Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

Teoria do grau topológico e sua aplicação em um problema elíptico ressonante superlinear

Rodrigo de Freitas Gabert

Orientador: *Rodrigo da Silva Rodrigues*

São Carlos
Agosto de 2015

Teoria do grau topológico e sua aplicação em um problema elíptico ressonante superlinear

Rodrigo de Freitas Gabert

Orientador: *Rodrigo da Silva Rodrigues*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de mestre em Matemática.

São Carlos
Agosto de 2015

Autor

Orientador

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Gabert, Rodrigo de Freitas
G112tg Teoria do grau topológico e sua aplicação em um problema elíptico ressonante superlinear / Rodrigo de Freitas Gabert. -- São Carlos : UFSCar, 2015.
118 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.

1. Grau topológico de Brouwer. 2. Grau topológico de Leray-Schaude. 3. Equações elípticas. I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Rodrigo de Freitas Gabert, realizada em 13/08/2015:

Rodrigo S. Rodrigues

Prof. Dr. Rodrigo da Silva Rodrigues
UFSCar

Francisco O.V. de Paiva

Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva
UFSCar

Prof. Dr. Ma To Fu
USP

À minha mãe.

"A persistência é o caminho do êxito" (Charles Chaplin)

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus pela vida, pela saúde que tem me proporcionado e pela alegria de viver.

Aos meus familiares, pelo incentivo em minha trajetória acadêmica, em especial aos meus pais, Dilmair e Rosangela, pelas incessantes orações em meu favor, ao meu irmão Diego, minha cunhada Jeane e minha tia Cleci, que muito têm me apoiado ao longo desse percurso.

Ao professor Rodrigo da Silva Rodrigues, pelo comprometimento e dedicação nos trabalhos de orientação.

Aos professores Francisco Odair Paiva e Ma To Fu, os quais compuseram a banca examinadora.

Ao professor Gustavo Ferron Madeira, por auxiliar-me no entendimento de alguns resultados apresentados no artigo que norteia este trabalho.

Aos meus amigos Marcos e Ronaldo, pela amizade e companheirismo, tanto em momentos de alegrias, quanto em momentos difíceis.

Ao meu colega de sala, Elard, por auxiliar-me na compreensão dos problemas apresentados e pelas sugestões de bibliografias que complementaram este trabalho.

Aos amigos que fiz enquanto graduando da Universidade Federal de Santa Maria, em especial aos amigos Maurício, Rian e Vanessa, pelos quais tenho grande apreço.

Ao professor João Batista Peneireiro, uma pessoa admirável, grande amigo, que contribuiu de forma substancial para minha formação matemática.

Aos professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Maria, que de alguma forma contribuíram para meu desenvolvimento acadêmico, em especial aos professores Márcio Luís Miotto, Taísa Junges Miotto e Ricardo Fajardo.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, vamos apresentar uma importante ferramenta da análise não linear, que tem grande aplicabilidade em equações diferenciais parciais: a teoria do grau topológico. Construiremos o grau topológico em dimensões finita e infinita e apresentaremos suas principais propriedades. Através dessa teoria, vamos provar a existência de soluções de dois problemas elípticos não lineares com condição de fronteira de Dirichlet, os quais foram estudados em [8]. Para que a técnica do grau topológico torne-se aplicável a tais problemas, será de grande importância a obtenção de estimativas a priori para as possíveis soluções destes problemas. Para tanto, usaremos desigualdades do tipo Hardy-Sobolev.

Abstract

In this work, we will show an important tool of nonlinear analysis, which has great applicability in partial differential equations: the topological degree theory. We will construct the topological degree in finite and infinite dimensions and show its main properties. Through this theory we will prove existence of solutions for two nonlinear elliptic problems with Dirichlet's boundary conditions, which were studied in [8]. To make topological degree be applicable to such problems, it will be of great importance obtain a-priori estimatives for possible solutions of these problems. To this end, we'll use inequalities of Hardy-Sobolev's type.

Sumário

Notações

$\operatorname{sgn} x$	-1, se $x < 0$; 0, se $x = 0$; 1, se $x > 0$;
det	determinante de uma matriz;
$J_f(x)$	sinal do determinante da matriz jacobiana de f, no ponto x;
$\lvert \cdot \rvert_\infty$	norma do máximo em $\mathbb{R}^N$;
$\lvert \cdot \rvert$	norma euclidiana em $\mathbb{R}^N$;
ρ	métrica em $\mathbb{R}^N$, induzida pela norma do máximo;
d	métrica em $\mathbb{R}^N$, induzida pela norma euclidiana;
$\rho(z, A)$	$\inf_{x \in A} \lvert x - z \rvert_\infty$;
$d(z, A)$	$\inf_{x \in A} \lvert x - z \rvert$;
$B_\rho(z, R)$	$\{x; \rho(x, z) < R\}$;
$B_d(z, R)$	$\{x; d(x, z) < R\}$;
$[A]$	espaço vetorial gerado pelo conjunto A;
$C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$	$\{f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N; f \text{ é contínua}, \Omega \subset \mathbb{R}^M \text{ é aberto, limitado}\}$;
$C(\overline{\Omega})$	$C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$;
$\lVert \cdot \rVert_\infty$	norma em $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, dada por $\sup_{x \in \overline{\Omega}} \lvert f(x) \rvert_\infty$;
$C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$	espaço das aplicações $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que f admite extensão $\widetilde{f}$ para um aberto $\Omega(f)$ contendo $\overline{\Omega}$ e $\widetilde{f}^{(m)}$ é contínua em $\Omega(f)$, $m \leq k$;
$C^k(\overline{\Omega})$	$C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$;
$\lVert \cdot \rVert_{C^k}$	norma em $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, dada por $\sum_{m=0}^{k} \lVert f^{(m)} \rVert_\infty$;
$C_0^1(\overline{\Omega})$	$\{f \in C^1(\overline{\Omega}); f = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$;
$\lVert \cdot \rVert_{C_0^1(\overline{\Omega})} = \lVert \cdot \rVert_{C^1}$	norma em $C_0^1(\overline{\Omega})$;
$\operatorname{supp} f$	$\overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}$, se f é contínua em Ω;
$C_c^k(\Omega, \mathbb{R}^N)$	$\{f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^N); \operatorname{supp} f \subset\subset \Omega\}$;
$C_c^k(\Omega)$	$C_c^k(\Omega, \mathbb{R})$;
$\lVert \cdot \rVert_p$	norma em $L^p(\Omega)$;
$\lVert \cdot \rVert_{k,p}$	norma em $W^{k,p}(\Omega)$;
$\lVert \cdot \rVert$	norma em $H_0^1(\Omega)$, dada por $\lVert f \rVert = \left(\int_\Omega \lvert \nabla f \rvert^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}$;
$\langle \, , \, \rangle_{H_0^1(\Omega)}$	produto interno de $H_0^1(\Omega)$;
Δ	operador Laplaciano, dado por $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$;
p^*	$\frac{Np}{N-p}$, para $1 < p < N$;
f^+	$\max\{f, 0\}$, para $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.

Introdução

O objetivo desta dissertação de mestrado é construir a teoria do grau topológico em dimensão finita e infinita e apresentar uma aplicação dessa teoria no estudo de equações diferenciais parciais. Para a construção do grau, vamos utilizar como referência principal [14] e para a aplicação, utilizaremos [8].

Essencialmente, a teoria do grau topológico é uma técnica que nos oferece informações sobre a existência de soluções de equações da forma $\phi(x) = y$, em que $\phi : X \to X$ é uma aplicação dada, X é um espaço vetorial normado e $y \in X$ é um ponto dado. E as soluções são procuradas em um conjunto $D \subset X$. A partir destes três objetos, isto é, a aplicação ϕ, o conjunto D e o ponto y, podemos formar ternas do tipo (ϕ, D, y) e estudar o comportamento dessas ternas. O grau topológico é uma função que associa a cada terna (ϕ, D, y) um número inteiro e, em geral, é denotada por deg. Para construirmos o grau topológico, tanto em dimensão finita, quanto em dimensão infinita, vamos precisar impor que D seja um conjunto aberto, limitado e que $y \notin \phi(\partial D)$. Isso ficará claro, no decorrer do texto, quando apresentarmos os detalhes da construção do grau.

Vamos apresentar uma série de propriedades do grau topológico, entre elas a propriedade de existência de solução, a qual nos diz que se $\deg(\phi, D, y) \neq 0$, então a equação $\phi(x) = y$ possui solução em D. Outra propriedade, não menos importante, é a propriedade de invariância homotópica, que nos permite, através de uma deformação contínua, transferir informações de aplicações cujo grau é conhecido para aplicações cujo grau é desconhecido.

A partir das informações acima, podemos notar que a teoria do grau topológico pode ser uma importante ferramenta para constatarmos a existência de soluções, por exemplo, de equações diferenciais parciais. Transformando o problema de encontrar soluções de uma equação diferencial parcial para o problema de encontrar ponto fixo de um operador T, teremos pela propriedade de existência de soluções que basta provar que $\deg(I-T, D, 0)$ é não nulo.

Por meio dessa estratégia, podemos estudar, por exemplo, a existência de soluções de equações elípticas não lineares da forma

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Problemas desse tipo podem ser classificados de acordo com o comportamento de $\frac{g(x,s)}{s}$, no infinito. Mais precisamente, considerando

$$g'(\pm\infty) := \lim_{s\to\pm\infty} \frac{g(x,s)}{s},\ a := \min\{g'(-\infty), g'(+\infty)\} \text{ e } b := \max\{g'(-\infty), g'(+\infty)\},$$

podemos classificar o problema (1) como *não ressonante*, quando $\sigma(-\Delta)\cap[a,b] = \emptyset$ e como *ressonante*, quando $\sigma(-\Delta) \cap [a,b] \neq \emptyset$, sendo $\sigma(-\Delta)$ o espectro do operador Laplaciano em $H_0^1(\Omega)$.

Em particular, o caso em que vamos tratar neste trabalho é quando:

(i) $g(x,0) \neq 0$ (a solução é não trivial);

(ii) o problema é ressonante;

(iii) o problema é superlinear, isto é, quando $b = \infty$.

Mais especificamente, vamos estudar a existência de soluções do seguinte problema elíptico ressonante superlinear:

Problema 1:

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda_1 u + (u^+)^p + f(x), \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

sendo λ_1 o primeiro autovalor do $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Neste problema, vamos assumir que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um domínio suave e limitado, que $1 < p < \frac{N+1}{N-1}$ e que $f \in L^r(\Omega)$, para algum $r > N$, satisfaz $\int_\Omega f\varphi_1\, dx < 0$, sendo φ_1 a autofunção associada a λ_1.

Também, vamos estudar a existência de soluções de um sistema de equações elípticas, com características semelhantes:

Problema 2:

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda_1 u + (v^+)^p + f(x), \quad \text{em } \Omega, \\ -\Delta v &= \lambda_1 v + (u^+)^q + g(x), \quad \text{em } \Omega, \\ u &= v = 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Neste problema, assumimos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um domínio suave e limitado, $p, q > 1$ satisfazem

$$\frac{1}{p+1} + \frac{N-1}{N+1}\frac{1}{q+1} > \frac{N-1}{N+1},$$
$$\frac{1}{q+1} + \frac{N-1}{N+1}\frac{1}{p+1} > \frac{N-1}{N+1}$$

e que $f, g \in L^r(\Omega)$, para algum $r > N$, são tais que $\int_\Omega f\varphi_1\, dx$, $\int_\Omega g\varphi_1\, dx < 0$.

Por teoria de regularidade para equações elípticas, qualquer solução do Problema 1, pertence a $C_0^1(\overline{\Omega})$. Tendo isso em vista, vamos associar ao Problema 1, um operador $T_f : C_0^1(\overline{\Omega}) \to C_0^1(\overline{\Omega})$, definido por

$$T_f(u) = (-\Delta)^{-1}(\lambda_1 u + (u^+)^p + f).$$

Dessa forma, encontrar solução para o Problema 1, equivale a encontrar ponto fixo para o operador T_f. Com essa formulação, devido a propriedade de existência de solução, é suficiente mostrar que $\deg(I - T_f, D, 0) \neq 0$, para algum conjunto D a ser determinado.

Como já mencionamos, uma das condições básicas que D deve satisfazer, para que o grau esteja bem definido, é ser um conjunto aberto, limitado, de modo que $0 \notin (I - T_f)(\partial D)$. Neste sentido, é de extrema importância obtermos estimativas a priori, na norma de $C_0^1(\overline{\Omega})$, para as possíveis soluções do Problema 1, pois tais estimativas garantem, por exemplo, que todas as possíveis soluções do Problema 1, estão contidas em uma bola aberta $B_{C_0^1(\overline{\Omega})}(0, R)$, para $R > 0$ suficientemente grande, garantindo dessa forma que $\deg(I - T_f, B_{C_0^1(\overline{\Omega})}(0, R), 0)$ está bem definido. Tais estimativas também serão importantes para assegurar que se $\|f\|_r$ é "pequena", então a norma das soluções do Problema 1 também são "pequenas" em $C_0^1(\overline{\Omega})$, sendo que esse fato será fortemente usado na prova de que $\deg(I - T_f, B_{C_0^1(\overline{\Omega})}(0, R), 0) \neq 0$.

Uma formulação de ponto fixo, análoga à formulação feita para o Problema 1, pode ser feita para o Problema 2, de modo que a teoria do grau torne-se aplicável também para o Problema 2.

No capítulo 1 deste trabalho, faremos a construção do grau topológico em dimensão finita que, neste caso, é também chamado grau topológico de Brouwer. Um resultado contendo várias propriedades do grau de Brouwer será enunciado e demonstrado. Neste capítulo, introduziremos a noção de índice de uma solução isolada, em dimensão finita, que pode ser uma excelente ferramenta para o cálculo do grau de Brouwer.

No capítulo 2, vamos construir a teoria do grau topológico em espaços de Banach de dimensão infinita, também conhecida por teoria do grau topológico de Leray-Schauder. A maior parte das propriedades do grau de Brouwer, apresentadas no capítulo 1, serão generalizadas para o grau de Leray-Schauder. Ainda, neste capítulo, introduziremos a noção de índice de uma solução isolada, em dimensão infinita. A relação do índice em dimensão infinita com o grau de Leray-Schauder, facilitará a aplicação da teoria do grau topológico nos problemas 1 e 2.

No capítulo 3, vamos estudar a existência de soluções do Problema 1, fazendo uso da teoria do grau de Leray-Schauder. Todo o trabalho a ser desenvolvido nesse capítulo terá como finalidade garantir que $\deg(I - T_f, B_{C_0^1(\overline{\Omega})}(0, R), 0) \neq 0$, para $R > 0$ suficientemente grande. Nesse percurso, estimativas a priori serão obtidas, através de desigualdades do tipo Hardy-Sobolev.

No capítulo 4, vamos estudar a existência de soluções para o Problema 2, também utilizando o grau de Leray-Schauder. A estratégia para aplicar a teoria do grau, neste capítulo, é a mesma que utilizamos no capítulo 3, porém a obtenção das estimativas a priori, neste caso, é um pouco mais "trabalhosa".

É importante ressaltar que as aplicações do grau topológico que vamos apresentar, são concernentes apenas ao grau de Leray-Schauder e não ao grau de Brouwer. Porém, pelo fato de que o grau de Leray-Schauder é construído a partir do grau de Brouwer, apresentaremos também os detalhes da construção do grau de Brouwer.

Capítulo

1

Grau topológico de Brouwer

Neste capítulo, vamos construir a teoria do grau topológico em dimensão finita, conhecida como teoria do grau topológico de Brouwer. A construção será realizada primeiramente em $\mathbb{R}^N$, depois será generalizada para espaços vetoriais reais normados de dimensão finita, através de isomorfismos.

Para que possamos definir o grau de Brouwer, precisamos impor algumas restrições sobre as ternas (ϕ, D, y), mencionadas na introdução deste trabalho. Por isso, vamos destacar a seguinte definição.

Definição 1.1. Seja $D \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e limitado. Se $\phi \in C(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ e $y \in \mathbb{R}^N \backslash \phi(\partial D)$, então (ϕ, D, y) é uma *terna admissível* para o grau topológico de Brouwer.

A construção do grau de Brouwer de ternas admissíveis (ϕ, D, y) será concebida em três etapas. Primeiro, vamos assumir que ϕ é de classe C^1 e que y é valor regular de ϕ (ver Definição A.1). Em seguida, ainda assumindo que ϕ é de classe C^1, a definição será generalizada, permitindo que y seja valor crítico de ϕ. Por último, vamos definir o grau de uma terna admissível (ϕ, D, y), assumindo que ϕ é apenas contínua.

1.1 Construção do grau para aplicações de classe C^1 e para valores regulares

Esta seção será dedicada à definição do grau de Brouwer de uma terna (ϕ, D, y), sendo ϕ uma aplicação de classe C^1 e y um valor regular de ϕ. Algumas propriedades do grau, neste caso especial, também serão apresentadas.

O seguinte lema embasará a nossa primeira definição do grau de Brouwer.

Lema 1.2. *Seja (ϕ, D, y) uma terna admissível com $\phi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$. Se y é valor regular de ϕ, então $\phi^{-1}(y) \cap D$ é um conjunto finito.*

Demonstração: Suponha que $\phi^{-1}(y) \cap D \neq \emptyset$. Desde que y é valor regular de ϕ, $\phi^{-1}(y) \cap D$ contém apenas pontos regulares, isto é, $\phi'(x)$ é sobrejetor e, portanto, um isomorfismo em $\mathbb{R}^N$, para todo $x \in \phi^{-1}(y) \cap D$.

Pelo Teorema da Aplicação Inversa (confira Teorema B.9), para cada $x \in \phi^{-1}(y) \cap D$, existe uma vizinhança V_x de x tal que ϕ é um difeomorfismo de V_x em $\phi(V_x)$, assim,

$(\phi^{-1}(y) \cap D) \cap V_x = \{x\}$. Logo $\phi^{-1}(y) \cap D$ é discreto. Vejamos que, na verdade, tal conjunto é finito.

Suponhamos que $\phi^{-1}(y) \cap D$ é infinito. Como $\overline{D}$ é compacto e $\phi^{-1}(y) \cap D \subset \overline{D}$, temos que $\phi^{-1}(y) \cap D$ tem ponto de acumulação $x_0 \in \overline{D}$. Desde que ϕ é contínua, $\phi^{-1}(y)$ é fechado. Agora, como $x_0 \in \overline{\phi^{-1}(y) \cap D} \subset \overline{\phi^{-1}(y)} \cap \overline{D} = \phi^{-1}(y) \cap \overline{D}$, segue que $\phi(x_0) = y$. Como $y \notin \phi(\partial D)$, x_0 deve pertencer a D. Desta forma, encontramos um ponto $x_0 \in \phi^{-1}(y) \cap D$ que não é isolado, gerando assim uma contradição. Logo, $\phi^{-1}(y) \cap D$ é um conjunto finito. $\square$

Agora, vamos à definição do grau no caso específico em que ϕ é de classe C^1 e y é valor regular de ϕ.

Definição 1.3. Seja (ϕ, D, y) uma terna admissível tal que $\phi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ e y é um valor regular de ϕ. Definimos o *grau de Brouwer* da terna (ϕ, D, y) por

$$\deg_B(\phi, D, y) := \sum_{x \in \phi^{-1}(y) \cap D} \operatorname{sgn}(J_\phi(x)),$$

em que $\operatorname{sgn}(J_\phi(x))$ é o sinal do determinante da matriz jacobiana de ϕ no ponto x. Se $\phi^{-1}(y) \cap D = \emptyset$, definimos $\deg_B(\phi, D, y) = 0$.

Observação 1.4. Observe que a soma, na Definição 1.3, está bem definida, pois o Lema 1.2 garante que $\phi^{-1}(y) \cap D$ é um conjunto finito.

A função que acabamos de definir, possui algumas propriedades, que serão importantes para prosseguirmos a nossa construção.

Proposição 1.5. *As seguintes propriedades são válidas:*

(i) *Sejam $I : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ a aplicação identidade do $\mathbb{R}^N$ e D um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$, então*

$$\deg_B(I, D, y) = 1, \ \forall\, y \in D;$$

(ii) *Seja (ϕ, D, y) uma terna admissível com $\phi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ e y valor regular de ϕ. Então $(\phi - y, D, 0)$ é uma terna admissível, 0 é valor regular de $\phi - y$ e*

$$\deg_B(\phi, D, y) = \deg_B(\phi - y, D, 0);$$

(iii) *Seja (ϕ, D, y) uma terna admissível com $\phi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ e y valor regular de ϕ. Se $K \subset \overline{D}$ é um conjunto compacto tal que $y \notin \phi(K)$, então*

$$\deg_B(\phi, D, y) = \deg_B(\phi, D \setminus K, y).$$

Demonstração:

(i) Para cada $y \in D$, $I^{-1}(y) = \{y\}$. Portanto, $\deg_B(I, D, y) = \operatorname{sgn}(J_I(y)) = \operatorname{sgn}(1) = 1$.

(ii) Se $\psi = \phi - y$, então $\phi(x) = y$ se, e somente se, $\psi(x) = 0$ e para todo $x \in D$, $\phi'(x) = \psi'(x)$. Assim $\phi^{-1}(y) = \psi^{-1}(0)$ e, por definição,

$$\begin{aligned} \deg_B(\phi, D, y) &= \sum_{x \in \phi^{-1}(y) \cap D} \operatorname{sgn}(J_\phi(x)) \\ &= \sum_{x \in \psi^{-1}(0) \cap D} \operatorname{sgn}(J_\psi(x)) \\ &= \deg_B(\psi, D, 0) \\ &= \deg_B(\phi - y, D, 0). \end{aligned}$$

(iii) Desde que $y \notin \phi(K)$, temos que $\phi^{-1}(y) \cap D = \phi^{-1}(y) \cap (D \setminus K)$. Assim

$$\begin{aligned} \deg_B(\phi, D, y) &= \sum_{x \in \phi^{-1}(y) \cap D} \operatorname{sgn}(J_\phi(x)) \\ &= \sum_{x \in \phi^{-1}(y) \cap (D \setminus K)} \operatorname{sgn}(J_\phi(x)) \\ &= \deg_B(\phi, D \setminus K, y). \end{aligned}$$

□

1.2 Construção do grau para aplicações de classe C^1 e para valores críticos

Nesta etapa do texto, vamos construir resultados que permitem a generalização da definição do grau de Brouwer para ternas admissíveis (ϕ, D, y) com ϕ ainda de classe C^1, mas com y valor crítico de ϕ.

Proposição 1.6. *Seja (ϕ, D, y) uma terna admissível com $\phi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ e y valor regular de ϕ. Então existe $\delta > 0$ tal que se $\psi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ e $\|\phi - \psi\|_{C^1} < \delta$, tem-se que (ψ, D, y) é uma terna admissível, y é um valor regular de ψ e*

$$\deg_B(\phi, D, y) = \deg_B(\psi, D, y).$$

Demonstração: Pelo Lema 1.2, sabemos que $\phi^{-1}(y) \cap D$ é finito. Tendo isso em vista, vamos separar a demonstração em casos.
Caso 1: $\phi^{-1}(y) \cap D = \emptyset$.

Neste caso, tome $\delta = \frac{1}{2}\rho(y, \phi(\overline{D})) > 0$, então para toda $\psi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ tal que $\|\phi - \psi\|_{C^1} < \delta$, temos que $|\phi(x) - \psi(x)|_\infty < \delta < \rho(y, \phi(x))$, para todo $x \in \overline{D}$. Assim $\psi(x) \neq y$, para todo $x \in \overline{D}$, isto é, $\psi^{-1}(y) \cap \overline{D} = \emptyset$. Logo (ψ, D, y) é uma terna admissível, y é um valor regular de ψ e

$$\deg_B(\phi, D, y) = 0 = \deg_B(\psi, D, y).$$

Caso 2: $\phi^{-1}(y) \cap D = \{a_1, ..., a_k\}$.

Mostraremos que existem $R, \delta > 0$ tais que para toda $\psi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$, satisfazendo $\|\phi - \psi\|_{C^1} < \delta$, tem-se que $\psi^{-1}(y) \cap B_\rho(a_i, R)$ contém apenas um elemento, para $i = 1, ..., k$.

Com efeito, denote por Z_ϕ o conjunto dos pontos críticos de ϕ e fixe $R_0 > 0$ tal que

$$R_0 < \min\left\{\frac{\rho(a_i, a_j)}{3};\ 1 \leq i, j \leq k,\ i \neq j\right\}$$

e

$$R_0 < \min\left\{\frac{\rho(a_i, \partial D \cup Z_\phi)}{3};\ 1 \leq i \leq k\right\}.$$

Observe que $\rho(a_i, \partial D \cup Z_\phi) > 0$, $i = 1, ..., k$, pois ∂D e $Z_\phi = J_\phi^{-1}(0)$ são fechados e $a_i \notin (\partial D \cup Z_\phi)$, $i = 1, ..., k$.

Sejam

$$B(R) = B_\rho(a_1, R) \cup ... \cup B_\rho(a_k, R)$$

e

$$c = \min\{|J_\phi(a_i)|;\ i = 1, ..., k\}.$$

Como a_i é ponto regular de ϕ, temos que $c > 0$. Desde que J_ϕ é contínua em $\overline{D}$ e $|J_\phi(a_i)| > \frac{2}{3}c$, $i = 1, ..., k$, existe $0 < R_1 < R_0$ tal que

$$|J_\phi(x)| \geq \frac{2}{3}c,\ \forall\, x \in B(R_1). \tag{1.1}$$

Uma vez que a função determinante é contínua no espaço das tranformações lineares de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}^N$, denotado por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|\det T - \det L| < \frac{1}{3}c$, sempre que $\|T - L\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)} < \delta_1$. Agora, se $\|\phi - \psi\|_{C^1} < \delta_1$, temos

$$\begin{aligned} \|\phi'(x) - \psi'(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)} &\leq |\phi(x) - \psi(x)|_\infty + \|\phi'(x) - \psi'(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|\phi - \psi\|_\infty + \|\phi' - \psi'\|_\infty \\ &= \|\phi - \psi\|_{C^1} < \delta_1,\ \forall\, x \in \overline{D}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\sup_{x \in \overline{D}} |J_\phi(x) - J_\psi(x)| = \sup_{x \in \overline{D}} |\det \phi'(x) - \det \psi'(x)| \leq \frac{1}{3}c, \tag{1.2}$$

sempre que $\|\phi - \psi\|_{C^1} < \delta_1$.

Ainda, assumindo que $\|\phi - \psi\|_{C^1} < \delta_1$, tem-se

$$|J_\psi(x)| - |J_\phi(x)| \geq -\frac{1}{3}c,\ \forall\, x \in B(R_1),$$

logo

$$|J_\psi(x)| \geq |J_\phi(x)| - \frac{1}{3}c \geq \frac{2}{3}c - \frac{1}{3}c = \frac{1}{3}c, \forall\, x \in B(R_1).$$

Portanto

$$\inf_{x\in B(R_1)} |J_\psi(x)| \geq \frac{1}{3}c, \tag{1.3}$$

garantindo que $\psi'(x)$ é invertível, para todo $x \in B(R_1)$.

Agora, fixado $i = 1, ..., k$, nosso objetivo é resolver a equação $\psi(x) = y$ em $B_\rho(a_i, R_1)$. Para simplificar a notação, ponha

$$a = a_i, \quad h = \phi(a_i) - \psi(a_i), \quad V = (\psi'(a))^{-1}.$$

Definimos $T, S : B_\rho(0, R_1) \to \mathbb{R}^N$ por

$$T(z) := \psi(a+z) - \psi(a) - \psi'(a).z, \quad S(z) := V(h - T(z)).$$

Note que

$$\begin{aligned}
\psi(a+z) = y,\ z \in B_\rho(0,R_1) &\Leftrightarrow \psi(a+z) = \phi(a),\ z \in B_\rho(0,R_1)\\
&\Leftrightarrow T(z) = \phi(a) - \psi(a) - \psi'(a).z,\ z \in B_\rho(0,R_1)\\
&\Leftrightarrow T(z) = h - \psi'(a).z,\ z \in B_\rho(0,R_1)\\
&\Leftrightarrow \psi'(a).z = h - T(z),\ z \in B_\rho(0,R_1)\\
&\Leftrightarrow z = V(h - T(z)),\ z \in B_\rho(0,R_1)\\
&\Leftrightarrow S(z) = z,\ z \in B_\rho(0,R_1),
\end{aligned}$$

donde concluímos que a equação $\psi(x) = y$ tem única solução em $B_\rho(a_i, R_1)$ se, e somente se, S tem único ponto fixo em $B_\rho(0, R_1)$.

Afirmação 1: A equação $S(z) = z$ admite única solução em $B_\rho(0, R)$, para algum $0 < R < R_1$, quando $\|\phi - \psi\|_{C^1} < \delta$, para algum $0 < \delta < \delta_1$.

De fato, mostraremos que S é uma contração na bola fechada $\overline{B}_\rho(0, R)$. Para tanto, vamos estimar a componente $(T(z) - T(w))_l$, para $z, w \in B_\rho(0, R)$.

$$\begin{aligned}
(T(z) - T(w))_l &= \psi_l(a+z) - \psi_l(a) - (\psi'(a).z)_l - \psi_l(a+w) + \psi_l(a) + (\psi'(a).w)_l\\
&= \psi_l(a+z) - \psi_l(a+w) - (\psi'(a).(z-w))_l\\
&= \int_0^1 \frac{d}{d\theta}\psi_l(a + \theta z + (1-\theta)w)\, d\theta - (\psi'(a).(z-w))_l.
\end{aligned}$$

Se denotarmos $\xi_\theta = a + \theta z + (1-\theta)w$, obtemos

$$\begin{aligned}
(T(z)-T(w))_l &= \int_0^1 \nabla\psi_l(\xi_\theta)\cdot\frac{d}{d\theta}(\xi_\theta)\,d\theta - \sum_{j=1}^N \frac{\partial\psi_l}{\partial x_j}(a)(z_j-w_j)\\
&= \int_0^1 \sum_{j=1}^N \frac{\partial\psi_l}{\partial x_j}(\xi_\theta)(z_j-w_j)\,d\theta - \int_0^1 \sum_{j=1}^N \frac{\partial\psi_l}{\partial x_j}(a)(z_j-w_j)\,d\theta\\
&= \int_0^1 \sum_{j=1}^N (z_j-w_j)\left[\frac{\partial\psi_l}{\partial x_j}(\xi_\theta) - \frac{\partial\psi_l}{\partial x_j}(a)\right]d\theta\\
&= \sum_{j=1}^N (z_j-w_j)\int_0^1 \left[\frac{\partial\psi_l}{\partial x_j}(\xi_\theta) - \frac{\partial\phi_l}{\partial x_j}(\xi_\theta) + \frac{\partial\phi_l}{\partial x_j}(\xi_\theta) - \frac{\partial\phi_l}{\partial x_j}(a) + \right.\\
&\quad \left. + \frac{\partial\phi_l}{\partial x_j}(a) - \frac{\partial\psi_l}{\partial x_j}(a)\right]d\theta.
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\max_{1\le l\le N}|(T(z)-T(w))_l| &\le \sum_{j=1}^N \max_{1\le j,l\le N}|z_j-w_j|\left\{\int_0^1\left|\frac{\partial\psi_l}{\partial x_j}(\xi_\theta) - \frac{\partial\phi_l}{\partial x_j}(\xi_\theta)\right|d\theta + \right.\\
&\quad \left. + \int_0^1\left|\frac{\partial\phi_l}{\partial x_j}(a) - \frac{\partial\psi_l}{\partial x_j}(a)\right|d\theta + \int_0^1\left|\frac{\partial\phi_l}{\partial x_j}(\xi_\theta) - \frac{\partial\phi_l}{\partial x_j}(a)\right|d\theta\right\}\\
&\le N|z-w|_\infty\left\{\int_0^1 2\|\phi-\psi\|_{C^1}d\theta + \int_0^1\left|\frac{\partial\phi_l}{\partial x_j}(\xi_\theta) - \frac{\partial\phi_l}{\partial x_j}(a)\right|d\theta\right\}\\
&\le N|z-w|_\infty(2\delta+\epsilon(R)),
\end{aligned}$$

em que $\epsilon : [0, R_1] \to \mathbb{R}$ é definido como

$$\epsilon(R) = \sup\left\{\int_0^1\left|\frac{\partial\phi_l}{\partial x_j}(\xi_\theta) - \frac{\partial\phi_l}{\partial x_j}(a)\right|d\theta\,;\, z,w\in\overline{B}_\rho(0,R), i,j=1,\dots,N\right\}.$$

Portanto

$$|T(z)-T(w)|_\infty \le N|z-w|_\infty(2\delta+\epsilon(R)).$$

Vejamos que $\lim_{R\to 0}\epsilon(R) = 0$. De fato, dado $\eta > 0$, desde que $\frac{\partial\phi_l}{\partial x_j}$ é uniformemente contínua em $[0,1]$, existe $\delta_{lj} > 0$ tal que se $z, w \in B_\rho(0,\delta_{lj})$, então

$$\left|\frac{\partial\phi_l}{\partial x_j}(\xi_\theta) - \frac{\partial\phi_l}{\partial x_j}(a)\right| < \frac{\eta}{2},\ \forall\,\theta\in[0,1].$$

Tome $\delta_2 = \min\{\delta_{lj}; 1 \le l,j \le N\}$. Dessa forma, se $R < \delta_2$, então

$$\sup\left\{\int_0^1\left|\frac{\partial\phi_l}{\partial x_j}(\xi_\theta) - \frac{\partial\phi_l}{\partial x_j}(a)\right|d\theta\,;\ z,w\in\overline{B}_\rho(0,R),\ i,j=1,\dots,N\right\} \le \frac{\eta}{2} < \eta.$$

Logo $\epsilon(R) < \eta$, sempre que $R < \delta_2$. Isso prova que $\lim_{R\to 0}\epsilon(R) = 0$.

Portanto,

$$\begin{aligned}|S(z)-S(w)|_\infty &= |V(h-T(z))-V(h-T(w))|_\infty\\ &= |V(T(z))-V(T(w))|_\infty\\ &\leq \|V\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)}|T(z)-T(w)|_\infty\\ &\leq N|z-w|_\infty\|V\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)}(2\delta+\epsilon(R))\end{aligned}$$

e, também

$$\begin{aligned}|S(z)|_\infty &\leq |S(0)|_\infty+|S(z)-S(0)|_\infty\\ &\leq \|V\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)}|h|_\infty+|S(z)-S(0)|_\infty.\end{aligned}$$

Uma vez que $\lim_{R\to 0}\epsilon(R)=0$, podemos tomar $R\leq R_1$ tal que

$$N\epsilon(R)\|V\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)}<\frac{1}{6}.$$

Defina $l(R)=\min\{|\phi(x)-y|_\infty;\ x\in\overline{D}\setminus B(R)\}$. Tome $0<\delta<\delta_1$ tal que

$$\delta\|V\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)}\leq\frac{R}{6},\quad 2N\delta\|V\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)}<\frac{1}{6}\quad\text{e}\quad\delta\leq\frac{1}{2}l(R).$$

Assuma que $\|\phi-\psi\|_{C^1}<\delta$ e observe que, neste caso, $|h|_\infty<\delta$. Assim, se $|z|_\infty<R$, então

$$\begin{aligned}|S(z)|_\infty &\leq \|V\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)}|h|_\infty+N|z|_\infty\|V\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)}(2\delta+\epsilon(R))\\ &\leq \delta\|V\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)}+(2N\delta\|V\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)})R+RN\epsilon(R)\|V\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)}\\ &\leq \frac{R}{6}+\frac{R}{6}+\frac{R}{6}=\frac{R}{2}<R.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}|S(z)-S(w)|_\infty &\leq N|z-w|_\infty\|V\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)}(2\delta+\epsilon(R))\\ &\leq |z-w|_\infty(N\|V\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)}2\delta+N\|V\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)}\epsilon(R))\\ &= |z-w|_\infty(\frac{1}{6}+\frac{1}{6})\\ &= \frac{1}{3}|z-w|_\infty,\ \ \forall\, z,w\in\overline{B}_\rho(0,R).\end{aligned}$$

Portanto $S:\overline{B}_\rho(0,R)\to\overline{B}_\rho(0,R)$ é uma contração. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach (confira Teorma A.5), segue que S possui único ponto fixo em $\overline{B}_\rho(0,R)$. Isso conclui a prova da afirmação 1.

Afirmação 2: $\psi^{-1}(y)\cap D\subset B(R)$.

De fato, se existisse $x\in\overline{D}\setminus B(R)$ tal que $\psi(x)=y$, como $\|\phi-\psi\|_{C^1}<\delta$, teríamos que

$$|\phi(x)-\psi(x)|_\infty = |\phi(x)-y|_\infty \geq l(R) \geq 2\delta > |\phi(x)-\psi(x)|_\infty,$$

que seria um absurdo. Portanto vale a afirmação 2.

Podemos supor então que $\psi^{-1}(y)\cap D = \{b_1,\ldots,b_k\}$ com $b_i \in B_\rho(a_i,R)$, $i = 1\ldots,k$. Usando a afirmação 2 e o fato de que $B(R)\cap\partial D = \emptyset$, concluímos que $y \notin \psi(\partial D)$. Logo (ψ,D,y) é uma terna admissível e pela desigualdade (1.3), y é um valor regular de ψ.

Pela Definição 1.3, temos que

$$\deg_B(\phi,D,y) = \sum_{i=1}^{k}\operatorname{sgn}(J_\phi(a_i)) \tag{1.4}$$

e

$$\deg_B(\psi,D,y) = \sum_{i=1}^{k}\operatorname{sgn}(J_\psi(b_i)). \tag{1.5}$$

Para cada $i = 1,\ldots,k$, J_ϕ é contínua e não se anula em $B_\rho(a_i,R)$. Assim, J_ϕ não muda de sinal em $B_\rho(a_i,R)$. Portanto $\operatorname{sgn}(J_\phi(a_i)) = \operatorname{sgn}(J_\phi(b_i))$, $i = 1,...,k$.

Finalmente, vejamos que $\operatorname{sgn}(J_\phi(b_i)) = \operatorname{sgn}(J_\psi(b_i))$. De fato, se para algum i, tivermos $\operatorname{sgn}(J_\phi(b_i)) \neq \operatorname{sgn}(J_\psi(b_i))$, , então $|J_\phi(b_i) - J_\psi(b_i)| = |J_\phi(b_i)| + |J_\psi(b_i)|$. Usando as desigualdades (1.1), (1.2) e (1.3), segue que

$$c = \frac{2}{3}c + \frac{1}{3}c \leq |J_\phi(b_i)| + |J_\psi(b_i)| = |J_\phi(b_i) - J_\psi(b_i)| \leq \frac{c}{3},$$

donde temos um absurdo.

Das igualdades (1.4) e (1.5), deduzimos que

$$\deg_B(\phi,D,y) = \deg_B(\psi,D,y).$$

□

Queremos apresentar uma caracterização do grau de Brouwer de uma terna (ϕ,D,y), quando ϕ é de classe C^1 e y é valor regular de ϕ. Para tanto, precisamos do seguinte lema:

Lema 1.7. *Sejam $f \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, $K = \operatorname{supp} f$ e $D \subset \mathbb{R}^N$ aberto. Seja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ uma curva tal que*

$$A = \{k+\gamma(s);\ k \in K,\ s \in [0,1]\} \subset D. \tag{1.6}$$

Então existe $v \in C_c^1(D,\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\operatorname{div}\, v(x) = f(x-\gamma(0)) - f(x-\gamma(1)). \tag{1.7}$$

Demonstração: Vamos provar o lema em duas etapas, primeiro faremos a prova para um caso particular, depois faremos o caso geral, usando o caso particular.

Caso 1: Suponhamos que $\gamma(s) = s\widehat{x}$, para algum $\widehat{x} \in \mathbb{R}^N$ e consideremos

$$F(x) = \int_0^1 f(x - \theta\widehat{x})\, d\theta \qquad e \qquad v(x) = \widehat{x}F(x).$$

Por hipótese, $f \in C^1(\overline{D})$, assim $F \in C^1(\overline{D})$ e, portanto, v é de classe C^1.

Afirmação 1: $\operatorname{supp}(F) \subset A \subset\subset D$.

De fato, se $x \in \mathbb{R}^N$ é tal que $F(x) \neq 0$, então existe $\theta \in [0,1]$ tal que $f(x - \theta\widehat{x}) \neq 0$. Assim $x - \theta\widehat{x} \in K$ e, portanto, $x \in K + \theta\widehat{x} \subset A$. Dessa forma $\operatorname{supp} F \subset \overline{A} = A$, o que prova a afirmação 1.

