UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Mateus Balbino Guimarães

Problemas elípticos não lineares envolvendo equações do tipo Kirchhoff

São Carlos - SP
21 de março de 2016

O presente trabalho teve suporte financeiro da Capes

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Problemas elípticos não lineares envolvendo equações do tipo Kirchhoff

Mateus Balbino Guimarães
BOLSISTA CAPES
Orientador: Prof. Dr. Rodrigo da Silva Rodrigues

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática

São Carlos - SP
21 DE MARÇO DE 2016

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G963p

Guimarães, Mateus Balbino
Problemas elípticos não lineares envolvendo equações do tipo Kirchhoff / Mateus Balbino Guimarães. -- São Carlos : UFSCar, 2016.
172 p.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2016.

1. Métodos variacionais. 2. Expoentes críticos. 3. Equações do tipo Kirchhoff. 4. Equações elípticas não lineares. I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Mateus Balbino Guimarães, realizada em 14/03/2016:

Rodrigo S. Rodrigues

Prof. Dr. Rodrigo da Silva Rodrigues
UFSCar

Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki
UFJF

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo
UFPA

Prof. Dr. Ma To Fu
USP

Prof. Dr. Gustavo Ferron Madeira
UFSCar

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter tornado esse trabalho possível.

Aos meus pais, Laura e Valter, ao meu irmão, Murilo, e a todos meus familiares que sempre me apoiaram e incentivaram.

À Marinez por todos esses anos ao meu lado me ajudando e apoiando.

A todos os meus amigos, em especial aos amigos da República Chinelinho.

Ao Professor Rodrigo da Silva Rodrigues, pela excelente orientação e por ter acreditado em mim desde a época da orientação do Mestrado.

Aos Professores Olímpio Hiroshi Miyagaki, Giovany de Jesus Figueiredo, Ma To Fu e Gustavo Ferron Madeira por aceitarem o convite de compor a banca examinadora e pelas excelentes críticas e sugestões ao trabalho.

Aos professores e funcionários do departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Finalmente, agradeço a todos que direta ou indiretamente me ajudaram a terminar essa tese.

Resumo

Nesse trabalho, estudamos a existência de soluções fracas para quatro problemas elípticos não lineares envolvendo equações do tipo Kirchhoff. Esses problemas apresentam em comum a presença de uma função $M : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+$, conhecida como função do tipo Kirchhoff. O primeiro problema estudado trata de uma equação do tipo Kirchhoff envolvendo expoentes subcríticos, enquanto o segundo problema trata da mesma equação envolvendo o expoente crítico de Caffarelli-Kohn-Nirenberg. No terceiro problema, estudamos um sistema de equações do tipo Kirchhoff envolvendo expoentes críticos de Caffarelli-Kohn-Nirenberg. O último problema estudado envolve um operador do tipo Kirchhoff e uma condição de fronteira não-linear.

Devido ao operador do tipo Kirchhoff nas equações, esses problemas são ditos não-locais. As dificuldades matemáticas encontradas nesse fenômeno é o que torna o estudo dessa classe de problemas particularmente interessante.

Em nossos estudos utilizamos métodos variacionais clássicos, como o Teorema do Passo da Montanha e a teoria de gênero de Krasnoseslkii.

Abstract

In this work we study the existence of weak solutions for four nonlinear elliptic problems of Kirchhoff type. These problems have in common the presence of a function $M : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+$, known as Kirchhoff-type function. The first problem deals with a Kirchhoff type equation involving subcritical exponents while the second problem deals with the same equation but with a critical Caffarelli-Kohn-Nirenberg exponent. In the third problem, we study a system of Kirchhoff type equations involving critical Caffarelli-Kohn-Nirenberg exponents. The latter problem involves a Kirchhoff type operator and a nonlinear boundary condition.

Due to the presence of the Kirchhoff type operator in the equations, these problems are called nonlocal problems. This phenomenon causes some mathematical difficulties, which makes the study of such a class of problem, particularly interesting.

In our studies we used classical variational methods such as The Mountain Pass Theorem and the Krasnoseslkii genus theory.

Sumário

Introdução

Nesse trabalho, estudamos a existência de soluções não triviais para problemas elípticos não lineares envolvendo equações do tipo Kirchhoff. Esses problemas apresentam em comum a presença de uma função $M : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+$, conhecida como função do tipo Kirchhoff. Especificamente, abordamos em nosso trabalho quatro tipos diferentes de problemas do tipo Kirchhoff. O primeiro problema estudado foi o seguinte:

$$\begin{cases} L(u) &= \lambda |x|^{-\delta} f(x,u) + |x|^{-\beta}|u|^{q-2}u, \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

em que

$$L(u) := -\left[M\left(\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p \, dx \right) \right] div\left(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \right),$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado com $0 \in \Omega$, $N \geq 3$, $1 < p < N$, $a < \frac{N-p}{p}$, $p < q < p^*$, em que $p^* = \frac{Np}{N-dp}$ é o expoente crítico de Caffarelli-Kohn-Nirenberg, com $d = 1 + a - b$ e $a \leq b < a + 1$, $\beta < (a+1)q + N(1 - \frac{q}{p})$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz certas hipóteses. O segundo problema estudado, descrito a seguir, é, de certa forma, semelhante ao problema (1), mas envolve o expoente crítico de Caffarelli-Kohn-Nirenberg:

$$\begin{cases} L(u) &= \lambda |x|^{-\delta} f(x,u) + |x|^{-bp^*}|u|^{p^*-2}u, \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Já no terceiro problema, estudamos um sistema de equações do tipo Kirchhoff, envolvendo expoentes críticos de Caffarelli-Kohn-Nirenberg:

$$\begin{cases} L_p(u) = \lambda|x|^{-c}F_u(x,u,v) + \alpha|x|^{-\beta}|u|^{\alpha-2}u|v|^{\gamma}, & \text{em } \Omega, \\ L_q(v) = \lambda|x|^{-c}F_v(x,u,v) + \gamma|x|^{-\beta}|u|^{\alpha}|v|^{\gamma-2}v, & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

em que

$$L_p(u) = -\left[M_1\left(\int_\Omega |x|^{-a_1p}|\nabla u|^p dx\right)\right] div\left(|x|^{-a_1p}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right),$$

$$L_q(v) = -\left[M_2\left(\int_\Omega |x|^{-a_2q}|\nabla v|^q dx\right)\right] div\left(|x|^{-a_2q}|\nabla v|^{q-2}\nabla v\right),$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado, com $0 \in \Omega$, $N \geq 3$, $1 < p < N$, $1 < q < N$, $a_1 < \frac{N-p}{p}$, $a_2 < \frac{N-q}{q}$, $c \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\alpha}{p^*} + \dfrac{\gamma}{q^*} = 1$, em que $p^* = \dfrac{Np}{N - d_1p}$ e $q^* = \dfrac{Nq}{N - d_2q}$ são os expoentes críticos de Caffarelli-Kohn-Nirenberg, com $d_i = 1 + a_i - b_i$, $a_i \leq b_i < a_i + 1$, $i = 1, 2$ e $\beta = b_1p^* = b_2q^*$. $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável em Ω e continuamente diferenciável em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e F_w é sua derivada parcial com respeito a w. $M_1, M_2 : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+$ são funções do tipo Kirchhoff.

O último problema estudado foi um problema envolvendo um operador do tipo Kirchhoff e uma condição de fronteira não-linear:

$$\begin{cases} L(u) = f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \eta} = g(x,u) \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

em que

$$L(u) = -\left[M\left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \int_\Omega c(x)|u|^p dx\right)\right] \cdot [div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) + c(x)|u|^{p-2}u],$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, é um domínio limitado, com fronteira $\partial\Omega$ de classe $C^{0,1}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \eta \cdot \nabla$ é a derivada normal (unitária) exterior a $\partial\Omega$, $p > 1$, $c \in L^\infty(\Omega)$ e f, g satisfazem certas hipóteses.

Devido à presença do termo $M\left(\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p\ dx\right)$ nos problemas (1) e (2) e seus correspondentes nos problemas (3) e (4), que são os únicos termos das equações acima que não estão aplicados em algum ponto de Ω, esses problemas são ditos não-locais. As dificuldades matemáticas encontradas nesse fenômeno é o que torna o estudo dessa classe de problemas particularmente interessante. Além do mais, essa classe de problemas tem uma motivação física. De fato, os problemas acima foram motivados pela versão estacionária da equação de Kirchhoff

$$\begin{cases} u_{tt} - M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u = g(x,u) \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \end{cases} \tag{5}$$

em que $M(s) = a + bs$, $a, b > 0$. Esta equação é uma versão mais geral do modelo proposto por Kirchhoff [38]:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{6}$$

A equação (6) é uma extensão da equação clássica da corda vibrante, proposta por d'Alembert, pois descreve a vibração de uma corda elástica levando-se em consideração a mudança no comprimento da mesma durante o movimento. Os parâmetros na equação (6) têm os seguintes significados: L é o comprimento da corda, h é a área da secção transversal da corda, E é o módulo de Young do material do qual a corda é feita, ρ é a densidade de massa e P_0 é a tensão inicial. Quando uma corda elástica com extremidades fixas é submetida a vibrações transversais, seu comprimento varia de acordo com o tempo, o que acarreta mudanças na tensão da corda. Isto motivou Kirchhoff a propor uma correção não-linear à equação clássica de d'Alembert.

Os primeiros estudos envolvendo equações do tipo Kirchhoff dizem respeito à Bernstein [7] e Pohozaev [50]. Entretanto, o problema (5) só veio receber grande atenção após o trabalho de J-L. Lions [42]. Nesse trabalho, pela primeira vez foram utilizados argumentos de análise funcional não-linear para atacar problemas não-locais do tipo Kirchhoff. Após isso, o estudo de problemas não-locais do tipo (5) cresceu exponencialmente. Alguns resultados interessantes podem ser encontrados, por exemplo em [1], [5], [17], [18],

[21], [35], [44], [45], [49] e nas referências neles encontradas.

O problema (1) com $a = b = \delta = 0$ e $p = 2$, foi estudado por muitos autores nos últimos anos. Citamos aqui um dos primeiros trabalhos nesse sentido, devido a Alves, Corrêa e Ma [1]. Eles estudaram a existência de uma solução positiva para o problema

$$\begin{cases} -M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u = f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

com $M(t) \geq m_0 > 0$, para todo $t \geq 0$, e f com crescimento subcrítico. Em [49], Perera e Zhang estudaram o problema (7) quando $M = a + bt$, $a, b > 0$ e $N = 1, 2$ e 3. Utilizando a teoria de índice de Yang eles obtiveram uma solução não trivial para o problema. He e Zou [35] estudaram a existência de múltiplas soluções para o problema

$$\begin{cases} -\left(a + b\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u = \lambda f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

com λ um parâmetro positivo e f satisfazendo hipóteses mais gerais que no trabalho de Perera e Zhang [49].

Figueiredo e dos Santos Júnior [28] estudaram o problema

$$\begin{cases} -M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u = \lambda f(x,u) + |u|^{q-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{9}$$

com $N = 1, 2$ e 3, $f(x,u) = |u|^{r-2}u$, $1 < r < 2 < q \leq 2^*$, λ um parâmetro positivo e $M \geq m_0 > 0$ satisfazendo determinadas hipóteses. Utilizando a teoria de gênero de Krasnoselskii eles obtiveram um resultado de múltiplas soluções para o problema (9). Figueiredo [26] estudou o problema (9) para $N \geq 3$ e f satisfazendo $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{f(x,t)}{t^{q-1}} = 0$, $2 < q < 2^*$. Através de um truncamento na função M e utilizando o Teorema do Passo da Montanha ele obteve uma solução positiva para o problema (9).

Para o caso envolvendo o operador p-Laplaciano, citamos, entre outros, os trabalhos de Corrêa e Figueiredo [18] e Chung e Toan [15]. Em [18], utilizando a teoria de gênero de Krasnoselskii, os autores provaram a existência de múltiplas soluções para o problema

$$\begin{cases} -\left[M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)\right]^{p-1} \Delta_p u &= f(x,u) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \qquad\quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{10}$$

em que f é uma função ímpar com crescimento subcrítico. Já em [15], Chung e Toan estudaram um problema com peso

$$\begin{cases} L(u) &= |x|^{-(a+1)p+c} f(x,u), \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0, \qquad\qquad\qquad\quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{11}$$

com $m_1 t^{\alpha_1 - 1} \leq M(t) \leq m_2 t^{\alpha_2 - 1}$, $1 < \alpha_1 \leq \alpha_2$ e $\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s)ds \geq M(t)t$, para $t > 0$, e f com crescimento subcrítico. Utilizando o Teorema de Fountain eles provaram a existência de uma sequência de soluções para o problema (11).

Sistemas de equações de Kirchhoff foram tratados, por exemplo, em [13], [14], [19], [27] e [45]. Em [13], Cheng, Wu e Liu estudaram o problema

$$\begin{cases} -\left[M_1\left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)\right]^{p-1} \Delta_p u &= \lambda F_u(x,u,v), \quad \text{em } \Omega, \\ -\left[M_2\left(\int_\Omega |\nabla v|^q dx\right)\right]^{q-1} \Delta_q v &= \lambda F_v(x,u,v), \quad \text{em } \Omega, \\ u = v &= 0, \qquad\qquad\quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{12}$$

com $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $p, q > N$, $0 < m_0 \leq M_i(t) \leq m_1$, $\forall t \geq 0, i = 1, 2$; e F com crescimento subcrítico. Utilizando o Teorema de Três Pontos Críticos de Ricceri, eles mostraram a existência de ao menos três soluções fracas para o problema. Em [27], Figueiredo estudou o problema

$$\begin{cases} -M_u\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right) \Delta u &= \lambda Q_u(u,v) + \frac{1}{2^*} H_u(u,v), \quad \text{em } \Omega, \\ -M_v\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right) \Delta v &= \lambda Q_v(u,v) + \frac{1}{2^*} H_v(u,v), \quad \text{em } \Omega, \\ u = v &= 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{13}$$

com $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 1, 2$ e 3 e $M, Q, H : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ funções de classe C^1, satisfazendo

$M_t(t,s) \geq m_0$ e $M_s(t,s) \geq m_1$, para todo $(t,s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$; $\frac{M_t(t,s)}{t} \to a$, quando $t \to +\infty$ e $\frac{M_s(t,s)}{s} \to b$, quando $s \to +\infty$; $\frac{1}{2}M(t^2,s^2) - \frac{1}{q}\left(M_t(t^2,s^2)t^2 + M_s(t^2,s^2)s^2\right) \geq 0$, para todo $t,s \geq 0$, para $2(1-\delta(c)) + 4\delta(c) < q < 2^*$, em que $c = \max\{a,b\}$ e $\delta(c) = 1$, se $c > 0$ e $\delta(c) = 0$, se $c = 0$; e $\frac{1}{\sqrt{t^2+s^2}}\left[\frac{1}{2}M(t^2,s^2) - \frac{1}{q}\left(M_t(t^2,s^2)t^2 + M_s(t^2,s^2)s^2\right)\right] \to +\infty$, quando $t \to +\infty$ ou $s \to +\infty$; Q possui crescimento subcrítico e H possui crescimento crítico. Usando o Teorema do Passo da Montanha ele obteve uma solução não trivial para o problema (13), para λ suficientemente grande. Mais recentemente, Chung [14] estudou o problema

$$\begin{cases} -M_1\left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)\Delta_p u &= \lambda a(x) f(u,v), \quad \text{em } \Omega, \\ -M_2\left(\int_\Omega |\nabla v|^q dx\right)\Delta_q v &= \lambda b(x) g(u,v), \quad \text{em } \Omega, \\ u = v &= 0, \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{14}$$

com $M_1(t) \geq m_1$ e $M_2(t) \geq m_2, \forall t \geq 0$; $a, b \in C(\overline{\Omega})$ tais que $a(x) \geq a_0 > 0$, $b(x) \geq b_0 > 0$, $\forall x \in \overline{\Omega}$; e f, g com crescimento subcrítico, satisfazendo determinadas hipóteses. Usando o método de sub-super solução, Chung provou a existência de uma solução positiva para o problema (14).

Problemas envolvendo uma condição fronteira não linear foram abordados, por exemplo, em [23], [46] e nas referências neles encontradas. Entretanto, esses trabalhos não tratam de problemas envolvendo um operador do tipo Kirchhoff. Em [47], Morbach abordou um problema envolvendo um operador do tipo Kirchhoff e condição fronteira não linear. Ressaltamos, também, que o sistema estudado por Corrêa e Nascimento [19] envolve uma condição de fronteira de Neumann.

Em nosso trabalho, visamos estender alguns dos resultados obtidos até aqui para problemas envolvendo equações do tipo Kirchhoff. Os problemas (1) e (2) estendem, principalmente, os trabalhos de Figueiredo e dos Santos Júnior [28] e Chung e Toan [15]. Trabalhamos com o operador do tipo Kirchhoff que foi considerado em [15], mas tratamos o caso em que o problema tem um termo com crescimento crítico e estendemos os resultados de [28]. Além disso, nosso problema trata dos casos envolvendo termos p-sublinear, p-linear e p-superlinear, diferentemente de [28] que só apresenta um termo com crescimento sublinear. Abordamos os problemas utilizando técnicas variacionais clássicas para a obtenção de soluções, como a teoria de gênero de Krasnoseslkii e o Teorema do Passo da Montanha. Ressaltamos, ainda, que no que é de nosso conhecimento, problemas envolvendo operadores do tipo Kirchhoff com um termo p-linear não haviam sido tratados na literatura. Além disso, a técnica que usamos nesse caso não havia sido usada nesse tipo de problema.

No problema (3) procuramos estender os resultados obtidos no problema (2), no caso p-superlinear, a um sistema de equações do tipo Kirchhoff. Dessa forma, tratamos um tipo de sistema de equações do tipo Kirchhoff diferente do que se via na literatura até agora, como os trabalhos de Cheng, Wu e Liu [13] e Chung [14], visto que o problema (3) trata de um sistema de equações do tipo Kirchhoff envolvendo um termo (p, q)-superlinear e expoentes críticos de Caffarelli-Kohn-Nirenberg. Em nosso problema, tratamos dois casos distintos, o primeiro quando $p = q$ e o segundo quando p pode ser diferente de q. Trabalhando com funções extremais e fazendo uso do Teorema do Passo da Montanha foi possível obter uma solução não trivial para o problema em ambos os casos. É válido dizer que, no que é de nosso conhecimento, nosso trabalho é o primeiro na literatura para essa classe de problemas no qual p pode ser diferente de q.

Devido à presença do termo não-local em (1), (2) e (3) foi necessário fazer um "truncamento" na função do tipo Kirchhoff, M, que aparece no operador, de forma a contornar essa dificuldade, criando, assim, um problema auxiliar. Encontrando soluções para esse problema auxiliar, podemos obter soluções para o problema original. Esse argumento de "truncamento" é similar ao utilizado em [26]. Outra dificuldade encontrada é a falta de compacidade devido à presença do termo crítico nos problemas (2) e (3). Essa dificuldade foi contornada utilizando uma técnica bastante utilizada na literatura: uma versão do princípio de concentração e compacidade devido à Lions [43].

O problema (4) visa estender o Teorema 1.2 de [23] utilizando-se um operador do tipo Kirchhoff ao invés do operador p-Laplaciano, quando as não linearidades de fronteira, g, e de reação, f, tem crescimento p-sublinear. Ressaltamos, entretanto, que, quando $M = 1$, nosso problema é exatamente o problema estudado em [23]. O Teorema 1.2 de [23] mostra a existência de uma solução quando os parâmetros relacionados às não linearidades estão em uma certa região delimitada pelos autovalores de Steklov e Neumann, enquanto em nosso trabalho, conseguimos obter uma região maior que a obtida em [23], para a existência de soluções fracas para o problema (4) e, além disso, foi possível demonstrar que essas soluções são não triviais. Mais ainda, supondo f e g funções ímpares e utilizando a teoria de gênero de Krasnoseslkii, conseguimos resultados de múltiplas soluções para o problema (4).

Nosso trabalho é divido em quatro capítulos, cada um abordando um dos problemas apresentados. O capítulo 1 é destinado ao estudo do problema (1). Nele apresentamos três resultados principais, o primeiro trata do problema (1) quando f é um termo p-sublinear e o segundo e terceiro resultados tratam dos casos p-linear e p-superlinear, respectivamente. O capítulo 2, destinado ao problema (2), também apresenta três resultados principais. Assim como no capítulo 1, cada um desses resultados estão relacionados ao comportamento da função f, ou seja, o primeiro resultado trata do caso em que f é um termo p-sublinear e os outros dois resultados tratam dos casos p-linear e p-superlinear. Lembramos que a diferença entre os problemas (1) e (2) é a presença do termo com crescimento crítico em (2). No capítulo 3, estudamos o problema (3). Esse capítulo apresenta dois resultados principais, o primeiro quando $p = q$ e o segundo quando p pode ser diferente de q. Finalmente, o capítulo 4 é destinado ao estudo do problema (4), apresentando quatro resultados principais. No primeiro resultado desse capítulo obtemos uma solução não trivial para o problema (4) impondo certas condições sobre a primitiva, F, da não linearidade de reação, f, e com a não linearidade de fronteira, g, tendo crescimento p-sublinear. No segundo resultado, supondo f e g funções ímpares, obtemos múltiplas soluções para o problema (4). O terceiro e quarto resultados são similares ao primeiro e segundo resultados, mas impondo certas condições sobre a primitiva, G, da não linearidade de fronteira, g, e com a não linearidade de reação, f, tendo crescimento p-sublinear.

Como uma forma de consulta rápida, apresentamos ao final da tese um apêndice contendo os principais resultados das teorias de Análise Funcional, Medida e Integração e Cálculo Variacional utilizados ao longo do trabalho.

Gostaríamos de ressaltar que os resultados obtidos nos Capítulos 1, 2 e 3 foram aceitos para publicação e podem ser encontrados nas referências [29], [32] e [33].

Capítulo

1

Equações do tipo Kirchhoff com expoentes subcríticos

1.1 Introdução

Nesse capítulo, estudaremos a existência de soluções para o problema:

$$\begin{cases} L(u) &= \lambda |x|^{-\delta} f(x,u) + |x|^{-\beta}|u|^{q-2}u, & \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0, & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

em que

$$L(u) := -\left[M\left(\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p \, dx \right)\right] div\left(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right),$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado com $0 \in \Omega$, $N \geq 3$, $1 < p < N$, $a < \frac{N-p}{p}$, $p < q < p^*$, em que $p^* = \frac{Np}{N-dp}$ é o expoente crítico de Caffarelli-Kohn-Nirenberg, com $d = 1 + a - b$ e $a \leq b < a+1$ e $\beta < (a+1)q + N(1 - \frac{q}{p})$.

As hipóteses sobre a função contínua $M : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+$ e sobre a função de Caratheodory $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são as seguintes:

(M_1) Existe $m_0 > 0$ tal que

$$M(t) \geq m_0, \forall\, t \geq 0;$$

(M_2) M é uma função crescente em $[0, +\infty)$;

(f_1) $$f(x,-t) = -f(x,t), \forall\,(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R};$$

(f_2) existem $r \in (1,q)$ e C_1, C_2 constantes positivas, com $C_1 < C_2$, tais que

$$C_1|t|^{r-1} \leq f(x,t) \leq C_2|t|^{r-1}, \forall\,(x,t) \in \Omega \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\});$$

(f_3) f satisfaz a condição superlinear de Ambrosetti-Rabinowitz, isto é, existe $\xi \in (p,q)$ tal que

$$0 < \xi \int_0^t f(x,s)ds \leq tf(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+.$$

Além dessas hipóteses, supomos $\delta < (a+1)r + N(1 - \frac{r}{p})$.

Observação 1.1.1. *Desde que* $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds$, *usando* (f_1) *e uma mudança de varáveis, obtemos*

$$\begin{aligned} F(x,u) &= \int_0^u -f(x,-s)ds \\ &= \int_0^{-u} f(x,r)dr \\ &= F(x,-u). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Por outro lado, integrando as desigualdades em (f_2), *temos que*

$$\frac{C_1}{r}|t|^r \leq F(x,t) \leq \frac{C_2}{r}|t|^r,\ \forall(x,t) \in \Omega \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}).$$

Agora, se $t < 0$, *então* $-t > 0$ *e da desigualdade acima, obtemos*

$$\frac{C_1}{r}|t|^r \leq F(x,-t) \leq \frac{C_2}{r}|t|^r,\ \forall(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^-.$$

Segue de (1.2) que

$$\frac{C_1}{r}|t|^r \leq F(x,t) \leq \frac{C_2}{r}|t|^r,\ \forall(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^-.$$

Logo,

$$\frac{C_1}{r}|t|^r \leq F(x,t) \leq \frac{C_2}{r}|t|^r,\ \forall(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Afim de tratar o problema de uma forma clara e objetiva, dividimos seu estudo em três casos: $1 < r < p$, $r = p$ e $r > p$, respectivamente denominados $p-$sublinear, $p-$linear e $p-$superlinear. Para o caso $p-$sublinear, utilizando a teoria de gênero de Krasnoselskii, foi possível obter um resultado de múltiplas soluções para o problema (1.1). Nos casos $p-$linear e $p-$superlinear, trabalhando com funções extremais e fazendo uso do Teorema do Passo da Montanha, foi possível obter uma solução não trivial para o problema (1.1). Dessa forma, esse capítulo apresenta três teoremas principais. Antes de apresentá-los, lembramos que λ_1 se refere ao primeiro autovalor associado ao problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= \lambda|x|^{-\delta}|u|^{p-2}u, \qquad \text{em } \Omega, \\ u &= 0, \qquad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

o qual é positivo. Os principais teoremas desse capítulo são os seguintes:

Teorema 1.1.2. *Suponha* (M_1), (f_1), (f_2) *e* $1 < r < p$. *Então, existe* $\lambda_0 > 0$ *tal que o problema (1.1) tem infinitas soluções, para cada* $\lambda \in (0, \lambda_0)$.

Teorema 1.1.3. *Suponha* (M_1), (M_2), (f_1), (f_2), (f_3) *e* $r = p$. *Então, o problema (1.1) tem ao menos uma solução não trivial, para cada* $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$.

Teorema 1.1.4. *Suponha* (M_1), (M_2), (f_1), (f_2), (f_3) *e* $p < r < q$. *Então, o problema (1.1) possui ao menos uma solução não trivial, para cada* $\lambda > 0$.

1.2 Formulação variacional e resultados preliminares

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suave e limitado, com $0 \in \Omega$, $N \geq 3$, $1 < p < N$, $a < (N-p)/p$, $a \leq b < a+1$ e $p^* = Np/(N-dp)$, em que $d = 1 + a - b$. Para tratar nosso problema, consideramos o espaço de Sobolev com peso, $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap})$, o qual é o completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito à norma

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx\right)^{1/p}.$$

Por simplicidade, denotaremos $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}) = \mathcal{D}_a^{1,p}$. Como visto em [51], $\mathcal{D}_a^{1,p}$ é reflexivo.

Dos resultados obtidos por Caffarelli-Kohn-Nirenberg e Xuan [11, 55], temos a seguinte desigualdade:

$$\left(\int_\Omega |x|^{-\alpha}|u|^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \leq C\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx, \quad \forall\, u \in \mathcal{D}_a^{1,p}, \tag{1.4}$$

em que $1 \leq r \leq Np/(N-p)$ e $\alpha \leq (a+1)r + N(1-\frac{r}{p})$, isto é, temos a imersão contínua de $\mathcal{D}_a^{1,p}$ em $L^r(\Omega, |x|^{-\alpha})$, em que $L^r(\Omega, |x|^{-\alpha})$ é o espaço com peso, $L^r(\Omega)$, com norma dada por

$$\|u\|_{r,\alpha} = \left(\int_\Omega |x|^{-\alpha}|u|^r dx\right)^{1/r}.$$

Além do mais, essa imersão é compacta se $1 \leq r < Np/(N-p)$ e $\alpha < (a+1)r + N(1-\frac{r}{p})$. A melhor constante para a desigualdade do tipo Caffarelli-Kohn-Nirenberg com peso (veja [11]) dada em (1.4) é caracterizada por

$$C_{a,p}^* = \inf_{u \in \mathcal{D}_a^{1,p}\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx}{\left(\int_\Omega |x|^{-bp^*}|u|^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}}}.$$

Desde que nossa abordagem é variacional, procuramos por soluções para o problema (1.1) encontrando pontos críticos do funcional de Euler-Lagrange $I : \mathcal{D}_a^{1,p} \to \mathbb{R}$, definido por

$$I(u) = \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) - \lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}F(x,u)\, dx - \frac{1}{q}\int_\Omega |x|^{-\beta}|u|^q dx, \tag{1.5}$$

em que $\widehat{M}(t) := \int_0^t M(s)\, ds$ e $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\, ds$. Note que $I \in C^1(\mathcal{D}_a^{1,p};\mathbb{R})$ (veja o Teorema A.4.3, no Apêndice) e

$$\begin{aligned} I'(u)(\phi) &= M(\|u\|^p)\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\phi\, dx \\ &\quad -\lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}f(x,u)\phi\, dx - \int_\Omega |x|^{-\beta}|u|^{q-2}u\phi\, dx, \end{aligned}$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}_a^{1,p}$.

No que segue, apresentamos algumas definições e resultados que nos serão úteis não somente nesse capítulo, mas ao longo do trabalho. Iniciaremos com a definição de sequência de Palais-Smale e daremos algumas noções básicas sobre a teoria de gênero de Krasnoselskii, a qual será usada para demonstrarmos o Teorema 1.1.2.

Definição 1.2.1. *Seja E um espaço de Banach e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional. Dizemos que (u_n) é uma sequência de Palais-Smale no nível l, abreviadamente $(PS)_l$, se $I(u_n) \to l$ e $I'(u_n) \to 0$ em E^{-1} (dual de E) quando $n \to \infty$. Dizemos, também, que I satisfaz a condição de Palais-Smale no nível l se toda sequência $(PS)_l$ possui uma subsequência que converge forte em E.*

Quando toda sequência de Palais-Smale para o funcional I no nível l for pré-compacta (isto é, possui subsequência fortemente convergente), para todo real l, diremos que I satisfaz a condição de Palais-Smale.

Seja E um espaço de Banach real. Denotamos por $\mathfrak{A}$ a classe de todos os conjuntos fechados $A \subset E \setminus \{0\}$ que são simétricos em relação à origem, isto é, se $u \in A$ então $-u \in A$.

Definição 1.2.2. *Seja $A \in \mathfrak{A}$. O gênero de Krasnoselskii de A, $\gamma(A)$, é definido como sendo o menor inteiro positivo k tal que existe uma aplicação ímpar $\phi \in C(A, \mathbb{R}^k)$ tal que $\phi(x) \neq 0$, para todo $x \in A$. Se tal k não existe, definimos $\gamma(A) = +\infty$. Além disso, por definição, $\gamma(\emptyset) = 0$.*

Os próximos resultados sobre a teoria de gênero de Krasnoselskii podem ser encontrados nas referências [3], [12], [20] e [39].

Proposição 1.2.3. *Suponha $E = \mathbb{R}^N$ e seja $\partial\Omega$ a fronteira de um conjunto conjunto aberto, simétrico e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $0 \in \Omega$. Então $\gamma(\partial\Omega) = N$.*

Corolário 1.2.4. *Se $\partial\Omega = S^{N-1}$ é a esfera unitária em $\mathbb{R}^N$, então $\gamma(S^{N-1}) = N$.*

Agora, estabelecermos um resultado devido à Clarke [16].

Proposição 1.2.5. *Seja $\Phi \in C^1(X,\mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição de Palais-Smale e suponha que*

i) Φ é limitado inferiormente e par;

ii) existe um conjunto compacto $K \in \mathfrak{A}$ tal que $\gamma(K) = k$ e $\sup\limits_{x\in K} \Phi(x) < \Phi(0)$.

Então Φ possui ao menos k pares distintos de pontos críticos e seus valores críticos correspondentes são menores que $\Phi(0)$.

Ressaltamos que esse resultado é uma consequência de um teorema de multiplicidade envolvendo um funcional invariante sobre a ação de grupo topológico compacto.

O próximo lema nos será útil sempre que for necessário demonstrar que um funcional satisfaz a condição de Palais-Smale. Esse resultado pode ser provado facilmente, usando [31, Lemma 4.1].

Lema 1.2.6 (Condição S_+)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suave e limitado, com $0 \in \Omega$, $1 < p < N$, $-\infty < a < \frac{N-p}{p}$ e seja $(u_n) \subset \mathcal{D}_a^{1,p}$ tal que*

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u, \ \textit{quando } n \to \infty, \\ \limsup\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla (u_n - u) dx \leq 0, \end{cases}$$

então existe uma subsequência que converge forte em $\mathcal{D}_a^{1,p}$.

1.3 Demonstração do Teorema 1.1.2

Afim de demonstrar o Teorema 1.1.2, utilizaremos a Proposição 1.2.5. Observe que da hipótese (f_1) temos que I é par. Com efeito, usando (1.2),

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) - \lambda \int_\Omega |x|^{-\delta} F(x,u) dx - \frac{1}{q}\int_\Omega |x|^{-\beta} |u|^q dx \\ &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|-u\|^p) - \lambda \int_\Omega |x|^{-\delta} F(x,-u) dx - \frac{1}{q}\int_\Omega |x|^{-\beta} |-u|^q dx \\ &= I(-u). \end{aligned}$$

Agora, utilizando as hipóteses (M_1), (f_1), (f_2) (vide Observação 1.1.1) e a desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (1.4), obtemos

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) - \lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}F(x,u)dx - \frac{1}{q}\int_\Omega |x|^{-\beta}|u|^q dx \\ &\geq \frac{1}{p}\int_0^{\|u\|^p} M(s)ds - \lambda\tilde{C}_2\|u\|^r - \frac{1}{q}\tilde{C}\|u\|^q \\ &\geq \frac{m_0}{p}\|u\|^p - \lambda\tilde{C}_2\|u\|^r - \frac{1}{q}\tilde{C}\|u\|^q \\ &= g_\lambda(\|u\|^p), \end{aligned}$$

em que $g_\lambda : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ é dada por

$$g_\lambda(t) = \frac{m_0}{p}t - \lambda\tilde{C}_2 t^{r/p} - \frac{1}{q}\tilde{C}t^{q/p}.$$

Mas, uma vez que $r < p < q$ implica $\lim\limits_{t\to+\infty} g_\lambda(t) = -\infty$, não podemos usar esse argumento clássico para assegurar que I é limitado inferiormente em $\mathcal{D}_a^{1,p}$ e aplicar a Proposição 1.2.5. Por isso, iremos construir um funcional auxiliar que verifica as hipóteses da Proposição 1.2.5 e, através desse funcional, demonstrar o Teorema 1.1.2. Os argumentos a seguir, servem para nos ajudar a definir tal funcional auxiliar.

A princípio, estudaremos o comportamento da função g_λ, dada acima. Afirmamos que existe $\lambda_0 > 0$ tal que, para cada $\lambda \in (0,\lambda_0)$, g_λ atinge um máximo positivo e existem $t_1, t_2 \in (0,+\infty)$, com $t_1 < t_2$ e $g_\lambda(t_1) = g_\lambda(t_2) = 0$. De fato, primeiramente, observe que, se

$$0 < t < \left(\frac{q}{p}\cdot\frac{m_0}{\tilde{C}}\right)^{\frac{p}{q-p}},$$

então

$$\frac{m_0}{p}t - \frac{1}{q}\tilde{C}t^{q/p} > 0.$$

Tomando $\tilde{t} = \left(\frac{m_0}{\tilde{C}}\right)^{\frac{p}{q-p}}$, temos

$$g_\lambda(\tilde{t}) = \frac{m_0}{p}\tilde{t} - \lambda\tilde{C}_2\tilde{t}^{r/p} - \frac{1}{q}\tilde{C}\tilde{t}^{q/p} > 0,$$

sempre que

$$\frac{m_0}{p}\tilde{t} - \frac{1}{q}\tilde{C}\tilde{t}^{q/p} > \lambda\tilde{C}_2\tilde{t}^{r/p}.$$

Entretanto, para $\lambda < \frac{1}{\tilde{C}_2\tilde{t}^{r/p}}\left(\frac{m_0}{p}\tilde{t} - \frac{1}{q}\tilde{C}\tilde{t}^{q/p}\right) = \lambda_0$, esta última desigualdade ocorre. Concluímos que para todo $\lambda < \lambda_0$, existe $\tilde{t} > 0$ tal que $g_\lambda(\tilde{t}) > 0$, ou seja, g_λ assume valores positivos.

Por outro lado, tomando $\tilde{\tilde{t}} < \left(\lambda\frac{\tilde{C}_2}{p}m_0\right)^{\frac{p}{p-r}}$, temos que $\frac{m_0}{p}t - \lambda\tilde{C}_2t^{r/p} < 0$, para todo $t < \tilde{\tilde{t}}$. Mas, desde que $\frac{1}{q}\tilde{C}t^{q/p} > 0$, temos

$$g_\lambda(t) < \frac{m_0}{p}t - \lambda\tilde{C}_2t^{r/p} < 0,$$

para todo $t < \tilde{\tilde{t}}$. Com isso, podemos concluir que a função g_λ toca o eixo das abscissas.

Agora, para $t > 0$, escreva

$$g_\lambda(t) = t\left(\frac{m_0}{p} - \lambda\tilde{C}_2t^{\frac{r}{p}-1} - \frac{1}{q}\tilde{C}t^{\frac{q}{p}-1}\right)$$

e considere $\tilde{g}_\lambda(t) = \frac{m_0}{p} - \lambda\tilde{C}_2t^{\frac{r}{p}-1} - \frac{1}{q}\tilde{C}t^{\frac{q}{p}-1}$. Como

$$\tilde{g}'_\lambda(t) = \lambda\tilde{C}_2\frac{p-r}{p}t^{\frac{r}{p}-2} - \frac{1}{q}\tilde{C}\frac{q-p}{p}t^{\frac{q}{p}-2},$$

temos que $\hat{t} = \left[\frac{\lambda\tilde{C}_2(p-r)q}{\tilde{C}(q-p)}\right]^{\frac{p}{q-r}}$ é o único ponto crítico de $\tilde{g}_\lambda$ em $[0,+\infty)$ e é um ponto de máximo de $\tilde{g}_\lambda$. Mas isso garante que g_λ tem um único ponto de máximo em $[0,+\infty)$.

Uma vez que $\lim\limits_{t\to+\infty} g_\lambda(t) = -\infty$, podemos concluir que existe $\lambda_0 > 0$ tal que, para cada $\lambda \in (0,\lambda_0)$, g_λ atinge um máximo positivo e existem $t_1, t_2 \in (0,+\infty)$, com $t_1 < t_2$ e $g_\lambda(t_1) = g_\lambda(t_2) = 0$. Um esboço do gráfico de g_λ, pode ser visto na Figura 1.1.

Considere a "função auxiliar" $\phi \in C_0^1([0,+\infty))$ tal que $0 \le \phi \le 1$, $\phi(t) = 1$, para todo $t \in [0,t_1]$, $\phi(t) = 0$, para todo $t \in [t_2,+\infty)$ e $\phi'(t) \le 0$, para todo $t \in [0,+\infty)$.

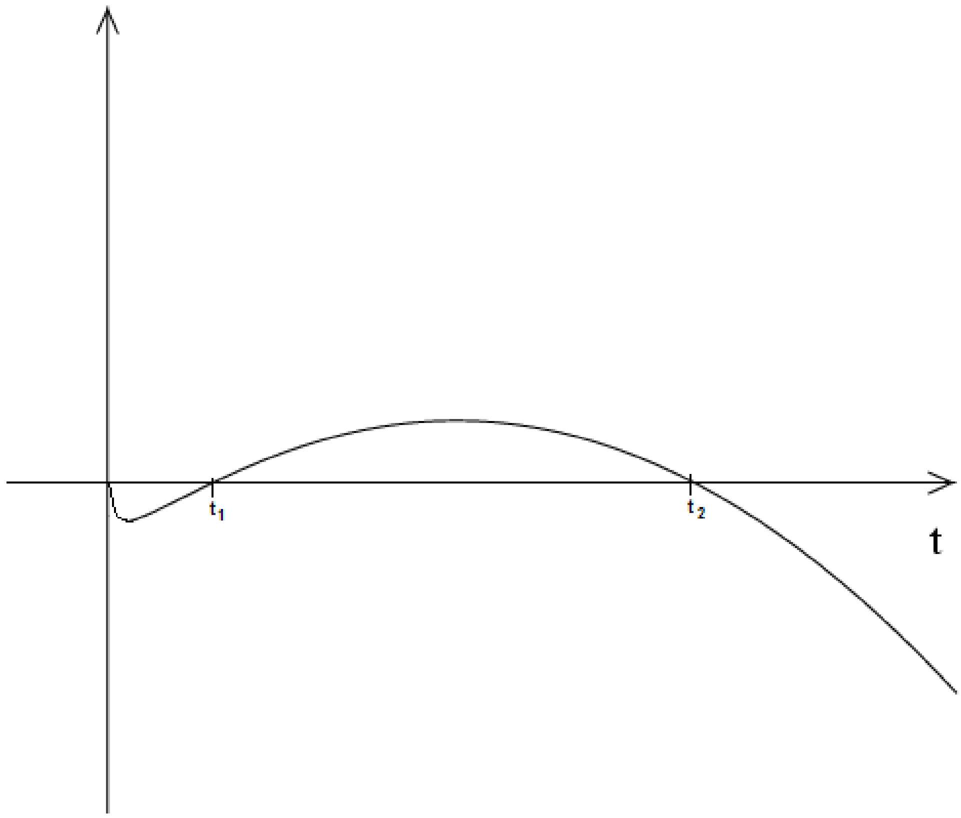

Figura 1.1: Gráfico de g_λ

Defina, para todo $\lambda < \lambda_0$, a função $\bar{g}_\lambda : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\bar{g}_\lambda(t) = \frac{m_0}{p}t - \lambda \tilde{C}_2 t^{r/p} - \frac{\tilde{C}}{q}\phi(t)t^{q/p}.$$

Note que $\bar{g}_\lambda(0) = 0$ e $\bar{g}_\lambda(t) \geq 0$, para todo $t \geq t_1$. Com efeito, se $t \in [t_1, t_2)$, da definição de ϕ, obtemos $\bar{g}_\lambda(t) \geq g_\lambda(t) \geq 0$. Se $t \geq t_2$, então $\phi(t) = 0$. Logo, para $t \geq t_2$,

$$\bar{g}_\lambda(t) = \frac{m_0}{p}t - \lambda \tilde{C}_2 t^{r/p}.$$

Seja $\lambda < \lambda_0$. Note que

$$\lambda_0 = \frac{1}{\tilde{C}_2 \tilde{t}^{r/p}} \left(\frac{m_0}{p}\tilde{t} - \frac{1}{q}\tilde{C}\tilde{t}^{q/p} \right) < \frac{1}{\tilde{C}_2 \tilde{t}^{r/p}} \cdot \frac{m_0}{p}\tilde{t} = \frac{m_0}{p} \cdot \frac{1}{\tilde{C}_2} \cdot (\tilde{t})^{\frac{p-r}{p}}.$$

Portanto, $\lambda < \frac{m_0}{p} \cdot \frac{1}{\tilde{C}_2} \cdot (\tilde{t})^{\frac{p-r}{p}}$ e, assim, $\tilde{t} > \left(\lambda \tilde{C}_2 \frac{p}{m_0}\right)^{\frac{p}{p-r}}$. Desde que $t \geq t_2 > \tilde{t}$, temos

$$t > \left(\lambda \tilde{C}_2 \frac{p}{m_0}\right)^{\frac{p}{p-r}},$$

o que implica $\bar{g}_\lambda(t) = \dfrac{m_0}{p} t - \lambda \tilde{C}_2 t^{r/p} > 0$. Concluímos que $\bar{g}_\lambda(t) = \dfrac{m_0}{p} t - \lambda \tilde{C}_2 t^{r/p} > 0$, para todo $\lambda < \lambda_0$. Consequentemente, $\bar{g}_\lambda(t) \geq 0$, para todo $t \geq t_1$. Além disso,

$$\lim_{t \to +\infty} \bar{g}_\lambda(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{m_0}{p} t - \lambda \tilde{C}_2 t^{r/p} = +\infty, \tag{1.6}$$

pois $\frac{r}{p} < 1$ e $\phi(t) = 0$, para todo $t \in [t_2, +\infty)$. Dessa forma, o gráfico de $\bar{g}_\lambda(t)$ coincide com o gráfico de $g_\lambda(t)$, quando $t \in [0, t_1]$ e $\bar{g}_\lambda(t)$ é positiva para todo $t \in (t_1, +\infty)$, conforme ilustra a Figura 1.2.

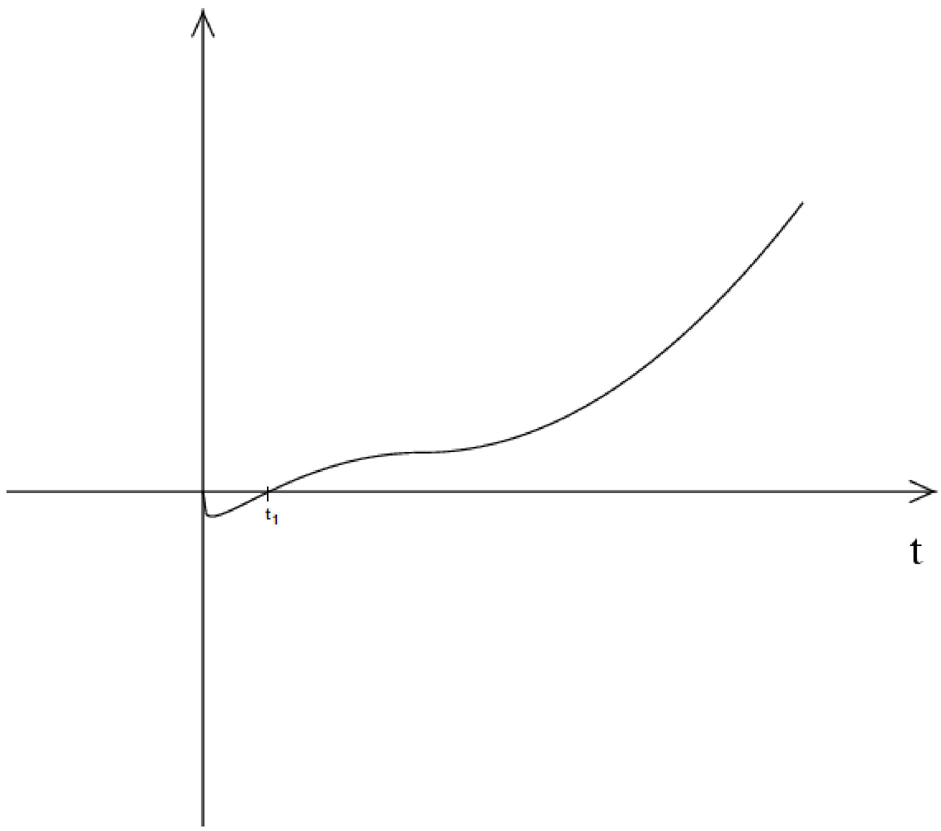

Figura 1.2: Gráfico de $\bar{g}_\lambda$

O funcional de Euler-Lagrange auxiliar, que iremos usar para aplicar a Proposição 1.2.5 é $J : \mathcal{D}_a^{1,p} \to \mathbb{R}$, dado por

$$J(u) = \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) - \lambda \int_\Omega |x|^{-\delta} F(x,u)\, dx - \frac{\phi(\|u\|^p)}{q} \int_\Omega |x|^{-\beta} |u|^q \, dx,$$

em que $\widehat{M}(t) := \int_0^t M(s)ds$ e $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Observe que J é de classe C^1 (veja Apêndice, Observação A.4.4).

Desde que $J(u) \geq \bar{g}_\lambda(\|u\|^p)$ e (1.6) ocorre, obtemos J coercivo em $\mathcal{D}_a^{1,p}$, o que implica J limitado inferiormente em $\mathcal{D}_a^{1,p}$. J é o funcional apropriado para demonstrar o Teorema 1.1.2, como veremos a seguir.

O próximo lema nos mostra que um ponto crítico de J com energia menor que 0 é, também, um ponto crítico de I. Observamos que os pontos críticos obtidos com a Proposição 1.2.5 são menores que $I(0) = J(0) = 0$.

