UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MÁRCIA ZULIAN TEIXEIRA TASSONE

CONSTRUÇÃO DA PARÁBOLA ATRAVÉS DE MODELOS LÚDICOS E COMPUTACIONAIS

SÃO CARLOS
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MÁRCIA ZULIAN TEIXEIRA TASSONE

CONSTRUÇÃO DA PARÁBOLA ATRAVÉS DE MODELOS LÚDICOS E COMPUTACIONAIS

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientação: Prof. Dr. José Antonio Salvador

SÃO CARLOS
2015

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

T215c

Tassone, Márcia Zulian Teixeira
Construção da parábola através de modelos lúdicos e computacionais / Márcia Zulian Teixeira Tassone. -- São Carlos : UFSCar, 2015.
132 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.

1. Ensino de matemática. 2. Parábola. 3. Atividades lúdicas e computacionais. 4. Aprendizagem. I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Marcia Zulian Teixeira Tassone, realizada em 11/09/2015:

Prof. Dr. Jose Antonio Salvador
UFSCar

Profa. Dra. Amanda Liz Pacífico Manfrim Perticarrari
UNESP

Prof. Dr. Joao Carlos Vieira Sampaio
UFSCar

“No meio do caminho tinha uma pedra
tinha uma pedra no meio do caminho
tinha uma pedra
no meio do caminho tinha uma pedra.

Nunca me esquecerei desse acontecimento
na vida de minhas retinas tão fatigadas.
Nunca me esquecerei que no meio do caminho
tinha uma pedra
tinha uma pedra no meio do caminho
no meio do caminho tinha uma pedra.”
Carlos Drummond de Andrade[1]

Dedico a todos que me auxiliaram a retirar as pedras do caminho, em especial à minha família, meus pais, Odival (in memoriam) e Rufina, que me introduziram no mundo acadêmico, meu esposo Benedito e meus queridos filhos Maria Júlia, Guilherme e Talles que me encorajaram, me apoiaram e fizeram-se presentes nesta caminhada.

[1] Poema: No meio do caminho, Carlos Drummond de Andrade, disponível em http://drummond.memoriaviva.com.br/alguma-poesia/no-meio-do-caminho/, Acesso em: 02 jul. 2015

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a Deus, pelo dom da vida, pelas oportunidades que me tem concedido, pela força e coragem no desenvolvimento de todas as atividades do mestrado.

A todos meus mestres, desde a professora Marisa na educação infantil até o meu querido orientador, professor Salvador, que muito me auxiliou no desenvolvimento do trabalho realizado, a quem sou muito grata e o admiro pela competência, dedicação e gentileza durante toda a orientação.

Aos professores do PROFMAT da UFSCar, pela dedicação e paciência que tiveram comigo, auxiliando na minha formação acadêmica.

Aos amigos da turma 2013 do PROFMAT da UFSCar, que nestes dois anos de convivência partilhamos dúvidas, expectativas, conhecimento, tristezas e muitas alegrias.

A toda equipe da Escola Estadual Padre Josué Silveira de Mattos, que apoiou o desenvolvimento do projeto, principalmente aos alunos da 3ª série B, que sempre foram solícitos na realização das atividades.

A minha segunda família a Escola Estadual Padre Geraldo Lourenço, ao corpo discente e docente, em especial ao professor Leandro, funcionários e equipe gestora que não mediram esforços para o êxito das atividades propostas.

A CAPES por oportunizar este mestrado.

E finalmente, agradeço a minha família, pela compreensão e auxílio nesta jornada.

"De tudo ficaram três coisas...

A certeza de que estamos começando...

A certeza de que é preciso continuar...

A certeza de que podemos ser interrompidos

antes de terminar...

Façamos da interrupção um caminho novo...

Da queda, um passo de dança...

Do medo, uma escada...

Do sonho, uma ponte...

Da procura, um encontro!"

Fernando Sabino[2]

[2] Trecho de "III – O Escolhido", do livro 'O Encontro Marcado', de Fernando Sabino.

RESUMO

O desenvolvimento tecnológico está associado ao conhecimento organizado e sistematizado, adquirido durante toda a existência humana. As cônicas, em especial a parábola possui um relevante papel neste desenvolvimento, contudo seu estudo na educação básica tem se restringido a manipulação de fórmulas desconexas de contexto. A presente dissertação discorre sobre o desenvolvimento de atividades diversificadas relacionadas ao ensino da parábola com o objetivo de relacionar a teoria com a prática através de sua utilidade na sociedade atual. O trabalho inicialmente foi desenvolvido com uma turma da terceira série do Ensino Médio de uma escola pública estadual. Para a introdução das características e propriedades da parábola foram utilizadas atividades lúdicas com dobraduras e os recursos do ambiente de geometria dinâmica do programa computacional GeoGebra serviram de meios para a ocorrência da: investigação, análise de dados, busca de regularidades, identificação e validação de modelos matemáticos. As atividades diversificadas motivaram os alunos para a construção de um fogão solar parabólico estreitando os laços entre a teoria e a prática. Num segundo momento as atividades foram aplicadas em outra unidade escolar estadual com a finalidade de envolver os docentes da área de matemática e ciências da natureza. O desenvolvimento das atividades com a utilização de objetos com formatos parabólicos para a reflexão de ondas sonoras culminou na elaboração de projeto para a construção de um banco parabólico no jardim da escola. Apresenta também uma pequena análise dos processos de ensino e aprendizagem sob a ótica de Piaget e Paulo Freire, da utilidade que a matemática possui no desenvolvimento humano, dos aspectos da tendência da Educação Matemática em utilizar processos investigativos e de modelagem. Constatou-se sua eficiência no desenvolvimento de competências e habilidades requeridas na atualidade e a sua viabilidade para a realização de atividades escolares.

Palavras chave: ensino de matemática, parábola, atividades lúdicas e computacionais, aprendizagem.

ABSTRACT

Technological development is associated with systematic and organized knowledge, gathered during the entirety of human existence. The conics, in particular, the parabola, have a relevant presence in this development, although its study in basic education has been restrained to the manipulation of formulas without a context. This dissertation discusses the development of diverse activities related to the teaching of the parabola with the goal of relating theory and practice through its use in an academic context. This project was initially designed and developed for one class in their third year of high school at a public institution in Brazil. In order to introduce the characteristics and properties of the parabola, the use of physical and entertaining activities such as paper folding, along with resources from the geometrical environment, especially the program GeoGebra, were put to use to in order to achieve investigation, data analysis, a search for regularities, and identification and validation of the mathematical models. The diverse activities motivated the students to build a parabolic solar stove, which helped to connect theory and practice. In a second phase of experiment, the activities were applied in another public school, with the goal of involving a larger corpus of students within the fields of mathematics and the natural sciences. The activities developed used parabolic objects for reflection of sound waves and led to the elaboration of a project to build a parabolic bench in the school's garden. It also presents a short analysis of the teaching and learning processes, based on the hypotheses of Piaget and Paulo Freire, about the role that mathematics has in human development and the aspects of mathematics education that utilize investigative processes and modeling. It was perceived the efficiency on the development of the competencies and abilities required nowadays and its viability to the realization of the scholarly activities.

Keywords: mathematics teaching, parabola, ludic and computational activities, learning.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

Introdução

Como obter a equação de uma parábola assim como suas propriedades é objeto de estudo do Ensino Básico de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais e a Proposta Curricular do Estado de São Paulo para Matemática, e a pergunta principal de nossa investigação era o que os estudantes aprenderam sobre a parábola no Ensino Fundamental? E o que eles poderão aprender no Ensino Médio?

Os estudantes do Ensino Básico ouvem que pela ação da gravidade num lançamento de um objeto como uma bola de futebol, pedra, ou até mesmo a trajetória da água lançada por um pivô utilizado para irrigação na agricultura possui o formato de um arco de curva plana conhecida como parábola. Do mesmo modo uma parábola é conhecida como uma seção cônica obtida quando um cone é seccionado por um plano paralelo a uma de suas geratrizes.

Com o objetivo de levar os estudantes a uma aprendizagem significativa dos conceitos envolvendo a parábola tanto como o gráfico de uma função polinomial do segundo grau, vista no final do Ensino Fundamental, bem como uma curva obtida de uma propriedade geométrica, estudada na série final do Ensino Médio, um projeto foi idealizado, tendo como início a investigação dos conhecimentos prévios adquiridos por uma turma que estava prestes a concluir a 3ª Série do Ensino Médio e, consequentemente a Educação Básica, para numa perspectiva construtivista, explorar atividades que possam potencializar a aprendizagem do estudante, visando estabelecer relações entre os conhecimentos prévios constituídos sobre a parábola no Ensino fundamental e o que é abordado sobre ela no Ensino Médio. Os conhecimentos prévios são conteúdos fundamentais para adquirir novos conhecimentos de acordo com Ausubel no trabalho de Moreira (1998).

Para tanto, aos estudantes foi proposto que construíssem modelos de parábolas, inicialmente com dobraduras, em seguida com recursos computacionais em ambiente de geometria dinâmica, utilizando o software GeoGebra[3], explorassem as suas aplicações (Rezende, 2012), uma vez que elas possuem propriedades interessantes que são usadas na construção de diversos objetos como antenas parabólicas, espelhos com focos, lanternas, radares, fogão solar, dentre outros, o que os motivou a trabalharem nas atividades propostas.

[3]Disponível em http://www.geogebra.org/

1. Escola parte integrante da vida

Este capítulo aborda alguns fatos que merecem destaque sobre a trajetória de vida da autora, sobre as escolas públicas de atuação onde ocorreram a aplicação das atividades diferenciadas na sala de aula e seus contextos, uma discussão sobre a parábola e suas aplicações a serviço da sociedade.

1.1 Trajetória de vida

Na educação básica, a autora estudou somente em Escola Pública, iniciando o ensino fundamental no Grupo Escolar Teófilo de Andrade no município de São João da Boa Vista.

Vivenciou como aluna várias políticas educacionais como a expansão da obrigatoriedade dos estudos (oito anos), a unificação do Grupo Escolar e o Ginásio, a extinção do exame de admissão, as mudanças no sistema de avaliação, onde as notas foram substituídas por conceitos, a implantação dos períodos de recuperação. Todas estas medidas tinham como finalidade a expansão do ensino fundamental e a permanência do aluno na escola.

Ao final do Ensino Fundamental como não havia vagas para todos no Segundo Grau (Ensino Médio) prestou "vestibulinho" para ingressar em uma Escola Estadual, passou, contudo por motivos econômicos decidiu matricular-se em uma Escola Técnica Municipal no período noturno onde faria o Curso de Técnico em Contabilidade e iniciaria a busca do primeiro emprego.

Com quinze anos, iniciou suas atividades trabalhistas em uma escola privada de Educação Infantil. Era a "Tia Márcia" das crianças do maternal, cuja idade era entre dois e quatro anos. Não se sentia e nem estava preparada para desempenhar tal função, era como uma "babá" das crianças. Não possuía conhecimento de algum teórico da educação, utilizava apenas a sua intuição em seu cotidiano e isso lhe incomodava. Ao final daquele ano não foi convidada pela Direção para permanecer na Escola, sendo esta a sua primeira frustração na educação, acreditava que nunca seria boa professora, que não possuía "dom" para lidar com as crianças.

Foi assim que saiu à busca de outra colocação, de preferência bem longe do ramo da "educação". Como estava cursando o Técnico em Contabilidade começou a trabalhar em um escritório de contabilidade e posteriormente no departamento de pessoal de uma indústria.

Estava concluindo o curso técnico e precisava definir qual a carreira seguir, qual curso fazer. Os computadores começavam a surgir no país e com ele novos cursos na área, mas infelizmente só eram oferecidos em grandes centros e o mais próximo era Campinas. Não tinha condições de manter-se fora de casa e as faculdades públicas pareciam-lhe distantes, pois sabia que o curso técnico realizado no período noturno não daria subsídios para tal façanha. Como sempre teve grande habilidade na área de exatas, prestou vestibular para o curso de Licenciatura em Ciências com Habilitação em Matemática na FEOB (Fundação de Ensino Octávio Bastos) no município em que reside, São João da Boa Vista, contudo não possuía a intenção de lecionar ou dedicar-se a Educação. O curso foi se desenrolando e somente ao final do terceiro e durante o quarto ano através das atividades nas aulas de Práticas e Instrumentação para o Ensino, começou a vislumbrar a possibilidade de lecionar.

Concluiu a graduação em 1984 e no ano de 1986 a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo realizou concurso para Professor III, foi aprovada e efetivada como Professora da Rede Estadual de Ensino em Hortolândia, naquela época distrito do município de Sumaré, na Escola Estadual Professora Liomar Freitas Câmara, em 1987.

Em 1989 foi removida para a Escola Estadual Padre Josué Silveira de Mattos, onde leciona até hoje. Nesse período, como Professora de Matemática, presenciou várias mudanças nas políticas educacionais, como a criação e a extinção de programas como: Ciclo Básico, Jornada Única, Escola Padrão, Escola Modular. Algumas permaneceram como a criação de dois Ciclos no Ensino Fundamental, hoje três, com manutenção da seriação e a instituição da Progressão Continuada, contestada pelo modo de sua implantação e pelos índices de qualidade da educação atual.

Em 1995 foi convidada para trabalhar na rede particular, numa escola bem conceituada do município de São João da Boa vista, tinha como clientela filhos de famílias da classe alta da cidade, com poucas exceções. Esta escola preocupava-se em manter seus professores atualizados, realizou alguns cursos com os professores do Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática - CAEM - USP. A coordenadora da Área de Matemática da escola, Professora Norma Kerps, fez com que a sua paixão pela matemática aumentasse, ajudou-lhe a trilhar caminhos nunca vistos antes, onde a matemática deixa de ser vista como o “bicho papão” da Escola.

Visando conquistar o cargo de Diretor de Escola voltou para a Faculdade para realizar o curso de pedagogia. Terminou o curso ao final do ano de 2000 e em 2001 realizou o concurso para Diretor de Escola da rede pública de ensino do Estado de São Paulo. Foi aprovada e ao final de 2001 iniciou sua atividade como Diretora de Escola na Escola Estadual José Theodoro de Moraes, em Aguaí, município próximo à cidade de São João da Boa Vista.

Participou de diversos cursos de atualização promovidos pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, tanto para professores quanto para gestores das escolas estaduais, realizados pela CENP – Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, ou através de convênios firmados com instituições educacionais. Dos cursos realizados destaca os pertencentes ao Programa Circuito Gestão, desenvolvido por empresa especializada em gestão empresarial em parceria com a CENP e outros dois, um curso intitulado "Construção de Gráficos de Funções com Fundamentos Teóricos e Computacionais", com carga horária de 160 horas/aulas, para professores de matemática da rede estadual de ensino, realizado no período de outubro de 1999 a novembro de 2000, pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – UNESP, com mestres do Campus de Rio Claro do Instituto de Geociência e Ciências. E o curso de Pós Graduação Lato Sensu em Gestão Educacional realizado na Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, iniciado em agosto de 2005 e concluído em março de 2007.

Em 2012 realizou o exame de acesso para o mestrado profissional PROFMAT na Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), iniciando-o em 2013. Os anos de 2013 e 2014 para a autora foram muitos marcantes, pode aprofundar seus conhecimentos matemáticos, possibilitando a reflexão da sua prática pedagógica, dando-lhe subsídios para aprimorar o seu desempenho docente.

Hoje atua como Professora de Matemática da E. E. Padre Josué Silveira de Mattos, município de São João da Boa Vista e Diretora da E. E. Padre Geraldo Lourenço, município de Aguaí, escolas pertencentes à Diretoria de Ensino da Região de São João da Boa Vista.

1.2 A Escola em seu contexto.

A E. E. Padre Josué Silveira de Mattos localiza-se em um bairro popular periférico do município de São João da Boa Vista, cuja maioria da população exerce suas atividades laborais na indústria ou comércio do município, em atividades sazonais na zona rural ou ainda na construção civil. Pertence à Diretoria de Ensino da Região de São João da Boa Vista, com atendimento regular a alunos do Ensino Fundamental, do 6º ao 9º ano, e Ensino Médio.

A Escola possui uma história muito bonita, iniciou as suas atividades no barracão de uma igreja e com muito empenho foi se institucionalizando como escola estadual. Seu patrono, Padre Josué Silveira de Mattos, não mediu esforços para a criação de uma escola que atendesse todos os excluídos da época, uma vez que no Grupo Escolar Joaquim José, hoje Escola Estadual, crianças "descalças" não podiam entrar, sua clientela era constituída pela elite da cidade que residia na zona central do município.

Desde 1989 a autora leciona nesta escola, e nos últimos anos percebe-se acentuado declínio na aprendizagem dos alunos, isto é, na formação de habilidades e competências dos mesmos, além de aumento significativo dos índices de retenção e evasão escolar.

O quadro abaixo apresenta os resultados do Ensino Médio da Escola na avaliação externa do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo – SARESP, bem como seu Índice de Desenvolvimento da Educação do Estado de São Paulo – IDESP nos últimos anos:

Quadro 1 – Resultados das avaliações do Ensino Médio do SARESP e IDESP da Escola Estadual Padre Josué Silveira de Mattos.

Ano	Português	Matemática	Correção Fluxo	IDESP
2010	2,8943	1,5937	0,8586	1,92
2011	2,6783	1,5987	0,8111	1,74
2012	2,4690	1,4770	0,7840	1,54
2013	2,1177	1,6077	0,7194	1,34

Fonte: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo[4]

Observa-se que os índices de matemática nesta avaliação são baixíssimos e nas últimas quatro edições do SARESP o maior índice obtido foi de 1,6, no ano letivo de 2013, no qual a distribuição por níveis de desempenho em matemática era: 54% dos alunos no nível

[4]Disponível em: < http://idesp.edunet.sp.gov.br>. Acesso em: 02 mai. 2015.

abaixo do básico, 44% no básico, 2% no adequado e nenhum percentual no nível avançado. Esses dados associados à correção de fluxo de 0,7194 culminaram no menor IDESP obtido pela Escola em sua história.

A direção da Escola Estadual Padre Josué Silveira de Mattos atribuiu à autora as aulas de matemática de duas das três turmas da 3ª série do Ensino Médio da escola no ano letivo de 2014, confiando-lhe a missão de melhorar este cenário, tarefa árdua, mas não impossível.

A Escola Estadual Padre Geraldo Lourenço, situada na área central do município de Aguaí, possui estudantes do Ensino Fundamental, do 6º ao 9º ano, e do Ensino Médio, atende jovens e adolescentes residentes nos bairros próximos à escola, no Jardim Aeroporto, bairro apartado do município, e os residentes na zona rural. Sua clientela, portanto, é bem diversificada quanto à classe social e econômica. Oferta também no Centro de Estudos de Línguas cursos de Espanhol e Inglês. Atualmente conta com quinhentos e um alunos no Ensino Fundamental e quatrocentos e oito no Ensino Médio.

A escola inicialmente recebeu o nome de ginásio Estadual de Aguaí, instalado em 15 de março de 1954, em continuação ao ginásio Municipal de Aguaí, criado em 1948. Seu patrono Padre Geraldo Lourenço é um nome respeitadíssimo da história de Aguaí; alemão de nascimento foi um sacerdote que muito amou este município, pelos vários anos de intensa dedicação ao bem estar da comunidade. Muito culto, conhecedor profundo da língua portuguesa, foi um batalhador pela causa da educação, acompanhando de perto todo o progresso educacional pelo qual passava o município. Veio para então Vila de Cascavel, nos anos de 1930, onde viveu até 29 de outubro de 1957, data de seu falecimento.

O quadro abaixo apresenta alguns índices do Ensino Médio da Escola.

Quadro 2 – Resultados das avaliações do Ensino Médio do SARESP e IDESP da Escola Estadual Padre Geraldo Lourenço.

Ano	Português	Matemática	Correção Fluxo	IDESP
2010	3,3327	1,9560	0,8225	2,17
2011	3,6153	1,6383	0,8100	2,13
2012	3,3617	1,7683	0,8445	2,17
2013	3,0040	1,9803	0,8672	2,16

Fonte: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo[5]

[5]Disponível em: < http://idesp.edunet.sp.gov.br>. Acesso em: 02 mai. 2015.

No quadro apresentado percebe-se uma acomodação no IDESP, nos últimos quatro anos a Escola obteve o índice de 2,1 com poucas alterações na casa dos centésimos. Os índices de matemática são baixos e não ultrapassaram a casa dos dois pontos. Pensando melhorar o desempenho da Escola, em especial na área de matemática, os gestores procuram envolver a comunidade escolar para o desenvolvimento de atividades que fortaleçam o protagonismo juvenil e favoreça o processo ensino aprendizagem.

O mestre Paulo Freire pontua que "ninguém educa ninguém, como tampouco ninguém se educa a si mesmo: os homens se educam em comunhão, mediatizados pelo mundo" (FREIRE, 1983, p.79), e indica alguns caminhos a seguir.

1.3 Parábolas por quê?

Em entrevista à revista Cálculo[6], a professora da Universidade Federal de Pelotas Daniela Stevanin Hoffmann pontua que o estudante percorre sua vida escolar procurando as raízes de equações do segundo grau, contudo não consegue mobilizar os conhecimentos adquiridos e aplicá-los quando vê uma parábola fora desse contexto. A professora universitária deixa nesta revista o seguinte depoimento: "Não sou tão velha, mas no meu tempo de escola não havia nada de aplicações, modelagem, experimento, nada disso. Então, não tenho nenhuma lembrança associada às parábolas especificamente" (SIMÕES, 2014, p. 15).

O fato de estar próximo o início do segundo semestre de 2014, atuar como docente nas turmas da 3ª série do Ensino Médio na E. E. Padre Josué Silveira de Mattos, o questionamento de Hoffmann citada por Simões (2014) associados às atividades abordadas no mestrado profissional PROFMAT e a experiência pessoal em sala de aula motivaram o desenvolvimento de um projeto específico com a parábola, uma vez que as cônicas fazem parte do currículo oficial do Estado de São Paulo.

No desenvolvimento do trabalho, inicialmente foi aplicada uma Ficha de Atividades solicitando que os alunos apresentassem o esboço da representação gráfica de algumas funções polinomiais reais de primeiro e segundo graus, identificando suas características e principais propriedades. O resultado obtido ficou muito aquém do esperado, a atividade realizada sinalizou para a busca de alternativas pedagógicas para desenvolver este tópico de modo que os alunos compreendessem o que estavam fazendo e que pudessem se apropriar do conteúdo vivenciando-o na prática.

[6] Cálculo – Ano 4 – Número 41 – junho de 2014. Editora Segmento.

É exatamente na terceira série do Ensino Médio que a Proposta Curricular do Estado de São Paulo para Matemática prevê o estudo das cônicas: noções e aplicações. E a pergunta que a inquietava era: o que os estudantes aprenderam? Dada às dificuldades iniciais passou-se a discutir: o que e como eles poderão aprender sobre parábolas? E surgiram várias ideias, dentre elas a experiência de construção de parábolas com atividades lúdicas de dobraduras e com o software de Geometria Dinâmica GeoGebra, a elaboração de alguns objetos usando os conceitos de parábola, pois as mesmas têm propriedades interessantes e podem ser usadas para construção de muitos objetos espaciais.

Santos (2009) pontua que apesar da importância das cônicas no desenvolvimento tecnológico moderno, o seu estudo no Ensino Médio ultimamente tem se restringido apenas em manipulação e/ou memorização de fórmulas corroborando para a não valorização do tema pelos alunos, e consequentemente deixam de conhecer a sua beleza, importância e utilidade.

A construção da parábola através de modelos lúdicos e computacionais é uma proposta que tem por objetivo principal possibilitar o estudo deste tema através da exploração de suas propriedades e aplicações no desenvolvimento tecnológico, de modo que, o aluno possa participar ativamente do processo de construção do seu conhecimento e venha contribuir para o sucesso do processo ensino aprendizagem.

E a partir do interesse dos estudantes nas aplicações das propriedades das parábolas no cotidiano, da dificuldade apresentada pelos mesmos em desenvolver a atividade preliminar, optou-se no desenvolvimento de atividades que possibilitariam abordar o tema através de práticas em sala de aula baseadas na realização de atividades investigativas e na construção de modelos matemáticos.

1.4 A parábola na proposta curricular de Matemática da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

A Secretaria da Educação do Estado de São Paulo possui uma proposta curricular para as escolas estaduais, e atualmente instituiu o Caderno do Aluno, material fornecido pelo Governo do Estado de São Paulo gratuitamente aos alunos, como uma das principais ferramentas a ser utilizada no desenvolvimento do currículo proposto.

Em matemática a equação do 2º grau é inicialmente abordada no Caderno do Aluno - Volume 1 da 8ª série/ 9º ano do Ensino Fundamental, na *Situação de Aprendizagem 5 – Alguns métodos para resolver equações do 2º grau*, utiliza para introdução deste conteúdo situações problemas. Nesta Situação de Aprendizagem as atividades propostas buscam relacionar cada situação apresentada com a sua respectiva equação, e para determinar as possíveis raízes das equações, soluções dos problemas propostos, as mesmas são reescritas na forma de produto de binômios cujo produto é igual a zero e a partir das características destas equações os alunos são conduzidos a solucioná-las.

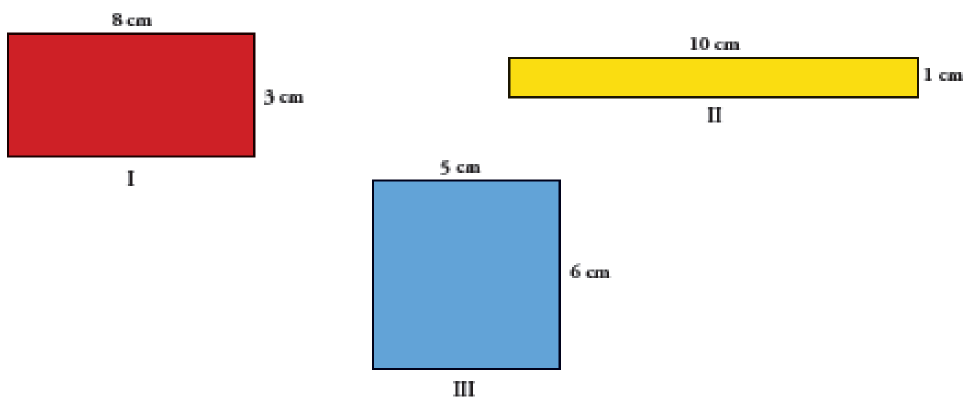
A soma e o produto das raízes de uma equação são trabalhados em diversas atividades nesta Situação de Aprendizagem, ora partindo de uma situação problema, ora iniciando com a equação buscando suas raízes, ora apresentando as raízes e solicitando a sentença matemática. Deste modo a fatoração de polinômios é bem utilizada no desenvolvimento das atividades propostas. O método de "completar quadrados" para encontrar as raízes de uma equação do 2º grau, a partir das características do trinômio quadrado perfeito também é apresentado aos alunos, assim como a fórmula resolutiva de Bhaskara, para tanto o Caderno do Aluno apresenta um pouco da História da Matemática e desenvolve atividades a partir de situações problemas.

A *Situação de Aprendizagem 6 – Equações de 2º grau na resolução de problemas*, pertencente ao Volume 1 do Caderno do Aluno da 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental, propõem algumas atividades contextualizadas onde a equação do segundo grau pode ser aplicada.

Ainda no Caderno do Aluno – Volume 1 da 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental as grandezas proporcionais são objeto de estudo nas *Situações de Aprendizagem 7 e 8*, nestas atividades algumas questões remetem a uma função polinomial de segundo grau. É na atividade 6 da Situação de Aprendizagem 8, Figuras 1, 2 e 3, que proporciona o primeiro contato dos alunos com a parábola, esta situação aborda a representação gráfica de grandezas proporcionais e de algumas não proporcionais.

Figura 1 - A parábola na 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental (A)

6. Observe os três retângulos e responda às questões a seguir:



Fonte: Caderno do Aluno – Matemática – 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental - Volume 1, p.89 e 90
Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, Edição 2014-2017.

Figura 2 - A parábola na 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental (B)

a) Calcule o **perímetro** e a **área** de cada um deles e, em seguida, preencha a tabela:

Retângulo	Perímetro (cm)	Área (cm^2)
I		
II		
III		

b) Considere um retângulo de mesmo perímetro que os anteriores, cujos lados medem **x** e **y** centímetros. Expresse **y** em função de **x**.

c) Complete a tabela a seguir para a função anterior com valores inteiros de **x** variando de 0 a 11. Com base nesses dados, construa o gráfico dessa função.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	11											0

Fonte: Caderno do Aluno – Matemática – 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental - Volume 1, p.89 e 90
Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, Edição 2014-2017.

Figura 3 - A parábola na 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental (C)

d) Como varia **y** à medida que o valor de **x** aumenta? O gráfico representa uma variação proporcional entre **x** e **y**? Justifique.

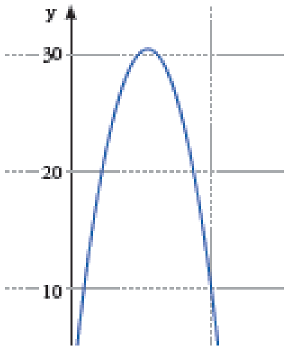
e) Indicando por **A** a área do retângulo do item anterior, escreva-a em função de **x**.

f) Preencha a tabela a seguir com os valores da área **A** para **x** variando de 0 a 11.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A												

g) A área **A** é proporcional à medida de **x**? Justifique.

h) O gráfico a seguir representa a função da área **A** de um retângulo em relação a seu lado de medida **x**. Com base nele, determine o valor de **x** que torna a área máxima.



Fonte: Caderno do Aluno – Matemática – 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental - Volume 1, p.91 Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, Edição 2014-2017.

A *Situação de Aprendizagem 7* do Volume 1 do Caderno do Aluno de Matemática da primeira série do Ensino Médio contempla o estudo das *Funções Polinomiais de 2º grau: significado, gráficos, interseções com os eixos, vértices e sinais.* Nesta situação de aprendizagem são estudadas as funções polinomiais do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c pertencentes ao conjunto dos números reais, com a diferente de zero.

Inicialmente esta Situação de Aprendizagem solicita ao aluno esboços de funções polinomiais do tipo $f(x) = ax^2$, com $a \neq 0$, e comparações dos gráficos obtidos, como pode-se observar na Figura 4 apresentada a seguir:

Figura 4 - A parábola na 1ª série do Ensino Médio (A)

1. Construa, no espaço a seguir, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das seguintes funções **a**, **b**, **c** e **d**, e, em outro plano, os gráficos das funções **e**, **f**, **g** e **h**.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = 2x^2$

c) $f(x) = 10x^2$

d) $f(x) = \frac{1}{10}x^2$

e) $f(x) = -x^2$

f) $f(x) = -2x^2$

g) $f(x) = -10x^2$

h) $f(x) = -\frac{1}{10}x^2$

Tome nota!

Procure esboçar os gráficos comparando uns aos outros, sem necessariamente recorrer a tabelas com valores de **x** e de **y**. Em vez disso, leve em consideração os valores relativos aos coeficientes de $\mathbf{x^2}$.

Fonte: Caderno do Aluno – Matemática – 1ª série do Ensino Médio - Volume 1, p.84
Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, Edição 2014-2017.

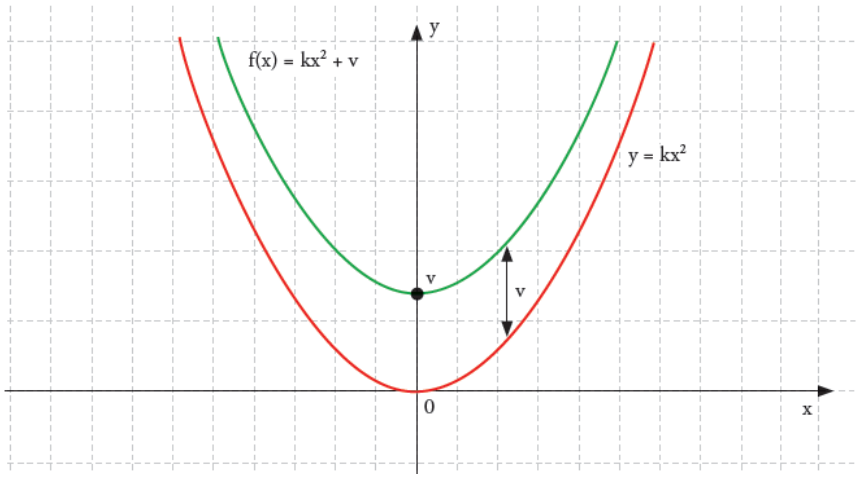
Os deslocamentos dos gráficos das funções polinomiais de segundo grau também são abordados, a Figura 5 apresenta como é trabalhado o deslocamento vertical.

Figura 5 - A parábola na 1ª série do Ensino Médio (B)

Deslocamentos verticais: a função $f(x) = ax^2 + v$

Quando a proporcionalidade entre **y** e $\mathbf{x^2}$ ocorre a partir de um valor inicial **v**, então $y - v = kx^2$, ou seja, $y = kx^2 + v$.

Nesses casos, o gráfico de $f(x) = kx^2 + v$ continua a ser uma parábola, mas seus pontos são deslocados, em relação ao conhecido gráfico de $y = kx^2$, na direção do eixo **y** de um valor **v**: para cima, se $v > 0$, ou para baixo, se $v < 0$.



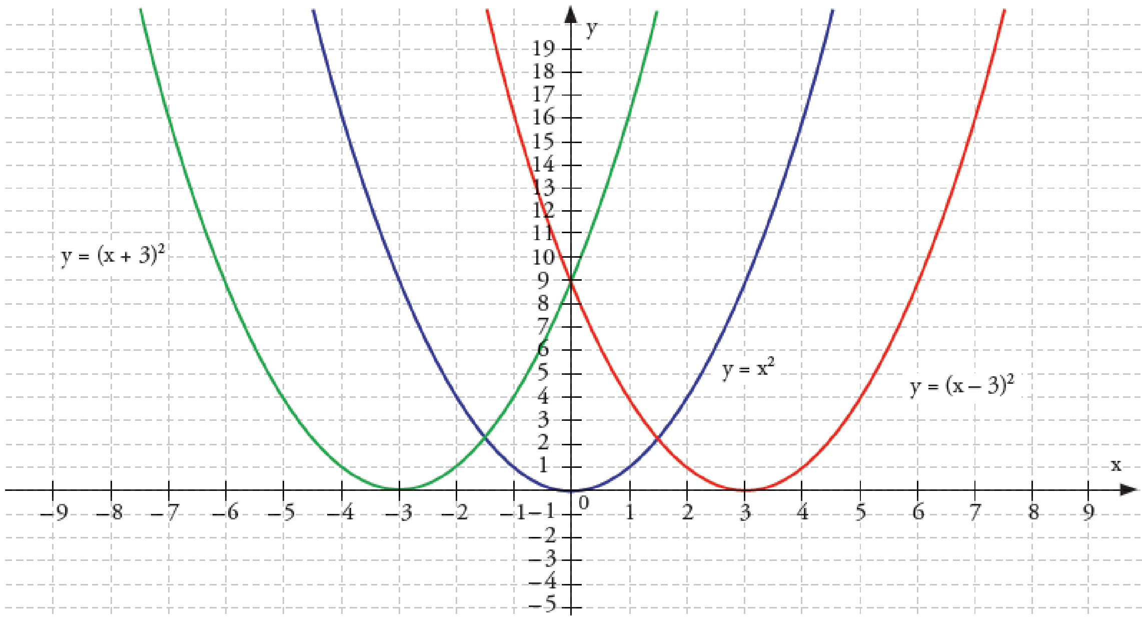
Fonte: Caderno do Aluno – Matemática – 1ª série do Ensino Médio - Volume 1, p.86
Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, Edição 2014-2017.

A Figura 6 apresenta a abordagem realizada para o deslocamento horizontal nesta Situação de Aprendizagem.

Figura 6 - A parábola na 1ª série do Ensino Médio (C)

Deslocamentos horizontais: a função $f(x) = a(x - h)^2$

Outra proporcionalidade direta entre uma grandeza e o quadrado de outra grandeza ocorre quando temos **y** diretamente proporcional não a $\mathbf{x^2}$, mas a $(x - h)^2$. Neste caso, temos $y = k(x - h)^2$ e o gráfico correspondente é análogo ao de $y = kx^2$, deslocado horizontalmente de **h** unidades, para a direita, se $h > 0$, ou para a esquerda, se $h < 0$.



Fonte: Caderno do Aluno – Matemática – 1ª série do Ensino Médio - Volume 1, p.88
Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, Edição 2014-2017

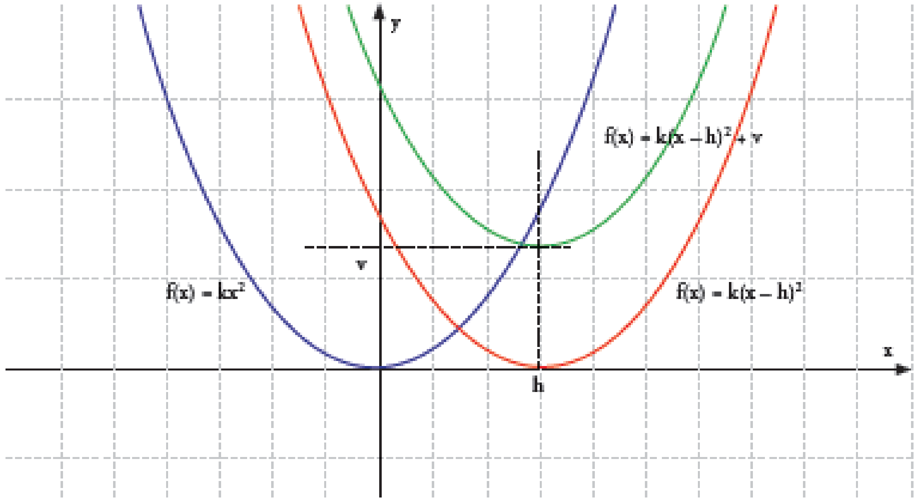
O Caderno do Aluno apresenta nesta situação de aprendizagem, para o deslocamento horizontal e para o vertical dos gráficos das funções polinomiais do segundo grau, uma pequena explanação do conteúdo programático seguida de situação concreta, para sua contextualização, e propõe aos alunos a construção de gráficos de modo que os mesmos possam aplicar o conteúdo trabalhado.

