

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Versões do Teorema de Tverberg e Aplicações

CARLOS HENRIQUE FELICIO PONCIO

SÃO CARLOS - SP

2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Versões do Teorema de Tverberg e Aplicações

CARLOS HENRIQUE FELICIO PONCIO

Orientador: PROF. DR. EDIVALDO LOPES DOS SANTOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

SÃO CARLOS - SP

2016

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P795v Poncio, Carlos Henrique Felício
Versões do teorema de Tverberg e aplicações /
Carlos Henrique Felício Poncio. -- São Carlos :
UFSCar, 2016.
55 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de
São Carlos, 2016.

1. Complexos simpliciais. 2. G-ações. 3. G-índices.
4. Teorema de tverberg. 5. Teoremas do tipo borsuk-
ulam. I. Título.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Carlos Henrique Felício Poncio, realizada em 25/02/2016:

Edivaldo Lopes dos Santos

Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos
UFSCar

Pedro Luiz Queiroz Pergher

Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher
UFSCar

Alice Kimie Miwa Libardi

Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi
UNESP

Aos meus pais.

“Tudo vale a pena quando a alma não é pequena”. (Fernando Pessoa)

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por todas as coisas boas que tem ocorrido na minha vida, pela saúde e por sempre me guiar. Gostaria de agradecer a todas as pessoas que participaram da minha trajetória até este momento.

Em especial à minha família por todo o apoio, educação e amor, que desde sempre tiveram comigo. Também agradeço aos meus amigos mais próximos e colegas do DM, com ênfase maior, aos três amigos que desde a graduação tem me acompanhado até o prezado momento, Daiana, Evandro e Mateus.

Evandro e Mateus sempre companheiros de estudos e verdadeiros amigos fora do âmbito acadêmico, certamente nossa amizade não definhará.

Daiana, ou carinhosamente Daia, menina de bom coração que me ajudou a passar pelos momentos mais difíceis deste período, fazendo que minha vida sempre tivesse um lado colorido, e em momento algum me deixou desanimar.

Com todo o carinho agradeço a todos os educadores que desde minha infância me incentivaram a seguir em busca do conhecimento. Em especial ao meu orientador Prof. Edivaldo, pela orientação, pelo conhecimento transferido a mim, pelas conversas sempre edificantes que tivemos e principalmente pelo exemplo como pessoa e como professor. Com certo destaque quero agradecer aos professores da UTFPR - campus Pato Branco, UNICAN - Espanha e do DM-UFSCar, por todo conhecimento matemático que obtive.

Enfatizo que sem o apoio de todas as pessoas acima citadas, tal conquista seria muito mais árdua ou impossível de alcançar.

Agradeço à FAPESP, Processo-2015/01264-7, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo suporte financeiro.

Resumo

O objetivo principal desta dissertação consiste em desenvolver um estudo detalhado de métodos topológicos em combinatória e geometria visando apresentar uma prova da versão topológica do teorema de Tverberg e de um teorema sobre a quantidade de partições de Tverberg.

Palavras Chave: *Complexos simpliciais, G -ações, G -índices, joins, Teorema de Tverberg, Teoremas do Tipo Borsuk-Ulam.*

Abstract

In this work, we will use topological methods in combinatorics and geometry to present a proof of the topological Tverberg theorem and a result about many Tverberg partitions.

Keywords: *Simplicial complexes, G -actions, G -index, joins, Tverberg theorem, Borsuk-Ulam type theorems.*

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	7
1.1 Complexos Simpliciais Geométricos	7
1.2 Triangulações	10
1.3 Complexos Simpliciais Abstratos	11
1.4 Dimensão de Realizações Geométricas	14
1.5 Complexos Simpliciais e conjuntos parcialmente ordenados	15
1.6 Joins	17
1.7 Espaços k -conexos	19
2 Versão topológica do teorema de Tverberg	23
2.1 G -espaços e G -aplicações	23
2.2 O G -índice	26
2.3 O caso particular $G = \mathbb{Z}_2$: \mathbb{Z}_2 -índice e a versão topológica do teorema de Radon	31
2.4 Versão topológica do teorema de Tverberg	34
2.5 Aplicações: Teorema de Borsuk-Ulam para \mathbb{Z}_p -ações livres	39
3 Sobre a quantidade de partições de Tverberg	43
3.1 Uma estimativa inferior para o número de partições de Tverberg	43
4 A conjectura de Tverberg	47
4.1 Um breve histórico sobre a conjectura de Tverberg	47

4.2 Comportamento das Partições de Tverberg 49

Introdução

O Teorema de Tverberg é uma generalização do Teorema de Radon. Este último, afirma que um conjunto de $d + 2$ pontos em \mathbb{R}^d pode ser particionado em dois subconjuntos que possuem envoltórias convexas não disjuntas. Tais teoremas são importantes e interessantes teoremas da Geometria Discreta e, especificamente, afirmam que:

Teorema de Radon. *Todo conjunto X constituído de $d + 2$ pontos em \mathbb{R}^d pode ser dividido em dois subconjuntos disjuntos A_1 e A_2 de X com interseção não vazia de suas envoltórias convexas, i.e., $\text{conv}(A_1) \cap \text{conv}(A_2) \neq \emptyset$, onde $\text{conv}(A_i)$ denota a envoltória convexa ou fecho convexo de A_i .*

Teorema de Tverberg. *Para qualquer $d \geq 1$ e $r \geq 2$, qualquer conjunto constituído de $(d + 1)(r - 1) + 1$ pontos em \mathbb{R}^d pode ser particionado em r subconjuntos disjuntos A_1, A_2, \dots, A_r de tal maneira que $\text{conv}(A_1) \cap \dots \cap \text{conv}(A_r) \neq \emptyset$. Tal partição é dita uma **partição de Tverberg**.*

A prova original do Teorema de Tverberg [22] apresentada em 1966 é considerada bastante técnica e complicada. Alguns anos depois, Tverberg em [23] publicou uma prova mais simples de seu teorema. Em 1992, Sarkaria em [18] também apresenta uma prova simples e elegante deste importante resultado.

Os teoremas de Radon e Tverberg podem ser reformulados em termos de aplicações afins, da seguinte forma:

Uma formulação equivalente do Teorema de Radon. *Para toda aplicação afim de $f : \|\sigma^{d+1}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$, existem duas faces disjuntas $F_1, F_2 \subseteq \sigma^{d+1}$ tais que*

$$f(\|F_1\|) \cap f(\|F_2\|) \neq \emptyset.$$

Uma formulação equivalente do Teorema de Tverberg. *Para toda aplicação afim $f : \|\sigma^{(d+1)(r-1)}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$, existem r faces disjuntas $F_1, F_2, \dots, F_r \subseteq \sigma^N$ tais que*

$$f(\|F_1\|) \cap f(\|F_2\|) \cap \dots \cap f(\|F_r\|) \neq \emptyset.$$

Sabendo das equivalências anteriores, faz sentido questionar se a afirmação contínua válida ao exigir que f seja somente uma aplicação contínua ao invés de afim. Tal formulação dá origem a famosa Conjectura de Tverberg, a saber

Conjectura de Tverberg. *Sejam $d \geq 1$ e $r \geq 2$ arbitrários e denote $N := (d+1)(r-1)$. Para cada aplicação contínua*

$$f : \|\sigma^N\| \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

existem r faces disjuntas $F_1, F_2, \dots, F_r \subseteq \sigma^N$ tais que

$$f(\|F_1\|) \cap f(\|F_2\|) \cap \dots \cap f(\|F_r\|) \neq \emptyset.$$

Esta conjectura foi provada no caso $r = 2$ por Bajmóczy e Bárány em 1979 [1] e no caso em que r é um primo por Bárány, Schlosman e Szücs em 1981 [2]. Estes dois casos constituem nos principais resultados que apresentaremos neste trabalho, conhecidos como **versão topológica do teorema de Radon** e **versão topológica do teorema de Tverberg para r primo**, respectivamente.

Versão topológica do teorema de Radon. *Seja $f : \|\sigma^{d+1}\| \longrightarrow \mathbb{R}^d$ uma aplicação contínua. Então existem duas faces disjuntas $F_1, F_2 \subseteq \sigma^{d+1}$ tais que*

$$f(\|F_1\|) \cap f(\|F_2\|) \neq \emptyset.$$

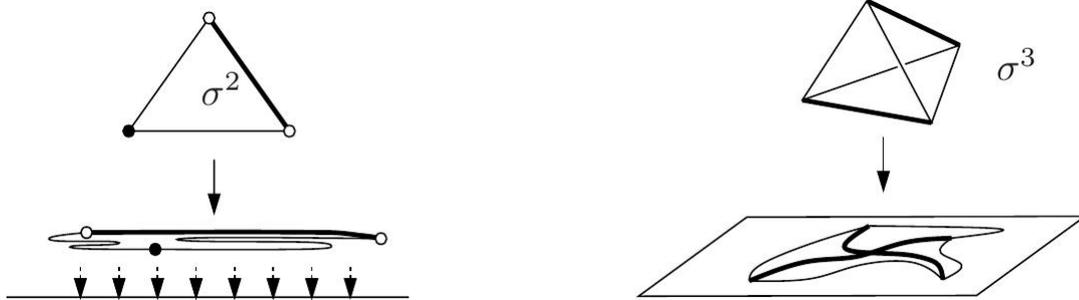
Versão topológica do teorema de Tverberg - Caso $r = p$ primo. *Sejam p um primo, $d \geq 1$ arbitrários e denote $N := (d+1)(p-1)$. Para cada aplicação contínua*

$$f : \|\sigma^N\| \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

existem p faces disjuntas $F_1, F_2, \dots, F_p \subseteq \sigma^N$ tais que

$$f(\|F_1\|) \cap f(\|F_2\|) \cap \dots \cap f(\|F_p\|) \neq \emptyset.$$

Aqui, vamos fazer uma observação interessante sobre estes teoremas: lembremos que o Teorema clássico de Borsuk-Ulam afirma, em particular, que uma aplicação contínua de S^n em \mathbb{R}^n não pode ser injetiva. O Teorema topológico de Radon tem esta mesma propriedade, como mostram as ilustrações abaixo para $d = 1$ e $d = 2$:



Este fato nos diz que o Teorema topológico de Radon está fortemente relacionado com os problemas famosos de não existência de mergulhos topológicos de um complexo simplicial (grafos) sobre os espaços euclidianos, tal como o Teorema de Van-Kampen-Flores entre outros.

Voltando a Conjetura de Tverberg, temos também que a mesma é válida para o caso em que r é uma potência de primo e tal teorema foi provado de maneiras independentes por Volovikov [24] e por Sarkaria [19]. A demonstração deste caso, em ambas referências, requer o conhecimento de ferramentas avançadas de topologia algébrica, tais como sequências espectrais de uma fibração entre outras.

Desde 1996 quando foi provado por Volovikov [24] (e de 2000 quando foi provado por Sarkaria [19]) até 2015, apesar de várias tentativas que deram origem a novas técnicas e conjecturas equivalentes, não houve avanços para o caso em que r não seja potência de primo. Durante este período, a validade da Conjetura de Tverberg para tal caso foi considerada um dos problemas mais desafiadores na área de topologia combinatorial e geométrica. Em fevereiro de 2015, em um pré-print publicado por Florian Frick no arxiv,

sob algumas condições sobre os parâmetros r e d , um contra-exemplo para a Conjectura de Tverberg é apresentado, mostrando então que a Conjectura de Tverberg não é válida para o caso geral.

Relatamos a seguir um outro problema interessante relacionado com o Teorema de Tverberg. Sabendo que o teorema é válido, podemos afirmar que existe pelo menos uma partição de Tverberg. Porém quantas partições de Tverberg existem para $(d + 1)(r - 1) + 1$ pontos em \mathbb{R}^d ? Sierksma conjecturou que existem $((r - 1)!)^d$ partições, mas até o momento tal afirmação ainda não pode ser provada. Entretanto, Vučić e Živaljević em [25] estabeleceram um limitante inferior para o número de partições se r for primo (no caso em que r é uma potência de primo, também existe uma estimativa similar [21]).

Teorema (Partições de Tverberg[25]). *Seja p um primo. Para qualquer aplicação contínua $f : \|\sigma^N\| \rightarrow \mathbb{R}^d$, onde $N = (d + 1)(p - 1)$, o número de p -uplas não ordenadas $\{F_1, F_2, \dots, F_p\}$ de faces disjuntas de σ^N com $\bigcap_{i=1}^p f(\|F_i\|) \neq \emptyset$ é ao menos*

$$\frac{1}{(p - 1)!} \cdot \left(\frac{p}{2}\right)^{(d+1)(p-1)/2}.$$

O objetivo principal deste trabalho é apresentar uma prova da versão topológica do teorema de Tverberg (caso r primo) e um teorema sobre a quantidade de partições de Tverberg (caso r primo). Para isso será feito um estudo sobre G -ações, Joins, $E_n G$ -espaços e G -índice. Estas ferramentas nos propiciarão condições para demonstrar os resultados citados. As principais referências para o desenvolvimento do trabalho foram [12], [2] e [25].

Mais especificamente, no capítulo 1, são apresentados os conceitos preliminares para a abordagem do tema, tais como, complexos simpliciais geométricos e abstratos, join de espaços topológicos e espaços k -conexos.

No capítulo 2, é introduzido o conceito de um G -índice para G -espaços. Aqui vale ressaltar que na literatura existem várias teorias de G -índice, como por exemplo o famoso \mathbb{Z}_2 -índice de Yang [26], no entanto, não faremos comparações do índice apresentado com os demais índices conhecidos, desde que cada um deles possui uma forma peculiar de definição. Na sequência, calculamos o índice de espaços especiais (p -produto deletado

de \mathbb{R}^d e p -join deletado de \mathbb{R}^d , para $p \geq 2$ primo), os quais são fundamentais para as demonstrações da versão topológica do teorema de Radon e a da versão topológica do teorema de Tverberg (caso r primo). Finalizamos o capítulo com uma aplicação do \mathbb{Z}_p -índice em teoremas de Borsuk-Ulam para \mathbb{Z}_p -ações livres.

No capítulo 3, usando algumas técnicas combinatoriais e também o \mathbb{Z}_p -índice, mostramos um teorema sobre a quantidade de partições de Tverberg (caso r primo) descrito anteriormente.

No capítulo 4, finalizando o trabalho, damos um breve histórico da Conjectura de Tverberg, apresentando os principais resultados que envolvem tal conjectura, dentre eles alguns bem recentes (2015), mostrando a relevância e importância atual deste tema na literatura.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos os conceitos preliminares para o desenvolvimento do trabalho, tais como, complexos simpliciais geométricos e abstratos, join de espaços topológicos e espaços k -conexos.

