamma_i v_i + P^t \sum_{i\neq j} \gamma_j h_{ij} v_i + P^t\gamma_i \sum_{j\neq i} h_{ij}v_j \\ &= v_i\gamma_i = \omega(\partial_i). \end{aligned}$$

■

Definição 5.1.3. Sejam $f\colon M^n(0) \to \mathbb{R}^{2n}$ uma imersão isométrica Lagrangiana e P um endomorfismo inversível de um espaço vetorial Euclidiano V. Uma transformada de Ribaucour vetorial $\tilde{f} = \mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega}(f)$ de f é uma P-*transformada de Ribaucour* de f, ou simplesmente uma P-*transformada* de f, se

$$\beta = Jf_*\omega^t P,$$

em que $\omega = d\varphi$, e

$$\Omega^t P + P^t \Omega^t = -T\rho, \tag{5.1.10}$$

em que $T = -P^t - (P^t)^{-1}$ e $\rho = P^t \omega \omega^t P$. Dizemos que o par (φ, P) determina uma P-transformada de f e escrevemos $\tilde{f} = \mathcal{R}_{\varphi,P}(f)$.

Além disso, se $f(M) \subset \mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ e $\varphi = -P^t \omega \sum_i \partial_i$, dizemos que o par (ω, P) determina uma *Pe-transformada* de f e escrevemos $\tilde{f} = \mathcal{R}_{\omega,P}(f)$.

A existência de P e Pe-transformadas de Ribaucour é assegurada pelo seguinte resultado.

Proposição 5.1.4. *Sejam $f\colon M^n(0) \to \mathbb{R}^{2n}$ uma imersão isométrica Lagrangiana com $\nu_f \equiv 0$ (respectivamente, com $f(M^n(0)) \subset \mathbb{S}^{2n-1}$), e $P : V \to V$ um endomorfismo de um espaço vetorial Euclidiano V tal que $\sigma(P) \cap (-\sigma(P)) = \emptyset$. Fixado $x_0 \in M^n$, sejam $\varphi_0 \in V$ e $\omega_0 \in T^*_{x_0}M \oplus V$ (respectivamente, $\omega_0 \in T^*_{x_0}M \oplus V$) tal que $E_\alpha \cap ker\omega_0^t = \{0\}$ (respectivamente, $E_\alpha \cap ker(\omega_0^t)^c = \{0\}$) para todo autovalor real (respectivamente, complexo) de P. Então existem uma vizinhança aberta U de x_0 e uma única P-transformada $\tilde{f} = \mathcal{R}_{\varphi,P}(f|_U)$ de $f|_U$ (respectivamente, uma única Pe-transformada $\tilde{f} = \mathcal{R}_{\omega,P}(f|_U)$ de $f|_U$) tal que $\varphi(x_0) = \varphi^0$ e $d\varphi(x_0) = \omega_0$ (respectivamente, $\omega(x_0) = \omega_0$).*

Demonstração. Pela Proposição 5.1.1, existe uma única função de classe C^∞ $\varphi\colon M \to V$ tal que φ satisfaz (5.1.2), $\varphi(x_0) = \varphi_0$ e $d\varphi(x_0) = \omega_0$. Como $P : V \to V$ satisfaz $\sigma(P) \cap (-\sigma(P)) = \emptyset$, temos pelo Teorema 2.4.5 que a equação de Lyapunov

$$X^t P + P^t X^t = -T\rho_0,$$

com $T = -P^t - (P^t)^{-1}$ e $\rho_0 = P^t \omega_0 \omega_0^t P$, possui uma única solução $X = \Omega_0$, com $2(\Omega_0)_s = \mathcal{F}^t(x_0)\mathcal{F}(x_0)$. Defina $\beta \in \Gamma(V^* \otimes N_f M)$ por (5.1.3), e seja Ω a única solução de (3.2.9) tal que $\Omega(x_0) = \Omega_0$. Decorre da Proposição 5.1.1 que Ω satisfaz (5.1.10), logo $\tilde{f} = \mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega}(f)$ é uma P-transformada de f. ∎

Lema 5.1.5. *Toda P-transformada (resp., Pe-transformada) $\tilde{f} = \mathcal{R}_{\varphi,P}(f)$ (resp., $\tilde{f} = \mathcal{R}_{\omega,P}(f)$) de uma imersão isométrica Lagrangiana $f\colon M^n(0) \to \mathbb{R}^{2n}$ (respectivamente, $f\colon M^n(0) \to \mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$) é também uma L-transformada de f, com $L = (P^2 + I)^{-1}P^2$.*

Demonstração. Pela Definição 4.1.4, basta verificar as equações (4.1.12) e (4.1.13). A primeira é consequência de (5.1.4), e a segunda decorre do Teorema 2.4.5.

∎

Nosso interesse em P-transformadas de imersões isométricas Lagrangianas $f\colon M^n(0) \to \mathbb{R}^{2n}$ e Pe-transformadas de imersões isométricas Lagrangianas $f\colon M^n(0) \to \mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ é justificado pelo seguinte resultado.

Teorema 5.1.6. *Sejam $f\colon M^n(0) \to \mathbb{R}^{2n}$ uma imersão isométrica Lagrangiana com $\nu_f \equiv 0$ e $\tilde{f} = \mathcal{R}_{\varphi,P}(f)\colon \tilde{M}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ uma P-transformada de f. Então $\tilde{f}$ é também Lagrangiana* *e tem métrica induzida de curvatura nula. Além disso, se $f(M) \subset \mathbb{S}^{2n-1}$ e $\tilde{f}$ é uma Pe-transformada de f, então $\tilde{f}(\tilde{M}) \subset \mathbb{S}^{2n-1}$.*

Demonstração. Pelo Lema 5.1.5 e pela Proposição 4.1.6, a métrica induzida por $\tilde{f}$ tem curvatura seccional nula. Pelo Teorema 2.4.5, temos que Ω satisfaz

$$T\Omega = \Omega^t T^t, \tag{5.1.11}$$

em que $T = -P^t - (P^t)^{-1}$. Por outro lado, pelo Teorema 1.4.2 temos que a solução (v, h) do sistema (I), dado na Proposição 1.3.1, associada a f é tal que $h = (h_{ij})$ é simétrica e, pela Proposição 4.1.7, a solução $(\tilde{v}, \tilde{h})$ desse mesmo sistema, associada a $\tilde{f}$, é dada por (4.1.15).

Fazendo uso de (i) de (5.1.1) e das equações (4.1.8) e (5.1.3), temos que

$$P^t\gamma_i = P^t\omega(X_i) = \beta^t J f_* X_i = \beta^t \xi_i = \beta_i. \tag{5.1.12}$$

De (5.1.11) obtemos

$$\begin{aligned} \langle L^{-1}\Omega^{-1}\gamma_i, \beta_j\rangle &= \langle \Omega^{-1}\gamma_i, (L^{-1})^t P^t \gamma_j\rangle = -\langle \Omega^{-1}\gamma_i, T\gamma_j\rangle \\ &= -\langle T^t\Omega^{-1}\gamma_i, \gamma_j\rangle = -\langle (\Omega^{-1})^t T\gamma_i, \gamma_j\rangle = -\langle T\gamma_i, \Omega^{-1}\gamma_j\rangle \\ &= \langle \beta_i, L^{-1}\Omega^{-1}\gamma_j\rangle, \end{aligned}$$

ou seja, $\tilde{h}_{ij} = \tilde{h}_{ji}$. Decorre do Teorema 1.4.2 que $\tilde{f}$ é também Lagrangiana.

Suponhamos agora que $f(M) \subset \mathbb{S}^{2n-1}$ e que $\tilde{f}$ seja uma Pe-transformada de f. Então, de (4.1.15) e $\sum_i v_i^2 = 1$ temos que

$$\sum_i \tilde{v}_i^2 = 1$$

se, e só se,

$$-\sum_i 2\left\langle \gamma_i, T^t\Omega^{-1}\varphi\right\rangle v_i + \sum_i \left\langle \gamma_i, T^t\Omega^{-1}\varphi\right\rangle^2 = 0.$$

Segue de $\omega(X_j) = \gamma_j$ que $\omega^t(T^t\Omega^{-1}\varphi) = \sum_j \langle T^t\Omega^{-1}\varphi, \gamma_j\rangle X_j$, logo, (2.4.6), (5.1.10) e

(5.1.11) implicam que

$$
\begin{aligned}
&-\textstyle\sum_i 2v_i \langle \gamma_i, T^t\Omega^{-1}\varphi\rangle + \sum_i \langle \gamma_i, T^t\Omega^{-1}\varphi\rangle^2 \\
&\qquad = -\textstyle\sum_i 2v_i \langle \omega^t(T^t\Omega^{-1}\varphi), X_i\rangle + \langle \omega^t(T^t\Omega^{-1}\varphi), \omega^t(T^t\Omega^{-1}\varphi)\rangle \\
&\qquad = \langle \omega^t(T^t\Omega^{-1}\varphi), -2\textstyle\sum_i v_i X_i + \omega^t(T^t\Omega^{-1}\varphi)\rangle \\
&\qquad = \langle T^t\Omega^{-1}\varphi, -2\textstyle\sum_i v_i \omega X_i + \omega\omega^t(T^t\Omega^{-1}\varphi)\rangle \\
&\qquad = \langle T^t\Omega^{-1}\varphi, -2\textstyle\sum_i v_i \gamma_i + \omega\omega^t(T^t\Omega^{-1}\varphi)\rangle \\
&\qquad = \langle \varphi, -2(\Omega^t)^{-1}T\textstyle\sum_i v_i \gamma_i + (\Omega^t)^{-1}T\omega\omega^t(T^t\Omega^{-1}\varphi)\rangle \\
&\qquad = \langle \varphi, 2(\Omega^t)^{-1}(L^t)^{-1}\textstyle\sum_i v_i P^t\gamma_i + (\Omega^t)^{-1}\left(-(P^t)^{-1}\Omega^t T^t - \Omega^t P^{-1}T^t\right)\Omega^{-1}\varphi\rangle \\
&\qquad = \langle \varphi, 2(\Omega^t)^{-1}(L^t)^{-1}\textstyle\sum_i v_i P^t\gamma_i + (\Omega^t)^{-1}\left(-(P^t)^{-1}T\Omega - \Omega^t P^{-1}T^t\right)\Omega^{-1}\varphi\rangle \\
&\qquad = \langle \varphi, 2(\Omega^t)^{-1}(L^t)^{-1}\textstyle\sum_i v_i P^t\gamma_i - (\Omega^t)^{-1}(P^t)^{-1}T\varphi - P^{-1}T^t\Omega^{-1}\varphi\rangle \\
&\qquad = \langle \varphi, -2(\Omega^t)^{-1}(L^t)^{-1}\varphi + (\Omega^t)^{-1}(L^t)^{-1}\varphi + L^{-1}\Omega^{-1}\varphi\rangle \\
&\qquad = -\langle L^{-1}\Omega^{-1}\varphi, \varphi\rangle + \langle \varphi, L^{-1}\Omega^{-1}\varphi\rangle \\
&\qquad = 0.
\end{aligned}
$$

■

Resumimos nos seguintes corolários o processo obtido a partir da $P-$transformação e da Pe-transformação para gerar uma família de imersões isométricas Lagrangianas $f\colon M^n(0) \to \mathbb{R}^{2n}$ e $f\colon M^n(0) \to \mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$, respectivamente, a partir de uma dada e de uma solução, com valores em um espaço vetorial Euclidiano, de um sistema linear completamente integrável de primeira ordem de equações diferenciais parciais.

Corolário 5.1.7. *Sejam $f : M^n(0) \to \mathbb{R}^{2n}$ uma imersão isométrica Lagrangiana com $\nu_f \equiv 0$, $(u_1, \ldots, u_n)$ coordenadas principais em um aberto $U \subset M^n(0)$ dadas pela Proposição 1.3.1, (v, h) a solução do sistema (1.4.5) associada a f e $P : V \to V$ um operador inversível tal que $\sigma(P) \cap (-\sigma(P)) = \emptyset$. Seja $(\varphi, \gamma_1, ..., \gamma_n)$ uma solução, com valores em V, do sistema linear completamente integrável de primeira ordem*

$$
\begin{cases} i)\ \partial_i(\varphi) = v_i\gamma_i, & ii)\ \partial_i(\gamma_i) = -(P^t)^{-1}\gamma_i - \sum_{j\neq i}\gamma_j h_{ij}, \\ iii)\ \partial_i(\gamma_j) = h_{ij}\gamma_i\ \ j \neq i. & \end{cases} \tag{5.1.13}
$$

em um aberto $W \subset U$ no qual

$$\tilde{v}_i = v_i + \left\langle \gamma_i, (P + P^{-1})\Omega^{-1}\varphi \right\rangle \neq 0$$

para todo $1 \leq i \leq n$, em que Ω é dada por (2.4.2) para $A = P$ e $C = (P^{t2} + I)d\varphi(d\varphi)^t P$. Então, a aplicação $\tilde{f} : W \to \mathbb{R}^{2n}$ dada por

$$\tilde{f} = f - \textstyle\sum_j \left(\langle \Omega^{-1}\varphi, \gamma_j\rangle + \langle P\Omega^{-1}\varphi, \gamma_j\rangle\, i\right) f_* X_j,$$

em que $X_j = v_j^{-1}\partial_j$ *para* $1 \leq j \leq n$, *define uma nova imersão isométrica Lagrangiana cuja métrica induzida tem curvatura seccional nula.*

Além disso, $(\tilde{v}, \widetilde{h})$ *é a solução de (1.4.19) associada a* $\widetilde{f}$, *com*

$$\widetilde{h}_{ij} = h_{ij} + \left\langle \gamma_j, (P + P^{-1})\Omega^{-1}\gamma_i \right\rangle.$$

Corolário 5.1.8. *Sejam* $f : M^n(0) \to \mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ *uma imersão isométrica Lagrangiana,* $(u_1, \ldots, u_n)$ *coordenadas principais em um aberto* $U \subset M^n(0)$ *dadas pela Proposição 1.3.1,* (v, h) *a solução do sistema (1.4.5) associada a* f *e* $P : V \to V$ *um operador inversível tal que* $\sigma(P) \cap (-\sigma(P)) = \emptyset$. *Seja* $(\gamma_1, ..., \gamma_n)$ *uma solução, com valores em* V, *do sistema linear completamente integrável de primeira ordem*

$$\begin{cases} i)\ \partial_i(\gamma_i) = -(P^t)^{-1}\gamma_i - \sum_{j\neq i}\gamma_j h_{ij}, \\ ii)\ \partial_i(\gamma_j) = h_{ij}\gamma_i\ j \neq i. \end{cases}$$

em um aberto $W \subset U$ *no qual*

$$\tilde{v}_i = v_i - \sum_k \left\langle \gamma_i, (P + P^{-1})\Omega^{-1}P^t v_k \gamma_k \right\rangle \neq 0 \tag{5.1.14}$$

para todo $1 \leq i \leq n$, *em que* Ω *é dada por (2.4.2) para* $A = P$ *e* $C = -(P^{t2} + I)P^t \sum_i \gamma_i \gamma_i^t P$. *Então, a aplicação* $\tilde{f} : W \to \mathbb{R}^{2n}$ *dada por*

$$\widetilde{f} = f + \textstyle\sum_{k,j} \left(\langle \Omega^{-1}P^t\gamma_k, \gamma_j \rangle + \langle \Omega^{-1}P^t\gamma_k, P^t\gamma_j \rangle\, i \right) v_k f_* X_j,$$

em que $X_j = v_j^{-1}\partial_j$ *para* $1 \leq j \leq n$, *define uma nova imersão isométrica Lagrangiana cuja métrica induzida tem curvatura seccional nula, e ainda,* $\tilde{f}(W) \subset \mathbb{S}^{2n-1}$.