Pelo fato de v ser de classe C^1 e pela afirmação 1, segue que $v \in C_c^1(D, \mathbb{R}^N)$. Mais ainda,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} v(x) &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x) \\
&= \sum_{i=1}^N \widehat{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^1 f(x - \theta\widehat{x})\, d\theta \\
&= \sum_{i=1}^N \widehat{x}_i \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i}(f(x - \theta\widehat{x}))\, d\theta \\
&= -\int_0^1 \frac{d}{d\theta} f(x - \theta\widehat{x})\, d\theta \\
&= f(x - 0) - f(x - \widehat{x}) \\
&= f(x - \gamma(0)) - f(x - \gamma(1)).
\end{aligned}$$

Caso 2: Para o caso geral, suponha que γ é uma curva satisfazendo (1.6) e considere $\mathcal{R}$ a relação definida em $[0,1]$ por

$$t\mathcal{R}s \Leftrightarrow \exists\, v \in C_c^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N);\ \operatorname{div} v(x) = f(x - \gamma(s)) - f(x - \gamma(t)).$$

Afirmação 2: $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência em [0,1].

a) $t\mathcal{R}t$, pois $0 \in C_c^1(D, \mathbb{R}^N)$ e $0 = \operatorname{div} 0 = f(x-\gamma(t)) - f(x-\gamma(t))$. Portanto $\mathcal{R}$ é reflexiva.

b) Se $t\mathcal{R}s$, então existe $v \in C_c^1(D, \mathbb{R}^N)$ tal que

$$\operatorname{div} v(x) = f(x - \gamma(s)) - f(x - \gamma(t)).$$

Assim, $-v \in C_c^1(D, \mathbb{R}^N)$ e

$$\operatorname{div}(-v(x)) = -\operatorname{div} v(x) = f(x - \gamma(t)) - f(x - \gamma(s)),$$

logo $s\mathcal{R}t$ e $\mathcal{R}$ é simétrica.

c) Se $t\mathcal{R}s$ e $s\mathcal{R}s'$, então existem $v, w \in C_c^1(D, \mathbb{R}^N)$, tais que

$$\operatorname{div} v(x) = f(x - \gamma(s)) - f(x - \gamma(t))$$

e

$$\operatorname{div} w(x) = f(x - \gamma(s')) - f(x - \gamma(s)).$$

Assim $v + w \in C_c^1(D, \mathbb{R}^N)$ e vale a igualdade

$$\operatorname{div}(v + w)(x) = f(x - \gamma(s')) - f(x - \gamma(t)),$$

garantindo que $t\mathcal{R}s'$, logo $\mathcal{R}$ é transitiva.

Por a), b) e c) concluímos que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência em $[0,1]$ e, portanto, $\mathcal{R}$ define uma partição de $[0,1]$.

Afirmação 3: Cada classe de equivalência definida por $\mathcal{R}$ é um aberto de $[0,1]$.

De fato, seja $s \in [0,1]$ e seja C_s a classe de equivalência de s. Mostraremos que C_s é um aberto de $[0,1]$, isto é, veremos que existe $\epsilon > 0$ tal que $\{t \in [0,1]; |t - s| < \epsilon\} \subset C_s$.

Sejam $x_t = \gamma(t) - \gamma(s)$, $t \in [0,1]$ e $f_s(x) = f(x - \gamma(s))$. Observe que se $f_s(x) \neq 0$, então $x - \gamma(s) \in K$, assim $x \in K + \gamma(s) \subset A$. Portanto $K_s := \operatorname{supp} f_s \subset \overline{A} = A \subset D$. Logo $K_s \cap D^c = \emptyset$.

Defina $\eta = \frac{1}{2}\rho(K_s, D^c) > 0$. Pela continuidade de γ, existe $\epsilon > 0$ tal que $|x_t|_\infty < \eta$, sempre que $|t - s| < \epsilon$. Fixe t tal que $|t - s| < \epsilon$ e ponha

$$A_s = \{k + \theta x_t; k \in K_s, \theta \in [0,1]\}.$$

Vamos verificar que $A_s \subset D$. De fato, se para algum $\theta \in [0,1]$ e para algum $k \in K_s$, tivermos que $x = k + \theta x_t \in D^c$, então $|x - k|_\infty = \theta |x_t|_\infty < \theta\eta \leq \eta$, consequentemente, $\rho(k, D^c) \leq |x - k|_\infty < \eta = \frac{1}{2}\rho(K_s, D^c)$, que é uma contradição. Logo $A_s \subset D$.

Agora, usando o caso 1, existe $v \in C_c^1(D, \mathbb{R}^N)$ tal que

$$\operatorname{div} v(x) = f_s(x) - f_s(x - x_t) = f(x - \gamma(s)) - f(x - \gamma(t)).$$

Logo $t\mathcal{R}s$, isto é, $t \in C_s$, donde concluímos que C_s é aberto em $[0,1]$. Isso prova a afirmação 3.

Uma vez que $[0,1]$ é conexo, sua única cisão é a trivial e, como cada classe de equivalência definida por $\mathcal{R}$ é um aberto de $[0,1]$ ($\mathcal{R}$ particiona $[0,1]$ em conjuntos abertos não vazios), segue que a única classe de equivalência deve ser o próprio $[0,1]$. Logo $0\mathcal{R}1$ e o lema está provado.

□

Vamos apresentar agora uma importante caracterização da teoria do grau de Brouwer.

Proposição 1.8. *Seja (ϕ, D, y) uma terna admissível com $\phi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$, y valor regular de ϕ e considere $f_\epsilon \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^N} f_\epsilon(x)dx = 1$ e $\operatorname{supp} f_\epsilon \subset B_\rho(0, \epsilon)$ (ver Corolário A.9). Então existe $\epsilon(y)$ tal que*

$$\deg_B(\phi, D, y) = \int_D f_\epsilon(\phi(x) - y) J_\phi(x)\, dx, \ \forall\, 0 < \epsilon < \epsilon(y).$$

Demonstração: Desde que y é valor regular de ϕ, usando o Lema 1.2, podemos supor que $\phi^{-1}(y) \cap D = \emptyset$ ou $\phi^{-1}(y) \cap D = \{a_1, \ldots, a_k\}$.

Caso 1: $\phi^{-1}(y) \cap D = \emptyset$.

Pela Definição 1.3, $\deg_B(\phi, D, y) = 0$. Tome $\epsilon(y) := \rho(y, \phi(\overline{D})) > 0$, dessa forma, temos que $|\phi(x) - y|_\infty \geq \epsilon(y) > \epsilon$, para todo $x \in \overline{D}$ e para todo $0 < \epsilon < \epsilon(y)$. Portanto $f_\epsilon(\phi(x) - y) = 0$, para todo $x \in \overline{D}$ e assim

$$\int_D f_\epsilon(\phi(x) - y) J_\phi(x)\, dx = 0 = \deg_B(\phi, D, y).$$

Caso 2: $\phi^{-1}(y) \cap D = \{a_1, \ldots, a_k\}$.

Tome $R > 0$ tal que $\overline{B}_\rho(a_i, R) \subset D$, $i = 1, \ldots, k$, $\overline{B}_\rho(a_i, R) \cap \overline{B}_\rho(a_j, R) = \emptyset$, $i \neq j$ e $J_\phi(x) \neq 0$, para todo $x \in \cup_{i=1}^k \overline{B}_\rho(a_i, R)$ (pois J_ϕ é contínua). Dessa forma, $J_\phi(x)$ não muda de sinal em $\overline{B}_\rho(a_i, R)$, $i = 1 \ldots k$.

Pelo Teorema da Aplicação Inversa, existe $0 < R_1 < R$ tal que

$$\phi|_{B_\rho(a_i, R_1)} \colon B_\rho(a_i, R_1) \to \phi(B_\rho(a_i, R_1))$$

é um difeomorfismo, para cada $i = 1, \ldots, k$. Assim $V = \cap_{i=1}^k \phi(B_\rho(a_i, R_1))$ é aberto contendo y e, portanto, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que

$$B_\rho(y, \epsilon_1) \subset V \subset \phi(B_\rho(a_i, R)),\ \forall\, i = 1, \ldots, k. \tag{1.8}$$

Afirmação: Existe $\epsilon_2 > 0$ tal que $|\phi(x) - y|_\infty < \epsilon_2$, $x \in D$, implica que $x \in \cup_{i=1}^k B_\rho(a_i, R)$.

De fato, uma vez que $\overline{D} \setminus \cup_{i=1}^k B_\rho(a_i, R)$ é um compacto, $\phi(\overline{D} \setminus \cup_{i=1}^k B_\rho(a_i, R))$ é também compacto, como $y \notin \phi(\overline{D} \setminus \cup_{i=1}^k B_\rho(a_i, R))$, podemos tomar

$$\epsilon_2 := \frac{1}{2} \rho(y, \phi(\overline{D} \setminus \cup_{i=1}^k B_\rho(a_i, R))) > 0.$$

Dessa forma, $|\phi(x) - y|_\infty < \epsilon_2$, $x \in D$, implica que $x \in \cup_{i=1}^k B_\rho(a_i, R)$, pois, se $x \in D \setminus \cup_{i=1}^k B(a_i, R)$, temos

$$2\epsilon_2 = \rho(y, \phi(\overline{D} \setminus \cup_{i=1}^k B_\rho(a_i, R))) \leq |\phi(x) - y|_\infty < \epsilon_2,$$

que é uma contradição. Portanto vale a afirmação.

Agora, considere $\epsilon < \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Usando a afirmação anterior e a inclusão (1.8), respectivamente, podemos concluir que

$$\{x \in D; |\phi(x) - y|_\infty < \epsilon\} = \left(\cup_{i=1}^k B_\rho(a_i, R)\right) \cap \phi^{-1}\left(B_\rho(y, \epsilon)\right) := B \tag{1.9}$$

e

$$\phi(B_\rho(a_i, R)) \cap B_\rho(y, \epsilon) = B_\rho(y, \epsilon). \tag{1.10}$$

Por fim,

$$
\begin{aligned}
\int_D f_\epsilon(\phi(x)-y)J_\phi(x)\,dx &= \int_{|\phi(x)-y|_\infty<\epsilon} f_\epsilon(\phi(x)-y)|J_\phi(x)|\operatorname{sgn}(J_\phi(x))\,dx \\
&= \int_B f_\epsilon(\phi(x)-y)|J_\phi(x)|\operatorname{sgn}(J_\phi(x))\,dx \qquad (1.11) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\int_{B_\rho(a_i,R)\cap\phi^{-1}(B_\rho(y,\epsilon))} f_\epsilon(\phi(x)-y)|J_\phi(x)|\operatorname{sgn}(J_\phi(a_i))\,dx \\
&= \sum_{i=1}^{k}\operatorname{sgn}(J_\phi(a_i))\int_{\phi(B_\rho(a_i,R))\cap B_\rho(y,\epsilon)} f_\epsilon(z-y)\,dz \qquad (1.12) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\operatorname{sgn}(J_\phi(a_i))\int_{B_\rho(y,\epsilon)} f_\epsilon(z-y)\,dz \qquad (1.13) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\operatorname{sgn}(J_\phi(a_i))\int_{B_\rho(0,\epsilon)} f_\epsilon(z)\,dz \\
&= \sum_{i=1}^{k}\operatorname{sgn}(J_\phi(a_i)) = \deg_B(\phi,D,y).
\end{aligned}
$$

Observe que em (1.11) usamos (1.9), em (1.12) usamos mudança de variáveis e em (1.13) usamos (1.10). $\square$

A próxima proposição será fundamental para generalizarmos a definição do grau de Brouwer para valores críticos.

Proposição 1.9. *Sejam $\phi \in C^1(\overline{D},\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{C}$ uma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial D)$ e $y_1, y_2 \in \mathcal{C}$ valores regulares de ϕ. Então*

$$\deg_B(\phi,D,y_1) = \deg_B(\phi,D,y_2).$$

Demonstração: Lembremos que se $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^N$ é aberto, então $\mathcal{C}$ é conexo se, e somente se, é conexo por caminhos. Suponha, inicialmente, que $\phi \in C^2(\overline{D},\mathbb{R}^N)$. Considere um caminho $\gamma : [0,1] \to \mathcal{C}$ tal que $\gamma(0) = y_1$ e $\gamma(1) = y_2$.

Pelo Corolário A.9, podemos considerar $f_\epsilon \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $K_\epsilon = \operatorname{supp} f_\epsilon \subset B_\rho(0,\epsilon)$ e $\int_{\mathbb{R}^N} f_\epsilon(z)\,dz = 1$. Pela Proposição 1.8, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$, tem-se

$$\deg_B(\phi,D,y_i) = \int_D f_\epsilon(\phi(x)-y_i)J_\phi(x)\,dx,\ i = 1,2.$$

Tome $\epsilon_1 := \frac{1}{2}\min\{\epsilon_0, \rho(\gamma([0,1]),\mathcal{C}^c)\}$ e considere $A = \{k+\gamma(s); k \in K_{\epsilon_1}, s \in [0,1]\}$. Vejamos que $A \subset \mathcal{C}$. De fato, se existem $k \in K_{\epsilon_1}$ e $s \in [0,1]$ tais que $x = k + \gamma(s) \notin \mathcal{C}$, então $|k|_\infty = \rho(\gamma(s),x) \geq 2\epsilon_1 > \epsilon_1$ e, assim, $k \notin K_{\epsilon_1}$, que é uma contradição.

Pelo Lema 1.7, existe $v \in C_c^1(\mathcal{C},\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\operatorname{div} v(x) = f_{\epsilon_1}(x-y_1) - f_{\epsilon_1}(x-y_2)$$

e

$$\mathrm{supp}(v) \cap \phi(\partial D) \subset \mathcal{C} \cap \phi(\partial D) = \emptyset.$$

Portanto, pela Proposição A.11, existe $u \in C^1_c(D, \mathbb{R}^N)$ tal que

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(u(x)) &= [\mathrm{div}\, v(\phi(x))] J_\phi(x) \\ &= [f_{\epsilon_1}(\phi(x) - y_1) - f_{\epsilon_1}(\phi(x) - y_2)] J_\phi(x). \end{aligned}$$

Escolha $R > 0$ tal que $D \subset B_d(0, R)$. Pelo Teorema da Divergência (ver Teorema A.2), concluímos que

$$\begin{aligned} \deg_B(\phi, D, y_1) - \deg_B(\phi, D, y_2) &= \int_D [f_{\epsilon_1}(\phi(x) - y_1) - f_{\epsilon_1}(\phi(x) - y_2)] J_\phi(x)\, dx \\ &= \int_D \mathrm{div}\, v(\phi(x)) J_\phi(x)\, dx \\ &= \int_D \mathrm{div}\, u(x)\, dx \\ &= \int_{B_d(0,R)} \mathrm{div}\, u(x)\, dx \\ &= \int_{\partial B_d(0,R)} u(x) \cdot \nu(x) d\sigma(x) = 0, \end{aligned}$$

sendo $\nu(x)$ o vetor normal exterior a $\partial B_d(0, R)$ em x e $d\sigma$ a medida de superfície de $\partial B_d(0, R)$.

Agora, suponha $\phi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ e, como no primeiro caso, considere $\gamma : [0, 1] \to \mathcal{C}$ com $\gamma(0) = y_1$ e $\gamma(1) = y_2$. Pela Proposição 1.6, existe $\delta(y_i) > 0$ tal que se $\|\phi - \psi\|_{C^1} \leq \delta(y_i)$, então y_i é valor regular de ψ, $y_i \notin \psi(\partial D)$ e

$$\deg_B(\phi, D, y_i) = \deg_B(\psi, D, y_i),\ i = 1, 2.$$

Seja

$$\delta = \frac{1}{2} \min\{\delta(y_1), \delta(y_2), \rho(\gamma([0, 1]), \phi(\partial D)\}.$$

Afirmação: Se $\|\phi - \psi\|_{C^1} < \delta$, então y_1 e y_2 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \psi(\partial D)$.

De fato, se $x \in \partial D$, $s \in [0, 1]$, então

$$\begin{aligned} |\gamma(s) - \psi(x)|_\infty &= |\gamma(s) - \phi(x) + \phi(x) - \psi(x)|_\infty \\ &\geq |\gamma(s) - \phi(x)|_\infty - |\phi(x) - \psi(x)|_\infty \\ &\geq \rho(\gamma(s), \phi(\partial D)) - \delta \\ &\geq \rho(\gamma(s), \phi(\partial D)) - \frac{1}{2}\rho(\gamma([0, 1]), \phi(\partial D)) \\ &\geq \frac{1}{2}\rho(\gamma([0, 1]), \phi(\partial D)) > 0. \end{aligned}$$

Portanto $\gamma(s) \in \mathbb{R}^N \setminus \psi(\partial D)$, para todo $s \in [0,1]$. Como γ liga y_1 e y_2, temos que y_1 e y_2 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \psi(\partial D)$.

Agora, pela Proposição A.4, podemos encontrar uma aplicação $\psi \in C^2(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ tal que $\|\phi - \psi\|_{C^1} < \delta$. Dessa forma,

$$\deg_B(\phi, D, y_1) = \deg_B(\psi, D, y_1) = \deg_B(\psi, D, y_2) = \deg_B(\phi, D, y_2).$$

$\square$

A partir dos resultados acima demonstrados, podemos generalizar a definição do grau de Brouwer para valores críticos.

Definição 1.10. Seja (ϕ, D, y) uma terna admissível com $\phi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ e y valor crítico de ϕ em D. Definimos o *grau de Brouwer* de (ϕ, D, y) por

$$\deg_B(\phi, D, y) = \deg_B(\phi, D, \widehat{y}),$$

sendo $\widehat{y}$ qualquer valor regular de ϕ em D, satisfazendo $|y - \widehat{y}|_\infty < \rho(y, \phi(\partial D))$.

Justificativa para a Definição 1.10:

Primeiramente, observe que $\rho(y, \phi(\partial D)) > 0$. De fato, desde que ∂D é compacto, temos que $\phi(\partial D)$ é compacto e como (ϕ, D, y) é admissível, $y \notin \phi(\partial D)$, donde segue que $\rho(y, \phi(\partial D)) > 0$.

Pelo Teorema de Sard (confira Teorema A.3), o conjunto dos valores regulares de ϕ é denso em $\mathbb{R}^N$, então existe $\widehat{y}$ valor regular de ϕ satisfazendo $|y - \widehat{y}|_\infty < \rho(y, \phi(\partial D))$. Note que $\widehat{y} \notin \phi(\partial D)$, pois se existisse $x \in \partial D$ tal que $\widehat{y} = \phi(x)$, então

$$\rho(y, \phi(x)) = |y - \phi(x)|_\infty < \rho(y, \phi(\partial D)),$$

que é uma contradição.

Agora, suponha que $\widehat{y}_1$ e $\widehat{y}_2$ são valores regulares de ϕ satisfazendo

$$|y - \widehat{y}_i|_\infty < \rho(y, \phi(\partial D)),\ i = 1, 2,$$

então $\widehat{y}_i \in B_\rho(y, \rho(y, \phi(\partial D))) \subset \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial D)$, $i = 1, 2$. Desde que $B_\rho(y, \rho(y, \phi(\partial D)))$ é conexo, deve estar contido numa componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial D)$. Portanto, $\widehat{y}_1$ e $\widehat{y}_2$ estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial D)$, pela Proposição 1.9, temos que $\deg_B(\phi, D, \widehat{y}_1) = \deg_B(\phi, D, \widehat{y}_2)$. Portanto, a definição do grau da terna (ϕ, D, y) independe da escolha do valor regular $\widehat{y}$.

Vejamos a seguir as definições de homotopia e homotopia C^1.

Definição 1.11. Uma aplicação $H : \overline{D} \times [0,1] \to \mathbb{R}^N$ é uma *homotopia* entre aplicações $\phi, \psi \in C(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$, se H é contínua em $\overline{D} \times [0,1]$, $H(x,0) = \phi(x)$ e $H(x,1) = \psi(x)$, $\forall\, x \in \overline{D}$.

Definição 1.12. Sejam $\phi, \psi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ e $H : \overline{D} \times [0,1] \to \mathbb{R}^N$. Dizemos que H é uma *homotopia C^1* entre ϕ e ψ se

(i) $H_t \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N), \forall\, t \in [0,1]$;

(ii) $\lim_{t\to s} \|H_t - H_s\|_{C^1} = 0, \ \forall\, s \in [0,1]$;

(iii) $H_0(x) = \phi(x)$, $H_1(x) = \psi(x)$, $\forall\, x \in \overline{D}$, em que $H_t(x) = H(x,t)$, $x \in \overline{D}$, $t \in [0,1]$.

O seguinte resultado auxilia a construção do grau de Brouwer para aplicações contínuas, que será efetivada na próxima seção.

Proposição 1.13. *Seja $\phi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$. Então as seguintes afirmações são válidas:*

(i) $\deg_B(\phi, D, .)$ *é constante em cada componente conexa de* $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial D)$;

(ii) *Se (ϕ, D, y) é uma terna admissível, então existe $\epsilon > 0$ tal que $\|\phi - \psi\|_{C^1} < \epsilon$ implica que (ψ, D, y) é uma terna admissível e*

$$\deg_B(\phi, D, y) = \deg_B(\psi, D, y);$$

(iii) *Se $H : \overline{D} \times [0,1] \to \mathbb{R}^N$ é uma homotopia C^1 entre ϕ e ψ e (H_t, D, y) é uma terna admissível, para todo $t \in [0,1]$, então*

$$\deg_B(\phi, D, y) = \deg_B(\psi, D, y).$$

Demonstração:

(i) Seja $\mathcal{C}$ uma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial D)$, contendo y_1 e y_2. Pelo Teorema de Sard, podemos escolher $\widehat{y}_1$ valor regular de ϕ tal que $|y_1 - \widehat{y}_1|_\infty < \rho(y_1, \phi(\partial D))$. Dessa forma, $\widehat{y}_1 \in \mathcal{C}$, pois $\widehat{y}_1 \in B = B_\rho(y_1, \rho(y_1, \phi(\partial D))) \subset \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial D)$ e desde que B é um conexo que contém y_1, temos que $\widehat{y}_1 B \subset \mathcal{C}$. Similarmente, escolhemos $\widehat{y}_2$ valor regular de ϕ, satisfazendo $|y_2 - \widehat{y}_2|_\infty < \rho(y_2, \phi(\partial D))$, de modo que $\widehat{y}_2 \in \mathcal{C}$. Pela Definição 1.10 e pela Proposição 1.9, segue que

$$\deg_B(\phi, D, y_1) = \deg_B(\phi, D, \widehat{y}_1) = \deg_B(\phi, D, \widehat{y}_2) = \deg_B(\phi, D, y_2).$$

(ii) Pelo Teorema de Sard, existe $\widehat{y}$ valor regular de ϕ, satisfazendo

$$|y - \widehat{y}|_\infty < \frac{1}{2}\rho(y, \phi(\partial D)),$$

dessa forma $y, \widehat{y} \in B_\rho(y, \frac{1}{2}\rho(y, \phi(\partial D))) \subset \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial D)$. Portanto, y e $\widehat{y}$ pertencem à mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial D)$ e, pela Proposição 1.6, existe $0 < \epsilon_0 < \rho(y, \phi(\partial D))$ de modo que $(\psi, D, \widehat{y})$ é uma terna admissível, $\widehat{y}$ é um valor regular de ψ e

$$\deg_B(\phi, D, \widehat{y}) = \deg_B(\psi, D, \widehat{y}), \tag{1.14}$$

sempre que $\psi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ e $\|\phi - \psi\|_{C^1} < \epsilon_0$.

Para cada $x \in \partial D$, temos que

$$\begin{aligned}
|\psi(x) - y|_\infty &= |\psi(x) - \phi(x) - (y - \phi(x))|_\infty \\
&\geq |\psi(x) - \phi(x)|_\infty - |\phi(x) - y|_\infty \\
&\geq \rho(y, \phi(\partial D)) - \frac{1}{2}\rho(y, \phi(\partial D)) \\
&= \frac{1}{2}\rho(y, \phi(\partial D)),
\end{aligned}$$

portanto

$$|y - \widehat{y}|_\infty < \frac{1}{2}\rho(y, \phi(\partial D)) \leq \rho(y, \psi(\partial D))$$

e, dessa forma, $y, \widehat{y} \in B_\rho(y, \rho(y, \psi(\partial D))) \subset \mathbb{R}^N \setminus \psi(\partial D)$, garantindo que y e $\widehat{y}$ estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \psi(\partial D)$. Usando o item (i) e a igualdade (1.14), concluímos que

$$\deg_B(\psi, D, y) = \deg_B(\psi, D, \widehat{y}) = \deg_B(\phi, D, \widehat{y}) = \deg_B(\phi, D, y).$$

(iii) Definimos $u : [0,1] \to \mathbb{Z}$ por $u(t) = \deg_B(H_t, D, y)$ e vejamos que u é contínua. Fixe $t \in [0,1]$. Pelo item (ii), existe $\epsilon > 0$ tal que $\|H_t - H_s\|_{C^1} < \epsilon$ implica que $\deg_B(H_t, D, y) = \deg_B(H_s, D, y)$. Por definição de homotopia C^1, temos que $\lim_{s\to t} \|H_t - H_s\|_{C^1} = 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $|t - s| < \delta$ implica que $\|H_t - H_s\|_{C^1} < \epsilon$, assim $\deg_B(H_t, D, y) = \deg_B(H_s, D, y)$, sempre que $|t - s| < \delta$ e, portanto, u é contínua no conexo $[0,1]$. Desde que $u(t) \in \mathbb{Z}$, para todo $t \in [0,1]$, segue que u é constante em $[0,1]$. Consequentemente, $u(0) = u(1)$, isto é,

$$\deg_B(\phi, D, y) = \deg_B(\psi, D, y).$$

$\square$

1.3 Construção do grau para aplicações contínuas

Nesta seção, vamos generalizar a definição do grau de Brouwer para qualquer terna admissível (ϕ, D, y). Para tanto, vamos aproximar ϕ por aplicações de classe C^1 e utilizar os resultados construídos na seção anterior. Começaremos com a seguinte proposição:

Proposição 1.14. *Seja (ϕ, D, y) uma terna admissível. Se $\psi_1, \psi_2 \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ são tais que*

$$\|\psi_i - \phi\|_\infty < \rho(y, \phi(\partial D)),\ i = 1, 2,$$

então

$$\deg_B(\psi_1, D, y) = \deg_B(\psi_2, D, y).$$

Demonstração: Considere a homotopia C^1 definida por

$$H(x,t) := t\psi_1(x) + (1-t)\psi_2(x), \ \ x \in \overline{D}, \ \ t \in [0,1],$$

a qual liga ψ_1 e ψ_2. Precisamos mostrar que $\deg_B(H_0, D, y) = \deg_B(H_1, D, y)$.

Para $x \in \overline{D}$, temos que

$$\begin{aligned}
|H(x,t) - \phi(x)|_\infty &= |t(\psi_1(x) - \phi(x)) + (1-t)(\psi_2(x) - \phi(x))|_\infty \\
&\leq t|\psi_1(x) - \phi(x)|_\infty + (1-t)|\psi_2(x) - \phi(x)|_\infty \\
&< t\rho(y, \phi(\partial D)) + (1-t)\rho(y, \phi(\partial D)) \\
&= \rho(y, \phi(\partial D)),
\end{aligned}$$

assim, se existirem $x \in \partial D$ e $t \in [0,1]$ tais que $H_t(x) = y$, então

$$|y - \phi(x)|_\infty < \rho(y, \phi(\partial D)) \leq \rho(y, \phi(x)),$$

donde teríamos uma contradição. Isso prova que $y \notin H_t(\partial D)$, para todo $t \in [0,1]$. Aplicando o item (iii) da Proposição 1.13, obtemos $\deg_B(H_0, D, y) = \deg_B(H_1, D, y)$. Logo a proposição está provada. □

Agora, vamos à definição mais geral do grau de Brouwer:

Definição 1.15. Seja (ϕ, D, y) uma terna admissível. Definimos o *grau de Brouwer* de (ϕ, D, y) por

$$\deg_B(\phi, D, y) = \deg_B(\psi, D, y),$$

sendo ψ qualquer aplicação em $C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$, satisfazendo $\|\phi - \psi\|_\infty < \rho(y, \phi(\partial D))$.

Justificativa para a Definição 1.15:

Pela Proposição A.4, é sempre possível encontrar uma aplicação $\psi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ tal que $\|\phi - \psi\|_\infty < \rho(y, \phi(\partial D))$.

Observe que $y \notin \psi(\partial D)$, pois se existir $x \in \partial D$ tal que $\psi(x) = y$, então

$$|\phi(x) - y|_\infty = |\phi(x) - \psi(x)|_\infty < \rho(y, \phi(\partial D)) \leq \rho(y, \phi(x)),$$

que é uma contradição. Portanto, (ψ, D, y) é uma terna admissível.

Além disso, pela Proposição 1.14, a Definição 1.15 não depende da escolha da aplicação ψ.

A proposição seguinte, garante que é possível tomar a aplicação ψ na Definição 1.15 de modo que y seja valor regular de ψ. Esse fato será útil na demonstração das propriedades do grau de Brouwer, que apresentaremos na próxima seção.

Proposição 1.16. *Seja (ϕ, D, y) uma terna admissível. Então existe $\psi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$, satisfazendo $\|\phi - \psi\|_\infty < \rho(y, \phi(\partial D))$, de modo que y é valor regular de ψ.*

Demonstração: Pela Proposição A.4, podemos considerar $\chi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$, tal que

$$\|\phi - \chi\|_\infty < \frac{1}{4}\rho(y, \phi(\partial D)).$$

Pelo Teorema de Sard, podemos escolher $\widehat{y} \in \mathbb{R}^N$ valor regular de χ tal que

$$|y - \widehat{y}|_\infty < \frac{1}{4}\rho(y, \phi(\partial D)).$$

Ponha $\psi(x) := \chi(x) + y - \widehat{y}$. Então $\psi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ e para todo $x \in \overline{D}$,

$$\begin{array}{rcl} |\psi(x) - \phi(x)|_\infty & \leq & |\chi(x) - \phi(x)|_\infty + |y - \widehat{y}|_\infty \\ & < & \dfrac{1}{2}\rho(y, \phi(\partial D)), \end{array}$$

garantindo que $\|\psi - \phi\|_\infty < \rho(y, \phi(\partial D))$.

Ainda, $\psi(x) = y$ se, e somente se, $\chi(x) = \widehat{y}$ e para todo $x \in \overline{D}$, tem-se $J_\psi(x) = J_\phi(x)$. Desde que $\widehat{y}$ é valor regular de χ, segue que y é valor regular de ψ.

□

1.4 Propriedades do grau de Brouwer

A seguir, vamos apresentar algumas propriedades importantes do grau de Brouwer, entre elas, as propriedades de existência de solução e de invariância homotópica, mencionadas na introdução deste trabalho.

Teorema 1.17. *As seguintes propriedades são válidas:*

(P_1) **(Normalização)** *Sejam $I : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ a aplicação identidade do $\mathbb{R}^N$ e D um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^N$, então*

$$\deg_B(I, D, y) = 1, \ \forall\, y \in D;$$

(P_2) **(Translação)** *Seja (ϕ, D, y) uma terna admissível. Então $(\phi - y, D, 0)$ é uma terna admissível e*

$$\deg_B(\phi, D, y) = \deg_B(\phi - y, D, 0);$$

(P_3) **(Existência de solução)** *Se (ϕ, D, y) é uma terna admissível e $\deg_B(\phi, D, y) \neq 0$, então existe $x \in D$ tal que $\phi(x) = y$;*

(P_4) **(Decomposição)** *Sejam (ϕ, D, y) uma terna admissível e $D' \subset D$ tal que $D' = \cup_{i=1}^{\infty} D_i$ com D_i abertos mutuamente disjuntos, de modo que $y \notin \phi(\overline{D} \setminus D')$. Então*

$$\deg_B(\phi, D, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \deg_B(\phi, D_i, y);$$

(P_5) **(Excisão)** *Seja (ϕ, D, y) uma terna admissível e seja $K \subset \overline{D}$ um conjunto compacto tal que $y \notin \phi(K)$, então*

$$\deg_B(\phi, D, y) = \deg_B(\phi, D \setminus K, y);$$

(P_6) **(Continuidade em ϕ)** *Seja (ϕ, D, y) uma terna admissível. Então, para toda $\psi \in C(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ tal que $\|\psi - \phi\|_\infty < \rho(y, \phi(\partial D))$, tem-se que (ψ, D, y) é uma terna admissível e*

$$\deg_B(\phi, D, y) = \deg_B(\psi, D, y);$$

(P_7) **(Invariância local)** *Se $\phi \in C(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$, então $\deg_B(\phi, D, .)$ é constante em cada componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial D)$;*

(P_8) **(Invariância homotópica)** *Seja $H : \overline{D} \times [0,1] \to \mathbb{R}^N$ uma homotopia e seja $t \in [0,1] \mapsto y_t \in \mathbb{R}^N$ uma curva tal que $y_t \notin H_t(\partial D)$, para todo $t \in [0,1]$. Então $\deg_B(H_t, D, y_t)$ independe de $t \in [0,1]$;*

(P_9) **(Propriedade do bordo)** *Sejam (ϕ, D, y) e (ψ, D, y) ternas admissíveis. Se ϕ e ψ coincidem em ∂D, então*

$$\deg_B(\phi, D, y) = \deg_B(\psi, D, y);$$

(P_{10}) **(Mudança de variáveis)** *Sejam (ϕ, D, y) uma terna admissível, $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ um difeomorfismo de classe C^1 e $D' \subset \mathbb{R}^N$ aberto, limitado tal que $\overline{D} = \Phi(\overline{D'})$. Se $\widehat{y} = \Phi^{-1}(y)$ e $\psi = \Phi^{-1} \circ \phi \circ \Phi$, então*

$$\deg_B(\phi, D, y) = \deg_B(\psi, D', \widehat{y}).$$

Demonstração:

(P_1) Já provamos na Proposição 1.5, item (i).

(P_2) Primeiramente, observe que $0 \notin (\phi(\partial D) - y)$, pois $\phi(x) - y = 0$ se, e somente se, $\phi(x) = y$, assim, $(\phi - y, D, 0)$ é uma terna admissível. Pela Proposição 1.16, existe $\psi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ tal que

$$\|(\phi - y) - (\psi - y)\|_\infty = \|\phi - \psi\|_\infty < \rho(y, \phi(\partial D)) = \rho(0, \phi(\partial D) - y),$$

de modo que (ψ, D, y) é uma terna admissível e y é um valor regular de ψ.

Usando a Definição 1.15, temos que

$$\deg_B(\phi, D, y) = \deg_B(\psi, D, y) \quad \text{e} \quad \deg_B(\phi - y, D, 0) = \deg_B(\psi - y, D, 0).$$

Desde que $\psi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ e y é valor regular de ψ, podemos usar a Proposição 1.5 item (ii) e concluir que

$$\deg_B(\psi, D, y) = \deg_B(\psi - y, D, 0).$$

Portanto, $\deg_B(\phi, D, y) = \deg_B(\phi - y, D, 0)$.

(P_3) Suponha que a equação $\phi(x) = y$ não possui solução em D, isto é, $y \notin \phi(D)$. Uma vez que $y \notin \phi(\partial D)$, temos que $y \notin \phi(\overline{D})$ e como $\phi(\overline{D})$ é compacto, segue que $\rho(y, \phi(\overline{D})) > 0$. Pela Proposição 1.16, é possível escolher $\psi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ tal que

$$\|\phi - \psi\|_\infty < \rho(y, \phi(\overline{D})) \leq \rho(y, \phi(\partial D)),$$

de modo que y é valor regular de ψ. Dessa forma, $y \notin \psi(\overline{D})$, pois se existisse $x \in \overline{D}$ tal que $\psi(x) = y$, então

$$|\phi(x) - y|_\infty = |\phi(x) - \psi(x)|_\infty < \rho(y, \phi(\overline{D})),$$

que seria uma contradição. Agora, usando a Definição 1.15 e a Definição 1.3, obtemos

$$\deg_B(\phi, D, y) = \deg_B(\psi, D, y) = 0,$$

contrariando a hipótese. Portanto, a equação $\psi(x) = y$ tem solução em D.

(P_4) Tendo em vista que os abertos D_i são mutuamente disjuntos, segue que

$$\partial D_i = \overline{D}_i \setminus D_i \subset (\cup_{i \in \mathbb{N}} \overline{D}_i) \setminus (\cup_{i \in \mathbb{N}} D_i) \subset \overline{D'} \setminus D' = \partial D'.$$

Portanto, para cada $i \in \mathbb{N}$, a terna (ϕ, D_i, y) é admissível. Pela Proposição 1.16, podemos considerar $\psi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ tal que $\|\phi - \psi\|_\infty < \rho(y, \phi(\overline{D} \setminus D'))$, de modo que y é valor regular de ψ. Desde que $\rho(y, \phi(\overline{D} \setminus D')) \leq \rho(y, \phi(\partial D')) \leq \rho(y, \phi(\partial D_i))$, temos que $\|\phi - \psi\|_\infty < \rho(y, \phi(\partial D_i))$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Ainda,

$$\|(\phi - \psi)|_{\overline{D}_i}\|_\infty < \rho(y, \phi(\partial D_i))$$

e, assim, pela Definição 1.15, tem-se

$$\deg_B(\phi, D_i, y) = \deg_B(\psi, D_i, y), \ \forall\, i \in \mathbb{N}.$$

Observe que $y \notin \psi(\overline{D} \setminus D')$, pois se existisse $x \in \overline{D} \setminus D'$ tal que $\psi(x) = y$, teríamos $|\phi(x) - y|_\infty < \rho(y, \phi(\overline{D} \setminus D'))$, que é uma contradição.

Desde que y é valor regular de ψ, $\psi^{-1}(y)$ é finito e como os conjuntos D_i são mutuamente disjuntos, pela propriedade (P_3), deve existir apenas um número finito de índices i tais que $\deg_B(\psi, D_i, y) \neq 0$. Reindexando, se necessário, podemos assumir que $\deg_B(\psi, D_i, y) \neq 0$, para $i = 1, \ldots, k$ e que $\deg_B(\psi, D_i, y) = 0$, sempre que $i > k$. Desse modo, usando as definições 1.15 e 1.3, obtemos

$$\begin{aligned}
\deg_B(\phi, D, y) &= \deg_B(\psi, D, y) \\
&= \sum_{x \in \psi^{-1}(y) \cap D} \operatorname{sgn}(J_\psi(x)) \\
&= \sum_{x \in \psi^{-1}(y) \cap D'} \operatorname{sgn}(J_\psi(x)) \\
&= \sum_{x \in \cup_{i=1}^{\infty} (\psi^{-1}(y) \cap D_i)} \operatorname{sgn}(J_\psi(x)) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{x \in \psi^{-1}(y) \cap D_i} \operatorname{sgn}(J_\psi(x)) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \deg_B(\psi, D_i, y) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \deg_B(\psi, D_i, y) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \deg_B(\phi, D_i, y).
\end{aligned}$$

(P_5) Pela Proposição 1.16, podemos considerar $\psi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ satisfazendo

$$\|\phi - \psi\|_\infty < \rho(y, \phi(K \cup \partial D)) \leq \rho(y, \phi(\partial D)),$$

com y valor regular de ψ. Ainda, através de uma simples verificação, conclui-se que $y \notin \psi(K)$. Pela Proposição 1.5, item (iii), segue que

$$\deg_B(\psi, D, y) = \deg_B(\psi, D \setminus K, y).$$

Usando a Definição 1.15, temos que

$$\deg_B(\phi, D, y) = \deg_B(\psi, D, y).$$

Observe que $\partial(D \setminus K) \subset \partial D \cup K$. Então

$$\|(\phi - \psi)|_{(D \setminus K)}\|_\infty < \rho(y, \phi(K \cup \partial D)) \leq \rho(y, \phi(\partial(D \setminus K))).$$

Usando, novamente, a Definição 1.15, segue que

$$\deg_B(\phi, D \setminus K, y) = \deg_B(\psi, D \setminus K, y).$$

Portanto

$$\deg_B(\phi, D, y) = \deg_B(\phi, D \setminus K, y).$$

(P_6) Seja $\psi \in C(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ satisfazendo $\|\phi - \psi\|_\infty < \rho(y, \phi(\partial D))$. Uma vez que a diferença $\rho(y, \phi(\partial D)) - \|\phi - \psi\|_\infty$ é positiva, podemos considerar $\chi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ tal que

$$\|\psi - \chi\|_\infty < \frac{1}{2}(\rho(y, \phi(\partial D)) - \|\phi - \psi\|_\infty).$$

Então

$$\|\phi - \chi\|_\infty \leq \|\phi - \psi\|_\infty + \|\psi - \chi\|_\infty < \rho(y, \phi(\partial D)).$$

Usando a Definição 1.15, obtemos

$$\deg_B(\phi, D, y) = \deg_B(\chi, D, y).$$

Agora, para todo $x \in \partial D$, temos

$$|\psi(x) - y|_\infty \geq |\phi(x) - y|_\infty - |\phi(x) - \psi(x)|_\infty > \rho(y, \phi(\partial D)) - \|\psi - \phi\|_\infty \geq 2\|\psi - \chi\|_\infty,$$

donde concluímos que $\|\psi - \chi\|_\infty < \rho(y, \psi(\partial D))$. Novamente, pela Definição 1.15, temos que

$$\deg_B(\psi, D, y) = \deg_B(\chi, D, y)$$

e, portanto,

$$\deg_B(\phi, D, y) = \deg_B(\psi, D, y).$$

(P_7) Sejam $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial D)$ e denote por $\mathcal{C}$ a componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial D)$ que contém y_1 e y_2. Uma vez que $\mathcal{C}$ é conexo por caminhos, podemos considerar um caminho $\gamma : [0,1] \to \mathcal{C}$ ligando y_1 e y_2. Ainda, desde que $\rho(\gamma([0,1]), \mathcal{C}^c) > 0$, é possível encontrar $\psi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ tal que $\|\phi - \psi\|_\infty < \rho(\gamma([0,1]), \mathcal{C}^c)$.