1.1 Complexos Simpliciais Geométricos

Definição 1.1.1 *Sejam v_0, v_1, \dots, v_k pontos em \mathbb{R}^d . Nós diremos que esses pontos são geometricamente dependentes se existem números reais $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, não todos nulos tal que $\sum_{i=0}^k \alpha_i v_i = 0$ e $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 0$. Caso contrário v_0, v_1, \dots, v_k são chamados geometricamente independentes.*

Exemplo 1.1.2 *Temos que:*

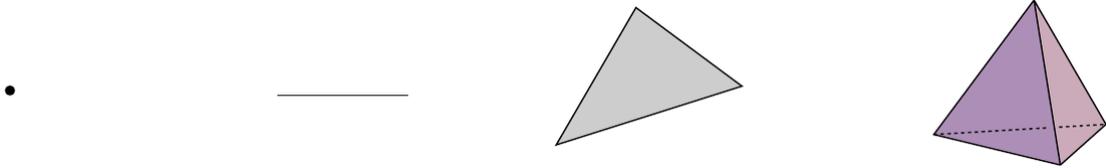
- *Dois pontos v_0 e v_1 são geometricamente independentes se $v_1 \neq v_0$.*
- *Três pontos v_0, v_1 e v_2 são geometricamente independentes se não estão numa mesma reta.*
- *Quatro pontos v_0, v_1, v_2 e v_3 são geometricamente independentes se não estão num mesmo plano.*

Lema 1.1.3 ([12], Lemma 1.3.2) *As seguintes condições são equivalentes aos pontos $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^d$ serem geometricamente independentes:*

- Os vetores $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_k - v_0$ são linearmente independentes.
- Os vetores $(d + 1)$ -dimensionais $(1, v_0), (1, v_1), \dots, (1, v_k) \in \mathbb{R}^{d+1}$ são linearmente independentes.

Definição 1.1.4 Um *simplexo* σ é a envoltória convexa de um conjunto finito $A \subset \mathbb{R}^d$ de pontos geometricamente independentes. Os pontos de A são chamados de *vértices* de σ . A *dimensão* de σ é $\dim \sigma := |A| - 1$. Assim cada k -simplexo (simplexo k -dimensional) tem $k + 1$ vértices.

Exemplo 1.1.5 São exemplos de simplexos: um ponto, um segmento de reta, um triângulo, um tetraedro:



Estes exemplos tem dimensão 0, 1, 2 e 3, respectivamente.

Definição 1.1.6 A *envoltória convexa* de um subconjunto arbitrário dos vértices de um simplexo σ é uma *face* de σ . Assim cada face é um simplexo.

O interior relativo de um simplexo σ é construído a partir de σ pela remoção de todas as faces de dimensão menor que $\dim \sigma$.

Definição 1.1.7 Uma família não vazia Δ de simplexos é um *complexo simplicial* se as duas seguintes condições são satisfeitas:

- Cada face de qualquer simplexo $\sigma \in \Delta$ é também um simplexo de Δ .
- A interseção $\sigma_1 \cap \sigma_2$ de quaisquer dois simplexos $\sigma_1, \sigma_2 \in \Delta$ é uma face de ambos σ_1 e σ_2 .

A união de todos os simplexos de um complexo simplicial Δ é denominada **poliedro** de Δ e é denotado por $||\Delta||$.

A **dimensão** de um complexo simplicial é a maior dimensão dos simplexos que o compõem: $\dim \Delta := \max\{\dim \sigma \in \Delta\}$.

O **conjunto de vértices** de Δ , denotado por $V(\Delta)$, é a união dos conjuntos de vértices de todos os simplexos de Δ .

Exemplo 1.1.8 Abaixo temos três figuras, onde a da esquerda representa um complexo simplicial e as outras duas não representam complexos simpliciais:



Os interiores relativos de todos os simplexos de um complexo simplicial Δ formam uma partição do poliedro $\|\Delta\|$, pois para cada $x \in \|\Delta\|$ existe exatamente um simplexo $\sigma \in \Delta$ tal que x está em seu interior relativo. Este simplexo é denotado por $\text{supp}(x)$ e chamado de *suporte* do ponto x .

Lema 1.1.9 O conjunto de todas as faces de um simplexo é um complexo simplicial.

Demonstração: Sejam $V \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto geometricamente independente e $F, G \subset V$. Mostremos que

$$\text{conv}(F) \cap \text{conv}(G) = \text{conv}(F \cap G)$$

Temos que $F \cap G \subset F, G$, portanto $\text{conv}(F \cap G) \subset \text{conv}(F)$ e $\text{conv}(F \cap G) \subset \text{conv}(G)$, ou seja, $\text{conv}(F \cap G) \subset \text{conv}(F) \cap \text{conv}(G)$. Por outro lado seja $x \in \text{conv}(F) \cap \text{conv}(G)$, logo existem números reais não negativos α_u, β_v , tais que

$$x = \sum_{u \in F} \alpha_u u = \sum_{v \in G} \beta_v v, \text{ com } \sum_{u \in F} \alpha_u = 1 = \sum_{v \in G} \beta_v.$$

Assim temos que

$$0 = \sum_{u \in F} \alpha_u u - \sum_{v \in G} \beta_v v = \sum_{u \in F \setminus G} \alpha_u u - \sum_{v \in G \setminus F} \beta_v v + \sum_{w \in F \cap G} (\alpha_w - \beta_w) w.$$

Como $F \cup G$ é um conjunto geometricamente independente temos que

$$\alpha_u = \beta_v = (\alpha_w - \beta_w) = 0, \text{ para todo } u \in F \setminus G, v \in G \setminus F \text{ e } w \in F \cap G.$$

Portanto $x = \sum_{u \in F \cap G} \alpha_u u = \sum_{v \in F \cap G} \beta_v v$. \square

Um complexo simplicial consistindo de todas as faces de um n -dimensional simplexo, arbitrário, incluindo o próprio simplexo, será denotado por σ^n .

Definição 1.1.10 *Um **subcomplexo** de um complexo simplicial Δ é um subconjunto de Δ que também é um complexo simplicial.*

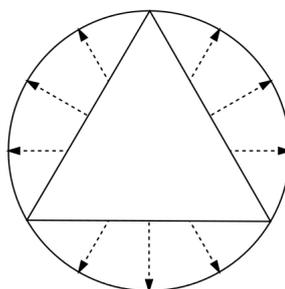
Exemplo 1.1.11 *Um exemplo de um subcomplexo é o k -esqueleto de um complexo simplicial Δ . O k -esqueleto consiste de todos os simplexos de Δ que tem dimensão no máximo k , e será denotado por $\Delta^{\leq k}$.*

1.2 Triangulações

Definição 1.2.1 *Seja X um espaço topológico. Se existir um complexo simplicial Δ tal que $X \cong \|\Delta\|$, então Δ é chamado de triangulação de X .*

Exemplo 1.2.2 *Uma simples triangulação da esfera S^{n-1} é a fronteira de um n -simplexo, que é, o subcomplexo de σ^n obtido ao deletarmos apenas o n -dimensional simplexo de σ^n .*

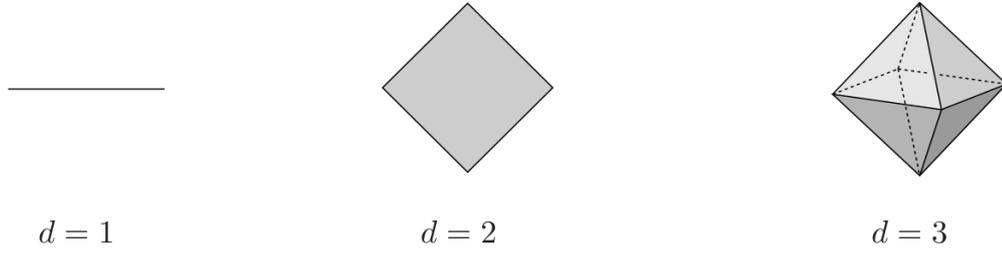
O homeomorfismo para o caso $n = 2$ ilustrado a seguir, é chamado de projeção central. O caso geral é obtido pelo mesmo tipo de projeção.



Definição 1.2.3 *O d -dimensional **crosspolytope** é a envoltória convexa*

$$\text{conv}\{e_1, -e_1, \dots, e_d, -e_d\}$$

dos vetores da base canônica juntamente com os opostos:



Também podemos definir como sendo a bola unitária em relação a norma

$$l_1 : \{x \in \mathbb{R} : \|x\|_1 \leq 1\}.$$

1.3 Complexos Simpliciais Abstratos

O complexo simplicial abstrato é a versão combinatorial do complexo simplicial geométrico, ou seja, duas descrições diferentes para o mesmo objeto matemático.

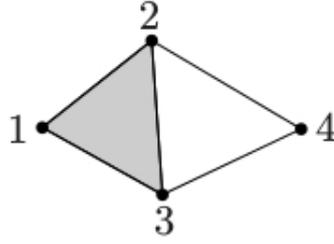
Definição 1.3.1 Um *complexo simplicial abstrato* é um par (V, K) , onde V é um conjunto e $K \subseteq 2^V$ é um sistema hereditário de subconjuntos de V , ou seja, sempre que $F \in K$ e $G \subset F$ tem-se que $G \in K$. Em particular $\emptyset \in K$ sempre que $K \neq \emptyset$. Os elementos de K são chamados *simplexos*. A *dimensão* de K é definida por $\dim(K) := \max\{|F| - 1 : F \in K\}$.

Usualmente será assumido que $V = \bigcup K$, escrevendo somente K em vez de (V, K) , onde V é entendido como sendo igual a $\bigcup K$.

Cada complexo simplicial geométrico Δ determina um complexo simplicial abstrato. Os pontos do complexo simplicial abstrato são todos os vértices de simplexos de Δ , pondo $V := V(\Delta)$, e os conjuntos do complexo simplicial abstrato são justamente os conjuntos de vértices dos simplexos de Δ . O sistema de conjuntos (V, K) obtido dessa maneira é um complexo simplicial abstrato.

Exemplo 1.3.2 Para o complexo simplicial geométrico representado abaixo

¹ 2^V denota o conjunto das parte de V .



tem-se o complexo simplicial abstrato $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Nessa situação dizemos que Δ é a *realização geométrica* de K , e o poliedro de Δ é também associado como poliedro de K .

Reciprocamente, qualquer complexo simplicial abstrato (V, K) com V finito tem uma realização geométrica. Seja $n := |V| - 1$ e identificamos V com o conjunto de vértices de um simplexo n -dimensional σ^n . Definindo um subcomplexo Δ de σ^n por $\Delta := \{\text{conv}(F) : F \in K\}$. Este é um complexo simplicial geométrico, e é associado ao complexo simplicial abstrato K . Assim todo complexo simplicial com $n + 1$ vértices pode ser realizado em \mathbb{R}^n .

Definição 1.3.3 *Sejam K e L dois complexos simpliciais abstratos. Uma **aplicação simplicial** de K em L é uma aplicação $f : V(K) \rightarrow V(L)$ que leva simplexos em simplexos, isto é, $f(F) \in L$ sempre que $F \in K$.*

Uma aplicação simplicial bijetiva cuja inversa também é aplicação simplicial é chamada um **isomorfismo** de complexos simpliciais abstratos. Se existe um isomorfismo entre complexos simpliciais K e L , denotamos $K \cong L$.

Definição 1.3.4 *Sejam Δ_1 e Δ_2 complexos simpliciais geométricos, K_1 e K_2 os complexos simpliciais abstratos associados, e $f : V(K_1) \rightarrow V(K_2)$ uma aplicação simplicial de K_1 em K_2 . Definimos a aplicação extensão afim de f ,*

$$\|f\| : \|\Delta_1\| \rightarrow \|\Delta_2\|,$$

estendendo f linearmente nos interiores relativos dos simplexos de Δ_1 , da seguinte maneira: se $\sigma = \text{supp}(x) \in \Delta_1$ é o suporte de x , os vértices de σ são v_0, \dots, v_k , e $x =$

$\sum_{i=0}^k \alpha_i v_i$ com $\alpha_0, \dots, \alpha_k \geq 0$ e $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 1$, definimos $\|f\|(x) = \sum_{i=0}^k \alpha_i f(v_i)$. Observamos que $\|f\|$ é bem definida, pois sendo f uma aplicação simplicial o conjunto de vértices $\{f(v_0), \dots, f(v_k)\}$ é sempre o conjunto de vértices de um simplexo em Δ_2 .

Lema 1.3.5 *Uma aplicação $f : \|\Delta_1\| \rightarrow X$ é contínua se, e somente se, $f|_\sigma$ é contínua para cada $\sigma \in \Delta_1$.*

Demonstração: Se f é contínua, então $f|_\sigma$ é contínua desde que σ é subespaço de Δ_1 . Reciprocamente, supondo cada aplicação $f|_\sigma$ contínua, tomemos C um fechado de X , logo $f^{-1}(C) \cap \sigma = (f|_\sigma)^{-1}(C)$ é fechado em σ , pois $f|_\sigma$ é contínua. Assim $f^{-1}(C)$ é fechado em Δ_1 , pois é interseção finita de fechados. \square

Proposição 1.3.6 *Para toda aplicação simplicial f como na definição 1.3.4, $\|f\|$ é uma aplicação contínua $\|\Delta_1\| \rightarrow \|\Delta_2\|$. Se f é injetiva, então $\|f\|$ é injetiva também, e se f é um isomorfismo, então $\|f\|$ é um homeomorfismo.*

Em particular, esta proposição mostra que cada complexo simplicial abstrato (V, K) define um único espaço topológico a menos de homeomorfismo.

Demonstração: Temos que $\|f\|$ aplica o n -simplexo σ gerado por v_0, v_1, \dots, v_n continuamente sobre o simplexo τ gerado pelo conjunto de vértices $\{f(v_0), f(v_1), \dots, f(v_n)\}$. Pelo Lema 1.3.5 $\|f\|$ é contínua. \square

Cada sistema finito de conjuntos hereditários pode ser considerado como um complexo simplicial abstrato, definindo um espaço topológico (o poliedro de uma realização geométrica) a menos de homeomorfismo.

Por outro lado, se um espaço topológico admite triangulação, ele pode ser descrito de forma puramente combinatorial por um complexo simplicial abstrato (essa descrição não é única).

Uma aplicação contínua, mesmo entre espaços triangularizáveis, geralmente não pode ser descrita por uma aplicação simplicial.

1.4 Dimensão de Realizações Geométricas

Teorema 1.4.1 (Teorema da Realização Geométrica) *Cada complexo simplicial finito d -dimensional K tem uma realização geométrica em \mathbb{R}^{2d+1} .*

Para $d = 1$, o teorema diz que qualquer grafo pode ser representado em \mathbb{R}^3 , com arestas sendo segmentos retos.

Para provar o teorema serão necessárias alguns resultados preliminares.

Lema 1.4.2 *Se K é um complexo simplicial e $f : V(K) \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma aplicação injetiva tal que $f(F \cup G)$ é geometricamente independente para todo $F, G \in K$, então a associação*

$$F \longmapsto \sigma_F := \text{conv}(f(F))$$

fornece uma realização geométrica de K em \mathbb{R}^d .