Além disso, $(\tilde{v}, \widetilde{h})$ *é uma solução de (1.4.19) associado a* $\widetilde{f}$, *com*

$$\widetilde{h}_{ij} = h_{ij} + \left\langle \gamma_j, (P + P^{-1})\Omega^{-1}\gamma_i \right\rangle.$$

5.2 A P-transformação de subvariedades horizontais com curvatura constante.

A fim de introduzir a P-transformação para a classe das imersões isométricas horizontais $f : M^n(c) \to \mathbb{S}_\epsilon^{2n+1}(c)$ com $\nu_f \equiv 0$, mostremos inicialmente a seguinte Proposição.

Proposição 5.2.1. *Sejam* $f : M^n(c) \to \mathbb{S}_\epsilon^{2n+1}(c)$ *uma imersão isométrica horizontal com* $\nu_f \equiv 0$, $(u_1, \ldots, u_n)$ *coordenadas principais em um aberto* $U \subset M^n(c)$ *dadas pelo Corolário 1.4.11 e* (v, h) *a solução associada do sistema (1.4.19). Seja* $P : V \to V$ *um operador linear inversível de um espaço vetorial Euclidiano* V. *Então valem as seguintes afirmações:*

(i) Fixados $x_0 \in U$ e $\varphi^0, \gamma_1^0, \dots, \gamma_n^0 \in V$, existe uma única solução $(\varphi, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ do sistema

$$\begin{cases} i)\ \partial_i(\varphi) = v_i\gamma_i, & ii)\ \partial_i(\gamma_i) = -(P^t)^{-1}\gamma_i - \sum_{j\neq i}\gamma_j h_{ij} - cv_i\varphi, \\ iii)\ \partial_i(\gamma_j) = h_{ij}\gamma_i\ j\neq i, & \end{cases} \tag{5.2.1}$$

tal que $\varphi(x_0) = \varphi^0$ e $\gamma_i(x_0) = \gamma_i^0$ para todo $1 \le i \le n$.

(ii) Se $(\varphi, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ é uma solução de (5.2.1), então

$$\alpha(X, \omega^t(v)) + \phi f_*\left((\nabla_X^{V^*\otimes TM}\omega^t)Pv\right) + \epsilon\sqrt{|c|}\nabla_X^{N_fM}\xi_f\varphi^t P(v) = 0, \tag{5.2.2}$$

em que $\omega = d\varphi$, $\xi_f = \xi \circ f$, $\epsilon = c/|c|$ e $\omega(\partial_i) = v_i\gamma_i$ para $1 \le i \le n$. Reciprocamente, se φ satisfaz (5.2.2), então $(\varphi, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ é uma solução de (5.2.1), em que $\gamma_i = v_i^{-1}\omega(\partial_i)$ para $1 \le i \le n$.

(iii) Se

$$\beta = (\phi f_*\omega^t + \epsilon\sqrt{|c|}\xi_f\varphi^t)P, \tag{5.2.3}$$

então φ satisfaz a (5.2.2) se, e só se, (φ, β) satisfaz (3.2.6).

(iv) Se φ satisfaz (5.2.2) e β é dado por (5.2.3), então $(\varphi, \beta) \in \mathcal{D}(f)$ e o tensor Φ definido em (3.3.24) satisfaz

$$\Phi(X)(P^2 + I)^{-1}P^2 = -A(X)\beta \tag{5.2.4}$$

para todo $X \in TM$.

(v) Se $(\varphi, \beta) \in \mathcal{D}(f)$ e Ω satisfaz (3.3.25), então existe uma seção paralela $K \in \Gamma(V^* \otimes V)$ tal que

$$\Omega^t P + P^t\Omega^t + T\rho = K,$$

em que $T = -P^t - (P^t)^{-1}$ e $\rho = P^t\omega\omega^t P + cP^t\varphi\varphi^t P$.

Demonstração. (i) Escrevendo o sistema (5.2.1) da forma (A.1.1), é imediato verificar, usando o fato de (v, h) ser uma solução de (1.4.19) e das equações em (1.4.16) que as equações de compatibilidade (A.1.2) de (5.2.1) são satisfeitas. Assim, a afirmação decorre do Apêndice A.1.

(ii) Observe que, se $\varphi \in C^\infty(M)$ e $\gamma_i = \omega(X_i)$ para $1 \le i \le n$, então pelas equações (1.4.14), (1.4.16) e (1.4.17), dada uma seção paralela $v \in \Gamma(V)$, temos

$$\begin{aligned}
\phi f_* \left(\nabla_{\partial_i}^{V^*\otimes TM}\omega^t\right) Pv + \epsilon\sqrt{|c|}\nabla_{\partial_i}^{N_f M}\xi_f\varphi^t P(v) &= \phi f_* \nabla_{\partial_i}\omega^t(Pv) + \epsilon\sqrt{|c|}\rho_i\xi_i\varphi^t P(v)\\
&= \textstyle\sum_j \phi f_* \nabla_{\partial_i}\langle \omega^t(Pv), X_j\rangle X_j + \epsilon\sqrt{|c|}\sqrt{|c|}v_i\xi_i\varphi^t P(v)\\
&= \textstyle\sum_j \phi f_* \nabla_{\partial_i}\langle \gamma_j, Pv\rangle X_j + cv_i\phi f_* X_i\varphi^t P(v)\\
&= \phi f_* \Big(\textstyle\sum_{j\neq i}\langle \nabla_{\partial_i}\gamma_j, Pv\rangle X_j + \sum_{j\neq i}\langle \gamma_j, Pv\rangle \nabla_{\partial_i}X_j\\
&\quad + \langle \nabla_{\partial_i}\gamma_i, Pv\rangle X_i + \langle \gamma_i, Pv\rangle \nabla_{\partial_i}X_i + cv_iX_i\varphi^t P(v)\Big)\\
&= \phi f_* \Big(\textstyle\sum_{j\neq i}\langle \nabla_{\partial_i}\gamma_j - \gamma_i h_{ji}, Pv\rangle X_j + \Big\langle \nabla_{\partial_i}\gamma_i + \sum_{j\neq i}\gamma_j h_{ij} + cv_i\varphi, Pv\Big\rangle X_i\Big).
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos de (1.4.13) e (1.4.17) que

$$\begin{aligned}
\alpha\left(\partial_i, \omega^t(v)\right) &= \langle \omega^t(v), X_i\rangle\, \alpha(\partial_i, X_i)\\
&= \langle \gamma_i, v\rangle\, \xi_i\\
&= \langle \gamma_i, v\rangle\, \phi f_* X_i
\end{aligned}$$

para todo $1 \le i \le n$. Portanto,

$$\alpha(\partial_i, \omega^t(v)) + \phi f_* \left((\nabla_{\partial_i}^{V^*\otimes TM}\omega^t)Pv\right) + \epsilon\sqrt{|c|}\nabla_{\partial_i}^{N_f M}\xi_f\varphi^t P(v) = 0,$$

para todo $1 \le i \le n$ se, e somente se, as equações (ii) e (iii) de (5.2.1) são satisfeitas.

(iii) De (1.4.10), temos para cada $v \in \Gamma(V)$

$$\begin{aligned}
(\nabla_X^{V^*\otimes N_f M}\beta)v &= \nabla_X^{N_f M}\beta(v) - \beta(\nabla_X^V v)\\
&= \nabla_X^{N_f M}\left(\phi f_*\omega^t P + \epsilon\sqrt{|c|}\xi_f\varphi^t P\right)v\\
&\quad - \left(\phi f_*\omega^t P + \epsilon\sqrt{|c|}\xi_f\varphi^t P\right)(\nabla_X^V v)\\
&= \nabla_X^{N_f M}\phi f_*\omega^t(Pv) + \epsilon\sqrt{|c|}\,\langle \omega(X), Pv\rangle\, \xi_f + \epsilon\sqrt{|c|}\xi_f\varphi^t P(\nabla_X v)\\
&\quad + \epsilon\sqrt{|c|}\nabla_X^{N_f M}\xi_f\varphi^t Pv - \phi f_*\omega^t P(\nabla_X^V v) - \epsilon\sqrt{|c|}\xi_f\varphi^t P(\nabla_X v)\\
&= \phi f_*\left(\nabla_X^{TM}\omega^t(Pv) - \omega^t P(\nabla_X^V v)\right) + \epsilon\sqrt{|c|}\nabla_X^{N_f M}\xi_f\varphi^t Pv\\
&= \phi f_*\left((\nabla_X^{V^*\otimes TM}\omega^t)Pv\right) + \epsilon\sqrt{|c|}\nabla_X^{N_f M}\xi_f\varphi^t Pv,
\end{aligned}$$

logo (φ, β) satisfaz (3.2.6) se, e só se, φ satisfaz a (5.2.2).

(iv) Como f é horizontal, para quaisquer $X, Y \in TM$ temos por (ii) da Proposição 1.4.5, do Teorema 1.4.7 e de (1.4.11) que

$$\begin{aligned}
f_*^t\phi^t A(X)^t Y &= f_*^t\phi^t\alpha(X,Y) = -f_*^t\phi^t\phi^2\alpha(X,Y)\\
&= -f_*^t\phi\alpha(X,Y) = f_*^t f_* A(X)\phi f_* Y\\
&= A(X)\phi f_* Y.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$f_*^t\phi^t A(X)^t = A(X)\phi f_*, \tag{5.2.5}$$

para todo $X \in TM$. Por outro lado, a equação (5.2.2) pode ser reescrita como

$$-A(X)^t\omega^t = \phi f_* d\omega^t(X)P + \epsilon\sqrt{|c|}\nabla_X^{N_f M}\xi_f\varphi^t P,$$

ou equivalentemente,

$$d\omega^t(X)P = -cX\varphi^t P - f_*^t\phi^t A(X)^t\omega^t. \tag{5.2.6}$$

Em particular,

$$\begin{aligned}
\omega d\omega^t(X)P &= -c\omega(X)\varphi^t P - \omega f_*^t\phi^t A(X)^t\omega^t \\
&= -c\omega(X)\varphi^t P - \omega A(X)\phi f_*\omega^t \\
&= -c\omega(X)\varphi^t P + P^t d\omega(X)\omega^t + cP^t\varphi X^t\omega^t
\end{aligned}$$

Além disso, se β é dado por (5.2.3), decorre de (5.2.5) e (5.2.6) que

$$\begin{aligned}
A(X)\beta &= A(X)\left(\phi f_*\omega^t + \epsilon\sqrt{|c|}\xi_f\varphi^t\right)P \\
&= A(X)\phi f_*\omega^t P + A(X)\epsilon\sqrt{|c|}\xi_f\varphi^t P \\
&= f_*^t\phi^t A(X)^t\omega^t P \\
&= -d\omega^t(X)P^2 - cX\varphi^t P^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\Phi(X)v &= (\nabla_X\omega^t)v - A_{\beta(v)}X + c\varphi^t(v)X \\
&= d\omega^t(X)v - A(X)\beta(v) + cX\varphi^t v \\
&= d\omega^t(X)(P^2+I)v + cX\varphi^t(P^2+I)v
\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

e assim, vale (5.2.4).

v) Segue-se de (3.3.18), (3.3.19), (3.3.25) e (5.2.7) que

$$\begin{aligned}
d(\Omega^t P + P^t\Omega^t + T\rho)(X) = {} & \Phi(X)^t\omega^t P + P^t\Phi(X)^t\omega^t - (P^t)^2 d\omega(X)\omega^t P - (P^t)^2\omega d\omega^t(X)P \\
& -d\omega(X)\omega^t P - \omega d\omega(X)^t P - c(P^t)^2\omega(X)\varphi^t P - c(P^t)^2\varphi\omega(X)^t P \\
& -c\omega(X)\varphi^t P - c\varphi\omega(X)^t P \\
& = ((P^t)^2+I)d\omega(X)\omega^t P + c((P^t)^2+I)\varphi X^t\omega^t P \\
& +P^t((P^t)^2+I)d\omega(X)\omega^t + cP^t((P^t)^2+I)\varphi X^t\omega^t \\
& -(P^t)^2 d\omega(X)\omega^t P - (P^t)^2\omega d\omega^t(X)P \\
& -d\omega(X)\omega^t P - \omega d\omega(X)^t P - c(P^t)^2\omega(X)\varphi^t P - c(P^t)^2\varphi\omega(X)^t P \\
& -c\omega(X)\varphi^t P - c\varphi\omega(X)^t P \\
& = 0.
\end{aligned}$$

■

Definição 5.2.2. Sejam $f : M^n(c) \to \mathbb{S}^{2n+1}_\epsilon(c)$ uma imersão isométrica horizontal e P um endomorfismo inversível de um espaço vetorial Euclidiano V. Uma transformada de Ribaucour vetorial $\tilde{f} = \mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega}(f)$ de f é uma *P-transformada de Ribaucour* de f, ou simplesmente uma *P-transformada* de f, se

$$\beta = (\phi f_* \omega^t + \epsilon\sqrt{|c|}\xi_f \varphi^t)P,$$

em que $\omega = d\varphi$, e

$$\Omega^t P + P^t \Omega^t = -T\rho, \tag{5.2.8}$$

em que $T = -P^t - (P^t)^{-1}$ e $\rho = P^t \omega \omega^t P + cP^t \varphi\varphi^t P$. Dizemos que o par (φ, P) determina uma P-transformada de f e escrevemos $\tilde{f} = \mathcal{R}_{\varphi,P}(f)$.