Para abordar os deslocamentos verticais e horizontais da função polinomial a Situação de Aprendizagem 7 do Caderno do Aluno de Matemática para a 1ª série do Ensino Médio utiliza as coordenadas do vértice de cada parábola. Com o subtítulo: *Deslocamentos verticais e/ou horizontais: a função $f(x) = a\,(x - h)^2 + v$*, a situação de aprendizagem propõem que as funções polinomiais de segundo grau do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ sejam escritas no formato $f(x) = a\,(x - h)^2 + v$, onde h e v são as coordenadas cartesianas do vértice da função polinomial do segundo grau representada graficamente. A figura a seguir apresenta a página 90 deste Caderno do Aluno com as justificativas e exemplos apresentados:

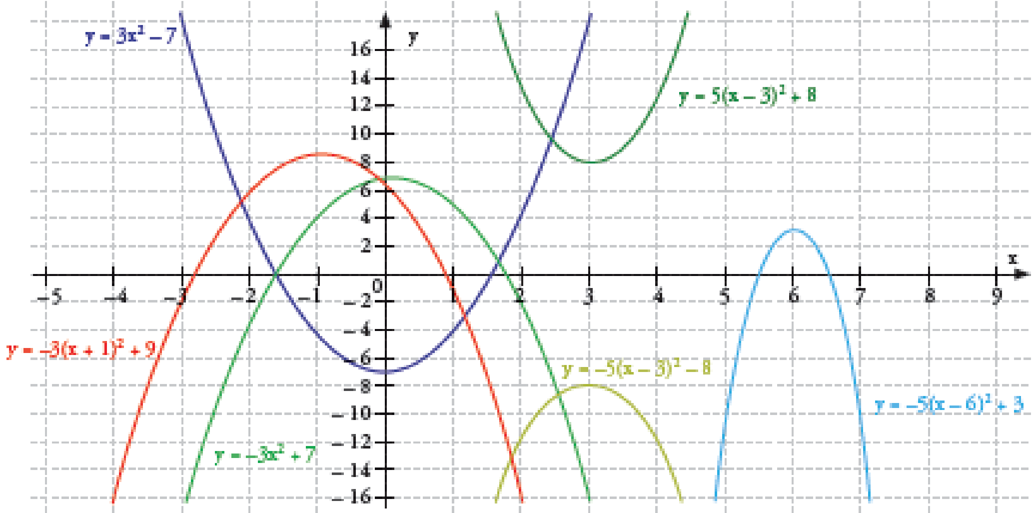
Figura 7 - A parábola na 1ª série do Ensino Médio (D)

Deslocamentos verticais e/ou horizontais: a função $f(x) = a(x - h)^2 + v$

No caso mais geral possível, podemos ter a variação nos valores de uma grandeza **y**, a partir de certo valor **v**, diretamente proporcional ao quadrado da variação nos valores de **x**, a partir de certo valor **h**: em outras palavras, $y - v = k(x - h)^2$. Uma função deste tipo é tal que $f(x) = k(x - h)^2 + v$, e tem como gráfico também uma parábola, deslocada horizontalmente de um valor **h** em relação à parábola $y = kx^2$ e deslocada verticalmente de um valor **v** em relação à parábola $y = k(x - h)^2$. O vértice da parábola é o ponto de coordenadas (h,v). O gráfico a seguir traduz o que se afirmou anteriormente.



Observe, a seguir, alguns exemplos de gráficos desse tipo de função:



Fonte: Caderno do Aluno – Matemática – 1ª série do Ensino Médio - Volume 1, p.90
Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, Edição 2014-2017

A *Situação de Aprendizagem 8* finaliza o Volume 1 do Caderno do Aluno de Matemática para a 1ª série do Ensino Médio e o estudo das funções polinomiais de 2º grau nesta série, aborda problemas envolvendo estas funções em múltiplos contextos, incluindo problemas de máximos e mínimos.

O estudo das cônicas está previsto no currículo escolar da 3ª série do Ensino Médio, a *Situação de Aprendizagem 4* do Volume 1 do Caderno do Aluno de Matemática contempla este conteúdo programático, apresentando na seção inicial de leitura e análise de texto os quatro tipos de curvas que podem ser obtidos por seções planas em uma superfície cônica utilizando para isto a figura de cone reto duplo, conforme Figura 23 reproduzida na página 53 deste trabalho. As características, propriedades e algumas aplicações da parábola estão presentes na seção leitura e análise de texto especificamente dedicada a esta cônica, conforme se observa nas figuras a seguir.

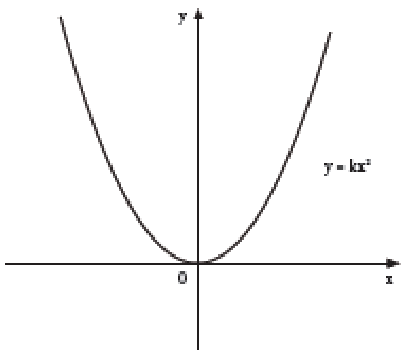
Figura 8 - A parábola na 3ª série do Ensino Médio (A)

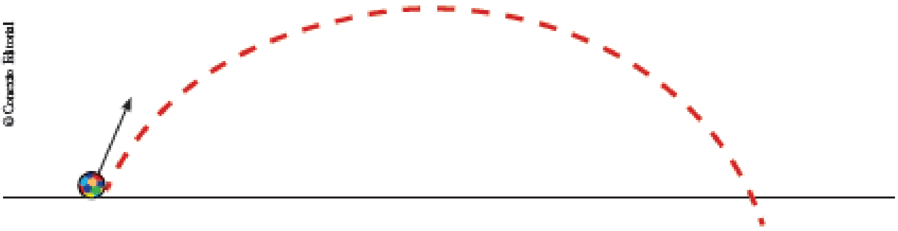
Leitura e análise de texto

Parábola

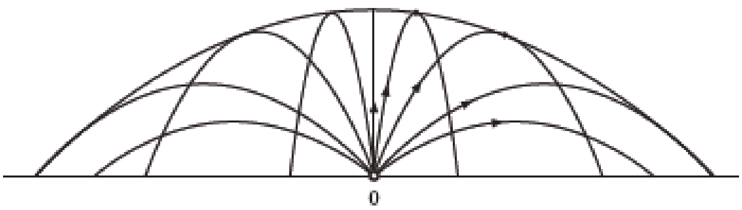
Em geral, quando representamos graficamente pares (x; y) de grandezas tais que **y** é diretamente proporcional ao quadrado de **x** ($y = kx^2$, **k** constante e $k \neq 0$), a curva correspondente no plano cartesiano é uma parábola.

É o que ocorre, por exemplo, quando uma pedra é abandonada e registramos a relação entre a distância percorrida verticalmente e o tempo de queda livre. Também é uma parábola a trajetória de todos os projéteis lançados obliquamente em relação à superfície da Terra, desconsiderados os efeitos do ar.





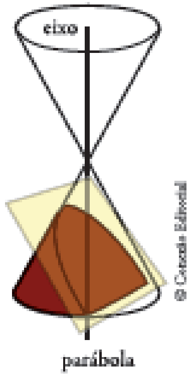
Além disso, quando, de um ponto fixado no solo, lançamos projéteis sempre com a mesma velocidade inicial v_0, em todas as direções possíveis, em um plano vertical dado, o contorno da região determinada pelos pontos que podem ser atingidos pelos projéteis é também uma parábola, chamada parábola de segurança.



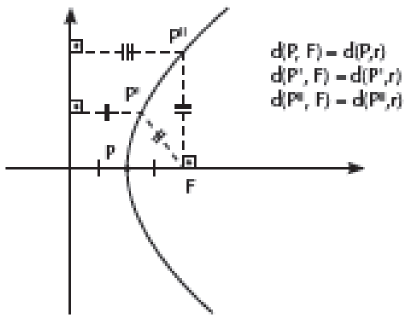
Fonte: Caderno do Aluno – Matemática – 3ª série do Ensino Médio - Volume 1, p.48
Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, Edição 2014-2017.

Figura 9 - A parábola na 3ª série do Ensino Médio (B)

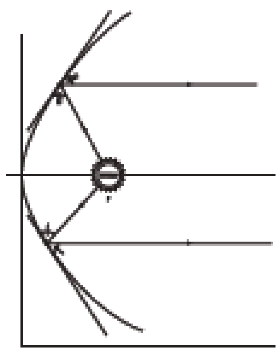
Quando seccionamos um cone circular reto por um plano que forma com a base um ângulo exatamente igual ao que uma geratriz do cone forma com a base, obtemos também uma parábola.



A parábola tem certas propriedades características que podem ser utilizadas para defini-la. Uma delas é a existência de um ponto **F**, fixado, e de uma reta **r**, fixada, tais que a distância de cada ponto **P** da parábola até **F** é igual à distância de **P** até **r**. **F** é o foco da parábola e **r** é sua diretriz.



Uma propriedade interessante das parábolas é a seguinte: sendo **P** um ponto qualquer da parábola, a reta que passa pelo foco **F** e por **P** forma com a tangente à parábola em **P** um ângulo igual ao formado pela tangente com a reta paralela ao eixo da parábola passando por **P** (veja a figura).



Fonte: Caderno do Aluno – Matemática – 3ª série do Ensino Médio - Volume 1, p.49
Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, Edição 2014-2017.

Contudo esta Situação de Aprendizagem contempla apenas um exercício para determinação do foco e da diretriz das parábolas de equações com coeficientes literais, Figura 19 constante na página 48 deste trabalho.

1.5 A matemática a serviço da sociedade

No desenvolvimento do currículo escolar aproximar a teoria da prática é, por muitos educadores, situação ideal para a ocorrência da aprendizagem. Portanto abordar o conteúdo escolar através de suas aplicações e utilidade no cotidiano, proporcionar a contextualização do currículo escolar são práticas pedagogicamente aceitas, que serão adotadas neste trabalho.

Justificar a inclusão de conteúdos no programa de cada disciplina, e desta no currículo escolar, são sempre objetos de estudo. Ávila (2010) argumenta que no caso da matemática a justificativa para o seu estudo vai além dos chavões geralmente utilizados, como desenvolver o raciocínio lógico e auxiliar o desenvolvimento de processos com a finalidade de quantificar aspectos da realidade. A seguir esta temática será abordada.

1.5.1 Mas afinal para que serve a matemática?

Esta pergunta sempre tem inquietado diversos matemáticos. Pois o adolescente, e talvez a sociedade atual, é imediatista, deseja ver a aplicação prática de todos os conteúdos que esteja estudando.

Ávila (2010) pontua em seu livro, Várias Faces da Matemática, no capítulo 1- Por que a Matemática?, que as primeiras justificativas mencionadas são: “A matemática é necessária em atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos da realidade. A Matemática é importante porque desenvolve o raciocínio lógico” (p.3). O autor, contudo, afirma que embora essas razões sejam legítimas, não as consideram as mais importantes. Justifica que para o nosso cotidiano necessitamos de processos matemáticos simples que podem ser resolvidos com calculadoras de bolso, que não demandariam tantos anos de estudo.

Para ele a afirmação que a matemática desenvolve o raciocínio lógico é insuficiente, dizendo que o pensamento matemático ultrapassa o raciocínio dedutivo, pois “exclui o que há de mais rico nos processos de invenção e descoberta” (ÁVILA, 2010, p.4) e “em seus aspectos mais criativos, a Matemática depende da intuição e da imaginação, às vezes até mais que da dedução” (ÁVILA, 2010, p.4).

Em seu livro Ávila (2010) apresenta diversas intuições e conjecturas famosas, afirma que “ideias são coisas que nos vêm por intuição” (p.5), relata ser muito comum um pesquisador comentar sobre algum resultado novo, sem que o mesmo esteja comprovado. O “Último Teorema de Fermat”, por exemplo, no qual afirma a impossibilidade de se obter números inteiros positivos a, b, c e n, com $n > 2$, de modo que $a^n + b^n = c^n$, perdurou por cerca de três séculos e meio desafiando matemáticos até ser demonstrado pelo matemático britânico Andrew Wiles em 1995.

De modo geral o ensino da Matemática é justificado por proporcionar ao aluno oportunidades para o desenvolvimento e exercício das habilidades intelectuais, contudo Ávila (2010) afirma que "a razão mais importante para justificar o ensino da matemática é o relevante papel que esta desempenha na construção de todo o edifício do conhecimento humano" (p.6), pois desde a mais remota civilização o homem procura compreender o mundo que habita, buscando sua forma, as características de seus movimentos, o efeito da gravidade; entender os movimentos dos corpos celestes, as substâncias que compõem a matéria, a sua divisibilidade, do que ela é constituída.

E foram as ideias matemáticas que a partir do século IV a.C. proporcionaram o entendimento destas questões e de outras que foram surgindo conforme o homem foi fazendo novas descobertas, e está presente em praticamente todas as áreas do conhecimento, até nas concepções filosóficas do homem, sobre as quais possui influência significativa perante a sua existência e do lugar em que vive.

Ávila (2010) justifica a importância do ensino da Matemática de modo mais amplo e abrangente enunciando:

> "A Matemática deve ser ensinada nas escolas porque é parte substancial de todo o patrimônio cognitivo da Humanidade. Se o currículo escolar deve levar a uma formação humanística, então o ensino da Matemática é indispensável para que essa formação seja completa. O ensino da Matemática se justifica ainda pelos elementos enriquecedores do pensamento matemático na formação intelectual do aluno, seja pela exatidão do pensamento demonstrativo que ela exibe, seja pelo exercício criativo da intuição, da imaginação e dos raciocínios por indução e analogia. O ensino da Matemática é também importante para dotar o aluno do instrumental necessário no estudo de outras ciências e capacitá-lo no trato das atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos da realidade" (ÁVILA, 2010, p.8)

Contudo em sala de aula existe a dificuldade de responder aos alunos de modo satisfatório quando estes indagam onde aplicarão o que estão aprendendo. É certo que a curiosidade se justifica e respostas claras que satisfaçam a curiosidade do aluno e estimulem a sua mente podem transformar o desinteresse do educando pela Matemática em participação ativa no processo de aprendizagem (Ávila, 2010).

O ideal é manter os alunos motivados, justificando a importância de todos os conteúdos a abordar, identificando sua aplicação na sociedade e em nosso cotidiano. O mestre tem a missão de provocar seus alunos, de modo a despertá-los para ideias matemáticas que buscam a compreensão do mundo no qual estão inseridos.

Há muitos questionamentos ainda a ser respondidos. E vivenciar os que já foram respondidos é um dos caminhos a ser trilhado.

1.5.2 A parábola e o problema deliano

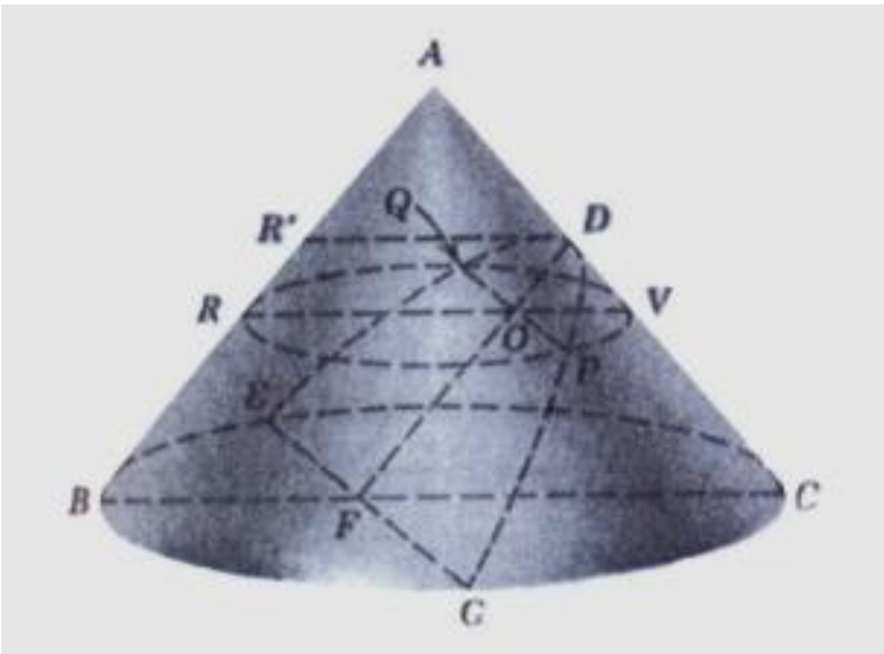
Boyer (1991) relata que na busca de curvas para a solução do problema da duplicação do cubo (problema deliano) Menaecnus (que viveu por volta de 360 a.C.) havia esbarrado nas cônicas com propriedades que possibilitavam a sua resolução.

De acordo com a história a peste matou um quarto da população de Atenas no ano 430 a.C. Uma delegação procurou o oráculo de Apolo em Delos buscando orientação no combate a peste, e receberam como resposta que o altar de Apolo, cúbico, deveria ser duplicado. Diz a lenda que os atenienses duplicaram as dimensões do altar, contudo o volume do novo cubo obtido era oito vezes maior que o original. Deste modo surgiu o problema deliano que consistia da construção de um cubo com o dobro do volume original utilizando apenas régua e compasso.

O relato de Boyer (1991) das ideias matemáticas de Menaecnus para solucionar o problema é transcrito a seguir:

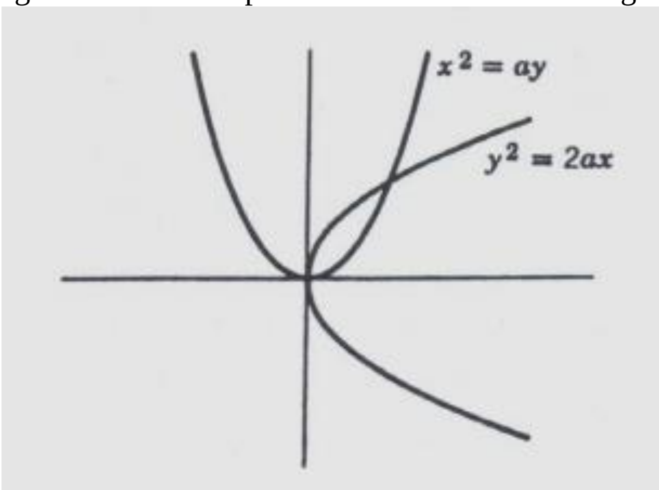
> "Se, então, quisermos duplicar um cubo de aresta *a*, determinamos sobre um cone retângulo duas parábolas, uma com latus rectum *a*, com latus rectum 2*a*. Se agora as colocarmos com vértices na origem e eixos segundos o dos x e o dos y respectivamente, o ponto de intersecção das duas curvas terá coordenadas (x,y) satisfazendo a proporção continuada $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$, isto é, $x = a\sqrt[3]{2}, y = a\sqrt[3]{4}$. A abscissa x é, pois a aresta do cubo procurado." (BOYER, 2010, p. 65-66)

Figura 10 - Parábola com latus rectum qualquer



Fonte: BOYER, 2010, p.67

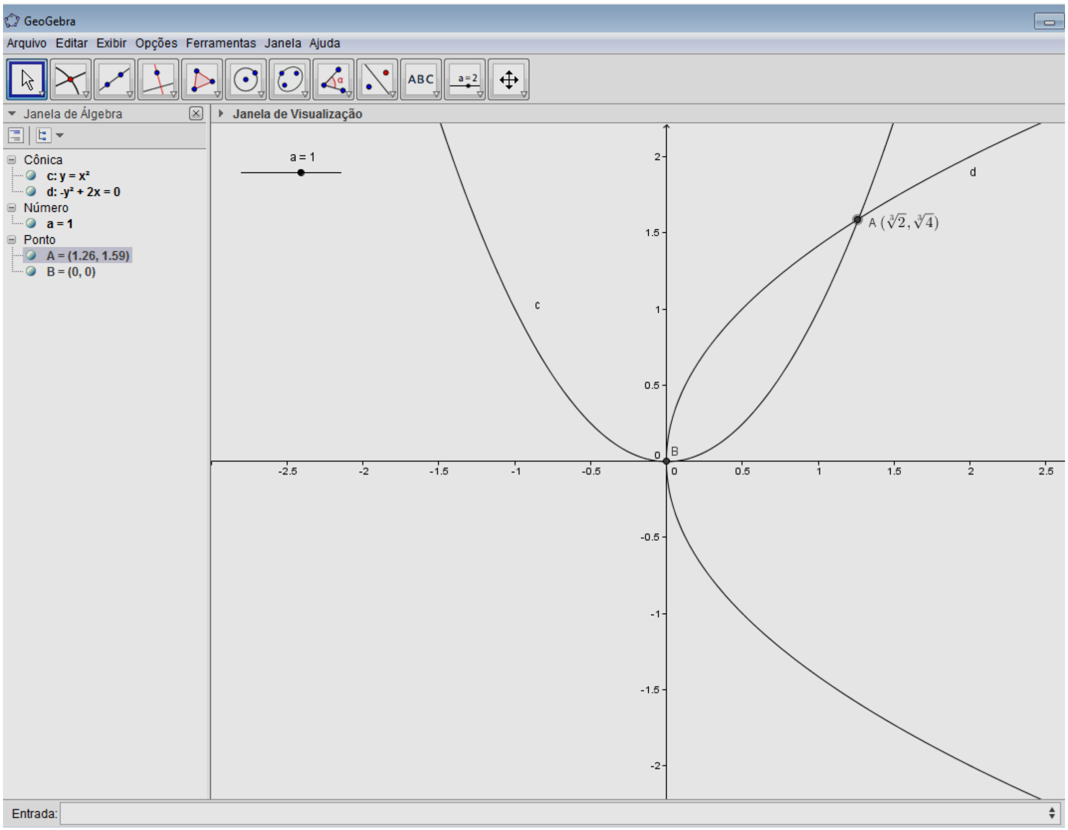
Figura11 – As duas parábolas com vértices na origem



Fonte: BOYER, 2010, p. 67

Para melhor entendimento, tome um cubo de aresta de medida a = 1. Para encontrar o cubo que possui o dobro do volume do inicial, e pelo acima exposto, este cubo terá como aresta o valor da abscissa x, neste caso a nova aresta medirá $1.\sqrt[3]{2}$. Pela proporção continuada obtêm-se duas parábolas $y = \frac{x^2}{a}$ e $x = \frac{y^2}{2a}$. Digitando na caixa de entrada do programa computacional GeoGebra essas equações, este rapidamente encontrará a representação da solução desejada como se verifica na Figura 12.

Figura 12 – Solução do problema deliano com o GeoGebra



Fonte: Arquivo da autora

Note que a solução do problema deliano, utilizando os recursos matemáticos e computacionais de hoje, amparados pelas ideias matemáticas construídas pela humanidade não é um “bicho de sete cabeças”. Contudo não se pode deixar de mencionar que para a solução deste problema os matemáticos da época não possuíam estes recursos, não havia o conhecimento das coordenadas cartesianas, a geometria analítica não existia e muito menos computadores. Para eles as deduções deveriam ser realizadas utilizando-se apenas régua (sem graduação) e compasso, sendo que apenas em 1837, Pierre Laurent Wantzel demonstrou que este problema não poderia ser resolvido utilizando apenas esses recursos.

2. Matemática e a aprendizagem

O capítulo anterior apresenta uma pequena reflexão sobre a importância da matemática para a humanidade, concluindo que os alunos ao conhecerem as aplicações do conteúdo programático que estão estudando na sociedade ou conseguirem associá-los às situações do cotidiano tornam-se mais receptivos, favorecendo a sua aprendizagem. Relata também que as curvas associadas às cônicas foram observadas, no processo da busca de solução para o problema deliano que desafiou os pensadores da época.

Pretende-se, neste capítulo, apresentar algumas ideias de pesquisadores e educadores para a ocorrência da aprendizagem do aluno.

2.1 A aprendizagem do aluno

Paulo Freire (1983) acredita na prática problematizadora, segundo ele não existe conhecimento quando "os educandos não são chamados a conhecer, mas a memorizar o conteúdo narrado pelo educador" (p.79); avesso à concepção "bancária", para a qual, segundo o autor, a "educação é o ato de depositar, de transferir, de transmitir valores e conhecimentos" (p.67), critica esta visão por não possibilitar o desvelamento do mundo e pontua que a educação deva ser libertadora, para ele:

> "A educação que se impõe aos que verdadeiramente se comprometem com a libertação não pode fundar-se numa compreensão dos homens como seres "vazios" a quem o mundo "encha" de conteúdos; não pode basear-se numa consciência especializada, mecanicista, compartimentada, mas nos homens como "corpos conscientes" e na consciência como consciência intencionada ao mundo. Não pode ser a do depósito de conteúdos, mas a problematização dos homens em suas relações com o mundo."(FREIRE, 1983, p.77).

Freire (1983) apresenta a educação libertadora, problematizadora, não como um ato de narrar, transferir ou transmitir "conhecimentos" e valores aos educandos, mas um ato cognoscente, de percepção de sua situação em relação ao mundo que se encontra, onde supera a condição opressor/oprimido (educador/educando) mediatizados pelo diálogo. Para ele, o ato de problematizar o aluno como seres no mundo e com o mundo faz que se sintam desafiados e quanto mais desafiados mais impelidos a responder o desafio.

Moreira (1999) citando Piaget diz que "o desenvolvimento mental da criança pode ser descrito tomando como referência os esquemas de assimilação que ela utiliza" (p.102) e a aprendizagem ocorre quando existe a acomodação. A mente, estrutura cognitiva, procura manter-se em equilíbrio, e quando este é rompido por experiências ainda não assimiladas ela procura se reestruturar (acomodação), construir novos esquemas de assimilação para conseguir novo reequilíbrio, o que Piaget denomina de *equilibração majorante.* Logo o mecanismo de aprender "é a capacidade de reestruturar-se mentalmente buscando um novo equilíbrio... O ensino deve, portanto, ativar este mecanismo.” (MOREIRA, 1999, p.103)

São quatro os períodos gerais de desenvolvimento cognitivo proposto por Piaget: sensório-motor; pré-operacional, operacional-concreto, operacional formal. Relaciona-os com a idade cronológica do indivíduo, contudo a faixa etária pode ser variável, podendo um indivíduo apresentar características de um período anterior, porém a sucessão desses períodos não possui variação. “O importante é a sucessão de períodos pelos quais o indivíduo passa até chegar ao pensamento formal, não as idades cronológicas em que isso acontece.” (MOREIRA, 1999, p.99)

Moreira (1999) pontua que a escola necessita “compatibilizar o ensino com o nível de desenvolvimento mental” (p.103) do aluno e aponta como erro comum no ensino médio e os primeiros anos do ensino superior são “ensinar em um nível puramente formal (*supondo,* portanto, que esse nível tenha já sido plenamente atingido) para alunos que estão ainda, em muitas áreas, em uma fase de raciocínio operacional-concreto”(p.103).

Quanto ao ensino, o autor pontua três aspectos: os esquemas de assimilação do aluno, aqueles que se quer ensinar, e os do professor, e apresenta o conceito de ensino reversível citando Kubli (1979):

> “Em um diálogo reversível, a distribuição dos esquemas de assimilação deve ser tão equilibrada quanto possível. (Em um sentido ideal, mas não exequível, o ensino passaria por uma sucessão de estados de equilíbrio de comunicação, tal como em um processo termodinâmico reversível)... isto significa que o professor deveria relacionar, através de argumentação apropriada, os esquemas de assimilação espontâneos do aluno com os esquemas de assimilação que ele quer ensinar, com o mínimo de desequilíbrio. Quanto mais a argumentação do professor se relacionar com os esquemas de assimilação do aluno, mais reversível se torna o diálogo e mais eficiente será o ensino...” (KUBLI, 1979 apud MOREIRA, 2009, p. 103-104).

A primeira vista tem-se a impressão que o ensino reversível proposto por Kubli contradiz o proposto por Piaget, mas na realidade o que Kubli propõe é que o desequilíbrio não seja demasiado e possibilite a equilibração majorante, “uma escolha cuidadosa dos esquemas de assimilação é essencial para não tornar o diálogo de ensino indevidamente desequilibrado” (MOREIRA, 1999, p.104). Não se trata de eliminar o desequilíbrio, mas estes devem levar à equilibração majorante.

Uma implicação da teoria de Piaget, citada por Moreira (1999), para o ensino é a de oportunizar aos alunos atividades práticas associando-as às demonstrações. Para Kubli (1979) citado por Moreira (1999) é ilusão acreditar que estas, mesmo realizadas pelos alunos possuem o poder de sozinhas, produzir conhecimento, o que ocorrerá quando integradas à argumentação do professor.

A seguir são transcritas as posições de Piaget relatadas por Moreira:

> "... A primeira dessas condições é naturalmente o recurso aos métodos ativos, conferindo-se especial relevo à pesquisa espontânea da criança ou do adolescente e exigindo-se que toda a verdade a ser adquirida seja reinventada pelo aluno, ou pelo menos, reconstruída e não simplesmente transmitida... Mas é evidente que o educador continua indispensável para criar as situações e armar os dispositivos iniciais capazes de suscitar problemas úteis à criança, e para organizar, em seguida, contraexemplos que levem à reflexão e obriguem ao controle das soluções demasiado apressadas: o que se deseja é que o professor deixe de ser apenas um conferencista e que estimule a pesquisa e o esforço, ao invés de se contentar com a transmissão de soluções já prontas." (PIAGET, 1977 apud MOREIRA, 1999, p. 105).

Ao insucesso escolar, Piaget, citado por Moreira (1999), pontua que a sua ocorrência em um ou outro tópico pode ocorrer pela passagem demasiadamente rápida da estrutura qualitativa dos problemas para a quantitativa que podem provocar um desequilíbrio tão grande e não leve à equilibração majorante, e consequentemente a não aprendizagem.

2.2 Investigações e Práticas de Modelagem em Matemática

No dicionário online da língua portuguesa, investigar (verbo transitivo direto) é seguir os vestígios, as pistas de; fazer diligências para descobrir (algo); inquirir, indagar; procurar metódica e conscientemente descobrir (algo), através de exame e observação minuciosos; pesquisar.[7]

A seguir as investigações e as práticas de modelagem são apresentadas como recursos pedagógicos para o desenvolvimento de competências e habilidades no âmbito da Educação Matemática.

2.2.1 As Investigações Matemáticas

Em contexto de ensino e aprendizagem, investigar não significa trabalhar problemas difíceis, complexos, "significa, tão-só, que formulamos questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p.9). A princípio as questões podem parecer confusas, mas elas tendem a favorecer a organização das ideias, clareando-as e facilitando o seu estudo.

---

[7] Disponível em: <https://www.google.com.br/?gfe_rd=cr&ei=x6qEVf2vA5Cq8weRuIGQBg&gws_rd=ssl#q=investigar)>. Acesso: 10 mai. 2015

> "Investigar em Matemática assume características muito próprias, conduzindo rapidamente à formulação de conjecturas que se procuram testar e provar, se for o caso. As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura-teste-demonstração." (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p.10)

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) relatam que o matemático Poincaré no início do século XX debruçou-se num processo de investigação matemática para tentar demonstrar a impossibilidade da existência de funções com determinadas características, contudo ao final descobriu que elas existiam denominando-as de "funções fuchsianas", Poincaré pontuou que a sua investigação foi composta de três fases: compilação de dados e experimentação, iluminação súbita, e sistematização e verificação dos resultados. Não se tem aqui a intenção de abordar as funções estudadas por ele, contudo do relato de suas investigações citado por Ponte (2003) o que mais chamou a atenção foi que "o momento chave dessa descoberta ocorreu... quando procurava adormecer – sugerindo que o inconsciente desempenha papel de grande relevo no trabalho criativo dos matemáticos" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p.14,15).

Poincaré, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), questiona como ocorre a atividade criativa inconsciente, "que tem de ser um sentido de apreciação estética da beleza das relações matemáticas" (p.15).

O quadro a seguir apresenta os quatro momentos principais para a realização de uma investigação matemática segundo Ponte, Brocardo e Oliveira:

Quadro 3 – Momentos na realização de uma investigação

Exploração e formulação de questões	▪ Reconhecer uma situação problemática ▪ Explorar a situação problemática ▪ Formular questões
Conjecturas	▪ Organizar dados ▪ Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	▪ Realizar testes ▪ Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	▪ Justificar uma conjectura ▪ Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p.21

O processo de criação matemática nem sempre segue de modo organizado, de forma lógica e dedutiva, como usualmente esta ciência é vista. George Pólya, citado por Ponte (2003) pontua sobre as duas faces que a Matemática possui: “é a ciência rigorosa de Euclides, mas é também algo mais ... A Matemática em construção aparece como uma ciência experimental, indutiva. Ambos os aspectos são tão antigos quanto a própria matemática” (PÓLYA, 1975 apud PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p.15-16)

As atividades matemáticas podem ser constituídas por investigações realizadas pelos alunos, desencadear-se na resolução de problemas ou exercícios propostos (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2003).

Ponte, Brocardo e Oliveira citando Pólya apresenta a seguinte distinção entre exercício e problema:

> “Um problema é uma questão para a qual o aluno não dispõe de um método que permita a sua resolução imediata, enquanto que um exercício é uma questão que pode ser resolvida usando um método já conhecido. É claro que pode haver exercícios mais difíceis, requerendo a aplicação mais ou menos engenhosa de vários métodos e também existem problemas mais simples ao lado de outros mais complicados. Em vez de uma dicotomia, temos um *continuum* entre exercício e problema, e o seu interesse educativo depende de muitos fatores para além do seu grau de dificuldade.” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p.22, 23).

No desenvolvimento do currículo escolar é fundamental que o aluno envolva-se para que ocorra a aprendizagem, isto é, quando o aluno “mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p.23).

É o que ocorre quando da investigação nas atividades matemáticas, pois estas requerem a participação dos alunos na formulação das questões a estudar, nas conjecturas, realização de testes, apresentação de resultados e na argumentação e discussão com sua turma e com o professor (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2003).

As investigações como tarefas matemáticas citadas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) nos apresentam uma metodologia de ensino que propõem o envolvimento dos alunos no seu desenvolvimento através de problemas ou exercícios, a serem resolvidos num processo de investigação, no qual, o professor apresenta-se como mediador não como “conferencista” que é capaz de “encher” de conteúdos os seus alunos, neste caso, o educador provoca “desequilíbrios” que levem a equilibração majorante e consequentemente a aprendizagem.

É importante citar que o problema e/ou exercício propostos precisam estar inseridos em um contexto que façam parte do “mundo” que eles estão inseridos justificando sua aplicação e importância para a sociedade.

O grande desafio "é articular esses diferentes tipos de tarefa de modo a constituir um currículo interessante e equilibrado, capaz de promover o desenvolvimento matemático dos alunos com diferentes níveis de desempenho" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, p.24).

2.2.2 Modelagem Matemática

Relacionar o ensino da matemática às suas aplicações no cotidiano, e com o campo das ciências foi o argumento do discurso do presidente da *American Mathematical Society*, o matemático E. H. Moore, em 1902. Contudo apenas na segunda metade do século XX, na década de 60, é que "renascem nas movimentações de configuração do próprio campo científico da Educação Matemática, como uma reação às limitações da abordagem da matemática moderna" (ALMEIDA, ARAÚJO, BISOGNIN, 2011, p.13).

Em 1967, realizou-se na Holanda, o colóquio: *Como ensinar matemática de modo que seja útil?* A partir da década de 70 intensificaram-se a discussão do uso de modelagem e aplicações da matemática no ensino, que chegaram ao Brasil ao final dos anos 70 e início dos anos 80, e tiveram como precursores os Professores Ubiratan D'Ambrósio (UNICAMP), Aristides Barreto (PUC-RJ) e Rodney Bassaenzi (UNICAMP), seus adeptos no Brasil foram aumentando sendo instituído pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) um grupo de trabalho sobre a Modelagem da Matemática na perspectiva da Educação Matemática, o GT10 e um comitê de Ensino da Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional.

Uma atividade Modelagem Matemática, para Almeida e Vertuan (2011):

> "...pode ser descrita de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final. Neste sentido, relações entre realidade (origem da situação inicial) e Matemática (área em que os conceitos e os procedimentos estão ancorados) servem de subsídio para que conhecimentos matemáticos e não matemáticos sejam acionados e/ou produzidos e integrados." (ALMEIDA; VERTUAN, 2011, p.21).

Os autores citam Lesh, Carmona, Hjalmarson (2006) para conceituar modelo matemático: "consiste em um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou de uma estrutura matemática, com a finalidade de descrever o comportamento de outro sistema ou permitir a realização de previsões sobre este outro" (ALMEIDA; VERTUAN, 2011, p.21)

Deste modo a Modelagem Matemática apresenta-se como uma alternativa pedagógica para abordar um problema (que não necessita ser essencialmente matemático), com a realização de investigações, como: coleta e análise de informações, identificação de variáreis, busca de hipóteses, tem o problema como ponto de partida, e como ponto de chegada a sua resolução por procedimentos adequados que possibilitem a aceitabilidade ou validação da representação matemática (modelo) obtida.

Almeida e Ferruzzi (2009) citados por Almeida e Vertuan (2011) descrevem os procedimentos para o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática como:

> "[...] um conjunto de ações como a busca de informações, a identificação e seleção de variáveis, a elaboração de hipóteses, a simplificação, a obtenção de uma representação matemática (modelo matemático), a resolução de problema por meio de procedimentos adequados e a análise da solução implica numa validação, identificando a sua aceitabilidade ou não" (ALMEIDA; FERRUZZI, 2009 apud ALMEIDA; VERTUAN, 2011, p. 22).

Sobre a Modelagem Matemática e o currículo escolar destacam-se as seguintes ideias:

Almeida e Vertuan (2011) apresentam quatro caracterizações sugeridas por Blum e Niss (1991) das atividades de Modelagem Matemática no currículo escolar tanto para a Educação Básica como para o Ensino Superior:

a) A alternativa da separação: onde são desenvolvidas como atividades extracurriculares, não alterando o currículo regular já instituído;

b) A alternativa de combinação: durante as aulas regulares a Modelagem Matemática auxilia na introdução de conceitos, ou para ativar novos conceitos na realização de atividades de modelagem e aplicação;

c) A alternativa de integração curricular: neste caso os problemas seriam o ponto de partida, e a matemática seria introduzida a partir da necessidade em resolvê-los. Segundo os autores, nesta alternativa os problemas devem conduzir a conceitos matemáticos "relevantes" e "tratáveis" pertinentes ao currículo escolar daquela série;

d) A alternativa interdisciplinar integrada: para caracterização desta alternativa busca-se uma completa integração entre as atividades extramatemáticas e matemática numa estrutura curricular em que a matemática não atua como disciplina isolada, e os conteúdos de diferentes disciplinas curriculares são de modo integrado desenvolvidos nas aulas.

Defendendo a Modelagem Matemática no currículo escolar Almeida e Vertuam (2011) pontuam:

> Ao fazer uso da matemática, considerando tanto o uso de algoritmos quanto conceitos matemáticos em si, os alunos podem ou aplicar conhecimentos já construídos durante as aulas, ou construir novos conhecimentos. Em muitas situações, ao se envolver com atividades de modelagem, os alunos deparam-se com um obstáculo para o qual não possuem, provisoriamente, conhecimentos suficientes para superá-lo, emergindo assim a necessidade de construir tal conhecimento por meio desta atividade. Logo, em atividades de modelagem, os alunos tanto podem ressignificar conceitos já construídos quanto construir outros diante da necessidade de seu uso. (ALMEIDA; VERTUAM, 2011, p. 25-26).