Demonstração: Se $f(F \cup G)$ é geometricamente independente, então σ_F e σ_G são duas faces do simplexo que tem $f(F \cup G)$ como conjunto de vértices. Então $\sigma_F \cap \sigma_G = \sigma_{F \cap G}$, desde que as faces do simplexo geométrico formam um complexo simplicial. \square

Definição 1.4.3 *A curva $\{\gamma : t \in \mathbb{R}\}$ dada por $\gamma(t) := (t, t^2, \dots, t^d)$ é chamada **curva momento** em \mathbb{R}^d .*

Lema 1.4.4 *Nenhum hiperplano intersecta a curva momento γ em \mathbb{R}^d em mais de d pontos. Consequentemente, cada conjunto com $d+1$ pontos distintos de γ é geometricamente independente. Além disso, se γ intersecta um hiperplano h em d pontos distintos, em cada interseção γ atravessa para o outro lado de h .*

Demonstração: Um hiperplano h é representado por uma equação $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_dx_d = b$ com $(a_1, \dots, a_d) \neq 0$. Se um ponto $\gamma(t)$ esta em h , então temos $a_1t + a_2t^2 + \dots + a_dt^d = b$. Isso significa que os valores de t correspondentes a interseção de γ com h são as raízes reais do polinômio não nulo $p(t) = (\sum_{i=1}^d a_it^i) - b$ de grau no máximo d . Assim $p(t)$ tem no máximo d raízes, e então existe no máximo d interseções.

Se existe d distintas interseções, então $p(t)$ tem d distintas raízes, as quais são todas simples. Portanto, $p(t)$ muda de sinal em cada raiz, isso significa que γ atravessa para o outro lado de h em cada raiz. \square

Demonstração:(Prova do Teorema 1.4.1): Escolhendo uma aplicação $f : V(K) \rightarrow \mathbb{R}^{2d+1}$ tal que os vértices de K são associados a distintos pontos da curva momento em \mathbb{R}^{2d+1} . Então para $F, G \in K$ nós temos $|F \cup G| \leq (d+1) + (d+1) = 2d+2$, e assim pelo Lema 1.4.4 os correspondentes pontos em $f(F \cup G)$ são geometricamente independentes. Logo, o resultado segue do Lema 1.4.2. \square

1.5 Complexos Simpliciais e conjuntos parcialmente ordenados

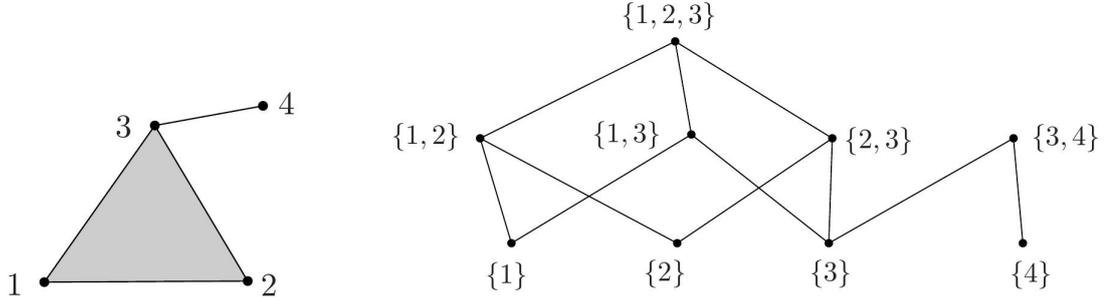
Um conjunto parcialmente ordenado, ou abreviadamente poset, é um par (P, \preceq) , onde P é um conjunto e \preceq é uma relação binária em P que é reflexiva, transitiva e antissimétrica.

Como nós veremos, existe uma correspondência entre complexos simpliciais finitos e posets finitos.

Definição 1.5.1 *O complexo ordem de um poset P é o complexo simplicial $\Delta(P)$, cujos vértices são os elementos de P e cujos simplexes são todas as cadeias (isto é, subconjuntos ordenados, $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}, x_1 \prec x_2 \prec \dots \prec x_k$) em P .*

O **poset face** de um complexo simplicial K é o poset $P(K)$, o qual é o conjunto de todos os simplexes não vazios de K ordenados por inclusão.

Exemplo 1.5.2 *Abaixo temos um complexo simplicial e seu respectivo poset face:*



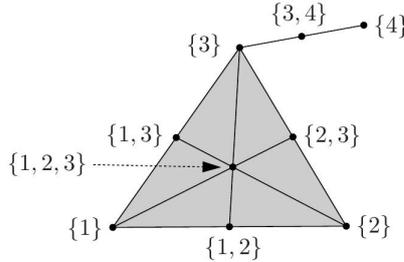
Definição 1.5.3 Para um complexo simplicial K , o complexo simplicial

$$sd(K) := \Delta(P(K))$$

é chamado de *subdivisão baricêntrica* de K .

Mais explicitamente, os vértices de $sd(K)$ são simplexos não vazios de K , e os simplexos de $sd(K)$ são as cadeias dos simplexos de K ordenados por inclusão.

Dada uma realização geométrica de K , nós podemos colocar o vértice de $sd(K)$, correspondente ao simplexo σ no centro de gravidade (baricentro) de σ . Assim, como é sugestivo na figura, temos que $\|sd(K)\|$ é sempre homeomorfo a $\|K\|$.



Sejam (P_1, \preceq_1) e (P_2, \preceq_2) posets. Uma aplicação $f : P_1 \rightarrow P_2$ é dita monótona se $x \preceq_1 y$ implica $f(x) \preceq_2 f(y)$.

Proposição 1.5.4 ([12], Proposition 1.7.3) Cada aplicação monótona $f : P_1 \rightarrow P_2$ entre posets é também uma aplicação simplicial $V(\Delta(P_1)) \rightarrow V(\Delta(P_2))$ entre os complexos ordem.

Corolário 1.5.5 ([12], Corollary 1.7.4) Sejam K_1 e K_2 complexos simpliciais. Consideramos uma aplicação arbitrária f que associa cada simplexo $F \in K_1$ a um simplexo

$f(K) \in K_2$, e suponha que se $F' \subseteq F$, então também $f(F') \subseteq f(F)$. Então f pode ser considerada como uma aplicação simplicial de $sd(K_1)$ em $sd(K_2)$, e então induz uma aplicação contínua $\|f\| : \|K_1\| \rightarrow \|K_2\|$.

Muitas vezes $sd(K)$ pode ser denotado em outras bibliografias por K' e é chamado de derivado de K .

Ao iterarmos a subdivisão baricêntrica varias vezes, o diâmetro de todos os simplexes decresce. Essa é uma maneira simples de produzir triangulações finas.

1.6 Joins

O produto cartesiano de dois espaços topológicos X, Y é também um espaço topológico, entretanto, se X e Y são simplexes de dimensão ao menos 1, então $X \times Y$ não é um simplexo.

Definiremos nesta seção o join, que nos permitira operar complexos simpliciais e obter um complexo simplicial.

Definição 1.6.1 *Sejam K e L dois complexos simpliciais. O join $K * L$ é o complexo simplicial com conjunto de vértices $V(K) \uplus V(L) := V(K) \times \{1\} \cup V(L) \times \{2\}$ e conjunto de simplexes $\{F \uplus G : F \in K, G \in L\}$.*

Mais geralmente, podemos definir o n -join de um complexo simplicial K ,

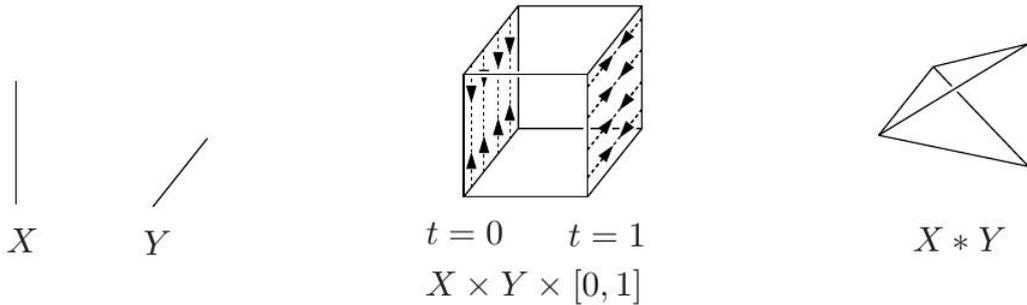
$$K^{*n} := \underbrace{K * K * \cdots * K}_{n\text{-vezes}} \cong \{F_1 \uplus F_2 \uplus \cdots \uplus F_n : F_1, \dots, F_n \in K\}.$$

Exemplo 1.6.2 *Seja $D_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ o complexo simplicial correspondente ao espaço discreto com dois pontos. Como definido temos que $\|D_2\|$ é homeomorfo a S^0 . Que tipo de espaço é o n -join D_2^{*n} ?*

*Podemos identificar o conjunto dos vértices de D_2^{*n} com o conjunto $[2] \times [n]$. Dessa forma um subconjunto de $[2] \times [n]$ será um simplexo se, e somente se, não contém ambos $(1, i)$ e $(2, i)$ com $i \in [n]$. Assim, o complexo simplicial D_2^{*n} é isomorfo ao complexo fronteira do n -dimensional crosspolytope. Portanto temos que $\|D_2^{*n}\| \cong S^{n-1}$.*

Definição 1.6.3 (Join de espaços) *Sejam X e Y espaços topológicos. O join $X * Y$ é o espaço quociente $X \times Y \times [0, 1] / \approx$, onde a relação de equivalência \approx é dada por $(x, y, 0) \approx (x', y, 0)$ para todo $x, x' \in X$ e $y \in Y$ e $(x, y, 1) \approx (x, y', 1)$ para todo $x \in X$ e $y, y' \in Y$.*

Exemplo 1.6.4 *Quando X e Y são simplexes de dimensão 1.*

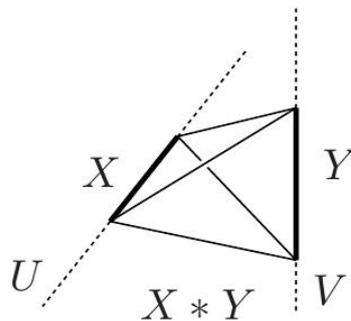


Uma útil interpretação geométrica do join é dada pela seguinte proposição (ver [12, Proposition 4.2.4]).

Proposição 1.6.5 (Interpretação geométrica do join) *Suponha que X_1, \dots, X_p são subespaços de um mesmo espaço euclidiano, que $X_i \subseteq U_i$, onde $U_1 \cap \dots \cap U_p = \emptyset$ e que a envoltória afim de $U_1 \cup \dots \cup U_p$ tem dimensão $\dim(U_1) + \dots + \dim(U_p) + p - 1$. Além disso suponha X_1, \dots, X_p limitados. Então, o espaço*

$$Z := \{t_1x_1 + \dots + t_px_p : t_i \in [0, 1], x_i \in X_i\} \subset \mathbb{R}^n,$$

*é homeomorfo a $X_1 * \dots * X_p$.*



Observação 1.6.6 *Com esta interpretação geométrica, mostra-se a equivalência da definição do join de complexos simpliciais com a do join de espaços topológicos, no seguinte sentido, a realização geométrica do join de complexos simpliciais $\|K * L\|$ é homeomorfa ao join das realizações geométricas dos complexos simpliciais $\|K\| * \|L\|$, ou seja, $\|K * L\| \cong \|K\| * \|L\|$ para quaisquer complexos simpliciais K e L (ver [12]).*

Podemos escrever um ponto de um join que é uma classe de equivalência $[(x, y, t)]$ como $tx \oplus (1 - t)y$. Notemos que mesmo tendo $X = Y$ e $a, b \in X, a \neq b$ essa soma não é comutativa, pois $\frac{1}{2}a \oplus \frac{1}{2}b \neq \frac{1}{2}b \oplus \frac{1}{2}a$.

De maneira análoga usaremos a notação $t_1x_1 \oplus t_2x_2 \oplus \dots \oplus t_nx_n$ para um ponto de $X^{*n} = \underbrace{X * X * \dots * X}_{n\text{-vezes}}$.

Definição 1.6.7 *Dadas duas aplicações contínuas $f : X_1 \rightarrow X_2$ e $g : Y_1 \rightarrow Y_2$, o join de f e g denotado por $f * g$ é a aplicação contínua*

$$f * g : X_1 * Y_1 \rightarrow X_2 * Y_2,$$

dada por $tx \oplus (1 - t)y \mapsto tf(x) \oplus (1 - t)g(y)$.

Mais geralmente, dada a aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$, podemos definir a aplicação contínua $f^{*n} = \underbrace{f * f * \dots * f}_{n\text{-vezes}} : X^{*n} \rightarrow Y^{*n}$.

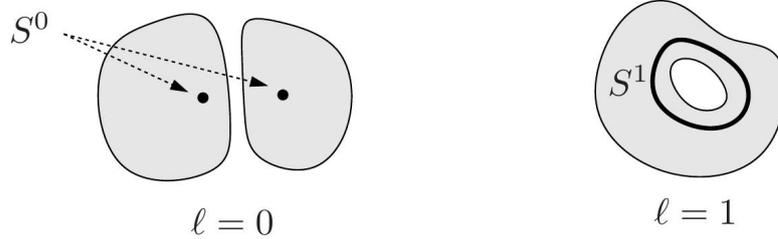
Observação 1.6.8 (Joins e produtos) *O produto $X \times Y$ pode ser mergulhado em $X * Y$ por $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}x \oplus \frac{1}{2}y$. Ou de maneira geral X^n mergulha em X^{*n} por $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{n}x_1 \oplus \frac{1}{n}x_2 \oplus \dots \oplus \frac{1}{n}x_n$.*

1.7 Espaços k -conexos

Definição 1.7.1 *Seja $k \geq -1$. Um espaço topológico X é k -conexo se para cada $l = -1, 0, \dots, k$, cada aplicação contínua $f : S^l \rightarrow X$ pode ser estendida a uma aplicação contínua $\bar{f} : B^{l+1} \rightarrow X$. Ou seja, cada aplicação $f : S^l \rightarrow X$ é homotopicamente nula.*

Consideremos $S^{-1} = \emptyset$ e B^0 um conjunto unitário.

Exemplo 1.7.2 *Abaixo temos dois subespaços de \mathbb{R}^2 , onde o primeiro é (-1) -conexo e o segundo é 0 -conexo:*



Teorema 1.7.3 (Teorema de Borsuk-Ulam) *Para todo $n \geq 0$, não existe aplicação contínua $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$ que é antipodal na fronteira, ou seja que satisfaz $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in S^{n-1} = \partial B^n$.*

Teorema 1.7.4 *A n -esfera S^n é $(n-1)$ -conexa e não é n -conexa.*

Demonstração: Para provar que S^n não é n -conexa vamos tomar a aplicação identidade $Id : S^n \rightarrow S^n$ onde $Id(x) = x$ para todo $x \in S^n$. Temos portanto que Id é uma aplicação antipodal uma vez que é contínua e satisfaz $Id(-x) = -x = -Id(x)$.

