

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS — UFSCAR
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

RICARDO SOARES VIEIRA

ESTUDOS SOBRE AS EQUAÇÕES DE BETHE

SÃO CARLOS

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS — UFSCAR
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ESTUDOS SOBRE AS EQUAÇÕES DE BETHE

RICARDO SOARES VIEIRA

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física.

Área de concentração: Física Estatística.

Orientação: PROF. DR. ANTONIO LIMA SANTOS

São Carlos

2015

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

V658es

Vieira, Ricardo Soares.

Estudos sobre as equações de Bethe / Ricardo Soares
Vieira. -- São Carlos : UFSCar, 2015.
106 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos,
2015.

1. Física estatística. 2. Bethe, Equações de. 3. Modelo de
seis vértices. 4. Polinômios auto-inversíveis. Polinômios de
Salem. 5. Polinômios de Salem. 6. Ansatz, Bethe. I. Título.

CDD: 530.13 (20^a)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Física

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Ricardo Soares Vieira, realizada em 15/05/2015:

Prof. Dr. Antonio Lima Santos
UFSCar

Prof. Dr. Elcio Abdalla
USP

Prof. Dr. Roland Köberle
IFSC/USP

Prof. Dr. Celso Jorge Villas Boas
UFSCar

Prof. Dr. Waldeck Schutzer
UFSCar

À minha família, por permitir que eu pudesse concluir os meus estudos. À minha mãe, pelo seu amor incondicional, ao meu pai, por ter despertado em mim o interesse pela ciência desde muito pequeno e aos meus irmãos por me apoiarem sempre que precisei.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em especial ao Prof. Dr. A. Lima-Santos, meu orientador, por quem a minha admiração transcende o âmbito profissional. Os seus conselhos, ensinamentos (estes sempre acompanhados de explicações muito criativas) e, é claro, as suas cobranças, foram essenciais para que esse projeto tenha sido bem executado. Todas os seus ensinamentos levarei comigo, para o resto de minha vida!

Aos meus amigos por fazerem a minha vida mais feliz.

Aos participantes da banca por aceitarem o convite e também pelos diversos apontamentos feitos, sem os quais este trabalho não seria o mesmo.

Por fim, agradeço também à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo auxílio financeiro.

“What I cannot create, I do not understand” – Richard P. Feynman

Resumo

Nesta tese fizemos um estudo analítico das equações de Bethe para o modelo de seis vértices XXZ com condições de contorno periódicas. Mostramos que as equações de Bethe deduzidas pelo Ansatz algébrico estão relacionadas com as equações de Bethe do Ansatz de coordenadas por uma transformação conforme. Isso nos permitiu reduzir as equações de Bethe a um sistema de equações polinomiais. Para os setores de um, dois e três mágnons, mostramos que essas equações podem ser desacopladas, de modo que as suas soluções podem ser expressas em termos das raízes de certos polinômios auto-inversivos, $P_a(z)$. Deduzimos aqui novos teoremas acerca da distribuição das raízes dos polinômios auto-inversivos no plano complexo, o que nos permitiu fazer uma análise minuciosa da distribuição das raízes de Bethe para o setor de dois mágnons. Esta análise nos permitiu mostrar que o Ansatz de Bethe é de fato completo para este setor, exceto para alguns valores críticos do parâmetro de anisotropia Δ , no qual os polinômios $P_a(z)$ podem apresentar raízes múltiplas. Por fim, uma inesperada conexão entre as equações de Bethe e os polinômios de Salem foi encontrada e um novo algoritmo para se procurar por números de Salem pequenos foi elaborado.

Palavras-chave: Equações de Bethe, Bethe Ansatz, modelo de seis vértices, polinômios auto-inversíveis, polinômios de Salem.

Abstract

In this dissertation we made an analytic study of the Bethe Ansatz equations for the XXZ six vertex model with periodic boundary conditions. We had show that the Bethe Ansatz equations deduced from the algebraic and coordinate Bethe Ansätze are related by a conformal map. This allowed us to reduce the Bethe Ansatz equations to a system of polynomial equations. For the one, two and three magnon sectors, we succeeded in decouple these equations, so that the solutions could be expressed in terms of the roots of some self-inversive polynomials, $P_a(z)$. Through new theorems deduced here about the distribution of the roots of self-inversive polynomials in the complex plane, we did a thorough analysis of the distribution of the Bethe roots for the two-magnon sector. This analysis allowed us to show that the Bethe Ansatz is indeed complete for this sector, except at some critical values of the anisotropy parameter Δ , in which the polynomials $P_a(z)$ may have multiple roots. Finally, an unexpected connection between the Bethe Ansatz equations and the Salem polynomials was found and a new algorithm for search small Salem numbers was elaborated.

Keywords: Bethe Ansatz Equations, Bethe Ansatz, six vertex model, self-inversive polynomials, Salem polynomials.

Sumário

	Sumário	II
	I INTRODUÇÃO	15
I.1	O Ansatz de Bethe	15
I.2	As equações de Bethe	17
I	O ANSATZ DE BETHE	19
	2 O ANSATZ DE BETHE DE COORDENADAS	21
2.1	O Modelo de Heisenberg em uma dimensão	21
2.2	O Ansatz de Bethe de coordenadas em ação: diagonalizando o hamiltoniano	23
2.2.1	Estados de spins	23
2.2.2	O Estado de referência	24
2.2.3	Estados de um mágnon	24
2.2.4	Estados de dois mágnons	26
2.2.5	Estados de três mágnons	29
2.2.6	Estados de N mágnons	30
	3 O ANSATZ DE BETHE ALGÉBRICO	33
3.1	O modelo de seis vértices	33
3.1.1	A mecânica estatística do modelo de seis vértices	34
3.1.2	Representação matricial para a função de monodromia e de transferência	36
3.1.3	A equação de Yang-Baxter	38
3.1.4	A integrabilidade do modelo de seis vértices	40
3.2	O Ansatz de Bethe algébrico em ação: diagonalizando da matriz de transferência	41
3.2.1	As relações de comutação	42
3.2.2	O estado de referência	42
3.2.3	Estados de um mágnon	43
3.2.4	Estados de dois mágnons	45
3.2.5	Estados de N mágnons	47
3.2.6	O Ansatz de Bethe algébrico visto como um problema combinatorial	51

II	AS EQUAÇÕES DE BETHE	55
4	RELAÇÃO ENTRE OS ANSÄTZE DE BETHE ALGÉBRICO E DE COORDENADAS	57
5	COMPARAÇÃO ENTRE AS DUAS FORMAS DAS EQUAÇÕES DE BETHE	59
6	SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE BETHE PARA OS ESTADOS DE UM MÁGNON	63
7	SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE BETHE PARA OS ESTADOS DE DOIS MÁGNONS	65
7.1	A forma polinomial das equações de Bethe	65
7.2	Polinômios auto-inversivos	67
7.3	Teoremas sobre o número de raízes de um polinômio auto-inverso sobre o círculo complexo unitário	68
7.4	Localização e distribuição das raízes de $P_a(z)$	71
7.5	Polinômios de Salem	75
7.5.1	Um novo algoritmo para procurar por números de Salem pequenos	77
7.6	Distribuição das raízes de Bethe – A hipótese de strings	80
7.7	A completeza do Ansatz de Bethe para $N = 2$	83
7.7.1	A questão da completeza para valores críticos de Δ	85
8	SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE BETHE PARA OS ESTADOS DE TRÊS MÁGNONS	87
9	CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS	91
A	SOLUÇÕES EXPLÍCITAS DAS EQUAÇÕES DE BETHE PARA $N = 2$ E $N = 3$	93
A.1	Soluções explícitas das equações de Bethe para $N = 2$	93
A.1.1	Soluções explícitas para $L = 1$	93
A.1.2	Soluções explícitas para $L = 2$	94
A.1.3	Soluções explícitas para $L = 3$	94
A.2	Soluções explícitas das equações de Bethe para $N = 3$	95
A.2.1	Soluções explícitas para $L = 1$	95
A.2.2	Soluções explícitas para $L = 2$	96
A.2.3	Soluções explícitas para $L = 3$	96

A.2.4	Soluções explícitas para $L = 4$	98
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	IOI

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1 O Ansatz de Bethe

As equações de Bethe, tema central desta tese, consistem em um conjunto de equações não-lineares introduzido por Hans Bethe em seu trabalho pioneiro de 1931 [1]. Nesse artigo, Bethe introduziu o agora chamado *Ansatz de Bethe* para resolver o problema de autovalor do modelo XXZ de Heisenberg¹ em uma dimensão [2]. Para isso, Bethe propôs uma forma adequada para a função de onda do sistema, de modo que a interação entre pares adjacentes de partículas da rede fossem levadas em conta. Em seguida, Bethe mostrou que esse *Ansatz* é de fato correto, o que lhe permitiu calcular todos os autovalores e autovetores do hamiltoniano de Heisenberg. As equações de Bethe surgem então como condições de consistência da teoria, necessárias, por exemplo, para que as condições de contorno sejam satisfeitas.

Desde o trabalho original de Bethe, a técnica do Ansatz de Bethe (conhecida atualmente por *Ansatz de Bethe de coordenadas*) tem sido aplicada a diversos modelos, bem como generalizada em diversas direções [3]. Destacamos, por exemplo, a solução do modelo do gás de Bose unidimensional com uma interação δ por Lieb e Liniger [4], o modelo do gelo em duas dimensões por Lieb [5] e os correlatos modelos de seis vértices da mecânica estatística por Lieb, Sutherland e Yang [6–8]. O Ansatz de Bethe de coordenadas para o modelo XXZ de Heisenberg foi resolvido por Yang e Yang em [9] e o modelo mais geral XYZ foi resolvido por Baxter em [10], onde a função de partição do modelo de oito vértices (uma generalização do modelo de seis vértices) foi também calculada.

¹ O modelo de Heisenberg consiste em um modelo da mecânica estatística que descreve um sistema magnético, no qual as partículas do sistema interagem apenas com os seus vizinhos mais próximos através de seus spins. No caso mais geral, o chamado de modelo XYZ de Heisenberg, os spins interagem diferentemente de acordo com a direção do spin. Bethe considerou apenas o caso mais simples, o modelo XXZ , no qual a direção dos spins não é importante.

Através de uma versão recursiva do Ansatz de Bethe, Sutherland [11] e Yang [12] estudaram modelos nos quais as partículas que compõe o sistema possuem spin maiores que $1/2$. Por exemplo, o modelo de quinze vértices, que está associado a cadeias de partículas de spin 1, pôde ser resolvido por esta técnica. Posteriormente, outros modelos mais complicados também foram resolvidos, citemos por exemplo os modelos de dezenove vértices resolvidos por Lima-Santos em [13].

Muito embora o Ansatz de Bethe de coordenadas tenha uma ampla aplicação, a formulação de maior interesse nos dias atuais é chamado o *Ansatz de Bethe algébrico*. Esta técnica foi desenvolvida sobretudo pelo grupo de Leningrado, liderado por Faddeev [14, 15] e em seguida foi generalizada de diversos modos, incluindo-se modelos com fronteiras [16–20]. No Ansatz de Bethe algébrico procura-se diagonalizar a *matriz de transferência*² do modelo em questão, ao invés do hamiltoniano. O nome “algébrico” deve-se ao fato de que o problema de autovalor é resolvido aqui através da existência de relações de comutação entre certos operadores definidos em um espaço de Hilbert, em contraste com o Ansatz de Bethe de coordenadas, onde o cálculo é executado diretamente pela aplicação dos operadores sobre a função de onda proposta.

A estrutura algébrica por trás do Ansatz de Bethe algébrico é fornecida pela *equação de Yang-Baxter* [21, 22]. Esta equação foi deduzida primeiramente por McGuire [23] e Yang [24, 25] no contexto da teoria do espalhamento quântico de um ensemble de partículas e, de forma independente, por Baxter [26, 27] em seu estudo sobre modelos de vértices, muito embora uma relação semelhante à equação de Yang-Baxter já tinha sido mencionada por Onsager em seu trabalho sobre o modelo de Ising [28, 29].

Na teoria do espalhamento quântico a equação de Yang-Baxter fornece uma condição suficiente para que a matriz de espalhamento associada a um ensemble de partículas se fatore em matrizes de espalhamento associadas a pares de partículas, apenas. Já no contexto dos modelos de vértices ela consiste em uma condição para que a matriz de transferência do modelo comute consigo mesma para diferentes valores do parâmetro espectral. Esta última propriedade é muito explorada pelo Ansatz de Bethe algébrico, pois ela nos permite chamar de integráveis os modelos solúveis pelo Ansatz de Bethe algébrico, uma vez que a matriz de transferência pode ser vista nestes casos como uma geradora de inúmeras quantidades conservativas em involução [14–18].

A conexão entre o Ansatz de Bethe algébrico e a teoria dos sistemas integráveis tem uma história interessante por si só. Basta dizer aqui que ela interliga várias áreas da física antes não correlatas como, por exemplo, a teoria dos sólitons, o método do espalhamento inverso, as equações de Painlevé etc. [30–33].

² A matriz de transferência é um objeto da mecânica estatística que está relacionado com a função de partição do sistema. Maiores detalhes serão apresentados nos próximos capítulos.

1.2 As equações de Bethe

Seja qual for a formulação do Ansatz de Bethe empregada, a solução analítica do problema de autovalor recai na solução de um sistema de equações não-lineares e acopladas – as chamadas equações de Bethe. Esse sistema de equações aparecem como condições de consistência para a validade do Ansatz de Bethe e também são necessárias para que as condições de contorno consideradas sejam satisfeitas. Somente quando as equações de Bethe são resolvidas é que expressões analíticas para os autovalores e autovetores do hamiltoniano (ou da matriz de transferência) podem ser escritas, uma vez que elas dependem explicitamente das chamadas raízes de Bethe (*i.e.*, as soluções das equações de Bethe).

As equações de Bethe serão consideradas em maiores detalhes na segunda parte desta tese. Aqui é suficiente comentar que elas são muito difíceis de serem resolvidas. Contudo, temos de notar que somente quando as equações de Bethe forem completamente resolvidas é que poderemos falar que o modelo foi de fato resolvido analiticamente³.

Os trabalhos voltados ao estudo das equações de Bethe são, em geral, baseados em técnicas numéricas. Mesmo nesses casos, no entanto, as soluções são difíceis de serem obtidas, uma vez que as raízes de Bethe são em geral muito próximas umas das outras, o que demanda uma grande precisão numérica nos cálculos [34–37]. Essas análises numéricas comumente baseiam-se na chamada *hipótese de strings* [38], muito embora excessões a esta hipótese já tenham sido reportadas fora do limite termodinâmico [39–42]. Além disso, outras peculiaridades das equações de Bethe, como por exemplo a existência de soluções singulares [43–50], dificultam ainda mais a procura de suas soluções.

Abordagens analíticas das equações de Bethe são em geral introduzidas apenas como uma forma de se encontrar propriedades ou identidades satisfeitas pelas equações de Bethe e suas soluções, o que em geral envolve complicadas relações com equações integrais, séries hiper-geométricas etc. [51–53]. Destacamos todavia os trabalhos de Langlands e Saint-Aubin [54,55] e Frenkel [56] nos quais as equações de Bethe são estudadas por meio da geometria algébrica e álgebra comutativa. Embora esta seja uma linha de pesquisa muito promissora, ainda não foi possível se resolver as equações de Bethe por meio delas.

Não obstante a todas essas dificuldades, mostraremos aqui um método que, se for aplicável de forma geral, nos permitirá resolver as equações de Bethe de forma analítica, no qual as suas soluções ficam reduzidas às raízes de um polinômio em uma única variável [57]. Mais especifica-

³ De fato, é muito comum encontrarmos na literatura frases como “esses resultados são válidos uma vez que as equações de Bethe sejam satisfeitas”. No Ansatz de Bethe em geral considera-se que o modelo está resolvido quando as equações de Bethe são deduzidas e expressões para os autovalores e autovetores são escritas em termos das raízes de Bethe. Em geral não se procura por soluções analíticas das equações de Bethe – o que é visto quase sempre como uma tarefa praticamente impossível.

mente, reduzimos as equações de Bethe (no caso considerado, as equações associadas ao modelo XXZ de seis vértices com condições de contorno periódicas) a um sistema de equações polinomiais, de modo que as equações de Bethe passam a ser um objeto de estudo da geometria algébrica e da álgebra comutativa. Para os casos mais simples (os setores de 1, 2 e 3 mágnons), mostramos que este sistema pode ser desacoplado e que as soluções respectivas podem ser escritas em termos das raízes de certos polinômios auto-inversivos. Por meio de teoremas deduzidos aqui acerca da análise da distribuição das raízes dos polinômios auto-inversivos [58] fizemos uma análise profunda das soluções das equações de Bethe, o que nos permitiu encontrar a distribuição das raízes de Bethe, discutir a questão da completeza do Ansatz de Bethe, encontrar uma conexão entre as equações de Bethe e os polinômios de Salem (usualmente estudados na teoria algébrica dos números) etc.

A presente tese está organizada da seguinte forma: na primeira parte apresentaremos o Ansatz de Bethe, onde discutiremos as duas formulações mais comuns do Ansatz de Bethe, a saber, o Ansatz de coordenadas e o algébrico. Na segunda parte focaremos nas equações de Bethe, tema central desta tese, onde a técnica desenvolvida por nós para obter suas soluções será descrita. Discutiremos em detalhes as equações de Bethe para o modelo XXZ de Heisenberg, associadas aos setores de um e dois mágnons. Teoremas sobre polinômios auto-inversivos deduzidos durante a nossa pesquisa serão apresentados e a conexão entre as equações de Bethe com os chamados polinômios de Salem serão também abordados. Também apresentaremos um algoritmo novo para se procurar por números de Salem pequenos. A questão da completeza do Ansatz de Bethe para o setor de dois mágnons será discutida em seguida e no outro capítulo alguns resultados para o setor de três mágnons serão apresentados. Por fim, nos apêndices, apresentaremos soluções explícitas das equações de Bethe para os setores de dois e três mágnons para pequenos valores de L .

Parte I

O Ansatz de Bethe

CAPÍTULO 2

O ANSATZ DE BETHE DE COORDENADAS

2.1 O Modelo de Heisenberg em uma dimensão

As equações de Bethe emergiram em física no estudo pioneiro de Hans Bethe sobre o modelo de Heisenberg em uma dimensão [1]. O modelo de Heisenberg consiste em uma rede de partículas que interagem através de seus spins, os quais podem, no caso mais geral, apontar para qualquer direção do espaço [2]. No caso unidimensional que vamos considerar, as partículas estarão dispostas sobre uma reta infinita ou, caso seja imposto condições de contorno periódicas, em um círculo. Consideraremos também que as partículas interagem apenas com os seus vizinhos mais próximos.

O hamiltoniano de Heisenberg que descreve um sistema de L partículas que interagem através de seus spins pode ser escrito como

$$H = H_0 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L J_x \sigma_k^x \sigma_{k+1}^x + J_y \sigma_k^y \sigma_{k+1}^y + J_z \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z, \quad (2.1)$$

onde H_0 é uma constante arbitrária que define o zero de energia, J_x , J_y e J_z são constantes de acoplamento que descrevem as interações nas direções X , Y e Z e

$$\sigma^x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

são as matrizes de Pauli, onde

$$\sigma_k^a = I_1 \otimes \cdots \otimes I_{k-1} \otimes \{\sigma^a\}_k \otimes I_{k+1} \otimes \cdots \otimes I_L, \quad a \in \{x, y, z\}, \quad (2.3)$$

são operadores definidos¹ no $\text{End}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \otimes \cdots \otimes V_L)$ que atuam não-trivialmente apenas no espaço vetorial V_k .

¹ A notação $\text{End}(V \otimes V)$ significa um endomorfismo no espaço tensorial $V \otimes V$. Um endomorfismo no espaço V nada mais é do que uma transformação linear (*i.e.*, um operador) que atua sobre V .

Notemos que a interação de entre duas partículas vizinhas da rede é descrita pelo hamiltoniano

$$H_{k,k+1} = -\frac{1}{2} \left(J_x \sigma_k^x \sigma_{k+1}^x + J_y \sigma_k^y \sigma_{k+1}^y + J_z \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z \right), \quad (2.4)$$

de modo que podemos escrever

$$H = H_0 + \sum_{k=1}^L H_{k,k+1}. \quad (2.5)$$

Casos especiais do modelo XYZ podem ser obtidos impondo restrições às constantes de acoplamento. Por exemplo, colocando-se $J_x = J_y$ obtemos o chamado modelo XXZ , no qual apenas a interação na direção Z é diferente das demais – o spin das partículas pode ter agora apenas dois valores, *up* ou *down*. Se, além disso, colocarmos $J_x = J_y = J_z$ obtemos o modelo XXX , cujas interações não dependem da direção de spin (esse foi o modelo considerado primeiramente por Bethe).

Na sequência vamos considerar apenas o modelo XXZ , pois veremos mais adiante que este modelo unidimensional está relacionado com o modelo de seis vértices definido em uma rede bidimensional. Para o modelo XXZ , o hamiltoniano torna-se,

$$H_{XXZ} = H_0 + \sum_{k=1}^L H_{k,k+1} = H_0 - \frac{J}{2} \sum_{k=1}^L \left(\sigma_k^x \sigma_{k+1}^x + \sigma_k^y \sigma_{k+1}^y + \Delta \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z \right), \quad (2.6)$$

onde colocamos $J_y = J_x = J$ e $J_z = J\Delta$, de modo que

$$H_{k,k+1} = -\frac{J}{2} \left(\sigma_k^x \sigma_{k+1}^x + \sigma_k^y \sigma_{k+1}^y + \Delta \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z \right). \quad (2.7)$$

Será conveniente introduzir os operadores,

$$P_{k,k+1} = \sigma_k^x \sigma_{k+1}^x + \sigma_k^y \sigma_{k+1}^y, \quad \text{e} \quad Q_{k,k+1} = \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z, \quad (2.8)$$

e definir

$$P = \sum_{k=1}^L P_{k,k+1}, \quad Q = \sum_{k=1}^L Q_{k,k+1}, \quad (2.9)$$

de modo que o hamiltoniano (2.6) possa ser escrito simplesmente como

$$H_{k,k+1} = -\frac{J}{2} (P_{k,k+1} + \Delta Q_{k,k+1}) \quad \text{e} \quad H = H_0 - \frac{J}{2} (P + \Delta Q). \quad (2.10)$$

2.2 O Ansatz de Bethe de coordenadas em ação: diagonalizando o hamiltoniano

A seguir vamos mostrar como o Ansatz de Bethe de coordenadas permite diagonalizar o hamiltoniano (2.6) de acordo com o número de mágnons dos estados quânticos².

2.2.1 Estados de spins

Uma vez que as partículas componentes do sistema em consideração interagem apenas por meio de seus spins, os estados quânticos associados podem ser escritos em termos dos spins das partículas, que podem apontar apenas nas direções *up* e *down*. Representando por $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ os estados associados a uma partícula com spin *up* e *down*, respectivamente, podemos introduzir a seguinte representação matricial,

$$|\uparrow\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

com $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ definidos no espaço de Hilbert V , de dimensão 2. Deste modo, podemos encontrar a ação das matrizes de Pauli sobre $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$:

$$\begin{aligned} \sigma^x |\uparrow\rangle &= |\downarrow\rangle, & \sigma^x |\downarrow\rangle &= |\uparrow\rangle, \\ \sigma^y |\uparrow\rangle &= i |\downarrow\rangle, & \sigma^y |\downarrow\rangle &= -i |\uparrow\rangle, \\ \sigma^z |\uparrow\rangle &= |\uparrow\rangle, & \sigma^z |\downarrow\rangle &= -|\downarrow\rangle. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Através destas relações podemos encontrar facilmente a ação dos operadores $P_{k,k+1}$ e $Q_{k,k+1}$ sobre os estados associados a duas partículas vizinhas da rede, localizadas digamos na posição x_k e x_{k+1} da rede, onde $1 \leq k \leq L$, isto é, os estados

$$\begin{aligned} |\uparrow\uparrow\rangle_{k,k+1} &= |\uparrow\rangle_k \otimes |\uparrow\rangle_{k+1}, & |\uparrow\downarrow\rangle_{k,k+1} &= |\uparrow\rangle_k \otimes |\downarrow\rangle_{k+1}, \\ |\downarrow\uparrow\rangle_{k,k+1} &= |\downarrow\rangle_k \otimes |\uparrow\rangle_{k+1}, & |\downarrow\downarrow\rangle_{k,k+1} &= |\downarrow\rangle_k \otimes |\downarrow\rangle_{k+1}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

que estão definidos no espaço tensorial $V_{k,k+1} = V_k \otimes V_{k+1}$. Pelas equações (2.12) é fácil verificar que,

$$\begin{aligned} P_{k,k+1} |\uparrow\uparrow\rangle_{k,k+1} &= 0 |\uparrow\uparrow\rangle_{k,k+1}, & Q_{k,k+1} |\uparrow\uparrow\rangle_{k,k+1} &= + |\uparrow\uparrow\rangle_{k,k+1}, \\ P_{k,k+1} |\uparrow\downarrow\rangle_{k,k+1} &= 2 |\downarrow\uparrow\rangle_{k,k+1}, & Q_{k,k+1} |\uparrow\downarrow\rangle_{k,k+1} &= - |\uparrow\downarrow\rangle_{k,k+1}, \\ P_{k,k+1} |\downarrow\uparrow\rangle_{k,k+1} &= 2 |\uparrow\downarrow\rangle_{k,k+1}, & Q_{k,k+1} |\downarrow\uparrow\rangle_{k,k+1} &= - |\uparrow\downarrow\rangle_{k,k+1}, \\ P_{k,k+1} |\downarrow\downarrow\rangle_{k,k+1} &= 0 |\downarrow\downarrow\rangle_{k,k+1}, & Q_{k,k+1} |\downarrow\downarrow\rangle_{k,k+1} &= + |\downarrow\downarrow\rangle_{k,k+1}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

² A melhor apresentação que pude encontrar do Ansatz de Bethe de coordenadas está presente no capítulo 15 do livro *Lectures on Physics* (Vol. III) de R. P. Feynman [59]. Embora Feynman não tenha apresentado as equações de Bethe nesta discussão (ele considera uma aproximação suficiente para o contexto do livro), a simplicidade de suas idéias e a discussão física dada pelo autor são, como sempre, geniais. Feynman esteve interessado no Ansatz de Bethe nos últimos anos de sua vida. A relação de Feynman com o Ansatz de Bethe é muito bem contada em [32].

Estas relações serão muito úteis quando diagonalizarmos o hamiltoniano (2.6) através do Ansatz de Bethe de coordenadas. O primeiro passo para se diagonalizar o hamiltoniano (2.6) é verificar que este hamiltoniano comuta com a componente Z do spin total do sistema,

$$S^z = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \sigma_k^z, \quad (2.15)$$

o que é uma consequência da relação de comutação $[S^x, S^y] = iS^z$. Isso significa que a componente Z do spin total do sistema é conservada e, portanto, a ação do hamiltoniano em um dado estado quântico não altera o número de spins *down* e *up* associados a este estado. Esta propriedade é muito bem vinda pois permite diagonalizar o hamiltoniano por setores, de acordo com número de spins *down* e *up* dos estados quânticos. Um estado quântico com N spins *down* é chamado de um estado de N mágnons. Note que a componente Z do spin total da rede está relacionada com o número de mágnons pela fórmula $S^z = L/2 - N$.

2.2.2 O Estado de referência

Começemos pelo estado mais simples que é o estado de zero mágnons. Existe apenas um estado desse tipo no qual todos os spins das partículas são do tipo *up*. Este estado é chamado de estado de referência e é dado por

$$\Psi_0 = |\uparrow\rangle_1 \otimes \cdots \otimes |\uparrow\rangle_L = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_1 \otimes \cdots \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_L. \quad (2.16)$$

Podemos facilmente encontrar a ação do hamiltoniano (2.10) em Ψ_0 . De fato, através das equações (2.14) podemos ver que P anula Ψ_0 , enquanto que Q contribui com o valor L . Portanto, por meio de (2.10) obtemos diretamente que

$$H\Psi_0 = \left(H_0 - \frac{J}{2} \Delta L \right) \Psi_0. \quad (2.17)$$

Podemos agora colocar $H_0 = \frac{J}{2} \Delta L$ a fim de que a energia relativa ao estado de referência seja nula.

2.2.3 Estados de um mágnon

Considere agora as configurações nas quais apenas uma das partículas da rede tem spin *down*. Os estados quânticos associados a essas configurações são chamados de estados de um mágnon. Seja $\phi_m(x_m) \equiv \phi_m$ a função de onda associada a uma dada configuração na qual apenas a partícula na posição x_m tem spin *down*, isto é,

$$\phi_m = |\uparrow\rangle_1 \otimes \cdots \otimes |\uparrow\rangle_{m-1} \otimes |\downarrow\rangle_m \otimes |\uparrow\rangle_{m+1} \otimes \cdots \otimes |\uparrow\rangle_L. \quad (2.18)$$

A ação do operador P sobre ϕ_m pode ser facilmente encontrada. De fato, notemos primeiro que ϕ_m será anulado por todos os operadores $P_{k,k+1}$, $1 \leq k \leq L$, com exceção dos operadores $P_{m-1,m}$ e $P_{m,m+1}$, os quais fornecem

$$P_{m-1,m}\phi_m = 2\phi_{m-1}, \quad P_{m,m+1}\phi_m = 2\phi_{m+1}. \quad (2.19)$$

Assim, temos que

$$P\phi_m = 2\phi_{m-1} + 2\phi_{m+1}. \quad (2.20)$$

Já para a ação de Q sobre ϕ_m , vemos a partir das equações (2.14) que

$$Q_{m-1,m}\phi_m = -\phi_m, \quad Q_{m,m+1}\phi_m = -\phi_m, \quad (2.21)$$

e

$$Q_{k,k+1}\phi_m = \phi_m, \quad \text{se } k \neq \{m-1, m\}, \quad (2.22)$$

e, portanto, obtemos,

$$Q\phi_m = (L-2)\phi_m - 2\phi_m = (L-4)\phi_m. \quad (2.23)$$

Com isso, encontramos que

$$H\phi_m = H_0\phi_m - \frac{J}{2}(P + \Delta Q)\phi_m = -J(\phi_{m-1} + \phi_{m+1} - 2\Delta\phi_m). \quad (2.24)$$

Encontramos assim como o hamiltoniano atua em um dado estado de spin associado ao setor de um mágnon. A função de onda mais geral pertencente ao setor de um mágnon corresponde, todavia, a uma superposição das funções de onda deste setor, ou seja, devemos considerar a combinação linear

$$\Psi_1(x_1, \dots, x_L) = \sum_{k=1}^L a_k(x_k)\phi_k(x_k), \quad (2.25)$$

onde os coeficientes $a_m(x_m) \equiv a_m$ correspondem à amplitude de probabilidade para que uma partícula na posição x_m tenha spin *down*. Estes coeficientes devem ainda ser determinados.

