Dois ensaios sobre precificação de ativos

Tamyris Marconi

Tamyris Marconi

Dois ensaios sobre precificação de ativos

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP e ao Departamento de Estatística – DEs-UFSCar, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Estatística – Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística. *VERSÃO REVISADA*.
Área de Concentração: Estatística
Orientador: Prof. Dr. Márcio Alves Diniz

UFSCar/USP - São Carlos
Maio /2016

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Marconi, Tamyris
M321d Dois ensaios sobre precificação de ativos / Tamyris Marconi. -- São Carlos : UFSCar, 2016.
102 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2016.

1. Precificação de ativos. 2. Teoria de probabilidades. 3. Teoria da coerência. 4. Martingales. I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia

Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a defesa de dissertação de mestrado da candidata Tamyris Marconi, realizada em 15/04/2016:

Marcio A. Diniz

Prof. Dr. Marcio Alves Diniz
UFSCar

Profa. Dra. Laura Leticia Ramos Rifo
UNICAMP

Savio Brochini Rodrigues

Prof. Dr. Savio Brochini Rodrigues
UFSCar

Certifico que a sessão de defesa foi realizada com a participação à distância do membro Profa. Dra. Laura Leticia Ramos Rifo e, depois das arguições e deliberações realizadas, o participante à distância está de acordo com o conteúdo do parecer da comissão examinadora redigido no relatório de defesa da aluna Tamyris Marconi.

Marcio A. Diniz

Prof. Dr. Marcio Alves Diniz
Presidente da Comissão Examinadora
UFSCar

Tamyris Marconi

Two essays on asset pricing

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP and to the Departamento de Estatística – DEs-UFSCar, as part of the requirements for obtaining the title of Master joint Graduate Program in Statistics DEs-UFSCar/ICMC-USP. *REVISED VERSION*.
Concentration Area: Statistics
Advisor: Prof. Dr. Márcio Alves Diniz

UFSCar/USP - São Carlos
May/2016

Agradecimentos

Em primeiro lugar, dedico um agradecimento especial a Deus por sempre prover além do necessário durante toda a minha caminhada acadêmica e à minha família, em especial aos meus pais, pelo apoio incondicional, especialmente nos momentos de dificuldade, independentemente da distância.

Além disso, gostaria de agradecer a todas as pessoas que, de algum modo, me ajudaram deste o inicio deste projeto, em particular , ao meu orientador Márcio que me ajudou em todos os momentos e soube, brihamentemente, me conduzir no decorrer desses dois anos.

Um agradecimento especial ao meu namorado Alan por todo o suporte e apoio durante esses dois anos e por toda a ajuda durante o desenvolvimento deste trabalho.

Resumo

Encontrar preços justos (segundo algum critério) para ativos em mercados financeiros é um dos pilares mais importantes da Teoria de Finanças. Para alcançar esse objetivo, a Teoria de Precificação de Ativos tem uma formulação matemática, fundamentada principalmente na Teoria de Probabilidades. Neste trabalho apresentaremos tal teoria, que é essencialmente baseada em martingales, objetos de grande importância na Teoria de Probabilidades. Alternativamente, apresentaremos uma Teoria de Precificação baseada na Teoria da Coerência de Bruno de Finetti com o objetivo de comparar, de modo informal, tais teorias.

Palavras chave: Precificação de Ativos, Teoria de Probabilidades, Teoria da Coerência, Martingales.

Abstract

Find fair (according to some criterion) prices for assets in financial markets is one of the most important pillars of Finance Theory. To accomplish this, the Asset Pricing Theory has a mathematical formulation, based mainly on Probability Theory. In this dissertation we present such theory, which is essentially based on mar- tingales, important objects of Probability Theory. Alternatively, we also present an Asset Pricing Theory based on the Coherence Theory of Bruno de Finetti in order to compare, informally, such approaches.

Key-words: Asset Princing Theory, Probability Theory, Coherence Theory, Martingales.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

Quando temos um ativo cujo preço futuro é conhecido dada a ocorrência de determinados acontecimentos, ou seja, seu preço futuro depende de acontecimentos que ainda irão acontecer, atribuir um preço para este ativo que seja considerado justo no tempo presente pode não ser algo simples. Em qualquer parte do mundo, a busca por preços justos no presente para os ativos vem sendo um dos problemas mais importantes na área de finanças, tanto no âmbito acadêmico quanto no profissional. Este problema tem uma formulação matemática fundamentada na Teoria de Probabilidades que denominamos “Teoria de Precificação de Ativos”.

Nos mercados financeiros, o termo **ativo** é geralmente utilizado para expressar bens, valores, créditos, direitos, etc. e tudo o mais que um indivíduo possa vir a possuir e que, em um determinado momento, venha a formar o patrimônio deste. Por exemplo, se um indivíduo possui uma casa, esta casa é um ativo uma vez que faz parte do patrimônio deste indivíduo. Do mesmo modo, uma ação de uma empresa também é um ativo já que também constitui o patrimônio de quem a possui.

Agora, imagine que um indivíduo possui uma ação de uma empresa. O preço dessa ação daqui trinta dias depende de como a empresa estará. Por exemplo, se a empresa atingir um determinado lucro essa ação deve valer mais do que o indivíduo pagou por ela, se a empresa não tiver lucros, provavelmente o preço da ação não mudará. Entretanto, se a empresa tiver um prejuízo, o preço da ação provavelmente cairá. Assim, podemos dizer que o preço dessa ação daqui trinta dias depende dos acontecimentos que acometem a empresa a qual essa ação representa.

Suponha agora que o indivíduo queira vender essa ação hoje. Por quanto ele deve vendê-la, ou seja, qual seria um preço “justo” hoje para essa ação? Claramente o preço da ação hoje deve depender de quanto ela valerá no futuro, por exemplo, o quanto ela valerá daqui um mês.

Observe que cada uma das três situações em que supomos que a empresa pode estar daqui um mês, a saber, situação de lucro, de estabilidade ou de prejuízo, as quais chamamos de **estados da natureza**, podem ser medidas atraves de uma medida de probabilidade que pode mensurar a chance de cada um desses eventos ocorrer daqui um mês. A ideia geral deste trabalho é a de, através dos preços dos ativos em um período de tempo futuro, seja possível precificá-los no tempo presente de modo que esses preços sejam considerados justos.

Para definir “preço justo” para um ativo precisamos introduzir um outro conceito dos mercados financeiros que será amplamente usado neste trabalho: o conceito de **arbitragem**.

Nos mercados financeiros, a ideia de perder (ou ganhar) com certeza é considerada irracional. É suposto que nenhum indivíduo deseje algo que, certamente, o levará a um prejuízo certo. Diante disso, se algum indivíduo tiver a chance de investir em algo que resulte em lucro certo, claramente quem está se desfazendo deste algo teria um prejuízo certo, o que contraria a ideia de que ninguém deseja perder com certeza. A ideia de ganhar (ou perder) quase com certeza, ou seja, quando um indivíduo com certeza não perderá e ainda tem chances reais de ganhar é conhecida como **arbitragem**. Por exemplo, se uma ação está sendo vendida em um mercado por 2 unidades monetárias e dentro de dois dias ela poderá valer ou 2 ou 4 unidades monetárias, o indivíduo que a comprar, com certeza, não terá chances de perder e ainda tem uma chance positiva de lucrar 2. Sendo assim, o preço de 2 por essa ação não pode ser considerado "justo".

Diante disso, é necessário encontrar preços para os ativos de modo que não seja possível que nenhum indivíduo tenha uma opção de "fazer arbitragem".

Formalmente, o preço de um ativo no tempo t é definido como uma variável aleatória X^t definida em um espaço de estados da natureza Ω, ou seja, $X^t : \Omega \to \mathbb{R}$. Quando a variável X^t é constante em cada tempo t, ou seja, quando o preço do ativo, em cada tempo t, é constante, dizemos que este ativo é um **ativo livre de risco**. Do contrário, dizemos que o ativo é um **ativo de risco**.

Nos mercados financeiros, geralmente, existe um único ativo livre de risco, e qualquer outro ativo que seja dito livre de risco é baseado neste. Por exemplo, no Brasil, os ativos livres de risco são os Títulos do Tesouro Nacional, o que nada mais é que um "empréstimo" feito ao governo com uma data pré-determinada de pagamento. Esses títulos devolvem aos investidores seu montante emprestado acrescido de uma taxa de juros, a Taxa Selic. Desse modo, independentemente do estado da natureza que ocorrer, esse ativo (o Título Público) retornará o mesmo valor para o investidor. Ainda é válido observar que qualquer outro ativo considerado livre de risco, como as Letras de Crédito Imobiliário e Agropecuário (LCI's e LCA's) por exemplo, são baseados nessa mesma Taxa Selic.

É claro que o conceito de ativo livre de risco é irreal, visto que, no caso de o governo brasileiro quebrar, por exemplo, as pessoas que investiram seu dinheiro dificilmente o teriam novamente. Contudo, existem fundos que garantem o retorno de uma parcela do dinheiro e, mesmo quando não há esse tipo de serviço, é tão distante da realidade imaginar um governo falindo que, dentre todos os ativos disponíveis, os Títulos Públicos podem ser considerados os mais livres de risco possíveis.

Neste trabalho apresentaremos duas abordagens teóricas distintas com o objetivo de precificar ativos de modo a garantir a ausência de arbitragem: a Teoria da Precificação de Ativos via Medidas Martingales e alternativamente, a Teoria da Coerência de Bruno de Finetti. O objetivo aqui será o de derivar resultados análogos nas duas abordagens apresentadas.

A organização do trabalho é como segue. Na parte I, a qual está baseada principalmente nas Referências [14], [15] e [18], desenvolveremos a teoria da precificação de ativos baseada na Teoria de Probabilidades. Esta parte está dividida em dois capítulos: o capítulo 1 e 2. No Capítulo 1 trataremos da precificação de ativos em mercados com um único período de tempo e no Capítulo 2, da precificação de ativos em mercados com vários períodos. Em ambos os casos assumiremos que nosso espaço de estados da natureza é finito e discreto. Falaremos de preços livres de arbitragem, medidas martingales equivalentes, modelos de mercados completos e apresentaremos uma versão do Teorema Fundamental de Precificação de Ativos.

Já na Parte II, a qual está baseada principalmente na Referência [17], apresentaremos a Teoria da Coerência com a abordagem de Bruno de Finetti e desenvolveremos alguns resultados de precificação de ativos em modelos com espaços de estados da natureza enumeráveis e um único período de tempo. Aqui, apresentaremos uma outra versão do Teorema Fundamental da Precificação de Ativos e também o Teorema Fundamental da Previsão, do qual derivaremos um resultado análogo para os preços dos ativos.

Finalmente, o Apêndice tem como objetivo apresentar os conceitos básicos de algumas áreas a fim de facilitar a compreenção do trabalho. Nele, trataremos brevemente de alguns resultados específicos das áreas de Álgebra Linear, Análise Funcional, Análise Real e Teoria de Probabilidades.

Concluiremos o trabalho fazendo uma breve comparação entre as duas abordagens para os modelos mais simples, ou seja, aqueles em que consideramos apenas um período de tempo e sem inclusão de taxa de juros.

Parte I

Precificação de Ativos Via Medidas Martingales

Capítulo 1

Modelo de Precificação de Ativos com um Único Período

Neste capítulo apresentaremos o Modelo de Precificação de Ativos com um único período de tempo. A teoria será desenvolvida de modo que seja possível precificar novos ativos inseridos em um mercado com um único período tendo o conhecimento dos valores desses ativos no final do período de tempo. Para tal, utilizaremos basicamente as Referências [2] e [14].

1.1 Especificações do Modelo

Considere uma data inicial $t = 0$ e uma data final $t = T$, denominadas **datas de negociação**, onde negociações só podem ser realizadas nessas duas datas. Considere ainda um espaço de estados da natureza finito $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_m\}$ e uma medida de probabilidade Q em Ω com $Q(\omega_i) > 0$ para todo $\omega_i \in \Omega$, $i = 1, ..., m$.

Considere n ativos de risco, $X_1, ..., X_n$, com $m \geq n$, e denote seus preços no tempo inicial por $P(X_j)$ e no tempo T pela variável aleatória X_j^T, para $j = 1, ..., n$. Observe que $P(X_1), ..., P(X_n)$ são constantes conhecidas, enquanto que $X_1^T, ..., X_n^T$ só serão conhecidas em $t = T$, uma vez que estas dependem do estado da natureza ω, o qual só será conhecido em $t = T$.

Considere ainda um ativo livre de risco X_0 com o preço $P(X_0)$ em $t = 0$ e X_0^T em $t = T$. Aqui, consideraremos que o valor deste ativo em $t = 0$ será sempre 1, ou seja, $P(X_0) = 1$, e em $t = T$ ele será uma constante conhecida. O modelo formado por Ω, a medida de probabilidade Q, os tempos $t = 0, T$ e os $n + 1$ ativos juntamente com seus preços em cada t é chamado **Modelo de Precificação de Ativos com um Único Período**.

Definição 1.1. *A matriz*

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} X_0^T(\omega_1) & X_0^T(\omega_2) & \cdots & X_0^T(\omega_m) \\ X_1^T(\omega_1) & X_1^T(\omega_2) & \cdots & X_1^T(\omega_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n^T(\omega_1) & X_n^T(\omega_2) & \cdots & X_n^T(\omega_m) \end{bmatrix}$$

*é a **matriz de preços finais** dos ativos X_j, $j = 0,1,...,n$, nos estados da natureza ω_i, $i = 1,...,m$. Cada linha de tal matriz é um vetor, denominado **vetor de preços** do ativo X_j.*

Observação 1.2. *A partir de agora denotaremos por A^{tr} a matriz transposta de uma matriz A.*

Definição 1.3. *Um **portfólio** ou **estratégia de negociação** é um vetor $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix}^{tr}$ em $\mathbb{R}^{n+1}$, onde β_j, $j = 0,...,n$, representa o número de ativos X_j adquiridos ou vendidos por um investidor. Como existe a possibilidade de empréstimos e vendas de qualquer quantidade, os componentes do portfólio β_j podem ser números reais quaisquer.*

Definição 1.4. *Seja $\boldsymbol{\beta}$ um portfólio qualquer. A ele associamos um valor, denominado **valor do portfólio**, $(V_t^{\boldsymbol{\beta}} \mid t = 0,T)$, que identifica o valor monetário do portfólio $\boldsymbol{\beta}$ no tempo t. Assim,*

$$V_0^{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}^{tr} \begin{bmatrix} P(X_0) \\ P(X_1) \\ \vdots \\ P(X_n) \end{bmatrix} \text{ e } V_T^{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}^{tr} \begin{bmatrix} X_0^T \\ X_1^T \\ \vdots \\ X_n^T \end{bmatrix}.$$

Observação 1.5. *Observe que $V_0^{\boldsymbol{\beta}}$ é o valor do portfólio $\boldsymbol{\beta}$ em $t = 0$, portanto, é uma constante conhecida. Já $V_T^{\boldsymbol{\beta}}$ é uma variável aleatória, visto que o valor do portfólio em $t = T$ depende dos valores de cada ativo em $t = T$.*

Observação 1.6. *No restante do trabalho denotaremos $\begin{bmatrix} P(X_0) & P(X_1) & \cdots & P(X_n) \end{bmatrix}^{tr}$ por $\boldsymbol{P(X)}$ e $\begin{bmatrix} X_0^T & X_1^T & \cdots & X_n^T \end{bmatrix}^{tr}$ por $\boldsymbol{X^T}$.*

Definição 1.7. *Seja $\boldsymbol{\beta}$ um portfólio qualquer. Definimos o **ganho do portfólio** $\boldsymbol{\beta}$, denotado por $G^{\boldsymbol{\beta}}$, como sendo a variável aleatória que descreve o lucro total (ou perda) gerada pelo portfólio $\boldsymbol{\beta}$. Desse modo,*

$$G^{\boldsymbol{\beta}} = V_T^{\boldsymbol{\beta}} - V_0^{\boldsymbol{\beta}}.$$

Teorema 1.8. *$G^{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}^{tr} \Delta \boldsymbol{X}$, onde $\Delta \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X^T} - \boldsymbol{P(X)}$.*

Demonstração. De fato,

$$G^{\beta} = \boldsymbol{\beta}^{tr} \Delta \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\beta}^{tr} \boldsymbol{X^T} - \boldsymbol{\beta}^{tr} \boldsymbol{P(X)} = V_T^{\beta} - V_0^{\beta}.$$

□

Exemplo 1.9. *Considere um modelo com apenas dois períodos de negociação, 0 e T, um espaço de estados da natureza $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ e apenas dois ativos de risco, denotados por X_1 e X_2, juntamente com o ativo livre de risco X_0. Seja $P(X_1) = 15$ o preço do ativo X_1 no tempo 0 e em $t = T$, na ocorrência de ω_1, $X_1^T(\omega_1) = 18$ e na ocorrência de ω_2, $X_1^T(\omega_2) = 9$. Do mesmo modo, o preço de X_2 em $t = 0$ é $P(X_2) = 1.5$ e em $t = T$, $X_2^T(\omega_1) = 3$ e $X_2^T(\omega_2) = 0$. Considere um investidor que possui uma unidade do ativo X_1 e suponha que ele monte o seguinte portfólio:*

ele vende o ativo X_1 que ele tem, com o pensamento de comprá-lo novamente em $t = T$, compra três unidades do ativo X_2 e compra 10.50 *unidades do ativo livre de risco, ou seja, formula o portólio* $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 10.50 & -1 & 3 \end{bmatrix}^{tr}$.

Então, em $t = T$, se ω_1 ocorrer, o investidor lucra

$$10.50 - 18 + 3 \times 3.00 = 1.50$$

e se ω_2 ocorrer, ele também lucra $10.50 - 9 + 3 \times 0 = 1.5$*. Desse modo, o investidor lucrou com certeza sem nenhum investimento, uma vez que recuperou seu ativo inicial independentemente do estado ocorrido e ainda aumentou seu montante.*

No Exemplo 1.9, sem nenhuma incerteza, o investidor tem um lucro de 1.50, ou seja, sua estratégia é livre de risco, isto é, tem um lucro certo sem custo inicial. Como visto no capítulo anterior, um investimento sem custo inicial, com alguma chance de obter lucro sem nenhuma chance de perder é chamado **oportunidade de arbitragem**. Como vimos, isto é improvável do ponto de vista financeiro. Desse modo, os preços atribuídos aos ativos não devem permitir oportunidades de arbitragem.

É interessante observar que uma oportunidade de arbitragem tende a se autodestruir, isto é, naturalmente a oportunidade deixa de existir com o passar do tempo. Para enxergar isto basta observar o Exemplo 1.9 e perceber que, tendo em vista que os investidores visam sempre o lucro, muitos outros investidores tentariam lucrar do mesmo modo que o do exemplo e, dessa maneira, aumentariam a demanda pelo ativo X_2, o que elevaria seu preço, e aumentariam a oferta do ativo X_1, dimuindo seu preço. Este processo ocorreria até que os preços dos dois ativos se igualassem e a oportunidade de arbitragem seria extinta.

Formalmente, o conceito de arbitragem é o que segue.

Definição 1.10. *Uma oportunidade de arbitragem é uma estratégia de negociação $\boldsymbol{\beta}$ tal que*

i) $V_0^{\boldsymbol{\beta}} \leq 0$

ii) $V_T^{\boldsymbol{\beta}} \geq 0$

iii) $E_Q(V_T^{\boldsymbol{\beta}}) > 0$

Observe que, dizer que $E_Q(V_T^{\boldsymbol{\beta}}) > 0$ é equivalente a dizer que $V_T^{\boldsymbol{\beta}} > 0$ para ao menos um $\omega_i \in \Omega$, $i = 1, \ldots, m$, porque assumimos que $Q(\omega_i) > 0$ para todo $\omega_i \in \Omega$.

Exemplo 1.11. *Suponha que $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Considere dois ativos de risco X_1 e X_2 e o ativo livre de risco X_0. Suponha que $P(X_0) = P(X_1) = P(X_2) = 1$ e que a matriz de preços finais (em $t = T$) seja*

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

É evidente que existem oportunidades de arbitragem uma vez que o ativo X_2 tem o mesmo preço de X_1, contudo, seu valor final é sempre maior do que o de X_1. De fato, o portfólio $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{tr}$ *é uma oportunidade de arbitragem porque*

$$V_0^{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}^{tr}\boldsymbol{P(X)} = 0 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times 1 = 0,$$

ou seja, custa zero em $t = 0$. Ainda, $V_T^{\boldsymbol{\beta}} = 1$ para todos os estados da natureza ω_i, $i = 1,2,3$, o que satisfaz os itens (ii) e (iii) da Definição 1.10.

Precisamos de um ativo com o qual possamos comparar todos os demais disponíveis. O ativo que usamos para isso é o ativo livre de risco. Tal ativo pode ou não ter o mesmo valor em T que possuía em $t = 0$, dependendo da taxa de juros decorrente no período. O que fazemos é definir essa taxa de juros como rendimento do ativo livre de risco, uma vez que a taxa do período deve ser a mesma para todos os ativos disponíveis. Então, normalizamos o processo de preço dos ativos utilizando a Definição 1.12. Observe que, como dissemos no capítulo anterior, no mercado brasileiro o ativo livre de risco é o Título do Tesouro Nacional, o qual tem como rendimento a Taxa Selic. Esta é a taxa de juros no período de tempo $[0,T)$.

Definição 1.12. *Os* ***preços descontados*** *do ativo X_j, $j = 0,1,...,n$, no tempo 0 e T, respectivamente, são*

$$\overline{P(X_j)} = \frac{P(X_j)}{P(X_0)} \text{ e } \overline{X}_j^T = \frac{X_j^T}{X_0^T}.$$

Observe que $P(X_0) = 1$ por definição, e assim, $X_0^T = 1 + r$, onde r é a taxa de juros que prevalece no período de tempo $[0,T)$. Desse modo, temos que $\overline{P(X_j)} = \dfrac{P(X_j)}{P(X_0)} = P(X_j)$, enquanto que $\overline{X}_j^T = \dfrac{X_j^T}{X_0^T} = \dfrac{X_j^T}{1+r}$.

Definição 1.13. *Seja $\boldsymbol{\beta}$ um portfólio qualquer. Definimos os* ***valores descontados do portfólio*** $\boldsymbol{\beta}$ *nos tempos 0 e T, respectivamente, como*

$$\overline{V}_0^{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}^{tr}\overline{\boldsymbol{P(X)}} \text{ e } \overline{V}_T^{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}^{tr}\overline{\boldsymbol{X}}^T.$$

Definição 1.14. *Seja $\boldsymbol{\beta}$ um portfólio qualquer. Definimos o* ***ganho descontado do portfólio*** $\boldsymbol{\beta}$ *como*

$$\overline{G}^{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}^{tr}\Delta\overline{\boldsymbol{X}},$$

em que $\Delta\overline{\boldsymbol{X}}_j = \overline{X}_j^T - \overline{P(X_j)}$ e $\Delta\overline{\boldsymbol{X}} = (\Delta\overline{\boldsymbol{X}}_0,...,\Delta\overline{\boldsymbol{X}}_n)$.

Teorema 1.15. *Seja $\boldsymbol{\beta}$ um portfólio qualquer. Temos que*

$$\overline{V}_0^{\boldsymbol{\beta}} = \frac{V_0^{\boldsymbol{\beta}}}{P(X_0)} \text{ e } \overline{V}_T^{\boldsymbol{\beta}} = \frac{V_T^{\boldsymbol{\beta}}}{X_0^T}.$$

Demonstração. De fato,

$$\frac{V_0^{\boldsymbol{\beta}}}{P(X_0)} = \frac{\beta_0 P(X_0)}{P(X_0)} + \frac{\beta_1 P(X_1)}{P(X_0)} + \ldots + \frac{\beta_n P(X_n)}{P(X_0)} = \boldsymbol{\beta}^{tr} \begin{bmatrix} \overline{P(X_0)} \\ \overline{P(X_1)} \\ \vdots \\ \overline{P(X_n)} \end{bmatrix} = \overline{V}_0^{\boldsymbol{\beta}}.$$

Analogamente, segue o resultado para $\overline{V}_T^{\boldsymbol{\beta}}$.

$\square$

Teorema 1.16. *Seja* $\boldsymbol{\beta}$ *um portfólio qualquer. Temos que*

$$\overline{G}^{\boldsymbol{\beta}} = \overline{V}_T^{\boldsymbol{\beta}} - \overline{V}_0^{\boldsymbol{\beta}}.$$

Demonstração. De fato,

$$\overline{V}_T^{\boldsymbol{\beta}} - \overline{V}_0^{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}^{tr} \begin{bmatrix} \overline{X}_0^T \\ \overline{X}_1^T \\ \vdots \\ \overline{X}_n^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}^{tr} \begin{bmatrix} \overline{P(X_0)} \\ \overline{P(X_1)} \\ \vdots \\ \overline{P(X_n)} \end{bmatrix} = \beta_0(\overline{X}_0^T - \overline{P(X_0)}) + \ldots + \beta_n(\overline{X}_n^T - \overline{P(X_n)}) = \overline{G}^{\boldsymbol{\beta}}.$$

$\square$

Observação 1.17. *Note que* $\Delta\overline{\boldsymbol{X}}_0 = 0$ *porque* $\overline{X}_0^T = \overline{P(X_0)} = 1$. *Desse modo, se dois portfólios diferem apenas na quantidade de ativos livres de risco, ou seja, dados dois portfólios* $\boldsymbol{\beta}$ *e* $\boldsymbol{\alpha}$ *tal que* $\beta_i = \alpha_j$ *para* $j = 1, \ldots, n$, $\boldsymbol{\beta}$ *e* $\boldsymbol{\alpha}$ *tem o mesmo ganho descontado.*

O próximo resultado nos dá outra condição equivalente à existência de arbitragem.

Teorema 1.18. *Existe uma oportunidade de arbitragem se, e somente se, existe uma estratégia de negociação* $\boldsymbol{\beta}$ *tal que*

i) $\overline{G}^{\boldsymbol{\beta}} \geq 0$

ii) $E_Q(\overline{G}^{\boldsymbol{\beta}}) > 0$.

Demonstração. Suponha que $\boldsymbol{\beta}$ seja um portfólio de arbitragem. Daí, $V_0^{\boldsymbol{\beta}} \leq 0$ e $V_T^{\boldsymbol{\beta}} \geq 0$ para todo $\omega_i \in \Omega$, $i = 1, \ldots, m$, com desigualdade estrita para ao menos um ω_i. Então, como $X_0^T > 0$ para todo $\omega_i \in \Omega$, temos que $\overline{V}_T^{\boldsymbol{\beta}} = \dfrac{V_T^{\boldsymbol{\beta}}}{X_0^T} \geq 0$ para todo ω_i com desigualdade estrita para ao menos algum ω_i. Pelo Teorema 1.16 segue que $\overline{G}^{\boldsymbol{\beta}} \geq 0$ para todo $\omega_i \in \Omega$ com desigualdade estrita para algum ω_i, ou seja, (i) e (ii) são satisfeitas.

Reciprocamente, suponha que $\boldsymbol{\beta}$ seja um portfólio satisfazendo (i) e (ii). Assim, podemos definir um novo portfólio $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}^{tr}$ tal que $\alpha_0 = -\sum_{j=1}^{n} \beta_j \overline{P(X_j)}$ e $\boldsymbol{\alpha}_j = \boldsymbol{\beta}_j$

para $j = 1,...,n$. Assim, $\overline{V}_0^{\boldsymbol{\alpha}} = V_0^{\boldsymbol{\alpha}} = 0$ e pela Observação 1.17, $\overline{G}^{\boldsymbol{\alpha}} = \overline{G}^{\boldsymbol{\beta}} \geq 0$ com desigualdade estrita para algum ω_i. Portanto, $\boldsymbol{\alpha}$ é um portfólio de arbitragem.

□

O próximo Teorema nos dá um modo de detectar a existência de oportunidades de arbitragem no nosso modelo. Como a condição é necessária e suficiente, segue que, mostrando tal condição, asseguramos que nosso modelo é livre de oportunidades de arbitragem.

Teorema 1.19 (Teorema da Não Arbitragem). *O modelo de precificação de um único período descrito não possui oportunidades de arbitragem se, e somente se, existe um vetor $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m$, com $\pi_i > 0$ para todo $i = 1,...,m$ e tal que*

$$\boldsymbol{P(X)} = \boldsymbol{D\pi}.$$

Demonstração. Primeiro, suponha que tal vetor $\boldsymbol{\pi}$ exista e considere um portfólio $\boldsymbol{\beta}$. Mostremos que $\boldsymbol{\beta}$ não pode ser uma oportunidade de arbitragem. De fato, se tal portfólio for uma oportunidade de arbitragem, devemos ter

$$V_0^{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}^{tr}\boldsymbol{P(X)} = \boldsymbol{\beta}^{tr}(\boldsymbol{D\pi}) = (\boldsymbol{\beta}^{tr}\boldsymbol{D})\boldsymbol{\pi} \leq 0,$$

uma vez que $V_0^{\boldsymbol{\beta}} \leq 0$.

Observe que $\boldsymbol{\beta}^{tr}\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} V_T^{\boldsymbol{\beta}}(\omega_1) & V_T^{\boldsymbol{\beta}}(\omega_2) & \cdots & V_T^{\boldsymbol{\beta}}(\omega_m) \end{bmatrix}^{tr}$. Como cada $\pi_i > 0$, $i = 1,...,m$, não podemos ter os seguintes acontecimentos simultaneamente:

i) $V_T^{\boldsymbol{\beta}}(\omega_i) \geq 0$ para todo $\omega_i \in \Omega$,

ii) $V_T^{\boldsymbol{\beta}}(\omega_i) > 0$ para ao menos algum $\omega_i \in \Omega$.

De fato, se (i) e (ii) ocorressem, teríamos

$$V_0^{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{\beta}^{tr}\boldsymbol{D})\boldsymbol{\pi} = \pi_1 V_T^{\boldsymbol{\beta}}(\omega_1) + ... + \pi_m V_T^{\boldsymbol{\beta}}(\omega_m) > 0,$$

o que é uma contradição com o fato de $\boldsymbol{\beta}$ ser um portfólio de arbitragem. Segue então que $\boldsymbol{\beta}$ não é uma oportunidade de arbitragem. Portanto, se existe tal vetor $\boldsymbol{\pi}$ não pode haver oportunidades de arbitragem.

Reciprocamente, assuma que não exista oportunidades de arbitragem. Agora, identifiquemos variáveis aleatórias em $\Omega = \{\omega_1,...,\omega_m\}$ com vetores em $\mathbb{R}^m$ como segue. Cada variável aleatória Y em Ω corresponde ao vetor $\overrightarrow{Y} = \begin{bmatrix} Y(\omega_1) & Y(\omega_2) & \cdots & Y(\omega_m) \end{bmatrix}^{tr}$ de seus possíveis resultados. Isto define uma bijeção entre variáveis aleatórias e vetores. Seja $\overline{G}^{\boldsymbol{\beta}}$ o ganho descontado associado ao portfólio $\boldsymbol{\beta}$, ou seja, $\overline{G}^{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{j=0}^{n} \beta_j \Delta \overline{X}_j$. Podemos pensar em $\overline{G}^{\boldsymbol{\beta}}$ como um vetor em $\mathbb{R}^m$. Agora defina

$$L = \{\overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^m \mid \overrightarrow{X} = \overline{G}^{\boldsymbol{\beta}} \text{ para algum portfólio } \boldsymbol{\beta}\}.$$

Observe que, para quaisquer dois portfólios $\boldsymbol{\beta}^1$ e $\boldsymbol{\beta}^2$,

$$\overline{G}^{\left(\boldsymbol{\beta}^1+\boldsymbol{\beta}^2\right)} = \left(\beta_0^1+\beta_0^2\right)\left(\overline{X}_0^T - \overline{P(X_0)}\right) + \ldots + \left(\beta_n^1+\beta_n^2\right)\left(\overline{X}_n^T - \overline{P(X_n)}\right) = \overline{G}^{\boldsymbol{\beta}_1} + \overline{G}^{\boldsymbol{\beta}_2}$$

e, para qualquer escalar λ e qualquer portfólio $\boldsymbol{\beta}$,

$$\overline{G}^{(\lambda\boldsymbol{\beta})} = (\lambda\beta_1)\left(\overline{X}_0^T - \overline{P(X_0)}\right) + \ldots + (\lambda\beta_n)\left(\overline{X}_n^T - \overline{P(X_n)}\right) = \lambda\overline{G}^{\boldsymbol{\beta}}.$$

Como $\boldsymbol{\beta}^1+\boldsymbol{\beta}^2$, $\lambda\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^{tr}$ são portfólios, segue que L é um subespaço linear de $\mathbb{R}^m$.

Defina também o conjunto

$$K = \{\overrightarrow{Y} \in \mathbb{R}^m \mid \overrightarrow{Y} \geq 0 \text{ e } E_Q(\overrightarrow{Y}) = 1\},$$

em que $E_Q(\overrightarrow{Y}) = \sum_{i=1}^m Q(\omega_i)Y_i$, onde $\overrightarrow{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 & \cdots & Y_m \end{bmatrix}^{tr}$. Se tomarmos $\overrightarrow{Y}_1$ e $\overrightarrow{Y}_2$ em K e $\lambda \in [0,1]$, temos que

$$\lambda\overrightarrow{Y}_1 + (1-\lambda)\overrightarrow{Y}_2 \geq 0$$

e

$$E_Q[\lambda\overrightarrow{Y}_1 + (1-\lambda)\overrightarrow{Y}_2] = \lambda E_Q(\overrightarrow{Y}_1) + (1-\lambda)E_Q(\overrightarrow{Y}_2) = \lambda + 1 - \lambda = 1,$$

ou seja, $\lambda\overrightarrow{Y}_1 + (1-\lambda)\overrightarrow{Y}_2$ pertence a K e K é convexo.

Ainda, K é limitado uma vez que se consegue encontrar facilmente uma cota superior e inferior para ele e a função $E : \overrightarrow{Y} \to E_Q(\overrightarrow{Y})$ é contínua e K é a imagem inversa (pela função contínua E) do conjunto $\{1\}$, o qual, por ser formado por um único ponto, é fechado. Assim, como imagem inversa de conjunto fechado por função contínua é fechada, segue que K é fechado. Portanto, K é compacto.

Observe ainda que $K \cap L = \emptyset$. De fato, suponha que isto não ocorra, ou seja, existe $\overrightarrow{Y} \in K \cap L$. Como $\overrightarrow{Y} \in L$ existe um portfólio $\boldsymbol{\beta}$ tal que $\overrightarrow{Y} = \overline{G}^{\boldsymbol{\beta}}$. Como $\overrightarrow{Y} \in K$, temos que $\overline{G}^{\boldsymbol{\beta}} \geq 0$ e $E_Q[\overline{G}^{\boldsymbol{\beta}}] = 1 > 0$. Pelo Teorema 1.18 segue que deveria existir uma oportunidade de arbitragem, o que é uma contradição. Portanto, $K \cap L = \emptyset$.

Segue então, pelo Corolário A.28 do Teorema do Hiperplano Separador A.27 que existe um vetor $\widehat{\boldsymbol{\pi}} \in \mathbb{R}^m$ tal que $\widehat{\boldsymbol{\pi}}^{tr}\overrightarrow{Y} = 0$ para todo $\overrightarrow{Y} \in L$ e $\widehat{\boldsymbol{\pi}}^{tr}\overrightarrow{Y} > 0$ para todo $\overrightarrow{Y} \in K$.

Note que o vetor

$$\overrightarrow{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{Q(\omega_i)} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^{tr} \in K.$$

Como $\widehat{\boldsymbol{\pi}}^{tr}\overrightarrow{Y} = \dfrac{\widehat{\pi}_i}{Q(\omega_i)} > 0$, segue que $\widehat{\pi}_i > 0$ para cada $i = 1,\ldots,m$.

O vetor $\widehat{\boldsymbol{\pi}}$ ainda não é o vetor que queremos. Para encontrá-lo precisamos fazer algumas modificações. Note que o vetor $\Delta\overline{X}_j = \begin{bmatrix} \Delta\overline{X}_j(\omega_1) & \Delta\overline{X}_j(\omega_2) & \cdots & \Delta\overline{X}_j(\omega_m) \end{bmatrix}^{tr}$ é justamente o ganho descontado $\overline{G}^{\boldsymbol{\beta}}$ do portfólio $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^{tr}$, o qual consiste de apenas uma unidade do $j-$ésimo ativo. Portanto, $\Delta\overline{X}_j \in L$ para todo $j = 1, ..., n$ e, desse modo, $\widehat{\boldsymbol{\pi}}^{tr}\Delta\overline{X}_j = 0$.