Os autores, a partir de Almeida e Dias (2004), conjecturam que o contato dos alunos com a modelagem deva ocorrer de forma gradativa e apontam três momentos diferentes:

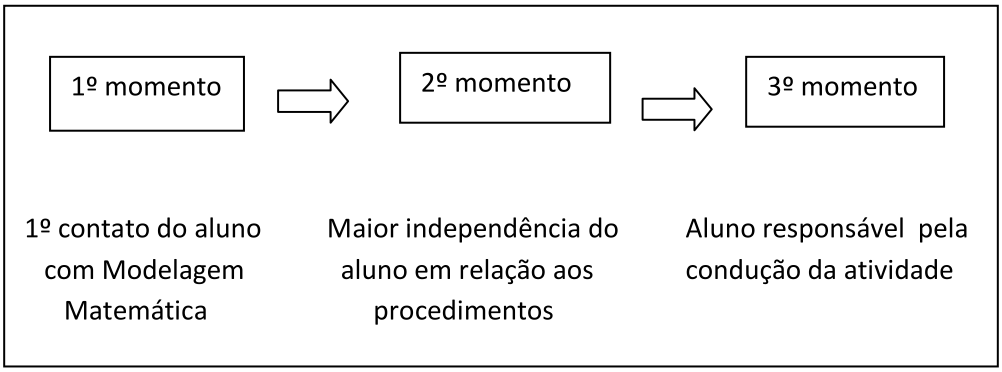
a) No primeiro momento, os alunos são colocados em contato com a situação problema, os procedimentos utilizados, como: investigação, dedução, análise, definição de variáveis e hipóteses, transição para a linguagem matemática, obtenção e validação do modelo, são acompanhados, orientados e avalizados pelo professor;

b) O segundo momento, é realizado a partir de uma atividade proposta pelo professor, que divididos em grupos desenvolvem os procedimentos como no primeiro momento, contudo neste momento os alunos possuem maior independência;

c) No terceiro momento, os alunos distribuídos em grupos são responsáveis pela condução de uma atividade de modelagem, desde a identificação do problema até a sua solução.

O quadro abaixo reproduz o que Almeida e Vertuam utilizam para sintetizar estes momentos:

Quadro 4 – Diferentes momentos da Modelagem na sala de aula



Fonte: ALMEIDA; VERTUAM, 2011, p. 28

Refletir sobre os processos de aprendizagem e algumas tendências da Educação Matemática associados ao desenvolvimento do currículo no mestrado profissional PROFMAT e a experiência docente culminaram no desenvolvimento de dois trabalhos distintos em escolas públicas.

O primeiro como docente de matemática na E. E. Padre Josué Silveira de Mattos, município de São João da Boa Vista, e outro como gestor da E. E. Padre Geraldo Lourenço, no município de Aguaí.

A seguir são apresentados os relatos dos trabalhos pedagógicos desenvolvidos nestas escolas.

3. Atividades desenvolvidas

A realização do mestrado profissional proporcionou diversos questionamentos quanto à função do educador na escola pública. Os índices de aprendizagem dos alunos obtidos na última década são assustadores. Alguns apontam o regime de progressão continuada como um dos principais motivos da má qualidade de ensino. Contudo a sua instituição na rede estadual de ensino provocou queda considerável na evasão escolar no Ensino Fundamental, em algumas escolas estaduais este índice tende a zero.

No ensino médio as taxas de evasão são bem maiores, a correção do fluxo escolar, no ano de 2013 na E. E. Padre Josué Silveira de Mattos foi 0,7194 e na E. E. Padre Geraldo Lourenço 0,8672, logo, 28% e 13% dos alunos do ensino médio das respectivas escolas deixaram de concluir satisfatoriamente a série que cursava naquele ano. Quanto à qualidade de ensino naquele ano, os indicadores de desempenho em matemática no Ensino Médio, nestas duas escolas são, respectivamente, 1,6077 e 1,9803, numa escala de 0 a 10.

O Índice de Desenvolvimento da Educação da Educação do Estado de São Paulo – IDESP, é obtido pelo produto da multiplicação do indicador de desempenho nas disciplinas língua portuguesa e matemática na última série/ano de cada segmento de ensino, Ensino Fundamental Ciclo I (do 2º ao 5º ano), Ensino Fundamental Ciclo II (do 6º ao 9º ano) e Ensino Médio (da 1ª à 3ª série), com valores compreendidos entre 0 e 10, pelo fator de correção do fluxo da escola, variando de 0 a 1, em cada segmento de ensino.

O quadro abaixo apresenta o IDESP do Ensino Fundamental Ciclo II e Ensino Médio ano letivo de 2013, das Escolas Estaduais Padre Josué Silveira de Mattos e Padre Geraldo Lourenço, dos municípios em que estão inseridas, da Diretoria de Ensino da Região de São João da Boa Vista e do Estado de São Paulo.

Quadro 5 – IDESP Ensino Médio ano letivo de 2013

IDESP	ENS. FUND. CICLO II	ENSINO MÉDIO
E.E. Pe. Geraldo Lourenço	2,75	2,16
Município de Aguaí	2,95	2,32
E.E. Pe. Josué Silveira de Mattos	1,78	1,34
Município S. João da Boa Vista	2,73	2,26
Diretoria Ens. Reg. S. J. Boa Vista	3,01	2,25
Estado de São Paulo	2,50	1,83

Fonte: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo[8]

[8] Disponível em: < http://idesp.edunet.sp.gov.br>. Acesso em: 02 mai. 2015.

O IDESP médio das escolas públicas do Estado de São Paulo não atinge a dois pontos no Ensino Médio, e na E. E. Padre Josué este índice é inferior ao obtido pelo Estado de São Paulo. Justifica-se que o problema é social, cultural e econômico, mas não se pode deixar como disse o mestre, Paulo Freire (1997), que o medo (a dificuldade) imobilize e impeça a ação.

As atividades a seguir apresentadas foram pensadas com a finalidade de melhorar este quadro. A reversão deste cenário implica inúmeras variáveis, contudo cada educador tem a missão de desempenhar suas funções buscando a formação de seus alunos, e o ideal é que ela ocorra de modo prazeroso, em que o aluno perceba-se como parte inclusa do processo. As fichas das atividades utilizadas no desenvolvimento do projeto encontram-se no apêndice dessa dissertação.

Houve a intenção de aguçar as percepções investigavas dos alunos, tomando cuidado para que os desequilíbrios provocados não fossem demasiados, provocando deste modo o equilíbrio majorante, e os problemas/atividades propostos apresentem situações de utilidade da matemática na sociedade e propiciassem num processo investigativo a busca de modelos matemáticos para a sua solução e a sua validação, e principalmente prazer em desenvolvê-los.

3.1 Atividades – E. E. Padre Josué Silveira de Mattos

As atividades a seguir foram desenvolvidas na 3ª série B da Escola Estadual Padre Josué Silveira de Mattos no ano letivo de 2014 com a finalidade de abordar a parábola, seus elementos e propriedades, assim como suas aplicações no cotidiano.

O trabalho inicial procurou identificar o domínio dos alunos da turma sobre o tema assim como suas dificuldades. A seguir o trabalho foi desenvolvido buscando-se diversificar as ações pedagógicas com atividades lúdicas, de exploração de parábolas com um software de geometria dinâmica e atividades que possibilitassem a conexão da parábola e o cotidiano do aluno.

3.1.1 Diagnosticando o aprendizado

A parábola como representação gráfica de uma função do segundo grau é abordada durante a trajetória escolar do aluno na educação básica, iniciando-se geralmente no 9º ano do Ensino Fundamental.

Com a finalidade de verificar os conhecimentos formados pelos alunos deste tema durante a sua trajetória escolar na Educação Básica, uma vez que a turma trabalhada estava prestes a concluir o Ensino Médio, solicitou-se que os mesmos apresentassem o esboço da representação gráfica de algumas funções reais ($f : \Re \rightarrow \Re$), em que $\Re$ é o conjunto dos números reais.

A exploração das funções polinomiais de primeiro e segundo grau, também foi requerida, pedindo que os alunos identificassem a(s) raiz(es) reais (se existissem), a interseção da referida função com o eixo das ordenadas associando este local ao coeficiente linear da função de primeiro grau e no caso específico das funções do segundo grau, determinar o vértice da função.

A atividade preliminar[9] foi constituída de cinco itens, os dois primeiros apresentavam funções do primeiro grau, os demais itens funções do segundo grau. Para o desenvolvimento desta atividade os alunos foram agrupados em duplas na sala de aula.

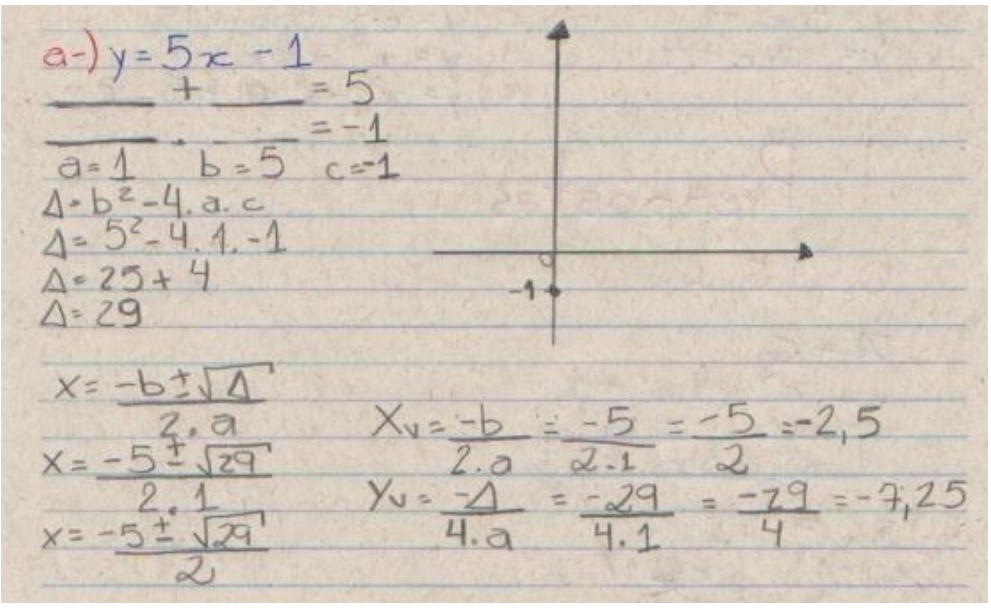
Houve uma inquietação no início, pois a maioria deles não se recordava como encontrar as raízes de uma equação do segundo grau, houve intervenção do professor, que realizou uma breve revisão destes conteúdos abordados em séries/anos anteriores.

As duplas de alunos desenvolveram as atividades propostas, realizaram alguns questionamentos, e o professor solicitou que os mesmos desenvolvessem as atividades a partir do que se recordavam de aulas anteriormente trabalhadas sobre o tema abordado.

As figuras seguir apresentam resoluções de três duplas de alunos:

i) Função do primeiro grau:

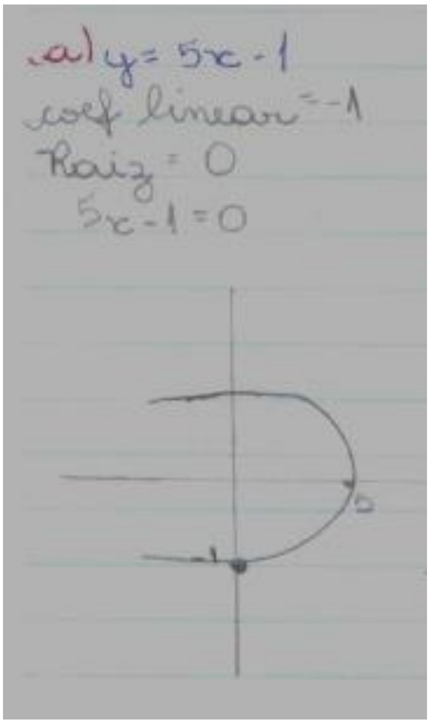
Figura 13 – Função do primeiro grau – dupla A, item a



Fonte: Arquivo da autora.

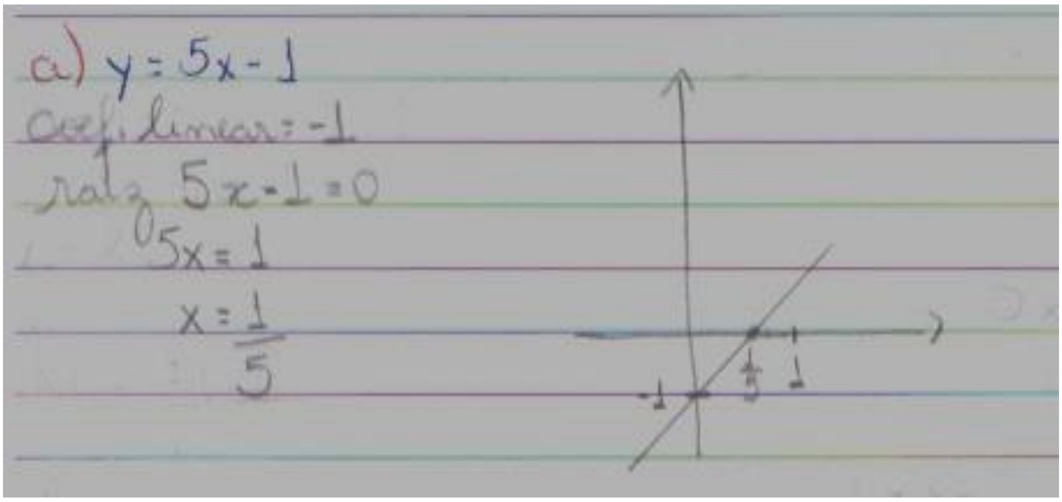
9 Apêndice p. 107

Figura 14 – Função do primeiro grau – dupla B – item a



Fonte: Arquivo da autora.

Figura 15 – Função do primeiro grau – dupla C – item a



Fonte: Arquivo da autora.

Observa-se que nem todos os alunos da turma diferenciaram uma função do primeiro grau de uma função do segundo grau.

De acordo com a Figura 13, a dupla A resolveu a atividade identificando coeficientes de uma equação do segundo grau ($x^2 + 5x - 1 = 0$) e não a do primeiro grau apresentada ($5x – 1 = 0$). Inicialmente a dupla buscou a forma fatorada da equação e como não teve êxito calculou o discriminante ($\Delta = b^2 - 4\ a\ c$), encontrou as raízes reais, o coeficiente linear, as coordenadas do vértice, contudo não apresentou o esboço do gráfico da função.

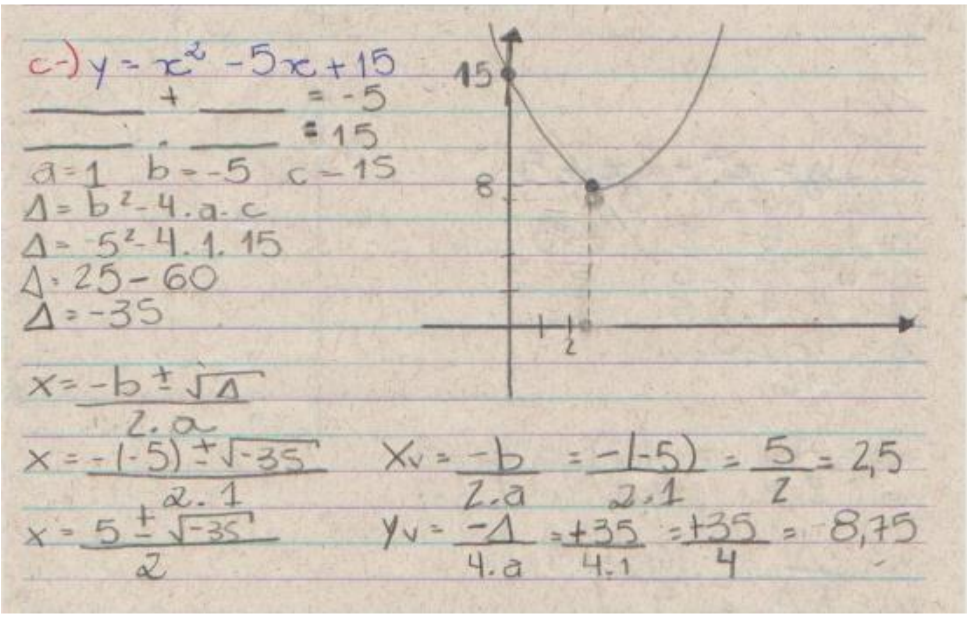
Na Figura 14 mostra que a dupla B também identificou essa função polinomial como sendo do segundo grau. Esses alunos apresentaram o coeficiente linear e a raiz da função associando a estes termos os algarismos presentes na sentença matemática apresentada, o esboço do gráfico da função apresentado lembra uma parábola cujo eixo focal coincide com o eixo das abscissas.

Finalmente, na Figura 15, vemos a resolução mais próxima da desejada para a questão, embora o esboço gráfico realizado pela dupla C apresente algumas falhas.

ii) Função do segundo grau:

A Figura 16 mostra o desenvolvimento da atividade (item c) pela dupla A. Note que a dupla identificou a interseção da função com o eixo das ordenadas e as coordenadas do vértice, considerou as raízes imaginárias como raízes reais, e o esboço do gráfico da função apresentam problemas de proporcionalidade.

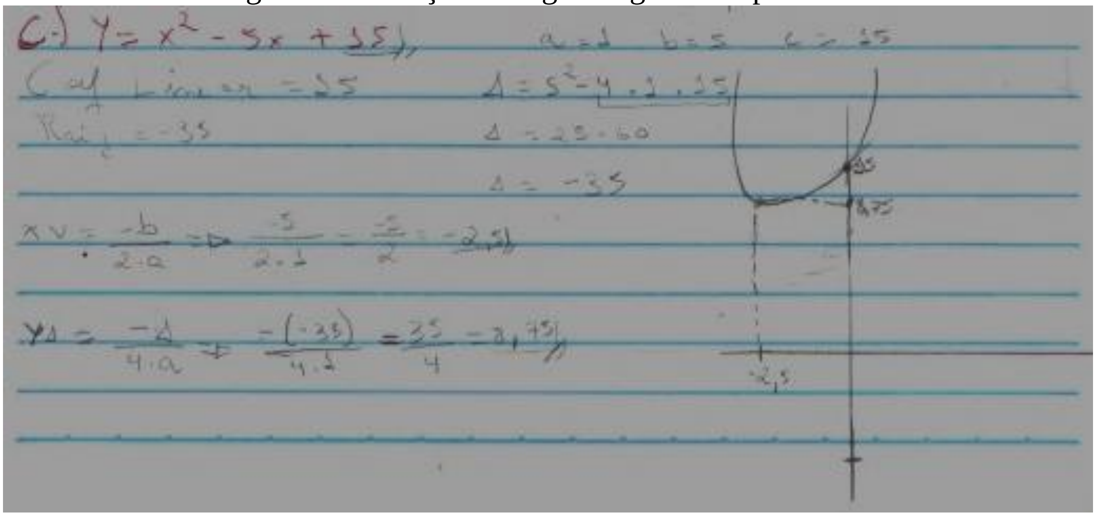
Figura 16 – Função do segundo grau – Dupla A – item c



Fonte: Arquivo da autora.

Na figura 17, a dupla B identificou o coeficiente linear da função e apresentou como raiz da função o valor do discriminante (Δ). No cálculo das coordenadas do vértice ocorreu um erro, o qual foi transportado para o esboço do gráfico da função, que também apresentou erros de proporcionalidade.

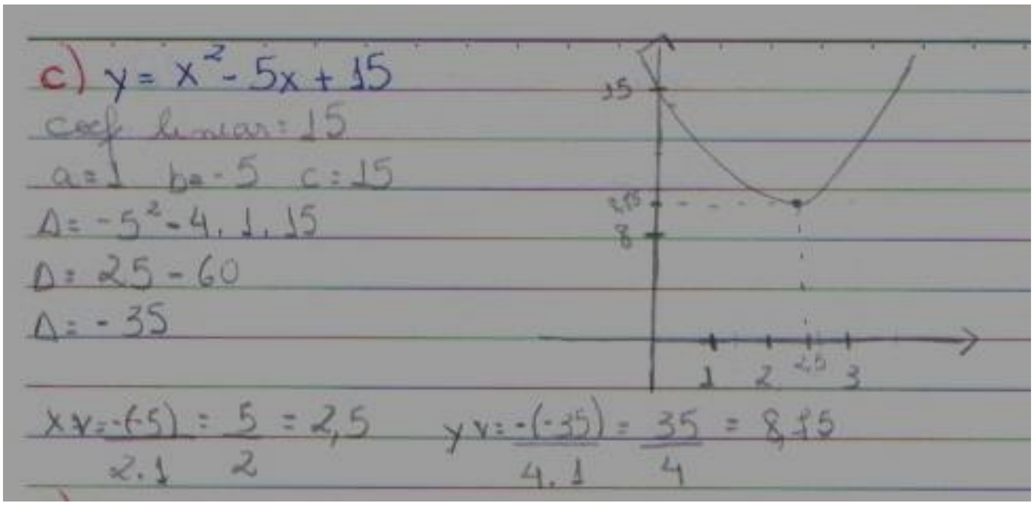
Figura 17 – Função de segundo grau - Dupla B – item c



Fonte: Arquivo da autora.

O item c foi desenvolvido pela dupla C como mostra a figura 18, e mais uma vez há falta de rigor no esboço do gráfico apresentado.

Figura 18 – Função do segundo grau - Dupla C – item c



Fonte: Arquivo da autora.

Os itens contemplavam algumas variações dos tipos destas funções, o item *a* apresentava uma função do primeiro grau crescente, no item *b* decrescente. Nos itens *c* e *e* as funções do segundo grau não possuíam raízes reais e no item *d* as raízes reais eram duplas.

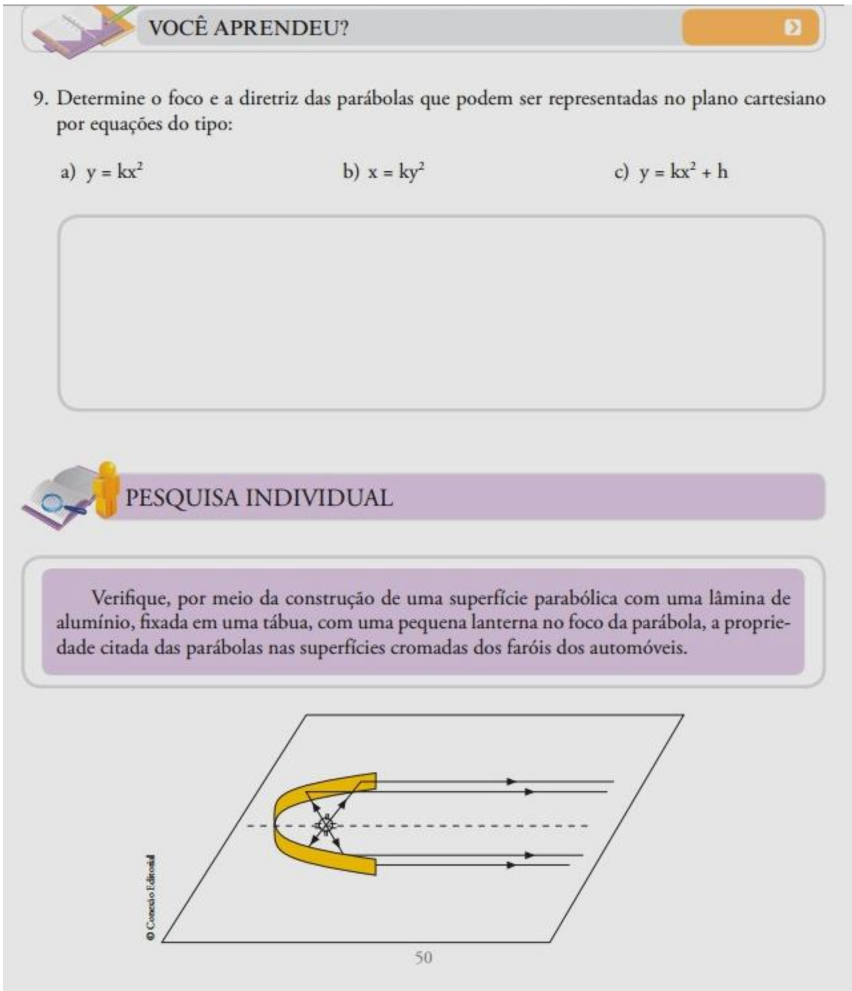
O desenvolvimento desta atividade possibilitou a identificação de algumas dificuldades dos alunos, além de mostrar que os conceitos destas funções não foram devidamente apropriados por todos durante a educação básica.

Na terceira série do Ensino Médio a Proposta Curricular do Estado de São Paulo para Matemática prevê o estudo das cônicas: noções e aplicações. A parábola em especial, é abordada no volume 1 do caderno do aluno da terceira série do Ensino Médio nas páginas 48, 49 e 50, edição 2014-2017, sendo as duas primeiras, Figuras 8 e 9, p. 27 e 28, destinadas à sua definição, apresentação de propriedades e alguns exemplos de aplicação. Na página 50 temos a proposta de um exercício e sugestão da realização de pesquisa individual, para verificação, por construção, da propriedade das parábolas, como podemos observar na Figura 19.

A atividade preliminar aplicada revelou que o sucesso na aprendizagem deste tópico não seria alcançado se fossem aplicadas apenas as atividades propostas no caderno do aluno, uma vez que para a resolução do exercício proposto há a necessidade de realizar algumas manipulações algébricas, as quais os alunos reproduzem em seu caderno muitas vezes sem compreendê-las.

A atividade proposta na Situação de Aprendizagem 4 – Circunferências e Cônicas: Significados, Equações, Aplicações constante no volume 1 do Caderno do Aluno da 3ª série do Ensino Médio é apresentada na Figura 19.

Figura 19 – Situação de Aprendizagem 4 – Equações – Você aprendeu?


VOCÊ APRENDEU?

9. Determine o foco e a diretriz das parábolas que podem ser representadas no plano cartesiano por equações do tipo:

a) $y = kx^2$ b) $x = ky^2$ c) $y = kx^2 + h$

PESQUISA INDIVIDUAL

Verifique, por meio da construção de uma superfície parabólica com uma lâmina de alumínio, fixada em uma tábua, com uma pequena lanterna no foco da parábola, a propriedade citada das parábolas nas superfícies cromadas dos faróis dos automóveis.

© Conexão Editorial

50

Fonte: Caderno do Aluno – Matemática – 3ª série do Ensino Médio - Volume 1, p.50
Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, Edição 2014-2017.

A partir do interesse dos alunos nas aplicações das propriedades das parábolas em nosso cotidiano, da dificuldade apresentada pelos mesmos em desenvolver a atividade preliminar, optou-se em realizar atividades que possibilitassem abordar o tema através de práticas em sala de aula baseadas na realização de atividades investigativas, como é proposto em Modelagem Matemática. Utilizando para isto a alternativa de combinação no desenvolvimento do currículo escolar para a adequação da Modelagem Matemática nas aulas regulares como auxílio na introdução de conceitos e ativá-los através de sua aplicação em situações concretas ou cotidianas.

Salvador, Bassanezi e Bisognin pontuam “que a modelagem é vista como estratégia na qual o aluno também ocupa um lugar especial de investigador” (2013, p.3) e investigar para os matemáticos profissionais “é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 13).

Neste sentido foram propostas atividades lúdicas aos alunos, iniciando com a atividade brincando de dobraduras, não sugerida no Caderno do Aluno de matemática para a 3ª série do Ensino Médio. Santos (2012), que realizou esta atividade, pontua que esta construção evidencia de modo natural a propriedade refletora da parábola.

3.1.2 Atividades lúdicas:

Nos primeiros momentos (atividades) os alunos foram colocados em contato com o objeto de estudo, os procedimentos utilizados são acompanhados pelo professor, orientando e avalizando os dados, validando modelos.

i) Atividade: Brincando de dobraduras I[10]

Objetivos da atividade:

Esta atividade, apresentada de modo lúdico, tem como principais objetivos: o primeiro contato dos alunos com material concreto para modelar a parábola, entender o conceito e os elementos da parábola: o foco e a reta diretriz, assim como as retas tangentes a ela, e as propriedades que a caracteriza.

Materiais usados: Papel translúcido, régua, lápis, computador com acesso a internet, folha com as descrições das ações a serem realizadas, Caderno do Aluno – Matemática - 3ª série do Ensino Médio – Volume 1.

[10] Apêndice p. 109

Procedimentos:

Para desenvolver a atividade os alunos receberam uma folha digitada com descrições das ações que deveriam realizar e uma folha de papel translúcido. Foram desafiados a realizar as atividades propostas e identificar a figura obtida ao término da atividade.

Inicialmente é solicitado ao aluno traçar, sobre o papel translúcido, uma reta *r* e um ponto F exterior à reta. Posteriormente sobre a reta traçada deveriam ser marcados no mínimo vinte pontos. A seguir o aluno é convidado a dobrar a folha de modo a sobrepor cada ponto marcado sobre a reta no ponto F não contido na reta. Neste momento o papel deve ser dobrado e vincado, obtendo assim, no mínimo vinte novas retas que surgiram das marcas produzidas pelo vinco do papel. Na Figura 20 podemos observar uma aluna desenvolvendo esta atividade.

Figura 20 – Aluna realizando dobras no papel translúcido.

Fonte: Foto da autora.

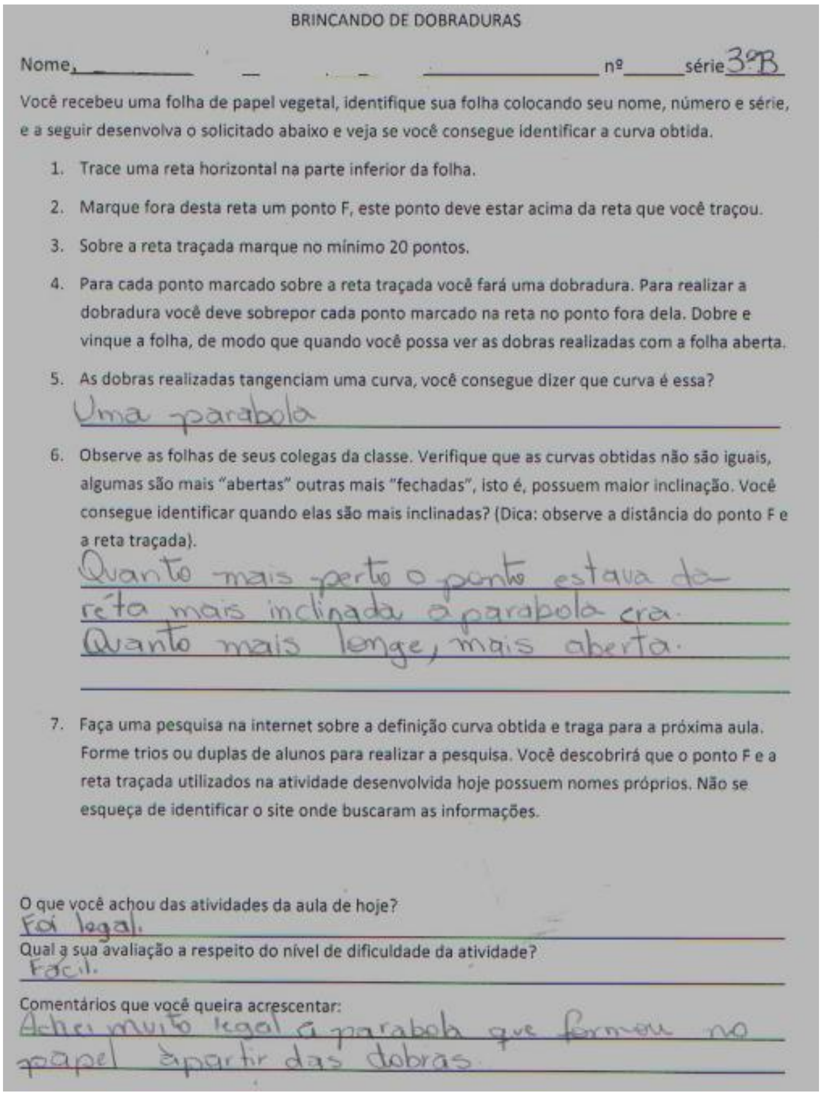
As dobras realizadas na folha tangenciam uma curva, sendo indagado ao aluno se consegue identificar qual é esta curva. O aluno também é instigado a observar as curvas produzidas pelos seus colegas de classe, verificar as semelhanças e diferenças quanto à convexidade das mesmas.

No desenvolvimento da atividade surgiram vários questionamentos e dificuldades: “Como vamos colocar o papel, de pé ou deitado? Onde vamos colocar a reta? E o ponto? Fica em cima, em baixo?...” Decidiu-se, no momento, que a folha seria trabalhada de modo que a dimensão maior ficasse na vertical, a reta ficaria na parte inferior da folha e o ponto deveria estar acima da reta, e preferencialmente, longe das extremidades laterais da folha. A localização dos pontos na reta também foi motivo de questionamento, ficando combinado que os pontos marcados sobre a reta fossem distribuídos de modo que não ficassem espaços “muito grandes” entre eles.

A maior dificuldade para a realização da atividade foi o entendimento de como realizar a dobra, como sobrepor os pontos. Mas à medida que um aluno compreendia e realizava a comanda, os outros alunos iam observando, perguntando, interagindo e por fim todos realizaram a atividade proposta. Esta parte da atividade foi programada para ser realizada em uma aula, e este foi o tempo necessário para sua realização.

Os alunos foram muito receptivos a esta atividade, todos participaram ativamente da aula, e alcançaram os objetivos propostos inicialmente. Apresentaram suas conclusões, fizeram seus registros, e avaliaram positivamente a atividade do dia, como podemos observar o relato na Figura 21.

Figura 21 – Atividade Brincando de Dobraduras



BRINCANDO DE DOBRADURAS

Nome__________ nº_____ série 3ºB

Você recebeu uma folha de papel vegetal, identifique sua folha colocando seu nome, número e série, e a seguir desenvolva o solicitado abaixo e veja se você consegue identificar a curva obtida.

1. Trace uma reta horizontal na parte inferior da folha.
2. Marque fora desta reta um ponto F, este ponto deve estar acima da reta que você traçou.
3. Sobre a reta traçada marque no mínimo 20 pontos.
4. Para cada ponto marcado sobre a reta traçada você fará uma dobradura. Para realizar a dobradura você deve sobrepor cada ponto marcado na reta no ponto fora dela. Dobre e vinque a folha, de modo que quando você possa ver as dobras realizadas com a folha aberta.
5. As dobras realizadas tangenciam uma curva, você consegue dizer que curva é essa?
   Uma parabola
6. Observe as folhas de seus colegas da classe. Verifique que as curvas obtidas não são iguais, algumas são mais "abertas" outras mais "fechadas", isto é, possuem maior inclinação. Você consegue identificar quando elas são mais inclinadas? (Dica: observe a distância do ponto F e a reta traçada).
   Quanto mais perto o ponto estava da reta mais inclinada a parabola era. Quanto mais longe, mais aberta.
7. Faça uma pesquisa na internet sobre a definição curva obtida e traga para a próxima aula. Forme trios ou duplas de alunos para realizar a pesquisa. Você descobrirá que o ponto F e a reta traçada utilizados na atividade desenvolvida hoje possuem nomes próprios. Não se esqueça de identificar o site onde buscaram as informações.

O que você achou das atividades da aula de hoje?
Foi legal.

Qual a sua avaliação a respeito do nível de dificuldade da atividade?
Facil.

Comentários que você queira acrescentar:
Achei muito legal a parabola que formou no papel àpartir das dobras.

Fonte: Arquivo da autora.

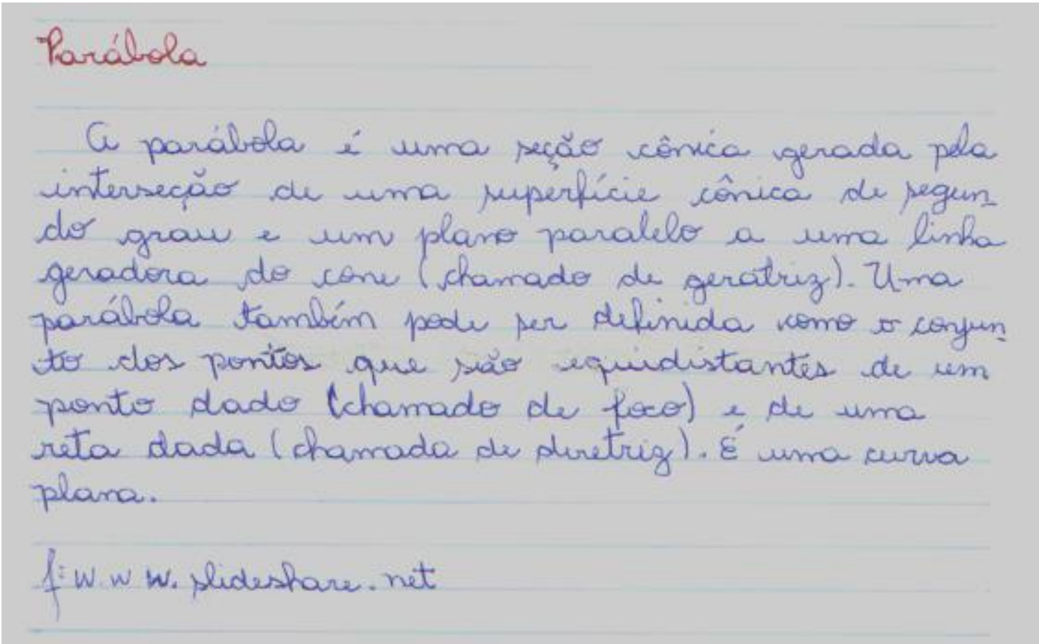
Ao final propõem-se uma pesquisa, a ser realizada pelos mesmos como atividade extraclasse, sobre a definição dessa curva, a qual deve ser apresentada na próxima aula.

Embora os alunos mostraram-se receptivos as atividades apresentadas, na aula seguinte alguns alunos deixaram de apresentar a pesquisa solicitada.

Durante a aula os grupos que apresentaram suas pesquisas, nelas contidas a definição da parábola, onde o ponto e a reta abordados na aula anterior foram devidamente nomeados. Houve espaço para que os alunos apresentassem suas dúvidas, dentre as quais se destaca: o que era seção cônica e qual a sua ligação com a parábola?

Na figura a vemos a pesquisa apresentada por um grupo.

Figura 22 – Pesquisa: Definição da parábola



Parábola

A parábola é uma seção cônica gerada pela interseção de uma superfície cônica de segundo grau e um plano paralelo a uma linha geradora do cone (chamado de geratriz). Uma parábola também pode ser definida como o conjunto dos pontos que são equidistantes de um ponto dado (chamado de foco) e de uma reta dada (chamada de diretriz). É uma curva plana.

f: w.w w. slideshare.net

Fonte: Arquivo da autora.