Projetando agora o estado $\Psi_1(x_1, \dots, x_L)$ nos estados de spin $\phi_m(x_m)$ e usando a equação de Schrödinger, obtemos a relação

$$E_1 a_m = -J(a_{m-1} + a_{m+1} - 2\Delta a_m). \quad (2.26)$$

Uma vez que esta equação seja resolvida para os coeficientes $a_m(x_m)$, o autoestado $\Psi_1(x_1, \dots, x_L)$ ficará determinado e os correspondentes autovalores poderão ser em seguida calculados.

Podemos verificar diretamente que o Ansatz

$$a_m(x_m) = A_1 e^{ik_1 x_m}, \quad (2.27)$$

satisfaz (2.26). Esse Ansatz é facilmente justificado do ponto de vista físico. Os estados de um mágnon podem ser pensados como estados associados a uma pseudo-partícula livre que se move com momentum k_1 .

Substituindo (2.27) em (2.26) podemos encontrar facilmente a energia associada a estes estados. O resultado é

$$E_1 = -2J(\cos k_1 - \Delta) \quad (2.28)$$

e ao impormos uma condição periódica de contorno, encontramos que $e^{ik_1 x_m} = e^{ik_1 x_{m+L}} = e^{i(k_1+L)}$, ou seja, devemos ter

$$e^{ik_1 L} = 1. \quad (2.29)$$

Esta última relação nos mostra que k_1 pode assumir apenas os valores $k_n = \frac{2\pi n}{L}$, $1 \leq n \leq L$. A equação acima é a equação de Bethe para o setor de um mágnon do modelo XXZ de Heisenberg. Para cada valor de n (*i.e.*, para cada solução da equação de Bethe) obtemos um valor para a energia E_1 e uma correspondente autofunção Ψ_1 .

2.2.4 Estados de dois mágnons

O próximo caso a ser considerado é o caso onde duas partículas da rede têm spins *down*, enquanto que as restantes têm spin *up*. Representemos por $\phi_{m,n}(x_m, x_n) \equiv \phi_{m,n}$ a função de onda de uma dada configuração na qual duas partículas da rede, nas posições x_m e x_n , possuem spin *down*³. Temos assim que,

$$\phi_{m,n} = |\uparrow\rangle_1 \otimes \cdots \otimes |\uparrow\rangle_{m-1} \otimes |\downarrow\rangle_m \otimes |\uparrow\rangle_{m+1} \otimes \cdots \otimes |\uparrow\rangle_{n-1} \otimes |\downarrow\rangle_n \otimes |\uparrow\rangle_{n+1} \otimes \cdots \otimes |\uparrow\rangle_L. \quad (2.30)$$

Desejamos calcular a ação de H sobre os estados $\phi_{m,n}$. Para isso, convém considerar dois casos distintos, a saber, quando $x_n = x_m + 1$, isto é, quando os dois spins *down* são adjacentes e quando $x_n > x_m + 1$.

Quando os spins não são adjacentes, a ação de H sobre $\phi_{m,n}$ pode ser facilmente calculada, uma vez que ela é semelhante ao caso anterior, referente aos estados de um mágnon. De fato, na ação de P sobre $\phi_{m,n}$ só sobrevivem quatro termos, a saber,

$$\begin{aligned} P_{m-1,m}\phi_{m,n} &= 2\phi_{m-1,n}, & P_{n-1,n}\phi_{m,n} &= 2\phi_{m,n-1}, \\ P_{m,m+1}\phi_{m,n} &= 2\phi_{m+1,n}, & P_{n,n+1}\phi_{m,n} &= 2\phi_{m,n+1}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

o que nos fornece,

$$\begin{aligned} P|x_m, x_n\rangle &= (P_{m-1,m} + P_{m,m+1} + P_{n-1,n} + P_{n,n+1})\phi_{m,n} \\ &= 2\phi_{m-1,n} + 2\phi_{m+1,n} + 2\phi_{m,n-1} + 2\phi_{m,n+1}, \\ &\quad (x_n > x_m + 1). \end{aligned} \quad (2.32)$$

³ Devido à condição periódica de contorno, é suficiente considerar $x_n > x_m$.

De modo semelhante, temos que

$$\begin{aligned} Q_{m-1,m}\phi_{m,n} &= -\phi_{m,n}, & Q_{n-1,n}\phi_{m,n} &= -\phi_{m,n}, \\ Q_{m,m+1}\phi_{m,n} &= -\phi_{m,n}, & Q_{n,n+1}\phi_{m,n} &= -\phi_{m,n}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

e $Q_{k,k+1}\phi_{m,n} = \phi_{m,n}$ nos outros casos. Portanto, ficamos com

$$Q\phi_{m,n} = (L-4)\phi_{m,n} - 4\phi_{m,n} = (L-8)\phi_{m,n}, \quad (x_n > x_m + 1). \quad (2.34)$$

Assim, obtemos que

$$\begin{aligned} H|x_m, x_n\rangle &= -J(\phi_{m-1,n} + \phi_{m+1,n} + \phi_{m,n-1} + \phi_{m,n+1} - 4\Delta\phi_{m,n}) \\ &\quad (x_n > x_m + 1), \end{aligned} \quad (2.35)$$

Considere agora o caso em que os spins *down* são adjacentes, como em $\phi_{m,m+1}$. Neste caso, na ação de P em $\phi_{m,m+1}$ sobrevivem apenas os termos,

$$P_{m-1,m}\phi_{m,m+1} = 2\phi_{m-1,m+1}, \quad P_{m+1,m+2}\phi_{m,m+1} = 2\phi_{m,m+2}, \quad (2.36)$$

e, assim,

$$P\phi_{m,m+1} = 2\phi_{m-1,m+1} + 2\phi_{m,m+2}. \quad (2.37)$$

Da mesma forma, para o operador Q , temos que $Q_{k,k+1}\phi_{m,m+1} = \phi_{m,m+1}$ exceto quando $k = m-1$ ou $k = m$, quando temos que

$$Q_{m-1,m}\phi_{m,m+1} = -\phi_{m,m+1}, \quad Q_{m,m+1}\phi_{m,m+1} = -\phi_{m,m+1}, \quad (2.38)$$

e, portanto, temos,

$$Q\phi_{m,m+1} = (L-2)\phi_{m,m+1} - 2\phi_{m,m+1} = (L-4)\phi_{m,m+1}. \quad (2.39)$$

Por conseguinte,

$$H\phi_{m,m+1} = -J(\phi_{m-1,m+1} + \phi_{m,m+2} - 2\Delta\phi_{m,m+1}), \quad (2.40)$$

e, para a ação de H sobre $\phi_{m-1,m}$, vamos obter um resultado semelhante,

$$H\phi_{m-1,m} = -J(\phi_{m-2,m} + \phi_{m-1,m+1} - 2\Delta\phi_{m-1,m}). \quad (2.41)$$

Obtemos assim a ação do hamiltoniano nos estados de spin associados ao setor de dois mágnons. O estado mais geral possível para o setor de dois mágnons é, como antes, dado pela combinação linear dos estados de spin pertencentes a este setor, isto é,

$$\Psi_2(x_1, \dots, x_L) = \sum_{1 \leq k < l \leq L} a_{k,l}(x_k, x_l)\phi_{k,l}(x_k, x_l), \quad (2.42)$$

onde devemos agora determinar as amplitudes $a_{m,n}(x_m, x_n) \equiv a_{m,n}$. Para isso, projetemos $\Psi_2(x_1, \dots, x_L)$ sobre $\phi_{m,n}(x_m, x_n)$, com o que vamos obter as seguintes relações,

$$-J(a_{m-1,n} + a_{m,n-1} + a_{m+1,n} + a_{m,n+1} - 4\Delta a_{m,n}) = a_{m,n}E_2, \quad (n > m + 1) \quad (2.43)$$

e,

$$-J(a_{m-1,m+1} + a_{m,m+2} - 2\Delta a_{m,m+1}) = a_{m,m+1}E_2, \quad (n = m + 1). \quad (2.44)$$

Para resolver essas equações funcionais para os coeficientes $a_{m,n}$ poderíamos tentar o Ansatz $a_{m,n}(x_m, x_n) = A_{12}e^{ik_1x_m + ik_2x_n}$, porém, podemos facilmente verificar que este Ansatz não satisfaz a equação (2.44), embora ele satisfaça a equação (2.43). Para resolver esta incompatibilidade, Bethe considerou uma combinação linear de funções de ondas com mesma energia. A única possibilidade é acrescentar um termo da forma $A_{21}(x_m, x_n)e^{ik_1x_n + ik_2x_m}$ no qual trocamos o momentum das partículas. Portanto, o Ansatz correto aqui é o seguinte:

$$a_{m,n}(x_m, x_n) = A_{12}e^{ik_1x_m + ik_2x_n} + A_{21}e^{ik_1x_n + ik_2x_m}, \quad (2.45)$$

o qual satisfaz ambas as equações (2.43) e (2.44). De fato, a substituição de (2.45) na equação (2.43) nos fornece os autovalores do hamiltoniano,

$$E_2 = -2J(\cos k_1 + \cos k_2 - 2\Delta), \quad (2.46)$$

e a substituição destes valores em (2.44) nos fornece a identidade

$$\frac{A_{12}}{A_{21}} = -\frac{e^{i(k_1+k_2)} - 2\Delta e^{ik_1} + 1}{e^{i(k_1+k_2)} - 2\Delta e^{ik_2} + 1}. \quad (2.47)$$

Note agora que se levarmos, por exemplo, a partícula na posição x_m para a posição x_{m+L} , então devido à condição periódica de contorno vamos obter a mesma configuração de antes. Isso significa que as amplitudes $a_{m,n}$ e $a_{n,m+L}$ devem ser iguais. Esta simetria nos fornece as seguintes relações entre A_{12} e A_{21} ,

$$A_{12} = A_{21}e^{ik_1L}, \quad A_{21} = A_{12}e^{ik_2L} \quad \text{e} \quad e^{i(k_1+k_2)L} = 1. \quad (2.48)$$

de modo que obtemos as equações,

$$e^{ik_1L} = -\frac{e^{i(k_1+k_2)} - 2\Delta e^{ik_1} + 1}{e^{i(k_1+k_2)} - 2\Delta e^{ik_2} + 1}, \quad e^{ik_2L} = -\frac{e^{i(k_1+k_2)} - 2\Delta e^{ik_2} + 1}{e^{i(k_1+k_2)} - 2\Delta e^{ik_1} + 1}. \quad (2.49)$$

Estas são as equações de Bethe para o setor de dois mágnons do modelo XXZ de Heisenberg.

2.2.5 Estados de três mágnons

Para entender como o Ansatz de Bethe de coordenadas permite diagonalizar completamente o hamiltoniano de Heisenberg, será instrutivo analisarmos o próximo caso, isto é, o setor três mágnons. A função de onda de uma configuração com três spins *down* nas posições x_m, x_n e x_o , com $x_m < x_n < x_o$, pode ser representada por $\phi_{m,n,o}(x_m, x_n, x_o) \equiv \phi_{m,n,o}$, de modo que o estado mais geral associado a este setor será dado pela combinação linear

$$\Psi_3(x_1, \dots, x_L) = \sum_{1 \leq i < j < k \leq L} a_{i,j,k}(x_i, x_j, x_k) \phi_{i,j,k}(x_i, x_j, x_k), \quad (2.50)$$

onde devemos determinar as amplitudes $a_{i,j,k}(x_i, x_j, x_k) \equiv a_{i,j,k}$. Através das relações (2.14) podemos encontrar a ação de H sobre $\phi_{m,n,o}$. Se as três partículas com spin *down* não são adjacentes, *i.e.*, se $x_n - x_m > 1$ e $x_o - x_n > 1$, obteremos assim a relação,

$$\begin{aligned} & -J(a_{m-1,n,o} + a_{m+1,n,o} + a_{m,n-1,o} + a_{m,n+1,o} + a_{m,n,o-1} + a_{m,n,o+1}) \\ & + 6J\Delta a_{m,n,o} = a_{m,n,o}E_3. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Já quando dois spins são adjacentes, temos que $x_n = x_{m+1}$ e $x_o - x_n > 1$, ou $x_n - x_m > 1$ e $x_o = x_{n+1}$, o que nos fornece as relações

$$\begin{aligned} -J(a_{m-1,m+1,o} + a_{m,m+2,o} + a_{m-1,n+1,o-1} + a_{m,m+1,o+1} - 4\Delta a_{m,m+1,o}) &= a_{m,m+1,o}E_3, \\ -J(a_{m-1,n,n+1} + a_{m+1,n,n+1} + a_{m,n-1,n+1} + a_{m,n,n+2} - 4\Delta a_{m,n,n+1}) &= a_{m,n,n+1}E_3, \end{aligned} \quad (2.52)$$

Por fim, quando os três spins *down* são adjacentes, isto é, quando $x_o = x_{m+2}$ e $x_n = x_{m+1}$, teremos

$$-J(a_{m-1,m+1,m+2} + a_{m,m+1,m+3} - 2\Delta a_{m,m+1,m+2}) = a_{m,m+1,m+2}E_3. \quad (2.53)$$

Note que as relações (2.52) e (2.53) podem ser facilmente deduzidas de (2.51).

O Ansatz de Bethe adequado para resolver as equações funcionais (2.51), (2.52) e (2.53) é o seguinte:

$$\begin{aligned} a_{m,n,o}(x_m, x_n, x_o) &= A_{123}e^{ik_1x_m+ik_2x_n+ik_3x_o} + A_{132}e^{ik_1x_m+ik_3x_n+ik_2x_o} \\ &+ A_{213}e^{ik_2x_m+ik_1x_n+ik_3x_o} + A_{231}e^{ik_2x_m+ik_3x_n+ik_1x_o} \\ &+ A_{312}e^{ik_3x_m+ik_1x_n+ik_2x_o} + A_{321}e^{ik_3x_m+ik_2x_n+ik_1x_o}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

De fato, a substituição de (2.54) em (2.51) nos fornece diretamente os autovalores de energia

$$E_3 = -2J(\cos k_1 + \cos k_2 + \cos k_3 - 3\Delta), \quad (2.55)$$

e a substituição de (2.54) e (2.55) em (2.52) nos fornece as relações

$$\frac{A_{312}}{A_{321}} = -s_{12}, \quad \frac{A_{213}}{A_{231}} = -s_{13}, \quad \frac{A_{123}}{A_{132}} = -s_{23}, \quad (2.56)$$

onde introduzimos as quantidades

$$s_{ij} = \frac{e^{i(k_i+k_j)} - 2\Delta e^{ik_i} + 1}{e^{i(k_j+k_i)} - 2\Delta e^{ik_j} + 1}, \quad (2.57)$$

chamadas de *fases de espalhamento de Bethe*.

Além disso, devido às condições periódicas de contorno, as amplitudes $a_{m,n,o}$ e $a_{n,o,m+L}$ etc. devem ser iguais, o que nos leva a outras relações entre as constantes A_{ijk} ,

$$\frac{A_{123}}{A_{231}} = \frac{A_{132}}{A_{321}} = e^{ik_1L}, \quad \frac{A_{231}}{A_{312}} = \frac{A_{213}}{A_{132}} = e^{ik_2L}, \quad \frac{A_{312}}{A_{123}} = \frac{A_{321}}{A_{213}} = e^{ik_3L}, \quad (2.58)$$

o que implica também na relação,

$$e^{i(k_1+k_2+k_3)L} = 1. \quad (2.59)$$

Através das relações (2.56) e (2.58) podemos finalmente verificar que os números de Bethe k_1 , k_2 e k_3 devem satisfazer o seguinte sistema de equações,

$$\begin{aligned} e^{ik_1L} &= \left(\frac{e^{i(k_1+k_2)} - 2\Delta e^{ik_1} + 1}{e^{i(k_1+k_2)} - 2\Delta e^{ik_2} + 1} \right) \left(\frac{e^{i(k_1+k_3)} - 2\Delta e^{ik_1} + 1}{e^{i(k_1+k_3)} - 2\Delta e^{ik_3} + 1} \right), \\ e^{ik_2L} &= \left(\frac{e^{i(k_1+k_2)} - 2\Delta e^{ik_2} + 1}{e^{i(k_1+k_2)} - 2\Delta e^{ik_1} + 1} \right) \left(\frac{e^{i(k_2+k_3)} - 2\Delta e^{ik_2} + 1}{e^{i(k_2+k_3)} - 2\Delta e^{ik_3} + 1} \right), \\ e^{ik_3L} &= \left(\frac{e^{i(k_1+k_3)} - 2\Delta e^{ik_3} + 1}{e^{i(k_1+k_3)} - 2\Delta e^{ik_1} + 1} \right) \left(\frac{e^{i(k_2+k_3)} - 2\Delta e^{ik_3} + 1}{e^{i(k_2+k_3)} - 2\Delta e^{ik_2} + 1} \right). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Estas são as equações de Bethe para o setor de três mágnons. Podemos verificar que se as equações de Bethe são satisfeitas, todas as equações funcionais (2.51), (2.52) e (2.53) são satisfeitas.

2.2.6 Estados de N mágnons

Analisando os casos anteriores podemos inferir o que acontece com o setor de N mágnons. Note que, do ponto de vista físico, devemos considerar $L \geq N$, uma vez que o número máximo de spins *down* da rede é limitado pelo número de partículas que ela contém. Devido a simetria de reversão dos spins, é suficiente ainda considerar que $L \geq 2N$.

Configurações nas quais N partículas da rede, digamos aquelas nas posições x_{m_1}, \dots, x_{m_N} , possuem spin *down* definem os estados quânticos associados ao setor de N mágnons. Podemos representar a função de onda de um tal estado por $\phi_{m_1, \dots, m_N}(x_{m_1}, \dots, x_{m_N}) \equiv \phi_{m_1, \dots, m_N}$. O estado

mais geral possível pertencente ao setor de N mágnons consiste em uma superposição dos estados de spin deste setor,

$$\Psi_N(x_1, \dots, x_L) = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_N \leq L} a_{k_1, \dots, k_N}(x_{k_1}, \dots, x_{k_N}) \phi_{k_1, \dots, k_N}(x_{k_1}, \dots, x_{k_N}), \quad (2.61)$$

e devemos determinar as amplitudes $a_{k_1, \dots, k_N}(x_{k_1}, \dots, x_{k_N}) \equiv a_{k_1, \dots, k_N}$.

Quando nenhum par de spins *down* são adjacentes, a ação de H sobre os estados ϕ_{m_1, \dots, m_N} nos fornece a seguinte relação funcional,

$$\begin{aligned} & - J \left(a_{m_1-1, m_2, \dots, m_N} + a_{m_1+1, m_2, \dots, m_N} + \dots + a_{m_1, m_2, \dots, m_{N+1}} + a_{m_1, m_2, \dots, m_{N-1}} \right) \\ & + 2NJ\Delta a_{m_1, m_2, \dots, m_N} = a_{m_1, m_2, \dots, m_N} E_N, \end{aligned} \quad (2.62)$$

Já quando um par de spins são adjacentes, digamos na posição x_{m_1} e $x_{m_1+1} = x_m + 1$, obtemos relações da forma

$$\begin{aligned} & - J \left(a_{m_1-1, m_1+1, m_3, \dots, m_N} + a_{m_1, m_1+2, m_3, \dots, m_N} + \dots + a_{m_1, m_1+1, \dots, m_{N+1}} + a_{m_1, m_1+1, \dots, m_{N-1}} \right) \\ & + 2J(N-1)\Delta a_{m_1, m_1+1, \dots, m_N} = a_{m_1, m_1+1, \dots, m_N} E_N, \end{aligned} \quad (2.63)$$

e equações semelhantes para quando os spins adjacentes estão nas posições x_j e x_{j+1} , $1 \leq j \leq L$. Além disso, quando tivermos três ou mais spins *down* adjacentes, equações semelhantes às de cima devem ser consideradas.

O Ansatz correto para resolver as equações funcionais acima deve levar em conta todas as permutações possíveis dos momenta das partículas, isto é, deve ter a forma,

$$a_{m_1 \dots m_N}(x_{m_1}, \dots, x_{m_N}) = \sum_{p_i \in S^n} A_{p_1 \dots p_N} e^{ik_{p_1} x_{m_1} + \dots + ik_{p_N} x_{m_N}}. \quad (2.64)$$

A substituição de (2.64) em (2.62) nos fornece os autovalores do hamiltoniano,

$$E_N = -2J \sum_{j=1}^N (\cos k_j - \Delta), \quad (2.65)$$

e com este valor de E_N , a substituição de (2.64) em (2.63) nos permite fixar razões entre as amplitudes A_{k_1, \dots, k_N} . De fato, obtemos relações da forma

$$\frac{A_{p_1 \dots p_j p_{j+1} \dots p_N}}{A_{p_1 \dots p_{j+1} p_j \dots p_N}} = -s_{p_j, p_{j+1}}, \quad \forall p_j \in S^n, \quad (2.66)$$

onde

$$s_{ij} = \frac{e^{i(k_i+k_j)} - 2\Delta e^{ik_i} + 1}{e^{i(k_j+k_i)} - 2\Delta e^{ik_j} + 1}. \quad (2.67)$$

Impondo condições periódicas de contorno, obtemos também que

$$\frac{A_{p_1 p_2 \dots p_{N-1} p_N}}{A_{p_2 p_3 \dots p_N p_1}} = e^{ik_{p_1} L}, \quad \forall p_j \in S^n, \quad (2.68)$$

o que fornece também a relação

$$e^{i(k_1+\dots+k_N)} = 1. \quad (2.69)$$

Através das relações (2.66) e (2.68), todos os coeficientes $A_{k_1\dots k_N}$ podem ser determinados e escritos, por exemplo, em termos de $A_{12\dots N}$. Em particular, podemos as identidades

$$(-1)^{N-1} s_{m,1}\dots s_{m,N} = e^{ik_m L}, \quad 1 \leq m \leq N, \quad (2.70)$$

as quais nos fornecem o seguinte sistema de equações não-lineares que fixam implicitamente os números de Bethe k_1, \dots, k_N ,

$$e^{ik_m L} = (-1)^{N-1} \prod_{\substack{j=1 \\ n \neq m}}^N \left(\frac{e^{i(k_m+k_j)} - 2\Delta e^{ik_m} + 1}{e^{i(k_m+k_j)} - 2\Delta e^{ik_j} + 1} \right), \quad 1 \leq m \leq N, \quad (2.71)$$

Estas são as equações de Bethe para o setor de N mágnons do modelo de seis vértices XXZ com condições de contorno periódicas. Note que os autovalores e autoestados do hamiltoniano só podem ser explicitamente escritos quando as equações de Bethe forem resolvidas para os números de Bethe k_1, \dots, k_N .

CAPÍTULO 3

O ANSATZ DE BETHE ALGÉBRICO

3.1 O modelo de seis vértices

Considere um sistema de partículas distribuídas uniformemente em uma rede retangular em duas dimensões, como em um cristal. Assuma que essas partículas interagem apenas com as suas vizinhas mais próximas, de modo que a energia de cada partícula depende somente dos estados das partículas adjacentes a ela.

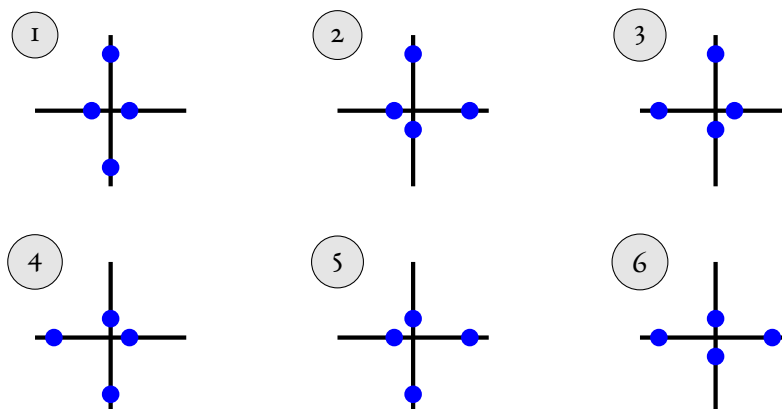


Figura 1 – Modelo que descreve o gelo. O centro de cada vértice representa um átomo de oxigênio. Os átomos de hidrogênio localizam-se nas arestas dos vértices e podem estar perto ou distante do átomo de oxigênio. Segundo a regra de Pauling apenas dois átomos de hidrogênio podem estar perto de um átomo de oxigênio, o que limita a seis o número de configurações possíveis para um dado vértice – temos assim um modelo de seis vértices.

Matematicamente, podemos representar esse sistema por meio de um reticulado retangular, onde cada vértice representa uma partícula da rede. A interação entre duas partículas adjacentes

pode então ser representada por uma aresta conectando os dois vértices correspondentes e a energia de cada partícula depende apenas das configurações associadas a estas arestas ou, de modo equivalente, das configurações atribuídas ao vértice em questão. Modelos que podem ser descritos desta maneira são chamados de *modelos de vértices*.

Na natureza existem sistemas que podem ser descritos por modelos de vértices. Um clássico exemplo é o gelo, que forma uma estrutura cristalina, de tal modo que a energia de cada molécula de água depende apenas da distância entre os átomos de hidrogênio em relação aos átomos de oxigênio¹. Podemos assim representar a estrutura cristalina do gelo em duas dimensões por um modelo de vértices. Neste modelo, colocamos cada átomo de oxigênio em um vértice, enquanto que os átomos de hidrogênio devem ser dispostos sobre as arestas. Admitindo que cada átomo de hidrogênio pode estar perto ou distante de um dado átomo de oxigênio, e que cada configuração contribui diferentemente para a energia desse átomo de oxigênio, cada vértice poderá assumir, a priori, $2^4 = 16$ configurações distintas. Temos assim um modelo de 16 vértices. Este modelo, no entanto, não fornece uma boa descrição para a gelo, uma vez que ele ignora o fato de a molécula de água ter apenas dois átomos de hidrogênio por átomo de oxigênio. Isso significa que devemos considerar apenas as configurações nas quais um átomo de oxigênio tem dois átomos hidrogênio próximos (e, portanto, dois distantes). Esta restrição foi considerada primeiramente por Pauling [60] e desde então ela é conhecida como a *regra do gelo de Pauling*. Levando-se em conta a regra do gelo, o número de configurações possíveis de um dado vértice é reduzido à somente seis: temos assim um modelo de 6 vértices.

A função de partição do modelo de seis vértices foi calculada por Lieb em 1967 [5]. Para isso ele reduziu o cálculo da função de partição à diagonalização da matriz de transferência associada a uma dada linha da rede. Relacionando esta matriz de transferência com modelo de Heisenberg em uma dimensão, Lieb pôde aplicar o Ansatz de Bethe a este modelo, onde os autovalores e autovetores da matriz de transferência pode ser calculado. Com isso Lieb foi capaz de calcular a entropia residual do gelo analiticamente, e obteve o resultado $S = k_B \log \lambda^N$, onde $\lambda = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ é a chamada constante de Lieb. A constante de Lieb também aparece em alguns problemas de combinatória, vide, por exemplo, a nota adicionada por Lieb em [5].

3.1.1 A mecânica estatística do modelo de seis vértices

Nesta seção pretendemos analisar o modelo de seis vértices através da mecânica estatística. Consideremos para este fim um reticulado com L colunas e N linhas. Vamos impor condições periódicas de contorno, de modo o vértice na posição $(i + L, j + N)$ será identificado com o vértice

¹ Embora a estrutura do gelo real seja tridimensional, sob muitos aspectos é satisfatório considerar um modelo bidimensional. Por exemplo, entropia residual do gelo, calculada através de de um modelo do gelo em duas dimensões, tem um bom acordo com os experimentos [5]).

na posição (i, j) . A cada vértice do reticulado, seja λ uma variável que descreve a configuração deste vértice². A energia do vértice depende de sua configuração e pode ser escrita como $E_{ij}(\lambda)$. O peso de Boltzmann referente a essa configuração do vértice é, então, $R_{ij}(\lambda) = \exp(-E_{ij}(\lambda)/k_B T)$, onde k_B é a constante de Boltzmann e T a temperatura. Para a rede como um todo, temos que a sua energia será igual a soma das energias de cada vértice, ou seja,

$$E(\lambda) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^L E_{ij}(\lambda), \quad (3.1)$$

O peso de Boltzmann associado a uma dada configuração do sistema, cuja energia é $E(\lambda)$, é dada então por

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= \exp\left(-\frac{E(\lambda)}{k_B T}\right) = \exp\left(-\frac{1}{k_B T} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^L E_{ij}(\lambda)\right) \\ &= \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^L \exp\left(-\frac{E_{ij}(\lambda)}{k_B T}\right) = \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^L R_{ij}(\lambda), \end{aligned} \quad (3.2)$$

e, por fim, a função de partição corresponde a soma dos pesos de Boltzmann para todas as possíveis configurações do sistema, isto é,

$$Z = \sum_{\lambda} R(\lambda) = \sum_{\lambda_{ij}} \left(\prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^L R_{ij}(\lambda) \right). \quad (3.3)$$

Usualmente a função de partição é calculada da seguinte forma: consideramos uma dada linha $i = a$ da rede e calculamos a função de partição devido apenas às interações das partículas nesta linha. Esta função de partição mais restrita é chamada de transferência. Depois consideramos as interações verticais entre estas linhas, obtendo-se assim a função de partição.