Lema 1.3.1. *Se u_0 é um ponto crítico de J com $J(u_0) < 0$, então u_0 é um ponto crítico de I.*

Demonstração. Seja u_0 um ponto crítico do funcional J, com $J(u_0) < 0$. Uma vez que J é contínuo, existe $R_0 > 0$ tal que $J(u) < 0$, para todo $u \in B(u_0, R_0) \subset \mathcal{D}_a^{1,p}$, o que implica $\|u\|^p < t_1$. Com efeito, desde que $\bar{g}_\lambda(t) \geq 0$, para todo $t \geq t_1$, se $\|u\|^p \geq t_1$, teríamos $\bar{g}_\lambda(\|u\|^p) \geq 0$. Mas, $J(u) \geq \bar{g}_\lambda(\|u\|^p)$, ou seja, teríamos $J(u) \geq 0$. Absurdo! Dessa forma, para todo $u \in B(u_0, R_0)$, temos $\phi(\|u\|^p) = 1$ e, consequentemente, $J(u) = I(u)$, para todo $u \in B(u_0, R_0)$. Em particular, segue que u_0 é um ponto crítico de I.

$\square$

Lema 1.3.2. *Suponha (M_1), (f_1) e (f_2). Então J satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demonstração. Seja $(u_n) \subset \mathcal{D}_a^{1,p}$ uma sequência de Palais-Smale no nível c, isto é, $J(u_n) \to c$ e $J'(u_n) \to 0$ (no dual de $\mathcal{D}_a^{1,p}$), quando $n \to +\infty$. Como J é coercivo, temos que $(u_n) \subset \mathcal{D}_a^{1,p}$ é limitada, pois do contrário, existiria uma subsequência (v_n) de (u_n), tal que $\|v_n\| \to +\infty$, quando $n \to +\infty$ e, como J é coercivo, teríamos $J(v_n) \to +\infty$, quando $n \to +\infty$. Absurdo, já que $J(u_n) \to c$, quando $n \to +\infty$.

Desde que $\mathcal{D}_a^{1,p}$ é reflexivo e (u_n) é limitada, passando a uma subsequência, se necessário, obtemos $u \in \mathcal{D}_a^{1,p}$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u, \quad \text{em } \mathcal{D}_a^{1,p},$$

quando $n \to +\infty$. Ainda, como a imersão de $\mathcal{D}_a^{1,p}$ em $L^s(\Omega, |x|^{-\alpha})$ é compacta, sempre que $1 \leq s < p^*$ e $\alpha < (a+1)s + N(1 - \frac{s}{p})$, temos

$$u_n \to u, \quad \text{em } L^q(\Omega, |x|^{-\beta}),$$

quando $n \to +\infty$. Daí, obtemos, também,

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega \text{ e } \|u_n\| \to t_0 \geq 0, \tag{1.7}$$

quando $n \to +\infty$.

Logo $J'(u_n)(u_n - u) = o_n(1)$, em que $\lim\limits_{n\to+\infty} o_n(1) = 0$, isto é,

$$M(\|u_n\|^p)\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(u_n - u)dx - \lambda\int_\Omega |x|^{-\delta} f(x, u_n)(u_n - u)dx$$

$$-\phi(\|u_n\|^p)\int_\Omega |x|^{-\beta}|u_n|^{q-2}u_n(u_n - u)dx$$

$$-\frac{p}{q}\phi'(\|u_n\|^p)\int_\Omega |x|^{-\beta}|u_n|^q dx \int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(u_n - u)dx = o_n(1).$$

Da desigualdade de Hölder e de (1.7), usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_\Omega |x|^{-\beta}|u_n|^{q-2}u_n(u_n - u)dx = o_n(1).$$

Desde que ϕ é contínua, usando (1.7) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\phi(\|u_n\|^p)\int_\Omega |x|^{-\beta}|u_n|^{q-2}u_n(u_n - u)dx = o_n(1).$$

Ainda, usando (f_2), a desigualdade de Hölder, (1.7) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\left|\int_\Omega |x|^{-\delta} f(x,u_n)(u_n-u)dx\right| \leq C_2 \int_\Omega |x|^{-\delta}|u_n|^{r-1}|u_n-u|dx = o_n(1).$$

Por conseguinte, obtemos

$$\left[M(||u_n||^p) - \frac{p}{q}\phi'(\|u_n\|^p)\int_\Omega |x|^{-\beta}|u_n|^q dx\right]\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(u_n-u)dx = o_n(1).$$

Uma vez que $M(t) \geq m_0$, $\phi'(t) \leq 0$, para todo $t \in [0,+\infty)$, (u_n) é limitada e M e ϕ' são funções contínuas, existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} m_0 &\leq M(\|u_n\|^p) - \frac{p}{q}\phi'(\|u_n\|^p)\int_\Omega |x|^{-\beta}|u_n|^q dx \\ &\leq M(\|u_n\|^p) - \frac{p}{q}\phi'(\|u_n\|^p)\|u_n\|^q \\ &\leq C, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Ou seja,

$$\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(u_n-u)\, dx = o_n(1).$$

Aplicando o Lema 1.2.6 concluímos a demonstração.

$\square$

1.3.1 Conclusão da demonstração do Teorema 1.1.2

Uma vez que $C_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{D}_a^{1,p}$ e $C_0^\infty(\Omega)$ possui dimensão infinita, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe um subespaço linear de $\mathcal{D}_a^{1,p}$, k-dimensional, $\mathcal{X}_k$, tal que $\mathcal{X}_k \subset C_0^\infty(\Omega)$. Assim, todas as normas em $\mathcal{X}_k$ são equivalentes. Logo, existe uma constante positiva $C(k)$, que depende de k, tal que

$$C(k)\|u\|^r \leq \frac{C_1}{r}\int_\Omega |x|^{-\delta}|u|^r\, dx,$$

para todo $u \in \mathcal{X}_k$. Dessa forma, se $u \in \mathcal{X}_k$, segue de (f_2) que

$$\int_\Omega |x|^{-\delta} F(x,u)dx \geq \frac{C_1}{r} \int_\Omega |x|^{-\delta}|u|^r dx \geq C(k)\|u\|^r.$$

Seja $u \in \mathcal{X}_k$, com $\|u\| \leq 1$. Da continuidade da função M, concluímos que existe $C > 0$ tal que

$$J(u) \leq C\|u\|^p - \lambda C(k)\|u\|^r.$$

Tome $R = \min\left\{1, \left(\frac{\lambda C(k)}{C}\right)^{\frac{1}{p-r}}\right\}$ e considere $\mathcal{S} = \{u \in \mathcal{X}_k : \|u\| = s\}$ com $0 < s < R$. Desde que $1 \leq r < p$, para todo $u \in \mathcal{S}$, obtemos

$$\begin{aligned} J(u) &\leq C\|u\|^p - \lambda C(k)\|u\|^r \\ &= s^r\left[Cs^{p-r} - \lambda C(k)\right] < 0 = J(0), \end{aligned} \tag{1.8}$$

o que implica $\sup_{\mathcal{S}} J(u) < 0 = J(0)$.

Desde que $\mathcal{X}_k$ e $\mathbb{R}^k$ são isomorfos e $\mathcal{S}$ e S^{k-1} são homeomorfos, concluímos que $\gamma(\mathcal{S}) = k$. Além disso J é coercivo, par, e, pelo Lema 1.3.2, satisfaz a condição de Palais-Smale. Segue da Proposição 1.2.5 que J tem ao menos k pares de pontos críticos distintos, para cada $\lambda \in (0, \lambda_0)$, uma vez que J está definido para $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Da arbitrariedade de k obtemos infinitos pontos críticos de J, para cada $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Por conseguinte, usando (1.8) e o Lema 1.3.1, obtemos infinitos pontos críticos de I, para cada $\lambda \in (0, \lambda_0)$.

□

1.4 Demonstração do Teorema 1.1.3

Nessa seção, demonstraremos o Teorema 1.1.3, que diz respeito ao problema (1.1) quando $r = p$. Para isso, faremos uso do Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale (veja Apêndice, Teorema A.2.7). Entretanto, para verificarmos as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha, necessitaremos do primeiro autovalor associado ao problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) & = & \lambda|x|^{-\delta}|u|^{p-2}u, & \text{em } \Omega, \\ u & = & 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.9}$$

Como visto em [54], o primeiro autovalor para o problema (1.9) é caracterizado por

$$\lambda_1 = \inf\left\{\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx; u \in \mathcal{D}_a^{1,p}, \int_\Omega |x|^{-\delta}|u|^p dx = 1\right\} \tag{1.10}$$

e é positivo.

Uma outra dificuldade encontrada no problema (1.1), que nos dificulta verificar que o funcional I satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha, é a falta de informações sobre o comportamento da função M no infinito. Sendo assim, precisaremos fazer um truncamento na função M, de forma que possamos contornar essa dificuldade. A partir desse truncamento, criamos um problema auxiliar cujas soluções serão, ainda, soluções de problema (1.1).

Segue de (M_2) que existe $t_0 > 0$ tal que $m_0 = M(0) < M(t_0) < \frac{\xi}{p} m_0$. Definimos

$$M_0(t) := \begin{cases} M(t), & \text{se} \quad 0 \le t \le t_0, \\ M(t_0), & \text{se} \quad t \ge t_0. \end{cases} \tag{1.11}$$

Ainda de (M_2), obtemos

$$m_0 \le M_0(t) \le \frac{\xi}{p} m_0, \ \forall t \ge 0. \tag{1.12}$$

A demonstração do Teorema 1.1.3 será baseada no estudo do seguinte problema auxiliar:

$$\begin{cases} L_0(u) & = & \lambda|x|^{-\delta}f(x,u) + |x|^{-\beta}|u|^{q-2}u, & \text{em} \quad \Omega, \\ u & = & 0, & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.13}$$

em que

$$L_0(u) :=: -\left[M_0\left(\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p \ dx\right)\right] div\left(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right).$$

O funcional de Euler-Lagrange associado ao problema (1.13) é $J_0 : \mathcal{D}_a^{1,p} \to \mathbb{R}$, definido por

$$J_0(u) = \frac{1}{p}\widehat{M_0}(\|u\|^p) - \lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}F(x,u)\ dx - \frac{1}{q}\int_\Omega |x|^{-\beta}|u|^q dx, \tag{1.14}$$

em que $\widehat{M_0}(t) := \int_0^t M_0(s)ds$. Note que J_0 é de classe C^1 e

$$\begin{aligned} J_0'(u)(\phi) &= M_0(\|u\|^p)\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi\ dx \\ &\quad -\lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}f(x,u)\phi\ dx - \int_\Omega |x|^{-\beta}|u|^{q-2}u\phi\ dx, \end{aligned}$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}_a^{1,p}$.

Os próximos dois lemas mostram que o funcional J_0 satisfaz a geometria do Passo da Montanha.

Lema 1.4.1. *Seja λ_1 como definido em (1.10). Suponha que sejam válidas as hipóteses (M_1), (M_2), (f_1), (f_2) e que $r = p$. Então, existem números reais positivos, ρ e α, tais que*

$$J_0(u) \geq \alpha > 0, \forall u \in \mathcal{D}_a^{1,p},\ \text{com } \|u\| = \rho,$$

para todo $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$.

Demonstração. Dado $u \in \mathcal{D}_a^{1,p}$, considere $v = \dfrac{u}{\left(\int_\Omega |x|^{-\delta}|u|^p dx\right)^{1/p}}$. Note que $v \in \mathcal{D}_a^{1,p}$ e $\displaystyle\int_\Omega |x|^{-\delta}|v|^p dx = 1$. Assim, de (1.10), segue que

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\leq \int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla v|^p dx \\ &= \frac{\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx}{\int_\Omega |x|^{-\delta}|u|^p dx} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\lambda_1 \int_\Omega |x|^{-\delta}|u|^p dx \leq \|u\|^p. \tag{1.15}$$

Seja $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$. Usando (M_1), (f_1), (f_2), (1.15) e a desigualdade (1.4), obtemos

$$\begin{aligned}
J_0(u) &= \frac{1}{p}\widehat{M_0}(\|u\|^p) - \lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}F(x,u)dx - \frac{1}{q}\int_\Omega |x|^{-\beta}|u|^q dx, \\
&\geq \frac{1}{p}\int_0^{\|u\|^p} M_0(s)ds - \lambda\frac{C_2}{p}\int_\Omega |x|^{-\delta}|u|^p dx - \frac{1}{q}\tilde{C}\|u\|^q \\
&\geq \frac{m_0}{p}\|u\|^p - \frac{\lambda C_2}{\lambda_1 p}\|u\|^p - \frac{1}{q}\tilde{C}\|u\|^q \\
&= \left(m_0 - \frac{\lambda C_2}{\lambda_1}\right)\frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{q}\tilde{C}\|u\|^q.
\end{aligned}$$

Desde que $p < q$ e $\lambda < \frac{m_0}{C_2}\lambda_1$, o resultado segue escolhendo $\rho > 0$, suficientemente pequeno.

$\square$

Lema 1.4.2. *Suponha que sejam válidas as hipóteses (M_1), (M_2), (f_1), (f_2) e que $r = p$. Então, para todo $\lambda > 0$, existe $e \in \mathcal{D}_a^{1,p}$ com $J_0(e) < 0$ e $\|e\| > \rho$.*

Demonstração. Considere $v_0 \in \mathcal{D}_a^{1,p}\backslash\{0\}$ tal que $v_0 > 0$ em Ω. Usando (1.12) e (f_2), obtemos

$$\begin{aligned}
J_0(tv_0) &= \frac{1}{p}\widehat{M_0}(\|tv_0\|^p) - \lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}F(x,tv_0)dx - \frac{1}{q}\int_\Omega |x|^{-\beta}|tv_0|^q dx, \\
&\leq \frac{1}{p}\int_0^{\|tv_0\|^p} M_0(s)ds - \frac{\lambda C_1}{p}\int_\Omega |x|^{-\delta}|tv_0|^p dx - \frac{1}{q}\int_\Omega |x|^{-\beta}|tv_0|^q dx, \\
&\leq \frac{\xi}{p^2}m_0 t^p\|v_0\|^p - \frac{\lambda C_1}{p}t^p\int_\Omega |x|^{-\delta}|v_0|^p dx - \frac{t^q}{q}\int_\Omega |x|^{-\beta}|v_0|^q dx.
\end{aligned}$$

Desde que $p < q$, temos $\lim\limits_{t\to+\infty} J_0(tv_0) = -\infty$. Logo, existe $\bar{t} > 0$ suficientemente grande, tal que $\bar{t}\|v_0\| > \rho$ e $J_0(\bar{t}v_0) < 0$. O resultado segue escolhendo $e = \bar{t}v_0$.

$\square$

Dos Lemas 1.4.1 e 1.4.2 segue que, para cada $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$, podemos aplicar o Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale (veja Apêndice, Teorema A.2.7) e obter uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{D}_a^{1,p}$, satisfazendo

$$J_0(u_n) \to c_\lambda \text{ e } J_0'(u_n) \to 0 \text{ em } (\mathcal{D}_a^{1,p})^{-1},$$

quando $n \to +\infty$, em que

$$0 < c_\lambda = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J_0(\gamma(t)),$$

$$\Gamma := \left\{ \gamma \in C([0,1], \mathcal{D}_a^{1,p}) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = \bar{t} v_0 \right\}$$

e $v_0 \in \mathcal{D}_a^{1,p}$ é tal que $v_0 > 0$.

Observação 1.4.3. *Desde que que $(u_n) \subset \mathcal{D}_a^{1,p}$, satisfaz $J_0(u_n) \to c_\lambda$ e $J_0'(u_n) \to 0$ em $(\mathcal{D}_a^{1,p})^{-1}$, quando $n \to +\infty$, temos (u_n) limitada em $\mathcal{D}_a^{1,p}$. De fato, segue da definição de M_0 e de (f_3) que*

$$\begin{aligned} c_\lambda + o_n(1)\|u_n\| + o_n(1) \geq & J_0(u_n) - \frac{1}{\xi} J_0'(u_n)(u_n) \\ = & \frac{1}{p} \widehat{M_0}(\|u_n\|^p) - \lambda \int_\Omega |x|^{-\delta} F(x, u_n) dx - \frac{1}{q} \int_\Omega |x|^{-\beta} |u_n|^q dx \\ & - \frac{1}{\xi} M_0(\|u_n\|^p) \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \phi dx \\ & + \lambda \frac{1}{\xi} \int_\Omega |x|^{-\delta} f(x, u_n) u_n dx + \frac{1}{\xi} \int_\Omega |x|^{-\beta} |u_n|^q dx \\ \geq & \left(\frac{m_0}{p} - \frac{M_0(t_0)}{\xi} \right) \|u_n\|^p + \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{q} \right) \int_\Omega |x|^{-\beta} |u_n|^q dx \\ \geq & \left(\frac{m_0}{p} - \frac{M_0(t_0)}{\xi} \right) \|u_n\|^p. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Suponha que (u_n) não seja limitada. Assim, passando a uma subsequência, se necessário, $\|u_n\| \to +\infty$, quando $n \to +\infty$. Mas, desde que $\dfrac{m_0}{p} - \dfrac{M_0(t_0)}{\xi} > 0$, fazendo $n \to +\infty$ em (1.16), obtemos uma contradição. Logo (u_n) é limitada em $\mathcal{D}_a^{1,p}$.

Lema 1.4.4. *Suponha (M_1), (M_2), (f_1), (f_2), (f_3) e $r = p$. Então J_0 satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demonstração. Seja $(u_n) \subset \mathcal{D}_a^{1,p}$ uma sequência de Palais-Smale no nível c, isto é, $J_0(u_n) \to c$ e $J_0'(u_n) \to 0$ (no dual de $\mathcal{D}_a^{1,p}$), quando $n \to +\infty$. Utilizando os mesmos argumentos da Observação 1.4.3, temos que $(u_n) \subset \mathcal{D}_a^{1,p}$ é limitada.

Desde que $\mathcal{D}_a^{1,p}$ é reflexivo e (u_n) é limitada, passando a uma subsequência, se necessário, obtemos $u \in \mathcal{D}_a^{1,p}$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u, \quad \text{em } \mathcal{D}_a^{1,p},$$

quando $n \to +\infty$. Ainda, como a imersão de $\mathcal{D}_a^{1,p}$ em $L^s(\Omega, |x|^{-\alpha})$ é compacta, sempre que $1 \leq s < p^*$ e $\alpha < (a+1)s + N(1 - \frac{s}{p})$, temos

$$u_n \to u, \quad \text{em } L^q(\Omega, |x|^{-\beta}) \;\text{ e }\; u_n \to u, \quad \text{em } L^p(\Omega, |x|^{-\delta}),$$

quando $n \to +\infty$. Daí, obtemos, também,

$$\begin{gathered} u_n(x) \to u(x) \;\text{ q.t.p. em } \Omega \\ \text{e} \\ \|u_n\| \to s_0 \geq 0, \end{gathered} \tag{1.17}$$

quando $n \to +\infty$.

Logo $J_0'(u_n)(u_n - u) = o_n(1)$, isto é,

$$\begin{aligned} &M_0(\|u_n\|^p)\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(u_n - u)dx \\ &\quad -\lambda\int_\Omega |x|^{-\delta} f(x, u_n)(u_n - u)dx - \int_\Omega |x|^{-\beta}|u_n|^{q-2}u_n(u_n - u)dx = o_n(1). \end{aligned}$$

Da desigualdade de Hölder e de (1.17), usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_\Omega |x|^{-\beta}|u_n|^{q-2}u_n(u_n - u)dx = o_n(1).$$

Ainda, usando (f_2), a desigualdade de Hölder, (1.17) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\left|\int_{\Omega}|x|^{-\delta}f(x,u_n)(u_n-u)dx\right| \leq C_2\int_{\Omega}|x|^{-\delta}|u_n|^{p-1}|u_n-u|dx = o_n(1).$$

Por conseguinte, obtemos

$$M_0(\|u_n\|^p)\int_{\Omega}|x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla(u_n-u)dx = o_n(1).$$

Uma vez que (u_n) é limitada e M é contínua e positiva,

$$\int_{\Omega}|x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla(u_n-u)\ dx = o_n(1).$$

Aplicando o Lema 1.2.6 concluímos a demonstração.

□

A partir dos resultados acima, podemos demonstrar que o problema auxiliar (1.13) possui ao menos uma solução não trivial. Posteriormente, demonstraremos que essa solução é, ainda, uma solução para o problema (1.1).

Proposição 1.4.5. *Suponha* (M_1), (M_2), (f_1), (f_2), (f_3) *e* $r = p$. *Então, o problema (1.13) tem ao menos uma solução não trivial, para cada* $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$, *em que* λ_1 *é dado em (1.10).*

Demonstração. Seja $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$. Segue dos Lemas 1.4.1, 1.4.2 e da Observação 1.4.3, que existe uma sequência limitada $(u_n) \subset \mathcal{D}_a^{1,p}$ tal que $J_0(u_n) \to c_\lambda$ e $J_0'(u_n) \to 0$, em $(\mathcal{D}_a^{1,p})^{-1}$, quando $n \to +\infty$. Aplicando o Lema 1.4.4, a menos de subsequência, existe $u_\lambda \in \mathcal{D}_a^{1,p}$ tal que $u_n \to u_\lambda$. Logo u_λ é uma solução fraca para o problema (1.13).

□

Agora, iremos demonstrar que a solução u_λ, obtida na Proposição 1.4.5 é, também, uma solução para o problema (1.1). Para isso, basta demonstrar que $\|u_n\|^p \leq t_0$, pois, dessa forma, teremos $J_0(u_n) = I(u_n)$. A sequência de lemas a seguir tem esse propósito.

Definimos o espaço

$$W_{a,b}^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in L^{p^*}(\Omega, |x|^{-bp^*}) : |\nabla u| \in L^p(\Omega, |x|^{-ap})\right\},$$

munido da norma

$$\|u\|_{W_{a,b}^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{p^*,bp^*} + \|\nabla u\|_{p,ap}.$$

Consideramos a melhor constante do tipo Caffarelli-Kohn-Nirenberg dada por

$$\tilde{S}_{a,p} = \inf_{u \in W_{a,b}^{1,p}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap} |\nabla u|^p dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp^*} |u|^{p^*} dx\right)^{\frac{p}{p^*}}} \right\}.$$

Também, definimos $R_{a,b}^{1,p}(\Omega)$ como sendo o subespaço de $W_{a,b}^{1,p}(\Omega)$ formado pelas funções radiais, mais precisamente

$$R_{a,b}^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in W_{a,b}^{1,p}(\Omega) : u(x) = u(|x|)\right\},$$

com respeito à norma induzida

$$\|u\|_{R_{a,b}^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{W_{a,b}^{1,p}(\Omega)}.$$

Horiuchi [36] provou que

$$\tilde{S}_{a,p,R} = \inf_{u \in R_{a,b}^{1,p}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap} |\nabla u|^p dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp^*} |u|^{p^*} dx\right)^{\frac{p}{p^*}}} \right\}$$

é atingida pelas funções da forma

$$u_\varepsilon(x) = k_{a,p}(\varepsilon) v_\varepsilon(x), \forall \varepsilon > 0,$$

em que

$$k_{a,p}(\varepsilon) = c\varepsilon^{(N-dp)/dp^2} \text{ e } v_\varepsilon(x) = \left(\varepsilon + |x|^{\frac{dp(N-p-ap)}{(p-1)(N-dp)}}\right)^{-\left(\frac{N-dp}{dp}\right)}.$$

Além do mais, u_ε satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u_\varepsilon|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp^*}|u_\varepsilon|^{p^*} dx = (\tilde{S}_{a,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}}. \tag{1.18}$$

De (1.18) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla v_\varepsilon|^p dx = [k_{a,p}(\varepsilon)]^{-p}(\tilde{S}_{a,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} \tag{1.19}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp^*}|v_\varepsilon|^{p^*} dx = [k_{a,p}(\varepsilon)]^{-p^*}(\tilde{S}_{a,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}}. \tag{1.20}$$

Seja R_0 uma constante positiva e considere $\Psi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \Psi(x) \leq 1$, $\Psi(x) = 1$, para todo $|x| \leq R_0$ e $\Psi(x) = 0$, para todo $|x| \geq 2R_0$. Defina

$$\tilde{v}_\varepsilon(x) = \Psi(x)v_\varepsilon(x), \tag{1.21}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e para todo $\varepsilon > 0$. Sem perda de generalidade, podemos considerar $B(0; 2R_0) \subset \Omega$, em que $B(x; s)$ denota a bola centrada em x de raio s. Note, ainda, que $\tilde{v}_\varepsilon \in \mathcal{D}_a^{1,p}$.

Lema 1.4.6.

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|^p}{\left(\int_\Omega |x|^{-\beta}|\tilde{v}_\varepsilon|^q dx\right)^{p/q}} = 0.$$

Demonstração. Afirmamos que

$$\|\tilde{v}_\varepsilon\|^p \leq [k_{a,p}(\varepsilon)]^{-p}(\tilde{S}_{a,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} + O(1) \tag{1.22}$$

e

$$\int_\Omega |x|^{-\beta}|\tilde{v}_\varepsilon|^q dx = \varepsilon^{-\frac{N-dp}{dp}q} \cdot O(1), \quad \forall \varepsilon \in (0, 1), \tag{1.23}$$

em que $O(1)$ denota uma constante positiva.

Antes de demonstrarmos as estimativas (1.22) e (1.23), note que podemos escrever $v_\varepsilon(x) = (\varepsilon + |x|^{c_1})^{-\left(\frac{N-dp}{dp}\right)}$, em que $c_1 = \frac{dp(N-p-ap)}{(p-1)(N-dp)}$. Assim,

$$\begin{aligned} |v_\varepsilon(x)| &= \left(\frac{1}{\varepsilon + |x|^{c_1}}\right)^{\frac{N-dp}{dp}} \\ &\leq \frac{1}{|x|^{\frac{c_1(N-dp)}{dp}}} \\ &= \frac{1}{|x|^{\frac{N-p-ap}{p-1}}} \end{aligned} \tag{1.24}$$

e

$$\begin{aligned} |\nabla v_\varepsilon(x)| &= \left|\frac{-N+dp}{dp}\right| \frac{|c_1||x|^{c_1-1}}{|\varepsilon + |x|^{c_1}|^{N/dp}} \\ &\leq \left|\frac{-N+dp}{dp}\right| |c_1||x|^{\frac{-N+ap+1}{p-1}}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Agora, provaremos (1.22). Observe que

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}_\varepsilon\|^p &= \int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla(\Psi v_\varepsilon)|^p dx \\ &= \int_{B(0;2R_0)} |x|^{-ap}|\nabla(\Psi v_\varepsilon)|^p dx \\ &= \int_{B(0;R_0)} |x|^{-ap}|\nabla v_\varepsilon|^p dx + \int_{B(0;2R_0)\setminus B(0;R_0)} |x|^{-ap}|\nabla(\Psi v_\varepsilon)|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla v_\varepsilon|^p dx + \int_{B(0;2R_0)\setminus B(0;R_0)} |x|^{-ap}|\nabla(\Psi v_\varepsilon)|^p dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0;R_0)} |x|^{-ap}|\nabla v_\varepsilon|^p dx. \end{aligned}$$

Usando (1.19) obtemos

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}_\varepsilon\|^p &= [k_{a,p}(\varepsilon)]^{-p}(\tilde{S}_{a,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} + \int_{B(0;2R_0)\setminus B(0;R_0)} |x|^{-ap}|\nabla(\Psi v_\varepsilon)|^p dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0;R_0)} |x|^{-ap}|\nabla v_\varepsilon|^p dx \\ &= [k_{a,p}(\varepsilon)]^{-p}(\tilde{S}_{a,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} + \int_{B(0;2R_0)\setminus B(0;R_0)} |x|^{-ap}|\Psi\nabla v_\varepsilon + v_\varepsilon\nabla\Psi|^p dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0;2R_0)} |x|^{-ap}|\nabla v_\varepsilon|^p dx - \int_{B(0;2R_0)\setminus B(0;R_0)} |x|^{-ap}|\nabla v_\varepsilon|^p dx \end{aligned}$$

$$\leq [k_{a,p}(\varepsilon)]^{-p}(\tilde{S}_{a,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} + 2^{p-1}\int_{B(0;2R_0)\backslash B(0;R_0)} |x|^{-ap}(|\Psi|^p|\nabla v_\varepsilon|^p + |v_\varepsilon|^p|\nabla\Psi|^p)dx$$
$$- \int_{\mathbb{R}^N\backslash B(0;2R_0)} |x|^{-ap}|\nabla v_\varepsilon|^p dx - \int_{B(0;2R_0)\backslash B(0;R_0)} |x|^{-ap}|\nabla v_\varepsilon|^p dx$$
$$\leq [k_{a,p}(\varepsilon)]^{-p}(\tilde{S}_{a,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} + (2^{p-1}-1)\int_{B(0;2R_0)\backslash B(0;R_0)} |x|^{-ap}|\nabla v_\varepsilon|^p dx$$
$$+ 2^{p-1}\int_{B(0;2R_0)\backslash B(0;R_0)} |x|^{-ap}|v_\varepsilon|^p|\nabla\Psi|^p dx.$$

Da escolha de $\Psi \in C_0^\infty$, existe $C > 0$ tal que $|\nabla\Psi|(x) \leq C$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Logo

$$\begin{aligned}\|\tilde{v}_\varepsilon\|^p \leq [k_{a,p}(\varepsilon)]^{-p}(\tilde{S}_{a,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} + (2^{p-1}-1)\int_{B(0;2R_0)\backslash B(0;R_0)} |x|^{-ap}|\nabla v_\varepsilon|^p dx \\ + 2^{p-1}C^p\int_{B(0;2R_0)\backslash B(0;R_0)} |x|^{-ap}|v_\varepsilon|^p dx.\end{aligned} \tag{1.26}$$

Substituindo (1.24) e (1.25) em (1.26), obtemos

$$\begin{aligned}\|\tilde{v}_\varepsilon\|^p &\leq [k_{a,p}(\varepsilon)]^{-p}(\tilde{S}_{a,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} \\ &\quad + (2^{p-1}-1)\left|\frac{(-N+dp)c_1}{dp}\right|^p \int_{B(0;2R_0)\backslash B(0;R_0)} |x|^{-ap}|x|^{\frac{(-N+ap+1)p}{p-1}} dx \\ &\quad + 2^{p-1}C^p\int_{B(0;2R_0)\backslash B(0;R_0)} |x|^{-ap}|x|^{\frac{(-N+p+ap)p}{p-1}} dx \\ &= [k_{a,p}(\varepsilon)]^{-p}(\tilde{S}_{a,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} \\ &\quad + (2^{p-1}-1)\left|\frac{(-N+dp)c_1}{dp}\right|^p \int_{B(0;2R_0)\backslash B(0;R_0)} |x|^{\frac{(-N+a+1)p}{p-1}} dx \\ &\quad + 2^{p-1}C^p\int_{B(0;2R_0)\backslash B(0;R_0)} |x|^{\frac{(-N+a+p)p}{p-1}} dx \\ &\leq [k_{a,p}(\varepsilon)]^{-p}(\tilde{S}_{a,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} \\ &\quad + (2^{p-1}-1)\left|\frac{(-N+dp)c_1}{dp}\right|^p \int_{B(0;2R_0)\backslash B(0;R_0)} \left(\frac{1}{R_0}\right)^{\frac{(N-a-1)p}{p-1}} dx \\ &\quad + 2^{p-1}C^p\int_{B(0;2R_0)\backslash B(0;R_0)} \left(\frac{1}{R_0}\right)^{\frac{(N-a-p)p}{p-1}} dx \\ &= [k_{a,p}(\varepsilon)]^{-p}(\tilde{S}_{a,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} + C'(R_0),\end{aligned}$$

isto é,

$$\|\tilde{v}_\varepsilon\|^p \leq [k_{a,p}(\varepsilon)]^{-p}(\tilde{S}_{a,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} + O(1),$$

o que demonstra (1.22).

No que se segue, demonstraremos (1.23). Temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |x|^{-\beta}|\tilde{v}_\varepsilon|^q dx &\geq \int_{B(0;R_0)} |x|^{-\beta}|\tilde{v}_\varepsilon|^q dx \\
&= \int_{B(0;R_0)} |x|^{-\beta}|v_\varepsilon|^q dx \\
&\geq \int_{B(0;R_0)\setminus B(0;\frac{R_0}{2})} |x|^{-\beta}\left(\frac{1}{\varepsilon + |x|^{c_1}}\right)^{\frac{(N-dp)q}{dp}} dx.
\end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de variáveis em coordenadas polares, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |x|^{-\beta}|\tilde{v}_\varepsilon|^q dx &\geq \omega_N \int_{\frac{R_0}{2}}^{R_0} r^{-\beta}\left(\frac{1}{\varepsilon + r^{c_1}}\right)^{\frac{(N-dp)q}{dp}} r^{N-1} dr \\
&= \omega_N \int_{\frac{R_0}{2}}^{R_0} (\varepsilon r^{-c_1} + 1)^{-\frac{(N-dp)q}{dp}} \cdot r^{-\beta+N-1-c_1\frac{(N-dp)q}{dp}} dr \\
&\geq \omega_N \left(\varepsilon\left(\frac{R_0}{2}\right)^{-c_1} + 1\right)^{-\frac{(N-dp)q}{dp}} \int_{\frac{R_0}{2}}^{R_0} r^{-\beta+N-1-c_1\frac{(N-dp)q}{dp}} dr \\
&= \left(\varepsilon\left(\frac{R_0}{2}\right)^{-c_1} + 1\right)^{-\frac{(N-dp)q}{dp}} \cdot C''(R_0),
\end{aligned}$$

em que ω_N representa a medida da S^{N-1}. Assim, para $\varepsilon < 1$ temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |x|^{-\beta}|\tilde{v}_\varepsilon|^q dx &> \left(\left(\frac{R_0}{2}\right)^{-c_1} + 1\right)^{-\frac{(N-dp)q}{dp}} \cdot C''(R_0) \\
&= \bar{C}'(R_0).
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Por outro lado, novamente fazendo uma mudança de variáveis em coordenadas polares,

obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}|x|^{-\beta}|\tilde{v}_{\varepsilon}|^{q}dx &= \int_{B(0;2R_0)}|x|^{-\beta}|\Psi v_{\varepsilon}|^{q}dx \\
&\leq \int_{B(0;2R_0)}|x|^{-\beta}|v_{\varepsilon}|^{q}dx \\
&= \int_{B(0;2R_0)}|x|^{-\beta}\left(\frac{1}{\varepsilon+|x|^{c_1}}\right)^{\frac{(N-dp)q}{dp}}dx \\
&\leq \varepsilon^{-\frac{(N-dp)q}{dp}}\int_{B(0;2R_0)}|x|^{-\beta}dx \\
&= \varepsilon^{-\frac{(N-dp)q}{dp}}\omega_N\int_0^{2R_0}r^{-\beta+N-1}dr \\
&= \bar{C}''(R_0)\cdot\varepsilon^{-\frac{(N-dp)q}{dp}},
\end{aligned} \tag{1.28}$$

uma vez que $-\beta+N-1>-1$.

Segue de (1.27) e (1.28) que

$$\bar{C}'(R_0)\leq\int_{\Omega}|x|^{-\beta}|\tilde{v}_{\varepsilon}|^{q}dx\leq\bar{C}''(R_0)\cdot\varepsilon^{-\frac{(N-dp)q}{dp}}.$$

Considere a função $f:\mathbb{R}^{+}\cup\{0\}\to\mathbb{R}^{+}\cup\{0\}$ dada por $f(t)=t\cdot\varepsilon^{-\frac{(N-dp)q}{dp}}$. Desde que f é contínua e $f(0)<\int_{\Omega}|x|^{-\beta}|\tilde{v}_{\varepsilon}|^{q}dx\leq f(\bar{C}''(R_0))$, segue do Teorema do Valor Médio que existe $\bar{t}>0$ tal que $f(\bar{t})=\int_{\Omega}|x|^{-\beta}|\tilde{v}_{\varepsilon}|^{q}dx$, isto é,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}|x|^{-\beta}|\tilde{v}_{\varepsilon}|^{p^*}dx &= \bar{t}\cdot\varepsilon^{-\frac{(N-dp)q}{dp}} \\
&= \varepsilon^{-\frac{(N-dp)q}{dp}}\cdot O(1),
\end{aligned}$$

para todo $\varepsilon\in(0,1)$, o que prova (1.23).

Finalmente, para todo $\varepsilon \in (0,1)$, de (1.22) e (1.23) obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|^p}{\left(\int_\Omega |x|^{-\beta}|\tilde{v}_\varepsilon|^q dx\right)^{p/q}} &\leq \frac{[k_{a,p}(\varepsilon)]^{-p}(\tilde{S}_{a,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} + O(1)}{\left(\varepsilon^{-\frac{N-dp}{dp}q}\cdot O(1)\right)^{p/q}} \\
&= \frac{[k_{a,p}(\varepsilon)]^{-p}(\tilde{S}_{a,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}}\varepsilon^{\frac{N-dp}{dp}p} + O(1)\varepsilon^{\frac{N-dp}{dp}p}}{O(1)} \\
&= \frac{[c\varepsilon^{(N-dp)/dp^2}]^{-p}(\tilde{S}_{a,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}}\varepsilon^{\frac{N-dp}{dp}p} + O(1)\varepsilon^{\frac{N-dp}{dp}p}}{O(1)} \\
&= \frac{c^{-p}(\tilde{S}_{a,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}}\varepsilon^{\frac{-(N-dp)}{dp}+\frac{N-dp}{dp}p} + O(1)\varepsilon^{\frac{N-dp}{dp}p}}{O(1)} \\
&= \frac{c^{-p}(\tilde{S}_{a,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}}\varepsilon^{\frac{N-dp}{dp}(p-1)} + O(1)\varepsilon^{\frac{N-dp}{dp}p}}{O(1)}.
\end{aligned}
$$

Uma vez que $p > 1$, temos

$$
\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|^p}{\left(\int_\Omega |x|^{-\beta}|\tilde{v}_\varepsilon|^q dx\right)^{p/q}} = 0.
$$

□

Lema 1.4.7. *Seja* $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$. *Suponha* (M_1), (M_2), (f_1) *e* (f_2). *Então, existe* $\varepsilon_1 \in (0,1)$ *tal que*

$$
\sup_{t\geq 0} J_0(t\tilde{v}_\varepsilon) < \left(\frac{1}{p}m_0 - \frac{1}{\xi}M_0(t_0)\right)t_0,
$$

para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_1$.

Demonstração. Sejam $0 < \varepsilon < 1$ e $\tilde{v}_\varepsilon$ como em (1.21). Desde que dos Lemas 1.4.1 e 1.4.2 o funcional J_0 satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha, para $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$, existe $t_\varepsilon > 0$ tal que

$$
\sup_{t\geq 0} J_0(t\tilde{v}_\varepsilon) = J_0(t_\varepsilon\tilde{v}_\varepsilon),
$$

para todo $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$. Temos, então,

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq 0} J_0(t\tilde{v}_\varepsilon) &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|t_\varepsilon \tilde{v}_\varepsilon\|^p) - \lambda \int_\Omega |x|^{-c} F(x, t_\varepsilon \tilde{v}_\varepsilon)dx - \frac{1}{q}\int_\Omega |x|^{-\beta} t_\varepsilon^q |\tilde{v}_\varepsilon|^q dx \\ &\leq \frac{\xi}{p^2} m_0 t_\varepsilon^p \|\tilde{v}_\varepsilon\|^p - \frac{1}{q} t_\varepsilon^q \int_\Omega |x|^{-\beta}|\tilde{v}_\varepsilon|^q dx,\end{aligned}$$

para cada $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$. Agora, considere a função $g : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, definida por

$$g(s) = \left(\frac{\xi}{p^2} m_0 \|\tilde{v}_\varepsilon\|^p\right) s^p - \left(\frac{1}{q}\int_\Omega |x|^{-\beta}|\tilde{v}_\varepsilon|^q dx\right) s^q.$$

É fácil ver que $\bar{s} = \left(\dfrac{\frac{\xi}{p} m_0 \|\tilde{v}_\varepsilon\|^p}{\int_\Omega |x|^{-\beta}|\tilde{v}_\varepsilon|^q dx}\right)^{\frac{1}{q-p}}$ é um máximo global de g e que

$$g(\bar{s}) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\left(\frac{\xi}{p} m_0\right)^{\frac{q}{q-p}} \left(\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|^p}{\left(\int_\Omega |x|^{-\beta}|\tilde{v}_\varepsilon|^q dx\right)^{p/q}}\right)^{\frac{q}{q-p}}.$$

Logo,

$$\sup_{t\geq 0} J_0(t\tilde{v}_\varepsilon) \leq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\left(\frac{\xi}{p} m_0\right)^{\frac{q}{q-p}} \left(\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|^p}{\left(\int_\Omega |x|^{-\beta}|\tilde{v}_\varepsilon|^q dx\right)^{p/q}}\right)^{\frac{q}{q-p}},$$

para cada $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$.

Segue do Lema 1.4.6 que existe $0 < \varepsilon_1 < 1$ tal que

$$\sup_{t\geq 0} J_0(t\tilde{v}_\varepsilon) < \left(\frac{1}{p} m_0 - \frac{1}{\xi} M_0(t_0)\right) t_0,$$

para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ e para cada $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$.

□

Observação 1.4.8. *Seja* $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$ *e considere o caminho* $\gamma_*(t) = t(\bar{t} v_{\varepsilon_1})$, *para* $t \in$

$[0,1]$, *o qual pertence à* Γ. *Segue do Lema 1.4.7 a seguinte estimativa:*

$$\begin{aligned} 0 < c_\lambda &= \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J_0(\gamma(t)) \\ &\leq \sup_{s\geq 0} J_0(s\tilde{v}_{\varepsilon_1}) \\ &< \left(\frac{1}{p}m_0 - \frac{1}{\xi}M_0(t_0)\right) t_0 \end{aligned}$$

para todo $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$.

Lema 1.4.9. *Suponha que* $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$ *e* $r = p$. *Suponha, ainda, as hipóteses* (M_1), (M_2), (f_2) *e* (f_3). *Seja* $(u_n) \subset \mathcal{D}_a^{1,p}$ *uma sequência tal que*

$$J_0(u_n) \to c_\lambda \ \ e \ \ J_0'(u_n) \to 0 \ \ em \ (\mathcal{D}_a^{1,p})^{-1}, \ \ quando \ n \to +\infty.$$

Então, existe uma subsequência de (u_n), *digamos* (u_{n_k}), *tal que*

$$\|u_{n_k}\|^p \leq t_0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Suponha que para uma infinidade de índices $n \in \mathbb{N}$, tem-se $\|u_n\|^p > t_0$. Considere a subsequência (u_{n_k}) de (u_n) formada por tais índices. Dessa forma, $\|u_{n_k}\|^p > t_0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Da Observação 1.4.3 temos que (u_{n_k}) é limitada. Assim, obtemos

$$|J_0'(u_{n_k}) \cdot (u_{n_k})| \leq |J_0'(u_{n_k})| \cdot \|(u_{n_k})\| \to 0,$$

quando $k \to +\infty$. Mas isto implica que

$$\begin{aligned} c_\lambda &= J_0(u_{n_k}) - \tfrac{1}{\xi}J_0'(u_{n_k})(u_{n_k}) + o_k(1) \\ &\geq \tfrac{1}{p}\widehat{M_0}(\|u_{n_k}\|^p) - \tfrac{1}{\xi}M_0(t_0)\|u_{n_k}\|^p + o_k(1) \\ &\geq \left(\tfrac{1}{p}m_0 - \tfrac{1}{\xi}M_0(t_0)\right)\|u_{n_k}\|^p + o_k(1). \end{aligned} \tag{1.29}$$

Como $m_0 < M(t_0) < \dfrac{\xi}{p} m_0$, temos $\frac{1}{p} m_0 - \frac{1}{\xi} M_0(t_0) > 0$. Então, obtemos

$$c_\lambda \geq \left(\frac{1}{p} m_0 - \frac{1}{\xi} M_0(t_0) \right) t_0 > 0.$$

Desde que $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2} \lambda_1)$, isto contradiz a Observação 1.4.8. Portanto, só podemos ter $\|u_n\|^p > t_0$ para uma quantidade finita de índices $n \in \mathbb{N}$. Excluindo-se tais índices, podemos considerar a subsequência (u_{n_k}), de (u_n), tal que $\|u_{n_k}\|^p \leq t_0$, para todo $k \in \mathbb{N}$..

$\square$

1.4.1 Conclusão da demonstração do Teorema 1.1.3

Segue da demonstração da Proposição 1.4.5 que existe $(u_n) \subset \mathcal{D}_a^{1,p}$ tal que $u_n \to u_\lambda$, fortemente, em $\mathcal{D}_a^{1,p}$ e que u_λ é uma solução para o problema (1.13). Aplicando o Lema 1.4.9, temos que u_λ é uma solução fraca para o problema (1.1).

$\square$

1.5 Demonstração do Teorema 1.1.4

Nessa seção, demonstraremos o Teorema 1.1.4, que diz respeito ao problema (1.1) quando $p < r < q$, conhecido como caso p-superlinear. Novamente faremos uso do Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale (veja Apêndice, Teorema A.2.7) para obter uma solução para esse problema. A demonstração desse Teorema é semelhante à do Teorema 1.1.3, entretanto, não precisaremos trabalhar com o primeiro autovalor associado ao problema (1.10). Assim como na seção anterior, precisaremos criar um funcional auxiliar de forma a controlar o crescimento da função M no infinito e, em seguida, fazer uso das funções extremais para demonstrar que os pontos críticos do funcional auxiliar são, ainda, pontos críticos do funcional de Euler-Lagrange associado ao problema (1.1).

Utilizando os mesmos argumentos da seção 1.4 podemos definir a função M_0 como em (1.11) e criar o problema auxiliar (1.13), tendo como funcional de Euler-Lagrange associado, J_0 definido em (1.14).

Os próximos dois lemas demonstram que o funcional J_0 satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale, para todo $\lambda > 0$, quando $p < r < q$.

Lema 1.5.1. *Suponha que sejam válidas as hipóteses* (M_1), (f_1), (f_2) *e que* $p < r < q$. *Então, existem números reais positivos,* ρ *e* α, *tais que*

$$J_0(u) \geq \alpha > 0, \forall u \in \mathcal{D}_a^{1,p}, \text{ com } \|u\| = \rho,$$

para todo $\lambda > 0$.

Demonstração. Seja $\lambda > 0$. Usando (M_1), (f_1), (f_2) e a desigualdade (1.4), obtemos

$$\begin{aligned} J_0(u) &= \frac{1}{p}\widehat{M}_0(\|u\|^p) - \lambda \int_\Omega |x|^{-\delta} F(x,u)dx - \frac{1}{q}\int_\Omega |x|^{-\beta}|u|^q dx \\ &\geq \frac{1}{p}\int_0^{\|u\|^p} M_0(s)ds - \lambda \frac{C_2}{r}\int_\Omega |x|^{-\delta}|u|^r dx - \frac{1}{q}\tilde{C}\|u\|^q \\ &\geq \frac{m_0}{p}\|u\|^p - \frac{\lambda \tilde{C}_2}{r}\|u\|^r - \frac{1}{q}\tilde{C}\|u\|^q. \end{aligned}$$

Desde que $p < r < q$, o resultado segue escolhendo $\rho > 0$, suficientemente pequeno.

$\square$

Lema 1.5.2. *Suponha que sejam válidas as hipóteses* (M_1), (M_2), (f_1), (f_2) *e que* $p < r < q$. *Então, para todo* $\lambda > 0$, *existe* $e \in \mathcal{D}_a^{1,p}$ *com* $J_0(e) < 0$ *e* $\|e\| > \rho$.

