Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Estatística

Modelos alternativos em filas M/G/1

Silvia Maria Prado

UFSCar - São Carlos/SP
Janeiro/2016

Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Estatística

Modelos alternativos em filas M/G/1.

Silvia Maria Prado

Orientador: Prof. Dr. Francisco Louzada Neto

Trabalho apresentado ao Departamento de Estatística da Universidade Federal de São Carlos - DEs/UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Estatística.

UFSCar - São Carlos/SP
Janeiro/2016

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Prado, Silvia Maria
P896ma Modelos alternativos em filas M/G/1 / Silvia Maria Prado. -- São Carlos : UFSCar, 2016.
174 p.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.

1. Modelos alternativos em filas M/G/1. 2. Distribuição Conway-Maxwell-Poisson. 3. Distribuição de tempos de serviço. I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Estatística

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado da candidata Silvia Maria Prado, realizada em 26/11/2015:

Prof. Dr. Francisco Louzada Neto
USP

Prof. Dr. Benedito Galvão Benze
UFSCar

Prof. Dr. Heleno Bolfarine
USP

Prof. Dr. José Gilberto Spasiani Rinaldi
UNESP

Prof. Dr. Josemar Rodrigues
USP

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar modelos de filas alternativos ao M/G/1, nos quais as chegadas seguem um processo de Poisson, o número total de usuários no sistema e o número total de canais de atendimento são desconhecidos. Neste caso, observamos apenas o canal de serviço que irá oferecer o máximo ou o mínimo tempo de serviço. Para isto, as distribuições de serviço são obtidas a partir da composição da distribuição Conway-Maxwell-Poisson truncada no ponto zero, usada para modelar o número de canais de atendimento, com uma distribuição geral para o máximo e o mínimo tempos de serviço. Desta forma, surgem novas distribuições de serviço que são denominadas de Máximo-Conway-Maxwell-Poisson-geral, denotada por distribuição MAXCOMPG, e Mínimo-Conway-Maxwell-Poisson-geral, denotada por distribuição MINCOMPG, e, assim, obtemos os modelos de fila M/MAXCOMPG/1 e M/MINCOMPG/1. Como distribuições gerais usamos as distribuições exponencial, Weibull e Birnbaum Saunders. Para ilustrar os modelos de fila propostos um amplo estudo de simulação é feito e dados reais também são utilizados.

Palavras-chave: Modelos de fila M/G/1; distribuição Conway-Maxwell-Poisson; distribuição do máximo e do mínimo tempos de serviço.

Abstract

The main aim of this work is to develop alternative queuing models to M/ G/1, in which arrivals follow a Poisson process, the total number of customers on the system and the total number of service channels are unknown. Our interest is just to observe the service channel that will offer the maximum or minimum service time. Wherefore, the service distributions are obtained from the composition of the Conway-Maxwell-Poisson distribution truncated at zero, used to model the number of service channels, with the general distribution to the maximum and minimum service time. Thus, we obtain new distributions for service time, which are called Maximum-Conway-Maxwell-Poisson-general, denoted by MAXCOMPG distribution, and Minimum-Conway-Maxwell-Poisson-general, denoted by MINCOMPG distribution, consequently, we obtain the queue models M/MAXCOMPG/1 and M/MINCOMPG/ 1, respectively. As general distributions, we use the distributions exponential, Weibull and Birnbaum Saunders. To illustrate the proposed queue models, a simulation study is done and also real data are used.

Keywords: M/G/1 queue; Conway-Maxwell-Poisson distribution; distribution for the maximum and minimum service time.

Sumário

1 Introdução **1**

2 Introdução a teoria das filas **7**

2.1 Introdução ao conceito de fila 7

2.1.1 Principais características de uma fila 8

2.2 Propriedade Pasta 10

2.3 Modelo de fila $M/G/1$ 12

2.3.1 Probabilidades do regime estacionário 14

2.4 Comentários finais 21

3 Modelos de fila M/MAXCOMPG/1 e M/MINCOMPG/1 **22**

3.1 Estimação pelo método de máxima verossimilhança 43

3.2 Seleção de modelos 46

3.3 Considerações finais 47

4 Modelos de fila M/MAXCOMPE/1 e M/MINCOMPE/1 **48**

4.1 Modelo de fila M/MAXCOMPE/1 48

4.1.1 Estimação pelo método de máxima verossimilhança 57

4.2 Modelo de fila M/MINCOMPE/1 60

4.2.1 Estimação pelo método de máxima verossimilhança 67

4.3 Resultados numéricos 69
4.3.1 Simulações 70
4.3.2 Caixa rápido de supermercado 81
4.4 Comentários finais 84

5 Modelos de fila M/MAXCOMPW/1 e M/MINCOMPW/1 85

5.1 Modelo de fila M/MAXCOMPW/1 85
5.1.1 Estimação pelo método de máxima verossimilhança 95
5.2 Modelo de fila M/MINCOMPW/1 99
5.2.1 Estimação pelo método de máxima verossimilhança 105
5.3 Resultados numéricos 108
5.3.1 Simulações 108
5.3.2 Acessos a um *blog* 117
5.4 Comentários finais 122

6 Modelos de fila M/MAXCOMPBS/1 e M/MINCOMPBS/1 123

6.1 Modelo de fila M/MAXCOMPBS/1 123
6.1.1 Estimação pelo método de máxima verossimilhança 133
6.2 Modelo de fila M/MINCOMPBS/1 137
6.2.1 Estimação pelo método de máxima verossimilhança 144
6.3 Resultados Numéricos 147
6.3.1 Simulações 147
6.3.2 Dados de fluxo de tráfego 155
6.4 Considerações finais 160

7 Conclusões e propostas futuras 162

Apêndice **169**

.1 Distribuição Conway-Maxwell-Poisson 169

.2 Truncamento da série 173

Lista de Tabelas

2.1 Notação de um sistema de filas 10

4.1 Resumo dos dados simulados. 70

4.2 Estimativas médias de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo de fila M/MAXCOMPE/1 e seus desvios-padrão (dp). 71

4.3 Estimativas médias de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo de fila M/MINCOMPE/1 e seus desvios-padrão (dp). 71

4.4 Estudo de simulação das estimativas médias dos parâmetros do modelo M/MAXCOMPE/1 para λ_1, $\rho_1 = 0,8$, $\mu_1 = 1,0$ e $\phi_1 = 0$. 73

4.5 Estudo de simulação das estimativas médias dos parâmetros do modelo M/MAXCOMPE/1 para $\lambda_1 = 0,9$, $\rho_1 = 0,9$, $\mu_1 = 0,9$ e $\phi_1 = 0$. 74

4.6 Estudo de simulação das estimativas médias dos parâmetros do modelo de fila M/MINCOMPE/1 para $\lambda_2 = 0,8$, $\rho_2 = 0,8$, $\mu_2 = 1,0$ e $\phi_2 = 0$. 75

4.7 Estudo de simulação das estimativas médias dos parâmetros do modelo de fila M/MINCOMPE/1 para $\lambda_2 = 0,9$, $\rho_2 = 0,9$, $\mu_2 = 1,0$ e $\phi_2 = 0$. 76

4.8 Porcentagem de concordância dos testes Log-rank e Quiquadrado para o modelo de fila M/MAXGE/1 79

4.9 Porcentagem de concordância dos testes Log-rank e Quiquadrado para o modelo de fial M/MINGE/1. 79

4.10 As estimativas de $\widehat{E}(Y_{max})$ e $\widehat{E}(Y_{min})$ modelos M/MAXGE/1 e M/MINGE/1. 79

4.11 Taxas de ocupação dos modelos de fila M/MAXGE/1 e M/MINGE/1. . . . 80

4.12 Medidas de desempenho dos modelos de fila M/MAXGE/1, M/MINGE/1 e M/M/1. 80

4.13 Valores dos critérios AIC e BIC 80

4.14 Resumo dos dados do caixa rápido em minutos. 81

4.15 Estimativas de máxima verossimilhança usando o modelo M/MAXCOMPE/1. 82

4.16 Estimativas de máxima verossimilhança usando o modelo M/MINCOMPE/1. 82

4.17 Medidas de desempenho dos modelos de fila M/MAXPE/1, M/MINPE/1 e M/M/1. 84

4.18 Valores dos critérios AIC e BIC 84

5.1 Resumos dos dados simulados para $\rho = 0,8$ e $\rho = 0,9$. 109

5.2 Estimativas médias de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo de fila M/ MAXCOMPW/1 e seus desvios-padrão (dp). 110

5.3 Estimativas médias de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo de fila M/MINCOMPW/1 e seus desvios-padrão (dp). 110

5.4 Porcentagem de concordância dos testes Log rank e Quiquadrado para o modelo de fila M/W/1. 111

5.5 Estimativas de $\widehat{E}(Y_1)$ para modelo M/W/1 das simulações. 111

5.6 As taxas de ocupação do modelo de fila M/W/1 para as duas simulações. . 111

5.7 Estudo de simulação das estimativas de máxima verossimilhança do modelo de fila M/MAXCOMPW/1 para $\lambda_1 = 0,8$, $\rho_1 = 0,8$,$\mu_1 = 1,0$, $k_1 = 0,9$ e $\phi_1 = 100$ 113

5.8 Estudo de simulação das estimativas de máxima verossimilhança do modelo de fila M/MAXCOMPW/1 para $\rho = 0,9$, $\lambda = 0,9$, $k = 0,9$ e $\phi = 0$. 114

5.9 Estudo de simulação das estimativas de máxima verossimilhança do modelo de fila M/MINCOMPW/1 para $\lambda_2 = 0,8$,$\rho_2 = 0,8$, $\mu_2 = 1,0$, $k_2 = 0,9$ e $\phi_1 = 100$. 115

5.10 Estudo de simulação das estimativas de máxima verossimilhança do modelo de fila M/MINCOMPW/1 para $\lambda_2 = 0,9$, $\rho_2 = 0,9$, $\mu_2 = 1,0$, $k_2 = 0,9$ e $\phi_2 = 100$. 116

5.11 Medidas de desempenho dos modelos de fila M/W/1 e M/M/1. 117

5.12 Valores dos critérios AIC e BIC 117

5.13 Resumo dos tempos entre os acessos em segundos. 119

5.14 Estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros 119

5.15 A estimativas de $\widehat{E}(Y_{max})$ e $\widehat{E}(Y_{min})$ dos modelos MAXPW e MINPW dado em segundos. 121

5.16 Taxas de ocupação dos modelos de fila M/MAXPW/1 e M/MINPW/1. . . 121

5.17 Medidas de desempenho dos modelos de fila M/MAXPW/1, M/MINPW/1 e M/M/1. 121

5.18 Valores dos critérios AIC e BIC 122

6.1 Resumos dos dados simulados com $\rho = 0,8$ e $\rho = 0,9$. 147

6.2 Estimativas médias dos parâmetros do modelo de fila M/MAXCOMPBS/1 e seus desvios-padrão (dp). 148

6.3 Estimativas médias dos parâmetros do modelo de fila M/MINCOMPBS/1 e seus desvios-padrão (dp). 148

6.4 Estimativas de $\widehat{E}(Y_1)$ do modelo de fila M/BS/1. 149

6.5 Porcentagem de concordância dos testes Log-rank e Quiquadrado para o modelo de fila M/BS/1. 149

6.6 Taxas de ocupação do modelo de fila M/BS/1 para as duas simulações. . . 149

6.7 Estudo de simulação das estimativas médias do modelo de fila M/MAXCOMPBS/1 para $\lambda = 0,8$, $\rho = 0,8$, $\alpha = 0,98$, $\beta = 7,0$, $\phi = 90$. 151

6.8 Estudo de simulação das estimativas médias do modelo de fila M/ MAX-COMPBS/1 para $\lambda = 0,9$, $\rho = 0,9$, $\alpha = 0,98$, $\beta = 7,0$ e $\phi = 90$. 152

6.9 Estudo de simulação das estimativas médias do modelo de fila M/MINCOMPBS/1 para $\lambda = 0,8$, $\rho = 0,8$, $\alpha = 0,98$, $\beta = 7,0$, $\phi = 0$. 153

6.10 Estudo de simulação das estimativas médias do modelo de fila M/MINCOMPBS/1 para $\lambda_2 = 0,9$, $\rho_2 = 0,9$, $\alpha_2 = 0,98$, $\beta_2 = 7,0$, $\phi_2 = 90$. 154

6.11 Valores dos critérios AIC e BIC 155

6.12 Resumo dos dados em segundos 156

6.13 Estimativas de máxima verossimilhança dos modelos M/MAXCOMPBS/1 e M/MINCOMPBS/1. 157

6.14 As estimativas de $\widehat{E}(Y_{max})$ e $\widehat{E}(Y_{min})$ em segundos. 159

6.15 Taxas de ocupação dos modelos de fila M/MAXGBS/1 e M/MINGBS/1. . 159

6.16 Medidas de desempenho dos modelos de fila M/MAXGBS/1, M/MINGBS/1 e M/M/1. 160

6.17 Valores dos critérios AIC e BIC 160

Lista de Figuras

3.1 Esquema dos modelos propostos. 23

4.1 Comparando a função de tempo restante da distribuição MAXGE e a função de tempo restante estimada com intensidade de tráfego $\rho_1 = 0,8$. . . . 77

4.2 Comparando a função de tempo restante da distribuição MAXGE e a função de tempo restante estimada com intensidade de tráfego $\rho_1 = 0,9$. . . . 77

4.3 Comparando a função de tempo restante da distribuição MINGE e a função de tempo restante estimada com intensidade de tráfego $\rho_2 = 0,8$. 78

4.4 Comparando a função de tempo restante da distribuição MINGE e a função de tempo restante estimada com intensidade de tráfego $\rho_2 = 0,9$. 78

4.5 Comparando a função de tempo restante da distribuição MAXPE e a função de tempo restante estimada. 83

4.6 Comparando a função de tempo restante da distribuição MINPE e a função de tempo restante estimada. 83

5.1 Comparando a função do tempo restante da distribuição Weibull e a função do tempo restante estimada com intensidade de tráfego $\rho = 0,8$. 112

5.2 Comparando a função do tempo restante da distribuição Weibull e a função do tempo restante estimada com intensidade de tráfego $\rho = 0,9$. 112

5.3 *Blog* Tendências Profissionais. 118

5.4 Comparando a função do tempo restante da distribuição MAXPW e a função do tempo restante estimada. 120

5.5 Comparando a função do tempo restante da distribuição MINPW e a função do tempo restante estimada. 120

6.1 Comparando a função do tempo restante da distribuição BS e a função do tempo restante estimada com intensidade de tráfego $\rho = 0,8$. 150

6.2 Comparando a função do tempo restante da distribuição BS e a função do tempo restante estimada com intensidade de tráfego $\rho = 0,9$. 150

6.3 Região Central da cidade de Presidente Prudente. 156

6.4 Esquema do fluxo de tráfego. 157

6.5 Comparando a função do tempo restante da distribuição MAXGBS e a função do tempo restante estimada. 158

6.6 Comparando a função do tempo restante da distribuição MINGBS e a função do tempo restante estimada. 159

Capítulo 1

Introdução

Um dos maiores problemas em sistemas de fila é modelar de forma realística a performance de centrais de serviço, assim como explicar a ocorrência de disparidades entre os atendimentos dos diferentes servidores das centrais, uma vez que alguns possuem longas filas e outros se encontram ociosos. A nossa questão é como construir novos modelos de fila, que incorporem mecanismos de ajuste contra longas filas.

As disparidades que surgem nas centrais raramente são incorporadas nos modelos de fila propostos na literatura. O nosso trabalho tem como propósito explicá-las, desenvolvendo novos modelos de fila, que possuam mecanismos de ajuste para reequilibrar o sistema quando ocorre um aumento do fluxo de usuários no sistema. Tais modelos serão focados nos servidores que oferecem o máximo ou o mínimo tempos de serviço entre todos os servidores em paralelo, sendo que o número total destes servidores é desconhecido.

Como exemplo, em um supermercado, alguns usuários necessitam de um maior ou menor tempo de serviço. Quando o usuário possui muitos itens em seu carrinho de compra, o supermercado dispõem de caixas normais para o atendimento, e para aquele com poucos itens, o qual necessita de um tempo menor de serviço, é disponibilizado o serviço de caixa rápido.

Diante deste objetivo usamos a metodologia de composição de distribuições para obter novas distribuições de serviço, que surgem a partir da composição da distribuição Conway-Maxwell-Poisson truncada no ponto zero, denotada por COMP truncada, usada para modelar o número de canais no sistema, com a distribuição geral para o máximo e o

mínimo tempos de serviço. Denominamos tais distribuições de Máximo-Conway-Maxwell-Poisson-Geral, denotada por distribuição MAXCOMPG e Mínimo-Conway-Maxwell-Poisson-Geral, denotada por distribuição MINCOMPG, sendo que ambas são truncadas no ponto zero. Como distribuições gerais, usamos as distribuições: exponencial, Weibull e Birnbaum Saunders.

A distribuição COMP é um modelo particular e bastante versátil para descrever o estado do sistema (Conway and Maxwell, 1961) (ver Apêndice 7), pois possui um parâmetro que representa a pressão exercida no servidor quando ocorre um aumento ou diminuição do fluxo de usuários.

Consideramos três variações deste parâmetro: (i) o parâmetro de pressão assume o valor zero, em que o servidor não altera a taxa de serviço (ii) o parâmetro de pressão assume o valor um, correspondendo a situação em que a taxa de serviço aumenta com o aumento de fluxo de usuários (iii) o parâmetro de pressão tende a infinito, sendo que a taxa de serviço aumenta ainda mais.

Os valores supracitados para o parâmetro de pressão foram escolhidos devido ao fato deles descreverem a distribuição do número de usuários no sistema de modelos clássicos de filas. Quando o parâmetro de pressão assume o valor zero, a distribuição COMP torna-se a distribuição geométrica e, assim, temos o modelo de fila $M/M/1$, em que os tempos entre as chegadas e os tempos de serviço possuem distribuição exponencial, a forma de atendimento é o primeiro que chega é o primeiro a ser atendido e há apenas um servidor. Para o parâmetro de pressão assumindo o valor um, a distribuição COMP torna-se a distribuição Poisson, e, assim, temos o modelo $M/M/\infty$, que difere do modelo M/M/1 pelo número de servidores. Para o parâmetro de pressão tendendo a infinito obtemos a distribuição Bernoulli (Conway and Maxwell, 1961).

Em relação às distribuições propostas MAXCOMPG e MINCOMPG, temos os seguintes casos: (i) quando o parâmetro de pressão assume o valor zero, obtemos respectivamente a distribuição Máximo-geométrica-geral, denotada por MAXGG e a distribuição Mínimo-geométrica-geral, denotada por MINGG; (ii) quando parâmetro de pressão assume o valor um, obtemos, respectivamente, a distribuição Máximo-Poisson-geral, denotada por MAXPG e a distribuição Mínimo-Poisson-geral, denotada por MINPG e (iii) quando o parâmetro de pressão tende a infinito obtemos, respectivamente, a distribuição

Máximo-Bernoulli-geral, denotada de MAXBG, e distribuição Mínimo-Bernoulli-Geral, denotada por MINBG. No último caso, em particular, as distribuições são semelhantes e coincidem com a distribuição geral.

Como, usamos três distribuições como distribuição geral para obter novos modelos de serviço: exponencial, Weibull e Birnbaum Saunders, então, obtemos seis novas distribuições a partir das distribuições MAXCOMPG e MINCOMPG que foram nomeadas como Máximo-Conway-Maxwell-Poisson-exponencial, denotada por distribuição MAXCOMPE, distribuição Mínimo-Conway-Maxwell-Poisson-exponencial, denotada por distribuição MINCOMPE, distribuição Máximo-Conway-Maxwell-Poisson-Weibull, denotada por distribuição MAXCOMPW, distribuição Mínimo-Conway-Maxwell-Poisson-Weibull, denotada por distribuição MINCOMPW, distribuição Máximo-Conway-Maxwell-Poisson-Birnbaum-Saunders, denotada por distribuição MAXCOMPBS e a distribuição Mínimo-Conway-Maxwell-Poisson-Birnbaum-Saunders, denotada por distribuição MINCOMPBS.

A escolha da distribuição Weibull foi feita devido ao fato de melhor descrever servidores humanos e vem sendo amplamente usada (Feldmann and Whitt, 1998). E a distribuição Birnbaum Saunders foi usada pois dados reais apresentarem serviços com esta distribuição e não foi encontrado nenhum modelo de fila com o uso desta distribuição, e essa foi uma das motivações de adotarmos esta distribuição.

Com a contrução destas novas distribuições de serviço para o máximo e o mínimo tempos de serviço surgem novos modelos de fila. Tais modelos são casos particulares do modelo de fila M/G/1 (Gross and Harris, 1998), na qual as chegadas dos usuários seguem um processo de Poisson, a distribuição de serviço é geral, possui apenas um servidor e o atendimento é por ordem de chegada, sendo que, neste trabalho, assumimos como distribuição geral as distribuições MAXCOMPG e MINCOMPG. Desta forma obtemos os seguintes modelos de fila M/MAXCOMPG/1 e M/MINCOMPG/1, para o máximo e o mínimo tempos de serviço, respectivamente.

Na literatura da teoria das filas, alguns trabalhos foram encontrados com o uso da metodologia de composição de distribuições no estudo de modelos de serviço. Schmidli et al. (1999) estudaram a composição de distribuições Poisson. Jongbloed and Koole (2001) utilizaram um modelo de composição de distribuições para modelar centrais de

serviço com taxa de serviço desconhecida. Iyer and Manjunath (2006) estudaram modelos de filas em que a função de densidade conjunta do tempo entre as chegadas e do serviço são descritas pela composição de misturas finitas de densidades exponenciais. Cordeiro et al. (2012) introduziram uma nova distribuição chamada distribuição exponencial-Conway-Maxwell-Poisson, denotada por distribuição ECOMP. Prado et al. (2015) apresentaram uma nova distribuição de serviço denominada Máximo-Conway-Maxwell-Poisson-Weibull com taxa de serviço dependente do estado do sistema.

A literatura é vasta para modelos com taxa de serviço dependente do estado do sistema, podemos citar os seguintes artigos: Whitt (1989) investigou o desempenho do modelo de fila M/M/1 com o crescente aumento da taxa de chegada. Adan and Kulkarni (2003) estudaram um sistema com um único servidor, na qual os tempos entre as chegadas e tempos de serviços dependem de uma cadeia de Markov discreta. Van Houdt et al. (2003) apresentaram um procedimento para calcular a distribuição de atraso de usuários com impaciência e paciência, segundo um modelo de fila com tempo discreto, na qual a distribuição de serviço depende do tempo de espera do usuário. Bekker et al. (2004) estudaram modelos de fila com carga de trabalho dependente da chegada e da rapidez do serviço. Koole et al. (2005) estudaram o impacto da distribuição de serviço na distribuição do comprimento máximo da fila de espera durante o período ocupado do modelo M^x/G/1, na qual x representa as chegadas em blocos. Lee and Kim (2006) consideraram o modelo de M/G/1, no qual a rapidez do servidor depende da quantidade de trabalho presente no sistema, e a política de serviço é dada pelo modelo de estoque. Cruz and Smith (2007) propuseram uma análise aproximada para redes de filas abertas com distribuição Markoviana para o tempo entre as chegadas e com distribuição de serviço dependente do estado do sistema com c servidores em paralelo. Ramsay (2007) encontrou a fórmula exata das funções de distribuição do tempo de espera e do tamanho da fila do modelo M/G/1, assumindo como distribuição para o tempo de serviço a distribuição Pareto. Marin et al. (2007) estudaram a segurança em aeroportos onde o sistema da fila é dependente do comprimento da mesma. Barth et al. (2010) estudaram canais de serviços com dois níveis de suporte e mecanismo de tempo dependente destes níveis. Alguns estudos consideram um único servidor cujo serviço é linearmente dependente do tempo de espera, como Boxma and Vlasiou (2007) e Whitt (1990). Cruz et al. (2010) propuseram uma extensão do modelo de fila M/G/c/c com estado dependente e com um fator de

seleção de rota. Bekker et al. (2011) estudaram a distribuição de equilíbrio do tempo de espera na fila, considerando o serviço dependente do primeiro usuário na fila. Singh et al. (2012) estudaram sistemas de filas com um único servidor, em que as chegadas seguem um processo de Poisson com taxas de chegada variando e com distribuição geral para o tempo de serviço. Tezcan (2012) estudou um controle ótimo de servidores heterogêneos com distribuição de serviço dada pela distribuição hiper-exponencial, denotada de H^*.

A limitação encontrada na literatura no estudo de novos modelos de serviço também foi uma das motivações deste trabalho. Isto ocorre, devido a dificuldade de encontrar as distribuições de equilíbrio na ocorrência da dependência entre serviço e chegadas, principalmente, quando relaxamos a suposição da distribuição exponencial para os tempos de serviço e/ou tempos entre as chegadas (Gross and Harris, 1998) e (Wolff, 1989). O relaxamento da distribuição exponencial faz com que o tempo para completar o serviço não possa ser determinado, dado que sua distribuição não tem necessariamente a propriedade de falta de memória, e neste caso os sistemas não são Markovianos. Além disso, a dependência é muitas vezes ignorada na teoria das filas em razão da dificuldade já citada (Civelek et al., 2009).

A presente tese de doutorado é organizada da seguinte maneira:

No Capítulo 2, apresentamos alguns conceitos básicos da teoria das filas, assim como, a propriedade *Poisson Arrival See Time Averages*, denotada como propridade PASTA. Esta propriedade é importante na obtenção das distribuições do tempo de espera na fila e no sistema. Mostramos, também, o modelo de fila $M/G/1$ que é de nosso interesse, pois os modelos propostos neste trabalho são casos particulares deste modelo.

No Capítulo 3, apresentamos os modelos gerais de fila M/MAXCOMPG/1 e M/MINCOMPG/1, bem como os casos particulares quando o parâmetro de pressão assume os valores zero, um e tende a infinito. Mostramos as propriedades das distribuições do tempo de serviço, como a obtenção das expressões para as funções de densidade e seus momentos, e as distribuições de equilíbrio do número de usuários no sistema e do tempo de espera na fila. O método de máxima verossimilhança é utilizado para a obtenção dos estimadores dos parâmetros dos modelos, assim como o Critério de Informação de Akaike (AIC- *Akaike Information Criterion*) e o Critério Bayesiano de Schwarz (BIC - *Bayesian Information Criterion*) são usados para a seleção de modelos.

Nos Capítulos 4, 5 e 6 apresentamos, respectivamente, os modelos M/MAXCOMPE/1 e M/MINCOMPE/1, modelos M/MAXCOMPW/1 e M/MINCOMPW/1 e os modelos M/MAXCOMPBS/1 e M/MINCOMPBS/1, além dos modelos particulares fixando os valores do parâmetro de pressão para cada um destes modelos. Apresentamos as propriedades destes modelos, como as expressões para as funções de densidade das distribuições dos tempos de serviço e seus momentos, e, as distribuições de equilíbrio do número de usuários no sistema e do tempo de espera na fila. Usamos o método de máxima verossimilhança para a estimação dos parâmetros dos modelos. Para ilustrar os modelos propostos, dados simulados e dados reais foram utilizados.

Finalmente, no Capítulo 7, apresentamos as conclusões e as propostas futuras para o aperfeiçoamento dos modelos de fila propostos.

Capítulo 2

Introdução a teoria das filas

Neste capítulo, apresentamos apenas um breve relato sobre alguns conceitos da teoria das filas. Para maiores informações, existe um vasto material disponível, dentre os quais podemos citar as principais referências deste trabalho, (Wolff, 1989), (Gross and Harris, 1998) e (Pinsky and Karlin, 2010). Em seguida, mostramos a propriedade *Poisson Arrivals see Time Average*, denotada por PASTA, que é uma propriedade importante e muito usada na teoria das filas (Wolff, 1989), e, finalmente, o modelo de fila M/G/1, que é de nosso interesse pois os modelos propostos neste trabalho são casos particulares deste modelo.

2.1 Introdução ao conceito de fila

Um modelo ou sistema de fila pode ser descrito da seguinte forma: usuários chegam para receber um certo serviço e, devido à impossibilidade de atendimento imediato, formam uma fila de espera. Neste trabalho, os termos usuários e serviço são usados em um sentido amplo. Podemos estar nos referindo a carros que chegam a um posto de serviço, máquinas que esperam para serem consertadas ou mensagens que são transmitidas por canais de comunicação.

O objetivo do estudo dos modelos de fila é a melhoria do desempenho do sistema, como por exemplo, a melhor utilização dos recursos dos serviços disponíveis, menor tempo de espera e maior rapidez no atendimento. O pioneiro neste estudo foi A. K. Erlang

que, como engenheiro da companhia dinamarquesa de telefones, estudou o problema de congestionamento de linhas (Brockmeyer et al., 1948). A partir daí, um grande número de áreas tem utilizado esta ferramenta, como por exemplo, no fluxo de tráfego de veículos e em centrais de atendimento.

2.1.1 Principais características de uma fila

Algumas das características básicas de uma fila, como chegadas, serviços, disciplina de atendimento e capacidade de espera são, brevemente, descritas a seguir. Para maiores detalhes vejam (Pinsky and Karlin, 2010).

- O processo de chegada é a descrição de como os usuários procuram o serviço. Se eles chegam a intervalos fixos de tempo, o processo de chegada é dito constante ou determinístico. Por outro lado, se as chegadas são aleatórias no tempo, elas formam um processo estocástico e é necessário descrever suas propriedades probabilísticas. A suposição mais comum é que as chegadas formam um processo de renovação (Pinsky and Karlin, 2010), isto é, os intervalos entre as chegadas são independentes e identicamente distribuídos. Em geral, é também assumido a independência em relação ao serviço. Também se faz necessário saber se as chegadas são unitárias ou em blocos, como é o caso da chegada de passageiros de um vôo em um aeroporto.

- Da mesma forma que o processo de chegada, podemos considerar o processo de serviço como sendo determinístico ou aleatório. A distribuição do tempo de serviço pode depender do estado do sistema ou, até mesmo, do tipo de usuário a ser servido. A hipótese mais simples é a independência entre serviços e chegadas. O número de servidores disponíveis para atender a uma mesma fila também deve ser especificado. Nesse caso, é comum mencionar que os servidores estão em paralelo numa referência a estarem atendendo uma mesma fila.

- A disciplina da fila se refere a maneira como os usuários serão selecionados para receber o serviço. No cotidiano, os atendimentos, em geral, se dão pela ordem de chegada. A fila do caixa do supermercado e da compra de ingressos são dois exemplos. A disciplina que descreve este tipo de fila é a FIFO (do inglês, *first in first out*), ou seja, primeiro que chega é o primeiro a ser atendido. Existem outras

disciplinas como, por exemplo, LIFO (do inglês, *last in fist out*), em que o último que chega é o primeiro a ser atendido, e a seleção aleatória dos usuários na fila, denominado de Siro (do inglês *serve in random order*). A disciplina de atendimento pode ainda estabelecer prioridades entre os usuários, de modo a atender primeiro os usuários com alta prioridade. Em alguns modelos, o serviço pode ser interrompido para dar lugar a um usuário de prioridade mais alta.

- A capacidade da fila é a limitação física no número de usuários que podem esperar no sistema, como, por exemplo, em uma sala de espera para uma consulta médica. Se a capacidade total estiver ocupada, o usuário não poderá entrar no sistema e será perdido ou desviado para outro centro de serviço. Essa limitação se relaciona com a chegada, mas a decisão de se integrar à fila não é do usuário e sim do sistema de serviço. A capacidade da fila também pode ser infinita, neste caso, o sistema não possui sala de espera limitada, como por exemplo, acessos a web site e telefônia.

A caracterização de uma fila, em geral, é feita utilizando a notação desenvolvida por Kendall (1953), a qual utiliza símbolos e barras tal como $A/B/H/C/Z$, sendo que A indica a distribuição do tempo entre as chegadas, B indica a distribuição do tempo de serviço, H o número de servidores, C a capacidade do sistema e Z é a disciplina da fila. A omissão de C e Z na representação acima, indica que a fila tem capacidade infinita e a disciplina da fila é FIFO. Alguns símbolos característicos são apresentados na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Notação de um sistema de filas

Características	Símbolos	Significado
Distribuição do tempo entre as chegadas (A)	M	exponencial
	D	determinística
	E_k	Erlang do tipo k
	GI	geral independente
Distribuição do tempo de serviço (B)	M	exponencial
	D	determinística
	E_k	Erlang do tipo k
	G	geral independente
Número de servidores (H)	$1, 2, \ldots, \infty$	
Capacidade do sistema (C)	$1, 2, \ldots, \infty$	
Disciplina (Z)	FIFO	primeiro que chega, é o primeiro a ser atendido
	LIFO	último que chega, é o primeiro a ser atendido

2.2 Propriedade Pasta

Vamos fazer um breve relato sobre propriedade PASTA, cuja prova podemos encontrar em Wolff (1989). A propriedade PASTA é uma abreviatura de *Poisson Arrivals See Time Averages*. Esse resultado indica que a distribuição do número de usuários no sistema em tempo contínuo é igual àquela obtida observando-se o sistema nos instantes imediatamente precedentes a uma chegada. Isto é, em regime estacionário, os usuários que chegam "exergam"o sistema com a distribuição em tempo contínuo. A probabilidade de uma chegada encontrar o sistema num particular estado é uma quantidade de interesse no estudo de filas e, em especial, será necessária para calcular a distribuição do tempo de espera na fila e no sistema.

Seja $\pi_n^a(t)$ a probabilidade de uma chegada no instante t encontrar o sistema no estado n, em que o superescrito a vem de *arrival*, do termo em ingles para chegada. O usuário, que está chegando em t não é computado no estado do sistema e, por essa razão, $\pi_n^a(t)$ é frequentemente mencionada como a distribuição nos instantes imediatamente an-

teriores a uma chegada ou distribuição imersa nos instantes de chegada. Iremos designar por π_n^a a correspondente distribuição estacionária. A primeira vista, poderíamos supor que a distribuição em tempo contínuo π_n deveria sempre ser igual a π_n^a para todos os sistemas de filas. Entretanto, isso não acontece, como podemos ver no exemplo a seguir.

- Exemplo

Considere uma fila D/D/1, em que as chegadas e serviços são determinísticos, isto é, as chegadas são espaçadas igualmente a cada x segundos e o serviço tem a duração de exatamente y segundos. Para garantir a estabilidade do sistema consideramos que $y < x$, ou seja, o serviço é mais rápido que o intervalo entre chegadas. Dessa forma, após o equilíbrio do sistema ser atingido, o usuário que chega encontra a fila vazia e teremos e teremos π_0^a e $\pi_k^a = 0, \forall k \geq 1$. Por outro lado, a fração do tempo que o sistema contém um usuário é y/x. No restante do tempo o sistema estará vazio, assim, $\pi_0 = 1 - y/x$, $\pi_1 = y/x$ e $\pi_k = 0$, $\forall k \geq 2$. Temos assim um exemplo em que $\pi_n \neq \pi_n^1$.

Teorema 2.1 *Na fila $M/M/1$, em regime estacionário, a distribuição do número de usuários no sistema, nos instantes de chegada, coincide com a distribuição em tempo contínuo, isto é, $\pi_n = \pi_n^a$ em que $\pi_n^a(t)$.*

Prova: Em equilíbrio, $\pi_n(t) = \pi_n^a(t)$, $\forall t$, implicando que as respectivas distribuições estacionárias são iguais. O evento correspondendo a uma chegada no intervalo $(t, t + \Delta t)$ será representado por $A(t, t + \Delta t)$. Então

$$\begin{aligned} \pi_n^a &= \lim_{\Delta \to 0} P[N(t) = n | A(t, t + \Delta t)] \\ \\ &= \lim_{\Delta \to 0} P[N(t) = n] = \pi_n(t), \end{aligned}$$

onde aplicamos a independência do evento $A(t, t + \Delta t)$ em relação ao número de usuários no sistema no instante t. Observe que isto é uma consequência direta das chegadas formarem um processo de Markov.

2.3 Modelo de fila $M/G/1$

No modelo de fila M/G/1 as chegadas seguem um processo de Poisson com taxa de chegada λ, a capacidade do sistema é infinita, a disciplina da fila é FIFO e possui um servidor com tempo de serviço denotado por S, que possui função de distribuição dada por $B(t)$ (Gross and Harris, 1998).

A taxa de serviço é dada por $\mu = \frac{1}{E(S)}$, em que $E(S)$ é o valor esperado de S, e definimos a intensidade de tráfego como sendo, $\rho = \lambda/\mu = \lambda E(S)$. A intensidade de tráfego é uma medida que mede a taxa de ocupação do sistema. Quando $\rho > 1$, a taxa de chegada excede a taxa de serviço, e, neste caso, a fila cresce infinitamente e o sistema não se encontra em equilíbrio. Quando $\rho < 1$, a fila está controlada e o sistema é estável.

Primeiramente, vamos mostrar alguns resultados tais como, número médio de usuários no sistema (L), número médio de usuários na fila (L_q), tempo médio de espera no sistema (W) e tempo médio de espera na fila (W_q) (Pinsky and Karlin, 2010). Estes resultados são conhecidos como fórmulas de Pollaczek-Khinchin e também denominadas de medidas de desempenho do sistema.

A estratégia é, obter uma dessas medidas e deduzir as outras utilizando as fórmulas de Little (Little, 1961). As fórmulas de Little são muito importantes na teoria das filas, pois relaciona o tamanho médio do sistema ao tempo médio de espera do usuário em estado de equilíbrio.

As fórmulas de Little são dadas por

$$\begin{aligned} L &= \lambda W, \\ L_q &= \lambda W_q, \end{aligned}$$

ou podemos usar $W = W_q + E(S)$.

Sabemos que o tempo de espera para uma nova chegada é exponencial com parâmetro λ. Entretanto, o tempo para completar o serviço não pode ser determinado, pois sua distribuição não tem necessariamente a propriedade de falta de memória. Dessa forma, a informação disponível não é suficiente para determinar o número de usuários no sistema no instante t, $N(t)$, pois não é um processo Markoviano. Neste caso, a idéia é encontrar alguns instantes de tempo, tais que, a partir deles, se possa obter o comportamento do

sistema. Isto pode ser tratado de duas maneiras: a primeira, obtém resultados considerando o sistema nos instantes em que os usuários chegam, e a segunda considerando o sistema nos momentos de partida (Wolff, 1989).

Considere um usuário chegando na fila, seu tempo de espera é determinado pelos usuários à sua frente, sendo que podem haver usuários na fila e um usuário em serviço. Considere os usuários na fila, no instante em que o usuário chega no sistema. Cada usuário que está posicionado à frente do usuário na fila contribui, em média, $E(S)$, para o tempo de espera. Existe em média, L_q usuários na fila no instante de chegada do usuário. Então, seu tempo de espera médio devido a esses usuários é $L_q E(S)$.

O usuário que se encontra em serviço no momento da chegada de um novo usuário contribui com um valor diferente para o tempo de espera deste usuário que chega ao sistema. Se o usuário já completou alguma parte do serviço, então sua contribuição para o tempo de espera é o tempo que resta para completar o serviço e não o tempo total de serviço.

Considere S_{oc} como sendo o evento servidor ocupado e T_{sr} o tempo de serviço residual, logo, a média do tempo de espera na fila para o usuário que chega é dada por

$$W_q = L_q E(S) + P(S_{oc}) E(T_{sr}|S_{oc}), \tag{2.1}$$

na qual $P(S_{oc})$ é a probabilidade do usuário que chega encontrar o servidor ocupado, e pela propriedade PASTA, ela é a mesma que a fração de tempo em que o servidor está ocupado, isto é, $P(S_{oc}) = \rho$.

Usando $L_q = \lambda W_q$ para eliminar L_q da Equação (2.1) temos que

$$W_q = \frac{P(S_{oc}) E(T_{sr}|S_{oc})}{1-\rho}. \tag{2.2}$$

O valor esperado do tempo de serviço residual dado que o servidor está ocupado é obtido com o conhecimento do tempo médio residual de um processo de renovação, logo temos que

$$E(T_{sr}|S_{oc}) = \frac{E(S^2)}{2E(S)} = \frac{1+CV^2}{2}\ E(S),$$

a expressão $\frac{E(S^2)}{2E(S)}$, é chamada de tempo médio residual do processo de renovação. O tempo médio residual é definido como o intervalo de t até a próxima renovação. Temos, também, que $CV^2 = \frac{Var(S)}{E^2(S)}$ é o quadrado do coeficiente de variação da distribuição de serviço, e

$Var(S)$ é a variância de S. A fórmula é denominada de tempo médio residual de um processo de renovação (Gross and Harris (1998)). Intuitivamente, é o tempo médio até o fim de um ciclo de renovação, visto por um observador que chega ao processo em um instante aleatório.

Logo, temos que o tempo médio de espera na fila pode ser escrito da seguinte forma

$$W_q = \frac{1+CV^2}{2}\frac{\rho}{1-\rho}\ E(S) = \frac{\lambda E(S^2)}{2(1-\rho)}. \tag{2.3}$$

As outras medidas de desempenho podem ser obtidas a partir de W_q, e as expressões são dadas por

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{\lambda^2\ E(S^2)}{2(1-\rho)}, \\ W &= \frac{\lambda E(S^2)}{2(1-\rho)} + \frac{1}{\mu}, \\ L &= \frac{\lambda^2\ E(S^2)}{2(1-\rho)} + \rho. \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.3.1 Probabilidades do regime estacionário

O número de usuários no sistema definido por $X(t)$, em um instante t, não é um processo de Markov para o modelo de fila M/G/1, pois para predizer o comportamento futuro do sistema devemos ter conhecimento do tempo gasto no sistema do usuário em serviço. O processo de chegada deste sistema é Poisson, isto implica que o intervalo entre as chegadas é exponencial. No entanto, o tempo para completar o serviço não tem, necessariamente, a propriedade de falta de memória.

Como já mencionado, a alternativa é encontrar alguns pontos de tal forma que a partir destes pontos, possamos ter ideia do comportamento do sistema. Como por exemplo, se observarmos o número de usuários nos instantes de saída do sistema, assim, evitamos a dificuldade de tratar com partes do tempo de serviço

Seja X_n o número de usuários remanescentes no sistema imediatamente após a saída do n-ésimo usuário. Então, $\{X_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, é um processo de Markov, e podemos

escrevê-lo da seguinte forma

$$X_{n+1} \begin{cases} X_n - 1 + A_{n+1}, \ X_n > 0, \\ \\ A_{n+1}, \qquad\qquad X_n = 0. \end{cases}$$

em que A_{n+1} é o número de usuários que chegam durante o tempo de serviço do $(n+1)$-ésimo usuário. Desde que a chegada é um processo de Poisson, o número de usuários A_n que chegam durante o serviço do n-ésimo usuário é independente das chegadas precedentes, e a propriedade de Markov segue instantaneamente, e assim, podemos calcular a probabilidade que durante um serviço n usuários cheguem ao sistema (Pinsky and Karlin, 2010), que é dada por

$$k_n = P[A_n = n] = \int_0^\infty P[A = n|S = t]dB(t) = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} dB(t), \tag{2.5}$$

A partir da Equação (2.5) obtemos a intensidade de tráfego a qual é também denominada de taxa de ocupação.

$$E(A) \ = \ \int_0^\infty E(A|S = t)dB(t) = \int_0^\infty \lambda t dB(t) = \lambda \ E(S) = \frac{\lambda}{\mu} \equiv \rho. \tag{2.6}$$

Para $j = 0, 1, 2, \ldots$ temos as probabilidades de transições

$$\begin{cases} p_{i,j} = P[X_n = j|X_{n-1} = i] = P[A = j - i + 1] \\ \\ \quad = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} dB(t), \qquad j \geq i - 1, i \geq 1, \\ \\ \quad = 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad j \leq i - 1, i \geq 1. \end{cases}$$

A matriz de transição é

$$P = [p_{ij}] = \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & \cdots \\ k_0 & k_1 & k_2 & \cdots \\ 0 & k_1 & k_2 & \cdots \\ 0 & 0 & k_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Assumindo a condição estacionária é alcançada, o vetor de probabilidades do estado de equilíbrio, $\pi = \pi_n$, pode ser encontrado como solução da equação estacionária

$\pi P = \pi$. Assim sendo, a distribuição estacionária da cadeia nos instantes de partida é a solução do sistema descrito a seguir:

$$\pi_i = \pi_0 k_i + \sum_{j=1}^{i+1} \pi_j k_{i-j+1},\ i = 0, 1, 2 \ldots, \tag{2.7}$$

na qual $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$ e i indica o número de usuários no sistema.

Para calcular as probabilidades de equilíbrio do número de usuários no sistema, e do tempo de espera na fila e no sistema, introduzimos as seguintes funções geradoras

$$\Pi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i z^i,\ \ |z| \leq 1, \tag{2.8}$$

e

$$K(z) = \sum_{i=0}^{\infty} k_i z^i, |z| \leq 1. \tag{2.9}$$

Multiplicando a Expressão (2.8) por z^i e somando para $i \geq 0$, temos

$$\begin{aligned}
\Pi(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i z^i = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_0 k_i z^i + \sum_{i=0}^{\infty} z^i \sum_{j=1}^{i+1} \pi_j k_{i-j+1} \\
&= \pi_0 K(z) + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=j-1}^{\infty} \pi_j k_{i-j+1} z^i \\
&= \pi_0 K(z) + \frac{1}{z} \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j z^j \sum_{i=j-1}^{\infty} k_{i-j+1} z^{i-j+1} \\
&= \pi_0 K(z) + \frac{1}{z}(\Pi(z) - \pi_0) K(z).
\end{aligned}$$

Então,

$$\Pi(z) = \frac{\pi_0 K(z)(1-z)}{K(z) - z}. \tag{2.10}$$

A Expressão (2.10) é uma das formas da fórmula de Pollaczek-Khinchin (Gross and Harris, 1998).

Para obter a expressão da função geradora precisamos determinar pi_0. Para tal, notamos que $\Pi(1) = 1$ e $K(1) = 1$, condições que decorrem da soma de probabilidadeds ser igual a 1. Com o valor de z substituído por 1, a expressão para $\Pi(z)$ ocorre uma indeterminação do tipo 0 sobre 0. Dessa forma, será necessário aplicar a regra de l'Hôpital,

isto é, derivamos o numerador e o denominador do lado direito da Equação (2.10) e depois efeutamos a substituição de z por 1. Temos,

$$1 = \frac{\pi_0[K^1(z)(1-z) + K(z)(-1)]}{k^1(z) - 1} \mid_{z=1}, \tag{2.11}$$

o qual $K^1(z) = \sum_{i=0}^{\infty} = ik_i z^{i-1}$ e, assim, temos

$$\begin{aligned} K^1(1) &= \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda u)^i e^{-\lambda y}}{i!} dB(y) \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda u)^i e^{-\lambda y}}{i!} dB(y) \\ &= \int_0^{\infty} \lambda y dB(y) = \lambda E(S), \end{aligned}$$

em que (1) indica a primeira derivada de $K(1)$.

Como antes, definimos a intensidade de tráfego do sistema como sendo $\rho = \lambda E(S)$. Com a substituição do valor de $K^1(1)$ em (2.10) obtemos que $\pi_0 = 1 - \rho$, o que indica a existência de distribuição estacionária se, e somente se, $\rho < 1$. Então

$$\Pi(z) = \frac{(1-\rho)K(z)(1-z)}{K(z) - z}. \tag{2.12}$$

A Equação (2.12) é uma medida para obter $\{\pi_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, que são equivalentes a $\{p_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, sem fazer suposição a uma especifíca distribuição de tempo de serviço.

Assim sendo, temos que

$$p_n = \frac{\Pi^{(n)}(0)}{n!}, \tag{2.13}$$

que é probabilidade de termos n usuários no sistema em equilíbrio, e (n) é a n-ésima derivada.

Pela definição de $K(z)$ temos ainda o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} K(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} z^i \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^i e^{-\lambda t}}{i!} dB(y) = \int_0^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda t z)^i e^{-\lambda t}}{i!} dB(t) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-z)t} dB(t). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Sabemos que a transformada de Laplace-Stieltjes de uma variável aleatória X com função de distribuição $F(\cdot)$ é definida como

$$\tilde{X}(s) = E(e^{-sx}) = \int_0^\infty e^{-sx} dF_X(x).$$

Portanto $K(z)$ dada pela equação (2.14) pode ser reescrita em função da transformada de Laplace-Stieltjes da distribuição do tempo de serviço, portanto, $K(z) = \tilde{B}(-\lambda(1-z))$.

