UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL ï PROFMAT

FÁBIO LEANDRO CRUZADO

ATIVIDADES PRÁTICAS PARA O ENSINO DO CONCEITO DE TANGENTE NO 9° ANO

SÃO CARLOS

2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL ï PROFMAT

FÁBIO LEANDRO CRUZADO

ATIVIDADES PRÁTICAS PARA O ENSINO DO CONCEITO DE TANGENTE NO 9° ANO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São Carlos como exigência parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Orientador: Professor Doutor José Antonio Salvador

SÃO CARLOS

2016

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C957a

Cruzado, Fábio Leandro
Atividades práticas para o ensino do conceito de tangente no 9° ano / Fábio Leandro Cruzado. -- São Carlos : UFSCar, 2016.
123 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2016.

1. Triângulo retângulo. 2. Ângulo agudo. 3. Tangente. 4. Medidas de objetos inacessíveis. I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Fábio Leandro Cruzado, realizada em 02/09/2016:

Prof. Dr. Jose Antonio Salvador
UFSCar

Profa. Dra. Janete Crema
USP

Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio
UFSCar

Poesia Matemática

Às folhas tantas
do livro matemático
um Quociente apaixonou-se
um dia
doidamente
por uma Incógnita.
Olhou-a com seu olhar inumerável
e viu-a do ápice à base
uma figura ímpar;
olhos rombóides, boca trapezóide,
corpo retangular, seios esferóides.
Fez de sua uma vida
paralela à dela
até que se encontraram
no infinito.
"Quem és tu?", indagou ele
em ânsia radical.
"Sou a soma do quadrado dos catetos.
Mas pode me chamar de Hipotenusa."
E de falarem descobriram que eram
(o que em aritmética corresponde
a almas irmãs**)**
primos entre si.
E assim se amaram
ao quadrado da velocidade da luz
numa sexta potenciação
traçando
ao sabor do momento
e da paixão
retas, curvas, círculos e linhas sinoidais
nos jardins da quarta dimensão.
Escandalizaram os ortodoxos das fórmulas euclidianas
e os exegetas do Universo Finito.
Romperam convenções newtonianas e pitagóricas.
E enfim resolveram se casar
constituir um lar,
mais que um lar,
um perpendicular.
Convidaram para padrinhos
o Poliedro e a Bissetriz.
E fizeram planos, equações e diagramas para o futuro
sonhando com uma felicidade
integral e diferencial.
E se casaram e tiveram uma secante e três cones
muito engraçadinhos.
E foram felizes

até aquele dia
em que tudo vira afinal
monotonia.
Foi então que surgiu
O Máximo Divisor Comum
frequentador de círculos concêntricos,
viciosos.
Ofereceu-lhe, a ela,
uma grandeza absoluta
e reduziu-a a um denominador comum.
Ele, Quociente, percebeu
que com ela não formava mais um todo,
uma unidade.
Era o triângulo,
tanto chamado amoroso.
Desse problema ela era uma fração,
a mais ordinária.
Mas foi então que Einstein descobriu a Relatividade
e tudo que era espúrio passou a ser
moralidade
como aliás em qualquer
sociedade.

Millôr Fernandes[1]

---

[1] Texto extraído do livro "*Tempo e Contratempo*", Edições O Cruzeiro - Rio de Janeiro, 1954, pág. sem número, publicado com o pseudônimo de Vão Gogo.

Dedico a todos que de alguma forma contribuíram para a existência deste trabalho. Dedico à minha família, meus pais, Durvalino (in memoriam) e Natalina, e aos meus irmãos. Em especial, dedico a minha esposa Natália que me encorajou, apoiou e sempre esteve presente nesta ardorosa caminhada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a Deus, pelo dom da vida, pelas oportunidades que me tem concedido, pela força e coragem no desenvolvimento de todas as atividades do mestrado.

A todos meus queridos professores, que proporcionaram minha formação como homem, como cidadão e como professor. Em especial, agradeço ao professor José Antonio Salvador, que muito me auxiliou no desenvolvimento do trabalho realizado, a quem sou muito grato e o admiro pela competência, dedicação e gentileza durante toda a orientação.

Aos professores do PROFMAT da UFSCar, pela dedicação e paciência que tiveram comigo, auxiliando na minha formação acadêmica.

Aos amigos da turma 2014 do PROFMAT da UFSCar, que nestes dois anos de convivência partilhamos dúvidas, expectativas, conhecimento, tristezas e muitas alegrias.

A toda equipe da Escola Municipal Oscar Novakoski, que apoiou o desenvolvimento do projeto, principalmente aos alunos do 9° ano B, que sempre foram solícitos na realização das atividades.

A CAPES por oportunizar este mestrado.

E finalmente, agradeço a minha família, pela compreensão e auxílio nesta jornada.

Aula de Matemática

Pra que dividir sem raciocinar
Na vida é sempre bom multiplicar
E por A mais B
Eu quero demonstrar
Que gosto imensamente de você

Por uma fração infinitesimal,
Você criou um caso de cálculo integral
E para resolver este problema
Eu tenho um teorema banal

Quando dois meios se encontram desaparece a fração
E se achamos a unidade
Está resolvida a questão

Pra finalizar, vamos recordar
Que menos por menos dá mais amor
Se vão as paralelas
Ao infinito se encontrar
Por que demoram tanto dois corações a se integrar?
Se infinitamente, incomensuravelmente,
Eu estou perdidamente apaixonado por você.

Antônio Carlos Jobim/ Marino Pinto

RESUMO

Neste trabalho apresentamos aos alunos alguns experimentos geométricos e, sobretudo, a manipulação de triângulos retângulos, com o claro objetivo de inserir, fixar e ressaltar a importância, histórica e prática, do conceito e do significado geométrico da tangente de um ângulo agudo. Posteriormente, os alunos construíram um teodolito rudimentar que foi utilizado para medir ângulos verticais de topos de objetos inacessíveis em relação ao solo e consequentemente o cálculo de suas alturas. Os objetos explorados foram árvores, postes, mastros, antenas, refletores, entre outros mais familiares para os estudantes do nono ano do Ensino Fundamental.

Palavras-chaves: Triângulo retângulo; ângulo agudo; tangente; medidas de objetos inacessíveis.

ABSTRACT

We introduce some geometric experiments to the students, and particularly the handling of right-angled triangles, with the clear purpose of inserting, firming and emphasizing the importance, historical and practical, of the concept and meaning of the geometric tangent in an entire acute angle in triangle. Later, the students built a rudimentary theodolite that was used to measure vertical angles of tops inaccessible objects from the ground and consequently the estimate of their heights. The prospect objects were trees, poles, masts, antennas, spotlights, among other more familiar to the students of the ninth grade in elementary school

Keywords: Triangle; acute angle; tangent; measures unreachable objects.

LISTAS DE FIGURAS

LISTAS DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Todos nós, temos, se não preocupação, ao menos curiosidade ou ainda, a necessidade, de calcularmos distâncias e medidas em geral. Quando os objetos terrestres a serem medidos ou as distâncias são relativamente pequenas, podemos lançar mão de uma trena. Mas e quando desejamos saber a medida de um objeto inacessível, como a largura de um rio ou a altura de uma árvore ou a altura de uma construção? Para isso, podemos utilizar um instrumento para medir ângulos chamado teodolito, ou diretamente, utilizando uma trena digital.

Fazendo uma rápida reflexão, notamos que o desejo de medir distâncias acompanha o homem desde os tempos mais remotos. Esse anseio pelo desconhecido cativava os cartógrafos e os exploradores do planeta, para medir os limites dos países, fronteiras de regiões, larguras de rios e lagos e até as distâncias entre os países. Esse conhecimento, por mais que seja fascinante, era muito mais que um simples cálculo ou uma curiosidade, mas sim uma necessidade. Deter conhecimento do obscuro trazia segurança e assim, determinados povos tinham mais condições de se sobressair sobre outros povos.

Como professor de Ensino Fundamental e Médio, pude notar na minha trajetória profissional que, independente do conceito que se deseja ensinar, o que mais cativava os alunos eram os que por algum motivo ou necessidade tinham alguma ligação prática. Percebemos que explorando alguma atividade diferenciada em que os próprios alunos manuseassem instrumentos ou objeto, eles participavam efetivamente da construção do conhecimento e notavam claramente um real sentido naquilo que o professor estava propondo.

O ensino tradicional de Matemática, proposto na maioria dos livros didáticos, resume-se a aplicações de regras, fórmulas, repetições de exercícios com elevação do grau de dificuldade e em alguns casos, os livros fazem ou tentam utilizar analogias. Uma analogia pode ser entre uma situação prática com aquilo que está sendo estudado, buscando sempre que possível uma situação conhecida, ou da vida cotidiana das pessoas em geral. Mesmo assim são poucos os alunos que interiorizam os conceitos propostos apenas na forma tradicional e menos ainda os que estudam Matemática simplesmente por gostar de Matemática. Isto não se mostra suficiente para despertar a importância e o uso da Matemática. Acabam se convencendo no avançar das séries que ela é muito abstrata, pois sem saber para que serve ou onde irão usá-las, suas principais dúvidas não são completamente respondidas a contento. Consequentemente muitos dos bons alunos das séries iniciais acabam deixando de gostar dessa sensacional ciência. Sem falar daqueles alunos que já carregavam certa aversão à Matemática, ao se depararem com sequências de informações e conteúdos abstratos, acabam por si só reforçando a enorme repulsão quando se fala dela.

Sendo assim, o objetivo principal deste trabalho, foi a elaboração de uma sequência didática para ensinar conceitos básicos de Trigonometria culminando em uma aplicação prática da Tangente de um ângulo agudo no 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública. Os alunos tinham que ao final dessa atividade, não apenas saber como trabalhar com as razões trigonométricas de um triângulo retângulo, mas sim calcular na prática a altura de objetos inacessíveis.

> A Engenharia Didática foi criada para atender a duas questões: a) das relações entre pesquisa e ação no sistema de ensino; b) do lugar reservado para as realizações didáticas entre as metodologias de pesquisa. É uma expressão de duplo sentido. Designa produções para o ensino, derivadas de resultados de pesquisa e também designa uma específica metodologia de pesquisa baseada em experiências de sala de aula. (CARNEIRO, 2005, p. 90)

Essa sequência didática foi dividida em quatro atividades, onde todos os alunos participavam efetivamente da construção do conceito de razão, especificamente das razões trigonométricas, com a finalidade de calcular distâncias. Além disso este trabalho propõe mais um objetivo, sobre uma discussão da utilização mais frequente de atividades práticas no ensino de Matemática, principalmente no Ensino Fundamental.

Na primeira atividade, a classe foi dividida em grupos de quatro alunos. Foi solicitado a esses grupos que construíssem utilizando papel cartão e transferidor, alguns triângulos retângulos, onde apenas as medidas dos seus ângulos foram pré-fixadas. Na construção dos triângulos retângulos os alunos ficaram livres para decidir a medida dos lados, respeitando os ângulos dados, sendo coerente na utilização racional do papel cartão. Finalmente, com diversos triângulos retângulos semelhantes na sala, foi solicitado que os alunos calculassem a razão entre as medidas dos catetos opostos pelos catetos adjacentes dos vários triângulos retângulos criados, dinamizando assim a noção de tangente, até então desconhecida. Fazendo a comparação entre os resultados, foi fácil refutar a ideia da introdução tradicional do conceito da tangente. Ressaltamos a importância para o desenvolvimento da cooperação e do trabalho em grupo na obtenção do sucesso dessa atividade.

Na segunda atividade os alunos foram submetidos a diversos problemas onde o objetivo era calcular alguma distância (altura) desconhecida. Esses problemas foram retirados de livros didáticos ou questões de vestibulares com um objetivo bem claro: produzir a imaginação nos alunos de como calcular uma altura inacessível utilizando a tangente de um ângulo. Nessa atividade, os alunos se ambientaram com a utilização da tabela trigonométrica com os valores da tangente para ângulos entre 0º e 90º. Aqui o aluno já de posse dos recursos necessários que ele precisava ter em mãos pode calcular uma altura inacessível.

A terceira atividade foi a construção de um teodolito rudimentar utilizando papel cartão, transferidor, fio de prumo e canudinho de suco. Os alunos construíram um medidor de ângulos (verticais) que será descrito mais adiante com todos os detalhes. Essas medidas são substanciais para a realização da atividade final, pois os alunos precisariam ter em mãos o ângulo de inclinação do topo do objeto escolhido em relação ao solo para aplicar o conceito de tangente e enfim, calcular a altura desejada do objeto em questão.

Para finalizar essa sequência de atividades, os alunos teriam finalmente que por em prática o que foi bastante discutido, elaborado e planejado teoricamente em sala de aula. Os alunos precisavam ter claramente que necessitariam da medida da distância do observador (a pessoa que está medindo o ângulo de inclinação) até a base do objeto, a medida da altura do observador e a medida do ângulo de inclinação do topo do objeto em relação ao solo.

Para que todos os objetivos propostos fossem alcançados, foi seguido o seguinte roteiro: no início investigamos experimentalmente a noção de tangente para que os alunos fossem se envolvendo com sua utilização e aplicabilidade. Em seguida, utilizamos esse conceito, ainda de forma teórica (em sala de aula) na resolução de diversos problemas que estavam alinhados com a preocupação de obter uma altura inacessível, ou seja, resolver problemas que envolviam a aplicação da tangente. Posteriormente, construímos um medidor de ângulos e, finalmente, o colocamos em prova numa situação real, fora da sala de aula, onde os alunos foram submetidos a calcular uma altura inacessível, no caso, um dos refletores próximo da escola.

Para a realização das atividades práticas ï a construção do medidor de ângulos e o cálculo da altura do refletor ï os alunos foram divididos em grupos de quatro pessoas. Todas as atividades envolvendo resoluções de problemas, foram realizadas de forma individual e autônoma pelos os alunos.

CAPÍTULO 1 ï A CONSTRUÇÃO DA PROPOSTA

Apresentamos neste capítulo uma descrição de como a proposta do nosso trabalho foi edificada, baseando-se na nossa trajetória profissional e no âmbito do ambiente escolar onde as atividades foram desenvolvidas. Logo adiante, faremos uma breve descrição dos conteúdos de Matemática abordados e da aplicação das atividades.

1.1 OBJETIVO

O objetivo desse trabalho é apresentar uma sequência didática para a introdução do conceito de tangente de um ângulo agudo, passando pelo seu desenvolvimento e culminando em uma aplicação prática. Essa sequência de atividades serve de alternativa ao que encontramos nos livros didáticos utilizados nas escolas públicas e a proposta é que a cada atividade aplicada, o aluno seja galgado a patamares de conhecimentos mais sólidos, os quais permitirão a ele um entendimento total em torno do conceito e da aplicação da tangente, dando condições para que o próprio aluno responda a tão famosa pergunta ï para que serve isso?

Cada atividade foi pensada e estruturada numa linguagem simples e totalmente acessível, buscando atingir todos os alunos, deixando-os mais autoconfiantes no que tange a matemática nesse contexto, e assim, reconduzi-los ou despertá-los para o prazer de estudar Matemática.

1.2 TRAJETÓRIA PROFISSIONAL

O autor é professor de Ensino Fundamental e Médio desde 2004. Trabalhou com diversos materiais de ensino, Pitágoras, Anglo, Poliedro, Seta, Positivo e Uno. As atividades relatadas neste trabalho foram desenvolvidas na escola municipal Oscar Novakoski da cidade de Dois Córregos/SP. Atualmente exerce o cargo de professor efetivo na Rede Estadual de Ensino e na rede SESI, onde leciona na unidade CE-026 na cidade de Jaú/SP.

No ano 2000, ingressou no curso de Agronomia, na Unesp de Ilha Solteira com uma inocente ideia do que seria um agrônomo. Já nas primeiras disciplinas específicas do curso, as dúvidas em relação ao meu futuro profissional ficavam cada vez mais fortes e conversando com alguns alunos veteranos do curso, aquela singela ideia se tornava uma certeza cada vez mais eminente de que não era aquilo que gostaria de fazer pelo resto da vida. No decorrer daquele ano tive algumas notas, vexatórias, talvez até por falta de comprometimento, prefiro entender que faltava “inspiração” para estudar. Mas entre as disciplinas da graduação, tínhamos as que envolviam cálculos, à saber: Matemática I, Matemática II, Física e Estatística. Recursos que todo agrônomo precisa dominar e, para essas disciplinas surgia a tal da inspiração e o prazer de estudar, consequentemente as notas eram melhores.

Nesse meio tempo, começamos a estudar em pequenos grupos na biblioteca do campus, mas quando o foco eram as disciplinas de exatas o espaço tornava-se inadequado, precisávamos de um lugar onde pudéssemos, não só trocar ideias, mas expor nossos pensamentos uns para os outros, e com o aumento do número de integrantes do grupo, fomos para uma sala de aula! Assim, esses encontros acabaram se tornando uma espécie de aula de reforço, na qual, eu era o “professor”. Nesses encontros, o autor era o aluno que mais ficava em lousa expondo e direcionando a discussão dos problemas. Não por menos, eu tinha uma organização didática, perante os outros integrantes do grupo, que facilitava o entendimento dos problemas. E assim surgiu o forte desejo de ser Professor de Matemática. Tranquei a faculdade de Agronomia e no ano seguinte, ingressei no curso de Licenciatura Plena em Matemática, na Unesp de Bauru, onde me formei.

O autor lecionou em colégios particulares ainda na graduação e como a maioria dos professores iniciantes que teve contato, ele se preocupava demais em dominar o conteúdo matemático com todas as suas regras e fórmulas. Naquela época, o autor acreditava que a melhor maneira para se aprender matemática era resolvendo enormes listas de exercícios, pois assim, o aluno acabava adquirindo um ñtraço comumò do conteúdo que está sendo estudado. Porém, com o passar do tempo, pode perceber que essa convicção podia até ser útil para treinar o que se aprendeu ou aprofundar o que o aluno já sabe, mas hoje temos certeza que esse método não é o mais adequado para ensinar Matemática.

Acreditava que o ensino de matemática era tedioso para o aluno quando dado sempre da forma convencional, pois o aluno só trabalha mecanicamente através de repetições de exercícios, não participando efetivamente da construção do conhecimento, não adquirindo uma aprendizagem significativa e acabava não enxergando a beleza da matemática, exceto, poucos deles. O processo de Ensino e Aprendizagem é dinâmico, logo as aulas também precisam ser dinâmicas, o aluno não pode ser um mero espectador, ele precisa participar expondo suas ideias, se envolver, seja qual for a disciplina. Cabe a nós professores fazermos com que isso aconteça. O fracasso escolar não deve ser atribuído, exclusivamente, ao aluno.

Com isso veio a ideia de utilizar jogos, desafios, materiais diversos, softwares, histórias, enfim, qualquer meio adequado onde o aluno interaja simultaneamente com a aula ou com o objeto de estudo ou com o conteúdo proposto a ser ensinado. A perspectiva do professor era mobilizar todos os alunos, inclusive os mais desinteressados, essa foi a grande mudança na maneira de pensar como professor.

> ñO bom professor é o que consegue, enquanto fala, trazer o aluno até a intimidade do movimento do seu pensamento. Sua aula é assim um desafio e não uma cantiga de ninar. Seus alunos cansam, não dormem. Cansam porque acompanham as idas e vindas de seu pensamento, surpreendem suas pausas, suas dúvidas, suas incertezasò (FREIRE,1996, p.96).

Em 2010 quando ingressou no PPGECE (Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exatas), o autor teve contato com diversos professores de Ensino Fundamental e Médio, que desenvolviam atividades diferenciadas para determinados conteúdos. Durante o mestrado, teve a oportunidade de assistir algumas defesas de dissertações se deparando com vários relatos de atividades onde ficou evidenciado que uma parte do sucesso do aprendizado do aluno foi atribuída à interação do aluno com o objetivo proposto, ocasionada por essas atividades. Em um curso de verão, o autor presenciou uma aula com o Professor Pedro Malagutti na qual este conduziu a introdução do conceito de Progressão Geométrica simulando a despoluição de um rio. Experiência que o autor repetiu com sucesso no primeiro ano do Ensino Médio e expôs na feira de ciências realizada pela escola, naquela oportunidade. O resultado foi excelente!

Aos poucos, o autor percebia que quando são explorados determinados assuntos em contextos diferentes do habitual, o aluno debruça um olhar mais curioso para a Matemática. A mesma Matemática que geralmente é propagada pelos livros didáticos ñapenasò através de definições, aplicações, regras e resoluções de exercícios, torna o aprendizado efetivo da Matemática, definitivamente, para poucos.

Para esse trabalho, conversando com meu orientador, escolhi trabalhar com a trigonometria do nono ano do Ensino Fundamental e para isso, busquei contextualizar o conteúdo da forma mais acessível aos alunos. Assim propomos uma sequência de atividades onde o aluno pudesse interagir passo a passo e construir de forma significativa o conceito da tangente de um ângulo agudo em um triângulo retângulo. Acreditamos que a trigonometria pode cumprir um papel importante ao mover a mente do aluno do nono ano, na faixa etária dos quatorze anos, para ambientes intrigantes, envolvendo medidas de ângulos, alturas e distâncias desconhecidas. Nessas condições a busca pelo desconhecido pode ser um estimulante e, para que de fato isso ocorra é necessário que uma sequência didática ofereça requisitos ao aluno para a construção do seu próprio conhecimento e assim passe a olhar a Matemática de forma mais prazerosa e útil.

1.3 A SÉRIE TRABALHADA

As atividades foram aplicadas numa turma de 24 alunos (nono ano B), do Ensino Fundamental da Escola Municipal EMEFEI ñOscar Novakoskiò, no período vespertino. Embora essas mesmas atividades, também foram aplicadas por outro professor no nono ano A, do mesmo nível que a turma B, as descrições contidas aqui neste trabalho são todas do nono ano B.

A escolha dessa sala foi devido ao fato de estar lecionando para a mesma turma desde o sétimo ano. Tendo o conhecimento das dificuldades individuais de cada aluno, pudemos notar claramente os avanços que uma sequência de atividades diferenciadas, devidamente preparadas, propiciou aos alunos.

Essa classe possuía alguns alunos com sérias dificuldades de aprendizagem em matemática, provenientes de déficits de conceitos básicos de anos anteriores e essa falta de conhecimentos prévios se tornava uma enorme barreira quando iniciávamos o desenvolvimento de um novo conteúdo. Com isso em mente, cada atividade foi pensada e arquitetada também com o compromisso de resgatar alguns conceitos já trabalhados em anos anteriores que serão necessários para maximizar o aproveitamento de cada atividade. Também tivemos nessa sala alunos com rara habilidade em Matemática e a mescla desses alunos na composição dos grupos ajudou a proporcionar um excelente resultado no desenvolvimento das atividades.