Assim se S^n fosse n -conexa existiria uma aplicação contínua $f : B^{n+1} \rightarrow S^n$ que estende Id . Ao estender Id temos que f é antipodal sobre a fronteira, o que contradiz o Teorema 1.7.3. Logo, S^n não é n -conexa.

Por outro lado, seja $f : S^k \rightarrow S^n, k < n$ uma aplicação contínua. Queremos que f seja homotopicamente nula. Para tanto vamos definir uma aplicação $g : S^k \rightarrow S^n$ homotopicamente nula e tal que g seja homotópica a f .

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ se $\|x - y\| < \varepsilon$. Sempre é possível fazer a escolha de tal ε pois f é contínua e tem domínio compacto, e portanto é uniformemente contínua. Tomemos uma triangulação Δ de S^k tal que cada simplexo σ de Δ tenha diâmetro menor que ε . Definimos g como sendo a extensão por linearidade de f com base nos vértices de Δ .

Defina $F : S^k \times [0, 1] \rightarrow S^n$, por:

$$F(x, t) = \frac{t \sum_{i=1}^m \lambda_i f(v_i) + (1-t)f(x)}{\|t \sum_{i=1}^m \lambda_i f(v_i) + (1-t)f(x)\|},$$

onde v_1, \dots, v_m são os vértices de $\text{supp}(x)$ e $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i$. Para que F esteja bem definida e contínua temos que ter $t \sum_{i=1}^m \lambda_i f(v_i) + (1-t)f(x) \neq 0$ para todo $x \in S^k$. Notemos que todos os $f(v_i)$ bem como $f(x)$ estão a uma distância menor que 1 de $f(v_1)$ uma vez que v_1, \dots, v_m são vértices de um simplexo de Δ e portanto cada v_i dista menos que ε de v_1 . Assim os pontos $f(v_1), \dots, f(v_m), f(x)$ estão contidos em uma bola de raio menor que 1 centrada em $f(v_1)$. Por ser $t \sum_{i=1}^m \lambda_i f(v_i) + (1-t)f(x)$ um ponto da envoltória convexa dos pontos $f(v_1), \dots, f(v_m), f(x) \in S^n$ e por esses pontos estarem numa bola que não contém $0 \in S^n$, sua envoltória também esta contida em tal bola, pois a bola é convexa, e podemos concluir que $t \sum_{i=1}^m \lambda_i f(v_i) + (1-t)f(x) \neq 0$.

Tem-se que $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$, portanto f e g são homotópicas. Como S^n menos um de seus pontos é homeomorfa a \mathbb{R}^n que é contrátil, basta mostrarmos que g não é sobrejetora e teremos que g é homotopicamente nula. Como $k < n$ temos que $\dim(\sigma) < n$ para todo $\sigma \in \Delta$ e portanto $g(\sigma)$ que esta contido em um simplexo de dimensão menor que n e conseqüentemente esta contido em um hiperplano h_σ de \mathbb{R}^{n+1} que passa pela origem. Como $\text{Im}(g) \subset \bigcup_{\sigma \in \Delta} h_\sigma$ e S^n não pode estar contida em tal união, temos que g não pode ser sobrejetora.

Como f é homotópica a g , f é homotopicamente nula e assim temos que S^n é $(n-1)$ -conexa como queríamos. \square

O seguinte lema é uma consequência do Teorema de Hurewicz([12], Theorem 4.4.1).

Lema 1.7.5 ([12], Proposition 4.4.3) *Supondo X k -conexo e Y l -conexo, onde X e Y são triangularizáveis. Então $X * Y$ é $(k + l + 2)$ -conexo.*

Capítulo 2

Versão topológica do teorema de Tverberg

Neste capítulo, introduzimos o conceito de um G -índice para G -espaços e calculamos o índice de espaços especiais (p -produto deletado de \mathbb{R}^d e p -join deletado de \mathbb{R}^d , para $p \geq 2$ primo). Tais resultados são fundamentais para as demonstrações da versão topológica do teorema de Radon e a da versão topológica do teorema de Tverberg (caso r primo). Finalizamos o capítulo com uma aplicação do \mathbb{Z}_p -índice em teoremas de Borsuk-Ulam para \mathbb{Z}_p -ações livres.

2.1 G -espaços e G -aplicações

Definição 2.1.1 (*G -espaços e G -aplicações*) *Sejam G um grupo topológico e X um espaço topológico. Uma G -ação sobre X é uma coleção $\Phi = (\phi_g)_{g \in G}$ de homeomorfismos $\phi_g : X \rightarrow X$ tal que,*

- a associação $(g, x) \mapsto \phi_g(x)$ é uma aplicação contínua de $G \times X \rightarrow X$,
- $\phi_e = id_X$ e
- $\phi_g \circ \phi_h = \phi_{gh}$ para todo $g, h \in G$.

Definição 2.1.2 *Sejam G um grupo topológico e X um espaço topológico, dada $\Phi = (\phi_g)_{g \in G}$ uma G -ação sobre X . O par (X, Φ) é dito **G -espaço**.*

Definição 2.1.3 *Se (X, Φ) e (Y, Ψ) são G -espaços, uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ é uma **G -aplicação** (ou **aplicação equivariante**) se $f \circ \phi_g = \psi_g \circ f$ para todo $g \in G$.*

Para cada $x \in X$, a órbita de x sobre a G -ação Φ é o conjunto $\{\phi_g(x) : g \in G\}$. Analogamente a órbita de um subconjunto $A \subseteq X$ é $\bigcup_{g \in G} \phi_g(A)$. Um conjunto $A \subseteq X$ é *invariante* se $\phi_g(A) = A$ para todo $g \in G$.

Definição 2.1.4 *Um G -espaço (X, Φ) é chamado **livre** se nenhum $\phi_g, g \neq e$, tem pontos fixos. Ou seja, para cada $x \in X$, a aplicação $g \mapsto \phi_g(x)$ é injetiva e portanto a órbita de cada ponto é uma cópia de G .*

Exemplo 2.1.5 *No plano complexo o círculo unitário S^1 consiste dos números complexos: $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Assim S^1 pode ser dotado de uma estrutura de grupo com a multiplicação complexa sendo a operação de grupo. Então S^1 é um S^1 -espaço, onde o homeomorfismo ϕ_z é dado pela multiplicação por z .*

Geometricamente, a multiplicação por $z = e^{i\alpha}$ pode ser interpretada como uma rotação de S^1 com ângulo α . Portanto a ação considerada é livre.

Exemplo 2.1.6 *Generalizando o exemplo anterior temos que um grupo topológico G age livremente sobre si mesmo pela multiplicação a esquerda, $\phi_g(h) = gh$.*

Exemplo 2.1.7 *Um fato que usaremos a frente é que toda esfera de dimensão ímpar admite uma estrutura de \mathbb{Z}_q -espaço livre.*

Seja S^{2n-1} vista como a esfera unitária em \mathbb{C}^n , ou seja, o conjunto $\{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$ e definimos a ação por $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (\omega z_1, \dots, \omega z_n)$, onde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{q}}$ é uma q -ésima raiz da unidade.

Se existe uma G -aplicação $X \rightarrow Y$ escreveremos $X \xrightarrow{G} Y$ ou $X \leq_G Y$.

Definição 2.1.8 *Um **G -complexo simplicial** é um complexo simplicial dotado de uma estrutura de G -espaço, onde todos os homeomorfismos ϕ_g são aplicações simpliciais.*

Definição 2.1.9 *Sejam G um grupo finito, $|G| > 1$, e $n \geq 0$. Um $E_n G$ -espaço é um G -espaço que é:*

- *um G -complexo simplicial finito,*
- *n -dimensional,*
- *$(n - 1)$ -conexo,*
- *e livre.*

Exemplo 2.1.10 *Um exemplo de um $E_n G$ -espaço é o $(n + 1)$ -join $G^{*(n+1)}$. Como espaço topológico $G^{*(n+1)}$ é o $(n + 1)$ -join de um espaço discreto de m pontos, onde $m := |G|$. Por exemplo para $n=1$ temos que G^{*2} é o grafo bipartido $K_{m,m}$ ¹. Como o espaço discreto G tem dimensão 0 tem-se que $G^{*(n+1)}$ é n -dimensional.*

Pelo Exemplo 2.1.6 temos que G age sobre si mesmo através da multiplicação à esquerda, e então $G^{(n+1)}$ é um G -complexo simplicial livre. Sendo assim falta provar que tal espaço é $(n - 1)$ -conexo. Mostraremos por indução sobre n . Temos que G é (-1) -conexo por se tratar de um espaço discreto, logo pelo Lema 1.7.5, $G * G$ é 0-conexo. Supondo G^{*n} $(n - 2)$ -conexo, obtemos que $G^{*n} * G = G^{*(n+1)}$ é $(n - 1)$ -conexo pelo Lema 1.7.5. Assim temos que $G^{*(n+1)}$ é um $E_n G$ -espaço.*

Exemplo 2.1.11 *Vejamos que S^{2n-1} é um $E_{2n-1} G$ -espaço. Já vimos no Exemplo 2.1.7 que toda esfera de dimensão ímpar admite uma \mathbb{Z}_q -ação simplicial livre. Pelo Teorema 1.7.4 sabemos que S^{2n-1} é $(2n - 2)$ -conexa e portanto é um $E_{2n-1} G$ -espaço.*

Lema 2.1.12 *Sejam X um G -espaço $(n - 1)$ -conexo e K um G -complexo simplicial livre finito de dimensão no máximo n . Então existe uma G -aplicação de $\|K\|$ em X .*

Em particular, existe uma G -aplicação de X em Y sempre que X e Y são $E_n G$ -espaços.

Demonstração: Vamos definir por indução $f_i : \|K^{\leq i}\| \rightarrow X, i = 0, \dots, n$, uma família de G -aplicações. Seja $\Phi = (\phi_g)_{g \in G}$ a G -ação sobre X e $\Psi = (\psi_g)_{g \in G}$ a G -ação sobre K .

¹Para mais detalhes ver [3]

Para $i = 0$ vamos particionar $V(K)$ segundo suas órbitas, seja O_0 um conjunto que contém exatamente um elemento de cada órbita, tomando $f_0 : ||V(K)|| \rightarrow X$ uma aplicação que a cada elemento de $k \in O_0$ associa a um elemento $x_k \in X$ qualquer e se $h \in V(K) \setminus O_0$ temos que $h = \psi_g(k)$ para algum $g \in G$ e algum $k \in O_0$, definimos $f_0(h) = \phi_g(x_k)$. Como definida f_0 é uma G -aplicação.

Suponha que tenhamos $f_j : ||K^{\leq j}|| \rightarrow X, 0 \leq j \leq n - 1$ uma G -aplicação. Se K é j -dimensional então f_j é a G -aplicação procurada, caso K seja m -dimensional com $m > j$ então particionamos o conjunto dos simplexes $(j + 1)$ -dimensionais segundo suas órbitas, e consideremos O_{j+1} o conjunto que contém exatamente um elemento de cada órbita. Para cada $\Delta \in O_{j+1}$ tem-se que $Fr(\Delta)$ é formada por simplexes j -dimensionais e satisfaz $||Fr(\Delta)|| \cong S^j$, portanto em $Fr(\Delta)$, f_j está bem definida e como X é $(n - 1)$ -conexo para cada $\Delta \in O_{j+1}$, $f_j|_{Fr(\Delta)}$ admite uma extensão $f_{j+1}^\Delta : \Delta \rightarrow X$. Se $\Sigma \in K \setminus O_{j+1}$ é um simplexo de dimensão $j + 1$, existem $g \in G$ e $\Delta \in O_{j+1}$ satisfazendo $\psi_g(\Delta) = \Sigma$ e portanto para cada $y \in \Sigma$ existe $d \in \Delta$ tal que $\psi_g(d) = y$ e definindo $f_{j+1}(y) = \phi_g(f_{j+1}^\Delta(d))$ em cada simplexo $j + 1$ -dimensional $\Sigma \in K$ e $f_{j+1}(d) = f_j(d)$ para todo $d \in \Delta \in K^{\leq j}$ temos que $f_{j+1} : ||K^{\leq j+1}|| \rightarrow X$ é uma G -aplicação. \square

2.2 O G -índice

Nesta seção, definiremos o G -índice associado a um G -espaço. Esta será a ferramenta fundamental para a prova dos principais resultados do trabalho.

Definição 2.2.1 (G -índice) *Para um G -espaço X , define-se o G -índice de X por:*

$$\text{ind}_G(X) := \min\{n : X \xrightarrow{G} E_n G\}.$$

Na sequência, apresentaremos as principais propriedades deste índice.

Proposição 2.2.2 *Seja G um grupo finito não trivial.*

(i) *Se $X \xrightarrow{G} Y$ então $\text{ind}_G(X) \leq \text{ind}_G(Y)$.*

- (ii) $\text{ind}_G(E_n G) = n$ qualquer que seja o espaço $E_n G$.
- (iii) $\text{ind}_G(X * Y) \leq \text{ind}_G(X) + \text{ind}_G(Y) + 1$.
- (iv) Se X é $(n - 1)$ -conexo, então $\text{ind}_G(X) \geq n$.
- (v) Se K é um G -complexo simplicial livre de dimensão n , então $\text{ind}_G(K) \leq n$.

Demonstração:

- (i) Suponha que exista $f : X \rightarrow Y$ uma G -aplicação. Se $\text{ind}_G(Y) = n$ então existe $h : Y \rightarrow E_n G$ uma G -aplicação e portanto $h \circ f : X \rightarrow E_n G$ é uma G -aplicação e assim $\text{ind}_G(X) \leq n$.
- (ii) Temos que a aplicação identidade $Id : E_n G \rightarrow E_n G$ é uma G -aplicação, logo por definição, $\text{ind}_G(E_n G) \leq n$. Segue do próximo resultado, Teorema 2.2.3, que $\text{ind}_G(E_n G)$ é exatamente n .
- (iii) Sejam $n = \text{ind}_G(X)$ e $m = \text{ind}_G(Y)$, assim $X \xrightarrow{G} G^{*n+1}$ e $Y \xrightarrow{G} G^{*m+1}$. Portanto $X * Y \xrightarrow{G} G^{*n+1} * G^{*m+1} = G^{*n+m+2}$, ou seja, $\text{ind}_G(X * Y) \leq \text{ind}_G G^{*n+m+2} = n + m + 1$.
- (iv) Ao ser X $(n - 1)$ -conexo o Lema 2.1.12 garante que existe uma G -aplicação de G^{*n+1} em X . Por (ii) temos que $\text{ind}_G G^{*n+1} = n$ e portanto, $\text{ind}_G(X) \geq n$.
- (v) Análogo ao item anterior.