A Equação (2.12) pode ser reescrita da forma

$$\Pi(z) = \frac{(1-\rho)\tilde{B}(\lambda(1-z))(1-z)}{\tilde{B}(\lambda(1-z)) - z}. \tag{2.15}$$

- Exemplo 1: Suponha que o tempo de serviço possui distribuição exponencial com média $1/\mu$. Então,

  $$\tilde{B}(\lambda(1-z)) = \frac{\mu}{\mu + \lambda(1-z)}.$$

  Logo,

  $$\begin{aligned} \Pi(z) &= \frac{(1-\rho)\frac{\mu}{\mu+\lambda(1-z)}(1-z)}{\frac{\mu}{\mu+\lambda(1-z)} - z} = \frac{(1-\rho)\mu(1-z)}{\mu - z(\mu+\lambda(1-z))} \\ &= \frac{(1-\rho)\mu(1-z)}{(\mu-\lambda z)(1-z)} = \frac{1-\rho}{1-\rho z}. \end{aligned}$$

  Assim,

  $$p_n = (1-\rho)\rho^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

  é a distribuição de equilíbrio do número de usuários no sistema do modelo de fila M/M/1.

Considere um usuário chegando no sistema em equilíbrio, no qual denotamos W como sendo a função de distribuição para o tempo de espera no sistema deste usuário.

A distribuição do número de usuários após a saída de um usuário é igual a p_n, $n = 0, 1, \ldots$, desde que o sistema esteja em equilíbrio. Considere que a disciplina da fila seja FIFO, desta forma, todos os usuários que estão atrás do usuário que acabou de sair do sistema são precisamente os usuários que chegaram durante o seu tempo de serviço. Portanto, temos que

$$p_n = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} dW(t).$$

Temos

$$K^*(z) = \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t z)^n}{n!} e^{-\lambda t} dW(t)$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda(1-z)t} dW(t) = \tilde{W}(\lambda(1-z)), \tag{2.16}$$

em que $\tilde{W}(\lambda(1-z))$ é a transformada de Laplace Stieljes.

De (2.16) sabemos que $\Pi(z) = \tilde{W}(\lambda(1-z))$ e que

$$\tilde{W}(\lambda(1-z)) = \frac{(1-\rho)\tilde{B}(\lambda(1-z))(1-z)}{\tilde{B}(\lambda(1-z)) - z}, \tag{2.17}$$

a partir das Equações (2.9) e (2.5) temos que

$$K(z) = \int_0^\infty e^{-\lambda y(1-z)} dB(y) = B^*(\lambda(1-z)). \tag{2.18}$$

Usando essas equações temos que

$$\tilde{W}(s) = \frac{(1-\rho)\tilde{B}(s)s}{\lambda\tilde{B}(s) + s - \lambda}, \tag{2.19}$$

em que $s = \lambda(1-z)$, e, está equação também é conhecida como fórmula de Pollaczek-Khinchin.

- Exemplo 2: Sendo o tempo de serviço exponencial com média $1/\mu$, temos

$$\tilde{B}(s) = \frac{\mu}{\mu + s}.$$

Logo,

$$\tilde{W}(s) = \frac{(1-\rho)\frac{\mu}{\mu+s}s}{\lambda\frac{\mu}{\mu+s} + s - \lambda} = \frac{\mu(1-\rho)}{\mu(1-\rho) + s}.$$

.

Usando a transformada inversa temos que

$$W(t) = 1 - e^{-\mu(1-\rho)t}, \quad t > 0,$$

que é a função de distribuição do tempo de espera no sistema do modelo de fila M/M/1.

Para o tempo de espera na fila, temos que a transformada da soma de duas variáveis aleatórias independentes (das variáveis aleatórias do tempo de espera na fila e do tempo de serviço) é o produto da transformada destas duas variáveis aleatórias (Gross and Harris, 1998).

$$\tilde{W}(s) = \tilde{W}_q(s)\tilde{B}(s),$$

na qual $\tilde{W}_q(s)$ é a função geradora da distribuição do tempo de espera na fila.

Então,

$$\tilde{W}_q(z) = \frac{(1-\rho)s}{\lambda\tilde{B}(s) + s - \lambda} = \frac{(1-\rho)s}{s - \lambda(1-\tilde{B}(s))}. \tag{2.20}$$

fazendo a expansão a direita como uma série geométrica, obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \tilde{W}_q(z) &= (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{s}(1-\tilde{B}(s)\right)^n \\ &= (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho\mu}{s}(1-\tilde{B}(s))\right)^n. \end{aligned}$$

O termo $\mu(1-\tilde{B}(s))/s$ é a transformada de Laplace-Stieltjes de

$$R(t) = \mu\int_0^t (1-B(x))dx,$$

em que $R(t)$ é a função de distribuição do tempo de serviço da sobra de tempo do usuário que esta sendo atendido no instante que um novo usuário entra no sistema. Portanto,

$$\tilde{W}_q(s) = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}[\rho R(s)]^n.$$

Fazendo a inversão termo a termo, e utilizando a propriedade de convolução temos

$$W_q(t) = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n[R^{[n]}(t)], \tag{2.21}$$

em que o símbolo $[n]$ é a n-ésima convolução da distribuição de serviço. Esta equação mostra que se o tempo é re-ordenado, este tempo de serviço remanescente é uma unidade de tempo, então, qualquer chegada em estado de equilíbrio encontra n usuários, tal que a unidade de tempo do serviço em potencial na frente deste usuário possui probabilidade $(1-\rho)\rho^n$, que é um resultado semelhante ao modelo de fila M/M/1 (Gross and Harris, 1998) .

- Exemplo 2: Sendo o tempo de serviço exponencial com média $1/\mu$ temos

$$\tilde{B} = \frac{\mu}{\mu + s}.$$

Logo,

$$\tilde{W}_q(s) = (1-\rho) + \rho\frac{\mu(1-\rho)}{\mu(1-\rho)+s}.$$

A distribuição de equilíbrio do tempo de espera na fila é

$$\begin{aligned} W_q(t) &= 1 - \rho + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n - 1\mu \int_0^t \frac{(\mu x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu x} dt \\ &= 1 - \rho e^{-(\mu-\lambda)t}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

que é a função de distribuição do tempo de espera na fila do modelo de fila M/M/1.

2.4 Comentários finais

Apresentamos uma breve descrição das caracterísicas básicas de uma fila, tal como chegadas, serviços, disciplina da fila, capacidade do sistema, e também a notação utilizada. Introduzimos a propriedade PASTA, na qual a quantidade média de trabalho em qualquer instante de tempo corresponde à média da quantidade de trabalho no sistema, visto por uma chegada. Mostramos o modelo de fila $M/G/1$, assim como as distribuições de equilíbrio do número de usuários no sistema, do tempo de espera na fila e no sistema, e as medidas de desempenho.

Capítulo 3

Modelos de fila M/MAXCOMPG/1 e M/MINCOMPG/1

Neste capítulo apresentamos os modelos M/MAXCOMPG/1 e M/MINCOMPG/1, nos quais as chegadas seguem um processo de Poisson, as distribuições dos tempos de serviço são dadas pelas distribuições MAXCOMPG e MINCOMPG, respectivamente. As disciplinas das filas são FIFO e as capacidades dos sistemas são infinitas. Os sistemas também possuem um número desconhecido de servidores dispostos em paralelo, sendo que apenas um servidor é observado, ou seja, aquele que irá oferecer o máximo e o mínimo tempos de serviço entre todos os servidores.

Os modelos de fila propostos possuem taxas de serviço dependentes do estado dos sistemas, isto é, os servidores podem aumentar as taxas de serviço quando ocorrem um aumento no fluxo de usuários no sistema, e desta forma, evitando a formação de longas filas.

Os modelos de fila M/MAXCOMPG/1 e M/MINCOMPG/1 são casos particulares do modelo de fila M/G/1, no qual a distribuição G assume as distribuições MAXCOMPG e MINCOMPG. E assim, podemos obter as distribuições de equilibrio dos modelos propostos a partir deste modelo, como foi descrito no Capítulo 2.

Na Figura 3.1 mostramos o esquena dos modelos de filas propostos.

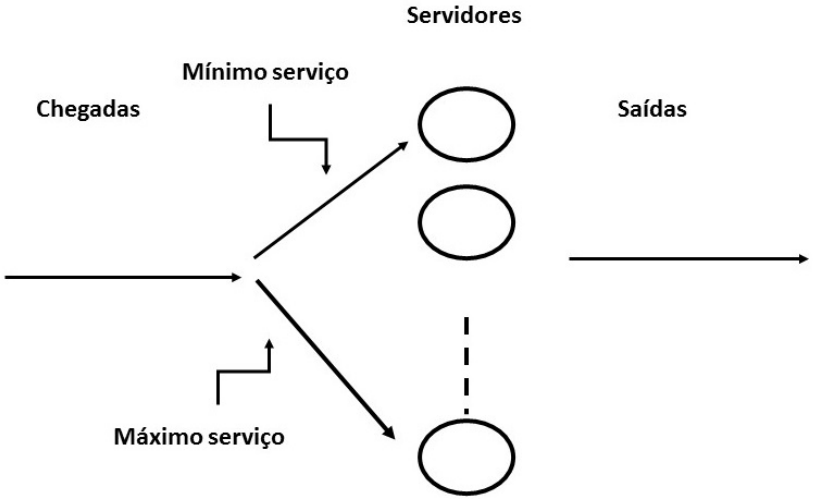

Figura 3.1: Esquema dos modelos propostos.

As distribuições de serviço MAXCOMPG e MINCOMPG são obtidas pela composição da distribuição COMP, para o número de servidores no sistema, com a distribuição geral para o tempo de serviço. Na sequência mostramos a obtenção destas distribuições.

Seja M a variável aleatória que denota o número de servidores no sistema, que assume valores no conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Tal variável é modelada pela distribuição COMP truncada no ponto zero, cuja função de probabilidade é

$$\begin{aligned} P(M = m) &= \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^j}{(j!)^\phi} - 1} \frac{\rho^m}{(m!)^\phi} \\ &= \frac{1}{[Z(\rho, \phi) - 1]} \frac{\rho^m}{(m!)^\phi}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

em que $Z(\rho, \phi) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^j}{(j!)^\phi}$ é a constante normalizadora, $\phi \in (-\infty, \infty)$ é parâmetro que indica a pressão exercida sobre o servidor, ρ é o parâmetro de intensidade do tráfego e $m = 1, 2, \ldots$ indica o número de servidores no sistema. Neste caso, temos o mesmo de usuários e servidores no sistema. Como os servidores não abrem automaticamente na chegada dos usuários no sistema, mas somente os servidores que ofereçam o máximo e o mínimo tempos de serviço.

Em particular, a distribuição COMP possui distribuição de serviço dada por $Exp(m^\phi \mu)$, cuja taxa de serviço é escrita da seguinte forma, $\mu_m = m^\phi \mu$, em que μ_m é significa taxa de serviço quando existe m usuários no sistema e μ é a taxa de serviço para apenas um usuário. Observe que para $\phi = 0$ a taxa de serviço é $\mu_m = \mu$, portanto, a

taxa de serviço independe do estado do sistema, e assim, a distribuição COMP torna-se a distribuição geométrica, $M \sim geométrica(1-\rho)$, e descreve o sistema de fila M/M/1. Quando $\phi = 1$, temos $\mu_m = m\mu$, por exemplo, se $m = 2$ o serviço se dará duas vezes mais rápido, pois $\mu_2 = 2\mu$, e neste caso a distribuição COMP se torna a distribuição Poisson $M \sim Poisson(\rho)$, e descreve o sistema de fila M/M/∞. No caso de $\phi \to \infty$, a taxa de serviço aumenta ainda mais, sendo possível observar apenas um serviço, e obtemos a distribuição de Bernoulli, $M \sim Bernoulli((1+\rho)^{-1})$.

Para $\phi \in [-\infty, 1)$, ocorre diminuição da taxa de serviço, a taxa de chegada torna-se maior que a taxa de serviço, e, neste caso, a fila de espera explode. Para $\phi \in [1, \infty)$, ocorre aumento da taxa de serviço, a taxa de chegada torna-se menor que a taxa de serviço, e assim, a fila de espera fica controlada.

A distribuição COMP é amplamente estudada no contexto de superdispersão e subdispersão, e podemos citar as seguintes referências, (Minka et al., 2003), (Shmueli et al., 2004), (Rodrigues et al., 2009) e (Cordeiro et al., 2012). No contexto de teoria das filas, o estudo desta distribuição é praticamente inexistente.

A Expressão (3.1) pode ser vista como uma distribuição Poisson ponderada com função de peso dada por $w(m, \phi) = (m!)^{1-\phi}$ (Kokonendji et al., 2008). Desta forma, a função de probabilidade (3.1) pode ser reescrita como

$$P(M = m, \phi, \rho) = \frac{w(m, \phi)\rho^m}{E_\phi(w(M), \phi) - 1}, \tag{3.2}$$

em que $E_\phi(w(M), \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} w(m, \phi) m^{-\phi} \rho^m$.

Neste trabalho, adotamos as seguintes variações do parâmetro de pressão, $\phi = 0, 1$ e ∞, pois como vimos, levam a distribuições conhecidas na distribuição COMP.

Considere que $\{Y_i; i = 1, 2, \ldots\}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, sendo que Y_i denota o tempo de serviço do i-ésimo usuário, cuja função de densidade será denotada por $f_{Y_i}(\cdot)$. Além disso, $Y_i, i = 1, 2, \ldots$, são variáveis aleatórias independentes de M.

Nos capítulos seguintes, apresentamos três funções de densidade $f_{Y_i}(\cdot)$ específicas para o tempo de serviço, tal como a distribuição exponencial, que é amplamente usada para descrever os tempos de serviço, a distribuição Weibull e distribuição Birnbaum Saunders.

A distribuição Weibull vem sendo amplamente utilizada por ser mais realística que a distribuição exponencial, principalmente, para modelar servidores humanos (Feldmann and Whitt, 1998). Além disso a distribuição Weibull surge de um processo de Poisson não homogêneo (a prova disso está em (McShane et al., 2008) e (Seetha and Muvattupuzha, 2012)). E a distribuição Birnbaum Saunders que foi construída segundo um processo de Poisson homogêneo (a prova pode ser encontrada em (Birnbaum and Saunders, 1969) e (Fierro et al., 2013)), e não temos conhecimento do seu uso em teoria das filas.

Nos próximos capítulos consideramos as distribuições gerais como sendo:a distribuição exponencial, a distribuição Weibull e a distribuição Birnbaum Saunders.

Na sequência, mostramos a obtenção das distribuições de serviço MAXCOMPG e MINCOMPG para o máximo e o mínimo tempos de serviço, respectivamente, assim como as distribuições de serviço obtidas a partir das variações do parâmetro de pressão.

O nosso principal interesse é a modelagem do máximo e do mínimo tempos de serviço, que são representados, respectivamente, pelas seguintes variáveis aleatórias:

$$Y_{max} = max[Y_1, \dots Y_M] \;\; e \;\; Y_{min} = min[Y_1, \dots Y_M], \tag{3.3}$$

nos quais M corresponde aos servidores em paralelo. A questão é, qual destes M servidores irá oferecer o máximo ou o mínimo tempos de serviço.

Adotaremos os índices 1 e 2 nos parâmetros dos modelos MAXCOMPG e MINCOMPG, respectivamente.

As distribuições de serviço MAXCOMPG e MINCOMPG são descritas na proposição a seguir.

Proposição 3.1 *Considere $M, Y_1, Y_2, \dots$ variáveis aleatórias independentes, tais que M possui distribuição COMP truncada no ponto zero e $Y_i, i = 1, \dots, n$, possui função de densidade $f_{Y_i}(\cdot)$. As funções de densidade das variáveis aleatórias de Y_{max} e Y_{min} definidas em (3.3) são dadas, respectivamente, por*

$$f_{Y_{max}}(y; \theta_{\mathbf{1}}) = \frac{1}{[Z(\rho_1, \phi_1) - 1]} f_{Y_1}(y) \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}} F_{Y_1}(y))^{m-1}, \tag{3.4}$$

e

$$f_{Y_{min}}(y; \theta_{\mathbf{2}}) = \frac{1}{[Z(\rho_2, \phi_2) - 1]} f_{Y_1}(y) \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}} (1 - (F_{Y_{max}}(y))^{1/m})^{m-1}, \tag{3.5}$$

em que $y > 0$, $\theta_{\mathbf{i}} = (\rho_i, \phi_i, \omega_{\mathbf{i}})^T$, $i = 1, 2$, são os vetores dos parâmetros dos modelos, ω_i, $i = 1, 2$, são os vetores dos parâmetros das distribuições gerais, $F_{Y_{max}}(\cdot)$ é a função de distribuição de Y_{max} e $f_{Y_1}(\cdot)$ é a função de densidade de Y_1. Neste caso, ρ_1 é a intensidade de tráfego do modelo MAXCOMPG e ρ_2 é a intensidade de tráfego do modelo MINCOMPG.

As Equações (3.4) e (3.5) são obtidas a partir de um programa desenvolvido no software R, e para isto, a série $\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}}$ e $\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}}$ devem ser truncadas, e este procedimento é descrito no Apêndice .2.

Prova: A função de densidade condicional de Y_{max} dado $M = m$ é

$$f_{Y_{max}}(y|M = m) = m f_{Y_1}(y)(F_{Y_1}(y))^{m-1}, \tag{3.6}$$

em que $y > 0$, $m = 1, 2, \ldots$, é o número de servidores no sistema, $f_{Y_1}(\cdot)$ é a função de densidade de Y_1 e $F_{Y_1}(\cdot)$ é a função de distribuição de Y_1. Então, a função de densidade de Y_{max} é dada por

$$\begin{aligned} f_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{1}}) &= \sum_{m=1}^{\infty} P(M = m) f_{Y_{max}}(y|M = m) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{[Z(\rho_1, \phi_1) - 1]} \frac{\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}} m f_{Y_1}(y)(F_{Y_1}(y))^{m-1} \\ &= \frac{1}{[Z(\rho_1, \phi_1) - 1]} f_{Y_1}(y) \sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}} F_{Y_1}(y))^{m-1}. \end{aligned}$$

A função de distribuição da variável aleatória Y_{min}.

Com $F_{max}(y) = (F_{Y_1}(y))^m$ e $F_{min}(y) = (1 - F_{Y_1}(y))^m$, então a função de densidade condicional de Y_{min} dado $M = m$ é

$$f_{Y_{min}}(y|M = m) = m f_{Y_1}(y)(1 - F_{Y_1}(y))^{m-1} = m f_{Y_1}(y)(1 - (F_{max}(y))^{1/m})^{m-1}.$$

A função de densidade de Y_{min} é

$$f_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{2}}) = \frac{1}{[Z(\rho_2, \phi_2) - 1]} f_{Y_1}(y) \sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_2^m}{(m!)^{\phi}}(1 - (F_{Y_{max}}(y))^{1/m})^{m-1}.$$

Isto completa a prova. □

As distribuições das variáveis aleatórias Y_{max} e Y_{min} são denominadas distribuição MAXCOMPG e distribuição MINCOMPG, respectivamente.

A função de distribuição de Y_{max} é dada por

$$F_{Y_{max}}(y;\boldsymbol{\theta_1}) = \frac{1}{[Z(\rho_1,\phi_1)-1]}\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_1^m}{(m!)^{\phi}}\left[\int_0^y f_{Y_1}(u)(F_{Y_1}(u))^{m-1}du\right]$$

$$= \frac{1}{[Z(\rho_1,\phi_1)-1]}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\rho_1 F_{Y_1}(y))^m}{(m!)^{\phi}}\right] = \frac{1}{Z(\rho_1,\phi_1)-1}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\rho_1 F_{Y_1}(y))^m}{(m!)^{\phi_1}}-1\right]$$

$$= \frac{Z(\rho_1 F_{Y_1}(y),\phi)-1}{[Z(\rho_1,\phi_1)-1]}, \tag{3.7}$$

em que $Z(\rho_1,\phi_1)$ é a constante normalizadora da distribuição COMP truncada no ponto zero e $Z(\rho_1 F_{Y_1}(y),\phi_1) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\rho_1 F_{Y_1}(y))^m}{(m!)^{\phi_1}}$.

A partir da Equação (3.7), obtemos a função do tempo restante da distribuição Y_{max}, que é

$$\begin{aligned} W_{Y_{max}}(y;\boldsymbol{\theta_1}) &= 1-\left[\frac{Z(\rho_1 F_{Y_1}(y),\phi_1)-1}{[Z(\rho_1,\phi_1)-1]}\right] \\ &= \frac{Z(\rho_1,\phi_1)-Z(\rho_1 F_{Y_1}(y),\phi_1)}{[Z(\rho_1,\phi_1)-1]}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

O r-ésimo momento, $r=1,2,\ldots$, da distribuição Y_{max} é determinado por

$$E(Y_{max}^r) = \frac{1}{[Z(\rho_1,\phi_1)-1]}\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}}\int_0^{\infty} y^r f_{Y_1}(Y)F_{Y_1}(y)^{m-1}dy. \tag{3.9}$$

De maneira análoga, a função de distribuição da variável aleatória Y_{min} é dada por

$$F_{Y_{min}}(y;\boldsymbol{\theta_2}) = \frac{1}{[Z(\rho_2,\phi_2)-1]}\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}}\left[\int_0^y f_{Y_1}(u)[1-(F_{max}(u))^{1/m}]^{m-1}du\right]$$

$$= \frac{1}{[Z(\rho_2,\phi_2)-1]}\left[-\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\rho_2(1-(F_{max}(y))^{1/m}))^m}{(m!)^{\phi_2}}-1\right)+\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\rho_2^m}{(m!)^{\phi}}-1\right)\right]$$

$$= \frac{Z(\rho_2,\phi_2)-Z(\rho_2(1-(F_{max}(y))^{1/m}),\phi_2)}{[Z(\rho_2,\phi_2)-1]}, \tag{3.10}$$

em que $Z(\rho_2,\phi_2)$ é a constante normalizadora da distribuição COMP truncada no ponto zero e $Z(\rho_2(1-(F_{max}(y))^{1/m}),\phi_2) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\rho_1(1-(F_{max}(y))^{1/m}))^m}{(m!)^{\phi_2}}$.

A partir da Equação (3.10) é obtida a função do tempo restante da variável aleatória Y_{min}, que é expressa da seguinte forma

$$W_{Y_{min}}(y;\boldsymbol{\theta_2}) = \frac{Z(\rho_2(1-(F_{max}(y))^{1/m}),\phi_2)-1}{[Z(\rho_2,\phi_2)-1]}. \tag{3.11}$$

O r-ésimo momento, $r = 1, 2, \ldots$, da variável aleatória Y_{min} é dado por

$$E(Y_{min}^r) = \frac{1}{[Z(\rho_2, \phi_2) - 1]} \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}} \int_0^{\infty} y^r f_{Y_1}(Y)(1 - (F_{max}(y))^{1/m})^{m-1} dy. \quad (3.12)$$

As distribuições de equilíbrio dos modelos de fila propostos são obtidas a seguir:

Primeiramente, calculamos as taxas de ocupação dos sistemas, que são dadas por

$$\rho_3 = \lambda_1 E(Y_{max}), \quad (3.13)$$

e,

$$\rho_4 = \lambda_2 E(Y_{min}), \quad (3.14)$$

os quais $\rho_3 < 1$ e $\rho_4 < 1$ serão os novos valores das intensidades de tráfego. Temos que λ_i, $i = 1, 2$, são as taxas de chegada dos modelos MAXCOMPG e MINCOMPG, respectivamente, e $E(Y_{max})$ e $E(Y_{min})$ são dadas pelas Equações (3.9) e (3.12) tomando $r = 1$, respectivamente. As equações (3.13) e (3.14) são obtidas a partir de um programa desenvolvido no software R.

As probabilidades de que durante um serviço, n usuários cheguem aos sistemas M/MAXCOMPG/1 e M/MINCOMPG/1, denotadas por k_n^i, $i = 1, 2$, respectivamente, são obtidas a partir da Equação (2.5). Então

$$\begin{aligned} k_n^1 &= \frac{1}{[Z(\rho_3, \phi_1) - 1]} \frac{\lambda_1^n}{n!} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\rho_3^m}{(m!)^{\phi_1}} \\ &\quad \times \int_0^{\infty} y^n e^{-\lambda_1 y} f_{Y_1}(y) F_{Y_1}(y))^{m-1} dy, \end{aligned} \quad (3.15)$$

e,

$$\begin{aligned} k_n^2 &= \frac{1}{[Z(\rho_4, \phi_2) - 1]} \frac{\lambda_2^n}{n!} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\rho_4^m}{(m!)^{\phi_2}} \\ &\quad \times \int_0^{\infty} y^n e^{-\lambda_2 y} f_{Y_1}(y)(1 - F_{Y_1}(y))^{m-1} dy. \end{aligned} \quad (3.16)$$

As funções geradoras dos modelos de fila M/MAXCOMPG/1 e M/MINCOMPG/1, denominadas por $K_{max}(z)$ e $K_{min}(z)$, respectivamente, e dadas pela Equação (2.14). Logo

temos

$$\begin{aligned} K_{max}(z) &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 y)^n e^{-\lambda_1 y}}{n!} f_{Y_{max}}(y;\theta_1) z^n dy \\ &= \frac{1}{[Z(\rho_3,\phi_1)-1]} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\rho_3^m}{(m!)^\phi} \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 yz)^n}{n!} e^{-\lambda_1 y} f_{Y_1}(y) F_{Y_1}(y))^{m-1} dy \\ &= \frac{1}{[Z(\rho_3,\phi_1)-1]} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\rho_3^m}{(m!)^{\phi_1}} \int_0^\infty e^{-\lambda_1 y(1-z)} f_{Y_1}(y) F_{Y_1}(y))^{m-1} dy \\ &= \tilde{B}_{max}(\lambda_1(1-z)), \end{aligned} \tag{3.17}$$

e,

$$\begin{aligned} K_{min}(z) &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_2 y)^n e^{-\lambda_2 y}}{n!} f_{Y_{min}}(y;\theta_2) z^n dy \\ &= \frac{1}{[Z(\rho_4,\phi_2)-1]} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\rho_4^m}{(m!)^{\phi_2}} \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_2 yz)^n}{n!} e^{-\lambda_2 y} f_{Y_1}(Y)(1-(F_{max}(y))^{1/m})^{m-1} dy \\ &= \frac{1}{[Z(\rho_4,\phi_2)-1]} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\rho_4^m}{(m!)^{\phi_2}} \int_0^\infty e^{-\lambda_2(1-z)y} f_{Y_1}(Y)(1-F_{Y_1}(y))^{m-1} dy \\ &= \tilde{B}_{min}(\lambda_1(1-z)), \end{aligned} \tag{3.18}$$

as taxas de ocupação dos modelos de fila M/MAXCOMPG/1, dada por ρ_1, e M/MINCOMPG/1, dada por ρ_2, são substituídas pelas novas taxas de ocupação dadas por ρ_3 e ρ_4, respectivamente. Neste caso, levamos em consideração as chegadas dos usuário nos sistemas.

As funções geradoras de probabilidades dos modelos de fila M/MAXCOMPG/1 e M/MINCOMPG/1, denotadas por $\Pi_{max}(z)$ e $\Pi_{min}(z)$, respectivamente, são dadas por

$$\Pi_{max}(z) = \frac{(1-\rho_3)\tilde{B}_{max}(\lambda_1(1-z))(1-z)}{\tilde{B}_{max}(\lambda_1(1-z)) - z}, \tag{3.19}$$

e,

$$\Pi_{min}(z) = \frac{(1-\rho_4)\tilde{B}_{min}(\lambda_2(1-z))(1-z)}{\tilde{B}_{min}(\lambda_2(1-z)) - z}, \tag{3.20}$$

estas equações são chamadas de fórmulas de Pollaczek-Khinchin. Expandindo as Equações (3.19) e (3.20) na série de Maclaurin, e, assim, obtemos as probabilidades do número de usuários no sistema (Gross and Harris, 1998).

Neste caso, a série de Maclaurin, é escrita na forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

em que (n) indica a n-ésima derivada, $f^n(a)$ indica a n-ésima derivada de f calculada no ponto a. Sendo, assim as probabilidades do número de usuários no sistema dos modelos de fila
M/MAXCOMPG/1 e M/MINCOMPG/1, denotadas por p_n^i, $i = 1, 2$, respectivamente, são dadas por

$$p_n^1 = n\frac{d\Pi_{max}(z)^{(n)}}{n!dz} \mid_{z=0}, \tag{3.21}$$

e,

$$p_n^2 = n\frac{d\Pi_{min}(z)^{(n)}}{n!dz} \mid_{z=0}, \tag{3.22}$$

no qual o símbolo (n) indica a n-ésima derivada.

O nosso interesse é o tempo de espera na fila, assim sendo, mostramos apenas as distribuições de equilíbrio destas medidas para os dois modelos de filas propostos.

As funções geradoras de probabilidade para o tempo de espera na fila dos modelos de fila M/MAXCOMPG/1 e M/MINCOMPG/1, denotadas por $\tilde{W}_q^i(s)$, $i = 1, 2$, respectivamente, são expressas pela Equação (2.21). Então

$$\tilde{W_q^1}(s) = \frac{(1-\rho_3)s}{\lambda_1\tilde{B}_{max}(s) + s - \lambda_1}, \tag{3.23}$$

e,

$$\tilde{W_q^2}(s) = \frac{(1-\rho_4)s}{\lambda_2\tilde{B}_{min}(s) + s - \lambda_2}, \tag{3.24}$$

estas equações também são chamadas de fórmulas Pollaczek-Khinchin.

As distribuições de equilíbrio do tempo de espera na fila para os modelos M/MAXCOMPG/1 e M/MINCOMPG/1, denominadas de $W_q^i(y)$, $i = 1, 2$, respectivamente, são dadas por

$$W_q^1(y) = (1-\rho_3)\sum_{n=1}^{\infty}\rho_3^n$$

$$\times\left[\int_0^y E(Y_{max})^{-1}\frac{(Z(\rho_3,\phi_1) - Z(\rho_3 F_{Y_1}(t),\phi_1))}{[Z(\rho_3,\phi_1)-1]}dt\right]^{(n)}, \tag{3.25}$$

e,

$$W_q^2(y) = (1-\rho_4)\sum_{n=1}^{\infty}\rho_4^n$$

$$\times\left[\int_0^y E(Y_{min})^{-1}\frac{Z(\rho_4(1-(F_{max}(t))^{1/m}),\phi_2)-1}{[Z(\rho_4,\phi_2)-1]}dt\right]^{[n]}, \tag{3.26}$$

em que o símbolo $[n]$ é a n-ésima convolução das distribuições MAXCOMPG e MINCOMPG, $E(Y_{max})$ e $E(Y_{min})$ são dadas pelas Equações (3.9) e (3.12) tomando $r = 1$, respectivamente, e substituindo ρ_1 por ρ_3 e ρ_2 por ρ_4.

As medidas de desempenho para o modelo de fila M/MAXCOMPG/1 são dadas pelas Equações (2.4) e (2.3), e são escritas da seguinte forma

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{\lambda_1^2}{2(1-\rho_3)}\ E(Y_{max}^2), \\ W_q &= \frac{\lambda_1}{2(1-\rho_3)}E(Y_{max}^2), \\ L &= \frac{\lambda_1^2}{2(1-\rho_3)}E(Y_{max}^2)+\rho_3, \\ W &= \frac{\lambda_1}{2(1-\rho_3)}\ E(Y_{max}^2)+E(Y_{max}), \end{aligned} \tag{3.27}$$

nas quais $E(Y_{max})$ e $E(Y_{max}^2)$ são expressas pela Equação (3.9) assumindo $r = 1$ e $r = 2$, respectivamente. As medidas de desempenho para o modelo de fila M/MINCOMPG/1 são obtidas substituindo $E(Y_{max})$ e $E(Y_{max}^2)$ dadas pela Equação (3.12) tomando $r = 1$ e $r = 2$, respectivamente, usando ρ_4 dado pela Expressão (3.14).

As distribuições MAXCOMPG e MINCOMPG possuem mecanismos de ajuste que são obtidos a partir das variações dos parâmetros de pressão ϕ_i, $i = 1, 2$. Mostraremos três variações destes parâmetros, que são: $\phi_i = 0, 1\ e\ \phi \to \infty$. Para cada variação destes parâmetros obtem-se em novas distribuições das váriáveis aleatórias Y_{max} e Y_{min}, respectivamente, e consequentemente, novos modelos de filas, os quais estão descritos nos seguintes corolários:

Na sequência, utilizaremos as mesmas notações dos modelos de fila M/MAXCOMPG/1 e M/MINCOMPG/1.

Corolário 3.1 *Quando os parâmetro de pressão assumem o valor zero, $\phi_i = 0$, $i = 1, 2$, as funções de densidade das variáveis aleatórias Y_{max} e Y_{min}, neste caso as distribuições de serviço MAXCOMPG e MINCOMPG, respectivamente, se tornam as distribuições Máximo-geométrica-geral e Mínimo-geométrica-geral, denotadas por distribuições MAXGG e MINGG, respectivamente, consequentemente, surgem dois novos modelos de fila que são os modelos de fila M/MAXGG/1 e M/MINGG/1.*

Primeiramente, mostramos a construção das distribuições de serviço MAXGG e MINGG.

A função de densidade de Y_{max} é dada por

$$\begin{aligned} f_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{3}}) &= \frac{1}{[Z(\rho_1,0)-1]} f_{Y_1}(y) \sum_{m=1}^{\infty} m\rho_1^m F_{Y_1}(y)^{m-1} \\ &= \frac{(1-\rho_1)}{\rho_1} f_{Y_1}(y) \sum_{m=1}^{\infty} m\rho_1^m F_{Y_1}(y)^{m-1}, \end{aligned} \tag{3.28}$$

em que $y > 0$, $\theta_{\mathbf{3}} = (\rho_1, \omega_1)^T$ é o vetor de parâmetros do modelo MAXGG, ρ_1 é o parâmetro de taxa de ocupação, $\omega_{\mathbf{1}}$ é o vetor dos parâmetros da distribuição geral, $F_{Y_1}(\cdot)$ é a função de distribuição de Y_1 e $f_{Y_1}(\cdot)$ é a função de densidade de Y_1.

A Equação (3.28) pode ser reescrita da seguinte forma

$$f_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{3}}) = \frac{1}{[Z(\rho_1,0)-1]} \rho_1 f_{Y_1}(y) \sum_{m=1}^{\infty} m(\rho_1 F_{Y_1}(y))^{m-1}$$

$$= \left(\frac{(1-\rho_1)}{\rho_1}\rho_1\right) f_{Y_1}(y) \left[\frac{1}{(1-\rho_1 F_{Y_1}(y))^2}\right] = \frac{(1-\rho_1) f_{Y_1}(y)}{(1-\rho_1 F_{Y_1}(y))^2}. \tag{3.29}$$

A função de distribuição de Y_{max} é

$$\begin{aligned} F_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{3}}) &= \frac{\sum_{m=0}^{\infty}(\rho_1 F_{Y_1}(y))^m - 1}{\sum_{m=0}^{\infty}\rho_1^m - 1} \\ &= \frac{F_{Y_1}(y)(1-\rho_1)}{(1-\rho_1 F_{Y_1}(y))}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

A função do tempo restante de Y_{max} é escrita da seguinte forma

$$W_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{3}}) = \frac{(1-F_{Y_1}(y))}{[1-\rho_1 F_{Y_1}(y)]}. \tag{3.31}$$

O r-ésimo momento, $r = 1, 2, \ldots$, de Y_{max} é

$$E(Y_{max}^r) = (1-\rho_1) \int_0^{\infty} y^r \frac{f_{Y_1}(y)}{(1-\rho_1 F_{Y_1}(y))^2} dy. \tag{3.32}$$

A função de densidade de Y_{min} é dada por

$$\begin{aligned} f_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{4}}) &= \frac{1}{[Z(\rho_2,0)-1]} f_{Y_1}(y) \sum_{m=1}^{\infty} m\rho_2^m (1-(F_{Y_{max}}(y))^{1/m})^{m-1} \\ &= \frac{(1-\rho_2)}{\rho_2} f_{Y_1}(y) \sum_{m=1}^{\infty} m\rho_2^m (1-F_{Y_1}(y))^{m-1}, \end{aligned} \tag{3.33}$$

em que $y > 0$, $\theta_4 = (\rho_2, \omega_{\mathbf{2}})^T$ é o vetor dos parâmetros do modelo, $\omega_{\mathbf{2}}$ é o vetor dos parâmetros da distribuição geral, $(1-F_{Y_1})(\cdot)$ é a função de confiabilidade de Y_{min} e $f_{Y_1}(\cdot)$ é a função de densidade de Y_1.

Podemos reescrever a Equação (3.33) da seguinte forma

$$\begin{aligned} f_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{4}}) &= \frac{1}{[Z(\rho_2,0)-1]} \rho_2 f_{Y_1}(y) \sum_{m=1}^{\infty} m\rho_2^{m-1} (1-(F_{Y_{max}}(y))^{1/m})^{m-1} \\ &= \frac{1}{\sum_{j=1}^{\infty} \rho_2^j} \rho_2 f_{Y_1}(y) \frac{1}{[1-\rho_2(1-F_{Y_1}(y))]^2} \\ &= \frac{(1-\rho_2) f_{Y_1}(y)}{[1-\rho_2(1-F_{Y_1}(y))]^2}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

A função de distribuição de Y_{min} é dada por

$$\begin{aligned} F_{Y_{min}}(y;\theta_4) &= \frac{Z(\rho_2,0) - Z(\rho_2(1-(F_{max}(y))^{1/m}),0)}{[Z(\rho_2,0)-1]} \\ &= \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \rho_2^m - \sum_{m=0}^{\infty} (\rho_2(1-(F_{max}(y))^{1/m}))^m}{(\sum_{m=0}^{\infty} \rho_2^m - 1)} \\ &= \frac{(1-\rho_2(1-F_{Y_1}(y))) - (1-\rho_2)}{\rho_2(1-\rho_2(1-F_{Y_1}(y)))} \\ &= \frac{F_{Y_1}(y)}{(1-\rho_2(1-F_{Y_1}(y)))}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

A função de confiabilidade de Y_{min} é

$$W_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{4}}) = \frac{(1-F_{Y_1}(y))(1-\rho_2)}{(1-\rho_2(1-F_{Y_1}(y)))}. \tag{3.36}$$

O r-ésimo momento, $r = 1, 2, \ldots$, de Y_{min} é escrito na forma

$$E(Y_{min}^r) = (1-\rho_2) \int_0^{\infty} y^r \frac{f_{Y_1}(y)}{(1-\rho_2(1-F_{Y_1}(y)))^2} dy. \tag{3.37}$$

As distribuições de equilíbrio dos modelos de fila M/MAXGG/1 e M/MINGG/1 são dadas a seguir:

As taxas de ocupação dos modelos propostos são

$$\rho_5 = \lambda_1 E(Y_{max}), \tag{3.38}$$

e,

$$\rho_6 = \lambda_2 E(Y_{min}), \tag{3.39}$$

nos quais $\rho_5 < 1$ e $\rho_6 < 1$ são as novas intensidades de tráfego, λ_i, $i = 1, 2$, são as taxas de serviço, $E(Y_{max})$ e $E(Y_{min})$ são expressas pelas Equações (3.32) e (3.37) assumindo $r = 1$.

As probabilidades que durante um serviço n usuários chegam aos sistemas dos modelos M/MAXGG/1 e M/MINGG/1, denotadas por k_n^3 e k_n^4, respectivamente, são escritas da forma

$$\begin{aligned} k_n^3 &= \frac{(1-\rho_5)}{\rho_5}\frac{\lambda_1^n}{n!}\sum_{m=1}^{\infty} m\rho_5^m \\ &\quad \times \int_0^{\infty} y^n e^{-\lambda_1 y} f_{Y_1}(y) F_{Y_1}(y))^{m-1} dy, \end{aligned} \tag{3.40}$$

e,

$$\begin{aligned} k_n^4 &= \frac{(1-\rho_6)}{\rho_6}\frac{\lambda_2^n}{n!}\sum_{m=1}^{\infty} m\rho_6^m \\ &\quad \times \int_0^{\infty} y^n e^{-\lambda_2 y} f_{Y_1}(y)(1 - F_{Y_1}(y))^{m-1} dy. \end{aligned} \tag{3.41}$$

As funções geradoras dos modelos de fila M/MAXGG/1 e M/MINGG/1, denotadas por $K_{max}^3(z)$ e $K_{min}^4(z)$, respectivamente, são expressas por

$$\begin{aligned} K_{max}^3(z) &= \frac{(1-\rho_5)}{\rho_5}\sum_{m=1}^{\infty} m\rho_5^m \int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 y(1-z)} f_{Y_1}(y) F_{Y_1}(y))^{m-1} dy \\ &= \tilde{B}_{max}^3(\lambda_1(1-z)), \end{aligned} \tag{3.42}$$

e,

$$\begin{aligned} K_{min}^4(z) &= \frac{(1-\rho_6)}{\rho_6}\sum_{m=1}^{\infty} m\rho_6^m \int_0^{\infty} e^{-\lambda_2(1-z)y} f_{Y_1}(Y)(1 - F_{Y_1}(y))^{m-1} dy \\ &= \tilde{B}_{min}^4(\lambda_2(1-z)). \end{aligned} \tag{3.43}$$

As funções geradoras de probabilidade dos modelos de fila M/MAXGG/1 e M/MINGG/1, denominadas de $\Pi^3_{max}(z)$ e $\Pi^4_{min}(z)$, respectivamente, são obtidas usando as Expressões (3.19) e (3.20), respectivamente, e são escritas da seguinte forma

$$\Pi^3_{max}(z) = \frac{(1-\rho_5)\tilde{B}^3_{max}(\lambda_1(1-z))(1-z)}{\tilde{B}^3_{max}(\lambda_1(1-z)) - z}, \tag{3.44}$$

e,

$$\Pi^4_{min}(z) = \frac{(1-\rho_6)\tilde{B}^4_{min}(\lambda_2(1-z))(1-z)}{\tilde{B}^4_{min}(\lambda_2(1-z)) - z}, \tag{3.45}$$

estas equações são chamadas de fórmulas de Pollaczek-Khinchin.

As probabilidades do número de usuários nos sistemas dos modelos de fila M/MAXGG/1 e M/MINGG, denominados de p^3_n e p^4_n, respectivamente, são dadas por

$$p^3_n = \frac{d\Pi^3_{max}(z)^{(n)}}{dz} \mid_{z=0}, \tag{3.46}$$

e,

$$p^4_n = \frac{d\Pi^4_{min}(z)^{(n)}}{dz} \mid_{z=0} . \tag{3.47}$$

As funções geradoras para o tempo de espera na fila dos modelos de fila M/MAXGG/1 e M/MINGG/1, denominadas por $\tilde{W^3_q}(s)$ e $\tilde{W^4_q}(s)$, são escritas da seguinte forma

$$\tilde{W_q}^3(s) = \frac{(1-\rho_5)s}{\lambda_1\tilde{B}^3_{max}(s) + s - \lambda_1}, \tag{3.48}$$

e,

$$\tilde{W_q}^4(s) = \frac{(1-\rho_6)s}{\lambda_2\tilde{B}^4_{min}(s) + s - \lambda_2}, \tag{3.49}$$

estas equações também são chamadas de fórmulas Pollaczek-Khinchin.

As distribuições do tempo de espera na fila dos modelos de fila M/MAXGG/1 e M/MINGG/1, denotadas por $W^3_q(y)$ e $W^4_q(y)$, são dadas por

$$\begin{aligned} W^3_q(y) &= (1-\rho_5)\sum_{n=1}^{\infty}\rho_5^n \\ &\quad \times \left(\int_0^y E(Y_{max})^{-1}\frac{(1-F_{Y_1}(t))}{[1-\rho_1 F_{Y_1}(t)]}dt\right)^{[n]}, \end{aligned} \tag{3.50}$$

e,

$$\begin{aligned} W^4_q(y) &= (1-\rho_6)\sum_{n=1}^{\infty}\rho_6^n \\ &\quad \times \left(E(Y_{min})^{-1}\int_0^y \frac{(1-F_{Y_1}(t))(1-\rho_6)}{[1-\rho_6(1-F_{Y_1}(t))]}dt\right)^{[n]}, \end{aligned} \tag{3.51}$$

nos quais o símbolo $[n]$ indica n-ésima convolução das distribuições MAXGG e MINGG e $E(Y_{max})$ e $E(Y_{min})$ são dadas pelas Expressões (3.37) e (3.32) assumindo $r = 1$, respectivamente.

As medidas de desempenho para os modelos de fila M/MAXGG/1 e M/MINGG/1 são obtidas a partir das Equações (3.27), com as devidas substituições das Equações (3.37) e (3.32), e as taxas de ocupação são expressas pelas Equações (3.38) e (3.39), respectivamente.

Quando $\phi_i = 0$, $i = 1, 2$, as taxas de serviço independem do estado dos sistemas, ou seja, os servidores não são pressionados pelo aumento do fluxo de usuários no sistema.

Corolário 3.2 *Quando os parâmetros de pressão assumem valor um, $\phi_i = 1$, $i = 1, 2$, as funções de densidade das variáveis aleatórias Y_{max} e Y_{min}, neste caso as distribuições MAXCOMPG e MINCOMPG se transformam nas distribuições Máximo-Poisson-geral e Mínimo-Poisson-geral, denotadas por distribuições MAXPG e MINPG, respectivamente. Assim sendo, surgem os modelos de fila M/MAXPG/1 e M/MINPG/1.*

A função de densidade de Y_{max} é dada por

$$\begin{aligned} f_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{5}}) &= \frac{1}{[Z(\rho_1,1)-1]} f_{Y_1}(y) \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_1^m}{(m!)} F_{Y_1}(y))^{m-1} \\ &= \frac{1}{(e^{\rho_1}-1)} f_{Y_1}(y) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\rho_1^m}{(m!)} F_{Y_1}(y))^{m-1}, \end{aligned} \tag{3.52}$$

em que $y > 0$, $\theta_{\mathbf{5}} = (\rho_1, \omega_1)^T$ é o vetor dos parâmetros do modelo, ρ_1 mede a taxa de ocupação, ω_1 é o vetor dos parâmetros da distribuição geral, $F_{Y_{max}}(\cdot)$ é a função de distribuição de Y_{max} e $f_{Y_1}(\cdot)$ é a função de densidade de Y_1.

A Equação (3.52) pode ser reescrita da seguinte forma

$$f_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{5}}) = \frac{1}{[Z(\rho_1,1)-1]} \rho f_{Y_1}(y) \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(\rho_1 F_{Y_1}(y))^{m-1}}{(m!)}}_{\text{mudando o indice do somatorio } j=m-1}$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho_1}{(j!)}\right) - 1} \rho_1 f_{Y_1}(y) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+1)(\rho F_{Y_1}(y))^j}{(j+1)!}$$

$$= \frac{1}{(e^{\rho_1}-1)} \rho_1 f_{Y_1}(y) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\rho_1 F_{Y_1}(y))^j}{(j!)} = \frac{\rho_1 f_{Y_1}(y) e^{\rho_1 F_{Y_1}(y)}}{(e^{\rho_1}-1)}. \tag{3.53}$$

A função de distribuição de Y_{max} é

$$\begin{aligned} F_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{5}}) &= \frac{Z(\rho_1 F_{Y_1}(y),1)-1}{[Z(\rho_1,1)-1]} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\rho_1 F_{Y_1}(y))^j}{(j!)}-1}{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\rho_1^j}{(j!)}-1} \\ &= \frac{e^{\rho_1 F_{Y_1}(y)}-1}{(e^{\rho_1}-1)}. \end{aligned} \tag{3.54}$$

A função de tempo restante da distribuição Y_{max} é dada por

$$W_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{5}}) = \frac{e^{\rho_1}-e^{\rho_1 F_{Y_1}(y)}}{(e^{\rho_1}-1)}. \tag{3.55}$$

O r-ésimo momento, $r = 1, 2, \ldots$, de Y_{max} é dado da seguinte forma

$$E(Y_{max}^r) = \frac{\rho_1}{(e^{\rho_1}-1)}\int_0^{\infty} y^r f_{Y_1}(y) e^{\rho_1 F_{Y_1}(y)} dy. \tag{3.56}$$

A função de densidade de Y_{min} é dada por

$$\begin{aligned} f_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{6}}) &= \frac{1}{[Z(\rho_2,1)-1]} f_{Y_1}(y)\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_2^m}{m!}(1-(F_{Y_{max}}(y))^{1/m})^{m-1} \\ &= \frac{1}{(e^{\rho_2}-1)} f_{Y_1}(y)\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_2^m}{m!}(1-F_{Y_1}(y))^{m-1}, \end{aligned} \tag{3.57}$$

em que $y > 0$, $\theta_{\mathbf{6}} = (\rho_2, \omega_{\mathbf{2}})^T$ são os parâmetros do modelo, $\omega_{\mathbf{2}}$ é o vetor dos parâmetros da distribuição geral, $(1 - F_{Y_1}(\cdot))$ é a função de distribuição de Y_{min} e $f_{Y_1}(\cdot)$ é a função de densidade de Y_1.