Diante disso, temos que

$$\sum_{i=1}^{m} \widehat{\pi}_i [\overline{X}_j^T(\omega_i) - \overline{P(X_j)}] = 0$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \widehat{\pi}_i \overline{X}_j^T(\omega_i) = \sum_{i=1}^{m} \widehat{\pi}_i \overline{P(X_j)}$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \widehat{\pi}_i \left(\frac{X_j^T(\omega_i)}{X_0^T(\omega_i)} \right) = P(X_j) \sum_{i=1}^{m} \widehat{\pi}_i$$
$$\Rightarrow P(X_j) = \sum_{i=1}^{m} \pi_i X_j^T(\omega_i), \text{ onde } \pi_i = \frac{\widehat{\pi}_i}{X_0^T(\omega_i) \sum_{i=1}^{m} \widehat{\pi}_i}.$$

Assim, temos que $\pi_i > 0$ para todo $i = 1, ..., m$. Ainda, como $X_j^T(\omega_i) = D_{nj}$, temos que $P(X_j) = \sum_{i=1}^{m} D_{ni}\pi_i$, ou seja,

$$\boldsymbol{P(X)} = \boldsymbol{D\pi}.$$

□

Observação 1.20. *O vetor* $\boldsymbol{\pi}$ *no Teorema da Não Arbitragem acima é chamado de* ***vetor de preços dos estados****. Explicaremos o motivo de tal nome agora. Suponha o modelo descrito no Teorema e que adicionamos m novos ativos fictícios* X_{n+1}, $X_{n+2}, ..., X_{n+m}$ *aos n ativos já existentes. O ativo* X_{n+i}, $i = 1, ...m$, *tem o valor de* 1 *no tempo T se o estado* ω_i *ocorrer e* 0 *na ocorrência de qualquer um dos demais estados. Temos agora um novo modelo com quantidade finita de ativos e um único período. Segue que, como o Teorema da Não Arbitragem é válido para todos os modelos desse tipo, não há oportunidades de arbitragem se, e somente se,*

$$\begin{bmatrix} P(X_0) \\ P(X_1) \\ \vdots \\ P(X_n) \\ P(X_{n+1}) \\ \vdots \\ P(X_{n+m}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0^T(\omega_1) & X_0^T(\omega_2) & \cdots & X_0^T(\omega_m) \\ X_1^T(\omega_1) & X_1^T(\omega_2) & \cdots & X_1^T(\omega_m) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X_n^T(\omega_1) & X_n^T(\omega_2) & \cdots & X_n^T(\omega_m) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_m \end{bmatrix}.$$

Da equação acima segue que, para não haver oportunidades de arbitragem,

$$\begin{cases} 1\times\pi_1+0\times\pi_2+...+0\times\pi_n=P(X_{n+1}) \\ 0\times\pi_1+1\times\pi_2+...+0\times\pi_n=P(X_{n+2}) \\ \vdots \\ 0\times\pi_1+0\times\pi_2+...+1\times\pi_n=P(X_{n+m}) \end{cases}$$

ou seja, π_i *deve ser o preço do ativo fictício* X_{n+i} *no tempo* 0.

Os dois próximos resultados serão importantes para conseguirmos uma estrutura probabilística para o Teorema da Não Arbitragem.

Teorema 1.21. *O Modelo de Precificação de um Único Período não permite oportunidades de arbitragem se, e somente se, existe uma variável aleatória estritamente positiva* Z *tal que*

$$P(X_j)=E_Q(ZX_j^T),\ j=0,1,...,n.$$

Demonstração. Suponha que não existam oportunidades de arbitragem. Defina

$$Z(\omega_i)=\frac{\pi_i}{Q(\omega_i)},$$

em que $\boldsymbol{\pi}$ é o vetor de preços dos estados. Então

$$E_Q(ZX_j^T)=\sum_{i=1}^{m}Q(\omega_i)\left[\frac{\pi_i}{Q(\omega_i)}X_j^T(\omega_i)\right]=\sum_{i=1}^{m}\pi_iX_j^T(\omega_i)=P(X_j),$$

uma vez que $\boldsymbol{P(X)}=\boldsymbol{D\pi}$.

Reciprocamente, suponha que exista tal Z. Defina

$$\pi_i=\frac{Z(\omega_i)}{Q(\omega_i)},$$

ou seja, Z é como definido acima. Então, para todo $j=0,1,...,n$,

$$P(X_j)=E_Q(ZX_j^T)=\sum_{i=1}^{m}\pi_iX_j^T(\omega_i),$$

ou seja, $\boldsymbol{P(X)}=\boldsymbol{D\pi}$, o que, pelo Teorema 1.19, não permite oportunidades de arbitragem.

□

Teorema 1.22. *O Modelo de Precificação de um Único Período não permite oportunidades de arbitragem se, e somente se, existe uma variável aleatória estritamente positiva* $\widehat{Z}$ *com* $E_Q(\widehat{Z})=1$ *tal que*

$$P(X_j)=E_Q\left(\widehat{Z}\overline{X}_j^T\right),\ j=0,1,...,n.$$

Demonstração. Suponha que não exista oportunidades de arbitragem. Defina $\widehat{Z}(\omega_i)=$

$\frac{\pi_i X_0^T(\omega_i)}{Q(\omega_i)}$. Segue que

$$E_Q(\widehat{Z}) = \sum_{i=1}^{m} Q(\omega_i)\frac{\pi_i X_0^T(\omega_i)}{Q(\omega_i)} = \sum_{i=1}^{m} \pi_i X_0^T(\omega_i) = 1,$$

uma vez que $P(X_0) = 1$ e $\boldsymbol{P(X)} = \boldsymbol{D\pi}$. Ainda, para todo $j = 0, 1, ..., n$,

$$E_Q\left(\widehat{Z X_j^T}\right) = \sum_{i=1}^{m} Q(\omega_i)\frac{\pi_i X_0^T(\omega_i)}{Q(\omega_i)}\frac{X_j^T(\omega_i)}{X_0^T(\omega_i)} = \sum_{i=1}^{m} \pi_i X_j^T(\omega_i) = P(X_j),$$

que segue pelo fato de $\boldsymbol{P(X)} = \boldsymbol{D\pi}$.

Reciprocamente, suponha que tal $\widehat{Z}$ exista. Defina $\widehat{Z}$ como acima. Temos que, para todo $j = 1, ..., n$,

$$E_Q(\widehat{Z X_j^T}) = \sum_{i=1}^{m} \pi_i X_j^T(\omega_i) = P(X_j),$$

ou seja, $\boldsymbol{P(X)} = \boldsymbol{D\pi}$, e pelo Teorema 1.19, não há oportunidades de arbitragem. □

Agora nosso objetivo será o de construir uma nova medida de probabilidade R em Ω a partir da medida de probabilidade Q já conhecida. O motivo de procurar essa outra medida ficará claro a seguir. Suponha inicialmente que X é uma variável aleatória não negativa com $E_Q(X) = 1$. Defina a medida de probabilidade R em Ω por

$$R(A) = E_Q(XI_A),\ A \subseteq \Omega,$$

em que

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A \\ 0 & \text{se } \omega \notin A. \end{cases}$$

De fato, R é uma medida de probabilidade em Ω porque

- $R(A) \geq 0$ para cada evento $A \subseteq \Omega$;
- $R(\Omega) = E_Q(XI_\Omega) = E_Q(X) = 1$;
- Para quaisquer $A_1, \ldots, A_k \subseteq \Omega$[1] tais que $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$,

$$\begin{aligned} R(A_1 \cup \cdots \cup A_k) &= E_Q(X(I_{A_1} \cup \cdots \cup I_{A_k})) \\ &= E_Q(XI_{A_1} + \cdots + XI_{A_k}) \\ &= E_Q(XI_{A_1}) + \cdots + E_Q(XI_{A_k}) \\ &= R(A_1) + \cdots + R(A_k); \end{aligned}$$

[1]Não precisamos mostrar que R é aditivo contável, apenas que é finitamente aditivo porque nosso espaço amostral é finito e discreto.

- Para qualquer $A \subseteq \Omega$,

$$1 = R(\Omega) = R(A \cup (\Omega \setminus A)) = R(A) + R(\Omega \setminus A) \Rightarrow R(A) \leq 1.$$

Ainda, como $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_m\}$ é um espaço finito, temos que

$$R(\omega_k) = E_Q(XI_{\{\omega_k\}}) = \sum_{i=1}^{m} Q(\omega_i)X(\omega_i)I_{\{\omega_k\}}(\omega_i) = Q(\omega_k)X(\omega_k),$$

para todo $k = 1, ..., m$. Desse modo, segue que

$$X(\omega)^2 = \frac{R(\omega)}{Q(\omega)}, \text{ para todo } \omega \in \Omega.$$

Definição 1.23. *Duas medidas de probabilidade Q e R são* ***equivalentes*** *se elas possuem os mesmos eventos de medida nula, isto é,*

$$Q(A) = 0 \Leftrightarrow R(A) = 0.$$

Notação: *$R \approx Q$.*

Observação 1.24. *Dizer que duas medidas de probabilidade Q e R em um espaço amostral finito e discreto possuem os mesmos eventos de medida nula equivale a dizer que, para todo evento $A \in \Omega$, $Q(A) > 0$ se, e somente se, $R(A) > 0$.*

Observação 1.25. *Perceba que se X é uma variável estritamente positiva e Q e R são medidas de probabilidade com $X = \frac{R}{Q}$, então R e Q são equivalentes. De fato, se $X(A) > 0$ para $A \subset \Omega$, então $\frac{R(A)}{Q(A)} > 0$, o que implica em $R(A) > 0$ e $Q(A) > 0$.*

Teorema 1.26. *Se Y é uma variável aleatória arbitrária e Q e R são medidas de probabilidade definidas em Ω, em que R é construído como acima, então*

$$E_R(Y) = E_Q\left(Y\frac{R}{Q}\right).$$

Demonstração. Se $X = \frac{R}{Q}$, então

$$E_R(Y) = \sum_{i=1}^{m} R(\omega_i)Y(\omega_i) = \sum_{i=1}^{m} Q(\omega_i)X(\omega_i)Y(\omega_i) = E_Q(XY).$$

[2] É válido observar que esta construção de uma medida de probabilidade R através de uma medida Q pode ser feita no geral. A variável aleatória X é chamada de **Derivada de Radon-Nikodym** da medida R relativa a medida Q e é usualmente denotada por $X = \frac{dR}{dQ}$. No ambiente discreto, o qual estamos inseridos, isso significa que $X = \frac{R}{Q}$, entretanto, para o caso contínuo esta escrita não faz sentido visto que $Q(\omega) = 0$ para todo $\omega \in \Omega$ (ou seja, pontos tem medidas nulas).

□

O Teorema 1.22 nos diz que a não existência de oportunidades de arbitragem é equivalente à existência de uma variável aleatória estritamente positiva $\widehat{Z}$ com esperança unitária tal que $P(X_j) = E_Q\left(\widehat{Z}\overline{X}_j^T\right)$ para todos os ativos X_j, $j = 0,...,n$. Dessa maneira, se definirmos a medida de probabilidade R como anteriormente, onde $\widehat{Z} = \dfrac{R}{Q}$, então temos que R é equivalente à Q e pelo Teorema 1.26

$$E_R\left(\overline{X}_j^T\right) = E_Q\left(\widehat{Z}\overline{X}_j^T\right) = P(X_j) \text{ para } j = 0,...,n.$$

O próximo Teorema mostra uma importante propriedade da medida de probabilidade R construída até então.

Teorema 1.27. *Se não houver oportunidades de arbitragem, o valor esperado (sob R) dos preços descontados finais (em $t = T$) de todos os ativos é igual a seus preços iniciais (em $t = 0$), ou seja,*

$$P(X_j) = E_R\left(\overline{X}_j^T\right).$$

Tal medida R é chamada ***Medida Martingale Equivalente***[3] *(MME).*

A partir de tudo o que foi feito sobre a medida R e tendo conhecimento do Teorema 1.27, temos um outro resultado que garante a não existência de oportunidades de arbitragem.

Teorema 1.28. *Um Modelo de Precificação de Único Período (com medida de probabilidade relacionada ao "mundo real" Q) não permite oportunidades de arbitragem se, e somente se, existe uma medida $R \approx Q$ tal que $P(X_j) = E_R\left(\overline{X}_j^T\right)$ para todos os ativos X_j, $j = 0,...,n$, ou seja, existe uma MME.*

Demonstração. Suponha que não existam oportunidades de arbitragem. Segue pelo Teorema 1.22 que existe uma variável aleatória estritamente positiva $\widehat{Z}$ com $P(X_j) = E_Q\left(\widehat{Z}\overline{X}_j^T\right)$. Defina uma medida de probabilidade R tal que $\widehat{Z} = \dfrac{R}{Q}$. Então, pela Observação 1.25, por $P(X_j) = E_Q(\widehat{Z}\overline{X}_j^T)$ e pelo Teorema 1.26, segue que $R \approx Q$ e $P(X_j) = E_R\left(\overline{X}_j^T\right)$ para $j = 0,...,n$.

Reciprocamente, suponha que existe uma medida de probabilidade R tal que $R \approx Q$ e $P(X_j) = E_R\left(\overline{X}_j^T\right)$, para todo $j = 0,...,n$. Suponha que exista oportunidades de arbitragem. Então, pelo Teorema 1.18, existe um portfólio $\boldsymbol{\beta}$ com $\overline{G}^{\boldsymbol{\beta}} \geq 0$ e $E_Q(\overline{G}^{\boldsymbol{\beta}}) > 0$. Escolha $\omega_k \in \Omega$ tal que $\overline{G}^{\boldsymbol{\beta}}(\omega_k) > 0$. Temos que

$$E_R\left(\Delta\overline{X}_j\right) = E_R\left(\overline{X}_j^T - \overline{P(X_j)}\right) = E_R\left(\overline{X}_j^T\right) - E_R\left(\overline{P(X_j)}\right) = P(X_j) - P(X_j) = 0.$$

O fato de que $\overline{G}^{\boldsymbol{\beta}} \geq 0$ nos força a concluir que $R(\omega_k) = 0$, uma vez que $E_R(\overline{G}) > 0$ se $R(\omega_k) > 0$. Mas $Q(\omega_k) > 0$ e temos que $R \approx Q$, o que implica que $R(\omega_k) > 0$, o que é uma contradição. Portanto, se existe tal R, não há oportunidades de arbitragem. □

[3]O motivo pelo qual a referida medida recebe esse nome será explicado no próximo capítulo.

Agora nós temos duas distintas condições equivalentes para não haver oportunidades de arbitragem: a existência de um vetor de preços dos estados e a existência de uma medida de probabilidade R tal que $R \approx Q$ e $P(X_j) = E_R\left(\overline{X}_j^T\right)$ para todo $j = 0, ..., n$. Se a taxa de juros é r, temos que essas duas condições estão relacionadas do seguinte modo:

- Seja $\boldsymbol{\pi}$ o vetor de preços dos estados. Como $\boldsymbol{P(X)} = \boldsymbol{D\pi}$, temos que, da multiplicação da primeira linha de $\boldsymbol{D}$ com o vetor $\boldsymbol{\pi}$, do fato de $P(X_0) = 1$ e de $X_0^T(\omega_i) = 1 + r$, para todo $i = 1, ..., m$,

$$(1+r)(\pi_1 + ... + \pi_m) = 1; \tag{1.1}$$

- O vetor de preços dos estados $\boldsymbol{\pi}$ nos dá uma variável aleatória positiva $\widehat{Z}$ com a propriedade de que $P(X_j) = E_Q\left(\widehat{Z}\overline{X}_j^T\right)$ para cada ativo X_j. Pela Demonstração do Teorema 1.22, temos que

$$\widehat{Z}(\omega_i) = \frac{\pi_i X_0^T(\omega_i)}{Q(\omega_i)} = \frac{\pi_i(1+r)}{Q(\omega_i)};$$

- Como $R(\omega_i) = \widehat{Z}(\omega_i)Q(\omega_i)$, segue, por (1.1) que

$$R(\omega_i) = \frac{\pi_i(1+r)}{Q(\omega_i)}Q(\omega_i) = \frac{\pi_i}{\pi_1 + ... + \pi_m}, \text{ para } i = 1, ..., m.$$

Diante disso, segue o seguinte Teorema:

Teorema 1.29. *Se* $\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_m \end{bmatrix}^{tr}$ *é um vetor de preços dos estados, então*

$$R(\omega_i) = \frac{\pi_i}{\pi_1 + ... + \pi_m} = \pi_i(1+r)$$

é equivalente à Q *e é tal que* $P(X_j) = E_R\left(\overline{X}_j^T\right)$, *para todo* $j = 0, ..., n$.

O próximo exemplo ilustra de maneira simples o Teorema 1.29.

Exemplo 1.30. *Considere um modelo de precificação de único período composto pelo ativo livre de risco* X_0 *e por um ativo de risco* X_1. *Considere que tenhamos dois estados da natureza,* ω_1 *e* ω_2 *e uma taxa de juros em* $[0, T)$ *de* $r = 1/9$. *Considere que* $P(X_1) = 5$, $X_1^T(\omega_1) = 20/3$ *e* $X_1^T(\omega_2) = 40/9$.

Temos que

$$\boldsymbol{P(X)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 10/9 & 10/9 \\ 20/3 & 40/9 \end{bmatrix}.$$

Assim, para não haver oportunidades de arbitragem temos que ter

$$\begin{cases} \frac{10}{9}\pi_1 + \frac{10}{9}\pi_2 = 1 \\ \frac{20}{3}\pi_1 + \frac{40}{9}\pi_2 = 5 \end{cases},$$

a qual possui única solução. Temos então que

$$\boldsymbol{\pi} = \left[\begin{array}{cc} 9/20 & 9/20 \end{array}\right]^{tr},$$

e $R(\omega_1) = R(\omega_2) = \dfrac{\frac{9}{20}}{\frac{9}{20}+\frac{9}{20}} = \dfrac{1}{2}.$

O vetor de preços dos estados $\boldsymbol{\pi}$ pode não ser único, e consequentemente, a medida de probabilidade R também. O próximo exemplo nos mostra um caso em que a unicidade de tal vetor e de tal medida não ocorre.

Exemplo 1.31. *Considere agora um modelo composto pelo ativo livre de risco X_0 e por um ativo de risco X_1. Considere que o espaço de estados da natureza é $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ e que a taxa de juros do período é de $r = 1/10$. Sejam $X_1^T(\omega_1) = 8$, $X_1^T(\omega_2) = 4$, $X_1^T(\omega_3) = 6$ e $P(X_1) = 6$. Temos que não existem oportunidades de arbitragem se existe um vetor $\boldsymbol{\pi}$ de preços dos estados tal que*

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ 6 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 11/10 & 11/10 & 11/10 \\ 8 & 4 & 6 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{array}\right],$$

ou seja,

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{11}{10}\pi_1 + \frac{11}{10}\pi_2 + \frac{11}{10}\pi_3 = 1 \\ 8\pi_1 + 4\pi_2 + 6\pi_3 = 6 \end{array}\right. .$$

Sendo $\pi_3 = \gamma$ e $\gamma \in (0, 7/11)$ temos que cada $\pi_i > 0$ e

$$\boldsymbol{\pi} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{13}{22} - \frac{1}{2}\gamma & \frac{7}{22} - \frac{1}{2}\gamma & \gamma \end{array}\right],$$

não possibilita arbitragem. Contudo, como a solução para o sistema não é única, temos que existem infinitos vetores de preços dos estados e, consequentemente, infinitas medidas de probabilidade R.

Do exemplo acima é possível observar que pode existir uma quantidade infinita de vetores $\boldsymbol{\pi}$ e, ainda assim, existir um modelo livre de oportunidades de arbitragem. O próximo resultado nos diz quando tal vetor $\boldsymbol{\pi}$ é único[4].

Teorema 1.32. *O vetor $\boldsymbol{\pi}$ é único se, e somente se, o número de estados da natureza em Ω coincide com o posto da matriz $\boldsymbol{D}$.*

Demonstração. Observe que, pelo Teorema A.29, o sistema $\boldsymbol{P(X)} = \boldsymbol{D\pi}$ tem única solução se, e somente se, a matriz D tem o posto igual ao número de incógnitas do sistema (os $\pi_i, i = 1, \ldots, m$) e isso só é possível se a matriz $\boldsymbol{D}$ tem exatamente m colunas independentes. □

[4]E consequentemente quando a MME é única.

1.2 Mercados Completos e Incompletos e Introdução de Novos Ativos

Até então estudamos um modelo com uma quantidade finita de ativos, cujos preços são conhecidos em $t = 0$ e são incertos em $t = T$. Uma pergunta natural a se fazer é a seguinte: é possível introduzir um novo ativo em um modelo de precificação de um único período de modo que o modelo ainda não permita oportunidades de arbitragem? E se sim, qual deverá ser o preço deste novo ativo em $t = 0$?

Os ativos já disponíveis em um mercado são precificados a partir das expectativas dos investidores, riscos assumidos e lei da oferta e da procura. Contudo, quando se quer introduzir um novo ativo em que seu valor em $t = T$ depende exclusivamente do estado da natureza ocorrido, nos deparamos com o problema de encontrar um preço justo em $t = 0$ para tal ativo.

Por exemplo, uma opção de compra é um ativo que dá ao investidor que o compra em $t = 0$ o direito de comprar um determinado ativo já disponível no modelo em $t = T$ por um preço pré determinado K (chamado *strike price*) em $t = 0$. Sendo assim, o preço dessa opção no tempo $t = 0$ depende unicamente do estado da natureza que ocorrerá em $t = T$ e não de regras do mercado. Desse modo, nos deparamos com o problema de encontrar esse preço de tal modo que essa opção, juntamente com o seu preço, e os demais ativos, juntamente com seus preços, não permitam oportunidades de arbitragem.

Antes de estendermos tal discussão, precisamos de um novo conceito, a **Lei do Preço Único**. Esta lei nos diz que, se dois portfólios tem o mesmo valor em $t = T$ para todos os estados da natureza, então eles devem ter o mesmo valor em todos os tempos precedentes a T. A fim de evitar oportunidades de arbitragem, além de intuitivo, é necessário que a lei do preço único valha, como mostra o teorema abaixo.

Teorema 1.33 (**Lei do Preço Único**). *Sejam $\boldsymbol{\beta}^1$ e $\boldsymbol{\beta}^2$ portfólios tais que $V_T^{\boldsymbol{\beta}^1}(\omega) = V_T^{\boldsymbol{\beta}^2}(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$. Então $V_0^{\boldsymbol{\beta}^1} \neq V_0^{\boldsymbol{\beta}^2}$ se, e somente se, existir oportunidades de arbitragem.*

Demonstração. De fato, suponha, sem perda de generalidade, que $V_0^{\boldsymbol{\beta}^1} > V_0^{\boldsymbol{\beta}^2}$. Construa o seguinte portfólio $\boldsymbol{\beta}$: venda o portfólio mais caro a descoberto[5] com contrato para entregar em T e com o dinheiro desta transação compre o portfólio mais barato e com a diferença positiva compre unidades do ativo livre de risco. Matematicamente, construa o portfólio $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} -\beta_0^1 + \beta_0^2 + V_0^{\boldsymbol{\beta}^1} - V_0^{\boldsymbol{\beta}^2} & -\beta_1^1 + \beta_1^2 & \cdots & -\beta_n^1 + \beta_n^2 \end{bmatrix}^{tr}$ (observe que, como $P(X_0) = 1$, podemos comprar $V_0^{\boldsymbol{\beta}^1} - V_0^{\boldsymbol{\beta}^2}$ unidades do ativo livre de risco). Temos que (em $t = 0$),

$$V_0^{\boldsymbol{\beta}} = -V_0^{\boldsymbol{\beta}_1} + V_0^{\boldsymbol{\beta}_2} + (V_0^{\boldsymbol{\beta}^1} - V_0^{\boldsymbol{\beta}^2}) = 0.$$

[5]Vender algo a descoberto significa vendê-lo sem o possuir com um contrato para entregá-lo ao comprador em tempo posterior ao momento da venda.

Contudo, para todo $\omega \in \Omega$,

$$V_T^{\beta}(\omega) = -V_T^{\beta_1} + V_T^{\beta_2} + V_0^{\beta^1} - V_0^{\beta^2} = V_0^{\beta^1} - V_0^{\beta^2} > 0,$$

o que constitui uma oportunidade de arbitragem.

Reciprocamente, se $V_0^{\beta_1} = V_0^{\beta_2}$ para quaisquer β_1, β_2 tais que $V_T^{\beta_1}(\omega) = V_T^{\beta_2}(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$, segue que nenhuma oportunidade de arbitragem existirá uma vez que nenhum indivíduo conseguirá construir um portfólio com um preço inferior ao de outro portfólio que valha, em $t = T$, o mesmo montante.

□

O Teorema 1.33 nos diz então que não existem oportunidades de arbitragem,se, e somente se, vale a Lei do Preço Único. Desse modo, podemos aplicar tal lei a fim de introduzir um novo ativo no mercado do seguinte modo: suponha que queiramos introduzir o ativo Y ao nosso modelo cujo preço em $t = T$ é dado pela variável aleatória Y^T definida em Ω e suponha que exista um portfólio β tal que $V_T^{\beta}(\omega) = Y^T(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$. Pela lei do preço único devemos ter $V_0^{\beta} = P(Y)$, onde $P(Y)$ é o preço de Y em $t = 0$. Como conhecemos o valor V_0^{β}, conhecemos então o valor de Y em $t = 0$.

Definição 1.34. *Seja Y um ativo. Se β é tal que $V_T^{\beta}(\omega) = Y^T(\omega)$ para todo ω, dizemos que β é uma **réplica** do ativo Y e Y é um **ativo replicável**.*

Desse modo, se o novo ativo que queremos introduzir em um modelo sem oportunidades de arbitragem for um ativo replicável, conseguimos precificá-lo de modo que o novo modelo constituído de todos os ativos já existentes somados ao novo ativo, ainda continue sem oportunidades de arbitragem.

Exemplo 1.35. *Considere o modelo do Exemplo 1.30 e considere que queiramos introduzir o ativo Y, onde $Y^T(\omega_1) = 5/3$ e $Y^T(\omega_2) = 0$. Queremos encontrar um portfólio β no modelo tal que $V_T^{\beta}(\omega) = Y^T(\omega)$. Desse modo, devemos resolver o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} \frac{10}{9}\beta_0 + \frac{20}{3}\beta_1 = \frac{5}{3} \\ \frac{10}{9}\beta_0 + \frac{40}{9} = 0 \end{cases},$$

o qual tem solução $\beta = \begin{bmatrix} -3 & 3/4 \end{bmatrix}^{tr}$. Assim, o portfólio consistindo de -3 do ativo livre de risco e $3/4$ do ativo de risco tem o mesmo valor do novo ativo Y em $t = T$. Desse modo, o preço de Y em $t = 0$ deve ser o valor do portfólio β em $t = 0$, o qual é $-3 \times 1 + \frac{3}{4} \times 5 = \frac{3}{4}$. Portanto, $P(Y) = \frac{3}{4}$ e o novo modelo com o ativo Y acrescido não permite oportunidades de arbitragem.

Observe que se quisermos inserir uma quantidade relativamente grande (mas finita) de ativos no modelo, o trabalho de verificar se cada um é ou não replicável seria demasiado grande. Agora tentaremos calcular o preço de ativos novos no modelo em $t = 0$ sem necessariamente conhecer seus portfólios replicantes. Os próximos resultados serão necessários para alcançarmos tal objetivo.

Teorema 1.36. *Considere o Modelo de Precificação de Único Período (com medida de probabilidade relacionada ao "mundo real" Q) e R um MME. Seja* $\boldsymbol{\beta}$ *um portfólio com valor* V. *Então*

$$V_0^{\boldsymbol{\beta}} = E_R(\overline{V}_T^{\boldsymbol{\beta}}).$$

Demonstração. Como R é uma MME, temos pelo Teorema 1.28 que $P(X_j) = E_R\left(\overline{X}_j^T\right)$ para todos os ativos no modelo e, portanto,

$$E_R\left(\Delta\overline{X}_j\right) = E_R\left(X_j^T - P(X_j)\right) = E_R\left(X_j^T\right) - P(X_j) = 0.$$

Segue que, se $\overline{G}^{\boldsymbol{\beta}}$ é o ganho descontado, então

$$E_R(\overline{G}^{\boldsymbol{\beta}}) = E_R\left(\sum_{j=0}^{n} \beta_j \Delta\overline{X}_j\right) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j E_R(\Delta\overline{X}_j) = 0.$$

Como $\overline{G}^{\boldsymbol{\beta}} = \overline{V}_T^{\boldsymbol{\beta}} - \overline{V}_0^{\boldsymbol{\beta}}$ e $\overline{V}_0^{\boldsymbol{\beta}} = V_0^{\boldsymbol{\beta}}$, temos que

$$0 = E_R(\overline{G}^{\boldsymbol{\beta}}) = E_R(\overline{V}_T^{\boldsymbol{\beta}} - \overline{V_0}^{\boldsymbol{\beta}}) = E_R(\overline{V}_T^{\boldsymbol{\beta}}) - V_0^{\boldsymbol{\beta}} \Rightarrow V_0^{\boldsymbol{\beta}} = E_R(\overline{V}_T^{\boldsymbol{\beta}}).$$

□

O teorema acima nos diz que o valor inicial de qualquer portfólio é igual à esperança sob uma MME do seu valor final descontado. Já o próximo resultado nos dá uma ferramenta capaz de precificar novos ativos em $t = 0$ sem a necessidade de encontrar o portfólio que o replica.

Teorema 1.37. *Suponha que o Modelo de Precificação de um Único Período não permita oportunidades de arbitragem e que* Y *seja um ativo replicável com preço em* $t = T$ *definido em* Ω *e não pertencente ao modelo. Então o preço de* Y *em* $t = 0$ *é dado por*

$$P(Y) = E_R(\overline{Y}^T),$$

onde R *é uma MME e* $\overline{Y}^T = \frac{Y^T}{X_0^T}$.

Demonstração. Se $\boldsymbol{\beta}$ é um portfólio que replica Y, então $V_T^{\boldsymbol{\beta}}(\omega) = Y^T(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$. Pela Lei do Preço Único, temos que $V_0^{\boldsymbol{\beta}} = P(Y)$. Aplicando o teorema anterior temos que

$$P(Y) = V_0^{\boldsymbol{\beta}} = E_R(\overline{V}_T^{\boldsymbol{\beta}}) = E_R(\overline{Y}^T).$$

□

Exemplo 1.38. *Considere o Exemplo 1.35. Calculemos o valor* $P(Y)$ *através do teorema anterior. Lembremos que a taxa é* $r = 1/9$, $R(\omega_1) = R(\omega_2) = 1/2$ *e* $Y^T(\omega_1) = 5/3$ *e* $Y^T(\omega_2) = 0$.

Temos que $X_0^T = 1 + 1/9 = 10/9$ *e assim,*

$$P(Y) = \frac{1}{2}\frac{\frac{5}{3}}{\frac{10}{9}} + \frac{1}{2}\frac{0}{\frac{10}{9}} = \frac{3}{4},$$

exatamente o valor encontrado utilizando o portfólio que replica Y.

Observação 1.39. *É importante perceber que só podemos fazer uso do Teorema 1.37 se soubermos que o ativo é replicável. Desse modo, ainda é preciso checar se tal fato vale.*

Pela Observação acima, parece desnecessário o Teorema 1.37, visto que ainda temos de encontrar o portfólio que replica um ativo Y a fim de mostrar que Y é replicável. Contudo, desenvolveremos agora uma teoria que torna dispensável encontrar o portfólio que replica Y, bastando apenas observar alguns fatos.

Definição 1.40. *Um Modelo de Precificação de Único Período é* ***completo*** *se cada ativo inserido no modelo é replicável. Caso contrário, dizemos que o modelo é* ***incompleto****.*

Assim, se mostrarmos que o modelo é completo com os ativos que queremos inserir, mostramos que cada ativo é replicável e, desse modo, podemos usar o Teorema 1.37 para precificar esses ativos em $t = 0$.

O próximo resultado nos dá uma condição necessária e suficiente para que um modelo seja completo.

Teorema 1.41. *Suponha que não haja oportunidades de arbitragem. Um Modelo de Precificação de Único Período é completo se, e somente se, o número de estados da natureza em* Ω *é igual ao posto da matriz* $\boldsymbol{D}$ *que contém os possíveis valores dos ativos no tempo* $t = T$.

Demonstração. Observe que cada novo ativo Y inserido no modelo é replicável se existe um portfólio $\boldsymbol{\beta}$ tal que, para todo ω_i,

$$Y^T(\omega_i) = \beta_0 X_0^T(\omega_i) + \ldots + \beta_n X_n^T(\omega_i).$$

Assim, temos m equações (uma para cada estado da natureza) em $n+1$ variáveis (os $\beta_j, j = 0, \ldots, n$), ou seja, temos o seguinte sistema

$$\left(\boldsymbol{Y^T}\right)^{tr} = \boldsymbol{\beta}^{tr}\boldsymbol{D},$$

onde $\boldsymbol{D}$ é a matriz dos possíveis preços dos ativos em $t = T$. Do Teorema A.29 temos que uma única solução existe se, e só se, a matriz $\boldsymbol{D}$ tem posto m, ou seja, se tal matriz $\boldsymbol{D}^{tr}$ tem m colunas independentes. Note que isso só é possível se o modelo tiver ao menos $m-1$ ativos de risco somados ao ativo livre de risco. Portanto, segue o desejado. $\square$

Observação 1.42. *Temos pelo Teorema A.29 que se tivermos mais estados da natureza que ativos disponíveis no modelo, ou seja, se tivermos um modelo incompleto, o sistema acima terá* *infinitas soluções. Desse modo, um novo ativo Y inserido no modelo poderá ter vários preços em $t = 0$ que não possibilitam arbitragem.*

Exemplo 1.43. *Observe o Exemplo 1.30. Temos dois estados da natureza, ω_1 e ω_2 e dois ativos, um livre de risco e um ativo de risco. A matriz $\boldsymbol{D}$ é*

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 10/9 & 10/9 \\ 20/3 & 40/9 \end{bmatrix},$$

que tem posto 2. Portanto, segue pelo Teorema 1.41 que o modelo é completo. Considere que queremos inserir um novo ativo Y nesse modelo, em que $Y^T(\omega_1) = 5$ e $Y^T(\omega_2) = 7$. Como o modelo é completo e a taxa de juros é $r = \frac{1}{9}$, a medida R é $R(\omega_1) = R(\omega_2) = \frac{1}{2}$ e pelo Teorema 1.37

$$P(Y) = E_R(\overline{Y}^T) = \frac{1}{2}\frac{5}{(1+\frac{1}{9})} + \frac{1}{2}\frac{7}{(1+\frac{1}{9})} = \frac{27}{5}.$$

Exemplo 1.44. *Considere agora o Exemplo 1.31. Temos que o modelo é composto por três estados da natureza ω_1, ω_2 e ω_3, um ativo livre de risco X_0 e um ativo de risco X_1 com matriz $\boldsymbol{D}$ dada por*

$$\begin{bmatrix} 11/10 & 11/10 & 11/10 \\ 8 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Temos que o posto de $\boldsymbol{D}$ é $2 \neq 3$. Portanto, pelo Teorema 1.41 segue que o modelo é incompleto. Observe que temos infinitos vetores de preços dos estados $\boldsymbol{\pi}$ e, portanto, infinitas medidas R. Assim, se quiséssemos incluir um novo ativo Y no modelo e pudéssemos aplicar o Teorema 1.37 (ou seja, se Y fosse replicável), teríamos infinitos valores para Y em $t = 0$ que não possibilitariam oportunidades de arbitragem.

O próximo e último resultado da seção é muito importante pois faz uma conexão entre modelos completos e livres de arbitragem com a existência de uma única MME.