A existência de P-transformadas de Ribaucour é assegurada pelo seguinte resultado.

Proposição 5.2.3. *Sejam $f\colon M^n(c) \to \mathbb{S}^{2n+1}_\epsilon(c)$ uma imersão isométrica horizontal com $\nu_f \equiv 0$, e $P : V \to V$ um endomorfismo de um espaço vetorial Euclidiano V tal que $\sigma(P) \cap (-\sigma(P)) = \emptyset$. Dados $x_0 \in M$ e um par P-admissível (φ_0, ω_0), existem uma vizinhança aberta U de x_0 e uma única P-transformada $\tilde{f} = \mathcal{R}_{\varphi,P}(f|_U)$ de $f|_U$ tal que $\varphi(x_0) = \varphi_0$ e $d\varphi(x_0) = \omega_0$.*

Demonstração. Pela Proposição 5.2.1, existe uma única $\varphi \in C^\infty(M)$ tal que $\omega = d\varphi$ satisfaz (5.2.2) em uma vizinhança aberta U de x_0, com $\varphi(x_0) = \varphi_0$ e $d\varphi(x_0) = \omega_0$. Como $P : V \to V$ satisfaz $\sigma(P) \cap (-\sigma(P)) = \emptyset$, temos, pela pela Definição 2.4.6 e Proposição 2.4.5, que a equação de Lyapunov

$$X^t P + P^t X^t = -T\rho_0,$$

com $T = -P^t - (P^t)^{-1}$ e $\rho_0 = P^t \omega_0 \omega_0^t P + cP^t \varphi_0 \varphi_0^t P$, possui uma única solução $X = \Omega_0$, com

$$2(\Omega_0)_s = \omega(x_0)\omega(x_0)^t + \beta(x_0)^t \beta(x_0) + c\varphi(x_0)\varphi(x_0)^t = \mathcal{G}^t(x_0)\mathcal{G}(x_0),$$

a qual é inversível. Defina $\beta \in \Gamma(V^* \otimes N_f M)$ por (5.2.3), e seja Ω a única solução de (3.3.25) tal que $\Omega(x_0) = \Omega_0$. Decorre da Proposição 5.2.1 que Ω satisfaz (5.2.8), logo $\tilde{f} = \mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega}(f|_U)$ é uma P-transformada de $f|_U$.

■

Lema 5.2.4. *A P-transformada $\tilde{f} = \mathcal{R}_{\varphi,P}(f)$ é uma $L-$transformada de f, com $L = (P^2 + I)^{-1} P^2$.*

Demonstração. Pela Definição 4.1.4, basta verificar as equações (4.1.12) e (4.1.13). A primeira é consequência de (5.2.4), e a segunda decorre do Teorema 2.4.5.

$\blacksquare$

O interesse no estudo da P-transformação para as imersões isométricas horizontais $f\colon\ M^n(c) \to \mathbb{S}^{2n+1}_{\epsilon}(c)$ é justificado pelo seguinte resultado.

Teorema 5.2.5. *Sejam $f\colon\ M^n(c) \to \mathbb{S}^{2n+1}_{\epsilon}(c)$ uma imersão isométrica horizontal e $\tilde{f} = \mathcal{R}_{\varphi,P}(f)\colon\ \tilde{M}^n \to S^{2n+1}_{\epsilon}(c)$ uma P-transformada de f. Então $\tilde{f}$ é também uma imersão horizontal cuja métrica induzida tem curvatura seccional constante c.*

Demonstração. Pelo Lema 5.2.4 e o Teorema 4.1.6, a métrica induzida por $\tilde{f}$ tem curvatura seccional constante c.

Para mostrar que $\tilde{f}$ é horizontal, faremos uso do Teorema 1.4.10, e para isso é necessário encontrar a solução $(\tilde{v}, \tilde{h}, \tilde{\rho})$ do sistema (1.4.15) associada à imersão $\tilde{f}$. Afirmamos que tal tripla é dada por

$$\tilde{v}_i = v_i + \left\langle \beta_i, L^{-1}\Omega^{-1}\varphi \right\rangle,\ \tilde{h}_{ij} = h_{ij} + \left\langle \beta_j, L^{-1}\Omega^{-1}\omega(X_i) \right\rangle \text{ e } \tilde{\rho}_i = \rho_i - \sqrt{|c|}\left\langle T\varphi, \Omega^{-1}\omega(X_i) \right\rangle, \tag{5.2.9}$$

em que $T = -P^t - (P^t)^{-1}$ e $L = (P^2 + I)^{-1}P^2$.

O par $(\tilde{v}, \tilde{h})$ em (5.2.9) foi obtido na Proposição 4.1.7. Para obter $\tilde{\rho}$, primeiramente observamos que, de (i) de (5.2.1), (v) da Proposição 1.4.5 e das equações (5.2.9) e (5.2.3) temos que

$$\begin{aligned} \beta_i &= \beta^t\xi_i = P^t\omega f_*^t\phi^t\xi_i + P^t\epsilon\sqrt{|c|}\varphi\xi_f^t\xi_i \\ &= P^t\omega f_*^t\phi^t\xi_i = P^t\omega f_*^t\phi^t\phi f_* X_i = P^t\omega(X_i) \\ &= P^t\gamma_i. \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

Seja

$$\tilde{\xi}_f = \mathcal{P}(\xi_f + \sqrt{|c|}\sum_s \left\langle T\varphi, \Omega^{-1}\beta_s \right\rangle \xi_s).$$

Afirmamos que

$$\tilde{\nabla}^{\perp}_{\partial_i}\tilde{\xi}_f = \tilde{\rho}_i\mathcal{P}(\xi_i - \sum_s \left\langle \beta_i, L^{-1}\Omega^{-1}\beta_s \right\rangle \xi_s) = \tilde{\rho}_i\tilde{\xi}_i.$$

De fato, essa igualdade segue de (1.4.14), (3.3.10), (3.3.25) e (v) de (5.2.1), da seguinte maneira

$$\begin{array}{rcl}
\widetilde{\nabla}^{\perp}_{\partial_i}\widetilde{\xi}_f & = & \widetilde{\nabla}^{\perp}_{\partial_i}\mathcal{P}\left(\xi_f + \sqrt{|c|}\sum_s \langle T\varphi, \Omega^{-1}\beta_s\rangle \xi_s\right) \\
& = & \mathcal{P}\left[\nabla^{\perp}_{\partial_i}\left(\xi_f + \sqrt{|c|}\sum_s \langle T\varphi, \Omega^{-1}\beta_s\rangle \xi_s\right)\right] \\
& = & \mathcal{P}\left[\nabla^{\perp}_{\partial_i}\xi_f + \sqrt{|c|}\sum_s \partial_i\langle T\varphi, \Omega^{-1}\beta_s\rangle \xi_s + \sqrt{|c|}\sum_{s\neq i} \langle T\varphi, \Omega^{-1}\beta_s\rangle \nabla^{\perp}_{\partial_i}\xi_s\right. \\
& & \left. +\sqrt{|c|}\langle T\varphi, \Omega^{-1}\beta_i\rangle \nabla^{\perp}_{\partial_i}\xi_i\right] \\
& = & \mathcal{P}\left[\rho_i\xi_i + \sqrt{|c|}\sum_s \langle T\omega(\partial_i), \Omega^{-1}\beta_s\rangle \xi_s - \sqrt{|c|}\sum_s \langle T\varphi, \Omega^{-1}d\Omega(\partial_i)\Omega^{-1}\beta_s\rangle \xi_s\right. \\
& & +\sqrt{|c|}\sum_{s\neq i} \langle T\varphi, \Omega^{-1}\partial_i\beta_s\rangle \xi_s + \sqrt{|c|}\langle T\varphi, \Omega^{-1}\partial_i\beta_i\rangle \xi_i \\
& & \left. +\sqrt{|c|}\sum_{s\neq i} \langle T\varphi, \Omega^{-1}\beta_s\rangle \nabla^{\perp}_{\partial_i}\xi_s + \sqrt{|c|}\langle T\varphi, \Omega^{-1}\beta_i\rangle \nabla^{\perp}_{\partial_i}\xi_i\right] \\
& = & \mathcal{P}\left[\rho_i\xi_i + \sqrt{|c|}\sum_s \langle \rho_i(P^t)^{-1}\beta_i, \Omega^{-1}\beta_s\rangle \xi_s - \sqrt{|c|}\sum_s \langle B_i, \Omega^{-1}\beta_s\rangle \langle T\varphi, \Omega^{-1}\gamma_i\rangle \xi_s\right. \\
& & +\sqrt{|c|}\sum_{s\neq i} \langle T\varphi, \Omega^{-1}h_{is}\beta_i\rangle \xi_s - \sqrt{|c|}\langle T\varphi, \Omega^{-1}\gamma_i\rangle \xi_i - \sqrt{|c|}\sum_{s\neq i} h_{is}\langle T\varphi, \Omega^{-1}\beta_s\rangle \xi_i \\
& & \left. +\sqrt{|c|}\sum_{s\neq i} \langle T\varphi, \Omega^{-1}\beta_s\rangle h_{is}\xi_i - \sqrt{|c|}\langle T\varphi, \Omega^{-1}\beta_i\rangle \sum_{s\neq i} h_{is}\xi_s\right] \\
& = & \left(\rho_i - \sqrt{|c|}\langle T\varphi, \Omega^{-1}\gamma_i\rangle\right)\mathcal{P}\left(\xi_i - \sum_s \langle \beta_i, L^{-1}\Omega^{-1}\beta_s\rangle \xi_s\right) \\
& = & \widetilde{\rho}_i\widetilde{\xi}_i.
\end{array}$$

Agora, temos pelo Teorema 2.4.5 que Ω também satisfaz

$$T\Omega = \Omega^t T^t \tag{5.2.11}$$

e, pelo Teorema 1.4.10, a solução (v, h, ρ) do sistema (1.4.15) associada a f é tal que $h = (h_{ij})$ é simétrica e $\rho_i = \sqrt{|c|}v_i$. Logo, por (5.1.11) e (5.1.12)

$$\begin{array}{rcl}
\langle L^{-1}\Omega^{-1}\gamma_i, \beta_j\rangle & = & \langle \Omega^{-1}\gamma_i, (L^{-1})^t P^t\gamma_j\rangle = -\langle \Omega^{-1}\gamma_i, T\gamma_j\rangle \\
& = & -\langle T^t\Omega^{-1}\gamma_i, \gamma_j\rangle = -\langle (\Omega^{-1})^t T\gamma_i, \gamma_j\rangle = -\langle T\gamma_i, \Omega^{-1}\gamma_j\rangle \\
& = & \langle \beta_i, L^{-1}\Omega^{-1}\gamma_j\rangle,
\end{array}$$

ou seja, $\tilde{h}_{ij} = \tilde{h}_{ji}$. Resta verificar que

$$\widetilde{\rho}_i = \sqrt{|c|}\widetilde{v}_i,$$

ou seja, por (5.2.9), verificar que

$$\rho_i - \sqrt{|c|}\left\langle T\varphi, \Omega^{-1}\gamma_i\right\rangle = \sqrt{|c|}(v_i + \left\langle \beta_i, L^{-1}\Omega^{-1}\varphi\right\rangle).$$

Essa igualdade é equivalente a

$$-\left\langle T\varphi, \Omega^{-1}\gamma_i\right\rangle = \left\langle \beta_i, L^{-1}\Omega^{-1}\varphi\right\rangle,$$

a qual segue de (5.2.10) e (5.2.11). A conclusão decorre do Teorema 1.4.10.

∎

Corolário 5.2.6. *Sejam (v,h) e $(\varphi,\psi,\gamma,\beta)$ soluções de (1.4.20) e (5.2.1), respectivamente. Então $(\tilde{v},\tilde{h})$ dados por (5.2.9) é uma nova solução de (1.4.20).*

Os resultados desta seção fornecem o seguinte processo para obter uma família de imersões isométricas horizontais $f\colon M^n_c \to \mathbb{S}^{2n+1}_\epsilon(c)$ a partir de uma imersão com tais propriedades e de uma solução, com valores em um espaço vetorial Euclidiano, de um sistema linear completamente integrável de primeira ordem de equações diferenciais parciais.

Corolário 5.2.7. *Sejam $f : M^n(c) \to \mathbb{S}^{2n+1}_\epsilon(c)$ uma imersão isométrica horizontal com $\nu_f \equiv 0$, $(u_1,...,u_n)$ coordenadas principais em um aberto $U \subset M^n(c)$ dadas pelo Corolário 1.4.11, (v,h) a solução do sistema (1.4.19) associada a f e $P : V \to V$ um operador inversível tal que $\sigma(P) \cap (-\sigma(P)) = \emptyset$. Seja $(\varphi,\gamma_1,...,\gamma_n)$ uma solução com valores em V do sistema linear completamente integrável de primeira ordem*

$$\begin{cases} i)\ \partial_i(\varphi) = v_i\gamma_i, \quad (ii)\ \partial_i(\gamma_j) = h_{ji}\gamma_i,\ i \neq j \\ iii)\ \partial_i(\gamma_i) + \sum_{j\neq i} h_{ji}\gamma_j + (P^t)^{-1}\gamma_i + cv_i\varphi = 0, \end{cases} \tag{5.2.12}$$

em um aberto $W \subset U$ no qual

$$\tilde{v}_i = v_i + \left\langle \gamma_i, (P+P^{-1})\Omega^{-1}\varphi \right\rangle \neq 0,$$

para todo $1 \leq i \leq n$, em que Ω é dada por (2.4.2) para $A = P$ e $C = (P^{t^2} + I)\,(d\varphi(d\varphi)^t + c\varphi\varphi^t)\,P$. Então, a aplicação $\tilde{f} : W \to \mathbb{S}^{2n+1}_\epsilon(c)$ dada por

$$\begin{aligned} \widetilde{F} = j \circ \widetilde{f} = F - \textstyle\sum_j \left(\langle \Omega^{-1}\varphi, \gamma_j\rangle + \langle P\Omega^{-1}\varphi, \gamma_j\rangle\, i\right) F_* X_j \\ - \left(\langle \Omega^{-1}\varphi, \varphi\rangle + \langle P\Omega^{-1}\varphi, \varphi\rangle\, i\right) cF, \end{aligned}$$

em que $X_j = v_j^{-1}\partial_j$ para $1 \leq j \leq n$ e $j : \mathbb{S}^{2n+1}_\epsilon(c) \to \mathbb{C}^{n+1}_\epsilon$ é a inclusão, define uma nova imersão horizontal cuja métrica induzida tem curvatura seccional constante c.