Podemos reescrever a Equação (3.57)

$$f_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{6}}) = \frac{\rho_2 f_{Y_1}(y) e^{\rho_2(1-F_{Y_1}(y))}}{(e^{\rho_2}-1)}. \tag{3.58}$$

A função de distribuição de Y_{min} é

$$\begin{aligned} F_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{6}}) &= \frac{Z(\rho_2,1)-Z(\rho_2(1-(F_{max}(y))^{1/m}),1)}{[Z(\rho_2,1)-1]} \\ &= \frac{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\rho_2^j}{(j!)}-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\rho_2(1-(F_{max}(y))^{1/m}))^m}{(m!)}}{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\rho_2^j}{(j!)}-1} \\ &= \frac{e^{\rho_2}-e^{\rho_2(1-F_{Y_1}(y))}}{(e^{\rho_2}-1)}. \end{aligned} \tag{3.59}$$

A função de tempo restante de Y_{min} é escrita da seguinte forma

$$W_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{6}}) = \frac{e^{\rho_2(1-F_{Y_1}(y))}}{(e^{\rho_2}-1)}. \tag{3.60}$$

O r-ésimo momento $r = 1, 2, \ldots,$, de Y_{min} é

$$E(Y_{min}^r) = \frac{1}{e^{\rho_2}-1}\int_0^\infty y^r f_{Y_1}(Y) e^{\rho_2(1-F_{Y1}(y))} dy. \tag{3.61}$$

As distribuições de equilíbrio dos modelos de fila M/MAXPG/1 e M/MINPG/1 são descritas a seguir:

As taxas de ocupação dos modelos de fila M/MAXPG/1 e M/MINPG/1 são

$$\rho_7 = \lambda_1 E(Y_{max}), \tag{3.62}$$

e,

$$\rho_8 = \lambda_2 E(Y_{min}), \tag{3.63}$$

em que λ_i, $i = 1, 2$, são as taxas de chegada, $\rho_7 < 1$ e $\rho_8 < 1$ são as novas intensidades de tráfego, e $E(Y_{max})$ e $E(Y_{min})$ são dadas pelas Equações (3.56) e (3.61) assumindo $r = 1$.

As probabilidades de que durante um serviço n usuários cheguem aos sistemas de fila M/MAXPG/1 e M/MINPG/1, denotadas por k_n^5 e k_n^6, respectivamente, são dadas por

$$\begin{aligned} k_n^5 &= \frac{1}{(e^{\rho_7}-1)}\frac{\lambda_1^n}{n!}\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_7^m}{m!} \\ &\quad \times \int_0^\infty y^n e^{-\lambda_1 y} f_{Y_1}(y) F_{Y_1}(y)^{m-1} dy, \end{aligned} \tag{3.64}$$

e,

$$\begin{aligned} k_n^6 &= \frac{1}{(e^{\rho_8}-1)}\frac{\lambda_2^n}{n!}\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_8^m}{m!} \\ &\quad \times \int_0^\infty y^n e^{-\lambda_2 y} f_{Y_1}(y)(1-F_{Y_1}(y))^{m-1} dy. \end{aligned} \tag{3.65}$$

As funções geradoras dos modelos de fila M/MAXPG/1 e M/MINPG/1, denotadas por $K_{max}^5(z)$ e $K_{min}^6(z)$, respectivamente, são escritas como

$$\begin{aligned} K_{max}^5(z) &= \frac{1}{(e^{\rho_7}-1)}\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_7^m}{m!}\int_0^\infty e^{-\lambda_1 y(1-z)} f_{Y_1}(y) F_{Y_1}(y))^{m-1} dy \\ &= \tilde{B}_{max}^5(\lambda_1(1-z)), \end{aligned} \tag{3.66}$$

e,

$$K^6_{min}(z) = \frac{1}{(e^{\rho_8}-1)}\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_8^m}{m!}\int_0^{\infty} e^{-\lambda_2(1-z)y} f_{Y_1}(Y)(1-F_{max}(y))^{m-1}dy$$
$$= \tilde{B}^6_{min}(\lambda_2(1-z)). \quad (3.67)$$

As funções geradoras de probabilidade dos modelos de fila M/MAXPG/1 e M/MINPG/1, denotadas por $\Pi^5_{max}(z)$ e $\Pi^5_{min}(z)$, respectivamente, são escritas na forma

$$\Pi^5_{max}(z) = \frac{(1-\rho_7)\tilde{B}^5_{max}(\lambda_1(1-z))(1-z)}{\tilde{B}^5_{max}(\lambda_1(1-z))-z}, \quad (3.68)$$

e,

$$\Pi^6_{min}(z) = \frac{(1-\rho_8)\tilde{B}^6_{min}(\lambda_2(1-z))(1-z)}{\tilde{B}^6_{min}(\lambda_2(1-z))-z}, \quad (3.69)$$

estas equações são chamadas de fórmulas de Pollaczek-Khinchin.

As probabilidades do número de usuários nos sistemas dos modelos de fila M/MAXPG/1 e M/MINPG, denotadas por p^5_n e p^6_n, respectivamente, são

$$p^5_n = \frac{d\Pi^5_{max}(z)^{(n)}}{dz}\ |_{z=0},$$
$$p^6_n = \frac{d\Pi^6_{min}(z)^{(n)}}{dz}|_{z=0}, \quad (3.70)$$

na qual o símbolo (n) é a n-ésima derivada.

As funções geradoras de probabilidade para o tempo de espera na fila dos modelos M/MAXPG/1 e M/MINPG/1, denotadas por $\tilde{W}^5_q(s)$ e $\tilde{W}^6_q(s)$, respectivamente, são dadas por

$$\tilde{W_q}^5(s) = \frac{(1-\rho_7)s}{\lambda_1\tilde{B}^5_{max}(s)+s-\lambda_1}, \quad (3.71)$$

e,

$$\tilde{W_q}^6(s) = \frac{(1-\rho_8)s}{\lambda_2\tilde{B}^6_{min}(s)+s-\lambda_2}, \quad (3.72)$$

estas equações também são chamadas de fórmulas de Pollaczek-Khinchin.

As funções geradoras de probabilidade para o tempo de espera na fila dos modelos de fila M/MAXPG/1 e M/MINPG/1, denotadas por $W^5_q(y)$ e $W^6_q(y)$, respectivamente, são dadas por

$$W^5_q(y) = (1-\rho_7)\sum_{n=1}^{\infty}\rho_7^n$$
$$\times\left(\int_0^y E(Y_{max})^{-1}\frac{e^{\rho_7}-e^{\rho_7 F_{Y_1}(y)}}{(e^{\rho_7}-1)}dt\right)^{[n]}, \quad (3.73)$$

e,

$$W_q^6(y) = (1-\rho_8)\sum_{n=1}^{\infty}\rho_8^n \times \left(\int_0^y E(Y_{min})^{-1}\frac{e^{\rho_8(1-F_{Y_1}(t))}}{e^{\rho_8}-1}dt\right)^{[n]}, \quad (3.74)$$

nos quais o símbolo $[n]$ indica n-ésima convolução das distribuições MAXPG e MINPG e $E(Y_{max})$ e $E(Y_{min})$ são dadas pelas Equações (3.56)e (3.61), assumindo $r = 1$, respectivamente.

As medidas de desempenho dos modelos de fila M/MAXPG/1 e M/MINPG/1 são obtidas a partir das Equações (3.27), substituindo $E(Y_{max})$ e $E(Y_{max}^2)$ pelas Equações (3.56)e (3.61), respectivamente, assim como, as taxas de ocupação que são expressas pelas Equações (3.62) e (3.63), respectivamente, substituindo ρ_1 por ρ_7 e ρ_2 por ρ_8.

Para $\phi_i = 1$, $i = 1, 2$, as taxas de serviço são dependentes do estado dos sistemas, com o aumento do fluxo de usuários as taxas de serviço aumentam proporcionalmente ao número de usuários no sistema, e assim se evita a formação de longas filas.

Corolário 3.3 *Quando os parâmetros de pressão tendem a infinito, $\phi_i \to \infty$, $i = 1, 2$, as funções de densidade de Y_{max} e Y_{min}, que são as distribuições MAXCOMPG e MINCOMPG se tornam as distribuições Máximo-Bernoulli-geral e Mínimo-Bernoulli-geral, denotadas por distribuições MAXBG e MINBG, respectivamente. Neste caso, em particular, as distribuições MAXBG e MINBG se transformam na distribuição geral, dada por G, portanto, obtemos o modelo de fila M/G/1.*

Prova: A função de densidade de Y_{max} é dada por

$$f_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{7}}) = \frac{1}{[Z(\rho_1,\phi_1\to\infty)-1]}\rho_1 f_{Y_1}(y)\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{(\rho_1 F_{Y_1}(y))^{m-1}}{(m!)^{\phi_1\to\infty}}$$

$$= \frac{1}{1+\rho_1-1}\rho_1 f_{Y_1}(y) = f_{Y_1}(y), \quad (3.75)$$

em que $y > 0$, $\theta_{\mathbf{7}} = (\omega_1)^T$ é o vetor dos parâmetros da distribuição geral, $f_{Y_1}(\cdot)$ é a função de densidade de Y_1.

A função de distribuição de Y_{max} é

$$\begin{aligned} F_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{7}}) &= \frac{Z(\rho_1 F_{Y_1}(y),\phi_1\to\infty)-1}{[Z(\rho_1,\phi_1\to\infty)-1]} \\ &= \frac{1+\rho_1 F_{Y_1}(y)-1}{1+\rho_1-1} = F_{Y_1}(y). \end{aligned} \tag{3.76}$$

A função de tempo restante de Y_{max} é dada da forma

$$\begin{aligned} W_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{7}}) &= \frac{Z(\rho_1,\phi_1\to\infty)-Z(\rho_1 F_{Y_1}(y),\phi_1\to\infty)}{[Z(\rho_1,\phi_1\to\infty)-1]} \\ &= \frac{1+\rho_1-1-\rho_1 F_{Y_1}(y)}{1+\rho_1-1} = (1-F_{Y_1}(y)). \end{aligned} \tag{3.77}$$

O r-ésimo momento, $r=1,2,\ldots$, de Y_{max} é

$$E(Y_{max}^r) = \int_0^\infty y^r f_{Y_1}(Y)dy. \tag{3.78}$$

A função de densidade de Y_{min} é dada por

$$\begin{aligned} f_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{8}}) &= \frac{1}{[Z(\rho_2,\phi_2\to\infty)-1]}\rho_2 f_{Y_1}(y)\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{(\rho_2(1-(F_{max}(y))^{1/m}))^{m-1}}{(m!)^{\phi_2\to\infty}} \\ &= \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\rho_2^j}{(j!)^{\phi_2\to\infty}}-1}\rho_2 f_{Y_1}(y)\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{(\rho_2(1-(F_{max}(y))^{1/m}))^{m-1}}{(m!)^{\phi_2\to\infty}} \\ &= \frac{1}{1+\rho_2-1}\rho f_{Y_1}(y) = f_{Y_1}(y), \end{aligned} \tag{3.79}$$

em que $y>0$, $\theta_{\mathbf{8}}=(\omega_{\mathbf{2}})^T$ é o vetor dos parâmetros da distribuição geral, $f_{Y_1}(\cdot)$, que é a função de densidade de Y_1. Neste caso, a função de densidade de Y_{min} é semelhante a função de densidade de Y_{max}.

A função de distribuição de Y_{min} é escrita da forma

$$\begin{aligned} F_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{8}}) &= \frac{Z(\rho_2,\phi_2\to\infty)-Z(\rho_2(1-F_{Y_1}(y)),\phi_2\to\infty)-1}{[Z(\rho_2,\phi_2\to\infty)-1]} \\ &= \frac{1+\rho_2-1-\rho_2(1-F_{Y_1}(y))}{1+\rho_2-1} = F_{Y_1}(y). \end{aligned} \tag{3.80}$$

A função de tempo restante de Y_{min} é dada por

$$W_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{8}}) = \frac{Z(\rho_2(1-(F_{max}(y))^{1/m}),\phi_2\to\infty)-1}{[Z(\rho_2,\phi_2\to\infty)-1]}$$

$$= \frac{1+\rho_2(1-F_{Y_1}(y))-1}{1+\rho_2-1} = (1-F_{Y_1}(y)). \tag{3.81}$$

O r-ésimo momento, $r=1,2,\ldots$, de Y_{min} é dado pela Equação (3.78)

Concluímos que as funções de densidade $f_{Y_{max}}(y;\theta_7) = f_{Y_{min}}(y;\theta_8) = f_{Y_1}(y)$, e adotamos para este modelo de fila a notação M/G/1, também assuminos para este modelo as notações: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, $\mu_1=\mu_2$ e $\rho_1=\rho_2=\rho$.

Isto completa a prova. □

Logo, a taxa de ocupação do modelo de fila M/G/1 é

$$\rho = \lambda E(Y_1), \tag{3.82}$$

na qual λ é a taxa de chegada, $\rho<1$ é a taxa de ocupação, e $E(Y_{max})=E(Y_{min})=E(Y_1)$ dada pela Equação (3.78) assumindo $r=1$.

A probabilidade de que durante um serviço n usuários cheguem ao sistema, denotada k_n^7, é escrita da seguinte forma

$$k_n^7 = \frac{\lambda^n}{n!}\int_0^\infty y^n e^{-\lambda y} f_{Y_1}(y)dy. \tag{3.83}$$

A função geradora, denotada por $K^7(z)$, é

$$K^7(z) = \int_0^\infty e^{-\lambda y(1-z)} f_{Y_1}(y)dy = \tilde{B}^7(\lambda(1-z)). \tag{3.84}$$

A função geradora de probabilidade, denotada por $\Pi^7(z)$, é dada por

$$\Pi^7(z) = \frac{(1-\rho_9)\tilde{B}^7(\lambda(1-z))(1-z)}{\tilde{B}^7(\lambda(1-z))-z}, \tag{3.85}$$

esta equação é chamada de fórmula de Pollaczek-Khinchin.

A probabilidade do número de usuários no sistemas, denotada por p_n^7, é

$$p_n^7 = \frac{d\Pi^7(z)^{(n)}}{dz}\mid_{z=0}, \tag{3.86}$$

no qual o símbolo (n) é a n-ésima derivada.

A função geradora de probabilidade para o tempo de espera na fila é escrita como

$$\tilde{W_q}^7(s) = \frac{(1-\rho)s}{\lambda \tilde{B}^7(s) + s - \lambda}, \tag{3.87}$$

esta equação é também chamada de Pollaczek-Khinchin.

A função geradora de probabilidade é dada por

$$W_q^7(y) \quad = \quad (1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \left[\int_0^y E(Y_1)^{-1}(1-F_{Y_1}(t))dt\right]^{[n]}, \tag{3.88}$$

em que o símbolo $[n]$ indica a n-ésima convolução da distribuição G e $E(Y_1)$ é dada pela Expressão (3.78) assumindo $r = 1$.

As medidas de desempenho para o modelo de fila M/G/1 são obtidas a partir das Equações (3.27), substituindo $E(Y_1)$ e $E(Y_1^2)$ dadas pela Expressão (3.78), tomando $r = 1$ e $r = 2$, respectivamente, e a taxa de ocupação é expressa pela Equação (3.82).

3.1 Estimação pelo método de máxima verossimilhança

Quando observamos um sistema de filas temos que planejar como os dados serão coletados. Usualmente, o planejamento mais simples, são as coletas do instante de chegada e do tempo de serviço de cada usuário por um certo período de tempo $(0, t]$, o qual t pode ser um valor fixo. Podemos, também, observar o sistema até que um número fixo de usuários seja atendido, ou um número fixo de transições (chegadas e saídas) tenha sido registrado (Gross and Harris, 1998) e (Armero and Bayarri, 1994). Um planejamento mais complexo pode ser adotado, como por exemplo, incluindo os períodos ociosos e períodos ocupados e os tempos de espera no sistema e na fila. Neste trabalho optamos por adotar o planejamento em que observamos o sistema com um número fixo de transições e que nos fornece uma completa informação sobre o sistema.

Considere a amostra aleatória $\mathbf{v} = (X_1, \ldots, X_{n_a}; Y_1, \ldots, Y_{n_s})^T$, consistindo do tempo entre as chegadas X_i do $(i-1)$-ésimo ao i-ésimo usuário, $i = 1, \ldots, n_a$, e do tempo de serviço completado Y_j, sendo do j-ésimo usuário,$j = 1, \ldots, n_s$, em que n_a é o número de tempo entre chegadas e n_s é o número total de serviços completados.

Supomos que os tempos entre as chegadas (X_i, $i = 1, \ldots n_a$) possui distribuição exponencial e os tempos de serviço (Y_j, $j = 1, \ldots n_s$) possui distribuição MAXCOMPG.

Os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo de fila M/MAXCOMPG/1 são obtidos pela maximização da soma do logaritmo da função de verossimilhança da distribuição dos tempos entre as chegadas, dada pela distribuição exponencial com parâmetro λ_1, com o logaritmo da distribuição do tempo de serviço expresso pela distribuição MAXCOMPG. Desta forma, considerando a amostra aleatória $(X_1, \ldots, X_{n_a}; Y_1, \ldots, Y_{n_s})^T$, a função do logaritmo da verossimilhança é

$$\begin{aligned} \ell_{max}(\theta_{\mathbf{1}}, \lambda_1) &= n_a \log \lambda_1 - \lambda_1 T_a - n_s \log[Z(\rho_1, \phi_1) - 1] + \sum_{i=1}^{n_s} f_{Y_1}(y_i) \\ &+ \sum_{i=1}^{n_s} \log \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}} F_{Y_1}(y_i))^{m-1} \right], \end{aligned} \tag{3.89}$$

na qual $\theta_{\mathbf{1}}$ é o vetor de parâmetros da distribuição MAXCOMPG, n_a é o número de tempo entre chegadas, T_a tempo total entre as chegadas, n_s número total de serviços completados.

Em relação aos casos particulares quando $\phi_1 = 0, 1$ e $\phi_1 \to \infty$ temos:

- O logaritmo da função de verossimilhança do modelo de fila M/MAXGG/1 é dado pelo logaritmo da função de densidade da distribuição exponencial com parâmetro λ_1, para o tempo entre as chegadas, e o logaritmo da função de densidade da distribuição MAXGG, para o tempo de serviço, que é dado por

$$\begin{aligned} \ell_{max}(\theta_{\mathbf{3}}, \lambda_1) &= n_a \log \lambda_1 - \lambda_1 T_a + n_s \log(1 - \rho_1) + \sum_{i=1}^{n_s} \log f_{Y_1}(y_i) \\ &- 2 \sum_{i=1}^{n_s} \log(1 - \rho_1 F_{Y_1}(y_i)), \end{aligned} \tag{3.90}$$

  na qual $\theta_{\mathbf{3}}$ é o vetor de parâmetros da distribuição MAXGG, n_a é o número de tempo entre chegadas, T_a tempo total entre as chegadas, n_s número total de serviços completados.

- O logaritmo da função de verossimilhança do modelo de fila M/MAXPG/1 é escrito pelo logaritmo da função de densidade da distribuição exponencial com parâmetro λ_1, para o tempo entre as chegadas, e o logaritmo da função de densidade da

distribuição de serviço dada pela distribuição MAXPG, que é expresso como

$$\begin{aligned}\ell_{max}(\theta_{\mathbf{5}}, \lambda_1) &= n_a \log \lambda_1 - \lambda_1 T_a + n_s \log \rho_1 + \sum_{i=i}^{n_s} \log f_{Y_1}(y_i) + \rho_1 \sum_{i=1}^{n_s} F_{Y_1}(y_i) \\ &- n_s \log(e^{\rho_1} - 1), \end{aligned} \tag{3.91}$$

na qual $\theta_{\mathbf{5}}$ é o vetor de parâmetros da distribuição MAXGG, n_a é o número de tempo de chegadas, T_a tempo total entre as chegadas, n_s número total de serviços completados.

- O logaritmo da função de verossimilhança do modelo de fila M/G/1 é dado pelo logaritmo da função de densidade da distribuição exponencial com parâmetro λ dos tempos entre as chegadas, e o logaritmo da distribuição de serviço dada pela distribuição $f_{Y_1}(y)$, logo temos

$$\ell_{max}(\theta, \lambda_1) = n_a \log \lambda - \lambda T_a + \sum_{i=1}^{n_s} \log f_{Y_1}(y_i), \tag{3.92}$$

na qual θ é o vetor de parâmetros da distribuição $f_{Y_1}(y_i)$, n_a é número de tempo entre chegadas, T_a tempo total entre as chegadas e n_s número total de serviços completados.

Considere a amostra aleatória $\mathbf{v} = (B_1, \ldots, B_{n_a}; Z_1, \ldots, Z_{n_s})^T$, consistindo do tempo entre as chegadas B_i do $(i-1)$-ésimo ao i-ésimo usuário, $i = 1, \ldots, n_a$, e do tempo de serviço completado Z_j, do j-ésimo usuário,$j = 1, \ldots, n_s$, em que n_a é o número de tempo entre chegadas e n_s é o número total de serviços completados.

Os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo de fila M/MINCOMPG/1 são obtidos pela maximização da soma do logaritmo da função de verossimilhança da distribuição dos tempos entre as chegadas, dada pela distribuição exponencial com parâmetro λ_2, e o logaritmo da distribuição do tempo de serviço expressa pela distribuição MINCOMPG. Desta forma, considerando a amostra aleatória $(B_1, \ldots, B_{n_a}; Z_1, \ldots, Z_{n_s})^T$, a função do logaritmo da verossimilhança é

$$\begin{aligned}\ell_{min}(\theta_{\mathbf{2}}, \lambda_2) &= n_a \log \lambda_2 - \lambda_2 T_a - n_s \log[Z(\rho_2, \phi_2) - 1] + n_s \log \rho_4 f_{Y_1}(z_i) \\ &+ \sum_{i=1}^{n_s} \log + \sum_{i=1}^{n_s} \log \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(\rho_4(1 - F_{Y_1}(z_i)))^{m-1}}{(m!)^{\phi_2}} \right], \end{aligned} \tag{3.93}$$

na qual $\theta_{\mathbf{2}}$ é o vetor de parâmetros da distribuição MINCOMPG, n_a é o número de tempo entre chegadas, T_a tempo total entre as chegadas e n_s número total de serviços completados.

Em relação aos casos particulares quando $\phi_2 = 0, 1$ e $\phi_2 \to \infty$ temos:

- O logaritmo da função de verossimilhança do modelo de fila M/MINGG/1 é dado pelo logaritmo da função de densidade da distribuição exponencial com parâmetro λ_2 para o tempo entre as chegadas, e o logaritmo da função de densidade da distribuição de serviço dada pela distribuição MINGG, que é dado por

$$\begin{aligned} \ell_{min}(\theta_{\mathbf{4}}, \lambda_2) &= n_a \log \lambda_2 - \lambda_2 T_a + n_s \log(1-\rho_2) + \sum_{i=1}^{n_s} f_{Y_1}(z_i) \\ &- 2\sum_{i=1}^{n_s} \log(1-\rho_2(1-F_{Y_1}(z_i))), \end{aligned} \tag{3.94}$$

  na qual θ_4 é o vetor de parâmetros da distribuição MINGG, n_a é número de tempo entre chegadas, T_a tempo total entre as chegadas, n_s número total de serviços completados.

- O logaritmo da função de verossimilhança do modelo de fila M/MINPG/1 é dado pelo logaritmo da função de densidade da distribuição exponencial para o tempo entre as chegadas, e o logaritmo da função de densidade da distribuição de serviço dada pela distribuição MINPG, que é dado por

$$\begin{aligned} \ell_{min}(\theta_{\mathbf{6}}) &= n_a \log \lambda_2 - \lambda_2 T_a + n_s \log \rho_2 + \sum_{i=1}^{n_s} \log f_{Y_1}(z_i) + \rho_2 \sum_{i=1}^{n_s} (1 - F_{Y_1}(z_i)) \\ &- n \log(e^{\rho_2} - 1), \end{aligned} \tag{3.95}$$

  na qual $\theta_{\mathbf{6}}$ é o vetor de parâmetros da distribuição MINPG, n_a é o número de tempo entre chegadas, T_a tempo total entre as chegadas, n_s número total de serviços completados.

3.2 Seleção de modelos

A escolha da distribuição que melhor explique os dados é extremamente importante na análise de dados. Nesta linha, diversos critérios para seleção de modelos são

apresentados na literatura e, dentre os critérios, aqueles baseados no máximo da função de verossimilhança são os mais utilizados. Entre eles podemos citar, o Critério de Informação de Akaike (AIC- *Akaike Information Criterion*) e o Critério Bayesiano de Schwarz (BIC - *Bayesian Information Criterion*),(para mais detalhes ver (Paulino et al., 2003) e (Bozdogan, 1987)). Tais critérios são definidos por

$$AIC = -2\log(L(\hat{\theta})) + 2v, \tag{3.96}$$

e,

$$BIC = -2\log f(y_m|\hat{\theta}) + v\log m, \tag{3.97}$$

em que $\hat{\theta}$ é o estimador de máxima verrossimilhança dos parâmetros do modelo, v é o número de parâmetros estimados pelo modelo e m é o tamanho da amostra. Seleciona-se o modelo que apresenta o menor valor dos critérios AIC e BIC.

3.3 Considerações finais

Neste capítulo apresentamos os modelos M/MAXCOMPG/1 e M/MINCOMPG/1, nos quais as distribuições dos tempos de serviço são dados pelas distribuições MAXCOMPG e MINCOMPG, respectivamente. Mostramos as distribuições de serviço obtidas a partir da variação do parâmetro de pressão, e exibimos as distribuições de equilíbrio de todos os modelos de fila apresentados.

Apresentamos também o logaritmo de máxima verossimilhança dos modelos, e também os critérios de informação AIC e BIC para a seleção do melhor modelo que descreverá os dados.

Nos capítulos seguintes serão consideradas as distribuições exponencial, Weibull e Birnbaum Baunders para modelar $Y_i, i = 1, 2, \ldots,$.

Capítulo 4

Modelos de fila M/MAXCOMPE/1 e M/MINCOMPE/1

Neste capítulo apresentamos os modelos de fila M/MAXCOMPE/1 e M/MINCOMPE/1 que são casos particulares dos modelos M/MAXCOMPG/1 e M/MINCOMPG/1, respectivamente, nos quais os tempos de serviço seguem as distribuições MAXCOMPE e MINCOMPE, nessa ordem.

As distribuições MAXCOMPE e MINCOMPE são obtidas a partir da composição da distribuição COMP, descrita pela Equação (3.1), e a distribuição exponencial para o máximo e o mínimo tempos de serviço, respectivamente.

Considere $Y_1, Y_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas, as quais representam a distribuição do tempo de serviço. A função de densidade de Y_i é

$$f_{Y_i}(y_i;\mu) = \mu e^{-\mu y_i} \quad i = 1, 2, \cdots, \tag{4.1}$$

na qual $\mu > 0$ é a taxa de serviço, y_i é o tempo de serviço do i-ésimo usuário.

4.1 Modelo de fila M/MAXCOMPE/1

O modelo de fila M/MAXCOMPE/1 possui distribuição MAXCOMPE para o tempo de serviço, e para a sua obtenção usamos a Expressão (3.4), e assim, a função de

densidade é dada por

$$f_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{1}}) = \frac{1}{[Z(\rho_1,\phi_1)-1]}\mu_1 e^{-\mu_1 y}\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}}(1-e^{-\mu_1 y})^{m-1}, \tag{4.2}$$

sendo $\theta_{\mathbf{1}} = (\rho_1,\mu_1,\phi_1)^T$ o vetor de parâmetros do modelo, $\rho_1 < 1$ é o parâmetro de intensidade de tráfego do sistema, μ_1 é a taxa de serviço e ϕ_1 é o parâmetro de pressão.

A partir da Equação (3.7), temos a função de distribuição da distribuição MAXCOMPE, que é dada por

$$F_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{1}}) = \frac{Z(\rho_1(1-e^{-\mu_1 y}),\phi_1)-1}{[Z(\rho_1,\phi_1)-1]}. \tag{4.3}$$

Usando a Equação (3.8) obtemos a função de tempo restante da distribuição MAXCOMPE, que é escrita da seguinte forma

$$W_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{1}}) = \frac{Z(\rho_1,\phi_1)-Z(\rho_1(1-e^{-\mu_1 y}),\phi_1)}{[Z(\rho_1,\phi_1)-1]}. \tag{4.4}$$

Escrevendo $(1-e^{-\mu_1 y})^{m-1}$ na forma de série de potência

$$(1-e^{-\mu_1 y})^{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}e^{-y\mu_1 k}. \tag{4.5}$$

Podemos reescrever a Equação (4.2) da seguinte forma

$$f_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{1}}) = \frac{1}{[Z(\rho_1,\phi_1)-1]}\mu_1\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}e^{-y\mu_1(1+k)}, \tag{4.6}$$

isto foi feito para facilitar a obtenção do r-ésimo momento e as das distribuições de equilíbrio.

O r-ésimo momento, $r = 1,2,\ldots$, da distribuição MAXCOMPE é dado por

$$\begin{aligned} E(Y_{max}^r) &= \frac{1}{[Z(\rho_1,\phi_1)-1]}\left\{\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}\right. \\ &\left.\times\left[\int_0^{\infty} y^r\mu_1(1+k)e^{-y\mu_1(1+k)}dy\right]\right\} \\ &= \frac{\mu_1^{-r}\Gamma(r+1)}{[Z(\rho_1,\phi_1)-1]}\frac{1}{(1+k)}\left\{\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}\frac{1}{(1+k)^r}\right\}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

para o cálculo desta equação foi usado um programa desenvolvido no software R e truncando a série $\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}}$. O truncamento desta série está em Apêndice .2.

A taxa de ocupação do modelo de fila M/MAXCOMPE/1 é dada por

$$\rho_3 = \lambda_1 E(Y_{max}), \tag{4.8}$$

no qual $\rho_3 < 1$, e passa a ser a nova intensidade de tráfego, λ_1 é a taxa de chegada e $E(Y_{max})$ é dada pela Expressão (4.7) assumindo $r = 1$.

A probabilidade que durante um serviço, n usuários chegam ao sistema é dada por

$$k_n = \frac{\lambda_1^n \mu_1}{[Z(\rho_3, \phi_1) - 1]} \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_3^m}{(m!)^{\phi_1}} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m-1}{k} \frac{1}{(\lambda_1 + \mu_1(1+k))^{n+1})}. \tag{4.9}$$

A função geradora $K_{max}(z)$ é dada por

$$\begin{aligned} K_{max}(z) &= \frac{1}{[Z(\rho_3, \phi_1) - 1]} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\rho_3^m}{(m!)^{\phi_1}} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m-1}{k} \\ &\quad \times \frac{\mu_1}{((\lambda_1(1-z)) + \mu_1(1+k))} \\ &= \tilde{B}_{max}(\lambda_1(1-z)). \end{aligned} \tag{4.10}$$

A função geradora de probabilidade para o número de usuários do sistema no instante de saída é escrito da seguinte forma

$$\Pi_{max}(z) = \frac{(1-\rho_3)\tilde{B}_{max}(\lambda_1(1-z))(1-z)}{\tilde{B}_{max}(\lambda_1(1-z)) - z}. \tag{4.11}$$

Podemos obter p_n, $n = 1, 2 \ldots, n$, a partir da Equação (3.21)

$$\begin{aligned} p_0 &= (1-\rho_3), \\ p_1 &= (1-\rho_3) \left\{ \frac{-\sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_3^m}{(m!)^{\phi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{m-1}{k} \frac{1}{(\rho_3 + (1+k))} + 1}{\sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_3^m}{(m!)^{\phi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{m-1}{k} \frac{1}{(\rho_3 + (1+k))}} \right\}, \\ &\vdots \\ p_n &= (1-\rho_3) \left\{ \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{[Z(\rho_3, \phi_1) - 1]} \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_3^m}{(m!)^{\phi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{m-1}{k} \frac{1}{(\rho_3 + (1+k))} \right)^{(i)} \right. \\ &\left. \times \left(\frac{1}{[Z(\rho_3, \phi_1) - 1]} \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_3^m}{(m!)^{\phi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{m-1}{k} \frac{1}{(\rho_3 + (1+k))} \right)^{-(n-i)} \right\}, \end{aligned}$$

em que os símbolos (i) e $(n-i)$ indicam a i-ésima e $(n-i)$-ésima derivadas, respectivamente.

A função geradora do tempo de espera na fila é

$$\tilde{W_q}(s) = \frac{(1-\rho_3)s}{\lambda_1 \tilde{B}_{max}(s) + s - \lambda_1}, \tag{4.12}$$

na qual $s = \lambda_1(1-z)$.

A distribuição de equilíbrio do tempo de espera na fila para o modelo de fila M/MAXCOMPE/1 é

$$\begin{aligned} W_q(y) &= (1-\rho_3)\sum_{n=0}^{\infty}\rho_3^n \\ &\times \left(\int_0^y E(Y_{max})^{-1}\frac{Z(\rho_1,\phi_1) - Z(\rho_3(1-e^{-\mu_1 t}),\phi_1)}{[Z(\rho_3,\phi_1)-1]}dt\right)^{[n]}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

em que o símbolo $[n]$ indica a n-ésima convolução da distribuição MAXCOMPE, $E(Y_{max})$ é dada pela Expressão (4.7) e, substituindo ρ_1 por ρ_3.

As medidas de desempenho do modelo M/MAXCOMPE/1 são:

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{\lambda_1^2}{2(1-\rho_3)}E(Y_{max}^2), \\ W_q &= \frac{\lambda_1}{2(1-\rho_3)}E(Y_{max}^2), \\ L &= \frac{\lambda_1^2}{2(1-\rho_3)}E(Y_{max}^2) + \rho_3, \\ W &= \frac{\lambda_1}{2(1-\rho_3)}E(Y_{max}^2) + E(Y_{max}), \end{aligned} \tag{4.14}$$

em que $E(Y_{max})$ e $E(Y_{max}^2)$ são dadas pela Equação (4.7), assumindo $r = 1$ e $r = 2$, respectivamente.

A partir dos Corolários 3.1, 3.2 e 3.3, do Capítulo 3, são obtidos os casos particulares para $\phi_1 = 0, 1$ e $\phi_1 \to \infty$. Na sequência, assumiremos a mesma notação usada no modelo de fila M/MAXCOMPE/1.

- Quando $\phi_1 = 0$, a distribuição MAXCOMPE para o tempo de serviço torna-se a distribuição Máximo-geométrica-exponencial, denotada por MAXGE, e assim, obtemos o modelo de fila M/MAXGE/1.

A função de densidade da distribuição MAXGE é dada por

$$f_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{2}}) = \frac{(1-\rho_1)}{\rho_1}\sum_{m=1}^{\infty} m\rho_1^m \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k \binom{m-1}{k} e^{-y\mu_1(1+k)}, \tag{4.15}$$

em que $y > 0$, $\theta_{\mathbf{2}} = (\rho_1, \mu_1)^T$ são os parâmetros do modelo MAXGE, sendo que ρ_1 é o parâmetro de intensidade de tráfego e μ_1 é a taxa de serviço.

Podemos reescrever a Equação (4.15) da seguinte forma

$$f_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{2}}) = \frac{\mu_1 e^{-\mu_1 y}(1-\rho_1)}{(1-\rho_1(1-e^{-\mu_1 y}))^2}. \tag{4.16}$$

A função de distribuição MAXGE é escrita da forma

$$F_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{2}}) = \frac{(1-e^{-\mu_1 y})(1-\rho_1)}{(1-\rho_1(1-e^{-\mu_1 y}))}. \tag{4.17}$$

A função de tempo restante da distribuição MAXGE é dada por

$$W_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{2}}) = \frac{e^{-\mu_1 y}}{(1-\rho_1(1-e^{-\mu_1 y}))}. \tag{4.18}$$

O r-ésimo momento, $r = 1, 2, \ldots$, da distribuição MAXGE é da forma

$$E(Y_{max}^r) = \frac{\mu_1^{-r}\Gamma(r+1)(1-\rho_1)}{\rho_1}\left[\sum_{m=1}^{\infty} m\rho_1^m \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k \binom{m-1}{k}\frac{1}{(1+k)^r}\right]. \tag{4.19}$$

A taxa de ocupação do modelo de fila M/MAXGE/1 é

$$\rho_4 = \lambda_1 E(Y_{max}), \tag{4.20}$$

em que $\rho_4 < 1$, λ_1 é a taxa de chegada e $E(Y_{max})$ é dada pela Equação (4.19) assumindo $r = 1$.

A probabilidade de que durante um serviço, n usuários cheguem ao sistema, é

$$k_n^1 = \frac{(1-\rho_4)\lambda_1^n}{\rho_4}\sum_{m=1}^{\infty} m\rho_4^m \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k \binom{m-1}{k}\frac{\mu_1}{(\lambda_1+\mu_1(1+k))^{n+1}}. \tag{4.21}$$

A função geradora de probabilidade é

$$\begin{aligned} K_{max}^1(z) &= \frac{(1-\rho_4)}{\rho_4}\sum_{m=1}^{\infty} m\rho_4^m \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k \binom{m-1}{k} \\ &\times \frac{\mu_1}{(\lambda_1(1-z)+\mu_1(1+k))} = \tilde{B}_{max}^1(\lambda(1-z)). \end{aligned} \tag{4.22}$$

A função geradora do distribuição do número de usuários no sistema é

$$\Pi^1_{max}(z) = \frac{(1-\rho_4)\tilde{B}^1_{max}(\lambda_1(1-z))(1-z)}{\tilde{B}^1_{max}(\lambda_1(1-z)) - z}. \tag{4.23}$$

Logo, temos que p_n, $n = 1, 2, \ldots, n$ são dadas por

$$\begin{aligned}
&p_0 = (1-\rho_4),\\
&p_1 = (1-\rho_4)\left\{\frac{-\sum_{m=1}^{\infty} m\rho_4^m \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{m-1}{k}\frac{1}{(\rho_4+(1+k))}+1}{\sum_{m=1}^{\infty} m\rho_4^m \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{m-1}{k}\frac{1}{(\rho_4+(1+k))}}\right\},\\
&\quad\vdots\\
&p_n = (1-\rho_4)\left\{\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{(1-\rho_4)}{\rho_4}\sum_{m=1}^{\infty} m\rho_4^m\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{m-1}{k}\frac{1}{(\rho_4+(1+k))}\right)^{(i)}\right.\\
&\left.\times\left(\frac{(1-\rho_4)}{\rho_4}\sum_{m=1}^{\infty}\rho_4^m\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{m-1}{k}\frac{1}{(\rho_4+(1+k))}\right)^{-(n-i)}\right\},
\end{aligned}$$

em que os símbolos (i) e $(n-i)$ indicam a i-ésima e $(n-i)$-ésima derivadas, respectivamente.

A função geradora de probabilidade da distribuição de equilíbrio do tempo de espera na fila é

$$\tilde{W}^1_q(s) = \frac{(1-\rho_4)s}{\lambda_1\tilde{B}^1_{max}(s) + s - \lambda_1}, \tag{4.24}$$

em que $s = \lambda_1(1-z)$

A distribuição de equilíbrio do tempo de espera na fila é

$$W^1_q(y) \;=\; (1-\rho_4)\sum_{n=0}^{\infty}\rho_4^n\left(\int_0^y E(Y_{max})^{-1}\frac{e^{-\mu_1 t}}{(1-\rho_4(1-e^{-\mu_1 t}))}dt\right)^{[n]}, \tag{4.25}$$

em que o símbolo $[n]$ indica a n-ésima convolução da distribuição MAXGE, $E(Y_{max})$ é dada pela Expressão (4.19), assumindo $r = 1$ e substituindo ρ_3 por ρ_4.

As medidas de desempenho do modelo M/MAXGE/1 são obtidas a partir das Equações (4.14), sustituindo $E(Y_{min})$ e $E(Y^2_{min})$, dadas pela Expressão (4.19), para $r = 1$ e $r = 2$, respectivamente, e substituindo ρ_3 por ρ_4.

- Quando $\phi_1 = 1$, a distribuição MAXCOMPE se reduz a distribuição Máximo-Poisson-exponencial para o tempo de serviço, denotada por MAXPE, e surge o modelo de fila M/MAXPE/1.

A função de densidade da distribuição MAXPE é dada por

$$f_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{3}}) = \frac{1}{(e^{\rho_1}-1)}\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_1^m}{m!}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}e^{-y\mu_1(1+k)}, \tag{4.26}$$

em que $y > 0$, $\theta_{\mathbf{3}} = (\rho_1, \mu_1)^T$ são os parâmetros do modelo MAXPE, sendo que ρ_1 é o parâmetro de intensidade de tráfego e μ_1 é a taxa de serviço.

Podemos reescrever a Equação (4.26) da seguinte forma

$$f_{Y_{max}}(y,\theta_{\mathbf{3}}) = \frac{\rho_1\mu_1 e^{-\mu_1 y+\rho_1(1-e^{-\mu_1 y})}}{(e^{\rho_1}-1)}. \tag{4.27}$$

A função de distribuição MAXPE é

$$F_{Y_{max}}(y,\theta_{\mathbf{3}}) = \frac{e^{\rho_1(1-e^{-\mu_1 y})}-1}{(e^{\rho_1}-1)}. \tag{4.28}$$

A função de tempo restante da distribuição MAXPE é escrita na forma

$$W_{Y_{max}}(y,\theta_{\mathbf{3}}) = \frac{e^{\rho_1}-e^{\rho_1(1-e^{-\mu y})}}{(e^{\rho_1}-1)}. \tag{4.29}$$

O r-ésimo momento, $r = 1, 2, \ldots$, da distribuição MAXPE é dado por

$$E(Y_{max}^r) = \frac{\mu_1^{-r}\Gamma(r+1)}{(e^{\rho_1}-1)}\left[\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_1^m}{(m!)}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}\frac{1}{(1+k)^r}\right]. \tag{4.30}$$

A taxa de ocupação do modelo de fila M/MAXPE/1 é

$$\rho_5 = \lambda_1 E(Y_{max}), \tag{4.31}$$

na qual $\rho_5 < 1$, λ_1 é a taxa de chegada e $E(Y_{max})$ é dada pela Equação (4.31), assumindo $r = 1$.

A probabilidade de que durante um serviço n usuários cheguem ao sistema é dada por

$$k_n^2 = \frac{\lambda_1^n}{(e^{\rho_5}-1)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\rho_5^m}{m!}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}\frac{\mu_1}{(\lambda_1+\mu_1(1+k))^{n+1}}.$$

A função geradora de probabilidade é

$$\begin{aligned} K_{max}^2(z) &= \frac{1}{(e^{\rho_5}-1)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\rho_5^m}{m!}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k} \\ &\quad\times\frac{\mu_1}{(\lambda_1(1-z)+\mu_1(1+k))} = \tilde{B}_{max}^2(\lambda_1(1-z)). \end{aligned} \tag{4.32}$$

A função geradora do número de usuários no sistema é

$$\Pi^2_{max}(z) = \frac{(1-\rho_3)\tilde{B}^2_{max}(\lambda_1(1-z))(1-z)}{\tilde{B}^2_{max}(\lambda_1(1-z)) - z}. \tag{4.33}$$

Logo, temos

$$\begin{aligned}
p^2_0 &= (1-\rho_5),\\
p^2_1 &= (1-\rho_5)\left\{\frac{-\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_5^m}{m!}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{m-1}{k}\frac{1}{(\rho_5+(1+k))}+1}{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\rho_5^m}{m!}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{m-1}{k}\frac{1}{(\rho_5+(1+k))}}\right\},\\
&\vdots\\
p^2_n &= (1-\rho_5)\left\{\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{(e^{\rho_5}-1)}\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_5^m}{m!}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{m-1}{k}\frac{1}{(\rho_5+(1+k))}\right)^{(i)}\right.\\
&\left.\times\left(\frac{1}{(e^{\rho_5}-1)}\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_5^m}{m!}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{m-1}{k}\frac{1}{(\rho_5+(1+k))}\right)^{-(n-i)}\right\},
\end{aligned}$$

em que os simbolos (i) e $(n-i)$ indicam a i-ésima e $(n-i)$-ésima derivadas, respectivamente.

A função geradora de probabilidade da distribuição de equilibrio do tempo de espera na fila é

$$\tilde{W}^2_q(s) = \frac{(1-\rho_5)s}{\lambda_1\tilde{B}^2_{max}(s) - s + \lambda_1}, \tag{4.34}$$

em que $s = \lambda_1(1-z)$.

A função geradora da distribuição de equilíbrio do tempo de espera na fila é

$$W^2_q(y) \;=\; (1-\rho_5)\sum_{n=1}^{\infty}\rho_5^n\left(\int_0^y E(Y_{max})^{-1}\frac{e^{\rho_5}-e^{\rho_5(1-e^{-\mu t})}}{(e^{\rho_5}-1)}dt\right)^{[n]}, \tag{4.35}$$

na qual o símbolo $[n]$ indica a n-ésima convolução da distribuições MAXPE, e $E(Y_{max})$ é dada pela Equação (4.31), assumindo $r = 1$.

As medidas de desempenho do modelo de fila M/MAXPE/1 são obtidas pelas Equações (4.14), sustituindo $E(Y_{min})$ e $E(Y^2_{min})$ dadas pela Expressão (4.30), para $r = 1$ e $r = 2$, respectivamente, e usando ρ_5 dado pela Equação (4.31).

- Quando $\phi_1 \to \infty$, a distribuição MAXCOMPE, torna-se a distribuição Máximo-Bernoulli-exponencial para o tempo de serviço, denotada por MAXBE, que é a própria distribuição exponencial. Neste caso, temos o modelo de fila mais simples o modelo M/M/1 (Pinsky and Karlin, 2010).

Assumiremos a seguinte notação para este modelo: $\lambda_1 = \lambda$ e $\mu_1 = \mu$.

A função de densidade é dado por

$$f_{Y_{max}}(y, \mu) = \mu e^{-\mu y}, \tag{4.36}$$

em que μ é a taxa de serviço.

A função de distribuição é

$$F_{Y_{max}}(y, \mu) = 1 - e^{-\mu y}. \tag{4.37}$$

A função de tempo restante é dada por

$$W_{Y_{max}}(y; \mu) = e^{-\mu y}. \tag{4.38}$$

O r-ésimo momento, $r = 1, 2, \ldots$ da distribuição exponencial é

$$E(Y_{max}^r) = \frac{\Gamma(r+1)}{\mu^r}, \tag{4.39}$$

em que Γ é a função gama $\Gamma(r+1) = \int_0^\infty y^r e^{-y} dy$.

A taxa de ocupação do modelo de fila M/M/1 é dado por

$$\rho = \lambda E(Y_1), \tag{4.40}$$

na qual $\rho < 1$, λ é a taxa de chegada e $E(Y_1)$ é dada pela Equação (4.39) assumindo $r = 1$.

A probabilidade de que durante um serviço n usuários cheguem é dado por

$$k_n^3 = \frac{\lambda^n \mu}{(\mu + \lambda)^{n+1}}. \tag{4.41}$$

A função geradora é dada por

$$K_{max}^3(y) = \frac{\mu}{\mu + \lambda(1 - z)} = \tilde{B}_{max}^3(\lambda(1 - z)). \tag{4.42}$$

A função geradora da distribuição de equilíbrio do número de usuários no sistema é obtida da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Pi_{max}^3(z) &= \frac{(1-\rho)\tilde{B}_{max}^3(\lambda(1-z))(1-z)}{\tilde{B}_{max}^3(\lambda(1-z)) - z} \\ &= \frac{(1-\rho)\mu(1-z)}{(\mu - \lambda z)(1-z)} = \frac{(1-\rho)}{1-\rho z}, \end{aligned} \tag{4.43}$$

portanto temos para $p_n^3 = \rho^n(1-\rho)$ tem-se a distribuição de equilíbrio para o número de usuários no sistema do modelo de fila M/M/1 (Gross and Harris, 1998).

A função geradora de probabilidade da distribuição do tempo de espera na fila é

$$\tilde{W}_q^3(s) = (1-\rho) + \rho\frac{\mu(1-\rho)}{\mu(1-\rho)+s}, \tag{4.44}$$

na qual $s = \lambda(1-z)$.