Demonstração. Considere $v_0 \in \mathcal{D}_a^{1,p} \backslash \{0\}$ tal que $v_0 > 0$ em Ω. Usando (1.12) e (f_2), obtemos

$$\begin{aligned} J_0(tv_0) &= \frac{1}{p}\widehat{M}_0(\|tv_0\|^p) - \lambda \int_\Omega |x|^{-\delta} F(x,tv_0)dx - \frac{1}{q}\int_\Omega |x|^{-\beta}|u|^q dx \\ &\leq \frac{1}{p}\int_0^{\|tv_0\|^p} M_0(s)ds - \frac{\lambda C_1}{r}\int_\Omega |x|^{-\delta}|tv_0|^r dx - \frac{1}{q}\int_\Omega |x|^{-\beta}|u|^q dx \\ &\leq \frac{\xi}{p^2} m_0 t^p \|v_0\|^p - \frac{\lambda C_1}{r} t^r \int_\Omega |x|^{-\delta}|v_0|^r dx - \frac{t^q}{q}\int_\Omega |x|^{-\beta}|v_0|^q dx. \end{aligned}$$

Desde que $p < r < q$, temos $\lim_{t \to +\infty} J_0(tv_0) = -\infty$. Logo, existe $\bar{t} > 0$ suficientemente grande, tal que $\bar{t}\|v_0\| > \rho$ e $J_0(\bar{t}v_0) < 0$. O resultado segue escolhendo $e = \bar{t}v_0$.

$\square$

Dos Lemas 1.5.1 e 1.5.2 segue que, para cada $\lambda > 0$, podemos aplicar o Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale e obter uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{D}_a^{1,p}$, satisfazendo

$$J_0(u_n) \to c_\lambda \text{ e } J_0'(u_n) \to 0 \text{ em } (\mathcal{D}_a^{1,p})^{-1},$$

quando $n \to +\infty$, em que

$$0 < c_\lambda = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J_0(\gamma(t)),$$

$$\Gamma := \left\{ \gamma \in C([0,1], \mathcal{D}_a^{1,p}) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = \bar{t}v_0 \right\}$$

e $v_0 \in \mathcal{D}_a^{1,p}$ é tal que $v_0 > 0$.

Observação 1.5.3. (u_n) *é limitada em* $\mathcal{D}_a^{1,p}$. *De fato, devido à condição* (f_3), *a demonstração é como visto na Observação 1.4.3.*

Lema 1.5.4. *Suponha* (M_1), (M_2), (f_1), (f_2), (f_3) *e* $r > p$. *Então* J_0 *satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demonstração. Seja $(u_n) \subset \mathcal{D}_a^{1,p}$ uma sequência de Palais-Smale no nível c, isto é, $J_0(u_n) \to c$ e $J_0'(u_n) \to 0$ (no dual de $\mathcal{D}_a^{1,p}$), quando $n \to +\infty$. Utilizando os mesmos argumentos da Observação 1.4.3, temos que $(u_n) \subset \mathcal{D}_a^{1,p}$ é limitada.

Desde que $\mathcal{D}_a^{1,p}$ é reflexivo e (u_n) é limitada, passando a uma subsequência, se necessário, obtemos $u \in \mathcal{D}_a^{1,p}$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u, \quad \text{em } \mathcal{D}_a^{1,p},$$

quando $n \to +\infty$. Ainda, como a imersão de $\mathcal{D}_a^{1,p}$ em $L^s(\Omega, |x|^{-\alpha})$ é compacta, sempre que $1 \leq s < p^*$ e $\sigma < (a+1)s + N(1 - \frac{s}{p})$, temos

$$u_n \to u, \quad \text{em } L^q(\Omega, |x|^{-\beta}) \text{ e } u_n \to u, \quad \text{em } L^r(\Omega, |x|^{-\delta}),$$

quando $n \to +\infty$. Daí, obtemos, também,

$$u_n(x) \to u(x) \ \text{ q.t.p. em } \Omega \ \text{ e } \ \|u_n\| \to s_0 \geq 0, \tag{1.30}$$

quando $n \to +\infty$.

Logo $J_0'(u_n)(u_n - u) = o_n(1)$, isto é,

$$M_0(\|u_n\|^p)\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(u_n - u)dx$$

$$-\lambda\int_\Omega |x|^{-\delta} f(x, u_n)(u_n - u)dx - \int_\Omega |x|^{-\beta}|u_n|^{q-2}u_n(u_n - u)dx = o_n(1).$$

Da desigualdade de Hölder e de (1.30), usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_\Omega |x|^{-\beta}|u_n|^{q-2}u_n(u_n - u)dx = o_n(1).$$

Ainda, usando (f_2), a desigualdade de Hölder, (1.30) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\left|\int_\Omega |x|^{-\delta} f(x, u_n)(u_n - u)dx\right| \leq C_2\int_\Omega |x|^{-\delta}|u_n|^{r-1}|u_n - u|dx = o_n(1).$$

Por conseguinte, obtemos

$$M_0(\|u_n\|^p)\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(u_n - u)dx = o_n(1).$$

Uma vez que (u_n) é limitada e M é contínua e positiva,

$$\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(u_n - u)\ dx = o_n(1).$$

Aplicando o Lema 1.2.6 concluímos a demonstração.

$\square$

Observação 1.5.5. *Devido aos Lemas 1.5.1 e 1.5.2 o Lema 1.4.7 é verdadeiro, para todo $\lambda > 0$, quando $p < r < q$. Assim, se considerarmos o caminho $\gamma_*(t) = t(\bar{t}v_{\varepsilon_1})$, para $t \in [0,1]$, o qual pertence à Γ, obtemos a seguinte estimativa*

$$\begin{aligned} 0 < c_\lambda &= \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J_0(\gamma(t)) \\ &\leq \sup_{s\geq 0} J_0(s\tilde{v}_{\varepsilon_1}) \\ &< \left(\frac{1}{p}m_0 - \frac{1}{\xi}M_0(t_0)\right) t_0 \end{aligned}$$

para todo $\lambda > 0$.

O próximo lema é uma versão do Lema 1.4.9 quando $p < r < q$. Devido à hipótese (f_3) e à Observação 1.5.5, sua demonstração é similar à demonstração do Lema 1.4.9.

Lema 1.5.6. *Suponha (M_1), (M_2), (f_2), (f_3) e $p < r < q$. Seja $(u_n) \subset \mathcal{D}_a^{1,p}$ uma sequência tal que*

$$J_0(u_n) \to c_\lambda \text{ e } J_0'(u_n) \to 0 \text{ em } (\mathcal{D}_a^{1,p})^{-1}, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Então, existe uma subsequência de (u_n), digamos (u_{n_k}), tal que

$$\|u_{n_k}\|^p \leq t_0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Seja $\lambda > 0$. Suponha que para uma infinidade de índices $n \in \mathbb{N}$, tem-se $\|u_n\|^p > t_0$. Considere a subsequência (u_{n_k}) de (u_n) formada por tais índices. Dessa forma, $\|u_{n_k}\|^p > t_0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Da Observação 1.5.3 temos que (u_{n_k}) é limitada. Assim, obtemos

$$|J_0'(u_{n_k}) \cdot (u_{n_k})| \leq |J_0'(u_{n_k})| \cdot \|(u_{n_k})\| \to 0,$$

quando $k \to +\infty$. Mas isto implica que

$$\begin{aligned} c_\lambda &= J_0(u_{n_k}) - \tfrac{1}{\xi} J_0'(u_{n_k})(u_{n_k}) + o_k(1) \\ &\geq \tfrac{1}{p}\widehat{M_0}(\|u_{n_k}\|^p) - \tfrac{1}{\xi} M_0(t_0)\|u_{n_k}\|^p + o_k(1) \\ &\geq \left(\tfrac{1}{p} m_0 - \tfrac{1}{\xi} M_0(t_0)\right) \|u_{n_k}\|^p + o_k(1). \end{aligned} \tag{1.31}$$

Como $m_0 < M(t_0) < \dfrac{\xi}{p} m_0$, temos $\frac{1}{p} m_0 - \frac{1}{\xi} M_0(t_0) > 0$. Então, obtemos

$$c_\lambda \geq \left(\frac{1}{p} m_0 - \frac{1}{\xi} M_0(t_0)\right) t_0 > 0.$$

Mas isto contradiz a Observação 1.5.5. Portanto, só podemos ter $\|u_n\|^p > t_0$ para uma quantidade finita de índices $n \in \mathbb{N}$. Excluindo-se tais índices, podemos considerar a subsequência (u_{n_k}), de (u_n), tal que $\|u_{n_k}\|^p \leq t_0$, para todo $k \in \mathbb{N}$..

$\square$

1.5.1 Conclusão da demonstração do Teorema 1.1.4

Seja $\lambda > 0$. Segue dos Lemas 1.5.1, 1.5.2 e da Observação 1.5.3, que existe uma sequência limitada $(u_n) \subset \mathcal{D}_a^{1,p}$ tal que $J_0(u_n) \to c_\lambda$ e $J_0'(u_n) \to 0$, em $(\mathcal{D}_a^{1,p})^{-1}$, quando $n \to +\infty$. Aplicando o Lema 1.5.4, a menos de subsequência, existe $u_\lambda \in \mathcal{D}_a^{1,p}$ tal que $u_n \to u_\lambda$. Logo u_λ é uma solução fraca para o problema (1.13). Aplicando o Lema 1.5.6, temos que u_λ é uma solução fraca para o problema (1.1).

$\square$

Capítulo

2

Equações do tipo Kirchhoff com expoentes críticos

2.1 Introdução

Nesse capítulo, estudaremos um problema semelhante ao problema (1.1), mas substituindo o termo com expoente subcrítico por um termo com expoente crítico. A presença do termo crítico aumenta a dificuldade na abordagem do problema, pois não temos a imersão compacta de $\mathcal{D}_a^{1,p}$ em $L^{p^*}(\Omega, |x|^{-bp^*})$, dificultando demonstrar que o funcional de Euler-Lagrange associado ao problema satisfaz a condição de Palais-Smale. Para contornar essa dificuldade, foi necessário utilizar uma versão do Princípio de Concentração e Compacidade de Lions. Além disso, a presença do termo não local no operador L nos obriga a fazer um truncamento na função do tipo Kirchhoff, M, tal como foi feito na Seção 1.4 do Capítulo 1.

Especificamente, estamos interessados em obter soluções para o seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} L(u) & = & \lambda |x|^{-\delta} f(x,u) + |x|^{-bp^*}|u|^{p^*-2}u, & \text{em} \quad \Omega, \\ u & = & 0, & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{2.1}$$

em que

$$L(u) := -\left[M \left(\int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u|^p \, dx \right) \right] div \left(|x|^{-ap} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right),$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado com $0 \in \Omega$, $N \geq 3$, $1 < p < N$, $a < \frac{N-p}{p}$, $p^* = \frac{Np}{N-dp}$ é o expoente crítico de Caffarelli-Kohn-Nirenberg, com $d = 1 + a - b$ e $a \leq b < a + 1$.

As hipóteses sobre a função contínua $M : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+$ são as mesmas postas no Capítulo 1:

(M_1) Existe $m_0 > 0$ tal que

$$M(t) \geq m_0, \forall\, t \geq 0.$$

(M_2) M é uma função crescente.

Já as hipóteses sobre a função de Caratheodory $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, são semelhantes às hipóteses do Capítulo 1, com uma ligeira modificação devido à presença do expoente crítico:

(f_1)
$$f(x, -t) = -f(x, t), \ \forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

(f_2) Existem $r \in (1, p^*)$ e C_1, C_2 constantes positivas, com $C_1 < C_2$, tais que

$$C_1|t|^{r-1} \leq f(x, t) \leq C_2|t|^{r-1}, \ \forall\, (x, t) \in \Omega \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}).$$

(f_3) f satisfaz a condição superlinear de Ambrosetti-Rabinowitz, isto é, existe $\xi \in (p, p^*)$ tal que

$$0 < \xi \int_0^t f(x, s)ds \leq t f(x, t), \ \forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+.$$

Supomos, também, $\delta < (a + 1)r + N(1 - \frac{r}{p})$.

Assim como no Capítulo 1, para facilitar o estudo do problema (2.1), dividimos o capítulo em seções, considerando os casos $p-$sublinear $(1 < r < p,)$, $p-$linear $(r = p)$ e $p-$superlinear $(r > p)$. Novamente, no caso $p-$sublinear utilizaremos a teoria de gênero de Krasnoselskii para obter um resultado de múltiplas soluções para o problema (2.1) e trabalharemos com funções extremais e o Teorema do Passo da Montanha para obter uma solução não trivial nos casos $p-$linear e $p-$superlinear. Os principais resultados desse capítulo são os seguintes:

Teorema 2.1.1. *Suponha* (M_1), (M_2), (f_1), (f_2) *e* $1 < r < p$. *Então existe* $\lambda^* > 0$ *tal que o problema (2.1) tem infinitas soluções, para cada* $\lambda \in (0, \lambda^*)$.

Teorema 2.1.2. *Suponha* (M_1), (M_2), (f_1), (f_2), (f_3) *e* $r = p$. *Então o problema (2.1) tem ao menos uma solução não trivial, para cada* $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$, *em que* λ_1 *é o primeiro autovalor associado ao problema (1.9).*

Teorema 2.1.3. *Suponha* (M_1), (M_2), (f_1), (f_2), (f_3) *e* $p < r < p^*$. *Então o problema (2.1) tem ao menos uma solução não trivial, para cada* $\lambda > 0$.

2.2 Formulação variacional e resultados preliminares

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suave e limitado, com $0 \in \Omega$, $N \geq 3$, $1 < p < N$, $a < (N-p)/p$, $a \leq b < a+1$ e $p^* = Np/(N-dp)$, em que $d = 1 + a - b$. Assim como no Capítulo 1, para tratar o problema (2.1), consideramos o espaço de Sobolev com peso, $\mathcal{D}_a^{1,p}$.

Desde que nossa abordagem é variacional, procuramos por soluções para o problema (2.1) encontrando pontos críticos do funcional de Euler-Lagrange $I : \mathcal{D}_a^{1,p} \to \mathbb{R}$, definido por

$$I(u) = \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) - \lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}F(x,u)\, dx - \frac{1}{q}\int_\Omega |x|^{-bp^*}|u|^{p^*}\, dx, \tag{2.2}$$

em que $\widehat{M}(t) := \int_0^t M(s)\, ds$ e $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\, ds$. Note que $I \in C^1$ (veja Apêndice, Teorema A.4.3) e

$$\begin{aligned} I'(u)(\phi) &= M(\|u\|^p)\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\phi\, dx \\ &\quad -\lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}f(x,u)\phi\, dx - \int_\Omega |x|^{-bp^*}|u|^{p^*-2}u\phi\, dx, \end{aligned}$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}_a^{1,p}$.

2.3 O problema auxiliar

Como foi citado na introdução desse capítulo, a presença do termo com expoente crítico no problema (2.1) faz com que não seja simples demonstrar que o funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale. Entretanto, essa não é a única dificuldade encontrada nesse processo. A falta de informações relativas ao comportamento da função M no infinito também atrapalha verificar que o funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale. Para isso, precisaremos fazer um truncamento na função M, de forma que possamos contornar essa dificuldade. Além disso, para demonstrarmos os Teoremas 2.1.2 e 2.1.3, necessitamos verificar a geometria do Teorema do Passo da Montanha, tal como foi feito na Seção 1.4 do Capítulo 1. A partir desse truncamento, criamos um problema auxiliar cujas soluções serão, ainda, soluções de problema (2.1).

Uma vez que $p < p^*$, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $p < \theta < p^*$. Segue de (M_2) que existe $t_0 > 0$ tal que $m_0 = M(0) < M(t_0) < \frac{\theta}{p} m_0$, para o caso $1 < r < p$ e $m_0 = M(0) < M(t_0) < \frac{\xi}{p} m_0$ para o caso $p \leq r < p^*$, em que ξ é dado em (f_3). Definimos

$$M_0(t) := \begin{cases} M(t), & \text{se} \quad 0 \leq t \leq t_0, \\ M(t_0), & \text{se} \quad t \geq t_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Ainda de (M_2), obtemos

$$m_0 \leq M_0(t) \leq \frac{\theta}{p} m_0, \ \forall t \geq 0, \ \text{se } 1 < r < p \tag{2.4}$$

e

$$m_0 \leq M_0(t) \leq \frac{\xi}{p} m_0, \ \forall t \geq 0, \ \text{se } p \leq r \leq p^*. \tag{2.5}$$

As demonstrações dos teoremas principais desse capítulo serão baseadas no estudo do seguinte problema auxiliar:

$$\begin{cases} L_0(u) &= \lambda|x|^{-\delta}f(x,u) + |x|^{-bp^*}|u|^{p^*-2}u, \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \\ u &= 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.6}$$

em que

$$L_0(u) :=: -\left[M_0\left(\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p\ dx\right)\right] div\left(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right).$$

O funcional de Euler-Lagrange associado ao problema (2.6) é $J : \mathcal{D}_a^{1,p} \to \mathbb{R}$, definido por

$$J(u) = \frac{1}{p}\widehat{M_0}(\|u\|^p) - \lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}F(x,u)\ dx - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |x|^{-bp^*}|u|^{p^*}dx, \tag{2.7}$$

em que $\widehat{M_0}(t) := \int_0^t M_0(s)ds$. Note que J é de classe C^1 e

$$\begin{aligned} J'(u)(\phi) \quad &= \quad M_0(\|u\|^p)\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi\ dx \\ &\quad -\lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}f(x,u)\phi\ dx - \int_\Omega |x|^{-bp^*}|u|^{p^*-2}u\phi\ dx, \end{aligned}$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}_a^{1,p}$.

2.4 Demonstração do Teorema 2.1.1

Nessa seção, demonstraremos o Teorema 2.1.1. Faremos uso da teoria de gênero de Krasnoselskii, apresentada no Capítulo 1, com o objetivo de obter múltiplas soluções para o problema (2.1) quando $1 < r < p$. Entretanto, não podemos aplicar o Teorema de Clarke (Teorema 1.2.5), pois além de não termos a garantia de que o funcional J, definido em (2.7), seja coercivo, esse funcional verifica apenas uma condição de Palais-Smale local (como veremos a seguir), isto é, o funcional verifica a condição de Palais-Smale para um determinado nível. Dessa forma, utilizaremos argumentos diferentes dos encontrados no Capítulo 1 com o intuito de aplicar a seguinte proposição, relativa à teoria de gênero de Krasnoselskii:

Proposição 2.4.1. *Sejam E um espaço de Banach real e $\mathfrak{A}$ a classe de todos os conjuntos fechados $A \subset E \setminus \{0\}$ que são simétricos em relação à origem. Se $K \in \mathfrak{A}$, $0 \notin K$, e $\gamma(K) \geq 2$, então K possui uma infinidade de pontos.*

Demonstração. Veja [24, Proposição 1.1.3]. $\square$

O próximo lema demonstra que o funcional J satisfaz uma condição de Palais-Smale local.

Lema 2.4.2. *Seja (u_n) uma sequência limitada em $\mathcal{D}_a^{1,p}$ tal que*

$$J(u_n) \to c \text{ e } J'(u_n) \to 0 \text{ em } (\mathcal{D}_a^{1,p})^{-1}, \text{ quando } n \to \infty.$$

Suponha $1 \leq r < p$, (M_1), (M_2), (f_1), (f_2) e

$$c < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p^*}\right)(m_0 C_{a,p}^*)^{\frac{p^*}{p^*-p}} - \left[\frac{\lambda C C_2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\theta}\right)}{\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p^*}\right)}\right]^{\frac{p^*}{p^*-r}} \left[\left(\frac{r}{p^*}\right)^{\frac{r}{p^*-r}} - \left(\frac{r}{p^*}\right)^{\frac{p^*}{p^*-r}}\right],$$

em que $C = \left(\int_\Omega \left(|x|^{-\delta+br}\right)^{\frac{p^*}{p^*-r}} dx\right)^{\frac{p^*-r}{p^*}}$, então (u_n) possui uma subsequência fortemente convergente em $\mathcal{D}_a^{1,p}$.

Demonstração. Desde que $\mathcal{D}_a^{1,p}$ é reflexivo e (u_n) é limitada, passando a uma subsequência, se necessário, obtemos $u \in \mathcal{D}_a^{1,p}$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } \mathcal{D}_a^{1,p},$$

quando $n \to +\infty$. Agora, se $1 \leq s < p^*$ e $\sigma < (a+1)s + N(1 - s/p)$, temos que a imersão de $\mathcal{D}_a^{1,p}$ em $L^s(\Omega, |x|^{-\sigma})$ é compacta e, portanto,

$$u_n \to u \text{ in } L^s(\Omega, |x|^{-\sigma}).$$

Daí, obtemos, também,

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p em } \Omega$$

e

$$\|u_n\| \to s_0 \geq 0,$$

quando $n \to +\infty$. Nomavente observando que (u_n) é limitada, usando o Princípio de Concentração e Compacidade devido a Lions (veja Apêndice, Lema A.2.8), obtemos um conjunto de índices, no máximo contável, Λ, sequências $(x_i) \subset \mathbb{R}^N$, $(\mu_i), (\nu_i) \subset (0, \infty)$, tais que

$$|x|^{-ap}|\nabla u_n|^p \rightharpoonup |x|^{-ap}|\nabla u|^p + \mu \text{ e } |x|^{-bp^*}|u_n|^{p^*} \rightharpoonup |x|^{-bp^*}|u|^{p^*} + \nu, \tag{2.8}$$

quando $n \to +\infty$, no sentido fraco* de convergência em medidas, em que

$$\nu = \sum_{i\in\Lambda} \nu_i \delta_{x_i}, \quad \mu \geq \sum_{i\in\Lambda} \mu_i \delta_{x_i} \quad \text{e} \quad C^*_{a,p} \nu_i^{p/p^*} \leq \mu_i, \tag{2.9}$$

para todo $i \in \Lambda$, em que δ_{x_i} é a medida de massa concentrada em $x_i \in \Omega$.

Seja $k \in \mathbb{N}$. Sem perda de generalidade, podemos supor $B(0;2) \subset \Omega$. Então, para cada $\varrho > 0$, definimos

$$\psi_\varrho(x) := \psi((x - x_k)/\varrho),$$

em que $\psi \in C_0^\infty(\Omega, [0,1])$ é tal que $\psi \equiv 1$ em $B(0;1)$, $\psi \equiv 0$ em $\Omega \setminus B(0;2)$ e $|\nabla\psi| \leq 1$. Observe que $(\psi_\varrho u_n)$ é limitada em $\mathcal{D}^{1,p}_a$. Com efeito

$$\begin{aligned}
\|\psi_\varrho u_n\|^p &= \int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla(\psi_\varrho u_n)|^p dx \\
&= \int_\Omega |x|^{-ap}(|\nabla\psi_\varrho u_n| + |\psi_\varrho \nabla u_n|)^p dx \\
&\leq 2^{p-1}\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla\psi_\varrho u_n|^p dx + \int_\Omega |x|^{-ap}|\psi_\varrho \nabla u_n|^p dx \\
&\leq \frac{2^{p-1}}{\rho^p}\int_\Omega |x|^{-ap}|u_n|^p dx + \int_\Omega |x|^{-ap}|\psi_\varrho \nabla u_n|^p dx \\
&\leq \hat{C}\|u_n\|^p.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos $J'(u_n)(\psi_\varrho u_n) \to 0$, isto é,

$$\begin{aligned} M_0(||u_n||^p)\int_\Omega |x|^{-ap}u_n|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\psi_\varrho dx = &-M_0(||u_n||^p)\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u_n|^p\psi_\varrho dx \\ &+\lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}f(x,u_n)\psi_\varrho u_n dx \\ &+\int_\Omega |x|^{-bp^*}\psi_\varrho|u_n|^{p^*}\ dx + o_n(1). \end{aligned}$$

Segue de (2.8) e (M_1) que

$$\begin{aligned} M_0(||u_n||^p)\int_\Omega |x|^{-ap}u_n|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\psi_\varrho dx \leq &-m_0\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p\psi_\varrho dx \\ &-m_0\int_\Omega \psi_\varrho d\mu \\ &+\lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}f(x,u_n)\psi_\varrho u_n dx \\ &+\int_\Omega |x|^{-bp^*}\psi_\varrho|u|^{p^*}\ dx \\ &+\int_\Omega \psi_\varrho d\nu + o_n(1). \end{aligned}$$

Uma vez que $u_n \to u$ in $L^r\left(\Omega,|x|^{-\delta}\right)$, quando $n\to+\infty$, a menos de uma subsequência, existe $h\in L^r\left(\Omega,|x|^{-\delta}\right)$, tal que $|u_n(x)|\leq h(x), \forall n\in\mathbb{N}$, q.t.p em Ω. Como $u_n(x)\to u(x)$ q.t.p em Ω, usando (f_2) obtemos

$$\begin{aligned} |x|^{-\delta}|f(x,u_n)||u_n(x)||\psi_\varrho| &\leq C_2|x|^{-\delta}|u_n(x)|^{r-1}|u_n(x)||\psi_\varrho(x)| \\ &\leq C_2|x|^{-\delta}|h(x)|^r \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}f(x,u_n)\psi_\varrho u_n dx \to \lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}f(x,u)\psi_\varrho u dx,$$

quando $n \to +\infty$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} M_0(||u_n||^p)\int_\Omega |x|^{-ap}u_n|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\psi_\varrho dx \leq & -m_0\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p\psi_\varrho dx \\ & - m_0\int_\Omega \psi_\varrho d\mu \\ & + \lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}f(x,u)\psi_\varrho u dx \\ & + \int_\Omega |x|^{-bp^*}\psi_\varrho|u|^{p^*}\ dx \\ & + \int_\Omega \psi_\varrho d\nu + o_n(1). \end{aligned}$$

Passando ao limite superior, temos que

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} M_0(||u_n||^p)\int_\Omega |x|^{-ap}u_n|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\psi_\varrho dx \leq & -m_0\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p\psi_\varrho dx \\ & - m_0\int_\Omega \psi_\varrho d\mu \\ & + \lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}f(x,u)\psi_\varrho u dx \\ & + \int_\Omega |x|^{-bp^*}\psi_\varrho|u|^{p^*} dx \\ & + \int_\Omega \psi_\varrho d\nu. \end{aligned}$$

Usando novamente o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p\psi_\varrho dx = o_\varrho(1), \int_\Omega |x|^{-\delta}f(x,u)\psi_\varrho u dx = o_\varrho(1),$$

e

$$\int_\Omega |x|^{-bp^*}\psi_\varrho|u|^{p^*}dx = o_\varrho(1),$$

em que $\lim\limits_{\varrho\to 0^+} o_\varrho(1) = 0$. Logo

$$\lim_{\varrho\to 0^+}\left[\limsup_{n\to\infty} M_0(\|u_n\|^p)\int_\Omega |x|^{-ap}u_n|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\psi_\varrho dx\right] \leq \lim_{\varrho\to 0^+}\left[\int_\Omega \psi_\varrho d\nu - m_0\int_\Omega \psi_\varrho d\mu\right]. \tag{2.10}$$

Agora, mostraremos que

$$\lim_{\varrho\to 0^+}\left[\limsup_{n\to\infty} M_0(\|u_n\|^p)\int_\Omega |x|^{-ap}u_n|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\psi_\varrho dx\right]=0. \tag{2.11}$$

Segue da desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega |x|^{-ap}u_n|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\psi_\varrho dx\right| &\leq \int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-1}|u_n\nabla\psi_\varrho|dx\\ &\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{|x|^{ap}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega \frac{|u_n\nabla\psi_\varrho|^p}{|x|^{ap}}dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \|u_n\|^{p-1}\left(\int_\Omega |x|^{-ap}|u_n\nabla\psi_\varrho|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Uma vez que (u_n) é limitada em $\mathcal{D}_a^{1,p}$, M é contínua e $supp(\psi_\varrho)\subset B(x_k;2\varrho)$, existe $L>0$ tal que

$$M_0(||u_n||^p)\left|\int_\Omega |x|^{-ap}u_n|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\psi_\varrho dx\right|\leq L\left(\int_{B(x_k;2\varrho)}|x|^{-ap}|u_n\nabla\psi_\varrho|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\left[M_0(\|u_n\|^p)\left|\int_\Omega |x|^{-ap}u_n|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\psi_\varrho dx\right|\right]\\ &\leq L\left(\int_{B(x_k;2\varrho)}|x|^{-ap}|u|^p|\nabla\psi_\varrho|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq L\left(\int_{B(x_k;2\varrho)}\left(|x|^{-ap}|u|^p\right)^{\frac{N}{N-p}}dx\right)^{\frac{N-p}{Np}}\left(\int_{B(x_k;2\varrho)}|\nabla\psi_\varrho|^N dx\right)^{\frac{1}{N}}\\ &\leq L|B(x_k;2\varrho)|^{\frac{1}{N}}\left(\int_\Omega \chi_{B(x_k;2\varrho)}\left(|x|^{-ap}|u|^p\right)^{\frac{N}{N-p}}dx\right)^{\frac{N-p}{Np}}.\end{aligned}$$

Fazendo $\varrho\to 0^+$ na expressão acima, obtemos (2.11). Concluímos de (2.10) que

$$0\leq \lim_{\rho\to 0^+}\left[\int_\Omega \psi_\varrho d\nu - m_0\int_\Omega \psi_\varrho d\mu\right].$$

Isto é,

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{\rho\to 0^+}\left[\int_{B(x_k;2\varrho)} \psi_\varrho d\nu - m_0\int_{B(x_k;2\varrho)} \psi_\varrho d\mu\right]\\
&= \nu(\{x_k\}) - m_0\mu(\{x_k\})\\
&\leq \sum_{i\in\Lambda} \nu_i\delta_{x_i}(\{x_k\}) - m_0\sum_{i\in\Lambda}\mu_i\delta_{x_i}(\{x_k\})\\
&= \nu_k - m_0\mu_k.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$m_0\mu_k \leq \nu_k.$$

Segue de (2.9) que

$$\nu_k \geq \left(m_0 C^*_{a,p}\right)^{\frac{p^*}{p^*-p}}. \tag{2.12}$$

Agora, provaremos que (2.12) não pode ocorrer e, dessa forma, o conjunto Λ é vazio. De fato, suponha, por contradição, $\nu_k \geq \left(m_0 C^*_{a,p}\right)^{\frac{p^*}{p^*-p}}$, para algum $k \in \Lambda$. Logo

$$c = J(u_n) - \frac{1}{\theta}J'(u_n)(u_n) + o_n(1).$$

Uma vez que $m_0 \leq M_0(t) \leq \frac{\theta}{p}m_0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos

$$
\begin{aligned}
c &= J(u_n) - \frac{1}{\theta}J'(u_n)(u_n) + o_n(1)\\
&= \frac{1}{p}\hat{M}_0(\|u_n\|^p) - \lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}F(x,u_n)dx - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |x|^{-bp^*}|u_n|^{p^*}dx\\
&\quad - \frac{1}{\theta}\left[M_0(\|u_n\|^p)\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u_n|^p dx - \lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}f(x,u_n)u_n dx\right.\\
&\quad \left. - \int_\Omega |x|^{-bp^*}|u_n|^{p^*}dx\right] + o_n(1)\\
&\geq \frac{m_0}{p}\|u_n\|^p - \frac{\theta m_0}{\theta p}\|u_n\|^p - \lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}F(x,u_n)dx + \frac{\lambda}{\theta}\int_\Omega |x|^{-\delta}f(x,u_n)u_n dx\\
&\quad + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p^*}\right)\int_\Omega |x|^{-bp^*}|u_n|^{p^*}dx + o_n(1).
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Mas, usando (f_2), temos, para $t \geq 0$,

$$f(x,t) \geq C_1|t|^{r-1} \geq 0$$

e, portanto,

$$f(x,t)t \geq -C_2|t|^r.$$

Se $t < 0$, usando (f_1),

$$f(x,t) = -f(x,-t) \leq -C_1|t|^{r-1}.$$

Logo,

$$f(x,t)t \geq -C_1|t|^r > -C_2|t|^r,$$

pois $C_1 < C_2$. Com isso, obtemos

$$f(x,t)t \geq -C_2|t|^r, \ \forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{2.14}$$

Além disso, da Observação 1.1.1, do Capítulo 1

$$F(x,t) \leq \frac{C_2}{r}|t|^r, \ \forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{2.15}$$

Substituindo (2.14) e (2.15) em (2.13), obtemos

$$c \geq -\lambda C_2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\theta}\right) \int_\Omega |x|^{-\delta}|u_n|^r dx + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p^*}\right) \int_\Omega |x|^{-bp^*}|u_n|^{p^*}\psi_\varrho dx + o_n(1).$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\begin{aligned}
c &\geq -\lambda C_2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\theta}\right) \int_\Omega |x|^{-\delta}|u|^r dx + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p^*}\right) \int_\Omega |x|^{-bp^*}|u|^{p^*}\psi_\varrho dx \\
&+ \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p^*}\right) \sum_{j\in\Lambda} \psi_\varrho(x_j)\nu_j \\
&\geq -\lambda C_2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\theta}\right) \int_\Omega |x|^{-\delta}|u|^r dx + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p^*}\right) \int_\Omega |x|^{-bp^*}|u|^{p^*}\psi_\varrho dx \\
&+ \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p^*}\right) \nu_k \\
&\geq -\lambda C_2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\theta}\right) \int_\Omega |x|^{-\delta}|u|^r dx + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p^*}\right) \int_\Omega |x|^{-bp^*}|u|^{p^*}\psi_\varrho dx \\
&+ \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p^*}\right) \left(m_0 C^*_{a,p}\right)^{\frac{p^*}{p^*-p}}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Agora, note que da desigualdade de Hölder,

$$\int_\Omega |x|^{-\delta}|u|^r dx \leq C \left(\int_\Omega |x|^{-bp^*}|u|^{p^*} dx\right)^{r/p^*}, \tag{2.17}$$

em que $C = \left(\int_\Omega \left(|x|^{-\delta+br}\right)^{\frac{p^*}{p^*-r}} dx\right)^{\frac{p^*-r}{p^*}}$. Afirmamos que $C < \infty$. De fato, para simplificar, faça $\tau = \frac{p^*}{p^*-r}$. Considere uma bola $B(0;R) \subset \Omega$. Como Ω é limitado, existe $K > 0$ tal que $|x| < K$, para todo $x \in \Omega\backslash B(0;R)$. Assim, $R \leq |x| < K$, para todo $x \in \Omega\backslash B(0;R)$ e, portanto,

$$\left(\int_{\Omega\backslash B(0;R)} |x|^{(-\delta+br)\tau} dx\right)^{\frac{1}{\tau}} < \infty.$$

Para $x \in B(0;R)$, fazendo uma mudança de varáveis em coordenadas polares, temos

$$\int_{B(0;R)} |x|^{(-\delta+br)\tau} dx = \omega_R \int_0^R s^{(-\delta+br)\tau+N-1} ds$$

Mas, por hipótese, $\delta < (a+1)r + N(1-\frac{r}{p})$. Logo

$$\begin{aligned}
\delta &< ar + r + N - \frac{Nr}{p} + br - br \\
&= br + N - \frac{r}{p}(N - p + p(b-a)) \\
&= br + N\left(1 - r\cdot\frac{N-dp}{Np}\right) \\
&= br + N\left(1 - \frac{r}{p^*}\right) \\
&= br + N\left(\frac{p^*-r}{p^*}\right) \\
&= br + \frac{N}{\tau} \\
&= \frac{br\tau + N}{\tau},
\end{aligned}$$

ou seja, $(-\delta + br)\tau + N > 0$. Dessa forma, $(-\delta + br)\tau + N - 1 > -1$ e, portanto,

$$\omega_R \int_0^R s^{(-\delta+br)\tau+N-1} ds < \infty.$$

Com isso, concluímos que $C < \infty$.

Substituindo (2.17) em (2.16) e fazendo $\varrho \to \infty$, obtemos

$$\begin{aligned}
c \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p^*}\right)\left(m_0 C^*_{a,p}\right)^{\frac{p^*}{p^*-p}} - \lambda C C_2 \|u\|^r_{p^*,bp^*} \\
+ \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p^*}\right)\|u\|^{p^*}_{p^*,bp^*}.
\end{aligned}$$

Defina $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(t) = -\lambda C C_2\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\theta}\right)t^r + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p^*}\right)t^{p^*}$. Essa função atinge seu mínimo absoluto no ponto

$$\bar{t} = \left(\frac{\lambda r C C_2\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\theta}\right)}{p^*\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p^*}\right)}\right)^{\frac{1}{p^*-r}} > 0.$$

Assim, concluímos que

$$
\begin{aligned}
c \geq & \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p^*}\right)\left(m_0 C_{a,p}^*\right)^{\frac{p^*}{p^*-p}} - \lambda r C C_2\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\theta}\right)\left[\frac{\lambda r C C_2\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\theta}\right)}{p^*\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p^*}\right)}\right]^{\frac{r}{p^*-r}} \\
& + \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p^*}\right)\left[\frac{\lambda r C C_2\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\theta}\right)}{p^*\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p^*}\right)}\right]^{\frac{p^*}{p^*-r}} \\
= & \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p^*}\right)\left(m_0 C_{a,p}^*\right)^{\frac{p^*}{p^*-p}} - \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p^*}\right)\left[\frac{\lambda C C_2\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\theta}\right)}{\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p^*}\right)}\right]^{\frac{p^*}{p^*-r}}\left(\frac{r}{p^*}\right)^{\frac{r}{p^*-r}} \\
& + \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p^*}\right)\left[\frac{\lambda C C_2\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\theta}\right)}{\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p^*}\right)}\right]^{\frac{p^*}{p^*-r}}\left(\frac{r}{p^*}\right)^{\frac{p^*}{p^*-r}} \\
= & \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p^*}\right)\left(m_0 C_{a,p}^*\right)^{\frac{p^*}{p^*-p}} \\
& - \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p^*}\right)\left[\frac{\lambda C C_2\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\theta}\right)}{\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p^*}\right)}\right]^{\frac{p^*}{p^*-r}}\left[\left(\frac{r}{p^*}\right)^{\frac{r}{p^*-r}}-\left(\frac{r}{p^*}\right)^{\frac{p^*}{p^*-r}}\right]. \\
> & \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p^*}\right)\left(m_0 C_{a,p}^*\right)^{\frac{p^*}{p^*-p}} - \left[\frac{\lambda C C_2\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\theta}\right)}{\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p^*}\right)}\right]^{\frac{p^*}{p^*-r}}\left[\left(\frac{r}{p^*}\right)^{\frac{r}{p^*-r}}-\left(\frac{r}{p^*}\right)^{\frac{p^*}{p^*-r}}\right],
\end{aligned}
$$

uma vez que $\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p^*}\right)<1$. Mas isso contradiz a hipótese do teorema. Logo, Λ é vazio e segue que $u_n \to u$ em $L^{p^*}\left(\Omega, |x|^{-bp^*}\right)$.

Agora, faremos algumas estimativas para concluir que $u_n \to u$ in $\mathcal{D}_a^{1,p}$.

Uma vez que $u_n \to u$ in $L^r\left(\Omega, |x|^{-\delta}\right)$, a menos de uma subsequência, existe $h \in L^r\left(\Omega, |x|^{-\delta}\right)$, tal que $|u_n(x)| \leq h(x), \forall n \in \mathbb{N}$, q.t.p. x em Ω. Dessa forma, como $u_n(x) \to u(x)$, q.t.p. x em Ω, usando (f_2) temos

$$
\begin{aligned}
|x|^{-\delta}|f(x,u_n)||u(x)| &\leq C_2|x|^{-\delta}|u_n|^{r-1}|u| \\
&\leq C_2|x|^{-\delta}|h(x)|^r \in L^1(\Omega).
\end{aligned}
$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$-\lambda \int_\Omega |x|^{-\delta} f(x,u_n)(u_n - u)dx \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Da mesma forma, como $u_n \to u$ in $L^{p^*}\left(\Omega, |x|^{-bp^*}\right)$, temos

$$-\int_\Omega |x|^{-bp^*}|u_n|^{p^*-2}u_n(u_n - u)dx \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Desde que $J'(u_n) \to 0$ em $(\mathcal{D}_a^{1,p})^{-1}$, quando $n \to \infty$ e (u_n) é limitada, obtemos

$$J'(u_n)(u_n - u) \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Mas, como $\|u_n\| \to s_0$ e M é contínua e positiva, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(u_n - u)dx = 0.$$

Segue do Lema 1.2.6 que $u_n \to u$ in $\mathcal{D}_a^{1,p}$. □

Para podermos demonstrar que os pontos críticos obtidos para o funcional J são, ainda, pontos críticos para o funcional I, será necessário a criação de um outro funcional auxiliar. A construção de tal funcional auxiliar segue um procedimento semelhante à construção do funcional auxiliar na Seção 1.3 do Capítulo 1, como veremos no que segue.

Utilizando as hipóteses (M_1), (f_1), (f_2) e a desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (1.4), obtemos

$$\begin{aligned}
J(u) &= \frac{1}{p}\widehat{M_0}(\|u\|^p) - \lambda \int_\Omega |x|^{-\delta}F(x,u)dx - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |x|^{-bp^*}|u|^{p^*}dx \\
&\geq \frac{1}{p}\int_0^{\|u\|^p} M(s)ds - \lambda \tilde{C}_2\|u\|^r - \frac{1}{p^*}\tilde{C}\|u\|^{p^*} \\
&\geq \frac{m_0}{p}\|u\|^p - \lambda \tilde{C}_2\|u\|^r - \frac{1}{p^*}\tilde{C}\|u\|^{p^*} \\
&\geq g_\lambda(\|u\|^p),
\end{aligned}$$

em que $g_\lambda : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ é dada por

$$g_\lambda(t) = \frac{m_0}{p}t - \lambda\tilde{C}_2 t^{r/p} - \frac{1}{p^*}\tilde{C}t^{p^*/p}.$$

Procedendo como na Seção 1.3 do Capítulo 1, existe $\lambda_0 > 0$ tal que, para cada $\lambda \in (0,\lambda_0)$, a função $g_\lambda(t)$ atinge um máximo positivo e existem $t_1, t_2 \in (0,+\infty)$, com $t_1 < t_2$ e $g_\lambda(t_1) = g_\lambda(t_2) = 0$. Agora, considere $\phi \in C_0^1([0,+\infty))$ com $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi(t) = 1$, para todo $t \in [0, t_1]$, $\phi(t) = 0$, para todo $t \in [t_2,+\infty)$ e $\phi'(t) \leq 0$, para todo $t \in [0,+\infty)$. Defina a função $\bar{g}_\lambda : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\bar{g}_\lambda(t) = \frac{m_0}{p}t - \lambda\tilde{C}_2 t^{r/p} - \frac{\tilde{C}}{p^*}\phi(t)t^{p^*/p}.$$

Note que $\bar{g}_\lambda(0) = 0$, $\bar{g}_\lambda(t) \geq 0$, para todo $t \geq t_1$ e

$$\lim_{t\to+\infty} \bar{g}_\lambda(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{m_0}{p}t - \lambda\tilde{C}_2 t^{r/p} = +\infty, \tag{2.18}$$

uma vez que $\frac{r}{p} < 1$ e $\phi(t) = 0$, para todo $t \in [t_2,+\infty)$.

Para todo $\lambda \in (0,\lambda_0)$, definimos o funcional de Euler-Lagrange auxiliar, $J_\lambda : \mathcal{D}_a^{1,p} \to \mathbb{R}$, dado por

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) - \lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}F(x,u)\,dx - \frac{\phi(\|u\|^p)}{p^*}\int_\Omega |x|^{-bp^*}|u|^{p^*}\,dx.$$

Uma vez que $J_\lambda(u) \geq \bar{g}_\lambda(\|u\|^p)$, segue de (2.18) que J_λ é coercivo em $\mathcal{D}_a^{1,p}$, o que implica J_λ limitado inferiormente em $\mathcal{D}_a^{1,p}$.

O lema a seguir é de suma importância para demonstrar que J_λ satisfaz uma condição de Palais-Smale local para níveis negativos e, também, para demonstrar que as soluções do problema (2.6) são soluções para o problema (2.1).

Lema 2.4.3. *Se valem (M_1), (M_2), (f_1), (f_2), e $1 < r < p$, então*

$$\lim_{\lambda\to 0^+} t_1(\lambda) = 0. \tag{2.19}$$

Demonstração. Desde que $g_\lambda(t_1(\lambda)) = 0$ e $g'_\lambda(t_1(\lambda)) > 0$, temos

$$\frac{m_0}{p} = \lambda \tilde{C}_2(t_1(\lambda))^{\frac{r-p}{p}} + \frac{1}{p^*}\tilde{C}(t_1(\lambda))^{\frac{p^*-p}{p}} \tag{2.20}$$

e

$$m_0 > \lambda r \tilde{C}_2(t_1(\lambda))^{\frac{r-p}{p}} + \tilde{C}(t_1(\lambda))^{\frac{p^*-p}{p}}, \tag{2.21}$$

para $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Usando (2.20) e (2.21), obtemos

$$\lambda p \tilde{C}_2(t_1(\lambda))^{\frac{r-p}{p}} + \frac{p}{p^*}\tilde{C}(t_1(\lambda))^{\frac{p^*-p}{p}} > \lambda r \tilde{C}_2(t_1(\lambda))^{\frac{r-p}{p}} + \tilde{C}(t_1(\lambda))^{\frac{p^*-p}{p}},$$

o que implica

$$\lambda \tilde{C}_2(p-r)(t_1(\lambda))^{\frac{r-p}{p}} > \tilde{C}\left(1 - \frac{p}{p^*}\right)(t_1(\lambda))^{\frac{p^*-p}{p}}. \tag{2.22}$$

Conluímos de (2.22) que

$$0 < t_1(\lambda) < \lambda^{\frac{p}{p^*-r}} \left[\frac{\tilde{C}_2(p-r)}{\tilde{C}\left(1 - \dfrac{p}{p^*}\right)}\right]^{\frac{p}{p^*-r}}. \tag{2.23}$$

Uma vez que $p^* > p > r$, passando ao limite quando $\lambda \to 0^+$ em 2.23 concluímos a demonstração.

□

Observação 2.4.4. *Devido ao Lema 2.4.3, podemos considerar $\lambda_0 > 0$ tal que $t_1 = t_1(\lambda) \leq t_0$, para cada $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Além disso, podemos obter $\lambda^* \leq \lambda_0$ tal que*

$$\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p^*}\right)(m_0 C^*_{a,p})^{\frac{p^*}{p^*-p}} - \left[\frac{\lambda C C_2\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\theta}\right)}{\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p^*}\right)}\right]^{\frac{p^*}{p^*-r}} \left[\left(\frac{r}{p^*}\right)^{\frac{r}{p^*-r}} - \left(\frac{r}{p^*}\right)^{\frac{p^*}{p^*-r}}\right] > 0,$$

para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$.

Utilizando o Lema 2.4.3, demonstramos o Lema a seguir, que nos dá uma condição para que os funcionais J_λ e J, coincidam e uma condição para que J_λ verifique uma condição de Palais-Smale local.

Lema 2.4.5. *Se $J_\lambda(u) < 0$, então $\|u\|^p < t_1$ e $J_\lambda(v) = J(v)$, para todo v numa vizinhança suficientemente pequena de u. Além do mais, J_λ verifica a condição de Palais-Smale para $c < 0$, para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$.*

Demonstração. Seja $u \in D_a^{1,p}$ tal que $J_\lambda(u) < 0$. Uma vez que J_λ é contínuo, existe $R_0 > 0$ tal que $J_\lambda(v) < 0$, para todo $v \in B(u, R_0) \subset \mathcal{D}_a^{1,p}$, o que implica $\|v\|^p < t_1$ (em particular, $\|u\|^p < t_1$) . Com efeito, desde que $\bar{g}_\lambda(t) \geq 0$, para todo $t \geq t_1$, se $\|v\|^p \geq t_1$, teríamos $\bar{g}_\lambda(\|v\|^p) \geq 0$. Mas, $J_\lambda(v) \geq \bar{g}_\lambda(\|v\|^p)$, ou seja, teríamos $J_\lambda(v) \geq 0$. Absurdo! Dessa forma, para todo $v \in B(u, R_0)$, temos $\phi(\|v\|^p) = 1$ e, consequentemente, $J_\lambda(v) = J(v)$, para todo $v \in B(u, R_0)$.

Agora, seja (u_n) uma sequência tal que $J_\lambda(u_n) \to c < 0$ e $J'_\lambda(u_n) \to 0$ em $(\mathcal{D}_a^{1,p})^{-1}$, quando $n \to +\infty$. Então $J(u_n) = J_\lambda(u_n) \to c < 0$ e $J'(u_n) = J'_\lambda(u_n) \to 0$, quando $n \to +\infty$. Segue da Observação 2.4.4 que, para $\lambda \in (0, \lambda^*)$,

$$c < 0 < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p^*}\right) \left(m_0 C^*_{a,p}\right)^{\frac{p^*}{p^*-p}} - \left[\frac{\lambda C C_2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\theta}\right)}{\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p^*}\right)}\right]^{\frac{p^*}{p^*-r}} \cdot \left[\left(\frac{r}{p^*}\right)^{\frac{r}{p^*-r}} - \left(\frac{r}{p^*}\right)^{\frac{p^*}{p^*-r}}\right]$$

Como J_λ é coercivo, temos que (u_n) é limitada em $\mathcal{D}_a^{1,p}$. Aplicando o Lema 2.4.2, (u_n) possui uma subsequência que converge forte em $\mathcal{D}_a^{1,p}$.