□

Teorema 2.2.3 (Teorema de Borsuk-Ulam para G -espaços.) *Não existe uma G -aplicação de um espaço $E_n G$ em um espaço $E_{n-1} G$.*

Demonstração: Do fato de G ser um grupo finito é sabido que G possui um subgrupo H de ordem p , com p primo, ou seja $H \cong \mathbb{Z}_p$. Portanto podemos restringir a G -ação em $E_n G$ a uma \mathbb{Z}_p -ação, obtendo um espaço $E_n \mathbb{Z}_p$.

Deste modo, se existisse uma G -aplicação de um espaço $E_n G$ em um espaço $E_{n-1} G$, existiria uma \mathbb{Z}_p -aplicação de $E_n \mathbb{Z}_p$ em $E_{n-1} \mathbb{Z}_p$. Vejamos que tal \mathbb{Z}_p -aplicação não pode existir.

Sejam o $E_n \mathbb{Z}_p$ espaço $K := (\mathbb{Z}_p)^{*(n+1)}$ e o $E_{n-1} \mathbb{Z}_p$ espaço $L := (\mathbb{Z}_p)^{*n}$. Identificamos L como subcomplexo de K correspondente aos n primeiros fatores no $(n+1)$ -join tomando $i : V(L) \rightarrow V(K)$ a aplicação inclusão.

Suponha por contradição que exista uma \mathbb{Z}_p -aplicação $f : \|K\| \rightarrow \|L\|$. Pelo Teorema da Aproximação Simplicial Equivariante ([9], Teorema D.14) é possível obter uma subdivisão baricêntrica \tilde{K} de K e uma \mathbb{Z}_p -aplicação simplicial $\tilde{f} : V(\tilde{K}) \rightarrow V(L)$ que seja homotópica a f .

Considerando a \mathbb{Z}_p -aplicação $g := i \circ \tilde{f} : V(\tilde{K}) \rightarrow V(K)$ temos que g induz a aplicação $g_{\#k} : C_k(\tilde{K}) \rightarrow C_k(\tilde{K})$, onde $C_k(\tilde{K}) = C_k(\tilde{K}, \mathbb{Q})$ é a k -dimensional cadeia de grupos com coeficientes racionais. O número de Lefschetz sobre o nível da cadeia de aplicações é

$$\Lambda(g) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{tr}(g_{\#k}).$$

Por ser \mathbb{Q} um corpo, podemos considerar para cada k , $C_k(\tilde{K})$ como um \mathbb{Q} -espaço vetorial e $g_{\#k}$ uma aplicação linear. Assim o traço de $g_{\#k}$ é o traço de uma aplicação linear no sentido usual.

Considerando a base usual para $C_k(\tilde{K})$ formada por todas as cadeias e_σ , onde σ é um k -simplexo de \tilde{K} , e e_σ toma valor 1 sobre σ e 0 fora de σ . Veremos que o traço, em relação a base usual, de cada $g_{\#k}$ é divisível por p e portanto teremos que $\Lambda(g)$ também será um múltiplo de p .

Para tanto mostremos que ao ser g uma \mathbb{Z}_p -aplicação, um simplexo $\sigma \in K$ contribui tanto para o traço quanto os outros $p-1$ simplexos de sua órbita.

Para cada k , seja $\beta_k = \{e_{\sigma_1}, e_{\sigma_2}, \dots, e_{\sigma_m}\}$ a base usual para $C_k(\tilde{K})$ e fixemos esta ordenação para termos uma base ordenada. Considerando (a_{ij}) a matriz de $g_{\#k}$ em relação a base β temos que $\text{tr}(g_{\#k}) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{mm}$.

Ao ser $g_{\#k}(e_{\sigma_i}) = e_{g(\sigma_i)}$ e sendo g uma \mathbb{Z}_p -aplicação, temos que

$$a_{ii} = \begin{cases} 1, & \text{se } g(\sigma_i) = \sigma_i \\ 0, & \text{se } g(\sigma_i) \neq \sigma_i \end{cases},$$

assim se σ_j está na órbita de σ_i , ou seja $\sigma_j = \phi_n(\sigma_i)$ para algum $n \in \mathbb{Z}_p$, temos que $a_{jj} = a_{ii}$. Basta notarmos que se $g(\sigma_i) = \sigma_i$ segue que $g(\sigma_j) = g(\phi_n(\sigma_i)) = \phi_n(g(\sigma_i)) = \phi_n(\sigma_i) = \sigma_j$ fazendo com que $a_{jj} = a_{ii} = 1$. Analogamente obtemos que $g(\sigma_j) \neq \sigma_j$ sempre que $g(\sigma_i) \neq \sigma_i$ e portanto $a_{jj} = a_{ii} = 0$.

Como estamos considerando um $E_n G$ -espaço, a ação é livre, o que torna cada órbita um conjunto de p elementos. Portanto $tr(g_{\#k})$ é divisível por p .

Por outro lado podemos considerar $\Lambda(g)$ sobre o nível de grupos de homologia. A aplicação g induz a aplicação $g_{*k} : H_k(K, \mathbb{Q}) \rightarrow H_k(K, \mathbb{Q})$ em homologia, e pela fórmula de Hopf para o traço ([13], Teorema 2.3.9), o número de Lefschetz é dado por

$$\Lambda(g) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k tr(g_{*k}).$$

Como K é $(n-1)$ -conexo temos que $H_k(K, \mathbb{Q}) = 0$ para $1 \leq k \leq n-1$, e portanto $\Lambda(g) = tr(g_{*0}) + (-1)^n tr(g_{*n})$, porém g_{*n} é a aplicação nula por sua construção e do fato que $H_n(L, \mathbb{Q}) = 0$ uma vez que L é $(n-1)$ -dimensional. Logo $\Lambda(g) = tr(g_{*0}) = 1$, e isso é uma contradição sendo $\Lambda(g)$ divisível por $p > 1$.

Assim concluímos que não pode existir uma \mathbb{Z}_p -aplicação $f : ||K|| \rightarrow ||L||$. \square

Definição 2.2.4 *Sejam $n \geq k \geq 2$ inteiros. Uma n -upla (x_1, x_2, \dots, x_n) é dita k -distinta se quaisquer k elementos dentre os x_i não são todos iguais.*

Definição 2.2.5 *O n -produto k -deletado de um espaço X é*

$$X_{\Delta(k)}^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^n : (x_1, \dots, x_n) k\text{-distinta}\}.$$

Definição 2.2.6 *O n -join n -deletado de X é*

$$X_{\Delta}^{*n} := X^{*n} \setminus \left\{ \frac{1}{n}x \oplus \frac{1}{n}x \oplus \dots \oplus \frac{1}{n}x : x \in X \right\}.$$

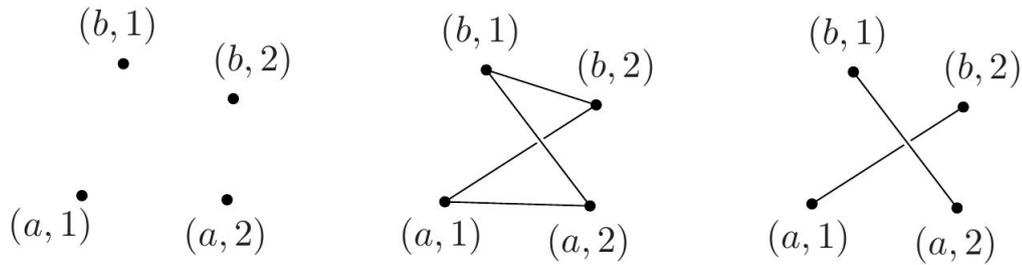
Definição 2.2.7 Para um complexo simplicial K , o n -join k -deletado de K é

$$K_{\Delta(k)}^n := \{F_1 \uplus F_2 \uplus \dots \uplus F_n \in K^{*n} : (F_1, F_2, \dots, F_n) \text{ é } k\text{-disjunta}\},$$

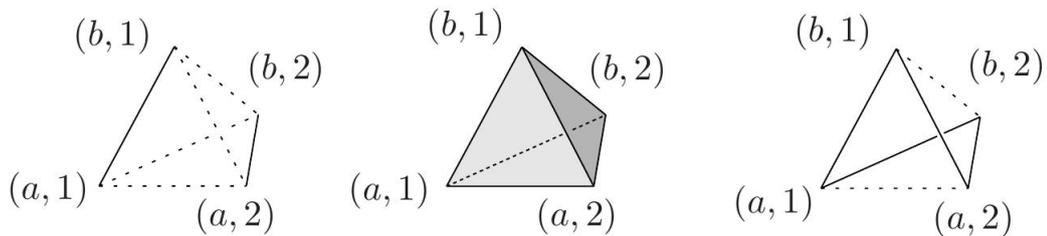
onde uma n -upla (F_1, F_2, \dots, F_n) de conjuntos é k -disjunta se cada k conjuntos dentre os F_i tem interseção vazia.

Para $k = n$ escrevemos X_{Δ}^n para $X_{\Delta(n)}^n$ e K_{Δ}^n para $K_{\Delta(n)}^n$.

Exemplo 2.2.8 Seja $D_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$ o complexo simplicial discreto de dois pontos. Temos que $(D_2)_{\Delta}^{*2}$ é a união disjunta de dois segmentos. Abaixo temos três figuras, onde a primeira representa duas cópias de D_2 , a segunda o join e a terceira o join deletado.



Exemplo 2.2.9 Seja σ^1 um simplexo de dimensão 1, ou seja, um segmento de reta com vértices a e b . O join deletado $(\sigma^1)_{\Delta}^{*2}$ é a fronteira de um quadrado de lado σ^1 . Como no exemplo anterior temos abaixo três figuras, onde a primeira representa a união disjunta de dois segmentos de reta, a segunda um tetraedro que é o join $\sigma^1 * \sigma^1$ e a terceira o join deletado $(\sigma^1)_{\Delta}^{*2}$.



2.3 O caso particular $G = \mathbb{Z}_2$: \mathbb{Z}_2 -índice e a versão topológica do teorema de Radon

Nesta seção vamos analisar o caso particular, ou podemos dizer, caso especial $G = \mathbb{Z}_2$. A maioria dos problemas envolvendo ações de grupos são formuladas inicialmente para o caso $G = \mathbb{Z}_2$ e posteriormente generalizadas para casos mais gerais. Por exemplo, a aplicação antipodal sobre a esfera S^n pode ser identificada com uma ação livre de $G = \mathbb{Z}_2$ sobre S^n e, conseqüentemente o Teorema clássico de Borsuk-Ulam é um teorema que envolve \mathbb{Z}_2 -ações livres, aplicações \mathbb{Z}_2 -equivariantes e técnicas especiais para este grupo.

Mostraremos nessa seção que o mesmo ocorre para a prova da versão topológica do teorema de Radon.

No caso $G = \mathbb{Z}_2$, temos que S^n é um $E_n G$ espaço, dessa forma

$$\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X) := \min\{n \in \{0, 1, 2, \dots\} : X \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} S^n\},$$

onde X é um \mathbb{Z}_2 -espaço.

A seguir, vamos dar uma estimativa para o \mathbb{Z}_2 -índice do 2-produto deletado e do 2-join deletado, do espaço euclidiano \mathbb{R}^d .

Lema 2.3.1 $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}((\mathbb{R}^d)_{\Delta}^2) \leq d - 1$.

Demonstração: Basta considerar a bem definida \mathbb{Z}_2 -aplicação

$$g : (\mathbb{R}^d)_{\Delta}^2 \rightarrow S^{d-1}, \text{ dada por}$$

$$g(x_1, x_2) = \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|}.$$

□

Lema 2.3.2 (2-join deletado de \mathbb{R}^d) *Existe uma \mathbb{Z}_2 -aplicação $g : (\mathbb{R}^d)_{\Delta}^{*2} \rightarrow S^d$, e conseqüentemente $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}((\mathbb{R}^d)_{\Delta}^{*2}) \leq d$.*

Demonstração: Consideremos as aplicações $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{2d+2}$, definidas por

$$\psi_1(x) := (1, x_1, \dots, x_d, 0, 0, \dots, 0) \text{ e } \psi_2(y) := (0, 0, \dots, 0, 1, y_1, y_2, \dots, y_d).$$

Tomemos agora, $U_1 := \psi_1(\mathbb{R}^d)$ e $U_2 := \psi_2(\mathbb{R}^d)$, que são subespaços afins disjuntos de \mathbb{R}^{2d+2} , nas condições da Proposição 1.6.5. Consideremos a bola unitária B em \mathbb{R}^d , e sendo B e \mathbb{R}^d homeomorfos, vamos limitar o \mathbb{Z}_2 -índice de B_Δ^{*2} .

Seja $h : B_\Delta^{*2} \rightarrow (\mathbb{R}^{d+1})^2$ definida por,

$$tx \oplus (1-t)y \mapsto t\psi_1(x) + (1-t)\psi_2(y).$$

Assim definida, h é uma \mathbb{Z}_2 -aplicação e aplica B_Δ^{*2} sobre $(\mathbb{R}^{d+1})_\Delta^2$ pois

$$(t, tx_1, \dots, tx_d) = (1-t, (1-t)y_1, \dots, (1-t)y_d)$$

implica que $t = \frac{1}{2}$ e $x = y$. Mas esses pontos não estão em B_Δ^{*2} .

Portanto, h é uma \mathbb{Z}_2 -aplicação e o resultado segue do Lema 2.3.1. \square

Agora, estamos em condições de provar o Teorema topológico de Radon. Antes disso, lembramos que o Teorema de Radon, afirma que um conjunto X de $d+2$ pontos em \mathbb{R}^d pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos que possuem envoltórias convexas não disjuntas. Uma formulação equivalente do Teorema de Radon é a seguinte:

Teorema 2.3.3 (Teorema de Radon) *Se $f : \|\sigma^{d+1}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma aplicação linear afim. Então existem duas faces disjuntas F_1, F_2 do simplexo σ^{d+1} tais que*

$$f(\|F_1\|) \cap f(\|F_2\|) \neq \emptyset.$$

Sobre a equivalência: Para vermos que o Teorema 2.3.3 implica no Teorema de Radon, basta definirmos uma aplicação linear afim f que aplica os $d+2$ vértices do simplexo nos $d+2$ pontos em \mathbb{R}^d , assim ao ser f linear afim temos que a imagem de uma certa face é a envoltória convexa da imagem dos vértices de tal face e portanto temos que vale o Teorema de Radon. Por outro lado uma tal aplicação linear afim fica completamente determinada pela imagem dos vértices do simplexo e assumindo o Teorema de Radon

temos que vale o Teorema 2.3.3, pois cada conjunto da partição dada pelo Teorema de Radon é associado a uma face do simplexo cujos vértices são a pré-imagem por f de tal conjunto.

