UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

BRUNO HENRIQUE DE OLIVEIRA

MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA DE ENSINO

Sorocaba
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA DE ENSINO

BRUNO HENRIQUE DE OLIVEIRA
Prof. Orientador: Dr. Wladimir Seixas

Sorocaba
2015

MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO:
UMA PROPOSTA METODOLÓGICA DE ENSINO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do título de mestre sob orientação do Professor Doutor Wladimir Seixas.

Sorocaba

2015

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

O48m

Oliveira, Bruno Henrique de
Matemática financeira no ensino médio : uma proposta metodológica de ensino / Bruno Henrique de Oliveira. -- São Carlos : UFSCar, 2015.
137 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.

1. Educação financeira. 2. Resolução de problemas. 3. Modelagem matemática. I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Bruno Henrique de Oliveira, realizada em 11/12/2015:

Wladimir Seixas

Prof. Dr. Wladimir Seixas
UFSCar

Marta Cilene Gadotti

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti
Unesp

Profa. Dra. Silvia Maria Simões de Carvalho
UFSCar

Dedico esse trabalho a minha esposa Mariana Cibele do Amaral, que me deu amor, apoio e incentivo durante o período de dedicação ao mestrado,
ao meu filho Bruno Henrique de Oliveira Filho, por ser um filho carinhoso e exemplar
e aos meus pais e irmãos que estiveram sempre próximos de mim me incentivando.

AGRADECIMENTOS

Aos alunos da Escola Técnica Estadual Fernando Prestes, em especial aos alunos do 3º EM 4 que participaram dessa pesquisa de maneira intensa. Eles foram maravilhosos e ficarão no meu coração pelo resto da minha vida.

A todos os meus companheiros de trabalho, que me deram força e incentivo.

A todos os alunos e professores do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exatas da UFSCar – Sorocaba com os quais convivi nesse período do mestrado, em especial ao meu orientador Prof. Wladimir Seixas pela paciência, dedicação e orientação nesse trabalho de pesquisa.

A minha esposa Mariana, por ser uma mulher guerreira que dedicou a mim o seu amor e pelo apoio, incentivo e compreensão.

Ao meu filho Bruno, pelo carinho e compreensão.

A minha mãe Sandra, pelo exemplo de pessoa e profissional da educação.

Ao meu pai Izaias, pelo exemplo de simplicidade e honestidade.

Aos meus irmãos Felipe e Bruna, pelo apoio e amizade.

RESUMO

Nesse trabalho de pesquisa abordamos conceitos ligados à Matemática Financeira. Para isso, desenvolvemos uma proposta metodológica de ensino diferenciada do que tradicionalmente se faz nesse nível de ensino. Além dos conteúdos tradicionais dessa etapa escolar (Porcentagem; Acréscimos e Descontos; Juros simples ou compostos) abordamos também conteúdos que geralmente são apresentados apenas em cursos que visam formar um profissional que tenha conhecimento em finanças, nas áreas de Administração, Economia, Contabilidade, etc. Esses conteúdos foram: Financiamento com prestações fixas, Sistemas de Amortização e Aplicação com depósitos regulares. Em nossa metodologia valorizamos o trabalho em equipe, a resolução de problemas, a investigação e o trabalho com ferramentas que estão à disposição de qualquer indivíduo, como a calculadora (simples ou científica), o aplicativo "Calculadora do cidadão" do Banco Central e o site www.calculador.com.br.

Palavras-chaves: Educação Financeira. Resolução de Problemas. Modelagem Matemática.

ABSTRACT

In this research work, we address concepts related to Financial Mathematics. In this way, we have developed a methodology of teaching which is different than traditional method. In addition to the traditional content of this school stage (Percentage; Accruals and discounts, simple interest or compound) also approached contents that are usually presented only in courses aimed at forming a professional who has knowledge of finance in the fields of Business Administration, Economics, Accounting, etc. . These contents were financing with fixed installments, amortization and application systems with regular deposits. In our methodology we value teamwork, problem solving, research and working with tools that are available to any individual, such as the calculator (scientific), the "Calculadora do cidadão", an application available by the Central Bank and the www.calculador.com.br site.

Key-words: Teaching of Financial Mathematics. Problem Solving. Mathematical Modeling.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

De acordo com Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio (PCNEM) no mundo atual a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessário tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional (BRASIL, 1999, p. 40).

É fato que a prioridade hoje na educação básica é a formação do indivíduo que possa exercer na sua plenitude o seu papel de cidadão. Neste sentido, existe uma série de competências e habilidades que devem ser adquiridas durante esse período da educação básica.

Para o desenvolvimento de nossa pesquisa escolhemos um tópico da Matemática que julgamos ser crucial para a formação do cidadão com essas características, a Matemática Financeira.

A motivação para essa escolha surgiu em uma das disciplinas do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da UFSCar, quando o professor Wladimir Seixas (orientador dessa pesquisa) abordou os conceitos de Matemática Financeira. Durante as aulas vimos na integra os conceitos fundamentais desse tópico da Matemática e percebemos que essa temática é pouco trabalhada na educação básica e mesmo nos cursos de formação de professores. Trabalhávamos em parte esses conceitos na disciplina de Cálculos Financeiros em cursos Técnicos em Administração. Assim, tivemos por objetivo nessa pesquisa elaborar uma proposta metodológica de ensino de Matemática Financeira para o Ensino Médio.

Este trabalho está dividido em 5 partes. Na primeira parte, iniciamos essa pesquisa buscando nos documentos curriculares indicações para a abordagem da Matemática Financeira no ensino de Matemática focados no Ensino Médio. Fizemos então a análise de dois livros didáticos constantes no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD – 2015) buscando compreender em que momento conteúdos da Matemática Financeira eram tratados e de que maneira eram abordados. Encerramos esta primeira parte apresentando como o ensino deste tema está proposto pela Sociedade Brasileira de Matemática – SBM no documento publicado em meados de 2015 sobre o currículo de Matemática para o ensino médio (SBM, 2015).

Na segunda parte, apoiados nos conceitos que foram desenvolvidos em aula e em autores como Morgado e César (2006), Iezzi, Hazan e Degenszajn (2004) e Hazzan e Pompeo (2005), fizemos uma abordagem dos conceitos básicos de Matemática Financeira, indicando definições e aplicações desses conceitos.

Na terceira parte apresentamos a escola onde nossa proposta metodológica foi aplicada e a turma que participou das atividades. Descrevemos todas as atividades indicando como elas foram concebidas e aplicadas para a turma, bem como os resultados obtidos nesse processo.

De maneira geral as atividades foram compostas por conceitos básicos da Matemática Financeira. Esta proposta metodológica é diferenciada do que se faz tradicionalmente nesse nível de ensino, pois além dos conteúdos tradicionais dessa etapa escolar (Porcentagem; Acréscimos e Descontos; Juros simples ou compostos) abordamos também conteúdos que geralmente são apresentados apenas em cursos que visam formar um profissional que tenha conhecimento em finanças, nas áreas de Administração, Economia, Contabilidade, etc. Esses conteúdos foram: Financiamento com prestações fixas, Sistemas de Amortização e Aplicação com depósitos regulares.

Em nossa metodologia valorizamos o trabalho em equipe, a resolução de problemas, a investigação e o trabalho com ferramentas que estão à disposição de qualquer indivíduo, como a calculadora (simples ou científica), o aplicativo "Calculadora do cidadão" do Banco Central e o site www.calculador.com.br. Ressaltamos que para organizar as atividades seguimos também algumas das orientações apresentadas no currículo de Matemática para o Ensino Médio proposto pela Sociedade Brasileira de Matemática.

Na quarta parte descrevemos a última atividade que foi aplicada com o objetivo de avaliar a capacidade dos alunos em resolver problemas comuns no cotidiano de qualquer cidadão que envolvam a Matemática Financeira. Apresentamos também as opiniões dos alunos sobre a metodologia aplicada nas atividades que foram desenvolvidas e a importância desse tipo de abordagem no Ensino Médio.

Finalmente na última parte apresentamos as nossas considerações finais.

2. A MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO

2.1 Os documentos curriculares e o ensino da Matemática Financeira no Ensino Médio

Com a finalidade de conhecer o que se é proposto para o ensino da Matemática Financeira nessa etapa da educação e ainda de adquirir subsídios que nos tragam condições de elaborar uma proposta de ensino para esse tema, buscamos analisar os documentos curriculares que regem a educação no contexto de nossa pesquisa. Os documentos analisados são: a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB - lei nº 9394-96) (BRASIL, 1996), as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM) (BRASIL, 1998), os Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 1999), os Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio + (PCNEM+) (BRASIL, 2002), as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) (BRASIL, 2006) e a Atualização da Proposta de Currículo por Competência para o Ensino Médio do Centro Paula Souza (SÃO PAULO, 2011).

Nesses documentos curriculares fica claro que todas convergem e se complementam no que diz respeito ao que se espera na formação do aluno do Ensino Médio, que a partir da LDB se apresenta como a etapa final da chamada Educação Básica, como podemos destacar no artigo 21 dessa lei (BRASIL, p. 8-9, 1996):

> “A educação escolar compõe-se de:
> I – educação básica, formada pela educação infantil, ensino fundamental e ensino médio;
> II – educação superior.”

2.1.1 A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – (LDB: lei nº 9.394-96) e As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio de 1998 (DCNEM)

A LDB de 1996 como o próprio nome já diz estabelece as diretrizes e bases da educação nacional tendo como foco central disciplinar e estruturar o funcionamento do sistema escolar brasileiro, dando-lhe a necessária unidade em meio a diversidade que caracteriza o país (BRASIL, 1996). Nesse documento encontramos toda a estruturação da educação para o nosso país e entendemos que mesmo que esse documento traga muito mais informações de gênero organizacional podemos destacar dois artigos (22 e 35), que mesmo de forma indireta, dizem respeito ao tema da nossa pesquisa.

> **Art. 22**. A educação básica tem por finalidades desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores.
>
> **Art. 35**. O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades:
>
> I – a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;
>
> II – a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
>
> III – o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
>
> IV – a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina (BRASIL, 1996, p. 9-14)

Verificamos desta maneira que o artigo 22 destaca a formação do aluno para o exercício da cidadania e que tenha meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores. Nesse sentido entendemos que um conhecimento adequado sobre Matemática Financeira contribui muito para atender esse objetivo. O artigo 35 destaca as finalidades do Ensino Médio como etapa da educação para a preparação do indivíduo para o trabalho e cidadania. Acreditamos que a Matemática Financeira venha contribuir nesse sentido.

Das chamadas Diretrizes Curriculares Nacionais podemos destacar o seu artigo 1º que traz inclusive a sua finalidade:

> **Art. 1º** As Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio – DCNEM, estabelecidas nesta Resolução, se constituem num conjunto de definições doutrinárias sobre princípios, fundamentos e procedimentos a serem observados na organização pedagógica e curricular de cada unidade escolar integrante dos diversos sistemas de ensino, em atendimento ao que manda a lei, tendo em vista vincular a educação com o mundo do trabalho e a prática social, consolidando a preparação para o exercício da cidadania e propiciando preparação básica para o trabalho

(BRASIL, 1998, p.1).

Nesse artigo destacamos o vínculo da educação com o mundo do trabalho e a prática social que pode ser associada ao tema da nossa pesquisa.

2.1.2 Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio (PCNEM, PCNEM +)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 1999) se apresentam como parâmetros que devem cumprir o duplo papel de difundir os princípios da reforma curricular e orientar o professor. É importante destacar que naquele momento se apresentava um novo perfil para o currículo, apoiado em competências básicas para a inserção dos jovens na vida adulta (BRASIL, 1999. p. 4). Nesse documento percebe-se a tendência da passagem do ensino descontextualizado e baseado no acumulo de informações para o conhecimento escolar significativo mediante a contextualização e interdisciplinaridade. Sobre os Conhecimentos de Matemática destacamos o seguinte parágrafo:

> Ao se estabelecer um primeiro conjunto de parâmetros para a organização do ensino de Matemática no Ensino Médio, pretende-se contemplar a necessidade da sua adequação para o desenvolvimento e promoção de alunos, com diferentes motivações, interesses e capacidades, criando condições para a sua inserção num mundo em mudança e contribuindo para desenvolver as capacidades que deles serão exigidas em sua vida social e profissional. Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional (BRASIL, 1999, p. 40)

Aqui entendemos que a Matemática Financeira possibilita a formação de um consumidor consciente, que tome decisões na sua vida de maneira lúcida sabendo, por exemplo, avaliar as vantagens ou desvantagens entre uma compra à vista ou a prazo.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio + (PCNEM +):

> No ensino médio, etapa final da escolaridade básica, a Matemática deve ser

> compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional (BRASIL, 2002, p. 108).

2.1.3 Orientações Curriculares para o Ensino Médio de 2006 (OCEM)

O objetivo das Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) é o de contribuir para o diálogo entre professor e escola sobre a prática docente, dessa forma buscamos nesse documento um apoio mais direcionado a sala de aula e a prática do professor efetivamente (BRASIL, 2006, p. 5).

Sobre a escolha dos conteúdos as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) dizem o seguinte:

> ... é importante que se levem em consideração os diferentes propósitos da formação matemática na educação básica. Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (BRASIL, 2006, p. 69).

Sobre a forma de trabalhar dos conteúdos as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) dizem o seguinte:

> ... deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contra- exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. Também significa um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente

teórica (BRASIL, 2006, p. 69-70).

Percebemos que sobre a escolha dos conteúdos e a forma de trabalhar esses conteúdos podemos destacar o que espera-se do aluno, por exemplo, que ele saiba usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano. Nesse sentido, entendemos que os conceitos da Matemática Financeira podem contribuir, agregando um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Vale ressaltar que o pensar matemático é de fundamental importância nesse processo.

Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) os conteúdos básicos estão organizados em quatro blocos: Números e Operações; Funções; Geometria; Análise de dados e probabilidade (BRASIL, 2006, p. 70).

O tema da nossa pesquisa aparece de maneira indireta no bloco Números e Operações quando menciona-se que nesse bloco de acordo com as (OCEM):

> ... o aluno deve ser capaz de decidir sobre as vantagens/desvantagens de uma compra à vista ou a prazo; avaliar o custo de um produto em função da quantidade; calcular impostos e contribuições previdenciárias; avaliar modalidades de juros bancários (BRASIL, 2006, p. 71).

Assim a contextualização nas operações fundamentais da matemática, os cálculos de porcentagem e o estudo dos regimes de capitalização simples e composta podem contribuir para esse processo de aprendizagem.

No bloco Funções, o estudo da função exponencial e logarítmica aparece no seguinte trecho das (OCEM):

> Dentre as aplicações da Matemática, tem-se o interessante tópico de Matemática Financeira como um assunto a ser tratado quando do estudo da função exponencial – juros e correção monetária fazem uso desse modelo. Nos problemas de aplicação em geral, é preciso resolver uma equação exponencial, e isso pede o uso da função inversa – a função logaritmo (BRASIL, 2006, p. 75).

Aqui identificamos uma relação entre o estudo das funções, no caso a função exponencial e a função logarítmica com a Matemática Financeira. Dessa forma entendemos que em nossa proposta de ensino essa relação poderá ser explorada, mostrando que os conteúdos da Matemática frequentemente estão interligados.

Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) sobre o que é chamado de situação de ensino e aprendizagem é apresentada a seguinte orientação:

> ... partimos do princípio de que toda situação de ensino e aprendizagem deve agregar o desenvolvimento de habilidades que caracterizem o “pensar matematicamente”. Nesse sentido, é preciso dar prioridade à qualidade do processo e não à quantidade de conteúdos a serem trabalhados. A escolha de conteúdos deve ser cuidadosa e criteriosa, propiciando ao aluno um “fazer matemático” por meio de um processo investigativo que o auxilie na apropriação de conhecimento (BRASIL, 2006, p. 70).

Para nosso trabalho essa orientação será importante, afinal a concepção de uma sequência de ensino aprendizagem depende muito do que trabalhar e do como trabalhar, sendo assim retomaremos essa orientação na construção de nossa proposta metodológica de ensino.

2.1.4 A Proposta Curricular do Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza (CEETEPS) para o Ensino Médio

O Centro Estadual de Educação Tecnológica (CEETEPS) é uma Autarquia do Governo do Estado de São Paulo vinculada à Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação. O Centro Paula Souza administra 218 Escolas Técnicas (Etecs) e 65 Faculdades de Tecnologia (Fatecs), reunindo mais de 285 mil estudantes nos ensinos Médio, Técnico, Técnico integrado ao Médio e Superiores Tecnológicos (CENTRO PAULA SOUZA, 2015).

A Organização dessa Proposta Curricular atende fielmente a Lei de Diretrizes e Bases (LDB/1996) no que diz respeito a organização e distribuição legal das disciplinas e suas cargas horárias, assim como os seus objetivos na formação do aluno do Ensino Médio. Foram selecionados onze princípios pedagógicos para orientar o ensino-aprendizagem no Ensino Médio das Escolas Técnicas de São Paulo (Etecs):

1. Ensino-aprendizagem com foco no desenvolvimento de competências.
2. Leitura crítica da realidade e inclusão construtiva na sociedade da informação e do conhecimento.
3. A aprendizagem como processo de construção coletiva em situações e ambientes

cooperativos.

4. Compartilhamento da responsabilidade do ensino-aprendizagem por professores e alunos.
5. Respeito a diversidade, valorização da subjetividade e promoção da inclusão.
6. Ética de identidade, estética da sensibilidade e política da igualdade.
7. Autonomia e protagonismo na aprendizagem.
8. Contextualização do ensino-aprendizagem.
9. Interdisciplinaridade e transdisciplinaridade.
10. Problematização do conhecimento.
11. Trabalho por projeto no desenvolvimento e na avaliação do ensino-aprendizagem.

Esses princípios pedagógicos selecionados para orientar o ensino-aprendizagem no Ensino Médio, mostram a preocupação com a formação do cidadão e não apenas na transmissão de conhecimentos. Dessa forma, esse currículo se apoia no ensino-aprendizagem por competências.

Para estruturar a organização dessas competências a Proposta Curricular do Centro Paula Souza para o Ensino Médio define:

> As competências foram organizadas em FUNÇÕES, entendendo-se por função um conjunto de competências voltadas para a consecução de um mesmo objetivo, como o de representar e comunicar ideias; de investigar e compreender a realidade; de contextualizar os objetos de conhecimento e os problemas a serem solucionados do ponto de vista sociocultural.
> Assim sendo, as competências do Ensino Médio foram classificados segundo três Funções:
>
> 1ª Função – Representação e Comunicação
> 2ª Função – Investigação e Compreensão
> 3ª Função – Contextualização Sociocultural
> (São Paulo, 2011, p. 13)

Tais Competências devem ser construídas mediante o desenvolvimento de alguns conteúdos listados que assim como as competências distribuídas nas três funções citadas, seguem os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 1999).

Para a área de Matemática e suas Tecnologias, são elencados os seguintes tópicos como temas que devem ser abordados no Ensino Médio:

- **Tema 1 - Álgebra**

  Conjuntos numéricos

  Noções de função

  Tipos de Funções: 1º grau, quadrática, modular, exponencial

  Logaritmo

  Sequências: P A e P G

- **Tema 2 – Introdução à estatística**

  Gráficos

- **Tema 3 - Trigonometria**

  Trigonometria no triângulo retângulo e na circunferência

  Funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente

  Matrizes e determinantes

- **Tema 4 – Geometria espacial**

  Posição

  Métrica: Áreas e Volumes

- **Tema 5 – Análise de dados**

  Contagem

  Análise combinatória

- **Tema 6 – Álgebra**

  Noções de Matemática Financeira

- **Tema 7 – Geometria analítica**

  Representação no plano cartesiano e equação

  Intersecção e posições relativas de figuras e circunferência

- **Tema 8 – Análise combinatória**

  Estatística - Probabilidade

- **Tema 9 – Educação Financeira**

Percebemos entre os conteúdos no Tema 6: Álgebra o tópico – Noções de Matemática Financeira e no Tema 9: Educação Financeira, uma indicação para o trabalho do tema nesse nível de ensino. Talvez num primeiro momento, no tema Álgebra, encontramos uma forma de se justificar o estudo algébrico por meio de exemplos de aplicações em Matemática Financeira. No tema Educação Financeira, o conhecimento adquirido anteriormente, pode ser aplicado em situações que orientem os alunos na formação do cidadão consciente como citado nos documentos curriculares.

Para finalizar são propostos métodos de avaliação para as competências esperadas e as formas de mensuração do conhecimento segundo padrões estabelecidos pelo Centro Paula Souza. Esperamos que a proposta metodológica de ensino desenvolvida nessa pesquisa venha atender a essa Proposta Curricular e contribuir desta maneira para a formação dos alunos.

2.2. Análise dos livros didáticos

Com objetivo de investigar o que se é proposto e aplicado nas escolas da rede pública na disciplina de matemática, mais especificamente no que diz respeito aos conceitos ligados diretamente ou indiretamente a Matemática Financeira, objeto de estudo da nossa pesquisa, escolhemos dois livros didáticos de matemática que fazem parte do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD - 2015) para o Ensino Médio. De acordo com o Ministério da Educação (MEC) o Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) “tem como principal objetivo subsidiar o trabalho pedagógico dos professores por meio da distribuição de coleções de livros didáticos aos alunos da educação básica” (MEC-PNLD, 2015).

> “O programa é executado em ciclos trienais alternados, sendo que a cada ano o Fundo Nacional do Desenvolvimento da Educação (FNDE) adquire e distribui livros para todos os alunos de determinada etapa de ensino e repõe e complementa os livros reutilizáveis para outras etapas” (FNDE, 2015).

Os livros selecionados, foram as duas opções indicadas pelo grupo de professores da escola em que a nossa pesquisa foi desenvolvida. Sendo que de acordo com a logística de distribuição do MEC apenas uma delas é enviada a escola para servir de apoio para o triênio 2015-2017.

Destacamos que no PNLD - 2015 para o Ensino Médio foram aprovadas ao todo 6 obras, ou seja, em nível nacional apenas essas 6 obras atenderam aos critérios de avaliação do MEC e poderão ser escolhidos como material de apoio pelos professores da rede pública.

Nossa pesquisa não tem por objetivo julgar ou avaliar o conteúdo das obras como um todo. Faremos uma análise do que se é proposto para o ensino de Matemática Financeira no ensino médio. Para isso, buscamos respostas para os seguintes questionamentos:

- Em que momento o tema Matemática Financeira aparece?
- O tema Matemática Financeira está relacionado a outros conceitos matemáticos ou aparece de forma isolada?
- Como o tema Matemática Financeira é abordado didaticamente?
- Qual a ordem de apresentação dos conceitos?
- Como eles são abordados?
- Eles são contextualizados?
- O uso da calculadora é recomendado? Em algum momento se explica como utilizar esse instrumento?

É importante situar ainda que as obras disponíveis no PNLD - 2015 para o Ensino Médio agora são divididas em três volumes, sendo um para cada ano do Ensino Médio.

2.2.1 Matemática: Contexto e Aplicações

Nessa seção analisaremos os três volumes da obra Matemática: Contexto e Aplicações (DANTE, 2014), buscaremos respostas para os questionamentos já apresentados. No sumário do volume 1 destinado aos alunos do 1º ano do EM, não encontramos nenhuma referência direta a Matemática Financeira, partimos então a procura da aparição do tema relacionado a outros tópicos.

Na unidade 1 – Números e funções encontramos alguns poucos problemas utilizados na apresentação do conceito de função do tipo que relacionam valores monetários com o números de unidades compradas ou consumidas (DANTE, 2014, p. 42).

Na unidade 2 – Função afim e Função quadrática na introdução do conceito de função afim encontramos novamente um problema do tipo que relaciona valores monetários com o números de unidades compradas ou consumidas (DANTE, 2014, p. 72) e numa apresentação da relação entre Função linear e proporcionalidade aparece um problema que mostra intuitivamente o conceito de juro composto e chega-se a conclusão de que em um período fixo, o retorno é proporcional ao capital investido, mas não é proporcional ao tempo do investimento (DANTE, 2014, p. 93).

Na unidade 5 – Função Exponencial na apresentação do conceito desse tipo de função aparece um exemplo que destaca a ligação do juro composto com esse tipo de função no que diz respeito a fórmula do montante (DANTE, 2014, p. 148).

Na unidade 6 – Logaritmo e função logarítmica novamente aparecem alguns problemas de juro composto que nesse caso tem aplicação dos logaritmos (DANTE, 2014, p. 175).

No volume 2 novamente não encontramos no sumário nenhuma referência direta a Matemática Financeira. Novamente fomos levados a procurar o tema relacionado a outros conceitos e encontramos apenas duas aparições bem modestas, na apresentação das operações com matrizes onde algumas tabelas com valores monetários foram utilizadas (DANTE, 2014, P. 81-85) e na resolução de alguns sistemas lineares que envolviam também valores monetários (DANTE, 2014, p. 120).

É importante destacar que esse volume se dedica aos estudos da Trigonometria e Funções Trigonométricas, Matrizes, Determinantes, Sistemas Lineares, Geometria plana e espacial, Análise combinatória e Probabilidade. Portanto é compreensível a pouca relação da Matemática Financeira com esses conteúdos.

No volume 3 o tema Matemática Financeira aparece explicitamente logo na unidade 1 – Matemática financeira e Estatística. Na abertura da unidade é apresentada uma linha do tempo com a evolução do celular e uma tabela com dados sobre os usuários dessa tecnologia no período de 2002 a 2012 e alguns questionamentos são feitos com relação a

Estatística e alguns cálculos com porcentagem, segundo o autor essa abertura “deve proporcionar o primeiro contato com um dos assuntos que será abordado na unidade” (DANTE, 2014, p. 10 -11).

Na introdução do capítulo 1 – Matemática Financeira é apresentado um texto que remete o aluno a aplicação da Matemática Financeira no cotidiano, aparecem também duas imagens relacionadas a esse contexto (DANTE, 2014, p. 12). Na sequência o aluno é levado a refletir sobre um problema que questiona a vantagem de se comprar uma TV à vista ou em duas parcelas sendo que nesse caso o dinheiro será aplicado num fundo de investimento e será resgatado para pagar a segunda parcela (DANTE, 2014, p. 13).

A seguir o aluno é apresentado ao conceito de porcentagem e levado a aplicar esse conceito na resolução de vários problemas, alguns já resolvidos no livro e outros propostos para que os alunos resolvam (DANTE, 2014, p. 14-15).

Antes de citar propriamente os regimes de juros simples e composto são apresentados conceitos como: Fator de atualização, Aumentos e descontos, Aumentos e descontos sucessivos, isso é feito com base na apresentação de conceitos e resolução de problemas que simulam situações práticas (Pág. 17, 18 e 19).

Nesse ponto do livro são apresentados os chamados “Termos importantes de Matemática Financeira”. Esses termos são: capital, tempo, juros, taxa de juros e montante. Em seguida, de maneira muito objetiva, são apresentados os conceitos de juros simples e de juros compostos seguidos de suas respectivas fórmulas e alguns problemas de aplicação que simulam algumas situações cotidianas (DANTE, 2014, p. 20-24).

São abordadas ainda algumas situações que mostram a conexão entre juros e funções e os cálculos de equivalência de taxas (DANTE, 2014, p. 25-27).

No capítulo 1 são apresentadas também duas leituras complementares que segundo o autor são “textos que visam ampliar e enriquecer o conteúdo estudado no capítulo” um dos textos destaca o conceito de inflação” (Figura 1) (DANTE, 2014, p. 16) e o outro fala sobre o cartão de crédito (Figura 2) e o sistema financeiro nacional (Figura 3) (DANTE, 2014, p. 28-29), por considerar que esses dois textos tem relação direta com o cotidiano das pessoas optamos por destacá-los.

Figura 1 - O Conceito de inflação.

Leitura

Conceito de inflação: o que é e como se forma?

CONTEÚDO DIGITAL

Ismar Ingber/Pulsar Imagens

A inflação é um conceito econômico que representa o aumento persistente e generalizado do preço de uma cesta de produtos em um país ou região durante um determinado período de tempo. Se, por exemplo, uma cesta de produtos custa R$ 100,00 em julho e passa a ser vendida por R$ 150,00 em agosto, verifica-se uma inflação de 50% no mês. Ela também representa a queda do poder aquisitivo do dinheiro em relação à elevação dos preços de bens e serviços. Quando a inflação está em um nível muito baixo, ocorre a estabilização dos preços e, assim, o valor dos produtos não aumenta.

A inflação já foi o grande drama da economia brasileira, e sempre merece grande atenção e acompanhamento do governo e da sociedade. A partir dos anos 1980, vários planos fracassaram na tentativa de impedir o seu crescimento, mas, desde 1994, com a implantação do Plano Real, ela está relativamente sob controle.

Causas

- Inflação monetária: emissão exagerada e descontrolada de dinheiro por parte do governo.
- Inflação de demanda: demanda nos custos (aumento no consumo) maior do que a capacidade de produção do país.
- Inflação de custos: aumento nos custos de produção (máquinas, matéria-prima, mão de obra) dos produtos.

Indicadores

No Brasil, existem vários índices que medem a inflação e são referências. Os principais são: IGP ou Índice Geral de Preços (calculado pela Fundação Getúlio Vargas), IPC ou Índice de Preços ao Consumidor (medido pela Fipe – Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas), INPC ou Índice Nacional de Preços ao Consumidor (medido pelo IBGE) e IPCA ou Índice de Preços ao Consumidor Amplo (também calculado pelo IBGE).

O IPC, por exemplo, considera o consumo de famílias com renda até 33 salários mínimos que vivem no Rio de Janeiro e em São Paulo. O IGP-M é calculado a partir de outros índices. O IPCA, de maior abrangência, pesquisa famílias com renda de até 40 salários mínimos em pelo menos 10 grandes capitais brasileiras. Já o ICV, calculado pelo Dieese, considera apenas os preços de alimentação, transporte, saúde e habitação praticados na cidade de São Paulo.

Adaptado de: <www.oeconomista.com.br/inflacao-o-que-e-e-como-se-forma/>. Acesso em: 30 out. 2012.

- A inflação brasileira em 2012 foi de 5,84% (IPCA). Assim, se uma cesta de produtos custava R$ 100,00 em dezembro de 2011, quanto ela custava em dezembro de 2012? R$ 105,84

Fonte: DANTE, 2014, p. 16.

Figura 2 - O cartão de crédito.

Leituras

O cartão de crédito

O cartão de crédito é um dos principais meios de pagamento atualmente. É um cartão de plástico que pode ou não conter um *chip*. Nos cartões com *chip* o pagamento só é efetuado mediante a digitação de uma senha.

Cada cartão de crédito possui um **limite**, ou seja, um valor máximo que se pode gastar e pagar por isso depois.

Todas as compras que o consumidor faz com o cartão de crédito são acumuladas para serem pagas mensalmente, em data previamente acertada com a empresa de crédito. Essas compras vêm discriminadas no que se chama **fatura** e o consumidor deve pagar pelo menos uma parte do valor total (conhecida como pagamento mínimo). O que não for pago é passado para a fatura do mês seguinte, acrescido de juros.

Os juros cobrados pelos cartões de crédito são os mais altos do mercado financeiro, por isso, pode não compensar passar a dívida para o mês seguinte. O ideal é sempre controlar os gastos e pagar a totalidade da fatura na data certa, todo mês, assim os juros do cartão são evitados.

Como o consumidor não percebe o dinheiro sendo gasto, é comum consumidores inexperientes gastarem demais e depois não conseguirem pagar a fatura, que vem muito alta. Nesses casos, é aconselhável fazer um empréstimo pessoal no banco, ou retirar dinheiro de alguma aplicação financeira, e pagar toda a fatura, para que a dívida não cresça no mês seguinte.

As operadoras de cartão, geralmente os bancos que emitem o cartão de uma empresa de crédito, costumam cobrar do consumidor uma taxa anual (**anuidade**) para manutenção da conta. Essa taxa varia de operadora para operadora, e pode chegar a zero em determinados casos. Sempre vale a pena ligar para a operadora e negociar o valor dessa taxa.

Se o consumidor sempre pagar a fatura total, em dia, o único gasto extra que ele poderá ter é a anuidade do cartão.

O lucro das empresas de crédito vem principalmente dos estabelecimentos comerciais. A empresa de crédito repassa ao lojista os valores das compras feitas com cartão, descontando uma taxa pelo serviço. Por exemplo, se o consumidor usa o cartão para comprar um produto de R$ 100,00 o consumidor pagará R$ 100,00 na fatura do cartão e o lojista receberá R$ 96,00 da empresa de crédito. Nesse caso, a taxa pelo serviço é de 4% sobre o valor da compra. A vantagem para o lojista é que ele sempre receberá da empresa de crédito; assim, se o consumidor não pagar, quem assume o prejuízo é a empresa de crédito, não o lojista. Então, vender no cartão é certeza de recebimento, ainda que recebendo um valor um pouco menor.

Assim, o cartão de crédito geralmente traz facilidades tanto para o consumidor quanto para o vendedor. Esse tipo de pagamento vem se consolidando mundialmente como uma das mais eficientes formas de pagamento, principalmente devido ao crescente comércio *on-line*.

Fonte: DANTE, 2014, p. 28.

Figura 3 - O Sistema Financeiro Nacional.

O Sistema Financeiro Nacional

No Brasil, o conjunto de instituições que possibilitam a ligação entre pessoas e empresas que dispõem de dinheiro para emprestar e pessoas e empresas que necessitam de dinheiro e se oferecem para tomá-lo emprestado é denominado **Sistema Financeiro Nacional**. Fazem parte desse sistema os bancos comerciais, a Caixa Econômica Federal, as cooperativas de crédito e as instituições similares. Esse sistema, que movimenta vultosos recursos diariamente, é regulamentado por lei e permeia todo o território nacional, influenciando a vida de todos os brasileiros.

Quem empresta dinheiro no mercado financeiro tem por motivação os juros que pode ganhar durante o tempo em que o seu dinheiro estiver emprestado. Esses juros são calculados por meio de porcentagens e sistemas de juros simples e juros compostos. Para o cálculo das porcentagens e desses juros, é necessário conhecer técnicas de Matemática. Matemática financeira é o ramo da Matemática que trata dos métodos utilizados para efetuar esses cálculos.

A taxa Selic (Sistema Especial de Liquidação e Custódia) é a média de juros que o governo brasileiro paga por empréstimos tomados dos bancos. Quando a taxa Selic é alta, os bancos preferem emprestar ao governo porque ele paga muito bem e o banco tem todas as garantias de recebimento. Quando a Selic é baixa, os bancos preferem emprestar dinheiro à população – nesse instante as taxas de cheque especial e cartão de crédito tendem a diminuir.

Quando existe risco de inflação alta, o Comitê de Política Monetária (Copom) do Banco Central aumenta a taxa Selic e a inflação geralmente recua.

Texto elaborado por Josimar Viana, doutor em Matemática.

30 de agosto de 2012 – Governo reduz taxa Selic de 8% ao ano para 7,5%

O BC (Banco Central) reduziu a taxa básica de juros Selic para o menor patamar histórico na noite de ontem. O percentual passou de 8% ao ano para 7,5%. E uma das principais consequências será a queda na rentabilidade da caderneta de poupança, que perdeu sua atratividade após medida do governo federal fixá-la de acordo com a Selic.

Disponível em: <www.dgabc.com.br/News/5977839/governo-reduz-taxa-selic-de-8-ao-ano-para-7-5.aspx>. Acesso em: 31 jan. 2013.

Agora, responda:

1. Quanto o governo gastaria a mais ao final de um ano com o aumento de 0,5% na taxa anual de juros, supondo-se que ele tenha tomado um empréstimo de R$ 1 000 000 000,00 de bancos? R$ 5 000 000,00

2. Suponha que o Brasil resolva fazer uma sequência de redução da sua taxa básica de juros. A taxa Selic de 7,5% ao ano deverá sofrer uma redução de 0,05 ponto percentual a cada mês até atingir a taxa de 0,1% ao ano. Em quanto tempo a taxa básica de juros do Brasil chegará a esse valor? 150 meses.

3. A taxa Selic não é a taxa cobrada pelos bancos pelo dinheiro que eles emprestam a seus clientes, mas serve de referência. Em 2012, a taxa cobrada pelo cheque especial foi de aproximadamente 160%* ao ano.

a) Quanto o governo pagará de juros a cada R$ 1 000,00 que tomou emprestado dos bancos ao final de um ano, tendo como base a taxa Selic de 7,5% ao ano? R$ 75,00

b) Quanto um cidadão que utiliza R$ 1 000,00 do seu cheque especial pagará após um ano, tendo como base a taxa de 160% ao ano? R$ 1 600,00

* Fonte: <www.ipea.gov.br/desafios/index.php?option=com_content&view=article&id=1250:reportagens-materias&Itemid=39>. Acesso em: 22 abr. 2013.

Fonte: DANTE, 2014, p. 29.

Esses textos dão abertura para uma abordagem mais direta a situações reais do dia a dia das pessoas. O texto que fala sobre o cartão de crédito abrindo uma discussão de como os jovens participam e compreendem o uso do cartão de crédito em suas famílias. Segundo o autor, essa leitura

> ... pode ser usada como referência para uma atividade em que os alunos deverão pesquisar sobre as taxas de juros cobradas pelas diversas operadoras de cartão de crédito e fazer simulações de gastos, pagamentos e dívidas, com o objetivo de orientar e educar consumidores conscientes (DANTE, 2014, p. 260).

A título de comparação estabelecemos uma razão entre o número de páginas em que apareceram uma abordagem relacionada com a Matemática Financeira e o número total de páginas. Nessa obra a razão foi de 30/759 ou aproximadamente 4%.

2.1.2 Matemática Paiva

Nessa seção analisaremos os três volumes da obra Matemática Paiva (PAIVA, 2013), buscaremos respostas para os questionamentos já apresentados.

No sumário do volume 1 destinado aos alunos do 1º ano do EM, encontramos no capítulo 2 – “Temas básicos da Álgebra e Matemática Financeira” a aparição explicita do tema Matemática Financeira. Os tópicos do capítulo são: Equações polinomiais do 1º grau; Inequações polinomiais do 1º grau; Sistemas de Equações polinomiais do 1º grau; Equações polinomiais do 2º grau; Matemática Financeira.