1.4 DESCRIÇÃO DO LOCAL DE APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

Todas as atividades foram aplicadas na Escola Municipal de Ensino Fundamental e Educação Infantil ñOscar Novakoskiò na cidade de Dois Córregos/SP com alunos do nono ano B do período da tarde, escola na qual o autor foi professor efetivo.

Para o desenvolvimento da pesquisa e aplicação das atividades, foi escolhida essa turma por diversos fatores, alguns já citados acima, enfatizando que o tempo lecionado para essa mesma turma, desde o sétimo ano, foi o fator fundamental para a escolha da mesma.

Vale destacar que essa escola preza pela inovação e busca inspirar seu corpo docente a procura de alternativas que tornem o processo de ensino-aprendizagem melhor a cada ano, tendo como principal foco a preparação do aluno para a vida.

> Muito difundida e aceita hoje, é uma escola reflexiva, que se pensa continuamente a si própria, revendo sua função social e organizativa, buscando proporcionar ambientes formativos que favoreçam o cultivo de atitudes e capacidades que permitam ao indivíduo viver, conviver e intervir em sociedade, em interação com os outros cidadãos. (ALARCÃO, 2001, p.144)

Foi a segunda escola classificada no Ideb (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica) no ano de 2011.

Melhores escolas públicas de 5º a 9º ano do Estado de SP

MUNICÍPIO	NOME DA ESCOLA	REDE	IDEB 2011
BARUERI	DAGMAR RIBAS TRINDADE PROFESSORA ESC ENS FUND MEDIO E TEC	Municipal	6,6
DOIS CORREGOS	**OSCAR NOVAKOSKI EMEFEI**	**Municipal**	**6,5**
LIMEIRA	ANTONIO PERCHES LORDELLO PROF	Estadual	6,5
SAO JOSE DOS CAMPOS	JOSE MARIOTTO FERREIRA MAJOR AVIADOR	Estadual	6,5
SERTAOZINHO	JOSE NEGRI PROF EMEF	Municipal	6,4
ARARAS	JULIO RIDOLFO PROF EMEF	Municipal	6,3
CUBATAO	USINA HENRY BORDEN UNIDADE MUNICIPAL DE ENSINO	Municipal	6,3
JAGUARIUNA	ADONE BONETTI PREFEITO EM	Municipal	6,3
SAO JOSE DOS CAMPOS	WALDEMAR RAMOS PROF EMEF	Municipal	6,3
SAO JOSE DOS CAMPOS	MERCEDES CARNEVALLI KLEIN PROFA EMEF	Municipal	6,3
SERTAOZINHO	ROBERTO ZANUTTO DESIDERIO PROF EMEF	Municipal	6,3

Quadro 1: Ranking das melhores escolas públicas do Estado de SP, segundo o Ideb de 2011.
Fonte: http://educacao.uol.com.br[2]

Além disso, os apontamentos de SOLER (2003) estão bem alinhados com o perfil desta escola, dentre os quais destacamos:

- Ser um elemento de transformação da sociedade.
- Considerar as crianças como seres sociais e construtivos.
- Privilegiar o contexto socioeconômico e cultural.
- Reconhecer as diferenças entre as crianças.
- Considerar os valores e a bagagem que elas já têm.
- Propiciar a todas as crianças um desenvolvimento integral e dinâmico.
- Favorecer a constrição e o acesso ao conhecimento.
- Valorizar a relação *adulto-criança* caracterizada pelo respeito mútuo, pelo afeto e pela confiança.
- Promover a autonomia, criticidade, criatividade, responsabilidade e cooperação.

[2] Disponível em: <http://educacao.uol.com.br/noticias/2012/08/15/confira-ranking-das-melhores-escolas-publicas-do-estado-de-sp-segundo-o-ideb.htm>. Acesso em 26 de março de 2016.

Essa escola conta ainda com um laboratório de informática, biblioteca bem equipada, um amplo espaço para os alunos, quadra esportiva, parque, lousas digitais e um grande número de professores com título de Mestre.

1.5 POR QUE TANGENTE?

Dentro do panorama de realizar atividades diferenciadas para servir de motivação aos alunos, inspiração para outras descobertas e que tenha o compromisso de fazê-los olhar para a Matemática com mais entusiasmo, podemos encontrar várias problemáticas; como, por exemplo: trabalhar a introdução de Progressão Geométrica através de uma simulação da despoluição de um rio, ou ensinar as operações básicas com Números Inteiros através de jogos, ou introduzir e até aprofundar a discussão sobre Funções através da Modelagem Matemática. Enfim, temos inúmeros exemplos para delinearmos sobre tal propósito e criarmos condições para abranger um conteúdo ou introduzir um conceito onde o foco seria o envolvimento dos alunos com o que pretendemos ensinar de forma bem mais satisfatória das que encontramos nos livros didáticos.

Escolhemos trabalhar com a Trigonometria por se tratar, em geral, de um conteúdo pouco explorado no nono ano das escolas públicas, por necessitar de pré-requisitos básicos (que foram de fácil resgate quando necessário), por permitir que outros conteúdos fossem trabalhados simultaneamente (para não comprometer o cronograma exigido pela escola) e por ser facilmente capaz de envolver os alunos em situações motivadoras, distintas das habituais. Além disso, observamos que a forma que alguns livros didáticos abordam esse tema, em especial a trigonometria no triângulo retângulo, não parece coerente com a realidade atual da maioria dos alunos de escolas públicas, uma vez que as relações trigonométricas aparecem prontas, desprovidas de sugestões de atividades práticas e/ou lúdicas.

Dentro desse trabalho, focamos o estudo da tangente,

> ...é recomendável o estudo da razão trigonométrica tangente pela sua importância na resolução de diversos tipos de problemas. Problemas de cálculos de distâncias inacessíveis são interessantes aplicações da trigonometria, e esse é um assunto que merece ser priorizado na escola. (Orientações Curriculares para o Ensino Médio, 2006, p.73-74)

É importante ressaltar que ao iniciarmos a aplicação dessas atividades, os alunos já possuíam uma bagagem conteudista importante, haviam estudado as relações métricas de um triângulo retângulo, portanto já sabiam o significado dos principais elementos de um triângulo retângulo: cateto oposto, cateto adjacente (a um ângulo agudo interno) e hipotenusa. Já haviam estudados o conceito de semelhança de triângulos, o que foi aprofundado no estudo das relações métricas. Já sabiam aplicar o Teorema de Pitágoras e em situações diversas e sabiam utilizar as razões trigonométricas, seno e cosseno, dos ângulos notáveis para resolver problemas. Entretanto era necessário a introdução do conceito de tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo.

1.6 FATOS HISTÓRICOS DA TRIGONOMETRIA E APLICAÇÃO DA TANGENTE

Estudar e analisar a história de obstáculos vividos e vencidos por matemáticos do passado é um bom amparo para entendermos as dificuldades dos alunos de hoje. O nosso próprio entendimento da história, da evolução e da propagação da Matemática, pode ser ampliado significativamente ao analisarmos os erros cometidos pelos estudantes. Além disso, quando o professor (de qualquer disciplina ou área do conhecimento) cria o hábito de fazer levantamentos históricos do que se propõe a ensinar, suas aulas ganham um enriquecimento especial e é notório que todos os alunos (pessoas em geral) adoram histórias, e elaborar essa mescla quando possível talvez torne a aula muito mais atrativa aos olhos dos alunos.

Fazer comparações de como eram os fatos, como estão atualmente e projetá-los de como serão, ou como sucederão o seu uso no futuro, faz parte do desenvolvimento da criatividade do aluno. Auxilia-o a conjecturar e o professor precisa estender seu olhar também para esse horizonte no momento de projetar sua sequência de atividades acerca de um determinado conceito e é claro que esse ñolharò para o futuro por parte dos alunos, só é possível de ser concretizado quando ocorre a criação significativa do conhecimento, quando há de fato o aprendizado. Dessa forma o aluno possuirá condições de fazer comparações a partir dos conhecimentos adquiridos, relacionando aos que já possuía e emitir, quando possível, suas próprias concepções de como ele ou talvez a humanidade em geral, fará o uso do determinado conteúdo.

Historicamente o desenvolvimento ou até o surgimento da tangente está atrelado ao desejo de se obter uma medida inacessível, como encontramos no Problema 56 do Papiro de Rhind:

> O Prob. 56 do Papiro de Rhind tem especial interesse por conter rudimentos de trigonometria e uma teoria de triângulos semelhantes. Na construção de pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces e pode ter sido essa preocupação a levar os egípcios a introduzir um conceito equivalente ao de cotangente de um ângulo. Na tecnologia moderna é usual medir o grau de inclinação de uma reta por uma razão entre segmentos verticais e horizontais que é a recíproca da usada no Egito. (Boyer, 2001, p.13)

Vamos supor que desejamos calcular a altura da uma caixa dõágua da escola. Como proposto no material ñ*O que se pode fazer com a Trigonometria*ò de Adalberto Spezamiglio, podemos medi-la subindo até o topo da caixa dõágua, jogar uma corda até o solo e posteriormente medir seu comprimento. Obviamente essa não seria a melhor maneira e muito menos a mais segura. Uma boa saída que podemos utilizar para esse problema já era apresentada cerca de 600 anos a.C. por Tales de Mileto quando elaborou tal método para se calcular a altura da Pirâmide de Quéops: utilizando-se de sua sombra. Pede-se que um amigo se coloque entre a base da caixa d’água e sua sombra, de tal forma que as pontas das sombras coincidam num ponto A. Como as medidas das sombras da caixa d’água, do amigo, assim como a altura de seu amigo são acessíveis, podemos facilmente medi-las com uma simples trena. Suponhamos então, que seu amigo mede 1,7 m de altura, sua sombra é de 2 m e que a sombra da caixa d’água mede 12 m. Observe um modelo matemático que descreve a situação apresentada acima.

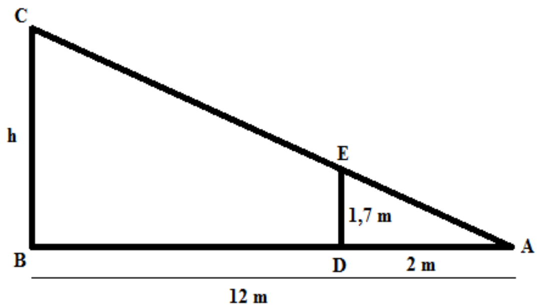


Figura 1: Ilustração referente à situação-problema proposta em “*O que se pode fazer com a Trigonometria*” de Adalberto Spezamiglio.
Fonte: arquivo do autor

É um ótimo exemplo de um problema envolvendo distância inacessível que pode ser facilmente resolvido aplicando conceitos de proporcionalidades entre os lados dos triângulos envolvidos.

É interessante destacarmos aqui que problemas similares a esses já despertavam a curiosidades de matemáticos alguns séculos antes de Cristo, dos quais, muitos eram resolvidos com bastante exatidão.

A análise da gênese do termo trigonometria nos remete a significados distintos, por exemplo, podemos dar significado a atual trigonometria como uma ciência analítica, e assim ela teria sua origem no século XVII, após o desenvolvimento do simbolismo algébrico.

Inevitavelmente mais um obstáculo epistemológico da construção do saber e do fazer Matemática era vencido surgindo assim, uma importante área da Matemática chamada *Trigonometria* (trigono = triangular; metria = medida).

CAPÍTULO 2 ï REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 SOBRE O CONHECIMENTO MATEMÁTICO

Fiorentini (1995) afirma que como todo conhecimento o saber matemático é resultado de um processo sócio histórico e está em permanente construção, sendo produzidos nas relações sociais e por meio delas. Como toda forma de conhecimento possui um pensamento e uma linguagem própria.

No entanto, segundo Fiorentini (1995) com o tempo a linguagem matemática foi se tornando formal, precisa e rigorosa, o que implicou na necessidade imperiosa de renovação.

Caraça (2003) enfatiza que o avanço no pensamento matemático se deu principalmente pela necessidade de resolução de problemas.

Flores (2006, p. 90) acrescenta que ñum objeto matemático envolve três dimensões: a do objeto material (uma representação), a conceitual (o conceito) e a de idealidade matemática (a entidade)ò.

Lefévre (apud FLORES, 2006, p. 90-1) complementa que

> (...) o conceito de ñcírculoò [...] pode ser resumido por uma curva fechada na qual todos os pontos estão situados a uma distância igual a um ponto interior chamado centro. A entidade matemática é, para o filósofo Desanti, o que está apreendido pela consciência na forma de unidade. Enfim, as representações de um círculo são múltiplas, elas podem ser simbólica (sob a forma, por exemplo, de uma equação: $\left\{(x, y) \in \Re^2 \middle| x^2 + y^2 = 1\right\}$, linguística (a palavra ñcírculoò) ou, ainda, visual (desenho de um círculo), por exemplo.

Para Souza e Spinelli (2001) o conhecimento matemático tem permitido o avanço de praticamente todas as áreas do saber humano, em especial porque a Matemática consegue realizar a passagem da realidade para a abstração do conhecimento, ñalém de fornecer instrumentos que possibilitam interpretar um acontecimento de maneira sistematizada e quantificadaò (SOUZA e SPINELLI, 2001, p. 6).

Assim foi quando o homem se viu diante da necessidade de quantificar coisas como a produção de grãos e cereais, animais; de sistematizar a passagem do tempo; comparar grandezas e medidas; descobrir relações entre os elementos da natureza etc.

Eves (2004) informa que os homens pré-históricos desenvolveram processos de contagem que demonstram que naquele tempo já havia um senso numérico, ainda que rústico e as noções de mais e menos a partir do acréscimo ou retirada de informações na contagem ou cálculos.

> (...) uma tribo tinha que saber quantos eram seus membros e quantos eram seus inimigos e tornava-se a um homem saber se seu rebanho de carneiro estava diminuindo. É provável que a maneira mais antiga de contar se baseasse algum método de registro simples, empregando o princípio da correspondência biunívoca. Para contagem de carneiros, por exemplo, podia-se dobrar um dedo para cada animal. Podia-se contar fazendo-se ranhuras no barro ou numa pedra, produzindo entalhes num pedaço de madeira ou fazendo nós numa corda (EVES, 2004, p. 25-26).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997, p.26) a Matemática ñdeverá ser vista pelo aluno como um conhecimento que pode favorecer o desenvolvimento do seu raciocínio, de sua sensibilidade expressiva, de sua sensibilidade estética e de sua imaginaçãoò.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) colocam que a Matemática no Ensino Fundamental deverá ser um meio facilitador para a estruturação e o desenvolvimento do pensamento do aluno e, para a formação básica de sua cidadania. ñFalar em formação básica para a cidadania significa falar em inserção das pessoas no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura, no âmbito da sociedade brasileiraò (BRASIL,1997, p. 25).

Menezes (2008) salienta que um dos grandes desafios da Matemática é a utilização de duas linguagens diferentes: as palavras e os símbolos matemáticos. Essa característica faz da Matemática uma combinação de sinais, letras, palavras e expressões que se organizam, segundo certas regras próprias, para expressar ideias que nem sempre são similares às encontradas em outros tipos de textos.

É preciso pensar também que a Matemática está relacionada de forma intrínseca à História influenciando e sendo por ela influenciada. Por isso a Matemática é uma ciência com função social, ou seja, ao dominar o conhecimento matemático amplia-se a percepção de realidade, podendo então transformá-la.

2.2 SOBRE O CONHECIMENTO MATEMÁTICO DE TRIGONOMETRIA

Ribeiro e Souza (2009) definem Trigonometria como o estudo das relações entre as medidas de ângulos e lados nos triângulos retângulos.

Observamos que um triângulo é retângulo, quando este possui um de seus ângulos internos reto, ou seja, com medida igual a 90°.

Ribeiro e Souza (2009) reforçam que o triangulo retângulo foi determinante na origem da Trigonometria principalmente pelo seu formato e por possuir propriedades interessantes, como o fato de que ao determinar que um dos seus ângulos mede 90º também se determinou que os outros dois ângulos tivessem medidas menores que 90º, formulando então o conceito de ângulos agudos e também de ângulos complementares, pois a soma dos dois ângulos menores de um triângulo retângulo é igual a 90º.

Lima, Carvalho e Wagner (2006) relata que desde a Antiguidade a medida de distâncias grandes e inacessíveis tem feito parte das preocupações do homem, pelo fato de que poucas são as distâncias que podem ser medidas com ferramentas como trenas. ìPraticamente tudo que desejamos saber sobre distâncias no mundo em que vivemos é calculado com o auxílio da trigonometriaò(LIMA; CARVALHO; WAGNER, 2006, p. 64).

Boyer (2001) ressalta que as observações astronômicas sempre fizeram parte do cotidiano do homem desde a Antiguidade. Assim, se após o por do sol uma estrela se tornava visível em um horário, podia-se então fazer previsões do tempo como chuva, seca etc.

Com o tempo, porém foi necessário o desenvolvimento de instrumentos de observação adequados e o uso de conhecimentos e recursos como a Matemática. Esse fato contribuiu para o surgimento da Geometria e da Trigonometria Esférica.

É preciso mencionar que ao contrário do que se possa pensar, o estudo da trigonometria plana, abordada no Ensino Básico, baseia-se no triângulo retângulo, no círculo trigonométrico e no estudo dos arcos e das cordas do círculo.

Guelli (2003) evidencia que historicamente a Trigonometria esteve associada à Astronomia devido ao fato de que egípcios e babilônios utilizavam as relações existentes entre lados e ângulos dos triângulos, para resolver problemas relacionados a esta área do conhecimento.

Ribnikov (1987) esclarece que o seno foi a primeira noção no processo de evolução das razões trigonométricas que por sua vez se originam da relação entre a corda e o ângulo central de uma circunferência.

Sobre o radiano que é um dos conceitos trigonométricos, Kupková (2008) cita que o termo radiano (radian) aparece pela primeira vez em 1873, nos estudos do norte-americano James Thonson da Faculdade de Queens, e em 1874, nos estudos de Thomas Muir da Universidade de Andrew, também nos Estados Unidos. O termo deriva de *radius* que quer dizer raio.

Kupková (2008) completa que a substituição do grau pelo radiano como medida de ângulos se deu graças a Roger Cortes, em 1714.

O radiano pode ser definido de duas formas: como medida linear e como medida angular.

Conforme Kupková (2008) o radiano com medida linear é identificado com o comprimento do raio da circunferência. Já o radiano como medida angular é o ângulo cujo arco correspondente é igual ao raio da circunferência.

Entre os elementos do conhecimento trigonométrico estão as funções trigonométricas cuja característica fundamental é sua periodicidade, ou seja, são periódicas, podendo ser utilizadas para descrever fenômenos de natureza periódica, oscilatória e vibratória, como o som, os batimentos cardíacos, o movimento de planetas, entre outros.

Sobre as funções trigonométricas Carvalho; Lima; Wagner (2004) apontam que sua importância foi reforçada e reconhecida a partir dos estudos de Joseph Fourier em 1822. Estes estudos permitiram a Fourier descobrir que toda função periódica limitada, com um número finito de descontinuidades, é uma soma infinita de funções do tipo $a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \cdot sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, onde n é um número natural, a_n e $b_n \in \Re$, ou seja:

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

> Para que se tenha a ideia de relevância desse fato de que deu origem a chamada Análise de Fourier, basta dizer que, segundo no banco de dados da revista *Mathematical Reviews*, o nome mais citado nos títulos de trabalhos matemáticos nos 50 anos é o de Fourier (CARVALHO; LIMA; WAGNER, 2004, p. 214).

Sobre o ângulo que é outro conceito trigonométrico Smith (1958) menciona sua importante contribuição para o desenvolvimento da trigonometria, em especial para a compreensão das razões trigonométricas em um triângulo retângulo, que por sua vez dependem não da medida dos lados e sim dos ângulos agudos do triângulo.

Ribeiro e Souza (2009) destacam que o conhecimento trigonométrico tem grande utilidade não apenas no estudo de triângulos e circunferências. Mais que isso, a trigonometria pode ser utilizada em situações práticas e teóricas diversas, fornecendo subsídios para o desenvolvimento de outras áreas do conhecimento cientifico e tecnológico, por exemplo: relacionadas a óptica, termodinâmica, eletricidade, entre outras.

Três funções são fundamentais na Trigonometria: seno, cosseno e tangente.

Ahlfors (apud RIBEIRO e SOUZA, 2009) informa que em um triângulo o seno de um ângulo é a razão entre o cateto oposto a este ângulo e a hipotenusa do triângulo. Já o cosseno deste mesmo ângulo é a razão entre o cateto adjacente (referente a este ângulo) pela hipotenusa. Por fim, a tangente de um ângulo agudo, é a razão entre o cateto oposto a este ângulo, e o cateto adjacente. Vale ressaltar que hipotenusa é o nome dado ao lado de um triângulo retângulo, oposto ao ângulo reto.

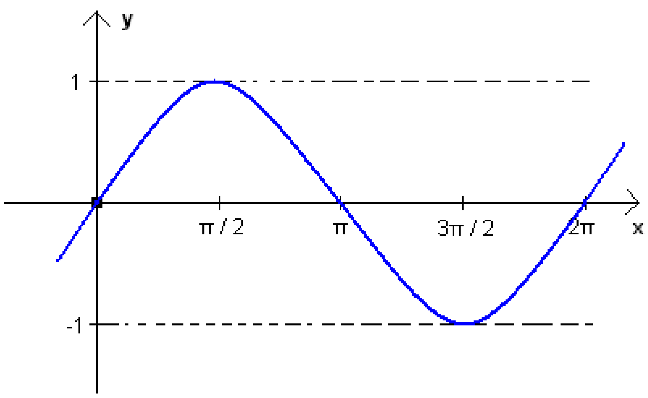


Figura 2 ï Gráfico da Função Seno.
Fonte: arquivo do autor

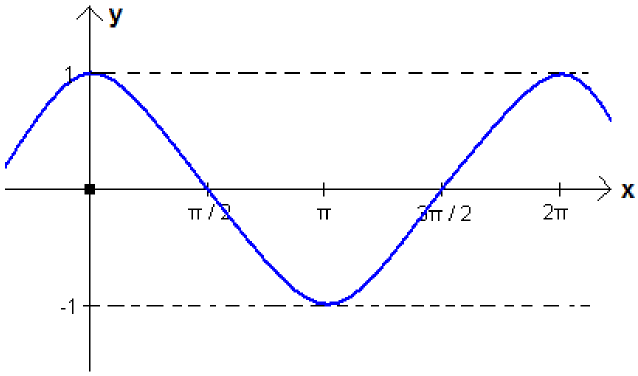


Figura 3 ï Gráfico da Função Cosseno.
Fonte: arquivo do autor

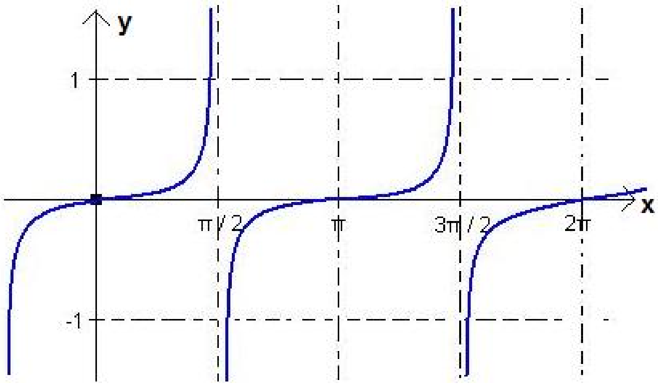


Figura 4 ï Gráfico da Função Tangente.
Fonte: arquivo do autor

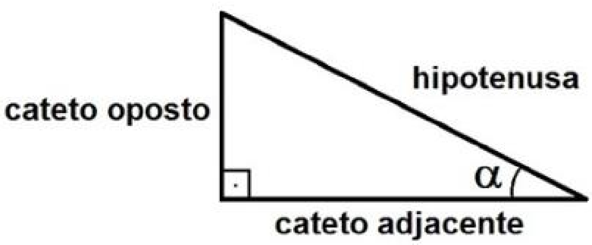


Figura 5 ï Triângulo Retângulo, enfatizando o nome de seus lados, de acordo com o ângulo dado.
Fonte: Arquivo do próprio autor

Ribeiro e Souza (2009) com relação à tangente de um ângulo, comentam ainda que ela pode ser definida (ou interpretada) como sendo o coeficiente angular de uma reta.