Além disso, $(\tilde{v},\widetilde{h})$ é a solução de (1.4.19) associada a $\widetilde{f}$, com

$$\widetilde{h}_{ij} = h_{ij} + \left\langle \gamma_j, (P+P^{-1})\Omega^{-1}\gamma_i \right\rangle.$$

5.3 Teoremas de decomposição para a P-transformação.

Nessa seção, obtemos teoremas de decomposição para a $P-$transformação de subvariedades Lagrangianas de $\mathbb{C}^n$ com curvatura nula e para a $P-$transformação de subvariedades horizontais de $\mathbb{S}^{2n+1}_\epsilon(c)$ com curvatura constante c. Em particular, mostraremos como obter, a partir de k P-transformadas de uma subvariedade em uma das duas classes acima, fórmulas explícitas para uma família de novas subvariedades da mesma classe, a qual está em correspondência com os vértices de um cubo k-dimensional, do qual as k subvariedades iniciais são os vértices contíguos àquele associado à subvariedade dada.

5.3.1 Decomposição da P-transformação de subvariedades Lagrangianas com curvatura nula.

Para a P-transformação de subvariedades Lagrangianas vale o seguinte teorema de decomposição.

Teorema 5.3.1. *Seja $f\colon M^n(0) \to \mathbb{R}^{2n}$ uma imersão isométrica Lagrangiana. Dada uma P-transformada $\mathcal{R}_{\varphi,P}(f)\colon \tilde{M}^n(0) \to \mathbb{R}^{2n}$ de f tal que $P = P_1 \oplus P_2$ com respeito a uma decomposição ortogonal $V = V_1 \oplus V_2$, defina $\varphi_j = \pi_{V_j} \circ \varphi$, $1 \le j \le 2$, e*

$$\bar{\varphi}_j = \varphi_j - \Omega_{ji}\Omega_{ii}^{-1}\varphi_i,$$

em que $\Omega_{ij} = \pi_{V_i} \circ \Omega|_{V_j}$. Então (φ_j, P_j) define uma P_j-transformada de f para $1 \le j \le 2$, $(\bar{\varphi}_i, P_i)$ uma P_i-transformada de f_j para $1 \le i \ne j \le 2$ e

$$\mathcal{R}_{\varphi,P}(f) = \mathcal{R}_{\bar{\varphi}_i,P_i}(\mathcal{R}_{\varphi_j,P_j}(f)).$$

Demonstração. Pela hipótese de que $\mathcal{R}_{\varphi,P}(f)$ é uma P-transformada de f, temos que $\tilde{f} = \mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega}(f)$, em que

$$\beta = Jf_*\omega^t P$$

e

$$\Omega^t P + P^t\Omega^t = -T\rho,$$

com $T = -P^t - (P^t)^{-1}$ e $\rho = P^t\omega\omega^t P = \beta^t\beta$. Desde que $P = P_1 \oplus P_2$, o operador T também admite uma decomposição $T = T_1 \oplus T_2$, logo as equações acima são equivalentes às equações

$$\beta_j = Jf_*\omega_j^t P_j,$$

e

$$\Omega_{jj}^t P_j + P_j^t\Omega_{jj}^t = -T_j\rho_{jj},\ \Omega_{ij}^t P_i + P_j^t\Omega_{ij}^t = -T_j\rho_{ij},\ 1 \le i,j \le 2.$$

Como Ω é inversível, temos pela Definição 2.4.6 que (φ^t, ω^t) é P-admissível. Logo, pela Proposição 2.4.7 temos que $E_\alpha \cap ker\omega^t = \{0\}$, logo $E_{\alpha_i} \cap ker\omega_j^t = \{0\}$, em que E_{α_j} é o autoespaço de P_j associado a α_j. Assim, novamente pela Proposição 2.4.7, temos que $(\varphi_j^t, \omega_j^t)$ é P_j-admissível, ou seja, Ω_{jj} é inversível. Portanto, pelo Teorema 3.3.5 e pela definição 5.1.3, f_j é uma P_j-transformada de f.

Afirmamos que

$$\bar{\Omega}_{ii}^t P_i + P_i^t\bar{\Omega}_{ii}^t + T_i\bar{\beta}_i^t\bar{\beta}_i = 0,$$

em que $\bar{\beta}_i = \mathcal{P}_j(\beta_i - \beta_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t)$. De fato, de (5.1.11) temos que

$$T_i\Omega_{ij} = \Omega_{ji}^t T_j^t \text{ e } T_j\Omega_{jj} = \Omega_{jj}^t T_j^t. \tag{5.3.1}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\bar{\Omega}_{ii}^t P_i + P_i^t\bar{\Omega}_{ii}^t + T_i^t\bar{\beta}_i^t\bar{\beta}_i &= \left(\Omega_{ii}^t - \Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t\right)P_i + P_i^t\left(\Omega_{ii}^t - \Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t\right)\\
&\quad + T_i\left(\beta_i - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\beta_j^t\right)\left(\beta_i - \beta_j(\Omega_{jj}^t)^{-1}\Omega_{ij}^t\right)\\
&= (\Omega_{ii}^t P_i + P_i^t\Omega_{ii}^t + T_i\beta_i^t\beta_i) - \Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t P_i - P_i^t\Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t\\
&\quad - T_i\beta_i^t\beta_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t - T_i\Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\beta_j^t\beta_i + T_i\Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\beta_j^t\beta_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t\\
&= -\Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t P_i - \left(P_i^t\Omega_{ji}^t + T_i\beta_i^t\beta_j\right)(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t\\
&\quad - \Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t T_j\beta_j^t\beta_i + \Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t T_j\beta_j^t\beta_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t\\
&= -\Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t\left(\Omega_{ij}^t P_i + T_j\beta_j^t\beta_i\right) - \left(P_i^t\Omega_{ji}^t + T_i\beta_i^t\beta_j\right)(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t\\
&\quad + \Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t T_j\beta_j^t\beta_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t\\
&= \Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t P_j^t\Omega_{ij}^t + \Omega_{ji}^t P_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t + \Omega_{ji}^t(\Omega_{jj}^{-1})^t T_j\beta_j^t\beta_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\Omega_{ij}^t\\
&= \Omega_{ji}^t\left((\Omega_{jj}^{-1})^t P_j^t + P_j(\Omega_{jj}^{-1})^t + (\Omega_{jj}^{-1})^t T_j\beta_j^t\beta_j(\Omega_{jj}^{-1})^t\right)\Omega_{ij}^t\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Para obtermos a equação (5.1.3) para $\mathcal{R}_{\bar{\varphi}_i,\bar{\beta}_i,\bar{\Omega}_{ii}}(f_j)$ há um problema técnico de encontrar o operador J definido na subvariedade $\widetilde{M}$ que a torna Lagrangiana. Para contornar esse problema, usamos o sistema de coordenadas principais. A partir desse sistema, podemos substituir a equação

$$\beta = Jf_*\omega^t P$$

na definição 5.1.3 por

$$P^t\gamma_i = \beta_i.$$

Assim, basta mostrar tal equação para os dados $(\bar{\varphi}_i, \bar{\beta}_i, \bar{\Omega}_{ii})$. Para isso, dada a transformada

$$f_j : \widetilde{M}^n \to \mathbb{R}^N,$$

seja $X_{j,l} \in T\widetilde{M}$, $1 \leq l \leq n$. Para manter a notação do Teorema de permutabilidade, chamamos os vetores relacionados a f_j por $(\gamma_{j,l}, \beta_{j,l})$, com $\gamma_{j,l} = (\gamma_{j,1}, ..., \gamma_{j,r_j})$ e $\beta_{j,l} = (\beta_{j,1}, ..., \beta_{j,r_j})$, sendo $r_j = dim(V_j)$. Assim $\omega_j(X_l) = \gamma_{j,l}$ e $\beta_j^t(\xi_l) = \beta_{j,l}$.

Sabemos de (4.1.17) que

$$D_jX_{j,l} = X_l,$$

e segue de (4.2.2) que

$$\bar{\omega}_iX_{j,l} = \omega_iD_jX_{j,l} - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\omega_jD_jX_{j,l},$$

implicando

$$\bar{\gamma}_{i,l} = \gamma_{i,l} - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\gamma_{j,l}.$$

Assim, segue das equações (4.1.8), (4.1.14), (5.1.10) e (5.3.1) que

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}_{i,l} &= \bar{\beta}_i(\xi_{j,l}) = \left(\beta_i^t - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\beta_j^t\right)\mathcal{P}_j^t\mathcal{P}_j\left(\xi_l - \textstyle\sum_k \left\langle (\Omega_{jj}^t)^{-1}(L_j^t)^{-1}\beta_{j,l}, \beta_k\right\rangle \xi_k\right)\\
&= \left(\beta_i^t - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\beta_j^t\right)\left(\xi_l - \beta_j\left((\Omega_{jj}^t)^{-1}(L_j^{-1})^t\beta_{j,l}\right)\right)\\
&= \beta_{i,l} - \rho_{ij}(\Omega_{jj}^t)^{-1}(L_j^{-1})^t\beta_{j,l} - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\beta_{j,l} + \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\rho_{jj}(\Omega_{jj}^t)^{-1}(L_j^{-1})^t\beta_{j,l}\\
&= P_i^t\gamma_{i,l} - \rho_{ij}(\Omega_{jj}^t)^{-1}(L_j^{-1})^tP_j^t\gamma_{j,l} - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}P_j^t\gamma_{j,l} + \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\rho_{jj}(\Omega_{jj}^t)^{-1}(L_j^{-1})^tP_j^t\gamma_{j,l}\\
&= P_i^t\gamma_{i,l} + \rho_{ij}(\Omega_{jj}^t)^{-1}T_j\gamma_{j,l} - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}P_j^t\gamma_{j,l} - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\rho_{jj}(\Omega_{jj}^t)^{-1}T_j\gamma_{j,l}\\
&= P_i^t\gamma_{i,l} + \rho_{ij}(\Omega_{jj}^t)^{-1}T_j\gamma_{j,l} - \Omega_{ij}\left(\Omega_{jj}^{-1}P_j^t + \Omega_{jj}^{-1}\rho_{jj}T_j^t\Omega_{jj}^{-1}\right)\gamma_{j,l}\\
&= P_i^t\gamma_{i,l} + \rho_{ij}T_j^t\Omega_{jj}^{-1}\gamma_{j,l} + \Omega_{ij}P_j\Omega_{jj}^{-1}\gamma_{j,l}\\
&= P_i^t\gamma_{i,l} + \left(\rho_{ij}T_j^t + \Omega_{ij}P_j\right)\Omega_{jj}^{-1}\gamma_{j,l}\\
&= P_i^t\gamma_{i,l} - P_i^t\Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\gamma_{j,l}\\
&= P_i^t\bar{\gamma}_{i,l}.
\end{aligned}$$

O resultado segue do Teorema 3.3.5 e pela definição 5.1.3.

■

Corolário 5.3.2. *Seja $f\colon M^n(0) \to \mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ uma imersão isométrica Lagrangiana. Dada uma P-transformada $\mathcal{R}_{\omega,P}(f)\colon \tilde{M}^n(0) \to \mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ de f tal que $P = P_1 \oplus P_2$ com respeito a uma decomposição ortogonal $V = V_1 \oplus V_2$, defina $\omega_j = \omega|_{V_j}$ e*

$$\bar{\omega}_j = \omega_j D_i - \Omega_{ji}\Omega_{ii}^{-1}\omega_i D_i, \tag{5.3.2}$$

em que $\Omega_{ij} = \pi_{V_i} \circ \Omega|_{V_j}$ e $D_i = I - \Phi^i_{\Omega_{ii}^{-1}\varphi_i}$. Então (ω_j, P_j) define uma P_je-transformada de f para $1 \le j \le 2$, $(\bar{\omega}_i, P_i)$ uma P_ie-transformada de f_j para $1 \le i \ne j \le 2$ e

$$\mathcal{R}_{\omega,P}(f) = \mathcal{R}_{\bar{\omega}_i,P_i}(\mathcal{R}_{\omega_j,P_j}(f)).$$

Demonstração. Como $\varphi = -P^t\omega\sum_k \partial_k$ se e só se, $\varphi_l = -P_l^t\omega_l\sum_k \partial_k,\ l \in \{i,j\}$, basta verificar que

$$\bar{\varphi}_j = \varphi_i - \Omega_{ji}\Omega_{ii}^{-1}\varphi_i = -P_j^t\bar{\omega}_j\sum_k \partial_k,$$

com $\bar{\omega}_j$ dado por (5.3.2). Para isso, temos de (5.1.10) que

$$P_j^t\Omega_{ji} + \Omega_{ji}P_i = -\rho_{ji}T_i^t \text{ e } \Omega_{ii}^{-1}P_i^t + P_i\Omega_{ii}^{-1} = -\Omega_{ii}^{-1}\rho_{ii}T_i^t\Omega_{ii}^{-1}, \tag{5.3.3}$$

em que $\rho_{ji} = P_j^t \omega_j \omega_i P_i$. Logo,

$$\begin{aligned} -P_j^t \bar{\omega}_j &= -P_j^t(\omega_j D_i - \Omega_{ji}\Omega_{ii}^{-1}\omega_i D_i) = -P_j^t \omega_j D_i + P_j^t \Omega_{ji}\Omega_{ii}^{-1}\omega_i D_i \\ &= -P_j^t \omega_j D_i + \Omega_{ji}\Omega_{ii}^{-1} P_i^t \omega_i D_i + \Omega_{ji}\Omega_{ii}^{-1}\rho_{ii} T_i^t \Omega_{ii}^{-1}\omega_i D_i \\ &\quad -\rho_{ji} T_i^t \Omega_{ii}^{-1}\omega_i D_i. \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