Convém, portanto, distinguir as interações das partículas nas direções horizontal e vertical. Para isso, introduzimos no lugar de λ as variáveis μ e ν , que correspondem ao número de configurações possíveis das arestas horizontais e verticais de um dado vértice, respectivamente. Assim, a energia de uma dada linha $i = a$ da rede pode ser escrita como

$$E_a(\mu, \nu) = E_{a1}(\mu, \nu) + \dots + E_{aL}(\mu, \nu), \quad (3.4)$$

e o peso de Boltzmann associado a esta linha, que é chamado de *monodromia*, é dado por

$$M_a(\mu, \nu) = \exp\left(-\frac{1}{k_B T} \sum_{j=1}^L E_{aj}(\mu, \nu)\right) = \prod_{j=1}^L \exp\left(-\frac{E_{aj}(\mu, \nu)}{k_B T}\right) = \prod_{j=1}^L R_{aj}(\mu, \nu). \quad (3.5)$$

² Para o modelo de 6 vértices, λ pode assumir os valores apenas seis valores.

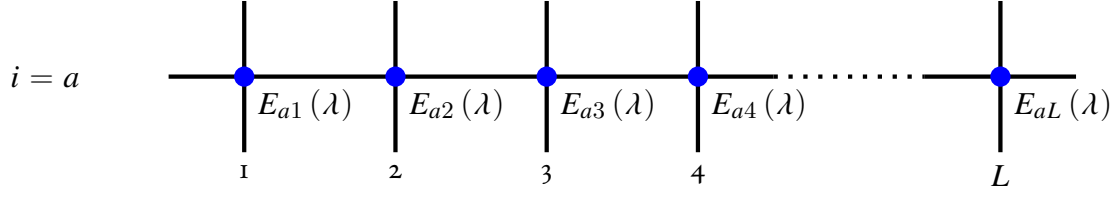


Figura 2 – Uma linha do reticulado. E energia de cada partícula depende da configuração λ do vértice que lhe é associado.

Assim, a transferência da linha a é obtida pela soma sob todas as configurações horizontais da monodromia associadas a esta linha,

$$T_a(\nu) = \sum_{\mu} M_a(\mu, \nu) = \sum_{\mu} \left(\prod_{j=1}^L R_{aj}(\mu, \nu) \right). \quad (3.6)$$

Para calcular a função de partição devemos agora levar em conta a interação de cada linha da rede com as linhas adjacentes. Repetindo o cálculo, obtemos que a função de partição Z será dada pela fórmula

$$Z = \sum_{\nu} \left(\prod_{a=1}^N T_a(\nu) \right). \quad (3.7)$$

Note que este procedimento pode ser facilmente estendido a dimensões mais altas.

3.1.2 Representação matricial para a função de monodromia e de transferência

Podemos facilmente construir uma representação matricial para estas quantidades. Para isto, podemos associar a cada vértice do reticulado um espaço de Hilbert, de modo que as grandezas associadas a este vértice possam ser representadas por operadores (matrizes) atuando neste espaço. Uma vez que cada vértice admite, a priori, 16 configurações, estas matrizes devem ter ordem 4×4 . Assim, a cada vértice devemos associar um espaço de Hilbert de dimensão 4. Convém diferenciar as direções vertical da horizontal e definir o espaço de Hilbert associado a um dado vértice do reticulado através do espaço tensorial $\mathcal{H} = H \otimes V$, onde H e V são dois espaços de Hilbert isomorfos a \mathbb{C}^2 .

Desse modo, o peso de Boltzmann associado a um dado vértice na linha a e coluna b do reticulado corresponderá a uma matriz $R_{ab}(\lambda)$ de ordem 4×4 , definida no $\text{End}(H_a \otimes V_b)$. Aqui, λ é uma variável relacionada com as interações do sistema – o chamado *parâmetro espectral*. Os elementos da matriz $R(\lambda)$ podem ser escritos como $R_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}(\lambda)$, onde os índices (i_1, j_1) referem-se ao espaço H_a e (i_2, j_2) espaço V_b .

Para o modelo de seis vértices, apenas seis elementos da matriz R devem ser diferentes de zero – eles correspondem às seis possibilidades de configurações de vértices mostradas na figura 1. Além disso, devido às simetrias do modelo, as configurações que diferem por uma inversão completa da configuração do vértice (tanto na horizontal quanto na vertical) devem possuir mesma energia, e portanto, elementos de matriz de $R(\lambda)$ correspondentes a essas configurações devem ser iguais³. Assim, a matriz $R(\lambda)$ do modelo de seis vértices deverá ter apenas três elementos distintos. Escolhendo uma base apropriada, podemos escrever esta matriz R como

$$R(\lambda) = \begin{bmatrix} a(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(\lambda) & c(\lambda) & 0 \\ 0 & c(\lambda) & b(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d(\lambda) \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

onde as funções $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ e $c(\lambda)$ devem ainda ser determinadas.

Considere agora dada linha do reticulado, digamos a linha $i = a$. Para construir uma representação matricial para a monodromia, podemos associar um espaço de Hilbert a esta linha através do produto tensorial dos espaços de Hilbert associados a cada vértice que ela contém, isto é,

$$V = V_{a1} \otimes V_{a2} \otimes \cdots \otimes V_{aL}. \quad (3.9)$$

Com isso introduzimos a *matriz de monodromia* como uma matriz que atua no $\text{End}(H_a \otimes V)$ através de

$$M_a(\lambda) = R_{a1}(\lambda)R_{a2}(\lambda) \cdots R_{aL}(\lambda), \quad (3.10)$$

onde $R_{aj}(\lambda)$, $1 \leq j \leq L$, é uma matriz definida em $\text{End}(H_a \otimes V_{a1} \otimes \cdots \otimes V_{aL})$ que atua como $R(\lambda)$ no espaço tensorial $H_a \otimes V_j$ e como identidade nos demais espaços vetoriais.

A *matriz de transferência*, por sua vez, fica definida pelo traço no espaço H_a da matriz de monodromia, isto é,

$$T_a(\lambda) = \text{tr}_a M_a(\lambda) = \text{tr}_a (R_{a1}(\lambda)R_{a2}(\lambda) \cdots R_{aL}(\lambda)), \quad (3.11)$$

Por fim, a função de partição pode ser calculada através da fórmula

$$Z = \text{tr} (T_1(\lambda)T_2(\lambda) \cdots T_N(\lambda)). \quad (3.12)$$

onde o traço é tomado agora nos espaços verticais.

Podemos ver, deste modo, que se for possível diagonalizar a matriz de transferência, então a função de partição pode ser facilmente calculada. De fato, desde cada linha do reticulado é equivalente as demais, segue que T_i deve possuir os mesmos autovalores para qualquer i , e podemos, portanto, escrever

$$Z = \text{tr} (T(\lambda))^N, \quad (3.13)$$

³ Por exemplo, na fig. 1, temos que as configurações $\{1, 6\}$, $\{2, 4\}$ e $\{3, 5\}$ devem possuir energias iguais.

onde supomos aqui que $T(\lambda)$ está escrita numa base onde ela é diagonal. Vemos assim que a matriz de transferência pode ser vista como um operador de evolução temporal, se interpretarmos a direção vertical como tempo, de modo que cada linha do reticulado corresponda a um sistema físico em uma dimensão em um dado instante de tempo. (Para o caso do modelo de 6 vértice veremos mais adiante que esse modelo unidimensional é justamente o modelo de Heisenberg.)

3.1.3 A equação de Yang-Baxter

A estrutura algébrica do Ansatz de Bethe que permite diagonalizar a matriz de transferência de um modelo integrável é fornecida pela equação de Yang-Baxter,

$$R_{12}(\lambda - \mu)R_{13}(\lambda)R_{23}(\mu) = R_{23}(\mu)R_{13}(\lambda)R_{12}(\lambda - \mu). \quad (3.14)$$

Esta equação está definida em $\text{End}(V_1 \otimes V_2 \otimes V_3)$ e $R_{ij}(\lambda)$ são operadores que atuam como a matriz $R(\lambda)$ nos espaço tensorial $V_{ij} \equiv V_i \otimes V_j$ e como a identidade no outro espaço vetorial, V_k .

A equação de Yang-Baxter foi deduzida quase em dois contextos diferentes. Na teoria do espalhamento quântico ela foi deduzida por McGuire e Yang e como uma condição para que o espalhamento de um ensemble de partículas possa ser descrito como uma composição de espalhamentos entre pares de partículas [23–25]. Em mecânica estatística ela foi deduzida por Baxter como uma condição suficiente para que a matriz de transferência de um dado modelo comute para diferentes valores do parâmetro espectral [26, 27], muito embora a sua origem remonte à relação *star-triangle* mencionada no trabalho de Onsager sobre o modelo de Ising [28, 29]. A comutatividade da matriz de transferência é importante no Ansatz de Bethe algébrico porque ela permite interpretar a matriz de transferência como uma geradora de inúmeras (infinitas no limite termodinâmico) quantidades

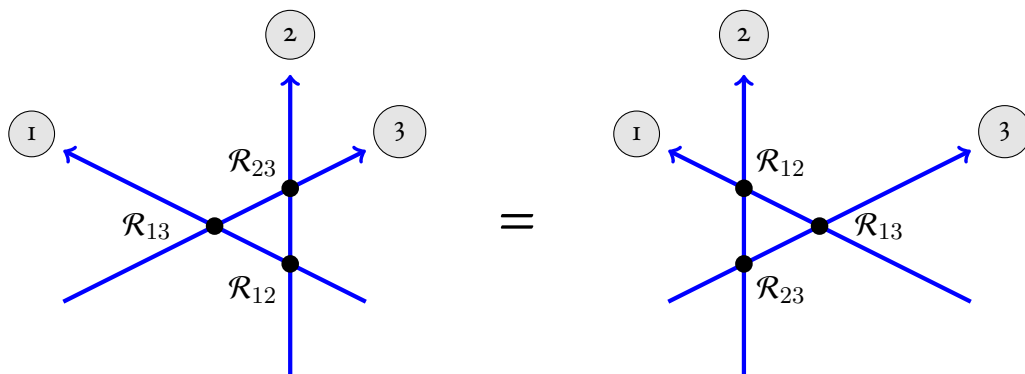


Figura 3 – Representação diagramática da equação de Yang-Baxter. A figura ilustra o espalhamento de três partículas, visto como a composição de espalhamento entre pares de partículas. Lendo-se o diagrama de baixo para cima (seta do tempo), a equação de Yang-Baxter pode ser identificada.

conservadas em involução (pois nestes casos ela comuta também com a hamiltoniana associada ao modelo). Isso fornece o status de integrável aos modelos solúveis pelo Ansatz de Bethe.

Se se um modelo é integrável, então a matriz $R(\lambda)$ associado a este modelo será uma solução da equação de Yang-Baxter. Em contrapartida, toda solução da equação de Yang-Baxter pode ser associado a um modelo integrável. Considere então a matriz $R(\lambda)$ do modelo de seis vértices (3.8). Veremos a seguir como podemos fixar as funções $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ e $z(\lambda)$ impondo que $R(\lambda)$ satisfaça a equação de Yang-Baxter.

Para o modelo de seis vértices, a equação de Yang-Baxter consiste em um sistema de 64 equações funcionais nas incógnitas $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ e $z(\lambda)$. Devido às simetrias do modelo, a maioria dessas equações são \identicamente satisfeitas, ou são linearmente dependente de outras. Com efeito temos que apenas 3 das 64 equações funcionais são independentes, a saber, as seguintes,

$$\begin{aligned} x(\lambda)z(\mu)x(\lambda - \mu) &= y(\lambda)z(\mu)y(\lambda - \mu) + z(\lambda)x(\mu)z(\lambda - \mu), \\ x(\lambda)y(\mu)z(\lambda - \mu) &= y(\lambda)x(\mu)z(\lambda - \mu) + z(\lambda)z(\mu)y(\lambda - \mu), \\ z(\lambda)y(\mu)x(\lambda - \mu) &= z(\lambda)x(\mu)y(\lambda - \mu) + y(\lambda)z(\mu)z(\lambda - \mu). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Este sistema de equações funcionais foi resolvido primeiramente por Baxter [?]. Para isso ele eliminou das equações as amplitudes com uma dada dependência. Por exemplo, eliminando as amplitudes com a dependência em $\lambda - \mu$, obtemos a seguinte equação,

$$\frac{x(\lambda)^2 + y(\lambda)^2 - z(\lambda)^2}{x(\lambda)y(\lambda)} = \frac{x(\mu)^2 + y(\mu)^2 - z(\mu)^2}{x(\mu)y(\mu)}. \quad (3.16)$$

Isso fornece uma separação de variáveis, já que cada lado desta equação depende de uma variável diferente. Isso implica que ambos os lados desta equações devem igualar uma dada constante, de modo que podemos escrever,

$$\frac{x(\lambda)^2 + y(\lambda)^2 - z(\lambda)^2}{x(\lambda)y(\lambda)} = \Delta. \quad (3.17)$$

Agora tudo o que é preciso para achar a solução é encontrar três funções $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ e $z(\lambda)$ que satisfaçam a relação funcional acima. Várias funções satisfazem esta identidade e, cada solução possível descreve um modelo integrável. Para o modelo de seis vértices com simetria XXZ , a solução procurada é

$$x(\lambda) = \sinh(\lambda + \eta), \quad y(\lambda) = \sinh \lambda, \quad z(\lambda) = \sinh \eta, \quad (3.18)$$

de modo que temos

$$\Delta = \cosh \eta. \quad (3.19)$$

Aqui, η é um parâmetro livre, o qual pode ser usado para adequar os resultados teóricos com os experimentais.

3.1.4 A integrabilidade do modelo de seis vértices

Mostraremos agora como a equação de Yang-Baxter para o modelo de 6 vértices implica a comutatividade da matriz de transferência. Para isso, será conveniente introduzir uma nova representação matricial – a chamada representação de Lax. Nesta representação a matriz $R_{ab}(\lambda)$, associada ao vértice da linha a e coluna k , é vista como uma matriz de ordem 2×2 que atua no espaço horizontal H_a mas cujos elementos são operadores atuando no espaço vertical V_b . Isto é,

$$R(\lambda) = \begin{bmatrix} L_1^1(\lambda) & L_1^2(\lambda) \\ L_2^1(\lambda) & L_2^2(\lambda) \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

onde

$$L_1^1(\lambda) = \begin{bmatrix} x(\lambda) & 0 \\ 0 & y(\lambda) \end{bmatrix}, \quad L_1^2(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z(\lambda) & 0 \end{bmatrix}, \quad L_2^1(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & z(\lambda) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_2^2(\lambda) = \begin{bmatrix} y(\lambda) & 0 \\ 0 & x(\lambda) \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

A matriz de monodromia, por sua vez, também pode ser representada como uma matriz 2×2 que atua em H_a mas cujos elementos são operadores que atuam no espaço tensorial $V \equiv V_1 \otimes \dots \otimes V_L$. Escrevemos, assim,

$$M(\lambda) = \begin{bmatrix} M_1^1(\lambda) & M_1^2(\lambda) \\ M_2^1(\lambda) & M_2^2(\lambda) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Os elementos de $M(\lambda)$ podem então ser computados pela fórmula⁴,

$$M_i^j(\lambda) = \sum_{\{k_1, \dots, k_{L-1}\}=1}^2 L_i^{k_1}(\lambda) \otimes L_{k_1}^{k_2}(\lambda) \otimes L_{k_2}^{k_3}(\lambda) \otimes \dots \otimes L_{k_{L-1}}^j(\lambda). \quad (3.23)$$

que pode ser facilmente compreendida se notarmos que os produtos tensoriais presentes igualam em número a quantidade L de vértices do reticulado, e que a somatória se estende a todas as combinações possíveis dos índices mudos, os quais podem assumir dos valores 1 e 2 somente.

Finalmente, temos que a matriz de transferência pode ser escrita, nesta representação, simplesmente como

$$T(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda). \quad (3.24)$$

⁴ Por exemplo, para o caso $L = 3$, temos,

$$\begin{aligned} M_1^1(\lambda) &= L_1^1(\lambda) \otimes L_1^1(\lambda) \otimes L_1^1(\lambda) + L_1^1(\lambda) \otimes L_1^2(\lambda) \otimes L_2^1(\lambda) + L_1^2(\lambda) \otimes L_1^1(\lambda) \otimes L_1^1(\lambda) + L_1^1(\lambda) \otimes L_2^2(\lambda) \otimes L_2^1(\lambda), \\ M_2^1(\lambda) &= L_2^1(\lambda) \otimes L_1^1(\lambda) \otimes L_1^1(\lambda) + L_2^1(\lambda) \otimes L_1^2(\lambda) \otimes L_2^1(\lambda) + L_2^2(\lambda) \otimes L_1^1(\lambda) \otimes L_1^1(\lambda) + L_2^2(\lambda) \otimes L_2^2(\lambda) \otimes L_2^1(\lambda), \\ M_1^2(\lambda) &= L_1^1(\lambda) \otimes L_1^1(\lambda) \otimes L_1^2(\lambda) + L_1^1(\lambda) \otimes L_1^2(\lambda) \otimes L_2^2(\lambda) + L_1^2(\lambda) \otimes L_1^1(\lambda) \otimes L_1^2(\lambda) + L_1^1(\lambda) \otimes L_2^2(\lambda) \otimes L_2^2(\lambda), \\ M_2^2(\lambda) &= L_2^1(\lambda) \otimes L_1^1(\lambda) \otimes L_1^2(\lambda) + L_2^1(\lambda) \otimes L_1^2(\lambda) \otimes L_2^2(\lambda) + L_2^2(\lambda) \otimes L_1^1(\lambda) \otimes L_1^2(\lambda) + L_2^2(\lambda) \otimes L_2^2(\lambda) \otimes L_2^2(\lambda). \end{aligned}$$

Com isso, deduz-se da equação de Yang-Baxter a chamada *equação fundamental do Ansatz de Bethe*, a saber, a equação,

$$S(\lambda - \mu) \{M(\lambda) \otimes M(\mu)\} = \{M(\mu) \otimes M(\lambda)\} S(\lambda - \mu). \quad (3.25)$$

Esta equação matricial é definida em $\text{End}(H_a \otimes V)$, com $V = V_1 \otimes \cdots \otimes V_L$ e onde

$$S(\lambda) = \begin{bmatrix} x(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z(\lambda) & y(\lambda) & 0 \\ 0 & y(\lambda) & z(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x(\lambda) \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

é chamada de matriz de espalhamento – ela está relacionada à matriz $R(\lambda)$ pela fórmula $S(\lambda) = PR(\lambda)$, onde P é o chamado permutador, definido pela relação $P(A \otimes B)P = B \otimes A$, válida para quaisquer operadores A e B definidos em $\text{End}(V_1 \otimes V_2)$. A matriz M deve estar escrita na representação de Lax para que o produto matricial faça sentido.

Tomando o traço no espaço H_a da equação (3.25), temos que

$$\begin{aligned} \text{tr}_a \{S(\lambda - \mu)M(\lambda) \otimes M(\mu)\} &= \text{tr}_a \{M(\mu) \otimes M(\lambda)S(\lambda - \mu)\}, \\ \text{tr}_a \{M(\lambda) \otimes M(\mu)\} &= \text{tr}_a \{S(\lambda - \mu)^{-1}M(\mu) \otimes M(\lambda)S(\lambda - \mu)\}, \\ \text{tr}_a \{M(\lambda) \otimes M(\mu)\} &= \text{tr}_a \{S(\lambda - \mu)S(\lambda - \mu)^{-1}M(\mu) \otimes M(\lambda)\}, \\ \text{tr}_a \{M(\lambda) \otimes M(\mu)\} &= \text{tr}_a \{M(\mu) \otimes M(\lambda)\}, \\ \text{tr}_a M(\lambda)\text{tr}_a M(\mu) &= \text{tr}_a M(\mu)\text{tr}_a M(\lambda), \end{aligned} \quad (3.27)$$

ou seja, desde que $T(\lambda) = \text{tr}_a M(\lambda)$, obtemos

$$[T(\lambda), T(\mu)] = 0. \quad (3.28)$$

A matriz de transferência do modelo de 6 vértices comuta, portanto para quaisquer valores dos parâmetros espectrais λ e μ , o que mostra que T é geradora de uma infinidade de quantidades conservadas, em especial, a hamiltoniana do modelo.

3.2 O Ansatz de Bethe algébrico em ação: diagonalizando da matriz de transferência

Nesta seção mostraremos como o Ansatz de Bethe algébrico pode ser usado para diagonalizar a matriz de transferência do modelo de seis vértices. Veremos que, mais uma vez, a equação de Yang-Baxter é de importância fundamental nesta construção.

3.2.1 As relações de comutação

No Ansatz de Bethe algébrico, os estados excitados são construídos atuando-se sucessivamente os operadores $B(\lambda_1)$, $B(\lambda_2)$ etc. em um dado autoestado da matriz de transferência, conhecido como estado de referência. Para computarmos a ação da matriz de transferência $T(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda)$ sobre estes estados, temos de passar os operadores $A(\lambda)$ e $D(\lambda)$ sobre os operadores $B(\lambda_1)$, $B(\lambda_2)$ etc., ou seja, temos de saber as relações de comutação entre esses operadores. Ocorre essas relações de comutação podem ser encontradas pela equação fundamental dada em (3.25). De fato, a equação (3.25), quando escrita na representação de Lax, representa um sistema de 16 equações lineares funcionais para variáveis não-comutativas A , B , C e D , os elementos da matriz de monodromia. Podemos manipular essas equações (resolvendo-se o sistema) de modo a encontrar as relações de comutação desejadas.

Apresentaremos a seguir apenas as relações de comutação que serão utilizadas mais adiante. São elas:

$$B(\lambda)B(\mu) = B(\mu)B(\lambda), \quad (3.29)$$

$$A(\lambda)B(\mu) = a(\mu - \lambda)B(\mu)A(\lambda) - b(\mu - \lambda)B(\lambda)A(\mu), \quad (3.30)$$

$$D(\lambda)B(\mu) = a(\lambda - \mu)B(\mu)D(\lambda) - b(\lambda - \mu)B(\lambda)D(\mu), \quad (3.31)$$

onde por conveniência introduzimos as quantidades,

$$a(\lambda) = \frac{x(\lambda)}{y(\lambda)} = \frac{\sinh(\lambda + \eta)}{\sinh(\lambda)}, \quad e \quad b(\lambda) = \frac{z(\lambda)}{y(\lambda)} = \frac{\sinh(\eta)}{\sinh(\lambda)}. \quad (3.32)$$

3.2.2 O estado de referência

O ponto de partida do Ansatz de Bethe algébrico consiste em encontrar um estado que seja um autoestado da matriz de transferência. Para o modelo de 6 vértices com condições de contorno periódicas, isso é bem simples de ser feito e, de fato, temos a seguinte

Proposição 1. *O estado definido por*

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \dots \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \bigotimes_{k=1}^L \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

é um autoestado da matriz de transferência $T(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda)$ e

$$T(\lambda) |0\rangle = (x(\lambda)^L + y(\lambda)^L) |0\rangle. \quad (3.34)$$

Além disso, os elementos $A(\lambda)$ e $D(\lambda)$ da matriz de monodromia atuam em $|0\rangle$ como

$$A(\lambda) |0\rangle = x(\lambda)^L |0\rangle, \quad B(\lambda) |0\rangle \notin |0\rangle, \quad C(\lambda) |0\rangle = 0 |0\rangle, \quad D(\lambda) |0\rangle = y(\lambda)^L |0\rangle. \quad (3.35)$$

Demonstração. A prova dessas afirmações é direta. Primeiro, note que os elementos da matriz R atuam em $|0\rangle$, quando escritas na representação de Lax, da seguinte forma,

$$L_1^1(\lambda) |0\rangle = x(\lambda) |0\rangle, \quad L_1^2(\lambda) |0\rangle \notin |0\rangle, \quad L_2^1(\lambda) |0\rangle = 0 |0\rangle, \quad L_2^2(\lambda) |0\rangle = y(\lambda) |0\rangle, \quad (3.36)$$

Logo, para provar a primeira afirmação basta olhar para a definição do operador $A(\lambda)$, dada pela equação (3.23). A partir desta definição podemos ver que o único termo que não contém o operador $L_2^1(\lambda)$ é o primeiro, onde todos os índices mudos são iguais a 1. Consequentemente, apenas o primeiro termo $L_1^1(\lambda) \otimes \dots \otimes L_1^1(\lambda)$ sobrevive e a sua ação sobre $|0\rangle$ é justamente $x(\lambda)^L |0\rangle$.

Do mesmo modo, para provar a última afirmação é suficiente perceber que, pela definição de $D(\lambda)$, apenas o último termo não contém o operador $L_2^1(\lambda)$, onde os índices mudos são todos iguais a 2. Assim, desde que a ação de $L_2^2(\lambda) \otimes \dots \otimes L_2^2(\lambda)$ em $|0\rangle$ é exatamente $y(\lambda)^L |0\rangle$ a afirmação é justificada.

Novamente, a partir da definição de $B(\lambda)$ também podemos ver que a sua ação sobre $|0\rangle$ não pode ser proporcional a $|0\rangle$, já que existem termos que contêm $L_1^2(\lambda)$ como um fator mas que não contêm $L_2^1(\lambda)$. Por fim, para provar que $C(\lambda) |0\rangle = 0 |0\rangle$ basta notar que na definição de $C(\lambda)$ todos os termos contêm $L_2^1(\lambda)$ como um fator, de modo que o estado de referência será aniquilado por todos estes termos. A proposição fica assim demonstrada. \square

Em resumo, o estado $|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \dots \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ é um autoestado da matriz de transferência cujo autovalor é

$$\tau_0(\lambda) = x(\lambda)^L + y(\lambda)^L = \sinh(\lambda + \eta)^L + \sinh(\lambda)^L. \quad (3.37)$$

3.2.3 Estados de um mágnon

Através da ação da matriz de monodromia sobre o estado de referência podemos notar duas coisas: em primeiro lugar, vemos que o operador C se comporta como um operador de aniquilação e, em segundo lugar, que o operador B atua como um operador de criação. Os estados excitados podem, por conseguinte, ser construídos pela ação do operador de criação B sobre o estado de referência $|0\rangle$. Veremos agora que é exatamente isso que é feito no Ansatz de Bethe algébrico. Definimos, assim, o estado de um mágnon da seguinte forma:

$$|\lambda_1\rangle = B(\lambda_1) |0\rangle. \quad (3.38)$$

Note que o operador B depende da celeridade λ_1 e não de λ . Isso é feito para que possamos determinar λ_1 de modo que $|\lambda_1\rangle$ seja de fato um autoestado da matriz de transferência. veremos na sequência que λ_1 será fixada implicitamente pela equação de Bethe associada ao setor de um mágnon.

Passemos agora ao cálculo da ação da matriz de transferência sobre $|\lambda_1\rangle$. Temos que,

$$T(\lambda) |\lambda_1\rangle = A(\lambda)B(\lambda_1) |0\rangle + D(\lambda)B(\lambda_1) |0\rangle, \quad (3.39)$$

No Ansatz de Bethe algébrico não procuramos encontrar a ação do operador B em $|0\rangle$, antes, usamos as relações de comutação entre os operadores $A(\lambda)$ e $D(\lambda)$ com $B(\mu)$, que são fornecidas pela equação fundamental (3.25). De acordo com as equações (3.30) e (3.31), teremos, então,

$$\begin{aligned} A(\lambda)B(\lambda_1) |0\rangle &= a(\lambda_1 - \lambda)B(\lambda_1)A(\lambda) |0\rangle - b(\lambda_1 - \lambda)B(\lambda)A(\lambda_1) |0\rangle, \\ D(\lambda)B(\lambda_1) |0\rangle &= a(\lambda - \lambda_1)B(\lambda_1)D(\lambda) |0\rangle - b(\lambda - \lambda_1)B(\lambda)D(\lambda_1) |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Com isso, podemos agora atuar os operadores A e D no estado de referência $|0\rangle$, com o que vamos obter,

$$\begin{aligned} A(\lambda)B(\lambda_1) |0\rangle &= x(\lambda)^L a(\lambda_1 - \lambda)B(\lambda_1) |0\rangle - x(\lambda_1)^L b(\lambda_1 - \lambda)B(\lambda) |0\rangle, \\ D(\lambda)B(\lambda_1) |0\rangle &= y(\lambda)^L a(\lambda - \lambda_1)B(\lambda_1) |0\rangle - y(\lambda_1)^L b(\lambda - \lambda_1)B(\lambda) |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Portanto, vemos que a ação da matriz de transferência em $|\lambda_1\rangle$ fica dada por

$$\begin{aligned} T(\lambda) |\lambda_1\rangle &= \left(x(\lambda)^L a(\lambda_1 - \lambda) + y(\lambda)^L a(\lambda - \lambda_1) \right) |\lambda_1\rangle \\ &\quad - \left(x(\lambda_1)^L b(\lambda_1 - \lambda) + y(\lambda_1)^L b(\lambda - \lambda_1) \right) |\lambda\rangle. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Note agora que $|\lambda_1\rangle$ somente será um autoestado de $T(\lambda)$ se o segundo termo se anular, já que este termo não pode ser proporcional a $|\lambda_1\rangle$, uma vez que o parâmetro espectral λ é arbitrário. Isso dá origem a equação de Bethe,

$$\frac{x(\lambda_1)^L}{y(\lambda_1)^L} = -\frac{b(\lambda - \lambda_1)}{b(\lambda_1 - \lambda)} = 1, \quad (3.43)$$

ou, substituindo as amplitudes,

$$\left(\frac{\sinh(\lambda_1 + \eta)}{\sinh \lambda_1} \right)^L = 1. \quad (3.44)$$

Assim, se λ_1 satisfaz esta relação então $|\lambda_1\rangle$ será um autoestado de $T(\lambda)$ e o correspondente autovalor será dado por

$$\begin{aligned} \tau_1(\lambda|\lambda_1) &= a(\lambda_1 - \lambda)x(\lambda)^L + a(\lambda - \lambda_1)y(\lambda)^L \\ &= \frac{\sinh(\lambda_1 - \lambda + \eta)}{\sinh(\lambda_1 - \lambda)} \sinh(\lambda + \eta)^L + \frac{\sinh(\lambda - \lambda_1 + \eta)}{\sinh(\lambda - \lambda_1)} \sinh(\lambda)^L \end{aligned} \quad (3.45)$$

3.2.4 Estados de dois mágnons

De forma semelhante, aplicando-se duas vezes o operador de criação B no estado de referência $|0\rangle$ obtemos o que se chama de estado de dois mágnons,

$$|\lambda_1, \lambda_2\rangle = B(\lambda_1)B(\lambda_2)|0\rangle, \quad (3.46)$$

onde as celeridades λ_1 e λ_2 devem ser determinadas a fim de que $|\lambda_1, \lambda_2\rangle$ seja um autoestado da matriz de transferência $T(\lambda)$.

