UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

LEANDRO SOUZA CANAVEZI

UMA PROPOSTA LÚDICA COM UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS E PROBABILIDADE GEOMÉTRICA

SÃO CARLOS
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

LEANDRO SOUZA CANAVEZI

UMA PROPOSTA LÚDICA COM UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS E PROBABILIDADE GEOMÉTRICA

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo A. S. Caetano

SÃO CARLOS
2016

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C213p

Canavezi, Leandro Souza
Uma proposta lúdica com utilização do GeoGebra para o estudo de funções quadráticas e probabilidade geométrica / Leandro Souza Canavezi. -- São Carlos : UFSCar, 2016.
151 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2016.

1. Funções quadráticas. 2. Probabilidade geométrica. 3. Problemas de otimização. 4. GeoGebra. 5. Engenharia didática. I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Leandro Souza Canavezi, realizada em 17/09/2016:

Prof. Dr. Paulo Antonio Silvani Caetano
UFSCar

Prof. Dr. José Luciano Santinho Lima
IFSP

Prof. Dr. Roberto Ribeiro Paterlini
UFSCar

Dedico este trabalho especialmente à minha esposa Ana Carolina, mulher admirável e companheira; e ao nosso filho Davi, luz de nossas vidas.

“Não há ramo da matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.”

Lobachevsky

“A matemática, quando a compreendemos bem, possui não somente a verdade, mas também a suprema beleza.”

Bertrand Russel

AGRADECIMENTOS

A Deus, em primeiro lugar, pelas bênçãos e pela força que me faz seguir adiante todos os dias.

À minha esposa, pelo apoio, incentivo e paciência, fundamentais para que eu pudesse dedicar-me aos estudos e concluir o curso de mestrado.

Ao meu filho, por alegrar-me todos os dias e ser uma das razões pela qual sigo adiante.

À minha família (também sogro, sogra, cunhados e outros), pelo apoio dado sempre que possível e por sempre me desejarem o bem.

Ao meu pai, André (em memória), por ter cuidado tão bem de mim.

Ao professor Paulo Antônio Silvani Caetano, pelo apoio na orientação deste trabalho.

Aos professores do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do polo UFSCar (PROFMAT), pela seriedade e competência com as quais ministraram todo o curso.

À CAPES, pela bolsa de estudos, fundamental para a conclusão do curso e deste trabalho.

Aos meus colegas de turma, sem dúvida grandes professores que contribuem para, além de ensinar matemática, iluminar a vida de seus alunos; por nossa união e pelo curto, mas muito proveitoso, tempo de convivência.

Ao meu amigo Georges, companheiro de curso, pelo apoio e parceria nos estudos.

Aos gestores e todos os demais funcionários da EE Prof. Farid Fayad e da EMEF Cônego Aníbal Difrância, pelo apoio dado durante a aplicação das atividades propostas.

Aos alunos do 9.º ano D da EE Prof. Farid Fayad e do 9.º ano E da EMEF Cônego Aníbal Difrância, pela postura, interesse e alegria durante a aplicação das atividades propostas.

RESUMO

Esta dissertação relata a idealização, o planejamento, a construção e a aplicação de atividades para o estudo de funções quadráticas e probabilidade geométrica para turmas de 9.º ano do ensino fundamental. Também apresenta as análises das atividades realizadas pelos alunos e as conclusões acerca dos objetivos propostos e dos objetivos alcançados. O objetivo principal das atividades elaboradas é proporcionar aos alunos uma melhor aprendizagem dos conteúdos e temas abordados através de uma abordagem lúdica, interativa e motivadora. Os objetivos específicos são desenvolver a capacidade de traduzir um problema matemático na linguagem matemática, manipular expressões algébricas, fazer estimativas e comparações, desenvolver conhecimentos matemáticos como saber expressar e calcular a área e o perímetro de figuras planas, calcular probabilidades de ocorrência de eventos aleatórios, resolver equações quadráticas, traçar gráficos de funções quadráticas e manipular o software ou o aplicativo GeoGebra. Para isto criamos um jogo de dardos adaptado e fichas de atividades contendo instruções, questões, tabelas, gráficos, exercícios de cálculos, problemas de otimização e roteiros de construções gráficas aplicadas ao GeoGebra.

A metodologia utilizada neste trabalho foi a Engenharia Didática. As atividades foram aplicadas em duas turmas de 9.º ano do ensino fundamental de duas escolas diferentes, sendo uma turma de uma escola da rede municipal de ensino de Bauru, estado de São Paulo, e outra turma de uma escola da rede estadual de ensino da cidade de Agudos, estado de São Paulo. Durante a aplicação foram utilizadas 12 aulas de 50 minutos nas duas turmas, sendo 6 dias de aulas duplas, nas quais os alunos participaram ativamente de todas as atividades. Nosso trabalho tem como referência os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e outros documentos que regem o ensino de matemática nas escolas públicas do Brasil. Recomendamos e autorizamos a reprodução destas atividades para fins didáticos.

Palavras-chave: Funções Quadráticas, Probabilidade Geométrica, Problemas de Otimização, GeoGebra, Engenharia Didática.

ABSTRACT

This paper reports the idealization, planning, construction and implementation of activities for the study of quadratic functions and geometric probability for classes of 9th grade of elementary school. It also presents the analysis of the activities undertaken by pupils and conclusions about the proposed objectives and goals achieved. The main objective of the developed activities is to provide students a better learning content covered and issues through a playful approach, interactive and motivating. The specific objectives are to develop the ability to translate a mathematical problem in mathematical language, manipulate algebraic expressions, estimates and comparisons, develop mathematical knowledge as knowing how to express and calculate the area and perimeter of plane figures, calculating probabilities of random events, solve quadratic equations, plotting graphs of quadratic functions and manipulate the software or the GeoGebra application. For this we have created a game of darts adapted and activity sheets containing instructions, questions, tables, graphs, calculation exercises, optimization problems and graphic constructions scripts applied to GeoGebra.

The methodology used was the Didactic Engineering. The activities were implemented in two classes of 9th grade of elementary school in two different schools, one class at a school in the municipal school of Bauru, São Paulo, and another class of a school in the state school system the city of Agudos, state of São Paulo. During the application were used 12 50-minute lessons in two classes, with six days of double classes, in which students actively participated in all activities. Our work makes reference to the National Curriculum Parameters (PCN) and other documents governing the teaching of mathematics in public schools in Brazil. We recommend and authorize reproduction of these activities for didactic purposes.

Keywords: Quadratic Functions, Geometric Probability, Optimization Problems, GeoGebra, Didactic Engineering.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

Introdução

Os conteúdos matemáticos abordados neste trabalho foram escolhidos levando-se em consideração algumas perguntas recorrentes feitas pelos alunos. Tais perguntas dizem respeito à relação deles próprios com a matemática. Entre elas, destacam-se: *“Para que serve a matemática?” “O que isto tem a ver com matemática?” “Quando utilizarei este (determinado) conteúdo matemático no meu dia a dia?”* Pensando nas respostas a estas perguntas, e procurando dar condições para que os alunos respondam a outras próprias perguntas a respeito da relação que têm com a matemática, escolhemos dois temas principais a serem estudados: funções quadráticas e probabilidade geométrica. A ideia norteadora para a elaboração das atividades foi fazer com que os alunos percebam o “surgimento” de funções quadráticas e parábolas em situações que, à primeira vista, não têm relação com tais temas. Para tal, fizemos uma abordagem lúdica, na qual os alunos deixaram de lado as “aulas tradicionais” e participaram de aulas interativas e motivadoras.

No capítulo 1 fazemos uma apresentação pessoal.

No capítulo 2 apresentamos as relações entre os conteúdos matemáticos abordados neste trabalho e outros documentos oficiais que regem o ensino em nível nacional e nas redes estadual de São Paulo e municipal de Bauru, estado de São Paulo.

No capítulo 3 apresentamos a metodologia da Engenharia Didática, na qual se baseiam as atividades deste trabalho.

No capítulo 4 descrevemos as atividades propostas e aplicadas em sala de aula.

No capítulo 5 descrevemos a construção do jogo de dardos adaptado.

No capítulo 6 descrevemos todo o processo de implementação das atividades.

No capítulo 7 fazemos análises e reflexões acerca das atividades.

No capítulo 8 fazemos as conclusões e as considerações finais acerca das atividades.

Por fim apresentamos o Apêndice, no qual estão elencadas as instruções para as fichas de atividades e as fichas de atividades realizadas pelos alunos.

1. Apresentação

Neste capítulo apresento um breve histórico da minha trajetória profissional até o momento, minha experiência com o PROFMAT, alguns relatos do dia a dia enquanto professor que me conduziram à elaboração das atividades deste trabalho e às escolhas do tema e do público-alvo.

1.1 Breve histórico profissional

Desde minha juventude, por volta dos 14 anos de idade e durante as aulas de matemática em minha turma de 8.ª série, percebi que tenho paixão pela matemática e me imaginei como professor lecionando matemática. Sempre ajudei meus colegas explicando e tirando dúvidas, inclusive nas séries anteriores. Claramente, minha aptidão era voltada para a área das ciências exatas.

Tive ótimos professores que serviram de modelo e que me fizeram criar uma pré-identidade como professor. As aulas de matemática me encantavam, e aprender um conceito matemático novo, para mim, era muito prazeroso.

Ao concluir a 8.ª série prestei uma prova, chamada vestibulinho, na qual fui aprovado. Iniciei o curso técnico em eletrônica no CTI – Colégio Técnico Industrial “Prof. Isaac Portal Roldán” da minha cidade, Bauru, SP. Anos atrás um dos meus tios também fizera o mesmo curso, e sempre o ajudei, enquanto criança e jovem, a desmontar e montar aparelhos eletrônicos que ele consertava em casa. Isto me fez criar gosto e interesse pela eletrônica. Concluí o curso, junto o ensino médio, e logo comecei a estagiar na área de manutenção de aparelhos eletrônicos domésticos (televisor, aparelhos de som etc.). Após o estágio permaneci trabalhando na mesma empresa por 7 anos.

Porém, minha paixão por matemática ainda me fazia refletir e eu continuava me imaginando como professor. Depois de concluído o ensino médio, e estagiando na área de eletrônica, prestei o vestibular para licenciatura em matemática na UNESP – Câmpus Bauru e fui aprovado. Cursei a licenciatura enquanto trabalhava como técnico em eletrônica. Meus patrões sempre me incentivaram a estudar, apesar de ser uma área diferente daquela na qual eu trabalhava. Depois de concluída a licenciatura comecei a lecionar no Colégio Dom Bosco da cidade de Bauru, um colégio particular. Prestei concurso para Professor de Ensino Básico II – Matemática, estado de São Paulo, no qual fui aprovado, e ingressei em 2008 na rede estadual de ensino como professor de matemática e de física. Trabalhei na rede SESI – SP como professor de matemática. Atualmente também sou professor da rede municipal de ensino de Bauru. Acabei deixando de lado o ofício de técnico em eletrônica; este, para mim, tornou-se um hobby nas (poucas) horas vagas.

1.2 Minha experiência no PROFMAT

Desde que ingressei como professor efetivo na rede estadual de ensino de São Paulo fiz vários cursos de atualização profissional oferecidos pela Secretaria Estadual de Educação – SEE. Sempre busquei me atualizar e continuar estudando. Minha paixão por matemática me impulsiona a fazer cursos. Foi desta forma que me conduzi ao PROFMAT, iniciando o curso em fevereiro de 2014 e concluindo em 2016 com a apresentação desta própria dissertação. Em resumo, penso que foi um ótimo curso que fiz, no qual revi vários conteúdos matemáticos com os quais não lido diretamente no dia a dia (por exemplo, o cálculo) e também aprendi vários outros conteúdos matemáticos que não estudei na graduação e que não conhecia (por exemplo, congruências). Considero a experiência no PROFMAT como ótima, porém isto não significa que considero o curso fácil de se cursar; digo que não é uma tarefa simples administrar o tempo destinado aos estudos, ao trabalho e à família. Com toda certeza, digo que só consegui terminar o PROFMAT graças ao apoio dos meus familiares, principalmente.

1.3 Relatos do dia a dia enquanto professor

Desde que me tornei professor e a cada ano que passa percebo que grande parte dos alunos, em geral, têm cada vez menos atração pelos estudos. A maioria deles vêm desmotivados para a escola, sem um plano a longo prazo, um objetivo profissional. Nas aulas de matemática raciocinar, formular hipóteses, estabelecer relações, fazer comparações e cálculos, enfim, pensar parece algo difícil. Atrair a atenção destes alunos durante as aulas em meio à era da informação que vivemos não é algo simples. Por outro lado, fico admirado ao observar como os celulares e smartphones atraem a atenção deles. A maioria dos alunos possui e usa estes aparelhos muitas horas por dia, conforme já constatei em atividades de pesquisa, porcentagens e construção de gráficos. Penso que este uso “indisciplinado” e contínuo destes aparelhos acaba por deixar seus usuários (os alunos) cada vez mais desatentos.

Não percebo na maioria dos alunos com os quais lido diariamente o mesmo encantamento e o mesmo prazer que eu tinha enquanto estudante. Percebo que eles são “imediatistas”, ou seja, querem ver rapidamente o resultado do que fazem, inclusive do que aprendem. Se isto não acontece eles perdem rapidamente o interesse pelo aprendizado. Frequentemente ouço perguntas do tipo: Para que serve a matemática? O que isto tem a ver com matemática? Quando utilizarei este (determinado) conteúdo matemático no meu dia a dia? Sempre respondo, relacionando a matemática com as profissões, principalmente, e também com situações do dia a dia, seja fazendo cálculos de troco, estimativas de quantidades etc. E também respondo explicando as contribuições da matemática para o desenvolvimento tecnológico, e para isto aproveito minha experiência como técnico em eletrônica. Inclusive, explico como a matemática é fundamental para o desenvolvimento dos celulares e smartphones que eles tanto “amam”.

Sempre que possível utilizo jogos em minhas aulas: bingo de tabuada, dominós, damas, gincanas e outros. Mas penso que nem sempre é adequado fazer isto. Alguns alunos “se aproveitam” dos poucos momentos livres durante as aulas com jogos para fazer coisas alheias à aula, o que acaba tumultuando a turma, além de tirar-lhes a atenção para o que está sendo ensinado. Também utilizo recursos de informática como notebook e datashow para exibir slides e filmes sobre determinado conteúdo matemático e utilizo o winplot para estudar funções. Confesso que nunca havia utilizado o GeoGebra nas aulas até aplicar as atividades deste trabalho. Percebo que, no geral, o interesse dos alunos em aprender matemática nestas aulas é maior, apesar do tumulto também ser maior. E também nunca havia planejado utilizar jogos e informática (notebook e smartphones) ao mesmo tempo nas aulas.

1.4 As escolhas do tema e do público-alvo

Neste contexto exposto até o momento e seguindo as orientações do Professor Paulo Caetano, que é um grande conhecedor do GeoGebra, resolvi planejar atividades envolvendo jogos e informática (notebook e smatphones) como elemento motivador nas aulas de matemática. Uma das dificuldades que enfrento na escola estadual onde leciono é que a sala de informática, a sala do Programa Acessa Escola, é pequena fisicamente e possui cerca de 6 computadores apenas, não comportando turmas com cerca de 35 alunos. Outra dificuldade semelhante que enfrento na escola municipal onde leciono é que o laboratório de informática está desativado por um tempo indeterminado para adequações. Por isso utilizo 1 notebook com datashow apenas em sala de aula. Em setembro do ano passado foi disponibilizada uma versão do GeoGebra para smartphones, sob a forma de aplicativo, para download gratuito. É chamado GeoGebra Calculadora Gráfica. Resolvi, então, planejar atividades pensando no uso deste aplicativo pelos alunos durante as aulas.

Um dos conteúdos matemáticos que muitos alunos apresentam dificuldades de aprendizagem é o traçado de gráficos de funções, tanto do 1.º quanto do 2.º grau, que é um conteúdo do 9.º ano do ensino fundamental. O uso do GeoGebra nas aulas pode ser um facilitador para a aprendizagem destes conteúdos, pois os alunos podem manipular rapidamente os gráficos, dinamizando a aula no geral. As raízes de uma função quadrática, por exemplo, podem ser facilmente visualizadas e, desta forma, os alunos podem estabelecer conexões com as raízes de uma equação quadrática. As variações dos coeficientes *a*, *b* e *c* de uma função quadrática e as respectivas mudanças nos gráficos podem ser facilmente percebidas; os pontos de máximo e de mínimo podem ser rapidamente obtidos.

Fizemos uma adaptação do jogo dos discos no qual um jogo de dardos tradicional, com alvo circular, foi transformado num jogo de dardos com alvo quadriculado. Ficou conhecido como jogo de dardos adaptado. Ao falarmos na palavra jogo naturalmente pensamos em situações de competição, nas quais há um vencedor. Porém, este jogo não tem esta característica que inclusive está presente no jogo de dardos tradicional, mas é um jogo de interação entre todos os participantes sem que haja pontuação. O seu objetivo é fazer com que os alunos lancem dardos aleatoriamente num alvo quadriculado e verifiquem quantos quadradinhos cinzas (ou pretos) do quadriculado foram atingidos. Para garantir a aleatoriedade nos lançamentos os alunos devem estar vendados. Após os lançamentos é feita uma contagem daqueles que foram favoráveis, ou seja, daqueles nos quais os dardos acertaram os quadradinhos pretos, e também dos não favoráveis. Caso o dardo lançado não atinja o alvo, então o lançamento não é considerado nem como favorável e nem como não favorável; é refeito o lançamento. É possível, entretanto, jogar os dardos e determinar um certo tipo de pontuação, uma certa competição.

2. As relações entre os conteúdos matemáticos abordados e os PCN, o Currículo de Matemática do Estado de São Paulo, o Currículo Comum para o Ensino Fundamental Municipal de Bauru e outros documentos

Este capítulo, dividido em duas partes, tem por objetivo situar e contextualizar as atividades e conteúdos matemáticos abordados neste trabalho de acordo com os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais), o Currículo de Matemática do Estado de São Paulo, o Currículo Comum para o Ensino Fundamental Municipal de Bauru e outros documentos, e assim justificar as escolhas tanto do tema quanto do público-alvo. A primeira parte trata do ensino na rede estadual de São Paulo e a segunda parte trata do ensino na rede municipal de Bauru.

2.1 Ensino na rede estadual de São Paulo

De acordo com o Currículo de Matemática do Estado de São Paulo o estudo de equações e funções quadráticas no ensino fundamental inicia-se a partir do 2.º bimestre do 9.º ano; o estudo de probabilidade inicia-se a partir do 3.º bimestre do 7.º ano, sendo um dos temas referentes ao estudo de razões.

Semestralmente a Secretaria Estadual de Educação de São Paulo distribui aos alunos os Cadernos do Aluno. Cada disciplina tem um caderno semestral específico correspondente, sendo que o volume 1, distribuído no primeiro semestre, contém Situações de Aprendizagem referentes aos conteúdos do primeiro e do segundo bimestre, e o volume 2, distribuído no segundo semestre, contém Situações de Aprendizagem referentes aos conteúdos do terceiro e do quarto bimestre. Os professores recebem os Cadernos do Professor, que são versões dos respectivos Cadernos do Aluno contendo planejamento de aulas, respostas, comentários e sugestões referentes às Situações de Aprendizagem.

A respeito dos Cadernos do Aluno e do Professor:

> O *Caderno* tem a proposição de apoiá-los no planejamento de suas aulas para que explorem em seus alunos as competências e habilidades necessárias que comportam a construção do saber e a apropriação dos conteúdos das disciplinas, além de permitir uma avaliação constante, por parte dos docentes, das práticas metodológicas em sala de aula, objetivando a diversificação do ensino e a melhoria da qualidade do fazer pedagógico. (SÃO PAULO, 2014, p. 5)

O Currículo de Matemática do Estado de São Paulo fala a respeito de competências e de habilidades:

> Um currículo que promove competências tem o compromisso de articular as disciplinas e as atividades escolares com aquilo que se espera que os alunos aprendam ao longo dos anos. Competências, nesse sentido, caracterizam modos de ser, de raciocinar e de interagir, que podem ser depreendidos das ações e das tomadas de decisão em contextos de problemas, de tarefas ou de atividades. (SÃO PAULO, 2011, p. 14)
>
> Tais habilidades traduzem, de modo operacional, as ações que os alunos devem ser capazes de realizar, ao final de cada bimestre, após serem apresentados aos conteúdos curriculares listados. (SÃO PAULO, 2011, p. 57)

Mais especificamente, no 4.º bimestre do 9.º ano há a Situação de Aprendizagem 4, cujo título é: Probabilidade e Geometria. Esta Situação de Aprendizagem apresenta um texto sobre os experimentos do matemático francês Georges-Louis Leclerc que ficou conhecido como Conde de Buffon, cujo título é: O pi e a agulha de Buffon. Também apresenta o problema 4, que diz respeito a um jogo de dardos tradicional e envolve cálculos de probabilidades. No ensino médio o estudo de problemas de otimização inicia-se a partir do 2.º bimestre da 1.ª série, na situação de aprendizagem 4 cujo título é: Problemas envolvendo funções de 2.º grau em múltiplos contextos; problemas de máximos e mínimos. Porém, cabe ressaltar, novamente, que o público-alvo deste trabalho é constituído por alunos do 9.º ano do ensino fundamental.

Os conceitos de competências e de habilidades são considerados fundamentais na LDBEN – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, nos DCN – Diretrizes Curriculares Nacionais e nos PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais, que são documentos elaborados pelo Conselho Nacional de Educação e pelo MEC – Ministério da Educação. O Currículo de Matemática do Estado de São Paulo diz que:

> Este Currículo adota como competências para aprender aquelas que foram formuladas no referencial teórico do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem, 1998). Entendidas como desdobramentos da competência leitora e escritora, para cada uma das cinco competências do Enem [...] apresenta-se a articulação com a competência de ler e escrever. (SÃO PAULO, 2011, p. 18-19)

Anualmente e geralmente no mês de novembro acontece o SARESP – Sistema de Avaliação de Rendimento do Estado de São Paulo, que é uma prova escrita aplicada aos alunos pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (SEE/SP) em turmas do 2.º, 3.º, 5.º, 7.º e 9.º anos do ensino fundamental e da 3.ª série do ensino médio. O seu objetivo principal é avaliar o ensino básico nas escolas da rede estadual. Participam do SARESP alunos de escolas particulares, da rede SESI e do Centro Paula Souza. As disciplinas avaliadas são Língua Portuguesa, Matemática, Ciências da Natureza, História e Geografia (7.º e 9.º anos do ensino fundamental e 3.ª série do ensino médio). Há também aplicação de provas de redação para amostras de turmas (exceto para turmas do 2.º ano do ensino fundamental). Os resultados do SARESP são utilizados para orientar as ações pedagógicas no sentido de melhorar a qualidade da educação básica e também integram o cálculo do Índice de Desenvolvimento da Educação do Estado de São Paulo (Idesp). Todas as provas do SARESP são formuladas tendo como base várias competências e habilidades específicas de cada uma das disciplinas avaliadas. Tais competências e habilidades constam nas Matrizes de Referência para a Avaliação SARESP – Ensino Fundamental e Médio.

De acordo com as Matrizes de Referência para a Avaliação SARESP – Ensino Fundamental e Médio:

> Em seus princípios centrais, aparecem as competências (formas de raciocinar e tomar decisões) como eixo em torno do qual guiam-se as aprendizagens e a prioridade que é dada à competência de leitura e escrita. (SÃO PAULO, 2009, p. 3)

Neste mesmo sentido o Currículo de Matemática do Estado de São Paulo explica que é por meio da exploração das ideias fundamentais de cada disciplina que se busca estabelecer relações entre conteúdos matemáticos e competências matemáticas:

> No caso específico da Matemática, proporcionalidade, equivalência, ordem, aproximação, problematização, otimização, entre outras, são exemplos de tais ideias fundamentais, a serem exploradas nos diversos conteúdos estudados. (SÃO PAULO, 2011, p. 59)

Os PCN propõem que o ensino de matemática deve ser baseado, fundamentalmente, na resolução de problemas. Neste sentido o problema (ou situação-problema) é o ponto de partida da atividade matemática para que aconteça o processo de ensino e aprendizagem, no qual os conceitos, as ideias e os métodos matemáticos devem ser abordados mediante situações nas quais os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las. Também explicam que:

> [...] convém destacar que é desejável que os problemas a serem trabalhados em sala de aula não sejam tratados separadamente. O que se recomenda é que os professores garantam que todos eles sejam explorados em situações mais ricas, contextualizadas, que possibilitem o desenvolvimento da interpretação, da análise, da descoberta, da verificação e da argumentação. (BRASIL, 1998, p. 112)

Os PCN explicam que há diversas possibilidades de trabalho em sala de aula, e que dentre elas destacam-se as tecnologias da comunicação e os jogos, pois são recursos que podem contextualizar os problemas além de fornecer instrumentos para construção de estratégias de resolução.

> Os números inteiros podem surgir como uma ampliação do campo aditivo, pela análise de diferentes situações em que esses números estejam presentes. Eles podem representar diferença, “falta”, orientação e posições relativas. As primeiras abordagens dos inteiros podem apoiar-se nas ideias intuitivas que os alunos já têm sobre esses números por vivenciarem situações de perdas e ganhos num jogo, débitos e créditos bancários ou outras situações. (BRASIL, 1998, p. 66)

De acordo com o Currículo de Matemática do Estado de São Paulo:

> Por um lado, certamente os numerosos recursos tecnológicos disponíveis para utilização em atividades de ensino encontram um ambiente propício para acolhimento no terreno da Matemática: máquinas de calcular, computadores, *softwares* para a construção de gráficos, para as construções em Geometria e para a realização de cálculos estatísticos são muito bem-vindos, bem como o seu uso será crescente, inevitável e desejável, salvo em condições extraordinárias, em razão de extremo mau uso. (SÃO PAULO, 2011, p. 33-34)

A respeito do uso de jogos em sala de aula, de acordo com o Currículo de Matemática do Estado de São Paulo:

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser

> corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas.
>
> A participação em jogos de grupo também representa uma conquista cognitiva, emocional, moral e social para o estudante e um estímulo para o desenvolvimento de sua competência matemática. (SÃO PAULO, 2011, p. 46-47)

De acordo com o Currículo de Matemática do Estado de São Paulo, as primeiras ideias associadas ao plano cartesiano estão presentes no ensino fundamental, tanto no 6.º ano quanto no 7.º ano, por meio de Situações de Aprendizagem que tratam da localização de pontos em mapas, do estudo de simetrias, de ampliações e de reduções de figuras no plano; também estão presentes no 8.º ano e no 9.º ano por meio de Situações de Aprendizagem que tratam da construção, análise e interpretação de gráficos.

A respeito dos problemas de otimização o Currículo de Matemática do Estado de São Paulo diz que:

> Um caso especialmente importante para a criação e a exploração de centros de interesse é o dos problemas que envolvem situações de otimização de recursos em diferentes contextos, ou seja, problemas de máximos ou de mínimos. Procurar, em cada problema, não apenas uma solução, mas sim a melhor solução, para minimizar os custos ou maximizar os retornos, por exemplo, pode constituir um atrativo a mais na busca de contextualização dos conteúdos estudados. (SÃO PAULO, 2011, p. 49)

Os PCN sugerem um critério para a verificação da aprendizagem dos alunos sobre probabilidade:

> Resolver problemas de contagem e indicar as possibilidades de sucesso de um evento por meio de uma razão. Por meio deste critério o professor verifica se o aluno é capaz de resolver problemas de contagem com quantidades que possibilitem obter o número de agrupamentos, utilizando procedimentos diversos, como a construção de diagrama de árvore, tabelas etc., sem o uso de fórmulas. Verifica, também, se o aluno é capaz de indicar a probabilidade de sucesso de um evento por meio de uma razão, construindo um espaço amostral em situações como o lançamento de dados, moedas etc. (BRASIL, 1998, p. 77)

O Currículo de Matemática do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2011, p. 65) apresenta uma tabela contendo os conteúdos matemáticos a serem trabalhados de acordo com o bimestre e algumas competências que os alunos devem desenvolver ao longo dos estudos:

2º Bimestre	**Números/Relações** Álgebra • Equações de 2º grau: resolução e problemas Funções • Noções básicas sobre função • A ideia de variação • Construção de tabelas e gráficos para representar funções de 1º e de 2º graus	• Compreender a resolução de equações de 2º grau e saber utilizá-las em contextos práticos • Compreender a noção de função como relação de interdependência entre grandezas • Saber expressar e utilizar em contextos práticos as relações de proporcionalidade direta entre duas grandezas por meio de funções de 1º grau • Saber expressar e utilizar em contextos práticos as relações de proporcionalidade direta entre uma grandeza e o quadrado de outra por meio de uma função de 2º grau • Saber construir gráficos de funções de 1º e de 2º graus por meio de tabelas e da comparação com os gráficos das funções $y = x$ e $y = x^2$

Figura 1: tabela de conteúdos matemáticos referentes ao 2.º bimestre do 9.º ano do ensino fundamental

Os Cadernos do Professor apresentam um quadro de conteúdos em suas páginas finais. Nele podemos localizar os conteúdos matemáticos abordados neste trabalho (SÃO PAULO, 2014, p. 113):

QUADRO DE CONTEÚDOS DO ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS FINAIS

	5ª série/6º ano	6ª série/7º ano	7ª série/8º ano	8ª série/9º ano
Volume 1	NÚMEROS NATURAIS – Múltiplos e divisores. – Números primos. – Operações básicas. – Introdução às potências. FRAÇÕES – Representação. – Comparação e ordenação. – Operações. NÚMEROS DECIMAIS – Representação. – Transformação em fração decimal. – Operações. SISTEMAS DE MEDIDA – Comprimento, massa e capacidade. – Sistema métrico decimal.	NÚMEROS NATURAIS – Sistemas de numeração na Antiguidade. – O sistema posicional decimal. NÚMEROS INTEIROS – Representação. – Operações. NÚMEROS RACIONAIS – Representação fracionária e decimal. – Operações com decimais e frações. GEOMETRIA/MEDIDAS – Ângulos. – Polígonos. – Circunferência. – Simetrias. – Construções geométricas. – Poliedros.	NÚMEROS RACIONAIS – Transformação de decimais finitos em fração. – Dízimas periódicas e fração geratriz. POTENCIAÇÃO – Propriedades para expoentes inteiros. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO – A linguagem das potências. ÁLGEBRA – Equivalências e transformações de expressões algébricas. – Produtos notáveis. – Fatoração algébrica.	NÚMEROS REAIS – Conjuntos numéricos. – Números irracionais. – Potenciação e radiciação em $\mathbb{R}$. – Notação científica. ÁLGEBRA – Equações de 2º grau: resolução e problemas. – Noções básicas sobre função; a ideia de interdependência. – Construção de tabelas e gráficos para representar funções de 1º e 2º graus.
Volume 2	GEOMETRIA/MEDIDAS – Formas planas e espaciais. – Noção de perímetro e área de figuras planas. – Cálculo de área por composição e decomposição. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO – Leitura e construção de gráficos e tabelas. – Média aritmética. – Problemas de contagem.	NÚMEROS/PROPORCIONALIDADE – Proporcionalidade direta e inversa. – Razões, proporções, porcentagem. – Razões constantes na Geometria: π. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO – Gráficos de setores. – Noções de probabilidade. ÁLGEBRA – Uso de letras para representar um valor desconhecido. – Conceito de equação. – Resolução de equações. – Equações e problemas.	ÁLGEBRA/EQUAÇÕES – Equações de 1º grau. – Sistemas de equações e resolução de problemas. – Inequações de 1º grau. – Sistemas de coordenadas (plano cartesiano). GEOMETRIA/MEDIDAS – Teorema de Tales e Pitágoras: apresentação e aplicações. – Área de polígonos. – Volume do prisma.	GEOMETRIA/MEDIDAS – Proporcionalidade, noção de semelhança. – Relações métricas entre triângulos retângulos. – Razões trigonométricas. – O número π; a circunferência, o círculo e suas partes; área do círculo. – Volume e área do cilindro. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO – Contagem indireta e probabilidade.

Figura 2: quadro de conteúdos do ensino fundamental – anos finais

2.2 Ensino na rede municipal de Bauru

Equivalente ao Currículo de Matemática do Estado de São Paulo há um documento-base intitulado Currículo Comum para o Ensino Fundamental Municipal de Bauru. A seguir apresento alguns de seus princípios norteadores, em relação ao ensino de matemática, que têm relação com as atividades apresentadas nesta dissertação e que foram aplicadas em sala de aula. Também apresento algumas considerações pertinentes dos PCN.

Um dos princípios norteadores do Currículo Comum para o Ensino Fundamental Municipal de Bauru é:

> Por meio de uma prática pedagógica alicerçada na resolução de problemas enquanto perspectiva metodológica – pautada pelo efetivo diálogo entre professor-aluno e aluno-aluno sobre o conhecimento matemático – o docente, ao garantir a aprendizagem da matemática, colaborará na constituição da cidadania do aluno. (TEZANI, 2012, p. 204)

Neste sentido os PCN também tratam da relação entre matemática e construção (constituição) da cidadania:

> Também é importante salientar que a compreensão e a tomada de decisões diante de questões políticas e sociais dependem da leitura crítica e interpretação de informações complexas, muitas vezes contraditórias, que incluem dados estatísticos e índices divulgados pelos meios de comunicação. Ou seja, para exercer a cidadania é necessário saber calcular, medir, raciocinar, argumentar, tratar informações estatisticamente etc. (BRASIL, 1998, p. 27)

O Currículo Comum para o Ensino Fundamental Municipal de Bauru apresenta os objetivos gerais do componente curricular (matemática) no ensino fundamental. Dois destes objetivos são:

> Identificar os conhecimentos matemáticos (aritmético, algébrico, combinatório, estatístico, geométrico, métrico, probabilístico) como instrumentos necessários para a seleção, organização e produção de informações relevantes para a interpretação e avaliação crítica da realidade circundante. (TEZANI, 2012, p. 205)

> Compreender a importância do trabalho coletivo na busca de soluções para as situações problemas propostas, sabendo respeitar e argumentar-discutir acerca do raciocínio matemático empregado pelo outro. (TEZANI, 2012, p. 205)

O estudo de equações e funções quadráticas no ensino fundamental municipal de Bauru se inicia a partir do 2.º bimestre do 9.º ano; já o estudo de probabilidade inicia-se a partir do 4.º bimestre do 7.º ano, sendo que o estudo de razões se inicia a partir do 3.º bimestre deste mesmo ano. O Currículo Comum para o Ensino Fundamental Municipal de Bauru apresenta quadros de distribuição dos conteúdos matemáticos a serem ensinados durante o ensino fundamental. Cabe ressaltar que esta distribuição é em caráter de sugestão, ou seja, o professor tem autonomia de seguir uma sequência de ensino que julgar mais adequada à realidade da turma para a qual estiver lecionando.

Distribuição dos Conteúdos Curriculares nos Anos Finais do Ensino Fundamental – Matemática			
9º ano			
1º Bimestre	2º Bimestre	3º Bimestre	4º Bimestre
NÚMEROS e OPERAÇÕES: Conjuntos e Diagramas. Linguagem Simbólica das Relações entre os Conjuntos (União, Intersecção, Complementar, etc.). Conjunto dos Números Reais: Racionais e Irracionais. Localização dos Números Reais na Reta Numérica. Potenciação e Radiciação envolvendo o conjunto dos Números Reais. NÚMEROS e OPERAÇÕES/GRANDEZAS e MEDIDAS: Notação Científica: Números 'Muito' Grandes ou Números 'Muito' Pequenos. TRATAMENTO da INFORMAÇÃO: Tabelas (Simples e de Dupla Entrada) e Gráficos de Barras, Linhas e de Setor (Circular). Cálculo de Possibilidades e Chances.	ÁLGEBRA: Equação do 2º Grau: Definição e Identificação. Equação do 2º Grau Completas e Incompletas e Solução por meio de Bháskara e Soma e Produto. Raízes de Equação do 2º Grau e Propriedades. Equações Biquadradas e Irracionais. Noções Básicas de Funções do 2º Grau e a Ideia de Variação. Construção de Gráficos e Tabelas para a Representação de Equação do 1º Grau.	ÁLGEBRA: Sistema de Equações do 2º Grau: Resolução e Representação Gráfica. ÁLGEBRA/GEOMETRIA: Teorema de Tales: Proporcionalidade entre Segmentos de Retas; Retas Paralelas e Triângulos. Teorema de Pitágoras: Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo (Seno, Cosseno e Tangente). GEOMETRIA: Semelhança de Triângulos: Conceitos e Casos (LAL, LLL, ALA, LAA).	GEOMETRIA/GRANDEZAS e MEDIDAS: O número π. Circunferência e Círculo: Área, Perímetro e suas partes (raio, diâmetro, corda, semicírculo, coroa). Cilindro e Cone: Volume. TRATAMENTO da INFORMAÇÃO: Média Aritmética, Mediana e Moda. Problemas de Contagem e Noções de Probabilidade.

Figura 3: distribuição dos conteúdos curriculares nos anos finais do ensino fundamental – matemática

Sequência didática e aprendizagem significativa são dois temas abordados pelo Currículo Comum para o Ensino Fundamental Municipal de Bauru.

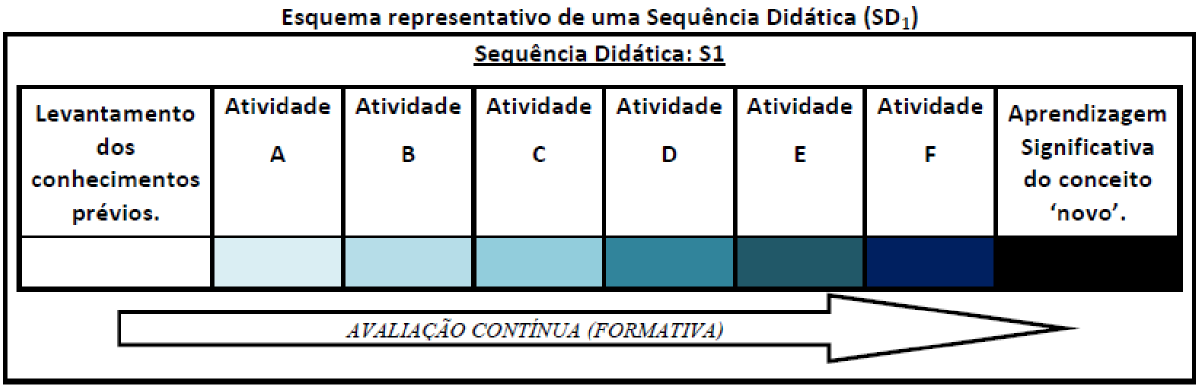


Figura 4: esquema representativo dos níveis de dificuldade de uma sequência didática

> No referido esquema representativo da Sequência Didática (SD_1), a intensificação das cores acompanha o nível de dificuldade das atividades que vão se tornando cada vez mais complexas. Entretanto, o docente deve atentar-se em relação ao aumento gradativo do nível de dificuldade das atividades propostas ao aprendiz de tal modo que o mesmo elabore progressivamente o conhecimento matemático. (TEZANI, 2012, p. 220)

A utilização de jogos nas aulas de matemática é um tema abordado no Currículo Comum para o Ensino Fundamental Municipal de Bauru. Segundo este documento, tal utilização deve ser permeada pela problematização para que o jogo não perca a sua função educativa. A resolução de problemas nas aulas de matemática é outro tema abordado e fortemente “apoiado”.

> Em suma, entendemos a resolução de problemas enquanto uma perspectiva metodológica na qual o professor deve desenvolver um novo entendimento do que é ensinar e aprender matemática. (TEZANI, 2012, p. 229)

3. Metodologia

A metodologia utilizada na realização deste trabalho é a Engenharia Didática, criada no início da década de 1980 por Michèle Artigue, educadora e autora da área de didática da matemática francesa. Nesta metodologia a abordagem didática é comparada ao trabalho de um engenheiro ao realizar um projeto e é baseada em experiências em sala de aula. Desta forma, destaca-se a importância das realizações didáticas em sala de aula como prática de investigação, associando conhecimentos práticos com conhecimentos teóricos.

> É preciso salientar que esta metodologia está fundamentada numa teoria muito ampla, que envolve a teoria das situações didáticas, dos quadros epistemológicos e dos obstáculos cognitivos desenvolvidas por autores da didática das matemáticas francesa, Brousseau, Douady e Chevallard. (CARNEIRO, 2005, p. 90)

Segundo Artigue (1996), a Engenharia Didática é caracterizada por 4 níveis de organização ou fases:

1) Análises prévias;
2) Concepção e análise *a priori*;
3) Implementação;
4) Análise *a posteriori* e validação.

A Engenharia Didática caracteriza-se como pesquisa experimental na qual a validação acontece através da comparação entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*; tal validação é interna e não há a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste.

A seguir descrevemos cada das fases anteriormente citadas.

3.1 Fase 1: Análises prévias

Nesta fase são realizadas as análises de como habitualmente vem sendo ensinado um tema matemático e os conteúdos específicos relacionados a este tema para que, posteriormente, seja proposta uma intervenção que proporcione uma melhor aprendizagem. Desta forma são observados os efeitos de um ensino tradicional, suas falhas, as dificuldades de aprendizagem que os alunos apresentam e os obstáculos que eles enfrentam.

Artigue (1996) sugere que essa análise inclua a distinção de três dimensões: a epistemológica, que diz respeito às características do saber; a didática, que diz respeito ao funcionamento do sistema de ensino; e a cognitiva, que caracteriza o público-alvo.

3.2 Fase 2: Concepção e análise *a priori*

Nesta fase é feita a intervenção comentada na fase anterior. É elaborado um plano de ação, ou seja, são elaboradas as atividades que os alunos desenvolverão em sala de aula. É composta pelas partes descritiva e preditiva. Na parte descritiva as escolhas globais são descritas, ou seja, o tema principal e o objetivo principal das atividades são descritos. Também as escolhas locais são descritas, ou seja, as intervenções são detalhadas, os recursos utilizados, o tempo de aplicação e o público-alvo são explicitados. Na parte preditiva acontece o momento no qual se imagina quais serão as respostas dos alunos para as atividades propostas e as possíveis dificuldades que eles apresentarão. Nesta fase são elaboradas hipóteses de como serão o raciocínio e o comportamento dos alunos durante a aplicação das atividades; a partir destas hipóteses é que são tomadas as decisões para a criação das atividades.

3.3 Fase 3: Implementação

Nesta fase as atividades são aplicadas e toda a aplicação é descrita, ou seja, são detalhados a quantidade de alunos, quais turmas participaram, as respostas e toda a participação dos alunos. É um momento de coleta da produção dos alunos para uma análise posterior. Se necessário, podem acontecer modificações nas atividades visando obter um melhor resultado final.

3.4 Fase 4: Análise *a posteriori* e validação

Nesta fase são feitas análises de toda a coleta de atividades realizadas pelos alunos. É um momento de confronto entre o que foi considerado nas hipóteses iniciais e o que foi observado durante a aplicação das atividades. Desta forma, podem ser feitas correções e modificações em quaisquer atividades propostas, se necessário. Podem ser sugeridas variações dos temas trabalhados. O objetivo é mostrar a evolução da aprendizagem dos alunos. Ao término desta fase é apresentada uma versão final das atividades propostas. A validação da experiência “é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste” (Almouloud; Coutinho, 2008).

4. Descrição das atividades propostas

Neste capítulo descrevemos as atividades propostas de acordo com a metodologia da Engenharia Didática.

4.1 Análises prévias

Esta etapa iniciou com o reconhecimento dos alunos das turmas de 9.º ano em relação à aprendizagem de matemática, e este reconhecimento foi diferente em cada uma das turmas. O professor (pesquisador) já conhecia a maioria dos alunos do 9.º ano D da E.E. Prof. Farid Fayad, pois leciona nesta escola desde 2010. Conhecia as dificuldades de aprendizagem e as potencialidades destes alunos. Já os alunos do 9.º ano E da EMEF Cônego Aníbal Difrância o pesquisador não conhecia, pois começou a lecionar nesta escola no início deste ano de 2016. Teve, portanto, que conhecê-los num primeiro momento e, então, verificar suas dificuldades de aprendizagem e potencialidades. Assim, desde as primeiras semanas de aula o pesquisador procurou investigar o nível de conhecimento destes alunos em relação a várias habilidades e competências matemáticas através de exercícios de conteúdos referentes a anos anteriores. Em resumo: iniciou uma revisão de conteúdos desde as primeiras semanas de aula para conhecer estes alunos. No capítulo 6 (Implementação) estas atividades de revisão são descritas com maiores detalhes.

4.2 Aprendizagem significativa

Propusemos aulas diferentes daquelas que os alunos estão acostumados e vivenciam diariamente, a fim de proporcionar uma melhor aprendizagem dos conteúdos matemáticos abordados. Neste sentido evitamos uma abordagem tradicional, na qual os alunos apresentam uma postura mais “passiva” do que “ativa”, e preocupam-se mais com o registro das atividades do que com a própria participação na aula. Buscamos relacionar os conhecimentos já adquiridos pelos alunos com novos conhecimentos a fim de atingir uma aprendizagem significativa conforme explica Ausubel:

> O aprendizado significativo acontece quando uma informação nova é adquirida mediante um esforço deliberado por parte do aprendiz

> em ligar a informação nova com conceitos ou proposições relevantes preexistentes em sua estrutura cognitiva. (AUSUBEL et al., 1980, p. 159)

Segundo Ausubel, a aprendizagem de conceitos inteiramente novos – a aprendizagem mecânica – é necessária e inevitável, mas posteriormente ela passará a se transformar em significativa. A aprendizagem deve valorizar a participação e as experiências dos alunos e não deve se basear simplesmente à memorização de um conteúdo sem sentido e objetivo. Desta forma, a aprendizagem significativa é preferível à aprendizagem mecânica, pois constitui um método mais simples, prático e eficiente para se aprender algo. Quando o aluno aprende algo mecanicamente e só mais tarde percebe a relação com algum conhecimento anterior já dominado, acaba dispendendo esforço e tempo demasiados; a aprendizagem teria acontecido mais facilmente se ele tivesse estabelecido relação com conhecimentos já existentes na sua estrutura cognitiva, como se fossem "âncoras".

Neste sentido, durante a aplicação das atividades o pesquisador assume o papel de mediador e "condutor", e os alunos assumem o papel de protagonistas da própria aprendizagem. O início das atividades acontece de maneira "despretensiosa", mas intencional, com o objetivo de provocar, posteriormente, um certo "espanto" por parte dos alunos ao notarem o "surgimento" de funções quadráticas e parábolas com um "simples" jogo.

4.3 Concepção e análise *a priori*

Elaboramos 5 fichas com instruções e atividades, as quais se encontram na íntegra no Apêndice. Nas salas de aula o pesquisador organizou os alunos em grupos de 5, e cada grupo recebeu um bloco contendo as instruções e as atividades impressas. A capa contém pistas sobre o que as atividades abordam e um espaço para os alunos escreverem a qual grupo pertencem e seus nomes.