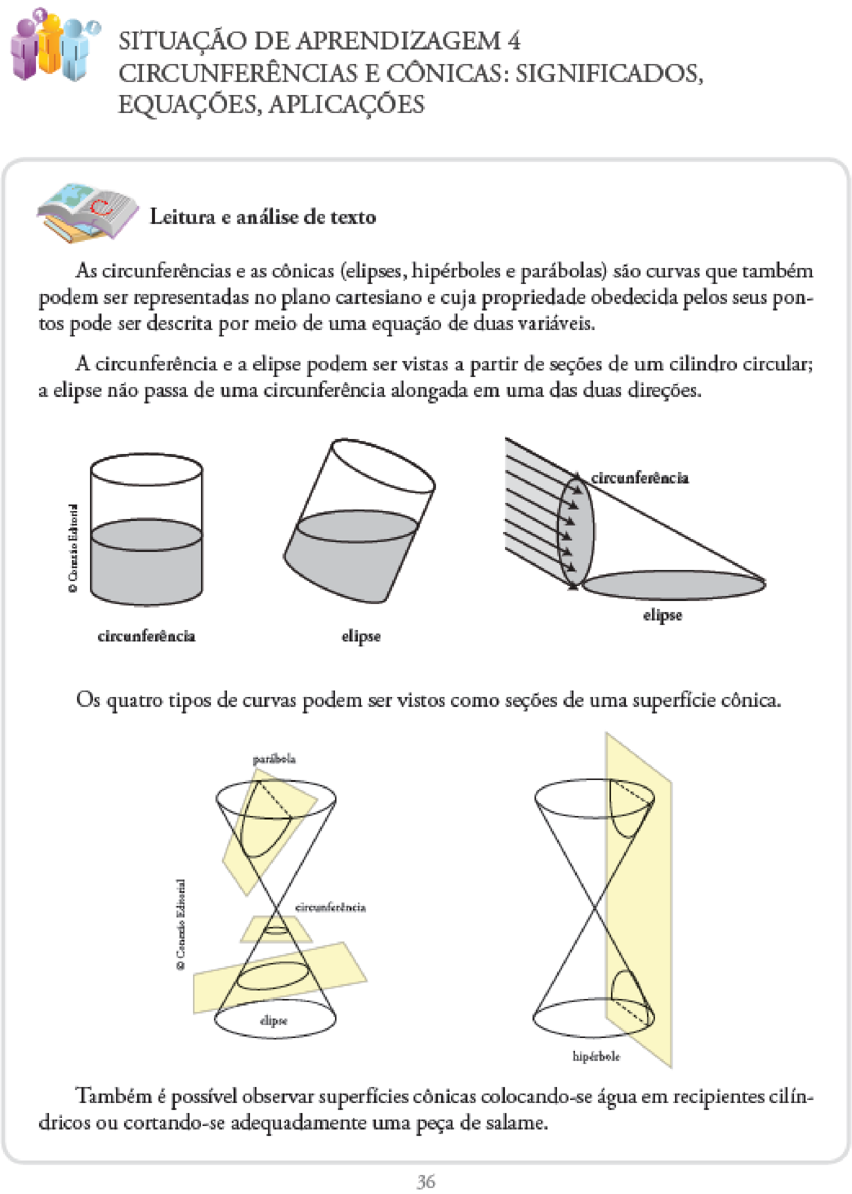
Baldin e Furuya (2011) ao introduzirem o estudo da parábola a caracterizam como:

> "A parábola é uma curva plana caracterizada pela seguinte propriedade geométrica:
> Os pontos de uma parábola são equidistantes de um ponto *F* e de uma reta *d*. que não contém F.
> O ponto *F* é o **foco** da parábola.
> A reta d é a **diretriz** da parábola.
> A reta perpendicular a *d* e passando por *F* é o eixo da parábola, que contém o **vértice** *V*." (BALDIN; FURUYA, 2011, p. 219)

Nota-se que a pesquisa realizada pelos alunos apresenta duas vertentes para esta curva. A primeira utilizando a seção de um cone por um plano paralelo a uma de suas geratrizes, que foi utilizada para a resolução do problema deliano por Menaecnus no século IV a.C., e a segunda utilizando a geometria analítica como Baldin e Furuya (2011) a caracterizaram.

Para o encerramento desta atividade foi realizada a leitura e análise de texto apresentada no início da Situação de Aprendizagem 4. Circunferências e Cônicas: Significados, Equações, Aplicações, contido no Caderno do Aluno da terceira série do Ensino Médio, da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, página 36, edição 2014-2017, reproduzida na Figura 23, onde o aluno pode visualizar os quatro tipos de curvas cônicas: (circunferência, elipse, hipérbole e parábola) obtidos através de seções de um cone reto duplo.

Figura 23 – Caderno do Aluno – Situação de Aprendizagem 4 – Leitura e análise de texto



SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 4
CIRCUNFERÊNCIAS E CÔNICAS: SIGNIFICADOS, EQUAÇÕES, APLICAÇÕES

Leitura e análise de texto

As circunferências e as cônicas (elipses, hipérboles e parábolas) são curvas que também podem ser representadas no plano cartesiano e cuja propriedade obedecida pelos seus pontos pode ser descrita por meio de uma equação de duas variáveis.

A circunferência e a elipse podem ser vistas a partir de seções de um cilindro circular; a elipse não passa de uma circunferência alongada em uma das duas direções.

Os quatro tipos de curvas podem ser vistos como seções de uma superfície cônica.

Também é possível observar superfícies cônicas colocando-se água em recipientes cilíndricos ou cortando-se adequadamente uma peça de salame.

36

Fonte: Caderno do Aluno – Matemática – 3ª série do Ensino Médio - Volume 1, p.36
Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, Edição 2014-2017.

Tempo de realização desta parte da atividade: duas aulas de 50 minutos.

Ao desenvolverem esta atividade os alunos foram apropriando-se de “novas” terminologias, elementos e propriedades da parábola antes não abordadas em sala de aula, o processo transcorreu naturalmente, sendo alcançados os objetivos propostos para esta atividade.

ii) Atividade: Brincando de dobraduras II[11]

Objetivos da atividade:

Apresentar o software GeoGebra e reproduzir no computador a atividade brincando de dobraduras feita anteriormente. Segundo Santos (2012) “As simulações destas construções no ambiente computacional ensinam o aluno a usar os objetos traçados na tela como ajuda no estabelecimento de conjecturas e justificativas” (p. 14) sendo estes uns dos principais objetivos.

Materiais usados: Folha com a descrição das atividades a serem desenvolvidas, computador, software GeoGebra.

Procedimentos:

Esta atividade foi realizada no ambiente computacional da sala do Acessa Escola, projeto da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, onde a sala de informática da escola conta com auxílio de um aluno estagiário.

Os alunos agrupados em duplas e/ou trios receberam as instruções e as orientações para a realização das atividades na sala de aula regular, antes de serem encaminhados para a sala do Acessa Escola. A turma em que o projeto foi desenvolvido possuía dois alunos que eram estagiários no programa Acessa Escola em período contrário do qual estudavam, a presença destes dois alunos na turma auxiliou o desenvolvimento das atividades realizadas neste ambiente.

Destinou-se uma aula para o primeiro contato da turma com o programa de geometria dinâmica GeoGebra, algumas ferramentas do software a serem utilizadas foram apresentadas para que os alunos explorassem-no.

[11] Apêndice p. 110

Notou-se que os alunos de modo geral não possuem receio em manipular o programa e fazem descobertas rapidamente, contudo percebeu-se também que alguns alunos buscavam na internet outras informações e distrações.

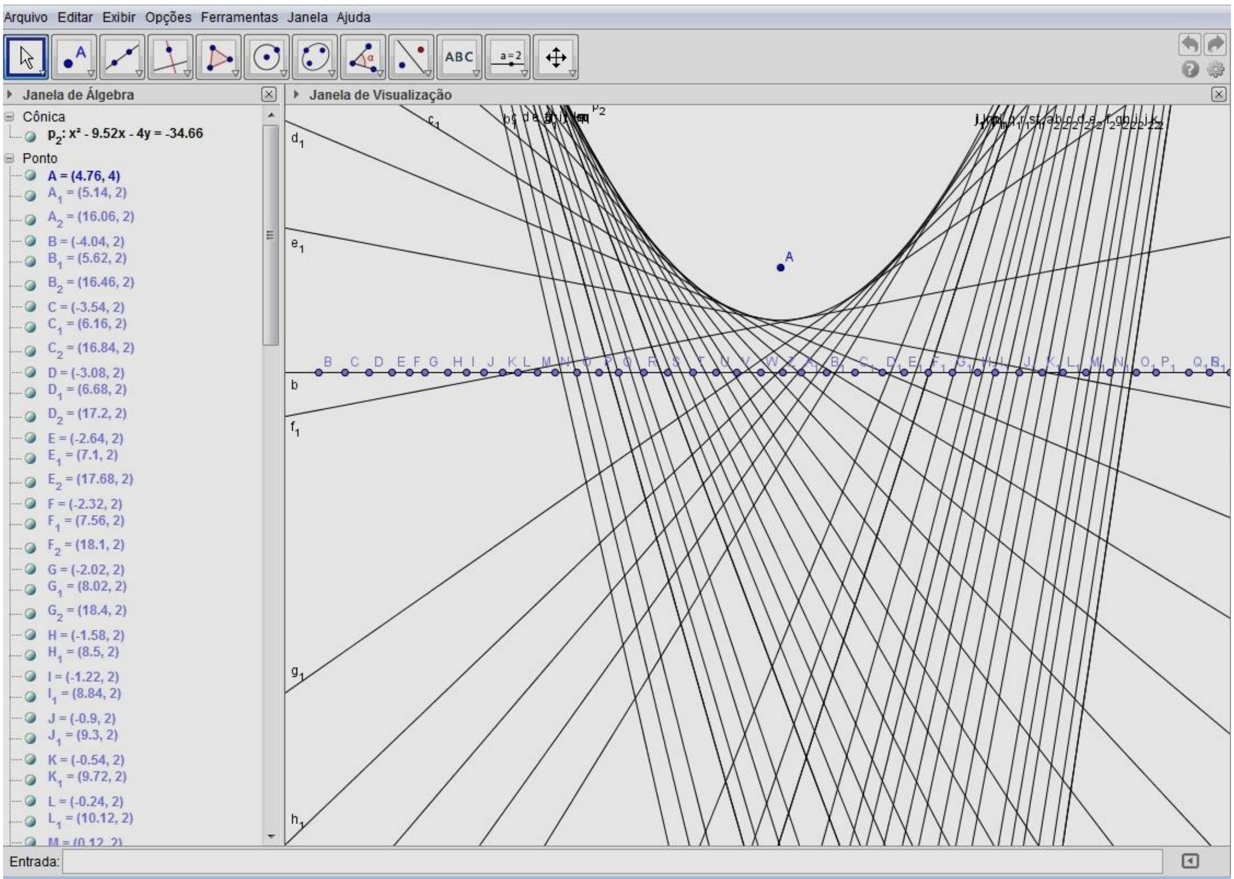
A segunda parte da atividade foi realizada seguindo os comandos recebidos em folha de papel no início da aula. A realização da atividade foi trabalhosa para o professor e para o estagiário do Acessa Escola, houve muita solicitação de ajuda nesta primeira atividade desenvolvida no computador. Alguns tiveram dificuldade na execução das tarefas, houve a necessidade da retomada do conceito de mediatriz.

Tempo de realização da atividade: duas aulas consecutivas desenvolvidas no ambiente Acessa Escola.

Ao final o resultado foi gratificante, todos alcançaram o objetivo esperado. Os alunos participaram ativamente das atividades e a na avaliação da aula os comentários foram: muito boa, legal, interessante.

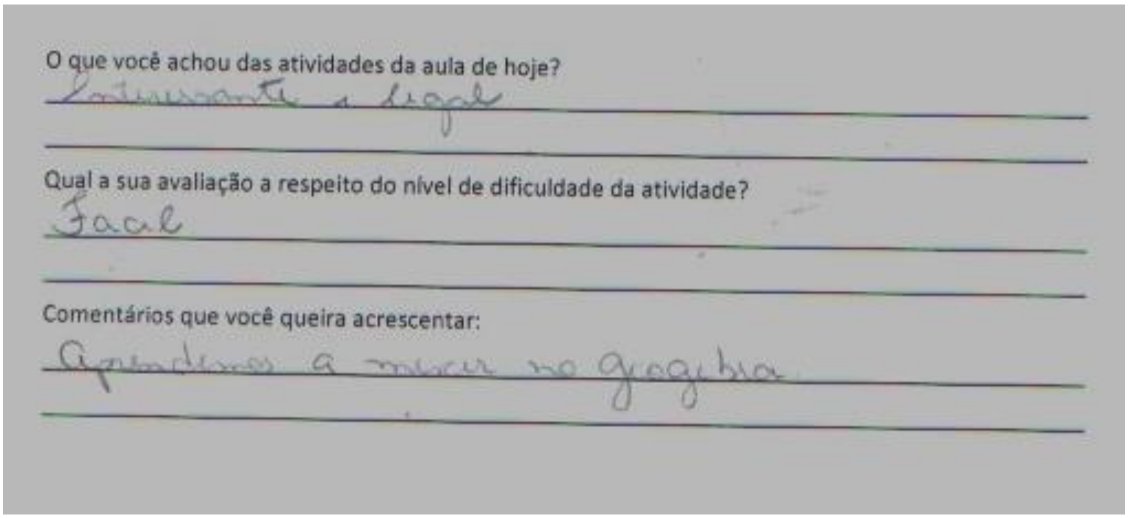
Na Figura 24 temos uma tela do GeoGebra com a atividade realizada de um grupo e a Figura 25 apresenta os comentários da atividade do dia de um grupo.

Figura 24 – Atividade: Brincando de dobraduras II



Fonte: Arquivo da autora

Figura 25 – Atividade: Brincando de dobraduras II - Avaliação


O que você achou das atividades da aula de hoje?

Interessante e legal

Qual a sua avaliação a respeito do nível de dificuldade da atividade?

Facil

Comentários que você queira acrescentar:

Aprendemos a mexer no geogebra

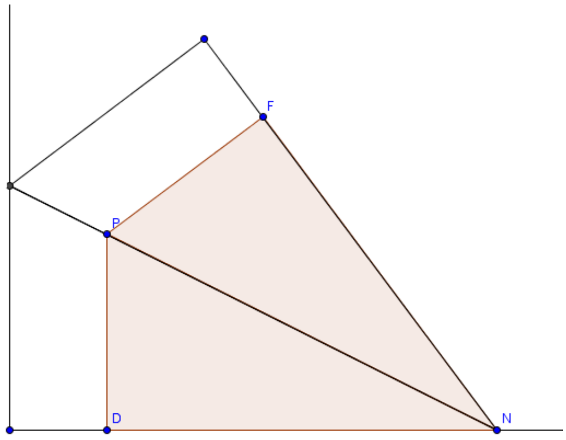
Fonte: Arquivo da autora

Ao desenvolver as atividades lúdicas os alunos construíram uma curva que parece uma parábola. Para provar que esta curva é realmente uma parábola, Santos (2012) propõem uma simulação computacional, pois a "construção permite que as tangentes sejam geradas rapidamente qualquer que seja a localização do ponto *F*, facilitando conjecturas e conclusões" (p.20).

Santos (2012) pontua que após traçar a reta e determinar sobre ela um ponto *D* e fora dela um ponto *F* numa simulação computacional, o desafio inicial é traçar a dobra, e a conclusão desejada é notar que ela é a mediatriz do segmento de reta formado pelos pontos *D e F*. O segundo desafio, segundo ela, é "determinar o ponto *P,* de interseção da tangente com a curva" (SANTOS, 2012, p. 21).

Para Santos (2012) o processo de construção por dobraduras facilita a conclusão de que o ponto *P* está sobre a dobra, pois é resultante da superposição do ponto *D* da reta horizontal, sobre o ponto *F*. Note que ao dobrar constroem-se por sobreposição dois triângulos retângulos congruentes de tal maneira que a cada ponto da dobra corresponde um único ponto na reta horizontal. A correspondência citada é determinada pela projeção ortogonal dos pontos da dobra sobre a reta horizontal. Assim temos que o ponto *D* é o pé da perpendicular à reta horizontal passando por *P*. E os triângulos *DPN* e *PNF* são retângulos e congruentes, como se pode observar na figura a seguir:

Figura 26 – Triângulos congruentes



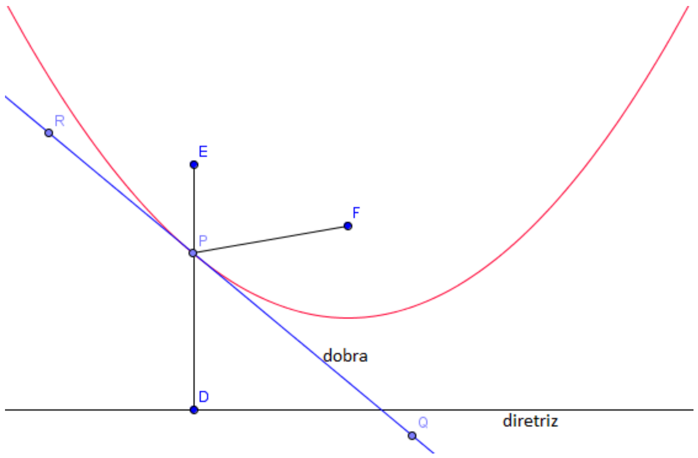
Fonte: Arquivo da autora

Logo o ponto P é obtido pela interseção da dobra (tangente), com a perpendicular à reta diretriz que passa por *D*. A prova que a curva é realmente uma parábola é imediata, pela congruência dos triângulos *PDN* e *PFN*.

Além disso, a atividade utilizando dobraduras permite ilustrar outra propriedade das parábolas de grande importância para o desenvolvimento do trabalho a ser proposto.

Cada dobra realizada determina uma reta tangente à parábola. Se a reta $\overleftrightarrow{RQ}$ foi obtida superpondo-se o ponto D sobre o ponto F, então os ângulos $F\hat{P}Q$ e $D\hat{P}Q$ são congruentes, como a reta $\overleftrightarrow{DE}$ é perpendicular à diretriz, e o ponto P pertence ao segmento de reta constituído pelos pontos $\overline{DE}$, então os ângulos $D\hat{P}Q$ e $E\hat{P}R$ são congruentes, pois são opostos pelo vértice. Logo, por transitividade, os ângulos $E\hat{P}R$ e $F\hat{P}Q$ possuem a mesma medida conforme se pode observar na figura abaixo:

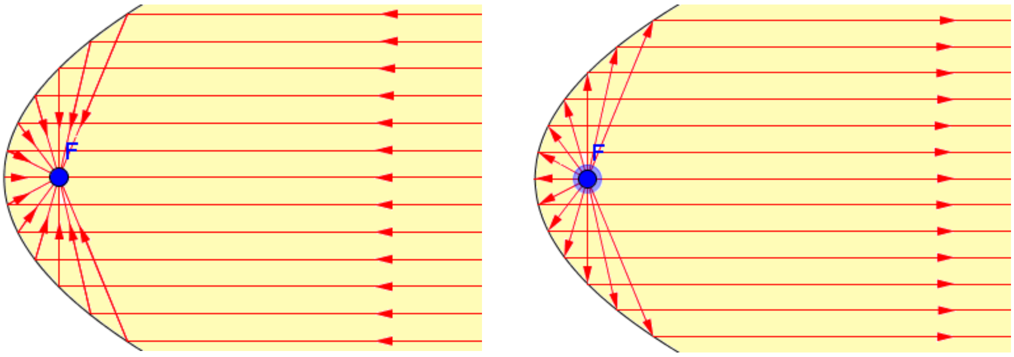
Figura 27 – Propriedade refletora da parábola



Fonte: Arquivo da autora

Santos (2012) relembra que Lei de Reflexão estudada na física aborda os fenômenos ondulatórios, segundo esta lei, as ondas ao encontrar um obstáculo são refletidas de modo que o ângulo de incidência é igual ao de reflexão. Assim se considerarmos a parábola como um espelho, qualquer onda que viaje ao longo da reta *EP*, ao bater na superfície parabólica (espelho), será refletido na direção de *PF*. De modo geral, raios de luz e outros fenômenos ondulatórios paralelos ao eixo de simetria da parábola são por ela refletidos de modo que esses passam pelo seu foco, e reciprocamente, os que partem do foco de uma parábola são por ela refletidos paralelamente ao seu eixo de simetria. A Figura 19 apresenta o processo de convergência das ondas no foco quando refletidas em uma superfície parabólica assim como a reflexão das mesmas a partir deste ponto.

Figura 28 – O foco da parábola e a propriedade de reflexão das ondas



Fonte: Arquivo da autora

Portanto, a atividade lúdica realizada é rica, pois possibilita aos alunos a construção dos conceitos, propriedades e características que envolvem a parábola.

3.1.3 Exploração de parábolas com o GeoGebra

Para que ocorra a aprendizagem em geometria o aluno deve percorrer as "etapas de exploração concreta, experimentação, resolução de problemas, elaboração de conjecturas, justificativas informais e provas" (SANTOS, 2012, p. 14).

A geometria dinâmica, numa abordagem concreta computacional, possibilita que as representações construídas neste ambiente favoreçam a formação de "base experimental necessária às abstrações inerentes à prova matemática" (SANTOS, 2012, p.14)

O intuito dessas atividades é que o aluno desenvolva o proposto num processo de investigação, percorrendo as etapas necessárias para a consolidação de sua aprendizagem, formulando hipóteses, verificando sua validação, determinando o modelo matemático existente em cada situação de aprendizagem. Para isso, utilizou-se o software GeoGebra.

i) Atividade: O GeoGebra e a construção de parábolas[12]

Objetivos da atividade:

Proporcionar maior familiarização com o GeoGebra na construção de parábolas com as seguintes características: diretriz paralela ao eixo das abscissas, diretriz paralela ao eixo das ordenadas e diretriz não paralela a nenhum dos eixos cartesianos.

Materiais usados: Computador, software GeoGebra.

Procedimentos:

As comandas da atividade foram passadas verbalmente e alguns problemas na execução ocorreram. São pontuadas a seguir as maiores dificuldades encontradas:

a) Traçar uma reta paralela aos eixos cartesianos. Na aula anterior para traçar a reta utilizaram a ferramenta  Reta definida por Dois Pontos, e as retas deste modo construídas, clicando aleatoriamente sobre a tela do computador, por mais que se queira, raramente são paralelas aos eixos cartesianos;
b) Para o aluno a imagem da reta obtida na tela do computador era paralela a um dos eixos cartesianos, contudo a equação da mesma indicava que não;
c) Os alunos não haviam utilizado, na aula anterior, a caixa de Entrada do software.

Para o desenvolvimento da atividade houve a necessidade de alterar a comanda inicial, explicitando como utilizar a caixa de Entrada, bem como a utilização de uma constante k qualquer, com $k \in \Re$. Os alunos tiveram dificuldade na realização da atividade, vários grupos digitaram na caixa de Entrada: $y = kx$ ou $x = ky$ e não escolheram um valor para o parâmetro real k.

Tempo de realização da atividade: Duas aulas, embora o tempo previsto para o desenvolvimento da mesma era de apenas uma aula.

Ao final da aula solicitou-se que os alunos registrassem em seus cadernos as equações obtidas na realização das atividades do dia e trouxessem as suas anotações na próxima aula.

---

[12] Apêndice p. 113

As falhas apresentadas na execução desta atividade foram importantes para o crescimento do grupo, principalmente do professor, indicando a necessidade, neste caso, do registro das ações a serem realizadas por escrito.

Nesta atividade os alunos obtiveram maior desenvoltura para trabalhar com este programa de geometria dinâmica, também proporcionou retomar alguns conceitos e características das retas quando estas são paralelas a um dos eixos cartesianos.

ii) Atividade: GeoGebra e a equação da parábola[13]

Objetivos da atividade:

Esta atividade foi desenvolvida no ambiente do Acessa Escola a partir das parábolas construídas pelos alunos na aula anterior e tem por objetivo, num processo de análise e investigação, associar a parábola encontrada à sua equação.

Materiais usados: Computador, software GeoGebra, caderno do aluno com anotações da aula anterior, folha para os alunos transcreverem suas observações.

Procedimentos:

Cada equipe deveria introduzir na caixa de entrada as equações anotadas em seu caderno, verificar sua representação gráfica, identificar as características de cada uma, associando-as aos coeficientes da equação digitada.

A atividade proposta era de investigação. E o que os alunos identificaram rapidamente é que as parábolas cujas diretrizes eram paralelas aos eixos cartesianos possuíam equações com menor quantidade de coeficientes.

Associar os coeficientes da equação ao visual da parábola não foi considerado pelos alunos algo fácil, solicitaram ajuda, e assim, e a professora precisou fazer algumas inferências.

Um dos objetivos desta atividade foi mostrar aos alunos a diversidade de parábolas, sem a pretensão de estudar cada caso a fundo, pontuando que elas estão presentes no cotidiano, principalmente pela utilidade de suas propriedades.

---

[13] Apêndice p. 114

As Figuras 29 e 30 apresentadas a seguir, mostram o relato das atividades de um grupo de alunos.

Figura 29 – O GeoGebra e as Parábolas II – (A)

ATIVIDADE:

1. Quais são as equações obtidas pelo software Geogebra das parábolas construídas em aulas anteriores?

1º $x^2 - 11.84x + 8.4y = -35.89$

2º $x^2 - 9.39x - 7.37y = -72.48$

3º $y^2 - 8.68x - 1.48y = -45.42$

4º $y^2 + 6.52x - 1.52y = 8.35$

5º $26.63x^2 - 26.01xy + 6.35y^2 - 188.57x - 90.27y = -876.85$

6º $26.63x^2 - 26.01xy + 6.35y^2 + 9.29x + 184.09y = 306.65$

2. Quais as características da parábola de cada equação?

1º A diretriz é paralela ao eixo x; a concavidade está para baixo

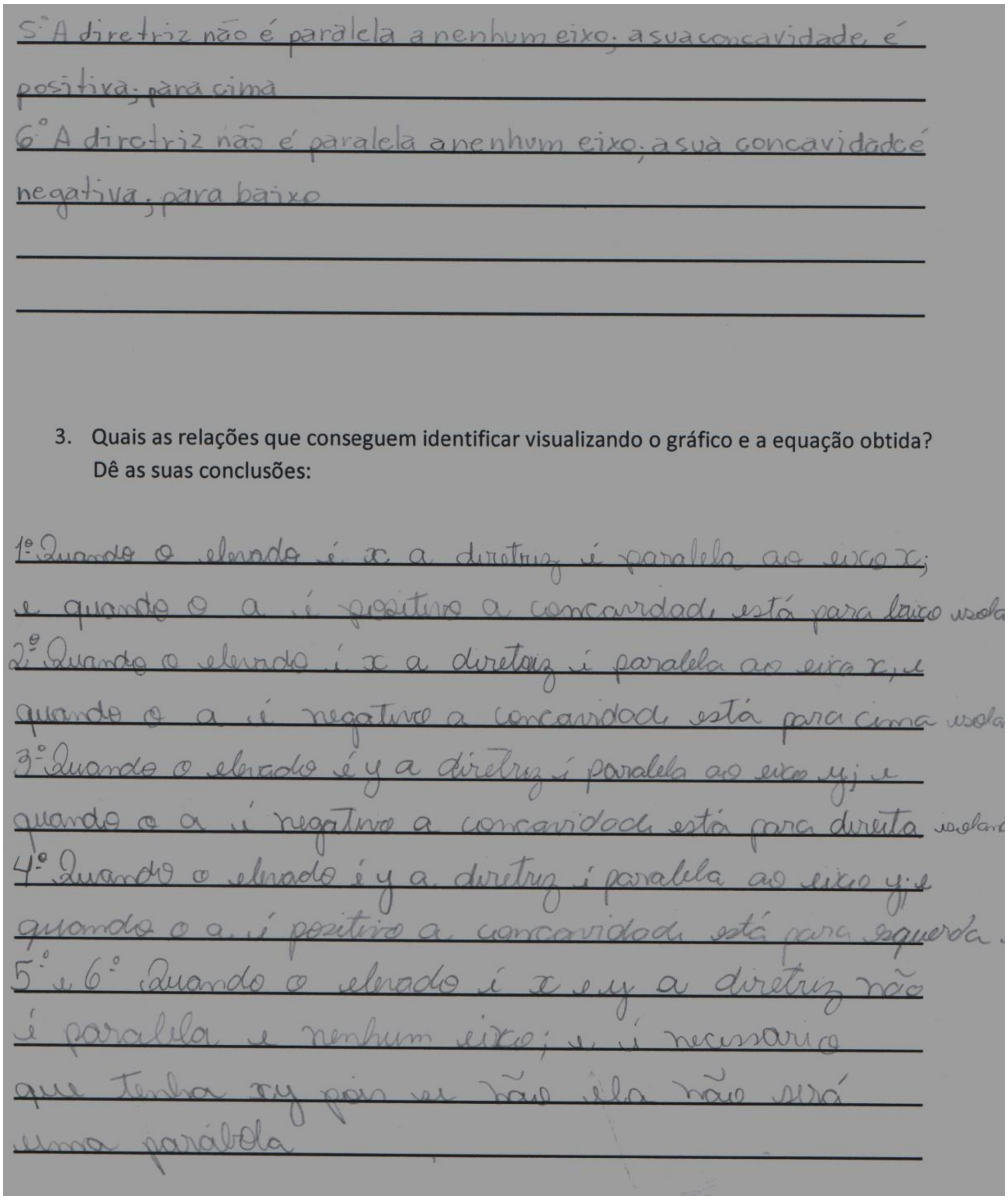
2º A diretriz é paralela ao eixo x; a concavidade está para cima

3º A diretriz é paralela ao eixo y; sua concavidade está para a direita

4º A diretriz é paralela ao eixo y; sua concavidade está para a esquerda

Fonte: Arquivo da autora.

Figura 30 – O GeoGebra e as Parábolas II – (B)


5° A diretriz não é paralela a nenhum eixo; a sua concavidade é positiva; para cima

6° A diretriz não é paralela a nenhum eixo; a sua concavidade é negativa; para baixo

3. Quais as relações que conseguem identificar visualizando o gráfico e a equação obtida? Dê as suas conclusões:

1° Quando o elevado é x a diretriz é paralela ao eixo x; e quando o a é positivo a concavidade está para baixo

2° Quando o elevado é x a diretriz é paralela ao eixo x, e quando o a é negativo a concavidade está para cima

3° Quando o elevado é y a diretriz é paralela ao eixo y; e quando o a é negativo a concavidade está para direita

4° Quando o elevado é y a diretriz é paralela ao eixo y; e quando o a é positivo a concavidade está para esquerda.

5° e 6° Quando o elevado é x e y a diretriz não é paralela a nenhum eixo; e é necessario que tenha xy pois se não ela não será uma parábola

Fonte: Arquivo da autora

Tempo de realização da atividade: Duas aulas consecutivas desenvolvidas no ambiente do Acessa Escola.

Os objetivos da atividade foram alcançados parcialmente, pois os alunos tiveram dificuldade em relacionar as características de cada parábola com a equação apresentada pelo programa. Notou-se que uma parte considerável dos alunos possui aversão à álgebra, provavelmente por experiências não bem sucedidas anteriormente.

iii) Atividade: Parábola por cinco pontos[14]

Objetivos da atividade:

Construir uma parábola utilizando do software GeoGebra através do comando Cônica definida por Cinco Pontos. Determinar vértice e parâmetro da parábola.

Materiais usados: Computador, software GeoGebra, folha com descrições das atividades a serem realizadas.

Procedimentos:

As descrições das ações levam a construção de uma parábola de diretriz paralela ao eixo das abscissas, com foco no ponto F e foi realizada no ambiente do Acessa Escola.

Em síntese propõe-se colocar sobre a reta diretriz os pontos A, B, C, D e E, sobre os quais são traçadas as retas perpendiculares à reta diretriz. São traçadas também as mediatrizes dos segmentos AF, BF, CF, DF e EF.

O ponto A’ é obtido pela interseção da reta perpendicular à reta diretriz que passa pelo ponto A e a mediatriz do segmento AF, de modo análogo obtêm-se os pontos B’, C’, D’ e E’.

A seguir solicita-se a distância dos pontos de interseção à reta diretriz e ao ponto F, pontuando que se as distâncias do ponto de interseção à reta diretriz e ao ponto F forem iguais então teremos por definição que os pontos de interseção encontrados pertencem à mesma parábola.

Os pontos A’, B’, C’, D’ e E’ são utilizados para traçar a parábola com o comando Cônica definida por Cinco Pontos. A equação da parábola, a construção da reta focal, a determinação do vértice da parábola são ações previstas na atividade. Introduz-se o termo parâmetro e sua definição.

As Figuras 31, 32 e 33, mostram a atividade desenvolvida por um grupo da classe e a Figura 34 apresenta a conclusão de outro grupo.

[14] Apêndice p. 116.

Figura 31 – Atividade: Parábola por 5 pontos (A)

Distância			As distâncias do ponto A' ao ponto F e à reta d são iguais?
do ponto	ao ponto F	à reta d	
A'	6.48	6.48	Sim
B'	2.99	2.99	Sim
C'	1.32	1.32	Sim
D'	1.02	1.02	Sim
E'	2	2	Sim

Se todas as respostas da última coluna forem sim teremos então, por definição, que os pontos A', B', C', D' e E' pertencem a uma parábola $\mathscr{P}$ de reta diretriz d e foco F.

13. Para traçar a parábola $\mathscr{P}$ selecionar o comando Cônica definida por Cinco Pontos. Clicar sobre os pontos A', B', C', D' e E'.

14. Clicar com o botão direito do mouse sobre o gráfico da parábola obtida e selecionar as opções: Propriedades..., Cor e clicar sobre a cor vermelha.

15. Clicar novamente com o botão direito do mouse sobre o gráfico da parábola e selecionar opção: Equação $y = ax^2 + bx + c$. Quais os coeficientes a, b e c da parábola obtida?

f: $y = -0.25x^2 + 1x$, a = -0.25, b = 1 e c = 0

16. Para determinar a reta f, eixo focal da parábola $\mathscr{P}$ selecionar o comando Reta Perpendicular, clicar sobre o ponto F e sobre o EixoX, uma vez que o foco da parábola pertence ao eixo das abscissas.

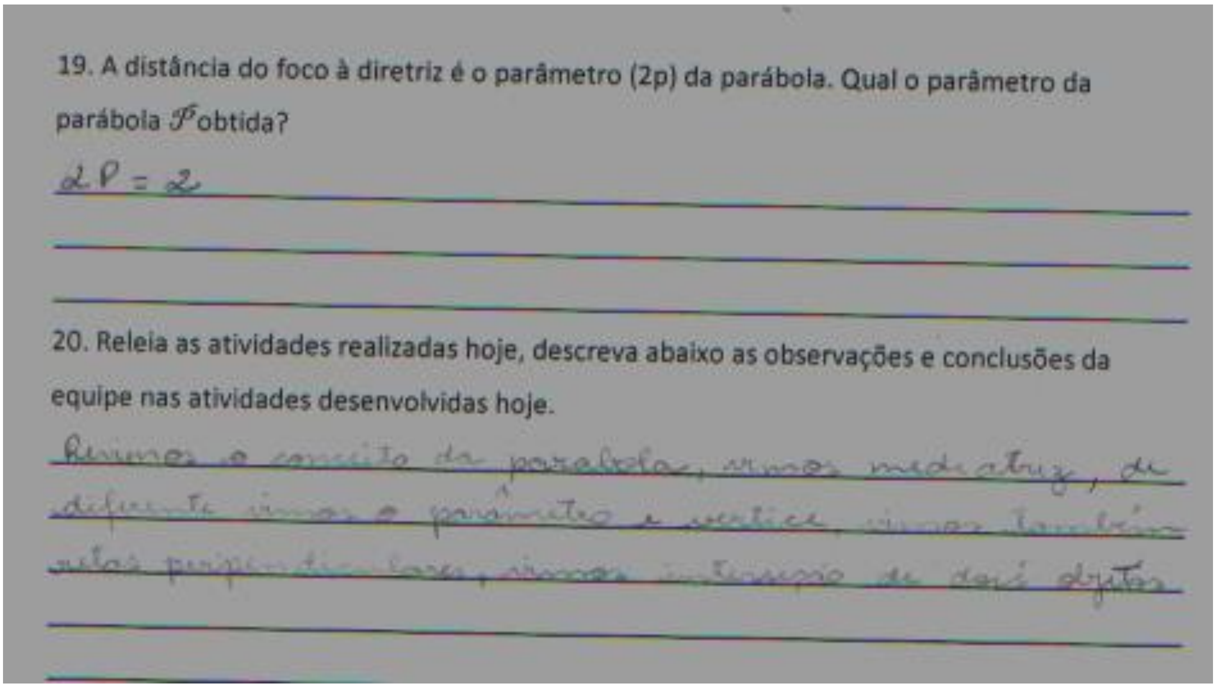
17. Selecionar o comando Interseção de dois Objetos para determinar o ponto V, vértice da parábola $\mathscr{P}$, de interseção da reta focal f e a parábola $\mathscr{P}$, clicar sobre o gráfico da parábola e sobre a reta f.

18. Quais são as coordenadas do ponto V e do Ponto F? Qual a distância entre estes dois pontos? Qual a distância do ponto V à reta diretriz d? O que podemos concluir?

V = (2, 1) e F = (2, 0), a distância de V até F é igual 1, a distância de V até a reta d é = 1, que eles tem a mesma medida

Fonte: Arquivo da autora.