Sobre o círculo trigonométrico, Bucchi (1944) relata que este é dividido em quatro partes pelos eixos do plano cartesiano. A estas partes, dá-se o nome de quadrantes e, uma volta completa no círculo trigonométrico corresponde a 360º ou 2´ radianos.

2.3 OUTROS FATOS HISTÓRICOS DA TRIGONOMETRIA

Dante (2005) aponta que a palavra Trigonometria vem do grego e é composta por três radicais gregos, sendo *tri* que significa três; *gonos* significando ângulos e *metron* que significa medir. Num entendimento literal trigonometria significa então medir ângulos. Porém, pode ser definida como a área de estudo das relações entre lados e ângulos de um triângulo.

Dante (2005) afirma também que os princípios da trigonometria são baseados nas proporções fixas dos lados de um ângulo em um dado triângulo retângulo e as proporções mais simples denominadas razões trigonométricas são conhecidas como seno, cosseno e tangente.

Segundo Boyer (2001) a origem da trigonometria é um tanto imprecisa. Porém, uma hipótese é que seu surgimento se deu em decorrência da busca de solucionar problemas de Astronomia, Agrimensura e Navegações, por volta do século IV a.C. sendo desenvolvida pelos egípcios e babilônios no seu início.

O documento mais antigo de registro do conhecimento matemático de que se tem notícia é o Papiro Rhind que de acordo com Eves (2004) apresenta os conhecimentos matemáticos dos antigos egípcios relacionados às operações de adição, multiplicação e divisão; apresentando indícios de utilização de frações no método de falsa posição e na solução de problemas de determinação de áreas.

Boyer (2001) complementa que o Papiro Rhind apresenta problemas que envolvem o conceito atual de cotangente além de uma tábua de valores correspondentes à secante.

> O problema 56 do papiro de Rhind tem especial interesse por conter rudimentos de trigonometria e uma teoria de triângulos semelhantes. Na construção de pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces e pode ter sido essa preocupação a levar os egípcios a introduzir um conceito equivalente ao de cotangente de um ângulo (BOYER, 2001, p.13).

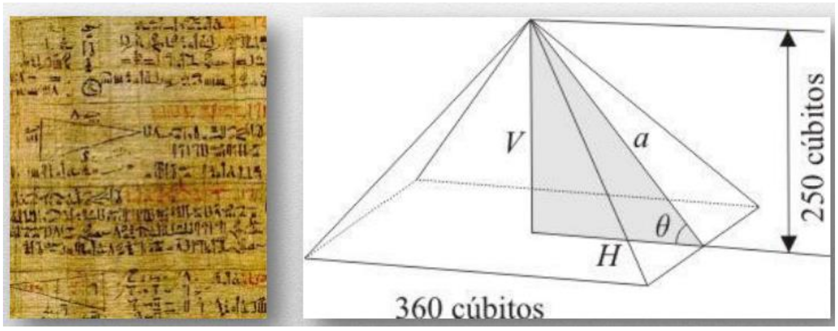


Figura 6 ï Problema 56 do Papiro Rhind, traz rudimentos de trigonometria relacionando altura e base de uma pirâmide.
Fonte: UNIFAL ï Universidade Federal de Alfenas[3]

Boyer (2001) coloca também que a trigonometria não foi obra de uma única nação ou indivíduo. Ao contrário, as primeiras formas de conhecimento trigonométrico estão presentes na civilização egípcia e babilônica que já estudavam as relações dos ângulos e dos triângulos.

---

[3] Disponível em: <http://www.unifal-mg.edu.br/matematica/files/file/ANDREA/EDUCACAO%20MATEMATICA/EM_aula_11_TrigonometriaEgito.pdf> Acessado em: 25 de julho de 2016.

Entre esses povos foi desenvolvido o conceito de medida de ângulo que era denominado de ñtrilaterometriaò que significa a medida de polígonos de três lados.

Boyer (2001) salienta que os gregos conheciam as propriedades das cordas como medidas de ângulos centrais inscritos em círculo, sendo que Hipócrates realizou numerosos estudos sobre esse assunto.

Como observa Boyer (2001), Eudoxo pode ter utilizado as razões e medidas de ângulos em seus estudos para determinar o tamanho da terra e as distâncias relativas entre o Sol e a Lua.

Boyer (2001) relata ainda com relação aos gregos, que a obra Os Elementos de Euclides ainda que não faça referência explícita à trigonometria, traz conhecimentos importantes desta área como teoremas e fórmulas envolvendo conceitos trigonométricos, com destaque para as leis de cossenos para ângulo obtuso e agudo. ñNas obras de Euclides não há uma trigonometria no sentido estrito da palavra, mas leis ou fórmulas trigonométricas específicasò (BOYER, 2001, p. 108).

Também Arquimedes ao formular seu teorema sobre a corda quebrada (o qual enunciamos abaixo) elaborou fórmulas para senos de somas e diferenças de ângulos.

Teorema da Corda Quebrada (Arquimedes)

Se AB e BC compõem uma corda quebrada ABC, onde $BC > AB$ e se M é o ponto médio do arco $\overset{\frown}{ABC}$, então o pé F da perpendicular de M sobre BC é o ponto médio da corda quebrada.

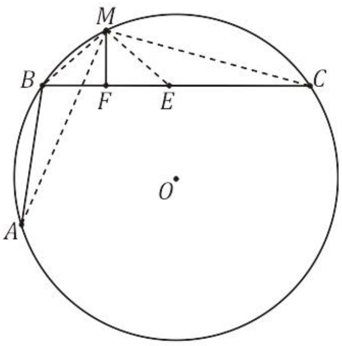


Figura 7 ï Teorema da corda Quebrada.
Fonte: arquivo do autor

Boyer (2001) reforça ainda que se deve ao astrônomo grego Hiparco de Nicéia grande parte do estudo sistemático da trigonometria. Isso porque Hiparco realizou a compilação da primeira tabela trigonométrica inicialmente para ser utilizada em atividades relacionadas à astronomia.

> As principais contribuições à astronomia atribuídas a Hiparco foram a organização de dados empíricos derivados dos babilônios, a elaboração de um catálogo estelar, melhoramentos em constantes astronômicas importantes (tais como a duração do mês e do ano, o tamanho da Lua, e o ângulo de inclinação da eclítica) e finalmente, a descoberta da precessão de equinócios (BOYER, 2001, p. 108).

Hiparco foi ainda responsável pela divisão do círculo em 360º e em seus estudos conseguiu determinar por meio de latitudes e longitudes a localização de pontos diversos na superfície terrestre.

Hiparco dividiu a circunferência de um círculo em 360 partes e o diâmetro em 120 partes. Por sua vez, cada uma dessas partes da circunferência e do diâmetro são divididas em 60 partes e cada uma em mais 60. Desta forma, para um arco AB cujo comprimento é expresso em unidades de circunferência corresponde um numero de unidades de corda.

Boyer (2001) enfatiza que não se conseguiu explicar porque Hiparco dividiu a circunferência em 360º. Porém, como o desenvolvimento da trigonometria desta época estava relacionado com a astronomia, uma hipótese é que essa divisão se deva ao fato de que a Terra dá uma volta ao redor do Sol em uma trajetória circular que tem uma duração aproximada de 360 dias.

Quanto às subdivisões posteriores Boyer (2001) ressalta que facilitam a mensuração, já que quanto menor a unidade, mais fácil a aproximação da medida por inteiros.

> (...) sempre que os estudiosos da antiguidade queriam um sistema preciso de aproximação, eles adotavam a base sessenta para a parte fracionada; isto levou as expressões ﬀrações astrônomasò e ﬀrações físicasò para distinguir as frações sexagesimais das comuns (BOYER, 2001, p. 114).

Na verdade, seu papel relevante no desenvolvimento da trigonometria foi ter por meio de estudos sistematizado algumas relações entre os lados e os ângulos do triângulo o que posteriormente foi muito útil na medição de grandes e inacessíveis distâncias, como a largura de um rio etc.

Ptolomeu ao ampliar o trabalho de Hiparco influenciou o desenvolvimento da trigonometria nos séculos posteriores. Esta ampliação diz respeito à obra "Almagesto" na qual Ptolomeu apresenta uma tabela de valores numéricos relacionando as cordas de um círculo com os ângulos centrais.

Aaboe (1984, p. 127) a respeito desta obra explica que

> Almagesto desempenhou o mesmo papel na Astronomia Matemática que os Elementos de Euclides e as Cônicas de Apolônio em seus respectivos assuntos. [...] Mas Ptolomeu, diferentemente de Euclides, reconheceu as realizações de seus antecessores generosa e precisamente, de maneira que nosso conhecimento da Astronomia pré-ptolomaica é mais rico e mais firme do que o da matemática pré-euclidiana. Pela mesma razão podemos identificar bem as contribuições do próprio Ptolomeu.

Aaboe (1984) esclarece também que a maior contribuição importante do Almagesto foi ter evidenciado que era possível descrever por meio da Matemática e de forma quantitativa os fenômenos naturais pela matemática e com isso permitir a previsão satisfatória de acontecimentos futuros.

Boyer (2001, p.113) evidencia sobre a história da trigonometria que

> Deve-se lembrar que desde os dias de Hiparco até os tempos modernos não havia coisas como razões trigonométricas. Os Gregos, e depois deles os hindus e os árabes, usavam linhas trigonométricas. Essas, a principio, tiveram a forma de cordas num círculo, e coube a Ptolomeu associar valores numéricos (ou aproximações) às cordas.

Conforme Boyer (2001) os chineses tinham conhecimento das relações trigonométricas, do conceito de ângulo e a forma de medi-lo.

Por influência dos gregos e indianos os árabes para realizar cálculos astronômicos formularam as tabelas hindus de senos e ajudaram a divulgar a trigonometria do seno na Europa.

O desenvolvimento da trigonometria recebeu contribuições da geometria e da astronomia. Os egípcios e babilônios deram importante incremento ao desenvolvimento da trigonometria. Os egípcios nos estudos sobre o movimento dos astros se valeram de relações trigonométricas como as existentes entre lados e ângulos de triângulos para resolver problemas.

Kupková (2008) destaca os hindus que também deram importante contribuição para os avanços em trigonometria em especial no período de 200 a 1.200 d.C. O Varahamihira usava 120 unidades para o raio. Mais tarde, Aryabhata associou metade da corda à metade do arco, trabalhando com o raio em 3438 unidades num esforço para medir raio e arco com uma medida comum.

Amorim; Seimetz e Schmitt (2006) expõem que no século V o indiano *Aryabhata* introduziu a noção de seno de um ângulo, cabendo aos árabes a formulação do conceito de função trigonométrica e outras contribuições importantes na evolução do conhecimento trigonométrico como *Nasir Eddin* a quem se atribui a autoria do primeiro texto sistemático de trigonometria desvinculado da astronomia.

Até a Idade Média os estudos envolvendo a trigonometria pouco evoluíram e como coloca Boyer (2001) somente no século XV são efetuados avanços nesta área quando Johannes Muller, mais conhecido como Regiomontanus, em sua obra *Triangulis Omnimodis Libri Quinque* expõe de forma sistemática a Trigonometria plana e esférica, tratando-a de forma independente da astronomia.

Sobre esta obra Eves (2004) acrescenta que

> O De Triangulis Omnimodis de Regiomontanus se divide em cinco livros, os dois primeiros dedicados à trigonometria plana e os outros três à trigonometria esférica. [...] As únicas funções trigonométricas empregadas o seno e o cosseno. Mais tarde, porém, Regiomontanus calculou uma tabela de tangentes (EVES, 2004, p.297).

A partir do século XV, os estudos dos ângulos e medidas ganha importante incremento com a evolução do cálculo que criou novas situações teóricas e práticas.

Issac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz criam o Cálculo Diferencial e Integral e com isso permitem avanços no cenário trigonométrico, assim a Trigonometria ganhou moldes proeminentes no cenário da Matemática.

Boyer (2001) também comenta sobre Euler que contribuiu de forma significativa para que a Trigonometria assumisse a sua forma atual, em especial quando adotou a medida do raio de um circulo como unidade e definiu funções, aplicadas a um número e não mais a um ângulo como era feito até então, em 1748. Euler em um processo iniciado com Viète no século XVI, com o aparecimento do Cálculo Infinitesimal no século XVII com seus estudos permitiu a transição das razões trigonométricas para as funções periódicas.

Para Boyer (2001, p. 305) Euler foi "o construtor de notações mais bem sucedido de todos os tempos".

> Na obra "Comentários de Petersburgo para 1734-1735", introduziu a letra grega ´ para a razão entre comprimento e diâmetro da circunferência e usou a notação f(x) para a função de x que, embora já tivesse surgido no "*Synopsis Palmariorum Matheseos*" de William

> Jones só foi difundida a partir do uso por Euler (BOYER, 2001, p. 305).

Dante (2008) observa que o conhecimento trigonométrico superou o estudo dos triângulos e atualmente se aplica a vários campos da matemática.

> Encontramos, também, aplicações da Trigonometria em Eletricidade, Mecânica, Acústica, Música, Engenharia Civil, Topografia e em muitos outros campos de atividades, aplicações essas envolvidas em conceitos que dificilmente lembram os triângulos que deram origem à Trigonometria (DANTE, 2008, p.187).

Após conhecer um pouco mais da história da Trigonometria e sua evolução, cabe agora analisarmos os principais aspectos das abordagens desses conteúdos no Ensino Fundamental e da nossa proposta de ensino.

2.4 COMENTÁRIOS SOBRE O ENSINO DE TRIGONOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

DóAugustine (1970, p. 10) considera que ño ensino da matemática consiste na aplicação de praticas didáticas, em um bom relacionamento com os alunos e aulas práticas diáriasò.

Nacarato (2001, p.29) cita que o ensino de trigonometria nas escolas brasileiras foi fortemente marcado por três enfoques: geométrico, da geometria Vetorial e das Funções Circulares.

No enfoque Geométrico como menciona Nacarato (2001) que predominantemente até por volta de 1929, o ensino integrava a trigonometria e geometria plana. ñTodos os teoremas concernentes ao referido conceito tinham seus enunciados, hipótese, teses e demonstrações vinculadas à geometria euclidianaò (NACARATO, 2001, p. 29).

O enfoque da geometria Vetorial que dominou o cenário do ensino da Trigonometria da década de 1930 até 1960 resultou de um movimento que requeria uma Matemática mais experimental e aplicada, principalmente à Física.

E, por fim, como completa Nacarato (2001) o enfoque das Funções Circulares que predominou até por volta de 1985 e foi proposto pelo Movimento da Matemática Moderna.

Pavanello (1989) reitera sobre este Movimento, que as críticas e questionamentos ao ensino da Matemática acentuaram principalmente a partir da década de 1950, em vários países como o Brasil, principalmente em razão do desempenho insatisfatório dos alunos e pelo fato da Matemática ser a disciplina que mais aversão causa aos alunos.

O movimento da Matemática Moderna na verdade, incluiu diferentes propostas, ações e iniciativas como a criação de grupos de pesquisa que se dedicaram a criar novos currículos de matemática com apoio financeiro governamental. Esta reforma do currículo visava uma renovação dos conteúdos que tradicionalmente eram trabalhados nas escolas sendo a maioria anterior ao século XVIII. Sendo assim deveriam ser substituídos por novos campos matemáticos como ña álgebra abstrata, a topologia, a lógica matemática e a álgebra de Boole (...)ò(PAVANELLO, 1989, p. 94).

Nacarato (2001) explica que estes enfoques estavam relacionados não somente às metodologias de ensino e materiais didáticos, como também aos currículos oficiais.

2.4.1 SOBRE A COMPLEXIDADE DA TRIGONOMETRIA

Um aspecto citado por Amaral (2002) para explicar a dificuldade que os alunos apresentam na aprendizagem da Trigonometria é o grau de abstração exigido para tal.

No caso do ensino da Trigonometria os desafios são enormes principalmente porque exige alto nível de abstração e também porque a maioria dos alunos apresenta uma defasagem enorme de conhecimentos geométricos.

Amaral (2002) considera que dos conteúdos matemáticos a Trigonometria é a de mais difícil compreensão pelos alunos. Isto ocorre, principalmente devido a fatores como metodologias tradicionais basicamente expositivas, o que impede que o aluno possa desenvolver o raciocínio, agindo de forma ativa sobre objeto de conhecimento e com isso ampliando sua compreensão. ñOs fatos e conceitos são apresentados sem que o aluno tenha oportunidade de construí-losò(AMARAL, 2002, p.11).

Brolezzi (1996) sobre a dificuldade de aprendizagem da trigonometria observada na maioria das escolas afirma que

> Da carga simbólica forte da Trigonometria advém muito da dificuldade do seu ensino e aprendizagem. A origem grega de boa parte dos seus conceitos e a utilização da linguagem dos ângulos calcada na base 60 dos povos da Mesopotâmia fazem com que os alunos tenham muita dificuldade em aprender Trigonometria (BROLEZZI, 1996, p. 70).

Ensinar Trigonometria e, em especial, desenvolver a compreensão desses conteúdos é quase um desafio principalmente porque tanto o aluno quanto o professor não são estimulados para construir conceitos como os geométricos, devido à formalização e pela memorização de procedimentos o que não promove a compreensão deles.

2.4.2 CONCEITOS TRIGONOMÉTRICOS

Para Pais (2006, p. 121), ños conceitos são ideias gerais e abstratas, associadas a certas classes de objetos, criados e transformados nos limites do território de uma área de conhecimento disciplinarò.

Sobre os conceitos matemáticos Caraça (2003, p. 118) enfatiza que ños conceitos matemáticos surgem, uma vez que sejam postos problemas de interesse capital, prático ou teórico para assegurar a compatibilidade lógica de aquisições diferentesò.

Lorenzato (2006, p.69) comenta que

> Os conceitos não são construídos em sequência linear nem de forma isolada, não é recomendável que sejam apresentadas separadamente ao aluno as noções de aritmética, geometria e álgebra. Aqueles que estudaram de modo isolado os conceitos ficaram com a impressão de que estes não se inter-relacionam e que aprenderam assuntos distintos.

Segundo Silva e Frota (2012) os conceitos relacionados à trigonometria são considerados de forma fragmentada o que impede muitas vezes que o aluno atribua-lhes um significado. Os autores citam como exemplo desta fragmentação do ensino a abordagem da transição do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico e deste, para o plano cartesiano.

2.4.3 OBJETIVOS DO ENSINO DA TRIGONOMETRIA

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (1999) o ensino da trigonometria deve visar à capacitação do aluno para que ele possa aplicar este conteúdo em diferentes situações; o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas envolvendo mediações e cálculo de distâncias inacessíveis e possa ser capaz de construir modelos relativos a fenômenos periódicos.

De acordo com as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais

> O que deve ser assegurado são as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Dessa forma, o estudo detém-se às funções seno, cosseno e tangente, com ênfase ao seu estudo na primeira volta do círculo trigonométrico e à perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas. (BRASIL, 2002, p. 122)

Pode-se dizer então que o ensino de trigonometria no Ensino Fundamental deve privilegiar a compreensão e significação dos conteúdos e não a memorização. É preciso que o ensino desenvolva no aluno capacidades, habilidades e competências diversas como a contextualização dos conteúdos, relacionando-os ao seu cotidiano de vida. Por isso a importância do estudo da trigonometria ser abordado relacionando ao cotidiano dos alunos, vinculando às suas aplicações práticas.

Como enfatizam Silva e Frota (2012, p. 99) uma das metas do ensino de Trigonometria é "que o aluno saiba transitar desde o Teorema de Pitágoras, das razões trigonométricas no triângulo retângulo, até interpretações no círculo trigonométrico".

2.4.4 PRÁTICAS INADEQUADAS DE ENSINO DA TRIGONOMETRIA

Fiorentini (1995) observa que a maioria das propostas pedagógicas em relação à trigonometria desconsidera o desenvolvimento histórico da trigonometria e por isso não há uma inovação nas metodologias de ensino e aprendizagem e com isso não se propicia uma compreensão maior ao aluno sobre este conhecimento matemático.

O conhecimento histórico da matemática deve fazer parte da formação dos professores para que possam mostrar a seus alunos que a matemática faz parte de verdades externas à escola, está relacionada com a vida de cada um e é útil para seu crescimento pessoal. ñA matemática praticada na sala de aula é uma atividade humana porque o que interessa nessa situação é a aprendizagem do alunoò (CARRAHER; SCHLIEMANN; CARRAHER, 1993, p.12).

Ribeiro e Souza (2009) comentam que o grande problema com relação ao ensino de Trigonometria é que o ensino se resume a transmissão, assimilação e memorização, ou seja, o aluno não sabe como, quando e como utilizá-la em sua vida cotidiana. Deste modo, ele não constrói este conhecimento, que passa a ser desprovido de significado para ele, sem saber seu valor. Por isso é preciso buscar novas formas de ensinar trigonometria para que o aluno reconheça sua importância na sua vida cotidiana e acadêmica.

