



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

BEATRIZ KRABBE LAGHETTO

**UM MODELO MATEMÁTICO PARA ESTIMAR O RISCO DE
DESENVOLVER CÂNCER DE PULMÃO POR MEIO DE SISTEMAS
FUZZY**

Sorocaba

2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

UM MODELO MATEMÁTICO PARA ESTIMAR O RISCO DE
DESENVOLVER CÂNCER DE PULMÃO POR MEIO DE SISTEMAS
FUZZY

Beatriz Krabbe Laghetto

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Magda da Silva Peixoto

Sorocaba

2016

**UM MODELO MATEMÁTICO PARA ESTIMAR O RISCO DE
DESENVOLVER CÂNCER DE PULMÃO POR MEIO DE SISTEMAS
FUZZY**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do título de mestre sob orientação da Professora Doutora Magda da Silva Peixoto.

Sorocaba

2016

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L172m Laghetto, Beatriz Krabbe
Um modelo matemático para estimar o risco de desenvolver câncer de pulmão por meio de sistemas fuzzy / Beatriz Krabbe Laghetto. -- São Carlos : UFSCar, 2016.
58 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2016.

1. Modelo matemático. 2. Conjuntos fuzzy. 3. Método de inferência de mamdani. 4. Câncer de pulmão. 5. Fatores de risco. I. Título.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Beatriz Krabbe Laghetto, realizada em 19/05/2016:

Magda Peixoto

Profa. Dra. Magda da Silva Peixoto
UFSCar

Adilson

Prof. Dr. Adilson Jose Vieira Brandão
UFSCar

Estevão

Prof. Dr. Estevão Esmi Laureano
UNICAMP

Este trabalho é dedicado às crianças adultas que, quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas. Em especial, à Magda da Silva Peixoto, orientadora para sempre.

AGRADECIMENTOS

Os meus agradecimentos principais são direcionados à Nosso Senhor Jesus Cristo e Sua Mãe Maria por sempre estarem me guiando nos caminhos certos.

À minha orientadora Magda da Silva Peixoto, por ter me escolhido, por ter me orientado, por ter me confiado, por ter me ensinado e principalmente por abrir portas à todas as oportunidades que aproveitei durante a caminhada, desde a graduação até o mestrado.

Aos verdadeiros professores Wladimir Seixas, Adilson Brandão, Silvia M. Carvalho, Antônio Luiz Venezuela e Paulo César Oliveira, que durante esses 7 anos foram fundamentais para minha formação acadêmica, humana e ética e que sempre tiveram disposição para me atender fora dos horários de aula, muitas vezes durante horas.

À todos os professores que tive durante toda minha jornada de desenvolvimento, pela paciência, dedicação e comprometimento em formar profissionais e cidadãos.

À CAPES e ao PROFMAT pela bolsa de mestrado.

À todos os colegas e companheiros nas aulas do Mestrado, principalmente à Camila Sant'Anna, que sempre compartilhou conhecimento e força para que tudo acontecesse de forma mais divertida e menos solitária.

À minha família, pelo apoio e incentivo à prática de estudo.

Muito obrigada!

*Valeu a pena? Tudo vale a pena
Se a alma não é pequena.
Quem quer passar além do Bojador
Tem que passar além da dor.
Deus ao mar o perigo e o abismo deu,
Mas nele é que espelhou o céu.*

Fernando Pessoa

RESUMO

Os principais objetivos desse trabalho são estudar as formas de modelar matematicamente certas incertezas por meio da Teoria dos Conjuntos *Fuzzy* e, em seguida, propor um modelo matemático para estimar o risco de um indivíduo desenvolver câncer de pulmão por meio um sistema baseado em regras *fuzzy*. Para isso, consideramos fatores de risco, tais como, tabagismo, poluição, histórico de doenças pulmonares, histórico familiar e contato com agentes químicos como variáveis de entrada do sistema *fuzzy*. O câncer de pulmão é uma doença que não apresenta sintomas em suas fases iniciais, tornando o diagnóstico mais difícil de ser feito e, por isso, a maioria descobre quando o câncer já está avançado. Esse tipo de câncer é altamente letal e frequente na população, apresentando aumento de 2% ao ano na sua incidência mundial.

Palavras-chaves: Modelo Matemático, Conjuntos *Fuzzy*, Método de inferência de Mamdani, Câncer de Pulmão, Fatores de Risco, Medicina.

ABSTRACT

The main aims of this work are to study the ways to model mathematical uncertainties using *Fuzzy Sets Theory*, and then propose a mathematical model to estimate the risk of an individual developing lung cancer through a system based rule *fuzzy*. Therefore, we consider risk factors, namely smoking, pollution, history of lung disease, family history and contact with chemical agents such as system input variables *fuzzy*. Lung cancer is a disease that has no symptoms in its early stages, making the diagnosis more difficult to be done and, therefore, most discovered when the cancer is already advanced. This type of cancer is highly lethal and frequent in the population, an increase of 2 % per year in its worldwide incidence.

Key-words: Mathematical modeling, *Fuzzy Sets*, Mamdani's Inference Method, Lung Cancer, Risk Factors, Medicine.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Quantidade de Gatos - 1	16
Figura 2 – Quantidade de Gatos - 2	17
Figura 3 – Quantidade de Gatos - 3	17
Figura 4 – Suporte de F (clássico)	20
Figura 5 – Gráficos dos Elementos próximos de 2	21
Figura 6 – Gráficos que representam os subconjuntos <i>fuzzy</i> A e B de U	23
Figura 7 – Gráficos que representam União, Intersecção e Complementar dos sub- conjuntos <i>fuzzy</i> A e B de U	24
Figura 8 – Intervalos encaixantes determinados pelos α -níveis	30
Figura 9 – Exemplo de $B = f'(A)$	32
Figura 10 – Esquema geral de um controlador <i>Fuzzy</i>	39
Figura 11 – <i>Defuzzificador</i> centróide $G(B)$	41
Figura 12 – Método de Inferência de Mamdani.	41
Figura 13 – Sensação térmica como função da temperatura e umidade relativa do ar.	43
Figura 14 – Resumo do modelo de controle <i>fuzzy</i> “Chance de Desenvolver Câncer”	49
Figura 15 – Variável Tabagismo	49
Figura 16 – Variável Poluição	50
Figura 17 – Variável Histórico de Doenças Pulmonares	50
Figura 18 – Variável Histórico Familiar	50
Figura 19 – Variável Contato com Agentes Químicos	51

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Grau de Pertinência	20
Tabela 2 – Exemplo de União, Intersecção e complementar	24
Tabela 3 – Classificação do estado de conforto térmico como função da Temperatura T (°C) e Umidade Relativa UR (%) do ar.	42
Tabela 4 – Taxas brutas de incidência de câncer por 100.000 habitantes por região do País, com base nos dados das capitais dos estados de cada Região, 2008.	44
Tabela 5 – Qualidade do Ar e Efeitos aúde	47

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	CONCEITOS BÁSICOS DA TEORIA DOS CONJUNTOS <i>FUZZY</i>	14
2.1	Um Pouco da História	14
2.2	A Necessidade da Lógica Fuzzy	15
2.3	Conceitos Básicos	18
2.4	Operações com Subconjuntos <i>Fuzzy</i>	22
2.5	O Conceito de α -nível	29
2.6	O Princípio de Extensão de Zadeh	31
3	SISTEMAS BASEADOS EM REGRAS <i>FUZZY</i>	36
3.1	Relações <i>Fuzzy</i>	36
3.2	Conectivos Lógicos	37
3.3	Sistemas Baseados em Regras <i>Fuzzy</i>	39
3.4	O Método de Inferência de Mamdani	41
4	UMA ABORDAGEM <i>FUZZY</i> PARA ESTIMAR O RISCO DE DESENVOLVIMENTO DO CÂNCER DE PULMÃO	44
4.1	Fatores de Risco	45
4.2	Formulação do Modelo <i>Fuzzy</i>	48
4.3	Resultados	51
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	54
	REFERÊNCIAS	55
	 ANEXOS	 57
	ANEXO A – ALGORÍTMO DO PROGRAMA	58

1 INTRODUÇÃO

É crescente o interesse por processos quantitativos para predizer fenômenos da realidade. Estes processos são, via de regra, obtidos por meio de modelos matemáticos. Nas últimas décadas houve um aumento considerável no número de trabalhos concernentes a abordagens quantitativas de fenômenos biológicos e nesse trabalho tem-se os mesmos interesses (ERMENTROUT; EDELSTEIN-KESHET, 1993).

A modelagem matemática é a tentativa de traduzir problemas reais em problemas matemáticos e uma nova ferramenta científica que, além da matemática, utiliza-se também da computação para o total aproveitamento de métodos avançados, na intenção de solucionar problemas em diversas áreas, tais como, Matemática, Física, Engenharias, Ciências Agrárias, Ecologia, Saúde, etc (BASSANESI, 2002), (PEIXOTO, 2005). Os fenômenos biológicos estudados por meio da modelagem matemática fazem parte do ramo da ciência chamada Biomatemática (ERMENTROUT; EDELSTEIN-KESHET, 1993).

Muitas das incertezas que se encontram nos fenômenos da Biomatemática são provenientes da subjetividade da nossa linguagem. Esse é o caso típico de alguns procedimentos adotados em Biomedicina para diagnosticar e controlar alguma doença em paciente. Por exemplo, para se controlar determinada doença, observa-se os sinais ou sintomas apresentados pelo paciente. A gravidade destes sinais indicará o procedimento médico a ser adotado. O termo “gravidade” é subjetivo no sentido de apresentar graduações. Pois bem, incertezas devido à gradualidade são tipicamente tratadas por meio de métodos *fuzzy* (BARROS; BASSANESI, 2001).

Os sistemas *fuzzy* tem sido a ferramenta com fundamentação teórica para se estudar quantitativamente fenômenos onde aspectos de gradualidades (e, portanto de qualidades) devem ser considerados na modelagem matemática.

Os conceitos e técnicas da teoria dos conjuntos *fuzzy* são relativamente novos e seu emprego em Biomatemática tem grande potencial, uma vez que tal teoria tem se mostrado capaz de incorporar subjetividades inerentes ao fenômeno estudado. Como já dito antes, os modelos de Biomatemática são carregados de incertezas, tanto nos parâmetros como nas variáveis de estado. Assim considera-se o tema apropriado para um trabalho de dissertação de mestrado.

A modelagem computacional com sistemas *fuzzy* mostra-se aplicável a várias áreas distintas do conhecimento, como por exemplo, controle de populações herbívoras ((PEIXOTO; BARROS; BASSANESI, 2008 (1)) (1), (PEIXOTO; BARROS; BASSANESI, 2008 (2)) (2), (PEIXOTO; BARROS; BASSANESI, 2007), (PEIXOTO, 2005)), diagnóstico de defeitos em peças de uma produção (FUJIMOTO, 2011), processos de decisão (ZADEH,

1973) e logística de distribuição física (SANTOS; FELIX; VIEIRA, 2012). No cenário da logística de distribuição, essa ferramenta possui importante papel em trabalhos de tomada de decisão por especialistas, uma vez que, na maioria dos casos, as decisões sobre distribuição são tomadas utilizando-se critérios qualitativos na escolha, que nem sempre podem ser mensurados.

Neste trabalho, nos aproveitamos da modelagem computacional com sistemas *fuzzy* para criar um modelo que estima o risco de um indivíduo desenvolver câncer de pulmão, ou seja, aplicamos a teoria citada na área da medicina. Em seguida é feita uma aplicação do modelo considerando dois indivíduos com estilos de vida diferenciados. Para fazer tal simulação estudamos os fatores de risco que influenciam no desenvolvimento desta doença, tais fatores são: tabagismo, poluição, histórico de doenças pulmonares, histórico familiar e contato com agentes químicos.

A principal proposta deste trabalho se refere ao estudo de incertezas e seu tratamento matemático. Para atingir nossos objetivos, foram estudados conceitos básicos da Teoria dos conjuntos *fuzzy*, em especial, Sistemas baseados em Regras *Fuzzy* (SBRF), ou seja, as formas de modelar matematicamente certas incertezas por meio dos sistemas *fuzzy*, temas encontrados nos capítulos 2 e 3. No capítulo 4 propõe-se um sistema baseado em regras *fuzzy* para elaborar um modelo matemático que estima o risco de um indivíduo desenvolver câncer de pulmão a partir de fatores de risco. Por fim, fazemos as considerações finais no capítulo 5.

2 CONCEITOS BÁSICOS DA TEORIA DOS CONJUNTOS *FUZZY*

2.1 UM POUCO DA HISTÓRIA

Nessa seção utilizamos (PEREIRA; GOMES; FAVERO, 2011) e (TÔRRES, 2012) para um breve relato sobre o surgimento da Teoria *Fuzzy*.

Em 1965 um renomado professor da Universidade da Califórnia *Berkeley*, chamado Lofti A. Zadeh introduziu o conceito dos conjuntos *fuzzy*, sendo que em meados dos anos 1960, após observar que os recursos tecnológicos disponíveis na época eram incapazes de automatizar as atividades de natureza industrial, biológica ou química, que resultassem em situações ambíguas, cujo processamento não era possível através do uso da lógica computacional clássica. O professor Zadeh, em um artigo publicado em 1965 (ZADEH, 1999), resumiu os conceitos dos conjuntos *fuzzy*, solucionando e revolucionando o assunto com a criação de sistemas *fuzzy*. (PEREIRA; GOMES; FAVERO, 2011), (TÔRRES, 2012).

A aplicação do raciocínio *fuzzy* foi observada em 1974, quando o professor Mandani da *Queen Mary College*(Universidade de Londres) conseguiu controlar uma máquina a vapor usando a teoria de Zadeh.

Esse mesmo sucesso foi observado em outras situações, como em 1980, no controle *fuzzy* de operações de um forno de cimento, bem como, com outras aplicações, por exemplo, os controladores *fuzzy* de plantas nucleares, refinarias, processos biológicos e químicos, trocador de calor, máquina diesel, tratamento de água e sistema de operação automática de trens. (TÔRRES, 2012)

Em 1984, foi criada a Sociedade Internacional de Sistemas *Fuzzy*, formada principalmente por pesquisadores de países avançados tecnologicamente.