Figura 32 – Atividade: Parábola por 5 pontos (B)


19. A distância do foco à diretriz é o parâmetro (2p) da parábola. Qual o parâmetro da parábola $\mathcal{P}$ obtida?

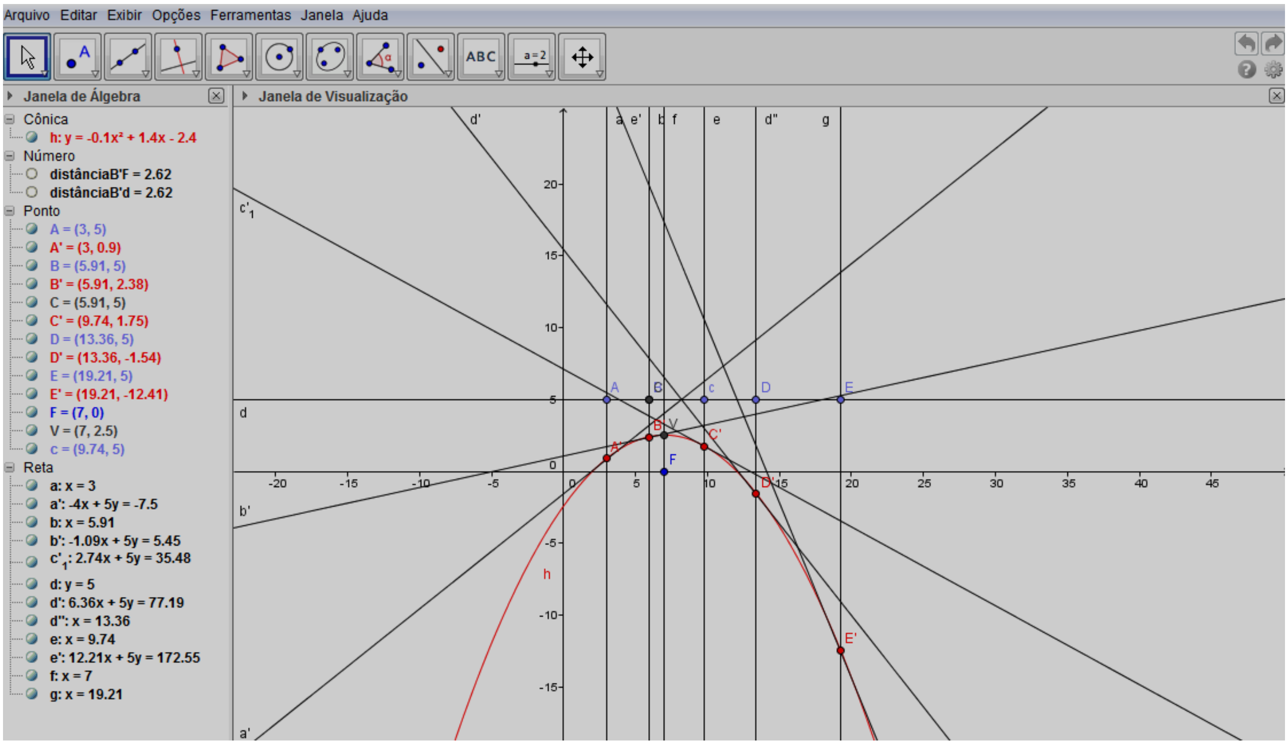
2P = 2

20. Releia as atividades realizadas hoje, descreva abaixo as observações e conclusões da equipe nas atividades desenvolvidas hoje.

Revimos o conceito da parabola, vimos mediatriz, de diferente vimos o parâmetro e vertice, vimos também retas perpendiculares, vimos intersecção de dois objetos

Fonte: Arquivo da autora

Figura 33 – Atividade: Parábola por 5 pontos (C)



Fonte: Arquivo da autora

Figura 34 - Atividade: Parábola por 5 pontos (D)

20. Releia as atividades realizadas hoje, descreva abaixo as observações e conclusões da equipe nas atividades desenvolvidas hoje.

Podemos concluir, que a distância do ponto F à reta d, serão sempre as mesmas, independente do ponto, definindo assim, que todos os pontos pertencem a uma mesma parabola P de reta diretriz d e foco F

Para determinar o ponto V, ou seja, a vértice da parábola, usemos a interseção de dois objetos.

As cordenadas do ponto V e do ponto F, possui a mesma distância.

21. Avalie a atividade proposta.

Propõe ao aluno, diferenciar uma parabola e um foco, o fazendo refletir que a distância do ponto à reta será sempre a mesma.

Fonte: Arquivo autora.

Tempo de realização da atividade: quatro aulas, sendo realizadas em duas seções de aulas duplas (consecutivas) no ambiente do Acessa Escola.

Inicialmente a atividade foi idealizada para transcorrer em duas aulas, contudo o tempo utilizado foi de quatro aulas, provavelmente por requerer a utilização de comandos do software GeoGebra ainda não utilizados pelos alunos. Todos os grupos de alunos pontuaram a atividade como extensa e de maior complexidade que as atividades anteriores.

Os alunos apresentaram dificuldade em relatar suas observações e conclusões, nem sempre foram claros os seus relatos, os termos utilizados muitas vezes são impróprios, algumas frases são desconexas.

Verificou-se também que as explicações orais são sempre mais completas e conclusivas. Em todos os relatos realizados pelos alunos pode-se constatar a compreensão da definição de parábola, das características de seus elementos.

O resultado da atividade foi positivo, uma vez que os objetivos foram alcançados, contudo, pelas dificuldades apresentadas a atividade deve ser dividida em duas partes para facilitar a sua aplicação.

iv) Atividade: A parábola[15]

Objetivos da atividade:

Desenvolvida em sala de aula, esta atividade tem como objetivo abordar de modo algébrico as principais características e propriedades da parábola. Proporcionar ao educando, deste modo, a sistematização do conhecimento construído.

Materiais usados: Folha com descrições das atividades a serem realizadas, caderno, lápis, borracha, régua.

Procedimentos:

Para iniciar a atividade foi realizada uma leitura dinâmica coletiva do texto apresentado das duas páginas iniciais da atividade.

As parábolas abordadas nesta atividade possuíam diretrizes paralelas a um dos eixos cartesianos, por possuírem sentenças algébricas menores, o que favorece a manipulação algébrica, uma vez que há a intenção de provocar pequenos desequilíbrios e que estes remetam a uma aprendizagem significativa.

Os alunos foram grupados em dois ou três alunos para desenvolver as atividades propostas. E embora os alunos verbalizassem as características e propriedades da parábola assertivamente, tiveram dificuldade no desenvolvimento das atividades propostas, a álgebra era o “entrave”.

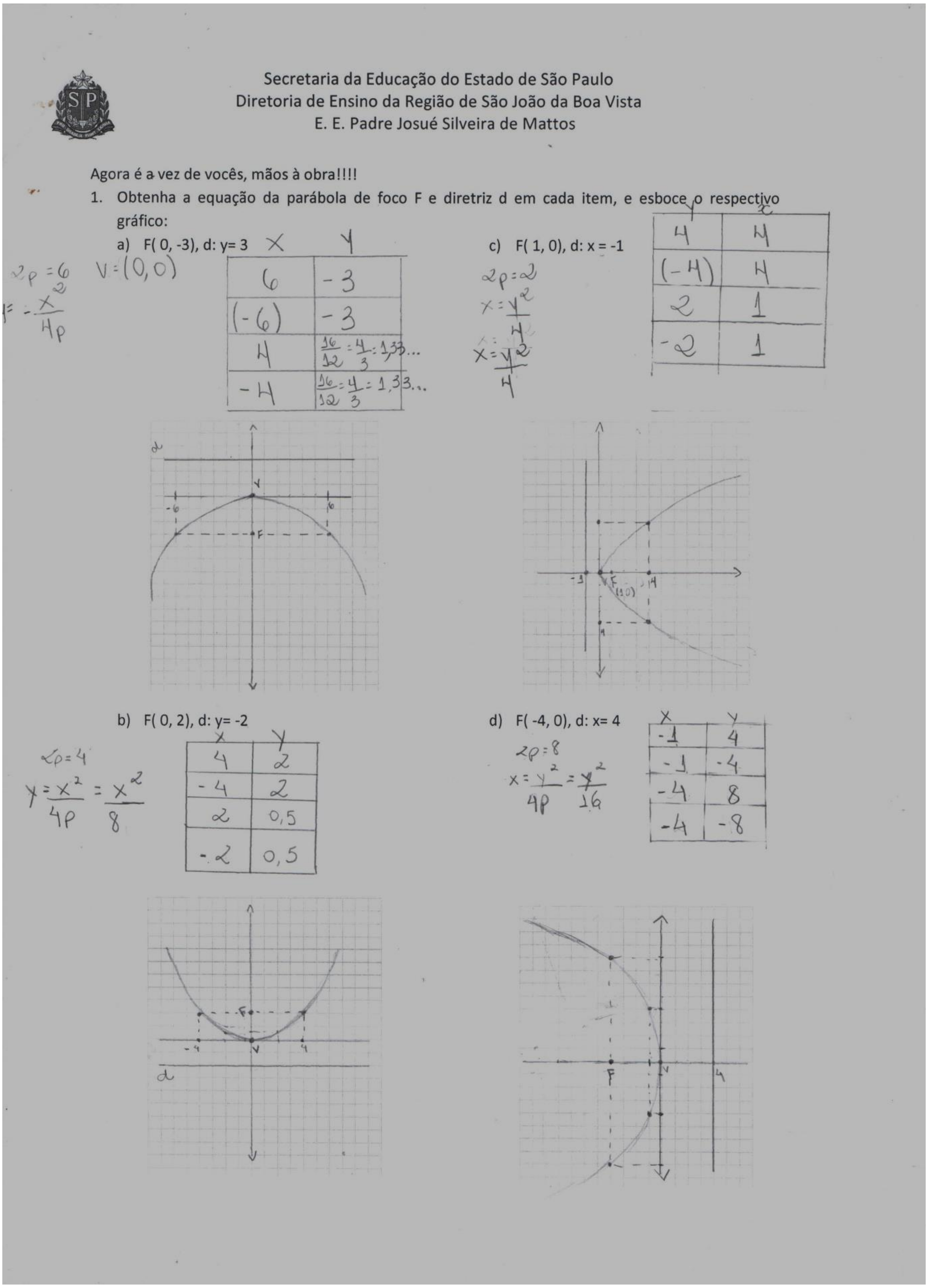
Houve necessidade da intervenção do professor, os alunos tiveram dificuldade de realizar a transcrição da língua materna para a linguagem matemática e principalmente na manipulação algébrica.

As Figuras 35, 36 e 37 a seguir apresentam a resolução da atividade de um grupo.

---

[15] Apêndice p. 118.

Figura 35 – A parábola (A)



Secretaria da Educação do Estado de São Paulo
Diretoria de Ensino da Região de São João da Boa Vista
E. E. Padre Josué Silveira de Mattos

Agora é a vez de vocês, mãos à obra!!!!

1. Obtenha a equação da parábola de foco F e diretriz d em cada item, e esboce o respectivo gráfico:

a) F(0, -3), d: y= 3

$2p = 6$ $V = (0,0)$

$y = -\frac{x^2}{4p}$

x	y
6	-3
(-6)	-3
4	$\frac{16}{12} = \frac{4}{3} = 1,33...$
-4	$\frac{16}{12} = \frac{4}{3} = 1,33...$

c) F(1, 0), d: x = -1

$2p = 2$

$x = \frac{y^2}{4}$

y	x
4	4
(-4)	4
2	1
-2	1

b) F(0, 2), d: y= -2

$2p = 4$

$y = \frac{x^2}{4p} = \frac{x^2}{8}$

x	y
4	2
-4	2
2	0,5
-2	0,5

d) F(-4, 0), d: x= 4

$2p = 8$

$x = \frac{y^2}{4p} = \frac{y^2}{16}$

x	y
-1	4
-1	-4
-4	8
-4	-8

Fonte: Arquivo da autora.

Figura 36 – A parábola (B)

Secretaria da Educação do Estado de São Paulo
Diretoria de Ensino da Região de São João da Boa Vista
E. E. Padre Josué Silveira de Mattos

2. Vamos pensar agora numa parábola cuja diretriz seja paralela ao eixo das abscissas (eixo x) e cujo vértice não esteja na origem do sistema cartesiano OXY, contudo pertença ao eixo das abscissas. Tomemos, por exemplo, a parábola de diretriz d: y = -2 e vértice V=(4,0)

2.1 A concavidade da parábola está voltada para cima ou para baixo? para cima

Por quê? porque a diretriz está abaixo do vértice

2.2 Qual a distância da reta diretriz ao vértice da parábola? 2 unidades

2.3 Qual é o parâmetro (2p) desta parábola? 4

2.4 Quais são as coordenadas do foco F da parábola? (4, 2)

2.5 Qual a reta focal desta parábola? $x = 4$

2.6 Para que o ponto P=(x,y) pertença a parábola o que devemos garantir? Utilize uma sentença matemática.

$d(P,F) = d(P,d)$

2.7 Desenvolva a sentença obtida acima, de modo a obter o valor de y em função do valor de x.

$d(FP) = \sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}$

$d_{PP'} = \sqrt{(x-x)^2+(y-(-2))^2} = \sqrt{(y+2)^2}$

$d_{FP} = d_{PP'}\ \cancel{\sqrt{}}(x-4)^2+(y-2)^2 = \cancel{\sqrt{}}(y+2)^2$

$(x-4)^2+(y-2)^2 = (y+2)^2$

$(x-4)^2+\cancel{y^2}-4y+4 = \cancel{y^2}+4y+4$

$(x-4)^2-8y = 0 \qquad y = \frac{(x-4)^2}{8}$

3. Seja a parábola $\mathscr{P}$, de vértice V= (4,1) e reta diretriz d: y = -2.

3.1 Quais as coordenadas cartesianas do ponto V' projeção de V sobre a reta diretriz d? (4, -2)

3.2 Qual a distância do ponto V ao ponto V'? 3 unidades

3.3 Qual é a reta focal desta parábola? $x = 4$

3.4 Qual é a distância de V, vértice da parábola, ao foco F da parábola? 3

3.5 Quais as coordenadas cartesianas do ponto F, foco da parábola? (4, 4)

3.6 Tomando um ponto genérico P = (x,y), de modo que P pertença a parábola $\mathscr{P}$, determine a equação de matemática.

$d(P,F) = d(P,P')$

$\sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2} = \sqrt{(x-y)^2+(y-(-2))^2}$

$(x-4)^2+(y-4)^2 = (y+2)^2$

$(x-4)^2+\cancel{y^2}-8y+16 = \cancel{y^2}+4y+4$

$(x-4)^2 = 4y+8y+4-16$

$(x-4)^2 = 12y-12$

$12(y-1) = (x-4)^2$

$(y-1) = \frac{(x-4)^2}{12}$

Fonte: Arquivo da autora.

Figura 37 – A parábola (C)

Secretaria da Educação do Estado de São Paulo
Diretoria de Ensino da Região de São João da Boa Vista
E. E. Padre Josué Silveira de Mattos

4. Note que nos exercícios anteriores temos que os vértices das parábolas não estão na origem do sistema cartesiano, observe dos dados de cada uma:

4.1) No exercício 2 temos que: V = (4,0) e 2p=4, e obtivemos a equação: $y = \frac{(x-4)^2}{8}$

4.2) No exercício 3 temos que: V = (4,1) e 2p=6, e obtivemos a equação: $\boldsymbol{y - 1} = \frac{(x-4)^2}{\mathbf{12}}$

Fazendo V = (x_0, y_0) e utilizando o parâmetro da parábola como podemos reescrever estas equações de modo geral? $y - y_0 = \frac{\pm(x - x_0)^2}{4p}$ sendo $V = (x_0, y_0)$ e $2p$ = parâmetro

De modo geral se a reta diretriz da parábola é paralela a um dos eixos cartesianos como serão descritas suas equações se:

i) Se a reta diretriz da parábola for paralela ao eixo das abscissas: $y - y_0 = \frac{(x - x_0)}{4p}$

a) Se a concavidade da parábola estiver voltada para cima teremos:

b) Se a concavidade da parábola estiver voltada para baixo teremos: $y - y_0 = -\frac{(x - x_0)^2}{4p}$

iii) Se a reta diretriz da parábola for paralela ao eixo das ordenas: $x - x_0 = \frac{(y - y_0)^2}{4p}$

a) Se a concavidade da parábola estiver voltada para direita teremos:

b) Se a concavidade da parábola estiver voltada para esquerda teremos: $x - x_0 = -\frac{(y - y_0)^2}{4p}$

Avaliação da atividade:

Houve dificuldade(s) para realizar as atividades propostas: (X) Sim ( ) Não

Se houve, pontuem quais? No desenvolvimento da algebra

Como a equipe avalia as atividades desenvolvidas? difícil

Conclusões da equipe: Aprendemos mais sobre parábolas.

Fonte: Arquivo da autora.

Durante o desenvolvimento da atividade pode-se observar que os termos: reta diretriz, foco, vértice e reta focal, foram apropriados pelos alunos com entendimento, assim como a propriedade que caracteriza a representação gráfica de uma função do segundo grau, a parábola.

Contudo, os alunos apresentaram dificuldade em trabalhar algebricamente a igualdade da distância de um ponto qualquer pertencente à parábola ao foco e daquele à reta diretriz.

Tempo de realização da atividade: quatro aulas, sendo duas aulas duplas (consecutivas).

Todas as equipes que responderam a avaliação informaram que tiveram dificuldade no desenvolvimento da atividade, quanto ao grau de dificuldade os alunos classificaram a atividade de mediana a difícil e pontuaram como dificuldade: “desenvoltura das contas” e “desenvolvimento da álgebra”, ao final, concluíram: “sem fórmulas dificulta a desenvoltura dos exercícios”, “ganhamos um conhecimento extenso” e “aprendemos mais sobre parábolas”.

Embora a dificuldade dos alunos em desenvolver a atividade foi grande, o avanço dos mesmos também o foi, por isso o resultado da atividade foi considerado satisfatório.

v) Atividade: Os coeficientes a, b e c de uma função quadrática.[16]

Objetivos da atividade:

O objetivo desta atividade é propiciar ao aluno a análise do comportamento do gráfico de uma função quadrática, $f : \Re \rightarrow \Re$, com reta diretriz paralela ao eixo das abscissas, definida $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando são alterados os valores dos coeficientes *a, b* e *c*.

Deseja-se aumentar a autonomia dos alunos no desenvolvimento das atividades, segundo momento pontuado por Almeida e Vertuam (2011) para atividades de Modelagem Matemática em sala de aula, uma vez que, a essa altura os alunos já se familiarizaram com estes tipos de atividades e possuem um domínio maior do programa de geometria dinâmica GeoGebra.

[16] Apêndice p. 123, 124 e 125.

Materiais usados: Computador, software GeoGebra, folhas com descrições das atividades a serem realizadas.

Procedimentos:

Para o desenvolvimento da atividade utilizou-se as ferramentas mover e o controle deslizante do software GeoGebra, variando os valores dos coeficientes no intervalo real [-5, 5], incremento de 0,1.

Os coeficientes foram analisados individualmente e cada grupo de aluno deveria buscar a modelagem matemática associada a cada coeficiente, num processo de investigação e observação.

- **Coeficiente "a"**

Objetivos da atividade:

Associar o coeficiente "*a*" à convexidade da parábola. Verificar o que ocorre com a função de segundo grau quando a = 0. Identificar a característica da curva quando a > 0, a < 0, justificando o modelo encontrado.

Procedimentos:

A atividade foi desenvolvida no GeoGebra utilizando as ferramentas mover e o controle deslizante com $a \in [-5,5] \subset \Re$, com incremento igual a 0,1, sendo digitado na caixa de entrada a equação: $y = ax^2$.

O coeficiente *a*, para esta cônica, está associado à concavidade da curva (parábola). Notou-se que os alunos utilizaram o termo "inclinação" para expor suas ideias sobre a concavidade da parábola.

Os questionamentos realizados levaram os alunos a observarem o que ocorre com o formato da curva quando o valor absoluto do coeficiente *a* aumenta ou diminui, quando ele tende a zero, e quando é zero.

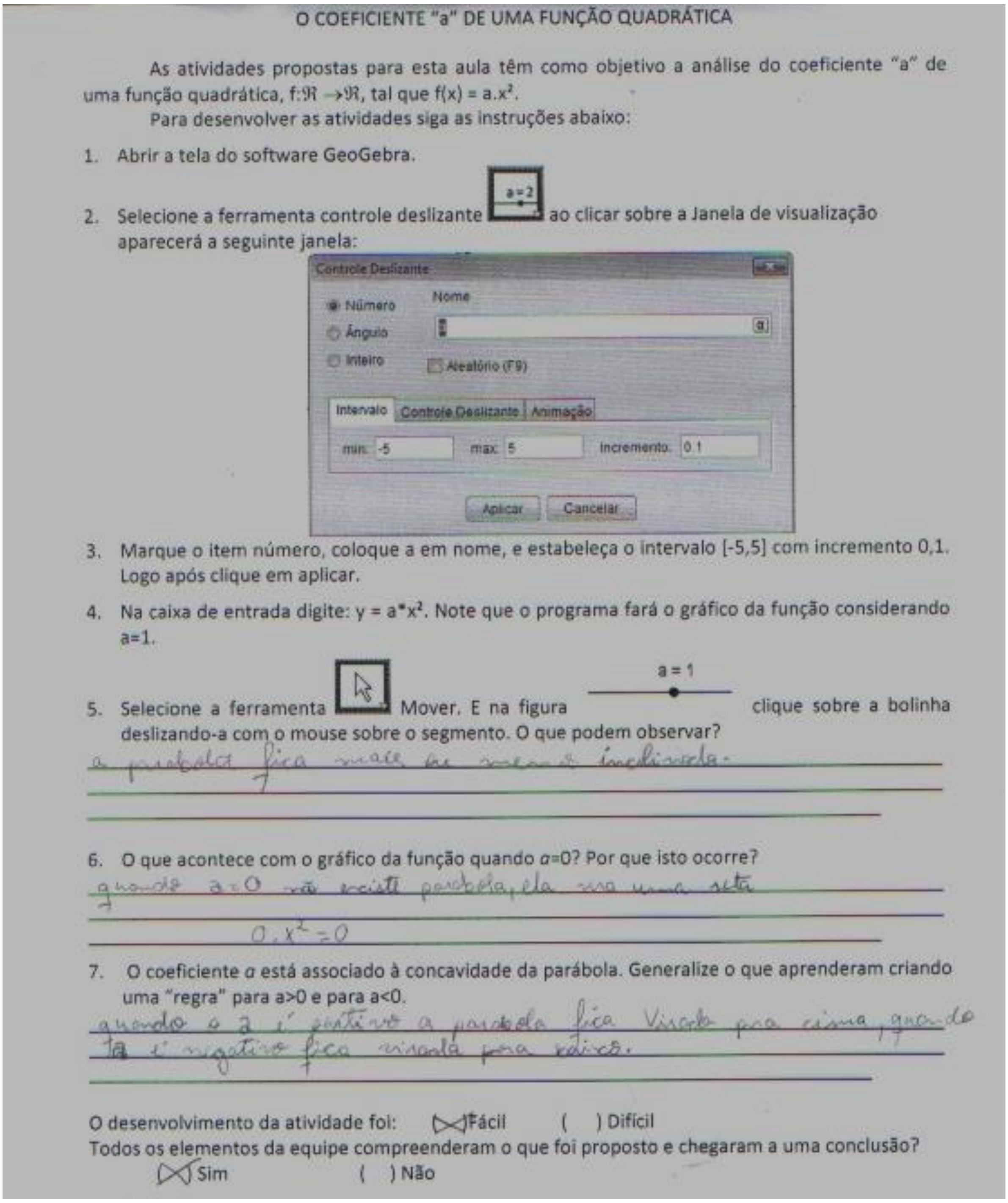
Foi solicitado aos alunos que observassem também a característica da parábola para $a > 0$ e para $a < 0$, e as conclusões apresentadas pelos alunos são dadas em respostas simples e assertivas.

Deixou-se de solicitar por escrito a justificativa para o modelo encontrado, por isso, no momento realizaram-se questionamentos verbais que provocassem os alunos, fazendo-os buscar justificativas, levando-os a concluírem que $y > 0$, se e somente se $a > 0$

para qualquer valor de $x \neq 0$, e $y < 0$, se e somente se $a < 0$ para qualquer valor de $x \neq 0$, com a, y e x pertencentes ao conjunto dos números reais, uma vez que $x^2 > 0$ ($x \neq 0$ e $x \in \Re$).

A Figura 38 apresenta o desenvolvimento da atividade por uma dupla de alunos.

Figura 38– O Coeficiente "*a*" da parábola.



O COEFICIENTE "a" DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

As atividades propostas para esta aula têm como objetivo a análise do coeficiente "a" de uma função quadrática, $f: \Re \to \Re$, tal que $f(x) = a.x^2$.

Para desenvolver as atividades siga as instruções abaixo:

1. Abrir a tela do software GeoGebra.
2. Selecione a ferramenta controle deslizante ao clicar sobre a Janela de visualização aparecerá a seguinte janela:

Controle Deslizante
Número
Ângulo
Inteiro
Nome
Aleatório (F9)
Intervalo | Controle Deslizante | Animação
min: -5 max: 5 Incremento: 0.1
Aplicar Cancelar

3. Marque o item número, coloque a em nome, e estabeleça o intervalo [-5,5] com incremento 0,1. Logo após clique em aplicar.
4. Na caixa de entrada digite: $y = a*x^2$. Note que o programa fará o gráfico da função considerando a=1.
5. Selecione a ferramenta Mover. E na figura a = 1 clique sobre a bolinha deslizando-a com o mouse sobre o segmento. O que podem observar?

a parábola fica mais ou menos inclinada.

6. O que acontece com o gráfico da função quando *a*=0? Por que isto ocorre?

quando a=0 não existe parábola, ela vira uma reta

$0.x^2=0$

7. O coeficiente *a* está associado à concavidade da parábola. Generalize o que aprenderam criando uma "regra" para a>0 e para a<0.

quando o a é positivo a parábola fica virada pra cima, quando ~~ta~~ é negativo fica virada para baixo.

O desenvolvimento da atividade foi: (X) Fácil ( ) Difícil

Todos os elementos da equipe compreenderam o que foi proposto e chegaram a uma conclusão?

(X) Sim ( ) Não

Fonte: Arquivo da autora

Os alunos não tiveram dificuldade em desenvolver a atividade, compreenderam o que foi proposto e chegaram à conclusão esperada. Alguns alunos se recordavam das características da curva quando o coeficiente *a* é positivo e quando coeficiente *a* é negativo.

Esta parte da atividade atingiu os objetivos propostos, contudo deve-se completá-la de modo que os alunos percebam que, neste caso, y é maior ou menor que zero, depende somente do valor *a*.

- **Coeficiente "*c*"**

Objetivos da atividade:

Associar o coeficiente "*c*" ao movimento de translação vertical do gráfico da função polinomial de segundo grau $f(x) = ax^2 + c$, com $a = 1$, $c \in [-5,5] \subset \Re$.

Procedimentos:

Para o estudo do coeficiente "*c*" da parábola solicitou-se que os alunos digitassem na caixa de entrada do software GeoGebra a sentença $y = x^2 + c$. Fixando portanto, neste caso, $a = 1$, $b = 0$, e atribuindo valores para *c,* tais que $c \in [-5,5] \subset \Re$, utilizando o controle deslizante com incremento de 0,1.

Os alunos logo associaram a alteração dos valores do coeficiente "*c*" ao "movimento vertical" do gráfico da função, pontuaram que ao alterarem o valor do coeficiente *c "a parábola faz um movimento de sobe e desce"* conforme figura 24.

Na sexta questão há uma afirmação, na qual, pontua-se que o coeficiente "*c"* indica o local onde a curva intercepta o eixo das ordenadas e a seguir pede-se aos alunos que justifiquem o fato.

A princípio, os alunos ficaram reticentes, algumas inferências foram realizadas. Um aluno concluiu, houve trocas de informações e todos atingiram o objetivo da questão proposta. O item da atividade mais discutido em sala de aula foi o número 7, que solicitava o número de raízes da função quando $c = 0$, $c > 0$ e $c < 0$, e $a = 1$, com $c \in \Re$.

Os alunos foram receptivos a atividade proposta e a desenvolveram com pouco auxilio do professor. Deste modo, os objetivos propostos foram todos alcançados.

Ao final os alunos foram unânimes respondendo sim à pergunta: Todos os elementos da equipe compreenderam o que foi proposto e chegaram à conclusão. Desde modo os objetivos propostos foram alcançados.

A figura a seguir mostra o desenvolvimento da atividade por um grupo de alunos.

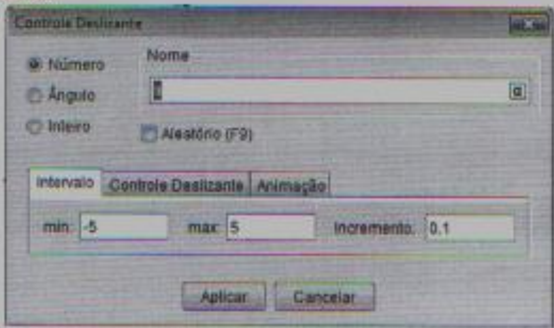
Figura 39 - O Coeficiente “*c*” da parábola.

O COEFICIENTE “c” DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

As atividades propostas para esta aula têm como objetivo a análise do coeficiente “c” de uma função quadrática, $f:\Re \rightarrow \Re$, tal que $f(x) = x^2+c$.

Para desenvolver as atividades siga as instruções abaixo:

1. Abrir a tela do software GeoGebra.
2. Selecione a ferramenta controle deslizante a=2 ao clicar sobre a Janela de visualização aparecerá a seguinte janela:



3. Marque o item número, coloque c em nome, e estabeleça o intervalo [-5,5] com incremento 0,1. Logo após clique em aplicar.
4. Na caixa de entrada digite: $y = x^2 + c$. Note que o programa fará o gráfico da função considerando c=1.
5. Selecione a ferramenta Mover. E na figura c = 1 clique sobre a bolinha deslizando-a com o mouse sobre o segmento. O que podem observar?

   a parábola fez um movimento de sobe e desce.

6. Dizemos que o coeficiente c indica onde a curva intercepta o eixo das ordenadas, isto é, a parábola intercepta o eixo y no ponto P = (0,c). Por que isto ocorre?

   pôr no eixo y e x=0

7. Quando c=0 onde está localizado o vértice da parábola? Nesta função quantas raízes reais a função possui quando c>0? E quando c<0?

   Na origem do sistema, nenhuma vez, não tem nenhuma raiz, se ele é negativo vai cortar 2 vezes o eixo X.

O desenvolvimento da atividade foi: (X) Fácil ( ) Difícil

Todos os elementos da equipe compreenderam o que foi proposto e chegaram a uma conclusão?

(X) Sim ( ) Não

Fonte: Arquivo da autora.

- **Coeficiente “b”**

Objetivos da atividade:

Analisar o movimento do gráfico da função polinomial do segundo grau, de equação $y = x^2 + bx$, com y, x e *b* reais, e $b \in [-5, 5]$, variando-se os valores do coeficiente “*b*” e verificar o comportamento da curva quando esta intercepta o eixo das ordenadas.

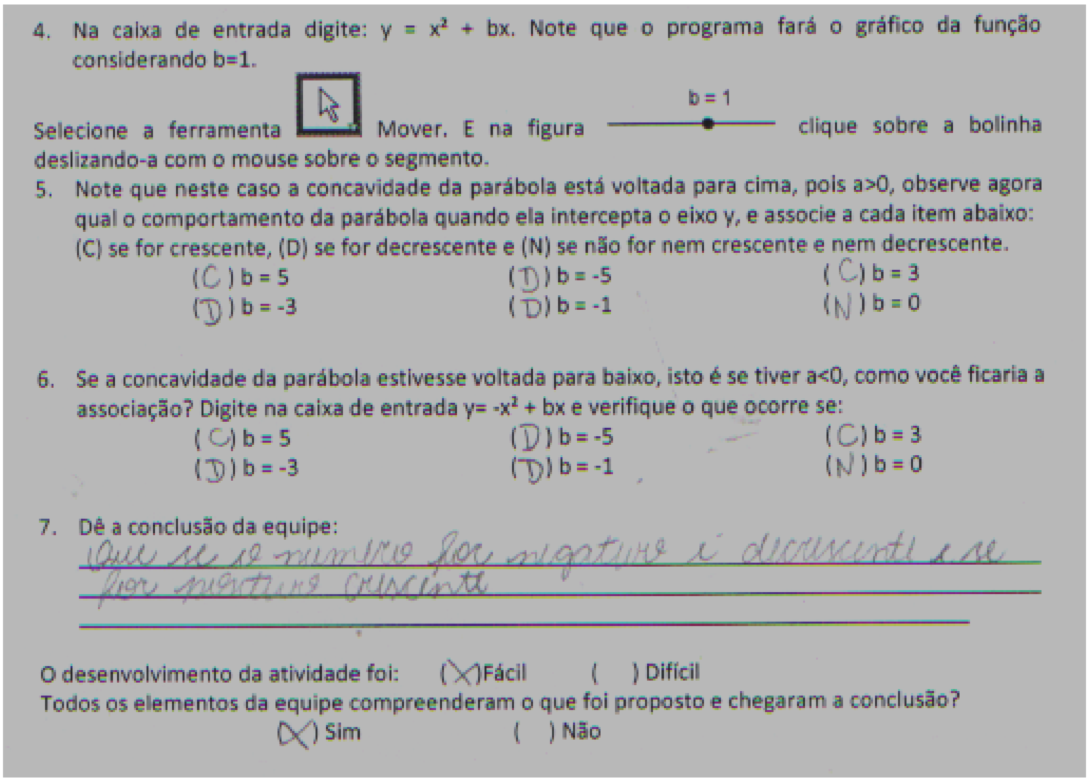
Procedimentos:

O gráfico da função polinomial real, $f(x) = x^2 + bx$, com $b \in [-5, 5]$ e incremento 0,1 foi objeto de estudo nesta atividade, que propõe aos alunos, num processo de investigação e observação, identificar regularidades associando a alteração dos valores do coeficiente *b* com a representação gráfica da função.

Os alunos apresentaram muita habilidade em utilizar os comandos do software GeoGebra solicitados. Pontuaram verbalmente o movimento que o gráfico realiza quando o valor do coeficiente *b* é alterado utilizando a ferramenta controle deslizante.

Os itens 5 e 6 da atividade que solicitavam a associação do comportamento da parábola no ponto de interseção da mesma com o eixo das ordenadas ao valor numérico de *b* mereceram maior atenção para a compreensão do solicitado e conclusão da equipe. A figura a seguir apresenta o desenvolvimento da parte final da atividade e a conclusão de uma equipe.

Figura 40 - O Coeficiente “*b*” da parábola



4. Na caixa de entrada digite: $y = x^2 + bx$. Note que o programa fará o gráfico da função considerando b=1.

Selecione a ferramenta Mover. E na figura b = 1 clique sobre a bolinha deslizando-a com o mouse sobre o segmento.

5. Note que neste caso a concavidade da parábola está voltada para cima, pois a>0, observe agora qual o comportamento da parábola quando ela intercepta o eixo y, e associe a cada item abaixo: (C) se for crescente, (D) se for decrescente e (N) se não for nem crescente e nem decrescente.

(C) b = 5 (D) b = -5 (C) b = 3
(D) b = -3 (D) b = -1 (N) b = 0

6. Se a concavidade da parábola estivesse voltada para baixo, isto é se tiver a<0, como você ficaria a associação? Digite na caixa de entrada $y = -x^2 + bx$ e verifique o que ocorre se:

(C) b = 5 (D) b = -5 (C) b = 3
(D) b = -3 (D) b = -1 (N) b = 0

7. Dê a conclusão da equipe:

Que se o numero for negativo é decrescente e se for positivo crescente

O desenvolvimento da atividade foi: (X) Fácil ( ) Difícil

Todos os elementos da equipe compreenderam o que foi proposto e chegaram a conclusão?

(X) Sim ( ) Não

Fonte: Arquivo da autora.

Giraldo, Caetano e Mattos (2013) apresentam como caminho para encontrar a resolução analítica do problema, o estudo analítico do lugar geométrico do percurso da função através das coordenadas do vértice de uma parábola.

Para maior entendimento do caminho proposto, transcreve-se a seguir o desenvolvimento realizado para encontrar a equação do lugar geométrico da família de parábolas $y = 2x^2 + bx + 3$:

> Para determinar analiticamente a equação deste lugar geométrico, devemos empregar as fórmulas de coordenadas do vértice da parábola:
>
> $$x_v = -\frac{b}{2a} \;\; e \;\; y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$
>
> Portanto, no caso da nossa família de parábolas, temos:
>
> $$x_v = -\frac{b}{4} \; e \; y_v = -\frac{b^2 - 24}{8} = -\frac{b^2}{8} + 3.$$
>
> Logo:
>
> $$y_v = -2x_v^2 + 3$$
>
> (GIRALDO; CAETANO; MATTOS, 2013, p. 71)

Deixa-se como sugestão o enriquecimento desta atividade com as orientações transcritas do autor, na ocorrência da aplicação não foi utilizada, pois um dos objetivos desta é buscar a autonomia do aluno no desenvolvimento da atividade e a sua inclusão foi considerada inviável devido às dificuldades que os alunos possuíam em trabalhar algebricamente.

Tempo de realização da atividade: duas aulas consecutivas.

Os objetivos da atividade foram atingidos pelos alunos, tanto o de busca de regularidades, associando os coeficientes da função à sua representação gráfica, como os de autonomia dos alunos. Percebeu-se que os alunos desenvolveram as atividades propostas cada vez mais independentes sem o auxílio do professor.

vi) ATIVIDADE: A função quadrática e seus coeficientes[17]

Objetivos da atividade:

Observar o gráfico da função polinomial $f(x) = ax^2 + bx + c$, com coeficientes a, b e c $\in [-5,5] \subset \Re$ através do programa de geometria dinâmica GeoGebra, utilizando as

[17] Apêndice p. 126.

ferramentas controle deslizante e animar, variando os coeficientes no intervalo dado, associando esses valores as características visualizadas no gráfico.

Materiais usados: Computador, software GeoGebra, folha com descrições das atividades a serem realizadas.

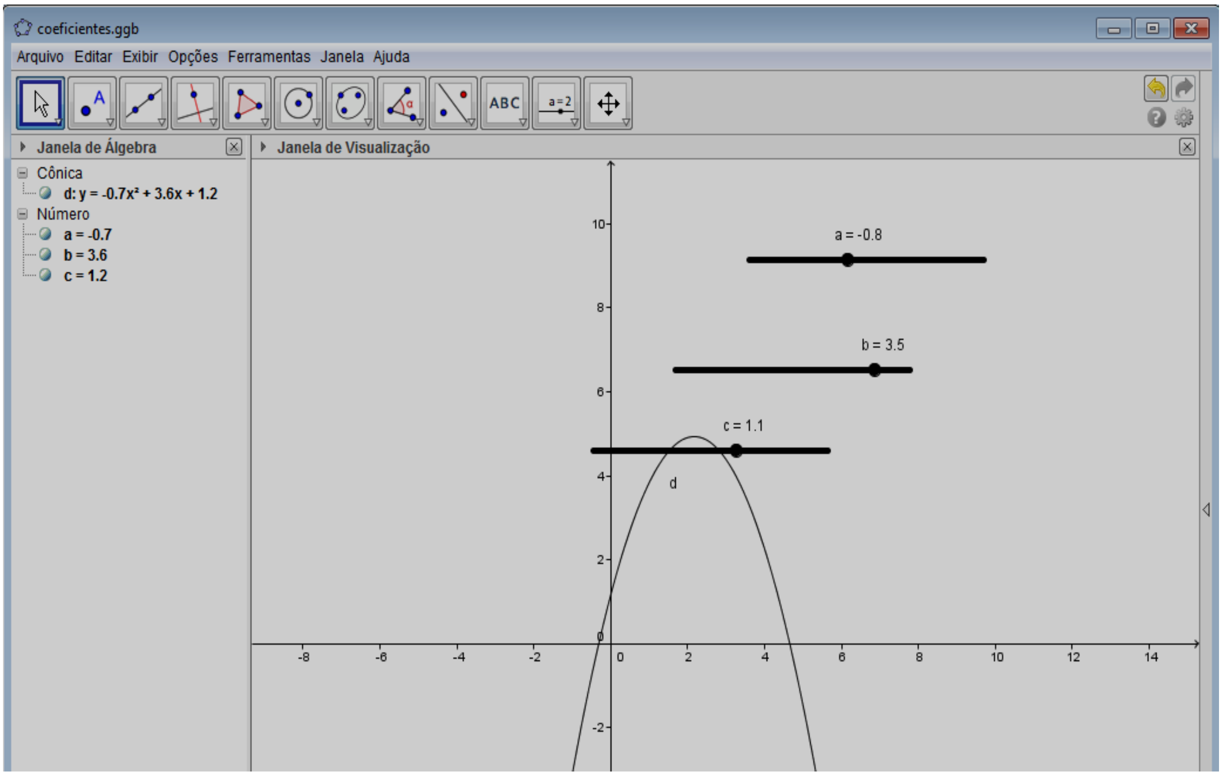
Procedimentos:

Nesta atividade os coeficientes *a*, *b* e $c \in \Re$, onde $\Re$ é o conjunto dos números reais, de uma função polinomial $f(x) = ax^2 + bx + c$ são observados simultaneamente a partir das conclusões obtidas nas atividades anteriores. Utilizou-se no software Geogebra a ferramenta controle deslizante, já utilizada anteriormente, nos coeficientes *a*, *b* e *c*, os alunos foram convidados a aplicarem sobre cada coeficiente a função animar e verificarem se as conclusões obtidas nas aulas anteriores estão corretas, quando esta função é utilizada.