A ação de $T(\lambda)$ em $|\lambda_1, \lambda_2\rangle$ é dada por

$$T(\lambda)|\lambda_1, \lambda_2\rangle = A(\lambda)B(\lambda_1)B(\lambda_2)|0\rangle + D(\lambda)B(\lambda_1)B(\lambda_2)|0\rangle. \quad (3.47)$$

Para calcular explicitamente essa ação temos de usar as relações de comutação entre A e D com B duas vezes. Na primeira vez isso fornece,

$$\begin{aligned} A(\lambda)B(\lambda_1)B(\lambda_2)|0\rangle &= a(\lambda_1 - \lambda)B(\lambda_1)A(\lambda)B(\lambda_2)|0\rangle - b(\lambda_1 - \lambda)B(\lambda)A(\lambda_1)B(\lambda_2)|0\rangle, \\ D(\lambda)B(\lambda_1)B(\lambda_2)|0\rangle &= a(\lambda - \lambda_1)B(\lambda_1)D(\lambda)B(\lambda_2)|0\rangle - b(\lambda - \lambda_1)B(\lambda)D(\lambda_1)B(\lambda_2)|0\rangle, \end{aligned} \quad (3.48)$$

e então, usando novamente as relações de comutação, obtemos,

$$\begin{aligned} A(\lambda)|\lambda_1, \lambda_2\rangle &= a(\lambda_1 - \lambda)a(\lambda_2 - \lambda)x(\lambda)^L|\lambda_1, \lambda_2\rangle \\ &+ (b(\lambda_1 - \lambda)b(\lambda_2 - \lambda_1) - a(\lambda_1 - \lambda)b(\lambda_2 - \lambda))x(\lambda_2)^L|\lambda_1, \lambda\rangle \\ &- b(\lambda_1 - \lambda)a(\lambda_2 - \lambda_1)x(\lambda_1)^L|\lambda, \lambda_2\rangle, \end{aligned} \quad (3.49)$$

e

$$\begin{aligned} D(\lambda)|\lambda_1, \lambda_2\rangle &= a(\lambda - \lambda_1)a(\lambda - \lambda_2)y(\lambda)^L|\lambda_1, \lambda_2\rangle \\ &+ (b(\lambda - \lambda_1)b(\lambda_1 - \lambda_2) - a(\lambda - \lambda_1)b(\lambda - \lambda_2))y(\lambda_2)^L|\lambda_1, \lambda\rangle \\ &- b(\lambda - \lambda_1)a(\lambda_1 - \lambda_2)y(\lambda_1)^L|\lambda, \lambda_2\rangle, \end{aligned} \quad (3.50)$$

onde atuamos com os operadores A e D em $|0\rangle$, conforme (3.35), e usamos a notação

$$|\lambda_1, \lambda\rangle = B(\lambda_1)B(\lambda)|0\rangle \quad \text{e} \quad |\lambda, \lambda_2\rangle = B(\lambda)B(\lambda_2)|0\rangle. \quad (3.51)$$

Somando as duas expressões acima, obtemos a ação da matriz de transferência em $|\lambda_1, \lambda_2\rangle$,

$$\begin{aligned} T(\lambda)|\lambda_2, \lambda_1\rangle &= \left(a(\lambda_1 - \lambda)a(\lambda_2 - \lambda)x(\lambda)^L + a(\lambda - \lambda_1)a(\lambda - \lambda_2)y(\lambda)^L \right) |\lambda_1, \lambda_2\rangle \\ &+ (b(\lambda_1 - \lambda)b(\lambda_2 - \lambda_1) - a(\lambda_1 - \lambda)b(\lambda_2 - \lambda))x(\lambda_2)^L|\lambda_1, \lambda\rangle \\ &+ (b(\lambda - \lambda_1)b(\lambda_1 - \lambda_2) - a(\lambda - \lambda_1)b(\lambda - \lambda_2))y(\lambda_2)^L|\lambda_1, \lambda\rangle \\ &- \left(b(\lambda_1 - \lambda)a(\lambda_2 - \lambda_1)x(\lambda_1)^L + b(\lambda - \lambda_1)a(\lambda_1 - \lambda_2)y(\lambda_1)^L \right) |\lambda, \lambda_2\rangle \end{aligned} \quad (3.52)$$

A fim de que $|\lambda_1, \lambda_2\rangle$ seja um autoestado da matriz de transferência os termos proporcionais a $|\lambda_1, \lambda\rangle$ e $|\lambda, \lambda_2\rangle$ devem ser nulos. Impondo a nulidade destes termos somos levados às equações de Bethe para o estado de dois mágnons,

$$b(\lambda_1 - \lambda)a(\lambda_2 - \lambda_1)x(\lambda_1)^L + b(\lambda - \lambda_1)a(\lambda_1 - \lambda_2)y(\lambda_1)^L = 0 \quad (3.53)$$

e

$$\begin{aligned} & (b(\lambda_1 - \lambda)b(\lambda_2 - \lambda_1) - a(\lambda_1 - \lambda)b(\lambda_2 - \lambda))x(\lambda_2)^L + \\ & (b(\lambda - \lambda_1)b(\lambda_1 - \lambda_2) - a(\lambda - \lambda_1)b(\lambda - \lambda_2))y(\lambda_2)^L = 0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

A equação (3.54) pode, entretanto, ser simplificada graças às identidades⁵

$$a(\lambda_1 - \lambda)b(\lambda_2 - \lambda) - b(\lambda_1 - \lambda)b(\lambda_2 - \lambda_1) = b(\lambda_2 - \lambda)a(\lambda_1 - \lambda_2), \quad (3.55)$$

$$a(\lambda - \lambda_1)b(\lambda - \lambda_2) - b(\lambda - \lambda_1)b(\lambda_1 - \lambda_2) = b(\lambda - \lambda_2)a(\lambda_2 - \lambda_1), \quad (3.56)$$

que são equivalentes às identidades trigonométricas⁶,

$$\frac{\sinh(\lambda - \lambda_1 + \eta) \sinh(\eta)}{\sinh(\lambda - \lambda_1) \sinh(\lambda - \lambda_2)} - \frac{\sinh(\eta)^2}{\sinh(\lambda - \lambda_1) \sinh(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{\sinh(\eta) \sinh(\lambda_2 - \lambda_1 + \eta)}{\sinh(\lambda - \lambda_2) \sinh(\lambda_2 - \lambda_1)}. \quad (3.57)$$

Com essas identidades podemos reescrever as equações de Bethe de uma forma mais simétrica, a saber,

$$b(\lambda_1 - \lambda)a(\lambda_2 - \lambda_1)x(\lambda_1)^L + b(\lambda - \lambda_1)a(\lambda_1 - \lambda_2)y(\lambda_1)^L = 0, \quad (3.58)$$

$$b(\lambda_2 - \lambda)a(\lambda_1 - \lambda_2)x(\lambda_1)^L + b(\lambda - \lambda_2)a(\lambda_2 - \lambda_1)y(\lambda_2)^L = 0. \quad (3.59)$$

Simplificando, obtemos

$$\frac{x(\lambda_1)^L}{y(\lambda_1)^L} = \frac{a(\lambda_1 - \lambda_2)}{a(\lambda_2 - \lambda_1)}, \quad e \quad \frac{x(\lambda_2)^L}{y(\lambda_2)^L} = \frac{a(\lambda_2 - \lambda_1)}{a(\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad (3.60)$$

ou, substituindo as amplitudes,

$$\left(\frac{\sinh(\lambda_1 + \eta)}{\sinh(\lambda_1)} \right)^L = \frac{\sinh(\lambda_1 - \lambda_2 + \eta)}{\sinh(\lambda_1 - \lambda_2 - \eta)}, \quad e \quad \left(\frac{\sinh(\lambda_2 + \eta)}{\sinh(\lambda_2)} \right)^L = \frac{\sinh(\lambda_2 - \lambda_1 + \eta)}{\sinh(\lambda_2 - \lambda_1 - \eta)}. \quad (3.61)$$

⁵ Estas identidades são consequências da equação de Yang-Baxter para o modelo de seis vértices. Todavia, elas também podem ser deduzidas diretamente por argumentos de simetria. De fato, uma vez que os operadores $B(\lambda_1)$ e $B(\lambda_2)$ comutam, temos que o estado de dois mágnons $|\lambda_1, \lambda_2\rangle$ pode ser reescrito como $|\lambda_2, \lambda_1\rangle$. Se considerarmos este último caso e repetirmos as contas acima vamos obter os mesmos resultados anteriores, exceto que agora as celeridades λ_1 and λ_2 estarão trocadas. Assim, a equação de Bethe para λ_2 terá a mesma forma que a equação de Bethe para λ_1 obtida anteriormente e, como elas tem de ser iguais, seguem-se as identidades apresentadas acima.

⁶ Note portanto que a álgebra de Yang-Baxter pode ser usada para se encontrar intrincadas identidades trigonométricas. No caso do modelo de oito vértices (uma importante generalização do modelo de seis vértices), os elementos da matriz R dependem de funções elípticas, neste caso a álgebra de Yang-Baxter fornecerá interessantes identidades envolvendo tais funções transcendentais.

Notemos que as equações de Bethe não dependem do parâmetro espectral λ . Isso é obrigatório, desde que essas relações devem ser válidas para qualquer valor de λ .

Portanto, uma vez que as equações de Bethe sejam satisfeitas, o estado $|\lambda_2, \lambda_1\rangle$ será um autoestado da matriz de transferência e o correspondente autovalor será igual a

$$\tau_2(\lambda|\lambda_1, \lambda_2) = a(\lambda_1 - \lambda)a(\lambda_2 - \lambda)x(\lambda)^L + a(\lambda - \lambda_1)a(\lambda - \lambda_2)y(\lambda)^L, \quad (3.62)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \tau_2(\lambda|\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{\sinh(\lambda_1 - \lambda + \eta)}{\sinh(\lambda_1 - \lambda)} \frac{\sinh(\lambda_2 - \lambda + \eta)}{\sinh(\lambda_2 - \lambda)} \sinh(\lambda + \eta)^L \\ &+ \frac{\sinh(\lambda - \lambda_1 + \eta)}{\sinh(\lambda - \lambda_1)} \frac{\sinh(\lambda - \lambda_2 + \eta)}{\sinh(\lambda - \lambda_2)} \sinh(\lambda)^L. \end{aligned} \quad (3.63)$$

3.2.5 Estados de N mágnons

Os dois casos discutidos acima são suficientes para discutirmos o caso mais geral, os estados de N mágnons. Estes estados são construídos atuando o operador de criação N vezes no estado de referência $|0\rangle$,

$$|\lambda_1, \dots, \lambda_N\rangle = B(\lambda_1)\dots B(\lambda_N) |0\rangle. \quad (3.64)$$

O conjunto de celeridades $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ deve ser fixado a fim de que $|\lambda_1, \dots, \lambda_N\rangle$ seja um autoestado da matriz de transferência. A ação da matriz de transferência em $|\lambda_N, \dots, \lambda_1\rangle$, por sua vez, é dado por

$$T(\lambda) |\lambda_1, \dots, \lambda_N\rangle = A(\lambda)B(\lambda_1)\dots B(\lambda_N) |0\rangle + D(\lambda)B(\lambda_1)\dots B(\lambda_N) |0\rangle. \quad (3.65)$$

para calculá-lo é necessário usar as relações de comutação N vezes. Com isso, torna-se possível provar o seguinte

Teorema 1. *A ação da matriz de transferência $T(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda)$ nos estados de N mágnons $|\lambda_1, \dots, \lambda_N\rangle = B(\lambda_1)\dots B(\lambda_N) |0\rangle$ é dada por*

$$T(\lambda) |\lambda_1, \dots, \lambda_N\rangle = \left(x(\lambda)^L \prod_{k=1}^N a(\lambda_k - \lambda) + y(\lambda)^L \prod_{k=1}^N a(\lambda - \lambda_k) \right) |\lambda_1, \dots, \lambda_N\rangle, \quad (3.66)$$

desde que as equações de Bethe

$$x(\lambda_j)^L \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N a(\lambda_k - \lambda_j) - y(\lambda_j)^L \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N a(\lambda_j - \lambda_k) = 0, \quad 1 \leq j \leq N, \quad (3.67)$$

sejam satisfeitas.

Demonstração. Para provar este teorema faremos uso da seguinte □

Proposição 2. *As relações de comutação entre $A(\lambda)$ e $D(\lambda)$ com $\prod_{k=1}^N B(\lambda_k)$ são dadas respectivamente por*

$$\begin{aligned} A(\lambda) \prod_{k=1}^N B(\lambda_k) &= \prod_{k=1}^N a(\lambda_k - \lambda) B(\lambda_k) A(\lambda) \\ &\quad - \sum_{j=1}^N b(\lambda_j - \lambda) B(\lambda) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N a(\lambda_k - \lambda_j) B(\lambda_k) A(\lambda_j), \end{aligned} \quad (3.68)$$

e

$$\begin{aligned} D(\lambda) \prod_{k=1}^N B(\lambda_k) &= \prod_{k=1}^N a(\lambda - \lambda_k) B(\lambda_k) D(\lambda) \\ &\quad - \sum_{j=1}^N b(\lambda - \lambda_j) B(\lambda) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N a(\lambda_j - \lambda_k) B(\lambda_k) D(\lambda_j). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Demonstração. Isto pode ser provado por indução matemática. Desde que as provas das equações (3.68) e (3.69) são similares vamos nos concentrar somente na prova da equação (3.68). Para $N = 1$ a proposição é claramente verdadeira (compare com o resultados da subseção 3.2.3). Assumamos que a proposição seja válida para um $N = n$ arbitrário. Desejamos provar que nestas condições a proposição também é válida no caso $N = n + 1$.

Desde que a ordem dos operadores de criação $B(\lambda_1), B(\lambda_2)$ etc. não importa, podemos colocar $B(\lambda_{n+1})$ para fora do produtório e suar a relação de comutação entre $A(\lambda)$ and $B(\lambda_{n+1})$ para obter

$$\begin{aligned} A(\lambda) B(\lambda_{n+1}) \prod_{k=1}^n B(\lambda_k) &= a(\lambda_{n+1} - \lambda) B(\lambda_{n+1}) A(\lambda) \prod_{k=1}^n B(\lambda_k) \\ &\quad - b(\lambda_{n+1} - \lambda) B(\lambda) A(\lambda_{n+1}) \prod_{k=1}^n B(\lambda_k). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Agora, como por hipótese a proposição é válida para $N = n$, nós somos levados a

$$\begin{aligned} A(\lambda) \prod_{k=1}^{n+1} B(\lambda_k) &= \prod_{k=1}^{n+1} a(\lambda_k - \lambda) B(\lambda_k) A(\lambda) \\ &\quad - a(\lambda_{n+1} - \lambda) B(\lambda_{n+1}) \sum_{j=1}^n b(\lambda_j - \lambda) B(\lambda) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n a(\lambda_k - \lambda_j) B(\lambda_k) A(\lambda_j) \\ &\quad + b(\lambda_{n+1} - \lambda) B(\lambda) \prod_{k=1}^n a(\lambda_k - \lambda_{n+1}) B(\lambda_k) A(\lambda_{n+1}) \\ &\quad - b(\lambda_{n+1} - \lambda) B(\lambda) \sum_{j=1}^n b(\lambda_j - \lambda_{n+1}) B(\lambda_{n+1}) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n a(\lambda_k - \lambda_j) B(\lambda_k) A(\lambda_j). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Assim, agrupando o segundo termo com o quarto, obteremos

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left\{ a(\lambda_{n+1} - \lambda)b(\lambda_j - \lambda) - b(\lambda_{n+1} - \lambda)b(\lambda_j - \lambda_{n+1}) \right\} \\ & \times B(\lambda)B(\lambda_{n+1}) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n a(\lambda_k - \lambda_j)B(\lambda_k)A(\lambda_j), \end{aligned} \quad (3.72)$$

que, graças a identidade,

$$a(\lambda_{n+1} - \lambda)b(\lambda_j - \lambda) - b(\lambda_{n+1} - \lambda)b(\lambda_j - \lambda_{n+1}) = b(\lambda_j - \lambda)a(\lambda_{n+1} - \lambda_j), \quad (3.73)$$

poede ser simplificado para

$$\sum_{j=1}^n b(\lambda_j - \lambda)B(\lambda) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n+1} a(\lambda_k - \lambda_j)B(\lambda_k)A(\lambda_j). \quad (3.74)$$

Notando agora que o terceiro termo da equação (3.71) pode ser agrupado com esta última quantidade obtida, bastando para isso estender a somatória para $N = n + 1$, nós obtemos

$$\begin{aligned} A(\lambda) \prod_{k=1}^{n+1} B(\lambda_k) &= \prod_{k=1}^{n+1} a(\lambda_k - \lambda)B(\lambda_k)A(\lambda) \\ &- \sum_{j=1}^{n+1} b(\lambda_j - \lambda)B(\lambda) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N a(\lambda_k - \lambda_j)B(\lambda_k)A(\lambda_j), \end{aligned} \quad (3.75)$$

o que prova a proposição para a relação de comutação entre $A(\lambda)$ e $\prod_{k=1}^N B(\lambda_k)$. Repetindo a mesma linha de raciocínio para a relação de comutação entre $D(\lambda)$ e $\prod_{k=1}^N B(\lambda_k)$ obteremos também

$$\begin{aligned} D(\lambda) \prod_{k=1}^N B(\lambda_k) &= \prod_{k=1}^N a(\lambda - \lambda_k)B(\lambda_k)D(\lambda) \\ &- \sum_{j=1}^N b(\lambda - \lambda_j)B(\lambda) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N a(\lambda_j - \lambda_k)B(\lambda_k)D(\lambda_j), \end{aligned} \quad (3.76)$$

o que conclui a prova da proposição.

Agora passamos a provar o teorema. Somando a equação (3.68) com (3.69) e atuando com

os operadores A and D no estado de referência, vemos que

$$\begin{aligned}
T(\lambda) |\lambda_1, \dots, \lambda_N\rangle &= \left(\prod_{k=1}^N a(\lambda_k - \lambda)x(\lambda)^L + \prod_{k=1}^N a(\lambda - \lambda_k)y(\lambda)^L \right) |\lambda_1, \dots, \lambda_N\rangle \\
&- \sum_{j=1}^N b(\lambda_j - \lambda)x(\lambda_j)^L \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N a(\lambda_k - \lambda_j) |\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_N\rangle, \\
&- \sum_{j=1}^N b(\lambda - \lambda_j)y(\lambda_j)^L \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N a(\lambda_j - \lambda_k) |\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_N\rangle, \quad (3.77)
\end{aligned}$$

onde introduzimos a notação

$$|\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_N\rangle = B(\lambda) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N B(\lambda_k). \quad (3.78)$$

Portanto, se $|\lambda_1, \dots, \lambda_N\rangle$ é um autoestado da matriz de transferência, a soma dos termos proporcionais $|\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_N\rangle$, para cada j variando de 1 a N , deve ser zero. Isso significa que o autovalor é dado por

$$\tau_N(\lambda|\lambda_1, \dots, \lambda_N) = x(\lambda)^L \prod_{k=1}^N a(\lambda_k - \lambda) + y(\lambda)^L \prod_{k=1}^N a(\lambda - \lambda_k), \quad (3.79)$$

enquanto que a nulidade dos termos não proporcionais a $|\lambda_1, \dots, \lambda_N\rangle$ nos fornece as equações de Bethe

$$y(\lambda_j)^L \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N a(\lambda_j - \lambda_k) - x(\lambda_j)^L \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N a(\lambda_k - \lambda_j) = 0 \quad 1 \leq j \leq N. \quad (3.80)$$

Isso conclui a prova do teorema. \square

Note que ao substituirmos as amplitudes, obtemos, para o autovalor,

$$\tau_N(\lambda|\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \sinh(\lambda + \eta)^L \prod_{k=1}^N \frac{\sinh(\lambda_k - \lambda + \eta)}{\sinh(\lambda_k - \lambda)} + \sinh(\lambda)^L \prod_{k=1}^N \frac{\sinh(\lambda - \lambda_k + \eta)}{\sinh(\lambda - \lambda_k)}, \quad (3.81)$$

enquanto que as equações de Bethe se tornam,

$$\frac{\sinh(\lambda_j + \eta)^L}{\sinh(\lambda_j)^L} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \frac{\sinh(\lambda_j - \lambda_k + \eta)}{\sinh(\lambda_j - \lambda_k - \eta)} \quad 1 \leq j \leq N. \quad (3.82)$$

3.2.6 O Ansatz de Bethe algébrico visto como um problema combinatorial

Nesta subseção vamos mostrar que os resultados apresentados acima podem ser obtidos de uma forma muito mais simples, através de argumentos combinatoriais apenas. A natureza combinatorial do Ansatz de Bethe algébrico deve-se à estrutura das relações de comutação de $A(\lambda)$ e $D(\lambda)$ com $B(\mu)$ dadas pelas equações (3.30) e (3.31), respectivamente. De fato, consideremos, por exemplo a relação de comutação entre o operador $A(\lambda)$ com os operadores $B(\lambda_1)B(\lambda_2)$. Ao usarmos uma vez a relação de comutação (3.30) obteremos,

$$A(\lambda)B(\lambda_1)B(\lambda_2) = a(\lambda_1 - \lambda)B(\lambda_1)A(\lambda)B(\lambda_2) - b(\lambda_1 - \lambda)B(\lambda)A(\lambda_1)B(\lambda_2). \quad (3.83)$$

Esta equação pode ser interpretada da seguinte forma: em primeiro lugar notemos que ao usarmos a relação de comutação entre A e B obtemos dois termos. O primeiro termo, que representaremos por (+), possui o coeficiente $a(\lambda_1 - \lambda)$ e nos deixa para calcular relação de comutação entre $A(\lambda)$ e $B(\lambda_2)$. Já o segundo termo, que representaremos por (-), carrega possui o coeficiente $-b(\lambda_1 - \lambda)$ e nos deixa para calcular a relação de comutação entre $A(\lambda_1)$ e $B(\lambda_2)$.

Deste modo, quando usarmos N vezes a relação de comutação entre A e B para calcular a quantidade $A(\lambda)B(\lambda_1)\dots B(\lambda_N)$, vamos obter 2^N termos, e a cada um desses termos podemos associar uma trajetória (p_1, p_2, \dots, p_N) onde cada $p_i = \pm 1$, $1 \leq i \leq N$, indica se no passo i foi mantido o primeiro (+) ou o segundo (-). Como sabemos quais fatores são mantidos em cada caso, a expressão final deste termo pode ser facilmente encontrada a partir da trajetória (p_1, p_2, \dots, p_N) associada a este termo.

Um exemplo é dado na figura 4, onde tomamos $N = 3$. Note nesta figura que na trajetória (+, +, +) obtemos um termo proporcional a $B(\lambda_1)B(\lambda_2)B(\lambda_3)A(\lambda)$, de modo que a ordem das celeridades $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ não é alterada em relação à sua ordem em $|\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\rangle$. De fato, sempre que escolhermos o caminho (+) a ordem das celeridades não é alterada neste ponto, ao passo que se escolhermos o caminho (-) haverá uma inversão na ordem das celeridades. Por exemplo, na trajetória (-, +, +) obtemos um termo proporcional a $B(\lambda)B(\lambda_2)B(\lambda_3)A(\lambda_1)$, onde houve uma inversão da celeridade λ_1 com λ no primeiro passo.

Mutatis mutandis, o mesmo pode ser dito da relação de comutação entre D e B , já que temos, neste caso,

$$D(\lambda)B(\lambda_1)B(\lambda_2) = a(\lambda - \lambda_1)B(\lambda_1)D(\lambda)B(\lambda_2) - b(\lambda - \lambda_1)B(\lambda)D(\lambda_1)B(\lambda_2), \quad (3.84)$$

a única diferença, portanto, é que o termo (+) leva agora consigo o fator $a(\lambda - \lambda_1)$, enquanto que o termo (-) leva consigo o fator $-b(\lambda - \lambda_1)$.

Mostraremos agora como a equação de autovalor e as equações de Bethe podem ser encontradas por esta abordagem combinatorial. Relembremos primeiramente que a ação de $T(\lambda)$

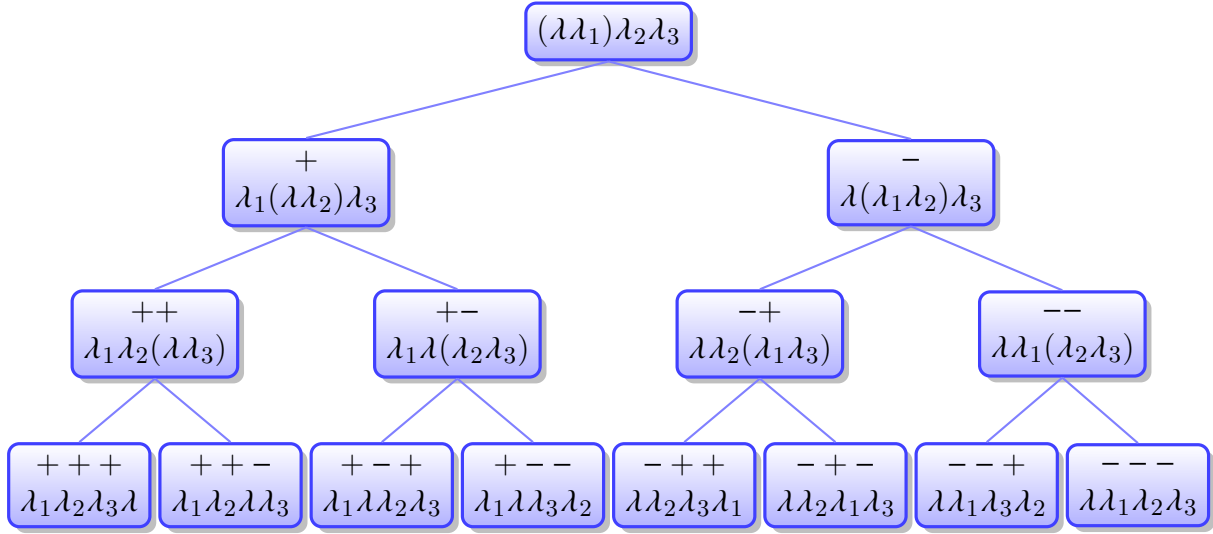


Figura 4 – A árvore combinatorial do Ansatz de Bethe Algébrico. O par entre parênteses mostra as variáveis que devem ser usadas nas relações de comutação, no respectivo passo.

em $|\lambda_1, \dots, \lambda_N\rangle = B(\lambda_1)\dots B(\lambda_N)|0\rangle$ fornecerá dois tipo de termos: aqueles proporcionais a $|\lambda_N, \dots, \lambda_1\rangle$ dão origem à equação de autovalor e são chamados de termos desejados (*wanted terms*) e aqueles que não são proporcionais a $|\lambda_N, \dots, \lambda_1\rangle$ dão origem às equações de Bethe e serão chamados de termos indesejados (*unwanted terms*).

Uma vez que os termos desejados são proporcionais a $B(\lambda_1)\dots B(\lambda_N)$ nós podemos ver que eles estão obtidos unicamente pela trajetória $(+, \dots, +)$, já que esta é a única trajetória para a qual a ordem das celeridades não é alterada e que fornece λ à direita. Deste modo, lembrando os fatores mantidos em cada passo desta trajetória e somando a contribuição devida às relações de comutação de A e D com os B 's, obtemos diretamente que

$$T(\lambda)|\lambda_1, \dots, \lambda_N\rangle = \left(x(\lambda)^L \prod_{k=1}^N a(\lambda_k - \lambda) + y(\lambda)^L \prod_{k=1}^N a(\lambda - \lambda_k) \right) |\lambda_1, \dots, \lambda_N\rangle. \quad (3.85)$$

onde no último passo atuamos os operadores $A(\lambda)$ e $D(\lambda)$ no estado de referência $|0\rangle$.

Para obter a equação de Bethe que fixa, digamos a celeridade λ_j , relembremos que elas são obtidas pela soma dos termos proporcionais a $|\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_N\rangle$. Analisando a árvore combinatorial podemos ver que estes termos são associados à trajetórias que alteram a ordem das celeridades de tal modo que λ_j fique à direita, por último. A equação de Bethe mais simples é aquela que fixa λ_1 e que está associada à trajetória $(- + \dots +)$. Esta também é a única trajetória que contém λ_1 à direita, pois qualquer outra trajetória inverteria a ordem de λ_1 com outra celeridade. Deste modo, somando as contribuições das relações de comutação de A e D com os B 's, obtemos diretamente

$$x(\lambda_1)^L b(\lambda_1 - \lambda) \prod_{k=2}^N a(\lambda_k - \lambda_1) + y(\lambda_1)^L b(\lambda - \lambda_1) \prod_{k=2}^N a(\lambda_1 - \lambda_k) = 0, \quad (3.86)$$

que graças a simetria $b(\lambda - \lambda_1) = -b(\lambda_1 - \lambda)$ pode ser simplificada para

$$x(\lambda_1)^L \prod_{k=2}^N a(\lambda_k - \lambda_1) - y(\lambda_1)^L \prod_{k=2}^N a(\lambda_1 - \lambda_k) = 0. \quad (3.87)$$

Para obter a equação de Bethe que fixa uma celeridade λ_j qualquer podemos proceder de modo semelhante, mas note que agora teremos de considerar todas as trajetórias que deixam a celeridade λ_j à direita. Somando as contribuições dessas trajetórias e usando as identidades (3.73), a equação de Bethe pode ser simplificada e obteremos uma equação semelhante a (3.87), com λ_j no lugar de λ_1 e com as somatórias correndo sobre todos os valores de 1 a N , com exceção de j . No entanto, é mais fácil usar o fato de que os operadores B comutam entre si para obter este resultado. De fato, começando pela ordem $(\lambda_j, \lambda_2, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ ao invés de $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_N)$, onde permutamos as celeridades λ_j e λ_1 , temos que a única trajetória que levará a celeridade λ_j à direita será a trajetória $(-, +, \dots, +)$. Isso significa que vamos obter uma equação análoga a (3.87), mas com λ_1 e λ_j trocados. Por conseguinte, para cada j entre 1 e N , obteremos as equações de Bethe

$$x(\lambda_j)^L \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N a(\lambda_k - \lambda_j) - y(\lambda_j)^L \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N a(\lambda_j - \lambda_k) = 0, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (3.88)$$

que são as mesmas obtidas anteriormente.