Ainda de acordo com (PEREIRA; GOMES; FAVERO, 2011) e (TÔRRES, 2012), mais de 30% dos artigos publicados sobre Sistema *Fuzzy* são de origem japonesa. Os pesquisadores japoneses, Seiji Yasunobu e Soji Miyamoto da Hitachi, em 1985, demonstraram a superioridade de sistemas de controle *fuzzy*, quando apresentaram simulações para a estrada de ferro de *Sendai*, sendo suas ideias adotadas para o controle de aceleração, frenagem e parada, quando a linha foi inaugurada em 1987. Já os Estados Unidos ignoraram a Teoria *Fuzzy* por que à associaram com inteligência artificial, um campo obscurecido e de pouca credibilidade por parte da indústria americana.

Durante um encontro internacional na área da teoria de conjuntos *fuzzy* em *Tokyo*, Takeshi Yamakawa, realizou um experimento com um pêndulo invertido, demonstrando o uso do Controle *Fuzzy*: um problema clássico de controle em que um veículo tenta manter um poste montado no seu topo por uma dobradiça vertical com movimentos de ida e

volta. Yamakawa impressionou os observadores com a sua demonstração, onde obteve estabilidade do sistema, também em outras situações. Suas experiências permitiram que ele organizasse seu próprio laboratório de pesquisas de Sistemas *Fuzzy*, ajudando a explorar suas patentes no campo.

Os japoneses desenvolveram tanto aplicações industriais como aplicações para consumo, criando em 1988 o Laboratório Internacional de Engenharia *Fuzzy* (LIFE), composto por 48 companhias para pesquisa em Sistema *Fuzzy*.(PEREIRA; GOMES; FAVERO, 2011), (TÔRRES, 2012).

Uma máquina de lavar pratos "inteligente" baseada em um Controlador *Fuzzy* e um "one-stop sensing module" que combina um termistor (aparelho que serve para medir temperaturas), um sensor condutivo (para medir o nível de detergente através dos íons presentes na água), um sensor de turvação que difundi a medida e transmite luz para medir a sujeira na lavagem, e um sensor magnético para ler a taxa de giro, foi criada em 1995 por Maytag. O sistema aperfeiçoa o ciclo de lavagem para qualquer carga obter os melhores resultados com o mínimo de energia, detergente e água.

Várias pesquisas são realizadas com aplicações *Fuzzy*: um projeto de *software*, incluindo Sistemas *Fuzzy Expert* e Integração de Lógica *Fuzzy* com redes neurais, os denominados algoritmos genéticos, com o objetivo de construção de um Sistema *Fuzzy* capaz de aprender.

O desenvolvimento de técnicas de Inteligência Artificial (IA) vem ocupando posição de destaque em pesquisas na área de controle de processos industriais e começam a ser implantadas em plantas industriais com enorme sucesso.

Os japoneses consideram como as mais promissoras técnicas para o século XXI, as técnicas do Controle *Fuzzy* e a de redes neurais aplicadas a sistemas de controle, que estão em grande evidência (PEREIRA; GOMES; FAVERO, 2011)(TÔRRES, 2012).

Atualmente, a lógica *fuzzy* é utilizada amplamente em diversas áreas do conhecimento, tais como: robótica, automação de linhas de produção, simulações financeiras, biologia, e até mesmo medicina. A grande vantagem na utilização dos sistemas *fuzzy* é que quando aplicado, vai além do raciocínio clássico, pois busca atribuir graus para os elementos em questão de forma que a resposta "contido" ou "não contido" somente, não satisfaz e busca-se saber o quão contido ou o quão não contido está determinado elemento.

Seguindo, apresentaremos uma seção que apresenta a necessidade da lógica *fuzzy*.

2.2 A NECESSIDADE DA LÓGICA FUZZY

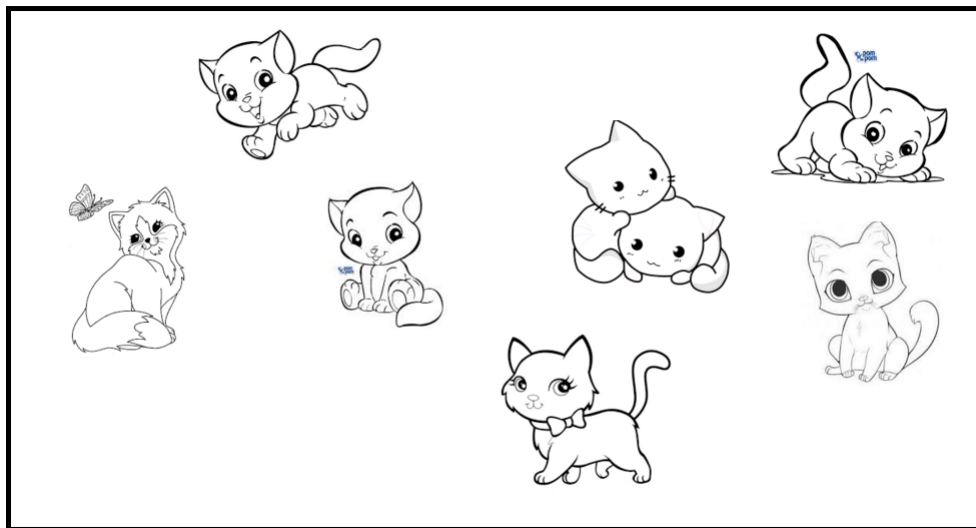
A lógica clássica de Aristóteles baseia-se no conceito da bivalência, isto é, reconhece que apenas dois valores podem ser atribuídos a fenômenos: verdadeiro ou falso, branco ou

preto, um ou zero. (SHAW; SIMOES, 1999)

Segundo (SHAW; SIMOES, 1999), a prática da bivalência é um marco histórico na cultura ocidental, na qual sempre se espera a afirmação de que algo é verdadeiro ou falso, o meio é excluído. Tal bivalência se torna uma “lei do raciocínio” até mesmo nos ambientes cotidianos como trabalho e escola, e normalmente existe uma falta de tolerância com o meio excluído, ou com pessoas que dizem “meias-verdades”.

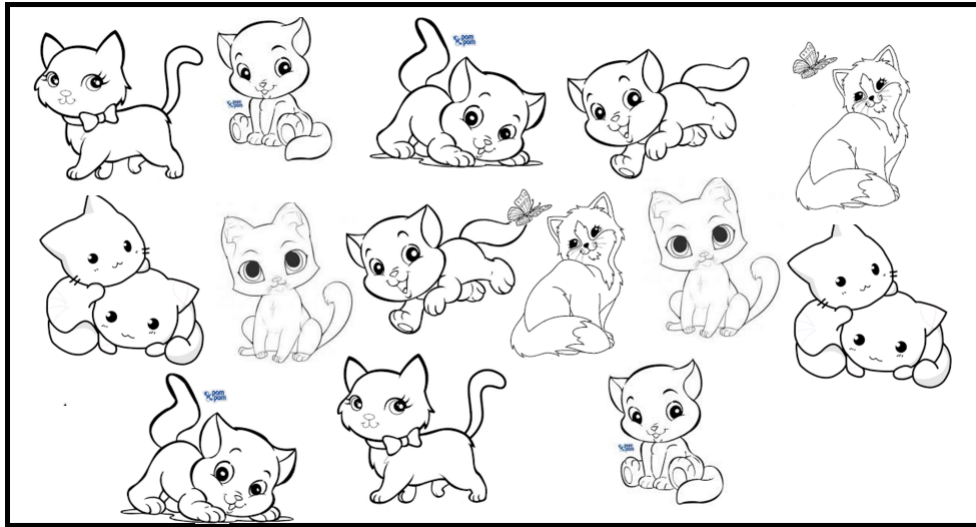
Porém é clara a existência de um considerável desacordo entre o mundo real e a prática da bivalência. Por exemplo, entre as cores, preto e branco existe uma enorme quantidade de tons de cinza ou até mesmo, dizer se um copo têm pouca ou muita água vai depender da sede de quem bebe (SHAW; SIMOES, 1999), (ZADEH, 1999). No mundo real, tudo é uma questão de ponto de vista ou de graduação. Esses fatos nos levam a conclusão de que o mundo real é multivalente, apresentando infinitas opções de respostas para problemas e não apenas duas. Para exemplificar melhor vamos analisar as figuras: Pra você leitor, as imagens a seguir têm poucos ou muitos gatos?:

Figura 1 – Quantidade de Gatos - 1



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 2 – Quantidade de Gatos - 2



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 3 – Quantidade de Gatos - 3



Fonte: Elaborada pela autora.

A resposta depende da concepção de muitos/poucos gatos de cada pessoa. Pode ser que para alguns a primeira imagem já contenha muitos gatos, para outros, não.

A concepção humana contém diversas incertezas, por exemplo, ao formarmos expressões verbais vagas, imprecisas, com pouca resolução, ou até mesmo ao utilizar uma palavra que pareça ter representação certa, podemos encontrar significados diferentes: quando se fala “casa”, se usa um julgamento intuitivo para se avaliar em que grau a casa pertence à nossa concepção da mesma. Talvez uma cabana seja uma casa com grau de 5% (SHAW; SIMOES, 1999).

Por outro lado, os computadores apenas se utilizam da linguagem binária (ou bivalente: 0 ou 1) para "raciocinar". Eles não conseguem entender os termos *fuzzy* presentes na comunicação humana. A lógica *fuzzy* surgiu desta necessidade, traduzir o grau de verdade de afirmações de modo que o computador às compreenda, fazer com que os computadores "raciocinem" da maneira como os humanos (SHAW; SIMOES, 1999).

A seguir, apresentamos os conceitos básicos desta teoria.

2.3 CONCEITOS BÁSICOS

Para obter a formalização matemática de um conjunto *fuzzy*, Zadeh baseou-se no fato de que qualquer conjunto clássico (ou conjunto crisp) pode ser representado pela sua função característica, definida de tal forma:

Definição 2.1. *Seja U um conjunto universo e A um subconjunto de U . A função característica de A é dada por*

$$X_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases} \quad (2.1)$$

Essa função tem objetivo de indicar quando um elemento $x \in U$ pertence ou não a A , dependendo da sua imagem em $\{0,1\}$. Assim, a função característica descreve completamente o conjunto A , uma vez que indica quais elementos do conjunto U são elementos de A (BARROS; BASSANESI, 2011).

Por exemplo, de acordo com a lógica clássica pode-se dizer que um homem que possui altura superior a 1,80m é alto. Logo um homem com 1,79m não é alto. A Teoria dos conjuntos *fuzzy* vem resolver essa discrepância, fazendo essa classificação de forma gradual.

Definição 2.2. *Seja U um conjunto (clássico); um subconjunto fuzzy F de U é caracterizado por uma função*

$$\varphi_F : U \rightarrow [0, 1] \quad (2.2)$$

pré-fixada, chamada função de pertinência do subconjunto *fuzzy* F .

O valor de $\varphi_F \in [0, 1]$ indica o grau com que o elemento x de U está no conjunto *fuzzy* F ; $\varphi_F(x) = 0$ e $\varphi_F(x) = 1$ indicam, respectivamente, a não pertinência e a pertinência completa de x ao conjunto *fuzzy* F . Um subconjunto *fuzzy* F é composto de elementos x de um conjunto clássico U , providos de um valor de pertinência a F , dado por $\varphi_F(x)$. (KLIR; YUAN, 1995), (SHAW; SIMOES, 1999)

Formalmente, a função de pertinência nada mais é do que a extensão da função característica com o contradomínio $\{0,1\}$ estendido para o intervalo $[0,1]$.

Sendo assim, todo conjunto clássico é um conjunto *fuzzy*, cuja função de pertinência pré-fixada é a própria função característica com seu contradomínio estendido para o intervalo $[0,1]$. (KLIR; YUAN, 1995)(BARROS, 2006)

Notamos que todo conjunto *fuzzy* é definido pela sua respectiva função de pertinência. Neste sentido pode-se dizer que um conjunto clássico é um caso particular de um conjunto *fuzzy*.

Agora, dentro da lógica *fuzzy*, pessoas de 1,80m e 1,79m possuem um grau de pertinência em relação à altura, que quanto mais próximo de 1, mais próximas de serem consideradas altas elas serão. Neste caso ocorre uma transição gradual.

O subconjunto clássico de U definido por

$$\text{supp } F = \{(x \in U : \varphi_F(x) > 0)\} \quad (2.3)$$

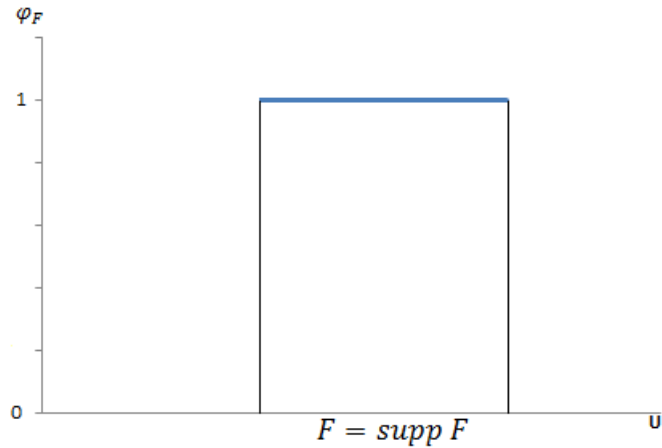
é denominado suporte de F que nada mais é do que os elementos de U que tem grau de pertinência maior que zero em F . Tem papel fundamental na inter-relação entre as teorias de conjuntos clássica e *fuzzy* (BARROS; BASSANESI, 2011).

Um fato importante é que o suporte de um conjunto clássico é igual ao próprio conjunto, isto é, $F = \text{supp } F$. De fato, como F é um conjunto clássico então sua função de pertinência é dada por:

$$\varphi_F : U \rightarrow [0, 1] \quad (2.4)$$

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases} \quad (2.5)$$

Assim, se $x \in F$ então $\varphi_F(x) = 1 > 0$, logo $x \in \text{supp } F$. Por outro lado, se $x \in \text{supp } F$, então $\varphi_F(x) > 0$, que implica $\varphi_F(x) = 1$ e portanto $x \in F$. Assim, segue a igualdade (BARROS; BASSANESI, 2011). A figura 4 ilustra essa situação:

Figura 4 – Suporte de F (clássico)

Fonte: Elaborada pela autora.

No entanto, para conjuntos *fuzzy* o resultado não é válido.

Exemplo 2.1. Considere a tabela a seguir, com um conjunto Universo $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e seus respectivos graus de pertinência:

Tabela 1 – Grau de Pertinência

Itens do Conjunto	Grau de Pertinência de F
1	0,1
2	0,3
3	0,6
4	1,0
5	0,4
6	0,0

Fonte: Elaborada pela autora.