Apesar do tópico Matemática Financeira aparecer apenas no final do capítulo, nos tópicos anteriores percebemos uma preocupação em manter uma ligação entre os tópicos e a resolução de problemas de ordem financeira, preparando o aluno para o estudo dos conceitos de porcentagem, juro simples e juro composto.

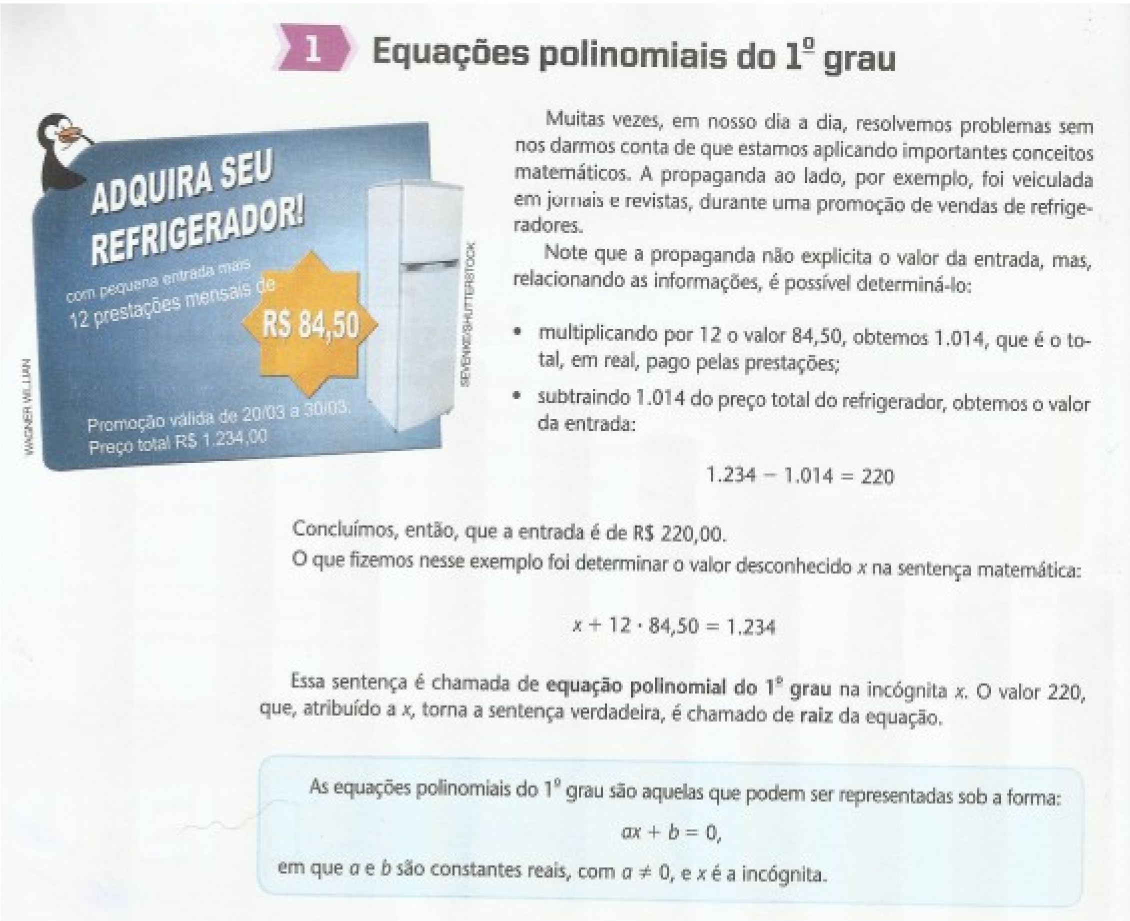
Na introdução do tópico Equações polinomiais do 1º grau, por exemplo, é apresentada a seguinte informação: (Ver figura 4)

Figura 4 - A compra do refrigerador.

Fonte: PAIVA, 2013, p. 44.

A partir dessa situação desenvolve-se o conceito de equação polinomial do 1º grau, como segue: (Ver figura 5)

Figura 5 - Desenvolvimento de Equações Polinomias de 1º grau.



1 Equações polinomiais do 1º grau

Muitas vezes, em nosso dia a dia, resolvemos problemas sem nos darmos conta de que estamos aplicando importantes conceitos matemáticos. A propaganda ao lado, por exemplo, foi veiculada em jornais e revistas, durante uma promoção de vendas de refrigeradores.

Note que a propaganda não explicita o valor da entrada, mas, relacionando as informações, é possível determiná-lo:

- multiplicando por 12 o valor 84,50, obtemos 1.014, que é o total, em real, pago pelas prestações;
- subtraindo 1.014 do preço total do refrigerador, obtemos o valor da entrada:

$$1.234 - 1.014 = 220$$

Concluímos, então, que a entrada é de R$ 220,00.

O que fizemos nesse exemplo foi determinar o valor desconhecido x na sentença matemática:

$$x + 12 \cdot 84{,}50 = 1.234$$

Essa sentença é chamada de **equação polinomial do 1º grau** na incógnita x. O valor 220, que, atribuído a x, torna a sentença verdadeira, é chamado de **raiz** da equação.

As equações polinomiais do 1º grau são aquelas que podem ser representadas sob a forma:

$$ax + b = 0,$$

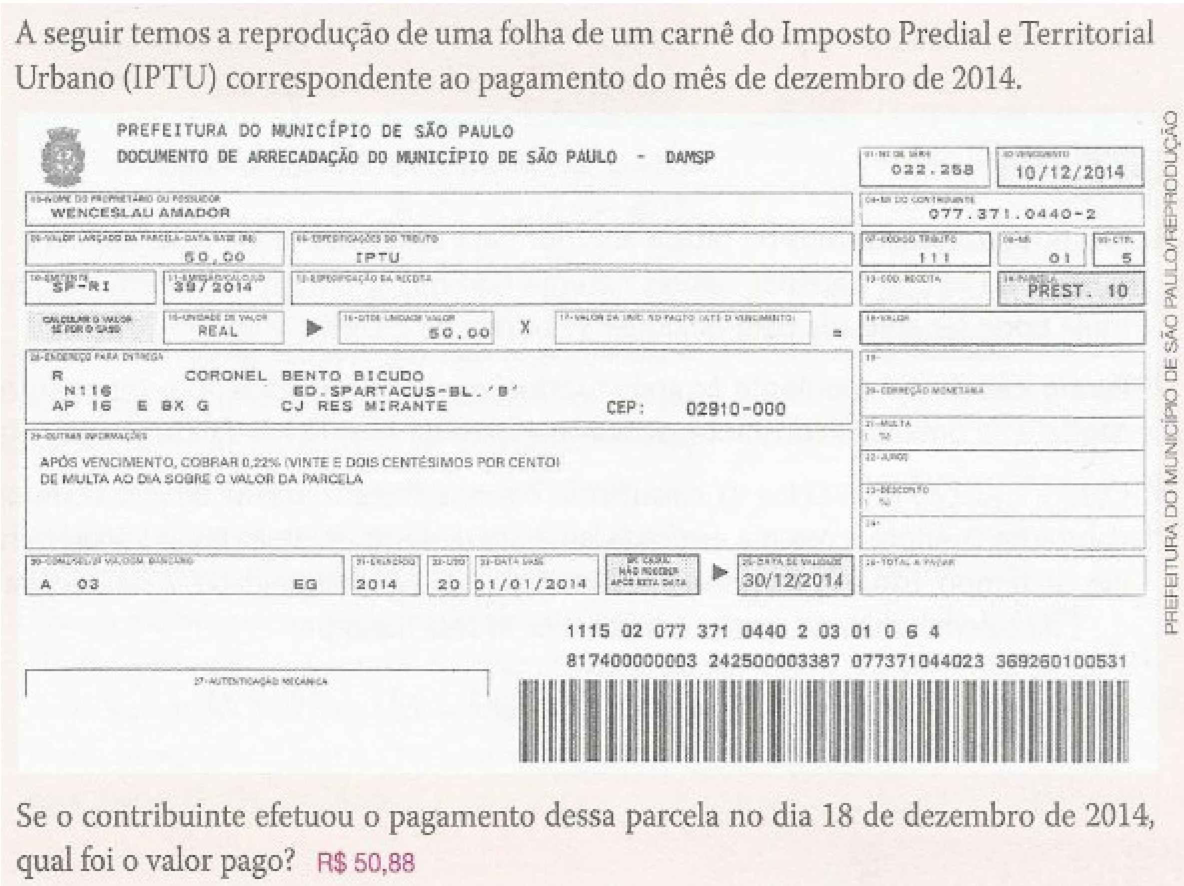
em que a e b são constantes reais, com $a \neq 0$, e x é a incógnita.

Fonte: PAIVA, 2013, p. 44.

No tópico Matemática Financeira percebemos uma introdução com algumas notícias de jornal em que aparecem valores percentuais e a partir dessa introdução são apresentados conceitos ligados ao cálculo de porcentagens por meio da razão e proporção. Em seguida são resolvidos alguns exercícios e problemas de ordem percentual.

Depois de trabalhados e resolvidos uma série de exercícios e problemas que envolvem o cálculo de porcentagens é apresentado o conceito de juro simples por meio de dois problemas bastante simples, partindo para a generalização do cálculo de juro simples pela fórmula. Em seguida, são propostos para a resolução dos alunos alguns exercícios e problemas para a aplicação do conceito de juro simples, com destaque para o seguinte problema:

Figura 6 - O boleto do IPTU.


A seguir temos a reprodução de uma folha de um carnê do Imposto Predial e Territorial Urbano (IPTU) correspondente ao pagamento do mês de dezembro de 2014.

PREFEITURA DO MUNICÍPIO DE SÃO PAULO
DOCUMENTO DE ARRECADAÇÃO DO MUNICÍPIO DE SÃO PAULO - DAMSP

022.258 10/12/2014
WENCESLAU AMADOR 077.371.0440-2
50,00 IPTU 111 01 5
SP-RI 39/2014 PREST. 10
CALCULAR O VALOR SE FOR O CASO REAL 50,00 X =
R CORONEL BENTO BICUDO
N116 ED. SPARTACUS-BL. 'B'
AP 16 E BX G CJ RES MIRANTE CEP: 02910-000
APÓS VENCIMENTO, COBRAR 0,22% (VINTE E DOIS CENTÉSIMOS POR CENTO)
DE MULTA AO DIA SOBRE O VALOR DA PARCELA
A 03 EG 2014 20 01/01/2014 30/12/2014
1115 02 077 371 0440 2 03 01 0 6 4
817400000003 242500003387 077371044023 369260100531
PREFEITURA DO MUNICÍPIO DE SÃO PAULO/REPRODUÇÃO

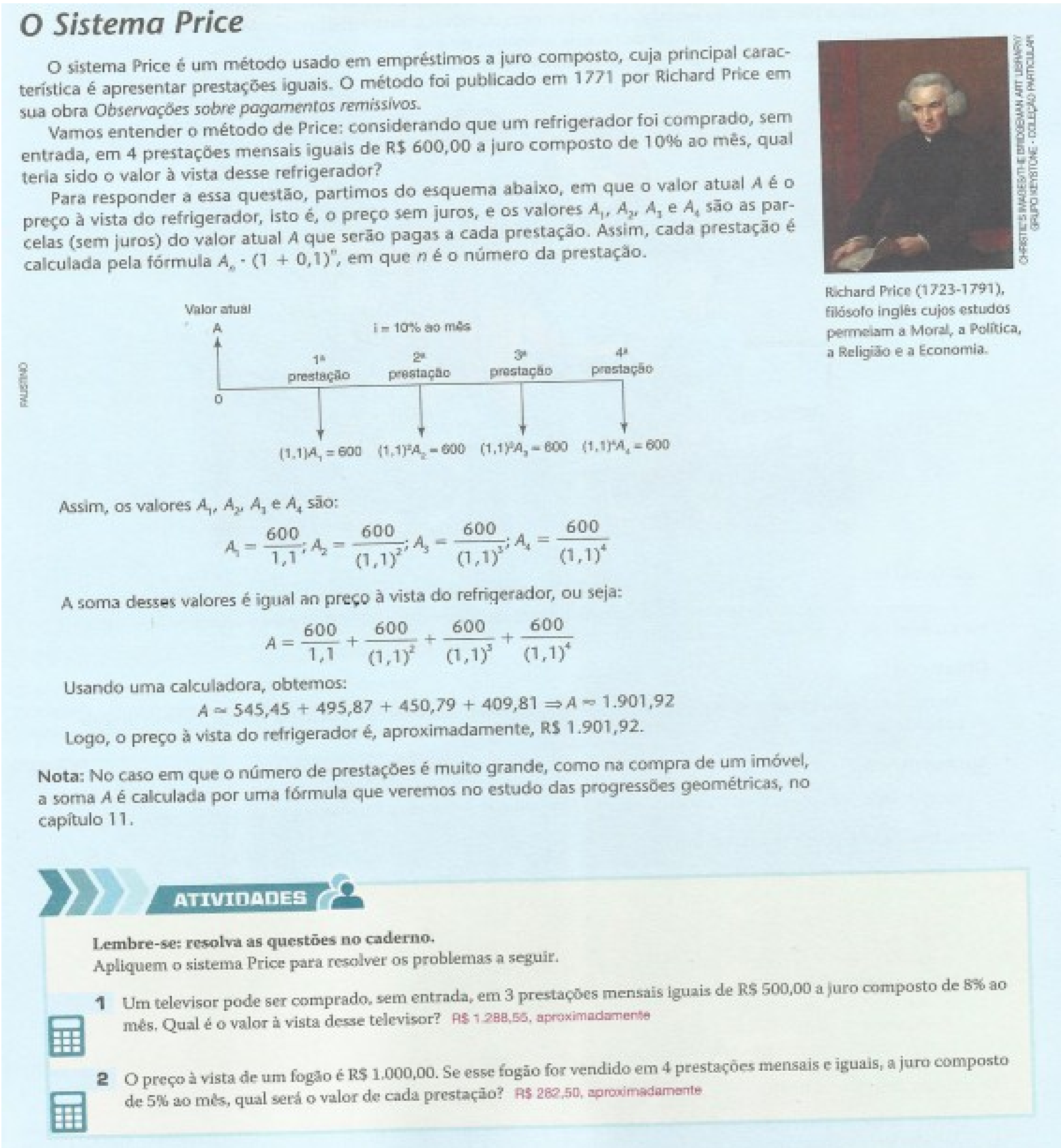
Se o contribuinte efetuou o pagamento dessa parcela no dia 18 de dezembro de 2014, qual foi o valor pago? R$ 50,88

Fonte: PAIVA, 2013, p. 55.

O conceito de juro composto é apresentado por meio de uma tabela onde um valor inicial de capital é aplicado nesse regime de capitalização e na tabela o montante é obtido em cada período adotando-se a cada período como capital o montante calculado no período anterior. A partir dessa tabela é obtida a generalização da fórmula do montante para o juro composto. Em seguida, são resolvidos e propostos uma série de exercícios e problemas aplicando o conceito de juro composto.

No final do capítulo na seção “Matemática sem fronteiras” o aluno é rapidamente apresentado ao chamado Sistema Price (Ver figura 7), bastante aplicado nas compras a prazo e depois convidado a resolver dois problemas desse gênero.

Figura 7 - O Sistema Price.



O Sistema Price

O sistema Price é um método usado em empréstimos a juro composto, cuja principal característica é apresentar prestações iguais. O método foi publicado em 1771 por Richard Price em sua obra *Observações sobre pagamentos remissivos*.

Vamos entender o método de Price: considerando que um refrigerador foi comprado, sem entrada, em 4 prestações mensais iguais de R$ 600,00 a juro composto de 10% ao mês, qual teria sido o valor à vista desse refrigerador?

Para responder a essa questão, partimos do esquema abaixo, em que o valor atual A é o preço à vista do refrigerador, isto é, o preço sem juros, e os valores A_1, A_2, A_3 e A_4 são as parcelas (sem juros) do valor atual A que serão pagas a cada prestação. Assim, cada prestação é calculada pela fórmula $A_n \cdot (1 + 0,1)^n$, em que n é o número da prestação.

Richard Price (1723-1791), filósofo inglês cujos estudos permeiam a Moral, a Política, a Religião e a Economia.

CHRISTIE'S IMAGES/THE BRIDGEMAN ART LIBRARY/GRUPO KEYSTONE - COLEÇÃO PARTICULAR

Assim, os valores A_1, A_2, A_3 e A_4 são:

$$A_1 = \frac{600}{1,1};\ A_2 = \frac{600}{(1,1)^2};\ A_3 = \frac{600}{(1,1)^3};\ A_4 = \frac{600}{(1,1)^4}$$

A soma desses valores é igual ao preço à vista do refrigerador, ou seja:

$$A = \frac{600}{1,1} + \frac{600}{(1,1)^2} + \frac{600}{(1,1)^3} + \frac{600}{(1,1)^4}$$

Usando uma calculadora, obtemos:

$$A \simeq 545,45 + 495,87 + 450,79 + 409,81 \Rightarrow A \simeq 1.901,92$$

Logo, o preço à vista do refrigerador é, aproximadamente, R$ 1.901,92.

Nota: No caso em que o número de prestações é muito grande, como na compra de um imóvel, a soma A é calculada por uma fórmula que veremos no estudo das progressões geométricas, no capítulo 11.

ATIVIDADES

Lembre-se: resolva as questões no caderno.

Apliquem o sistema Price para resolver os problemas a seguir.

1 Um televisor pode ser comprado, sem entrada, em 3 prestações mensais iguais de R$ 500,00 a juro composto de 8% ao mês. Qual é o valor à vista desse televisor? R$ 1.288,55, aproximadamente

2 O preço à vista de um fogão é R$ 1.000,00. Se esse fogão for vendido em 4 prestações mensais e iguais, a juro composto de 5% ao mês, qual será o valor de cada prestação? R$ 282,50, aproximadamente

Fonte: PAIVA, 2013, p. 61.

Na última página deste capítulo é proposto um projeto sobre o orçamento familiar mensal que pode ser desenvolvido em grupo pensando nas necessidades de uma família e a organização de seu orçamento financeiro.

No volume 2 não encontramos no sumário nenhuma referência direta a Matemática Financeira. Fomos então levados a procurar o tema relacionado a outros conceitos. Percebemos que quando foram trabalhados os conceitos de matrizes, sistema lineares e determinantes apareceram vários problemas que envolviam valores monetários, representando situações cotidianas justificando o estudo desses conceitos naquele momento.

É importante destacar que esse volume se dedica aos estudos da Trigonometria e Funções Trigonométricas, Matrizes, Determinantes, Sistemas Lineares, Geometria plana e espacial, Análise combinatória e Probabilidade, portanto é compreensível a pouca relação da Matemática Financeira com esses conteúdos.

No volume 3 novamente não encontramos no sumário nenhuma referência direta a Matemática Financeira. Dessa forma, fomos novamente levados a procurar o tema relacionado a outros conceitos e encontramos poucas situações em que essa relação aparecesse. Podemos destacar o capítulo Noções de Estatística onde em um dos exemplos utilizados para coleta e organização de dados foi abordada a relação entre Meio Ambiente e Crescimento Econômico.

Os outros temas abordados nesse volume foram: Geometria Analítica Plana, Números Complexos, Polinômios e Equações Polinomiais.

Para essa obra também a título de comparação estabelecemos uma razão entre o número de páginas em que apareceram uma abordagem relacionada com a Matemática Financeira e o número total de páginas. E nesse caso a razão foi de 26/752 ou aproximadamente 3,5%.

2.3. A Proposta Curricular da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) para o Ensino Médio

Em meados de 2015 tivemos contato com a Proposta Curricular da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) para o Ensino Médio e pudemos verificar uma indicação para o trabalho de Matemática Financeira nessa etapa de ensino que amplia o que se é feito usualmente.

A Sociedade Brasileira de Matemática é uma entidade civil, de caráter cultural e sem fins lucrativos, fundada em 1969, por ocasião do VII Colóquio Brasileiro de Matemática, em Poços de Caldas.

> A SBM tem por principais finalidades congregar os matemáticos e professores de Matemática do Brasil, estimular a realização e divulgação de pesquisa de alto nível em Matemática, contribuir para a melhoria do ensino de Matemática em todos os níveis, estimular a disseminação de conhecimentos de Matemática na sociedade, incentivar e promover o intercâmbio entre os profissionais de Matemática do Brasil e do exterior, zelar pela liberdade de ensino e pesquisa, bem como pelos interesses científicos e profissionais dos matemáticos e professores de Matemática no país, contribuir para o constante aprimoramento de altos padrões de trabalho e formação científica em Matemática no Brasil e oferecer assessoria e colaboração, na área de Matemática, visando o desenvolvimento nacional (SBM, 2015).

Tendo em vista que essa entidade exerce forte influência sobre o ensino de Matemática em nosso país decidimos levar em conta essa proposta curricular como um norte para o nosso trabalho. De acordo com a Sociedade Brasileira de Matemática,

> A presente proposta é resultado de uma discussão ao longo de um pouco mais de três meses, com base na experiência em sala de aula, na análise de currículos em vigor no país e no exterior e no nosso ponto de vista sobre os conteúdos apresentados nos principais livros didáticos usados pelas escolas brasileiras. Desta forma, foi construída uma grade com os principais conteúdos de Matemática, visando contemplar habilidades a serem alcançadas pelos alunos concludentes do Ensino Médio (SBM, 2015, p. 3).

Identificamos nessa proposta a indicação para o trabalho com a Matemática Financeira na 2ª série do Ensino Médio, no bloco identificado como Matemática Discreta. O detalhamento desse tema é dado da seguinte forma:

> **Estrutura de tópicos:**
>
> 1.1. Acréscimos e descontos percentuais;
>
> 1.2. Taxas de Juros;
>
> 1.3. Valor Presente e Valor Futuro;

1.4. Juros Compostos;
1.5. Taxas Equivalentes;
1.6. Juros Simples;
1.7. Séries Uniformes;
1.8. Sistemas de Amortização

Habilidades:
• Determinar o valor final de uma grandeza que sofreu variação percentual de uma taxa i (produto por 1 + i e 1 - i);
• Determinar a taxa de variação percentual de uma grandeza que sofreu acréscimo ou desconto;
• Determinar a taxa de juros de um empréstimo relacionada ao período;
• Resolver problemas envolvendo equivalência de capitais;
• Resolver problemas envolvendo juros compostos e amortizações;
• Determinar taxas de juros equivalentes e taxas de juros proporcionais;
• Aplicar o conceito de juros simples a situações em que o prazo é menor que a unidade;
• Resolver problemas envolvendo séries uniformes;
• Construir tabelas de amortização nos sistemas Price e SAC.

Recomendações:
• No ensino de juros compostos e da Matemática Financeira como um todo, pode-se evitar o uso excessivo de fórmulas caso o aluno adquira a habilidade de resolver problemas com o diagrama de flechas montando a chamada equação de valor, com foco numa determinada época.
• O conceito de juros simples é raramente utilizado em situações reais e, portanto, deve-se abolir a prática de propor aos alunos exemplos e exercícios artificiais de empréstimos a juros simples. A exceção reside no cálculo de juros em que o prazo é menor que a unidade de tempo adotada, em particular, no cálculo dos juros de mora. Uma boa forma de visualizar o motivo pelo qual isso acontece, é comparar os gráficos de montantes dos juros simples e compostos
(função afim e exponencial), onde se pode verificar a vantagem de adotar essa prática para o detentor do capital.
• Na medida do possível, o ensino da Matemática Financeira deve ser acompanhado do uso de calculadoras financeiras e/ou planilhas eletrônicas. Tal prática aproxima o aluno das aplicações desses conceitos no mundo real.
(SBM, 2015, p. 27)

3. CONCEITOS DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Neste capítulo organizamos os conceitos básicos da Matemática Financeira. Para isso apresentamos alguns exemplos de aplicações e em seguida formalizamos esses conceitos através de fórmulas e definições. Dentre esses exemplos alguns foram elaborados por nós com base nas referências pesquisadas nesse trabalho e os outros foram retirados na íntegra dessas referências. Nesse caso fazemos a devida referência.

3.1. Porcentagem, acréscimos e descontos

É comum em nosso cotidiano nos depararmos com o símbolo de porcentagem (%), e por vezes realizamos mentalmente muitos dos cálculos que envolvem porcentagem. Nesta seção vamos explorar alguns métodos para resolver situações em que esse conceito é aplicado.

Quando escrevemos 11% estamos usando uma forma de representar a razão centesimal $\frac{11}{100}$. O por cento é uma expressão representada pelo símbolo %, que significa centésimos. Assim,

$$11\% = \frac{11}{100} = 0{,}11$$

Exemplo 1: Quanto é 11% de 1500?

Resolução: Já sabemos que $11\% = \frac{11}{100} = 0{,}11$ e que precisamos calcular 11% de 1500. Basta então multiplicarmos 0,11 por 1500. Assim,

$$0{,}11 \times 1500 = 165$$

Vamos chamar 0,11 (representação decimal de 11%) de fator de porcentagem. Para os cálculos nessa etapa da nossa pesquisa vamos utilizar uma calculadora simples. Para efetuar esse cálculo podemos digitar:

0,11 x 1500 =

ou

1500 x 11 %

Nos dois casos encontraremos o resultado 165, que representa os 11% de 1500.

Exemplo 2: Um determinado produto que custava R$ 28,00 e depois de um aumento passou a custar R$ 35,00 teve uma variação percentual de qual valor?

Resolução: Nessa situação, como o produto teve uma variação de R$ 28,00 para R$ 35,00, fica claro que o aumento foi de R$ 7,00 (35 – 28 = 7). Para conhecermos a variação percentual fazemos a comparação entre essa variação e o valor inicial da seguinte maneira:

$$\frac{7}{28} = 0{,}25 \quad \rightarrow \quad 0{,}25 \text{ x } 100 = 25\%$$

Portanto, a variação percentual foi de 25%, ou seja, o produto foi reajustado em 25%. Usando uma calculadora simples podemos digitar:

7 : 28 x 100 =

No visor da calculadora irá aparecer 25 que, nesse caso, indica os 25%.

Exemplo 3: Um determinado produto que custava R$ 35,00 e depois de um desconto passou a custar R$ 28,00 teve uma variação percentual de qual valor?

Resolução: Nessa situação, como o produto teve uma variação de R$ 35,00 para R$ 28,00, é claro que o desconto foi de R$ 7,00 (35 – 28 = 7). Para conhecermos a variação percentual fazemos a comparação entre essa variação e o valor inicial da seguinte maneira:

$$\frac{7}{35} = 0{,}2 \quad \rightarrow \quad 0{,}2 \text{ x } 100 = 20\%$$

Portanto, a variação percentual foi de 20%, ou seja, o produto sofreu um desconto de 20%. Usando uma calculadora simples podemos digitar:

7 : 35 x 100 =

No visor da calculadora irá aparecer 20 que, nesse caso, indica os 20%.

Nos exemplos anteriores vimos que é comum o cálculo de porcentagens relacionado a situações que envolvam o aumento ou de desconto de valores monetários. Desta forma,

> Acrescentar p% a um valor x é multiplicar x por um fator de correção f (f maior que 1), dado por f $= 1 + \dfrac{p}{100}$ ... [e] … reduzir um valor x de p% é multiplicar x por um fator de correção f (f menor que 1), dado por f $= 1 - \dfrac{p}{100}$ (MORGADO; CESAR, 2006, p. 1).

Exemplo 4: Considerando que um artigo que custava R$ 120,00 tenha sido reajustado em 8%, qual é o preço desse artigo depois do reajuste?

Resolução: Como o reajuste foi de 8%, o fator de correção que passaremos a chamar de fator de aumento f, é dado por

$$f = 1 + \frac{8}{100} \quad \rightarrow \quad f = 1 + 0{,}08 \quad \rightarrow \quad f = 1{,}08$$

Para encontrar o valor final do produto após esse aumento basta multiplicarmos o valor inicial pelo fator de aumento. Assim,

$$120 \text{ x } 1{,}08 = 129{,}6$$

Portanto, o valor do artigo depois do reajuste de 8% é de R$ 129,60. Usando uma calculadora simples podemos digitar:

120 x 1,08 =

ou

120 + 8 %

No primeiro caso encontraremos 129,6 em qualquer calculadora. No segundo caso, esse procedimento é válido apenas para algumas calculadoras.

Exemplo 5: Supondo que um produto que custava R$ 120,00 tivesse um abatimento de 8% no pagamento à vista, qual seria então o valor do produto se o pagamento for à vista?

Resolução: Como o abatimento foi de 8% temos que o fator de correção, que passaremos a chamar de fator de desconto f, será dado por

$$f = 1 - \frac{8}{100} \quad \rightarrow \quad f = 1 - 0{,}08 \quad \rightarrow \quad f = 0{,}92$$

Para encontrar o valor final do produto após esse desconto basta multiplicarmos o valor inicial pelo fator de desconto. Assim,

$$120 \times 0{,}92 = 110{,}4$$

Portanto, o valor do produto depois do abatimento de 8% é de R$ 110,40. Usando uma calculadora simples podemos digitar:

120 x 0,92 =

ou

120 - 8 %

Encontramos o valor de 110,4.

Existe ainda a possibilidade de ocorrerem mais de um aumento ou mais de um desconto. Quando isso ocorrer chamaremos de acréscimos sucessivos, quando ocorrer mais de um aumento, ou de descontos sucessivos quando ocorrer mais de um desconto.

Exemplo 6: Se um produto que custava R$ 300,00 sofre um aumento de 20% e em seguida outro aumento de 30%, pergunta-se: a) qual a taxa de aumento total do produto depois dos dois reajustes? b) qual será o novo valor do produto depois dos dois reajustes?

Resolução: item a) Nesse caso é comum que se imagine que a taxa de aumento total do produto seja de 50%, porém isso não é verdade. De fato, vamos encontrar o fator de aumento total:

- Na incidência do primeiro reajuste temos como fator de aumento o seguinte:

$$f_1 = 1 + \frac{20}{100} \quad \rightarrow \quad f_1 = 1 + 0{,}2 \quad \rightarrow \quad f_1 = 1{,}2$$

- Na incidência do segundo reajuste temos como fator de aumento o seguinte:

$$f_2 = 1 + \frac{30}{100} \quad \rightarrow \quad f_2 = 1 + 0{,}3 \quad \rightarrow \quad f_2 = 1{,}3$$

É importante destacar que f_2 só será aplicado depois da aplicação de f_1. Dessa forma, o fator de aumento total que chamaremos de f_t será obtido pelo produto de f_1 por f_2.

Assim,

$$f_t = f_1 \text{ x } f_2 \quad \rightarrow \quad ft = 1{,}2 \text{ x } 1{,}3 \quad \rightarrow \quad f_t = 1{,}56$$

Percebemos que, se o fator de aumento total é de 1,56 então a taxa de aumento total pode ser encontrada fazendo 1,56 – 1 = 0,56 (realizando essa diferença temos o percentual de aumento em relação ao valor inicial) que é 56% e não de 50%. Se ocorrem mais de dois aumentos sucessivos, para encontrar o fator de aumento total, basta efetuar o produto de todos os fatores que incidiram.

item b) Agora que já conhecemos o fator de aumento total basta efetuar o produto entre o valor inicial pelo fator de aumento total. Assim,

$$300 \text{ x } 1{,}56 = 468$$

Portanto, o valor final desse produto depois dos dois reajustes sucessivos é de R$ 468,00. Esse resultado poderia ter sido obtido direto pela seguinte expressão:

$$300 \text{ x } 1{,}2 \text{ x } 1{,}3 = 468$$

Usando uma calculadora simples podemos digitar:

300 | x | 1,2 | x | 1,3 | =

ou

300 | + | 20 | % | + | 30 | %

Destacamos que, como citado anteriormente no primeiro caso encontraremos 468 em qualquer calculadora. Já no segundo caso, esse procedimento é válido apenas para algumas calculadoras.

Exemplo 7: Se o preço de um artigo tem um reajuste de 7% e a seguir um novo reajuste, gerando um acumulado de 12%, qual é o valor aproximado em porcentagem do segundo reajuste?

Resolução: Aqui é conhecido o primeiro reajuste que é de 7%, o acumulado de 12% e devemos encontrar o percentual do segundo reajuste. Para isso, vamos usar a seguinte expressão:

$$f_t = f_1 \text{ x } f_2 \quad \rightarrow \quad 1{,}12 = 1{,}07 \text{ x } f_2 \quad \rightarrow \quad f_2 = \frac{1{,}12}{1{,}07} \quad \rightarrow \quad f_2 = 1{,}0467$$

Como o fator de aumento do segundo reajuste é de 1,0467, arredondando para quatro casas decimais, o percentual desse reajuste foi de (1,0467 – 1) x 100 = 0,0467 x 100 = 4,67%

Usando uma calculadora simples podemos digitar:

1,12	:	1,07	=	-	1	=	x	100

Exemplo 8: Se um produto que custava R$ 300,00 sofre um desconto de 20% e em seguida outro desconto de 30%, pergunta-se: a) qual a taxa de desconto total do produto depois dos dois abatimentos? b) qual será o novo valor do produto depois dos dois abatimentos?

Resolução: item a) Nesse caso a taxa desconto também não é de 50%, pois o segundo desconto ocorre depois da ocorrência do primeiro desconto. Vamos encontrar o fator de desconto total:

- Na incidência do primeiro abatimento temos como fator de desconto o seguinte:

$$f_1 = 1 - \frac{20}{100} \quad \rightarrow \quad f_1 = 1 - 0{,}2 \quad \rightarrow \quad f_1 = 0{,}8$$

- Na incidência do segundo abatimento temos como fator de desconto o seguinte:

$$f_2 = 1 - \frac{30}{100} \quad \rightarrow \quad f_2 = 1 - 0{,}3 \quad \rightarrow \quad f_2 = 0{,}7$$

É importante destacar que f_2 só será aplicado depois da aplicação de f_1. Dessa forma, o fator de desconto total, que chamaremos de f_t, será obtido pelo produto de f_1 por f_2. Assim,

$$f_t = f_1 \text{ x } f_2 \quad \rightarrow \quad f_t = 0{,}8 \text{ x } 0{,}7 \quad \rightarrow \quad f_t = 0{,}56$$

Percebemos que, se o fator de desconto total é de 0,56 então a taxa de desconto total pode ser encontrada fazendo 1 – 0,56 = 0,44 (realizando essa diferença temos o percentual de desconto em relação ao valor inicial) que é 44% e não de 50%. Se ocorrem mais de dois descontos sucessivos, o fator de desconto total será o produto de todos os fatores que incidiram.

Resolução: item b) Agora que já conhecemos o fator de desconto total basta efetuar o produto entre o valor inicial pelo fator de desconto total. Assim,

$$300 \text{ x } 0{,}56 = 168$$

Portanto, o valor final desse produto depois dos dois abatimentos sucessivos é de R$ 168,00. Esse resultado poderia ter sido obtido direto pela seguinte expressão:

$$300 \text{ x } 0{,}8 \text{ x } 0{,}7 = 168$$

Usando uma calculadora simples podemos digitar:

300 x 0,8 x 0,7 =

ou

300 - 20 % - 30 %

Encontramos o valor 168.

Exemplo 9: Se um produto que custava R$ 150,00 sofre um abatimento de 7% e depois de um segundo abatimento tem um abatimento acumulado de 14,44%, qual é a taxa percentual do segundo desconto?

Resolução: Aqui é conhecido o primeiro abatimento que é de 7%, o acumulado de 14,44% e devemos encontrar o percentual do segundo abatimento. Para isso, vamos usar a seguinte expressão:

$$f_t = f_1 \text{ x } f_2 \quad \rightarrow \quad 0{,}8556 = 0{,}93 \text{ x } f_2 \quad \rightarrow \quad f_2 = \frac{0{,}8556}{0{,}93} \quad \rightarrow \quad f_2 = 0{,}92$$

Como o fator de desconto do segundo reajuste é de 0,92 então o percentual desse desconto foi de (1 – 0,92) x 100 = 0,08 x 100 = 8%. Usando uma calculadora simples podemos digitar:

0,8556 : 0,93 = - 1 = x 100

Nesse caso, o resultado final ficará -8 indicando que ocorreu um abatimento de 8%.

3.2. Capital, juros, taxa de juros e montante

Segundo Morgado (2001)

> A operação básica da matemática financeira é a operação de empréstimo. Alguém que dispõe de um capital C (chamado de principal), emprestado a outrem por um certo período de tempo. Após esse período, ele recebe o seu capital C de volta, acrescido de uma remuneração J pelo empréstimo. Essa remuneração é chamada de juro. A soma C + J é chamada de montante e será representada por M. A razão i = J / C, que é a taxa de crescimento do capital, será sempre referida ao período da operação e chamada de taxa de juros (MORGADO; WAGNER; ZANI, 2001, p. 44).

Essa definição apresentada por Morgado é importante para que possamos compreender de maneira simples e objetiva o que se estuda em Matemática Financeira e quais os termos mais frequentes. Vale destacar ainda que nessa definição o termo "operação de empréstimo" pode ser compreendido também como "operação de investimento", analisando do ponto de vista de quem concede o empréstimo.

Hazzan (2005) afirma que

> A Matemática Financeira visa estudar o valor do dinheiro no tempo, nas aplicações e nos pagamentos de empréstimos" e ainda que "... a Matemática Financeira fornece instrumentos para o estudo e avaliação das formas de aplicação de dinheiro bem como de pagamento de empréstimos (HAZZAN; POMPEO, 2005, p. 1) .

Em geral o termo financiamento aparece quando o empréstimo está vinculado a compra de um bem que durante o pagamento desse financiamento fica alienado ao banco ou financeira. No Brasil as taxas de juros são reguladas pelo governo e Banco Central, podendo variar de uma instituição para outra, ou ainda, depender da modalidade de empréstimo ou financiamento. Em geral, o que determina a taxa de juros são os riscos do não pagamento e das garantias, caso isso ocorra.

De acordo com o Banco Central

> **Empréstimo**: É um contrato entre o cliente e a instituição financeira pelo qual ele recebe uma quantia que deverá ser devolvida ao banco em prazo determinado, acrescida dos juros acertados. Os recursos obtidos no empréstimo não tem destinação específica (BANCO CENTRAL, 2015).

e

> **Financiamento**: Assim como o empréstimo bancário, o financiamento também é um contrato entre o cliente e a instituição financeira mas com destinação específica dos recursos tomados, como, por exemplo, a aquisição de veículo ou de bem imóvel. Geralmente o financiamento possui algum tipo de garantia, como, por exemplo, alienação fiduciária ou hipoteca (BANCO CENTRAL, 2015).