Pacheco e Simionato (2011) complementam que com relação aos conhecimentos referentes à Trigonometria observa-se uma falta de motivação para aprender por parte dos alunos e uma falta de motivação para ensinar. Por isso os docentes precisam superar a posição de comodismo e passar a assumir uma postura investigativa, buscando conhecimentos que possam oferecer um suporte para vencer dificuldades como a falta de materiais pedagógicos adequados e atualizados, objetivando desenvolver o estudo da Trigonometria de forma mais satisfatória, em especial para o aluno.

> Nos dias atuais, lida-se com quantidades numéricas expressivas, gráficos indicando comportamento de fenômenos econômicos, biológicos, sociais e políticos, o que revela, segundo alguns analistas, a tendência das ciências se matematizarem. Ocorre também uma maior facilidade de informações fornecidas por meios de comunicação, Internet ou outras fontes. Estes conhecimentos são repassados aos alunos de forma livre, sem critérios, proporcionando

> um excesso de informações muitas vezes sem utilidade real, o que pode causar apatia e consequentemente desinteresse ao conteúdo escolar. (PACHECO e SIMIONATO, 2011, p. 03)

Brolezzi (1996) acrescenta que entre as muitas possíveis causas das dificuldades que os alunos enfrentam no processo de aprendizagem de Trigonometria, uma delas é justamente a forma de seleção de conteúdos e a linguagem desta área de conhecimento matemático. Segundo o autor a trigonometria tem uma carga simbólica forte decorrente da origem grega de boa parte de seus conceitos, o que dificulta a sua compreensão.

DôAmbrósio (2004) salienta ser essencial proporcionar ao aluno a ampliação de seus conhecimentos da história da Matemática. Para que ele se conscientize da importância deste conhecimento para sua vida diária e para a sociedade como um todo, já que a Matemática está presente de diferentes formas no seu cotidiano.

DôAmbrósio (2004) coloca que qualquer proposta de inovação em educação matemática e educação em geral precisa antes de tudo colocar em discussão os conteúdos que devem estar articulados no contexto moderno. ñTorna-se cada vez mais motivar alunos para uma ciência cristalizada. Não é sem razão que a história vem aparecendo como um elemento motivador de grande importânciaò(DôAMBRÓSIO, 2004, p. 29).

Quando ao aluno é oferecida a oportunidade de um contato maior com a história da trigonometria, ele pode então encontrar respostas para suas dúvidas, compreendendo melhor os conceitos e conteúdos e com isso podem construir melhor o conhecimento trigonométrico e em especial aplicá-lo ao seu cotidiano, já que as áreas de aplicação da trigonometria não se resumem apenas à geometria e matemáticas, sendo que suas contribuições tem sido valiosas na topografia, engenharia, física, medicina entre outras áreas.

2.4.5 NOVAS FORMAS DE APRENDER TRIGONOMETRIA

Duval (2005) ressalta que é preciso que o aluno reconheça o objeto matemático por meio de múltiplas representações.

> A condição fundamental para que um aluno possa, por si próprio, transferir ou modificar formulações ou representações de informações durante a resolução de um problema. Essa condição supõe que ele não identifica mais os objetos matemáticos com os conteúdos de certas representações. (DUVAL, 2005, p. 23)

Silva e Frota (2012) observam que no ensino de Trigonometria no Ensino Fundamental é importante utilizar diferentes recursos como os modelos matemáticos cuja integração com as noções matemáticas precisa ser construída pelo aluno.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1998, p.36) reforçam que

> Um conhecimento só é pleno se for mobilizado em situações diferentes daquelas que serviram para lhe dar origem. Para que sejam transferíveis a novas situações e generalizados, os conhecimentos devem ser descontextualizados, para serem novamente contextualizados em outras situações.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) evidenciam que algumas aplicações da trigonometria como problemas de cálculos de distâncias inacessíveis são interessantes aplicações da trigonometria, e esse é um assunto que merece ser priorizado na escola [...]. Outros tópicos presentes no estudo da trigonometria como, por exemplo, as outras três razões trigonométricas, as fórmulas para *sen(a + b)* e *cos(a + b)* que tanto exigem dos alunos para serem memorizadas, podem ser desprezados. (BRASIL, 2006, p. 74)

Silva e Frota (2012) apontam ser essencial a compreensão de conceitos e modelos matemáticos e implica em atribuir significado, ou seja, fazer ter um sentido.

> (...), por exemplo, ao modelo que denominamos círculo trigonométrico, significa compreender que esse modelo consiste na circunferência orientada, de raio unitário, tendo o sentido anti-horário como sentido positivo, com centro no ponto $O = (0,\ 0)$, origem do sistema cartesiano. O ponto $A = (1,\ 0)$, ponto de interseção entre a circunferência e o eixo x é a origem de todos os arcos, do qual se parte, podendo percorrer o círculo no sentido positivo ou negativo. (SILVA e FROTA, 2012, p. 98)

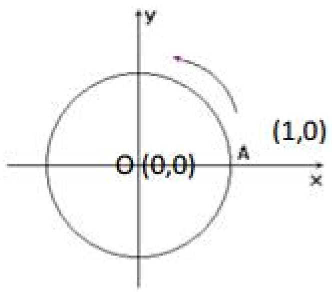


Figura 8 ï Círculo trigonométrico orientado.
Fonte: SILVA e FROTA, 2012, p.98

O ensino de trigonometria contextualizado permite então que antes de tudo o aluno compreenda os conteúdos e não mais memorize, resgatando-os posteriormente quando necessário e relacionando-os ao seu cotidiano e sua realidade de vida.

Deste modo, desmistifica-se a imagem da trigonometria construída ao longo do tempo de disciplina de difícil aprendizagem, ao mesmo tempo em que coloca o aluno no centro do processo educativo.

Mendes (2009) esclarece que é preciso buscar novas formas de ensinar e aprender trigonometria através de propostas ativas que propiciem a redescoberta do conhecimento; que permitam ao aluno formular hipóteses e testá-las, investigando, explorando todas as possibilidades e mais do que compreender o objeto de conhecimento possam também compreender porque é importante aprender. Deste modo, como menciona Mendes (2009) possibilita-se ao aluno se tornar mais criativo, crítico e observador utilizando o conhecimento construído na solução de problemas do cotidiano. ñEssa prática, então, dá oportunidade ao aluno de construir sua aprendizagem, através da aquisição de conhecimentos e redescoberta de princípiosò (MENDES, 2009, p. 110).

É importante ainda ressaltar o caráter dinâmico deste processo, pois quando o aluno é convidado a interagir com o conhecimento, os papéis também se transformam e o professor passa a ser um mediador, um facilitador da aprendizagem do aluno. Assim, o aluno aprende de forma mais significativa e este aprender se efetiva de maneira compartilhada.

> O educador já não é o que apenas educa, mas o que enquanto educa, em diálogo com o educando que, ao ser educado, também se educa. Ambos, assim, se tornam sujeitos do processo em que crescem juntos e em que ños argumentos de autoridadeò já não valem. Em que, para ser-se funcionalmente, autoridade, se necessita estar sendo com as liberdades e não contra elas. (FREIRE, 1987, p. 39)

Sànchez e Bravo (2006) relatam que a aprendizagem de Trigonometria deve ser significativa para o aluno e para isso é preciso que ele articule ideias e conceitos, aprenda a observar, questionar, formular hipóteses e testá-las, relacionando o conhecimento novo aos já construídos e com isso obtendo suas respostas de modo criativo e autônomo. ñEnfim, exige que construa paralelamente fatos, conceitos, princípios, procedimentos e estratégias relativas ao conhecimento matemáticoò (SÁNCHEZ e BRAVO, 2006, p. 24).

No ensino de trigonometria os documentos oficiais apontam que para haver uma maior significação da aprendizagem, ideias e conceitos devem ser articulados de forma lógica para permitir ao aluno estabelecer relações entre eles. Por isso deve-se evitar o foco e o detalhamento exagerado na nomenclatura, fórmulas e equações.

Quanto aos conhecimentos que devem ser priorizados segundo Brasil (2006) há alguns conteúdos como as três razoes trigonométricas que podem ser dispensadas em razão de exigirem apenas a memorização e não a compreensão do aluno. Já os problemas de cálculos de distâncias inacessíveis que são aplicações muito interessantes devem estar na lista das prioridades.

Quanto aos recursos Pais (2006) alerta também para o fato de que o livro didático não deve ser considerado o único material utilizado em sala de aula. isso requer do docente a pesquisa a fim de se atualizar, acessando outros recursos didáticos articulando-os com o uso do livro e com isso proporcionando maiores condições de uma aprendizagem significativa ao aluno.

> A velocidade e a diversidade na informação trazem grandes benefícios para a prática docente. No entanto, cabe ao professor filtrar essas informações e redirecioná-las para o uso e bom proveito nas práticas educativas. [...] cabe ao professor fazer articulações permanentes entre o livro didático e outras formas de expressão do saber, pois no plano educacional mais amplo, a tendência é que todos os recursos possam ser redimensionados e multiplicados para corresponder à multiplicidade contida no fenômeno que interliga ensino e aprendizagem. (PAIS, 2006, p. 49)

Mendes (2001) cita que um recurso metodológico que pode contribuir para a aprendizagem significativa da Trigonometria são as atividades estruturadas envolvendo a história da Matemática, pois permitem ao aluno buscar o conhecimento e fazer descobertas, desenvolvendo a criatividade, a autonomia, entre outros aspectos.

Foresti (1995) completa que é importante que o processo de ensino e aprendizagem se torne mais dinâmico, Nesse sentido, é que o professor deve buscar novas metodologias e recursos de ensino como o lúdico para motivar os alunos e despertar o interesse pela Trigonometria, propondo então novas formas de aprender, de vivenciar o conhecimento.

A respeito do jogo os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) destacam que ñ(...) um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazerò Por isso, segundo este documento cabe ao professor analisar a potencialidade educativa dos jogos e articulá-lo com o desenvolvimento do conteúdo curricular.

Miras (2006) considera essencial também considerar os conhecimentos prévios dos alunos construídos tanto no contexto escolar como em outros contextos. Assim, no ensino de Trigonometria e da Matemática em geral o professor precisa determinar o quanto os alunos conhecem sobre esta área, pois é isso que fundamentará a construção de novos conhecimentos e significados; permitindo que o aluno seja capaz de estabelecer relações entre os conhecimentos prévios e os novos.

Na verdade, o que precisa ser mudado é a forma de ensinar trigonometria. Este ensino precisa ser antes de tudo participativo, levando o aluno a agir sobre o conhecimento, o que amplia sua compreensão e obviamente propicia uma aprendizagem mais efetiva e significativa.

2.5 MODELAGEM MATEMÁTICA

No âmbito da Educação matemática uma das estratégias de ensino que se destaca cada vez mais é a Modelagem Matemática.

Quanto à modelagem matemática Silva e Frota (2012) expõem que ao mesmo tempo em que ajuda na estruturação dos processos de aprendizagem, permite ao professor introduzir e desenvolver novos conceitos matemáticos, ao mesmo tempo em que ampliam a compreensão do aluno.

Franchi (2007) reitera que um modelo matemático pode ser entendido de forma básica como uma representação simplificada de uma dada realidade. ñUm modelo matemático pode ser explicado como uma representação abstrata de uma parte do mundo real, através de estruturas e conceitos matemáticosò(FRANCHI, 2007, p.181).

Os motivos para o reconhecimento desta importância são variados e estão relacionadas com a motivação do aluno para aprender; facilitar a aprendizagem; possibilitar a utilização da Matemática em diferentes áreas, assim como promover o desenvolvimento de habilidades como de exploração e compreensão, ampliando a compreensão do aluno quanto à função sociocultural da matemática.

Borges e Nehring (2008) afirmam que no contexto da Modelagem Matemática, a resolução de problemas reais se constitui importante procedimento de pesquisa, permitindo ao aluno coletar e analisar dados, fazer avaliações, comparar resultados o que se reflete em uma melhoria da sua capacidade de tomar decisões e das próprias decisões tomadas e ainda da ação do sujeito sobre a realidade.

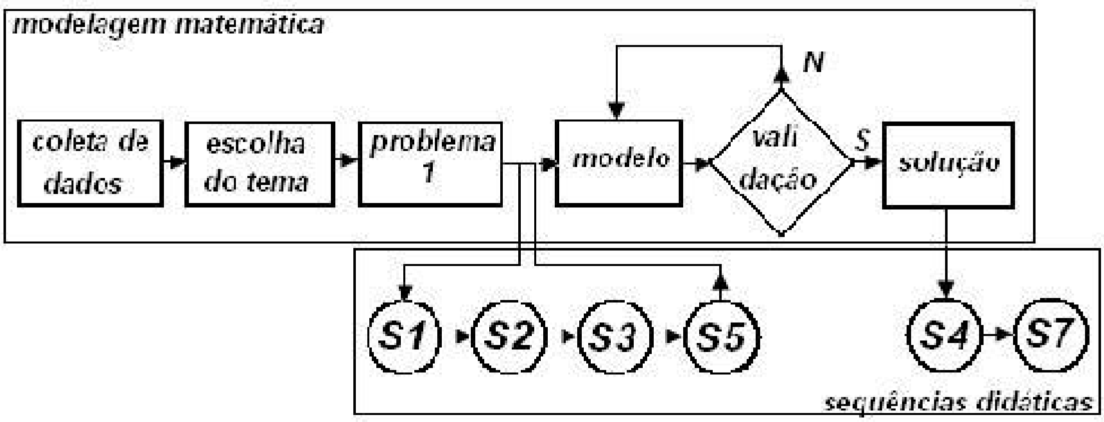


Figura 9 ï Passos da Modelagem Matemática associados às situações didáticas em paralelo.
Fonte Borges e Nehring, 2008, p. 144

Almeida e Dias (2004) enfatizam que Modelagem Matemática pode ser considerada uma alternativa para um ensino e aprendizagem mais significativos dos conteúdos matemáticos, já que permite a aluno desenvolver capacidades e habilidades ao mesmo tempo em que desperta seu interesse para aprender, torna-o mais crítico e capaz de refletir sobre a Matemática e seus conteúdos.

Além de estruturar e promover os processos de aprendizagem permite que o professor possa introduzir e desenvolver conceitos matemáticos, desenvolvendo então uma compreensão ampliada.

Micotti (1999, p. 156) acrescenta que “as novas orientações pedagógicas acentuam a importância da construção do conhecimento, das elaborações pessoais dos estudantes para acesso ao saber”.

Silva e Frota (2012) complementam que os alunos devem ser incentivados a explorar modelos matemáticos. Assim, a partir de um modelo como, por exemplo, $y = 2x + 4$, segundo Silva e Frota é possível propor uma série de tarefas aos alunos como a representação gráfica; prever as mudanças que ocorreriam se o valor do coeficiente angular ou do coeficiente linear fosse alterado entre outros. “O exemplo citado pretende destacar algumas iniciativas que podem ser relevantes no processo de aprender a modelar, a partir da ação de apropriação de um modelo matemático” (SILVA e FROTA, 2012, p. 99).

O contexto da modelagem matemática de acordo com Pais (2001) compreende cinco etapas básicas: análise preliminar; análise *a priori*; aplicação da sequência; análise *a posteriori*; e validação.

A análise preliminar é a etapa que permite conhecer melhor os sujeitos e as condições do contexto e da realidade na qual a sequência didática será efetivada.

> Para melhor organizar a análise preliminar, é recomendável proceder a uma descrição das principais dimensões que definem o fenômeno a ser estudado e que se relacionam com o sistema de ensino, tais como a epistemologia cognitiva, pedagógica, entre outras. Cada uma dessas dimensões participa na constituição do objeto de estudo. (PAIS, 2001, p. 101)

Almouloud e Coutinho (2008, p. 66) aponta que as analises preliminares podem comportar as seguintes vertentes:

- epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
- do ensino usual e seus efeitos;
- das concepções dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que marcam sua evolução;
- das condições e fatores de que depende a construção didática efetiva;
- a consideração dos objetivos específicos da pesquisa;
- o estudo da transposição didática do saber considerando o sistema educativo no qual insere-se o trabalho.

Artigues (apud ALMOULOUD e COUTINHO, 2008) essas análises preliminares podem ser retomadas, principalmente porque devem ser articulados com as demais fases da pesquisa.

Esta etapa permite ao professor avaliar as capacidades já adquiridas e ajustar as atividades e exercícios previstos às possibilidades e dificuldades reais de uma turma, conforme orientam Dolz, Noverraz e Schnuwly (2004).

A fase inicial de apresentação da situação permite, portanto, fornecer aos alunos todas as informações necessárias para que conheçam o projeto comunicativo visado e a aprendizagem de linguagem a que está relacionado. ǹNa medida do possível, devem ser realizadas no âmbito de um projeto de classe, elaborado durante a apresentação da situação, pois este torna as atividades de aprendizagem significativas e pertinentesò (DOLZ; NOVERRAZ; SCHNEUWLY, 2004, p. 98) .

A análise a priori como informa Pais (2001) permite definir as variáveis locais e globais que envolvem a realidade da sequência didática e ainda os conhecimentos docentes sobre a Matemática e o processo educativo.

Artigues (apud ALMOULOUD e COUTINHO, 2008) complementa que as variáveis locais ou microdidáticas se referem à organização de uma sessão ou fase, enquanto que as variáveis globais ou macrodidáticas se referem à organização global da engenharia.

Almouloud e Coutinho (2008, p. 67) salientam que o objetivo de uma análise a priori é determinar como as escolhas efetuadas, ou seja, as variáveis selecionadas permitem explicar o sentido dos comportamento dos alunos e controlá-lo. Dessa forma, segundo Almouloud e Coutinho (2008, p. 67) nesta fase deve-se antes de tudo descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação adidática desenvolvida.

Também segundo os autores é preciso analisar a importância da situação adidática para o aluno; assim como as possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação.

De acordo com Almouloud e Coutinho (2008, p. 67) ñas ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagemò.

Também é preciso prever possíveis comportamentos e como através da análise será possível controlá-los, assegurando comportamentos esperados.

A aplicação da sequência didática diz respeito à ação em si na qual a observação deve ser uma constante.

A fase da aplicação da sequência didática é conhecida, como salientam Almouloud e Coutinho (2008) como a fase clássica da Engenharia Didática e é o momento de colocar em funcionamento o que foi construído até então, fazendo as correções necessárias. Estas correções são identificadas geralmente por meio das análises locais do desenvolvimento local, retornando então à etapa da análise a priori, em um processo de complementação constante.

A análise a posteriori diz respeito ao tratamento das informações coletadas por meio da observação durante a aplicação da sequência didática.

Almouloud (2007, p.174) coloca que a análise a posteriori ñ(...) é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribui para a melhoria dos conhecimentos didáticos (...)à

E, por fim, Pais (2001) cita a última etapa, da validação quando então são confrontados os resultados das análises a priori e a posteriori.

Almouloud (2007) relata que a Engenharia Didática foi proposta por Artigue e desenvolvida na escola francesa de Didática da Matemática, podendo ser utilizada em pesquisas que focam o ensino e aprendizagem de um dado objeto matemático.

Por isso Almouloud (2007) afirma que a Engenharia Didática se caracteriza por um esquema experimental e baseia-se nas realizações didáticas efetivadas em sala de aula.

Caracteriza-se ainda pela forma de validação que consiste no confronto entre a análise a priori, que se apoia no referencial teórico, e a análise a posteriori baseada nos resultados de experimentação.

Machado (1999, p. 200) observa que ñtorna-se importante ressaltar que a singularidade da engenharia didática não repousa sobre seus objetivos, mas sobre suas características de funcionamento metodológicoò

A engenharia didática ao investigar os diferentes aspectos dos processos de aprendizagem de matemática, foca sua atenção para as sequências didáticas quanto á sua concepção, efetivação e análise.

2.5.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sequência didática como ressalta Zabala (1998, p. 18) é ñum conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunosò.

É importante o professor ter em mente que toda sequência didática tem um objetivo que deve ser compartilhado com todos os integrantes do processo.

Enquanto conjunto de atividades interligadas, a sequência didática é muito útil no sentido de ensinar um conteúdo, em etapas sucessivas, organizadas de acordo com os objetivos pedagógicos e de aprendizagem. È uma maneira de articular temas e conteúdos permitindo o desenvolvimento do conhecimento lógico, além de competências, capacidades e habilidades diversas.

O Guia de Orientações para Intervenção Pedagógica (2011) reforça que

> (...) o trabalho com sequência didática supõe um rico processo de interação em sala de aula, com a participação e orientação do professor como parceiro experiente e conhecedor do conteúdo que ensina, e cria um campo que favorece a apropriação, por parte dos alunos, de um dos instrumentos culturais elaborados historicamente pelo homem. (ESPÍRITO SANTO, 2011, p. 34)

Pais (2001) evidencia que neste processo as situações de institucionalização surgem no momento em que o professor realiza a revisão dos conhecimentos que serão acionados durante a aplicação da sequência didática. É quando estes conhecimentos tornam-se um saber oficial. As situações de institucionalização tem então a finalidade de resgatar o caráter objetivo e universal do conhecimento estudado. ñSob o controle do professor, é o momento onde se tenta proceder a passagem do conhecimento, do plano individual e particular, a dimensão histórica e cultural do saber científicoò(PAIS, 2001, p. 73-4).

Pais (2001) esclarece que a elaboração de uma sequência didática exige uma preparação e um planejamento criterioso, principal porque é formada por um número de aulas visando à observação de situações de aprendizagem envolvendo e ainda visa desenvolver no aluno a prática da pesquisa, da investigação.

Aula, neste contexto, como explica Pais (2001) não devem ser entendidas no sentido da rotina escolar. Na sequência didática aulas são chamadas de sessões e são direcionadas especificamente para a pesquisa.

Almouloud e Coutinho (2008) completa que a aplicação da sequência didática pode ser definida como

> (...) o momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o se necessário, quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica em um retorno a analise *a priori*, em um processo de complementação. (ALMOULOUD e COUTINHO, 2008, p. 67)

No início da sequência didática é importante que o professor faça uma sondagem visando levantar os conhecimentos prévios dos alunos, baseando-se neles para o planejamento das aulas, que devem conter principalmente desafios, situações-problema, jogos, visando desenvolver a capacidade dos alunos de análise e reflexão.

Miras (2006, p. 60) aponta que os conhecimentos prévios "abrangem tanto conhecimentos e informações sobre o próprio conteúdo como conhecimentos que, de maneira direta ou indireta, estão relacionados ou podem relacionar-se com ele".

Miras (2006) considera também que os conhecimentos prévios do aluno são os fundamentos da construção dos novos significados, ou seja, da aprendizagem significativa na qual o aluno é capaz de estabelecer relações entre o conhecimento já construído e o novo que lhe é apresentado na situação de aprendizagem. ñ(...) sempre podem existir conhecimentos prévios a respeito de novo conteúdo a ser aprendido, pois, de outro modo, não seria possível atribuir um significado inicial ao novo conhecimentoò(MIRAS, 2006, p. 62).