Como $y_i \in \mathcal{C}$ e $\phi(\partial D) \subset \mathcal{C}^c$, obtemos

$$\|\phi - \psi\|_\infty < \rho(\gamma([0,1]), \mathcal{C}^c) \leq \rho(y_i, \phi(\partial D))$$

e usando a Definição 1.15, concluímos que

$$\deg_B(\phi, D, y_i) = \deg_B(\psi, D, y_i),\ i = 1, 2. \tag{1.15}$$

Resta mostrar que $\deg_B(\psi, D, y_1) = \deg_B(\psi, D, y_2)$. Para $s \in [0,1]$ e $x \in \partial D$, temos

$$\begin{aligned} |\gamma(s) - \psi(x)|_\infty &\geq |\gamma(s) - \phi(x)|_\infty - |\phi(x) - \psi(x)|_\infty \\ &\geq \rho(\gamma([0,1]), \mathcal{C}^c) - \|\phi - \psi\|_\infty, \end{aligned}$$

dessa forma

$$\rho(\gamma([0,1]), \psi(\partial D)) \geq \rho(\gamma([0,1]), \mathcal{C}^c) - \|\phi - \psi\|_\infty > 0,$$

consequentemente, $\gamma([0,1]) \subset \mathbb{R}^N \setminus \psi(\partial D)$ e assim y_1 e y_2 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \psi(\partial D)$. Pelo item (i) da Proposição 1.13, deduzimos que

$$\deg_B(\psi, D, y_1) = \deg_B(\psi, D, y_2). \tag{1.16}$$

Das igualdades (1.15) e (1.16), concluímos que

$$\deg_B(\phi, D, y_1) = \deg_B(\phi, D, y_2).$$

(P_8) Seja $F(x,t) := H(x,t) - y_t$, $t \in [0,1]$, $x \in \overline{D}$. Então $y_t \notin H_t(\partial D)$ se, e somente se, $0 \notin F_t(\partial D)$. Pela propriedade (P_2), segue que para $t \in [0,1]$,

$$\deg_B(F_t, D, 0) = \deg_B(H_t, D, y_t).$$

Considere agora $u(t) = \deg_B(F_t, D, 0)$ e vejamos que u é contínua em [0,1]. Fixe $s \in [0,1]$, pela propriedade (P_6), existe $\epsilon > 0$ tal que $\deg_B(F_t, D, 0) = \deg_B(F_s, D, 0)$, sempre que $\|F_t - F_s\|_\infty < \epsilon$. Como F é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que $|t-s| = |(x,t)-(x,s)|_\infty < \delta$ implica que $|F_t(x) - F_s(x)|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $x \in \overline{D}$. Dessa forma $|t-s| < \delta$ implica que $\|F_t - F_s\|_\infty < \epsilon$ e, portanto, implica que $\deg_B(F_t, D, 0) = \deg_B(F_s, D, 0)$. Logo u é contínua no conexo $[0,1]$ e como $u(t) \in \mathbb{Z}$, para todo $t \in [0,1]$, temos que u deve ser constante em $[0,1]$.

Portanto $\deg_B(H_t, D, y_t)$ independe de $t \in [0,1]$.

(P_9) Considere a homotopia

$$H(x,t) = t\phi(x) + (1-t)\psi(x), \ x \in \overline{D}, \ t \in [0,1].$$

Então $H_t(\partial D) = \phi(\partial D) = \psi(\partial D)$. Logo $y \notin H_t(\partial D)$, para todo $t \in [0,1]$. Pela propriedade (P_8), segue que $\deg_B(H_t, D, y)$ não depende de $t \in [0,1]$ e assim

$$\deg_B(\phi, D, y) = \deg(\psi, D, y).$$

(P_{10}) Desde que Φ é um difeomorfismo, Φ é uma aplicação aberta, logo $\Phi(D')$ é um conjunto aberto. Como $\Phi(D') \subset \overline{D}$ e $D \subset \Phi(\overline{D'}) = \overline{\Phi(D')}$, temos que $\Phi(D') = D$, portanto, $\Phi(\partial D') = \partial D$. Assim

$$\widehat{y} \in \psi(\partial D') \ \Leftrightarrow \ \Phi^{-1}(y) \in \Phi^{-1} \circ \phi \circ \Phi(\partial D') \ \Leftrightarrow \ y \in \phi(\Phi(\partial D')) = \phi(\partial D),$$

logo $\widehat{y} \notin \psi(\partial D')$, provando que (ψ, D, y) é terna admissível.

Passo 1: Primeiramente, vamos assumir que $\phi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ e que y é valor regular de ϕ. Neste caso, $\psi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$. Além disso,

$$\psi'(w) = (\Phi^{-1})'(\phi(\Phi(w))) \circ \phi'(\Phi(w)) \circ \Phi'(w). \tag{1.17}$$

Ainda, $\psi(w) = \widehat{y}$, $w \in D'$ se, e somente se, $\phi(\Phi(w)) = y$, $w \in D'$. Desde que y é valor regular de ϕ e $\Phi'(w)$, $(\Phi^{-1})'(\phi(\Phi(w)))$ são isomorfismos, por (1.17) temos que $\widehat{y}$ é valor regular de ψ. Uma vez que $\det \Phi'(\,\cdot\,)$ não muda de sinal em D', temos que

$$\begin{aligned}
\deg_B(\psi, D', \widehat{y}) &= \sum_{\psi(w)=\widehat{y}} \operatorname{sgn}(J_\psi(y)) \\
&= \sum_{\psi(w)=\Phi^{-1}(y)} \operatorname{sgn}\left[\det(\Phi^{-1})'(\phi(\Phi(w))) \det \phi'(\Phi(w)) \det(\Phi'(w))\right] \\
&= \sum_{(\Phi^{-1}\circ\phi\circ\Phi)(w)=\Phi^{-1}(y)} \frac{\operatorname{sgn}\det \phi'(\Phi(w)) \operatorname{sgn}\det(\Phi'(w))}{\operatorname{sgn}\det \Phi'((\Phi^{-1}\circ\phi\circ\Phi)(w))} \\
&= \sum_{(\phi\circ\Phi)(w)=y} \operatorname{sgn}\det(\phi'(\Phi(w))) \\
&= \sum_{\phi(x)=w} \operatorname{sgn}\det(\phi'(x)) \\
&= \deg_B(\phi, D, y).
\end{aligned}$$

Passo 2: Assuma que $\phi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ e que y é valor crítico de ϕ. Usando o Teorema de Sard, existe uma sequência (y_j) de valores regulares de ϕ que converge para y. Assim, $(\widehat{y}_j) := (\Phi^{-1}(y_j))$ é uma sequência de valores regulares de ψ que converge para $\widehat{y}$. Tome j_0 suficientemente grande, de modo que $y_{j_0}, \widehat{y}_{j_0}$ estejam na mesma componente conexa de y em $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial D)$ e de $\widehat{y}$ em $\mathbb{R}^N \setminus \psi(\partial D')$, respectivamente. Pela propriedade (P_7) e pelo passo 1, segue que

$$\deg_B(\phi, D, y) = \deg_B(\phi, D, y_{j_0}) = \deg_B(\psi, D', \widehat{y}_{j_0}) = \deg_B(\psi, D', \widehat{y}).$$

Passo 3: Assuma que $\phi \in C(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$. Pela proposição A.4, podemos encontrar uma sequência $(\phi_j) \subset C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ que converge uniformemente para ϕ. Considere $\psi_j := \Phi^{-1} \circ \phi_j \circ \Phi$, então $(\psi_j) \subset C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ e ψ_j converge para ψ, uniformemente. Escolhendo $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\phi_{j_0} - \phi\|_\infty < \rho(y, \phi(\partial D)) \quad \text{e} \quad \|\psi_{j_0} - \psi\|_\infty < \rho(\widehat{y}, \psi(\partial D'))$$

e usando a propriedade (P_6), juntamente com o passo 2, obtemos

$$\deg_B(\phi, D, y) = \deg_B(\phi_{j_0}, D, y) = \deg_B(\psi_{j_0}, D', \widehat{y}) = \deg_B(\psi, D', \widehat{y}).$$

Isso conclui a prova do teorema.

□

Observação 1.18 (**Unicidade do grau de Brouwer**). É possível mostrar que existe apenas uma função $\mathsf{d} : \{(\phi, D, y); D$ é aberto, limitado, $\phi : \overline{D} \to \mathbb{R}^N$ é contínua, $y \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial D)\} \to \mathbb{Z}$ satisfazendo as propriedades de normalização, decomposição (com apenas dois abertos) e invariância homotópica. A demonstração desse fato pode ser encontrada no capítulo 1 de [10]. Daí concluímos que o grau de Brouwer é único.

1.5 Generalização do grau de Brouwer para espaços vetoriais reais normados de dimensão finita

Nosso objetivo, nesta seção, é apresentar a estratégia utilizada para generalizar a teoria do grau desenvolvida em $\mathbb{R}^N$ para qualquer espaço vetorial real normado de dimensão finita.

Começamos com as definições de terna admissível e de grau topológico para aplicações de classe C^1 e para valores regulares.

Definição 1.19. Seja V um espaço vetorial real normado de dimensão finita e $D \subset V$ um conjunto aberto e limitado. Se $\phi : U \to V$ é uma aplicação contínua em $\overline{D}$ e $y \in V \backslash \phi(\partial D)$, então (ϕ, D, y) é uma *terna adissível* para o grau de Brouwer.

Definição 1.20. Seja (ϕ, D, y) uma terna admissível com $\phi \in C^1(\overline{D}, V)$ e y um valor regular de ϕ. Definimos o *grau de Brouwer* de (ϕ, D, y) como

$$\deg_B(\phi, D, y) = \sum_{x \in \phi^{-1}(y) \cap D} \operatorname{sgn} \det \phi'(x),$$

sendo $\operatorname{sgn} \det \phi'(x)$ o sinal do determinante da matriz que representa $\phi'(x)$ em qualquer base de V fixada.

Observação 1.21. Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases de V, $A_{\mathcal{B}_1}, A_{\mathcal{B}_2}$ matrizes que representam $\phi'(x)$ nas bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$, respectivamente. Podemos observar que se M é a matriz mudança de bases de $\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}_2$, então $A_{\mathcal{B}_2} = M^{-1} A_{\mathcal{B}_1} M$, assim $\det A_{\mathcal{B}_2} = (\det M)^{-1} \det M \det A_{\mathcal{B}_1} = \det A_{\mathcal{B}_1}$. Portanto $\operatorname{sgn} \det \phi'(x)$ não depende da base escolhida. Ainda, o Lema 1.2 permanece válido para espaços vetoriais normados de dimensão finita, garantindo que a soma na Definição 1.19 é finita.

Vamos apresentar a seguir uma proposição que mostra a invariância do grau topológico por isomorfismos de um espaço V em $\mathbb{R}^N$.

Proposição 1.22. *Sejam (ϕ, D, y) uma terna admissível com $\phi \in C^1(\overline{D}, V)$, y um valor regular de ϕ em D e $\Phi : V \to \mathbb{R}^N$ um isomorfismo. Se $D' = \Phi(D)$, $\widehat{y} = \Phi(y)$ e $\psi = \Phi \circ \phi \circ \Phi^{-1}$, então*

$$\deg_B(\phi, D, y) = \deg_B(\psi, D', \widehat{y}).$$

Demonstração: Primeiramente, como na demonstração da propriedade (P_{10}) no Teorema 1.17, podemos observar que $\psi : D' \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é tal que $(\psi, D', \widehat{y})$ é uma terna admissível e $\widehat{y}$ é valor regular de ψ em D'. Pela Definição 1.3, segue que

$$\deg_B(\psi, D', \widehat{y}) = \sum_{\psi^{-1}(w \in \widehat{y}) \cap D'} \operatorname{sgn} \det(\psi'(w)).$$

Como Φ é linear, $\psi'(w) = \Phi \circ \phi'(\Phi^{-1}(w)) \circ \Phi^{-1}$. Assim,

$$\det \psi'(w) = \det \Phi (\det \Phi)^{-1} \det \phi'(\Phi^{-1}(w)) = \det \phi'(\Phi^{-1}(w)).$$

Portanto

$$\begin{aligned} \deg_B(\psi, D', \widehat{y}) &= \sum_{\psi(w)=\widehat{y}} \operatorname{sgn} \det(\phi'(\Phi^{-1}(w))) \\ &= \sum_{\Phi(\phi(x))=\widehat{y}} \operatorname{sgn} \det(\phi'(x)) \\ &= \sum_{\phi(x)=y} \operatorname{sgn} \det(\phi'(x)) \\ &= \sum_{x\in\phi^{-1}(y)\cap D} \operatorname{sgn} \det(\phi'(x)) \\ &= \deg_B(\phi, D, y). \end{aligned}$$

□

A Proposição 1.22 nos permite generalizar a definição do grau de Brouwer para uma terna admissível (ϕ, D, y) em um espaço vetorial real normado de dimensão finita. Além disso, todas as propriedades demonstradas na Seção 1.4, continuam válidas se substituirmos $\mathbb{R}^N$ por espaços vetoriais reais normados de dimensão finita. Os procedimentos para constituir tal generalização consiste em considerar um isomorfismo entre V e $\mathbb{R}^N$ e usar argumentos análogos aos apresentados nas Seções 1.2, 1.3 e 1.4 para a aplicação $\psi : D' \to \mathbb{R}^N$, introduzida na Proposição 1.22.

Observação 1.23. No decorrer do texto, faremos referência às propriedades do grau de Brouwer, mencionadas no Teorema 1.17, mesmo que o espaço vetorial em questão não seja o $\mathbb{R}^N$, mas um espaço vetorial real normado de dimensão finita.

A seguinte proposição desempenhará um papel importante na construção do grau topológico em dimensão infinita.

Proposição 1.24. *Sejam V espaço vetorial real de dimensão N e W subespaço de V, de dimensão N_1. Seja $D \subset V$ um conjunto aberto e limitado. Considere $T : \overline{D} \to W$ uma aplicação contínua e defina $\phi : \overline{D} \to V$ por $\phi(x) = x - T(x)$. Considere $\phi|_{\overline{D}\cap W} \colon \overline{D} \cap W \to W$ e $y \in W \setminus \phi(\partial D)$. Então*

$$\deg_B(\phi, D, y) = \deg_B(\phi|_{\overline{D}\cap W}, D \cap W, y).$$

Demonstração: Escrevemos $\psi = \phi|_{\overline{D}\cap W}$. Primeiro provemos que vale a igualdade $\phi^{-1}(y) \cap D = \psi^{-1}(y) \cap D$. É claro que $\psi^{-1}(y) \cap D \subset \phi^{-1}(y) \cap D$. Vejamos que vale a inclusão contrária. De fato, se $x \in \phi^{-1}(y) \cap D$, então $\phi(x) = y$, ou seja, $x = y + T(x) \in W$. Logo $x \in \psi^{-1}(y) \cap D$. Portanto, $\phi^{-1}(y) \cap D \subset \psi^{-1}(y) \cap D$.

Agora, se $\psi^{-1}(y)\cap(D\cap W)=\emptyset$, então $\phi^{-1}(y)\cap D=\emptyset$, portanto

$$\deg_B(\phi,D,y)=\deg_B(\psi,D\cap W,y)=0.$$

Suponha que $\psi^{-1}(y)\cap(D\cap W)\neq\emptyset$ e divida a demonstração em dois passos:

Passo 1: Suponha que $T\in C^1(\overline{D},V)$ e que y é valor regular de ψ. Considere a decomposição $V=W\oplus W'$, em que W' é um complemento direto de W.

Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases de W e W', respectivamente, e ponha $\mathcal{B}=\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$, base de V. Para $x\in D\cap W$, podemos representar o operador $\phi'(x)$ na base $\mathcal{B}$ pela matriz

$$Q=\begin{pmatrix} M_x & P_x \\ 0_{(N-N_1)\times N_1} & I_{N-N_1}\end{pmatrix},$$

sendo M_x a matriz de $\psi'(x)$ na base $\mathcal{B}_1$ e

$$P_x=\begin{pmatrix} -\frac{\partial T_1}{\partial x_{N_1+1}}(x) & \cdots & -\frac{\partial T_1}{\partial x_N}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial T_{N_1}}{\partial x_{N_1+1}}(x) & \cdots & -\frac{\partial T_{N_1}}{\partial x_N}(x)\end{pmatrix},$$

em que $\frac{\partial T_j}{\partial x_i}$ denota a derivada da j-ésima coordenada da aplicação T em relação a i-ésima coordenada de x. Dessa forma, como $\det Q=\det M_x\det I_{N-N_1}=\det M_x$, temos que para $x\in D\cap W$, $\operatorname{sgn}\det\psi'(x)=\operatorname{sgn}\det\phi'(x)$.

Desde que y é valor regular de ψ e $\psi^{-1}(y)\cap D=\phi^{-1}(y)\cap D$, temos que y é também valor regular de ϕ, assim

$$\begin{aligned}\deg_B(\phi,D,y) &= \sum_{x\in\phi^{-1}(y)\cap D}\operatorname{sgn}\det\phi'(x)\\ &= \sum_{x\in\psi^{-1}(y)\cap D}\operatorname{sgn}\det\psi'(x)\\ &= \deg_B(\psi,D\cap W,y).\end{aligned}$$

Passo 2: Suponha que T é apenas contínua em $\overline{D}$. Pela Proposição A.4, existe $\widehat{T}\in C^1(\overline{D},W)$ tal que

$$|\widehat{T}(x)-T(x)|_V<\rho(y,\phi(\partial D)),\ \forall x\in\overline{D}, \tag{1.18}$$

sendo $|\cdot|_V$ a norma de V.

Defina $\widehat{\phi}(x)=x-\widehat{T}(x)$ e $\widehat{\psi}=\widehat{\phi}|_{\overline{D}\cap W}$. Pelo Teorema de Sard, podemos escolher $\widehat{y}\in W$, valor regular de $\widehat{\psi}$, tal que

$$|\widehat{y}-y|_V<\rho(y,\widehat{\psi}(\partial D)).$$

Por (1.18), temos $|\widehat{\phi}(x)-\phi(x)|_V<\rho(y,\phi(\partial D))$, para todo $x\in\overline{D}$ e pela Definição

1.15, segue que

$$\deg_B(\widehat{\phi}, D, y) = \deg_B(\phi, D, y) \quad \text{e} \quad \deg_B(\widehat{\psi}, D \cap W, y) = \deg_B(\psi, D \cap W, y).$$

Usando a Definição 1.10, segue que

$$\deg_B(\widehat{\phi}, D, y) = \deg_B(\widehat{\phi}, D, \widehat{y}) \quad \text{e} \quad \deg_B(\widehat{\psi}, D \cap W, y) = \deg_B(\widehat{\psi}, D \cap W, \widehat{y}).$$

Pelo Passo 1, temos que $\deg_B(\widehat{\phi}, D, \widehat{y}) = \deg_B(\widehat{\psi}, D, \widehat{y})$. Juntando as igualdades, obtemos

$$\deg_B(\phi, D, y) = \deg_B(\psi, D \cap W, y).$$

Isso conclui a prova da proposição. □

1.6 Índice de uma solução isolada em dimensão finita

Nas seções anteriores, provamos uma série de propriedades do grau, porém, mesmo dispondo de tais propriedades, às vezes o cálculo do grau pode ser uma tarefa bastante complicada. Dessa forma, quanto mais ferramentas tivermos para calcular o grau, mais viável torna-se a teoria. Neste sentido, vamos introduzir nesta seção o conceito de índice de uma solução isolada, em dimensão finita, o qual pode ser um importante instrumento para o cálculo do grau de Brouwer. No próximo capítulo, vamos generalizar o conceito de índice para dimensão infinita.

Definição 1.25. Seja (ϕ, D, y) uma terna admissível, dizemos que $x_0 \in D$ é uma *solução isolada da equação* $\phi(x) = y$ se x_0 satisfaz tal equação e existe $R > 0$ tal que $\phi(x) \neq y$, para todo $x \in B_\rho(x_0, R) \setminus \{x_0\}$.

A propriedade de excisão nos permite definir o índice de uma solução isolada x_0 de $\phi(x) = y$. De fato, usando a propriedade de excisão, com $K = \overline{B}_\rho(x_0, R) \setminus B_\rho(x_0, s)$, $s \in (0, R)$, e $D = B_\rho(x_0, R)$, temos

$$\deg_B(\phi, B_\rho(x_0, s), y) = \deg_B(\phi, B_\rho(x_0, R), y), \ \forall\, s \in (0, R).$$

Definição 1.26. Seja (ϕ, D, y) uma terna admissível. Definimos o *índice de ϕ com relação a uma solução isolada x_0 de $\phi(x) = y$,* por

$$i(\phi, x_0) = \lim_{s \to 0} \deg_B(\phi, B_\rho(x_0, s), y).$$

A próxima proposição expressa o grau de uma terna (ϕ, D, y) em termos dos índices das soluções da equação $\phi(x) = y$ em D.

Proposição 1.27. *Se (ϕ, D, y) é uma terna admissível tal que $\phi^{-1}(y) \cap D = \{x_1, ..., x_k\}$,* *então*

$$\deg_B(\phi, D, y) = \sum_{j=1}^{k} i(\phi, x_j).$$

Demonstração: Tome $s > 0$ tal que $B_\rho(x_l, s) \cap B_\rho(x_j, s) = \emptyset$, $l \neq j$. Considere $D_0 = B_\rho(x_1, s) \cup ... \cup B_\rho(x_k, s)$, usando a propriedade ($\mathrm{P}_4$) do Teorema 1.17, obtemos

$$\begin{aligned} \deg_B(\phi, D, y) &= \deg_B(\phi, D_0, y) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \deg_B(\phi, B_\rho(x_j, s), y) \\ &= \sum_{j=1}^{k} i(\phi, x_j). \end{aligned}$$

□

Apresentaremos agora o último resultado deste capítulo. Tal resultado será utilizado na construção do índice de uma solução isolada em dimensão infinita.

Lema 1.28. *Sejam (ϕ, D, y) uma terna admissível com $\phi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ e $x_0 \in D$ tal que $y = \phi(x_0)$ é valor regular de ϕ. Então*

$$i(\phi, x_0) = (-1)^\beta,$$

sendo β a soma das multiplicidades algébricas de todos os autovalores negativos de $\phi'(x_0)$.

Demonstração: Desde que y é valor regular de ϕ, $\phi^{-1}(y)$ é finito, assim x_0 é uma solução isolada de $\phi(x) = y$, isto é, existe $R > 0$ tal que a única solução de $\phi(x) = y$ em $B_\rho(x_0, R)$ é x_0. Então $i(\phi, x_0) = \deg_B(\phi, B_\rho(x_0, R), y) = \mathrm{sgn}(J_\phi(x_0))$.

Usando a forma canônica de Jordan, temos que o determinante jacobiano $J_\phi(x_0)$ é dado por

$$J_\phi(x_0) = \prod_{j=1}^{N} \lambda_j,$$

em que os λ_j são os autovalores de $\phi'(x_0)$ repetidos de acordo com a multiplicidade algébrica de λ_j.

Observe que cada λ_j é não nulo, pois $\phi'(x_0)$ é invertível. Além disso, se um autovalor é complexo, digamos $a + bi$, então seu conjugado $a - bi$ também é autovalor de $\phi'(x_0)$ e o produto deles é $a^2 + b^2 > 0$. Assim, $\mathrm{sgn}(J_\phi(x_0)) = (-1)^\beta$, em que β é a soma das multiplicidades algébricas dos autovalores negativos de $\phi'(x_0)$. Portanto, $i(\phi, x_0) = (-1)^\beta$.

□

Capítulo

2

Grau topológico de Leray-Schauder

Neste capítulo vamos trabalhar a teoria do grau topológico em dimensão infinita, mais conhecida como teoria do grau de Leray-Schauder.

Considere E um espaço de Banach e Γ o conjunto das ternas (ϕ, D, y) tais que $D \subset E$ é um conjunto aberto, limitado, $\phi : \overline{D} \to E$ é uma aplicação contínua e $y \in E \setminus \phi(\partial D)$.

Nosso intuito é definir uma função $\deg : \Gamma \to \mathbb{Z}$, esperando que

(i) $\deg(I, D, y) = 1$, para todo $y \in D$, em que I é a aplicação identidade de E;

(ii) $\deg(\phi, D, y) \neq 0$ implique que $y \in \phi(D)$;

(iii) $\deg(H_t, D, y)$ independa de t, se $H : \overline{D} \times [0,1] \to E$ é uma homotopia tal que $y \notin H_t(\partial D)$, para todo $t \in [0,1]$.

Quando E é de dimensão finita vimos que existe uma função deg, satisfazendo as propriedades (i) − (iii), com ϕ apenas contínua. No caso em que E é de dimensão infinita, um exemplo dado por Leray, mostra que não basta ϕ ser apenas contínua, para garantir a existência de uma função deg satisfazendo (i)-(iii):

Exemplo 2.1. *Seja E o espaço das funções contínuas $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ e para $x \in E$, seja*

$$\|x\|_E := \max_{s \in [0,1]} |x(s)|.$$

Considere $x_0 \in E$, dada por $x_0(s) = \frac{1}{2}$, para todo $s \in [0,1]$ e seja $D \subset E$, dado por

$$D := \{x \in E; \|x - x_0\|_E < \frac{1}{2}\}.$$

Então existe $y \in E$, tal que qualquer função $\deg(\,\cdot\,, D, y) : C(\overline{D}, E) \to \mathbb{Z}$ não satisfaz pelo menos uma das propriedades (i) − (iii)*, sendo $C(\overline{D}, E)$ o espaço das aplicações contínuas de $\overline{D}$ em E.*

Para verificarmos que isso é válido, suponhamos o contrário, isto é, que existe uma função $\deg(\,\cdot\,, D, y) : C(\overline{D}, E) \to \mathbb{Z}$ verificando (i) − (iii). Considere a curva

$\gamma : [0,1] \to [0,1]$, dada por

$$\gamma(s) = \begin{cases} s, & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}; \\ 1-s, & \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{5}{8}; \\ \frac{5}{3}(s-1)+1, & \frac{5}{8} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

e defina $\phi : \overline{D} \to E$ por $\phi(x) = \gamma \circ x$. Uma vez que $\gamma([0,1]) = [0,1]$, temos que $\phi(\overline{D}) \subset \overline{D}$. Considere a homotopia $H_t(x) := tx + (1-t)\phi(x)$, $0 \leq t \leq 1$, $x \in \overline{D}$ e como $\overline{D}$ é convexo, temos que $H_t(x) \in \overline{D}$, isto é,

$$\|H_t(x) - x_0\|_E \leq \frac{1}{2}.$$

Afirmação 1: $H_t(\partial D) \subset \partial D$, para todo $t \in [0,1]$.

De fato, fixe $t \in [0,1]$ e considere $x \in \partial D$. Então $\|x - x_0\|_E = \max_{s\in[0,1]} |x(s)| = \frac{1}{2}$, assim

$$|x(s) - x_0(s)| \leq \frac{1}{2}, \forall s \in [0,1]$$

e para algum $s_0 \in [0,1]$,

$$|x(s_0) - x_0(s_0)| = \frac{1}{2}.$$

Assim, $x(s_0) \in \{0,1\}$, consequentemente $H_t(x)(s_0) \in \{0,1\}$. Logo

$$|H_t(x)(s_0) - x_0(s_0)| = \left| H_t(x)(s_0) - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

Agora, $\|H_t(x) - x_0\|_E \geq |H_t(x)(s_0) - x_0(s_0)| = \frac{1}{2}$, por outro lado, $\|H_t(x) - x_0\|_E \leq \frac{1}{2}$, assim $\|H_t(x) - x_0\|_E = \frac{1}{2}$. Logo $H_t(x) \in \partial D$, concluindo a prova da afirmação.

Seja $y \in E$, definida por $y(s) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}s$, então

$$\|y - x_0\|_E = \sup_{s\in[0,1]} \left| \frac{1}{4} + \frac{1}{2}s - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{4},$$

portanto, $y \notin \partial D$. Pela afirmação 1, temos que $y \notin H_t(\partial D)$, para todo $t \in [0,1]$, assim $\deg(H_t, D, y)$ está bem definido. Usando (i) e (iii), deduzimos que

$$\deg(\phi, D, y) = \deg(I, D, y) = 1.$$

Pela propriedade (ii), existe $x \in D$ tal que $\gamma \circ x = \phi(x) = y$.

Afirmação 2: A equação $x(s) = \frac{1}{2}$ admite exatamente uma solução em $[0,1]$.

De fato,

$$\frac{1}{4} = y(0) \Rightarrow \frac{1}{4} = \gamma \circ x(0) \Rightarrow x(0) = \frac{1}{4}$$

e

$$\frac{3}{4} = y(1) \Rightarrow \frac{3}{4} = \gamma \circ x(1) \Rightarrow x(1) = \frac{17}{20}.$$

Desde que $x(0) = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{17}{20} = x(1)$ e x é contínua, a equação $x(s) = \frac{1}{2}$ tem solução.

Além disso,
$$x(s) = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma(x(s)) = \gamma(\frac{1}{2}) \Rightarrow y(s) = \frac{1}{2} \Rightarrow s = \frac{1}{2}.$$
Portanto $s = \frac{1}{2}$ é a única solução de $x(s) = \frac{1}{2}$. Isto prova a afirmação 2.

Pela afirmação 2 e pela continuidade de x, concluímos que $x(s) > \frac{1}{2}$, para todo $s \in (\frac{1}{2}, 1]$ ou $x(s) < \frac{1}{2}$, para todo $s \in (\frac{1}{2}, 1]$. Se a segunda possibilidade ocorresse, isto é, $x(s) < \frac{1}{2}$, para todo $s \in (\frac{1}{2}, 1]$, então

$$\begin{aligned} x(s) < \frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \quad \gamma \circ x(s) < \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \quad y(s) < \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = y(1) < \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

que é uma contradição. Logo, vale a primeira possibilidade, isto é, $x(s) < \frac{1}{2}$, para todo $s \in (\frac{1}{2}, 1]$. Agora, desde que $x(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, por continuidade, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $s \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \epsilon]$, $x(s) \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]$. Uma vez que em $[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]$, $\gamma(s) = 1 - s$, para todo $s \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \epsilon]$, temos que
$$y(s) = \gamma \circ x(s) \in \left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right].$$
Como y é crescente, temos uma contradição, pois $y(\frac{1}{2} + \epsilon) \leq \frac{1}{2} = y(\frac{1}{2})$. Logo, pelo menos uma das propriedades (i), (ii) ou (iii) não é verificada por $\deg(\,\cdot\,, D, y)$.

O exemplo 2.1 mostra que não é possível definirmos o grau topológico, em dimensão infinita, para aplicações apenas contínuas, como o fizemos em dimensão finita. Porém, se nos restringirmos a perturbações compactas da identidade, isto é, aplicações do tipo $I - T$ com T compacta, o grau topológico poderá ser estendido para dimensão infinita.

2.1 Construção do grau de Leray-Schauder

Primeiramente, vamos fixar algumas notações que serão utilizadas no decorrer deste capítulo. Se E é um espaço de Banach real, denotaremos por $\|\cdot\|_E$ a norma de E, à qual associamos a métrica ρ, dada por $\rho(x, y) := \|x - y\|_E$, $x, y \in E$. Ainda, se $A \subset E$ e $x \in E$, então
$$\rho(x, A) := \inf_{w \in A} \rho(x, w).$$

A seguir, apresentaremos algumas definições pertinentes ao desenvolvimento do grau de Leray-Schauder.

Definição 2.2. Sejam E, F espaços de Banach. Dizemos que $T : M \subset E \to F$ é uma *aplicação compacta* se

(i) T é contínua;

(ii) $\overline{T(A)}$ é compacto para todo $A \subset M$, limitado.

Definição 2.3. Sejam E, F espaços de Banach. Dizemos que $\phi : E \to F$ é uma *aplicação própria* em $M \subset E$ se $\phi^{-1}(K) \cap M$ é compacto em E, para todo K, subconjunto compacto de F.

Definição 2.4. Sejam E, F espaços de Banach. Dizemos que $T : M \subset E \to F$ é uma *aplicação de posto finito,* se T é contínua e $T(M)$ está contido num subespaço de F de dimensão finita.

Definição 2.5. Seja D um subconjunto aberto e limitado de um espaço de Banach E. Se $\phi : \overline{D} \to E$ é dada por $\phi(x) = x - T(x)$, sendo $T : \overline{D} \to E$ uma aplicação compacta e $y \in E \setminus \phi(\partial D)$, então dizemos que (ϕ, D, y) é uma *terna admissível* para o grau de Leray-Schauder.

O próximo resultado permite aproximarmos uma aplicação compacta por aplicações de posto finito. Essas aproximações serão fundamentais para a construção do grau de Leray-Schauder, que será concebida a partir do grau de Brouwer.

Lema 2.6. *Sejam E, F espaços de Banach munidos, respectivamente, das normas $\|\cdot\|_E$, $\|\cdot\|_F$. Assuma que $M \subset E$ é um conjunto limitado e $T : M \to F$ é uma aplicação compacta. Então, para cada $\epsilon > 0$, existe uma aplicação $T_\epsilon : M \to F$ de posto finito tal que $\|T(x) - T_\epsilon(x)\|_F < \epsilon$, para todo $x \in M$.*

Demonstração: Desde que T é uma aplicação compacta, segue que $\overline{T(M)}$ é compacto. Fixado $\epsilon > 0$, desde que

$$\overline{T(M)} \subset \bigcup_{z \in \overline{T(M)}} B_\rho(z, \epsilon),$$

existem $z_1, \ldots, z_k \in \overline{T(M)}$, tais que

$$\overline{T(M)} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_\rho(z_i, \epsilon).$$

Definamos, para cada $1 \leq i \leq k$, $m_i : M \to F$ por $m_i(x) := \max\{0, \epsilon - \|T(x) - z_i\|_F\}$ e consideremos

$$\theta_i(x) = \frac{m_i(x)}{\sum_{j=1}^{k} m_j(x)}.$$

Afirmação: $\theta_i : M \to \mathbb{R}$ está bem definida e é contínua, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$.

De fato, dado $x \in M$, existe $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $T(x) \in B_\rho(z_j, \epsilon)$. Dessa forma $\|T(x) - z_j\|_F < \epsilon$, consequentemente $m_j(x) > 0$. Logo

$$\sum_{i=1}^{k} m_i(x) > 0$$

e, para cada i, θ_i está bem definida.

Desde que

$$\max\{0, \epsilon - \|T(x) - z_i\|_F\} = \frac{\epsilon - \|T(x) - z_i\|_F}{2} + \frac{|\,\epsilon - \|T(x) - z_i\|_F\,|}{2},$$

segue que m_i é contínua, consequentemente θ_i é contínua, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Isto prova a afirmação.

Definamos agora

$$T_\epsilon(x) = \sum_{i=1}^{k} \theta_i(x) z_i$$

e observemos que

$$\sum_{i=1}^{k} \theta_i(x) = 1.$$

Assim,

$$T(x) - T_\epsilon(x) = \sum_{i=1}^{k} \theta_i(x) T(x) - \sum_{i=1}^{k} \theta_i(x) z_i = \sum_{i=1}^{k} \theta_i(x)(T(x) - z_i).$$

Logo,

$$\|T(x) - T_\epsilon(x)\|_F \leq \sum_{i=1}^{k} \theta_i(x) \|T(x) - z_i\|_F < \epsilon.$$

□

Para prosseguirmos a construção do grau de Leray-Schauder de uma terna admissível (ϕ, D, y), vamos precisar que $\rho(y, \phi(\partial D)) > 0$. Para tanto, será necessário o seguinte resultado:

Lema 2.7. *Sejam E um espaço de Banach, $D \subset E$ um conjunto aberto, limitado e $T : \overline{D} \to E$ uma aplicação compacta. Defina $\phi(x) = x - T(x)$. Então:*

(i) *ϕ é uma aplicação própria em $\overline{D}$;*

(ii) *ϕ é uma aplicação fechada.*

Demonstração:

(i) Sejam $K \subset E$ compacto, mostraremos que $\phi^{-1}(K) \cap \overline{D}$ é compacto. Suponhamos que $\phi^{-1}(K) \cap \overline{D} \neq \emptyset$ e consideremos uma sequência $(x_n) \subset \phi^{-1}(K) \cap \overline{D}$. Como K é compacto e $(\phi(x_n)) \subset K$, existe subsequência $(x_{n_m}) \subset (x_n)$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} \phi(x_{n_m}) = z \in K.$$

Agora, como T é compacta, $\overline{T(\overline{D})}$ é compacto e desde que $(T(x_{n_m})) \subset T(\overline{D})$, existe subsequência $(x_{n_{m_l}})$ de (x_{n_m}) tal que

$$\lim_{l\to\infty} T(x_{n_{m_l}}) = w \in E.$$

Sendo $\phi = I - T$, segue que

$$\lim_{l\to\infty} x_{n_{m_l}} = \lim_{l\to\infty} \phi(x_{n_{m_l}}) + \lim_{l\to\infty} T(x_{n_{m_l}}) = z + w.$$

Da continuidade de ϕ, tem-se

$$\phi(z+w) = \phi\left(\lim_{l\to\infty} x_{n_{m_l}}\right) = \lim_{l\to\infty} \phi(x_{n_{m_l}}) = z \in K,$$

logo $z+w \in \phi^{-1}(K)$. Além disso, como $(x_{n_{m_l}}) \subset \overline{D}$, temos que $z+w \in \overline{D}$. Portanto, $z + w \in \phi^{-1}(K) \cap \overline{D}$. Logo $\phi^{-1}(K) \cap \overline{D}$ é compacto.

(ii) Fixe um fechado $F \subset \overline{D}$. Mostremos que $\phi(F)$ é fechado. Considere $(y_n) \subset \phi(F)$ uma sequência que converge para $y \in E$. Seja $K = \{y_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$, o qual é compacto, como ϕ é própria, $\phi^{-1}(K)$ é compacto, assim $\phi^{-1}(K) \cap F$ é compacto, pois F é fechado.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, ponha $y_n = \phi(z_n)$, $z_n \in F$, então $(z_n) \subset \phi^{-1}(K) \cap F$. Pela compacidade de $\phi^{-1}(K) \cap F$, segue que existe subsequência (z_{n_m}) de (z_n) que converge para algum $z \in \phi^{-1}(K) \cap F$. Como ϕ é contínua, $\phi(z_{n_m}) \to \phi(z)$, quando $m \to \infty$. Pela unicidade do limite, $\phi(z) = y$. Como $z \in F$, $y \in \phi(F)$. Logo $\phi(F)$ é fechado.

□

Observação 2.8. Observe que se (ϕ, D, y) for uma terna admissível para o grau de Leray-Schauder, então $\rho(y, \phi(\partial D)) > 0$, pois $y \notin \phi(\partial D)$ e pelo item (ii) do Lema 2.7, $\phi(\partial D)$ é um conjunto fechado.

O lema seguinte será fundamental para construirmos o grau de Leray-Schauder de uma terna admissível $(I - T, D, y)$, pois garante que se aproximarmos T por aplicações de posto finito, o grau de $(I - T, D, y)$ poderá ser definido a partir do grau de Brouwer.