Parte II

As equações de Bethe

CAPÍTULO 4

RELAÇÃO ENTRE OS ANSÄTZE DE BETHE ALGÉBRICO E DE COORDENADAS

Nos capítulos anteriores apresentamos duas formas do Ansatz de Bethe. Nos casos que discutimos o Ansatz de Bethe de coordenadas foi empregado para se diagonalizar o hamiltoniano de Heisenberg, enquanto que no Ansatz algébrico diagonalizamos a matriz de transferência do modelo de seis vértices. O modelo de seis vértices e o modelo de Heisenberg em uma dimensão estão, no entanto, relacionados, o que foi notado sobretudo por Lieb, que de fato resolveu o modelo de seis vértices reduzindo-o ao modelo de Heisenberg [5]. A seguir mostraremos como estes dois modelos, a primeira vista distintos, podem ser relacionados.

A primeira observação que podemos fazer concerne à mecânica estatística do modelo de 6 vértices. Analisando o cálculo apresentado para a função de partição do modelo de seis vértices podemos ver que a matriz de transferência pode ser relacionada com uma função de partição associada a um dado modelo unidimensional, uma vez que no cálculo da matriz de transferência levamos em conta apenas uma dada linha da rede. Mostraremos agora que este modelo unidimensional é justamente o modelo de Heisenberg. Para isso, lembremos que no modelo de seis vértices cada vértice pode assumir seis configurações possíveis. Se, no entanto, nos atermos apenas às interações horizontais, vemos que existem somente duas possíveis configurações, o que pode ser interpretado como as configurações *down* e *up* dos spins de uma rede unidimensional. Mas um tal sistema é equivalente ao modelo de Heisenberg em uma dimensão, o que mostra a relação entre os dois modelos.

Mostraremos agora que a partir dos autovalores do hamiltoniano de Heisenberg, os autovalores correspondentes da matriz de transferência do modelo de seis vértices podem ser diretamente obtidos. Para mostrar isso, lembremos da mecânica estatística clássica que a probabilidade de o sis-

tema se encontrar em uma dada configuração de energia E é dada por

$$\varrho = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right), \quad (4.1)$$

onde Z é a função de partição do modelo, k_B a constante de Boltzmann e T é a temperatura. Em mecânica quântica, a energia E é substituída pelo hamiltoniano H e, como H é um operador, segue que o mesmo acontecerá com ρ . Este novo operador chama-se *operador de densidade*,

$$\rho = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{H}{k_B T}\right). \quad (4.2)$$

Como ρ tem uma interpretação de probabilidade, devemos ter $\text{tr}\rho = 1$. Essa propriedade nos permite inferir que a função de partição é dada pela fórmula

$$Z = \text{tr}\left\{\exp\left(-\frac{H}{k_B T}\right)\right\}. \quad (4.3)$$

Mas a função de partição associada ao modelo de Heisenberg é justamente a matriz de transferência do modelo de seis vértices. Consequentemente, vemos que se o hamiltoniano H for diagonalizado, a matriz de transferência será diagonalizada simultaneamente. Os autovetores de ambos, por conseguinte, serão os mesmos.

Deste modo, uma vez que os autovalores e autovetores do hamiltoniano sejam computados pelo Ansatz de Bethe de coordenadas, os respectivos autovalores e autovetores da matriz de transferência podem ser encontrados sem se fazer uso do Ansatz de Bethe algébrico. Do mesmo modo, tendo-se a matriz de transferência diagonalizada é fácil recuperar o hamiltoniano – basta expandir a matriz de transferência em série de potências e reter o termo de primeira ordem.

CAPÍTULO 5

COMPARAÇÃO ENTRE AS DUAS FORMAS DAS EQUAÇÕES DE BETHE

Uma vez que os dois Ansätze de Bethe estão relacionados não é difícil concluir que as equações do Ansatz de Bethe algébrico estão também relacionada com as equações de Bethe do Ansatz de coordenadas. Mostraremos agora como podemos relacioná-las.

Conforme vimos, as equações de Bethe do Ansatz algébrico consistem em um sistema de equações não-lineares acopladas que tem a forma

$$\left(\frac{\sinh(\lambda_m + \eta)}{\sinh \lambda_m} \right)^L = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^N \frac{\sinh(\lambda_m - \lambda_j + \eta)}{\sinh(\lambda_m - \lambda_j - \eta)}, \quad 1 \leq m \leq N, \quad (5.1)$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ são as incógnitas.

Já as equações de Bethe do Ansatz de coordenadas são dadas por

$$e^{ik_m L} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^N \frac{e^{i(k_m+k_j)} - 2\Delta e^{ik_m} + 1}{e^{i(k_m+k_j)} - 2\Delta e^{ik_j} + 1}, \quad 1 \leq m \leq N. \quad (5.2)$$

onde as incógnitas são agora k_1, \dots, k_N .

Para mostrar como esses dois conjuntos de equações estão relacionados, partiremos das equações do Ansatz de Bethe algébrico. Notemos em primeiro lugar que o sistema de equações (5.1) é invariante com respeito à permutação das celeridades $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. Essa propriedade implica que o produto termo-a-termo dessas equações só pode depender das celeridades $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ de um

modo simétrico. Com efeito, facilmente podemos verificar que esse produto é igual a 1:

$$\prod_{m=1}^N \left(\frac{\sinh(\lambda_m + \eta)}{\sinh(\lambda_m)} \right)^L = 1. \quad (5.3)$$

Isso nos sugere colocar

$$\frac{\sinh(\lambda_1 + \eta)}{\sinh(\lambda_1)} = c_1, \quad \frac{\sinh(\lambda_2 + \eta)}{\sinh(\lambda_2)} = c_2, \quad \dots \quad \frac{\sinh(\lambda_N + \eta)}{\sinh(\lambda_N)} = c_N. \quad (5.4)$$

de modo que a equação (5.3) se torna equivalente à equação mais simples

$$c_1^L c_2^L \dots c_N^L = 1. \quad (5.5)$$

Por sua vez, as equações (5.4) podem ser facilmente resolvidas para c_1, \dots, c_N . Temos de fato, que

$$\lambda_m = \operatorname{arctanh} \left(\frac{\sinh \eta}{c_m - \cosh \eta} \right) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{e^{-\eta} - c_m}{e^{\eta} - c_m} \right), \quad 1 \leq m \leq N. \quad (5.6)$$

onde as funções $\operatorname{arctanh}(x)$ e $\log(x)$ devem ser consideradas funções complexas multivaloradas, com cada um de seus ramos diferindo por múltiplos inteiros de $i\pi$. Note que as equações (5.6) consistem em uma transformação conforme $c_m \mapsto \lambda_m$, para $1 \leq m \leq N$. Esta mapa conforme se comporta de modo diferente dependendo se η é real ou imaginário. Por exemplo, para η é real, a transformação (5.6) mapeia o círculo complexo unitário $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ na reta vertical $x = -|\eta|/2$, enquanto que para η imaginário ela mapeia U em duas retas horizontais, $y = -|\eta|/2$ e $y = -|\eta| + i\pi/2$.

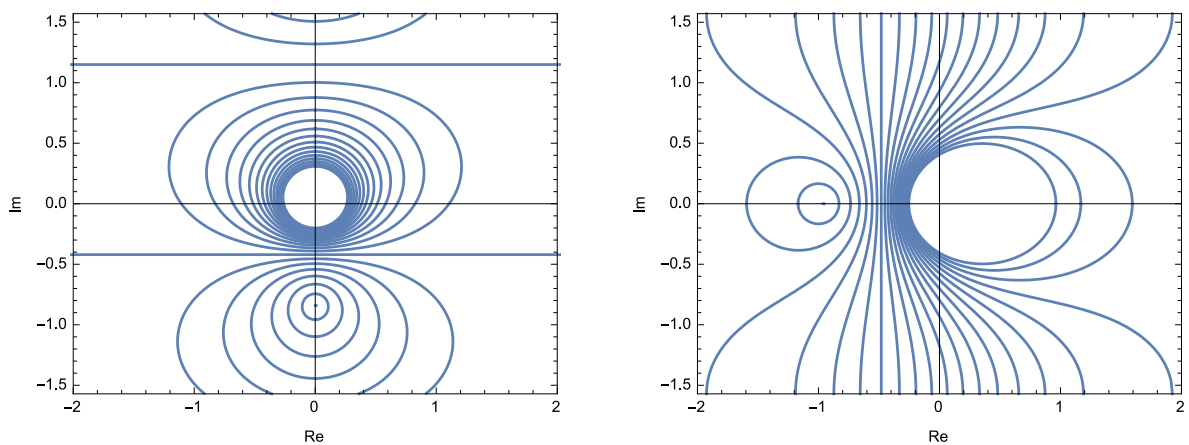


Figura 5 – A transformação conforme (7.2). Os gráficos mostram como círculos são mapeados pela transformação (7.2). Na primeira figura temos $\Delta = 2/3$ e o círculo $|z| = 1$ é mapeado em duas retas horizontais $y = -|\eta|/2$ e $y = -|\eta| + i\pi/2$. Na segunda figura temos $\Delta = 3/2$ e o círculo $|z| = 1$ é mapeado na reta vertical $x = -|\eta|/2$.

Devemos ainda obter as equações que fixam c_1, \dots, c_N . Para isso podemos inserir as expressões para as celeridades $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, dadas em (5.6), de volta em (5.1). Após simplificarmos as equações resultantes, por exemplo fazendo uso das identidades trigonométricas,

$$\sinh(\operatorname{arctanh}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (5.7)$$

e

$$\operatorname{arctanh}(x) + \operatorname{arctanh}(y) = \operatorname{arctanh}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right), \quad (5.8)$$

vamos obter o seguinte sistema de equações polinomiais para as constantes c_1, \dots, c_N :

$$c_m^L = (-1)^{N-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^N \frac{c_m c_j - 2\Delta c_m + 1}{c_m c_j - 2\Delta c_j + 1}, \quad 1 \leq m \leq N. \quad (5.9)$$

onde colocamos $\Delta = \cosh \eta$. Observe agora que a parametrização $c_m = e^{ik_m}$, $1 \leq m \leq N$, transforma essas equações em

$$e^{ik_m L} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^N \frac{e^{i(k_m+k_j)} - 2\Delta e^{ik_m} + 1}{e^{i(k_m+k_j)} - 2\Delta e^{ik_j} + 1}, \quad 1 \leq m \leq N. \quad (5.10)$$

que são justamente as equações de Bethe deduzidas por meio do Ansatz de Bethe de coordenadas. A relação entre as duas formas das equações de Bethe fica assim encontrada. Essa relação é importante pois vemos que as soluções das equações de Bethe do Ansatz algébrico estão relacionadas com as soluções das equações de Bethe do Ansatz de coordenadas por uma mera transformação conforme. Portanto, conclusões obtidas a partir das soluções de um desses sistemas de equações podem ser facilmente traduzidas para o outro.

Na sequência vamos analisar as soluções das equações de Bethe. É conveniente, portanto, deixar claro o que significa uma solução das equações de Bethe e quais os tipos de soluções iremos considerar. Por uma solução das equações de Bethe nos referimos a um conjunto $\{\xi_1, \dots, \xi_N\}$ de N números complexos tais que todas as equações do sistema (5.9) sejam satisfeitas simultaneamente. É muito fácil encontrar conjuntos de N números complexos que satisfaçam uma ou outra equação de Bethe, mas não todo o sistema: tais conjuntos não serão considerados soluções. Uma solução será considerada física se todos os números complexos do conjunto $\{\xi_1, \dots, \xi_N\}$ forem distintos. Adotaremos esta terminologia porque embora as equações de Bethe admitam soluções com alguns dos números complexos ξ_i iguais, essas soluções não geram autoestados associados ao setor de N mágnons. Admitimos, no entanto, que ξ_i possa ser zero ou infinito (essas soluções devem ser levadas em conta porque elas levam a soluções finitas para as raízes de Bethe).

Por fim, note que do ponto de vista físico devemos considerar $L > 2N$, uma vez que os estados de N mágnons só podem existir em uma rede suficientemente grande (o fator 2 deve-se

à simetria com relação a inversão dos spins das partículas). Do ponto de vista matemático podemos considerar casos nos quais $L \leq 2N$ (o que é chamado na literatura de “o lado além do equador”), no entanto, veremos que as soluções das equações de Bethe se comportam de forma estranha neste casos. Por exemplo, podemos encontrar soluções singulares, onde algum dos números complexos ξ_i assume os valores $\xi_i = \pm\eta$, o que faz com que algumas das raízes de Bethe se tornem infinitas. Também podemos encontrar neste regime soluções com dimensão de Hilbert maior que zero, ou seja, curvas, superfícies e, em geral hiper-superfícies que satisfazem as equações de Bethe. Estes comportamentos bizarros não parecem ocorrer para quando $L > 2N$, de modo que na sequência vamos nos ater apenas a este regime (Soluções das equações de Bethe na região além do equador serão discutidas nos apêndices, onde apresentaremos soluções explícitas das equações de Bethe associados aos setores de dois e três mágnons para pequenos valores de L).

CAPÍTULO 6

SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE BETHE PARA OS ESTADOS DE UM MÁGNON

O caso mais simples que podemos considerar ocorre quando $N = 1$. Este caso é na verdade trivial, já que temos apenas uma equação de Bethe, a saber,

$$\left(\frac{\sinh(\lambda_1 + \eta)}{\sinh \lambda_1} \right)^L = 1. \quad (6.1)$$

Esta equação pode ser resolvida diretamente mas, para exemplificar, seguiremos o método delineado anteriormente, colocando,

$$\frac{\sinh(\lambda_1 + \eta)}{\sinh \lambda_1} = c_1. \quad (6.2)$$

Com isso, a solução para λ_1 pode ser escrita em termos de c_1 através de,

$$\lambda_1 = \operatorname{arctanh} \left(\frac{\sinh \eta}{c_1 - \cosh \eta} \right) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{e^{-\eta} - c_1}{e^{\eta} - c_1} \right). \quad (6.3)$$

Substituindo esse valor para λ_1 em (6.1) e simplificando obtemos a equação

$$c_1^L = 1, \quad (6.4)$$

de modo que as soluções são da forma

$$c_1^{(k)} = e^{\frac{2i\pi k}{L}}, \quad 1 \leq k < L, \quad (6.5)$$

ou seja, correspondem às L raízes da unidade de grau L . Deste modo obtemos exatamente L soluções para as equações de Bethe,

$$\lambda_1^{(k)} = \operatorname{arctanh} \left(\frac{\sinh \eta}{e^{\frac{2i\pi k}{L}} - \cosh \eta} \right) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{e^{-\eta} - e^{\frac{2i\pi k}{L}}}{e^{\eta} - e^{\frac{2i\pi k}{L}}} \right), \quad 1 \leq k < L. \quad (6.6)$$

Lembramos que essas funções são multivaloradas, de modo que as soluções podem diferir por um múltiplo inteiro de $i\pi$.

CAPÍTULO 7

SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE BETHE PARA OS ESTADOS DE DOIS MÁGNONS

7.1 A forma polinomial das equações de Bethe

Consideraremos agora as equações de Bethe do Ansatz de Bethe algébrico para o setor de dois mágnons, isto é, para $N = 2$. Neste caso, as equações de Bethe são constituídas por apenas duas equações, a saber,

$$\left(\frac{\sinh(\lambda_1 + \eta)}{\sinh \lambda_1} \right)^L = \frac{\sinh(\lambda_1 - \lambda_2 + \eta)}{\sinh(\lambda_1 - \lambda_2 - \eta)} \quad \text{e} \quad \left(\frac{\sinh(\lambda_2 + \eta)}{\sinh \lambda_2} \right)^L = \frac{\sinh(\lambda_2 - \lambda_1 + \eta)}{\sinh(\lambda_2 - \lambda_1 - \eta)}. \quad (7.1)$$

Conforme descrito no capítulo anterior, podemos colocar essas equações numa forma matricial através de uma transformação conforme

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \log \left(\frac{e^{-\eta} - c_1}{e^{\eta} - c_1} \right), \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} \log \left(\frac{e^{-\eta} - c_2}{e^{\eta} - c_2} \right). \quad (7.2)$$

Obtemos de fato o seguinte sistema de equações polinomiais para as incógnitas c_1 e c_2 ,

$$\begin{aligned} c_1^L (1 + c_1 c_2 - 2\Delta c_2) + (1 + c_1 c_2 - 2\Delta c_1) &= 0, \\ c_2^L (1 + c_1 c_2 - 2\Delta c_1) + (1 + c_1 c_2 - 2\Delta c_2) &= 0. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Além disso, uma vez que o produto lado-a-lado das equações de Bethe dadas em (7.1) é igual a 1, obtemos, por meio de (7.2), a equação de vínculo

$$c_1^L c_2^L = 1. \quad (7.4)$$

O sistema de equações polinomiais (7.3) pode ser facilmente resolvido. De fato, introduzindo-se a notação

$$\omega_a = \exp\left(\frac{2i\pi a}{L}\right), \quad 1 \leq a < L, \quad (7.5)$$

podemos resolver a equação de vínculo (7.4) para c_2 através de

$$c_2 = \frac{\omega_a}{c_1}, \quad 1 \leq a \leq L. \quad (7.6)$$

Deste modo, o sistema (7.3) se torna equivalente a,

$$P_a(c_1) = 0, \quad \text{e} \quad \frac{P_a(c_1)}{c_1^L} = 0, \quad (7.7)$$

onde introduzimos os polinômios,

$$P_a(z) = (\omega_a + 1)z^L - 2\Delta\omega_a z^{L-1} - 2\Delta z + (\omega_a + 1), \quad 1 \leq a \leq L. \quad (7.8)$$

Note que para c_1 finito e não nulo, as duas equações do sistema (7.4) são equivalentes, de modo que as soluções são todas elas dadas em termos das raízes de $P_a(x)$. Além disso, podemos facilmente verificar que os polinômios $P_a(z)$ satisfazem a propriedade

$$P_a(z) = z^L P_a\left(\frac{\omega_a}{z}\right), \quad 0 \leq a \leq L, \quad (7.9)$$

de modo que c_1 e $c_2 = \omega_a/c_1$ satisfazem a mesma equação polinomial. As soluções finitas são, portanto da forma

$$\{c_1, c_2\} = \left\{ \xi_b, \frac{\omega_a}{\xi_b} \right\}, \quad 1 \leq a, b \leq L, \quad (7.10)$$

onde ξ_b representa uma das raízes do polinômio $P_a(z)$. Dentre essas soluções, contudo, teremos de descartar aquelas nas quais $c_2 = c_1$, bem como as soluções que diferem entre si apenas por uma permutação de c_1 e c_2 (essas soluções devem ser contadas apenas uma vez). A possibilidade $c_1 = \pm\infty$ faz com que a segunda equação seja identicamente satisfeita. Neste caso porém podemos verificar que a primeira equação somente é satisfeita quando $a = L/2$, ou seja, quando $\omega = -1$. Essas particularidades reduzem o número de soluções físicas das equações de Bethe e nos fornece o número correto de soluções físicas, de modo a garantir que o Ansatz de Bethe é de fato completo para $N = 2$ (exceto para alguns valores críticos do parâmetro de anisotropia Δ , casos em que os polinômios $P_a(x)$ apresentam raízes múltiplas que levam a novas soluções com $c_2 = c_1$).

Uma outra propriedade interessante dos polinômios $P_a(z)$ ocorre quando $a = L$, ou seja, quando $\omega = 1$. Neste caso podemos expressar $P_L(z)$ em termos dos polinômios de Chebyshev $T(z)$. No plano complexo, os polinômios de Chebyshev [61] são definidos pela relação

$$T_n\left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right) = \frac{z^n + z^{-n}}{2}. \quad (7.11)$$

Vemos assim que dividindo $P_L(x)$ por $x^{L/2}$ e agrupando os termos, podemos reescrever a equação $P_a(z) = 0$ como

$$T_{\frac{L}{2}}(\vartheta) - T_{\frac{L-2}{2}}(\vartheta) \Delta = 0, \quad \text{onde,} \quad \vartheta = \frac{z + z^{-1}}{2}. \quad (7.12)$$

7.2 Polinômios auto-inversivos

A seguir vamos nos concentrar no estudo dos polinômios $P_a(z)$ e de suas raízes. O ponto central desse estudo reside no fato de que os polinômios $P_a(z)$ são auto-inversivos.

Definição 1. Um polinômio

$$p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n, \quad (7.13)$$

com coeficientes em \mathbb{C} e com $a_n \neq 0$ é chamado de um polinômio *auto-inversivo* de grau n se ele satisfaz a seguinte propriedade:

$$p(z) = \omega z^n \bar{p}\left(\frac{1}{z}\right), \quad \text{com} \quad |\omega| = 1, \quad (7.14)$$

onde $\bar{p}(z)$ denota o complexo-conjugado de $p(z)$ [62].

Em especial, quando $\omega = 1$ o polinômio $p(z)$ é chamado de *auto-recíproco*. O nome auto-inversivo deve-se ao fato de que as raízes desses polinômios são simétricos em relação ao círculo complexo de raio 1, isto é, para cada raiz ξ de $p(z)$ existe uma outra raiz $\xi^* = 1/\bar{\xi}$ que é a sua imagem especular em relação ao círculo complexo unitário. Isso segue diretamente da definição dada acima e da propriedade $\bar{p}(z) = p(\bar{z})$, que é válida para qualquer polinômio com coeficientes complexos.

Por conveniência, vamos introduzir o polinômio

$$p^*(z) = \omega z^n \bar{p}\left(\frac{1}{z}\right) = \omega \bar{a}_n + \omega \bar{a}_{n-1}z^1 + \dots + \omega \bar{a}_1z^{n-1} + \omega \bar{a}_0z^n, \quad (7.15)$$

de modo que um polinômio auto-inversivo satisfaz $p(z) = p^*(z)$. Segue então que os coeficientes de um polinômio auto-inversivo satisfazem as propriedades

$$a_k = \omega \bar{a}_{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n. \quad (7.16)$$

Podemos facilmente verificar que os polinômios $P_a(z)$ são auto-inversivos. Note que em conjunto com a propriedade (7.9), os polinômios $P_a(z)$ devem também satisfazer a interessante propriedade,

$$P_a(\omega_a z) = \omega_a \bar{P}_a(z), \quad \omega_a = \exp\left(\frac{2i\pi a}{L}\right), \quad 1 \leq a \leq L. \quad (7.17)$$

7.3 Teoremas sobre o número de raízes de um polinômio auto-inverso sobre o círculo complexo unitário

A seguir vamos apresentar condições suficientes para que um polinômio auto-inverso tenha um número fixo de raízes sobre o círculo complexo de raio 1. Estes teoremas foram publicados pelo autor em [58]. Mais precisamente, vamos demonstrar o seguinte

Teorema 2. Seja $p(z)$ ser um polinômio auto-inverso de grau n . Se a desigualdade

$$|a_{n-l}| > \frac{1}{2} \left(\frac{n}{n-2l} \right) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \{l, n-l\}}}^n |a_k|, \quad l < n/2, \quad (7.18)$$

for válida, então $p(z)$ terá $n - 2l$ raízes no círculo complexo de raio 1, $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Além disso, se n é par e $l = n/2$, então $p(z)$ não terá raízes em U caso a desigualdade

$$|a_{n/2}| > 2 \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n/2}}^n |a_k| \quad (7.19)$$

for verificada.

Para provar este teorema vamos usar dois teoremas da análise complexa, a saber, o teorema de Cohn e o teorema de Rouché. O teorema de Cohn afirma que um polinômio auto-inverso $p(z)$ tem tantas raízes no interior de U quanto tem o polinômio

$$q(z) = z^{n-1} \overline{p'} \left(\frac{1}{z} \right) \quad (7.20)$$

na mesma região [62–65]. Em outras palavras, $p(z)$ e a sua derivada $p'(z)$ têm o mesmo número de raízes na região exterior de U . Já o teorema de Rouché afirma que se duas funções $f(z)$ e $g(z)$ são analíticas no interior de alguma curva de Jordan γ simples e fechada, são contínuas em γ e $|f(z)| > |g(z)|$ em todos os pontos de γ então as funções $f(z)$ e $h(z) = f(z) + g(z)$ têm o mesmo número de raízes no interior da região delimitada pela curva γ [62, 66].

Demonstração. Seja $p(z)$ um polinômio auto-inverso de grau n , como em (7.13). Da equação (7.20) segue que o polinômio $q(z)$ usado no teorema de Cohn é dado por

$$q(z) = n\bar{a}_n + (n-1)\bar{a}_{n-1}z + (n-2)\bar{a}_{n-2}z^2 + \dots + 2\bar{a}_2z^{n-2} + \bar{a}_1z^{n-1}. \quad (7.21)$$

Suponha além disso que $a_{n-l} \neq 0$ e $l < n/2$. Defina então as funções

$$f(z) = (n-l)\bar{a}_{n-l}z^l, \quad (7.22)$$

e

$$\begin{aligned} g(z) &= q(z) - f(z), \\ &= n\bar{a}_n + \dots + (n-l+1)\bar{a}_{n-l+1}z^{l-1} + (n-l-1)\bar{a}_{n-l-1}z^{l+1} + \dots + \bar{a}_1z^{n-1}. \end{aligned}$$

Na curva $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : z = e^{iy}, y \in \mathbb{R}\}$, nós temos,

$$|f(z)|_\gamma = (n-l)|a_{n-l}|, \quad (7.23)$$

e

$$\begin{aligned} |g(z)|_\gamma &= \left| n\bar{a}_n + (n-1)\bar{a}_{n-1}e^{iy} + \dots + (n-l+1)\bar{a}_{n-l+1}e^{iy(l-1)} \right. \\ &\quad \left. + (n-l-1)\bar{a}_{n-l-1}e^{iy(l+1)} + \dots + 2\bar{a}_2e^{iy(n-2)} + \bar{a}_1e^{iy(n-1)} \right|. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Mas, pela desigualdade triangular, também temos que

$$|g(z)|_\gamma \leq n|a_n| + \dots + (n-l+1)|a_{n-l+1}| + (n-l-1)|a_{n-l-1}| + \dots + |a_1|, \quad (7.25)$$

e, portanto, o teorema de Rouché poderá ser aplicado caso

$$(n-l)|a_{n-l}| > n|a_n| + \dots + (n-l+1)|a_{n-l+1}| + (n-l-1)|a_{n-l-1}| + \dots + |a_1|. \quad (7.26)$$

Além do mais, desde que $p(z)$ é auto-inverso, nós podemos usar a propriedade (7.16), notando que

$$k|a_k| + (n-k)|a_{n-k}| = n|a_k| = \frac{n}{2}(|a_k| + |a_{n-k}|), \quad (7.27)$$

para reescrever (7.26) como

$$(n-l)|a_{n-l}| > l|a_{n-l}| + \frac{n}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \{l, n-l\}}}^n |a_k|. \quad (7.28)$$

Assim, encontramos que o teorema de Rouché poderá ser aplicado sempre que a condição

$$|a_{n-l}| > \frac{1}{2} \left(\frac{n}{n-2l} \right) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \{l, n-l\}}}^n |a_k| \quad (7.29)$$

for satisfeita. Neste caso nós temos, pelo teorema de Rouché, que $f(z)$ e $q(z) = f(z) + g(z)$ têm o mesmo número de raízes no interior do círculo complexo de raio 1. Mas $f(z)$ tem exatamente l raízes no interior de U e portanto o mesmo pode ser dito de $q(z)$. Por outro lado, a partir do teorema de Cohn podemos concluir que $p(z)$ também tem l no interior de U e, uma vez que $p(z)$ é auto-inverso, ele também tem l raízes no exterior de U . Portanto somos levados a conclusão que $p(z)$ tem $n - 2l$ raízes sobre o círculo complexo de raio 1. Isso prova a primeira parte do teorema. Para a segunda parte devemos apenas definir $f(z) = (n/2)\bar{a}_{n/2}z^{n/2}$ e $g(z) = q(z) - f(z)$. Então, seguindo-se os mesmos passos acima vamos obter o resultado desejado. Isto conclui a prova. \square

Teorema 3. Seja $p(z)$ um polinômio auto-inverso de grau n como acima e suponha que a desigualdade (7.27) seja satisfeita. Então $p(z)$ não tem raízes múltiplas sobre U .

Demonstração. A prova desse teorema pode ser também obtida pelo teorema de Rouché. Devemos no entanto considerar agora a derivada de $p(z)$, no lugar de $q(z)$. Temos que

$$p'(z) = a_1 + 2a_2z + \dots + (n-2)a_{n-2}z^{n-3} + (n-1)a_{n-1}z^{n-2} + na_nz^{n-1}. \quad (7.30)$$

Vamos mostrar primeiro que $q'(z)$ não tem raízes sobre U se a desigualdade (7.27) for satisfeita.

Para isso, defina as funções

$$f(z) = (n-l)a_{n-l}z^{n-l-1} \quad \text{e} \quad g(z) = p'(z) - f(z). \quad (7.31)$$

Sobre a curva γ como acima temos que

$$|f(z)|_\gamma = (n-l)|a_{n-l}| \quad (7.32)$$

e

$$|g(z)|_\gamma \leq |a_1| + 2|a_2| + \dots + (n-l-1)|a_{n-l-1}| + (n-l+1)|a_{n-l+1}| + \dots + n|a_n|. \quad (7.33)$$

Assim, fazendo-se uso das relações (7.27), vemos que a condição $|f(z)|_\gamma > |g(z)|_\gamma$ pode ser escrita como

$$(n-l)|a_{n-l}| > l|a_{n-l}| + \frac{n}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \{l, n-l\}}}^n |a_k|, \quad (7.34)$$

ou seja, obtemos novamente a condição (7.29),

$$|a_{n-l}| > \frac{1}{2} \left(\frac{n}{n-2l} \right) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \{l, n-l\}}}^n |a_k|. \quad (7.35)$$

Pelo teorema de Rouché $p'(z)$ tem o mesmo número de raízes que $f(z)$ no interior da região delimitada pela curva γ , ou seja, ele tem $n-l-1$ raízes no interior de U . Pelo teorema fundamental da álgebra segue que $p'(z)$ deve ter l raízes na região $|z| \geq 1$. Por outro lado, se a desigualdade acima se verificar, então o polinômio $q(z)$ usado no teorema anterior também deve ter l raízes no interior de U , o que implica que $p'(z)$ tem esse mesmo número de raízes na região $|z| > 1$. Em outras palavras mostramos que $q'(z)$ não possui raízes sobre U . Isso é suficiente para concluirmos que $p(z)$ não tem raízes múltiplas sobre U , já que nesse caso essa raiz também seria raiz de $p'(z)$, o que contradiz o teorema. \square

Em conclusão esses dois teoremas mostram que se a desigualdade (7.27) for verificada então $p(z)$ tem $n-2l$ raízes sobre U e elas são simples. Portanto, raízes múltiplas só podem ocorrer quando essas desigualdades não forem satisfeitas, em especial no caso de uma igualdade¹.