Teorema 1.45 (Teorema Fundamental da Precificação de Ativos). *O Modelo de Precificação de Ativos de um único período é completo e não permite oportunidades de arbitragem se, e somente se, existe uma única MME.*

Demonstração. Já sabemos que o modelo não permite oportunidades de arbitragem se, e somente se, existe ao menos uma MME R. Resta então mostrarmos que tal medida é única se o modelo for completo. Para tal, suponha que existam duas medidas R e $\widehat{R}$ tais que $R \approx Q$, $\widehat{R} \approx Q$ e $P(X_j) = E_R\left(\overline{X}_j^T\right) = E_{\widehat{R}}\left(\overline{X}_j^T\right)$ para $j = 0, \ldots, n$. Para cada estado da natureza ω_i defina um ativo Y_i, $i = 1, \ldots, m$, não pertencente ao modelo que paga $X_0^T(\omega_i)$ no estado ω_i e 0 nos demais. Como o modelo é completo, Y_i é replicável, e, pelo Teorema 1.37, temos que

$$P(Y_i) = E_{\widehat{R}}(\overline{Y}_i^T) = E_R(\overline{Y}_i^T).$$

Claramente,

$$\overline{Y}_i^T(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega = \omega_i \\ 0 & \text{se } \omega \neq \omega_i, \end{cases}$$

e assim, para todo $i = 1, ..., , m$,

$$P(Y_i) = R(\omega_i) = \widehat{R}(\omega_i).$$

Portanto, existe uma única MME.

Reciprocamente, suponha que exista uma única MME R. Já sabemos que o modelo não permite oportunidades de arbitragem. Resta mostrarmos que tal modelo é completo. Para tal, seja Y um ativo não pertencente ao modelo e suponha que o modelo não seja completo. Segue pelo Teorema 1.32 que podemos encontrar duas MME's diferentes, o que é uma contradição. Portanto, o modelo é completo. $\square$

Capítulo 2

Modelo de Precificação de Ativos com Vários Períodos

Neste capítulo desenvolveremos a teoria a fim de precificar novos ativos inseridos em um modelo com finitos períodos $0,...,T$, tendo o conhecimento apenas do valor desses ativos no tempo T. Esse modelo é mais complexo e se aproxima muito mais da realidade do que aquele de um único período. Aqui, utilizaremos basicamente as Referências [14] e [15].

2.1 Especificações do Modelo

Assim como no modelo de um único período, consideramos um espaço de estados da natureza finito $\Omega = \{\omega_1,...,\omega_m\}$ e um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$, onde $Q(\omega_i) > 0$ para todo $i = 1,...,m$ e $\mathcal{F}$, geralmente, o conjunto das partes de Ω. A diferença aqui consiste no conjunto de datas de negociação, ou seja, o conjunto de períodos de tempo. Diferentemente do modelo de um único período que era constituído apenas pelas datas de negociação 0 e T, aqui, consideramos uma quantidade finita de períodos entre 0 e T. Assim, nosso conjunto de períodos de tempo será da forma $\mathbb{T} = \{0,1,...,T\}$.

Neste modelo de precificação temos que os preços dos ativos são funções do tempo t. Esses preços são aleatórios e dependem das informações disponíveis sobre os estados da natureza em cada tempo t. No tempo $t = 0$ não temos informação com relação ao estado da natureza que será observado. Contudo, a cada período de tempo, informações novas são incorporadas ao modelo de modo que no tempo T tenhamos o conhecimento do verdadeiro estado da natureza. Como sabemos, as informações são organizadas em $\sigma-$álgebras, e assim, nós associamos uma $\sigma-$álgebra a cada tempo t, que modela as informações disponíveis no tempo t com relação aos estados da natureza. Assumimos também que as informações nunca são perdidas ou esquecidas, ou seja, uma vez que se incorpora uma nova informação em um tempo t, ela é conhecida também em qualquer tempo posterior a t.

Sendo mais preciso, podemos ver a evolução da informação como uma sequência aleatória de subconjuntos de Ω, a qual denotaremos por $\{A_t\}$, em que $A_0 = \Omega$ e $A_T = \{\omega\}$ para algum

$\omega \in \Omega$ de tal forma que $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \cdots \supseteq A_T$. No tempo t sabe-se que para algum subconjunto A_t, o verdadeiro estado da natureza é tal que $\omega \in A_t$, mas não se tem a informação certa sobre qual é esse estado. Por outro lado, cada estado $\omega \in A_t^c$ é descartado no tempo t, uma vez que já se sabe que o verdadeiro estado da natureza não está fora de A_t. Seguindo esse raciocínio, no próximo período, $t+1$, o subconjunto que descreve a informação relativa ao estado da natureza A_{t+1} deve ser um subconjunto de A_t, uma vez que é suposto que nenhuma informação se perde. Portanto, segue que a sequência $\{A_t\}$ de subconjuntos de Ω deve de fato satisfazer $A_{t+1} \supseteq A_t$ para todo t.

Note que, supondo que $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_m\}$, exitem m possíveis sequências de informação $\{A_t\}$ de subconjuntos. No tempo $t = 0$ tem-se o conhecimento de todas essas sequências, entretanto, não se sabe qual acabará acontecendo.

Arbitrariarmente, selecione uma dessas m sequências $\{\widehat{A}_t\}$ e algum tempo $s < T$ e considere a coleção de todas as sequências $\{A_t\}$ que coincidem com $\{\widehat{A}_t\}$ ao longo do tempo s, juntamente com a própria sequência $\{\widehat{A}_t\}$. Agora, considere todas as sequências A_{s+1} no tempo $s+1$ oriundas daquelas sequências naquela coleção. Se $\omega \in \widehat{A}_t$, então deve existir ao menos um subconjunto A_{s+1} contendo ω. De fato, se nenhuma das sequências que coincidem com $\{\widehat{A}_t\}$ no tempo s contém ω, então ω não estaria em $\widehat{A}_t$, o que é uma contradição. Segue então que a união de todos os subconjuntos A_{s+1} que sucedem $\widehat{A}_t$ deve ser igual a $\widehat{A}_t$. Além disso, essa coleção de subconjuntos $\{A_{s+1}\}$ deve ser mutuamente exclusiva, porque, do contrário, ω estaria em dois subconjuntos distintos e então existiriam duas ou mais sequências $\{A_t\}$ correspondendo ao estado da natureza ω, o que é uma contradição. Portanto, a coleção $\{A_{s+1}\}$ de subconjuntos que podem suceder $\widehat{A}_s$ forma uma partição de $\widehat{A}_s$.

Em particular, tomando $s = 0$, vemos que a coleção $\{A_1\}$ de todos os possíveis subconjuntos no tempo $t = 1$ forma uma partição de Ω. Denotaremos tal partição por $\mathfrak{A}_1$. Ainda, a coleção $\{A_2\}$ de todos os possíveis subconjuntos em $t = 2$ também forma uma partição de Ω, denotada por $\mathfrak{A}_2$, a qual tem a propriedade de que cada $A \in \mathfrak{A}_1$ é igual a união de um ou mais elementos de $\mathfrak{A}_2$. Segue, portanto que a estrutura de informação é totalmente descrita como uma sequência $\mathfrak{A}_1, ..., \mathfrak{A}_T$ de partições de Ω, com $\mathfrak{A}_0 = \{\Omega\}$ e $\mathfrak{A}_T = \{\{\omega_1\}, \ldots, \{\omega_m\}\}$, e satisfazendo a propriedade de que cada $A \in \mathfrak{A}_t$ é igual a união de elementos de $\mathfrak{A}_{t+1}$ para todo $t < T$. Esta sequência de partições $\{\mathfrak{A}_t\}$ é unicamente construida a partir da coleção das sequências de informações possíveis $\{A_t\}$. Reciprocamente, dada uma sequência de partições $\{\mathfrak{A}_t\}$ como acima, existe um única coleção correspondente de sequências de informações possíveis $\{A_t\}$.

Como, pelo Teorema A.56 cada partição $\mathfrak{A}_i$, $i = 1, ..., T$ gera uma única $\sigma-$álgebra $\mathcal{F}_i$, podemos representar a informação disponível através de uma sequência de $\mathcal{F}_0 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_T$. Portanto, devemos ter uma filtração $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_0, ..., \mathcal{F}_T\}$, com $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq ... \subseteq \mathcal{F}_T = \mathcal{F}$, a qual modela a informação disponível referente ao real estado da natureza nos diferentes períodos de tempo $t = 0, ..., T$.

Exemplo 2.1. *Considere um espaço de estados* $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_8\}$, *três períodos de tempo* $t =$

$0,1,2$. *Suponha que em $t=1$ tenhamos a seguinte partição de Ω*

$$\mathfrak{A}_1 = \{\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\},\{\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8\}\}.$$

Em $t=2$ podemos ter uma das seguintes partições:

$$\mathfrak{A}_2 = \{\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_3,\omega_4\},\{\omega_5,\omega_6\},\{\omega_7,\omega_8\}\}$$

ou

$$\mathfrak{A}_2 = \{\{\omega_1\},\{\omega_2,\omega_3,\omega_4\},\{\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8\}\},$$

contudo, não podemos ter

$$\mathfrak{A}_2 = \{\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\},\{\omega_3,\omega_4\},\{\omega_5,\omega_6\},\{\omega_7,\omega_8\}\},$$

uma vez que temos dois subconjuntos que não são disjuntos.

Cada estrutura de infomação do modelo organizada como uma sequência de partições pode ser melhor enxergada quando utilizamos um diagrama, o qual chamamos de árvore da informação. Por exemplo, a sequência de partições

$$\mathfrak{A}_0 = \{\Omega\}, \mathfrak{A}_1 = \{\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\},\{\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8\}\},$$

$$\mathfrak{A}_2 = \{\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_3,\omega_4\},\{\omega_5,\omega_6\},\{\omega_7,\omega_8\}\},$$

$$\mathfrak{A}_3 = \{\{\omega_1\},\{\omega_2\},\{\omega_3\},\{\omega_4\},\{\omega_5\},\{\omega_6\},\{\omega_7\},\{\omega_8\}\}$$

pode ser representada pelo diagrama representado na Figura 2.1, a árvore da informação do modelo, em que cada **nó** da árvore se refere a um elemento da partição $\mathfrak{A}_t$ em t, cada **linha** liga um elemento da partição $\mathfrak{A}_t$ a um de seus possíveis elementos sucessores na partição $\mathfrak{A}_{t+1}$ e cada **ramo** representa uma sequência $\{A_t\}$ que liga Ω a cada $\omega \in \Omega$.

Consideramos também n ativos de risco, $X_1,....,X_n$, e então, o processo estocástico $\boldsymbol{X}$ com valores em $\mathbb{R}^{n+1}$ cujos componentes consistem de um processo estocástico adaptado à filtração $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_0,\ldots,\mathcal{F}_T\}$,

$$P(X_j) \text{ se } t=0 \text{ e } \left(X_j^t\right)_{t\in\{1,\ldots,T\}}, \text{ para } j=0,\ldots,n,$$

em que $P(X_j)$ é $\mathcal{F}_0-$adaptado[1]. Assim, $P(X_j)$ e cada X_j^t são variáveis aleatórias as quais são os preços do $j-$ésimo ativo nos tempos $t=0$ e t, respectivamente. Observe que este processo é suposto adaptado à filtração uma vez que queremos que os preços dos ativos sejam consistentes com a estrutura de informação disponível, ou seja, queremos conhecer o preço dos ativos no passado e no presente. Desse modo, cada X_j^t é $\mathcal{F}_t-$mensurável.

[1]Observe que $P(X_j)$ é uma variável aleatória que não distingue os ω em Ω. Assim, o preço em $t=0$ é o mesmo valor para todo $\omega \in \Omega$.

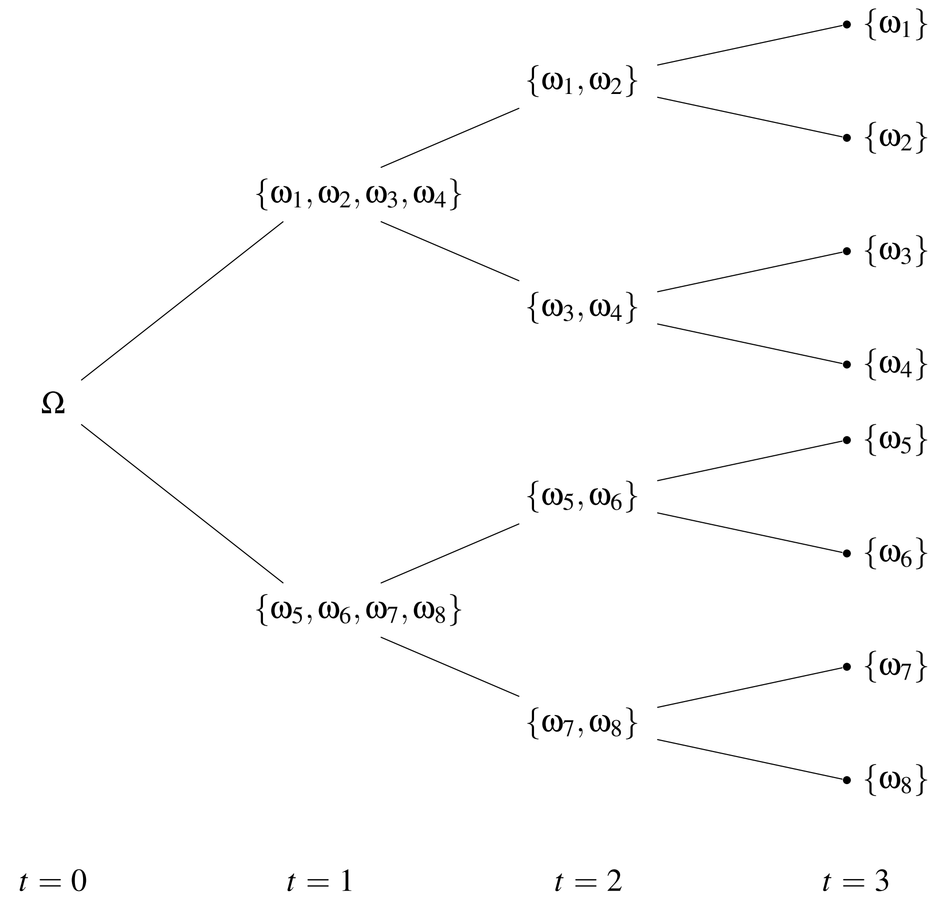

Figura 2.1: Diagrama de Árvore das partições $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ e $\mathfrak{A}_3$ de Ω.

Finalmente, consideramos um ativo livre de risco X_0, onde assumimos que[2] $P(X_0) = 1$, sem perda de generalidade.

Denotando $P(X_j)$ por X_j^0 temos que $\left(\Omega, \mathcal{F}, Q, \mathbb{F}, \mathbb{T}, \left(X_j^t\right)_{t\in\mathbb{T},\ j=0,\ldots,n}\right)$ é o Modelo de Precificação com Vários Períodos.

Definição 2.2. *A* ***taxa de juros*** *referente a cada período $[t-1,t)$ é dada por*

$$r_1 = \frac{X_0^t - P(X_0)}{P(X_0)},\ t = 1,\ e\ r_t = \frac{X_0^t - X_0^{t-1}}{X_0^{t-1}},\ t \geq 2.$$

Definição 2.3. *O* ***fator de desconto*** *referente ao período $[t-1,t)$ é*

$$\phi_t = \prod_{s=1}^{t} \frac{1}{1+r_s}.$$

Se r é constante, segue que $\phi_t = (1+r)^{-t}$.

Observação 2.4. *Observe que a definição da taxa de juros é a generalização daquela para um*

[2]Da mesma maneira que fizemos no Modelo de Único Período.

único período: naquele caso, $T = 1$ *e de* $X_0^T = 1 + r$*, segue que*

$$r = X_0^T - 1 = \frac{X_0^T - P(X_0)}{P(X_0)},$$

uma vez que $P(X_0) = 1$.

Ainda, o fator de desconto era $\frac{1}{1+r}$ *naquele modelo, o que torna natural pensar no fator de desconto no período* $[t-1, t)$ *como sendo o produto dos fatores de desconto em cada período.*

Observação 2.5. *No caso do modelo com um único período não foi necessário o uso dos conceitos de* $\sigma-$*álgebra explicitamente, contudo ele estava implícito quando tratamos de medidas de probabilidade definidas em* Ω*. Não foi necessário citar tal objeto visto que ali, em* $t = 0$ *não tinhámos informação nenhuma, ou seja, nossa* $\sigma-$*álgebra era* $\mathcal{F}_0$ *e em* $t = T$ *tinhámos todas as informações possíveis e então nossa* $\sigma-$*álgebra era* $\mathcal{F}$.

Observação 2.6. *Temos que*

$$\phi_t = \prod_{s=1}^{t} \frac{1}{1+r_s} = \frac{X_0^0}{X_0^t} = \frac{1}{X_0^t},$$

uma vez que $X_0^0 = 1$.

Agora, uma vez apresentado o modelo de vários períodos, podemos definir os objetos já conhecidos para o modelo mais simples.

Definição 2.7. *Um* ***portfólio*** *ou* ***estratégia de negociação*** *é um processo estocástico com valores em* $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\boldsymbol{\beta} = \left\{ \begin{bmatrix} \beta_0^t & \beta_1^t & \cdots & \beta_n^t \end{bmatrix}^{tr} \middle| \, t \in \mathbb{T} \right\},$$

em que cada componente β_j^t *representa o número de ativos* X_j *que um investidor possui no período* $[t-1, t)$.

Como a quantidade de ativos X_j em um portfólio $\boldsymbol{\beta}$ no período $[t-1, t)$ deve ser decidida antes do período começar, temos que em $t-1$ se tem conhecimento sobre essa quantidade e, desse modo, β_j^t é $\mathcal{F}_{t-1}-$mensurável. Assim, segue pela Definição A.70 que o processo $\boldsymbol{\beta}$ é previsível.

Definição 2.8. *Seja* $\boldsymbol{\beta}$ *um portfólio qualquer. Definimos o* ***valor do portfólio*** *como o processo estocástico* $V^{\boldsymbol{\beta}} = (V_t)_{t \in \mathbb{T}}$*, o qual nos dá o valor do portfólio* $\boldsymbol{\beta}$ *nos diferentes períodos . Assim,*

$$V_0^{\boldsymbol{\beta}} = \left[\boldsymbol{\beta}^1\right]^{tr} \boldsymbol{P(X)} = \sum_{j=0}^{n} \beta_j^1 P(X_j),$$

$$V_t^{\boldsymbol{\beta}} = \left[\boldsymbol{\beta}^t\right]^{tr} \boldsymbol{X}^t = \sum_{j=0}^{n} \beta_j^t X_j^t, \; t = 1, ..., T.$$

A Definição acima pode causar certa confusão pela diferença entre os cálculos do valor de um portfólio em $t = 0$ e em $t = 1,...,T$. Primeiramente, considere o caso $t = 0$. Neste, $\boldsymbol{\beta}^1$ contém as quantidades de cada ativo no período $[0,1)$. Desse modo, o valor do portfólio em $t = 0$ é o dito na definição. Agora, considerando o caso $t \neq 0$, temos que $\boldsymbol{\beta}^t$ são as quantidades de cada ativo no período $[t-1,t)$. Contudo, o portfólio será reconstruído no tempo t. Assim,

$$\left[\boldsymbol{\beta}^{t+1}\right]^{tr}\boldsymbol{X}^t$$

será o valor do portfólio logo após a reconstrução, enquanto que

$$\left[\boldsymbol{\beta}^{t}\right]^{tr}\boldsymbol{X}^t$$

será o valor do portfólio antes da reconstrução. Dessa forma, os dois modos de descrever o valor do portfólio definem seu valor no tempo t, e aqui trabalharemos com o valor do portfólio antes da reconstrução, justamente como está na definição.

Definição 2.9. *Um portfólio* $\boldsymbol{\beta}$ *é* ***autofinanciável*** *se*

$$\left[\boldsymbol{\beta}^{t}\right]^{tr}\boldsymbol{X}^t = \left[\boldsymbol{\beta}^{t+1}\right]^{tr}\boldsymbol{X}^t, \text{ para todo } t \in \mathbb{T}, 1 \leq t \leq T-1.$$

A definição acima é bastante natural. Um portfólio é autofinanciável se nenhum montante é retirado ou acrescido nos períodos de tempo, e assim o seu valor antes das reconstruções e pós reconstruções permanece o mesmo. Isto significa que, se ocorrerem vendas ou compras nas reconstruções, estas devem ser feitas de modo que o portfólio não mude seu valor. Contudo, é válido observar que o valor de um portfólio autofinanciável nos períodos de tempo podem mudar, só não mudam abruptamente simplesmente por causa de uma reconstrução. De fato, como os preços mudam de $t-1$ à t, o valor do portfólio autofinanciável também mudará e o valor de tal mudança é dado por

$$V_1^{\boldsymbol{\beta}} - V_0^{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{j=0}^{n} \beta_j^1 \left(X_j^1 - P(X_j)\right) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j^1 \Delta X_j^1,$$

$$V_t^{\boldsymbol{\beta}} - V_{t-1}^{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{j=0}^{n} \beta_j^t \left(X_j^t - X_j^{t-1}\right) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j^t \Delta X_j^t,$$

onde $\Delta X_j^1 = X_j^1 - P(X_j)$ e $\Delta X_j^t = X_j^t - X_j^{t-1}$.

A partir de agora definiremos outros objetos, sempre com a hipótese de que os portfólios são autofinanciáveis.

Definição 2.10. *Seja* $\boldsymbol{\beta}$ *um portfólio autofinanciável. Definimos o* **ganho total** *(cumulativo)* $G_t^{\boldsymbol{\beta}}$ *do tempo* $t = 0$ *até o tempo* t *por*

$$G_t^{\boldsymbol{\beta}} = V_t^{\boldsymbol{\beta}} - V_0^{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{u=1}^{t} (V_u - V_{u-1}) = \sum_{u=1}^{t}\sum_{j=0}^{n} \beta_j^u \Delta X_j^u = \sum_{u=1}^{t} [\boldsymbol{\beta}^u]^{tr} \Delta \boldsymbol{X}^u,$$

onde $\boldsymbol{\beta}^u = \begin{bmatrix} \beta_0^u & \beta_1^u & \cdots & \beta_n^u \end{bmatrix}^{tr}$ *e* $\Delta \boldsymbol{X}^u = \begin{bmatrix} \Delta X_0^u & \Delta X_1^u & \cdots & \Delta X_n^u \end{bmatrix}^{tr}$.

Observação 2.11. *Note que $G_t^{\boldsymbol{\beta}}$ é adaptado uma vez que se tem conhecimento de seu valor em t, ou seja, é $\mathcal{F}_t-$mensurável. Além disso, observe que, como $\boldsymbol{\beta}$ é um processo previsível e o processo de preço é adaptado à filtração (ambos com respeito à $\mathbb{F}$), segue pela Definição A.71 que*

$$\beta_j^u \Delta \boldsymbol{X}^u$$

é a transformação martingale do $j-$ésimo processo de preço $X_j = (X_j^t)_{\{0,\ldots,T\}}$ pelo $j-$ésimo portfólio β_j. Assim, podemos reescrever a soma dupla que define $G_t^{\boldsymbol{\beta}}$ por

$$G_t^{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{u=1}^{t} \sum_{j=0}^{n} \beta_j^u \Delta X_j^u = \sum_{j=0}^{n} (\boldsymbol{\beta}_j \boldsymbol{X}_j)_t.$$

Exemplo 2.12. *Considere o Modelo de Precificação com Vários Períodos composto apenas pelo ativo livre de risco, um ativo de risco X e o espaço de estados da natureza $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Por simplicidade, seja $r = 0$. A tabela a seguir contém os valores de X nos diferentes tempos e nos diferentes estados da natureza.*

Tabela 2.1: Valores do ativo X em cada tempo t.

$\boldsymbol{\omega_i}$	$\boldsymbol{t=0}$	$\boldsymbol{t=1}$	$\boldsymbol{t=2}$
ω_1	$P(X) = 5$	$X^1 = 8$	$X^2 = 9$
ω_2	$P(X) = 5$	$X^1 = 8$	$X^2 = 6$
ω_3	$P(X) = 5$	$X^1 = 4$	$X^2 = 7$
ω_4	$P(X) = 5$	$X^1 = 4$	$X^2 = 3$

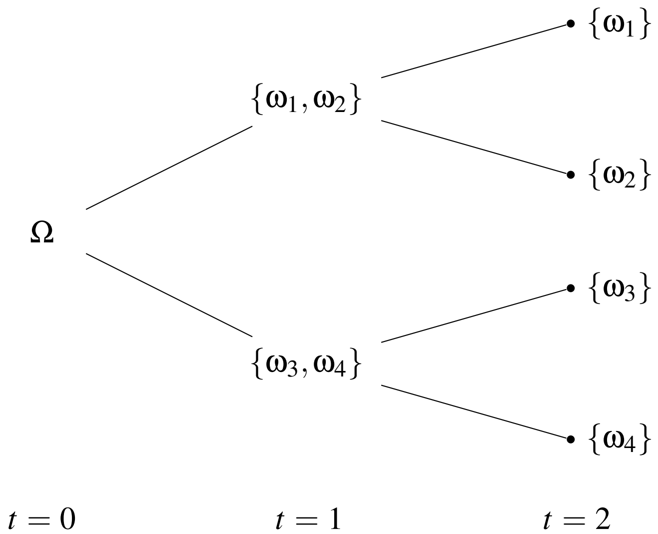

Figura 2.2: Diagrama de Árvore representando a filtração $\mathbb{F}$.

Observando as mesmas informações na árvore representada na Figura 3.2*, podemos enxergar claramente quais são as partições em cada tempo t que nos dão nossa filtração $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\}$, em que:*

- $\mathcal{F}_0$ *não traz informação alguma, ou seja,*

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\};$$

- $\mathcal{F}_1$ *é formada pela partição* $\mathfrak{A}_1 = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}\}$,*ou seja,*

$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}\};$$

- $\mathcal{F}_2$ *é formada pela partição* $\mathfrak{A}_2 = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\}\}$, *ou seja,*

$$\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_4\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_4\},$$

$$\{\omega_3, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}\},$$

que nada mais é que o conjunto da partes de Ω*, ou seja, essa* $\sigma-$*álgebra traz toda a informação possível sobre o verdadeiro estado da natureza.*

Um outro ponto muito semelhante ao modelo de um único período é nosso interesse em controlar as mudanças reais dos preços dos ativos, sem levar em consideração a taxa de juros aplicada no período. Assim, do mesmo modo que no modelo mais simples, nós normalizamos o preço do ativo livre de risco em todos os períodos, mantendo seu valor como a constante um e, assim, conseguimos o valor dos ativos livres de risco sem a inclusão da taxa de juros, apenas descontando esta taxa de seu valor. Isto é feito utilizando o fator de desconto ϕ_t em cada período $[t-1, t)$, o qual já foi definido nesta escrita.

Diante disso podemos agora definir outros conceitos importantes.

Definição 2.13. *Definimos o* ***processo de preço descontado*** *do ativo* X_j*,* $j = 0, ..., n$ *por*

$$\overline{P(X_j)} = \phi_0 P(X_j), \text{ para } t = 0 \text{ e } \overline{X}_j^t = \phi_t X_j^t, \text{ para } t = 1, ..., T.$$

Definição 2.14. *Seja* β *um portólio qualquer. Definimos o* ***processo de valor descontado*** *do portfólio* β *por*

$$\overline{V}_t^{\beta} = \phi_t V_t.$$

Definição 2.15. *Seja* β *um portólio qualquer. Definimos o* ***processo de ganho descontado***[3] *de tal portfólio por*

$$\overline{G}_t^{\beta} = \sum_{u=1}^{t} \left(\boldsymbol{\beta^u}\right)^{tr} \Delta\overline{\boldsymbol{X}}^u = \sum_{u=1}^{t} \sum_{j=0}^{n} \beta_j{}^u \Delta\overline{X}_j^u,$$

onde $\Delta\overline{X}_j^u = \overline{X}_j^u - \overline{X}_j^{u-1}$.

[3]Note que $\overline{G}_t$ geralmente difere de $\phi_t G_t$.

Observação 2.16. *Temos que* $\overline{G}_t^{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{j=0}^{n} (\beta_j \overline{X}_j)_t$ *é uma soma de transformações martingales.*

O próximo Teorema nos dá uma condição necessária e suficiente para um portfólio ser autofinanciável, a qual relaciona o processo de ganho descontado e o processo de valor descontado.

Teorema 2.17. *Um portfólio* $\boldsymbol{\beta}$ *é autofinanciável se, e somente se,*

$$\overline{V}_t^{\boldsymbol{\beta}} = \overline{V}_0^{\boldsymbol{\beta}} + \overline{G}_t^{\boldsymbol{\beta}}.$$

Demonstração. Suponha que $\boldsymbol{\beta}$ é autofinanciável. Temos pela Definição 2.10 e da relação[4] $\overline{V}_0^{\boldsymbol{\beta}} = V_0^{\boldsymbol{\beta}}$ que

$$\begin{aligned} V_0^{\boldsymbol{\beta}} + \overline{G}_t^{\boldsymbol{\beta}} &= \left(\boldsymbol{\beta}^1\right)^{tr} \boldsymbol{X}^0 + \sum_{u=1}^{t} (\boldsymbol{\beta}^u)^{tr} \left(\overline{\boldsymbol{X}}^u - \overline{\boldsymbol{X}}^{u-1}\right) \\ &= \sum_{u=1}^{t-1} \overline{\boldsymbol{X}}^u \left[(\boldsymbol{\beta}^u)^{tr} - \left(\boldsymbol{\beta}^{u+1}\right)^{tr}\right] + (\boldsymbol{\beta}^t)^{tr} \overline{\boldsymbol{X}}^t \\ &= -\sum_{u=1}^{t-1} \left(\overline{\boldsymbol{X}}^u\right)^{tr} \left(\boldsymbol{\beta}^{u+1} - \boldsymbol{\beta}^u\right) + (\boldsymbol{\beta}^t)^{tr} \overline{\boldsymbol{X}}^t. \end{aligned}$$

Como $\boldsymbol{\beta}$ é autofinanciável temos, para cada u na soma acima,

$$\left(\overline{\boldsymbol{X}}^u\right)^{tr} \left(\boldsymbol{\beta}^{u+1} - \boldsymbol{\beta}^u\right) = \phi_u (X^u)^{tr} \left(\boldsymbol{\beta}^{u+1} - \boldsymbol{\beta}^u\right) = 0,$$

uma vez que $\boldsymbol{\beta}^u = \boldsymbol{\beta}^{u+1}$.

Portanto,

$$V_0^{\boldsymbol{\beta}} + \overline{G}_t^{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{\beta}^t)^{tr} \overline{\boldsymbol{X}}^t = \overline{V}_t^{\boldsymbol{\beta}}.$$

Reciprocamente, suponha que $V_0^{\boldsymbol{\beta}} + \overline{G}_t^{\boldsymbol{\beta}} = \overline{V}_t^{\boldsymbol{\beta}}$ para todo $t = 0, ..., T$. Então

$$\overline{G}_{t-1}^{\boldsymbol{\beta}} - \overline{G}_t^{\boldsymbol{\beta}} = \overline{V}_{t-1}^{\boldsymbol{\beta}} - \overline{V}_t^{\boldsymbol{\beta}},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \left(\boldsymbol{\beta}^{t+1}\right)^{tr} \left(\overline{\boldsymbol{X}}^{t+1} - \overline{\boldsymbol{X}}^t\right) &= \left(\boldsymbol{\beta}^{t+1}\right)^{tr} \overline{\boldsymbol{X}}^{t+1} - (\boldsymbol{\beta}^t) \overline{\boldsymbol{X}}^t \\ \Rightarrow \left(\boldsymbol{\beta}^{t+1}\right) \overline{\boldsymbol{X}}^t &= (\boldsymbol{\beta}^t) \overline{\boldsymbol{X}}^t. \end{aligned}$$

Portanto, $\boldsymbol{\beta}$ é autofinanciável. □

Teorema 2.18. *Para qualquer valor inicial* V_0 *e qualquer processo previsível* $\left\{ \left[\begin{array}{ccc} \beta_1^t & \cdots & \beta_n^t \end{array} \right]^{tr} \middle| \, 1 \leq t \leq T \right\}$ *de dimensão n (o qual deve ser pensando como o portfólio formado somente pelos ativos de risco), existe um único processo previsível unidimensional*

[4] Basta observar que $\phi_0 = 1$ e, desse modo, $\overline{V}_0^{\boldsymbol{\beta}} = \phi_0 V_0^{\boldsymbol{\beta}} = V_0^{\boldsymbol{\beta}}$

$\{\beta_0^t \mid 1 \leq t \leq T\}$ *(os investimentos no ativo livre de risco) tal que o processo combinado*

$$\boldsymbol{\beta} = \left\{ \left[\begin{array}{cccc} \beta_0^t & \beta_1^t & \cdots & \beta_n^t \end{array} \right]^{tr} \,\middle|\, 1 \leq t \leq T \right\}$$

de dimensão $n+1$ *é autofinanciável com valor inicial* V_0.

Demonstração. Suponha que seja dado um valor inicial V_0 e um portfólio formado apenas por ativos de risco. Defina a quantidade de ativos livres de risco em $t=0$ como segue

$$\beta_0^1 = V_0 - \sum_{j=1}^{n} \beta_j^1 X_j^0.$$

Como β_j^1, X_j^0 e V_0 (a qual é uma constante) são $\mathcal{F}_0-$mensuráveis, segue que β_0^1 também é $\mathcal{F}_0-$mensurável. Além disso, em $t=0$, o portfólio combinado, ou seja, formado pelo portfólio inicial de ativos de risco e do ativo livre de risco tem valor

$$\beta_0^1 X_0^0 + \sum_{j=1}^{n} \beta_j^1 X_j^0 = V_0.$$

Continuemos dessa maneira, ou seja, construindo o portfólio combinado autofinanciável escolhendo a quantidade exata do ativo livre de risco. Para que o portfólio reestruturado em $t=1$ de fato seja autofinanciável, devemos ter

$$\beta_0^2 X_0^1 + \sum_{j=1}^{n} \beta_j^2 X_j^1 = \beta_0^1 X_0^1 + \sum_{j=1}^{n} \beta_j^1 X_j^1,$$

e assim, segue que

$$\beta_0^2 = \beta_0^1 + \frac{1}{X_0^1} \sum_{j=1}^{n} X_j^1 (\beta_j^1 - \beta_j^2),$$

e β_0^2 é $\mathcal{F}_1-$mensurável.

Continuando por indução, temos que, para todo $1 < t < T$, tendo definido β_0^t, definimos β_0^{t+1} de modo que a condição de o portfólio combinado reestruturado no tempo t ser autofinanciável é satisfeita, ou seja,

$$\beta_0^{t+1} X_0^t + \sum_{j=1}^{n} \beta_j^{t+1} X_j^t = \beta_0^t X_0^t + \sum_{j=1}^{n} \beta_j^t X_j^t.$$

Como β_0^{t+1} é formado por X_j^t, β_j^t e β_j^{t+1}, onde cada uma delas são variáveis $\mathcal{F}_t-$mensuráveis, segue que β_0^{t+1} também é $\mathcal{F}_t-$mensurável.

Desse modo, construímos um portfólio formado pelo portfólio de ativos de risco dado e pelo ativo livre de risco de modo que tal portfólio tem valor inicial V_0 e é autofinanciável, como desejado. Observe ainda, que pela construção, tal portfólio é único.

$\square$

Observação 2.19. *Assim como observado no Modelo de Precificação com um Único Período, no Modelo de Vários Períodos o ativo livre de risco também não contribui para o cálculo do ganho descontado já que* $\Delta\overline{X}_0^t = 0$. *Desse modo,*

$$\overline{G}_t^{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{u=1}^{t}\sum_{j=0}^{n} (\boldsymbol{\beta}^u)^{tr}\,\Delta\overline{X}_j^u = \sum_{u=1}^{t}\sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{\beta}^u)^{tr}\,\Delta\overline{X}_j^u.$$

Assim, o Teorema 2.18 é extremamente útil, uma vez que podemos apenas nos preocupar com o portfólio de ativos de risco pois sabemos que é sempre possível ajustar a quantidade do ativo livre de risco a fim de garantir um portfólio final autofinanciável com valor inicial desejado.

Como desejamos que nosso modelo não permita oportunidades de arbitragem, definiremos agora, matematicamente, a arbitragem, a qual possui definição análoga àquela definida no Modelo com Um Único Período.