Esta forma tabular pode ser escrita da seguinte maneira, pelo subconjunto *fuzzy* F de U . (BARROS; BASSANESI, 2011):

$$F = \frac{0,1}{1} + \frac{0,3}{2} + \frac{0,6}{3} + \frac{1,0}{4} + \frac{0,4}{5} + \frac{0,0}{6} \quad (2.6)$$

O sinal $+$ serve apenas para conectar os elementos do conjunto *fuzzy* F quando U é finito e tem forma:

$$F = \sum \frac{\varphi_F(x)}{x} \quad (2.7)$$

Exemplo 2.2. (Números próximos de 2). Considere o conjunto *fuzzy* F dos números reais próximos de 2:

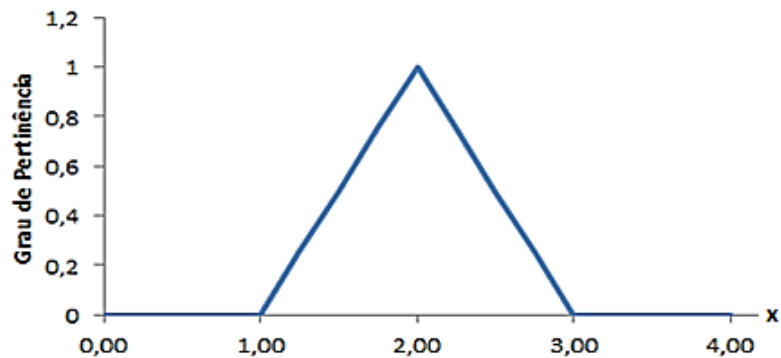
$$F = \{x \in \mathfrak{R} : x \text{ proximo de } 2\} \quad (2.8)$$

Se definirmos a função $\varphi_F : \mathfrak{R} \rightarrow [0,1]$, que associa cada x real ao valor de proximidade ao número 2 pela expressão

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} (1 - |x - 2|), & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{se } x \notin [1, 3] \end{cases} \quad (2.9)$$

Então o subconjunto *fuzzy* F dos pontos próximos de 2, caracterizado por φ_F , é tal que $\varphi_F(2,001) = 0,999$ e $\varphi_F(7) = 0$. Neste caso, dizemos que $x = 2,001$ é um ponto próximo de 2 com grau de pertinência 0,999 e $x = 7$ não é próximo de 2. A Figura 5 a seguir ilustra esse exemplo.

Figura 5 – Gráficos dos Elementos próximos de 2



Fonte: Elaborada pela autora.

Com este exemplo podemos perceber que o grau de pertinência de um elemento a um conjunto é totalmente subjetivo, considerando que para uma outra função poderíamos ter graus de pertinência diferentes para estes mesmos elementos. Nota-se também que nos exemplos dados, o conjunto universo U é facilmente identificado. No entanto, isso não ocorre em todos os casos e em grande parte da modelagem matemática é necessário decidir qual é o conjunto universo em que devemos trabalhar. (BARROS, 2006)

Podemos definir também a cardinalidade de um conjunto *fuzzy*:

Definição 2.3. *Cardinalidade de um conjunto fuzzy é a soma dos graus de pertinência do conjunto, a qual representamos da seguinte forma, para U infinito:*

$$\text{card}(F) = \sum_{i=1}^n F(x_i) \quad (2.10)$$

Exemplo 2.3. Seja o conjunto $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, o mesmo conjunto do exemplo 2.1 e a seguir o subconjunto F de U :

$$F = \frac{0,1}{1} + \frac{0,3}{2} + \frac{0,6}{3} + \frac{1,0}{4} + \frac{0,4}{5} + \frac{0,0}{6} \quad (2.11)$$

$$\text{card}(F) = 0, 1 + 0, 3 + 0, 6 + 1, 0 + 0, 4 + 0, 0 = 2, 4 \quad (2.12)$$

2.4 OPERAÇÕES COM SUBCONJUNTOS FUZZY

Após explicitarmos alguns exemplos de conjuntos *fuzzy* na seção anterior, serão definidos e apresentados alguns resultados sobre operações entre subconjuntos *fuzzy*.

Sejam A e B dois subconjuntos *fuzzy* de U , com funções de pertinência dadas por φ_A e φ_B , respectivamente.

Dizemos que A é subconjunto *fuzzy* de B , ou está contido em B , e escrevemos $A \subseteq B$, se $\varphi_A(x) \leq \varphi_B(x)$ para todo $x \in U$.

Note que o conjunto vazio \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto *fuzzy* uma vez que é um conjunto crisp, logo tem função de pertinência $\varphi_{\emptyset}(x) = 0$ enquanto que o conjunto universo (U) tem função de pertinência $\varphi_U(x) = 1$ para todo $x \in U$, já que todo subconjunto *fuzzy* A esta contido no conjunto crisp. Assim, podemos dizer que $\emptyset \subset A$ e que $A \subset U$ para todo A .

Definição 2.4. *Os subconjuntos fuzzy A e B de U são iguais se suas funções de pertinência coincidirem, isto é*

$$\varphi_A(x) = \varphi_B(x), \forall x \in U \quad (2.13)$$

Definição 2.5. *(União) A união entre A e B é o subconjunto fuzzy de U cuja a função de pertinência é dada por:*

$$\varphi_{A \cup B} = \max_{x \in U} \{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} \quad (2.14)$$

Observe que esta é uma extensão do caso clássico. Quando A e B são subconjuntos clássicos de U temos:

$$\max_{x \in U} \{X_A(x), X_B(x)\} = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \text{ ou } x \in B \\ 0, & \text{se } x \notin A \text{ e } x \notin B \end{cases} \quad (2.15)$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \cup B \\ 0, & \text{se } x \notin A \cup B \end{cases} \quad (2.16)$$

$$= X_{A \cup B}(x) \quad (2.17)$$

Definição 2.6. (*Intersecção*) A Intersecção entre A e B é o subconjunto fuzzy de U cuja a função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{A \cap B}(x) = \min_{x \in U} \{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, \forall x \in U \quad (2.18)$$

Que também é uma extensão do caso clássico:

$$\min_{x \in U} \{X_A(x), X_B(x)\} = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \text{ e } x \in B \\ 0, & \text{se } x \notin A \text{ ou } x \notin B \end{cases} \quad (2.19)$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \cap B \\ 0, & \text{se } x \notin A \cap B \end{cases} \quad (2.20)$$

$$= X_{A \cap B}(x), \forall x \in U \quad (2.21)$$

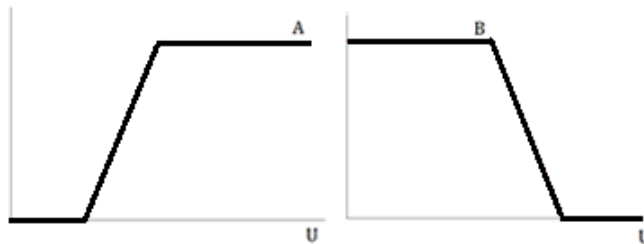
Definição 2.7. (*Complementar de Subconjunto Fuzzy*) O Complementar de A é o subconjunto fuzzy A' de U cuja a função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{A'} = 1 - \varphi_A, x \in U \quad (2.22)$$

Graficamente podemos representar a união, intersecção e complementar:

Sejam A e B dois subconjuntos fuzzy de U , com as funções de pertinência representadas abaixo:

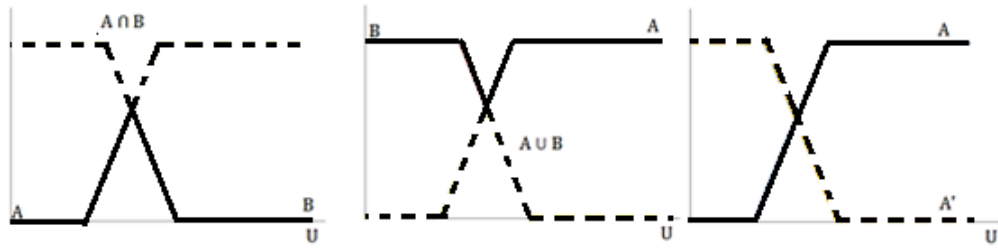
Figura 6 – Gráficos que representam os subconjuntos fuzzy A e B de U



Fonte: Elaborada pela autora.

Podemos representar a união e intersecção entre os subconjuntos A e B e o complementar de A , respectivamente como segue:

Figura 7 – Gráficos que representam União, Intersecção e Complementar dos subconjuntos fuzzy A e B de U



Fonte: Elaborada pela autora.

Exemplo 2.4. Podemos também representar a união, intersecção e complementar dos subconjunto fuzzy A e B dado um conjunto U (universo) finito de forma tabular:

Tabela 2 – Exemplo de União, Intersecção e complementar

Conjunto U	Subconjunto A	Subconjunto B	$A \cup B$	$A \cap B$	A'	$A \cup A'$	$A \cap A'$
1	0,7	0,6	0,7	0,6	0,3	0,7	0,3
2	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	0,0
3	0,4	0,2	0,4	0,2	0,6	0,6	0,4
4	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
5	1,0	0,2	1,0	0,2	0,0	1,0	0,0

Fonte: Elaborada pela autora.

Vamos mostrar agora algumas propriedades que são válidas para conjuntos clássicos, mas que não se estendem para os conjuntos fuzzy:

Proposição 2.1. *Sejam A e B conjuntos crisp, então são válidas as seguintes propriedades:*

1. $X_{A \cap B}(x) = X_A(x) \cdot X_B(x), \forall x \in U$
2. $X_{A \cap A'}(x) = 0, \forall x \in U$
3. $X_{A \cup A'}(x) = 1, \forall x \in U$

Demonstração 2.1. (SHAW; SIMOES, 1999) *Para o primeiro caso, perceba que para todo $x \in U$ tem-se:*

$$X_A(x) \cdot X_B(x) = 0 \leftrightarrow X_A(x) = 0 \text{ ou } X_B(x) = 0 \leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \leftrightarrow x \notin A \cap B$$

Por outro lado,

$$X_A(x) \cdot X_B(x) = 1 \leftrightarrow X_A(x) = 1 \text{ e } X_B(x) = 1 \leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B \leftrightarrow x \in A \cap B$$

Logo,

$$X_A(x) \cdot X_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \cap B \\ 0, & \text{se } x \notin A \cap B \end{cases}$$

Para mostrar as outras propriedades basta notar que para conjuntos clássicos são válidos: $A \cap A' = \emptyset$ e $A \cup A' = U$, logo $X_{(A \cap A')}(x) = X_{\emptyset}(x) = 0$ e $X_{(A \cup A')}(x) = X_U(x) = 1$.



Para conjuntos *fuzzy* as três propriedades acima nem sempre são válidas (KLIR; YUAN, 1995). Analisemos:

Exemplo 2.5. (SHAW; SIMOES, 1999) Sejam A e B os seguintes conjuntos *fuzzy* e suas respectivas funções de pertinência:

$$A = \{x \in \mathfrak{R} : x \text{ próximo de } 2\} \text{ e } \varphi_A(x) = \begin{cases} (1 - |x - 2|), & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{se } x \notin [1, 3] \end{cases} \quad (2.23)$$

$$B = \{x \in \mathfrak{R} : x \text{ próximo de } 2,5\} \text{ e } \varphi_B(x) = \begin{cases} (1 - |x - 2,5|), & \text{se } 1,5 \leq x \leq 2,5 \\ 0, & \text{se } x \notin [1,5; 2,5] \end{cases} \quad (2.24)$$

Assim, tomando $x = 2,6$ temos que:

$$\varphi_{A \cap B} = \min\{\varphi_A(2,6), \varphi_B(2,6)\} = \min\{0,4; 0,9\} = 0,4 \quad (2.25)$$

Por outro lado,

$$\varphi_A(2,6) \cdot \varphi_B(2,6) = 0,4 \cdot 0,9 = 0,36 \quad (2.26)$$

Na definição do complementar de um subconjunto *fuzzy* A em U , vimos que A' tem como função pertinência $\varphi_{A'}(x) = 1 - \varphi_A(x)$ que pode ser visto também como $\varphi_{A'}(x) = \varphi_U(x) - \varphi_A(x)$. Generalizaremos, agora o conceito de complemento (SHAW; SIMOES, 1999), (ZADEH, 1999).