7.4 Localização e distribuição das raízes de $P_a(z)$

Podemos agora aplicar o teorema demonstrado acima para os polinômios $P_a(z)$ a fim de que obtenhamos informações sobre a localização de suas raízes. na análise que se segue, veremos que a distribuição das raízes de $P_a(z)$ depende sobretudo do valor de Δ . Em especial, dois desses valores são críticos, a saber, os valores

$$\Delta_1 = \left| \frac{\omega_a + 1}{2} \right| \quad \text{e} \quad \Delta_2 = \frac{L}{L-2} \left| \frac{\omega_a + 1}{2} \right|. \quad (7.36)$$

Com efeito, vamos provar agora os seguintes teoremas:

Teorema 4. *Se $|\Delta| < \Delta_1$ então todas as raízes de $P_a(x)$ estão localizadas sobre o círculo complexo unitário $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ e são simples.*

Demonstração. Uma condição suficiente para que todas as raízes de um polinômio auto-inverso de grau n se distribuam sobre o círculo complexo unitário U é que a desigualdade

$$|a_n| > \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} |a_k|, \quad (7.37)$$

seja satisfeita. Vimos também que nesse caso as suas raízes são simples. Este é um caso especial do teorema demonstrado acima (para $l = 0$) e que foi demonstrado antes por Lakatos e Losonczy [67]. Quando aplicado ao polinômio $P_a(z)$, obtemos

$$|\omega_a + 1| > \frac{1}{2} (|-2\Delta| + |-2\Delta\omega_a|) = 2|\Delta|, \quad (7.38)$$

de onde, obtemos a condição

$$|\Delta| < \left| \frac{\omega_a + 1}{2} \right|. \quad (7.39)$$

□

¹ Quando $l = 0$ obtemos a seguinte condição para que um polinômio auto-inverso tenha todas as suas raízes em U :

$$|a_n| > \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} |a_k|.$$

Esta condição foi encontrada antes por Lakatos e Losonczy em [67], de modo que o teorema demonstrado aqui pode ser visto como uma generalização do teorema de Lakatos-Losonczy. Esses autores também provaram (por outros meios) que $p(z)$ pode apresentar raízes múltiplas quando esta desigualdade é substituída por uma igualdade.

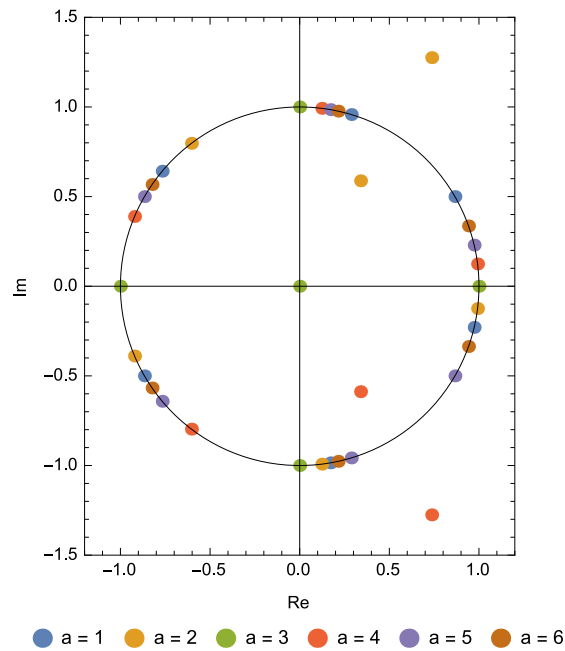


Figura 6 – As raízes de $P_a(x)$ para $L = 6$ e $\Delta = 2/3$. Para $a = \{1, 5, 6\}$ temos que $|\Delta| \leq \Delta_1$, de modo que as raízes de $P_a(x)$ raízes estão todas sobre U . Para $a = \{2, 4\}$ temos $\Delta_1 < |\Delta| < \Delta_2$ e uma vez que a é par, temos em cada caso duas raízes duais fora de U . Por fim, para $a = 3$ temos $|\Delta| > \Delta_2$ e, portanto, temos duas raízes duais fora de U (essas raízes são 0 e $-\infty$).

Teorema 5. Se $|\Delta| > \Delta_2$ então apenas duas raízes duais, s e ω_a/s , de $P_a(a)$ não estão sobre U e as raízes são simples.

Demonstração. Neste caso, devemos considerar a desigualdade (7.18) para $l = 1$, que neste caso se torna,

$$|a_{n-1}| > \frac{1}{2} \binom{n}{n-2} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \{1, n-1\}}}^n |a_k|. \quad (7.40)$$

Para o polinômio $P_a(x)$ temos então que

$$|-2\Delta\omega_a| > \frac{1}{2} (|\omega_a + 1| + |\omega_a + 1|), \quad (7.41)$$

ou seja, devemos ter

$$|\Delta| > \frac{L}{L-2} \left| \frac{\omega_a + 1}{2} \right|. \quad (7.42)$$

□

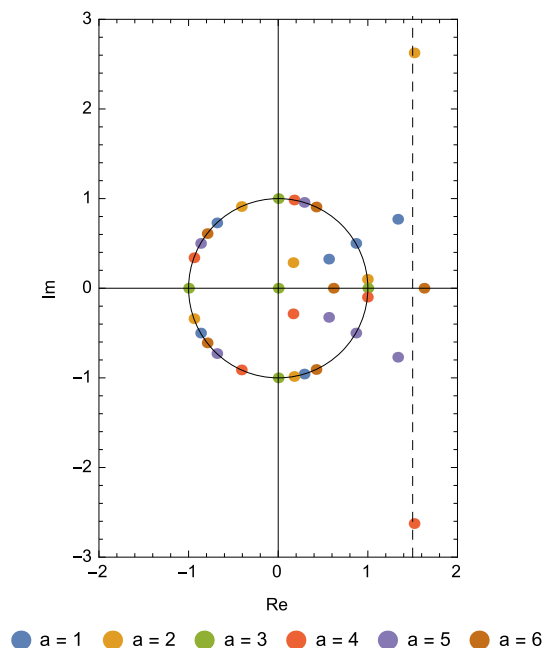


Figura 7 – As raízes de $P_a(x)$ para $L = 6$ e $\Delta = 3/2$. Para todos os valores de a temos $|\Delta| \geq \Delta_2$, com a igualdade ocorrendo apenas para $a = 6$, mas neste caso $P_6(c)$ não tem raízes coincidentes. Portanto, para cada valor de a , teremos duas raízes duais fora de U . Note que as raízes de $P_a(z)$ que estão fora do círculo complexo unitário estão próximas à reta tracejada $x = \Delta$.

Note que o teorema acima não se aplica ao intervalo $\Delta_1 \leq |\Delta| \leq \Delta_2$. Entretanto, quando uma igualdade ocorre na equação (7.37), Lakatos e Losonczi provaram que o polinômio pode ter raízes múltiplas [67]. A partir desse teorema podemos mostrar que

Teorema 6. *Quando $|\Delta| = \Delta_1$ o polinômio $P_a(z)$ pode apresentar uma raiz dupla sobre U .*

Demonstração. Isso pode ser mostrado através dos argumentos apresentados por Lakatos e Losonczi em [67]. Contudo, para os polinômios $P_a(z)$ podemos proceder de forma mais simples. Os casos onde os polinômios $P_a(z)$ apresentam raízes duplas podem ser encontrados diretamente pela fatoração desses polinômios.

Com efeito, encontramos o seguinte: para L par ($L = 2k$) e $a \neq k$ temos que $P_a(x)$ se fatora em $P_a(x) = (1 + \omega_a)(x - \omega_b)^2 R_a(x)$ quando a é par, onde ω_b é uma outra raiz da unidade e $R_a(x)$ é outro polinômio auto-inversivo. Para L ímpar ($L = 2k + 1$), temos que $P_a(x)$ se fatora quando a é par e $a \leq k$ ou quando a é ímpar e $a > k$. Nos outros casos $P_a(x)$ não se fatora e não apresenta raízes duplas. O caso $a = k$ está fora do contexto, pois neste caso o polinômio $P_a(z)$ se colapsa em um polinômio muito mais simples (discutiremos esse caso mais adiante). \square

Teorema 7. *Quando $|\Delta| = \Delta_2$ o polinômio $P_a(z)$ pode apresentar uma raiz tripla sobre U .*

Demonstração. Como no caso anterior, podemos verificar esta afirmação através da fatoração dos polinômios $P_a(z)$ para quando $|\Delta| = \Delta_2$. De fato, obtemos que para L par ($L = 2k$) e $a \neq k$ decorre que $P_a(x)$ se fatora em $P_a(x) = (x - \omega_b)^3 \tilde{R}_a(x)$ quando a é ímpar, mas não se fatora quando a é par. Para L ímpar, ($L = 2k + 1$), temos que $P_a(x)$ se fatora quando a ímpar e $a < k$, ou quando a é par e $a \geq k$. Nos outros casos $P_a(x)$ não se fatora e não temos uma raiz tripla. \square

Conjectura 1. *Seja $p(z)$ um polinômio auto-inverso de grau n e suponha que a equação (7.29) seja válida com igualdade para um dado l . Então $p(z)$ pode ter uma raiz de multiplicidade $l + 2$ sobre U .*

Verificamos numericamente que para $l = 0$ o polinômio $p(z)$ pode possuir uma raiz dupla no círculo complexo unitário e, para o caso $l = 1$, que $p(z)$ pode ter uma raiz tripla sobre U . Isto sugere $p(z)$ possa ter, para um dado valor de l , uma raiz de multiplicidade $l + 2$. Para $l = 0$ a condição exata para que isso ocorra foi descrita em [67]. Os outros casos carece de uma análise mais profunda.

Conjectura 2. *No intervalo $\Delta_1 < |\Delta| < \Delta_2$ as raízes dos polinômios $P_a(z)$ se comportam como no teorema 4 ou como no teorema 5, a depender da paridade de L e do valor de a .*

Verificamos numericamente que todas as raízes de $P_a(z)$ estão sobre U quando, para L par, a é ímpar e, para L ímpar, se a é par e $a \neq (L \pm 1)/2$. Para $a = (L \pm 1)/2$ as raízes de $P_a(z)$ estão sobre U se $L \equiv (3 \pmod{4})$. De outro modo, $P_a(z)$ tem duas raízes ξ e ω_a/ξ fora de U . Também verificamos numericamente que essas raízes são simples.

Por fim, é importante mostrar também que

Teorema 8. *Para diferentes valores de a , as raízes de $P_a(z)$ são distintas.*

Demonstração. Assuma que alguma das raízes de $P_a(z)$ e de $P_b(z)$, com $b \neq a$ e $1 \leq a, b \leq L$ sejam iguais. Sejam r_a e r_b essas raízes, respectivamente. Como $P_a(z)$ e $P_b(z)$ satisfazem a propriedade (7.17) e são auto-inversivos, segue que $s_a = \omega_a/r_a$ e $s_b = \omega_b/r_b$ também são raízes de $P_a(z)$ e $P_b(z)$, respectivamente. Contudo, uma vez que $r_b = r_a$ devemos ter também que $s_b = s_a$, já que s_b e s_a são imagens especulares de r_b e r_a através do círculo unitário, respectivamente. Isso implica $\omega_b = \omega_a$, ou seja, que $b = a$. \square

7.5 Polinômios de Salem

Portanto, as raízes dos polinômios $P_a(z)$ estão distribuídas de dois modos, somente: ou elas estão todas sobre o círculo complexo unitário U ou apenas duas delas não estão sobre esse círculo (essas duas raízes são imagens especulares uma da outra).

Em teoria de números, uma classe importante de polinômios cujas raízes estão todas sobre o círculo complexo unitário são os polinômios ciclotômicos. Um polinômio ciclotômico é um polinômio de coeficientes inteiros cujas raízes são as raízes da unidade – esses polinômios são extensivamente estudados em matemática pura. Nem todos os polinômios cujas raízes caem sobre U são ciclotômicos, no entanto, um elegante teorema devido à Kronecker garante que se todas as raízes de um polinômio de coeficientes inteiros estiverem sobre o círculo complexo unitário então essas raízes são de fato raízes da unidade (e portanto o polinômio em questão será ciclotômico). Dessa forma, podemos concluir que os polinômios $P_a(z)$ serão ciclotômicos sempre que os seus coeficientes forem inteiros (ou seja, quando Δ for um número inteiro ou semi-inteiro) desde que todas as suas raízes estiverem sobre U . Como as raízes de um polinômio ciclotômico podem ser expressas em termos de radicais, temos aqui um exemplo onde as raízes de $P_a(z)$ podem ser explicitamente exibidas em termos de radicais ou de funções trigonométricas.

Uma outra classe de polinômios que recentemente tem despertado o interesse de matemáticos são os chamados polinômios de Salem. Um polinômio de Salem é definido como um polinômio de coeficientes inteiros que possui apenas duas raízes positivas e recíprocas, s e $1/s$, fora do círculo complexo unitário U [68, 69].

Destacamos que os polinômios $P_a(z)$ são polinômios de Salem quando $a = L$ e Δ é um inteiro ou semi-inteiro tal que $|\Delta| > \Delta_2$. Nos casos em que $a \neq L$ os polinômios $P_a(z)$ se comportam da mesma forma que um polinômio de Salem, exceto que as suas duas raízes fora de U não são mais reais – de fato estes polinômios se comportam como um “polinômio de Salem girado”.

Em física os polinômios de Salem foram encontrados apenas em algumas áreas bem específicas, por exemplo em sistemas dinâmicos, na teoria dos grupos de Coxeter e na teoria dos nós do tipo $(-2, 3, 7)$ -pretzel (também chamados de nós de Fintushel-Stern) [69]. Por esse motivo, a conexão direta que encontramos entre os polinômios de Salem e as soluções das equações de Bethe foi de fato uma surpresa muito bem vinda.

Intimamente relacionados com os polinômios de Salem são os polinômios de Pisot, que são definidos como um polinômio de coeficientes inteiros cujas raízes estão no interior de U , exceto por uma raiz positiva $r > 1$. Sabe-se muito sobre polinômios de Pisot, mas pouco ainda sobre os polinômios de Salem. Uma questão importante em teoria algébrica de números que envolve os polinômios de Salem e de pisot é a seguinte: qual é a mais classe de polinômios mais “próxima” dos polinômios ciclotômicos? Esta questão pode ser expressa em termos mais precisos introduzindo-se

a chamada *medida de Mahler* de um polinômio de grau n ,

$$M(p(z)) = \prod_{k=0}^n \max(1, |\xi_k|), \quad (7.43)$$

onde ξ_k , $1 \leq k \leq n$ é uma das raízes de $p(z)$. A medida de Mahler consiste no módulo do produto de todas as raízes de $p(z)$ cujo módulo é maior ou igual a 1. Por conseguinte, a medida de Mahler de um polinômio ciclotômico é sempre igual a 1 e a medida de Mahler de um polinômio de Salem (Pisot) é igual ao módulo de sua única raiz positiva, a qual é chamada de *número de Salem (Pisot)* [70, 71]. Quanto menor for a medida de Mahler de um polinômio, mais próximo podemos considerá-lo de um polinômio ciclotômico e, por conseguinte, os polinômios de Salem ou de Pisot são os candidatos com maiores chances de ganharem essa titulação.

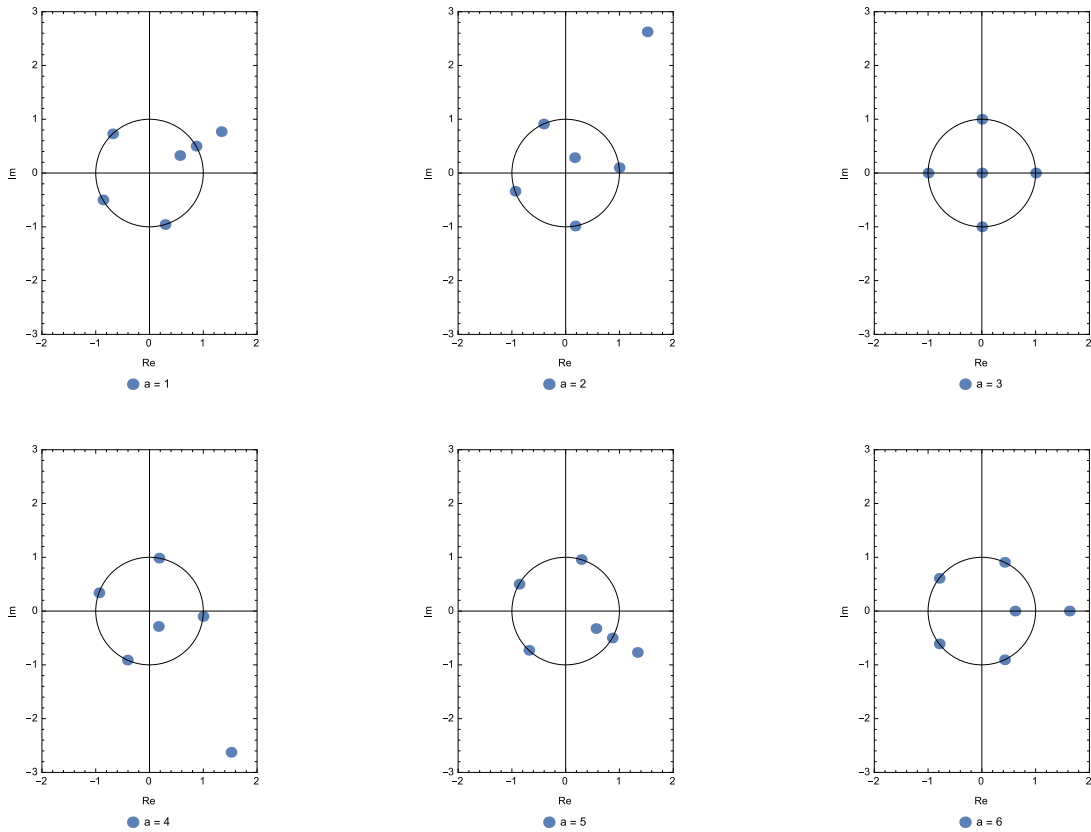


Figura 8 – Raízes de $P_a(x)$ para $L = 6$ e $\Delta = 3/2$. Note que para $a = 6$ temos um polinômio de Salem.

A procura por polinômios com medida de Mahler pequena é atualmente um campo de intensa pesquisa em matemática pura. Por exemplo, há bastante interesse em se saber qual é o menor número de Salem e de Pisot. No que diz respeito aos números de Pisot, a resposta foi dada por Siegel em 1944 [72]: o menor número de Pisot é o chamado *número plástico*, que consiste na única raiz real

do polinômio de Pisot $x^3 - x - 1$ e cujo valor é aproximadamente 1,324. Entretanto, não sabemos ainda qual é o menor número de Salem – de fato, não sabemos nem mesmo se *existe* um menor número de Salem! O menor número de Salem conhecido até o momento tem o valor aproximado de 1,176 e foi encontrado há pouco mais de 80 anos por Lehmer [73, 74], na mesma época em que Bethe introduziu as equações do Ansatz de Bethe. Este número de Lehmer é a raiz positiva do seguinte polinômio de grau 10,

$$\mathcal{L}(x) = x^{10} + x^9 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 + x + 1. \quad (7.44)$$

Um número de Salem menor que 1.3 é comumente chamado de número de Salem pequeno [70, 71]. Estes números são muito raros e menos de 50 deles são conhecidos até hoje. Os números de Salem encontrados aqui são todos maiores que 2 e, portanto não são pequenos – eles tendem para o valor de Δ conforme L aumenta².

7.5.1 Um novo algoritmo para procurar por números de Salem pequenos

Em conexão com a teoria dos polinômios de Salem, o autor desenvolveu alguns algoritmos para se procurar números de Salem pequenos. Baseado em alguns teoremas da análise, esses algoritmos permitem saber se um polinômio é do tipo Salem ou não antes mesmo de se calcular suas raízes. A seguir apresentaremos uma breve descrição do nosso algoritmo.

Para verificar se um dado polinômio é do tipo Salem precisamos, a priori, saber o número de raízes deste polinômio sobre o círculo complexo unitário, U . Podemos considerar desde início um polinômio auto-recíproco (de coeficientes inteiros) de grau n , de modo que ele será do tipo Salem se ele tiver $n - 2$ raízes sobre U e as outras duas raízes recíprocas forem positivas. Um computador de mesa pode rapidamente calcular as raízes de um polinômio, contudo, quando se tem de testar milhares de polinômios, esse tempo se torna muito grande e esta abordagem não é mais viável – temos por conseguinte de encontrar métodos que nos permitam saber o número de raízes de um polinômio sobre U sem que suas raízes sejam conhecidas.

O problema clássico de se calcular o número de raízes reais de um polinômio apenas conhecendo-se os seus coeficientes foi resolvido há muito tempo por Sturm. O método de Sturm consiste no se-

² Mencionemos ainda que o teorema mostrado mais acima, para o caso $l = 1$, fornece um modo de se testar se um dado polinômio auto-recíproco com coeficientes inteiros é ou não um polinômio de Salem. De fato, teremos um polinômio de Salem sempre quando a condição

$$|a_{n-1}| > \frac{1}{2} \binom{n}{n-2} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \{1, n-1\}}}^n |a_k|$$

for satisfeita. Além disso, atribuindo a a_{n-1} um valor suficientemente grande, um polinômio de Salem pode ser sempre construído. Note, entretanto, que a condição acima é apenas suficiente, de modo que um polinômio de Salem pode não satisfazê-la. Com efeito, os polinômios de Salem que possuem números de Salem pequenos conhecidos até então (vide [70, 71]) não satisfazem essa desigualdade.

guinte: dado um polinômio $p(z)$ de grau n , definimos a sequência de Sturm $S(z)$ como o conjunto ordenado

$$S(z) = \{p_0(z), p_1(z), p_2(z), \dots, p_n(z)\}, \quad (7.45)$$

onde,

$$p_0(z) = p(z), \quad p_1(z) = p'(z), \quad p_j(z) = -\text{rem}(p_{j-2}(z), p_{j-1}(z)), \quad 2 \leq j \leq n, \quad (7.46)$$

com $p'(z)$ denotando a derivada formal de $p(z)$ e $\text{rem}(p(z), q(z))$ o resto da divisão de $p(z)$ por $q(z)$. Assim, o teorema de Sturm afirma que o número de raízes reais de um polinômio $p(z)$ no intervalo (a, b) é igual a³

$$\text{var}[S(a)] - \text{var}[S(b)], \quad (7.47)$$

onde $\text{var}[S(z)]$ significa o número de variações de sinais na sequência $S(z)$, ignorando zeros. A prova desse teorema pode ser encontrada em [62]. Deste modo, temos como contar o número de raízes de um polinômio sobre a reta real. Para se contar o número de raízes de um polinômio sobre círculo complexo unitário U , podemos fazer uso de uma transformação de Möbius $z \mapsto \mu(z)$ adequada (tal que as raízes de $p(z)$ que estão sobre U sejam levados a pontos sobre a reta real \mathbb{R}) e depois se utilizar o teorema de Sturm. Por exemplo, podemos fazer uso da transformação

$$\mu(z) = \frac{z - i}{z + i}, \quad (7.48)$$

e definir o polinômio

$$q(z) = (z + i)^n p\left(\frac{z - i}{z + i}\right). \quad (7.49)$$

Entretanto, podemos verificar que se $p(z)$ for um polinômio auto-recíproco, então $q(z)$ será na verdade um polinômio de grau $n/2$ na variável z^2 , *i.e.*, as potências ímpares de $q(z)$ se anulam. Isso permite definir, de uma só vez, o polinômio

$$r(z) = (\sqrt{z} + i)^n p\left(\frac{\sqrt{z} - i}{\sqrt{z} + i}\right). \quad (7.50)$$

Consequentemente, $p(z)$ será do tipo Salem se $r(z)$ tiver $n/2 - 1$ raízes reais. Uma vez que o grau de $r(z)$ é a metade do grau de $p(z)$, esta notável propriedade torna o algoritmo muito potente. Em adição, podemos fazer uso de outros teoremas simples que tornam o programa ainda mais rápido. Por exemplo, fazendo-se uso do teorema de Bolzano, podemos verificar se $p(z)$ tem (ao menos) uma raiz no intervalo $(1, 1.3)$, o que permite filtrar os polinômios para se procurar apenas por números de Salem pequenos.

³ Para simplificar a apresentação, assumimos que $p(z)$ não tem raízes múltiplas.

Mais abaixo apresentamos um esboço do algoritmo. Neste algoritmo, primeiro verificamos pelo teorema de Bolzano se $p(z)$ tem uma raiz no intervalo $(1, 1.3)$ a fim de procurar somente polinômios de Salem com números de Salem pequenos. A seguir calculamos o polinômio $r(z)$ e usamos o teorema de Sturm para contar o número de raízes reais de $r(z)$. Se esse número for igual a $n/2 - 1$, onde n é o grau de $p(z)$, então $p(z)$ tem $n - 2$ raízes sobre o círculo complexo unitário e, como $p(z)$ é auto-recíproco, ele será um polinômio de Salem e o programa retorna 1. Do contrário $p(z)$ não será do tipo Salem e o programa retorna 0.

Algoritmo 1: É $p(z)$ DO TIPO SALEM COM NÚMERO DE SALEM PEQUENO?

Entrada:
 Um polinômio auto-recíproco $p(z)$ de grau n (par).

Saída:
 1 (se $p(z)$ é do tipo Salem com número de Salem pequeno);
 0 (se $p(z)$ não é do tipo Salem com número de Salem pequeno).

1 início
 2 $n := \text{grau}(p(z))$;
 3 se $p(1)p(1.3) < 0$ então
 4 $r(z) := (\sqrt{z} + i)^n p\left(\frac{\sqrt{z}-i}{\sqrt{z}+i}\right)$;
 5 se $\text{STURM}(r(z)) = n/2 - 1$ então
 6 1;
 7 senão
 8 0;
 9 fim
 10 senão
 11 0;
 12 fim

Note que o procedimento STURM pode ser substituído por outro procedimento qualquer que conte o número de raízes reais de um polinômio. Por exemplo, algoritmos numéricos comumente usados para isolar raízes de polinômios podem ser utilizados para esse fim. Em especial, algoritmos baseados no antigo método das frações continuadas de Vicent, desenvolvidos recentemente por Akritas, Strzebonski, Collins, Alesina, Galuzza e outros, parecem ser os mais rápidos já desenvolvidos para esse fim [75]. Outros métodos de refinamento, levando em conta a teoria dos polinômios auto-recíprocos e dos polinômios de Salem também podem ser empregados.

Por meio de uma versão pouco mais refinada do algoritmo acima, usando um computador de mesa comum, conseguimos reproduzir todos os números de Salem pequenos conhecidos até

então, até o grau 44, nos casos em que os coeficientes dos polinômios podem assumir apenas os valores $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Esperamos em breve aumentar o nosso poder computacional e aperfeiçoar esses algoritmos para procurar por números de Salem pequenos ainda não conhecidos.

7.6 Distribuição das raízes de Bethe – A hipótese de strings

Uma vez que conhecemos a distribuição das raízes c_1 e c_2 dos polinômios $P_a(z)$, podemos através da transformação conforme (7.2) encontrar a distribuição das raízes de Bethe λ_1 e λ_2 . Uma vez que temos sempre $c_2 = \omega_a/c_1$ para um dado a entre 1 e L , a transformação (7.2) nos fornece a seguinte relação entre λ_2 e λ_1 ,

$$\lambda_2(\eta) = -\eta - \lambda_1 \left(\eta - \frac{2i\pi a}{L} \right), \quad (\text{mod } i\pi), \quad (7.51)$$

(para um dado a entre 1 e L), onde consideramos λ_1 e λ_2 como funções de η .

Conforme foi comentado anteriormente, a transformação conforme (7.2) tem um comportamento diferente para η real ou imaginário (*i.e.*, para $\Delta > 1$ ou $\Delta < 1$). De fato, vimos que para η real, esta transformação conforme mapeia o círculo complexo unitário U na reta vertical $x = -|\eta|/2$, enquanto que para η imaginário ela mapeia U nas duas retas horizontais $y = -|\eta|/2$ e $y = -|\eta + i\pi|/2$.

Deste modo, as raízes de Bethe estão quase todas distribuídas sobre essas retas (apenas as raízes de $P_a(z)$ que não caem sobre U serão mapeada em pontos fora dessas retas). Esse modo peculiar de distribuição das raízes de Bethe é o que dá origem à chamada *hipótese de strings* [38], que é usualmente considerada no limite termodinâmico ($L \gg 1$) das equações de Bethe para o caso racional, no qual se tem $\Delta = 1$. A hipótese de strings estabelece que as raízes de Bethe se distribuem no plano complexo de modo a formarem grupos. Cada grupo, ou string, caracteriza-se por um conjunto de raízes de Bethe com a mesma parte real, enquanto que as partes imaginárias são igualmente espaçadas. Uma string contendo n raízes de Bethe é chamada de string de comprimento n e assume-se que n seja menor ou igual a N . As raízes de Bethe de uma dada string de comprimento n têm, portanto, a forma,

$$\lambda^{(n)} = \xi + i\zeta^{(n)}, \quad \zeta^{(n)} = \zeta^{(1)} + \epsilon n, \quad (7.52)$$

onde ϵ é um número real que mede o espaçamento entre duas raízes da string.

Podemos facilmente verificar, através da nossa abordagem, qual é a relação entre as raízes de $P_a(z)$ com a hipótese de strings⁴. Consideremos primeiramente o caso em que η é imaginário ($\Delta < 1$). Neste caso, para cada valor de a entre 1 e L , as duas raízes de $P_a(x)$ que não estão sobre

⁴ Note que para $N = 2$ só podemos ter strings de comprimento 1 e 2.