Lema 2.9. *Seja (ϕ, D, y) uma terna admissível com $\phi = I - T$. Para cada $0 < \epsilon < \rho(y, \phi(\partial D)) := R$, existe uma aplicação $T_\epsilon : \overline{D} \to E$ de posto finito, satisfazendo $\|T(x) - T_\epsilon(x)\|_E < \epsilon$, para todo $x \in \overline{D}$. Se definirmos $S_\epsilon = [T_\epsilon(\overline{D}) \cup \{y\}]$, $D_\epsilon = D \cap S_\epsilon$ e ϕ_ϵ a restrição de $I - T_\epsilon$ a $\overline{D}_\epsilon$, então $\deg_B(\phi_\epsilon, D_\epsilon, y)$ está bem definido e independe de ϵ.*

Demonstração: A primeira parte deste lema segue diretamente do Lema 2.6. Mostraremos então que $\deg_B(\phi_\epsilon, D_\epsilon, y)$ está bem definido e independe de ϵ.

Note que D_ϵ é um subconjunto aberto, limitado de S_ϵ, com $\phi_\epsilon(\overline{D}_\epsilon) \subset S_\epsilon$ e se $\partial_\epsilon D_\epsilon$ denota a fronteira de D_ϵ em S_ϵ, então $\partial_\epsilon D_\epsilon \subset \partial D$. Além disso, $y \notin \phi_\epsilon(\partial_\epsilon D_\epsilon)$, pois se existisse $x \in \partial_\epsilon D_\epsilon$ tal que $\phi_\epsilon(x) = y$, então

$$\|y - \phi(x)\|_E = \|\phi_\epsilon(x) - \phi(x)\|_E = \|T_\epsilon(x) - T(x)\|_E < R,$$

o que seria uma contradição. Portanto $\deg_B(\phi_\epsilon, D_\epsilon, y)$ está bem definido, para todo $0 < \epsilon < R$.

Vejamos agora que $\deg_B(\phi_\epsilon, D_\epsilon, y)$ não depende da escolha de $\epsilon \in (0, R)$. De fato, considere $0 < \eta < R$ e $T_\eta : \overline{D} \to E$ uma aplicação de posto finito, também satisfazendo $\|T(x) - T_\eta(x)\|_E < \eta$, para todo $x \in \overline{D}$. Ponha $S = S_\epsilon + S_\eta$, $\widehat{D} = D \cap S$ e $\widehat{\phi}_j$ a restrição de $I - T_j$ a $\overline{\widehat{D}}$, para $j = \epsilon$, η. Pela Proposição 1.24, temos que

$$\deg_B(\widehat{\phi}_\epsilon, \widehat{D}, y) = \deg_B(\phi_\epsilon, D_\epsilon, y) \quad \text{e}$$

$$\deg_B(\widehat{\phi}_\eta, \widehat{D}, y) = \deg_B(\phi_\eta, D_\eta, y).$$

Seja $H : \overline{\widehat{D}} \times [0, 1] \to S$ uma homotopia, definida por $H(x, t) = t\widehat{\phi}_\epsilon(x) + (1 - t)\widehat{\phi}_\eta(x)$. Observe que

$$\begin{aligned} \|H(x,t) - \phi(x)\|_E &\leq t\|\widehat{\phi}_\epsilon(x) - \phi(x)\|_E + (1-t)\|\phi_\eta(x) - \phi(x)\|_E \\ &< t\,\epsilon + (1-t)\,\eta < R. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|H(x,t) - y\|_E \geq \|\phi(x) - y\|_E - \|H(x,t) - \phi(x)\|_E > R - R = 0, \forall\, x \in \partial\widehat{D}.$$

Portanto $H(x, t) \neq y$, para todo $x \in \partial\widehat{D}$ e para todo $t \in [0, 1]$. Pela propriedade (P_8) do Teorema 1.17, segue que $\deg_B(\widehat{\phi}_\epsilon, \widehat{D}, y) = \deg_B(\widehat{\phi}_\eta, \widehat{D}, y)$. Logo

$$\deg_B(\phi_\epsilon, D_\epsilon, y) = \deg_B(\phi_\eta, D_\eta, y).$$

□

Observação 2.10. No Lema 2.9, podemos observar que se $D_\epsilon = \emptyset$, para algum $0 < \epsilon < R$, então $\deg_B(\phi_\epsilon, D_\epsilon, y) = 0$, e por invariância homotópica $\deg_B(\phi_\eta, D_\eta, y) = 0$, para todo $0 < \eta < R$.

Apresentemos agora a definição do grau topológico de Leray-Schauder.

Definição 2.11. Sejam (ϕ, D, y) uma terna admissível com $\phi = I - T$ e $\widehat{T} : \overline{D} \to E$ uma aplicação de posto finito, tal que para todo $x \in \overline{D}$,

$$\|\widehat{T}(x) - T(x)\|_E < \rho(y, \phi(\partial D)).$$

Seja $\widehat{S}$ um subespaço de dimensão finita de E, contendo $\widehat{T}(\overline{D})$ e y. Então definimos o *grau de Leray-Schauder de* (ϕ, D, y) por

$$\deg_{LS}(\phi, D, y) = \deg_B(\widehat{\phi}, \widehat{D}, y),$$

sendo $\widehat{\phi} = (I - \widehat{T})|_{\overline{\widehat{D}}}$ e $\widehat{D} = D \cap \widehat{S}$.

Justificativa para a Definição 2.11: Essa definição é justificada automaticamente pelo Lema 2.9.

2.2 Propriedades do grau de Leray-Schauder

Vamos apresentar, nesta seção, algumas propriedades do grau de Leray-Schauder. Porém, antes disso, apresentaremos a definição de homotopia de aplicações compactas.

Definição 2.12. Seja $M \subset E$ e $H : M \times [0,1] \to E$. Dizemos que H é uma *homotopia de aplicações compactas em* M se

(i) $H(\,.\,,t)$ é compacto em M, para todo $t \in [0,1]$;

(ii) para todo $\epsilon > 0$ e para todo subconjunto B de M, limitado, existe $\delta > 0$ tal que $\|H(x,t) - H(x,s)\|_E < \epsilon$, sempre que $x \in B$ e $|t-s| < \delta$.

Teorema 2.13. *As seguintes propriedades são válidas:*

(P_1) **(Normalização)** *Seja $I : E \to E$ a aplicação identidade de E e $D \subset E$ um conjunto aberto e limitado, então*

$$\deg_{LS}(I, D, y) = 1, \; \forall\, y \in D;$$

(P_2) **(Translação)** *Seja (ϕ, D, y) uma terna admissível. Então $(\phi - y, D, 0)$ é uma terna admissível e*

$$\deg_{LS}(\phi, D, y) = \deg_{LS}(\phi - y, D, 0);$$

(P_3) **(Existência de solução)** *Seja (ϕ, D, y) uma terna admissível. Se $\deg_{LS}(\phi, D, y) \neq 0$, então existe $x \in D$ tal que $\phi(x) = y$;*

(P_4) **(Decomposição)** *Seja (ϕ, D, y) uma terna admissível, $D' \subset D$ tal que $D' = \cup_{i=1}^{\infty} D_i$, com D_i abertos em E mutuamente disjuntos, de modo que $y \notin \phi(\overline{D} \setminus D')$. Então*

$$\deg_{LS}(\phi, D, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \deg_{LS}(\phi, D_i, y);$$

(P_5) **(Excisão)** *Se (ϕ, D, y) é uma terna admissível e $K \subset \overline{D}$ é um conjunto compacto tal que $y \notin \phi(K)$, então*

$$\deg_{B}(\phi, D, y) = \deg_{B}(\phi, D \setminus K, y);$$

(P_6) **(Invariância homotópica)** *Suponha que $H : \overline{D} \times [0,1] \to E$ é uma homotopia de aplicações compactas em $\overline{D}$. Seja $\phi_t := I - H(.,t)$, para $t \in [0,1]$ e assuma que $y \notin \phi_t(\partial D)$, para todo $t \in [0,1]$. Então $\deg_{LS}(\phi_t, D, y)$ independe de t.*

(P_7) **(Continuidade em T)** *Seja (ϕ, D, y) uma terna admissível. Se $T = I - \phi$, então existe $\epsilon > 0$ tal que, para toda aplicação compacta $P : \overline{D} \to E$, com $\sup_{x \in \overline{D}} \|P(x) - T(x)\|_E < \epsilon$, a terna $(I - P, D, y)$ é admissível e*

$$\deg_{LS}(I - P, D, y) = \deg_{LS}(\phi, D, y);$$

(P_8) **(Invariância local)** *Se T é uma aplicação compacta e $\phi := I - T$, então $\deg_{LS}(\phi, D, .)$ é constante em cada componente conexa de $E \setminus \phi(\partial D)$;*

(P_9) **(Propriedade do bordo)** *Sejam (ϕ, D, y) e (ψ, D, y) ternas admissíveis. Se ϕ e ψ coincidem em ∂D, então*

$$\deg_{LS}(\phi, D, y) = \deg_{LS}(\psi, D, y).$$

Demonstração:

(P_1) Suponha $y \neq 0$ e considere $\widehat{S} = [y]$, $\widehat{D} = D \cap \widehat{S}$, $\widehat{T} \equiv 0$ e $\widehat{\phi} = I|_{\overline{\widehat{D}}}$. Pela Definição 2.11, temos

$$\deg_{LS}(I, D, y) = \deg_B(\widehat{\phi}, \widehat{D}, y).$$

Uma vez que $y \in D$, temos que $y \in \widehat{D}$, pela Propriedade (P_1) do Teorema 1.17, tem-se

$$\deg_{LS}(I, D, y) = \deg_B(\widehat{\phi}, \widehat{D}, y) = 1.$$

Se $y = 0$, considere $\widehat{S} = \{0\}$, assim $\widehat{D} = D \cap \widehat{S} = \{0\}$ e a terna $(I, \widehat{D}, 0)$ é admissível, pois $\partial\widehat{D} = \partial\{0\} = \emptyset$, onde a fronteira é relativa ao espaço nulo. Daí concluímos que $\deg_{LS}(I, D, 0) = \deg_B(I, \widehat{D}, 0) = 1$.

(P_2) Desde que $T(x) = x - \phi(x)$ é compacta, $\widetilde{T}(x) = x - (\phi(x) - y)$ também é compacta. Se $x \in \partial D$, por hipótese, $\phi(x) \neq y$, ou seja, $\phi(x) - y \neq 0$, portanto, a terna $(\phi - y, D, 0)$ é admissível.

Considere $\widehat{T} : \overline{D} \to E$ uma aplicação de posto finito tal que para todo $x \in \overline{D}$,

$$\|\widehat{T}(x) - T(x)\|_E < \rho(y, \phi(\partial D)).$$

Ponha $\widehat{S} = [\widehat{T}(\overline{D}) \cup \{y\}]$ e $\widehat{D} = D \cap \widehat{S}$. Usando a Definição 2.11, temos que

$$\deg_{LS}(\phi, D, y) = \deg_B((I - \widehat{T})|_{\overline{\widehat{D}}}, \widehat{D}, y).$$

Agora, para todo $x \in \overline{D}$,

$$\|(\widehat{T} + y)(x) - (T + y)(x)\|_E = \|\widehat{T}(x) - T(x)\|_E < \rho(y, \phi(\partial D)) = \rho(0, (\phi - y)(\partial D)),$$

e a imagem da aplicação $I - (\widehat{T} + y)$ tem dimensão finita. Usando novamente a Definição 2.11, temos

$$\deg_{LS}(\phi - y, D, 0) = \deg_B((I - \widehat{T} - y)|_{\overline{\widehat{D}}}, \widehat{D}, 0).$$

Pela propriedade (P_2) do Teorema 1.17, segue que

$$\deg_B((I-\widehat{T})|_{\overline{\widehat{D}}}, \widehat{D}, 0) = \deg_B((I-\widehat{T}-y)|_{\overline{\widehat{D}}}, \widehat{D}, 0).$$

Portanto,

$$\deg_{LS}(\phi, D, y) = \deg_{LS}(\phi - y, D, 0).$$

(P_3) Ponha $T = I - \phi$. Para todo $n > \frac{1}{\rho(y,\phi(\partial D))}$, existe $\widehat{T}_n : \overline{D} \to E$ de posto finito, satisfazendo

$$\|\widehat{T}_n(x) - T(x)\|_E < \frac{1}{n}, \ \ \forall\, x \in \overline{D}.$$

Considere $\widehat{S}_n = [T_n(\overline{D}) \cup \{y\}]$ e $\widehat{D}_n = D \cap \widehat{S}_n$. Pela Definição 2.11,

$$\deg_{LS}(\phi, D, y) = \deg_B((I-\widehat{T}_n)|_{\overline{\widehat{D}_n}}, \widehat{D}_n, y). \tag{2.1}$$

Por hipótese $\deg_B((I-\widehat{T}_n)|_{\overline{\widehat{D}_n}}, \widehat{D}_n, y) \neq 0$, pela Propriedade ($P_3$) do Teorema 1.17, existe $x_n \in \widehat{D}_n$ tal que

$$x_n - \widehat{T}_n(x_n) = y.$$

Como T é uma aplicação compacta, $T(\overline{D})$ é compacto e desde que $(x_n) \subset D$, $(T(x_n))$ possui subsequência $T(x_{n_k})$ convergente, digamos para $z \in E$. Da desigualdade

$$\|\widehat{T}_{n_k}(x_{n_k}) - z\|_E \leq \|\widehat{T}_{n_k}(x_{n_k}) - T(x_{n_k})\|_E + \|T(x_{n_k}) - z\|_E,$$

concluímos que $\widehat{T}_{n_k}(x_{n_k})$ converge para z, quando $k \to \infty$. Assim $x_{n_k} = \widehat{T}_{n_k}(x_{j_k}) + y$ converge para $z + y \in \overline{D}$, quando $k \to \infty$. Da continuidade de ϕ, obtemos

$$\phi(z+y) = \lim_{k\to\infty} \phi(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty}(x_{n_k} - T(x_{n_k})) = y.$$

Desde que $y \notin \phi(\partial D)$, $z + y \in D$. Desta forma, a equação $\phi(x) = y$ tem solução em D.

(P_4) Escreva $\phi = I - T$, com T compacta. Temos que $\partial D_j \subset \partial D'$, assim $y \notin \phi(\partial D_j)$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Como T é compacta em $\overline{D}_j$, segue que as ternas (ϕ, D_j, y) são admissíveis, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Considere $\widehat{T} : \overline{D} \to E$ uma aplicação de posto finito tal que

$$\|\widehat{T}(x) - T(x)\|_E < \rho(y, \phi(\overline{D} \setminus D)) \leq \rho(y, \phi(\partial D_j)), \ \forall x \in \overline{D}, \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Sejam $\widehat{S} = [\widehat{T}(\overline{D}), \{y\}]$, $\widehat{D} = D \cap \widehat{S}$, $\widehat{D'} = D' \cap \widehat{S}$ e $\widehat{D}_j = D_j \cap \widehat{S}$. Usando a Definição 2.11, temos que

$$\deg_{LS}(\phi, D, y) = \deg_B((I-\widehat{T})|_{\overline{\widehat{D}}}, \widehat{D}, y) \tag{2.2}$$

e

$$\deg_{LS}(\phi, D_j, y) = \deg_B((I - \widehat{T})|_{\overline{\widehat{D}_j}}, \widehat{D}_j, y). \tag{2.3}$$

Uma vez que $y \notin \phi((\overline{D} \setminus D') \cap \widehat{S}) = \phi(\overline{\widehat{D}} \setminus \widehat{D'})$, pela propriedade (P$_4$) do Teorema 1.17, segue que

$$\deg_B((I - \widehat{T})|_{\overline{\widehat{D}}}, \widehat{D}, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \deg_B((I - \widehat{T})_{\overline{\widehat{D}_j}}, \widehat{D}_j, y).$$

Consequentemente, por (2.2) e (2.3), concluímos que

$$\deg_{LS}(\phi, D, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \deg_{LS}(\phi, D_j, y).$$

(P_5) Observe que $\partial(D \setminus K) \subset \partial D \cup K$. Como $y \notin \phi(\partial D \cup K)$, temos que $y \notin \phi(\partial(D \setminus K))$, consequentemente $(\phi, D \setminus K, y)$ é uma terna admissível. Considere $\widehat{T} : \overline{D} \to E$ uma aplicação de posto finito tal que

$$\|\widehat{T}(x) - T(x)\|_E < \rho(y, \phi(\partial D)), \ \forall x \in \overline{D},$$

em que $T = I - \phi$. Sejam $\widehat{S} = [\widehat{T}(\overline{D}) \cup \{y\}]$, $\widehat{D} = D \cap \widehat{S}$ e $\widehat{D}_K = (D \setminus K) \cap \widehat{S}$. Pela Definicão 2.11, temos que

$$\deg_{LS}(\phi, D, y) = \deg_B((I - \widehat{T})|_{\overline{\widehat{D}}}, \widehat{D}, y) \tag{2.4}$$

e

$$\deg_{LS}(\phi, D \setminus K, y) = \deg_B((I - \widehat{T})|_{\overline{\widehat{D}_K}}, \widehat{D}_K, y). \tag{2.5}$$

Pela propriedade (P$_5$) do Teorema 1.17, segue que

$$\deg_B((I - \widehat{T})|_{\overline{\widehat{D}}}, \widehat{D}, y) = \deg_B((I - \widehat{T})|_{\overline{\widehat{D}}}, \widehat{D} \setminus (K \cap \widehat{S}), y). \tag{2.6}$$

Como $\widehat{D}_K = (D \setminus K) \cap \widehat{S} = (D \cap \widehat{S}) \setminus (K \cap \widehat{S}) = \widehat{D} \setminus (K \cap \widehat{S})$, temos que

$$\deg_B((I - \widehat{T})|_{\overline{\widehat{D}_K}}, \widehat{D}_K, y) = \deg_B((I - \widehat{T})|_{\overline{\widehat{D}}}, \widehat{D} \setminus (K \cap \widehat{S}), y). \tag{2.7}$$

Por (2.4), (2.5), (2.6) e (2.7), temos

$$\deg_{LS}(\phi, D, y) = \deg_{LS}(\phi, D \setminus K, y).$$

(P_6) Primeiramente, vejamos que vale a seguinte:

Afirmação: Existe $R > 0$ tal que $\|y - \phi_t(x)\|_E \geq R$, para todo $x \in \partial D$, $t \in [0, 1]$.

Suponha o contrário, então existe $(t_n) \subset [0,1]$ e $(x_n) \subset \partial D$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|y - \phi_{t_n}(x_n)\|_E = 0.$$

Passando a uma subsequência, podemos assumir que $t_n \to t_0 \in [0,1]$. Como $H(.,t_0)$ é compacta e (x_n) é limitada, também passando a uma subsequência, temos que $H(x_n,t_0) \to w \in E$. Agora, usando o item (ii) da Definição 2.12, temos que

$$\begin{aligned} y &= \lim_{n\to\infty} \phi_{t_n}(x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} (x_n) - H(x_n,t_0) + \lim_{n\to\infty} (H(x_n,t_0) - H(x_n,t_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} (x_n - w). \end{aligned}$$

Portanto, $y + w = \lim_{n\to\infty} x_n \in \partial D$. Como $H(.,t_0)$ é contínua, temos que

$$\begin{aligned} y = (y+w) - w &= (y+w) - \lim_{n\to\infty} H(x_n,t_0) \\ &= (y+w) - H(y+w,t_0) \\ &= \phi_{t_0}(y+w), \end{aligned}$$

que é uma contradição, pois $y \notin \phi_{t_0}(\partial D)$. Isso prova a afirmação.

Considere $\mathcal{R}$ a relação definida em $[0,1]$ por

$$t\mathcal{R}s \Leftrightarrow \deg_{LS}(\phi_t, D, y) = \deg_{LS}(\phi_s, D, y).$$

Claramente, $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência em $[0,1]$. De forma análoga ao Lema 1.7, vamos mostrar que cada classe de equivalência definida por $\mathcal{R}$ é um aberto em $[0,1]$. Da conexidade de $[0,1]$, seguirá que $\mathcal{R}$ define uma única classe e, portanto, $\deg_{LS}(\phi_t, D, y)$ será constante em $[0,1]$.

Fixe $s \in [0,1]$ e considere C_s a classe de equivalência de s com relação a $\mathcal{R}$. Ponha $R := \rho(y, \phi_s(\partial D)) > 0$ e fixe $\epsilon \in (0, \frac{R}{4})$. Pelo Lema 2.6, existe $h_\epsilon : \overline{D} \to E$ de posto finito tal que

$$\|h_\epsilon(x) - H(x,s)\|_E < \epsilon, \ \forall\, x \in \overline{D}. \tag{2.8}$$

Pela Definição 2.12, existe $\delta > 0$ tal que $|t - s| < \delta$ implica que

$$\|H(x,t) - H(x,s)\|_E < \epsilon, \ \forall x \in \overline{D}. \tag{2.9}$$

Seja $S_\epsilon = [h_\epsilon(\overline{D}) \cup \{y\}]$ e $D_\epsilon = D \cap S_\epsilon$. Usando (2.8) e a Definição 2.11, segue que

$$\deg_{LS}(\phi_s, D, y) = \deg_B((I - h_\epsilon)|_{\overline{D}_\epsilon}, D_\epsilon, y).$$

Ainda, por (2.9), temos que para $|t-s|<\delta$,

$$\begin{aligned}\|h_\epsilon(x)-H(x,t)\|_E &\leq \|h_\epsilon(x)-H(x,s)\|_E+\|H(x,s)-H(x,t)\|_E\\ &< 2\epsilon<\rho(y,\phi_s(\partial D)),\ \forall x\in\overline{D}.\end{aligned}$$

Dessa forma, pela Definição 2.11,

$$\deg_{LS}(\phi_t,D,y)=\deg_B((I-h_\epsilon)|_{\overline{D}_\epsilon},D_\epsilon,y)=\deg_{LS}(\phi_s,D,y).$$

Daí concluímos que se $|t-s|<\delta$, então $t\mathcal{R}s$, isto é, $t\in C_s$. Portanto C_s é aberto em [0,1] e o resultado está provado.

(P_7) Ponha $R:=\rho(y,\phi(\partial D))>0$ e fixe $P:\overline{D}\to E$ uma aplicação compacta, satisfazendo

$$\sup_{x\in\overline{D}}\|P(x)-T(x)\|_E<R.$$

Denote por $\psi:=I-P$ e considere $H:\overline{D}\times[0,1]\to E$ uma homotopia de aplicações compactas definida por $H(x,t):=tT(x)+(1-t)P(x)$. Considere ainda

$$\phi_t(x)=x-H(x,t)=t\phi(x)+(1-t)\psi(x),\ x\in\overline{D},\ t\in[0,1].$$

Observe que para todo $x\in\partial D$ e para todo $t\in[0,1]$, temos

$$\begin{aligned}\|y-\phi_t(x)\|_E &= \|y-\phi(x)-(1-t)(\psi(x)-\phi(x))\|_E\\ &\geq \|y-\phi(x)\|_E-(1-t)\|\psi(x)-\phi(x)\|_E\\ &> R-(1-t)R=tR\geq 0.\end{aligned}$$

Portanto $y\notin\phi_t(\partial D)$, para todo $t\in[0,1]$. Pela propriedade (P_6), segue que

$$\deg_{LS}(\phi,D,y)=\deg_{LS}(\psi,D,y).$$

(P_8) Ponha $\phi(x)=I-T(x)$, sendo uma T aplicação compacta em $\overline{D}$. Considere $\mathcal{C}$ uma componente conexa de $E\setminus\phi(\partial D)$. Defina $u:\mathcal{C}\to\mathbb{Z}$ como $u(y):=\deg_{LS}(\phi,D,y)$. Basta mostrar que u é contínua no conexo $\mathcal{C}$, pois, desde que $u(\mathcal{C})\subset\mathbb{Z}$, teremos que u será constante em $\mathcal{C}$.

Fixado $y\in\mathcal{C}$ e $R:=\rho(y,\phi(\partial D))>0$, temos que $B_\rho(y,R)\subset\mathcal{C}$. Para cada $w\in\mathcal{C}$ defina a aplicação $\phi_w:\overline{D}\to E$ por

$$\phi_w(x):=\phi(x)-(w-y).$$

Observe que ϕ_w pode ser escrito como $\phi_w=I-T_w$ em que $T_w=T+(w-y)$ é uma aplicação compacta em $\overline{D}$. Pela propriedade (P_2), temos que

$$\begin{aligned}\deg_{LS}(\phi, D, w) &= \deg_{LS}(\phi - w, D, 0)\\ &= \deg_{LS}(\phi - (w-y) - y, D, 0)\\ &= \deg_{LS}(\phi - (w-y), D, y) = \deg_{LS}(\phi_w, D, y).\end{aligned}$$

Se $\|y-w\|_E < R$, então $\|T(x) - T_w(x)\|_E = \|T(x) - T(x) - (w-y)\|_E < \rho(y, \phi(\partial D))$, para todo $x \in \overline{D}$. Pela propriedade (P_7), temos que

$$\deg_{LS}(\phi_w, D, y) = \deg_{LS}(\phi, D, y).$$

Consequentemente,

$$\deg_{LS}(\phi, D, y) = \deg_{LS}(\phi, D, w).$$

Portanto $u : \mathcal{C} \to \mathbb{Z}$ é contínua. Logo u é constante.

(P_9) Sejam $T : \overline{D} \to E$ e $S : \overline{D} \to E$ aplicações compactas, tais que $\phi = I - T$ e $\psi = I - S$.

Considere a homotopia de aplicações compactas $H : \overline{D} \times [0,1] \to E$, definida por $H(x,t) = tT(x) + (1-t)S(x)$ e ponha $\phi_t(x) := x - H(x,t)$. Para $x \in \partial D$ e para $t \in [0,1]$, temos

$$H(x,t) = tT(x) + (1-t)S(x) = T(x) = S(x)$$

Portanto, $\phi_t(x) = \phi(x) \neq y$, para todo $x \in \partial D$ e para todo $t \in [0,1]$. Pela propriedade (P_6), segue que

$$\deg_{LS}(\phi, D, y) = \deg_{LS}(\psi, D, y).$$

□

2.3 Índice de uma solução isolada em dimensão infinita

Nesta seção, vamos generalizar o conceito de índice de uma solução isolada, apresentado na seção 1.6, para dimensão infinita.

Ao longo dessa seção, $C^1(\overline{D}, E)$ denotará o espaço das aplicações $T : \overline{D} \to E$ que têm extensão $\widetilde{T}$ para um aberto $D(T)$, contendo $\overline{D}$, que é Fréchet diferenciável (confira Definição B.7) e $\widetilde{T}'$ é contínua em $D(T)$.

Seja $x_0 \in D$ uma solução isolada da equação $\phi(x) = y$, em D, com (ϕ, D, y) terna admissível. Considere $B_R = B_\rho(x_0, R)$ tal que x_0 é a única solução da equação $\phi(x) = y$ em $\overline{B}_R$. Para $0 < s < R$, temos que $y \notin \phi(B_R \setminus B_s)$. Pela propriedade ($\mathrm{P}_4$) do Teorema

2.13, concluímos que $\deg_{LS}(\phi, B_R, y) = \deg_{LS}(\phi, B_s, y)$. Esta conclusão, nos permite apresentar a seguinte:

Definição 2.14. Sejam (ϕ, D, y) uma terna admissível e $x_0 \in D$ uma solução isolada da equação $\phi(x) = y$. Definimos o *índice de ϕ com relação a x_0* por

$$i(\phi, x_0) = \lim_{s \to 0} \deg_{LS}(\phi, B_\rho(x_0, s), y).$$

Destacaremos agora a definição de valor característico de um operador linear.

Definição 2.15. Seja $L : E \to E$ um operador linear. Dizemos que $\mu \neq 0$ é *valor característico de L* se μ^{-1} é autovalor de L.

Pelo fato de estarmos interessados em calcular o índice de uma solução isolada de $\phi(x) = y$, precisamos saber que condições a aplicação ϕ deve satisfazer para que $\phi(x) = y$ possua apenas soluções isoladas. O próximo lema estabelece tais condições.

Lema 2.16. *Seja (ϕ, D, y) uma terna admissível com $\phi = I - T$, $T \in C^1(\overline{D}, E)$ e considere $x_0 \in D$ tal que 1 não é valor característico de $T'(x_0)$. Então $\phi'(x_0) = I - T'(x_0)$ é invertível.*

Demonstração: Uma vez que 1 não é valor característico de $T'(x_0)$, 1 também não deve ser autovalor de $T'(x_0)$. Pela Proposição B.10, temos que $T'(x_0)$ é compacto e da Proposição B.4, segue que o espectro de $T'(x_0)$ contém apenas autovalores, com excessão do 0. Assim 1 não pertence ao espectro de $T'(x_0)$ e, portanto, $\phi'(x_0) = I - T'(x_0)$ é invertível, como queríamos. $\square$

Com base no Lema 2.16, se (ϕ, D, y) é uma terna admissível com $T = I - \phi \in C^1(\overline{D}, E)$ e 1 não é valor característico de $T'(x)$, para todo $x \in D$, podemos deduzir que toda solução de $\phi(x) = y$ em D é isolada. De fato, se $x_0 \in D$ é uma solução de $\phi(x) = y$, pelo Lema 2.16, $\phi'(x_0)$ é invertível. Usando o Teorema da Aplicação Inversa, temos que ϕ é um difeomorfismo em alguma vizinhança de x_0. Logo, em alguma vizinhança de x_0 a equação $\phi(x) = y$ tem apenas x_0 como solução.

No decorrer desta seção vamos trabalhar para expressar o índice de uma aplicação $\phi = I - T$, com T compacta de classe C^1, numa solução isolada x_0, em termos das multiplicidades algébricas dos valores característicos de $T'(x_0)$. Iniciaremos esse trabalho com o seguinte:

Lema 2.17. *Sejam $x_0 \in E$, $R > 0$ tais que a terna $(\phi, B_\rho(x_0, R), y)$ é admissível. Então*

$$\deg_{LS}(\phi, B_\rho(x_0, R), y) = \deg_{LS}(\phi(\,\cdot + x_0), B_\rho(0, R), y).$$

Demonstração: Se $\Phi(x) = x + x_0$, então Φ é um difeomorfismo, com $\Phi^{-1}(w) = w - x_0$. Ainda, se $\psi = \Phi^{-1} \circ \phi \circ \Phi$, então podemos escrever $\psi = I - P$, em que $P = \Phi^{-1} \circ T \circ \Phi$ é uma aplicação compacta em $\overline{B}_\rho(0, R)$.

Considere $\widehat{T} : \overline{B}_\rho(x_0, R) \to E$ uma aplicação de posto finito tal que para todo $x \in B_\rho(x_0, R)$, tem-se

$$\|T(x) - \widehat{T}(x)\|_E < \min\{\rho(y, \phi(\partial B_\rho(x_0, R))), \rho(y - x_0, \psi(\partial B_\rho(0, R)))\}.$$

Denotando por $\widehat{P} = \Phi^{-1} \circ \widehat{T} \circ \Phi$, temos

$$\|P(x) - \widehat{P}(x)\|_E = \|T(x + x_0) - \widehat{T}(x + x_0)\|_E < \rho(y - x_0, \psi(\partial B_\rho(0, R))), \forall x \in \overline{B}_\rho(0, R).$$

Considere $\widehat{S} = [\widehat{T}(\overline{B}_\rho(x_0, R)) \cup \widehat{P}(\overline{B}_\rho(0, R)) \cup \{y\} \cup \{x_0\}]$, $\widehat{D}_1 = B_\rho(x_0, R) \cap \widehat{S}$ e $\widehat{D}_2 = B_\rho(0, R) \cap \widehat{S}$. Usando a Definição 2.11, temos que

$$\deg_{LS}(\phi, B_\rho(x_0, R), y) = \deg_B((I - \widehat{T})|_{\overline{\widehat{D}}_1}, \widehat{D}_1, y) \tag{2.10}$$

e

$$\deg_{LS}(\psi, B_\rho(0, R), y - x_0) = \deg_B((I - \widehat{P})|_{\overline{\widehat{D}}_2}, \widehat{D}_2, y - x_0). \tag{2.11}$$

Podemos considerar a restrição $\Phi : \widehat{S} \to \widehat{S}$ e notar que $\Phi(B_\rho(0, R) \cap \widehat{S}) = B_\rho(x_0, R) \cap \widehat{S}$. Dessa forma, aplicando a propriedade (P_{10}) do Teorema 1.17, obtemos

$$\deg_B((I - \widehat{T})|_{\overline{\widehat{D}}_1}, \widehat{D}_1, y) = \deg_B((I - \widehat{P})|_{\overline{\widehat{D}}_2}, \widehat{D}_2, y - x_0).$$

Usando (2.10) e (2.11), concluímos que

$$\deg_{LS}(\phi, B_\rho(x_0, R), y) = \deg_{LS}(\phi(\,\cdot + x_0) - x_0, B_\rho(0, R), y - x_0).$$

Por fim, usando a propriedade (P_2) do Teorema 2.13, deduzimos que

$$\deg_{LS}(\phi, B_\rho(x_0, R), y) = \deg_{LS}(\phi(\,\cdot + x_0), B_\rho(0, R), y).$$

□

Vejamos, agora, um resultado que relaciona o índice de uma aplicação ϕ de classe C^1 com o grau de sua derivada.

Lema 2.18. *Seja (ϕ, D, y) uma terna admissível com $\phi = I - T$, em que $T \in C^1(\overline{D}, E)$ é uma aplicação compacta. Suponha que $x_0 \in D$ é tal que $\phi(x_0) = y$ e que 1 não é valor característico de $T'(x_0)$. Então*

$$i(\phi, x_0) = \deg_{LS}(\phi'(x_0), B_\rho(0, R), 0), \ R \ll 1.$$

Demonstração: Por definição de diferenciabilidade, temos

$$\phi(x + x_0) - \phi(x_0) = \phi'(x_0).\, x + \chi(x) = Ix - T'(x_0)x + \chi(x),$$

em que

$$\lim_{\|x\|_E \to 0} \frac{\chi(x)}{\|x\|_E} = 0.$$

Considere $H(x,s) = T'(x_0).\, x - s\chi(x)$, para $x \in \overline{D}$ e $s \in [0,1]$. Pela Proposição B.10, temos que $T'(x_0)$ é compacto, consequentemente $\chi = T'(x_0) - T(\,\cdot + x_0) - \phi(x_0)$ é compacto, portanto H é uma homotopia de aplicações compactas.

Seja $\phi_s := I - H(\cdot\,, s)$. Vejamos que existe $R > 0$, suficientemente pequeno tal que $0 \notin \phi_s(\partial B_\rho(0,R))$, para todo $s \in [0,1]$. De fato, suponha o contrário, então existe sequência $(x_n, s_n) \subset D \times [0,1]$, com $x_n \to 0$ e $s_n \in [0,1]$ tal que $\phi_{s_n}(x_n) = 0$, para todo n. Dessa forma,

$$x_n - T'(x_0).\, x_n + s_n \chi(x_n) = 0.$$

Seja $z_n = \frac{x_n}{\|x_n\|_E}$, então z_n satisfaz

$$z_n = T'(x_0).\, z_n - s_n \frac{\chi(x_n)}{\|x_n\|_E}. \tag{2.12}$$

Agora, sabemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n \chi(x_n)}{\|x_n\|_E} = 0$. Como (z_n) é limitada e $T'(x_0)$ é compacto segue por (2.12) que (z_n) tem subsequência convergente. Reindexando, podemos supor $z_n \to z$, com $\|z\|_E = 1$.

Dessa forma, existe $z \neq 0$ tal que $T'(x_0).\, z = z$, donde concluímos que $\mu = 1$ é valor característico de $T'(x_0)$, contrariando a hipótese. Logo $0 \notin \phi_s(\partial B_\rho(0,R))$, para todo $s \in [0,1]$.

Aplicando o Lema 2.17 e as propriedades (P_2) e (P_6) do Teorema 2.13, deduzimos que

$$\begin{aligned}
i(\phi, x_0) &= \deg_{LS}(\phi, B_\rho(x_0,R), y)\\
&= \deg_{LS}(\phi(\,\cdot + x_0), B_\rho(0,R), y)\\
&= \deg_{LS}(\phi(\,\cdot + x_0) - \phi(x_0), B_\rho(0,R), 0)\\
&= \deg_{LS}(\phi_1, B_\rho(0,R), 0)\\
&= \deg_{LS}(\phi_0, B_\rho(0,R), 0)\\
&= \deg_{LS}(\phi'(x_0), B_\rho(0,R), 0), \quad R \ll 1.
\end{aligned}$$

□

O próximo lema expressa o grau de uma aplicação do tipo $I - L$, sendo L um operador linear compacto, em termos das multiplicidades algébricas dos valores característicos de L.

Lema 2.19. *Seja $L : E \to E$ um operador linear compacto e suponha que 1 não é valor característico de L. Então*

$$\deg_{LS}(I - L, B_\rho(0,R), 0) = (-1)^\beta, \ R > 0,$$

sendo β a soma das multiplicidades algébricas dos valores característicos de L em $(0,1)$.

Demonstração: Para cada valor característico μ_i de L, considere

$$N_i = \bigcup_{m=1}^{\infty} \ker(I - \mu_i L)^m.$$

Desde que $\ker(I - \mu_i L) \subset \ker(I - \mu_i L)^2 \subset \cdots$, temos que N_i é espaço vetorial, para todo i. Pela Proposição B.3, $\dim \ker(I - \mu_i L)^m < \infty$, para todo m e pelo Lema B.11, a sequência é estacionária. Logo $\dim N_i < \infty$. Ainda, a multiplicidade algébrica de μ_i é dada por $q_i = \dim N_i$.

Pelo Lema B.2, temos que existe apenas um número finito de valores característicos de L no intervalo $(0, 1)$. Denote por μ_i, $1 \leq i \leq k$ os valores característicos de L no intervalo $(0, 1)$, dois a dois distintos.

Afirmação 1: $N_i \cap (\sum_{j \neq i} N_j) = \{0\}$.

De fato, para cada j, considere m_j o menor inteiro tal que

$$\ker(I - \mu_j L)^{m_j} = \ker(I - \mu_j L)^{m_j + n}, \ \forall\, n \geq 1.$$

Pelo item (iii) do Corolário B.12, temos que

$$\sum_{j \neq i} N_j \subset \mathrm{Im}(I - \mu_i L)^{m_i}.$$

Pelo item (i) do Corolário B.12, segue que $\ker(I - \mu_i L)^{m_i} \cap \mathrm{Im}(I - \mu_i L)^{m_i} = \{0\}$. Logo,

$$N_i \cap \left(\sum_{j \neq i} N_j \right) = \{0\}.$$

Portanto a afirmação 1 está provada.

Agora considere $V = \bigoplus_{i=1}^{k} N_i$. Então $\dim V = q_1 + \ldots + q_k = \beta$ (se L não possui valores característicos em $(0, 1)$, tome $V = \{0\}$, neste caso, $\beta = 0$).

Considere, ainda, para cada $i = 1, \ldots, k$ os espaços $R_i = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathrm{Im}(I - \mu_i L)^m$ e ponha

$$W = \bigcap_{i=1}^{k} R_i.$$

Afirmação 2: $E = V \oplus W$.

Primeiro, vejamos que $V \cap W = \{0\}$. De fato, se $x \in V \cap W$, então $x = \sum_{j=1}^{k} x_j$, com $x_j \in N_j$ e $x \in R_j$, $j = 1, \ldots, k$.

Pelo item (iii) do Corolário B.12, temos que $\bigoplus_{i=2}^{k} N_i \subset R_1$, assim $\sum_{j=2}^{k} x_j \in R_1$ e, portanto, $x_1 = x - \sum_{j=2}^{k} x_j \in R_1 \cap N_1 = \{0\}$. Logo $x_1 = 0$. De modo similar, conclui-se que $x_2 = \ldots = x_k = 0$, donde concluímos que $x = 0$.

Agora, dado $x \in E$, pelo item (i) do Corolário B.12, podemos escrever $x = x_j + y_j$, com $x_j \in N_j$ e $y_j \in R_j$. Pelo item (iii) do Corolário B.12, temos que $\bigoplus_{j\neq l} N_j \subset R_l$, assim

$$x - \sum_{j=1}^{k} x_j = x - x_l - \sum_{j\neq l} x_j = y_j - \sum_{j\neq l} x_j \in R_l,\ l = 1, \ldots, k,$$

portanto $x - \sum_{j=1}^{k} x_j \in W$. Assim, $x = y + z$, com $y = \sum_{j=1}^{k} x_j \in V$ e $z = x - \sum_{j=1}^{k} x_j \in W$. Portanto $E = V \oplus W$ e a afirmação 2 está provada.