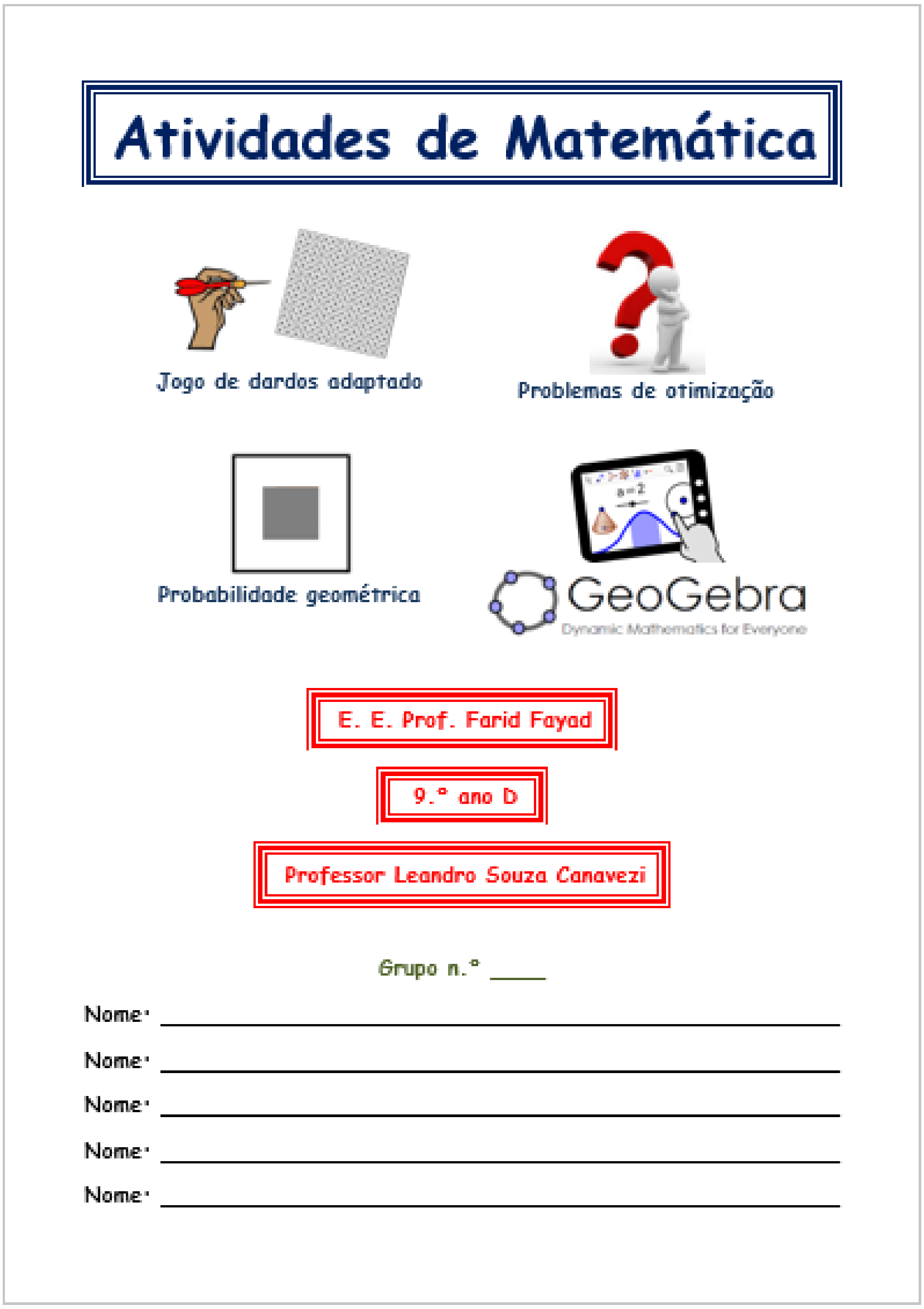


Figura 5: Capa das atividades aplicadas à turma do 9.º ano D da EE Prof. Farid Fayad

As Instruções para a ficha de atividades 1 apresentam um texto introdutório explicando o que é um jogo de dardos tradicional e o que é o jogo dos discos. Todas as instruções de todas as fichas de atividades devem ser lidas atentamente e seguidas para que as atividades aconteçam de uma maneira tranquila. Importante ressaltar que não se trata de uma aplicação “rígida”, ou seja, que deve ser feita à risca de acordo com as instruções; tais instruções constituem uma maneira de organizar o andamento da aprendizagem, que é o que se espera que os alunos apresentem. Neste sentido, cabe lembrar que, de acordo com a metodologia da Engenharia Didática, neste momento estamos na fase da implementação, e são aceitas mudanças nas atividades que melhorem a própria aplicação das atividades e melhorem a aprendizagem dos alunos.

Instruções para a ficha de atividades 1

Jogo de dardos adaptado do jogo dos discos

Você já jogou dardos? Tem boa mira? Consegue acertar um alvo a longa distância?

Figura 6: Início das instruções para a ficha de atividades 1

Existe um jogo muito interessante, assim como o jogo de dardos, mas que é diferente deste e que envolve lançamentos. É chamado jogo dos discos. Ele é formado por um tabuleiro (alvo) quadriculado que fica na posição horizontal e por discos de tamanhos variados, que podem ser moedas, botões, CDs, argolas, etc. O objetivo deste jogo é fazer com que o disco lançado caia inteiramente dentro de um dos quadrados do tabuleiro (sem que a borda do disco encoste na borda do quadrado).

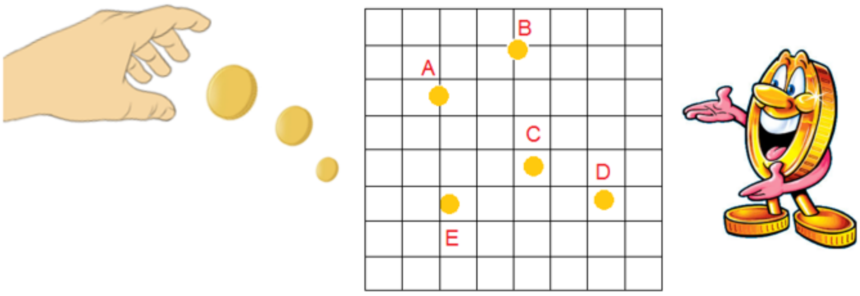


Figura 2: ilustração do jogo dos discos

Figura 7: Parte da página 3 das Instruções para a ficha de atividades 1

Na sequência do texto explicamos o que é o jogo de dardos adaptado, que é o jogo do qual os alunos devem participar.

Vamos, agora, fazer uma "fusão" do jogo de dardos com o jogo dos discos. Será chamada de jogo de dardos adaptado.

Este novo jogo é constituído por 7 alvos quadriculados (tipos: I, II, III, IV, V, VI e VII) com formatos semelhantes ao do quadriculado do jogo dos discos e por dardos em forma de flechas. Cada um dos alvos contém 14 por 14 quadrados de contorno preto de 3 cm de lado, sendo que em cada um destes quadrados há um quadrado menor cinza centralizado, cuja medida do lado varia de acordo com cada tipo:

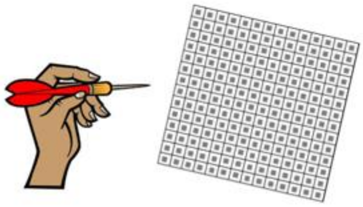


Figura 8: Parte da página 3 das Instruções para a ficha de atividades 1

Na sequência do texto e antes de iniciar o jogo de dardos adaptado propomos que os alunos respondam às duas primeiras perguntas da ficha de atividades 1, que dizem respeito ao conceito de probabilidade. A primeira pergunta deve ser feita separada da segunda, e para responder à segunda os alunos devem consultar um dicionário. Somente após responder à primeira pergunta é que os alunos devem ter contato com o dicionário.

Ficha de atividades 1

Responda às perguntas:

1) Já ouvir falar em probabilidade? Sabe o que significa? Anote abaixo o que você sabe sobre probabilidade.

____

____

____

2) Agora, consulte um dicionário e anote os significados apresentados. Procure destacar o significado matemático para probabilidade.

____

____

____

Figura 9: Parte da página 1 da ficha de atividades 1

Depois de responderem a estas perguntas há uma mensagem indicando que os alunos devem voltar à folha contendo as instruções para a ficha 1. Em seguida há textos explicando o conceito de probabilidade, porém sem especificar o conceito de probabilidade geométrica. A próxima atividade consiste em lançar os dardos nos alvos quadriculados. Ao todo são sete tipos de alvos quadriculados com quadradinhos centralizados na cor cinza de tamanhos diferentes. Deve-se anotar a quantidade de lançamentos favoráveis em cada tipo de alvo, isto é, a quantidade de dardos que acertam os quadradinhos na cor cinza. Se o dardo não atingir o alvo, então o lançamento é refeito e não deve ser considerado nem como favorável e nem como não favorável.

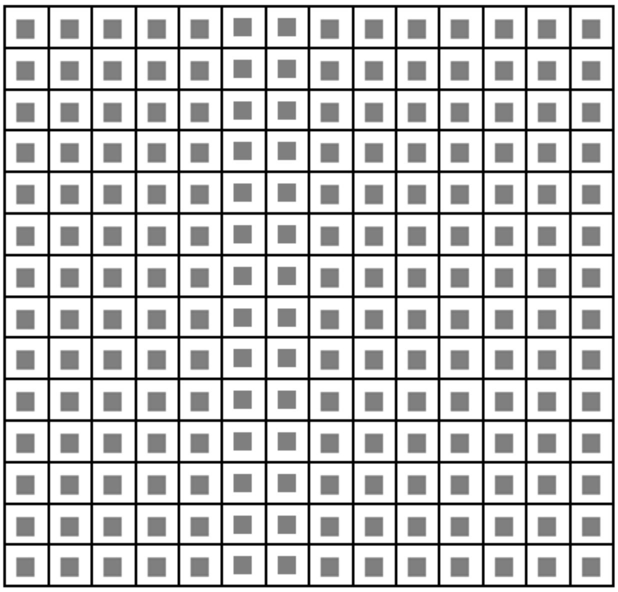


Figura 10: Parte da página 4 das instruções para a ficha de atividades 1

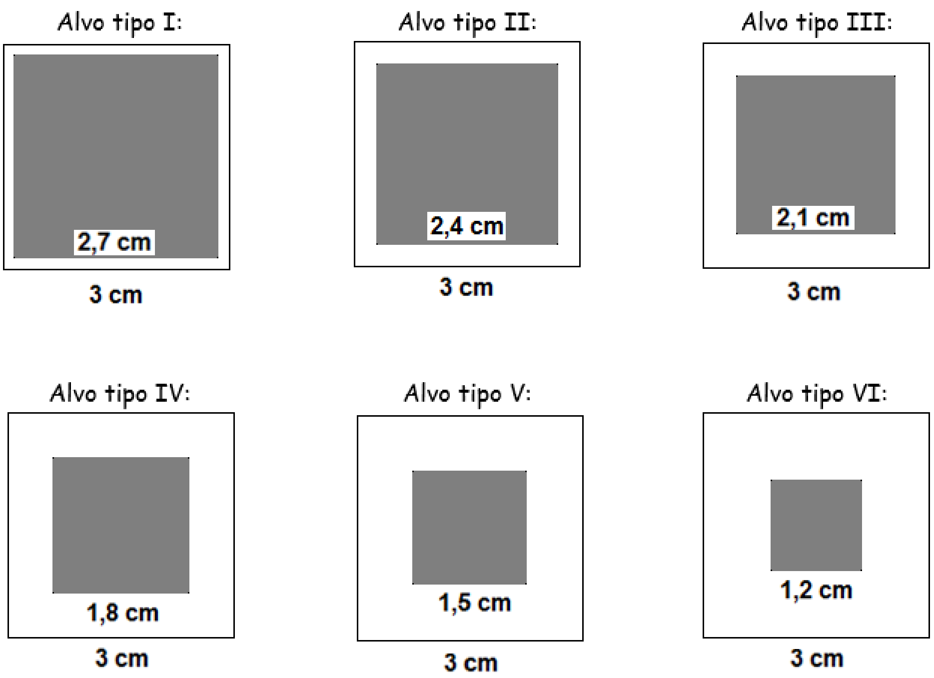


Figura 11: Parte da página 4 das instruções para a ficha de atividades 1

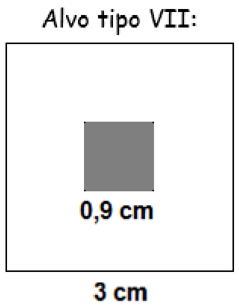


Figura 12: Parte da página 5 das instruções para a ficha de atividades 1

Continuando, vamos jogar e estudar matemática! Siga as orientações do professor e organize-se para o jogo de dardos adaptado!

3) Faça os 100 lançamentos dos dardos nos alvos quadriculados. A cada grupo de 10 lançamentos anote os dados obtidos nas tabelas abaixo. Atenção: os lançamentos deverão ser todos aleatórios!!!

Figura 13: Parte da página 1 da ficha de atividades 1

Tabela 1: Dados obtidos no lançamento dos dardos no alvo tipo I.

L	Q	F
1	10	
2	10	
3	10	
4	10	
5	10	
6	10	
7	10	
8	10	
9	10	
10	10	
T	100	

L: número do grupo de lançamentos

Q: quantidade de dardos lançados

F: quantidade de lançamentos favoráveis

T: totalização das colunas

Figura 14: Parte da página 1 da ficha de atividades 1 (primeira das 7 tabelas referentes aos 7 tipos respectivos de alvos)

Neste momento o professor escolhe ou os próprios alunos escolhem quem fará os lançamentos. Cada aluno participante deverá lançar 10 dardos no alvo quadriculado correspondente à tabela e as quantidades de lançamentos favoráveis devem ser anotadas numa das linhas da tabela, na coluna F. Todos os grupos de 5 alunos devem fazer a mesma anotação, e para isto os integrantes podem se revezar. Devem ser lançados 100 dardos em cada alvo em grupos de 10 lançamentos, e ao final destes lançamentos o total de lançamentos favoráveis deve ser anotado na linha T, coluna F. Para garantir a aleatoriedade dos lançamentos os alunos devem estar vendados e todos os lançamentos devem ser aleatórios. Caso o dardo lançado não atinja o alvo, então este lançamento é desconsiderado (não é contado nem como favorável e nem como não favorável).

Depois de feitos todos os 100 lançamentos em cada um dos 7 tipos de alvos e preenchidas todas as 7 tabelas respectivas há uma tabela na página 5 da ficha de atividades 1 na qual os alunos devem transcrever, de cada uma das 7 tabelas anteriores, as diferenças d (medida do lado do quadrado branco menos a medida do lado do quadrado cinza centralizado), as quantidades (os totais) de lançamentos, as quantidades de lançamentos favoráveis e as probabilidades de ganho (acerto) em função das respectivas diferenças d. Neste momento espera-se que os alunos deduzam o valor de d para cada tipo de alvo, uma vez que já leram nas instruções as medidas de cada tipo de alvo e manusearam os alvos construídos. Caso isto não ocorra o professor deverá intervir e ajudar os alunos a deduzirem, pois o gráfico seguinte depende desta informação para ser construído. Adiante, porém, haverá uma atividade para o cálculo (dedução) da diferença d genérica.

4) Após realizar todos estes passos anteriores, organize os dados na tabela 8:

Tabela 8:

Lado do quadrado de contorno preto: 3 cm				
Tipo de alvo	d (em cm)	Quant. de lançamentos	Eventos favoráveis	Probabilidade de ganho p(d)
I				
II				
III				
IV				
V				
VI				
VII				

Figura 15: Parte da página 6 da ficha de atividades 1

Depois de preenchida esta tabela há um plano cartesiano na próxima página no qual os alunos devem construir o gráfico da probabilidade p em função de d. Importante notar que até este momento nada foi comentado a respeito do conteúdo função quadrática ou do gráfico de funções quadráticas (parábolas). Entretanto, espera-se que os alunos percebam que o gráfico construído representa justamente as situações nas quais o aumento de d provoca uma diminuição da probabilidade de acerto, ou equivalentemente, situações nas quais quanto menor for o quadrado cinza dos alvos quadriculados menor é a probabilidade (real) de acerto, respectivamente. Espera-se, também, que pelo menos alguns dos alunos percebam que os pontos marcados no gráfico estejam sobre uma parábola, ou que façam algum comentário ou pergunta citando uma parábola. Caso isto não ocorra, adiante haverá atividades que mostrarão este fato. O enunciado pede para que seja construído o gráfico da “função p(d)”. Espera-se que os alunos comentem este enunciado, pois até o momento, nestas atividades, nada foi dito a respeito do conceito de função.

5) Com base nos dados obtidos na tabela 8 construa o gráfico da função p(d):

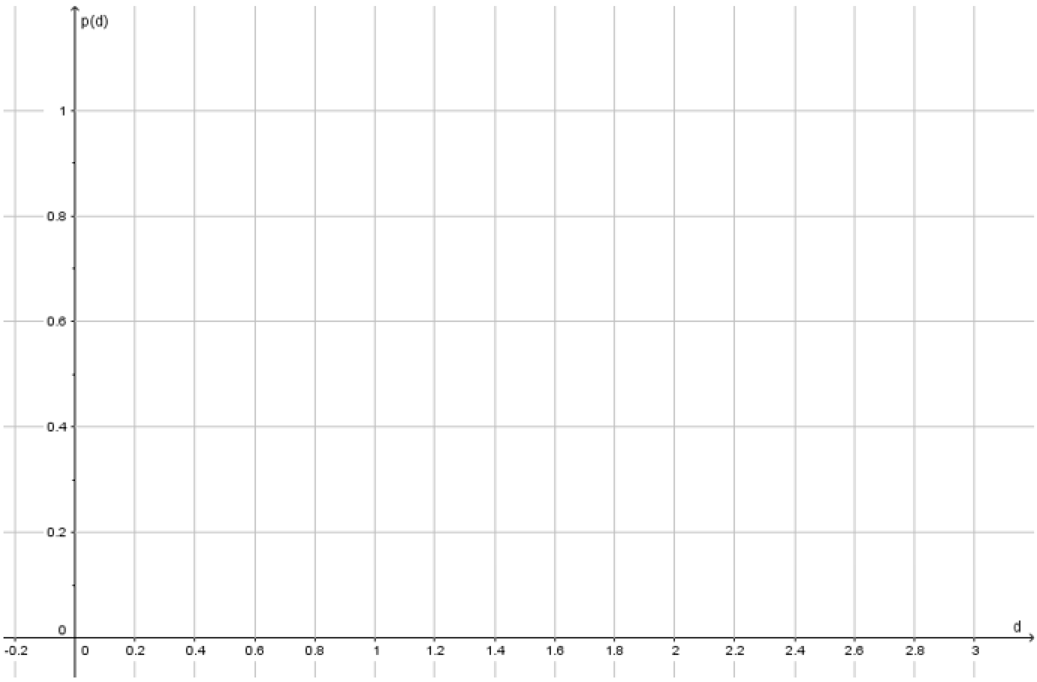


Figura 16: Parte da página 6 da ficha de atividades 1

Em seguida há perguntas a respeito dos lançamentos, das diferenças d, das probabilidades e se os alunos perceberam que os pontos parecem formar uma curva (parábola). Estas e todas as demais perguntas devem ser respondidas em grupo. Caso os alunos precisem de ajuda poderão perguntar ao professor ou até mesmo a outros colegas de outros grupos.

6) Responda:

a) Foram feitos 100 lançamentos aleatórios de dardos em cada tipo de alvo para calculamos as probabilidades. O que você imagina que aconteceria se fizéssemos menos lançamentos (digamos, 50 lançamentos)? E se fizéssemos mais lançamentos (digamos, 200 lançamentos)? Os resultados obtidos seriam os mesmos? Será que 100 lançamentos são suficientes para calcularmos as probabilidades?

Figura 17: Item a da pergunta 6 da ficha de atividades 1

Nesta pergunta espera-se que os grupos respondam que com 50 lançamentos os resultados seriam menos confiáveis e com 200 lançamentos os resultados seriam mais confiáveis, ou seja, quanto maior for a quantidade de lançamentos melhores serão os resultados; e que também respondam que 100 lançamentos foram suficientes. Cabe ressaltar que para esta atividade consideramos

100 lançamentos uma quantidade adequada, sendo possível obter uma boa estimativa para a probabilidade.

b) O que foi feito para garantir que os lançamentos foram aleatórios?

Figura 18: Item b da pergunta 6 da ficha de atividades 1

Nesta pergunta espera-se que os grupos respondam que durante os lançamentos os participantes utilizaram venda nos olhos.

c) Sabendo que a medida do lado do quadrado de contorno preto é 3 cm e que d é a diferença entre esse lado e o lado do quadrado cinza, qual é o menor e qual é o maior valor possível para d ?

Figura 19: Item c da pergunta 6 da ficha de atividades 1

Nesta pergunta espera-se que os grupos respondam que o menor valor é muito próximo de 0 cm e o maior valor é 3 cm.

d) Considerando que a probabilidade é um quociente, qual o menor valor que ela pode atingir e qual o maior valor?

Figura 20: Item d da pergunta 6 da ficha de atividades 1

Nesta pergunta espera-se que os grupos respondam que o menor valor para a probabilidade é muito próximo de 0 ou 0% e o maior valor é 1 ou 100%.

e) Analisando o gráfico de p(d), qual deve ser o valor de d para uma probabilidade de acerto de 0,5 ou 50%?

Figura 21 Item e da pergunta 6 da ficha de atividades 1

Nesta pergunta espera-se que os grupos respondam que d deve estar entre 0,8 cm e 0,9 cm aproximadamente.

f) Analisando o gráfico de p(d), qual deve ser o valor de d para uma probabilidade de acerto de 0,8 ou 80%?

Figura 22: Item f da pergunta 6 da ficha de atividades 1

Nesta pergunta espera-se que os grupos respondam que d deve ser 0,3 cm aproximadamente.

g) Podemos considerar que os pontos do gráfico de p(d) formam uma linha contínua? Por quê?

Figura 23: Item g da pergunta 6 da ficha de atividades 1

Nesta pergunta espera-se que os grupos respondam que a os pontos do gráfico não formam uma linha contínua, porque há intervalos de valores de d para os quais não foram construídos alvos (deveriam haver infinitos tipos de alvos). Entretanto, espera-se também que alguns alunos respondam que o gráfico forma uma linha contínua, haja visto que a noção de continuidade é mais “natural” do que a noção de descontinuidade. A própria percepção de “alinhamento” dos pontos pode instigar os alunos a responderem assim.

h) Você percebeu que os pontos parecem formar uma curva? Qual é o nome desta curva?

Figura 24: Item h da pergunta 6 da ficha de atividades 1

Nesta pergunta espera-se que os alunos respondam que conseguiram perceber este fato e que o nome da curva é parábola, haja visto que já estudaram tal conteúdo matemático e que, até o momento, nada foi dito sobre parábola nestas atividades.

As instruções para a ficha de atividades 1 e a ficha de atividades 1 compõem 1 bloco. A leitura e a aplicação deste primeiro bloco devem durar cerca de 4 aulas, sendo 2 dias de aulas duplas. Para agilizar a aplicação os alunos deverão levar para casa e ler este bloco (e os demais em outro momento). Como cada grupo de 5 alunos recebe um bloco, os integrantes devem revezar e cada dia um deles levará para casa.

Terminada a ficha de atividades 1 seguem as instruções para a ficha de atividades 2. Iniciando há duas perguntas aos alunos.

Instruções para a ficha de atividades 2

Eis algumas perguntas que são interessantes para o momento:

Será que há alguma conexão entre o jogo dos discos e o jogo de dardos adaptado do jogo dos discos? Por que foi feita uma fusão destes jogos?

Para responder a estas perguntas vamos estudar o conceito de probabilidade geométrica.

Figura 25: Parte da página 1 das instruções para a ficha de atividades 2

Há um texto explicando sobre a probabilidade experimental, que foi a probabilidade com a qual os alunos estiveram lidando até o momento, e sobre a probabilidade geométrica, que é obtida através da razão entre áreas (razão entre a área do quadrado cinza e a área do quadrado branco de contorno preto). Em seguida há a ficha de atividades 2, que inicia com o desenvolvimento da última fórmula das instruções para a ficha de atividades 2.

Consideremos, então, o plano do quadriculado do jogo dos dardos. Relembrando: d é a diferença entre a medida do quadrado de contorno preto e a medida do lado do quadrado cinza centralizado. Assim, cada quadrado de contorno preto tem lados de medida L e cada quadrado cinza centralizado tem lados medindo L – d. Aplicando o conceito de probabilidade geométrica neste caso obtemos:

$$p(d) = \frac{\text{área do quadrado de lado } L - d}{\text{área do quadrado de lado } L} = \frac{(L-d)^2}{L^2}$$

Figura 26: Parte da página 2 das instruções para a ficha de atividades 2

Ficha de atividades 2

Voltando para o jogo de dardos adaptado, vamos agora aplicar a fórmula anterior. Calcularemos as probabilidades de acerto para cada tipo de alvo.

1) O lado de cada quadrado do quadriculado mede 3 cm, ou seja, L = 3. Substitua este valor na fórmula e a desenvolva:

$$p(d) = \frac{(L-d)^2}{L^2} = \underline{\hspace{4cm}} = \underline{\hspace{4cm}}$$

Figura 27: Parte da página 1 da ficha de atividades 2

Nesta pergunta espera-se que a resposta seja:

$$\boxed{p(d) = \frac{(L-d)^2}{L^2} = \frac{(3-d)^2}{3^2} = \frac{9-6\,d+d^2}{9}}$$

Figura 28: Resposta correta para a pergunta 1 da ficha de atividades 2

Há a pergunta 2 na qual os alunos devem substituir as medidas de d e calcular as probabilidades de acerto. Desta vez os alunos não estarão lidando com a probabilidade experimental, mas sim com a probabilidade teórica, na qual deverão calcular de acordo com a fórmula manipulada (deduzida) anteriormente.

Lado do quadrado do quadriculado: 3 cm		
Tipo de alvo	d (em cm)	Probabilidade de acerto
I		p( ) =
II		p( ) =
III		p( ) =
IV		p( ) =
V		p( ) =
VI		p( ) =
VII		p( ) =

Figura 29: Parte da página 1 da ficha de atividades 2

Nesta pergunta espera-se que a resposta seja:

Lado do quadrado do quadriculado: 3 cm		
Tipo de alvo	d (em cm)	Probabilidade de acerto
I	0,3	p (0,3) = $\frac{(3-0,3)^2}{9} = \frac{2,7^2}{9} = \frac{7,29}{9} = 0,81 = 81\%$
II	0,6	p (0,6) = $\frac{(3-0,6)^2}{9} = \frac{2,4^2}{9} = \frac{5,76}{9} = 0,64 = 64\%$
III	0,9	p (0,9) = $\frac{(3-0,9)^2}{9} = \frac{2,1^2}{9} = \frac{4,41}{9} = 0,49 = 49\%$
IV	1,2	p (1,2) = $\frac{(3-1,2)^2}{9} = \frac{1,8^2}{9} = \frac{3,24}{9} = 0,36 = 36\%$
V	1,5	p (1,5) = $\frac{(3-1,5)^2}{9} = \frac{1,5^2}{9} = \frac{2,25}{9} = 0,25 = 25\%$
VI	1,8	p (1,8) = $\frac{(3-1,8)^2}{9} = \frac{1,2^2}{9} = \frac{1,44}{9} = 0,16 = 16\%$
VII	2,1	p (2,1) = $\frac{(3-2,1)^2}{9} = \frac{0,9^2}{9} = \frac{0,81}{9} = 0,09 = 9\%$

Figura 30: Tabela da pergunta 2 da ficha de atividades 2 preenchida corretamente

Há novamente um plano cartesiano no qual os alunos devem construir o gráfico da probabilidade p em função de d (dado em cm). Porém, desta vez eles estarão lidando com a probabilidade teórica. O objetivo da construção deste novo gráfico é justamente compará-lo com o anterior para que os alunos percebam as semelhanças entre eles. Esta será uma comparação a ser feita adiante.

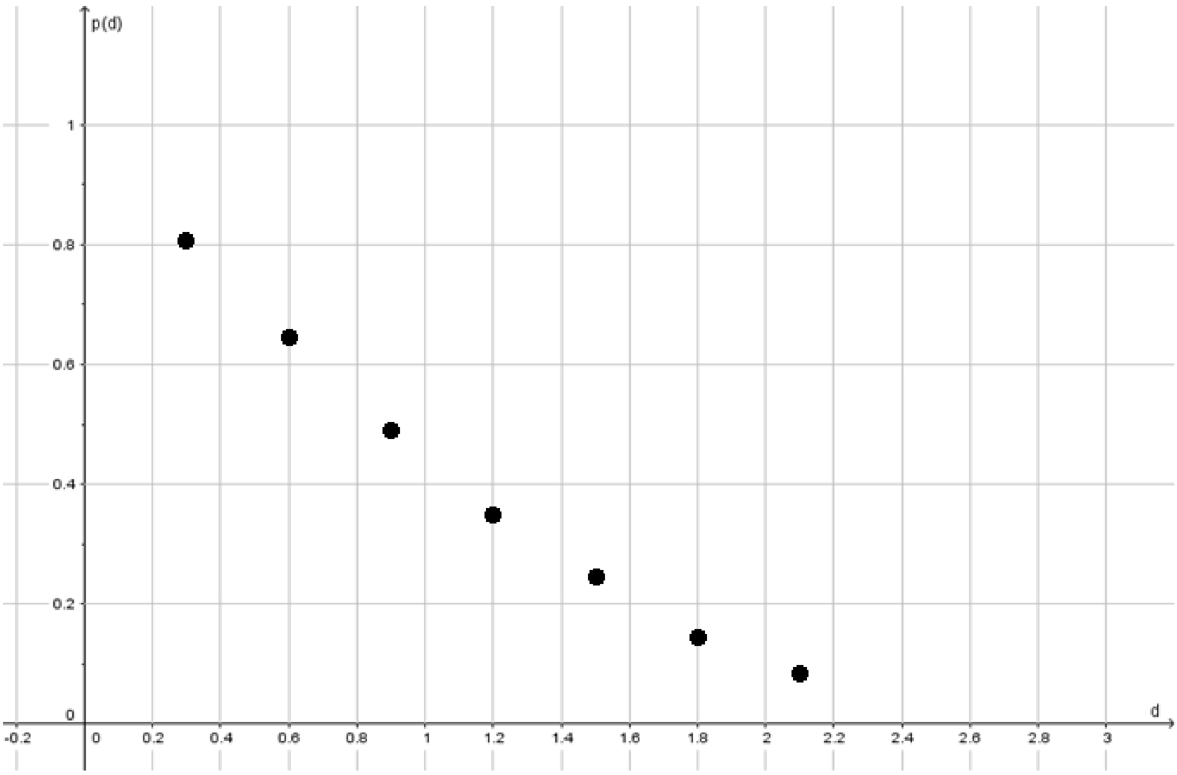
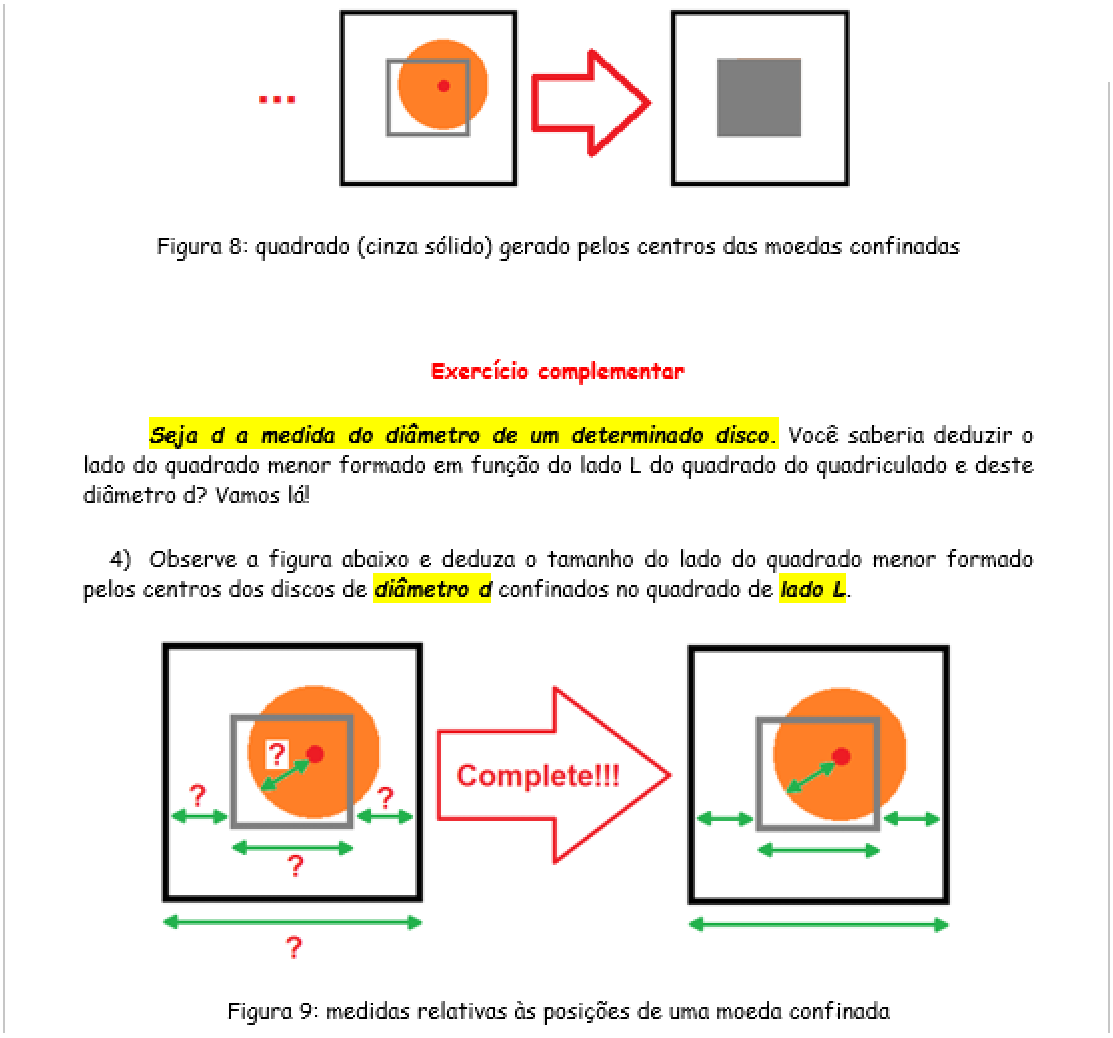


Figura 31: Gráfico da pergunta 3 da ficha de atividades 2 construído corretamente

Em seguida, na ficha de atividades 2 há uma leitura complementar (texto) que busca responder às perguntas iniciais (Será que há alguma conexão entre o jogo dos discos e o jogo de dardos adaptado do jogo dos discos? Por que foi feita uma fusão de dois jogos?). Este texto apresenta uma análise do jogo dos discos com moedas, CDs e argolas e mostra a conexão entre o jogo dos discos e o jogo de dardos adaptado. Para isto o texto explica a conexão e apresenta figuras contendo quadrados gerados pelos centros das moedas confinadas (discos confinados) nos quadrados de contorno preto. Neste momento, ao fazer esta leitura complementar espera-se que os alunos percebam a semelhança entre estas figuras e os alvos quadriculados do jogo de dardos adaptado.

Há um exercício complementar que pede aos alunos para deduzirem o lado do quadrado menor formado pelos centros dos discos de diâmetro d confinados no quadrado de lado L. Espera-se também que os alunos estabeleçam uma comparação entre o diâmetro d e a diferença d.



...

Figura 8: quadrado (cinza sólido) gerado pelos centros das moedas confinadas

Exercício complementar

Seja d a medida do diâmetro de um determinado disco. Você saberia deduzir o lado do quadrado menor formado em função do lado L do quadrado do quadriculado e deste diâmetro d? Vamos lá!

4) Observe a figura abaixo e deduza o tamanho do lado do quadrado menor formado pelos centros dos discos de ***diâmetro d*** confinados no quadrado de ***lado L***.

Figura 9: medidas relativas às posições de uma moeda confinada

Figura 32: Parte da página 4 da ficha de atividades 2

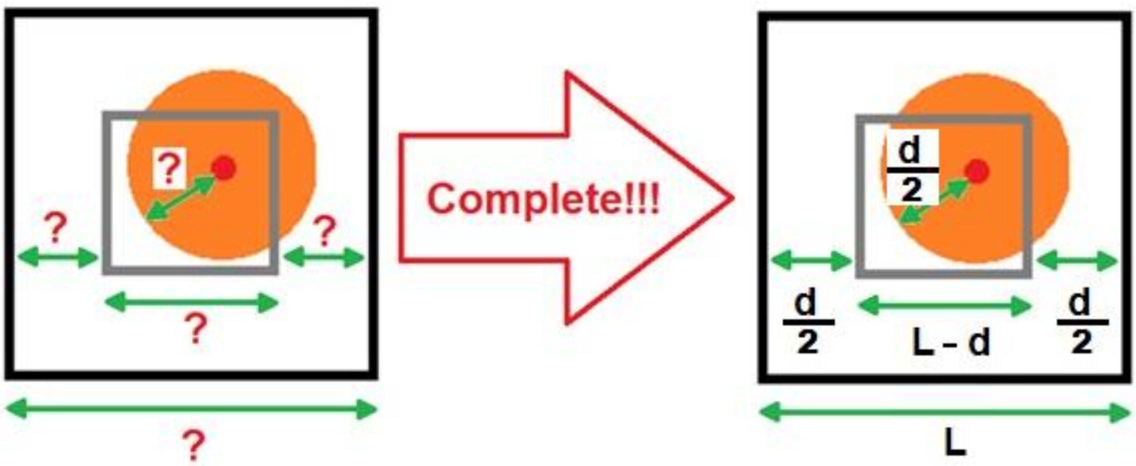


Figura 33: Resposta correta para a pergunta 4 da ficha de atividades 2

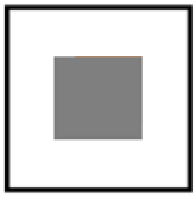


Figura 10: quadrado do quadriculado e quadrado (cinza sólido) gerado pelos centros das moedas confinadas

Esta figura é semelhante a um dos quadradinhos do alvo!

Percebeu que lançar as moedas e botões no quadriculado produz o mesmo resultado do que lançar os dardos nos alvos quadriculados?

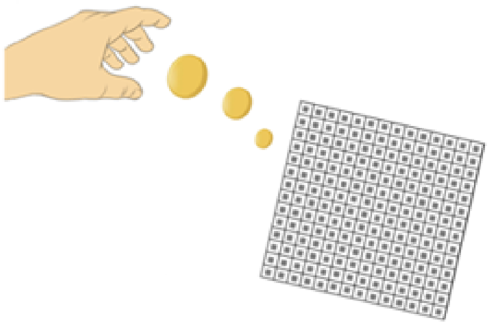


Figura 34: Parte da página 5 da ficha de atividades 2

Consideremos o plano do quadriculado do jogo dos discos. Cada quadrado de contorno preto tem lados de medida L e cada quadrado gerado pelos centros dos discos de diâmetro d tem lados medindo L - d. **Observamos que o diâmetro d corresponde justamente à diferença entre a medida do lado do quadrado de contorno preto e a medida do lado do quadrado cinza.** Assim, aplicando o conceito de probabilidade geométrica, neste caso, obtemos:

$$p(d) = \frac{\text{área do quadrado de lado } L - d}{\text{área do quadrado de lado } l} = \frac{(L-d)^2}{L^2}$$

Conclusão:

Fixando a medida L para todos os alvos, então as probabilidades de acerto do jogo de discos e do jogo de dardos adaptado em função de d serão as mesmas!!!

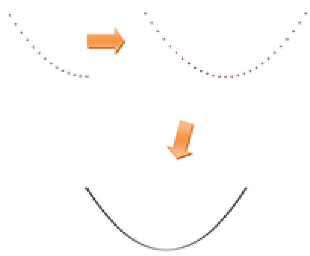


Figura 35: Parte da página 5 da ficha de atividades 2

As instruções para a ficha de atividades 1 e a ficha de atividades 2 compõem outro bloco. A leitura e a aplicação deste segundo bloco devem durar cerca de 2 aulas, sendo 1 dia de aulas duplas. Novamente, para agilizar a aplicação os alunos deverão levar para casa e ler este bloco (e os demais em outro momento). Como cada grupo de 5 alunos recebe um bloco, os integrantes devem revezar e cada dia um deles levará para casa.

E seguida há as instruções para a ficha de atividades 3 que dizem respeito ao problema inverso, ou seja, determinar a diferença d a partir de uma probabilidade p dada. Para isto o texto das instruções apresenta uma manipulação algébrica na qual d é dado em função da probabilidade p. Tal manipulação é possível levando-se em conta que os radicados em ambos os membros da igualdade é não-negativo, e isto deve ser comentado com os alunos.

$$p = \frac{(L-d)^2}{L^2}$$

Isolando d nesta expressão obtemos:

$$p = \frac{(L-d)^2}{L^2} \Rightarrow$$

$$p.L^2 = (L-d)^2 \Rightarrow$$

$$L\sqrt{p} = L - d \Rightarrow$$

$$d = L - L\sqrt{p} \Rightarrow$$

$$d = L.(1-\sqrt{p})$$

Figura 36: Parte da página 1 das instruções para a ficha de atividades 3

Em seguida a ficha de atividades 3 apresenta uma tabela na qual os alunos devem calcular d em função das probabilidades p dadas. Para isto os alunos poderão utilizar calculadoras fornecidas pelo professor ou as calculadoras dos smartphones deles próprios.

Ficha de atividades 3

1) Usando a expressão anterior, calcule o valor de d em função da probabilidade dada. Se preferir, use uma calculadora para agilizar os cálculos:

Probabilidade p	d (em cm)
0%	
10%	
20%	
35%	
53%	
67%	
80%	
90%	
100%	

Figura 37: Parte da página 1 da ficha de atividades 3

Probabilidade p	d (em cm)
0%	3
10%	2,05
20%	1,65
35%	1,22
53%	0,81
67%	0,54
80%	0,31
90%	0,15
100%	0

Figura 38: Tabela da pergunta 1 da ficha de atividades 3 preenchida corretamente

Há duas perguntas nas quais os alunos devem comparar as diferenças d das tabelas feitas anteriormente a partir das probabilidades experimentais e teóricas, e também comparar os gráficos correspondentes.

2) Compare os resultados obtidos para as medidas da diferença d com as medidas das tabelas 8 e 9. O que você conclui?

3) Compare também os gráficos referentes às tabelas 8 e 9. O que você conclui?

Figura 39: Perguntas 2 e 3 da ficha de atividades 3

Nestas perguntas espera-se que os alunos respondam que perceberam que os valores das tabelas são próximos e que os gráficos são parecidos.

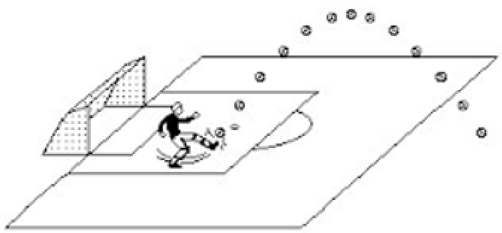
As instruções para a ficha de atividades 3 e a ficha de atividades 3 compõem outro bloco. A leitura e a aplicação deste terceiro bloco devem durar cerca de 1 ou 2 aulas, sendo 1 dia de aulas duplas. Novamente, para agilizar a aplicação os alunos deverão levar para casa e ler este bloco (e os demais em outro momento). Como cada grupo de 5 alunos recebe um bloco, os integrantes devem revezar e cada dia um deles levará para casa.

As instruções para a ficha de atividades 4 começam com um texto sobre parábolas e apresenta algumas perguntas para os alunos refletirem.

Instruções para a ficha de atividades 4

Parábola

Você percebeu que os gráficos anteriores formam uma curva? Lembra-se de que esta curva é chamada parábola?



Não é interessante notarmos o "surgimento" de uma parábola através do jogo dos discos e do jogo de dardos? Você imaginava que estes jogos poderiam nos conduzir ao estudo de funções quadráticas e parábolas?

Figura 40: Parte da página 1 das instruções para ficha de atividades 4

Será que existem mais situações que nos conduzam ao surgimento de outras parábolas e ao estudo de funções quadráticas? Prossiga com as atividades e você verá a resposta a esta intrigante questão!!!

Figura 41: Parte da página 2 das instruções para a ficha de atividades 4

Na sequência o texto apresenta a definição matemática de função quadrática e uma síntese sobre funções quadráticas: a relação entre o coeficiente *a* e a concavidade da parábola correspondente, a definição do que são as raízes, a relação entre o discriminante e a quantidade de raízes e a definição de vértice. Cabe ressaltar que as expressões para o cálculo das coordenadas do vértice da parábola devem ser demonstradas, o que não foi feito nas instruções.

Vértice da parábola

O vértice de uma parábola determinada pela função quadrática dada por y = f(x) = $ax^2 + bx + c$, com a diferente de zero, é determinado por:

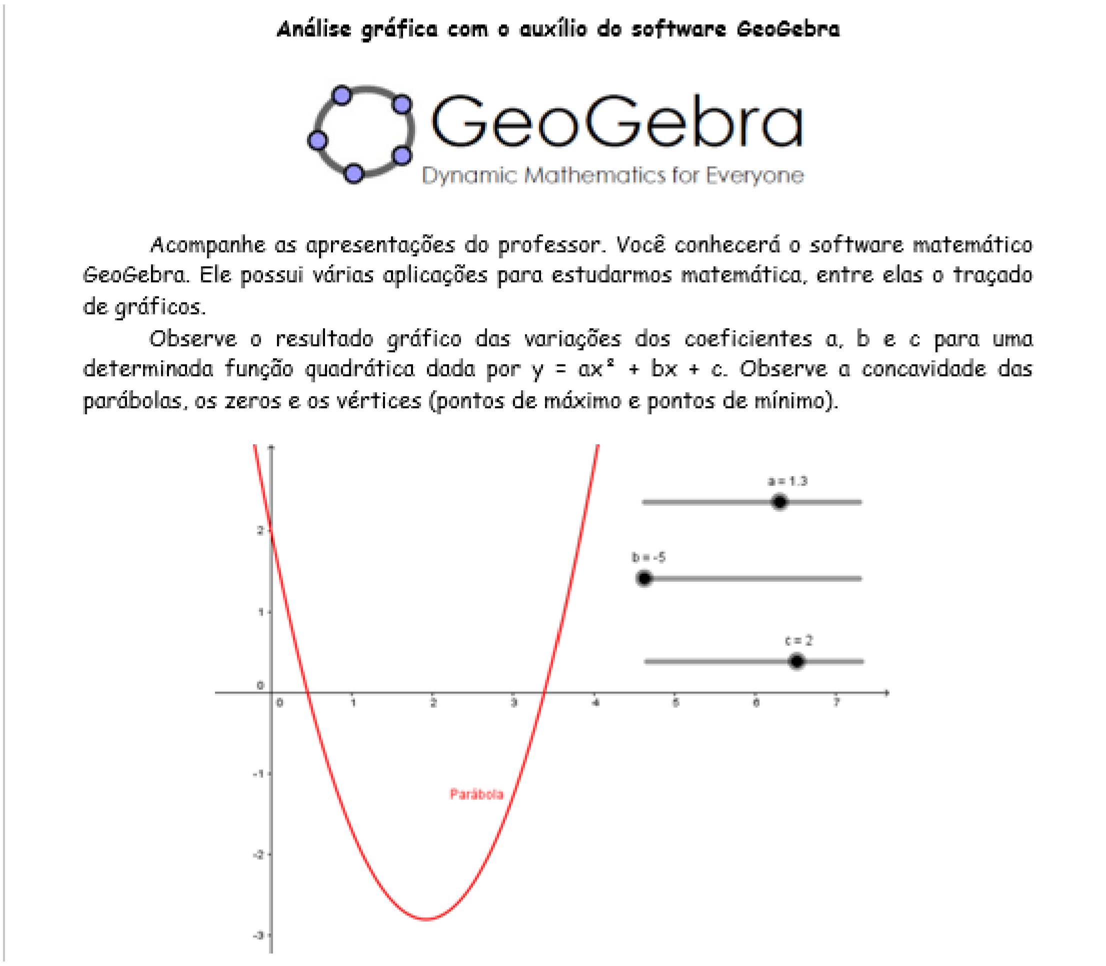
$$\boldsymbol{V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)}$$

Quando o domínio de f(x) é o conjunto dos números reais:

- Se $a > 0$, quando $x_v = -\frac{b}{2a}$ a função assume o valor mínimo $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$.
- Se $a < 0$, quando $x_v = -\frac{b}{2a}$ a função assume o valor máximo $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$.