Definição 2.20. *Um portfólio ou estratégia de negociação autofinanciável* $\boldsymbol{\beta}$ *é chamado uma* ***oportunidade de arbitragem*** *se, e somente se,*

i) $V_0^{\boldsymbol{\beta}} \leq 0$*;*

ii) $V_T^{\boldsymbol{\beta}} \geq 0$ *para todo* $\omega \in \Omega$*,*

iii) $E_Q(V_T^{\boldsymbol{\beta}}) > 0$*, isto é,* $V_T^{\boldsymbol{\beta}}(\omega_i) > 0$ *para algum* $i \in \{1,...,m\}$*.*

Em palavras, no Modelo de Precificação com Vários Períodos temos que uma oportunidade de arbitragem é um portfólio com valor inicial zero ou negativo, sem chance de perder dinheiro no tempo $t = T$ e com uma chance real de fazer algum lucro neste mesmo tempo.

O Teorema abaixo nos dá uma definição alternativa de oportunidade de arbitragem.

Teorema 2.21. *Existe uma oportunidade de arbitragem se, e somente se, existe um portfólio* $\boldsymbol{\beta}$ *tal que*

i) $\overline{G}_T^{\boldsymbol{\beta}} \geq 0$ *para todo* $\omega \in \Omega$*,*

ii) $E\left(\overline{G}_T^{\boldsymbol{\beta}}\right) > 0$*.*

Demonstração. Suponha que $\boldsymbol{\beta}$ é uma oportunidade de arbitragem. Temos que $\overline{V}_0^{\boldsymbol{\beta}} = V_0^{\boldsymbol{\beta}} \leq 0$ e $V_T^{\boldsymbol{\beta}} \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$ com inequação estrita para ao menos um $\omega_i \in \Omega$. Desse modo, $\overline{V}_T^{\boldsymbol{\beta}} \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$ e $\overline{V}_T^{\boldsymbol{\beta}}(\omega_i) > 0$. Assim, $\overline{G}_T^{\boldsymbol{\beta}}(\omega) = \overline{V}_T^{\boldsymbol{\beta}}(\omega) - \overline{V}_0^{\boldsymbol{\beta}} \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$ e $\overline{G}_T^{\boldsymbol{\beta}}(\omega_i) > 0$. Portando as condições $i)$ e $ii)$ do Teorema são safisfeitas.

Reciprocamente, suponha que o portólio $\boldsymbol{\beta}$ satisfaz as condições $i)$ e $ii)$ do Teorema. Seja $\boldsymbol{\alpha}$ um portfólio que possui a mesma quantidade de cada ativo de risco que $\boldsymbol{\beta}$, ou seja,

$$\alpha_j^t = \beta_j^t, \text{ para } j = 1,...,n,$$

e escolha α_0^t de modo que $\boldsymbol{\alpha}$ seja autofinanciável com valor inicial $V_0 \leq 0$ (utilizando o Teorema 2.18).

Como, pela Observação 2.19, o ativo livre de risco não contribuí para o cálculo do ganho descontado, sempre teremos

$$\overline{G}_t^{\boldsymbol{\alpha}} = \overline{G}_t^{\boldsymbol{\beta}}.$$

Assim, como $\overline{G}_t^{\boldsymbol{\beta}} \geq 0$ com inequação estrita para algum $\omega_i \in \Omega$ segue que

$$\overline{V}_t^{\boldsymbol{\alpha}} - \overline{V}_0^{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0 \Rightarrow \overline{V}_t^{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0,$$

com inequação estrita para ω_i. Portanto, segue o desejado. □

2.2 Preços Livres de Arbitragem e Medida Martingale Equivalente

Assim como no Modelo de Precificação com Um Único Período, queremos introduzir novos ativos no nosso modelo com vários períodos de tempo, onde só temos a informação dos preços desses ativos no tempo T, e precificá-los em todos os tempos $t \in \mathbb{T}$, sem que haja oportunidades de arbitragem. A ideia é a mesma do modelo com um único período: encontrar um portfólio replicante para o novo ativo Y e usar a Lei do Preço Único para precificar Y nos diferentes tempos $t \in \mathbb{T}$.

Definição 2.22. *Um ativo Y não pertencente ao Modelo de Precificação com Vários Períodos é **replicável** e, e só se, existe um portfólio autofinanciável $\boldsymbol{\beta}$ tal que*

$$Y^T(\omega) = V_T^{\boldsymbol{\beta}}(\omega) \text{ para todo } \omega \in \Omega.$$

*O portfólio $\boldsymbol{\beta}$ é chamado **portfólio replicante** de Y.*

A fim de pensar na precificação de um ativo replicável Y e observando a definição acima, podemos nos perguntar se poderiam existir dois portfólios replicantes para Y, ou seja, portfólios $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ tais que $V_T^{\boldsymbol{\beta}} = V_T^{\boldsymbol{\alpha}}$, com $V_t^{\boldsymbol{\beta}} \neq V_t^{\boldsymbol{\alpha}}$ para algum $t \in \mathbb{T}$. Isso poderia nos trazer problemas no momento de precificar o ativo Y nesse tempo t. O Teorema a seguir responde essa pergunta.

Teorema 2.23. *Suponha que o Modelo de Precificação com Vários Períodos não permita oportunidades de arbitragem. Se $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ são portfólios tais que $V_T^{\boldsymbol{\beta}} = V_T^{\boldsymbol{\alpha}}$, então $V_t^{\boldsymbol{\beta}} = V_t^{\boldsymbol{\alpha}}$ para todo $t = 1, ..., T$.*

Demonstração. Suponha que $V_T^{\boldsymbol{\beta}} = V_T^{\boldsymbol{\alpha}}$, mas que, para ao menos um $t \in \{0, ..., T-1\}$, $V_t^{\boldsymbol{\beta}} \neq V_t^{\boldsymbol{\alpha}}$. Seja

$$t = \inf\{u \mid u \in \{0, ..., T-1\} \text{ e } V_u^{\boldsymbol{\beta}} \neq V_u^{\boldsymbol{\alpha}}\}.$$

Assuma, sem perda de generalidade que

$$A = \{\omega \in \Omega \mid V_t^{\boldsymbol{\beta}}(\omega) > V_t^{\boldsymbol{\alpha}}(\omega)\}.$$

Observe que $Q(A) > 0$ uma vez que $Q(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$. Considere agora o seguinte portfólio $\boldsymbol{\eta}$ tal que, para $j = 1, ..., n$ (para os ativos de risco),

$$\eta_j^u = \begin{cases} \beta_j^u - \alpha_j^u & \text{se } u \leq t \\ I_{A^c}(\beta_j^u - \alpha_j^u) & \text{se } u > t \end{cases}$$

e para η_0^u é definido de modo que o portfólio $\boldsymbol{\eta}$ seja autofinanciável sem custo inicial (pelo Teorema 2.18).

Em palavras, o portfólio é o seguinte: em $t = 0$ compra-se o portfólio $\boldsymbol{\beta}$ e vende-se a descoberto o portfólio $\boldsymbol{\alpha}$. Se A ocorreu em t, vende-se $\boldsymbol{\beta}$ e compra-se $\boldsymbol{\alpha}$. O lucro positivo é usado adquirindo-se ativos livres de risco. Se A não ocorreu, nada é feito. Assim, no tempo T, se A ocorreu, entrega-se o portfólio $\boldsymbol{\alpha}$ e tem-se um lucro certo de $\phi_T(V_t^{\boldsymbol{\beta}} - V_t^{\boldsymbol{\alpha}}) > 0$. Se A não ocorreu, vende-se o portfólio $\boldsymbol{\beta}$, compra-se $\boldsymbol{\alpha}$ e o mesmo é entregue, não lucrando e nem perdendo nada. Assim, $V_T^{\boldsymbol{\eta}}(\omega) \geq 0$ com desigualdade estrita para $\omega \in A$ e $V_0^{\boldsymbol{\eta}} = 0$, o que é uma contradição com o fato de o modelo não permitir oportunidades de arbitragem. Portanto, $V_t^{\boldsymbol{\beta}} = V_t^{\boldsymbol{\alpha}}$ para todo $t \in \mathbb{T}$. □

Diante do Teorema 2.23, denotando o **processo de valor** do novo ativo Y por $P(Y)$ em $t = 0$ e por Y^t no tempo t e lembrando da Lei do Preço Único, segue que, se $\boldsymbol{\beta}$ é um portfólio que replica Y, então

$$P(Y) = V_0^{\boldsymbol{\beta}} \text{ e } Y^t = V_t^{\boldsymbol{\beta}}.$$

Contudo, até agora só mostramos como precificar o novo ativo que queremos inserir no modelo através do portfólio replicante. Nosso intuito agora é, assim como fizemos no modelo de único período, preficicar tais ativos utilizando medidas martingales equivalentes. Observe que, no contexto de um único período, uma medida martingale equivalente R é uma medida tal que

- $R(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$;
- $E_R\left(\overline{X}_j^T\right) = \overline{X}_j^0$, para todo $\omega \in \Omega$.

É claro que essa simplicidade da MME se deve ao fato de que tinhámos apenas duas datas de negociação, os tempos 0 e T. Observe que a filtração nesse caso era $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_T\}$, em que $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e $\mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega)$ e, portanto, cada $\overline{X}_j$ era um martingale com respeito à filtração $\mathbb{F}$ e à medida R. Desse modo, podemos definir uma MME para o modelo com vários períodos como segue.

Observação 2.24. *A partir de agora, a fim de simplificar a notação, denotaremos $P(X_j)$ por X_j^0.*

Definição 2.25. *Seja* $\left(\Omega, \mathcal{F}, Q, \mathbb{F}, \mathbb{T}, \left(X_j^t\right)_{t\in\mathbb{T}, j=0,\dots,n}\right)$ *um Modelo de Precificação de Ativos com Vários Períodos. Uma medida de probabilidade R em $(\Omega, \mathcal{F})$ é uma* ***medida martingale equivalente*** *se, e somente se,*

- *R é equivalente à Q, isto é, $Q(A) = 0$ se, e somente se, $R(A) = 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$*[5]*;*
- *Cada processo de preço descontado é um martingale com respeito à R e $\mathbb{F}$, ou seja,*

$$E_R\left(\overline{X}_j^{t+1} \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right) = \overline{X}_j^t,\ t = 0, \dots, T;\ j = 0, 1, \dots, n.$$

Definição 2.26. *Se um processo é um martingale com respeito à R e a $\mathbb{F}$, dizemos que tal processo é um* ***$R-$martingale****.*

Teorema 2.27. *Se R é um MME e $\boldsymbol{\beta}$ é um portfólio autofinanciável, então o processo de valor descontado $\overline{V}_t^{\boldsymbol{\beta}}$ e o processo de ganho descontado $\overline{G}_t^{\boldsymbol{\beta}}$ são martingales com respeito a R.*

Demonstração. Temos que R é uma MME e, desse modo,

$$E_R\left(\overline{X}_j^{t+1} \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right) = \overline{X}_j^t,\ t = 0, \dots, T\ ;\ j = 0, \dots, n.$$

Pelo Teorema A.72, temos que uma transformação martingale de um martingale por um processo previsível finito é também um martingale e pelo Teorema A.68 que soma de martingales é um martingale. Note agora que

$$\overline{G}_t^{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{u=1}^{t} \left(\boldsymbol{\beta}^u\right)^{tr} \Delta\overline{\boldsymbol{X}}^u = \sum_{j=0}^{n} (\beta_j \overline{X}_j)_t$$

onde $(\beta_j \overline{X}_j)$ é a transformação martingale de $\overline{X}_j$ pelo processo previsível finito β_j. Segue que, para cada $j = 1, \dots, n$, $(\beta_j \overline{X}_j)$ é um $R-$martingale, ou seja, $\overline{G}_t^{\boldsymbol{\beta}}$ é uma soma de martingales, e portanto um $R-$martingale.

Ainda, como $\boldsymbol{\beta}$ é autofinanciável, temos pelo Teorema 2.17 que

$$\overline{V}_t^{\boldsymbol{\beta}} = V_0^{\boldsymbol{\beta}} + \overline{G}_t^{\boldsymbol{\beta}}.$$

Como $\overline{G}_t^{\boldsymbol{\beta}}$ é $R-$martingale, temos que

$$E_R\left(\overline{V}_{t+1}^{\boldsymbol{\beta}} - \overline{V}_0^{\boldsymbol{\beta}} \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right) = E_R\left(\overline{V}_{t+1}^{\boldsymbol{\beta}} \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right) - V_0^{\boldsymbol{\beta}} = \overline{G}_t^{\boldsymbol{\beta}} = \overline{V}_t^{\boldsymbol{\beta}} - \overline{V}_0^{\boldsymbol{\beta}},$$

ou seja, $E_R\left(\overline{V}_{t+1}^{\boldsymbol{\beta}} \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right) = \overline{V}_t^{\boldsymbol{\beta}}$. Portando, $\overline{V}_t^{\boldsymbol{\beta}}$ também é $R-$martingale. □

Para o Modelo de Precificação de Um Único Período, mostramos que, a fim de não existir oportunidades de arbitragem no modelo, é necessário e suficiente existir uma MME. Este

[5] Como nosso espaço de estados é finito, isso implica que $R(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$ uma vez que $Q(\omega) > 0$ para todos os estados da natureza.

resultado também é verdadeiro para o modelo de vários períodos. Contudo, sua demonstração, se feita com as mesmas ideias utilizadas para o modelo mais simples, é muito complicada. Aqui, seguiremos um outro caminho a fim de mostrar isso, utilizando o resultado já provado para o modelo de um único período. Inicialmente, vamos enxergar o modelo de vários períodos como uma junção de vários modelos de um único período a fim de estabelecermos uma relação entre a definição de arbitragem do modelo mais simples com o mais complexo. Observemos inicialmente alguns fatos a fim de alcançarmos nosso objetivo.

Considere um Modelo de Precificação com Vários Períodos

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, Q, \mathbb{F}, \mathbb{T}, (X_j^t)_{t\in\mathbb{T}, j=0,\ldots,n}\right).$$

Temos que cada $\mathcal{F}_t$ é uma $\sigma-$álgebra finita gerada por alguma partição de Ω

$$\mathfrak{A}_t = \{A_1^t, \ldots, A_K^t\}.$$

Observe que os A_k^t correspondem aos nós da árvore de informação. Ainda, como $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+1}$, cada $A_k^t \in \mathfrak{A}_t$, $k = 1, \ldots, K$ é uma união (disjunta) de alguns dos $A_l^{t+1} \in \mathfrak{A}_{t+1}$ e esses A_l^{t+1}, $l = 1, \ldots, L$ correspondem aos nós sucessores dos A_k^t na árvore de informação.

Diante disso, cada nó A_k^t no tempo t pode ser considerado como ponto inicial de um modelo de único período em $[t, t+1)$, com resultado possível dado pelos nós sucessores a ele. Portanto, associamos a cada nó A_k^t um espaço de estados da natureza

$$\Omega_k^t = \{A_l^{t+1} \mid A_l^{t+1} \subseteq A_k^t\}.$$

Esses são os possíveis estados da natureza do Modelo de Único Período começando no nó A_k^t. Como o processo de preços é adaptado, segue pelo Teorema A.57 que o preço de cada ativo X_j no tempo t é constante em cada A_k^t e que o preço de cada ativo X_j em $t+1$ é constante em cada A_l^{t+1}. Podemos então considerar o preço de cada ativo em $t+1$ como uma variável aleatória definida em Ω_k^t, isto é,

$$X_j^{t+1}(A_l^{t+1}) = X_j^{t+1}(\omega) \text{ em que cada } \omega \in A_l^{t+1}.$$

O que foi dito acima define então os processos de preço nos "resultados" $A_l^{t+1} \subseteq A_k^t$. Todas essas considerações nos mostram que podemos enxergar o modelo com vários períodos como vários modelos de um único período. O exemplo abaixo ilustra as considerações feitas.

Exemplo 2.28. *Sejam* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$ *e* $t = 0, 1, 2, 3$. *Considere as partições*

$$\mathfrak{A}_0 = \Omega,\ \mathfrak{A}_1 = \{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}\},$$
$$\mathfrak{A}_2 = \{\{\omega_1, \omega_2\}\{\omega_3, \omega_4\}, \{\omega_5, \omega_6\}, \{\omega_7, \omega_8\}\} \text{ e}$$
$$\mathfrak{A}_3 = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\}, \{\omega_5\}, \{\omega_6\}, \{\omega_7\}, \{\omega_8\}\}.$$

Temos que $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\}$ *é uma filtração de* Ω, *em que cada* $\mathcal{F}_i$ *é a* $\sigma-$*álgebra gerada pela partição* $\mathfrak{A}_i$. *Podemos representar tal filtração pelo diagrama de árvore na Figura 3.3, onde cada ponto no diagrama, os nós, representa a situação informativa (os estados da natureza ainda possíveis) nos vários períodos de tempo* $t = 0, 1, 2, 3$. *Considere o nó* $A_1^1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ *da árvore. Temos que*

$$\Omega_1^1 = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}\}$$

e assim, temos que o preço de cada ativo X_j *nesse modelo é constante em* A_1^1 *e é uma variável aleatória em* Ω_1^1 *tal que*

$$\overline{X}_j^2(\omega) = \begin{cases} c_1 & se\ \omega \in \{\omega_1, \omega_2\} \\ c_2 & se\ \omega \in \{\omega_3, \omega_4\} \end{cases}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

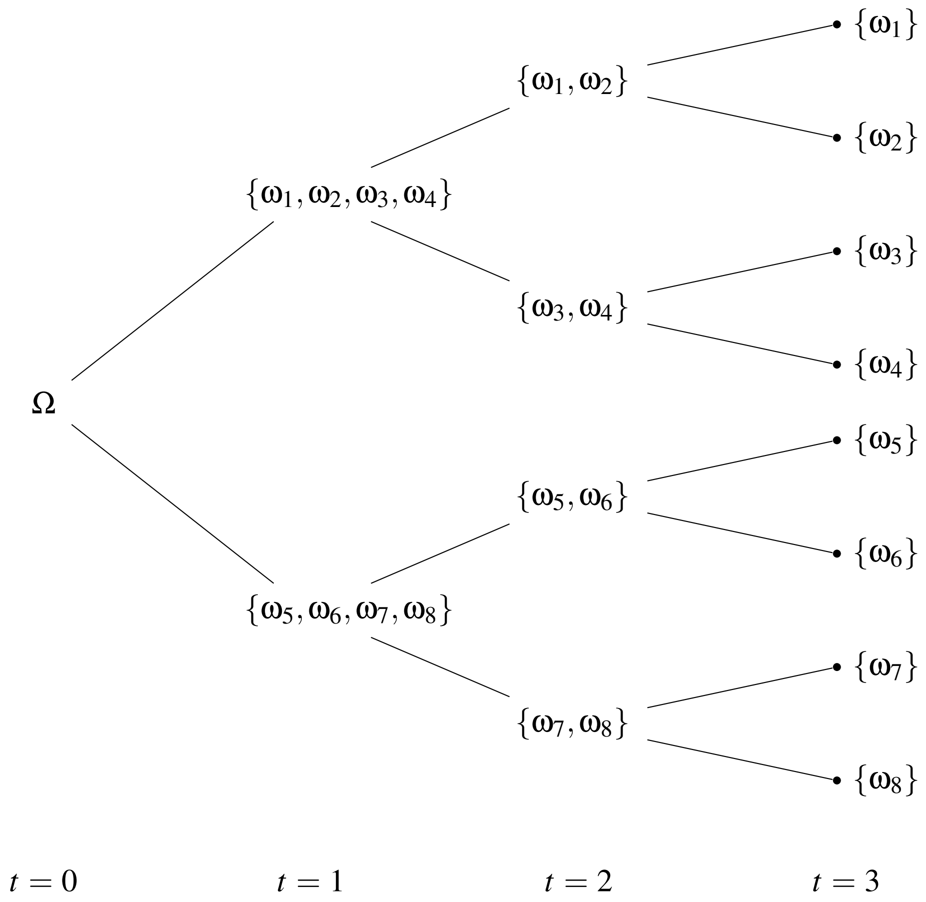

Figura 2.3: Representação da Filtração $\mathbb{F}$.

Agora, a fim de mostrarmos o resultado desejado, precisamos do seguinte Teorema, a qual é muito importante, uma vez que relaciona a inexistência de oportunidades de arbitragem no modelo com vários períodos com a inexistência de arbitragem em cada modelo de um único período que o constitui.

Teorema 2.29. *Se um Modelo de Precificação com Vários Períodos não permite oportunidades de arbitragem, então não existem oportunidades de arbitragem em cada modelo de único período que o compõe.*

Demonstração. Suponha que exista uma estratégia de arbitragem $\boldsymbol{\eta}$ em um dos modelos de único período que compõem o modelo com vários períodos. Suponha ainda que o modelo comece no nó $A \in \mathfrak{A}_t$ com nós sucessores $B_1, ..., B_l \in \mathfrak{A}_{t+1}$. Como esta estratégia está em um modelo de um único período, $\boldsymbol{\eta}$ é apenas um vetor (e não um processo estocástico) que contém as quantidades de cada ativo no nó A. Considere a seguinte estratégia $\boldsymbol{\beta}$:

- Para os ativos de risco, ou seja, para $j = 1, ..., n$,

$$\beta_j^u = \begin{cases} 0 & \text{se } u \leq t \\ I_A \eta_j^u & \text{se } u = t+1 \\ 0 & \text{se } u > t+1 \end{cases}$$

- e para o ativo livre de risco

$$\beta_0^u = \begin{cases} 0 & \text{se } u \leq t \\ c & \text{se } u = t+1 \\ \beta_0^{u-1} X_0^u + \phi_{t+1} V_{t+1}^{\boldsymbol{\eta}} & \text{se } u > t+1 \end{cases}$$

  em que c é uma constante que torna o valor do portfólio $\boldsymbol{\beta}$ igual a zero (Teorema 2.18). Note que se a estratégia de arbitragem $\boldsymbol{\eta}$ é tal que $V_t^{\boldsymbol{\eta}} = 0$, então $c = 0$, e se $V_t^{\boldsymbol{\eta}} < 0$, então $c = -V_t^{\boldsymbol{\eta}}$.

Em palavras, tal estratégia é a seguinte: não invista nada até o tempo t. Em t, se A não ocorreu, permaneça sem investir. Contudo, se A ocorreu em t, compre a estratégia de arbitragem $\boldsymbol{\eta}$ em t e mantenha até $t+1$ e em $t+1$ venda todos os ativos de risco e compre esse montante em ativos livres de risco. Como $V_0^{\boldsymbol{\beta}} = 0$, $V_T^{\boldsymbol{\beta}}(\omega) = 0$ para $\omega \notin A$ e $V_T^{\boldsymbol{\beta}}(\omega) = \beta_0^{T-1} X_0^T + \phi_{t+1} V_{t+1}^{\boldsymbol{\eta}} > 0$, para $\omega \in A$, tal estratégia é de arbitragem no modelo com vários períodos.

□

Agora, segue do Teorema 2.29 que se o modelo com vários períodos não permite oportunidades de arbitragem, então nenhum modelo de único período que o compõe permite. Assim, segue do Teorema 1.28 que cada modelo de único período possui uma MME, ou seja, se $A \in \mathfrak{A}_t$ é um nó no tempo t e se $B_1, ..., B_l \in \mathfrak{A}_{t+1}$ são seus nós sucessores, então existe uma medida de probabilidade $R(t,A)$ definida em $\Omega_A^t = \{B_1, ..., B_l\}$ tal que

- $R(t,A)(B_i) > 0$ para todo $i = 1, ..., l$,
- $E_{R(t,A)}\left(\overline{X}_j^{t+1}\right) = \overline{X}_j^t$, onde $\overline{X}_j^0 = \overline{P(X_j)}$. Isto significa que

$$\sum_{i=1}^{l} R(t,A)(B_i)\, \overline{X}_j^{t+1}(B_i) = \overline{X}_j^t(A),$$

onde $X_j^t(A)$ é o valor constante de X_j^t em A e $X_j^{t+1}(B_i)$ é o valor constante de X_j^{t+1} em B_i.

Desse modo, podemos pensar em $R(t,A)$ como medidas martingales equivalentes dado que o evento A ocorreu no tempo t. Uma vez encontradas as $R(t,A)$, podemos multiplicá-las de modo a definir a medida martingale equivalente R para o modelo com vários períodos. Observe que se $\omega \in \Omega$, existe exatamente um caminho na árvore de informação que vai do nó inicial Ω à ω (uma vez que temos uma partição de Ω em cada tempo t). Suponha que tal caminho seja

$$\Omega = A_1^0 \mapsto A_{k_1}^1 \mapsto A_{k_2}^2 \mapsto \ldots \mapsto A_{k_T}^T = \{\omega\},$$

ou seja, os nós sucessores ao longo do caminho de Ω até ω são os $A_{k_t}^t$. Defina $R(\omega)$ como sendo o produto das medidas martingales equivalentes ao longo do caminho, ou seja,

$$R(\omega) = R\left(0,A_1^0\right)\left(A_{k_1}^1\right).R\left(1,A_{k_1}^1\right)\left(A_{k_2}^2\right).\ldots.R\left(T-1,A_{k_{t-1}}^{T-1}\right)(\omega).$$

Como cada um dos $R\left(t,A_k^t\right)(A_{k_{t+1}}^{t+1}) > 0$ pela definição de medida martingale equivalente de um único período, segue que $R(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$.

Mostremos agora que

$$R(\omega_1) + \ldots + R(\omega_m) = 1.$$

Considere uma árvore de informação com uma probabilidade associada a cada linha emergindo de cada nó de modo que, para cada nó, a soma das probabilidades seja um. Então segue que, se tomarmos o produto de todas as probabilidades ao longo de um ramo e somarmos todos os resultados dessas multiplicações, teremos o número um como resultado. Mostremos que tal afirmação é verídica. De fato, suponha que o comprimento máximo dos ramos é um, ou seja, os ramos da árvore são formados por uma ou nenhuma linha. Isso significa que o modelo tem apenas um período de tempo. Nesse caso não existem probabilidades para multiplicar e assim, a soma dos produtos das probabilidades é apenas a soma das probabilidades emergindo do nó inicial, a qual assumimos ser um.

Suponha que tal resultado valha para todas as árvores cujos ramos tenham comprimento máximo k, ou seja, os ramos dessas árvores são formados por k ou menos linhas, e considere uma árvore cujos ramos tenham comprimento máximo $k+1$. Suponha que o número de linhas emergindo do nó inicial seja L, isto é, que existam L nós sucessores no próximo nível. Cada um desses L nós é um nó inicial de uma árvore com ramos de tamanho máximo menor ou igual à k, e, portanto, para essas árvores o resultado é assumido válido. Sejam $p_1, \ldots, p_L$ as probabilidades ao longo das linhas emergindo do nó inicial. Assim,

$$\sum_{\text{todos os ramos}} \left(\text{produto das probabilidades ao longo do ramo}\right)$$

$$= \sum_{l=1}^{L} p_l \left[\sum_{\text{todos os ramos do } i-\text{ésimo nó}} \left(\text{produto das probabilidades ao longo dos ramos do } i-\text{ésimo nó}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=1}^{L} p_l.1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Uma vez que $R(\omega)$ é, por definição, o produto de todas as probabilidades ao longo de um ramo até ω, $R(\omega_1)+...+R(\omega_m)$ é, então a soma em todos os ramos dos produtos das probabilidades ao longo de cada ramo e , portanto,

$$R(\omega_1)+...+R(\omega_m)=1.$$

Isto, combinado com o fato de que cada $R(\omega)>0$, mostra que R é uma medida de probabilidade equivalente à Q.

Resta então mostrarmos que o processo de preços descontados é um $R-$martingale. Note que se A é um nó em t, existe um único caminho $\Omega = A^0 \mapsto A^1 \mapsto \dots A^{t-1} \mapsto A^t = A$ começando do nó inicial e terminando em A. Assim,

$$\begin{aligned}
R(A) &= \sum_{\omega \in A} R(\omega) \\
&= R\left(0,A^0\right)\left(A^1\right).R\left(1,A^1\right)\left(A^2\right).\dots.R\left(t-1,A^{t-1}\right)(A) \\
&\quad \cdot \sum_{\text{ramos de } A} \left(\text{produtos das probabilidades ao longo do ramo partindo de A}\right) \\
&= R\left(0,A^0\right)\left(A^1\right).R\left(1,A^1\right)\left(A^2\right).\dots.R\left(t-1,A^{t-1}\right)(A).
\end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade R referente a cada nó é justamente o produto das probabilidades ao longo do ramo que chega naquele nó. Também, se A é um nó no tempo t e se B é um nó sucessor de A, então $R(B)=R(A).R(t,A)(B)$. Usando este fato, mostraremos que R é de fato uma MME.

Devemos mostrar que

$$E_R\left(\overline{X}_j^{t+1} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right) = \overline{X}_j^t, \text{ para todo } j,t.$$

Pela Definição A.59, pelo Teorema A.60 e por $E_R\left(\overline{X}_j^t \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right) = \overline{X}_j^t$[6], basta mostrarmos que

$$E_R\left(\overline{X}_j^{t+1} I_A\right) = E_R\left(\overline{X}_j^t I_A\right), \text{ para todo } A \in \mathfrak{A}_t.$$

Observe que os nós sucessores do nó A na árvore de infomação são os $B_1,\dots,B_L \in \mathfrak{A}_{t+1}$. Assim, $\overline{X}_j^{t+1}$ é constante em cada B_l uma vez que é $\mathcal{F}_{t+1}-$mensurável. Segue então que o conjunto F_j da Definição A.59 são os B_l. Desse modo,

$$E_R\left(\overline{X}_j^{t+1} I_A\right) = R(A)\sum_{l=1}^{L} x_l R(B_l \mid A).$$

[6]Porque cada X_j^t é $\mathcal{F}_t-$mensurável.

Mas $x_l = \overline{X}_j^{t+1}(B_l)$ e $R(B_l \mid A) = R(t,A)(B_l)$ pela construção de R. Assim,

$$E_R\left(\overline{X}_j^{t+1} I_A\right) = R(A)\sum_{l=1}^{L} \overline{X}_j^{t+1}(B_l)R(t,A)(B_l)$$

$$= R(A)E_{R(t,A)}\left(\overline{X}_j^{t+1}\right)$$

$$= R(A)\overline{X}_j^{t}(A)$$

$$= E_R\left(\overline{X}_j^{t} I_A\right),$$

onde as duas últimas igualdades ocorrem porque $Q(t,A)$ é um MME de um único período (iniciado no nó A) e $\overline{X}_j^t$ é constante (com valor $\overline{X}_j^t(A)$) no nó A. Portanto, R é um MME.

Agora, diante dos resultados apresentados temos o seguinte teorema .

Teorema 2.30. *Um Modelo de Precificação de Ativos com Vários Períodos não permite oportunidades de arbitragem se, e somente se, existe uma MME.*

Demonstração. Suponha que o modelo não permite oportunidades de arbitragem. Assim, pelo Teorema 2.29 segue que cada modelo de único período que compõe o modelo com vários períodos também não permite oportunidades de arbitragem. Desse modo, contruímos uma medida martingale equivalente a partir das medidas martingales equivalentes em cada modelo de único período, cujo processo foi feito anteriormente.

Reciprocamente, seja $\boldsymbol{\beta}$ uma estratégia de negociação com $V_0^{\boldsymbol{\beta}} \leq 0$ e R uma MME. Como pelo Teorema 2.27 o processo de valor descontado $\overline{V}_t^{\boldsymbol{\beta}}$ é um $R-$martingale , segue que

$$E_R\left(\overline{V}_T^{\boldsymbol{\beta}}\right) = \overline{V}_0^{\boldsymbol{\beta}} = 0.$$

Portanto, $\boldsymbol{\beta}$ não pode ser uma estratégia de arbitragem, ou seja, o modelo não permite oportunidades de arbitragem. □

Exemplo 2.31. *Considere o Modelo de Precificação com Vários Períodos com dois períodos de tempo ($T = 2$), um ativo de risco X ($n = 1$) e quatro estados da natureza, ou seja, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Seja $r = 10\%$ a taxa de juros em cada período de tempo. Os preços do ativo X nos diferentes tempos nos diferentes estados na natureza estão na Figura* 3.4.

Primeiramente, vamos ver se é possível encontrar uma MME diretamente da definição. Para R ser uma MME devemos ter

$$\frac{1}{1+r}E_R\left(X_1^t \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) = X_1^{t-1}, \text{ para } t = 1,2.$$

Nosso objetivo é encontrar $R(\omega_1)$, $R(\omega_2)$, $R(\omega_3)$, $R(\omega_4)$ de modo que a relação acima seja satisfeita. Para tal, em $t = 1$, a seguinte equação deve ser válida

$$\frac{1}{1.1}(8.80(R(\omega_1) + R(\omega_2)) + 4.40(R(\omega_3) + R(\omega_4)) = 5.$$

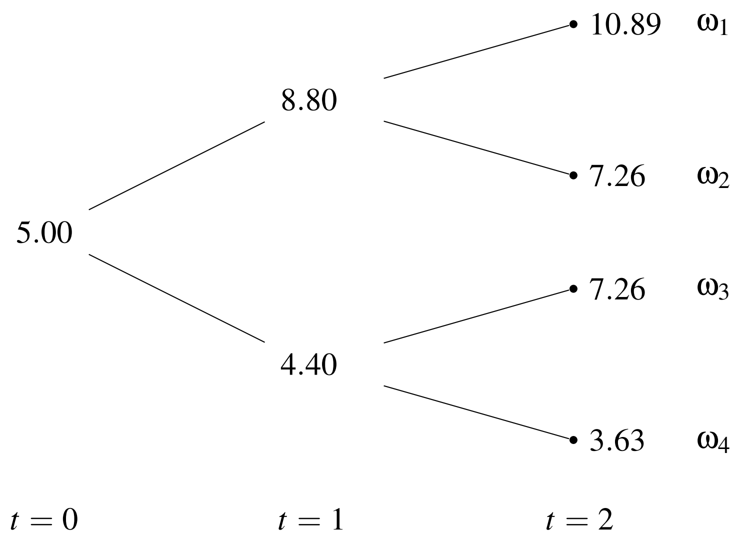

Figura 2.4: Preço do ativo X nos diferentes tempos e nos diferentes estados da natureza.

E para $t = 2$*, as duas seguintes equações devem ser satisfeitas*

$$\frac{1}{1.1}(10.89R(\omega_1) + 7.26R(\omega_2)) = 8.80(R(\omega_1) + R(\omega_2))$$

$$\frac{1}{1.1}(7.26R(\omega_3) + 3.63R(\omega_4)) = 4.40(R(\omega_3) + R(\omega_4)).$$

Como se deseja que R *seja uma MME, devemos garantir que ela é de fato uma medida de probabilidade e, assim, a equação abaixo também deve ser satisfeita*

$$R(\omega_1) + R(\omega_2) + R(\omega_3) + R(\omega_4) = 1.$$

Desse modo, temos um sistema linear com quatro equações e quatro incógnitas, cuja única solução é: $R(\omega_1) = \frac{1}{6}$, $R(\omega_2) = \frac{1}{12}$, $R(\omega_3) = \frac{1}{4}$, $R(\omega_4) = \frac{1}{2}$.

Agora, vamos encontrar uma MME para este mesmo modelo construindo-a a partir das MME de cada modelo de único período que o compõe. Primeiramente, vamos descontar todos os preços, ou seja, encontrar os preços descontados do ativo X *em todos os tempos. Esses preços descontados estão na Figura* 3.5.

Temos três modelos de único período que compõem o modelo com vários períodos, os quais estão representados na Figura 3.6.