Temos ainda de (4.1.17), (5.1.14) e $\omega_i^t(v) = \sum_l \langle \gamma_{i,l}, v\rangle X_l$, que

$$\begin{aligned} \omega_z D_i \partial_k &= \omega_z (v_{i,k} X_k) = \omega_z \left(\left(v_k - \left\langle \gamma_{i,k}, (P_i + P_i^{-1})\Omega_{ii}^{-1} P_i^t \textstyle\sum_l v_l \gamma_{i,l}\right\rangle\right) X_k\right) \\ &= \omega_z \left(\left(v_k + \left\langle \gamma_{i,k}, T_i^t \Omega_{ii}^{-1} P_i^t \textstyle\sum_l v_l \gamma_{i,l}\right\rangle\right) X_k\right) \\ &= v_k \gamma_{z,k} + \left\langle \gamma_{i,k}, T_i^t \Omega_{ii}^{-1} P_i^t \textstyle\sum_l v_l \gamma_{i,l}\right\rangle \gamma_{z,k} \\ &= v_k \gamma_{z,k} + \omega_z \omega_i T_i^t \Omega_{ii}^{-1} P_i^t \textstyle\sum_l v_l \gamma_{i,l} \\ &= v_k \gamma_{z,k} + (P_z^t)^{-1} \rho_{zi} P_i^{-1} T_i^t \Omega_{ii}^{-1} P_i^t \textstyle\sum_l v_l \gamma_{i,l}, \;\; z = i, j. \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

Assim, usando as equações (5.3.3), (5.3.4) e (5.3.5), temos

$$\begin{aligned} -P_j^t \bar{\omega}_j \textstyle\sum_k \partial_k &= -P_j^t(\omega_j D_i - \Omega_{ji}\Omega_{ii}^{-1}\omega_i D_i) \textstyle\sum_k \partial_k \\ &= \left(-P_j^t \omega_j D_i + \Omega_{ji}\Omega_{ii}^{-1} P_i^t \omega_i D_i + \Omega_{ji}\Omega_{ii}^{-1}\rho_{ii} T_i^t \Omega_{ii}^{-1}\omega_i D_i - \rho_{ji} T_i^t \Omega_{ii}^{-1}\omega_i D_i\right) \textstyle\sum_k \partial_k \\ &= -P_j^t \textstyle\sum_k v_k \gamma_{j,k} - P_j^t (P_j^t)^{-1} \rho_{ji} P_i^{-1} T_i^t \Omega_{ii}^{-1} P_i^t \textstyle\sum_l v_l \gamma_{i,l} + \Omega_{ji}\Omega_{ii}^{-1} P_i^t \textstyle\sum_k v_k \gamma_{i,k} \\ &\quad +\Omega_{ji}\Omega_{ii}^{-1} P_i^t (P_i^t)^{-1} \rho_{ii} P_i^{-1} T_i^t \Omega_{ii}^{-1} P_i^t \textstyle\sum_l v_l \gamma_{i,l} + \Omega_{ji}\Omega_{ii}^{-1}\rho_{ii} T_i^t \Omega_{ii}^{-1} \textstyle\sum_k v_k \gamma_{i,k} \\ &\quad +\Omega_{ji}\Omega_{ii}^{-1}\rho_{ii} T_i^t \Omega_{ii}^{-1} (P_i^t)^{-1} \rho_{ii} P_i^{-1} T_i^t \Omega_{ii}^{-1} P_i^t \textstyle\sum_l v_l \gamma_{i,l} \\ &\quad -\rho_{ji} T_i^t \Omega_{ii}^{-1} \textstyle\sum_k v_k \gamma_{i,k} - \rho_{ji} T_i^t \Omega_{ii}^{-1} (P_i^t)^{-1} \rho_{ii} P_i^{-1} T_i^t \Omega_{ii}^{-1} P_i^t \textstyle\sum_l v_l \gamma_{i,l} \\ &= \bar{\varphi}_j + \rho_{ji}\left(-P_i^{-1} T_i^t \Omega_{ii}^{-1} P_i^t - T_i^t \Omega_{ii}^{-1} - T_i^t \Omega_{ii}^{-1} (P_i^t)^{-1} \rho_{ii} P_i^{-1} T_i^t \Omega_{ii}^{-1} P_i^t\right) \textstyle\sum_l v_l \gamma_{i,l} \\ &\quad +\Omega_{ji}\Omega_{ii}^{-1}\rho_{ii}\left(P_i^{-1} T_i^t \Omega_{ii}^{-1} P_i^t + T_i^t \Omega_{ii}^{-1} + T_i^t \Omega_{ii}^{-1} (P_i^t)^{-1} \rho_{ii} P_i^{-1} T_i^t \Omega_{ii}^{-1} P_i^t\right) \textstyle\sum_l v_l \gamma_{i,l} \\ &= \bar{\varphi}_j + (\rho_{ji} - \Omega_{ji}\Omega_{ii}^{-1}\rho_{ii})\left(-P_i^{-1} T_i^t \Omega_{ii}^{-1} P_i^t - T_i^t \Omega_{ii}^{-1}\right. \\ &\quad \left. -T_i^t \Omega_{ii}^{-1} (P_i^t)^{-1} \rho_{ii} P_i^{-1} T_i^t \Omega_{ii}^{-1} P_i^t\right) \textstyle\sum_l v_l \gamma_{i,l} \\ &= \bar{\varphi}_j + (\rho_{ji} - \Omega_{ji}\Omega_{ii}^{-1}\rho_{ii})\left(-P_i^{-1} T_i^t \Omega_{ii}^{-1} P_i^t - T_i^t \Omega_{ii}^{-1}\right. \\ &\quad \left. -T_i^t \Omega_{ii}^{-1} (P_i^t)^{-1} \left(-P_i^t \Omega_{ii} (T_i^t)^{-1} - \Omega_{ii} P_i (T_i^t)^{-1}\right) P_i^{-1} T_i^t \Omega_{ii}^{-1} P_i^t\right) \textstyle\sum_l v_l \gamma_{i,l} \\ &= \bar{\varphi}_j. \end{aligned}$$

■

Dados $P_1, P_2 \in \mathbb{R}$, com $P_1 \neq -P_2$, dizemos que um conjunto $\{f_1, ..., f_4\}$ de imersões isométricas Lagrangianas $f_i : M_i(0) \to \mathbb{R}^{2n}$, $1 \leq i \leq 4$, é um (P_1, P_2)-quadrilátero de Bianchi se, para cada uma delas, as imersões precedente e subsequente (pensadas como pontos em um círculo orientado) são, respectivamente, P_l e P_t-transformadas daquela, com t, l distintos em $\{1, 2\}$, e os tensores de Codazzi associados comutam.

Proposição 5.3.3. *Seja*

$$f_r = \mathcal{R}_{\varphi_r}(f) : M^n(0) \to \mathbb{R}^{2n},$$

uma P_r-transformada de Ribaucour de $f : M^n(0) \to \mathbb{R}^{2n}$ com $1 \leq r \leq 2$ e $P_1 \neq \pm P_2$. Se $[d\omega_1^t, d\omega_2^t] = 0$, então existe uma única imersão $\tilde{f} : M^n(0) \to \mathbb{R}^{2n}$ tal que $\{f, f_1, f_2, \tilde{f}\}$ forma um (P_1, P_2)-quadrilátero de Bianchi.

Além disso, o mesmo resultado é válido substituindo P-transformadas por Petrans
-formadas.

Demonstração. Pelo Lema 5.1.5, f_r é uma L_r-transformada de f, com $L_r = \frac{P_r^2}{P_r^2+1}$ e

$$\beta_r = Jf_*(d\varphi_r)^t P_r, \ r = 1, 2. \tag{5.3.6}$$

Assim, pela Proposição 4.2.3, $\{f, f_1, f_2, \tilde{f} = \mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega}(f)\}$ é um (L_1, L_2)-quadrilátero de Bianchi. Resta provar que tal quadrilátero é um (P_1, P_2)-quadrilátero de Bianchi. Definindo $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $Pe_r = P_r e_r, \ r = 1, 2$, a equação

$$\beta = Jf_*(d\varphi)^t P,$$

é equivalente às equações (5.3.6). A equação $\Omega^t P + P^t \Omega^t = -T\rho$, com $T = -P^t - (P^t)^{-1}$, é consequência da existência da P_r-transformada, ou seja, $2P_r\Omega_{rr} = -T_r\rho_{rr}$, e da escolha

$$\Omega_{ij}(x_0) = \frac{-L_i \langle \mathcal{F}_i(x_0), \mathcal{F}_j(x_0) \rangle + \rho_{ij}(x_0)}{L_j - L_i} = \frac{(1 + P_j^2)}{P_j(P_i + P_j)} \rho_{ij}(x_0), \ i, j \in \{1, 2\},$$

para algum $x_0 \in M^n$, em que $\rho_{ij} = P_i P_j \langle \nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j \rangle$, feita na Proposição 4.2.3. Logo, pelas Definições 3.3.1 e 5.1.3, $\tilde{f} = \mathcal{R}_{\varphi,\Omega}(f)$ é uma P-transformada de f.

Agora, definindo $\mathcal{R}_{\varphi,\Omega}(\varphi_i, \Omega_{ii}) := (\bar{\varphi}_i, \bar{\Omega}_{ij})$ por

$$\bar{\varphi}_i = \varphi_i - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j \text{ e } \bar{\Omega}_{ii} = \Omega_{ii} - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji},$$

em que $\Omega_{jj} = \frac{1}{2}\langle \mathcal{G}_j, \mathcal{G}_j \rangle$, temos, pelo Teorema 5.3.1, que

$$\mathcal{R}_{\varphi,\Omega,P}(f) = \mathcal{R}_{\bar{\varphi}_i,\bar{\Omega}_{ii},P_i}(\mathcal{R}_{\varphi_j,\Omega_{jj},P_j}(f)).$$

■

5.3.2 Decomposição da P-transformação de subvariedades horizontais.

A seguir mostraremos um teorema de decomposição para a P-transformação de imersões isométricas horizontais $f\colon\ M^n(c) \to \mathbb{S}_\epsilon^{2n+1}(c)$.

Teorema 5.3.4. *Sejam* $f\colon M^n(c) \to \mathbb{S}^{2n+1}_\epsilon(c)$ *uma imersão isométrica horizontal e* $\mathcal{R}_{\varphi,P}(f) : \tilde{M}^n(c) \to \mathbb{S}^{2n+1}_\epsilon(c)$ *uma* P*-transformada de* f *tal que* $P = P_1 \oplus P_2$ *com respeito a uma decomposição ortogonal* $V = V_1 \oplus V_2$. *Defina* $\varphi_j = \varphi|_{V_j}$ *e seja*

$$\bar{\varphi}_j = \varphi_j - \Omega_{ji}\Omega_{ii}^{-1}\varphi_i \text{ com } \Omega_{ij} = \pi|_{V_i} \circ \Omega|_{V_j}.$$

Então, se $c > 0$ *temos que* (φ_j, P_j) *define uma* P_j*-transformada de* f *para* $1 \leq j \leq 2$, $(\bar{\varphi}_i, P_i)$ *uma* P_i*-transformada de* f_j *para* $1 \leq i \neq j \leq 2$ *e*

$$\mathcal{R}_{\varphi,P}(f) = \mathcal{R}_{\bar{\varphi}_i,P_i}(\mathcal{R}_{\varphi_j,P_j}(f)).$$

Valem as mesmas conclusões para $c < 0$ *desde que* Ω_{jj} *seja inversível para* $1 \leq j \leq 2$.

Demonstração. Pela hipótese de que $\tilde{f} = \mathcal{R}_{\varphi,P}(f) = \mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega}(f)$ é uma P-transformada de f, temos que

$$\beta = (\phi f_* \omega^t + \epsilon\sqrt{|c|}\xi_f \varphi^t)P,$$

e

$$\Omega^t P + P^t \Omega^t = -T\rho,$$

em que $T = -P^t - (P^t)^{-1}$ e $\rho = P^t\omega\omega^t P + cP^t\varphi^t\varphi P$. Desde que $P = P_1 \oplus P_2$ e $T = T_1 \oplus T_2$, essas equação são equivalentes, respectivamente, as seguintes equações

$$\beta_j = (\phi f_* \omega_j^t + \epsilon\sqrt{|c|}\xi_f \varphi_j^t)P_j,$$

e

$$\Omega_{jj}^t P_j + P_j^t \Omega_{jj}^t = -T_j\rho_{jj},\ \Omega_{ij}^t P_i + P_j^t \Omega_{ij}^t = -T_j\rho_{ij},\ 1 \leq i, j \leq 2.$$

Agora, como Ω é inversível, temos pela Definição 2.4.6 que (φ^t, ω^t) é P-admissível. Logo, pela Proposição 2.4.7 $E_\alpha \cap (\ker \varphi^t \cap ker\omega^t) = \{0\}$ para $c > 0$, implicando que $E_{\alpha_i} \cap (ker\varphi_j^t \cap ker\omega_j^t) = \{0\}$, com E_{α_j} sendo o autoespaço de P_j. Assim, novamente pela Proposição 2.4.7 temos que $(\varphi_j^t, \omega_j^t)$ é P_j-admissível se $c > 0$, ou seja, Ω_{jj} é inversível. Portanto, pelo Teorema 3.3.5 e pela definição 5.2.2, f_j é uma P_j-transformada de f se $c > 0$. O mesmo é válido para $c < 0$ se Ω_{jj} for inversível.

De forma análoga ao Teorema 5.3.1, prova-se que

$$\bar{\Omega}_{ii}^t P_i + P_i^t \bar{\Omega}_{ii}^t + T_i \bar{\beta}_i^t \bar{\beta}_i = 0,$$

em que $\bar{\beta}_i = \mathcal{P}_j(\beta_i - \beta_j(\Omega_{jj}^{-1})^t \Omega_{ij}^t)$, e munindo a variedade com um sistema de coordenadas, temos também $\bar{\beta}_{i,l} = P_i^t \bar{\gamma}_{i,l}$. Assim, segue o resultado.

■

Dados $P_1, P_2 \in \mathbb{R}$, com $P_1 \neq -P_2$, dizemos que um conjunto $\{f_1, ..., f_4\}$ de imersões isométricas horizontais $f_i : M_i(c) \to \mathbb{S}^{2n+1}_\epsilon$, $1 \leq i \leq 4$, é um (P_1, P_2)-quadrilátero de Bianchi se, para cada uma delas, as imersões precedente e subsequente (pensadas como pontos em um círculo orientado) são, respectivamente, P_l e P_t-transformadas daquela, com t, l distintos em $\{1,2\}$, e os tensores de Codazzi associados comutam.