□

No que segue, iremos construir uma sequência minimax de valores críticos negativos para o funcional J_λ.

Lema 2.4.6. *Dado $k \in \mathbb{N}$, existe $\epsilon = \epsilon(k) > 0$ tal que*

$$\gamma(J^{-\epsilon}) \geq k,$$

em que $J^{-\epsilon} = \{u \in \mathcal{D}_a^{1,p} : J_\lambda(u) \leq -\epsilon\}$.

Demonstração. Uma vez que $C_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{D}_a^{1,p}$ possui dimensão infinita, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe um subespaço linear de $\mathcal{D}_a^{1,p}$, k-dimensional, $\mathcal{X}_k$, tal que $\mathcal{X}_k \subset C_0^\infty(\Omega)$. Assim, todas as normas em $\mathcal{X}_k$ são equivalentes. Logo, existe uma constante positiva $C(k)$, que depende de k, tal que

$$C(k)\|u\|^r \leq \frac{C_1}{r}\int_\Omega |x|^{-\delta}|u|^r\ dx,$$

para todo $u \in \mathcal{X}_k$. Dessa forma, se $u \in \mathcal{X}_k$, segue de (f_2) que

$$\int_\Omega |x|^{-\delta}F(x,u)dx \geq \frac{C_1}{r}\int_\Omega |x|^{-\delta}|u|^r dx \geq C(k)\|u\|^r.$$

Seja $u \in \mathcal{X}_k$ tal que $0 < \|u\|^p < t_1$. Assim, $J_\lambda(u) = J(u)$. Da continuidade da função M, concluímos que existe $C > 0$ tal que

$$J(u) \leq C\|u\|^p - \lambda C(k)\|u\|^r.$$

Tome $R = \min\left\{t_1^{\frac{1}{p}}, \left(\frac{\lambda C(k)}{C}\right)^{\frac{1}{p-r}}\right\}$ e considere $\mathcal{S} = \{u \in \mathcal{X}_k : \|u\| = s\}$ com $0 < s < R$. Desde que $1 \leq r < p$, para todo $u \in \mathcal{S}$, obtemos

$$\begin{aligned} J(u) &\leq C\|u\|^p - \lambda C(k)\|u\|^r \\ &= s^r\left[Cs^{p-r} - \lambda C(k)\right] < 0. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Logo, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$J(u) < -\epsilon,$$

para todo $u \in \mathcal{S}$.

Como $J_\lambda(u) = J(u)$, para todo $u \in \mathcal{S}$, obtemos $\mathcal{S} \subset J^{-\epsilon}$. Desde que $\mathcal{X}_k$ e $\mathbb{R}^k$ são isomorfos e $\mathcal{S}$ e S^{k-1} são homeomorfos, segue das propriedades de gênero de Krasnoselskii (veja Apêndice, Lema A.3.1) e do Corolário 1.2.4 que

$$\gamma(J^{-\epsilon}) \geq \gamma(\mathcal{S}) = k.$$

$\square$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, defina os conjuntos

$$\Gamma_k = \{C \subset \mathcal{D}_a^{1,p} \backslash \{0\} : C \;\text{ é fechado}, C = -C \;\text{ e }\; \gamma(C) \geq k\},$$

$$K_c = \{u \in \mathcal{D}_a^{1,p} : J'_\lambda(u) = 0 \;\text{ e }\; J_\lambda(u) = c\}$$

e o número

$$c_k = \inf_{C \in \Gamma_k} \sup_{u \in C} J_\lambda(u).$$

Lema 2.4.7. *Para cada $k \in \mathbb{N}$, c_k é um número real negativo.*

Demonstração. Segue do Lema 2.4.6 que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\gamma(J^{-\epsilon}) \geq k$. Além disso, $0 \notin J^{-\epsilon}$, pois $J_\lambda(0) = 0$. Também, $J^{-\epsilon}$ é fechado e simétrico. De fato, é fechado, pois $J^{-\epsilon} = J_\lambda^{-1}((-\infty, -\epsilon])$ com J_λ contínuo e $(-\infty, -\epsilon]$ fechado e é simétrico, pois como J_λ é par, $J_\lambda(u) = J_\lambda(-u)$, para todo $u \in \mathcal{D}_a^{1,p}$. Logo, $J^{-\epsilon} \in \Gamma_k$.

Por outro lado,

$$\sup_{u \in J^{-\epsilon}} J_\lambda(u) \leq -\epsilon$$

e, então,

$$-\infty < c_k = \inf_{C \in \Gamma_k} \sup_{u \in C} J_\lambda(u) \leq \sup_{u \in J^{-\epsilon}} J_\lambda(u) \leq -\epsilon < 0.$$

□

O próximo lema nos permitirá demonstrar a existência de pontos críticos para o fucional J.

Lema 2.4.8. *Se $c = c_k = c_{k+1} = ... = c_{k+m}$, para algum $m \in \mathbb{N}$, então*

$$\gamma(K_c) \geq m + 1,$$

para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$.

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência em K_c. Como do Lema 2.4.7, $c = c_k = c_{k+1} = ... = c_{k+m} < 0$, aplicando o Lema 2.4.5 temos que (u_n) é limitada e $J_\lambda(u_n) = J(u_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, podemos aplicar o Lema 2.4.2 e obter uma subsequência de (u_n), que converge forte em $\mathcal{D}_a^{1,p}$, isto é, K_c é um conjunto compacto. Além disso, como J_λ é par, $K_c = -K_c$.

Suponha, por contradição, que $\gamma(K_c) \leq m$. Como K_c é compacto, do Lema A.3.1, existe um conjunto fechado e simétrico U, tal que

$$K_c \subset U \;\text{ e }\; \gamma(U) = \gamma(K_c) \leq m.$$

Note que podemos tomar $U \subset J^0$, pois como $c < 0$, $K_c \subset J^0$. Aplicando o Lema da Deformação (Lema A.3.2), obtemos um homeomorfismo $\eta : \mathcal{D}_a^{1,p} \to \mathcal{D}_a^{1,p}$, tal que

$$\eta(J^{c+\delta} - intU) \subset J^{c-\delta},$$

para algum $\delta > 0$, com $0 < \delta < -c$. Como $c + \delta < 0$, temos $J^{c+\delta} \subset J^0$. Uma vez que $c = c_{k+m} = \inf\limits_{C \in \Gamma_{k+m}} \sup\limits_{u \in C} J_\lambda(u)$, da definição de ínfimo, existe $A \in \Gamma_{k+m}$ tal que $\sup\limits_{u \in A} J_\lambda(u) < c + \delta$. Mas, isso implica que $A \subset J^{c+\delta}$ e, portanto,

$$\eta(A - intU) \subset \eta(J^{c+\delta} - intU) \subset J^{c-\delta}. \tag{2.25}$$

Agora, como $A \subset (A - intU) \cup intU$, obtemos $A \subset (\overline{A - U}) \cup U$, pelo Lema A.3.1, temos $\gamma(A) \leq \gamma(\overline{A - U}) + \gamma(U)$. Assim,

$$\gamma(\overline{A - U}) \geq \gamma(A) - \gamma(U) \geq (k + m) - m = k.$$

Desde que γ é ímpar, aplicando o Lema A.3.1, obtemos

$$\gamma(\eta(\overline{A - U})) \geq \gamma(\overline{A - U}) \geq k.$$

Como $\eta(\overline{A - U})$ é fechado e simétrico, concluímos que $\eta(\overline{A - U}) \in \Gamma_k$. Mas isso contradiz (2.25). Com efeito, como $\eta(\overline{A - U}) \in \Gamma_k$, temos

$$\sup_{u \in \eta(\overline{A-U})} J_\lambda(u) \geq c_k = c.$$

Mas, como $J^{c-\delta}$ é fechado e η é um homeomorfismo, de (2.25), temos

$$\eta(\overline{A-U}) \subset J^{c-\delta}.$$

Logo, para cada $u \in \eta(\overline{A-U})$, temos $J_\lambda(u) \leq c-\delta$, ou seja,

$$\sup_{u\in\eta(\overline{A-U})} J_\lambda(u) \leq c-\delta.$$

Absurdo! Portanto, $\gamma(K_c) \geq m+1$. $\square$

Observação 2.4.9. *Se $-\infty < c_1 < c_2 < ... < c_k < ... < 0$, pelo Lema 2.4.5, cada c_k é um valor crítico negativo de J_λ e, assim, obtemos infinitos pontos críticos de J_λ, com energia negativa. Novamente, aplicando o Lema 2.4.5, temos que J possui infinitos pontos críticos, ou seja, o problema (2.6) tem infinitas soluções.*

Por outro lado, se existem duas constantes $c_k = c_{k+m}$, então $c = c_k = c_{k+1} = ... = c_{k+m}$. Do Lema 2.4.8, para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$, temos

$$\gamma(K_c) \geq m+1 \geq 2.$$

Como K_c é fechado, simétrico e $0 \notin K_c$, segue da Proposição 2.4.1, que K_c tem infinitos pontos, isto é, o problema (2.6) tem infinitas soluções, para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$.

2.4.1 Conclusão da demonstração do Teorema 2.1.1

Seja $\lambda \in (0, \lambda^*)$ e seja u_λ uma solução do problema (2.6) obtida na Observação 2.4.9. Assim, $J_\lambda(u_\lambda) = J(u_\lambda) < 0$. Aplicando o Lema 2.4.5, obtemos

$$\|u_\lambda\|^p \leq t_1 < t_0,$$

e, portanto,

$$M_0(\|u_\lambda\|^p) = M(\|u_\lambda\|^p).$$

Logo, u_λ é uma solução do problema (2.1). Uma vez que o problema (2.6) possui infinitas soluções, para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$, concluímos que o problema (2.1) possui infinitas soluções, para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$. □

2.5 Demonstração do Teorema 2.1.2

Nessa seção, demonstraremos o Teorema 2.1.2, o qual diz respeito ao problema (2.1), quando $r = p$. Para tal, utilizaremos o Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale (veja Apêndice, Teorema A.2.7). Entretanto, como dito anteriormente, o funcional de Euler-Lagrange, I, associado ao problema (2.1), definido em (2.2), não satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha. Sendo assim, será necessário trabalharmos com o funcional J, associado ao problema auxiliar (2.6).

A princípio, demonstraremos que o funcional J, definido em (2.7), satisfaz a condição de Palais-Smale, para um determinado nível c, quando $r = p$.

Lema 2.5.1. *Seja (u_n) uma sequência limitada em $\mathcal{D}_a^{1,p}$ tal que*

$$J(u_n) \to c \ \textit{e}\ J'(u_n) \to 0 \ \textit{em}\ (\mathcal{D}_a^{1,p})^{-1}, \ \textit{quando}\ n \to \infty.$$

Suponha $r = p$, (M_1), (M_2), (f_1), (f_2), (f_3) e

$$c < \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{p^*}\right) \left(m_0 C_{a,p}^*\right)^{\frac{p^*}{p^*-p}},$$

então (u_n) possui uma subsequência fortemente convergente em $\mathcal{D}_a^{1,p}$.

Demonstração. Desde que $\mathcal{D}_a^{1,p}$ é reflexivo e (u_n) é limitada, passando a uma subsequência, se necessário, obtemos $u \in \mathcal{D}_a^{1,p}$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } \mathcal{D}_a^{1,p},$$

quando $n \to +\infty$. Agora, se $1 \leq s < p^*$ e $\sigma < (a+1)s + N(1 - s/p)$, temos que a imersão de $\mathcal{D}^{1,p}_a$ em $L^s(\Omega, |x|^{-\sigma})$ é compacta e, portanto,

$$u_n \to u \text{ in } L^s(\Omega, |x|^{-\sigma}).$$

Daí, obtemos, também,

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p em } \Omega$$

e

$$\|u_n\| \to s_0 \geq 0,$$

quando $n \to +\infty$. Desde que (u_n) é limitada, podemos aplicar o Princípio de Concentração e Compacidade (veja Apêndice, Lema A.2.8) e obter um conjunto de índices, no máximo contável, Λ, sequências $(x_i) \subset \mathbb{R}^N$, $(\mu_i), (\nu_i) \subset (0, \infty)$, tais que

$$|x|^{-ap}|\nabla u_n|^p \rightharpoonup |x|^{-ap}|\nabla u|^p + \mu \text{ e } |x|^{-bp^*}|u_n|^{p^*} \rightharpoonup |x|^{-bp^*}|u|^{p^*} + \nu, \tag{2.26}$$

quando $n \to +\infty$, no sentido fraco* de convergência em medidas, em que

$$\nu = \sum_{i\in\Lambda} \nu_i \delta_{x_i}, \quad \mu \geq \sum_{i\in\Lambda} \mu_i \delta_{x_i} \quad \text{e} \quad C^*_{a,p}\nu_i^{p/p^*} \leq \mu_i, \tag{2.27}$$

para todo $i \in \Lambda$, em que δ_{x_i} é a medida de massa concentrada em $x_i \in \Omega$.

Seja $k \in \mathbb{N}$. Sem perda de generalidade, podemos supor $B(0;2) \subset \Omega$. Então, para cada $\varrho > 0$, definimos

$$\psi_\varrho(x) := \psi((x - x_k)/\varrho),$$

em que $\psi \in C_0^\infty(\Omega, [0,1])$ é tal que $\psi \equiv 1$ em $B(0;1)$, $\psi \equiv 0$ em $\Omega \setminus B(0;2)$ e $|\nabla\psi| \leq 1$.

Observe que $(\psi_\varrho u_n)$ é limitada em $\mathcal{D}_a^{1,p}$, com efeito

$$\begin{aligned}
\|\psi_\varrho u_n\|^p &= \int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla(\psi_\varrho u_n)|^p dx \\
&= \int_\Omega |x|^{-ap}(|\nabla\psi_\varrho u_n| + |\psi_\varrho \nabla u_n|)^p dx \\
&\leq 2^{p-1}\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla\psi_\varrho u_n|^p dx + \int_\Omega |x|^{-ap}|\psi_\varrho \nabla u_n|^p dx \\
&\leq \frac{2^{p-1}}{\rho^p}\int_\Omega |x|^{-ap}|u_n|^p dx + \int_\Omega |x|^{-ap}|\psi_\varrho \nabla u_n|^p dx \\
&\leq \hat{C}\|u_n\|^p.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos $J'(u_n)(\psi_\varrho u_n) \to 0$, isto é,

$$\begin{aligned}
M_0(||u_n||^p)\int_\Omega |x|^{-ap}u_n|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\psi_\varrho dx = &-M_0(||u_n||^p)\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u_n|^p\psi_\varrho dx \\
&+ \lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}f(x,u_n)\psi_\varrho u_n dx \\
&+ \int_\Omega |x|^{-bp^*}\psi_\varrho|u_n|^{p^*}\, dx + o_n(1).
\end{aligned}$$

Segue de (2.26) e (M_1) que

$$\begin{aligned}
M_0(||u_n||^p)\int_\Omega |x|^{-ap}u_n|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\psi_\varrho dx \leq &-m_0\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p\psi_\varrho dx \\
&- m_0\int_\Omega \psi_\varrho d\mu \\
&+ \lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}f(x,u_n)\psi_\varrho u_n dx \\
&+ \int_\Omega |x|^{-bp^*}\psi_\varrho|u|^{p^*}\, dx \\
&+ \int_\Omega \psi_\varrho d\nu + o_n(1).
\end{aligned}$$

Uma vez que $u_n \to u$ in $L^r\left(\Omega, |x|^{-\delta}\right)$, quando $n \to +\infty$, a menos de uma subsequência, existe $h \in L^r\left(\Omega, |x|^{-\delta}\right)$, tal que $|u_n(x)| \leq h(x), \forall n \in \mathbb{N}$, q.t.p em Ω. Como

$u_n(x) \to u(x)$ q.t.p em Ω, usando (f_2) obtemos

$$\begin{aligned}|x|^{-\delta}|f(x,u_n)||u_n(x)||\psi_\varrho| &\leq C_2|x|^{-\delta}|u_n(x)|^{r-1}|u_n(x)||\psi_\varrho(x)| \\ &\leq C_2|x|^{-\delta}|h(x)|^r \in L^1(\Omega).\end{aligned}$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}f(x,u_n)\psi_\varrho u_n dx \to \lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}f(x,u)\psi_\varrho u dx,$$

quando $n \to +\infty$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}M_0(||u_n||^p)\int_\Omega |x|^{-ap}u_n|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\psi_\varrho dx \leq &-m_0\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p\psi_\varrho dx \\ &- m_0\int_\Omega \psi_\varrho d\mu \\ &+ \lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}f(x,u)\psi_\varrho u dx \\ &+ \int_\Omega |x|^{-bp^*}\psi_\varrho|u|^{p^*}\ dx \\ &+ \int_\Omega \psi_\varrho d\nu + o_n(1).\end{aligned}$$

Passando ao limite superior, temos que

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} M_0(||u_n||^p)\int_\Omega |x|^{-ap}u_n|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\psi_\varrho dx \leq &-m_0\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p\psi_\varrho dx \\ &- m_0\int_\Omega \psi_\varrho d\mu \\ &+ \lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}f(x,u)\psi_\varrho u dx \\ &+ \int_\Omega |x|^{-bp^*}\psi_\varrho|u|^{p^*} dx \\ &+ \int_\Omega \psi_\varrho d\nu.\end{aligned}$$

Usando novamente o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p \psi_\varrho dx = o_\varrho(1), \int_\Omega |x|^{-\delta} f(x,u)\psi_\varrho u dx = o_\varrho(1),$$

e

$$\int_\Omega |x|^{-bp^*}\psi_\varrho |u|^{p^*} dx = o_\varrho(1),$$

em que $\lim\limits_{\varrho\to 0^+} o_\varrho(1) = 0$. Logo

$$\lim_{\varrho\to 0^+}\left[\limsup_{n\to\infty} M_0(\|u_n\|^p)\int_\Omega |x|^{-ap} u_n |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\psi_\varrho dx\right] \le \lim_{\varrho\to 0^+}\left[\int_\Omega \psi_\varrho d\nu - m_0\int_\Omega \psi_\varrho d\mu\right]. \tag{2.28}$$

Agora, mostraremos que

$$\lim_{\varrho\to 0^+}\left[\limsup_{n\to\infty} M_0(\|u_n\|^p)\int_\Omega |x|^{-ap} u_n |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\psi_\varrho dx\right] = 0. \tag{2.29}$$

Segue da desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega |x|^{-ap} u_n |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\psi_\varrho dx\right| &\le \int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u_n|^{p-1}|u_n\nabla\psi_\varrho| dx \\
&\le \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{|x|^{ap}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega \frac{|u_n\nabla\psi_\varrho|^p}{|x|^{ap}}dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|u_n\|^{p-1}\left(\int_\Omega |x|^{-ap}|u_n\nabla\psi_\varrho|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Uma vez que u_n é limitada em $\mathcal{D}_a^{1,p}$, M é contínua e $supp(\psi_\varrho) \subset B(x_k; 2\varrho)$, existe $L > 0$ tal que

$$M_0(||u_n||^p)\left|\int_\Omega |x|^{-ap} u_n |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\psi_\varrho dx\right| \le L\left(\int_{B(x_k;2\varrho)} |x|^{-ap}|u_n\nabla\psi_\varrho|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e a desigualde de Hölder,

obtemos

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\left[M_0(\|u_n\|^p)\left|\int_\Omega |x|^{-ap}u_n|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\psi_\varrho dx\right|\right]\\
&\leq L\left(\int_{B(x_k;2\varrho)}|x|^{-ap}|u|^p|\nabla\psi_\varrho|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq L\left(\int_{B(x_k;2\varrho)}\left(|x|^{-ap}|u|^p\right)^{\frac{N}{N-p}}dx\right)^{\frac{N-p}{Np}}\left(\int_{B(x_k;2\varrho)}|\nabla\psi_\varrho|^N dx\right)^{\frac{1}{N}}\\
&\leq L|B(x_k;2\varrho)|^{\frac{1}{N}}\left(\int_\Omega \chi_{B(x_k;2\varrho)}\left(|x|^{-ap}|u|^p\right)^{\frac{N}{N-p}}dx\right)^{\frac{N-p}{Np}}.
\end{aligned}
$$

Fazendo $\varrho\to 0^+$ na expressão acima, obtemos (2.29). Concluímos de (2.28) que

$$
0\leq\lim_{\rho\to 0^+}\left[\int_\Omega\psi_\varrho d\nu - m_0\int_\Omega\psi_\varrho d\mu\right].
$$

Isto é,

$$
\begin{aligned}
0&\leq\lim_{\rho\to 0^+}\left[\int_{B(x_k;2\varrho)}\psi_\varrho d\nu - m_0\int_{B(x_k;2\varrho)}\psi_\varrho d\mu\right]\\
&=\nu(\{x_k\})-m_0\mu(\{x_k\})\\
&\leq\sum_{i\in\Lambda}\nu_i\delta_{x_i}(\{x_k\})-m_0\sum_{i\in\Lambda}\mu_i\delta_{x_i}(\{x_k\})\\
&=\nu_k-m_0\mu_k.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
m_0\mu_k\leq\nu_k.
$$

Segue de (2.27) que

$$
\nu_k\geq\left(m_0C^*_{a,p}\right)^{\frac{p^*}{p^*-p}}. \tag{2.30}
$$

Agora, provaremos que (2.30) não pode ocorrer e, dessa forma, o conjunto Λ é vazio. De fato, suponha, por contradição, $\nu_k\geq\left(m_0C^*_{a,p}\right)^{\frac{p^*}{p^*-p}}$, para algum $k\in\Lambda$. Logo

$$
c=J(u_n)-\frac{1}{\theta}J'(u_n)(u_n)+o_n(1).
$$

Uma vez que, para $r \geq p$, $m_0 \leq M_0(t) \leq \frac{\xi}{p} m_0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, aplicando (f_3) obtemos

$$\begin{aligned}
c &= J(u_n) - \frac{1}{\xi} J'(u_n)(u_n) + o_n(1) \\
&= \frac{1}{p}\hat{M}_0(\|u_n\|^p) - \lambda \int_\Omega |x|^{-\delta} F(x,u_n)dx - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |x|^{-bp^*}|u_n|^{p^*}dx \\
&\quad - \frac{1}{\xi}\left[M_0(\|u_n\|^p)\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u_n|^p dx - \lambda \int_\Omega |x|^{-\delta} f(x,u_n)u_n dx \right. \\
&\quad \left. - \int_\Omega |x|^{-bp^*}|u_n|^{p^*}dx \right] + o_n(1) \qquad (2.31) \\
&\geq \frac{m_0}{p}\|u_n\|^p - \frac{\xi m_0}{\xi p}\|u_n\|^p - \lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}F(x,u_n)dx + \frac{\lambda}{\xi}\int_\Omega |x|^{-\delta} f(x,u_n)u_n dx \\
&\quad + \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{p^*}\right)\int_\Omega |x|^{-bp^*}|u_n|^{p^*}dx + o_n(1) \\
&\geq \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{p^*}\right)\int_\Omega |x|^{-bp^*}|u_n|^{p^*}\psi_\varrho dx + o_n(1).
\end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\begin{aligned}
c &\geq \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{p^*}\right)\int_\Omega |x|^{-bp^*}|u|^{p^*}\psi_\varrho dx + \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{p^*}\right)\sum_{j\in\Lambda}\psi_\varrho(x_j)\nu_j \\
&\geq \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{p^*}\right)\nu_k \qquad (2.32) \\
&\geq \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{p^*}\right)\left(m_0 C_{a,p}^*\right)^{\frac{p^*}{p^*-p}}.
\end{aligned}$$

Mas isso contradiz a hipótese do teorema. Logo, Λ é vazio e segue que $u_n \to u$ em $L^{p^*}\left(\Omega, |x|^{-bp^*}\right)$.

Agora, faremos algumas estimativas para concluir que $u_n \to u$ in $\mathcal{D}_a^{1,p}$.

Uma vez que $u_n \to u$ in $L^r\left(\Omega, |x|^{-\delta}\right)$, a menos de uma subsequência, existe $h \in L^r\left(\Omega, |x|^{-\delta}\right)$, tal que $|u_n(x)| \leq h(x), \forall n \in \mathbb{N}$, q.t.p. x em Ω. Dessa forma, como $u_n(x) \to u(x)$, q.t.p. x em Ω, usando (f_2) temos

$$\begin{aligned}
|x|^{-\delta}|f(x,u_n)||u(x)| &\leq C_2|x|^{-\delta}|u_n|^{r-1}|u| \\
&\leq C_2|x|^{-\delta}|h(x)|^r \in L^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$-\lambda \int_{\Omega} |x|^{-\delta} f(x, u_n)(u_n - u)dx \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Da mesma forma, como $u_n \to u$ in $L^{p^*}\left(\Omega, |x|^{-bp^*}\right)$, temos

$$-\int_{\Omega} |x|^{-bp^*} |u_n|^{p^*-2} u_n(u_n - u)dx \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Desde que $J'(u_n) \to 0$ em $(\mathcal{D}_a^{1,p})^{-1}$, quando $n \to \infty$ e (u_n) é limitada, obtemos

$$J'(u_n)(u_n - u) \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Mas, como $\|u_n\| \to s_0$ e M é contínua e positiva, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} |x|^{-ap} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla(u_n - u)dx = 0.$$

Segue do Lema 1.2.6 que $u_n \to u$ in $\mathcal{D}_a^{1,p}$. □

Os próximos dois lemas demonstram que o funcional J satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha.

Lema 2.5.2. *Seja λ_1 como definido em (1.10). Suponha que sejam válidas as hipóteses (M_1), (f_1), (f_2) e que $r = p$. Então, existem números reais positivos, ρ e α, tais que*

$$J(u) \geq \alpha > 0, \forall u \in \mathcal{D}_a^{1,p}, \text{ com } \|u\| = \rho,$$

para todo $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$.

Demonstração. Dado $u \in \mathcal{D}_a^{1,p}$, considere $v = \dfrac{u}{\int_{\Omega} |x|^{-\delta} |u|^p dx}$. Note que $v \in \mathcal{D}_a^{1,p}$ e

$\int_\Omega |x|^{-\delta}|v|^p dx = 1$. Assim, de (1.10), segue que

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\leq \int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla v|^p dx \\ &= \frac{\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx}{\int_\Omega |x|^{-\delta}|u|^p dx} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\lambda_1 \int_\Omega |x|^{-\delta}|u|^p dx \leq \|u\|^p. \tag{2.33}$$

Seja $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$. Usando (M_1), (f_1), (f_2), (2.33) e a desigualdade (1.4), obtemos

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{p}\widehat{M_0}(\|u\|^p) - \lambda \int_\Omega |x|^{-\delta} F(x,u)dx - \frac{1}{q}\int_\Omega |x|^{-\beta}|u|^{p^*}dx, \\ &\geq \frac{1}{p}\int_0^{\|u\|^p} M_0(s)ds - \lambda\frac{C_2}{p}\int_\Omega |x|^{-\delta}|u|^p dx - \frac{1}{q}\tilde{C}\|u\|^{p^*} \\ &\geq \frac{m_0}{p}\|u\|^p - \frac{\lambda C_2}{\lambda_1 p}\|u\|^p - \frac{1}{p^*}\tilde{C}\|u\|^{p^*} \\ &= \left(m_0 - \frac{\lambda C_2}{\lambda_1}\right)\frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{p^*}\tilde{C}\|u\|^{p^*}. \end{aligned}$$

Desde que $p < p^*$ e $\lambda < \frac{m_0}{C_2}\lambda_1$, o resultado segue escolhendo $\rho > 0$, suficientemente pequeno.

$\square$

Lema 2.5.3. *Suponha que sejam válidas as hipóteses (M_1), (M_2), (f_1), (f_2) e que $r = p$. Então, para todo $\lambda > 0$, existe $e \in \mathcal{D}_a^{1,p}$ com $J(e) < 0$ e $\|e\| > \rho$.*

Demonstração. Considere $v_0 \in \mathcal{D}_a^{1,p}\backslash\{0\}$, tal que $v_0 > 0$ em Ω. Usando (2.5) e (f_2),

obtemos

$$
\begin{aligned}
J(tv_0) &= \frac{1}{p}\widehat{M}_0(\|tv_0\|^p) - \lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}F(x,tv_0)dx - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |x|^{-bp^*}|tv_0|^{p^*}dx,\\
&\leq \frac{1}{p}\int_0^{\|tv_0\|^p} M_0(s)ds - \frac{\lambda C_1}{p}\int_\Omega |x|^{-\delta}|tv_0|^p dx - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |x|^{-bp^*}|tv_0|^{p^*}dx,\\
&\leq \frac{\xi}{p^2}m_0 t^p\|v_0\|^p - \frac{\lambda C_1}{p}t^p\int_\Omega |x|^{-\delta}|v_0|^p dx - \frac{t^{p^*}}{p^*}\int_\Omega |x|^{-bp^*}|v_0|^{p^*}dx.
\end{aligned}
$$

Desde que $p < p^*$, temos $\lim\limits_{t\to+\infty} J(tv_0) = -\infty$. Logo, existe $\bar{t} > 0$ suficientemente grande, tal que $\bar{t}\|v_0\| > \rho$ e $J(\bar{t}v_0) < 0$. O resultado segue escolhendo $e = \bar{t}v_0$.

□

Dos Lemas 2.5.2 e 2.5.3 segue que, para cada $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$, podemos aplicar o Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale (veja Apêndice, Teorema A.2.7) e obter uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{D}_a^{1,p}$, satisfazendo

$$J(u_n) \to c_\lambda \text{ e } J'(u_n) \to 0 \text{ em } (\mathcal{D}_a^{1,p})^{-1},$$

quando $n \to +\infty$, em que

$$0 < c_\lambda = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)),$$

$$\Gamma := \left\{\gamma \in C([0,1], \mathcal{D}_a^{1,p}) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = \bar{t}v_0\right\}$$

e $v_0 \in \mathcal{D}_a^{1,p}$ é tal que $v_0 > 0$.

A fim de obter o nível c_λ abaixo do nível dado pelo Lema 2.5.1, faremos uso de funções extremais, tal como na Seção 1.4 do Capítulo 1. Os dois próximos lemas têm esse propósito.

Como visto no Capítulo 1,

$$\tilde{S}_{a,p,R} = \inf_{u\in R^{1,p}_{a,b}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}}\left\{\frac{\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-ap}|\nabla u|^p dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-bp^*}|u|^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}}}\right\}$$

é atingida pelas funções da forma

$$u_\varepsilon(x) = k_{a,p}(\varepsilon) v_\varepsilon(x), \forall \varepsilon > 0,$$

em que

$$k_{a,p}(\varepsilon) = c\varepsilon^{(N-dp)/dp^2} \text{ e } v_\varepsilon(x) = \left(\varepsilon + |x|^{\frac{dp(N-p-ap)}{(p-1)(N-dp)}}\right)^{-\left(\frac{N-dp}{dp}\right)}.$$

Além do mais, u_ε satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap} |\nabla u_\varepsilon|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp^*} |u_\varepsilon|^{p^*} dx = (\tilde{S}_{a,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}}. \tag{2.34}$$

De (2.34) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap} |\nabla v_\varepsilon|^p dx = [k_{a,p}(\varepsilon)]^{-p} (\tilde{S}_{a,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} \tag{2.35}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp^*} |v_\varepsilon|^{p^*} dx = [k_{a,p}(\varepsilon)]^{-p^*} (\tilde{S}_{a,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}}. \tag{2.36}$$

Seja R_0 uma constante positiva e considere $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \Psi(x) \leq 1$, $\Psi(x) = 1$, para todo $|x| \leq R_0$, e $\Psi(x) = 0$, para todo $|x| \geq 2R_0$. Defina

$$\tilde{v}_\varepsilon(x) = \Psi(x) v_\varepsilon(x), \tag{2.37}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e para todo $\varepsilon > 0$. Sem perda de generalidade, podemos considerar $B(0; 2R_0) \subset \Omega$, em que $B(x; s)$ denota a bola centrada em x de raio s. Note, ainda, que $\tilde{v}_\varepsilon \in D_a^{1,p}$.

Lema 2.5.4.

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|^p}{\left(\int_\Omega |x|^{-bp^*} |\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*} dx\right)^{p/p^*}} = 0.$$

Demonstração. Utilizando os mesmos argumentos do Lema 1.4.6, é possível mostrar que

$$\|\tilde{v}_\varepsilon\|^p \leq [k_{a,p}(\varepsilon)]^{-p} (\tilde{S}_{a,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} + O(1) \tag{2.38}$$

e

$$\int_\Omega |x|^{-bp^*}|\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*}dx = \varepsilon^{-\frac{N-dp}{dp}p^*}\cdot O(1), \quad \forall \varepsilon \in (0,1), \tag{2.39}$$

em que $O(1)$ denota uma constante positiva. Dessa forma, para todo $\varepsilon \in (0,1)$, de (2.38) e (2.39) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|^p}{\left(\int_\Omega |x|^{-bp^*}|\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*}dx\right)^{p/p^*}} &\le \frac{[k_{a,p}(\varepsilon)]^{-p}(\tilde{S}_{a,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} + O(1)}{\left(\varepsilon^{-\frac{N-dp}{dp}p^*}\cdot O(1)\right)^{p/p^*}} \\
&= \frac{[k_{a,p}(\varepsilon)]^{-p}(\tilde{S}_{a,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}}\varepsilon^{\frac{N-dp}{dp}p} + O(1)\varepsilon^{\frac{N-dp}{dp}p}}{O(1)} \\
&= \frac{[c\varepsilon^{(N-dp)/dp^2}]^{-p}(\tilde{S}_{a,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}}\varepsilon^{\frac{N-dp}{dp}p} + O(1)\varepsilon^{\frac{N-dp}{dp}p}}{O(1)} \\
&= \frac{c^{-p}(\tilde{S}_{a,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}}\varepsilon^{\frac{-(N-dp)}{dp}+\frac{N-dp}{dp}p} + O(1)\varepsilon^{\frac{N-dp}{dp}p}}{O(1)} \\
&= \frac{c^{-p}(\tilde{S}_{a,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}}\varepsilon^{\frac{N-dp}{dp}(p-1)} + O(1)\varepsilon^{\frac{N-dp}{dp}p}}{O(1)}
\end{aligned}$$

Uma vez que $p > 1$, temos

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|^p}{\left(\int_\Omega |x|^{-bp^*}|\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*}dx\right)^{p/p^*}} = 0.$$

□

Lema 2.5.5. *Seja $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$. Suponha (M_1), (M_2), (f_1) e (f_2). Defina*

$$l^* = \min\left\{\left(\frac{1}{p}m_0 - \frac{1}{\xi}M_0(t_0)\right)t_0, \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{p^*}\right)\left(m_0 C^*_{a,p}\right)^{\frac{p^*}{p^*-p}}\right\}.$$

Então, existe $\varepsilon_1 \in (0,1)$ tal que

$$\sup_{t\ge 0} J(t\tilde{v}_\varepsilon) < l^*,$$

para todo $\varepsilon \le \varepsilon_1$.

Demonstração. Sejam $0 < \varepsilon < 1$ e $\tilde{v}_\varepsilon$ como em (2.37). Desde que dos Lemas 2.5.2 e 2.5.3 o funcional J satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha, para $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$, existe $t_\varepsilon > 0$ tal que

$$\sup_{t\geq 0} J(t\tilde{v}_\varepsilon) = J(t_\varepsilon \tilde{v}_\varepsilon),$$

para todo $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$. Temos, então,

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq 0} J(t\tilde{v}_\varepsilon) &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|t_\varepsilon \tilde{v}_\varepsilon\|^p) - \lambda \int_\Omega |x|^{-\delta} F(x, t_\varepsilon \tilde{v}_\varepsilon) dx - \frac{1}{q}\int_\Omega |x|^{-bp^*} t_\varepsilon^{p^*} |\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*} dx \\ &\leq \frac{\xi}{p^2} m_0 t_\varepsilon^p \|\tilde{v}_\varepsilon\|^p - \frac{1}{p^*} t_\varepsilon^{p^*} \int_\Omega |x|^{-bp^*} |\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*} dx,\end{aligned}$$

para cada $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$. Agora, considere a função $g : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, definida por

$$g(s) = \left(\frac{\xi}{p^2} m_0 \|\tilde{v}_\varepsilon\|^p\right) s^p - \left(\frac{1}{p^*}\int_\Omega |x|^{-bp^*} |\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*} dx\right) s^{p^*}.$$

É fácil ver que $\bar{s} = \left(\dfrac{\frac{\xi}{p} m_0 \|\tilde{v}_\varepsilon\|^p}{\int_\Omega |x|^{-bp^*} |\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*} dx}\right)^{\frac{1}{p^*-p}}$ é um máximo global de g e que

$$g(\bar{s}) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right)\left(\frac{\xi}{p} m_0\right)^{\frac{p^*}{p^*-p}} \left(\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|^p}{\left(\int_\Omega |x|^{-bp^*} |\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*} dx\right)^{p/p^*}}\right)^{\frac{p^*}{p^*-p}}.$$

Logo,

$$\sup_{t\geq 0} J(t\tilde{v}_\varepsilon) \leq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right)\left(\frac{\xi}{p} m_0\right)^{\frac{p^*}{p^*-p}} \left(\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|^p}{\left(\int_\Omega |x|^{-bp^*} |\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*} dx\right)^{p/p^*}}\right)^{\frac{p^*}{p^*-p}},$$

para cada $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$.

Segue do Lema 2.5.4 que existe $0 < \varepsilon_1 < 1$ tal que

$$\sup_{t\geq 0} J(t\tilde{v}_\varepsilon) < l^*,$$

para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ e para cada $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$.

□

Observação 2.5.6. *Seja* $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$ *e considere o caminho* $\gamma_*(t) = t(\bar{t}v_{\varepsilon_1})$, *para* $t \in$

$[0,1]$, *o qual pertence à* Γ. *Segue do Lema 2.5.5 a seguinte estimativa:*

$$\begin{aligned} 0 < c_\lambda &= \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) \\ &\leq \sup_{s \geq 0} J(s\tilde{v}_{\varepsilon_1}) \\ &< l^*, \end{aligned}$$

para todo $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$.

O próximo lema nos será útil para demonstrar que uma solução para o problema (2.6) será, também, uma solução para o problema (2.1).

Lema 2.5.7. *Suponha que* $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$ *e* $r = p$. *Suponha, ainda, as hipóteses* (M_1), (M_2), (f_2) *e* (f_3). *Seja* $(u_n) \subset \mathcal{D}_a^{1,p}$ *uma sequência tal que*

$$J(u_n) \to c_\lambda \text{ e } J'(u_n) \to 0 \text{ em } (\mathcal{D}_a^{1,p})^{-1}, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Então, existe uma subsequência de (u_n), *digamos* (u_{n_k}), *tal que*

$$\|u_{n_k}\|^p \leq t_0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Suponha que para uma infinidade de índices $n \in \mathbb{N}$, tem-se $\|u_n\|^p > t_0$. Considere a subsequência (u_{n_k}) de (u_n) formada por tais índices. Dessa forma, $\|u_{n_k}\|^p > t_0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Das hipóteses sobre (u_n), temos $J(u_{n_k}) \to c_\lambda$ e $J'(u_{n_k}) \to 0$ em $(\mathcal{D}_a^{1,p})^{-1}$, quando $k \to +\infty$. Procedendo como na Observação 1.4.3 temos que (u_{n_k}) é limitada. Assim, obtemos

$$|J'(u_{n_k}) \cdot (u_{n_k})| \leq |J'(u_{n_k})| \cdot \|(u_{n_k})\| \to 0,$$

quando $k \to +\infty$. Mas isto implica que

$$\begin{aligned} c_\lambda &= J(u_{n_k}) - \tfrac{1}{\xi}J'(u_{n_k})(u_{n_k}) + o_k(1) \\ &\geq \tfrac{1}{p}\widehat{M_0}(\|u_{n_k}\|^p) - \tfrac{1}{\xi}M_0(t_0)\|u_{n_k}\|^p + o_k(1) \\ &\geq \left(\tfrac{1}{p}m_0 - \tfrac{1}{\xi}M_0(t_0)\right)\|u_{n_k}\|^p + o_k(1). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Como $m_0 < M(t_0) < \dfrac{\xi}{p}m_0$, temos $\frac{1}{p}m_0 - \frac{1}{\xi}M_0(t_0) > 0$. Então, obtemos

$$c_\lambda \geq \left(\frac{1}{p}m_0 - \frac{1}{\xi}M_0(t_0)\right) t_0 > 0.$$

Desde que $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$, isto contradiz a Observação 2.5.6. Portanto, só podemos ter $\|u_n\|^p > t_0$ para uma quantidade finita de índices $n \in \mathbb{N}$. Excluindo-se tais índices, podemos considerar a subsequência (u_{n_k}), de (u_n), tal que $\|u_{n_k}\|^p \leq t_0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. $\square$

2.5.1 Conclusão da demonstração do Teorema 2.1.2

Seja $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$. Segue da Observação 2.5.6, que

$$c_\lambda < \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{p^*}\right)\left(m_0 C^*_{a,p}\right)^{\frac{p^*}{p^*-p}}. \tag{2.41}$$

Dos Lemas 2.5.2 e 2.5.3 e procedendo como na Observação 1.4.3, existe uma sequência limitada $(u_n) \subset \mathcal{D}^{1,p}_a$, tal que $J(u_n) \to c_\lambda$ e $J'(u_n) \to 0$ em $(\mathcal{D}^{1,p}_a)^{-1}$, quando $n \to +\infty$. Desde que (2.41) acontece, segue do Lema 2.5.1 que, a menos de uma subsequência, $u_n \to u_\lambda$ fortemente, em $\mathcal{D}^{1,p}_a$. Logo, u_λ é uma solução fraca para o problema (2.6), para todo $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$. Aplicando o Lema 2.5.7, concluímos que u_λ é uma solução fraca para o problema (2.1), para todo $\lambda \in (0, \frac{m_0}{C_2}\lambda_1)$.

$\square$

2.6 Demonstração do Teorema 2.1.3

Nessa seção, demonstraremos o Teorema 2.1.3, o qual trata do problema (2.1) no caso p-superlinear, ou seja, quando $p < r < p^*$. Novamente faremos uso do Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale para obter uma solução para esse problema. A demonstração desse Teorema é semelhante à do Teorema 2.1.2, entretanto, assim como na Seção 1.5, não precisaremos trabalhar com o primeiro autovalor associado ao problema (1.10).

Lema 2.6.1. *Seja (u_n) uma sequência limitada em $\mathcal{D}_a^{1,p}$ tal que*

$$J(u_n) \to c \text{ e } J'(u_n) \to 0 \text{ em } (\mathcal{D}_a^{1,p})^{-1}, \text{ quando } n \to \infty.$$

Suponha $p < r < p^*$, (M_1), (M_2), (f_1), (f_2), (f_3) e

$$c < \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{p^*}\right) \left(m_0 C_{a,p}^*\right)^{\frac{p^*}{p^*-p}},$$

então (u_n) possui uma subsequência fortemente convergente em $\mathcal{D}_a^{1,p}$.

Demonstração. Uma vez que (2.5) é válido quando $p \leq r < p^*$, a demonstração é análoga à demosntração do Lema 2.5.1.

□

Os próximos dois lemas demonstram que o funcional J satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale, para todo $\lambda > 0$, quando $p < r < p^*$.

Lema 2.6.2. *Suponha que sejam válidas as hipóteses (M_1), (f_1), (f_2) e que $p < r < p^*$. Então, existem números reais positivos, ρ e α, tais que*

$$J_0(u) \geq \alpha > 0, \forall u \in \mathcal{D}_a^{1,p}, \text{ com } \|u\| = \rho,$$

para todo $\lambda > 0$.

Demonstração. Seja $\lambda > 0$. Usando (M_1), (f_1), (f_2) e a desigualdade (1.4), obtemos

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{p}\widehat{M_0}(\|u\|^p) - \lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}F(x,u)dx - \frac{1}{q}\int_\Omega |x|^{-bp^*}|u|^{p^*}dx \\ &\geq \frac{1}{p}\int_0^{\|u\|^p} M_0(s)ds - \lambda\frac{C_2}{r}\int_\Omega |x|^{-\delta}|u|^r dx - \frac{1}{p^*}\tilde{C}\|u\|^{p^*} \\ &\geq \frac{m_0}{p}\|u\|^p - \frac{\lambda\tilde{C}_2}{r}\|u\|^r - \frac{1}{p^*}\tilde{C}\|u\|^{p^*}. \end{aligned}$$

Desde que $p < r < p^*$, o resultado segue escolhendo $\rho > 0$, suficientemente pequeno.

$\square$

Lema 2.6.3. *Suponha que sejam válidas as hipóteses* (M_1), (M_2), (f_1), (f_2) *e que* $p < r < p^*$. *Então, para todo* $\lambda > 0$, *existe* $e \in \mathcal{D}_a^{1,p}$ *com* $J_0(e) < 0$ *e* $\|e\| > \rho$.

Demonstração. Considere $v_0 \in \mathcal{D}_a^{1,p}\backslash\{0\}$ tal que $v_0 > 0$ em Ω. Usando (2.5) e (f_2), obtemos

$$\begin{aligned} J(tv_0) &= \frac{1}{p}\widehat{M_0}(\|tv_0\|^p) - \lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}F(x,tv_0)dx - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |x|^{-bp^*}|tv_0|^{p^*}dx \\ &\leq \frac{1}{p}\int_0^{\|tv_0\|^p} M_0(s)ds - \frac{\lambda C_1}{r}\int_\Omega |x|^{-\delta}|tv_0|^r dx - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |x|^{-bp^*}|tv_0|^{p^*}dx \\ &\leq \frac{\xi}{p^2}m_0 t^p\|v_0\|^p - \frac{\lambda C_1}{r}t^r\int_\Omega |x|^{-\delta}|v_0|^r dx - \frac{t^{p^*}}{p^*}\int_\Omega |x|^{-bp^*}|v_0|^{p^*}dx. \end{aligned}$$

Desde que $p < r < p^*$, temos $\lim\limits_{t\to+\infty} J(tv_0) = -\infty$. Logo, existe $\bar{t} > 0$ suficientemente grande, tal que $\bar{t}\|v_0\| > \rho$ e $J(\bar{t}v_0) < 0$. O resultado segue escolhendo $e = \bar{t}v_0$.

$\square$

Dos Lemas 2.6.2 e 2.6.3 segue que, para cada $\lambda > 0$, podemos aplicar o Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale e obter uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{D}_a^{1,p}$, satisfazendo

$$J(u_n) \to c_\lambda \text{ e } J'(u_n) \to 0 \text{ em } (\mathcal{D}_a^{1,p})^{-1},$$

quando $n \to +\infty$, em que

$$0 < c_\lambda = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)),$$

$$\Gamma := \left\{ \gamma \in C([0,1], \mathcal{D}_a^{1,p}) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = \bar{t} v_0 \right\}$$

e $v_0 \in \mathcal{D}_a^{1,p}$ é tal que $v_0 > 0$.

Observação 2.6.4. *Devido aos Lemas 2.6.2 e 2.6.3, o Lema 2.5.5 é verdadeiro, para todo $\lambda > 0$, quando $p < r < p^*$. Assim, se considerarmos o caminho $\gamma_*(t) = t(\bar{t} v_{\varepsilon_1})$, para $t \in [0,1]$, o qual pertence à Γ, obtemos a seguinte estimativa*

$$\begin{aligned} 0 < c_\lambda &= \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) \\ &\leq \sup_{s \geq 0} J(s \tilde{v}_{\varepsilon_1}) \\ &< l^* \end{aligned}$$

para todo $\lambda > 0$.

O próximo lema é uma versão do Lema 2.5.7 quando $p < r < p^*$. Devido à hipótese (f_3) e à Observação 2.6.4, sua demonstração é similar à demonstração do Lema 2.5.7.