Exemplo 10: Se um capital de R$ 500,00 foi emprestado por um mês a taxa de 2% a. m. (ao mês), então:

1º) Os juros acumulado no período será de 2% de 500, o que equivale a 0,02 x 500 = 10.

Generalizando podemos dizer que o juro J proporcionado por um capital C aplicado a uma taxa i em decorrência de um único período indicado na unidade da taxa é:

$$J = C \cdot i$$

2º) O montante no período será de R$ 510,00, ou seja, R$ 500,00 que é o valor do capital inicial somado com R$ 10,00 que é o juro no período. Generalizando, o montante M é dado pela soma do capital C com o juro J, assim:

$$M = C + J$$

É importante destacar ainda que a taxa de juros pode ser representada por $i = J / C$. Verificando o caso resolvido temos $i = 10 / 500 \rightarrow i = 0{,}02 \rightarrow i = 2\%$. Nessa situação, o acordo entre o tomador do empréstimo e o emprestador teve como base a taxa de juros de 2% a.m., ou seja, R$ 500,00 na data do empréstimo tem o mesmo valor de R$ 510,00 depois de um mês. Podemos concluir que o valor do dinheiro depende a que época este é referido.

Exemplo 11: Um capital de R$ 1200,00 foi aplicado durante 3 meses à taxa de 5% a.t. (ao trimestre). Calcule os juros e o montante recebidos após 3 meses.

Resolução: Nesse caso o período de aplicação é de três meses e a taxa referida indica 5% ao trimestre, o que indica um único período. Para calcular os juros (J) fazemos:

$$J = C \cdot i \quad \rightarrow \quad J = 1200 \times 0{,}05 \quad \rightarrow \quad J = 60$$

Assim, os juros acumulados no período são de R$ 60,00. O montante gerado por essa aplicação será de R$ 1260,00, que é indicado pelo cálculo:

$$M = C + J \quad \rightarrow \quad M = 1200 + 60 \quad \rightarrow \quad M = 1260$$

3.3. Regimes de Capitalização

De acordo com Iezzi, Hazzan e Degenszajn (2004)

> Se um capital foi aplicado a uma certa taxa por período, por vários intervalos ou períodos de tempo, o valor do montante pode ser calculado segundo duas convenções de cálculo, chamadas de regimes de capitalização: capitalização simples (ou juros simples) e capitalização composta (ou juros compostos) (IEZZI; HAZZAN; DEGENSZAJN, 2004, p. 44).

Exemplo 12: Consideremos um empréstimo de R$ 100,00 que será quitado em uma parcela única três meses após o empréstimo ser concedido, a uma taxa de 10% a. m. (ao mês).

Resolução: Como não fica claro qual o regime de capitalização aplicado vamos resolver esse problema de dois modos, aplicando primeiro o regime de capitalização composta e depois o regime de capitalização simples.

1º caso: Se o regime de capitalização escolhido for o composto, a evolução do capital inicial acontecerá da seguinte forma:

- Após o 1º mês → 100 x 0,10 = 10 → 100 + 10 = 110
- Após o 2º mês → 110 x 0,10 = 11 → 110 + 11 = 121
- Após o 3º mês → 121 x 0,10 = 12,10 → 121 + 12,10 = 133,10

Nesse regime capitalização, os juros no primeiro período são calculados sobre o capital inicial e os próximos são calculados sobre o montante acumulado no período anterior. Portanto, para saldar a dívida depois de três meses, o pagamento deverá ser de R$ 133,10.

2º caso: Se o regime de capitalização escolhido for o simples, a evolução do capital inicial acontecerá da seguinte forma:

- Após o 1º mês → 100 x 0,10 = 10 → 100 + 10 = 110
- Após o 2º mês → 100 x 0,10 = 10 → 110 + 10 = 120
- Após o 3º mês → 100 x 0,10 = 10 → 120 + 10 = 130

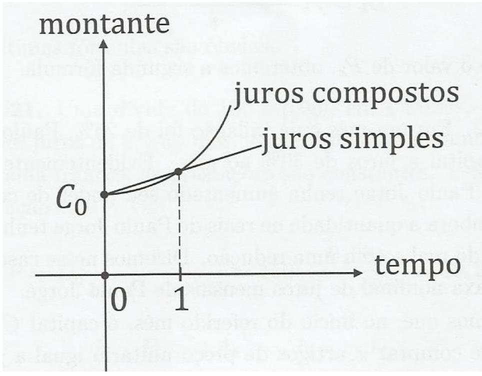
Percebemos que nesse regime de capitalização, os juros são calculados em cada período sempre sobre o capital inicial e não sobre o montante do período anterior. Portanto, para saldar a dívida depois de três meses, o pagamento deverá ser de R$ 130,00.

De acordo com Morgado, Wagner e Zani (2001)

> Na vida real, juros simples são raramente usados. O motivo para isso é o que o humorista já definiu como sendo a regra de ouro da Matemática Financeira – e também da vida: Na vida quem tem o ouro é que faz as regras” ... “A exceção ocorre se o prazo for menor que a unidade de tempo; neste caso, juros simples dariam maior montante. Esta é a única situação da vida real – que ocorre tipicamente em juros de mora, isto é, nos juros que são cobrados por pequenos atrasos em pagamentos – em que juros simples são usados (MORGADO; WAGNER; ZANI, 2001, p. 57).

Vamos visualizar isso graficamente:

Figura 8 - Comparativo entre Juros simples e Juros Compostos



Fonte: LIMA; et al. 2006, p. 60.

3.4. Juros simples

Como vimos anteriormente os juros simples seguem o regime de capitalização simples, ou seja, os juros são calculados sempre sobre o capital inicial. Na vida real os juros simples são usados apenas em situações que o prazo for menor que a unidade de tempo.

Com a finalidade de entender um pouco melhor esse regime de juros vamos considerar o seguinte exemplo:

Exemplo 13: Um capital de R$ 1000,00 é aplicado a juros simples, à taxa de 2% ao mês, durante 5 meses. Calcule os juros e o montante dessa aplicação.

Resolução: Para o cálculo dos juros sabemos que se os juros são calculados em todos os períodos sempre sobre o capital inicial, então é evidente que os juros serão iguais em todos os períodos. Para calcular os juros acumulados nos 5 meses, calculamos os juros para um mês e em seguida multiplicamos por 5. Assim,

$$J = (1000 \,.\, 0{,}02) \,.\, 5 = 100$$

Generalizando, para calcular os juros simples acumulados na aplicação de um capital C, à uma taxa de juros por período i, durante n períodos é dado por:

$$J = C \,.\, i \,.\, n$$

Observamos que taxa e tempo devem estar na mesma unidade de medida e embora a dedução dessa expressão tenha sido feita para valores inteiros de tempo, ela se estende aos casos em que o tempo não for inteiro, o que é muito comum quando se trata de juros simples.

Para o cálculo do montante, uma vez que já conhecemos o capital inicial que é de R$ 1000,00 e os juros acumulados nos 5 meses que é de R$ 100,00, então o montante acumulado é dado por:

$$M = C + J = 1000 + 100 = 1100$$

Se quisermos calcular o montante de maneira direta deduzimos a seguinte regra:

$$M = C + J = C + C \cdot i \cdot n = C \cdot (1 + i \cdot n)$$

Verificando a validade no exemplo temos:

$$M = C \cdot (1 + i \cdot n) = 1000 \cdot (1 + 0{,}02 \cdot 5) = 1000 \cdot (1 + 0{,}1) = 1000 \cdot 1{,}1 = 1100$$

Exemplo 14: O pagamento de uma dívida de R$ 300,00 teve um atraso de 12 dias. Se a taxa de juros simples cobrada é 2% a.m., calcule os juros que serão cobrados e o montante que deverá ser pago pela dívida.

Resolução: Nessa situação a taxa é de 2% a. m. e o prazo em que os serão cobrados é de 12 dias, ou seja, menor que um mês. Representaremos esses 12 dias como uma fração do mês. Adotaremos o mês comercial (30 dias). Assim, 12 dias equivalem a $\frac{12}{30}$ de um mês, que simplificando fica como $\frac{2}{5}$. Então para calcular os juros temos:

$$J = C \cdot i \cdot n = 300 \cdot 0{,}02 = 2{,}4$$

Assim, os juros cobrados pelos 12 dias de atraso serão de R$ 2,40 e consequentemente o montante será de R$ 302,40 (300 + 2,4).

3.5. Juros compostos

Como vimos anteriormente os juros compostos são calculados seguindo o regime de capitalização composto, ou seja, os juros no primeiro período são calculados sobre o capital inicial e os próximos são calculados sobre o montante acumulado no período anterior. Podemos verificar ainda que nesse regime de capitalização o montante cresce exponencialmente. Assim, considerando um capital C aplicado a juros compostos, a uma taxa i por período e durante n períodos de tempo, calculando o montante dessa aplicação temos:

- Montante após 1 período:

$$M_1 = C + C \cdot i = C \cdot (1 + i)$$

- Montante após 2 períodos:

$$M_2 = M_1 + M_1 \,.\, i = M_1 \,.\, (1 + i) = C \,.\, (1 + i) \,.\, (1 + i) = C \,.\, (1 + i)^2$$

- Montante após 3 períodos:

$$M_3 = M_2 + M_2 \,.\, i = M_2 \,.\, (1 + i) = C \,.\, (1 + i)^2 \,.\, (1 + i) = C \,.\, (1 + i)^3$$

Generalizando temos que, o montante após n períodos é:

$$M_n = C \,.\, (1+i)^n$$

Convencionalmente omitimos o índice n no montante ficando então com a seguinte expressão:

$$M = C \,.\, (1+i)^n$$

Essa é a chamada fórmula para o cálculo do montante dos juros compostos. Percebemos que a equação é composta por quatro variáveis: montante M, capital C, taxa i e tempo n. Assim, conhecendo três dessas variáveis a quarta variável pode ser calculada por essa expressão. Para os cálculos nessa etapa do nosso trabalho vamos utilizar uma calculadora científica.

A calculadora científica também está disponível em outros aparelhos eletrônicos como celulares, *tablets*, computadores, entre outros, sendo assim de fácil acesso. Em nossos cálculos com juros compostos ela será útil principalmente para o cálculo de exponencial presente na fórmula do montante.

Exemplo 15: Marcelo investe R$ 1300,00 a juros compostos de 3% a. m. (ao mês), qual será o montante de Marcelo quatro meses depois?

Resolução: Aplicando a fórmula do montante dos juros compostos, temos:

$$M = C \,.\, (1+i)^n = 1300 \,.\, (1+0{,}03)^4 = 1300 \,.\, (1{,}03)^4 = 1463{,}16$$

Destacamos que a taxa e o tempo estão na mesma unidade de medida, ou seja, a taxa de 3% a.m. (ao mês) e o período de quatro meses. Para calcularmos $(1{,}03)^4$ usamos uma calculadora cientifica. Para isso teclamos:

1,03 ^ 4 =

Obtemos no visor da calculadora o número 1,12550881 que em seguida é multiplicado por 1300 tendo como resultado 1463,161453. Arredondamos para duas casas depois da vírgula, pois estamos trabalhando com dinheiro adotamos o resultado em reais de R$ 1463,16.

Ressaltamos que fizemos o arredondamento apenas no final do cálculo. Isso é importante, pois diminui distorções no resultado.

Exemplo 16: Qual o capital que deve ser aplicado a juros compostos durante 5 meses, à taxa de 2% a.m. (ao mês) para resultar em um montante de R$ 1000,00?

Resolução: Nesse caso conhecemos o valor do montante e precisamos encontrar o valor do capital que deve ser aplicado para se obter esse montante. A taxa e o tempo já estão equiparados na mesma unidade (mês). Assim,

$$M = C \cdot (1+i)^n$$

Substituindo os valores

$$1000 = C \cdot (1+0{,}02)^5$$

Isolando o valor de C

$$\frac{1000}{(1{,}02)^5} = C$$

Obtemos C = 905,73

Chegamos na expressão $\frac{1000}{(1{,}02)^5}$. Utilizando uma calculadora científica temos:

1000	:	(	1,02	^	5	)	=

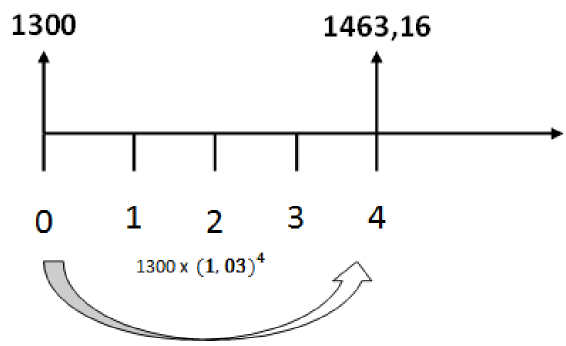
Obtemos na calculadora o resultado 905,7308098 e arredondamos para duas casas após a vírgula ficando com o resultado R$ 905,73, ou seja, para chegar num montante de R$ 1000,00 numa aplicação à juros compostos a taxa de 2% a.m. durante 5 meses devemos investir um capital de R$ 905,73.

De acordo com (LIMA; et al. 2006, p. 47) "No fundo, só há um único problema de Matemática Financeira: deslocar quantias no tempo".

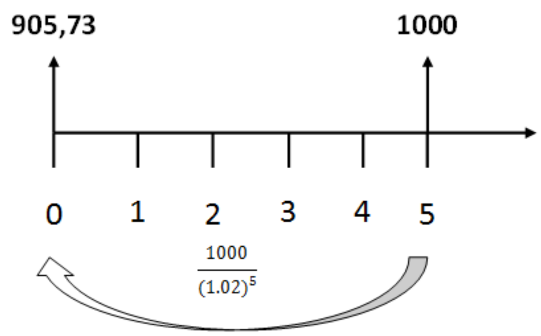
Uma outra forma de visualizar a fórmula do montante $M = C \cdot (1+i)^n$, é que uma quantia hoje igual a C, irá se transformar, depois de *n* períodos de tempo, em uma quantia igual a $C \cdot (1+i)^n$. Isto é, uma quantia que tinha o valor atual que chamaremos de (VA), equivalerá no futuro, depois de n períodos de tempo, a um valor futuro que chamaremos de (VF) calculado por $VF = VA \cdot (1+i)^n$.

Segundo (LIMA; et al. 2006, p. 47) “Essa é a fórmula fundamental da equivalência de capitais: Para obter um valor futuro, basta multiplicar o atual por $(1+i)^n$. Para obter o valor atual, basta dividir o valor futuro por $(1+i)^n$ ”. Observamos esse fato nos dois exemplos anteriores.

No primeiro problema tínhamos o valor de um capital inicial (C = 1300), uma taxa (i = 3% a.m.) aplicada por (n = 4 meses) e aplicando a fórmula do montante, nós transportamos os R$ 1300,00 para o futuro (4 meses à frente) encontrando a quantia de R$ 1463,16, ou seja, se aplicarmos R$ 1300,00 hoje à uma taxa de 3% a.m. depois de 4 meses teremos a quantia de R$ 1463,16.



No segundo problema tínhamos o valor do montante (M = 1000), uma taxa (i = 2% a.m.) aplicada por (n = 5 meses) e aplicando a fórmula do montante, nós transportamos os R$ 1000,00 que estava 5 meses à frente para o presente, encontrando a quantia de R$ 905,73, ou seja, para obter R$ 1000,00 depois de cinco meses à taxa de 2% a.m. é necessário aplicar R$ 905,73.



Exemplo 17: Consideremos um investimento de R$ 3000,00 a juros compostos de 1% a.m. (ao mês). De quanto serão os juros obtidos após 12 meses?

Resolução: Para obtermos os juros é fácil perceber que podemos calcular o montante como fizemos no exemplo 1 e depois efetuarmos a diferença entre o montante e o capital inicial. Generalizando temos: J = M – C. Porém, nesse caso vamos buscar deduzir uma fórmula para a obtenção dos juros direto. Para isso, vamos partir da expressão J = M – C. Como sabemos que o montante é obtido por M = C . $(1+i)^n$ ficamos então com:

$$J = M - C = C \,.\, (1+i)^n - C = C \,.\, [\,(1+i)^n - 1]$$

Portanto, para efetuar o cálculo direto dos juros, podemos utilizar a expressão

$$J = C \,.\, [\,(1+i)^n - 1].$$

Substituindo os valores do problema temos:

$$J = C \,.\, [\,(1+i)^n - 1] = 3000 \,.\, [\,(1+0{,}01)^{12} - 1] = 3000 \,.\, [\,(1{,}01)^{12} - 1] = 380{,}47$$

Na calculadora científica calculamos a exponencial $(1{,}01)^{12}$, subtraímos 1 e depois multiplicamos por 3000. Assim,

1,01	^	12	-	1	=	x	3000	=

Obtemos na calculadora o resultado 380,4750904, arredondamos para duas casas após a vírgula, ou seja, R$ 380,47 de juros.

Embora tenhamos deduzido a fórmula para o cálculo dos juros compostos direto, vamos evitar o uso excessivo da aplicação e “decoreba” de fórmulas destacando que o simples fato de se entender que o cálculo do montante pode ser obtido multiplicando-se por $(1+i)^n$ é suficiente para se resolver tal problema.

Quando se trata de situações em que se envolvem juros compostos podemos perguntar ainda:

- Qual foi a taxa de juros de uma aplicação?
- Por quanto tempo um capital deve ficar aplicado para produzir um determinado montante?

Os dois exemplos a seguir mostram situações como essas.

Exemplo 18: Um capital de R$ 4200,00 foi aplicado a juro composto, durante 4 meses resultando num montante de R$ 4617,95. Calcule a taxa de juro composto da operação.

Resolução: Como conhecemos o valor do capital (C) de R$ 4200,00, o montante (M) de R$ 4617,95, o período (n) de aplicação igual a 4 meses e precisamos encontrar a taxa de aplicação. Assim, M = C . $(1+i)^n$. Substituindo os valores do problema teremos

$$4617{,}95 = 4200 \;.\; (1+i)^4$$

Assim,

$$\frac{4617{,}95}{4200} = (1+i)^4$$

Efetuando a divisão $\frac{4617{,}95}{4200}$, encontramos o resultado 1,099511905. Vamos considerar todas as casas para que o resultado não fique comprometido, ficando com a seguinte expressão:

$$1{,}099511905 = (1+i)^4$$

Para resolver essa situação usamos o recurso de aplicar a raiz quarta de ambos os lados da equação, ou seja,

$$\sqrt[4]{1{,}099511905} = \sqrt[4]{(1+i)^4}$$

Simplificando o lado direito temos que $\sqrt[4]{(1+i)^4}$ = (1 + i). Logo,

$$\sqrt[4]{1{,}099511905} = (1 + i)$$

Para resolver a raiz quarta do lado esquerdo usamos a calculadora científica da seguinte forma:

1,099511905	$\sqrt[x]{\square}$	4	=

Obtemos o número 1,024000064. Assim, 1,024000064 = 1 + i, ou seja, i = 0,024000064. Multiplicando 0,024000064 por 100, pois queremos a taxa em porcentagem encontramos 2,4000064, isto é 2,4% que fica indicado ao mês por termos trabalhado com a unidade de tempo em mês, ou seja, i = 2,4% a. m.

Exemplo 19: Por quanto tempo um capital de R$ 1000,00 deve ser aplicado a juros compostos, à taxa de 10% a.m. (ao mês) para dar um montante R$ 1610,51?

Resolução: Como conhecemos o valor do capital (C) de R$ 1000,00, o montante (M) de R$ 1610,51, a taxa que é de 10% a. m. e precisamos encontrar o tempo em que esse capital deve ficar aplicado para chegar nesse montante vamos aplicar a fórmula M = C . $(1+i)^n$. Substituindo os valores temos

$$1610{,}51 = 1000 \;.\; (1+0{,}1)^n$$

Assim,

$$\frac{1610{,}51}{1000} = (1{,}1)^n$$

Efetuamos a divisão $\frac{1610{,}51}{1000}$ e encontramos o resultado 1,61051. Novamente vamos considerar todas as casas para que o resultado não fique comprometido. Chegamos na equação exponencial

$$1{,}61051 = (1{,}1)^n$$

Para resolvê-la vamos aplicar o logaritmo decimal de ambos os lados da equação, ficando com a seguinte expressão:

$$\log 1{,}61051 = \log (1{,}1)^n$$

Do lado direito da equação aplicamos uma das propriedades dos logaritmos ficando com a expressão:

$$\log 1{,}61051 = n \cdot \log 1{,}1$$

Logo,

$$\frac{\log 1{,}61051}{\log 1{,}1} = n$$

Encontramos o valor de n usando a calculadora científica, ou seja,

1.61051	log	:	1,1	log	=

Obtemos n igual a 5, ou seja, o tempo necessário para que o capital de R$ 1000,00 gere um montante de R$ 1610,51 a uma taxa de 10% ao mês é de 5 meses. Nesse caso encontramos um período inteiro, mas poderíamos ter obtido um período de tempo não inteiro. Veremos casos como esse mais adiante.

Exemplo 20: Um capital de R$ 1500,00 é aplicado a juros compostos, à taxa de 2% a.m. (ao mês). Qual o montante se o prazo de aplicação for de 2 anos?

Resolução: Nesse caso observamos que o tempo que é de 2 anos e não está na mesma unidade da taxa, que é de 2% ao mês. Assim, devemos equipará-las, sendo mais conveniente passar os dois anos para meses, ou seja, 24 meses. Resolvemos o problema, aplicando a fórmula M = C . $(1+i)^n$ e substituindo os valores do problema temos

$$M = 1500 \cdot (1+0{,}02)^{24} = 1500 \cdot (1{,}02)^{24} = 2412{,}66$$

Para calcularmos $(1{,}02)^{24}$ usamos uma calculadora cientifica. Assim, 1,02 ^ 24 =

Obtemos o número 1,608437249 que em seguida é multiplicado por 1500 tendo como resultado 2412,655874, arredondando para duas casas depois da vírgula, pois estamos trabalhando com dinheiro adotamos o resultado em reais de R$ 2412,66.

Exemplo 21: Aqui vamos trazer um exemplo proposto por Morgado; Wagner e Zani (2001, p. 57): “Qual é o montante de um principal de R$ 520,00, a juros de 6% ao mês, em 3 meses e 10 dias?”. De acordo com os autores existem três modos possíveis de fazer tal cálculo, o primeiro é **quando nos pagam juros**, o segundo é usando a chamada **convenção exponencial** e a terceira é aplicando-se a chamada **convenção linear**.

1º caso: **Quando nos pagam juros**

> Quando nos pagam juros, é claro que só se levam em conta os 3 meses – afinal, foram combinados juros ao mês, não ao dia! Por exemplo, é o que acontece quando retiramos antes do prazo um capital investido” (MORGADO; WAGNER; ZANI, 2001, p. 57).

Dessa forma, o cálculo é feito levando-se em conta apenas os 3 meses. Aplicando a fórmula M = C . $(1+i)^n$ e substituindo os valores do problema temos

$$M = 520 \cdot (1+0{,}06)^3 = 520 \cdot (1{,}06)^3 = 619{,}33$$

2º caso: **Convenção exponencial**

Nessa convenção consideramos os juros compostos durante todo o período, inclusive no período não inteiro. Assim,

$$M = C \cdot (1+i)^n = 520 \cdot (1+0{,}06)^{3+10/30} = 520 \cdot (1{,}06)^{10/3} = 631{,}47$$

Observamos que para o período não inteiro de 10 dias, temos de indicá-lo na mesma unidade em que a taxa se apresenta, ou seja, em “mês”. Para isso consideramos o mês comercial de 30 dias, por isso indicamos a fração $\frac{10}{30}$. Se precisássemos colocar em ano aplicaríamos o ano comercial com 12 meses de 30 dias que dá 360 dias.

<u>3º caso</u>: **Convenção linear**

Nessa convenção aplicamos os juros compostos durante os 3 meses (períodos inteiros) e juros simples durante os 10 dias (períodos não inteiros), dividindo o cálculo em duas etapas.

- 1ª etapa:

$$M = C \,.\, (1+i)^n = 520 \,.\, (1+0{,}06)^3 = 520 \,.\, (1{,}06)^3 = 619{,}33$$

- 2ª etapa: Nessa etapa o capital inicial que era de R$ 520,00 já se transformou em R$ 619,33 depois de três meses e agora sobre esse montante serão calculados juros simples de 6% a.m. durante 10 dias, ficando o cálculo assim:

$$J = 619{,}33 \,.\, 0{,}06 \,.\, \frac{10}{30} = 619{,}33 \,.\, 0{,}06 \,.\, \frac{1}{3} = 12{,}39$$

Por fim, temos que o montante acumulado, de acordo com essa convenção, é de:

$$M = 619{,}33 + 12{,}39 = 631{,}72$$

No primeiro caso, o que Morgado chama de “Quando nos pagam juros” fica evidente que se o período não inteiro é descartado essa então é a situação em que o montante terá o menor valor. O montante foi de R$ 619,33 e é exatamente dessa forma que as instituições financeiras calculam o seu montante quando você faz uma retirada de uma aplicação antes de completar o período.

Percebemos que no segundo caso, o da convenção exponencial, que leva em conta juros compostos em todo o período, o montante gerado foi de R$ 631,47, enquanto que no terceiro caso, o da convenção linear, que leva em conta juros compostos para os períodos inteiros e juros simples para o período não inteiro o montante gerado foi ligeiramente maior, chegando a R$ 631,72. Isso ocorre pelo fato já destacado que para um período de tempo menor que uma unidade o juro simples gera um montante maior que o juro composto.

De acordo com Castanheira; Macedo (2010, p. 63) “... no dia a dia do mundo financeiro, costuma-se utilizar a convenção linear” obviamente por ser mais danoso a quem paga os juros e por gerar maior lucro a instituição financeira e por isso é indicado também por Morgado como sendo a convenção aplicada “quando nos cobram juros”.

3.6. Taxas equivalentes no regime de juros compostos

De acordo com Morgado; Cesar (2006, p. 47) “taxas equivalentes: são taxas efetivas, referidas a períodos de tempo diferentes, que quando aplicadas a um mesmo capital, pelo mesmo prazo, geram o mesmo montante”.

As taxas efetivas surgem pelo fato de existir a possibilidade da taxa ser dada em um período de tempo diferente do período de capitalização. Nesse caso, a taxa é dita nominal e pode muitas vezes ser enganosa. Vamos discutir este fato através de um exemplo.

Exemplo 22: Seja uma taxa anunciada como 24% ao ano capitalizados mensalmente, temos que se a capitalização é mensal, então a taxa de 24% a.a. é a taxa nominal, que nesse caso, trabalhando com a proporcionalidade, temos uma taxa efetiva de $\frac{24}{12}$ = 2% ao mês. Se quisermos saber a taxa efetiva no prazo de um ano teremos então de encontrar a taxa anual que é equivalente a taxa mensal de 2% a.m.

Observamos que muitas pessoas afirmariam imediatamente que a taxa efetiva anual seria de 24%. Para que duas taxas sejam consideradas equivalentes estas devem gerar o mesmo montante quando aplicadas a um mesmo capital, pelo mesmo prazo. Teríamos desta maneira, para um capital C = 100 aplicado a uma taxa de 2% a.m. durante 12 meses deveria produzir o mesmo montante que o capital C = 100 aplicado a uma taxa de 24% a.a. durante um ano. Vamos verificar estas duas situações:

1. C = 100, taxa de juros 2% a.m. durante 12 meses:

$$M = C \cdot (1+i)^n = 100 \cdot (1+0{,}02)^{12} = 100 \cdot (1{,}02)^{12} = 126{,}82$$

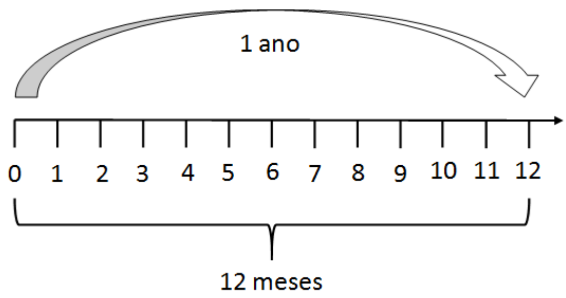
2. C = 100, taxa de juros 24% a.a. durante 1 ano

$$M = C \cdot (1+i)^n = 100 \cdot (1+0{,}24)^{1} = 100 \cdot 1{,}24 = 124$$

Percebemos que os montantes gerados foram diferentes. Logo, 2% a.m. não são equivalentes a 24% a.a.. Qual será então a taxa efetiva anual? A taxa efetiva pode ser encontrada por meio da relação:

$$1 + I = (1+i)^n \ .$$

Sendo que i e I são as taxas equivalentes, com e i (taxa referida ao período de tempo mais curto), I (taxa referida ao período de tempo mais longo) e n (número de períodos que i está capitalizada em I). Para esse exemplo esquematicamente temos:



Assim,

$$1 + I = (1+i)^n = (1+0{,}02)^{12}$$

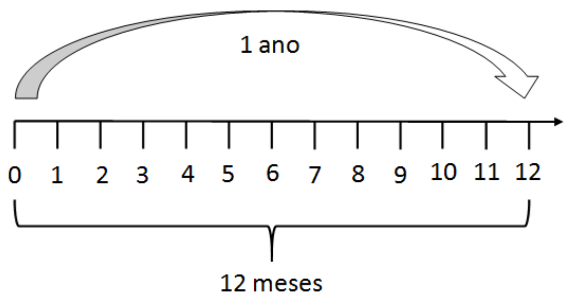
Logo,

$$I = (1{,}02)^{12} - 1 = 0{,}2682 = 26{,}82\%$$

Portanto a taxa anual equivalente a taxa de 2% a.m. é de 26,82%.

Exemplo 23: Transforme a taxa de juros de 3% ao mês capitalizada mensalmente em taxa nominal anual e taxa efetiva anual.

Resolução: A taxa nominal anual é calculada aplicando-se apenas a proporcionalidade e pode ser chamada também de taxa proporcional, assim 12 x 3 = 36% a.a. A taxa efetiva anual é calculada pela equivalência de taxas, esquematicamente temos:



Resolvendo:

$$1 + I = (1+i)^n = (1+0{,}03)^{12}$$

Assim,

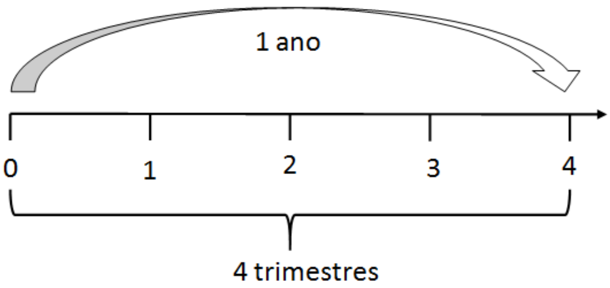
$$I = (1{,}03)^{12} - 1 = 0{,}4258$$

Logo, I = 42,58 % a.a.

Exemplo 24: Qual a taxa trimestral equivalente a 15% a.a.

Resolução: Vamos aplicar a equivalência de taxas, para isso é necessário destacar que se queremos a taxa trimestral equivalente a taxa anual então devemos calcular quantos trimestres tem um ano, ou seja, (12 / 3 = 4) 4 trimestres.

Esquematicamente temos:



Resolvendo:

$$1 + 0{,}15 = (1+i)^4 \ .$$

Assim,

$$\sqrt[4]{1{,}15} = \sqrt[4]{(1+i)^4} \ .$$

Logo,

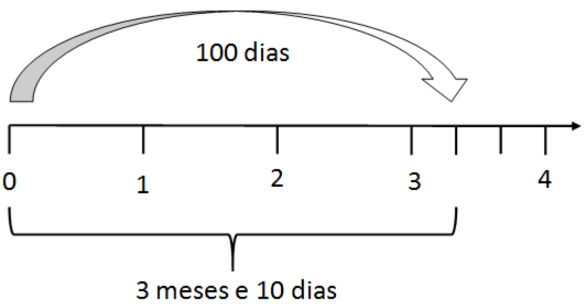
$$\sqrt[4]{1{,}15} - 1 = i \ .$$

Chegamos ao valor i = 0,0356 que corresponde à 3,56% ao trimestre. Portanto, I = 42,58 % a.a.

Exemplo 25: Qual a taxa em 3 meses e 10 dias equivalente a 6% a.m.?

Resolução: Nesse caso temos um período não inteiro (3 meses e 10 dias) que podemos representar por $\frac{100}{30}$ meses, que simplificando fica $\frac{10}{3}$.

Esquematicamente temos:



Resolvendo:

$$1 + I = (1+i)^n$$

$$1 + I = (1+0,06)^{\frac{10}{3}}$$

$$I = (1,06)^{\frac{10}{3}} - 1$$

$$I = 0,2144$$

$$I = 21,44\ \%\ .$$

Portanto a taxa de juros de 6% a.m. é equivalente a taxa de 21,44% em 3 meses e 10 dias.

3.7. Valor atual de um conjunto de capitais no regime de juros compostos

Sabemos que o regime de juros compostos é o aplicado na vida real e que a fórmula para se calcular o montante nesse regime de juros é M = C . $(1+i)^n$. Essa fórmula pode ser interpretada como sendo a fórmula da equivalência de capitais, ou seja, para transportar um valor atual para o futuro multiplicamos por $(1+i)^n$. Para trazermos um valor do futuro para o tempo atual dividimos por $(1+i)^n$.

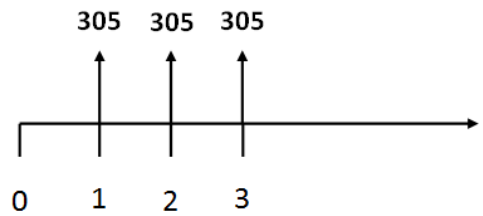
O entendimento da equivalência de capitais pode ser crucial na tomada de decisão ao efetuarmos uma compra. O pagamento pode ser feito de várias formas distintas, cabendo ao comprador escolher a mais vantajosa para si. Consideremos os exemplos a seguir:

Exemplo 26: Uma TV é vendida por R$ 900,00 à vista ou a prazo em 3 prestações mensais de R$ 305,00 cada uma. A primeira prestação vence um mês após a compra. Qual a melhor alternativa de pagamento para um comprador que aplica seu dinheiro a juros compostos, a uma taxa de 0,57% a. m.?

Resolução: Nesse caso fica claro que se a opção de pagamento for a do pagamento à vista, então o comprador deverá desembolsar no ato da compra R$ 900,00. Por outro lado se a forma de pagamento escolhida for a do pagamento a prazo, então o comprador deverá desembolsar 3 parcelas de R$ 305,00. É claro que essas parcelas só serão desembolsadas nas épocas que chamaremos de época 1 (um mês após a compra), época 2 (dois meses após a compra) e época 3 (três meses após a compra). Dessa forma, se o comprador pode investir o seu dinheiro a uma taxa de 0,57% a.m. (que é a taxa média da poupança em 2014 de acordo com o Banco Central) então para avaliar essa situação as parcelas que estão respectivamente nas épocas 1, 2 e 3 deverão ser comparadas na época 0 (data focal 0), pois dessa forma temos a comparação das parcelas no seu valor atual, assim:

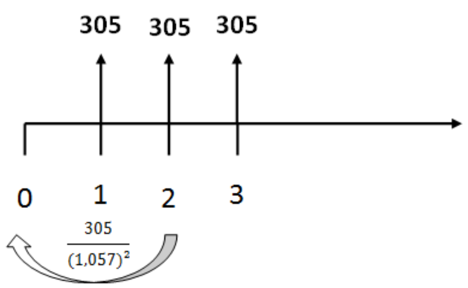
<u>Pagamento à vista</u>: R$900,00

<u>Pagamento a prazo</u>: Vamos trazer o valor das parcelas para a data focal 0.

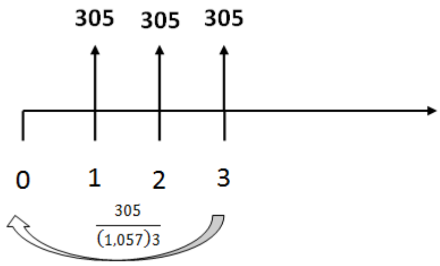


- 1ª Parcela: Na data focal 0, temos o valor de R$ 303,27 arredondando o resultado para duas casas após a vírgula, para chegar nesse valor fazemos $\frac{305}{1{,}0057}$.

- 2ª Parcela: Na data focal 0, temos o valor de R$ 301,56 arredondando o resultado para duas casas após a vírgula, para chegar nesse valor fazemos $\frac{305}{(1{,}0057)^2}$.



- 3ª Parcela: Na data focal 0, temos o valor de R$ 299,84 arredondando o resultado para duas casas após a vírgula, para chegar nesse valor fazemos $\dfrac{305}{(1{,}0057)^3}$.



Resumimos o cálculo da seguinte forma:

$$VA = \frac{305}{(1+0{,}0057)} + \frac{305}{(1+0{,}0057)^2} + \frac{305}{(1+0{,}0057)^3} .$$

Ou seja,

$$VA = \frac{305}{(1{,}0057)} + \frac{305}{(1{,}0057)^2} + \frac{305}{(1{,}0057)^3} = 303{,}27 + 301{,}56 + 299{,}84 = 904{,}67 .$$

Somando as 3 parcelas na época 0 temos o chamado valor atual do conjunto de capitais, no caso as 3 parcelas de R$ 305,00 equivalem a R$ 904,67 atualmente.

Podemos perceber então que a melhor opção de pagamento é a do pagamento à vista é de R$ 900,00, pois para fazer frente aos pagamentos na compra a prazo seria necessário investir na época da compra R$ 904,67 que é um valor superior. Se esse valor fosse inferior a R$ 900,00 compensaria então fazer o investimento e comprar a prazo.

É evidente que esse tipo de comparação não teria sentido algum se o comprador não dispusesse do dinheiro para efetuar o pagamento à vista e se tivesse, ainda seria conveniente negociar, pois muitas vezes o vendedor valorizando o pagamento à vista pode considerar dar um desconto.