Proposição 5.3.5. *Seja*

$$f_r = \mathcal{R}_{\varphi_r}(f) : M^n(c) \to \mathbb{S}^{2n+1}(c),$$

uma P_r-transformada de Ribaucour de $f : M^n(c) \to \mathbb{S}^{2n+1}(c)$ com $1 \leq r \leq 2$, $c > 0$ e $P_1 \neq \pm P_2$. Se $[d\omega_1^t, d\omega_2^t] = 0$, então existe uma única imersão $\tilde{f} : M^n(c) \to \mathbb{S}^{2n+1}(c)$ tal que $\{f, f_1, f_2, \tilde{f}\}$ forma um (P_1, P_2)-quadrilátero de Bianchi.

Demonstração. Pelo Lema 5.2.4 f_r é uma L_r-transformada de f, com $L_r = \frac{P_r^2}{P_r^2+1}$ e

$$\beta_r = \left(\Phi f_* \omega_r^t + \epsilon\sqrt{|c|}\xi_f \varphi_r^t\right) P_r. \tag{5.3.7}$$

Assim, pela Proposição 4.2.3, $\{f, f_1, f_2, \tilde{f} = \mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega}(f)\}$ é um (L_1, L_2)-quadrilátero de Bianchi. Resta provar que tal quadrilátero é um (P_1, P_2)-quadrilátero de Bianchi. Definindo $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $Pe_r = P_r e_r,\ r = 1, 2$, a equação

$$\beta = \left(\phi f_* \omega^t + \epsilon\sqrt{|c|}\xi_f \varphi^t\right) P,$$

é equivalente as equações (5.3.7). A equação $\Omega^t P + P^t \Omega^t = -T\rho$, com $T = -P^t - (P^t)^{-1}$, é consequência da existência da P_r-transformada, ou seja, $2P_r\Omega_{rr} = -T_r\rho_{rr}$, e da escolha de

$$\Omega_{ij}(x_0) = \frac{-L_i \langle \mathcal{G}_i(x_0), \mathcal{G}_j(x_0)\rangle + \rho_{ij}(x_0)}{L_j - L_i} = \frac{(1+P_j^2)}{P_j(P_i+P_j)}\rho_{ij}(x_0),\ i, j \in \{1,2\},$$

para algum $x_0 \in M$, em que $\rho_{ij} = P_i P_j \langle \nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j\rangle + cP_iP_j\varphi_i\varphi_j$, feita na Proposição 4.2.3. Logo, pelas Definições 3.3.9 e 5.2.2, $\mathcal{R}_{\varphi,\Omega}(f)$ é uma P-transformada de f.

Agora, definindo $\mathcal{R}_{\varphi,\Omega}(\varphi_i, \Omega_{ii}) := (\bar{\varphi}_i, \bar{\Omega}_{ij})$ por

$$\bar{\varphi}_i = \varphi_i - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\varphi_j \text{ e } \bar{\Omega}_{ii} = \Omega_{ii} - \Omega_{ij}\Omega_{jj}^{-1}\Omega_{ji},$$

em que $\Omega_{jj} = \frac{1}{2}\langle \mathcal{G}_j, \mathcal{G}_j\rangle$, temos que $\mathcal{R}_{\bar{\varphi}_i,\bar{\Omega}_{ii},P_i}(f_j)$ é uma P_i-transformada de f_j e

$$\mathcal{R}_{\varphi,\Omega,P}(f) = \mathcal{R}_{\bar{\varphi}_i,\bar{\Omega}_{ii},P_i}(\mathcal{R}_{\varphi_j,\Omega_{jj},P_j}(f)).$$

■

5.3.3 O P-cubo

Para cada $1 \leq r \leq k$, considere o conjunto de multi-índices

$$\Lambda_r = \{\alpha_r = \{i_1 < ... < i_r\} \subset \{1, ..., k\}\}.$$

Dados $P_1, ..., P_k \in \mathbb{R}$, com $P_i \neq -P_j$ para quaisquer $1 \leq i \neq j \leq k$, um $(P_1, ..., P_k)$-cubo de Bianchi é uma $(k+1)$-upla $(\mathcal{C}_0, ..., \mathcal{C}_k)$, em que cada $\mathcal{C}_r$ é uma família de subvariedades com $\binom{k}{r}$ elementos, indexada em Λ_r, de imersões isométricas Lagrangianas $f_{\alpha_r} : M^n(0) \to \mathbb{R}^{2n}$, satisfazendo as seguintes propriedades

(i) Dada $f_{\alpha_{s+1}} \in \mathcal{C}_{s+1}$, se $\alpha_{s+1} = \alpha_s \cup \{i_j\}$, então $f_{\alpha_{s+1}}$ é uma P_{i_j}-transformada de $f_{\alpha_s} \in \mathcal{C}_s$.

(ii) Se $\alpha_{s+1} = \alpha_{s-1} \cup \{i_k, i_j\}$, então o quadrilátero $\{f_{\alpha_{s-1}}, f_{\alpha_{s-1}\cup\{i_k\}}, f_{\alpha_{s-1}\cup\{i_j\}}, f_{\alpha_{s+1}}\}$ é um (P_{i_k}, P_{i_j}) quadrilátero de Bianchi.

De maneira análoga, define-se um P-cubo de imersões isométricas horizontais $f : M^n(c) \to \mathbb{S}^{2n+1}(c),\ c > 0$.

Teorema 5.3.6. *Sejam $f : M^n(0) \to \mathbb{R}^{2n}$ (respectivamente, $f : M^n(c) \to \mathbb{S}^{2n+1}(c)$, $c > 0$) uma imersão isométrica Lagrangiana (respectivamente horizontal) e*

$$f_i = \mathcal{R}_{\varphi,P_i}(f) : M^n(0) \to \mathbb{R}^{2n} \ (\textit{respectivamente, } f_i = \mathcal{R}_{\varphi,P_i}(f) : M^n(c) \to \mathbb{S}^{2n+1}(c),\ c > 0),$$

$1 \leq i \leq k$, uma P_i-transformada de Ribaucour de f, com $P_i \neq \pm P_j$, $1 \leq i \neq j \leq k$. Se $[d\omega_i^t, d\omega_j^t] = 0,\ i \neq j$ e nenhuma das f_i pertence à família associada a duas quaisquer das outras, então existe um único $(P_1, \ldots, P_k)$-cubo de Bianchi $(\mathcal{C}_0, ..., \mathcal{C}_k)$ tal que $\mathcal{C}_0 = \{f\}$ e $\mathcal{C}_1 = \{f_1, ..., f_k\}$.

Demonstração. Pelo Lema 5.1.5 (respectivamente, Lema 5.2.4) f_i é uma L_i-transformada de f, com $L_i = \frac{P_i^2}{P_i^2+1}$ e

$$\beta_i = Jf_*(d\varphi_i)^t P_i \ (\text{respectivamente, } \beta_i = (\phi f_* \omega_i^t + \epsilon\sqrt{|c|}\xi_f \varphi^t)P_i). \tag{5.3.8}$$

Assim, o Teorema 4.2.4 garante a existência de um único $(L_1, ..., L_k)$-cubo de Bianchi $(\mathcal{C}_0, ..., \mathcal{C}_k)$ tal que $\mathcal{C}_0 = \{f\}$ e $\mathcal{C}_1 = \{f_1, ..., f_k\}$. Resta mostrar que tal cubo é um $(P_1, ..., P_k)$-cubo de Bianchi.

Considere $\tilde{f} = \mathcal{R}_{\varphi,\beta,\Omega}$, com φ, β e Ω dados respectivamente por (4.2.6) e (4.2.7). A equação $\Omega^t P + P^t \Omega^t = -T\rho$, com

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & P_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & P_k \end{bmatrix},$$

e $T = -P^t - (P^t)^{-1}$, ocorre se e só se, $2P_r\Omega_{rr} = -T_r\rho_{rr}$ e

$$\Omega_{ij}L_j + L_i\Omega_{ji} - \rho_{ij} = 0,\ i, j \in \{1, 2\},$$

em que $\rho_{ij} = P_i P_j \langle \nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j \rangle$ (respectivamente, $\rho_{ij} = P_i P_j \langle \nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j \rangle + cP_i P_j \varphi_i \varphi_j$). A primeira equação ocorre de f_i ser uma P_i-transformada de f e a segunda da escolha

$$\Omega_{ij}(x_0) = \frac{-L_i \langle \mathcal{G}_i(x_0), \mathcal{G}_j(x_0) \rangle + \rho_{ij}(x_0)}{L_j - L_i} = \frac{(1+P_j^2)}{P_j(P_i+P_j)} \rho_{ij}(x_0),\ i,j \in \{1,2\},$$

para algum $x_0 \in M$, feita na Proposição 4.2.3. A equação (5.1.3) (respectivamente, (5.2.3)) segue de (5.3.8) (respectivamente, (5.3.8)). Portanto, $\mathcal{R}_{\varphi,P}(f)$ é uma $P-$transformada de f.

Agora, para qualquer multi-índice $\alpha = \{i_1, ..., i_r\} \subset \{1, ..., k\}$, considere φ^{α_r} e Ω^{α_r} dados em (4.2.10) e

$$P^{\alpha_r} = \begin{bmatrix} P_{i_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & P_{i_2} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & P_{i_r} \end{bmatrix}.$$

Definimos $\mathcal{C}_r$ como a família de $\binom{k}{r}$ elementos de P^{α_r}-transformadas vetorial de Ribaucour de f.

Dada $f_{\alpha_{s+1}} = \mathcal{R}_{\varphi^{\alpha_{s+1}},\Omega^{\alpha_{s+1}},L^{\alpha_{s+1}}}(f) \in \mathcal{C}_{s+1},\ 1 \leq s \leq k-1$ e $\alpha_{s+1} = \{i_1, ..., i_{s+1}\} \subset \{1, ..., k\}$, se $\alpha_{s+1} = \alpha_{s-1} \cup \{i_l, i_j\}$, temos pelo Teorema 5.3.1 (respectivamente, Teorema 5.3.4) que

$$f_{\alpha_{s-1}\cup\{i_t\}} = \mathcal{R}_{\varphi^{\alpha_{s-1}\cup\{i_t\}},\Omega^{\alpha_{s-1}\cup\{i_t\}},L^{\alpha_{s-1}\cup\{i_t\}}}(f) \in \mathcal{C}_s,\ t \in \{l, j\},$$

e $f_{\alpha_{s+1}} = \mathcal{R}_{\bar{\varphi}_{i_y},P_{i_y}}(f_{\alpha_{s-1}\cup\{i_t\}})$, $t \neq y$ em $\{l, j\}$. Novamente pelo Teorema 5.3.1 (respectivamente, Teorema 5.3.4), $f_{\alpha_{s-1}\cup\{i_t\}} = \mathcal{R}_{\varphi_{i_t},P_{i_t}}(f_{\alpha_{s-1}})$. Portanto,

$$f_{\alpha_{s+1}} = \mathcal{R}_{\bar{\varphi}_{i_t},P_{i_t}}(\mathcal{R}_{\varphi_{i_y},P_{i_y}}(f_{\alpha_{s-1}})),\ t \neq y \text{ em } \{l, j\},$$

e assim, $\{f_{\alpha_{s-1}}, f_{\alpha_{s-1}\cup\{i_l\}}, f_{\alpha_{s-1}\cup\{i_j\}}, f_{\alpha_{s+1}}\}$ é um (P_{i_l}, P_{i_j})-quadrilátero de Bianchi.

■

5.4 Exemplos

No trabalho [35], Tojeiro constrói exemplos explícitos de imersões isométricas horizontais $f : M^n(c) \to \mathbb{S}^{2n+1}_\epsilon(c)$ usando a transformação escalar de Ribaucour. Nesta seção, construímos novos exemplos explícitos dessas imersões, assim como exemplos de imersões isométricas Lagrangianas $F : M^n(0) \to \mathbb{R}^{2n}$ e $F : M^n(0) \to \mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$, aplicando respectivamente a P e Pe-transformação vetorial de Ribaucour. Observamos ainda, que para P não simétrico, tais exemplos não podem ser obtidos através de uma sequência de aplicações do Teorema de permutabilidade nos exemplos encontrados em [11] e [35].

A parte inicial desta seção, para $c \neq 0$, está em [35].

Comece com a seguinte solução trivial do sistema (1.4.19)

$$v_1 = b \neq 0,\ v_i = 0,\ 2 \leq i \leq n,\ \text{ e } h = 0. \tag{5.4.1}$$

Embora essa solução não esteja em correspondência com uma imersão isométrica, podemos usá-la para gerar exemplos não triviais. Primeiramente, substituindo os dados de (5.4.1) no sistema (1.4.20) (respectivamente para $c = 0$, em (1.4.6)), esse reduz-se a

$$\begin{cases} i)\ \partial_1 F = bY_1, & ii)\ \partial_i F = 0,\ 2 \leq i \leq n, \quad iii)\ \partial_j Y_i = 0,\ i \neq j, \\ iv)\ \partial_i Y_i = iY_i,\ 2 \leq i \leq n, & v)\ \partial_1 Y_1 = iY_1 - cbF. \end{cases} \tag{5.4.2}$$

(respectivamente, (i), (ii), (iii) e (iv) acima e $v')$ $\partial_1 Y_1 = iY_1$).

Denotando por $\{E_i; 1 \leq i \leq n+1\}$ (respectivamente, $\{E_i; 1 \leq i \leq n\}$) a base canônica de $\mathbb{C}^{n+1}_\epsilon$ (respectivamente, $\mathbb{C}^n$) sobre $\mathbb{C}$, para $2 \leq i \leq n$ (respectivamente, $1 \leq i \leq n$), podemos escolher a solução $Y_i = e^{iu_1}E_{i+1}$ (respectivamente, $Y_i = e^{iu_1}E_i$).

Temos do sistema e de $\langle F(u_0), Y_i(u_0)\rangle = 0,\ 2 \leq i \leq n$, que

$$\begin{array}{rcl} F \ :\ U \subset \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{C}^{n+1}_\epsilon \\ u & \to & (F_1(u_1), F_2(u_1), 0, ..., 0), \end{array}$$

Agora, segue de (i) e (v) que F satisfaz a equação de segunda ordem

$$F'' - iF' + cb^2 F = 0. \tag{5.4.3}$$

(respectivamente, de (i) temos que $F(u_1) = -ibe^{iu_1}E_1$). Considere $\Delta = 1 + 4cb^2$. Dividimos em três casos, conforme seja $\Delta > 0,\ \Delta = 0$ ou $\Delta < 0$. Observe que somente o primeiro caso ocorre quando $c > 0$.