À medida que a sequência vai sendo efetivada, é necessário que o professor aumente a complexidade dos desafios o que permite um aprofundamento do tema em questão.

Borges e Nehring (2008) mencionam que o desafio do professor é criar uma sequência didática que realmente promova a aprendizagem do aluno, e também possa contribuir para sua formação.

Por isso como comenta Zaballa (1998) os resultados da sequência didática como o alcance de seus objetivos dependerão em grande parte do planejamento eficaz dos conteúdos a serem desenvolvidos e da intervenção metodológica elaborada. Esta intervenção por sua vez está relacionada com a definição de tipos de atividades para se obter melhores resultados de aprendizagem e ainda a melhoria do ensino. Já o planejamento dos conteúdos deve ser feito de forma criteriosa já que orienta as ações a fim de que a sequência didática atinja seus objetivos. ñO conteúdo é tudo quanto se tem que aprender para alcançar determinados objetivos que não apenas abrangem as capacidades cognitivas, como também incluem as demais capacidadesò(ZABALA, 1998, p.30).

Borges e Nehring (2008, p. 136) expõem que

> Sequências com situações de pesquisa bibliográfica e aulas expositivas podem levar ao aprendizado do mesmo conceito obtido com sequências compostas por situações didáticas que usam materiais concretos, experimentos e aquisição de conceitos via seminários, ou por aquelas que utilizam estudo dirigido, desenvolvendo diferentes habilidades lógicas e atitudes diante das dificuldades inerentes ao aprendizado.

Falcão (2003) reitera que para que uma sequência didática atinja seus objetivos é fundamental um contrato didático como instrumento legitimador do produto final.

Fiorentini e Lorenzato (2006) informam que conforme Brousseau

> Contrato didático significa as atitudes, comportamentos, posturas e ações dos alunos, que são esperadas pelo professor, e aquelas do professor, que são esperadas pelos alunos. Esse contrato pode ser implícito ou explícito, podendo o mesmo ser negociado entre professor e alunos (FIORENTINI e LORENZATO, 2006, p.47).

Fiorentini e Lorenzato (2006) afirmam que também de acordo com Guy Brousseau esse contrato é importante porque torna claro o conjunto de regras que determinam o papel de cada sujeito na situação didática, suas responsabilidades perante o grupo e ainda sua participação.

Bronckart (1999, p. 233) enfatiza que ñas sequências e as outras formas de planificação constituem, [...] o produto de uma restauração de um conteúdo temático já organizado na memória do agente-produtor na forma de macroestruturasò.

Para Dolz; Noverraz e Schneuwly (2004, p. 98) ñas sequências didáticas servem, portanto, para dar acesso aos alunos a práticas de linguagem novas ou dificilmente domináveisò.

Zabala (1998) acrescenta que na sequência didática é preciso considerar as intenções educacionais e o papel das tarefas na definição dos conteúdos de aprendizagem. Na verdade, segundo Zabala (1998) os conteúdos de aprendizagem ajudam a explicitar as intenções educativas abrangendo três dimensões: conceitual, procedimental e atitudinal.

A dimensão conceitual diz respeito ao que se deve ensinar e aprender; a dimensão procedimental refere-se ao conhecimento para a ação, ou seja, o que se deve aprender para fazer; e, a dimensão atitudinal diz respeito como deve ser o aprender, estando relacionada com ações e atitudes.

Zabala (1998) salienta que existem diversos tipos de sequência, cada uma podendo contribuir para a efetivação significativa da aprendizagem. Por isso cabe ao professor conhecê-las; reconhecer suas possibilidades e carências; e refletir sobre qual delas se adapta melhor aos propósitos da ação educativa e, em especial às necessidades educacionais dos alunos.

Borges e Nehring (2008) complementam que a sequência didática no contexto da modelagem contribui muito para a formação cidadã do aluno, já que é uma oportunidade de dar um novo significado aos conhecimentos matemáticos, articulando-os com os problemas de sua realidade de vida, ampliando a percepção do aluno da realidade em que se insere como sujeito sócio-histórico.

Vargas e Magalhães (2011, p.125-6) ressaltam que a efetivação de uma sequência didática envolvem quatro fases:

Primeira fase - Apresentação da situação de aprendizagem ï é quando o professor irá compartilhar com os alunos o trabalho, apresentando o tema e comentando sobre as diversas atividades que serão desenvolvidas. Nesta etapa o professor tem oportunidade também de expor os conteúdos a serem trabalhados; áreas de conhecimento envolvidas, discutindo de forma coletiva aspectos da organização da sequência didática.

Segunda Fase - Produção Inicial ï pode ser realizada individualmente ou em grupos e tem o objetivo de identificar o conhecimento prévio dos alunos sobre o objeto de conhecimento a ser desenvolvido. Nesta etapa, o professor coletará informações importantes sobre o que os alunos já sabem, permitindo então planejar uma articulação desses conhecimentos prévios com os que serão construídos no decorrer da sequência didática e também planejar futuras intervenções e mesmo transformar as atividades em função das necessidades dos alunos.

Como colocam os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1997)

> As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam uma inteligência essencialmente prática, que permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões e portanto, desenvolver uma ampla capacidade para lidar com a atividade matemática. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado. (BRASIL, 1997, p.37)

Terceira etapa ï Módulos Intermediários ï são construídos em torno da temática trabalhada, permitindo a aprendizagem por meio de atividades variadas.

Quarta Fase ï Produção Final ï constitui um parâmetro de avaliação para que o professor possa avaliar os conhecimentos construídos pelo aluno durante o desenvolvimento da sequência didática.

Dolz; Noverraz e Schnuwly (2004, p. 107) sobre esta etapa observam que ñauxilia o aluno a [...] regular e controlar seu próprio comportamento de produtor de textos, durante a revisão e reescritaò.

O objetivo desta etapa pode ainda incluir que o aluno possa colocar em prática o que foi trabalhado nos módulos e para o professor é uma oportunidade de realizar uma avaliação somativa.

Dolz, Noverraz e Schnuwly (2004) evidenciam que o movimento geral da sequência didática vai do complexo para o simples. ñ(...) da produção inicial aos módulos, cada um trabalhando uma ou outra capacidade necessária ao domínio de um gênero. No fim, o movimento leva novamente ao complexo: a produção finalò (DOLZ; NOVERRAZ; SCHNUWLY, 2004, p. 103).

Vargas e Magalhães (2011, p. 142) reforçam que

> A Sequência Didática é um instrumento dinâmico, ou seja, sua organização permite inserções de atividades de acordo com a observação do professor a respeito do desenvolvimento das

capacidades de linguagem dos alunos, seus conhecimentos prévios e suas experiências culturais.

Também Vargas e Magalhães (2011) relatam que uma das características da sequência didática é a impossibilidade de prever o processo de forma global, ou seja, nem tudo poderá ser previsto, já que em muitos aspectos o professor terá que adaptar o planejado de acordo com a realidade dos alunos, nível de dificuldade encontrado pelos alunos na realização das tarefas etc. Em diversos momentos a redefinição das atividades permitirá que a sequência didática assuma seu sentido completo.

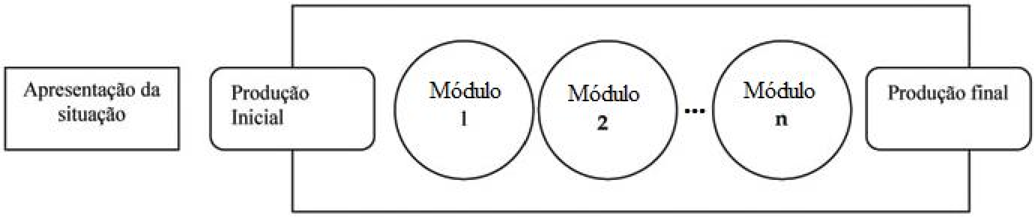


Figura 10 ï Esquema da Sequência Didática.
Fonte: DOLZ, NOVERRAZ & SCHNEUWLY, 2004, p. 98.

Lins e Gimenez (2001) esclarecem que é importante trabalhar sequências com foco investigativo, oferecendo a oportunidade- de atividades de investigação, o que possibilita ao aluno construir conhecimentos por meio da experimentação, generalização, abstração e formação de significados.

CAPÍTULO 3 - ATIVIDADES E MATERIAIS EXPLORADOS

Neste Capítulo, faremos uma descrição detalhada de cada uma das quatro atividades desenvolvidas com os alunos. Todas as atividades aqui mostradas foram realizadas na Escola Municipal de Ensino Fundamental e Educação Infantil ñOscar Novakoskiò em Dois Córregos ï SP com alunos do nono ano, escola na qual fui professor efetivo. Para a realização das atividades 1, 3 e 4 foram utilizadas duas aulas (uma aula dupla) em cada atividade, já na atividade 2, foram utilizadas 6 aulas (3 aulas duplas).

Para a realização de todas as atividades, foi entregue antecipadamente para a diretora da escola, um Plano de Trabalho, detalhando a sequência didática, os objetivos de cada atividade, os materiais utilizados nas atividades e o tempo estimado da realização de cada atividade. Informando-a que o cronograma seria cumprido.

3.1 ATIVIDADE 1: EXPLORANDO A TANGENTE DE UM ÂNGULO AGUDO

Nessa primeira atividade, procuramos combinar com os alunos que durante as próximas semanas (dia da semana onde as aulas duplas de Matemática eram no final do período), eles estariam realizando algumas atividades que não estavam relacionadas com o conteúdo em vigência no material didático para aquele momento. Ficou bem claro, que embora fossem atividades “diferenciadas”, elas teriam uma avaliação contínua correspondente ao desempenho de cada grupo, durante o período em que realizaram o trabalho.

Antes de iniciarmos a atividade, realizamos um levantamento de conhecimentos prévios sobre conceitos básicos de geometria já estudados pelos alunos, como: ângulo agudo, ângulo reto, triângulo retângulo, catetos, hipotenusa, soma dos ângulos internos de um triângulo e uso do transferidor.

Nessa primeira atividade, tínhamos a intenção de difundir o conceito da Tangente, embora os alunos não desconhecessem plenamente esse termo, o maior objetivo aqui era fazer com que todos conseguissem acreditar que num simples triângulo retângulo existe uma razão poderosa entre dois lados específicos. Para atingir tal propósito, primeiramente dividimos a classe em grupos de quatro alunos. Realizar esta atividade individualmente não teria o ganho adequado, pois o trabalho em grupo é uma preciosa oportunidade de construir o conhecimento coletivamente. Essa prática faz com que o aluno se relacione de outras formas com o que está sendo proposto.

O trabalho em grupo é uma estratégia muito importante para o aprendizado, não é por menos que é muito defendido por grandes pensadores.

Os estudos sobre desenvolvimento intelectual do psicólogo bielo-russo Lev Vigotsky, no início do século XX, atribuíram um papel preponderante às relações interpessoais no processo de aquisição do conhecimento. "Ao longo do século passado, pensadores como Piaget, Vigotsky e Paulo Freire mostraram que a aprendizagem depende de uma ação de mão dupla. E essa interação não se resolve pela mera passividade", diz Luís Carlos de Menezes, educador da Universidade de São Paulo. Daí a importância do trabalho em grupo. Fonte: http://educarparacrescer.abril.com.br[4]

Foram utilizados nessa atividade lúdica, papel cartão, régua, tesoura, calculadora e transferidor. Todos os materiais foram providenciados pelos próprios alunos.

Com os grupos divididos e com os materiais distribuídos, inicia-se então a atividade que nesse primeiro momento é a construção de quatro triângulos retângulos, por grupo, com os ângulos sugeridos:

90º, 60º e 30º;

90º, 70º e 20º;

90º, 40º e 50º;

90º, 45º e 45º.

[4] Disponível em: <http://educarparacrescer.abril.com.br/aprendizagem/apostar-trabalho-grupo-508577.shtml>. Acessado em: 14 de Junho de 2016.

Figura 11 ï Alunos confeccionando os triângulos.
Fonte: Arquivo do autor

Na construção dos triângulos retângulos os alunos ficaram ñlivresò para decidir a medida dos lados, sendo coerente na utilização racional do papel cartão. Na verdade foi instruído que os alunos construíssem os triângulos sem usar nenhuma medida especificada para os lados e durante a construção dos triângulos foram feitas algumas intervenções, chamando a atenção dos alunos para que façam triângulos com ñmedidasò diferentes daquelas dos grupos vizinhos, que não tomassem nada como padrão. Apenas os ângulos tinham que ser os mesmos. Era muito importante que tivéssemos o maior número possível de triângulos visivelmente distintos entre os grupos. Com os triângulos em mãos, foi solicitado aos alunos que medissem os catetos dos triângulos e anotassem no próprio triângulo.

Figura 12 ï Triângulos construídos.
Fonte: Arquivo do autor

Tomando como ponto de partida o triângulo retângulo com ângulos de 20º, 70º e 90º, e tomando como referência o ângulo de 20º, foi pedido que calculassem, utilizando uma calculadora, a razão entre o cateto oposto e cateto adjacente e anotassem em uma folha para que pudessem ser comparados com os valores de todos os grupos. Surpresa! Os resultados obtidos foram muito próximos uns dos outros.

Novamente aqui foi um momento de parada e de relembrarmos duas outras razões trigonométricas importantes que haviam sido estudadas há pouco tempo; o Seno e o Cosseno de um ângulo de um triângulo retângulo. Foi lembrado que o seno é a razão do cateto oposto pela hipotenusa, e o cosseno sendo a razão do cateto adjacente pela hipotenusa. Eles tinham acabado de calcular uma razão especifica, a divisão do cateto oposto pelo cateto adjacente em relação a um determinado ângulo, em diversos triângulos distintos, feito por pessoas diferentes, e o resultado obtido foi muito próximo uns dos outros. Oras! Estava claro que aqueles valores eram oriundos de mais uma razão trigonométrica importante e que assim como o Seno e o Cosseno ela merecia sim um nome especial.

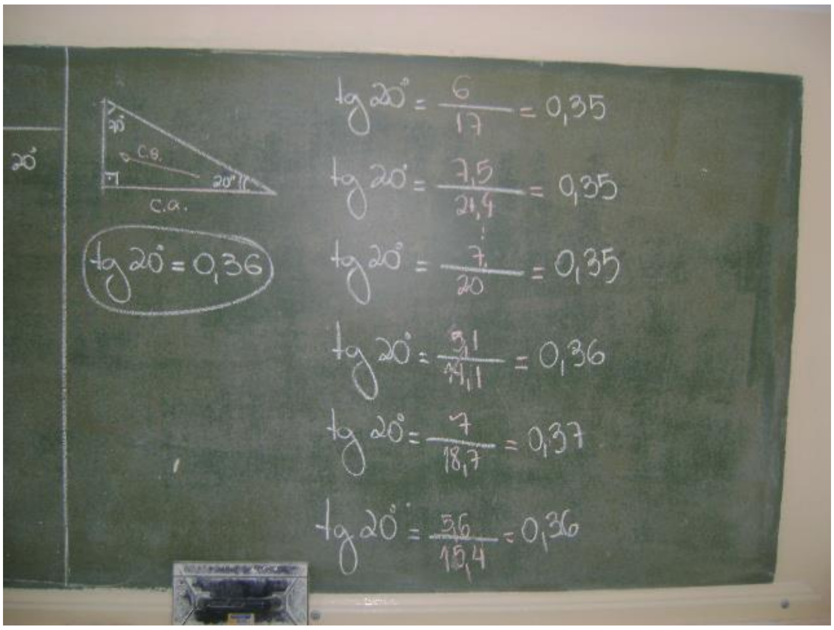


Figura 13 ï Valores aproximados da tangente de 20 graus calculados pelos grupos.
Fonte: Arquivo do autor

Esse procedimento foi repetido em todos os ângulos agudos de todos os triângulos construídos pelos alunos conforme Figura 13 e cada vez mais os resultados reforçavam a credibilidade dos alunos de que podemos estender esse procedimento em qualquer triângulo retângulo, ou seja, a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente de um referido ângulo, não depende das medidas dos seus lados. Isso foi importante para que os alunos observassem na prática, que todos os triângulos retângulos com os mesmos ângulos, possuem a razão entre os lados constantes. Tendo essa consciência estabelecida de forma homogênea na sala, foi apresentado aos alunos que o nome dessa razão, entre o cateto oposto e o cateto adjacente é Tangente.

3.2 ATIVIDADE 2: UTILIZANDO A TABELA TRIGONOMÉTRICA

Como vimos na Atividade 1, a tangente de um ângulo, não depende do valor das medidas dos catetos e sim da medida do ângulo (abertura) entre o cateto e a hipotenusa. Nessa atividade, mostramos outra aplicação da tangente através de um raciocínio inverso da anterior, ou seja, partindo de um triângulo retângulo, cujas medidas dos catetos são conhecidas, foi possível obtermos o valor, em graus, do ângulo entre o cateto e a hipotenusa, com o auxílio de uma tabela trigonométrica. Assim, essa atividade além de ter trabalhado novamente o conceito de tangente, propôs um ganho para o aluno ao envolvê-lo com uma situação distinta da anterior utilizando um recurso extra ï a tabela trigonométrica. Essa atividade foi realizada individualmente.

Alguns conceitos de desenho geométrico foram revisados antes do início da Atividade 2, como a utilização correta de um compasso e como traçar retas perpendiculares entre si utilizando régua e compasso.

Para iniciarmos a atividade, foi distribuído uma Ficha de Atividade (ver anexo na p.117) para cada aluno e foi solicitado que fizessem um triângulo retângulo, com seus catetos paralelos às margens inferior e direita, sendo as medidas dos catetos ñarbitráriasò, utilizando o compasso para determinar o ângulo reto. Novamente tomamos o cuidado de orientá-los a não olhar para o vizinho; foi apenas reforçado que utilizassem medidas convenientes para fazer medições posteriores. Nessa fase alguns alunos tiveram a tendência de querer fazer algo parecido com o do colega, achando, talvez, que existisse algum padrão de tamanho para os lados do triângulo. Foi reforçado que seria interessante termos o maior número de triângulos retângulos distintos na sala.

Com o triângulo retângulo inicial em mãos, foi solicitado aos alunos que marcassem dois pontos no cateto maior (a maioria dos alunos desenhou esse cateto na horizontal), também com distâncias arbitrárias e convenientes um ponto do outro. Por esses dois pontos, utilizando régua e compasso, os alunos construíram dois segmentos perpendiculares ao cateto até a hipotenusa.

Notemos que agora eles obtiveram três triângulos retângulos, como na Figura 14.

No próximo passo, solicitamos a determinação com régua das medidas de todos os catetos dos três triângulos da figura. Designando de *x* o ângulo comum, formado entre os catetos da horizontal e as respetivas hipotenusas dos três triângulos formados e calculando a razão entre os catetos opostos e adjacentes ao ângulo *x*, ou seja, obtendo os valores da *tangente de x*, novamente se depararam com valores muito próximos para as três razões (alguns alunos encontraram o mesmo valor para as três razões calculadas) e utilizando a tabela trigonométrica, os alunos puderam determinar em graus, a medida do ângulo *x*. Posteriormente, os alunos utilizaram o transferidor para medir o ângulo *x* e conferir os resultados obtidos.

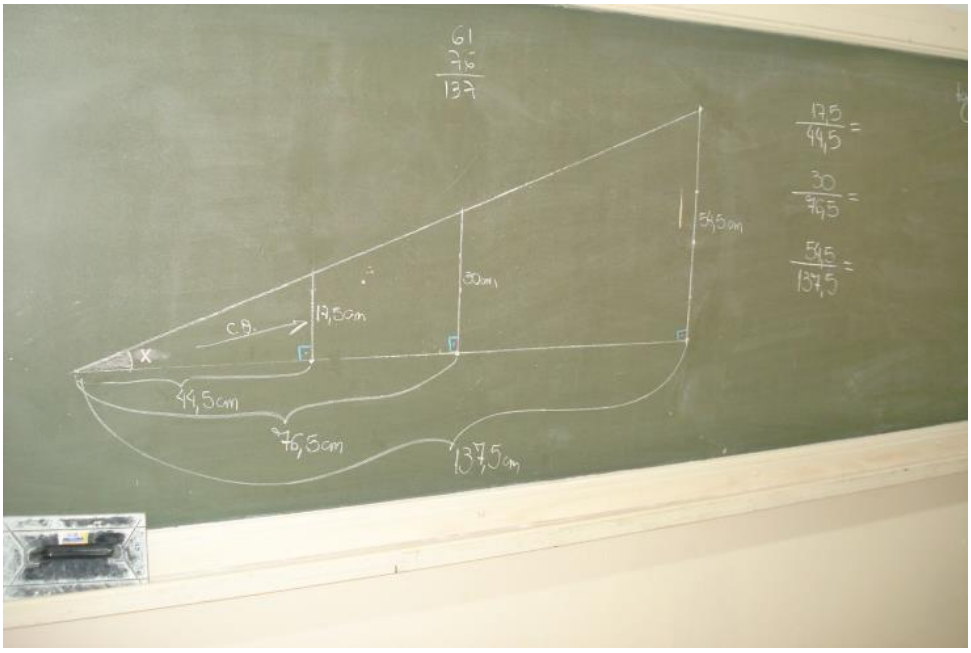


Figura 14 ï Razões entre as medidas (obtidas com régua) dos catetos opostos pelos catetos adjacentes.
Fonte: arquivo do autor

Figura 15 ï Aluna medindo os catetos opostos e adjacentes e calculando as razões.
Fonte: arquivo do autor

É importante destacar que nesta atividade retomamos alguns conceitos de aproximações e estimativas. Alguns alunos ao realizar a primeira divisão, já previam um resultado igual ou próximo para a segunda e terceira razão, o que justificou um bom entendimento da aplicação do conceito de tangente já na primeira atividade, onde ficou claro que os valores não dependiam dos lados e sim do ângulo de inclinação. Esses alunos já haviam interiorizado que ao ampliarmos os lados de um triângulo retângulo, a inclinação não muda e sendo assim, a razão entre os catetos é uma constante.

Esta foi a tabela trigonométrica utilizada pelos alunos durante as atividades práticas, reforçando também o desenvolvimento das habilidades de leitura e interpretação de tabelas.