Para o primeiro modelo, encontramos uma MME

$$Q(1,\Omega)(\{\omega_1,\omega_2\}) = \frac{1}{4} \text{ e } Q(1,\Omega)(\{\omega_3,\omega_4\}) = \frac{3}{4}.$$

Analogamente, para o segundo modelo temos

$$Q(2,\{\omega_1,\omega_2\})(\omega_1) = \frac{2}{3} \text{ e } Q(2,\{\omega_1,\omega_2\})(\omega_2) = \frac{1}{3}.$$

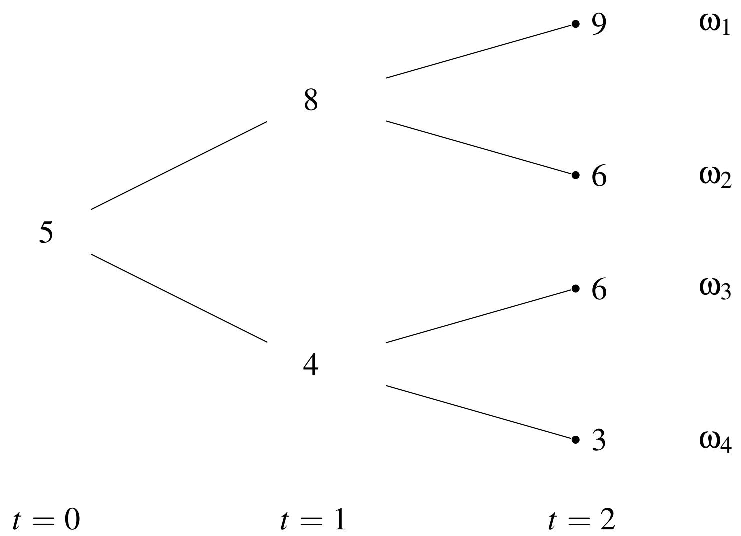

Figura 2.5: Preço descontado do ativo X nos diferentes tempos e nos diferentes estados da natureza.

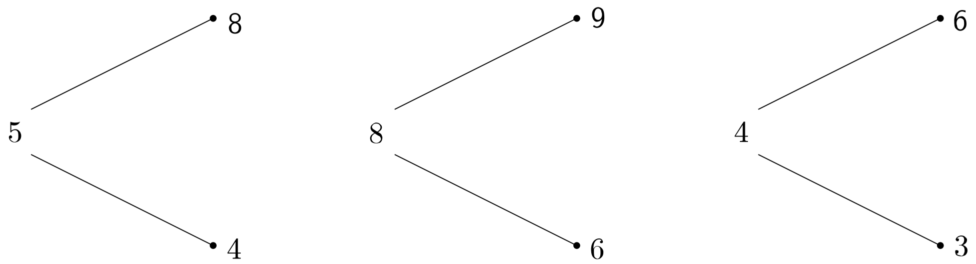

Figura 2.6: Modelos de Único Período que compõem o Modelo com Vários Períodos.

Finalmente, para o terceiro modelo temos que

$$Q(2,\{\omega_3,\omega_4\})(\omega_3) = \frac{1}{3} \text{ } e \text{ } Q(2,\{\omega_3,\omega_4\})(\omega_4) = \frac{2}{3}.$$

Colocando todas essas MME's juntas (Figura 3.7*) e multiplicando as probabilidades ao longo de cada ramo, temos que* $R(\omega_1) = \frac{1}{4}\frac{2}{3} = \frac{1}{6}$, $R(\omega_2) = \frac{1}{4}\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$, $R(\omega_3) = \frac{3}{4}\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ *e* $R(\omega_4) = \frac{3}{4}\frac{2}{3} = \frac{1}{2}$, *exatamente o obtido diretamente da definição de MME.*

2.3 Mercados Completos

No Modelo de Precificação de Um Único Período, mostramos que se um ativo Y não pertencente ao modelo era replicável, não era necessário encontrar o portfólio que o replicava a fim de saber seu preço livre de arbitragem no tempo $t = 0$. Bastava calcular a esperança de Y^T a fim de precificá-lo. Agora mostraremos um resultado anólogo a esse para o Modelo de

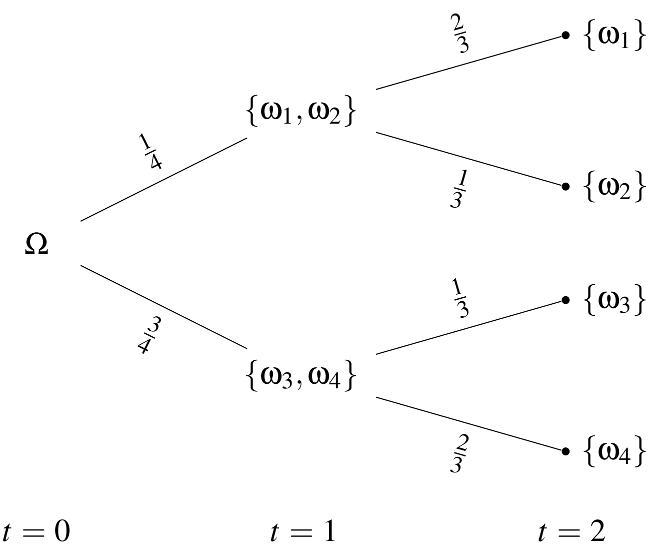

Figura 2.7: Representação das Medidas Martingais Equivalentes de cada Modelo de Único Período.

Precificação de Ativos com Vários Períodos.

Teorema 2.32. *Em um Modelo de Precificação com Vários Períodos em que não há oportunidades de arbitragem, o preço de um ativo replicável Y não pertencente ao modelo é um $R-$martingale, em que R é uma MME.*

Demonstração. Sabemos que um ativo não pertencente ao modelo é replicável se, e somente se, existe um portfólio que o replica. Desse modo, pelo Teorema 2.23 e pela Lei do Preço Único, segue que, para não haver oportunidades de arbitragem, o preço do ativo Y em todos os tempos $t = 0, \ldots, T$, deve ser o mesmo daquele portfólio que o replica. Ainda, pelo Teorema 2.30, segue que um modelo não permite oportunidades de arbitragem se, e somente se, existe uma MME. Pelo Teorema 2.27 segue que, se $\boldsymbol{\beta}$ é um portfólio que replica Y, então

$$\overline{Y}^t = \overline{V}_t^{\boldsymbol{\beta}} = E_R\left(\overline{V}_T^{\boldsymbol{\beta}} \mid \mathcal{F}_t\right) = E_R\left(\overline{Y}^T \mid \mathcal{F}_t\right).$$

Portanto, segue que o processo de valor descontado de Y é um $R-$martingale.

□

Observação 2.33. *Em geral,*

$$Y_t = \frac{1}{\phi_t} E_R\left(Y^T \mid \mathcal{F}_t\right),$$

em que $\phi_t = \frac{1}{X_0^t}$ são os fatores de desconto.

Contudo, assim como nos modelos de único período, ainda temos o problema de mostrar que o ativo Y é replicável a fim de podermos utilizar o Teorema 2.32 para precificá-lo. É por isso que definiremos aqui o conceito de modelos completos.

Definição 2.34. *Dizemos que um Modelo de Precificação com Vários Períodos é **completo** se, e somente se, cada ativo não pertencente ao modelo é replicável.*

Uma grande diferença entre modelos completos com vários períodos e de único período é que, como os portfólios podem ser sempre reconstruídos nos tempos $t = 0,...,T$, normalmente exige-se menos do modelo mais complexo a fim de mostrar sua completude. Para o Modelo de Único Período conseguimos mostrar que se o posto da matriz de preços finais dos ativos em todos os estados da natureza coincidisse com a quantidade de estados da natureza do modelo, este era completo. Infelizmente, um resultado similar para o nosso modelo mais complexo é muito difícil de obter, mas, felizmente, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.35. *Se cada um dos Modelos de Único Período que compõe o Modelo com Vários Períodos é completo, então o Modelo de Precificação com Vários Períodos é completo.*

Demonstração. Suponha que cada um dos Modelos de Único Período que compõem o Modelo com Vários Períodos é completo. Seja Y um ativo não pertencente ao modelo com vários períodos. Considere uma árvore onde os nós $A_1,...,A_M$ são os penúltimos em tal árvore, considerados como eventos. Segue então que a $\sigma-$álgebra $\mathcal{F}_{T-1}$ é gerada pela partição $A_1,...,A_M$.

Considere cada um dos modelos de um único período que compoẽm o modelo com vários períodos e possuem valor inicial no nó A_m, para $m = 1,...,M$. Temos por hipótese que cada um desses modelos é completo. Assim, podemos encontrar estratégias $\boldsymbol{\alpha}^1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}^M$ tais que

$$(\boldsymbol{\alpha}^m)^{tr}\boldsymbol{X}^T(\omega) = Y^T(\omega), \text{ se } \omega \in A_m.$$

Desse modo, definimos a estratégia $\boldsymbol{\beta}$ no modelo de vários períodos por

$$\boldsymbol{\beta}^T(\omega) = \boldsymbol{\alpha}^m \text{ para } \omega \in A_m.$$

Então segue que $\boldsymbol{\beta}^T$ é constante (com valor $\boldsymbol{\alpha}^m$) em cada A_m, e, portanto, pelo Teorema A.57 $\boldsymbol{\beta}^T$ é $\mathcal{F}_{T-1}-$mensurável.

Agora, considere os antipenúltimos nós $B_1,\ldots,B_P$ da árvore, os quais formam a partição que gera $\mathcal{F}_{T-2}$. Como cada B_p, $p = 1,...,P$, é um nó inicial para um modelo de um único período, com os A_m como nós finais, e por hipótese cada um desses modelos é completo, podemos encontrar estratégias de um único período $\boldsymbol{\varphi}^1,\ldots,\boldsymbol{\varphi}^P$ que replicam $\left(\boldsymbol{\beta}^T\right)^{tr}\boldsymbol{X}^{T-1}$. Então,

$$(\boldsymbol{\varphi}^p)^{tr}\boldsymbol{X}^{T-1}(\omega) = \left(\boldsymbol{\beta}^T(\omega)\right)^{tr}\boldsymbol{X}^{T-1}(\omega) \text{ para } \omega \in B_p.$$

Portanto, devemos definir a penúltima estratégia replicante $\boldsymbol{\beta}$ por

$$\boldsymbol{\beta}^{T-1}(\omega) = \boldsymbol{\varphi}^p(\omega).$$

Então

$$\left(\boldsymbol{\beta}^{T-1}\right)^{tr}\boldsymbol{X}^{T-1} = \left(\boldsymbol{\beta}^T\right)^{tr}\boldsymbol{X}^{T-1}$$

e $\boldsymbol{\beta}^{T-1}$ é uma constante em cada B_p, e portanto, é $\mathcal{F}_{T-2}-$mensurável.

Continuamos com este raciocínio, ou seja, dado que $\boldsymbol{\beta}^t$ foi definido tal que

- $(\boldsymbol{\beta}^t)^{tr} \boldsymbol{X}^t = \left(\boldsymbol{\beta}^{t+1}\right)^{tr} \boldsymbol{X}^t$,
- $\boldsymbol{\beta}^t$ é $\mathcal{F}_{t-1}$−mensurável,

podemos encontrar estratégias replicantes de um único período nos modelos de um único período que compõem o modelo de vários períodos começando em $T-2$ que replicam $\left(\boldsymbol{\beta}^t\right)^{tr} \boldsymbol{X}^{t-1}$. Daí, colocamos todas essas estratégias juntas para formar $\boldsymbol{\beta}^{t-1}$, a qual é constante nos nós em $t-2$.

Portanto, definimos $\boldsymbol{\beta}^T, \boldsymbol{\beta}^{T-1}, \ldots, \boldsymbol{\beta}^1$ de tal modo que o processo

$$\boldsymbol{\beta} = \left\{ \begin{bmatrix} \beta_0^t & \beta_1^t & \cdots & \beta_n^t \end{bmatrix}^{tr} \middle| \, t \in \mathbb{T} \right\}$$

é uma estratégia previsível e autofinanciável que replica Y. Desse modo, o modelo com vários períodos é completo.

□

Segue então que para mostrar que um Modelo de Precificação com Vários Períodos é completo é suficiente checar se cada modelo de único período que o compõe é completo. Assim, basta analisar se o posto da matriz de pagamento final de cada modelo de único período é igual ao número de estados da natureza do mesmo.

Exemplo 2.36. *Considere um Modelo com Vários Períodos, com* $t = 0, 1, 2$*, um ativo de risco* X *e quatro estados da natureza,* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$*. Seja* $r = 10\%$ *a taxa de juros em cada período de tempo. Temos os preços de* X *nos diferentes tempos na Figura* 3.8*. Considere um ativo* Y *não pertence ao modelo onde*

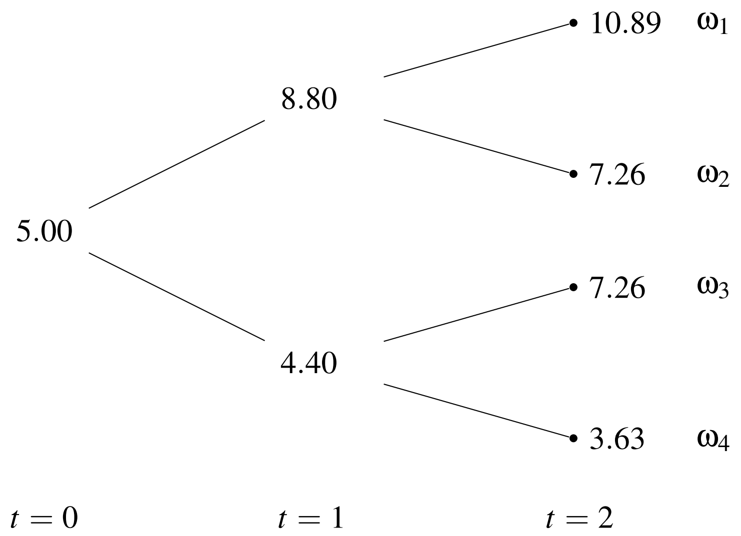

Figura 2.8: Preço do ativo X nos diferentes tempos e nos diferentes estados da natureza.

$$Y^T(\omega) = \begin{cases} 1.21 & se\ \omega = \omega_1 \\ 4.84 & se\ \omega = \omega_2 \\ 4.84 & se\ \omega = \omega_3 \\ 1.21 & se\ \omega = \omega_4. \end{cases}$$

Encontremos agora um portfólio replicante para tal ativo. Note que para o evento $\{\omega_1, \omega_2\}$ *em* $t = 2$*, devemos ter*[7],

$$\begin{bmatrix} \beta_0^2 & \beta_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.21 & 1.21 \\ 10.89 & 7.26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.21 & 4.84 \end{bmatrix},$$

o qual tem solução

$$\left(\beta^2\right)^{tr}(\omega) = \begin{bmatrix} 10 & -1 \end{bmatrix}, \ para\ \omega_1, \omega_2.$$

Analogamente, temos que

$$\left(\beta^2\right)^{tr}(\omega) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}, \ para\ \omega_3, \omega_4.$$

Agora, como definimos β^2*, podemos encontrar* β^1*. A fim de* β *ser autofinanciável, devemos ter*

$$\left(\beta^1\right)^{tr}(\omega)X^1(\omega) = \left(\beta^2\right)^{tr}(\omega)X^1(\omega),$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} \beta_0^1 & \beta_1^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.1 & 1.1 \\ 8.8 & 4.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.20 & 2.20 \end{bmatrix},$$

o qual nos dá

$$\left(\beta^1\right)^{tr}(\omega) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}, \ para\ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4.$$

Portanto, a estratégia replicante para Y *é a seguinte: em* $t = 0$*, compre* 2.00 *ativos livres de risco e não compre nada do ativo de risco. Em* $t = 1$*, se o preço do ativo for* 8.80[8]*, venda à descoberto uma unidade do ativo de risco* X *e compre o resto da transação de ativos livres de risco. Contudo, se o ativo* X *custar* 4.40*, compre um ativo de risco e fique devendo a diferença de ativos livres de risco. Pela Lei do Preço Único, devemos ter* $P(Y) = V_0^{\beta} = 2$.

Entretanto, temos uma outra alternativa para calcular o preço de X*. Observe que cada modelo de único período que compõe o modelo com vários períodos é completo. Assim, segue pelo Teorema 2.35 que o modelo com vários períodos é completo e, desse modo, cada ativo é replicável e podemos utilizar o Teorema 2.32. Pelo Exemplo 2.31 temos que a MME para este*

[7] observando que $X_0^2 = (1.1)^2$ e $X_0^1 = 1.1$.

[8] Ou seja, se o evento $\{\omega_1, \omega_2\}$ ocorreu.

modelo é $R(\omega_1) = \dfrac{1}{6}, R(\omega_2) = \dfrac{1}{12}, R(\omega_3) = \dfrac{1}{4}, R(\omega_4) = \dfrac{1}{2}$ *e, assim,*

$$P(Y) = E_R\left(\overline{Y}\right) = \frac{1}{6}\,\frac{1.21}{(1.1)^2} + \frac{1}{12}\,\frac{4.84}{(1.1)^2} + \frac{1}{4}\,\frac{4.84}{(1.1)^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1.21}{(1.1)^2} = 2.$$

Agora, fechamos essa parte apresentando o importante Teorema Fundamental da Precificação de Ativos, que mostra a equivalência entre a existência de uma única MME à completude e falta de arbitragem nos modelos com vários períodos.

Teorema 2.37 (**Teorema Fundamental da Precificação de Ativos**). *Um Modelo de Precificação com Vários Períodos é completo e não permite oportunidades de arbitragem se, e somente se, existe uma única MME.*

Demonstração. Suponha que exista uma única MME. Desse modo, segue pelo Teorema 2.30 que o modelo não permite oportunidades de arbitragem. Ainda, pelo Teorema 2.29 segue que cada modelo de único período que compõe o modelo com vários períodos não permite oportunidades de arbitragem e pelo Teorema 1.28 cada modelo de único período possui uma MME. Desse modo, podemos construir uma MME para o modelo com vários períodos a partir das MME's de cada modelo de único período. Assim, se algum modelo de único período não for completo, podemos encontrar pelo menos duas MME's distintas para ele e assim, construir duas MME's distintas para o modelo com vários períodos, o que é uma contradição. Portanto, cada modelo de um único período é completo e, pelo Teorema 2.35, o modelo com vários períodos é completo.

Reciprocamente, suponha que o modelo com vários períodos seja completo e não permita oportunidades de arbitragem e que exista mais de uma MME para tal modelo, R e $\widehat{R}$. Seja $\omega_i \in \Omega$ tal que $r = R(\omega_i) \neq \widehat{R}(\omega_i) = \widehat{r}$ e Y um ativo não pertencente ao modelo com a seguinte propriedade:

$$Y(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{\phi_T} & \text{se } \omega = \omega_i \\ 0 & \text{se } \omega \neq \omega_i, \end{cases}$$

isto é, Y paga o valor futuro de uma unidade do ativo livre de risco se ω_i ocorrer e nada nos demais estados da natureza.

Agora suponha que Y é replicável. Assim, pelo Teorema 2.32 devemos ter

$$P(Y) = E_R\left(\overline{Y}\right) = r \text{ e } P(Y) = E_{\widehat{R}}\left(\overline{Y}\right) = \widehat{r},$$

o que é uma contradição.[9] Portanto, Y não é replicável, e segue que o modelo não é completo. Assim, se o modelo for completo, existe no máximo uma MME e, para não haver oportunidades de arbitragem, deve haver ao menos uma MME. Portanto, existe uma única MME. □

[9]Note que se $\boldsymbol{\beta}$ é um portfólio replicante, então $\overline{V}_t^{\boldsymbol{\beta}}$ é $R-$martingale e $\widehat{R}-$martingale e segue que $E_R\left(\overline{V}_T^{\boldsymbol{\beta}}\right) = V_0^{\boldsymbol{\beta}} = E_{\widehat{R}}\left(\overline{V}_T^{\boldsymbol{\beta}}\right)$.

Parte II

Precificação de Ativos via Teoria da Coerência

Capítulo 3

Os Princípios da Coerência e Arbitragem

A ideia nesta parte do trabalho é a de tratar da precificação de ativos para o caso mais simples, ou seja, aquele constituído de um único período de tempo e sem a inclusão de taxas de juros. Para tal utilizamos principalmente a Referência [17]. Aqui, denotaremos por Ω o conjunto[1] de estados da natureza com uma $\sigma-$álgebra de subconjuntos de Ω denotada por $\mathcal{F}$. Ainda, trabalharemos com um conjunto enumerável $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ de ativos, onde, por simplicitade, o próprio X_j denota o preço do ativo X_j no tempo T e $P(X_j)$ denota o preço no tempo 0. Desse modo, $\mathcal{X}$ denotará o conjunto de preços dos ativos disponíveis em $t = T$. Ainda, exigiremos que o preço do ativo livre de risco 0 em $t = T$, definido por $X_0(\omega) = 1$ para todo $\omega \in \Omega$ esteja em $\mathcal{X}$. Além disso, consideraremos o espaço linear gerado pelos elementos de $\mathcal{X}$, o qual denotaremos por $\mathcal{L}(\mathcal{X})$.

Construiremos uma teoria de precificação baseada na Teoria da Coerência de Bruno De Finetti. Esta teoria é baseada em um único axioma, conhecido como **Princípio da Coerência**, o qual assume que um indivíduo não deseja perder com certeza, ou seja, nenhuma atitude de um indivíduo deve levá-lo a um prejuízo certo.

Para entendermos como funciona o Princípio da Coerência, considere um ativo cujo preço no tempo T, denotado por X, é definido em um espaço de estados da natureza Ω tal que $X(\omega^*) = 1$ e $X(\omega) = 0$ para todo $\omega \neq \omega^*$. Suponha que um indivíduo esteja disposto a vender por $\beta P(X)$, em que β é um número real e $P(X)$ denota o preço do ativo acima em $t = 0$, um bilhete de loteria sobre X que paga β se ω^* ocorrer e nada se qualquer outro ω ocorrer. Temos que o ganho desse indivíduo, em T, será

$$\begin{cases} \beta P(X) - \beta & \text{se } \omega = \omega^* \\ \beta P(X) & \text{se } \omega \neq \omega^*. \end{cases}$$

Pelo Princípio da Coerência devemos ter

$$\beta P(X)[\beta P(X) - \beta] \leq 0,$$

porque, caso contrário, teríamos

[1]Aqui não exigiremos que o espaço de estados seja finito, apenas enumerável.

1) $\beta P(X) < 0$ e $[\beta P(X) - \beta] < 0$, o que implicaria em prejuízo certo para quem vende o bilhete;

ou

2) $\beta P(X) > 0$ e $[\beta P(X) - \beta] > 0$, o que implicaria prejuízo certo para quem compra o bilhete.

Esta conceito de um preço a se pagar por um bilhete de loteria que aposta na ocorrência de um estado da natureza específico pode ser generalizado para ativos quaisquer. Considere um ativo X qualquer com preço X^T em $t = T$ definido em um conjunto Ω. Agora, esse preço, cujo valor é desconhecido em $t = T$, é considerado como o ganho aleatório que está prometido para o apostador. Assim, o valor que esse apostador está disposto a pagar por um bilhete que paga βX em $t = T$ é denotado por $\beta P(X)$ e $P(X)$ é o preço do ativo X em $t = 0$. Assim, pelo Princípio da Coerência, como o lucro do vendedor da aposta será agora $\beta P(X) - \beta X$ devemos ter que, para ao menos algum $\omega^* \in \Omega$,

$$\beta[P(X) - X(\omega^*)] \leq 0.$$

Para tal, basta exigirmos que

$$\sup_{\omega\in\Omega} \beta[X(\omega) - P(X)] \geq 0.$$

Formalmente o preço de um ativo em $t = 0$ é definido abaixo.

Definição 3.1. *Um funcional real P, definido em $\mathcal{L}(\mathcal{X})$, é chamado de **preço** em $t = 0$. Para cada $X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, associamos (em $t = 0$) o preço $P(X) \in \mathbb{R}$.*

Observação 3.2. *No restante desta parte do texto, salvo menção contrária, o preço do ativo X em $t = 0$ será chamado apenas de preço de X.*

Agora, tendo em mente que os preços dos ativos (em $t = 0$) vistos como preços pagos por apostas não ferem o Príncipio da Coerência, podemos ter a seguinte definição natural de uma coleção de preços coerentes.

Definição 3.3. *Seja $X_0, X_1, \ldots$ uma coleção de ativos, cujos preços no tempo T estão no conjunto $\mathcal{X}$. O conjunto de preços em $t = 0$, $\{P(X_0), P(X_1), \ldots\}$ correspondentes os elementos de $\mathcal{L}(\mathcal{X})$, é coerente se, para todo n finito, quaisquer $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ e quaisquer reais $\beta_1, \ldots, \beta_n$,*

$$\sup_{\omega\in\Omega} \sum_{i=1}^{n} \beta_i[X_i(\omega) - P(X_i)] \geq 0.$$

*Se os preços não são coerentes, dizemos que eles são **incoerentes**.*

Tal definição é bastante intuitiva visto que, se cada ativo tem um preço coerente, ou seja, um preço que não fere o Princípio da Coerência, uma coleção finita de ativos cujos preços são coerentes também deve ser conjuntamente coerente. Esta definição de coerência é apenas uma dentre várias outras existentes e equivalentes a essa. Agora nosso objetivo é apresentar outras quatro definições de preço coerente, mostrando a equivalência entre todas elas.

A próxima definição de coerência será muito útil nesta parte do trabalho, uma vez que facilitará as demonstrações de alguns resultados importantes.

Definição 3.4. *Seja $\mathcal{X}$ um conjunto de preços de ativos no tempo T em que cada $X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ tem preço $P(X)$ em $t = 0$. O conjunto de preços $\{P(X_0), P(X_1), \ldots\}$ é coerente se, para quaisquer n finito e $\varepsilon > 0$ não existem reais $\beta_1, ..., \beta_n$ tais que*

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i [X_i(\omega) - P(X_i)] \leq -\varepsilon \textit{ para todo } \omega \in \Omega.$$

Teorema 3.5. *As Definições 3.3 e 3.4 são equivalentes.*

Demonstração. Suponha que a afirmação da Definição 3.3 seja válida. Então, não existem $n \geq 1$, $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$, $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ e $\varepsilon > 0$ que satisfaçam

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i [X_i(\omega) - P(X_i)] \leq -\varepsilon, \qquad \text{para todo } \omega \in \Omega,$$

pois caso contrário $\sup_{\omega\in\Omega} \sum_{i=1}^{n} \beta_i [X_i(\omega) - P(X_i)] \leq -\varepsilon < 0$.

Reciprocamente, suponha que a afirmação da Definição 3.4 seja válida. Portanto, para quaisquer $\varepsilon > 0$, $n \geq 1$, $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ e $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ deve existir ω_0 tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i [X_i(\omega_0) - P(X_i)] > -\varepsilon,$$

o que implica

$$\sup_{\omega\in\Omega} \sum_{i=1}^{n} \beta_i [X_i(\omega) - P(X_i)] > -\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ foi tomado arbitrariamente, segue que para quaisquer $n \geq 1$, $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ e $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{X}$ vale[2]

$$\sup_{\omega\in\Omega} \sum_{i=1}^{n} \beta_i [X_i(\omega) - P(X_i)] \geq 0.$$

□

Já a próxima definição é muito interessante uma vez que limita as opções que podem ser tomadas como preços de um ativo.

Definição 3.6. *Seja $\mathcal{X}$ um conjunto de preços de ativos no tempo T em que cada $X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ tem preço $P(X)$. O conjunto de preços é coerente se P é um funcional linear em $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ e cada $P(X)$*

[2]De fato, se $\sup_{\omega\in\Omega} \sum_{i=1}^{n} \beta_i [X_i(\omega) - P(X_i)] < 0$ existiria $\varepsilon > 0$ tal que $\sup_{\omega\in\Omega} \sum_{i=1}^{n} \beta_i [X_i(\omega) - P(X_i)] < -\varepsilon$, o que é uma contradição.

pode assumir valores entre (e incluindo) o ínfimo de X e o supremo de X, ou seja,

$$\inf_{\omega\in\Omega} X(\omega) \leq P(X) \leq \sup_{\omega\in\Omega} X(\omega), \forall X \in \mathcal{L}(\mathcal{X}).$$

A fim de mostrar a equivalência entre as Definições 3.6 e 3.4, será muito útil o resultado do Lema a seguir.

Lema 3.7. *Se as seguintes sentenças são verídicas,*

i) Para quaisquer $X,Y \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $P(X+Y) = P(X)+P(Y)$,

ii) $\inf_{\omega\in\Omega}, X(\omega) \leq P(X) \leq \sup_{\omega\in\Omega} X(\omega)$, para todo $X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$,

então $P(\lambda X) = \lambda P(X)$ para todo $X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$.

Demonstração. De fato, de (i) segue que

$$P(X) = P(X+0) = P(X)+P(0) \Rightarrow P(0) = 0.$$

Desse modo, temos que

$$0 = P(0) = P(X+(-X)) = P(X)+P(-X) \Rightarrow P(-X) = -P(X).$$

Daí, para $\lambda \in \mathbb{Z}^+$, temos que $P(\lambda X) = \lambda P(X)$ por indução finita usando (i). Se $\lambda \in \mathbb{Z}^-$, segue o resultado pois $P(-X) = -P(X)$. Se $\lambda \in \mathbb{Q}$ temos que $\lambda = \dfrac{q}{r}$, $q,r \in \mathbb{Z}$, e pelo resultado anteriormente provado,

$$P(X) = P\left(r\frac{X}{r}\right) = rP\left(\frac{X}{r}\right) \Rightarrow \frac{P(X)}{r} = P\left(\frac{X}{r}\right),$$

e assim,

$$P\left(\frac{q}{r}X\right) = \frac{P(qX)}{r} = \frac{q}{r}P(X).$$

Finalmente, mostremos para λ irracional. Para tal, observe inicialmente que se $X(\omega) \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$, então $\inf_{\omega\in\Omega} X(\omega) \geq 0$ e, pelo item (ii) temos que

$$P(X) \geq \inf_{\omega\in\Omega} X(\omega) \geq 0,$$

ou seja, (ii) implica positividade do funcional. Desse modo, quando $X(\omega) \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$, temos que existem $k_1, k_2 \in \mathbb{Q}$ tais que $k_1 \leq \lambda \leq k_2$ e assim, pela positividade,

$$k_1 X(\omega) \leq \lambda X(\omega) \leq k_2 X(\omega), \text{ para todo } \omega \in \Omega \Rightarrow k_1 P(X) \leq P(\lambda X) \leq k_2 P(X).$$

Como os racionais são densos em $\mathbb{R}$, podemos construir uma sequência crescente de números racionais $k_1^n, k_1^2, \ldots, k_1^n, \ldots$ tais que $\lim_{n\to\infty} k_1^n = \lambda$. Do mesmo modo, podemos construir uma sequência decrescente de números racionais $k_2^1, k_2^2, ..., k_2^n, ...$ tal que $\lim_{n\to\infty} k_1^n = \lambda$. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} k_1^n P(X) \leq P(\lambda X) \leq \lim_{n\to\infty} k_2^n P(X) \Rightarrow \lambda P(X) \leq P(\lambda X) \leq \lambda P(X).$$

Portanto, segue que $P(\lambda X) = \lambda P(X)$. Se X não é uniformemente positiva, é sempre possível escrever $X = Y - Z$, em que $Y = XI_{\{X\geq 0\}}(\omega)$ e $Z = -XI_{\{X<0\}}(\omega)$ e assim Y e Z são uniformemente positivas. Portanto, como $P(\lambda Y) = \lambda P(Y)$ e $P(\lambda Z) = \lambda P(Z)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que

$$P(\lambda X) = P(\lambda Y - \lambda Z) = \lambda P(Y) - \lambda P(Z) = \lambda(P(Y - Z)) = \lambda P(X),$$

como desejado. □

Agora, mostremos que a Definição 3.6 é equivalente às definições já conhecidas de preços coerentes.

Teorema 3.8. *As Definições 3.4 e 3.6 são equivalentes.*

Demonstração. Suponha que a afirmação da Definição 3.6 seja válida. Então, como P é funcional linear, dados $P(X_1), ..., P(X_n)$ temos que

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i [X_i(\omega) - P(X_i)]\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i\right) - P\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i P(X_i)\right).$$

Como $P(X_i)$ é constante, $\inf_{\omega\in\Omega} P(X_i) = P(X_i) = \sup_{\omega\in\Omega} P(X_i)$ e segue que

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i [X_i(\omega) - P(X_i)]\right) = 0,$$

para quaisquer reais $\beta_1, ..., \beta_n$. Como $\sum_{i=1}^{n} \beta_i [X_i(\omega) - P(X_i)]$ pertence ao espaço gerado pelos elementos de $\mathcal{X}$, para qualquer escolha dos $\beta_1, ..., \beta_n$, devemos ter

$$\inf_{\omega\in\Omega} \sum_{i=1}^{n} \beta_i [X_i(\omega) - P(X_i)] \leq 0 \leq \sup_{\omega\in\Omega} \sum_{i=1}^{n} \beta_i [X_i(\omega) - P(X_i)],$$

e logo a Definição 3.3 é satisfeita. Como a Definição 3.3 é equivalente à Definição 3.4, temos o desejado.

Reciprocamente, assuma que a afirmação da Definição 3.4 é satisfeita. Seja $X \in \mathcal{X}$ e suponha que $P(X) > \sup_{\omega\in\Omega} X(\omega)$. Nesse caso, como $X(\omega) \leq \sup_{\omega\in\Omega} X(\omega) < P(X)$ para todo $\omega \in \Omega$, existem $\varepsilon > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ (qualquer $\beta > 0$) tais que

$$\beta[X(\omega) - P(X)] \leq -\varepsilon, \text{ para todo } \omega \in \Omega,$$

o que contradiz a Definição 3.4. Portanto, $P(X) \leq \sup_{\omega\in\Omega} X(\omega)$. Similarmente para $P(X) < \inf_{\omega\in\Omega} X(\omega)$. Portanto,

$$\inf_{\omega\in\Omega} X(\omega) \leq P(X) \leq \sup_{\omega\in\Omega} X(\omega).$$

Ainda, suponha que $P(X+Y) = P(X) + P(Y) + \delta > P(X) + P(Y)$, ou seja, $\delta > 0$. Tomando $\beta = -\beta_1 = -\beta_2 > 0$, temos que para todo $\omega \in \Omega$ existe $\varepsilon > 0$, tal que

$$\beta[X(\omega) + Y(\omega) - P(X+Y)] + \beta_1[X(\omega) - P(X)] + \beta_2[Y(\omega) - P(Y)]$$

$$= -\beta P(X+Y) + \beta P(X) + \beta P(Y)$$

$$= -\beta[P(X) + P(Y) + \delta] + \beta P(X) + \beta P(Y)$$

$$= -\beta\delta \leq -\varepsilon < 0,$$

o que contradiz a Definição 3.4. Similarmente, assumindo que $P(X+Y) = P(X) + P(Y) - \delta < P(X) + P(Y)$. Portanto, $P(X+Y) = P(X) + P(Y)$.

Como, pelo Lema 3.7

- $\inf_{\omega\in\Omega} X(\omega) \leq P(X) \leq \sup_{\omega\in\Omega} X(\omega)$,
- $P(X+Y) = P(X) + P(Y)$

implicam em $P(\lambda X) = \lambda P(X)$ para todo $X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, segue o desejado.

□

Agora apresentaremos mais uma definição de coerência, a qual mostra a equivalência entre preços coerentes e a existência de um funcional linear positivo definido no espaço linear $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ gerado pelos elementos de $\mathcal{X}$ e munido de algumas propriedades.

Definição 3.9. *O conjunto de preços em $t = 0$ para os elementos de $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ é coerente se, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, temos que*

i) Se $X(\omega) \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$, então $P(X) \geq 0$,

ii) $P(X+Y) = P(X) + P(Y)$,

iii) $P(1) = 1$.

Teorema 3.10. *As Definições 3.6 e 3.9 são equivalentes.*

Demonstração. Suponha válida a afirmação da Definição 3.9. De (ii) e (iii) temos que

$$1 = P(1) = P(1+0) = P(1) + P(0) \Rightarrow P(0) = 0.$$

Assim, por (i) e (ii), temos pelo Lema 3.7 que para todo $X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ e qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, $P(-X) = -P(X)$ e $P(\lambda X) = \lambda P(X)$. Diante disso e por (iii), se k é uma constante, temos que

$$P(k) = P(k1) = kP(1) = k,$$

ou seja, preço de uma constante é a própria constante.