Lema 2.6.5. *Suponha (M_1), (M_2), (f_2), (f_3) e $p < r < p^*$. Seja $(u_n) \subset \mathcal{D}_a^{1,p}$ uma sequência tal que*

$$J(u_n) \to c_\lambda \text{ e } J'(u_n) \to 0 \text{ em } (\mathcal{D}_a^{1,p})^{-1}, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Então, existe uma subsequência de (u_n), digamos (u_{n_k}), tal que

$$\|u_{n_k}\|^p \leq t_0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Seja $\lambda > 0$. Suponha que para uma infinidade de índices $n \in \mathbb{N}$, tem-se $\|u_n\|^p > t_0$. Considere a subsequência (u_{n_k}) de (u_n) formada por tais índices. Dessa forma, $\|u_{n_k}\|^p > t_0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Das hipóteses sobre (u_n), temos $J(u_{n_k}) \to c_\lambda$ e $J'(u_{n_k}) \to 0$

em $(\mathcal{D}_a^{1,p})^{-1}$, quando $k \to +\infty$. Procedendo como na Observação 1.4.3 temos que (u_{n_k}) é limitada. Assim, obtemos

$$|J'(u_{n_k}) \cdot (u_{n_k})| \leq |J'(u_{n_k})| \cdot \|(u_{n_k})\| \to 0,$$

quando $k \to +\infty$. Mas isto implica que

$$\begin{aligned} c_\lambda &= J(u_{n_k}) - \tfrac{1}{\xi} J'(u_{n_k})(u_{n_k}) + o_k(1) \\ &\geq \tfrac{1}{p}\widehat{M_0}(\|u_{n_k}\|^p) - \tfrac{1}{\xi} M_0(t_0)\|u_{n_k}\|^p + o_k(1) \\ &\geq \left(\tfrac{1}{p} m_0 - \tfrac{1}{\xi} M_0(t_0)\right) \|u_{n_k}\|^p + o_n(1). \end{aligned}$$

Como $m_0 < M(t_0) < \dfrac{\xi}{p} m_0$, temos $\frac{1}{p} m_0 - \frac{1}{\xi} M_0(t_0) > 0$. Então, obtemos

$$c_\lambda \geq \left(\frac{1}{p} m_0 - \frac{1}{\xi} M_0(t_0)\right) t_0 > 0.$$

O que contradiz a Observação 2.6.4. Portanto, só podemos ter $\|u_n\|^p > t_0$ para uma quantidade finita de índices $n \in \mathbb{N}$. Excluindo-se tais índices, podemos considerar a subsequência (u_{n_k}), de (u_n), tal que $\|u_{n_k}\|^p \leq t_0$, para todo $k \in \mathbb{N}$.. □

2.6.1 Conclusão da demonstração do Teorema 2.1.3

Seja $\lambda > 0$. Segue da Observação 2.6.4 que

$$c_\lambda < \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{p^*}\right) \left(m_0 C_{a,p}^*\right)^{\frac{p^*}{p^*-p}}. \tag{2.42}$$

Dos Lemas 2.6.2 e 2.6.3, existe uma sequência limitada $(u_n) \subset \mathcal{D}_a^{1,p}$, tal que $J(u_n) \to c_\lambda$ e $J'(u_n) \to 0$ em $(\mathcal{D}_a^{1,p})^{-1}$, quando $n \to +\infty$. Desde que (2.42) acontece, segue do Lema 2.6.1 que, a menos de uma subsequência, $u_n \to u_\lambda$ fortemente, em $\mathcal{D}_a^{1,p}$. Logo, u_λ é uma solução fraca para o problema (2.6), para todo $\lambda > 0$. Aplicando o Lema 2.6.5, concluímos que u_λ é uma solução fraca para o problema (2.1), para todo $\lambda > 0$.

□

Capítulo

3

Sistemas de equações de Kirchhoff com expoentes críticos

3.1 Introdução

Nesse capítulo, estudaremos um sistema (p,q)-Laplaciano de equações do tipo Kirchhoff com peso e não linearidade, envolvendo um termo (p,q)-superlinear, no qual p pode ser diferente de q, e com expoente crítico de Caffarelli-Kohn-Nirenberg. O sistema a ser estudado é o seguinte

$$\begin{cases} L_p(u) &= \lambda|x|^{-c}F_u(x,u,v) + \alpha|x|^{-\beta}|u|^{\alpha-2}u|v|^{\gamma}, & \text{em } \Omega, \\ L_q(v) &= \lambda|x|^{-c}F_v(x,u,v) + \gamma|x|^{-\beta}|u|^{\alpha}|v|^{\gamma-2}v, & \text{em } \Omega, \\ u=v &= 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

em que

$$L_p(u) = -\left[M_1\left(\int_\Omega |x|^{-a_1p}|\nabla u|^p dx\right)\right] div\left(|x|^{-a_1p}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right),$$

$$L_q(v) = -\left[M_2\left(\int_\Omega |x|^{-a_2q}|\nabla v|^q dx\right)\right] div\left(|x|^{-a_2q}|\nabla v|^{q-2}\nabla v\right),$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado, com $0 \in \Omega$, $N \geq 3$; $1 < p < N$, $1 < q < N$, $a_1 < \frac{N-p}{p}$, $a_2 < \frac{N-q}{q}$, $c \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\alpha}{p^*} + \dfrac{\gamma}{q^*} = 1$, em que $p^* = \dfrac{Np}{N-d_1p}$ e $q^* = \dfrac{Nq}{N-d_2q}$ são os expoentes críticos de Caffarelli-Kohn-Nirenberg, com $d_i = 1 + a_i - b_i$, $a_i \leq b_i < a_i + 1$, $i = 1,2$ e $\beta = b_1p^* = b_2q^*$. $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável em Ω e continuamente diferenciável em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e F_w é sua derivada parcial com respeito a w. $M_i : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+$ é uma função contínua, para todo $i = 1, 2$.

As hipóteses sobre as funções contínuas $M_i : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2$, são as seguintes:

$(M1)$ Existem $m_1 > 0$ e $m_2 > 0$, tais que

$$M_i(t) \geq m_i,$$

para todo $t \geq 0$ e para todo $i = 1, 2$.

$(M2)$ M_i é crescente, para todo $i = 1, 2$.

Além de ser uma função mensurável em Ω e continuamente diferenciável em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes hipóteses

$(F1)$

$$F_u(x, s, t) = -F_u(x, -s, t),$$

para todo $(x, s, t) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e

$$F_v(x, s, t) = -F_v(x, s, -t),$$

para todo $(x, s, t) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$(F2)$ Existem constantes positivas C_1, C_2, com $C_1 < C_2$ e $\theta, \delta > 1$, com $\dfrac{\theta}{p} + \dfrac{\delta}{q} > 1$ e $\dfrac{\theta}{p^*} + \dfrac{\delta}{q^*} < 1$, tais que

$$C_1 \theta |s|^{\theta - 1} |t|^{\delta} \leq F_u(x, s, t) \leq C_2 \theta |s|^{\theta - 1} |t|^{\delta},$$

para todo $(x, s, t) \in \Omega \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$ e

$$C_1 \delta |s|^{\theta} |t|^{\delta - 1} \leq F_v(x, s, t) \leq C_2 \delta |s|^{\theta} |t|^{\delta - 1},$$

para todo $(x,s,t) \in \Omega \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$.

$(F3)$ Existem $\xi_1 \in (p,p^*)$ e $\xi_2 \in (q,q^*)$ tais que

$$F(x,u,v) \leq \frac{1}{\xi_1} F_u(x,u,v) \cdot u + \frac{1}{\xi_2} F_v(x,u,v) \cdot v,$$

para todo $(x,u,v) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Observamos que de $(F1)$ e $(F2)$, obtemos

$$(F1') \qquad F(x,s,t) = F(x,-s,t) = F(x,s,-t) = F(x,-s,-t),$$

para todo $(x,s,t) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Além do mais, de $(F1')$ e $(F2)$ temos, também,

$$(F2') \qquad C_1|s|^\theta |t|^\delta \leq F(x,s,t) \leq C_2 |s|^\theta |t|^\delta,$$

para todo $(x,s,t) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Supomos, também, $c < \min\{(a_1+1)r + N(1-\frac{p_0}{p}), (a_2+1)r + N(1-\frac{q_0}{q})\}$, em que $p_0 \in (p,p^*)$ e $q_0 \in (q,q^*)$ são tais que $\dfrac{\theta}{p_0} + \dfrac{\delta}{q_0} = 1$.

Devido à presença dos termos não-locais no sistema (3.1), será necessário fazer um truncamento nas funções do tipo Kirchhoff que aparecem no operador, criando um problema auxiliar, de certa forma, semelhante ao que foi feito no Capítulo 2. Encontrando soluções para esse problema auxiliar, poderemos obter soluções para o problema (3.1). A presença do termo com expoente crítico no sistema, também causa uma certa dificuldade no estudo do problema, devido à falta de compacidade, como veremos posteriormente.

Nós estabelecemos dois resultados para o problema (3.1). Em ambos fizemos uso do Teorema do Passo da Montanha para obter soluções para o sistema. No primeiro resultado, supomos $p = q$. Trabalhando com funções extremais, foi possível obter uma solução não trivial para o problema, para todo $\lambda > 0$. O outro resultado diz respeito ao caso em que p pode ser diferente de q. Nesse segundo resultado, também obtemos uma solução não trivial para o problema (3.1), mas para λ suficientemente grande. O problema de p ser diferente de q foi contornado fazendo uso de uma versão do Princípio de Concentração e Compacidade devido a Lions (cf.[43, Lemma 2.1]) e controlando o nível da sequência de Palais-Smale obtida com o Teorema do Passo da Montanha.

Os principais resultados desse capítulo são os seguintes:

Teorema 3.1.1. *Suponha* $p = q$, $(M1)$, $(M2)$, $(F1)$, $(F2)$, $(F3)$, $a_1 = a_2$ *e* $\alpha + \gamma = p^*$. *Então, para todo* $\lambda > 0$, *o problema (3.1) tem ao menos uma solução não trivial.*

Teorema 3.1.2. *Suponha* $(M1)$, $(M2)$, $(F1)$, $(F2)$, $(F3)$ *e* $\dfrac{\alpha}{p^*} + \dfrac{\gamma}{q^*} = 1$. *Então, existe* $\lambda^* > 0$ *tal que o problema (3.1) tem ao menos uma solução não trivial, para cada* $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$.

3.2 Formulação variacional e resultados preliminares

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suave e limitado, com $0 \in \Omega$, $N \geq 3$, $1 < l < N$, $a < (N-l)/l$, $a \leq b < a+1$, e $l^* = Nl/(N-dl)$, em que $d = 1 + a - b$. Considere o espaço de Sobolev $\mathcal{D}_a^{1,l}$, definido tal como no Capítulo 1, o qual é o completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito à norma

$$\|w\| = \left(\int_\Omega |x|^{-al}|\nabla w|^l dx\right)^{1/l}.$$

Devido à desigualdade (1.4), temos que a imersão de $\mathcal{D}_a^{1,l}$ em $L^r(\Omega, |x|^{-\eta})$ é contínua, em que $L^r(\Omega, |x|^{-\eta})$ é o espaço de Sobolev com peso $L^r(\Omega)$, munido da norma

$$\|w\|_{r,\eta} = \left(\int_\Omega |x|^{-\eta}|w|^r dx\right)^{1/r}.$$

Além do mais, essa imersão é compacta quando $1 \leq r < Nl/(N-l)$ e $\eta < (a+1)r + N(1 - \frac{r}{l})$.

Denote $A = \mathcal{D}_{a_1}^{1,p}$ e $B = \mathcal{D}_{a_2}^{1,q}$. Definimos o espaço de Sobolev $E = A \times B$, munido da norma

$$\|(u,v)\| = \|u\|_A + \|v\|_B = \left(\int_\Omega |x|^{-a_1p}|\nabla u|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |x|^{-a_2q}|\nabla v|^q dx\right)^{1/q}.$$

Desde que nossa abordagem é variacional, procuramos por soluções para o problema (3.1) encontrando pontos críticos do funcional de Euler-Lagrange, $I : E \to \mathbb{R}$, dado por

$$I(u,v) = \frac{1}{p}\widehat{M_1}(\|u\|_A^p) + \frac{1}{q}\widehat{M_2}(\|v\|_B^q) - \lambda\int_\Omega |x|^{-c}F(x,u,v)dx - \int_\Omega |x|^{-\beta}|u|^\alpha|v|^\gamma dx,$$

para todo $(u,v) \in E$, em que $\widehat{M_i}(t) := \int_0^t M_i(s)ds$, $i = 1, 2$. Observe que $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ (veja Apêndice, Teorema A.4.5) e

$$\begin{aligned} I'(u,v)(\varphi,\psi) =& M_1(\|u\|_A^p)\int_\Omega |x|^{-a_1p}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi dx \\ &+ M_2(\|v\|_B^q)\int_\Omega |x|^{-a_2q}|\nabla v|^{q-2}\nabla v\nabla\psi dx \\ &- \lambda\int_\Omega |x|^{-c}F_u(x,u,v)\varphi dx - \lambda\int_\Omega |x|^{-c}F_v(x,u,v)\psi dx \\ &- \alpha\int_\Omega |x|^{-\beta}|u|^{\alpha-2}u|v|^\gamma\varphi dx - \gamma\int_\Omega |x|^{-\beta}|u|^\alpha|v|^{\gamma-2}v\psi dx, \end{aligned}$$

para todo $(\varphi,\psi) \in E$.

A próxima proposição é uma versão do Princípio de Concentração e Compacidade devido à Lions (cf. [43, Lemma 2.1]) e nos será útil para demonstrar que o funcional I satisfaz uma condição local de Palais-Smale. Esta versão é uma versão mais geral do teorema dado por Silva e Xavier [52], adaptado para o nosso problema. Sua demonstração pode ser encontrada no Apêndice, Seção A.2.1.

Proposição 3.2.1. *Seja $1 \le p, q < N$. Seja, também, $Q \in C^1(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ uma função não negativa, satisfazendo $Q(x,0,0) = 0$, para todo $x \in \Omega$ e*

(Q_0) existe $C > 0$ tal que, para cada $(x,u,v) \in \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$,

$$|Q_u(x,u,v)| \le C(|u|^{p^*-1} + |v|^{\frac{q^*(p^*-1)}{p^*}} + 1),$$

$$|Q_v(x,u,v)| \leq C(|u|^{\frac{p^*(q^*-1)}{q^*}} + |v|^{q^*-1} + 1).$$

Seja $\{(u_n, v_n)\} \subset E$ *uma sequência tal que* $(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v)$, *fracamente, em* E. *Suponha que*

$$|x|^{-a_1p}|\nabla u_n|^p dx \rightharpoonup \mu, \ |x|^{-a_2q}|\nabla v_n|^q dx \rightharpoonup \sigma, \ |x|^{-\beta}Q(x, u_n, v_n)dx \rightharpoonup \nu,$$

*no sentido fraco** *de convergência em medidas, em que* μ, σ *e* ν *são medidas não negativas e limitadas em* $\bar{\Omega}$. *Então, existem um conjunto* Λ, *no máximo contável, famílias* $(\mu_j)_{j\in\Lambda}$, $(\sigma_j)_{j\in\Lambda}$ *e* $(\nu_j)_{j\in\Lambda}$ *de números reais positivos e uma família* $(x_j)_{j\in\Lambda}$ *de pontos de* $\bar{\Omega}$ *tais que*

$$\nu = |x|^{-\beta}Q(x,u,v)dx + \sum_{j\in\Lambda} \nu_j \delta_{x_j}, \tag{3.2}$$

$$\mu \geq |x|^{-a_1p}|\nabla u|^p dx + \sum_{j\in\Lambda} \mu_j \delta_{x_j}, \tag{3.3}$$

$$\sigma \geq |x|^{-a_2q}|\nabla v|^q dx + \sum_{j\in\Lambda} \sigma_j \delta_{x_j}. \tag{3.4}$$

Além disso, existe uma constante $C > 0$ *tal que*

$$\mu_j^{p^*/p} + \sigma_j^{q^*/q} \geq C\nu_j. \tag{3.5}$$

3.3 O problema auxiliar

Afim de provar os Teoremas 3.1.1 e 3.1.2, faremos uso do Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale. Porém, uma vez que o problema (3.1) envolve um termo com crescimento crítico e um operador não-local sem muito conhecimento sobre o comportamento das funções M_1 e M_2 no infinito, necessitamos fazer um "truncamento" nessas funções. Dessa forma, será possível demonstrar que o funcional de Euler-Lagrange associado ao problema (3.1) possui a geometria do Passo da Montanha.

Defina $m_0 = \min\{m_1, m_2\}$. Segue de $(M2)$ que existem $t_1, t_2 > 0$ tais que

$m_0 \leq M_1(0) < M_1(t_1) < \frac{\xi_1}{p} m_0$ e $m_0 \leq M_2(0) < M_2(t_2) < \frac{\xi_2}{q} m_0$. Definimos

$$M_{t_1}(t) := \begin{cases} M_1(t), & \text{se} \quad 0 \leq t \leq t_1, \\ M_1(t_1), & \text{se} \quad t \geq t_1, \end{cases}$$

e

$$M_{t_2}(t) := \begin{cases} M_2(t), & \text{se} \quad 0 \leq t \leq t_2, \\ M_2(t_2), & \text{se} \quad t \geq t_2. \end{cases}$$

Novamente, usando $(M2)$, obtemos

$$m_0 \leq M_{t_1}(t) < \frac{\xi_1}{p} m_0 \;\text{ e }\; m_0 \leq M_{t_2}(t) < \frac{\xi_2}{q} m_0, \forall t \geq 0. \tag{3.6}$$

A demonstração dos Teoremas 3.1.1 e 3.1.2 será baseada no estudo do seguinte problema auxiliar

$$\begin{cases} L_p^1(u) = \lambda |x|^{-c} F_u(x,u,v) + \alpha |x|^{-\beta} |u|^{\alpha-2} u |v|^{\gamma}, & \text{em } \Omega, \\ L_q^2(v) = \lambda |x|^{-c} F_v(x,u,v) + \gamma |x|^{-\beta} |u|^{\alpha} |v|^{\gamma-2} v, & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.7}$$

em que

$$L_p^1(u) := -\left[M_{t_1} \left(\int_\Omega |x|^{-a_1 p} |\nabla u|^p \, dx \right) \right] div \left(|x|^{-a_1 p} |\nabla u|^{p-2} \nabla w \right)$$

e

$$L_q^2(v) := -\left[M_{t_2} \left(\int_\Omega |x|^{-a_2 q} |\nabla v|^q \, dx \right) \right] div \left(|x|^{-a_2 q} |\nabla v|^{q-2} \nabla v \right).$$

O funcional de Euler-Lagrange, $J : E \to \mathbb{R}$, associado ao problema (3.7) é dado por

$$J(u,v) = \frac{1}{p} \widehat{M}_{t_1}(\|u\|_A^p) + \frac{1}{q} \widehat{M}_{t_2}(\|v\|_B^q) - \lambda \int_\Omega |x|^{-c} F(x,u,v) dx - \int_\Omega |x|^{-\beta} |u|^{\alpha} |v|^{\gamma} dx,$$

para todo $(u,v) \in E$, em que $\widehat{M_{t_i}}(t) := \int_0^t M_{t_i}(s)ds$, $i = 1, 2$. Note que $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ e

$$\begin{aligned}
J'(u,v)(\varphi,\psi) = & M_{t_1}(\|u\|_A^p)\int_\Omega |x|^{-a_1 p}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi dx \\
& + M_{t_2}(\|v\|_B^q)\int_\Omega |x|^{-a_2 q}|\nabla v|^{q-2}\nabla v\nabla\psi dx \\
& - \lambda\int_\Omega |x|^{-c}F_u(x,u,v)\varphi dx - \lambda\int_\Omega |x|^{-c}F_v(x,u,v)\psi dx \\
& - \alpha\int_\Omega |x|^{-\beta}|u|^{\alpha-2}|v|^\gamma u\varphi dx - \gamma\int_\Omega |x|^{-\beta}|u|^\alpha|v|^{\gamma-2}v\psi dx,
\end{aligned}$$

para todo $(\varphi,\psi) \in E$.

3.4 A condição de Palais-Smale

Nessa seção, verificaremos que, sob as hipóteses (M_1), (M_2), (F_1) e (F_2), o funcional J satisfaz a condição de Palais-Smale, para um determinado nível.

Lema 3.4.1. *Seja $\{(u_n, v_n)\}$ uma sequência limitada em E tal que*

$$J(u_n,v_n) \to c \ \text{e} \ J'(u_n,v_n) \to 0 \ \text{em} \ E^{-1}, \ \text{quando} \ n \to \infty.$$

Suponha que (M_1), (M_2), (F_1) e (F_2) sejam válidas e que

$$c < \left(\frac{\alpha}{\xi_1} + \frac{\gamma}{\xi_2} - 1\right)\frac{m_0}{\alpha+\gamma}K_{p,q},$$

em que $K_{p,q} = \min\left\{\left(\frac{m_0}{2(\alpha+\gamma)C}\right)^{\frac{p}{p^*-p}}, \left(\frac{m_0}{2(\alpha+\gamma)C}\right)^{\frac{q}{q^*-q}}\right\}$. Então, $\{(u_n,v_n)\}$ possui uma subsequência que converge forte em E.

Demonstração. Desde que E é reflexivo e $\{(u_n,v_n)\}$ é limitada em E, passando a uma subsequência, se necessário, obtemos $u \in E$ tal que

$$(u_n, v_n) \rightharpoonup (u,v) \text{ em } E$$

quando $n \to +\infty$. Como a imersão de E em $L^r(\Omega, |x|^{-a}) \times L^s(\Omega, |x|^{-b})$ é compacta, sempre que $1 \leq r < p^*$, $1 \leq s < q^*$, $a < (a_1+1)r + N(1-r/p)$ e $b < (a_2+1)s + N(1-s/q)$, temos

$$(u_n, v_n) \to (u, v) \text{ em } L^r(\Omega, |x|^{-a}) \times L^s(\Omega, |x|^{-b}),$$

quando $n \to +\infty$, em que $1 \leq r < p^*$, $1 \leq s < q^*$, $a < (a_1+1)r + N(1-r/p)$ e $b < (a_2+1)s + N(1-s/q)$. Daí, obtemos, também,

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega, \quad v_n(x) \to v(x) \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e

$$\|u_n\|_A \to t_0 \geq 0, \quad \|v_n\|_B \to s_0 \geq 0,$$

quando $n \to \infty$. Além disso, como $\{(u_n, v_n)\}$ é limitada e $Q(x, u, v) = |u|^\alpha |v|^\gamma$ satisfaz (Q_0), podemos aplicar a Proposição 3.2.1 para obter um conjunto de índices, no máximo contável, Λ e sequências $\{x_j\} \subset \mathbb{R}^N$, $\{\mu_j\}$, $\{\sigma_j\}$, $\{\nu_j\} \subset (0, +\infty)$ tais que

$$|x|^{-a_1 p}|\nabla u_n|^p dx \rightharpoonup \mu, \; |x|^{-a_2 q}|\nabla v_n|^q dx \rightharpoonup \sigma, \; |x|^{-\beta}|u_n|^\alpha |v_n|^\gamma dx \rightharpoonup \nu, \tag{3.8}$$

quando $n \to +\infty$, no sentido fraco* de convergência em medidas, em que

$$\nu = |x|^{-\beta}|u|^\alpha |v|^\gamma dx + \sum_{j \in \Lambda} \nu_j \delta_{x_j}, \tag{3.9}$$

$$\mu \geq |x|^{-a_1 p}|\nabla u|^p dx + \sum_{j \in \Lambda} \mu_j \delta_{x_j}, \tag{3.10}$$

$$\sigma \geq |x|^{-a_2 q}|\nabla v|^q dx + \sum_{j \in \Lambda} \sigma_j \delta_{x_j}, \tag{3.11}$$

para todo $j \in \Lambda$, sendo δ_{x_j} a medida de massa concentrada em $x_j \in \Omega$. Além do mais, existe $C > 0$ tal que

$$\mu_j^{p^*/p} + \sigma_j^{q^*/q} \geq C\nu_j, \tag{3.12}$$

para todo $j \in \Lambda$.

Agora, seja $k \in \mathbb{N}$. Sem perda de generalidade, podemos supor $B(0; 2) \subset \Omega$.

Para cada $\varrho > 0$, definimos $\psi_\varrho(x) := \psi((x - x_k)/\varrho)$, em que $\psi \in C_0^\infty(\Omega, [0, 1])$ é tal que $\psi \equiv 1$ em $B(0; 1)$, $\psi \equiv 0$ em $\Omega \setminus B(0; 2)$ e $|\nabla\psi| \leq 1$. Observe que $(\psi_\varrho u_n, \psi_\varrho v_n)$ é limitada em E. De fato, como

$$\|(\psi_\varrho u_n, \psi_\varrho v_n)\| = \|\psi_\varrho u_n\|_A + \|\psi_\varrho v_n\|_B,$$

$$\begin{aligned}
\|\psi_\varrho u_n\|_A^p &= \int_\Omega |x|^{-a_1 p} |\nabla(\psi_\varrho u_n)|^p dx \\
&= \int_\Omega |x|^{-a_1 p} (|\nabla\psi_\varrho u_n| + |\psi_\varrho \nabla u_n|)^p dx \\
&\leq 2^{p-1} \left(\int_\Omega |x|^{-a_1 p} |\nabla\psi_\varrho u_n|^p dx + \int_\Omega |x|^{-a_1 p} |\psi_\varrho \nabla u_n|^p dx \right) \\
&\leq 2^{p-1} \left(\frac{1}{\varrho^p} \int_\Omega |x|^{-a_1 p} |u_n|^p dx + \int_\Omega |x|^{-a_1 p} |\psi_\varrho \nabla u_n|^p dx \right) \\
&\leq \hat{C} \|u_n\|_A^p
\end{aligned}$$

e, da mesma forma,

$$\|\psi_\varrho v_n\|_B^q \leq \bar{C} \|v_n\|_B^q,$$

concluímos que $\{(\psi_\varrho u_n, \psi_\varrho v_n)\}$ é limitada em E. Logo

$$J'_\lambda(u_n, v_n)(\psi_\varrho u_n, \psi_\varrho v_n) \to 0,$$

quando $n \to +\infty$, isto é,

$$\begin{aligned}
&M_{t_1}(\|u_n\|_A^p) \int_\Omega \frac{u_n |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla\psi_\varrho}{|x|^{a_1 p}} dx + M_{t_2}(\|v_n\|_B^q) \int_\Omega \frac{v_n |\nabla v_n|^{q-2} \nabla v_n \nabla\psi_\varrho}{|x|^{a_2 q}} dx \\
&= -M_{t_1}(\|u_n\|_A^p) \int_\Omega |x|^{-a_1 p} |\nabla u_n|^p \psi_\varrho dx - M_{t_2}(\|v_n\|_B^q) \int_\Omega |x|^{-a_2 q} |\nabla v_n|^q \psi_\varrho dx \\
&\quad + \lambda \int_\Omega |x|^{-c} F_u(x, u_n, v_n) \psi_\varrho u_n dx + \lambda \int_\Omega |x|^{-c} F_v(x, u_n, v_n) \psi_\varrho v_n dx \\
&\quad + (\alpha + \gamma) \int_\Omega |x|^{-\beta} |u_n|^\alpha |v_n|^\gamma \psi_\varrho dx + o_n(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le -m_0\int_\Omega |x|^{-a_1 p}|\nabla u_n|^p\psi_\varrho dx - m_0\int_\Omega |x|^{-a_2 q}|\nabla v_n|^q\psi_\varrho dx\\
&\quad+\lambda\int_\Omega |x|^{-c}F_u(x,u_n,v_n)\psi_\varrho u_n dx+\lambda\int_\Omega |x|^{-c}F_v(x,u_n,v_n)\psi_\varrho v_n dx\\
&\quad+(\alpha+\gamma)\int_\Omega |x|^{-\beta}|u_n|^\alpha|v_n|^\gamma\psi_\varrho dx+o_n(1).
\end{aligned}$$

Usando (3.8) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to+\infty}\left[M_{t_1}(\|u_n\|_A^p)\int_\Omega \frac{u_n|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\psi_\varrho}{|x|^{a_1 p}}dx+M_{t_2}(\|v_n\|_B^q)\int_\Omega \frac{v_n|\nabla v_n|^{q-2}\nabla v_n\nabla\psi_\varrho}{|x|^{a_2 q}}dx\right]\\
&\le -m_0\int_\Omega |x|^{-a_1 p}|\nabla u|^p\psi_\varrho dx - m_0\sum_{j\in\Lambda}\mu_j\delta_j(\psi_\varrho)\\
&\quad- m_0\int_\Omega |x|^{-a_2 q}|\nabla v|^q\psi_\varrho dx - m_0\sum_{j\in\Lambda}\sigma_j\delta_j(\psi_\varrho)\\
&\quad+\lambda\int_\Omega |x|^{-c}F_u(x,u,v)\psi_\varrho u dx+\lambda\int_\Omega |x|^{-c}F_v(x,u,v)\psi_\varrho v dx\\
&\quad+(\alpha+\gamma)\int_\Omega |x|^{-\beta}|u|^\alpha|v|^\gamma\psi_\varrho dx+(\alpha+\gamma)\sum_{j\in\Lambda}\nu_j\delta_j(\psi_\varrho).
\end{aligned}$$

Novamente, aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\int_\Omega |x|^{-a_1 p}|\nabla u|^p\psi_\varrho dx=o_\varrho(1),\ \int_\Omega |x|^{-a_2 q}|\nabla v|^q\psi_\varrho dx=o_\varrho(1),$$

$$\int_\Omega |x|^{-\delta}F_u(x,u,v)\psi_\varrho u dx=o_\varrho(1),\ \int_\Omega |x|^{-\delta}F_v(x,u,v)\psi_\varrho v dx=o_\varrho(1),$$

e

$$\int_\Omega |x|^{-\beta}|u|^\alpha|v|^\gamma\psi_\varrho dx=o_\varrho(1),$$

em que $\lim\limits_{\varrho\to0^+} o_\varrho(1)=0$.

Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned}
&\lim_{\rho\to 0^+}\left\{\limsup_{n\to+\infty}\left[M_{t_1}(\|u_n\|_A^p)\int_\Omega \frac{u_n|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\psi_\varrho}{|x|^{a_1p}}dx\right.\right.\\
&\left.\left.+\ M_{t_2}(\|v_n\|_B^q)\int_\Omega \frac{v_n|\nabla v_n|^{q-2}\nabla v_n\nabla\psi_\varrho}{|x|^{a_2q}}dx\right]\right\} \qquad (3.13)\\
\leq\ &\lim_{\rho\to 0^+}\left[-m_0\sum_{j\in\Lambda}\mu_j\delta_j(\psi_\varrho)-m_0\sum_{j\in\Lambda}\sigma_j\delta_j(\psi_\varrho)+(\alpha+\gamma)\sum_{j\in\Lambda}\nu_j\delta_j(\psi_\varrho)\right].
\end{aligned}$$

Agora, mostraremos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{\rho\to 0^+}\left\{\limsup_{n\to+\infty}\left[M_{t_1}(\|u_n\|_A^p)\int_\Omega |x|^{-a_1p}u_n|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\psi_\varrho\ dx\right.\right.\\
&\left.\left.+\ M_{t_2}(\|v_n\|_B^q)\int_\Omega |x|^{-a_2q}v_n|\nabla v_n|^{q-2}\nabla v_n\nabla\psi_\varrho\ dx\right]\right\}=0.
\end{aligned} \qquad (3.14)$$

Primeiramente, observe que, da desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega |x|^{-a_1p}u_n|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\psi_\varrho dx\right| &\leq \int_\Omega |x|^{-a_1p}|\nabla u_n|^{p-1}|u_n\nabla\psi_\varrho|dx\\
&\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{|x|^{a_1p}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega \frac{|u_n\nabla\psi_\varrho|^p}{|x|^{a_1p}}dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \|u_n\|_A^{p-1}\left(\int_\Omega |x|^{-a_1p}|u_n\nabla\psi_\varrho|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Uma vez que (u_n) é limitada em $\mathcal{D}_a^{1,p}$, M_{t_1} e M_{t_2} são contínuas e $supp(\psi_\varrho)\subset B(x_k;2\varrho)$, existe $L_1>0$ tal que

$$M_{t_1}(\|u_n\|^p)\left|\int_\Omega |x|^{-a_1p}u_n|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\psi_\varrho dx\right|\leq L_1\left(\int_{B(x_k;2\varrho)}\frac{|u_n\nabla\psi_\varrho|^p}{|x|^{a_1p}}dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Analogamente, existe $L_2>0$ tal que

$$M_{t_2}(\|v_n\|^q)\left|\int_\Omega |x|^{-a_2q}v_n|\nabla v_n|^{q-2}\nabla v_n\nabla\psi_\varrho dx\right|\leq L_2\left(\int_{B(x_k;2\varrho)}\frac{|v_n\nabla\psi_\varrho|^q}{|x|^{a_2q}}dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Logo, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e a desigualdade de

Hölder, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{n\to+\infty}\left[M_{t_1}(\|u_n\|_A^p)\left|\int_\Omega |x|^{-a_1p}u_n|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\psi_\varrho dx\right|\right.\\
&\quad\left.+\ M_{t_2}(\|v_n\|_B^q)\left|\int_\Omega |x|^{-a_2q}v_n|\nabla v_n|^{q-2}\nabla v_n\nabla\psi_\varrho dx\right|\ \right]\\
\leq&\quad L_1\left(\int_{B(x_k;2\varrho)}\frac{|u\nabla\psi_\varrho|^p}{|x|^{a_1p}}dx\right)^{\frac{1}{p}}+L_2\left(\int_{B(x_k;2\varrho)}\frac{|v\nabla\psi_\varrho|^q}{|x|^{a_2q}}dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
\leq&\quad L_1\left(\int_{B(x_k;2\varrho)}\left(|x|^{-a_1p}|u|^p\right)^{\frac{N}{N-p}}dx\right)^{\frac{N-p}{Np}}\left(\int_{B(x_k;2\varrho)}|\nabla\psi_\varrho|^N dx\right)^{\frac{1}{N}}\\
&\quad+L_2\left(\int_{B(x_k;2\varrho)}\left(|x|^{-a_2q}|v|^q\right)^{\frac{N}{N-q}}dx\right)^{\frac{N-q}{Nq}}\left(\int_{B(x_k;2\varrho)}|\nabla\psi_\varrho|^N dx\right)^{\frac{1}{N}}\\
\leq&\quad L_1|B(x_k;2\varrho)|^{\frac{1}{N}}\left(\int_\Omega\chi_{B(x_k;2\varrho)}\left(|x|^{-a_1p}|u|^p\right)^{\frac{N}{N-p}}dx\right)^{\frac{N-p}{Np}}\\
&\quad+L_2|B(x_k;2\varrho)|^{\frac{1}{N}}\left(\int_\Omega\chi_{B(x_k;2\varrho)}\left(|x|^{-a_2q}|v|^q\right)^{\frac{N}{N-q}}dx\right)^{\frac{N-q}{Nq}}.
\end{aligned}
$$

Fazendo $\varrho\to 0^+$ na expressão acima, segue do Teorema da Convergência Dominada que (3.14) ocorre. Assim, concluímos de (3.13) que

$$
0\leq\lim_{\rho\to 0^+}\left[-m_0\sum_{j\in\Lambda}\mu_j\delta_j(\psi_\varrho)-m_0\sum_{j\in\Lambda}\sigma_j\delta_j(\psi_\varrho)+(\alpha+\gamma)\sum_{j\in\Lambda}\nu_j\delta_j(\psi_\varrho)\right].
$$

Isto é,

$$
\begin{aligned}
0&\leq\lim_{\rho\to 0^+}\left[-m_0\left(\int_\Omega\psi_\varrho d\mu+\int_\Omega\psi_\varrho d\sigma\right)+(\alpha+\gamma)\int_\Omega\psi_\varrho d\nu\right]\\
&=\lim_{\rho\to 0^+}\left[-m_0\left(\int_{B(x_k;2\varrho)}\psi_\varrho d\mu+\int_{B(x_k;2\varrho)}\psi_\varrho d\sigma\right)+(\alpha+\gamma)\int_{B(x_k;2\varrho)}\psi_\varrho d\nu\right]\\
&=-m_0\mu(\{x_k\})-m_0\sigma(\{x_k\})+(\alpha+\gamma)\nu(\{x_k\})\\
&=-m_0(\mu_k+\sigma_k)+(\alpha+\gamma)\nu_k.
\end{aligned}
$$

Logo, de (3.12) obtemos

$$\begin{aligned} m_0(\mu_k + \sigma_k) &\leq (\alpha+\gamma)\nu_k \\ &\leq (\alpha+\gamma)C(\mu_k^{p^*/p} + \sigma_k^{q^*/q}). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Faça $\tau = \mu_k + \sigma_k$. Temos que $0 < m_0\tau \leq (\alpha+\gamma)C(\tau^{p^*/p} + \tau^{q^*/q})$, o que implica $\dfrac{m_0}{(\alpha+\gamma)C} \leq \tau^{\frac{p^*}{p}-1} + \tau^{\frac{q^*}{q}-1}$. Definindo $r_1 = \frac{p^*}{p} - 1$ e $r_2 = \frac{q^*}{q} - 1$, se $\tau < 1$, temos

$$\tau^{r_1} + \tau^{r_2} \leq 2\tau^{\min\{r_1, r_2\}}.$$

Se $\tau \geq 1$, temos

$$\tau^{r_1} + \tau^{r_2} \leq 2\tau^{\max\{r_1, r_2\}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \tau &\geq \min\left\{ \left(\frac{m_0}{2(\alpha+\gamma)C}\right)^{\frac{1}{\min\{r_1,r_2\}}}, \left(\frac{m_0}{2(\alpha+\gamma)C}\right)^{\frac{1}{\max\{r_1,r_2\}}} \right\} \\ &= \min\left\{ \left(\frac{m_0}{2(\alpha+\gamma)C}\right)^{\frac{1}{r_1}}, \left(\frac{m_0}{2(\alpha+\gamma)C}\right)^{\frac{1}{r_2}} \right\} \\ &= K_{p,q}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Segue de (3.15) e (3.16) que

$$\nu_k \geq \frac{m_0}{\alpha+\gamma}\tau \geq \frac{m_0}{\alpha+\gamma}K_{p,q}. \tag{3.17}$$

Agora, provaremos que (3.17) não pode ocorrer e, portanto, Λ é vazio. De fato, suponha, por contradição, que (3.17) seja válida, para algum $k \in \Lambda$. Uma vez que

$m_0 \leq M_{t_1}(t) \leq \frac{\xi_1}{p} m_0$ e $m_0 \leq M_{t_2}(t) \leq \frac{\xi_2}{q} m_0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, de $(F3)$ obtemos

$$
\begin{aligned}
c &= J(u_n, v_n) - J'(u_n, v_n) \cdot (\frac{u_n}{\xi_1}, \frac{v_n}{\xi_2}) + o_n(1) \\
&\geq \frac{1}{p} m_0 \|u_n\|_A^p - \frac{1}{\xi_1} M_{t_1}(\|u_n\|_A^p) \|u_n\|_A^p \\
&\quad + \frac{1}{q} m_0 \|v_n\|_B^q - \frac{1}{\xi_2} M_{t_2}(\|v_n\|_B^q) \|v_n\|_B^q \\
&\quad + \left(\frac{\alpha}{\xi_1} + \frac{\gamma}{\xi_2} - 1 \right) \int_\Omega |x|^{-\beta} |u_n|^\alpha |v_n|^\gamma dx + o_n(1) \\
&\geq \frac{m_0}{p} \|u_n\|_A^p - \frac{1}{\xi_1} \frac{\xi_1}{p} m_0 \|u_n\|_A^p + \frac{m_0}{q} \|v_n\|_B^q - \frac{1}{\xi_2} \frac{\xi_2}{q} m_0 \|v_n\|_B^q \\
&\quad + \left(\frac{\alpha}{\xi_1} + \frac{\gamma}{\xi_2} - 1 \right) \int_\Omega |x|^{-\beta} |u_n|^\alpha |v_n|^\gamma dx + o_n(1) \\
&\geq \left(\frac{\alpha}{\xi_1} + \frac{\gamma}{\xi_2} - 1 \right) \int_\Omega |x|^{-\beta} |u_n|^\alpha |v_n|^\gamma \psi_\varrho dx + o_n(1).
\end{aligned}
$$

Fazendo $n \to +\infty$,

$$
\begin{aligned}
c &\geq \left(\frac{\alpha}{\xi_1} + \frac{\gamma}{\xi_2} - 1 \right) \int_\Omega |x|^{-\beta} |u|^\alpha |v|^\gamma \psi_\varrho dx + \left(\frac{\alpha}{\xi_1} + \frac{\gamma}{\xi_2} - 1 \right) \sum_{j \in \Lambda} \nu_j \delta_{x_j}(\psi_\varrho) \\
&= \left(\frac{\alpha}{\xi_1} + \frac{\gamma}{\xi_2} - 1 \right) \int_\Omega |x|^{-\beta} |u|^\alpha |v|^\gamma \psi_\varrho dx + \left(\frac{\alpha}{\xi_1} + \frac{\gamma}{\xi_2} - 1 \right) \sum_{j \in \Lambda} \nu_j \psi_\varrho(x_j) \\
&\geq \left(\frac{\alpha}{\xi_1} + \frac{\gamma}{\xi_2} - 1 \right) \nu_k \\
&\geq \left(\frac{\alpha}{\xi_1} + \frac{\gamma}{\xi_2} - 1 \right) \frac{m_0}{\alpha + \gamma} K_{p,q}.
\end{aligned}
$$

Mas isso contradiz a hipótese do teorema. Logo Λ é vazio e segue que

$$
\int_\Omega |x|^{-\beta} |u_n|^\alpha |v_n|^\gamma dx \to \int_\Omega |x|^{-\beta} |u|^\alpha |v|^\gamma dx. \tag{3.18}
$$

No que segue, demonstraremos que $(u_n, v_n) \to (u, v)$ em E.

Desde que $(u_n, v_n) \to (u, v)$ em $L^\theta(\Omega, |x|^{-c}) \times L^\delta(\Omega, |x|^{-c})$, Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$
-\lambda \int_\Omega |x|^{-c} F_u(x, u, v)(u_n - u) dx \to 0,
$$

quando $n \to +\infty$. Também, de (3.18) e do Teorema da Convergência Dominada e do Lema de Brezis-Lieb (veja Apêndice, Teorema A.2.4), obtemos

$$\int_{\Omega} |x|^{-\beta}|u_n|^{\alpha-2}u_n|v_n|^{\gamma}(u_n - u)dx \to 0,$$

quando $n \to +\infty$. Como $\{(u_n, v_n)\}$ é limitada em E, temos $J'(u_n, v_n)(u_n - u, 0) \to 0$, em $\mathbb{R}$, quando $n \to +\infty$. Assim, uma vez que $\|u_n\|_A \to t_0 \geq 0$, quando $n \to +\infty$ e M_{t_1} é contínua e positiva, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} |x|^{-a_1 p}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(u_n - u)dx = 0.$$

Segue do Lema 1.2.6 que $u_n \to u$ in $\mathcal{D}^{1,p}_{a_1}$, quando $n \to +\infty$. Pelos mesmos argumentos, obtemos $v_n \to v$ em $\mathcal{D}^{1,q}_{a_2}$, quando $n \to +\infty$. Concluímos então, que $(u_n, v_n) \to (u, v)$ em E, quando $n \to +\infty$.

□

3.5 Demonstração do Teorema 3.1.1

Nessa seção, demonstraremos o Teorema 3.1.1. Lembramos o leitor que estamos supondo $p = q$ como hipótese desse resultado. Além disso, consideramos $a_1 = a_2$, o que implica $E = \mathcal{D}^{1,p}_{a_1} \times \mathcal{D}^{1,p}_{a_1}$.

Os próximos dois lemas mostram que o funcional J possui a geometria do Passo da Montanha. Antes de demonstrá-los, observe que como $p = q$, então $p < \theta + \delta < p^*$ e $\alpha + \gamma = p^*$.

Lema 3.5.1. *Suponha que sejam válidas as hipóteses $(M1)$, $(M2)$, $(F1)$, $(F2)$ e que $p = q$. Então, existem números reais positivos ρ e ζ tais que*

$$J(u, v) \geq \zeta > 0, \forall (u, v) \in E \text{ com } \|(u, v)\| = \rho.$$

Demonstração. Seja $(u, v) \in E$ tal que $\|(u, v)\| \leq 1$. De $(M1)$, $(F1)$, $(F2)$, (1.4) e da desigualdade de Young, obtemos

$$
\begin{aligned}
J(u,v) &= \frac{1}{p}\widehat{M}_{t_1}(\|u\|_A^p) + \frac{1}{p}\widehat{M}_{t_2}(\|v\|_A^p) - \lambda\int_\Omega |x|^{-c}F(x,u,v)dx \\
&\quad - \int_\Omega |x|^{-\beta}|u|^\alpha|v|^\gamma dx \\
&\geq \frac{m_0}{p}\|u\|_A^p + \frac{m_0}{p}\|v\|_A^p - \lambda C_2\int_\Omega |x|^{-c}|u|^\theta|v|^\delta dx - \int_\Omega |x|^{-\beta}|u|^\alpha|v|^\gamma dx \\
&\geq \frac{m_0}{p}\|u\|_A^p + \frac{m_0}{p}\|v\|_A^p - \lambda\frac{\theta C_2}{\theta+\delta}\int_\Omega |x|^{-c}|u|^{\theta+\delta}dx - \lambda\frac{\delta C_2}{\theta+\delta}\int_\Omega |x|^{-c}|v|^{\theta+\delta}dx \\
&\quad - \frac{\alpha}{p^*}\int_\Omega |x|^{-\beta}|u|^{p^*}dx - \frac{\gamma}{p^*}\int_\Omega |x|^{-\beta}|v|^{p^*}dx \\
&\geq \frac{m_0}{p}\|u\|_A^p + \frac{m_0}{p}\|v\|_A^p - \lambda\tilde{C}_2\|u\|_A^{\theta+\delta} - \lambda\hat{C}_2\|v\|_A^{\theta+\delta} - \frac{\alpha}{p^*}\|u\|_A^{p^*} - \frac{\gamma}{p^*}\|v\|_A^{p^*} \\
&\geq \left(\frac{m_0}{p}\|u\|_A^p - \left(\lambda\tilde{C}_2 + \frac{\alpha}{p^*}\right)\|u\|_A^{\theta+\delta}\right) + \left(\frac{m_0}{p}\|v\|_A^p - \left(\lambda\hat{C}_2 + \frac{\gamma}{p^*}\right)\|v\|_A^{\theta+\delta}\right).
\end{aligned}
$$

Desde que $p < \theta+\delta$, tomando $\rho \in (0,1)$ suficientemente pequeno, existe $\zeta > 0$ tal que $J(u,v) \geq \zeta > 0$, para todo $(u,v) \in E$ com $\|(u,v)\| = \rho$.

□

Lema 3.5.2. *Suponha que sejam válidas as hipóteses* $(M1)$, $(M2)$, $(F1)$, $(F2)$ *e que* $p = q$. *Então, para todo* $\lambda > 0$, *existe* $e \in E$, *com* $J(e) < 0$ *e* $\|e\| > \rho$.

Demonstração. Fixe $(u_0, v_0) \in E$ com $u_0, v_0 > 0$ em Ω. Usando (3.6) e $(F2)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
J(tu_0,tv_0) &= \frac{1}{p}\widehat{M}_{t_1}(\|tu_0\|_A^p) + \frac{1}{p}\widehat{M}_{t_2}(\|tv_0\|_A^p) \\
&\quad - \lambda\int_\Omega |x|^{-c}F(x,tu_0,tv_0)dx \\
&\quad - \int_\Omega |x|^{-\beta}t^{p^*}u_0^\alpha v_0^\gamma dx \\
&\leq \frac{\xi_1}{p}m_0t^p\|u_0\|_A^p + \frac{\xi_2}{p}m_0t^p\|v_0\|_A^p - \lambda C_1t^{\theta+\delta}\int_\Omega |x|^{-c}u_0^\theta v_0^\delta dx.
\end{aligned}
$$

Desde que $\theta+\delta > p$, temos

$$\lim_{t\to\infty} J(tu_0,tv_0) = -\infty.$$

Assim, existe $t_0 > 0$ suficientemente grande, tal que $\|(t_0u_0,t_0v_0)\| > \rho$ e $J(t_0u_0,t_0v_0) < 0$.