A distribuição de equilíbrio do tempo de espera na fila é

$$\begin{aligned} W_q^3(y) &= 1-\rho+\sum_{n=1}^{\infty}\mu\int_0^y \frac{(\mu t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\mu t}dt \\ &= 1-\rho e^{-(\mu-\lambda)y}, \end{aligned} \tag{4.45}$$

As medidas de desempenho do modelo M/M/1 são dadas por

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{\rho^2}{1-\rho}, \\ W_q &= \frac{\rho}{\mu-\lambda}, \\ L &= \frac{\rho}{1-\rho}, \\ W &= \frac{\rho}{\lambda_1(1-\rho)}. \end{aligned} \tag{4.46}$$

4.1.1 Estimação pelo método de máxima verossimilhança

Segundo o planejamento da coleta de dados descrito no Capítulo 3, obtemos a amostra aleatória $\mathbf{v} = (X_1, \ldots, X_{n_a}; Y_1, \ldots, Y_{n_s})^T$, consistindo dos tempos entre as chegadas X_i do $(i-1)$-ésimo ao i-ésimo usuário, $i = 1, \ldots, n_a$, e dos tempos de serviços completados Y_j, do j-ésimo usuário,$j = 1, \ldots, n_s$, em que n_a é o número total de tempos entre chegadas e n_s é o número total de serviços completados.

Os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo de fila M/MAXCOMPE/1 são obtidos pela maximização da soma do logaritmo da função de verossimilhança da distribuição dos tempos entre as chegadas, dada pela função de densidade da distribuição exponencial com parâmetro λ_1, e do logaritmo da distribuição do tempo

de serviço completdo expresso pela função de densidade da distribuição MAXCOMPE, que é dado por

$$\begin{aligned}\ell_{max}(\theta_{\mathbf{1}},\lambda_1) &= n_a\log\lambda_1-\lambda_1T_a-n_s\log[Z(\rho_1,\phi_1)-1]+n_s\log\mu_1-\mu_1T_s\\ &+ \sum_{i=1}^{n_s}\log\left[\sum_{m=1}^{\infty}m\frac{\rho_1^m(1-e^{-\mu_1y_i})^{m-1}}{(m!)^{\phi}}\right], \end{aligned} \tag{4.47}$$

em que $\theta_{\mathbf{1}}=(\rho_1,\mu_1,\phi_1)^T$ é o vetor do modelo MAXCOMPE, n_a é número total de tempos entre chegadas, T_a tempo total dos tempos entre chegadas, T_s é o tempo total de serviços completados e n_s número total de serviços completados.

Através da primeira derivada do logaritmo da função de verossimilhança em relação a cada parâmetro, definimos a função (ou vetor) escore $U=(U_{\lambda_1},U_{\rho_1},U_{\mu_1},U_{\phi_1})$, cujos elementos são:

$$U_{\lambda_1} = \frac{n_a}{\lambda_1}-T_a,$$

$$\begin{aligned}U_{\rho_1} &= \frac{n_s}{[Z(\rho_1,\phi_1)-1]}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\rho_1^{m-1}}{(m!)^{\phi_1}}+\sum_{i=1}^{n_s}\left\{\left[\sum_{m=1}^{\infty}m\frac{\rho_1^m(1-e^{-\mu_1y_i})^{m-1}}{(m!)^{\phi_1}}\right]^{-1}\right\}\\ &\times\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^2\rho_1^{m-1}(1-e^{-\mu_1y_i})^{m-1}}{(m!)^{\phi_1}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U_{\mu_1} &= \frac{n_s}{\mu_1}-T_s+\sum_{i=1}^{n_s}\left\{\left[\sum_{m=1}^{\infty}m\frac{\rho_1^m(1-e^{-\mu_1y_i})^{m-1}}{(m!)^{\phi_1}}\right]^{-1}\right\}\\ &\times\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\rho_1^my_ie^{-\mu_1y_i}(1-e^{-\mu_1y_i})^{m-2}}{(m!)^{\phi_1}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U_{\phi} &= \frac{n_s}{[Z(\rho_1,\phi_1)-1]}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\rho_1^m\log(m!)}{(m!)^{\phi_1}}-\sum_{i=1}^{n_s}\left\{\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\rho_1^m(1-e^{-\mu_1y_i})^{m-1}}{(m!)^{\phi_1}}\right]^{-1}\right.\\ &\left.\times\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\rho_1^m(1-e^{-\mu_1y_i})^{m-1}\log(m!)}{(m!)^{\phi_1}}\right\}.\end{aligned}$$

Os casos particulares do logaritmo da função de verossimilhança do modelo de fila M/MAXCOMPE/1 são obtidos a partir da variação de ϕ_1, tal que $\phi_1=0,1$ e $\phi_1\to\infty$, são descritos a seguir:

- O logaritmo da função de verossimilhança do modelo de fila M/MAXGE/1 é escrito pelo logaritmo da função de densidade da distribuição exponencial com parâmetro

λ_1, para os tempos entre as chegadas, mais o logaritmo da função de densidade da distribuição MAXGE, para os tempos de serviços completados, sendo dado por

$$\begin{aligned}\ell_{max}(\theta_{\mathbf{2}}, \lambda_1) &= n_a \log \lambda_1 - \lambda_1 T_a + n_s \log \mu_1 - \mu_1 T_s + n_s \log(1-\rho_1) \\ &- 2\sum_{i=1}^{n_s} \log(1-\rho_1(1-e^{-\mu_1 y_i})), \end{aligned} \tag{4.48}$$

em que $\theta_{\mathbf{2}} = (\rho_1, \mu_1)^T$ é o vetor de parâmetros do modelo MAXGE, n_a é número total de tempos entre chegadas, T_a tempo total dos tempos entre as chegadas, n_s número total de serviços completados e T_s é o tempo total dos serviços completados.

Os elementos da função (ou vetor) escore $U = (U_{\lambda_1}, U_{\rho_1}, U_{\mu_1}$ são dados a seguir:

$$U_{\lambda_1} = \frac{n_a}{\lambda_1} - T_a,$$

$$U_{\rho_1} = -\frac{n_s}{(1-\rho_1)} + 2\sum_{i=1}^{n_s} \frac{(1-e^{-\mu_1 y_i})}{(1-\rho_1(1-e^{-\mu_1 y_i}))},$$

$$U_{\mu_1} = \frac{n_s}{\mu_1} - T_s + 2\sum_{i=1}^{n_s} \frac{y_i \rho_1 e^{-\mu_1 y_i}}{(1-\rho_1(1-e^{-\mu_1 y_i}))}.$$

- O logaritmo da função de verossimilhança do modelo de fila M/MAXPE/1 é escrito pelo logaritmo da função de densidade da distribuição exponencial com parâmetro λ_1, para os tempos entre as chegadas, mais logaritmo da função de densidade da distribuição MAXPE, para os tempos de serviços completados, sendo dado por

$$\begin{aligned}\ell_{max}(\theta_{\mathbf{3}}, \lambda_1) &= n_a \log \lambda_1 - \lambda_1 T_a + n_s \log \rho_1 + n_s \log \mu_1 - \mu T_s \\ &+ \rho_1 \sum_{i=1}^{n_s} (1-e^{-\mu_1 y_i}) - n_s \log(e^{\rho_1} - 1), \end{aligned} \tag{4.49}$$

em que $\theta_{\mathbf{3}} = (\rho_1, \mu_1)^T$ é o vetor de parâmetros do modelo MAXPE, n_a é número total de tempos entre chegadas, T_a tempo total dos tempos entre as chegadas, n_s número total de serviços completados e T_s é o tempo total dos serviços completados.

Os elementos da função escore $U = (U_{\lambda_1}, U_{\rho_1}, U_{\mu_1})$ são dados por:

$$\begin{aligned} U_{\lambda_1} &= \frac{n_a}{\lambda_1} - T_a, \\ U_{\rho} &= \frac{n_s}{\rho_1} + n_s - \sum_{i=1}^{n_s} e^{-\mu_1 y_i} - \frac{n_s e^{\rho_1}}{(e^{\rho_1} - 1)}, \\ U_{\mu} &= \frac{n_s}{\mu_s} - T_s - \rho_1 \sum_{i=1}^{n_s} y_i e^{-\mu_1 y_i}. \end{aligned}$$

- O logaritmo da função de verossimilhança do modelo de fila M/MAXBE/1 ou do modelo de fila M/M/1, consiste nos logaritmos das funções de densidade das distribuições exponenciais com parâmetros λ e μ para os tempos entre as chegadas e os tempos de serviço completados, respectivamente, o qual é dado por

$$\ell_{max}(\mu, \lambda) = n_a \log \lambda - \lambda T_a + n_s \log \mu - \mu T_s,$$

na qual n_a é número total de tempos entre chegadas, T_a tempo total dos tempos entre as chegadas, n_s número total de serviços completados e T_s é o tempo total dos serviços completados.

Os elementos da função escore $U = (U_\lambda, U_\mu)$ são dados por

$$\begin{aligned} U_{\lambda} &= \frac{n_a}{\lambda} - T_a, \\ U_{\mu} &= \frac{n_s}{\mu} - T_s. \end{aligned}$$

4.2 Modelo de fila M/MINCOMPE/1

Apresentamos o modelo de fila M/MINCOMPE/1, que difere do modelo de fila anteriormente descrito pela sua distribuição do tempo serviço.

A partir da Equação (3.5) podemos obter a função de densidade da distribuição MINCOMPE, que é dada por

$$f_{Y_{min}}(y; \theta_{\mathbf{4}}) = \frac{\mu_2}{[Z(\rho_2, \phi_2) - 1]} \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}} e^{-m\mu_2 y}, \tag{4.50}$$

sendo $\theta_{\mathbf{4}} = (\rho_2, \mu_2, \phi_2)^T$ o vetor de parâmetros do modelo, tal que ρ_2 é o parâmetro de intensidade de tráfego, μ_2 é a taxa de serviço e ϕ_2 é o parâmetro de pressão.

A distribuição MINCOMPE é semelhante a distribuição ECOMP dada em Cordeiro et al. (2012). A distribuição ECOMP é proposta naquele trabalho como uma nova distribuição e não é colocada em um contexto de fila.

Usando a Expressão (3.10), obtemos a função de distribuição da distribuição MINCOMPE que é expressa da seguinte forma

$$F_{Y_{min}}(y, \theta_{\mathbf{4}}) = \frac{Z(\rho_2, \phi_2) - Z(\rho_2 e^{-\mu_2 y}, \phi_2)}{[Z(\rho_2, \phi_2) - 1]}. \tag{4.51}$$

A função de tempo restante da distribuição MINCOMPE é dada por

$$W_{Y_{min}}(y; \theta_{\mathbf{4}}) = \frac{Z(\rho_2 e^{-\mu_2 y}, \phi_2) - 1}{[Z(\rho_2, \phi_2) - 1]}. \tag{4.52}$$

O r-ésimo momento, $r = 1, 2 \ldots$, da distribuição MINCOMPE é

$$E(Y_{min}^r) = \frac{\mu_2^{-r}\Gamma(r+1)}{[Z(\rho_2, \phi_2) - 1]} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}} \frac{1}{m^r}, \tag{4.53}$$

esta equação foi obtida a partir de um programa desenvolvido no software R, e pelo truncamento da série $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}}$, que é descrito no Apêndice .2.

A taxa de ocupação do modelo de fila M/MINCOMPE/1, é dada por

$$\rho_7 = \lambda_2 E(Y_{min}). \tag{4.54}$$

na qual $\rho_7 < 1$, λ_2 é a taxa de chegada e $E(Y_{min})$ é dado pela Equação (4.53) assumindo $r = 1$.

A probabilidade de que durante um serviço n usuários cheguem ao sistema é dada por

$$k_n^4 = \frac{\lambda_2^n}{[Z(\rho_7, \phi_2) - 1]} \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_7^m}{(m!)^{\phi_2}} \frac{\mu_2}{((\lambda_2 + \mu_2 m)^{n+1})}. \tag{4.55}$$

A função geradora é dada por

$$\begin{aligned} K_{min}(z) &= \frac{\mu_2}{[Z(\rho_7, \phi_2) - 1]} \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_7^m}{(m!)^{\phi_2}} \frac{1}{(\lambda_2(1-z) + \mu_2 m)} \\ &= \tilde{B}_{min}(\lambda_2(1-z)). \end{aligned} \tag{4.56}$$

A função geradora de probabilidade é

$$\Pi_{min}(z) = \frac{(1-\rho_7)\tilde{B}_{min}(\lambda_2(1-z))(1-z)}{\tilde{B}_{min}(\lambda_2(1-z)) - z}. \tag{4.57}$$

A probabilidade do número de usuários no sistema dada por p_n, $n = 0, 1, \ldots n$, é dado por

$$\begin{aligned}
&p_0^4 = (1-\rho_7),\\
&p_1^4 = (1-\rho_7)\left\{\frac{-\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_7^m}{(m!)^{\phi_2}}\frac{1}{(\rho_7+m)} + 1}{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\rho_7^m}{(m!)^{\phi_2}}\frac{1}{(\rho_7+m)}}\right\},\\
&\quad\vdots\\
&p_n^4 = (1-\rho_7)\left\{\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{[Z(\rho_7,\phi_2)-1]}\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_7^m}{(m!)^{\phi_2}}\frac{1}{(\rho_7+m)}\right)^{(i)}\right.\\
&\left.\times\left(\frac{1}{[Z(\rho_7,\phi_2)-1]}\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_7^m}{(m!)^{\phi_2}}\frac{1}{(\rho_7+m)}\right)^{-(n-i)}\right\},
\end{aligned}$$

em que os simbolos (i) e $(n-i)$ indicam a i-ésima e $(n-i)$-ésima derivadas, respectivamente.

A função geradora de probabilidade da distribuição do tempo de espera na fila é dado por

$$\tilde{W}_q^4(s) = \frac{(1-\rho_7)s}{\lambda_2\tilde{B}_{min}(s) + s - \lambda_2}, \tag{4.58}$$

na qual temos que $s = \lambda_2(1-z)$.

A distribuição de equilíbrio do tempo de espera na fila é

$$W_q^4(y) = (1-\rho_7)\sum_{n=0}^{\infty}\rho_7^n\left(\int_0^y E(Y_{min})^{-1}\frac{Z(\rho_7 e^{-\mu_2 t},\phi_2)-1}{[Z(\rho_7,\phi_2)-1]}dt\right)^{[n]}, \tag{4.59}$$

na qual o símbolo $[n]$ indica a n-ésima convolução da distribuição MINCOMPE e $E(Y_{min})$ é dada pela Expressão (4.53), assumindo-se $r = 1$, e substituindo-se ρ_2 por ρ_7.

As medidas de desempenho do modelo M/MINCOMPE/1 são

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{\lambda_2^2}{2(1-\rho_7)} E(Y_{mim}^2), \\ W_q &= \frac{\lambda_2}{2(1-\rho_7)} E(Y_{min}^2), \\ L &= \frac{\lambda_2^2}{2(1-\rho_7)}\ E(Y_{min}^2) + \rho_7, \\ W &= \frac{\lambda_2}{2(1-\rho_7)} E(Y_{min}^2) + E(Y_{min}), \end{aligned} \tag{4.60}$$

em que $E(Y_{min})$ e $E(Y_{min}^2)$ são dadas pela Equação (4.53), assumindo-se $r = 1$ e $r = 2$, respectivamente, e substituindo-se ρ_2 por ρ_7.

A partir dos Corolários 3.1, 3.2 e 3.3 os casos particulares do modelo de fila M/MINCOMPE/1 são descritos a seguir. Adotaremos a mesma notação usada no modelo de fila M/MINCOMPE/1:

- Quando $\phi_2 = 0$, a distribuição MINCOMPE torna-se a distribuição Mínimo-geométrica-exponencial para o tempo de serviço, denotada por MINGE. E obtemos o modelo de fila M/MINGE/1.

  A função de densidade da distribuição MINGE é

  $$f_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{5}}) = \frac{(1-\rho_2)}{\rho_2}\mu_2 \sum_{m=1}^{\infty} m\rho_2^m e^{-m\mu_2 y}, \tag{4.61}$$

  em que $y > 0$, $\theta_{\mathbf{5}} = (\rho_2, \mu_2)^T$ é o vetor de parâmetros do modelo MINGE, sendo que ρ_2 é o parâmetro de intensidade de tráfego e μ_2 é a taxa de serviço.

  Podemos reescrever a Equação (4.61) da seguinte forma

  $$f_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{5}}) = \frac{\mu_2 e^{-\mu_2 y}(1-\rho_2)}{(1-\rho_2 e^{-\mu_2 y})^2}. \tag{4.62}$$

  A função de distribuição MINGE é dada por

  $$F_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{5}}) = \frac{(1-e^{-\mu_2 y})}{(1-\rho_2 e^{-\mu_2 y})}, \tag{4.63}$$

  e a função de tempo restante da distribuição MINGE é

  $$W_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{5}}) = \frac{(1-\rho_2)e^{-\mu_2 y}}{(1-\rho_2 e^{-\mu_2 y})}. \tag{4.64}$$

O r-ésimo momento, $r = 1, 2 \ldots$, da distribuição MINGE é

$$E(Y_{min}^r) = \mu_2^{-r}\Gamma(r+1)\frac{(1-\rho_2)}{\rho_2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\rho_2^m}{(m)^r}. \tag{4.65}$$

A taxa de ocupação do modelo de fila M/MINGE/1 é dada por

$$\rho_8 = \lambda_2 E(Y_{min}^r), \tag{4.66}$$

na qual $\rho_8 < 1$, λ_2 é a taxa de serviço e $E(Y_{min})$ é dado pela Equação (4.65), assumindo-se $r = 1$.

A probabilidade de que durante um serviço n usuários cheguem ao sistema é

$$k_n^5 = \frac{(1-\rho_8)\lambda_2^n}{\rho_8}\sum_{m=1}^{\infty} m\rho_8^m \frac{\mu_2}{(\lambda_2+\mu_2 m)^{n+1}}. \tag{4.67}$$

A função geradora é dada por

$$K_{min}^5(z) = \frac{(1-\rho_8)}{\rho_8}\sum_{m=1}^{\infty} m\rho_8^m \frac{\mu_2}{(\lambda_2(1-z)+\mu_2 m)} = \tilde{B}_{min}^5(\lambda_2(1-z)). \tag{4.68}$$

A função geradora de probabilidade é obtida da seguinte forma

$$\Pi_{min}^5(z) = \frac{(1-\rho_8)\tilde{B}_{min}^5(\lambda_2(1-z))(1-z)}{\tilde{B}_{min}^5(\lambda_2(1-z)) - z}. \tag{4.69}$$

Temos,

$$\begin{aligned}
p_0^5 &= (1-\rho_8),\\
p_1^5 &= (1-\rho_8)\left\{\frac{-\sum_{m=1}^{\infty} m\rho_8^m \frac{1}{(\rho_8+m)} + 1}{\sum_{m=1}^{\infty} m\rho_8^m \frac{1}{(\rho_8+m)}}\right\},\\
&\vdots\\
p_n^5 &= (1-\rho_8)\left\{\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{(1-\rho_8)}{\rho_8}\sum_{m=1}^{\infty} m\rho_8^m\frac{1}{(\rho_8+m)}\right)^{(i)}\right.\\
&\left.\times\left(\frac{(1-\rho_8)}{\rho_8}\sum_{m=1}^{\infty} m\rho_8^m\frac{1}{(\rho_8+m)}\right)^{-(n-i)}\right\},
\end{aligned}$$

em que os simbolos (i) e $(n-i)$ indicam a i-ésima e $(n-i)$-ésima derivadas, respectivamente.

A função geradora de probabilidade distribuição do tempo de espera na fila é dado por

$$\tilde{W}_q^5(s) = \frac{(1-\rho_8)s}{\lambda_2\tilde{B}_{min}^5(s) + s - \lambda_2}, \tag{4.70}$$

na qual temos que $s = \lambda_2(1 - z)$.

A distribuição de equilíbrio do tempo de espera na fila é

$$W^5(y) = (1 - \rho_8) \sum_{n=0}^{\infty} \rho_8^n \left(\int_0^y E(Y_{min})^{-1} \frac{(1 - \rho_8)e^{-\mu_2 t}}{(1 - \rho_8 e^{-\mu_2 t})} dt \right)^{[n]}, \tag{4.71}$$

no qual o símbolo $[n]$ indica a n-ésima convolução da distribuição MINGE, e $E(Y_{min})$ é dada pela Equação (4.65), assumindo-se $r = 1$, e substituindo-se ρ_2 por ρ_8.

As medidas de desempenho do modelo M/MINGE/1 são obtidas a partir das Equações (4.60), usando-se $E(Y_{min})$ e $E(Y_{min}^2)$ dadas pela Expressão (4.65), assumindo-se $r = 1$ e $r = 2$, repectivamente, e substituindo-se ρ_7 por ρ_8.

- Quando $\phi_2 = 1$, a distribuição MINCOMPE se reduz a distribuição Mínimo-Poisson-exponencial para o tempo de serviço, denotada por MINPE, e obtemos o modelo de fila M/MINPE/1.

  A função de densidade da distribuição MINPE é

  $$f_{Y_{min}}(y; \theta_{\mathbf{6}}) = \frac{\mu_2}{e^{\rho_2} - 1} \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_2^m}{(m!)} e^{-m\mu_2 y}, \tag{4.72}$$

  em que $y > 0$, $\theta_{\mathbf{6}} = (\rho_2, \mu_2)^T$ é o vetor de parâmetros do modelo MINPE, sendo que ρ_2 é o parâmetro de intensidade de tráfego e μ_2 é a taxa de serviço.

  A Equação (4.72) é reescrita da seguinte forma

  $$f_{Y_{min}}(y; \theta_{\mathbf{6}}) = \frac{\mu_2 \rho_2 e^{-\mu_2 y + \rho_2 e^{-\mu_2 y}}}{(e^{\rho_2} - 1)}. \tag{4.73}$$

  A função de distribuição MINPE é

  $$F_{Y_{min}}(y; \theta_{\mathbf{6}}) = \frac{e^{\rho_2} - e^{\rho_2 e^{-\mu_2 y}}}{(e^{\rho_2} - 1)}. \tag{4.74}$$

  A função de tempo restante da distribuição MINPE é

  $$W_{Y_{min}}(y; \theta_{\mathbf{6}}) = \frac{e^{\rho_2 e^{-\mu_2 y}} - 1}{(e^{\rho_2} - 1)}. \tag{4.75}$$

  O r-ésimo mosmento, $r = 1, 2 \ldots$, da distribuição MINPE é dado por

  $$E(Y_{min}^r) = \frac{\mu_2^{-r} \Gamma(r + 1)}{(e^{\rho_2} - 1)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho_2^m}{(m!)(m^r)}. \tag{4.76}$$

A taxa de ocupação do modelo de fila M/MINPE/1 é

$$\rho_9 = \lambda_2 E(Y_{min}), \tag{4.77}$$

em que $\rho_9 < 1$, λ_2 é a taxa de serviço e $E(Y_{min})$ é dado pela Equação (4.76) assumindo $r = 1$.

A probabilidade de que durante um serviço n usuários cheguem ao sistema é

$$k_n^6 = \frac{\lambda_2^n}{(e^{\rho_9} - 1)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\rho_9^m}{m!} \frac{\mu_2}{(\lambda_2 + \mu_2 m)^{n+1}}. \tag{4.78}$$

A correspondente função geradora é

$$K_{min}^6(z) = \frac{\mu_2}{(e^{\rho_9} - 1)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\rho_9^m}{m!} \frac{1}{(\lambda_2(1-z) + m\mu_2)} = \tilde{B}_{min}^6(\lambda_2(1-z)). \tag{4.79}$$

A função geradora de probabilidade é dada por

$$\Pi_{min}^6(z) = \frac{(1-\rho_9)\tilde{B}_{min}^6(\lambda_2(1-z))(1-z)}{\tilde{B}_{min}^6(\lambda_2(1-z)) - z}. \tag{4.80}$$

Temos,

$$\begin{aligned}
p_0^6 &= (1-\rho_9), \\
p_1^6 &= (1-\rho_9)\left\{ \frac{-\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_9^m}{m!}\frac{1}{(\rho_9+m)} + 1}{\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_9^m}{m!}\frac{1}{(\rho_9+m)}} \right\}, \\
&\vdots \\
p_n^6 &= (1-\rho_9)\left\{ \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{(e^{\rho_9}-1)} \sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_9^m}{m!}\frac{1}{(\rho_9+m)} \right)^{(i)} \right. \\
&\left. \times \left(\frac{1}{(e^{\rho_9}-1)} \sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_9^m}{m!}\frac{1}{(\rho_9+m)} \right)^{-(n-i)} \right\},
\end{aligned}$$

em que os simbolos (i) e $(n-i)$ indicam a i-ésima e $(n-i)$-ésima derivadas, respectivamente.

A função geradora do tempo de espera na fila é dada por

$$\tilde{W}_q^6(y) = \frac{(1-\rho_9)s}{\lambda_2 \tilde{B}_{min}^6(s) + s - \lambda_2}, \tag{4.81}$$

na qual $s = \lambda_2(1-z)$.

A distribuição de equilíbrio do tempo de espera na fila é

$$W_q^6(y) = (1-\rho_9)\sum_{n=0}^{\infty}\rho_9^n\left(\int_0^y E(Y_{min})^{-1}\frac{e^{\rho_9 e^{-\mu_2 t}}-1}{(e^{\rho_9}-1)}dt\right)^{[n]}, \qquad (4.82)$$

na qual $[n]$ indica a n-ésima convolução da distribuição MINPE, e $E(Y_{min})$ é dada pela Equação (4.76), assumindo-se $r = 1$, e substituindo-se ρ_2 por ρ_9.

As medidas de desempenho do modelo M/MINPE/1 são obtidas a partir das Equações (4.60), usando $E(Y_{min})$ e $E(Y_{min}^2)$ dadas pela Expressão (4.76), assumindo-se $r = 1$ e $r = 2$, respectivamente, e substituindo-se ρ_7 por ρ_9.

- Quando $\phi_2 \to \infty$, a distribuição MINCOMPE é convertida na distribuição Mínimo-Bernoulli-exponencial para o tempo de serviço, denotada por MINBE, esta distribuição é a mesma descrita anteriormente para o modelo de fila M/M/1.

4.2.1 Estimação pelo método de máxima verossimilhança

Seguindo o mesmo planejamento descrito anteriormente, temos a amostra aleatória $\tau = (B_1, \ldots, B_{n_a}; Z_1, \ldots Z_{n_s})^T$, consistindo do tempo entre as chegadas B_i do $(i-1)$-ésimo ao i-ésimo usuário, $i = 1, \ldots, n_a$, e dos tempos de serviços completados Z_j, do j-ésimo usuário,$j = 1, \ldots, n_s$, em que n_a é o número total de tempos entre chegadas e n_s é o número total de serviços completados.

Assim, o logaritmo da função de verossimilhança do modelo M/MINCOMPE/1 é dado pela soma do logaritmo da função de densidade da distribuição exponencial com parâmetro λ_2, que descreve os tempos entre as chegadas, mais o logaritmo da função de densidade da distribuição MINCOMPE, que descreve os tempos de serviço. Desta forma, considerando a amostra aleatória $(B_1, \ldots, B_{n_a}; Z_1, \ldots, Z_{n_s})^T$, a função do logaritmo da verossimilhança é

$$\begin{aligned}\ell_{min}(\theta_{\mathbf{4}}, \lambda_1) &= n_a \log\lambda_2 - \lambda_2 T_a - n_s \log[Z(\rho_2, \phi_2) - 1] + n_s \log\mu_2 \\ &+ \sum_{i=1}^{n_s}\log\left[\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}}e^{-m\mu_2 z_i}\right], \qquad (4.83)\end{aligned}$$

em que $\theta_{\mathbf{4}} = (\rho_2, \mu_2, \phi_2)^T$ é o vetor de parâmetros do modelo MINCOMPE, n_a é o número total de tempos entre chegadas, $T_a = \sum_{i=1}^{n_a} b_i$ tempo total entre as chegadas, n_s tempo total de serviços completados.

Os elementos da função (ou vetor) escore $U = (U_{\lambda_2}, U_{\rho_2}, U_{\mu_2}, U_{\phi_2})$ são dados por:

$$
\begin{aligned}
U_{\lambda_2} &= \frac{n_a}{\lambda_2} - T_a, \\
U_{\rho_2} &= -\frac{n_s}{[Z(\rho_2,\phi_2)-1]} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\rho_2^{m-1}}{(m!)^{\phi_2}} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n_s} \left\{ \left[\sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}} e^{-m\mu_2 z_i} \right]^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \rho_2^{m-1}}{(m!)^{\phi_2}} e^{-m\mu_2 z_i} \right\}, \\
U_{\mu_2} &= \frac{n_s}{\mu_2} + \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left[\sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}} e^{-m\mu_2 z_i} \right]^{-1} \right. \\
&\quad \left. \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}} m^2 z_i e^{-m\mu_2 z_i} \right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{\phi_2} &= \frac{n}{[Z(\rho_2,\phi_2)-1]} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho_2^m \log(m!)}{(m!)^{\phi_2}} - \sum_{i=1}^{n_s} \left\{ \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}} e^{-m\mu_2 z_i} \right]^{-1} \right. \\
&\quad \left. \times \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_2^m \log(m!)}{(m!)^{\phi_2}} e^{-m\mu_2 z_i} \right\}.
\end{aligned}
$$

Casos particulares do logaritmo da função de verossimilhança do modelo de fila M/MINCOMPE/1, quando $\phi_2 = 0, 1$ e $\phi_2 \to \infty$ são descritos a seguir:

- O logaritmo da função de verossimilhança do modelo de fila M/MINGE/1, que é descrito pela soma do logaritmo da função de densidade da distribuição exponencial com parâmetro λ_2, para o tempo entre as chegadas, mais logaritmo da função de densidade da distribuição MINGE, para os tempos de serviços completados, que é dado por

$$
\begin{aligned}
\ell_{min}(\theta_{\mathbf{5}}, \lambda_2) &= n_a \log \lambda_2 - \lambda T_a + n_s \log \mu_2 - \mu_2 T_s \\
&+ n_s \log(1-\rho_2) - 2 \sum_{i=1}^{n_s} \log(1 - \rho_2 e^{-\mu_2 z_i}), \qquad (4.84)
\end{aligned}
$$

  em que $\theta_{\mathbf{5}} = (\rho_2, \mu_2)^T$ é o vetor de parâmetros do modelo MINGE, n_a é o número total de tempos entre chegadas, T_a tempo total entre as chegadas, n_s número total de serviços completados e T_s tempo total de serviços completados.

Os elementos da função (ou vetor) escore $U = (U_{\lambda_2}, U_{\rho_2}, U_{\mu_2})$ são dados por:

$$U_{\lambda_2} = \frac{n_a}{\lambda_2} - T_a,$$

$$U_{\rho_2} = -\frac{n_s}{(1-\rho_2)} - 2\sum_{i=1}^{n_s} \frac{e^{-\mu_2 z_i}}{(1-\rho_2 e^{-\mu_2 z_i})},$$

$$U_{\mu_2} = \frac{n_s}{\mu_2} - T_a + T_s - 2\sum_{i=1}^{n_s} \frac{z_i \rho_2 e^{-\mu_2 z_i}}{(1-\rho_2 e^{-\mu_2 z_i})}.$$

- O logaritmo da função de verossimilhança do modelo de fila M/MINPE/1, é dado pelo logaritmo da função de densidade da distribuição exponencial com parâmetro λ_2, para os tempos entre as chegadas, mais logaritmo da função de densidade da distribuição MINPE, para os tempos de serviços completados, que é

$$\begin{aligned} \ell_{min}(\theta_{\mathbf{6}}, \lambda_2) &= n_a \log \lambda_2 - \lambda_2 T_a + n_s \log \rho_2 + n_s \log \mu_2 \\ &- \mu_2 T_s + \rho_2 \sum_{i=1}^{n_s} e^{-\mu_2 z_i} - n_s \log(e^{\rho_2} - 1), \end{aligned} \tag{4.85}$$

em que $\theta_{\mathbf{6}} = (\rho_2, \mu_2)^T$ é o vetor de parâmetros do modelo MINPE, n_a é o número total de tempos entre chegadas, T_a tempo total entre as chegadas, n_s tempo total de serviços completados e T_s tempo total de serviços completados.

Os elementos da função (ou vetor) escore $U = (U_{\lambda_2}, U_{\rho_2}, U_{\mu_2})$ são dados por:

$$U_{\lambda} = \frac{n_a}{\lambda_2} - T_a,$$

$$U_{\rho} = \frac{n_s}{\rho_2} + \sum_{i=1}^{n_s} e^{-\mu_2 z_i} + n_s \frac{e^{\rho_2}}{(e^{\rho_2} - 1)},$$

$$U_{\mu} = \frac{n_s}{\mu_2} - T_s - \rho \sum_{i=1}^{n_s} z_i e^{-\mu_2 z_i}.$$

- O logaritmo da função de verossimilhança do modelo de fila M/ MINBE/1 é o mesmo descrito anteriormente para o modelo M/M/1.

4.3 Resultados numéricos

Para ilustrar os modelos propostos neste capítulo usamos dados simulados e dados reais. Os dados simulados foram obtidos a partir de um programa desenvolvido no *software*

R, e os dados reais são de um caixa rápido de um supermercado de porte médio da cidade de São Carlos.

4.3.1 Simulações

Simulamos dois conjuntos de dados segundo o modelo de fila M/MINGE/1, com vetor de parâmetros de entrada dado por $(\lambda_2, \rho_2, \phi_2)^T$ assumindo os seguintes valores: $(0,8; 0,8; 0)^T$ e $(0,9; 0,9; 0)^T$. Como podemos observar, a partir dos valores de ρ_2, que as simulações indicam altas taxas de ocupação com 80% e 90% do tempo ocupado.

Como critério de parada das simulações usamos $n_a = n_s = 100$, isto é, o número total de tempos entre chegadas sendo igual ao número total de serviços completados.

Na Tabela 4.1, mostramos resumo descritivo das simulações. Podemos observar que com o aumento da intensidade de tráfego, que o tempo de serviço diminui e a variabilidade do sistema aumenta. Podemo observar que existe uma pequena diferença nas simulações, isto ocorre, devido a grande intensidade de tráfego que faz com que os tempos de serviços sejam próximos.

Tabela 4.1: Resumo dos dados simulados.

ρ_2	Média	Mediana	Máximo	Mínimo	Desvios-padrão
0,8	1,203	0,806	8,24	0,003	1,270
0,9	1,260	0,741	8,09	0,00016	1,488

Supondo que não temos informações sobre os dados gerados, podemos utilizar os modelos de fila M/MAXCOMPE/1 e M/MINCOMPE/1 para obtermos estas informações. Para isso, geramos 1.000 sistemas segundo o modelo de fila M/MINGE/1 com os mesmos parâmetros já citados, e aplicamos os modelos M/MAXCOMPE/1 e M/MINCOMPE/1, e assim, calculamos a média das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros e seus desvios-padrão (dp). As estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros foram obtidas numericamente usando o *gmalss* (Rigby and Stasinopoulos (2005)).

Nas Tabelas 4.2 e 4.3, mostramos estas estimativas médias dos parâmetros dos modelos. Podemos observar que não existe grande variabilidade nas estimativas. Notamos também, que os parâmetros ϕ_i, $i = 1, 2$, assumem valores próximos de zero em ambos os

modelos, isto mostra, que os possíveis modelos que descreverão os dados são M/MAXGE/1 e M/MINGE/1. Supondo que desconhecemos o modelo cujo dados foram gerados.

Tabela 4.2: Estimativas médias de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo de fila M/MAXCOMPE/1 e seus desvios-padrão (dp).

	$\hat{\rho_1}$	dp	$\hat{\lambda_1}$	dp	$\hat{\mu_1}$	dp	$\hat{\phi_1}$	dp
$\rho_1 = 0,8$	0,81	0,09	0,79	0,10	1,02	0,12	0,00001	0,02
$\rho_1 = 0,9$	0,92	0,14	0,89	0,15	1,03	0,19	0,00002	0,01

Tabela 4.3: Estimativas médias de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo de fila M/MINCOMPE/1 e seus desvios-padrão (dp).

	$\hat{\rho_2}$	dp	$\hat{\lambda_2}$	dp	$\hat{\mu_2}$	dp	$\hat{\phi_2}$	dp
$\rho_2 = 0,8$	0,790	0,16	0,78	0,13	0,978	0,15	0,00001	0,03
$\rho_2 = 0,9$	0,881	0,13	0,92	0,19	0,989	0,09	0,00002	0,01

Simulamos 1.000 amostras de tamanhos diferentes dos dois modelos M/MINGE/1, e assim, verificamos a performance das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros usando os modelos M/MAXCOMPE/1 e M/MINCOMPE/1. Consideramos os seguintes tamanhos de amostra (n):50, 250, 500, 700, e 1.000. Calculamos as médias das estimativas e os vícios dos modelos.

Nas Tabelas 4.4, 4.5, 4.6 e 4.7, mostramos estas estimativas médias e os vícios das estimativas dos parâmetros para cada modelo. Notamos que os vícios das estimativas de máxima verossimilhança diminuem quando n cresce em ambos modelos, e observamos que os parâmetros de pressão assumem valores próximos de zero.

Nas Figuras 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4, mostramos a adequabilidade das distribuições MAXGE e MINGE a partir da comparação de suas funções de confiabilidade com a função de tempo restante estimada pelo método de Kaplan-Meier. Podemos observar que as funções de confiabilidade destas distribuições se mostram em concordância com a função de tempo restante estimada.

As curvas de confiabilidade podem dar uma ideia das diferenças ou igualdades das distribuições, mas não revelam se as diferenças são significativas ou não, sendo assim, usamos os testes Log-rank e Quiquadrado. Em ambos, testamos a hipótese nula (H_0), de

que não existe diferença entre as curvas.

Simulamos 1.000 modelos M/MAXGE/1 e M/MINGE/1 com diferentes tamanhos, e aplicamos os testes Log-rank e Quiquadrado para cada uma das amostras, e obtivemos a porcentagem de concordância destes testes.

Nas Tabelas 4.8 e 4.9 mostramos estas porcentagens de concordância dos testes. Podemos observar que a medida que o tamanho da amostra e a intensidade de tráfego aumentam também aumenta a concordância dos testes.

Tabela 4.4: Estudo de simulação das estimativas médias dos parâmetros do modelo M/MAXCOMPE/1 para λ_1, $\rho_1 = 0,8$, $\mu_1 = 1,0$ e $\phi_1 = 0$.

Amostra (n)	50				250				500			
	$\hat{\lambda_1}$	$\hat{\rho_1}$	$\hat{\mu_1}$	$\hat{\phi_1}$	$\hat{\lambda_1}$	$\hat{\rho_1}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\phi_1}$	$\hat{\lambda_1}$	$\hat{\rho_1}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\phi_1}$
Média amostral	0,71	0,72	0,97	0,0002	0,75	0,76	0,98	0,0001	0,78	0,79	0,99	0,0003
Variância	1,3	1,21	1,31	0,001	0,90	0,60	0,14	0,002	0,80	0,30	0,05	0,001
Vício	0,09	0,08	0,03	-0,0002	0,05	0,04	0,02	-0,0001	0,02	0,01	0,01	-0,0003

Amostra (n)	700				1,000			
	$\hat{\lambda_1}$	$\hat{\rho_1}$	$\hat{\mu_1}$	$\hat{\phi_1}$	$\hat{\lambda_1}$	$\hat{\rho_1}$	$\hat{\mu_1}$	$\hat{\phi_1}$
Média amostral	0,81	0,82	0,99	0,00001	0,82	0,80	1,02	0,00001
Variância	0,050	0,064	0,0026	0,002	0,0001	0,009	0,0027	0,0001
Vício	-0,01	-0,02	0,01	-0,0001	-0,02	0,0	-0,02	-0,00001

Tabela 4.5: Estudo de simulação das estimativas médias dos parâmetros do modelo M/MAXCOMPE/1 para $\lambda_1 = 0,9$, $\rho_1 = 0,9$, $\mu_1 = 0,9$ e $\phi_1 = 0$.

Amostra (n)	50				250				500			
	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\rho}_1$	$\hat{\mu}_1$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\rho}_1$	$\hat{\mu}_1$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\rho}_1$	$\hat{\mu}_1$	$\hat{\phi}_1$
Média Amostral	0,79	0,82	0,97	0,0001	0,82	0,86	0,99	0,0001	0,89	0,91	0,98	0,00002
Variância	1,10	1,21	1,31	0,001	0,98	0,60	0,14	0,001	0,63	0,10	0,07	0,0001
Vício	0,11	0,08	0,03	-0,0001	0,08	0,04	0,01	-0,0001	0,01	-0,01	0,02	-0,00002

Amostra (n)	700				1,000			
	$\hat{\rho}_1$	$\hat{\mu}_1$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\rho}_1$	$\hat{\mu}_1$	$\hat{\phi}_1$	
Média Amostral	0,93	0,92	0,99	0,00001	0,93	0,91	1,01	0,00001
Variância	0,30	0,026	0,005	0,0001	0,1	0,010	0,0023	0,00001
Vício	-0,03	-0,02	0,01	-0,00001	-0,03	-0,01	-0,1	-0,00001

Tabela 4.6: Estudo de simulação das estimativas médias dos parâmetros do modelo de fila M/MINCOMPE/1 para $\lambda_2 = 0,8$, $\rho_2 = 0,8$, $\mu_2 = 1,0$ e $\phi_2 = 0$.

Amostra (n)	50				250				500			
	$\hat{\lambda_2}$	$\hat{\rho_2}$	$\hat{\mu_2}$	$\hat{\phi_2}$	$\hat{\lambda_2}$	$\hat{\rho_2}$	$\hat{\mu_2}$	$\hat{\phi_2}$	$\hat{\lambda_2}$	$\hat{\rho_2}$	$\hat{\mu_2}$	$\hat{\phi_2}$
Média amostral	0,69	0,70	0,99	0,0002	0,71	0,72	0,98	0,0001	0,79	0,81	0,99	0,0001
Variância	1,02	1,06	1,61	0,001	1,0	0,91	0,66	0,002	0,99	0,17	0,09	0,001
Vício	0,11	0,01	0,01	-0,0002	0,09	0,08	0,02	-0,0001	0,01	-0,01	0,01	-0,0001

Amostra (n)	700				1,000			
	$\hat{\lambda_2}$	$\hat{\rho_2}$	$\hat{\mu_2}$	$\hat{\phi_2}$	$\hat{\lambda_2}$	$\hat{\rho_2}$	$\hat{\mu_2}$	$\hat{\phi_2}$
Média amostral	0,81	0,81	0,99	0,00001	0,81	0,82	0,99	0,00001
Variância	0,81	0,018	0,009	0,001	0,82	0,001	0,007	0,001
Vício	-0,01	-0,01	0,01	-0,0001	-0,01	-0,02	0,01	-0,00001

Tabela 4.7: Estudo de simulação das estimativas médias dos parâmetros do modelo de fila M/MINCOMPE/1 para $\lambda_2 = 0,9$, $\rho_2 = 0,9$, $\mu_2 = 1,0$ e $\phi_2 = 0$.

Amostra (n)	50				250				500			
	$\hat{\lambda_2}$	$\hat{\rho_2}$	$\hat{\mu_2}$	$\hat{\phi_2}$	$\hat{\lambda_2}$	$\hat{\rho_2}$	$\hat{\mu_2}$	$\hat{\phi_2}$	$\hat{\lambda_2}$	$\hat{\rho_2}$	$\hat{\mu_2}$	$\hat{\phi_2}$
Média amostral	0,72	0,74	0,83	0,0002	0,78	0,80	0,99	0,0001	0,82	0,84	0,99	0,0001
Variância	1,12	1,36	1,90	0,001	1,07	0,90	0,89	0,002	1,02	1,03	0,017	0,001
Vício	0,18	0,16	0,17	-0,0002	0,12	0,10	0,01	-0,0001	0,08	0,06	0,01	-0,0001

Amostra (n)	700				1,000			
	$\hat{\lambda_2}$	$\hat{\rho_2}$	$\hat{\mu_2}$	$\hat{\phi_2}$	$\hat{\lambda_2}$	$\hat{\rho_2}$	$\hat{\mu_2}$	$\hat{\phi_2}$
Média amostral	0,88	0,92	0,99	0,00001	0,90	0,89	1.01	0,00001
Variância	0,09	0,90	0,911	0,017	0,89	0,87	0,78	0,001
Vício	0,02	0	0,01	-0,00001	0	0,01	-0,01	-0,00001

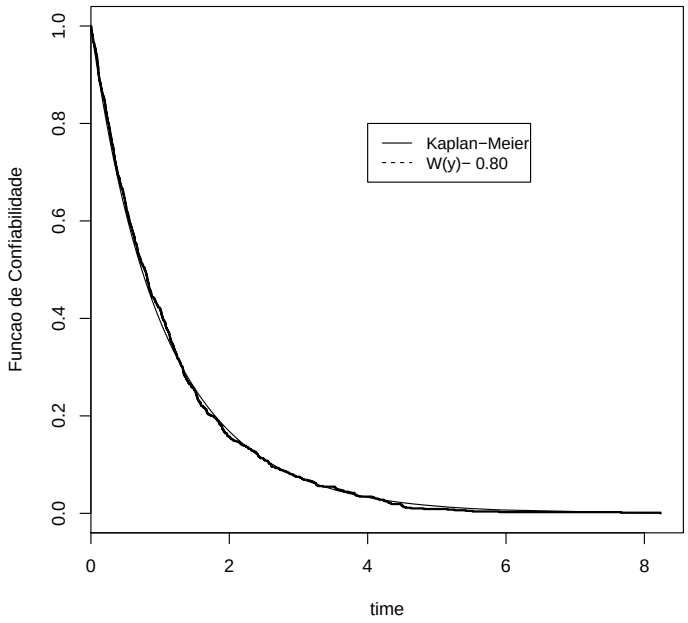

Figura 4.1: Comparando a função de tempo restante da distribuição MAXGE e a função de tempo restante estimada com intensidade de tráfego $\rho_1 = 0,8$.

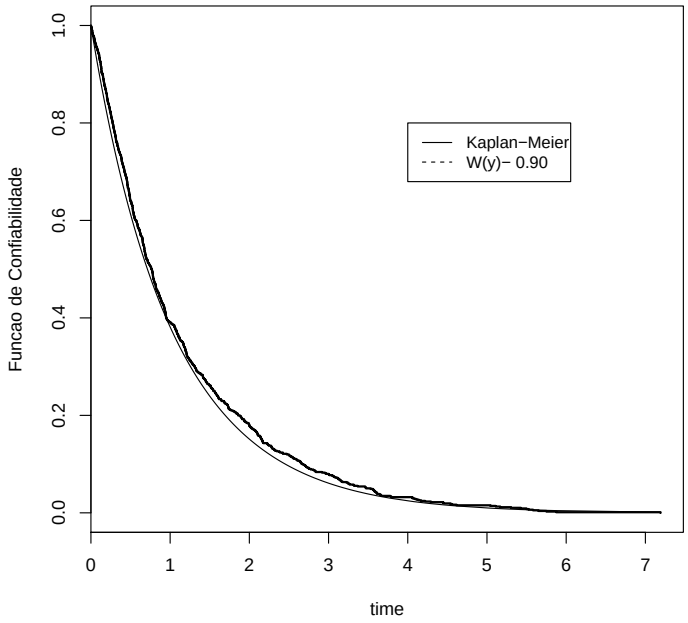

Figura 4.2: Comparando a função de tempo restante da distribuição MAXGE e a função de tempo restante estimada com intensidade de tráfego $\rho_1 = 0,9$.

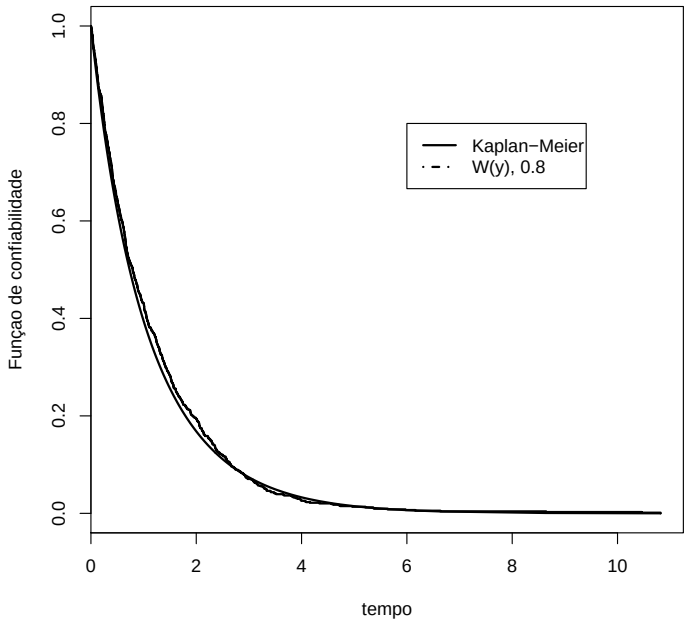

Figura 4.3: Comparando a função de tempo restante da distribuição MINGE e a função de tempo restante estimada com intensidade de tráfego $\rho_2 = 0,8$.