U são transformadas, por meio de (7.2), em duas raízes de Bethe com mesma parte real. Estas raízes devem, devem, portanto, serem associadas a strings de comprimento 2. Por outro lado, as raízes distribuídas sobre U são levadas por meio de (7.2) à raízes de Bethe com diferentes partes reais (todas estas raízes têm mesma parte imaginária), e devem ser associadas com strings de comprimento 1. Já para o caso em que η é real ($\Delta > 1$) ocorre algo similar, contanto que se redefina a hipótese de strings, considerando uma string de comprimento n como um conjunto de raízes de Bethe caracterizadas por terem mesma parte imaginária. Assim, como no caso anterior, as raízes de $P_a(z)$ que caem sobre U devem ser associadas com strings de comprimento 1 e as que não caem, à strings de comprimento 2.

Alertamos contudo que fora do limite termodinâmico a hipótese de strings não é correta e várias excessões a esta hipótese já foram reportadas⁵ [39–42]. Por exemplo, para L não muito grande a parte imaginária das raízes de Bethe não estão uniformemente espaçadas, como afirma a hipótese de strings. Podemos com efeito mostrar que a parte imaginária das raízes de Bethe se tornam igualmente espaçadas no limite termodinâmico, já que as raízes de um polinômio tendem a se condensar próximo ao círculo complexo unitário, a medida que o grau do polinômio aumenta [76], o que através da transformação conforme (7.2) nos leva justamente à hipótese de strings. Além disso, as raízes de Bethe provenientes das raízes de $P_a(z)$ que estão fora do círculo complexo unitário tendem a se aproximarem da reta $x = \Delta$ no limite termodinâmico, vide Figura (7.4).

Embora a hipótese de strings não seja válida fora do limite termodinâmico, temos de mencionar que ela fornece uma boa aproximação e, com efeito, ela tem sido utilizada como ponto de partida de muitos estudos numéricos das equações de Bethe [34–37].

⁵ Uma vez que não fizemos uso da hipótese de strings, a nossa abordagem está livre de tais excessões.

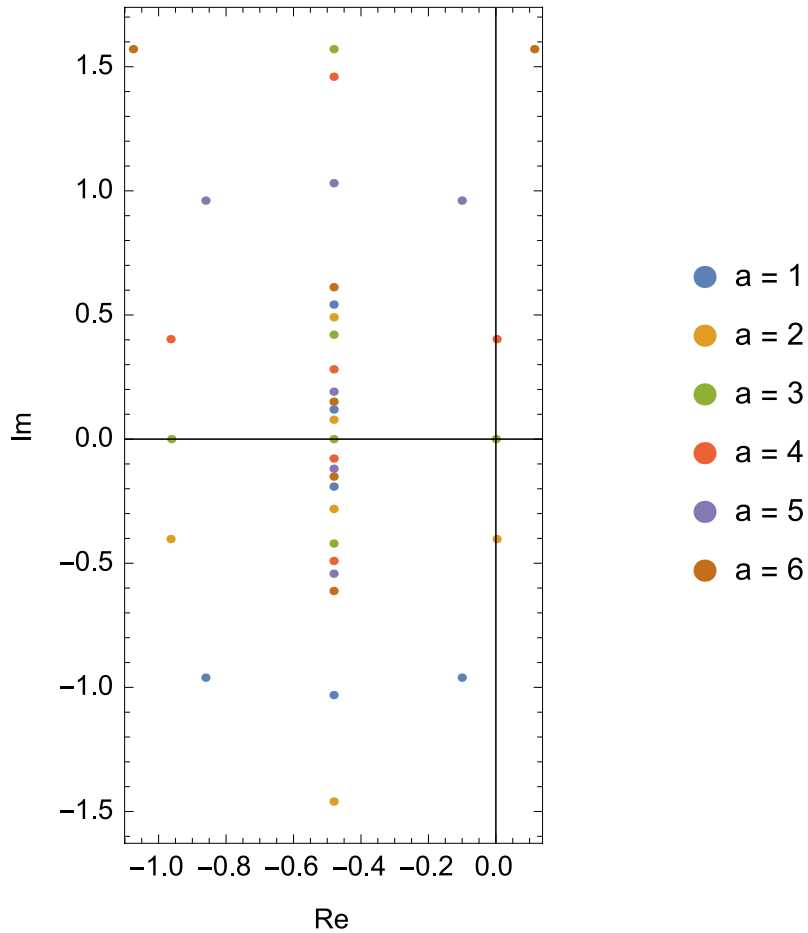
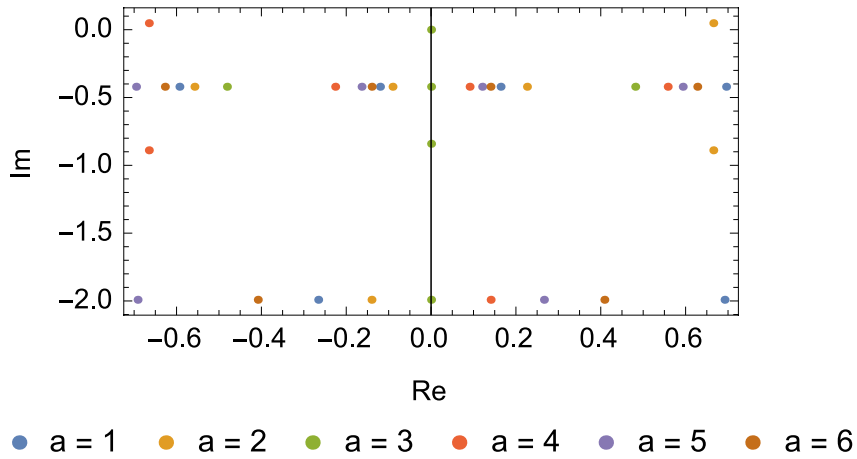


Figura 9 – As raízes de Bethe para $L = 6$. Na primeira figura temos $\Delta = 2/3$ e as raízes de $P_a(x)$ que caem em U são mapeadas nas retas $y = -|\eta|/2$ e $y = -|\eta + i\pi|/2$. Na segunda figura temos $\Delta = 3/2$ e as raízes de $P_a(x)$ que caem em U são mapeadas na reta $x = -|\eta|/2$. Em qualquer caso, as raízes de $P_a(x)$ que estão sobre U levam à strings de comprimento 1, enquanto que os pares de raízes conjugadas que não estão em U nos fornecem strings de comprimento 2.

7.7 A completeza do Ansatz de Bethe para $N = 2$

Uma das questões mais importantes da teoria do Ansatz de Bethe, e que ainda não foi completamente respondida, é a questão de sua completeza. Dizemos que o Ansatz de Bethe é completo se ela fornecer o número correto de autoestados para a matriz de transferência (ou do hamiltoniano) do modelo em questão – no caso, o modelo de seis vértices. Uma vez que os autoestados da matriz de transferência dependem explicitamente das raízes de Bethe, a questão da completeza depende de uma análise dessas raízes. É esperado que cada solução das $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ das equações de Bethe, onde cada celeridade é diferente das demais, gere um autoestado distinto da matriz de transferência. Portanto, a completeza do Ansatz de Bethe pode ser demonstrada através de uma contagem das soluções das raízes de Bethe na qual as celeridades são todas distintas.

A contagem do número de soluções admissíveis das equações de Bethe é relativamente simples na nossa abordagem e se resume basicamente a uma contagem das raízes dos polinômios de $P_a(z)$ que levam à soluções com $\lambda_2 \neq \lambda_1$. Vamos primeiramente assumir que $|\Delta| \neq \Delta_1$ e $|\Delta| \neq \Delta_2$, de modo que as raízes de $P_a(z)$ são simples, conforme mostramos nos teoremas 4 e 5. Além disso, pelo teorema 8 vemos que as raízes de $P_a(z)$ são todas distintas para diferentes valores de a tais que $1 \leq a \leq L$.

Portanto, para mostrar a completeza do Ansatz de Bethe para o setor de dois mágnons, temos apenas de contar o número de raízes distintas dos polinômios $P_a(z)$. Essa contagem, todavia, é diferente de acordo com a paridade de L .

Consideremos primeiramente o caso em que L é ímpar. Neste caso, temos que os polinômios $P_a(z)$ se fatoram em

$$P_a(z) = (x + \omega_b)Q_a(z), \quad (7.53)$$

onde $2b \equiv a \pmod{L}$ e $Q_a(z)$ é um outro polinômio auto-inverso de grau $L - 1$. Contudo, as soluções $x = -\omega_b$ nos fornece $c_2 = c_1$ e portanto $\lambda_2 = \lambda_1$, de tal modo que devemos excluí-las. Portanto, as soluções associadas ao setor $N = 2$ são dadas pelas raízes de $Q_a(z)$, que totalizam $L(L - 1)$ raízes que, pelos teoremas acima, são todas simples e distintas. Metade dessas soluções, contudo, estão relacionadas por permutações de c_1 e c_2 e também devem ser descartadas, já que as equações de Bethe são invariantes pela permutação das celeridades. Em conclusão, obtemos $L(L - 1)/2$ soluções independentes.

Para L par ($L = 2k$) devemos proceder com maior cautela. Isso é devido ao fato de neste caso o sistema de equações

$$\begin{aligned} c_1^L (1 + c_1 c_2 - 2\Delta c_2) + (1 + c_1 c_2 - 2\Delta c_1) &= 0, \\ c_2^L (1 + c_1 c_2 - 2\Delta c_1) + (1 + c_1 c_2 - 2\Delta c_2) &= 0, \end{aligned} \quad (7.54)$$

admite soluções singulares da forma $\{c_1, c_2\} = \{0, -\infty\}$ ou $\{c_1, c_2\} = \{-\infty, 0\}$, desde que o

vínculo $c_1^L c_2^L = 1$ seja satisfeito. De fato, vimos que ao colocarmos $c_2 = \omega_a / c_1$, onde ω_a é uma das raízes da unidade de grau L , o sistema acima se torna equivalente a

$$P_a(c_1) = 0, \quad \text{e} \quad \frac{P_a(c_1)}{c_1^L} = 0, \quad (7.55)$$

onde introduzimos o polinômio auto-inverso

$$P_a(z) = (\omega_a + 1) z^L - 2\Delta\omega_a z^{L-1} - 2\Delta z + (\omega_a + 1), \quad 1 \leq a \leq L. \quad (7.56)$$

Assim, se colocarmos $c_1 = 0$, devemos ter $c_2 = \pm\infty$ e então $z = 0$ deve ser uma raiz de $P_a(z)$. No entanto, isso só é possível se $\omega_a = -1$, ou seja, se L é par e $a = k$. Obtemos assim a solução $\{c_1, c_2\} = \{0, -\infty\}$. Por outro lado, como esse sistema de equações é invariante pela troca de c_1 e c_2 , vemos que uma outra solução admissível é $\{c_1, c_2\} = \{-\infty, 0\}$. Por fim, devemos mostrar que essas soluções singulares levam a soluções finitas para λ_1 e λ_2 . Isso pode ser facilmente verificado tomando-se os correspondentes limites das expressões (7.2). De fato, obtemos respectivamente as soluções

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\eta, \quad \text{e} \quad \lambda_1 = -\eta, \quad \lambda_2 = 0, \quad (7.57)$$

que de fato são soluções das equações de Bethe originais.

Consideremos agora o caso em que as soluções são finitas. As soluções das equações de Bethe polinomiais são nestes casos dadas pelas raízes de $P_a(z)$. Para L par e $a = k$, temos que $P_a(z)$ se torna simplesmente

$$P_k(z) = 2\Delta z(z^{L-2} - 1) = 0. \quad (7.58)$$

A solução $z = 0$ já foi levada em conta na discussão acima. As outras soluções correspondem às raízes da unidade de grau $L - 2$,

$$z_j = \exp\left(\frac{2\pi i}{L-2}j\right), \quad 1 \leq j \leq L-2, \quad (7.59)$$

o que por sua vez nos fornece as raízes de Bethe

$$\lambda_1^{(j)} = \frac{1}{2} \log\left(\frac{z_j - e^{-\eta}}{z_j - e^{\eta}}\right), \quad \lambda_2^{(j)} = \frac{1}{2} \log\left(\frac{z_j e^{-\eta} + 1}{z_j e^{\eta} + 1}\right), \quad 1 \leq j \leq L-2. \quad (7.60)$$

Notemos nestas soluções que $\lambda_2 = \lambda_1$ somente quando $j = (k-1)/2$ ou $j = 3(k-1)/2$, igualdades que só fazem sentido quando k é ímpar. Assim, temos que para $a = k$ existem $2(k-1) + 2$ soluções se k é par, mas somente $2(k-2) + 2$ soluções se k é ímpar.

Por fim, considere agora os casos em que $a \neq k$. Aqui temos que (7.8) se fatora em $P_a(z) = (x^2 - \omega_a) Q_a(z)$, quando a é ímpar, mas não se fatora quando a é par ($Q_a(z)$ são outros polinômios auto-inversivos de grau $L-2$ cujas raízes são todas simples e distintas). Para k par temos $k-1$

casos onde a é par e k casos onde a é ímpar, o que nos fornece $(k-1)(2k) + (k)(2k-2)$ soluções. Para k ímpar nós temos $k-1$ casos onde a é par e $k-1$ casos onde a é ímpar, o que nos fornece $(k)(2k) + (k-1)(2k-2)$ soluções. Portanto, levando em conta as soluções provenientes de $a = k$, obtemos, ao todo,

$$\begin{aligned} [(k-1)(2k) + (k)(2k-2)] + [2(k-1) + 2] &= 2k(2k-1), & \text{se } k \text{ é par,} \\ [(k)(2k) + (k-1)(2k-2)] + [2(k-2) + 2] &= 2k(2k-1), & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{aligned} \quad (7.61)$$

Lembrando ainda que metade das soluções diferem apenas por uma permutação de c_1 e c_2 , obtemos, em ambos os casos, exatamente $k(2k-1) = L(L-1)/2$ soluções independentes.

Portanto, o número de soluções independentes das equações de Bethe associadas ao setor de dois mágnons, é igual a $\binom{L}{2} = L(L-1)/2$, o que é de fato o valor esperado de estados físicos para este setor em uma lattice de L sítios.

7.7.1 A questão da completeza para valores críticos de Δ

Consideremos agora os casos em que $|\Delta|$ assume os valores críticos mostrados em (7.36). Isto é, quando $|\Delta|$ assume os valores,

$$|\Delta| = \Delta_1^a = \left| \frac{1 + \omega_a}{2} \right| \quad \text{ou} \quad |\Delta| = \Delta_2^a = \frac{L}{L-2} \left| \frac{1 + \omega_a}{2} \right|. \quad (7.62)$$

neste caso, os polinômios $P_a(z)$ podem ter raízes múltiplas, o que tem por efeito a aparição de soluções com $\lambda_2 = \lambda_1$.

Consideremos primeiro o caso em que $|\Delta| = \Delta_1^a$. Para L par ($L = 2k$), e $a \neq k$ podemos verificar que $P_a(x)$ se fatora em $P_a(z) = (1 + \omega_a)(z - \omega_b)^2 R_a(z)$ quando a é par, onde vemos a aparição de uma raiz dupla igual a ω_b . Para L ímpar, $L = 2k + 1$, temos que $P_a(z)$ se fatora quando a é par e $a \leq k$ ou quando a é ímpar e $a > k$. Nos outros casos $P_a(z)$ não se fatora e não apresenta raízes duplas. Portanto, temos $k-1$ casos de polinômios com raízes duplas quando L é par, k polinômios quando L é ímpar e k é par e $k+1$ polinômios quando L e k são ímpares.

Agora, se tivermos $|\Delta| = \Delta_2^a$ então para L par ($L = 2k$) e $a \neq k$ decorre que $P_a(z)$ se fatora quando a é ímpar, em $P_a(z) = (x - \omega_b)^3 \tilde{R}_a(z)$, mas não se fatora quando a é par. Para L ímpar, ($L = 2k + 1$), temos que $P_a(z)$ se fatora quando a ímpar e $a < k$, ou quando a é par e $a \geq k$. Nos outros casos $P_a(z)$ não se fatora. Portanto, temos k polinômios que apresentam raízes triplas quando L é par e $k-1$ polinômios com raízes triplas se L é ímpar.

A presença de raízes múltiplas no setor de dois mágnons camufla a completeza. Raízes múltiplas implicam celeridades iguais, o que nos conduzem à soluções não pertencentes ao setor de dois mágnons. Usando a linguagem das matriz de espalhamento, as soluções das equações de Bethe com

$\lambda_2 \neq \lambda_1$ descrevem estados associados ao espalhamento de duas partículas, ao passo que soluções $\lambda_2 = \lambda_1$ descrevem estados ligados.

É importante mencionar que esse fenômeno ocorre, por exemplo, para o caso em que $\Delta = 1$, de modo que a completeza do Ansatz de Bethe para o modelo de seis vértices racional deve ser melhor analisada.

CAPÍTULO 8

SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE BETHE PARA OS ESTADOS DE TRÊS MÁGNONS

Neste capítulo consideraremos as equações de Bethe para o setor de três mágnons, isto é, $N = 3$. Neste caso as equações de Bethe polinomiais se tornam muito complicadas, e ainda não foi possível encontrar todas as soluções em termos das raízes de um polinômio em uma variável, como foi feito no caso $N = 2$. No entanto, conseguimos fazer isto para quando $c_1 c_2 c_3 = \pm 1$, isto é, para quando ω é real.

Seguindo o método apresentado nos capítulos anteriores, comecemos com as equações de Bethe do Ansatz algébrico. Para $N = 3$ temos um sistema de três equações não-lineares acopladas para as incógnitas λ_1, λ_2 e λ_3 , a saber,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sinh(\lambda_1 + \eta)}{\sinh \lambda_1} \right)^L &= \frac{\sinh(\lambda_1 - \lambda_2 + \eta) \sinh(\lambda_1 - \lambda_3 + \eta)}{\sinh(\lambda_1 - \lambda_2 - \eta) \sinh(\lambda_1 - \lambda_3 - \eta)}, \\ \left(\frac{\sinh(\lambda_2 + \eta)}{\sinh \lambda_2} \right)^L &= \frac{\sinh(\lambda_2 - \lambda_1 + \eta) \sinh(\lambda_2 - \lambda_3 + \eta)}{\sinh(\lambda_2 - \lambda_1 - \eta) \sinh(\lambda_2 - \lambda_3 - \eta)}, \\ \left(\frac{\sinh(\lambda_3 + \eta)}{\sinh \lambda_3} \right)^L &= \frac{\sinh(\lambda_3 - \lambda_1 + \eta) \sinh(\lambda_3 - \lambda_2 + \eta)}{\sinh(\lambda_3 - \lambda_1 - \eta) \sinh(\lambda_3 - \lambda_2 - \eta)}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Multiplicando-se lado-a-lado essas equações obtemos

$$\left(\frac{\sinh(\lambda_1 + \eta)}{\sinh \lambda_1} \frac{\sinh(\lambda_2 + \eta)}{\sinh \lambda_2} \frac{\sinh(\lambda_3 + \eta)}{\sinh \lambda_3} \right)^L = 1, \quad (8.2)$$

o que nos permite escrever

$$\frac{\sinh(\lambda_1 + \eta)}{\sinh \lambda_1} = c_1, \quad \frac{\sinh(\lambda_2 + \eta)}{\sinh \lambda_2} = c_2, \quad \frac{\sinh(\lambda_3 + \eta)}{\sinh \lambda_3} = c_3. \quad (8.3)$$

Por consistência, devemos ter também,

$$c_1^L c_2^L c_3^L = 1, \quad \text{ou,} \quad c_1 c_2 c_3 = \omega_a, \quad (8.4)$$

onde

$$\omega_a = \exp\left(2i\pi \frac{a}{L}\right), \quad 1 \leq a \leq L. \quad (8.5)$$

As equações (8.3) podem ser facilmente resolvidas para λ_1 , λ_2 e λ_3 em termos de c_1 , c_2 e c_3 :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sinh \eta}{c_1 - \cosh \eta}\right) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{e^{-\eta} - c_1}{e^{+\eta} - c_1}\right), \\ \lambda_2 &= \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sinh \eta}{c_2 - \cosh \eta}\right) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{e^{-\eta} - c_2}{e^{+\eta} - c_2}\right), \\ \lambda_3 &= \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sinh \eta}{c_3 - \cosh \eta}\right) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{e^{-\eta} - c_3}{e^{+\eta} - c_3}\right), \end{aligned} \quad (8.6)$$

onde, relembremos, as funções complexas $\operatorname{arctanh}$ e \log são multivaloradas, cada ramo diferindo por múltiplos de $i\pi$. Substituindo as expressões de λ_1 , λ_2 e λ_3 novamente em (8.1) obtemos as equações que devem ser satisfeitas por c_1 , c_2 e c_3 ,

$$\begin{aligned} c_1^L (1 + c_1 c_2 - 2\Delta c_2) (1 + c_1 c_3 - 2\Delta c_3) - (1 + c_1 c_2 - 2\Delta c_1) (1 + c_1 c_3 - 2\Delta c_1) &= 0, \\ c_2^L (1 + c_2 c_1 - 2\Delta c_1) (1 + c_2 c_3 - 2\Delta c_3) - (1 + c_2 c_1 - 2\Delta c_2) (1 + c_2 c_3 - 2\Delta c_2) &= 0, \\ c_3^L (1 + c_3 c_1 - 2\Delta c_1) (1 + c_3 c_2 - 2\Delta c_2) - (1 + c_3 c_1 - 2\Delta c_3) (1 + c_3 c_2 - 2\Delta c_3) &= 0. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Passaremos agora a resolver esse sistema de equações. Começemos por considerar soluções tais que $c_1 c_2 c_3 = \varepsilon = \pm 1$, isto é, soluções nas quais ω é real. Coloquemos, portanto,

$$c_3 = \frac{\varepsilon}{c_2 c_1}. \quad (8.8)$$

Com isso, o sistema(8.7) se fatora em

$$(c_1 - \varepsilon) f(c_1, c_2) = 0, \quad (c_2 - \varepsilon) f(c_2, c_1) = 0, \quad (c_1 c_2 - 1) g(c_1, c_2) = 0. \quad (8.9)$$

onde $f(c_1, c_2)$ and $g(c_1, c_2)$ são duas expressões complicadas em c_1 e c_2 . Para resolver o sistema acima coloquemos $c_2 = 1/c_1$, o que implica que $c_3 = 1$. Então podemos verificar que o sistema acima será satisfeito sempre que c_1 satisfazer a seguinte equação polinomial,

$$P_\varepsilon(z) = z_1^{L+1} - (3\varepsilon\Delta - 1) z^{L+\varepsilon\Delta} (2\varepsilon\Delta - 1) z^{L-1} - \Delta (2\varepsilon\Delta - 1) z^2 + (3\varepsilon\Delta - 1) z - \varepsilon. \quad (8.10)$$

Os polinômios $P_\varepsilon(z)$ são auto-inversivos. Podemos verificar que as raízes de $P_a(x)$ podem estar todas no círculo complexo de raio 1, ou então duas ou quatro delas podem estar fora desse círculo a depender do valor de Δ considerado. Essa análise pode ser feita através de teoremas sobre polinômios auto-inversivos, da mesma forma como foi feita no caso $N = 2$, contudo a análise aqui é mais complicada porque agora os valores críticos de Δ envolvem o valor absoluto de certas funções complicadas dos coeficientes de $P_a(x)$. No entanto, podemos verificar este comportamento numericamente.

Para os casos em que ω não é real as soluções pertencentes ao setor de 3 mágnons são muito mais difíceis de serem obtidas analiticamente. Acreditamos que uma análise mais física das equações de Bethe, em conjunto com as ferramentas da geometria algébrica e da álgebra comutativa (como por exemplo a teoria das bases de Gröbner) possa nos ajudar a encontrar tais soluções. No momento estamos trabalhando exatamente neste ponto. Verificamos entretanto, por métodos numéricos, que tais soluções existem e o número de soluções com todas as celeridades distintas é de fato o esperado isto é, igual a $\binom{L}{3} = \frac{1}{6}L(L-1)(L-2)$, exceto para os valores críticos de Δ . Isto significa que para $N = 3$ o Ansatz de Bethe é de modo geral completo.

Existem, é claro, soluções com celeridades iguais, que talvez sejam interessantes em matemática pura. De fato, podemos verificar diretamente que $c_1 = c_2 = c_3 = \omega_a$ é solução para qualquer valor de a entre 1 e L . Soluções com duas celeridades iguais podem ser obtidas colocando-se, por exemplo, $c_2 = c_1$ e $c_3 = \omega_a/c_1^2$. Com o que o sistema (8.7) se torna equivalente a

$$(c_1^2 - 2\Delta c_1 + 1) Q_a(c_1) = 0, \quad (8.11)$$

onde $Q_a(z)$ são os polinômios

$$Q_a(z) = z^{L+1} + \omega_a z^L - 2\omega_a \Delta z^{L-1} + 2\Delta z^2 - z - \omega_a, \quad \omega_a = e^{2i\pi \frac{a}{L}}, \quad 1 \leq a \leq L. \quad (8.12)$$

Mais uma vez, se impormos $c_1^2 - 2\Delta c_1 + 1 = 0$ obtemos soluções singulares. De outro modo, devemos ter $Q_a(c_1) = 0$, o que implica soluções finitas. Os polinômios também $Q_a(z)$ são auto-inversivos e, para $a = L$ e Δ suficientemente grande eles são de fato polinômios de Salem. Os números de Salem associados ao polinômio $Q_L(z)$ são tais que tendem para a razão áurea a medida que L tende ao infinito.

CAPÍTULO 9

CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

Nesta tese, as equações de Bethe do modelo de seis vértices foram estudadas de forma analítica, em contraste com as abordagens numéricas usualmente empregadas para se resolver essas equações. Mostramos que as equações de Bethe do Ansatz algébrico estão relacionadas com as equações de Bethe do Ansatz de coordenadas por uma transformação conforme e que, de fato, elas podem ser colocadas em uma forma polinomial. O estudo deste sistema de equações polinomiais para os setores de um e dois mágnons foram completamente resolvidas (e foram parcialmente resolvidas para o setor de três mágnons).

Para o setor de dois mágnons as equações de Bethe em sua forma polinomial puderam ser desacopladas e as suas soluções escritas em termos das raízes de certos polinômios auto-inversivos $P_a(z)$. A partir da teoria dos polinômios auto-inversivos e, em especial, através de teoremas provados pelo autor sobre a distribuição das raízes desses polinômios no plano complexo, fizemos uma análise minuciosa da distribuição das raízes de Bethe, o que permitiu provar que o Ansatz de Bethe para $N = 2$ é completo, exceto para alguns valores críticos do parâmetro de anisotropia Δ , onde a presença de raízes múltiplas de $P_a(z)$ reduzem o número de soluções das equações de Bethe com todas as celeridades distintas. Mostramos também como a hipótese de strings pode ser relacionada à nossa abordagem. Com efeito, as raízes de $P_a(z)$ que se localizam no círculo complexo unitário U podem ser identificadas às chamadas strings de comprimento 1, enquanto que as raízes duais de $P_a(z)$ que não estão sobre U podem ser identificadas com strings de comprimento 2.

Através dos polinômios $P_a(z)$ encontramos uma conexão entre as equações de Bethe e os polinômios de Salem, os quais são estudados em teoria algébrica de números e não foram encontrados em muitas áreas da física até então. O estudo do autor sobre a teoria dos polinômios permitiu a elaboração de um algoritmo novo para se procurar por números de Salem pequenos e deste modo conseguimos, utilizando um computador de mesa comum, reproduzir todos os números de Salem

conhecidos atualmente para polinômios de grau menor ou igual a 44 e cujos coeficientes assumem os valores no conjunto $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Esperamos em breve aumentar o nosso poder computacional para procurar por números de Salem pequenos ainda não conhecidos.

Acreditamos que o trabalho desenvolvido aqui possa ser estendido para os setores de N mágnons, embora esta tarefa não seja simples. Esperamos que um melhor entendimento da teoria da integrabilidade e um conhecimento mais profundo de geometria algébrica e álgebra comutativa (temas de enorme interesse na matemática atual) possam fornecer, senão a solução completa do problema, ao menos várias propriedades inerentes às equações de Bethe e suas soluções. Além disso, acreditamos que a técnica aqui elaborada é geral o suficiente para ser aplicada a outros modelos de vértices, como o modelo de oito vértices, bem como os modelos que possuem fronteiras.

APÊNDICE A

SOLUÇÕES EXPLÍCITAS DAS EQUAÇÕES DE BETHE

PARA $N = 2$ E $N = 3$

Neste apêndice apresentaremos soluções explícitas das equações de Bethe dos setores de dois e três mágnons para pequenos valores de L . Para grandes valores de L , parece não ser possível expressar as soluções em termos de radicais, exceto em alguns casos particulares que já foram discutidos ou para alguns valores especiais de Δ .

Destacamos nestas soluções a presença de soluções singulares e soluções com dimensão de Hilbert não nula, que são características das equações de Bethe para $L < 2N$.

A.1 Soluções explícitas das equações de Bethe para $N = 2$

A.1.1 Soluções explícitas para $L = 1$

Para $L = 1$ claramente devemos ter $\omega = 1$. Neste caso, a equação (7.8) se fatora em

$$(c_1 + 1)(\Delta - 1) = 0. \quad (\text{A.1})$$

Esta equação é identicamente satisfeita se $\Delta = 1$, o que só pode acontecer no limite racional da equações de Bethe. Para $\Delta \neq 1$ devemos ter $c_1 = -1$, mas isso nos leva a uma solução em que $\lambda_1 = \lambda_2$, a saber,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2} \log \left(\frac{e^{-\eta} + 1}{e^{\eta} + 1} \right). \quad (\text{A.2})$$

Portanto, chegamos a conclusão de que não há soluções pertencentes ao setor de dois mágnons para $L = 1$, o que de fato já era esperado.

A.1.2 Soluções explícitas para $L = 2$

No caso em que $L = 2$ podemos ter $a = 1$ ou $a = 2$, ou seja, temos de considerar os casos em que $\omega = -1$ e $\omega = 1$.