O resultado segue considerando $e = (t_0u_0, t_0v_0)$.

$\square$

Aplicando o Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale (veja Apêndice, Teorema A.2.7), obtemos uma sequência $\{(u_n, v_n)\} \subset E$, satisfazendo

$$J(u_n, v_n) \to c_\lambda \text{ e } J'(u_n, v_n) \to 0, \text{ em } E^{-1}(\text{dual de } E), \tag{3.19}$$

quando $n \to +\infty$, em que

$$c_\lambda = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)),$$

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = (t_0u_0, t_0v_0)\}$$

e $(u_0, v_0) \in E$ é tal que $u_0, v_0 > 0$ em Ω.

Observação 3.5.3. *Desde que $\{(u_n, v_n)\} \subset E$, satisfaz $J(u_n, v_n) \to c_\lambda$ e $J'(u_n, v_n) \to 0$, em E^{-1}, quando $n \to +\infty$, temos $\{(u_n, v_n)\}$ limitada em E. De fato, usando (3.19), $(F3)$ e (3.6), obtemos*

$$\begin{aligned}
c_\lambda + o_n(1)\|(u_n, v_n)\| &\geq J(u_n, v_n) - J'(u_n, v_n) \cdot (\frac{1}{\xi_1}u_n, \frac{1}{\xi_2}v_n) \\
&\geq \frac{m_0}{p}\|u_n\|_A^p - \frac{1}{\xi_1}M_{t_1}(\|u_n\|_A^p)\|u_n\|_A^p \\
&\quad + \frac{m_0}{q}\|v_n\|_B^q - \frac{1}{\xi_2}M_{t_2}(\|v_n\|_B^q)\|v_n\|_B^q \\
&\quad + \left(\frac{\alpha}{\xi_1} + \frac{\gamma}{\xi_2} - 1\right)\int_\Omega |x|^{-\beta}|u_n|^\alpha|v_n|^\gamma dx \\
&\geq \left[\frac{m_0}{p} - \frac{1}{\xi_1}M_{t_1}(t_1)\right]\|u_n\|_A^p + \left[\frac{m_0}{q} - \frac{1}{\xi_2}M_{t_2}(t_2)\right]\|v_n\|_B^q.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Suponha, por contradição, que $\{(u_n, v_n)\}$ não seja limitada em E, isto é, a menos de uma subsequência, $\|(u_n, v_n)\| \to +\infty$, quando $n \to +\infty$. Como de (3.6) temos

$$\frac{m_0}{p} - \frac{1}{\xi_1}M_{t_1}(t_1) > 0 \quad e \quad \frac{m_0}{q} - \frac{1}{\xi_2}M_{t_2}(t_2) > 0,$$

fazendo $n \to +\infty$ em 3.20, obtemos uma contradição. Logo, $\{(u_n, v_n)\}$ é limitada em E.

Na Observação 3.5.3 não substituímos $p = q$ e $A = B$ propositalmente, pois esta observação também será útil na demonstração do Teorema 3.1.2.

Afim de obter o nível c_λ da sequência de Palais-Smale, obtida com o Teorema do Passo da Montanha, abaixo do valor dado pelo Lema 3.4.1, precisaremos fazer algumas estimativas utilizando funções extremais, tal como foi feito na Seção 1.4 do Capítulo 1.

Definimos o espaço

$$W^{1,p}_{a_1,b_1}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p^*}(\Omega, |x|^{-b_1 p^*}) : |\nabla u| \in L^p(\Omega, |x|^{-a_1 p}) \right\},$$

munido da norma

$$\|u\|_{W^{1,p}_{a_1,b_1}(\Omega)} = \|u\|_{p^*, b_1 p^*} + \|\nabla u\|_{p, a_1 p}.$$

Consideramos a melhor constante do tipo Caffarelli-Kohn-Nirenberg dada por

$$\tilde{S}_{a_1,p} = \inf_{u \in W^{1,p}_{a_1,b_1}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-a_1 p} |\nabla u|^p dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-b_1 p^*} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{p}{p^*}}} \right\}.$$

Também, definimos $R^{1,p}_{a_1,b_1}(\Omega)$ como sendo o subespaço de $W^{1,p}_{a_1,b_1}(\Omega)$ formado pelas funções radiais, mais precisamente

$$R^{1,p}_{a_1,b_1}(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,p}_{a_1,b_1}(\Omega) : u(x) = u(|x|) \right\},$$

com respeito à norma induzida

$$\|u\|_{R^{1,p}_{a_1,b_1}(\Omega)} = \|u\|_{W^{1,p}_{a_1,b_1}(\Omega)}.$$

Tal como visto no Capítulo 1,

$$\tilde{S}_{a_1,p,R} = \inf_{u \in R^{1,p}_{a_1,b_1}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-a_1 p} |\nabla u|^p dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-b_1 p^*} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{p}{p^*}}} \right\}$$

é atingida pelas funções da forma

$$u_\varepsilon(x) = k_{a_1,p}(\varepsilon)v_\varepsilon(x), \forall \varepsilon > 0,$$

em que

$$k_{a_1,p}(\varepsilon) = c\varepsilon^{(N-d_1p)/d_1p^2} \text{ e } v_\varepsilon(x) = \left(\varepsilon + |x|^{\frac{d_1p(N-p-a_1p)}{(p-1)(N-d_1p)}}\right)^{-\left(\frac{N-d_1p}{d_1p}\right)}.$$

Além do mais, u_ε satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-a_1p}|\nabla u_\varepsilon|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-b_1p^*}|u_\varepsilon|^{p^*} dx = (\tilde{S}_{a_1,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}}. \tag{3.21}$$

De (3.21) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-a_1p}|\nabla v_\varepsilon|^p dx = [k_{a_1,p}(\varepsilon)]^{-p}(\tilde{S}_{a_1,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} \tag{3.22}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-b_1p^*}|v_\varepsilon|^{p^*} dx = [k_{a_1,p}(\varepsilon)]^{-p^*}(\tilde{S}_{a_1,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}}. \tag{3.23}$$

Seja R_0 uma constante positiva e considere $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \Psi(x) \leq 1$, $\Psi(x) = 1$, para todo $|x| \leq R_0$ e $\Psi(x) = 0$, para todo $|x| \geq 2R_0$. Defina

$$\tilde{v}_\varepsilon(x) = \Psi(x)v_\varepsilon(x), \tag{3.24}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e para todo $\varepsilon > 0$. Sem perda de generalidade, podemos considerar $B(0; 2R_0) \subset \Omega$.

Lema 3.5.4.

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|_A^p}{\left(\int_\Omega |x|^{-b_1p^*}|\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*} dx\right)^{p/p^*}} = 0.$$

Demonstração. Afirmamos que

$$\|\tilde{v}_\varepsilon\|_A^p \leq [k_{a_1,p}(\varepsilon)]^{-p}(\tilde{S}_{a_1,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} + O(1) \tag{3.25}$$

e

$$\int_\Omega |x|^{-b_1 p^*}|\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*}dx = \varepsilon^{-\frac{N-d_1p}{d_1p}p^*}\cdot O(1), \quad \forall \varepsilon \in (0,1), \tag{3.26}$$

em que $O(1)$ denota uma constante positiva. Antes de demonstrarmos as estimativas (3.25) e (3.26), note que podemos escrever $v_\varepsilon(x) = (\varepsilon + |x|^{c_1})^{-\left(\frac{N-d_1p}{d_1p}\right)}$, em que $c_1 = \dfrac{d_1p(N-p-a_1p)}{(p-1)(N-d_1p)}$. Assim,

$$\begin{aligned} |v_\varepsilon(x)| &= \left(\frac{1}{\varepsilon + |x|^{c_1}}\right)^{\frac{N-d_1p}{d_1p}} \\ &\leq \frac{1}{|x|^{\frac{c_1(N-d_1p)}{d_1p}}} \\ &= \frac{1}{|x|^{\frac{N-p-a_1p}{p-1}}} \end{aligned} \tag{3.27}$$

e

$$\begin{aligned} |\nabla v_\varepsilon(x)| &= \left|\frac{-N+d_1p}{d_1p}\right| \frac{|c_1||x|^{c_1-1}}{|\varepsilon + |x|^{c_1}|^{N/d_1p}} \\ &\leq \left|\frac{-N+d_1p}{d_1p}\right| |c_1||x|^{\frac{-N+a_1p+1}{p-1}}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Agora, provaremos (3.25). Observe que

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}_\varepsilon\|_A^p &= \int_\Omega |x|^{-a_1p}|\nabla(\Psi v_\varepsilon)|^p dx \\ &= \int_{B(0;2R_0)} |x|^{-a_1p}|\nabla(\Psi v_\varepsilon)|^p dx \\ &= \int_{B(0;R_0)} |x|^{-a_1p}|\nabla v_\varepsilon|^p dx + \int_{B(0;2R_0)\backslash B(0;R_0)} |x|^{-a_1p}|\nabla(\Psi v_\varepsilon)|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-a_1p}|\nabla v_\varepsilon|^p dx + \int_{B(0;2R_0)\backslash B(0;R_0)} |x|^{-a_1p}|\nabla(\Psi v_\varepsilon)|^p dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N\backslash B(0;R_0)} |x|^{-a_1p}|\nabla v_\varepsilon|^p dx. \end{aligned}$$

Usando (3.22) obtemos

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{v}_\varepsilon\|_A^p &= [k_{a_1,p}(\varepsilon)]^{-p}(\tilde{S}_{a_1,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} + \int_{B(0;2R_0)\setminus B(0;R_0)} |x|^{-a_1p}|\nabla(\Psi v_\varepsilon)|^p dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0;R_0)} |x|^{-a_1p}|\nabla v_\varepsilon|^p dx \\
&= [k_{a_1,p}(\varepsilon)]^{-p}(\tilde{S}_{a_1,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} + \int_{B(0;2R_0)\setminus B(0;R_0)} |x|^{-a_1p}|\Psi\nabla v_\varepsilon + v_\varepsilon\nabla\Psi|^p dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0;2R_0)} |x|^{-a_1p}|\nabla v_\varepsilon|^p dx - \int_{B(0;2R_0)\setminus B(0;R_0)} |x|^{-a_1p}|\nabla v_\varepsilon|^p dx \\
&\leq [k_{a_1,p}(\varepsilon)]^{-p}(\tilde{S}_{a_1,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} + 2^{p-1}\int_{B(0;2R_0)\setminus B(0;R_0)} |x|^{-a_1p}(|\Psi|^p|\nabla v_\varepsilon|^p + |v_\varepsilon|^p|\nabla\Psi|^p) dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0;2R_0)} |x|^{-a_1p}|\nabla v_\varepsilon|^p dx - \int_{B(0;2R_0)\setminus B(0;R_0)} |x|^{-a_1p}|\nabla v_\varepsilon|^p dx \\
&\leq [k_{a_1,p}(\varepsilon)]^{-p}(\tilde{S}_{a_1,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} + (2^{p-1}-1)\int_{B(0;2R_0)\setminus B(0;R_0)} |x|^{-a_1p}|\nabla v_\varepsilon|^p dx \\
&\quad + 2^{p-1}\int_{B(0;2R_0)\setminus B(0;R_0)} |x|^{-a_1p}|v_\varepsilon|^p|\nabla\Psi|^p dx.
\end{aligned}
$$

Da escolha de $\Psi \in C_0^\infty$, existe $C > 0$ tal que $|\nabla\Psi|(x) \leq C$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Logo

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{v}_\varepsilon\|_A^p &\leq [k_{a_1,p}(\varepsilon)]^{-p}(\tilde{S}_{a_1,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} + (2^{p-1}-1)\int_{B(0;2R_0)\setminus B(0;R_0)} |x|^{-a_1p}|\nabla v_\varepsilon|^p dx \\
&\quad + 2^{p-1}C^p\int_{B(0;2R_0)\setminus B(0;R_0)} |x|^{-a_1p}|v_\varepsilon|^p dx.
\end{aligned} \tag{3.29}
$$

Substituindo (3.27) e (3.28) em (3.29), obtemos

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{v}_\varepsilon\|_A^p &\leq [k_{a_1,p}(\varepsilon)]^{-p}(\tilde{S}_{a_1,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} \\
&\quad + (2^{p-1}-1)\left|\frac{(-N+d_1p)c_1}{d_1p}\right|^p \int_{B(0;2R_0)\setminus B(0;R_0)} |x|^{-a_1p}|x|^{\frac{(-N+a_1p+1)p}{p-1}} dx \\
&\quad + 2^{p-1}C^p\int_{B(0;2R_0)\setminus B(0;R_0)} |x|^{-a_1p}|x|^{\frac{(-N+p+a_1p)p}{p-1}} dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= [k_{a_1,p}(\varepsilon)]^{-p}(\tilde{S}_{a_1,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} \\
&\quad + (2^{p-1}-1)\left|\frac{(-N+d_1p)c_1}{d_1p}\right|^p \int_{B(0;2R_0)\setminus B(0;R_0)} |x|^{\frac{(-N+a_1+1)p}{p-1}} dx \\
&\quad + 2^{p-1}C^p \int_{B(0;2R_0)\setminus B(0;R_0)} |x|^{\frac{(-N+a_1+p)p}{p-1}} dx \\
&\leq [k_{a_1,p}(\varepsilon)]^{-p}(\tilde{S}_{a_1,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} \\
&\quad + (2^{p-1}-1)\left|\frac{(-N+d_1p)c_1}{d_1p}\right|^p \int_{B(0;2R_0)\setminus B(0;R_0)} \left(\frac{1}{R_0}\right)^{\frac{(N-a_1-1)p}{p-1}} dx \\
&\quad + 2^{p-1}C^p \int_{B(0;2R_0)\setminus B(0;R_0)} \left(\frac{1}{R_0}\right)^{\frac{(N-a_1-p)p}{p-1}} dx \\
&= [k_{a_1,p}(\varepsilon)]^{-p}(\tilde{S}_{a_1,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} + C'(R_0),
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\|\tilde{v}_\varepsilon\|_A^p \leq [k_{a_1,p}(\varepsilon)]^{-p}(\tilde{S}_{a_1,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} + O(1),
$$

o que demonstra (3.25).

No que se segue, demonstraremos (3.26). Temos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |x|^{-b_1p^*}|\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*} dx &\geq \int_{B(0;R_0)} |x|^{-b_1p^*}|v_\varepsilon|^{p^*} dx \\
&\geq \int_{B(0;R_0)\setminus B(0;\frac{R_0}{2})} |x|^{-b_1p^*}\left(\frac{1}{\varepsilon+|x|^{c_1}}\right)^{\frac{(N-d_1p)p^*}{d_1p}} dx.
\end{aligned}
$$

Fazendo uma mudança de variáveis em coordenadas polares, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |x|^{-b_1p^*}|\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*} dx &\geq \omega_N \int_{\frac{R_0}{2}}^{R_0} r^{-b_1p^*}\left(\frac{1}{\varepsilon+r^{c_1}}\right)^{\frac{(N-d_1p)p^*}{d_1p}} r^{N-1} dr \\
&= \omega_N \int_{\frac{R_0}{2}}^{R_0} (\varepsilon r^{-c_1}+1)^{-\frac{(N-d_1p)p^*}{d_1p}} \cdot r^{-b_1p^*+N-1-c_1\frac{(N-d_1p)p^*}{d_1p}} dr \\
&\geq \omega_N \left(\varepsilon\left(\frac{R_0}{2}\right)^{-c_1}+1\right)^{-\frac{(N-d_1p)p^*}{d_1p}} \int_{\frac{R_0}{2}}^{R_0} r^{-b_1p^*+N-1-c_1\frac{(N-d_1p)p^*}{d_1p}} dr \\
&= \left(\varepsilon\left(\frac{R_0}{2}\right)^{-c_1}+1\right)^{-\frac{(N-d_1p)p^*}{d_1p}} \cdot C''(R_0).
\end{aligned}
$$

em que ω_N representa a medida da S^{N-1}. Assim, para $\varepsilon < 1$ temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |x|^{-b_1p^*}|\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*}dx &> \left(\left(\frac{R_0}{2}\right)^{-c_1}+1\right)^{-\frac{(N-d_1p)p^*}{d_1p}} \cdot C''(R_0) \\ &= \bar{C}'(R_0).\end{aligned} \tag{3.30}$$

Por outro lado, novamente fazendo uma mudança de variáveis em coordenadas polares, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |x|^{-b_1p^*}|\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*}dx &= \int_{B(0;2R_0)} |x|^{-b_1p^*}|\Psi v_\varepsilon|^{p^*}dx \\ &\le \int_{B(0;2R_0)} |x|^{-b_1p^*}|v_\varepsilon|^{p^*}dx \\ &= \int_{B(0;2R_0)} |x|^{-b_1p^*}\left(\frac{1}{\varepsilon+|x|^{c_1}}\right)^{\frac{(N-d_1p)p^*}{d_1p}}dx \\ &\le \varepsilon^{-\frac{(N-d_1p)p^*}{d_1p}}\int_{B(0;2R_0)} |x|^{-b_1p^*}dx \\ &= \varepsilon^{-\frac{(N-d_1p)p^*}{d_1p}}\omega_N\int_0^{2R_0} r^{-b_1p^*+N-1}dr \\ &= \bar{C}''(R_0)\cdot\varepsilon^{-\frac{(N-d_1p)p^*}{d_1p}},\end{aligned} \tag{3.31}$$

uma vez que $-b_1p^*+N-1>-1$.

Segue de (3.30) e (3.31) que

$$\bar{C}'(R_0) \le \int_\Omega |x|^{-b_1p^*}|\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*}dx \le \bar{C}''(R_0)\cdot\varepsilon^{-\frac{(N-d_1p)p^*}{d_1p}}.$$

Considere a função $f:\mathbb{R}^+\cup\{0\}\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ dada por $f(t)=t\cdot\varepsilon^{-\frac{(N-d_1p)p^*}{d_1p}}$. Desde que f é contínua e $f(0)<\int_\Omega |x|^{-b_1p^*}|\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*}dx \le f(\bar{C}''(R_0))$, segue do Teorema do Valor Médio que existe $\bar{t}>0$ tal que $f(\bar{t})=\int_\Omega |x|^{-b_1p^*}|\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*}dx$, isto é,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |x|^{-b_1p^*}|\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*}dx &= \bar{t}\cdot\varepsilon^{-\frac{(N-d_1p)p^*}{d_1p}} \\ &= \varepsilon^{-\frac{(N-d_1p)p^*}{d_1p}}\cdot O(1),\end{aligned}$$

para todo $\varepsilon\in(0,1)$, o que demonstra (3.26).

Finalmente, para todo $\varepsilon \in (0,1)$, de (3.25) e (3.26) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|_A^p}{\left(\int_\Omega |x|^{-b_1 p^*}|\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*}dx\right)^{p/p^*}} &\leq \frac{[k_{a_1,p}(\varepsilon)]^{-p}(\tilde{S}_{a_1,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}} + O(1)}{\left(\varepsilon^{-\frac{N-d_1p}{d_1p}p^*}\cdot O(1)\right)^{p/p^*}}\\
&= \frac{[k_{a_1,p}(\varepsilon)]^{-p}(\tilde{S}_{a_1,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}}\varepsilon^{\frac{N-d_1p}{d_1p}p} + O(1)\varepsilon^{\frac{N-d_1p}{d_1p}p}}{O(1)}\\
&= \frac{[c\varepsilon^{(N-d_1p)/d_1p^2}]^{-p}(\tilde{S}_{a_1,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}}\varepsilon^{\frac{N-d_1p}{d_1p}p} + O(1)\varepsilon^{\frac{N-d_1p}{d_1p}p}}{O(1)}\\
&= \frac{c^{-p}(\tilde{S}_{a_1,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}}\varepsilon^{\frac{-(N-d_1p)}{d_1p}+\frac{N-d_1p}{d_1p}p} + O(1)\varepsilon^{\frac{N-d_1p}{d_1p}p}}{O(1)}\\
&= \frac{c^{-p}(\tilde{S}_{a_1,p,R})^{\frac{p^*}{p^*-p}}\varepsilon^{\frac{N-d_1p}{d_1p}(p-1)} + O(1)\varepsilon^{\frac{N-d_1p}{d_1p}p}}{O(1)}.
\end{aligned}$$

Uma vez que $p > 1$, temos

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|_A^p}{\left(\int_\Omega |x|^{-b_1 p^*}|\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*}dx\right)^{p/p^*}} = 0.$$

$\square$

Lema 3.5.5. *Suponha* $(M1)$, $(M2)$, $(F1)$, $(F2)$ *e* $p = q$. *Defina*

$$l^* = \min\left\{\left(\frac{1}{p}m_0 - \frac{1}{\xi_1}M_1(t_1)\right)t_1, \left(\frac{1}{p}m_0 - \frac{1}{\xi_1}M_2(t_2)\right)t_2,\right.$$
$$\left.\left(\frac{\alpha}{\xi_1}+\frac{\gamma}{\xi_2}-1\right)\frac{m_0}{p^*}\left(\frac{m_0}{2p^*C}\right)^{\frac{p}{p^*-p}}\right\}.$$

Então, existe $\varepsilon_1 \in (0,1)$ *tal que*

$$\sup_{t\geq 0} J(t(\tilde{v}_\varepsilon, \tilde{v}_\varepsilon)) < l^*,$$

para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_1$.

Demonstração. Sejam $0 < \varepsilon < 1$ e $\tilde{v}_\varepsilon$ como em (3.24). Desde que dos Lemas 3.5.1 e 3.5.2, o funcional J satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha, existe $t_\varepsilon > 0$

tal que

$$\sup_{t\geq 0} J(t(\tilde{v}_\varepsilon,\tilde{v}_\varepsilon)) = J(t_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon,\tilde{v}_\varepsilon)).$$

Como $p=q$, temos

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq 0} J(t(\tilde{v}_\varepsilon,\tilde{v}_\varepsilon)) &= \frac{1}{p}\widehat{M}_{t_1}(\|t_\varepsilon\tilde{v}_\varepsilon\|_A^p) + \frac{1}{p}\widehat{M}_{t_2}(\|t_\varepsilon\tilde{v}_\varepsilon\|_A^p)\\ &\quad - \lambda\int_\Omega |x|^{-c}F(x,t_\varepsilon\tilde{v}_\varepsilon,t_\varepsilon\tilde{v}_\varepsilon)dx - \int_\Omega |x|^{-\beta}t_\varepsilon^{p^*}|\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*}dx\\ &\leq \frac{\xi_1+\xi_2}{p^2}m_0 t_\varepsilon^p\|\tilde{v}_\varepsilon\|_A^p - t_\varepsilon^{p^*}\int_\Omega |x|^{-\beta}|\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*}dx.\end{aligned}$$

Agora, considere a função $g:\mathbb{R}^+\cup\{0\}\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$, definida por

$$g(s) = \left(\frac{\xi_1+\xi_2}{p^2}m_0\|\tilde{v}_\varepsilon\|_A^p\right)s^p - \left(\int_\Omega |x|^{-\beta}|\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*}dx\right)s^{p^*}.$$

É fácil ver que $\bar{s} = \left(\dfrac{\frac{\xi_1+\xi_2}{p}m_0\|\tilde{v}_\varepsilon\|_A^p}{p^*\int_\Omega |x|^{-\beta}|\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*}dx}\right)^{\frac{1}{p^*-p}}$ é um máximo global de g e que

$$\begin{aligned}g(\bar{s}) &= \left(\frac{\xi_1+\xi_2}{p^2}m_0\|\tilde{v}_\varepsilon\|_A^p\right)\left(\frac{\frac{\xi_1+\xi_2}{p}m_0\|\tilde{v}_\varepsilon\|_A^p}{p^*\int_\Omega |x|^{-\beta}|\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*}dx}\right)^{\frac{p}{p^*-p}}\\ &\quad - \left(\int_\Omega |x|^{-\beta}|\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*}dx\right)\left(\frac{\frac{\xi_1+\xi_2}{p}m_0\|\tilde{v}_\varepsilon\|_A^p}{p^*\int_\Omega |x|^{-\beta}|\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*}dx}\right)^{\frac{p^*}{p^*-p}}\\ &= \left(\frac{\xi_1+\xi_2}{p^2}m_0\right)\left(\frac{\frac{\xi_1+\xi_2}{p}m_0}{p^*}\right)^{\frac{p}{p^*-p}}\frac{(\|\tilde{v}_\varepsilon\|_A^p)^{\frac{p^*}{p^*-p}}}{\left(\int_\Omega |x|^{-\beta}|\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*-p}}}\\ &\quad - \left(\frac{\frac{\xi_1+\xi_2}{p}m_0}{p^*}\right)^{\frac{p^*}{p^*-p}}\frac{(\|\tilde{v}_\varepsilon\|_A^p)^{\frac{p^*}{p^*-p}}}{\left(\int_\Omega |x|^{-\beta}|\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*-p}}}\\ &= \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)\frac{\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{p}m_0\right)^{\frac{p^*}{p^*-p}}}{(p^*)^{\frac{p}{p^*-p}}}\left(\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|_A^p}{\left(\int_\Omega |x|^{-\beta}|\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*}dx\right)^{p/p^*}}\right)^{\frac{p^*}{p^*-p}}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\sup_{t\geq 0} J(t(\tilde{v}_\varepsilon, \tilde{v}_\varepsilon)) \leq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right) \frac{\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{p} m_0\right)^{\frac{p^*}{p^*-p}}}{(p^*)^{\frac{p}{p^*-p}}} \left(\frac{\|\tilde{v}_\varepsilon\|_A^p}{\left(\int_\Omega |x|^{-\beta} |\tilde{v}_\varepsilon|^{p^*} dx\right)^{p/p^*}}\right)^{\frac{p^*}{p^*-p}}.$$

Segue do Lema 3.5.4 qu existe $0 < \varepsilon_1 < 1$ tal que

$$\sup_{t\geq 0} J(t(\tilde{v}_\varepsilon, \tilde{v}_\varepsilon)) < l^*,$$

para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_1$. □

Observação 3.5.6. *Considere o caminho* $\gamma_*(t) = t(t_0\tilde{v}_{\varepsilon_1}, t_0\tilde{v}_{\varepsilon_1})$, *para* $t \in [0, 1]$, *o qual pertence* Γ. *Segue do Lema 3.5.5 a seguinte estimativa*

$$\begin{aligned} 0 < c_\lambda &= \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) \\ &\leq \sup_{s\geq 0} J(s(\tilde{v}_{\varepsilon_1}, \tilde{v}_{\varepsilon_1})) \\ &< l^*. \end{aligned}$$

O próximo lema será útil para demonstrar que uma solução do problema (3.7) é, também, uma solução para o problema (3.1).

Lema 3.5.7. *Suponha que sejam válidas* $(M1)$, $(M2)$, $(F2)$, $(F3)$ *e que* $p = q$. *Seja* $\{(u_n, v_n)\} \subset E$ *uma sequência tal que*

$$J(u_n, v_n) \to c_\lambda \text{ e } J'(u_n, v_n) \to 0, \tag{3.32}$$

quando $n \to +\infty$. *Então, existe uma subsequência de* $\{(u_n, v_n)\}$, *digamos* $\{(u_{n_k}, v_{n_k})\}$, *tal que*

$$\|u_{n_k}\|_A^p \leq t_1 \text{ e } \|v_{n_k}\|_A^p \leq t_2,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Suponha que para uma infinidade de índices $n \in \mathbb{N}$, tem-se $\|u_n\|_A^p > t_1$

ou $\|v_n\|_A^p > t_2$. Sem perda de generalidade suponha $\|u_n\|_A^p > t_1$, para uma infinidade de índices $n \in \mathbb{N}$. Considere a subsequência (u_{n_k}) de (u_n) formada por tais índices. Dessa forma, $\|u_{n_k}\|_A^p > t_1$, para todo $k \in \mathbb{N}$. De (3.32) e da Observação 3.5.3, temos que $\{(u_{n_k}, v_{n_k})\}$ é limitada em E. Portanto,

$$|J'(u_{n_k}, v_{n_k}) \cdot (u_{n_k}, v_{n_k})| \leq |J'(u_{n_k}, v_{n_k})| \cdot \|(u_{n_k}, v_{n_k})\| \to 0,$$

quando $k \to +\infty$, o que implica

$$\begin{aligned}
c_\lambda &= J(u_{n_k}, v_{n_k}) - J'(u_{n_k}, v_{n_k}) \cdot (\frac{1}{\xi_1} u_{n_k}, \frac{1}{\xi_2} v_{n_k}) + o_k(1) \\
&\geq \frac{m_0}{p}\|u_{n_k}\|_A^p - \frac{1}{\xi_1} M_{t_1}(\|u_{n_k}\|_A^p)\|u_{n_k}\|_A^p + \frac{m_0}{p}\|v_{n_k}\|_A^p - \frac{1}{\xi_2} M_{t_2}(\|v_{n_k}\|_A^p)\|v_{n_k}\|_A^p \\
&\quad + \left(\frac{\alpha}{\xi_1} + \frac{\gamma}{\xi_2} - 1\right) \int_\Omega |x|^{-\beta} |u_{n_k}|^\alpha |v_{n_k}|^\gamma dx + o_k(1) \\
&\geq \left[\frac{m_0}{p} - \frac{1}{\xi_1} M_{t_1}(\|u_{n_k}\|_A^p)\right] \|u_{n_k}\|_A^p + \left[\frac{m_0}{p} - \frac{1}{\xi_2} M_{t_2}(\|v_{n_k}\|_A^p)\right] \|v_{n_k}\|_A^p + o_n(1).
\end{aligned}$$

Como M_{t_2} é crescente, de (3.6), obtemos

$$M_{t_2}(\|v_{n_k}\|_A^p) \leq M_{t_2}(t_2) < \frac{\xi_2}{p} m_0,$$

o que implica

$$\frac{1}{p} m_0 - \frac{1}{\xi_2} M_{t_2}(\|v_{n_k}\|_A^p) > 0.$$

Além disso, uma vez que $\|u_{n_k}\|^p > t_1$, temos $M_{t_1}(\|u_{n_k}\|_A^p) = M_{t_1}(t_1)$. Logo,

$$\begin{aligned}
c_\lambda &\geq \left[\frac{m_0}{p} - \frac{1}{\xi_1} M_{t_1}(\|u_{n_k}\|_A^p)\right] \|u_{n_k}\|_A^p + \left[\frac{m_0}{p} - \frac{1}{\xi_2} M_{t_2}(\|v_{n_k}\|_A^p)\right] \|v_{n_k}\|_A^p + o_k(1) \\
&\geq \left[\frac{m_0}{p} - \frac{1}{\xi_1} M_{t_1}(\|u_{n_k}\|_A^p)\right] \|u_{n_k}\|_A^p + o_k(1) \\
&> \left[\frac{m_0}{p} - \frac{1}{\xi_1} M_{t_1}(t_1)\right] t_1 + o_k(1).
\end{aligned}$$

Passando ao limite quando $k \to +\infty$, obtemos

$$c_\lambda \geq \left[\frac{m_0}{p} - \frac{1}{\xi_1} M_{t_1}(t_1)\right] t_1, \forall \lambda > 0,$$

o que contradiz a Observação 3.5.6. Portanto, só podemos ter $\|u_n\|^p > t_0$ para uma quantidade finita de índices $n \in \mathbb{N}$. Excluindo-se tais índices, podemos considerar a subsequência (u_{n_k}), de (u_n), tal que $\|u_{n_k}\|_A^p \leq t_0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. O mesmo ocorre se supormos $\|v_n\|_A^p > t_2$. Isso conclui a demonstração.

□

3.5.1 Conclusão da demonstração do Teorema 3.1.1

Seja $\lambda > 0$. Segue da Observação 3.5.6 que

$$c_\lambda < \left(\frac{\alpha}{\xi_1} + \frac{\gamma}{\xi_2} - 1\right) \frac{m_0}{p^*} \left(\frac{m_0}{2p^* C}\right)^{\frac{p}{p^*-p}}. \tag{3.33}$$

Dos Lemas 3.5.1, 3.5.2 e da Observação 3.5.3, existe uma sequência limitada $\{(u_n, v_n)\} \subset E$, tal que $J(u_n, v_n) \to c_\lambda$ e $J'(u_n, v_n) \to 0$ em E^{-1}, quando $n \to \infty$. Desde que (3.33) ocorre e $p = q$, segue do Lema 3.4.1 que, a menos de uma subsequência, $(u_n, v_n) \to (u, v)$ fortemente em E. Logo (u, v) é uma solução fraca para o problema (3.7), para todo $\lambda > 0$. Além do mais, pelo Lema 3.5.7, podemos concluir que (u, v) é uma solução fraca para o problema (3.1), para todo $\lambda > 0$.

□

3.6 Demonstração do Teorema 3.1.2

Nessa seção, demonstraremos o Teorema 3.1.2. Aqui p pode ser diferente de q. Devido a isso, não podemos garantir um resultado de existência de soluções para todo $\lambda > 0$.

Nos próximos dois lemas, demonstramos que o funcional J satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha. Antes de demonstrá-los, observe que, como $\frac{\theta}{p}+\frac{\delta}{q}>1$ e $\frac{\theta}{p^*}+\frac{\delta}{q^*}<1$, existem $p_0\in(p,p^*)$ e $q_0\in(q,q^*)$ tais que $\frac{\theta}{p_0}+\frac{\delta}{q_0}=1$. Segue da desigualdade de Young que

$$|u|^{\theta}|v|^{\delta}\leq\frac{\theta}{p_0}|u|^{p_0}+\frac{\delta}{q_0}|v|^{q_0} \tag{3.34}$$

e

$$|u|^{\alpha}|v|^{\gamma}\leq\frac{\alpha}{p^*}|u|^{p^*}+\frac{\gamma}{q^*}|v|^{q^*}. \tag{3.35}$$

Lema 3.6.1. *Suponha que as condições $(M1)$, $(M2)$, $(F1)$ e $(F2)$ sejam válidas. Então, existem números reais positivos ρ e ζ tais que*

$$J(u,v)\geq\zeta>0, \forall(u,v)\in E \text{ com } \|(u,v)\|=\rho.$$

Demonstração. Seja $(u,v)\in E$ tal que $\|(u,v)\|\leq1$. De $(M1)$, $(F1)$, $(F2)$, (3.34), (3.35) e (1.4), obtemos

$$\begin{aligned}
J(u,v) &= \frac{1}{p}\widehat{M}_{t_1}(\|u\|_A^p)+\frac{1}{q}\widehat{M}_{t_2}(\|v\|_B^q)-\lambda\int_\Omega|x|^{-c}F(x,u,v)dx\\
&\quad-\int_\Omega|x|^{-\beta}|u|^{\alpha}|v|^{\gamma}dx\\
&\geq\frac{m_0}{p}\|u\|_A^p+\frac{m_0}{q}\|v\|_B^q-\lambda C_2\int_\Omega|x|^{-c}|u|^{\theta}|v|^{\gamma}dx-\int_\Omega|x|^{-\beta}|u|^{\alpha}|v|^{\gamma}dx\\
&\geq\frac{m_0}{p}\|u\|_A^p+\frac{m_0}{q}\|v\|_B^q-\lambda\frac{\theta C_2}{p_0}\int_\Omega|x|^{-c}|u|^{p_0}dx-\lambda\frac{\delta C_2}{q_0}\int_\Omega|x|^{-c}|v|^{q_0}dx\\
&\quad-\frac{\alpha}{p^*}\int_\Omega|x|^{-\beta}|u|^{p^*}dx-\frac{\gamma}{q^*}\int_\Omega|x|^{-\beta}|v|^{q^*}dx\\
&\geq\frac{m_0}{p}\|u\|_A^p+\frac{m_0}{q}\|v\|_B^q-\lambda\tilde{C}_2\|u\|_A^{p_0}-\lambda\hat{C}_2\|v\|_B^{q_0}-\frac{\alpha}{p^*}\tilde{C}\|u\|_A^{p^*}-\frac{\gamma}{q^*}\tilde{C}\|v\|_B^{q^*}\\
&\geq\left(\frac{m_0}{p}\|u\|_A^p-\left(\lambda\tilde{C}_2+\frac{\alpha}{p^*}\tilde{C}\right)\|u\|_A^{p_0}\right)+\left(\frac{m_0}{q}\|v\|_B^q-\left(\lambda\hat{C}_2+\frac{\gamma}{q^*}\tilde{C}\right)\|v\|_B^{q_0}\right).
\end{aligned}$$

Desde que $p<p_0$ e $q<q_0$, tomando $\rho\in(0,1)$ suficientemente pequeno, existe $\zeta>0$ tal que $J(u,v)\geq\zeta>0$, para todo $(u,v)\in E$ com $\|(u,v)\|=\rho$.

□

Lema 3.6.2. *Suponha que as condições* $(M1)$, $(M2)$, $(F1)$ *e* $(F2)$ *sejam válidas. Então, para todo* $\lambda > 0$, *existe* $e \in E$, *com* $J(e) < 0$ *e* $\|e\| > \rho$.

Demonstração. Fixe $(u_0, v_0) \in E$ com $u_0, v_0 > 0$ em Ω e $\|(u_0, v_0)\| = 1$. Usando (3.6) e $(F2)$, obtemos

$$\begin{aligned} J(t^{1/p}u_0, t^{1/q}v_0) &= \frac{1}{p}\widehat{M}_{t_1}(\|t^{1/p}u_0\|_A^p) + \frac{1}{q}\widehat{M}_{t_2}(\|t^{1/q}v_0\|_B^q) \\ &\quad - \lambda \int_\Omega |x|^{-c} F(x, t^{1/p}u_0, t^{1/q}v_0)dx \\ &\quad - \int_\Omega |x|^{-\beta} t^{\frac{\alpha}{p}+\frac{\gamma}{q}} u_0^\alpha v_0^\gamma dx \\ &\leq \frac{\xi_1}{p} m_0 t \|u_0\|_A^p + \frac{\xi_2}{q} m_0 t \|v_0\|_B^q - \lambda C_1 t^{\frac{\theta}{p}+\frac{\delta}{q}} \int_\Omega |x|^{-c} u_0^\theta v_0^\delta dx. \end{aligned}$$

Desde que $\frac{\theta}{p} + \frac{\delta}{q} > 1$, temos

$$\lim_{t \to \infty} J(t^{1/p}u_0, t^{1/q}v_0) = -\infty.$$

Assim, existe $t_0 > \max\{\rho^p, \rho^q\}$ suficientemente grande, tal que $J(t_0^{\frac{1}{p}}u_0, t_0^{\frac{1}{q}}v_0) < 0$. O resultado segue considerando $e = (t_0^{\frac{1}{p}}u_0, t_0^{\frac{1}{q}}v_0)$.

□

Aplicando o teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale (veja Apêndice, Teorema A.2.7), obtemos uma sequência $\{(u_n, v_n)\} \subset E$, satisfazendo

$$J(u_n, v_n) \to c_\lambda \text{ e } J'(u_n, v_n) \to 0, \text{ em } E^{-1}(\text{dual de } E),$$

quando $n \to +\infty$, em que

$$c_\lambda = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)),$$

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$$

e $e = (t_0^{\frac{1}{p}}u_0, t_0^{\frac{1}{q}}v_0)$ é como no Lema 3.6.2.

O próximo lema é extremamente importante para estimar o nível c_λ da sequência $(P.S)_{c_\lambda}$, obtida pelo Teorema do Passo da Montanha, abaixo do valor dado pelo Lema 3.4.1.

Lema 3.6.3. *Se $(M1)$, $(M2)$ $(F1)$ e $(F2)$ valem, então*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} c_\lambda = 0.$$

Demonstração. Denote $\bar{u}_0 = t_0^{1/p}u_0$ e $\bar{v}_0 = t_0^{1/q}v_0$, em que (u_0, v_0) é dado no Lema 3.6.2. Desde que o funcional J satisfaz a geometria do Passo da Montanha, existe $t_\lambda > 0$ tal que $J(t_\lambda^{\frac{1}{p}}\bar{u}_0, t_\lambda^{\frac{1}{q}}\bar{v}_0) = \max_{t\geq 0} J(t^{\frac{1}{p}}\bar{u}_0, t^{\frac{1}{q}}\bar{v}_0)$. Além disso, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\left(J(t^{\frac{1}{p}}\bar{u}_0, t^{\frac{1}{q}}\bar{v}_0)\right)\Big|_{t=t_\lambda}\\
&= J'(t_\lambda^{\frac{1}{p}}\bar{u}_0, t_\lambda^{\frac{1}{q}}\bar{v}_0)(\frac{1}{p}t_\lambda^{\frac{1}{p}-1}\bar{u}_0, \frac{1}{q}t_\lambda^{\frac{1}{q}-1}\bar{v}_0),
\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
0 &= t_\lambda J'(t_\lambda^{\frac{1}{p}}\bar{u}_0, t_\lambda^{\frac{1}{q}}\bar{v}_0)(\frac{1}{p}t_\lambda^{\frac{1}{p}-1}\bar{u}_0, \frac{1}{q}t_\lambda^{\frac{1}{q}-1}\bar{v}_0)\\
&= J'(t_\lambda^{\frac{1}{p}}\bar{u}_0, t_\lambda^{\frac{1}{q}}\bar{v}_0)(\frac{1}{p}t_\lambda^{\frac{1}{p}}\bar{u}_0, \frac{1}{q}t_\lambda^{\frac{1}{q}}\bar{v}_0).
\end{aligned}$$

Usando (3.6) e $(F2)$, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= J'(t_\lambda^{\frac{1}{p}}\bar{u}_0, t_\lambda^{\frac{1}{q}}\bar{v}_0)(\frac{1}{p}t_\lambda^{\frac{1}{p}}\bar{u}_0, \frac{1}{q}t_\lambda^{\frac{1}{q}}\bar{v}_0)\\
&\leq \frac{\xi_1}{p^2}m_0 t_\lambda\|\bar{u}_0\|_A^p + \frac{\xi_2}{q^2}m_0 t_\lambda\|\bar{v}_0\|_B^q - \lambda\bar{C}t_\lambda^{\frac{\theta}{p}+\frac{\delta}{q}}\int_\Omega |x|^{-c}\bar{u}_0^\theta\bar{v}_0^\delta dx\\
&\quad - (\alpha+\gamma)t_\lambda^{\frac{\alpha}{p}+\frac{\gamma}{q}}\int_\Omega |x|^{-\beta}\bar{u}_0^\alpha\bar{v}_0^\gamma dx.
\end{aligned}$$

Lembrando que $\bar{u}_0 = t_0^{1/p}u_0$ e $\bar{v}_0 = t_0^{1/q}v_0$, considere $C_0 = \max\{t_0^{1/p}, t_0^{1/q}\}$. Uma vez que $\|(u_0, v_0)\| = 1$, temos $\|u_0\|_A^p, \|v_0\|_B^q \leq 1$ e, assim,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\xi_1}{p^2} + \frac{\xi_2}{q^2}\right)C_0 m_0 t_\lambda &\geq \lambda\bar{C}t_\lambda^{\frac{\theta}{p}+\frac{\delta}{q}}\int_\Omega |x|^{-c}\bar{u}_0^\theta\bar{v}_0^\delta dx + (\alpha+\gamma)t_\lambda^{\frac{\alpha}{p}+\frac{\gamma}{q}}\int_\Omega |x|^{-\beta}\bar{u}_0^\alpha\bar{v}_0^\gamma dx\\
&\geq (\alpha+\gamma)t_\lambda^{\frac{\alpha}{p}+\frac{\gamma}{q}}\int_\Omega |x|^{-\beta}\bar{u}_0^\alpha\bar{v}_0^\gamma dx.
\end{aligned}$$

Como $\frac{\alpha}{p} + \frac{\gamma}{q} > \frac{\alpha}{p^*} + \frac{\gamma}{q^*} = 1$, temos que $\{t_\lambda\}$ é uma sequência limitada. Logo, existem uma sequência $\{\lambda_n\}$ e $\beta_0 \geq 0$ tais que $\lambda_n \to +\infty$ e $t_{\lambda_n} \to \beta_0$, quando $n \to \infty$. Consequentemente, existe $D > 0$ tal que

$$\left(\frac{\xi_1}{p^2} + \frac{\xi_2}{q^2}\right) C_0 m_0 t_{\lambda_n} \leq D,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\lambda_n \bar{C} t_{\lambda_n}^{\frac{\theta}{p}+\frac{\delta}{q}} \int_\Omega |x|^{-c} \bar{u}_0^\theta \bar{v}_0^\delta dx + (\alpha+\gamma) t_{\lambda_n}^{\frac{\alpha}{p}+\frac{\gamma}{q}} \int_\Omega |x|^{-\beta} \bar{u}_0^\alpha \bar{v}_0^\gamma dx \leq D, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.36}$$

Se $\beta_0 > 0$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \left[\lambda_n \bar{C} t_{\lambda_n}^{\frac{\theta}{p}+\frac{\delta}{q}} \int_\Omega |x|^{-c} \bar{u}_0^\theta \bar{v}_0^\delta dx + (\alpha+\gamma) t_{\lambda_n}^{\frac{\alpha}{p}+\frac{\gamma}{q}} \int_\Omega |x|^{-\beta} \bar{u}_0^\alpha \bar{v}_0^\gamma dx\right] = +\infty,$$

o que contradiz (3.36). Concluímos que $\beta_0 = 0$. Agora, considere o caminho $\gamma_*(t) = \left(t^{\frac{1}{p}} \bar{u}_0, t^{\frac{1}{q}} \bar{v}_0\right)$, para $t \in [0,1]$, o qual pertence à Γ. Obtemos, então, a seguinte estimativa

$$0 < c_\lambda \leq \max_{t\in[0,1]} J(\gamma_*(t)) = J(t_\lambda^{\frac{1}{p}} \bar{u}_0, t_\lambda^{\frac{1}{q}} \bar{v}_0) \leq \left(\frac{\xi_1}{p^2} + \frac{\xi_2}{q^2}\right) C_0 m_0 t_\lambda.$$

Uma vez que $t_{\lambda_n} \to 0$, quando $n \to +\infty$, temos

$$\lim_{n\to+\infty} c_{\lambda_n} = 0,$$

ou seja, $\{c_\lambda\}$ possui uma subsequência convergente. Observando que F é par e $\{c_\lambda\}$ é uma sequência monótona, concluímos que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} c_\lambda = 0.$$

$\square$

Observação 3.6.4. *Devido ao Lema 3.6.3, existem* $\lambda_1 > 0$ *e* $\lambda_2 > 0$ *tais que*

$$c_\lambda < \left(\frac{1}{p}m_0 - \frac{1}{\xi_1}M_1(t_1)\right)t_1,$$

para cada $\lambda > \lambda_1$ *e*

$$c_\lambda < \left(\frac{1}{q}m_0 - \frac{1}{\xi_2}M_2(t_2)\right)t_2,$$

para cada $\lambda > \lambda_2$.

O próximo lema garante que uma solução para o problema (3.7) será, ainda, uma solução para o problema (3.1).