I) $\Delta > 0$: Sabemos que $F_j = C_{j1}e^{ia_1u_1} + C_{j2}e^{ia_2u_1},\ j = 1, 2$, com $a_1 = (1 - \sqrt{\Delta})/2$ e $a_2 = (1 + \sqrt{\Delta})/2$, é uma solução da equação (5.4.3). Tomando $C_{12} = C_{21} = 0$, podemos escrever a solução como

$$\begin{cases} F = F(u_1) = C_1 e^{ia_1u_1}E_1 + C_2 e^{ia_2u_1}E_2, \\ Y_1 = Y_1(u_1) = \frac{i}{b}\left(a_1C_1e^{ia_1u_1}E_1 + a_2C_2e^{ia_2u_1}E_2\right). \end{cases}$$

Além disso, novamente de $\langle F(0), F(0)\rangle = 1/c$ e $\langle iF(0), Y_1(0)\rangle = 0$ temos que

$$\epsilon C_1^2 = \frac{\sqrt{\Delta}+1}{2c\sqrt{\Delta}} \text{ e } C_2^2 = \frac{\sqrt{\Delta}-1}{2c\sqrt{\Delta}}.$$

Seguindo o mesmo racíocinio do caso (I), temos

II) $\Delta = 0$:

$$\begin{cases} F = F(u_1) = \frac{e^{\frac{1}{2}iu_i}}{2\sqrt{-c}}\left[(2i+u_1)E_1 + u_1E_2\right], \\ Y_1 = Y_1(u_1) = \frac{e^{\frac{1}{2}iu_i}}{4b\sqrt{-c}}\left[iu_1E_1 + (2+iu_1)E_2\right]. \end{cases}$$

III) $\Delta < 0$:

$$\begin{cases} F = F(u_1) = e^{\frac{1}{2}iu_1}\left(e^{au_1}V_1 + e^{-au_1}V_2\right), \ a = \frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}, \\ Y_1 = Y_1(u_1) = \frac{e^{\frac{1}{2}iu_1}}{b}\left[(a+\frac{i}{2})a^{au_1}V_1 + (-a+\frac{i}{2})e^{-au_1}V_2\right], \end{cases}$$

em que

$$V_j = \frac{1}{2\sqrt{-c}}\left(1 + i\frac{(-1)^j}{\sqrt{-\Delta}}\right)E_1 - \frac{(-1)^j b}{\sqrt{-\Delta}}E_2, \ 1 \le j \le 2.$$

Agora, fazendo $P := (P^t)^{-1}$, o sistema (5.2.12) (respectivamente, em (5.1.13)) torna-se

$$\begin{cases} i)\ \partial_1(\varphi) = b\gamma_1, \quad (ii)\ \ \partial_i(\varphi) = 0, \ 2 \le i \le n \\ iii)\ \partial_i(\gamma_j) = 0, \ i \ne j, \ iv)\ \partial_1(\gamma_1) = -P\gamma_1 - cb\varphi \\ v)\ \partial_i(\gamma_i) = -P\gamma_i, \ 2 \le i \le n. \end{cases} \tag{5.4.4}$$

(respectivamente, (i), (ii), (iii), (v) acima e $iv')$ $\partial_1(\gamma_1) = -P\gamma_1$).

Para encontrar uma solução para o sistema acima, usamos resultados básicos sobre equações diferenciais lineares, os quais podem ser encontrados, por exemplo, em [31].

Proposição 5.4.1. *Sejam $J_p = S_p^{-1}PS_p$ a forma canônica de Jordan de P e $J_{n_j}(\mu_j)$ o bloco de Jordan correspondente ao autovalor μ_j de ordem n_j. Então as soluções do sistema (5.4.4) são dadas por*

$$\begin{cases} \varphi(u_1) = S_p\psi(u_1), \\ \gamma_1(u_1) = \frac{1}{b}S_p\partial_1(\psi(u_1)), \\ \gamma_i(u_i) = S_pe^{J_pu_i}w_0, \ 2 \le i \le n, \end{cases}$$

em que w_0 é um vetor fixo de V e

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi^1 \\ \vdots \\ \psi^s \end{bmatrix},$$

sendo

$$\begin{pmatrix} {\psi^j}_{n_j\times 1} \\ {\psi^{j'}}_{n_j\times 1} \end{pmatrix} = S_{F_j}e^{J_{F_j}u_1}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \tag{5.4.5}$$

com u_0 e v_0 vetores fixos de V e

$$F_j := \begin{pmatrix} 0 & I \\ -cb^2I & -J_{n_j}(\mu_j) \end{pmatrix}_{2n_j\times 2n_j}.$$

(respectivamente,

$$\begin{cases} \varphi(u_1) = bS_p J_p^{-1} e^{J_p u_1} w_0, \\ \gamma_i(u_i) = S_p e^{J_p u_i} w_0, \ 1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

com w_0 um vetor fixo de V.)

Demonstração. Sabemos, da teoria de sistemas de equações diferenciais lineares de 1^a ordem com coeficientes constantes, que $S_p e^{J_p u_i}$ é uma matriz fundamental do sistema dado em (v) de (5.4.4), sendo $2 \leq i \leq n$ (respectivamente, $1 \leq i \leq n$). Portanto, a solução dessa equação é dada por

$$\gamma_i(u_i) = S_p e^{J_p u_i} w_0, \ 2 \leq i \leq n, \ (\text{respectivamente, } 1 \leq i \leq n,)$$

em que w_0 é um vetor fixo de V.

De (i), (ii) e (iv) temos que

$$\varphi'' + P\varphi' + cb^2\varphi = 0.$$

Observe que φ é solução da equação acima se, e só se, a função ψ dada por $\varphi = S_P\psi$ é solução de

$$\psi'' + S_P^{-1} P S_P \psi' + cb^2\psi = 0. \tag{5.4.6}$$

Particione ψ na forma

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi^1 \\ \vdots \\ \psi^s \end{bmatrix},$$

com $\psi^j \in M_{n_j \times 1}(\mathbb{R})$, de acordo com a ordem de $J_{n_j}(\mu_j)$. Assim, o sistema (5.4.6) é equivalente aos s sistemas

$$\psi^{j\prime\prime} + J_{n_j}(\mu_j)\psi^{j\prime} + cb^2\psi^j = 0, \ 1 \leq j \leq s.$$

Cada sistema acima é equivalente ao sistema de primeira ordem

$$\begin{pmatrix} \psi^j \\ \psi^{j\prime} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -cb^2 I & -J_{n_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^j \\ \psi^{j\prime} \end{pmatrix}. \tag{5.4.7}$$

Definindo

$$\theta_j := \begin{pmatrix} \psi^j \\ \psi^{j\prime} \end{pmatrix},$$

temos que (5.4.7) é equivalente a $\theta_j{}' = F_j\theta_j$. Sabemos que $S_{F_j} e^{J_{F_j} u_1}$ é uma matriz fundamental desse sistema, e assim obtemos (5.4.5).

∎

A partir das soluções F e Y_i de (5.4.2), e φ, γ_i dadas pela Proposição 5.4.1, obtemos pelo Corolário 5.2.7 (respectivamente, Corolário 5.1.7) parametrizações explícitas de imersões isométricas horizontais (respectivamente, Lagrangianas) não triviais. Além disso, fazendo $b = 1$ e substituindo as soluções F, Y_i e γ_i para o caso $c = 0$ no Corolário 5.1.8, obtemos exemplos de imersões isométricas Lagrangianas $f : M^n(0) \to S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$.

Vamos finalizar esta seção calculando explicitamente a matriz $e^{J_{F_j} u_1}$. Para simplificar a notação, não usaremos o índice j. Primeiramente, sendo λ um autovalor de F, afirmamos que $\lambda \neq 0$. De fato,

$$det\left(\begin{pmatrix} 0 & I \\ -cb^2 I & -J \end{pmatrix} - 0I\right) = det(-cb^2 I) = (-cb^2)^n \neq 0.$$

Agora, temos de

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}, \; A, B, C, D \in M_{m\times m}(\mathbb{R}),$$

que

$$\begin{aligned} det\left(\begin{pmatrix} 0 & I \\ -cb^2 I & -J \end{pmatrix} - \lambda I\right) &= det\begin{pmatrix} -\lambda I & I \\ -cb^2 I & -J - \lambda I \end{pmatrix} \\ &= det(-\lambda I) det(-J - \lambda I + cb^2 I(-\lambda I)^{-1} I) \\ &= (-\lambda)^n (-1)^n det\left(J - \left(\tfrac{-\lambda^2 - cb^2}{\lambda}\right) I\right) \\ &= \lambda^n det\left(J - \left(\tfrac{-\lambda^2 - cb^2}{\lambda}\right) I\right) \\ &= \lambda^n \left(\mu - \left(\tfrac{-\lambda^2 - cb^2}{\lambda}\right)\right)^n \\ &= (\lambda^2 + \mu\lambda + cb^2)^n, \end{aligned}$$

e assim, λ é autovalor de F se, e só se, $\frac{-\lambda^2 - cb^2}{\lambda} = \mu$ é autovalor de J, e

$$\lambda = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4cb^2}}{2}.$$

Essa expressão de λ também vale no caso em que μ é complexo. De fato, fazendo $a = \frac{-\lambda^2 - cb^2}{\lambda}$, temos de

$$J_{n_j}(\mu_j) = \begin{bmatrix} R & I & ... & 0 & 0 \\ 0 & R & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & R & I \\ 0 & 0 & ... & 0 & R \end{bmatrix}.$$

com

$$R = \begin{pmatrix} Re(\mu_j) & Im(\mu_j) \\ -Im(\mu_j) & Re(\mu_j) \end{pmatrix} \text{ e } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que

$$det\,(J - aI) = ((Re(\mu_j) - a)^2 + Im(\mu_j)^2)^{n_j} = 0,$$

e isso ocorre se, e só se, $a = Re(\mu_j) \pm i Im(\mu_j)$.

Dessa forma, sabemos que existem no máximo 2 blocos na forma canônica de Jordan de F correspondendo, respectivamente, a λ_1 e λ_2. Vamos verificar qual a ordem desses blocos. Considerando

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix},$$

autovetor de F associado a λ, temos

$$(F - \lambda I)\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

se, e só se,

$$\begin{cases} z = \lambda\omega \\ Jz = \left(\frac{-cb^2-\lambda^2}{\lambda}\right) z = \mu z. \end{cases}$$

Assim, como z é o único autovetor associado a μ, temos que

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z}{\lambda} \\ z \end{pmatrix}$$

também é o único autovetor associado a λ.

Analisemos primeiramente o caso em que μ é real. Se $\lambda_1 = \lambda_2$ então a ordem do bloco $J_{m_i}(\lambda_i)$ é $m_i = 2n_j$ com n_j sendo a ordem do bloco $J(\mu)$, pois temos somente um autovetor associado a λ compondo a matriz S_F. Se λ é complexo, novamente $m_i = 2n_j$. Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então a ordem de cada $J_{m_i}(\lambda_i)$ é $m_i = n_j$, com n_j sendo a ordem de $J(\mu)$, pois

$$det(F - \lambda I) = (\lambda^2 + \mu\lambda + cb^2)^n = \left(\lambda_1 - \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 4cb^2}}{2}\right)^n \left(\lambda_2 - \frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 - 4cb^2}}{2}\right)^n,$$

e a justificativa decorre do fato de cada autovalor conter somente um autovetor compondo a matriz S_F.

Assim, para explicitar a matriz $e^{J_F u_1}$, necessitamos dividir em três caso, conforme $\widetilde{\Delta} = \mu^2 - 4cb^2 > 0, \widetilde{\Delta} = 0$ ou $\widetilde{\Delta} < 0$.

a) $\widetilde{\Delta} > 0$:

$$e^{J_F u_1} = (e^{J_{n_j}(\lambda_1)u_1} \oplus e^{J_{n_j}(\lambda_2)u_1}),$$

em que n_j é a ordem de $J_{n_j}(\mu_j)$ e

$$e^{J(\lambda_i)u_1} = e^{\lambda_i u_1} e^{J(0)u_1} = e^{\lambda_i u_1} \begin{pmatrix} 1 & u_1 & \frac{u_1^2}{2} & ... & \frac{u_1^{n_j-2}}{(n_j-2)!} & \frac{u_1^{n_j-1}}{(n_j-1)!} \\ 0 & 1 & u_1 & ... & \frac{u_1^{n_j-3}}{(n_j-3)!} & \frac{u_1^{n_j-2}}{(n_j-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & u_1 & \frac{u_1^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & u_1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) $\widetilde{\Delta} = 0$:

$$e^{J_F u_1} = e^{J_{2n_j}(\lambda)u_1},$$

sendo dado como no caso anterior.

c) $\widetilde{\Delta} < 0$: Então $\lambda = \alpha + i\beta$ com $\alpha = -\frac{\mu}{2}$ e $\beta = \frac{\sqrt{-\tilde{\Delta}}}{2}$, e assim,

$$e^{J_F u_1} = e^{J_{n_j}(\lambda)u_1}.$$

Considere

$$I(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \; R(u_1, b) = \begin{pmatrix} cos(bu_1) & sen(bu_1) \\ -sen(bu_1) & cos(bu_1) \end{pmatrix},$$

e

$$diag(A_1, A_2, ..., A_m) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & A_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & 0 & ... & A_m \end{pmatrix}.$$

Temos

$$e^{J(\lambda)u_1} = e^{diag(I(\alpha,\beta))u_1 + J(0)u_1} = e^{\alpha u_1} diag(R(u_1, \beta)) e^{J(0)u_1}$$

$$= e^{\alpha u_1} diag(R(u_1, \beta)) \begin{pmatrix} I_2 & I_2 u_1 & I_2 \frac{u_1^2}{2} & ... & I_2 \frac{u_1^{n_j-2}}{(n_j-2)!} & I_2 \frac{u_1^{n_j-1}}{(n_j-1)!} \\ 0 & I_2 & I_2 u_1 & ... & I_2 \frac{u_1^{n_j-3}}{(n_j-3)!} & I_2 \frac{u_1^{n_j-2}}{(n_j-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & I_2 u_1 & I_2 \frac{u_1^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & ... & I_2 & I_2 u_1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

$$= e^{\alpha u_1}\begin{pmatrix} R & Ru_1 & R\frac{u_1^2}{2} & \dots & R\frac{u_1^{n_j-2}}{(n_j-2)!} & R\frac{u_1^{n_j-1}}{(n_j-1)!} \\ 0 & R & Ru_1 & \dots & R\frac{u_1^{n_j-3}}{(n_j-3)!} & R\frac{u_1^{n_j-2}}{(n_j-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Ru_1 & R\frac{u_1^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R & Ru_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & R \end{pmatrix}.$$

Obtemos assim a solução para o caso de μ real.