Definição 2.8. Sejam A e B subconjuntos *fuzzy* em U , o complementar do conjunto *fuzzy* A em B , denotado por A'_B , é dado por:

$$\varphi_{A'_B}(x) = \varphi_B(x) - \varphi_A(x), \quad x \in U \quad (2.27)$$

Proposição 2.2. As operações entre subconjuntos *fuzzy* satisfazem as seguintes propriedades:

1. Propriedade Comutativa: $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$
2. Propriedade Associativa: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ e $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. Idempotência: $A \cup A = A$ e $A \cap A = A$

4. Distributividade em relação à união: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
5. Distributividade em relação à intersecção: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6. Conjunto fuzzy e conjunto nulo: $A \cup \emptyset = A$ e $A \cap \emptyset = \emptyset$
7. Conjunto fuzzy e conjunto Universo: $A \cup U = U$ e $A \cap U = A$
8. Leis de De Morgan: $(A \cup B)' = A' \cap B'$ e $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Demonstração 2.2. (KLIR; YUAN, 1995)

$$\begin{aligned}
 1. \quad \varphi_{A \cup B}(x) &= \\
 \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} &= \\
 \max\{\varphi_B(x), \varphi_A(x)\} &= \\
 \varphi_{B \cup A} \leftrightarrow A \cup B &= \\
 B \cup A &
 \end{aligned}$$

O caso da intersecção é análogo.

$$\begin{aligned}
 2. \quad \varphi_{A \cup (B \cup C)}(x) &= \\
 \max\{\varphi_A(x), \varphi_{B \cup C}(x)\} &= \\
 \max\{\varphi_A(x), \max\{\varphi_B(x), \varphi_C(x)\}\} &
 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \varphi_{(A \cup B) \cup C}(x) &= \\
 \max\{\varphi_{A \cup B}(x), \varphi_C(x)\} &= \\
 \max\{\max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, \varphi_C(x)\} &
 \end{aligned}$$

Devemos então considerar os seguintes casos:

- a $\varphi_A(x) > \varphi_B(x) > \varphi_C(x)$
- b $\varphi_A(x) > \varphi_C(x) > \varphi_B(x)$
- c $\varphi_B(x) > \varphi_C(x) > \varphi_A(x)$
- d $\varphi_B(x) > \varphi_A(x) > \varphi_C(x)$
- e $\varphi_C(x) > \varphi_A(x) > \varphi_B(x)$
- f $\varphi_C(x) > \varphi_B(x) > \varphi_A(x)$

Mostraremos que essa propriedade é válida no caso (a) e nos outros casos a análise é feita de forma análoga. Assim, se (a) acontecer, então:

$$\begin{aligned}\varphi_{A \cup (B \cup C)}(x) &= \\ \max\{\varphi_A(x), \varphi_{B \cup C}(x)\} &= \\ \max\{\varphi_A(x), \max\{\varphi_B(x), \varphi_C(x)\}\} &= \\ \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} &= \\ \varphi_A(x) &\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\varphi_{(A \cup B) \cup C}(x) &= \\ \max\{\varphi_{A \cup B}(x), \varphi_C(x)\} &= \\ \max\{\max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, \varphi_C(x)\} &= \\ = \max\{\varphi_A(x), \varphi_C(x)\} &= \\ \varphi_A(x) &\end{aligned}$$

E, portanto, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Para o caso da intersecção a análise é a mesma.

$$\begin{aligned}3. \varphi_{A \cup A}(x) &= \\ \max\{\varphi_A(x), \varphi_A(x)\} &= \\ \varphi_A(x) &\end{aligned}$$

Portanto, $A \cup A = A$

No caso da intersecção fazemos a mesma análise.

$$\begin{aligned}4. \varphi_{A \cup (B \cap C)}(x) &= \\ \max\{\varphi_A(x), \varphi_{B \cap C}(x)\} &= \\ \max\{\varphi_A(x), \min\{\varphi_B(x), \varphi_C(x)\}\} &\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\varphi_{(A \cup B) \cap (A \cup C)}(x) &= \\ \min\{\varphi_{A \cup B}(x), \varphi_{A \cup C}(x)\} &= \\ \min\{\max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, \max\{\varphi_A(x), \varphi_C(x)\}\} &\end{aligned}$$

Considerando novamente os casos que vimos em (2), mostraremos que a propriedade é válida para o caso (a) e os outros casos seguem de maneira análoga. Assim, se (a) acontecer, temos que:

$$\begin{aligned}\varphi_{A \cup (B \cap C)}(x) &= \\ \max\{\varphi_A(x), \varphi_{B \cap C}(x)\} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \max\{\varphi_A(x), \min\{\varphi_B(x), \varphi_C(x)\}\} = \\ & = \max\{\varphi_A(x), \varphi_C(x)\} = \\ & \varphi_A(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \varphi_{(A \cup B) \cap (A \cup C)}(x) = \\ & \min\{\varphi_{A \cup B}(x), \varphi_{A \cup C}(x)\} = \\ & \min\{\max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, \max\{\varphi_A(x), \varphi_C(x)\}\} \\ & = \min\{\varphi_A(x), \varphi_A(x)\} = \\ & \varphi_A(x) \end{aligned}$$

E assim segue a igualdade, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

5. Análoga ao item (4).

$$\begin{aligned} 6. \varphi_{A \cup \emptyset}(x) &= \\ \max\{\varphi_A(x), \varphi_{\emptyset}(x)\} &= \\ \max\{\varphi_A(x), 0\} &= \\ \varphi_A(x) \end{aligned}$$

Portanto, $A \cup \emptyset = A$

$$\begin{aligned} \varphi_{A \cap \emptyset}(x) &= \\ \min\{\varphi_A(x), \varphi_{\emptyset}(x)\} &= \\ \min\{\varphi_A(x), 0\} &= 0 = \\ \varphi_{\emptyset}(x) \end{aligned}$$

Portanto, $A \cap \emptyset = \emptyset$

7. Análogo ao item (6).

8. Para quaisquer funções com valores reais f e g , temos que:

$$\begin{aligned} \max[f(x), g(x)] &= \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|] \\ \min[f(x), g(x)] &= \frac{1}{2}[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|] \end{aligned}$$

Assim, temos para o primeiro caso que:

$$\begin{aligned} \varphi_{(A' \cap B')}(x) &= \\ \min\{\varphi_{A'}(x), \varphi_{B'}(x)\} &= \\ \min\{1 - \varphi_A(x), 1 - \varphi_B(x)\} &= \\ \frac{1}{2}[(1 - \varphi_A(x)) + (1 - \varphi_B(x)) - |(1 - \varphi_A(x)) - (1 - \varphi_B(x))|] &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}[2 - (\varphi_A(x) + \varphi_B(x) + | - \varphi_A(x) + \varphi_B(x)|)] = \\
& 1 - \frac{1}{2}[\varphi_A(x) + \varphi_B(x) + | - (\varphi_A(x) - \varphi_B(x))|] = \\
& 1 - \frac{1}{2}[\varphi_A(x) + \varphi_B(x) + |\varphi_A(x) - \varphi_B(x)|] = \\
& 1 - \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} =
\end{aligned}$$

$$1 - \varphi_{A \cup B}(x) =$$

$$\varphi_{(A \cup B)'}(x)$$

$$\text{Portanto, } (A \cup B)' = A' \cap B'$$

E para o segundo caso, temos que:

$$\varphi_{(A' \cup B')}(x) =$$

$$\max\{\varphi_{A'}(x), \varphi_{B'}(x)\} =$$

$$\max\{1 - \varphi_A(x), 1 - \varphi_B(x)\} =$$

$$\frac{1}{2}[(1 - \varphi_A(x)) + (1 - \varphi_B(x)) + |(1 - \varphi_A(x)) + (1 - \varphi_B(x))|] =$$

$$\frac{1}{2}[2 - (\varphi_A(x) + \varphi_B(x) - | - \varphi_A(x) + \varphi_B(x)|)] =$$

$$1 - \frac{1}{2}[\varphi_A(x) + \varphi_B(x) - | - (\varphi_A(x) - \varphi_B(x))|] =$$

$$1 - \frac{1}{2}[\varphi_A(x) + \varphi_B(x) - |\varphi_A(x) - \varphi_B(x)|] =$$

$$1 - \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} =$$

$$1 - \varphi_{A \cap B}(x) =$$

$$\varphi_{(A \cap B)'}(x)$$

$$\text{Portanto, } (A \cap B)' = A' \cup B'$$

■

2.5 O CONCEITO DE α -NÍVEL

Os elementos de um subconjunto *fuzzy* A de U podem ser classificados em graus obedecendo a certa hierarquia (ordem), sendo que um elemento x de U está em determinado grau, $x \in [0, 1]$, se seu grau de pertinência é maior ou igual a x . Esse conjunto é denominado α -nível de A denotado por $[A]^\alpha$ (BARROS; BASSANESI, 2011).

Definição 2.9. (α -nível) *Seja A um subconjunto fuzzy de U e $\alpha \in [0, 1]$. O α -nível de A é o subconjunto clássico de U definido por:*

$$[A]^\alpha = \{x \in U : \varphi_A(x) \geq \alpha\}, \text{ para } 0 < \alpha \leq 1 \quad (2.28)$$

O nível 0 de um subconjunto *fuzzy* que é definido como sendo o menor subconjunto fechado de U , que contém $\overline{\text{supp}}A$, é indicado por $\overline{\text{supp}}A$, que é o fecho do suporte de A , isto é $[A]^0 = \overline{\text{supp}}A$, se considerarmos U um espaço topológico (BARROS; BASSANESI, 2011).

Um subconjunto *fuzzy* A é dito normal se todos os seus α -níveis forem não vazios, isto é, se $[A]^1 \neq \emptyset$ (SHAW; SIMOES, 1999).

O exemplo a seguir mostra como funciona a leitura do α -nível.

Exemplo 2.6. $A = \frac{0,12}{1} + \frac{0,34}{2} + \frac{0,62}{3} + \frac{1,0}{4} + \frac{0,47}{5} + \frac{0,07}{6}$

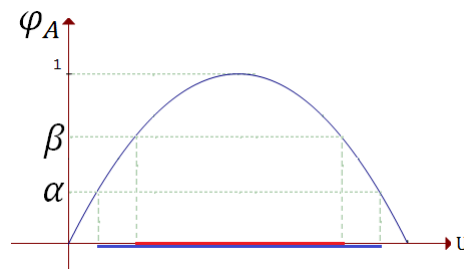
$$[A]^{0,5} = \{3, 4\}$$

$$[A]^{0,15} = \{2, 3, 4, 5\}$$

Observação 2.1. Se A for um conjunto clássico então $[A]^\alpha = A$, para todo $\alpha \in (0, 1]$. De fato, se $x \in [A]^\alpha$ então $X_A \geq \alpha > 0 \rightarrow X_A > 0$, assim $X_A(x) = 1 \rightarrow x \in A$. Por outro lado, se $x \in A$ então $X_A(x) = 1 \geq \alpha \rightarrow x \in [A]^\alpha$.

Observação 2.2. No caso geral, uma propriedade interessante sobre os α -níveis é que se $\alpha \leq \beta$ então $x \in [A]^\beta \rightarrow \varphi_A(x) \geq \beta \geq \alpha$ para todo $x \in U$. Logo, $x \in [A]^\alpha$. Portanto, $[A]^\beta \subset [A]^\alpha$.

Figura 8 – Intervalos encaixantes determinados pelos α -níveis



Fonte: Elaborada pela autora.

Assim os conjuntos crisp definidos pelos α -níveis são uma sequência de conjuntos clássicos decrescentes, e ainda, o teorema a seguir mostra que a família de conjuntos $[A]^\alpha$ determina completamente o subconjunto *fuzzy* A . (SHAW; SIMOES, 1999),(ZADEH, 1999).

Teorema 2.1. Sejam A e B subconjuntos *fuzzy* de U . Então $A = B$ se, e somente se, $[A]^\alpha = [B]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Demonstração 2.3. (\rightarrow) Suponha que $A = B$, então $[A]^\alpha = \{x \in U : \varphi_A(x) \geq \alpha\} = \{x \in U : \varphi_B(x) \geq \alpha\} = [B]^\alpha$.

(\leftarrow) Agora, se $[A]^\alpha = [A]^\beta$ para todo $\alpha \in [0, 1]$, suponhamos que $A \neq B$. Logo, existe $x_0 \in U$ tal que $\varphi_A(x_0) \neq \varphi_B(x_0)$, isto é, $\varphi_A(x_0) > \varphi_B(x_0)$ ou $\varphi_A(x_0) < \varphi_B(x_0)$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\varphi_A(x_0) > \varphi_B(x_0)$. Então, tomamos $\alpha = \varphi_A(x_0)$. Se $x \in [A]^{\varphi_A(x_0)}$ e como $\varphi_B(x_0) < \varphi_A(x_0) = \alpha$ então $x \notin [B]^{\varphi_A(x_0)}$. Assim, existe um α -nível $\varphi_A(x_0)$ tal que $[A]^{\varphi_A(x_0)} \neq [B]^{\varphi_A(x_0)}$, contradizendo a hipótese. Portanto, só pode ser $A = B$.

■

Proposição 2.3. *Sejam A e B subconjuntos fuzzy. Então são válidas as seguintes propriedades para α -níveis:*

1. $[A \cup B]^\alpha = [A]^\alpha \cup [B]^\alpha$;
2. $[A \cap B]^\alpha = [A]^\alpha \cap [B]^\alpha$;

Demonstração 2.4. 1. (\rightarrow) Se $x \in [A \cup B]^\alpha$ então $\varphi_{A \cup B}(x) \geq \alpha$. Como $\varphi_{A \cup B}(x) = \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}$, então:

$$\varphi_{A \cup B}(x) = \begin{cases} \varphi_A(x), & \text{se } \varphi_A(x) > \varphi_B(x) \\ \varphi_B(x), & \text{se } \varphi_A(x) < \varphi_B(x) \end{cases} \quad (2.29)$$

Logo, $\varphi_A(x) \geq \alpha$ ou $\varphi_B(x) \geq \alpha$. Assim, $x \in [A]^\alpha \cup [B]^\alpha$.

(\leftarrow) Por outro lado, se $x \in [A]^\alpha \cup [B]^\alpha$ então $x \in [A]^\alpha$ ou $x \in [B]^\alpha$. Logo, $\varphi_A(x) \geq \alpha$ ou $\varphi_B(x) \geq \alpha$. Desse modo, $\max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} \geq \alpha$ e assim segue que $\varphi_{A \cup B}(x) \geq \alpha \rightarrow x \in [A \cup B]^\alpha$. Portanto, $[A \cup B]^\alpha = [A]^\alpha \cup [B]^\alpha$.

2. *Raciocínio análogo ao do item anterior.*

■

Até este ponto apresentamos conceitos de conjuntos *fuzzy*, bem como operações que podem ser realizadas com esses conjuntos. Também vimos algumas propriedades envolvendo essas operações. A seguir falaremos do princípio de extensão de Zadeh.

2.6 O PRINCÍPIO DE EXTENSÃO DE ZADEH

O método de extensão proposto por Zadeh é uma das idéias básicas que permite a extensão de conceitos matemáticos clássicos no contexto *fuzzy*. O Princípio de Extensão de Zadeh para uma função $f : X \rightarrow Z$ indica como deve ser a imagem de um subconjunto *fuzzy* A de X por meio de f . É de se esperar que esta imagem seja um subconjunto *fuzzy* de Z (BARROS; BASSANESI, 2011).

$$B(y) = \sup A(x) \text{ para } x \text{ em } A \text{ e } y = f(x)$$

$$B(1) = \max(A(1)) = 0,2$$

$$B(4) = \max(A(2)) = 0,4$$

$$B(9) = \max(A(3)) = 0,3$$

$$B = f(x) = \frac{0,2}{1} + \frac{0,4}{4} + \frac{0,3}{9}$$

Teorema 2.2. *Sejam $f : X \rightarrow Z$ uma função contínua e A um subconjunto fuzzy de X . Então, para todo $\alpha \in [0, 1]$ temos:*

$$[f'(A)]^\alpha = f([A]^\alpha) \quad (2.33)$$

Demonstração 2.5. *Vamos dividir a demonstração em dois casos, quando $\alpha > 0$ e quando $\alpha = 0$:*

i. Para $\alpha > 0$:

Seja $z \in f([A]^\alpha)$ então existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = z$ e $\varphi_A(x_0) \geq \alpha$, como x_0 pertence ao subconjunto das imagens inversas de z , então:

$$\varphi_{f'(A)}(z) = \sup_{f^{-1}(z)} \varphi_A(x) \geq \varphi_A(x_0) \geq \alpha \quad (2.34)$$

Logo, $z \in [f'(A)]^\alpha$.