Demonstração: Já vimos que $d + 2$ pontos em \mathbb{R}^d são geometricamente dependentes. Portanto podemos fixar $\alpha_1, \dots, \alpha_{d+2} \in \mathbb{R}$ não todos nulos de tal forma que $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{d+2} x_{d+2} = 0$ e $\sum_{i=1}^{d+2} \alpha_i = 0$. Agora definimos $I_1 := \{i \in [d+2] : \alpha_i = 0\}$, $I_2 := [d+2] \setminus I_1$ e $S := \sum_{i \in I_1} \alpha_i = \sum_{j \in I_2} -\alpha_j$. Portanto o ponto $x = \sum_{i \in I_1} \frac{\alpha_i}{S} x_i = \sum_{j \in I_2} \frac{\alpha_j}{S} x_j$ pertence a envoltória convexa tanto de X_1 , quanto de X_2 , onde $X_1 := \{x_i : i \in I_1\}$ e $X_2 := X \setminus X_1$. Assim X_1 e X_2 formam a partição de X requerida. \square

Se no Teorema de Radon (Teorema 2.3.3) substituirmos "aplicação afim" por "aplicação contínua", obtemos a chamada versão topológica do teorema de Radon.

Note que a prova do Teorema de Radon é simples e usa apenas a estrutura de espaço vetorial de \mathbb{R}^d e não está relacionada com técnicas de topologia algébrica.

Com base nos resultados desenvolvidos na seção provamos a seguir:

Teorema 2.3.4 (Versão topológica do teorema de Radon) *Seja $f : \|\sigma^{d+1}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma aplicação contínua. Então existem duas faces disjuntas F_1, F_2 de σ^{d+1} tais que*

$$f(\|F_1\|) \cap f(\|F_2\|) \neq \emptyset.$$

Lema 2.3.5 *Sejam K e L complexos simpliciais. Então*

$$(K * L)_{\Delta(2)}^{*2} \cong K_{\Delta(2)}^{*2} * L_{\Delta(2)}^{*2}.$$

Demonstração: Um simplexo de $(K * L)_{\Delta(2)}^{*2}$ é da forma $(F_1 \uplus G_1) \uplus (F_2 \uplus G_2)$, onde $F_1, F_2 \in K$, e $G_1, G_2 \in L$ e temos que $F_1 \cap F_2 = \emptyset = G_1 \cap G_2$. Tal simplexo corresponde ao simplexo $(F_1 \uplus F_2) \uplus (G_1 \uplus G_2) \in K_{\Delta(2)}^{*2} * L_{\Delta(2)}^{*2}$ com as mesmas condições sobre F_1, F_2, G_1, G_2 . \square

Corolário 2.3.6 *Temos que $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}((\sigma^n)_{\Delta(2)}^{*2}) = n$.*

Demonstração: Pelo Lema 2.3.5

$$(\sigma^n)_{\Delta(2)}^{*2} \cong ((\sigma^0)^{*(n+1)})_{\Delta(2)}^{*2} \cong ((\sigma^0)_{\Delta(2)}^{*2})^{*(n+1)} \cong (D_2)^{*(n+1)},$$

onde D_2 denota o complexo simplicial correspondente a um espaço discreto de 2 pontos. Identificando \mathbb{Z}_2 com D_2 , concluímos que $(D_2)^{*(n+1)}$ é um \mathbb{Z}_2 -espaço, e pela Proposição 2.2.2 tem \mathbb{Z}_2 -índice n . \square

Demonstração:(Prova do Teorema 2.3.4). Suponhamos que exista uma aplicação contínua $f : \|\sigma^{d+1}\| \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que não existam faces disjuntas F_1, F_2 com $f(\|F_1\|) \cap f(\|F_2\|) \neq \emptyset$. Considere o 2-join f^{*2} como uma aplicação do 2-join 2-deletado :

$$f^{*2} : \|(\sigma^{d+1})_{\Delta(2)}^{*2}\| \rightarrow (\mathbb{R}^d)_{\Delta}^{*2}.$$

Um simplexo de $(\sigma^{d+1})_{\Delta(2)}^{*2}$ é da forma $F_1 \uplus F_2 \in (\sigma^{d+1})^{*2} : F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Portanto por hipótese temos que para $x \in (\sigma^{d+1})_{\Delta(2)}^{*2}$, $f(x)$ não pertence à diagonal em $(\mathbb{R}^d)^{*2}$ e assim f está bem definida. Sabemos ainda que f^{*2} é uma \mathbb{Z}_2 -aplicação.

Pelo Lema 2.3.2 temos que $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}((\mathbb{R}^d)_{\Delta}^{*2}) \leq d$. Por outro lado, pelo Corolário 2.3.6, o \mathbb{Z}_2 -índice de $(\sigma^{d+1})_{\Delta(2)}^{*2} = d + 1$.

Portanto não pode existir tal \mathbb{Z}_2 -aplicação f , pois se existisse implicaria que

$$d + 1 = \text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\|(\sigma^{d+1})_{\Delta(2)}^{*2}\|) \leq \text{ind}_{\mathbb{Z}_2}((\mathbb{R}^d)_{\Delta}^{*2}) \leq d.$$

\square

2.4 Versão topológica do teorema de Tverberg

Nessa seção, apresentaremos a prova do resultado principal deste trabalho, a versão topológica do teorema de Tverberg.

Os resultados a seguir, serão de fundamental importância para a demonstração do teorema, generalizando o caso $G = \mathbb{Z}_2$ da seção anterior, daremos uma estimativa para o p -produto deletado e p -join deletado do espaço euclidiano \mathbb{R}^d , com p primo.

Lema 2.4.1 (*p*-produto deletado de \mathbb{R}^d) . *Sejam p primo e $d \geq 1$. Então*

$$\text{ind}_{\mathbb{Z}_p}((\mathbb{R}^d)_\Delta^p) \leq d(p-1) - 1$$

Demonstração: Para essa prova será construída uma \mathbb{Z}_p -aplicação $g : (\mathbb{R}^d)_\Delta^p \rightarrow S^{d(p-1)-1}$.

Vamos interpretar $(\mathbb{R}^d)^p$ como o espaço das matrizes $(x_{ij})_{i=1, j=1}^d, p$ com d linhas e p colunas e a \mathbb{Z}_p -ação será a troca de colunas respeitando a ordem entre elas. Os elementos de $(\mathbb{R}^d)_\Delta^p$ são todas as matrizes dessa forma exceto aquelas com todas as colunas iguais. Por exemplo se $d = 1$ e $p = 3$ nós obtemos o espaço euclidiano tridimensional com a diagonal $\{x_1 = x_2 = x_3\}$ removida.

Considerando a projeção ortogonal $g_1 : (\mathbb{R}^d)^p \rightarrow L$, onde L é o $(d-1)$ -dimensional subespaço perpendicular à diagonal, ou seja, L é o subespaço consistindo de todas as matrizes $d \times p$ com a soma das linhas igual a 0, ou seja, $\sum_{j=1}^p x_{ij} = 0 \forall i$. De fato, se $X \in L$ e $Y \in \Delta$, então $X \cdot Y^t = 0$. Se

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdot & \cdot & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdot & \cdot & x_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{d1} & x_{d2} & \cdot & \cdot & x_{dp} \end{bmatrix} \text{ e } Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_1 & \cdot & \cdot & y_1 \\ y_2 & y_2 & \cdot & \cdot & y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y_n & \cdot & \cdot & y_n \end{bmatrix},$$

como $X \cdot Y^t = 0$, temos

$$\begin{cases} y_1(x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1p}) = 0 \\ y_2(x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2p}) = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_d(x_{d1} + x_{d2} + \cdots + x_{dp}) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1p} = 0 \\ x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2p} = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{np} = 0 \end{cases}$$

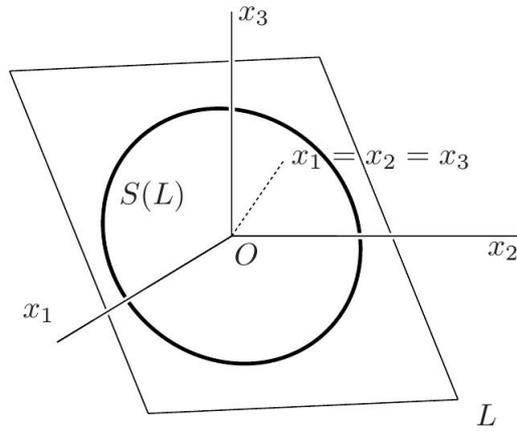
Assim, g_1 é a aplicação que leva cada matriz $X = (x_{ij})$ na matriz

$$g_1(X) = \left(x_{ij} - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p x_{ik} \right)_{ij},$$

ou seja, a média das colunas é retirada de cada coluna.

Logo, temos que $g_1(X)$ é a matriz nula se, e somente se, cada coluna de X é igual a média de todas as colunas, ou seja, se todas as colunas de X são iguais. Portanto podemos obter a partir de g_1 uma \mathbb{Z}_p -aplicação $(\mathbb{R}^d)_\Delta^p \rightarrow L \setminus \{O\}$. Por exemplo, para $d = 1$ e $p = 3$, a aplicação g_1 é a projeção ortogonal sobre o plano $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Definindo $g(X) := \frac{g_1(X)}{\|g_1(X)\|}$, temos que a imagem de g é a esfera unitária $S(L)$ em L que pode ser identificada com $S^{d(p-1)-1}$.



Denotemos por σ a ação livre padrão de \mathbb{Z}_p sobre $(\mathbb{R}^d)_\Delta^p$, a qual permuta as colunas da matriz $X = (x_{ij})$ e por $\tau = \sigma|_{S(L)}$ a restrição de σ a $S(L)$.

Mostremos que g é \mathbb{Z}_p -equivariante, ou seja, mostremos que $g \circ \sigma = \tau \circ g$. Temos

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdot & \cdot & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdot & \cdot & x_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdot & \cdot & x_{np} \end{bmatrix}, \quad \sigma(X) = \begin{bmatrix} x_{12} & x_{13} & \cdot & \cdot & x_{1p} & x_{11} \\ x_{22} & x_{23} & \cdot & \cdot & x_{2p} & x_{21} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n2} & x_{n3} & \cdot & \cdot & x_{np} & x_{n1} \end{bmatrix}$$

$$g_1(\sigma(X)) = \begin{bmatrix} x_{12} & x_{13} & \cdot & \cdot & x_{1p} & x_{11} \\ x_{22} & x_{23} & \cdot & \cdot & x_{2p} & x_{21} \\ \cdot & \cdot & -M & \cdot & -M & \cdot & \cdot & -M & \cdot & -M \\ \cdot & \cdot \\ x_{n2} & x_{n3} & \cdot & \cdot & x_{np} & x_{n1} \end{bmatrix},$$

$$\text{onde } M = \frac{1}{p} \begin{bmatrix} x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1p} \\ x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2p} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{np} \end{bmatrix}.$$

Logo $\sigma(g_1(X)) = g_1(\sigma(X))$ e $\|g_1(X)\| = \|g_1(\sigma(X))\| = \|\sigma(g_1(X))\|$ e segue que

$$\begin{aligned} g(\sigma(X)) &= \frac{g_1(\sigma(X))}{\|g_1(\sigma(X))\|} \\ &= \frac{\sigma(g_1(X))}{\|g_1(X)\|} \\ &= \sigma|_{S(D)}\left(\frac{g_1(X)}{\|g_1(X)\|}\right) \\ &= \sigma|_{S(D)}(g(X)). \end{aligned}$$

Logo, g é uma \mathbb{Z}_p -aplicação, o que completa a prova do lema. □

Observação 2.4.2 *Note que para $p = 2$, o Lema 2.4.1 é uma generalização do Lema 2.3.1. Aqui vale ressaltar que a prova do caso $p = 2$ é simples, no entanto a prova do caso p primo é bem mais elaborada, a qual usa outra estratégia de demonstração.*

Lema 2.4.3 (*p -join deletado de \mathbb{R}^d*) *Sejam p primo e $d \geq 1$. Então*

$$\text{ind}_{\mathbb{Z}_p}((\mathbb{R}^d)_{\Delta}^{*p}) \leq (d+1)(p-1) - 1.$$

Demonstração: Vamos construir uma \mathbb{Z}_p -aplicação $h : (\mathbb{R}^d)_{\Delta}^{*p} \rightarrow (\mathbb{R}^{d+1})_{\Delta}^p$. Para isso consideremos os mergulhos ψ_1, \dots, ψ_p , onde $\psi_i(x)$ tem $(1, x_1, x_2, \dots, x_d)$ na i -ésima coordenada e 0 nas demais. Assim a aplicação $h : (B^d)_{\Delta}^{*p} \rightarrow (\mathbb{R}^{d+1})_{\Delta}^p$ dada por

$$t_1x_1 \oplus t_2x_2 \oplus \cdots \oplus t_px_p \longmapsto t_1\psi_1(x_1) + t_2\psi_2(x_2) + \cdots + t_p\psi_p(x_p)$$

é uma \mathbb{Z}_p -aplicação e o resultado segue do Lema 2.4.1. □

Teorema 2.4.4 (Versão topológica do teorema de Tverberg) *Sejam p um primo, $d \geq 1$ arbitrário e $N := (d + 1)(p - 1)$. Para cada aplicação contínua*

$$f : \|\sigma^N\| \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

existem p faces disjuntas $F_1, F_2, \dots, F_p \subseteq \sigma^N$ tais que

$$f(\|F_1\|) \cap f(\|F_2\|) \cap \dots \cap f(\|F_p\|) \neq \emptyset.$$

Demonstração: Suponhamos que exista uma aplicação contínua $f : \|\sigma^N\| \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tal que não existam faces disjuntas F_1, F_2, \dots, F_p com $\bigcap_{i=1}^p f(\|F_i\|) \neq \emptyset$. Consideremos f^{*p} , o p -join de f , como uma aplicação do p -join 2-deletado :

$$f^{*p} : \|(\sigma^N)_{\Delta(2)}^{*p}\| \longrightarrow (\mathbb{R}^d)_{\Delta}^{*p}.$$

Um simplexo de $(\sigma^N)_{\Delta(2)}^{*p}$ é da forma $F_1 \uplus F_2 \uplus \dots \uplus F_p \in (\sigma^N)^{*p} : F_i \cap F_j = \emptyset$ para todo $1 \leq i, j \leq p$. Portanto por hipótese temos que para $x \in (\sigma^N)_{\Delta(2)}^{*p}$, $f(x)$ não pertence a diagonal em $(\mathbb{R}^d)^{*p}$ e assim f esta bem definida. Sabemos ainda que f^{*p} é uma \mathbb{Z}_p -aplicação.

Pelo Lema 2.4.3 temos que $\text{ind}_{\mathbb{Z}_p}((\mathbb{R}^d)_{\Delta}^{*p}) \leq (d + 1)(p - 1) - 1$. Vejamos qual o \mathbb{Z}_p -índice de $(\sigma^N)_{\Delta(2)}^{*p}$.