Os alunos consideraram a atividade fácil, demonstraram ter habilidades no manuseio do software GeoGebra e não pontuaram nenhuma dificuldade em identificar a característica da parábola através de seu coeficientes.

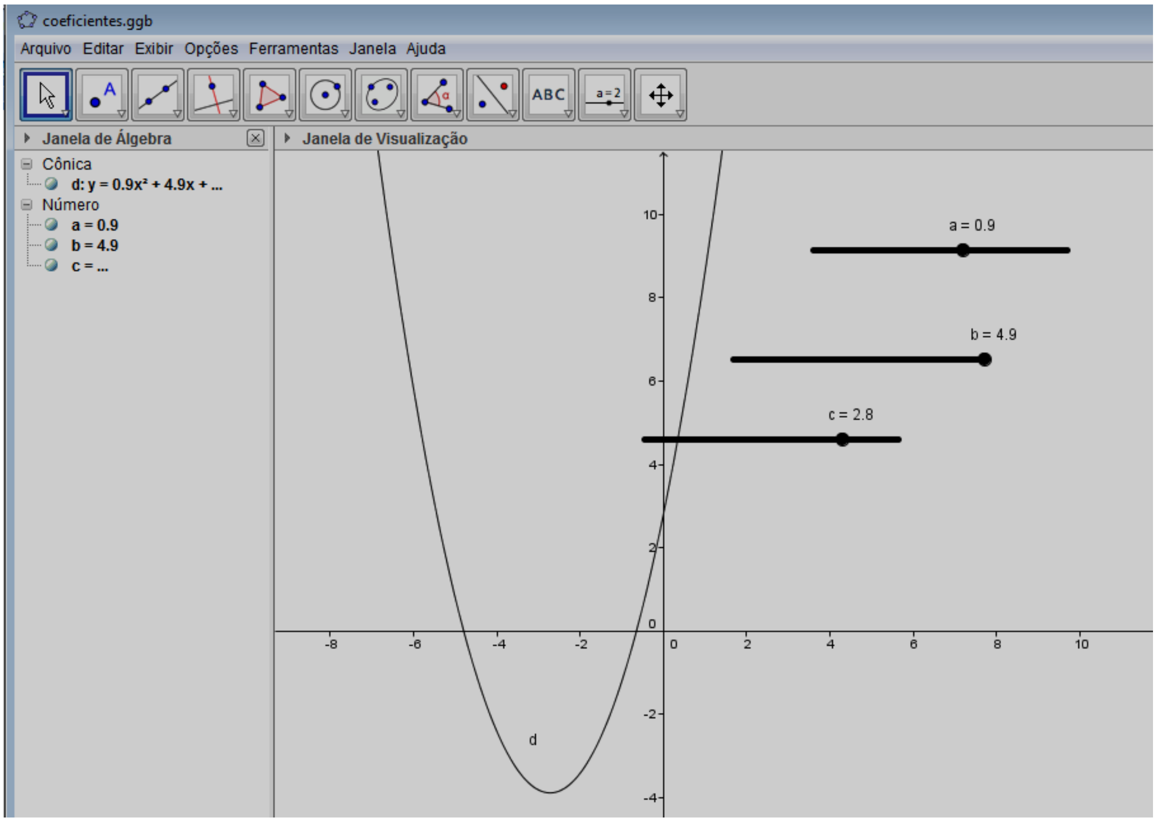
As figuras a seguir apresentam três momentos da animação do programa realizado no desenvolvimento da atividade.

Figura 41 – A função quadrática e seus elementos (A)



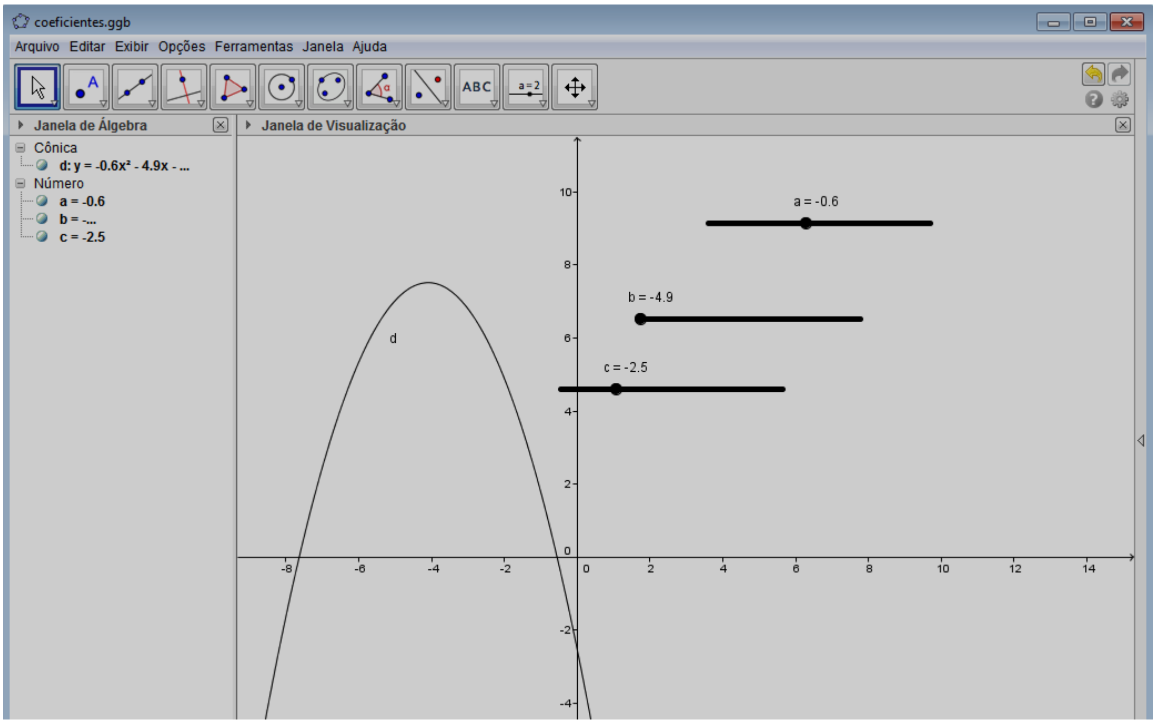
Fonte: Arquivo da autora.

Figura 42 – A função quadrática e seus elementos (B)



Fonte: Arquivo da autora.

Figura 43 – A função quadrática e seus elementos (C)



Fonte: Arquivo da autora.

Tempo de realização da atividade: uma aula

Os objetivos propostos para esta atividade foram plenamente atingidos, os alunos desenvolveram as atividades sem auxílio do professor.

3.1.4 Atividades: A parábola e o cotidiano.

Essas atividades têm por objetivo abordar a aplicação das parábolas no cotidiano. Num primeiro momento foi realizada uma sondagem sobre tópicos de utilidade das parábolas sobre os quais os alunos possuíam interesse em estudar. Desta pesquisa surgiu o interesse do desenvolvimento de atividades sobre a distância de freagem de veículos, de autoria do Professor Doutor Roberto Ribeiro Paterlini, do DM – UFSCar. Explorou-se na sala de multimídia da escola vídeos sobre as aplicações da parábola, como o produzido pela Associação Portuguesa de Matemática, "Parabólicas, Castanhas e Orelhas Grandes", e outros dois vídeos disponíveis na internet. Além do objetivo de desenvolver a autonomia do educando, terceiro momento da Modelagem em sala de aula, onde os alunos buscam desenvolver as atividades com poucas inferências do professor.

i) Atividade: Sobre a distância de freagem de veículos

Objetivos da atividade:

Trabalhar uma situação problema não essencialmente matemática associada ao cotidiano do aluno que apresente para o mesmo uma utilidade da matemática.

Materiais usados: Folha com descrições das atividades a serem realizadas, caderno, lápis, borracha, régua.

Procedimentos:

Dentre os temas do cotidiano dos alunos que poderiam ser desenvolvido utilizando funções do segundo grau, o tema escolhido por eles foi o cálculo da distância percorrida por um veículo após o motorista ter acionado o freio.

A atividade aplicada pertence à Aula sugerida no Hipertexto Pitágoras[18] de autoria do Prof. Dr. Roberto Ribeiro Paterlini, do DM – UFSCar. A atividade apresenta um modelo matemático para o cálculo da distância de freagem de veículos.

[18]Disponível em: http://www.dm.ufscar.br/hp/hp202/hp2021/hp2021001/hp2021001.html, Acesso em 01/11/2014

A seguir o desenvolvimento da atividade realizado por grupo de estudantes (Figuras 44, 45 e 46).

Figura 44 – Sobre a distância de freagem (A)

SOBRE A DISTÂNCIA DE FREAGEM DE VEICULOS

Roberto Ribeiro Paterlini*

Um veículo em movimento, ao ser freado pelo motorista, percorre uma certa distância até parar. À distância percorrida pelo veículo nestas circunstâncias chamamos de *distância de freagem*. Um guarda rodoviário utiliza a seguinte regra para determinar a distância de freagem: ***elevar a velocidade ao quadrado e dividir o resultado por 100.*** Nesta regra, a velocidade é dada em km/h e a distância, em metros.

Problema 1: Usando a regra do guarda rodoviário, calcule a distância de freagem de um carro que está a:

a) 40 km/h $\frac{40^2}{100} = \frac{1600}{100} = 16\ m$

b) 80 km/h $\frac{80^2}{100} = \frac{6400}{100} = 64\ m$

Vemos que 80 km/h é o dobro de 40 km/h. Vale o mesmo para as distâncias correspondentes?

Não, pois 64 é o quadruplo de 16

Problema 2: Usando ainda a regra do guarda rodoviário, complete a tabela abaixo, onde v é a velocidade e d a distância de freagem. Plote os resultados no gráfico.

v	20	40	60	80	100	120
d	4	16	36	64	100	144

A regra do guarda rodoviário pode ser traduzida como uma função $d\ (v)$ à velocidade.

Complete a fórmula desta função:

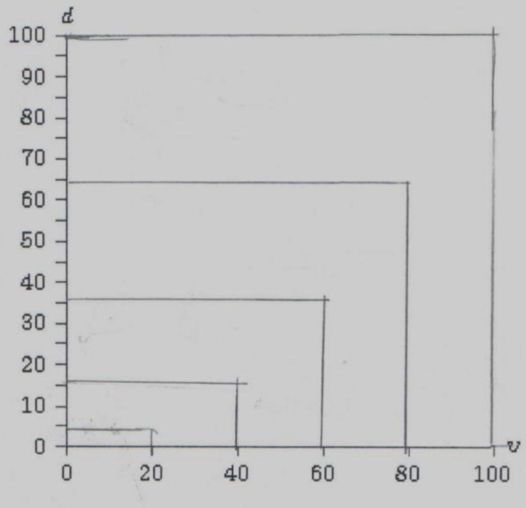
$d = \frac{v^2}{100}$

$d(v) =$

$\frac{60^2}{100} = 36\ m$

$\frac{100^2}{100} = 100\ m$

$\frac{120^2}{100} = 144\ m$



Fonte: Arquivo da autora.

Figura 45 – Sobre a distância de freagem (B)

Secretaria da Educação do Estado de São Paulo
Diretoria de Ensino da Região de São João da Boa Vista
E. E. Padre Josué Silveira de Mattos

Problema 3: Observe a seguinte tabela de freagem de um veículo de uma certa marca, divulgada por uma revista especializada:

v	40	60	80	100
d	8,2	18,1	31,8	50,3

a) Aumente a tabela calculando outros valores.

$d = \frac{20^2}{198,515} = \frac{400}{198,515} = 2,02$

$d = \frac{120^2}{198,515} = \frac{14400}{198,515} = 72,5$

v	20	40	60	80	100	120
d	2,02	8,2	18,1	31,8	50,3	72,5

$d = \frac{v^2}{K}$

$d_1 = \frac{40^2}{K} = 8,2 \Rightarrow$

$8,2K = 1600$

$K = \frac{1600}{8,2} \approx 195,12$

$K_1 = 195,12$
$K_2 = 198,89$
$K_3 = 201,25$
$K_4 = 198,80$

$\frac{794,06}{4} = 198,515$ → média

b) Supondo que a função $d\ (v)$ neste caso obedeça a uma regra do tipo $d = \frac{1}{k} v^2$, encontre um valor k que corresponda aproximadamente aos dados da tabela.

c) Comparando estes resultados com a regra do guarda rodoviário, você pode imaginar as razões pelas quais a regra do guarda considera distâncias duplicadas em relação a um teste profissional?

Das condicoes do freio do carro, pois a guarda precisa ter a dobro de segurança para não causar acidente.

Problema 4: Uma indústria montadora de automóveis está substituindo um modelo já superado por outro que incorpora inovações técnicas. O novo modelo traz um sistema de freios computadorizado que permite um freamento muito mais eficiente. Supondo que as distâncias de freagem nos dois modelos obedeçam às equações $d_1 = \frac{1}{k_1} v^2$ e $d_2 = \frac{1}{k_2} v^2$ (modelos antigo e novo, respectivamente), assinale a resposta verdadeira:

■ $k_1 < k_2$ ☐ $k_1 = k_2$ ☐ $k_1 > k_2$

Fonte: Arquivo da autora.

Figura 46 – Sobre a distância de freagem de veículos (C).

Secretaria da Educação do Estado de São Paulo
Diretoria de Ensino da Região de São João da Boa Vista
E. E. Padre Josué Silveira de Mattos

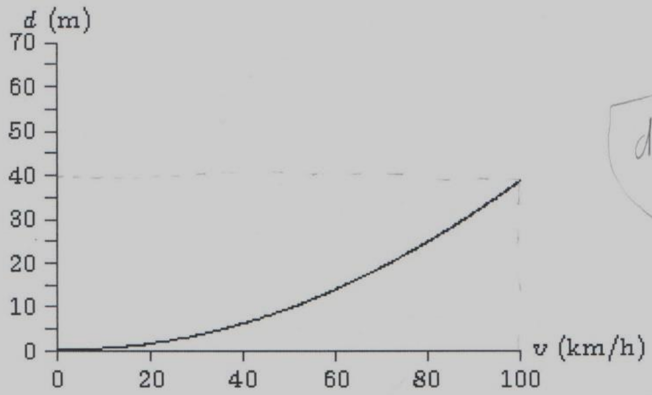
Problema 5: O gráfico abaixo fornece as distâncias de freagem de um certo veículo. Admitindo que a função neste caso é do tipo $d = \frac{1}{k} v^2$, encontre um valor $d\ (v)$ que corresponda aproximadamente aos dados do gráfico.

$d = \frac{1}{k} \cdot v^2 \rightarrow 40 = \frac{1}{k} \cdot 100^2 \rightarrow 40k = 10000$

$k = \frac{10000}{40}$

$k = 250$

$d = \frac{v^2}{250}$



Atividade Complementar:

Consulte seu professor de Física para obter uma justificativa para a regra

distância de freagem $= \boldsymbol{constante} \times \boldsymbol{v^2}$

Sugestão: temos *energia cinética* $= \boldsymbol{mv^2/2}$.

Em situações ideais energia cinética$= f \times \boldsymbol{deslocamento}$, onde f onde é constante.

Avalie esta atividade:

Razoável, pois com as fórmulas ficam fáceis de resolver.

*Aula do Hipertexto Pitágoras, disponível em http://www.dm.ufscar.br/hp/hp202/hp2021/hp2021001/hp2021001.html, acesso em 01/11/2014.

Fonte: Arquivo da autora.

Tempo de realização da atividade: duas aulas consecutivas.

Pode-se observar durante a aplicação da atividade que o tema escolhido pela turma era realmente de interesse dos mesmos. Os alunos não se detiveram apenas no que foi solicitado, houve muita interação, alguns alunos pontuaram os tipos diferentes de freios existentes no mercado, assim como a eficiência de cada um.

A noção de proporcionalidade foi utilizada pela maioria dos alunos no desenvolvimento da atividade proposta, houve boa receptividade dos alunos às atividades propostas, e consideram o seu desenvolvimento fácil.

A atividade desenvolvida mostra que houve evolução dos alunos para a realização dos gráficos e cálculos quando comparados aos executados inicialmente pela turma.

ii) Atividade: Uso de vídeos sobre as parábolas[19]

Objetivos da atividade:

Esta atividade foi idealizada com a finalidade de motivar os alunos a desenvolverem uma atividade prática onde pudessem utilizar o que aprenderam. Outro objetivo da atividade é possibilitar uma introdução à abordagem histórica da matemática relacionada ao tema.

Materiais usados: Folha com descrições das atividades a serem realizadas, computador, projetor de imagens, acesso à internet.

Procedimentos:

Os alunos foram convidados a assistir o vídeo clipe “Parabólicas, Castanhas e Orelhas Grandes”[20] da Sociedade Portuguesa de Matemática, parte da série de programas “Isto é matemática”, que mostra diversas aplicações da matemática no cotidiano, apresentado pelo professor universitário Rogério Martins.

O vídeo clipe assistido exibe a utilidade da parábola e paraboloides para a sociedade, apresentando diversas aplicações em vários campos. De modo contextualizado o apresentador aborda neste vídeo clipe a reflexão e a captação de diversos tipos de ondas através de uma antena parabólica, isto é, um paraboloide.

[19] Apêndice p. 128.

[20] Disponível em: http://www.youtube.com/watch?v=X59mM76CL_g, Acesso em: 12 nov. 2014.

O vídeo clipe apresenta de modo lúdico o paraboloide e a lei da física: "o ângulo de incidência é igual do ângulo de reflexão" aplicada em uma superfície parabólica.

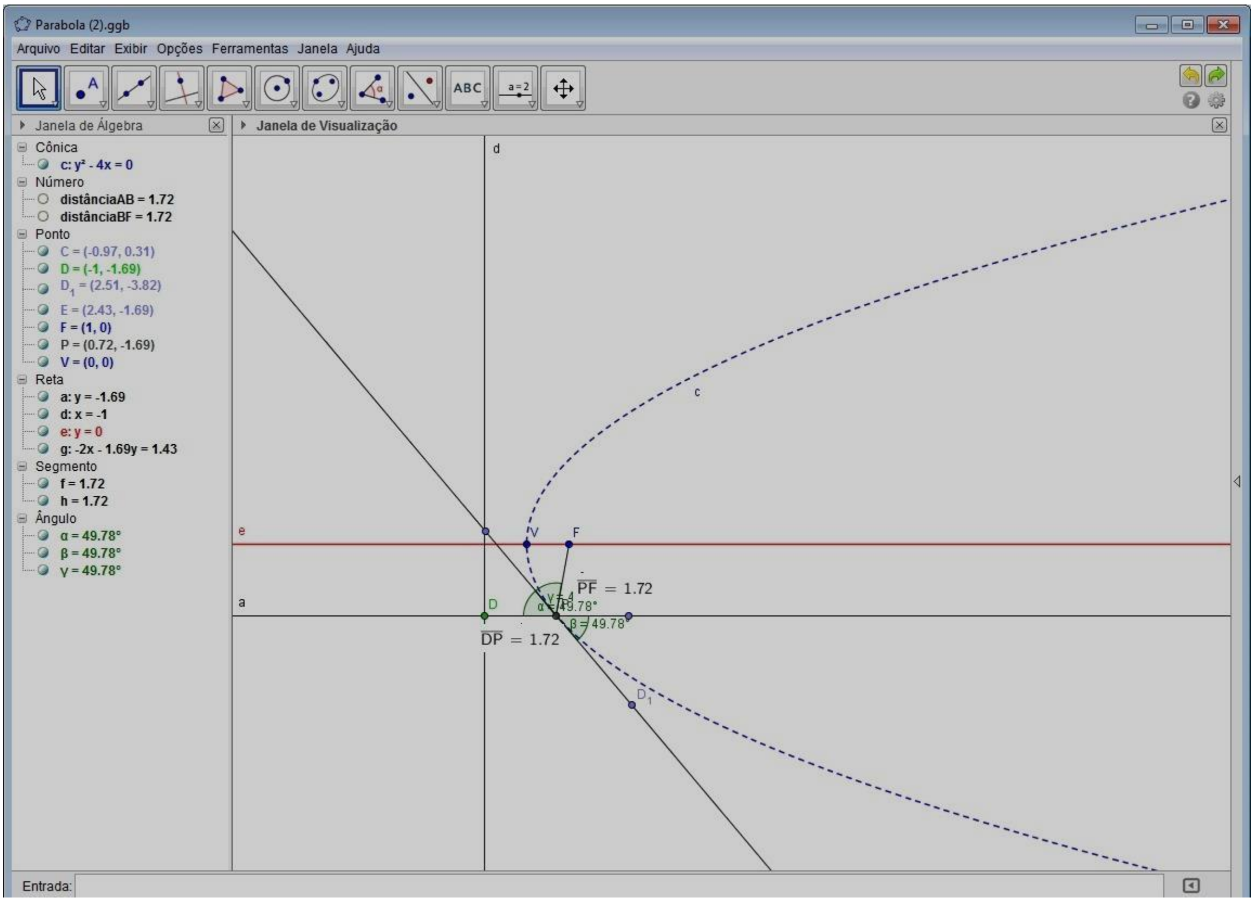
Sobre esta lei Wagner (1997) pontua:

> Os raios de luz e as ondas de rádio propagam-se no espaço em linha reta. Aliás, isso não é inteiramente verdadeiro, mas para o observador da Terra é praticamente. Quando esses sinais são refletidos em um ponto de uma superfície, tudo se passa como se estivessem sendo refletidos em um plano tangente à superfície nesse ponto, de acordo com a famosa lei da Física: "o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão" (WAGNER, 1997, p.14).

De modo geral, as ondas paralelas ao eixo focal da parábola são refletidas de tal maneira que a onda passa pelo seu foco. Reciprocamente, ondas que partem do foco de uma parábola são por ela refletidas paralelamente ao seu eixo focal.

Para melhor entendimento da lei de reflexão mencionada uma simulação foi realizada no GeoGebra onde o aluno pode observar a congruência dos ângulos pontuada na lei de reflexão de ondas mecânicas ou eletromagnéticas estudada na física. A seguir a Figura 47 mostra a interface do programa apresentada aos alunos.

Figura 47 – A parábola e os ângulos de incidência e reflexão.



Fonte: Arquivo da autora.

Foram projetados também outros dois vídeos disponíveis na internet. O primeiro vídeo[21] relata um pouco da história dos jogos olímpicos mostrando como a tocha olímpica é acesa em Atenas. Este vídeo intitulado como funciona as tochas olímpicas informa que a cada quatro anos a pira olímpica é acesa na cerimônia de abertura das olimpíadas através da tocha olímpica. Antes disso a tocha olímpica percorre todos os continentes do planeta, sendo passada de mão em mão, de país em país até chegar ao país que cedia o evento. Contudo pouco se fala de como esta tocha é acesa. O vídeo mostra que tudo se inicia em Atenas em uma cerimônia onde a tocha olímpica é acesa quando a mesma é colocada sobre o foco de um paraboloide onde concentra toda irradiação solar captada por ele. O segundo vídeo[22] apresentado em outra língua mostra um fogão solar em formato parabólico que possui em seu foco um recipiente, no qual foi colocado alimentos para assar.

Os alunos foram muito receptivos aos vídeos apresentados, reclamaram um pouco do sotaque do professor português, contudo divertiram-se com o último vídeo apresentado, exibido em língua não portuguesa, cujo personagem principal assava linguiças no fogão solar, chegando a queimar as mãos por falta de cuidados.

Tempo de realização da atividade: duas aulas.

Os alunos participaram efetivamente da atividade, responderam os questionamentos, apresentaram os pontos positivos e negativos da utilização dos paraboloides no cotidiano. Avaliaram a atividade como “muito interessante”, “legal” e afirmaram que compreenderam o conteúdo apresentado.

Todos os alunos escolheram o fogão solar como aplicação mais interessante da propriedade reflexiva da parábola apresentada nos vídeos.

A atividade teve êxito e despertou o interesse e a curiosidade da turma na construção de um fogão solar. Uma aluna brincou dizendo que gostaria de “estourar pipocas no fogão solar”.

Deste modo, ao final da atividade ficou decidido que a turma construiria um fogão solar. Para isto foi solicitado que os alunos pesquisassem como poderiam construí-lo e trouxessem para a próxima aula o resultado da pesquisa.

A figura a seguir apresenta um momento do desenvolvimento da atividade de observação do vídeo.

[21] Disponível em http://youtube.com/watch?v=YAV4qXTZ3yw. Acesso em: 12 nov. 2014.

[22] Disponível em: http://www.youtube.com/watch?v=k8bt0qz-E7E, Acesso em: 12 nov. 2014.

Figura 48 – Atividade: Vídeo Clipe

Fonte: Arquivo da autora.

iii) Atividade: Construção do fogão solar

Objetivo da atividade:

Construir um fogão solar para observar "*in loco*" a propriedade refletora de raios de luz incidentes sobre a superfície de um paraboloide concentrando calor no seu foco.

Materiais usados: Computador, acesso à internet, antena parabólica usada, fita com espelhos planos, cola quente.

Procedimentos:

Os alunos realizaram a pesquisa para construção do fogão solar, dentre as quais escolheram desenvolver a atividade descrita no portal do Ministério da Educação[23] proposta pelo Professor Guilherme Erwin, tendo como coautor Rita Meirelles.

A página pesquisada com as orientações para a construção do fogão solar foi acessada, as orientações lidas e assistiram a um vídeo no youtube[24] onde testavam a eficiência do fogão construído.

---

[23]Disponível em: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=23269. Acesso em: 19 nov. 2014.

Para a realização do projeto necessita-se de uma pequena antena parabólica, de preferência usada (baixo custo), pedaços de espelhos planos (pequenos), cola quente para afixação dos espelhos na superfície da antena parabólica. Inicialmente pensou-se em buscar nas vidraçarias do município retalhos de espelhos, contudo, ficou decidido, pensando na segurança dos alunos e facilidade no manuseio, adquirir fita com pequenos pedaços de espelhos (quadrados) para serem colados sobre a superfície parabólica. O que caberia a cada equipe ficou acordado, as tarefas foram divididas e a construção do fogão ficou agendada para a próxima aula.

Na outra aula, uma antena parabólica usada, sem custo algum, foi utilizada na realização do projeto, a fita com os espelhos foi adquirida e a cola e demais equipamentos para os recortes da fita e afixar os espelhos sobre a superfície da antena parabólica foram cedidos pela escola.

Os alunos não apresentaram dificuldade alguma na realização desta atividade. Eles mesmos dividiram as tarefas, cada um desenvolveu uma parte, de acordo com a habilidade manual e interesse de cada um.

Figura 49 – Construção do fogão parabólico (A)

Fonte: Arquivo da autora.

[24] Disponível em: http://www.youtube.com/watch?v=oHKgWtEKBec, Acesso em: 19 nov. 2014.

Figura 50 – Construção do fogão parabólico(B)

Fonte: Arquivo da autora.

A primeira experiência ocorreu dentro da própria sala. Os alunos posicionaram a antena parabólica (fogão solar) voltada para os raios luminosos emitidos por um conjunto de lâmpadas da sala, verificando a concentração da luminosidade e pequena fonte de calor no foco do paraboloide. Saindo da sala de aula, na área externa da escola, os alunos puderam perceber que mesmo com o céu parcialmente nublado havia concentração de calor no foco do paraboloide.

Os alunos desejavam afixar um recipiente no foco do fogão solar para auxiliar no cozimento dos alimentos, e tornar o fogão mais seguro, contudo não houve tempo hábil para isto, pois estava próximo o final do ano letivo, fica esta sugestão para o aprimoramento do projeto.

Para verificar a eficiência do fogão solar, utilizou-se um "pegador de macarrão", alguns clipes para afixar a folha de papel de seda no foco do paraboloide como retrata a Figura 51.

Figura 51 – Construção do fogão parabólico(C)

Fonte: Arquivo da autora.

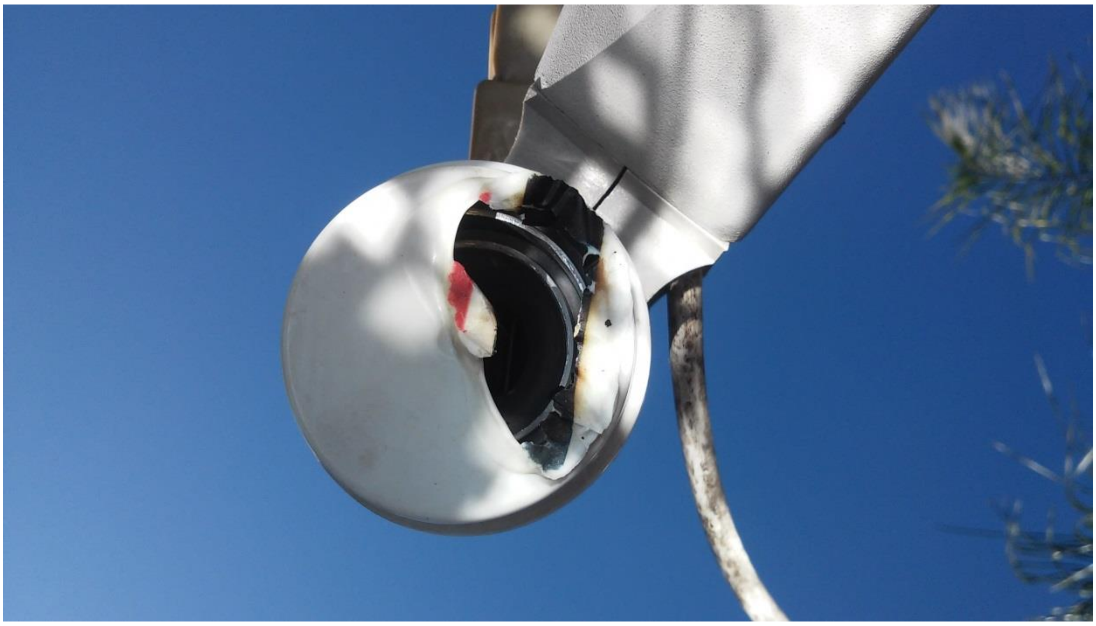
Pode-se observar quando o papel começa a pegar fogo na figura a seguir.

Figura 52 – Construção do fogão parabólico (D)

Fonte: Arquivo da autora.

A concentração de calor no foco foi tamanha que o plástico que recobre o conector do foco derreteu-se como se verifica na Figura 53.

Figura 53 – Construção do fogão parabólico (E)



Fonte: Arquivo da autora.

A figura a seguir mostra a conclusão do fogão com alguns alunos da 3ª série B do Ensino Médio da E. E. Padre Josué Silveira de Mattos onde foi desenvolvido o projeto.

Figura 54 – Construção do fogão solar (F)

Fonte: Arquivo autora.

Tempo de realização da atividade: seis aulas, sendo três seções de aulas duplas (consecutivas).

A atividade foi muito bem sucedida, os alunos puderam ver na prática os conteúdos aprendidos em sala de aula. Todos os cuidados foram tomados e não houve incidente algum.

A conclusão do projeto foi momento de alegria e satisfação, os alunos foram receptivos na maioria das atividades idealizadas, culminando com a construção do fogão parabólico pelos próprios alunos, de modo independente, onde o professor tem papel coadjuvante no processo, o que valida o modelo matemático para o fogão solar.

3.2 Atividades – E. E. Padre Geraldo Lourenço

O êxito no desenvolvimento de atividades numa perspectiva de investigação e modelagem matemática realizadas na Escola Estadual Padre Josué Silveira de Mattos, no ano letivo de 2014, levou a autora a abordar o mesmo tema com o corpo docente da Escola Estadual Padre Geraldo Lourenço, na qual exerce a função de Diretor de Escola, e uma das competências destinadas ao gestor escolar é a formação continuada de sua equipe, e dentre eles o corpo docente.

O professor de física da escola, Leandro César da Rosa, daqui em diante, reportado como Professor Leandro, mostrou interesse em desenvolver um projeto interdisciplinar envolvendo as disciplinas: física e matemática, do currículo escolar, com a finalidade de abordar a utilidade das parábolas para a sociedade, visando o enriquecimento curricular. Para o desenvolvimento do mesmo optou-se, de acordo com Almeida e Vertuan (2011), pela alternativa da separação, com adesão de alunos que desejam desenvolver atividades extracurriculares em período contrário ao que estudam.

O projeto iniciou com nove alunos do ensino médio, que estudam no período da manhã, sob a orientação do Professor Leandro, com as atividades: Brincando de Dobradura I, Brincando de Dobradura II e Vídeo Clipe.

Além dos objetivos anteriormente determinados para o desenvolvimento dessas atividades, foi acrescentado o da integração da matemática com a física, abordando principalmente a utilização da parábola e seus elementos no cotidiano, buscando relacionar os conteúdos escolares com a vida do aluno.

Os alunos responderam positivamente às atividades apresentadas, participando ativamente, interagiram com o professor, atingindo os objetivos desejados para aquelas atividades.

Na avaliação da aula os alunos utilizaram as seguintes expressões: “muito legal, aprendi muito nesta aula”, “muito interessante”, “muito legal, de bom aprendizado, dificuldade – fácil”, “sensacional”, “uma aula construtiva, interessante e divertida, são atividades diferentes”. Alguns comentários dos alunos: “poderia ter mais aulas assim”, “gostaria de ter esse programa em casa”, “a aula foi muito legal, e o professor sabe ensinar muito”.

Os alunos mostraram-se muito interessados na produção de alguns objetos para a verificação da propriedade refletora da parábola, ficaram deslumbrados com a mesa de bilhar parabólica apresentada no vídeo clipe, e propuseram ao professor a realização da sua construção, contudo o professor de física da escola possuía interesse em desenvolver um experimento para obter a reflexão das ondas sonoras, conteúdo programático do currículo escolar para física. O professor conversou com os alunos e propôs a realização da mesa no segundo semestre do ano letivo, o que ficou acordado.

Pensando em motivar os alunos para desenvolverem o experimento abordando a reflexão do som, o Professor Leandro e a autora optaram em construir um anteparo parabólico de papelão, uma vez que o município de Aguaí possui várias indústrias de cartonagem, e o custo para a realização do anteparo seria irrisório.

3.2.1 A parábola e a reflexão do som.

As atividades a seguir foram idealizadas com a finalidade de abordar as propriedades de reflexão do som e da superfície parabólica, proporcionando ao aluno vivencia-las, estimulando a formação de conceitos associando teoria e prática, identificando a utilidade do conteúdo abordado no mundo em que vivemos.

i) Atividade: Construção de um anteparo parabólico[25]

Objetivo da atividade:

Construir um anteparo parabólico de papelão com a finalidade de motivar os alunos a desenvolverem atividades abordando a propagação e a reflexão das ondas sonoras utilizando o perfil do cilindro parabólico.

[25] Apêndice p. 130

Materiais utilizados: Seis placas de papelão, de 2m de comprimento por 1,5m de largura; cola; fita adesiva; alfinetes; estilete; tesoura.

Procedimentos:

O anteparo parabólico de papelão foi idealizado de modo que a pessoa posicionada no foco da seção parabólica, ao emitir som pudesse perceber o retorno do mesmo pela reflexão das ondas sonoras.

A melhor distância entre o foco e o vértice da parábola para o desenvolvimento do projeto foi objeto de análise e estudo. Após algumas discussões decidiu-se que esta seria de 80 (oitenta) centímetros. Esta medida foi escolhida pensando na distância do indivíduo à superfície parabólica do anteparo, no formato da concavidade da parábola, além de ser um número de fácil manipulação para trabalhar algebricamente com os alunos posteriormente.

O anteparo foi construído no Laboratório de Ciências da Escola Estadual Padre Geraldo Lourenço. A Figura 55 apresentada a seguir mostra a confecção dos moldes em papelão da parábola em questão pelo Professor Leandro e pela autora.