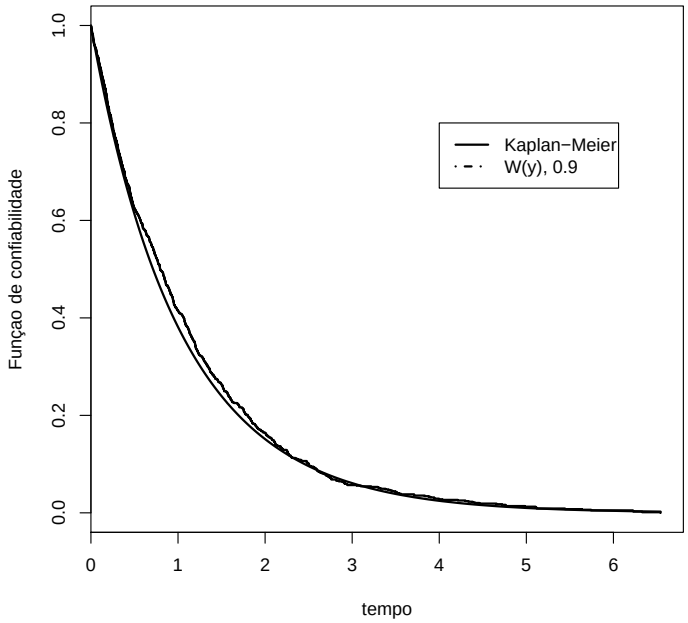

Figura 4.4: Comparando a função de tempo restante da distribuição MINGE e a função de tempo restante estimada com intensidade de tráfego $\rho_2 = 0,9$.

Tabela 4.8: Porcentagem de concordância dos testes Log-rank e Quiquadrado para o modelo de fila M/MAXGE/1

	Log rank (%)			**Quiquadrado**(%)		
Amostra (n)	$\rho_1 = 0,75$	$\rho_1 = 0,80$	$\rho_1 = 0,90$	$\rho_1 = 0,75$	$\rho_1 = 0,80$	$\rho_1 = 0,90$
500	60,2	57,5	62,1	65,4	60,1	66,7
1.000	61,0	62,0	60,0	75,0	70,0	72,0
10.000	78,1	70,0	72,0	80,0	83,4	84,0

Tabela 4.9: Porcentagem de concordância dos testes Log-rank e Quiquadrado para o modelo de fila M/MINGE/1.

	Log rank (%)			**Quiquadrado**(%)		
Amostra (n)	$\rho_2 = 0,75$	$\rho_2 = 0,80$	$\rho_2 = 0,90$	$\rho_2 = 0,75$	$\rho_2 = 0,80$	$\rho_2 = 0,90$
500	56,42	57,53	59,0	69,0	64,0	68,0
1.000	57,93	60,0	65,0	70,0	71,0	79,0
10.000	77,50	75,0	79.0	83,0	86,4	87,0

Na Tabela 4.10 mostramos as estimativas de $\widehat{E}(Y_{max})$ e $\widehat{E}(Y_{min})$ das simulações. Os valores são próximos, pois os sistemas simulados possuem tempos de serviço muito próximos, não havendo grande diferença entre o máximo e mínimo tempos de serviço.

Tabela 4.10: As estimativas de $\widehat{E}(Y_{max})$ e $\widehat{E}(Y_{min})$ modelos M/MAXGE/1 e M/MINGE/1.

Intensidade de tráfego	$0,80$	$0,90$
$\widehat{E}(Y_{max})$	0,975	0,998
$\widehat{E}(Y_{min})$	0,890	0,950

Na Tabela 4.11, mostramos as novas taxas de ocupação dos modelos de fila M/MAXGE/1 e M/MINGE/1. Observamos que as taxas de ocupação dados por ρ_4 e ρ_8 dos modelos de fila M/MAXGE/1 e M/MINGE/1, respectivamente, são menores que as taxas cujos dados foram gerados, mostrando a rapidez dos servidores destes modelos.

Tabela 4.11: Taxas de ocupação dos modelos de fila M/MAXGE/1 e M/MINGE/1.

Taxa de ocupação	$0,8$	$0,9$
ρ_4	0,78	0,898
ρ_8	0,712	0,855

Na Tabela 4.12, mostramos as medidas de desempenho de cada modelo de filas, usando as novas taxas de ocupação e comparamos com o modelo de fila M/M/1. Observamos que os tempos médios de espera na fila (W_q) dos modelos estudados são baixos em comparação com o do modelo de fila M/M/1, assim como, o número médio de usuários na fila (L_q) e no sistema (L).

Tabela 4.12: Medidas de desempenho dos modelos de fila M/MAXGE/1, M/MINGE/1 e M/M/1.

	M/MAXGE/1		**M/MINGE/1**		**M/M/1**			
	0,810	0,920	0,790	0,881	0,810	0,920	0,790	0,881
L_q	0,78	1,43	0,51	0,97	3,453	10,58	2,97	7,283
W_q	0,96	1,59	0,63	1,11	4,26	12,50	3,76	9,90
L	1,59	2,337	1,32	1,65	4,25	11,50	3,760	7,283
W	1,96	2,59	1,63	1,91	5,263	11,5	4,780	9,174

Na Tabela 4.13, comparamos os modelos M/MAXGE/1, M/MINGE/1 e $M/M/1$ usando os critérios AIC e BIC, para que possamos selecionar o modelo que melhor se adequa aos dados. Observamos que o modelo M/MINGE/1 possui o menor valor nestes critérios. Optamos por mostrar somente a comparação dos modelos com intensidade de tráfego $0,8$, pois com intensidade de tráfego $0,9$ os modelos apresentam o mesmo comportamento.

Tabela 4.13: Valores dos critérios AIC e BIC

Modelos	**AIC**	**BIC**
M/MINGE/1	240,39	249,76
M/MAXGE/1	241,35	249,87
M/M/1	288,65	265,09

Para a simulação do modelo M/M/1 usamos os seguintes parâmetros de entrada $\lambda = 0,8$ e $\mu = 1,0$, e para o modelo M/MAXGE/1 usamos os mesmos parâmetros do modelo M/MINGE/1.

4.3.2 Caixa rápido de supermercado

Usamos os dados de uma pesquisa sobre o tempo de atendimento nos caixas de um supermercado de porte médio da cidade de São Carlos. O supermercado possui 10 caixas normais e 3 caixas rápidos. A coleta dos dados foi feita durante um mês, e, em um particular dia da semana, um dos caixas rápidos apresentou a mesma característica dos sistemas estudados neste trabalho, ou seja, rapidez no atendimento. Neste caixa, foram coletados 88 tempos de serviço e tempos entre chegadas, $n_a = n_s = 88$, no período das 9:00 horas às 11:00 horas (dados cedidos pelo Prof. Dr. José Gilberto Spasiani Rinaldi da UNESP de Presidente Prudete).

Para verificar se a amostra dos tempos de serviço são de uma população com distribuição exponencial (H_0), usamos o teste Kolmogorov-Smirnov a um nivel de significância de 0.05 apresentando p-valor=0.3497, e assim a hipótese nula não foi rejeitada.

Na Tabela 4.14, apresentamos um resumo descritivo dos tempos de serviço em minutos. Observamos que o menor tempo de serviço foi de 1,6 minutos, e o maior de 5,93 minutos.

Tabela 4.14: Resumo dos dados do caixa rápido em minutos.

Média	Mediana	Máximo	Mínimo	Desvio-padrão
1,12	1,05	5,93	1,6	0,95

Nas Tabelas 4.15 e 4.16, apresentamos as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros dos modelos e seus desvios-padrão. Estas estimativas foram obtidas a partir dos modelos de fila M/MAXCOMPE/1 e M/MINCOMPE/1 e usamos o pacote *gmalss* do software R (Rigby and Stasinopoulos (2005)). Observamos que as estimativas dos parâmetros de pressão, ϕ_i, $i = 1, 2$, dos modelos, estão próximas de um, sendo assim, os dados sugerem como possíveis modelos que poderão descrevê-los são os modelos de fila M/MAXPE/1 e M/MINPE/1.

Tabela 4.15: Estimativas de máxima verossimilhança usando o modelo M/MAXCOMPE/1.

Estimativas	$\hat{\lambda_1}$	$\hat{\rho}_1$	$\hat{\mu}_1$	$\hat{\phi}_1$
	0,88	0,92	1,01	1,002

Tabela 4.16: Estimativas de máxima verossimilhança usando o modelo M/MINCOMPE/1.

Estimativas	$\hat{\lambda_2}$	$\hat{\rho}_2$	$\hat{\mu}_2$	$\hat{\phi}_2$
	0,87	0,887	0,98	1,010

Nas Figuras 4.5 e 4.6, comparamos as funções de confiabilidade das distribuições de serviço MAXPE, MINPE e a função de tempo restante estimada. A partir destas figuras, observamos a concordância entre as funções de tempo restante das distribuições e a função de tempo restante estimada pelo estimador de Kaplan-Meier.

Calculamos as estimativas $\widehat{E}(Y_{max})$ e $\widehat{E}(Y_{min})$ das distribuições de serviço MAXPE e MINPE, respectivamente. Obtendo os seguintes valores, $\widehat{E}(Y_{max}) = 0,99$ minutos e $\widehat{E}(Y_{min}) = 0,97$ minutos. Esse cálculo foi feito usando um programa desenvolvido no *software* R.

As taxas de ocupação dos modelos de fila M/MAXPE/1 e M/MINPE/1 são dadas por, $\rho_5 = 0,871$ e $\rho_9 = 0,834$, respectivamente. As novas taxas mostram que ocorreu uma diminuição na ocupação do sistema, quando comparadas com as taxas estimadas, e isto ocorreu em ambos modelos.

Com os valores das taxas de ocupação atualizados, podemos obter as medidas de desempenho dos modelos. As medidas de desempenho dos modelos propostos, mostram que o servidor dos modelos é rápido, o tempo de espera na fila e no sistema é baixo, assim como o número de usuários na fila e no sistema. Estes modelos se mostram mais realistas do que o modelo M/M/1, o qual superestima as medidas de desempenho.

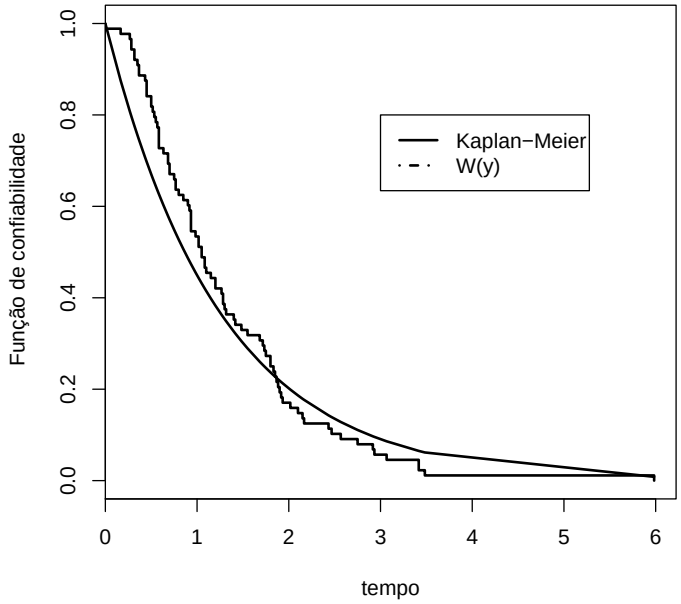

Figura 4.5: Comparando a função de tempo restante da distribuição MAXPE e a função de tempo restante estimada.

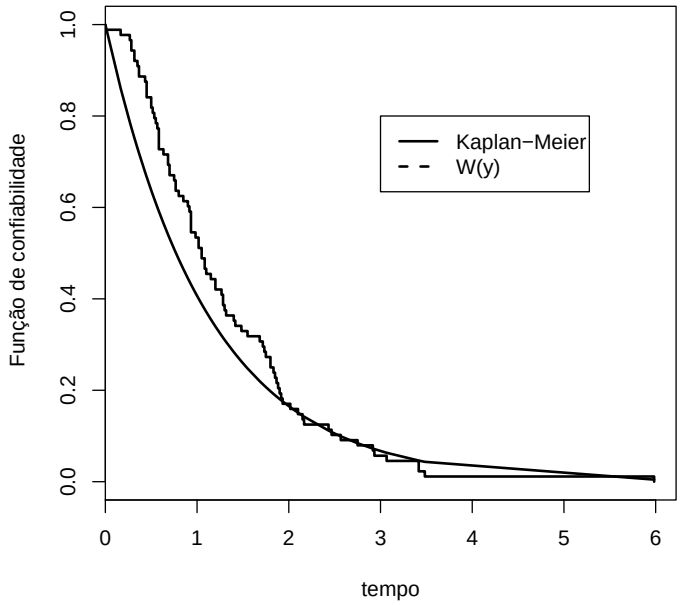

Figura 4.6: Comparando a função de tempo restante da distribuição MINPE e a função de tempo restante estimada.

Tabela 4.17: Medidas de desempenho dos modelos de fila M/MAXPE/1, M/MINPE/1 e M/M/1.

	M/MAXPE/1	**M/MINPE/1**	**M/M/1**
L_q	1,5	1,18	3,01
W_q	1,90	1,79	3,40
L	1,51	1,39	3,01
W	2,4	2,12	4,43

Comparamos os modelos de fila M/MAXPE/1, M/MINPE/1 e $M/M/1$ a partir dos valores dos critérios AIC e BIC.

Na Tabela 4.18 comparamos os modelos de fila M/MAXPE/1, M/MINPE/1 e M/M/1 usando os valores dos critérios AIC e BIC. E Observamos que o menor valor destes critérios é dado pelos modelo M/MINPE/1.

Tabela 4.18: Valores dos critérios AIC e BIC

Modelos	**AIC**	**BIC**
M/MAXPE/1	8,06	4,11
M/MINPE/1	7,30	2,34
M/M/1	8,12	5,10

4.4 Comentários finais

Neste capítulo apresentamos os modelos M/MAXCOMPE/1 e M/MINCOMPE/1, que são casos particulares dos modelos de fila M/MAXCOMPG/1 e M/MINCOMPG/1, respectivamente. Para cada um dos modelos propostos apresentamos as distribuições de equilíbrio do número de usuários no sistema, do tempo de espera na fila, assim como as medidas de desempenho.

Mostramos a aplicabilidade dos modelos de fila usando dois conjuntos de dados simulados, e um conjunto de dados reais de um caixa rápido de um supermercado da cidade de São Carlos.

Capítulo 5

Modelos de fila M/MAXCOMPW/1 e M/MINCOMPW/1

Neste capítulo relaxamos, a suposição da distribuição exponencial como distribuição geral e adotamos as distribuições Máximo-Conway-Maxwell-Poisson-Weibul e Mínimo-Conway-Maxwell-Poisson-Weibull. Assim sendo, surgem novas distribuições para o máximo e o mínimo tempos de serviço, denominadas de distribuições MAXCOMPW e MINCOMPW, respectivamente. Desta forma, temos novos modelos de filas, que foram denotadas de M/MAXCOMPW/1 e M/MINCOMPW/1. Estes modelos têm as mesmas características dos modelos de fila descritos no Capítulo 4, diferenciando-se pela distribuição do tempo de serviço.

Suponha que $Y_1, Y_2, \ldots$ sejam variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas com distribuição Weibull, e portanto, função de densidade de Y_i é dada por

$$f_Y(y_i; \mu, k) = k\mu^k y_i^{k-1} e^{-(\mu y_i)^k}, \tag{5.1}$$

em que y_i é o tempo de serviço do i-ésimo usuário, μ é o parâmetro de escala e k é o parâmetro de forma.

5.1 Modelo de fila M/MAXCOMPW/1

O modelo de fila M/MAXCOMPW/1 possui distribuição de serviço dada pela distribuição MAXCOMPW.

E a função de densidade da distribuição MAXCOMPW é obtida a partir da Expressão (3.4) e a correspondente substituição relacionadas à distribuição Weibull, e escrita na forma

$$f_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{1}}) = \frac{1}{[Z(\rho_1,\phi_1)-1]}\mu_1^k k_1 y_1^{k_1-1} e^{-(\mu_1 y)^{k_1}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}} (1-e^{-(\mu_1 y)^{k_1}})^{m-1}, \qquad (5.2)$$

em que $\theta_{\mathbf{1}} = (\rho_1, \mu_1, k_1, \phi_1)^T$ é o vetor de parâmetros do modelo MAXCOMPW, μ_1 é o parâmetro de escala, $k_1 > 0$ é o parâmetro de forma, ϕ_1 é o parâmetro de pressão e $\rho_1 < 1$ mede a intensidade de tráfego.

A função de distribuição MAXCOMPW é

$$F_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{1}}) = \frac{[Z(\rho_1(1-e^{-(\mu_1 y)^{k_1}}),\phi_1)-1]}{[Z(\rho_1,\phi_1)-1]}. \qquad (5.3)$$

A correspondente função do tempo restante da distribuição MAXCOMPW é, então escrita da seguinte forma

$$W_{Y_{max}}(y,\theta_{\mathbf{1}}) = \frac{Z(\rho_1,\phi_1) - Z(\rho_1(1-e^{-(\mu_1 y)^{k_1}}),\phi_1)}{[Z(\rho_1,\phi_1)-1]}. \qquad (5.4)$$

O r-ésimo momento, $r = 1, 2, \ldots$, da distribuição MAXCOMPW é dado por

$$\begin{aligned}
E(Y_{max}^r) &= \frac{1}{[Z(\rho_1,\phi_1)-1]} \left[\sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}} \right. \\
&\left. \times \int_0^{\infty} y^r k_1 \mu_1^{k_1} y^{k_1-1} e^{-(\mu_1 y)^{k_1}} (1-e^{-(\mu_1 y)^{k_1}})^{m-1} dy \right] \\
&= \frac{1}{[Z(\rho_1,\phi_1)-1]} \left[\sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}} \sum_{\delta_1=0}^{m-1} (-1)^{\delta} \binom{m-1}{\delta} \right. \\
&\left. \times \int_0^{\infty} y^r \mu_1^{k_1} y^{k_1-1} e^{-(\mu_1 y)^{k_1}((1-\delta)^{1/k_1})^{k_1}} \right] dy \\
&= \frac{\mu_1^{-r}\Gamma(\frac{r}{k_1}+1)}{[Z(\rho_1,\phi_1)-1]} \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}} \sum_{\delta=0}^{m-1} (-1)^{\delta} \binom{m-1}{\delta} \frac{1}{(1-\delta)^{r/k_1+1}}, \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

a Equação (5.5) foi calculada a partir de um programa desenvolvido no software R, e truncado a série $\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}}$, em que este procedimento é dado no Apêndice .2.

As distribuições de equilibrio do número de usuários no sistema e do tempo de espera na fila são dadas a seguir:

A taxa de ocupação do modelo de fila M/MAXCOMPW/1 é

$$\rho_3 = \lambda_1 E(Y_{max}), \tag{5.6}$$

em que $\rho_3 < 1$, λ_1 é a taxa de chegada e $E(Y_{max})$ é dada pela Expressão (5.5), assumindo-se $r = 1$.

A probabilidade de que durante um serviço, n usuários cheguem ao sistema é

$$k_n = \frac{\lambda_1^n}{n!} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\lambda_1^j}{j!} E(Y_{max}^{n+j}), \tag{5.7}$$

em que escrevemos $e^{\lambda_1 y} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 y)^j}{j!}$, e $E(Y_{max}^{n+j})$ é dada pela Equação (5.5), assumindo-se $r = n + j$, esubstituindo-se ρ_1 por ρ_3.

A correspondete função geradora é dada por

$$K_{max}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(\lambda_1(1-z))^j}{j!} E(Y_{max}^j) = \tilde{B}_{max}(\lambda_1(1-z)), \tag{5.8}$$

sendo que $E(Y_{max}^j)$ é dada pela Expressão (5.5), assumindo-se $r = j$, e substituindo-se ρ_1 por ρ_3.

A expressão da função geradora de probabilidades para o número de usuários do sistema nos instantes de saída do sistema, é escrita da seguinte forma

$$\Pi_{max}(z) = \frac{(1-\rho_3)\tilde{B}_{max}(\lambda_1(1-z))(1-z)}{\tilde{B}_{max}(\lambda_1(1-z)) - z}. \tag{5.9}$$

Assim sendo, temos,

$$\begin{aligned}
p_0 &= (1-\rho_3), \\
p_1 &= (1-\rho_3) \left\{ \frac{-\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\lambda_1^j}{j!} E(Y_{max}^j) + 1}{\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(\lambda_1(1-z))^j}{j!} E(Y_{max}^j)} \right\}, \\
&\vdots \\
p_n &= (1-\rho_3) \left\{ \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\lambda_1^j}{j!} E(Y_{max}^j) \right)^{(i)} \right. \\
&\times \left. \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\lambda_1^j}{j!} E(Y_{max}^j) \right)^{-(n-i)} \right\},
\end{aligned}$$

em que os símbolos (i) e $(n-i)$ indicam a i-ésima e $(n-i)$-ésima derivadas, respectivamente, $E(Y_{max}^{j})$ é dada pela Expressão (5.5), assumindo-se $r = j$, e substituindo-se ρ_1 por ρ_3.

A função geradora do tempo de espera na fila é

$$\tilde{W_q}(s) = \frac{(1-\rho_3)s}{\lambda_1 \tilde{B}_{max}(s) + s - \lambda_1}, \tag{5.10}$$

na qual $s = \lambda_1(1-z)$.

Então,

$$\begin{aligned} W_q(t) &= (1-\rho_3)\sum_{n=0}^{\infty}\rho_3^n \\ &\times \left(\int_0^y E(Y_{max})^{-1}\frac{Z(\rho_3,\phi_1) - Z(\rho_3(1-e^{-(\mu_1 t)^{k_1}}),\phi_1)}{[Z(\rho_3,\phi_1)-1]}dt\right)^{[n]}, \end{aligned} \tag{5.11}$$

na qual o símbolo $[n]$ indica a n-ésima convolução da distribuição MAXCOMPW, $E(Y_{max})$ é dada pela Expressão (5.5), assumindo-se $r = 1$, e substituindo-se ρ_1 por ρ_3.

As medidas de desempenho do modelo M/MAXCOMPW/1 são:

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{\lambda_1^2}{2(1-\rho_3)}E(Y_{max}^2), \\ W_q &= \frac{\lambda_1}{2(1-\rho_3)}E(Y_{max}^2), \\ L &= \frac{\lambda_1^2}{2(1-\rho_3)}E(Y_{max}^2) + \rho_3, \\ W &= \frac{\lambda_1}{2(1-\rho_3)}E(Y_{max}^2) + E(Y_{max}), \end{aligned} \tag{5.12}$$

em que $E(Y_{max})$ e $E(Y_{max}^2)$ são dadas pela Equação (5.5), assumindo-se $r = 1$ e $r = 2$, respectivamente, e substituindo-se ρ_1 por ρ_3.

De acordo com os Corolários 3.1, 3.2 e 3.3, os casos particulares do modelo de fila M/MAXCOMPW/1 são descritos a seguir:

Adotaremos a mesma notação usada no modelo de fila M/MINCOMPW/1.

- Quando $\phi_1 = 0$, a distribuição do tempo de serviço MAXCOMPW torna-se a distribuição Máximo-geométrica-Weibull, denotada por MAXGW, e obtemos o modelo

de fila M/MAXGW/1.

A função de densidade da distribuição MAXGW é, então,

$$f_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{2}}) = \frac{(1-\rho_1)}{\rho_1}\mu^{k_1}k_1y^{k_1-1}\sum_{m=1}^{\infty} m\rho_1^m(1-e^{-(\mu_1 y)^{k_1}})^{m-1}, \tag{5.13}$$

em que $y > 0$, $\theta_{\mathbf{2}} = (\rho_1, \mu_1, k_1)^T$ é o vetor dos parâmetros do modelo MAXGW, sendo que ρ_1 é o parâmetro de intensidade de tráfego e μ_1 é o parâmetro de escala e k_1 é o parâmetro de forma.

A Equação (5.13) pode ser reescrita na seguinte forma

$$f_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{2}}) = \frac{k_1\mu_1^{k_1-1}y^{k_1-1}(1-\rho_1)e^{-(\mu_1 y)^{k_1}}}{(1-\rho_1(1-e^{-(\mu_1 y)^{k_1}}))^2}. \tag{5.14}$$

A função de distribuição de MAXGW é dada na forma

$$F_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{2}}) = \frac{e^{-(\mu_1 y)^{k_1}}(1-\rho_1)}{(1-\rho_1(1-e^{-(\mu_1 y)^{k_1}}))}, \tag{5.15}$$

e a função do tempo restante da distribuição MAXGW é dada por

$$W_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{2}}) = \frac{(1-e^{-(\mu_1 y)^{k_1}})(1-\rho_1)}{(1-\rho_1(1-e^{-(\mu_1 y)^{k_1}}))}. \tag{5.16}$$

O r-ésimo momento, $r = 1, 2, \ldots$, da distribuição MAXGW é dado por

$$\begin{aligned} E(Y_{max}^r) &= \frac{\mu_1^{-r}\Gamma(\frac{r}{k_1}+1)(1-\rho_1)}{\rho_1}\sum_{m=1}^{\infty} m\rho_1^m \\ &\times \sum_{\delta=0}^{m-1}(-1)^{\delta}\binom{m-1}{\delta}\left((1+\delta)^{\frac{r}{k_1}+1}\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{5.17}$$

A taxa de ocupação do sistema é expressa por

$$\rho_4 = \lambda_1 E(Y_{max}), \tag{5.18}$$

sendo que $\rho_4 < 1$, λ_1 é a taxa de chegada e $E(Y_{max})$ é obtida a partir da Equação (5.17), assumindo-se $r = 1$.

A probabilidade de que durante um serviço n usuários cheguem ao sistema é

$$k_n^1 = \frac{\lambda_1^n}{n!}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\lambda_1^j}{j!}E(Y_{max}^{n+j}), \tag{5.19}$$

em que $E(Y_{max}^{n+j})$ é obtida a partir da Equação (5.17), assumindo-se $r = n + j$, e substituindo-se ρ_1 por ρ_4.

A função geradora é dada por

$$K_{max}^1(z) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{(\lambda_1(1-z))^j}{j!} E(Y_{max}^j) = \tilde{B}_{max}^1(\lambda_1(1-z)), \tag{5.20}$$

em que $E(Y_{max}^j)$ é obtida a partir da Equação (5.17), assumindo-se $r = j$, e substituindo-se ρ_1 por ρ_4.

A função geradora da distribuição de equilíbrio do número de usuários no sistema é

$$\Pi_{max}^1(z) = \frac{(1-\rho_4)\tilde{B}_{max}^1(\lambda_1(1-z))(1-z)}{\tilde{B}_{max}^1(\lambda_1(1-z)) - z}. \tag{5.21}$$

Assim sendo, temos,

$$\begin{aligned}
p_0 &= (1-\rho_4), \\
p_1 &= (1-\rho_4)\left\{ \frac{-\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{\lambda_1^j}{j!} E(Y_{max}^j) + 1}{\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{(\lambda_1(1-z))^j}{j!} E(Y_{max}^j)} \right\}, \\
&\vdots \\
p_n &= (1-\rho_4)\left\{ \left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{\lambda_1^j}{j!} E(Y_{max}^j) \right)^{(i)} \right. \\
&\times \left. \left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{\lambda_1^j}{j!} E(Y_{max}^j) \right)^{-(n-i)} \right\},
\end{aligned}$$

em que os símbolos (i) e $(n-i)$ indicam a i-ésima e $(n-i)$-ésima derivadas, respectivamente, $E(Y_{max}^j)$ é obtida a partir da Equação (5.17), assumindo-se $r = j$, e substituindo-se ρ_1 por ρ_4.

A função geradora de probabilidades da distribuição de equilíbrio do tempo de espera na fila é

$$\tilde{W}_q^1(s) = \frac{(1-\rho_4)s}{\lambda_1 \tilde{B}_{max}^1(s) + s - \lambda_1}, \tag{5.22}$$

em que $s = \lambda_1(1-z)$.

Temos que a função de distribuição do tempo de espera na fila é

$$\begin{aligned}
W_q^1(t) &= (1-\rho_4)\sum_{n=0}^{\infty}\rho_4^n \\
&\times \left(\int_0^y E(Y_{max})^{-1} \frac{(1-e^{-(\mu_1 t)^{k_1}})(1-\rho_4)}{(1-\rho_1(1-e^{-(\mu_1 t)^{k_1}}))} dt \right)^{[n]},
\end{aligned} \tag{5.23}$$

na qual $[n]$ indica a n-ésima convolução da distribuição MAXGW, e $E(Y_{max})$ é obtida a partir da Equação (5.17), assumindo-se $r = 1$, e substituindo-se ρ_1 por ρ_4.

As medidas de desempenho do modelo de fila M/MAXGW/1 podem ser obtidas a partir das Equações (5.12), substituindo-se $E(Y_{max}^2)$ e $E(Y_{max})$ dadas pela Equação (5.17), em que r assume os valores 2 e 1, respectivamente.

- Quando $\phi_1 = 1$, a função de distribuição de serviço MAXCOMPW torna-se a distribuição Máximo-Poisson-Weibull, denotada por MAXPW, e, assim, obtemos o modelo de fila M/MAXPW/1.

  A função de densidade da distribuição MAXPW é expressa por

$$f_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{3}}) = \frac{1}{(e^{\rho_1}-1)}\mu_1^{k_1}k_1y^{k_1-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\rho_1^m}{m!}(1-e^{-(\mu_1 y)^{k_1}})^{m-1}, \tag{5.24}$$

  em que $y > 0$, $\theta_{\mathbf{3}} = (\rho_1, \mu_1, k_1)^T$ são os parâmetros do modelo MAXPW, sendo que ρ_1 é o parâmetro de intensidade de tráfego, μ_1 é o parâmetro de escala e k_1 é o parâmetro de forma.

  Fazendo a mudança de indice no somatório da Equação (5.24), para $j = m - 1$, podemos reescrevê-la na seguinte forma

$$f_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{3}}) = \frac{k_1\mu_1^{k_1}y^{k_1-1}\rho_1 e^{\rho_1(1-e^{-(\mu_1 y)^{k_1}})-(\mu_1 y)^{k_1}}}{(e^{\rho_1}-1)}. \tag{5.25}$$

  A correspondente função de distribuição MAXPW é dada por

$$F_{Y_{max}}(y,\theta_{\mathbf{3}}) = \frac{e^{\rho_1(1-e^{-(\mu_1 y)^{k_1}})}-1}{(e^{\rho_1}-1)}, \tag{5.26}$$

  e a função do tempo restante da distribuição MAXPW é dada por

$$W_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{3}}) = \frac{e^{\rho_1}-e^{1-e^{-(\mu_1 y)^{k_1}}}}{(e^{\rho_1}-1)}.$$

  O r-ésimo momento, $r = 1, 2, \ldots, n$, da distribuição MAXPW é da forma

$$E(Y_{max}^r) = \frac{\mu_1^{-r}\Gamma(\frac{r}{k_1}+1)}{(e^{\rho_1}-1)}\sum_{m=1}^{\infty}m\frac{\rho_1^m}{m!}\sum_{\delta=0}^{m-1}(-1)^{\delta}\binom{m-1}{\delta}\left((1+\delta)^{\frac{r}{k_1}+1}\right)^{-1}. \tag{5.27}$$

  A taxa de ocupação do sistema é dada por

$$\rho_5 = \lambda_1 E(Y_{max}), \tag{5.28}$$

em que $\rho_5 < 1$, λ_1 é a taxa de chegada e $E(Y_{max})$ é dada pela Equação (5.27), assumindo-se $r = 1$.

A probabilidade de que durante um serviço, n usuários cheguem ao sistema é

$$k_n^2 = \frac{\lambda_1^n}{n!} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\lambda_1^j}{j!} E(Y_{max}^{n+j}), \tag{5.29}$$

na qual $E(Y_{max}^{n+j})$ é obtida a partir da Equação (5.27), assumindo-se $r = n + j$, e substituindo-se ρ_1 por ρ_5.

A correspondente função geradora é dada por

$$K_{max}^2(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(\lambda_1(1-z))^j}{j!} E(Y_{max}^j) = \tilde{B}_{max}^2(\lambda_1(1-z)), \tag{5.30}$$

em que $E(Y_{max}^j)$ é obtida a partir da Equação (5.27), assumindo-se $r = j$, e substituindo-se ρ_1 por ρ_5.

A função geradora da distribuição de equilibrio do número de usuários no sistema é

$$\Pi_{max}^2(z) = \frac{(1-\rho_5)\tilde{B}_{max}^2(\lambda_1(1-z))(1-z)}{\tilde{B}_{max}^2(\lambda_1(1-z)) - z}. \tag{5.31}$$

Temos, então

$$\begin{aligned}
p_0 &= (1-\rho_5), \\
p_1 &= (1-\rho_5) \left\{ \frac{-\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\lambda_1^j}{j!} E(Y_{max}^j) + 1}{\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(\lambda_1(1-z))^j}{j!} E(Y_{max}^j)} \right\}, \\
&\vdots \\
p_n &= (1-\rho_5) \left\{ \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\lambda_1^j}{j!} E(Y_{max}^j) \right)^{(i)} \right. \\
&\times \left. \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\lambda_1^j}{j!} E(Y_{max}^j) \right)^{-(n-i)} \right\},
\end{aligned}$$

em que os símbolos (i) e $(n-i)$ indicam a i-ésima e $(n-i)$-ésima derivadas, respectivamente, $E(Y_{max}^j)$ é obtida a partir da Equação (5.27), assumindo-se $r = j$, e substituindo-se ρ_1 por ρ_5.

A função geradora de probabilidade da distribuição de equilíbrio do tempo de espera na fila é

$$\tilde{W}_q^2(s) = \frac{(1-\rho_5)s}{\lambda_1 \tilde{B}_{max}^2(s) + s - \lambda_1}, \tag{5.32}$$

sendo que $s = \lambda_1(1 - z)$.

A função de distribuição do tempo de espera na fila é

$$W_q^2(t) = (1-\rho_5)\sum_{n=0}^{\infty}\rho_5^n\left(\int_0^y E(Y_{max})^{-1}\frac{e^{\rho_5} - e^{1-e^{-(\mu_1 t)^{k_1}}}}{(e^{\rho_5}-1)}dt\right)^{[n]}, \quad (5.33)$$

em que o símbolo $[n]$ indica a n-ésima convolução da distribuição MAXPW, $E(Y_{max})$ é dada pela Equação (5.27), assumindo-se $r = 1$, e substituindo-se ρ_1 por ρ_5.

As medidas de desempenho do modelo de fila M/MAXPW/1 podem ser obtidas a partir da Equação (5.12), substituindo $E(Y_{max})$ e $E(Y_{max}^2)$ dadas pela Expressão (5.27), em que r assume os valores 1 e 2, respectivamente, e substituindo-se ρ_1 por ρ_5.

- Quando $\phi_1 \to \infty$, a distribuição MAXCOMPW, torna-se a distribuição Máximo-Bernoulli-Weibull para o tempo de serviço, denotada por MAXBW, que é a própria distribuição Weibull, e assim temos o modelo de fila M/W/1.

  Adotaremos a seguinte notação para os parâmetros deste modelo, $\lambda_1 = \lambda$, $\mu_1 = \mu$ e $k_1 = k$.

  A função de densidade distribuição Weibull é

$$f_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{4}}) = k\mu^k y^{k-1}e^{-(\mu y)^k}, \quad (5.34)$$

  em que $y > 0$, $\theta_{\mathbf{3}} = (\mu, k)^T$ é o vetor dos parâmetros do modelo Weibull, sendo que μ é o parâmetro de escala e k é o parâmetro de forma.

  A função do tempo restante da distribuição Weibull é

$$W_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{4}}) = 1 - e^{-(\mu y)^k}. \quad (5.35)$$

  O r- ésimo momento, $r = 1, 2, \ldots$, da distribuição Weibull é dado por

$$E(Y_{max}^r) = \frac{\Gamma\left(\frac{r}{k}+1\right)}{\mu^r}. \quad (5.36)$$

  A taxa de ocupação do modelo de fila M/W/1 é

$$\rho = \lambda E(Y_1), \quad (5.37)$$

em que $\rho < 1$, λ é a taxa de chegada e $E(Y_1)$ é dada pela Equação (5.36), assumindo-se $r = 1$.

A probabilidade de que durante um serviço, n usuários cheguem no sistema é dada por

$$\begin{aligned} k_n^3 &= \frac{\lambda^n}{n!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}\frac{1}{\mu^j}\Gamma(\frac{j}{k}+1) \\ &= \frac{\lambda^n}{n!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\rho^j}{j!}\Gamma(\frac{j}{k}+1). \end{aligned} \tag{5.38}$$

A correspondente função geradora é

$$K_{max}^3(z) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{(\rho(1-z))^j}{j!}\Gamma\left(\frac{j}{k}+1\right) = \tilde{B}_{max}^3(\lambda(1-z)). \tag{5.39}$$

A função geradora da distribuição de equilíbrio do número de usuários no sistema, é obtida da seguinte forma

$$\Pi_{max}^3(z) = \frac{(1-\rho)\tilde{B}_{max}^3(\lambda(1-z))(1-z)}{\tilde{B}_{max}^3(\lambda(1-z)) - z}. \tag{5.40}$$

Temos, então

$$\begin{aligned} p_0^3 &= (1-\rho), \\ p_1^3 &= (1-\rho)\left\{\frac{-\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\rho^j}{j!}\Gamma(\frac{j}{k}+1)+1}{\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\rho^j}{j!}\Gamma(\frac{j}{k}+1)}\right\}, \\ &\vdots \\ p_n^3 &= (1-\rho)\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\frac{\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\rho^j}{j!}\Gamma(\frac{j}{k}+1)\right)^{(i)}}{\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\rho^j}{j!}\Gamma(\frac{j}{k}+1)\right)^{-(n-i)}}, \end{aligned}$$

em que os simbolos (i) e $(n-i)$ indicam a i-ésima e $(n-i)$-ésima derivadas, respectivamente.

A função geradora de probabilidades da distribuição de equilíbrio do tempo de espera na fila é

$$\tilde{W}_q^3(s) = \frac{(1-\rho)s}{\lambda\tilde{B}_{max}^3(s) + s - \lambda}, \tag{5.41}$$

na qual $s = \lambda_1(1-z)$.

A função de distribuição do tempo de espera na fila é

$$W_q^3(y) = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\left(\int_0^y E(Y_1)^{-1}(1-e^{-(\mu t)^k})dt\right)^{(n)}, \tag{5.42}$$

na qual o símbolo $[n]$ indicam a n-convolução da distribuição Weibull e $E(Y_1)$ é dada pela Equação (5.36), assumindo-se $r = 1$

As medidas de desempenho são:

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{\lambda^2}{2(1-\rho)}\frac{1}{\mu^2}\Gamma\left(\frac{2}{k}+1\right), \\ W_q &= \frac{\lambda}{2(1-\rho)}\frac{1}{\mu^2}\Gamma\left(\frac{2}{k}+1\right), \\ L &= \frac{\lambda^2}{2(1-\rho)}\frac{1}{\mu^2}\Gamma\left(\frac{2}{k}+1\right)+\rho, \\ W_q &= \frac{\lambda}{2(1-\rho)}\frac{1}{\mu^2}\Gamma\left(\frac{2}{k}+1\right)+\frac{1}{\mu}\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right). \end{aligned} \tag{5.43}$$

5.1.1 Estimação pelo método de máxima verossimilhança

Adotamos o mesmo planejamento descrito no Capítulo 4. Portanto, temos a amostra aleatória $\mathbf{v} = (X_1, \ldots, X_{n_a}; Y_1, \ldots, Y_{n_s})^T$, consistindo dos tempos entre as chegadas X_i do $(i-1)$-ésimo ao i-ésimo usuário, $i = 1, \ldots, n_a$, e dos tempos de serviços completados Y_j, do j-ésimo usuário, $j = 1, \ldots, n_s$, em que n_a é o número total de tempo entre chegadas e n_s é o número total de serviços completados

Desta forma, o logaritmo da função de verossimilhança do modelo M/MAXCOMPW/1 é dado pela soma do logaritmo da função de densidade da distribuição exponencial com parâmetro λ_1, que descreve os tempos entre chegadas, mais o logaritmo da função de densidade da distribuição MAXCOMPW, que descreve os tempos de serviços completados, assim sendo, temos,

$$\ell_{max}(\theta_{\mathbf{1}}, \lambda_1) = n_a \log\lambda_1 - \lambda_1 T_a - n_s \log[Z(\rho_1, \phi_1) - 1] + n_s k_1 \log\mu_1 + n_s \log k_1$$

$$+(k_1-1)\sum_{i=1}^{n_s}\log y_i + \sum_{i=1}^{n_s}\log\left[\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}}(1-e^{-(\mu_1 y_i)^{k_1}})^{m-1}\right], \tag{5.44}$$

sendo $\theta_{\mathbf{1}} = (\rho_1, \mu_1, k_1, \phi)^T$ o vetor de parâmetros do modelo MAXCOMPW, $T_a = \sum_{i=0}^{n_a} x_i$ é tempo total entre as chegadas, n_a é o número total de tempos entre chegadas e n_s é o número total de serviços completados.

Pela primeira derivada do logaritmo da função de verossimilhança em relação a cada parâmetro, definimos a função (ou vetor) escore $U = (U_{\lambda_1}, U_{\rho_1}, U_{\mu_1}, U_{k_1}, U_{\phi_1})$, cujos elementos são:

$$
\begin{aligned}
U_{\lambda_1} &= \frac{n_a}{\lambda_1} - T_a, \\
U_{\rho_1} &= \frac{n_s}{[Z(\rho_1,\phi_1)-1]} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j\rho_1^{j-1}}{(j!)^{\phi_1}} + \sum_{i=1}^{n_s} \left\{ \left(\sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}} (1 - e^{-(\mu_1 y_i)^{k_1}})^{m-1} \right)^{-1} \right\} \\
&\quad \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \rho_1^{m-1}}{(m!)^{\phi_1}} (1 - e^{-(\mu_1 y_i)^{k_1}})^{m-1}, \\
U_{\mu_1} &= \frac{n_s k_1}{\mu_1} - k_1 \mu_1^{k_1 - 1} T_s + \sum_{i=1}^{n_s} \left\{ \left(\sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}} (1 - e^{-(\mu_1 y_i)^{k_1}})^{m-1} \right)^{-1} \right. \\
&\quad \left. \times \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}} (m-1) k_1 \mu_1^{k_1-1} y_i^{k_1} e^{-(\mu_1 y_i)^{k_1}} (1 - e^{-(\mu_1 y_i)^{k_1}})^{m-2} \right\}, \\
U_{\phi_1} &= \frac{n_s}{[Z(\rho_1,\phi_1)-1]} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho_1^j}{(j!)^{\phi_1}} \ln(j!) \right) - \sum_{i=1}^{n_s} \left\{ \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}} (1 - e^{-(\mu_1 y_i)^{k_1}})^{m-1} \right)^{-1} \right. \\
&\quad \left. \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\rho_1^m \log(m!)}{(m!)^{\phi_1}} (1 - e^{-(\mu_1 y_i)^{k_1}})^{m-1} \right\}, \\
U_{k_1} &= n_s \log \mu_1 + \frac{n_s}{k_1} + \sum_{i=1}^{n_s} \log y_i - \sum_{i=1}^{n_s} (\mu_1 y_i)^{k_1} \log(\mu_1 y_i) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n_s} \left\{ \left(\sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}} (1 - e^{-(\mu_1 y_i)^{k_1}})^{m-1} \right)^{-1} \right. \\
&\quad \left. \times \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}} (m-1) (\mu_1 y_i)^{k_1} \log(\mu_1 y_i) e^{-(\mu_1 y_i)^{k_1}} (1 - e^{-(\mu_1 y_i)^{k_1}})^{m-2} \right\}.
\end{aligned}
$$

Os casos particulares do logaritmo da função de verossimilhança do modelo de fila M/MAXCOMPW/1 quando $\phi_1 = 0, 1$ e $\phi \to \infty$, são descritos a seguir:

- O logaritmo da função de verossimilhança do modelo de fila M/MAXGW/1 é escrito

pela soma do logaritmo da função de densidade da distribuição exponencial com parâmetro λ_1, para os tempos entre as chegadas, e logaritmo da função de densidade da distribuição MAXGW, para os tempos de serviço, logo temos

$$\ell_{max}(\theta_{\mathbf{2}}, \lambda_1) = n_a \log \lambda_1 - \lambda_1 T_a + n_s \log k_1 + n_s k_1 \log \mu_1 + n_s \log(1-\rho_1)$$
$$+(k_1-1)\sum_{i=1}^{n_s} \log y_i - 2\sum_{i=1}^{n_s} \log(1-\rho_1(1-e^{-(\mu_1 y_i)^{k_1}})), \tag{5.45}$$

em que $\theta_{\mathbf{2}} = (\rho_1, \mu_1, k_1)^T$ é o vetor de parâmetros do modelo MAXGW, n_a é o número total de tempos entre chegadas, T_a tempo total dos tempos entre as chegadas, n_s é o número total de serviços completados.

Os elementos da função escore $U = (U_{\lambda_1}, U_{\rho_1}, U_{\mu}, U_{k_1})$ são, então, dados por

$$\begin{aligned}
U_{\lambda_1} &= \frac{n_a}{\lambda_1} - T_a, \\
U_{\rho_1} &= -\frac{n_s}{(1-\rho_1)} + 2\sum_{i=1}^{n_s} \frac{(1-e^{-(\mu_1 y_i)^{k_1}})}{(1-\rho_1(1-e^{-(\mu_1 y_i)^{k_1}}))}, \\
U_{\mu_1} &= \frac{n_s k}{\mu_1} - k_1 \mu_1^{k_1-1} \sum_{i=1}^{n_s} y_i^{k_1} + 2k_1\rho_1\mu_1^{k_1-1} \sum_{i=1}^{n_s} \frac{y_i^{k_1} e^{-(\mu_1 y_i)^{k_1}}}{(1-\rho_1(1-e^{-(\mu_1 y_i)^{k_1}}))}, \\
U_{k_1} &= \frac{n_s}{k_1} + n_s \log \mu_1 - \sum_{i=1}^{n_s} \log y_i - \sum_{i=1}^{n_s} (\mu_1 y_i)^{k_1} \log(\mu_1 y_i) \\
&\quad -2\sum_{i=1}^{n_s} \frac{\rho_1 e^{-(\mu_1 y_i)^{k_1}} (\mu_1 y_i)^{k_1} \log(\mu_1 y_i)}{(1-\rho_1(1-e^{-(\mu_1 y_i)^{k_1}}))}.
\end{aligned}$$

- O logaritmo da função de verossimilhança do modelo de fila M/MAXPW/1 é escrito pela soma do logaritmo da função de densidade da distribuição exponencial com parâmetro λ_1, para os tempos entre as chegadas, e do logaritmo da função de densidade da distribuição MAXPW para os tempos de serviço, e é dado por

$$\ell_{max}(\theta_{\mathbf{3}}, \lambda_1) = n_a \log \lambda_1 - \lambda_1 T_a + n_s \log k_1 + n_s k_1 \log \mu_1 + (k_1-1)\sum_{i=1}^{n_s} \log y_i$$
$$+n_s \log \rho_1 - \rho_1 \sum_{i=1}^{n_s} (1-e^{-(\mu_1 y_i)^{k_1}}) - \sum_{i=1}^{n_1} (\mu_1 y_i)^{k_1} - n_s \log(e^{\rho_1}-1), \tag{5.46}$$

em que $\theta_{\mathbf{3}} = (\rho_1, \mu_1, k_1)^T$ é o vetor de parâmetros do modelo MAXPW, n_a é número total de entre chegadas, T_a é o tempo total dos tempos entre as chegadas, n_s é o número total de serviços completados.