Por outro lado, seja $x \in [f'(A)]^\alpha$, isto é, $\varphi_{f'(A)}(x) \geq \alpha$. Assim $f^{-1}(x) \neq \emptyset$ e $[A]^0 \cap f^{-1}(x) \neq \emptyset$.

Portanto, $\varphi_{f'(A)}(x) = \sup_{z \in f^{-1}(x)} \varphi_A(z) = \sup_{z \in f^{-1}(x) \cap [A]^0} \varphi_A(z)$.

Sabemos que existe $y \in f^{-1}(x) \cap [A]^0$ tal que $\sup_{z \in f^{-1}(x) \cap [A]^0} \varphi_A(z) = \varphi_A(y)$.

Logo $\varphi_A(y) \geq \alpha$. Como $\varphi_A(y) \geq \alpha$ e $f(y) = x$. Segue que $x \in f([A]^\alpha)$.

ii. Para $\alpha = 0$:

Tem-se que

$$B = \{x : (f'(A))(x) > 0\} = f\{x : A(x) > 0\} = f(C) \quad (2.35)$$

Se $x \in B$, então

$$\sup_{z \in f^{-1}(x)} \varphi_A > 0 \quad (2.36)$$

daí existe y com $f(y) = x$ e $\varphi_y > 0$, isto é, $x \in f(C)$.

Se $x \in f(C)$, então existe $y \in C$ com $x = f(y)$, logo

$$\sup_{z \in f^{-1}(x)} \varphi_A \geq \varphi_y > 0 \quad (2.37)$$

isto é, $x \in B$.

Agora, $\bar{B} = f(\bar{C}) \supset f(\bar{C})$ por f ser contínua, e $\bar{B} = f(\bar{C}) \subset f(\bar{C}) = f(\bar{C})$ pela compacidade de \bar{B} e a continuidade de f .

Portanto $[f'(A)]^0 = f([A]^0)$.

■

Este resultado nos diz que os α -níveis de um conjunto *fuzzy* obtidos pelo Princípio da Extensão de Zadeh, coincidem com as imagens dos α -níveis pela função crisp, se f é contínua.

A hipótese da função f ser contínua é essencial para a veracidade desse teorema. Observe o exemplo apresentado por (KLIR; YUAN, 1995):

Exemplo 2.8. Seja $f : X \rightarrow Y$, com $x = \mathbb{N}$ e $Y = \{a, b\}$ dada por:

$$f(n) = \begin{cases} a, & \text{se } n \leq 10 \\ b, & \text{se } n > 10 \end{cases} \quad (2.38)$$

Seja A um conjunto *fuzzy*, com a seguinte função de pertinência:

$$\varphi_A(n) = 1 - \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.39)$$

Então,

$$\varphi_{f'(A)}(a) = \sup_{f^{-1}(a)} \varphi_A(n) = \frac{9}{10} \quad (2.40)$$

$$\varphi_{f'(A)}(b) = \sup_{f^{-1}(b)} \varphi_A(n) = 1 \quad (2.41)$$

Assim, para $\alpha = 1$ temos que $[f'(A)]^1 = \{b\}$ enquanto que $f([A]^1) = \emptyset$ já que $[A]^1 = \emptyset$. Portanto $f([A]^\alpha) \neq [f'(A)]^\alpha$.

Definição 2.11. Sejam $f : X \times Y \rightarrow Z$ e A, B subconjuntos *fuzzy* de X e Y , respectivamente, A extensão f' de f , aplicada a A e B é o subconjunto *fuzzy* $f'(A, B)$ de Z cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{f'(A,B)}(z) = \begin{cases} \sup_{f^{-1}(z)} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(x)], & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0, & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases} \quad (2.42)$$

onde, $f^{-1}(z) = \{(x, y) : f(x, y) = z\}$.

Exemplo 2.9. (BARROS; BASSANESI, 2011)

Seja $f : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + y$.

Consideremos

$$A = \frac{0,4}{3} + \frac{0,5}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0,5}{6} + \frac{0,2}{7} \text{ e}$$

$$B = \frac{0,2}{6} + \frac{0,5}{7} + \frac{1}{8} + \frac{0,5}{9} + \frac{0,2}{10}.$$

Vejamos qual é o grau de pertinência dos elementos $z = 10$ e $z = 25$ em $f'(A, B)$.

Como $f^{-1}(10) = \emptyset$ então $\varphi_{f'(A,B)}(10) = 0$.

Por outro lado,

$$\varphi_{f'(A,B)}(25) = \sup_{f^{-1}(25)}(\varphi_A(4), \varphi_B(9)) = \sup_{f^{-1}(25)}(0, 5; 0, 5) = 0, 5.$$

No próximo capítulo falaremos sobre Sistemas Baseados em Regras *Fuzzy*, considerando as Relações *Fuzzy*, Conectivos Lógicos, Variáveis Linguísticas e o Método de Inferência de Mandani.

3 SISTEMAS BASEADOS EM REGRAS FUZZY

3.1 RELAÇÕES FUZZY

Matematicamente, o conceito de relação é formalizado a partir da teoria de conjuntos. Uma relação clássica descreve a inter-relação entre dois ou mais objetos e, sendo um conjunto, é representada por sua função característica. Uma relação de amizade entre duas pessoas, por exemplo, designada como amigos considera que, nas relações humanas, ou alguém é seu amigo ou não é, o que é uma simplificação da realidade. Por outro lado uma relação de amizade *fuzzy* entre duas pessoas pode considerar o grau de amizade entre elas. Sendo assim, dois ou mais indivíduos podem se relacionar com diferentes graus de amizade. Podemos dizer então que uma relação será *fuzzy* se optarmos pela teoria *fuzzy*, e será clássica se optarmos pela teoria de conjuntos (PEIXOTO, 2005).

Definição 3.1. *Uma relação fuzzy \mathfrak{R} sobre $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ é qualquer subconjunto fuzzy do produto cartesiano $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$. Assim, uma relação fuzzy \mathfrak{R} é definida por uma função de pertinência $\varphi_{\mathfrak{R}} : U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \rightarrow [0, 1]$.*

A composição entre relações *fuzzy* mais tradicional chama-se [*max – min*]. Considere R e S duas relações *fuzzy* binárias em $U \times V$ e $V \times W$, respectivamente. A composição $R \circ S$ é uma relação *fuzzy* binária em $U \times W$ cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{(R \circ S)}(x, y) = \max[\min(\varphi_R(x, y), \varphi_S(y, z))] \quad (3.1)$$

Observação 3.1. 1. *Se o produto cartesiano for formado de dois elementos, digamos $U_1 \times U_2$, a relação é chamada de binária sobre $U_1 \times U_2$.*
 2. *Se $U_i = U$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ então diremos que \mathfrak{R} é uma relação n -ária sobre U .*
 3. *Se $\varphi_{\mathfrak{R}}$ for a função de pertinência da relação fuzzy \mathfrak{R} então o número $\varphi_{\mathfrak{R}}(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]$ indica o grau com que os elementos x_i , que compõe a n -upla (x_1, \dots, x_n) , estão relacionados segundo a relação \mathfrak{R} .*

Vejamos um exemplo de representação para relações *fuzzy*:

Exemplo 3.1. (KLIR; YUAN, 1995)

Sejam $X = \{NovaYork, Paris\}$ e $Y = \{Beijing, NovaYork, Londres\}$ dois conjuntos e \mathfrak{R} uma relação *fuzzy* em $X \times Y$ representando o conceito "muito distante". Sendo assim, tal relação é dada por

$$\mathfrak{R}(x, y) = \frac{1}{(NovaYork, Beijing)} + \frac{0}{(NovaYork, NovaYork)} +$$

$$\frac{0,6}{(NovaYork, Londres)} + \frac{0,9}{(Paris, Beijing)} + \frac{0,7}{(Paris, NovaYork)} + \frac{0,3}{(Paris, Londres)}$$

3.2 CONECTIVOS LÓGICOS

Para avaliar logicamente uma expressão, admitimos que a mesma só poderia assumir valores 0 ou 1 dentro da lógica clássica. Agora, e se considerarmos a lógica *fuzzy*?

Devemos atribuir um valor que indique o quanto a proposição “ a está em A é verdadeira, sendo A um conjunto *fuzzy* e sabendo que o elemento a esta no intervalo $[0, 1]$ (BARROS; BASSANESI, 2011). Para isso usam-se as *normas* e *conormas* triangulares:

Definição 3.2. *t-norma*: O operador $\Delta : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $\Delta(x, y) = x\Delta y$, é uma *t-norma*, se satisfaz as seguintes condições:

1. *Elemento Neutro*: $\Delta(1, x) = 1\Delta x = x$;
2. *Comutatividade*: $\Delta(x, y) = x\Delta y = y\Delta x = \Delta(y, x)$;
3. *Associatividade*: $x\Delta(y\Delta z) = (x\Delta y)\Delta z$;
4. *Monotonicidade*: Se $x \leq u$ e $y \leq v$ então $x\Delta y \leq u\Delta v$;

A expressão *t-norma* estende o operador \wedge que modela o conectivo “e que representa o *min*”.

Vejamos alguns exemplos de **t-normas**:

Exemplo 3.2. $\Delta_1(x, y) : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] = \min\{x, y\} = x\Delta_1 y$; (KLIR; YUAN, 1995)

1. *Elemento Neutro*: $\Delta_1(1, x) = \min\{1, x\} = x$;
2. *Comutatividade*: $\Delta_1(x, y) = \min\{x, y\} = \min\{y, x\} = \Delta_1(y, x)$;
3. *Associatividade*: $x\Delta_1(y\Delta_1 z) = x\Delta_1(\min\{y, z\}) = \min\{x, \min\{y, z\}\}$

Por outro lado, $(x\Delta_1 y)\Delta_1 z = \min\{\min\{x, y\}, z\}$

Analisaremos apenas um caso, pois os demais seguem de maneira análoga.

Suponhamos que $x \leq y \leq z$ então

$$x\Delta_1(y\Delta_1 z) = \min\{x, \min\{y, z\}\} = x = \min\{\min\{x, y\}, z\} = (x\Delta_1 y)\Delta_1 z$$

Portanto, segue a Associatividade.

4. *Monotonicidade*: Sejam u e v tais que $x \leq u$ e $y \leq v$. Analisemos os possíveis casos,
 - Se $x \leq y$ e $u \leq v$ então $\Delta_1(x, y) = \min\{x, y\} = x \leq u = \min\{u, v\} = \Delta_1(u, v)$
 - Se $x \leq y$ e $v \leq u$ então $\Delta_1(x, y) = \min\{x, y\} = x \leq y \leq v = \min\{u, v\} = \Delta_1(u, v)$
 - Se $y \leq x$ e $u \leq v$ então $\Delta_1(x, y) = \min\{x, y\} = y \leq x \leq u = \min\{u, v\} = \Delta_1(u, v)$
 - Se $y \leq x$ e $v \leq u$ então $\Delta_1(x, y) = \min\{x, y\} = y \leq v = \min\{u, v\} = \Delta_1(u, v)$

Portanto, Δ_1 é uma *t-norma*.

Exemplo 3.3. $\Delta_2(x, y) : xy$; (KLIR; YUAN, 1995)

1. Elemento Neutro: $\Delta_2(1, x) = 1x = x$;
2. Comutatividade: $\Delta_2(x, y) = xy = yx = \Delta_2(y, x)$;
3. Associatividade: $x\Delta_2(y\Delta_2z) = x\Delta_2(yz) = x(yz) = xyz = (xy)z = (x\Delta_2y)z = (x\Delta_2y)\Delta_2z$;
4. Monotonicidade: Sejam u e v tais que $x \leq u$ e $y \leq v$, assim temos que $x\Delta_2y = xy \leq uy \leq uv = u\Delta_2v$;

Portanto, Δ_2 é uma t -norma.

Definição 3.3. t -conorma: O operador $\nabla : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $\nabla(x, y) = x\nabla y$, é uma t -conorma, se satisfaz as seguintes condições:

1. Elemento Neutro: $\nabla(0, x) = 0\nabla x = x$;
2. Comutatividade: $\nabla(x, y) = x\nabla y = y\nabla x = \nabla(y, x)$;
3. Associatividade: $x\nabla(y\nabla z) = (x\nabla y)\nabla z$;
4. Monotonicidade: Se $x \leq u$ e $y \leq v$ então $x\nabla y \leq u\nabla v$;

A expressão t -conorma estende o operador \vee que modela o conectivo “ou que representa o max.

Vejamos alguns exemplos de **t -conormas**:

Exemplo 3.4. $\nabla_1(x, y) : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] = \max\{x, y\} = x\nabla_1 y$; (KLIR; YUAN, 1995)

1. Elemento Neutro: $\nabla_1(0, x) = \max\{0, x\} = x$;
2. Comutatividade: $\nabla_1(x, y) = \max\{x, y\} = \max\{y, x\} = \nabla_1(y, x)$;
3. Associatividade: $x\nabla_1(y\nabla_1 z) = x\nabla_1(\max\{y, z\}) = \max\{x, \max\{y, z\}\}$

Se $x \leq y \leq z$ então $x\nabla_1(y\nabla_1 z) = x\nabla_1 z = z$

Por outro lado, $(x\nabla_1 y)\nabla_1 z = y\nabla_1 z = z$

As outras situações são análogas e portanto, segue a associatividade.

4. Monotonicidade: Sejam u e v tais que $x \leq u$ e $y \leq v$. Temos o seguintes casos:

Se $x \leq y$ e $u \leq v$ então $x\nabla_1 y = y \leq v = u\nabla_1 v$.

Se $x \leq y$ e $u > v$ então $x\nabla_1 y = y \leq v < u = u\nabla_1 v$.

Se $x > y$ e $u \leq v$ então $x\nabla_1 y = x \leq u = u\nabla_1 v$.

Se $x > y$ e $u > v$ então $x\nabla_1 y = y = x \leq u = u\nabla_1 v$.

Logo, ∇_1 é uma t -conorma.