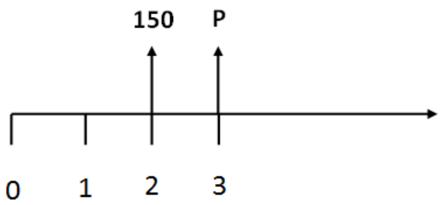
Exemplo 27:

> Geraldo tomou um empréstimo de R$ 300,00 a juros mensais de 5%. Dois meses após, Geraldo pagou R$ 150,00 e, um mês após esse pagamento, liquidou seu débito. Qual o valor desse último pagamento? (MORGADO; WAGNER; ZANI, 2001, p. 46)

Para resolver esse problema temos que comparar a soma dos pagamentos que serão realizados na época 2 (R$ 150,00) e na época 3 (P) na data focal zero, ou seja, na época em que o empréstimo foi concedido. Sabemos que nessa época o valor do dinheiro foi de R$ 300,00 considerando uma taxa de juros de 5% a.m. Podemos então representá-los pelo seguinte esquema:

<u>Pagamento à vista</u>: R$300,00

<u>Pagamento a prazo</u>:



Igualando os valores na época na data focal 0, temos:

$$300 = \frac{150}{(1+0{,}05)^2} + \frac{P}{(1+0{,}05)^3} = \frac{150}{(1{,}05)^2} + \frac{P}{(1{,}05)^3} \ .$$

Percebemos que se 150 está no tempo 2 então dividimos este valor por $(1{,}05)^2$ para trazermos para a data focal 0. Se P está na época 3 para trazermos este valor para a data focal 0 dividimos por $(1{,}05)^3$.

Resolvendo essa equação encontramos para P o valor 189,7875, que arredondando para duas casas após a vírgula dá R$ 189,79 que representa o valor que deverá ser pago na época 3.

Exemplo 28: Uma loja apresenta a seus clientes a seguinte opção para pagamentos:

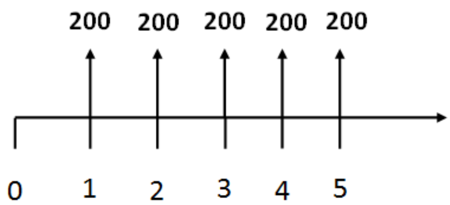
- 1ª opção: Pagamento à vista com 10% de desconto.
- 2ª opção: Pagamento em 5 x sem juros com vencimento para um mês após a compra.

Supomos que na compra de alguns produtos o valor total da compra é de R$ 1000,00. Qual seria a melhor opção de compra?

Resolução: Se o comprador dispõe do dinheiro para o pagamento à vista e opta por fazê-lo então fica claro que ele terá um desconto no ato da compra de 10% sobre o valor de R$ 1000,00, ou seja, o desconto será de R$ 100,00. O comprador desembolsará então R$ 900,00 (1000 – 100).

Se o comprador não dispõe do dinheiro para a compra à vista então ele deverá desembolsar 5 parcelas de R$ 200,00 cada uma, totalizando o pagamento dos R$ 1000,00. No entanto, se o comprador dispõe de recursos é mais vantajoso para ele pagar à vista ou investir o seu dinheiro a uma taxa de 1% a.m.?

Nesse caso devemos saber quanto é necessário investir a taxa de 1% a.m. na época da compra (data focal 0), para que o comprador possa fazer frente ao pagamento das prestações, cada prestação no valor de R$ 200,00 sendo a primeira parcela paga um mês após a data da compra. Inicialmente temos que transportar as parcelas a serem pagas nas épocas 1, 2, 3, 4 e 5 para a data focal 0 e descobrirmos qual o valor atual desse conjunto de capitais. Assim,



$$VA = \frac{200}{(1+0{,}01)} + \frac{200}{(1+0{,}01)^2} + \frac{200}{(1+0{,}01)^3} + \frac{200}{(1+0{,}01)^4} + \frac{200}{(1+0{,}01)^5} \ .$$

Ou seja,

$$VA = \frac{200}{(1{,}01)} + \frac{200}{(1{,}01)^2} + \frac{200}{(1{,}01)^3} + \frac{200}{(1{,}01)^4} + \frac{200}{(1{,}01)^5} \ .$$

Logo,

$$VA = 198{,}02 + 196{,}06 + 194{,}12 + 192{,}20 + 190{,}29 = 970{,}69 \ .$$

Percebemos que se o conjunto de capitais somados na data focal 0 equivale a R$ 970,69 então a compra parcelada com o investimento a taxa de 1% a.m. não é a melhor opção, afinal é melhor pagarmos R$ 900,00 do que R$ 970,69.

Em geral de acordo com o mercado financeiro quando se tem o dinheiro para o pagamento à vista o seu poder de negociação é maior, mas sempre vale a pena pesquisar, negociar e avaliar antes de fechar qualquer negócio.

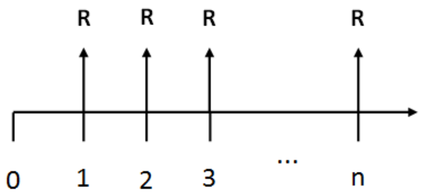
Nos três últimos exemplos percebemos que sempre que tivermos um conjunto de capitais referidos em datas distintas podemos calcular o seu valor atual trazendo todos os capitais para a data focal 0 e efetuarmos a sua soma. No exemplo 2 trabalhamos com dois capitais em datas distintas e que tinham valores diferentes, porém nos exemplos 1 e 3 trabalhamos com capitais que se referiam a datas distintas, mas que tinham valores iguais nessas diferentes datas. Como os períodos eram equidistantes, esses dois casos podem ser interpretados também como sendo uma sequência uniforme. Trataremos esta situação na próxima seção.

3.8. Sequência uniforme de pagamentos

De acordo com Iezzi; Hazzan; Degensajn (2004, p.68)

> Se considerarmos um valor financiado V que deve ser pago em prestações iguais de valor R nas datas 1, 2, 3, ..., n e que a taxa de juros compostos cobrada no financiamento seja i por período de tempo. Chamamos esse conjunto de Sequência uniforme de pagamentos

Nos exemplos 1 e 3 trabalhamos com capitais que seguiam o padrão apresentado na definição acima como sendo uma sequência uniforme de pagamentos. Para determinarmos o valor atual de uma sequência uniforme de pagamentos, devemos fazer com que o valor das prestações de valor R sejam trazidas para a data focal 0, ficando com a seguinte representação:



$$V = \frac{R}{(1+i)^1}+\frac{R}{(1+i)^2}+\frac{R}{(1+i)^3}+\dots+\frac{R}{(1+i)^n} \quad .$$

Se considerarmos $\frac{R}{(1+i)^1},\frac{R}{(1+i)^2},\frac{R}{(1+i)^3},\dots,\frac{R}{(1+i)^n}$ como sendo uma sequência, então teremos que essa é uma progressão geométrica com primeiro termo a_1 = $\frac{R}{(1+i)}$ e razão q = $\frac{1}{(1+i)}$. Da Matemática Elementar sabemos que a soma dos termos de uma P.G. finita é dada por S = $\frac{a_1.(q^n-1)}{(q-1)}$. Podemos então encontrar uma regra para o cálculo dessa sequência uniforme, ou seja,

$$V = \frac{\frac{R}{(1+i)} \cdot \left[\frac{1}{(1+i)^n} - 1\right]}{\frac{1}{(1+i)} - 1} = R \,.\, \frac{\frac{1}{(1+i)} \cdot \left[\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}\right]}{\frac{1-(1+i)}{(1+i)}} = R \,.\, \frac{\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}\right]}{i} \,.$$

Logo,

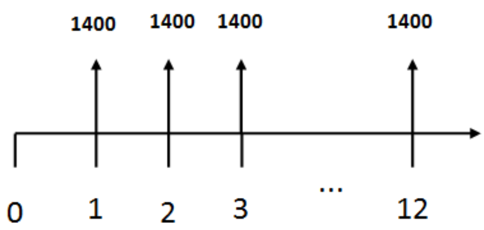
$$V = R \,.\, \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \,.\, i} \,.$$

Essa fórmula relaciona o valor atual com a prestação, taxa de juros e número de prestações de uma sequência uniforme de pagamentos.

Exemplo 29:

> Um banco concedeu um empréstimo para uma pessoa adquirir um carro. O pagamento deveria ser feito em 12 prestações mensais de R$ 1400,00 cada uma, sem entrada. Qual o valor do empréstimo sabendo-se que a taxa de juros compostos cobrada pelo banco foi de 3% a.m.? (IEZZI; HAZZAN; DEGENSAJN. 2004, p. 69)

Resolução: Podemos representar esse problema no esquema a seguir:



Observamos que essa é uma situação em que se evidencia uma sequência uniforme de pagamentos, onde os pagamentos são iguais a R$ 1400,00 mensais durante 12 meses. Precisamos descobrir a soma do valor atual dessas prestações, ou seja, o valor do empréstimo na data em que ele foi concedido. Aplicamos a fórmula

$$V = R \,.\, \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \,.\, i} \,.$$

Substituindo os valores do exemplo temos:

$$V = 1400 \,.\, \frac{(1+0{,}03)^{12} - 1}{(1+0{,}03)^{12} \,.\, 0{,}03} = 13935{,}61 \,.$$

Portanto, o valor do empréstimo foi de R$ 13935,61.

Exemplo 30:

> Uma loja vende uma televisão por R$ 1200,00 à vista ou financia essa quantia em 5 prestações mensais iguais sem entrada. Qual o valor de cada prestação se a taxa de juros compostos cobrada for de 2,5% a.m.? (IEZZI; HAZZAN; DEGENSAJN. 2004, p. 70)

Resolução: Aplicamos novamente a fórmula

$$V = R \,.\, \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n . i} \,.$$

Substituindo os valores do exemplo temos:

$$1200 = R \,.\, \frac{(1+0{,}025)^5 - 1}{(1+0{,}025)^5 . 0{,}025} \,,$$

ou seja,

$$1200 = R \,.\, 4{,}6458 \,.$$

Resolvendo obtemos R = 258,30. Portanto, o valor de cada prestação será de R$ 258,30.

Exemplo 31:

> Qual será o valor de cada prestação do exemplo anterior se a loja cobrar uma entrada de R$ 300,00? (IEZZI; HAZZAN; DEGENSAJN. 2004, p. 70)

Resolução: Como o valor da entrada é desembolsado no ato da compra, temos que subtraí-lo do valor da TV (1200 – 300 = 900) e considerarmos o valor financiado de R$ 900,00. Aplicando a regra temos:

$$V = R \,.\, \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n . i} \,.$$

Substituindo os valores do exemplo temos:

$$900 = R \,.\, \frac{(1+0{,}025)^5 - 1}{(1+0{,}025)^5 . 0{,}025} \,,$$

ou seja,

$$900 = R \,.\, 4{,}6458 \,.$$

Resolvendo obtemos R = 193,72. Nesse caso, além da entrada de R$ 300,00, o comprador irá desembolsar 5 parcelas de R$ 193,72.

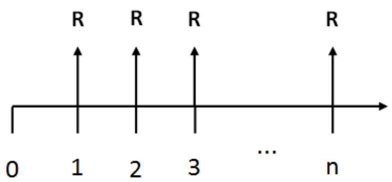
É importante destacarmos que essa definição para sequência uniforme de pagamentos é limitada para situações em que os capitais ou rendas (como também costumam ser chamadas) aparecem a partir da data um, ou seja, só aparecem depois da decorrência de um período da compra, nesse caso pode ser chamada de sequência uniforme postecipada (quando o primeiro capital é referido ao final do primeiro período). Se o primeiro termo fosse referido a data zero, então ela seria dita antecipada.

3.9. Montante de uma sequência uniforme de pagamentos

De acordo com Iezzi; Hazzan; Degensajn (2004, p.72)

> Se considerarmos n depósitos mensais iguais a R, nas datas 1, 2, 3, ..., n, rendendo juros compostos, a uma taxa i mensal. Queremos saber qual a soma M dos montantes desses depósitos na data n (isto é logo após ter sido feito o último depósito).

Esquematicamente temos:



Seja, M_k o montante do k – ésimo depósito na data n. Sabemos que $M_k = R \,.\, (1+i)^{n-k}$ para k = 1, 2, ..., n. O montante final será a soma dos montantes de cada depósito, ou seja,

$$M = R \,.\, (1+i)^{n-1} + R \,.\, (1+i)^{n-2} + R \,.\, (1+i)^{n-3} + \ldots + R \,.$$

Os termos do 2º membro dessa expressão constituem uma progressão geométrica cuja razão vale $q = \frac{1}{(1+i)}$ e cujo 1º termo é $a_1 = R \,.\, (1+i)^{n-1}$.

Ao aplicarmos a fórmula da soma dos termos da progressão geométrica finita, temos:

$$M = \frac{R.(1+i)^{n-1}.\left[\frac{1}{(1+i)^n}-1\right]}{\frac{1}{(1+i)}-1} = R \,.\, \frac{\frac{1}{(1+i)}-(1+i)^{n-1}}{\frac{-i}{(1+i)}} = R \,.\, \frac{\left[\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)}\right]}{\frac{-i}{(1+i)}} \,.$$

Portanto,

$$M = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} .$$

Essa fórmula relaciona o montante de uma sequência uniforme de depósitos.

Exemplo 32:

> Uma pessoa deposita mensalmente R$ 600,00 num fundo que rende juros compostos, à taxa de 1,5% a.m. Qual será seu montante no instante imediatamente após o 30º depósito? (IEZZI; HAZZAN; DEGENSAJN. 2004, p. 74)

Resolução: Aplicamos a fórmula

$$M = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} .$$

Substituindo os valores do exemplo:

$$M = 600 \cdot \frac{(1+0{,}015)^{30} - 1}{0{,}015} ,$$

ou seja, M = 600 . 37,53868. Resolvendo obtemos M = 22523,21. O montante imediatamente depois do 30º depósito será de R$ 22523,21.

Exemplo 33:

> Quanto uma pessoa deverá depositar num fundo que rende juros compostos, à taxa de 1,2% a.m., para ter um montante de R$ 30000,00 no instante após o último depósito? Considerando que serão feitos 40 depósitos. (IEZZI; HAZZAN; DEGENSAJN. 2004, p. 74)

Resolução: Aplicamos a fórmula

$$M = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} .$$

Substituindo os valores do exemplo:

$$30000 = R \cdot \frac{(1+0{,}012)^{40} - 1}{0{,}012} ,$$

ou seja, 30000 = R . 50,9553. Resolvendo obtemos R = 588,75. Assim, para ter um montante de R$ 30000,00 depois de 40 depósitos à uma taxa de 1,2% a.m., ele deverá depositar mensalmente R$ 588,75.

3.10. Sistemas de Amortização

De acordo com Castanheira; Macedo (2014, p.164)

> Ao tomarmos um capital emprestado ou fazermos um financiamento, poderemos devolver esse capital ou valor do financiamento em parcelas ou em pagamento único. Nos dois casos, amortizar significa devolver o capital que se tomou emprestado. No Brasil, temos mais de uma forma de realizar essa amortização. Temos assim, os chamados Sistemas de Amortização.

De acordo com Morgado; Wagner; Zani (2001, p.59)

> Os sistemas usuais de amortização são o sistema de amortização constante (SAC) e o sistema francês de amortização, também chamado de Tabela Price (Richard Price foi um economista inglês). No sistema francês, a prestação é constante.

Como vimos **amortizar** é devolver o capital que se tomou emprestado e para o nosso trabalho daremos ênfase aos sistemas de amortização francês (SAF) e constante (SAC) como os sistemas usuais. É importante estabelecermos a forma como serão abordados: os juros (J) serão calculados sempre sobre o saldo devedor (Sd) e as prestações (P) serão sempre, a soma de duas parcelas: a parcela correspondente à amortização (A) e a parcela correspondente aos juros cobrados. Trabalharemos com tabelas assim indicadas:

Período **n**	**Prestação** **P**	**Juros** **J**	**Amortização** **A**	**Saldo devedor** **Sd**

3.10.1. Sistema de Amortização Francês (SAF)

De acordo com Hazzan; Pompeo (2005, p. 146)

> Tal sistema se desenvolveu na França no século XIX, porém foi concebido pelo matemático inglês Richard Price, no século XVIII (daí a denominação Sistema Price, ou Tabela Price, como é comumente chamado). Nesse sistema as prestações são iguais e consecutivas (a partir do instante em que começam a ser pagas as amortizações) (HAZZAN; POMPEO. 2005, p. 146).

Exemplo 34: Considerando um financiamento de R$ 3000,00 que deverá ser pago em 3 parcelas (a primeira parcela após um mês), seguindo o sistema de amortização francês ou tabela Price, à uma taxa de 5% a.m., construa a tabela que mostre a amortização da dívida.

Resolução: O sistema de amortização francês considera as parcelas com valores iguais. Temos então uma sequência uniforme de pagamentos e para encontrarmos o valor das parcelas vamos aplicar a fórmula que relaciona o valor atual com a prestação nesse tipo de situação, ou seja,

$$V = R \, . \quad \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n . \, i} \quad .$$

Substituindo os valores do exemplo temos:

$$3000 = R \, . \quad \frac{(1+0{,}05)^3 - 1}{(1+0{,}05)^3 . \, 0{,}05} \quad ,$$

ou seja, 3000 = R . 2,723248. Resolvendo obtemos R = 1101,63.

Sabemos que o pagamento da dívida será efetuado em 3 parcelas de R$ 1101,63 sendo a primeira parcela paga um mês após a compra. A tabela 1 de amortização será dada por:

Tabela 1 - Tabela de amortização Exemplo 34.

Período	**Prestação**	**Juros**	**Amortização**	**Saldo devedor**
0	-	-	-	3000
1	1101,63	150	951,63	2048,37
2	1101,63	102,42	999,21	1049,16
3	1101,63	52,46	1049,16	0
Total	3304,89	304,88	3000	0

Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Observamos que nesse sistema de amortização o valor das prestações são fixas e é composta pela soma da amortização com os juros no período. Os juros no período são calculados pela taxa do empréstimo ou financiamento sempre sobre o saldo devedor do período anterior e esse saldo devedor vai diminuindo a medida que a dívida vai sendo amortizada até que o saldo seja zerado.

3.10.2. Sistema de Amortização Constante (SAC)

De acordo com Hazzan; Pompeo (2005, p. 143)

> Entre as inúmeras maneiras que existem para se amortizar o principal, o sistema de amortizações constantes é bastante utilizado na prática. Tal sistema consiste em se fazer com que todas as parcelas de amortização sejam iguais.

Exemplo 35: Considerando um financiamento de R$ 3000,00 que deverá ser pago em 3 parcelas (a primeira parcela após um mês), seguindo o sistema de amortização constante, à uma taxa de 5% a.m., construa a tabela que mostre a amortização da dívida.
Resolução: Observamos que se o saldo devedor na data da compra é de R$ 3000,00, que serão pagos em 3 parcelas e se o sistema de amortização considera amortizações constantes, temos que a amortização em cada mês será de R$ 1000,00. (3000 dividido por 3). Devemos então calcular os juros mês a mês para compor o valor da prestação. Temos a tabela dada por:

Tabela 2 - Tabela de amortização Exemplo 35

Período	Prestação	Juros	Amortização	Saldo devedor
0	-	-	-	3000
1	1150	150	1000	2000
2	1100	100	1000	1000
3	1050	50	1000	0
Total	3300	300	3000	0

Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Nesse sistema de amortização, a amortização é constante e os juros são calculados período a período aplicando a taxa do financiamento ou empréstimo sobre o saldo devedor do período anterior. O valor da prestação é obtida somando-se a amortização do período com os respectivos juros. Observamos que nesse caso as prestações são decrescentes.

4. A PROPOSTA METODOLÓGICA DE ENSINO

Nesse capítulo descrevemos a nossa proposta metodológica de ensino de Matemática Financeira aplicada a uma turma do 3º ano do ensino médio da Escola Técnica Estadual Fernando Prestes na cidade de Sorocaba - SP. Organizamos essa proposta em sete etapas que identificamos como Situações de aprendizagem (de 1 a 6) e Avaliação. São elas:

1. Porcentagem, acréscimos e descontos;
2. Distinção entre capitalização simples e capitalização composta;
3. Valor futuro de um capital;
4. Financiamento com prestações fixas;
5. Sistemas de Amortização;
6. Aplicação com depósitos regulares.

4.1. A escola e a turma

A Etec “Fernando Prestes” é uma das escolas técnicas estaduais administradas pelo Centro Paula Souza, que é uma autarquia do Governo do Estado de São Paulo, vinculada à Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação (SDECTI). A autarquia administra 218 Escolas Técnicas estaduais (Etecs) e 65 Faculdades de Tecnologia (Fatecs), reunindo mais de 285 mil alunos em cursos nos ensinos Médio, Técnico, Técnico Integrado ao Médio e Superiores Tecnológicos, em mais de 300 municípios (CENTRO PAULA SOUZA, 2015).

A Etec “Fernando Prestes” conta com aproximadamente 2800 alunos matriculados no ano de 2015, desse total cerca de 600 fazem parte do Ensino Médio, que na escola é composto por:

- 4 primeiros anos regulares independentes do curso técnico e 1 primeiro ano integrado ao curso Técnico de Informática;
- 4 segundos anos independentes do curso técnico e 1 integrado ao curso Técnico de Eventos;
- 5 terceiros anos independentes do curso técnico.
- O ingresso dos alunos na escola é feito mediante processo seletivo, chamado de

“Vestibulinho”.

> O Exame do processo seletivo é constituído por uma prova com 50 (cinquenta) questões-teste, cada uma com 5 (cinco) alternativas (A, B, C, D, E), relacionadas às diferentes áreas do saber (científico, artístico e literário), à comunicação e à expressão, em diversos tipos de linguagem, abrangendo conhecimentos comuns de 5ª a 8ª série ou do 6º ao 9º ano do ensino fundamental. As questões são elaboradas por uma equipe interdisciplinar e dizem respeito a um determinado tema - ligado a situações do cotidiano, envolvendo problemáticas sociais, culturais, científicas e tecnológicas - apresentado em um texto-matriz e vários textos complementares. As questões demandam as seguintes competências e habilidades do candidato: C1 – aplicar conhecimentos desenvolvidos no ensino fundamental para a compreensão da realidade e para a resolução de problemas; C2 – interpretar diferentes tipos de textos como crônicas, poesias, charges, tabelas, gráficos, mapas, imagens e outras formas de representação; C3 – analisar criticamente argumentos apresentados nas questões; C4 – reconhecer e relacionar diferentes formas de linguagens, abordagens e técnicas de comunicação e expressão; C5 – avaliar ações e resoluções de acordo com critérios estabelecidos”(VESTIBULINHO ETEC, 2015).

No ano de 2015 a demanda no Vestibulinho para o Ensino Médio foi de 7,41, o que mostra a concorrência acirrada para o ingresso na escola. O Ensino Médio apresenta bons índices nas avaliações externas como SARESP e ENEM.

Os resultados do SARESP 2014 podem ser observados na Figura 9.

Figura 9 - Resultados comparativos do SARESP 2014 para a Etec “Fernando Prestes” (Escola).

MÉDIAS DO SARESP 2014

A partir do SARESP 2014, o desempenho dos alunos do 3º ano do Ensino Fundamental é processado pela metodologia da Teoria da Resposta ao Item e, a exemplo do que ocorre nos demais anos e séries avaliados, ancora-se na mesma escala de desempenho da Prova Brasil/Saeb.

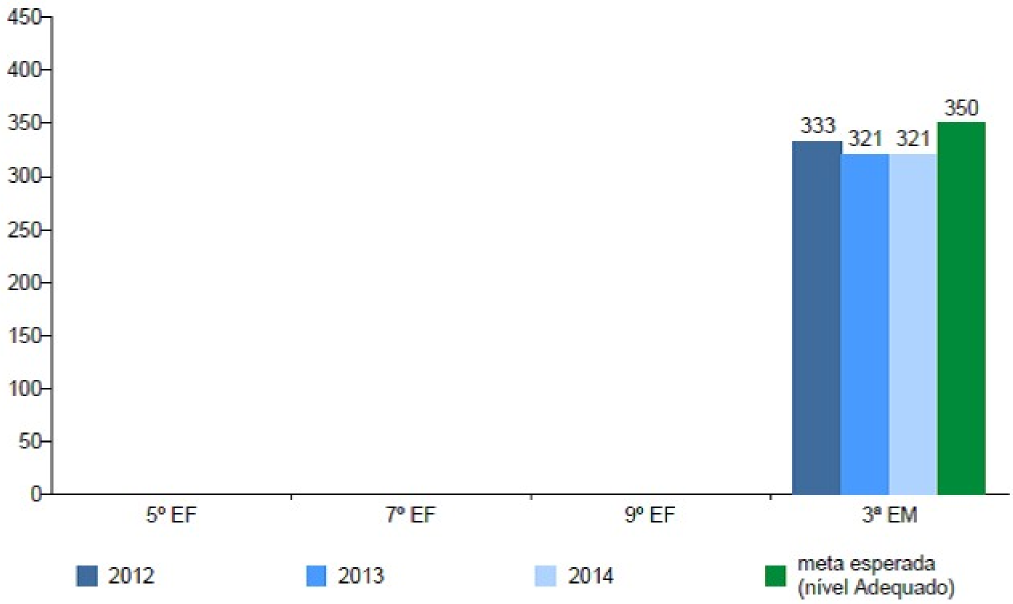
INSTÂNCIAS	LÍNGUA PORTUGUESA					MATEMÁTICA					CIÊNCIAS E CIÊNCIAS DA NATUREZA		
	3º EF	5º EF	7º EF	9º EF	3ª EM	3º EF	5º EF	7º EF	9º EF	3ª EM	7º EF	9º EF	3ª EM
REDE ESTADUAL	192,5	203,7	211,6	231,7	265,7	213,4	216,5	215,1	243,4	270,5	227,6	250,3	276,1
INTERIOR	202,5	212,2	216,2	236,6	269,9	221,2	228,8	222,1	250,9	277,4	234,8	257,3	282,8
DIRETORIA DE ENSINO	191,5	205,0	210,9	236,4	268,6	198,8	217,1	214,6	247,7	271,6	225,7	254,4	276,8
ESCOLAS DO CENTRO PAULA SOUZA	-	-	-	-	317,0	-	-	-	-	323,2	-	-	337,1
ESCOLA	-	-	-	-	**318,2**	-	-	-	-	**320,8**	-	-	**345,2**

Fonte: SARESP, 2014.

É possível observar na figura 9 que as médias obtidas pela escola estiveram bem próximas das médias do Centro Paula Souza e sempre acima das outras instâncias.

Na figura 10 a seguir são apresentados os resultados comparativos do SARESP de 2012 a 2014 na disciplina de Matemática:

Figura 10 - Comparação entre as média de proficiência em Matemática dos alunos nas edições de 2012 a 2014 e com a meta esperada no SARESP para a Etec “Fernando Prestes”.



Fonte: SARESP, 2014.

No comparativo entre os anos de 2012, 2013 e 2014 em Matemática, percebemos que o maior índice foi em 2012 (333) e que em 2013 e 2014 os índices se repetiram em 321. Esses índices são superiores aos das outras instâncias, mas ainda estão um pouco abaixo da meta que no caso é de 350, ou seja, uma média que considera todos os alunos no nível adequado.

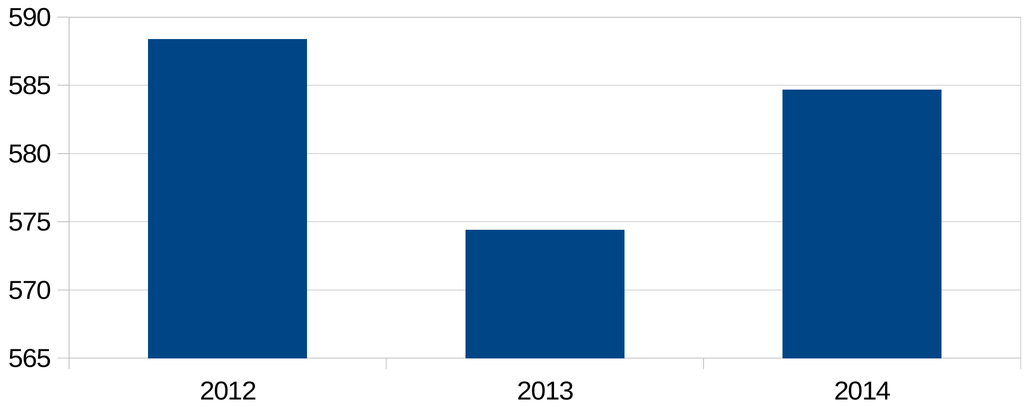
Os resultados do ENEM nos três últimos anos são apresentados na Tabela 3 e Figura 11:

Tabela 3 - Resultado ENEM: Etec Fernando Prestes - Sorocaba (2012, 2013 e 2014).

Ano	**Matemática**	**Ciências da Natureza**	**Ciências Humanas**	**Linguagens e Códigos**	**Redação**	**Média Geral**	**Taxa de Participação**	**Ranking Geral**
2012	632,2	542,3	605,4	567,7	594,6	588,4	90%	1542
2013	607,1	529,0	581,9	563,1	590,7	574,4	91%	2362
2014	565,5	537,9	609,2	577,7	633,4	584,7	89%	2343

Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Figura 11 - Média Geral ENEM: Etec Fernando Prestes - Sorocaba (2012, 2013 e 2014).



Fonte: Elaborada pelo pesquisador.

Considerando a média entre as quatro áreas do conhecimento e redação percebemos que a escola apresentou um pequena queda de 2012 para 2013 e no ano seguinte uma recuperação de 2013 para 2014. De maneira geral podemos dizer que a escola manteve uma regularidade quanto a esses resultados.

Apesar dessa regularidade na média geral identificamos que em Matemática os resultados da escola apresentaram redução nos dois últimos anos. Entre as possíveis causas dessa redução, os professores da unidade destacam a diminuição no número de aulas de Matemática e uma mudança no perfil dos alunos que tem chegado à escola apresentando maior defasagem nos conhecimentos prévios da disciplina.

A escola tem uma estrutura física com cerca de 21 salas de aula, uma biblioteca e vários laboratórios específicos para os cursos técnicos. O destaque é para a estrutura de tecnologia, sendo que a escola conta com:

- nove laboratórios de informática, cada um equipado com cerca de 20 computadores e projetor ou TV de LCD;
- quinze salas de aula com TV de LCD;
- dois ambientes com projetor e som, um com capacidade para 100 pessoas e outro para 40 pessoas;
- duas lousas digitais;
- um anfiteatro com projetor, som e iluminação e capacidade para 144 pessoas;
- rede de internet de 35 MB (mantida pela APM da escola);
- técnicos em informática e estagiários que mantém essa estrutura e auxiliam os professores.

A equipe de pessoal no ano de 2015 é composta por 89 professores contratados por tempo indeterminado e 18 professores contratados por tempo determinado, todos sediados na escola, além de outros 45 professores que são sediados em outras unidades, mas que mantém vínculo com algumas aulas na unidade. Fazem parte dessa equipe também 35 funcionários administrativos, 14 estagiários e 22 funcionários terceirizados que cuidam da limpeza, segurança e merenda.

A equipe de gestão é composta pelo diretor geral da unidade, uma diretora administrativa, uma coordenadora pedagógica, uma orientadora educacional e pelos coordenadores de área que são professores da unidade.

Além do ensino médio a unidade de ensino mantém

> ... as habilitações profissionais de Técnico em Administração, Técnico em Desenho de Construção Civil, Técnico em Projetos de Mecânica, Técnico em Informática, Técnico em Informática para Internet, Técnico em Secretariado, Técnico em Design de Interiores, Técnico em Segurança do Trabalho, Técnico em Contabilidade, Técnico em Logística, Técnico em Agenciamento de Viagem, Técnico em Finanças, Técnico em Edificações e Técnico em Eventos integrado ao Ensino Médio. A escola também mantém classes descentralizadas que funcionam em parceria com escola da rede estadual (Joaquim Izidoro Marins) onde funcionam o curso Técnico em Logística, Técnico em Informática e Administração, e, todas elas atendendo a LDB 9394/96, ao Decreto 5154/04 (ETEC FERNANDO PRESTES, 2015).

A turma escolhida para a aplicação das atividades é uma turma do 3º ano do Ensino Médio composta por 40 alunos com idades entre 17 e 19 anos.

O processo de escolha dessa turma para a aplicação das atividades teve como principal motivo o fato de que esse era o único entre os três terceiros anos em que o professor pesquisador já ministrara aulas no ano anterior. Isso contribuiu no sentido de conhecermos melhor os alunos e de sabermos exatamente os conteúdos que já haviam sido trabalhados anteriormente e como haviam sido trabalhados, além de que existia um tempo extra para os conteúdos que deveriam ser cumpridos, permitindo a aplicação das atividades sem atropelos.

4.2. As ferramentas

4.2.1. Calculadora do cidadão

A calculadora do cidadão é um aplicativo do Banco Central que "possibilita a realização de cálculos financeiros simples com o objetivo de auxiliar o cidadão em suas necessidades cotidianas" (BANCO CENTRAL, 2015).

Em entrevista ao site www.vivoseudinheiro.com.br a chefe do Departamento de Educação Financeira (Depef), do Banco Central, Elvira Crivinel Ferreira disse que "essa é uma das ações do Programa Cidadania Financeira, que visa contribuir para a proteção dos consumidores de produtos e serviços financeiros e melhorar a qualidade do relacionamento do cidadão com as instituições do sistema financeiro"(VIVO SEU DINHEIRO, 2015).

Atualmente a calculadora traz cinco funções:

- Aplicação com depósitos regulares;
- Financiamento com prestações fixas;
- Valor futuro de um capital;
- Correção de valores;
- Cartão de crédito.

A ferramenta traz ainda uma versão para celulares e tablets com as mesmas funções. Essas funções ajudam o cidadão a calcular, por exemplo:

- Quanto ele terá no futuro, se economizar todo mês, uma parcela de sua renda;
- O custo de um financiamento com prestações fixas;
- O valor, no futuro, do dinheiro investido hoje;

- Quanto vale hoje, corrigido pela inflação, o dinheiro utilizado no passado;
- Realizar a comparação do custo de pagar parte da sua fatura com outros tipos de crédito: consignado, pessoal e cheque especial.

É importante destacar que os resultados obtidos com a ferramenta não consideram possíveis encargos operacionais ou fiscais. Dessa forma podem ser considerados como referências para situações reais, mas não como valores oficiais.

Em nossa pesquisa utilizamos a calculadora com as ferramentas: Valor futuro de um capital, Financiamento com prestações fixas e Aplicação com depósitos regulares.

4.2.2. Calculador.com.br

O www.calculador.com.br é um site que "visa ajudar na solução de cálculos diversos, fornecendo uma ferramenta de consulta confiável e gratuita" (CALCULADOR, 2015). Ele traz, por exemplo, funções que efetuam cálculos trabalhistas e financeiros, além de tabelas com índices financeiros importantes.

Em nossa pesquisa utilizamos essa ferramenta nas funções: Financiamento PRICE e Financiamento SAC – Caixa, pelo fato de gerarem as tabelas de amortização nesses dois modelos de financiamento.

4.3. Situação de Aprendizagem 1

Tema:	Porcentagem, acréscimos e descontos
Competências e Habilidades:	Retomar métodos para o cálculo de Porcentagens; Determinar o valor final de uma grandeza que sofreu variação percentual de uma taxa i (produto por 1+i e 1-i); Determinar a taxa de variação percentual de uma grandeza que sofreu acréscimo ou desconto.
Estratégias:	Resolução de problemas e trabalho em grupo
Duração:	4 aulas de 50 minutos

Iniciamos essa etapa da nossa proposta metodológica apresentando aos alunos os tópicos que seriam abordados: porcentagem, acréscimos e descontos. Chamamos a atenção dos alunos para o fato de que ao longo dos anos de escolaridade que já haviam percorrido, obviamente já tinham estudado o cálculo de porcentagens e resolvido problemas que envolvem esse conceito.

Dessa forma organizamos a turma em grupos de até 4 alunos cada e apresentamos a eles uma lista com dez problemas que abordavam esses conceitos.

Para a resolução desses problemas pedimos que os grupos discutissem as diferentes formas de resolução dos problemas e que os métodos de resolução fossem registrados na folha. Recomendamos também que, em havendo mais de uma forma de resolução para o mesmo problema, elas também poderiam ser registradas na folha. Orientamos ainda que o uso da calculadora era permitido, desde que a metodologia aplicada fosse também registrada passo a passo.

As orientações e os problemas propostos foram os seguintes:

Atividade 1 – Porcentagem, Acréscimos e Descontos

Como já estão no 3º ano do EM partimos do pressuposto que em algum momento de sua escolaridade ou mesmo da sua vida cotidiana vocês tenham aprendido e utilizados métodos para o cálculo de porcentagens, acréscimos e descontos. Portanto, essa atividade consiste na resolução de alguns problemas bem simples sobre esse tópico.

O objetivo dessa atividade é o de retomar os métodos para cálculos desse gênero. Para tanto, vamos partir dos conhecimentos já desenvolvido por vocês. As instruções para o desenvolvimento dessa atividade são:

1º A sala deverá se organizar em grupos com 4 alunos;

2º Em grupo discutirão a resolução dos problemas propostos, podendo lançar mão dos métodos já conhecidos e até mesmo da calculadora (pode ser a do celular mesmo). Vocês deverão registrar pelo menos duas formas para se resolver o mesmo problema e quando fizerem uso da calculadora deverão indicar o que foi feito;

3º Durante o desenvolvimento da atividade o professor caminhará pela sala auxiliando na mediação dos trabalhos, mas sem indicar caminhos diretos, cada pergunta será respondida com uma nova pergunta, pois nesse momento será valorizado o conhecimento prévio de vocês;

4º Após a realização da atividade o professor fará uma análise das resoluções feitas pelos grupos e escolherá alguns para serem apresentados e discutidos em sala pelos alunos do próprio grupo, valorizando o protagonismo;

5º Durante essa apresentação o professor fará as indicações e generalizações necessárias com o intuito de concretizar a aprendizagem.