Figura 42: Parte da página 5 das instruções para ficha de atividades 4

Em seguida nas instruções para a ficha de atividades 4 há um texto que propõe aos alunos acompanharem as apresentações do professor que deverá apresentar o software GeoGebra. O professor deverá mostrar aos alunos o resultado gráfico das variações dos coeficientes de uma função quadrática. Os alunos deverão observar a concavidade das parábolas, as raízes e os vértices.


Análise gráfica com o auxílio do software GeoGebra

Acompanhe as apresentações do professor. Você conhecerá o software matemático GeoGebra. Ele possui várias aplicações para estudarmos matemática, entre elas o traçado de gráficos.

Observe o resultado gráfico das variações dos coeficientes a, b e c para uma determinada função quadrática dada por $y = ax^2 + bx + c$. Observe a concavidade das parábolas, os zeros e os vértices (pontos de máximo e pontos de mínimo).

Figura 43: Parte da página 4 das instruções para a ficha de atividades 4

Em seguida as instruções para a ficha de atividades 4 apresentam um texto explicando o que são problemas de otimização e a relação deste tipo de problemas com funções quadráticas e vértices de parábolas (pontos de máximo e pontos de mínimo). Há 3 problemas de otimização, sendo que os alunos deverão resolver apenas o segundo problema.

Outras situações que envolvem funções quadráticas

Há situações em que queremos determinar o lucro máximo, o gasto mínimo, a menor área, o maior volume, etc. Ou seja, queremos determinar o valor máximo ou o valor mínimo de uma determinada função quadrática (dizemos que queremos maximizar ou minimizar uma função quadrática). São situações chamadas de problemas de otimização.

Estudaremos, a partir de agora, três problemas de otimização. Em suas resoluções há a determinação das coordenadas do vértice de uma parábola e a análise das raízes da função quadrática correspondente.

Você deverá resolver apenas o segundo problema. O primeiro problema servirá de roteiro para a resolução do segundo. O terceiro problema será resolvido pelo professor utilizando o software GeoGebra.

Figura 44: Parte da página 5 das instruções para a ficha de atividades 4

A ficha de atividades 4 começa com o problema (de otimização) 1.

Ficha de atividades 4

Leia os problemas e siga o roteiro a seguir para resolvê-los:

Problema 1:

O administrador de uma rede de cinemas observou que, quando o preço do ingresso era R$ 8,00, o número de espectadores por sessão era 240. Depois verificou que cada R$ 1,00 de aumento no ingresso provocava a diminuição de 12 espectadores por sessão. Levando em consideração essas condições, o administrador estabeleceu o preço do ingresso de modo que a receita arrecadada por sessão fosse maximizada. Qual foi o preço estabelecido por ingresso? Qual foi a receita máxima por sessão?

Roteiro:

Seja R(x) a função receita, isto é, a função que nos possibilita obter a receita de acordo com o aumento do preço do ingresso (x).

R(x) = preço do ingresso VEZES quantidade de espectadores

Figura 45: Parte da página 1 da ficha de atividades 4

a) Calcule R(0) (isto é, a receita arrecadada com o ingresso custando R$ 8,00).

$$\mathbf{R(0) = 8 * 240 = 1920}$$

b) Calcule R(1) (isto é, a receita arrecadada com o ingresso custando R$ 9,00).

$$\mathbf{R(1) = (8+1) * (240 - 12 * 1) = 9 * (240 - 12) = 9 * 228 = 2052}$$

c) Calcule R(2) (isto é, a receita arrecadada com o ingresso custando R$ 10,00).

$$\mathbf{R(2) = (8+2) * (240 - 12 * 2) = 10 * (240 - 24) = 10 * 216 = 2160}$$

d) Determine a expressão R(x).

$$\mathbf{R(x) = (8 + x).(240 - 12x)}$$

Figura 46: Parte da página 1 da ficha de atividades 4

e) Calcule e preencha a tabela a seguir:

x (aumento, em reais)	p(x) (preço do ingresso, em reais)	q(x) (quantidade de espectadores por sessão)	R(x) (receita arrecadada, em reais)
0	8	240	1 920
1	9	228	2 052
2	10	216	2 160
3	11	204	2 244
4	12	192	2 304
5	13	180	2 340
6	14	168	2 352
7	15	156	2 340
8	16	144	2 304
9	17	132	2 244
10	18	120	2 160
11	19	108	2 052
12	20	96	1 920
13	21	84	1 764
14	22	72	1 584
15	23	60	1 380
16	24	48	1 152
17	25	36	900
18	26	24	624
19	27	12	324
20	28	0	0

Figura 47: Parte da página 2 da ficha de atividades 4

g) Observando os dados da tabela e o gráfico anterior, qual deve ser o aumento aproximado para que a receita seja máxima? Qual deve ser o preço aproximado do ingresso para que a receita seja máxima?

O aumento deve ser de 6 reais, e o preço deve ser 8 + 6 = 14 reais.

h) A partir da resposta do item e), determine os coeficientes *a*, *b* e *c* da função R(x).

$$R(x) = (8 + x).(240 - 12x) = 8 * 240 - 8 * 12x + 240 * x - 12 * x^2 =$$

$$= -12x^2 + 144x + 1920$$

Coeficientes: a = -12, b = 144 e c = 1920.

Figura 48: Parte da página 3 da ficha de atividades 4

i) Considere que o gráfico de R(x) seja uma linha contínua, isto é, seja uma parábola. Calcule as raízes de R(x). Alguma raiz é negativa? O que representa um valor negativo para x?

Resolução por fatoração:

$$R(x) = (8 + x).(240 - 12x)$$

$$(8 + x) = 0 \Rightarrow x = -8$$

$$(240 - 12x) = 0 \Rightarrow 12x = 240 \Rightarrow x = \frac{240}{12} \Rightarrow x = 20$$

$$S = \{-8, 20\}$$

Resolução pela fórmula resolutiva (Bhaskara):

$$R(x) = -12x^2 + 144x + 1920$$

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

$a = -12$
$b = 144$
$c = 1920$

$$\Delta = (144)^2 - 4.(-12).(1920) = 20\,736 + 92\,160 = 112\,896$$

Figura 49: Parte da página 3 da ficha de atividades 4

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x = \frac{-(144) \pm \sqrt{112\ 896}}{2.(-12)} = \frac{-144 \pm 336}{-24}$$

$$x_1 = \frac{-144 + 336}{-24} = -\frac{192}{24} = -8$$

$$x_2 = \frac{-144 - 336}{-24} = \frac{-480}{-24} = 20$$

$$S = \{-8, 20\}$$

Raízes: -8 e 20.

Uma das raízes é negativa. Um valor negativo para x não faz sentido para o problema proposto, pois significaria diminuição no preço do ingresso.

j) Considere, novamente, que o gráfico de R(x) seja uma linha contínua, isto é, seja uma parábola. Sabendo que as coordenadas do vértice de uma parábola são dadas por $V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$, calcule exatamente quanto deverá ser o aumento no preço do ingresso para que a receita seja máxima e qual será a receita máxima.

$$\boxed{V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})}$$

$a = -12$
$b = 144$
$c = 1920$

$$x_v = -\frac{144}{2.(-12)}, = \frac{-144}{-24} = 6$$

$$y_v = -\frac{112\ 896}{4.(-12)}, = \frac{-112\ 896}{-48} = 2\ 352$$

$$V = (6, 2\ 352)$$

O aumento deverá ser de 6 reais e a receita máxima deverá ser 2 352 reais.

Figura 50: Parte da página 4 da ficha de atividades 4

Em seguida há o problema (de otimização) 2 que deverá ser resolvido pelos alunos seguindo a resolução do problema 1 como um roteiro. As perguntas feitas são equivalentes às feitas no problema anterior (o que se pretende agora é maximizar o lucro de uma empresa de turismo).

Problema 2:

Um ônibus de viagem com capacidade máxima para 46 passageiros foi fretado para uma excursão. Cada passageiro pagou R$ 180,00 pela passagem mais R$ 10,00 por cada lugar vago. Para qual quantidade de passageiros a rentabilidade da empresa de turismo é máxima?

Roteiro:

Seja R(x) a função receita, isto é, a função que nos possibilita obter a receita de acordo com o número de lugares vagos (x).

R(x) = preço da passagem VEZES quantidade de passageiros

Figura 51: Parte da página 5 da ficha de atividades 4

a) Calcule R(0).

R(0) = 180 . 46 = 8 280

b) Calcule R(1).

R(1) = (180 + 10.1) . (46 – 1) = 190 . 45 = 8 550

c) Calcule R(2).

R(2) = (180 + 10.2) . (46 – 2) = 200 . 44 = 8 800

d) Determine a expressão R(x).

R(x) = (180 + 10x) . (46 – x)

Figura 52: Itens a, b, c, e d do problema 2 da ficha de atividades 4 com as respostas esperadas

x (quantidade de lugares vagos)	p(x) (preço da passagem, em reais)	q(x) (quantidade de passageiros)	R(x) (receita arrecadada, em reais)
0	180	46	8 280
1	190	45	8 550
2	200	44	8 800
3	210	43	9 030
4	220	42	9 240
5	230	41	9 430
⋮	⋮	⋮	⋮
10	280	36	10 080
⋮	⋮	⋮	⋮
20	380	26	9 880
⋮	⋮	⋮	⋮
30	480	16	7 680
⋮	⋮	⋮	⋮
40	580	4	3 480
⋮	⋮	⋮	⋮
42	600	2	2 400
⋮	⋮	⋮	⋮
44	620	0	1 240
⋮	⋮	⋮	⋮
46	640	0	0

Figura 53: Tabela do item e do problema 2 da ficha de atividades 4 preenchida corretamente

É interessante discutir com os alunos a situação em que o ônibus está cheio e o lucro é nulo. Ou seja, trata-se de uma situação que realmente pode acontecer? Qual é o sentido matemático e qual é o sentido real desta situação? Neste momento os alunos deverão expor suas conclusões, e o professor poderá explicar que, apesar da contextualização do problema, esta situação não acontecerá realmente. Entretanto, o estudo matemático deve continuar para solucionar o problema proposto.

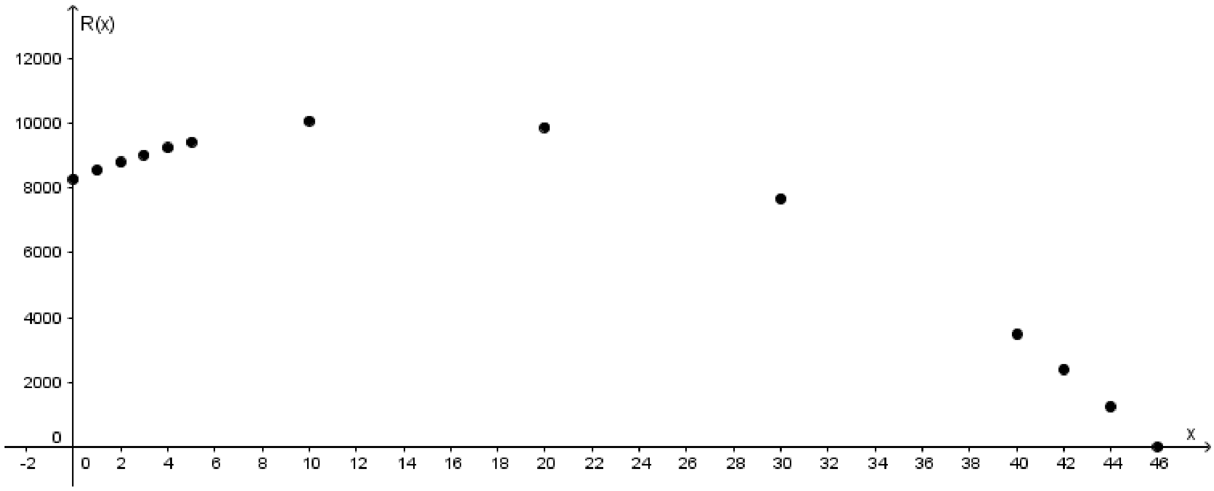


Figura 54: Gráfico da pergunta f do problema 2 da ficha de atividades 4 construído corretamente

g) Analise o gráfico anterior e responda: o gráfico de R(x) é uma linha contínua? É uma parábola? Por quê?

Figura 55: Item g do problema 2 da ficha de atividades 4

Nesta pergunta espera-se que os alunos respondam que o gráfico não é uma linha contínua porque corresponde aos valores discretos calculados e preenchidos na tabela anterior. Entretanto, também se espera que os alunos respondam que é uma linha contínua devido à noção “natural” de continuidade.

h) Observando os dados da tabela e o gráfico anterior, qual deve ser a quantidade aproximada de passageiros para que a receita seja máxima? Qual deve ser o preço aproximado da passagem para que a receita seja máxima?

Figura 56: Item h do problema 2 da ficha de atividades 4

Nesta pergunta espera-se que os alunos analisem a simetria da curva formada pelos pontos discretos e respondam que a quantidade aproximada é 14 passageiros, e que o preço da passagem é de (180 + 14.10) = 320 reais.

i) A partir da resposta do item d), determine os coeficientes *a*, *b* e *c* da função R(x).

Figura 57: Item i do problema 2 da ficha de atividades 4

Nesta pergunta espera-se que os alunos realizem os seguintes cálculos:

R(x) = (180 + 10x) . (46 – x) = 180 . 46 – 180x + 460x – $10x^2$ = $-10x^2$ + 280x +8280

E que, portanto, respondam que os coeficientes são:

a = -10, b = 280 e c = 8280 .

j) Considere que o gráfico de R(x) seja uma linha contínua, isto é, seja uma parábola. Calcule as raízes de R(x). Alguma raiz é negativa? O que representa um valor negativo para x?

Figura 58: Item j do problema 2 da ficha de atividades 4

Nesta pergunta espera-se que os alunos realizem os seguintes cálculos:

R(x) = (180 + 10x) . (46 – x)

(180 + 10x) = 0

180 = -10x

x = - 180/10

x = -18

(46 – x) = 0

x = 46

E que, portanto, respondam que as raízes são: -18 e 46, justificando que uma das raízes é negativa, o que representa desconto no preço da passagem ao invés de acréscimo.

k) Considere, novamente, que o gráfico de R(x) seja uma linha contínua, isto é, seja uma parábola. Sabendo que as coordenadas do vértice de uma parábola são dadas por $\boldsymbol{V} = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, calcule exatamente a quantidade de passageiros para que a receita seja máxima e qual será a receita máxima.

Figura 59: Item k do problema 2 da ficha de atividades 4

Nesta pergunta espera-se que os alunos realizem os seguintes cálculos:

$$x_v = -\frac{280}{2.(-10)} = \frac{280}{20} = 14$$

$$\Delta = (280)^2 - 4.(-10).(8280) = 78\,400 + 331\,200 = 409\,600$$

$$y_v = -\frac{-409\,600}{4.(-10)} = \frac{409\,600}{40} = 10\,240$$

V = (14, 10 240)

E que, portanto, respondam que 14 é a quantidade de passageiros para que a receita seja máxima e que R$ 10 240,00 é a receita máxima.

Logo após o problema 2 há o problema (de otimização) 3 cuja resolução deve ser feita pelo professor utilizando o software GeoGebra.

Problema 3:

André tem uma pequena fábrica de sorvetes. Semanalmente ele vende, em média, 500 caixas de picolés por R$ 34,00 cada uma. Com o passar do tempo ele percebeu que cada vez que diminuía R$ 1,00 no preço da caixa, vendia 40 caixas a mais. Quanto ele deve cobrar pela caixa de picolés para que sua receita seja máxima, ou seja, para que tenha o maior lucro possível?

Roteiro:

Seja R(x) a função receita, isto é, a função que nos possibilita obter a receita de acordo com a diminuição (x) do preço da caixa de picolé.

R(x) = preço de cada caixa VEZES quantidade de caixas

Figura 60: Parte da página 9 da ficha de atividades 4

As 3 primeiras perguntas devem ser resolvidas sem o software GeoGebra. A partir delas há uma série de instruções que devem ser seguidas para a construção gráfica com o software GeoGebra.

a) Determine a expressão R(x).

$$\mathbf{R(x) = (34 - x).(500 + 40x)}$$

b) A partir da resposta do item a), determine os coeficientes a, b e c da função R(x).

$$\mathbf{R(x) = (34 - x).(500 + 40x) = 34 * 500 + 34 * 40\boldsymbol{x} - 500 * \boldsymbol{x} - 40 * \boldsymbol{x}^2 =}$$

$$\mathbf{= -40\boldsymbol{x}^2 + 860\boldsymbol{x} + 17\,000}$$

Coeficientes: a = -40, b = 860 e c = 17 000.

Figura 61: Parte da página 9 da ficha de atividades 4

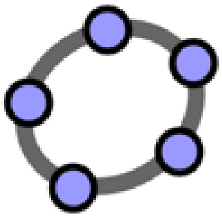
c) Pense e responda: o gráfico de R(x) será uma linha contínua? Por quê?

Não. Considerando que x representa o aumento em reais do preço de cada caixa de sorvete, e que este aumento (variação) pode ser graduado (no mínimo) em centavos, que correspondem a centésimos do real, então o gráfico será formado por pontos discretos que estão sobre uma linha contínua.

Figura 62: Parte da página 10 da ficha de atividades 4

d) Considere que o gráfico de R(x) seja uma linha contínua, isto é, seja uma parábola. Calcule as raízes de R(x). Alguma raiz é negativa? O que representa um valor negativo para x?

Resolução feita com o GeoGebra:



- Esboçamos o gráfico de R(x). Para isto digitamos no campo entrada: $p2(x) = -40 * x\text{^}2 + 860 * x + 17\,000$ ENTER

- Analisamos (observamos) o gráfico gerado (parábola com concavidade para baixo e que intercepta o eixo dos x em dois pontos);

- Marcamos os pontos de interseção entre a parábola e o eixo dos x. Para isto clicamos na flecha para baixo do segundo ícone da barra de ferramentas e clicamos em PONTO INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS. Levamos o cursor sobre cada região de interseção e clicamos para marcar os pontos de interseção;

- Clicamos com o botão direito sobre o primeiro ponto de interseção (o ponto mais à esquerda) e clicamos em Propriedades... Em seguida digitamos R1 no campo nome e fechamos a janela. Assim, nomeamos este ponto de R1. De maneira análoga, nomeamos o outro ponto de R2;

- Observamos as coordenadas destes dois pontos de interseção, que são R1 = (-12,5; 0) e R2 = (34, 0) e determinamos as raízes de R(x): $x_1 = -12,5$ e $x_2 = 34$.

Uma das raízes é negativa: $x_1 = -12,5$. Um valor negativo para x não faz sentido para o problema proposto, pois significaria aumento no preço da caixa de sorvete.

Figura 63: Parte da página 10 da ficha de atividades 4

l) Considere, novamente, que o gráfico de R(x) seja uma linha contínua, isto é, seja uma parábola. Sabendo que as coordenadas do vértice de uma parábola são dadas por $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, calcule exatamente quanto deverá ser a diminuição no preço de cada caixa para que a receita seja máxima e qual será a receita máxima.

Resolução feita com o GeoGebra:

<u>**Para esta resolução utilizaremos o conceito de simetria da parábola**</u>

- **Determinamos o ponto médio entre as raízes de R(x). Para isto clicamos na flecha para baixo do segundo ícone da barra de ferramentas e clicamos em PONTO MÉDIO OU CENTRO. Depois clicamos sobre o ponto R1 e, em seguida, sobre o ponto R2. Observamos o ponto gerado que é equidistante de R1 e R2;**

- **Clicamos com o botão direito sobre este ponto gerado e clicamos em Propriedades... , e em seguida digitamos PM no campo nome e fechamos a janela. Assim, nomeamos este ponto de PM (ponto médio).**

- **Traçamos o eixo de simetria da parábola. Para isto clicamos na flecha para baixo do terceiro ícone da barra de ferramentas e clicamos em RETA PERPENDICULAR. Clicamos sobre o ponto PM e sobre um ponto qualquer do eixo dos x;**

- **Determinamos o vértice da parábola. Para isto clicamos na flecha para baixo do segundo ícone da barra de ferramentas e clicamos em INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS. Levamos o cursor sobre a região de interseção entre a parábola e o eixo de simetria e clicamos para marcar o vértice;**

- **Clicamos com o botão direito sobre este ponto gerado e clicamos em Propriedades... , e em seguida digitamos V no campo nome e fechamos a janela. Assim, nomeamos o vértice da parábola de V;**

- **Observamos as coordenadas do ponto V = (10,75; 21 622,50).**

Assim, determinamos a que diminuição no preço de cada caixa de sorvete é R$ 10,75 e que a receita máxima é R$ 21622,50.

Figura 64: Parte da página 11 da ficha de atividades 4

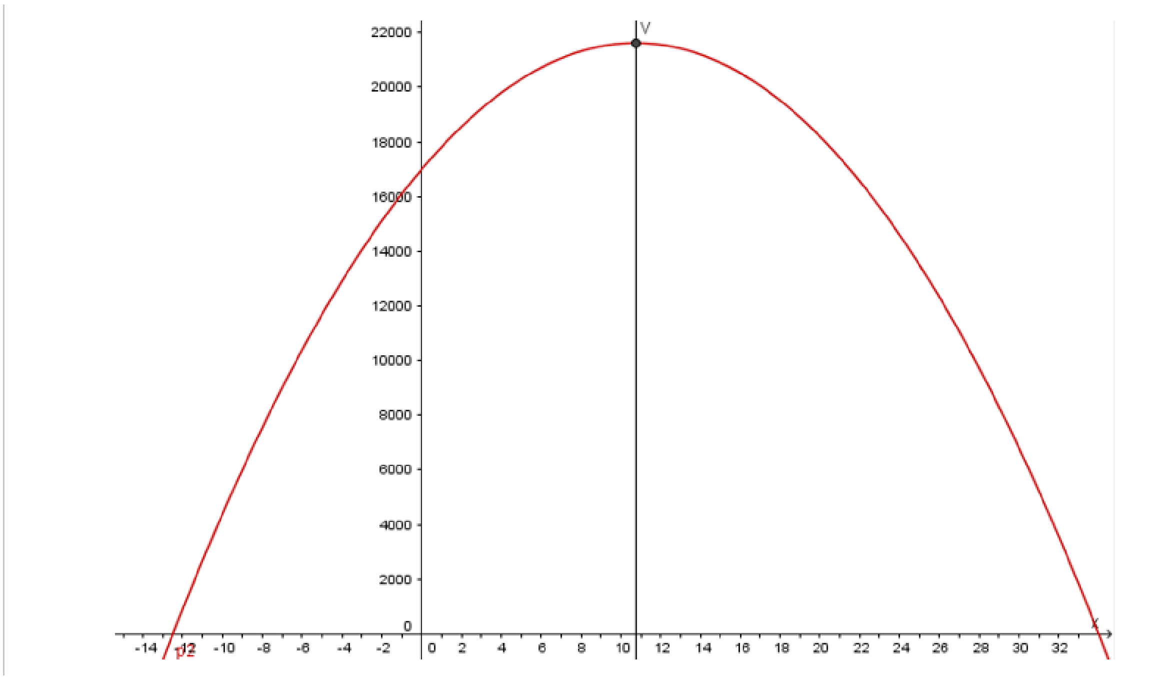


Figura 65: Parte da página 12 da ficha de atividades 4

As instruções para a ficha de atividades 4 e a ficha de atividades 4 compõem outro bloco. A leitura e a aplicação deste quarto bloco devem durar cerca de 2 aulas, sendo 1 dia de aulas duplas. Novamente, para agilizar a aplicação os alunos deverão levar para casa e ler este bloco (e os demais em outro momento). Como cada grupo de 5 alunos recebe um bloco, os integrantes devem revezar e cada dia um deles levará para casa.

Em seguida há as instruções para a ficha de atividades 5. Elas apresentam um texto explicando que para realizar as atividades seguintes os alunos deverão instalar o aplicativo para smartphones (que utilizam o sistema operacional Android) GeoGebra Calculadora Gráfica. O texto apresenta as instruções para a instalação do aplicativo e um pequeno resumo do seu funcionamento básico. Cada aluno poderá utilizar o aplicativo em seu smartphone (se possuir). Caso não possua, eles poderão acompanhar o desenvolvimento das atividades no smartphone de algum colega do grupo ou de outro grupo. Espera-se que pelo menos um dos alunos de cada grupo possua um smartphone e que o grupo todo acompanhe a resolução em seu smartphone.

Após instalado o aplicativo, abra-o e observe a tela apresentada semelhante à figura a seguir:

Figura 66: Parte da página 1 das instruções para a ficha de atividades 5

Funcionamento básico:

Na parte superior da tela já uma barra azul que contém:

- O ícone barra de ferramentas para construção de desenhos geométricos, entre outras.
- O ícone propriedades do objeto que dá acesso às ferramentas de visualização gráfica (mostrar/ocultar eixos, mostrar/ocultar linhas de grade, etc.)
- O ícone desfazer, que permite desfazer a última ação feita.
- O ícone pesquisa, que permite pesquisar na internet arquivos já feitos (animações, quebra-cabeças, etc.)
- O ícone menu que permite criar um arquivo novo, abrir/gravar/compartilhar um arquivo existente e obter ajuda pela internet (inclusive consultar um tutorial em inglês).

Na parte central da tela há a área de trabalho, onde podemos fazer construções geométricas e esboçar gráficos. Nela podemos observar os eixos cartesianos.

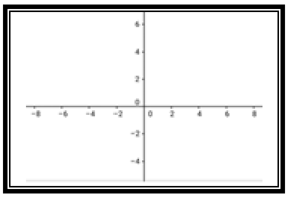


Figura 67: Parte da página 2 das instruções para a ficha de atividades 5

A ficha de atividades 5 começa com um problema que pede aos alunos para voltarem à ficha de atividades 2 e anotarem a expressão calculada para p(d), com L = 3.

1) Retorne à ficha de atividades 2 e anote abaixo a expressão calculada para p(d), com L = 3.

$$p(d) = \frac{(3-d)^2}{3^2}$$

Esta expressão permite calcular a probabilidade em função de uma determinada distância *d*, ou seja, nos dá *y* em função de *d*. Porém, ao utilizarmos o aplicativo deveremos considerar *y* em função de *x*. Para isto basta simplesmente reescrever esta expressão substituindo *d* por *x*:

$$y = \frac{(3-x)^2}{3^2}$$

Figura 68: Pergunta 1 da ficha de atividades 5 com as respostas esperadas

Em seguida há a sequência de digitação da função quadrática a ser feita na janela de álgebra do aplicativo GeoGebra Calculadora Gráfica que gerará o respectivo gráfico (parábola).

Com o smartphone em mãos e com o aplicativo GeoGebra Calculadora Gráfica aberto, digite esta expressão no campo entrada. Para isto, siga a sequência:

y = (1 : 9) **X** x² - (2 : 3) **X** x + 1 ENTER

Observação: **X** é o símbolo para multiplicação (vezes...)

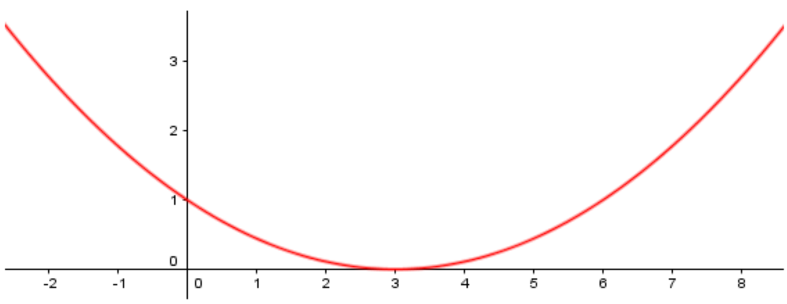


Figura 69: Parte da página 1 da ficha de atividades 5

Em seguida há perguntas a respeito da concavidade da parábola, do coeficiente *a*, da diferença d e das probabilidades.

2) Observando a parábola apresentada pelo aplicativo e retomando a ficha de atividades 2, complete o que se pede:

a) A concavidade da parábola é para cima pois o coeficiente a é positivo.

b) Cada ponto marcado no plano cartesiano representa uma probabilidade em função da diferença d.

c) À medida que a diferença d aumenta observamos que a probabilidade de acerto diminui.

d) p(0) = 1

e) p(3) = 0 .

Figura 70: Pergunta 2 da ficha de atividades 5 com as respostas esperadas

3) Responda às perguntas:

f) Uma diferença visível entre a parábola da ficha de atividades 2 e a do aplicativo é que esta última não se restringe ao intervalo [0, 3]. Por que há esta diferença?

Porque a distância varia entre 0 e 3. É no mínimo 0 e no máximo 3.

g) A função p(d) possui raízes? Quantas?

Sim. Possui duas raízes reais iguais (d=3).

Figura 71: Itens f e g da pergunta 3 da ficha de atividades 5 com as respostas esperadas

h) Qual é o vértice da parábola? É ponto de máximo ou de mínimo?

O vértice é o ponto (3, 0). O ponto de mínimo é o vértice e o de máximo é (0, 1).

Figura 72: Item h da pergunta 3 da ficha de atividades 5 com as respostas esperadas

4) Localize a expressão para R(x) do problema 1 e construa o gráfico utilizando o GeoGebra. Complete o que se pede:

a) Concavidade da parábola: para baixo.

b) Raízes de R(x): x = 20 e x = -8.

c) Vértice da parábola: (6, 2 352).

d) O vértice da parábola é um ponto de máximo.

5) Localize a expressão para R(x) do problema 2 e construa o gráfico utilizando o GeoGebra. Complete o que se pede:

a) Concavidade da parábola: para baixo.

b) Raízes de R(x): x = -18 e x = 46.

c) Vértice da parábola: (14, 10 240).

d) O vértice da parábola é um ponto de máximo.

Figura 73: Perguntas 4 e 5 da ficha de atividades 5 com as respostas esperadas

Há perguntas que pedem que os alunos localizem as expressões para R(x) dos problemas (de otimização), construam o gráfico utilizando o aplicativo GeoGebra Calculadora Gráfica e completem algumas informações.

6) Localize a expressão para R(x) do problema 3 e construa o gráfico utilizando o aplicativo. Complete o que se pede:

a) Concavidade da parábola: para baixo.

b) Raízes de R(x): x = 34 e x = -12,5.

c) Vértice da parábola: (10,75; 21 622,50).

d) O vértice da parábola é um ponto de máximo.

Figura 74: Pergunta 6 da ficha de atividades 5 com as respostas esperadas

Há perguntas nas quais os alunos devem construir os gráficos das funções quadráticas dadas utilizando o aplicativo GeoGebra Calculadora Gráfica e responder sobre o que as variações dos coeficientes *a*, *b* e *c* produzem nas parábolas.

7) Complete os valores dos coeficientes: a = 1, b = 1 e c = 1.

Construa o gráfico das funções quadráticas a seguir, anote os valores dos coeficientes e responda às perguntas. Compare as parábolas obtidas com a parábola correspondente à função $y = x^2$.

a) $y = -x^2$ → *a* = -1, *b* = 0 e *c* = 0

O que a alteração no sinal do coeficiente *a* fez com a parábola?

Mudou a concavidade para baixo.

b) $y = 2x^2$ → a = 2, b = 0 e c =0

c) $y = 5x^2$ → a = 5, b = 0 e c = 0

O que a alteração no valor do coeficiente *a* fez com a parábola?

Fez variar a abertura da parábola (fechou a parábola).

Figura 75: Itens a, b e c da pergunta 7 da ficha de atividades 5 com as respostas esperadas

d) $y = x^2 + 1$ → a = 1, b = 0 e c = 1

e) $y = x^2 - 1$ → a = 1, b = 0 e c = -1

O que a alteração no valor do coeficiente *c* fez com a parábola?

Mudou o ponto de interseção da parábola com o eixo y e mudou as raízes.

f) $y = x^2 + 2x$ → a = 1, b = 2 e c = 0

g) $y = x^2 - 2x$ → a = 1, b = -2 e c = 0

h) $y = x^2 + 8x$ → a = 1, b = 8 e c = 0

i) $y = x^2 - 8x$ → a = 1, b = -8 e c = 0

O que a alteração no valor do coeficiente *b* fez com a parábola?

Transladou a parábola na horizontal (mas manteve a raiz x=0).

j) $y = x^2 - 2x + 1$ → a = 1, b = -2 e c = 1

Figura 76: Itens d até j da pergunta 7 da ficha de atividades 5 com as respostas esperadas

k) $y = -x^2 + 5x - 1$ ➔ a = -1, b = 5 e c = -1

O que as alterações simultâneas nos valores dos coeficientes *a*, *b* e *c* fizeram com a parábola?

A parábola foi transladada na horizontal e/ou na vertical e sua abertura variou.

Figura 77: Item k da pergunta 7 da ficha de atividades 5 com as respostas esperadas

No final da ficha de atividades 5 há algumas perguntas sobre a opinião dos alunos sobre todas as atividades desenvolvidas até o momento.

8) Para finalizar as atividades, responda às perguntas a seguir:

a) Você gostou das atividades feitas até agora? Qual delas te chamou mais a atenção?

b) Você concorda que o aplicativo GeoGebra Calculadora Gráfica facilitou o estudo de funções quadráticas e parábolas? Por quê?

Figura 78: Parte da página 6 da ficha de atividades 5

c) Após realizar todas estas atividades, você consegue citar alguma aplicação prática que as funções quadráticas têm? Qual ou quais?

d) Você imaginava que o estudo do jogo dos discos e do jogo dos dardos adaptado tivesse alguma relação com funções quadráticas? Achou interessante a abordagem feita?

e) Para finalizar, responda: Você tem algum elogio, crítica ou sugestão para as atividades realizadas? Qual ou quais? Escreva abaixo!!!

Figura 79: Parte da página 7 da ficha de atividades 5

As instruções para a ficha de atividades 5 e a ficha de atividades 5 compõem outro bloco, o último deles. A leitura e a aplicação deste quinto e último bloco devem durar cerca de 2 aulas, sendo 1 dia de aulas duplas. Novamente, para agilizar a aplicação os alunos deverão levar para casa e ler este bloco (e os demais em outro momento). Como cada grupo de 5 alunos recebe um bloco, os integrantes devem revezar e cada dia um deles levará para casa.

5. Construção do jogo de dardos adaptado

Neste capítulo relatamos brevemente as etapas para construção do jogo de dardos adaptado.

Na primeira etapa o pesquisador adquiriu os materiais necessários relacionados a seguir.

Isopor: 7 folhas de 1 cm de espessura e 2 folhas de 5 cm de espessura;

Papel cartolina: 7 folhas brancas e 5 folhas pretas ou cinzas;

Cola de isopor: 2 tubos pequenos;

Dardos: 12 dardos com ponta de metal.

Outros materiais utilizados que o pesquisador não comprou por já possuir: tesoura escolar, estilete, régua 30 cm, lápis, borracha, cola branca escolar, caneta esferográfica, papel sulfite, fita adesiva transparente e clips de papel.

Os dardos utilizados foram retirados de 2 jogos de dardos tradicional que o pesquisador comprou, sendo 6 de cada um. Há, porém, a opção de comprar somente os dardos via internet em lojas virtuais.

Na segunda etapa o pesquisador iniciou a construção na própria casa. Construiu o quadriculado nas cartolinas brancas e as recortou no formato quadrado (42 cm por 42 cm), recortou as folhas de isopor no mesmo formato quadrado e nelas colou as folhas brancas de papel cartolina, imprimiu o título Jogo de dardos adaptado numa folha de papel sulfite e colou numa das sobras de isopor. Em seguida fez a marcação quadriculada nas folhas de cartolina pretas, mas não recortou os quadradinhos referentes aos 7 tipos de alvos quadriculados. Por uma preferência pessoal utilizou cartolina preta no lugar da cartolina cinza.

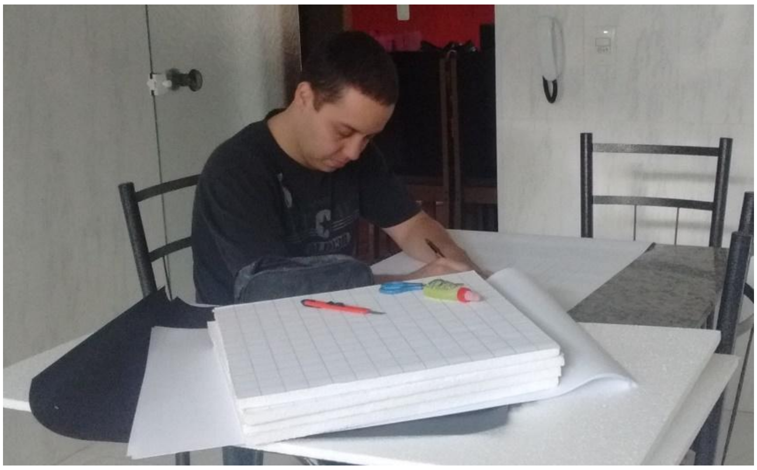


Figura 80: Eu (Leandro Souza Canavezi) iniciando a construção do jogo de dardos adaptado

Figura 81: Eu (Leandro Souza Canavezi) iniciando a construção do jogo de dardos adaptado

Na terceira etapa o pesquisador contou com a colaboração de um grupo de alunos dos 8.^{os} anos da EMEF Cônego Aníbal Difrância para o término da construção dos alvos. Cabe ressaltar que estas turmas não participaram das atividades elaboradas e não jogaram o jogo de dardos adaptado. A iniciativa de ajudar na construção partiu deste próprio grupo de alunos ao ouvirem as explicações do pesquisador sobre os conteúdos matemáticos que eles estudarão no ano seguinte, o 9.º ano, e pela curiosidade em conhecer este jogo matemático. Não foi solicitada a ajuda das 2 turmas de 9.º ano que participaram das atividades (como havia imaginado) por ser suficiente a ajuda destes alunos de 8.^{os} anos, e também para causar um maior "impacto" ao verem o jogo pela primeira vez.

Figura 82: Alunos dos 8.^{os} anos da EMEF Cônego Aníbal Difrância auxiliando na construção do jogo de dardos adaptado

Figura 83: Alunos dos 8.^{os} anos da EMEF Cônego Aníbal Difrância auxiliando na construção do jogo de dardos adaptado

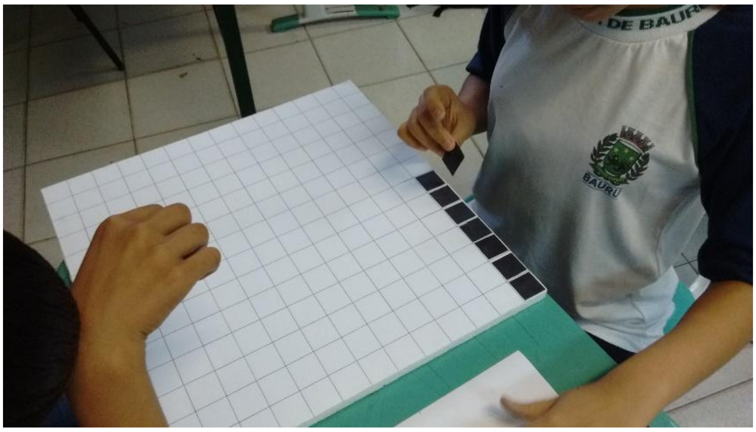


Figura 84: Alunos dos 8.os anos da EMEF Cônego Aníbal Difrância auxiliando na construção do jogo de dardos adaptado

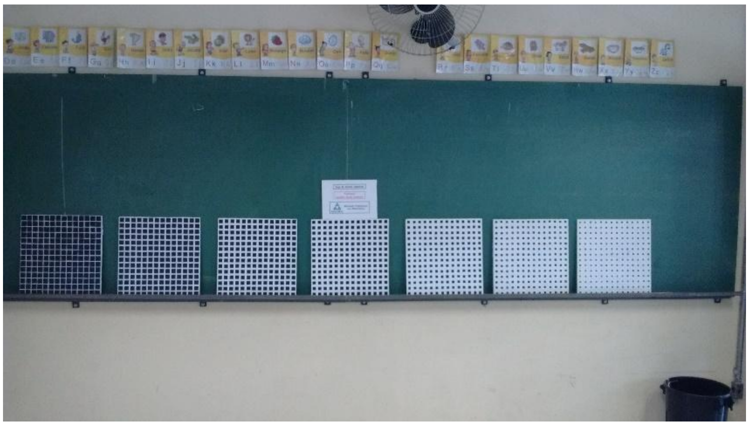


Figura 85: Jogo de dardos adaptado pronto

Figura 86: Detalhe de identificação do jogo de dardos adaptado

6. Implementação

Neste capítulo apresentamos os conhecimentos prévios dos alunos necessários para o desenvolvimento das fichas de atividades, uma breve descrição das escolas envolvidas e como aconteceu a aplicação das fichas de atividades, detalhando os dados coletados (as respostas dos alunos).

6.1 Pré-requisitos necessários

Para o desenvolvimento das fichas de atividades é necessário, principalmente, que os alunos saibam realizar as operações matemáticas básicas, resolver problemas envolvendo equações e funções do 1.º grau e construir gráficos de funções do 1.º grau. É interessante também que os alunos conheçam funções do 2.º grau e sabiam construir gráficos de tais funções. Porém, estes são assuntos que serão abordados durante a aplicação das atividades. Em vista da dificuldade que os alunos apresentam em relação à aprendizagem significativa destes conteúdos matemáticos fizemos várias revisões durante o 1.º bimestre. Foram cerca de 5 semanas de revisões, sendo as semanas anteriores à aplicação das fichas de atividades. Na primeira semana os alunos resolveram listas de exercícios sobre as operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão com números decimais). Na segunda semana os alunos resolveram listas de exercícios sobre potenciação e radiciação, frações e problemas envolvendo as operações básicas. Na terceira e quarta semanas foram revisados conteúdos de álgebra (polinômios, operações com polinômios, fatoração e equações do 1.º grau). A partir da quinta semana os conteúdos foram revisados sob a forma de tarefas. Todas estas atividades foram feitas concomitantemente com o estudo dos conteúdos referentes ao 1.º e ao 2.º bimestres letivo. No 2.º bimestre, após finalizar as atividades de revisão, os alunos aprenderam sobre equações e funções quadráticas. A maioria destes exercícios foi feita individualmente pelos alunos e alguns feitos em grupos com, no máximo, 5 alunos. A formação dos grupos foi por livre escolha dos alunos. Para agilizar as revisões de conteúdos os alunos utilizaram calculadoras e folhas de papel quadriculado, nos quais puderam construir os gráficos das funções do 1.º grau.

6.2 Breve descrição das escolas e das turmas participantes das atividades

Uma das escolas envolvidas na aplicação das atividades é a Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Professor Farid Fayad, na qual eu, professor Leandro, leciono desde 2010. Está localizada na rua Lucentino Catini, n.º 80, no bairro Jardim Cruzeiro, na cidade de Agudos, estado de São Paulo. Funciona em dois períodos, manhã e tarde. No período da manhã há 11 turmas, sendo uma turma de 6.º ano do ensino fundamental e duas turmas de 9.º ano do ensino fundamental, três turmas da 1.ª série do ensino médio, três turmas da 2.ª série do ensino médio e duas turmas da 3.ª série do ensino médio. No período da tarde há 9 turmas, todas do ensino fundamental, sendo duas turmas de 6.º ano, duas turmas de 7.º ano, três turmas de 8.º ano e duas turmas de 9.º ano. Cada turma tem, em média, 35 alunos. A maioria dos alunos que estudam nesta escola mora no próprio bairro, em bairros vizinhos ou na zona rural. De segunda a sexta-feira funciona o ensino regular e aos sábados e domingos funciona o programa Escola da Família, oferecendo atividades como artesanato, pintura, dança, práticas esportivas etc. Quanto à parte física, a escola possui 11 salas de aula, sala de informática com 6 computadores (sala do programa Acessa Escola), biblioteca (sala de leitura), cozinha, refeitório, dispensa, depósito, banheiros para os alunos, banheiros para os professores, administração e funcionários, áreas livres, jardins, quadra poliesportiva coberta e pátio coberto para alimentação. Possui também a área administrativa, formada pela sala dos professores, sala da coordenação pedagógica, sala da direção e sala da vice-direção. Quanto aos recursos pedagógicos, a escola possui projetor multimídia (datashow), notebook para uso dos professores, televisor de 29 polegadas, aparelho de DVD, 2 caixas de som amplificadas, filmadora, máquina fotográfica, impressora, fotocopiadora e materiais pedagógicos específicos (jogos didáticos de diversas disciplinas, documentários, filmes e vídeos em DVD, softwares, mapas, globos etc.). O quadro de funcionários da escola é composto por 54 funcionários, entre professores, diretora, vice-diretora, coordenadora, responsáveis pela biblioteca, agentes de organização escolar, cozinheiras e auxiliares de limpeza.

A outra escola envolvida na aplicação das atividades é a Escola Municipal de Ensino Fundamental Cônego Aníbal Difrância, na qual eu, professor Leandro, leciono desde o início deste ano de 2016. Ela está localizada na Alameda Manoel Figueiredo, n.º 1-20, na cidade de Bauru, estado de São Paulo. Funciona em três períodos: manhã, tarde e noite. No período da manhã há 15 turmas, todas do ensino fundamental, sendo quatro turmas de 6.º ano, três turmas de 7.º ano, três turmas de 8.º ano e cinco turmas de 9.º ano. No período da tarde há 15 turmas, todas do ensino fundamental, sendo três turmas de 1.º ano, três turmas de 2.º ano, três turmas de 3.º ano, três turmas de 4.º ano e três turmas de 5.º ano. No período da noite há 5 turmas, todas do ensino supletivo (educação para jovens e adultos): 1.º ano A, 2.º ano A, 3.º ano A e 4.º ano A. Cada turma do ensino fundamental tem, em média, 30 alunos, e cada turma do ensino supletivo tem, em média, 24 alunos. A maioria dos alunos que estudam nesta escola mora no próprio bairro ou em bairros vizinhos. Quanto à parte física, a escola possui 15 salas de aula, secretaria, biblioteca, sala de recursos para alunos com necessidades educacionais especiais, sala da direção, sala da coordenação, laboratório de informática, sala de multimídia, sala de jogos, depósito de materiais pedagógicos, dispensa, refeitório, 2 cozinhas, banheiros para alunos sendo um deles para alunos com necessidades educacionais especiais, banheiros para professores, administração e funcionários, depósito, residência do ocupante de zeladoria, pátio coberto, jardins, quadra poliesportiva coberta, quadra de areia, áreas livres, estacionamento de veículos, gabinete odontológico, sala de materiais de ginástica e cantina. Quanto aos recursos pedagógicos, a escola possui projetor multimídia (datashow), notebook para uso dos professores, 3 televisores de 29 polegadas, 2 aparelhos de DVD, caixa de som amplificada, filmadora, máquina fotográfica, impressora, fotocopiadora e materiais pedagógicos específicos (jogos didáticos de diversas disciplinas, documentários, filmes e vídeos em DVD, softwares, mapas, globos etc.). O quadro de funcionários da escola é composto por 74 funcionários, entre professores, diretora, vice-diretora, coordenadoras, agentes administrativos, técnicos administrativos, serventes, inspetores de alunos, auxiliares de serviços gerais e cuidadores.