Exemplo 3.5. $\nabla_2(x, y) : x + y - xy$; (KLIR; YUAN, 1995)

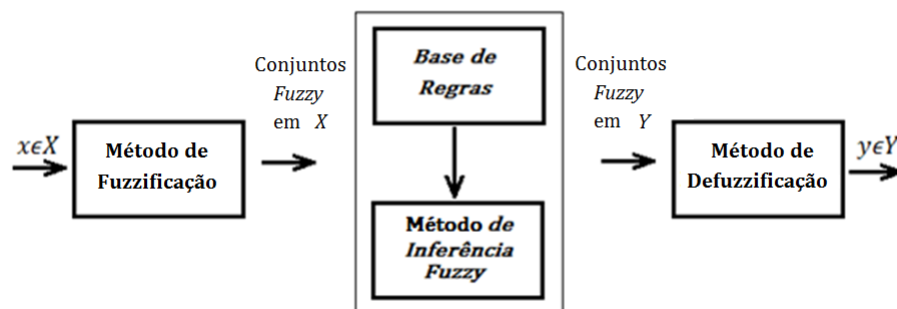
1. Elemento Neutro: $\nabla_2(0, x) = 0 + x - 0x = x$;
2. Comutatividade: $\nabla_2(x, y) = x + y - xy = (x + y) - (xy) = (y + x) - (yx) = y + x - yx = \nabla_2(y, x)$;
3. Associatividade: $x \nabla_2(y \nabla_2 z) = x + (y + z - yz) - x(y + z - yz) = x + y + z - yz - xy - xz - xyz = (x + y - (xy)) + z - (xz + yz + xyz) = (x + y - yx) + z - (x + y + (xy))z = (x + y - yx) + z - (x + y - yx)z = (x \nabla_2 y) \nabla_2 z$;
4. Monotonicidade: Se $x \leq u$ e $y \leq v$ então $x \nabla_2 y \leq u \nabla_2 v$:
 Se $x \leq u$ e $y \leq v$ então $x + y \leq u + v$ (1).
 Se $x \leq u$ e $y \leq v$ então $xy \leq uv$ (2)
 Subtraindo (1) e (2) temos que $x + y - xy \leq u + v - uv$;
 Logo, ∇_2 é uma t-conorma.

Na próxima seção falaremos sobre sistemas baseados em regras *fuzzy*.

3.3 SISTEMAS BASEADOS EM REGRAS *FUZZY*

As ações humanas controlam os mais diversos sistemas do mundo real por meio de informações imprecisas. Cada indivíduo recebe informações que são interpretadas de acordo com seus parâmetros e, então, decide que atitudes tomar. O controle e execução de tarefas devem seguir uma sequência de “ordens linguísticas, traduzidas por um conjunto de regras, capazes de serem codificadas por um controlador. E baseado nisso, são esses componentes que um sistema baseado em regras *fuzzy* possui: um processador de entrada (ou *fuzzificador*), um conjunto de regras linguística, um método de inferência *fuzzy* e um processador de saída (ou *defuzzificador*), gerando um número real como saída (PEIXOTO, 2005).

Figura 10 – Esquema geral de um controlador *Fuzzy*



Fonte:(PEIXOTO, 2005).

Essa estrutura de controlador representa a transformação que ocorre do domínio do mundo real, que usa números reais, para o domínio *fuzzy*, que usa conjuntos *fuzzy*.

Nessa transformação, um conjunto de regras *fuzzy* é usado para as tomadas de decisões, e, por fim, há uma transformação inversa do domínio *fuzzy* para o domínio do mundo real, para que ocorra o acoplamento entre a saída do algoritmo *fuzzy* e as variáveis de atuação (PEIXOTO, 2005).

- O **método de Fuzzificação** corresponde a tradução dos componentes de entrada do sistema por conjuntos *fuzzy*. É nele que justifica-se a grande importância de especialistas do fenômeno a ser modelado. Juntamente com os especialistas, as funções de pertinência são formuladas para cada conjunto *fuzzy* envolvido no processo. Mesmo quando a entrada pertença a um conjunto clássico, essa será *fuzzificada* por meio de sua função característica.
- A **base de regras** É composta por proposições *fuzzy* e consiste em catalogarmos as variáveis e suas classificações linguísticas. Essa etapa é considerada o núcleo do sistema. Pode ser considerada como um conjunto de proposições linguísticas do tipo, “Se... então.... Ainda com o auxílio do especialista, as regras serão importantes no estabelecimento das relações entre as variáveis linguísticas.
- É no **método de Inferência Fuzzy** que cada proposição será “traduzida matematicamente por meio das técnicas da lógica *fuzzy*. É onde se define quais *t-normas*, *t-conormas* e regras de inferência serão utilizadas para se obter a relação *fuzzy* que modela a base de regras. É basicamente do método de inferência que depende o sucesso do controlador *fuzzy*, já que ele fornecerá a saída (controle) *fuzzy* a ser adotado pelo controlador, a partir de cada entrada *fuzzy*. Nesse trabalho é utilizado o método de inferência *fuzzy* de Mamdani, que será explicado mais a frente.
- O **método de defuzzificação** consiste em um processo que permite representar um conjunto *fuzzy* por um número real. O método utilizado nesse trabalho é o Centro de gravidade no caso finito. Este método de *defuzzificação* é semelhante a média ponderada para uma distribuição de dados, com a diferença que os passos aqui são os valores $\varphi_B(u_i)$, que indicam o grau de compatibilidade do valor u_i com o conceito modelado pelo conjunto *fuzzy* B (BARROS; BASSANESI, 2011).

O **centróide** dá a média das áreas de todas as figuras que representam os graus de pertinência de um subconjunto *fuzzy*. As equações 3.2 e 3.3 referem-se ao domínio discreto e contínuo, respectivamente. A figura 11 mostra o gráfico do *defuzzificador* e centro de gravidade $G(B)$ (BARROS; BASSANESI, 2011).

Caso discreto:

$$G(B) = \frac{\sum_{i=0}^n u_i \varphi_B(u_i)}{\sum_{i=0}^n \varphi_B(u_i)} \quad (3.2)$$

Caso Contínuo:

$$G(B) = \frac{\int_{\mathfrak{R}} u \varphi_B(u) du}{\int_{\mathfrak{R}} \varphi_B(u) du} \quad (3.3)$$

Exemplo 3.6. Um dos grandes desafios da ambiência na avicultura atual, é estabelecer o estado de conforto térmico das aves. Nesse sentido (AMENDOLA et al., 2004), analisa como as variáveis climáticas independentes, tais como a temperatura e umidade relativa do ar, influenciam a variável dependente denominada conforto térmico, usando a Teoria dos Conjunto *Fuzzy*.

As variáveis independentes constituem intervalos de temperatura (°C) e de umidade relativa do ar (%) sobre os quais são definidas as variáveis linguísticas. A variável dependente, denotada por conforto térmico, constitui intervalos, também classificados da mesma forma. Todas as classificações foram feitas segundo os dados da seguinte tabela:

Tabela 3 – Classificação do estado de conforto térmico como função da Temperatura T (°C) e Umidade Relativa UR (%) do ar.

UR (%)	Temperatura (°C)				
	<12	12-21	21-24	24-29	>29
<70	ruim	médio	bom	bom	ruim
70-80	ruim	bom	bom	médio	ruim
>80	ruim	médio	bom	ruim	ruim

Fonte: (AMENDOLA et al., 2004).

Foram utilizando o método de inferência de Mamdani, a defuzzificação do centro de gravidade e o ambiente computacional MATLAB[®] 6.0.

Para a variável linguística "umidade relativa" considerou-se o domínio no intervalo [50, 100] pelos termos linguísticos: baixa, média e alta com funções de pertinência trapezoidais.

Para a variável linguística "temperatura" considerou-se o domínio no intervalo [5, 35] pelos termos linguísticos: muito baixa, baixa, média alta e muito alta também com funções de pertinência trapezoidais.

Para a variável de saída "conforto térmico" considerou-se o domínio no intervalo [0,1] pelos termos: ruim, médio e bom. Sendo que o valor próximo de zero significa a pior sensação e perto de 1, a melhor.

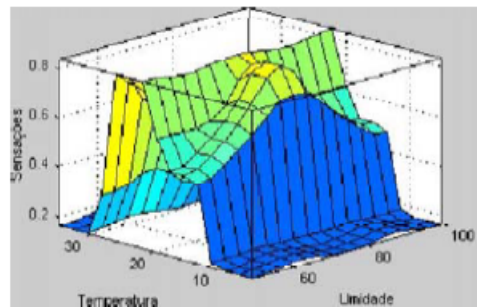
Então, foi criada a seguinte base com 15 regras seguindo a tabela 3:

1. *Se (UR é Baixa) e (T é Muito-baixa) então (CT é Ruim)*
2. *Se (UR é Baixa) e (T é Baixa) então (CT é Médio)*
3. *Se (UR é Baixa) e (T é Média) então (CT é Bom)*
4. *Se (UR é Baixa) e (T é Alta) então (CT é Bom)*
5. *Se (UR é Baixa) e (T é Muito-alta) então (CT é Ruim)*
6. *Se (UR é Média) e (T é Muito-baixa) então (CT é Ruim)*

7. *Se (UR é Média) e (T é Baixa) então (CT é Bom)*
8. *Se (UR é Média) e (T é Média) então (CT é Bom)*
9. *Se (UR é Média) e (T é Alta) então (CT é Médio)*
10. *Se (UR é Média) e (T é Muito-alta) então (CT é Ruim)*
11. *Se (UR é Alta) e (T é Muito-baixa) então (CT é Ruim)*
12. *Se (UR é Alta) e (T é Baixa) então (CT é Médio)*
13. *Se (UR é Alta) e (T é Média) então (CT é Bom)*
14. *Se (UR é Alta) e (T é Alta) então (CT é Ruim)*
15. *Se (UR é Alta) e (T é Muito-alta) então (CT é Ruim)*

A figura a seguir mostra a variação não-linear da sensação de conforto térmico, como função de pertinência da Umidade Relativa e Temperatura do ar e foi gerada a partir da Base de Regras acima estabelecida.

Figura 13 – Sensação térmica como função da temperatura e umidade relativa do ar.



Fonte: (AMENDOLA et al., 2004).

Por exemplo, uma temperatura de $16,6^{\circ}\text{C}$ e umidade de $60,8\%$ e, após a defuzzificação encontra-se o valor de $0,595$, orientando que estas temperatura e umidade relativa do ar geram condições de um ambiente de sensação de conforto térmico Médio. (AMENDOLA et al., 2004)

Este resultado auxilia no suporte a decisão do controle da climatização do galpão onde os frangos permanecem, garantindo assim uma melhor produção.

No Capítulo que segue apresentaremos um modelo criado para estimar o risco de um indivíduo desenvolver câncer de pulmão segundo aos fatores de risco associados a doença.

4 UMA ABORDAGEM *FUZZY* PARA ESTIMAR O RISCO DE DESENVOLVIMENTO DO CÂNCER DE PULMÃO

O câncer é uma doença que resulta, principalmente, de alterações genéticas, fatores ambientais e do estilo de vida. Dentre os muitos tipos de câncer, propomos um estudo do câncer de pulmão que tem como principal causa o tabagismo.

Segundo (ZAMBONI, 2002), o câncer de pulmão passou de uma doença rara no passado para a doença neoplásica mais comum e mais mortal, em todo o mundo. Ainda segundo seus dados, este tipo de câncer é a principal causa de morte por câncer entre os homens da América do Norte e Europa; sua mortalidade vem aumentando significativamente, entre a população da ásia, América Latina e da África.

As modificações no comportamento da doença começaram a ser notadas a partir da década de 20, quando o número de casos começou a crescer progressivamente, transformando-se numa verdadeira epidemia mundial no início do século XXI. Entre 1960 e 1980, sua mortalidade aumentou 76% entre as mulheres e cerca de 135% entre os homens (ZAMBONI, 2002).

Os primeiros estudos controlados sobre a doença começaram a ser feitos em 1950, e neles foram demonstrado que o tabagismo tinha relação direta com o câncer de pulmão, o que comprovou que junto com a explosão do hábito de fumar a partir dos anos 20, veio também a explosão dos casos de câncer de pulmão (ZAMBONI, 2002).

O fumo tornou-se então um grave problema de saúde pública, podendo se tornar, até 2030, a maior causa isolada de mortalidade, matando até 10 milhões de pessoas por ano. A indústria do fumo é voltada para aqueles menos privilegiados economicamente e socialmente, tendo como principal público alvo os adolescentes, fato que poderia ser considerado como maus tratos e abuso (MENEZES et al., 2002).

Para ilustrar tal fato, considere a tabela adaptada de (FILHO et al., 2010):

Tabela 4 – Taxas brutas de incidência de câncer por 100.000 habitantes por região do País, com base nos dados das capitais dos estados de cada Região, 2008.

Tipo de Câncer	Norte	Nordeste	Centro-Oeste	Sudeste	Sul
Cavidade Oral	9,0	14,6	16,4	23,8	23,1
Esôfago	4,2	6,6	9,9	12,2	17,1
Pulmão	25,3	26,5	29,5	45,5	58,1

Fonte: Elaborada pela autora.

Segundo (FILHO et al., 2010), as taxas do conjunto de tumores (exceto os tumores de pele) são cerca de duas vezes mais elevadas nas regiões Sudeste e Sul do que nas regiões Norte e Nordeste. O motivo de tal diferença está relacionado com as mais altas taxas de prevalência de tabagismo registradas no Sudeste e Sul, regiões também com as mais

elevadas incidências dos três tumores com intensa associação com o tabaco: cavidade oral, esôfago e pulmão.

Não há explicações simples e diretas para as diferenças regionais da incidência de câncer, mas alguns fatos induzem algumas inferências. Os mais altos níveis de prevalência de tabagismo, bem como a ocorrência das mais altas taxas de incidência e de mortalidade por câncer de pulmão no país, são constatadas na região Sul do País. O Brasil é o segundo maior produtor mundial de tabaco em folha (14,1% da produção mundial), atrás apenas da China. O Rio Grande do Sul é responsável por cerca de 50% da produção nacional. A cultura é típica de pequenas propriedades e a maior parte da produção localiza-se no entorno de indústrias de transformação e beneficiamento (FILHO et al., 2010).

Esta característica econômica pode ter definido intrincadas relações entre produção agrícola e industrial, cultura e ações políticas que podem ter influenciado o consumo mais elevado de tabaco pela população daquela região (FILHO et al., 2010).