Agora, temos que para todo $X \in \mathcal{X}$,

$$\inf_{\omega \in \omega} X(\omega) \leq X(\omega) \leq \sup_{\omega \in \omega} X(\omega) \Rightarrow X(\omega) - \inf_{\omega \in \omega} X(\omega) \geq 0.$$

De (i) e (ii) da Definição 3.9, dos fatos $P(-X) = P(X)$ e de que preço de constante é constante, segue que

$$P\left[X + \left(-\inf_{\omega \in \omega} X(\omega)\right)\right] = P(X) + P\left[-\inf_{\omega \in \omega} X(\omega)\right] \geq 0 \Rightarrow P(X) \geq \inf_{\omega \in \Omega} X(\omega).$$

Analogamente, $P(X) \leq \sup_{\omega \in \Omega} X(\omega)$. Portanto a Definição 3.9 implica a Definição 3.6.

Reciprocamente, suponha a afirmação na Definição 3.6. Se k é um número real e $X(\omega) = k$ para todo $\omega \in \Omega$, temos que

$$\inf_{\omega \in \Omega} X(\omega) = k = \sup_{\omega \in \Omega} X(\omega)$$

e, de $\inf_{\omega \in \Omega} X(\omega) \leq P(X) \leq \sup_{\omega \in \Omega} X(\omega)$ segue que

$$P(X) = P(k) = k \Rightarrow P(1) = 1.$$

Ainda, se $X(\omega) \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$, segue que $\inf_{\omega \in \Omega} X(\omega) \geq 0$ (de fato, $c < 0$ não pode ser o ínfimo de $X(\omega)$ porque não é a maior cota inferior de $X(\omega)$ uma vez que 0 é cota inferior de X e é maior que c). De $\inf_{\omega \in \Omega} X(\omega) \leq P(X)$ temos que

$$0 \leq \inf_{\omega \in \Omega} X(\omega) \leq P(X) \Rightarrow P(X) \geq 0.$$

$\square$

Diante dessa abordagem de de Finetti, o conceito de **arbitragem** é similar, mas levemente mais forte que o de incoerência. Informalmente, uma oportunidade de arbitragem consiste na ideia de que o indivíduo que define o preço do ativo em $t = 0$ perde com certeza, sem nenhuma chance de ganhar, ou seja, qualquer outro indivíduo que venha a apostar com ele não terá chances de perder e ainda terá alguma chance real de ganhar.

Assim, para evitar arbitragem é necessário que os preços escolhidos pelo indivíduo não permitam que ele perca, quase com certeza. A parte complicada neste contexto é definir "quase com certeza". Informalmente, perder quase com certeza significa que, para ao menos algum estado da natureza, com chances reais de acontecer em $t = T$, o indivíduo com certeza perderá, e nos demais o indivíduo não perderá e nem ganhará. Para definirmos essa ideia formalmente, introduzimos uma subcoleção $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}$, onde $\mathcal{F}$ é a $\sigma-$álgebra definida em Ω, chamada de **eventos nulos**. Estes eventos devem satisfazer:

$i)$ se $A \in \mathcal{N}$ e $B \subseteq A$, então $B \in \mathcal{N}$;

$ii)$ se $A, B \in \mathcal{N}$, então $A \cup B \in \mathcal{N}$;

$iii)$ $\Omega \notin \mathcal{N}$.

As três condições acima podem ser reorganizadas como as condições definindo um **ideal** de subconjuntos de Ω. Um evento é chamado **não nulo** se não pertence a $\mathcal{N}$.

Informalmente, os eventos nulos são aqueles impossíveis de ocorrer, ou seja, cuja probabilidade de ocorrer em $t = T$ é nula. Diante disso, podemos definir formalmente o conceito de arbitragem.

Definição 3.11. *Seja $\mathcal{X}$ uma coleção de preços de ativos no tempo $t = T$. Suponha que cada $X \in \mathcal{X}$ tem um preço $P(X)$ em $t = 0$. Uma* ***oportunidade de arbitragem*** *(ou simplesmente uma* ***arbitragem****) existe se há n finito, $X_1,...,X_n \in \mathcal{X}$ e reais $\beta_1,...,\beta_n$ tais que $\sum_{i=1}^{n} \beta_i P(X_i) \leq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i(\omega) \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$ com desigualdade estrita para todo ω em um evento não nulo.*

Diante da Definição 3.11 pode não ficar clara a ligação entre arbitragem e a teoria da coerência apresentada. Contudo, o conceito de arbitragem está intimamente ligado ao conceito de incoerência. O teorema a seguir ilustra essa relação.

Teorema 3.12. *Se os preços (em $t = 0$) são incoerentes, há oportunidades de arbitragem, não importa quais são os eventos nulos.*

Demonstração. Se os preços são incoerentes, pela Definição 3.4, existem n, $X_1,...,X_n \in \mathcal{X}$, $\varepsilon > 0$ e $\gamma_1,...,\gamma_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i [X_i(\omega) - P(X_i)] < -\varepsilon,$$

para todo $\omega \in \Omega$. Sejam $\beta_i = -\gamma_i$ para $i = 1,...,n$ e $c = \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \beta_i P(X_i)$ e $X_0(\omega) = c$ para todo $\omega \in \Omega$, com $\beta_0 = -1$. De $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i [X_i(\omega) - P(X_i)] < -\varepsilon$, temos que

$$-\gamma_1 [X_1(\omega) - P(X_1)] - ... - \gamma_n [X_n - P(X_n)] > \varepsilon$$

$$\Rightarrow \beta_0 X_0(\omega) + \beta_1 X_1(\omega) + ... + \beta_n X_n(\omega) > \varepsilon + \beta_0 X_0(\omega) + \beta_1 P(X_1) + ... + \beta_n P(X_n)$$

$$\Rightarrow -\varepsilon - \sum_{i=1}^{n} \beta_i P(X_i) + \beta_1 X_1(\omega) + ... + \beta_n X_n(\omega) > -\sum_{i=1}^{n} \beta_i P(X_i) + \beta_1 P(X_1) + ... + \beta_n P(X_n)$$

$$\Rightarrow \beta_0 X_0(\omega) + \beta_1 X_1(\omega) + ... + \beta_n X_n(\omega) > 0 \tag{3.1}$$

e de $X_0(\omega) = c$ para todo $\omega \in \Omega$, temos que $P(X_0) = c = \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \beta_i P(X_i)$. Assim,

$$\beta_0 P(X_0) = \beta_0 \left[\varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \beta_i P(X_i) \right].$$

Como $\beta_0 = -1$, temos que

$$\beta_0 P(X_0) = -\varepsilon - \sum_{i=1}^{n} \beta_i P(X_i)$$

$$\Rightarrow \beta_0 P(X_0) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i P(X_i) = -\varepsilon$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} \beta_i P(X_i) = -\varepsilon. \tag{3.2}$$

Portanto, as equações (3.1) e (3.2) mostram que existe uma oportunidade de arbitragem que independe dos eventos declarados nulos.

□

O próximo exemplo nos mostra que a recíproca do Teorema 3.12 não é verídica.

Exemplo 3.13. *Considere um espaço de estados* $\Omega = \{0,1\}$. *Seja* $X(\omega) = \omega$ *para todo* $\omega \in \Omega$ *e* $P(X) = 0$. *Suponha que* $\mathcal{N} = \{\emptyset\}$ *é a coleção de eventos nulos. Então este único preço é coerente pois*

$$\sup_{\omega\in\Omega} \beta[X(\omega) - P(X)] = \begin{cases} \beta \sup_{\omega\in\Omega}[X(\omega) - P(X)] & se\ \beta \geq 0 \\ \beta \inf_{\omega\in\Omega}[X(\omega) - P(X)] & se\ \beta < 0 \end{cases}$$

e assim,

$$\sup_{\omega\in\Omega} \beta[X(\omega) - P(X)] = \begin{cases} \beta & se\ \beta \geq 0 \\ 0 & se\ \beta < 0. \end{cases}$$

Contudo, pela Definição 3.11 há oportunidades de arbitragem porque $\beta P(X) = 0$ *e para* $\beta > 0$, $\beta[X(\omega)] > 0$ *para todo* $\omega \in \{1\}$ *e* $\{1\} \notin \mathcal{N}$.

Observe que no exemplo anterior, se declarássemos $\{1\}$ como sendo um evento nulo, não existiriam oportunidades de arbitragem. O próximo exemplo nos dá uma situação em que há oportunidades de arbitragem independentemente dos eventos declarados nulos.

Exemplo 3.14. *Seja* $\Omega = \mathbb{Z}^+$. *Seja ainda* $X(\omega) = \dfrac{1}{\omega}$ *para todo* $\omega \in \Omega$ *e* $P(X) = 0$. *Temos que*

$$\sup_{\omega\in\Omega} \beta[X(\omega) - P(X)] = \begin{cases} \beta \sup_{\omega\in\Omega}[X(\omega) - 0] & se\ \beta \geq 0 \\ \beta \inf_{\omega\in\Omega}[X(\omega) - 0] & se\ \beta < 0 \end{cases}$$

e assim, como $\sup_{\omega\in\Omega}[X(\omega) - 0)] = 1$ *e* $\inf_{\omega\in\Omega}[X(\omega) - 0] = 0$, *concluímos que, para todo* $\beta \in \mathbb{R}$, $\sup_{\omega\in\Omega} \beta[X(\omega) - P(X)] \geq 0$. *Portanto, o preço é coerente. Contudo,* $P(X) \leq 0$ *enquanto que* $X(\omega) > 0$ *para todo* $\omega \in \Omega$ *e , pela Definição 3.11, há oportunidades de arbitragem, não importando quais eventos são declarados nulos.*

O último resultado desta seção nos mostra que, a fim de não haver oportunidades de arbitragem, os preços de ativos livres de risco, ou seja, aqueles ativos cujo preço no tempo T é uma constante c[3], devem ser iguais a c para todo $c \in \mathbb{R}$, pois, do contrário, oportunidades de arbitragem existirão.

Teorema 3.15. *Suponha que* $\mathcal{X}$ *seja o conjunto de todos os ativos livres de risco, ou seja, todos os ativos constantes. Isto é, para cada real c, o ativo* X_c *com* $X_c(\omega) = c$ *para todo* $\omega \in \Omega$ *está em* $\mathcal{X}$. *Então, os preços serão incoerentes e oportunidades de arbitragem existirão a menos que* $P(X_c) = c$ *para todo* $c \in \mathbb{R}$.

[3] $X(\omega) = c$ para todo $\omega \in \Omega$.

Demonstração. Mostremos inicialmente que se $P(X_c) = c$, então $P(X_c)$ é coerente. De fato, suponha que para cada número real c, $P(X_c) = c$. Como $X_c(\omega) = c$ para todo $\omega \in \Omega$ temos que $X_c(\omega) - P(X_c) = 0$ para todo $\omega \in \Omega$ e para todo $c \in \mathbb{R}$. Assim, para todo n finito e para quaisquer $\beta_1, ..., \beta_n$ e quaisquer $X_{c_1}, ..., X_{c_n}$, $\beta_i[X_{c_i}(\omega) - P(X_{c_i})] = 0$ para todo $\omega \in \Omega$, e desse modo, $\sup_{\omega\in\Omega} \sum_{i=1}^{n} \beta_i[X_{c_i}(\omega) - P(X_{c_i})] = 0$. Portanto, os preços são coerentes. Também, tais preços não permitem oportunidades de arbitragem. De fato, $\beta_i P(X_{c_i}) = \beta_i X_{c_i}$ para todo i, e, desse modo, não existe $\omega \in \Omega$ tal que $\beta_i P(X_{c_i}) \leq 0$ e $\beta_i X_{c_i} > 0$.

Suponha agora, sem perda de generalidade, que $P(X_c) > c$ para algum $c \in \mathbb{R}$. Temos que, como $X_c(\omega) = c$ para todo $\omega \in \Omega$, $X_c(\omega) - P(X_c) < 0$ para todo $\omega \in \Omega$. Desse modo, para todo n finito e para quaisquer $\beta_1, ..., \beta_n$ positivos, e quaisquer $X_{c_1}, ..., X_{c_n}$, $\beta_i[X_{c_i}(\omega) - P(X_{c_i})] < 0$, ou seja, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\sup_{\omega\in\Omega} \beta_i[X_{c_i}(\omega) - P(X_{c_i})] < -\varepsilon$. Portanto, os preços são incoerentes. Assim, segue pelo Teorema 3.12 que existe oportunidades de arbitragem. O caso $P(X_c) < c$ é análogo. □

3.1 Preços de Ativos Não Limitados

Até agora não colocamos nenhuma restrição sobre os preços dos ativos no tempo T serem ou não limitados, tal como fizemos na primeira parte do trabalho. Mas será que tem sentido falarmos em preços de ativos (em T) não limitados? Veremos agora que sim.

Imagine um ativo que possui seu valor atrelado ao lançamento de uma moeda honesta repetido até que o resultado do lançamento seja cara e que o valor desse ativo no tempo T seja: um real se a cara aparecer no primeiro lançamento, dois reais se aparecer no segundo, quatro reais se aparecer no terceiro, e assim por diante, ou seja, $X(\omega) = 2^{(\omega-1)}$, em que $\Omega = \{1, 2, ...\}$. Assim, a probabilidade de que cada estado da natureza ocorra é $Q(\omega) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\omega}$. Observe que o valor esperado desse ativo no tempo T é

$$E(X) = \sum_{\omega=1}^{\infty} 2^{(\omega-1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\omega} = \infty.$$

Formalmente, o preço desse ativo no tempo T está bem definido, contudo, temos o seguinte problema: qual deve ser o preço dele em $t = 0$? Este problema, que pode ser encontrado na Referência [3], é conhecido como Paradoxo de São Petersburgo, e foi e ainda é amplamente discutido no meio acadêmico.

De fato, quando $\mathcal{X}$ contém preços de ativos não limitados (no tempo T), pode ser impossível atribuir preços finitos para todos eles, como o exemplo acima ilustra: preço finito pode não ser justo visto que o provável ganho obtido através daquele ativo pode ser um valor absurdamente grande. É disso que esta seção trata. No exemplo a seguir, mostraremos um caso em que tal problema ocorre e uma maneira de resolvê-lo.

Exemplo 3.16. *Seja $\Omega = \mathbb{Z}^+$ e seja $Y(\omega) = 2^{\omega}$. Defina também*

$$X_i(\omega) = I_i(\omega) = \begin{cases} 1 & se\ \omega = i \\ 0 & se\ \omega \neq i, \end{cases}$$

para $i \in \mathbb{Z}^+$. Suponha que $P(X_i) = \dfrac{1}{2^i}$ para todo $i \in \mathbb{Z}^+$, ou seja, X_i tem distribuição geométrica com parâmetro $\dfrac{1}{2}$. Finalmente, seja

$$\begin{aligned} Y_i(\omega) &= Y(\omega)I_{\{1,2,...,i\}}(\omega) = \\ &= Y(\omega)[I_{\{1\}}(\omega) + I_{\{2\}}(\omega) + ... + I_{\{i\}}(\omega)] \\ &= \sum_{j=1}^{i} 2^j X_j(\omega), \end{aligned}$$

para todo $i \in \mathbb{Z}^+$. Então Y_i é Y truncado no conjunto $\{1,2,...,i\}$ e

$$Y_i(\omega) = \begin{cases} 2^\omega & se\ \omega \in \{1,2,...,i\} \\ 0 & se\ \omega \notin \{1,2,...,i\} \end{cases} \leq 2^\omega = Y(\omega),$$

para todo $i \in \mathbb{Z}^+$. Ainda, para todo $i \in \mathbb{Z}^+$,

$$P(Y_i) = P\left[\sum_{j=1}^{i} 2^j X_j(\omega)\right] = \sum_{j=1}^{i} 2^j P(X_j) = \sum_{j=1}^{i} 2^j \frac{1}{2^j} = i.$$

Assim, se $P(Y)$ pudesse tomar um valor, este deveria ser infinito. Entretanto, tal preço não é consistente com a ideia de que $\beta[Y - P(Y)]$ é uma aposta justa para algum β não nulo.

Observação 3.17. *Nos casos similares ao Exemplo 3.16, denotamos $P(Y) = \infty$ para dizer que $\beta[Y - P(Y)]$ é aceitável para todo $P(Y)$ finito e para todo $\beta \geq 0$. Analogamente, denotamos $P(Y) = -\infty$ a fim de dizer que $\beta[Y - P(Y)]$ é aceitável para todo $P(Y)$ finito e todo $\beta \leq 0$. Desse modo, preços infinitos significam que somente apostas unilaterais são aceitáveis para as correspondentes variáveis aleatórias ilimitadas.*

Dado um conjunto $\mathcal{X}$ de preços de ativos no tempo T, sejam eles limitados ou ilimitados, nosso desejo é de que os preços de variáveis aleatórias equivalentes[4] sejam os mesmos, ou seja, se X e Y são variáveis aleatórias equivalentes, deseja-se que $P(X) = P(Y)$. Entretanto, o exemplo a seguir nos mostra que, no caso em que preços finitos não contínuos são atribuídos para ativos cujos preços no tempo T não são limitados, não é possível preservar a igualdade entre eles.

Exemplo 3.18. *Seja $\Omega = \{1,2,...\} \times \{0,1\}$ e $Q[\omega = (n,i)] = 2^{-(n+1)}$ para $n = 1,2,...$ e $i = 0,1$ uma medida de probabilidade em Ω. Seja $\mathcal{X}$ formado pelas indicadoras de i pertencentes à $\mathbb{Z}^+$,*

[4]Isto é, variáveis que tenham a mesma distribuição.

ou seja,

$$I_i(\omega) = \begin{cases} 1 & se\ \omega = i \\ 0 & se\ \omega \neq i, \end{cases}$$

e pelos seguintes preços de ativos no tempo T:

$$X(n,i) = n;$$

$$W_1(n,i) = \begin{cases} n+1 & se\ i = 1 \\ 1 & se\ i = 0; \end{cases}$$

$$W_2(n,i) = \begin{cases} n+1 & se\ i = 0 \\ 1 & se\ i = 1. \end{cases}$$

Temos que X, W_1 e W_2 tem distrbuição Geométrica com parâmetro $\frac{1}{2}$. De fato,

$$Q(X = n) = Q[\omega = (n,i)] = 2^{-(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{2},$$

$$Q(W_1 = 1) = Q[(n,i) = (n,0)] = Q[(n,i) = (1,0)] + \cdots + Q[(n,i) = (n,0)] + \cdots = \frac{1}{2},$$

$$Q(W_1 = n+1) = Q[\omega = (n,1)] = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{2},$$

e o caso de W_2 é análogo à W_1.

Temos que a esperança dessas três variáveis é 2. Ainda, se $\omega = (n,0)$ para todo n, $W_1 = 1$, $W_2 = n+1$ e $X = n$, ou seja, $W_1 + W_2 - X = 2$. Do mesmo modo, se $\omega = (n,1)$, $W_1 + W_2 - X = 2$. Assim, deve existir uma dependência linear entre esses três preços equivalentes de ativos no tempo T e eles possuem o mesmo preço em $t = 0$ se, e somente se, tal preço for 2. Contudo, pelo Teorema 3.25 e pelo Exemplo 3.28 discutidos adiante, qualquer valor maior ou igual a 2 é um preço coerente para tais ativos. Visto que ativos cujos preços em T são equivalentes e linearmente dependentes devem ter o mesmo preço, torna-se necessário exigir algo a mais do que o Teorema 3.25 exige para ativos cujos preços em T não são limitados.

3.2 Preços: Uma Extensão

Até aqui nós conhecemos o preço dos ativos em $t = 0$ cujos preços no tempo T estão em $\mathcal{X}$. Consequentemente, pela Definição 3.9 de preço como um funcional linear, conhecemos os preços em $t = 0$ de todos os ativos cujos preços em T estão em $\mathcal{L}(\mathcal{X})$, o espaço gerado pelos elementos de $\mathcal{X}$. Nesta seção temos como objetivo apresentar alguns resultados de modo que seja possível precificar em $t = 0$ um ativo cujo preço no tempo T seja Y, onde Y não esteja em $\mathcal{L}(\mathcal{X})$, de modo que o novo conjunto de ativos não possibilite oportunidades de arbitragem. Para tal, apresentaremos alguns teoremas, dentre eles um resultado análogo ao de arbitragem, que nos possibilita estender um conjunto de ativos cujos preços são coerentes, de modo que o novo conjunto de preços ainda seja coerente.

Definição 3.19. *Se $X \leq c$, ou seja, se $X(\omega) \leq c$ para todo $\omega \in \Omega$, dizemos que X respeita uma **desigualdade linear fraca**.*

Definição 3.20. *Se $X(\omega) \leq c$ para todo $\omega \in \Omega$ com $X(\omega) < c$ para todo ω pertencente a algum evento não nulo, dizemos que X respeita uma **desigualdade linear não-nula**, o que denotamos por $X \prec c$.*

Definição 3.21. *Um **funcional linear positivo** é um funcional linear L tal que $L(X) \geq 0$ para todo $X \geq 0$. Já um **funcional linear estritamente positivo** é um funcional positivo tal que $L(X) > 0$ para todo $X \succ 0$.*

O próximo resultado nos dá uma condição relacionada a desigualdades lineares que é necessária e suficiente para que os preços de determinados ativos sejam coerentes. Já o resultado posterior é análogo para os preços dos ativos no âmbito da arbitragem.

Teorema 3.22. *Os preços em $t = 0$ para ativos cujos preços em T estão em um conjunto X são coerentes se, e somente se, cada desigualdade linear fraca satisfeita pelos preços no tempo T também é satisfeita pelos preços no tempo $t = 0$.*

Demonstração. Equivalentemente, basta mostrarmos que os preços em $t = 0$ são incoerentes se, e somente se, ao menos alguma desigualdade linear fraca satisfeita pelos preços dos ativos no tempo T não for satisfeita pelos preços no tempo $t = 0$.

Suponha que ao menos uma desigualdade linear fraca satisfeita pelos preços em T não seja satisfeita pelos preços em $t = 0$. Seja $\varepsilon > 0$ e tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i(\omega) + \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} \beta_i P(X_i),$$

para todo $\omega \in \Omega$, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i(\omega) < \sum_{i=1}^{n} \beta_i P(X_i) - \varepsilon.$$

Contudo, tal desigualdade não é satisfeita pelos preços em $t = 0$ visto que, como preço coerente de constante é a própria constante,

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i P(X_i) > \sum_{i=1}^{n} \beta_i P(X_i) - \varepsilon.$$

Ora, se

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i(\omega) + \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} \beta_i P(X_i),$$

então

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i [X_i(\omega) - P(X_i)] < -\varepsilon,$$

para todo $\omega \in \Omega$. Portanto, os preços em $t = 0$ são incoerentes.

Analogamente, suponha que os preços são incoerentes. Então existem $\varepsilon > 0$, $\beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{R}$ tais que, para todo $\omega \in \Omega$,

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i [X_i(\omega) - P(X_i)] < -\varepsilon \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i(\omega) - \sum_{i=1}^{n} \beta_i P(X_i) < -\varepsilon$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i(\omega) < -\varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \beta_i P(X_i).$$

Contudo, tal desigualdade não é satisfeita pelos preços visto que

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i P(X_i) > -\varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \beta_i P(X_i),$$

o que conclui a demonstração.

$\square$

Teorema 3.23. *Os preços em $t = 0$ para ativos cujos preços em T estão em um conjunto $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ não permitem oportunidades de arbitragem se, e somente se, cada desigualdade linear não-nula satisfeita pelos preços em T é satisfeita como uma desigualdade estrita pelos preços em* 0*.*

Demonstração. Suponha que cada desigualdade linear não nula satisfeita pelos preços em T é também satisfeita como uma desigualdade estrita pelos preços em 0. Assim, temos dois casos:

- $X \prec c$ e $P(X) < c$,
- $X \succ c$ e $P(X) > c$.

Suponha primeiramente que $X \prec c$ e $P(X) < c$. Como $X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, segue que cada X pode ser escrito como uma combinação linear de elementos de $\mathcal{X}$, ou seja, $X = \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i(\omega)$. Assim, se $\sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i(\omega) \prec c$ segue por hipótese que $\sum_{i=1}^{n} \beta_i P(X_i) < c$. Observe que podemos encontrar reais $d_1, \ldots, d_n$ tais que $c = \sum_{i=1}^{n} \beta_i d_i$. Assim,

$$\sum_{i}^{n} \beta_i P(X_i) - c < 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i}^{n} \beta_i P(X_i) - \sum_{i=1}^{n} \beta_i d_i < 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i}^{n} \beta_i [P(X_i) - d_i] < 0.$$

Sendo Y_i[5] $= X_i - d_i$, temos que $\sum_{i=1}^{n} \beta_i P(Y_i) < 0$ e $\sum_{i=1}^{n} \beta_i Y_i(\omega) \leq 0$ para todo $\omega \in \Omega$ com desigualdade estrita para $\omega \in A$, $A \in \mathcal{N}^c$. Para quaisquer $\beta_i, ..., \beta_n \in \mathbb{R}$ tais que $\sum_{i=1}^{n} \beta_i Y_i(\omega) \prec$

[5] Observe que $Y_i \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ uma vez que é uma combinação linear de elementos de $\mathcal{X}$ e constantes.

0 segue que $\sum_{i=1}^{n} \beta_i P(Y_i) < 0$. Então não existem $\beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{R}$ tais que $\sum_{i=1}^{n} \beta_i P(Y_i) \leq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} \beta_i Y_i(\omega) \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$ com desigualdade estrita para $\omega \in A$, $A \in \mathcal{N}^c$. Portanto, não há oportunidades de arbitragem.

Ainda, se $X \succ c$ implicar $P(X) > c$ segue que $X - c \succ 0$ implica em $P(X) - c > 0$. Assim, escrevendo X e c como fizemos anteriormente, e denotando novamente $X_i - d_i$ por Y_i, segue que, para quaisquer $n \in \mathbb{N}$, $\beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{R}$ tais que $\sum_{i=1}^{n} \beta_i Y_i(\omega) \succ 0$, segue que $\sum_{i=1}^{n} \beta_i P(Y_i) > 0$, e assim não existem $n \in \mathbb{N}$, $\beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{R}$ tais que $\sum_{i=1}^{n} \beta_i Y_i(\omega) \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$ com desigualdade estrita para ω em um evento não nulo e $\sum_{i=1}^{n} \beta_i P(Y_i) \leq 0$. Portanto, também não existem oportunidades de arbitragem.

Reciprocamente, suponha que os preços em $t = 0$ para ativos cujos preços em T estão em $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ não permitam oportunidades de arbitragem. Então não existem $n \in \mathbb{N}$ e $\beta_1, \ldots, \beta_n$ nem todos nulos tais que

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i P(X_i) \leq 0 \ \text{ e } \ \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i(\omega) \succ 0,$$

para todo $\omega \in \Omega$, com desigualdade estrita para $\omega \in A$, $A \in \mathcal{N}^c$.

Assim, para quaisquer $n \in \mathbb{N}$, $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ e $\beta_1, \ldots, \beta_n$ reais nem todos nulos, devemos ter $\sum_{i=1}^{n} \beta_i P(X_i) > 0$ sempre que $\sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i(\omega) \succ 0$, para todo $\omega \in \Omega$, com desigualdade estrita para algum $\omega \in \Omega$. Nesse caso, como qualquer elemento de $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ é escrito como uma combinação linear dos elementos de $\mathcal{X}$, se $X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ e $X \succ 0$, então $P(X) > 0$. Similarmente para $X \succ c$ ou $X \prec c$. $\square$

Agora apresentaremos um resultado análogo à Definição 3.9 que garante a não existência de oportunidades de arbitragem se existir um funcional linear estritamente positivo em $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ que indique os preços em $t = 0$ dos ativos cujos preços em T estão em $\mathcal{L}(\mathcal{X})$.

Teorema 3.24 (Teorema Fundamental da Precificação de Ativos). *Os preços em $t = 0$ dos ativos cujos preços em T estão em um conjunto $\mathcal{X}$ não permitem oportunidades de arbitragem se, e somente se, existe um funcional linear estritamente positivo L definido em $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ tal que $L(X) = P(X)$ para todo $X \in \mathcal{X}$ e $L(1) = 1$.*

Demonstração. Suponha que os preços em $t = 0$ para ativos cujos preços em T estão em $\mathcal{X}$ não permitam oportunidades de arbitragem. Assim, segue do Teorema 3.12 que os preços em $\mathcal{X}$ são coerentes e, pela Definição 3.9 e Lema 3.7, que existe um funcional linear positivo L definido na extensão linear de $\mathcal{X}$ com $L(1) = 1$. Então, resta mostrarmos que tal funcional é estritamente positivo. De fato, suponha que exista $X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ tal que $X \succ 0$ e $L(X) \leq 0$. Como X está na extensão linear de $\mathcal{X}$, segue que X pode ser escrito como uma combinação linear dos elementos de $\mathcal{X}$, ou seja, existem $n \in \mathbb{N}$, reais $\beta_1, \ldots, \beta_n$ e $X_1, ..., X_n \in \mathcal{X}$ tais que

$$X = \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i.$$

Assim, segue que $P(X) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i P(X_i)$. Como estamos supondo que $X \succ 0$ e $P(X) \leq 0$, temos uma oportunidade de arbitragem com os preços em $t = 0$ dos ativos cujos preços em T estão em $\mathcal{X}$, o que é uma contradição. Portanto, o funcional linear em $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ é estritamente positivo.

Reciprocamente, suponha que exista um funcional linear estritamente positivo definido em $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ e que existam oportunidades de arbitragem em $\mathcal{X}$. Assim, pela Definição 3.11, existem $n \in \mathbb{N}$, reais $\beta_1, \ldots, \beta_n$ e $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{X}$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i(\omega) \succ 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{n} \beta_i P(X_i) \leq 0.$$

Mas, $\sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i$ é uma combinação linear de elementos de $\mathcal{X}$ e, portanto pertence à $\mathcal{L}(\mathcal{X})$, o que é uma contradição com o fato de o funcional ser estritamente positivo em $\mathcal{L}(\mathcal{X})$. Portanto, não existem oportunidades de arbitragem. □

A partir dos dois teoremas anteriores e utilizando o Teorema de Hahn-Banach, podemos estender um conjunto de preços corentes a fim a incluir outro ativo não pertencente a $\mathcal{L}(\mathcal{X})$, de modo que o novo conjunto de preços, o conjunto antigo juntamente com o preço em $t = 0$ do novo ativo, ainda seja coerente. O mesmo raciocínio é aplicado para o âmbito da arbitragem, onde podemos precificar um novo ativo disponível a partir dos preços de ativos já conhecidos, de modo que o conjunto dos preços do novo conjunto de ativos não permita oportunidades de arbitragem.

Teorema 3.25 (Teorema Fundamental da Previsão). *Suponha que preços coerentes são dados para todos os ativos cujos preços em T formam um conjunto enumerável $\mathcal{X}$. Considere um ativo com preço em T denotado por Y e tal que Y não pertença a $\mathcal{X}$ e seja $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ o espaço gerado pelos elementos de $\mathcal{X}$. Considere os conjuntos*

$$\underline{P}(Y) = \sup\{P(X) \mid X \leq Y \; e \; X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})\}$$

e

$$\overline{P}(Y) = \inf\{P(X) \mid X \geq Y \; e \; X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})\}.$$

Então $P(Y)$ pode tomar qualquer valor no intervalo fechado $[\underline{P}(Y), \overline{P}(Y)]$ e os preços resultantes ainda serão coerentes. Além disso, nenhum valor fora deste intervalo será um valor coerente para $P(Y)$.

Demonstração. Considere o espaço $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ gerado pelos elementos de $\mathcal{X}$. Se $Y \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, então $P(Y)$ é univocamente determinado uma vez que Y pode ser escrito como combinação linear de elementos de $\mathcal{X}$ e P é um funcional linear.

Se $Y \notin \mathcal{L}(\mathcal{X})$, considere o espaço $\mathcal{L}(\mathcal{X})_1$ gerado por $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ e Y, isto é,

$$\mathcal{L}(\mathcal{X})_1 = \{X + \lambda Y \mid X \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), \lambda \in \mathbb{R}\},$$

e o funcional definido em $\mathcal{L}(\mathcal{X})_1$

$$\overline{P}(Z) = \inf\{P(X) \mid X \geq Z, X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})\}.$$

Observe que $\overline{P}(Z)$ é o limite inferior de $P(X)$ atribuído aos ativos X de $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ para os quais $X \geq Z$ e $Z \in \mathcal{L}(\mathcal{X})_1$. Note que

$$\overline{P}(X+Z) \leq \overline{P}(X) + \overline{P}(Z);\ X, Z \in \mathcal{L}(\mathcal{X})_1,$$

$$\overline{P}(\alpha X) = \alpha \overline{P}(X), \alpha \in \mathbb{R}^+,$$

e se X e $Z \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ tais que $Z \geq X$, $Z - X \geq 0$ e, como P é um funcional linear positivo em $\mathcal{L}(\mathcal{X})$, $P(Z-X) \geq 0$, ou seja, $P(Z) \geq P(X)$ para todo $X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. Assim,

$$P(X) \leq \inf\{P(Z) \mid Z \geq X, Z \in \mathcal{L}(\mathcal{X})\} = \overline{P}(X)$$

para todo $X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, ou seja, $\overline{P}$ é um funcional sublinear que domina P em $\mathcal{L}(\mathcal{X})$. Assim, pelo Teorema de *Hahn-Banach*[6] é possível estender o funcional P em $\mathcal{L}(\mathcal{X})_1$ preservando a dominância de $\overline{P}$ sob P. Esta extensão, a qual denominaremos P_1, é igual à P para todos os elementos de $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ e para $Y \in \mathcal{L}(\mathcal{X})_1$ é tal que $P_1(Y) \leq \overline{P}(Y)$. Ainda, definindo

$$\underline{P}(Z) = \sup\{P(X) \mid X \leq Z, X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})\},$$

e percebendo que

$$\begin{aligned}
\underline{P}(Z) &= \sup\{P(X) \mid X \leq Z, X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})\} \\
&= \sup\{-P(-X) \mid X \leq Z, X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})\} \\
&= -\inf\{P(-X) \mid -X \geq -Z, X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})\} \\
&= -\overline{P}(-Z),
\end{aligned}$$

temos que

$$P_1(-Y) \leq \overline{P}(-Y) \Rightarrow P_1(Y) \geq -\overline{P}(-Y) = \underline{P}(Y).$$

Como P_1 é um funcional linear positivo definido em $\mathcal{L}(\mathcal{X})_1$, segue pela Definição 3.9 que os preços resultantes ainda serão coerentes.

Resta agora mostrar que se $P(Y) \notin [\underline{P}(Y), \overline{P}(Y)]$, os preços resultantes não serão coerentes. De fato, considere $P(Y) = P_1(Y) < \underline{P}(Y)$. Seja então $X' \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ tal que $P(X') = \underline{P}(Y)$, ou seja, $X' \leq Y$. Temos que $Y - X' \in \mathcal{L}(\mathcal{X})_1$ e $Y - X' \geq 0$, contudo

$$P_1(Y - X') = P_1(Y) - P_1(X') = P_1(Y) - \underline{P}(Y) < 0,$$

ou seja, P_1 não é um funcional linear positivo, e pela Definição 3.9, os preços resultantes não

[6] Ver Proposição A.23 no Capítulo 1.

são coerentes. O caso $P(Y) > \overline{P}(Y)$ é análogo. □

Observação 3.26. *Na demonstração do Teorema 3.25, o funcional linear P_1 definido em $\mathcal{L}(\mathcal{X})_1$ é positivo se, para todo $X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $X + \lambda Y \geq 0$, então $P(X + \lambda Y) \geq 0$. Para tal, se $\lambda > 0$,*

$$P(Y) \geq -\frac{P(X)}{\lambda} = P\left(-\frac{X}{\lambda}\right),$$

e se $\lambda < 0$,

$$P(Y) \leq -\frac{P(X)}{\lambda} = P\left(-\frac{X}{\lambda}\right).$$

Como $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ é um espaço linear, $-\dfrac{X}{\lambda} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ e

$$\inf\left\{P\left(-\frac{X}{\lambda}\right) \;\middle|\; -\frac{X}{\lambda} \geq Y\right\} = \overline{P}(Y)$$

e

$$\sup\left\{P\left(-\frac{X}{\lambda}\right) \;\middle|\; -\frac{X}{\lambda} \leq Y\right\} = \underline{P}(Y),$$

segue que se $P_1(Y)$ assumir qualquer valor entre $\underline{P}(Y)$ e $\overline{P}(Y)$, P_1 é funcional linear positivo.