6.3 Aplicação das atividades

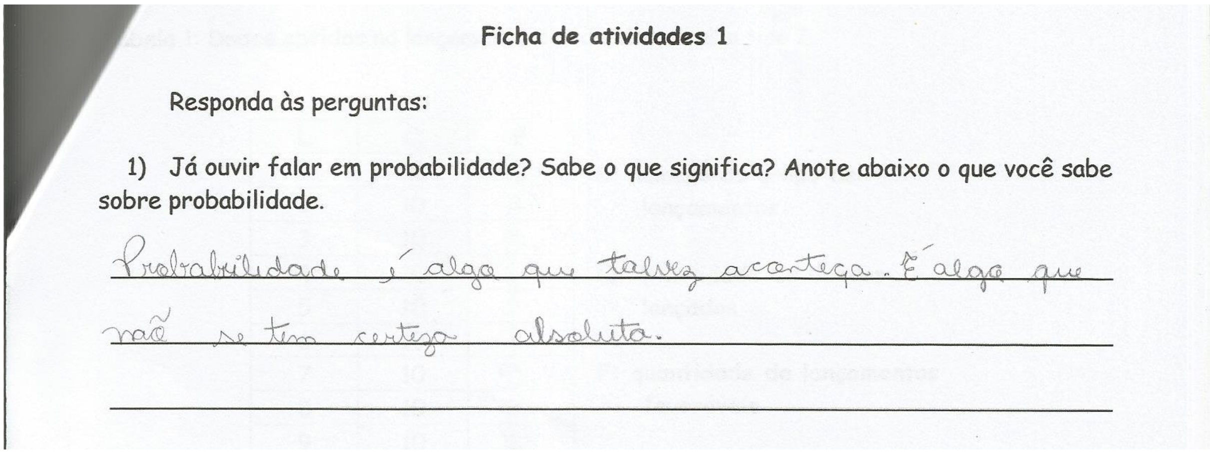
A aplicação aconteceu em sala de aula. As duas turmas de 9.º ano foram divididas em grupos com, no máximo, 5 alunos. Houve momentos nos quais alguns alunos participaram de mais de um grupo para se ajudarem. Alguns grupos formados permaneceram os mesmos que já haviam sido formados durante a revisão para a aplicação das atividades. Novamente a formação dos grupos foi por livre escolha dos alunos. No total 8 grupos foram formados, sendo 5 grupos no 9.º ano D nomeados: 1D, 2D, 3D, 4D e 5D; e 3 no 9.º ano E nomeados: 1E, 2E e 3E. Após a formação dos grupos a aplicação teve início. Foram necessárias 12 aulas de 50 minutos cada uma nas duas turmas, sendo 6 dias de aulas duplas.

Figura 87: Alunos do grupo 1D

Figura 88: Alunos do grupo 3E

6.3.1 Primeiro dia de aplicação

No primeiro dia de aplicação, que corresponde a 2 aulas, cada grupo recebeu o primeiro bloco de atividades formado pelas instruções para a ficha de atividades 1 e a ficha de atividades 1, e também um dicionário de língua portuguesa emprestado da escola. Uma das alunas fez a leitura das instruções a pedido do pesquisador. Seguindo as instruções, os grupos responderam às duas primeiras perguntas.



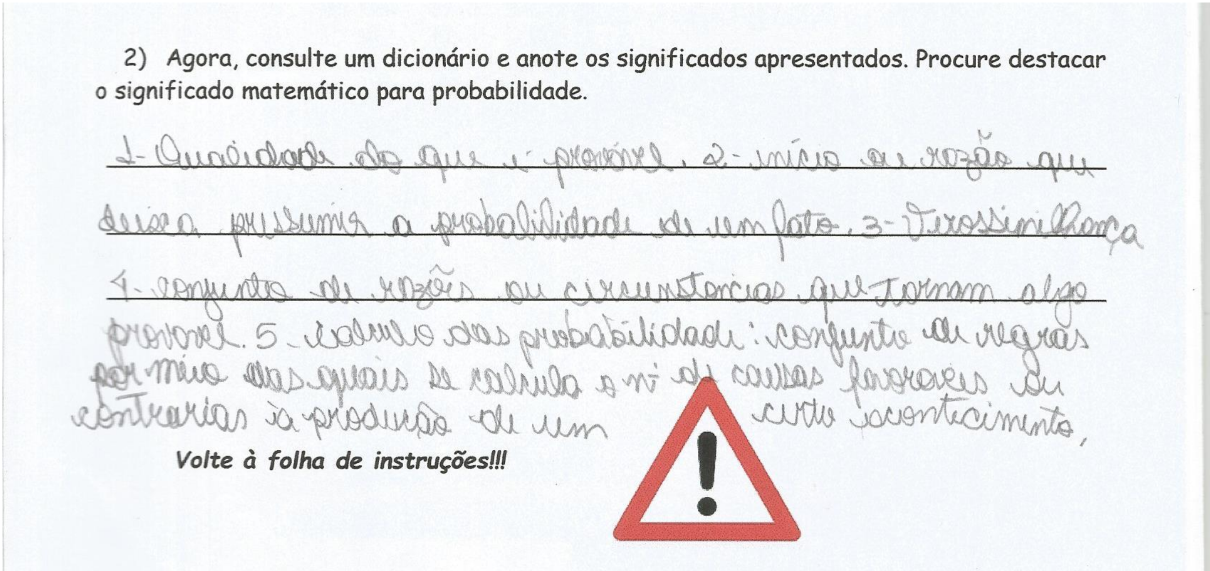
Ficha de atividades 1

Responda às perguntas:

1) Já ouvir falar em probabilidade? Sabe o que significa? Anote abaixo o que você sabe sobre probabilidade.

Probabilidade é algo que talvez aconteça. É algo que não se tem certeza absoluta.

Figura 89: Resposta correta do grupo 1D para a pergunta 1 da ficha de atividades 1



2) Agora, consulte um dicionário e anote os significados apresentados. Procure destacar o significado matemático para probabilidade.

1- Qualidade do que é provável. 2- Indício ou razão que deixa presumir a probabilidade de um fato. 3- Verossimilhança 4- conjunto de razões ou circunstâncias que tornam algo provável. 5- cálculo das probabilidades: conjunto de regras por meio das quais se calcula o nº de casos favoráveis ou contrárias à produção de um certo acontecimento.

Volte à folha de instruções!!!

Figura 90: Resposta correta do grupo 3D para a pergunta 2 da ficha de atividades 1

Consideramos que todos os 8 grupos responderam corretamente às questões 1 e 2.

Em seguida o pesquisador montou o primeiro alvo quadriculado (tipo I) na lousa e escreveu na lousa uma lista com a ordem de quais alunos deveriam jogar os dardos. Também escreveu uma tabela para anotar a quantidade de lançamentos favoráveis ou não de cada aluno. Foram 10 lançamentos por aluno, totalizando 100 lançamentos no alvo tipo I. Os 3 primeiros alunos estiveram vendados durante os lançamentos. Porém, desta forma eles tiveram muita dificuldade em acertar o alvo e levaram muito tempo para fazer os 10 lançamentos. Então foi proposto que os demais lançamentos fossem feitos com os olhos abertos, mas de forma aleatória, ou seja, sem procurar mirar nos quadradinhos pretos. Cada aluno posicionou-se a uma distância mínima de 1,5 m do alvo.

Figura 91: Alunos dos grupos 1D e 4D durante o lançamento de dardos

Figura 92: Alunos dos grupos 2E e 3E durante o lançamento de dardos

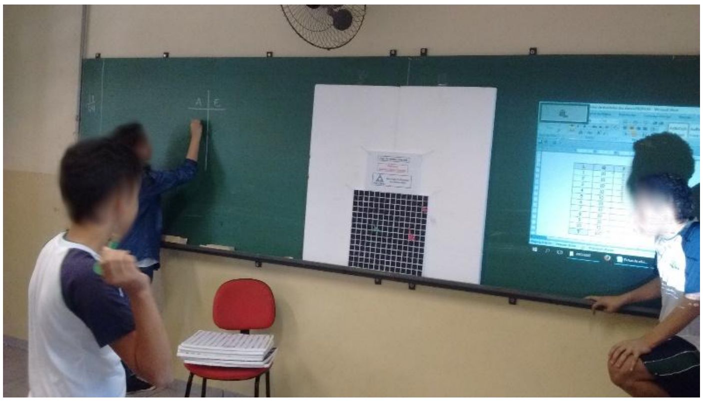


Figura 93: Alunos dos grupos 2E e 3E durante o lançamento de dardos

Neste dia, a convite do pesquisador, as duas vice-diretoras e (em outro momento) a coordenadora pedagógica da EE Prof. Farid Fayad fizeram uma rápida visita à turma do 9.º ano D e assistiram a alguns lançamentos de dardos feitos pelos alunos. Também neste dia, e a pedido do pesquisador, a coordenadora pedagógica da EMEF Cônego Aníbal Difrância fez uma rápida visita à turma do 9.º ano E e assistiu a alguns lançamentos de dardos feitos pelos alunos. Após conhecer brevemente o jogo de dardos adaptado e as fichas de atividades perguntou se poderia fazer outra visita no segundo dia de aplicação, quando o gráfico das probabilidades começasse a ser construído. O pesquisador concordou com o pedido.

Depois de feitos os 100 lançamentos de dardos no alvo tipo I e preenchida toda a tabela 1 passamos para o alvo tipo II, e assim sucessivamente. Os lançamentos aconteceram de maneira muito tranquila e prazerosa. Os alunos mostraram-se motivados a lançar os dardos e todos tiveram a chance de lançar, não sendo obrigados. No decorrer dos lançamentos os próprios alunos se propuseram a fazer as anotações na lousa. Para agilizar o preenchimento das tabelas das fichas de atividades também foi usado um notebook e um datashow. Desta forma, a tabela 8 foi preenchida em conjunto por toda a turma acompanhando a projeção na lousa, e o gráfico seguinte pode ser comparado também com a projeção. Assim terminou o primeiro dia de aplicação das atividades.

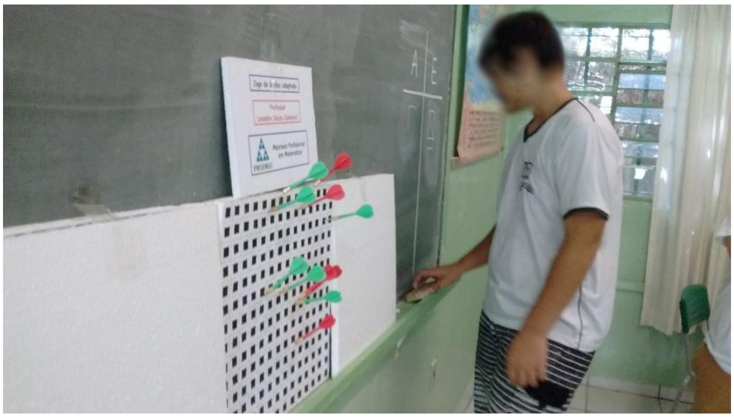


Figura 94: Aluno do grupo 4D durante o lançamento de dardos

Tabela 1: Dados obtidos no lançamento dos dardos no alvo tipo I.

L	Q	F
1	10	9
2	10	10
3	10	8
4	10	6
5	10	7
6	10	7
7	10	8
8	10	4
9	10	7
10	10	7
T	100	73

L: número do grupo de lançamentos

Q: quantidade de dardos lançados

F: quantidade de lançamentos favoráveis

T: totalização das colunas

Figura 95: Tabela 1 preenchida pelo grupo 3D

Tabela 2: Dados obtidos no lançamento dos dardos no alvo tipo II.

L	Q	F
1	10	2
2	10	6
3	10	6
4	10	6
5	10	5
6	10	7
7	10	6
8	10	9
9	10	6
10	10	5
T	100	58

L: número do grupo de lançamentos

Q: quantidade de dardos lançados

F: quantidade de lançamentos favoráveis

T: totalização das colunas

Figura 96: Tabela 2 preenchida pelo grupo 3D

Tabela 3: Dados obtidos no lançamento dos dardos no alvo tipo III.

L	Q	F
1	10	5
2	10	3
3	10	6
4	10	5
5	10	4
6	10	2
7	10	5
8	10	3
9	10	5
10	10	7
T	100	45

L: número do grupo de lançamentos

Q: quantidade de dardos lançados

F: quantidade de lançamentos favoráveis

T: totalização das colunas

Figura 97: Tabela 3 preenchida pelo grupo 1D

Tabela 4: Dados obtidos no lançamento dos dardos no alvo tipo IV.

L	Q	F
1	10	3
2	10	5
3	10	4
4	10	5
5	10	5
6	10	2
7	10	4
8	10	0
9	10	7
10	10	6
T	100	41

L: número do grupo de lançamentos

Q: quantidade de dardos lançados

F: quantidade de lançamentos favoráveis

T: totalização das colunas

Figura 98: Tabela 4 preenchida pelo grupo 1D bela 5: Dados obtidos no lançamento dos dardos no alvo tipo V.

L	Q	F
1	10	0
2	10	1
3	10	1
4	10	2
5	10	2
6	10	2
7	10	5
8	10	2
9	10	0
10	10	5
T	100	21

L: número do grupo de lançamentos

Q: quantidade de dardos lançados

F: quantidade de lançamentos favoráveis

T: totalização das colunas

Figura 99: Tabela 5 preenchida pelo grupo 3E

Tabela 6: Dados obtidos no lançamento dos dardos no alvo tipo VI.

L	Q	F
1	10	0
2	10	0
3	10	3
4	10	2
5	10	0
6	10	0
7	10	2
8	10	2
9	10	0
10	10	0
T	100	9

L: número do grupo de lançamentos

Q: quantidade de dardos lançados

F: quantidade de lançamentos favoráveis

T: totalização das colunas

Figura 100: Tabela 6 preenchida pelo grupo 3E

Tabela 7: Dados obtidos no lançamento dos dardos no alvo tipo VII.

L	Q	F
1	10	0
2	10	0
3	10	1
4	10	2
5	10	1
6	10	1
7	10	0
8	10	2
9	10	0
10	10	0
T	100	7

L: número do grupo de lançamentos

Q: quantidade de dardos lançados

F: quantidade de lançamentos favoráveis

T: totalização das colunas

Figura 101: Tabela 7 preenchida pelo grupo 2E

Tabela 8:

Lado do quadrado de contorno preto: 3 cm				
Tipo de alvo	d (em cm)	Quant. de lançamentos	Eventos favoráveis	Probabilidade de ganho p(d)
I	0,3	100	73	73 %
II	0,6	100	55	55%
III	0,9	100	37	37 %
IV	1,2	100	34	34 %
V	1,5	100	21	21 %
VI	1,8	100	9	9 %
VII	2,1	100	7	7 %

Figura 102: Tabela 8 preenchida pelo grupo 2E

Consideramos que todos os 8 grupos preencheram corretamente as tabelas 1 até 8 das questões 3 e 4 da ficha de atividades 1. Quanto ao gráfico da questão 5, os grupos 1D e 2E apresentaram dificuldades para construí-lo, sendo necessário minha intervenção e ajuda de outros grupos. Assim, consideramos que 6 grupos construíram corretamente o gráfico e 2 grupos construíram parcialmente o gráfico.

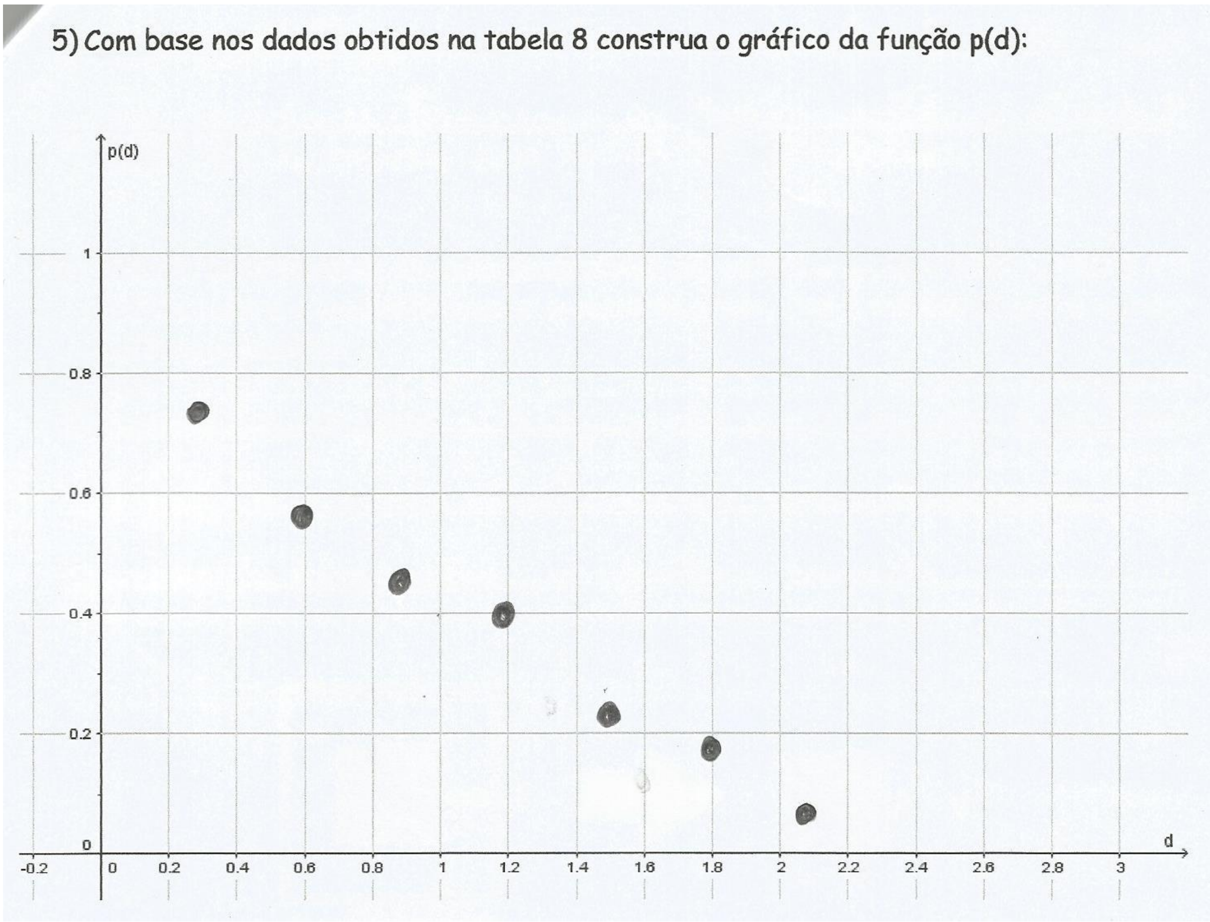


Figura 103: Gráfico corretamente construído pelo grupo 1D para a pergunta 5 da ficha de atividades 1 após intervenção

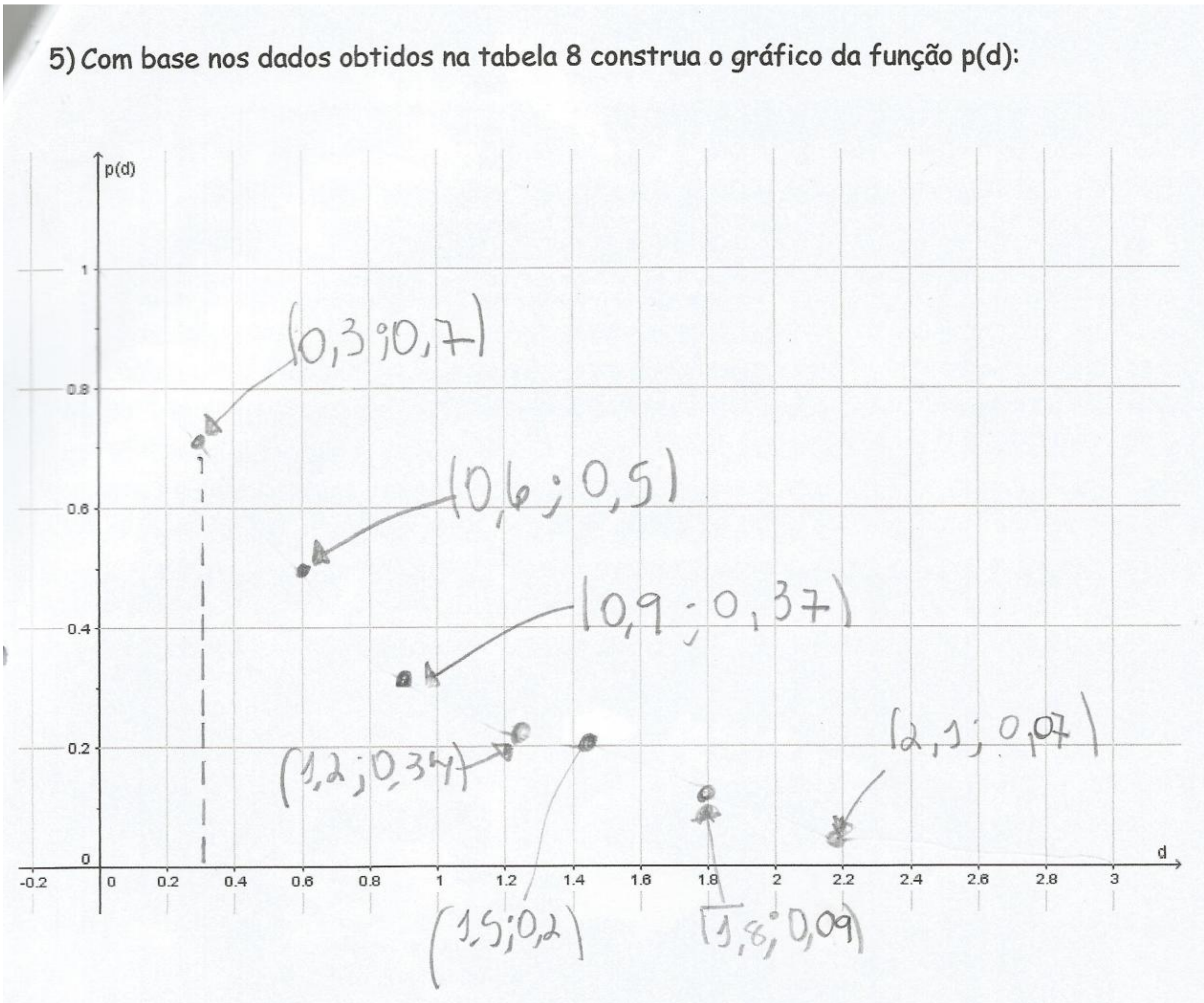


Figura 104: Gráfico corretamente construído pelo grupo 2E para a pergunta 5 da ficha de atividades 1 após intervenção

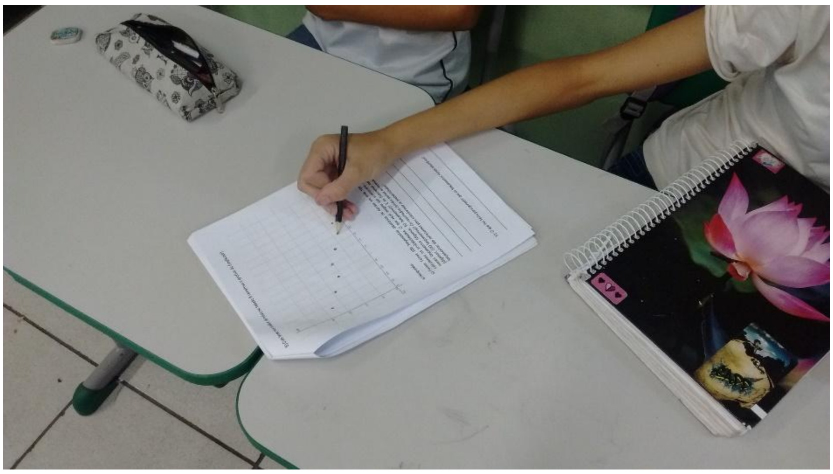
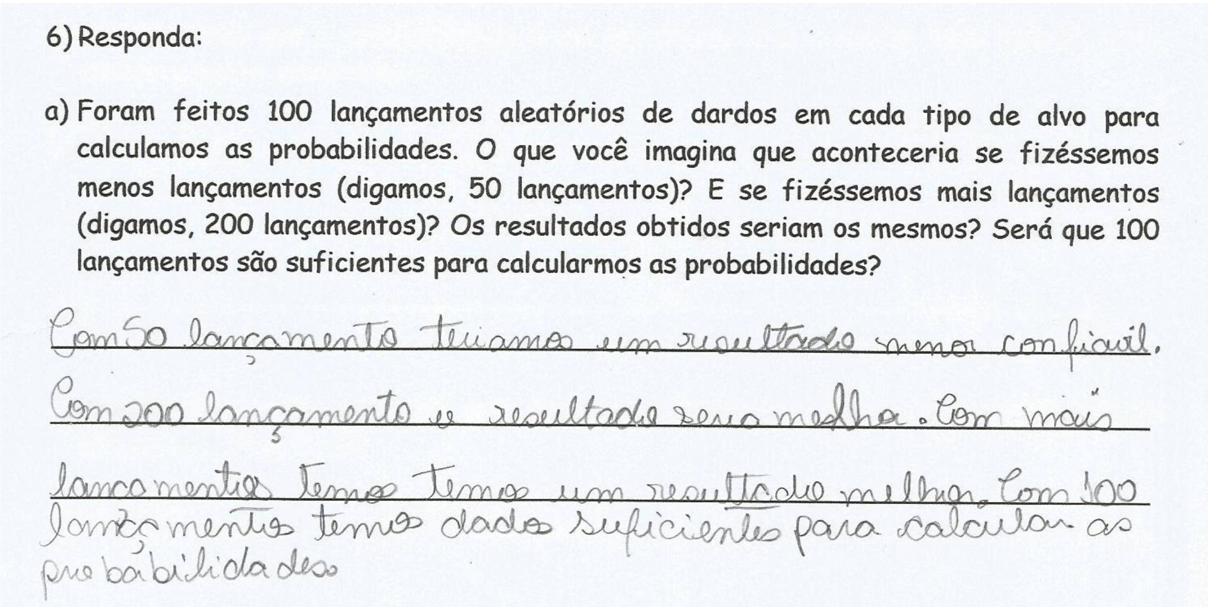


Figura 105: Grupo 3D construindo corretamente o gráfico para a pergunta 5 da ficha de atividades 1

6.3.2 Segundo dia de aplicação

No segundo dia de aplicação, que corresponde a 2 aulas, as perguntas seguintes foram respondidas por cada grupo separadamente, sendo que em algumas ocasiões o pesquisador foi chamado para tirar dúvidas dos grupos. Duas perguntas foram discutidas pelas duas turmas de 9.º ano de maneira geral. Por exemplo, a pergunta: *"Será que 100 lançamentos são suficientes para calcularmos as probabilidades"* foi respondida de maneira colaborativa. Um dos alunos de cada turma digitou a resposta para que todos acompanhassem a projeção. Outra pergunta respondida desta mesma forma: "*Considerando que a probabilidade é um quociente, qual o menor valor que ela pode atingir e qual o maior valor?"* Desta forma, foi possível acompanhar os grupos durante as respostas, porém sem intervir. Um aluno do grupo 5D respondeu em voz alta o item h da questão 6, pois o grupo 1D não se lembrava do nome da curva (parábola).


6) Responda:

a) Foram feitos 100 lançamentos aleatórios de dardos em cada tipo de alvo para calculamos as probabilidades. O que você imagina que aconteceria se fizéssemos menos lançamentos (digamos, 50 lançamentos)? E se fizéssemos mais lançamentos (digamos, 200 lançamentos)? Os resultados obtidos seriam os mesmos? Será que 100 lançamentos são suficientes para calcularmos as probabilidades?

Com 50 lançamento teriamos um resultado menor confiavel. Com 200 lançamento o resultado sero melhor. Com mais lançamentos temos temos um resultado melhor. Com 100 lançamentos temos dados suficientes para calcular as probabilidades

Figura 106: Resposta correta do grupo 1D para a pergunta 6 item a da ficha de atividades 1

b) O que foi feito para garantir que os lançamentos foram aleatórios?

Primeiro usamos uma venda nos olhos, mas isso dificultou os lançamentos. Por isso tiramos a venda. A distância e a dificuldade tornaram os lançamentos aleatórios. É muito difícil mirar nos quadradinhos pretos.

Figura 107: Resposta correta do grupo 3E para a pergunta 6 item b da ficha de atividades 1

c) Sabendo que a medida do lado do quadrado de contorno preto é 3 cm e que d é a diferença entre esse lado e o lado do quadrado cinza, qual é o menor e qual é o maior valor possível para d ?

A menor diferença é 0 (quando o quadrado fica todo cinza) e a maior diferença é 3 cm (quando o quadrado cinza vira um ponto e some).

Figura 108: Resposta correta do grupo 1D para a pergunta 6 item c da ficha de atividades 1

d) Considerando que a probabilidade é um quociente, qual o menor valor que ela pode atingir e qual o maior valor?

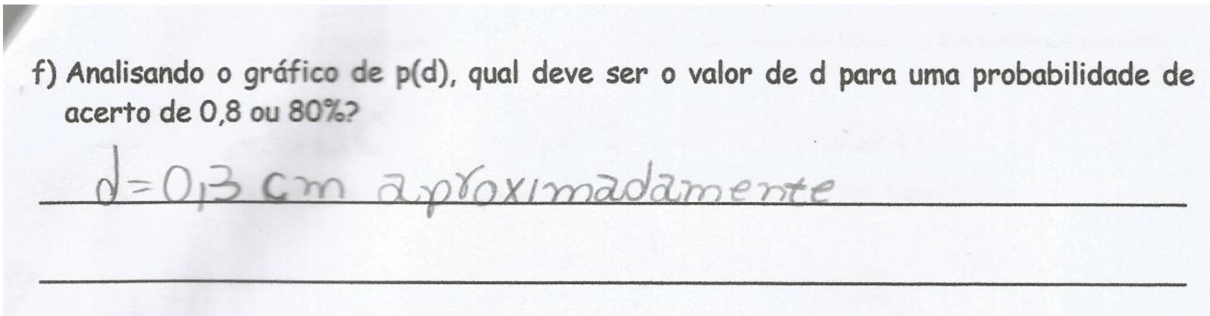
O menor valor é 0 (0%) e o maior valor é 1 (100%)

Figura 109: Resposta correta do grupo 3D para a pergunta 6 item d da ficha de atividades 1

e) Analisando o gráfico de p(d), qual deve ser o valor de d para uma probabilidade de acerto de 0,5 ou 50%?

d = 0,9 cm aproximadamente.

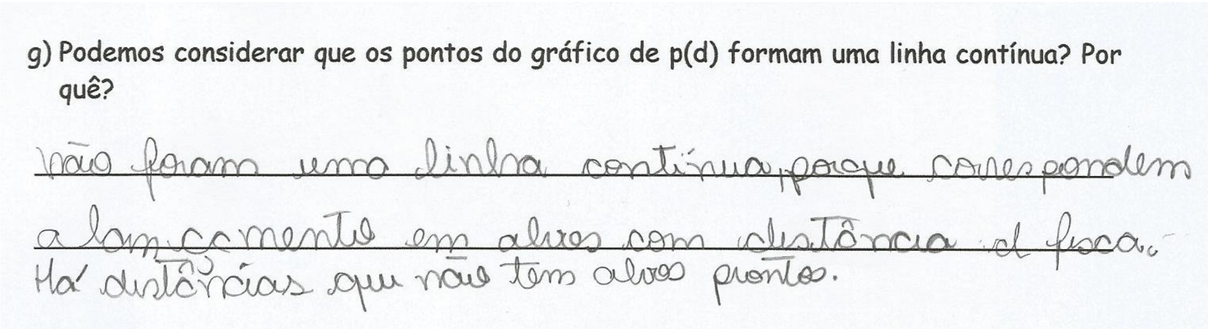
Figura 110: Resposta correta do grupo 3D para a pergunta 6 item e da ficha de atividades 1



f) Analisando o gráfico de p(d), qual deve ser o valor de d para uma probabilidade de acerto de 0,8 ou 80%?

d=0,3 cm aproximadamente

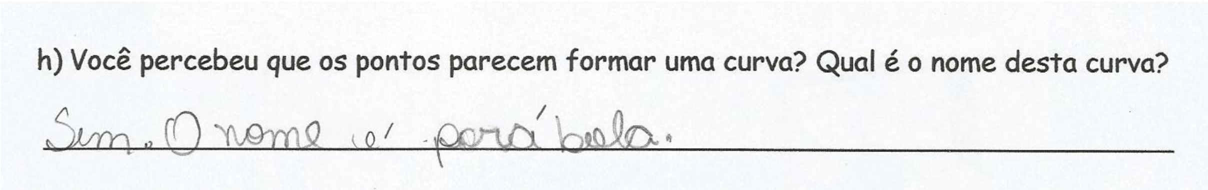
Figura 111: Resposta correta do grupo 1D para a pergunta 6 item f da ficha de atividades 1



g) Podemos considerar que os pontos do gráfico de p(d) formam uma linha contínua? Por quê?

não foram uma linha contínua, porque correspondem a lançamento em alvos com distância d fixa. Há distâncias que não tem alvos prontos.

Figura 112: Resposta correta do grupo 1D para a pergunta 6 item g da ficha de atividades 1



h) Você percebeu que os pontos parecem formar uma curva? Qual é o nome desta curva?

Sim. O nome é parábola.

Figura 113: Resposta correta do grupo 1D para a pergunta 6 item h da ficha de atividades 1

Consideramos que todos os 8 grupos responderam corretamente a questão 6, itens a até h.

Depois de terminada esta primeira ficha de atividades foi proposto aos alunos que levassem para casa o primeiro e o segundo bloco de atividades para lerem e estudarem todas as instruções e atividades já feitas e as que eles ainda farão. Desta forma eles poderiam rever o que já foi feito e adiantar o entendimento do que ainda farão. Um aluno de cada grupo levou um destes blocos para casa e o trouxe na aula seguinte.

Figura 114: Aluno do grupo 4D durante o lançamento de dardos

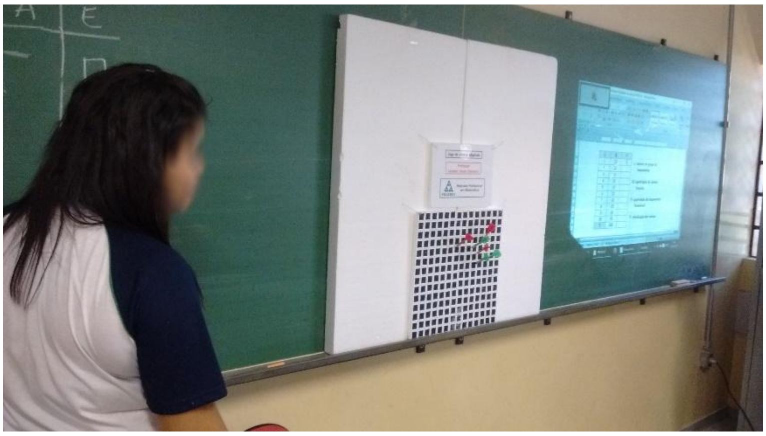


Figura 115: Aluna do grupo 1E durante o lançamento de dardos

6.3.3 Terceiro dia de aplicação

No terceiro dia de aplicação, que corresponde a 2 aulas, os grupos realizaram as atividades do segundo bloco de atividades. Novamente, um dos alunos fez a leitura das instruções a pedido do pesquisador. Seguindo as instruções, os grupos iniciaram a resolução das perguntas. As duas turmas apresentaram dificuldades para responder à primeira pergunta, na qual os alunos deveriam substituir a medida do lado L e desenvolver a fórmula para o cálculo da probabilidade em função da diferença d. Neste momento foi necessário fazer uma intervenção, e então o pesquisador ajudou os alunos a desenvolverem a fórmula.

1) O lado de cada quadrado do quadriculado mede 3 cm, ou seja, L = 3. Substitua este valor na fórmula e a desenvolva:

$$p(d) = \frac{(L-d)^2}{L^2} = \frac{(3-D)^2}{3^2} = \frac{9-6D+D^2}{9}$$

Figura 116: Resposta correta do grupo 1D para a pergunta 1 da ficha de atividades 2 após intervenção

Na turma do 9.º ano E, o grupo 1E errou ao iniciar a resposta da segunda pergunta, na qual deveriam preencher a tabela 9, substituindo as medidas dos lados dos quadrados cinzas de cada tipo de alvo (começando pelo tipo VII) ao invés de substituir as medidas de d. O grupo 2E também havia entendido que deveria fazer o mesmo nesta pergunta, porém não chegou a preencher a tabela 9 e me pediram ajuda.

Lado do quadrado do quadriculado: 3 cm		
Tipo de alvo	d (em cm)	Probabilidade de acerto
I	0,9	p(0,9) =
II	1,2	p(1,2) =
III	1,5	p(1,5) =
IV	1,8	p(1,8) =
V	2,1	p(2,1) =
VI	2,4	p(2,4) =
VII	2,7	p(2,7) =

Figura 117: Tabela 9 incorretamente preenchida pelo grupo 1E

Neste momento o pesquisador constatou o erro de entendimento do grupo 2E. Fez, então, outra intervenção e ajudou os alunos a preencherem a tabela 9, projetando-a na lousa. Um aluno do grupo 2E perguntou-lhe se poderia copiar as probabilidades da tabela 8 já preenchida. O pesquisador fez outra intervenção e pediu que ele lesse novamente o texto das instruções explicando a diferença entre os conceitos de probabilidade experimental e de probabilidade teórica. Após a leitura todos os grupos perceberam que não poderiam simplesmente copiar, e preencheram corretamente a tabela 9. Na turma do 9.º ano D a resolução foi tranquila, maiores intervenções além da feita durante a pergunta 1 da ficha de atividades 2.

Lado do quadrado do quadriculado: 3 cm		
Tipo de alvo	**d (em cm)**	**Probabilidade de acerto**
I	0,3	$p(0,3) = \frac{(3-0,3)^2}{9} = \frac{2,7^2}{9} = \frac{7,29}{9} = 0,81 = 81\%$
II	0,6	$p(0,6) = \frac{(3-0,6)^2}{9} = \frac{2,4^2}{9} = \frac{5,76}{9} = 0,64 = 64\%$
III	0,9	$p(0,9) = \frac{(3-0,9)^2}{9} = \frac{2,1^2}{9} = \frac{4,41}{9} = 0,49 = 49\%$
IV	1,2	$p(1,2) = \frac{(3-1,2)^2}{9} = \frac{1,8^2}{9} = \frac{3,24}{9} = 0,36 = 36\%$
V	1,5	$p(1,5) = \frac{(3-1,5)^2}{9} = \frac{1,5^2}{9} = \frac{2,25}{9} = 0,25 = 25\%$
VI	1,8	$p(1,8) = \frac{(3-1,8)}{9} = \frac{1,2}{9} = \frac{1,44}{9} = 0,16 = 16\%$
VII	2,1	$p(2,1) = \frac{(3-2,1)^2}{9} = \frac{0,9^2}{9} = \frac{0,81}{9} = 0,09 = 9\%$

Figura 118: Tabela 9 corretamente preenchida pelo grupo 2D

Assim, constatamos que todos os grupos apresentaram dificuldades ao responder à questão 1 da ficha de atividades 2 e consideramos, portanto, que esta pergunta foi respondida parcialmente. Quanto à questão 2, consideramos que 1 grupo respondeu incorretamente, 2 grupos apresentaram dificuldades e responderam parcialmente e os outros 5 grupos responderam corretamente.

A pergunta 3 foi respondida corretamente por todos os grupos das duas turmas, no qual deveriam construir o gráfico da função p(d). Desta vez os alunos não ligaram os pontos como haviam feito no primeiro bloco, e foram fiéis aos pontos marcados na tabela 9 (alguns grupos ligaram os pontos mas perceberam logo o erro e corrigiram).

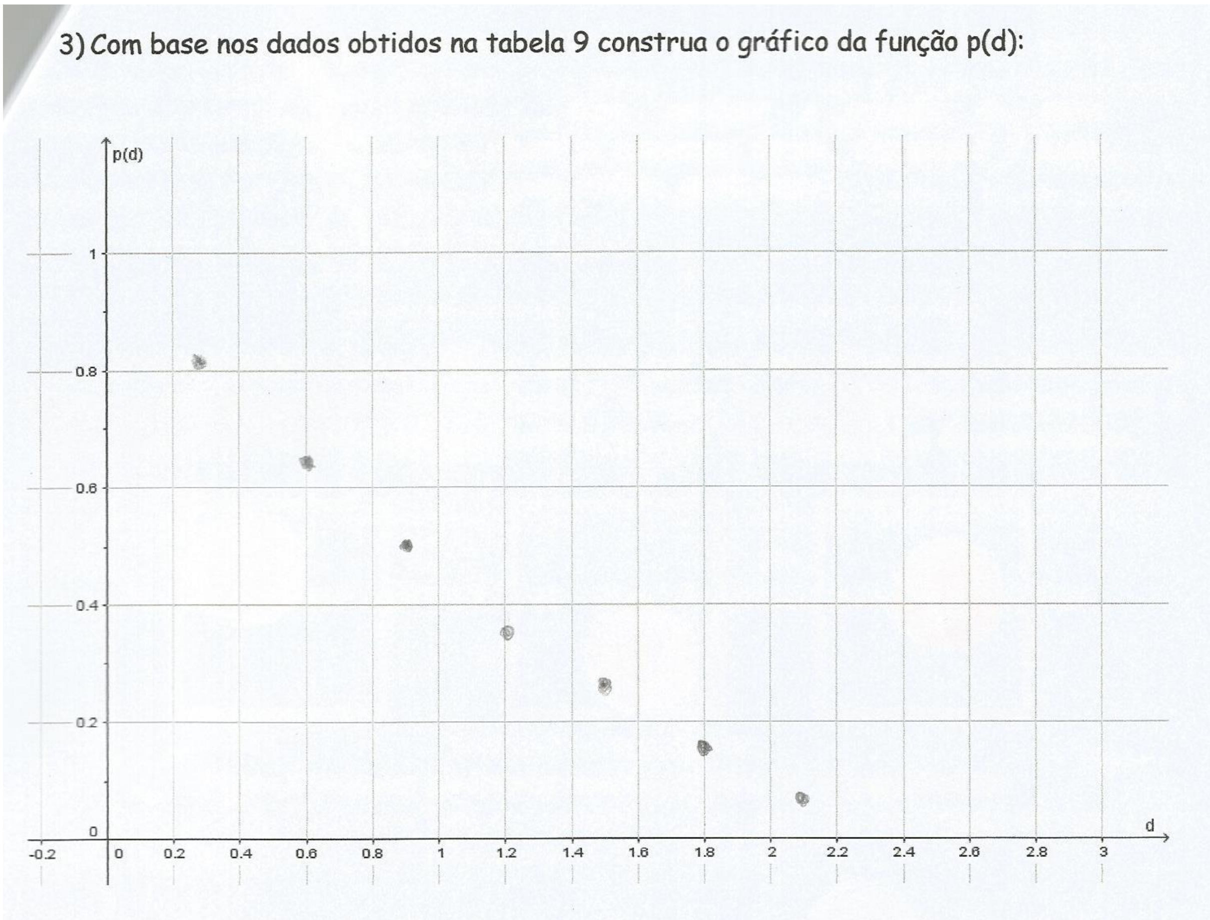


Figura 119: Gráfico corretamente construído pelo grupo 3D para a pergunta 3 da ficha de atividades 2

Consideramos que todos os 8 grupos construíram corretamente o gráfico da pergunta 3 da ficha de atividades 2.

Depois de respondida à pergunta 3 o pesquisador fez a leitura do texto intitulado “Leitura complementar”. A pergunta 4 foi respondida em grupo. Porém, antes de responder a esta pergunta o pesquisador solicitou aos grupos que consultassem a resposta da pergunta 1 da mesma ficha de atividades a fim de facilitar a compreensão da dedução pedida na pergunta. Consideramos que todos os 8 grupos responderam corretamente à questão 4 da ficha de atividades 2. Depois de terminada esta questão 4 deduzi junto com os grupos o perímetro do quadrado de contorno preto e qual é o perímetro do quadrado de contorno cinza. Os grupos participaram e ajudaram nas deduções, mas não registraram os resultados.