Observe que o item (ii) do Corolário B.12 garante que V e W são invariantes por L.

Denote por P e Q as projeções sobre V e W, respectivamente e considere a homotopia $H : E \times [0, 1] \to E$ definida por

$$H(x, s) = L(P(x)) + sL(Q(x)).$$

Desde que a composição de um operador linear compacto com um operador linear contínuo resulta em um operador compacto, segue que LQ e LP são operadores compactos, assim H é uma homotopia de operadores compactos.

Seja $\phi_s := I - H(\cdot, s)$ e vejamos que para todo $R > 0$ e para todo $s \in [0, 1]$, tem-se que $0 \notin \phi_s(\partial B_\rho(0, R))$. De fato, suponha que existe $R > 0$ e $(x, s) \in \partial B_\rho(0, R) \times [0, 1]$, tais que $\phi_s(x) = 0$ e escreva $x = x_V + x_W$ com $x_V \in V$ e $x_W \in W$. Então vale a igualdade

$$x_V - L(P(x)) = sL(Q(x)) - x_W,$$

que pode ser escrita como

$$P(x) - L(P(x)) = sL(Q(x)) - Q(x).$$

Da invariância de V e W por L, segue que $P(x) - L(P(x)) \in V$ e $sL(Q(x)) - Q(x) \in W$. Como $V \cap W = \{0\}$, temos que $P(x) = L(P(x))$ e $Q(x) = sL(Q(x))$.

Desde que 1 não é valor característico de L, temos que $x_N = P(x) = 0$. Assim $Q(x) = x_W = x$, consequentemente, $x = sL(x)$. Como $x \neq 0$, temos que $s \neq 0$ e $s \neq 1$, portanto $0 < s < 1$.

Dessa forma, temos que s é valor característico de L em $(0, 1)$. Então $s = \mu_i$, para algum i. Logo $x \in \ker(I - \mu_i L) \subset V$. Isso contradiz o fato de que $x = Q(x) \in W$. Portanto $0 \notin \phi_s(\partial B_\rho(0, R))$, para todo $R > 0$ e para todo $s \in [0, 1]$.

Usando a propriedade (P_6) do Teorema 2.13, obtemos

$$\deg_{LS}(I - L, B_\rho(0, R), 0) = \deg_{LS}(I - LP, B_\rho(0, R), 0). \tag{2.13}$$

Como $LP(E) = L(V) \subset V$, podemos usar a Definição 2.11 e concluir que

$$\deg_{LS}(I - LP, B_\rho(0, R), 0) = \deg_B((I - LP)|_V, V \cap B_\rho(0, R), 0) \tag{2.14}$$

Observe que $\mu \in (0, 1)$ é valor característico de L se, e somente se, $\lambda = \frac{\mu - 1}{\mu}$ é autovalor negativo de $I - L$. Dessa forma, β é também a soma das multiplicidades algébricas dos autovalores negativos de $(I - L)'(0) = I - L$ em V.

Note ainda que $I - L$ é injetor, pois 1 não é valor característico de L. Assim $(I - L)|_V \colon V \to V$ é sobrejetor, portanto 0 é valor regular de $I - L$ em V.

Agora, desde que $(I - LP)|_V = (I - L)|_V$, usando a Proposição 1.27 e o Lema 1.28, segue que

$$\deg_B((I - LP)|_V, V \cap B_\rho(0, R), 0) = (-1)^\beta.$$

Segue de (2.13) e de (2.14) que

$$\deg_{LS}(I - L, B_\rho(0, R), 0) = (-1)^\beta.$$

Isso conclui a prova do teorema.

□

Com base nos últimos resultados, vamos expressar o índice de uma aplicação $\phi = I - T$, com T compacta de classe C^1, numa solução isolada x_0, em termos das multiplicidades algébricas dos valores característicos de $T'(x_0)$.

Teorema 2.20. *Seja (ϕ, D, y) uma terna admissível com $\phi = I - T$, em que $T \in C^1(\overline{D}, E)$ é uma aplicação compacta tal que 1 não é valor característico de $T'(x_0)$, para algum $x_0 \in D$. Suponha que $\phi(x_0) = y$. Então x_0 é uma solução isolada de $\phi(x) = y$ e*

$$i(\phi, x_0) = (-1)^\beta,$$

sendo β a soma das multiplicidades algébricas de todos os valores característicos de $T'(x_0)$ em $(0, 1)$.

Demonstração: Pelos lemas 2.18 e 2.19, para $R \ll 1$, obtemos

$$\begin{aligned} i(\phi, x_0) &= \deg_{LS}(\phi'(x_0), B_\rho(0, R), 0) \\ &= \deg_{LS}(I - T'(x_0), B_\rho(0, R), 0) \\ &= (-1)^\beta. \end{aligned}$$

□

Vamos apresentar, agora, o último resultado desta seção, o qual será fortemente utilizado nos capítulos 3 e 4.

Teorema 2.21. *Seja (ϕ, D, y) uma terna admissível com $\phi = I - T$, sendo $T \in C^1(\overline{D}, E)$ uma aplicação compacta. Suponha que $\phi^{-1}(y) \cap D \neq \emptyset$ e que 1 não é valor característico do operador $T'(x)$, para todo $x \in \phi^{-1}(y) \cap D$. Então $\phi^{-1}(y) \cap D$ é um conjunto finito, digamos $\phi^{-1}(y) \cap D = \{x_1, \ldots, x_k\}$ e*

$$\deg_{LS}(\phi, D, y) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{\beta_i},$$

em que β_i *é a soma das multiplicidades algébricas dos valores característicos de* $T'(x_i)$ *no intervalo* $(0,1)$.

Demonstração: Para simplificar a notação, ponha $A := \phi^{-1}(y) \cap D$. Pela Proposição B.10, temos que $T'(x)$ é um operador linear compacto, para todo $x \in A$. Desde que 1 não é valor característico de $T'(x)$, para todo $x \in A$, segue da Proposição B.4 que $1 \notin \sigma(T'(x))$, para todo $x \in A$. Logo o operador $I - T'(x)$ é um isomorfismo, para todo $x \in A$. Do Teorema da Aplicação Inversa, decorre que o conjunto A é discreto.

Vejamos que A é finito. De fato, suponha que A é infinito, então existe uma sequência $(x_n) \subset A$ com $x_m \neq x_n$, para $m \neq n$, tal que $T(x_n) = x_n - y$. Como T é compacta, passando a uma subsequência, temos que $T(x_n) \to w \in E$, consequentemente, $x_n \to w+y$, logo $w + y \in \overline{D}$. Por continuidade, concluímos que $\phi(w + y) = y$ e desde que $y \notin \phi(\partial D)$, segue que $w + y \in D$. Assim $w + y \in A$ e, portanto, A contém um ponto de acumulação. Isso contradiz o fato de que A é discreto. Logo A deve ser finito.

Escrevendo $A = \{x_1, \ldots, x_k\}$, podemos considerar bolas abertas $B_\rho(x_i, \epsilon)$ tais que para $i \neq j$, $B_\rho(x_i, \epsilon) \cap B_\rho(x_j, \epsilon) = \emptyset$. Pela propriedade ($\mathrm{P}_4$) do Teorema 2.13 e pelo Teorema 2.20, segue que

$$
\begin{aligned}
\deg_{LS}(\phi, D, y) &= \sum_{i=1}^{k} \deg_{LS}(\phi, B_\rho(x_i, \epsilon), y) \\
&= \sum_{i=1}^{k} i(\phi, x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{\beta_i},
\end{aligned}
$$

em que β_i é a soma das multiplicidades algébricas dos valores característicos de $T'(x_i)$ no intervalo $(0,1)$. $\square$

Capítulo

3

Existência de soluções para uma equação elíptica ressonante superlinear

Neste capítulo, vamos estudar a existência de soluções de uma equação elíptica ressonante superlinear, usando as ferramentas topológicas construídas no capítulo 2. Mais especificamente, vamos considerar o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_1 u + (u^+)^p + f(x), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

em que
(H1) Ω é um domínio aberto, limitado e suave do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$;
(H2) $1 < p < \frac{N+1}{N-1}$;
(H3) $f \in L^r(\Omega)$, para algum $r > N$ e $\int_\Omega f\varphi_1 < 0$, em que φ_1 é a autofunção positiva, normalizada em $L^2(\Omega)$, associada ao primeiro autovalor λ_1 do operador $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Podemos observar que a hipótese (H3) é uma condição necessária para que as possíveis soluções de (3.1) tenham parte positiva não trivial. De fato, se u é uma solução de (3.1), usando φ_1 como função teste, temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi_1 \, dx &= \int_\Omega (-\Delta u)\varphi_1 \, dx \\ &= \int_\Omega \lambda_1 \varphi_1 \, u \, dx + \int_\Omega (u^+)^p \varphi_1 \, dx + \int_\Omega f\varphi_1 \, dx \\ &= \int_\Omega -\Delta\varphi_1 \, u \, dx + \int_\Omega (u^+)^p \varphi_1 \, dx + \int_\Omega f\varphi_1 \, dx \\ &= \int_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla u \, dx + \int_\Omega (u^+)^p \varphi_1 \, dx + \int_\Omega f\varphi_1 \, dx. \end{aligned}$$

Consequentemente, para que a solução u tenha parte positiva não trivial devemos ter que

$$\int_\Omega f\varphi_1 \, dx = -\int_\Omega (u^+)^p \varphi_1 \, dx < 0. \tag{3.2}$$

Essa condição é satisfeita pela hipótese (H3).

Nosso objetivo, neste capítulo, é demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3.1. *Suponha* (H1), (H2) *e* (H3). *Então o problema* (3.1) *possui ao menos uma solução em* $W^{2,r}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

É de grande importância, no estudo de equações diferenciais, obter informações sobre a regularidade de uma solução fraca de um determinado problema de valor de fronteira. Argumentos do tipo "bootstrap" podem ser utilizados nessa tarefa. Neste contexto, vamos apresentar o seguinte resultado, sobre regularidade:

Lema 3.2. *Toda solução fraca* $u \in H_0^1(\Omega)$ *de* (3.1), *pertence a* $W^{2,r}(\Omega)$. *Em particular,* $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$ *e vale a desigualdade*

$$\|u\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} \leq \theta_1(\|u\| + \|f\|_r), \tag{3.3}$$

em que $\theta_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *é contínua, crescente tal que* $\theta_1(0) = 0$.

Demonstração: Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução fraca de (3.1). Mostremos que $u \in W^{2,r}(\Omega)$. Para tanto, vamos usar um argumento "bootstrap", que é um processo iterativo feito por meio de imersões de Sobolev do tipo $W^{2,s}(\Omega) \hookrightarrow L^t(\Omega)$.

Considere $F(x,u) = \lambda_1 u + (u^+)^p + f$ e note que

$$\int_\Omega |F(x,u)|^{\frac{2^*}{p}}\, dx \leq C\left(\int_\Omega |u|^{\frac{2^*}{p}}\, dx + \int_\Omega |u|^{2^*}\, dx + \int_\Omega |f|^{\frac{2^*}{p}}\, dx\right). \tag{3.4}$$

Pelo item (i) do Teorema C.5, temos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, então $u \in L^{2^*}(\Omega)$. Dessa forma podemos iniciar o processo com $t_1 = \frac{2^*}{p}$.

• $N = 3$.

Neste caso temos que $2^* = 6$ e $p < \frac{N+1}{N-1} = 2$, então $t_1 = \frac{2^*}{p} > 3 = N$. Se considerarmos $s = \min\{r, t_1\}$, teremos que $F \in L^s(\Omega)$, dessa forma, usando o Teorema C.9 e (3.4), segue que $u \in W^{2,s}(\Omega)$ e

$$\begin{aligned} \|u\|_{2,s} \leq C\|F\|_s &\leq C(\|u\|_s + \|u\|_{sp}^p + \|f\|_s) \\ &\leq C(\|u\|_{2^*} + \|u\|_{2^*}^p + \|f\|_r). \end{aligned}$$

Pela imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, vale a desigualdade

$$\|u\|_{2,s} \leq C(\|u\| + \|u\|^p + \|f\|_r).$$

• $N \geq 4$.

Vejamos que $f \in L^{t_1}(\Omega)$. De fato, observe que $t_1 \leq r$, pois, se $t_1 = \frac{2^*}{p} > r > N$, então $p < \frac{2}{N-2} \leq 1$, que é falso. Logo $f \in L^{t_1}(\Omega)$ e, assim, $F \in L^{t_1}(\Omega)$. Usando o Teorema C.9 e (3.4), segue que $u \in W^{2,t_1}(\Omega)$ e

$$\|u\|_{2,t_1} \leq C(\|u\|_{t_1} + \|u\|_{2^*}^p + \|f\|_{t_1}).$$

Pela imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, segue que

$$\|u\|_{2,t_1} \leq C(\|u\| + \|u\|^p + \|f\|_{t_1}). \tag{3.5}$$

Temos as seguintes possibilidades para t_1:

Caso 1: $2t_1 > N$.

Pelo item (iii) do Teorema C.5, temos que $W^{2,t_1}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$, para algum $0 < \lambda < 1$. Dessa forma, $u \in C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$ e, portanto,

$$\int_\Omega |F(x,u)|^r \, dx \leq C \left(\int_\Omega |u|^r \, dx + \int_\Omega |u|^{pr} \, dx + \int_\Omega |f|^r \, dx \right) < \infty.$$

Pelo Teorema C.9, concluímos que

$$\|u\|_{2,r} \leq C\|F\|_r \leq C(\|u\|_r + \|u\|_{pr}^p + \|f\|_r).$$

Uma vez que $pr > r > \frac{N}{2}$, aplicando o item (ii) do Teorema C.5, temos que vale a imersão $W^{2,\frac{N}{2}}(\Omega) \hookrightarrow L^{rp}(\Omega)$. Então

$$\|u\|_{2,r} \leq C(\|u\|_{2,\frac{N}{2}} + \|u\|_{2,\frac{N}{2}}^p + \|f\|_r).$$

Portanto

$$\|u\|_{2,r} \leq C(\|u\|_{2,t_1} + \|u\|_{2,t_1}^p + \|f\|_r).$$

Usando (3.5), concluímos que

$$\|u\|_{2,r} \leq C(\|u\| + \|u\|^p + \|u\|^{p^2} + \|f\|_r^p + \|f\|_r).$$

Caso 2: $2t_1 = N$.

Aplicando o item (ii) do Teorema C.5, concluímos que $W^{2,t_1}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $t_1 < s < \infty$. Como $rp > N > t_1$, podemos aplicar tal imersão para $s = rp$ e concluir que $u \in L^{rp}(\Omega)$, logo

$$\int_\Omega |F(x,u)|^r \, dx \leq C \left(\int_\Omega |u|^r \, dx + \int_\Omega |u|^{rp} \, dx + \int_\Omega |f|^r \, dx \right) < \infty, \tag{3.6}$$

portanto $F \in L^r(\Omega)$. Do Teorema C.9, segue que $u \in W^{2,r}(\Omega)$ e vale a desigualdade

$$\|u\|_{2,r} \leq C\|F\|_r$$

e por (3.6), temos que

$$\begin{aligned} \|u\|_{2,r} &\leq C(\|u\|_r + \|u\|_{rp}^p + \|f\|_r) \\ &\leq C(\|u\|_{2,t_1} + \|u\|_{2,t_1}^p + \|f\|_r). \end{aligned}$$

Pela desigualdade (3.5), deduzimos que

$$\|u\|_{2,r} \leq C(\|u\| + \|u\|^p + \|u\|^{p^2} + \|f\|_r + \|f\|_r^p).$$

Caso 3: $2t_1 < N$.

Neste caso, podemos aplicar o item (i) do Teorema C.5, para garantir a existência da imersão $W^{2,t_1}(\Omega) \hookrightarrow L^{s_1}(\Omega)$, com $s_1 = \frac{Nt_1}{N-2t_1}$. Observe que

$$\int_\Omega |F(x,u)|^{\frac{s_1}{p}}\, dx \leq C\left(\int_\Omega |u|^{\frac{s_1}{p}}\, dx + \int_\Omega |u|^{s_1}\, dx + \int_\Omega |f|^{\frac{s_1}{p}}\, dx\right).$$

Daí, o processo pode ser repetido com $t_2 = \frac{s_1}{p}$. Em geral, temos

$$t_{m+1} = \frac{s_m}{p}, \quad \text{em que} \quad s_m = \frac{Nt_m}{N-2t_m}.$$

Vejamos que o número de iterações é finito, isto é, existe m tal que $2t_m > N$, de modo a reincidir no caso 1. De fato, como $p < \frac{N+1}{N-1} < 2^* - 1$, temos que

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{s_1}{2^*} = \frac{N}{Np - 22^*} > \frac{N}{N(2^*-1) - 22^*} = 1.$$

Portanto $\frac{t_2}{t_1} = \delta$, $\delta > 1$. Ainda

$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{s_2}{s_1} = \frac{t_2}{t_1}\frac{N-2t_1}{N-2t_2} > \frac{t_2}{t_1} = \delta.$$

Logo $t_3 > t_2\delta = t_1\delta^2$. Prosseguindo o argumento concluímos que $t_{m+1} > t_1\delta^m$. Portanto, é possível encontrar m tal que $2t_m > N$ e com isso reincidimos no caso 1.

Independentemente dos casos considerados anteriormente, é possível encontrar uma função contínua, crescente $\widehat{\theta}_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ com $\widehat{\theta}_1(0) = 0$ tal que para algum $s > N$, vale a estimativa

$$\|u\|_{2,s} \leq \widehat{\theta}_1(\|u\| + \|f\|_r).$$

Pelo item (iii) do Teorema C.5, temos que $W^{2,s}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$, para algum $0 < \lambda < 1$. Ainda, pelo Teorema C.6, temos que $C^{1,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$, daí segue que qualquer solução fraca de (3.1) pertence a $C_0^1(\overline{\Omega})$ e vale a estimativa

$$\|u\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{2,s} \leq \theta_1(\|u\| + \|f\|_r),$$

em que $\theta_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função contínua, crescente tal que $\theta_1(0) = 0$. $\square$

3.1 Estimativas a priori para as possíveis soluções da equação (3.1)

Nesta etapa do texto, vamos nos concentrar na obtenção de estimativas a priori para as possíveis soluções da equação (3.1). Veremos na próxima seção que tais estimativas serão de extrema importância para aplicarmos a teoria do grau. Para provarmos a existência destas estimativas, vamos precisar de desigualdades do tipo Hardy-Sobolev:

Lema 3.3 (Desigualdade de Hardy-Sobolev). *Suponha* (H1) *e considere* $v \in H_0^1(\Omega)$. *Então vale a seguinte desigualdade*

$$\left\| \frac{v}{\varphi_1^\tau} \right\|_t \leq C\|v\|,$$

para todo $\tau \in [0,1]$ *tal que* $\frac{1}{t} = \frac{1}{2} - \frac{1-\tau}{N}$.

Demonstração: A prova deste resultado é uma aplicação do Lema 2.1 de [5]. □

Como consequência da desigualdade de Hardy-Sobolev, temos o seguinte lema:

Lema 3.4. *Suponha* (H1) *e considere* $1 < p \leq \frac{N+2}{N-2}$. *Então existe uma constante* $C = C(p,\Omega)$ *tal que, para quaisquer* $u, v \in H_0^1(\Omega)$, *com* $|u| \leq |v|$, *q.t.p., vale*

$$\int_\Omega |u|^p |v|\, dx \leq C \left(\int_\Omega |u|^p \varphi_1\, dx \right)^\alpha \left(\int_\Omega |\nabla v|^2\, dx \right)^{\frac{\delta}{2}},$$

sendo

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \frac{N}{2 + 2N - (N-2)p} \in [0,1), \\ \delta &= 1 + \frac{Np}{2 + 2N - (N-2)p} \in (1, 2^*]. \end{aligned}$$

Se, além disso, $p < \frac{N+1}{N-1}$, *então* $\alpha \in (0,1)$ *e* $\delta \in (1,2)$.

Demonstração: Para $\alpha \in (0,1)$, usando a desigualdade de Hölder (confira Teorema C.11) com $\frac{1}{\alpha}$ e $\frac{1}{1-\alpha}$ e a hipótese de que $|u| \leq |v|$, q.t.p., obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u|^p v\, dx &= \int_\Omega |u|^{p\alpha} \varphi_1^\alpha \frac{|u|^{p(1-\alpha)} v}{\varphi_1^\alpha}\, dx \\ &\leq \left(\int_\Omega |u|^p \varphi_1\, dx \right)^\alpha \left(\int_\Omega \frac{|u|^p |v|^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\varphi_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\, dx \right)^{1-\alpha} \\ &\leq \left(\int_\Omega |u|^p \varphi_1\, dx \right)^\alpha \left(\int_\Omega \frac{|v|^{p+\frac{1}{1-\alpha}}}{\varphi_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\, dx \right)^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

A fim de usarmos o Lema 3.3, devemos escolher $0 < \alpha < 1$ de modo que para

$$t = p + \tfrac{1}{1-\alpha}, \qquad \tau = \tfrac{\alpha}{t(1-\alpha)},$$

tenhamos

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{2} - \frac{1-\tau}{N}.$$

Dessa forma, o valor de α deve ser escolhido como segue:

$$\begin{aligned} 1 = \frac{t}{2} - \frac{t - t\tau}{N} \quad &\Leftrightarrow \quad 1 = \frac{p}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\alpha} - \left(\frac{p + \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha}}{N}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad 1 = \frac{p}{2} + \frac{1}{2(1-\alpha)} - \frac{p+1}{N} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-\alpha} = 2 - p + \frac{p+1}{2N} = \frac{2N - pN + 2(p+1)}{N} \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha = 1 - \frac{N}{2 + 2N - (N-2)p}. \end{aligned}$$

Vejamos que $\alpha \in [0,1)$. Por hipótese $(N-2)p \leq N + 2 < 2N + 2$, assim $2N + 2 - (N-2)p > 0$. Ainda $N \leq 2N + 2 - (N-2)p$, logo $\frac{N}{2+2N-(N-2)p} \in (0,1]$. Portanto, $\alpha \in [0,1)$.

Agora, se $p < \frac{N+1}{N-1} \leq \frac{N+2}{N-2}$, então $(N-2)p < N+2$, logo $N + 2 - (N-2)p > 0$, consequentemente $N < 2N + 2 - (N-2)p$. Portanto $\alpha \in (0,1)$.

Usando o Lema 3.3, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\int_\Omega \frac{|v|^{p+\frac{1}{1-\alpha}}}{\varphi_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\,dx\right)^{1-\alpha} &= \left(\int_\Omega \left(\frac{|v|}{\varphi_1^\tau}\right)^t dx\right)^{1-\alpha} \\ &\leq C\left(\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx\right)^{\frac{t(1-\alpha)}{2}}. \end{aligned}$$

Para obtermos o resultado, basta tomarmos

$$\delta = t(1-\alpha) = p(1-\alpha) + 1 = 1 + \frac{Np}{2 + 2N - (N-2)p}.$$

Desde que $\frac{N}{2+2N-(N-2)p} \in (0,1]$, temos que $\frac{Np}{2+2N-(N-2)p} \in (0,p]$, logo $\delta \in (1, p+1] \subset (1, 2^*]$. Observe ainda, que

$$\begin{aligned} Np < 2N + 2 - (N-2)p \quad &\Leftrightarrow \quad Np < N + 1 + p \\ &\Leftrightarrow \quad (N-1)p < N + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad p < \frac{N+1}{N-1}. \end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que se $p < \frac{N+1}{N-1}$, então $\frac{Np}{2N+2-(N-2)p} \in (0,1)$, portanto, $\delta \in (1,2)$, quando $p < \frac{N+1}{N-1}$. Isso conclui a prova do lema. $\square$

Vamos agora ao resultado que nos garante a existência de uma estimativa a priori para as possíveis soluções de (3.1).

Teorema 3.5. *Assuma* (H1), (H2) *e* (H3). *Seja* $u \in H_0^1(\Omega)$ *uma solução da equação* (3.1). *Então existe uma função contínua, crescente* $\theta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, *dependendo apenas de* p *e* Ω, *tal que* $\theta(0) = 0$ *e*

$$\|u\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} \leq \theta(\|f\|_r).$$

Demonstração: Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução fraca de (3.1). Como $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert e $[\varphi_1]$ é fechado, podemos escrever $H_0^1(\Omega) = [\varphi_1] \oplus [\varphi_1]^\perp$. Então $u = t\varphi_1 + u_1$, para algum $t \in \mathbb{R}$ e para $u_1 \in [\varphi_1]^\perp$, isto implica que $\int_\Omega u_1\varphi_1\,dx = 0$.

Por (3.2), temos que

$$\int_\Omega (u^+)^p \varphi_1\,dx = -\int_\Omega f\varphi_1\,dx.$$

Consequentemente, usando a desigualdade de Hölder com r e seu conjugado r', obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega (u^+)^p \varphi_1\,dx &= -\int_\Omega f\varphi_1\,dx \\ &\leq \int_\Omega |f|\,|\varphi_1|\,dx \\ &\leq \left(\int_\Omega |f|^r\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_\Omega |\varphi_1|^{r'}\,dx\right)^{\frac{1}{r'}} \\ &\leq C\|f\|_r \end{aligned} \tag{3.7}$$

e, portanto, se p' é o conjugado de p, usando novamente a desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned} t &= \int_\Omega u\varphi_1\,dx - \int_\Omega u_1\varphi_1\,dx \\ &= \int_\Omega u\varphi_1\,dx \\ &= \int_\Omega u^+\varphi_1\,dx - \int_\Omega u^-\varphi_1\,dx \\ &\leq \int_\Omega u^+\varphi_1\,dx \\ &\leq \left(\int_\Omega (u^+)^p\varphi_1\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega \varphi_1\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq C\left(\int_\Omega (u^+)^p\varphi_1\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C\|f\|_r^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Pela caracterização variacional do segundo autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ (confira Teorema

D.2), temos que

$$\lambda_2 = \inf_{u \in [\varphi_1]^\perp \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx}{\int_\Omega u^2\, dx}.$$

Como $u_1 \in [\varphi_1]^\perp$, concluímos que $\lambda_2 \leq \frac{\|u_1\|^2}{\|u_1\|_2^2}$, logo

$$\|u_1\|_2^2 \leq \frac{\|u_1\|^2}{\lambda_2}. \tag{3.9}$$

Multiplicando (3.1) por u_1 e integrando, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u_1|^2\, dx - \lambda_1 \int_\Omega u_1^2\, dx = \int_\Omega (u^+)^p u_1\, dx + \int_\Omega f u_1\, dx. \tag{3.10}$$

Usando (3.9), (3.10) e a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ (confira item (i) do Teorema C.5), obtemos

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\|u_1\|^2 &= \|u_1\|^2 - \frac{\lambda_1 \|u_1\|^2}{\lambda_2} \\
&\leq \|u_1\|^2 - \lambda_1 \|u_1\|_2^2 \\
&\leq \int_\Omega |f||u_1|\, dx + \left|\int_\Omega (u^+)^p u_1\, dx\right| \\
&\leq \|f\|_2 \|u_1\|_2 + \left|\int_\Omega (u^+)^p u_1\, dx\right| \\
&\leq C\|f\|_r \|u_1\| + \left|\int_\Omega (u^+)^p u_1\, dx\right|. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Vamos separar a demonstração conforme o sinal de t:

Caso 1: $t \geq 0$.

Observe que $u_1^+ \leq u^+$ e que $u^+ \leq t\varphi_1$ em $A = \{x \in \Omega; u_1(x) \leq 0\}$. Dessa forma, temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega (u^+)^p u_1\, dx\right| &= \left|\int_\Omega (u^+)^p (u_1^+ - u_1^-)\, dx\right| \\
&\leq \int_\Omega (u^+)^p u_1^+\, dx + \int_\Omega (u^+)^p u_1^-\, dx \\
&\leq \int_\Omega (u^+)^p u^+\, dx + \int_A (t\varphi_1)^p u_1^-\, dx \\
&= \int_\Omega (u^+)^{p+1}\, dx + t^p \int_\Omega \varphi_1^p u_1^-\, dx.
\end{aligned}$$

Por (3.8), obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega (u^+)^p u_1\, dx\right| &\leq \int_\Omega (u^+)^{p+1}\, dx + C\|f\|_r \int_\Omega \varphi_1^p u_1^-\, dx \\
&\leq \int_\Omega (u^+)^{p+1}\, dx + C\|f\|_r \|u_1\|. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Vamos usar (3.7), (3.8) e o Lema 3.4 para estimar a integral $\int_\Omega (u^+)^{p+1}\,dx$. Aplicando o Lema 3.4 para a função u^+ e utilizando as desigualdades (3.7) e (3.8), obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (u^+)^{p+1}\,dx &\leq C\left(\int_\Omega (u^+)^p\varphi_1\,dx\right)^\alpha \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac{\delta}{2}}\\
&\leq C\|f\|_r^\alpha \|u\|^\delta\\
&\leq C\|f\|_r^\alpha (\|t\varphi_1 + u_1\|)^\delta\\
&\leq C\|f\|_r^\alpha (t + \|u_1\|)^\delta\\
&\leq C\|f\|_r^\alpha (\|f\|_r^{\frac{1}{p}} + \|u_1\|)^\delta\\
&\leq C\|f\|_r^\alpha (\|f\|_r^{\frac{\delta}{p}} + \|u_1\|^\delta). \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Usando (3.12) e (3.13) em (3.11), concluímos que

$$\|u_1\|^2 \leq C(\|f\|_r^{\alpha+\frac{\delta}{p}} + \|f\|_r^\alpha \|u_1\|^\delta + \|f\|_r \|u_1\|). \qquad (3.14)$$

Se $0 \leq \|u_1\| \leq 1$, então

$$\|u_1\| \leq C(\|f\|_r^{\frac{1}{2}(\alpha+\frac{\delta}{p})} + \|f\|_r^{\frac{\alpha}{2}} + \|f\|_r^{\frac{1}{2}}),$$

usando (3.8), segue que

$$\|u\| \leq C(\|f\|_r^{\frac{1}{2}(\alpha+\frac{\delta}{p})} + \|f\|_r^{\frac{\alpha}{2}} + \|f\|_r^{\frac{1}{2}} + \|f\|_r^{\frac{1}{p}}).$$

Suponha então que $\|u_1\| > 1$. Neste caso, usando a desiguadade de Young com ϵ (confira Teorema C.10), para $\frac{1}{2-\delta}$ e seu conjugado $\frac{1}{\delta-1}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|u_1\| &\leq C(\|f\|_r^{\alpha+\frac{\delta}{p}} + \|f\|_r^\alpha \|u_1\|^{\delta-1} + \|f\|_r)\\
&\leq C(\|f\|_r^{\alpha+\frac{\delta}{p}} + \|f\|_r + C(\epsilon)\|f\|_r^{\frac{\alpha}{2-\delta}}) + C\epsilon\|u_1\|.
\end{aligned}$$

Consequentemente

$$(1 - C\epsilon)\|u_1\| \leq C(\|f\|_r^{\alpha+\frac{\delta}{p}} + \|f\|_r + C(\epsilon)\|f\|_r^{\frac{\alpha}{2-\delta}})$$

Escolhendo $\epsilon < \frac{1}{C}$, temos que $1 - C\epsilon > 0$, dessa forma, concluímos que

$$\|u_1\| \leq C(\|f\|_r^{\alpha+\frac{\delta}{p}} + \|f\|_r + \|f\|_r^{\frac{\alpha}{2-\delta}}).$$

Ainda, usando (3.8), deduzimos que

$$\|u\| \leq C(\|f\|_r^{\frac{1}{p}} + \|f\|_r^{\alpha+\frac{\delta}{p}} + \|f\|_r + \|f\|_r^{\frac{\alpha}{2-\delta}}).$$

Para obtermos uma estimativa de $\|u\|_{C_0^1(\overline{\Omega})}$ a partir da estimativa de $\|u\|$, basta usarmos a estimativa (3.3), mencionada no Lema 3.2.

Caso 2: $t < 0$.

Aplicando o Lema de Hopf à função $-\varphi_1$ (veja Teorema D.7), obtemos

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu}(x_0) < 0, \forall x_0 \in \partial\Omega.$$

Por continuidade, podemos tomar $m_0 = \min_{x_0 \in \partial\Omega} -\frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu}(x_0) > 0$. E, se considerarmos $0 < \epsilon_1 < m_0$, para $v \in B_{C_0^1(\overline{\Omega})}(\varphi_1, \epsilon_1)$, teremos que $|\nabla v(x) - \nabla \varphi_1(x)| < \epsilon_1$, para todo $x \in \overline{\Omega}$. Consequentemente, para $v \in B_{C_0^1(\overline{\Omega})}(\varphi_1, \epsilon_1)$, vale

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) &= (\nabla v(x_0) - \nabla \varphi_1(x_0)) \cdot \nu + \nabla \varphi_1(x_0) \cdot \nu \\
&\leq |\nabla v(x_0) - \nabla \varphi_1(x_0)| + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu}(x_0) \\
&< \epsilon_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu}(x_0) \\
&< m_0 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu}(x_0) \\
&\leq -\frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu}(x_0) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu}(x_0) = 0\,, \forall\, x_0 \in \partial\Omega.
\end{aligned}$$

Além disso, desde que $\frac{\partial v}{\partial \nu}(x) < 0$ em cada ponto $x \in \partial\Omega$, por continuidade, é possível obter uma vizinhança V_x de x tal que $\frac{\partial v}{\partial \nu} < 0$ em V_x. Dessa forma, a função v decresce na direção de cada vetor ν normal, exterior à $\partial\Omega$. Como $v = 0$ em $\partial\Omega$, temos que $v > 0$ em $\Omega \cap V$, sendo $V = \cup_{x \in \partial\Omega} V_x$.

Considere $B = \Omega \setminus V = \overline{\Omega} \setminus (\overline{\Omega} \cap V) \subset \Omega$, o qual é fechado e limitado em $\mathbb{R}^N$, portanto, compacto. Dessa forma, podemos tomar $m_1 = \min_{x \in B} \varphi_1(x) > 0$, escolher $0 < \epsilon_2 < m_1$ e deduzir que para $v \in B_{C_0^1(\overline{\Omega})}(\varphi_1, \epsilon_2)$, tem-se que

$$\begin{aligned}
v(x) &= v(x) - \varphi_1(x) + \varphi_1(x) \\
&> -\epsilon_2 + m_1 > -m_1 + m_1 = 0, \,\forall\, x \in B.
\end{aligned}$$

Uma vez que $v > 0$ em $\Omega \cap V$, segue que $v > 0$ em Ω. Escolhendo $0 < \epsilon < \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, concluímos que

$$v \in B_{C_0^1(\overline{\Omega})}(\varphi_1, \epsilon) \;\Rightarrow\; v > 0 \,\text{em}\; \Omega. \tag{3.15}$$

Podemos considerar ϵ_0 o supremo dos ϵ's que satisfazem a propriedade (3.15). Desde que a solução u de (3.1) pertence a $C_0^1(\overline{\Omega})$ e $u_1 = u - t\varphi_1$, temos que $u_1 \in C_0^1(\overline{\Omega})$.

Vamos escrever $u = t(\varphi_1 + \frac{u_1}{t})$. Devemos ter, necessariamente, que $\frac{u_1}{t} \notin B_{C_0^1(\overline{\Omega})}(0, \epsilon_0)$. De fato, se $\frac{u_1}{t} \in B_{C_0^1(\overline{\Omega})}(0, \epsilon_0)$, então $\varphi_1 + \frac{u_1}{t} \in B_{C_0^1}(\varphi_1, \epsilon_0)$. Assim $\varphi_1 + \frac{u_1}{t} > 0$ e como $t < 0$, devemos ter que $u < 0$. Logo $u^+ \equiv 0$, que é uma contradição com (3.2).

Dessa forma, concluímos que

$$|t| \leq \frac{1}{\epsilon_0}\|u_1\|_{C_0^1(\overline{\Omega})}. \tag{3.16}$$

Consequentemente, usando (3.16), obtemos

$$\begin{aligned}
\|u\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} &\leq \|t\varphi_1 + u_1\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} \\
&\leq C(|t| + \|u_1\|_{C_0^1(\overline{\Omega})}) \\
&\leq C\|u_1\|_{C_0^1(\overline{\Omega})}.
\end{aligned}$$

Portanto, é suficiente encontrar uma estimativa a priori para $\|u_1\|_{C_0^1(\overline{\Omega})}$.
Como $t < 0$, temos que $u^+ \leq u_1^+ \leq |u_1|$. Pelo Lema 3.4 e por (3.7) temos a estimativa

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega (u^+)^p u_1\,dx\right| &\leq \int_\Omega (u^+)^p|u_1|\,dx \\
&\leq C\left(\int_\Omega (u^+)^p\varphi_1\,dx\right)^\alpha \left(\int_\Omega |\nabla u_1|^2\,dx\right)^{\frac{\delta}{2}} \\
&\leq C\|f\|_r^\alpha\|u_1\|^\delta.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Aplicando (3.17) em (3.11), obtemos

$$\|u_1\|^2 \leq C(\|f\|_r\|u_1\| + \|f\|_r^\alpha\|u_1\|^\delta).$$

Pela desigualdade de Young com ϵ, deduzimos que

$$\begin{aligned}
\|u_1\| &\leq C(\|f\|_r + \|f\|_r^\alpha\|u_1\|^{\delta-1}) \\
&\leq C(\|f\|_r + C(\epsilon)\|f\|_r^{\frac{\alpha}{2-\delta}} + \epsilon\|u_1\|) \\
&\leq C(\|f\|_r + \|f\|_r^{\frac{\alpha}{2-\delta}}) + C\epsilon\|u_1\|.
\end{aligned}$$

Logo

$$(1 - C\epsilon)\|u_1\| \leq C(\|f\|_r + \|f\|_r^{\frac{\alpha}{2-\delta}}).$$

Considere $0 < \epsilon < \frac{1}{C}$, então $1 - C\epsilon > 0$, consequentemente

$$\|u_1\| \leq C(\|f\|_r + \|f\|_r^{\frac{\alpha}{2-\delta}}). \tag{3.18}$$

Para obtermos uma estimativa de $\|u_1\|_{C_0^1(\overline{\Omega})}$ a partir da estimativa de $\|u_1\|$, vamos usar o fato de que u_1 resolve a equação

$$\left\{\begin{array}{rcll}
-\Delta u_1 &=& \lambda_1 u_1 + (u^+)^p + f, & \text{em } \Omega, \\
u_1 &=& 0, & \text{sobre } \partial\Omega.
\end{array}\right. \tag{3.19}$$

Como no Lema 3.2, usando que $u^+ \leq u_1^+$, um argumento "bootstrap" pode ser aplicado a (3.19) para se obter uma estimativa do tipo

$$\|u_1\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} \leq \theta_2(\|u_1\| + \|f\|_r), \tag{3.20}$$

em que $\theta_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função contínua, crescente e $\theta_2(0) = 0$. Por (3.18) e por (3.20), obtemos uma estimativa de $\|u_1\|_{C_0^1(\overline{\Omega})}$ em termos de $\|f\|_r$, isso conclui a prova do caso 2.

Em ambos os casos 1 e 2, mostramos que é possível obter uma função $\theta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ contínua, crescente com $\theta(0) = 0$ tal que

$$\|u\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} \leq \theta(\|f\|_r).$$

$\square$

3.2 Existência de soluções para a equação (3.1)

Com o objetivo de aplicar a teoria do grau topológico, introduziremos uma formulação de ponto fixo para o problema (3.1). Considere o operador $T_f : C_0^1(\overline{\Omega}) \to C_0^1(\overline{\Omega})$, em que T_f associa a cada $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$ a única solução fraca $T_f(u) = v \in H_0^1(\Omega)$ do problema

$$\begin{cases} -\Delta v &= \lambda_1 u + (u^+)^p + f, \quad \text{em } \Omega, \\ v &= 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sabemos, pelo Teorema C.9, que $v \in W^{2,r}(\Omega)$. Ainda, pelo item (iii) do Teorema C.5 e pelo Teorema C.6, temos que valem as imersões $W^{2,r}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$, $0 < \lambda < 1$, logo $v \in C_0^1(\overline{\Omega})$. Isso mostra que T_f está bem definido.

Dessa forma, podemos expressar T_f por

$$T_f(u) = (-\Delta)^{-1}(\lambda_1 u + (u^+)^p + f).$$

Observe que u é solução de (3.1) se, e somente se, u é ponto fixo do operador T_f. Pela propriedade de existência de solução apresentada no Teorema 2.13, para mostrar que T_f possui ponto fixo, é suficiente mostrar que

$$\deg_{LS}(I - T_f, D, 0) \neq 0,$$

para algum aberto limitado $D \subset C_0^1(\overline{\Omega})$.