Para a primeira possibilidade podemos verificar de imediato que a equação $P_1(c_1) = 0$ é identicamente satisfeita. Neste caso, temos que $c_2 = -1/c_1$ e nenhuma restrição precisa ser imposta a c_1 . Isso significa que temos aqui uma solução com dimensão de Hilbert igual a um, ou seja, uma solução com um parâmetro livre: uma curva que satisfaz as equações de Bethe. As raízes de Bethe neste caso são dadas por

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \log \left(\frac{e^{-\eta} - c_1}{e^\eta - c_1} \right), \quad e \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \log \left(\frac{e^{-\eta} c_1 + 1}{e^\eta c_1 + 1} \right), \quad (\text{A.3})$$

com c_1 qualquer número complexo.

Já para a segunda possibilidade, temos que $P_2(c_1) = 0$ se reduz à equação

$$c_1^2 - 2\Delta c_1 + 1 = 0, \quad (\text{A.4})$$

cujas soluções são

$$c_1 = e^\eta, \quad e \quad c_1 = e^{-\eta}, \quad (\text{A.5})$$

onde devemos lembrar que $\Delta = \cosh \eta$. Estas soluções, entretanto, fornecem um valor infinito para λ_1 e λ_2 , de modo que tais soluções são chamadas de singulares.

Portanto, chegamos à conclusão de que, para $N = 2$ e $L = 2$ temos apenas soluções singulares ou soluções com dimensão de Hilbert igual a 1.

A.1.3 Soluções explícitas para $L = 3$

Neste caso ω pode assumir três valores, a saber,

$$\omega_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}, \quad \omega_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3} \quad e \quad \omega_3 = 1. \quad (\text{A.6})$$

Para o caso mais simples no qual $\omega = 1$, a equação (7.8) se torna

$$(c_1 + 1) [c_1^2 - (\Delta + 1)c_1 + 1] = 0, \quad (\text{A.7})$$

e, portanto, devemos ter $c_1 = -1$ ou $c_1^2 - (\Delta + 1)c_1 + 1 = 0$. A primeira possibilidade nos leva a uma solução com $\lambda_1 = \lambda_2$, que não pertence ao setor de dois mágnons. Portanto, devemos considerar a segunda possibilidade apenas, o que nos fornece

$$c_1 = \frac{(\Delta + 1)}{2} \pm \sqrt{\frac{(\Delta + 1)^2}{4} - 1}, \quad (\text{A.8})$$

Pelas equações (7.2) obtemos então,

$$\begin{aligned}\lambda_1^\pm &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{(e^\eta + 3) \pm \sqrt{e^{2\eta} + 6e^\eta + 1}}{-(3e^\eta + 1) \pm \sqrt{e^{2\eta} + 6e^\eta + 1}} \right), \\ \lambda_2^\pm &= -\lambda_1^\pm - \eta.\end{aligned}\quad (\text{A.9})$$

Já para quando $\omega \neq 1$, temos que (7.8) se fatora em

$$(c_1 + \omega^*) \left[\omega c_1^2 + (2\Delta - 1) c_1 + \omega^* \right] = 0, \quad (\text{A.10})$$

onde ω^* denota o complexo-conjugado de ω . Mais uma vez, a primeira opção $c_1 = -\omega^*$ nos leva a uma solução em que $\lambda_1 = \lambda_2$. Portanto, devemos ter

$$c_1 = -\frac{(2\Delta - 1)}{2\omega} \pm \frac{\sqrt{(2\Delta - 1)^2 - 4}}{2\omega}, \quad (\text{A.11})$$

o que nos conduz às soluções

$$\begin{aligned}\lambda_1^\pm &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{(e^\eta - e^{2\eta} - 2\omega - 1) \pm \sqrt{(e^{2\eta} + e^\eta + 1)(e^{2\eta} - 3e^\eta + 1)}}{(e^\eta - e^{2\eta} - 2\omega e^{2\eta} - 1) \pm \sqrt{(e^{2\eta} + e^\eta + 1)(e^{2\eta} - 3e^\eta + 1)}} \right), \\ \lambda_2^\pm &= -\lambda_1^\pm - \eta.\end{aligned}\quad (\text{A.12})$$

Aqui devemos lembrar que a função log é multivalorada, de modo que podemos ter soluções que diferem destas apresentadas acima por múltiplos de $i\pi$.

A.2 Soluções explícitas das equações de Bethe para $N = 3$.

A.2.1 Soluções explícitas para $L = 1$

Para $L = 1$ devemos ter $\omega = 1$. Com isso, as equações (8.7) se simplificam para

$$\begin{aligned}(2\Delta + 1)(c_1 - 1) \left[c_1 c_2^2 + c_1 c_2 + c_2 + 1 - 2\Delta c_2 (c_1 - 1) \right] &= 0, \\ (2\Delta + 1)(c_2 - 1) \left[c_2 c_1^2 + c_2 c_1 + c_1 + 1 - 2\Delta c_1 (c_2 - 1) \right] &= 0, \\ (2\Delta + 1)(c_1 c_2 - 1) [2\Delta (c_1 c_2 + 1) - c_1 c_2 - c_1 - c_2 - 1] &= 0.\end{aligned}\quad (\text{A.13})$$

Note que para $\Delta = -1/2$ esse sistema é identicamente satisfeito (temos uma solução com dimensão de Hilbert igual a 2!). Para $\Delta \neq -1/2$, entretanto, não temos nenhuma solução com todas as celeridades distintas. Por exemplo, se resolvermos a terceira equação escolhendo $c_2 = 1/c_1$, as outras duas equações se degeneram em $(2\Delta + 1)(\Delta - 1)(c_1^2 - 1) = 0$. Assim, obtemos uma solução com dimensão de hilbert igual a 1 se $\Delta = 1$ e as soluções $c_1 = \pm 1$ para qualquer outro valor de Δ (diferente de 1 e 1/2). No entanto, estes valores para c_1 nos conduzem às soluções

$$\lambda_1^\pm = \lambda_2^\pm = \frac{1}{2} \log \left(\frac{e^{-\eta} \mp 1}{e^{+\eta} \mp 1} \right), \quad \lambda_3^\pm = \frac{1}{2} \log \left(\frac{e^{-\eta} - 1}{e^{+\eta} - 1} \right). \quad (\text{A.14})$$

Podemos verificar que essas são as únicas soluções deste sistema. Portanto, podemos concluir que não há soluções cujas celeridades sejam todas distintas para $L = 1$, exceto para $\Delta = -1/2$ ou $\Delta = 1$ onde temos soluções com dimensão de Hilbert maior que zero.

A.2.2 Soluções explícitas para $L = 2$

Para $L = 2$ podemos ter $\omega = 1$ ou $\omega = -1$. Em qualquer caso, as equações (8.7) se fatoram em

$$(c_1 - \varepsilon) F(c_1, c_2) = 0, \quad (c_2 - \varepsilon) F(c_1, c_2) = 0, \quad (c_1 c_2 - 1) F(c_1, c_2) = 0, \quad (\text{A.15})$$

onde $\varepsilon = \pm 1$ e a função $F(c_1, c_2)$ é dada por

$$F(c_1, c_2) = c_1^2 c_2^2 + \varepsilon c_1^2 c_2 + \varepsilon c_1 c_2^2 - 2(2\Delta^2 - 2\Delta\varepsilon + 1) c_1 c_2 + \varepsilon c_1 + \varepsilon c_2 + 1. \quad (\text{A.16})$$

Neste caso acontece que o sistema de equações (8.7) fica identicamente satisfeito quando $F(c_1, c_2) = 0$, ou seja temos neste caso novamente uma solução com dimensão de Hilbert igual a 1. No entanto, se impormos que $F(c_1, c_2) \neq 0$, então devemos ter, de forma mais geral, $c_2 = 1/c_1$. Com isso o sistema (8.7) se torna equivalente à equação

$$(c_1 - \varepsilon) [c_1^2 - 2\varepsilon(\Delta^2 + \varepsilon\Delta - 1)c_1 + 1] = 0, \quad (\text{A.17})$$

cujas soluções são $c_1 = \varepsilon$, ou

$$c_1 = \varepsilon (\Delta^2 + \varepsilon\Delta - 1) \pm \sqrt{\varepsilon(\Delta^2 + \varepsilon\Delta - 1)^2 - 1}. \quad (\text{A.18})$$

A primeira possibilidade nos fornece uma solução onde todas as celeridades são iguais,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2} \log \left(\frac{e^{-\eta} \mp 1}{e^{+\eta} \mp 1} \right), \quad (\text{A.19})$$

enquanto que a outra nos fornece as soluções

$$\begin{aligned} \lambda_1^\pm &= \frac{1}{2} \log \left[\frac{(e^{2\eta} + 2\varepsilon e^\eta - 1) \pm \sqrt{(e^{2\eta} + 1)(e^{2\eta} + 4\varepsilon e^\eta + 1)}}{(e^{2\eta} - 2\varepsilon e^\eta - 1) \pm \sqrt{(e^{2\eta} + 1)(e^{2\eta} + 4\varepsilon e^\eta + 1)}} \right], \\ \lambda_2^\pm &= -\eta - \lambda_1^\pm, \\ \lambda_3^\pm &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{e^{-\eta} - \varepsilon}{e^{+\eta} - \varepsilon} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

A.2.3 Soluções explícitas para $L = 3$

Neste caso temos três valores possíveis para ω , a saber,

$$\omega_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}, \quad \omega_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}, \quad \text{e} \quad \omega_3 = 1. \quad (\text{A.21})$$

Para $a = 3$, isto é, $\omega = 1$, temos que o sistema (8.7) se simplifica para

$$(c_1 - 1) f(c_1, c_2) = 0, \quad (c_2 - 1) f(c_2, c_1) = 0, \quad (c_1 c_2 - 1) g(c_1, c_2) = 0. \quad (\text{A.22})$$

onde

$$\begin{aligned} f(c_1, c_2) &= (1 - 2\Delta) (c_1^2 c_2^2 + 2c_1^2 c_2 + 2c_1 c_2 + c_1) \\ &+ c_1^3 c_2^2 + c_1^3 c_2 + c_1^2 + c_1 c_2^2 + c_2 + 1, \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

e

$$\begin{aligned} g(c_1, c_2) &= (1 - 2\Delta) (2c_1^2 c_2^2 + c_1^2 c_2 + c_1 c_2^2) \\ &+ c_1^3 c_2^3 + c_1^3 c_2^2 + c_1^2 c_2^3 + c_1 + c_2 + 1. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Como antes, a partir da terceira equação em (A.22), coloquemos $c_2 = 1/c_1$. Com isso (A.22) se torna equivalente à equação

$$(c_1^2 - 1) [c_1^2 - (3\Delta - 1) c_1 + 1] = 0. \quad (\text{A.25})$$

Se $c_1 = \pm 1$ somos levados à mesma solução que não pertence ao setor de três mágnons. No outro caso, temos

$$c_1 = \frac{3\Delta - 1}{2} \pm \sqrt{\frac{(3\Delta - 1)^2}{4} - 1}, \quad (\text{A.26})$$

o que fornece

$$\begin{aligned} \lambda_1^\pm &= \frac{1}{2} \log \left[\frac{-(3e^\eta + 1) \pm 3\sqrt{e^{2\eta} + \frac{2}{3}e^\eta + 1}}{(e^\eta + 3) \pm 3\sqrt{e^{2\eta} + \frac{2}{3}e^\eta + 1}} \right], \\ \lambda_2^\pm &= -\eta - \lambda_1^\pm, \\ \lambda_3^\pm &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{e^{-\eta} - 1}{e^\eta - 1} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

A última possibilidade que temos está em resolver o sistema de equações reduzido

$$f(c_1, c_2) = 0, \quad f(c_2, c_1) = 0, \quad g(c_1, c_2) = 0. \quad (\text{A.28})$$

As únicas soluções desse sistema, entretanto, são tais que $c_1 = c_2 = c_3 = \omega_a$, de modo que todas as celeridades são iguais.

A menos de permutações das celeridades, podemos verificar que não há outras soluções para $a = 3$. Falta agora considerar os casos em que $a = 1$ ou $a = 2$, ou seja, quando ω não é real. Neste caso entretanto podemos verificar que não há soluções com todas as celeridades distintas, de modo que as únicas soluções pertencentes ao setor de três mágnons são as apresentadas acima.

A.2.4 Soluções explícitas para $L = 4$

Aqui podemos ter $a = \{1, 2, 3, 4\}$, ou seja, ω pode assumir os valores no conjunto $\{1, -1, i, -i\}$.

Quando ω é real, temos que $c_3 = \varepsilon / (c_1 c_2)$, onde $\varepsilon = \pm 1$. Neste caso segue que o sistema (8.7) se simplifica para

$$\begin{aligned} (c_1^2 - 2\Delta c_1 + 1)(c_1 - \varepsilon) f(c_1, c_2) &= 0, \\ (c_2^2 - 2\Delta c_2 + 1)(c_2 - \varepsilon) f(c_1, c_2) &= 0, \\ (c_1^2 c_2^2 - 2\Delta c_1 c_2 + 1)(c_1 c_2 - 1) f(c_1, c_2) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

onde

$$f(c_1, c_2) = (c_1 c_2 + 1)^2 + \varepsilon [(c_1 c_2 + 1)(c_1 + c_2) - 2\Delta c_1 c_2]. \quad (\text{A.30})$$

O primeiro fator que multiplica esse sistema de equações nos fornece um conjunto de soluções singulares:

$$\begin{aligned} c_1 &= e^\eta, & c_2 &= e^\eta, & c_3 &= \varepsilon e^{-2\eta}, \\ c_1 &= e^{-\eta}, & c_2 &= e^{-\eta}, & c_3 &= \varepsilon e^{2\eta}, \\ c_1 &= e^\eta, & c_2 &= e^{-\eta}, & c_3 &= \varepsilon, \\ c_1 &= e^{-\eta}, & c_2 &= e^\eta, & c_3 &= \varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Por outro lado, se fizermos $f(c_1, c_2) = 0$ então vemos que o sistema (A.29) fica identicamente satisfeito. Portanto temos novamente aqui uma solução com dimensão de Hilbert igual a 1.

As outras soluções desse sistema podem ser obtidas colocando $c_2 = 1/c_1$. Com isso o sistema (A.29) se reduz à equação

$$(c_1^2 - 2\Delta c_1 + 1)(c_1 - \varepsilon) [c_1^2 - (\varepsilon\Delta - 2)c_1 + 1] = 0. \quad (\text{A.32})$$

O primeiro fator fornece as mesmas soluções singulares apresentadas acima. O segundo fator também nos fornece soluções em que duas das celeridades são idênticas. Assim, as únicas soluções pertencentes ao setor de três mágnons são obtidas pelo terceiro fator desta equação, cuja soluções são,

$$c_1^\pm = \frac{(2 - \varepsilon\Delta)}{2} \pm \sqrt{\frac{(2 - \varepsilon\Delta)^2}{4} - 1}, \quad (\text{A.33})$$

o que fornece,

$$\begin{aligned} \lambda_1^\pm &= \frac{1}{2} \log \left[\frac{(e^{2\eta} - 4\varepsilon e^\eta - 3) \pm \sqrt{(e^{2\eta} + 1)(e^{2\eta} - 8\varepsilon e^\eta + 1)}}{(-3e^{2\eta} - 4\varepsilon e^\eta + 1) \pm \sqrt{(e^{2\eta} + 1)(e^{2\eta} - 8\varepsilon e^\eta + 1)}} \right], \\ \lambda_2^\pm &= -\eta - \lambda_1^\pm, \\ \lambda_3^\pm &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{e^{-\eta} - \varepsilon}{e^\eta - \varepsilon} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Essas são as únicas soluções para ω real.

Por fim, quando ω não é real, isto é, quando $\omega = \pm i$, podemos verificar que as únicas soluções com todas celeridades distintas são também singulares, a saber

$$c_1 = e^\eta, \quad c_2 = e^{-\eta}, \quad c_3 = \pm i, \quad (\text{A.35})$$

ou permutações destas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BETHE, H. Zur Theorie der Metalle I, *Zeit. Phys.*, v. 71, p. 205-226, 1931. [15](#), [21](#)
- [2] HEISENBERG, W. Zur Theorie des Ferromagnetismus, *Z. Phys.*, v. 49(9-10), p. 619-636. 1928. [15](#), [21](#)
- [3] BAXTER, R. J. **Exactly solved models in statistical mechanics**, Ann. Academic Press, London: Ann. Academic Press, 1982. [15](#)
- [4] LIEB, H. E. AND LINIGER, W. Exact analysis of an interacting Bose gas. I. The General solution and the ground state, *Phys. Rev.*, v. 130, p. 1605-1616, 1963. [15](#)
- [5] LIEB, E. H. Residual entropy of square ice. *Phys. Rev.* v. 162(1), p. 162-172, 1967. [15](#), [34](#), [57](#)
- [6] LIEB, E. H. Exact solution of the problem of the entropy of two-dimensional ice. *Phys. Rev. Lett.* v. 18(17): p. 692-694, 1967. [15](#)
- [7] SUTHERLAND, B. Exact solution of a two-dimensional model for hydrogen-bonded crystals. *Phys. Rev. Lett.* v. 19(3), p. 103-104, 1967. [15](#)
- [8] YANG, C. P. Exact solution of a two-dimensional model for hydrogen-bonded crystals. *Phys. Rev. Lett.*, v. 19(3): p. 586-588, 1967. [15](#)
- [9] YANG C. N. AND YANG. C. P. One-Dimensional Chain of Anisotropic Spin-Spin Interactions. I. Proof of Bethe's Hypothesis for Ground State in a Finite System, *Phys. Rev.* v. 150, p. 321-327, 1966. [15](#)
- [10] BAXTER, R. J. Partition function of the Eight-Vertex lattice model. *Annals of Physics*, v. 70 (1), p. 193-228, 1972. [15](#)

- [11] SUTHERLAND, B. Model for a multicomponent quantum system, **Phys. Rev. B**, v. 12 (9), p. 3795-3805, 1975. [16](#)
- [12] YANG, C. N. Some exact results for the many body problems in one dimension with repulsive delta function interaction, **Phys. Rev. Lett.**, v. 19, p. 1312-1314, 1967. [16](#)
- [13] LIMA-SANTOS, A. Bethe ansätze for 19-vertex models. **Journ. of Phys. A: Math. and Gen.**, v. 32 (10), p. 1819-1839, 1999. [16](#)
- [14] TAKHTADZHAN, L. A.; FADDEEV, L. D. The quantum method of the inverse problem and the Heisenberg XYZ model. **Russ. Math. Surv.** v. 34, p. 11-68, 1979. [16](#)
- [15] FADDEEV, L. D.; SKLYANIN, E. K.; TAKHTAJAN, L. The quantum inverse problem method I, **Theor. Math. Phys.**, v. 40, p. 688-706, 1980. [16](#)
- [16] FADDEEV, L. D. **Integrable models in (1+1)-dimensional quantum field theory**, Les Houches: Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics, 1982. [16](#)
- [17] SKLYANIN, E. K. Quantum version of the method of inverse scattering problem. **J. Soviet Math.**, v. 19, p. 1546-1596, 1982. [16](#)
- [18] KOREPIN, V. E.; IZERGIN, A. G.; BOGOLIUBOV, N. M. **Quantum inverse scattering method and correlation functions**, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992. [16](#)
- [19] LIMA-SANTOS, A. Algebraic Bethe ansatz for the Zamolodchikov-Fateev and Izergin-Korepin models with open boundary conditions. **Nuclear Physics B**, v. 699 (3), p. 595-631, 2004. [16](#)
- [20] LIMA-SANTOS, A. On the algebraic Bethe ansatz: periodic boundary conditions. **Journ. of Stat. Mech.: Theory and Exp.**, v. P07003, p. , 2006. [16](#)
- [21] JIMBO, M. **Yang-Baxter equation in integrable systems**. In Advanced Series in Mathematical Physics, Singapore: World Scientific, 1990. [16](#)
- [22] PERK; J. H.; AU-YANG, H. Yang-Baxter Equations. **Enc. of Math. Phys.**, v. 5, p. 1251-2666, 2006. [16](#)
- [23] MCGUIRE, J. B. Study of exactly solvable one-dimensional N -body problems” **J. Math. Phys.**, v. 5, p 622-636, 1964. [16](#), [38](#)
- [24] YANG, C. N. Some exact results for the many body problem in one dimension with repulsive delta function interaction, **Phys. Rev. Lett.**, v. 19, p. 1312-1314, 1967. [16](#), [38](#)
- [25] YANG, C. N. S -matrix for the one-dimensional N -body problem with repulsive or attractive δ -function interaction. **Phys. Rev.**, v. 168, 1920-1923, 1968. [16](#), [38](#)

- [26] BAXTER, R. J. Partition function of the eight-vertex lattice model. **Ann. Phys.**, 70, 193-228 - 1972. [16](#), [38](#)
- [27] BAXTER, R. J. Solvable eight-vertex model on a arbitrary planar lattice. **Ann. Phys. Phil. Trans. Royal Soc. London**, v. 289, p. 315-346, 1978. [16](#), [38](#)
- [28] ONSAGER, L. Crystal Statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition. **Phys. Rev. Lett.**, v. 65, p.117, 1944. [16](#), [38](#)
- [29] JIMBO, M. Introduction to the Yang-Baxter equation. **Int. J. Mod. Phys. A**, v. 4(15), p. 3759-3777, 1989. [16](#), [38](#)
- [30] BATCHELOR, M. T. The Bethe ansatz after 75 years. **Physics Today** v. 60, p. 36-40, 2007. [16](#)
- [31] GAUDIN, M. **The Bethe wavefunction**. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. [16](#)
- [32] FADDEEV, L. D. The new life of complete integrability. **Physics Uspekhi**, v. 56(5), p. 465-472, 2013. [16](#), [23](#)
- [33] FADDEEV, L. D., Instructive history of the quantum inverse scattering method, **Acta Applicandae Mathematicae**, v. 39(1), p. 69-84, 1995. [16](#)
- [34] BAXTER, R. J. Completeness of the Bethe Ansatz for the Six and Eight-Vertex Models. **Journal of Stat. Phys.** v.108, p 1-48, 2002. [17](#), [81](#)
- [35] DEGUCHI, T.; GIRI, P. R. Non Self-conjugate Strings, Singular Strings and Rigged Configurations in the Heisenberg Model. **J. Stat. Mech.**, v. P02004, 2015. [17](#), [81](#)
- [36] GIRI, P. R.; DEGUCHI, T. Singular eigenstates in the even(odd) length Heisenberg spin chain. **arXiv:1411.5839**, 2015. [17](#), [81](#)
- [37] GIRI, P. R.; DEGUCHI, T.; Heisenberg model and Rigged Configurations. **arXiv:1501.07801**. 2015. [17](#), [81](#)
- [38] TAKAHASHI, M. One-Dimensional Heisenberg Model at Finite Temperature, **Prog. Theor. Phys.** v. 46, p. 401-415, 1971. [17](#), [80](#)
- [39] ESSLER, F. H. L.; KOREPIN, V. E.; SCHOUTENS, K. Fine structure of the Bethe ansatz for the spin-1/2 Heisenberg *XXX* model, **J. Phys. A: Math. Gen.** v. 25, p. 4115-4126, 1992. [17](#), [81](#)
- [40] ISLER, K.; PARANJAPE, M. B. Violations of the String Hypothesis in the Solutions of the Bethe Ansatz Equations in the *XXX*-Heisenberg Model, **Phys. Lett. B**, v. 319, p. 209-214, 1993; [17](#), [81](#)

- [41] ILAKOVAC, A.; KOLANOVIC, M.; PALLUA, S.; PRESTER, P. Violation of the string hypothesis and the Heisenberg XXZ spin chain, **Phys. Rev. B**, v. 60, p. 7271-7277, 1999. [17](#), [81](#)
- [42] FABRICIUS, K.; MCCOY, B. M. Completing Bethe's Equations at Roots of Unity, **J. Statist. Phys.** v. 104, p. 573-587, 2001. [17](#), [81](#)
- [43] SIDDHARTHAN, R. Singularities in the Bethe solution of the XXX and XXZ Heisenberg spin chains, **arXiv:cond-mat/9804210**, 1998. [17](#)
- [44] NOH, J. D.; LEE, D. S.; KIM, D. Origin of the singular Bethe ansatz solutions for the Heisenberg XXZ spin chain, **Phys. A**, v. 287, p. 167-176, 2000; [17](#)
- [45] NEPOMECHIE, R. I.; WANG, C. Algebraic Bethe ansatz for singular solutions **arXiv:1304.7978**, **J. Phys. A: Math. Theor.**, v. 46 (325002), 2013. [17](#)
- [46] HAO, W.; NEPOMECHIE, R. I.; SOMMESE, J. On the completeness of solutions of Bethe's equations. **arXiv:1308.4645**, **Phys. Rev. E**, v. 88 (052113), 2013. [17](#)
- [47] HAO, W.; NEPOMECHIE, R. I.; SOMMESE, J. Singular solutions, repeated roots and completeness for higher-spin chains **arXiv:1312.2982v2**, **J. Stat. Mech.**, v. P03024, 2013. [17](#)
- [48] NEPOMECHIE, R. I.; WANG, C. Twisting singular solutions of Bethe's equations **arXiv:1409.7382**, **J. Phys. A: Math. Theor.** v.47(505004), 2014. [17](#)
- [49] KIRILLOV, A. N.; SAKAMOTO, R. Singular Solutions to the Bethe Ansatz Equations and Rigged Configurations, **arXiv:1402.0651**, **J. Phys. A**, v. 47(205207), (2014). [17](#)
- [50] KIRILLOV, A. N.; SAKAMOTO, R. Some Remarks On Nepomechie–Wang Eigenstates For Spin-1/2 XXX Model, **arXiv:1406.1958**, 2015. [17](#)
- [51] FABRICIUS, K.; MCCOY, B. M. Evaluation parameters and Bethe roots for the six-vertex model at roots of unity, **Prog. Math. Phys.**, v. 23, p. 119, 2001. [17](#)
- [52] TARASOV, V. On solutions of Bethe equations for the XXZ model **arXiv:math-ph/0306002**, 2003. [17](#)
- [53] LI, J. R.; TARASOV, V. XXZ-type Bethe ansatz equations and quasi-polynomials **arXiv:1210.2315**, **J. Phys.: Conf. Ser.** v. 411(012020), 2012. [17](#)
- [54] LANGLANDS, R. P.; SAINT-AUBIN, Y. Algebro-geometric aspects of the Bethe equations, **Strings and Symmetries**, Proc. of Gürsey Memorial Conference, Istanbul, Springer-Verlag, 1995. [17](#)

- [55] LANGLANDS, R. P.; SAINT-AUBIN, Y. Aspects combinatoires des équations de Bethe **Adv. in Math. Sciences: CRM's 25 years**, ed. Luc Vinet, CRM Proceedings and Lecture Notes, Amer. Math. Soc. 1997. [17](#)
- [56] FRENKEL, E. Affine Algebras, Langlands Duality and Bethe Ansatz, **Proc. of the Int. Cong. of Math. Phys.**, Paris, International Press, p. 606-642, 1995. [17](#)
- [57] VIEIRA, R. S.; LIMA-SANTOS, A. Where are the roots of the Bethe Ansatz equations? [arXiv:1502.05316](#), **Physics Letters A**, v. 379(37), p. 2150–2153, 2015. [17](#)
- [58] VIEIRA, R. S. On the number of roots of self-inversive polynomials on the complex unit circle [arXiv:1504.00615](#), (submitted to publication at the Ramanujan Journal), 2015. [18](#), [68](#)
- [59] FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. **The Feynman Lectures on Physics**, Addison-Wesley Publishing Company, 1970. [23](#)
- [60] PAULING, L. The structure and entropy of ice and of other crystals with some randomness of atomic arrangement, **J. Am. Chem. Soc.**, v. 57, p. 2680-2684, 1935. [34](#)
- [61] MASON, J. C.; HANDSCOMB, D. C. **Chebyshev Polynomials**. London: Chapman and Hall, 2003. [66](#)
- [62] MARDEN, M. **Geometry of polynomials**, Math. Surveys, 3, Providence: Amer. Math. Society, 1966. [67](#), [68](#), [78](#)
- [63] COHN, A. Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise, **Math. Zeit.**, v. 14, p. 110-148, 1922. [68](#)
- [64] BONSALE, F. F.; MARDEN M. Zeros of self-inversive polynomials, **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 3, p. 471-475, 1952. [68](#)
- [65] ANCOCHEA, G. Zeros of self-inversive polynomials. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 4, p. 900-902, 1953. [68](#)
- [66] ROUCHÉ, E. Mémoire sur la série de Lagrange, **J. École Polytech.**, v. 22, p. 217-218, 1862. [68](#)
- [67] LAKATOS, P.; LOSONCZI, L. Self-inversive polynomials whose zeros are on the unit circle, **Publ. Math. Debrecen**, v. 65, p. 409-420, 2004. [71](#), [73](#), [74](#)
- [68] BERTIN, M. J. ET AL. **Pisot and Salem numbers**, Basel: Birkhäuser Verlag, 1992. [75](#)
- [69] SMYTH, C. Seventy years of Salem numbers: a survey, [arXiv:1408.0195](#), 2015. [75](#)
- [70] BOYD, D. W. Small Salem numbers, **Duke Math. J.**, v. 44, p. 315-328, 1977. [76](#), [77](#)

- [71] BOYD, D. W. Pisot and Salem Numbers in Intervals of the Real Line. **Math. Comput.**, v. 32, p. 1244-1260, 1978. [76](#), [77](#)
- [72] SIEGEL, C. L. Algebraic numbers whose conjugates lie in the unit circle. **Duke Math. J.**, v. 11, p. 597-602, 1944. [76](#)
- [73] LEHMER, D. H. Factorization of certain cyclotomic functions. **Ann. Math.** v. 34(2), p. 461-479, 1933. [77](#)
- [74] HIRONAKA, E. What is... Lehmer's number?, **Not. Amer. Math. Soc.**, v. 56(3) p. 374-375, 2009. [77](#)
- [75] AKRITAS, A. G; STRZEBONSKI, A. W.; VIGKLAS, P. S. On the various bisection methods derived from Vicent's theorem, **Serdica J. Computing**, v. 2, p. 89-104, 2008. [79](#)
- [76] HUGHES, C. P.; NIKEGHBALI, A. The zeros of random polynomials cluster uniformly near the unit circle. **Compositio Math.**, v. 144, p. 734-746, 2008. [81](#)