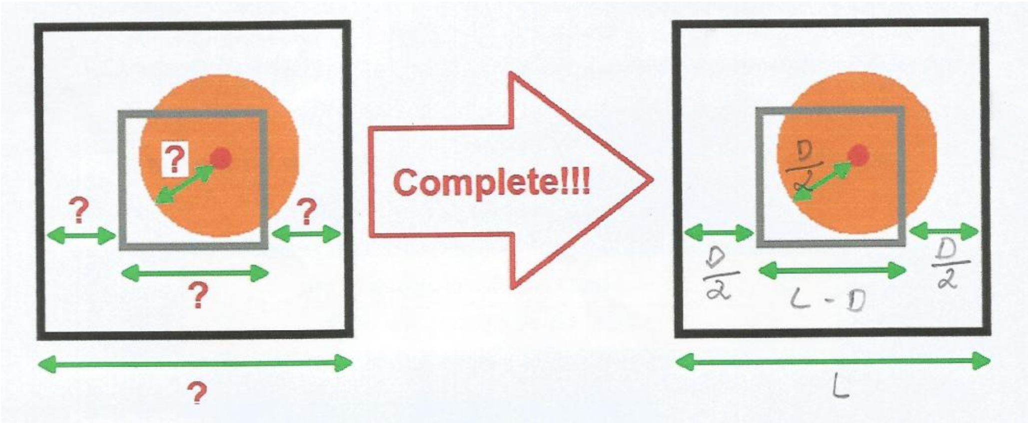


Figura 120: Resposta correta do grupo 5D para o exercício complementar da ficha de atividades 2

Figura 121: Alunos dos grupos 4D e 5D manuseando o notebook

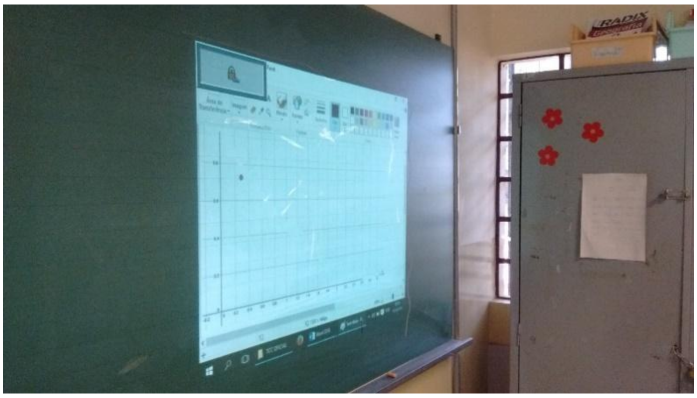
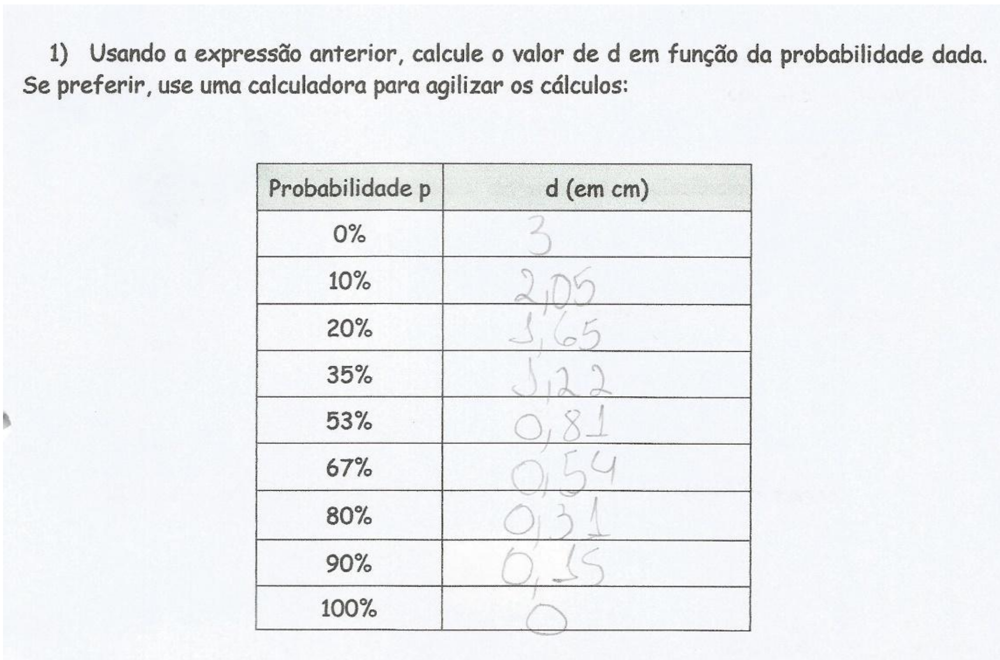


Figura 122: Projeção na lousa do gráfico da pergunta 3 da ficha de atividades 2 para a turma do 9.º ano E

6.3.4 Quarto dia de aplicação

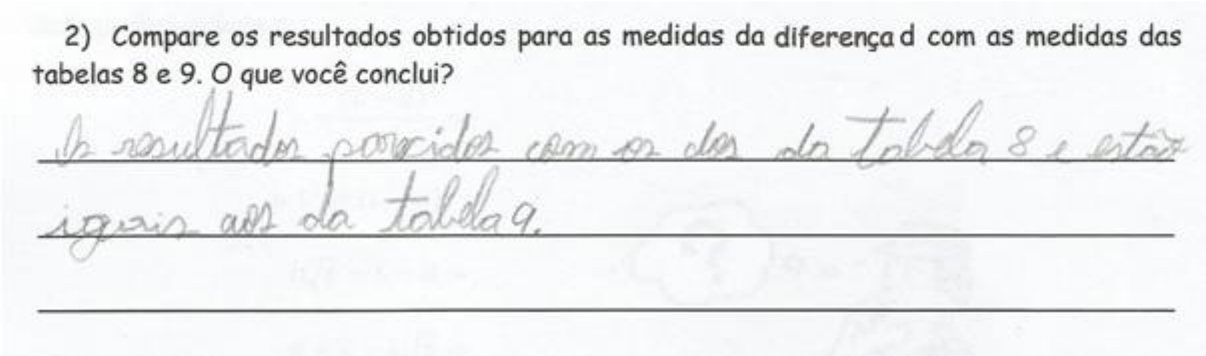
No quarto dia de aplicação, que corresponde a 2 aulas, os alunos realizaram as atividades do terceiro bloco de atividades. Os alunos receberam calculadoras para agilizar os cálculos de d. Novamente, um dos alunos fez a leitura das instruções a pedido do pesquisador. Seguindo as instruções, os grupos iniciaram a resolução das perguntas. O grupo 5D solicitou ajuda ao para utilizar a calculadora para calcular a raiz quadrada. Este grupo apresentou dificuldades quanto à ordem de resolução das operações na expressão $d = L.(1 - \sqrt{p})$. O pesquisador fez uma intervenção e o ajudou a responder inteira a questão 1 da ficha de atividades 3.



1) Usando a expressão anterior, calcule o valor de d em função da probabilidade dada. Se preferir, use uma calculadora para agilizar os cálculos:

Probabilidade p	d (em cm)
0%	3
10%	2,05
20%	1,65
35%	1,22
53%	0,81
67%	0,54
80%	0,31
90%	0,15
100%	0

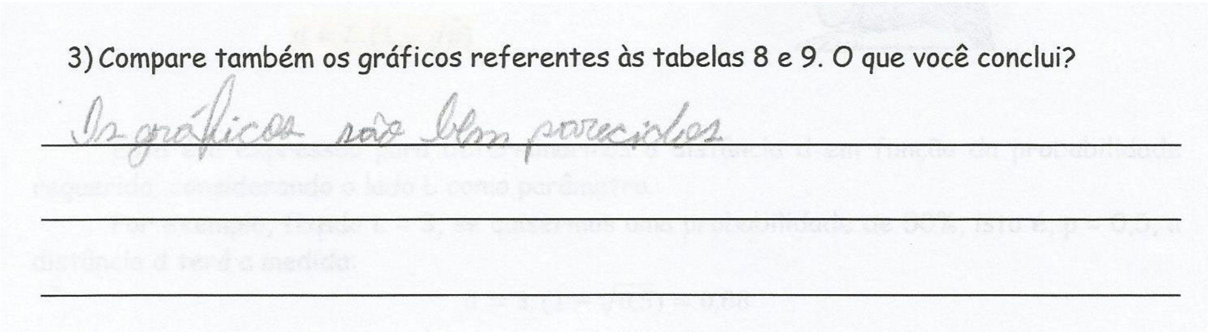
Figura 123: Tabela corretamente preenchida pelo grupo 3E para a pergunta 1 da ficha de atividades 3



2) Compare os resultados obtidos para as medidas da diferença d com as medidas das tabelas 8 e 9. O que você conclui?

Os resultados parecidos com os dos da tabela 8 e estão iguais aos da tabela 9.

Figura 124: Resposta correta do grupo 3E para a pergunta 2 da ficha de atividades 3



3) Compare também os gráficos referentes às tabelas 8 e 9. O que você conclui?

Os gráficos são bem parecidos

Figura 125: Resposta correta do grupo 3E para a pergunta 3 da ficha de atividades 3

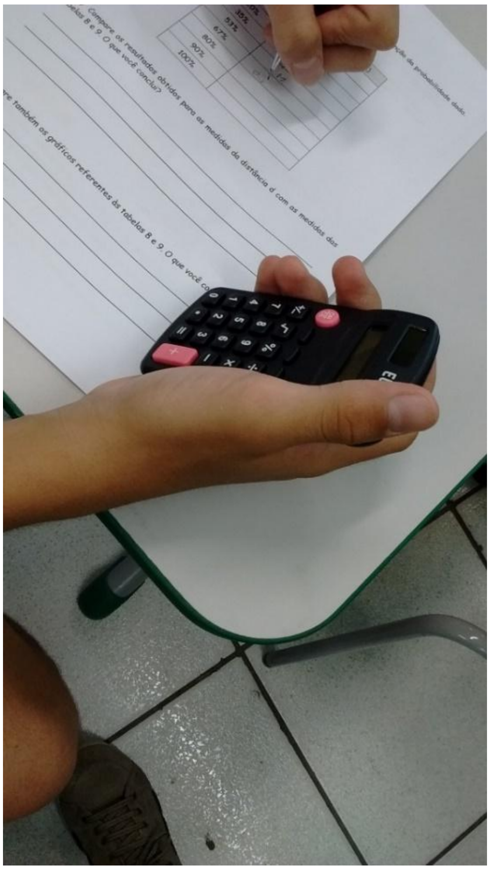


Figura 126: Aluno do grupo 5D utilizando uma calculadora

Quase todos os grupos concluíram rapidamente que a tabela da pergunta 1 apresentam resultados próximos aos da tabela 8 e resultados correspondentes aos da tabela 9. Também quase todos os grupos concluíram rapidamente que os gráficos referentes às tabelas 8 e 9 são parecidos. Uma das alunas do grupo 3D comentou que o texto das instruções explicava isto.

Figura 127: Alunas do grupo 3D

Consideramos que 1 grupo respondeu parcialmente à questão 1 da ficha de atividades 3, e todos os grupos responderam corretamente as questões 2 e 3 da ficha de atividades 3.

6.3.5 Quinto dia de aplicação

No quinto dia de aplicação, que corresponde a 2 aulas, os grupos realizaram as atividades do quarto bloco de atividades. Estas foram as 2 aulas mais “trabalhosas”, nas quais todo o tempo disponível foi utilizado e também uma parte do tempo da primeira aula do sexto dia de aplicação das atividades. Foram distribuídas calculadoras para agilizar todos os cálculos que fariam. Um dos alunos iniciou e outro finalizou a leitura das instruções a pedido do pesquisador. Alguns alunos das duas turmas comentaram que o texto das instruções era complicado de entender. Neste momento o pesquisador fez uma intervenção e explicou com mais detalhes a definição de função do 2.º grau, dando exemplos na lousa e construindo os gráficos correspondentes. A maioria dos alunos das duas turmas ficou “assustada” num primeiro momento. Após a intervenção eles ficaram mais “calmos”, e então, seguindo as instruções, os grupos iniciaram a resolução. O pesquisador pediu que todos os grupos prestassem atenção à resolução do primeiro problema de otimização, que serve de base para a resolução do segundo problema de otimização, o qual eles deveriam resolver. Uma das alunas do grupo 3E perguntou se a raiz –8 significava que o prejuízo do dono do cinema era 8 reais, e se a raiz 20 significava que o lucro era 20 reais. Perguntou também se o preço cobrado 20 – 8 = 12 reais corresponderia ao lucro máximo. Neste momento o pesquisador fez uma intervenção geral e pediu aos alunos que lessem novamente as instruções e que dessem atenção especial ao gráfico apresentado e ao cálculo do vértice da parábola. Ainda sim o grupo 3E pediu ajuda para responder ao segundo problema, ainda durante a leitura das instruções. De um modo geral, todos os grupos apresentaram dificuldades em resolver este segundo problema e levaram um tempo maior do que o imaginado, sendo necessário parte do tempo da primeira aula do quinto dia de aplicação das atividades. O pesquisador fez várias intervenções e, em determinado momento, achou melhor que a resolução fosse feita em conjunto em ambas as turmas. Pediu que dois alunos de grupos diferentes fossem à lousa e resolvessem as perguntas com o auxílio do pesquisador. Foram utilizados, então, a lousa e a projeção do datashow.

Problema 2:

Um ônibus de viagem com capacidade máxima para 46 passageiros foi fretado para uma excursão. Cada passageiro pagou R$ 180,00 pela passagem mais R$ 10,00 por cada lugar vago. Para qual quantidade de passageiros a rentabilidade da empresa de turismo é máxima?

Roteiro:

Seja R(x) a função receita, isto é, a função que nos possibilita obter a receita de acordo com o número de lugares vagos (x).

R(x) = preço da passagem VEZES quantidade de passageiros

a) Calcule R(0).

$R(0) = 180 \cdot 46 = 8\,280$

b) Calcule R(1).

$R(1) = (180 + 10 \cdot 1) \cdot (46 - 1) = 190 \cdot 45 = 8\,550$

c) Calcule R(2).

$R(2) = (180 + 10 \cdot 2) \cdot (46 - 2) = 200 \cdot 44 = 8\,800$

d) Determine a expressão R(x).

$R(x) = (180 + 10x) \cdot (46 - x)$

Figura 128: Resposta correta do grupo 3E para o problema 2 itens a, b, c e d da ficha de atividades 4

e) Calcule e preencha a tabela a seguir:

x (quantidade de lugares vagos)	p(x) (preço da passagem, em reais)	q(x) (quantidade de passageiros)	R(x) (receita arrecadada, em reais)
0	180	46	8 280
1	190	45	8 550
2	200	44	8 800
3	210	43	9 030
4	220	42	9 240
5	230	41	9 430
⋮	⋮	⋮	⋮
10	280	36	10 080
⋮	⋮	⋮	⋮
20	380	26	9 880
⋮	⋮	⋮	⋮
30	480	16	7680
⋮	⋮	⋮	⋮
40	580	4	3480
⋮	⋮	⋮	⋮
42	600	2	2400
⋮	⋮	⋮	⋮
44	620	0	1240
⋮	⋮	⋮	⋮
46	640	0	0

Figura 129: Resposta correta do grupo 3E para o problema 2 item e da ficha de atividades 4

No item f do problema 2 os grupos começaram a construção do gráfico marcando os pontos correspondentes às receitas calculadas em função da quantidade de lugares vagos. Porém, todos os grupos construíram o gráfico com uma linha contínua, na região onde a abscissa é negativa. E no item g responderam que o gráfico não é uma linha contínua porque é formado por pontos discretos. O pesquisador fez uma intervenção e explicou que o gráfico não deveria ser construído com uma linha contínua "porque é formado por pontos discretos que correspondem aos valores calculados".

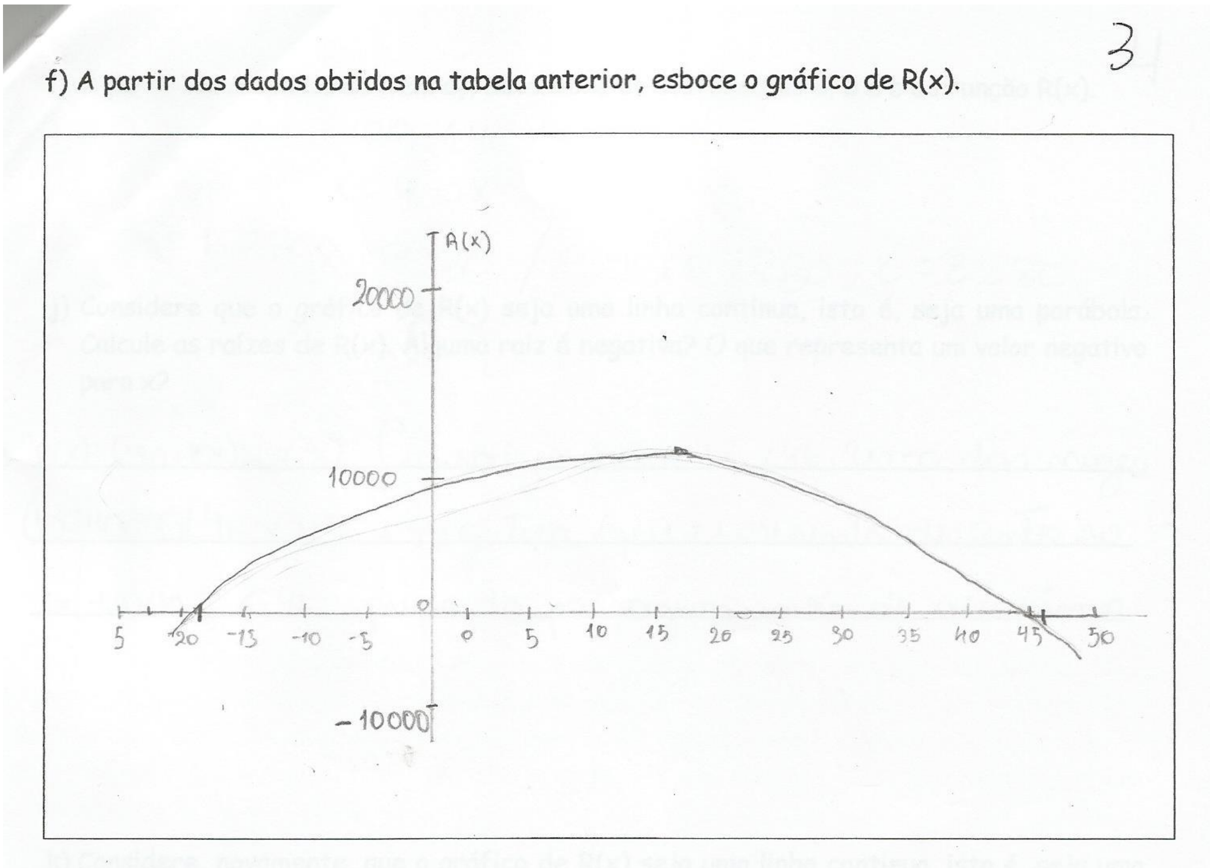
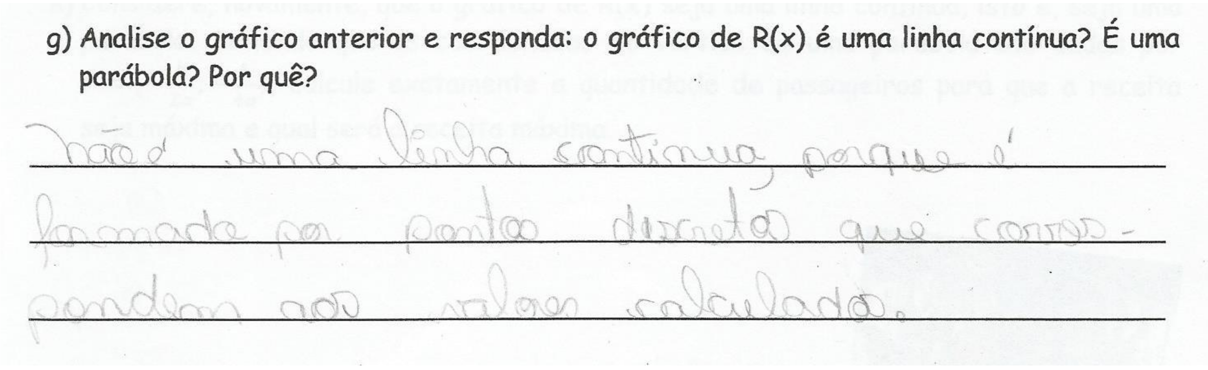
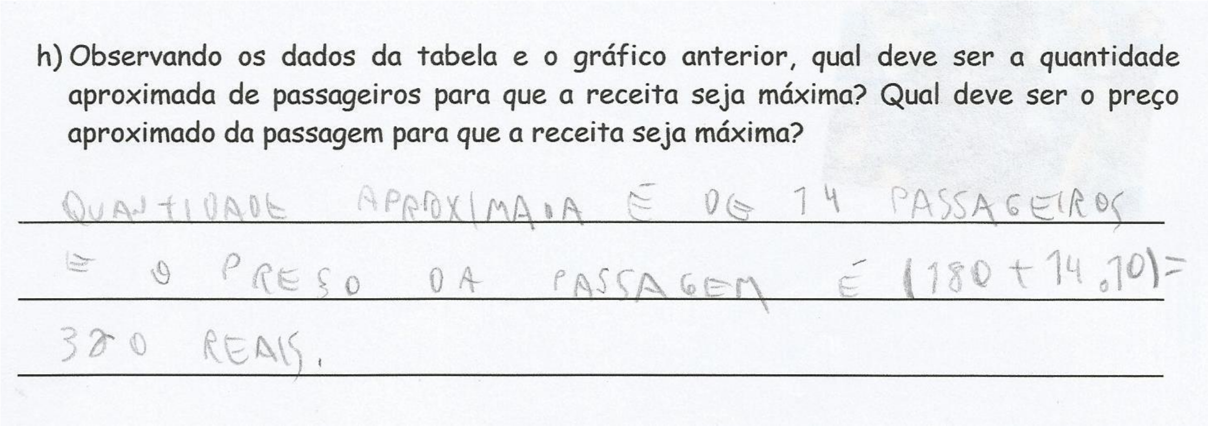

f) A partir dos dados obtidos na tabela anterior, esboce o gráfico de R(x).

Figura 130: Gráfico construído com linha contínua pelo grupo 2D para o problema 2 item f da ficha de atividades 4


g) Analise o gráfico anterior e responda: o gráfico de R(x) é uma linha contínua? É uma parábola? Por quê?

não é uma linha continua, porque é formada por pontos discretos que corres-pondem aos valores calculados.

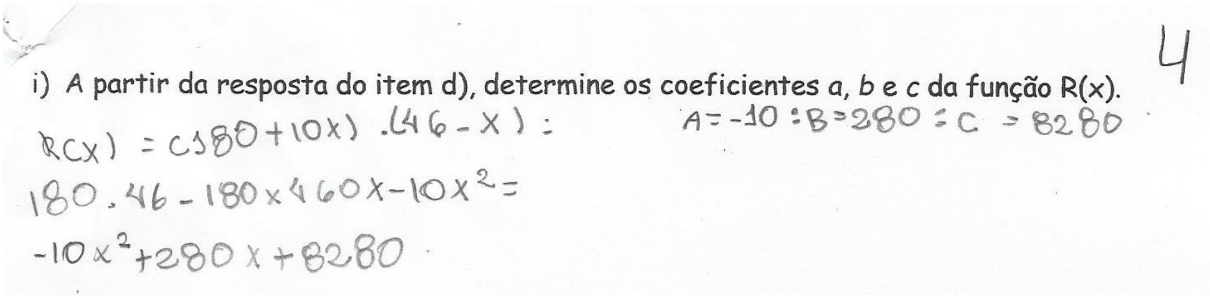
Figura 131: Resposta correta do grupo 2D para o problema 2 item g da ficha de atividades 4



h) Observando os dados da tabela e o gráfico anterior, qual deve ser a quantidade aproximada de passageiros para que a receita seja máxima? Qual deve ser o preço aproximado da passagem para que a receita seja máxima?

QUANTIDADE APROXIMADA É DE 14 PASSAGEIROS E O PRESO DA PASSAGEM É $(180 + 14 . 10) =$ 320 REAIS.

Figura 132: Resposta correta do grupo 2E para o problema 2 item h da ficha de atividades 4



i) A partir da resposta do item d), determine os coeficientes *a*, *b* e *c* da função R(x).

4

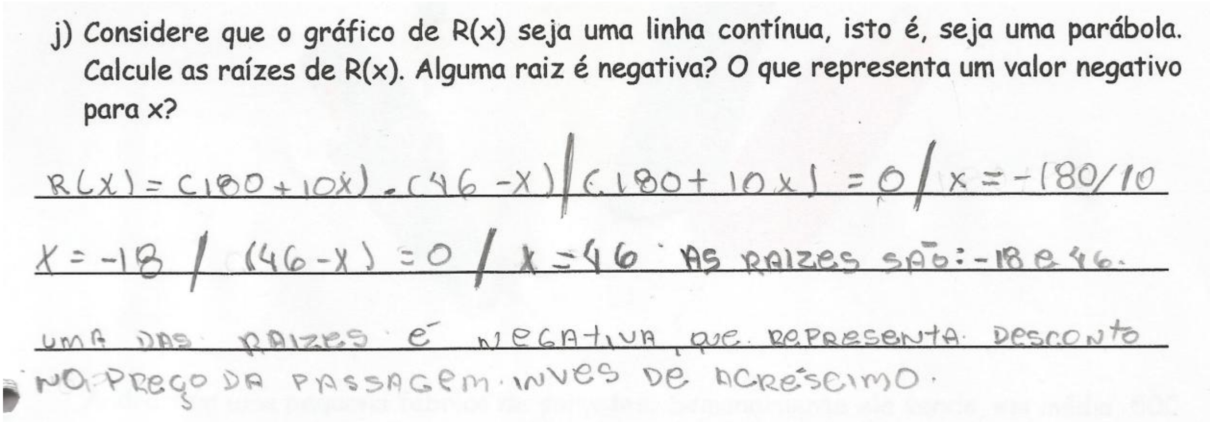
$R(x) = (180 + 10x) . (46 - x) :$ $A = -10 : B = 280 : C = 8280$

$180 . 46 - 180x + 460x - 10x^2 =$

$-10x^2 + 280x + 8280$

Figura 133: Resposta correta do grupo 3D para o problema 2 item i da ficha de atividades 4

No item j os grupos de ambas as turmas preferiram calcular as raízes da função R(x) por fatoração ao invés de utilizar a fórmula resolutiva (Bhaskara). Os grupos 1D e 2D cometeram os mesmos erros no cálculo da primeira raiz, esquecendo-se de colocar o sinal negativo e obtendo dois acréscimos possíveis para o preço da passagem. Porém, este erro foi rapidamente percebido e corrigido por alunos de outros grupos.



j) Considere que o gráfico de R(x) seja uma linha contínua, isto é, seja uma parábola. Calcule as raízes de R(x). Alguma raiz é negativa? O que representa um valor negativo para x?

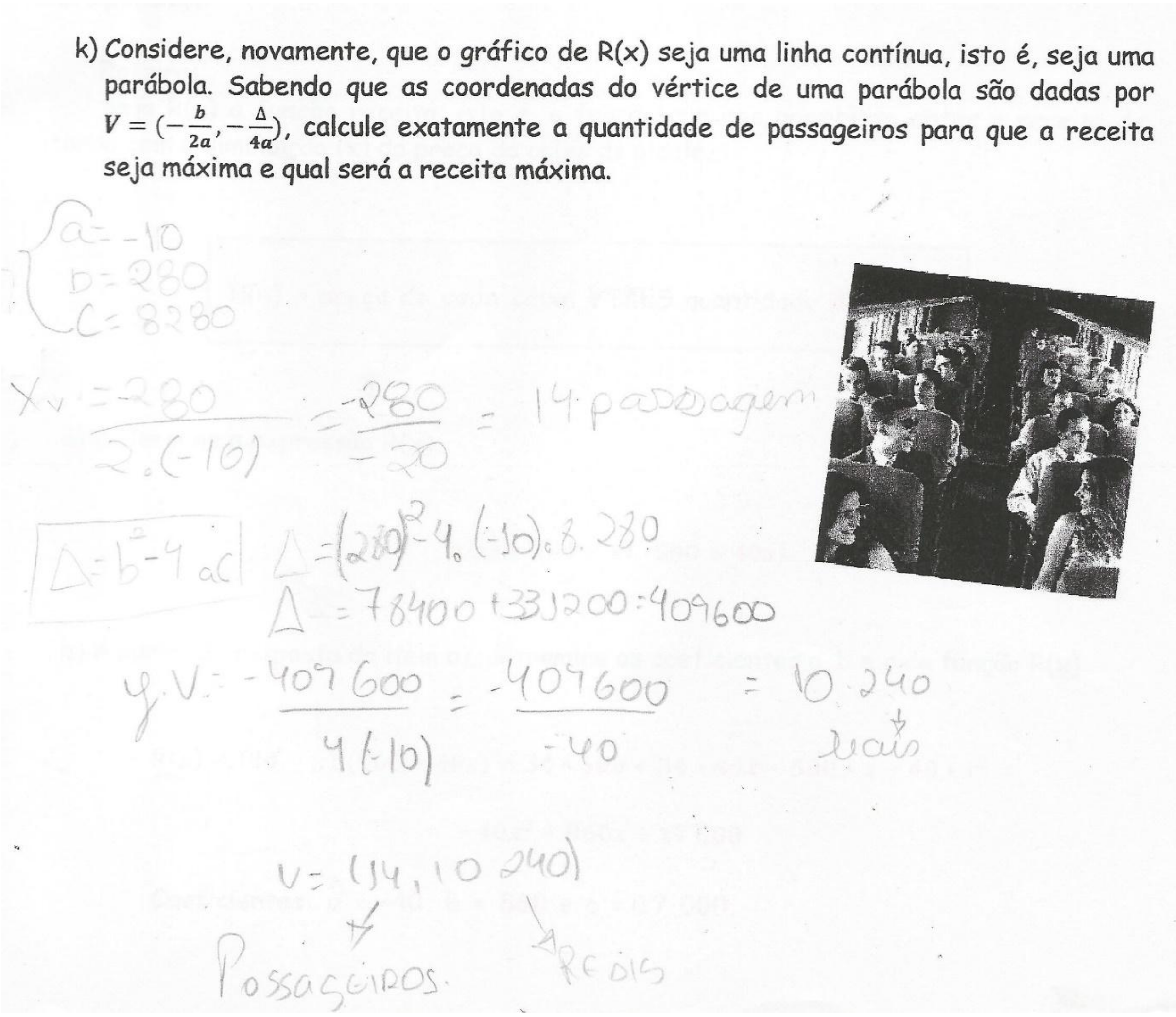
R(x) = (180 + 10x) . (46 − x) / (180 + 10x) = 0 / x = −180/10

x = −18 / (46 − x) = 0 / x = 46 AS RAIZES SÃO: −18 e 46.

UMA DAS RAIZES É NEGATIVA, QUE REPRESENTA DESCONTO NO PREÇO DA PASSAGEM INVES DE ACRÉSCIMO.

Figura 134: Resposta correta do grupo 3D para o problema 2 item j da ficha de atividades 4

Os grupos 1D, 2D, 2E e 3E apresentaram dificuldades para responder o item k, no qual deveriam calcular as coordenadas do vértice da parábola e desta forma obter exatamente a quantidade de passageiros para que a receita seja máxima e qual é esta receita máxima. Os grupos de ambas as turmas entraram em “conflito” ao analisarem o gráfico do item f; havia grupos que afirmavam que a quantidade de passageiros deveria ser 13, outros que deveria ser 14 e outros que deveria ser 15. Neste momento o pesquisador fez uma intervenção e perguntou aos grupos qual era o motivo pelo qual as respostas estavam diferentes. Alguns alunos disseram que se basearam nos gráficos construídos no item f e nas respostas do item h. Então, ajudou-os a calcular as coordenadas do vértice e a obter as respostas corretas. Todos puderam perceber que a quantidade exata de passageiros para que a receita seja máxima é 14, o preço da passagem deve ser 320 reais e a receita máxima, nestas condições, será 10 240 reais.



k) Considere, novamente, que o gráfico de R(x) seja uma linha contínua, isto é, seja uma parábola. Sabendo que as coordenadas do vértice de uma parábola são dadas por $V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$, calcule exatamente a quantidade de passageiros para que a receita seja máxima e qual será a receita máxima.

$$\begin{cases} a = -10 \\ b = 280 \\ c = 8280 \end{cases}$$

$$X_v = \frac{-280}{2.(-10)} = \frac{-280}{-20} = 14 \text{ passagem}$$

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac} \quad \Delta = (280)^2 - 4.(-10).8.280$$

$$\Delta = 78400 + 331200 = 409600$$

$$y.V. = \frac{-409600}{4(-10)} = \frac{-409600}{-40} = 10.240 \text{ reais}$$

$$V = (14, 10\,240)$$

Passageiros. Reais

Figura 135: Resposta correta do grupo 2D para o problema 2 item k da ficha de atividades 4

Os grupos terminaram a resolução deste problema 2 e logo a segunda aula de aplicação terminou, não restando tempo para a resolução do problema de otimização 3 que ficou, então, para a próxima aula. De um modo geral todos os grupos ficaram “cansados” após este dia de atividades. Porém, cabe ressaltar que todos os grupos mantiveram uma postura de comprometimento durante todo o tempo em que estiveram resolvendo o problema 2.

Constatamos que todos os grupos apresentaram dificuldades para resolver o problema 2 da ficha de atividades 4. Diante de todas estas dificuldades consideramos, portanto, que todos os itens deste problema foram respondidos parcialmente pelos grupos, apesar de apresentarem respostas corretas.

6.3.6 Sexto dia de aplicação

No sexto e último dia de aplicação, que corresponde a 2 aulas, o problema de otimização 3 foi retomado. Os grupos acompanharam a resolução deste problema através da projeção na lousa. Desta vez não o pesquisador não pediu para algum aluno ler, pois os grupos deveriam apenas acompanhar a resolução feita por ele. Desta forma, o pesquisador leu e explicou todas as respostas e instruções para a construção do gráfico utilizando o software GeoGebra. No dia anterior o pesquisador havia pedido aos alunos que possuem smartphone com sistema operacional Android para instalar o aplicativo GeoGebra Calculadora Gráfica. Quase todos instalaram e, felizmente, em todos os grupos havia pelo menos um aluno com um smartphone com o aplicativo instalado.

Consideramos que todos os alunos acompanharam a resolução feita pelo pesquisador utilizando notebook, datashow e o software GeoGebra.

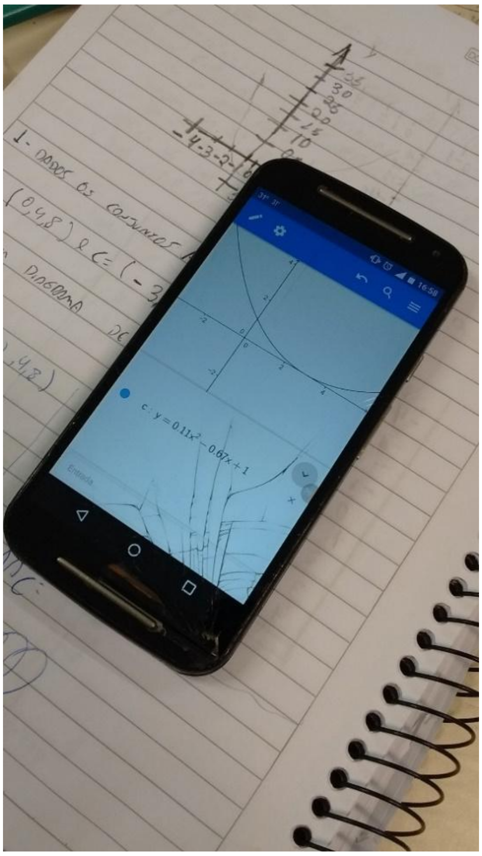


Figura 136: Smartphone de um aluno do grupo 1D com o aplicativo GeoGebra Calculadora Gráfica instalado

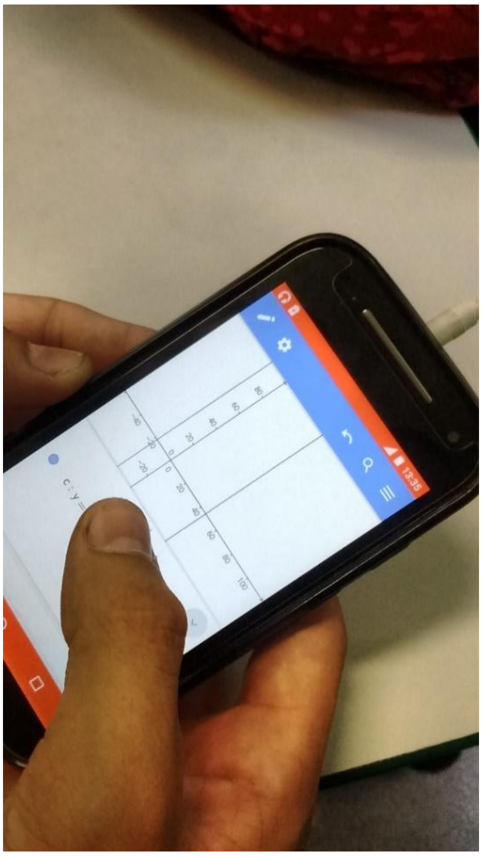
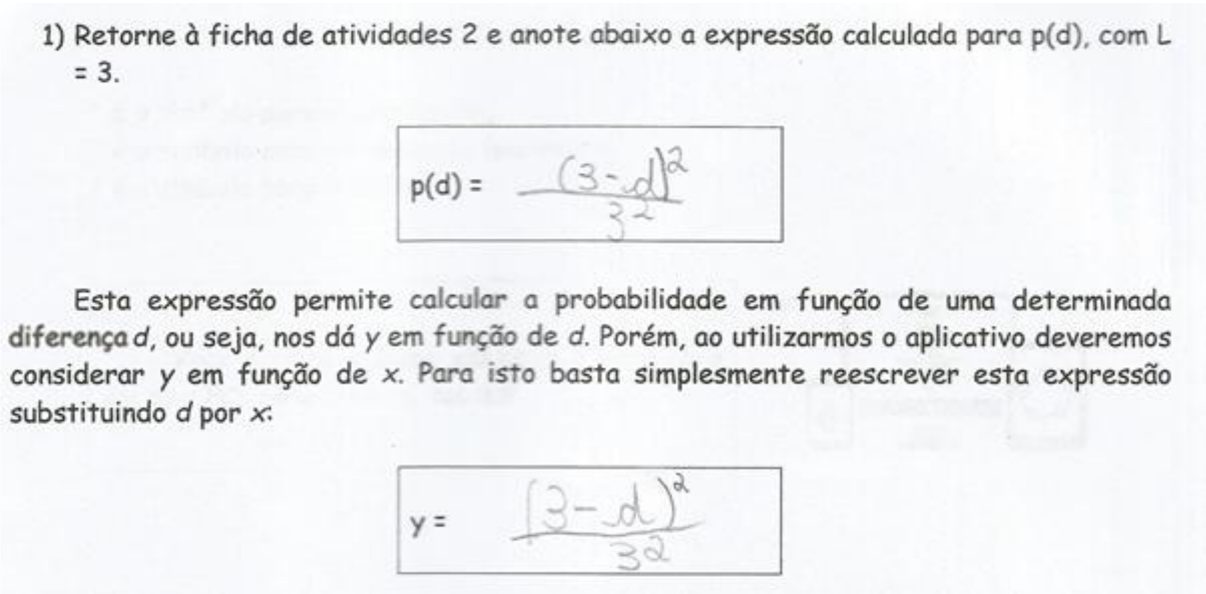


Figura 137: Smartphone de um aluno do grupo 1E com o aplicativo GeoGebra Calculadora Gráfica instalado

Todos puderam acompanhar e também reproduzir a resposta apresentada, e não foi necessário acessar a internet móvel para utilizar o GeoGebra, conforme a alternativa das instruções. Durante a resolução, dois alunos do grupo 1E quiseram comentar o item c, cuja pergunta é: *“Pense e responda: o gráfico de R(x) será uma linha contínua? Por quê?”* Ambos comentaram que desta vez entenderam porque o gráfico não é uma linha contínua, pois os valores de x podem variam em centavos e há “espaços vazios” entre os centavos. Seguindo a resposta, o pesquisador solicitou a ajuda de uma aluna do grupo 3D e de um aluno do grupo 2E, pois quase todos os grupos demonstraram interesse em reproduzir a resposta nos smartphones, apesar da proposta fosse que eles apenas acompanhassem a resolução com a projeção do software GeoGebra. Ambos estes alunos comentaram que haviam achado fácil utilizar o aplicativo GeoGebra e demonstraram habilidade e rapidez no manuseio do aplicativo. Outros alunos também comentaram que acharam fácil utilizar o aplicativo, porém não demonstraram a mesma habilidade e tanta rapidez no manuseio do mesmo. Sendo assim, o pesquisador achou conveniente que a referida aluna do grupo 3D e o referido aluno do grupo 2E auxiliassem todos os grupos na resolução do problema 3. Posteriormente estes alunos disseram que haviam manuseado em casa o aplicativo. Ambos aceitaram prontamente ajudar e, então, prossegui com a resolução. O pesquisador percebeu que com a ajuda deles a resolução foi mais rápida.

Depois de terminada a resolução do problema 3 finalmente o pesquisador iniciou a leitura das instruções para a ficha de atividades 5. Os grupos receberam as instruções e as fichas de atividades anteriores, pois já na questão 1 deveriam consultar a ficha de atividades 2 e anotar a expressão para p(d), com L = 3.



1) Retorne à ficha de atividades 2 e anote abaixo a expressão calculada para p(d), com L = 3.

$$p(d) = \frac{(3-d)^2}{3^2}$$

Esta expressão permite calcular a probabilidade em função de uma determinada diferença *d*, ou seja, nos dá *y* em função de *d*. Porém, ao utilizarmos o aplicativo deveremos considerar *y* em função de *x*. Para isto basta simplesmente reescrever esta expressão substituindo *d* por *x*:

$$y = \frac{(3-d)^2}{3^2}$$

Figura 138: Resposta correta do grupo 3E para a pergunta 1 da ficha de atividades 5

Em algumas das questões seguintes os grupos deveriam consultar outras expressões de fichas de atividades anteriores. Neste momento o pesquisador ficou preocupado com o tempo restante para o término desta última ficha de atividades, pois não queria que elas se estendessem por mais um dia. No 9.º ano D as atividades tiveram início 1 semana antes em relação ao 9.º ano E e, desta forma, em dois momentos esta preocupação foi sentida. Mas, felizmente, as atividades terminaram com apenas 1 dia a mais do que o previsto. Portanto, achou mais conveniente ajudar os alunos a responderem as questões finais, junto com os alunos referidos anteriormente. De forma geral a resolução feita desta forma foi tranquila e sem tantas dificuldades como as que os alunos apresentaram ao resolver o problema 2 da ficha de atividades 4.

2) Observando a parábola apresentada pelo aplicativo e retomando a ficha de atividades 2, complete o que se pede:

a) A concavidade da parábola é para cima, pois o coeficiente a é positivo.

b) Cada ponto marcado no plano cartesiano representa uma probabilidade, em função da distância d.

c) À medida que a diferença d aumenta observamos que a probabilidade de acerto diminui.

d) p(0) = 1.

e) p(3) = 0.

Figura 139: Resposta correta do grupo 3E para a pergunta 2 itens a até e da ficha de atividades 5

3) Responda às perguntas:

f) Uma diferença visível entre a parábola da ficha de atividades 2 e a do aplicativo é que esta última não se restringe ao intervalo [0, 3]. Por que há esta diferença?

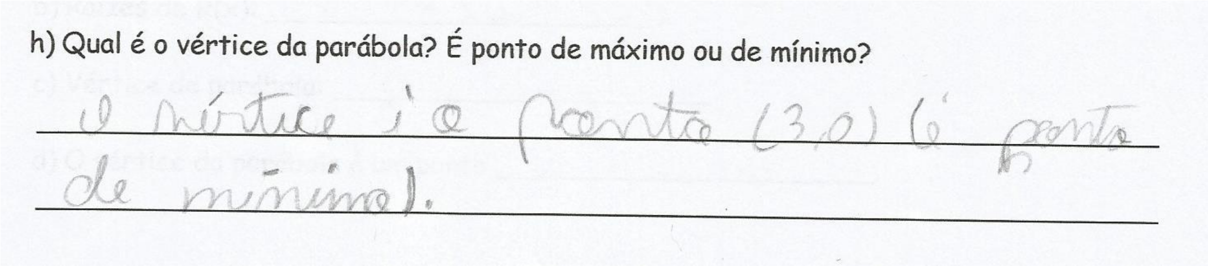
Porque a distância varia entre 0 e 3. É no mínimo 0 e no máximo 3.

Figura 140: Resposta correta do grupo 3E para a pergunta 3 item f da ficha de atividades 5

g) A função p(d) possui raízes? Quantas?

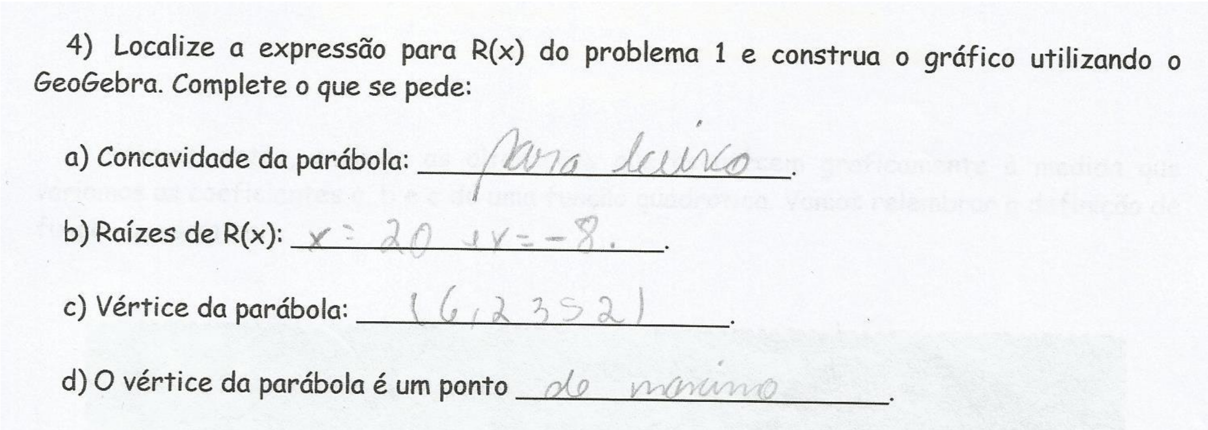
Sim, possui duas raízes

Figura 141: Resposta correta do grupo 1E para a pergunta 3 item g da ficha de atividades 5


h) Qual é o vértice da parábola? É ponto de máximo ou de mínimo?

O vértice é o ponto (3,0) (é ponto de mínimo).

Figura 142: Resposta correta do grupo 1E para a pergunta 3 item h da ficha de atividades 5


4) Localize a expressão para R(x) do problema 1 e construa o gráfico utilizando o GeoGebra. Complete o que se pede:

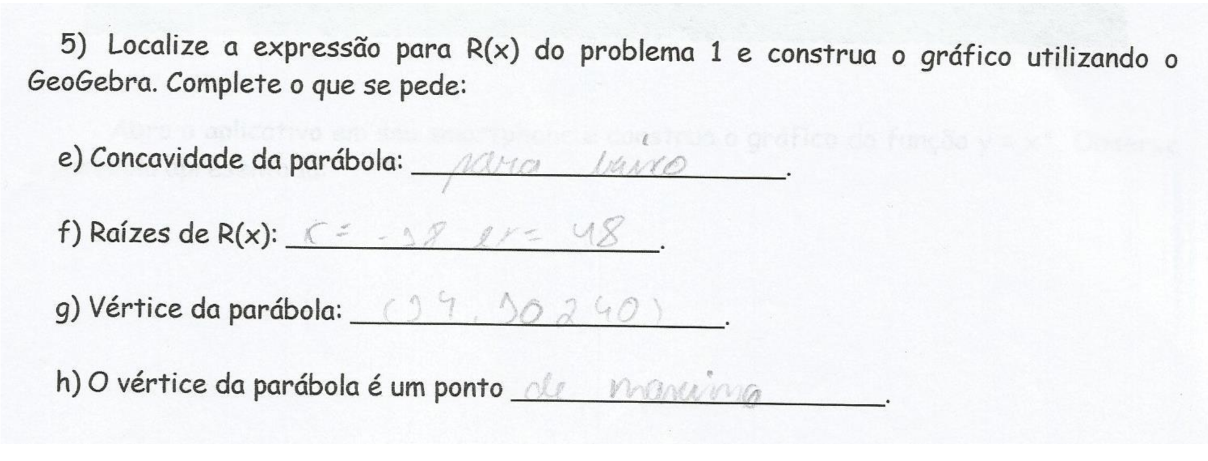
a) Concavidade da parábola: para baixo.

b) Raízes de R(x): x = 20 e x = -8..

c) Vértice da parábola: (6, 2352).

d) O vértice da parábola é um ponto de máximo.