Como visto no capítulo 2, o grau de Leray-Schauder é definido para perturbações compactas da identidade, assim é necessário que T_f seja um operador compacto. Ainda, com o objetivo de provar que $\deg_{LS}(I - T_f, D, 0) \neq 0$, vamos utilizar alguns resultados sobre índice, apresentados na seção 2.3, os quais exigem que T_f seja um operador de classe C^1. Dessa forma, precisamos assegurar que T_f seja um operador compacto, de classe C^1.

Esse fato será provado na próxima proposição.

Proposição 3.6. *O operador $T_f : C_0^1(\overline{\Omega}) \to C_0^1(\overline{\Omega})$, definido por*

$$T_f(u) = (-\Delta)^{-1}(\lambda_1 u + (u^+)^p + f)$$

é compacto e de classe C^1 em $C_0^1(\overline{\Omega})$, cuja derivada em um ponto $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$ é dada por

$$T_f'(u).\, v = (-\Delta)^{-1}(\lambda_1 v + p(u^+)^{p-1} v), \ \forall\, v \in C_0^1(\overline{\Omega}).$$

Demonstração: Vejamos, inicialmente, que T_f é de classe C^1 em $C_0^1(\overline{\Omega})$. Primeiramente, mostremos que T_f é Gâteaux diferenciável, isto é, para cada $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$, existe um operador linear limitado, que denotaremos por $T_f'(u)$, satisfazendo

$$\lim_{t \to 0} \frac{T_f(u + tv) - T_f(u) - T_f'(u).\, tv}{t} = 0, \ \forall\, v \in C_0^1(\overline{\Omega}).$$

Nossa candidata à derivada de Gâteaux é a transformação linear limitada dada por $T_f'(u).\, v = (-\Delta)^{-1}(\lambda_1 v + p(u^+)^{p-1} v)$. Podemos escrever

$$\frac{T_f(u + tv) - T_f(u) - T_f'(u).\, tv}{t} = (-\Delta)^{-1}(F_t(u, v)),$$

em que

$$\begin{aligned} F_t(u,v) &= \frac{1}{t}[\lambda_1(u + tv) + ((u + tv)^+)^p + f - \lambda_1 u - (u^+)^p - f - t\lambda_1 v - tp(u^+)^{p-1} v] \\ &= \frac{1}{t}[((u + tv)^+)^p - (u^+)^p] - p(u^+)^{p-1} v. \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Valor Médio (confira Teorema A.6), existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned} F_t(u,v) &= \frac{1}{t}[p((u + t_0 tv)^+)^{p-1} tv] - p(u^+)^{p-1} v \\ &= p[((u + t_0 tv)^+)^{p-1} - (u^+)^{p-1}] v. \end{aligned}$$

Observe que $|F_t(u, v)|^r \to 0$, pontualmente, quando $t \to 0$ e $|F_t(u, v)|^r \leq g$ com $g \in L^1(\Omega)$. Pelo Teorema da Convergência Dominada (confira Teorema C.12), segue que $\|F_t(u, v)\|_r \to 0$, quando $t \to 0$.

Como $W^{2,r}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$, segue que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T_f(u + tv) - T_f(u) - T_f'(u).\, tv}{t} \right\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} &= \|(-\Delta)^{-1}(F_t(u, v))\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} \\ &\leq C\|(-\Delta)^{-1}(F_t(u, v))\|_{2,r}. \end{aligned}$$

Agora, pelo Teorema C.9, temos que

$$\|(-\Delta)^{-1}(F_t(u,v))\|_{2,r} \leq C\|F_t(u,v)\|_r.$$

Daí, deduzimos que

$$\left\|\frac{T_f(u+tv)-T_f(u)-T_f'(u).\,tv}{t}\right\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} \leq C\|F_t(u,v)\|_r.$$

Portanto, para cada $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$ fixado,

$$\lim_{t\to 0}\frac{T_f(u+tv)-T_f(u)}{t} = T_f'(u)\cdot v,$$

em $C_0^1(\overline{\Omega})$, para todo $v \in C_0^1(\overline{\Omega})$.

Com base no Teorema B.8, para concluirmos que T_f é de classe C^1, basta mostrarmos que T_f' é contínua em $C_0^1(\overline{\Omega})$. Para tanto, considere $(u_n) \subset C_0^1(\overline{\Omega})$ tal que $u_n \to u$ em $C_0^1(\overline{\Omega})$. Para simplificar a notação, escrevemos $T_f'(u_n)\cdot v - T_f'(u)\cdot v = (-\Delta)^{-1}(F_n(u)v)$, em que

$$F_n(u) = p((u_n^+)^{p-1} - (u^+)^{p-1}).$$

Desde que $u_n \to u$ em $C_0^1(\overline{\Omega})$, temos que $|F_n(u)|^r \to 0$, pontualmente e existe $h \in L^1(\Omega)$ tal que $|F_n(u)|^r \leq h$, para todo n. Pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que $F_n(u) \to 0$ em $L^r(\Omega)$.

Pelo Teorema C.9, temos que $\|(-\Delta)^{-1}(F_n(u)v)\|_{2,r} \leq C\|F_n(u)v\|_r$. Uma vez que $W^{2,r}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$, temos que

$$\begin{aligned}
\|T_f'(u_n)\cdot v - T_f'(u)\cdot v\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} &= \|(-\Delta)^{-1}(F_n(u)v)\|_{C_0^1(\overline{\Omega})}\\
&\leq C\|(-\Delta)^{-1}(F_n(u)v)\|_{2,r}\\
&\leq C\|F_n(u)v\|_r\\
&\leq C\|F_n(u)\|_r\|v\|_{C_0^1(\overline{\Omega})}.
\end{aligned}$$

Desse modo, concluímos que se $n \to \infty$, então

$$\sup_{\|v\|_{C_0^1(\overline{\Omega})}=1}\|T_f'(u_n)\cdot v - T_f'(u)\cdot v\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} \leq \|F_n(u)\|_r \to 0.$$

Logo T_f' é uma aplicação contínua. Portanto T_f é de classe C^1.

Vejamos, agora, que T_f é um operador compacto. Seja $(u_n) \subset C_0^1(\overline{\Omega})$ uma sequência limitada. Então a sequência $(w_n) = (\lambda_1 u_n + (u_n^+)^p + f)$ é limitada em $L^r(\Omega)$. Do Teorema C.9, segue que $T_f(u_n) = v_n \in W^{2,r}(\Omega)$ e

$$\|v_n\|_{2,r} \leq c\|w_n\|_r,\ \forall\, n.$$

Assim (v_n) é uma sequência limitada em $W^{2,r}(\Omega)$. A partir dos teoremas C.5 e C.6, segue que $W^{2,r}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$ e que a imersão $C^{1,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$ é compacta. Logo, (v_n) possui subsequência convergente em $C_0^1(\overline{\Omega})$. Portanto T_f é um operador compacto.

$\square$

Na próxima proposição, veremos que se $\|f_1\|_r$ é "pequena" e com tal f_1 o problema (3.1) possui solução, então $\deg_{LS}(I - T_{f_1}, D_1, 0) \neq 0$, para algum aberto, limitado $D_1 \subset C_0^1(\overline{\Omega})$. Esse fato será fundamental para garantirmos a existência de solução do problema (3.1), pois ligando $I - T_f$ a $I - T_{f_1}$ por homotopia, concluiremos, a partir da propriedade de invariância homotópica, que o grau de Leray-Schauder de $I - T_f$ é não nulo.

Proposição 3.7. *Existe $\epsilon > 0$ e $R_0 > 0$ tais que para todas as funções f_1 satisfazendo* (H3)*, com $\|f_1\|_r < \epsilon$ e para a qual o problema* (3.1) *possui ao menos uma solução, tem-se que*

$$\deg_{LS}(I - T_{f_1}, B_{C_0^1(\overline{\Omega})}(0, R), 0) \neq 0, \ \forall R \geq R_0.$$

Demonstração: Primeiro, vamos provar que existe $\epsilon > 0$ para o qual $\|f_1\|_r < \epsilon$ implica que toda solução u de (3.1) com f_1 é tal que 1 não é valor característico de $T'_{f_1}(u)$ e a soma das multiplicidades algébricas dos valores característicos de $T'_{f_1}(u)$ em $(0, 1)$ é 1.

Seja θ a função dada pelo Teorema 3.5. Uma vez que $\theta(0) = 0$ e θ é contínua, podemos escolher $\epsilon < 1$ tal que $\theta(\epsilon) < \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}$.

Seja $f_1 \in L^r(\Omega)$ satisfazendo (H3) e tal que $\|f_1\|_r < \epsilon$. Pelo Teorema 3.5, desde que θ é crescente, segue que

$$\|u\|_{C_0^1(\Omega)} \leq \theta(\|f_1\|_r) \leq \theta(\epsilon) < \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} =: R_0. \tag{3.21}$$

Dessa forma, temos que toda solução u de (3.1), com f_1 satisfazendo $\|f_1\|_r < \epsilon$, é tal que $u \in B_{C_0^1(\overline{\Omega})}(0, R_0)$. Ainda, para todo $R \geq R_0$, $0 \notin (I - T_{f_1})(\partial B_{C_0^1(\overline{\Omega})}(0, R))$, logo a terna $(I - T_{f_1}, B_{C_0^1(\overline{\Omega})}(0, R), 0)$ é admissível, para todo $R \geq R_0$.

O problema (3.1) linearizado numa solução u_0 fixada, é da forma:

$$\begin{cases} -\Delta v &= (\lambda_1 + p(u_0^+)^{p-1})v, & \text{em } \Omega, \\ v &= 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.22}$$

Considere o seguinte problema de autovalor com peso $a(x) := \lambda_1 + p(u_0^+)^{p-1} \in L^r(\Omega)$:

$$\begin{cases} -\Delta v &= \mu a(x) v, & \text{em } \Omega, \\ v &= 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.23}$$

Pelo Teorema D.4, temos que existe uma sequência $0 < \mu_1(a) \leq \mu_2(a) \leq \ldots$ de autovalores do problema (3.23) e pelo Teorema D.5, o primeiro autovalor $\mu_1(a)$ tem multiplicidade algébrica 1.

A partir da hipótese (H3), concluímos que $u_0^+ > 0$ em algum subconjunto de medida positiva em Ω. Ainda, por (3.21) obtemos $u_0^+ \leq \|u_0\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} < \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}$. Dessa forma, temos que $\lambda_1 + p(u_0^+)^{p-1} < \lambda_2$. Donde concluímos que $\lambda_1 < a(x) = \lambda_1 + p(u_0^+)^{p-1} < \lambda_2$ em algum subconjunto de medida positiva em Ω.

Pelo Teorema D.6, temos que $\mu_1(\lambda_1) > \mu_1(a)$ e $\mu_2(a) > \mu_2(\lambda_2)$. Agora, observe que $\mu_j(\lambda_i) = \frac{\lambda_j}{\lambda_i}$. Portanto,

$$\mu_1(a) < \mu_1(\lambda_1) = 1 = \mu_2(\lambda_2) < \mu_2(a).$$

Dessa forma, concluímos que o único autovalor do problema (3.23) no intervalo $(0,1)$ é $\mu_1(a)$. Também se pode concluir que 1 não é autovalor do problema (3.23). Uma vez que os valores característicos de $T'_{f_1}(u_0)$ são exatamente os autovalores de (3.23), segue que $T'_{f_1}(u_0)$ possui apenas um valor característico em $(0,1)$, o qual possui multiplicidade algébrica 1 e que 1 não é valor característico de $T'_{f_1}(u_0)$.

Observe que o número β, mencionado na seção 2.3, neste caso, é 1. Portanto, em cada solução u_0 do problema (3.1) com f_1, o índice $i(I - T_{f_1}, u_0) = (-1)^1 = -1$.

Admitindo que o problema (3.1) possui ao menos uma solução com tal f_1 e usando o Teorema 2.21 com $R \geq R_0$, obtemos

$$\deg_{LS}(I - T_{f_1}, B_{C_0^1(\overline{\Omega})}(0,R), 0) = {\sum}'(-1) \neq 0.$$

$\square$

Apresentaremos na próxima subseção a demonstração do resultado principal deste capítulo.

3.2.1 Demonstração do Teorema 3.1

Para provarmos este teorema, será necessário garantirmos a existência de uma função f_1, para a qual $\deg_{LS}(I - T_f, B_{C_0^1(\overline{\Omega})}(0,R), 0) \neq 0$, se $R > 0$ é suficientemente grande.

Consideremos $\epsilon > 0$ obtido pela Proposição 3.7, $f_1 := -(t\varphi_1)^p$ e vamos escolher $t > 0$ de modo que $\|f_1\|_r < \epsilon$.

Com a escolha de $0 < t < \left(\frac{\epsilon}{\|\varphi_1^p\|_r}\right)^{\frac{1}{p}}$, temos que

$$\begin{aligned}
\|f_1\|_r &= \left(\int_\Omega |f_1|^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left(\int_\Omega t^{pr}|\varphi_1|^{pr}\right)^{\frac{1}{r}} \\
&< \left(\int_\Omega \frac{\epsilon^r}{\|\varphi_1^p\|_r^r}|\varphi_1^p|^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \frac{1}{\|\varphi_1^p\|_r}\epsilon\|\varphi_1^p\|_r = \epsilon.
\end{aligned}$$

Se $u = t\varphi_1$, então u é solução de (3.1) com f_1. De fato,

$$-\Delta u = t\lambda_1\varphi_1 = t\lambda_1\varphi_1 + (t\varphi_1)^p - (t\varphi_1)^p = \lambda_1 u + (u^+)^p + f_1, \text{em } \Omega,$$

ainda, como $\varphi_1 = 0$ em $\partial\Omega$, temos que $u = 0$ em $\partial\Omega$.

Dessa forma, podemos aplicar a Proposição 3.7 e concluir que, para R suficientemente grande, $\deg_{LS}(I - T_{f_1}, B_{C_0^1(\overline{\Omega})}(0, R), 0) \neq 0$.

Considere a homotopia compacta

$$H(u,\tau) = (-\Delta)^{-1}(\lambda_1 u + (u^+)^p + (1-\tau)f + \tau f_1),\ 0 \leq \tau \leq 1.$$

Então $\phi_\tau(u) := (I - H_\tau)(u) = 0$ se, e somente se, u é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda_1 u + (u^+)^p + (1-\tau)f + \tau f_1, \quad \text{em } \Omega, \\ \quad u &= 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.24}$$

Pela estimativa a priori do Teorema 3.5, toda solução u de (3.24) satisfaz

$$\begin{aligned} \|u\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} &\leq \theta(\|(1-\tau)f + \tau f_1\|_r) \\ &\leq \theta((1-\tau)\|f\|_r + \tau\|f_1\|_r) \\ &\leq \theta(\max\{\|f\|_r, \|f_1\|_r\}) := R_1. \end{aligned}$$

Tome $R > \max\{R_0, R_1\}$, de modo que $\phi_\tau(u) = u - H_\tau(u) \neq 0$, para qualquer $u \in \partial B_{C_0^1(\overline{\Omega})}(0, R)$ e para qualquer $\tau \in [0, 1]$.

Usando a propriedade de invariância homotópica, obtemos

$$\begin{aligned} \deg_{LS}(I - T_f, B_{C_0^1(\overline{\Omega})}(0,R), 0) &= \deg_{LS}(\phi_0, B_{C_0^1(\overline{\Omega})}(0,R), 0) \\ &= \deg_{LS}(\phi_1, B_{C_0^1(\overline{\Omega})}(0,R), 0) \\ &= \deg_{LS}(I - T_{f_1}, B_{C_0^1(\overline{\Omega})}(0,R), 0) \neq 0. \end{aligned}$$

Pela propriedade de existência de solução, existe $u \in B_{C_0^1(\overline{\Omega})}(0, R)$ tal que $(I - T_f)(u) = 0$, isto é, $T_f(u) = u$. Portanto o problema (3.1) possui solução, como queríamos.

$\square$

Capítulo

4

Existência de soluções para um sistema elíptico ressonante superlinear

Neste capítulo, vamos estudar a existência de soluções de um sistema ressonante, utilizando a teoria do grau topológico. Consideraremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda_1 u + (v^+)^p + f(x), \qquad \text{em } \Omega, \\ -\Delta v &= \lambda_1 v + (u^+)^q + g(x), \qquad \text{em } \Omega, \\ u &= v = 0, \qquad\qquad\qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

em que

(H1) Ω é um domínio aberto, limitado e suave do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$;

(H2) $\frac{1}{p+1} + \frac{N-1}{N+1}\frac{1}{q+1} > \frac{N-1}{N+1}$ $(p, q > 1)$;

(H3) $\frac{1}{q+1} + \frac{N-1}{N+1}\frac{1}{p+1} > \frac{N-1}{N+1}$ $(p, q > 1)$;

(H4) $f, g \in L^r(\Omega)$ para algum $r > N$ e $\int_\Omega f\varphi_1\, dx$, $\int_\Omega f\varphi_1\, dx < 0$, em que φ_1 é a autofunção positiva, normalizada em $L^2(\Omega)$, associada ao primeiro autovalor λ_1 do operador $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Segue de (H2) e de (H3) que $p, q < 2^* - 1$. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{1}{p+1} + \frac{N-1}{N+1}\frac{1}{q+1} > \frac{N-1}{N+1} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{p+1} > \frac{N-1}{N+1}\frac{q}{q+1} \\ &\Leftrightarrow \quad p+1 < \frac{N+1}{N-1}\frac{q+1}{q} \\ &\Leftrightarrow \quad p < \frac{2}{N-1} + \frac{1}{q}\frac{N+1}{N-1}. \end{aligned}$$

Desde que $\frac{1}{q} < 1$, segue que $\frac{2}{N-1} + \frac{N+1}{q(N-1)} < \frac{N+3}{N-1}$. Portanto (H2) implica que $p < \frac{N+3}{N-1}$. De modo análogo, mostra-se que (H3) implica que $q < \frac{N+3}{N-1}$. Desde que $\frac{N+3}{N-1} < \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1$, temos que $p, q < 2^* - 1$.

Vamos demonstrar, neste capítulo, o seguinte teorema:

Teorema 4.1. *Assuma* (H1) *e que f e g satisfazem a hipótese* (H4). *Assuma ainda que p, $q > 1$ satisfazem* (H2) *e* (H3). *Então existe ao menos uma solução $(u, v) \in H_0^1(\Omega)^2$ do sistema* (4.1).

Vejamos, agora, um resultado sobre regularidade das soluções de (4.1).

Lema 4.2. *Toda solução fraca* $(u,v) \in H_0^1(\Omega)^2$ *de* (4.1), *pertence a* $W^{2,s}(\Omega)^2$, *para algum* $s > N$. *Em particular,* $(u,v) \in C_0^1(\overline{\Omega})^2$ *e vale a estimativa*

$$\|u\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} + \|v\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} \leq \gamma_1(\|u\|_{2^*} + \|v\|_{2^*} + \|f\|_r + \|g\|_r), \tag{4.2}$$

em que $\gamma_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *é contínua, crescente com* $\gamma_1(0) = 0$.

Demonstração: Para simplificar a notação, vamos considerar as seguintes funções: $F_1(x,u,v) = \lambda_1 u + (v^+)^p + f$ e $F_2(x,u,v) = \lambda_1 v + (u^+)^q + g$. De modo similar ao Lema 3.2, vamos usar um argumento "bootstrap" para obter regularidade das soluções de (4.1). Vamos mostrar, inicialmente, que $u, v \in W^{2,s}(\Omega)$, para algum $s > N$ e que vale uma estimativa para as normas de u e v em $W^{2,s}(\Omega)$.

Note que $u, v \in L^{2^*}(\Omega)$, pois $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$. Assim, podemos iniciar o processo com $t_1 = \min\{\frac{2^*}{p}, \frac{2^*}{q}\}$. Observe que

$$\int_\Omega |F_1(x,u,v)|^{t_1} \leq C\left(\int_\Omega |u|^{t_1}\,dx + \int_\Omega |v|^{t_1 p}\,dx + \int_\Omega |f|^{t_1}\,dx\right); \tag{4.3}$$

$$\int_\Omega |F_2(x,u,v)|^{t_1} \leq C\left(\int_\Omega |v|^{t_1}\,dx + \int_\Omega |u|^{t_1 q}\,dx + \int_\Omega |f|^{t_1}\,dx\right). \tag{4.4}$$

Podemos supor que $t_1 \leq r$, pois, caso contrário, teríamos que $F_1, F_2 \in L^r(\Omega)$ e usando o Teorema C.9, concluiríamos diretamente, sem usar processo iterativo, que $u, v \in W^{2,r}(\Omega)$ e que vale uma estimativa do tipo

$$\|u\|_{2,r} + \|v\|_{2,r} \leq C(\|u\|_{2^*} + \|v\|_{2^*} + \|u\|_{2^*}^q + \|v\|_{2^*}^p + \|f\|_r + \|g\|_r).$$

Assumindo então que $t_1 \leq r$, temos que $f, g \in L^{t_1}(\Omega)$. Das desigualdades (4.3) e (4.4), segue que $F_1, F_2 \in L^{t_1}(\Omega)$. Aplicando o Teorema C.9, podemos concluir que $u, v \in W^{2,t_1}(\Omega)$ e que valem as desigualdades

$$\|u\|_{2,t_1} \leq C\|F_1\|_{t_1} \leq C(\|u\|_{2^*} + \|v\|_{2^*}^p + \|f\|_r); \tag{4.5}$$

$$\|v\|_{2,t_1} \leq C\|F_1\|_{t_1} \leq C(\|v\|_{2^*} + \|u\|_{2^*}^q + \|g\|_r). \tag{4.6}$$

Se $t_1 > N$, podemos parar o processo. Vamos assumir então que $t_1 \leq N$ e proceder o argumento através de imersões de Sobolev, analisando os seguintes casos:

Caso 1: $2t_1 > N$.

Pelo Teorema C.5, item (iii), vale a imersão $W^{2,t_1}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$, para $0 < \lambda < 1$. Assim, $u, v \in C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$, logo

$$\int_\Omega |F_1(x,u,v)|^r\,dx \leq \int_\Omega |u|^r\,dx + \int_\Omega |v|^{rp}\,dx \int_\Omega |f|^r\,dx < \infty;$$

$$\int_\Omega |F_2(x,u,v)|^r\,dx \leq \int_\Omega |v|^r\,dx + \int_\Omega |u|^{rp}\,dx \int_\Omega |g|^r\,dx < \infty.$$

Dessa forma $F_1, F_2 \in L^r(\Omega)$. Pelo Teorema C.9, temos que $u, v \in W^{2,r}(\Omega)$ e

$$\|u\|_{2,r} \leq C\|F_1\|_r \leq C(\|u\|_r + \|v\|_{rp}^p + \|f\|_r);$$

$$\|v\|_{2,r} \leq C\|F_2\|_r \leq C(\|v\|_r + \|u\|_{rq}^q + \|g\|_r).$$

Desde que $rp, rq > r > \frac{N}{2}$, aplicando o item (ii) do Teorema C.5, valem as imersões $W^{2,\frac{N}{2}}(\Omega) \hookrightarrow L^{rp}(\Omega), L^{rq}(\Omega)$. Então

$$\|u\|_{2,r} \leq C(\|u\|_{2,\frac{N}{2}} + \|v\|_{2,\frac{N}{2}}^p + \|f\|_r);$$

$$\|v\|_{2,r} \leq C(\|v\|_{2,\frac{N}{2}} + \|u\|_{2,\frac{N}{2}}^q + \|g\|_r).$$

Portanto, valem as desigualdades

$$\|u\|_{2,r} \leq C(\|u\|_{2,t_1} + \|v\|_{2,t_1}^p + \|f\|_r);$$

$$\|v\|_{2,r} \leq C(\|v\|_{2,t_1} + \|u\|_{2,t_1}^q + \|g\|_r).$$

Consequentemente, usando (4.5) e (4.6), respectivamente, concluímos que

$$\|u\|_{2,r} \leq C(\|u\|_{2^*} + \|v\|_{2^*}^p + \|v\|_{2^*}^{p^2} + \|f\|_r^p + \|f\|_r);$$

$$\|v\|_{2,r} \leq C(\|v\|_{2^*} + \|u\|_{2^*}^q + \|v\|_{2^*}^{q^2} + \|g\|_r^q + \|g\|_r).$$

Caso 2: $2t_1 = N$.

Pelo item (ii) do Teorema C.5, concluímos que $W^{2,t_1}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in (t_1, \infty)$. Uma vez que $rp, rq > N > t_1$, podemos aplicar tal imersão para $s = rp, rq$ e concluir que $u \in L^{rq}(\Omega)$ e $v \in L^{rp}(\Omega)$. Logo

$$\int_\Omega |F_1(x,u,v)|^r \leq C\left(\int_\Omega |u|^r\,dx + \int_\Omega |v|^{rp}\,dx + \int_\Omega |f|^r\,dx\right) < \infty;$$

$$\int_\Omega |F_2(x,u,v)|^r \leq C\left(\int_\Omega |v|^r\,dx + \int_\Omega |u|^{rq}\,dx + \int_\Omega |g|^r\,dx\right) < \infty.$$

Portanto, $F_1, F_2 \in L^r(\Omega)$. Pelo Teorema C.9, segue que $u, v \in W^{2,r}(\Omega)$ e valem as desigualdades

$$\begin{aligned} \|u\|_{2,r} \leq C\|F_1\|_r &\leq C(\|u\|_r + \|v\|_{rp}^p + \|f\|_r) \\ &\leq C(\|u\|_{2,t_1} + \|v\|_{2,t_1}^p + \|f\|_r); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|v\|_{2,r} \leq C\|F_2\|_r &\leq C(\|v\|_r + \|u\|_{rq}^q + \|g\|_r) \\ &\leq C(\|v\|_{2,t_1} + \|u\|_{2,t_1}^p + \|g\|_r). \end{aligned}$$

Pelas desigualdades (4.5) e (4.6), segue que

$$\|u\|_{2,r} \leq C(\|u\|_{2^*} + \|v\|_{2^*}^p + \|v\|_{2^*}^{p^2} + \|f\|_r^p + \|f\|_r);$$

$$\|v\|_{2,r} \leq C(\|v\|_{2^*} + \|u\|_{2^*}^q + \|u\|_{2^*}^{q^2} + \|g\|_r^q + \|g\|_r).$$

Caso 3: $2t_1 < N$.

Neste caso, aplicamos o Teorema C.5, item (i) para garantir a existência da imersão $W^{2,t_1}(\Omega) \hookrightarrow L^{s_1}(\Omega)$ com $s_1 = \frac{Nt_1}{N-2t_1}$. Dessa forma, podemos repetir o processo para $t_2 = \min\{\frac{s_1}{p}, \frac{s_1}{q}\}$. Em geral, temos

$$t_{m+1} = \min\left\{\frac{s_m}{p}, \frac{s_m}{q}\right\}, \text{ em que } s_m = \frac{Nt_m}{N-2t_m}.$$

Vejamos que o processo é finito, isto é, existe m tal que $2t_m > N$, de modo a reincidir no caso 1. De fato, como $p, q < 2^* - 1$, temos que

$$\frac{t_2}{t_1} \geq \frac{s_1}{2^*} > \frac{N}{N(2^*-1) - 2.2^*} = 1$$

Portanto $\frac{t_2}{t_1} := \delta > 1$. Ainda

$$\frac{t_3}{t_2} \geq \frac{s_2}{s_3} = \frac{t_2}{t_1}\frac{N-2t_1}{N-2t_2} > \frac{t_2}{t_1} = \delta.$$

Logo $t_3 > t_2\delta = t_1\delta^2$. Em geral, deduzimos que $t_{m+1} > t_1\delta^m$. Assim, é possível encontrar m tal que $2t_m > N$. Logo o processo é finito.

Pelos argumentos anteriormente apresentados, concluímos que $u, v \in W^{2,s}(\Omega)$, para algum $s > N$. Pelo item (iii) do Teorema C.5, temos que $W^{2,s}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$ com $0 < \lambda < 1$. Uma vez que $C^{1,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$, temos que $u, v \in C_0^1(\overline{\Omega})$ e vale a desigualdade

$$\|u\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} + \|v\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} \leq C(\|u\|_{2,s} + \|v\|_{2,s}).$$

Dessa forma, é possível encontrar uma função $\gamma_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ contínua, crescente com $\gamma_1(0) = 0$ tal que

$$\|u\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} + \|v\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} \leq \gamma_1(\|u\|_{2^*} + \|v\|_{2^*} + \|f\|_r + \|g\|_r).$$

$\square$

4.1 Estimativas a priori para as possíveis soluções do sistema (4.1)

Para obtermos a estimativa a priori para as possíveis soluções de (4.1), vamos precisar da seguinte versão da desigualdade de Hardy-Sobolev, a qual pode ser encontrada em [7]:

Lema 4.3. *Seja $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,m}(\Omega)$, $1 < m < \infty$. Então a seguinte desigualdade vale*

$$\left\| \frac{u}{\varphi_1^\tau} \right\|_t \le C\|u\|_{2,m}, \tag{4.7}$$

em que C depende apenas de τ, m e N; $\tau \in [0,1]$ e $t > 1$ obedecem as seguintes restrições:

(i) $\frac{1}{t} = \frac{1}{m} - \frac{2-\tau}{N}$, *se* $m < \frac{N}{2}$;

(ii) $\frac{1}{t} > \frac{\tau}{N}$, *se* $m = \frac{N}{2}$;

(iii) $\frac{1}{t} = \tau\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{N}\right)$, *se* $\frac{N}{2} < m < N$;

(iv) *vale para todo $t > 1$ e para todo $\tau \in [0,1]$, se $m > N$.*

Vamos apresentar, agora, o resultado que garante a existência da estimativa a priori.

Teorema 4.4. *Assuma* (H1) *e que f e g satisfazem* (H4). *Assuma ainda que $p, q > 1$ satisfazem* (H2) *e* (H3) *e que $(u,v) \in H_0^1(\Omega)^2$ é uma solução do problema* (4.1). *Então existe uma função contínua, crescente $\gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, dependendo apenas de p, q e Ω, tal que $\gamma(0) = 0$ e*

$$\|u\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} + \|v\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} \le \gamma(\|f\|_r + \|g\|_r).$$

Demonstração: A prova, neste caso, consiste, primeiramente, em obter estimativas da norma de u em $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ e da norma de v em $W^{2,\frac{q+1}{q}}(\Omega)$, diretamente a partir das equações de (4.1). Em seguida, serão estimadas as normas de u e de v em $L^{2^*}(\Omega)$ e por fim, o Lema 4.2 será utilizado para obter uma estimativa das normas de u e de v em $C_0^1(\overline{\Omega})$.

Seja $(u,v) \in H_0^1(\Omega)^2$ uma solução de (4.1). Primeiramente, vamos mostrar que existe uma função contínua, crescente $\widehat{\gamma} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, com $\widehat{\gamma}(0) = 0$, dependendo apenas de p, q e Ω, tal que

$$\|u\|_{2,\frac{p+1}{p}} + \|v\|_{2,\frac{q+1}{q}} \le \widehat{\gamma}(\|f\|_r + \|g\|_r). \tag{4.8}$$

Multiplicando a primeira equação de (4.1) por φ_1, encontramos

$$\begin{aligned} \int_\Omega (v^+)^p \varphi_1 \, dx &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi_1 \, dx - \lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 \, dx - \int_\Omega f\varphi_1 \, dx \\ &= \lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 \, dx - \lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 \, dx - \int_\Omega f\varphi_1 \, dx \\ &= -\int_\Omega f\varphi_1 \, dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_\Omega (v^+)^p \varphi_1 \, dx = -\int_\Omega f\varphi_1 \, dx \le \left(\int_\Omega |f|^r \, dx\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_\Omega \varphi^{r'} \, dx\right)^{\frac{1}{r'}} \le C\|f\|_r. \tag{4.9}$$

De modo análogo, usando a segunda equação em (4.1), obtemos

$$\int_\Omega (u^+)^q \varphi_1\, dx = -\int_\Omega g\varphi_1\, dx \leq C\|g\|_r. \tag{4.10}$$

Aplicando, novamente, a desigualdade de Hölder, para p e seu conjugado p', concluímos que

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega v^+\varphi_1\, dx\right)^p &= \left(\int_\Omega v^+\varphi_1^{\frac{1}{p}}\varphi_1^{\frac{1}{p'}}\, dx\right)^p \\
&\leq \left(\int_\Omega (v^+)^p\varphi_1\, dx\right)\left(\int_\Omega \varphi_1\, dx\right)^{\frac{p}{p'}} \\
&\leq C\int_\Omega (v^+)^p\varphi_1\, dx \\
&\leq C\|f\|_r.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\int_\Omega v^+\varphi_1\, dx \leq C(\|f\|_r)^{\frac{1}{p}}.$$

Analogamente, temos

$$\int_\Omega u^+\varphi_1\, dx \leq C(\|g\|_r)^{\frac{1}{q}}.$$

Desde que $H_0^1(\Omega) = [\varphi_1] \oplus [\varphi_1]^\perp$, podemos escrever $u = s_1\varphi_1 + u_1$, $v = s_2\varphi_1 + v_1$, de modo que $\int_\Omega u_1\varphi_1\, dx = \int_\Omega v_1\varphi_1\, dx = 0$. Multiplicando por φ_1 e integrando, obtemos $s_1 = \int_\Omega u\varphi_1\, dx$ e $s_2 = \int_\Omega v\varphi_1\, dx$, consequentemente

$$\begin{array}{l}
s_1 = \int_\Omega u^+\varphi_1\, dx - \int_\Omega u^-\varphi_1\, dx \leq \int_\Omega u^+\varphi_1\, dx \leq C\|f\|_r^{\frac{1}{p}} \\
s_2 = \int_\Omega v^+\varphi_1\, dx - \int_\Omega v^-\varphi_1\, dx \leq \int_\Omega v^+\varphi_1\, dx \leq C\|g\|_r^{\frac{1}{q}}.
\end{array} \tag{4.11}$$

Vamos separar a demonstração em dois casos, de acordo com os sinais de s_1 e s_2.

Caso 1: $s_1 \geq 0$ e $s_2 \geq 0$.

A partir de (4.11), obtemos uma limitação de s_1 e uma limitação de s_2. Desde que u é solução de (4.1), temos também que u_1 satisfaz a equação

$$\left\{\begin{array}{rcll}
-\Delta u_1 &=& \lambda_1 u_1 + (v^+)^p + f, & \text{em } \Omega, \\
u_1 &=& 0, & \text{sobre } \partial\Omega.
\end{array}\right. \tag{4.12}$$

Tomando a norma de $L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ em ambos os membros da equação (4.12) e usando a desigualdade de Hölder com $\frac{rp}{p+1} > 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\Delta u_1 + \lambda_1 u_1|^{\frac{p+1}{p}}\, dx &= \int_\Omega |(v^+)^p + f|^{\frac{p+1}{p}}\, dx \\
&\leq C\left(\int_\Omega (v^+)^{p+1}\, dx + \int_\Omega |f|^{\frac{p+1}{p}}\, dx\right) \\
&\leq C\left(\int_\Omega (v^+)^{p+1}\, dx + C_1\left(\int_\Omega |f|^r\, dx\right)^{\frac{1}{r}\frac{p+1}{p}}\right) \\
&\leq C\left(\int_\Omega (v^+)^{p+1}\, dx + \|f\|_r^{\frac{p+1}{p}}\right). \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

Vamos escrever

$$\int_\Omega (v^+)^{p+1}\, dx = \int_\Omega (v^+)^{p\alpha}\varphi_1^\alpha \varphi_1^{-\alpha}(v^+)^{p(1-\alpha)+1}\, dx,$$

para algum $0 < \alpha < 1$ a ser determinado posteriormente. Pela desigualdade de Hölder com $\frac{1}{\alpha} > 1$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (v^+)^{p+1}\, dx &= \int_\Omega ((v^+)^{p\alpha}\varphi_1^\alpha)\varphi_1^{-\alpha}(v^+)^{p(1-\alpha)+1}\, dx \\
&\leq \left(\int_\Omega (v^+)^p \varphi_1\, dx\right)^\alpha \left(\int_\Omega \frac{(v^+)^{p+\frac{1}{1-\alpha}}}{\varphi_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\, dx\right)^{1-\alpha}. \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

Dessa forma, por (4.9), concluímos que

$$\int_\Omega (v^+)^{p+1} \leq C\|f\|_r^\alpha \left(\int_\Omega \frac{(v^+)^{p+\frac{1}{1-\alpha}}}{\varphi_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\, dx\right)^{1-\alpha}. \qquad (4.15)$$

Vamos aplicar o Lema 4.3 para estimar a integral $\int_\Omega \frac{(v^+)^{p+\frac{1}{1-\alpha}}}{\varphi_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\, dx$ por $\|v\|_{2,\frac{q+1}{q}}$. Para usarmos o lema, será necessário dividirmos em casos, porém, em todos os casos vamos considerar $m = \frac{q+1}{q}$, $t = p + \frac{1}{1-\alpha}$, $\tau t = \frac{\alpha}{1-\alpha}$, em que α será escolhido de acordo com cada caso:

(a) ($N \geq 4$, $q > 1$) ou ($N = 3$ e $q > 2$).

Neste caso $m = \frac{q+1}{q} < \frac{N}{2}$. A fim de usarmos o item (i) do Lema 4.3, precisamos que $\frac{1}{t} = \frac{1}{m} - \frac{2-\tau}{N} = \frac{q}{q+1} - \frac{2-\tau}{N}$.

Se $L := \frac{q}{q+1} - \frac{2}{N} > 0$, então $\frac{1}{t} = L + \frac{\tau}{N}$. Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} 1 &= tL + \frac{t\tau}{N} \\ &= Lp + \frac{L}{1-\alpha} + \frac{\frac{\alpha}{1-\alpha}}{N} \\ &= Lp + \frac{L}{1-\alpha} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{N} \\ &= Lp + \frac{1}{1-\alpha}\Big(L + \frac{\alpha}{N}\Big). \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} (1-\alpha)(1-Lp) = L + \frac{\alpha}{N} &\Leftrightarrow (1-\alpha)(1-Lp)N - LN = \alpha \\ &\Leftrightarrow \alpha + \alpha(1-Lp)N = (1-Lp)N - LN \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{N(1-L-Lp)}{1+N-LNp}. \end{aligned}$$

Tomando α dessa forma, teremos que $\frac{1}{t} = \frac{1}{m} - \frac{2-\tau}{N}$, de modo que o item (i) do Lema 4.3 é satisfeito.

Mostremos agora que $\alpha \in (0,1)$. Vejamos, inicialmente, que $\alpha > 0$. Pela hipótese (H2), temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{p+1} + \frac{N-1}{N+1}\frac{1}{q+1} > \frac{N-1}{N+1} &\Leftrightarrow \frac{1}{p+1} > \frac{q}{q+1}\frac{N-1}{N+1} \\ &\Leftrightarrow 1 > \frac{pq}{q+1}\frac{N-1}{N+1} + \frac{q}{q+1}\frac{N-1}{N+1}. \end{aligned}$$

Usando frações parciais, obtemos

$$\frac{q}{q+1}\frac{N-1}{N+1} = \frac{q}{q+1} - \frac{2q}{(N+1)(q+1)}.$$

Como

$$\frac{2q}{(N+1)(q+1)} = \frac{2}{N+1}\frac{q}{q+1} < \frac{2}{N+1} < \frac{2}{N},$$

inferimos que

$$\frac{pq}{q+1}\frac{N-1}{N+1} > \frac{pq}{q+1} - \frac{2p}{N}.$$

Dessa forma,

$$1 > \frac{pq}{q+1} - \frac{2p}{N} + \frac{q}{q+1} - \frac{2}{N} = Lp + L.$$

Portanto, $1 - L - Lp > 0$. Ainda, por (H2), temos que

$$\begin{aligned} 1 &> \frac{pq}{q+1}\frac{N-1}{N+1} + \frac{q}{q+1}\frac{N-1}{N+1} \\ &> \frac{pq}{q+1}\frac{N-1}{N+1} \\ &> \frac{pq}{q+1} - \frac{2p}{N+1} \\ &> \frac{pq}{q+1}\frac{N}{N+1} - \frac{2p}{N+1}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$1 > \frac{pq}{q+1}\frac{N}{N+1} - \frac{2p}{N+1} = p\left(\frac{q}{q+1} - \frac{2}{N}\right)\frac{N}{N+1}.$$

Logo $N + 1 > LpN$ e, portanto, $1 + N - LNp > 0$. Assim temos que $\alpha > 0$.