Os elementos da função escore $U = (U_{\lambda_1}, U_{\rho_1}, U_{\mu_1}, U_{k_1})$ são, então

$$\begin{aligned} U_{\lambda_1} &= \frac{n_a}{\lambda_1} - T_a, \\ U_{\rho_1} &= \frac{n_s}{\rho_1} + n_s - \sum_{i=1}^{n_s} e^{(-\mu_1 y_i)^k} - n_s \frac{e^{\rho_1}}{(e^{\rho_1} - 1)}, \\ U_{\mu_1} &= \frac{n_s k_1}{\mu_1} + \rho_1 k_1 \mu_1^{k_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_s} y_i^{k_1} e^{-(\mu_1 y_i)^{k_1}} - k_1 \mu^{k_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_s} y_i^{k_1}, \\ U_{k_1} &= \frac{n_s}{k_1} + n_s \log \mu_1 + \sum_{i=1}^{n_s} \log y_i - \sum_{i=1}^{n_s} (\mu_1 y_i)^{k_1} \log(\mu_1 y_i) \\ &+ \rho_1 \sum_{i=1}^{n_s} e^{-(\mu_1 y_i)^{k_1}} (\mu_1 y_i)^{k_1} \log(\mu_1 y_i). \end{aligned}$$

- O logaritmo da função de verossimilhança do modelo de fila M/W/1, consiste na soma do logaritmo da função de densidade da distribuição exponencial com parâmetros λ_1, para os tempos entre as chegadas, com o logaritmo da função de densidade da distribuição Weibull, para os tempos de serviços completados. Logo temos

$$\begin{aligned} \ell_{max}(\theta_{\mathbf{4}}, \lambda) &= n_a \log \lambda - \lambda T_a + n_s \log k + n_s k \log \mu \\ &+ (k-1) \sum_{i=1}^{n_s} \log y_i - \sum_{i=1}^{n_s} (\mu y_i)^k, \end{aligned} \tag{5.47}$$

na qual $\theta = (\mu, k)^T$ é o vetor de parâmetros da função de densidade da distribuição Weibull, n_a é o número total de tempos entre chegadas, T_a é o tempo total dos tempos entre as chegadas, n_s é o número total de serviços completados.

Os elementos da função escore $U = (U_\lambda, U_\mu, U_k)$ são, então, dados por

$$\begin{aligned} U_\lambda &= \frac{n_a}{\lambda} - T_a, \\ U_\mu &= \frac{n_s k}{\mu} - k \mu^{k-1} \sum_{i=1}^{n_s} y_i^k, \\ U_{k_1} &= \frac{n_s}{k} + n_s \log \mu + \sum_{i=1}^{n_s} \log y_i - \mu \sum_{i=1}^{n_s} y_i^k \log(k). \end{aligned}$$

5.2 Modelo de fila M/MINCOMPW/1

Apresentamos agora o modelo de fila M/MINCOMPW/1, que difere do modelo de fila descrito anteriormente pela distribuição de serviço, que neste caso é dada pela distribuição MINCOMPW.

Usando a Equação (3.5) escrevemos a função de densidade da distribuição MINCOMPW

$$f_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{5}}) = \frac{1}{[Z(\rho_2,\phi_2)-1]} k_2 \mu_2^{k_2} y^{k_2-1} \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}} e^{-(\mu_2 y m^{1/k_2})^{k_2}}, \tag{5.48}$$

em que $\theta_{\mathbf{5}} = (\rho_2, \mu_2, k_2, \phi_2)^T$ é o vetor de parâmetros do modelo MINCOMPW, na qual μ_2 é o parâmetro escala, k_2 é o parâmetro de forma, ϕ_2 é o parâmetro de pressão e ρ_2 mede a intensidade de tráfego.

A função de distribuição MINCOMPW é

$$F_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{5}}) = \frac{Z(\rho_2,\phi_2) - Z(\rho_2 e^{-(\mu_2 y)^{k_2}},\phi_2)}{[Z(\rho_2,\phi_2)-1]}, \tag{5.49}$$

e a função do tempo restante da distribuição MINCOMPW é dada por

$$W_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{5}}) = \frac{Z(\rho_2 e^{-(\mu_2 y)^{k_2}},\phi_2) - 1}{[Z(\rho_2,\phi_2)-1]}. \tag{5.50}$$

O r-ésimo momento, $r = 1, 2, \ldots$ da MINCOMPW é

$$E(Y_{min}^r) = \frac{\mu_2^{-r}\Gamma\left(\frac{r}{k_2}+1\right)}{[Z(\rho_2,\phi_2)-1]} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}} \frac{1}{m^{\frac{r}{k_2}}}, \tag{5.51}$$

a Equação (5.51) foi obtida a partir de um programa desenvolvido no software R, e também truncamos a série $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}}$, e este procedimento está descrito no Apêndice .2.

A taxa de ocupação do sistema é dada por

$$\rho_7 = \lambda_2 E(Y_{min}), \tag{5.52}$$

em que $\rho_7 < 1$, λ_2 é a taxa de chegada e $E(Y_{min})$ é dado pela Equação (5.51), assumindo-se $r = 1$.

A probabilidade de que durante um serviço, n usuários cheguem ao sistema, é

$$k_n^4 = \frac{\lambda_2^n}{n!} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\lambda_2^j}{j!} E(Y_{min}^{n+j}), \tag{5.53}$$

em que $E(Y_{min}^{n+j})$ é dada pela Equação (5.51), assumindo-se $r = n + j$, e substituindo-se ρ_2 por ρ_7.

A correspondente função geradora é dada por

$$K_{min}(z) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{(\lambda_2(1-z))^j}{j!} E(Y_{min}^j) = \tilde{B}_{min}(\lambda_2(1-z)), \tag{5.54}$$

sendo que $E(Y_{min}^j)$ é dada pela Expressão (5.51), assumindo $r = j$, e substituindo ρ_2 por ρ_7.

A função geradora da distribuição de equilibrio do número de usuários no sistema é, então,

$$\Pi_{min}(z) = \frac{(1-\rho_7)\tilde{B}_{min}(\lambda_2(1-z))(1-z)}{\tilde{B}_{min}(\lambda_2(1-z)) - z}. \tag{5.55}$$

Temos,

$$\begin{aligned}
p_0 &= (1-\rho_7), \\
p_1 &= (1-\rho_7)\left\{ \frac{-\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{\lambda_2^j}{j!} E(Y_{min}^j) + 1}{\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{(\lambda_1(1-z))^j}{j!} E(Y_{min}^j)} \right\}, \\
&\vdots \\
p_n &= (1-\rho_7)\left\{ \left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{\lambda_2^j}{j!} E(Y_{min}^j) \right)^{(i)} \right. \\
&\times \left. \left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{\lambda_2^j}{j!} E(Y_{min}^j) \right)^{-(n-i)} \right\},
\end{aligned}$$

em que os símbolos (i) e $(n-i)$ indicam a i-ésima e $(n-i)$-ésima derivadas, respectivamente, $E(Y_{min}^j)$ é obtida a partir da Equação (5.51), assumindo-se $r = j$, e substituindo-se ρ_2 por ρ_7.

A função geradora de probabilidades do distribuição do tempo de espera na fila é dada por

$$\tilde{W}_q^4(s) \frac{(1-\rho_7)s}{\lambda_2 \tilde{B}_{min}(s) + s - \lambda_2}, \tag{5.56}$$

na qual temos que $s = \rho_7(1-z)$.

A função de distribuição do tempo de espera na fila é

$$W_q^4(y) = (1-\rho_7)\sum_{n=0}^{\infty}\rho_7^n \left(\int_0^y E(Y_{min})^{-1} \frac{Z(\rho_7 e^{-(\mu_2 t)^{k_2}}, \phi_2) - 1}{[Z(\rho_7, \phi_2) - 1]} dt \right)^{[n]}, \tag{5.57}$$

na qual o símbolo $[n]$ indica a n-ésima convolução da distribuição MINCOMPW, e $E(Y_{min})$ é dado pela Equação (5.51), assumindo-se $r = 1$, e substituindo-se ρ_2 por ρ_7.

As medidas de desempenho são dadas por

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{\lambda_2^2}{2(1-\rho_7)}\ E(Y_{min}^2), \\ W_q &= \frac{\lambda_2}{2(1-\rho_7)}\ E(Y_{min}^2), \\ L &= \frac{\lambda_2^2}{2(1-\rho_7)}E(Y_{min}^2) + \rho_7, \\ W_q &= \frac{\lambda_2}{2(1-\rho_7)}E(Y_{min}^2) + E(Y_{min}), \end{aligned} \tag{5.58}$$

nas quais $E(Y_{min})$ e $E(Y_{min}^2)$ são dadas pela Equação (5.51), assumindo-se $r = 1$ e $r = 2$, respectivamente, e substituindo-se ρ_2 por ρ_7.

Usando os Corolários 3.1, 3.2 e 3.3 obtemos os modelos de fila geradps a partir da variação do parâmetro ϕ_2.

Adotaremos aqui a mesma notação usada no modelo M/MINCOMPW/1.

- Quando o parâmetro de pressão assume o valor zero, $\phi_2 = 0$, a distribuição MINCOMPW, para o tempo de serviço, se torna a distribuição Mínimo-geométrica-Weibull, denotada por MINGW, e, assim, obtemos o modelo de fila M/MINGW/1.

  A função de densidade da distribuição MINGW é dada por

$$f_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{5}}) = \frac{(1-\rho_2)}{\rho_2}\mu_2^{k_2}k_2y^{k_2-1}\sum_{m=1}^{\infty} m\rho_2^m e^{-(\mu_2 y m^{1/k_2})^{k_2}}, \tag{5.59}$$

  em que $y > 0$, $\theta_{\mathbf{5}} = (\rho_2, \mu_2, k_2)$ é o vetor dos parâmetros do modelo MINGW, sendo que ρ_2 é o parâmetro de intensidade de tráfego e μ_2 é o parâmetro de escala e k_2 é o parâmetro de forma.

  A Equação (5.59) pode ser reescrita na seguinte forma

$$f_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{5}}) = \frac{k_2\mu_2^{k_2}y^{k_2-1}e^{-(\mu_2 y)^{k_2}}(1-\rho_2)}{(1-\rho_2 e^{-(\mu_2 y)^{k_2}})^2}. \tag{5.60}$$

  A função de distribuição da distribuição MINGW é escrita na forma

$$F_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{5}}) = \frac{\rho_2(1-e^{-(\mu_2 y)^{k_2}})}{(1-\rho_2 e^{-(\mu_2 y)^{k_2}})}. \tag{5.61}$$

A função do tempo restante da distribuição MINGW é dada por

$$W_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{5}}) = \frac{(1-\rho_2)e^{-(\mu_2 y)^{k_2}}}{(1-\rho_2 e^{-(\mu_2 y)^{k_2}})}. \tag{5.62}$$

O r-ésimo momento, $r = 1, 2, \ldots$, da distribuição MINGW é dado por

$$E(Y_{min}^r) = \frac{(1-\rho_2)}{\rho_2}\mu_2^{-r}\Gamma(1+\frac{r}{k_2})\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\rho_2^m}{m^{r/k_2}}. \tag{5.63}$$

A taxa de ocupação do sistema é dada por

$$\rho_8 = \lambda_2 E(Y_{min}), \tag{5.64}$$

em que $\rho_8 < 1$, λ_2 é a taxa de chegada e $E(Y_{min})$ é dada pela Equação (5.63), assumindo-se $r = 1$.

A probabilidade de que durante um serviço, n usuários cheguem ao sistema, é

$$k_n^5 = \frac{\lambda_2^n}{n!}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\lambda_2^j}{j!}E(Y_{min}^{n+j}), \tag{5.65}$$

na qual $E(Y_{min}^{n+j})$ é dada pela Equação (5.63), assumindo-se $r = n+j$, e substituindo-se ρ_2 por ρ_8.

A correspondente função geradora é dada por

$$K_{min}^5(z) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{(\lambda_2(1-z))^j}{j!}E(Y_{min}^j) = \tilde{B}_{min}^5(\lambda_2(1-z)), \tag{5.66}$$

sendo que $E(Y_{min}^j)$ é dada pela Expressão (5.63), assumindo-se $r = j$, e substituindo-se ρ_2 por ρ_8. A função geradora para a distribuição de equilibrio do número de usuarios no sistema é obtida da seguinte forma

$$\Pi_{min}^5(z) = \frac{(1-\rho_8)\tilde{B}_{min}^5(\lambda_2(1-z))(1-z)}{\tilde{B}_{min}^5(\lambda_2(1-z)) - z}. \tag{5.67}$$

Então,

$$\begin{aligned}
p_0^5 &= (1-\rho_8), \\
p_1^5 &= (1-\rho_8)\left\{\frac{-\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\lambda_2^j}{j!}E(Y_{min}^j)+1}{\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{(\lambda_2(1-z))^j}{j!}E(Y_{min}^j)}\right\}, \\
&\vdots \\
p_n^5 &= (1-\rho_8)\left\{\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\lambda_2^j}{j!}E(Y_{max}^j)\right)^{(i)}\right. \\
&\times \left.\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\lambda_2^j}{j!}E(Y_{min}^j)\right)^{-(n-i)}\right\},
\end{aligned}$$

em que (i) indica i-ésima derivada e $(n-i)$ a $(n-i)$-ésima derivada, e $E(Y_{min}^{j})$ pela Equação (5.63), assumindo-se $r = j$ e substituindo-se ρ_2 por ρ_8.

A função geradora da probabilidade distribuição do tempo de espera na fila é dada por

$$\tilde{W}_q^5(s) = \frac{(1-\rho_8)s}{\lambda_2 \tilde{B}_{min}^5(s) - s + \lambda_2}, \tag{5.68}$$

na qual temos que $s = \lambda_2(1-z)$.

A função de distribuição do tempo de espera na fila é

$$W_q^5(y) = (1-\rho_8)\sum_{n=0}^{\infty}\rho_8^n \left(\int_0^y E(Y_{min})^{-1}\frac{(1-\rho_2)e^{-(\mu_2 y)^{k_2}}}{(1-\rho_2 e^{-(\mu_2 y)^{k_2}})}dt\right)^{[n]}, \tag{5.69}$$

no qual o símbolo $[n]$ indica a n-ésima convolução da distribuições MINGW, e $E(Y_{min})$ é dado pela Equação (5.63), assumindo-se $r = 1$, e substituindo-se ρ_2 por ρ_8.

As correspondentes medidas de desempenho são obtidas a partir de (5.12) substituindo $E(Y_{min})$ e $E(Y_{min}^2)$ por (5.63), para $r = 1$ e $r = 2$, respectivamente, e substituindo-se ρ_2 por ρ_8.

- Quando o parâmetro de pressão assume valor um, $\phi_2 = 1$, a distribuição MINCOMPW se reduz à distribuição Mínimo-Poisson-Weibull, denotada por MINPW. Logo, temos o modelo de fila M/MINPW/1.

  A função densidade da distribuição MINPW é então, escrita na forma

$$f_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{6}}) = \frac{1}{(e^{\rho_2}-1)}\mu_2^{k_2}k_2 y^{k_2-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\rho_2^m}{m!}e^{-(\mu_2 y m^{1/k_2})^{k_2}}, \tag{5.70}$$

  em que $y > 0$, $\theta_{\mathbf{6}} = (\rho_2, \mu_2, k_2)$ é o vetor de parâmetros do modelo MINPW, sendo que ρ_2 é o parâmetro de intensidade de tráfego, μ_2 é o parâmetro de forma e k_2 é o parâmetro de escala.

  Fazendo uma mundança no indice do somatório da Equação (5.70), para $j = m-1$, obtemos a seguinte forma

$$f_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{6}}) = \frac{k_2\mu_2^{k_2}y^{k_2-1}e^{\rho_2 e^{-(\mu_2 y)^{k_2}}-(\mu_2 y)^{k_2}}}{(e^{\rho_2}-1)}. \tag{5.71}$$

  A função de distribuição da distribuição MINPW é, então, dada por

$$F_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{6}}) = \frac{e^{\rho_2} - e^{\rho_2 e^{-(\mu_2 y)^{k_2}}}}{(e^{\rho_2}-1)}, \tag{5.72}$$

e a função do tempo restante da distribuição MINPW é dado por

$$W_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{6}}) = \frac{(e^{\rho_2 e^{-(\mu_2 y)^{k_2}}} - 1)}{(e^{\rho_2} - 1)}. \tag{5.73}$$

O r-ésimo momento, $r = 1, 2, \ldots$, da distribuição MINPW é

$$E(Y_{min}^r) = \frac{\mu_2^{-r}\Gamma\left(\frac{r}{k_2} + 1\right)}{(e^{\rho_2} - 1)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho_2^m}{m!} \frac{1}{m^{\frac{r}{k_2}}}. \tag{5.74}$$

A taxa de ocupação do modelo de fila M/MINPW/1 é

$$\rho_9 = \lambda_2 E(Y_{min}), \tag{5.75}$$

em que $\rho_9 < 1$, λ_2 é a taxa de chegada, e $E(Y_{min})$ é obtido pela Equação (5.74), para $r = 1$.

A probabilidade de que durante um serviço, n usuários cheguem ao sistema, é

$$k_n^6 = \frac{\lambda_2^n}{n!} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\lambda_2^j}{j!} E(Y_{min}^{n+j}), \tag{5.76}$$

na qual $E(Y_{min}^{n+j})$ é dada pela Equação (5.74), assumindo-se $r = n+j$, e substituindo-se ρ_2 por ρ_9.

A correspondente função geradora é

$$K_{min}^6(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(\lambda_2(1-z))^j}{j!} E(Y_{min}^j) = \tilde{B}_{min}^6(\lambda_2(1-z)), \tag{5.77}$$

sendo que $E(Y_{min}^j)$ é dada pela Expressão (5.74), assumindo-se $r = j$, e substituindo-se ρ_2 por ρ_9.

A função geradora de probabilidade em estado de equilibrio, para o número de usuários no sistmea é

$$\Pi_{min}^6(z) = \frac{(1-\rho_9)\tilde{B}_{min}^6(\lambda_2(1-z))(1-z)}{\tilde{B}_{min}^6(\lambda_2(1-z)) - z}. \tag{5.78}$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} p_0^5 &= (1-\rho_9), \\ p_1^5 &= (1-\rho_9) \left\{ \frac{-\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{\lambda_2^j}{j!} E(Y_{min}^j) + 1}{\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{(\lambda_2(1-z))^j}{j!} E(Y_{min}^j)} \right\}, \end{aligned}$$

$$p_n^5 = (1-\rho_9)\left\{\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\lambda_2^j}{j!}E(Y_{min}^j)\right)^{(i)} \times \left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\lambda_2^j}{j!}E(Y_{min}^j)\right)^{-(n-i)}\right\},$$

em que os símbolos (i) e $(n-i)$ indicam a i-ésima e $(n-i)$-ésima derivadas, respectivamente, e $E(Y_{min}^j)$ é obtida a partir da Equação (5.74), assumindo-se $r=j$, e substituindo-se ρ_2 por ρ_9.

A função geradora do tempo de espera na fila é dado por

$$\tilde{W}_q^6(y) = \frac{(1-\rho_9)s}{\lambda_2\tilde{B}_{min}^6(s)+s-\lambda_2}, \tag{5.79}$$

na qual $s=\lambda_2(1-z)$.

Temos, que a função de distribuição em estado de equilibrio do tempo de espera na fila é

$$W_q^6(t) = (1-\rho_9)\sum_{n=0}^{\infty}\rho_9^n\left(\int_0^y E(Y_{min})^{-1}\frac{(e^{\rho_9 e^{-(\mu_2 t)^{k_2}}}-1)}{(e^{\rho_9}-1)}dt\right)^{[n]}, \tag{5.80}$$

no qual o símbolo $[n]$ indica a n-ésima convolução da distribuição MINPE, e $E(Y_{min})$ é obtida pela Equação (5.74), para $r=1$, e substituindo-se ρ_2 por ρ_9.

As medidas de desempenho são obtidas por (5.12), substituindo-se $E(Y_{min})$ e $E(Y_{min}^2)$ por (5.74) para $r=1$ e $r=2$, respectivamente, e usando-se ρ_9.

- Quando $\phi_2 \to \infty$, a distribuição MINCOMPW se transforma na distribuição Mínimo-Bernoulli-Weibull, denotada por MINBW, e a sua função densidade é a própria distribuição Weibull. Neste caso, obtemos o modelo de fila M/W/1, como descrito anteriormente.

5.2.1 Estimação pelo método de máxima verossimilhança

Como descrito anteriormente, no Capítulo 4, adotamos o planejamento mais simples, no qual temos uma amostra aleatória $\tau = (B_1,\ldots,B_{n_a};Z_1,\ldots Z_{n_s})^T$, consistindo dos tempos entre as chegadas B_i do $(i-1)$-ésimo ao i-ésimo usuário, $i=1,\ldots,n_a$, e dos tempos de serviços completado sZ_j, do j-ésimo usuário,$j=1,\ldots,n_s$, em que n_a é o número total de tempos entre chegadas e n_s é o número total de serviços completados.

O logaritmo da função de verossimilhança do modelo de fila M/MINCOMPW/1 é dado pela soma do logaritmo da função de densidade da distribuição exponencial com parâmetro λ_2, que descreve os tempos entre as chegadas, e do logaritmo da função de densidade da distribuição MINCOMPW, que descreve os tempos de serviço, e dado por

$$\begin{aligned}\ell_{min}(\theta_{\mathbf{4}}) &= n_a\lambda_2 - \lambda T_a - n_s \log[Z(\rho_2,\phi_2)-1] + n_s k_2 \log\mu_2 + n_s \log k_2 + (k-1)\sum_{i=1}^{n_s}\log z_i \\ &+ \sum_{i=1}^{n_s}\log\left(\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}} e^{-(\mu_2 z_i m^{1/k_2})^{k_2}}\right), \end{aligned} \tag{5.81}$$

em que $\theta_{\mathbf{4}} = (\rho_2, \mu_2, \phi_2, k_2)^T$ é o vetor de parâmetros do modelo MINCOMPW, n_a é o número total de tempos entre chegadas, T_a é o tempo total entre as chegadas, n_s é o tempo total de serviços completados.

Os elementos da função (ou vetor) escore $U = (U_{\lambda_2}, U_{\rho_2}, U_{\mu_2}, U_{k_2}, U_{\phi_2})$ são dados por

$$\begin{aligned} U_{\lambda_2} &= \frac{n_a}{\lambda_2} - T_a, \\ U_{\rho_2} &= \frac{n_s}{[Z(\rho_2,\phi_2)-1]}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m\rho_2^{m-1}}{(m!)^{\phi_2}} + \sum_{i=1}^{n_s}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}} e^{-(\mu_2 z_i m^{1/k_2})^{k_2}}\right)^{-1} \\ &\times \sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^2\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}} e^{-(\mu_2 z_i m^{1/k_2})^{k_2}}, \\ U_{\mu_2} &= \frac{n_s k_2}{\mu_2} + \sum_{i=1}^{n_s}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}} e^{-(\mu_2 z_i m^{1/k_2})^{k_2}}\right)^{-1} \\ &\times \sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^2\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}} k_2\mu_2^{k_2-1} z_i^{k_2} e^{-(\mu_2 z_i m^{1/k_2})^{k_2}}, \\ U_{\phi_2} &= -\frac{n_s}{[Z(\rho_2,\phi_2)-1]}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\rho_2^j\log(j!)}{(j!)^{\phi_2}} - \sum_{i=1}^{n_s}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}} e^{-(\lambda_2 z_i m^{1/k_2})^{k_2}}\right)^{-1} \\ &\times \left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}} e^{-(\mu_2 z_i m^{1/k_2})^{k_2}}\log(m!)\right), \end{aligned}$$

$$U_{k_2} = n_s \log \mu_2 + \frac{n_s}{k_2} + \sum_{i=1}^{n_s} \log z_i - \sum_{i=1}^{n_s} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}} e^{-(\mu_2 z_i m^{1/k_2})^{k_2}} \right)^{-1}$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}} e^{-(\mu_2 z_i m^{1/k_2})^{k_2}} (\mu_2 y_i m^{1/k_2})^{k_2} \log(\mu_2 z_i m^{1/k_2}).$$

Os casos particulares do logaritmo da função de verossimilhança do modelo de fila M/MINCOMPW/1 para a variação de $\phi_2 = 0, 1$ e $\phi_2 \to \infty$ são descritos a seguir.

- O logaritmo da função de verossimilhança do modelo de fila M/MINGW/1 é dado pela soma logaritmo da função de verossimilhança da função de densidade da distribuição exponencial com parâmetro λ_2, para os tempos entre as chegadas, e do logaritmo da função de densidade da distribuição MINGW, para os tempos de serviços completado, que é dado por

$$\ell_{min}(\theta_{\mathbf{5}}, \lambda_2) = n_a \log \lambda_2 - \lambda_2 T_a + n_s \log k_2 + n_s k_2 \log \mu_2 + (k-1) \sum_{i=1}^{n_s} \log z_i$$

$$-\mu_2^{k_2} \sum_{i=1}^{n_s} z_i^{k_2} + n_s \log(1-\rho_2) - 2 \sum_{i=1}^{n_s} \log(1 - \rho_2 e^{-(\mu_2 z_i)^{k_2}}), \tag{5.82}$$

em que $\theta_{\mathbf{5}} = (\rho_2, \mu_2, k_2)^T$ é o vetor de parâmetros do modelo MINGW, n_a é o número total de tempos entre chegadas, T_a é o tempo total entre as chegadas, n_s é o tempo total de serviços completados.

Os elementos da função (ou vetor) escore $U = (U_{\lambda_2}, U_{\rho_2}, U_{\mu_2}, U_{k_2})$ são, então, dados por

$$U_{\lambda_2} = \frac{n_a}{\lambda_2} - T_a,$$

$$U_{\rho_2} = -\frac{n_s}{(1-\rho_2)} + 2 \sum_{i=1}^{n_s} \frac{e^{-(\mu_2 z_i)^{k_2}}}{(1 - \rho_2 e^{-(\mu_2 z_i)^{k_2}})},$$

$$U_{\mu_2} = \frac{n_s k}{\mu_2} - k_2 \mu_2^{k_2 - 1} \sum_{i=0}^{n_s} z_i^{k_2} - 2\rho_2 k_2 \mu_2^{k_2-1} \sum_{i=1}^{n_s} \frac{z_i^{k_2} e^{-(\mu_2 z_i)^{k_2}}}{(1 - \rho_2 e^{-(\mu_2 z_i)^{k_2}})},$$

$$U_{k_2} = \frac{n_s}{k_2} + n_s \log \mu_s + \sum_{i=1}^{n_s} \log z_i - \sum_{i=1}^{n_s} (\mu_2 z_i)^k \log(\mu_2 z_i)$$

$$+ 2\rho_2 \sum_{i=1}^{n_s} \frac{\rho_2 e^{-(\mu_2 z_i)^{k_2}} (\mu_2 z_i)^{k_2} \log(\mu_2 z_i)}{(1 - \rho_2 e^{-(\mu_2 z_i)})}.$$

- O logaritmo da função de verossimilhança do modelo de fila M/MINPW/1 é dado pela soma do logaritmo da função de densidade da distribuição exponencial com parâmetro λ_2, para os tempos entre as chegadas, e do logaritmo da função de densidade da distribuição MINPW, para os tempos de serviços completados, e dado por

$$\begin{aligned}\ell_{min}(\theta_{\mathbf{6}}, \lambda_2) &= n_a \log \lambda_2 - \lambda_2 T_a - n_s \log(e^{\rho_2} - 1) + n_s k_2 \log \mu_2 + n_s \log k_2 \\ &- (k-1)\sum_{i=1}^{n_s} \log z_i + \rho_2 \sum_{i=1}^{n_s} e^{-(\mu_2 z_i)^{k_2}} + \mu_2^{k_2} \sum_{i=1}^{n_s} z_i^{k_2}, \end{aligned} \tag{5.83}$$

em que $\theta_{\mathbf{5}} = (\rho_2, \mu_2)^T$ é o vetor de parâmetros do modelo MINPW, n_a é o número total de tempos entre chegadas, T_a é o tempo total entre as chegadas, n_s é o tempo total de serviços completados.

Os elementos da função (ou vetor) escore $U = (U_{\lambda_2}, U_{\rho_2}, U_{\mu_2}, U_{k_2})$ são dados por

$$\begin{aligned} U_{\lambda_2} &= \frac{n_a}{\lambda_2} - T_a, \\ U_{\rho_2} &= -n_s \frac{e^{\rho_2}}{(e^{\rho_2} - 1)} + \sum_{i=1}^{n_s} e^{-(\mu_2 z_i)^{k_2}}, \\ U_{\mu_2} &= \frac{n_s k_2}{\mu_2} - k_2 \mu_2^{k_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_s} z_i^{k_2} e^{-(\mu_2 z_i)^{k_2}} - k_2 \mu_2^{k_2 - 1} \sum_{i=0}^{n_s} z_i^{k_2}, \\ U_{k_2} &= \frac{n_s}{k_2} - n_s \log \mu_2 + \rho_2 \sum_{i=1}^{n_s} \log(\mu_2 z_i)(\mu z_i)^{k_2} e^{-(\mu_2 z_i)^{k_2}} - \sum_{i=1}^{n_s} (\mu_2 z_i)^{k_2} \log(\mu_2 z_i). \end{aligned}$$

5.3 Resultados numéricos

Para mostrarmos a aplicabilidade dos modelos de fila propostos neste capítulo, usamos dados simulados, obtidos a partir de um programa desenvolvido no *software* R, e um conjunto de dados reais dos acessos a um *blog*.

5.3.1 Simulações

Para as simulações usamos o mesmo critério de parada descrito no Capítulo 4, ou seja $n_a = n_s = 100$.

Simulamos dois modelos de fila M/W/1, com o vetor de parâmetros de entrada $(\lambda, \rho, \mu, k)^T$, assumindo os seguintes valores, $(0,8; 0,8; 1,0; 0,9)^T$ e $(0.9; 0,9; 1,0; 0,9)^T$. A escolha do parâmetro k foi feita a partir das simulações que apresentaram maior rapidez de serviço, e o valor selecionado para este parâmetro foi $0,9$.

Umas da dificuldades encontradas neste trabalho foi simular os modelos de fila, M/MAXCOMPW/1 e M/MINCOMPW/1, assim como os modelos particulares oriundos da variação do parâmetro $\phi_i = 0$ e $\phi_i = 1$, $i = 1, 2$. Isto ocorre devido a dificuldade de sincronizar chegadas, serviços e saídas. A solução deste problema é colocada nas propostas futuras.

Na Tabela 5.1, mostramos o resumo descritivos dos dados simulados. Podemos notar, que a simulação com intensidade de tráfego $0,9$ possui o maior e o menor tempos de serviço com $8,470$ unidade de tempo e $0,000156$ unidade de tempo, respectivamente.

Tabela 5.1: Resumos dos dados simulados para $\rho = 0,8$ e $\rho = 0,9$.

ρ	Média	Mediana	Máximo	Mínimo	Desvios-padrão
0,8	0,840	0,542	5,918	0,00052	1,31
0,9	0,941	0,551	8,470	0,00016	1,71

O valor do parâmetro ϕ está subtendido no modelo de fila M/W/1, sendo assim, primeiramente, este parâmetro foi estimado pelo método de máxima verossimilhança dos modelos M/MAXCOMPW/1 e M/MINCOMPW/1 a partir de 10.000 rodadas de simulações. O valor médio das estimativas do parâmetro de pressão foi de $\phi_i = 100$, $i = 1, 2$, assim, este valor foi considerado como o valor a ser comparado.

Simulamos 1.000 modelos de fila M/W/1, e, para cada vetor dos parâmetros calculamos as médias das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros, usando os modelos de fila M/MAXCOMPW/1 e M/MINCOMPW/1 e seus desvios-padrão (dp).

Nas Tabelas 5.2 e 5.3, apresentamos as médias destas estimativas e seus desvios-padrão. Podemos observar que as estimativas médias dos parâmetros dos modelos estão próximas dos parâmetros de entrada da simulação. Notamos também, que a variabilidade é pequena para todas as estimativas médias. As estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros foram obtidas numericamente usando o *gmalss* (Rigby and Stasinopoulos, 2005).

Tabela 5.2: Estimativas médias de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo de fila M/ MAXCOMPW/1 e seus desvios-padrão (dp).

ρ	$\hat{\lambda}$	dp	$\hat{\rho}$	dp	$\hat{\mu_1}$	dp	$\hat{k_1}$	dp	$\hat{\phi_1}$	dp
0,8	0,84	0,07	0,82	0,001	1,12	0,04	0,98	0,012	99	0,03
0,9	0,91	0,09	0,93	0,02	1,09	0,03	0,99	0,02	100,90	0,01

Tabela 5.3: Estimativas médias de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo de fila M/MINCOMPW/1 e seus desvios-padrão (dp).

ρ	$\hat{\lambda_2}$	dp	$\hat{\rho_2}$	dp	$\hat{\mu_2}$	dp	$\hat{k_2}$	dp	$\hat{\phi_2}$	dp
0,8	0,83	0,089	0,81	0,002	0,82	0,04	0,89	0,02	99,90	0,002
0,9	0,89	0,092	0,91	0,003	0,92	0,023	0,90	0,0052	101,0	0,001

Em seguida, simulamos 1.000 amostras com tamanhos diferentes do modelo M/W/1 com os diferentes parâmetros de entrada, que são: 50, 250, 500, 700, e 1.000. E verificamos a performance das estimativas médias de máxima verossimilhança dos parâmetros dos modelos e também calculamos os vícios.

Apresentamos estes resultados nas Tabelas 5.7, 5.8, 5.9 e 5.10. Notamos que os vícios das estimativas médias diminuem quando o tamanho das amostras aumenta, e isto acontece em ambos modelos.

Nas Figuras 5.1 e 5.2, comparamos as funções de confiabilidade da distribuição Weibull das duas simulações e a função do tempo restante estimada. Notamos que as funções de confiabilidade das distribuições se mostram em concordância com a função do tempo restante estimada.

Usamos os testes Log-rank e Quiquadrado como foi feita no Capítulo 4, e na Tabela 5.4 mostramos as porcentagens de concordância dos testes. Podemos observar que à medida que o tamanho amostral e a intensidade aumentam, também aumentam as porcentagens de concordância dos testes.

Tabela 5.4: Porcentagem de concordância dos testes Log rank e Quiquadrado para o modelo de fila M/W/1.

	Log rank (%)			**Quiquadrado**(%)		
Tamanho Amostral(n)	$\rho = 0,75$	$\rho = 0,80$	$\rho = 0,90$	$\rho = 0,75$	$\rho = 0,80$	$\rho = 0,90$
500	50,1	57,5	56,6	72,3	75,0	76,6
1.000	85,3	88,0	80,0	84,6	87,0	87,9
10.000	80,2	84,0	88,1	94,0	95,0	96,8

Usando a Equação (5.36) calculamos as estimativas de $\widehat{E}(Y_1)$ no modelo de fila M/W/1, para os dois conjuntos de dados simulados. Na Tabela 5.5 mostramos estes resultados.

Tabela 5.5: Estimativas de $\widehat{E}(Y_1)$ para modelo M/W/1 das simulações.

	$\rho = 0,80$	$\rho = 0,90$
$\widehat{E}(Y_1)$	0,915	0,965

Na Tabela 5.6, mostramos as estimativas das taxas de ocupação dos sistemas simulados. Podemos observar uma diminuição nessas taxas em relação aos valores do parâmetro ρ, usados como entradas das simulações.

Tabela 5.6: As taxas de ocupação do modelo de fila M/W/1 para as duas simulações.

ρ	$0,80$	$0,90$
$\hat{\rho}$	0,754	0,853

Na Tabela 5.11, mostramos as medidas de desempenho de cada modelo de fila M/W/1 e comparamos com as do modelo de fila M/M/1. Observamos que as medidas de desempenho para o modelo de fila M/W/1 são menores que as do modelo de fila M/M/1.

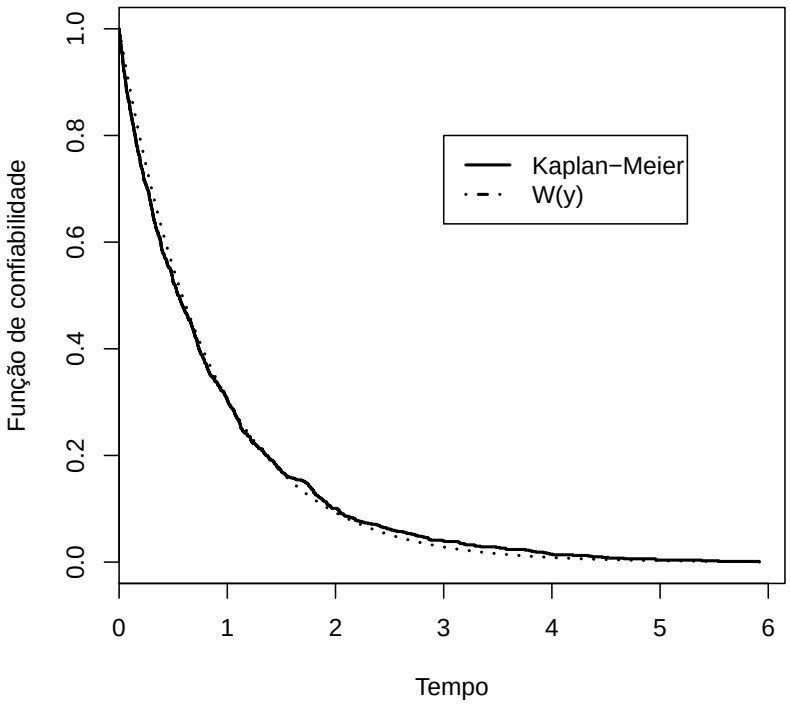

Figura 5.1: Comparando a função do tempo restante da distribuição Weibull e a função do tempo restante estimada com intensidade de tráfego $\rho = 0,8$.

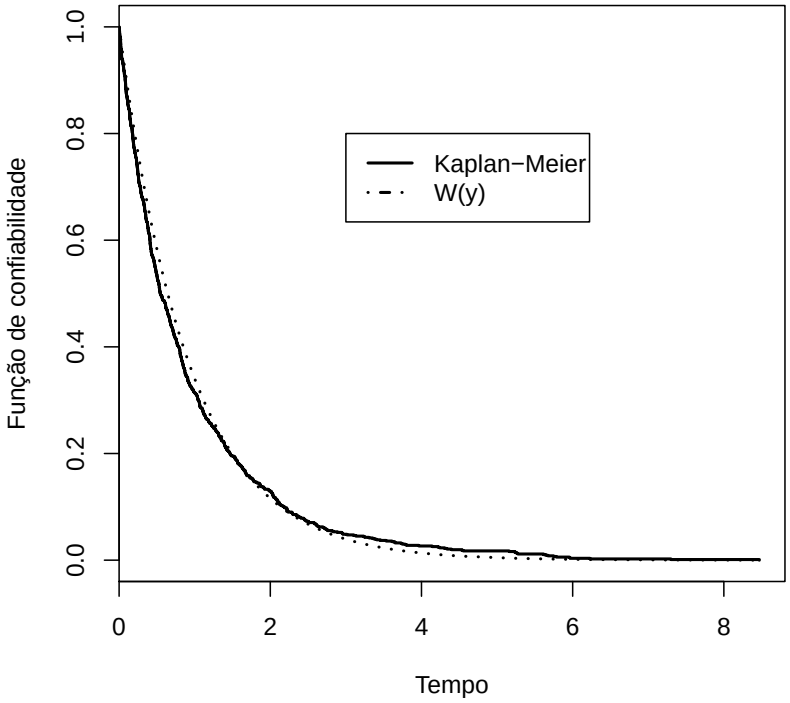

Figura 5.2: Comparando a função do tempo restante da distribuição Weibull e a função do tempo restante estimada com intensidade de tráfego $\rho = 0,9$.

Tabela 5.7: Estudo de simulação das estimativas de máxima verossimilhança do modelo de fila M/MAXCOMPW/1 para $\lambda_1 = 0,8$, $\rho_1 = 0,8$,$\mu_1 = 1,0$, $k_1 = 0,9$ e $\phi_1 = 100$

Amostra (n)	50					250					500				
	$\hat{\lambda_1}$	$\hat{\rho_1}$	$\hat{\mu_1}$	$\hat{k_1}$	$\hat{\phi_1}$	$\hat{\lambda_1}$	$\hat{\rho_1}$	$\hat{\mu_1}$	$\hat{k_1}$	$\hat{\phi_1}$	$\hat{\lambda_1}$	$\hat{\rho_1}$	$\hat{\mu_1}$	$\hat{k_1}$	$\hat{\phi_1}$
Média Amostral	0,67	0,70	0,89	0,7	50	0,72	0,71	0,91	0,72	69	0,78	0,80	0,96	0,89	72,1
Variância	1,7	2,0	1,80	1,20	0,10	1,54	1,98	0,90	1,10	0,09	1,25	0,66	0,206	0,92	0,07
Vício	0,13	0,10	0,11	0,2	50	0,08	0,09	0,09	0,18	31	0,2	0	0,04	0,01	27,9

Amostra (n)	700					1,000				
	$\hat{\lambda_1}$	$\hat{\rho_1}$	$\hat{\mu_1}$	$\hat{k_1}$	$\hat{\phi_1}$	$\hat{\lambda_1}$	$\hat{\rho_1}$	$\hat{\mu_1}$	$\hat{k_1}$	$\hat{\phi_1}$
Média Amostral	0,79	0,82	0,81	0,89	81,4	0,82	0,81	0,81	0,91	84
Variância	0,120	0,13	0,01	0,98	0,054	0,01	0,02	0,09	0,9	0,01
Vício	0,01	-0,02	-0,01	0,1	18,6	-0,02	- 0,01	-0,01	- 0,01	16

Tabela 5.8: Estudo de simulação das estimativas de máxima verossimilhança do modelo de fila M/MAXCOMPW/1 para $\rho = 0,9$, $\lambda = 0,9$, $k = 0,9$ e $\phi = 0$.

Amostra (n)	50					250					500				
	$\hat{\lambda_1}$	$\hat{\rho_1}$	$\hat{\mu_1}$	$\hat{k_1}$	$\hat{\phi_1}$	$\hat{\lambda_1}$	$\hat{\rho_1}$	$\hat{\mu_1}$	$\hat{k_1}$	$\hat{\phi_1}$	$\hat{\lambda_1}$	$\hat{\rho_1}$	$\hat{\mu_1}$	$\hat{k_1}$	$\hat{\phi_1}$
Média Amostral	0,72	0,76	0,94	0,8	61,1	0,75	0,78	0,95	0,92	70	0,83	0,84	0,94	0,92	83
Variância	1,8	2,0	1,99	0,60	0,04	1,5	0,03	1,90	0,34	0,02	1,2	1,06	0,42	0,042	0,01
Vício	0,18	0,14	0,06	0,1	38,9	0,15	0,12	0,05	-0,02	30	0,07	0,06	-0,04	-0,02	17

Amostra (n)	700					1,000				
	$\hat{\lambda_1}$	$\hat{\rho_1}$	$\hat{\mu_1}$	$\hat{k_1}$	$\hat{\phi_1}$	$\hat{\lambda_1}$	$\hat{\rho_1}$	$\hat{\mu_1}$	$\hat{k_1}$	$\hat{\phi_1}$
Média Amostral	0,86	0,90	0,91	0,90	86	0,89	0,91	0,91	0,90	88
Variância	0,01	0,002	0,011	0,04	0,001	0,02	0,03	0,025	0,01	0,01
Vício	0,04	0	-0,01	0,0	14	0,01	-0,01	- 0,01	0,00	12

Tabela 5.9: Estudo de simulação das estimativas de máxima verossimilhança do modelo de fila M/MINCOMPW/1 para $\lambda_2 = 0,8$,$\rho_2 = 0,8$, $\mu_2 = 1,0$, $k_2 = 0,9$ e $\phi_1 = 100$.

Amostra (n)	50					250					500				
	$\hat{\lambda_2}$	$\hat{\rho_2}$	$\hat{\mu_2}$	$\hat{k_2}$	$\hat{\phi_2}$	$\hat{\lambda_2}$	$\hat{\rho_2}$	$\hat{\mu_2}$	$\hat{k_2}$	$\hat{\phi_2}$	$\hat{\lambda_2}$	$\hat{\rho_2}$	$\hat{\mu_2}$	$\hat{k_2}$	$\hat{\phi_2}$
Média Amostral	0,65	0,69	0,90	0,83	54	0,67	0,70	0,94	0,78	69,3	0,72	0,75	0,94	0,79	70,1
Variância	1,34	2,01	2,01	0,42	0,02	1,30	2,00	2,04	0,34	0,01	0,07	0,04	0,025	0,032	0,01
Vício	0,15	0,11	0,10	0,07	462	0,13	0,10	0,06	0,12	30,7	0,08	0,05	0,06	0,01	29,9

Amostra (n)	700					1,000				
	$\hat{\lambda_1}$	$\hat{\rho_1}$	$\hat{\mu_1}$	$\hat{k_1}$	$\hat{\phi_1}$	$\hat{\lambda_1}$	$\hat{\rho_1}$	$\hat{\mu_1}$	$\hat{k_1}$	$\hat{\phi_1}$
Média Amostral	0,79	0,81	0,95	0,90	82,7	0,82	0,81	0,98	0,90	89
Variância	0,06	0,02	0,011	0,003	0,04	0,001	0,05	0,08	0,015	0,02
Vício	0,01	-0,01	-0,05	0,0	17,3	0,01	-0,01	0,02	0,00	11

Tabela 5.10: Estudo de simulação das estimativas de máxima verossimilhança do modelo de fila M/MINCOMPW/1 para $\lambda_2 = 0,9$, $\rho_2 = 0,9$, $\mu_2 = 1,0$, $k_2 = 0,9$ e $\phi_2 = 100$.

Amostra (n)	50					250					500				
	$\hat{\lambda_2}$	$\hat{\rho_2}$	$\hat{\mu_2}$	$\hat{k_2}$	$\hat{\phi_2}$	$\hat{\lambda_2}$	$\hat{\rho_2}$	$\hat{\mu_2}$	$\hat{k_2}$	$\hat{\phi_2}$	$\hat{\lambda_2}$	$\hat{\rho_2}$	$\hat{\mu_2}$	$\hat{k_2}$	$\hat{\phi_2}$
Média Amostral	0,79	0,82	0,96	0,86	68	0,81	0,87	0,97	0,89	76,1	0,85	0,88	1,04	0,89	84
Variância	1,90	1,85	1,8	,85	0,02	1,78	1,12	0,127	0,034	1,12	1,02	0,94	0,25	0,29	0,01
Vício	0,11	0,08	0,04	0,04	32	0,09	0,03	0,03	0,01	24	0,05	0,02	-0,14	0,01	16

Amostra (n)	700					1,000				
	$\hat{\lambda_1}$	$\hat{\rho_1}$	$\hat{\mu_1}$	$\hat{k_1}$	$\hat{\phi_1}$	$\hat{\lambda_1}$	$\hat{\rho_1}$	$\hat{\mu_1}$	$\hat{k_1}$	$\hat{\phi_1}$
Média Amostral	0,91	0,95	1,01	0,89	87,1	0,91	0,91	1,02	0,91	91
Variância	0,10	0,12	0,1	0,03	0,01	0,08	0,18	0,15	0,53	0,01
Vício	-0,01	-0,05	-0,11	0,01	12,9	-0,01	-0,01	0,02	-0,01	9

Tabela 5.11: Medidas de desempenho dos modelos de fila M/W/1 e M/M/1.

	M/W/1		**M/M/1**	
$\hat{\rho}$	0,754	0,853	0,754	0,853
L_q	1,59	1,70	2,311	5,942
W_q	1,57	2,03	3,08	5,822
L	2,98	2.930	3,06	5,802
W	2,37	2,524	4,080	6,826

Na Tabela 5.12, comparamos os modelos de fila M/W/1, M/M/1 e M/E_k/1, usando os critérios AIC e BIC, e, assim, selecionando o modelo que melhor explique os dados. Notamos que modelo M/W/1 atinge o menor valor destes critérios. Optamos por mostrar somente a comparação dos modelos gerados com intensidade de tráfego $0,8$, pois com intensidade de tráfego $0,9$, os modelos apresentam o mesmo comportamento.

Tabela 5.12: Valores dos critérios AIC e BIC

Modelos	**AIC**	**BIC**
M/W/1	349,05	352,50
M/M/1	400,03	458,51
M/E_k/1	350,02	358,90

Nota: O modelo de fila M/E_k/1 foi simulado com os mesmos parâmetros de entrada do modelo M/W/1, e para o modelo M/M/1 usamos $\lambda = 0,8$ e $\mu = 1$. Usamos estes valores para gerar o modelo de fila M/M/1, pois obtemos a mesma intensidade de tráfego gerada nas simulações, $\rho = \lambda/\mu = 0,8$.

5.3.2 Acessos a um *blog*

Os dados agora apresentados são dos acessos a um questionário alocado no *blog* "Tendências Profissionais", que tinha como objetivo coletar dados para a pesquisa financiada pelo Instituto de Pesquisa Econômica (IPEA), que traçava o perfil do profissional na área de comunicação no Brasil. A coleta iniciou-se em 10 de dezembro de 2.011, e o questionário ficou disponível por 20 dias.