Figura 55 – Confecção do molde da parábola

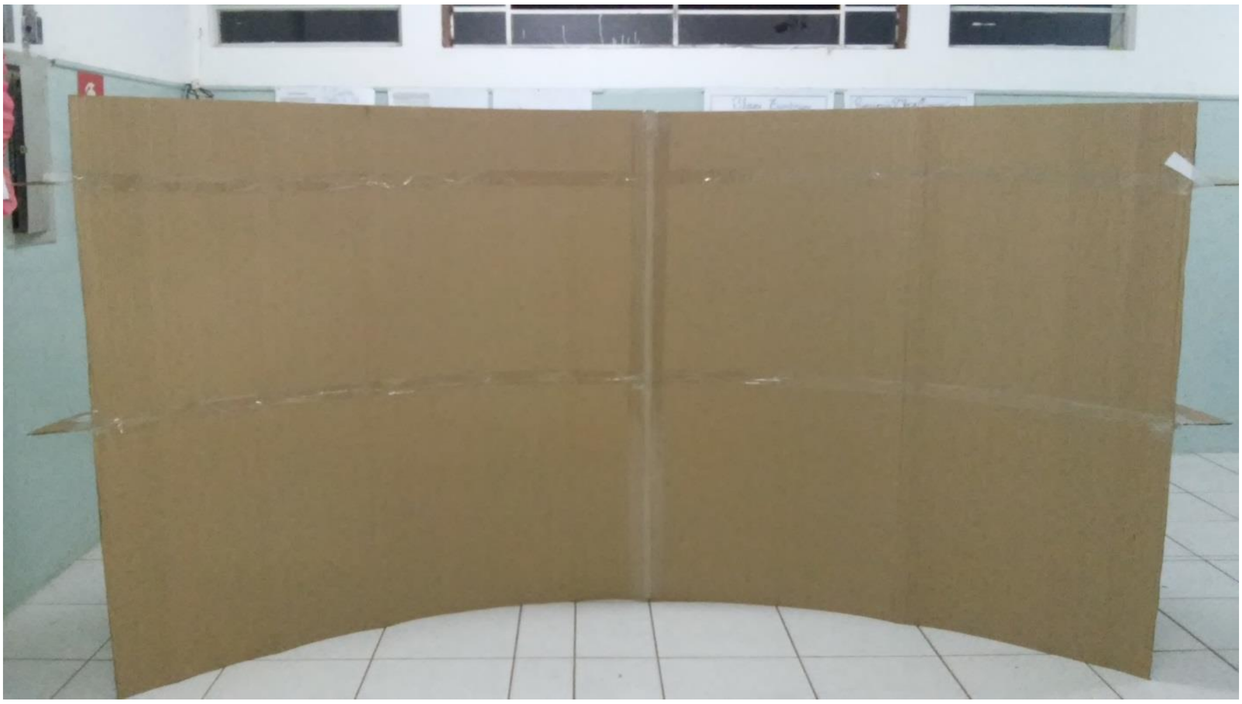
Fonte: Arquivo da autora.

Para dar o formato parabólico às placas de papelão que comporiam o anteparo, inicialmente duas placas foram enroladas tornando-se mais maleáveis, posteriormente os moldes confeccionados foram afixados no papelão enrolado, procurando deixá-los bem ajustados aos moldes confeccionados, de modo que o papelão enrolado pudesse ter o formato parabólico idealizado, para isto foram utilizados alfinetes, cola e fita adesiva.

A construção foi muito trabalhosa, realizada por uma equipe de professores, que auxiliaram o professor Leandro e a autora. Foram eles os professores: Almira Helena Nunes de Souza, Wellington Michel Souza de Paula, Luciene Dias Fonseca Marciano e Cesar Reis Moraes, os dois primeiros professores possuem licenciatura em Letras, Português e Inglês, a terceira em Educação Física e o último em Matemática, com habilitação em Matemática e Física, todos do corpo docente da Escola Estadual Padre Geraldo Lourenço.

A equipe que construiu o anteparo de papelão parabólico era multidisciplinar, os professores que não possuíam licenciatura na área de exatas não acreditavam que o experimento desse certo e havia o temor de que o resultado não fosse o esperado devido às propriedades do material utilizado, e também pelo formato irregular da superfície do papelão, pois por mais que quisessem a superfície não ficou totalmente lisa e, portanto, havia irregularidades no formato parabólico. A figura 56, a seguir, apresenta o anteparo construído.

Figura 56 – Anteparo de papelão parabólico



Fonte: Arquivo da autora.

Os professores que auxiliaram na construção do mesmo foram os primeiros a verificar que o experimento “deu certo”, ficaram maravilhados com o resultado obtido. Os testes foram realizados dentro do Laboratório de Ciências onde o mesmo foi construído.

A reflexão do som obtida pelo “papelão parabólico” era perceptível ao ouvido humano, principalmente quando a pessoa se localizava próxima ao foco da parábola. Também era perceptível a amplificação do som no setor interno da superfície parabólica.

Tempo de realização da atividade: oito aulas.

A construção do anteparo parabólico tinha como objetivo principal motivar os alunos para desenvolver um projeto que abordasse a reflexão do som utilizando uma superfície parabólica. Por isso realizou-se, na próxima etapa, uma pesquisa com uma turma da escola sobre as percepções auditivas obtidas quando o indivíduo postado nas imediações do foco do anteparo parabólico emitisse um som.

ii) Atividade: Percepção sonora.

Objetivo da atividade:

Apresentar o anteparo de papelão parabólico para o corpo discente da escola. Quantificar a percepção auditiva dos alunos em contato com o experimento. Instigar a comunidade escolar para a construção de outros experimentos abordando a reflexão do som através de superfície parabólica.

Materiais utilizados:

Anteparo parabólico cilíndrico de papelão, cadeira, ficha de questionamento, caneta.

Procedimentos:

Os alunos de uma sala da escola foram convidados para individualmente irem ao Laboratório de Ciências. Em sala de aula os alunos foram orientados para que durante a visita procurassem estar bem atentos para, ao final, responder a um questionário, além de não contar suas percepções para os outros alunos que ainda não tivessem realizado a visita ao laboratório.

A turma que realizou a atividade foi um 8º ano do período da tarde que não havia tido algum contato com o projeto, pois o intuito nesta atividade era obter as percepções dos alunos, sem qualquer interferência, livres de induções e pré-conceitos sobre as propriedades da parábola.

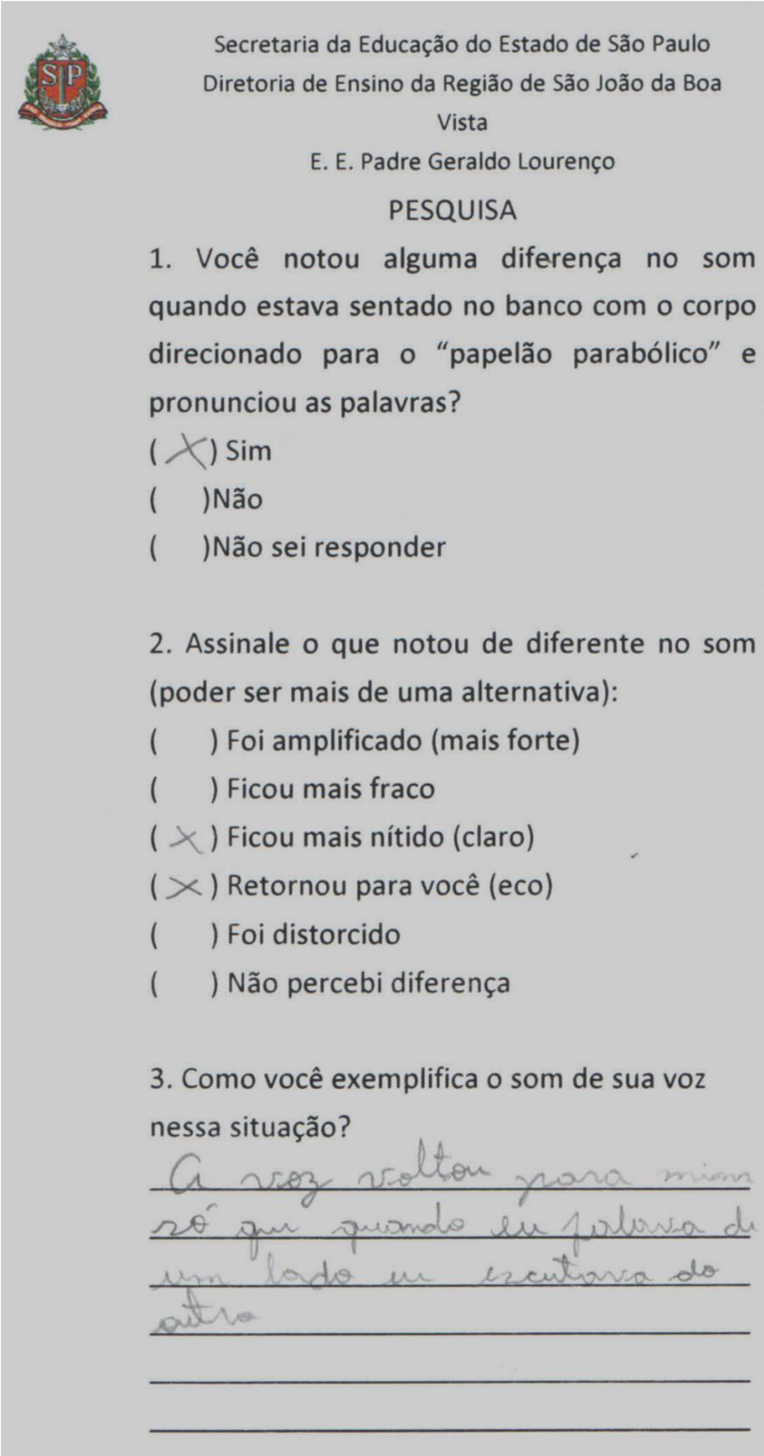
Uma cadeira foi colocada no foco do anteparo parabólico, o aluno foi convidado a sentar e iniciava-se com ele uma conversa informal. Conforme a conversa ia se desenrolando pode-se observar as reações dos alunos. A figura abaixo apresenta uma aluna neste momento.

Figura 57 – Percepção sonora

Fonte: Arquivo da autora

Os alunos foram fieis ao solicitado, pois não relataram o ocorrido para outros alunos da sala, e a curiosidade auxiliou no processo de observação. Os alunos responderam o questionário apresentado na figura 58.

Figura 58 – A pesquisa.



Secretaria da Educação do Estado de São Paulo
Diretoria de Ensino da Região de São João da Boa Vista
E. E. Padre Geraldo Lourenço

PESQUISA

1. Você notou alguma diferença no som quando estava sentado no banco com o corpo direcionado para o "papelão parabólico" e pronunciou as palavras?

(X) Sim
( )Não
( )Não sei responder

2. Assinale o que notou de diferente no som (poder ser mais de uma alternativa):

( ) Foi amplificado (mais forte)
( ) Ficou mais fraco
(X) Ficou mais nítido (claro)
(X) Retornou para você (eco)
( ) Foi distorcido
( ) Não percebi diferença

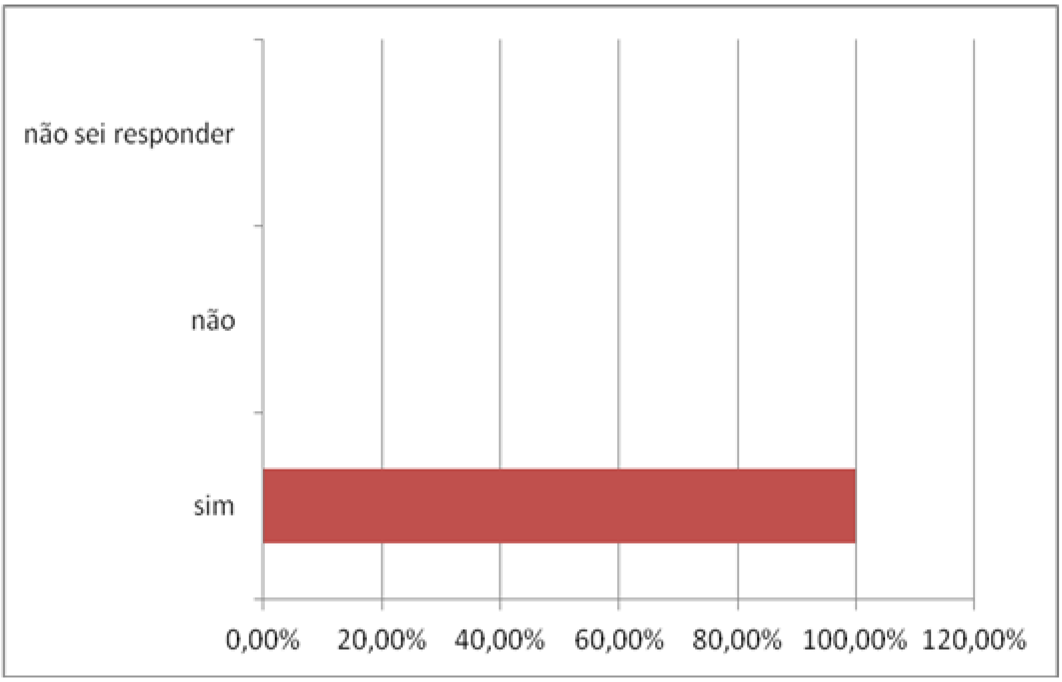
3. Como você exemplifica o som de sua voz nessa situação?

A voz voltou para mim só que quando eu falava de um lado eu escutava do outro

Fonte: Arquivo da autora

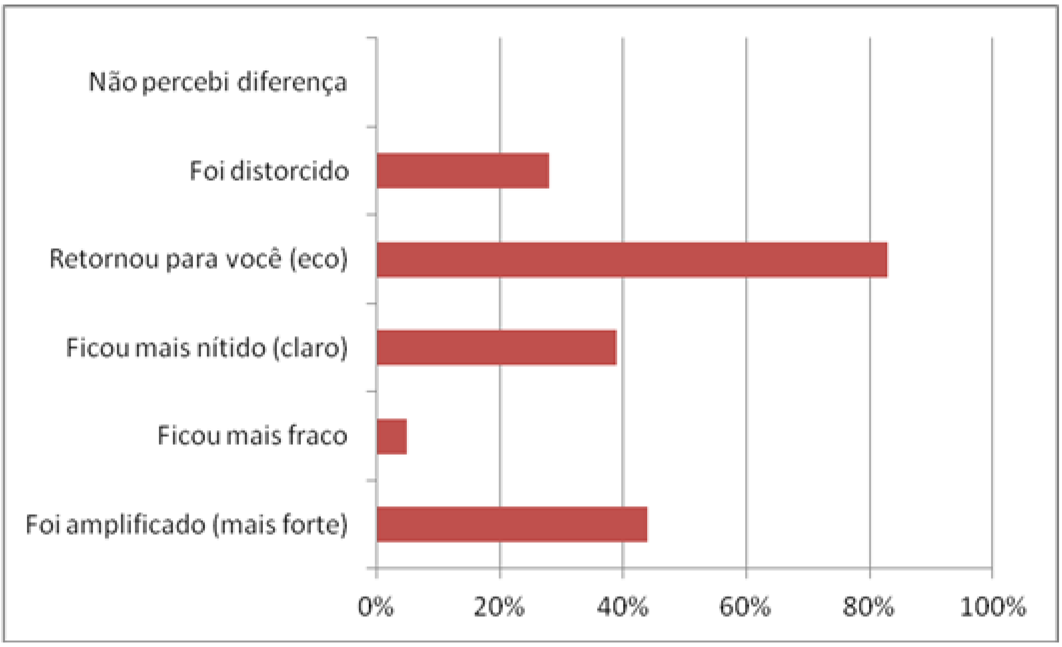
As perguntas e o percentual de respostas obtido às duas questões objetivas estão descritos nos quadros a seguir:

Quadro 6 - Você notou diferença no som quando estava sentado no banco com o corpo direcionado para o “papelão parabólico” e pronunciou as palavras?



Fonte: Arquivo da autora

Quadro 7 - Assinale o que notou de diferente no som (pode ser mais de uma alternativa):



Fonte: Arquivo da autora

O terceiro questionamento não era objetivo, nele cada aluno é convidado a relatar o que percebeu de diferente no experimento.

Alguns relatos dos alunos:

- “A voz voltou para mim só que quando eu falava de um lado eu escutava do outro”
- “Deu tipo de um eco, como se tivesse um alto falante atrás do papelão, como se tivesse falando mais alto, e um pouco mais forte.”
- “Eu virava para um lado e só escutava do outro.”
- “A minha voz saiu como um som do eco como estivessem falando do meu lado.”
- “É que a voz deu eco mas só o que percebi.”
- “Ah eu falava dum lado e o som vinha do outro. Eu fiquei assustada.”
- “Ficou muito diferente e deu muito eco.”
- “Parece que tem alguém me imitando.”

A atividade superou os objetivos estabelecidos, uma vez que a turma conseguiu, através de seus relatos, aguçar a curiosidade não apenas do corpo discente, mas também de outros segmentos, desde a área de gestão até os membros administrativos da escola, que procuraram o Professor Leandro para realizar o experimento.

Não houve tempo hábil para abordar com esses alunos as propriedades e características da parábola, contudo ficou a proposta de trabalhar no próximo ano e no Ensino Médio com mais detalhamento.

Tempo de realização da atividade: duas aulas consecutivas.

Devido ao sucesso da atividade os professores de ciências da escola solicitaram que o experimento fosse guardado com muito cuidado para ser utilizado na próxima feira de ciências que sempre ocorre no mês de outubro e resolveram testar o experimento agora num espaço aberto, para verificar a percepção auditiva da reflexão do som no foco do “anteparo parabólico” em um local onde há maior dispersão do som.

O transporte do anteparo parabólico para área externa da escola acabou acarretando avarias no mesmo devido à fragilidade do material, sua superfície ficou mais irregular.

Neste ambiente pode-se perceber a amplificação do som e a reflexão do som também foi observada, contudo com menor intensidade de percepção ao ouvido humano quando comparada a observada em ambiente fechado, como no Laboratório de Ciências da escola, provavelmente pela maior dispersão do som neste ambiente e também pelas irregularidades observadas na superfície do anteparo.

Na aula de trabalho pedagógico coletivo, os professores da área de ciências da natureza e matemática junto com a direção da escola decidiram pela construção de um banco parabólico de alvenaria no jardim da escola, no início do segundo semestre deste ano letivo. Sua construção será inspirada no anteparo parabólico, isto é, possuirá as mesmas dimensões do anteparo parabólico de papelão construído, e o foco da parábola será assinalado no chão de modo que a pessoa posicionar-se no mesmo colocando seus pés sobre a marca estabelecida. A figura a seguir mostra o anteparo parabólico concebido como protótipo do banco parabólico a ser construído.

Figura 59 – Anteparo parabólico na área externa da escola

Fonte: Arquivo da autora

O projeto de construção do banco parabólico no jardim da escola será desenvolvido com a participação do corpo discente, representados pelos alunos do Ensino Médio que iniciaram o estudo das parábolas com o Professor Leandro, representantes dos professores, em especial os da área de ciências da natureza e matemática, e com a equipe gestora: Professores Coordenadores, Vices Diretores e a Diretora da Escola.

O objetivo da construção do banco parabólico é associar os conteúdos escolares, neste caso, a cônica parábola abordada no currículo da matemática e a propagação do som estudada na física, às experiências vivenciadas pelo aluno, diminuindo a distância entre a teoria e a prática, buscando aguçar o espírito investigativo e científico do corpo discente, pontuando a importância do currículo escolar no desenvolvimento tecnológico, justificando a inserção destes conteúdos no currículo através de suas aplicações na sociedade atual.

Considerações finais e conclusão

Ao longo do segundo semestre de 2014 os alunos da 3ª série B do Ensino Médio da Escola Estadual Padre Josué Silveira de Mattos mostraram-se receptivos as atividades propostas que abordaram o estudo das cônicas, em especial a parábola.

Os alunos demonstraram, ao final do projeto, que os conceitos e características da parábola, objeto de estudo deste trabalho, foram constituídos, identificando facilmente seus elementos através de seu gráfico e/ou coeficientes, suas propriedades e aplicações, pontuando sua importância no cenário atual.

Ocorreram durante o desenvolvimento das atividades diversas falhas, especialmente na de título: O GeoGebra e a construção de parábolas, na qual verificamos a necessidade do registro escrito das comandas das ações a serem realizadas para facilitar a compreensão e o desenvolvimento da mesma pelos alunos.

A falta de habilidade em desenvolver expressões algébricas dificultou o desenvolvimento de várias atividades. Os alunos quando se deparavam com expressões que demandariam algumas "linhas" para o seu desenvolvimento mostravam-se apáticos ou solicitavam ajuda do professor, o que dificultou a validação dos modelos matemáticos abordados. Esta foi a maior dificuldade obtida durante o desenvolvimento das atividades.

Contudo no decorrer do processo houve melhora significativa no desenvolvimento de atividades que necessitam de manipulações algébricas, embora nestas situações, os alunos ao final do projeto ainda se sentiam inseguros. Concluiu-se que estas habilidades e competências precisam ser trabalhadas de modo diferenciado durante todo o processo de escolarização do aluno.

O enfoque pedagógico utilizado no projeto possibilitou a formação de vários conceitos, habilidades e competências requeridas não apenas para abordar o conteúdo específico parábolas. Nota-se melhor desenvoltura da turma para expor seus pensamentos, analisar variáveis, buscar soluções.

A competência leitora também foi motivada e constatou-se melhor desempenho dos alunos, principalmente nas últimas atividades, onde os alunos utilizaram-na para a realização das atividades procurando não recorrer ao professor, desenvolvendo-as com mais autonomia.

Os processos investigativos, a busca de regularidades, a identificação e validação de modelos matemáticos, a associação dos conteúdos ao cotidiano do aluno, utilizados no projeto proporcionou aos alunos um novo olhar para as atividades escolares, onde o mesmo deixou a posição de mero expectador e passou a fazer parte do processo de sua aprendizagem.

A incorporação desses processos, dessa metodologia pode auxiliar os alunos tanto na continuação dos seus estudos no ensino superior, ou em cursos técnicos, como no desenvolvimento de competências e habilidades requeridas no mundo do trabalho.

Não se pode deixar de constar também que os alunos ao "conseguirem" desenvolver as atividades, estabelecerem relações, "pensar matematicamente", construírem o fogão parabólico, melhoram a sua autoestima.

O IDESP desta escola ultrapassou a casa dos dois pontos percentuais, o índice este ano foi de 2,02, maior índice atingido nesta década, superando a média do Estado de São Paulo 1,93. Em matemática, o indicador de desempenho neste ano foi de 2,0103, houve um aumento de 25% neste índice. Os dados apresentados estão longe dos considerados ideais na educação, esta melhora indica que os esforços realizados estão dando certo. Não se pode afirmar que o projeto desenvolvido foi responsável por esta melhoria, contudo este pode ter contribuído para atingir a meta pré-estabelecida para a escola.

Quanto ao projeto que começa a ser delineado na Escola Estadual Padre Geraldo Lourenço, a semente foi lançada. Os propósitos e objetivos iniciais foram todos atingidos, uma vez que o corpo docente da escola, principalmente os docentes da área de matemática e ciências da natureza abraçaram-no, e estão motivados a desenvolverem as atividades pedagógicas de modo lúdico e prazeroso para os alunos. Embora existam na escola alguns docentes resistentes à mudança, que com o tempo poderão aderir à proposta de trabalho.

A construção do banco parabólico na área externa da escola vem ao encontro às ideias de Moore, em 1902, abordadas em 1967, na Holanda, no colóquio: *Como ensinar matemática de modo que seja útil?* Uma vez que associar a teoria à prática, compreender as características e propriedades do objeto de estudo, bem como sua utilidade no cotidiano, favorecerem a formação de competências e habilidades requeridas no mundo globalizado como o atual.

Os dois anos de estudos no mestrado profissional PROFMAT na Universidade Federal de São Carlos – UFSCar propiciou não apenas o crescimento pessoal da autora estendeu-se para outros caminhos, chegando até a base, na Educação Básica. Além disso, o desenvolvimento das atividades com os alunos abordadas de modo diferenciado fez com que o professor também crescesse, melhorando seu desempenho, valorizando o seu trabalho docente.

Freire pontua que “Não é no silêncio que os homens se fazem, mas na palavra, no trabalho, na ação-reflexão” (1983, p.92), deste modo ações como o mestrado profissional - PROFMAT possibilitam a evolução acadêmica dos docentes e reflexão da autocrítica profissional, e por consequência influencia diretamente a sua prática pedagógica e esta, o processo ensino aprendizagem, auxiliando os estudantes a compreender o mundo atual inserindo-os na sociedade conscientes de seu papel profissional, político, ético e social.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L.M.W.; ARAÚJO, J.L.; BISOGNIN, E., Coordenação, **Práticas de modelagem matemática: relatos de experiências e propostas pedagógicas,** Londrina : Eduel, 2011 (Vários autores)

ÁVILA, G. **Várias faces da matemática: tópicos para licenciatura e leitura geral,** 2ª ed. São Paulo : Blucher, 2010.

BALDIN, Y.; FURUYA, Y. **Geometria Analítica para todos e atividades com Octave e GeoGebra,** São Carlos : EdUFSCar, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio**. PCNEM. Brasília: MEC, 2000.

BOYER, C.B. **História da Matemática,** prefácio de Isaac Asimov revista por Uta C**.** Merzbach**,** tradução Elza F. Gomide, 3ª ed., São Paulo : Blucher, 2010.

FREIRE, P. **Pedagogia do Oprimido,** 13ª ed. Rio de Janeiro : Paz e Terra, 1983.

_______. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. 2ª ed. São Paulo : Paz e Terra, 1997

GIRALDO, V.; CAETANO, P.; MATTOS, F. **Recursos Computacionais no Ensino de Matemática.** 1ª ed**.** Rio de Janeiro : SBM, 2012.

HARTUNG, G.; MEIRELLES, R. **Paraboloide de Revolução**. Disponível em: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=23269. Acesso em 01 out. 2014.

MACHADO, Mirtes. **Parábolas – As curvas preciosas.** Objeto de Aprendizagem Colaborativa - OAC. IES: Universidade Estadual de Londrina. 2009 Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/673-2.pdf. Acesso em 01 out. 2014.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa**. Brasília: Ed. da UnB, 1998.

______. **Teorias de Aprendizagem.** São Paulo : EPU, 1999.

PAIVA, M. **Matemática Paiva**. v.3. Editora Moderna. 1ª edição. São Paulo, 2009.

PATERLINI, R. **Sobre a distância de freagem de veículos.** Hipertexto Pitágoras, 2002. Disponível em: http://www.dm.ufscar.br/hp/hp202/hp2021/hp2021001/hp2021001.html. Acesso em 01 Nov. 2014

PONTE, J.P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula,** Belo Horizonte : Autêntica, 2003.

REZENDE, M.W.; PESCO U.D.; BORTOLOSSI, J. H. Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do GeoGebra, **1ª. Conferência Latino Americana de GeoGebra**, pp. 77, 2012

SALVADOR, José Antonio et al., **Modelagem Matemática Discreta,** VIII CNMEM, UNIFRA, Santa Maria, RS (2013).

SALVADOR, J.A; BASSANEZI, R.C.; BISOGNIN, V. **Modelagem Computacional para o Ensino de Matemática**, CNMAC – 2014**,** Natal – RN. (2014).

SANTOS, A. R. **Construções Concretas e Geometria Dinâmica: Abordagens Interligadas para o Estudo de Cônicas,** São Carlos, SP: SBMAC, 2012. (Notas em Matemática Aplicada, v.44). Disponível em: http://www.sbmac.org.br/arquivos/notas/livro_44.pdf. Acesso em: 28 Set. 2014.

SÃO PAULO (ESTADO) SECRETARIA DA EDUCAÇÃO**. Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática. Ensino Fundamental – Ciclo II e Ensino Médio**. São Paulo: SEE, 2008.

SÃO PAULO (ESTADO) SECRETARIA DA EDUCAÇÃO**. Caderno do aluno: Matemática**, **ensino fundamental – 8ª/9º ano ,** v.1, Secretaria da Educação; São Paulo: SEE, nova edição 2014-2017

SÃO PAULO (ESTADO) SECRETARIA DA EDUCAÇÃO**. Caderno do aluno: Matemática**, **ensino médio – 1ª série,** v.1, Secretaria da Educação; São Paulo: SEE, nova edição 2014-2017

SÃO PAULO (ESTADO) SECRETARIA DA EDUCAÇÃO**. Caderno do aluno: Matemática**, **ensino médio – 3ª série,** v.1, Secretaria da Educação; São Paulo: SEE, nova edição 2014-2017.

SÃO PAULO (ESTADO) SECRETARIA DA EDUCAÇÃO**. Caderno do professor: Matemática**, **ensino médio – 3ª série,** v.1, Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini, São Paulo: SEE, 2013.

SIMÕES, M. Parábolas tardias demais. **Cálculo,** São Paulo, n.41, p. 12-15, Ed. Segmento, Junho de 2014.

WAGNER, E. Por que as antenas são parabólicas. Sociedade Brasileira de Matemática. **Revista do Professor de Matemática,** Rio de Janeiro, n. 33, p. 10-15, SBM, 1º Quadrimestre de 1997.

APÊNDICE

No desenvolvimento das atividades, em sala de aula, que compunham o projeto foram utilizadas fichas de atividades, elaboradas a partir do conhecimento prévio da turma sobre o tema, assim como das habilidades e competências constituídas durante o processo da escolarização dos mesmos.

As fichas apresentadas a seguir são fruto de estudos e pesquisas realizadas no decorrer do processo, elas podem e devem ser aprimoradas e adequadas ao perfil da turma a ser aplicada.

Para melhor apresentação foram divididas em blocos as atividades desenvolvidas: preliminar, lúdico, geometria dinâmica e aplicações no cotidiano.

Apêndice A

Atividade Preliminar

Atividade: As funções polinomiais de primeiro e segundo grau e seus gráficos.

Síntese:
Esta atividade tem por objetivo fazer uma sondagem inicial dos conhecimentos constituídos pelos alunos durante a sua trajetória escolar sobre o conteúdo do projeto.

Secretaria da Educação do Estado de São Paulo
Diretoria de Ensino da Região de São João da Boa Vista
E. E. Padre Josué Silveira de Mattos

As funções polinomiais e seus gráficos

Nome____ nº______série______

Dadas as funções polinomiais, $f : \Re \to \Re$, definidas abaixo, determine (se houver) o coeficiente linear e as raízes das funções, e esboce o seu gráfico.

a) $f(x) = 5x - 1$
b) $f(x) = -2x + 4$
c) $f(x) = x^2 - 5x + 15$
d) $f(x) = x^2 + 6x + 9$
e) $f(x) = x^2 - 2x + 5$

Apêndice B

Atividades Lúdicas

Atividades:

a) Brincando de Dobraduras I;
b) Brincando de Dobraduras II.

Síntese:

Estas atividades introduzem ludicamente o projeto através de dobraduras com papel translúcido, instiga o aluno a associar as dobras realizadas com o formato de uma curva, requer que o mesmo busque, através de pesquisas, identificar a figura objeto de estudo, bem como suas propriedades e características. Introduz o programa de geometria dinâmica GeoGebra e reproduz a primeira atividade neste programa.

As fichas das atividades foram criadas para o desenvolvimento do projeto idealizado, a partir de pesquisas realizadas na literatura presente na bibliografia desta dissertação sendo adaptada a realidade da turma trabalhada.

Secretaria da Educação do Estado de São Paulo
Diretoria de Ensino da Região de São João da Boa Vista
E. E. Padre Josué Silveira de Mattos

BRINCANDO DE DOBRADURAS I

Nome____ nº______série______

Você recebeu uma folha de papel vegetal, identifique sua folha colocando seu nome, número e série, e a seguir desenvolva o solicitado abaixo e veja se você consegue identificar a curva obtida.

1. Trace uma reta horizontal na parte inferior da folha.
2. Marque fora desta reta um ponto F, este ponto deve estar acima da reta que você traçou.
3. Sobre a reta traçada marque no mínimo 20 pontos.
4. Para cada ponto marcado sobre a reta traçada você fará uma dobradura. Para realizar a dobradura você deve sobrepor cada ponto marcado na reta no ponto fora dela. Dobre e vinque a folha, de modo que você possa ver as dobras realizadas com a folha aberta.
5. As dobras realizadas tangenciam uma curva, você consegue dizer que curva é essa?

   ____

6. Observe as folhas de seus colegas da classe. Verifique que as curvas obtidas não são iguais, algumas são mais “abertas” outras mais “fechadas”, isto é, possuem maior inclinação. Você consegue identificar quando elas são mais inclinadas? (Dica: observe a distância do ponto F à reta traçada).

   ____
   ____
   ____
   ____

7. Faça uma pesquisa na internet sobre a definição da curva obtida e traga-a para a próxima aula. Para realizar a pesquisa agrupem-se em trios ou duplas. Você descobrirá que o ponto F e a reta traçada utilizados na atividade desenvolvida hoje possuem nomes próprios. Não se esqueça de identificar o site onde buscaram as informações.

O que você achou das atividades da aula de hoje?
____
____

Qual a sua avaliação a respeito do nível de dificuldade da atividade?
____
____

Comentários que queira acrescentar:
____
____

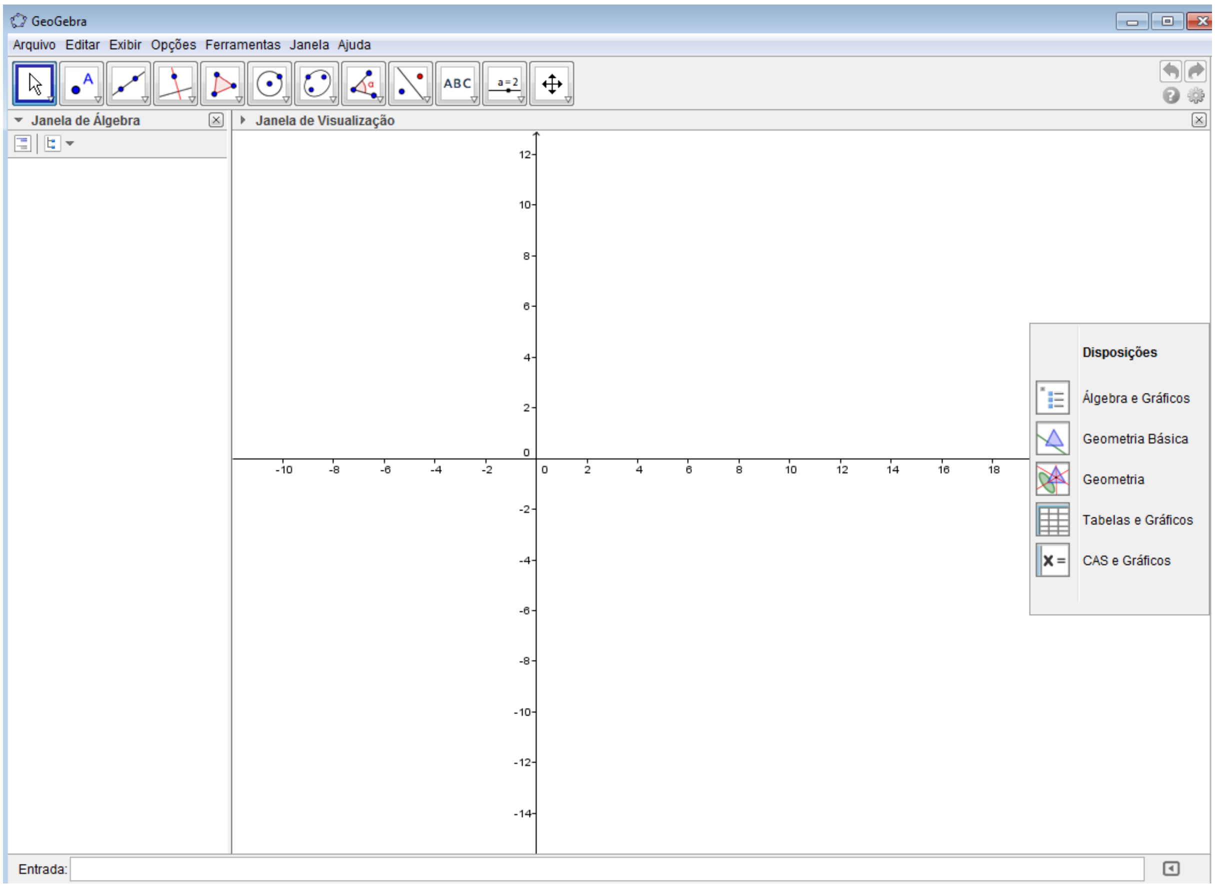
Secretaria da Educação do Estado de São Paulo
Diretoria de Ensino da Região de São João da Boa Vista
E. E. Padre Josué Silveira de Mattos

Nome____ nº______série______
Nome____ nº______série______
Nome____ nº______série______

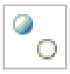
BRINCANDO DE DOBRADURAS II

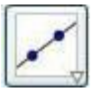
Nesta aula desenvolveremos a atividade “Brincando de dobraduras” utilizando no computador o software GeoGebra . Os computadores da Sala do Acessa Escola possuem o programa instalado, para acessá-lo, busque-o na área do aluno. Abaixo se encontram o símbolo e a interface deste software.

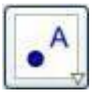
GeoGebra

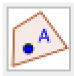


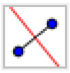
Antes de desenvolver as atividades “Brincando de Dobraduras II”, observe as figuras existentes na parte superior da interface do programa. Ao selecionar uma figura perceberá que existem diversos comandos associados à figura selecionada. Faça um “passeio” sobre as figuras, observe os termos associados a cada uma. Nesse primeiro contato com o programa identifique as funções que ele oferece para o desenvolvimento das atividades.

1. Abrir a tela do GeoGebra. Selecione a ferramenta  Exibir/Esconder Objeto, clicar sobre os eixos cartesianos para que eles não estejam visíveis na tela do computador.

2. Para traçar a reta diretriz selecione a ferramenta  Reta definida por Dois Pontos, e a seguir clicar sobre a janela de visualização.

3. Selecione agora a ferramenta Novo Ponto  e clique sobre a janela de visualização, este ponto será o foco da parábola e, portanto, não pertence à reta diretriz.

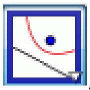
4. Selecione agora a ferramenta Ponto em Objeto  e clique sobre a reta diretriz de modo a obter, no mínimo, dez pontos sobre a reta diretriz.

5. A ferramenta Mediatriz  será utilizada para traçar as retas que tangenciam a parábola, uma vez que no processo de dobraduras esta reta divide o segmento formado por um ponto sobre a reta diretriz e o foco. Você deve após selecionar a ferramenta clicar sobre o ponto fora da reta mediatriz e sobre um ponto da reta. Deste modo você obterá, no mínimo, dez mediatrizes.

6. A figura formada janela de visualização é semelhante à realizada no papel vegetal?

____

____

7. Se você selecionar a ferramenta Parábola , e clicar sobre o foco e sobre a reta diretriz o GeoGebra traçará o gráfico da parábola, e na janela de Álgebra você obterá a sentença matemática que representa esta curva. Dê a sentença obtida.

____

____

O que você achou das atividades da aula de hoje?

____

____

Qual a sua avaliação a respeito do nível de dificuldade da atividade?

____

____

Comentários que você queira acrescentar:

____

____

Apêndice C

Atividades Geometria Dinâmica

Atividades:

a) O GeoGebra e a construção de parábolas;
b) O GeoGebra e a equação da parábola;
c) Parábola por cinco pontos;
d) A parábola;
e) Os coeficientes a, b e c de uma função quadrática;
f) A função quadrática e seus coeficientes.

Síntese:

O GeoGebra foi o programa de geometria dinâmica escolhido para desenvolver as atividades com a finalidade de oportunizar ao aluno caminhos que podem auxiliá-lo no processo investigativo, na busca de regularidades a serem verificadas e validadas.

O programa favorece também a visualização das características da função estudada. A variação de seus coeficientes possibilita conjecturas quanto à função dos mesmos presentes na equação.

Os elementos da parábola, suas propriedades e características, assim como a generalização de seu modelo matemático serão abordados nestas atividades.