QUESTÕES

1. Se do salário de Pedro que é de R$ 3500,00 são descontados para a contribuição do INSS 11%. De quanto é a contribuição de Pedro para o INSS?
2. Um determinado produto que custava R$ 28,00 e depois de um aumento passou a custar R$ 35,00 teve uma variação percentual de?
3. Um determinado produto que custava R$ 35,00 e depois de um desconto passou a custar R$ 28,00 teve uma variação percentual de?
4. Considerando que um artigo que custava R$ 120,00 tenha sido reajustado em 8%, qual é o preço desse artigo depois do reajuste?
5. Supondo que um produto que custava R$ 120,00 tivesse um abatimento de 8% no pagamento à vista, qual seria então o valor do produto se o pagamento for à vista?
6. Paulo teve um aumento de 12% e a passou a receber R$ 1344,00. Qual era seu salário antes do reajuste?
7. Se um produto que custava R$ 300,00 sofre um aumento de 20% e em seguida outro aumento de 30%, pergunta-se:

a) qual a taxa de aumento total do produto depois dos dois reajustes?

b) qual será o novo valor do produto depois dos dois reajustes?

8. Se o preço de um artigo tem um reajuste de 7% e a seguir um novo reajuste, gerando um acumulado de 12%, qual é o valor aproximado em porcentagem do segundo reajuste?
9. Se um produto que custava R$ 300,00 sofre um desconto de 20% e em seguida outro desconto de 30%, pergunta-se:

a) qual a taxa de desconto total do produto depois dos dois abatimentos?

b) qual será o novo valor do produto depois dos dois abatimentos?

10. Se um produto que custava R$ 150,00 sofre um abatimento de 7% e depois de um segundo abatimento tem um abatimento acumulado de 14,44%, qual é a taxa percentual do segundo desconto?

Durante o trabalho dos grupos pudemos perceber que a resolução dos problemas estavam fluindo e que eles discutiam efetivamente as diferentes possibilidades de métodos para a resolução dos problemas.

Em alguns momentos a presença do professor era requisitada. Na maioria das vezes não existia uma concordância total do grupo sobre o resultado apresentado. Por exemplo, um dos grupos estava com dúvidas sobre os problemas 2 e 3, pois alguns haviam identificado corretamente a taxa de variação percentual em cada caso como sendo 25% e 20%. Porém, alguns não concordavam pelo fato de acreditarem que, como os valores numéricos eram os mesmos, a taxa de variação percentual deveria ser a mesma. Orientamos então que efetuassem novamente a leitura dos dois problemas e que tentassem identificar se a situação apresentada era a mesma ou se havia alguma diferença entre elas e que depois avaliassem as propostas de resolução. Pudemos identificar que o grupo chegou ao consenso de que as variações eram mesmo respectivamente 25% e 20%.

De maneira geral percebemos que os grupos conseguiram resolver a maioria dos problemas de maneira correta, conceitos de proporcionalidade apoiado no método prático da regra de três.

Para quantificar os acertos partimos do fato que atividade era composta por 10 problemas, sendo que os problemas 7 e 9 apresentavam dois itens a) e b) cada um como pergunta e daí consideramos como correta a resolução que tivesse no final a resposta com o valor correto, atribuindo 1 ponto para cada um dos problemas e dessa forma cada item das questões 7 e 9 tiveram o valor de 0,5 ponto cada. A Tabela 4 mostra a quantidade de acertos por quantidade de grupos.

Tabela 4 - Resultados da Atividade 1.

Quantidade de acertos	**Quantidade de grupos**
10	1
9	3
8,5	1
8	2
7	2
6,5	1

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Verificamos que o aproveitamento geral da turma foi de 82% de acertos.

A análise qualitativa dos métodos apresentados nas resoluções foi feita na retomada da atividade, quando os alunos socializaram os métodos de resolução.

Identificamos que as questões que tiveram o maior índice de erros foram as questões 9 e 10, sendo que 6 grupos erraram a questão 9 totalmente ou parcialmente enquanto que 5 grupos erraram a questão 10.

Para a retomada da atividade na aula seguinte devolvemos as folhas para os grupos corrigidas e indicamos que cada grupo deveria expor para a turma o método aplicado na resolução de uma das questões apresentadas. Essa escolha foi feita pensando sempre em agregarmos para a turma métodos que fossem eficientes e práticos em cada caso.

A medida que os grupos apresentavam a turma os seus métodos, também fomos fazendo algumas intervenções com o objetivo de mostrar, por exemplo, que na ocorrência de um acréscimo efetuamos uma correção pelo fator (1 + i) enquanto que na ocorrência de um desconto corrigimos pelo fator (1 – i).

Para a apresentação da resolução da questão 9 o grupo selecionado trouxe o seguinte:

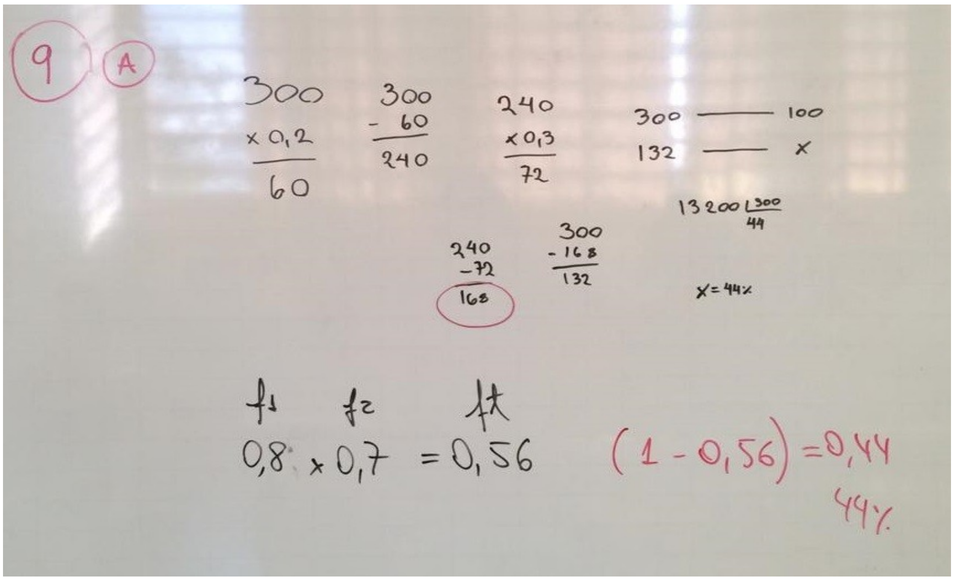
Como o primeiro desconto era de 20% sobre os R$ 300,00 eles multiplicaram 300 por 0,2 encontrando o desconto que era de R$ 60,00, em seguida efetuaram o desconto restando então R$ 240,00. Como o segundo desconto era de 30% agora sobre os R$ 240,00 restantes eles multiplicaram 240 por 0,3 encontrando o desconto que era de R$ 72,00, em seguida efetuaram o desconto restando então R$ 168,00.

Eles observaram que o valor R$ 168,00 era o valor que restou e não o desconto, sendo essa a resposta do item b). Em seguida fazendo a diferença 300 – 168, obtiveram R$ 132,00 que era o valor total do desconto. Em seguida usando o método da regra de três encontraram a taxa de desconto total do produto que era de 44%.

Destacamos que alguns grupos haviam efetuado a primeira parte do problema de maneira correta, empregando as duas taxas de desconto, porém concluíram erroneamente que R$ 168,00 era o valor do desconto e que a taxa total do desconto era de 56%. Durante a explanação do grupo procuramos orientar a turma sobre essa interpretação.

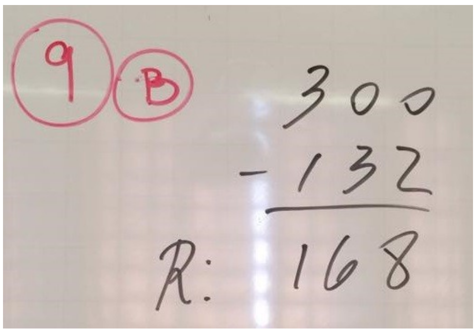
Para fechar a questão apresentamos aos alunos a aplicação dos fatores (1 – 0,2) e (1 – 0,3), chamando a atenção para o fato de que o fator 0,56 obtido representava o que havia sobrado do valor inicial do produto e que para se obter o percentual do desconto total deveríamos efetuar 1 – 0,56 = 0,44 que indica um percentual de 44%.

Figura 12 - Resolução no quadro do problema 9 item a) por um grupo.



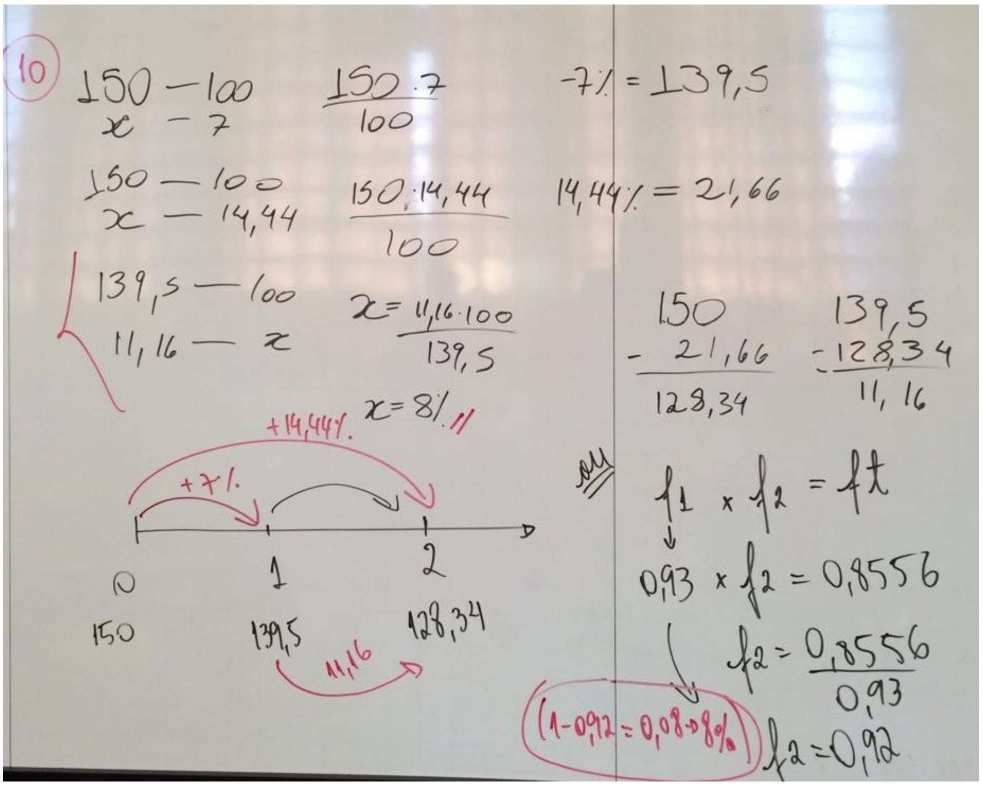
Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 13 - Resolução no quadro do problema 9 item b) por um grupo.



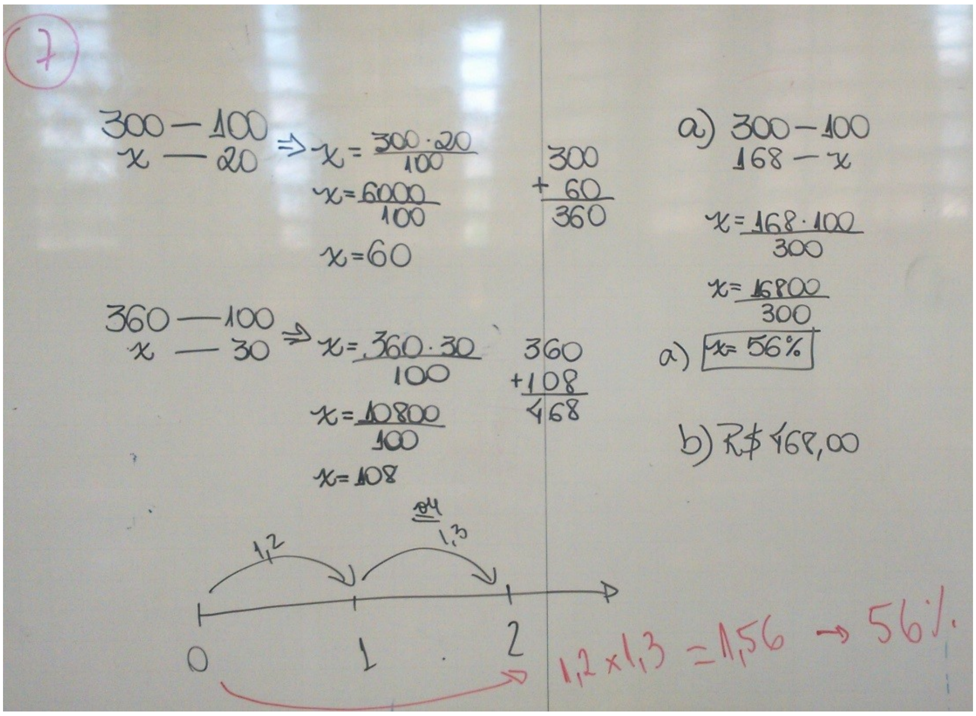
Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 14 - Resolução no quadro do problema 10 por um grupo.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 15 - Resolução no quadro do problema 7 por um grupo.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

De maneira geral avaliamos que essa primeira situação de aprendizagem teve um aproveitamento significativo. Destacamos o empenho dos alunos em concentrar os seus conhecimentos prévios na busca da solução dos problemas, bem como a participação ativa na retomada da atividade durante a apresentação da solução pelos colegas e intervenção do professor.

Dessa forma, acreditamos que eles tenham ampliado o seu repertório na aplicação de métodos que podem ser utilizados na resolução de problemas dessa natureza.

4.4. Situação de Aprendizagem 2

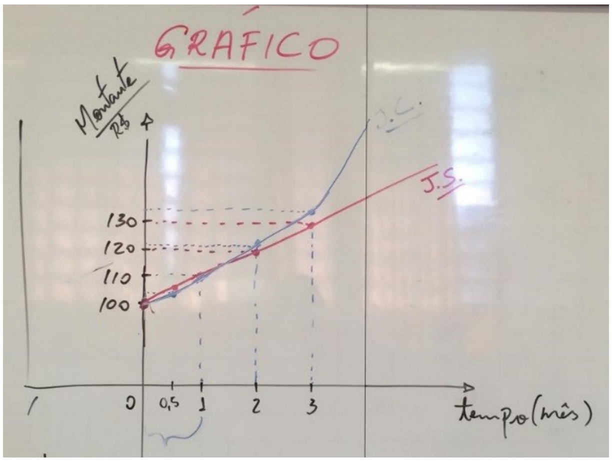
Tema:	Introdução à Matemática Financeira
Competências e Habilidades:	Identificar os termos usuais da Matemática Financeira e reconhecer os seus significados; Saber classificar um regime de capitalização em simples ou composto; Aplicar o conceito de juros simples a situações em que o prazo é menor que a unidade;
Estratégias:	Aula expositiva e dialogada; Apresentação do vídeo: "Professor Morgado"; Resolução de problemas e manuseio de calculadora simples.
Duração:	4 aulas de 50 minutos

Roteiro de aplicação: Nessa etapa apresentamos aos alunos a operação básica da Matemática Financeira, os termos usuais e os seus significados. Para tanto, utilizamos a apresentação feita por (MORGADO; WAGNER; ZANI, 2001, p. 44) destacada nessa pesquisa no capítulo 2. Resolvemos dois problemas simples em que ocorria uma capitalização de um único período e fechamos com a apresentação da existência dos dois modelos de capitalização: simples e composta.

Primeiramente os alunos assistiram um trecho da vídeo aula do professor Morgado (até o minuto 13), gravada durante um curso para professores no Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). O vídeo pode ser encontrado no link https://www.youtube.com/watch?v=Bn1_6QNgCg4. Nesse trecho o professor apresenta de maneira única e descontraída os princípios básicos da Matemática Financeira e a distinção entre os regimes de capitalização simples e o regime de capitalização composta.

Retomamos os conceitos apresentados no vídeo, mostrando a distinção entre a capitalização simples e a capitalização composta, fechando com a construção de um gráfico que mostra a evolução linear do montante em relação ao tempo na capitalização simples e a evolução exponencial do montante em relação ao tempo na capitalização composta. Ver Figura 16.

Figura 16 - Juros simples e Juros compostos.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Completamos o exemplo discutido no vídeo mostrando aos alunos o cálculo do montante para o período de 15 dias. Nesse sentido, consideramos o mês comercial com 30 dias, obtendo assim o período de 0,5 mês e usamos as técnicas de cálculo para determinarmos os montantes nos dois regimes de capitalização. Orientamos os alunos que esses métodos seriam retomados mais adiante.

Com essa construção enfatizamos que a aplicação dos juros simples acontece na vida real quando o período for menor que um inteiro, como já havia destacado o professor Morgado, pelo simples fato de que nesse caso ele é mais danoso para o tomador do empréstimo nesse regime de capitalização.

Em seguida utilizamos um exemplo fictício para formalizarmos os métodos utilizados na aplicação dos juros simples e depois aplicamos esses métodos em um problema de cobrança de juros de mora.

Ressaltamos que a nossa proposta metodológica atende as recomendações feitas na Proposta Curricular da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) para o Ensino Médio:

> O conceito de juros simples é raramente utilizado em situações reais e, portanto,

> deve-se abolir a prática de propor aos alunos exemplos e exercícios artificiais de empréstimos a juros simples. A exceção reside no cálculo de juros em que o prazo é menor que a unidade de tempo adotada, em particular, no cálculo dos juros de mora. Uma boa forma de visualizar o motivo pelo qual isso acontece, é comparar os gráficos de montantes dos juros simples e compostos (função afim e exponencial), onde se pode verificar a vantagem de adotar essa prática para o detentor do capital (SBM, 2015, p. 27).

4.5. Situação de Aprendizagem 3

Tema:	Juros compostos
Competências e Habilidades:	Utilizar a calculadora do cidadão na sua função “**Valor futuro de um capital”** para resolver problemas do cotidiano sobre juros compostos; Reconhecer a evolução de um capital ao longo do tempo no regime de capitalização composta; Usar o diagrama de flechas para resolver problemas de capitalização composta; Manusear a calculadora científica para resolver problemas nesse regime de capitalização.
Estratégias:	Resolução de problemas, Manuseio da calculadora científica e calculadora do cidadão (ferramenta disponível no site do Banco Central).
Duração:	6 aulas de 50 minutos

Para trabalharmos mais detalhadamente os juros compostos optamos por apresentar inicialmente aos alunos a Calculadora do cidadão na sua função “Valor futuro de um capital” que pode auxiliar nos cálculos que envolvem esse regime de capitalização. Nessa etapa levamos os alunos a um dos laboratórios de informática da escola com acesso à internet e divididos em duplas propomos a seguinte atividade:

Etec FERNANDO PRESTES – ENSINANDO PARA A VIDA – CENTRO PAULA SOUZA – GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO

Atividade 3 – Juros compostos

Acessem a calculadora do cidadão disponível em http://www.bcb.gov.br/?calculadora. Leiam a descrição da calculadora apresentada pelo Banco Central. Depois acessem a função Valor futuro de um Capital. Façam a leitura dos quatro exemplos apresentados e com o auxílio da ferramenta efetuem os cálculos indicados. Em seguida respondam:

1. Vocês conseguiram entender o funcionamento da ferramenta pelas orientações e exemplos apresentados? Por quê?

2. Quais foram os resultados obtidos nos cálculos indicados nos exemplos?

3. Apresentem situações do cotidiano em que vocês acreditam que essa ferramenta possa ser útil.

4. Usando a ferramenta resolva os problemas a seguir:

a) Marcelo investe R$ 1300,00 a juros compostos de 3% a. m. (ao mês), qual será o montante de Marcelo quatro meses depois?

b) Qual o capital que deve ser aplicado a juros compostos durante 5 meses, à taxa de 2% a.m. (ao mês) para resultar em um montante de R$ 1000,00?

c) Um capital de R$ 4200,00 foi aplicado a juro composto, durante 4 meses resultando num montante de R$ 4617,95. Calcule a taxa de juro composto da operação.

d) Por quanto tempo um capital de R$ 1000,00 deve ser aplicado a juros compostos, à taxa de 10% a.m. (ao mês) para dar um montante R$ 1610,51?

5. Quais foram as dificuldades para resolver os problemas?

6. Clicando em Metodologia quais são as informações obtidas?

7. Usando uma calculadora científica (pode ser a do celular ou a do próprio computador) tente resolver os problemas anteriores aplicando essa metodologia.

8. Os resultados obtidos foram compatíveis com os obtidos na calculadora do cidadão? Explique.

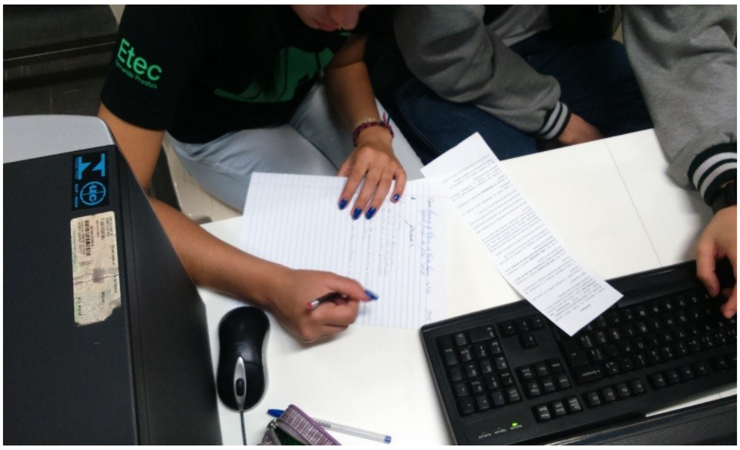
9. Quais foram as dificuldades para realizar os cálculos?

10. Tentem explicar como se chega na fórmula obtida em Metodologia e porque ela funciona nessas situações.

Figura 17 - Alunos trabalhando no laboratório de informática.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 18 - Uma das duplas fazendo as anotações.

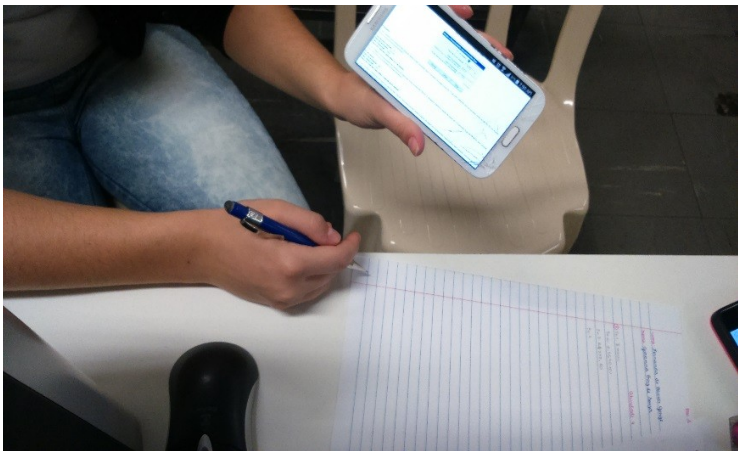


Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 19 - Outra dupla fazendo as suas anotações.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 20 - Aluna usando o aplicativo no celular.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

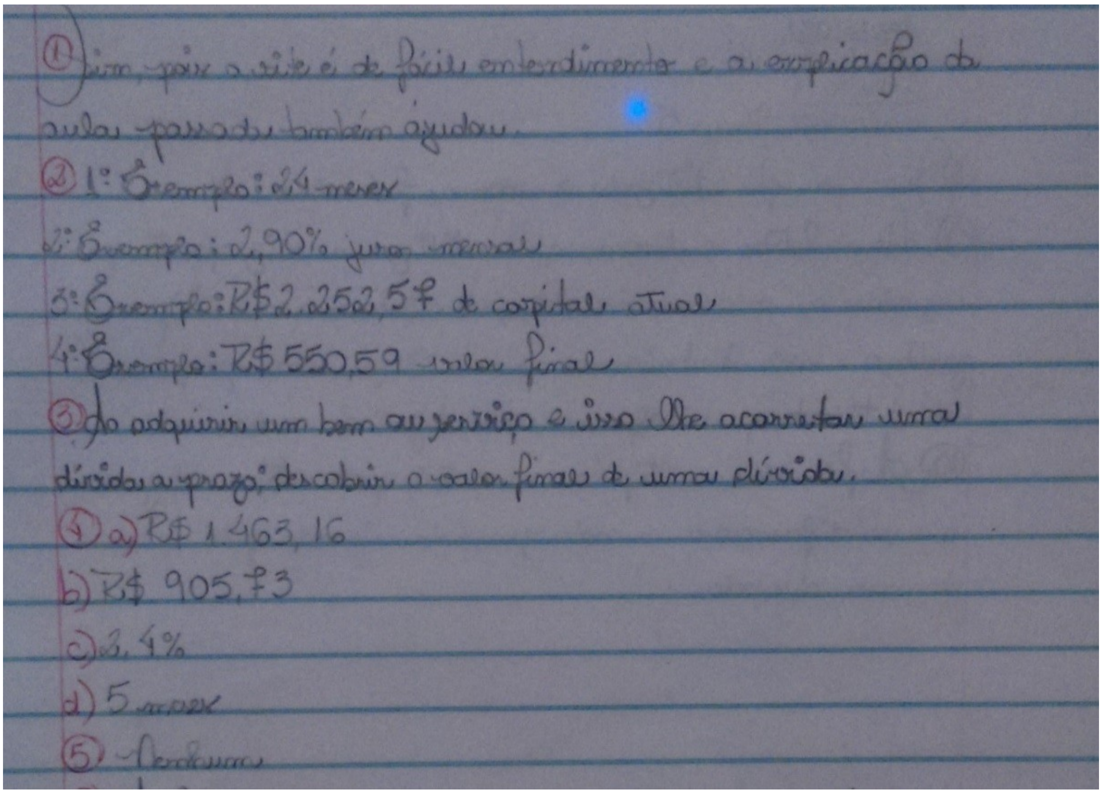
Como podemos observar o roteiro da atividade foi bem detalhado passo a passo. Nosso objetivo era de que os alunos acompanhando esse roteiro pudessem investigar a aplicação e o funcionamento da função “Valor futuro de um capital” da ferramenta “Calculadora do cidadão”. Além disso, o objetivo era subsidiar o entendimento desse regime de capitalização e sua metodologia de cálculo.

Na primeira etapa dessa atividade (questões de 1 até 5), direcionamos os alunos para uma investigação sobre o funcionamento dessa função da ferramenta. Propomos na questão 4 alguns problemas que deveriam ser resolvidos com o auxílio da ferramenta, na questão 5 perguntamos sobre possíveis dificuldades que haviam encontrado.

Tivemos que todas as duplas encontraram os valores corretos nos problemas da questão 4 e os relatos da questão 5 indicaram que eles praticamente não tiveram dificuldades nas resoluções.

Um dos grupos apresentou o seguinte (Ver Figura 21):

Figura 21 - Respostas das questões 1 até 5 de um dos grupos.



1) Sim, pois o site é de fácil entendimento e a explicação da aula passada também ajudou.
2) 1° Exemplo: 24 meses
2° Exemplo: 2,90% juros mensal
3° Exemplo: R$ 2.252,57 de capital atual
4° Exemplo: R$ 550,59 valor final
3) Ao adquirir um bem ou serviço e isso lhe acarretar uma dívida a prazo; descobrir o valor final de uma dívida.
4) a) R$ 1.463,16
b) R$ 905,73
c) 2,4%
d) 5 meses
5) Nenhuma

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Na segunda etapa da atividade (questões de 6 a 10), os alunos foram orientados a clicar em **Metodologia** e tentar resolver os problemas anteriores aplicando a fórmula apresentada com o auxílio da calculadora científica. Clicando em **Metodologia** eles encontraram a Figura 22.

Figura 22 - Metodologia do valor futuro de um capital.

$$S_n = (1 + j)^n q_0$$

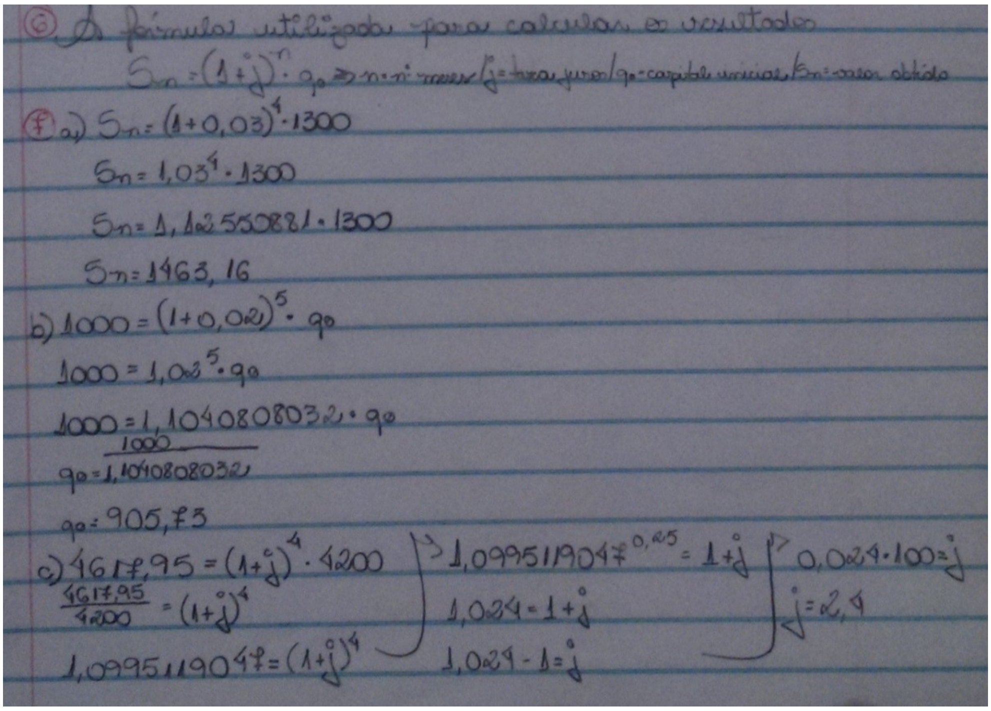
Onde:
n = Nº de Meses
j = Taxa de Juros Mensal
q_0 = Capital Atual
S_n = Valor Obtido ao Final

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Para efetuar o cálculo de maneira geral eles identificaram bem as variáveis da fórmula aplicando corretamente a substituição dos valores. Pudemos identificar algumas dificuldades na manipulação dessas variáveis para o isolamento da incógnita que se apresentava em cada caso, com destaque para os itens c) e d) da questão 4.

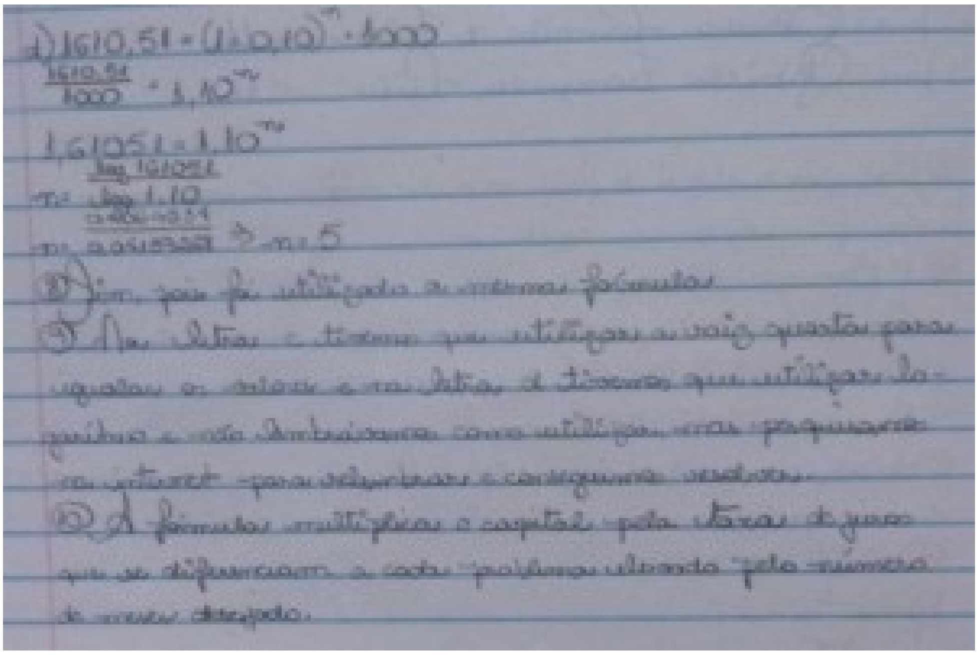
Nesse momento fizemos uma intervenção resgatando conceitos que ajudassem na continuação dos cálculos, no caso a extração da raiz quarta de ambos os lados da equação no item c) e da aplicação do logaritmo decimal de ambos os lados da equação no item d) ambos da questão 4. Tivemos de orientar também no manuseio da calculadora para a extração da raiz quarta e do cálculo do logaritmo decimal. Segue o desenvolvimento do mesmo grupo:

Figura 23 - Respostas das questões 6 até 10 de um dos grupos.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 24 - Respostas das questões 6 até 10 de um dos grupos.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Na questão 8 alguns relataram uma pequena diferença nas casas decimais nos resultados obtidos e justificaram de maneira correta que essa diferença era advinda de arredondamentos feitos. Na questão 9 a maioria relatou as dificuldades que encontraram na manipulação das variáveis, mas que com o resgate feito por nós e com algumas pesquisas rápidas com o auxílio da própria internet isso foi superado.

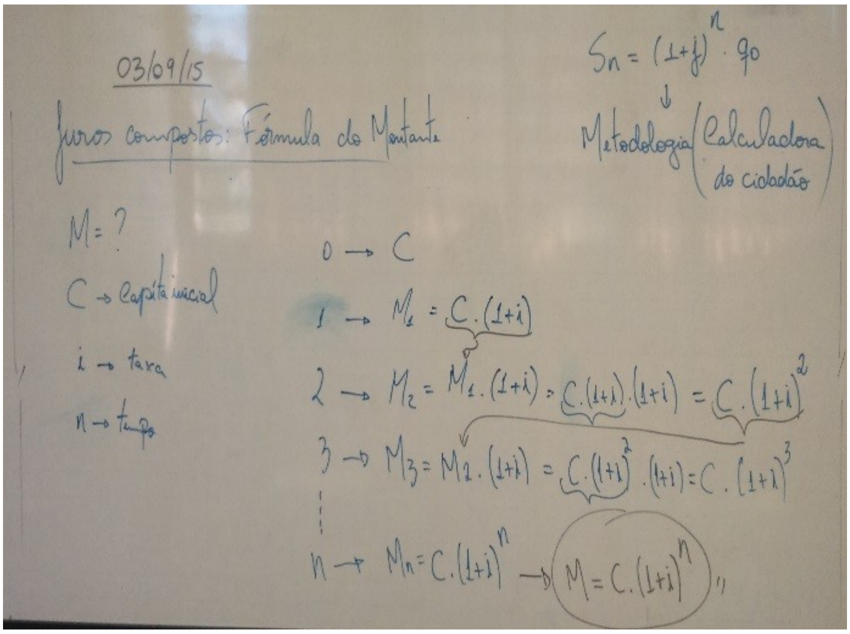
Com a aplicação dessa atividade percebemos que os alunos puderam compreender o funcionamento da função Valor futuro de um capital da Calculadora do cidadão e mesmo a aplicação da fórmula apresentada na metodologia.

Nas questões 3 e 10 percebemos uma certa confusão quanto a aplicação dos juros compostos no cotidiano. Por exemplo, um dos grupos forneceu a seguinte resposta para a questão 3: "*No financiamento de uma casa ou em um empréstimo*" enquanto outro grupo respondeu a questão 10 como: "*Na hora de fazer compras parceladas*".

Também ocorreram confusões na compreensão do funcionamento da fórmula do montante para regime de capitalização de juros compostos. Um grupo respondeu a questão 10 como: "*Porque usando o valor final fazemos a multiplicação com as outras informações, como a taxa mensal é ela vezes ela mesma. O valor fica elevado, tendo as informações conseguimos chegar ao resultado final*".

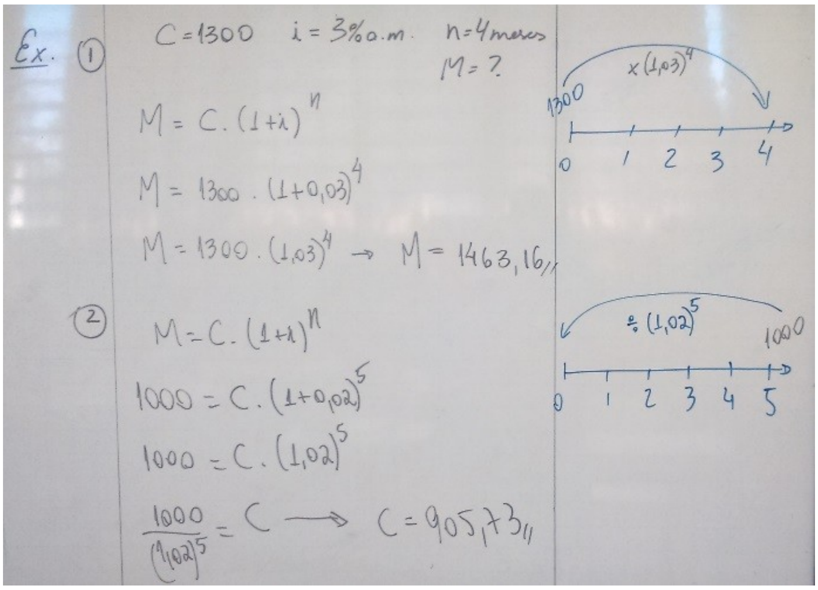
Retomamos o conceito dos juros compostos fazendo passo a passo a generalização da fórmula do montante e mostramos o trabalho com o diagrama de flechas indicando o transporte de um capital na linha do tempo, montando a chamada equação de valor, com foco numa determinada época. Ver Figuras 25 e 26.

Figura 25 - Juros compostos generalização.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 26 - Juros compostos aplicação.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em seguida os alunos aplicaram os conceitos resolvendo oito problemas sobre juros compostos selecionados do livro didático disponível na escola (PAIVA, 2013, p. 57, 58 – vol. 1).