Ângulo	Tangente
1	0,017455
2	0,034921
3	0,052408
4	0,069927
5	0,087489
6	0,105104
7	0,122785
8	0,140541
9	0,158384
10	0,176327
11	0,19438
12	0,212557
13	0,230868
14	0,249328
15	0,267949
16	0,286745
17	0,305731
18	0,32492
19	0,344328
20	0,36397
21	0,383864
22	0,404026
23	0,424475
24	0,445229
25	0,466308
26	0,487733
27	0,509525
28	0,531709
29	0,554309
30	0,57735
31	0,600861
32	0,624869
33	0,649408
34	0,674509
35	0,700208
36	0,726543
37	0,753554
38	0,781286
39	0,809784
40	0,8391
41	0,869287
42	0,900404
43	0,932515
44	0,965689
45	1
46	1,03553
47	1,072369
48	1,110613
49	1,150368
50	1,191754
51	1,234897
52	1,279942
53	1,327045
54	1,376382
55	1,428148
56	1,482561
57	1,539865
58	1,600335
59	1,664279
60	1,732051
61	1,804048
62	1,880726
63	1,962611
64	2,050304
65	2,144507
66	2,246037
67	2,355852
68	2,475087
69	2,605089
70	2,747477
71	2,904211
72	3,077684
73	3,270853
74	3,487414
75	3,732051
76	4,010781
77	4,331476
78	4,70463
79	5,144554
80	5,671282
81	6,313752
82	7,11537
83	8,144346
84	9,514364
85	11,43005
86	14,30067
87	19,08114
88	28,63625
89	57,28996
90	-

Tabela 1 ï Tabela trigonométrica com ângulos medidos em graus.
Fonte: arquivo do autor

3.3 ATIVIDADE 3: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE APLICAÇÃO DA TANGENTE DE UM ÂNGULO AGUDO

As atividades anteriores serviram de introdução do conceito da tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo e a persuadir os alunos de que a tangente não depende das medidas dos lados de um triângulo retângulo e sim do ângulo entre o cateto maior e a hipotenusa. Após esse convencimento por parte dos alunos é imprescindível um contato através de exemplos mostrando aplicações da tangente. Dessa forma, nessa atividade, os alunos foram submetidos a resolver problemas de aplicação da tangente, que aparentassem o mais próximo possível com o que iriam fazer na atividade final. Em outras palavras, essa atividade serviu de preparação ñteóricaòï em sala de aula ï do que iriam realizar na atividade prática.

Foram escolhidos dois problemas. Para essa escolha foi levada em consideração a abrangência que eles poderiam trazer na sua resolução. Não queríamos problemas simplesmente para repetir de formas diferentes o que vimos nas atividades anteriores, mas sim que os problemas escolhidos tivessem a incumbência de acrescentar algo relevante, no que foi trabalhado até então com os alunos.

O primeiro problema foi retirado de um livro didático do nono ano. Esse problema possibilitou-nos duas resoluções distintas, utilizando Semelhança de Triângulos e o conceito de Tangente à qual concordamos com a ideia do aluno em utilizá-la, quando possível.

O segundo problema fez parte do Vestibulinho do segundo semestre de 2011 das Escolas Técnicas do Centro Paula Souza. Esse problema faz uma simulação idêntica a qual faremos na atividade final. A escolha de um problema aplicado no vestibulinho das Etecs foi também devido ao grande número de alunos, nessa faixa etária, que prestam essa prova no final do ano.

3.3.1 PROBLEMA 1

"Dois agrimensores estão tentando descobrir a distância aproximada da praia até a ilhota. Represente essa situação fazendo um desenho bem caprichado, com régua e transferidor, na escala $1:1000$ (na qual 1 cm vale 10 m), e calcule a distância da ilha até a praia." (Imenes e Lellis, 2009, p. 26)

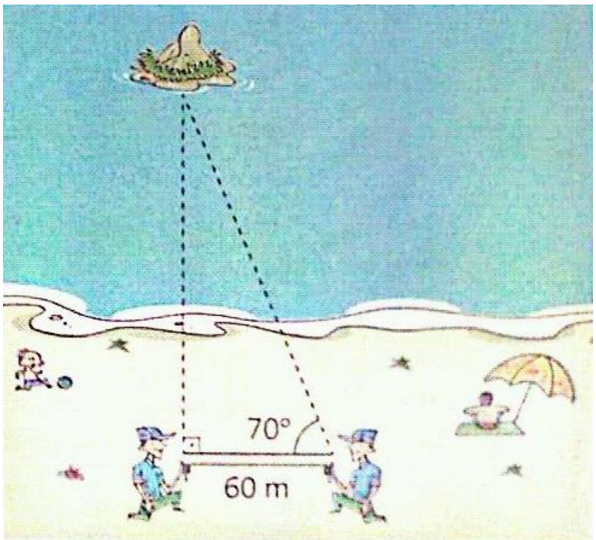


Figura 16 – Ilustração referente à situação problema descrita acima.
Fonte: Imenes e Lellis, 2009, p. 26.

Inicialmente devemos observar que no próprio enunciado do problema está implícito para utilizarmos a semelhança de triângulos na resolução da questão e, de fato fizemos isso num primeiro momento. Essa forma de resolver esse problema possibilitou uma comparação com outra resolução que fizemos logo em seguida, utilizando a tangente.

3.3.2 PRIMEIRA RESOLUÇÃO: UTILIZANDO A SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Como já havíamos revisado a utilização do transferidor na Atividade 1, não ouve necessidade de fazê-la novamente nessa ocasião, apenas alertá-los para o alinhamento preciso do instrumento no momento de marcar os ângulos, no caso de 70º e 90º. A primeira dúvida que surgiu foi de como utilizar o espaço reservado para a resolução na folha de forma racional. Foi orientado que os alunos fizessem o cateto de 6 cm, correspondente a 60 m na ilustração, sobre ou bem próximo da margem inferior da folha, assim, haveria espaço suficiente para a construção do triângulo. Vale reforçar que fazer um desenho ñbem caprichadoò, como cita o enunciado do problema, significa fazer um desenho com o máximo de precisão possível, pois a credibilidade do resultado final (a distância da praia até a ilha) também será virtude dessa precisão.

Marcado os dois ângulos e fazendo-se coincidir as semirretas, obtemos assim um triângulo semelhante (uma redução) ao da figura, proposto no problema.

É importante ressaltar que todos os alunos conseguiram fazer o desenho da situação descrita, com poucas intervenções do professor.

Como os desenhos em mãos, abriu-se espaço (na verdade uma necessidade) para retomar alguns conceitos já estudados nos anos anteriores sobre ampliação e redução de figuras (Escala), semelhança entre figuras e a Semelhança de Triângulos, que é o que necessitariam aplicar nessa atividade até o momento. Os alunos precisavam ter a clara noção de saber quando dois triângulos são semelhantes e quais as consequências, credibilizando a condução da resolução do problema proposto, por intermédio da construção de um triângulo semelhante ao triângulo dado na ilustração. Assim, é fácil verificar, que o triângulo dado e o triângulo construído são de fato semelhantes, pois possuem ângulos correspondentes de mesma medida, bastando apenas fazer à medição do cateto correspondente a distância da ilha até a praia para determinar sua medida. Essa medição foi realizada com uma régua e para determinar a medida em *metros*, bastava multiplicar o resultado obtido na medição por 10, já que na escala adotada, 1 cm corresponde a 10 m.

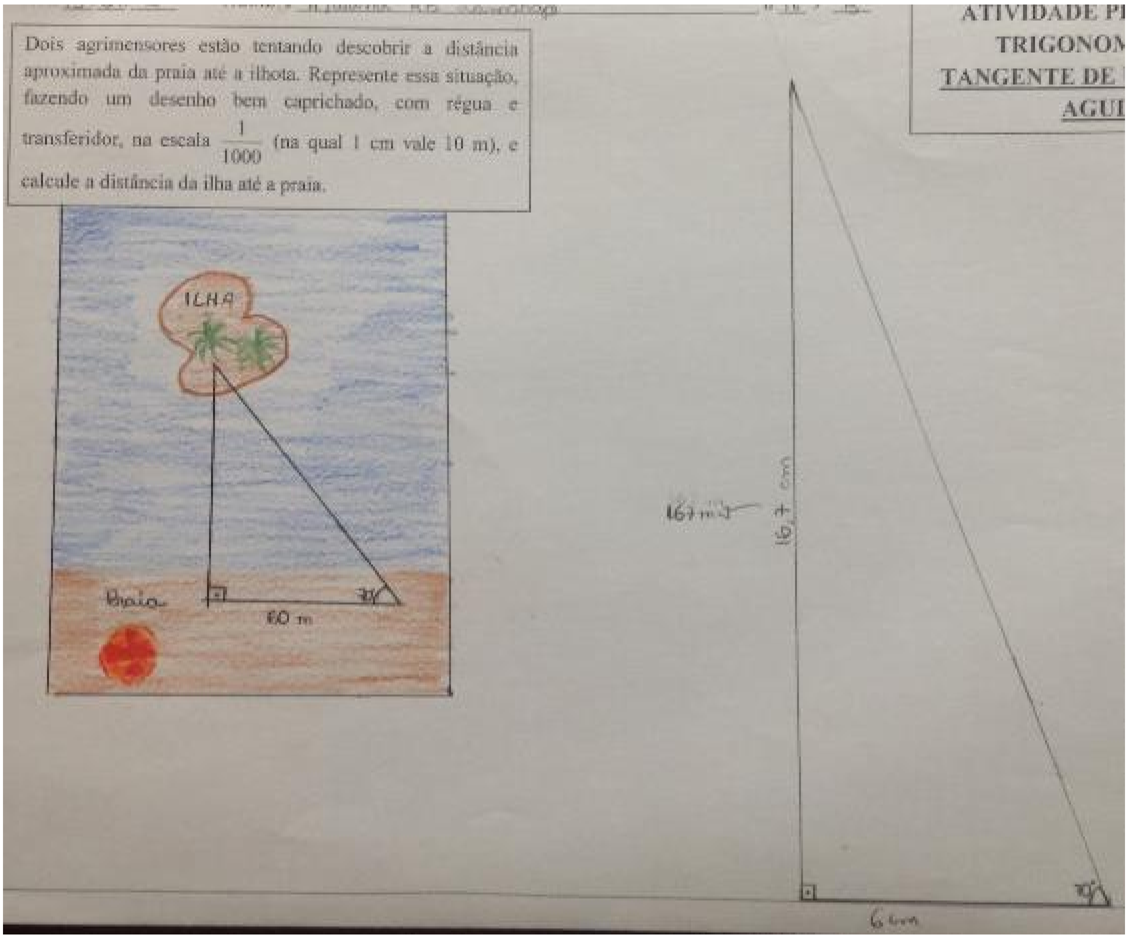


Figura 17 ï Resolução do Problema 1 apresentada por um aluno.
Fonte: arquivo do autor

3.3.3 SEGUNDA RESOLUÇÃO: UTILIZANDO A TANGENTE

De certa maneira, a resolução do problema na forma proposta ou implicitamente proposta pelo enunciado do problema é relativamente fácil, porém ï trabalhosa. Desenharmos, com certa precisão, um triângulo semelhante ao dado no problema, de fato não é uma ação vertiginosa e como sabemos os adolescentes, em geral, vislumbram o imediatismo em quase tudo que são propostos a fazer. Nessa ótica foi apresentada uma proposta de solução para o mesmo problema com a missão de ser mais rápida, mais direta e mais precisa que a resolução anterior. A resolução solicitada neste caso foi utilizar o conceito de tangente.

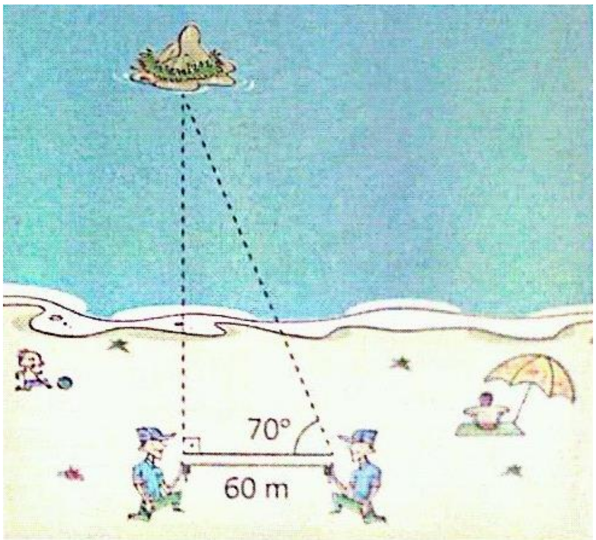


Figura 18 ï Ilustração referente à situação problema descrita acima.
Fonte: Imenes e Lellis, 2009, p. 26.

Note que o triângulo dado no problema é retângulo e sendo assim, temos a possibilidade de aplicarmos as razões trigonométricas para obtermos valores de ângulos, utilizando uma tabela trigonométrica ou calculadora científica. Nesse caso, propomos aos alunos que utilizassem a tangente de 70º para calcular a distância da ilha até a praia.

Como foi estudado nas Atividades 1 e 2, já sabíamos que a tangente de 70º é a divisão do cateto oposto ao ângulo de 70º pelo cateto adjacente ao referido ângulo. Nesse ponto é imprescindível que o professor faça algumas indagações a respeito dos dados que envolvem o problema como:

- Quais são os valores conhecidos?
- Que medida estamos buscando na resolução?
- Esse valor representa a medida de qual cateto para que possamos usar a tangente de 70º?
- Precisamos do valor da tangente de 70º?
- Como obtê-lo?

Durante esses questionamentos observou-se que todos os alunos estavam inteirados na busca da solução do problema, e a maioria dos alunos apresentaram respostas bem satisfatórias.

A seguir, vamos mostrar duas das resoluções feitas pelos alunos.

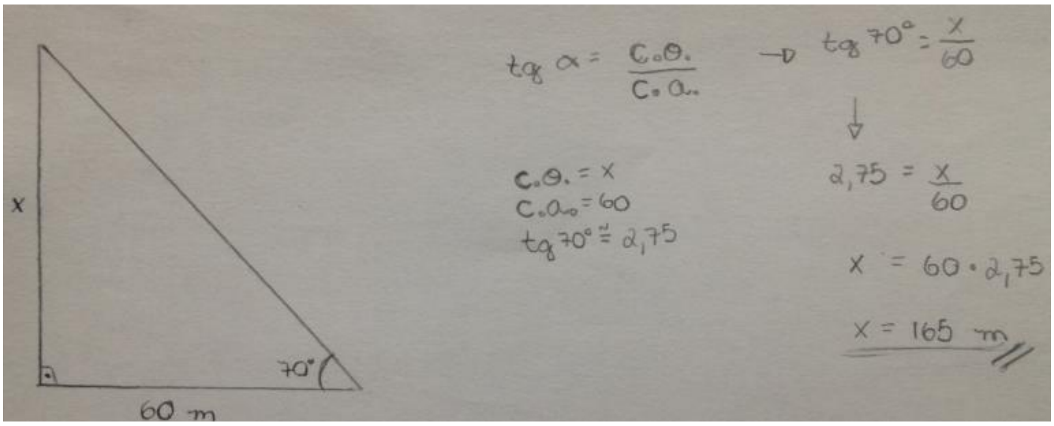


Figura 19 ï Resolução do Problema 1 apresentada por um aluno.
Fonte: arquivo do autor

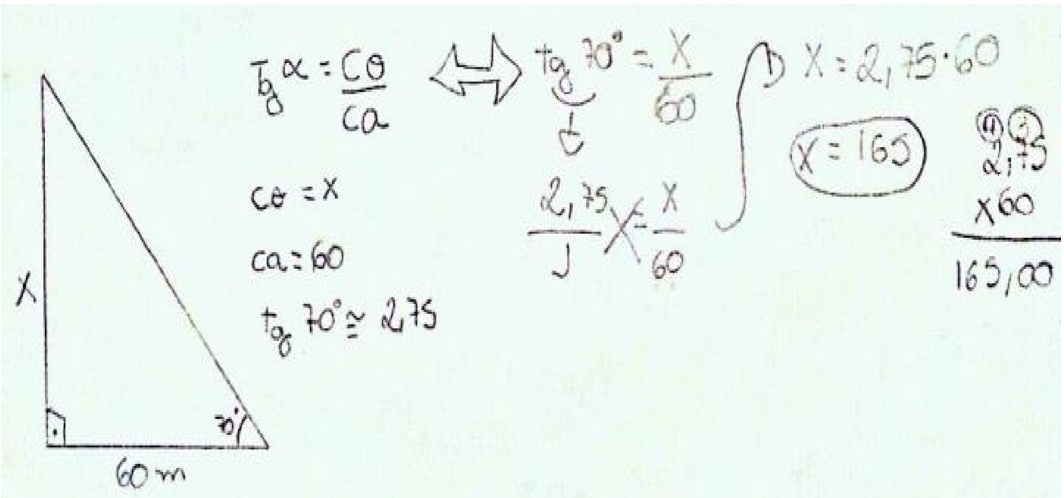


Figura 20 ï Resolução do Problema 1 apresentada por um aluno.
Fonte: arquivo do autor

Para essa resolução, foi solicitado aos alunos que aproximassem o valor da tangente de 70º para 2,75.

Com resultados em mãos, foi inevitável fazermos as devidas comparações, não só entre os resultados obtidos nas duas resoluções, mas principalmente nas maneiras de se resolver o mesmo problema. A rapidez da aplicabilidade do conceito de tangente na busca da medida do lado desconhecido foi claramente mais vantajosa que a forma de resolução feita anteriormente, utilizando semelhança de triângulos retângulos. Os alunos logo se convenceram de que a segunda resolução é mais prática que a primeira, uma vez que para a segunda resolução basta sabermos apenas dados técnicos do problema, como ângulos e pelo menos um lado. Já para a primeira resolução, além dos dados técnicos existe o empecilho de termos bons instrumentos em mãos, como régua e transferidor, além de utilizá-los com precisão para fazer o desenho, na escala adequada. É óbvio que a confiabilidade da solução se dará através da precisão empregada na elaboração do desenho.

Claro que todos ficaram convencidos que as divergências nos resultados finais foram devidas as imprecisões na execução do desenho, pequenas digam-se de passagem, mas o suficiente para que aconteçam. É óbvio que nessa idade escolar os alunos sempre esperam a mesma solução para um mesmo problema e nesse caso enxergaram claramente que isso nem sempre ocorre, pois estamos trabalhando com alguns valores aproximados e nem por isso os resultados da aprendizagem deixaram de serem válidos.

3.4 PROBLEMA 2

Após a aula sobre astrolábios, o professor de uma ETEC propôs a seus alunos que determinassem a altura de uma antena localizada em um terreno plano e sem obstáculos à sua volta, que ficava próxima à escola. Para a realização da tarefa, explicou aos alunos os procedimentos para se determinar a altura (H) da antena:

- O aluno deve-se colocar a uma distância (d) da base da antena;
- Com o astrolábio, mirar o topo da antena e obter a medida do ângulo Ŭ;

- Medir a distância (h) dos olhos do aluno até o solo. (Vestibulinho ETEC ï Centro Paula Souza, 2º sem/2011)

Qual a medida da altura H da antena?

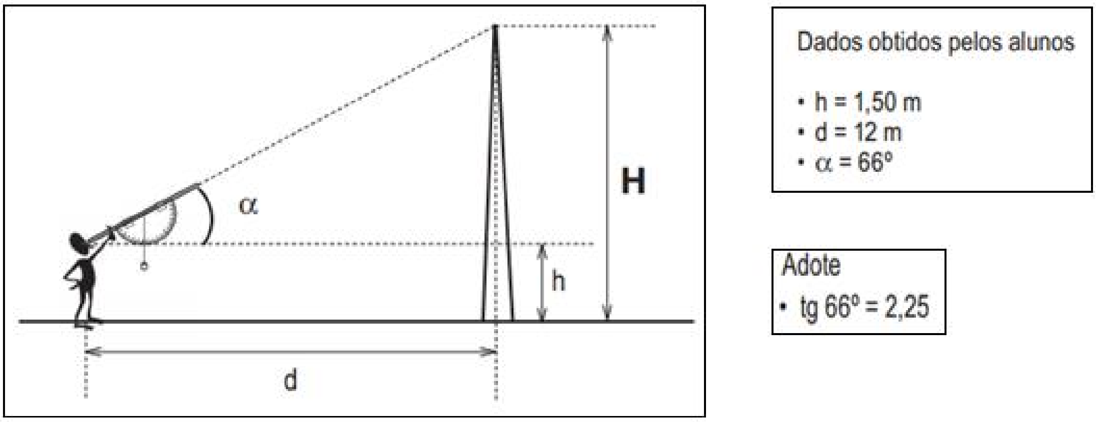


Figura 21 ï Ilustração e informações fornecidas na situação problema do Vestibulinho.
Fonte: http://www.vestibulinhoetec.com.br[5]

O astrolábio, assim como o teodolito, é um instrumento que serve para medir ângulos.

Para iniciar as discussões que melhores norteariam a solução dos alunos, primeiramente tínhamos que dimensionar as certezas e as dúvidas que os alunos aparentemente expressariam num primeiro contato com esse problema. Como em qualquer problema de matemática, para obter êxito em sua resolução, um dos procedimentos é de que o aluno possua ao interpretar o problema, a exata ideia dos dados fornecidos pelo problema e aonde quer chegar a partir desses dados, traçando-se um plano de ação. Assim foi reproduzido na lousa, um esboço dessa figura com as medidas indicadas em suas posições, para que todos os alunos tenham a clara ideia dos dados fornecidos pelo problema e do valor a ser procurado.

[5] Disponível em <http://www.vestibulinhoetec.com.br/download/prova_ant/78.pdf>. Acessado em: 26 de Julho de 2016.

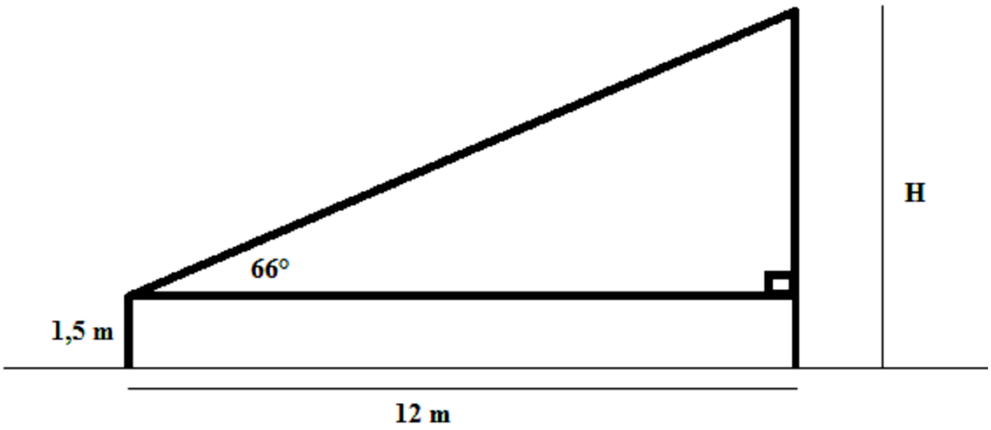


Figura 22 ï Esquema utilizado para facilitar a resolução do Problema 2.
Fonte: arquivo do autor

Apresentado o esboço aos alunos, evidentemente todos facilmente detectaram os dados fornecidos e o valor a ser procurado, ou seja, a medida H da antena. Como já era esperado, alguns alunos se recordaram da segunda resolução do primeiro problema e como é inevitável a analogia, logo disseram que a resolução estava relacionada com a aplicação da tangente de 66°. Essa manifestação já era esperada, pois é o primeiro problema envolvendo uma altura inacessível que os alunos estavam experimentando e rotineiramente nesse momento incipiente é normal os alunos acabarem esquecendo de computar, ao resultado final, a altura dos olhos do observador até o solo. Essa falsa observação é facilmente notada e corrigida.