4.1 FATORES DE RISCO

Se apropriando dos dados de (UEHARA; JAMNIK; SANTORO, 1998), (ZAMBONI, 2002), (OMENN et al., 1996) e (CETESB, 2016) concluímos que os principais fatores de risco para o desenvolvimento do câncer de pulmão são:

1. Tabagismo

A associação entre o tabagismo e o desenvolvimento do câncer do pulmão foi sugerida, pela primeira vez, na Inglaterra, em 1927. Algum tempo depois, em Viena, trabalhos realizados verificaram que eram fumantes 51 dos 54 pacientes que apresentavam câncer do pulmão, sendo que 30 deles fumavam de 20 a 90 cigarros por dia (ZAMBONI, 2002).

O risco de câncer de pulmão na população de fumantes é dezessete (17) vezes maior nos homens e onze (11) vezes maior nas mulheres, quando comparados com não fumantes. O risco de câncer de pulmão diminui em ex-fumantes, sendo que, cinco anos após cessar o tabagismo, o risco cai pela metade, e, após dez (10) anos, cai a 1,4. Sabemos que, mesmo quinze (15) anos após parar de fumar, o ex-fumante ainda tem um risco para câncer de pulmão de 1,4 e 4 vezes maior que o não fumante (UEHARA; JAMNIK; SANTORO, 1998). Por isso, consideramos na elaboração do modelo o tempo que uma pessoa fuma ou fumou durante a vida.

Outro fator que consideramos foi o caso dos fumantes passivos. Segundo (UEHARA; JAMNIK; SANTORO, 1998) e (OMENN et al., 1996) o risco de não fumantes, expostos a fumaça de cigarro, para câncer de pulmão é de 1,2 a 1,5 maior que o do não fumante não exposto ao fumo dos seus pais ou cônjuges.

2. Poluição

O ar ambiente está contaminado comumente por diversos carcinógenos oriundos dos veículos a motor e das diferentes indústrias, sendo plausível que a poluição atmosférica tenha algum significado no risco de aparecimento do câncer do pulmão. Um forte argumento a favor do efeito danoso da poluição atmosférica baseia-se no fato de que há um gradiente consistente entre o meio urbano e o rural na incidência do câncer do pulmão, que varia de 1,1 a 1,9. Essa diferença sugere que o indivíduo que vive nas grandes cidades tem risco maior de ser acometido pelo câncer do pulmão, possivelmente devido a maior exposição aos carcinógenos, tais como os hidrocarbonetos policíclicos e a fumaça do óleo diesel (ZAMBONI, 2002).

Por esse motivo achamos conveniente buscar informações sobre a qualidade do ar em nossa região. Buscamos tais informações junto a CETESB.

A CETESB (Companhia Ambiental Do Estado de São Paulo) é a agência do governo estadual paulista responsável pelo controle, fiscalização, monitoramento e licenciamento de atividades geradoras de poluição, com a preocupação fundamental de preservar e recuperar a qualidade das águas, do ar e do solo.

Segundo a (CETESB, 2016), o índice de qualidade do ar é uma ferramenta matemática desenvolvida para simplificar o processo de divulgação da qualidade do ar. Esse índice foi criado usando como base uma longa experiência desenvolvida nos EUA. Para cada poluente medido é calculado um índice, que é um valor adimensional. Dependendo do índice obtido, o ar recebe uma qualificação, que é uma nota para a qualidade do ar, conforme apresentado na Tabela 5:

Tabela 5 – Qualidade do Ar e Efeitos à saúde

Qualidade	Índice	Significado
N1 - Boa	0-40	-
N2 - Moderada	41-80	Pessoas de grupos sensíveis (crianças, idosos e pessoas com doenças respiratórias e cardíacas) podem apresentar sintomas como tosse seca e cansaço. A população, em geral, não é afetada.
N3 - Ruim	81-120	Toda a população pode apresentar sintomas como tosse seca, cansaço, ardor nos olhos, nariz e garganta. Pessoas de grupos sensíveis (crianças, idosos e pessoas com doenças respiratórias e cardíacas) podem apresentar efeitos mais sérios na saúde
N4 - Muito Ruim	121-200	Toda a população pode apresentar agravamento dos sintomas como tosse seca, cansaço, ardor nos olhos, nariz e garganta e ainda falta de ar e respiração ofegante. Efeitos ainda mais graves à saúde de grupos sensíveis (crianças, idosos e pessoas com doenças respiratórias e cardíacas).
N5 - Péssima	200	Toda a população pode apresentar sérios riscos de manifestações de doenças respiratórias e cardiovasculares. Aumento de mortes prematuras em pessoas de grupos sensíveis.

Fonte: (CETESB, 2016).

Nos apropriamos destes dados para fazer o modelo *fuzzy* em questão.

3. Histórico de Doenças Pulmonares

Algumas doenças pulmonares não malignas estão relacionadas a maior incidência de câncer do pulmão, especialmente o adenocarcinoma. Entre elas, a mais comum é a doença pulmonar obstrutiva crônica (DPOC). Pacientes com enfisema pulmonar têm seis vezes maior probabilidade de apresentar câncer do pulmão do que os fumantes sem enfisema. Lesões fibróticas cicatriciais da tuberculose também coexistem com maior probabilidade de ocorrência de câncer do pulmão (OMENN et al., 1996), (ZAMBONI, 2002) e (UEHARA; JAMNIK; SANTORO, 1998).

Por esses fatores consideramos que o histórico de doenças é um atenuante para o desenvolvimento do câncer de pulmão.

4. Histórico Familiar

O risco pessoal para câncer de pulmão é aumentado mais que cinco (5) vezes, se pelo menos um dos pais morreu de câncer de pulmão. Em um estudo de famílias de mulheres com câncer de pulmão, foi observado: pessoas que nunca fumaram, com história familiar positiva, tinham risco de 5,7; fumantes com história familiar negativa, risco de 15,1, e fumantes com história familiar positiva, risco 30,0 (UEHARA; JAMNIK; SANTORO, 1998).

Consideramos no modelo parentes de 1º e 2º grau que tiveram a doença.

5. Contato com Agentes Químicos

Também consideramos em nosso estudo, o contato com agentes químicos no trabalho: Trabalhadores expostos ao asbesto têm risco quadruplicado para câncer de pulmão, quando associado ao hábito tabágico. Outras substâncias químicas industriais, associadas ao câncer de pulmão, são: arsênico, berílio, cádmio, clorometila-éter, hidrocarbometos, gás mostarda e níquel (UEHARA; JAMNIK; SANTORO, 1998) e (ZAMBONI, 2002).

4.2 FORMULAÇÃO DO MODELO *FUZZY*

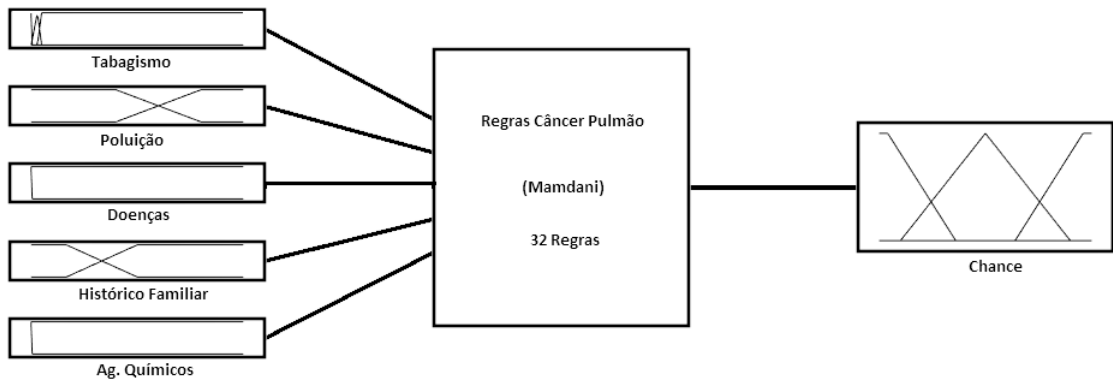
Para a elaboração deste modelo, utilizou-se os dados de (UEHARA; JAMNIK; SANTORO, 1998), (ZAMBONI, 2002), (OMENN et al., 1996) e (CETESB, 2016), ou seja:

- Tabagismo - Nunca fumou e não é fumante passivo = NÃO RISCO; Até 1 ano de fumo ou fumante passivo = POUCO RISCO e acima de um ano de fumo = RISCO;
- Poluição - Até nível 4 = NÃO RISCO, do nível 5 em diante = RISCO;
- Histórico de doenças pulmonares - Sim = RISCO, Não = NÃO RISCO;
- Histórico Familiar - Não = Não Risco, Parentesco de 2º grau = MEIO RISCO e Parentesco do 1º grau = RISCO
- Contato com Agentes Químicos- Não = NÃO RISCO, sim = RISCO;

A proposta desse modelo é definir os fatores acima como conjuntos *fuzzy*, ou seja, de forma mais gradual. Informações qualitativas de especialistas, em particular de oncologistas, permitem propor regras que relacionem os fatores acima com a chance de um indivíduo desenvolver o câncer de pulmão.

O sistema *fuzzy* aqui proposto possui cinco variáveis de entrada (Tabagismo, Poluição, Histórico de Doenças Pulmonares, Histórico Familiar, Contato com Agentes Químicos) e uma variável de saída (chance de um indivíduo desenvolver um câncer de pulmão). Veja o resumo do modelo na figura abaixo:

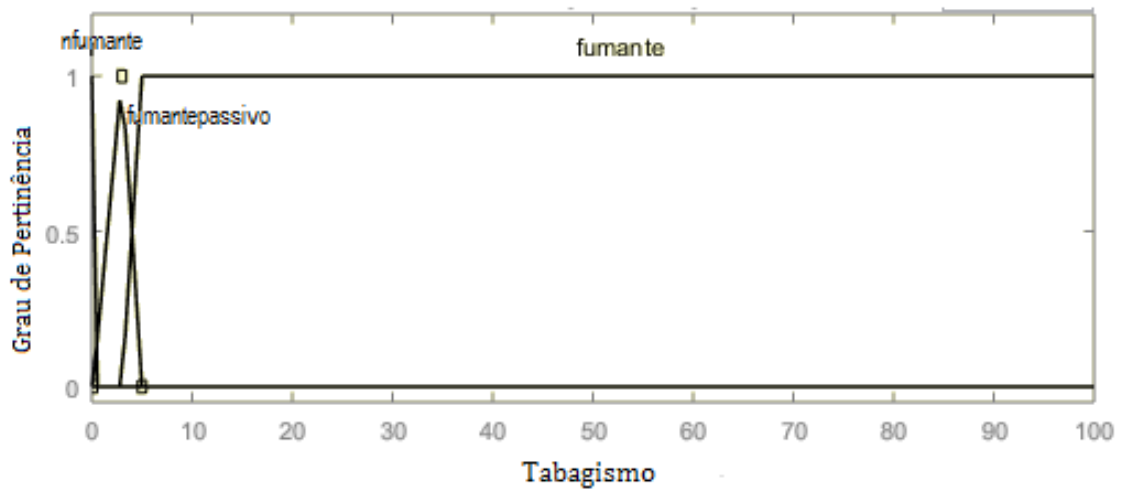
Figura 14 – Resumo do modelo de controle *fuzzy* “Chance de Desenvolver Câncer



Fonte: Elaborada pela autora.

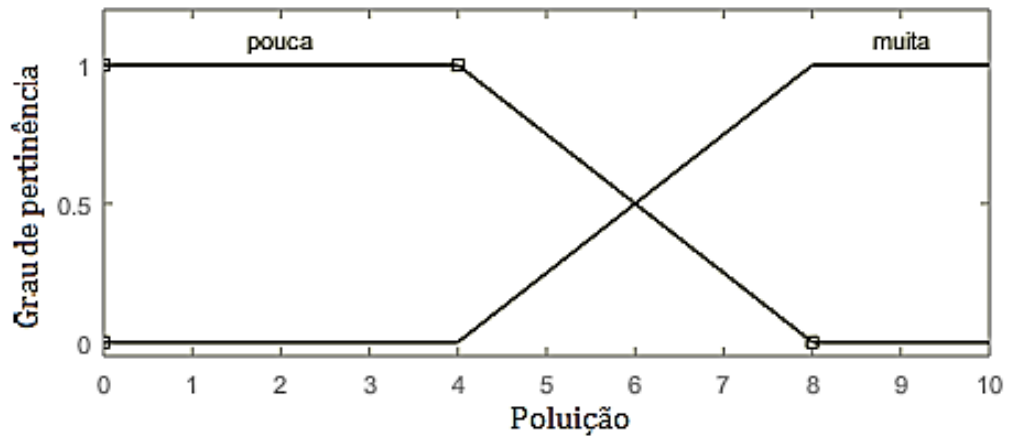
- A variável *fuzzy* tabagismo é definida pelos subconjuntos *fuzzy* {não fumante, fumante passivo, fumante} como na Figura 15.
- A variável *fuzzy* Poluição é definida pelos subconjuntos *fuzzy* {pouca; muita} como na figura 16.
- A variável *fuzzy* Histórico de Doenças Pulmonares é definida pelos subconjuntos *crisp* {sim; não} como na figura 17.
- A variável *fuzzy* Histórico Familiar é definida pelos subconjuntos *fuzzy* {não; sim} como na figura 18.
- A variável *fuzzy* Contato com agentes químicos é definida pelos subconjuntos *crisp* {sim; não} como na figura 19.