Exemplo 3.27. *Suponha que $\mathcal{X}$ é constituído de todos os Y_i do Exemplo 3.16 a menos de $Y = 2^{\omega}$ e seja $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ o espaço gerado por esses esses preços (no tempo T). Lembrando que Y_i é Y truncada em $\{1, 2, ..., i\}$ para todo $i \in \mathbb{Z}^+$ e Y é ilimitada, temos os seguintes conjuntos*

$$\underline{A} = \{X \mid X \leq Y \text{ e } X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})\} = \mathcal{L}(\mathcal{X}),$$

$$\overline{A} = \{X \mid X \geq Y \text{ e } X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})\} = \emptyset.$$

Desse modo, como $P(Y_i) = i$ para todo $i \in \mathbb{Z}^+$, segue que

$$\underline{P}(Y) = \sup\{P(X) \mid X \leq Y \text{ e } X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})\} = \sup\{P(X) \mid X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})\} = \infty,$$

$$\overline{P}(Y) = \inf\{P(X) \mid X \geq Y \text{ e } X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})\} = \inf \emptyset = \infty.^{7}$$

Portanto, como cada $P(Y_i)$ é coerente, segue pelo Teorema 3.25 que $\underline{P}(Y) = \overline{P}(Y) = \infty$ é um preço coerente para Y, exatamente o que deduzimos no Exemplo 3.16.

Exemplo 3.28. *Seja $\mathcal{X}$ o conjunto de todas as indicadoras de ω pertencentes a $\Omega = \mathbb{Z}^+$, ou seja,*

$$I_i(\omega) = \begin{cases} 1 & se\ \omega = i \\ 0 & se\ \omega \neq i. \end{cases}$$

[7] A afirmação de que o ínfimo do conjunto vazio é infinito se dá porque, para o conjunto vazio, todo número real é uma cota superior e inferior de tal conjunto. Se considerarmos a reta real extendida, a qual inclui ∞ como um número, a maior cota inferior do conjunto vazio é ∞.

Seja $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ o espaço gerado por $\mathcal{X}$, considere a variável aleatória X do Exemplo 3.18 e suponha que $P(I_i) = \frac{1}{2^i}$. Temos que X tem distribuição Geométrica de parâmetro $\frac{1}{2}$ e podemos reescrevê-la como

$$X(\omega) = 1\, I_1(\omega) + 2\, I_2(\omega) + \dots .$$

Desse modo, definindo $\underline{A} = \{Y \mid Y \leq X \text{ e } Y \in \mathcal{L}(\mathcal{X})\}$, segue que

$$Y(\omega) = 1 I_{\{1\}}(\omega) + \dots + n I_{\{n\}}(\omega) \in \underline{A}.$$

Daí,

$$P(Y) = 1\,\frac{1}{2} + \dots + n\,\frac{1}{2^n},$$

e

$$\underline{P}(X) = \sup\{P(Y) \mid Y \leq X \text{ e } Y \in \mathcal{L}(\mathcal{X})\} = \sup_{n \in Z^+}\left(1\,\frac{1}{2} + \dots + n\,\frac{1}{2^n}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} i\frac{1}{2^i} = 2.$$

Ainda, definindo $\overline{A} = \{Y \mid Y \geq X \text{ e } Y \in \mathcal{L}(\mathcal{X})\}$, segue que $\overline{A} = \emptyset$, e assim, $\overline{P}(X) = \inf \emptyset = \infty$. Portanto, como cada $P(I_i)$ é coerente, qualquer valor entre $[2, \infty]$ é um preço coerente para Y.

Apresentaremos agora um resultado análogo ao Teorema 3.25 para preços livres de arbitragem.

Teorema 3.29. *Suponha que os preços dados para todos os ativos cujos preços no tempo T estão em um conjunto $\mathcal{X}$ não permitam oportunidades de arbitragem. Considere um ativo com preço no tempo T denotado por Y e com Y não pertencente a $\mathcal{X}$ e seja $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ o espaço linear gerado pelos elementos de $\mathcal{X}$. Considere os conjuntos*

$$\underline{B} = \{X \mid X \prec Y \text{ e } X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})\}$$

e

$$\overline{B} = \{X \mid X \succ Y \text{ e } X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})\}.$$

Defina

$$\underline{P}(Y) = \sup_{X \in \underline{B}} P(X) \text{ e } \overline{P}(Y) = \inf_{X \in \overline{B}} P(X).$$

Então, se $P(Y)$ tomar qualquer valor no intervalo aberto $(\underline{P}(Y), \overline{P}(Y))$, não existirão oportunidades de arbitragem. Além disso, se o preço para Y for escolhido fora do intervalo fechado $[\underline{P}(Y), \overline{P}(Y)]$, existirão oportunidades de arbitragem.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $P(Y)$ é escolhido no intervalo aberto $(\underline{P}(Y), \overline{P}(Y))$ e que há oportunidades de arbitragem. Então, suponha que existam $X_1, \dots, X_n$ em $\mathcal{X}$, $\beta_1, \dots, \beta_n$ em $\mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\beta P(Y) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i P(X_i) \leq 0 \qquad (I)$$

e

$$\beta Y(\omega) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i(\omega) \geq 0, \qquad (II)$$

para todo $\omega \in \Omega$ com desigualdade estrita para ω em um evento não nulo A. Observe que $\beta \neq 0$ pois, caso contrário, os preços para os ativos cujos preços em T estão em $\mathcal{X}$ possibilitariam oportunidades de arbitragem. Se $\beta < 0$, temos a partir de (II) que

$$Y(\omega) + \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i(\omega) \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i(\omega) \leq -Y(\omega)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} -\frac{\beta_i}{\beta} X_i(\omega) \geq Y(\omega), \qquad (III)$$

para todo $\omega \in \Omega$ com desigualdade estrita para $\omega \in A$. Assim, de (III), temos que o preço $\sum_{i=1}^{n} -\frac{\beta_i}{\beta} X_i(\omega)$ no tempo T, o qual chamaremos de X, deve ser um elemento de $\overline{B}$ pois $X \succ Y$ e está no espaço gerado por $\mathcal{X}$. Daí, como estamos supondo $P(Y) \in (\underline{P}(Y), \overline{P}(Y))$, temos que

$$P(X) \geq \inf_{X \in \overline{B}} P(X) = \overline{P}(Y) > P(Y).$$

Contudo, de (I) temos que

$$\beta P(Y) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i P(X_i) \leq 0,$$

e como $\beta < 0$, segue que

$$\sum_{i=1}^{n} -\frac{\beta_i}{\beta} P(X_i) \leq P(Y),$$

ou seja, $P(X) \leq P(Y)$, o que contradiz o fato de $P(Y) < P(X)$. O caso $\beta > 0$ é análogo. Portanto, se $P(Y) \in (\underline{P}(Y), \overline{P}(Y))$ não há oportunidades de arbitragem.

Também é necessário mostrar que, se $P(Y) \notin (\underline{P}(Y), \overline{P}(Y))$ haverá oportunidades de arbitragem. De fato, suponha, sem perda de generalidade, que $P(Y) < \underline{P}(Y)$. Seja $X \in \underline{B}$ tal que

$$P(X) \geq \frac{[P(Y) + \underline{P}(Y)]}{2}.$$

Temos que

$$2P(X) \geq P(Y) + \underline{P}(Y).$$

Como $P(Y) < \underline{P}(Y)$,

$$2P(X) > P(Y) + P(Y) \Rightarrow P(X) > P(Y). \qquad (IV)$$

Como $X \in \underline{B}$, $X \prec Y$ e temos que $Y - X \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$ com desigualdade estrita para ω

em um evento não nulo A e, de (IV), $P(Y)-P(X)<0$, que, pela Definição 3.11 constitui uma oportunidade de arbitragem, concluindo a prova. $\square$

O próximo exemplo mostra porque de o intervalo de preços possíveis para o novo ativo no Teorema acima é aberto.

Exemplo 3.30. *Seja $\Omega=\mathbb{Z}^+$, $\mathcal{N}$ a coleção de todos os subconjuntos finitos de Ω, $\mathcal{X}$ a coleção de todas as indicadoras I_i, $i\in\mathbb{Z}^+$ e de todas as funções constantes $X_c(\omega)=c$ para todo $c\in\mathbb{R}^+$ e considere o espaço gerado $\mathcal{L}(\mathcal{X})$. Considere $P(I_i)=0$ para todo $i\in\mathbb{Z}^+$ e $P(X_c)=c$ para todo $c\in\mathbb{R}$. Observe que, para todo $n\in\mathbb{N}$, quaisquer reais $\beta_1,...,\beta_n$ e quaisquer $X_1,\ldots,X_n\in\mathcal{X}$, se $\sum_{i=1}^n\beta_iX_i(\omega)\succ 0$ então $\sum_{i=1}^n\beta_iX_i(\omega)>0$ para uma quantidade infinita de ω's, uma vez que os eventos não nulos são os subconjuntos infinitos de Ω.*

Como $\sum_{i=1}^n\beta_iX_i$ é uma combinação linear de elementos de $\mathcal{X}$ e os valores de cada X_i e $P(X_i)$ diferem apenas para as indicadoras, segue que $\sum_{i=1}^n\beta_iX_i(\omega)>0$ e $\sum_{i=1}^n\beta_iP(X_i)\leq 0$ só ocorreriam simultaneamente para ω em um evento nulo. Portanto, se $\sum_{i=1}^n\beta_iX_i(\omega)\succ 0$, então $\sum_{i=1}^n\beta_iP(X_i)>0$, e segue do Teorema 3.23 que não há oportunidades de arbitragem. Considere agora o ativo cujo preço em T é $Y(\omega)=\dfrac{1}{\omega}$ sendo $Y\notin\mathcal{X}$. Temos que,

$$\underline{P}(Y)=\sup\{P(X)\mid X\prec Y \text{ e } X\in\mathcal{L}(\mathcal{X})\}=0,$$

uma vez que qualquer função indicadora ou combinação linear de funções indicadoras são maiores do que Y para algum $\omega\in\Omega$, assim como qualquer função constante que não seja zero. Ainda, como

$$\frac{1}{\omega}+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}\right)I_j(\omega)\geq Y(\omega)$$

para todo $\omega\in\Omega$ e todo $n\in\mathbb{Z}^+$ e qualquer outro elemento maior do que Y em $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ é maior do que $\dfrac{1}{\omega}+\sum_{j=1}^n\left(\dfrac{1}{j}\right)I_j(\omega)$ para algum $n\in\mathbb{Z}^+$, segue que

$$\overline{P}(Y)=\inf\{P(X)\mid X\succ Y \text{ e } X\in\mathcal{L}(\mathcal{X})\}=0.$$

Contudo, pelo Exemplo 3.14, $P(Y)=0$ possibilita arbitragem.

A diferença entre os princípios de coerência e de ausência de arbitragem está intimamente relacionada à continuidade do funcional P. A seguir definiremos uma forte consideração de continuidade que é necessária para que não existam oportunidades de arbitragem.

Definição 3.31. *Um **free lunch** é uma rede [8] $\{(X_\alpha,Y_\alpha)\mid\alpha\in\mathfrak{N}\}$, onde cada X_α é uma combinação linear de elementos de $\mathcal{X}$ e cada Y_α é arbitrário e tal que $X_\alpha\succ Y_\alpha$ para todo $\alpha\in\mathfrak{N}$, $lim_{\alpha\to\infty}Y_\alpha=Y\succ 0$ e $\liminf_{\alpha\to\infty}P(X_\alpha)\leq 0$.*

O resultado abaixo relaciona arbitragem e *free lunch*.

[8] $\mathfrak{N}$ é um conjunto de índices.

Teorema 3.32. *Se existe uma oportunidade de arbitragem, então existe um free lunch.*

Demonstração. Seja $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ o espaço gerado pelos elementos de $\mathcal{X}$ e suponha que exista uma oportunidade de arbitragem. Assim, existe $X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ tal que $X(\omega) \succ 0$ para todo $\omega \in \Omega$ e $P(X) \leq 0$. Seja $\mathfrak{N} = \mathbb{Z}^+$, $X_\alpha = X$ e $Y_\alpha = X - \dfrac{1}{\alpha}$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^+$. Então $X_\alpha > Y_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^+$,

$$\lim_{\alpha\to\infty} Y_\alpha = \lim_{\alpha\to\infty}\left(X - \frac{1}{\alpha}\right) = X$$

e

$$\liminf_{\alpha\to\infty} P(X_\alpha) = \liminf_{\alpha\to\infty} P(X) = P(X) \leq 0,$$

que constituí um *free lunch*. □

Entretanto, a recíproca do Teorema 3.32 não é verdadeira e o exemplo abaixo ilustra tal fato.

Exemplo 3.33. *Considere os elementos do Exemplo 3.30 sem a inclusão de Y e seja $\mathfrak{N} = \mathbb{Z}^+$. Considere*

$$X_\alpha(\omega) = \frac{1}{\omega} I_{\{1,\ldots,\alpha\}}(\omega) + \frac{1}{\alpha} I_{\{\alpha+1,\ldots\}}(\omega),$$

e $Y_\alpha(\omega) = \dfrac{1}{\omega}$ para todo $\alpha \in \mathfrak{N}$. Note que, para cada $\alpha \in \mathfrak{N}$, a função constante $\frac{1}{\alpha}$ é menor ou igual a X_α. Além disso, essa função é o maior elemento dentre todos aqueles que são menores do que X_α em $\mathcal{L}(\mathcal{X})$. Como os preços em $t = 0$ dos ativos cujos preços em T estão em $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ ou são a própria constante ou são iguais a zero, segue que $\underline{P}(X_\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}$.

Ainda, temos que

$$\frac{1}{\alpha} + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}\right) I_j(\omega) \geq X_\alpha(\omega)$$

para todo $\alpha \in \mathfrak{N}$, todo $n \in \mathbb{Z}^+$ e $\omega \in \Omega$ e qualquer outro elemento maior do que X_α em $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ é maior do que $\dfrac{1}{\alpha} + \sum_{j=1}^{n}\left(\dfrac{1}{j}\right) I_j(\omega)$ para algum $n \in \mathbb{Z}^+$. Assim, o menor elemento dentre esses é aquele com o maior n, e assim, como $P\left(\dfrac{1}{\alpha} + \sum_{j=1}^{n} \dfrac{1}{j} I_j(\omega)\right) = \dfrac{1}{\alpha}$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\overline{P}(X_\alpha) = \inf\{P(Z) \mid Z \succ X_\alpha \, e \, Z \in \mathcal{L}(\mathcal{X})\} = \inf \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}.$$

Então, $P(X_\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}$.

Ainda, como $X_\alpha \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$ e $P(X_\alpha) > 0$, segue que os preços em $t = 0$ dos ativos cujos preços em T estão em $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ juntamente com os preços em $t = 0$ dos ativos com preços em T definidos por X_α não permitem oportunidades de arbitragem, uma vez que uma combinação de elementos de $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ não permite que exista uma desigualdade estrita satisfeita pelos preços dos ativos em T e que não é satisfeita estritamente pelos preços em $t = 0$ e X_α e $P(X_\alpha)$ não poderiam mudar esse fato, visto que ambos possuem sinais iguais.

Finalmente, observe que $X_\alpha \geq Y_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathfrak{N}$ e para todo $\omega \in \Omega$. Ainda, $\lim_{\alpha\to\infty} Y_\alpha = \dfrac{1}{\omega} \succ 0$ para todo $\omega \in \Omega$ e $\liminf_{\alpha\to\infty} P(X_\alpha) = 0$. Portanto, existe um free lunch.

O Teorema 3.32 é muito interessante pois nos diz que se não há *free lunch*, então não há oportunidades de arbitragem. Contudo, apresentaremos um resultado que nos mostra que, ao se exigir que não exista *free lunch*, exige-se algo a mais dos preços pois se exige que eles respeitem uma propriedade muito importante.

Definição 3.34. *Um funcional linear L é* ***contavelmente aditivo*** *se, para cada sequência crescente não negativa* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *cujo limite é X,* $\lim_{n\to\infty} L(X_n) = L(X)$*. Se um funcional L não for contavelmente aditivo, dizemos que ele é* ***finitamente aditivo****.*

Diante da Definição 3.34, veremos através do teorema abaixo que, ao exigirmos que não exista *free lunch*, exigimos que os preços sejam contavelmente aditivos.

Teorema 3.35. *Se os preços são apenas finitamente aditivos, então existe um free lunch.*

Demonstração. Se os preços são finitamente aditivos então, pela Definição 3.34, existe uma sequência $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ e Z tais que $Z_n \leq Z$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\lim_n Z_n = Z$ mas $\lim_n P(Z_n) < P(Z)$. Seja $c \leq P(Z) - \lim_n P(Z_n)$, ou seja, $c > 0$. Seja $\mathfrak{N} = \mathbb{Z}^+$. Para cada $\alpha \in \mathfrak{N}$, seja $Y_\alpha = Z_\alpha - Z + \frac{c}{2}$ e $X_\alpha = Y_\alpha + \frac{c}{4}$. Segue que $X_\alpha \succ Y_\alpha$ para todo α,

$$\lim_\alpha Y_\alpha = \lim_\alpha (Z_n - Z) + \lim_\alpha \frac{c}{2} = \frac{c}{2} \succ 0$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_\alpha P(X_\alpha) &= \lim_\alpha \left[P(Z_\alpha) - P(Z) + P\left(\frac{c}{2}\right) + P\left(\frac{c}{4}\right) \right] \\
&= \lim_\alpha P(Z_\alpha) - P(Z) + \frac{c}{2} + \frac{c}{4} \\
&\leq \lim_\alpha P(Z_\alpha) - P(Z) + \frac{3[P(Z) - \lim_\alpha P(Z_\alpha)]}{4} \\
&= \frac{\lim_\alpha P(Z_\alpha) - P(Z)}{4} \\
&= -\frac{[P(Z) - \lim_\alpha P(Z_\alpha)]}{4} \leq 0.
\end{aligned}$$

Portanto, existe um *free lunch*. □

Capítulo 4

Considerações Finais

Na Parte I deste trabalho apresentamos uma abordagem teórica utilizando resultados da Teoria de Martingales para desenvolver resultados que garantissem a ausência de arbitragem em Modelos de Um ou de Vários Períodos, com ou sem inclusão de taxa de juros. Além disso, com a premissa de que um modelo não permitia oportunidades de arbitragem, desenvolvemos também resultados que precificavam, no presente, ativos não pertencentes ao modelo mas que eram replicáveis.

Já na Parte II desenvolvemos resultados bastante similares aos desenvolvidos na Parte I utilizando resultados da Teoria da Coerência. Entretanto, apenas para Modelos de Um Único Período e sem a inclusão de taxa de juros. Nesse contexto, conseguimos apresentar um resultado que precificava, não de modo único, ativos não replicáveis.

Agora, a título de conclusão, faremos uma breve comparação entre os resultados apresentados nas Partes I e II para modelos de um único período e sem a inclusão de taxa de juros. Desse modo, esta comparação se dará nos modelos mais simples, ou seja, aqueles modelos de precificação com um único período de tempo e sem inclusão de taxas de juros. A ideia é a de que, ao final desta discussão, possamos concluir as limitações e qualidades de cada abordagem.

Primeiramente, observe que as definições 1.10 e 3.11, ou seja, as definições de arbitragem da Parte I e da Parte II do trabalho, respectivamente, são análogas. De fato, relembrando que um portfólio $\boldsymbol{\beta}$ é uma combinação linear qualquer de ativos disponíveis no modelo de precificação e que

$$V_0 = \boldsymbol{\beta}^{tr} \begin{bmatrix} P(X_0) \\ P(X_1) \\ \vdots \\ P(X_n) \end{bmatrix} = \beta_0 P(X_0) + \ldots + \beta_n P(X_n)$$

e

$$V_T = \boldsymbol{\beta}^{tr} \begin{bmatrix} X_0^T \\ X_1^T \\ \vdots \\ X_n^T \end{bmatrix} = \beta_0 X_0^T(\omega) + \ldots + \beta_n X_n^T(\omega)$$

segue que os itens (i) e (ii) da Definição 1.10 equivalem à condição " há n finito, $X_0, \ldots, X_n \in \mathcal{X}$ e reais $\beta_0, \ldots, \beta_n$ tais que $\sum_{i=0}^{n} \beta_i P(X_i) \leq 0$ e $\sum_{i=0}^{n} \beta_i X_i(\omega) \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$" da Definição 3.11. Já a condição da desigualdade estrita para todo ω em um evento não nulo da definição 3.11 é equivalente ao item (iii) da Definição 1.10, uma vez que nesta assumimos que o conjunto de medida nula era vazio, ou seja, cada $\omega \in \Omega$ tinha probabilidade positiva de ocorrer.

Desse modo, o conceito de arbitragem é o mesmo nas duas abordagens e faz sentido compararmos as duas teorias apresentadas.

Observe agora que em ambas as abordagens temos resultados que garantem a ausência de arbitragem no Modelo de Precificação com um Único Período. Na Parte I, o resultado 1.19 nos diz que a existência do vetor de preços dos estados $\boldsymbol{\pi}$ é uma condição necessária e suficiente para não existir oportunidades de arbitragem no modelo. Já o Teorema 3.29 nos garante que a existência de um funcional linear estritamente positivo L definido em $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ tal que $L(X) = P(X)$ para todo preço em $t = T$ e $X \in \mathcal{X}$, sendo $L(1) = 1$, é necessária e suficiente para não haver oportunidades de arbitragem no modelo. Apesar de os dois resultados não terem uma equivalência direta, ambos podem ser utilizados para garantir que em um Modelo de Precificação com um Único Período não existam, de fato, oportunidades de arbitragem. Assim, até agora, podemos dizer que as duas abordagens são igualmente eficientes.

Seguindo a linha da escrita, a partir do momento que conseguimos garantir que não há oportunidades de arbitragem no Modelo de Precificação com um Único período, o próximo passo é o de inserir novos ativos no modelo, os quais sabemos o preço no tempo T e queremos precificar no tempo 0, de modo que o modelo resultante, o inicial acrescido de tais ativos, ainda preserve a ausência de arbitragem. Nessa linha, as duas abordagens nos apresentam resultados similares, contudo com diferenças importantes. Na Parte I, o Teorema 1.37 nos dispoẽ uma maneira de precificar esses novos ativos, de modo a preservar a ausência de arbitragem, desde que tais ativos sejam replicáveis, ou seja, os seus preços no tempo T sejam linearmente dependentes dos preços, em $t = T$, dos ativos já disponíveis no modelo. Já na abordagem apresentada na Parte II, como o preço P é um funcional linear, temos que todos os ativos cujo preço em T seja combinação linear de preços em $\mathcal{X}$ possuem um preço único em $t = 0$ livre de arbitragem. Desse modo, em modelos cujos ativos são todos replicáveis, ou seja, em modelos de mercados completos, as duas abordagens também podem ser consideradas igualmente eficientes.

Contudo, quando tratamos de modelos de mercados incompletos temos que existem ativos que não são replicáveis. Assim, na abordagem da Parte I não há maneira de precificar tal ativo que garanta a ausência de arbitragem do modelo acrescido deste. Contudo, na abordagem da Parte II, o Teorema 3.29 nos permite precificar (não de modo único) um ativo Y que não seja replicável, desde que $\underline{P}(Y) \neq \overline{P}(Y)$. Desse modo, podemos concluir que, nos modelos incompletos de um único período, a segunda abordagem é mais eficiente que a abordagem apresentada na Parte I, visto que conseguimos precificar uma gama maior de ativos de modo a garantir a ausência de arbitragem.

Entretanto, é válido ressaltar que, na abordagem da Parte II, um ativo que não é replicável pode tomar infinitos preços distintos em $t = 0$ que garantam a ausência de arbitragem. Sendo assim, escolher um preço dentre todas as opções pode não ser algo tão simples (imagine o quão difícil seria escolher um preço para um ativo que pode tomar qualquer valor entre $(0,\infty)!$), mas ainda assim temos como precificar um ativo não replicável de modo a evitar arbitragem, algo que a abordagem da Parte I não nos permite.

Em resumo, para os modelos de precificação mais simples podemos afirmar que a abordagem teórica da Parte II pode conseguir precificar uma gama maior de ativos e, ainda assim, garantir a ausência de arbitragem. Além disso, é válido recordar que todos os resultados da Parte II podem ser aplicados para modelos com espaço de estados da natureza Ω enumerável, enquanto os resultados na Parte I são garantidos apenas para Ω finito.

Apêndice A

Apêndice: Conceitos Básicos

A.1 Espaços Topológicos

Definição A.1. *Uma topologia em um conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:*

1. *$\emptyset$ e X estão em τ;*

2. *A união dos elementos de qualquer subcoleção de τ está em τ;*

3. *A intersecção de elementos de qualquer subcoleção finita de τ está em τ.*

Definição A.2. *Um par ordenado (X,τ), onde X é um conjunto e τ é uma topologia em X, é chamado **espaço topológico**. Neste trabalho, utilizaremos a nomenclatura "o espaço topológico X", mencionando τ somente quando houver ambiguidade.*

Definição A.3. *Dizemos que um subconjunto U de um espaço topológico X é um **conjunto aberto** de X se U pertence à coleção τ.*

Definição A.4. *Um subconjunto F de um espaço topológico X é **fechado** se seu complementar $X-F$ é aberto.*

Exemplo A.5. *O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ munido da topologia formada pela coleção de todos os intervalos abertos (a,b), para todo $a,b \in \mathbb{R}$, é um espaço topológico. Desse modo, todos os intervalos fechados $[a,b]$ são conjuntos fechados de $\mathbb{R}$.*

Definição A.6. *Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que uma função $f : X \to Y$, de um espaço topológico X em um espaço topológico Y é **contínua** quando a imagem inversa $f^{-1}(B)$ de todo conjunto aberto $B \subset Y$ for um conjunto aberto em X.*

A.2 Análise Real

Definição A.7. *Um conjunto $S \subset \mathbb{R}$ é **limitado superiormente** quando existe algum $b \in \mathbb{R}$ tal que $s \leq b$ para todo $s \in S$. Neste caso, dizemos que b é uma **cota superior** de S. Analogamente,*

*S é **limitado inferiormente** quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq s$ para todo $s \in S$. Dizemos que o número a é uma **cota inferior** de S. Se S é limitado superior e inferiormente, dizemos que S é um **conjunto limitado**.*

Definição A.8. *Seja $S \subset \mathbb{R}$. Se S for um conjunto limitado inferiormente, dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é o **ínfimo** do conjunto S quando é uma cota inferior de S e $a \geq a'$ para toda cota inferior a' de S. Analogamente, se S for limitado superiormente, o elemento $b \in S$ é o **supremo** do conjunto S quando é uma cota superior de S e $b \leq b'$ para toda cota superior b' de S.*

Teorema A.9. *Sejam $S, T \subseteq \mathbb{R}$ não vazios e λ um número real. Valem as seguintes afirmações:*

i) *Se S e T são limitados inferiormente então $S+T$ é limitado inferiormente, sendo $\inf(S+T) = \inf S + \inf T$.*

ii) *Se S e T são limitados superiormente então $S+T$ é limitado superiormente, sendo $\sup(S+T) = \sup S + \sup T$.*

iii) *Se S é limitado inferiormente e $\lambda \geq 0$ então λS é limitado inferiormente, sendo $\inf(\lambda S) = \lambda \inf S$.*

iv) *Se S é limitado superiormente e $\lambda \geq 0$ então λS é limitado superiormente, sendo $\sup(\lambda S) = \lambda \sup S$.*

v) *Se S é limitado inferiormente e $\lambda < 0$ então λS é limitado superiormente, e se tem $\sup(\lambda S) = \lambda \inf S$.*

vi) *Se S é limitado superiormente e $\lambda < 0$ então λS é limitado inferiormente, e se tem $\inf(\lambda S) = \lambda \sup S$.*

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser encontrado nas Referências [4] e [13]. □

Definição A.10. *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ diz-se limitada quando sua imagem $f(X)$ é um conjunto limitado. Escreve-se, às vezes, de modo abreviado:*

$$\inf_X f, \quad \sup_X f$$

para denotar respectivamente, o ínfimo $\inf f(X)$ e o supremo $\sup f(X)$ da imagem $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ de X pela função f.

Teorema A.11. *Sejam X um conjunto não vazio, $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções limitadas e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, valem as seguintes afirmações:*

i) *A soma $f+g$ de f e g é limitada, valendo $\inf_X f + \inf_X g \leq \inf_X (f+g) \leq \sup_X (f+g) \leq \sup_X f + \sup_X g$.*

ii) *O produto λf de f pelo número λ é limitado.*

iii) *Tem-se* $\inf_X(\lambda f) = \lambda \inf_X f$ *e* $\sup_X(\lambda f) = \lambda \sup_X f$ *se* $\lambda \geq 0$.

iv) *Tem-se* $\inf_X(\lambda f) = \lambda \sup_X f$ *e* $\sup_X(\lambda f) = \lambda \inf_X f$ *se* $\lambda < 0$.

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser encontrada nas Referências [4] e [13]. □

Definição A.12. *Uma sequência de funções* $f_n : X \to \mathbb{R}$ *(*$n = 1, 2, \ldots$*)* ***converge simplesmente*** *para a função* $f : X \to \mathbb{R}$ *quando, para todo* $x \in X$*, a sequência de números* $f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ *converge para* $f(x)$.

Assim, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *simplesmente em* X *quando, dados* $\varepsilon > 0$ *e* $x \in X$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *(dependendo de* ε *e* x*) tal que, se* $n > n_0$*, então* $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

A.3 Álgebra Linear e Análise Funcional

Definição A.13. *Um espaço vetorial é uma estrutura algébrica constituída por um corpo*[1] K *e por um conjunto não nulo* V *tal que:*

1) *Quaisquer dois elementos* $u, v \in V$ *unicamente determinam um terceiro elemento* $u + v \in V$ *chamado soma de* u *e* v *tal que*

  i) $u + v = v + u$ *(comutatividade);*

  ii) $(u + v) + r = u + (v + r)$ *(associatividade);*

  iii) *existe um elemento* $0 \in V$*, chamado nulo, com a propriedade de que* $v + 0 = v$ $\forall\, v \in V$*;*

  iv) *para todo* $v \in V$*, existe* $u \in V$ *tal que* $v + u = 0$.

2) *Qualquer* $\alpha \in K$ *e qualquer elemento* $u \in V$ *unicamente determinam* $\alpha u \in V$*, chamado produto de* α *e* u *tal que*

  i) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u,\ \alpha, \beta \in K$*;*

  ii) $1u = u$;

3) *As operações de adição e multiplicação obedecem duas leis distributivas:*

  i) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

  ii) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.

Se V *satisfizer todas as propriedades acima, dizemos que* V *é um espaço vetorial (sobre* K*).*

[1] Um corpo K é um conjunto onde estão definidas as operações de soma e multiplicação com as propriedades usuais. Os conjuntos dos números racionais e dos números reais são exemplos de corpos.

Definição A.14. *Seja W um subconjunto não vazio de um espaço linear V. Dizemos que W é um **subespaço linear**[2] de V se forem satisfeitas as seguintes condições:*

i) $0 \in W$;

ii) *Se* $u, v \in W$ *então* $u + v \in W$;

iii) *Se* $u \in W$ *então* $\alpha u \in W$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definição A.15. *Dizemos que os elementos $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de um espaço linear V são **linearmente dependentes** se existirem reais $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, não todos nulos tal que*

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \ldots + \lambda v_n = 0$$

*Se a equação acima implicar que $\alpha = \beta = \ldots = \lambda = 0$, os elementos $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são ditos **linearmentes independentes**.*

Os elementos de um subconjunto infinito $W \subset V$ são linearmente independentes se os elementos de cada subconjunto finito de W são linearmente independentes.

Definição A.16. *Seja V um espaço linear e $v_1, \ldots, v_n$ elementos de V. Dizemos que um elemento $v \in V$ é uma **combinação linear** dos elementos $v_1, \ldots, v_n$ se existirem reais $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ tais que*

$$v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \cdots + \lambda v_n.$$

Definição A.17. *Seja W um subconjunto de um espaço linear V. O **subespaço gerado** por W é o conjunto de todas as combinações lineares de elementos W. Quando este conjunto é o próprio V, dizemos que W **gera** V ou é um conjunto gerador de V.*

Definição A.18. *Uma **base** de um espaço linear V é um subconjunto $B \subset W$, linearmente independente, que gera V.*

Definição A.19. *Uma função real L definida em um espaço linear V é chamada **funcional** (em V). Ela é **aditiva** se*

$$L(u + v) = L(u) + L(v)$$

para todo $u, v \in V$, e homogênea se

$$L(\alpha u) = \alpha L(u)$$

para todo número real α.

Definição A.20. *Um funcional aditivo e homogêneo é chamado **funcional linear.** Se a função L é contínua, dizemos que o funcional L é **contínuo**, caso contrário dizemos que L é **descontínuo.***

Definição A.21. *Um funcional L definido em um espaço linear V é chamado de **sublinear** se*

[2]Note que todo subespaço vetorial W de um espaço vetorial V é ele próprio um espaço vetorial.

1) $L(\alpha v) = \alpha L(v)$ *para todo* $v \in V$ *e todo* $\alpha \geq 0$*;*

2) $L(u+v) \leq L(u) + L(v)$ *para todo* $u, v \in V$*.*

Definição A.22. *Dado um espaço linear V e um subespaço $V_0 \subset V$, seja L_0 um funcional linear definido em V_0. Um funcional linear L no espaço geral V é chamado uma* ***extensão*** *do funcional L_0 se $L(u) = L_0(u)$ para todo $u \in V_0$.*

Teorema A.23 (Teorema de Hahn-Banach). *Seja L um funcional sublinear definido em um espaço linear real V e V_0 um subespaço de V. Seja L_0 um funcional linear definido em V_0 satisfazendo a condição*

$$L_0(u) \leq L(u) \tag{1.1}$$

em V_0. Então L_0 pode ser estendido a um funcional linear L_1 satisfazendo a condição (1.1) em todo espaço V.

Demonstração. Assuma que $V_0 \neq V$ porque, caso contrário, basta tomar $L_1 = L_0$.

Nosso objetivo é mostrar que L_0 pode ser estendido para o espaço V sem violar a condição (1.1).

Seja v um elemento qualquer de $V \cap (V_0)^c$ e seja M_v o subespaço gerado por V_0 e o elemento v, isto é, o conjunto

$$M_v = \{u + \lambda v : u \in V_0, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Se L_{M_v} é a extensão de L_0 em M_v, nós devemos ter

$$L_{M_v}(u+\lambda v) = L_0(u) + \lambda L_{M_v}(v) \text{ ou}$$

$$L_{M_v}(u+\lambda v) = L_0(u) + \lambda c$$

sendo $L_{M_v}(v) = c$.

Agora verifiquemos para quais valores de c a condição $L_{M_v}(u+\lambda v) \leq L(u+\lambda v)$ é satisfeita, ou seja,

$$L_0(u) + \lambda c \leq L(u+\lambda v). \tag{1.2}$$

Se $\lambda > 0$, (1.2) equivale a

$$L_0\left(\tfrac{u}{\lambda}\right) + c \leq L\left(\tfrac{u}{\lambda} + v\right)$$

ou

$$c \leq L\left(\frac{u}{\lambda} + v\right) - L_0\left(\frac{u}{\lambda}\right). \tag{1.3}$$

E se $\lambda < 0$, (1.2) equivale a

$$L_0\left(\frac{u}{\lambda}\right) + c \geq L\left(\frac{u}{\lambda} + v\right) = -L\left(-\frac{u}{\lambda} - v\right)$$

ou

$$c \geq -L\left(-\frac{u}{\lambda} - v\right) - L_0\left(\frac{u}{\lambda}\right). \tag{1.4}$$

Agora devemos mostrar que existe sempre um valor c que satisfaz (1.3) e (1.4). Sejam r_1 e r_2 elementos quaisquer de V_0. Então, pela condição (1.1) e a sublineariedade de L, temos

$$L_0(r_2) - L_0(r_1) \leq L(r_2 - r_1) = L[(r_2 + v) - (r_1 + v)] \leq L(r_2 + v) + L(-r_1 - v),$$

e então

$$-L_0(r_2) + L(r_2 + v) \geq -L_0(r_1) - L(-r_1 - v). \tag{1.5}$$

Definindo

$$c_1 = \sup_{r_1}\{-L_0(r_1) - L(-r_1 - v)\}$$

e

$$c_2 = \inf_{r_2}\{-L_0(r_2) + L(r_2 + v)\},$$

temos que $c_2 \geq c_1$ (segue de (1.5) e do fato de r_1 e r_2 serem arbitrários). Portanto, escolhendo c tal que $c_2 \geq c \geq c_1$, o funcional L_{M_v} definido em M_v, satisfaz (1.1).