Observe que $\alpha < 1$, pois

$$N - LN - LpN < 1 + N - LNp \;\; (L > 0).$$

Portanto, $\alpha \in (0, 1)$.

(b) $N = 3$ e $q = 2$.

Neste caso $m = \frac{q+1}{q} = \frac{N}{2} = \frac{3}{2}$. Vejamos que o item (ii) do Lema 4.3 é satisfeito, isto é, $\frac{1}{t} > \frac{\tau}{N} = \frac{\tau}{3}$. Para tanto, é suficiente escolher qualquer $\alpha \in (0, \frac{3}{4})$.

(c) $N = 3$ e $1 < q < 2$.

Neste caso, temos $m = \frac{q+1}{q} < q + 1 < 3$. Vejamos que o item (iii) do Lema 4.3 é satisfeito. De fato, como $q < 2$, temos que $3q < 2q + 2$, logo $\frac{3}{2} < \frac{q+1}{q}$ e consequentemente $\frac{N}{2} = \frac{3}{2} < \frac{q+1}{q} < 3 = N$. Precisamos então que $\frac{1}{t} = \tau\left(\frac{q}{q+1} - \frac{1}{3}\right)$. Assim, devemos escolher α da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 1 = t\tau\left(\frac{q}{q+1} - \frac{1}{3}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad 1 = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{q}{q+1} - \frac{1}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha\left(1 + \frac{q}{q+1} - \frac{1}{3}\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha\left(\frac{5q+2}{3(q+1)}\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{3(q+1)}{5q+2}. \end{aligned}$$

Desde que $q < 2$, temos que $5q + 2 < 4q + 4$, logo $\frac{3}{4} < \frac{3(q+1)}{5q+2} = \alpha$. Ainda, como $q > 1$, temos que $3q > 3$, assim $10q + 4 > 7q + 7$, donde $2(5q + 2) > 7(q + 1)$ e, portanto, $\frac{6}{7} > \frac{3(q+1)}{5q+2}$. Logo $\alpha \in (\frac{3}{4}, \frac{6}{7})$.

Em todos os casos, foi possível encontrar $0 < \alpha < 1$, de modo que as hipóteses do

Lema 4.3 são satisfeitas. Dessa forma, podemos aplicar o Lema 4.3 e obter

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega \frac{(v^+)^{p+\frac{1}{1-\alpha}}}{\varphi_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\, dx\right)^{1-\alpha} &= \left(\int_\Omega \left(\frac{v^+}{\varphi_1^\tau}\right)^t dx\right)^{\frac{p(1-\alpha)+1}{t}} \\
&= \left\|\frac{v^+}{\varphi_1^\tau}\right\|_t^{p(1-\alpha)+1} \\
&\leq C\|v\|_{2,\frac{q+1}{q}}^{p(1-\alpha)+1}. \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

Por (4.15), concluímos que

$$\int_\Omega (v^+)^{p+1}\, dx \leq C\|f\|_r^\alpha \|v\|_{2,\frac{q+1}{q}}^{p(1-\alpha)+1}. \qquad (4.17)$$

Agora, usando (4.13) e (4.17), obtemos

$$\int_\Omega |\Delta u_1 + \lambda_1 u_1|^{\frac{p+1}{p}}\, dx \leq C(\|f\|_r^\alpha \|v\|_{2,\frac{q+1}{q}}^{p(1-\alpha)+1} + \|f\|_r^{\frac{p+1}{p}}). \qquad (4.18)$$

Considere o operador $-\Delta - \lambda_1 I : W_*^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \to L_*^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$, em que

$$W_*^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) := \left\{u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega);\ \int_\Omega u\varphi_1\, dx = 0\right\}$$

e

$$L_*^{\frac{p+1}{p}}(\Omega) := \left\{u \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega);\ \int_\Omega u\varphi_1\, dx = 0\right\}.$$

Pelo Teorema D.9, temos que $-\Delta - \lambda_1 I$ é um isomorfismo nesses espaços. Consequentemente, a inversa $(-\Delta - \lambda_1 I)^{-1}$ é contínua. Como $u_1 \in W_*^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$, temos que

$$\|u_1\|_{2,\frac{p+1}{p}} \leq C\|\Delta u_1 + \lambda_1 u_1\|_{\frac{p+1}{p}}$$

e por (4.18), segue que

$$\|u_1\|_{2,\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} \leq C(\|f\|_r^\alpha \|v\|_{2,\frac{q+1}{q}}^{p(1-\alpha)+1} + \|f\|_r^{\frac{p+1}{p}}). \qquad (4.19)$$

De modo análogo ao que fizemos usando a primeira equação, podemos mostrar, usando a segunda equação, que

$$\|v_1\|_{2,\frac{q+1}{q}}^{\frac{q+1}{q}} \leq C(\|g\|_r^{\overline{\alpha}} \|u\|_{2,\frac{p+1}{p}}^{q(1-\overline{\alpha})+1} + \|g\|_r^{\frac{q+1}{q}}), \qquad (4.20)$$

em que $\overline{\alpha}$ é escolhido de modo semelhante à escolha de α, considerando os casos (a), (b) e (c), trocando os papéis de p e q, usando a hipótese (H3) em vez de (H2) e considerando $K := \frac{p}{p+1} - \frac{2}{N}$ em vez de L, no caso (a).

A partir de (4.19) e da estimativa de s_2, obtemos

$$\begin{aligned}
\|u_1\|_{2,\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} &\leq C[\|f\|_r^{\alpha}(s_2\|\varphi_1\|_{2,\frac{q+1}{q}} + \|v_1\|_{2,\frac{q+1}{q}})^{p(1-\alpha)+1} + \|f\|_r^{\frac{p+1}{p}}] \\
&\leq C[\|f\|_r^{\alpha}(\|g\|_r^{\frac{1}{q}} + \|v_1\|_{2,\frac{q+1}{q}})^{p(1-\alpha)+1} + \|f\|_r^{\frac{p+1}{p}}] \\
&\leq C[\|f\|_r^{\alpha}(\|g\|_r^{\frac{p(1-\alpha)+1}{q}} + \|v_1\|_{2,\frac{q+1}{q}}^{p(1-\alpha)+1}) + \|f\|_r^{\frac{p+1}{p}}]. \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

Ainda, a partir de (4.20) e da estimativa de s_1, obtemos

$$\begin{aligned}
\|v_1\|_{2,\frac{q+1}{q}}^{\frac{q+1}{q}} &\leq C[\|g\|_r^{\overline{\alpha}}(s_1\|\varphi_1\|_{2,\frac{p+1}{p}} + \|u_1\|_{2,\frac{p+1}{p}})^{q(1-\overline{\alpha})+1} + \|g\|_r^{\frac{q+1}{q}}] \\
&\leq C[\|g\|_r^{\overline{\alpha}}(\|f\|_r^{\frac{1}{p}} + \|u_1\|_{2,\frac{q+1}{q}})^{q(1-\overline{\alpha})+1} + \|g\|_r^{\frac{q+1}{q}}] \\
&\leq C[\|g\|_r^{\overline{\alpha}}(\|f\|_r^{\frac{q(1-\overline{\alpha})+1}{p}} + \|u_1\|_{2,\frac{q+1}{q}}^{q(1-\overline{\alpha})+1}) + \|g\|_r^{\frac{q+1}{q}}]. \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

Se $a = (p(1-\alpha)+1)\frac{q}{q+1}$ e $b = (q(1-\overline{\alpha})+1)\frac{p}{p+1}$, podemos reescrever (4.21) usando (4.22) como

$$\|u_1\|_{2,\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} \leq \widetilde{\gamma}_1(\|f\|_r + \|g\|_r) + C\|f\|_r^{\alpha}\|g\|_r^{\overline{\alpha}}\|u_1\|_{2,\frac{p+1}{p}}^{ab\frac{p+1}{p}},$$

em que $\widetilde{\gamma}_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função contínua, crescente tal que $\widetilde{\gamma}_1(0) = 0$.

Vamos assumir, por enquanto, que $a, b < 1$. Usando a desigualdade de Young, com ϵ, para $k = \frac{1}{ab} > 1$, temos

$$\|u_1\|_{2,\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} \leq \widetilde{\gamma}_1(\|f\|_r + \|g\|_r) + C(\epsilon)\|f\|_r^{\alpha k'} + C\epsilon\|u_1\|_{2,\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}},$$

logo

$$(1 - C\epsilon)\|u_1\|_{2,\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} \leq \widetilde{\gamma}_1(\|f\|_r + \|g\|_r) + C(\epsilon)\|f\|_r^{\alpha k'},$$

considerando $\epsilon < \frac{1}{C}$, obtemos

$$\|u_1\|_{2,\frac{p+1}{p}} \leq \widehat{\gamma}_1(\|f\|_r + \|g\|_r), \qquad (4.23)$$

sendo $\widehat{\gamma}_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua, crescente tal que $\widehat{\gamma}_1(0) = 0$.

De modo semelhante, assumindo que $a, b < 1$, podemos também mostrar que

$$\|v_1\|_{2,\frac{q+1}{q}} \leq \widehat{\gamma}_2(\|f\|_r + \|g\|_r), \qquad (4.24)$$

sendo $\widehat{\gamma}_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua, crescente tal que $\widehat{\gamma}_2(0) = 0$.

Agora nos dedicaremos à prova de que $a < 1$. O fato de que $b < 1$, pode ser demonstrado de modo análogo. Mostraremos que $a < 1$, considerando os seguintes casos: (a) $(N \geq 4, q > 1)$ ou $(N = 3, q > 2)$.

Neste caso temos que $\alpha = \frac{N(1-L-Lp)}{1+N-LNp}$, para $L = \frac{q}{q+1} - \frac{N}{2}$. Queremos que $pq(1-\alpha) < 1$.

Agora,

$$\begin{aligned}
pq(1-\alpha)<1 &\Leftrightarrow \frac{pq+LNpq}{1+N-LNp}<1\\
&\Leftrightarrow pq+LNp(q+1)<N+1\\
&\Leftrightarrow pq+Npq-2p(q+1)<N+1\\
&\Leftrightarrow pq(N+1)+p(N+1)-2p(q+1)<N+1+p(N+1)\\
&\Leftrightarrow (p(N+1)-2p)(q+1)(N+1)(p+1)\\
&\Leftrightarrow p(N-1)(q+1)<(N+1)(p+1).
\end{aligned}$$

A última desigualdade segue diretamente da hipótese (H3).

(b) $N=3$, $q=2$.

Por (H2), temos que $\frac{1}{p+1}>\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$, assim $p<2$. Agora,

$$p(1-\alpha)+1<\frac{q+1}{q}=\frac{3}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \alpha>1-\frac{1}{2p}.$$

A última desigualdade é sempre válida, pois desde que $p<2$, tem-se que $1-\frac{1}{2p}<0<\alpha$.

(c) $N=3$, $1<q<2$.

Neste caso, temos que $\alpha\in(\frac{3}{4},\frac{6}{7})$, então $1-\alpha\in(\frac{1}{7},\frac{1}{4})$. Queremos que $p(1-\alpha)+1<\frac{q+1}{q}$, que equivale a $pq(1-\alpha)<1$. Para $N=3$ a hipótese (H2) equivale a $pq<q+2$. Como $q<2$, segue que $pq<4$, logo $pq(1-\alpha)<4\frac{1}{4}=1$. Isso conclui o caso c).

Para concluirmos o caso 1, podemos usar (4.23) e (4.24) para obter a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{2,\frac{p+1}{p}}+\|v\|_{2,\frac{q+1}{q}} &\leq C(s_1+\|u_1\|_{2,\frac{p+1}{p}}+s_2\|v_1\|_{2,\frac{q+1}{q}})\\
&\leq C(\|f\|_r^{\frac{1}{p}}+\widehat{\gamma}_1(\|f\|_r+\|g\|_r)+\|g\|_r^{\frac{1}{q}}+\widehat{\gamma}_2(\|f\|_r+\|g\|_r))\\
&:= \widehat{\gamma}(\|f\|_r+\|g\|_r), \qquad (4.25)
\end{aligned}$$

sendo $\widehat{\gamma}:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ uma função contínua, crescente tal que $\widehat{\gamma}(0)=0$.

Caso 2: $s_1<0$ ou $s_2<0$.

Assuma, por exemplo, que $s_2<0$. Procedendo como no caso 2 da demonstração do Teorema 3.5, temos que existe $\epsilon_0>0$ tal que

$$|s_2|\leq\frac{1}{\epsilon_0}\|v_1\|_{C_0^1(\overline{\Omega})}.$$

Observe que $v^+\leq v_1^+\leq|v_1|$. Usando (4.14), obtemos

$$\int_\Omega(v^+)^{p+1}\,dx\leq C\left(\int_\Omega(v^+)^p\varphi_1\,dx\right)^\alpha\left(\int_\Omega\frac{|v_1|^{p+\frac{1}{1-\alpha}}}{\varphi_1^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\,dx\right)^{1-\alpha}.$$

Com as mesmas escolhas de α feitas no caso 1, podemos concluir, usando o Lema 4.3 e a continuidade da inversa do operador $-\Delta-\lambda_1 I : W_*^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega)\cap W_0^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega)\to L_*^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$, que

$$\|u_1\|_{2,\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} \leq C(\|f\|_r^{\alpha}\|v_1\|_{2,\frac{q+1}{q}}^{p(1-\alpha)+1}+\|f\|_r^{\frac{p+1}{p}})$$

e, similarmente, que

$$\|v_1\|_{2,\frac{q+1}{q}}^{\frac{q+1}{q}} \leq C(\|g\|_r^{\overline{\alpha}}\|u_1\|_{2,\frac{p+1}{p}}^{q(1-\overline{\alpha})+1}+\|g\|_r^{\frac{q+1}{q}}).$$

Para concluir o caso 2, podemos prosseguir como no caso 1, a partir de (4.21) e de (4.22) e obter

$$\|u\|_{2,\frac{p+1}{p}}+\|v\|_{2,\frac{q+1}{q}} \leq \widehat{\gamma}(\|f\|_r+\|g\|_r). \tag{4.26}$$

Tanto no caso 1, quanto no caso 2, foi possível estimar as normas de u e de v em $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ e $W^{2,\frac{q+1}{q}}(\Omega)$, respectivamente. Como mencionamos no início da demonstração, vamos passar a estimativa para a norma $\|\cdot\|_{2^*}$.

Para obtermos uma estimativa na norma $\|\cdot\|_{2^*}$, precisamos analisar os casos a), b) e c), apresentados anteriormente:

a) $(N\geq 4, q>1)$ ou $(N=3, q>2)$.

Desde que $L:=\frac{q}{q+1}-\frac{2}{N}$, podemos escrever

$$\frac{1}{L}=\frac{N\left(\frac{q+1}{q}\right)}{N-2\left(\frac{q+1}{q}\right)}.$$

Pelo Teorema C.5, item (ii), temos que $W^{2,\frac{q+1}{q}}(\Omega)\hookrightarrow L^{\frac{1}{L}}(\Omega)$. Como $\frac{1}{L}\geq 2^*$, segue que $L^{\frac{1}{L}}(\Omega)\hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$. Portanto

$$\|v\|_{2^*}\leq C\|v\|_{2,\frac{q+1}{q}}.$$

b) $N=3$ e $q=2$.

Neste caso, $2(\frac{q+1}{q})=N$. Desde que $\frac{q+1}{q}\leq 2^*$, pelo Teorema C.5, item (ii), vale a imersão $W^{2,\frac{q+1}{q}}(\Omega)\hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$. Dessa forma também vale a desigualdade

$$\|v\|_{2^*}\leq C\|v\|_{2,\frac{q+1}{q}}.$$

c) $N=3$ e $1<q<2$.

Neste caso temos que $2\left(\frac{q+1}{q}\right)>N>\frac{q+1}{q}$. Pelo Teorema C.5, item (iii), vale a imersão $W^{2,\frac{q+1}{q}}(\Omega)\hookrightarrow C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$, para $0<\lambda<1$. Logo, vale a desigualdade

$$\|v\|_{2^*}\leq C\|v\|_{C(\overline{\Omega})}\leq C\|v\|_{C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})}\leq C\|v\|_{2,\frac{q+1}{q}}.$$

Estimativas análogas podem ser obtidas para $\|u\|_{2^*}$, considerando os casos a), b) e c), trocando q por p.

Utilizando (4.26), podemos estimar $\|u\|_{2^*} + \|v\|_{2^*}$ em termos de $\|f\|_r + \|g\|_r$.

Para finalizar a prova do teorema, basta utilizar a estimativa (4.2), obtida no Lema 4.2 e concluir que existe uma função $\gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ contínua, crescente com $\gamma(0) = 0$, tal que

$$\|u\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} + \|v\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} \leq \gamma(\|f\|_r + \|g\|_r).$$

□

4.2 Existência de soluções para o sistema (4.1)

Iniciaremos esta seção apresentando dois lemas, os quais são necessários para a obtenção do resultado principal deste capítulo.

Lema 4.5. *Existe $\epsilon > 0$ tal que para qualquer $a, b \in L^\infty(\Omega)$, $c \in \mathbb{R}$ e $t \in [0,1]$ com $a, b \geq 0$ q.t.p., $a \not\equiv 0$, $b \not\equiv 0$, $\|a\|_\infty < \epsilon, \|b\|_\infty < \epsilon$ e $0 < c < \epsilon$, o sistema*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta w &=& \lambda_1 w + ta(x)z + (1-t)cz, & \text{em } \Omega, \\ -\Delta z &=& \lambda_1 z + tb(x)w + (1-t)cw, & \text{em } \Omega, \\ w &=& z = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{4.27}$$

possui apenas a solução trivial $w = z = 0$.

Demonstração: Suponhamos que o resultado seja falso, então existem sequências de funções a_n, $b_n \not\equiv 0$, com $0 \leq a_n, b_n \leq \frac{1}{n}$ e sequências de números reais $t_n \in [0,1]$, $c_n \in (0, \frac{1}{n}]$ tais que (4.27) tem solução não trivial (w_n, z_n), com os correspondentes coeficientes. Considere as sequências

$$\widetilde{w}_n = \frac{w_n}{\|w_n\|_2}, \quad \widetilde{z}_n = \frac{z_n}{\|z_n\|_2}.$$

Observe que $\widetilde{w}_n$ satisfaz a equação

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta \widetilde{w}_n &=& \lambda_1 \widetilde{w}_n + (t_n a_n(x) + (1-t_n)c_n)\frac{z_n}{\|w_n\|_2}, & \text{em } \Omega, \\ \widetilde{w}_n &=& 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{4.28}$$

Para tais sequências temos duas possibilidades:

1) a sequência $q_n = \frac{\|z_n\|_2}{\|w_n\|_2}$ é limitada.

Multiplicando (4.28) por $\widetilde{w}_n$, integrando e usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{array}{rcl} \left| \|\nabla \widetilde{w}_n\|_2^2 - \lambda_1 \|\widetilde{w}_n\|_2^2 \right| &\leq& \left| \displaystyle\int_\Omega |\nabla \widetilde{w}_n|^2\, dx - \lambda_1 \int_\Omega |\widetilde{w}_n|^2\, dx \right| \\ &\leq& \displaystyle\int_\Omega (t_n a_n(x) + (1-t_n)c_n(x)) \frac{|z_n|}{\|w_n\|_2} |\widetilde{w}_n|\, dx \\ &\leq& \displaystyle(t_n \frac{1}{n} + (1-t_n)\frac{1}{n}) \int_\Omega \frac{|z_n|}{\|w_n\|_2} |\widetilde{w}_n|\, dx \\ &\leq& \displaystyle\frac{1}{n} \frac{\|z_n\|_2}{\|w_n\|_2} \|\widetilde{w}_n\|_2 = \frac{1}{n} q_n. \end{array}$$

Uma vez que $\|\widetilde{w}_n\|_2 = 1$ e (q_n) é limitada, segue que $\|\nabla\widetilde{w}_n\|_2^2 \to \lambda_1$, quando $n \to \infty$. Portanto a sequência $(\widetilde{w}_n)$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Como $H_0^1(\Omega)$ é reflexivo, existe $\widetilde{w} \in H_0^1(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência, $\widetilde{w}_n$ converge fracamente para $\widetilde{w}$. Pelo Teorema C.7, temos que a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é compacta. Dessa forma, a menos de subsequência, $\widetilde{w}_n$ converge para $\widetilde{w}$ em $L^2(\Omega)$, logo $\|\widetilde{w}\|_2 = 1$.

Desde que $\widetilde{w}_n \to \widetilde{w}$ em $L^2(\Omega)$, a convergência também ocorre no sentido distribucional, logo $\Delta\widetilde{w}_n \to \Delta\widetilde{w}$ no sentido distribucional. Ainda, como $\Delta\widetilde{w}_n \to \lambda_1\widetilde{w}$ em $L^2(\Omega)$, tal convergência também acontece no sentido distribucional. Dessa forma, temos que $\Delta\widetilde{w} = \lambda_1\widetilde{w}$, q.t.p. em Ω. Daí concluímos que $\widetilde{w}$ é uma solução não nula da equação

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta\widetilde{w} & = & \lambda_1\widetilde{w}, & \text{em } \Omega, \\ \widetilde{w} & = & 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Portanto, $\widetilde{w} = \pm\varphi_1$. Vejamos que a convergência $\widetilde{w}_n \to \widetilde{w}$ ocorre em $H_0^1(\Omega)$. De fato, temos que $\|\nabla\widetilde{w}_n\|_2^2 \to \lambda_1 = \|\nabla\widetilde{w}\|_2^2$, dessa forma, $\|\widetilde{w}_n\| \to \|\widetilde{w}\|$. Como $\widetilde{w}_n$ converge fracamente para $\widetilde{w}$, temos que $\widetilde{w}_n$ converge para $\widetilde{w}$ em $H_0^1(\Omega)$ (veja Proposição 3.32, p. 78 em [4]).

Podemos observar que $\frac{z_n}{\|w_n\|_2}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. De fato, testando a segunda equação de (4.27) com z_n, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla z_n|^2\,dx \le C\left(\int_\Omega |z_n|^2\,dx + \frac{1}{n}\int_\Omega |w_n||z_n|\,dx\right).$$

Usando a desigualdade de Hölder e dividindo por $\|w_n\|_2^2$, obtemos

$$\frac{\|z_n\|^2}{\|w_n\|_2^2} \le C\left(\frac{\|z_n\|_2^2}{\|w_n\|_2^2} + \frac{\|z_n\|_2}{\|w_n\|_2}\right).$$

Como $\frac{\|z_n\|_2}{\|w_n\|_2}$ é limitada, temos que $\frac{z_n}{\|w_n\|_2}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$.

Agora, aplicando um argumento "bootstrap" à equação

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta(\widetilde{w}_n \pm \varphi_1) & = & \lambda_1(\widetilde{w}_n \pm \varphi_1) + (t_n a_n(x) + (1-t_n)c_n)\frac{z_n}{\|w_n\|_2}, & \text{em } \Omega, \\ \widetilde{w}_n \pm \varphi_1 & = & 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{array} \right.$$

e usando a limitação da sequência $\frac{z_n}{\|w_n\|_2}$ em $H_0^1(\Omega)$, obtém-se uma desigualdade do tipo

$$\|\widetilde{w}_n \pm \varphi_1\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} \le C(\|\widetilde{w}_n \pm \varphi_1\| + \frac{1}{n}).$$

Desde que $\widetilde{w}_n$ converge a $\pm\varphi_1$ em $H_0^1(\Omega)$, segue que $\widetilde{w}_n$ converge a $\pm\varphi_1$ em $C_0^1(\overline{\Omega})$.

Na demonstração do Teorema 3.5, provamos que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$v \in B_{C_0^1(\overline{\Omega})}(\varphi_1, \epsilon) \Rightarrow v > 0, \text{em } \Omega,$$

ou de modo semelhante

$$v \in B_{C_0^1(\overline{\Omega})}(-\varphi_1, \epsilon) \Rightarrow v < 0, \text{em } \Omega.$$

Como $\widetilde{w}_n \to \pm\varphi_1$ em $C_0^1(\overline{\Omega})$, temos que para n suficientemente grande, $\widetilde{w}_n$ tem sinal definido em Ω, consequentemente w_n tem sinal definido para n suficientemente grande. Por outro lado, testando a segunda equação de (4.27) com φ_1, obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega (t_n b_n + (1-t_n)c_n) w_n \varphi_1 \, dx &= \int_\Omega (-\Delta\varphi_1) z_n \, dx - \lambda_1 \int_\Omega z_n \varphi_1 \, dx \\ &= \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1 z_n \, dx - \lambda_1 \int_\Omega z_n \varphi_1 \, dx = 0. \end{aligned}$$

Desde que $c_n > 0$, $b_n \geq 0$ q.t.p. e $b_n \not\equiv 0$, temos uma contradição com o fato de que w_n tem sinal definido.

2) $q_n = \frac{\|z_n\|_2}{\|w_n\|_2}$ é ilimitada.

Neste caso, a sequência $\frac{1}{q_n}$ é limitada e, portanto, o argumento segue de modo análogo ao caso 1), porém deve ser aplicado à segunda equação e a contradição provirá da primeira equação em (4.27).

Em cada um dos dois casos anteriores, chegamos a uma contradição, logo nossa suposição inicial é falsa, portanto o lema está provado. $\square$

Lema 4.6. *Seja* $0 < c < \lambda_2 - \lambda_1$ *fixado e considere o seguinte problema de autovalor com parâmetro* μ*:*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta w &=& \mu(\lambda_1 w + cz), & \text{em } \Omega, \\ -\Delta z &=& \mu(\lambda_1 z + cw), & \text{em } \Omega, \\ w &=& z = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{4.29}$$

Então existe apenas um autovalor μ *no intervalo* $[0,1]$*. Este autovalor é precisamente* $\mu_1 := \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + c} < 1$.

Demonstração: Considere (φ_n), $n \geq 1$ uma sequência de autofunções do operador $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, a qual forma uma base ortogonal de $H_0^1(\Omega)$ (confira Teorema D.2), com cada φ_n normalizada em $H_0^1(\Omega)$.

Se w, $z \in H_0^1(\Omega)$, então podemos escrever $w = \sum_n t_n \varphi_n$ e $z = \sum_n s_n \varphi_n$. A partir de

(4.29), usando a primeira equação, para m fixado, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_n t_n\lambda_n\langle\varphi_n,\varphi_m\rangle_{H_0^1(\Omega)} &= \sum_n t_n\langle-\Delta\varphi_n,\varphi_m\rangle_{H_0^1(\Omega)}\\
&= \left\langle -\Delta\left(\sum_n t_n\varphi_n\right),\varphi_m\right\rangle_{H_0^1(\Omega)}\\
&= \mu\left\langle \lambda_1\sum_n t_n\varphi_n + c\sum_n s_n\varphi_n,\varphi_m\right\rangle_{H_0^1(\Omega)}\\
&= \mu\left(\lambda_1\sum_n t_n\langle\varphi_n,\varphi_m\rangle_{H_0^1(\Omega)} + c\sum_n s_n\langle\varphi_n,\varphi_m\rangle_{H_0^1(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Desde que $\langle\varphi_n,\varphi_m\rangle_{H_0^1(\Omega)} = 0$, para $n\neq m$ e $\langle\varphi_m,\varphi_m\rangle_{H_0^1(\Omega)} = 1$, temos que

$$\lambda_m t_m = \mu(\lambda_1 t_m + cs_m).$$

De modo análogo, usando a segunda equação de (4.29), obtemos

$$\lambda_m s_m = \mu(\lambda_1 s_m + ct_m).$$

Dessa forma, podemos formar um sistema, que pode ser representado matricialmente por

$$\begin{pmatrix} \lambda_m-\mu\lambda_1 & -\mu c\\ -\mu c & \lambda_m-\mu\lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_m\\ s_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Queremos encontrar soluções não triviais do problema (4.29), para tanto é necessário que

$$\det\begin{pmatrix} \lambda_m-\mu\lambda_1 & -\mu c\\ -\mu c & \lambda_m-\mu\lambda_1\end{pmatrix} = 0,$$

logo

$$\begin{aligned}
(\lambda_m-\mu\lambda_1)^2 = (\mu c)^2 &\Rightarrow \lambda_m-\mu\lambda_1 = \pm\mu c\\
&\Rightarrow \mu(\lambda_1\pm c) = \lambda_m\\
&\Rightarrow \mu = \frac{\lambda_m}{\lambda_1\pm c}.
\end{aligned}$$

Observe que $\mu = \frac{\lambda_m}{\lambda_1-c}\notin[0,1]$. Ainda, como $0<c<\lambda_2-\lambda_1$, temos que

$$\frac{\lambda_1}{c+\lambda_1} < 1 < \frac{\lambda_2}{c+\lambda_1}.$$

Portanto o único autovalor do problema (4.29) que pertence ao intervalo $[0,1]$ é $\mu = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+c}$.

$\square$

Para finalizar, na próxima subseção, faremos a demonstração do teorema principal deste capítulo.

4.2.1 Demonstração do Teorema 4.1

Vamos transformar o problema (4.1) numa formulação de ponto fixo, considerando o operador $T_{(f,g)} : C_0^1(\overline{\Omega})^2 \to C_0^1(\overline{\Omega})^2$, definido por:

$$T_{(f,g)}(u,v) = ((-\Delta)^{-1}(\lambda_1 u + (v^+)^p + f), (-\Delta)^{-1}(\lambda_1 v + (u^+)^q + g)).$$

Observe que (u,v) é solução de (4.1) se, e somente se, (u,v) é ponto fixo de $T_{(f,g)}$, isto é, $T_{(f,g)}(u,v) = (u,v)$.

É possível mostrar, de modo similar ao que fizemos na seção 3.2, que o operador $T_{(f,g)}$ é compacto, de classe C^1 e sua derivada em um ponto $(u,v) \in C_0^1(\overline{\Omega})^2$ é dada por

$$T'_{(f,g)}(u,v).\,(w,z) = ((-\Delta)^{-1}(\lambda_1 w + p(v^+)^{p-1}z), (-\Delta)^{-1}(\lambda_1 z + p(u^+)^{q-1}w)).$$

A ideia para demonstrar este teorema é encontrar funções f_1 e g_1, de modo que $\deg_{LS}(I - T_{(f_1,g_1)}, D, 0) \neq 0$, para algum D a ser determinado e usar a propriedade de invariância homotópica para garantir que $\deg_{LS}(I - T_{(f,g)}, D, 0) \neq 0$.

Escolha $f_1 = -(\alpha\varphi_1)^p$ e $g_1 = -(\overline{\alpha}\varphi_1)^q$, em que α e $\overline{\alpha}$ serão escolhidos adequadamente no decorrer da prova. Vejamos que $(u_0, v_0) = (\overline{\alpha}\varphi_1, \alpha\varphi_1)$ é solução de (4.1) com f_1 e g_1. De fato, em Ω, vale

$$-\Delta(\overline{\alpha}\varphi_1) = \lambda_1(\overline{\alpha}\varphi_1) = \lambda_1(\overline{\alpha}\varphi_1) + (\alpha\varphi_1)^p - (\alpha\varphi_1)^p$$

e

$$-\Delta(\alpha\varphi_1) = \lambda_1(\alpha\varphi_1) = \lambda_1(\alpha\varphi_1) + (\overline{\alpha}\varphi_1)^q - (\overline{\alpha}\varphi_1)^q,$$

na fronteira de Ω, claramente temos $\overline{\alpha}\varphi_1 = \alpha\varphi_1 = 0$.

Considere agora a homotopia compacta dada por

$$H((u,v),\tau) = ((-\Delta)^{-1}(\lambda_1 u + (v^+)^p + (1-\tau)f + \tau f_1), (-\Delta)^{-1}(\lambda_1 v + (u^+)^q + (1-\tau)g + \tau g_1)).$$

Observe que H liga $T_{(f,g)}$ a $T_{(f_1,g_1)}$ e $(I - H_\tau)(u,v) = 0$ se, e somente se, (u,v) é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda_1 u + (v^+)^p + (1-\tau)f + \tau f_1, & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v &= \lambda_1 v + (u^+)^q + (1-\tau)g + \tau g_1, & \text{em } \Omega, \\ u &= v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.30}$$

A partir do Teorema 4.4, podemos considerar uma função $\gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ contínua, crescente, tal que se (u,v) é solução de (4.30), então

$$\begin{aligned}\|u\|_{C_0^1(\overline{\Omega})}+\|v\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} &\leq \gamma(\|(1-\tau)f+\tau f_1\|_r+\|(1-\tau)g+\tau g_1\|_r)\\ &\leq \gamma((1-\tau)(\|f\|_r+\|g\|_r)+\tau(\|f_1\|_r+\|g_1\|_r)).\end{aligned}$$

Desde que o conjunto $A=\{(1-\tau)(\|f\|_r+\|g\|_r)+\tau(\|f_1\|_r+\|g_1\|_r);\tau\in[0,1]\}\subset\mathbb{R}^+$ é compacto e γ é contínua temos que $\gamma(s)\leq M$, para todo $s\in A$. Portanto, todas as soluções de (4.30) são uniformemente limitadas por uma constante que depende continuamente de α e $\overline{\alpha}$.

Assim, é possível considerar $R>0$ suficientemente grande de modo que $\phi_\tau(u,v):=(I-H_\tau)(u,v)\neq 0$, para todo $(u,v)\in\partial B_{C_0^1(\overline{\Omega})^2}(0,R)$ e para todo $\tau\in[0,1]$. A partir da propriedade de invariância homotópica, obtemos

$$\begin{aligned}\deg_{LS}(I-T_{(f,g)},B_{C_0^1(\overline{\Omega})^2}(0,R),0) &= \deg_{LS}(\phi_0,B_{C_0^1(\overline{\Omega})^2}(0,R),0)\\ &= \deg_{LS}(\phi_1,B_{C_0^1(\overline{\Omega})^2}(0,R),0)\\ &= \deg_{LS}(I-T_{(f_1,g_1)},B_{C_0^1(\overline{\Omega})^2}(0,R),0). \quad (4.31)\end{aligned}$$

Vejamos que é possível escolher α e $\overline{\alpha}$ suficientemente pequenos de modo que o Lema 4.5 se aplica para

$$a=p(v^+)^{p-1}\ \text{ e }\ b=q(u^+)^{q-1},$$

sendo (u,v) solução arbitrária de (4.1) com (f_1,g_1). Em outras palavras, se tomarmos $\|f_1\|_r$ e $\|g_1\|_r$ pequenas, teremos que $\|u^+\|_\infty$ e $\|v^+\|_\infty$ também tornam-se pequenas, para (u,v) solução de (4.1) com (f_1,g_1).

De fato, dado $\epsilon>0$, desde que γ é contínua e $\gamma(0)=0$, existe $\delta>0$ tal que se $\|f_1\|_r$, $\|g_1\|_r<\delta$, então $\|u\|_\infty+\|v\|_\infty\leq\gamma(\|f_1\|_r+\|g_1\|_r)<\epsilon$.

Seja $\epsilon>0$, fornecido pelo Lema 4.5. Vimos que é possível tomar α e $\overline{\alpha}$ suficientemente pequenos, de modo que $\|a\|_\infty$, $\|b\|_\infty<\epsilon$. Dessa forma, podemos aplicar o Lema 4.5 com $0<c<\min\{\epsilon,\lambda_2-\lambda_1\}$ e concluir que o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcll}-\Delta w &=& \lambda_1 w+\tau p(v^+)^{p-1}z+(1-\tau)cz, & \text{em } \Omega,\\ -\Delta z &=& \lambda_1 z+\tau q(u^+)^{q-1}w+(1-\tau)cw, & \text{em } \Omega,\\ w &=& z=0, & \text{sobre } \partial\Omega,\end{array}\right. \quad (4.32)$$

possui apenas a solução trivial.

Para (u_0,v_0) solução fixada de (4.1) com (f_1,g_1), consideremos a homotopia

$$h_\tau(w,z)=((-\Delta)^{-1}(\lambda_1 w+\tau p(v_0^+)^{p-1}z+(1-\tau)cz),(-\Delta)^{-1}(\lambda_1 z+\tau q(u_0^+)^{q-1}w+(1-\tau)cw)).$$

Note que h_τ é um operador linear compacto, para todo $\tau\in[0,1]$ e $h_1=T'_{(f_1,g_1)}(u_0,v_0)$.

Desde que o sistema (4.32) possui apenas a solução trivial, temos que 1 não é valor característico de h_τ, para todo $\tau\in[0,1]$. Dessa forma, para qualquer $R'>0$, temos que $(I-h_\tau)(w,z)\neq 0$, para todo $(w,z)\in\partial B_{C_0^1(\overline{\Omega})^2}(0,R')$ e para todo $\tau\in[0,1]$. Logo a terna

$(I - h_\tau, B_{C_0^1(\overline{\Omega})^2}(0, R'), 0)$ é admissível, para todo $\tau \in [0,1]$ e para todo $R' > 0$. Aplicando a propriedade de invariância homotópica, temos que

$$\deg_{LS}(I - h_0, B_{C_0^1(\overline{\Omega})^2}(0, R'), 0) = \deg_{LS}(I - h_1, B_{C_0^1(\overline{\Omega})^2}(0, R'), 0), \ \forall\, R' > 0.$$

Pelo Lema 4.6, temos que h_0 possui único valor característico no intervalo $(0,1)$, com multiplicidade algébrica 1.

Aplicando o Lema 2.19, com $L = h_0$ e $\beta = 1$, obtemos

$$\deg_{LS}(I - h_0, B_{C_0^1(\overline{\Omega})^2}(0, R'), 0) = (-1)^1 = -1, \ \forall\, R' > 0.$$

Tendo em vista que $T'_{(f_1,g_1)}(u_0, v_0) = h_1$, segue que

$$\deg_{LS}(I - T'_{(f_1,g_1)}(u_0, v_0), B_{C_0^1(\overline{\Omega})^2}(0, R'), 0) = -1, \ \forall\, R' > 0.$$

Pelo Lema 2.18, deduzimos que

$$\begin{aligned} i(I - T_{(f_1,g_1)}, (u_0, v_0)) &= \deg_{LS}(I - T'_{(f_1,g_1)}(u_0, v_0), B_{C_0^1(\overline{\Omega})^2}(0, R'), 0), \ R' \ll 1 \\ &= -1. \end{aligned}$$

Seja B o conjunto das soluções de $(I - T_{(f_1,g_1)})(u,v) = 0$, em $B_{C_0^1(\overline{\Omega})^2}(0, R)$. Pelo Teorema 2.21, temos que B é um conjunto finito e

$$\begin{aligned} \deg_{LS}(I - T_{(f_1,g_1)}, B_{C_0^1(\overline{\Omega})^2}(0, R), 0) &= \sum_{(u,v)\in B} i(I - T_{(f_1,g_1)}, (u, v)) \\ &= \sum{}' -1 \neq 0. \end{aligned}$$

Por (4.31), segue que $\deg_{LS}(I - T_{(f,g)}, B_{C_0^1(\overline{\Omega})^2}(0, R), 0) \neq 0$. Finalmente, pela propriedade de existência de solução, concluímos que o sistema (4.1) admite solução. Isso conclui a prova do teorema.

□

Apêndice

$\mathcal{A}$

Resultados de topologia diferencial e cálculo avançado

Definição A.1. Sejam $D \subset \mathbb{R}^M$ aberto e $\phi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$. Dizemos que $x \in \overline{D}$ é *ponto regular de* ϕ se $\phi'(x)$ é sobrejetor. Caso contrário, dizemos que x é *ponto crítico de* ϕ. Ainda, $y \in \mathbb{R}^N$ é *valor crítico de* ϕ se $\phi^{-1}(y) \cap \overline{D}$ contém algum ponto crítico de ϕ, caso contrário, y é *valor regular de* ϕ.

Teorema A.2 (**Teorema da divergência**). *[13, Teorema 0.4] Seja $U \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira ∂U de classe C^1 e seja F um campo vetorial de classe C^1 em $\overline{U}$. Então*

$$\int_{\partial U} F(w) \cdot \nu(w)\, d\sigma(w) = \int_U F(x)\, dx,$$

em que $d\sigma$ é a medida de superfície de ∂U.