Para o caso de μ ser complexo, $\lambda, \bar{\lambda}$ são os únicos autovalores de F quando $\mu^2 - 4cb^2 = 0$, e a ordem de $J_{m_j}(\lambda)$ é $m_j = 2n_j$, caso contrário, $\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_2$ são os autovalores de F e a ordem de $J_{m_j}(\lambda_i)$ é $m_j = n_j$, desde que $\lambda_1 \neq \bar{\lambda}_2$. Caso $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$, temos novamente que a ordem de $J_{m_j}(\lambda)$ é $m_j = 2n_j$.

No caso de $\mu^2 - 4cb^2 = 0$, $e^{J_F u_1}$ é dada como no caso $\tilde{\Delta} < 0$. Caso contrário,

$$e^{J_F u_1} = \left(e^{J_{n_j}(\lambda_1)u_1} \oplus e^{J_{n_j}(\lambda_2)u_1}\right),$$

com $e^{J_{n_j}(\lambda_i)}$ como no caso $\tilde{\Delta} < 0$.

Apêndice A

Sistemas de equações diferenciais parciais

A.1 Sistemas lineares completamente integráveis

Considere o seguinte sistema linear de equações diferenciais parciais de primeira ordem em um aberto simplesmente conexo $U \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \partial_i(y_j) = \sum_{k=1}^{d} a_{ij}^k y_k, \text{ com } 1 \leq j \leq d \text{ e } 1 \leq i \leq n; \\ y_i(x_0) = y_i^0, \end{cases} \tag{A.1.1}$$

em que $x_0 \in U$ e $y_1^0, ..., y_d^0$ são fixados. Queremos uma solução C^1 $y_1, ..., y_d$, definida sobre U, tal que $y_i(x_0) = y_i^0$.

Se denotamos por Y a matriz-linha $(y_1, y_2, ..., y_d) \in M_{1\times d}$ e por A_i a matriz quadrada $A_i := (a_{ij}^k) \in M_{d\times d}$, em que a_{ij}^k é o elemento $k-$ésima linha e $j-$ésima coluna, com $1 \leq i \leq n$, podemos reescrever o sistema por

$$\begin{aligned} &\partial_i(Y) = YA_i, \text{ para todo } i \in \{1, 2, ..., n\}, \\ &Y(x_0) = Y_0, \end{aligned}$$

em que Y_0 é a matriz-linha $(y_1^0, ..., y_d^0) \in M_{1\times d}$. Esse sistema é conhecido como um *sistema de Pfaff*, e tem sido estudado por vários autores, ver [26]. Classicamente (veja, por exemplo, [19]), a existência local de soluções de um sistema de Pfaff é garantida sob a hipótese de que as matrizes A_i sejam de classe C^1 em U e satisfaçam a condição de compatibilidade

$$\partial_j(A_i)(x) + A_j(x)A_i(x) = \partial_i(A_j)(x) + A_i(x)A_j(x), \tag{A.1.2}$$

para todo $x \in U$ e quaisquer $i, j \in \{1, ..., n\}$, ou equivalentemente,

$$\partial_i a_{lj}^k - \partial_l a_{ij}^k = \sum_{t=1}^{d} a_{it}^k a_{lj}^t - \sum_{t=1}^{d} a_{lt}^k a_{ij}^t. \tag{A.1.3}$$

O sistema $\mathcal{R}_{c-\tilde{c}}$, dado no Lema 4.1.3, é um sistema de Pfaff. De fato, se denotamos por Y a matrix linha
$(\varphi^1, ..., \varphi^m, \gamma_1^1, ..., \gamma_1^m, ..., \gamma_n^1, ..., \gamma_n^m, \beta_1^1, ..., \beta_1^m, ..., \beta_p^1, ..., \beta_p^m)$, podemos escrever $\mathcal{R}_{c-\tilde{c}}$ por

$$\begin{aligned} &\partial_i(Y) = YA_i, \text{ para todo } i \in \{1, 2, ..., n\}, \\ &Y(x_0) = Y_0, \end{aligned}$$

em que

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -\left(L^{-1}(c-\tilde{c}) + \tilde{c}I\right) v_i & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -h_{1i}I & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -h_{2i}I & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots & ... & \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ v_iI & h_{1i}I & h_{2i}I & h_{3i}I & ... & 0 & ... & h_{ni}I & -V_{i1}I & ... & -V_{ip}I \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots & ... & \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -h_{ni}I & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -(L^{-1} - I)V_{i1} & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots & ... & \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -(L^{-1} - I)V_{ip} & ... & 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} Y_0 \;=\; &\big((\varphi^0)^1, ..., (\varphi^0)^m, (\gamma_1^0)^1, ..., (\gamma_1^0)^m, ..., (\gamma_n^0)^1, ..., (\gamma_n^0)^m, (\beta_1^0)^1, ..., (\beta_1^0)^m, ..., \\ &(\beta_p^0)^1, ..., (\beta_p^0)^m\big) \end{aligned}$$

A.2 O sistema de Bourlet

Considere o sistema, não necessariamente linear, de equações diferenciais parciais

$$\partial_k(U_i) = \Psi_{ik}(U_1, ..., U_m, u_1, ..., u_n, \partial_l(U_j), ...).$$

Suponhamos que esse sistema satisfaça as seguintes condições:

i) Ψ_{ik} contém apenas derivadas com respeito às variáveis u_l com $l \geq k$, e depende linearmente dessas derivadas.

ii) Ψ_{ik} só depende de $\partial_k(U_j)$ quando $j > i$.

Um tal sistema pode ser escrito na forma

$$\partial_k(U_i) = a^{ik}_{oo} + \sum_{j>i} a^{ik}_{jk}\partial_k(U_j) + \sum_{l>k} a^{ik}_{sl}\partial_l(U_s), \tag{A.2.1}$$

em que a^{ik}_{oo} e a^{ik}_{sl} são funções de $u_1, ..., u_n, U_1, ..., U_m$.

Dizemos que u_k é uma variável principal para a função U_i. As demais variáveis são ditas paramétricas para U_i.

Suponhamos ainda que as funções ψ_{ik} sejam analíticas e que as equações do sistema impliquem

$$\partial_k\partial_h(U_i) = \partial_h\partial_k(U_i),$$

em que as derivadas são calculadas com respeito às variáveis principais. Um tal sistema é chamado, na terminologia de Bianchi, um sistema de Bourlet. Tal sistema foi estudado por Bourlet, que mostrou em [4] o seguinte resultado

Teorema A.2.1. *Fixados $u^0_1, ..., u^0_n$, existe uma única solução holomorfa $(U_1, ..., U_m)$ de (A.2.1) em uma vizinhança das condições iniciais $u^0_1, ..., u^0_n$, tal que cada U_i se reduz a uma função holomorfa arbitrária das suas variáveis paramétricas quando as suas variáveis principais assumem os valores iniciais.*

Referências Bibliográficas

[1] J. A. Aminov, *On the immersions of n-dimensional Lobačevskiĭ space in a* $(2n-1)$*-dimensional Euclidean space*, Soviet Math. Dokl **18** (1977), 1210–1213.

[2] ______, *Isometric immersions of domains of n-dimensional Lobačevskiĭ space in a* $(2n-1)$*-dimensional Euclidean space*, Mat. Sb. (N.S.) **111(153)** (1980), no. 3, 402–433, 479. MR 568985 (81g:53044)

[3] L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. Vol. 2 Parte 1, Bologna, 1927.

[4] C. Bourlet, *Sur les équations aux dérivées partielles simultanées qui contiennent plusieurs fonctions inconnues*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **8** (1891), 3–63. MR 1508864

[5] H. Browne, *Fibrados, conexões e geometria riemanniana*, Instituto de Matemática pura e avançada, Rio de Janeiro, BR, 1981.

[6] C. T. Chen, *A generalization of the inertia theorem*, SIAM J. Appl. Math. **25** (1973), 158–161. MR 0335534 (49 #315)

[7] M. Dajczer, L. A. Florit, and R. Tojeiro, *The vectorial Ribaucour transformation for submanifolds and applications*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), no. 10, 4977–4997 (electronic). MR 2320656 (2008f:53017)

[8] M. Dajczer and R. Tojeiro, *On compositions of isometric immersions*, J. Differential Geom. **36** (1992), no. 1, 1–18. MR 1168979 (93g:53085)

[9] ______, *Flat totally real submanifolds of* $\mathbf{C}\mathrm{P}^n$ *and the symmetric generalized wave equation*, Tohoku Math. J. (2) **47** (1995), no. 1, 117–123. MR 1311445 (95m:53077)

[10] ______, *Isometric immersions and the generalized Laplace and elliptic sinh-Gordon equations*, J. Reine Angew. Math. **467** (1995), 109–147. MR 1355924 (96m:53067)

[11] ______, *The Ribaucour transformation for flat Lagrangian submanifolds*, J. Geom. Anal. **10** (2000), no. 2, 269–280. MR 1766483 (2001g:53138)

[12] ______, *An extension of the classical Ribaucour transformation*, Proc. London Math. Soc. (3) **85** (2002), no. 1, 211–232. MR 1901374 (2003g:53091)

[13] ______, *Commuting Codazzi tensors and the Ribaucour transformation for submanifolds*, Results Math. **44** (2003), no. 3-4, 258–278. MR 2028680 (2005g:53027)

[14] K. Datta, *The matrix equation $XA - BX = R$ and its applications*, Linear Algebra Appl. **109** (1988), 91–105. MR 961568 (90a:15016)

[15] E. de Souza and S. P. Bhattacharyya, *Controllability, observability and the solution of $AX - XB = C$*, Linear Algebra Appl. **39** (1981), 167–188. MR 625248 (82h:15021)

[16] L. P. Eisenhart, *Transformations of surfaces*, Second edition, Chelsea Publishing Co., New York, 1962. MR 0142061 (25 #5455)

[17] M. Dajczer et al., *Submanifolds and isometric immersions*, Math. Lecture Ser. 13, Publish or Perish Inc. Houston, 1990.

[18] E. I. Ganzha and S. P. Tsarev, *An algebraic formula for superposition and the completeness of the bäcklund transformations of* $(2 + 1)$*-dimensional integrable systems*, Russian Mathematical Surveys **51** (1996), no. 6, 1200.

[19] P. Hartman and A. Wintner, *On the fundamental equations of differential geometry*, Amer. J. Math. **72** (1950), 757–774. MR 0038110 (12,357a)

[20] J. Z. Hearon, *Nonsingular solutions of $TA - BT = C$*, Linear Algebra and Appl. **16** (1977), no. 1, 57–63. MR 0457471 (56 #15676)

[21] Q. Hu and D. Cheng, *The polynomial solution to the Sylvester matrix equation*, Appl. Math. Lett. **19** (2006), no. 9, 859–864. MR 2240475 (2007d:15026)

[22] V. Kučera, *The matrix equation $AX + XB = C$*, SIAM J. Appl. Math. **26** (1974), 15–25. MR 0340280 (49 #5035)

[23] J. M. Lee, *Manifolds and differential geometry*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 107, American Mathematical Society, Providence, RI, 2009. MR 2572292 (2011b:53002)

[24] Q. P. Liu and M. Mañas, *Vectorial Ribaucour transformations for the Lamé equations*, J. Phys. A **31** (1998), no. 10, L193–L200. MR 1629398 (99c:58178)

[25] E. Ma, *A finite series solution of the matrix equation $AX - XB = C$*, SIAM J. Appl. Math. **14** (1966), 490–495. MR 0201456 (34 #1340)

[26] S. Mardare, *On Pfaff systems with L^p coefficients and their applications in differential geometry*, J. Math. Pures Appl. (9) **84** (2005), no. 12, 1659–1692. MR 2180386 (2006k:58003)

[27] J. D. Moore, *Submanifolds of constant positive curvature. I*, Duke Math. J. **44** (1977), no. 2, 449–484. MR 0438256 (55 #11174)

[28] B. O'Neill, *Umbilics of constant curvature immersions*, Duke Math. J. **32** (1965), 149–159. MR 0180951 (31 #5181)

[29] H. Reckziegel, *Horizontal lifts of isometric immersions into the bundle space of a pseudo-Riemannian submersion*, Global differential geometry and global analysis 1984 (Berlin, 1984), Lecture Notes in Math., vol. 1156, Springer, Berlin, 1985, pp. 264–279. MR 824074 (87e:53103)

[30] ______, *A correspondence between horizontal submanifolds of Sasakian manifolds and totally real submanifolds of Kählerian manifolds*, Topics in differential geometry, Vol. I, II (Debrecen, 1984), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, vol. 46, North-Holland, Amsterdam, 1988, pp. 1063–1081. MR 933886 (89b:53087)

[31] J. Sotomayor, *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Projeto Euclides [Euclid Project], vol. 11, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979. MR 651910 (83m:34001)

[32] K. Tenenblat, *Bäcklund's theorem for submanifolds of space forms and a generalized wave equation*, Bol. Soc. Brasil. Mat. **16** (1985), no. 2, 69–94. MR 847117 (87j:58045)

[33] K. Tenenblat and C.L. Terng, *Bäcklund's theorem for n-dimensional submanifolds of* $\mathbb{R}^{2n-1}$, Annals of Mathematics **111** (1980), no. 3, pp. 477–490 (English).

[34] C. L. Terng, *A higher dimension generalization of the sine-gordon equation and its soliton theory*, Annals of Mathematics **111** (1980), no. 3, pp. 491–510 (English).

[35] R. Tojeiro, *Lagrangian submanifolds of constant sectional curvature and their Ribaucour transformation*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin **8** (2001), no. 1, 29–46.

[36] B. Zhou and G. Duan, *An explicit solution to polynomial matrix right coprime factorization with application in eigenstructure assignment*, J. Control Theory Appl. **4** (2006), no. 2, 147–154. MR 2232354

Índice Remissivo