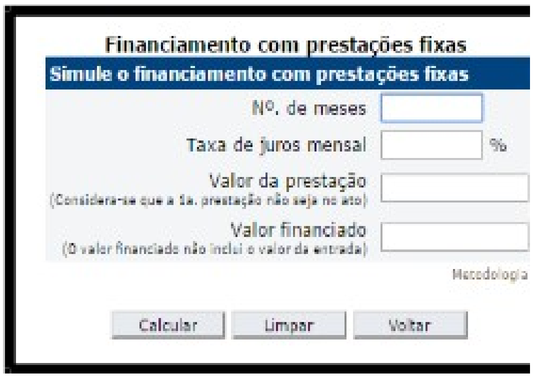
Na resolução desses problemas percebemos que os alunos não apresentaram maiores dificuldades.

4.6. Situação de Aprendizagem 4

Tema:	Sequência uniforme de pagamentos
Competências e Habilidades:	Resolver problemas envolvendo sequências uniforme de pagamentos; Compreender como funciona um financiamento com prestações fixas e utilizar a calculadora do cidadão para efetuar esses cálculos; Resolver problemas envolvendo equivalência de capitais; Determinar taxas de juros equivalentes.
Estratégias:	Resolução de problemas, Manuseio da calculadora científica e calculadora do cidadão (ferramenta disponível no site do Banco Central).
Duração:	6 aulas de 50 minutos

Nessa etapa, optamos novamente por iniciar com a exploração da Calculadora do cidadão, agora na função “**Financiamento com prestações fixas**”. Essa função da calculadora, como o próprio nome já diz, auxilia nos cálculos ligados a financiamentos que tenham uma prestação fixa. Acessando essa função da calculadora, temos as informações apresentadas na Figura 27.

Figura 27 - Financiamento com prestações fixas.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

São apresentados quatro campos para o preenchimento, que correspondem as quatro variáveis envolvidas nesse tipo de situação (Nº de meses; Taxa de juros mensal; Valor da prestação; Valor Financiado). Dessa forma, inserindo os valores de três dessas variáveis e clicando em calcular obtemos o valor da 4ª variável, que completa as informações do financiamento.

Destacamos que a metodologia aplicada considera que o valor financiado não inclui o valor de entrada e que o valor da prestação é dado considerando que o 1º pagamento será efetuado um mês após a compra, ou seja, segue o modelo de financiamento com prestações fixas postecipadas.

Retornamos com os alunos ao laboratório de informática e propomos a seguinte atividade:

Atividade 4 – Sequência uniforme de pagamentos

Acessem a calculadora do cidadão (Banco Central) disponível em http://www.bcb.gov.br/?calculadora . Depois acessem a função **Financiamento com prestações fixas**, façam a leitura dos quatro exemplos apresentados e com o auxílio da ferramenta efetuem os cálculos em cada exemplo. Em seguida respondam:

1. Quais foram os resultados obtidos no cálculo dos exemplos?

2. Vocês conseguiram entender o funcionamento da ferramenta pelas orientações e exemplos apresentados? Por quê?

3. No item **Valor da Prestação** aparece a informação (Considera-se que a 1ª prestação não seja no ato). O que significa isso? Justificar.

4. No item **Valor Financiado** aparece a informação (O valor financiado não inclui o valor da entrada). O que significa isso? Justificar.

5. Apresentem situações do cotidiano em que vocês acreditam que essa ferramenta pode ser útil.

6. Usando a ferramenta resolva os problemas a seguir:

a) Um banco concedeu um empréstimo para uma pessoa adquirir um carro. O pagamento deveria ser feito em 12 prestações mensais de R$ 1400,00 cada uma, sem entrada. Qual o valor do empréstimo sabendo-se que a taxa de juros compostos cobrada pelo banco foi de 3% a.m.?

b) Uma loja vende uma televisão por R$ 1200,00 à vista ou financia essa quantia em 5 prestações mensais iguais sem entrada. Qual o valor de cada prestação se a taxa de juros compostos cobrada for de 2,5% a.m.?

7. Quais foram as dificuldades para resolver os problemas?

8. Clicando em **Metodologia** quais são as informações obtidas?

9. Usando uma calculadora científica (pode ser a do celular) tente resolver os problemas anteriores aplicando essa metodologia.

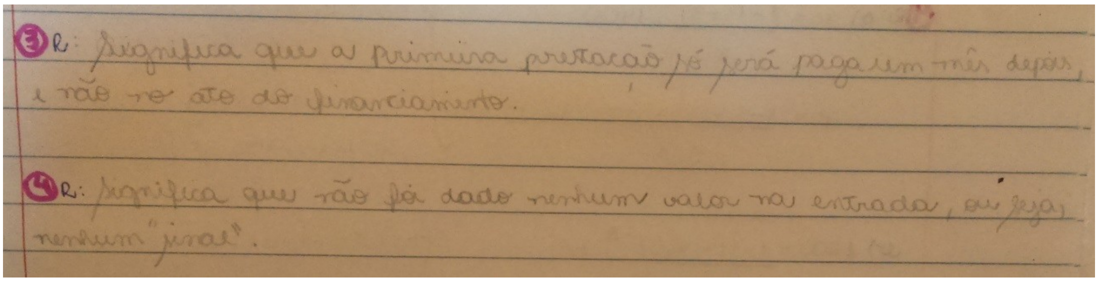
10. Os resultados obtidos foram compatíveis com os obtidos na calculadora do cidadão? Justificar.
11. Quais foram as dificuldades para realizar os cálculos?

Organizamos o roteiro dessa atividade com o objetivo de fazer com que os alunos investigassem o funcionamento dessa função da calculadora.

Nas questões 1 e 2 tivemos que todas as duplas relataram que conseguiram entender facilmente o funcionamento da ferramenta, sendo que todos chegaram aos valores corretos nos cálculos dos exemplos indicados pela ferramenta.

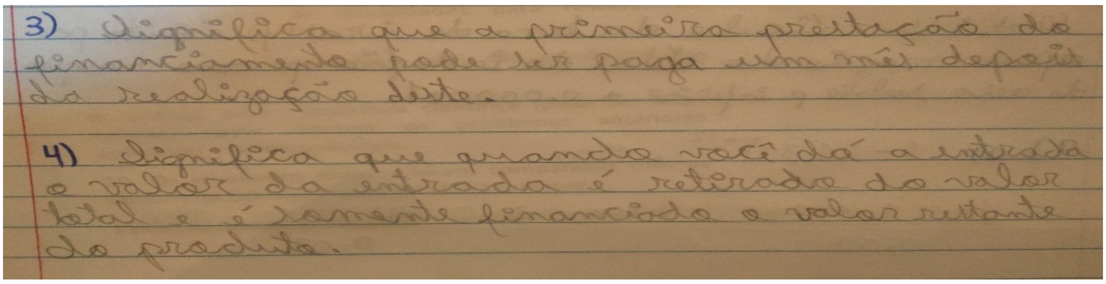
Nas questões 3 e 4 o questionamento era sobre o significado das informações sobre as variáveis "**Valor da prestação**" e "**Valor financiado**" que traziam respectivamente as informações: "Considera-se que a 1ª prestação não seja no ato" e "O valor financiado não inclui o valor da entrada". Percebemos que a maioria das duplas compreendeu que nessa simulação o 1º pagamento seria efetuado ao final do 1º período e que o valor financiado representava o saldo devedor e não necessariamente o valor da compra, ou seja, se existisse um valor pago na entrada esse deveria ser abatido e o restante financiado. Algumas respostas dos alunos podem ser observadas nas Figuras 28, 29 e 30.

Figura 28 - Respostas do grupo 1 – Itens 3 e 4.



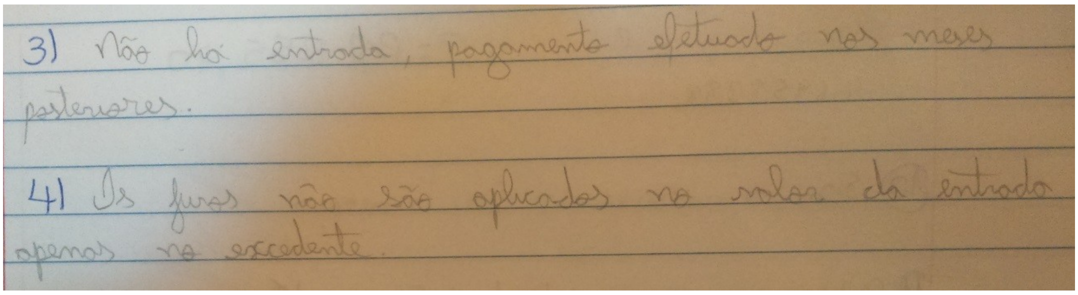
Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 29 - Respostas do grupo 2 – Itens 3 e 4.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 30 - Respostas do grupo 3 – Itens 3 e 4.

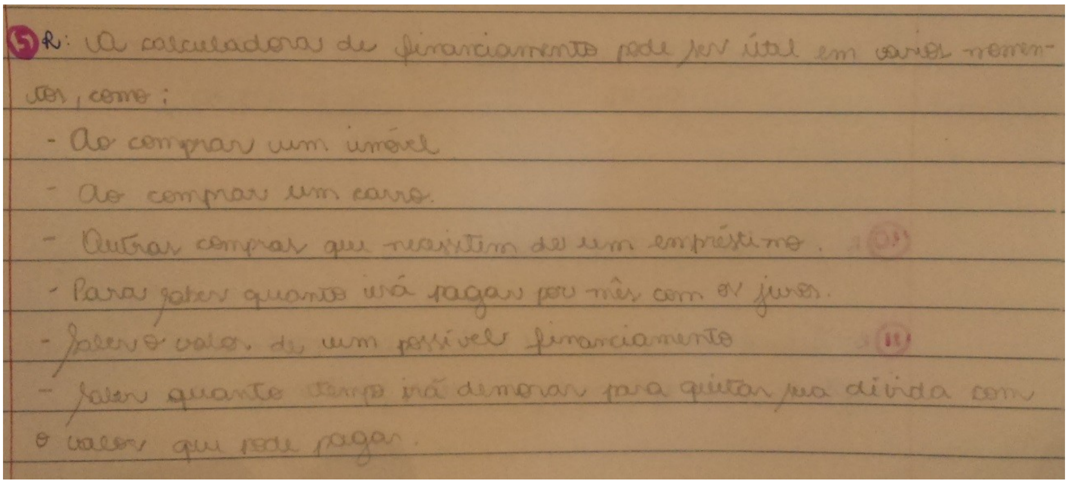

3) Não há entrada, pagamento efetuado nos meses posteriores.

4) Os juros não são aplicados no valor da entrada apenas no excedente.

Fonte: Arquivo do autor.

As respostas dos grupos para a questão 5 mostrou que eles tem claro a aplicação da ferramenta nas situações do cotidiano. Algumas respostas estão nas Figuras 31, 32 e 33.

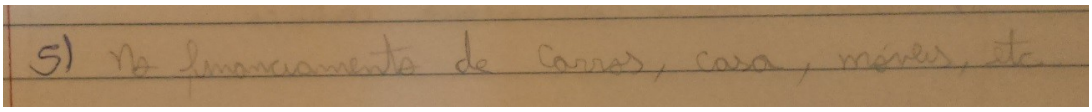
Figura 31 - Respostas do grupo 1 – Itens 5.


5 R: A calculadora de financiamento pode ser útil em vários momentos, como:

- Ao comprar um imóvel
- Ao comprar um carro.
- Outras compras que necessitem de um empréstimo.
- Para saber quanto irá pagar por mês com os juros.
- Saber o valor de um possível financiamento
- Saber quanto tempo irá demorar para quitar sua dívida com o valor que pode pagar.

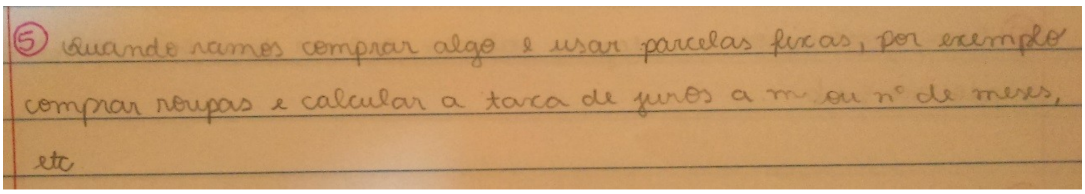
Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 32 - Respostas do grupo 3 – Itens 5.


5) No financiamento de Carros, casa, móveis, etc

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 33 - Respostas do grupo 4 – Itens 5.


5 Quando vamos comprar algo e usar parcelas fixas, por exemplo comprar roupas e calcular a taxa de juros a m ou nº de meses, etc

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Na segunda etapa da atividade (questões 6 até 11) pedimos para que os alunos usassem a ferramenta para resolver dois problemas sobre financiamento. No primeiro o valor da prestação era conhecido e a incógnita era o valor financiado, enquanto que no segundo, o valor financiado era conhecido e a incógnita era o valor de cada prestação. Usando a Calculadora do cidadão todas as duplas encontraram os valores corretos. Isso já era esperado, afinal a ferramenta é bem eficiente e os alunos compreenderam bem o seu funcionamento.

Na sequência clicando em Metodologia os alunos encontraram a fórmula aplicada para o cálculo. Isso pode ser observado na Figura 34.

Figura 34 - Metodologia do Financiamento com prestações fixas

$$q_0 = \frac{1-(1+j)^{-n}}{j}\,p$$

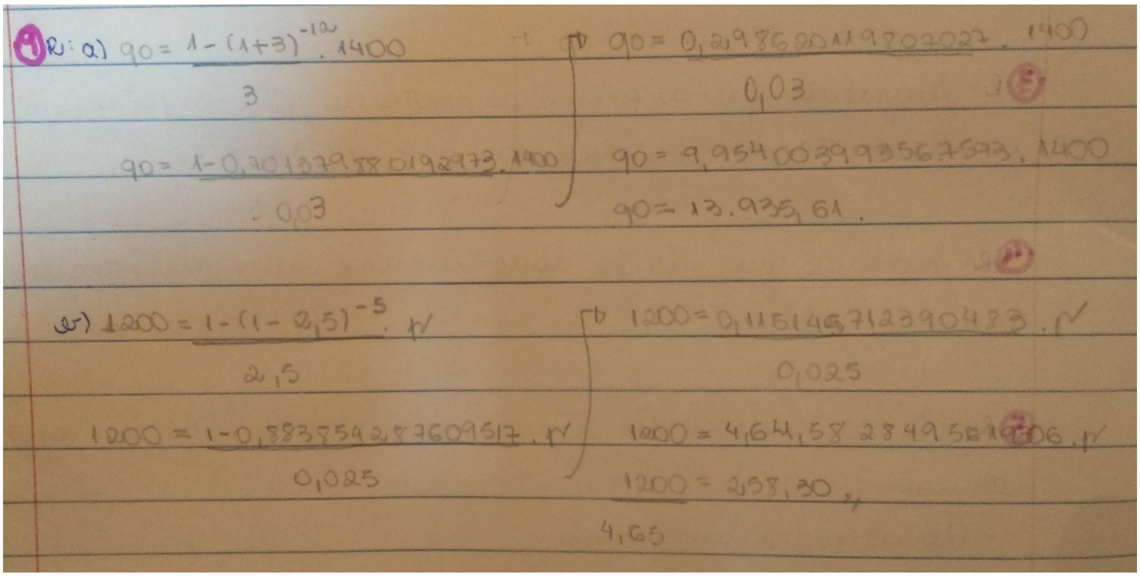
Onde:
n = Nº de Meses
j = Taxa de Juros Mensal
p = Valor da Prestação
q_0 = Valor Financiado

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Pedimos para que eles fizessem os cálculos aplicando essa metodologia com o auxílio da calculadora científica. De maneira geral percebemos que as duplas fizeram a correta identificação das variáveis envolvidas e que durante a manipulação da equação a principal dificuldade encontrada foi no manuseio da calculadora para encontrar o valor da potência com expoente negativo.

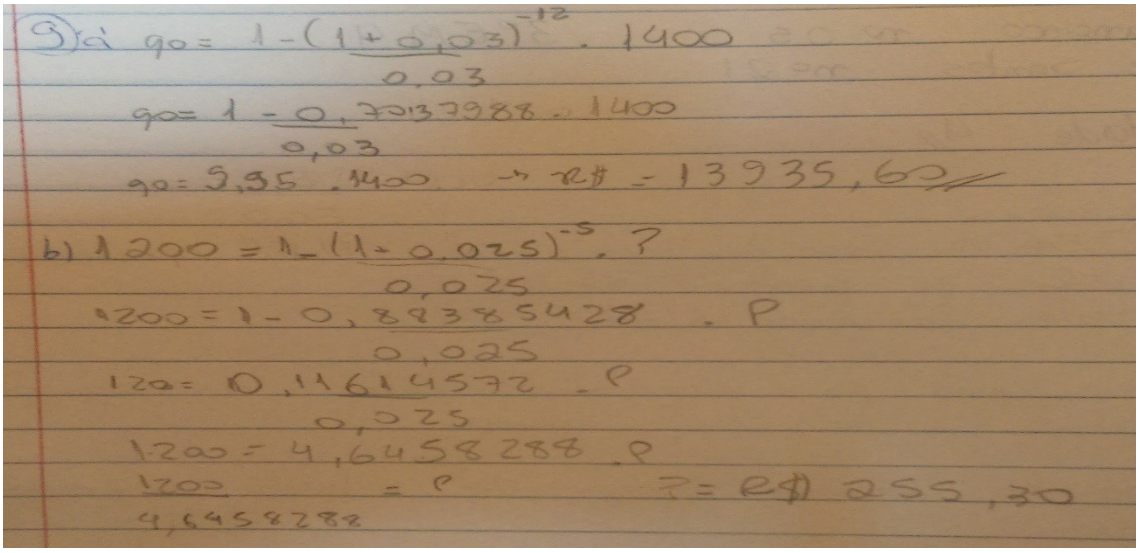
Os resultados foram bem próximos dos que haviam sido obtidos com a calculadora do cidadão. As diferenças de centavos surgiram devido aos arredondamentos feitos por alguns grupos. Isso pode ser observado nas Figuras 35 e 36.

Figura 35 - Respostas do grupo 1 – Itens 9.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 36 - Respostas do grupo 5 – Itens 5.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Na aula seguinte, retornando para a sala de aula, generalizamos as situações que envolvem o financiamento com prestações fixas de acordo com a proposta de (IEZZI; HAZZAN; DEGENSAJN. 2004, p. 68). Utilizamos o diagrama de flechas montando a chamada equação de valor. Em seguida, aplicamos o conceito de equivalência de capitais e o método da soma dos termos de uma Progressão Geométrica finita.

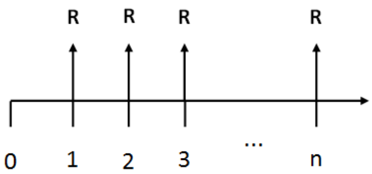
Entregamos para os alunos uma folha complementar que e pedimos para que eles a colassem no caderno. Em posse dela, efetuamos todo o processo de generalização.

Financiamento com prestações fixas ou Sequência uniforme de pagamentos (folha complementar)

De acordo com Iezzi; Hazzan; Degensajn (2004, p. 68)

> Se considerarmos um valor financiado V que deve ser pago em prestações iguais de valor R nas datas 1, 2, 3, ..., n e que a taxa de juros compostos cobrada no financiamento seja i por período de tempo. Chamamos esse conjunto de Sequência uniforme de pagamentos.

Para determinarmos o valor atual de uma sequência uniforme de pagamentos, devemos fazer com que o valor das prestações de valor R sejam trazidas para a data focal 0, ficando com a seguinte representação:



$$V = \frac{R}{(1+i)^1}+\frac{R}{(1+i)^2}+\frac{R}{(1+i)^3}+\ldots+\frac{R}{(1+i)^n}$$

Percebemos que, se considerarmos $\frac{R}{(1+i)^1},\frac{R}{(1+i)^2},\frac{R}{(1+i)^3},\ldots,\frac{R}{(1+i)^n}$ como sendo uma sequência, então teremos que essa é uma progressão geométrica com primeiro termo $a_1 = \frac{R}{(1+i)}$ e razão $q = \frac{1}{(1+i)}$. Da Matemática Elementar sabemos que a soma dos termos de uma P.G. finita é dada por $S = \frac{a_1.(q^n-1)}{(q-1)}$. Podemos então encontrar uma regra para o cálculo dessa sequência uniforme, ou seja,

$$V = \frac{\dfrac{R}{(1+i)} \cdot \left[\dfrac{1}{(1+i)^n} - 1\right]}{\dfrac{1}{(1+i)} - 1} = R \,.\, \frac{\dfrac{1}{(1+i)} \cdot \left[\dfrac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}\right]}{\dfrac{1-(1+i)}{(1+i)}} = R \,.\, \frac{\left[\dfrac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}\right]}{i}$$

Logo,

$$V = R \,.\, \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n . i}$$

Essa fórmula relaciona o valor atual com a prestação, taxa de juros e número de prestações de uma sequência uniforme de pagamentos.

Os alunos perceberam que a fórmula não estava escrita como a que eles haviam encontrado na metodologia da Calculadora do cidadão. Aplicamos essa fórmula na resolução dos dois problemas que tinham sido propostos na atividade anterior e mostramos que os resultados foram os mesmos. Ressaltamos que o fato de os resultados obtidos terem sido os mesmos, ainda não nos garantia se tratar da mesma fórmula. Então mostramos que adotando, o Valor financiado: $q_0 = V$; a Taxa de juros: $j = i$; o Valor de cada prestação: $p = R$ e partindo da fórmula encontrada na metodologia apresentada pela Calculadora do cidadão, temos:

$$V = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} . R = R . \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} . \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n} = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n . i}$$

Na sequência propomos aos alunos uma lista com 5 exercícios sobre o financiamento com prestações fixas. Esses exercícios foram retirados do livro (IEZZI; HAZZAN; DEGENSAJN. 2004).

4.7. Situação de Aprendizagem 5

Tema:	Sistemas de Amortização
Competências e Habilidades:	Construir tabelas de amortização nos sistemas Price e SAC; Compreender como funciona um financiamento nesses dois sistemas e utilizar o site (www.calculador.com.br) para gerar essas tabelas; Resolver problemas envolvendo equivalência de capitais;
Estratégias:	Resolução de problemas, Manuseio da calculadora científica e ferramenta de cálculo (www.calculador.com.br) na funções: **Tabela Price** e **Tabela SAC**.
Duração:	6 aulas de 50 minutos

Nessa etapa da nossa proposta metodológica de ensino tínhamos o objetivo de mostrar aos alunos como a dívida de um financiamento é amortizada, ou seja, como ocorre o processo de extinção de uma dívida. Para isso iniciamos a atividade com a exploração do site (www.calculador.com.br), usando as funções “**Tabela Price**” e “**Tabela SAC**”.

A função “**Tabela Price**” gera a tabela de amortização da dívida de um financiamento que use esse modelo, ou seja, o financiamento com prestações fixas que havia sido abordado anteriormente. A função “**Tabela SAC**” gera a tabela de amortização da dívida de um financiamento que considera a amortização constante, ou seja, o valor de amortização da dívida é constante e o valor da prestação é decrescente. Destacamos que esse modelo usa a taxa de juros anual, fazendo necessário o cálculo de taxas equivalentes.

Organizamos os alunos em duplas no Laboratório de informática e propomos a seguinte atividade:

Atividade 5 – Sistemas de amortização

1. Acessem o site www.calculador.com.br e sigam os seguintes passos: (calculadoras financeiro financiamento PRICE). (Não precisa responder)

2. Agora leiam no final da página as informações sobre a ferramenta indicada como: **Sobre cálculo Financiamento PRICE**. (Não precisa responder)

3. Usando o exemplo: “O preço de um computador a vista é de R$ 1.500,00. O vendedor oferece para ser pago em 5 parcelas mensais iguais, a primeira vencendo daqui a 30 dias e as demais sucessivamente (ou seja: um plano de 30/60/90/120/150 dias) a uma taxa de juros de 5% ao mês”. Digite as informações e clique em calcular.

a) Qual o valor de cada prestação?

b) Monte agora a tabela que foi obtida. Essa tabela é a chamada Tabela de Amortização (PRICE).

4. Percebam que o método para o cálculo de cada prestação é o mesmo da Calculadora do cidadão (Banco Central), pois o valor da prestação é fixo. Agora pesquisem sobre o Sistema de Amortização PRICE e tentem explicar matematicamente como são obtidos os resultados da tabela, ou seja, como funciona o processo de amortização até a extinção da dívida.

5. Em que situações do dia a dia essa ferramenta pode ser utilizada? Justificar.

6. Acessem o site www.calculador.com.br e sigam os seguintes passos: (calculadoras financeiro financiamento SAC - Caixa). (Não precisa responder)
7. Agora leiam no final da página as informações sobre a ferramenta indicada como: Sobre cálculo Financiamento SAC - Caixa. (Não precisa responder)
8. Usando o exemplo: ‘O preço de um computador à vista é de R$ 1.500,00. O vendedor oferece para ser pago em 5 parcelas mensais no sistema SAC, a primeira vencendo daqui a 30 dias e as demais sucessivamente (ou seja: um plano de 30/60/90/120/150 dias) a uma taxa de juros de 5% ao mês (79,59% a.a.)”. Digite as informações e clique em calcular. Responder:
Obs.: Nesse caso a ferramenta considera a taxa anual e para isso teremos de encontrar a taxa equivalente de 5% a.m. em taxa anual, que nesse caso é de 79,59% a. a. Depois abordaremos essa transformação em sala, mas existe nesse mesmo site uma ferramenta que auxilia nessa transformação.
a) Montem agora a tabela que foi obtida. Essa tabela é a chamada Tabela de Amortização (SAC).
b) O que se observa de diferente com o valor das prestações em relação ao sistema PRICE?
9. Agora pesquisem sobre o Sistema de Amortização SAC e tentem explicar matematicamente como são obtidos os resultados da tabela, ou seja, como funciona o processo de amortização até a extinção da dívida.
10. Em que situações do dia a dia essa ferramenta pode ser utilizada? Justificar.

No roteiro dessa atividade indicamos para os alunos os passos para chegar até as funções “**Tabela Price**” e “**Tabela SAC**”. Orientamos que fizessem a leitura das informações apresentadas no site sobre o funcionamento dessas funções. Em seguida, propomos um problema que deveria ser resolvido com a aplicação da função “**Tabela Price**” e um problema semelhante que deveria ser resolvido aplicando a função “**Tabela SAC**”.

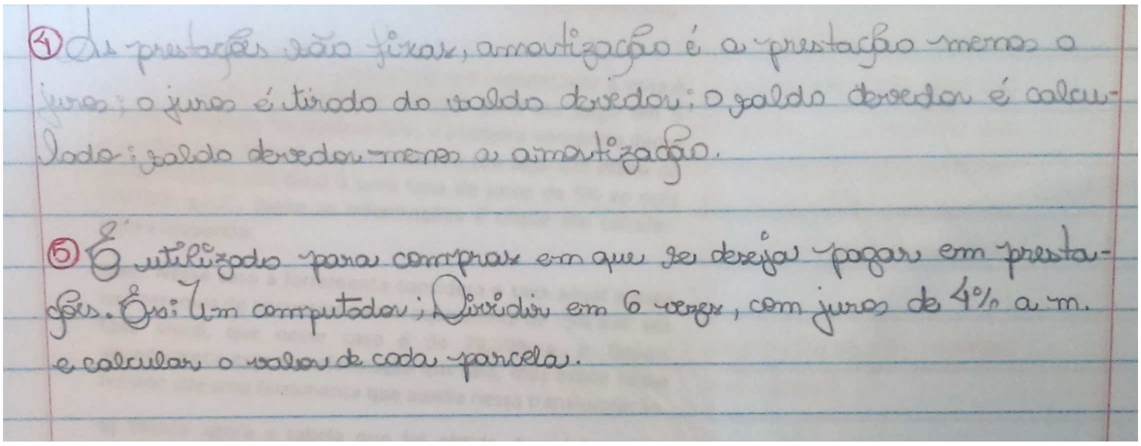
No problema que usava a função “**Tabela SAC**” indicamos para eles que a taxa de 5% a.m. era equivalente a 79,59% a.a., pois essa função da ferramenta utiliza a taxa anual. Comentamos que essa transformação seria abordada em detalhes nas aulas seguintes, mas que ali no próprio site existia uma função que fazia essa transformação “**Taxas equivalentes**”. Percebemos que alguns deles ficaram curiosos e acessaram a função para conferir essa taxa.

Nos itens 3 e 8, as duplas deveriam aplicar as duas funções da ferramenta para resolver os problemas propostos todos obtiveram a resposta correta. Isso indica que conseguiram compreender o funcionamento das funções “**Tabela Price**” e “**Tabela SAC**”.

Nos itens 4 e 5 pedimos para que eles pesquisassem na internet sobre o Sistema de amortização Price e que tentassem explicar matematicamente como eram obtidos os resultados naquela tabela, além de indicarem em que situações do cotidiano essa ferramenta poderia ser utilizada. Nos itens 9 e 10 pedimos o mesmo para o Sistema de amortização constante.

Nesses itens as respostas foram variadas. Identificamos que apesar de não explicitarem detalhadamente os processos de cálculo aplicados algumas duplas conseguiram expressar com clareza o funcionamento de cada uma das tabelas e a sua aplicação como podemos ver nas Figuras 37, 38, 39 e 40.

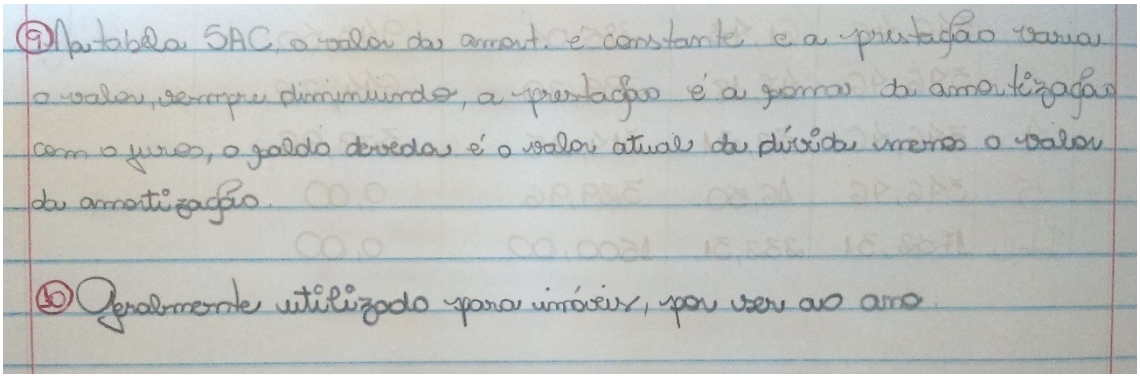
Figura 37 - Respostas do grupo 1 – Itens 4 e 5.


4 As prestações são fixas, amortização é a prestação menos o juros; o juros é tirado do saldo devedor; o saldo devedor é calculado: saldo devedor menos a amortização.

5 É utilizado para compras em que se deseja pagar em prestações. Ex: Um computador; Dividir em 6 vezes, com juros de 4% a.m. e calcular o valor de cada parcela.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

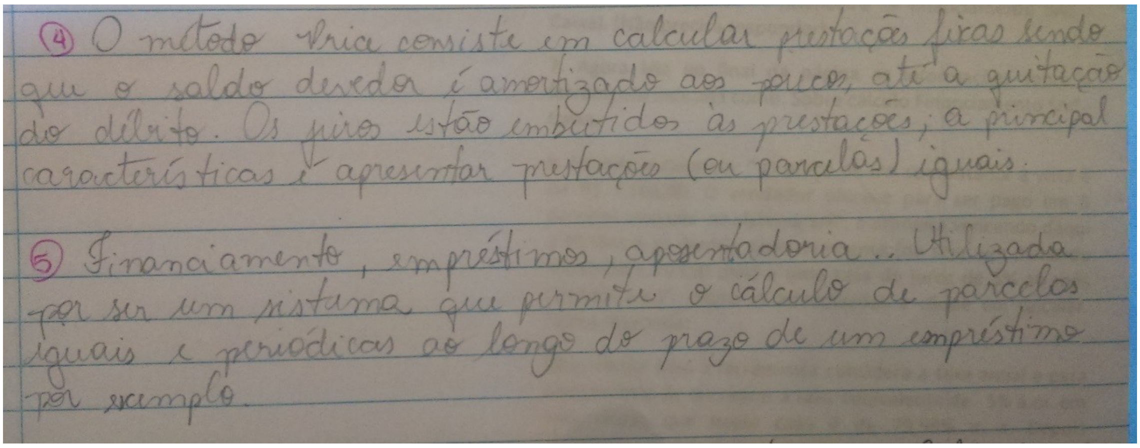
Figura 38 - Respostas do grupo 1 – Itens 9 e 10.


9 Na tabela SAC, o valor da amort. é constante e a prestação varia o valor, sempre diminuindo, a prestação é a soma da amortização com o juros, o saldo devedor é o valor atual da dívida menos o valor da amortização.

10 Geralmente utilizado para imóveis, por ser ao ano

Fonte: Arquivo do pesquisador.

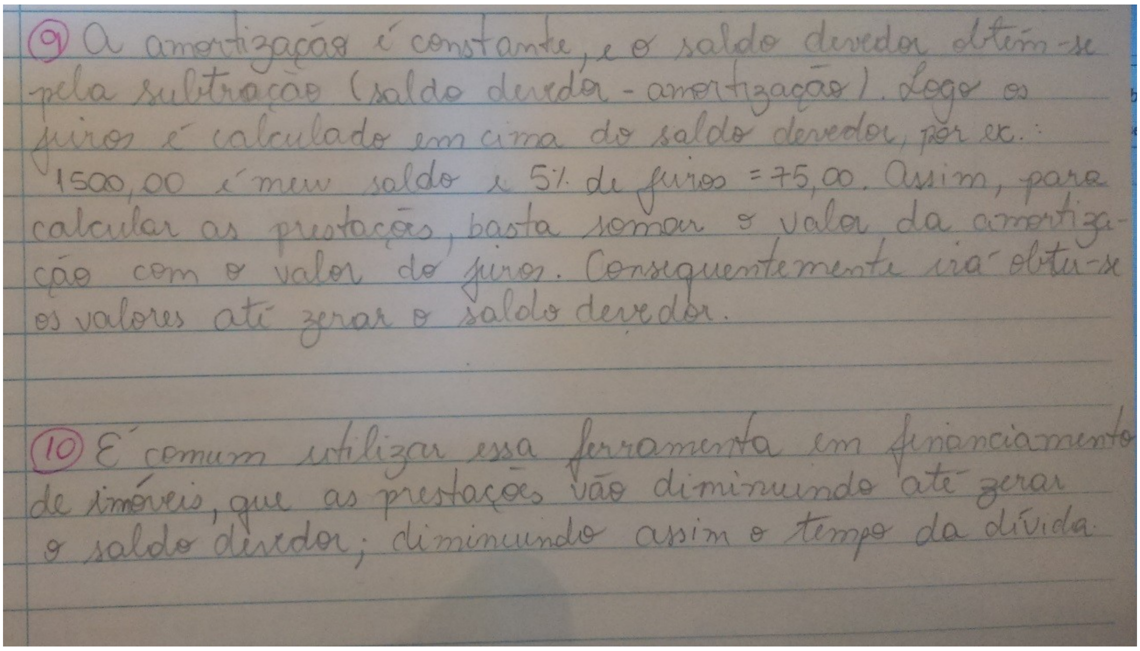
Figura 39 - Respostas do grupo 2 – Itens 4 e 5.


4 O método Price consiste em calcular prestações fixas sendo que o saldo devedor é amortizado aos poucos até a quitação do débito. Os juros estão embutidos às prestações; a principal características é apresentar prestações (ou parcelas) iguais.

5 Financiamento, empréstimos, aposentadoria.. Utilizada por ser um sistema que permite o cálculo de parcelas iguais e periódicas ao longo do prazo de um empréstimo por exemplo.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 40 - Respostas do grupo 2 – Itens 9 e 10.

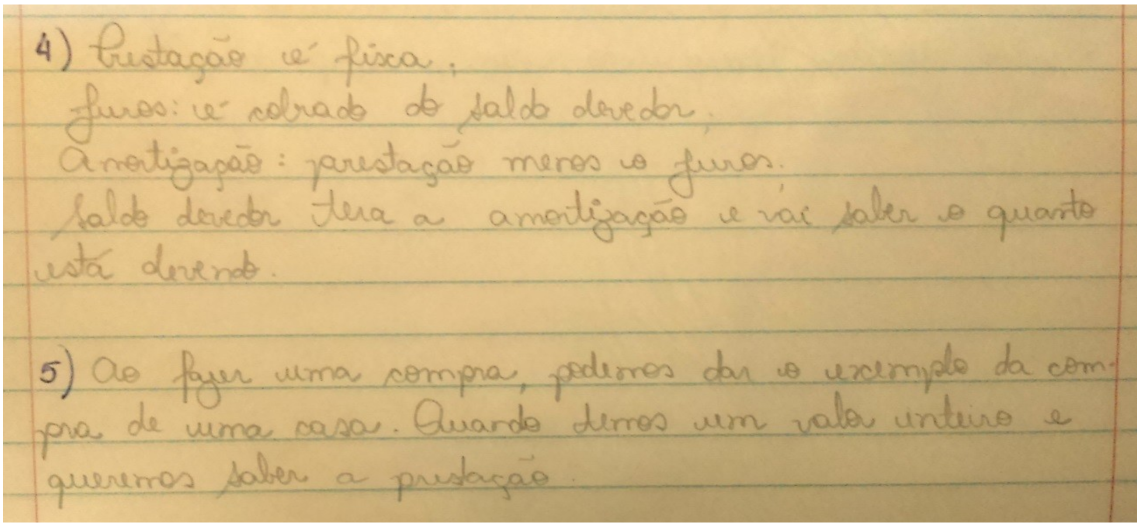

9 A amortização é constante, e o saldo devedor obtém-se pela subtração (saldo devedor - amortização). Logo os juros é calculado em cima do saldo devedor, por ex.: 1500,00 é meu saldo e 5% de juros = 75,00. Assim, para calcular as prestações, basta somar o valor da amortização com o valor do juros. Consequentemente irá obter-se os valores até zerar o saldo devedor.

10 É comum utilizar essa ferramenta em financiamento de imóveis, que as prestações vão diminuindo até zerar o saldo devedor; diminuindo assim o tempo da dívida.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Algumas duplas apresentaram informações que estão de acordo com os métodos aplicados, mas de forma confusa como podemos observar nas Figuras 41, 42 e 43.