Figura 15 – Variável Tabagismo



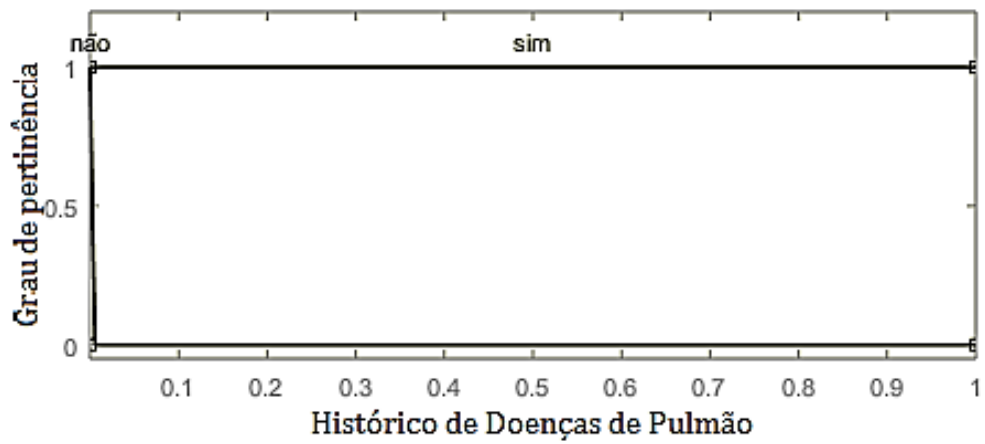
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 16 – Variável Poluição



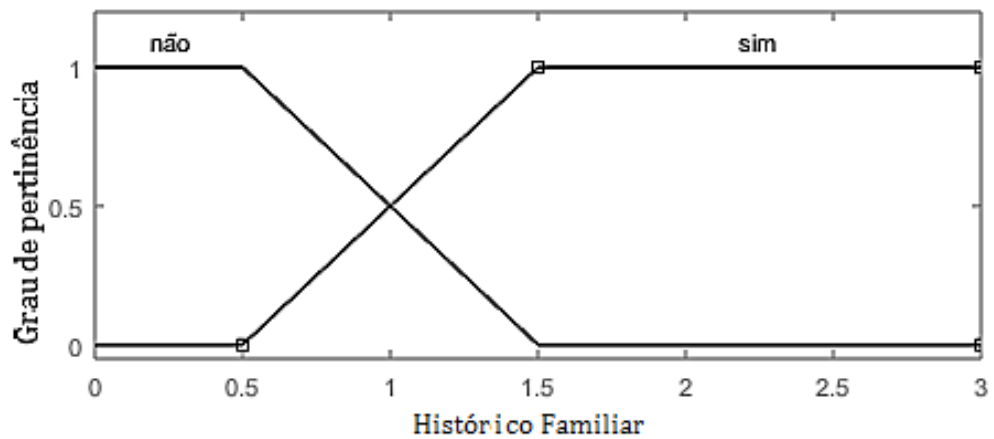
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 17 – Variável Histórico de Doenças Pulmonares



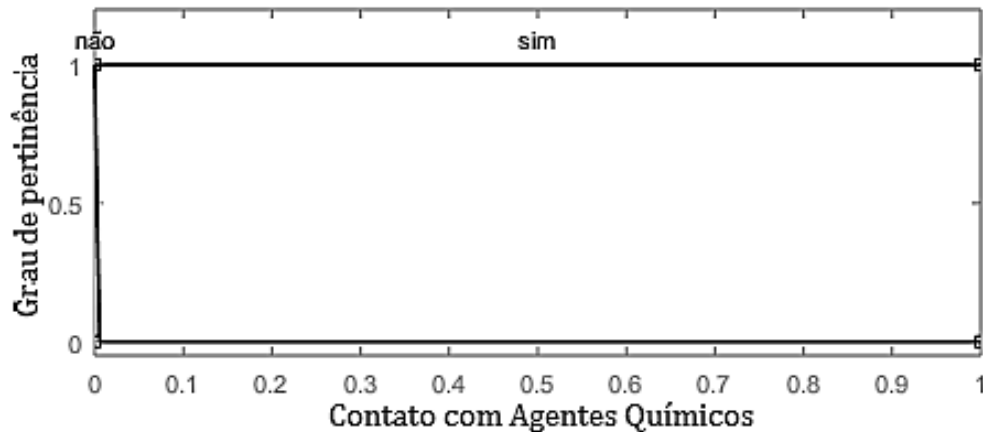
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 18 – Variável Histórico Familiar



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 19 – Variável Contato com Agentes Químicos



Fonte: Elaborada pela autora.

Foi elaborada uma base de regras, num total de 32 regras, do tipo:

“Se (tabagismo é não fumante) e (poluição é pouca) e (Histórico de Doenças Pulmonares é não) e (Histórico Familiar é não) e (Contatos com Agentes Químicos é não), então (chance é baixa);

“Se (tabagismo é fumante) e (poluição é muita) e (Histórico de Doenças Pulmonares é sim) e (Histórico Familiar é sim) e (Contatos com Agentes Químicos é sim), então (chance é alta);

Adotou-se o Método de Inferência de Mamdani e a *defuzzificação* do Centro de Gravidade.

4.3 RESULTADOS

O modelo matemático foi desenvolvido utilizando-se a ferramenta *Toolbox Fuzzy* do software *MatLab*, o algoritmo do programa será apresentado no Anexo A desta dissertação.

Por exemplo, considere os casos extremos de dois pacientes hipotéticos a as simulações obtidas através do programa:

Exemplo 4.1. suponha um indivíduo que

- Fuma a mais de 30 anos;
- Mora em uma cidade grande e poluída;
- Possui histórico de doenças pulmonares;
- Possui parentes de 1º grau com a doença;
- Já esteve em contato com Agentes Químicos;

Como o programa é auto-explicativo, deve digitar os seguinte os comandos:

Para Variável "tabagismo" considere:

Se você não for fumante e não conviver com um fumante digite zero.

Se você não for fumante, porém conviver com um fumante digite uma nota de 1 a 5.

'Se você for (ou foi) fumante digite há quantos anos você fuma (ou fumou).'

Nota atribuída a variável "tabagismo": 40

De 0 a 10, qual grau de poluição você está exposto diariamente: 10

Você teve, ou tem alguma doença pulmonar grave (como, tuberculose ou Doença Pulmonar Obstrutiva Crônica)? Se sim, digite 1, se não, digite 0: 1

Você possui histórico familiar de câncer de pulmão? Se não, digite 0. Se sim e o familiar for de 2º grau, digite 1. Ou, se sim e o familiar for de 1º grau, digite 2: 2

Você já esteve exposto a algum agente tóxico como: Arsênico, amianto, asbesto, berílio, cromo, radônio, níquel, cádmio ou cloreto em seu trabalho? Se sim, digite 1, se não, digite 0: 1

Risco de desenvolver câncer de pulmão: 0,8817

Nas condições citadas acima, o indivíduo possui aproximadamente 0,9 de chances de desenvolver um câncer de pulmão, isto é, estimativa gerada pelo sistema *fuzzy* proposto.

Exemplo 4.2. Considere agora um indivíduo que

- Nunca fumou e não tem contato direto com pessoas fumantes;
- Mora em uma cidade do interior, em contato com a natureza;
- Não possui histórico de doenças pulmonares;
- Não possui parentes com a doença;
- Nunca esteve em contato com Agentes Químicos;

A pessoa, então deve digitar os seguintes comandos:

Para Variável "tabagismo" considere:

Se você não for fumante e não conviver com um fumante digite zero.

Se você não for fumante, porém conviver com um fumante digite uma nota de 1 a 5.

'Se você for (ou foi) fumante digite há quantos anos você fuma (ou fumou).'

Nota atribuída a variável "tabagismo": 0

De 0 a 10, qual grau de poluição você está exposto diariamente: 3

Você teve, ou tem alguma doença pulmonar grave (como, tuberculose ou Doença

Pulmonar Obstrutiva Crônica)? Se sim, digite 1, se não, digite 0: 0

Você possui histórico familiar de câncer de pulmão? Se não, digite 0. Se sim e o familiar for de 2º grau, digite 1. Ou, se sim e o familiar for de 1º grau, digite 2: 1

Você já esteve exposto a algum agente tóxico como: Arsênico, amianto, asbesto, berílio, cromo, radônio, níquel, cádmio ou cloreto em seu trabalho? Se sim, digite 1, se não, digite 0: 0

Risco de desenvolver câncer de pulmão: 0,4022

Nas condições citadas acima, o indivíduo possui aproximadamente 0,4 de chances de desenvolver um câncer de pulmão, isto é, estimativa gerada pelo sistema *fuzzy* proposto.

Por um lado, consideramos que os resultados obtidos nas simulações estão coerentes com dados reais, no sentido que satisfaz resultados encontrados na literatura. Por outro lado, para validação do modelo, seria necessário um banco de dados fornecido por um médico especialista com o perfil de pacientes com suspeita de câncer de pulmão para comparar com nossos resultados.

Apresentaremos agora, as Considerações Finais.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na modelagem de fenômenos biológicos é comum se deparar com incertezas, envolvendo variáveis que não são precisamente quantificadas. Muitas das incertezas que encontramos nos fenômenos são provenientes apenas da subjetividade da nossa linguagem. Esse é o caso típico de alguns procedimentos adotados em Biomedicina para diagnosticar e controlar alguma doença em paciente. Por exemplo, para se controlar determinada doença, observam-se os sinais ou sintomas apresentados pelo paciente. A gravidade destes sinais indicará o procedimento médico a ser adotado. O termo “gravidade” é subjetivo no sentido de apresentar graduações. Pois bem, incertezas devido à gradualidade podem ser tratadas por meio de métodos *fuzzy*. Esta teoria tem se mostrado mais adequada no tratamento de variáveis incertas e subjetivas do que a matemática clássica.

Dessa forma, este trabalho iniciou-se com estudo de conceitos básicos da Teoria dos Conjuntos *Fuzzy* e de sistemas baseados em regras *fuzzy*.

A partir deste estudo propomos um modelo matemático para estimar o risco de um indivíduo desenvolver câncer de pulmão por meio de um sistema baseado em regras *fuzzy*. Para isso, consideramos os seguintes fatores de risco: tabagismo, poluição, histórico de doenças pulmonares, histórico familiar e contato com agentes químicos como variáveis de entrada do sistema *fuzzy*.

No modelo *fuzzy* as variáveis do sistema são conjuntos fuzzy e estabelecemos uma base de regras que relacionam as variáveis de entrada com a variável de saída - risco de um indivíduo desenvolver câncer de pulmão – a partir de dados da literatura fornecidos por especialistas.

Utilizamos o método de inferência de Mamdani e o centroide como defuzzificador. As simulações foram realizadas no *Toolbox Fuzzy* do ambiente *Matlab*.

REFERÊNCIAS

- AMENDOLA, M. et al. *Análise Matemática de condições de conforto térmico para avicultura usando a teoria dos conjuntos fuzzy*. [S.l.], 2004.
- BARROS, L. C. *Mini curso Introdução a Lógica Fuzzy*. [S.l.], 2006.
- BARROS, L. C.; BASSANESI, R. C. *Introdução à teoria Fuzzy: Aplicações em Biomatemática*. [S.l.], 2001.
- BARROS, L. C.; BASSANESI, R. C. *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*. [S.l.], 2011.
- BASSANESI, R. C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. [S.l.], 2002.
- CETESB. <http://www.cetesb.sp.gov.br/>. [S.l.], 2016.
- ERMENTROUT, G. B.; EDELSTEIN-KESHET, L. *Cellular automata approaches to biological modeling*. [S.l.], 1993.
- FILHO, V. W. et al. *Tabagismo e Câncer no Brasil: Evidências e Perspectivas*. [S.l.], 2010.
- FUJIMOTO, R. Y. *Diagnóstico automático de defeitos em rolamentos baseado em Lógica Fuzzy*. [S.l.], 2011.
- KLIR, G. J.; YUAN, B. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic - Theory and Application*. [S.l.], 1995.
- MENEZES, A. et al. *Risco de câncer de pulmão, laringe e esôfago atribuível ao fumo*. [S.l.], 2002.
- OMENN, G. S. et al. *Risk Factors for Lung Cancer and for Intervention Effects in CARET, the Beta-Carotene and Retinol Efficacy Trial*. [S.l.], 1996.
- PEIXOTO, M. S. *Sistemas Dinâmicos e Controladores Fuzzy: um Estudo da Dispersão da Morte Súbita dos Citros em São Paulo*. [S.l.], 2005.
- PEIXOTO, M. S.; BARROS, L. C.; BASSANESI, R. C. *A model of Cellular Automata for the spatial and temporal analysis of Citrus Sudden Death with the fuzzy parameter*. [S.l.], 2008 (1).
- PEIXOTO, M. S.; BARROS, L. S.; BASSANESI, R. C. *Uma Abordagem Fuzzy para um Modelo Presa-predador Acoplado ao Parasitismo*. [S.l.], 2007.
- PEIXOTO, M. S.; BARROS, L. S.; BASSANESI, R. C. *Predator prey fuzzy model*. [S.l.], 2008 (2).
- PEREIRA, A. M.; GOMES, M.; FAVERO, N. C. *A Inteligência Artificial usada na Recuperação de Informações*. [S.l.], 2011.
- SANTOS, A. V. N.; FELIX, L. B.; VIEIRA, J. G. V. *Estudo da logística de distribuição física de um laticínio utilizando lógica fuzzy*. [S.l.], 2012.
- SHAW, I. S.; SIMOES, M. G. *Controle e Modelagem Fuzzy*. [S.l.], 1999.
- TÔRRES, J. <http://www.teoriadacomplexidade.com.br> (Acessado em 10/02/15, às 16h 00min.). [S.l.], 2012.

UEHARA, C.; JAMNIK, S.; SANTORO, I. L. *Câncer de Pulmão*. [S.l.], 1998.

ZADEH, L. A. *Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes*. [S.l.], 1973.

ZADEH, L. A. *Fuzzy Sets*. [S.l.], 1999.

ZAMBONI, M. *Epidemiologia do câncer do pulmão*. [S.l.], 2002.

Anexos

ANEXO A – ALGORÍTMO DO PROGRAMA

```

clear all
disp('Para Variável "tabagismo" considere:');
disp('Se você não for fumante e não conviver com um fumante digite zero. ');
disp('Se você não for fumante, porém conviver com um fumante digite uma nota de 1 a 5. ');
disp('Se você for (ou foi) fumante digite há quantos anos você fuma (ou fumou). ');
Tabagismo=input('Nota atribuída à variável "tabagismo": ');
if Tabagismo>5
Tabagismo=Tabagismo+5;
end
Poluicao=input('De 0 a 10, qual grau de poluição você esta exposto diariamente: ');
disp('Você teve, ou têm alguma doença pulmonar grave (como, tuberculose ou Doença Pulmonar Obstrutiva Crônica)? ');
Doencas=input('Se sim, digite 1, se não, digite 0: ');
disp('Você possui histórico familiar de câncer de pulmão? ');
disp('Se não, digite 0. ');
disp('Se sim e o familiar for de 2º grau, digite 1. ');
Genetica=input('Ou, se sim e o familiar for de 1º grau, digite 2: ');
disp('Você já esteve exposto a algum agente tóxico como: ');
disp('Arsênico, amianto, asbesto, berílio, cromo, radônio, níquel, cádmio ou cloreto em seu trabalho? ');
Agquimicos=input('Se sim, digite 1, se não, digite 0: ');
a=readfis('regrascancerpulmao2');
out=evalfis([Tabagismo;Poluicao;Doencas;Genetica;Agquimicos],a);
disp('Chance de desenvolver câncer de pulmão: ')
disp(out)

```