Portanto, para que houvesse um melhor entendimento da resolução deste problema, foi proposto aos alunos que o fizéssemos em duas partes:

- primeira parte: aplicar a tangente de 66° e calcular parcialmente a altura da antena;

- segunda parte: acrescentar ao resultado encontrado acima o valor da altura dos olhos do observador até o solo.

Para dividir a resolução do problema em duas partes, foi conveniente incrementarmos outra medida, designada por *x*, representando a primeira altura a ser calculada, ou seja, a altura da antena menos a altura do observador. Somando-as $(x+1{,}5)$, teremos a altura da antena.

Abaixo apresentamos o esboço com a medida *x*.

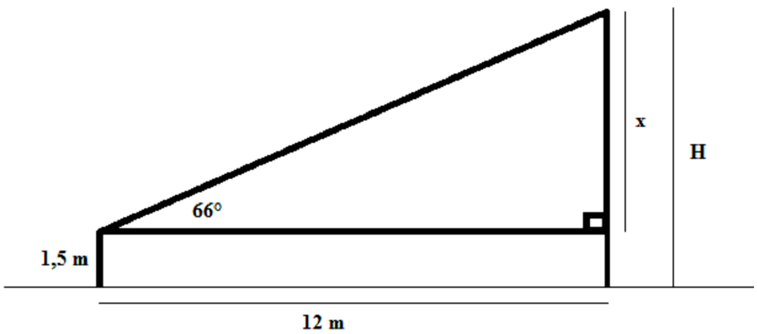


Figura 23 ï Esquema utilizado para facilitar a resolução do Problema 2.
Fonte: arquivo do autor

Acompanhe uma das resoluções feitas pelos alunos.

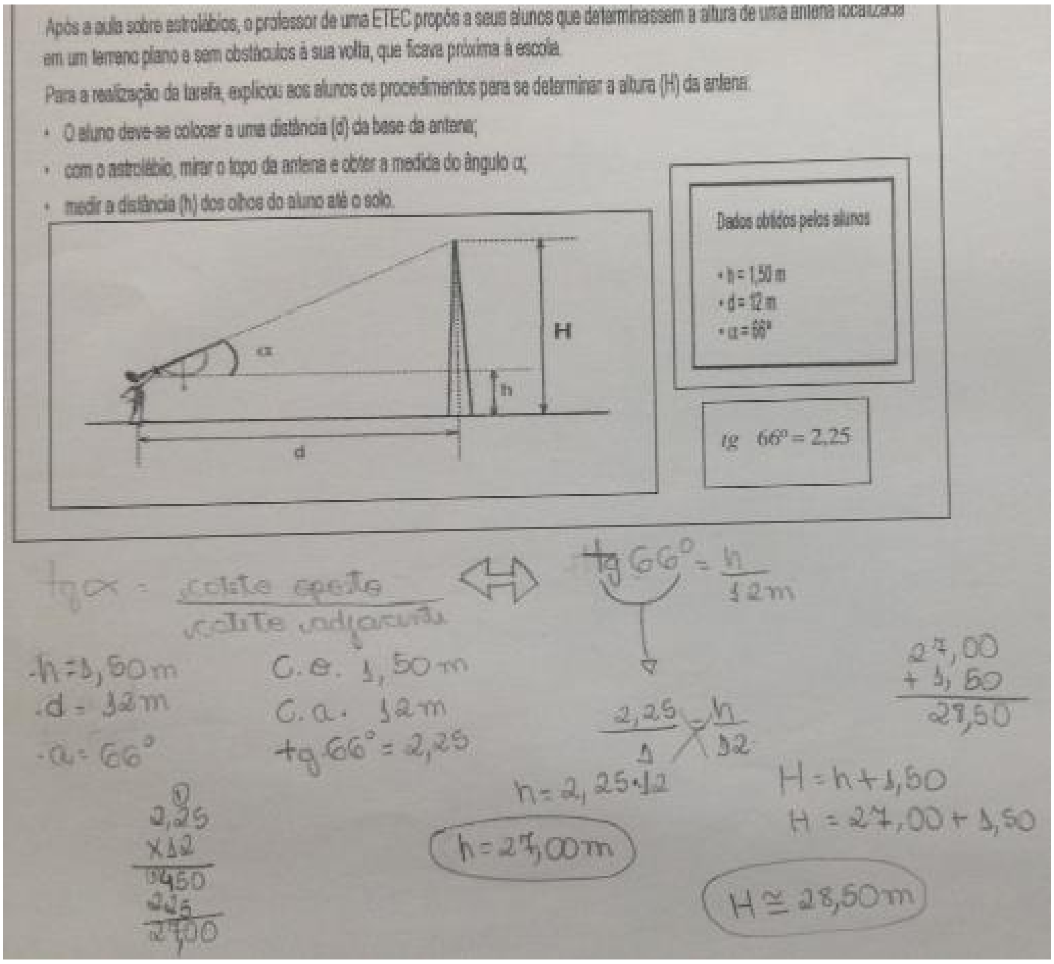


Figura 24 ï Resolução do Problema 2 apresentada por um aluno.
Fonte: arquivo do autor

3.4.1 CONSIDERAÇÕES À RESPEITO DO PROBLEMA 2

Esse problema é praticamente o que os alunos fariam na atividade final, mas aí fora da sala de aula, onde seriam submetidos a uma situação real na qual teriam que calcular uma altura inacessível utilizando exatamente o mesmo procedimento descrito no problema acima. Portanto é imprescindível que os alunos saibam ao final dessa atividade o que possibilitou-nos através de alguns cálculos conhecermos a altura da antena, sem medi-la. Assim, deve ser de total conhecimento dos alunos que, para podermos calcular uma altura inacessível, por intermédio da tangente, precisamos necessariamente que alguém se posicione a uma determinada medida do objeto, conhecermos essa distância, conhecermos a altura dos olhos do observador até o solo e através de um astrolábio ou teodolito, ou seja, um medidor de ângulos, medirmos o ângulo de inclinação do topo do objeto em relação ao solo. Com essas etapas bem definidas e interiorizadas pelos alunos, podemos passar para a atividade final, a construção do medidor de ângulos e colocar em prática tudo o que foi visto até então.

3.5 ATIVIDADE 4: CONSTRUÇÃO DO MEDIDOR DE ÂNGULOS E APLICAÇÃO PRÁTICA

Nessa atividade os alunos construíram um medidor de ângulos (verticais) ou teodolito rudimentar utilizando materiais de fácil acesso, os quais eles mesmos se encarregaram de trazer para a confecção. Posteriormente, utilizaram esse medidor de ângulos de maneira análoga ao segundo problema da atividade anterior para medir o ângulo de inclinação do topo de um refletor com o solo e, assim calcular sua altura.

A elaboração da construção desse instrumento, assim como seu uso em geral, é relativamente simples, demandando ῆapenasò paciência, trabalho em grupo e habilidade manual. É uma atividade que consiste basicamente em recortes e colagens, mas contrastando com esse quadro cômodo, é necessária atenção especial para que a confecção deste instrumento ocorra com a máxima precisão e meticulosidade. Além disso, esta atividade proporcionou mais um momento importante no desenvolvimento das habilidades motoras dos alunos.

Para que todos realizassem esta atividade, como já fora feito na Atividade 1, os alunos foram divididos em grupos de 3 ou 4 alunos. Foi mostrado aos grupos um exemplar de um medidor de ângulos semelhante ao que eles iriam construir e detalhado que a construção ocorreria em passos. Esses passos foram monitorados e realizados um após o outro, não sendo permitido o avanço de um grupo em relação aos demais. É importante que a classe como um todo, entenda que em determinadas atribuições o avanço só existe de fato, quando todos cumprem de forma adequada suas obrigações. Dessa forma, todos os grupos realizaram cada passo da confecção do medidor de ângulos por vez, ou seja, um novo passo só era atribuído quando todos haviam cumprido adequadamente o passo anterior. Isso com certeza ajuda reforçar o trabalho em equipe.

Os materiais utilizados na construção do medidor de ângulos foram:

- Papel cartão;
- Régua;
- Transferidor;
- Tesoura;
- Canudinho de suco;
- Fita adesiva;
- Peso (para o fio de prumo);
- Barbante;
- Calculadora;
- Trena.

Vejamos então a descrição dos passos para a elaboração do medidor de ângulos, conforme http://m3.imec.unicamp.br/ (acessado em 26 de Julho de 2016).

Recorte um pedaço retangular (20 cm X 10 cm) do papel cartão;

Fixe o transferidor neste pedaço de papel usando fita transparente, destacando o segmento de reta que passa pela marca do ângulo de 90º, conforme Figura 25.

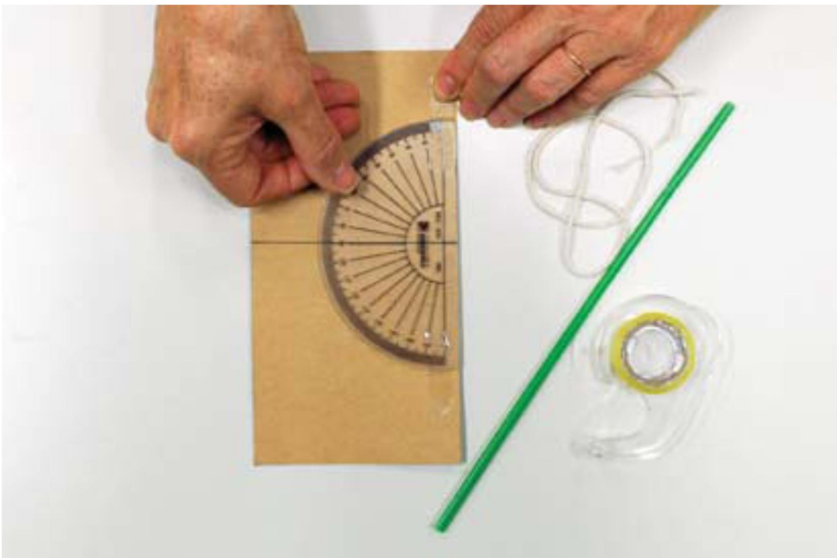


Figura 25 ï Construção do medidor de ângulos ï fixando o transferidor no papel cartão.
Fonte: http://m3.ime.unicamp.br/[6]

Figura 26 ï Construção do medidor de ângulos ï fixando o barbante com o peso e o canudinho.
Fonte: http://m3.ime.unicamp.br/[7]

---

[6] Disponível em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/994>. Acessado em: 26 de Julho de 2016.

[7] Disponível em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/994>. Acessado em: 26 de Julho de 2016.

Prenda o barbante com o peso e o canudo, como mostra a Figura 27.

Os grupos devem ser constantemente visitados pelo professor para se certificar do posicionamento dos materiais e sempre reforçar a importância da paciência e da precisão durante o processo da construção.

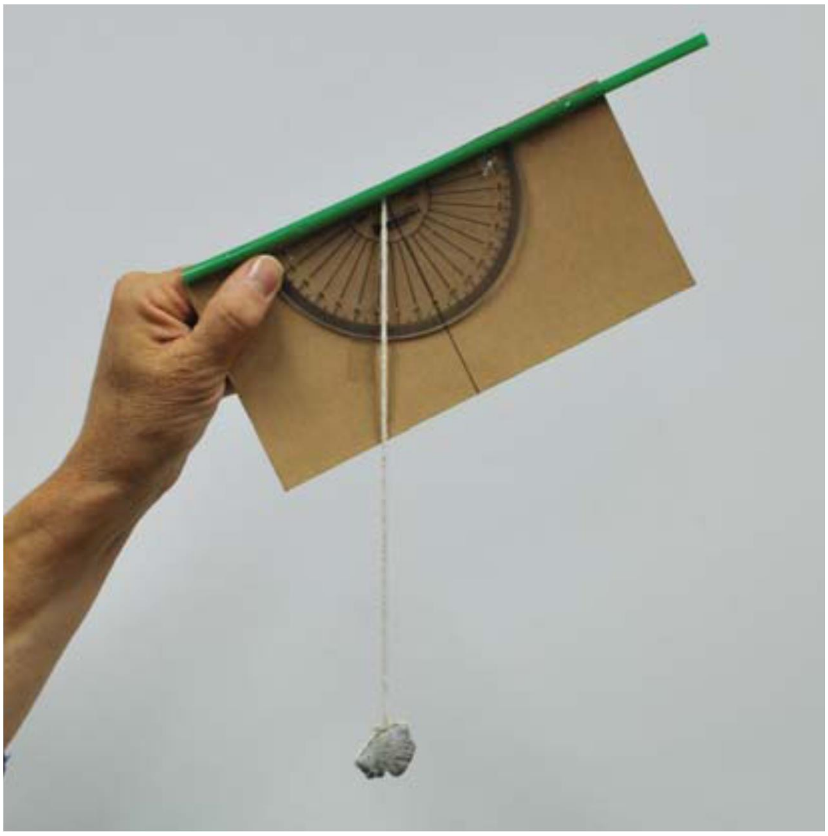


Figura 27 ï Medidor de ângulos pronto.
Fonte: http://m3.ime.unicamp.br/[8]

O papel cartão pode ser substituído por outros materiais de fácil manuseio, mas com rigidez similar ao papel cartão. Podendo ser um retângulo feito em madeira, desde que ele já esteja cortado com as medidas indicadas (20 cm X 10 cm), pois seria inconveniente esse trabalho em sala de aula.

[8] Disponível em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/994>. Acessado em: 26 de Julho de 2016.

3.5.1 – POR QUE O MEDIDOR DE ÂNGULOS FUNCIONA?

Como podemos observar na figura abaixo, BC representa o fio de prumo, logo o triângulo ACB é um triângulo retângulo, com $\hat{C} = 90°$. O ângulo $D\hat{B}C$ é o ângulo de leitura no transferidor acoplado no teodolito. Queremos mostrar que este ângulo é igual ao ângulo de inclinação do solo ao topo do objeto observado. De fato é, pois

$$x + 90° - y + 90° = 180° \Leftrightarrow x - y = 180° - 180° \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Logo, o ângulo de leitura no transferidor é o ângulo de inclinação do solo ao topo do objeto que está em observação.

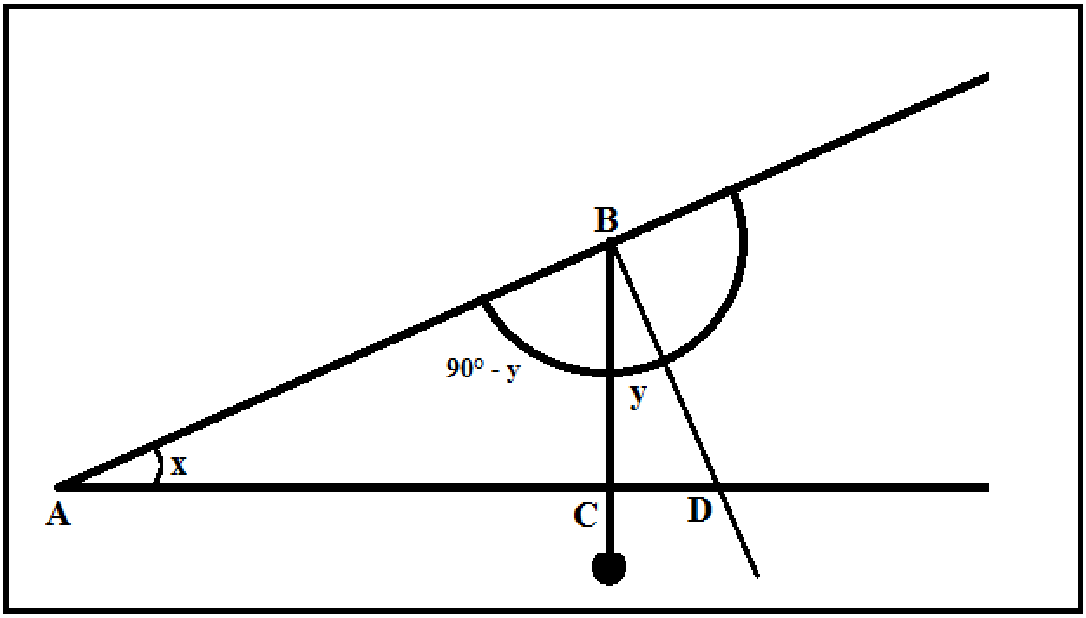


Figura 28 – Esquema mostrando que o ângulo de leitura no transferidor possui a mesma medida que o ângulo de inclinação do solo ao topo de um objeto.
Fonte: arquivo do autor.

Com o medidor de ângulos construído, passamos para a atividade final.

3.5.2 CALCULANDO UMA ALTURA INACESSÍVEL UTILIZANDO A TANGENTE

Chegamos então ao momento de colocarmos em prática tudo o que foi desenvolvido através das atividades anteriores, com o objetivo específico de calcularmos uma altura inacessível e o objeto escolhido foi um refletor localizado nas imediações da escola.

Ainda em sala de aula e antes de irem para o local onde seriam efetuadas as medições e cálculos, os alunos dividiram-se nos mesmos grupos que compuseram para fazer o medidor de ângulos e como já haviam se passado alguns dias desde a resolução do problema da Atividade 3, os alunos tiveram uma pequena revisão para relembrar todos os passos que teriam que fazer na prática, ou seja:

- utilizar o medidor de ângulos para obter o ângulo de inclinação do topo do refletor em relação ao solo;
- medir a altura do observador que está efetuando a medição do ângulo;
- medir a distância do observador até o refletor;
- utilizar o conceito de tangente para calcular a altura do refletor.

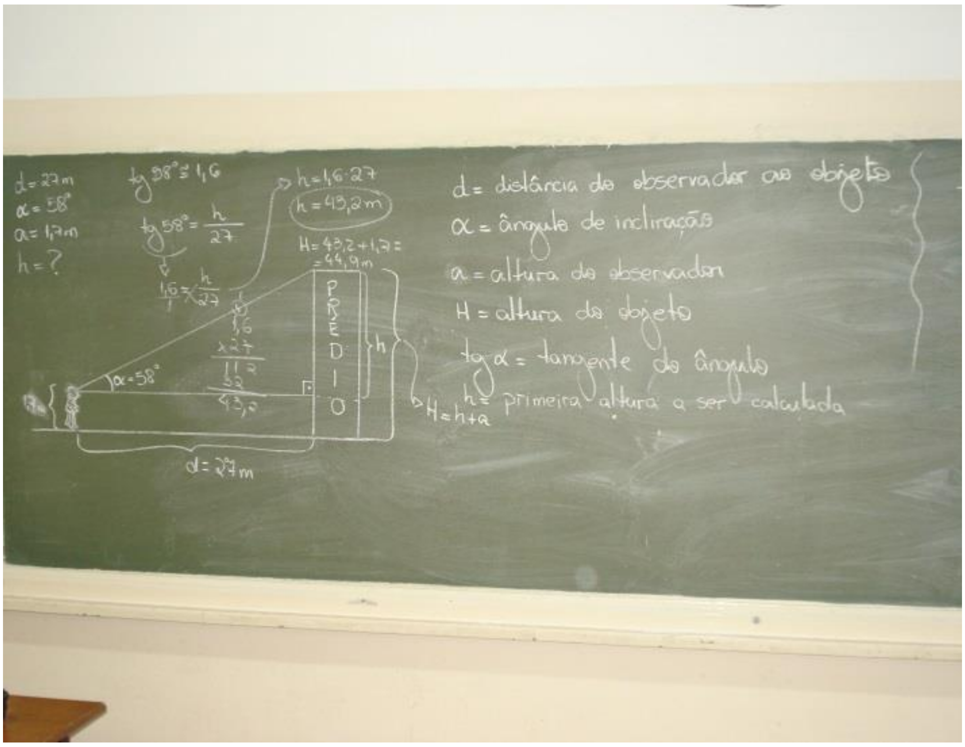


Figura 29 ï Apresentação do esquema para facilitar os procedimentos na atividade prática.
Fonte: arquivo do autor

Para essa revisão, o professor resolveu na lousa um problema similar ao resolvido na segunda parte da Atividade 3. Não foi pedido aos alunos que fizessem individualmente (em seus cadernos) a resolução desse problema, apenas que acompanhassem o desenvolvimento.

O objeto escolhido para calcularmos sua altura, já supracitado, foi um refletor localizado nas imediações da escola, devido a vasta área praticamente plana localizada ao seu redor, tornando-se fácil e segura a locomoção dos grupos para a realização desta atividade.

Os materiais utilizados pelos alunos nessa atividade foram:

- folha de papel A4;
- lápis, caneta;
- borracha;

- calculadora;
- trena;
- tabela trigonométrica,
- medidor de ângulos;

Figura 30 ï Refletor utilizado para o cálculo da altura durante a atividade prática.
Fonte: arquivo do autor

Vejamos agora algumas das resoluções feitas pelos alunos.