O meio utilizado para a coleta dos dados foi a distribuição do *link* do blog nas principais redes sociais (*Facebook*, *Twiter*, *Orkut*, *MySpace*, *Youtube*) e também 1.000 *e-mails* foram enviados às principais agências de publicidade do Brasil (Dados cedidos pelo grupo de pesquisa Midia interativas digitais (Mid)).

Podemos acessar o blog pelo seguinte endereço:

http://tendenciasprofissionais.wordpress.com/grupo-de-pesquisa-mid.

Na Figura 5.3, mostramos a página principal do *blog*, na qual existem vários *links*, que o usuário pode acessar, como, por exemplo, o grupo Mid, a Equipe, o questionário etc. Cada *link* foi interpretado como sendo um servidor, e dentro de cada um é possível acessar o questionário.

Figura 5.3: *Blog* Tendências Profissionais.

Com o uso da ferramenta *Google Analytics* foi possível saber quantos acessos o usuário fez a página, quais *links* foram feitos, os horários de acesso, a origem do usuário através do IP da máquina e se o usuário acessou diretamente o questionário.

No período da coleta desses dados foram realizados 2.000 acessos ao questionário, e, em um particular dia tivemos 206 acessos, isto foi devido a ampla divugação nas redes sociais no inicio da pesquisa, e também do esforço para contactar pessoas que trabalhavam na área da comunicação. Vale ressaltar que o acesso não implica responder o questionário. Portanto, escolhemos este dia para mostrar a aplicabilidade dos modelos propostos neste trabalho.

Para verificar se a amostra selecionada origina-se de uma população com distribuição Weibull (H_0), usamos o teste Kolmogorov-Smirnov com nível de significância de $0,05$ e obtendo o p-valor$= 0,2857$, com este resultado não rejeitamos a hipótese H_0.

Mostramos, na Tabela 5.13, o resumo descritivo dos tempos entre os acessos ao questionário. Podemos observar que o menor e o maior tempo entre os acessos foi de $0,00068$ segundos e de $16,56$ segundos, respectivamente.

Tabela 5.13: Resumo dos tempos entre os acessos em segundos.

Média	Mediana	Máximo	Mínimo	Desvio-padrão
1,008	0,326	16,56	0,00068	1,86

Na Tabela 5.14, mostramos as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros dos modelos de fila M/MAXCOMPW/1 e M/MINCOMPW/1. Podemos observar que as estimativas dos parâmetros ϕ_i, $i = 1, 2$ dos modelos M/MAXCOMPW/1 e M/MINCOMPW/1, respectivamente, estão próximas de um. Portanto, os possíveis modelos que descreverão os dados são M/MAXPW/1 e M/MINPW/1. Na Tabela 5.14 omitimos os índices dos parâmetros dos modelos para facilitar a visualização.

Tabela 5.14: Estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros

Modelos	$\hat{\lambda}$	$\hat{\rho}$	$\hat{\mu}$	$\hat{k}$	$\hat{\phi}$
M/MAXCOMPW/1	0,80	0,90	1,12	0,94	1,01
M/MINCOMPW/1	0,80	0,88	1,15	0,91	1,0

Nas Figuras 5.4 e 5.5, comparamos as funções de confiabilidade das distribuições de serviço MAXPW, MINPW e a função do tempo restante estimada. A partir destas figuras, observamos a concordância entre as funções de confiabilidade das distribuições MAXPW e MINPW e a função do tempo restante estimada.

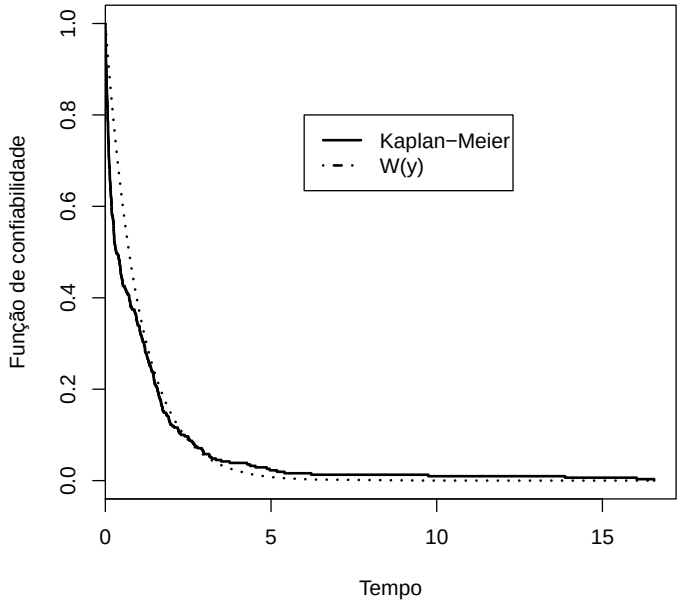

Figura 5.4: Comparando a função do tempo restante da distribuição MAXPW e a função do tempo restante estimada.

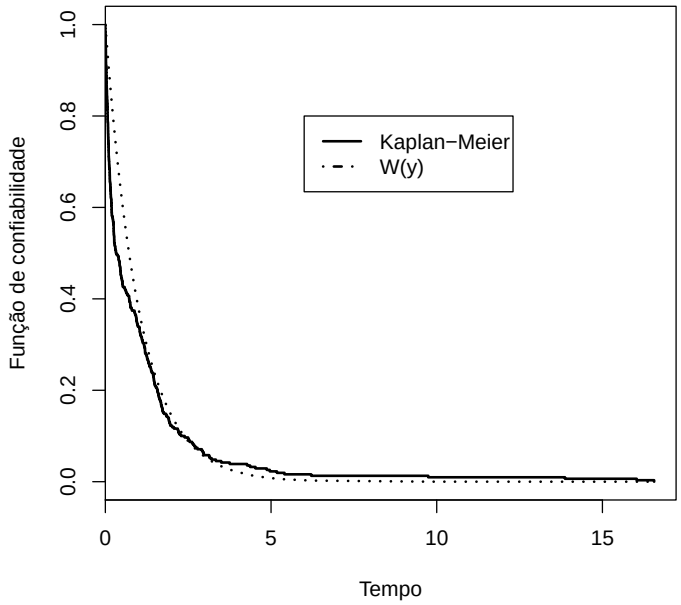

Figura 5.5: Comparando a função do tempo restante da distribuição MINPW e a função do tempo restante estimada.

Na Tabela 5.15 mostramos as estimativas de $\widehat{E}(Y_{max})$ e $\widehat{E}(Y_{min})$ referentes aos

modelos MAXPW e MINPW, respectivamente. Observamos que os valores dessas estimativas estão muito próximas.

Tabela 5.15: A estimativas de $\widehat{E}(Y_{max})$ e $\widehat{E}(Y_{min})$ dos modelos MAXPW e MINPW dado em segundos.

	MAXPW	**MINPW**
	$\widehat{E}(Y_{max})$	$\widehat{E}(Y_{min})$
	0,88	0,80

Na Tabela 5.16, mostramos as taxas de ocupação dos modelos de fila M/MAXPW/1 e M/MINPW/1. Podemos observar que as taxas de ocupação em ambos modelos são menores que um, mostrando a estabilidade do sistema.

Tabela 5.16: Taxas de ocupação dos modelos de fila M/MAXPW/1 e M/MINPW/1.

	M/MAXPW/1	**M/MINPW/1**
M/MAXPW/1	$\rho_5 = 0,792$	$\rho_9 = 0,704$

Na Tabela 5.17, mostramos as medidas de desempenho dos modelos de fila M/MAXPW/1, M/MINPW/1, e M/M/1. Notamos que as medidas de desempenho dos modelos M/MAXPW/1, M/MINPW/1 são menores que as do modelo M/M/1.

Tabela 5.17: Medidas de desempenho dos modelos de fila M/MAXPW/1, M/MINPW/1 e M/M/1.

	M/MAXPW/1	**M/MINPW/1**	**M/M/1**	
	0,792	0,704	0,792	0,704
L_q	0,0079	0,00089	3,808	1,674
W_q	0,0097	0,0011	3,770	2,092
L	0,888	0,800	3,016	2,378
W	0,8897	0,811	4,76	2,972

Na Tabela 5.18,mostramos os valores dos critérios AIC e BIC para os modelos M/MAXPW/1, M/MINPW/1, M/W/1 e M/M/1. Observamos que o modelo de fila M/MINPW/1 atinge os menores valores dos critérios AIC e BIC, portanto, este é o modelo de fila que melhor se adequa aos dados.

Tabela 5.18: Valores dos critérios AIC e BIC

Modelos	**AIC**	**BIC**
M/MAXPW/1	191,90	190,57
M/MINPW/1	190,72	190,33
M/W/1	199,90	197,89
M/M/1	210,10	205,05

5.4 Comentários finais

Neste capítulo, apresentamos os modelos M/MAXCOMPW/1 e M/MINCOMPW/1, que são casos particulares dos modelos de fila M/MAXCOMPG/1 e M/MINCOMPG/1, respectivamente, nos quais consideramos a distribuição Weibull como distribuição geral.

Mostramos as propriedades dos modelos, tais como as expressões para as funções de densidade das distribuições obtidas e seus momentos, as distribuições de equilíbrio do número de usuários no sistema e do tempo de espera na fila. Usamos o método de máxima verossimilhança para a estimação dos parâmetros dos modelos. Para ilustrar os modelos propostos, dados simulados e dados de acessos a um blog foram utilizados.

Capítulo 6

Modelos de fila M/MAXCOMPBS/1 e M/MINCOMPBS/1

Neste capítulo, apresentamos os modelos M/MAXCOMPBS/1 e M/MINCOMPBS/1, nos quais assumimos a distribuição Birnbaum Saunders, denotada por BS, como distribuição geral para os tempos de serviço. As características destes modelos são as mesmas já descritas nos modelos de fila apresentados anteriormente.

Suponha que $Y_1, Y_2, \ldots$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição BS. A função de densidade de Y_i e é dada por

$$f(y_i, \alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2}\left[\frac{y_i}{\beta} + \frac{\beta}{y_i} - 2\right]\right\} y_i^{-3/2}\frac{[y+\beta]}{2\alpha\sqrt{\beta}}, \tag{6.1}$$

em que y_i é o tempo de serviço do i-ésimo usuário, $\alpha > 0$ é o parâmetro de forma e $\beta > 0$ é o parâmetro de escala.

6.1 Modelo de fila M/MAXCOMPBS/1

No modelo de fila M/MAXCOMPBS/1, a distribuição de serviço é dada pela distribuição MAXCOMPBS.

A função de densidade da distribuição MAXCOMPBS é obtida usando Equação (3.4), e dada por

$$f_{Y_{max}}(y; \theta_{\mathbf{1}}) = \frac{1}{[Z(\rho_1, \phi_1) - 1]} f_{Y_1}(y) \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}} \Phi(\nu_y))^{m-1}, \tag{6.2}$$

em que $y > 0$, $\theta_{\mathbf{1}} = (\rho_1, \alpha_1, \beta_1, \phi_1)^T$ é o vetor de parâmetros do modelo MAXCOMPBS, $f_{Y_1}(\cdot)$ é a função de densidade de Y_1, dada pela Equação (6.1), $\nu_y = \alpha_1^{-1}\kappa(\sqrt{y/\beta_1} - \sqrt{\beta_1/y})$ e $\Phi(\nu_y)$ é a função de distribuição da distribuição normal padrão.

A função de distribuição MAXCOMPBS é

$$F_{Y_{max}}(y; \theta_{\mathbf{1}}) = \frac{Z(\rho_1, \phi_1) - Z(\rho_1\Phi(\nu_y), \phi_1)}{[Z(\rho_1, \phi_1) - 1]}, \tag{6.3}$$

e a função do tempo restante da distribuição MAXCOMPBS é dada por

$$W_{Y_{max}}(y; \theta_{\mathbf{1}}) = \frac{Z(\rho_1\Phi(\nu_y), \phi_1) - 1}{[Z(\rho_1, \phi_1) - 1]}. \tag{6.4}$$

O r-ésimo momento, $r = 1, 2, \ldots$, da distribuição MAXCOMPBS é dado por

$$E(Y_{max}^r) = \frac{1}{[Z(\rho_1, \phi_1) - 1]} \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}} \int_0^{\infty} y^r f_{Y_1}(y)\Phi(\nu_y)^{m-1} dy, \tag{6.5}$$

em que $f_{Y_1}(y)$ é expressa pela Equação (6.1). A Equação (6.5) foi calculada usando um programa desenvolvido no software R, e, a partir do truncamento da série $\sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}}$ descrita no Apêndice .2.

A taxa de ocupação do sistema é expressa

$$\rho_3 = \lambda_1 E(Y_{max}), \tag{6.6}$$

em que $\rho_3 < 1$, λ_1 é a taxa de chegada e $E(Y_{max})$ é obtida pela Expressão (6.5), assumindo-se $r = 1$.

A probabilidade de que durante um serviço, n usuários cheguem ao sistema é

$$\begin{aligned}
k_n &= \frac{1}{[Z(\rho_1, \phi_1) - 1]} \frac{\lambda_1^n}{n!} \sum_{j=0}^{\infty} m \frac{\rho_3^m}{(m!)^{\phi_1}} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\lambda_1^j}{j!} \\
&\times \int_0^{\infty} y^{n+j} f_{Y_1}(y)\Phi(\nu_y)^{m-1} dy \\
&= \frac{\lambda_1^n}{n!} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\lambda_1^j}{j!} \frac{1}{[Z(\rho_1, \phi_1) - 1]} \sum_{j=0}^{\infty} m \frac{\rho_3^m}{(m!)^{\phi_1}} \\
&\times \int_0^{\infty} y^{n+j} f_{Y_1}(y)\Phi(\nu_y)^{m-1} dy \\
&= \frac{\lambda_1^n}{n!} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\lambda_1^j}{j!} E(Y_{max}^{n+j}),
\end{aligned} \tag{6.7}$$

em que $E(Y_{max}^{n+j})$ dada pela Equação (6.5), assumindo-se $r = n + j$, e substituindo-se ρ_1 por ρ_3.

A função geradora de probabilidade é dada por

$$\begin{aligned} K_{max}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(\lambda_1(1-z))^n}{n!} E(Y_{max}^n) \\ &= \tilde{B}_{max}(\lambda_1(1-z), \end{aligned} \tag{6.8}$$

em que $E(Y_{max}^n)$ é dada pela Expressão (6.5), tomando-se $r = n$, e substituindo-se ρ_1 por ρ_3.

A função geradora de probabilidades para o número de usuários do sistema em situação de equilibrio, é dada por

$$\Pi_{max}(z) = \frac{(1-\rho_3)\tilde{B}_{max}(\lambda_1(1-z))(1-z)}{\tilde{B}_{max}(\lambda_1(1-z)) - z}. \tag{6.9}$$

Assim temos,

$$\begin{aligned} p_0 &= (1-\rho_3), \\ p_1 &= (1-\rho_3)\left\{ \frac{-\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{\lambda_1^j}{j!} E(Y_{max}^j) + 1}{\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{\lambda_1^j}{j!}\ E(Y_{max}^j)} \right\}, \\ &\vdots \\ p_n &= (1-\rho_3)\left\{ \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{\lambda_1^j}{j!}\ E(Y_{max}^j) \right)^{(i)} \right. \\ &\times \left. \left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{\lambda_1^j}{j!}\ E(Y_{max}^j) \right)^{-(n-i)} \right\}, \end{aligned}$$

em que os símbolos (i) e $(n-i)$ indicam a i-ésima e $(n-i)$-ésima derivadas, respectivamente, $E(Y_{max}^j)$ é obtida a partir da Equação (6.5), assumindo-se $r = j$, e substituindo-se ρ_1 por ρ_3.

A função geradora do tempo de espera na fila em situação de equilibrio é expressa na forma

$$\tilde{W}_q(s) = \frac{(1-\rho_3)s}{\lambda_1 \tilde{B}_{max}(s) + s - \lambda_1}, \tag{6.10}$$

na qual $s = \lambda_1(1-z)$.

Temos, que a distribuição do tempo médio de espera na fila é dado pela expressão

$$W_q(t) = (1-\rho_3)\sum_{n=0}^{\infty}\rho_3^n\left(\int_0^y E(Y_{max})^{-1}\frac{Z(\rho_3\Phi(\nu_t),\phi_1)-1}{[Z(\rho_3,\phi_1)-1]}dt\right)^{[n]}, \tag{6.11}$$

na qual o símbolo $[n]$ indica a n-ésima convolução da distribuição MAXCOMPBS, e $E(Y_{max})$ é expressa pela Equação (6.5), e substituindo-se ρ_1 por ρ_3.

As medidas de desempenho, então, são dadas por

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{\lambda_1^2}{2(1-\rho_3)}\ E(Y_{max}^2), \\ L &= \frac{\lambda_1^2}{2(1-\rho_3)}E(Y_{max}^2)+\rho_3, \\ W_q &= \frac{\lambda_1}{2(1-\rho_3)}E(Y_{max}^2), \\ W_q &= \frac{\lambda_1}{2(1-\rho_3)}\ E(Y_{max}^2)+E(Y_{max}), \end{aligned} \tag{6.12}$$

em que $E(Y_{max})$ e $E(Y_{max}^2)$ são dadas pela Equação (6.5), assumindo-se $r=1$ e $r=2$, respectivamente, e substituindo-se ρ_1 por ρ_3.

A partir dos Corolários 3.1, 3.2 e 3.3 são obtidos os casos particulares do modelo de fila M/MAXCOMPBS/1.

A seguir adotamos a mesma notação usada no modelo de fila M/MAXCOMPBS/1.

- Quando a pressão do parâmetro ϕ_1 assume valor zero, a distribuição MAXCOMPBS torna-se a distribuição Máximo-geométrica-Birnbaum Saunders, denotada por MAXGBS, para os tempos de serviço, e, assim, obtemos o modelo de fila M/MAXGBS/1.

  A função de densidade da distribuição MAXGBS é dada por

  $$f_{Y_{max}}(y;\boldsymbol{\theta_2}) = \frac{(1-\rho_1)}{\rho_1}f_{Y_1}(y)\sum_{m=1}^{\infty}m\rho_1^m\Phi(\nu_y))^{m-1}, \tag{6.13}$$

  em que $y>0$, $\boldsymbol{\theta_2}=(\rho_1,\alpha_1,\beta_1)^T$ é o vetor de parâmetros do modelo MAXGBS, $f_{Y_1}(\cdot)$ é a função de densidade de Y_1, dada pela Equação (6.1), $\nu_y=\alpha_1^{-1}\kappa(\sqrt{y/\beta_1}-\sqrt{\beta_1/y})$ e $\Phi(\nu_y)$ é a função de distribuição da distribuição normal padrão.

  A Equação (6.13) pode ser reescrita da seguinte forma

  $$f_{Y_{max}}(y;\boldsymbol{\theta_2}) = \frac{(1-\rho_1)f_{Y_1}(y)}{(1-\rho_1\Phi(\nu_y))^2}. \tag{6.14}$$

A correspondente função de distribuição MAXGBS é

$$F_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{2}}) = \frac{1-\Phi(\nu_y)}{(1-\rho_1\Phi(\nu_y))}, \tag{6.15}$$

e a função do tempo restante da distribuição MAXGBS é dada por

$$W_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{2}}) = \frac{\Phi(\nu_y)(1-\rho_1)}{(1-\rho_1\Phi(\nu_y))}. \tag{6.16}$$

O r-ésimo momento, $r = 1, 2, \ldots$, da distribuição MAXGBS é

$$E(Y_{max}^r) = \frac{(1-\rho_1)}{\rho_1}\sum_{m=1}^{\infty} m\rho_1^m \int_0^{\infty} y^r f_{Y_1}(y)\Phi(\nu_y)^{m-1}dy, \tag{6.17}$$

na qual $f_{Y_1}(y)$ é dada pela Equação (6.1).

A taxa de ocupação do modelo de fila M/MAXGBS/1 é dada por

$$\rho_4 = \lambda_1 E(Y_{max}), \tag{6.18}$$

sendo que $\rho_4 < 1$, λ_1 é a taxa de chegada e $E(Y_{max})$ é obtida pela Expressão (6.17), assumindo-se $r = 1$.

A probabilidade de que n usuários cheguem ao sistema, durante um serviço é dada da seguinte forma

$$k_n^1 = \frac{\lambda_1^n}{n!}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\lambda_1^j}{j!}E(Y_{max}^{n+j}), \tag{6.19}$$

na qual $E(Y_{max}^{n+j})$ é dada pela Equação (6.17), assumindo-se $r = n+j$, e substituindo-se ρ_1 por ρ_4.

A função geradora de probabilidades em situação de equilibrio do sistema é dada por

$$\begin{aligned} K_{max}^1(z) &= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{(\lambda_1(1-z))^j}{j!}E(Y_{max}^j) \\ &= \tilde{B}_{max}^1(\lambda_1(1-z)), \end{aligned} \tag{6.20}$$

em que $E(Y_{max}^j)$ é dada pela Expressão (6.17), assumindo-se $r = j$, e substituindo-se ρ_1 por ρ_4.

A função geradora da distribuição de equilíbrio do número de usuários no sistema é

$$\Pi_{max}^1(z) = \frac{(1-\rho_4)\tilde{B}_{max}^1(\lambda_1(1-z))(1-z)}{\tilde{B}_{max}^1(\lambda_1(1-z)) - z}. \tag{6.21}$$

Temos, assim, que

$$p_0^1 = (1-\rho_4),$$

$$p_1^1 = (1-\rho_4)\left\{\frac{-\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\frac{\lambda_1^j}{j!}\ E(Y_{max}^j)+1}{\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\lambda_1^j}{j!}\ E(Y_{max}^j)}\right\},$$

$$p_n^1 = (1-\rho_4)\left\{\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\lambda_1^j}{j!}\ E(Y_{max}^j)\right)^{(i)}\right.$$

$$\left.\times\ \left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\lambda_1^j}{j!}E(Y_{max}^j)\right)^{-(n-i)}\right\},$$

em que os símbolos (i) e $(n-i)$ indicam a i-ésima e $(n-i)$-ésima derivadas, respectivamente, $E(Y_{max}^j)$ é obtida a partir da Equação (6.17), assumindo-se $r=j$, e substituindo-se ρ_1 por ρ_4.

A função geradora de probabilidade da distribuição de equilíbrio do tempo de espera na fila é

$$\tilde{W}_q^1(s) = \frac{(1-\rho_4)s}{\lambda_1\tilde{B}_{max}^1(s)+s-\lambda_1}, \tag{6.22}$$

em que $s=\lambda_1(1-z)$.

A distribuição do tempo médio de espera na fila é expressa na forma

$$W_q^1(y) = (1-\rho_4)\sum_{n=0}^{\infty}\rho_4^n\left(\int_0^y E(Y_{max})^{-1}\frac{\Phi(\nu_t)(1-\rho_4)}{(1-\rho_4\Phi(\nu_t))}dt\right)^{[n]}, \tag{6.23}$$

na qual o símbolo $[n]$ indica a n-ésima convolução da distribuição MAXGBS, $E(Y_{max})$ é dada pela Expressão (6.17), com $r=1$, e substituindo-se ρ_1 por ρ_4.

As medidas de desempenho do modelo de fila M/MAXGBS/1 podem ser obtidas a partir da Equação (6.12), substituindo-se $E(Y_{max})$ e $E(Y_{max}^2)$ dadas em (6.17), tal que r assume os valores 1 e 2, respectivamente, e substituindo-se ρ_1 por ρ_4.

- Quando o parâmetro de pressão ϕ_1 assume valor um, a distribuição MAXCOMPBS para o tempo de serviço torna-se a distribuição Máximo-Poisson-Birnbaum-Saunders, denominada por distribuição MAXPBS, e, assim, obtemos o modelo de fila M/MAXPBS/1.

  A função de densidade da distribuição MAXPBS é

$$f_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{3}}) = \frac{1}{(e^{\rho_1}-1)}f_{Y_1}(y)\sum_{m=1}^{\infty}m\frac{\rho^m}{(m!)}(\Phi(\nu_y))^{m-1}, \tag{6.24}$$

em que $y > 0$, $\theta_{\mathbf{3}} = (\rho_1, \alpha_1, \beta_1)^T$ é o vetor de parâmetros do modelo MAXPBS, $f_{Y_1}(\cdot)$ é a função de densidade de Y_1, dada pela Equação (6.1), $\nu_y = \alpha_1^{-1}\kappa(\sqrt{y/\beta_1} - \sqrt{\beta_1/y})$ e $\Phi(\nu_y)$ é a função de distribuição da distribuição normal padrão.

A Equação (6.24) pode ser reescrita na forma

$$f_{Y_{max}}(y; \theta_{\mathbf{3}}) = \frac{\rho_1 f_Y(y) e^{\rho_1 \Phi(\nu_y)}}{(e^{\rho_1} - 1)}. \tag{6.25}$$

A função de distribuição MAXPBS é

$$F_{Y_{max}}(y; \theta_{\mathbf{3}}) = \frac{e^{\rho_1} - e^{\rho_1 \Phi(\nu_y)}}{(e^{\rho_1} - 1)}, \tag{6.26}$$

e q função do tempo restante da distribuição MAXPBS é dada por

$$W_{Y_{max}}(y; \theta_{\mathbf{3}}) = \frac{e^{\rho_1 \Phi(\nu_y)} - 1}{(e^{\rho_1} - 1)}. \tag{6.27}$$

O r-ésimo momento, $r = 1, \ldots$, da distribuição MAXPBS é

$$E(Y_{max}^r) = \frac{1}{(e^{\rho_1} - 1)} \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_1^m}{m!} \int_0^{\infty} y^r f_{Y_1}(y) \Phi(\nu_y)^{m-1} dy, \tag{6.28}$$

em que $f_{Y_1}(y)$ é dada pela Equação (6.1).

A taxa de ocupação do sistema é dado por

$$\rho_5 = \lambda_1 E(Y_{max}), \tag{6.29}$$

em que $\rho_5 < 1$, λ_1 é a taxa de chegada, $E(Y_{max})$ é dada pela Expressão (6.28), assumindo-se $r = 1$.

A probabilidade de que n usuários cheguem ao sistema, durante um serviço é

$$k_n^2 \;\; = \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\lambda^j}{j!} E(Y_{max}^{n+j}), \tag{6.30}$$

sendo que $E(Y_{max}^{n+j})$ é dada pela Expressão (6.28) tomando $r = n + j$ e substituindo ρ_1 por ρ_5.

A função geradora de probabilidades é dada por

$$\begin{aligned} K_{max}^2(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(\lambda_1(1-z))^j}{j!} E(Y_{max}^j) \\ &= \tilde{B}_{max}^2(\lambda_1(1-z)), \end{aligned} \tag{6.31}$$

em que $E(Y_{max}^j)$ é obtida pela Expressão (6.28), fazendo-se $r = j$, e substituindo-se ρ_1 por ρ_5.

A função geradora da distribuição de equilíbrio do número de usuários no sistema, é obtida da seguinte forma

$$\Pi_{max}^2(z) = \frac{(1-\rho_5)\tilde{B}_{max}^2(\lambda_1(1-z))(1-z)}{\tilde{B}_{max}^2(\lambda_1(1-z)) - z}. \tag{6.32}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
p_0^2 &= (1-\rho_5), \\
p_1^2 &= (1-\rho_5)\left\{\frac{-\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{\lambda_1^j}{j!}\ E(Y_{max}^j) + 1}{\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{\lambda_1^j}{j!}\ E(Y_{max}^j)}\right\}, \\
&\vdots \\
p_n^2 &= (1-\rho_5)\left\{\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{\lambda_1^j}{j!}\ E(Y_{max}^n)\right)^{(i)}\right. \\
&\times \left.\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{\lambda_1^j}{j!}\ E(Y_{max}^j)\right)^{-(n-i)}\right\},
\end{aligned}$$

em que os símbolos (i) e $(n-i)$ indicam a i-ésima e $(n-i)$-ésima derivadas, respectivamente, $E(Y_{max}^j)$ é obtida a partir da Equação (6.28), assumindo-se $r = j$, e substituindo-se ρ_1 por ρ_5.

A função geradora de probabilidade da distribuição de equilíbrio do tempo de espera na fila é

$$\tilde{W}_q^2(s) = \frac{(1-\rho_5)s}{\lambda_1\tilde{B}_{max}^2(s) + s - \lambda_1}, \tag{6.33}$$

na qual $s = \lambda(1-z)$.

Então, a distribuição do tempo média de espera na fila é expressa por

$$W_q(y) = (1-\rho_5)\sum_{n=0}^{\infty}\rho_5^n\left(\int_0^y E(Y_{max})^{-1}\frac{e^{\rho_5\Phi(\nu_y)}-1}{(e^{\rho_5}-1)}dt\right)^{[n]}, \tag{6.34}$$

na qual o símbolo $[n]$ indica a n-ésima convolução da distribuição MAXPBS, e $E(Y_{max})$ é dada pela Expressão (6.28), assumindo-se $r = 1$, e substituindo-se ρ_1 por ρ_5.

As medidas de desempenho do modelo de fila M/MAXPBS/1 podem ser obtidas a partir das Equações (6.12), nas quais substituímos $E(Y_{max})$ e $E(Y_{max}^2)$ dadas em

(6.28), sendo que r assume os valores 1 e 2, respectivamente, e substituindo-se ρ_1 por ρ_5.

- Quando o parâmetro de pressão ϕ_1 tende para infinito, $\phi_1 \to \infty$, a distribuição MAXCOMPBS torna-se a distribuição Máximo-Bernoulli-Birnbaum-Saunders, denominada por distribuição MAXBBS, que é a distribuição BS, e obtemos o modelo de fila M/BS/1.

  A função de densidade da distribuição BS é

$$f_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{4}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2}\left[\frac{y}{\beta}+\frac{\beta}{y}-2\right]\right\} y^{-3/2}\frac{(y+\beta)}{2\alpha\sqrt{\beta}}, \tag{6.35}$$

  em que $y > 0$, $\theta_{\mathbf{4}} = (\alpha, \beta)^T$ é o vetor de parâmetros do modelo BS, $f_{Y_1}(\cdot)$ é a função de densidade de Y_1, dada pela Equação (6.1), $\nu_y = \alpha^{-1}\kappa(\sqrt{y/\beta} - \sqrt{\beta/y})$ e $\Phi(\nu_y)$ é a função de distribuição da distribuição normal padrão.

  Adotamos a seguinte notação neste modelo, $\lambda_1 = \lambda$ e $\alpha_1 = \alpha$ e $\beta_1 = \beta$. A função de distribuição da distribuição BS é, então,

$$F_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{4}}) = \Phi(\nu_y), \tag{6.36}$$

  em que $\Phi(\nu_y)$ é a função de distribuição da distribuição normal padrão.

  A função do tempo restante da distribuição BS é dada por

$$W_{Y_{max}}(y;\theta_{\mathbf{4}}) = 1 - \Phi(\nu_y). \tag{6.37}$$

  O r-ésimo momento, $r = 1, 2, \ldots$, da distribuição MAXBBS é

$$E(Y_{max}^r) = \beta \sum_{j=0}^{r} \binom{2r}{2j} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \frac{(2(r-j+i))!}{2^{r-j+1}(r-j+i)!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2(r-j+i)}. \tag{6.38}$$

  A taxa de ocupação do modelo M/BS/1 é

$$\rho_6 = \lambda E(Y_1), \tag{6.39}$$

  na qual $\rho_6 < 1$, λ é a taxa de chegada e $E(Y_1)$ é dado pela Expressão (6.38), tomando-se $r = 1$.

  A probabilidade de que durante um serviço, n usuários cheguem no sistema é dado por

$$k_n^3 = \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda)^j}{j!} E(Y_1^{j+n}), \tag{6.40}$$

na qual $E(Y_1^{n+j})$ é dado por (6.38), tomando-se $r = n + j$.

A correspondente função geradora é dada por

$$K^3_{max}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-z))^j}{j!} E(Y_1^j) = \tilde{B}^3_{max}(\lambda(1-z)), \tag{6.41}$$

em que $E(Y^j)$ é dado por (6.38), assumindo-se $r = j$.

A função geradora da distribuição de equilíbrio do número de usuários no sistema, é obtida da seguinte forma

$$\Pi^3_{max}(z) = \frac{(1-\rho_6)\tilde{B}^3_{max}(\lambda(1-z))(1-z)}{\tilde{B}^3_{max}(\lambda(1-z)) - z}. \tag{6.42}$$

Temos, então,

$$\begin{aligned}
p_0^3 &= (1-\rho_6), \\
p_1^3 &= (1-\rho_6)\left\{\frac{-\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\lambda^j}{j!}E(Y^j)+1}{\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\lambda^j}{j!}E(Y^j)}\right\}, \\
&\vdots \\
p_n^3 &= (1-\rho_6)\left\{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\lambda^j E(Y^j)}{j!}\right)^{(i)}\right. \\
&\times \left.\left(\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\lambda^j E(Y^j)}{j!}\right)^{-(n-i)}\right)\right\},
\end{aligned}$$

em que os simbolos (i) e $(n-i)$ indicam a i-ésima e $(n-i)$-ésima derivadas, respectivamente.

A função geradora de probabilidades da distribuição de equilíbrio do tempo de espera na fila é

$$\tilde{W}^3_q(s) = \frac{(1-\rho_6)s}{\lambda_1\tilde{B}^3_{max}(s) + s - \lambda}, \tag{6.43}$$

na qual $s = \lambda(1-z)$.

Então, a distribuição do tempo médio de espera na fila é expressa por

$$W^3_q(y) = (1-\rho_6)\sum_{n=0}^{\infty}\rho_6\left(\int_0^y E(Y_1)^{-1}(1-\Phi(\nu(t)))dt\right)^{(n)}, \tag{6.44}$$

em que $[n]$ indica a n-ésima convolução da distribuição BS e $E(Y_1)$ é dada pela Equação (6.38), assumindo-se $r = 1$.

As medidas de desempenho são obtidas usando-se a Expressão (6.38), para $r = 1$ e $r = 2$ em (6.12).

6.1.1 Estimação pelo método de máxima verossimilhança

Adotamos o mesmo planejamento descrito no Capítulo 4 e 5. Assim sendo, temos a amostra aleatória $\mathbf{v} = (X_1, \ldots, X_{n_a}; Y_1, \ldots, Y_{n_s})^T$, consistindo dos tempos entre as chegadas X_i do $(i-1)$-ésimo ao i-ésimo usuário, $i = 1, \ldots, n_a$, e dos tempos de serviços completados Y_j, do j-ésimo usuário, $j = 1, \ldots, n_s$, em que n_a é o número total de tempos entre chegadas e n_s é o número total de serviços completados.

O logaritmo da função de verossimilhança do modelo M/MAXCOMPBS/1 é dado pela soma do logaritmo da função de densidade da distribuição exponencial com parâmetro λ_1, que descreve os tempos entre as chegadas, e do logaritmo da função de densidade da distribuição MAXCOMPBS, que descreve os tempos de serviços completados. Logo, a função do logaritmo da função de verossimilhança do modelo de fila M/MAXCOMPBS/1 é

$$\begin{aligned} \ell_{max}(\theta_{\mathbf{1}}, \lambda - 1) &= n_a \log \lambda_1 - \lambda_1 T_a - \lambda \sum_{i=1}^{n_a} -n_s \log[Z(\rho_1, \phi_1) - 1] + \sum_{i=1}^{n_s} f_{Y_1}(y_i) \\ &+ \sum_{i=1}^{n_s} \left[\log \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}} \Phi(\nu_{y_i})^{m-1} \right], \end{aligned} \tag{6.45}$$

sendo $\theta_{\mathbf{1}} = (\rho_1, \alpha_1, \beta_1, \phi_1)^T$ é o vetor de parâmetros do modelo MAXCOMPBS, $f_{Y_1}(\cdot)$ é a função de densidade de Y_1, $T_a = \sum_{i=0}^{n_a} x_i$ é o tempo total entre as chegadas, n_a é o número total de tempos entre as chegadas, n_s é o número total de serviços completados.

Fazendo a primeira derivada do logaritmo da função de verossimilhança em relação a cada parâmetro, obtemos a função (ou vetor) escore $U = (U_{\lambda_1} U_{\rho_1}, U_{\alpha_1}, U_{\beta_1}, U_{\phi_1})$,

cujos elementos são:

$$
\begin{aligned}
U_{\lambda_1} &= \frac{n_a}{\lambda_1} - T_a, \\
U_{\rho_1} &= \frac{n_s}{[Z(\rho_1,\phi_1)-1]} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\rho_1^{m-1}}{(m!)^{\phi_1}} + \sum_{i=1}^{n_s} \left\{ \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}} \Phi(\nu_{y_i})^{m-1} \right]^{-1} \right. \\
&\quad \left. \times \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \frac{\rho_1^{m-1}}{(m!)^{\phi_1}} (\Phi(\nu_{y_i}))^{m-1} \right\}, \\
U_{\alpha_1} &= -2\sum_{i=1}^{n_s} \frac{(y_i/\beta_1 + \beta_1/y_i - 2)}{\alpha_1^3} - \frac{n_s}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n_s} \left\{ \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}} \Phi(\nu_{y_i})^{m-1} \right]^{-1} \right. \\
&\quad \left. \times \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1) \frac{\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1} (\Phi(\nu_{y_i}))^{m-2} (\sqrt{y_i/\beta_1} - \sqrt{\beta_1/y_i}) e^{-\nu_{y_i}}} \alpha_1^3 \right\}, \\
U_{\beta_1} &= \frac{1}{2\alpha_1^2} \sum_{i=1}^{n_s} \left(\frac{y_i}{\beta_1^2} + \frac{1}{y_i} \right) + \sum_{i=1}^{n_s} \frac{1}{y_i + \beta_1} - \frac{n}{\sqrt{\beta_1}} + \sum_{i=1}^{n_s} \left\{ \left[\sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}} \Phi(\nu_{y_i})^{m-1} \right]^{-1} \right. \\
&\quad \left. \times m(m-1) \frac{\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}} \Phi(\nu_{y_i})^{m-2} (y_i/\beta_1^2 + 1/y_i) e^{-\nu_{y_i}} \right\}, \\
U_{\phi_1} &= -\frac{n_s}{[Z(\rho_1,\phi_1)-1]} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho_1^m \log(m!)}{(m!)^{\phi_1}} - \sum_{i=1}^{n_s} \left\{ \left[\sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}} \Phi(\nu_{y_i})^{m-1} \right]^{-1} \right. \\
&\quad \left. \times \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_1^m}{(m!)^{\phi_1}} \Phi(\nu_{y_i})^{m-1} \log(m!) \right\}.
\end{aligned}
$$

Os casos particulares do logaritmo da função de verossimilhança do modelo de fila M/MAXCOMPBS/1 quando $\phi_1 = 0, 1$ e $\phi_1 \to \infty$, são descritos a seguir:

- O logaritmo da função de verossimilhança do modelo de fila M/MAXGBS/1 é dado pela soma do logaritmo da função de densidade da distribuição exponencial para os tempos entre as chegadas, e do logaritmo da função de densidade da distribuição MAXGBS, para os tempos de serviços completados, isto é

$$
\begin{aligned}
\ell_{max}(\boldsymbol{\theta_2}, \lambda_1) &= n_a\lambda_1 - \lambda_1 T_a + n\log(1-\rho_1) + \sum_{i=1}^{n_s} \log f_{Y_1}(y_i) \\
&- 2\sum_{i=1}^{n_s} \log(1 - \rho_1 \Phi(\nu_{y_i})), \qquad (6.46)
\end{aligned}
$$

em que $\theta_{\mathbf{2}} = (\alpha_1, \beta_1)^T$ é o vetor de parâmetros do modelo MAXGBS, λ_1 é a taxa de chegada da distribuição exponencial, $f_{Y_1}(\cdot)$ é a função de densidade de Y_i, n_a é o número total de tempos entre chegadas, T_a é o tempo total dos tempos entre as chegadas, n_s é o número total de serviços completados.

Os elementos da função (ou vetor) escore $U = (U_{\lambda_1}, U_{\rho_1}, U_{\alpha_1}, U_{\beta_1})$ são dados a seguir:

$$
\begin{aligned}
U_{\lambda_1} &= \frac{n_a}{\lambda_1} - T_a, \\
U_{\rho_1} &= -\frac{n_s}{(1-\rho_1)} + 2\sum_{i=1}^{n_s} \frac{\Phi(\nu_{y_i})}{(1-\rho_1\Phi(\nu_{y_i}))}, \\
U_{\alpha_1} &= \frac{n_s}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{1}{2\alpha_1^3\beta_1}\sum_{i=1}^{n_s}\left(\frac{y_i}{\beta_1^2} + \frac{1}{y_i}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n_s}\frac{\rho_1\left(\frac{y_i}{\beta_1^2} + \frac{1}{y_i}\right)^2 e^{-\nu_{y_i}}}{(1-\rho_1\Phi(\nu_{y_i}))\alpha_1^3}, \\
U_{\beta} &= \frac{1}{\alpha_1^2}\sum_{i=1}^{n_s}\left(\frac{1}{y_i} - \frac{y_i}{\beta_1^2}\right) + \frac{n_s}{2\alpha_1\beta_1^{-3/2}} - \sum_{i=1}^{n_s}\frac{1}{y_i+\beta_1} \\
&\quad + \frac{2}{\alpha_1^2}\sum_{i=1}^{n_s}\frac{1}{(1-\rho_1\Phi(\nu_{y_i}))}\left(\frac{1}{y} - \frac{y_i}{\beta_1^2}\right)e^{-\nu_{y_i}}.
\end{aligned}
$$

- O logaritmo da função de verossimilhança do modelo de fila M/MAXPBS/1 é dado pela soma do logaritmo da função de densidade da distribuição exponencial para os tempos entre as chegadas, e do logaritmo da função de densidade da distribuição MAXPBS, para os tempos de serviços completados, que é expressa como

$$
\begin{aligned}
\ell_{max}(\theta_{\mathbf{3}}, \lambda_1) &= n_a\lambda_1 - \lambda_1 T_a + n_s \log\rho_1 + \sum_{i=1}^{n_s}\log f_{Y_1}(y_i) \\
&+ \rho_1\sum_{i=1}^{n_s}\Phi(\nu_{y_i}) - n\log(e^{\rho_1}-1), \qquad (6.47)
\end{aligned}
$$

em que $\theta_{\mathbf{3}} = (\rho_1, \alpha_1, \beta_1)^T$ é o vetor de parâmetros do modelo MAXPBS, λ_1 é a taxa de chegadas da distribuição exponencial, n_a é o número total de tempos entre as chegadas, T_a é o tempo total dos tempos entre as chegadas, n_s é o número total de serviços completados.

Os elementos da função (ou vetor) escore $U = (U_{\lambda_1}, U_{\rho_1}, U_{\alpha_1}, U_{\beta_1})$ são dados a seguir:

$$\begin{aligned}
U_{\lambda_1} &= \frac{n_a}{\lambda_1} - T_a, \\
U_{\rho_1} &= \frac{n_s}{\rho_1} + \sum_{i=1}^{n_s} \Phi(\nu_{y_i}) - \frac{n_s e^{\rho_1}}{(e^{\rho_1} - 1)}, \\
U_{\alpha_1} &= \frac{n_s \kappa(\alpha_1, \beta_1)^2}{\alpha_1^3} + \frac{1}{\alpha_1^2} \sum_{i=1}^{n_s} \rho_1 e^{-\nu_{y_i}} \kappa(y/\beta_1)^2, \\
U_{\beta_1} &= \frac{1}{\alpha_1^2} \sum_{i=1}^{n_s} \left(\frac{1}{y_i} - \sum_{i=1}^{n_s} \frac{y_i}{\beta_1^2} \right) + \frac{n_s}{2\alpha_1 \beta^{-3/2}} - \sum_{i=1}^{n_s} \frac{1}{y_i + \beta_1} \\
&\quad + \rho_1 \sum_{i=1}^{n_s} \left(\frac{1}{y_i} - \frac{y_i}{\beta_1^2} \right) e^{-\nu_{y_i}}.
\end{aligned}$$

- O logaritmo da função de verossimilhança do modelo de fila M/BS/1 é dado pela soma do logaritmo da função de densidade da distribuição exponencial, para os tempos entre as chegadas, e do logaritmo da função de densidade da distribuição BS, para os tempos de serviços completados, que é dado por

$$\begin{aligned}
\ell_{max}(\theta, \lambda_1)) &= n_a \log \lambda - \lambda T_a - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^{n_s} \left(\frac{y_i}{\beta} + \frac{\beta}{y_i} - 2 \right) - \frac{3}{2} T_s \\
&+ \sum_{i=1}^{n_s} \log(y_i + \beta) - n_s \log(2\alpha\sqrt{\beta}), \qquad (6.48)
\end{aligned}$$

na qual $\theta = (\alpha, \beta)^T$ é o vetor de parâmetros do modelo BS, λ é a taxa de chegada da distribuição exponencial, n_a é o número total de tempos entre chegadas, T_a é o tempo total dos tempos entre as chegadas, T_s é o tempo total de serviços completados e n_s é o número total de serviços completados.

Os elementos da função (ou vetor) escore $U = (U_\lambda, U_\alpha, U_\beta)$ são dados a seguir:

$$\begin{aligned}
U_\lambda &= \frac{n_a}{\lambda} - T_a, \\
U_\alpha &= \frac{1}{\alpha^3} \sum_{i=1}^{n_s} \left(\frac{y_i}{\beta} + \frac{\beta}{y_i} - 2 \right) + \sum_{i=1}^{n_s} \frac{1}{y_i + \beta} - \frac{n_s}{2\alpha_1\sqrt{\beta}}, \\
U_\beta &= -\frac{n_s}{2\alpha^2} \left(-\frac{y_i}{\beta^2} + \frac{1}{\beta} \right) + \sum_{i=1}^{n_s} \frac{1}{y_i + \beta} - \frac{n_s}{2\beta}.
\end{aligned}$$

6.2 Modelo de fila M/MINCOMPBS/1

O modelo de fila M/MINCOMPBS/1 difere do modelo anterior pela distribuição de serviço, que neste caso é a distribuição MINCOMPBS.

A função de densidade da distribuição MINCOMPBS é obtida usando a Equação (3.5), e é escrita da seguinte forma

$$f_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{4}}) = \frac{1}{[Z(\rho_2,\phi_2)-1]} f_{Y_1}(y) \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}} (1-\Phi_{Y_1}(\nu)))^{m-1}, \tag{6.49}$$

na qual $y > 0$, $\theta_{\mathbf{4}} = (\rho_2, \alpha_2, \beta_2, \phi_2)^T$ é o vetor de parâmetros do modelo MINCOMPBS, $f_{Y_1}(\cdot)$ é a função de densidade de Y_i, dada pela Equação (6.1), $\nu_y = \alpha_2^{-1}\kappa(\sqrt{y/\beta_2} - \sqrt{\beta_2/y})$ e $\Phi(\nu_y)$ é a função de distribuição da distribuição normal padrão.

A função de distribuição MINCOMPBS é

$$F_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{2}}) = \frac{Z(\rho_2(1-\Phi(\nu_y)),\phi_2)-1}{[Z(\rho_2,\phi_2)-1]}, \tag{6.50}$$

e a função do tempo restante da distribuição MICOMPBS é dada por

$$W_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{4}}) = \frac{Z(\rho_2,\phi_2) - Z(\rho_2(1-\Phi(\nu_y)),\phi_2)}{[Z(\rho_2,\phi_2)-1]}. \tag{6.51}$$

O r-ésimo momento, $r = 1, \ldots$, da distribuição MINCOMPBS é

$$\begin{aligned} E(Y_{min}^r) &= \frac{1}{[Z(\rho_2,\phi_2)-1]} \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}} \sum_{\delta=0}^{m-1} (-1)^{\delta} \binom{m-1}{\delta} \\ &\times \int_0^{\infty} y^r f_{Y_1}(y) \Phi(\nu_y)^{\delta} dy, \end{aligned} \tag{6.52}$$

na qual $f_{Y_1}(y)$ é dada pela Expressão (6.1). Esta equação foi calculada usando um programa desenvolvido no software R, e pelo truncamento da série $\sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}}$, descrito em Apêndice .2.

A taxa de ocupação do sistema é dada por

$$\rho_7 = \lambda_2 E(Y_{min}), \tag{6.53}$$

em que $\rho_7 < 1$, λ_2 é a taxa de chegada e $E(Y_{min})$ é obtida pela Expressão (6.52), assumindo-se $r = 1$.

A probabilidade que durante um serviço, n usuários cheguem ao sistema é expressa por

$$k_n^4 = \frac{\lambda_2^n}{n!}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\lambda_2^j}{j!}E(Y_{min}^{n+j}), \tag{6.54}$$

na qual $E(Y_{min}^{n+j})$ é obtida a partir da Expressão (6.52), em que $r = n+j$, e substituindo-se ρ_2 por ρ_7.