Figura 143: Resposta correta do grupo 1E para a pergunta 4 itens a, b, c e d da ficha de atividades 5


5) Localize a expressão para R(x) do problema 1 e construa o gráfico utilizando o GeoGebra. Complete o que se pede:

e) Concavidade da parábola: para baixo.

f) Raízes de R(x): x = -14 e x = 48.

g) Vértice da parábola: (17, 30240).

h) O vértice da parábola é um ponto de máximo.

Figura 144: Resposta correta do grupo 1E para a pergunta 5 itens e, f, g e h da ficha de atividades 5

6) Localize a expressão para R(x) do problema 3 e construa o gráfico utilizando o aplicativo. Complete o que se pede:

a) Concavidade da parábola: para baixo.

b) Raízes de R(x): x = 9 e x = 12,5.

c) Vértice da parábola: (10,75 ; 21622,50).

d) O vértice da parábola é um ponto de máximo.

Figura 145: Resposta correta do grupo 5D para a pergunta 6 itens a, b, c e d da ficha de atividades 5

7) Complete os valores dos coeficientes: a = 1, b = 1 e c = 1.

Construa o gráfico das funções quadráticas a seguir, anote os valores dos coeficientes e responda às perguntas. Compare as parábolas obtidas com a parábola correspondente à função $y = x^2$.

a) $y = -x^2 \rightarrow a$ = -1, b = -0 e c = 0

O que a alteração no sinal do coeficiente a fez com a parábola?

MUDOU A CONCAVIDADE

Figura 146: Resposta correta do grupo 1D para a pergunta 7 item a da ficha de atividades 5

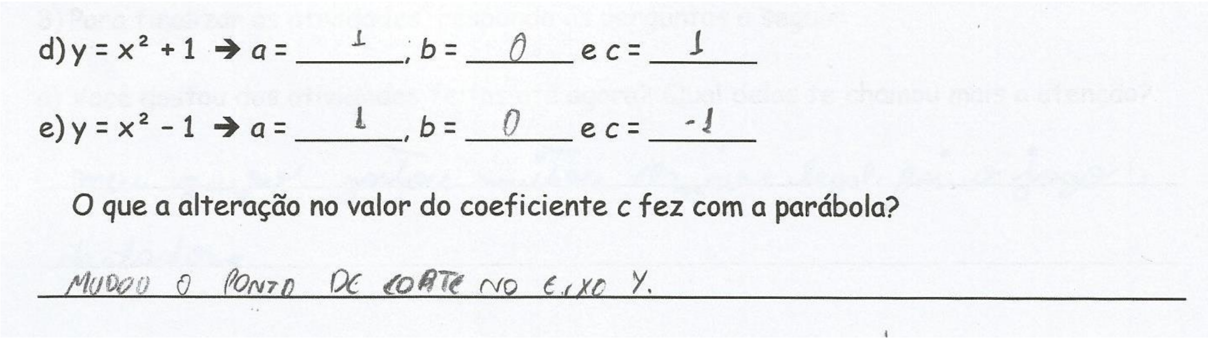
b) $y = 2x^2 \rightarrow a$ = 2, b = 0 e c = 0

c) $y = 5x^2 \rightarrow a$ = 5, b = 0 e c = 0

O que a alteração no valor do coeficiente a fez com a parábola?

FECHOU A PARÁBOLA

Figura 147: Resposta correta do grupo 1D para a pergunta 7 itens b e c da ficha de atividades 5



d) $y = x^2 + 1$ ➔ $a =$ 1, $b =$ 0 e $c =$ 1

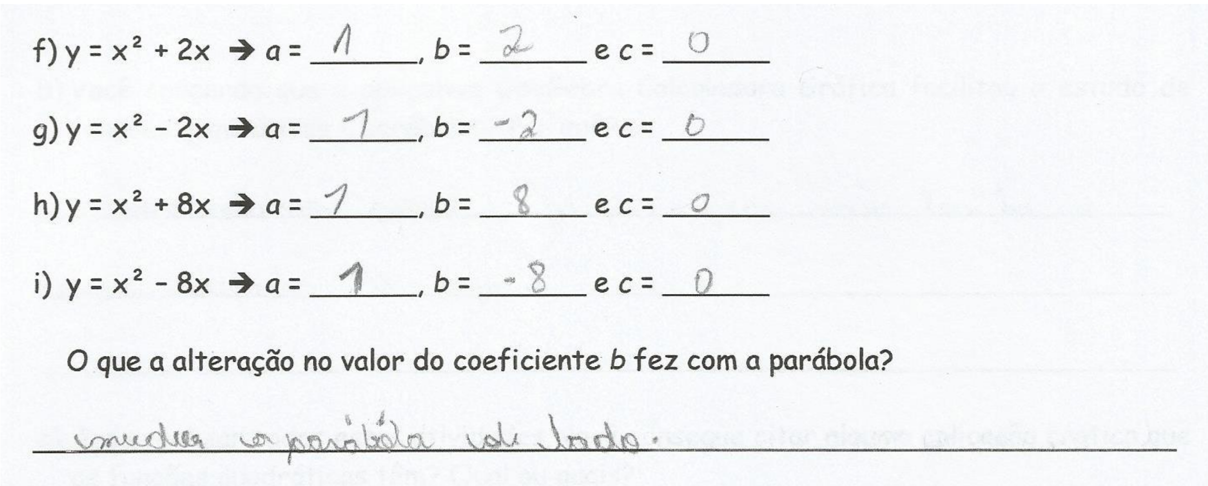
e) $y = x^2 - 1$ ➔ $a =$ 1, $b =$ 0 e $c =$ -1

O que a alteração no valor do coeficiente *c* fez com a parábola?

MUDOU O PONTO DE CORTE NO EIXO Y.

Figura 148: Resposta correta do grupo 1D para a pergunta 7 itens d até e da ficha de atividades 5

Uma observação interessante é sobre a pergunta feita após o item i) da questão 7, que é: *"O que a alteração no valor do coeficiente b fez com a parábola?"* Para responder a esta questão os grupos deveriam comparar os gráficos das funções $y = x^2 + 8x$ e $y = x^2 - 8x$ e concluir que esta alteração (mudança de sinal do coeficiente *b*) fez com que a parábola fosse transladada na horizontal, mantendo a raiz $x = 0$ e trocando o sinal da outra raiz. Os grupos 4D e 5D desconsideraram o fato de que a raiz $x = 0$ foi mantida e que a outra raiz teve o sinal trocado, e apenas responderam: *"Mudou a parábola de lado".*



f) $y = x^2 + 2x$ ➔ $a =$ 1, $b =$ 2 e $c =$ 0

g) $y = x^2 - 2x$ ➔ $a =$ 1, $b =$ -2 e $c =$ 0

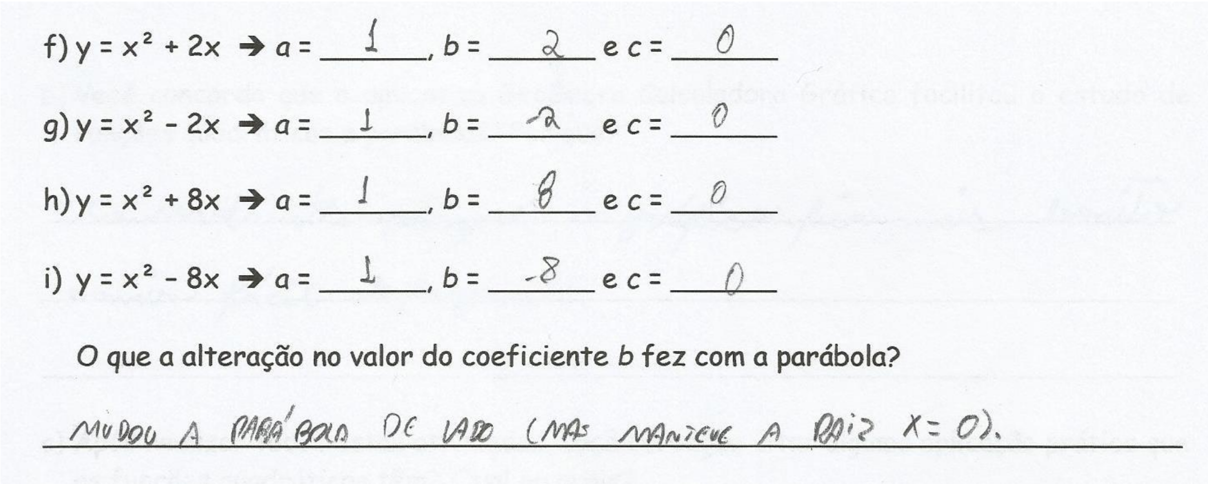
h) $y = x^2 + 8x$ ➔ $a =$ 1, $b =$ 8 e $c =$ 0

i) $y = x^2 - 8x$ ➔ $a =$ 1, $b =$ -8 e $c =$ 0

O que a alteração no valor do coeficiente *b* fez com a parábola?

mudou a parábola de lado.

Figura 149: Resposta parcialmente correta do grupo 5D para a pergunta 7 itens f, g, h e i da ficha de atividades 5



f) $y = x^2 + 2x \rightarrow a =$ 1, $b =$ 2 e $c =$ 0

g) $y = x^2 - 2x \rightarrow a =$ 1, $b =$ -2 e $c =$ 0

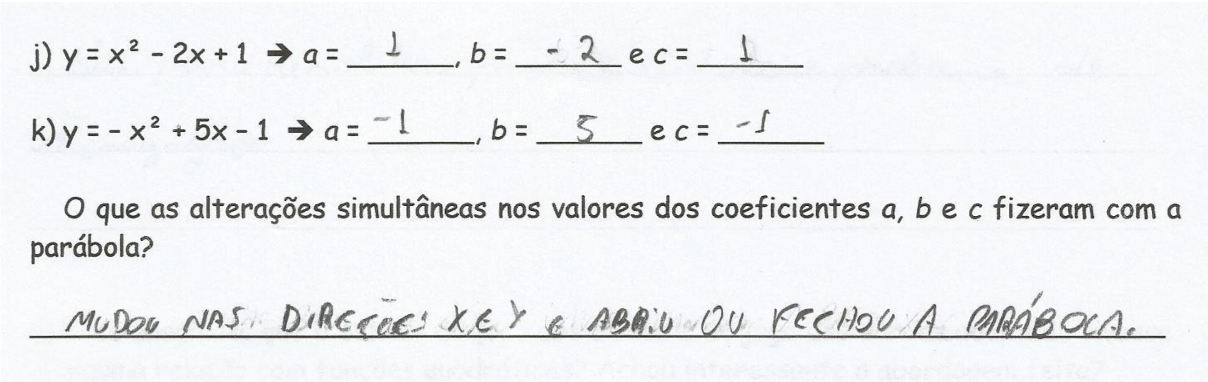
h) $y = x^2 + 8x \rightarrow a =$ 1, $b =$ 8 e $c =$ 0

i) $y = x^2 - 8x \rightarrow a =$ 1, $b =$ -8 e $c =$ 0

O que a alteração no valor do coeficiente *b* fez com a parábola?

MUDOU A PARÁBOLA DE LADO (MAS MANTEVE A RAIZ X = 0).

Figura 150: Resposta correta do grupo 1D para a pergunta 7 itens f, g, h e i da ficha de atividades 5



j) $y = x^2 - 2x + 1 \rightarrow a =$ 1, $b =$ -2 e $c =$ 1

k) $y = -x^2 + 5x - 1 \rightarrow a =$ -1, $b =$ 5 e $c =$ -1

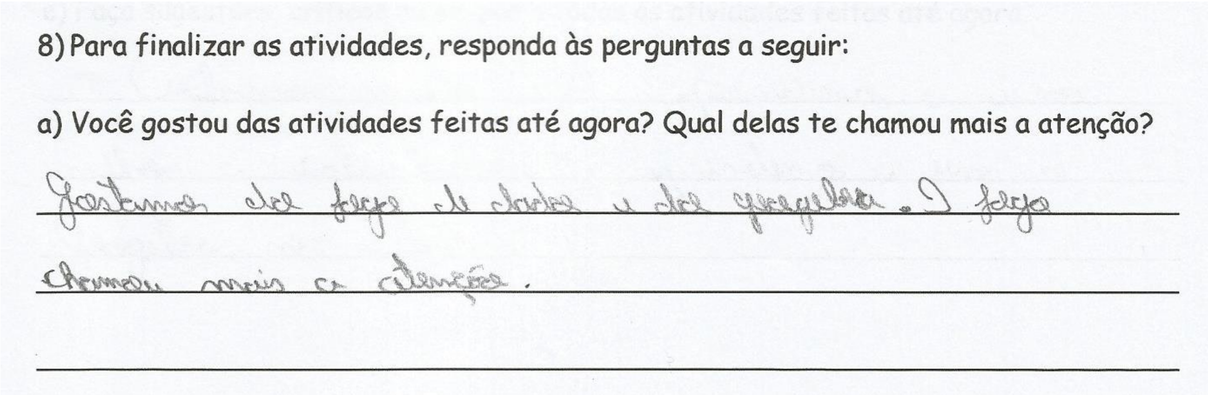
O que as alterações simultâneas nos valores dos coeficientes *a*, *b* e *c* fizeram com a parábola?

MUDOU NAS DIREÇÕES X E Y E ABRIU OU FECHOU A PARÁBOLA.

Figura 151: Resposta correta do grupo 1D para a pergunta 7 itens j e k da ficha de atividades 5

Consideramos que apenas a pergunta feita após o item k da questão 7 da ficha de atividades 5 foi respondida parcialmente por 2 grupos, e as demais questões foram respondidas corretamente pelos outros 6 grupos e pelos referidos 2 grupos, apesar da resolução ter sido feita em conjunto com a turma toda.

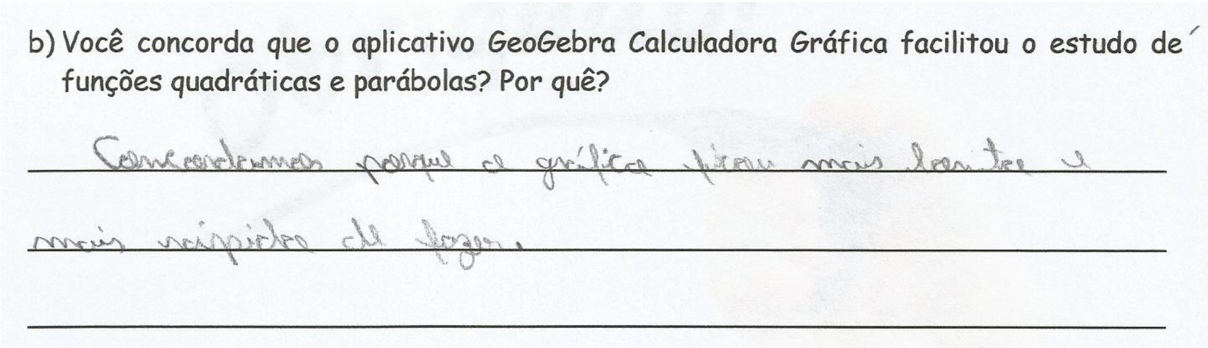
Para finalizar esta última ficha de atividades os grupos responderam a questão 8, que consiste basicamente em verificar 4 itens: quais são as opiniões dos alunos quanto a aplicação de todas as atividades; se conseguem citar aplicações práticas para funções quadráticas; se imaginavam que as atividades e os jogos realizados conduziriam ao estudo de funções quadráticas; e, finalmente, quais são as críticas, sugestões ou elogios a todas as atividades realizadas. Por se tratarem de questões cujas respostas são pessoais (mas feitas em grupo) não as consideramos como corretas, parcialmente corretas ou incorretas.


8) Para finalizar as atividades, responda às perguntas a seguir:

a) Você gostou das atividades feitas até agora? Qual delas te chamou mais a atenção?

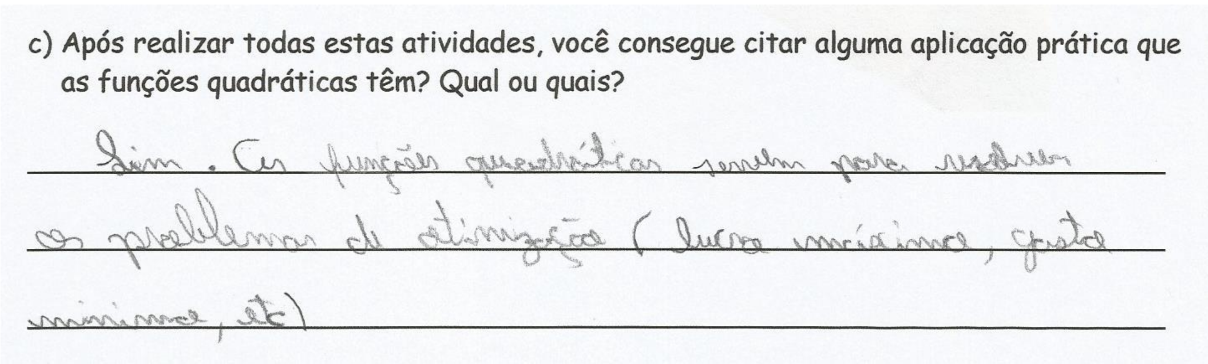
Gostamos do jogo de dardos e do geogebra. O jogo chamou mais a atenção.

Figura 152: Resposta do grupo 5D para a pergunta 8 item a da ficha de atividades 5


b) Você concorda que o aplicativo *GeoGebra Calculadora Gráfica* facilitou o estudo de funções quadráticas e parábolas? Por quê?

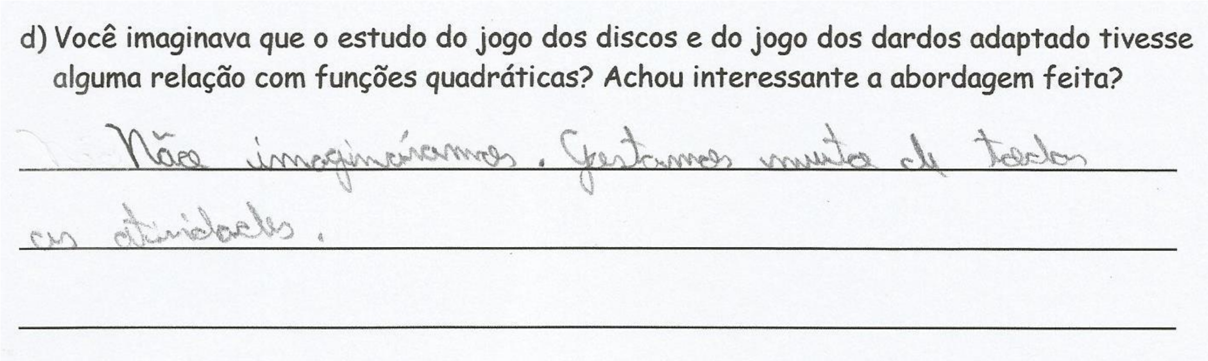
Concordamos porque o gráfico ficou mais bonito e mais rápido de fazer.

Figura 153: Resposta do grupo 5D para a pergunta 8 item b da ficha de atividades 5


c) Após realizar todas estas atividades, você consegue citar alguma aplicação prática que as funções quadráticas têm? Qual ou quais?

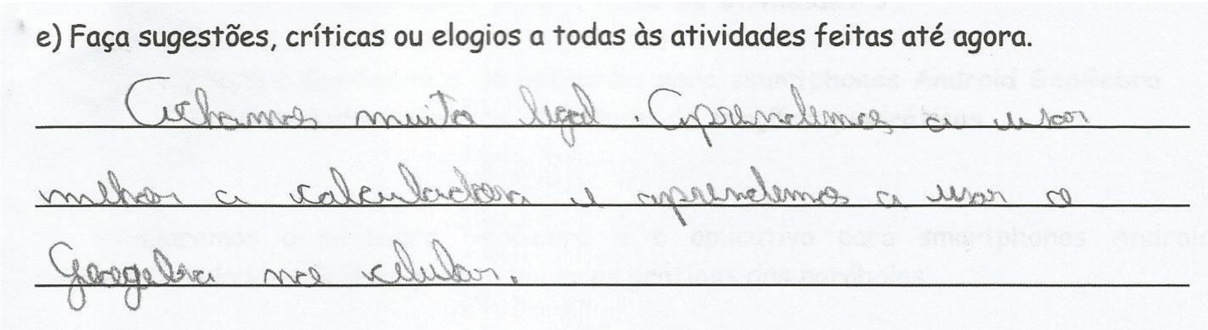
Sim. As funções quadráticas servem para resolver os problemas de otimização (lucro máximo, gasto mínimo, etc)

Figura 154: Resposta do grupo 5D para a pergunta 8 item c da ficha de atividades 5


d) Você imaginava que o estudo do jogo dos discos e do jogo dos dardos adaptado tivesse alguma relação com funções quadráticas? Achou interessante a abordagem feita?

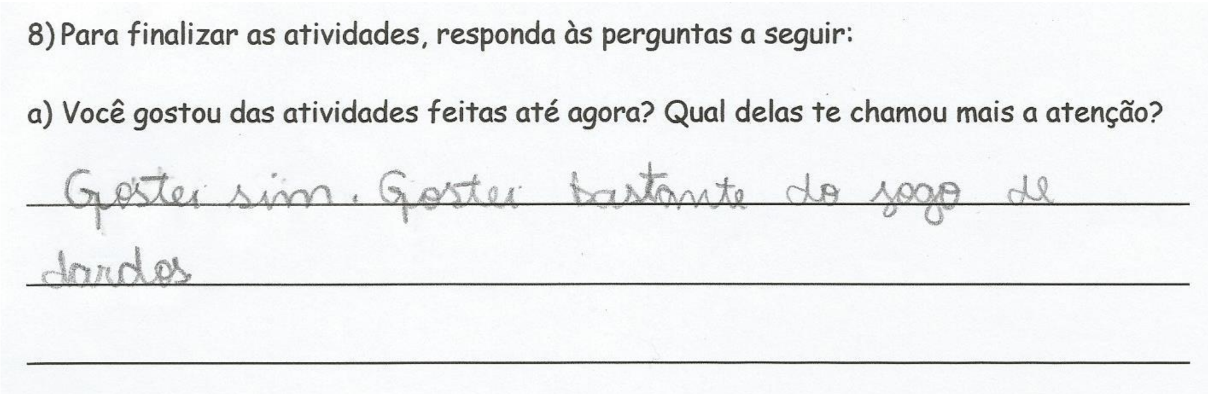
Não imaginávamos. Gostamos muito de todas as atividades.

Figura 155: Resposta do grupo 5D para a pergunta 8 item d da ficha de atividades 5


e) Faça sugestões, críticas ou elogios a todas às atividades feitas até agora.

Achamos muito legal. Aprendemos a usar melhor a calculadora e aprendemos a usar o Geogebra no celular.

Figura 156: Resposta do grupo 5D para a pergunta 8 item e da ficha de atividades 5


8) Para finalizar as atividades, responda às perguntas a seguir:

a) Você gostou das atividades feitas até agora? Qual delas te chamou mais a atenção?

Gostei sim. Gostei bastante do jogo de dardos

Figura 157: Resposta do grupo 1E para a pergunta 8 item a da ficha de atividades 5

b) Você concorda que o aplicativo GeoGebra Calculadora Gráfica facilitou o estudo de funções quadráticas e parábolas? Por quê?

Facilitou, mas meu grupo não conseguiu usar o Geogebra muito bem porque ninguém instalou. Acompanhei no outro grupo

Figura 158: Resposta do grupo 1E para a pergunta 8 item b da ficha de atividades 5

c) Após realizar todas estas atividades, você consegue citar alguma aplicação prática que as funções quadráticas têm? Qual ou quais?

Sim. Resolver problemas de otimização

Figura 159: Resposta do grupo 1E para a pergunta 8 item c da ficha de atividades 5

d) Você imaginava que o estudo do jogo dos discos e do jogo dos dardos adaptado tivesse alguma relação com funções quadráticas? Achou interessante a abordagem feita?

não imaginava, mas entendi quando vi o desenho dos alvos.

Figura 160: Resposta do grupo 1E para a pergunta 8 item d da ficha de atividades 5

e) Faça sugestões, críticas ou elogios a todas às atividades feitas até agora.

Gostei do jogo de dardos e do geobra. Deu muito trabalho resolver o problema 2. Espero ter mais aulas diferentes como esta.

Figura 161: Resposta do grupo 1E para a pergunta 8 item e da ficha de atividades 5

7. Análise *a posteriori* e validação

Neste capítulo fazemos uma síntese de todos os dados obtidos e uma análise de todos os dados coletados a fim de verificar quais objetivos propostos inicialmente foram alcançados e de validar a aplicação das atividades.

7.1 Síntese dos dados obtidos

A tabela a seguir apresenta a síntese dos dados obtidos. Cabe ressaltar que todos os grupos responderam a todas as questões e problemas.

		Classificação da resposta		
Tipo de ficha	**Questão ou problema**	**Correta**	**Parcialmente correta**	**Incorreta**
Fichas de atividades 1	Questão 1	8 grupos	0 grupo	0 grupo
	Questão 2	8 grupos	0 grupo	0 grupo
	Questão 3	8 grupos	0 grupo	0 grupo
	Questão 4	8 grupos	0 grupo	0 grupo
	Questão 5	6 grupos	2 grupos	0 grupo
	Questão 6	8 grupos	0 grupo	0 grupo
Ficha de atividades 2	Questão 1	0 grupo	8 grupos	0 grupo
	Questão 2	5 grupos	2 grupos	1 grupo
	Questão 3	8 grupos	0 grupo	0 grupo
	Questão 4	8 grupos	0 grupo	0 grupo
Ficha de atividades 3	Questão 1	7 grupos	1 grupo	0 grupo
	Questão 2	8 grupos	0 grupo	0 grupo
	Questão 3	8 grupos	0 grupo	0 grupo
Ficha de atividades 4	Problema 1 (itens a até j)	Roteiro para o problema 2 (não se aplica a classificação)	Roteiro para o problema 2 (não se aplica a classificação)	Roteiro para o problema 2 (não se aplica a classificação)
	Problema 2 (itens a até k)	0 grupo	8 grupos	0 grupo
	Problema 3 (itens a até e)	Resolução feita pelo professor (não se aplica a classificação)	Resolução feita pelo professor (não se aplica a classificação)	Resolução feita pelo professor (não se aplica a classificação)
Ficha de atividades 5	Questão 1	8 grupos	0 grupo	0 grupo
	Questão 2	8 grupos	0 grupo	0 grupo
	Questão 3	8 grupos	0 grupo	0 grupo

	Questão 4	8 grupos	0 grupo	0 grupo
	Questão 5	8 grupos	0 grupo	0 grupo
	Questão 6	8 grupos	0 grupo	0 grupo
	Questão 7	6 grupos	2 grupos	0 grupo
	Questão 8 (itens a até e)	Respostas pessoais (não se aplica a classificação)	Respostas pessoais (não se aplica a classificação)	Respostas pessoais (não se aplica a classificação)

Tabela 1: síntese dos dados obtidos

7.2 Conclusões

Através da análise dos dados obtidos e da reflexão acerca das atividades realizadas pelos alunos consideramos que os objetivos gerais e específicos inicialmente propostos foram atingidos. As atividades realizadas pelos alunos proporcionaram uma melhor aprendizagem dos conteúdos matemáticos abordados e, de um modo geral, contribuíram para que eles tenham mais autonomia diante de problemas matemáticos. Muitos alunos tiraram dúvidas específicas envolvendo conteúdos matemáticos e melhoraram seu desempenho em matemática. Num sentido mais amplo, podemos dizer que muitas dificuldades de aprendizagem foram superadas. Desta forma, a validação deste trabalho foi feita internamente, conforme sugere a metodologia da Engenharia Didática.

Uma dificuldade que os alunos tiveram durante a construção dos gráficos de p(d) nas duas primeiras fichas de atividades aconteceu devido às escalas adotadas nos gráficos. No eixo das abscissas a escala ideal seria de 0,3 cm em 0,3 cm, e não de 0,2 cm em 0,2 cm como proposto; desta forma a plotagem dos pontos obtidos ficaria mais fácil, pois as medidas d variaram de 0,3 cm em 0,3 cm. No eixo das ordenadas a escala ideal seria de 0,1 em 0,1, e não de 0,2 em 0,2, facilitando também localizar a probabilidade correspondente. Devido a esta dificuldade na construção destes gráficos houve uma intervenção do professor maior do que o inicialmente imaginado. Assim, paras próximas aplicações destas atividades estes gráficos serão feitos na escala ideal.

Cabe ressaltar que o relacionamento entre os próprios alunos e entre os alunos e o professor pesquisador melhorou em ambas as turmas.

Especificamente, o pesquisador percebeu que melhorou o seu relacionamento com os alunos do 9.º ano E, que é uma turma para a qual começou a lecionar no início deste ano de 2016. Com este trabalho os alunos puderam conhecer melhor o pesquisador, e vice-versa. Certamente isto contribui, de um modo geral, para uma melhor aprendizagem durante as aulas.

8. Considerações finais

O presente trabalho foi elaborado com a finalidade de estudar funções quadráticas e probabilidade geométrica. Para isto contamos com o jogo de dardos adaptado, problemas de otimização e o GeoGebra. Fizemos uma abordagem lúdica e dinâmica contando com a colaboração e a participação dos alunos. Todo este trabalho esteve pautado na metodologia da Engenharia Didática. Desta forma, tudo o que foi idealizado, planejado e construído inicialmente foi aplicado.

Podemos dizer que a também metodologia da resolução de problemas esteve presente durante todo este trabalho. De modo geral, os alunos lidaram com situações e problemas novos, os quais tiveram que compreender, buscar estratégias para resolver e efetivamente resolver. Aconteceram uma motivação e uma “movimentação” dos alunos diante dos problemas que lhes foram apresentados.

Uma observação importante: o pesquisador havia combinado previamente com os alunos que, de acordo com a análise final feita pelo pesquisador acerca da participação nas atividades, receberiam 2 pontos na média bimestral. Todos os alunos de ambas as turmas receberam estes pontos, pois o comprometimento com o trabalho e o envolvimento deles nas atividades foram grandes, além da alegria que demonstraram por se tratar de atividades lúdicas e diferenciadas. De modo geral, todos mostraram-se estimulados a participar de todas as atividades.

Os alunos de ambas as turmas mantiveram uma postura colaborativa em todos os momentos, empenhando-se para aprender e conseguir marcar os 2 pontos na média bimestral. Porém, esta pontuação foi alcançada por mérito dos alunos, e foi obtida como consequência.

Cabe ressaltar que o tempo destinado à aplicação deste trabalho pode ser maior, o que pode inclusive melhorar os resultados. As 5 aulas duplas planejadas inicialmente foram insuficientes, sendo necessário 1 dia a mais de aulas duplas. Entretanto, com um tempo maior há mais possibilidades de se explorar possíveis desdobramentos deste trabalho e, desta forma, ampliar a “visão matemática” dos alunos. Por exemplo, poderíamos fazer questionamentos como: Se os quadrados pretos dos alvos quadriculados não estivessem centralizados haveria mudanças no cálculo das probabilidades? Neste caso, qual seria a expressão matemática para o cálculo das probabilidades em função das diferenças d? E se os alvos não fossem somente quadriculados e tivessem outros formatos (digamos, triangulares, retangulares, hexagonais etc.)? Deixamos, portanto, estas e outras questões em aberto.

Ainda a respeito do tempo destinado à aplicação, julgamos que o professor da turma é quem deve planejar a implementação das atividades. É ele quem deve verificar o ritmo de aprendizagem da turma e decidir se 5 aulas duplas são ou não suficientes. Isto foi exatamente o que fizemos. Foi conveniente (e necessário!) 1 dia a mais de aulas duplas para conseguir aplicar todas as atividades.

Outra possibilidade, e que provavelmente demande mais tempo, é a de os alunos utilizarem o software GeoGebra na sala de informática ao invés de utilizarem o aplicativo no smartphone. Talvez isto seja o ideal pensando-se na aprendizagem dos alunos. Neste sentido, o uso do smartphone que aconteceu durante este trabalho foi uma alternativa que facilitou e muito a implementação. Podemos dizer mais: tornou possível a realização deste trabalho diante da mesma dificuldade enfrentada nas duas escolas envolvidas, que é a impossibilidade de utilização da sala de informática.

O pesquisador ficou contente com a realização deste trabalho para as turmas referidas. Sentiu-se valorizado em sala de aula, pois recebeu vários elogios dos alunos, das coordenadoras e das vice-diretoras durante a aplicação. Disseram-lhe que foi este trabalho foi um sucesso, mesmo antes de ver o seu término. Sentiu-se valorizado profissionalmente e passou a ter mais confiança nas próprias competências para enfrentar os desafios ao lecionar nos dias atuais. A experiência que vivenciou foi muito rica e proveitosa, e por isso o pesquisador pretende planejar mais aulas utilizando jogos e informática, especificamente o software ou o aplicativo GeoGebra.

Uma das razões pela qual em vários momentos as questões e problemas foram resolvidos em conjunto com toda a turma é que muitos alunos, principalmente do 9.º ano D, apresentam dificuldades na escrita, mais especificamente em “conectar as palavras” e formar respostas com coerência e clareza. E essa dificuldade, que já era conhecida pelo pesquisador, ficou bem evidente ao tentarmos dar respostas “explicativas” aos problemas matemáticos, já durante as revisões feitas. Entretanto, consideramos que esta maneira de resolver em conjunto não descaracteriza a questão ou problema propostos, apenas auxilia os alunos a organizarem e explicitarem suas conclusões.

Os conhecimentos matemáticos prévios descritos anteriormente são muito importantes para que os alunos consigam participar da maioria das atividades deste trabalho. Neste sentido, posso dizer que as revisões feita nas semanas anteriores ao início da aplicação foram determinantes para o sucesso do mesmo. Percebi que muitos alunos fizeram conexões entre o que haviam revisado e o que estavam aprendendo.

O pesquisador confessa que durante todo este trabalho, desde a sua idealização até o seu término em sala de aula, guardou consigo uma grande dúvida em sua mente: Será que vou conseguir “despertar o interesse em aprender dos alunos”? Em outras palavras, pensava: Será que este trabalho vai dar certo? Ou: Será que está dando certo? Confessa, agora, que está aliviado e pode responder que sim a todas estas perguntas. Logicamente, o pesquisador não conseguiu despertar o interesse em aprender em todos os alunos, o que seria ideal, mas pode dizer que até os mais “indisciplinados e desinteressados” tiveram um pouco mais de interesse. Todos os alunos de ambas as turmas participaram em algum momento, principalmente do jogo de dardos adaptado.

Todas as instruções e fichas de atividades deste trabalho estão disponíveis para que outros professores utilizem. Autorizamos sua reprodução e utilização em outras turmas de 9.º ano. Adaptações poderão ser feitas a fim de adequar o material às necessidades da turma e assim melhorar a aprendizagem matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. **Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. Revista eletrônica da educação matemática.** Santa Catarina, v. 3, n. 6, 2008, p. 62-77.

ARTIGUE, M. **Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la ensenãnza y el aprendizaje de las matemáticas.** México: Grupo editorial Iberoamérica, 1996.

AUSUBEL, D. P.; HANESIAN, H; NOVAK, J. D. **Psicologia educacional**. Trad. Eva Nick e outros. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. **Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática**. Zetetike**,** Campinas – UNICAMP, v. 13, n. 23, 2005, p. 85-118.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio, ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.** Brasília, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf>. Acesso em 13 mai. 2016.

CAETANO, P.; GIRALDO, V.; MATTOS, F. **Recursos computacionais no ensino da matemática. Coleção PROFMAT.** Rio de Janeiro: SBM, 2013.

_______; PATERLINI, R. **Matem@tica na pr@tica. Curso de especialização em ensino de matemática para o ensino médio. Módulo I: Jogo dos discos.** Cuiabá: Central de Texto, 2013.

GARCIA, V. J. N. **Um estudo exploratório sobre as relações entre o conceito de automatismo da teoria do processamento de informações de SternBerg e o conceito de pensamento resumido na teoria das habilidades matemáticas de**

Krutetskii. 2005. 212 f. Tese (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, Campinas, 2005.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A matemática do ensino médio. Enunciados e soluções dos exercícios, volume 4.** Rio de Janeiro: SBM, 2010.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro, Interciência, 1978.

_______. **O ensino por meio de problemas**. Revista do Professor de Matemática, n.7, 1985, p. 11-16.

SÃO PAULO (Estado), Secretaria da Educação. **Currículo do estado de São Paulo: matemática e suas tecnologias.** São Paulo: SEE, 2011. Disponível em: <http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/238.pdf>. Acesso em 13 mai 2016.

______. **Material de apoio ao currículo do estado de São Paulo: caderno do professor; matemática, ensino fundamental, anos finais, 8.ª série / 9.º ano, volume 1.** São Paulo: SEE, 2014.

______. **Matrizes de referência para a avaliação SARESP: documento básico, volume 1.** São Paulo: SEE, 2009.

TEZANI, T. C. R. **A estrutura do currículo comum para o ensino fundamental municipal.** In: Currículo comum para o ensino fundamental municipal de Bauru. Bauru, 2012.

APÊNDICE A

Tabelas de conteúdos matemáticos.

2º Bimestre	**Números/Relações** Álgebra • Equações de 2º grau: resolução e problemas Funções • Noções básicas sobre função • A ideia de variação • Construção de tabelas e gráficos para representar funções de 1º e de 2º graus	• Compreender a resolução de equações de 2º grau e saber utilizá-las em contextos práticos • Compreender a noção de função como relação de interdependência entre grandezas • Saber expressar e utilizar em contextos práticos as relações de proporcionalidade direta entre duas grandezas por meio de funções de 1º grau • Saber expressar e utilizar em contextos práticos as relações de proporcionalidade direta entre uma grandeza e o quadrado de outra por meio de uma função de 2º grau • Saber construir gráficos de funções de 1º e de 2º graus por meio de tabelas e da comparação com os gráficos das funções $y = x$ e $y = x^2$

QUADRO DE CONTEÚDOS DO ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS FINAIS

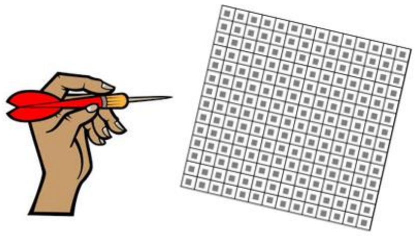
	5ª série/6º ano	6ª série/7º ano	7ª série/8º ano	8ª série/9º ano
Volume 1	NÚMEROS NATURAIS – Múltiplos e divisores. – Números primos. – Operações básicas. – Introdução às potências. FRAÇÕES – Representação. – Comparação e ordenação. – Operações. NÚMEROS DECIMAIS – Representação. – Transformação em fração decimal. – Operações. SISTEMAS DE MEDIDA – Comprimento, massa e capacidade. – Sistema métrico decimal.	NÚMEROS NATURAIS – Sistemas de numeração na Antiguidade. – O sistema posicional decimal. NÚMEROS INTEIROS – Representação. – Operações. NÚMEROS RACIONAIS – Representação fracionária e decimal. – Operações com decimais e frações. GEOMETRIA/MEDIDAS – Ângulos. – Polígonos. – Circunferência. – Simetrias. – Construções geométricas. – Poliedros.	NÚMEROS RACIONAIS – Transformação de decimais finitos em fração. – Dízimas periódicas e fração geratriz. POTENCIAÇÃO – Propriedades para expoentes inteiros. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO – A linguagem das potências. ÁLGEBRA – Equivalências e transformações de expressões algébricas. – Produtos notáveis. – Fatoração algébrica.	NÚMEROS REAIS – Conjuntos numéricos. – Números irracionais. – Potenciação e radiciação em $\mathbb{R}$. – Notação científica. ÁLGEBRA – Equações de 2º grau: resolução e problemas. – Noções básicas sobre função; a ideia de interdependência. – Construção de tabelas e gráficos para representar funções de 1º e 2º graus.
Volume 2	GEOMETRIA/MEDIDAS – Formas planas e espaciais. – Noção de perímetro e área de figuras planas. – Cálculo de área por composição e decomposição. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO – Leitura e construção de gráficos e tabelas. – Média aritmética. – Problemas de contagem.	NÚMEROS/ PROPORCIONALIDADE – Proporcionalidade direta e inversa. – Razões, proporções, porcentagem. – Razões constantes na Geometria: π. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO – Gráficos de setores. – Noções de probabilidade. ÁLGEBRA – Uso de letras para representar um valor desconhecido. – Conceito de equação. – Resolução de equações. – Equações e problemas.	ÁLGEBRA/EQUAÇÕES – Equações de 1º grau. – Sistemas de equações e resolução de problemas. – Inequações de 1º grau. – Sistemas de coordenadas (plano cartesiano). GEOMETRIA/MEDIDAS – Teorema de Tales e Pitágoras: apresentação e aplicações. – Área de polígonos. – Volume do prisma.	GEOMETRIA/MEDIDAS – Proporcionalidade, noção de semelhança. – Relações métricas entre triângulos retângulos. – Razões trigonométricas. – O número π; a circunferência, o círculo e suas partes; área do círculo. – Volume e área do cilindro. TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO – Contagem indireta e probabilidade.

Distribuição dos Conteúdos Curriculares nos Anos Finais do Ensino Fundamental – Matemática			
9º ano			
1º Bimestre	**2º Bimestre**	**3º Bimestre**	**4º Bimestre**
NÚMEROS e OPERAÇÕES: Conjuntos e Diagramas. Linguagem Simbólica das Relações entre os Conjuntos (União, Intersecção, Complementar, etc.). Conjunto dos Números Reais: Racionais e Irracionais. Localização dos Números Reais na Reta Numérica. Potenciação e Radiciação envolvendo o conjunto dos Números Reais. NÚMEROS e OPERAÇÕES/GRANDEZAS e MEDIDAS: Notação Científica: Números 'Muito' Grandes ou Números 'Muito' Pequenos. TRATAMENTO da INFORMAÇÃO: Tabelas (Simples e de Dupla Entrada) e Gráficos de Barras, Linhas e de Setor (Circular). Cálculo de Possibilidades e Chances.	ÁLGEBRA: Equação do 2º Grau: Definição e Identificação. Equação do 2º Grau Completas e Incompletas e Solução por meio de Bháskara e Soma e Produto. Raízes de Equação do 2º Grau e Propriedades. Equações Biquadradas e Irracionais. Noções Básicas de Funções do 2º Grau e a Ideia de Variação. Construção de Gráficos e Tabelas para a Representação de Equação do 1º Grau.	ÁLGEBRA: Sistema de Equações do 2º Grau: Resolução e Representação Gráfica. ÁLGEBRA/GEOMETRIA: Teorema de Tales: Proporcionalidade entre Segmentos de Retas; Retas Paralelas e Triângulos. Teorema de Pitágoras: Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo (Seno, Cosseno e Tangente). GEOMETRIA: Semelhança de Triângulos: Conceitos e Casos (LAL, LLL, ALA, LAA).	GEOMETRIA/GRANDEZAS e MEDIDAS: O número π. Circunferência e Círculo: Área, Perímetro e suas partes (raio, diâmetro, corda, semicírculo, coroa). Cilindro e Cone: Volume. TRATAMENTO da INFORMAÇÃO: Média Aritmética, Mediana e Moda. Problemas de Contagem e Noções de Probabilidade.

APÊNDICE B

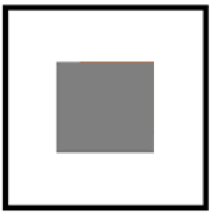
Instruções e fichas de atividades.

Atividades de Matemática

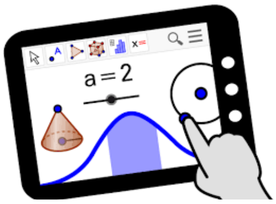


Jogo de dardos adaptado

Problemas de otimização



Probabilidade geométrica



GeoGebra
Dynamic Mathematics for Everyone

E. E. Prof. Farid Fayad

9.º ano D

Professor Leandro Souza Canavezi

Grupo n.º ____

Nome: ____

Nome: ____

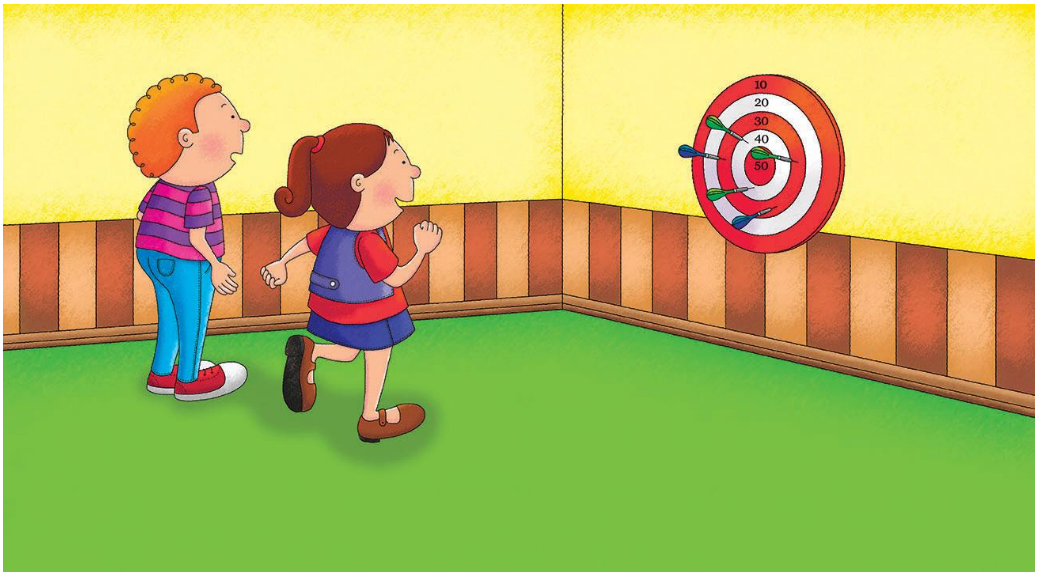
Nome: ____

Nome: ____

Nome: ____

Instruções para a ficha de atividades 1

Jogo de dardos adaptado do jogo dos discos



Você já jogou dardos? Tem boa mira? Consegue acertar um alvo a longa distância?

Um jogo de dardos "tradicional" é formado por um alvo em formato circular e por dardos em forma de flechas conforme a figura abaixo:

Figura 1: alvo e dardos de um jogo de dardos

O objetivo deste jogo é marcar mais pontos. Para marcar pontos o jogador deve lançar o dardo no alvo que fica na posição vertical. De acordo com a região atingida pelo dardo marca-se uma quantidade de pontos. Quanto mais difícil for acertar uma determinada região, isto é, quanto menor for a área de uma determinada região, mais pontos o jogador marca. Os jogadores vão alternando os lançamentos ou grupos de lançamentos até que a rodada termine. A quantidade de rodadas é combinada previamente pelos jogadores. Também é possível jogar em grupos.