Teorema A.3 (**Teorema de Sard**). *[14, Lema 1.4] Seja $\phi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$. Então o conjunto dos valores críticos de ϕ tem medida nula em $\mathbb{R}^N$. Consequentemente, o conjunto dos valores regulares de ϕ é denso em $\mathbb{R}^N$.*

Proposição A.4. *[17, Proposição 8, p. 252] Sejam $U \subset \mathbb{R}^M$ aberto e $K \subset U$ compacto. Dados um número $\delta > 0$ e uma aplicação $\phi : U \to \mathbb{R}^N$ de classe C^k, existe uma aplicação $\psi : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$, de classe C^∞, tal que $\|\phi - \psi\|_{C^k} < \delta$ em K, para todo inteiro k não negativo.*

Teorema A.5 (**Ponto Fixo de Banach**). *[11, Teorema 5.4] Seja B um subconjunto fechado de um espaço métrico completo X. Se a aplicação $\phi : B \to B$ é uma contração, então ϕ possui único ponto fixo em B.*

Teorema A.6 (**Teorema do Valor Médio**). *[16, p. 36] Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em um aberto $U \subset \mathbb{R}^N$. Suponha que o segmento de reta $[a, a+h] \subset U$. Então existe $0 < t_0 < 1$ tal que*

$$f(a+h) - f(a) = f'(a + t_0 h) \cdot h.$$

Definição A.7. Uma função $\theta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é *emoliente simétrica positiva* se

(i) $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$;

(ii) $\operatorname{supp}(\theta) \subset \overline{B}_d(0,1)$;

(iii) $\int_{\mathbb{R}^N} \theta(x)\,dx = 1$;

(iv) $\theta(x) = \omega(|x|)$, para alguma função $\omega : [0,\infty) \to \mathbb{R}$;

(v) $\theta(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Proposição A.8. *Existe uma função $\theta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ emoliente simétrica positiva.*

Demonstração: Defina $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{t}\right), & t > 0 \\ 0, & t \leq 0\,. \end{cases}$$

Temos que $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Defina agora, para $x \in \mathbb{R}^N$, $\theta_1(x) = g(1-|x|^2)$. Então $\theta_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Ainda, se $|x| > 1$, então $1 - |x|^2 < 0$, assim $\theta_1(x) = 0$. Portanto $\operatorname{supp}\theta_1 \subset \overline{B}_d(0,1)$.

Para finalizar, defina

$$\theta(x) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \theta_1(x)\,dx\right)^{-1} \theta_1(x),$$

dessa forma

$$\operatorname{supp}\theta \subset\subset \overline{B}_d(0,1) \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \theta(x)\,dx = 1.$$

Se $\omega(t) = c\,g(1-t^2)$, com $c = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \theta_1(x)\,dx\right)^{-1}$, então $\theta(x) = \omega(|x|)$. Dessa forma θ é emoliente simétrica positiva. $\square$

Corolário A.9. *Para todo $\epsilon > 0$, existe uma função não negativa $f_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\operatorname{supp} f_\epsilon \subset B_\rho(0,\epsilon)$ e*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_\epsilon(x)\,dx = 1.$$

Demonstração: Com as notações introduzidas na demonstração da Proposição A.8, tome $f(x) = \theta\left(\frac{x}{\epsilon/2}\right)$, então $\operatorname{supp} f \subset \overline{B}_d(0,\epsilon/2) \subset B_d(0,\epsilon) \subset B_\rho(0,\epsilon)$. Considerando $f_\epsilon(x) = (\frac{2}{\epsilon})^N \theta\left(\frac{x}{\epsilon/2}\right)$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_\epsilon(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \theta(x)\,dx = 1.$$

$\square$

Lema A.10. *Seja $\phi \in C^2(\overline{D},\mathbb{R}^N)$ e seja $(A_{ij}(x))$ a matriz dos cofatores da matriz jacobiana de ϕ no ponto x. Então*

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}(x) = 0,\ \forall\, x \in \overline{D},\ \forall\, i = 1,\ldots,N.$$

Demonstração: Sabemos que se C_j denota a j-ésima coluna de uma matriz C, $N \times N$, então

$$\det(C_1, \ldots, C_N) = \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn} \sigma (C_1^{\sigma(1)}, \ldots, C_N^{\sigma(N)}),$$

em que S_N é o conjunto de N permutações e $\operatorname{sgn} \sigma$ é o sinal de σ.

Se $C_j \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$, então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j} \det(C_1, \ldots, C_N) &= \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn} \sigma \frac{\partial}{\partial x_j} (C_1^{\sigma(1)}, \ldots, C_N^{\sigma(N)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn} \sigma \sum_{k=1}^{N} (C_1^{\sigma(1)}, \ldots, \frac{\partial C_k^{\sigma(k)}}{\partial x_j}, \ldots, C_N^{\sigma(N)}) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn} \sigma (C_1^{\sigma(1)}, \ldots, \frac{\partial C_k^{\sigma(k)}}{\partial x_j}, \ldots, C_N^{\sigma(N)}) \\
&= \det(\frac{\partial C_1}{\partial x_j}, \ldots, C_N) + \cdots + \det(C_1, \ldots, \frac{\partial C_N}{\partial x_j}).
\end{aligned}$$

Fixe i, ponha $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ e denote a coluna

$$\phi_{x_k} = (\partial_k \phi_1, \ldots, \partial_k \phi_{i-1}, \partial_k \phi_{i+1}, \ldots, \partial_k \phi_N).$$

Dessa forma a matriz (A_{ij}) é dada por

$$A_{ij}(x) = (-1)^{i+j} \det(\phi_{x_1}, \ldots, \phi_{x_{j-1}}, \hat{\phi}_{x_j}, \phi_{x_{j+1}}, \ldots, \phi_{x_N}).$$

Derivando em relação a x_j, obtemos

$$\partial_j A_{ij}(x) = (-1)^{i+j} \sum_{k=1}^{N} \det(\phi_{x_1}, \ldots, \hat{\phi}_{x_j}, \ldots, \phi_{x_{k-1}}, \partial_j \phi_k, \phi_{x_{k+1}}, \ldots, \phi_{x_N}).$$

Seja $c_{kj} = \det(\partial_j \phi_{x_k}, \phi_{x_1}, \ldots, \hat{\phi}_{x_j}, \ldots, \hat{\phi}_{x_k}, \ldots, \phi_{x_N})$. Como ϕ é de classe C^2, temos que $\partial_j \partial_k \phi = \partial_k \partial_j \phi$, portanto $c_{kj} = c_{jk}$. Com essa notação, podemos escrever

$$\begin{aligned}
(-1)^{i+j} \partial_j A_{ij}(x) &= \sum_{k<j} (-1)^{k-1} c_{kj} + \sum_{k>j} (-1)^{k-2} c_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \sigma_{kj} c_{kj},
\end{aligned}$$

com $\sigma_{kj} = 1$, para $k < j$, $\sigma_{jj} = 0$ e $\sigma_{kj} = -\sigma_{jk}$. Portanto, para i fixado,

$$\begin{aligned}
(-1)^i \sum_{j=1}^{N} \partial_j A_{ij}(x) &= \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k-1+i}\sigma_{kj}c_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(-1)^{i-1+k}\sigma_{jk}c_{jk} \\
&= -\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k-1+i}\sigma_{kj}c_{kj}.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\sum_{j=1}^{N} \partial_j A_{ij}(x) = 0.$$

□

Proposição A.11. *Seja* $\phi \in C^2(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ *e seja* $v \in C_c^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ *tal que* $\operatorname{supp}(v) \cap \phi(\partial D) = \emptyset$. *Então existe* $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ *tal que*

$$\operatorname{div} u(x) = J_\phi(x) \operatorname{div} v(\phi(x)).$$

Demonstração: Seja $(A_{ij}(x))$ a matriz dos cofatores de $\phi'(x)$. Considere

$$u_i(x) = \sum_{j=1}^{N} v_j(\phi(x)) A_{ji}(x).$$

Afirmação: $\operatorname{supp} u_i \cap \overline{D} \subset \phi^{-1}(\operatorname{supp} v) \cap \overline{D} \subset D$.

De fato, se $x \in \overline{D}$ é tal que $u_i(x) \neq 0$, então existe j tal que $v_j(\phi(x)) \neq 0$. Assim $\phi(x) \in \operatorname{supp} v_j \subset \operatorname{supp} v$ e, portanto, $x \in \phi^{-1}(\operatorname{supp} v)$. Mais ainda, $\phi^{-1}(\operatorname{supp} v)$ é fechado, logo $\operatorname{supp} u_i \cap \overline{D} \subset \phi^{-1}(\operatorname{supp} v) \cap \overline{D}$. Por hipótese, $\phi^{-1}(\operatorname{supp}) \cap \partial D = \emptyset$, dessa forma $\phi^{-1}(\operatorname{supp} v) \cap \overline{D} \subset D$, donde concluímos que $\operatorname{supp} u_i \cap \overline{D} \subset D$.

Claramente $u = (u_1, \ldots, u_N) \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$, portanto $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. Mostremos agora que $\operatorname{div} u(x) = J_\phi(x) \operatorname{div} v(\phi(x))$. Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x) &= \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}((v_j \circ \phi) A_{ji})(x) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \left[A_{ji}(x) \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial v_j}{\partial x_k}(\phi(x)) \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}(x) + v_j(\phi(x)) \frac{\partial A_{ji}}{\partial x_i}(x) \right] \\
&= \sum_{j,k}^{N} A_{ji}(x) \frac{\partial v_j}{\partial x_k}(\phi(x)) \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}(x) + \sum_{j=1}^{N} v_j(\phi(x)) \frac{\partial A_{ji}}{\partial x_i}(x).
\end{aligned}$$

Pelo Lema A.10, temos

$$\sum_{i,j}^{N} \frac{\partial A_{ji}}{\partial x_i}(x) v_j(\phi(x)) = \sum_{j=1}^{N} v_j(\phi(x)) \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial A_{ji}}{\partial x_i}(x) = 0,$$

consequentemente,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} u(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x) &= \sum_{i,j,k}^{N} A_{ji}(x) \frac{\partial v_j}{\partial x_k}(\phi(x)) \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}(x) \\
&= \sum_{j,k}^{N} \frac{\partial v_j}{\partial x_k}(\phi(x)) \sum_{i=1}^{N} A_{ji}(x) \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}(x) \\
&= \sum_{j,k}^{N} \frac{\partial v_j}{\partial x_k}(\phi(x)) \delta_{j,k} J_{\phi}(x) \qquad \text{(A.1)} \\
&= J_{\phi}(x) \operatorname{div} v(\phi(x)),
\end{aligned}$$

sendo $\delta_{j,k}$ o delta de Kronecker. Observe que na igualdade (A.1), usamos o fato de que $A(x)^t \phi'(x) = I \det \phi'(x)$, em que $A(x) = (A_{ij}(x))$, $A(x)^t = (A_{ji}(x))$ e I é a aplicação identidade do $\mathbb{R}^N$. $\square$

Apêndice

$\mathcal{B}$

Resultados de análise funcional

No decorrer deste apêndice, vamos assumir que E é um espaço de Banach real, munido da norma $\|\cdot\|_E$.

Definição B.1. Seja $L : E \to E$ um operador linear, limitado. O *espectro de L* é o conjunto

$$\sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{R};\ L_\lambda = \lambda I - L \text{ não é bijetor}\}.$$

Lema B.2. *[11, Proposição 30.2] Seja $L : E \to E$ um operador linear compacto. Então, para todo $\epsilon > 0$, o número de autovalores λ de L (contados com multiplicidade) com $|\lambda| \geq \epsilon$ é finito.*

Proposição B.3. *[6, Lema 15.7 e Teorema 15.9] Se $L : E \to E$ é um operador linear compacto, então $\dim\ker(I - L) < \infty$ e $\mathrm{Im}(I - L)$ é fechado.*

Proposição B.4. *[6, Teorema 15.11] Se $L : E \to E$ é um operador compacto e $\lambda \in \sigma(L)$ é não nulo, então λ é um autovalor de L.*

Lema B.5 (Lema de Riesz). *[11, Lema 2.1] Seja $X \subset E$ subespaço fechado próprio. Então, para cada $0 < \alpha < 1$ existe $w \in E \setminus X$ com $\|w\|_E = 1$ e $\inf_{x\in X} \|w - x\|_E \geq \alpha$.*

Teorema B.6 (Representação de Riesz). *[11, Teorema 19.1] Seja H um espaço de Hilbert e f um funcional linear limitado em H. Então existe único $x_0 \in H$ tal que $f(x) = \langle x, x_0\rangle$, para todo $x \in H$, sendo $\langle\ ,\ \rangle$ o produto interno de H.*

Definição B.7. Considere E, F espaços de Banach, um aberto $U \subset E$ e uma aplicação $f : U \to F$. A aplicação f é *Gâteaux diferenciável em $x_0 \in U$* se existe um operador linear limitado $L : E \to F$ tal que

$$Lx = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t}, \tag{B.1}$$

para todo $x \in E$. O operador L é a *derivada de Gâteaux de f em x_0* e é denotada por $f'(x_0)$. Se o limite em (B.1) é uniforme na esfera unitária de E, dizemos que f é *Fréchet diferenciável em x_0* (ou simplesmente diferenciável em x_0) e $f'(x_0)$ é a derivada de Fréchet de f em x_0.

Proposição B.8. *[3, Teorema 2.1.13] Se f é Gâteaux diferenciável e a aplicação $x \mapsto f'(x)$ é contínua, então f é continuamente diferenciável.*

Teorema B.9 (Teorema da Aplicação Inversa). *[3, Teorema 3.1.5] Suponha que f é uma aplicação de classe C^1 em uma vizinhança de algum ponto x_0 de um espaço de Banach E, com imagem num espaço de Banach F. Se $f'(x_0) : E \to F$ é um isomorfismo, então f é um difeomorfismo local de uma vizinhança $U(x_0)$ em $f(U(x_0))$.*

Proposição B.10. *Seja $T : E \to E$ uma aplicação compacta e diferenciável em x_0. Então $T'(x_0)$ é um operador linear compacto e, portanto, existe apenas um número finito de valores característicos de $T'(x_0)$ contidos em $(0, 1)$ e cada um tem multiplicidade algébrica finita.*

Demonstração: Podemos assumir que T é diferenciável em 0 e que $T(0) = 0$, pois caso contrário, podemos considerar $S(x) = T(x_0 + x) - T(x_0)$, aplicar o argumento para S e usar que $S'(0) = T'(x_0)$.

Vamos supor que $T'(0)$ não é um operador compacto e mostrar que T não é uma aplicação compacta.

Suponha que existe um conjunto limitado $B \subset E$ tal que $\overline{T'(0)(B)}$ não é compacto em E. Isto implica que existe uma sequência $(x_n) \subset B$ para a qual $(T'(0)x_n)$ não possui subsequência convergente em E.

A ideia é mostrar que a sequência $(T(x_n))$ tem a mesma propriedade de $(T'(0)x_n)$, dessa forma T não será compacta em E.

A menos de multiplicação por constante, podemos assumir que $\|x_n\|_E \leq 1$, para todo n. A completude de E, implica que $(T'(0)x_n)$ não possui subsequência de Cauchy em E, ou seja, existe $\eta > 0$ tal que, excetuando um número finito de índices n, m, tem-se

$$\|T'(0)x_n - T'(0)x_m\|_E > \eta, \ n \neq m.$$

Por definição de diferenciabilidade em 0, existe $\delta > 0$ tal que se $\|x\|_E < \delta$, então

$$\|T(x) - T'(0)x\|_E \leq \frac{\eta}{3}\|x\|_E.$$

Vejamos que a sequência $(T(\delta x_n))$ não possui subsequência de Cauchy. De fato, para $n \neq m$,

$$\begin{aligned}
\|T(\delta x_n) - T(\delta x_m)\|_E &= \|T'(0)(\delta x_n) - T'(0)(\delta x_m) + (T(\delta x_n) - T'(0)(\delta x_n)) + \\
&\quad +(-T(\delta x_m) + T'(0)(\delta x_m)\|_E \\
&\geq \|T'(0)(\delta x_n) - T'(0)(\delta x_m)\|_E - \|T(\delta x_n) - T'(0)(\delta x_n)\|_E - \\
&\quad -\|T(\delta x_m) - T'(0)(\delta x_m)\|_E \\
&\geq \delta\eta - \frac{\eta}{3}\|\delta x_n\|_E - \frac{\eta}{3}\|\eta x_m\|_E \\
&\geq \delta\eta - \frac{2\delta\eta}{3} = \frac{\eta\delta}{3}.
\end{aligned}$$

Assim $(T(\delta x_n))$ não possui subsequência convergente. Desde que (δx_n) é limitada $(\|\delta x_n\|_E \leq \delta$, para todo $n)$, segue que T não é compacta.

Para concluir, como consequência do fato de $T'(0)$ ser um operador compacto, temos que o número de valores característicos de $T'(0)$ no intervalo $(0,1)$ é finito e cada um tem multiplicidade finita. De fato, $\mu \in (0,1)$ é valor característico de $T'(0)$ se, e somente se, $\frac{1}{\mu} > 1$ é autovalor de $T'(0)$. Do Lema B.2, segue o resultado. □

Lema B.11. *Seja $L : E \to E$ um operador linear compacto e μ um valor característico de L. Então as sequências*

$$\ker(I - \mu L) \subset \ker(I - \mu L)^2 \subset \cdots \tag{B.2}$$

$$\mathrm{Im}(I - \mu L) \supset \mathrm{Im}(I - \mu L)^2 \supset \cdots \tag{B.3}$$

são estacionárias. Mais precisamente, existe um inteiro positivo k, tal que

$$\ker(I - \mu L)^{k-1} \neq \ker(I - \mu L)^k = \ker(I - \mu L)^{k+n},\ \forall\, n \geq 1;$$
$$\mathrm{Im}(I - \mu L)^{k-1} \neq \mathrm{Im}(I - \mu L)^k = \mathrm{Im}(I - \mu L)^{k+n},\ \forall\, n \geq 1.$$

Demonstração: Suponha que $\ker(I - \mu L)^i \neq \ker(I - \mu L)^{i+1}$, para todo $i \geq 1$.

Para cada i, como $\ker(I - \mu L)^{i-1}$ é subespaço fechado de $\ker(I - \mu L)^i$ e próprio, podemos usar o Lema de Riesz com $\alpha = \frac{1}{2}$ e encontrar $w_i \in \ker(I - \mu L)^i \setminus \ker(I - \mu L)^{i-1}$ tal que $\|w_i\|_E = 1$ e $\rho(w_i, \ker(I - \mu L)^{i-1}) \geq \frac{1}{2}$.

Para cada $i > j$, temos

$$\begin{aligned}
\mu\|Lw_j - Lw_i\|_E &= \|(w_j - \mu Lw_j) - w_j + (w_i - \mu Lw_i) - w_i\|_E \\
&= \|(I - \mu L)w_j - w_j + (I - \mu L)w_i - w_i\|_E \\
&\geq \rho(w_i, \ker(I - \mu L)^{i-1}) \geq \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Observe que $(I - \mu L)w_j - w_j + (I - \mu L)w_i \in \ker(I - \mu L)^{i-1}$, pois se $L_\mu := I - \mu L$, então

$$L_\mu^{i-1}(L_\mu w_j - w_j + L_\mu w_i) = L_\mu^i(w_j) - L^{i-1}(w_j) + L_\mu^i(w_i) = 0,$$

isto justifica a desigualdade (B.4).

Assim, a sequência (Lw_i) não contém subsequência convergente, contradizendo a compacidade de L. Essa contradição mostra que $\ker L_\mu^j = \ker L_\mu^{j+1}$, para algum j. De fato, $\ker L_\mu^i = \ker L_\mu^{i+1}$, para todo $i > j$. Para $x \in \ker L_\mu^{i+1}$, temos

$$L_\mu^{m+1}(L_\mu^{i-m}x) = L_\mu^{i+1}x = 0.$$

Assim,$L_\mu^{i-m}x \in \ker L_\mu^{m+1} = \ker L_\mu^m$. Consequentemente,

$$0 = L_\mu^m(L_\mu^{i-m}x) = L_\mu^i x,$$

donde concluímos que $x \in \ker L_\mu^i$, portanto $\ker L_\mu^{i+1} = \ker L_\mu^i$. Portanto a sequência (B.2) é estacionária.

Para ver que (B.3) é também estacionária, devemos usar a proposição B.3 para concluir que $\mathrm{Im}(L - \lambda I)^i$ é fechado para todo i e, assim, aplicar um argumento similar ao que usamos em B.2.

Seja k o menor inteiro tal que $\ker(I - \mu L)^k = \ker(I - \mu L)^{k+n}$, para todo $n \geq 1$ e l o menor inteiro tal que $\mathrm{Im}(I - \mu L)^l = \mathrm{Im}(I - \mu L)^{l+n}$, para todo $n \geq 1$. Veremos a seguir que $k = l$.

Afirmação 1: $\ker(I - \mu L)^k \cap \mathrm{Im}(I - \mu L)^k = \{0\}$.

De fato, se $w = L_\mu^k(x)$, $x \in E$ e $L_\mu^k(w) = 0$, então $L_\mu^{2k}(x) = 0$. Como $\ker L_\mu^k = \ker L_\mu^{2k}$, temos que $w = L_\mu^k(x) = 0$. Logo vale a afirmação.

Afirmação 2: $k = l$.

Suponha $l > k$, então $\ker L_\mu^l = \ker L_\mu^k$ e $\mathrm{Im}\, L_\mu^l \subsetneq \mathrm{Im}\, L_\mu^k$, assim podemos encontrar $w \in (\mathrm{Im}\, L_\mu^{l-1} \setminus \mathrm{Im}\, L_\mu^l) \subset \mathrm{Im}\, L_\mu^k$ e, dessa forma, $L_\mu(w) \in \mathrm{Im}\, L_\mu^l = L_\mu(\mathrm{Im}\, L_\mu^l)$, isto é, existe $z \in \mathrm{Im}\, L_\mu^l$ tal que $L_\mu(w - z) = 0$. Assim $w - z \in (\ker L_\mu) \cap \mathrm{Im}\, L_\mu^k \subset (\ker L_\mu^k) \cap \mathrm{Im}\, L_\mu^k = \{0\}$, ou seja, $w = z$, que é uma contradição, pois $w \notin \mathrm{Im}\, L_\mu^l$. Portanto $l \leq k$.

Suponha que $l < k$, então $\mathrm{Im}\, L_\mu^l = \mathrm{Im}\, L_\mu^k$ e $\ker L_\mu^l \subsetneq \ker L_\mu^k$. Então existem $x, w \in E$, tais que $L_\mu^k(x) = 0$ e $0 \neq L_\mu^l(x) = L_\mu^k(w)$ e portanto $0 = L_\mu^k(x) = L_\mu^{k-l+l}(x) = L_\mu^{2k-l}(w)$, isto é, $w \in \ker L_\mu^{2k-l} = \ker L_\mu^k$, que é uma contradição. Portanto $k \leq l$. Dessa forma, temos $k = l$. Isso conclui a prova do lema. $\square$

Corolário B.12. *Considere $L : E \to E$ um operador linear compacto e para μ, valor característico de L, ponha $L_\mu = I - \mu L$. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) *existe um menor inteiro $k = k(\mu)$, tal que*

$$E = \ker L_\mu^k \oplus \mathrm{Im}\, L_\mu^k$$

(ii) $\ker L_\mu^k$ *e* $\mathrm{Im}\, L_\mu^k$ *são invariantes por L.*

(iii) $\ker L_\mu^{k(\mu)} \subset \mathrm{Im}\, L_\lambda^{k(\lambda)}$*, se $\mu \neq \lambda$ são valores característicos de L.*

Demonstração:

(i) Pela afirmação 1, feita na demonstração do Lema B.11, temos que $\ker L_\mu^k \cap \mathrm{Im}\, L_\mu^k = \{0\}$.

Ainda, se $x \in E$, então $L_\mu^k(x) \in L_\mu^k(\mathrm{Im}\, L_\mu^k)$, ou seja, existe $w \in \mathrm{Im}\, L_\mu^k$ tal que $L_\mu^k(x) = L_\mu^k(w)$. Assim, se $z = x - w$, então

$$L_\mu^k(z) = L_\mu^k(x) - L_\mu^k(w) = 0,$$

logo $z \in \ker L_\mu^k$. Dessa forma $x = z + w$, com $z \in \ker L_\mu^k$ e $w \in \mathrm{Im}\, L_\mu^k$, portanto $E = \ker L_\mu^k \oplus \mathrm{Im}\, L_\mu^k$.

(ii) Observe inicialmente que $L_\mu^k L = LL_\mu^k$. Agora, se $x \in \ker L_\mu^k$, então $L_\mu^k(x) = 0$, assim $L_\mu^k L(x) = LL_\mu^k(x) = 0$, isto é $L(x) \in \ker L_\mu^k$. Ainda, se $w \in \operatorname{Im} L_\mu^k$, então existe $x \in E$, tal que $L_\mu^k(x) = w$, assim $L(w) = LL_\mu^k(w) = L_\mu^k L(w) \in \operatorname{Im} L_\mu^k$. Portanto, $\ker L_\mu^k$ e $\operatorname{Im} L_\mu^k$ são invariantes por L.

(iii) Considere $p = k(\mu)$ e $q = k(\lambda)$ os inteiros obtidos no Lema B.11. Dado $x \in \ker L_\mu^p$, pelo item (i), temos uma representação $x = w + z$, com $w \in \operatorname{Im} L_\lambda^q$ e $z \in \ker L_\lambda^q$, assim $0 = L_\mu^p(x) = L_\mu^p(w) + L_\mu^p(z)$. De modo semelhante ao que fizemos no item (ii), pode-se mostrar que $\ker L_\lambda^q$ e $\operatorname{Im} L_\lambda^q$ são invariantes por L_μ^p. Ainda, não é difícil mostrar que $\ker L_\mu^p \cap \ker L_\lambda^q = \{0\}$, garantindo que $L_\mu^p|_{\ker L_\lambda^q}$ é injetora.

Como $L_\mu^p(w) = -L_\mu^p(z)$, pela invariância, temos $L_\mu^p(w) \in \operatorname{Im} L_\lambda^q \cap \ker L_\lambda^q = \{0\}$. Dessa forma, $L_\mu^p(z) = 0$ e da injetividade de L_μ^p em $\ker L_\lambda^q$, segue que $z = 0$. Logo $x = w \in \operatorname{Im} L_\lambda^q$. Portanto, $\ker L_\mu^p \subset \operatorname{Im} L_\lambda^q$.

$\square$

Apêndice C

Espaços de Sobolev

Definição C.1. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, m um inteiro não negativo e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o *espaço de Sobolev* $W^{m,p}(\Omega)$ como sendo

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq m\},$$

em que $\partial^\alpha u$ é a derivada distribucional de u de ordem $|\alpha|$, sendo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ um multi-índice com $|\alpha| = \sum_{i=1}^N |\alpha_i|$ e

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Introduzimos uma norma natural em $W^{m,p}(\Omega)$ dada por

$$\|u\|_{m,p} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_p.$$

Definição C.2. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, m um inteiro não negativo e $1 \leq p \leq \infty$. O espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ é definido como sendo o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ na norma $\|\cdot\|_{m,p}$, isto é

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p}}.$$

Observação C.3. Os espaços $W^{m,p}(\Omega)$ são espaços de Banach com a norma $\|\cdot\|_{m,p}$. Quando $p = 2$, vamos denotar $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$, isto é, $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$. Ainda, os espaços $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^m} := \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega \partial^\alpha u \, \partial^\alpha v \, dx, \ \forall \, u, v \in H^m(\Omega).$$

Observação C.4. Denotamos o dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ por $W^{-1,p'}(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$, sendo p' o conjugado de p. Em particular, denotamos o dual de $H_0^1(\Omega)$ por $H^{-1}(\Omega)$.

Vejamos a seguir alguns resultados sobre imersões de Sobolev do tipo $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$. Talvez a mais natural delas é a imersão $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$. Nessa perspectiva, temos os seguintes resultados:

Teorema C.5. *[1, Teorema 4.12] Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suave, então existem as seguintes imersões:*

(i) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q$, *se* $mp < N$ *e* $p \leq q \leq \frac{Np}{N-mp}$;

(ii) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *se* $mp = N$ *e* $p \leq q < \infty$;

(iii) $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\overline{\Omega})$, *se* $mp > N > (m-1)p$ *e* $0 < \lambda \leq m - \frac{N}{p}$, *em que*

$$C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}) := \{u \in C^j(\overline{\Omega});\ |\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(z)| \leq C|x-z|, \forall\, x, z \in \overline{\Omega},\ 0 \leq |\alpha| \leq j\}.$$

Teorema C.6. *[1, Teorema 1.34] Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, então a imersão $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$, $0 < \lambda < 1$, é compacta.*

Teorema C.7 (Rellich-Kondrachov). *[1, Teorema 6.3] Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suave, limitado, então a imersão*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

é compacta para todo $q \in [1, p^*)$, em que $p^* = \frac{Np}{N-p}$, para $p < N$.

Teorema C.8 (Desigualdade de Poincaré). *[4, Corolário 9.19] Suponha que $1 \leq p < \infty$ e que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto, limitado. Então existe uma constante C (dependendo de Ω e p) tal que*

$$\|u\|_p \leq C\|\nabla u\|_p,\ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Em particular, a expressão $\|\nabla u\|_p$ é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$ que é equivalente à norma $\|u\|_{1,p}$; sobre $H_0^1(\Omega)$ a expressão $\sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx$ é um produto interno que induz a norma $\|\nabla u\|_2$, que é equivalente a norma $\|u\|_{H^1}$.

Teorema C.9 (Agmon, Douglis, Nirenberg). *[18, Teorema 3, p.230] Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio de classe C^2, limitado e $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x), \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

com $f \in L^s$, $s \in (1, +\infty)$, então $u \in W^{2,s}(\Omega)$ e vale a desigualdade

$$\|u\|_{2,s} \leq C\|f\|_s.$$

Teorema C.10 (Desigualdade de Young com ϵ). *Dados $1 < p, p' < \infty$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $a, b > 0$ e $\epsilon > 0$, temos:*

$$ab \leq \epsilon a^p + C(\epsilon) b^{p'},$$

sendo $C(\epsilon) = \frac{1}{(\epsilon p)^{\frac{p'}{p}} p'}$.

Demonstração: Esta desigualdade é uma consequência da desigualdade de Young: $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$. □

Teorema C.11 (Desigualdade de Hölder). *[1, Teorema 2.4] Seja $1 < p < \infty$ e p' seu expoente conjugado, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^{p'}(\Omega)$, então $u, v \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega uv\,dx \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}.$$

Teorema C.12 (Teorema da Convergência Dominada). *[1, Teorema 1.50] Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$. Suponha que*

(i) *$f_n(x) \to f(x)$, q.t.p. em Ω;*

(ii) *existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$, q.t.p. em Ω.*

Então $f \in L^1(\Omega)$ e $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Apêndice

$\mathcal{D}$

O operador Laplaciano

Teorema D.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, limitado e suave. Então*

(i) $-\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ *é um operador linear limitado;*

(ii) $-\Delta : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ *é um operador linear invertível.*

Demonstração:

(i) Claramente $-\Delta$ é um operador linear. Se $\|\cdot\|_{H^{-1}(\Omega)}$ denota a norma em $H^{-1}(\Omega)$, então

$$\begin{aligned}
\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} &= \sup_{\|\varphi\|=1} \left| \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \right| \\
&\leq \sup_{\|\varphi\|=1} \int_\Omega |\nabla u| \, |\nabla \varphi| \, dx \\
&\leq \sup_{\|\varphi\|=1} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla \varphi|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sup_{\|\varphi\|=1} \|u\| \, \|\varphi\| = \|u\|.
\end{aligned}$$

Logo $-\Delta$ é um operador limitado.

(ii) Mostrar que o operador $-\Delta$ é invertível equivale a mostrar que para cada $f \in L^2(\Omega)$, a equação

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{D.1}$$

possui única solução fraca em $H_0^1(\Omega)$.

A existência de única solução fraca de (D.1) equivale à existência de único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx := F(v), \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega),$$

sendo $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ um funcional linear.

Vejamos que F pertence ao dual de $H_0^1(\Omega)$. De fato, usando a desigualdade de Hölder e a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, temos

$$|F(v)| \leq \int_\Omega |fv|\,dx \leq \|f\|_2\|v\|_2 \leq C\|f\|_2\|v\|.$$

Portanto F é limitado e assim F está no dual de $H_0^1(\Omega)$. Pelo teorema de representação de Riesz, existe único vetor $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $F(v) = \langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega)}$, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Daí concluímos que o operador $-\Delta$ é invertível. Isso conclui a prova do item (ii).

□

Os dois resultados seguintes podem ser encontrados em [12] (p. 335 e 336).

Teorema D.2. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, então o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{D.2}$$

possui uma sequência de autovalores

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_j \leq \cdots$$

tal que $\lambda_j \to \infty$, quando $j \to \infty$. Para cada j, temos a seguinte caracterização variacional dos λ_j:

$$\lambda_j = \inf_{u \in X_j \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}{\int_\Omega u^2\,dx},$$

sendo $X_j = [\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_j]^\perp$, em que cada φ_i é uma autofunção associada a λ_i. Além disso, as autofunções $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ formam uma base ortogonal de $H_0^1(\Omega)$.

Teorema D.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, λ_1 o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ e φ_1 uma autofunção associada a esse autovalor. Então*

(i) *$\varphi_1 > 0$ ou $\varphi_1 < 0$ em Ω;*

(ii) *se ψ é uma λ_1-autofunção, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\psi = \alpha\varphi_1$. Consequentemente, λ_1 é um autovalor simples de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.*

(iii) *se Ω é suave, então $\varphi_1 \in C^\infty(\overline{\Omega})$.*

Teorema D.4. *[9, Proposição 1.10] Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, então o problema de autovalor com peso*

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu a(x) u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{D.3}$$

em que a função peso $a : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *pertence a* $L^r(\Omega)$, *para algum* $r > \frac{N}{2}$, *possui uma sequência dupla de autovalores*

$$\cdots \leq \mu_{-2} \leq \mu_{-1} < 0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots .$$

Teorema D.5. *[9, Teorema 1.13] Seja* $a \in L^r(\Omega)$, *para algun* $r > \frac{N}{2}$. *Suponha que* $a > 0$ *em um subconjunto de* Ω *com medida positiva. Então o primeiro autovalor* $\mu_1(a)$ *de* (D.3) *é simples.*

Teorema D.6. *[9, Proposição 1.12] Sejam* $a, \widehat{a} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *funções em* $L^r(\Omega)$, *para* $r > \frac{N}{2}$, *tais que* $a(x) \leq \widehat{a}(x)$ *para todo* $x \in \Omega$. *Suponha que para algum* $j \in \mathbb{Z}$, *os autovalores* $\mu_j(a)$ *e* $\mu_j(\widehat{a})$ *existem. Então*

$$\mu_j(a) \geq \mu_j(\widehat{a}). \tag{D.4}$$

Além disso, se $a < \widehat{a}$ *num subconjunto de medida positiva em* Ω, *então a desigualdade* (D.4) *é estrita.*

Lema D.7 (Lema de Hopf). *[12, p. 330] Assuma que* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. *Suponha que* $-\Delta u \leq 0$ *em* Ω *e que existe* $x_0 \in \partial\Omega$ *tal que* $u(x_0) > u(x)$, *para todo* $x \in \Omega$. *Suponha, ainda, que* Ω *satisfaz a condição da bola interior em* x_0, *isto é, existe uma bola* $B \subset \Omega$ *com* $x_0 \in \partial B$. *Então*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0,$$

em que ν *é o vetor normal, exterior a* B *em* x_0.

Lema D.8. *[4, Teorema 9.32] Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio de classe* C^2 *com* $\partial\Omega$ *limitada. Seja* $1 < s < \infty$. *Então o operador* $-\Delta + I : W^{2,s}(\Omega) \cap W_0^{1,s}(\Omega) \to L^s(\Omega)$ *é um isomorfismo.*

Com base na teoria de operadores de Fredholm em espaços de Banach, apresentada no capítulo 6 em [4], podemos destacar um fato relevante, que nos auxiliará na prova do próximo resultado: se $L : E \to F$ é um isomorfismo do espaço de Banach E no espaço de Banach F e $S : E \to F$ é um operador linear compacto, então $S + L$ é injetor se, e somente se, é sobrejetor.

Teorema D.9. *Seja* Ω *um domínio suave e* $1 < p < \infty$. *Então o operador*

$$-\Delta - \lambda_1 I : W_*^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \to L_*^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$$

é um isomorfismo, sendo

$$W_*^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) = \left\{ u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega); \int_\Omega u\varphi_1 \, dx = 0 \right\}$$

e

$$L_*^{\frac{p+1}{p}}(\Omega) = \left\{ u \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega); \int_\Omega u\varphi_1 \, dx = 0 \right\}.$$

Demonstração: Vejamos, inicialmente, que o operador

$$-\Delta + I : W_*^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \to L_*^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$$

é um isomorfismo. Para tanto, basta verificar que tal operador é bijetor. Pelo Lema D.8, dada $f \in L_*^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$, existe única solução $u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= f, \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{D.5}$$

Testando a equação (D.5), com φ_1, concluímos que $\int_\Omega u\varphi_1\, dx = 0$. Assim $u \in W_*^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$. Logo $-\Delta + I$ é um operador bijetor de $W_*^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ em $L_*^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$.

Agora, pelo Teorema C.7, temos que a imersão $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ é compacta e, portanto, a imersão $W_*^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L_*^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ é também compacta. Assim o operador

$$(-\lambda_1 - 1)I : W_*^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \cap W_0^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \to L_*^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$$

é compacto. Dessa forma, temos que

$$-\Delta - \lambda_1 I = (-\Delta + I) + ((-\lambda_1 - 1)I) : W_*^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \cap W_0^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \to L_*^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$$

é injetor se, e somente se, é sobrejetor.

Pelo item (ii) do Teorema D.3, temos que se $u \in W_*^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ é solução de

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda_1 u, \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

então $u = \alpha\varphi_1$. Desde que $u \in W_*^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$, temos que $0 = \int_\Omega u\varphi_1\, dx = \alpha \int_\Omega \varphi_1^2\, dx$. Logo, $\alpha = 0$ e, portanto, $u = 0$. Isso mostra que $-\Delta - \lambda_1 I$ é injetor, portanto, é também sobrejetor.

Desde que vale a desigualdade

$$\|\Delta u + \lambda_1 u\|_{\frac{p+1}{p}} \leq \|\Delta u\|_{\frac{p+1}{p}} + \lambda_1 \|u\|_{\frac{p+1}{p}} \leq C\|u\|_{2,\frac{p+1}{p}},$$

segue que $-\Delta - \lambda_1 I$ é limitado, logo é um isomorfismo.

□

Referências Bibliográficas

[1] Adams, R. A.; Fournier, J. J. F.; *Sobolev spaces*, 2ª Ed., Elsevier, Netherlands, 2003.

[2] Ambrosetti, A.; Malchiodi, A.; *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems*, Cambridge University Press, New York, 2007.

[3] Berger, M. S.; *Nonlinearity and functional analysis*, Academic Press, New York, 1977.

[4] Brezis, H.; *Functional analysis, sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, New York, 2011.

[5] Brezis, H.; Turner, R. E. L.; *On a class of superlinear elliptic problems*, Communications in Partial Differential Equations, p. 601-614, 1977.

[6] Brown, R. F.; *A topological introduction to nonlinear analysis*, 2ª Ed., Springer, New York, 2004.

[7] Clément, Ph.; De Figueiredo, D. G.; Mitidieri, E.; *A priori estimates for positive solutions of semilinear elliptic systems via Hardy-Sobolev inequalities*, Nonlinear partial differential equations, Pitman Res. Notes Math. Ser., 343, p. 73-91, 1996.

[8] Cuesta, M.; De Figueiredo, D. G.; Srikanth, P. N.; *On a resonant-superlinear elliptic problem*, Springer-Verlag, v. 17, p. 221-233, 2003.

[9] De Figueiredo, D. G.; *Positive solutions of semilinear elliptic problems*, Universidade de Brasília, Brasília, 1981.

[10] Deimling, K.; *Nonlinear functional analysis*, Springer, Berlin, 1985.

[11] De Oliveira, C. R.; *Introdução à análise funcional*, IMPA, Rio de Janeiro, 2012.

[12] Evans, L. C.; *Partial differential equations*, AMS, Providence, 1998.

[13] Folland, G. B.; *Introduction to partial differential equations*, Princeton University Press, Princeton, 1995.

[14] Fonseca, I.; Gangbo, W.; *Degree theory in analysis and applications*, Oxford University Press, New York, 1995.

[15] Hounie J.; *Teoria elementar das distribuições*, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[16] Lima, E. L.; *Análise no espaço* $\mathbb{R}^n$, IMPA, Rio de Janeiro, 2004.

[17] Lima, E. L.; *Variedades diferenciáveis*, IMPA, Rio de Janeiro, 2010.

[18] Mitrović, D.; Žubrinić, D.; *Fundamentals of applied functional analysis*, Addison Wesley Longman Limited, Boston, 1998.