O conteúdo programático contidos nas fichas a seguir está presente em várias referências do presente trabalho. A partir do estudo da realidade, das características da turma trabalhada, foram produzidas as atividades a seguir:

Secretaria da Educação do Estado de São Paulo
Diretoria de Ensino da Região de São João da Boa Vista
E. E. Padre Josué Silveira de Mattos

Nome____ nº______série______
Nome____ nº______série______
Nome____ nº______série______

O GEOGEBRA E A CONSTRUÇÃO DA PARÁBOLA

Nesta aula vocês, em equipe, construirão parábolas utilizando o software Geogebra. Deverão utilizar os recursos aprendidos em aulas anteriores.

As parábolas a construir contemplarão os casos a seguir especificados:

a) Parábolas cuja reta diretriz é paralela a um dos eixos cartesianos:

- A reta diretriz é horizontal, isto é, paralela ao eixo das abscissas (eixo x) e, portanto, a diretriz d é descrita na forma d: y = k sendo k um número real. Para isto digite na janela Entrada: y = k (não se esqueça de que k é um número real).

- Diretriz d paralela ao eixo das ordenadas (eixo y), logo a diretriz d é vertical, sendo descrita na forma d: x = k, com k pertencente ao conjunto dos números reais. Neste caso digite na janela Entrada: x = k (não se esqueça de que k é um número real).

b) Parábolas cuja reta diretriz não é paralela aos eixos cartesianos:

- Neste caso a reta diretriz não é paralela a nenhum dos eixos cartesianos. Utilize aqui o comando: Reta definida por Dois Pontos.

A equipe conseguiu realizar a comanda de hoje?

____

____

O que acharam das atividades da aula?

____

____

Qual a avaliação a respeito do nível de dificuldade da atividade?

____

____

Comentários que queiram acrescentar:

____

____

Secretaria da Educação do Estado de São Paulo
Diretoria de Ensino da Região de São João da Boa Vista
E. E. Padre Josué Silveira de Mattos

Equipe

Nome: ____nº_____ Turma:____

Nome: ____nº_____ Turma:____

Nome: ____nº_____ Turma:____

ATIVIDADE: O GeoGebra e a equação da parábola

1. Quais são as equações obtidas pelo software GeoGebra das parábolas construídas em aulas anteriores?

____

____

____

____

____

____

____

____

____

2. Quais as características da parábola de cada equação?

____

____

____

____

____

3. Quais as relações identificadas na visualização do gráfico e a equação do mesmo? Dê as suas conclusões:

Secretaria da Educação do Estado de São Paulo
Diretoria de Ensino da Região de São João da Boa Vista
E. E. Padre Josué Silveira de Mattos

Equipe

Nome: ____nº_____ Turma:____

Nome: ____nº_____ Turma:____

Nome: ____nº_____ Turma:____

ATIVIDADE: PARÁBOLA POR CINCO PONTOS

Objetivos: Construir uma parábola utilizando o software Geogebra através do comando Cônica definida por Cinco Pontos. Determinar o vértice e o parâmetro da parábola.

1. Abra a tela do *GeoGebra.*

2. Construa uma reta horizontal, que será a diretriz da parábola, digite na janela entrada y=k, sendo K um número inteiro, diferente de zero, escolhido pela equipe;

3. Clique sobre a reta com o botão direito do mouse, e na opção Renomear, digite a letra d e clique em Aplicar;

4. O foco F da parábola pertencerá ao eixo das abscissas, para que isto ocorra, digite na janela de entrada F = (f,0), sendo f um número inteiro qualquer;

5. Sobre a reta d determine o ponto A. Selecione o comando Ponto em Objeto e clique sobre a reta d;

6. Trace a reta *a* perpendicular à reta d, passando por A. Selecione o comando Reta Perpendicular, clique sobre o ponto A e sobre a reta d;

7. Trace a mediatriz do segmento AF. Selecione o comando Mediatriz, clique sobre o ponto A e depois sobre o ponto F;

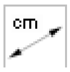
8. Clique sobre a reta mediatriz com o botão direito do mouse, e na opção Renomear, digite a’ e clique em Aplicar;

9. Para determinar o ponto A’, interseção das retas a e a’, selecione o comando Interseção de dois Objetos e clique sobre as retas a e a’;

10. Clique sobre o ponto com o botão direito do mouse, e na opção Renomear, digite A’ e clique em Aplicar;

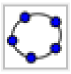
11. Determine os pontos B, C, D, e E sobre a reta d. Utilize o comando e para cada ponto, repita os comandos de 5 a 10;

12. Complete a tabela a seguir com a distância dos pontos A’, B’, C’, D’ e E’ ao ponto F, e à reta d.

Para determinar as distâncias solicitadas selecione o comando  Distância, Comprimento ou Perímetro. Clique sobre os objetos solicitados.

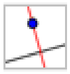
Distância			As distâncias do ponto A' ao ponto F e à reta d são iguais?
do ponto	ao ponto F	à reta d	
A'			
B'			
C'			
D'			
E'			

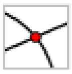
Se todas as respostas da última coluna forem sim, então por definição, os pontos A', B', C', D' e E' pertencem a uma parábola $\mathcal{P}$ de reta diretriz *d* e foco F.

13. Para traçar a parábola $\mathcal{P}$ selecione o comando  Cônica definida por Cinco Pontos e clique sobre os pontos A', B', C', D' e E'.

14. Clique com o botão direito do mouse sobre o gráfico da parábola obtida e selecione as opções: Propriedades..., Cor e clique sobre a cor vermelha.

15. Clique novamente com o botão direito do mouse sobre o gráfico da parábola e selecione a opção: Equação y = ax² + bx +c. Quais os coeficientes a, b e c da parábola obtida?

16. Para determinar a reta f, eixo focal da parábola $\mathcal{P}$ selecione o comando  Reta Perpendicular, clique sobre o ponto F e sobre o EixoX, uma vez que o foco da parábola pertence ao eixo das abscissas.

17. Selecione o comando  Interseção de dois Objetos para determinar o ponto V, vértice da parábola $\mathcal{P}$, de interseção da reta focal f e a parábola, clique sobre o gráfico da parábola e sobre a reta f.

18. Quais são as coordenadas do ponto V e do Ponto F? Qual a distância entre estes dois pontos? Qual a distância do ponto V à reta diretriz d? O que concluíram?

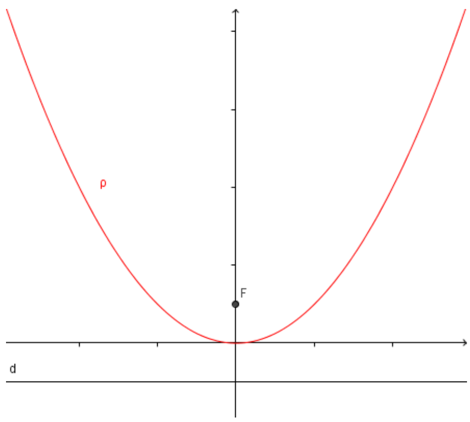
Secretaria da Educação do Estado de São Paulo
Diretoria de Ensino da Região de São João da Boa Vista
E. E. Padre Josué Silveira de Mattos

Equipe:

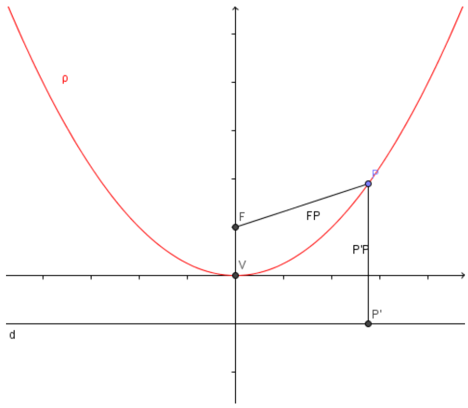
____ nº______série______
____ nº______série______
____ nº______série______

A PARÁBOLA

Seja uma parábola $\mathcal{P}$ representada no plano cartesiano OXY cuja reta diretriz *d* é paralela ao eixo das abscissas (eixo x), o foco F pertence ao eixo das ordenadas (eixo y), isto é, F = (0,f). Logo o eixo das ordenadas (eixo y) é a reta focal (ou eixo de simetria) da parábola, sendo perpendicular à diretriz da parábola e, portanto, perpendicular ao eixo das abscissas (eixo x). Tomando um número real positivo p e fazendo d: y = - p e F = (0,p) teremos que a interseção da parábola $\mathcal{P}$ com a reta focal f, f : x = 0, é dada pelo ponto V=(0,0), vértice da parábola $\mathcal{P}$, e o parâmetro da parábola, distância do foco à reta diretriz da parábola, é o número 2p. Observe a figura abaixo:



Considere o ponto P = (x,y) pertencente a parábola $\mathcal{P}$, e o ponto P', projeção ortogonal de P na reta d, diretriz da parábola $\mathcal{P}$, logo P'= (x,-p) . Como P pertence à parábola $\mathcal{P}$, então a distância de F a P é igual a distância de P' a P, isto é, d(FP) = d(P'P) pois, por definição de parábola, os segmentos FP e P'P são congruentes, isto é, possuem a mesma medida.



Como F=(0,p), P=(x,y) e P'(x,-p) podemos utilizar a fórmula de distância de dois pontos e escrever:

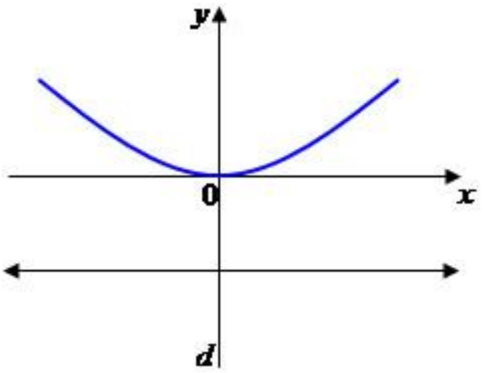
d(FP) = $\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2}$ = $\sqrt{(x-x)^2 + (-p-y)^2}$ = d(P'P)

Desenvolvendo as expressões de cada radicando e elevando a sentença matemática ao quadrado, obteremos: $x^2 + y^2 - 2yp + p^2 = p^2 + 2py + y^2$

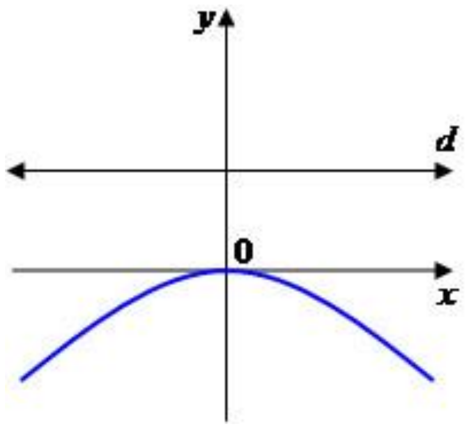
Simplificando a sentença e deixando y em função de x encontraremos a equação da parábola para este caso: $\mathbf{y = \frac{x^2}{4p}}$

Se a reta diretriz da parábola é paralela a um dos eixos cartesianos e o vértice da parábola está na origem do sistema de coordenadas cartesianas obteremos, utilizando procedimento semelhante ao descrito anteriormente, as seguintes equações:

i) A reta diretriz parábola é paralela ao eixo das abscissas (eixo x):

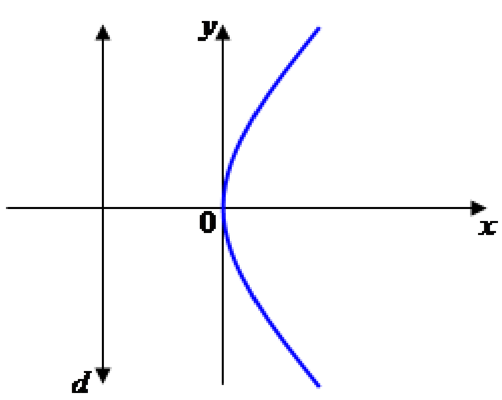


$\boldsymbol{x^2 = 4py \Rightarrow y = \frac{x^2}{4p}}$

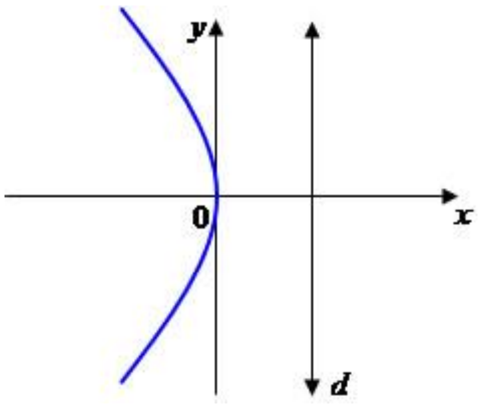


$\boldsymbol{x^2 = -4py \Rightarrow y = -\frac{x^2}{4p}}$

ii) A reta diretriz parábola é paralela ao eixo das ordenadas (eixo y):



$\boldsymbol{y^2 = 4px \Rightarrow x = \frac{y^2}{4p}}$



$\boldsymbol{y^2 = -4px \Rightarrow x = -\frac{y^2}{4p}}$

Agora é a vez de vocês, mãos à obra!!!!

1. Obtenham a equação da parábola de foco F e diretriz d em cada item, e esbocem o respectivo gráfico:

a) F(0, -3), d: y= 3

c) F(1, 0), d: x = -1

a) F(0, 2), d: y= -2

d) F(-4, 0), d: x= 4

2. Pensem agora numa parábola cuja diretriz seja paralela ao eixo das abscissas (eixo x) e cujo vértice não esteja na origem do sistema cartesiano OXY, contudo pertença ao eixo das abscissas. Tomem, por exemplo, a parábola de diretriz d: y = -2 e vértice V = (4,0)

2.1 A concavidade da parábola está voltada para cima ou para baixo? ________________________

Por quê?____

2.2 Qual a distância da reta diretriz ao vértice da parábola?_________________________________

2.3 E seu parâmetro (2p)?____

2.4 Quais são as coordenadas do foco F da parábola? ______________________________________

2.5 Qual é a reta focal? ____

2.6 Para que o ponto P = (x,y) pertença a parábola o que é preciso garantir? Utilizem uma sentença matemática.

____

____

2.7 Desenvolvam a sentença acima, obtendo o valor de y em função do valor de x.

____

____

____

____

____

____

3 Seja a parábola $\mathcal{P}$, de vértice V= (4,1) e reta diretriz d: y = -2.

3.2 Quais as coordenadas cartesianas do ponto V' projeção de V sobre a reta diretriz d? ________

3.3 Encontre a distância do ponto V ao ponto V'?____

3.4 Identifique a reta focal dessa parábola?____

3.5 Determine a distância de V a F, vértice e foco da parábola?_______________________________

3.6 Quais as coordenadas cartesianas do ponto F, foco da parábola?__________________________

3.7 Tomando um ponto genérico P = (x,y), de modo que P pertença a parábola $\mathcal{P}$, determine a equação desta parábola.

____

____

____

____

____

4 Notem que nos exercícios anteriores os vértices das parábolas não estão sobre a origem do sistema cartesiano, observem os dados de cada uma:

4.1) No exercício 2: V = (4,0) e 2p = 4, equação: $y = \frac{(x-4)^2}{8}$

4.2) No exercício 3: V = (4,1) e 2p = 6, equação: $y - 1 = \frac{(x-4)^2}{12}$

Fazendo V = (x_0, y_0) e utilizando o parâmetro da parábola, generalizem as sentenças matemáticas dessas equações.

____

5 De modo geral se a reta diretriz da parábola é paralela a um dos eixos cartesianos como serão descritas suas equações se:

i) A reta diretriz da parábola for paralela ao eixo das abscissas:

a) A concavidade da parábola estiver voltada para cima: ______________________________

b) A concavidade da parábola estiver voltada para baixo:______________________________

ii) A reta diretriz da parábola for paralela ao eixo das ordenas:

a) A concavidade da parábola estiver voltada para direita:_____________________________

b) A concavidade da parábola estiver voltada para esquerda: __________________________

Avaliação da atividade:

Houve dificuldade(s) para realizar as atividades propostas: ( ) Sim ( ) Não

Se houve, pontuem quais? ____

____

Como a equipe avalia as atividades desenvolvidas? ____________________________________

____

Conclusões da equipe: ____

____

____

____

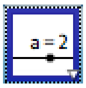
Secretaria da Educação do Estado de São Paulo
Diretoria de Ensino da Região de São João da Boa Vista
E. E. Padre Josué Silveira de Mattos

Nome____ nº______série______
Nome____ nº______série______
Nome____ nº______série______

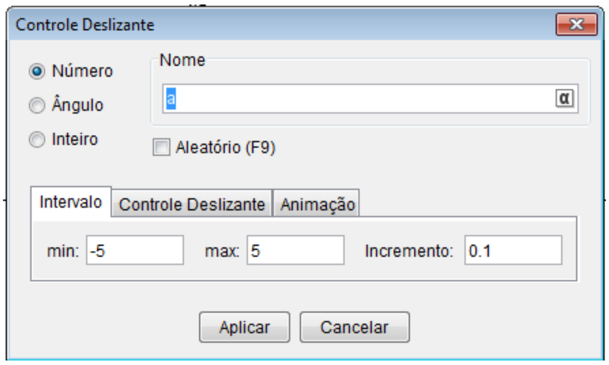
O COEFICIENTE "a" DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

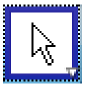
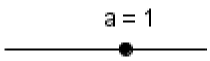
As atividades propostas para esta aula têm como objetivo a análise do coeficiente "a" de uma função quadrática, $f : \Re \rightarrow \Re$, tal que $f(x) = a.x^2$.

Para desenvolver as atividades sigam as instruções abaixo:

1. Abra a tela do software GeoGebra.
2. Selecione a ferramenta controle deslizante 

e ao clicar sobre a Janela de visualização aparecerá a seguinte janela:



3. Na janela marque no item número, coloque a em nome, e estabeleça o intervalo [-5,5] com incremento 0,1. Logo após clique em aplicar.
4. Na caixa de entrada digite: $y = a*x^2$. Note que o programa fará o gráfico da função considerando a = 1.
5. Selecione a ferramenta  Mover. E na figura 

clique sobre a bolinha deslizando-a com o mouse sobre o segmento. O que podem observar?

____
____

6. O que acontece com o gráfico da função quando a=0? Por que isto ocorre?

____
____
____

7. O coeficiente a está associado à concavidade da parábola. Generalize o que aprenderam criando uma "regra" para a > 0 e para a < 0.

____
____
____

O desenvolvimento da atividade foi: (   )Fácil (   ) Difícil
Todos os elementos da equipe compreenderam o proposto e chegaram a uma conclusão?
(   ) Sim (   ) Não

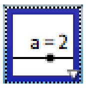
Secretaria da Educação do Estado de São Paulo
Diretoria de Ensino da Região de São João da Boa Vista
E. E. Padre Josué Silveira de Mattos

Nome____ nº______série______
Nome____ nº______série______
Nome____ nº______série______

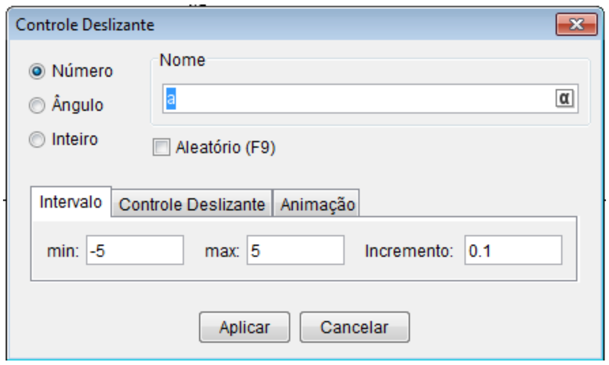
O COEFICIENTE "c" DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

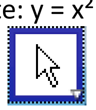
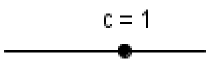
As atividades propostas para esta aula têm como objetivo a análise do coeficiente "c" de uma função quadrática, $f : \Re \rightarrow \Re$, tal que $f(x) = x^2 + c$.

Para desenvolver as atividades sigam as instruções abaixo:

1. Abra a tela do software GeoGebra.
2. Selecione a ferramenta controle deslizante 

e ao clicar sobre a Janela de visualização aparecerá a seguinte janela:



3. Na janela marque no item número, coloque c em nome, e estabeleça o intervalo [-5,5] com incremento 0,1. Logo após clique em aplicar.
4. Na caixa de entrada digite: $y = x^2 + c$. O programa fará o gráfico da função considerando c=1.
5. Selecione a ferramenta  Mover. E na figura 

clique sobre a bolinha deslizando-a com o mouse sobre o segmento. O que podem observar?

____
____

6. O coeficiente c indica onde a curva intercepta o eixo das ordenadas, isto é, a parábola intercepta o eixo y no ponto P = (0,c). Por que isto ocorre?

____
____

7. Quando *c* = 0 onde está localizado o vértice da parábola? Nesse caso, quando c > 0, quantas raízes reais a função possui? E quando c < 0?

____
____

O desenvolvimento da atividade foi: ( )Fácil ( ) Difícil

Todos os elementos da equipe compreenderam o proposto e chegaram a uma conclusão

O desenvolvimento da atividade foi: ( )Fácil ( ) Difícil

Todos os elementos da equipe compreenderam o proposto e chegaram a uma conclusão?

( ) Sim ( ) Não

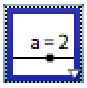
Secretaria da Educação do Estado de São Paulo
Diretoria de Ensino da Região de São João da Boa Vista
E. E. Padre Josué Silveira de Mattos

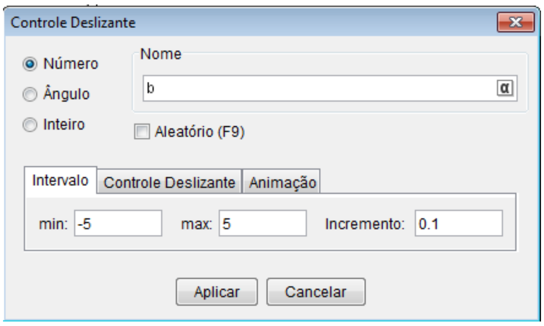
Nome____ nº______série______
Nome____ nº______série______
Nome____ nº______série______

O COEFICIENTE “b” DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

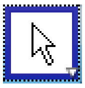
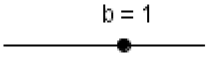
As atividades propostas para esta aula têm como objetivo a análise do coeficiente “b” de uma função quadrática, $f : \Re \rightarrow \Re$, tal que $f(x) = x^2 + bx$.

Para desenvolver as atividades sigam as instruções abaixo:

1. Abra a tela do software GeoGebra.
2. Selecione a ferramenta controle deslizante  e ao clicar sobre a Janela de visualização aparecerá a seguinte janela:



3. Na janela marque no item número, coloque b em nome, e estabeleça o intervalo [-5,5] com incremento 0,1. Logo após clique em aplicar.
4. Na caixa de entrada digite: $y = x^2 + bx$. Note que o programa fará o gráfico da função considerando b=1.

Selecione a ferramenta  Mover. E na figura 

clique sobre a bolinha deslizando-a com o mouse sobre o segmento.

5. Note que neste caso a concavidade da parábola está voltada para cima, pois a>0, observe qual o comportamento da parábola quando ela intercepta o eixo y, e associe a cada item abaixo, (C) se a função neste local for crescente, (D) se for decrescente e (N) se não for nem crescente e nem decrescente.

( ) b = 5	( ) b = -5	( ) b = 3
( ) b = -3	( ) b = -1	( ) b = 0

Se a concavidade da parábola estivesse voltada para baixo, isto é se a<0, como faria a associação? Digite na caixa de entrada $y= -x^2 + bx$ e verifique o que ocorre se:

( ) b = 5	( ) b = -5	( ) b = 3
( ) b = -3	( ) b = -1	( ) b = 0

6. Dê a conclusão da equipe:

____

____

O desenvolvimento da atividade foi: (   )Fácil (   ) Difícil

Todos os elementos da equipe compreenderam o proposto e chegaram a conclusão?

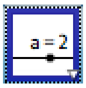
(   ) Sim (   ) Não

Secretaria da Educação do Estado de São Paulo
Diretoria de Ensino da Região de São João da Boa Vista
E. E. Padre Josué Silveira de Mattos

Nome____ nº______série______
Nome____ nº______série______
Nome____ nº______série______

A FUNÇÃO QUADRÁTICA E SEUS COEFICIENTES:

Nas atividades anteriores foram estudados isoladamente os coeficientes a, b e c de uma função quadrática. Hoje a proposta é utilizar o controle deslizante e a função animar do software GeoGebra para os três coeficientes. Vamos lá!

1. Abra a tela do software GeoGebra.
2. Selecione a ferramenta controle deslizante 

e ao clicar sobre a Janela de visualização aparecerá a janela Controle Deslizante. Marque o item número, e no nome coloque a letra *a*, e estabeleça o intervalo [-5,5] com incremento 0,1. Logo após clique em aplicar.
3. Repita o procedimento só que coloque no nome a letra *b.*
4. Repita novamente colocando agora a letra *c*.
5. Na caixa de entrada digite: y = a*x² + b*x + c. Note que o programa fará o gráfico da função considerando a = b = c = 1.
6. Clique com o botão direito do mouse sobre o número a, selecione propriedades, e na aba básico selecione animar.
7. Repita o item 6, clicando agora com o botão direito do mouse sobre o número b.
8. Agora repita o procedimento para a letra c.
9. Observem os movimentos que a parábola faz na janela de visualização conforme os valores dos coeficientes *a*, *b* e *c* vão se alterando, verifiquem a associação dos valores dos coeficientes à visualização da parábola, e se compreenderam de fato a "função" de cada coeficiente de uma função quadrática na visualização de seu gráfico.

O desenvolvimento da atividade foi: ( )Fácil ( ) Difícil
Todos os elementos identificaram a característica da parábola através de seus coeficientes?
( ) Sim ( ) Não
Em caso de negação pontue a dificuldade:

____
____
____
____

Apêndice D

Atividades de Aplicação no Cotidiano

Atividades:

a) Sobre a distância de freagem de veículos;
b) Vídeo Clipe
c) Construção de um fogão solar
d) Construção do anteparo parabólico de papelão

Síntese:

Estas atividades têm por finalidade apresentar algumas aplicações da parábola no cotidiano. Elas possibilitam abordar o conteúdo escolar através das propriedades e características da cônica parábola estreitando laços entre teoria e prática.

A atividade sobre a distância de freagem de veículos, de autoria do Professor Doutor Roberto R. Paterlini pode ser acessada no Hipertexto Pitágoras através do endereço eletrônico**:** http://www.dm.ufscar.br/hp/hp202/hp2021/hp2021001/hp2021001.html.

A construção do fogão solar com formato de um paraboloide realizada em sala de aula foi desenvolvida seguindo as orientações da aula sobre Paraboloide de Revolução dos Professores Guilherme Hartung e Rita Meirelles disponíveis no portal do MEC, endereço eletrônico http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=23269.

Na atividade Vídeo Clipe foram exibidos três vídeos disponíveis no youtube, o primeiro da série de programas "Isto é matemática" da Sociedade Portuguesa de Matemática, disponível em http://www.youtube.com/watch?v=X59mM76CL_g, e os vídeos: Como funcionam as tochas olímpicas e Cozinha Solar Parabólica, respectivamente disponíveis em: http://youtube.com/watch?v=YAV4qXTZ3yw e http://www.youtube.com/watch?v=k8bt0qz-E7E.

A ficha de atividade a seguir foi especialmente confeccionada com a finalidade de facilitar o encaminhamento da atividade Vídeo Clipe, para coletar dados e impressões dos alunos, avaliar a aprendizagem e a própria atividade.

O roteiro utilizado para a construção do anteparo parabólico conclui esse Apêndice, atividade elaborada pela autora, tendo como principal colaborador o Professor Leandro César da Rosa.

Secretaria da Educação do Estado de São Paulo
Diretoria de Ensino da Região de São João da Boa Vista
E. E. Padre Josué Silveira de Mattos

Nome____nº______série______

Parabólicas, Castanhas e Orelhas Grandes:

O videoclipe: “Parabólicas, Castanhas e Orelhas Grandes” pode ser acessado na internet pelo endereço eletrônico: http://www.youtube.com/watch?v=X59mM76CL_g .

Este vídeo foi promovido pela Sociedade Portuguesa de Matemática, com apresentação do matemático e professor universitário Rogério Martins, e faz parte da série de programas “Isto é matemática”. Os programas da série mostram como a matemática está presente no nosso dia a dia.

1. O que você achou do vídeo?

   ____

2. No vídeo qual o conteúdo matemático que o professor apresenta?

   ____

3. Afinal o que é um paraboloide?

   ____

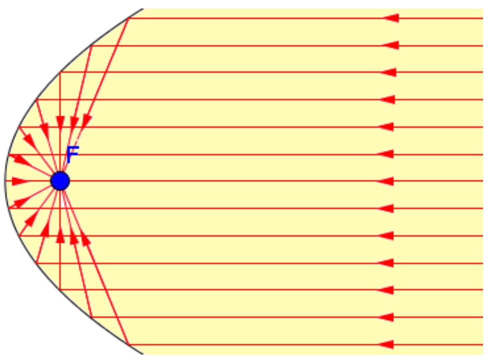
   ____

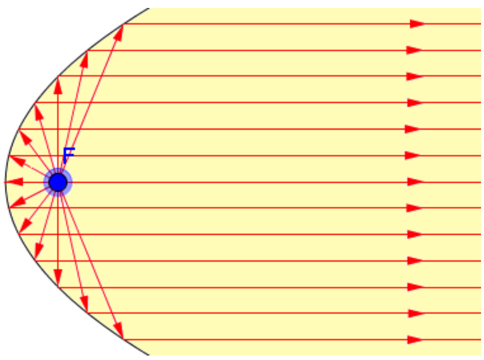
4. Qual a propriedade da parábola apresentada no vídeo? O que consiste esta propriedade?

   ____

   ____

5. As ondas mecânicas ou eletromagnéticas, como os raios de luz e as ondas de rádio, propagam-se no espaço em linha reta, isto não é totalmente verdadeiro, mas podemos aceitar esta hipótese. Pela lei da física: “o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão”. Deste modo quando esses sinais são refletidos em um ponto de uma superfície, tudo se passa como se estivessem sendo refletidos em um plano tangente à superfície nesse ponto. De um modo geral, as ondas paralelas ao eixo de simetria da parábola são por ela refletidas de tal maneira que a onda refletida passa pelo seu foco. Reciprocamente, ondas que partem do foco de uma parábola são por ela refletidas paralelamente ao seu eixo de simetria (eixo focal). Observe as figuras abaixo:





6. Essa propriedade é utilizada em diversas situações no dia a dia. Dê alguns exemplos de aplicações no mundo atual:

____

____

____

____

____

7. Qual das aplicações apresentadas da propriedade reflexiva da parábola no vídeo você achou a mais interessante?

____

____

8. Você sabia que a palavra foco vem do grego e significa fogo. Durante o vídeo o professor relata uma lenda onde Arquimedes havia colocado fogo em navios romanos durante o cerco de Siracusa. Segundo a lenda, Arquimedes construiu uma superfície parabólica espelhada para captar os raios solares e concentrá-los em um único ponto, o foco da parábola, localizado sobre os navios romanos, incendiando-os. Você acredita que isto seja realmente possível? Você acredita que os paraboloides devam ser utilizados em nossas casas como meio para "gerar energia"? Cite vantagens e desvantagens:

____

____

____

____

9. Os próximos dois vídeos também abordam a utilidade da parábola no cotidiano. O primeiro relata um pouco da história dos jogos olímpicos (disponível em: http://www.youtube.com/watch?v=YAV4qXTZ3yw), o segundo apresenta a utilização de um fogão solar (http://www.youtube.com/watch?v=k8bt0qz-E7E.)

O que achou das atividades da aula de hoje?

____

Compreendeu o conteúdo trabalhado?

____

Comentários que queira acrescentar:

____

____

ATIVIDADE: CONSTRUÇÃO DO ANTEPARO PARABÓLICO DE PAPELÃO

Objetivos:

Construir um anteparo parabólico utilizando papelão com a finalidade de observar o fenômeno de reflexão das ondas sonoras perceptíveis ao ouvido humano. Deseja-se comprovar que as ondas ao atingirem uma superfície parabólica são refletidas e convergem para o foco da parábola.

Material utilizado:

- Seis placas de papelão com formato retangular de dimensões 1,5m x 2m;
- Uma caixa de alfinetes;
- Duas fitas adesivas (largas);
- Dois tubos de cola;
- Quatro folhas de papel pardo;
- Régua, esquadro, tesoura, estilete.

Procedimentos:

1. Construção de moldes com o formato de parábolas:

Como a parábola é simétrica ao seu eixo focal o molde será composto de duas partes simétricas. Para o desenvolvimento do projeto determinou-se que a menor distância entre o foco e a parábola (vértice) seria de 80 cm.

Traça-se uma reta paralela ao lado maior do papelão, distante 10 cm de uma borda do mesmo. Esta reta será o eixo das abscissas, e sobre ela teremos o primeiro ponto, vértice da parábola, sobre a borda do papelão. A reta diretriz é paralela à reta traçada inicialmente no papelão, a qual dista 160 cm do foco. Neste caso a função polinomial de segundo grau que determina a parábola está definida em f : $\Re_+ \rightarrow \Re_+$, tal que $f(x) = \frac{x^2}{320}$.

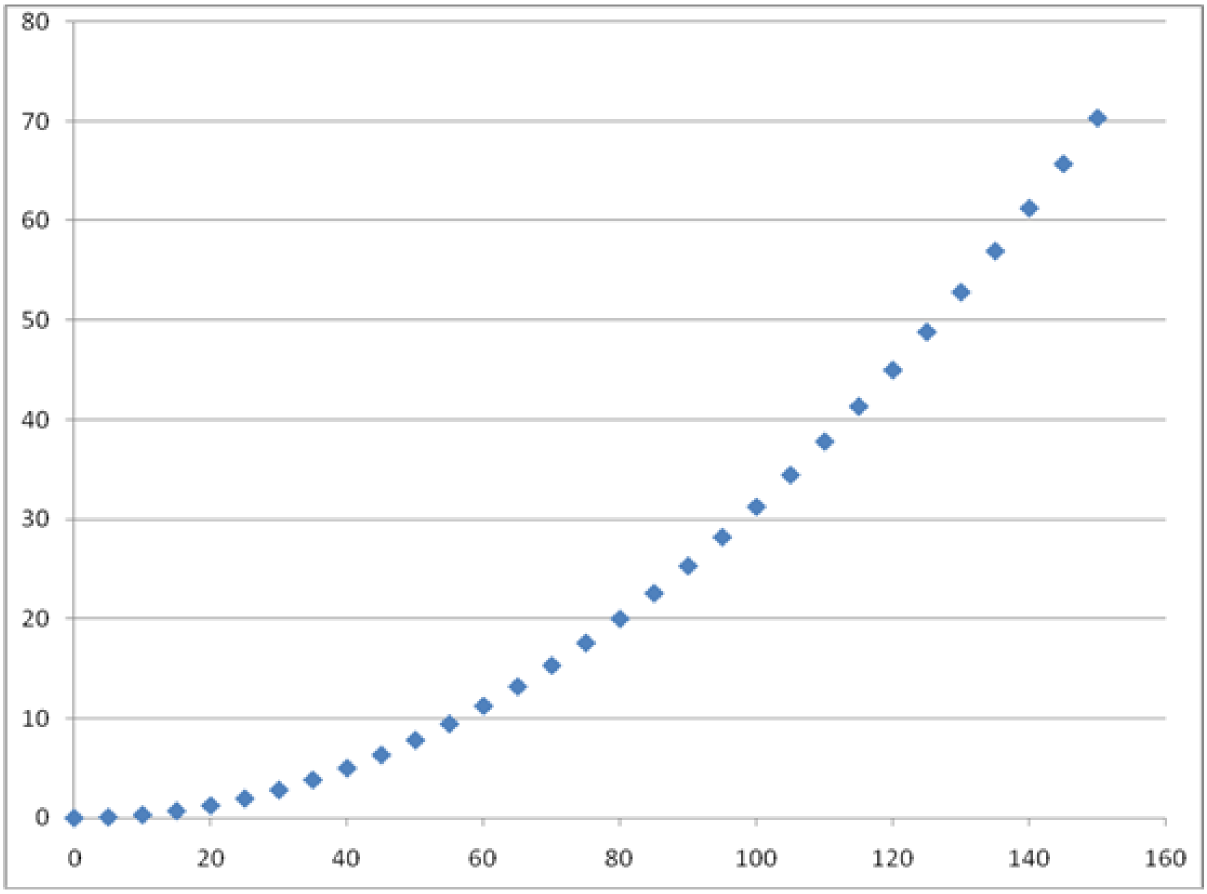
Sobre essa reta serão marcados pontos (abscissas) com 5 cm de distância entre eles, sendo igualmente espaçados, projeções ortogonais dos pontos obtidos na parábola a ser traçada sobre o papelão. As coordenadas dos pontos obtidos pertencentes à parábola são apresentadas a seguir:

x	y
5	0,078
10	0,313
15	0,703
20	1,25
25	1,953
30	2,813
35	3,828
40	5
45	6,328
50	7,813

x	y
55	9,453
60	11,25
65	13,2
70	15,31
75	17,58
80	20
85	22,58
90	25,31
95	28,2
100	31,25

x	y
105	34,45
110	37,81
115	41,33
120	45
125	48,83
130	52,81
135	56,95
140	61,25
145	65,7
150	70,31

Simulação computacional dos pontos obtidos no papelão.



Com a união dos pontos obtêm-se a curva desejada, molde da seção transversal do anteparo parabólico.

Para a conclusão da confecção do molde basta cortar o papelão na curva obtida.

2. Preparação do papelão para a confecção do anteparo:

O anteparo foi construído em duas placas de papelão.

As placas de papelão utilizadas eram planas, e para facilitar o manuseio, as mesmas foram enroladas de modo a formarem um cilindro de 1,5m de altura.

3. Colagem dos moldes nas placas de papelão enroladas, parte traseira do anteparo:

Cada papelão deve receber no mínimo dois moldes afixados paralelamente para obter o formato desejado e dar resistência ao anteparo.

Para afixar os moldes ao papelão utilizam-se os alfinetes que iniciam o trabalho de sustentação.

As folhas de papel pardo são recortadas em tiras de 20 cm e são coladas de modo a unir o papelão enrolado e o molde produzido.

As fitas adesivas também são utilizadas para a afixação das tiras de papel pardo no papelão.

4. União das partes do paraboloide cilíndrico construído e colocação de suportes:

As duas placas de papelão simétricas são unidas utilizando a fita adesiva larga, de modo que os vértices de cada uma sejam coincidentes.

Para manter o anteparo na posição vertical colocam-se suportes em papelão enrolados, com formatos de pequenos cilindros, que ao serem afixados aos moldes na parte traseira do anteparo favorecem o seu equilíbrio.