Existe um jogo muito interessante, assim como o jogo de dardos, mas que é diferente deste e que envolve lançamentos. É chamado jogo dos discos. Ele é formado por um tabuleiro (alvo) quadriculado que fica na posição horizontal e por discos de tamanhos variados, que podem ser moedas, botões, CDs, argolas, etc. O objetivo deste jogo é fazer com que o disco lançado caia inteiramente dentro de um dos quadrados do tabuleiro (sem que a borda do disco encoste na borda do quadrado).

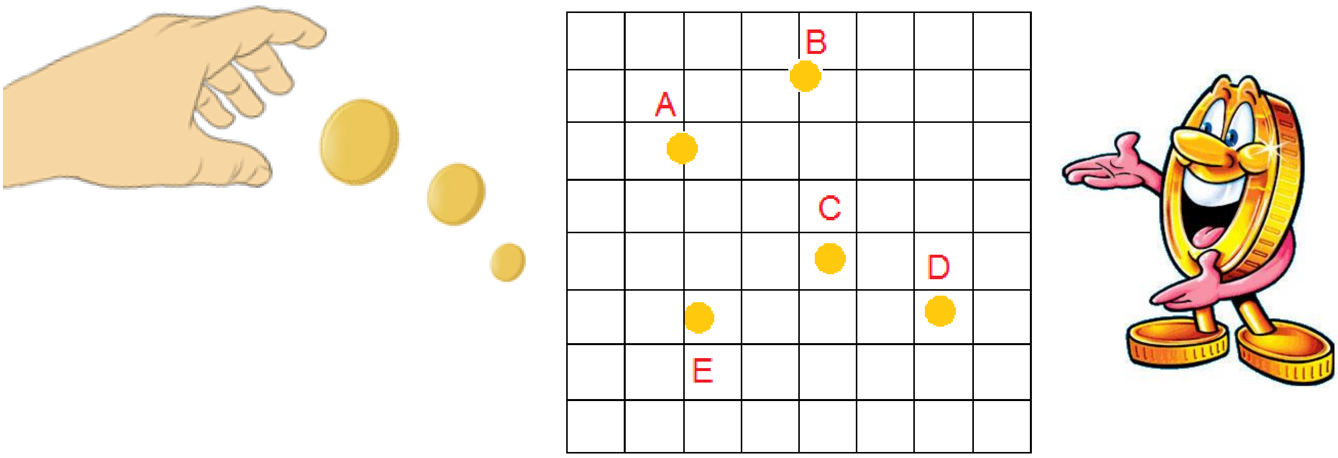
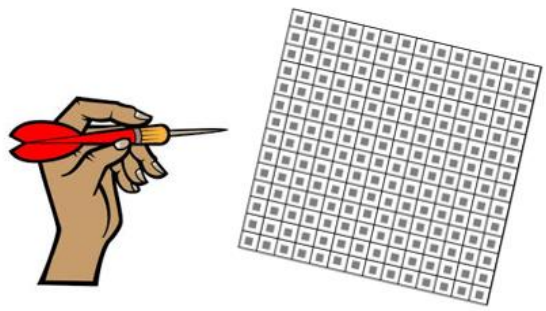


Figura 2: ilustração do jogo dos discos

Cada vez que a moeda cai inteiramente dentro de um dos quadrados considera-se que o lançamento foi favorável; caso contrário considera-se que o lançamento não foi favorável. A figura anterior ilustra um tabuleiro com 5 moedas (de 10 centavos) lançadas, sendo que nele observamos 2 lançamentos favoráveis (C e D) num total de 5 lançamentos (A, B, C, D e E).

Vamos, agora, fazer uma "fusão" do jogo de dardos com o jogo dos discos. Será chamada de jogo de dardos adaptado.

Este novo jogo é constituído por 7 alvos quadriculados (tipos: I, II, III, IV, V, VI e VII) com formatos semelhantes ao do quadriculado do jogo dos discos e por dardos em forma de flechas. Cada um dos alvos contém 14 por 14 quadrados de contorno preto de 3 cm de lado, sendo que em cada um destes quadrados há um quadrado menor cinza centralizado, cuja medida do lado varia de acordo com cada tipo:



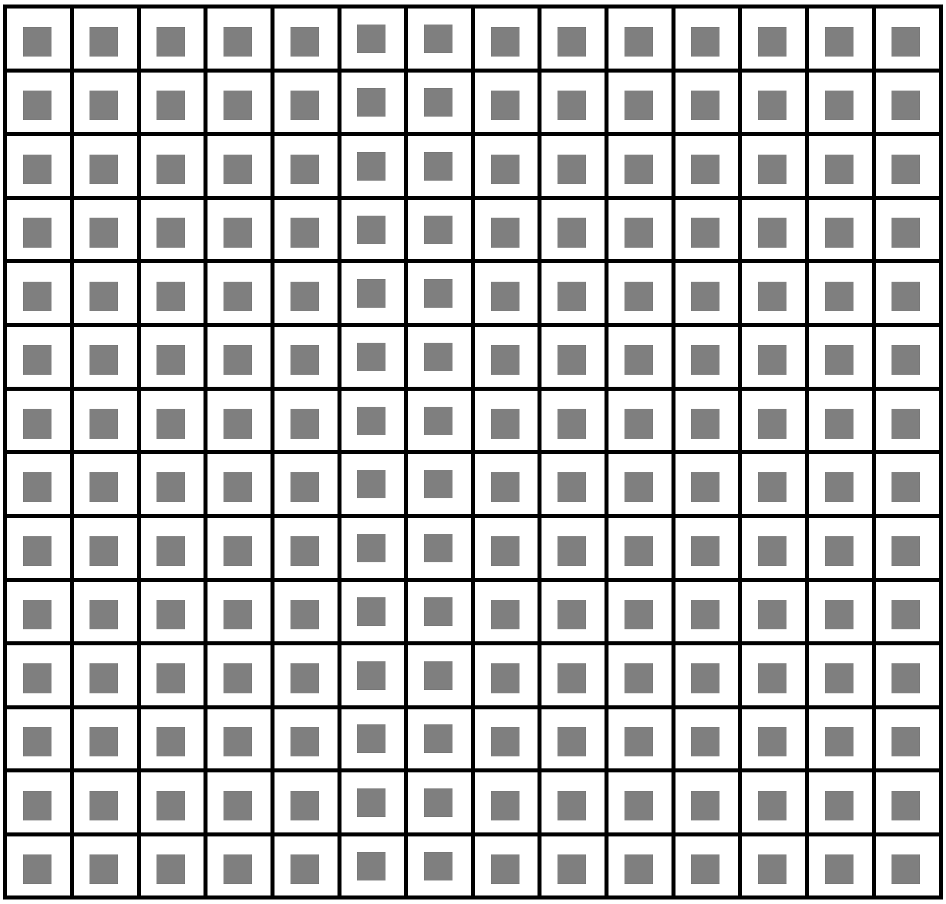
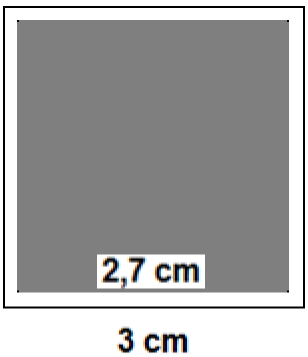
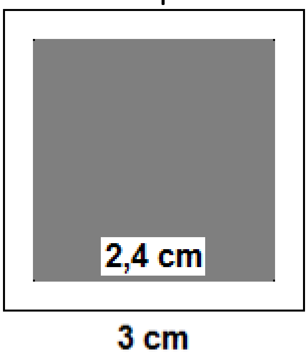


Figura 3: um dos alvos do jogo de dardos adaptado

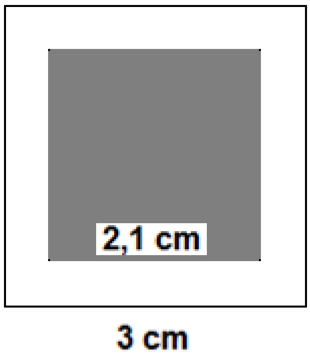
Alvo tipo I:



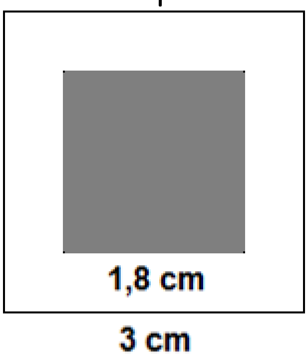
Alvo tipo II:



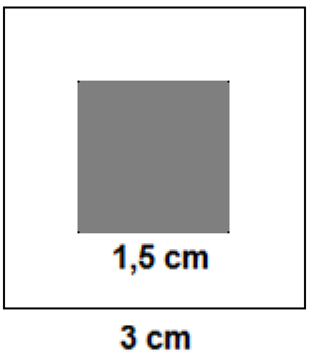
Alvo tipo III:



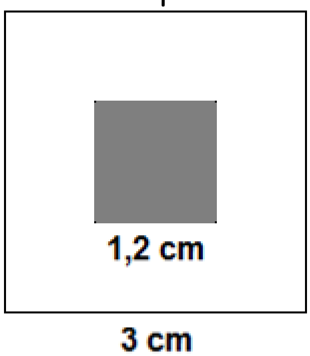
Alvo tipo IV:



Alvo tipo V:



Alvo tipo VI:



Alvo tipo VII:

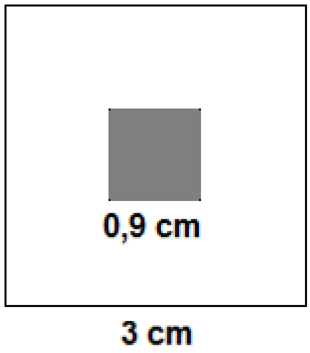
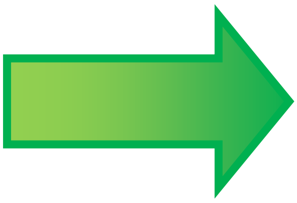


Figura 4: medidas dos quadrados dos alvos do jogo de dardos adaptado



Antes de jogarmos, vamos agora estudar um conceito matemático: a probabilidade.

Pegue a ficha de atividades 1 e responda às duas primeiras perguntas. Somente depois de respondê-las, volte a esta folha de instruções!!!

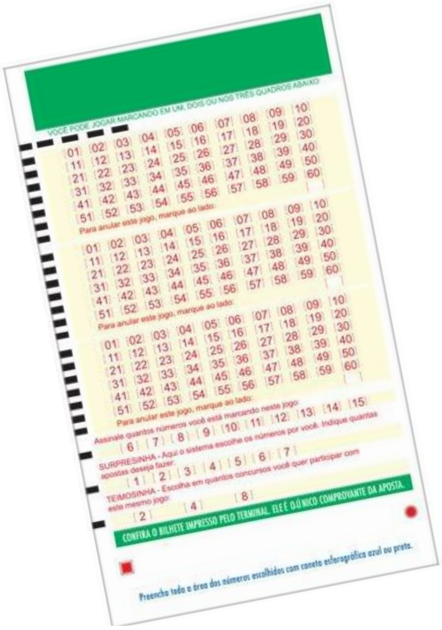
Voltando:

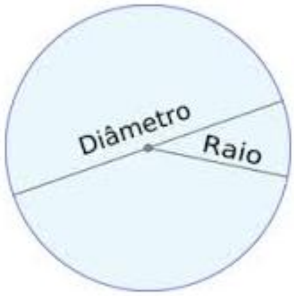
Observe novamente a figura 2. Relembrando: nela observamos 2 lançamentos favoráveis (C e D) num total de 5 lançamentos (A, B, C, D e E).

Sabemos que para estimar uma probabilidade devemos dividir a quantidade de casos favoráveis pela quantidade de casos possíveis. Assim, nesta etapa a probabilidade aproximada de acerto com a moeda de 10 centavos é:

$$p = \frac{lançamentos\ favoráveis}{total\ de\ lançamentos} = \frac{2}{5} = 0,4$$

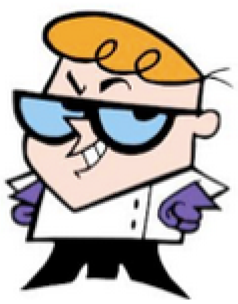
ou $40\ \%$





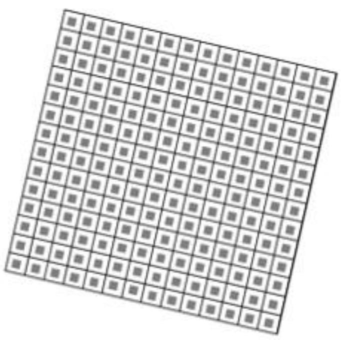
A probabilidade de acerto de um disco depende do seu diâmetro. Indicando o diâmetro por d (em cm), a probabilidade de acerto p será uma função de d e, assim, escrevemos p(d). Considerando que a moeda de 10 centavos tem 2 cm de diâmetro, neste caso temos p(2) = 40 % aproximadamente.

Para tornar ainda mais interessante o jogo adaptado do jogo dos discos vamos deixar de lado a pontuação. Vamos, então, pensar na probabilidade de um jogador acertar o dardo sobre qualquer um dos quadrados cinzas do alvo. Assim, quando após um lançamento o dardo atingir a borda ou o interior do quadrado cinza considere como sendo um caso favorável; caso contrário, como sendo um caso não favorável.



Vamos fazer estimativas de probabilidade através de experimentos, ou seja, vamos jogar, fazer anotações e alguns cálculos. Ao nos referirmos a estas estimativas estaremos falando em probabilidade experimental.

No nosso jogo de dardos adaptado, a probabilidade de acerto depende do tamanho do quadrado cinza. Indicando por L (em cm) o lado do quadrado do quadriculado, por ℓ (em cm) o lado do quadrado cinza e por $d = L - \ell$ (em cm) a diferença entre os lados desses quadrados, a probabilidade de acerto p será uma função de d e, assim, escrevemos p(d). Utilize estas informações para preencher a tabela 8.



Ficha de atividades 1

Responda às perguntas:

1) Já ouvir falar em probabilidade? Sabe o que significa? Anote abaixo o que você sabe sobre probabilidade.

____

____

____

2) Agora, consulte um dicionário e anote os significados apresentados. Procure destacar o significado matemático para probabilidade.

____

____

____

Volte à folha de instruções!!!

Continuando, vamos jogar e estudar matemática! Siga as orientações do professor e organize-se para o jogo de dardos adaptado!

3) Faça os 100 lançamentos dos dardos nos alvos quadriculados. A cada grupo de 10 lançamentos anote os dados obtidos nas tabelas abaixo. Atenção: os lançamentos deverão ser todos aleatórios!!!

Tabela 1: Dados obtidos no lançamento dos dardos no alvo tipo I.

L	Q	F
1	10	
2	10	
3	10	
4	10	
5	10	
6	10	
7	10	
8	10	
9	10	
10	10	
T	100	

L: número do grupo de lançamentos

Q: quantidade de dardos lançados

F: quantidade de lançamentos favoráveis

T: totalização das colunas

Tabela 2: Dados obtidos no lançamento dos dardos no alvo tipo II.

L	Q	F
1	10	
2	10	
3	10	
4	10	
5	10	
6	10	
7	10	
8	10	
9	10	
10	10	
T	100	

L: número do grupo de lançamentos

Q: quantidade de dardos lançados

F: quantidade de lançamentos favoráveis

T: totalização das colunas

Tabela 3: Dados obtidos no lançamento dos dardos no alvo tipo III.

L	Q	F
1	10	
2	10	
3	10	
4	10	
5	10	
6	10	
7	10	
8	10	
9	10	
10	10	
T	100	

L: número do grupo de lançamentos

Q: quantidade de dardos lançados

F: quantidade de lançamentos favoráveis

T: totalização das colunas

Tabela 4: Dados obtidos no lançamento dos dardos no alvo tipo IV.

L	Q	F
1	10	
2	10	
3	10	
4	10	
5	10	
6	10	
7	10	
8	10	
9	10	
10	10	
T	100	

L: número do grupo de lançamentos

Q: quantidade de dardos lançados

F: quantidade de lançamentos favoráveis

T: totalização das colunas

Tabela 5: Dados obtidos no lançamento dos dardos no alvo tipo V.

L	Q	F
1	10	
2	10	
3	10	
4	10	
5	10	
6	10	
7	10	
8	10	
9	10	
10	10	
T	100	

L: número do grupo de lançamentos

Q: quantidade de dardos lançados

F: quantidade de lançamentos favoráveis

T: totalização das colunas

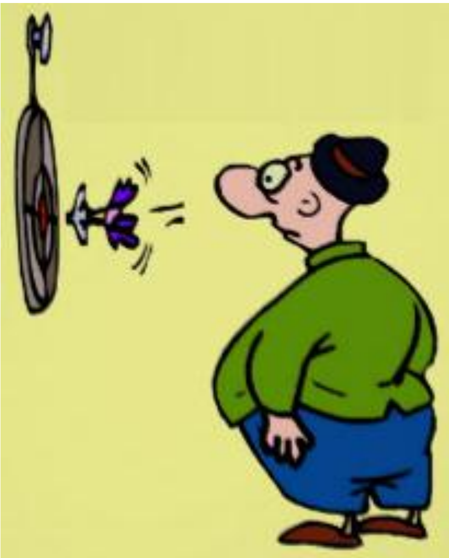


Tabela 6: Dados obtidos no lançamento dos dardos no alvo tipo VI.

L	Q	F
1	10	
2	10	
3	10	
4	10	
5	10	
6	10	
7	10	
8	10	
9	10	
10	10	
T	100	

L: número do grupo de lançamentos

Q: quantidade de dardos lançados

F: quantidade de lançamentos favoráveis

T: totalização das colunas

Tabela 7: Dados obtidos no lançamento dos dardos no alvo tipo VII.

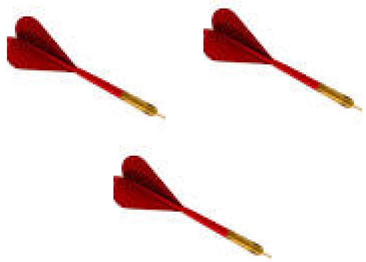
L	Q	F
1	10	
2	10	
3	10	
4	10	
5	10	
6	10	
7	10	
8	10	
9	10	
10	10	
T	100	

L: número do grupo de lançamentos

Q: quantidade de dardos lançados

F: quantidade de lançamentos favoráveis

T: totalização das colunas

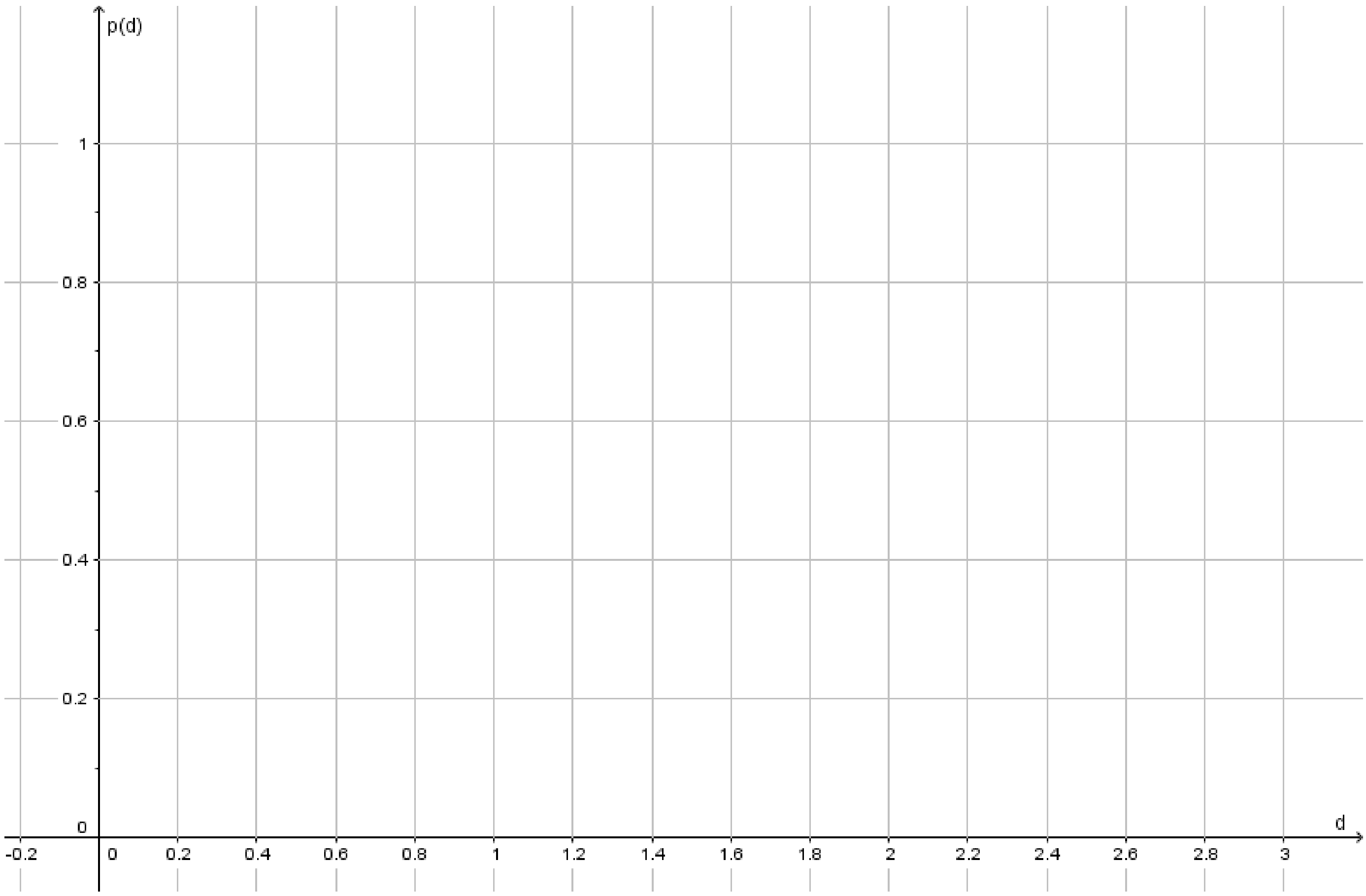


4) Após realizar todos estes passos anteriores, organize os dados na tabela 8:

Tabela 8:

Lado do quadrado de contorno preto: 3 cm				
Tipo de alvo	d (em cm)	Quant. de lançamentos	Eventos favoráveis	Probabilidade de ganho p(d)
I				
II				
III				
IV				
V				
VI				
VII				

5) Com base nos dados obtidos na tabela 8 construa o gráfico da função p(d):



6) Responda:

a) Foram feitos 100 lançamentos aleatórios de dardos em cada tipo de alvo para calculamos as probabilidades. O que você imagina que aconteceria se fizéssemos menos lançamentos (digamos, 50 lançamentos)? E se fizéssemos mais lançamentos (digamos, 200 lançamentos)? Os resultados obtidos seriam os mesmos? Será que 100 lançamentos são suficientes para calcularmos as probabilidades?

____

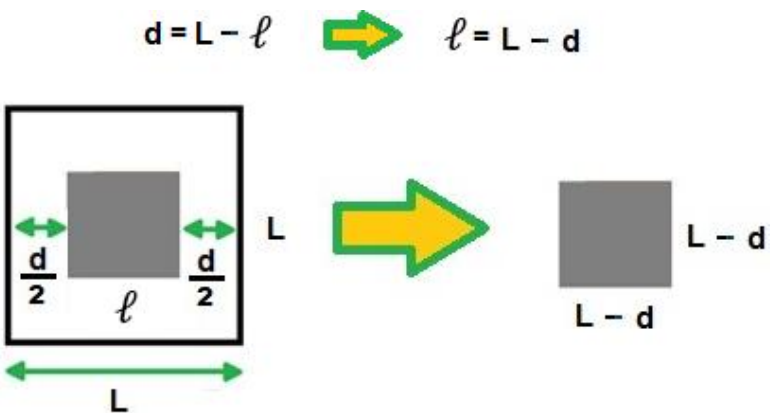
____

____

b) O que foi feito para garantir que os lançamentos foram aleatórios?

____

c) Sabendo que a medida do lado do quadrado de contorno preto é 3 cm e que d é a diferença entre esse lado e o lado do quadrado cinza, qual é o menor e qual é o maior valor possível para d ?



d) Considerando que a probabilidade é um quociente, qual o menor valor que ela pode atingir e qual o maior valor?

e) Analisando o gráfico de p(d), qual deve ser o valor de d para uma probabilidade de acerto de 0,5 ou 50%?

f) Analisando o gráfico de p(d), qual deve ser o valor de d para uma probabilidade de acerto de 0,8 ou 80%?

____

____

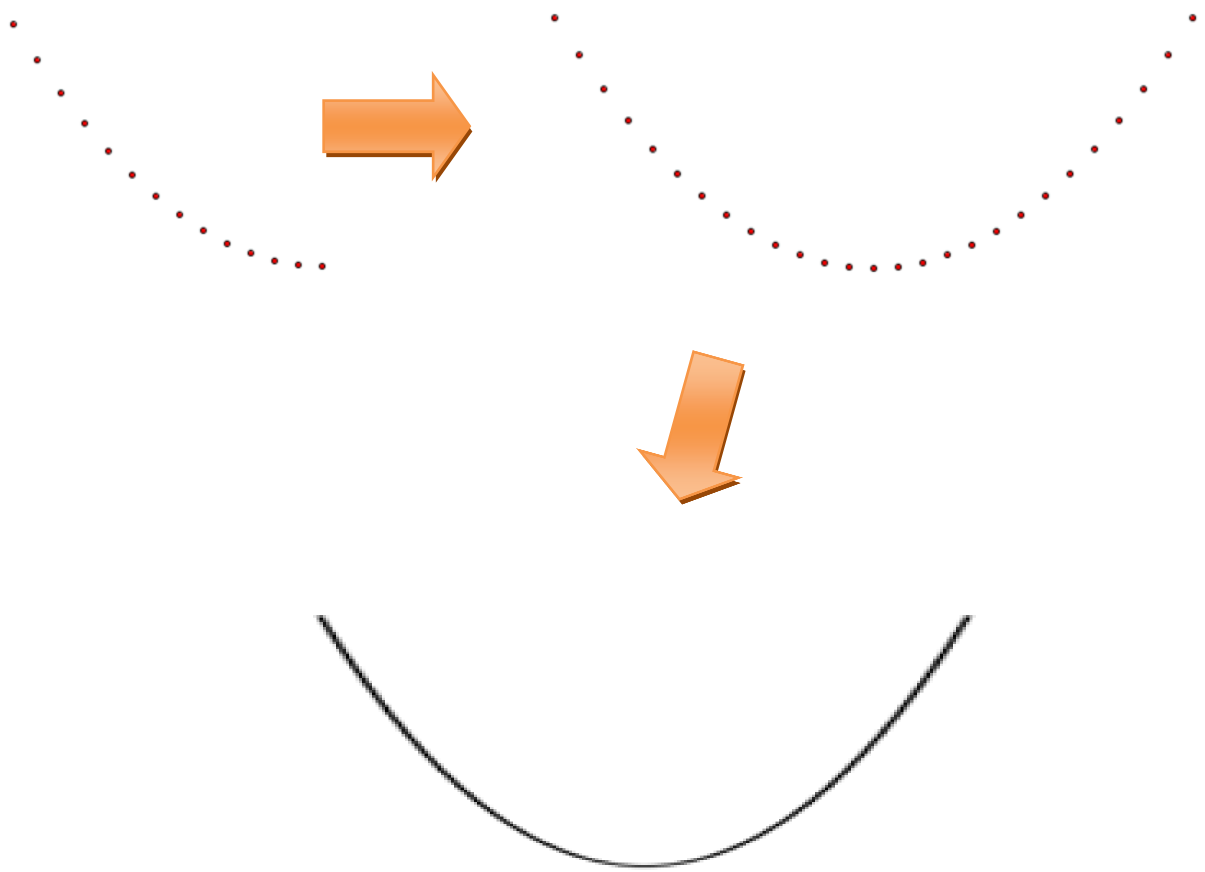
g) Podemos considerar que os pontos do gráfico de p(d) formam uma linha contínua? Por quê?

____

____

h) Você percebeu que os pontos parecem formar uma curva? Qual é o nome desta curva?

____



Instruções para a ficha de atividades 2

Eis algumas perguntas que são interessantes para o momento:

Será que há alguma conexão entre o jogo dos discos e o jogo de dardos adaptado do jogo dos discos? Por que foi feita uma fusão destes jogos?

Para responder a estas perguntas vamos estudar o conceito de probabilidade geométrica.

Até o momento estivemos lidando com probabilidade experimental. Vamos, a partir deste momento, determinar precisamente a probabilidade de um lançamento ser favorável, isto é, vamos obter uma expressão exata para a função probabilidade. Ao nos referirmos aos resultados desta expressão estaremos falando em probabilidade teórica.

Probabilidade geométrica

Definiremos, agora, o conceito de probabilidade geométrica.

Consideremos uma região B de plano contida numa região A do mesmo plano. A figura abaixo ilustra um exemplo desta situação.

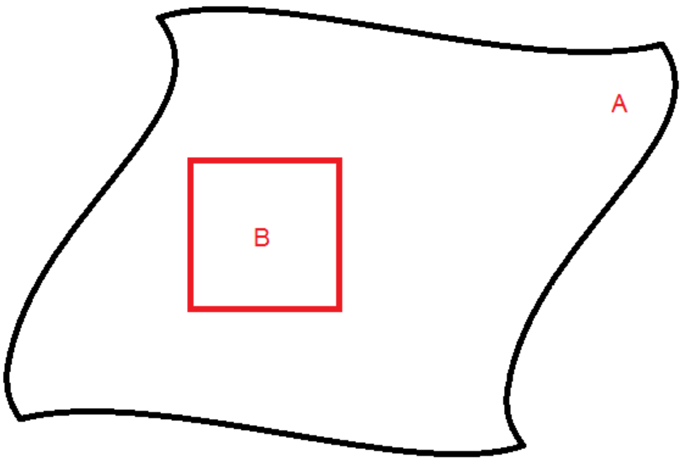


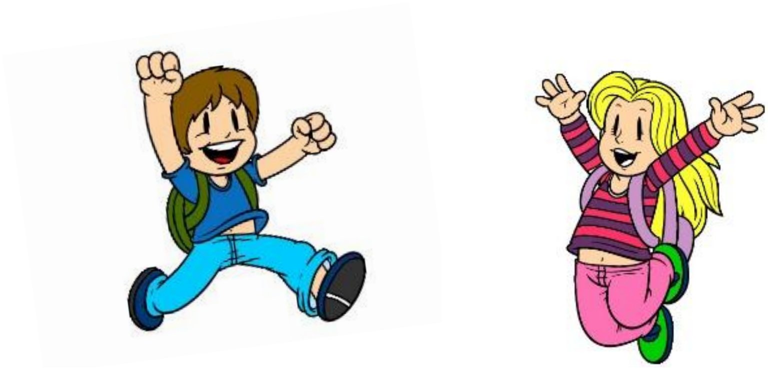
Figura 5: plano (genérico) e região contida (genérica) no plano

Ao escolhermos ao acaso um ponto de A, a probabilidade de que este ponto pertença a B é:

$$p = \frac{\text{área de } B}{\text{área de } A}$$

Consideremos, então, o plano do quadriculado do jogo dos dardos. Relembrando: d é a diferença entre a medida do quadrado de contorno preto e a medida do lado do quadrado cinza centralizado. Assim, cada quadrado de contorno preto tem lados de medida L e cada quadrado cinza centralizado tem lados medindo L – d. Aplicando o conceito de probabilidade geométrica neste caso obtemos:

$$p(d) = \frac{\text{área do quadrado de lado } L - d}{\text{área do quadrado de lado } L} = \frac{(L-d)^2}{L^2}$$



Ficha de atividades 2

Voltando para o jogo de dardos adaptado, vamos agora aplicar a fórmula anterior. Calcularemos as probabilidades de acerto para cada tipo de alvo.

1) O lado de cada quadrado do quadriculado mede 3 cm, ou seja, L = 3. Substitua este valor na fórmula e a desenvolva:

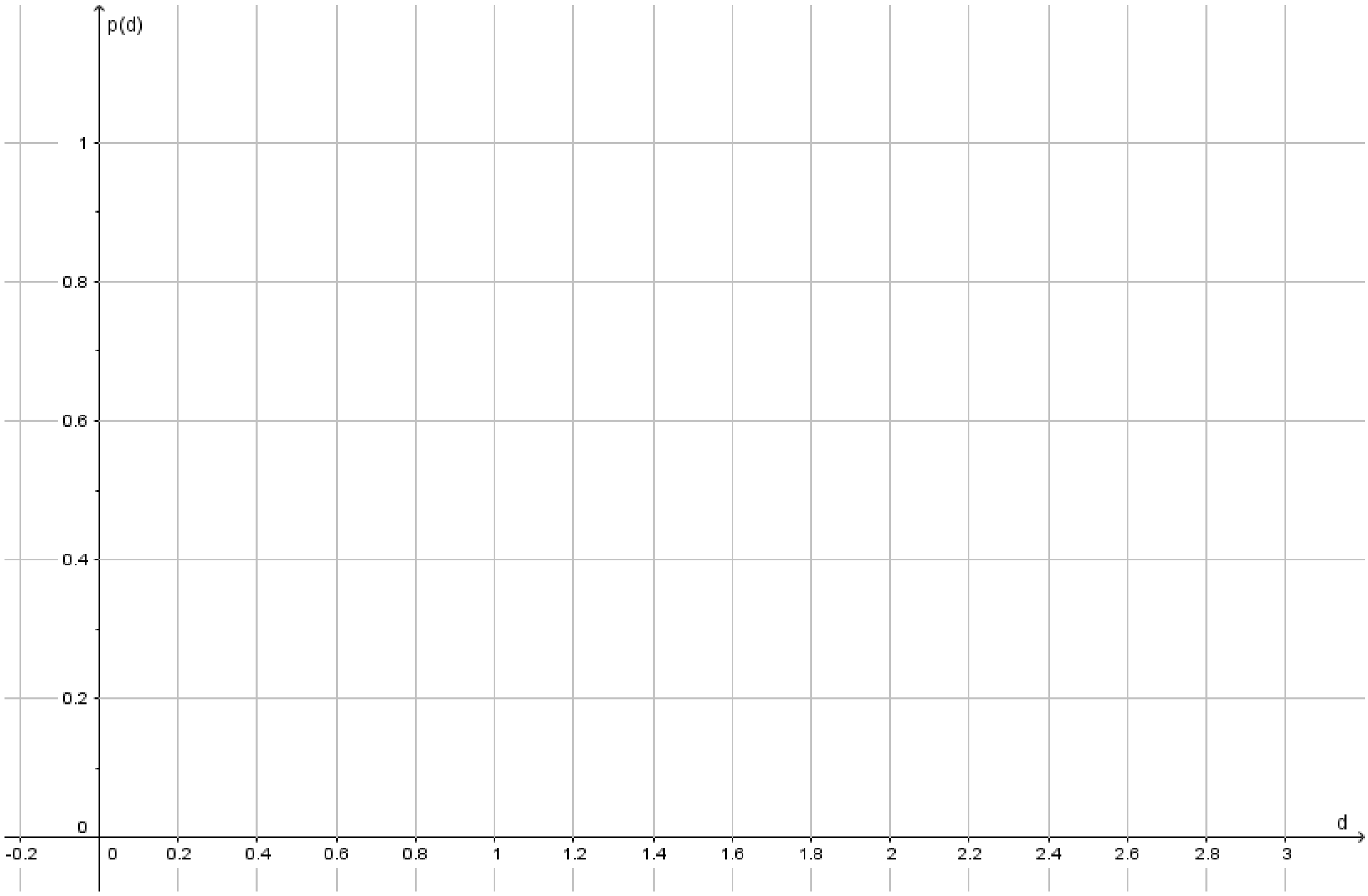
$$p(d) = \frac{(L-d)^2}{L^2} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

2) Agora, substitua as medidas dos diâmetros d e calcule a probabilidade de acerto:

Tabela 9:

Lado do quadrado do quadriculado: 3 cm		
Tipo de alvo	d (em cm)	Probabilidade de acerto
I		p( ) =
II		p( ) =
III		p( ) =
IV		p( ) =
V		p( ) =
VI		p( ) =
VII		p( ) =

3) Com base nos dados obtidos na tabela 9 construa o gráfico da função p(d):



Leitura complementar

Voltando agora às perguntas iniciais:

Será que há alguma conexão entre o jogo dos discos e o jogo de dardos adaptado do jogo dos discos? Por que foi feita uma fusão de dois jogos?

Após o que estudamos até o momento, consegue respondê-las?

A explicação a seguir te ajudará a respondê-las!!!

Vamos analisar o jogo dos discos com moedas, CDs e argolas.

Para dizer que um lançamento foi favorável ou não precisamos analisar a posição do disco dentro do quadradinho do quadriculado.

Mas, analisar a posição do disco significa comparar áreas. Concorda? E quais áreas seriam, neste caso?

Pare responder a esta pergunta imagine que você lançou um disco no quadriculado. Imagine todas as posições possíveis para o disco parado dentro de um dos quadrados do quadriculado, tocando ou não as bordas desse quadrado.

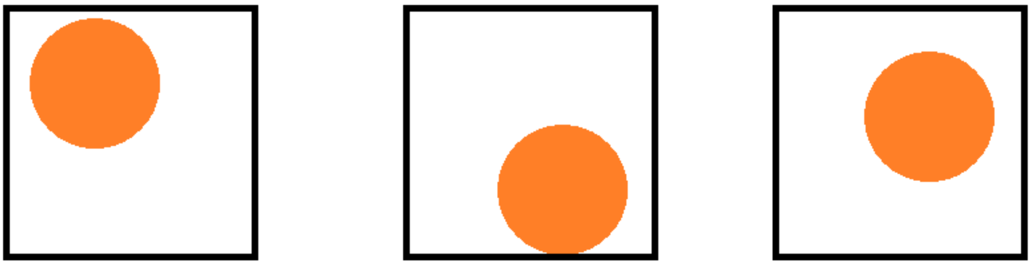


Figura 6: moedas confinadas num dos quadrados do quadriculado

Você consegue visualizar que a localização do centro de um disco confinado no quadradinho determina a posição desse disco no quadrado?

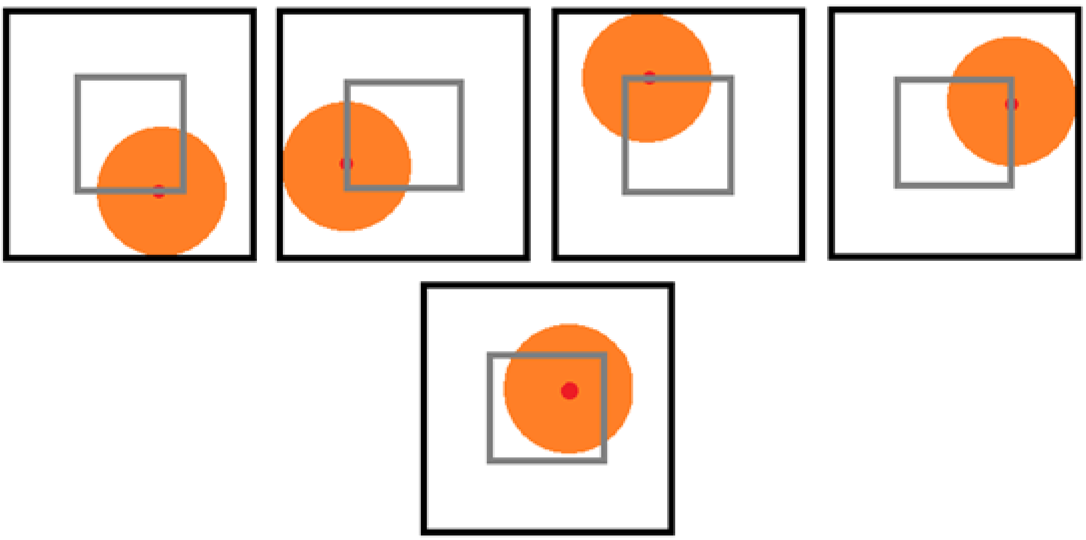


Figura 7: quadrado (de contorno cinza) gerado pelos centros das moedas confinadas

Pensando agora numa abordagem teórica, vamos considerar que lançar um disco em um dos quadrados do quadriculado é o mesmo que lançar um ponto (o centro do disco) em qualquer um destes quadrados. Desta forma, o centro é um representante do disco.

Consideremos, ainda, uma grande quantidade de discos lançados, todos confinados nos quadrados do quadriculado. Você consegue perceber que seus centros geram tanto a borda quanto o interior de outro quadrado menor (centralizado)?

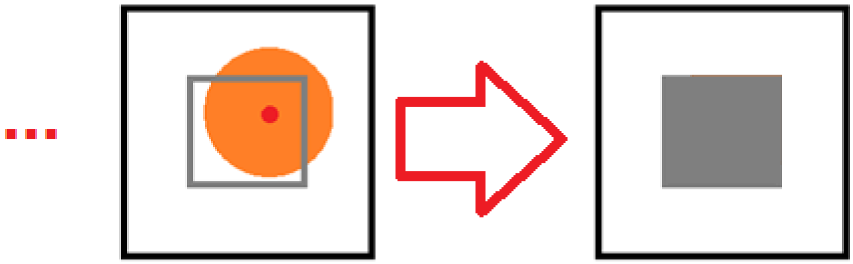


Figura 8: quadrado (cinza sólido) gerado pelos centros das moedas confinadas

Exercício complementar

Seja d a medida do diâmetro de um determinado disco. Você saberia deduzir o lado do quadrado menor formado em função do lado L do quadrado do quadriculado e deste diâmetro d? Vamos lá!

4) Observe a figura abaixo e deduza o tamanho do lado do quadrado menor formado pelos centros dos discos de ***diâmetro d*** confinados no quadrado de ***lado L***.

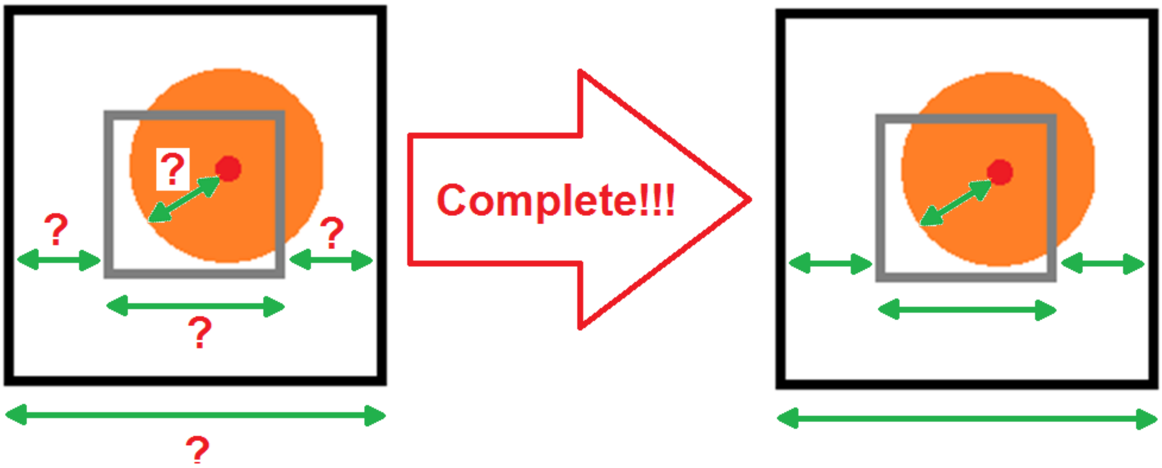


Figura 9: medidas relativas às posições de uma moeda confinada

Você percebeu alguma semelhança entre esta figura e o alvo do jogo de dardos?

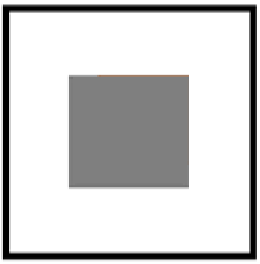
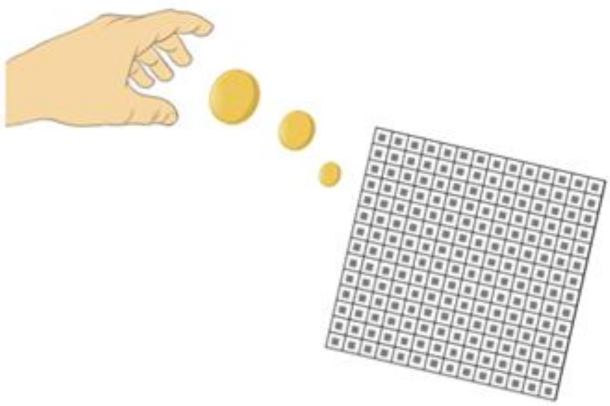


Figura 10: quadrado do quadriculado e quadrado (cinza sólido) gerado pelos centros das moedas confinadas

Esta figura é semelhante a um dos quadradinhos do alvo!

Percebeu que lançar as moedas e botões no quadriculado produz o mesmo resultado do que lançar os dardos nos alvos quadriculados?

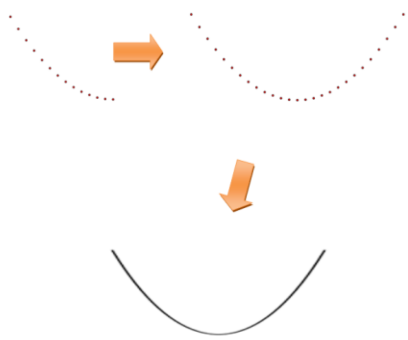


Consideremos o plano do quadriculado do jogo dos discos. Cada quadrado de contorno preto tem lados de medida L e cada quadrado gerado pelos centros dos discos de diâmetro d tem lados medindo L – d. **Observamos que o diâmetro d corresponde justamente à diferença entre a medida do lado do quadrado de contorno preto e a medida do lado do quadrado cinza.** Assim, aplicando o conceito de probabilidade geométrica, neste caso, obtemos:

$$p(d) = \frac{\text{área do quadrado de lado } L - d}{\text{área do quadrado de lado } l} = \frac{(L-d)^2}{L^2}$$

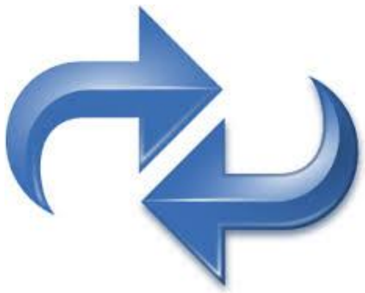
Conclusão:

Fixando a medida L para todos os alvos, então as probabilidades de acerto do jogo de discos e do jogo de dardos adaptado em função de d serão as mesmas!!!



Instruções para a ficha de atividades 3

Resolvendo o problema inverso



Até agora trabalhamos com a probabilidade em função de d ou, equivalentemente, em função do lado do quadrado cinza, já que fixamos a medida L.

Mas, e se quisermos resolver o problema inverso? Isto é, e se quisermos determinar a diferença ou o diâmetro d a partir de uma probabilidade p?