Lema 3.6.5. *Suponha que* $\lambda > \lambda_3 = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$ *e que* $(M1)$, $(M2)$, $(F2)$ *e* $(F3)$ *sejam válidas. Seja* $\{(u_n, v_n)\} \subset E$ *uma sequência tal que*

$$J(u_n, v_n) \to c_\lambda \ e \ J'(u_n, v_n) \to 0, \tag{3.37}$$

quando $n \to +\infty$. *Então, existe uma subsequência de* $\{(u_n, v_n)\}$, *digamos* $\{(u_{n_k}, v_{n_k})\}$, *tal que*

$$\|u_{n_k}\|_A^p \leq t_1 \ e \ \|v_{n_k}\|_B^q \leq t_2,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Suponha que para uma infinidade de índices $n \in \mathbb{N}$, tem-se $\|u_n\|_A^p > t_1$ ou $\|v_n\|_B^q > t_2$. Sem perda de generalidade suponha $\|u_n\|_A^p > t_1$, para uma infinidade de índices $n \in \mathbb{N}$. Considere a subsequência (u_{n_k}) de (u_n) formada por tais índices. Dessa forma, $\|u_{n_k}\|_A^p > t_1$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Segue de (3.37) e da Observação 3.5.3 que $\{(u_{n_k}, v_{n_k})\}$ é limitada em E. Assim,

$$|J'(u_{n_k}, v_{n_k}) \cdot (u_{n_k}, v_{n_k})| \leq |J'(u_{n_k}, v_{n_k})| \cdot \|(u_{n_k}, v_{n_k})\| \to 0,$$

quando $k \to +\infty$. Mas isso implica que

$$
\begin{aligned}
c_\lambda &= J(u_{n_k}, v_{n_k}) - J'(u_{n_k}, v_{n_k}) \cdot (\frac{1}{\xi_1} u_{n_k}, \frac{1}{\xi_2} v_{n_k}) + o_k(1)\\
&\geq \frac{m_0}{p} \|u_{n_k}\|_A^p - \frac{1}{\xi_1} M_{t_1}(\|u_{n_k}\|_A^p) \|u_{n_k}\|_A^p + \frac{m_0}{q} \|v_{n_k}\|_B^q - \frac{1}{\xi_2} M_{t_2}(\|v_{n_k}\|_B^q) \|v_{n_k}\|_B^q\\
&\quad + \left(\frac{\alpha}{\xi_1} + \frac{\gamma}{\xi_2} - 1 \right) \int_\Omega |x|^{-\beta} |u_{n_k}|^\alpha |v_{n_k}|^\gamma dx + o_k(1)\\
&\geq \left[\frac{m_0}{p} - \frac{1}{\xi_1} M_{t_1}(\|u_{n_k}\|_A^p) \right] \|u_{n_k}\|_A^p + \left[\frac{m_0}{q} - \frac{1}{\xi_2} M_{t_2}(\|v_{n_k}\|_B^q) \right] \|v_{n_k}\|_B^q + o_k(1).
\end{aligned}
$$

Desde que M_{t_2} é crescente, segue de (3.6) que

$$
M_{t_2}(\|v_{n_k}\|_B^q) \leq M_{t_2}(t_2) < \frac{\xi_2}{q} m_0.
$$

Logo,

$$
\frac{1}{q} m_0 - \frac{1}{\xi_2} M_{t_2}(\|v_{n_k}\|_B^q) > 0.
$$

Além do mais, como $\|u_{n_k}\|^p > t_1$, temos $M_{t_1}(\|u_{n_k}\|_A^p) = M_{t_1}(t_1)$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
c_\lambda &\geq \left[\frac{m_0}{p} - \frac{1}{\xi_1} M_{t_1}(\|u_{n_k}\|_A^p) \right] \|u_{n_k}\|_A^p + \left[\frac{m_0}{q} - \frac{1}{\xi_2} M_{t_2}(\|v_{n_k}\|_B^q) \right] \|v_{kn}\|_B^q + o_k(1)\\
&\geq \left[\frac{m_0}{p} - \frac{1}{\xi_1} M_{t_1}(\|u_{n_k}\|_A^p) \right] \|u_{n_k}\|_A^p + o_k(1)\\
&> \left[\frac{m_0}{p} - \frac{1}{\xi_1} M_{t_1}(t_1) \right] t_1 + o_k(1).
\end{aligned}
$$

Passando ao limite, quando $k \to +\infty$, obtemos

$$
c_\lambda > \left[\frac{m_0}{p} - \frac{1}{\xi_1} M_{t_1}(t_1) \right] t_1,
$$

para todo $\lambda > \lambda_3$, o que contradiz a Observação 3.6.4. Portanto, só podemos ter $\|u_n\|^p > t_0$ para uma quantidade finita de índices $n \in \mathbb{N}$. Excluindo-se tais índices, podemos considerar a subsequência (u_{n_k}), de (u_n), tal que $\|u_{n_k}\|_A^p \leq t_0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. O mesmo ocorre se supormos $\|v_{n_k}\|_B^q > t_2$. Isso conclui a demonstração.

$\square$

3.6.1 Conclusão da demonstração do Teorema 3.1.2

Segue do Lema 3.6.3 que existe $\lambda_4 > 0$ tal que

$$c_\lambda < \left(\frac{\alpha}{\xi_1} + \frac{\gamma}{\xi_2} - 1 \right) \frac{m_0}{\alpha + \gamma} K_{p,q}, \tag{3.38}$$

para todo $\lambda > \lambda_4$. Tome $\lambda^* = \max\{\lambda_3, \lambda_4\}$. Seja $\lambda \geq \lambda^*$. Dos Lemas 3.6.1, 3.6.2 e da Observação 3.5.3, existe uma sequência limitada $\{(u_n, v_n)\} \subset E$, tal que $J(u_n, v_n) \to c_\lambda$ e $J'(u_n, v_n) \to 0$ em E^{-1}, quando $n \to \infty$. Desde que (3.38) ocorre, segue do Lema 3.4.1 que, a menos de uma subsequência, $(u_n, v_n) \to (u, v)$ fortemente em E. Logo, (u, v) é uma solução fraca para o problema (3.7), para todo $\lambda \geq \lambda^*$. Além do mais, pelo Lema 3.6.5 podemos concluir que (u, v) é uma solução fraca para o problema (3.1), para todo $\lambda \geq \lambda^*$.

$\square$

Capítulo

4

Equações do tipo Kirchhoff com condição de fronteira não-linear

4.1 Indrodução

Nesse capítulo, estudaremos a existência de soluções para o problema envolvendo um operador do tipo Kirchhoff e uma condição de fronteira não-linear:

$$\begin{cases} L(u) &= f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ \\ |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \eta} &= g(x,u) \ \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

em que

$$L(u) = -\left[M\left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \int_\Omega c(x)|u|^p dx\right)\right] \cdot [div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) + c(x)|u|^{p-2}u],$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, é um domínio limitado, com fronteira $\partial\Omega$ de classe $C^{0,1}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \eta \cdot \nabla$ é a derivada normal (unitária) exterior a $\partial\Omega$ e $p > 1$. $M : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+$ é uma função contínua satisfazendo:

(M1) existe $m_0 > 0$, tal que

$$M(t) \geq m_0, \ \forall t > 0.$$

Também, $c : \Omega \to \mathbb{R}$ satisfaz:

(C1) $c \in L^\infty(\Omega)$, $c \geq 0$ q.t.p. em Ω e $\int_\Omega c(x)dx > 0$.

As não-linearidades $f, g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas e satisfazem:

(F1) existem constantes $b_1, b_2 > 0$ tais que

$$|f(x,u)| \leq b_1 + b_2|u|^r, \forall (x,u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R},$$

com $0 < r < p_*(N) - 1$, em que

$$p_*(N) = \begin{cases} \frac{Np}{N-p}, & \text{se } p < N, \\ +\infty, & \text{se } p \geq N. \end{cases}$$

(F2) Existe $b_3 > 0$ tal que

$$b_3|u|^\alpha \leq f(x,u), \forall (x,u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+,$$

com $1 < \alpha + 1 < p$.

(G1) Existem constantes $a_1, a_2 > 0$ tais que

$$|g(x,u)| \leq a_1 + a_2|u|^s, \forall (x,u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R},$$

com $0 < s < p_*^1(N) - 1$, em que

$$p_*^1(N) = \begin{cases} \frac{(N-1)p}{N-p}, & \text{se } p < N, \\ +\infty, & \text{se } p \geq N. \end{cases}$$

Em [23], de Godoi, Miyagaki e Rodrigues, estudaram os seguintes problemas de autovalor:

$$\begin{cases} -\Delta_p u + c(x)|u|^{p-2}u = 0, & \text{em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \eta} = \mu|u|^{p-2}u, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.2}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta_p u + c(x)|u|^{p-2}u &= \lambda|u|^{p-2}u, \text{ em } \Omega, \\ \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= 0, \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.3}$$

Eles estabeleceram a existência de um primeiro autovalor, μ_1, relacionado ao problema (4.2), e um primeiro autovalor, λ_1, relacionado ao problema (4.3). A partir daí, eles estudaram um problema semelhante ao problema (4.1), com $M = 1$. Sob a hipótese:

(P4) existem constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que

$$\limsup_{|u|\to+\infty} \frac{pF(x,u)}{|u|^p} \leq \lambda < \lambda_1 \quad \text{e} \quad \limsup_{|u|\to+\infty} \frac{pG(x,u)}{|u|^p} \leq \mu < \mu_1$$

uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$, com $\lambda_1\mu + \mu_1\lambda < \mu_1\lambda_1$;

eles estabeleceram a existência de uma solução fraca para esse problema. Nesse capítulo, estabelecemos resultados que visam estender o resultado obtido por de Godoi, Miyagaki e Rodrigues [23], quando as não linearidades f e g têm crescimento p-sublinear. Observe que a condição $\lambda_1\mu + \mu_1\lambda < \mu_1\lambda_1$, imposta em [23], pode ser representada pela região hachurada na Figura 4.1.

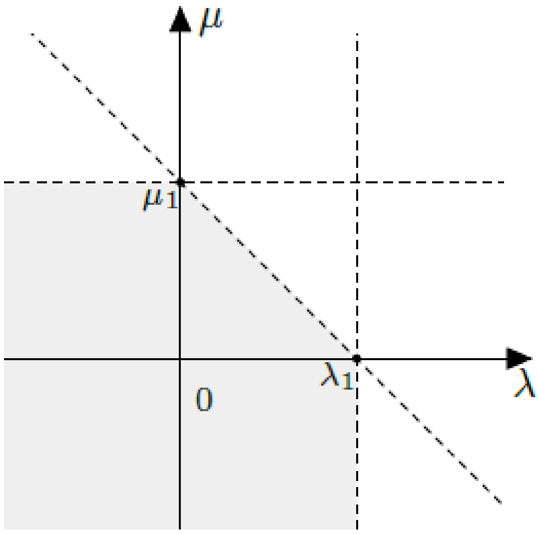

Figura 4.1: Região de soluções relativas aos autovalores μ_1 e λ_1, obtidas em [23].

Em nossos resultados, conseguimos obter uma independência entre os autovalores λ_1 e μ_1, eliminando a necessidade da condição $\lambda_1\mu + \mu_1\lambda < \mu_1\lambda_1$. Dessa forma, obtemos dois resultados que ampliam a região de soluções no plano cartesiano $\lambda\mu$, como podem ser observado nas Figuras 4.2 e 4.3. Além disso, foi possível demonstrar que nossas soluções são não triviais. Mais ainda, supondo f e g ímpares e utilizando a teoria de gênero de Krasnoselskii, estabelecemos resultados de múltiplas soluções para o problema (4.1).

Os principais resultados desse capítulo são os seguintes:

Teorema 4.1.1. *Suponha que* $(M1)$, $(C1)$, $(F1)$, $(F2)$ *e* $(G1)$ *são satisfeitas. Suponha, ainda, que* $s+1<p$ *e que* $F(x,u)=\int_0^u f(x,t)dt$ *satisfaça:*

(F3) existe $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\limsup_{|u|\to+\infty} \frac{pF(x,u)}{|u|^p} \leq \lambda < \lambda_1 m_0,$$

uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$. *Então, o problema (4.1) tem ao menos uma solução não trivial.*

Teorema 4.1.2. *Suponha que* $(M1)$, $(C1)$, $(F1)$, $(F2)$ *e* $(G1)$ *são satisfeitas e que* $s+1<p$. *Adicionalmente, suponha que*

(F4) $f(x,-t)=-f(x,t)$, *para cada* $(x,t)\in\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$,

(G2) $g(x,-t)=-g(x,t)$, *para cada* $(x,t)\in\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$,

e $F(x,u)=\int_0^u f(x,t)dt$ *satisfaça* $(F3)$. *Então, o problema (4.1) tem infinitas soluções.*

Teorema 4.1.3. *Suponha que* $(M1)$, $(C1)$, $(F1)$, $(F2)$ *e* $(G1)$ *são satisfeitas. Suponha, ainda, que* $r+1<p$ *e que* $G(x,u)=\int_0^u g(x,t)dt$ *satisfaça:*

(G3) existe $\mu \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\limsup_{|u|\to+\infty} \frac{pG(x,u)}{|u|^p} \leq \mu < \mu_1 m_0,$$

uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$. Então, o problema (4.1) tem ao menos uma solução não trivial.

Teorema 4.1.4. *Suponha que $(M1)$, $(C1)$, $(F1)$, $(F2)$, $(F4)$, $(G1)$, $(G2)$ e $(G3)$ são satisfeitas e que $r+1<p$. Então, o problema (4.1) tem infinitas soluções.*

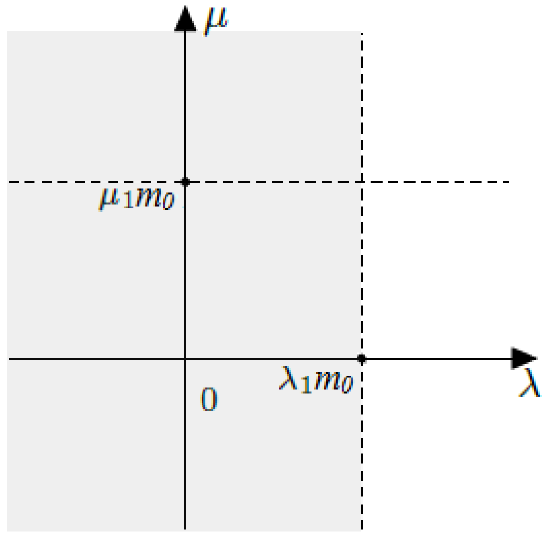

Figura 4.2: Região de existência de soluções dadas nos teoremas 4.1.1 e 4.1.2.

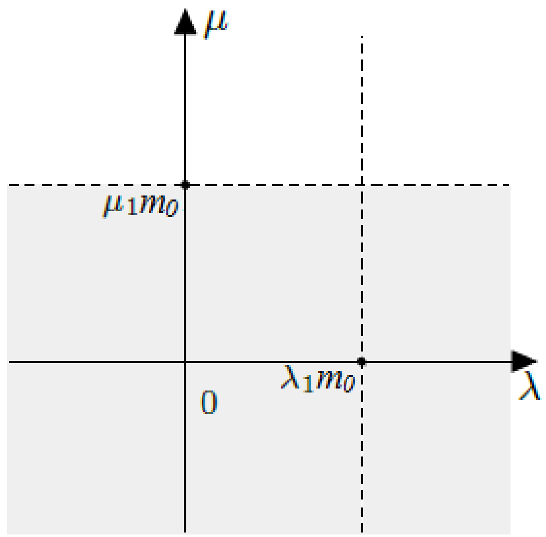

Figura 4.3: Região de existência de soluções dadas nos teoremas 4.1.3 e 4.1.4.

4.2 Formulação variacional e resultados preliminares

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, um domínio limitado, com fronteira $\partial\Omega$ de classe $C^{0,1}$ e $p > 1$. Para tratar nosso problema, consideramos o espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$. Embora a norma usual de $W^{1,p}(\Omega)$ seja dada por

$$\|u\|_{1,p} = \left(\int_\Omega [|\nabla u|^p + |u|^p] dx \right)^{1/p},$$

para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$, iremos trabalhar com outra norma em $W^{1,p}(\Omega)$, equivalente a $\| \cdot \|_{1,p}$. Uma vez que $c : \Omega \to \mathbb{R}$ satisfaz (C1), temos que

$$\|u\|_c = \left(\int_\Omega [\ |\nabla u|^p + c(x)|u|^p] dx \right)^{1/p}$$

define uma norma em $\in W^{1,p}(\Omega)$ (veja [34, Teorema 25]). Além disso, $\| \cdot \|_{1,p}$ e $\| \cdot \|_c$ são equivalentes (veja [23]). Iremos considerar $W^{1,p}(\Omega)$ com respeito à norma $\| \cdot \|_c$.

Como visto em [40], se $p \in [1, +\infty)$, a imersão

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

é contínua se $p < N$ e $1 \leq q \leq \frac{Np}{N-p}$ ou $p \geq N$ e $q \in [1, +\infty)$. Além do mais, se $p < N$ e $1 \leq q < \frac{Np}{N-p}$ ou $p \geq N$ e $q \in [1, +\infty)$, essa imersão é compacta.

O Teorema do Traço Compacto (veja Apêndice, Teorema A.2.9) estabelece que existe um único operador contínuo

$$\Gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\partial\Omega),$$

desde que $p < N$ e $1 \leq q \leq \frac{(N-1)p}{N-p}$ ou $p \geq N$ e $q \in [1, +\infty)$. Além disso, se $p < N$ e $1 \leq q < \frac{(N-1)p}{N-p}$ ou $p \geq N$ e $q \in [1, +\infty)$, o operador Γ é compacto. Denotamos por $\| \cdot \|_{q,\partial}$ a norma em $L^q(\partial\Omega)$.

As desigualdades a seguir estão relacionadas aos primeiros autovalores, μ_1

e λ_1, relativos aos problemas (4.2) e (4.3), respectivamente, e são de nosso interesse. Elas podem ser encontradas em [23]:

$$\|u\|_c^p \geq \mu_1 \|u\|_{p,\partial}^p, \ \forall u \in W^{1,p}(\Omega), \tag{4.4}$$

e

$$\|u\|_c^p \geq \lambda_1 \|u\|_p^p, \ \forall u \in W^{1,p}(\Omega). \tag{4.5}$$

Desde que nossa abordagem é variacional, definimos o funcional de Euler-Lagrange, $I_p : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, associado ao problema (4.1), por

$$I_p(u) = \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|_c^p) - \int_\Omega F(x,u)dx - \int_{\partial\Omega} G(x,u)d\sigma, \tag{4.6}$$

para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$, em que $\widehat{M}(t) := \int_0^t M(s)ds$, $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds$ e $G(x,u) = \int_0^u g(x,s)ds$. Utilizando argumentos semelhantes à demonstração do Teorema A.4.3, é possível demonstrar que I_p está bem definido em $W^{1,p}(\Omega)$ e $I_p \in C^1(W^{1,p}(\Omega),\mathbb{R})$. Além do mais, I_p tem derivada de Fréchet em $u \in W^{1,p}(\Omega)$, dada por

$$\begin{aligned} I_p'(u)(v) =& M(\|u\|_c^p)\int_\Omega [|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v + c(x)|u|^{p-2}uv]dx \\ & - \int_\Omega f(x,u)vdx - \int_{\partial\Omega} g(x,u)vd\sigma, \end{aligned}$$

para todo $v \in W^{1,p}(\Omega)$.

Definição 4.2.1. *Dizemos que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (4.1), se satisfaz*

$$M(\|u\|_c^p)\int_\Omega [|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v + c(x)|u|^{p-2}uv]dx = \int_\Omega f(x,u)vdx + \int_{\partial\Omega} g(x,u)vd\sigma,$$

para cada $v \in W^{1,p}(\Omega)$.

Ressaltamos que a teoria de gênero de Krasnoselskii será usada nesse capítulo para obtermos os resultados de múltiplas soluções para o problema (4.1) (Teoremas

4.1.2 e 4.1.4). Além disso, faremos uso do seguinte resultado para obtenção de soluções nos Teoremas 4.1.1 e 4.1.3, cuja demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em [37]:

Teorema 4.2.2. *Seja E um espaço de Banach. Se $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Palais-Smale e é limitado inferiormente, então $l = \inf_E I$ é um ponto crítico de I.*

Para que possamos utilizar os resultados acima, necessitamos que o funcional I_p seja coercivo em $W^{1,p}(\Omega)$. Os próximos dois lemas tratam disso.

Lema 4.2.3. *Suponha que $(M1)$, $(C1)$, $(F3)$ e $(G1)$ são satisfeitas e que $s+1 < p$. Então I_p é coercivo em $W^{1,p}(\Omega)$.*

Demonstração. Observemos, inicialmente, que a condição $(F3)$ implica que, dado $\varepsilon > 0$, existe $R = R(\epsilon) > 0$ tal que, se $x \in \overline{\Omega}$ e $|u| > R$,

$$\frac{pF(x,u)}{|u|^p} \leq \lambda + \epsilon. \tag{4.7}$$

Mais ainda, desde que Ω é limitado em $\mathbb{R}^N$, temos $\overline{\Omega}$ compacto em $\mathbb{R}^{N+1}$. Assim, $\overline{\Omega} \times [-R, R]$ é compacto em $\mathbb{R}^N$. Uma vez que $F \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, podemos concluir que F assume um máximo em $\overline{\Omega} \times [-R, R]$. Desse modo, existe $M_\epsilon > 0$ tal que, se $x \in \overline{\Omega}$ e $|u| \leq R$, temos

$$F(x,u) \leq M_\epsilon. \tag{4.8}$$

Por conseguinte, ao combinarmos (4.7) e (4.8), obtemos

$$F(x,u) \leq \frac{1}{p}(\lambda + \epsilon)|u|^p + M_\epsilon, \tag{4.9}$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$ e para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Usando $(G1)$, (4.5), (4.9) e o Teorema do Traço Compacto (veja Apêndice, Teorema A.2.9), obtemos

$$
\begin{aligned}
I_p(u) &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|_c^p) - \int_\Omega F(x,u)dx - \int_{\partial\Omega} G(x,u)d\sigma \\
&\geq \frac{m_0}{p}\|u\|_c^p - \frac{1}{p}\left(\lambda+\epsilon\right)\|u\|_p^p - M_\epsilon|\Omega| - a_1\int_{\partial\Omega}|u|d\sigma - \frac{a_2}{s+1}\int_{\partial\Omega}|u|^{s+1}d\sigma \\
&\geq \frac{m_0}{p}\|u\|_c^p - \frac{1}{p}\frac{(\lambda+\epsilon)}{\lambda_1}\|u\|_c^p - a_1\|u\|_{L^1,\partial} - \frac{a_2}{s+1}\|u\|_{s+1,\partial}^{s+1} - M_\epsilon|\Omega| \\
&\geq \frac{1}{p}\left(m_0 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\|u\|_c^p - a_1\bar{C}\|u\|_c - \frac{a_2}{s+1}\tilde{C}\|u\|_c^{s+1} - M_\epsilon|\Omega|,
\end{aligned}
$$

em que $|\Omega|$ é a medida de Ω. Desde que $\lambda < \lambda_1 m_0$, temos $m_0 - \frac{\lambda}{\lambda_1} > 0$. Assim, tomando $\epsilon < \lambda_1 m_0 - \lambda$, obtemos $\left(m_0 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right) > 0$. Como $s+1 < p$, segue que

$$\lim_{\|u\|_c \to +\infty} I_p(u) = +\infty.$$

Logo, I_p é coercivo em $W^{1,p}(\Omega)$.

$\square$

Lema 4.2.4. *Suponha que* $(M1)$, $(C1)$, $(G3)$ *e* $(F1)$ *são satisfeitas e que* $r+1 < p$. *Então* I_p *é coercivo em* $W^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. O procedimento para demonstrar esse lema é análogo ao da demonstração do Lema 4.2.3. Primeiramente, observamos que a condição $(G3)$ implica que, dado $\varepsilon > 0$, existe $R = R(\epsilon) > 0$ tal que, se $x \in \overline{\Omega}$ e $|u| > R$,

$$\frac{pG(x,u)}{|u|^p} \leq \mu + \epsilon. \tag{4.10}$$

Desde que $\overline{\Omega} \times [-R, R]$ é compacto em $\mathbb{R}^{N+1}$ e $G \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, existe $M_\epsilon > 0$ tal que, se $x \in \overline{\Omega}$ e $|u| \leq R$, temos

$$G(x,u) \leq M_\epsilon. \tag{4.11}$$

Segue de (4.10) e (4.11) que

$$G(x,u) \leq \frac{1}{p}\left(\mu+\epsilon\right)|u|^p + M_\epsilon, \tag{4.12}$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$ e para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Usando $(F1)$, (4.4), (4.12) e o Teorema do Traço Compacto, obtemos

$$\begin{aligned}
I_p(u) &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|_c^p) - \int_\Omega F(x,u)dx - \int_{\partial\Omega} G(x,u)d\sigma \\
&\geq \frac{m_0}{p}\|u\|_c^p - b_1\int_\Omega |u|dx - \frac{b_2}{r+1}\int_\Omega |u|^{r+1}dx - \frac{1}{p}(\mu+\epsilon)\|u\|_{p,\partial}^p - M_\epsilon|\Omega| \\
&\geq \frac{m_0}{p}\|u\|_c^p - b_1\|u\|_{L^1} - \frac{b_2}{r+1}\|u\|_{r+1}^{r+1} - \frac{1}{p}\frac{(\mu+\epsilon)}{\mu_1}\|u\|_c^p - M_\epsilon|\Omega| \\
&\geq \frac{1}{p}\left(m_0 - \frac{\mu}{\mu_1} - \frac{\epsilon}{\mu_1}\right)\|u\|_c^p - b_1\bar{C}\|u\|_c - \frac{b_2}{r+1}\tilde{C}\|u\|_c^{r+1} - M_\epsilon|\Omega|,
\end{aligned}$$

em que $|\Omega|$ é a medida de Ω. Desde que $\mu < \mu_1 m_0$, temos $m_0 - \frac{\mu}{\mu_1} > 0$. Assim, tomando $\epsilon < \mu_1 m_0 - \mu$, obtemos $\left(m_0 - \frac{\mu}{\mu_1} - \frac{\epsilon}{\mu_1}\right) > 0$. Como $r+1 < p$, segue que

$$\lim_{\|u\|_c \to +\infty} I_p(u) = +\infty.$$

Logo, I_p é coercivo em $W^{1,p}(\Omega)$.

□

4.3 A condição de Palais-Smale

Nessa seção, demonstraremos que o funcional I_p satisfaz a condição de Palais-Smale se assumirmos a hipótese $(F3)$ ou a hipótese $(G3)$.

Lema 4.3.1. *Suponha que $(M1)$, $(C1)$, $(F1)$, $(F3)$ e $(G1)$ são satisfeitas e que $s+1 < p$. Então I_p satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demonstração. Seja $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega)$ uma sequência de Palais-Smale no nível l, isto é, $I_p(u_n) \to l$ e $I_p'(u_n) \to 0$ (no dual de $W^{1,p}(\Omega)$), quando $n \to +\infty$. Pelo Lema 4.2.3, temos que I_p é coercivo. Logo, $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega)$ é limitada, pois do contrário, existiria uma subsequência (v_n) de (u_n), tal que $\|v_n\|_c \to +\infty$, quando $n \to +\infty$ e, como I_p é coercivo, teríamos $I_p(v_n) \to +\infty$, quando $n \to +\infty$. Absurdo, já que $I_p(u_n) \to l$, quando $n \to +\infty$.

Desde que as normas $\|\cdot\|_c$ e $\|\cdot\|_{1,p}$ são equivalentes, $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$ é reflexivo e (u_n) é limitada, passando a uma subsequência, se necessário, obtemos $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u, \quad \text{em } W^{1,p}(\Omega),$$

quando $n \to +\infty$. Ainda, como a imersão de $W^{1,p}(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$ é compacta, temos

$$u_n \to u, \quad \text{em } L^p(\Omega),$$

quando $n \to +\infty$. Daí, obtemos, também,

$$u_n(x) \to u(x) \;\; \text{q.t.p. em } \Omega \tag{4.13}$$

e

$$\|u_n\| \to t_0 \geq 0,$$

quando $n \to +\infty$. Além disso, como $u_n \rightharpoonup u$ em $L^p(\Omega)$, pelo Teorema do Traço Compacto, temos que

$$u_n \to u, \quad \text{em } L^p(\partial\Omega)$$

e, portanto,

$$u_n(x) \to u(x) \;\; \text{q.t.p. em } \partial\Omega. \tag{4.14}$$

Agora, desde que (u_n) é limitada em $W^{1,p}(\Omega)$ e $I_p'(u_n) \to 0$ (no dual de $W^{1,p}(\Omega)$), temos $I_p'(u_n)(u_n - u) = o_n(1)$, em que $\lim\limits_{n\to+\infty} o_n(1) = 0$, isto é,

$$\begin{aligned} M(\|u_n\|_c^p)\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(u_n - u)dx - \int_\Omega f(x,u_n)(u_n-u)dx \\ - \int_{\partial\Omega} g(x,u_n)(u_n-u)dx = o_n(1). \end{aligned}$$

Da desigualdade de Hölder, de (4.13), (4.14) e usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_\Omega f(x,u_n)(u_n-u)dx \to 0 \;\; \text{e} \;\; \int_{\partial\Omega} g(x,u_n)(u_n-u)dx \to 0,$$

quando $n \to +\infty$. Logo,

$$M(\|u_n\|_c^p)\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(u_n - u)dx = o_n(1).$$

Como M é contínua e (u_n) é limitada, existe $C > 0$ tal que $M(\|u_n\|_c^p) \leq C$. Dessa forma, usando $(M1)$, obtemos

$$0 < m_0 \leq M(\|u_n\|_c^p) \leq C,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(u_n - u)dx = o_n(1).$$

Aplicando o Lema 1.2.6 concluímos a demonstração.

$\square$

Lema 4.3.2. *Suponha que* $(M1)$, $(C1)$, $(F1)$, $(G1)$ *e* $(G3)$ *são satisfeitas e que* $r+1 < p$. *Então* I_p *satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demonstração. Observando que as hipóteses $(M1)$, $(C1)$, $(F1)$ e $(G3)$ implicam, pelo Lema 4.2.4, que I_p é coercivo, quando $r + 1 < p$, o restante da demonstração desse Lema é análoga à demonstração do Lema 4.3.1.

$\square$

4.4 Demonstração do Teorema 4.1.1

Nessa seção, demonstraremos o Teorema 4.1.1. Para isso, faremos uso do Teorema 4.2.2.

Pelo Lema 4.2.3, temos que I_p é coercivo e, portanto, limitado inferiormente. Além disso, pelo Lema 4.3.1, temos que I_p satisfaz a condição de Palais-Smale. Desde que $I_p \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, aplicando o Teorema 4.2.2, $l = \inf\limits_{W^{1,p}(\Omega)} I_p$ é um valor crítico de I_p, isto é, I_p tem um ponto crítico $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $I_p(u_0) = l$.

Uma vez que u_0 ponto crítico de I_p, temos $I_p'(u_0)(v) = 0$, para todo $v \in$

$W^{1,p}(\Omega)$, ou seja, u_0 é uma solução fraca do problema (4.1). Resta mostrar que u_0 é não trivial. Isso será feito no próximo lema.

Lema 4.4.1. *Suponha que* $(M1)$, $(C1)$, $(F1)$, $(F2)$, $(F3)$ *e* $(G1)$ *são satisfeitas e que* $s+1<p$. *Então* $l<0$.

Demonstração. Tome φ_1 a primeira autofunção positiva do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= |u|^{p-2}u \text{ em } \Omega, \\ \\ u &= 0 \ \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

dada em [6]. Uma vez que $\varphi_1 = 0$ em $\partial\Omega$, temos $G(x,t\varphi_1)=0$, para todo $t>0$ e para todo $x\in\partial\Omega$. Logo, para $t<1$, usando $(F2)$ e sabendo que M é contínua, existe $C>0$, tal que

$$\begin{aligned} I_p(t\varphi_1) &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|t\varphi_1\|_c^p) - \int_\Omega F(x,t\varphi_1)dx - \int_{\partial\Omega} G(x,t\varphi_1)d\sigma \\ &\le \frac{1}{p}\int_0^{\|t\varphi_1\|_c^p} M(s)ds - \frac{b_3t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\int_\Omega |\varphi_1|^{\alpha+1}dx \\ &\le \frac{C}{p}t^p\|\varphi_1\|_c^p - \frac{b_3t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\int_\Omega |\varphi_1|^{\alpha+1}dx \\ &= C_1t^p - C_2t^{\alpha+1}, \end{aligned}$$

em que, $C_1 = \frac{C}{p}\|\varphi_1\|_c^p > 0$ e $C_2 = \frac{b_3}{\alpha+1}\int_\Omega |\varphi_1|^{\alpha+1}dx > 0$. Dessa forma, obtemos

$$I_p(t\varphi_1) < 0, \ \forall t < \min\left\{1, \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^{\frac{1}{p-(\alpha+1)}}\right\}.$$

Mas, isso implica que $l = \inf\limits_{W^{1,p}(\Omega)} I_p < 0.$ $\square$

Uma vez que o Lema 4.4.1 garante que $l<0$, obtemos $I_p(u_0)=l<0$. Como $I_p(0)=0$, segue que $u_0\neq 0$, o que conclui a demonstração do Teorema 4.1.1.

4.5 Demonstração do Teorema 4.1.2

Nessa seção, iremos demonstrar o Teorema 4.1.2. Utilizaremos a teoria de gênero de Krasnoselskii, apresentada no Capítulo 1. Particularmente, estamos interessados em aplicar a Proposição 1.2.5.

Observe que, das definições de F e G, e usando $(F4)$ e $(G2)$, temos que I_p é par e $I_p(0) = 0$. Além disso, $I_p \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ e, pelos Lemas 4.2.3 e 4.3.1, I_p é limitado inferiormente e satisfaz a condição de Palais-Smale. O próximo lema mostra que I_p satisfaz $ii)$ da Proposição 1.2.5.

Lema 4.5.1. *Suponha que* $(C1)$, $(F1)$, $(F2)$ *e* $(G1)$ *são satisfeitas. Então, existe um conjunto compacto* $\mathcal{S} \subset W^{1,p}(\Omega)$ *tal que* $\gamma(\mathcal{S}) = k < \infty$ *e* $\sup_{u\in\mathcal{S}} I_p(u) < I_p(0) = 0$.

Demonstração. Uma vez que $C_0^\infty(\Omega) \subset W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$ possui dimensão infinita, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe um subespaço linear de $W_0^{1,p}(\Omega)$, k-dimensional, $\mathcal{X}_k$, tal que $\mathcal{X}_k \subset C_0^\infty(\Omega)$. Assim, todas as normas em $\mathcal{X}_k$ são equivalentes. Logo, existe uma constante positiva $C(k)$, que depende de k, tal que

$$C(k)\|u\|_c^{\alpha+1} \le \frac{b_3}{\alpha+1}\int_\Omega |u|^{\alpha+1}dx,$$

para todo $u \in \mathcal{X}_k$. Dessa forma, se $u \in \mathcal{X}_k$, segue de $(F2)$ que

$$\int_\Omega F(x,u)dx \ge \frac{b_3}{\alpha+1}\int_\Omega |u|^{\alpha+1}dx \ge C(k)\|u\|_c^{\alpha+1}.$$

Seja $u \in \mathcal{X}_k$, com $\|u\|_c \le 1$. Desde que $\mathcal{X}_k \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, temos $u = 0$ em $\partial\Omega$. Da continuidade da função M, existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} I_p(u) &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|_c^p) - \int_\Omega F(x,u)dx - \int_{\partial\Omega} G(x,u)d\sigma \\ &\le \frac{1}{p}\int_0^{\|u\|_c^p} M(s)ds - C(k)\|u\|_c^{\alpha+1} \\ &\le \frac{C}{p}\|u\|_c^p - C(k)\|u\|_c^{\alpha+1}, \end{aligned}$$

para todo $u \in \mathcal{X}_k$.

Tome $R = \min\left\{1, \left(\frac{pC(k)}{C}\right)^{\frac{1}{p-(\alpha+1)}}\right\}$ e considere $\mathcal{S} = \{u \in \mathcal{X}_k : \|u\| = s\}$, com $0 < s < R$. Desde que $1 \leq \alpha + 1 < p$, para todo $u \in \mathcal{S}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
I_p(u) &\leq \frac{C}{p}\|u\|_c^p - C(k)\|u\|_c^{\alpha+1} \\
&= s^{\alpha+1}\left[\frac{C}{p}s^{p-(\alpha+1)} - C(k)\right] < 0 = I_p(0),
\end{aligned}
$$

o que implica $\sup_{\mathcal{S}} I_p(u) < 0 = I_p(0)$.

Por fim, como $\mathcal{X}_k$ e $\mathbb{R}^k$ são isomorfos e $\mathcal{S}$ e S^{k-1} são homeomorfos, concluímos que $\gamma(\mathcal{S}) = k$.

□

Como $I_p \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ é coercivo, par, satisfaz a condição de Palais-Smale e, pelo Lema 4.5.1, satisfaz condição $ii)$ da Proposição 1.2.5, podemos aplicar a Proposição 1.2.5 e concluir que I_p tem ao menos k pares de pontos críticos distintos. Da arbitrariedade de k obtemos infinitos pontos críticos de I_p.

4.6 Demonstração do Teorema 4.1.3

Nessa seção, demonstraremos o Teorema 4.1.3. A demonstração desse teorema é análoga à demonstração do Teorema 4.1.1, uma vez que estamos trocando a hipótese $(F3)$ por uma hipótese semelhante, $(G3)$. Como na demonstração do Teorema 4.1.1, devemos aplicar o Teorema 4.2.2.

Pelo Lema 4.2.4, temos que I_p é coercivo e, portanto, limitado inferiormente. Além disso, pelo Lema 4.3.2, temos que I_p satisfaz a condição de Palais-Smale. Desde que $I_p \in C^1(W^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, aplicando o Teorema 4.2.2, $l = \inf_{W^{1,p}(\Omega)} I_p$ é um valor crítico de I_p, isto é, I_p tem um ponto crítico $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$, tal que $I_p(u_0) = l$.

Uma vez que u_0 é ponto crítico de I_p, temos $I_p'(u_0)(v) = 0$, para todo $v \in W^{1,p}(\Omega)$, ou seja, u_0 é uma solução fraca do problema (4.1). Para demonstrar que u_0 é não trivial utilizamos o lema a seguir, cuja demonstração é idêntica à do Lema 4.4.1, uma vez que a hipótese $(G3)$ substitui a hipótese $(F3)$ do Lema 4.4.1, usada para garantir a existência de l.

Lema 4.6.1. *Suponha que* $(M1)$, $(C1)$, $(F1)$, $(F2)$, $(G1)$ *e* $(G3)$ *são satisfeitas e que* $r+1<p$. *Então* $l<0$.

Uma vez que o Lema 4.6.1 garante que $l<0$, obtemos $I_p(u_0)=l<0$. Como $I_p(0)=0$, segue que $u_0\neq 0$, o que conclui a demonstração do Teorema 4.1.3.

4.7 Demonstração do Teorema 4.1.4

Nessa seção, iremos demonstrar o Teorema 4.1.4. Assim como o Teorema 4.1.3 é um análogo do Teorema 4.1.1, trocando a hipótese $(F3)$ por $(G3)$, o Teorema 4.1.4 é um análogo do Teorema 4.1.2 ao trocarmos essas mesmas hipóteses. Utilizaremos a Proposição 1.2.5 da teoria de gênero de Krasnoselskii.

Observe que, das definições de F e G, e usando $(F4)$ e $(G2)$, temos que I_p é par e $I_p(0)=0$. Além disso, $I_p\in C^1(W^{1,p}(\Omega),\mathbb{R})$ e, pelos Lemas 4.2.4 e 4.3.2, I_p é limitado inferiormente e satisfaz a condição de Palais-Smale. Segue do Lema 4.5.1 que podemos aplicar a Proposição 1.2.5 e concluir que I_p tem ao menos k pares de pontos críticos distintos. Da arbitrariedade de k obtemos infinitos pontos críticos de I_p.

Apêndice

$\mathcal{A}$

Apêndice

A.1 Desigualdades

A demonstração da desigualdade a seguir pode ser encontrada, por exemplo, em [2, Lema 2.2].

Teorema A.1.1. *Sejam A, B e $k \geq 1$ reais não negativos. Então,*

$$(A+B)^k \leq 2^{k-1}\left(A^k + B^k\right).$$

As próximas duas desigualdades podem ser vistas, por exemplo, em [8].

Teorema A.1.2 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam A, B reais não negativos e $k, k' \geq 1$ expoentes conjugados. Então,*

$$AB \leq \frac{1}{k}A^k + \frac{1}{k'}B^{k'}.$$

Teorema A.1.3 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam p, p' tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ e $1 \leq p \leq \infty$. Se $f \in L^p$ e $g \in L^{p'}$, então $fg \in L^1$ e*

$$\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

A.2 Resultados básicos

A demonstração da Proposição A.2.1 e dos Teoremas A.2.2 e A.2.3, a seguir, podem ser encontradas em [8].

Proposição A.2.1. *Seja X um espaço de Banach e seja (x_n) uma sequência em X tal que $x_n \rightharpoonup x$, quando $n \to \infty$. Então, (x_n) é limitada.*

Teorema A.2.2. *Se X é um espaço de Banach reflexivo, então toda sequência limitada em X possui uma subsequência fracamente convergente.*

Teorema A.2.3. *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$, (f_n) uma sequência em L^p e $f \in L^p$ tais que $\|f_n - f\|_p \to 0$, quando $n \to +\infty$. Então, existem uma subsequência (f_{n_k}) e uma função $h \in L^p$ tais que*
a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω, quando $n \to +\infty$;
b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, $\forall k$, q.t.p em Ω.

Teorema A.2.4 (Brezis-Lieb)**.** *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$ e (f_n) uma sequência de funções mensuráveis e uniformemente limitada em $L^p(\Omega)$, para algum $1 \leq p < \infty$ tal que $f_n(x) \to f(x)$, q.t.p em Ω, quando $n \to \infty$. Então, o limite*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|f_n\|_p^p - \|f_n - f\|_p^p\right)$$

existe e vale a igualdade

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|f_n\|_p^p - \|f_n - f\|_p^p\right) = \|f\|_p^p.$$

Demonstração. Veja [9, Teorema 1].

□

Teorema A.2.5 (Teorema do Valor Médio)**.** *Seja $f : U \to \mathbb{R}$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^N$. Suponhamos que o segmento de reta $[a, a+v]$ esteja contido em U, que a restrição $f|_{[a,a+v]}$ seja contínua e que exista a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x)$, segundo v, em todo ponto $x \in (a, a+v)$. Então, existe $\theta \in (0,1)$ tal que $f(a+v) - f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(a + \theta v)$.*

Demonstração. Veja [41, Pag. 123].

□

Teorema A.2.6 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue). *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$ e (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ satisfazendo*

a) $f_n(x) \to f(x)$, quando $n \to \infty$, q.t.p. em Ω,

b) existe uma função $g \in L^1$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p. em Ω.

Então, $f \in L^1$ e $\|f_n - f\|_1 \to 0$, quando $n \to \infty$.

Demonstração. Veja [8, Teorema 4.2].

□

Teorema A.2.7 (Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale). *Sejam X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. Suponhamos que as seguintes condições geométricas sejam satisfeitas:*

1) $I(0) = 0$,

2) $\exists\, \sigma, \rho > 0; I(w) \geq \sigma > 0$, $\forall w \in X$ com $\|w\| = \rho$,

3) $\exists\, e_0 \in X; \|e_0\| > \rho$ e $I(e_0) < 0$.

Então, existe uma sequência $(w_n) \subset X$ tal que

$$I(w_n) \to c \text{ e } I'(w_n) \to 0 \text{ em } X^{-1}, \text{ quando } n \to \infty,$$

em que

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e_0\}.$$

Demonstração. Veja [10, Teorema 2.2].

□

O próximo lema é conhecido como Princípio de Concetração e Compacidade. Sua versão original é devido a Lions [43]. A versão estabelecida a seguir, pode ser encontrada, por exemplo, em [55] e sua demonstração é uma adaptação da versão de Lions [43].

Lema A.2.8 (de Concentração e Compacidade)**.** *Seja* (u_n) *uma sequência limitada em* $\mathcal{D}_a^{1,p}$ *tal que* $u_n \rightharpoonup u$*, fracamente em* $\mathcal{D}_a^{1,p}$*, quando* $n \to +\infty$*. Suponha que*

$$|x|^{-ap}|\nabla u_n|^p dx \rightharpoonup \mu \ e \ |x|^{-bp^*}|u_n|^{p^*} dx \rightharpoonup \nu$$

no sentido fraco de convergência em medidas, quando* $n \to +\infty$*. Em que* μ *e* ν *são medidas não negativas e limitadas em* $\mathbb{R}^N$*. Então, existem duas famílias* $(\mu_j)_{j\in\Lambda}$ *e* $(\nu_j)_{j\in\Lambda}$ *de números reais positivos e uma família* $(x_j)_{j\in\Lambda}$ *de pontos de* $\mathbb{R}^N$*, em que* Λ *é um conjunto de índices no máximo enumerável, tais que*

$$\nu = |x|^{-bp^*}|u|^{p^*} dx + \sum_{j\in\Lambda} \nu_j \delta_{x_j},$$

$$\mu \geq |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx + \sum_{j\in\Lambda} \mu_j \delta_{x_j},$$

$$C_{a,p}^* \nu_j^{p/p^*} \leq \mu_j, \forall j \in \Lambda$$

e

$$\sum_{j\in\Lambda} \nu_j^{p/p^*} < +\infty,$$

em que δ_{x_j} *é a medida de massa concentrada em* $x_j \in \mathbb{R}^N$*.*

O próximo teorema pode ser encontrado, por exemplo, em [2] e [48].

Teorema A.2.9 (Teorema do Traço Compacto)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado, com fronteira de classe* $C^{0,1}$*,* $N \geq 2$ *e* $p \in [0, +\infty)$*. Então, existe um único operador, denominado operador traço, de* $W^{1,p}(\Omega)$ *sobre* $L^q(\partial\Omega)$*,*

$$\Gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\partial\Omega),$$

contínuo, desde que $p < N$ *e* $1 \leq q \leq \frac{(N-1)p}{N-p}$ *ou* $p \geq N$ *e* $q \in [1, +\infty)$*. E mais, caso*

$p < N$ *e* $1 \leq q < \frac{(N-1)p}{N-p}$ *ou* $p \geq N$ *e* $q \in [1, +\infty)$, *então o operador* Γ *é compacto.*

A.2.1 Demonstração da Proposição 3.2.1

Para demonstrarmos a Proposição 3.2.1, necessitamos antes de alguns lemas.

Lema A.2.10. *Suponha que* Q *satisfaça* (Q_0). *Então, dado* $\varepsilon > 0$, *existem* $C_\varepsilon > 0$ *e* $C > 0$ *tais que*

$$|Q(x, u+a, v+b) - Q(x, u, v)| \leq \varepsilon(|u|^{p^*} + |v|^{q^*}) + C_\varepsilon(|a|^{p^*} + |b|^{q^*}) + C.$$

Demonstração. Pelo Teorema do Valor Médio,

$$|Q(x, u+a, v+b) - Q(x, u, v)| = |\nabla Q(x, u+\theta a, v+\theta b) \cdot (a, b)|,$$

para algum $\theta \in (0, 1)$. Usando (Q_0) e o Teorema A.1.1, obtemos:

$$\begin{aligned}
|Q(x, u+a, v+b) - Q(x, u, v)| &= |Q_u(x, u+\theta a, v+\theta b) \cdot a + Q_v(x, u+\theta a, v+\theta b) \cdot b| \\
&\leq C(|u+\theta a|^{p^*-1} + |v+\theta b|^{\frac{q^*(p^*-1)}{p^*}} + 1)|a| \\
&\quad + C(|u+\theta a|^{\frac{p^*(q^*-1)}{q^*}} + |v+\theta b|^{q^*-1} + 1)|b| \\
&\leq \bar{C}(|u|^{p^*-1} + |a|^{p^*-1} + |v|^{\frac{q^*(p^*-1)}{p^*}} + |b|^{\frac{q^*(p^*-1)}{p^*}} + 1)|a| \\
&\quad + \tilde{C}(|u|^{\frac{p^*(q^*-1)}{q^*}} + |a|^{\frac{p^*(q^*-1)}{q^*}} + |v|^{q^*-1} + |b|^{q^*-1} + 1)|b| \\
&\leq \hat{C}\Big(|u|^{p^*-1}|a| + |a|^{p^*} + |v|^{\frac{q^*(p^*-1)}{p^*}}|a| + |b|^{\frac{q^*(p^*-1)}{p^*}}|a| \\
&\quad + |u|^{\frac{p^*(q^*-1)}{q^*}}|b| + |a|^{\frac{p^*(q^*-1)}{q^*}}|b| + |v|^{q^*-1}|b| + |b|^{q^*} \\
&\quad + |a| + |b|\Big)
\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Young com ε dado, obtemos

$$
\begin{aligned}
|Q(x,u+a,v+b)-Q(x,u,v)| \leq & \frac{\varepsilon}{2}|u|^{p^*}+C_\varepsilon|a|^{p^*}+|a|^{p^*}+\frac{\varepsilon}{2}|v|^{q^*}+C_\varepsilon|a|^{p^*} \\
& +\varepsilon|b|^{q^*}+C_\varepsilon|a|^{p^*}+\frac{\varepsilon}{2}|u|^{p^*}+C_\varepsilon|b|^{q^*} \\
& +\varepsilon|a|^{p^*}+C_\varepsilon|b|^{q^*}+\frac{\varepsilon}{2}|v|^{q^*}+C_\varepsilon|b|^{q^*}+|b|^{q^*}+C \\
= & \varepsilon(|u|^{p^*}+|v|^{q^*})+\bar{C}_\varepsilon(|a|^{p^*}+|b|^{q^*})+\bar{C}.
\end{aligned}
$$

□

Baseado no Lema A.2.10, a seguinte versão do Lema de Brézis-Lieb pode ser provada:

Lema A.2.11. *Suponha* $Q \in C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ *uma função não negativa satisfazendo* (Q_0) *e* $Q(x,0,0)=0$, *para cada* $x\in\Omega$. *Sejam* (u_n), (v_n) *sequências limitadas em* $L^{p^*}(\Omega,|x|^{-\beta})$ *e* $L^{q^*}(\Omega,|x|^{-\beta})$, *respectivamente. Suponha que* $u_n(x)\to u(x)$, $v_n(x)\to v(x)$, *q.t.p. em* Ω, *quando* $n\to+\infty$. *Então,*

$$|x|^{-\beta}Q(x,u_n,v_n)-|x|^{-\beta}Q(x,u_n-u,v_n-v)\to|x|^{-\beta}Q(x,u,v), \text{ em } L^1(\Omega,|x|^{-\beta}),$$

quando $n\to+\infty$.