Para completar a prova, assuma inicialmente que V é gerado por um conjunto enumerável de elementos $v_1, v_2, \ldots$ de V. Então, construímos um funcional em V por indução, ou seja, construindo uma sequência de subespaços

$$V_1 = \{V_0, v_1\}, V_2 = \{V_1, v_2\}, \ldots,$$

cada um contendo o precedente. Aqui, $\{V_k, v_{k+1}\}$ denota o subespaço gerado por V_k e v_{k+1}. Este processo estende o funcional por todo o espaço V desde que todo elemento de $v \in V$ pertença a algum subespaço L_k.

Se não existe conjunto enumerável que gera V, o teorema é demonstrado usando o Lema de Zorn e indução transfinita. Ver Referência [7]. □

A.3.1 O Teorema do Hiperplano Separador

Definição A.24. *Sejam* $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *e* $c \in \mathbb{R}$. *O conjunto*

$$H(\beta, c) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i = \langle \beta, y \rangle = c \right\}.$$

é denominado hiperplano (no $\mathbb{R}^n$*) que passa por c.*

Definição A.25. *Um subconjunto* $C \subset \mathbb{R}^n$ *é convexo se, e só se, para todo* x *e* $y \in C$ *e* $0 \leq t \leq 1$ *temos* $tx + (1-t)y \in C$.

Propriedade A.26. *Um conjunto $K \in \mathbb{R}^n$ é compacto quando é limitado e fechado.*

Teorema A.27 (Teorema do Hiperplano Separador). *Seja K,C dois conjuntos convexos disjuntos de $\mathbb{R}^n$ e suponha que K é compacto. Então existe um funcional linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que*

$$
\begin{aligned}
L(x) > \alpha \quad \forall x \in K \\
L(x) < \alpha \quad \forall x \in C
\end{aligned}
$$

Demonstração. A Demonstração deste resultado pode ser encontrado a partir da página 8 da Referência [14]. □

Corolário A.28. *Suponha que K é um subconjunto compacto convexo de $\mathbb{R}^n$ e que W é um subespaço linear com $K \cap W = \emptyset$. Então existe um vetor $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\pi}^{tr}\, \boldsymbol{w} = 0, \ \forall \ \boldsymbol{w} \in W \\
\boldsymbol{\pi}^{tr}\, \boldsymbol{k} > 0, \ \forall \ \boldsymbol{k} \in K,
\end{aligned}
$$

onde $\boldsymbol{\pi}^{tr}$ denota o transposto de $\boldsymbol{\pi}$.

Demonstração. A demonstração deste Corolário pode ser visto a partir da página 10 da Referência [14]. □

A.3.2 O Teorema do Posto

Teorema A.29 (Teorema do Posto). *Consideremos um sistema linear com m equações e n incógnitas $AX = B$, onde A é a matriz dos coeficientes, X é a matriz das incógnitas e B é a matriz dos termos independentes. Sejam ρ_{AB} o posto da matriz ampliada do sistema e ρ_A o posto da matriz dos coeficientes do sistema. Então*

- *O sistema é possível se, e somente se, $\rho_{AB} = \rho_A$*
- *O sistema é possível e determinado se $\rho_{AB} = \rho_A = n$.*
- *O sistema é possível e indeterminado se $\rho_{AB} = \rho_A < n$. Neste caso, $n - \rho_A$ é o número de incógnitas livres do sistema, ou seja, incógnitas que podem assumir qualquer valor real.*

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser encontrada na página 49 da Referência [8]. □

A.4 Teoria de Probabilidades

Considere um experimento aleatório, ou seja, um experimento cujo resultado é desconhecido.

Definição A.30. *Dado um experimento aleatório, o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento, o qual denotaremos por Ω, é denominado **espaço amostral**.*

Nos capítulos posteriores, nos referiremos ao espaço amostral como sendo o **espaço de estados da natureza** ou de **espaço de estados.**

Exemplo A.31. *Considere o lançamento de uma moeda honesta e que estamos interessados em saber se o resultado é cara ou coroa. Temos que tal experimento é aleatório uma vez que não sabemos, antes de realizá-lo, qual é o resultado. Contudo, sabemos que os resultados possíveis são cara ou coroa. Assim, $\Omega = \{Cara, Coroa\}$.*

Definição A.32. *Seja Ω um conjunto não vazio. Uma $\sigma-$álgebra de Ω é uma coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω tal que*

i) $\emptyset \in \mathcal{F}$;

ii) Se $A \in \mathcal{F}$, então $A^c = \Omega - A \in \mathcal{F}$;

iii) Se $A_1, A_2, \ldots$ é uma coleção enumerável de elementos de $\mathcal{F}$, então $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

*O par $(\Omega, \mathcal{F})$ é chamado **espaço mensurável**.*

Definição A.33. *Na Teoria de Probabilidades, os elementos de uma $\sigma-$álgebra são chamados de **eventos aleatórios** ou simplesmente **eventos**.*

Se um experimento aleatório tem um conjunto de possíveis resultados Ω, então dizemos que o evento $A \subseteq \Omega$ ocorreu se o resultado $\omega \in \Omega$ de tal experimento pertence a A. Informalmente, os eventos que pertencem a uma $\sigma-$álgebra são aqueles que podemos decidir se ocorreram ou não dada a informação disponível sobre experimentos já realizados. Desse modo, podemos dizer que $\sigma-$álgebras modelam informação.

Exemplo A.34. *Se Ω é um conjunto não vazio de resultados possíveis de um experimento, então, $\{\emptyset, \Omega\}$ e o conjunto das partes[3] de Ω, o qual denotaremos por $\mathcal{P}(\Omega)$ são, respectivamente, a menor e a maior $\sigma-$ álgebras de Ω. A primeira corresponde a não ter informação nenhuma, ou seja, sabe-se apenas que um dos resultados possíveis pode ser observado enquanto que a última contém toda informação referente ao resultado do experimento, ou seja, tudo é observável.*

Definição A.35. *Considere o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. A menor $\sigma-$álgebra que contém todos os intervalos abertos de $\mathbb{R}$ é chamada $\sigma-$álgebra de Borel e é denotada por $\mathcal{B}$.*

[3]Dado um conjunto Ω, o conjunto formado por todos os subconjuntos de Ω é chamado conjunto das partes de Ω.

A $\sigma-$álgebra de Borel é a $\sigma-$álgebra natural com a qual trabalhar quando se trata de $\mathbb{R}$. Pense em termos de um experimento aleatório, como escolher um número da reta real. Tal $\sigma-$álgebra é capaz de responder as questões mais básicas que podem ser feitas a respeito de tais experimentos. Isso ficará claro no próximo exemplo.

Exemplo A.36. *Considere um experimento aleatório que corresponde a selecionar um número X pertencente a $\mathbb{R}$. Imagine que queremos saber se X está entre números reais quaisquer a e b. Como o conjunto aberto (a,b) está em $\mathcal{B}$, podemos decidir se (a,b) ocorreu ou não. Se ele ocorreu então X está entre a e b, caso contrário não.*

E se quisermos saber se $X \geq a$? A visualização do evento $[a,\infty)$ como um conjunto de Borel é como segue: para cada $n \in \mathbb{N}$, note que $B_n = (a - \frac{1}{n}, \infty)$ é uma união enumerável dos intervalos abertos $B_n = \bigcup_k (a - \frac{1}{n}, k)$. Portanto, cada $B_n \in \mathcal{B}$. Agora, $[a,\infty) = \bigcap_n B_n$ é uma interseção enumerável de elementos de $\mathcal{B}$ e portanto também pertence a $\mathcal{B}$. Assim, também conseguimos responder a essa pergunta.

As demais perguntas que podem ser feitas com relação ao valor de X em $\mathbb{R}$ também podem ser respondidas através da $\sigma-$álgebra de Borel, o que a faz ser a mais natural, visto que qualquer outra $\sigma-$álgebra que contenha todos os intervalos possíveis de $\mathbb{R}$ e, portanto, possa responder todos esses tipos de perguntas, deve conter todos os elementos de $\mathcal{B}$.

Observação A.37. *Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ duas $\sigma-$álgebras definidas num mesmo espaço amostral. Se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ dizemos que $\mathcal{G}$ é* ***mais fina*** *do que $\mathcal{F}$. Segue que $\mathcal{G}$ contém mais informação do que $\mathcal{F}$, visto que possui mais eventos. Isso significa, informalmente, que $\mathcal{G}$ pode "responder" a mais perguntas do que $\mathcal{F}$.*

Definição A.38. *Suponha que $(\Omega, \mathcal{F})$ é um espaço mensurável. Uma função $Q : \mathcal{F} \to [0,1]$ é uma* ***medida de probabilidade*** *em $(\Omega, \mathcal{F})$ se:*

i) $Q(\Omega) = 1$*;*

ii) Se $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ é uma família enumerável de elementos de $\mathcal{F}$ os quais são dois a dois disjuntos (isto é, $A_n \cap A_m = \emptyset$ se $n \neq m$), então

$$Q\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} Q(A_n).$$

Dizemos que Q é $\sigma-$aditiva.

A tripla $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ é chamada ***espaço de probabilidade****.*

Definição A.39. *Dizemos que evento $A \in \mathcal{F}$ tem medida nula se $Q(A) = 0$.*

Definição A.40. *Suponha que $(S, \mathcal{A})$ e $(T, \mathcal{B})$ são espaços mensuáveis. Uma função $f : S \to T$ é dita $\mathcal{A}/\mathcal{B}-$* ***mensurável*** *(ou simplesmente mensurável) se, e somente se,*

$$\forall\, B \in \mathcal{B} \Rightarrow f^{-1}(B) = \{s \in S | f(s) \in B\} \in \mathcal{A}.$$

Definição A.41. *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ *um espaço de probabilidade. Uma* ***variável aleatória*** *é uma função*

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}),$$

que é $\mathcal{F}/\mathcal{B}-$*mensurável.*

Teorema A.42. *Somas e produtos de funções mensuráveis são mensuráveis.*

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser encontrada na página 30 da referência [20]. □

Corolário A.43. *Somas e produtos de variáveis aleatórias são variáveis aleatórias.*

As **funções indicadoras** são uma classe especial de variáveis aleatórias. Se $A \subseteq \Omega$, definimos a função indicadora I_A[4] por

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A \\ 0 & \text{se caso contrário.} \end{cases}$$

Definição A.44. *Seja* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *uma função real. Definimos a* ***$\sigma-$álgebra gerada por*** X*, denotada por* $\sigma(X)$ *pela família*

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}.$$

Similarmente, dada uma família $\mathcal{X}$ *de funções de* Ω *em* $\mathbb{R}$*, definimos a* $\sigma-$*álgebra gerada por todos os eventos* $X^{-1}(B)$*, onde* $X \in \mathcal{X}$ *e* $B \in \mathcal{B}$*, a qual denotamos por* $\sigma(\mathcal{X})$*.*

A.4.1 Probabilidade Condicional

Suponha que lancemos dois dados. Suponha também que cada um dos 36 resultados possíveis sejam equiprováveis, ou seja, tenham a mesma probabilidade de ocorrer. Assim, para cada $\omega \in \Omega$, em que Ω é formado pelos 36 resultados possíveis, $Q(\omega) = \frac{1}{36}$. Além disso, digamos que o primeiro resultado seja 3. Então, dado que conhecemos essa informação, qual é a probabilidade de que a soma dos dois dados seja igual a 8?

Para calcular essa probabilidade, devemos pensar do seguinte modo: sabendo que saiu o número 3 no primeiro dado, existirão no máximo seis resultados possíveis para o nosso experimento, os quais são $(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)$. Como cada um desses resultados tinha originalmente a mesma probabilidade de ocorrência, os resultados deveriam continuar a ter probabilidades iguais. Isto é, se o primeiro lançamento resultou em 3, a probabilidade (condicionada a esse fato) de cada um dos seis resultados possíveis é $\frac{1}{6}$, enquanto que a probabilidade (também condicionada) dos outros 30 outros eventos do espaço amostral é 0. Com isso, a probabilidade desejada será igual a $\frac{1}{6}$.

[4] Note que $I_A : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ é uma variável aleatória se, e somente se, $A \in \mathcal{F}$.

Se A e B representam, respectivamente, o evento em que o primeiro dado é 3 e o evento em que a soma dos dados é 8, então a probabilidade que acabamos de obter é chamada de **probabilidade condicional** de que B ocorra dado que A ocorreu e é representada por $P(B \mid A)$.

No caso geral, se um evento qualquer A ocorrer, então, para que um outro evento B ocorra é necessário que a ocorrência real seja um ponto tanto em A quanto em B, isto é, ele deve estar em $A \cap B$. Assim, como sabemos que A ocorreu, tem-se que A se torna nosso novo, e agora reduzido, espaço amostral. Com isso, a probabilidade de que o evento $A \cap B$ ocorra será igual à probabilidade de $A \cap B$ relativa à probabilidade de A. Formalmente, temos a seguinte definição.

Definição A.45. *Se A e B são eventos e $Q(A) \neq 0$, definimos a* ***probabilidade condicional de** B **dado*** *A por*

$$Q(B \mid A) = \frac{Q(A \cap B)}{Q(A)}.$$

Se $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ é um espaço de probabilidade, e se $A \in \mathcal{F}$ com $Q(A) > 0$, então $(\Omega, \mathcal{F}, Q(\,\cdot\,|A))$ é também um espaço de probabilidade.

A.4.2 Esperança e Esperança Condicional

Definição A.46. *Uma variável aleatória X é dita* ***discreta*** *se o número de valores possíveis para X for enumerável.*

Observação A.47. *Em palavras, uma variável aleatória discreta só pode assumir, no máximo, um número enumerável de valores possíveis $x_1, x_2, \ldots$.*

Definição A.48. *Se X é uma variável aleatória discreta com medida de probabilidade Q, então a* ***esperança*** *ou* ***valor esperado*** *de X, denotada por $E(X)$, é definida por*

$$E(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j Q(A_j),$$

em que cada $A_j \in \mathcal{F}$.

Em palavras, a esperança de X é uma média ponderada dos possíveis valores que X pode receber, com cada valor sendo ponderado pela probabilidade de que X seja igual a esse valor.

Teorema A.49. *Sejam X e Y duas variáveis aleatórias discretas. Então as seguintes sentenças são verídicas:*

i) Se $E(X) > 0$, então existe $A \in \mathcal{F}$ com $Q(A) > 0$ tal que $X(\omega) > 0$ para todo $\omega \in A$;

ii) $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.

Demonstração. O item (i) segue diretamente da Definição A.48. Já a demonstração do item (ii) pode ser encontrada na página 67 de [16]. □

Definição A.50. *Seja X uma variável aleatória discreta. A* ***esperança condicional*** *de X dada uma $\sigma-$ágebra $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, denotada por $E(X \mid \mathcal{G})$ é uma variável aleatória discreta Z satsifazendo*

i) *Z é $\mathcal{G}/\mathcal{B}-$mensurável;*

ii) *Para todo $F \in \mathcal{G}$,*
$$E(XI_F) = E(ZI_F).$$

Teorema A.51. *Sejam X e Y duas variáveis aleatórias discretas, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$. Então*

ii) *$E(E(X \mid \mathcal{G})) = E(X)$;*

ii) *$E(aX + bY \mid \mathcal{G}) = aE(X \mid \mathcal{G}) + bE(Y \mid \mathcal{G})$;*

iii) *Se X é $\mathcal{G}-$mensurável, então $E(X \mid \mathcal{G}) = X$;*

iv) *$E(c \mid \mathcal{G}) = c$ para todo $c \in \mathbb{R}$;*

v) *$E(X \mid \{\emptyset, \Omega\}) = E(X)$.*

Demonstração. As demostrações das propriedades acima podem ser encontradas a partir da página 471 da Referência [6]. □

A.5 Partições e $\sigma-$Álgebras

Quando lidamos com espaços amostrais finitos é mais interessante pensarmos em termos de **partições** do espaço amostral do que propriamente $\sigma-$álgebras. As partições podem ser pensadas como uma coleção de conjuntos que dividem o espaço amostral em “blocos”. Formalmente, temos a definição a seguir.

Definição A.52. *Seja Ω um conjunto não vazio e finito. Uma coleção $A_1, \ldots, A_n$ de subconjuntos não vazios de Ω é chamada uma* ***partição*** *de Ω se:*

i) *todo $\omega \in \Omega$ pertence a um único A_i, isto é, $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$,*

ii) *$A_1 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.*

A partir de agora apresentaremos alguns resultados a fim de pensarmos apenas em termos de partições do espaço amostral. O primeiro resultado que apresentaremos define uma outra coleção de conjuntos, denominado álgebra, que é de certo modo mais fraco que o conceito de $\sigma-$álgebra.

Definição A.53. *Seja Ω um espaço amostral. Uma coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de Ω é uma* ***álgebra*** *se*

i) *$\Omega \in \mathcal{C}$;*

ii) Se $A,B \in \mathcal{C}$, então $A \cup B \in \mathcal{C}$;

ii) Se $A \in \mathcal{C}$, então $A^c \in \mathcal{C}$.

Observação A.54. *Observe que a diferença entre álgebras e $\sigma-$álgebras consiste na exigência que a união enumerável de elementos dessa (e portanto intersecção enumerável também) esteja na coleção, enquanto que numa álgebra só exigimos que as uniões finitas (e portanto intersecções finitas) de elementos da coleção pertençam à mesma. Contudo, quando nosso espaço amostral Ω é finito, álgebras e $\sigma-$álgebras são exatamente o mesmo objeto.*

Definição A.55. *Seja $A_1,\ldots,A_n$ uma partição de um conjunto finito e não vazio Ω. A coleção formada pelas uniões de finitos A_i's é uma álgebra, denominada* ***algébra gerada pela partição*** *$A_1,\ldots,A_n$.*

Teorema A.56. *Toda álgebra $\mathcal{C}$ em um espaço amostral finito Ω é gerada por uma única partição de Ω. Em outras palavras, existe uma bijeção entre álgebras e partições.*

Demonstração. Observe inicialmente que, dada uma partição $\mathfrak{A} = \{A_1,...,A_K\}$ de um espaço amostral finito Ω, a álgebra (e, portanto, $\sigma-$álgebra) gerada por essa partição é

$$\sigma(\mathfrak{A}) = \left\{ \bigcup_{k \in I} A_k, I \subseteq \{1,...,K\} \right\},$$

ou seja, o conjunto de todas as uniões possíveis de elementos da partição $\mathfrak{A}$.

Seja $\mathcal{F}$ uma álgebra sobre Ω. Como Ω é finito segue que $\mathcal{F}$ é finita. Defina

$$\mathfrak{A} = \{A \in \mathcal{F} \mid A \neq \emptyset \text{ e } (A \cap F = \emptyset \text{ ou } A \cap F = A) \text{ para todo } F \in \mathcal{F}\},$$

a qual denominaremos de *classe dos átomos*. Temos que $\mathfrak{A} \neq \emptyset$. De fato, suponha que $\mathfrak{A} = \emptyset$. Assim, para todo $A \neq \emptyset$, $A \in \mathcal{F}$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $A \cap F \neq \emptyset$ e $A \cap F \neq A$, ou seja, todo subconjunto não vazio de $\mathfrak{A}$ teria um subconjunto não vazio e próprio. Se aplicássemos esse raciocínio repetidas vezes, concluiríamos que todo subconjunto não vazio teria infinitos subconjuntos próprios, o que contradiz o fato de $\mathcal{F}$ ser finita. Portanto $\mathfrak{A}$ é não vazia.

Além disso, para quaisquer $A_i, A_j \in \mathfrak{A}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$. De fato, se $i \neq j$, temos pela Definição do conjunto $\mathfrak{A}$ que,

$$(A_i \cap A_j) \cap A_i = A_i \cap A_j = \begin{cases} \emptyset \\ \text{ou} \\ A_i \end{cases}$$

e

$$(A_i \cap A_j) \cap A_j = A_i \cap A_j = \begin{cases} \emptyset \\ \text{ou} \\ A_j \end{cases}.$$

Se $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ para $i \neq j$, teríamos $A_i = A_j$, o que é um absurdo. Portanto, $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$.

Ainda, a união de todos os conjuntos $A \in \mathfrak{A}$ é igual à Ω. De fato, como $\mathcal{F}$ é finito, segue que $\mathfrak{A} = \{A_1, ..., A_K\}$ e se $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_K \neq \Omega$, segue que o conjunto $\Omega \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_K) \notin \mathfrak{A}$ possuiria uma infinidade de subconjuntos próprios não vazios, o que é uma contradição. Portanto, $A_1 \cup \cdots \cup A_K = \Omega$. Desse modo, segue que $\mathfrak{A}$ é uma partição de Ω.

Mostremos agora que $\mathcal{F} = \sigma(\mathfrak{A})$. Note que, para $F \in \mathcal{F}$,

$$F = (F \cap A_1) \cup (F \cap A_2) \cup \cdots \cup (F \cap A_K).$$

Como, pela Definição de $\mathfrak{A}$, $F \cap A_i$ é $\emptyset$ ou A_i, segue que F é uma união disjunta de elementos de $\mathfrak{A}$, isto é, $F \in \sigma(\mathfrak{A})$. Além disso, $\mathfrak{A}$ é a única partição de Ω tal que $\mathcal{F} = \sigma(\mathfrak{A})$. De fato, suponha que exista uma outra partição de Ω, denotada por $\mathfrak{A}' = \{A'_1, \ldots, A'_l\}$, tal que

$$\mathcal{F} = \sigma(\mathfrak{A}') = \sigma(\mathfrak{A}).$$

Então, para todo $i = 1, \ldots, K$, existe J_i tal que

$$A_i = \sum_{j \in J_i} A'_j.$$

Como cada A'_j é um subconjunto não vazio de A_i e A_i é um átomo, segue que $A'_j = A_i$, e então J_i é unitário. Assim, podemos definir $J_i = \{t(i)\}, i = 1, ..., K$. Portanto, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'$, o que implica $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$. Portanto, existe uma bijeção entre álgebras (e portanto $\sigma-$álgebras) e partições quando Ω é finito.

$\square$

A partir da Observação A.54 e do Teorema A.56, mostramos que cada partição gera uma única álgebra e, portanto, uma única $\sigma-$álgebra. O próximo resultado é muito importante e será bastante utilizado na Parte I do trabalho.

Teorema A.57. *Sejam Ω um espaço amostral finito, $\mathfrak{A}$ uma partição de Ω, $\mathcal{F} = \sigma(\mathfrak{A})$, $\mathcal{B}$ a $\sigma-$álgebra de Borel em $\mathbb{R}$ e $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Então X é $\mathcal{F}/\mathcal{B}-$mensurável se, e somente se, X é constante em cada $A \in \mathfrak{A}$.*

Demonstração. Suponha que X seja mensurável e que existam $\omega_1, \omega_2 \in A$, para algum $A \in \mathfrak{A}$ com $\omega_1 \neq \omega_2$ tais que $X(\omega_1) = x_1 \neq x_2 = X(\omega_2)$. Como a $\sigma-$álgebra em $\mathbb{R}$ é a $\sigma-$álgebra de Borel, segue que $B_1 = \{x_1\} \in \mathcal{B}$ e $B_2 = \{x_2\} \in \mathcal{B}$. Temos que

$$\omega_1 \in A \cap X^{-1}(B_1)$$

e

$$\omega_2 \in A \cap X^{-1}(B_2).$$

Assim, como X é mensurável por hipótese, temos que $X^{-1}(B_1)$ contém A porque $X^{-1}(B_1) \in \mathcal{F}$.

Contudo, $\omega_2 \notin X^{-1}(B_1)$ e $\omega_2 \in A$, o que é uma contradição. Portanto, se X é mensurável segue que é constante em cada elemento da partição.

Reciprocamente, suponha que X seja constante em cada $A_i \in \mathfrak{A}$, $i = 1,...,K$, e que assuma o valor x_i em A_i. Seja $B \in \mathcal{B}$. Então,

$$X^{-1}(B) = \bigcup_{i \,|\, x_i \in B} A_i \in \mathcal{F}.$$

Portanto, X é $\mathcal{F}/\mathcal{B}-$mensurável. □

A.5.1 Esperança Condicional dada uma Partição

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ um espaço de probabilidade e $\mathfrak{A} = \{A_1, \ldots, A_K\}$ uma partição de Ω, em que $Q(A_i) > 0$ para todo $i = 1, \ldots, K$. Seja ainda $F \in \mathcal{F}$ um evento e $Q(F \mid A_i)$ a probabilidade condicional de F dado A_i.

A um conjunto de probabilidades condicionais $\{Q(F \mid A_i) \mid i = 1,...,K\}$, podemos associar a variável aleatória

$$Q(F \mid \mathfrak{A})(\omega) = \sum_{i=1}^{K} Q(F \mid A_i) I_{A_i}(\omega),\ \omega \in \Omega,$$

que assume o valor $Q(F \mid A_i)$ em A_i para $i = 1, \ldots, K$.

Definição A.58. *A variável aleatória $Q(F \mid \mathfrak{A})$ é a probabilidade condicional do evento $F \in \mathcal{F}$ dada a partição $\mathfrak{A}$.*

Diante disso, podemos definir a esperança de uma variável aleatória condicionada a uma partição como segue.

Definição A.59. *Considere o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ e seja X uma variável aleatória que asume os valores $x_1, \ldots, x_n$. A esperança condicional de X dada a partição finita $\mathfrak{A} = \{A_1, \ldots, A_K\}$ de Ω é definida como*

$$E[X \mid \mathfrak{A}] = \sum_{j=1}^{n} x_j Q(F_j \mid \mathfrak{A}),$$

em que $F_j = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_j\}$.

Observe que a esperança condicional $E[X \mid \mathfrak{A}]$ é uma variável aleatória. Além disso, para todo $\omega \in A_i$, temos que $E(X \mid \mathfrak{A})(\omega) = \sum_{j=1}^{n} x_j Q(F_j \mid A_i)$. Como consequência, segue que a esperança condicional de X dado um elemento A_i da partição $\mathfrak{A}$, denotada por $E[X \mid A_i]$, é

$$E[X \mid A_i] = \sum_{j=1}^{n} x_j Q(F_j \mid A_i) = \frac{E[X I_{A_i}]}{Q(A_i)}$$

e

$$E(X \mid \mathfrak{A})(\omega) = \sum_{i=1}^{K} E(X \mid A_i) I_{A_i}(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Teorema A.60. *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ um espaço de probabilidade e X uma variável aleatória discreta com $E(X) < \infty$. Se $\mathcal{G} = \sigma(\mathfrak{A})$, em que $\mathfrak{A}$ é uma partição de Ω, então*

$$E(X \mid \mathcal{G}) = E(X \mid A_i).$$

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser encontrada na página 215 da Referência [18]. □

Teorema A.61. *Sejam X e Y variáveis aleatórias discretas, $a, b \in \mathbb{R}$, $X_c = c$ uma função constante e $\mathfrak{A}$ uma partição finita de Ω. Então as seguintes propriedades são satisfeitas.*

i) $E(aX + bY \mid \mathfrak{A}) = aE[X \mid \mathfrak{A}] + bE[Y \mid \mathfrak{A}]$;

ii) $E(X \mid \Omega) = E(X)$;

iii) $E(c \mid \mathfrak{A}) = c$;

iv) *Se* $X = I_F(\omega)$. *Então* $E(X \mid \mathfrak{A}) = Q(F \mid \mathfrak{A})$;

v) $E(E(X \mid \mathfrak{A})) = E[X]$.

Demonstração. As demonstrações das propriedades listadas acima podem ser encontradas a partir da página 77 da Referência [18]. □

Teorema A.62. *Sejam X uma variável aleatória discreta e Y uma variável aleatória mensurável com respeito a $\sigma(\mathfrak{A})$. Então, temos que*

$$E[XY \mid \mathfrak{A}] = YE[X \mid \mathfrak{A}].$$

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser encontrado a partir da página 215 da Referência [18]. □

Teorema A.63. *Considere $\mathfrak{A}_1$ e $\mathfrak{A}_2$ partições de Ω tais que $\sigma(\mathfrak{A}_1) \subset \sigma(\mathfrak{A}_2)$. Para toda variável aleatória discreta X, temos que*

$$E[E(X \mid \mathfrak{A}_1) \mid \mathfrak{A}_2](\omega) = E[E(X \mid \mathfrak{A}_2) \mid \mathfrak{A}_1](\omega) = E(X \mid \mathfrak{A}_1)(\omega), \;\; \omega \in \Omega.$$

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser encontrado a partir da página 215 da Referência [18]. □

A.6 Processos Estocásticos e Filtrações

Definição A.64. *Suponha que $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ é um espaço de probabilidade. Uma sequência não decrescente*

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}$$

de $\sigma-$álgebras em Ω é chamada uma ***filtração***.

Definição A.65. *Um **processo estocástico em tempo discreto** $(X^t)_{t=0,\ldots,T}$ é uma sequência de variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço amostral Ω.*

Definição A.66. *Um processo estocástico $(X^t)_{t=0,\ldots,T}$ é **adaptado** à filtração $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_0, \ldots, \mathcal{F}_T\}$ se cada variável aleatória X^t é $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}-$mensurável.*

A.7 Martingales

Os martingales são objetos muito importantes na Teoria de Probabilidades e para o Modelo de Precificação com Finitos Períodos, que trataremos na Parte I, tais objetos se tornam indispensáveis. A seguir definiremos tais objetos e apresentaremos alguns resultados que serão úteis no decorrer do texto.

Definição A.67. [5] *Um processo estocástico $Y = (Y_n \mid n \in \mathbb{N})$, em que $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$, é chamado **martingale** com respeito à filtração $\mathcal{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$ se, e somente se,*

i) Para todo Y_n, $E(Y_n)$ existe e é finito;

ii) Y é adaptado à filtração $\mathcal{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$;

iii) $E(Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = Y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema A.68. *Sejam X e Y dois martingales com respeito a uma mesma filtração $\mathcal{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Então $X + Y$ também é um martingale com respeito a tal filtração.*

Demonstração. De fato, segue do item (ii) do Teorema A.51 e do fato de X e Y serem martingales que

$$E(X_n + Y_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) + E(Y_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1} + Y_{n-1}.$$

Portanto, $X + Y$ é um martingale.

□

Teorema A.69. *Seja $Y = \{Y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ um processo estocástico discreto, em que cada $\mathcal{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$ é gerada por uma partição de Ω. Então Y é um martingale se, e somente se,*

$$E(X_n \mid \mathcal{F}_s) = X_s$$

para qualquer $s < n$.

Demonstração. De fato, suponha que $E(X_n \mid \mathcal{F}_s) = X_s$ para qualquer $s < n$, então, tomando $s = n - 1$, temos que X é um martingale.

[5] Observe que podemos tomar como conjunto de índices do processo estocástico acima um subconjunto finito de $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ e a generalização da definição A.67 não traz nenhum problema.

Reciprocamente, suponha que X é um martingale, ou seja, $E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$. Assim, pelo Teorema A.63, temos que

$$E(X_n \mid \mathcal{F}_s) = E(E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) \mid \mathcal{F}_s) = E(X_{n-1} \mid \mathcal{F}_s).$$

Usando indução finita temos que

$$E(X_n \mid \mathcal{F}_s) = X_s.$$

□

Definição A.70. *Um processo estocástico $C = \{C_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ é **previsível** com respeito à filtração $\mathcal{F}_n$ se cada C_n é $\mathcal{F}_{n-1}-$mensurável, para $n \geq 1$.*

Definição A.71. *Se C é um processo estocástico previsível e Y é um processo adaptado (ambos com respeito a uma mesma filtração $\mathcal{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$), então a **transformação martingale** de Y por C é o processo W dado por*

$$W_0 = 0$$
$$W_n = \sum_{k=1}^{n} C_k(Y_k - Y_{k-1}) \text{ se } n > 0.$$

O processo W será geralmente denotado por CY e W_n por $(CY)_n$.

Teorema A.72. *Suponha que Y é um martingale e que C é um processo previsível limitado. Então CY é um martingale.*

Demonstração. Seja $W = CY$. O fato de que C é limitado e que para cada Y_n, $E(Y_n)$ existe e é finita implica que $E(W_n)$ existe e é finita. Então

$$\begin{aligned} W_{n+1} - W_n &= \sum_{k=1}^{n+1} C_k(Y_k - Y_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} C_k(Y_k - Y_{k-1}) \\ &= [C_1(Y_1 - Y_0) + \cdots + C_n(Y_n - Y_{n-1}) + C_{n+1}(Y_{n+1} - Y_n)] - [C_1(Y_1 - Y_0) + \cdots + C_n(Y_n - Y_{n-1})] \\ &= C_{n+1}(Y_{n+1} - Y_n). \end{aligned}$$

Usando o fato de que Y_n e C_{n+1} são $\mathcal{F}_n-$ mensuráveis, vemos que

$$\begin{aligned} E[W_{n+1} - W_n | \mathcal{F}_n] &= C_{n+1} E(Y_{n+1} - Y_n \mid \mathcal{F}_n) \\ &= C_{n+1}[E(Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) - E(Y_n \mid \mathcal{F}_n)] \\ &= C_{n+1}[E[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] - Y_n] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$
\begin{aligned}
&E[W_{n+1}|\mathcal{F}_n] - E[W_n|\mathcal{F}_n] = 0 \\
\Rightarrow &E[W_{n+1}|\mathcal{F}_n] - W_n = 0 \\
\Rightarrow &E[W_{n+1}|\mathcal{F}_n] = W_n.
\end{aligned}
$$

Portanto, CY é um martingale.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] CALLIOLI, C. A., DOMINGUES, H. H., COSTA, R. C. F., *Álgebra Linear e Aplicações*. 2. ed. Atual Editora Ltda, 1978.

[2] CASTAGNOLI, E. *Abbecedario di matematica Finanziara*. Cakuntala, 2011.

[3] FELLER, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* 3. ed. Vol. 1. Wiley, 1968.

[4] FIGUEIREDO, D. G. *Análise I*. Rio de Janeiro. LTC, 1996. 256 p.

[5] FINETTI, B., *Theory of Probability*. Vol. 1, New York: Wiley, 1970.

[6] GUT, A. *Probability: a graduate course*, 1.ed. New York: Springer, 2005.

[7] HALMOS, P. R. *Teoria Ingênua dos Conjuntos*. Univ. S. Paulo e Polígono, 1970.

[8] HEFEZ, A. ; FERNANDEZ, C. S. . *Introdução à Álgebra Linear*. Coleção PROFMAT. Vol. 1, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. 328p.

[9] KOLMOGOROV, A. N. ; FOMIN, S.V. *Introductory Real Analysis.* 1.ed., New York: Dover Publications, 1975.

[10] LAD, F. *Operational Subjective Statistical Methods: A Mathematical, Philosophical, and Historical Introduction.* New York: Wiley, 1996.

[11] LIMA, E. L. *Álgebra Linear*, Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, CNPq, 1995.

[12] LIMA, E. L. *Análise Real - Funções de uma variável*, vol.1, 10. ed.. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[13] LIMA, E. L. *Curso de Análise*, Vol 1. Rio de Janeiro: IMPA, CNPq, 1989.

[14] OUWEHAND, P. *Foundations of Stochastic Finance* - Department of Mathematical Sciences, Stellenbosch University, 2008.

[15] PLISKA, S. R. *Introduction to Mathematical Finance - Discrete Time Models*. Oxford: Blackwell, 1997.

[16] ROSS, S. *Probabilidade : um curso moderno com aplicações*. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2010. 608p.

[17] SCHERVISH, M. J.; SEIDENFELD. T.; KADANE. J. B. The fundamental theorems of prevision and asset pricing. *International Journal of Approximate Reasoning*, Pittsburgh, n.49, p. 148-158, 2007.

[18] SHIRYAEV, A. N. *Probability*. 2 ed. New York: Springer, 1996.

[19] MARCONI, T. *Um exemplo de topologia não metrizável*. 2013. 41p. Trabalho de Conclusão de Curso - Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

[20] WILLIAMS, D. *Probability with Martingales*. Statistical Laboratory, DPMMS. Cambridge University.