Figura 41 - Respostas do grupo 3 – Itens 4 e 5.

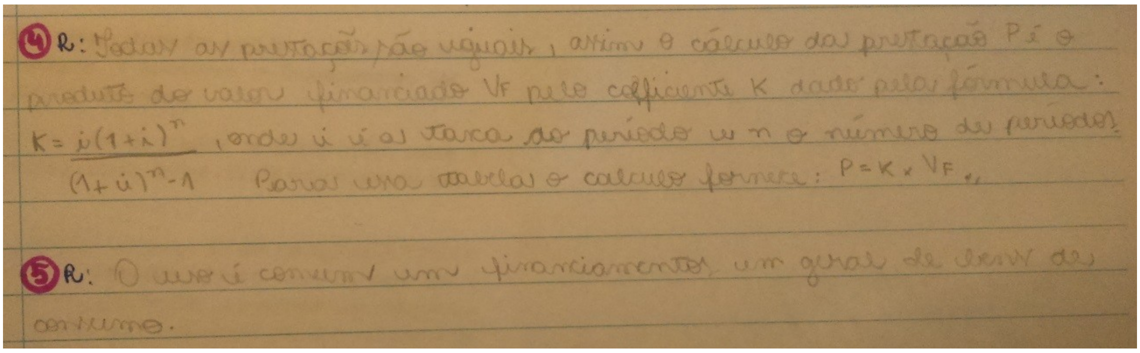


4) Prestação é fixa.
Juros: é cobrado do saldo devedor.
Amortização: prestação menos os juros.
Saldo devedor tira a amortização e vai saber o quanto está devendo.

5) Ao fazer uma compra, podemos dar o exemplo da compra de uma casa. Quando temos um valor inteiro e queremos saber a prestação.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 42 - Respostas do grupo 4 – Itens 4 e 5.

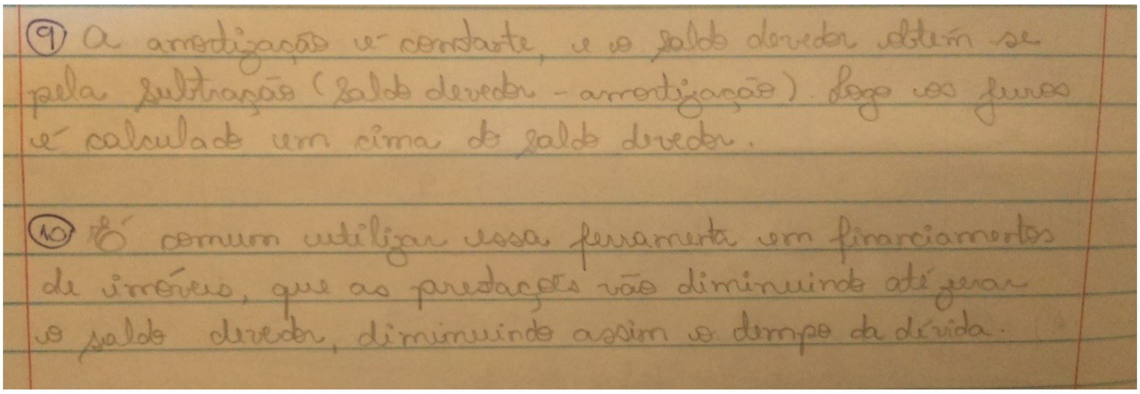


4 R: Todas as prestações são iguais, assim o cálculo da prestação P é o produto do valor financiado VF pelo coefficiente K dado pela fórmula:
$K = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$, onde i é a taxa do período e n o número de períodos. Para usar tabela o cálculo fornece: $P = K \times VF$.

5 R: O uso é comum em financiamentos em geral de bens de consumo.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 43 - Respostas do grupo 5 – Itens 9 e 10.



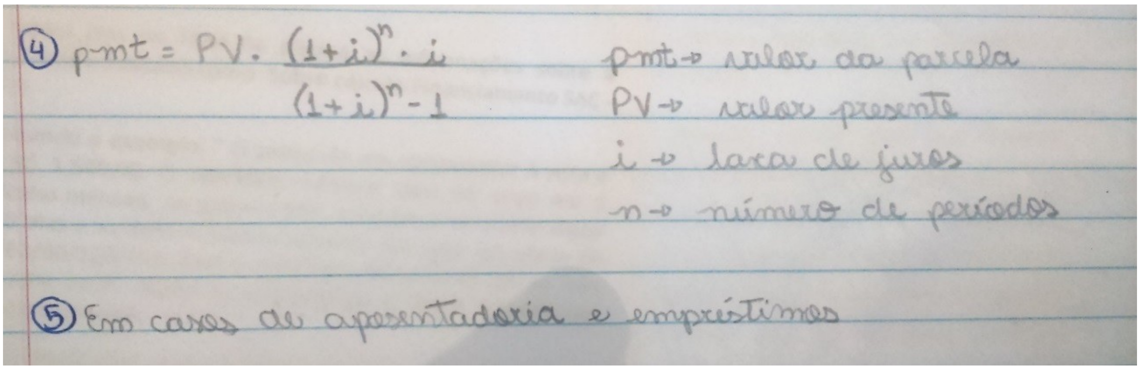
9) A amortização é constante, e o saldo devedor obtém-se pela subtração (saldo devedor - amortização). Logo os juros é calculado em cima do saldo devedor.

10) É comum utilizar essa ferramenta em financiamentos de imóveis, que as prestações vão diminuindo até zerar o saldo devedor, diminuindo assim o tempo da dívida.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

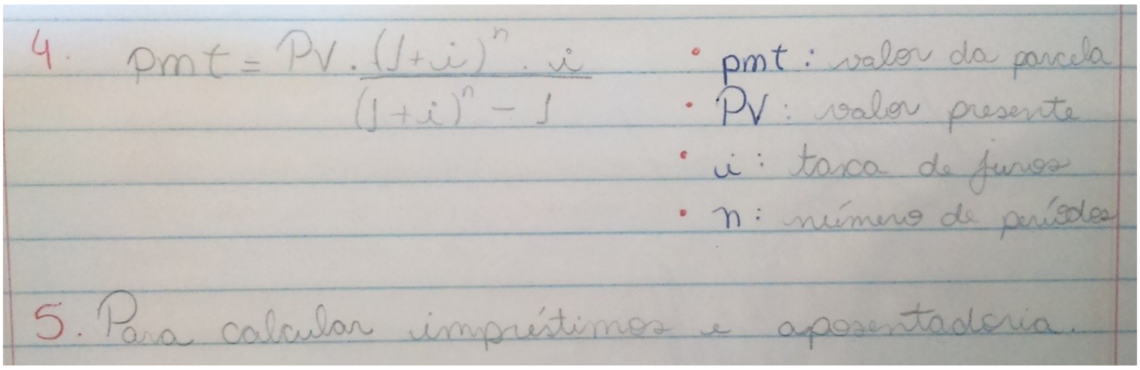
No item 4 tivemos ainda duas duplas que apresentaram apenas a metodologia de cálculo para as prestações como podemos observar nas Figuras 44 e 45.

Figura 44 - Respostas do grupo 6 – Itens 4 e 5.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 45 - Respostas do grupo 7 – Itens 4 e 5.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Destacamos que nos itens 4, 5, 9 e 10 o nosso objetivo foi de que os alunos fizessem uma investigação sobre os métodos aplicados para a obtenção das tabelas de amortização “PRICE” e “SAC”. Não tínhamos a pretensão de que após uma rápida pesquisa eles compreendessem esses sistemas e os seus métodos na sua totalidade, mas sim que adquirissem um conhecimento prévio sobre o assunto.

Retornamos para a sala de aula onde fizemos uma retomada da construção das tabelas “PRICE” e “SAC” a partir dos dois exemplos resolvidos na atividade anterior com o auxílio do site www.calculador.com.br nas funções “**Tabela Price**” e “**Tabela SAC**”.

Destacamos nessa aula como são obtidos os valores que compõem as duas tabelas e os alunos com o uso da calculadora científica fomos obtendo os resultados.

Alguns perceberam que no site para a "**Tabela SAC**" a taxa deveria ser indicada ao ano (a.a.) e na composição da mesma tabela elaborada em aula, a taxa utilizada ao mês (a.m.). Eles puderam observar que os resultados foram os mesmos. Esse foi então o momento para abordarmos a metodologia aplicada para a obtenção de taxas equivalentes no regime de capitalização composto.

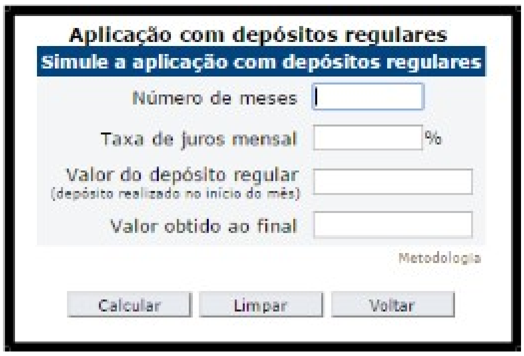
Para finalizar a atividade pedimos para que resolvessem alguns exercícios que envolviam o cálculo das duas tabelas e também equivalência de taxas. De maneira geral percebemos que aplicaram bem os conceitos.

4.8. Situação de Aprendizagem 6

Tema:	Montante de uma sequência uniforme de pagamentos
Competências e Habilidades:	Resolver problemas envolvendo o montante sequências uniforme de pagamentos; Compreender como funciona o cálculo do montante de uma sequência uniforme de pagamentos e utilizar a calculadora do cidadão para efetuar esses cálculos; Resolver problemas envolvendo equivalência de capitais;
Estratégias:	Resolução de problemas, Manuseio da calculadora científica e calculadora do cidadão (ferramenta disponível no site do Banco Central).
Duração:	4 aulas de 50 minutos

Nessa etapa da nossa proposta metodológica de ensino, tínhamos como objetivo inicial explorar a Calculadora do cidadão, agora na função "**Aplicação com depósitos regulares**". Essa função da calculadora auxilia no cálculo de um montante obtido a partir de uma sequência de depósitos regulares feitos numa aplicação. Acessando essa função da calculadora, temos as informações apresentadas na Figura 46.

Figura 46 - Aplicação com depósitos regulares.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Para essa função são apresentados quatro campos para o preenchimento, que correspondem as quatro variáveis envolvidas nesse tipo de situação (Número de meses; Taxa de juros mensal; Valor do depósito regular; Valor obtido no final). Dessa forma, inserindo os valores de três dessas variáveis e clicando em calcular obtemos o valor da 4ª variável que completa as informações da aplicação.

Destacamos que a metodologia aplicada considera que os depósitos são realizados sempre no início de cada mês sempre no mesmo dia.

Retornamos então com os alunos ao laboratório de informática e lhes apresentamos a seguinte atividade:

Atividade 6 – Montante de uma sequência uniforme de pagamentos

Acessem a calculadora do cidadão (Banco Central) disponível em http://www.bcb.gov.br/?calculadora. Depois acessem a função **Aplicação com depósitos regulares**, façam a leitura dos quatro exemplos apresentados e com o auxílio da ferramenta efetuem os cálculos em cada exemplos. Em seguida respondam:

1. Quais foram os resultados obtidos no cálculo dos exemplos?

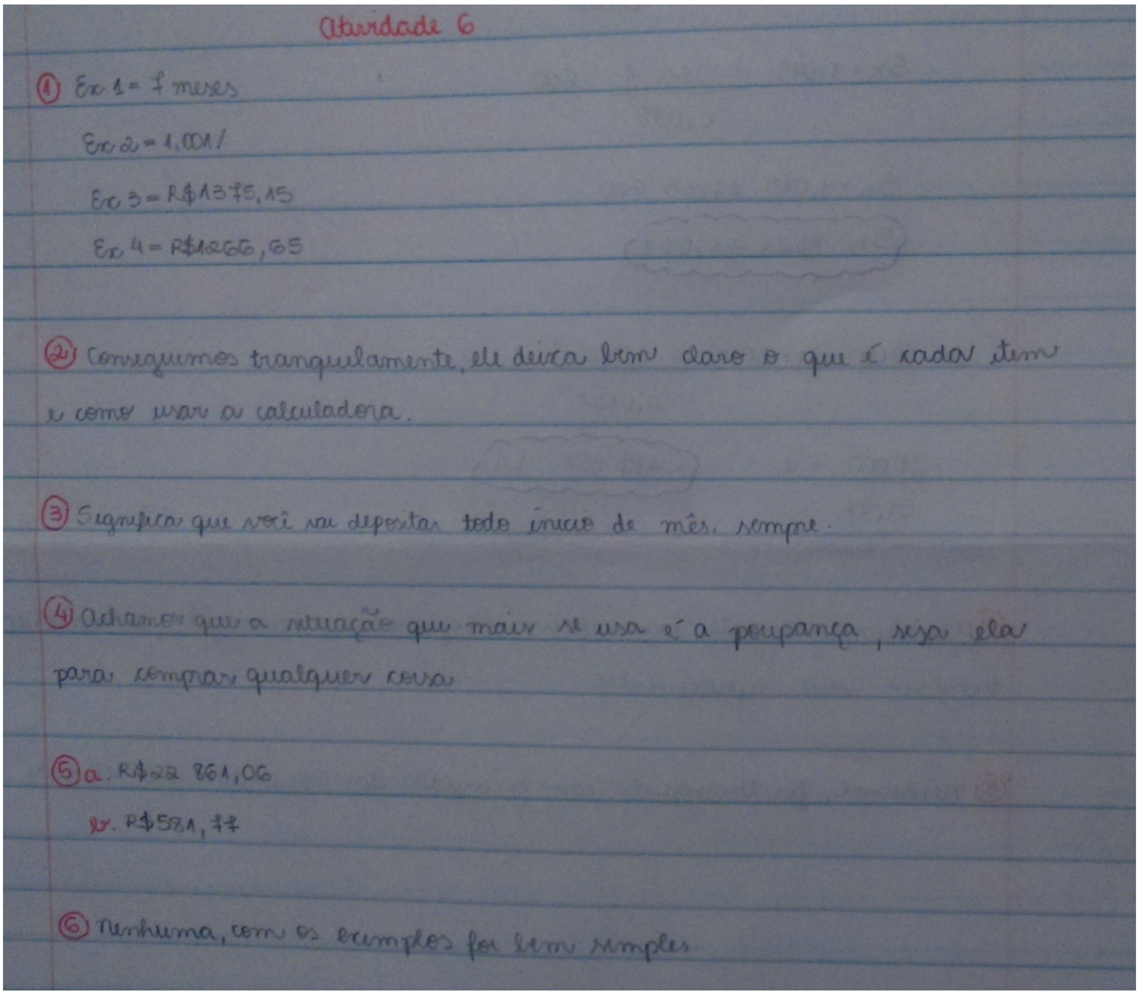
2. Vocês conseguiram entender o funcionamento da ferramenta pelas orientações e exemplos apresentados? Por quê?

3. No item **Valor do depósito regular** aparece a informação (**depósito realizado no início do mês**). O que

significa isso? Justificar. 4. Apresentem situações do cotidiano em que vocês acreditam que que essa ferramenta pode ser útil. 5. Usando a ferramenta resolvam os problemas a seguir: a) Uma pessoa deposita mensalmente R$ 600,00 num fundo que rende juros compostos, à taxa de 1,5% a.m. Qual será seu montante no instante imediatamente após o 30º depósito? b) Quanto uma pessoa deverá depositar num fundo que rende juros compostos, à taxa de 1,2% a.m., para ter um montante de R$ 30000,00 no instante após o último depósito. Considerando que serão feitos 40 depósitos? 6. Quais foram as dificuldades para resolver os problemas? 7. Clicando em **Metodologia** quais são as informações obtidas? 8. Usando uma calculadora científica (pode ser a do celular) tentem resolver os problemas anteriores aplicando essa metodologia. 9. Os resultados obtidos foram compatíveis com os obtidos na calculadora do cidadão? Justificar. 10. Quais foram as dificuldades para realizar os cálculos?

O roteiro dessa atividade é muito semelhante ao roteiro da atividade 4 e talvez por esse motivo percebemos que os alunos a executaram rapidamente e com muita tranquilidade. De maneira geral eles relataram que conseguiram compreender bem o funcionamento dessa função da calculadora e os resultados obtidos nas operações propostas foram corretos. Isso pode ser observado nas Figuras 47, 48, 49 e 50.

Figura 47 - Respostas do grupo 1 – Itens 1 a 6.



Atividade 6

1 Ex 1 = 7 meses

Ex 2 = 1,001/

Ex 3 = R$1375,15

Ex 4 = R$1266,65

2 Conseguimos tranquilamente, ele deixa bem claro o que é cada item e como usar a calculadora.

3 Significa que você vai depositar todo início de mês, sempre.

4 Achamos que a situação que mais se usa é a poupança, seja ela para comprar qualquer coisa.

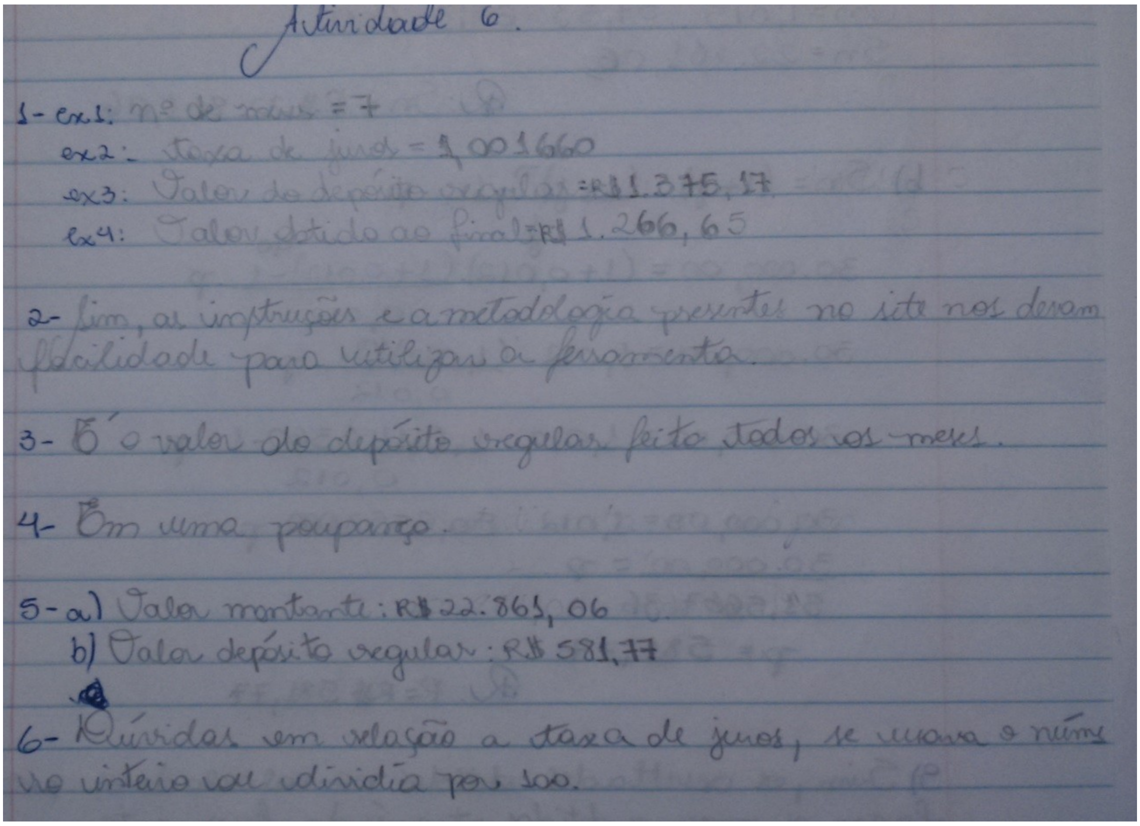
5 a. R$22 861,06

b. R$581,77

6 Nenhuma, com os exemplos foi bem simples.

Fonte: Arquivo do pesquisador

Figura 48 - Respostas do grupo 2 – Itens 1 a 6.



Atividade 6.

1- ex1: nº de meses = 7
ex2: taxa de juros = 1,001660
ex3: Valor do depósito regular = R$ 1.375,17
ex4: Valor obtido ao final = R$ 1.266,65

2- Sim, as instruções e a metodologia presentes no site nos deram facilidade para utilizar a ferramenta.

3- É o valor do depósito regular feito todos os meses.

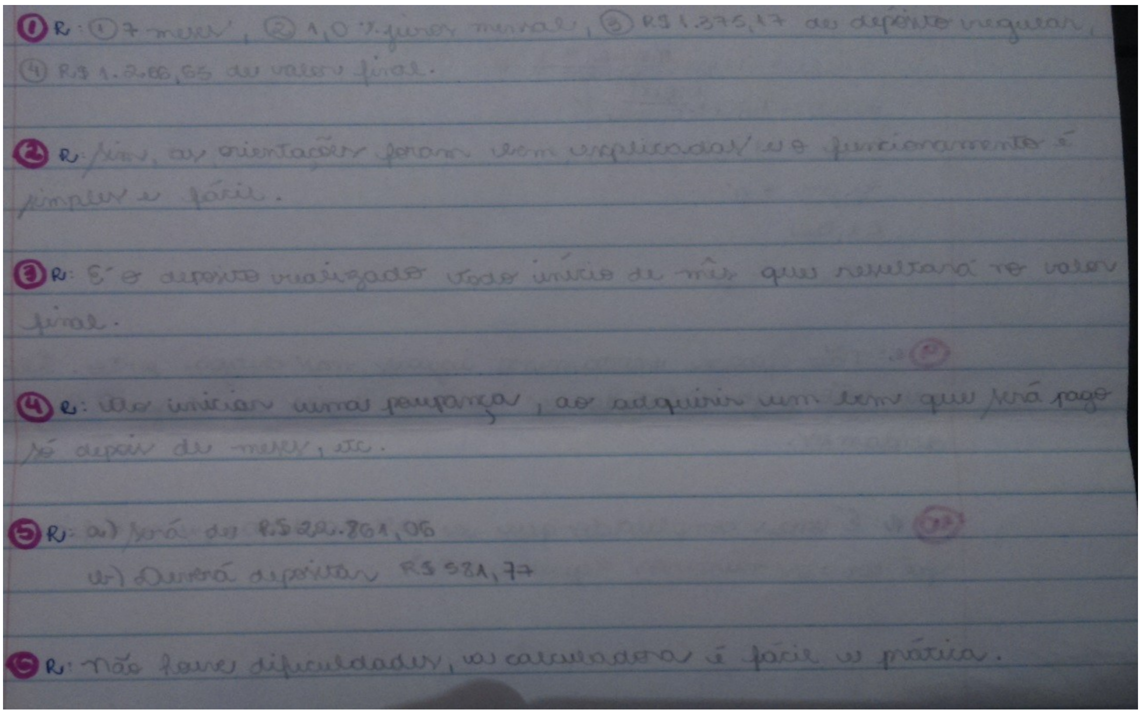
4- Em uma poupança.

5- a) Valor montante: R$ 22.861,06
b) Valor depósito regular: R$ 581,77

6- Dúvidas em relação a taxa de juros, se usava o número inteiro ou dividia por 100.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 49 - Respostas do grupo 3 – Itens 1 a 6.



1 R: 1 7 meses, 2 1,0 % juros mensal, 3 R$ 1.375,17 de depósito regular, 4 R$ 1.266,65 de valor final.

2 R: Sim, as orientações foram bem explicadas e o funcionamento é simples e fácil.

3 R: É o depósito realizado todo início de mês que resultará no valor final.

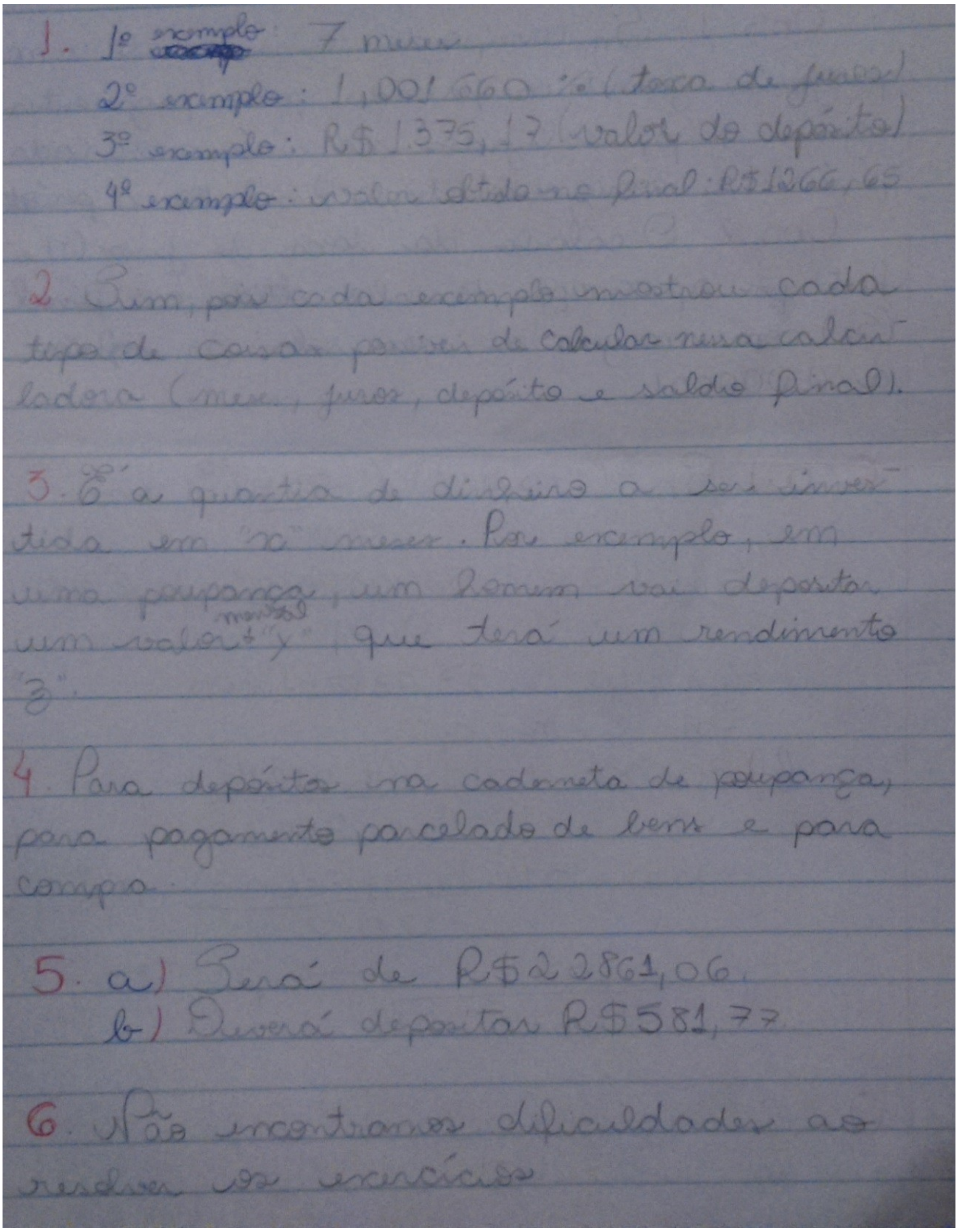
4 R: Ao iniciar uma poupança, ao adquirir um bem que será pago só depois de meses, etc.

5 R: a) Será de R$ 22.861,06
b) Deverá depositar R$ 581,77

6 R: Não houve dificuldades, a calculadora é fácil e prática.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 50 - Respostas do grupo 4 – Itens 1 a 6.



1. 1º exemplo: 7 meses
2º exemplo: 1,001660 % (taxa de juros)
3º exemplo: R$ 1375,17 (valor do depósito)
4º exemplo: valor obtido no final: R$1266,65

2. Sim, pois cada exemplo mostrou cada tipo de coisa possível de calcular nessa calculadora (meses, juros, depósito e saldo final).

3. É a quantia de dinheiro a ser investida em "n" meses. Por exemplo, em uma poupança, um homem vai depositar um valor mensal "x", que terá um rendimento "z".

4. Para depósitos na caderneta de poupança, para pagamento parcelado de bens e para compra.

5. a) Terá de R$ 22861,06.
b) Deverá depositar R$ 581,77.

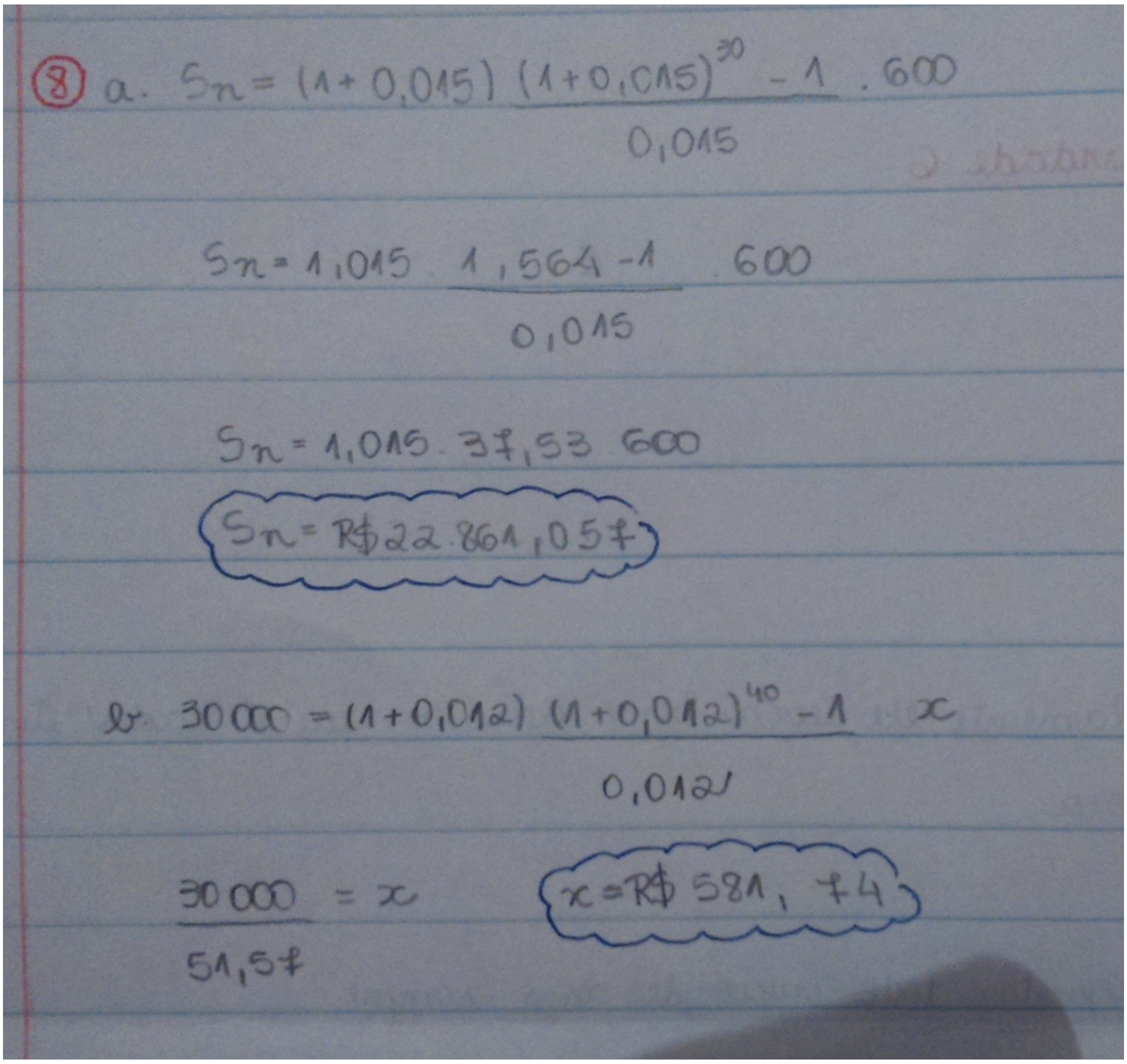
6. Não encontramos dificuldades ao resolver os exercícios.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Nessas respostas observamos também que a questão 4, em que eles deveriam indicar situações do cotidiano em que essa ferramenta pode ser útil a maioria relacionou essa função com aplicações regulares na poupança.

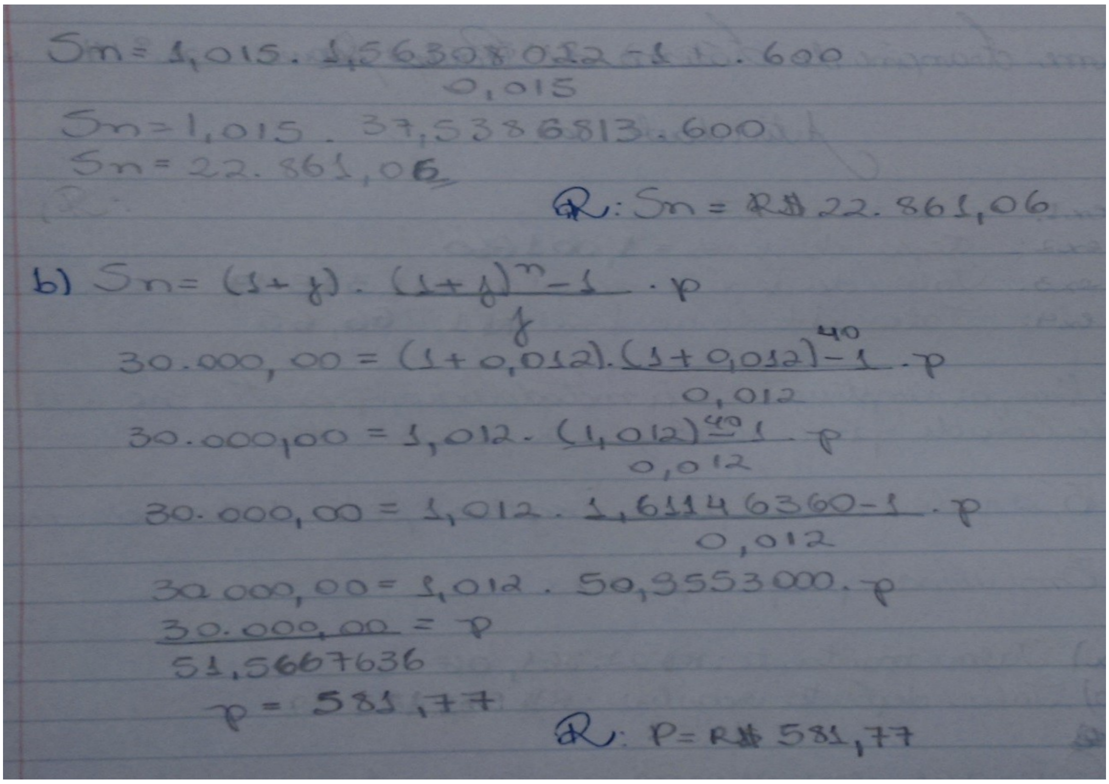
Na aplicação da fórmula indicada pela ferramenta percebemos que eles identificaram bem as variáveis envolvidas e que aplicaram bem a fórmula. Alguns efetuaram arredondamentos no processo de aplicação da fórmula e obtiveram resultados com valores próximos aos que haviam sido obtidos com a Calculadora do cidadão. Algumas resoluções podem observadas nas Figuras 51, 52, 53 e 54.

Figura 51 - Resolução do grupo 1 – Item 8.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 52 - Resolução do grupo 2 – Item 8.

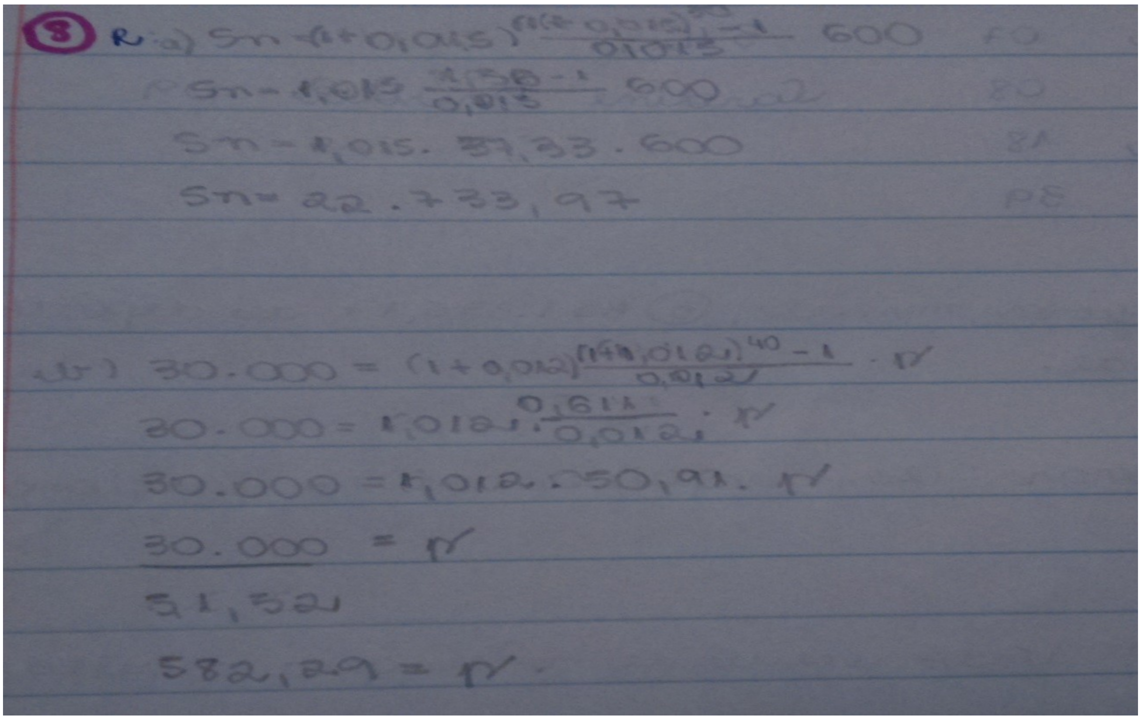


$$Sn = 1{,}015 \cdot \frac{1{,}563080822 - 1}{0{,}015} \cdot 600$$
$$Sn = 1{,}015 \cdot 37{,}5386813 \cdot 600$$
$$Sn = 22.861{,}06$$
R: Sn = R$ 22.861,06

b) $$Sn = (1+j) \cdot \frac{(1+j)^n - 1}{j} \cdot p$$
$$30.000{,}00 = (1+0{,}012) \cdot \frac{(1+0{,}012)^{40} - 1}{0{,}012} \cdot p$$
$$30.000{,}00 = 1{,}012 \cdot \frac{(1{,}012)^{40} - 1}{0{,}012} \cdot p$$
$$30.000{,}00 = 1{,}012 \cdot \frac{1{,}61146360 - 1}{0{,}012} \cdot p$$
$$30.000{,}00 = 1{,}012 \cdot 50{,}9553000 \cdot p$$
$$\frac{30.000{,}00}{51{,}5667636} = p$$
$$p = 581{,}77$$
R: P = R$ 581,77

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 53 - Resolução do grupo 3 – Item 8.