Demonstração. Primeiramente, observe que da hipótese (Q_0) e usando a desigualdade de Young, obtemos $\bar{C}>0$, tal que, para cada $(x,u,v)\in(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$,

$$Q(x,u,v)\leq\bar{C}(|u|^{p^*}+|v|^{q^*}+|u|+|v|)\leq\bar{C}(|u|^{p^*}+|v|^{q^*}+1). \tag{A.1}$$

Defina

$$g_n=|x|^{-\beta}|Q(x,u_n,v_n)-Q(x,u_n-u,v_n-v)-Q(x,u,v)|.$$

Seja $\varepsilon>0$. Pelo Lema A.2.10, existem $C>0$ e $C_\varepsilon>0$, tais que

$$g_n\leq|x|^{-\beta}\left(Q(x,u,v)+\varepsilon(|u_n-u|^{p^*}+|v_n-v|^{q^*})+C_\varepsilon(|u|^{p^*}+|v|^{q^*})+C\right),$$

uma vez que Q é não negativa. Consequentemente, usando (A.1), obtemos

$$\begin{aligned} W_{n,\varepsilon} &:= (g_n - \varepsilon|x|^{-\beta}(|u_n - u|^{p^*} + |v_n - v|^{q^*}) \\ &\leq (\bar{C} + C_\varepsilon)|x|^{-\beta}(|u|^{p^*} + |v|^{q^*} + \bar{C} + C) \in L^1(\Omega, |x|^{-\beta}). \end{aligned}$$

Além disso, como $u_n(x) \to u(x)$ e $v_n(x) \to v(x)$, q.t.p. em Ω, temos $W_{n,\varepsilon}(x) \to 0$, q.t.p. em Ω, quando $n \to +\infty$. Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega W_{n,\varepsilon}\ dx = 0.$$

Desde que $g_n = W_{n,\varepsilon} + \varepsilon|x|^{-\beta}(|u_n - u|^{p^*} + |v_n - v|^{q^*})$, (u_n) é limitada em $L^{p^*}(\Omega, |x|^{-\beta})$ e (v_n) é limitada em $L^{q^*}(\Omega, |x|^{-\beta})$, temos

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega g_n dx \leq \varepsilon \cdot \limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega |x|^{-\beta}(|u_n - u|^{p^*} + |v_n - v|^{q^*})dx \leq \tilde{C}\varepsilon.$$

Da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, segue o resultado.

$\square$

No que segue, denotamos $(u_n, v_n) \subset \mathcal{D}^{1,p}_{a_1} \times \mathcal{D}^{1,q}_{a_2}$ uma sequência tal que $(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v)$, fracamente em $\mathcal{D}^{1,p}_{a_1} \times \mathcal{D}^{1,q}_{a_2}$. Consideremos as extensões a $\mathbb{R}^N$ de u_n, u, v_n, v definindo estas funções como sendo zero fora de Ω. Também, estendemos Q a $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, definindo $Q(x, s, t) = 0$, para $x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega$, $(s, t) \in \mathbb{R}^2$. Desse modo, $(|x|^{-a_1 p}|\nabla u_n|^p)$, $(|x|^{-a_2 q}|\nabla v_n|^q)$ e $|x|^{-\beta}Q(x, u_n, v_n)$ são sequências limitadas em $L^1(\mathbb{R}^N, |x|^{-a_1 p})$, $L^1(\mathbb{R}^N, |x|^{-a_2 q})$ e $L^1(\mathbb{R}^N, |x|^{-\beta})$, respectivamente. Segue da teoria de convergência fraca no sentido de medidas (veja, por exemplo, [25]) que existem medidas não negativas e limitadas em $\mathbb{R}^N$, μ, σ, ν tais que, a menos de uma subsequência,

$$|x|^{-\beta}Q(x, u_n, v_n)dx \rightharpoonup \nu,\ |x|^{-a_1 p}|\nabla u_n|^p dx \rightharpoonup \mu,\ |x|^{-a_2 q}|\nabla v_n|^q dx \rightharpoonup \sigma, \tag{A.2}$$

fracamente, no sentido de medidas. Note que μ, σ e ν são nulas em $\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}$. Agora, defina $\tilde{u_n} = u_n - u$ e $\tilde{v_n} = v_n - v$. Dessa forma, temos que $(|x|^{-a_1 p}|\nabla \tilde{u}_n|^p)$, $(|x|^{-a_2 q}|\nabla \tilde{v}_n|^q)$ e $|x|^{-\beta}Q(x, \tilde{u}_n, \tilde{v}_n)$ são sequências limitadas em $L^1(\mathbb{R}^N, |x|^{-a_1 p})$, $L^1(\mathbb{R}^N,\ |x|^{-a_2 q})$ e $L^1(\mathbb{R}^N,$

$|x|^{-\beta}$), respectivamente. Consequentemente, existem medidas não negativas e limitadas em $\mathbb{R}^N$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\nu}$ tais que, a menos de uma subsequência,

$$|x|^{-\beta}Q(x,\tilde{u}_n,\tilde{v}_n)dx \rightharpoonup \tilde{\nu},\ |x|^{-a_1p}|\nabla\tilde{u}_n|^p dx \rightharpoonup \tilde{\mu},\ |x|^{-a_2q}|\nabla\tilde{v}_n|^q dx \rightharpoonup \tilde{\sigma}, \tag{A.3}$$

fracamente, no sentido de medidas. Note que $\tilde{\mu}$, $\tilde{\sigma}$ e $\tilde{\nu}$ são nulas em $\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}$.

Lema A.2.12. *Seja ω uma medida não negativa e limitada em $\mathbb{R}^N$. Considere o conjunto $D = \left\{x_j \in \mathbb{R}^N; j \in J \text{ e } \omega(\{x_j\}) > 0\right\}$. Então, J é, no máximo, enumerável.*

Demonstração. Dado $n \in \mathbb{N}$, defina $D_n = \left\{x \in \mathbb{R}^N; \omega(\{x\}) > \frac{1}{n}\right\}$. Desde que $\sum_{x\in D_n} \frac{1}{n} \leq \sum_{x\in D_n} \omega(\{x\}) \leq \omega(\mathbb{R}^N) < +\infty$, D_n é finito. Como $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$, a prova está completa.

□

Lema A.2.13. *Suponha que Q satisfaça (A.1) Seja Ω_0 um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. Então, existe $C > 0$ tal que*

$$\tilde{\nu}(\Omega_0) \leq C\{\tilde{\mu}(\Omega_0)\}^{p^*/p} + C\{\tilde{\sigma}(\Omega_0)\}^{q^*/q}.$$

Demonstração. Seja Ω_0 um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. Então,

$$\tilde{\nu}(\Omega_0) = \sup\{\tilde{\nu}(K);\ K \subset \Omega_0,\ K \text{ é compacto }\}.$$

Agora, seja $K \subset \Omega_0$ um conjunto compacto e $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, com $0 \leq \xi \leq 1$, $\xi \equiv 1$ em K e supp$\xi \subset \Omega_0$. Seja $\alpha \geq \max\{p^*, q^*\}$. De (A.3),

$$\tilde{\nu}(K) = \int_K d\tilde{\nu} = \int_K \xi^\alpha d\tilde{\nu} \leq \int_{\mathbb{R}^N} \xi^\alpha d\tilde{\nu} = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-\beta}Q(x,\tilde{u}_n,\tilde{v}_n)\xi^\alpha dx. \tag{A.4}$$

De (A.1), das imersões de Sobolev e do Teorema (A.1.1), obtemos $C' > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-\beta} Q(x,\tilde{u}_n,\tilde{v}_n)\xi^\alpha dx &\le \hat{C}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-\beta}|\tilde{u}_n|^{p^*}\xi^\alpha dx + \hat{C}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-\beta}|\tilde{v}_n|^{q^*}\xi^\alpha dx \\
&\quad + \hat{C}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-\beta}(|\tilde{u}_n| + |\tilde{v}_n|)\xi^\alpha dx \\
&\le \tilde{C}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-a_1 p}|\nabla(\xi^{\alpha/p^*}|\tilde{u}_n|)|^p dx\right)^{p^*/p} \\
&\quad + \tilde{C}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-a_2 q}|\nabla(\xi^{\alpha/q^*}|\tilde{v}_n|)|^q dx\right)^{q^*/q} \\
&\quad + \hat{C}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-\beta}(|\tilde{u}_n| + |\tilde{v}_n|)\xi^\alpha dx \\
&\le C'\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-a_1 p}|\tilde{u}_n|^p|\nabla\xi^{\frac{\alpha}{p^*}}|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-a_1 p}|\nabla\tilde{u}_n|^p \xi^{\frac{\alpha p}{p^*}} dx\right)^{\frac{p^*}{p}} \\
&\le C'\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-a_2 q}|\tilde{v}_n|^q|\nabla\xi^{\frac{\alpha}{q^*}}|^q dx + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-a_2 q}|\nabla\tilde{v}_n|^q \xi^{\frac{\alpha q}{q^*}} dx\right)^{\frac{q^*}{q}} \\
&\quad + C'\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-\beta}(|\tilde{u}_n| + |\tilde{v}_n|)\xi^\alpha dx
\end{aligned}$$

Segue da definição de ξ, do Teorema (A.1.1), de (A.3) e do Teorema da Convergência Dominada que, a menos de uma subsequência, existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-\beta} Q(x,\tilde{u}_n,\tilde{v}_n)\xi^\alpha dx &\le C\left(\int_{\mathbb{R}^N} \xi^{\frac{\alpha p}{p^*}} d\tilde{\mu}\right)^{p^*/p} + C\left(\int_{\mathbb{R}^N} \xi^{\frac{\alpha q}{q^*}} d\tilde{\sigma}\right)^{q^*/q} \\
&\le C\{\tilde{\mu}(\Omega_0)\}^{p^*/p} + C\{\tilde{\sigma}(\Omega_0)\}^{q^*/q}.
\end{aligned}$$

Combinando essa última desigualdade com (A.4), concluímos a prova.

□

Corolário A.2.14. *$\tilde{\nu}$ é absolutamente contínua com relação a $\tilde{\mu} + \tilde{\sigma}$. Além do mais, existem um conjunto J, uma família $(\nu_j)_{j\in J}$ de números positivos e uma família $(x_j)_{j\in J}$ de pontos de $\overline{\Omega}$ tais que $\tilde{\nu} = \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j}$.*

Demonstração. Seja $A \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto mensurável tal que $(\tilde{\mu} + \tilde{\sigma})(A) = 0$. Dado

$0 < \varepsilon < 1$, existe um conjunto aberto $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ tal que $A \subset \Omega_\varepsilon$ e $(\tilde{\mu}+\tilde{\sigma})(\Omega_\varepsilon) < \varepsilon$. Pelo Lema A.2.13,

$$\tilde{\nu}(A) \leq \tilde{\nu}(\Omega_\varepsilon) \leq C\varepsilon^{p^*/p} + C\varepsilon^{q^*/q}.$$

Desde que ε é arbitrariamente pequeno, $\tilde{\nu}(A) = 0$. Isto mostra que $\tilde{\nu}$ é absolutamente contínua com relação a $\tilde{\mu}+\tilde{\sigma}$.

Agora, considere $(x_j)_{j\in J} \subset \mathbb{R}^N$ os átomos da medida $\tilde{\nu}$, isto é, os pontos $x_j \in \mathbb{R}^N$ tais que $\tilde{\nu}(\{x_j\}) > 0$. Pelo Lema A.2.12, J é no máximo enumerável. Decompomos

$$\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_0 + \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j},$$

com $\tilde{\nu}_0$ livre de átomos. Mostraremos que $\tilde{\nu}_0 = 0$. Desde que $\tilde{\nu}$ é absolutamente contínua em relação a $\tilde{\mu}+\tilde{\sigma}$, então $\tilde{\nu}_0$ também o é. Segue do Teorema de Radon-Nikodym que existe $f \in L^1(\mathbb{R}^N, \tilde{\mu}+\tilde{\sigma})$ tal que

$$d\tilde{\nu}_0 = f d(\tilde{\mu}+\tilde{\sigma}).$$

Além do mais, para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^N$, com respeito a $\tilde{\mu}+\tilde{\sigma}$, (veja [30])

$$f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{\tilde{\nu}_0(B(x_j;r))}{(\tilde{\mu}+\tilde{\sigma})(B(x_j;r))}. \tag{A.5}$$

Seja $H = \{x \in \Omega; (\tilde{\mu}+\tilde{\sigma})(\{x\}) > 0\}$. Para $x \notin H$, por (A.5) e pelo Lema $A.2.13$,

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \lim_{r\to 0} \frac{\tilde{\nu}(B(x_j;r))}{(\tilde{\mu}+\tilde{\sigma})(B(x_j;r))} \\ &\leq \lim_{r\to 0} \frac{C\{\tilde{\mu}(B(x_j;r))\}^{p^*/p} + C\{\tilde{\sigma}(B(x_j;r))\}^{q^*/q}}{(\tilde{\mu}+\tilde{\sigma})(B(x_j;r))} = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $f \equiv 0$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N \backslash H$, com respeito a $\tilde{\mu}+\tilde{\sigma}$. Pelo Lema A.2.12, H é no máximo enumerável. Assim, para cada mensurável $A \subset \mathbb{R}^N$,

$$\tilde{\nu}_0(A) = \tilde{\nu}_0(A\backslash H) + \tilde{\nu}_0(A \cap H) = 0.$$

Logo, $\tilde{\nu}_0 = 0$ e $\tilde{\nu} = \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}$. Além do mais, desde que $\tilde{\nu}(\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}) = 0$, $(x_j)_{j\in J} \subset \overline{\Omega}$.

□

Lema A.2.15. *Seja $(x_j)_{j\in J}$ como dado no Corolário A.2.14. Então, existe $C > 0$ tal que $\tilde{\mu}(\{x_j\}) \leq C\mu(\{x_j\})$ para cada $j \in J$.*

Demonstração. Considere $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \xi \leq 1$, $\xi \equiv 1$ em $\overline{B(0;1)}$; $\xi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \backslash B(0;2)$. Dado $r > 0$, definimos $\xi_{r,j}(x) = \xi\left(\frac{x-x_j}{r}\right)$; $j \in J$. Temos

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mu}(\{x_j\}) &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \xi_{r,j} d\tilde{\mu} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-a_1 p} |\nabla u_n - \nabla u|^p \xi_{r,j} \ dx \\
&\leq \lim_{n\to+\infty} 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-a_1 p} (|\nabla u_n|^p - |\nabla u|^p) \xi_{r,j} \ dx \\
&= 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} \xi_{r,j} d\mu + 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} \xi_{r,j} |\nabla u|^p dx \\
&= 2^{p-1} \int_{B(0;2r)} \xi_{r,j} d\mu + 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} \xi_{r,j} |\nabla u|^p dx \\
&\leq 2^{p-1} \int_{B(0;2r)} 1 \ d\mu + 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} \xi_{r,j} |\nabla u|^p dx
\end{aligned}
$$

Fazendo $r \to 0^+$, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\tilde{\mu}(\{x_j\}) \leq 2^{p-1} \mu(\{x_j\}).$$

□

Demonstração da Proposição 3.2.1. Pelo Lema A.2.11, se $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-\beta} Q(x, u_n, v_n) \varphi \ dx = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-\beta} Q(x, u, v) \varphi \ dx + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-\beta} Q(x, \tilde{u}_n, \tilde{v}_n) \varphi \ dx + o_n(1).$$

Fazendo $n \to +\infty$, de (A.2) e (A.3), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \ d\nu = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-\beta} Q(x, u, v) \varphi \ dx + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi \ d\tilde{\nu},$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Usando o Corolário A.2.14, temos

$$\nu = |x|^{-\beta} Q(x,u,v)dx + \tilde{\nu} = |x|^{-\beta} Q(x,u,v)dx + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}.$$

Isso demonstra (3.2). Note que, em particular, $\nu(\{x_j\}) = \tilde{\nu}(\{x_j\}) = \nu_j,\ j \in J$. Agora, pelo Lema A.2.13, existe $C > 0$ tal que

$$\tilde{\nu}(B(x_j;r)) \leq C\{\tilde{\mu}(B(x_j;r))\}^{p^*/p} + C\{\tilde{\sigma}(B(x_j;r))\}^{q^*/q}.$$

Fazendo $r \to +\infty$ e combinando com o Lema A.2.15, obtemos (3.5), com $\mu_j = \mu(\{x_j\})$ e $\sigma_j = \sigma(\{x_j\})$.

Procedendo como acima, obtemos

$$\mu = |x|^{-a_1 p} |\nabla u|^p dx + \tilde{\mu} \geq |x|^{-a_1 p} |\nabla u|^p dx.$$

Também, temos que $\mu \geq \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j}$. Uma vez que $|x|^{-a_1 p} |\nabla u|^p dx$ e δ_{x_j} são mutuamente singulares, obtemos (3.3). Analogamente, demonstra-se que (3.4) ocorre.

□

A.3 Propriedades do gênero de Krasnoselskii

Lema A.3.1. *Denote por $\mathfrak{A}$ a classe de todos os conjuntos fechados $A \subset E \setminus \{0\}$ que são simétricos em relação à origem. Sejam $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$. Valem*

(i) Se $A_1 \subset A_2$, então $\gamma(A_1) \leq \gamma(A_2)$;

(ii) $\gamma(A_1 \cup A_2) \leq \gamma(A_1) + \gamma(A_2)$;

(iii) se $\eta \in C(A; E)$ é ímpar, então $\gamma(A) \leq \gamma(\eta(A))$;

(iv) se A é compacto, então $\gamma(A) < +\infty$ e existe U_A, uma vizinhança simétrica de A, tal que $\gamma(\overline{U}_A) = \gamma(A)$.

Demonstração. Veja [4, Lema 10.4].

□

A demonstração do próximo lema pode ser vista em [24].

Lema A.3.2 (Deformação equivariante)**.** *Seja X um espaço de Banach real e suponha que $\phi \in C^1(X;\mathbb{R})$ é um funcional satisfazendo a condição $(PS)_c$. Se $c \in \mathbb{R}$, $\bar{\epsilon} > 0$ e U é uma vizinhança aberta de $K_c = \{u \in X : \phi'(u) = 0 \;\; e \;\; \phi(u) = c\}$, então existem $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ e $\eta \in C([0,1] \times X; X)$ tais que, para quaisquer $u \in X$ e* $[0,1]$, *vale:*

(i) $\eta(0, u) = u$;

(ii) $\eta(t, u) = u$, *se* $u \notin \phi^{-1}([c - \bar{\epsilon}, c + \bar{\epsilon}])$;

(iii) $\phi(\eta(t, u)) \leq \phi(u)$;

(iv) $\eta(1, \phi^{c+\epsilon} \backslash U) \subset \phi^{c-\epsilon}$;

(v) $\eta(t, \cdot) : X \to X$ *é um homeomorfismo ímpar.*

A.4 Operadores diferenciáveis

Definição A.4.1. *Sejam X um espaço de Banach, $U \subset X$ um aberto e $\varphi : U \to \mathbb{R}$ um operador. Dizemos que φ tem derivada de Gâteaux $f \in X^{-1}$ (dual de X) em $u \in U$ se, para cada $h \in X$,*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[\varphi(u + th) - \varphi(u) - \langle f, th \rangle] = 0.$$

A derivada de Gâteaux em u é denotada por $\varphi'(u)$.

Dizemos que φ tem derivada de Fréchet $f \in X^{-1}$ em $u \in U$ se

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|}[\varphi(u + h) - \varphi(u) - \langle f, h \rangle] = 0.$$

Além disso, dizemos que $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$ se a derivada de Fréchet de φ existe e é contínua.

Se X é um espaço de Hilbert e φ tem derivada de Gâteaux em $u \in U$, o gradiente de φ em u é definido por

$$\langle \nabla\varphi(u), h\rangle := \langle \varphi'(u), h\rangle \,.$$

Observação: a) A derivada de Gâteaux é dada por

$$\varphi'(u)(h) = \langle \varphi'(u), h\rangle = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\varphi(u+th) - \varphi(u)].$$

b) Todo operador diferenciável a Fréchet é diferenciável a Gâteaux.

A demonstração da proposição a seguir pode ser vista, por exemplo, em [53, Proposição 1.3].

Proposição A.4.2. *Se o operador φ tem derivada de Gâteaux contínua em U, então $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$.*

Os próximos Teoremas dizem respeito à diferenciabilidade dos funcionais apresentados durante o trabalho.

Teorema A.4.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suave e limitado com $N \geq 3$, $1 < p < N$, $a < \frac{N-p}{p}$, $p < q \leq p^*$, em que $p^* = \frac{Np}{N-dp}$ é o expoente crítico de Caffarelli-Kohn-Nirenberg, com $d = 1 + a - b$, $a \leq b < a + 1$ e $\beta < (a+1)q + N(1 - \frac{q}{p})$. Sejam, também, $M : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Caratheodory satisfazendo as seguintes hipóteses:*

(M_1) *Existe $m_0 > 0$ tal que*

$$M(t) \geq m_0, \forall\, t \geq 0.$$

(M_2) *M é uma função crescente.*

(f_1) $$f(x, -t) = -f(x, t), \forall\, (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

(f_2) Existem $r \in [1, q)$ e C_1, C_2 constantes positivas, com $C_1 < C_2$, tais que

$$C_1|t|^{r-1} \leq f(x,t) \leq C_2|t|^{r-1}, \forall\, (x,t) \in \Omega \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}).$$

Além dessas hipóteses, supomos $\delta < (a+1)r + N(1-\frac{r}{p})$. Então, o funcional $I : \mathcal{D}_a^{1,p} \to \mathbb{R}$, definido por

$$I(u) = \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) - \lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}F(x,u)\ dx - \frac{1}{q}\int_\Omega |x|^{-\beta}|u|^q\ dx, \tag{A.6}$$

em que $\widehat{M}(t) := \int_0^t M(s)\ ds$ e $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\ ds$ é de classe $C^1(\mathcal{D}_a^{1,p};\mathbb{R})$ e sua derivada de Fréchet em u é dada por

$$\begin{aligned} I'(u)(\phi) &= M(\|u\|^p)\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\phi\ dx \\ &\quad -\lambda\int_\Omega |x|^{-\delta}f(x,u)\phi\ dx - \int_\Omega |x|^{-\beta}|u|^{q-2}u\phi\ dx, \end{aligned}$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}_a^{1,p}$.

Demonstração. Para demonstrar esse teorema, faremos uso da Proposição A.4.2. Primeiramente, demonstraremos que o operador $H_1 : \mathcal{D}_a^{1,p} \to \mathbb{R}$, definido por $H_1(u) = \int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx$, é de classe C^1 e sua derivada de Fréchet é dada por

$$H_1'(u)(\phi) = p\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi\ dx,$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}_a^{1,p}$.

Defina $G_1 : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, por $G_1(x,y) = p\int_0^{|y|} s^{p-1}ds$. Para $u, v \in \mathcal{D}_a^{1,p}$ e $0 < |t| < 1$, temos

$$\int_\Omega |x|^{-ap}\frac{|\nabla u + t\nabla v|^p - |\nabla u|^p}{t}dx = \int_\Omega |x|^{-ap}\frac{G_1(x, \nabla u + t\nabla v) - G_1(x,\nabla u)}{t}dx.$$

Mas, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{|G_1(x,\nabla u + t\nabla v) - G_1(x,\nabla u)|}{|t|} &\leq \frac{p|\nabla u + \theta t\nabla v|^{p-1}|t\nabla v|}{|t|}\\ &\leq p(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-1}(|\nabla u| + |\nabla v|)\\ &\leq 2^{p-1}p(|\nabla u|^p + |\nabla v|^p) \in L^1(\Omega, |x|^{-ap}).\end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\int_\Omega |x|^{-ap}\frac{|\nabla u + t\nabla v|^p - |\nabla u|^p}{t}dx &= \int_\Omega |x|^{-ap}\lim_{t\to 0^+}\frac{G_1(x,\nabla u + t\nabla v) - G_1(x,\nabla u)}{t}dx\\ &= \int_\Omega |x|^{-ap}G_1'(\nabla u)(\nabla v)dx\\ &= p\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v\ dx.\end{aligned}$$

Assim,

$$H_1'(u)(\phi) = p\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi\ dx,$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}_a^{1,p}$. Segue da desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}|H_1'(u)(\phi)| &= |p\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi\ dx|\\ &\leq p\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-1}|\nabla\phi|dx\\ &\leq p\left(\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla\phi|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= p\|u\|^{p-1}\|\phi\|,\end{aligned} \tag{A.7}$$

ou seja, $H_1'(u)$ é um operador linear limitado e, portanto, contínuo.

Agora, mostraremos que $H_1' : \mathcal{D}_a^{1,p} \to (\mathcal{D}_a^{1,p})^{-1}$ é contínuo. Com efeito, sejam (u_n) uma sequência em $\mathcal{D}_a^{1,p}$ e $u \in \mathcal{D}_a^{1,p}$ tais que $u_n \to u$ em $\mathcal{D}_a^{1,p}$, quando $n \to +\infty$.

Pela desigualdade (A.7), obtemos

$$\begin{aligned}\|H_1'(u_n) - H_1'(u)\|_{(\mathcal{D}_a^{1,p})^{-1}} &= \sup\{|(H_1'(u_n) - H_1'(u))(v)| : v \in \mathcal{D}_a^{1,p} \text{ e } \|v\| = 1\}\\ &\leq p\|u_n - u\|^{p-1} \to 0 \text{ em } (\mathbb{R}, |\cdot|),\end{aligned}$$

quando $n \to +\infty$. Isso mostra que $H_1 \in C^1(\mathcal{D}_a^{1,p}; \mathbb{R})$.

Defina $H_2 = \widehat{M} \circ H_1$. Afirmamos que H_2 é de classe C^1. Com efeito, dados $u, v \in \mathcal{D}_a^{1,p}$ e $0 < |t| < 1$, como $\widehat{M}$ e H_1 são diferenciáveis, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0,1)$, tal que

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{p}\widehat{M}(\|u+tv\|^p) - \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p)}{t} &= \frac{\frac{1}{p}M(\|u+\theta tv\|^p)\cdot H_1'(u+\theta tv)\cdot t\nabla v}{t}\\ &= \frac{1}{p}M(\|u+\theta tv\|^p)\cdot H_1'(u+\theta tv)\cdot\nabla v\\ &= M(\|u+\theta tv\|^p)\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla(u+\theta tv)|^{p-2}\nabla u\nabla v\; dx.\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada e sabendo que M é contínua, obtemos

$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{p}\widehat{M}(\|u+tv\|^p) - \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p)}{t} = M(\|u\|^p)\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v\; dx.$$

Assim,

$$H_2'(u)(\phi) = M(\|u\|^p)\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi\; dx,$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}_a^{1,p}$.

Mostremos que $H_2' : \mathcal{D}_a^{1,p} \to (\mathcal{D}_a^{1,p})^{-1}$ é um operador contínuo. Seja $(u_n) \subset \mathcal{D}_a^{1,p}$, tal que $u_n \to u$, em $\mathcal{D}_a^{1,p}$. Dessa forma, temos $\|u_n\|$ limitada. Desde que M é contínua, existe $C > 0$ tal que $M(\|u_n\|^p) \leq C$. Segue da desigualdade de Hölder que, para toda $\phi \in \mathcal{D}_a^{1,p}$,

$$\begin{aligned}|H_2'(u_n)(\phi) - H_2'(u)(\phi)| =& \Big| M(\|u_n\|^p) \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \phi \, dx \\ & - M(\|u\|^p) \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi \, dx \Big| \\ \leq & M(\|u_n\|^p) \left| \int_\Omega |x|^{-ap} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \nabla \phi \, dx \right| \\ & + |M(\|u_n\|^p) - M(\|u\|^p)| \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u|^{p-1} |\nabla \phi| dx \\ \leq & C \left| \int_\Omega |x|^{-ap} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \nabla \phi \, dx \right| \\ & + \|u\|^{p-1} \|\phi\| \, |M(\|u_n\|^p) - M(\|u\|^p)| \, .\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|H_2'(u_n) - H_2'(u)\| =& \sup_{\|\phi\| \leq 1} |H_2'(u_n)(\phi) - H_2'(u)(\phi)| \\ \leq & C \left| \int_\Omega |x|^{-ap} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \nabla \phi \, dx \right| \\ & + \|u\|^{p-1} \, |M(\|u_n\|^p) - M(\|u\|^p)| \, .\end{aligned} \tag{A.8}$$

Como $|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \to |\nabla u|^{p-2} \nabla u$, em $[L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega, |x|^{-ap})]^N$, quando $n \to +\infty$, (veja [22]) temos

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega |x|^{-ap} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \nabla \phi \, dx = 0.$$

Logo, fazendo $n \to +\infty$ em (A.8), obtemos

$$\|H_2'(u_n) - H_2'(u)\| \to 0,$$

quando $n \to +\infty$. Isso mostra que H_2' é contínuo e, portanto, H_2 é de classe C^1.

Agora, defina $H_3 : \mathcal{D}_a^{1,p} \to \mathbb{R}$ por $H_3(u) = \int_\Omega |x|^{-\delta} F(x,u) dx$. Pelo Teorema do Valor Médio, para todos $u, v \in \mathcal{D}_a^{1,p}$ e $0 < |t| < 1$, existe $0 < \theta < 1$, tal que

$$\begin{aligned}\frac{|F(x, u+tv) - F(x,u)|}{|t|} &= \frac{|f(x, u+\theta tv)| \cdot |tv|}{|t|}\\ &\leq C_2 |u + \theta tv|^{r-1}|v|\\ &\leq C_2 2^{r-1}(|u|^r + |v|^r) \in L^1(\Omega, |x|^{-\delta}).\end{aligned}$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{H_3(u+tv) - H_3(u)}{t} &= \int_\Omega |x|^{-\delta} \lim_{t\to 0^+} \frac{F(x, u+tv) - F(x,u)}{t} dx\\ &= \int_\Omega |x|^{-\delta} f(x,u)v \; dx.\end{aligned}$$

Logo, $H_3'(u)(\phi) = \int_\Omega |x|^{-\delta} f(x,u)\phi \; dx$, para toda $\phi \in \mathcal{D}_a^{1,p}$. Assim, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}|H_3'(u)(\phi)| &= |\int_\Omega |x|^{-\delta} f(x,u)\phi \; dx|\\ &\leq C_2 \int_\Omega |x|^{-\delta}|u|^{r-1}|\phi| dx \\ &\leq C_2 \|u\|^{r-1}\|\phi\|.\end{aligned} \tag{A.9}$$

O que mostra que $H_3'(u)$ é um operador linear limitado e, portanto, contínuo.

Agora, mostraremos que $H_3' : \mathcal{D}_a^{1,p} \to (\mathcal{D}_a^{1,p})^{-1}$ é contínuo. Com efeito, sejam (u_n) uma sequência em $\mathcal{D}_a^{1,p}$ e $u \in \mathcal{D}_a^{1,p}$ tais que $u_n \to u$ em $\mathcal{D}_a^{1,p}$, quando $n \to +\infty$. Pela desigualdade (A.9), obtemos

$$\begin{aligned}\|H_3'(u_n) - H_3'(u)\|_{(\mathcal{D}_a^{1,p})^{-1}} &= \sup\{|(H_3'(u_n) - H_3'(u))(v)| : v \in \mathcal{D}_a^{1,p} \text{ e } \|v\| = 1\}\\ &\leq C_2 \|u_n - u\|^{r-1} \to 0 \text{ em } (\mathbb{R}, |\cdot|),\end{aligned}$$

quando $n \to +\infty$.Isso mostra que $H_3 \in C^1(\mathcal{D}_a^{1,p}; \mathbb{R})$.

Por fim, defina $H_4 : \mathcal{D}_a^{1,p} \to \mathbb{R}$ por $H_4(u) = \int_\Omega |x|^{-\beta}|u|^q dx$. Pelo Teorema do Valor Médio, para todos $u, v \in \mathcal{D}_a^{1,p}$ e $0 < |t| < 1$, existe $0 < \theta < 1$, tal que

$$\begin{aligned} \frac{|H_4(x, u+tv) - H_4(x,u)|}{|t|} &= \frac{q|u + \theta t v|^{q-1} \cdot |tv|}{|t|} \\ &\leq q(|u| + |v|)^{q-1}(|u| + |v|) \\ &\leq 2^{q-1}(|u|^q + |v|^q) \in L^1(\Omega, |x|^{-\beta}). \end{aligned}$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{H_4(u+tv) - H_4(u)}{t} &= \int_\Omega |x|^{-\beta} \lim_{t \to 0^+} \frac{|u+tv|^q - |u|^q}{t} dx \\ &= q \int_\Omega |x|^{-\beta} |u|^{q-2} uv dx. \end{aligned}$$

Logo, $H_4'(u)(\phi) = \int_\Omega |x|^{-\beta}|u|^{q-2}u\phi \; dx$, para toda $\phi \in \mathcal{D}_a^{1,p}$. Assim, pela desigualdade de Hölder,

$$|H_4'(u)(\phi)| \leq \|u\|^{q-1}\|v\|. \tag{A.10}$$

O que mostra que $H_4'(u)$ é um operador linear limitado e, portanto, contínuo.

Agora, mostraremos que $H_4' : \mathcal{D}_a^{1,p} \to (\mathcal{D}_a^{1,p})^{-1}$ é contínuo. Com efeito, sejam (u_n) uma sequência em $\mathcal{D}_a^{1,p}$ e $u \in \mathcal{D}_a^{1,p}$ tais que $u_n \to u$ em $\mathcal{D}_a^{1,p}$, quando $n \to +\infty$. Pela desigualdade (A.10), obtemos

$$\begin{aligned} \|H_4'(u_n) - H_4'(u)\|_{(\mathcal{D}_a^{1,p})^{-1}} &= \sup\{|(H_4'(u_n) - H_4'(u))(v)| : v \in \mathcal{D}_a^{1,p} \text{ e } \|v\| = 1\} \\ &\leq \|u_n - u\|^{r-1} \to 0 \text{ em } (\mathbb{R}, |\cdot|), \end{aligned}$$

quando $n \to +\infty$. Isso mostra que $H_4 \in C^1(\mathcal{D}_a^{1,p}; \mathbb{R})$.

Uma vez que $I(u) = \frac{1}{p}H_2(u) - \lambda H_3(u) - \frac{1}{q}H_4(u)$, temos que I é de classe $C^1(\mathcal{D}_a^{1,p}; \mathbb{R})$ e sua derivada de Fréchet em u é dada por

$$\begin{aligned} I'(u)(\phi) \;\; &= \;\; M(\|u\|^p)\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi \; dx \\ & \quad -\lambda \int_\Omega |x|^{-\delta} f(x,u)\phi \; dx - \int_\Omega |x|^{-\beta}|u|^{q-2}u\phi \; dx, \end{aligned}$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}_a^{1,p}$.

$\square$

Observação A.4.4. *Considere a "função corte" $\psi \in C_0^1([0,+\infty))$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi(t) = 1$, para todo $t \in [0, t_1]$, $\psi(t) = 0$, para todo $t \in [t_2, +\infty)$ e $\psi'(t) \leq 0$, para todo $t \in [0, +\infty)$. Sob as hipóteses do Teorema A.4.3, defina o operador $H_5 : \mathcal{D}_a^{1,p} \to \mathbb{R}$ por $H_5(u) = \psi(\|u\|^p)H_4(u)$. Desde que H_4 é de classe C^1, utilizando os mesmos argumentos para demonstrar que H_2 é de classe C^1, podemos demonstrar que $\psi(\|u\|^p)$ é de classe C^1. Logo, $H_5 \in C^1(\mathcal{D}_a^{1,p}; \mathbb{R})$. Assim, o funcional $J : \mathcal{D}_a^{1,p} \to \mathbb{R}$, dado por*

$$J(u) = \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) - \lambda \int_\Omega |x|^{-\delta} F(x,u)\, dx - \frac{\psi(\|u\|^p)}{q} \int_\Omega |x|^{-\beta}|u|^q\, dx,$$

é de classe C^1.

Os argumentos para a demonstração do próximo teorema são muito semelhantes aos da demonstração do Teorema A.4.3.

Teorema A.4.5. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suave e limitado, com $N \geq 3$; $1 < p < N$, $1 < q < N$, $a_1 < \frac{N-p}{p}$, $a_2 < \frac{N-q}{q}$, $\dfrac{\alpha}{p^*} + \dfrac{\gamma}{q^*} = 1$, em que $p^* = \dfrac{Np}{N - d_1 p}$ e $q^* = \dfrac{Nq}{N - d_2 q}$ são os expoentes críticos de Caffarelli-Kohn-Nirenberg, com $d_i = 1 + a_i - b_i$, $a_i \leq b_i < a_i + 1$, $i = 1, 2$ e $\beta = b_1 p^* = b_2 q^*$ e $c < \min\{(a_1+1)r + N(1 - \frac{p_0}{p}), (a_2+1)r + N(1 - \frac{q_0}{q})\}$, em que $p_0 \in (p, p^*)$ e $q_0 \in (q, q^*)$ são tais que $\dfrac{\theta}{p_0} + \dfrac{\delta}{q_0} = 1$. Sejam, também $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função mensurável em Ω e continuamente diferenciável em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, F_w sua derivada parcial com respeito a w e $M_i : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua, para $i = 1, 2$, satisfazendo as hipóteses $(M1)$, $(M2)$, $(F1)$ e $(F2)$ do Capítulo 3. Então, o funcional $I : E \to \mathbb{R}$, dado por*

$$I(u,v) = \frac{1}{p}\widehat{M_1}(\|u\|_A^p) + \frac{1}{q}\widehat{M_2}(\|v\|_B^q) - \lambda \int_\Omega |x|^{-c} F(x,u,v)dx - \int_\Omega |x|^{-\beta}|u|^\alpha |v|^\gamma dx,$$

para todo $(u,v) \in E$, em que $\widehat{M_i}(t) := \int_0^t M_i(s)ds$, $i = 1, 2$, é de classe C^1 e sua derivada *de Fréchet é dada por*

$$
\begin{aligned}
I'(u,v)(\varphi,\psi) =& M_1(\|u\|_A^p)\int_\Omega |x|^{-a_1p}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi dx\\
&+ M_2(\|v\|_B^q)\int_\Omega |x|^{-a_2q}|\nabla v|^{q-2}\nabla v\nabla\psi dx\\
&- \lambda\int_\Omega |x|^{-c}F_u(x,u,v)\varphi dx - \lambda\int_\Omega |x|^{-c}F_v(x,u,v)\psi dx\\
&- \alpha\int_\Omega |x|^{-\beta}|u|^{\alpha-2}u|v|^{\gamma}\varphi dx - \gamma\int_\Omega |x|^{-\beta}|u|^{\alpha}|v|^{\gamma-2}v\psi dx,
\end{aligned}
$$

para todo $(\varphi,\psi)\in E$.

Referências Bibliográficas

[1] C. Alves, F. J. S. A. Corrêa, T. F. Ma, *Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type*, Comput. Math. Appl. 49 (2005), 85-93.

[2] R. Adams, J. Fournier, *Sobolev spaces*, Academic Press, Boston, 2003.

[3] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and apllications*, J. Functional Analysis 14 (1973), 349-381.

[4] A. Ambrosetti, A. Malchiodi, *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems*, Cambridge University Press, New York, 2007.

[5] G. Anelo, *A uniqueness result for a nonlocal equation of Kirchhoff type and some related open problem*, J. Math. Anal. Appl. 373 (2011), 248-251.

[6] J. P. García Azorero, I. P. Alonso, *Existence and nonuniqueness for the p-Laplacian*, Comm. PDE 12 (1987), 126-202.

[7] S. Bernstein, *Sur une classe d'équations fonctionnelles aux dérivés partielles*, Bull. Acad. Sci. URSS. Sér. Math. (Izvestia Akad. Nauk SSSR) 4 (1940), 17-26.

[8] H. Brézis, *Functional Analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, New York, 2010.

[9] H. Brézis, E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983), 486-490.

[10] H. Brézis, L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. vol. 36 (1983), 437-477.

[11] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg, *First order interpolation inequalities with weights*, Compos. Math. 53 (1984), 259-275.

[12] A. Castro, *Metodos variacionales y analisi functional no linear*, X Coloquio colombiano de Matematicas, 1980.

[13] B. Cheng, X. Wu, J. Liu, *Multiplicity of solutions for nonlocal elliptic system of (p,q)-Kirchhoff type*, Abstract and Applied Analysis, 2011.

[14] N. T. Chung, *An existence result for a class of Kirchhoff type systems via sub and supersolutions method*, Applied Mathematics Letters 35 (2014), 95-101.

[15] N. T. Chung, H. Q. Toan, *Existence and multiplicity of solutions for a degenerate nonlocal elliptic differential equation*, EJDE, 148, (2013) 1-13.

[16] D. C. Clark, *A variant of the Lusternik-Schnirelman theory*, Indiana Univ. Math., J. 22 (1972), 65-74.

[17] F. J. S. A. Corrêa, G. M. Figueiredo, *On an elliptic equation of p-Kirchhoff-type via variational methods*, Bull. Austral. Math. Soc. 77 (2006), 263-277.

[18] F. J. S. A. Corrêa, G. M. Figueiredo, *On a p-Kirchhoff equation via Krasnoselskii's genus*, Applied Mathematics Letters 22 (2009), 819-822.

[19] F. J. S .A. Corrêa, R.G. Nascimento, *On a nonlocal elliptic system of p-Kirchhoff type under Neumann boundary condition*, Math. Comput. Modelling 49 (2009), 598-604.

[20] D. G. Costa, *Tópicos em analise não linear e aplicações as equações diferenciais*, Escola Latino-Americano de Matemática, 1986.

[21] G. Dai, D. Liu, *Infinitely many positive solutions for a p(x)-Kirchhoff-type equation*, J. Math. Anal. Apll. 359 (2009), 764-710.

[22] J. D. de Godoi, *Problemas de autovalores de Steklov-Neumann e aplicações*, Tese de Doutorado UFSCar, São Carlos, 2012.

[23] J. D. de Godoi, O. H. Miyagaki, R. S. Rodrigues, *On Steklov-Neumann boundary value problems for some quasilinear elliptic equations*, Applied Mathematics Letters 45 (2015), 47-51.

[24] J. R. dos Santos Júnior, *Multiplicidade de soluções para uma classe de problemas não-locais do tipo Kirchhoff*, Dissertação de Mestrado, UFPA, Belém, 2011.

[25] L. C. Evans, R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, Florida, 1992.

[26] G. M. Figueiredo, *Existence of a positive solution for a Kirchhoff problem type with critical growth via truncation argument*, J. Math. Anal. Appl. 401 (2013), 706-713.

[27] G. M. Figueiredo, *On a nonlocal system with critical growth*, Chapter 4 of the book Recent Trends on Nonlinear Elliptic Systems, ISBN 978-618-8003-0-8, International ScientificPress, Athens, Greece, 2012.

[28] G. M. Figueiredo, J. R. dos Santos Junior, *Multiplicity of solutions for a Kirchhoff equation with subcritical or critical growth*, DIE-Diff. Int. Equations, 25 (2012), 853-868.

[29] G. M. Figueiredo, M. B. Guimarães, R. S. Rodrigues, *Solutions for a Kirchhoff equation with weight and nonlinearity with subcritical and critical Caffarelli-Kohn-Nirenberg growth*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, (2016), doi:10.1017/S0013091515000395.

[30] G. B. Folland, *Real analysis: modern techniques and their applications*, John Wiley & Sons, New York, 1999.

[31] N. Ghoussoub, C. Yuan, *Multiple solutions for quasi-linear PDEs involving the critical Sobolev and Hardy exponents*, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (1998), 5703-5743.

[32] M. B. Guimarães, R. S. Rodrigues, *Existence of a nontrivial solution for a Kirchhoff equation involving p-linear and p-superlinear therms and with critical Caffarelli-Kohn-Nirenberg growth*, EJDE, a aparecer.

[33] M. B. Guimarães, R. S. Rodrigues, *Existence of solution for a Kirchhoff type system with weight and nonlinearity involving a (p, q)-superlinear term and critical Caffarelli-Kohn-Nirenberg growth*, TMNA, a aparecer.

[34] G. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya *Inequalities*, Cambridge University Press, London, 1934.

[35] X. He, W. Zou *Infinitely many positive solutions for Kirchhoff-type problems*, Nonlinear Anal. 70 (2009), 1407-1414.

[36] T. Horiuchi, *Best constant in weighted Sobolev inequality with weights being powers of distance from origin*, J. Inequal. Appl. **1** (1997), 275-292.

[37] S. Kesavan, *Nonlinear functional analysis*, Hindustan Book Agency, New Dehli, 1993.

[38] G. Kirchhoff, *Mechanik, Teubner*, Leipzig, Germany, 1883.

[39] M. A. Krasnoselskii, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, MacMillan, New York, 1964.

[40] A. Kufner, O. John, S. Fucik, *Function Spaces*, Academia, Praha & Noordhoff International Publishing, Layden, 1977.

[41] E. L. Lima, *Curso de Análise, vol.2*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, IMPA, 2010.

[42] J-L. Lions, *On some questions in boundary value problems of mathematical physics*, in: Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations (Proc. Internat. Sympos., Inst. Mat., Univ. Fed. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1977), in: North- Holland Math. Stud., vol. 30, North-Holland, Amsterdam, New York, (1978), 284-346.

[43] P. L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case*, Rev. Mat. Iberoamericana **1** (1985), 145-201.

[44] D. C. Liu, *On a p-Kirhhoff equation via fountain theorem and dual fountain theorem*, Nonlinear Anal. 72 (2010), 302-208.

[45] T. F. Ma, J.E. Muñoz Rivera, *Positive solutions for a nonlinear nonlocal elliptic transmission problem*, Applied Mathematics Letters 16 (2) (2003), 243-248.

[46] N. Mavinga, M. N. Nkashama, *Steklov-Neumann eigenproblems and nonlinear elliptic equations with nonlinear boundary conditions*, J. Differential Equations 248 (2009), 1212-1229.

[47] J. Morbach, *Problemas elípticos não-locais com condições de fronteira inegrais*, Tese de Doutorado UFPA, Belém, 2014.

[48] J. Necǎs, *Direct methods in the theory of elliptic equations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.

[49] K. Perera, Z. Zhang, *Nontrivial solutions of Kirchhoff-type problems via the Yang index*, J. Differential Equations 221 (2006), 246-255.

[50] S. I. Pohozaev, *A certain class of quasilinear hyperbolic equations*, Mat. Sb. (N.S.) 96 (138) (1975), 152-166, 168.

[51] R. S. Rodrigues, *Sistemas elípticos com pesos envolvendo o expoente crítico de Hardy-Sobolev*, Tese de Doutorado UFSCar, São Carlos, 2007.

[52] E. Silva, M. Xavier, *Quasilinear elliptic system with coupling on nonhomogeneous critical term*, Nonlinear Analysis 69 (2008).

[53] M. Willem, *Minimax theorems (Progress in nonlinear differential equations and their applications)*, Birkhäuser, Boston, 1996.

[54] B. Xuan, *The eigenvalue problem of a singular quasilinear elliptic equation*, EJDE 16 (2004), 1-11.

[55] B. Xuan, *The solvability of quasilinear Brezis-Nirenberg-type problems with singular weights*, Nonlinear Anal. 62 (2005), 703-725.