Lema 2.4.5 *Sejam K e L complexos simpliciais. Então*

$$(K * L)_{\Delta(2)}^{*p} \cong K_{\Delta(2)}^{*p} * L_{\Delta(2)}^{*p}.$$

Demonstração: Um simplexo de $(K * L)_{\Delta(2)}^{*p}$ é da forma $(F_1 \uplus G_1) \uplus \dots \uplus (F_p \uplus G_p)$, onde $F_1, \dots, F_p \in K$, e $G_1, \dots, G_p \in L$ e temos que $F_i \cap F_j = \emptyset = G_i \cap G_j, \forall i, j \in [p]$ com $i \neq j$. Tal simplexo corresponde ao simplexo $(F_1 \uplus \dots \uplus F_p) \uplus (G_1 \uplus \dots \uplus G_p) \in K_{\Delta(2)}^{*p} * L_{\Delta(2)}^{*p}$ com as mesmas condições sobre $F_1, \dots, F_p, G_1, \dots, G_p$.

□

Corolário 2.4.6 *Temos que $\text{ind}_{\mathbb{Z}_p}((\sigma^n)_{\Delta(2)}^{*p}) = n$.*

Demonstração: Pelo Lema 2.4.5

$$(\sigma^n)_{\Delta(2)}^{*p} \cong ((\sigma^0)^{*(n+1)})_{\Delta(2)}^{*p} \cong ((\sigma^0)_{\Delta(2)}^{*p})^{*(n+1)} \cong (D_p)^{*(n+1)},$$

onde D_p denota o complexo simplicial correspondente a um espaço discreto de p pontos. Identificando \mathbb{Z}_p com D_p , concluímos que $(D_p)^{*(n+1)}$ é um $E_n\mathbb{Z}_p$ -espaço, e pela Proposição 2.2.2 tem \mathbb{Z}_p -índice n . \square

Portanto não pode existir tal \mathbb{Z}_p -aplicação f , pois se existisse implicaria que

$$N = \text{ind}_{\mathbb{Z}_p}(\|(\sigma^N)_{\Delta(2)}^{*p}\|) \leq \text{ind}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{R}^d)_{\Delta}^{*p} = (d+1)(p-1) - 1 = N - 1.$$

\square

Corolário 2.4.7 *O Teorema topológico de Tverberg implica no teorema de Tverberg.*

Demonstração: Consideremos um simplexo Δ de dimensão $(d+1)(r-1)$, e fixemos $(d+1)(r-1)+1$ pontos em \mathbb{R}^d . Seja $f : V(\Delta) \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma função que associa cada vértice de Δ a um dos $(d+1)(r-1)+1$ fixados, de tal modo que dois vértices distintos são associados a pontos distintos. Deste modo a extensão afim de f é uma função contínua de Δ em \mathbb{R}^d e pela versão topológica do teorema de Tverberg, existem r faces disjuntas tais que suas imagens se interseccionam. Porém a imagem de uma face por $\|f\|$ é justamente a envoltória convexa do conjunto de pontos atingidos pela imagem dos vértices de tal face.

Desta maneira conseguimos r subconjuntos disjuntos de pontos dentre os $(d+1)(r-1)+1$ pontos em \mathbb{R}^d fixados de tal maneira que suas envoltórias convexas se interseccionam. \square

2.5 Aplicações: Teorema de Borsuk-Ulam para \mathbb{Z}_p -ações livres

Nesta seção, usaremos o \mathbb{Z}_p -índice definido anteriormente para mostrar um resultado sobre \mathbb{Z}_p -coincidências, o qual é uma generalização do Teorema clássico de Borsuk-Ulam

para o caso de \mathbb{Z}_p -ações. Também, como no caso clássico, discutiremos uma versão equivalente para tal generalização.

Teorema 2.5.1 (Teorema de Borsuk-Ulam para \mathbb{Z}_p -ações livres) *Seja (X, τ) um \mathbb{Z}_p -espaço tal que $\text{ind}_{\mathbb{Z}_p}(X) \geq d(p-1)$, onde p é um primo. Então para qualquer aplicação contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = f(\tau(x)) = f(\tau^2(x)) = \dots = f(\tau^{p-1}(x))$.*

Demonstração: Suponha que não exista tal $x \in X$. Então a aplicação

$$x \longmapsto (f(x), f(\tau(x)), \dots, f(\tau^{p-1}(x)))$$

é uma \mathbb{Z}_p -aplicação de X no produto deletado $(\mathbb{R}^d)_\Delta^p$, e portanto temos que $\text{ind}_{\mathbb{Z}_p}(X) \leq \text{ind}_{\mathbb{Z}_p}((\mathbb{R}^d)_\Delta^p) \leq d(p-1) - 1$. \square

Agora, segue do exemplo 2.1.11 que para n ímpar, a esfera S^n é um $E_n\mathbb{Z}_p$ -espaço e, da Proposição 2.5.3(ii), concluímos que $\text{ind}_{\mathbb{Z}_p}(S^n) = n$. Dessa forma, temos a seguinte consequência do resultado anterior.

Corolário 2.5.2 (Teorema clássico de Borsuk-Ulam para \mathbb{Z}_p -ações livres) *Se $n \geq d(p-1)$, n ímpar, para qualquer aplicação contínua $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = f(\tau(x)) = f(\tau^2(x)) = \dots = f(\tau^{p-1}(x))$, onde τ determina a ação padrão de \mathbb{Z}_p sobre S^n .*

O teorema anterior aparece na literatura pela primeira vez no importante artigo de Munkholm [14]. Note que, tomando $p = 2$ e $n = d$ no teorema anterior, e neste caso n pode ser considerado um inteiro qualquer, obtemos o Teorema clássico de Borsuk-Ulam, o qual possui as seguintes versões equivalentes bem conhecidas:

1. Para toda função contínua $f : S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ existe um ponto $x \in S^d$ com $f(x) = f(-x)$.
2. Não existe aplicação equivariante $f : S^d \rightarrow S^{d-1}$ com relação a aplicação antípoda.

Considerando X um \mathbb{Z}_2 -espaço livre mais geral do que as esferas, temos as seguintes versões equivalentes do Teorema de Borsuk-Ulam:

Proposição 2.5.3 *Seja (X, τ) um espaço com uma ação livre de \mathbb{Z}_2 . Então são equivalentes:*

1. *Para toda função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ existe um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = f(\tau(x))$;*
2. *Não existe aplicação \mathbb{Z}_2 -equivariante $f : X \rightarrow S^{d-1}$.*

Demonstração: Se existe aplicação equivariante $f : X \rightarrow S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$, então $f(\tau(x)) = -f(x) \neq f(x)$, para todo $x \in X$ e, portanto, o Teorema de Borsuk-Ulam não é válido.

Reciprocamente, se o Teorema de Borsuk-Ulam não for válido, então está bem definida a aplicação equivariante $F : X \rightarrow S^{d-1}$, dada por

$$F(x) = \frac{f(x) - f(\tau(x))}{\|f(x) - f(\tau(x))\|}.$$

□

Mostraremos a seguir uma condição equivalente ao Teorema de Borsuk-Ulam para \mathbb{Z}_p -ações livres, a qual estende a Proposição 2.5.3. Note que uma tentativa direta de estender a demonstração da Proposição 2.5.3 para o caso de \mathbb{Z}_p -ações livres, $p > 2$ primo, não é possível pois os argumentos usados na demonstração dependem do fato de p ser igual a 2. A seguir, usando o Lema 2.4.1, apresentamos uma prova de tal extensão. Tal resultado foi provado no trabalho recente de Santos [17, Proposição A.1.2].

Proposição 2.5.4 *Seja (X, τ) um espaço com uma ação livre de \mathbb{Z}_p . Então são equivalentes:*

1. *Para toda função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ existe um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = f(\tau^j(x))$ para $j = 1, \dots, p-1$;*
2. *Não existe aplicação \mathbb{Z}_p -equivariante $F : (X, \tau) \rightarrow (S^{n(d-1)-1}, \gamma)$, onde γ é a ação padrão de \mathbb{Z}_p sobre $S^{d(p-1)-1}$.*

Demonstração: Considere a inclusão $i : (S^{d(p-1)-1}, \gamma) \rightarrow ((\mathbb{R}^d)_\Delta^p, \sigma)$, a qual é a inversa homotópica equivariante da aplicação g definida no Lema 2.4.1. Suponha que exista uma aplicação \mathbb{Z}_p -equivariante $F : (X, \tau) \rightarrow (S^{d(p-1)-1}, \gamma) \subset ((\mathbb{R}^d)_\Delta^p, \sigma)$ e sejam $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ dadas por $f_i = p_i \circ F$, onde p_i é a projeção na i -ésima coordenada $i = 1, \dots, p$. Temos

$$F(\tau^j x) = \sigma^j F(x), \forall x \in X, \forall j = 1, \dots, p-1 \text{ e } F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))$$

Assim, $F(\tau^j x) = (f_1(\tau^j x), \dots, f_p(\tau^j x))$ e $\sigma^j F(x) = (f_{j+1}(x), \dots, f_{j-1}(x))$. Logo, $f_1(\tau^j x) = f_{j+1}(x), \forall x \in X, \forall j = 1, \dots, p-1$ e como $F(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) \in (\mathbb{R}^d)_\Delta^p$ concluímos que o Teorema de Borsuk-Ulam para \mathbb{Z}_p -ações livres não é válido.

Reciprocamente, suponha que o Teorema de Borsuk-Ulam para \mathbb{Z}_p -ações livres não seja válido. Então existe uma função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$, para a qual não existe um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = f(\tau^j(x)), \forall j = 1, \dots, p-1$. Assim, podemos definir a aplicação $G : X \rightarrow (\mathbb{R}^d)_\Delta^p$ dada por

$$G(x) = (f(x), f(\tau x), \dots, f(\tau^{p-1} x)).$$

Temos que $G \circ \tau = \sigma \circ G$, logo G é \mathbb{Z}_p -equivariante. Usando a aplicação equivariante g dada pelo Lema 2.4.1 temos que a composição

$$F = g \circ G : (X, \tau) \rightarrow (S^{d(p-1)-1}, \gamma)$$

é uma aplicação equivariante. □

Capítulo 3

Sobre a quantidade de partições de Tverberg

Neste capítulo, usando algumas técnicas combinatoriais e também o \mathbb{Z}_p -índice, mostramos um teorema sobre a quantidade de partições de Tverberg (caso r primo).

3.1 Uma estimativa inferior para o número de partições de Tverberg

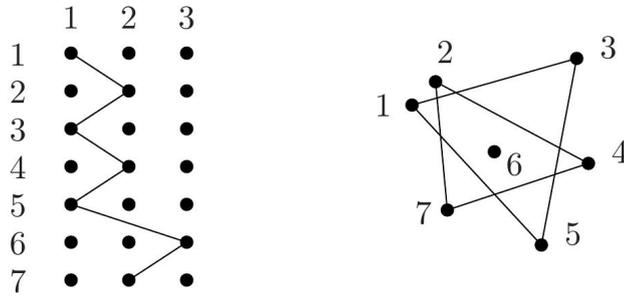
Sabendo que o Teorema de Tverberg é válido podemos afirmar que existe uma partição de Tverberg. Porém quantas partições de Tverberg existem para $(d+1)(r-1)+1$ pontos em \mathbb{R}^d ?

Sierksma conjecturou que existem $((r-1)!)^d$ partições, mas até o momento tal afirmação ainda não pode ser provada. Entretanto, Vučić e Živaljević em [25] estabeleceram um limitante inferior para o número de partições se $r = p$ for primo.

Teorema 3.1.1 (partições de Tverberg [25]) *Seja p um primo. Para qualquer aplicação contínua $f : \|\sigma^N\| \rightarrow \mathbb{R}^d$, onde $N = (d+1)(p-1)$, o número de p -uplas não ordenadas $\{F_1, F_2, \dots, F_p\}$ de faces disjuntas de σ^N com $\bigcap_{i=1}^p f(\|F_i\|) \neq \emptyset$ é ao menos*

$$\frac{1}{(p-1)!} \cdot \left(\frac{p}{2}\right)^{(d+1)(p-1)/2}.$$

Demonstração: Seja K o complexo simplicial $(\sigma^N)_{\Delta(2)}^{*p}$. Os simplexos maximais de K são da forma $F_1 \uplus F_2 \uplus \dots \uplus F_p$, onde os F_i são dois a dois subconjuntos disjuntos do conjunto de vértices $[N + 1]$ de σ^N , $\bigcup_1^p F_i = [N + 1]$ e também podem ser vistas como as arestas do hipergrafo completo $(N + 1)$ -partido¹. Como segue, se o conjunto de vértices de K é identificado com $[N + 1] \times [p]$, então um tal simplexo maximal S é $\{(1, i_1), (2, i_2), \dots, (N + 1, i_{N+1})\}$, $i_1, \dots, i_{N+1} \in [p]$. Um tal S fornece uma partição ordenada (F_1, F_2, \dots, F_p) dada por $F_i = \{j \in [N + 1] : i_j = i\}$. Por exemplo para $d = 2$ e $p = 3$ temos a seguinte ilustração,



Chamaremos S de *ideal* sempre que S nos providenciar uma partição de Tverberg, ou seja sempre que $\bigcap_{i=1}^p f(|F_i|) \neq \emptyset$. Então S é ideal se, e somente se, tem um ponto que é aplicado na diagonal de $(\mathbb{R}^d)^{*p}$ por f^{*p} . Notemos que se K tem ao menos M simplexos maximais ideais, então existem ao menos $M/p!$ partições de Tverberg.

Agora definimos \mathcal{L} a família dos subcomplexos $L \subseteq K$ tal que L é fechado sobre a \mathbb{Z}_p -ação cíclica e que $\text{ind}_{\mathbb{Z}_p}(L) \geq N$, assim f^{*p} restrita a $|L|$ aplica algum ponto sobre a diagonal de $(\mathbb{R}^d)^{*p}$. E portanto, cada $L \in \mathcal{L}$ contém um simplexo maximal ideal. Agora basta estimarmos o número Q de $L \subseteq \mathcal{L}$ que contém um dado simplexo maximal ideal de K e estimar $M \geq p \cdot |\mathcal{L}|/Q$.

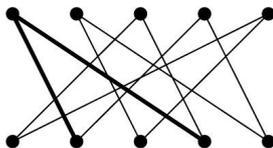
Para o caso de $p = 2$ o teorema apenas afirma que existe uma partição de Tverberg, porém este fato já foi provado. Portanto nos interessa o caso de p ser maior que 2.

Seja $p > 2$ um primo, portanto p é ímpar e assim $N = (d + 1)(p - 1)$ é par. Para descrever um membro L da família \mathcal{L} , nós primeiro dividimos as $N + 1$ linhas do hipergrafo

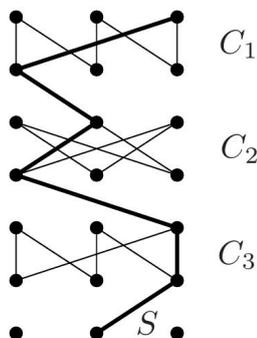
¹Para mais detalhes ver [11].

em $\frac{N}{2}$ pares e mais uma linha remanescente. Seja Π o número de maneiras de realizar essas escolhas.