Para respondermos a esta pergunta precisamos trabalhar com a expressão obtida para p(d) e isolar d:

$$p(d) = \frac{(L-d)^2}{L^2}$$

Podemos reescrever e trabalhar com esta expressão da seguinte forma:

$$p = \frac{(L-d)^2}{L^2}$$

Isolando d nesta expressão obtemos:

$$p = \frac{(L-d)^2}{L^2} \Rightarrow$$

$$p.L^2 = (L-d)^2 \Rightarrow$$

$$L\sqrt{p} = L - d \Rightarrow$$

$$d = L - L\sqrt{p} \Rightarrow$$

$$d = L.(1-\sqrt{p})$$

Esta é a expressão para determinarmos d em função da probabilidade requerida, considerando o lado L como parâmetro.

Por exemplo, fixado L = 3, se quisermos uma probabilidade de 50%, isto é, p = 0,5, o valor de d será:

$$d = 3.(1-\sqrt{0{,}5}) \approx 0{,}88$$

Compare este valor teórico e exato com o valor experimental consultando a tabela 9 e o gráfico para esta tabela. Veja que interessante!

Ficha de atividades 3

1) Usando a expressão anterior, calcule o valor de d em função da probabilidade dada. Se preferir, use uma calculadora para agilizar os cálculos:

Probabilidade p	d (em cm)
0%	
10%	
20%	
35%	
53%	
67%	
80%	
90%	
100%	

2) Compare os resultados obtidos para as medidas da diferença d com as medidas das tabelas 8 e 9. O que você conclui?

____

____

____

3) Compare também os gráficos referentes às tabelas 8 e 9. O que você conclui?

____

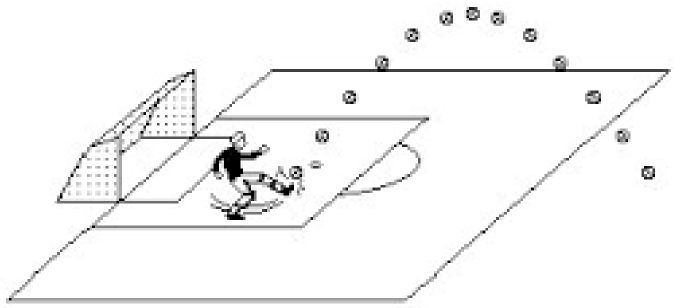
____

____

Instruções para a ficha de atividades 4

Parábola

Você percebeu que os gráficos anteriores formam uma curva? Lembra-se de que esta curva é chamada parábola?



Não é interessante notarmos o "surgimento" de uma parábola através do jogo dos discos e do jogo de dardos? Você imaginava que estes jogos poderiam nos conduzir ao estudo de funções quadráticas e parábolas?

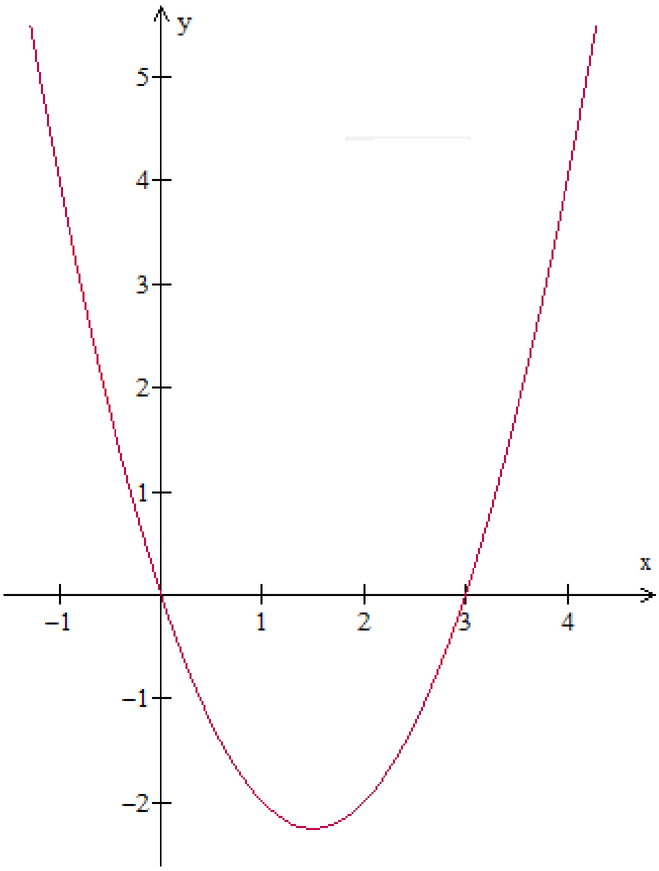


Figura 11: parábola

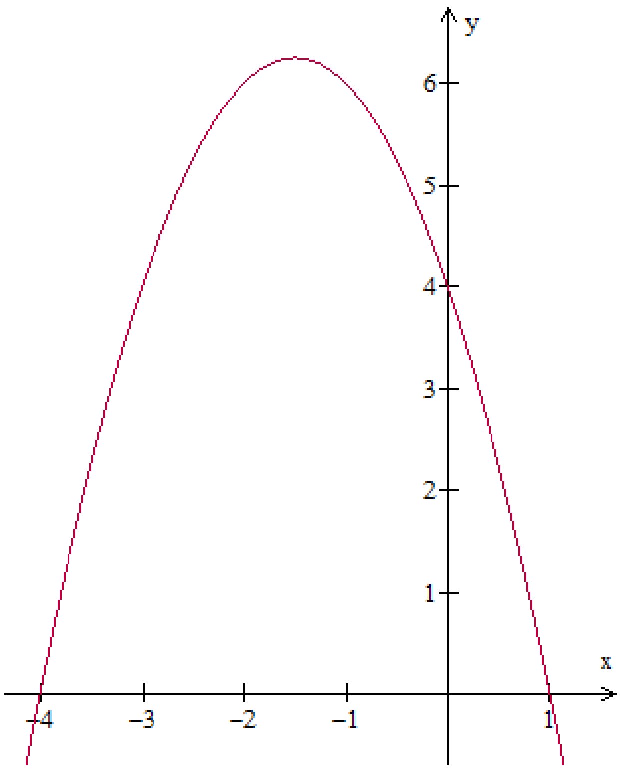


Figura 12: parábola

Será que existem mais situações que nos conduzam ao surgimento de outras parábolas e ao estudo de funções quadráticas? Prossiga com as atividades e você verá a resposta a esta intrigante questão!!!

Toda parábola é composta por dois ramos simétricos em relação a uma reta chamada de eixo de simetria (e). O ponto comum à parábola e ao eixo de simetria é o ponto V, chamado de vértice da parábola.

Toda função polinomial do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais e a diferente de zero, é denominada função polinomial do 2.º grau ou função quadrática.

- Se $a > 0$ sua concavidade é voltada para o sentido positivo do eixo y, isto é, é para cima (figura 11);
- Se $a < 0$ sua concavidade é voltada para o sentido negativo do eixo y, isto é, é para baixo (figura 12).

Zeros ou raízes de uma função quadrática

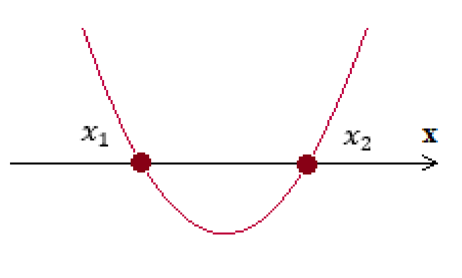
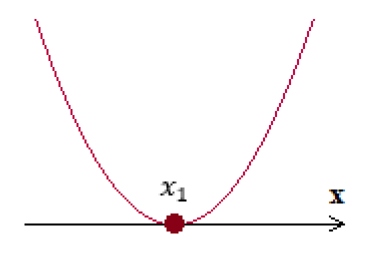
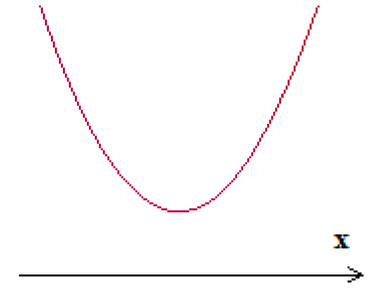
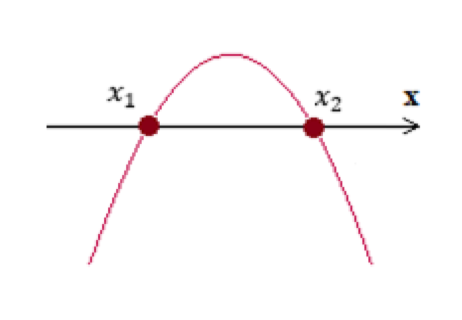
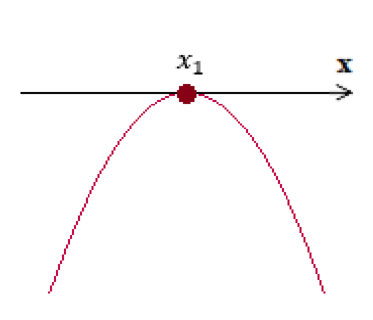
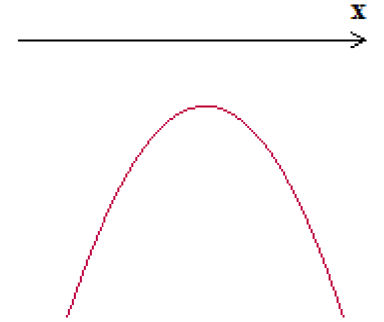
Os zeros ou raízes de uma função quadrática dada por $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, com *a* diferente de zero, são os valores reais de x para os quais se tem $y = 0$, quando existirem.

Algebricamente, as raízes da função quadrática são obtidas quando resolvemos a equação do 2.º grau $ax^2 + bx + c = 0$. O discriminante (Δ) da equação e, também, o discriminante da função, e assim:

- Quando $\Delta > 0$ a função $y = ax^2 + bx + c$ tem duas raízes reais diferentes.
- Quando $\Delta = 0$ a função $y = ax^2 + bx + c$ tem uma única raiz real.
- Quando $\Delta < 0$ a função $y = ax^2 + bx + c$ não tem raízes reais.

Geometricamente, as raízes da função quadrática correspondem aos valores de x nos pontos de intersecção da parábola com o eixo x.

Analisando o sinal do coeficiente a e analisando o discriminante temos as seguintes situações:

	Δ > 0	Δ = 0	Δ < 0
a > 0			
a < 0			

Vértice da parábola

O vértice de uma parábola determinada pela função quadrática dada por y = f(x) = ax^2 + bx + c, com a diferente de zero, é determinado por:

$$\boxed{V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)}$$

Quando o domínio de f(x) é o conjunto dos números reais:

- Se a > 0, quando $x_v = -\frac{b}{2a}$ a função assume o valor mínimo $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$.
- Se a < 0, quando $x_v = -\frac{b}{2a}$ a função assume o valor máximo $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$.

Analisando as parábolas esboçadas

As parábolas que esboçamos a partir da função p(d):

- Têm concavidade para cima;
- Assumem o valor máximo y = 1 em d = 0, isto é, p(0) = 1;
- Assumem o valor mínimo y = 0 em d = L (vértice);
- Têm uma única raiz real d = L.

Análise gráfica com o auxílio do software GeoGebra

Acompanhe as apresentações do professor. Você conhecerá o software matemático GeoGebra. Ele possui várias aplicações para estudarmos matemática, entre elas o traçado de gráficos.

Observe o resultado gráfico das variações dos coeficientes a, b e c para uma determinada função quadrática dada por $y = ax^2 + bx + c$. Observe a concavidade das parábolas, os zeros e os vértices (pontos de máximo e pontos de mínimo).

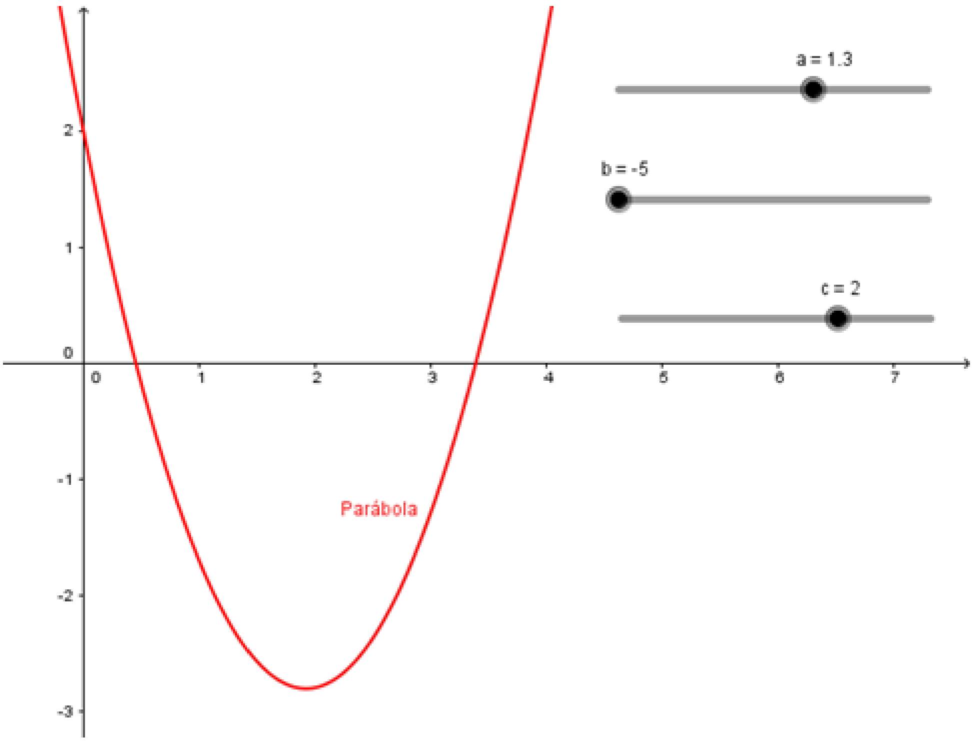


Figura 13: parábola com controles deslizantes traçada com o software GeoGebra

Outras situações que envolvem funções quadráticas

Há situações em que queremos determinar o lucro máximo, o gasto mínimo, a menor área, o maior volume, etc. Ou seja, queremos determinar o valor máximo ou o valor mínimo de uma determinada função quadrática (dizemos que queremos maximizar ou minimizar uma função quadrática). São situações chamadas de problemas de otimização.

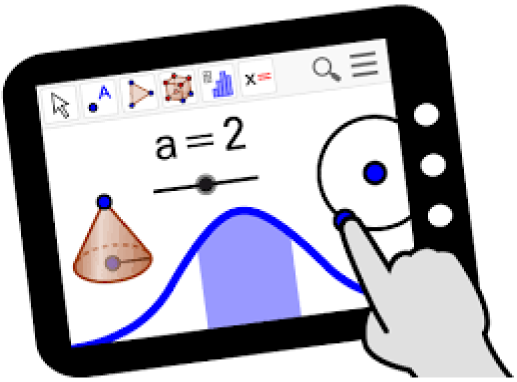
Estudaremos, a partir de agora, três problemas de otimização. Em suas resoluções há a determinação das coordenadas do vértice de uma parábola e a análise das raízes da função quadrática correspondente.

Você deverá resolver apenas o segundo problema. O primeiro problema servirá de roteiro para a resolução do segundo. O terceiro problema será resolvido pelo professor utilizando o software GeoGebra.

1

2

3



Ficha de atividades 4

Leia os problemas e siga o roteiro a seguir para resolvê-los:

Problema 1:

O administrador de uma rede de cinemas observou que, quando o preço do ingresso era R$ 8,00, o número de espectadores por sessão era 240. Depois verificou que cada R$ 1,00 de aumento no ingresso provocava a diminuição de 12 espectadores por sessão. Levando em consideração essas condições, o administrador estabeleceu o preço do ingresso de modo que a receita arrecadada por sessão fosse maximizada. Qual foi o preço estabelecido por ingresso? Qual foi a receita máxima por sessão?

Roteiro:

Seja R(x) a função receita, isto é, a função que nos possibilita obter a receita de acordo com o aumento do preço do ingresso (x).

R(x) = preço do ingresso VEZES quantidade de espectadores

a) Calcule R(0) (isto é, a receita arrecadada com o ingresso custando R$ 8,00).

$$\mathbf{R(0) = 8 * 240 = 1920}$$

b) Calcule R(1) (isto é, a receita arrecadada com o ingresso custando R$ 9,00).

$$\mathbf{R(1) = (8+1) * (240 - 12 * 1) = 9 * (240 - 12) = 9 * 228 = 2052}$$

c) Calcule R(2) (isto é, a receita arrecadada com o ingresso custando R$ 10,00).

$$\mathbf{R(2) = (8+2) * (240 - 12 * 2) = 10 * (240 - 24) = 10 * 216 = 2160}$$

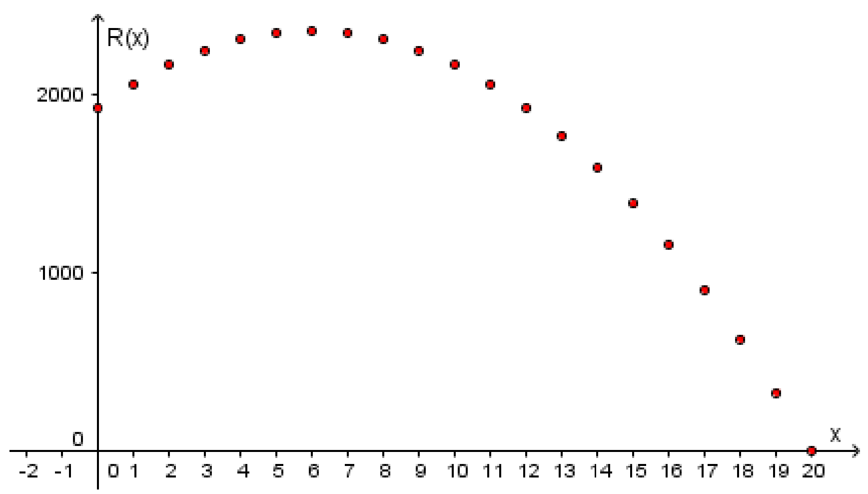
d) Determine a expressão R(x).

$$\mathbf{R(x) = (8+x).(240 - 12x)}$$

e) Calcule e preencha a tabela a seguir:

x (aumento, em reais)	p(x) (preço do ingresso, em reais)	q(x) (quantidade de espectadores por sessão)	R(x) (receita arrecadada, em reais)
0	8	240	1 920
1	9	228	2 052
2	10	216	2 160
3	11	204	2 244
4	12	192	2 304
5	13	180	2 340
6	14	168	2 352
7	15	156	2 340
8	16	144	2 304
9	17	132	2 244
10	18	120	2 160
11	19	108	2 052
12	20	96	1 920
13	21	84	1 764
14	22	72	1 584
15	23	60	1 380
16	24	48	1 152
17	25	36	900
18	26	24	624
19	27	12	324
20	28	0	0

f) A partir dos dados obtidos na tabela anterior, esboce o gráfico de R(x).



g) Observando os dados da tabela e o gráfico anterior, qual deve ser o aumento aproximado para que a receita seja máxima? Qual deve ser o preço aproximado do ingresso para que a receita seja máxima?

O aumento deve ser de 6 reais, e o preço deve ser 8 + 6 = 14 reais.

h) A partir da resposta do item e), determine os coeficientes *a*, *b* e *c* da função R(x).

$$\mathbf{R(x) = (8 + x).(240 - 12x) = 8 * 240 - 8 * 12x + 240 * x - 12 * x^2 =}$$

$$\mathbf{= -12x^2 + 144x + 1920}$$

Coeficientes: a = -12, b = 144 e c = 1920.

i) Considere que o gráfico de R(x) seja uma linha contínua, isto é, seja uma parábola. Calcule as raízes de R(x). Alguma raiz é negativa? O que representa um valor negativo para x?

Resolução por fatoração:

$$\mathbf{R(x) = (8 + x).(240 - 12x)}$$

$$\mathbf{(8 + x) = 0 \Rightarrow x = -8}$$

$$\mathbf{(240 - 12x) = 0 \Rightarrow 12x = 240 \Rightarrow x = \frac{240}{12} \Rightarrow x = 20}$$

$$\mathbf{S = \{-8, 20\}}$$

Resolução pela fórmula resolutiva (Bhaskara):

$$\mathbf{R(x) = -12x^2 + 144x + 1920}$$

$$\boxed{\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac}}$$

$\mathbf{a = -12}$
$\mathbf{b = 144}$
$\mathbf{c = 1920}$

$$\mathbf{\Delta = (144)^2 - 4.(-12).(1920) = 20\,736 + 92\,160 = 112\,896}$$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x = \frac{-(144) \pm \sqrt{112\ 896}}{2.(-12)} = \frac{-144 \pm 336}{-24}$$

$$x_1 = \frac{-144 + 336}{-24} = -\frac{192}{24} = -8$$

$$x_2 = \frac{-144 - 336}{-24} = \frac{-480}{-24} = 20$$

$$S = \{-8, 20\}$$

Raízes: -8 e 20.

Uma das raízes é negativa. Um valor negativo para x não faz sentido para o problema proposto, pois significaria diminuição no preço do ingresso.

j) Considere, novamente, que o gráfico de R(x) seja uma linha contínua, isto é, seja uma parábola. Sabendo que as coordenadas do vértice de uma parábola são dadas por $V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$, calcule exatamente quanto deverá ser o aumento no preço do ingresso para que a receita seja máxima e qual será a receita máxima.

$$\boxed{V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})}$$

$a = -12$
$b = 144$
$c = 1920$

$$x_v = -\frac{144}{2.(-12)}, = \frac{-144}{-24} = 6$$

$$y_v = -\frac{112\,896}{4.(-12)}, = \frac{-112\,896}{-48} = 2\,352$$

$$V = (6, 2\,352)$$

O aumento deverá ser de 6 reais e a receita máxima deverá ser 2 352 reais.

Problema 2:

Um ônibus de viagem com capacidade máxima para 46 passageiros foi fretado para uma excursão. Cada passageiro pagou R$ 180,00 pela passagem mais R$ 10,00 por cada lugar vago. Para qual quantidade de passageiros a rentabilidade da empresa de turismo é máxima?

Roteiro:

Seja R(x) a função receita, isto é, a função que nos possibilita obter a receita de acordo com o número de lugares vagos (x).

R(x) = preço da passagem VEZES quantidade de passageiros

a) Calcule R(0).

b) Calcule R(1).

c) Calcule R(2).

d) Determine a expressão R(x).

e) Calcule e preencha a tabela a seguir:

x (quantidade de lugares vagos)	p(x) (preço da passagem, em reais)	q(x) (quantidade de passageiros)	R(x) (receita arrecadada, em reais)
0			
1			
2			
3			
4			
5			
⋮	⋮	⋮	⋮
10			
⋮	⋮	⋮	⋮
20			
⋮	⋮	⋮	⋮
30			
⋮	⋮	⋮	⋮
40			
⋮	⋮	⋮	⋮
42			
⋮	⋮	⋮	⋮
44			
⋮	⋮	⋮	⋮
46			

f) A partir dos dados obtidos na tabela anterior, esboce o gráfico de R(x).

g) Analise o gráfico anterior e responda: o gráfico de R(x) é uma linha contínua? É uma parábola? Por quê?

____

____

____

h) Observando os dados da tabela e o gráfico anterior, qual deve ser a quantidade aproximada de passageiros para que a receita seja máxima? Qual deve ser o preço aproximado da passagem para que a receita seja máxima?

____

____

____

i) A partir da resposta do item d), determine os coeficientes *a*, *b* e *c* da função R(x).

j) Considere que o gráfico de R(x) seja uma linha contínua, isto é, seja uma parábola. Calcule as raízes de R(x). Alguma raiz é negativa? O que representa um valor negativo para x?

____

____

____

k) Considere, novamente, que o gráfico de R(x) seja uma linha contínua, isto é, seja uma parábola. Sabendo que as coordenadas do vértice de uma parábola são dadas por $\boldsymbol{V} = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$, calcule exatamente a quantidade de passageiros para que a receita seja máxima e qual será a receita máxima.

Problema 3:

André tem uma pequena fábrica de sorvetes. Semanalmente ele vende, em média, 500 caixas de picolés por R$ 34,00 cada uma. Com o passar do tempo ele percebeu que cada vez que diminuía R$ 1,00 no preço da caixa, vendia 40 caixas a mais. Quanto ele deve cobrar pela caixa de picolés para que sua receita seja máxima, ou seja, para que tenha o maior lucro possível?

Roteiro:

Seja R(x) a função receita, isto é, a função que nos possibilita obter a receita de acordo com a diminuição (x) do preço da caixa de picolé.

R(x) = preço de cada caixa VEZES quantidade de caixas

a) Determine a expressão R(x).

$$\mathbf{R(x) = (34 - x).(500 + 40x)}$$

b) A partir da resposta do item a), determine os coeficientes a, b e c da função R(x).

$$\mathbf{R(x) = (34 - x).(500 + 40x) = 34 * 500 + 34 * 40x - 500 * x - 40 * x^2 =}$$

$$\mathbf{= -40x^2 + 860x + 17\,000}$$

Coeficientes: a = -40, b = 860 e c = 17 000.

c) Pense e responda: o gráfico de R(x) será uma linha contínua? Por quê?

Não. Considerando que x representa o aumento em reais do preço de cada caixa de sorvete, e que este aumento (variação) pode ser graduado (no mínimo) em centavos, que correspondem a centésimos do real, então o gráfico será formado por pontos discretos que estão sobre uma linha contínua.

d) Considere que o gráfico de R(x) seja uma linha contínua, isto é, seja uma parábola. Calcule as raízes de R(x). Alguma raiz é negativa? O que representa um valor negativo para x?

Resolução feita com o GeoGebra:

- **Esboçamos o gráfico de R(x). Para isto digitamos no campo entrada: $p2(x) = -40 * x\hat{}2 + 860 * x + 17\,000$ ENTER**

- **Analisamos (observamos) o gráfico gerado (parábola com concavidade para baixo e que intercepta o eixo dos x em dois pontos);**

- **Marcamos os pontos de interseção entre a parábola e o eixo dos x. Para isto clicamos na flecha para baixo do segundo ícone da barra de ferramentas e clicamos em PONTO INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS. Levamos o cursor sobre cada região de interseção e clicamos para marcar os pontos de interseção;**

- **Clicamos com o botão direito sobre o primeiro ponto de interseção (o ponto mais à esquerda) e clicamos em Propriedades... Em seguida digitamos R1 no campo nome e fechamos a janela. Assim, nomeamos este ponto de R1. De maneira análoga, nomeamos o outro ponto de R2;**

- **Observamos as coordenadas destes dois pontos de interseção, que são R1 = (-12,5; 0) e R2 = (34, 0) e determinamos as raízes de R(x): $x_1 = -12,5$ e $x_2 = 34$.**

Uma das raízes é negativa: $x_1 = -12,5$. Um valor negativo para x não faz sentido para o problema proposto, pois significaria aumento no preço da caixa de sorvete.

e) Considere, novamente, que o gráfico de R(x) seja uma linha contínua, isto é, seja uma parábola. Sabendo que as coordenadas do vértice de uma parábola são dadas por $\boldsymbol{V} = (-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}, -\frac{\Delta}{\boldsymbol{4a}})$, calcule exatamente quanto deverá ser a diminuição no preço de cada caixa para que a receita seja máxima e qual será a receita máxima.

Resolução feita com o GeoGebra:

<u>Para esta resolução utilizaremos o conceito de simetria da parábola</u>

- **Determinamos o ponto médio entre as raízes de R(x). Para isto clicamos na flecha para baixo do segundo ícone da barra de ferramentas e clicamos em PONTO MÉDIO OU CENTRO. Depois clicamos sobre o ponto R1 e, em seguida, sobre o ponto R2. Observamos o ponto gerado que é equidistante de R1 e R2;**

- **Clicamos com o botão direito sobre este ponto gerado e clicamos em Propriedades... , e em seguida digitamos PM no campo nome e fechamos a janela. Assim, nomeamos este ponto de PM (ponto médio).**

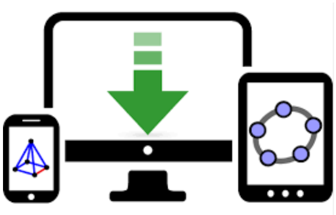
- **Traçamos o eixo de simetria da parábola. Para isto clicamos na flecha para baixo do terceiro ícone da barra de ferramentas e clicamos em RETA PERPENDICULAR. Clicamos sobre o ponto PM e sobre um ponto qualquer do eixo dos x;**

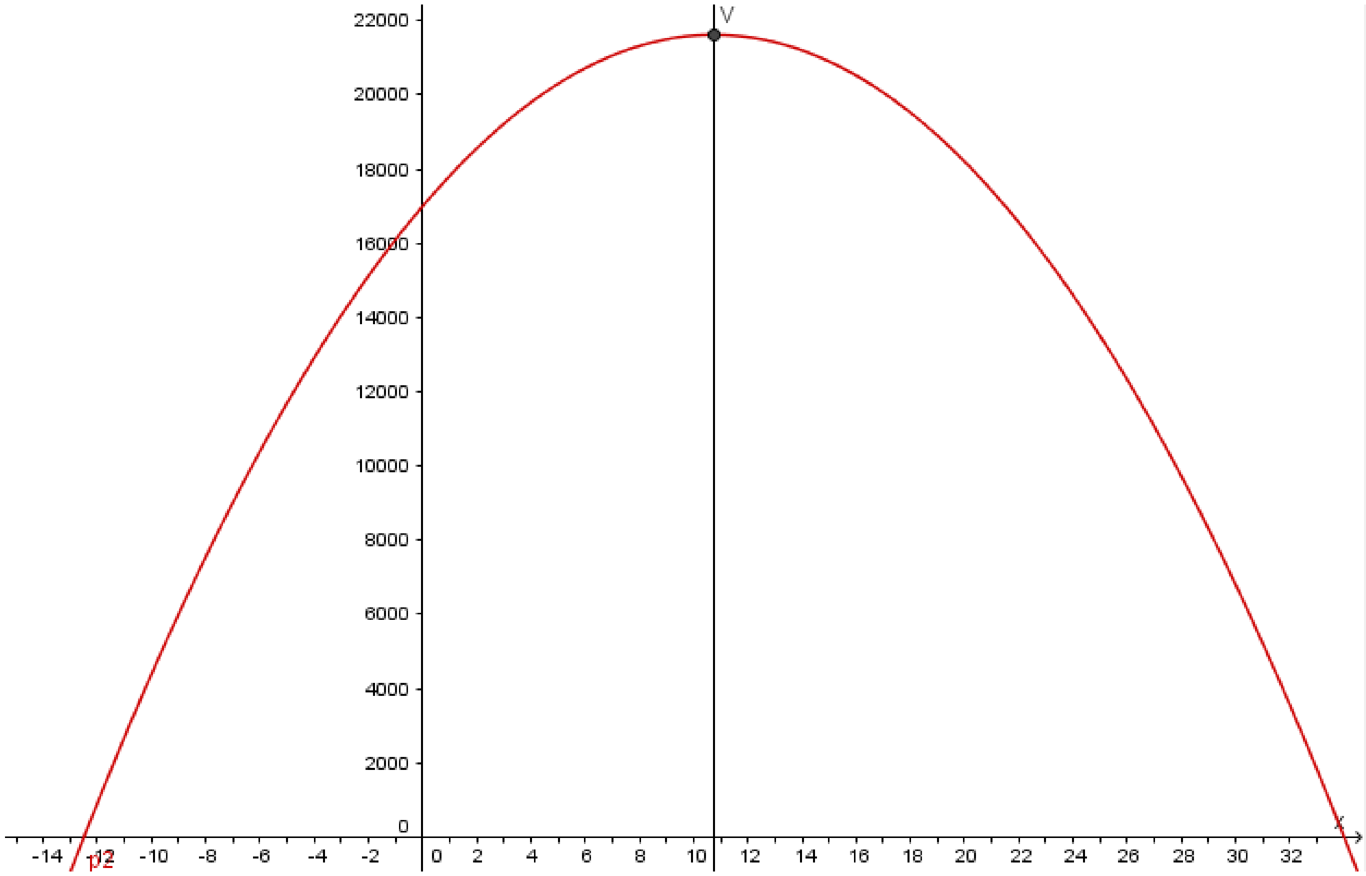
- **Determinamos o vértice da parábola. Para isto clicamos na flecha para baixo do segundo ícone da barra de ferramentas e clicamos em INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS. Levamos o cursor sobre a região de interseção entre a parábola e o eixo de simetria e clicamos para marcar o vértice;**

- **Clicamos com o botão direito sobre este ponto gerado e clicamos em Propriedades... , e em seguida digitamos V no campo nome e fechamos a janela. Assim, nomeamos o vértice da parábola de V;**

- **Observamos as coordenadas do ponto V = (10,75; 21 622,50).**

Assim, determinamos a que diminuição no preço de cada caixa de sorvete é R$ 10,75 e que a receita máxima é R$ 21622,50.





22000
20000
18000
16000
14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
V
p2
x
-14 -12 -10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32

Instruções para a ficha de atividades 5

Uso do software GeoGebra e do aplicativo para smartphones Android GeoGebra Calculadora Gráfica no estudo de funções quadráticas

Utilizaremos o software GeoGebra e o aplicativo para smartphones Android GeoGebra Calculadora Gráfica para esboçar os gráficos das parábolas.

Importante: O seu smartphone deverá utilizar o sistema operacional Android. Caso contrário, uma alternativa é acessar via internet móvel do seu smartphone o endereço https://web.geogebra.org/. Porém, será necessário o uso contínuo da internet para que as atividades possam ser feitas.

Primeiro passo:

Acesse o aplicativo Play Store de seu smatphone, digite no campo busca GeoGebra Calculadora Gráfica e instale este aplicativo. É recomendável que você, aluno, faça esta instalação em casa para aproveitar melhor o tempo em sala de aula.

Depois de instalado o aplicativo, abra-o e observe a tela apresentada semelhante à figura a seguir:

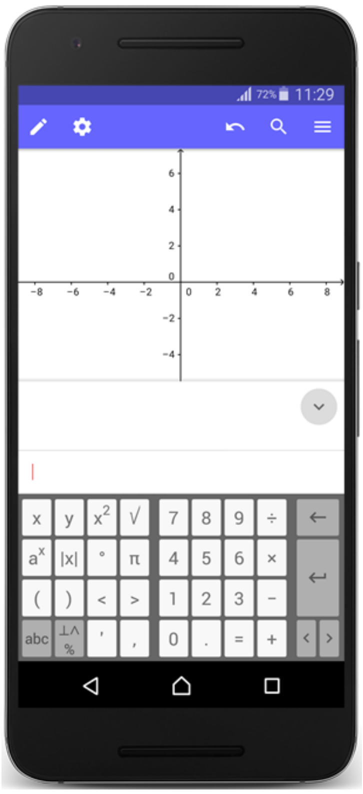
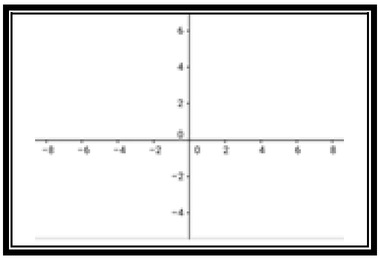


Figura 13: smatphone com o aplicativo GeoGebra Calculadora Gráfica

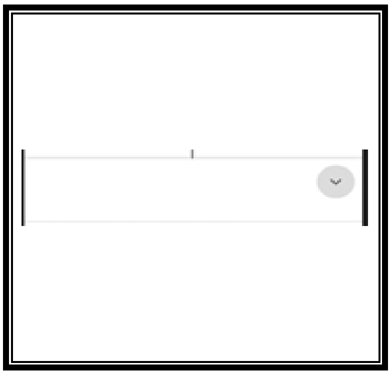
Funcionamento básico:

Na parte superior da tela já uma barra azul que contém:

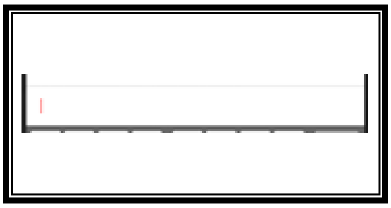
- O ícone  barra de ferramentas para construção de desenhos geométricos, entre outras.
- O ícone  propriedades do objeto que dá acesso às ferramentas de visualização gráfica (mostrar/ocultar eixos, mostrar/ocultar linhas de grade, etc.)
- O ícone  desfazer, que permite desfazer a última ação feita.
- O ícone  pesquisa, que permite pesquisar na internet arquivos já feitos (animações, quebra-cabeças, etc.)
- O ícone  menu que permite criar um arquivo novo, abrir/gravar/compartilhar um arquivo existente e obter ajuda pela internet (inclusive consultar um tutorial em inglês).



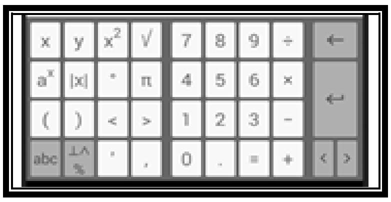
Na parte central da tela há a área de trabalho, onde podemos fazer construções geométricas e esboçar gráficos. Nela podemos observar os eixos cartesianos.



Na parte central e abaixo da área de trabalho há a janela de álgebra, onde as coordenadas e equações correspondentes são mostradas. Contém o ícone que permite esconder a janela de álgebra e o teclado, mostrando apenas a área de trabalho. Ao clicar neste ícone ele muda para o ícone que permite mostrar novamente a janela de álgebra e o teclado.

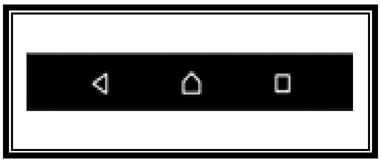


Na parte central e abaixo da janela de álgebra há o campo de entrada, que mostra as coordenadas, equações, funções e comandos digitados. Estes são mostrados na área de trabalho imediatamente após pressionar a tecla enter.



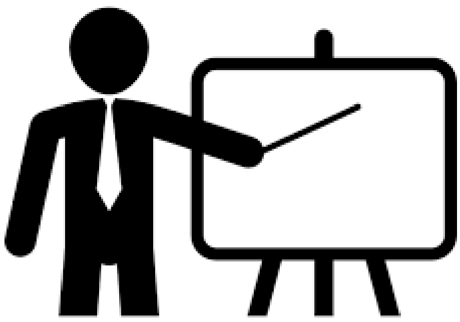
Na parte inferior da tela há um teclado alfanumérico contendo símbolos matemáticos, que é usado para digitar.

Há ainda os botões de controle do smartphone. Para cada tipo de smartphone há botões diferentes com ações diferentes, porém destes botões permite fechar o aplicativo.



Dica: Manuseie bastante o aplicativo para familiarizar-se com ele! Tire suas dúvidas com o professor!

Importante: acompanhe as instruções do professor. Ele utilizará o software GeoGebra com notebook e datashow para projetar as atividades a seguir e auxiliar na construção dos gráficos.



Ficha de atividades 5

1) Retorne à ficha de atividades 2 e anote abaixo a expressão calculada para p(d), com L = 3.

p(d) =

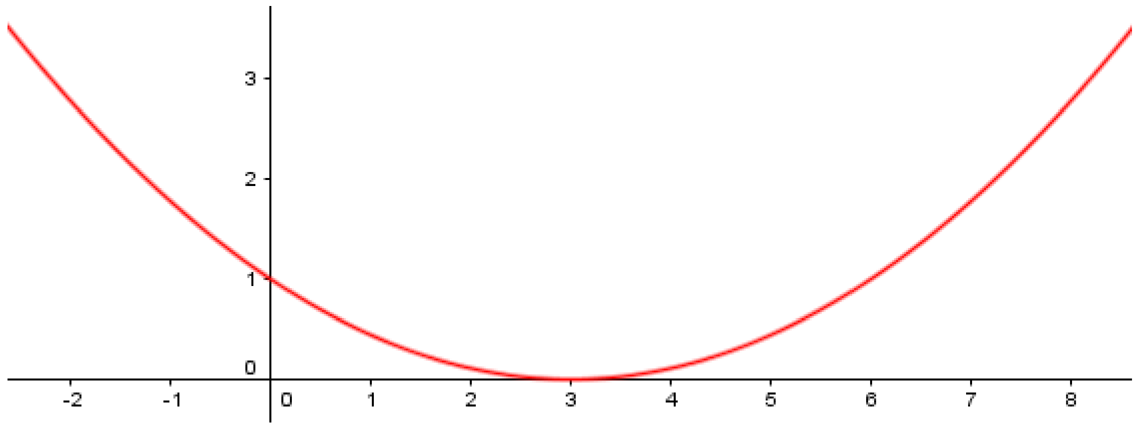
Esta expressão permite calcular a probabilidade em função de uma determinada diferença *d*, ou seja, nos dá *y* em função de *d*. Porém, ao utilizarmos o aplicativo deveremos considerar *y* em função de *x*. Para isto basta simplesmente reescrever esta expressão substituindo *d* por *x*:

y =

Com o smartphone em mãos e com o aplicativo *GeoGebra Calculadora Gráfica* aberto, digite esta expressão no campo entrada. Para isto, siga a sequência:

$$y = (\ 1 : 9\ )\ \boldsymbol{X}\ x^2 - (\ 2 : 3\ )\ \boldsymbol{X}\ x + 1 \text{ ENTER}$$

Observação: ***X*** é o símbolo para multiplicação (vezes...)



Observe o gráfico desenhado. Viu a parábola (completa)? Percebeu como foi rápido e fácil obtê-la através do aplicativo?

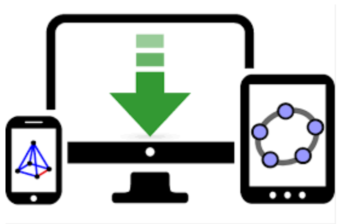
Esconda a janela de álgebra e manuseie o gráfico. Com os dedos, dê um zoom na tela para visualizar melhor a parábola.

Observação: No software GeoGebra utilizado pelo professor a sequência a ser digitada é quase idêntica:

y = (1 / 9) * x ^ 2 – (2 / 3) * x + 1

* é o símbolo para multiplicação;
^ é o símbolo para potenciação (elevado a...);
/ é o símbolo para divisão.

Você poderá utilizar em casa o GeoGebra em seu PC, notebook ou tablet!



2) Observando a parábola apresentada pelo aplicativo e retomando a ficha de atividades 2, complete o que se pede:

a) A concavidade da parábola é ____________________, pois o coeficiente a é ____________________.

b) Cada ponto marcado no plano cartesiano representa uma ____________________, em função da ____________________ d.

c) À medida que a distância d ____________________ observamos que a probabilidade de acerto ____________________.

d) p(0) = ______.

e) p(3) = ______.

3) Responda às perguntas:

f) Uma diferença visível entre a parábola da ficha de atividades 2 e a do aplicativo é que esta última não se restringe ao intervalo [0, 3]. Por que há esta diferença?

____

____

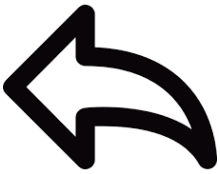
g) A função p(d) possui raízes? Quantas?

____

h) Qual é o vértice da parábola? É ponto de máximo ou de mínimo?

____

____



Retorne à ficha de atividades 4 para fazer as atividades a seguir.

4) Localize a expressão para R(x) do problema 1 e construa o gráfico utilizando o GeoGebra. Complete o que se pede:

a) Concavidade da parábola: ________________________.

b) Raízes de R(x): ________________________.

c) Vértice da parábola: ________________________.

d) O vértice da parábola é um ponto ________________________.

5) Localize a expressão para R(x) do problema 1 e construa o gráfico utilizando o GeoGebra. Complete o que se pede:

a) Concavidade da parábola: ________________________.

b) Raízes de R(x): ________________________.

c) Vértice da parábola: ________________________.

d) O vértice da parábola é um ponto ________________________.

6) Localize a expressão para R(x) do problema 3 e construa o gráfico utilizando o aplicativo. Complete o que se pede:

a) Concavidade da parábola: ________________________.

b) Raízes de R(x): ________________________.

c) Vértice da parábola: ________________________.

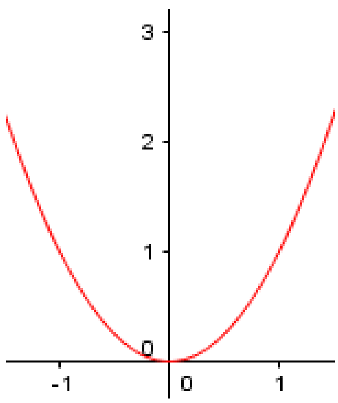
d) O vértice da parábola é um ponto ________________________.

Você percebeu que cada função quadrática estudada até agora correspondeu a uma parábola diferente?

Vamos, então, analisar as alterações que acontecem graficamente à medida que variamos os coeficientes a, b e c de uma função quadrática. Vamos relembrar a definição de função quadrática:

Toda função polinomial do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais e a diferente de zero, é denominada função polinomial do 2.º grau ou função quadrática.

Abra o aplicativo em seu smartphone e construa o gráfico da função $y = x^2$. Observe a parábola apresentada:



7) Complete os valores dos coeficientes: *a* = ______, *b* = ______ e *c* = ______.

Construa o gráfico das funções quadráticas a seguir, anote os valores dos coeficientes e responda às perguntas. Compare as parábolas obtidas com a parábola correspondente à função $y = x^2$.

a) $y = -x^2$ ➔ *a* = ______, *b* = ______ e *c* = ______

O que a alteração no sinal do coeficiente *a* fez com a parábola?

____

b) $y = 2x^2$ ➔ *a* = ______, *b* = ______ e *c* = ______

c) $y = 5x^2$ ➔ *a* = ______, *b* = ______ e *c* = ______

O que a alteração no valor do coeficiente *a* fez com a parábola?

____

d) $y = x^2 + 1$ ➔ *a* = ______, *b* = ______ e *c* = ______

e) $y = x^2 - 1$ ➔ *a* = ______, *b* = ______ e *c* = ______

O que a alteração no valor do coeficiente *c* fez com a parábola?

____

f) $y = x^2 + 2x$ ➔ *a* = ______, *b* = ______ e *c* = ______

g) $y = x^2 - 2x$ ➔ *a* = ______, *b* = ______ e *c* = ______

h) $y = x^2 + 8x$ ➔ *a* = ______, *b* = ______ e *c* = ______

i) $y = x^2 - 8x$ ➔ *a* = ______, *b* = ______ e *c* = ______

O que a alteração no valor do coeficiente *b* fez com a parábola?

____

j) $y = x^2 - 2x + 1$ ➔ a = ______, b = ______ e c = ______

k) $y = -x^2 + 5x - 1$ ➔ a = ______, b = ______ e c = ______

O que as alterações simultâneas nos valores dos coeficientes *a*, *b* e *c* fizeram com a parábola?

____

8) Para finalizar as atividades, responda às perguntas a seguir:

a) Você gostou das atividades feitas até agora? Qual delas te chamou mais a atenção?

____

____

____

b) Você concorda que o aplicativo GeoGebra Calculadora Gráfica facilitou o estudo de funções quadráticas e parábolas? Por quê?

____

____

____

c) Após realizar todas estas atividades, você consegue citar alguma aplicação prática que as funções quadráticas têm? Qual ou quais?

____

____

____

d) Você imaginava que o estudo do jogo dos discos e do jogo dos dardos adaptado tivesse alguma relação com funções quadráticas? Achou interessante a abordagem feita?

____

____

____

e) Para finalizar, responda: Você tem algum elogio, crítica ou sugestão para as atividades realizadas? Qual ou quais? Escreva abaixo!!!

____

____

____