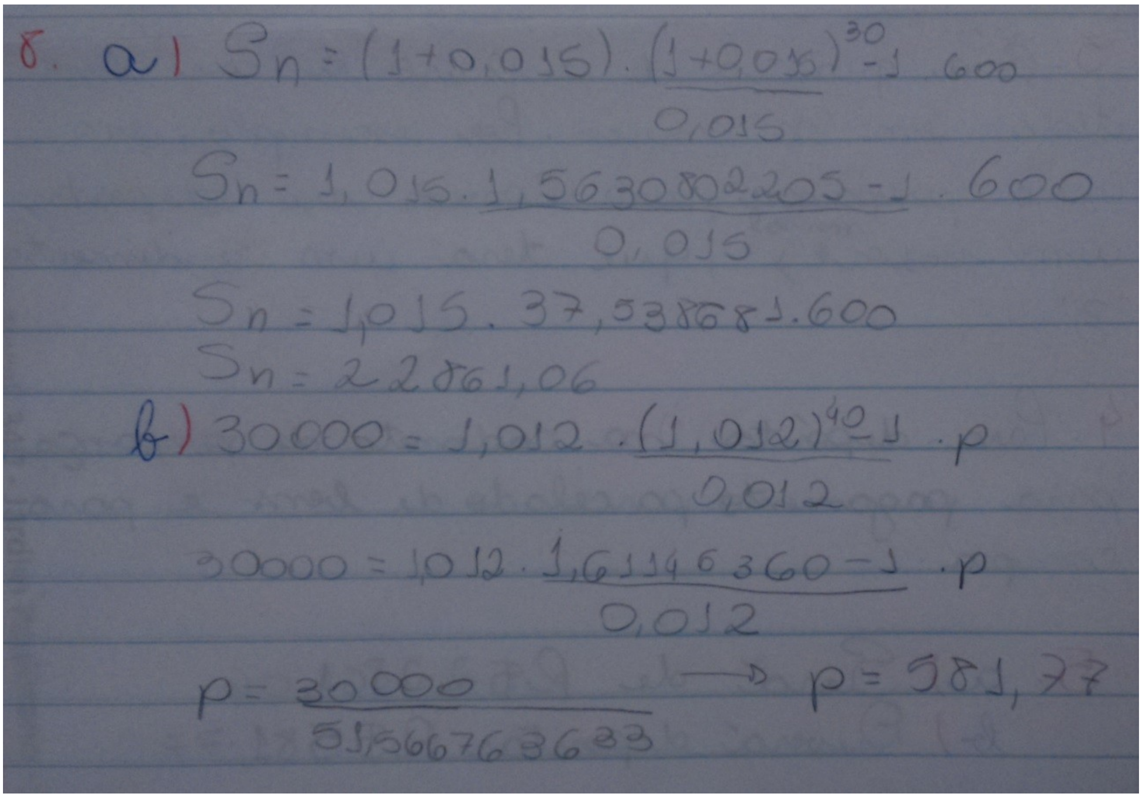


8 R: a) $$Sn = (1+0{,}015) \cdot \frac{(1+0{,}015)^{30} - 1}{0{,}015} \cdot 600$$
$$Sn = 1{,}015 \cdot \frac{1{,}56 - 1}{0{,}015} \cdot 600$$
$$Sn = 1{,}015 \cdot 37{,}33 \cdot 600$$
$$Sn = 22.733{,}97$$

b) $$30.000 = (1+0{,}012) \cdot \frac{(1+0{,}012)^{40} - 1}{0{,}012} \cdot r$$
$$30.000 = 1{,}012 \cdot \frac{0{,}611}{0{,}012} \cdot r$$
$$30.000 = 1{,}012 \cdot 50{,}91 \cdot r$$
$$\frac{30.000}{51{,}52} = r$$
$$582{,}29 = r$$

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 54 - Resolução do grupo 4 – Item 8.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Retornamos para a sala de aula e generalizamos as situações que envolvem aplicação com depósitos regulares de acordo com a proposta de (IEZZI; HAZZAN; DEGENSAJN. 2004, p. 72). Utilizamos o diagrama de flechas montando a chamada equação de valor, em seguida aplicamos o conceito de equivalência de capitais e o método da soma dos termos de uma Progressão Geométrica finita.

Para isso entregamos para os alunos uma folha complementar que trazia essas informações, pedimos para que eles a colassem no caderno e em posse dela fomos para o quadro e representamos isso detalhadamente.

De acordo com Iezzi; Hazzan; Degensajn (2004, p. 72)

> Se considerarmos n depósitos mensais iguais a R, nas datas 1, 2, 3, ..., n, rendendo juros compostos, a uma taxa i mensal. Queremos saber qual a soma M dos montantes desses depósitos na data n (isto é logo após ter sido feito o último depósito).

Esquematicamente temos

Seja, M_k o montante do k – ésimo depósito na data n.

Sabemos que

$$M_k = R \,.\, (1+i)^{n-k} \quad \text{para } k = 1, 2, ..., n.$$

O montante final será a soma dos montantes de cada depósito, ou seja,

$$M = R \,.\, (1+i)^{n-1} + R \,.\, (1+i)^{n-2} + R \,.\, (1+i)^{n-3} + ... + R$$

Os termos do 2º membro dessa expressão constituem uma progressão geométrica cuja razão vale q = $\frac{1}{(1+i)}$ e cujo 1º termo é $a_1 = R \,.\, (1+i)^{n-1}$.

Ao aplicarmos a fórmula da soma dos termos da progressão geométrica finita, temos:

$$M = \frac{R.(1+i)^{n-1}.\left[\frac{1}{(1+i)^n}-1\right]}{\frac{1}{(1+i)}-1} = R \,.\, \frac{\frac{1}{(1+i)}-(1+i)^{n-1}}{\frac{-i}{(1+i)}} = R \,.\, \frac{\left[\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)}\right]}{\frac{-i}{(1+i)}}$$

Portanto, $M = R \,.\, \frac{(1+i)^n-1}{i}$

Essa fórmula relaciona o montante de uma sequência uniforme de depósitos.

Os alunos perceberam que da mesma forma que havia ocorrido na atividade 4, essa fórmula não estava escrita como a que eles haviam encontrado na metodologia da Calculadora do cidadão. Então aplicamos essa fórmula na resolução dos dois problemas que tinham sido propostos na atividade anterior e como já tínhamos previsto ocorreu que nesse caso os resultados não foram os mesmos resultados obtidos com a Calculadora do cidadão.

Isso chamou a atenção de todos. Pedimos então para que tentassem descobrir porque isso havia acontecido. Depois de levantarem muitas hipóteses, a maioria relatava que o processo para a dedução da fórmula poderia conter algum erro, comentamos que esse processo era o mesmo destacado na obra (IEZZI; HAZZAN; DEGENSAJN. 2004) e que a diferença estava no fato de que essa fórmula que havíamos deduzido considera o montante obtido imediatamente após o último depósito enquanto que a Calculadora do cidadão considera que depois do último depósito é aguardada a capitalização de mais um período para se obter o montante.

Mostramos então que a fórmula aplicada na Calculadora do cidadão é a mesma que deduzimos multiplicada por (1+i). Em conversa com os alunos pedimos para que eles elegessem qual dos dois métodos eles acreditavam que fosse melhor para situações do cotidiano e eles escolheram o método da Calculadora do cidadão.

Usando esse método propomos a eles 4 exercícios sobre o financiamento com prestações fixas. Esses exercícios também foram retirados do livro (IEZZI; HAZZAN; DEGENSAJN. 2004).

5. AVALIAÇÃO

No capítulo anterior desenvolvemos uma sequência didática composta por 6 situações de aprendizagem abordando os conceitos fundamentais da Matemática Financeira mediante a investigação e aplicação das ferramentas “Calculadora do cidadão” e “www.calculadora.com.br”.

Nosso objetivo neste capítulo é o de avaliar a capacidade dos alunos em resolver problemas comuns no cotidiano de qualquer cidadão que envolvam a Matemática Financeira. Para isso, elaboramos uma avaliação simulando o contexto financeiro de uma família que chamamos de “Família Silva”. Nesta atividade colocamos algumas situações financeiras vividas por esta família e que os alunos, usando o conhecimento financeiro adquirido, a ajudassem resolver.

A atividade proposta para essa avaliação foi a seguinte:

Avaliação – Matemática Financeira

A “Família Silva”

A família “Silva” é composta por 3 pessoas e é uma família comum que têm uma renda mensal de R$ 3000,00. Atualmente essa família têm uma despesa fixa de R$ 1800,00 (prestação da casa, combustível, água, luz, telefone, internet e alimentação). Obviamente que além dessa despesa fixa a família tem outros gastos que variam de um mês para o outro. A família tem como princípio não gastar além da renda mensal sempre com o objetivo de alcançar novas conquistas. A família possui ainda um saldo de R$ 5000,00 numa conta poupança.

Com base nessas informações sobre a “Família Silva” e nos conhecimentos adquiridos nas aulas sobre Matemática Financeira ajude essa família na resolução das situações a seguir:

Situação 1: O carro da “Família Silva” está apresentando problemas os deixando na mão frequentemente. A família decide então pesquisar o preço de um carro novo (modelo 0 Km) e encontra uma promoção em que o modelo desejado por eles está custando R$ 30000,00 à vista. O veículo usado da família foi avaliado pela concessionária em R$ 13000,00 e poderá ser dado como entrada. Como eles não têm o valor total para o pagamento à vista e como decidiram que o prazo máximo que aceitariam para um possível financiamento é de 24 meses. Sobram para eles as seguintes opções:

Opção 1: Entrada de R$ 13000,00 (considerando o veículo usado como entrada) + 24 parcelas fixas com taxa de 2% a.m. Opção 2: Entrada de R$ 18000,00 (considerando o veículo usado + a poupança como entrada) + 24 parcelas fixas com taxa de 1,5% a.m. Responda: a) Qual seria o valor de cada prestação se eles escolhessem a opção 1? Explique. b) Qual seria o valor de cada prestação se eles escolhessem a opção 2? Explique. c) Matematicamente a família poderia escolher qualquer uma das opções, considerando o seu orçamento familiar? Explique. d) Na sua opinião, qual seria a opção mais vantajosa? Por quê? e) Apresentem uma outra opção para que essa família comprasse o carro. **Situação 2**: Supondo que na situação anterior a família tenha escolhido a opção 2, por entender que essa opção seria para eles a mais vantajosa naquele momento. É fato que por essa escolha eles ficaram com a poupança zerada, porém como consideram importante ter uma reserva disponível na poupança para eventuais emergências. Eles decidem então que querem recuperar o saldo da poupança com o R$ 5000,00 durante os 24 meses em que estarão pagando o carro. Quanto eles deverão depositar mensalmente para que depois dos 24 meses a poupança volte a ter esse saldo considerando juros de 0,57% a.m.? **Situação 3**: Supondo que a família tivesse escolhido a opção 1 para a compra do carro. Qual seria o saldo da poupança deles depois de 24 meses? **Situação 4**: Escolhendo a opção 2 quanto eles deveriam depositar mensalmente se quisessem alcançar o saldo da poupança com o mesmo valor obtido na situação 3? Esta opção continuaria sendo vantajosa? Explique. **Situação 5**: Considerando a opção 2 (sem depositar nada na poupança) e que logo depois de pagar a 13ª prestação do carro o Sr. Silva tenha recebido R$ 6000,00 de bônus de natal da empresa que trabalha. Esse valor seria suficiente para quitar a dívida do carro? Explique. Se você fosse o Sr. Silva que atitude você tomaria?

A atividade foi realizada em um dos laboratórios de informática da escola, sendo que os alunos foram agrupados em duplas ou trios. Ao todo participaram da avaliação 38 alunos arranjados em 17 grupos.

Nessa atividade de avaliação apresentamos situações que abordam os conceitos básicos de Matemática Financeira que foram explorados ao longo das atividades propostas no capítulo anterior.

Na 1ª situação a "Família Silva" decide trocar de carro e têm duas opções para a compra, o conceito envolvido nesse caso é a sequência uniforme de pagamentos (postecipados) que abordamos em nossa pesquisa associando com a ferramenta "Calculadora do cidadão” na função “Financiamento com prestações fixas”.

Nossa expectativa era de que os alunos identificassem a ferramenta e a função correta para efetuar o cálculo do valor da prestação em cada uma das opções. Percebemos que todos os grupos o fizeram com sucesso, ou seja, todos encontraram o valor correto da prestação nas duas opções. Para a opção 1 o valor de cada prestação seria de R$ 898,81, enquanto que para a opção 2 o valor seria de R$ 599,09.

No item c) dessa 1ª situação, onde questionávamos se matematicamente a família poderia escolher qualquer uma das opções todos identificaram que a resposta era SIM, pois como as despesas fixas da família somavam R$ 1800,00 e a renda mensal era de R$ 3000,00 então havia uma “sobra” de R$ 1200,00 se não existisse nenhum outro gasto.

No item d) onde pedíamos a opinião sobre qual das duas opções eles julgavam ser mais vantajosa, obtivemos respostas variadas que mostraram um censo crítico sobre a situação. Tivemos que dos 17 grupos que realizaram a avaliação, 12 escolheram a opção 2 como sendo a mais vantajosa, enquanto que 5 grupos escolheram a opção 1. Entre os grupos que escolheram a opção 1 algumas respostas foram:

> *“Escolheria a opção 1, pelo fato dela não usar a poupança na entrada”.*
>
> *“A opção 1, pois o valor se encaixa nos custos mensais da família e eles ainda teriam dinheiro guardado no banco”.*
>
> *“Primeira opção, pois teriam saldo para possíveis imprevistos, que caso não ocorressem poderiam usar esse saldo para quitar as prestações”.*

Entre os grupos que escolheram a opção 2 algumas respostas foram:

> *“A segunda opção, porque as parcelas são mais suaves e ele pode até investir em uma nova poupança, além de que o juros é menor”.*
>
> *“A segunda opção, pois os juros são menores e o valor das parcelas também”.*
>
> *“A segunda opção, tem menos juros e no final a família vai pagar menos”.*
>
> *“A opção 2, pois no final terá um valor menor do que obtido na opção 1”.*

No item e) quando pedimos para que eles apresentassem uma outra opção para a compra do carro alguns grupos questionaram sobre qual valor da taxa que eles deveriam usar. Comentamos então que isso poderia variar de uma instituição para outra, mas que de maneira geral a medida que se reduz o valor financiado ou o número de prestações muitas vezes o valor da taxa de juros também reduz. Orientamos então que eles usassem a taxa que julgassem interessante.

Algumas das opções apresentadas foram as seguintes:

"Entrada de R$ 15000,00 (considerando o veículo usado + R$ 2000,00 da poupança) mais 24 parcelas fixas com taxa de 1,5% ao mês, o valor da prestação seria de R$ 748,46 e ainda restaria R$ 3000,00 na poupança".

"Com 48 parcelas e a taxa de juros de 2,5%, e a entrada de R$ 13000,00. O valor fixo da parcela será de R$ 612,10."

"Dar R$ 18000,00 de entrada e dividir no menor número de prestações possível (desde que caiba no orçamento) para os juros ficar menor".

"Entrada de 15000 reais + 24 parcelas fixas com taxa de 1,8% a.m. (valor da prestação 775,21)".

Na 2ª situação, supondo que a família tivesse escolhido a opção 2, pedimos para que eles calculassem o valor que deveria ser depositado mensalmente na poupança, considerando uma taxa de juros de 0,57% a.m. para que a família recuperasse o saldo de R$ 5000,00 em 24 meses. Nossa expectativa era de que eles percebessem que nesse caso a função adequada da "Calculadora do cidadão" para efetuar o cálculo era "Aplicação com depósitos regulares". Tivemos que dos 17 grupos que realizaram a avaliação 14 encontraram o valor correto que deveria ser depositado mensalmente para se obter um saldo R$ 5000,00 em 24 meses, que no caso era de R$ 193,90. Dos 3 grupos que não encontraram o valor correto, 2 deles obtiveram o valor R$ 223,50, acreditamos que eles tenham usado a "Calculadora do cidadão" na função "Financiamento com prestações fixas", ou seja, não compreenderam a situação. O outro grupo deu o valor de R$ 155,00. Não conseguimos identificar como eles chegaram nesse resultado.

Na 3ª situação, supondo que a família tivesse escolhido a opção 1, pedimos para que eles calculassem o saldo da poupança depois dos 24 meses. Esperávamos que para isso eles usassem a função "Valor futuro de um capital" da "Calculadora do cidadão". Nesse caso, novamente 14 responderam corretamente o valor de R$ 5730,77. Dois desses grupos não usaram a "Calculadora do cidadão". Eles aplicaram a fórmula do montante para os juros compostos e usaram a calculadora científica.

Dos três grupos que não chegaram no valor correto cada um apresentou um valor diferente, R$ 10730,00, R$ 10000,00 e R$ 5675,19. Não conseguimos identificar como eles chegaram a esses valores. O grupo que emitiu a resposta R$ 10730,00 relatou que considerou que se depositava um valor na poupança todo mês, mas não disse qual era esse valor.

Na situação 4, supondo que a família tivesse escolhido a opção 2, só que agora considerando que eles queriam recuperar na poupança com o valor corrigido, ou seja, R$ 5730,77 (valor que deveria ter sido obtido na situação 3). Questionávamos também se a opção 2 continuaria sendo mais vantajosa. Nosso objetivo com esse questionamento era de que eles fizessem a comparação entre a opção 1 e a opção 2 considerando que o valor da poupança seria recuperado com correção da poupança (0,57% a.m.). Para essa pergunta 13 grupos emitiram a resposta correta R$ 222,23, provavelmente porque identificaram corretamente que a função a ser usada da "Calculadora do cidadão" era "Aplicação com depósitos regulares" e que o montante final tinha que alcançar o valor de R$ 5730,77. Dos 4 grupos que não obtiveram o resultado correto, 3 deles foram os mesmos que erraram a resposta da situação 3, pois esse cálculo dependia do resultado anterior. O outro grupo que não chegou no resultado correto provavelmente não compreendeu que o montante final deveria ser de R$ 5730,77.

Quanto ao questionamento sobre a vantagem entre opção 1 ou opção 2 (com depósitos regulares para recuperar o saldo da poupança corrigido), todos responderam que dessa forma a opção 2 era mais vantajosa, porém os 4 grupos que erraram o cálculo não tinham argumentos numéricos para comprovar isso. Nosso objetivo era de que eles percebessem que nas duas opções a família teria ao final dos 24 meses o carro e um saldo de R$ 5730,77 na poupança, mas que para isso na opção 1 eles desembolsariam mensalmente R$ 898,81 (valor da prestação nesse caso), enquanto que na opção 2 eles desembolsariam mensalmente R$ 821,32 (valor da prestação R$ 599,09 + valor do depósito na poupança R$ 222,23).

Alguns grupos justificaram a escolha pela opção 2, assim:

> *"Continuaria sendo vantajoso, pois mesmo com esse acréscimo o valor da parcela na opção 1 continua sendo mais caro (821,32 < 898,81)".*
>
> *"Sim, pois ao final do período de 24 meses para a família ter o mesmo saldo final a opção 1 gastará R$ 21571,44 e a opção 2 R$ 19711,68".*
>
> *"Continuaria sendo vantajosa, pois o valor das despesas (considerando o depósito*

mensal) seria menor do que a opção 1".

"Esta opção continuaria sendo vantajosa devido ao preço da prestação".

Vale destacar que alguns grupos alertaram para o fato de que nos dois casos a família comprometeria quase todo o valor da renda que sobra tirando as despesas fixas e que isso poderia não ser um bom negócio. Um dos grupos disse que a família não tinha condições seguras para comprar o carro e que o melhor seria esperar e poupar mais. Isso mostra o senso crítico deles diante dessa problemática.

Na situação 5, supondo que a família tivesse escolhido a opção 2 e que não tivesse poupado nada nesse período, ou seja, permaneceram com a poupança zerada, mas que logo após pagar a 13ª prestação o Sr. Silva tenha recebido de bônus de natal R$ 6000,00 perguntamos se esse valor seria suficiente para quitar o carro. Esperávamos que eles lembrassem que no site www.calculador.com.br a função "Tabela Price" mostra a tabela de amortização da dívida considerando o financiamento com prestações fixas e identificassem o saldo devedor após o pagamento da 13ª prestação. Tivemos que 13 grupos identificaram corretamente que após o pagamento da 13ª prestação o saldo devedor seria de R$ 6033,50 e que então o valor recebido pelo Sr. Silva não seria suficiente, pois ele havia recebido R$ 6000,00.

Na mesma situação perguntamos também qual seria a posição deles se fossem o Sr. Silva. Entre os 13 grupos que encontraram o valor correto 12 deles responderam que complementariam com parte da renda mensal os R$ 33,50 que faltavam e que quitariam o carro. O outro grupo que fez o cálculo correto disse que, como era Natal e as despesas no fim de ano são maiores, eles usariam metade do dinheiro para diminuir a dívida do carro (R$ 3000,00) e que usariam a outra metade nesse período.

Os 4 grupos que não conseguiram identificar corretamente o saldo devedor depois do pagamento da 13ª prestação, não usaram o site www.calculador.com.br com a função "Tabela Price" para identificar o saldo devedor. Eles simplesmente multiplicaram 13 por R$ 599,09 encontrando o valor R$ 7788,17 e depois subtraíram ele de R$ 12000,00 chegando ao valor de 4211,83. Concluíram então que o bônus do Sr. Silva era suficiente para quitar a dívida. Isso mostra que possivelmente eles não compreenderam efetivamente como funciona o processo de amortização de uma dívida nesse tipo de situação.

Para finalizar propomos que individualmente os alunos respondessem algumas questões sobre o desenvolvimento dessas atividades. As questões propostas foram as seguintes:

Relatório das aulas de Matemática que abordaram o tema: Matemática Financeira

Nas últimas aulas trabalhamos os conceitos ligados a Matemática Financeira. Desenvolvemos uma proposta metodológica de ensino que julgamos ser diferenciada do que tradicionalmente se faz nesse nível de ensino.
Além dos conteúdos tradicionais dessa etapa escolar (Porcentagem; Acréscimos e Descontos; Juros simples ou compostos) abordamos também conteúdos que geralmente são apresentados apenas em cursos que visam formar um profissional que tenha conhecimento em finanças, nas áreas de Administração, Economia, Contabilidade, etc. Esses conteúdos foram: Financiamento com prestações fixas, Sistemas de Amortização e Aplicação com depósitos regulares.
Em nossa metodologia valorizamos o trabalho em equipe, a resolução de problemas, a investigação e o trabalho com ferramentas que estão à disposição de qualquer indivíduo, como a calculadora (simples ou científica), o aplicativo “Calculadora do cidadão” do Banco Central e o site www.calculador.com.br.
Com base nos conhecimentos adquiridos, para finalizar essa pesquisa peço que respondam ao seguinte questionário:

1. Você considera importante a abordagem do tema “Matemática Financeira” como a que foi feita nessa Proposta Metodológica de Ensino para alunos do ensino médio? Justifique a resposta.
2. Destaque pontos positivos e pontos negativos sobre o desenvolvimento das atividades nesse período.
3. Qual a sua opinião sobre os momentos em que foram utilizadas as ferramentas: aplicativo “Calculadora do cidadão” e o site www.calculador.com.br.
4. Em que situações os conhecimentos adquiridos nesse período poderão ser aplicados por você em seu dia a dia? Explique.
5. Você tem alguma sugestão para a melhoria desta proposta metodológica? Qual?

Nosso objetivo com esse questionário foi conhecer a opinião dos alunos quanto a metodologia aplicada nas atividades que foram desenvolvidas e a importância desse tipo de abordagem no Ensino Médio.

De maneira geral percebemos que a maioria considerou importante a abordagem desse tema no ensino médio e que aprovaram a forma como as atividades foram desenvolvidas. Na 1ª questão algumas repostas dos alunos foram:

“Sim, a matemática financeira está sempre presente no nosso dia a dia, seja ao fazer um financiamento, empréstimo ou investimento. Sendo assim é mais que necessário sua aplicação no ensino médio, pois ao aprender, será utilizado por toda a vida”.

“Sim, eu considero importante pois, nos dá informações que realmente vamos fazer uso futuramente em nossas vidas, independente se o aluno seguirá uma carreira na área de exatas ou não”.

“Sim, pois aproxima a matéria da nossa realidade, dando sentido maior aos estudos”.

“Considero importante a abordagem desse tema, pois ensina para os adolescentes uma noção de economia e controle do dinheiro”.

“Sim, pois Matemática Financeira é algo que vamos usar pelo resto da vida”.

Na 2ª questão pedimos para que eles destacassem os pontos positivos e os pontos negativos sobre o desenvolvimento das atividades nesse período. Alguns desses pontos positivos e negativos destacados por eles foram:

Pontos positivos

“... foi uma atividade mais dinâmica, além de adquirirmos mais conhecimento do que alunos que aprendem com o método comum”.

“... foi a fácil compreensão do conteúdo e a facilidade que a “Calculadora do cidadão” trouxe na hora de resolver os problemas”.

“... o assunto foi explicado com muita clareza facilitando assim o desenvolvimento e o entendimento da matéria”.

“Achei positivo a cooperação da sala e o empenho dos alunos em solucionar os problemas que nos eram propostos”.

Pontos negativos

“Houve momentos em que a internet caiu, mas nada que impossibilitasse de fazer as atividades”.

“O único ponto negativo é que foi por um curto período e com certeza poderíamos nos aprofundar mais”.

“... os computadores da escola demoraram muito para ligar e a internet caiu em alguns momentos prejudicando o desenvolvimento da matéria”.

“... foi a dificuldade de entender as fórmulas e qual ferramenta usamos em certos problemas”.

"... é que algumas pessoas dispersam por ser em outro ambiente".

Na 3ª questão pedimos a opinião deles sobre os momentos em que foram utilizadas a "Calculadora do cidadão" e o site "www.calculador.com.br". Algumas das respostas dadas por eles foram:

"Foram bons, pois as ferramentas facilitam e agilizam o processo das contas, e é algo que todos podem usar, mesmo os que não gostam de matemática".

"Foram aulas mais legais, porque saímos da sala de aula, usamos o computador e os exercícios foram interessantes".

"Os aplicativos são essenciais para a realização de alguns cálculos, que poderiam levar algum tempo se tivéssemos que fazer através das fórmulas".

"A calculadora do cidadão é uma ferramenta boa, de fácil acesso e que não contém dificuldade em ser usada, há exemplos para explicar como funciona o cálculo".

"É uma informação a mais, foi legal ver um jeito prático de resolver problemas do cotidiano"

Na 4ª questão perguntamos em que situações do dia a dia deles esses conhecimentos poderão ser aplicados. Algumas das respostas dadas por eles foram:

"Quando eu abrir uma conta em um banco, comprar um imóvel ou carro parcela. Me ajudará a saber qual caminho será mais vantajoso e necessário para obter os resultados que desejo na minha vida financeira".

"Na compra de um imóvel, de um produto desejado pode-se avaliar as propostas de diferentes lugares e ver qual seria mais vantajosa a partir dos resultados obtidos".

"Na compra de uma casa, carro, apartamento, quando for abrir uma poupança e em inúmeros outros investimentos".

"Em situações onde for realizada uma compra para escolher entre compras a prazo ou à vista, em financiamentos, para decidir quanto dar de entrada e saber se cabe no seu bolso".

Na 5ª questão pedimos sugestões para a melhoria desta proposta metodológica. Muitos não registraram nenhuma sugestão, pois diziam que a proposta metodológica está bem estruturada, porém apareceram algumas sugestões interessantes que mostram inclusive um bom censo crítico. Algumas das sugestões foram:

“Seria interessante se os próprios alunos sugerissem problemas, ou dúvidas que, com o auxílio do professor poderiam ser solucionadas”.

“A proposta aplicada é ótima e muito bem elaborada, uma sugestão que dou são aulas mais práticas, indo até lojas, imobiliárias, bancos e comparando as diversas possibilidades que encontraríamos diante daquela instituição”.

“Aproveitando-se o tema, poderia ensinar sobre controle e organização de gastos, utilizando-se de ferramentas como o Excel para a construção de uma planilha econômica”.

“Sim, que as atividades sejam individuais”.

“Seria interessante propor aos alunos pegar uma situação real de sua casa, financiamento, empréstimo, etc, e fazer a simulação nas ferramentas. Assim não só o aluno aprenderia, como poderia ajudar os familiares a saber alguma informação e ensiná-los como usar as ferramentas”.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando iniciamos esse trabalho de pesquisa, tínhamos como objetivo apresentar uma proposta metodológica de ensino de Matemática Financeira para o Ensino Médio que ampliasse o que tradicionalmente se faz nesse nível de ensino. Sabíamos que para isso não bastava simplesmente apresentar uma quantidade maior de conteúdos, mantendo uma abordagem tradicionalista. Foi quando decidimos fazer uso de algumas ferramentas que estão à disposição de qualquer cidadão. As principais ferramentas foram a "Calculadora do cidadão" disponível no site do Banco Central e o site "www.calculador.com.br", além de nos apoiarmos na organização apresentada pela SBM na sua proposta de currículo do Ensino Médio quanto a abordagem do tema Matemática Financeira.

A "Calculadora do cidadão" foi escolhida por trazer explicações detalhadas sobre seu uso indicando inclusive exemplos para cada uma de suas funções, além de destacar a metodologia aplicada, ou seja, a fórmula matemática relacionada. O site "www.calculador.com.br" foi escolhido para suprir a necessidade da construção das tabelas de amortização nos sistemas "PRICE" e "SAC".

Organizamos então as atividades apresentando aos alunos um roteiro que eles deveriam seguir num processo de reconhecimento e investigação dessas ferramentas e de algumas de suas funções, enquanto que em sala retomávamos os conceitos matemáticos envolvidos em cada caso. O manuseio da calculadora simples e da calculadora científica também foram abordados nesse processo, pois quando realizamos os cálculos usando as fórmulas matemáticas o uso dessas ferramentas se mostrou necessário.

Durante as atividades propostas pudemos perceber que os alunos se apropriaram de conceitos importantes da Matemática Financeira que, como relatou um dos alunos, serão úteis para o resto de suas vidas. Avaliamos que o empenho dos alunos em seguir os roteiros e desenvolver as atividades foram cruciais para uma aprendizagem significativa, ou seja, não basta uma atividade bem planejada para que ocorra essa aprendizagem, isso também depende do interesse e da participação dos educandos.

Outro ponto que destacamos é o fato de que a escola apresenta uma boa estrutura de laboratórios de informática, com internet disponível e um auxiliar docente (Técnico em informática) sempre disposto a ajudar. Apesar de em alguns momentos termos perdido a conexão com a internet isso rapidamente foi resolvido não prejudicando o desenvolvimento das atividades.

No Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) 2015, uma das questões da prova de Matemática abordou o Sistema de Amortização Constante, que foi um dos conteúdos que trabalhamos em nossas atividades e que geralmente não aparecem nos currículos desse nível de ensino. A questão foi a seguinte:

(ENEM – 2015) Um casal realiza um financiamento imobiliário de R$ 180 000,00, a ser pago em 360 prestações mensais, com taxa de juros efetiva de 1% ao mês. A primeira prestação é paga um mês após a liberação dos recursos e o valor da prestação mensal é de R$ 500,00 mais juro de 1% sobre o saldo devedor (valor devido antes do pagamento). Observe que, a cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R$ 500,00 e considere que não há prestação em atraso.

Efetuando o pagamento dessa forma, o valor, em reais, a ser pago ao banco na décima prestação é de

a) 2 075,00.

b) 2 093,00.

c) 2 138,00.

d) 2 255,00.

e) 2 300,00.

Em conversa com os alunos pudemos perceber que a maioria identificou que na questão era apresentado um financiamento nos moldes do Sistema de Amortização Constante e como havíamos trabalhado a metodologia de cálculo para esse sistema conseguiram identificar o valor correto da 10ª prestação. Assim,

Se a amortização é de R$ 500,00 em cada período, então como já foram efetuados 9 pagamentos o saldo devedor na décima prestação é dado por:

$$180000 - (9 . 500) = 175500.$$

Como sabemos que o valor da prestação é dado pela soma da amortização com os juros no período, e que os juros são cobrados sobre o saldo devedor naquele período, então o valor da 10ª prestação é dado por:

10ª prestação = 500 + (. 175500)

10ª prestação = 500 + 1755,00

10ª prestação = 2255 (Resposta D)

Os resultados obtidos na atividade de avaliação proposta mostraram que a maioria dos alunos conseguiu resolver os problemas aplicando os métodos e as ferramentas exploradas, além de mostrarem uma análise crítica diante de cada uma das situações. No questionário proposto sobre o desenvolvimento das atividades percebemos que a maioria considerou importante a abordagem desse tema no ensino médio e que aprovaram a forma como as atividades foram desenvolvidas.

Sabemos que para garantir uma formação completa aos alunos da Educação Básica na sua formação como cidadão que age como consumidor prudente e que tem condições de tomar decisões em sua vida pessoal e profissional, no que diz respeito a questões financeiras, talvez seja necessário um trabalho contínuo sobre o tema desde o início da escolaridade na Educação Infantil até o fim do Ensino Médio abordando o tema em blocos de acordo com a maturidade dos alunos.

Acreditamos que essa proposta possa contribuir muito para isso e para que esse trabalho não fique restrito a aplicação dessas atividades no ano de 2015, nos propomos a dar sequência a esse projeto realizando ajustes que se mostrem necessários. Alguns apontamentos feitos pelos alunos devem ser levados em consideração, por exemplo, trabalhar com situações que sejam propostas pelos próprios alunos ou ainda trabalhar com planilhas que ajudem no controle e organização de gastos.

Vamos também propor ao Centro Paula Souza por meio das equipes de supervisão e de formação continuada de professores que essa pesquisa seja divulgada e discutida entre os professores de Matemática da instituição, nos colocando à disposição para um trabalho de capacitação desses professores e quem sabe expandir isso para todo o EM.

Para finalizar consideramos que a abordagem do tema Matemática Financeira como foi feita nessa proposta metodológica de ensino contribui para que os alunos adquirissem competências e habilidades de suma relevância para a sua vida após a conclusão do Ensino Médio, etapa que finda a Educação Básica.

7. REFERÊNCIAS

BANCO CENTRAL. **Calculadora do cidadão**. Disponível em: <http://www.bcb.gov.br>. Acesso em: 12 ago. 2015.

BANCO CENTRAL. **Empréstimos e Financiamentos**. Disponível em: <http://www.bcb.gov.br>. Acesso em: 12 ago. 2015.

BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**, Resolução CEB nº 3 de 26 de junho de 1998.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, Lei nº 9.394 de 20 dezembro de 1996.

BRASIL. Ministério da Educação (Secretaria da Educação Básica e Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação). **Guia dos livros didáticos do Ensino Médio – PNLD, 2015**. Brasília, 2014.

BRASIL. Ministério da Educação (Secretaria da Educação Básica). **Orientações Curriculares para o Ensino Médio – Volume 2**. Brasília, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação (Secretaria de Educação Média e Tecnológica). **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação (Secretaria de Educação Média e Tecnológica). **PCN + Ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, 2002.

CALCULADOR. **Calculador Financeiro**. Disponível em: <www.calculador.com.br>. Acessado em 15 set. 2015.

CASTANHEIRA, N. P.; MACEDO, L. R. D. **Matemática Financeira Aplicada**. 3. ed. Curitiba: IBPEX, 2010.

CENTRO PAULA SOUZA. **Perfil e Histórico**. Disponível em: <http://www.centropaulasouza.sp.gov.br>. Acesso em 15 set. 2015.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações (Obra em 3 volumes)**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

ETEC FERNANDO PRESTES. **Cursos**. Disponível em: <http://www.etecfernandoprestes.com.br> Acessado em 15 set. 2015.

FNDE. **FNDE – Livro didático**. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico>. Acessado em 03 ago. 2015.

HAZZAN, S.; POMPEO, J. N. **Matemática Financeira**. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

IEZZI, G.; HAZZAN, S.; DEGENSZAJN, D. **Fundamentos de Matemática Elementar – 11**. 1. ed. São Paulo: Atual, 2004.

LIMA, E. L.; et al. **A matemática do ensino médio – volume 2**. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MEC - PNLD. **Plano Nacional do Livro Didático**. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?Itemid=668id=12391option=com_contentview=article> Acessado em 03 ago. 2015.

MORGADO, A. C.; CESAR, B. **Matemática Financeira**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.

MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; ZANI, S. C. **Progressões e Matemática Financeira**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

PAIVA, M. **Matemática: Paiva (Obra em 3 volumes)**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

SÃO PAULO. Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza (Unidade de Ensino Médio e Técnico). **Atualização da Proposta de Currículo por Competências para o Ensino Médio**. São Paulo, 2011.

SBM (Sociedade Brasileira de Matemática). **Diretrizes Curriculares para o ensino de Matemática – Ensino Médio**. 2015. Disponível em <http://www.sbm.org.br/…/pdf/Proposta_curricular_PROPOSTA.pdf > Acessado em: 03 jul. 2015.

SBM. **Institucional – quem somos**. Disponível em: <http://www.sbm.org.br/pt/institucional/quem-somos/natureza-e-missao> Acessado em 25 jul. 2015.

VESTIBULINHO ETEC. **Manual do candidato**. Disponível em: <http://fatweb.s3.amazonaws.com/vestibulinhoetec/documentos/1SEM-16/ManualCandidato.pdf?id=20161>. Acessado em 15 set. 2015.

VIVO SEU DINHEIRO. Entrevista – Elvira Crivinel. Disponível em: <www.vivoseudinheiro.com.br>. Acessado em 22 ago. 2015.