Para cada par de linhas escolhamos um ciclo C que seja invariante sobre a ação cíclica que age nas colunas do hipergrafo e notemos que pelo fato de C ser um ciclo invariante sobre a ação basta definir as arestas que saem do primeiro vértice da primeira linha. Por exemplo para $p = 5$:



Assim existem $\binom{p}{2}$ escolhas para C . Escolhendo para cada par de linhas um tal ciclo, obtemos os ciclos invariantes $C_1, C_2, \dots, C_{N/2}$. Para um pareamento fixo das linhas temos que o número de escolhas para os $C_i, 1 \leq i \leq N/2$ é $\binom{p}{2}^{N/2}$. Os simplexos maximais do subcomplexo L constituídos de um certo pareamento e os correspondentes C_i são os simplexos maximais de K que contém uma aresta de cada C_i .



Como o número de escolhas para os C_i é $\binom{p}{2}$ e cada uma dessas escolhas é feita para cada um dos Π pareamentos das linhas, temos que $|\mathcal{L}| = \Pi \cdot \binom{p}{2}^{N/2}$. Por outro lado fixado um simplexo maximal de K temos que uma das duas arestas que saem do primeiro vértice da primeira linha é atingida pelo simplexo maximal ou por uma ação numa aresta do mesmo pareamento, assim para definir cada ciclo já não é mais preciso definir aonde vai cada uma das duas arestas que saem do primeiro vértice da primeira linha de cada par pois uma já está fixada, portanto resta definirmos a outra aresta que por sua vez não

pode atingir o mesmo vértice atingido pela aresta fixada na linha abaixo pois devemos ter um ciclo e temos então que as escolhas para dita aresta são $p - 1$. Concluimos então que $Q = \Pi \cdot (p - 1)^{N/2}$.

Cada L pode ser interpretado como o join dos $N/2$ ciclos $C_1, C_2, \dots, C_{N/2}$ e os p pontos remanescentes do pareamento. Assim topologicamente temos:

$$\|L\| \cong (S^1)^{*(N/2)} * D_p \cong S^{N-1} * D_p,$$

portanto $\text{ind}_{\mathbb{Z}_p}(L) \geq N$.

Agora basta calcularmos $p \cdot |\mathcal{L}|/Q$,

$$\begin{aligned} p \cdot |\mathcal{L}|/Q &= p \cdot \frac{\Pi \cdot \binom{p}{2}^{N/2}}{\Pi \cdot (p - 1)^{N/2}} \\ &= p \cdot \left(\frac{\binom{p}{2}}{(p - 1)} \right)^{N/2} \\ &= p \cdot \left(\frac{p!}{2! \cdot (p-2)!} \right)^{N/2} \\ &= p \cdot \left(\frac{p!}{2! \cdot (p-1)!} \right)^{N/2} \\ &= p \cdot \left(\frac{p}{2} \right)^{N/2} \end{aligned}$$

Como o número de partições de Tverberg é ao menos $M/p!$ e $M \geq p \cdot |\mathcal{L}|/Q = p \cdot \left(\frac{p}{2}\right)^{N/2}$, onde $N = (d + 1)(p - 1)$, temos que existem ao menos,

$$\frac{1}{(p - 1)!} \cdot \left(\frac{p}{2}\right)^{(d+1)(p-1)/2}$$

partições de Tverberg. □

Capítulo 4

A conjectura de Tverberg

No capítulo anterior vimos que a versão topológica do teorema de Tverberg é válida quando a dimensão do simplexo é $N = (d + 1)(r - 1) + 1$, com $d \geq 1$ e r um número primo. O objetivo deste capítulo é descrever brevemente o que ocorre para os outros valores de r , e também analisar como se comporta o número de partições de Tverberg para estes casos. Mais precisamente, descrever os principais resultados que foram obtidos nas últimas décadas em torno da famosa Conjectura de Tverberg.

4.1 Um breve histórico sobre a conjectura de Tverberg

A seguir, enunciamos a versão topológica mais geral do Teorema de Tverberg, conhecida como Conjectura de Tverberg.

Teorema 4.1.1 (Conjectura de Tverberg) *Sejam $d \geq 1$ e $r \geq 2$ arbitrários e denote $N := (d + 1)(r - 1)$. Para cada aplicação contínua*

$$f : \|\sigma^N\| \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

existem r faces disjuntas $F_1, F_2, \dots, F_r \subseteq \sigma^N$ tais que

$$f(\|F_1\|) \cap f(\|F_2\|) \cap \dots \cap f(\|F_r\|) \neq \emptyset.$$

Esta conjectura foi provada no caso em que r é um primo (caso principal estudado neste trabalho) por Bárány, Schlosman e Szücs em 1981 [2]. A conjectura também é válida

para o caso em que r é uma potência de primo e tal teorema foi provado de maneiras independentes por Volovikov [24] e por Sarkaria [19]. A demonstração deste caso, em ambas referências, requer o conhecimento de ferramentas avançadas de topologia algébrica.

Desde 1996 quando foi provado por Volovikov [24] (e de 2000 quando foi provado por Sarkaria [19]) até 2015, apesar de outras tentativas que deram origem a novas técnicas e conjecturas equivalentes, não houve avanços para o caso onde r não seja potência de primo. Durante este período, a validade da Conjectura de Tverberg para tal caso foi considerada um dos problemas mais desafiadores na área de topologia combinatorial e geométrica.

Em fevereiro de 2015, em um pré-print publicado por Florian Frick no arxiv, sob algumas condições sobre os parâmetros r e d , um contra-exemplo para a Conjectura de Tverberg é apresentado e, portanto, a Conjectura de Tverberg não é válida para o caso geral.

A seguir, descrevemos os passos usados por Frick, para obter o contra exemplo para tal conjectura.

Denotemos por W_r o espaço o espaço vetorial $\{(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r \mid \sum x_i = 0\}$ com a ação do grupo simétrico S_r que permuta as coordenadas.

Teorema 4.1.2 *Suponha $r \geq 2$, $k \geq 3$ e seja K um complexo simplicial de dimensão $(r - 1)k$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *Existe uma S_r -aplicação $K_{\Delta(2)}^r \rightarrow S(W_r^{\oplus rk})$.*
- (ii) *Existe uma aplicação contínua $f : K \rightarrow \mathbb{R}^{rk}$ tal que para qualquer conjunto de r faces $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de k temos $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) = \emptyset$.*

Demonstração: Ver em [10]. □

Lema 4.1.3 *Sejam $d \geq 3$ e G um grupo finito. Se X um G -complexo simplicial d -dimensional livre e Y um G -complexo simplicial $(d - 2)$ -conexo. Existe uma G -aplicação $X \rightarrow Y$ se, e somente se, existe uma G_p -aplicação $X \rightarrow Y$ para todo p -subgrupo de Sylow, com p primo.*

Demonstração: Ver em [16]. □

Com os dois últimos resultados Frick provou o seguinte teorema, o qual garante que a Conjectura de Tverberg falha no caso geral.

Teorema 4.1.4 *Sejam $r \geq 6$ um inteiro que não seja potência de primo, e $k \geq 3$ um inteiro. Pondo $N = (r-1)(rk+2)$, então existe uma aplicação contínua $F : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^{rk+1}$ tal que para qualquer r faces disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ_N tenhamos $F(\sigma_1) \cap \dots \cap F(\sigma_r) = \emptyset$.*

Demonstração: Ver em [6]. □

Sabendo que a Conjectura de Tverberg não é válida no caso geral, faz sentido questionar em que condições podemos ter um resultado similar. Em outubro de 2015, Blagojevic, Frick e Ziegler em [4] apresentaram um trabalho nesta direção, o qual descreveremos brevemente a seguir.

Definição 4.1.5 *Seja $N_r(d)$ o menor inteiro N tal que para qualquer aplicação contínua $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ existem r faces disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ com $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$.*

Até agora sabemos que para r potência de primo $N_r(d) = (r-1)(d+1)$, e também sabemos que quando r não é uma potência de primo e d é suficientemente grande, $N_r(d) > (r-1)(d+1)$.

Em [4], foi conjecturado o seguinte:

Conjectura 4.1.6 *Sejam $r \geq 2$ e $d \geq 1$. Então*

$$N_r(d) = \begin{cases} (r-1)(d+1) & \text{se } r \text{ é uma potência de primo ou } d \leq r \\ r(d+1) - 1 & \text{caso contrário.} \end{cases},$$

4.2 Comportamento das Partições de Tverberg

Desde que a Conjectura de Tverberg é válida para o caso em que r é uma potência de um primo, o número de partições de Tverberg é maior ou igual 1 e, a questão de apresentar

uma estimativa inferior para este número, como foi apresentada no capítulo anterior para o caso em que $r = p$ é um primo, torna-se uma questão bastante interessante. Stephan em [21] deu uma resposta para tal problema, como mostra o seguinte resultado.

Teorema 4.2.1 *Sejam $r = p^s$ uma potência de primo e $d \geq 1$. Para qualquer aplicação contínua $f : \|\sigma^N\| \rightarrow \mathbb{R}^d$, onde $N = (d+1)(r-1)$, o número de r -uplas não ordenadas $\{F_1, F_2, \dots, F_r\}$ de faces disjuntas de σ^N com $\bigcap_{i=1}^r f(\|F_i\|) \neq \emptyset$ é ao menos*

$$\frac{1}{(r-1)!} \cdot \left(\frac{r}{s+1} \right)^{\lceil \frac{N}{2} \rceil}.$$

A seguir, apresentamos os principais resultados usados na demonstração do teorema anterior.

Definição 4.2.2 *Seja (X, Φ) um G -espaço, dizemos que X é livre de pontos fixos se a órbita de cada ponto é um conjunto não unitário, ou seja nenhum elemento de X é fixado por todos os elementos do grupo.*

Lema 4.2.3 (Volovikov) *Sejam $G = (\mathbb{Z}_p)^s$, X e Y G -espaços livres de pontos fixos tal que Y é uma n -esfera de cohomologia sobre \mathbb{Z}_p de dimensão finita e $\tilde{H}_i(X, \mathbb{Z}_p) = 0$ para todo $i \leq n$. Então não existe uma G -aplicação de X a Y .*

Demonstração: Ver [24]. □

Lema 4.2.4 *Seja X_{Δ}^{*r} o r -join r -deletado, onde o grupo simétrico S_r age sobre X_{Δ}^{*r} permutando as coordenadas. Então X_{Δ}^{*r} é livre de pontos fixos.*

Demonstração: Seja $x = t_1x_1 + \dots + t_rx_r \in X_{\Delta}^{*r}$, portanto por definição de join deletado existem índices i e j tais que $t_i \neq t_j$ ou $x_i \neq x_j$. Portanto basta considerar um elemento $g \in (\mathbb{Z}_p)^s$ que permuta a coordenada i com a coordenada j . Obtemos assim que $x \neq gx$ e portanto $|O_x| > 1$. □

Lema 4.2.5 *Sejam $r \geq 2$ e d inteiros. Então temos que $(\mathbb{R}^d)_{\Delta}^{*r} \simeq S^{(d+1)(r-1)-1}$.*

Demonstração: Ver [21], página 4. □

Como mencionado anteriormente, os resultados acima são ferramentas auxiliares que permitem a demonstração do Teorema 4.2.1, a qual pode ser encontrada com detalhes em [21]. A ideia da prova é uma adaptação da técnica usada para demonstrar o Teorema 3.1.1.

Referências Bibliográficas

- [1] Bajmóczy, E. G., Bárány, I. *A common generalization of Borsuk's and Radon's theorem*, Acta Math. Hungarica, (1979) 34, 347-350.
- [2] Bárány, I., Shlosman, S.B., Szücs, A. *On a topological generalization of a theorem of Tverberg*, J. London Math. Soc., II. Ser. 23 (1981) 158-164.
- [3] Biggs, N. *Discrete Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1989.
- [4] Blagojevic, P., Frick, F., Ziegler, G. *Barycenters of Polytope Skeleta and Counterexamples to the Topological Tverberg Conjecture, via Constraints* eprint arXiv:1510.07984.
- [5] Crabb, M. C. *The topological Tverberg theorem and related topics*. J. Fixed Point Theory Appl. 12 (2012), no. 1-2, 1-25.
- [6] Frick, F. *Counterexamples to the topological Tverberg conjecture*, eprint arXiv:1502.00947.
- [7] Greenberg, M. J. and Harper J.R. *Algebraic Topology, a first course*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. New York Amsterdam, 1981.
- [8] Hatcher, A. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [9] Longueville, M. *A Course in Topological Combinatorics*. Springer New York, 2012.
- [10] Mabillard, I. and Wagner, U. *Eliminating Higher-Multiplicity Intersections, I. A Whitney Trick for Tverberg-Type Problems* eprint arXiv:1508.02349.

-
- [11] Matoušek, J. *Lectures on Discrete Geometry*. Springer-Verlag New York, 2002.
- [12] Matoušek, J. *Using the Borsuk-Ulam Theorem. Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry*, in: Universitext, Springer-Verlag, Heidelberg, 2003.
- [13] Miller, E., Reiner, V., Sturmfels, B. *Geometric Combinatorics*, American Mathematical Society, 2007.
- [14] Munkholm, H. J. *Borsuk-Ulam type theorems for proper \mathbb{Z}_p -actions on (mod p) homology n -spheres*, Math. Scand. 24 (1969), 167-185.
- [15] Munkres, J.R. *Elements of Algebraic Topology*. Massachusetts Institute of Technology Cambridge Massachusetts, 1984.
- [16] Ozaydin, M. *Equivariant maps for the symmetric group*, unpublished, 17 pages, 1987.
- [17] Santos, M. V. *Teorema de Borsuk-Ulam para formas espaciais esféricas*, tese de Doutorado, ICMC-USP, 2014.
- [18] Sarkaria, K. S. *Tverberg's theorem via number fields*. Israel J. Math. 79 (1992), no. 2-3, 317-320.
- [19] Sarkaria, K.S. *Tverberg partitions and Borsuk-Ulam theorems*, Pacific J. Math. 196 (2000) 231-241.
- [20] Spanier, E.H., *Algebraic Topology*, Springer, Berlin, 1966.
- [21] Stephan, H. *On the number of Tverberg partitions in the prime power case*. European J. Combin. 28 (2007), no. 1, 347-355.
- [22] Tverberg, H., *A generalization of Radon's Theorem*, J. London Math. Soc. 41 (1966) 123-128.
- [23] Tverberg, H., *A generalization of Radon's theorem. II*. Bull. Austral. Math. Soc. 24 (1981), no. 3, 321-325.

-
- [24] Volovikov, A. Y., *On a topological generalization of the Tverberg theorem*, Math. Notes 3 (1996) 324-326.
- [25] Vučić, A., Živaljević, R., *Notes on a conjecture of Sierksma*, Discrete Comput. Geom. 9 (1993) 339-349.
- [26] Yang, C. T., *On theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yujobo and Dyson-I*, Ann. of Math. 60 (1954), 262-282.