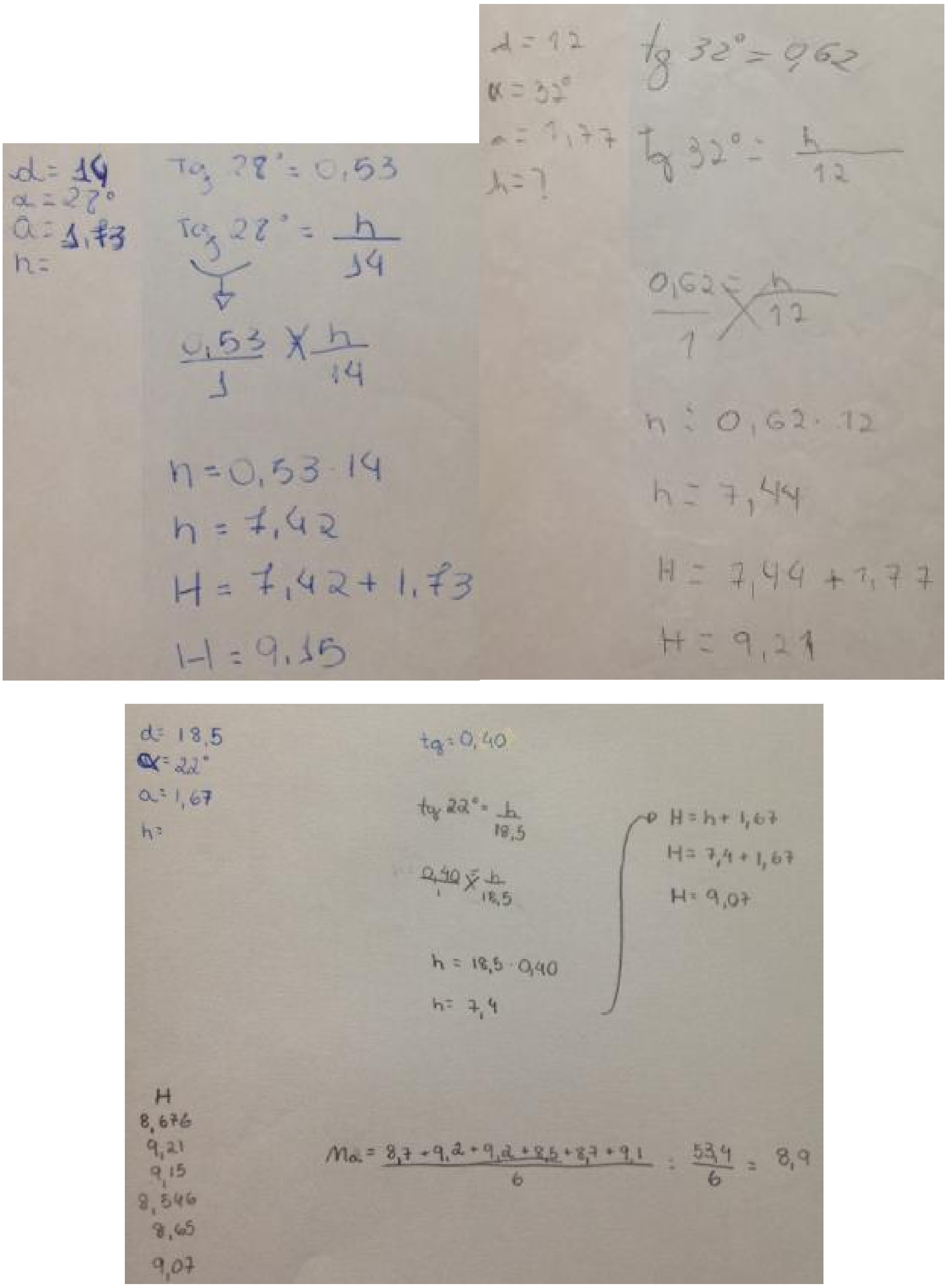


Figura 31 ï Resolução feita por um grupo no cálculo da altura do refletor, utilizando o medidor de ângulos e a aplicação da tangente.
Fonte: arquivo do autor

3.6 CONCLUSÃO

Planejar e aplicar atividades diferenciadas foi em muitas situações, um combustível extra para a criatividade e a motivação, tanto do autor, como dos alunos envolvidos nas atividades. Os assuntos abordados sempre estiveram diretamente relacionados à aprendizagem dos alunos e o principal objetivo deste trabalho, foi o de promover a integração de todos os alunos no processo de ensino/aprendizagem. Para isso, é preciso inovar.

Algumas indagações foram surgindo a medida que o autor repetia essa Sequência de Atividades em outras turmas, como por exemplo, a possibilidade de ŋjuntarmosò as duas partes e obtermos um único procedimento para calcularmos a altura do refletor (ou outra altura inacessível), ou ainda, obtermos uma fórmula que pudesse ser usada sempre que tivermos uma situação semelhante a descrita no Problema 2. Tais respostas não seriam dadas de imediato, mas sim, após as socializações feitas em sala de aula, realizadas no final da Atividade 3.

Durante as socializações, alguns alunos sempre acabavam observando outras aplicações do medidor de ângulos (verticais) em conjunto com a aplicação da tangente, como por exemplo, calcular a altura da casa de um João de Barro, no alto de uma árvore, ou a altura de uma janela no alto da torre de uma igreja. Tais atividades, são perfeitamente possíveis de serem realizadas e, fica também como proposta de ampliação deste material para os próximos professores.

Outra observação importante a ser destacada pelo autor, baseada também na experiência de seguidas aplicações ao longo dos anos, mostraram que a Atividade 4, onde é construído o medidor de ângulos em conjunto com os alunos, pode ser suprimida sem nenhum prejuízo conceitual. É claro que nesse caso, o Professor da sala deve confeccionar um medidor de ângulos que sirva para o uso dos alunos durante a atividade prática. Recomenda-se, neste caso, que o Professor utilize um transferidor de lousa, pois este proporcionará maior precisão na obtenção dos ângulos.

Recomendo ainda, que o professor confeccione um medidor de ângulos que seja possível de realizar medições também na horizontal, para que o leque de aplicações seja ainda mais vasto que apenas utilizando um medidor de ângulos verticais.

REFERÊNCIAS

AABOE, Asger. **Episódios da História Antiga da Matemática**. Tradução de J.B. Pitombeira de Carvalho. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle; DIAS, Michele Regiane. **Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino aprendizagem.** Revista Bolema, Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, ano 17, n. 22, 2004, p. 19-35.

ALARCÃO, Isabel (org). **Escola Reflexiva e Nova Racionalidade**. Porto Alegre: Artmed, 2001. 144p.

ALMOULOUD, Sado Ag. **Fundamentos da didática da Matemática**. Curitiba: Editora UFPR, 2007.

______., COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. **Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd 1.** Revista Eletrônica de Educação Matemática REVEMAT, Florianópolis, v. 3, n. 3, p.62-77, 2008.

AMARAL, Fábio José. **Ensino da trigonometria via resolução de problemas mediado por dinâmicas de grupo, analogias e recursos informáticos.**

2002. 129 f. Dissertação (Mestrado em Educação Tecnológica). Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, CEFET. Belo Horizonte: 2002.

AMORIM, Jodette; SEIMETZ, Rui; SCHIMTT, Tânia. **Trigonometria e números complexos**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2006.

BORGES, Pedro Augusto Pereira; NEHRING, Cátia Maria. **Modelagem Matemática e sequências didáticas: uma relação de complementaridade.** Revista Bolema Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 21, n. 30, p. 131-47, 2008.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (1ª a 4ª série): matemática.** Brasília: MEC/ SEF, 1997.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais: Ensino Médio. Ciências da Natureza Matemática e suas tecnologias.** Brasília: MEC/SEMTEC, 1998.

_____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** Brasília: MEC/SEMTEC, 1999.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ciências Humanas e suas Tecnologias. Brasília: Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

______. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. v 2. Brasília: MEC/SEB, 2006.

BROLEZZI, Antonio Carlos. **A tensão entre o discreto e o contínuo na História da Matemática e no ensino de Matemática**. 1996. 88f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

BRONCKART, Jean-Paul. **Atividades de linguagem, textos e discursos**: por um interacionismo sócio-discursivo. Tradução de Anna Rachel Machado e Péricles Cunha. São Paulo: EDUC, 1999.

BUCCHI, Paulo. **Matemática**. São Paulo: Editora Escala, 1944.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Gradiva, 2003.

CARRAHER, Terezinha Nunes; SCHLIEMANN, Analúcia; CARRAHER, David William. **Na Vida dez, na Escola zero.** 7 ed. São Paulo: Cortez, 1993.

CARNEIRO, Vera Clotilde GARCIA. **Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática.** Zetetike, Campinas, UNICAMP, v. 13, n. 23, 2005, p. 85-118

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática (Ensino médio).** São Paulo: Ática, 2005.

______. **Matemática**. São Paulo: Ática. 2008.

DOLZ, Joaquim; SCHNEUWLY, Bernard; NOVERRAZ, Michèle. Gêneros e progressão em expressão oral e escrita ï sequências didáticas para o oral e a escrita: apresentação de um procedimento. In: ROJO, Roxane; CORDEIRO, Glaís Sales (Orgs.). **Gêneros orais e escritos na escola.** Campinas: Mercado de letras, 2004. p. 95-128.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Aprendizagem em Matemática:** registros de representação semiótica. 2 ed. São Paulo: Papirus, 2005. p. 11-33.

DôAMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática da teoria à prática**. 11 ed. São Paulo: Papirus, 2004.

D'AUGUSTINE, Charles**. Métodos Modernos para o Ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Livro Técnico, 1970.

ESPÍRITO SANTO. Secretaria de Estado da Educação. **Guia de orientações para a intervenção pedagógica**: Ensino Médio. Vitoria: SEDU, 2011.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

FALCÃO, Jorge Tarcísio da Rocha. **Psicologia da Educação Matemática:** uma introdução. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

FIORENTINI, Dario. **Alguns Modos de Ver e Conceber o Ensino de Matemática no Brasil.** Revista Zetetiké, Campinas, UNICAMP, ano 3, n. 4, p.1-36, 1995.

______. ; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática**. Campinas: Autores Associados, 2006.

FLORES, Cláudia Regina. **Registros de representação semiótica: história, epistemologia, aprendizagem.** Revista Bolema, Rio Claro, ano 19, n. 26, p.77-102, 2006.

FORESTI, Miriam Celi Pimentel Porto. **Prática docente na universidade: a contribuição dos meios de comunicação.** IN: Tecnologia Educacional, V. 22 (125), Jul/Ago, 1995.

FRANCHI, Regina H. de Oliveira Lino. **Ambientes de aprendizagem fundamentados na modelagem matemática e na informática como possibilidades para a educação matemática.** In: BARBOSA, Jonei C.; CALDEIRA, Ademir D.; ARAÚJO, Jussara L. (Orgs.). Modelagem matemática na educação matemática brasileira: pesquisas e práticas educacionais. **Revista da Sociedade Brasileira de Matemática SBEM**, Recife, v. 3, p. 177-93, 2007.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido**. 17 ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: Saberes necessários à prática educativa.** São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GUELLI, Oscar. **Matemática uma Aventura do Pensamento.** São Paulo: Ática, 2003.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática**: Imenes & Lellis, 9° ano. São Paulo: Moderna, 2009.

KUPKOVÁ, E. **Developing the radian concept understanding and the historical point of view.** Itália: Scienze Matematiche n. 18, 2008.

LIMA, Elon Lages. [et al]. **Temas e Problemas.** Coleção do Professor de Matemática. 3ª ed. Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Matemática, 2003.

LIMA, Elon Lages et al. **Matemática no Ensino Médio, vol. 2.** 2006.

LINS, Rômulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas da aritmética e álgebra para o século XXI.** Campinas: Papirus, 2001.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Engenharia didática. In: ______. (Org.) **Educação matemática:** uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999. p. 197-210.

MENDES, Iran Abreu. **O uso da história no ensino da matemática:** reflexões teóricas e experiências. Belém: EDUEPA, 2001.

MENDES, Iran Abreu; Atividades históricas para o ensino da trigonometria. IN: MIGUEL, Antônio; CARVALHO; Dione Lucchesi de; BRITO, Arlete de Jesus et al. **História da matemática em atividades didáticas**. 2 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

MENEZES, Luis Carlos de. **Matemática.** Disponível em: < http://www.csa.osa.org.br/cursos/ensino-fundamental/areas-do-conhecimento/>. Acesso em: 27 de julho de 2016.

MICOTTI, Maria Cecília de Oliveira. **O ensino e as propostas pedagógicas.** In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas.** São Paulo: UNESP, 1999. p. 153-67.

MIRAS, Mariana. Um ponto de partida para a aprendizagem de novos conteúdos: os conhecimentos prévios. In: COLL, Cesar; MARTÍN, Elena; MAURI, Teresa. **O construtivismo na sala de aula**. São Paulo: Ática, 2006.

NACARATO, M. **O Ensino de trigonometria: tendência e perspectivas.** In: VI Reunión de Didáctica de la Matemática Del Cono Sur. Buenos Aires, 2001.

PACHECO, Edilson Roberto; SIMIONATO, Ivane Marcarini. **Um olhar histórico a trigonometria como fonte de motivação em sala de aula**. **Curitiba:** Secretaria de Estado da Educação do Paraná, 2011.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da matemática:** uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

______. **Ensinar e aprender Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono da geometria: uma visão histórica.** 1989. Dissertação (Mestrado) Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.

RIBEIRO, Amauri Luiz da Silva; SOUZA, Everaldo. **Trigonometria e sua importância na matemática**. Mato Grosso, 2011. Disponível em: <http://cefaprocaceres.com.br/index.php?option=com_content&view=article&id=596&Itemid=76>. Acesso em: 03 mar.2015.

RIBNIKOV, Konstantín. **História de las Matemáticas.** Moscou: Editorial Mir, 1987.

ROJO, Roxane; CORDEIRO, Glaís Sales (Orgs.). **Gêneros orais e escritos na escola.** Campinas: Mercado de letras, 2004.

SÁNCHEZ HUETE, Juan Carlos; BRAVO, José A. Fernández. **O ensino da matemática, fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas.** Porto Alegre: Artmed, 2006.

SCHNEUWLY, Bernard; DOLZ, Joaquim. **Gêneros orais e escritos na Escola**. In: In: ROJO, Roxane; CORDEIRO, Glaís Sales (Orgs.). **Gêneros orais e escritos na escola.** Campinas: Mercado de letras, 2004. p. 95 ï 128.

SMITH, David Eugene. History of Mathematics. ***Special Topics of Elementary Mathematics***. Vol. II. New York: Dover Publications, INC., 1958.

SOLER, R. **Jogos Cooperativos.** 2.ed. Rio de Janeiro, RJ: Sprint, 2003.

SILVA, Marlizete Franco da; FROTA, Maria Clara Rezende. Explorando modelos matemáticos trigonométricos a partir de *applets*. **Revista VIDYA**, Santa Maria, v. 32, n. 2, p.97-111, dez.2012. ISSN: 0104-270 X.

SPEZAMIGLIO, Adalberto. **O que se pode fazer com a Trigonometria.** S.J.R.Preto, Departamento de Matemática: Didática, 2000.

SOUZA, Maria Helena; SPINELLI, Walter. **Matemática**. São Paulo: Ática, 2001.

VARGAS, Suzana Lima; MAGALHÃES, Luciane Manera. O gênero tirinhas: uma proposta de sequência didática. Revista Educação em Foco, Juiz de Fora, v. 16, n. 1, p. 119-43, ago.2011.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ANEXOS ï FICHAS UTILIZADAS NAS ATIVIDADES PRÁTICAS

Para o desenvolvimento das atividades propostas na sequência didática deste trabalho, elaboramos fichas para as atividades práticas, para melhorar a organização dos resultados obtidos em cada atividade proposta.

Essas fichas podem e devem ser aprimoradas ou adequadas para o perfil da turma a ser aplicada.

FICHA DE ATIVIDADE 1

Utilizada para organizar (e posteriormente socializar os resultados obtidos com os demais grupos da sala) os valores das razões provenientes das tangentes de 20°, 30°, 40°, 45°, 50°, 60° e 70°.

Objetivos: desenvolver a noção de tangente de um ângulo agudo; habituar os alunos com o uso do transferidor e desenvolver a habilidade de trabalhar em equipe.

Duração da atividade: 3 aulas de 50 minutos.

Materiais utilizados: papel cartão, régua, transferidor, tesoura e calculadora.

Conhecimentos prévios: triângulo retângulo, razão, cateto oposto e cateto adjacente.

Procedimento: formar grupos de 3 ou 4 alunos e recortar triângulos retângulos com ângulos de 20°e 70°, 30° e 60°, 40° e 50°, 45° e 45°, utilizando papel cartão e transferidor para medir os ângulos. Após isso, os alunos devem calcular os valores das razões entre o cateto oposto e o cateto adjacente referente a cada ângulo agudo de todos os triângulos e anotar na Ficha de Atividade abaixo.

DATA: ___/___/_____

FICHA DE ATIVIDADE 1

ATIVIDADE PRÁTICA DE TRIGONOMETRIA: TANGENTE DE UM ÂNGULO AGUDO

NOMES:

____ nº____ 9° _____

____ nº____ 9° _____

____ nº____ 9° _____

____ nº____ 9° _____

$tg\ 20° = \frac{}{} =$
$tg\ 30° = \frac{}{} =$
$tg\ 40° = \frac{}{} =$
$tg\ 45° = \frac{}{} =$
$tg\ 50° = \frac{}{} =$
$tg\ 60° = \frac{}{} =$
$tg\ 70° = \frac{}{} =$

FICHA DE ATIVIDADE 2

Utilizada individualmente para organizar (e posteriormente socializar a atividade desenvolvida com os demais alunos da sala) a construção do triângulo retângulo, feito com medidas arbitrárias. Posteriormente os alunos aplicaram o conceito de tangente referente ao ângulo x (segundo orientações descritas nas p.77-80). Em seguida, utilizou-se a tabela trigonométrica para obter, de forma aproximada, o valor do ângulo x.

Objetivo: perceber que tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo NÃO depende das medidas dos catetos e sim da abertura entre o cateto e a hipotenusa.

Duração da atividade: 2 aulas de 50 minutos.

Materiais utilizados: tabela trigonométrica, régua, compasso, calculadora e transferidor.

Conhecimentos prévios: saber calcular a tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo.

Procedimento: utilizar a Ficha de Atividade 2 (figura abaixo), para desenhar um triângulo retângulo, onde os catetos fiquem, paralelo a margem inferior da folha e paralelo a margem esquerda da folha. Utilize o compasso para a construção do ângulo reto. Note que os ângulos agudos são arbitrários e as medidas dos catetos são, também, arbitrárias. Construir no interior deste triângulo retângulo dois segmentos perpendiculares ao cateto paralelo a margem inferior da folha, obtendo dois triângulos inscritos. Medir cada um dos catetos dos três triângulos retângulos envolvidos nesta figura e calcular os valores das tangentes dos ângulos, referente a cada triângulo retângulo. Após isso, utilizar a tabela trigonométrica para encontrar a medida ângulo utilizado para calcular os valores das tangentes.

DATA: ___/___/_____

NOME: ____ nº___ 9° ______

FICHA DE ATIVIDADE 2

ATIVIDADE PRÁTICA DE TRIGONOMETRIA: TANGENTE DE UM ÂNGULO AGUDO

FICHA DE ATIVIDADE 3 ï PROBLEMA 1

Utilizada individualmente para organizar (e posteriormente socializar a atividade desenvolvida com os demais alunos da sala) a resolução do Problema 1.

Objetivo: resolver uma situação problema utilizando técnicas de resolução ï Semelhança de Triângulos e Aplicação da Tangente. Após a socialização das resoluções, os alunos devem perceber que utilizando a razão trigonométrica tangente o problema é resolvido com muito mais facilidade e precisão.

Duração da atividade: 2 aulas de 50 minutos.

Materiais utilizados: régua, transferidor, calculadora e tabela trigonométrica.

Conhecimentos prévios: semelhança de triângulos, tangente e escala.

Procedimento: os alunos devem resolver, individualmente, a situação problema apresentada na Ficha de Atividade 3 ï Problema 1, utilizando Semelhança de Triângulos e posteriormente aplicando a Razão Trigonométrica Tangente. Na resolução utilizando Semelhança de Triângulos, os alunos construirão um triângulo semelhante ao descrito no Problema 1, com muita meticulosidade, utilizando régua e transferidor. Posteriormente utilizarão a escola descrita no enunciado do problema para encontrar a medida desconhecida. Na segunda resolução, os alunos utilizarão a Razão Trigonométrica Tangente e calcularão de forma direta, a medida desconhecida.

DATA: ____/____/_______

NOME: ____ nº___ 9°______

FICHA DE ATIVIDADE 3 PROBLEMA 1

ATIVIDADE PRÁTICA DE TRIGONOMETRIA:
TANGENTE DE UM ÂNGULO AGUDO

Dois agrimensores estão tentando descobrir a distância aproximada da praia até a ilhota. Represente essa situação, fazendo um desenho bem caprichado, com régua e transferidor, na escala $\frac{1}{1000}$ (na qual 1 cm vale 10 m), e calcule a distância da ilha até a praia.

FICHA DE ATIVIDADE 3 ï PROBLEMA 2

Utilizada individualmente para organizar (e posteriormente socializar a atividade desenvolvida com os demais alunos da sala) a resolução do Problema 2.

Objetivos: resolver situação problema utilizando a Razão Trigonométrica Tangente. Simular a resolução que será realizada na Atividade Final ï o cálculo de uma altura inacessível.

Duração da atividade: 2 aulas de 50 minutos.

Materiais utilizados: régua, calculadora e tabela trigonométrica.

Conhecimentos prévios: saber aplicar a razão trigonométrica tangente para resolver problemas em diferentes contextos.

Procedimento: os alunos devem resolver, individualmente, a situação problema apresentada na Ficha de Atividade 3 ï Problema 2, aplicando a Razão Trigonométrica Tangente. O professor deve conduzir a socialização desta atividade de tal forma que os alunos fiquem familiarizados com o que realizarão na atividade final, o cálculo de uma altura inacessível utilizando a razão trigonométrica tangente.

DATA: ___/___/_____

NOME: ____ nº___ 9° ____

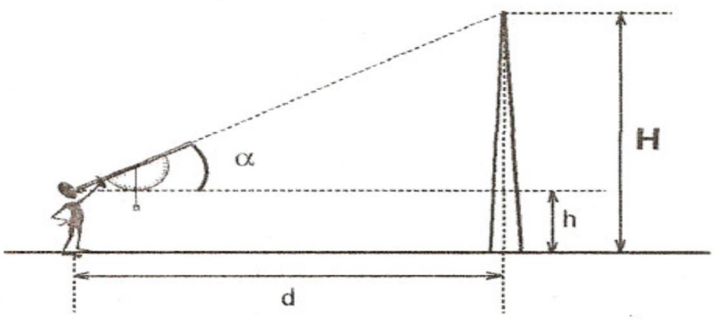
FICHA DE ATIVIDADE 3
PROBLEMA 2

ATIVIDADE PRÁTICA DE TRIGONOMETRIA: TANGENTE DE UM ÂNGULO AGUDO

Após a aula sobre astrolábios, o professor de uma ETEC propôs a seus alunos que determinassem a altura de uma antena localizada em um terreno plano e sem obstáculos à sua volta, que ficava próxima à escola.

Para a realização da tarefa, explicou aos alunos os procedimentos para se determinar a altura (H) da antena:

- O aluno deve-se colocar a uma distância (d) da base da antena;
- com o astrolábio, mirar o topo da antena e obter a medida do ângulo α;
- medir a distância (h) dos olhos do aluno até o solo.



Dados obtidos pelos alunos

- $h = 1{,}50$ m
- $d = 12$ m
- $\alpha = 66°$

$tg\ 66^{o} = 2{,}25$