A correspondente função geradora de probabilidade é dada por

$$K_{min}(z) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\lambda(1-z))^j}{j!}E(Y_{min}^j) = \tilde{B}_{min}(\lambda_2(1-z)), \tag{6.55}$$

em que $E(Y_{min}^j)$ é obtido a partir da Equação (6.52), em que $r = j$, e substituindo-se ρ_2 por ρ_7.

A função geradora da distribuição de equilíbrio do número de usuários é dado por

$$\Pi_{min}(z) = \frac{(1-\rho_7)\tilde{B}_{min}(\lambda_2(1-z))(1-z)}{\tilde{B}_{min}(\lambda_2(1-z)) - z}. \tag{6.56}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} p_0 &= (1-\rho_7), \\ p_1 &= (1-\rho_7)\left\{\frac{-\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\lambda_2^j}{j!}E(Y_{min}^j)+1}{\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\lambda_2^j}{j!}E(Y_{min}^j)}\right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_n &= (1-\rho_7)\left\{\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\lambda_2^j}{j!}E(Y_{min}^j)\right)^{(i)}\right. \\ &\times \left.\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\lambda_2^j}{j!}E(Y_{min}^j)\right)^{-(n-i)}\right\}, \end{aligned}$$

em que os símbolos (i) e $(n-i)$ indicam a i-ésima e $(n-i)$-ésima derivadas, respectivamente, $E(Y_{min}^j)$ é obtida a partir da Equação (6.52), assumindo-se $r = j$, e substituindo-se ρ_2 por ρ_7.

A função geradora de probabilidades distribuição do tempo de espera na fila em estado de equilibrio, é dada por

$$\tilde{W}_q^4(s)\frac{(1-\rho_7)s}{\lambda_2\tilde{B}_{min}(s) + (s-\lambda_2)}, \tag{6.57}$$

na qual temos que $s = \lambda_2(1-z)$.

Logo, temos a distribuição de equilíbrio do tempo de espera na fila

$$W_q^4(y) = (1-\rho_7)\sum_{n=0}^{\infty}\rho_7^n\left(\int_0^y E(Y_{min})^{-1}\frac{Z(\rho_7,\phi_2)-Z(\rho_7(1-\Phi(\nu_t)),\phi_2)}{[Z(\rho_7,\phi_2)-1]}dt\right)^{[n]}, \quad (6.58)$$

em que o símbolo $[n]$ indica a n-ésima convolução da distribuição MINCOMPBS, $E(Y_{min}^{(j)})$ é dada pela Equação (6.52), assumindo-se $r=1$, e substituindo-se ρ_2 por ρ_7. As medidas de desempenho são dadas por

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{\lambda^2}{2(1-\rho_7)}E(Y_{min}^2), \\ W_q &= \frac{\lambda_2}{2(1-\rho_7)}E(Y_{min}^2), \\ L &= \frac{\lambda^2}{2(1-\rho_7)}E(Y_{min}^2)+\rho_7, \\ W_q &= \frac{\lambda_2}{2(1-\rho_7)}E(Y_{min}^2)+E(Y_{min}), \end{aligned} \quad (6.59)$$

em que $E(Y_{min})$ e $E(Y_{min}^2)$ são dadas pela Equação (6.52), assumindo-se $r=1$ e $r=2$, respectivamente, e substituindo-se ρ_2 por ρ_7.

Através dos Corolários 3.1, 3.2 e 3.3, são obtidos os casos particulares para $\phi_2 = 0,1$ e $\phi_2 \to \infty$, e assumimos a mesma notação usada para o modelo de fila M/MINCOMPBS/1.

- Quando a pressão do parâmetro ϕ_2 assume valor zero, a distribuição MINCOMPBS, para os tempos de serviço, se reduz a distribuição Mínimo-geométrica-Birnbaum-Saunders, denominada por distribuição MINGBS, e, assim, temos o modelo de fila M/MINGBS/1.

  A função de densidade da distribuição MINGBS é dada por

  $$f_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{5}}) = \frac{(1-\rho_2)}{\rho_2}f_{Y_1}(y)\sum_{m=1}^{\infty}m\frac{\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}}(1-\Phi_{Y_1}(\nu)))^{m-1}, \quad (6.60)$$

  em que $y>0$, $\theta_{\mathbf{5}} = (\rho_2,\alpha_2,\beta_2)^T$ é o vetor de parâmetros do modelo MINGBS, $f_{Y_1}(\cdot)$ é a função de densidade de Y_i, dada pela Equação (6.1), $\nu_y = \alpha_2^{-1}\kappa(\sqrt{y/\beta_2}-\sqrt{\beta_2/y})$ e $\Phi(\nu_y)$ é a função de distribuição normal padrão

A Equação (6.60), pode ser reescrita da seguinte forma

$$f_{Y_{min}}(y;\ \theta_{\mathbf{5}}) = \frac{(1-\rho_2)f_{Y_1}(y)}{(1-\rho_2(1-\Phi(\nu_y)))^2}. \tag{6.61}$$

A função de distribuição da MINGBS é

$$F_{Y_{min}}(y;\ \theta_{\mathbf{5}}) = \frac{(1-\Phi(\nu_y))(1-\rho_2)}{(1-\rho_2(1-\Phi(\nu_y)))}, \tag{6.62}$$

e a função do tempo restante da distribuição MINGBS, é expressa por

$$W_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{5}}) = \frac{\Phi(\nu_y)}{(1-\rho_2(1-\Phi(\nu_y)))}. \tag{6.63}$$

O r-ésimo momento, $r = 1, 2, \ldots$, da distribuição MINGBS é

$$\begin{aligned} E(Y_{min}^r) &= \frac{(1-\rho_2)}{\rho_2}\sum_{m=1}^{\infty} m\rho_2^m \sum_{\delta=0}^{m-1}(-1)^{\delta}\binom{m-1}{\delta} \\ &\times \int_0^{\infty} y^r f_{Y_1}(y)\Phi(\nu_y)^{\delta}dy, \end{aligned} \tag{6.64}$$

A taxa de ocupação do modelo de fila M/MINGBS/1, é dada por

$$\rho_8 = \lambda_2 E(Y_{min}). \tag{6.65}$$

em que $\rho_8 < 1$, λ_2 é a taxa de chegada e $E(Y_{min})$ é obtida pela Expressão (6.64), assumindo-se $r = 1$.

A probabilidade de que durante um serviço, n usuários cheguem ao sistema, é expressa na forma

$$k_n^5 = \frac{\lambda_2^n}{n!}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\lambda_2^j}{j!}E(Y_{min}^{n+j}), \tag{6.66}$$

na qual $E(Y_{min}^{n+j})$ é obtida a partir da Expressão (6.64), em que $r = n + j$, e substituindo-se ρ_2 por ρ_8.

A correspondente função geradora de probabilidade é dada por

$$K_{min}^5(z) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{(\lambda_2(1-z))^j}{j!}E(Y_{min}^j) = \tilde{B}_{min}^5(\lambda_2(1-z)), \tag{6.67}$$

na qual $E(Y_{min}^j)$ é obtida a partir da Equação (6.64), em que $r = j$, e substituindo-se ρ_2 por ρ_8.

A função geradora para o número de usuarios no sistema em estado de equilibrio, é obtida da seguinte forma

$$\Pi^5_{min}(z) = \frac{(1-\rho_8)\tilde{B}^5_{min}(\lambda_2(1-z))(1-z)}{\tilde{B}^5_{min}(\lambda_2(1-z)) - z}. \tag{6.68}$$

Assim, temos,

$$\begin{aligned}
p^5_0 &= (1-\rho_8), \\
p^5_1 &= (1-\rho_8)\left\{ \frac{\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{\lambda_2^j}{j!} E(Y^j_{min}) + 1}{\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{\lambda_2^j}{j!}\ E(Y^j_{min})} \right\}, \\
&\vdots \\
p^5_n &= (1-\rho_8)\Bigg\{ \left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{\lambda_2^j}{j!} E(Y^j_{min}) \right)^{(i)} \\
&\times \left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{\lambda_2^j}{j!} E(Y^j_{min}) \right)^{-(n-i)} \Bigg\},
\end{aligned}$$

em que (i) indica a i-ésima derivada, $(n-i)$ indica $(n-i)$-ésima derivada, e $E(Y^j_{min})$ é obtida a partir da Equação (6.64), assumindo-se $r = j$, e substituindo-se ρ_2 por ρ_8.

A função geradora de probabilidade é dada por

$$\tilde{W}^5_q(s) = \frac{(1-\rho_8)s}{\lambda_2 \tilde{B}^5_{min}(s) - s + \lambda_2}, \tag{6.69}$$

na qual $s = \lambda_2(1-z)$.

A função de distribuição em equilibrio do tempo de espera na fila é

$$\begin{aligned}
W^5_q(y) &= (1-\rho_8)\sum_{n=0}^{\infty}\rho_8^n && (6.70) \\
&\times \left(\int_0^y E(Y_{min})^{-1} \frac{\Phi(\nu_t)}{(1-\rho_8(1-\Phi(\nu_t)))} dt \right)^{[n]}, && (6.71)
\end{aligned}$$

em que $[n]$ indica a convolução das n distribuições MINGBS, e $E(Y_{min})$ é obtida pela Equação (6.64), assumindo-se $r = 1$, e substituindo-se ρ_2 por ρ_8.

As medidas de desempenho são dadas pelas Equações (6.59), tomando ρ_8, e $E(Y^r_{min})$ é expressa pela Equação (6.64), assumindo-se $r = 1$ e $r = 2$.

- Quando o parâmetro de pressão ϕ_2 assume valor um, $\phi_2 = 1$, a distribuição MIN-COMPBS para o tempo de serviço torna-se a distribuição Mínimo-Poisson-Birnbaum-Saunders, denominada por distribuição MINPBS, e, assim, obtemos o modelo de fila M/MINPBS/1.

  A função densidade da distribuição MINPBS, é dada por

$$f_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{6}}) = \frac{1}{(e^{\rho_2}-1)} f_{Y_1}(y) \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_2^m}{m!} (1-\Phi_{Y_1}(\nu)))^{m-1}, \tag{6.72}$$

  em que $y > 0$, $\theta_{\mathbf{6}} = (\rho_2, \alpha_2, \beta_2)^T$ é o vetor de parâmetros da função de densidade da distribuição MINPBS, $f_{Y_1}(\cdot)$ é a função de densidade de Y_i, e dada pela Equação (6.1), $\nu_y = \alpha_2^{-1}\kappa(\sqrt{y/\beta_2} - \sqrt{\beta_2/y})$ e $\Phi(\nu_y)$ é a função de distribuição da normal padrão.

  A Expressão (6.72), pode ser reescrita da seguinte forma

$$f_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{6}}) = \frac{\rho_2 f_{Y_1}(y) e^{\rho_2(1-\Phi(\nu_y))}}{(e^{\rho_2}-1)}. \tag{6.73}$$

  A correspondente função de distribuição MINPBS é

$$F_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{6}}) = \frac{e^{\rho_2(1-\Phi(\nu_y))}-1}{(e^{\rho_2}-1)}, \tag{6.74}$$

  e a função do tempo restante da distribuição MINPBS é

$$W_{Y_{min}}(y;\theta_{\mathbf{6}}) = \frac{e^{\rho_2} - e^{\rho_2(1-\Phi(\nu_y))}}{(e^{\rho_2}-1)}. \tag{6.75}$$

  O r-ésimo momento, $r = 1, 2, \ldots$, da distribuição MINPBS é dado por

$$\begin{aligned} E(Y_{min}^r) &= \frac{1}{(e^{\rho_2}-1)} \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\rho_2^m}{m!} \sum_{\delta=0}^{m-1} (-1)^{\delta} \binom{m-1}{\delta} \\ &\times \int_0^{\infty} y^r f_{Y_1}(y) \Phi(\nu_y)^{\delta} dy, \end{aligned} \tag{6.76}$$

  na qual $f_{Y_1}(y)$ é dada pela Expressão (6.1).

  A taxa de ocupação do sistema de fila M/MINPBS/1 é dada por

$$\rho_9 = \lambda_2 E(Y_{min}) \tag{6.77}$$

  em que $\rho_9 < 1$, λ_2 é a taxa de chegada, e $E(Y_{min})$ é obtida pela Expressão (6.76), assumindo-se $r = 1$.

A probabilidade de que durante um serviço, n usuários cheguem ao sistema, é dada por

$$k_n^6 = \frac{\lambda_2^n}{n!}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\lambda^j}{j!}E(Y_{min}^{n+j}), \tag{6.78}$$

na qual $E(Y_{min}^{n+j})$ é obtida a partir da Expressão (6.76), em que $r = n + j$, e substituindo-se ρ_2 por ρ_9.

A correspondente função geradora de probabilidade é dada por

$$K_{min}^6(z) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{(\lambda(1-z))^j}{j!}E(Y_{min}^j) = \tilde{B}_{min}^6(\lambda_2(1-z)), \tag{6.79}$$

na qual $E(Y_{min}^{(j)})$ é obtido a partir da Equação (6.76), em que $r = n$, e substituindo-se ρ_2 por ρ_9.

A função geradora de probabilidade é dada por

$$\Pi_{min}^6(z) = \frac{(1-\rho_9)\tilde{B}_{min}^6(\lambda_2(1-z))(1-z)}{\tilde{B}_{min}^6(\lambda_2(1-z)) - z}. \tag{6.80}$$

Assim, temos,

$$\begin{aligned}
p_0^6 &= (1-\rho_9),\\
p_1^6 &= (1-\rho_9)\left\{\frac{\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\lambda_2^j}{j!}E(Y_{min}^j)+1}{\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\lambda_2^j}{j!}\ E(Y_{min}^j)}\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_n^6 &= (1-\rho_9)\left\{\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\lambda_2^j}{j!}E(Y_{min}^j)\right)^{(i)}\right.\\
&\times \left.\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\lambda_2^j}{j!}E(Y_{min}^j)\right)^{-(n-i)}\right\},
\end{aligned}$$

em que os símbolos (i) e $(n-i)$ indicam a i-ésima e $(n-i)$-ésima derivadas, respectivamente, e $E(Y_{min}^j)$ é obtida a partir da Equação (6.76), assumindo-se $r = j$, e substituindo-se ρ_2 por ρ_9.

A função geradora do tempo de espera na fila é dada por

$$\tilde{W}_q^6(y) = \frac{(1-\rho_9)s}{\lambda_2\tilde{K}_{min}^6(s) + s - \lambda_2}, \tag{6.81}$$

na qual $s = \lambda_2(1-z)$.

Logo, temos a distribuição de equilibrio do tempo de espera na fila, que é dada por

$$W_q^6(y) = (1-\rho_9)\sum_{n=0}^{\infty}\rho_9^n\left(\int_0^y E(Y_{min})^{-1}\frac{e^{\rho_9}-e^{\rho_9(1-\Phi(\nu_t))}}{(e^{\rho_9}-1)}dt\right)^{[n]}, \tag{6.82}$$

em que o símbolo $[n]$ indica a n-ésima convolução da distribuição MINPBS, $E(Y_{min})$ é obtida a partir da Expressão (6.76), em que $r=1$, e substituindo-se ρ_2 por ρ_9.

As medidas de desempenho são obtidas pela Equação (6.76), assumindo-se $r=1$ e $r=2$, na Equação (6.59), e substituindo-se ρ_2 por ρ_9.

- Quando $\phi_2 \to \infty$, a distribuição MINCOMPBS, para so tempos de serviço, torna-se a distribuição Mínimo-Bernoulli-Birnbaum-Saunders, denominada por distribuição MINBBS. Neste caso, a distribuição MINBS é semelhante a distribuição MAXBS, já descrita anteriormante.

6.2.1 Estimação pelo método de máxima verossimilhança

Adotamos o mesmo planejamento descrito nos Capítulos 4 e 5, cuja amostra aleatória é dada pelo vetor $\tau = (B_1,\ldots,B_{n_a};Z_1,\ldots Z_{n_s})^T$, consistindo dos tempos entre as chegadas, B_i do $(i-1)$-ésimo ao i-ésimo usuário, $i=1,\ldots,n_a$, e dos tempos de serviços completados, Z_j, do j-ésimo usuário, $j=1,\ldots,n_s$, em que n_a é o número total de tempos entre chegadas e n_s é o número total de serviços completados.

O logaritmo da função de verossimilhança do modelo M/MINCOMPBS/1 é dado pela soma do logaritmo da função de densidade da distribuição exponencial com parâmetro λ_2, que descreve os tempos entre as chegadas, e do logaritmo da função de densidade da distribuição MINCOMPBS, que descreve os tempos de serviço. Assim, o logaritmo da função de verossimilhança do modelo M/MINCOMPBS/1 é dado por

$$\ell_{min}(\theta_{\mathbf{4}},\lambda_2) = n_a\lambda_2 - \lambda_2 T_a - n_s\log[Z(\rho_2,\phi_2)-1] + \sum_{i=1}^{n_s}\log f_{Y_1}(z_i) \tag{6.83}$$

$$+\sum_{i=1}^{n_s}\log\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}}(1-\Phi(\nu_{z_i}))^{m-1}, \tag{6.84}$$

sendo $\theta_{\mathbf{4}} = (\rho_2,\alpha_2,\beta_2,\phi_2)^T$ é o vetor de parâmetros do modelo MINCOMPBS, $f_{Y_1}(\cdot)$ é a função de densidade de y_i, $T_a = \sum_{i=0}^{n_a} x_i$ é o tempo total entre as chegadas, n_a é o número total de tempos entre as chegadas, n_s é o número total de serviços completados.

Os componentes da função escore $U(\theta) = (U_{\lambda_2}, U_{\alpha_2}, U_{\rho_2}, U_{\alpha_2}, U_{\beta_2}, U_{\phi_2})^T$ são dados por

$$
\begin{aligned}
U_{\lambda_2} &= \frac{n_a}{\lambda_2} - T_a, \\
U_{\rho_2} &= -\frac{n_s}{[Z(\rho_2,\phi_2)-1]} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\rho_2^{m-1}}{(m!)^{\phi_2}} + \sum_{i=1}^{n_s} \left\{ \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}} (1-\Phi(\nu_{z_i}))^{m-1} \right]^{-1} \right. \\
&\quad \left. \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\rho_2^{m-2}}{(m!)^{\phi_2}} (1-\Phi(\nu_{z_i}))^{m-1} \right\}, \\
U_{\alpha_2} &= -2\sum_{i=1}^{n_s} \frac{(z_i/\beta_2 + \beta_2/z_i - 2)}{\alpha_2^3} - \frac{n_s}{\alpha_2} - \sum_{i=1}^{n_s} \left\{ \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}} (1-\Phi(\nu_{z_i}))^{m-1} \right]^{-1} \right. \\
&\quad \left. \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}\alpha_2^3} \frac{(1-\Phi(\nu_{z_i}))^{m-2}(\sqrt{z_i/\beta_2} - \sqrt{\beta_2/z_i})e^{-\nu_{z_i}}}{\alpha_2^3} \right\}, \\
U_{\beta_2} &= \frac{1}{2\alpha_2^2} \sum_{i=1}^{n_s} \left(\frac{z_i}{\beta_2^2} + \frac{1}{z_i} \right) - \sum_{i=1}^{n_s} \frac{1}{z_i + \beta_2} - \frac{n_s}{\sqrt{\beta_2}} + \sum_{i=1}^{n_s} \left\{ \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}} (1-\Phi(\nu_{z_i}))^{m-1} \right]^{-1} \right. \\
&\quad \left. \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}} (1-\Phi(\nu_{z_i}))^{m-2}(z_i/\beta_2^2 + 1/z_i)e^{-\nu_{z_i}} \right\}, \\
U_{\phi_2} &= -\frac{n_s}{[Z(\rho_2,\phi_2)-1]} \sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\rho_2^m \log(m!)}{(m!)^{\phi_2}} - \sum_{i=1}^{n_s} \left\{ \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\rho_2^m}{(m!)^{\phi_2}} (1-\Phi(\nu_{z_i}))^{m-1} \right]^{-1} \right. \\
&\quad \left. \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\rho_2^m \log(m!)}{(m!)^{\phi_2}} (1-\Phi(\nu_{z_i}))^{m-1} \right\}.
\end{aligned}
$$

Os casos particulares do logaritmo da função de verossimilhança quando $\phi_2 = 0, 1$ e $\phi_2 \to \infty$, são descritos a seguir:

- O logaritmo da função de verossimilhança do modelo de fila M/MINGBS/1, é dado pela soma do logaritmo da função de densidade da distribuição exponencial para os tempos entre as chegadas, e do logaritmo da função de densidade da distribuição MINGBS, para os tempos de serviços completados, e é dado por

$$
\begin{aligned}
\ell_{min}(\theta_{\mathbf{5}}, \lambda_2) &= n_a\lambda_2 - \lambda_2 T_a + n_s \log(1-\rho_2) + \sum_{i=1}^{n_s} \log f_{Y_1}(z_i) \\
&- 2\sum_{i=1}^{n_s} \log(1-\rho_2(1-\Phi(\nu_{z_i}))), \qquad (6.85)
\end{aligned}
$$

sendo $\theta_{\mathbf{5}} = (\rho_2, \alpha_2, \beta_2)^T$ é o vetor de parâmetros do modelo MINGBS, λ_2 é a taxa de chegada, T_a é o tempo total entre as chegadas, n_a é o número total de tempo entre as chegadas, n_s é o número total de serviços completados.

Os elementos da função (ou vetor) escore $U = (U_{\lambda_2}, U_{\rho_2}, U_{\alpha_2}, U_{\beta_2})$ são dados por:

$$\begin{aligned} U_{\lambda_2} &= \frac{n_a}{\lambda_2} - T_a, \\ U_{\rho_2} &= -\frac{n}{(1-\rho_2)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{2(1-\Phi(\nu_{z_i}))}{(1-\rho_2(1-\Phi(\nu_{z_i})))}, \\ U_{\alpha_2} &= \frac{n}{\sqrt{\beta_2}} - \frac{1}{2\alpha_2^3\beta_2}\kappa(z_i/\beta_2)^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_2\kappa(z_i/\beta_2)^2 e^{-\nu_y}}{(1-\rho_2(1-\Phi(\nu_{z_i})))\alpha_2^3}, \\ U_{\beta_2} &= \frac{1}{\alpha_2^2}\left(\frac{1}{z_i} - \frac{z_i}{\beta_2^2}\right) + \frac{n}{2\alpha_2\beta_2^{-3/2}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_i+\beta_2} \\ &\quad -\frac{2}{\alpha_2^2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_2^2(1-\rho(1-\Phi(\nu_{z_i})))}\left(\frac{1}{z_i} - \frac{z_i}{\beta_2^2}\right) e^{-\nu_{z_i}}. \end{aligned}$$

- O logaritmo da função de verossimilhança do modelo de fila M/MINPBS/1, é dado pela soma do logaritmo da função de densidade da distribuição exponencial para os tempos entre as chegadas, e do logaritmo da função de densidade da distribuição MINPBS, para os tempos de serviços completados, que é dado por

$$\begin{aligned} \ell_{min}(\theta_{\mathbf{6}}, \lambda_2) &= n_a\lambda_2 - \lambda_2 T_a + n_s \log\rho_2 + \sum_{i=1}^{n_s} f_{Y_1}(z_i) + n_s\rho_2 \\ &- \rho_2 \sum_{i=1}^{n_s} \Phi(\nu_{z_i}) - n_s \log(e^{\rho_2} - 1). \end{aligned} \tag{6.86}$$

sendo $\theta_{\mathbf{6}} = (\rho_2, \alpha_2, \beta_2)^T$ é o vetor de parâmetros da modelo MINPBS, λ_2 é a taxa de chegada, T_a é o tempo total entre as chegadas, n_a é o número total de tempos entre as chegadas, n_s é o número total de serviços completados.

Os elementos da função (ou vetor) escore $U = (U_{\lambda_2}, U_{\rho_2}, U_{\alpha_2}, U_{\beta_2})$ são dados por

$$U_{\lambda_2} = \frac{n_a}{\lambda_2} - T_a,$$

$$
\begin{aligned}
U_{\rho_2} &= \frac{n_s}{\rho_2} + n_s - \sum_{i=1}^{n_s} \Phi(\nu_{z_i}) - n_s \frac{e^{\rho_2}}{(e^{\rho_2}-1)}, \\
U_{\alpha} &= n_s \frac{\kappa(\alpha_2,\beta_2)^2}{\alpha_2^3} - \frac{1}{\alpha_2^2} \sum_{i=1}^{n_s} \rho_2 e^{-\nu_{z_i}} \kappa(z_i/\beta_2)^2, \\
U_{\beta} &= \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{1}{z_i} - \frac{z_i}{\beta_2^2}\right) + \frac{n}{2\alpha\beta_2^{-3/2}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_i+\beta_2}, \\
&\quad -\rho_2 \left(\frac{1}{z_i} - \frac{z_i}{\beta_2^2}\right) e^{-\nu_{z_i}}.
\end{aligned}
$$

6.3 Resultados Numéricos

Para ilustrar os modelos de fila apresentados neste capítulo, utilizamos dois conjuntos de dados simulados e um conjunto de dados reais. Os dados simulados foram gerados em um programa no *software* R, e os dados reais são do fluxo de veículos de uma via do centro da cidade de Presidente Prudente.

6.3.1 Simulações

As simulações foram realizadas seguindo o mesmo critério de parada dos capítulos anteriores, isto é, $n_a = n_s = 100$. Assim sendo, simulamos dois modelos de fila M/BS/1, nos quais os tempos de serviço seguem uma distribuição BS. Adotamos o seguinte vetor de parâmetros de entrada $(\lambda, \rho; \alpha; \beta)^T$, e assumimos os seguintes valores $(0,8; 0,8; 0,92; 0,7)^T$ e $(0,9; 0,9; 0,92; 0,7)^T$. Os valores de $\alpha = 0,92$ e $\beta = 0,7$ foram escolhidos a partir das rodadas das simulações que apresentaram os menores tempos de serviço.

Na Tabela 6.1, mostramos o resumo descritivo das simulações. Podemos observar que com o aumento da intensidade de tráfego, os tempos de serviço diminuem.

Tabela 6.1: Resumos dos dados simulados com $\rho = 0,8$ e $\rho = 0,9$.

ρ	Média	Mediana	Máximo	Mínimo	Desvios-padrão
$0,8$	1,291	0,8943	12,71	0,000759	1,38
$0,9$	1,05	0,7523	7,913	0,0003675	1,80

Realizamos 10.000 rodadas de simulações, com objetivo de estimar os parâmetros ϕ_i, $i = 1, 2$, pelo método de máxima verossimilhança, usando os modelos M/MAXCOMPBS/1 e M/MINCOMPBS/1. Os valores médios das estimativas para os parâmetros foram de 90, $\phi_i = 90$, $i = 1, 2$ e este valor foi considerado como o valor a ser comparado.

Simulamos novamente 1.000 modelos de fila $M/BS/1$ e, para cada vetor de parâmetros, calculamos a média das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros, usando os modelos M/MAXCOMPBS/1 e M/MINCOMPBS/1, assim, como, seus desvios-padrão (dp).

Nas Tabelas 6.2, 6.3, apresentamos estas estimativas médias dos parâmetros dos modelos, e seus desvios-padrão. Podemos observar que as estimativas médias dos parâmetros estão próximos dos parâmetros de entrada das simulações.

Tabela 6.2: Estimativas médias dos parâmetros do modelo de fila M/MAXCOMPBS/1 e seus desvios-padrão (dp).

ρ	$\hat{\lambda_1}$	dp	$\hat{\rho_1}$	dp	$\hat{\alpha_1}$	dp	$\hat{\beta_1}$	dp	$\hat{\phi_1}$	dp
0,8	0,83	0,03	0,81	0,05	0,85	0,09	0,69	0,001	89	0,01
0,9	0,85	0,06	0,92	0,01	0,99	0,004	0,702	0,009	92	0,09

Tabela 6.3: Estimativas médias dos parâmetros do modelo de fila M/MINCOMPBS/1 e seus desvios-padrão (dp).

ρ	$\hat{\lambda_2}$	dp	$\hat{\rho_2}$	dp	$\hat{\alpha_2}$	dp	$\hat{\beta_2}$	dp	$\hat{\phi_2}$	dp
0,8	0,82	0,02	0,79	0,033	0,84	0,096	0,68	0,002	91	0,02
0,9	0,86	0,07	0,88	0,023	0,96	0,0057	0,69	0,01	90	0,06

Simulamos 1.000 amostras dos modelos com diferentes tamanhos, 50, 250, 500, 700, e 1.000, e, assim, verificamos a performance das estimativas médias dos parâmetros dos modelos e cálculamos as médias amostrais e vícios.

Nas Tabelas 6.7, 6.9, 6.8 e 6.10 apresentamos estas estimativas médias e os vícios dos modelos. Notamos que os vícios das estimativas médias diminuem quando o tamanho amostral cresce em ambos os modelos.

Nas Figuras 6.1 e 6.2, comparamos as funções de confiabilidade da distribuição

BS, com a função do tempo restante estimada pelo método de Kaplan-Meier. Logo, podemos dizer que existe concordância entre ambas. Para a simulação do modelo de fila M/M/1 usamos os seguintes parâmetros de entrada $\lambda = 0,8$ e $\mu = 1,0$. Na Tabela 6.4, mostramos as estimativas de $\widehat{E}(Y_1)$, referentes à distribuição BS, para as duas simulações. Observamos que os valores destas estimativas são próximas. Na Tabela 6.5, mostramos

Tabela 6.4: Estimativas de $\widehat{E}(Y_1)$ do modelo de fila M/BS/1.

	$\rho = 0,80$	$\rho = 0,90$
$\widehat{E}(Y_1)$	0,979	1,01

as porcentagens de concordância dos testes Log rank e Quiquadrado. Observamos, que a medida que aumentamos o tamanho amostral, também aumentam as porcentagens de concordância dos testes.

Tabela 6.5: Porcentagem de concordância dos testes Log-rank e Quiquadrado para o modelo de fila M/BS/1.

	Log rank (%)			**Quiquadrado**(%)		
Amostra	$\rho = 0,75$	$\rho = 0,80$	$\rho = 0,90$	$\rho = 0,75$	$\rho = 0,80$	$\rho = 0,90$
n=50	50,1	60,1	63,2	72,9	73,1	75,0
n=1.000	70,0	73,0	75,0	80,6	81,0	84,0
n=10.000	80,0	82,5	83,1	83,2	86,8	87,8

Na Tabela 6.6 apresentamos as taxas de ocupação das duas simulações do modelo M/BS/1. Podemos observar que estas taxas são menores que um, mostrando a estabilidade dos sistemas. Notamos também, uma redução destas taxas em relação as taxas usadas como parâmetro de entradas das simulações.

Tabela 6.6: Taxas de ocupação do modelo de fila M/BS/1 para as duas simulações.

	$\rho = 0,80$	$\rho = 0,90$
M/BS/1	0,775	0,884

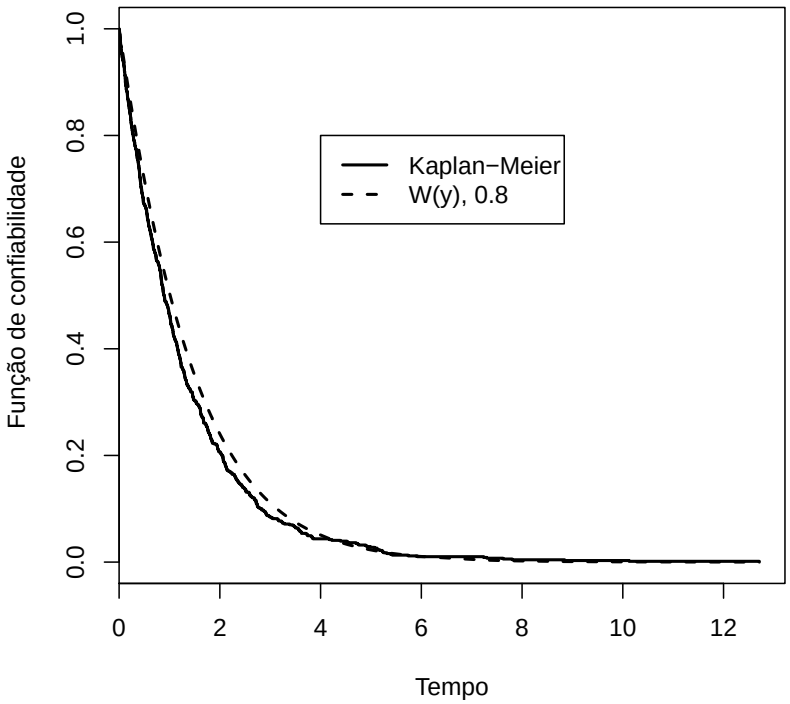

Figura 6.1: Comparando a função do tempo restante da distribuição BS e a função do tempo restante estimada com intensidade de tráfego $\rho = 0,8$.

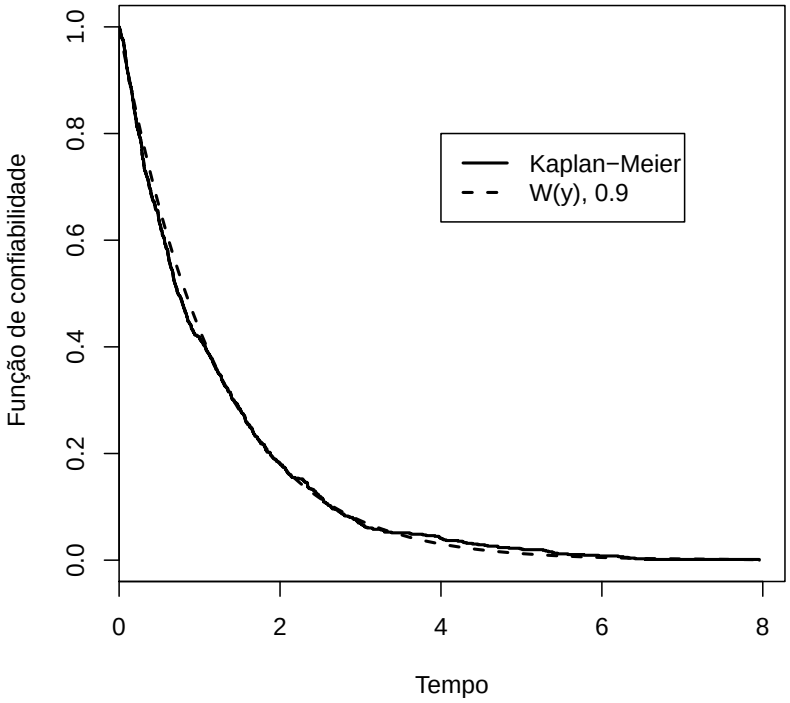

Figura 6.2: Comparando a função do tempo restante da distribuição BS e a função do tempo restante estimada com intensidade de tráfego $\rho = 0,9$.

Tabela 6.7: Estudo de simulação das estimativas médias do modelo de fila M/MAXCOMPBS/1 para $\lambda = 0,8$, $\rho = 0,8$, $\alpha = 0,98$, $\beta = 7,0$, $\phi = 90$.

Amostra (n)	50					250					500				
	$\hat{\lambda_1}$	$\hat{\rho_1}$	$\hat{\alpha_1}$	$\hat{\mu_1}$	$\hat{\phi_1}$	$\hat{\lambda_1}$	$\hat{\rho_1}$	$\hat{\alpha_1}$	$\hat{\mu_1}$	$\hat{\phi_1}$	$\hat{\lambda_1}$	$\hat{\rho}$	$\hat{\alpha_1}$	$\hat{\mu_1}$	$\hat{\phi_1}$
Média Amostral	0,64	0,65	0,72	5,2	78	0,68	0,69	0,74	6,2	80	0,70	0,73	0,82	6,5	84
Variância	1,8	0,07	0,80	0,20	0,001	0,54	0,98	0,90	0,10	0,009	0,25	0,66	0,206	0,92	0,01
Vício	0,16	0,15	0,26	1,8	12	0,12	0,11	0,24	0,8	10	0,1	0,07	0,25	0,5	4

Amostra (n)	700					1,000				
	$\hat{\lambda_1}$	$\hat{\rho_1}$	$\hat{\alpha_1}$	$\hat{\beta_1}$	$\hat{\phi_1}$	$\hat{\lambda_1}$	$\hat{\rho_1}$	$\hat{\alpha_1}$	$\hat{\beta_1}$	$\hat{\phi_1}$
Média Amostral	0,78	0,79	0,91	6,8	84,9	0,82	0,81	0,92	6,9	88,1
Variância	0,23	0,18	0,12	0,52	0,054	0,14	0,12	0,1	0,9	0,01
Vício	0,02	0,01	0,08	0,2	5,1	-0,02	- 0,01	0,06	0,1	1,9

Tabela 6.8: Estudo de simulação das estimativas médias do modelo de fila M/ MAXCOMPBS/1 para $\lambda = 0,9$, $\rho = 0,9$, $\alpha = 0,98$, $\beta = 7,0$ e $\phi = 90$.

Amostra (n)	50					250					500				
	$\hat{\lambda_1}$	$\hat{\rho_1}$	$\hat{\alpha_1}$	$\hat{\mu_1}$	$\hat{\phi_1}$	$\hat{\lambda_1}$	$\hat{\rho_1}$	$\hat{\alpha_1}$	$\hat{\mu_1}$	$\hat{\phi_1}$	$\hat{\lambda_1}$	$\hat{\rho}$	$\hat{\alpha_1}$	$\hat{\mu_1}$	$\hat{\phi_1}$
Média Amostral	0,80	0,84	0,60	6,1	82	0,82	0,86	0,65	6,7	83,2	0,85	0,88	0,80	6,8	87
Variância	0,30	0,24	0,17		0,01	0,28	0,28	0,89	0,28	0,09	0,21	0,12	0,21	0,62	0,01
Vício	0,10	0,06	0,38	0,9	8	0,08	0,04	0,33	0,3	6,8	0,05	0,02	0,28	0,2	3

Amostra (n)	700					1,000				
	$\hat{\lambda_1}$	$\hat{\rho_1}$	$\hat{\alpha_1}$	$\hat{\beta_1}$	$\hat{\phi_1}$	$\hat{\lambda_1}$	$\hat{\rho_1}$	$\hat{\alpha_1}$	$\hat{\beta_1}$	$\hat{\phi_1}$
Média Amostral	0,89	0,85	0,85	7,1	87,9	0,91	0,89	0,88	6,9	87,1
Variância	0,12	0,15	0,12	0,18	0,03	0,13	0,11	0,09	0,72	0,01
Vício	0,01	0,03	0,13	0,4	0.01	2,1	-0,01	0,01	0,1	2,9

Tabela 6.9: Estudo de simulação das estimativas médias do modelo de fila M/MINCOMPBS/1 para $\lambda = 0,8$, $\rho = 0,8$, $\alpha = 0,98$, $\beta = 7,0$, $\phi = 0$.

Amostra (n)	50					250					500				
	$\hat{\lambda_2}$	$\hat{\rho_2}$	$\hat{\alpha_2}$	$\hat{\mu_2}$	$\hat{\phi_2}$	$\hat{\lambda_2}$	$\hat{\rho_2}$	$\hat{\alpha_2}$	$\hat{\mu_2}$	$\hat{\phi_2}$	$\hat{\lambda_2}$	$\hat{\rho_2}$	$\hat{\alpha_2}$	$\hat{\mu_2}$	$\hat{\phi_2}$
Média Amostral	0,54	0,57	0,62	4,1	76	0,60	0,66	0,70	5,8	82	0,68	0,72	0,81	6,3	87
Variância	1,8	0,23	0,50	0,12	0,01	0,43	0,68	,91	0,19	0,09	0,12	0,16	0,18	0,82	0,02
Vício	0,26	0,23	0,36	2,9	14	0,2	0,14	0,28	1,8	8	0,12	0,08	0,17	0,7	3

Amostra (n)	700					1,000				
	$\hat{\lambda_2}$	$\hat{\rho_2}$	$\hat{\alpha_2}$	$\hat{\beta_2}$	$\hat{\phi_2}$	$\hat{\lambda_2}$	$\hat{\rho_2}$	$\hat{\alpha_2}$	$\hat{\beta_2}$	$\hat{\phi_2}$
Média Amostral	0,77	0,76	0,90	6,6	85,1	0,79	0,78	0,90	6,8	88
Variância	0,14	0,15	0,14	0,48	0,0054	0,16	0,10	0,10	0,8	0,01
Vício	0,03	0,04	0,08	0,4	4,9	0,01	0,02	0,08	0,2	2

Tabela 6.10: Estudo de simulação das estimativas médias do modelo de fila M/MINCOMPBS/1 para $\lambda_2 = 0,9$, $\rho_2 = 0,9$, $\alpha_2 = 0,98$, $\beta_2 = 7,0$, $\phi_2 = 90$.

Amostra (n)	50					250					500				
	$\hat{\lambda_2}$	$\hat{\rho_2}$	$\hat{\alpha_2}$	$\hat{\mu_2}$	$\hat{\phi_2}$	$\hat{\lambda_2}$	$\hat{\rho_2}$	$\hat{\alpha_2}$	$\hat{\mu_2}$	$\hat{\phi_2}$	$\hat{\lambda_2}$	$\hat{\rho_2}$	$\hat{\alpha_2}$	$\hat{\mu_2}$	$\hat{\phi_2}$
Média Amostral	0,70	0,63	0,70	5,3	83	0,65	0,68	0,75	6,3	83,52	0,76	0,79	0,88	6,9	88
Variância	1,4	1,3	0,9	0,21	0,01	1,2	0,98	0,78	0,15	0,09	0,90	0,56	0,56	0,82	0,01
Vício	0,2	0,27	0,28	1,7	7	0,25	0,22	0,23	0,7	-6,5	0,14	0,11	0,10	0,1	2

Amostra (n)	700					1,000				
	$\hat{\lambda_2}$	$\hat{\rho_2}$	$\hat{\alpha_2}$	$\hat{\beta_2}$	$\hat{\phi_2}$	$\hat{\lambda_2}$	$\hat{\rho_2}$	$\hat{\alpha_2}$	$\hat{\beta_2}$	$\hat{\phi_2}$
Média Amostral	0,77	0,76	0,90	6,6	88,7	0,79	0,78	0,90	6,8	89
Variância	0,14	0,15	0,14	0,48	0,04	0,16	0,10	0,10	0,8	0,01
Vício	0,13	0,14	0,08	0,4	1,3	0,11	0,12	0,08	0,2	1

Na Tabela 6.11, mostramos os valores dos critérios AIC e BIC, e, assim, selecionar o modelo que melhor de adequa aos dados. Observamos que o modelo de fila M/BS/1 atinge os menores valores dos critérios AIC e BIC. Mostramos, os criterios somente para a simulação com intensidade de tráfego 0,8.

Tabela 6.11: Valores dos critérios AIC e BIC

Modelos	**AIC**	**BIC**
$M/BS/1$	202,10	198,28
$M/M/1$	205,30	203,89

6.3.2 Dados de fluxo de tráfego

Os dados reais usados aqui, são dos tempos entre passagens de veículos de uma via da região central da cidade de Presidente Prudente, no Estado de São Paulo. A região é formada por 25 quarteirões, 7 vias de entrada e saída, sendo estas vias chamadas de pontos externos. Para determinar o fluxo de tráfego nesta região central, existem 8 pontos internos, sendo um deles a principal via de escoamento de veículos. Este ponto principal, foi escolhido como ponto da coleta dos dados.

Várias coletas de dados foram realizadas, em diferentes dias da semana, durante de 1 mês. Em um dia especifíco de coleta, um sábado, no período das 9:00 horas às 10:00 horas e 30 minutos, o sistema apresentou grande intensidade de tráfego, por se tratar de começo de mês e periodo de pagamento. Este dia foi escolhido para ilustrar a aplicação dos modelos propostos, por apresentar rapidez no fluxo de veículos e grande intensidade de tráfego.

Na Figura 6.3, mostramos o esquema da região de interesse obtido via *Google*. A região é representada pelo retângulo em amarelo, e o círculo também em amarelo, é o ponto de coleta dos dados.

Figura 6.3: Região Central da cidade de Presidente Prudente.

Na Figura 6.4, mostramos o esquema do fluxo de tráfego dos veículos, no ponto de coleta.

O ponto de coleta é um cruzamento de duas avenidas, em que um dos lados foi fixado como ponto de coleta e também o principal ponto de passagem dos veículos. Assim, foram coletados 486 tempos entre passagens (os dados foram cedidos pelo Prof Dr. José Gilberto Spaziani Rinaldi da UNESP de Presidente Prudente).

Na Tabela 6.12, mostramos o resumo descritivo dos dados em segundos.

Tabela 6.12: Resumo dos dados em segundos

Média	Mediana	Máximo	Mínimo	Desvio-padrão
10,81	7,50	53	1,0	9,79

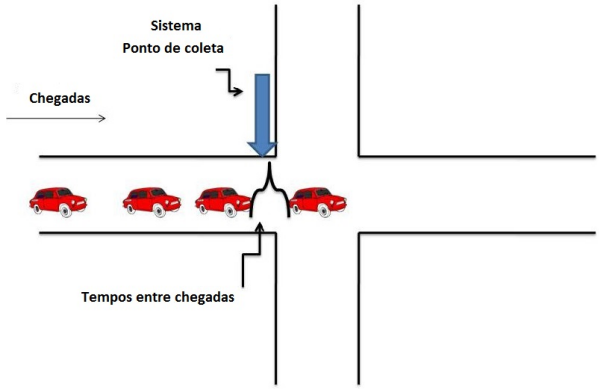

Figura 6.4: Esquema do fluxo de tráfego.

Foi usado o teste Kolmogorov-Smirnov para verificar se a amostra é proveniente de uma população com distribuição BS (H_0), com um nível de significância de $0,05$, obtendo-se um p-valor$=0,3616$, e, portanto, a hipótese nula não foi rejeitada.

Na Tabela 6.13, apresentamos as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros dos modelos M/MAXCOMPBS/1 e M/MINCOMPBS/1. As estimativas do parâmetro ρ de ambos modelos estão próximas. Mostrando que a via de escoamento apresentou aproximadamente uma taxa de ocupação de $86,7\%$. Além disso, as estimativas de máxima verossimilhança do parâmetro ϕ, estão próximas de zero, logo, os possíveis modelos para o máximo e mínimo tempos entre passagens são os modelos de fila M/MAXGBS/1 e M/MINGBS/1.

Tabela 6.13: Estimativas de máxima verossimilhança dos modelos M/MAXCOMPBS/1 e M/MINCOMPBS/1.

M/MAXCOMPBS/1	**M/MINCOMPBS/1**
$\hat{\lambda}_1 = 0,885$	$\hat{\lambda}_2$=0,988
$\hat{\rho}_1 = 0,867$	$\hat{\rho}_2 = 0,866$
$\hat{\alpha_1} = 0,98$	$\hat{\alpha}_2 = 0,90$
$\hat{\beta}_1 = 7,36$	$\hat{\beta}_2 = 7,50$
$\hat{\phi_1} = 0,00091$	$\hat{\phi}_2 = 0,00082$

Nas Figuras 6.5 e 6.6, comparamos as funções de confiabilidade das distribuições MAXGBS e MINGBS, respectivamente, e a função do tempo restante estimada pelo método de Kaplan-Meier. Podemos, observar que as funções de confiabilidade destas

distribuições, se mostram em concordância com a função do tempo restante estimada.

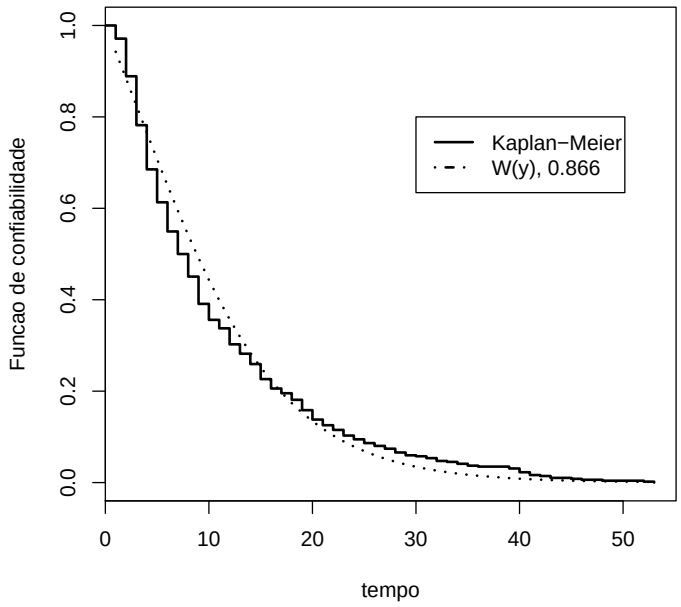

Figura 6.5: Comparando a função do tempo restante da distribuição MAXGBS e a função do tempo restante estimada.

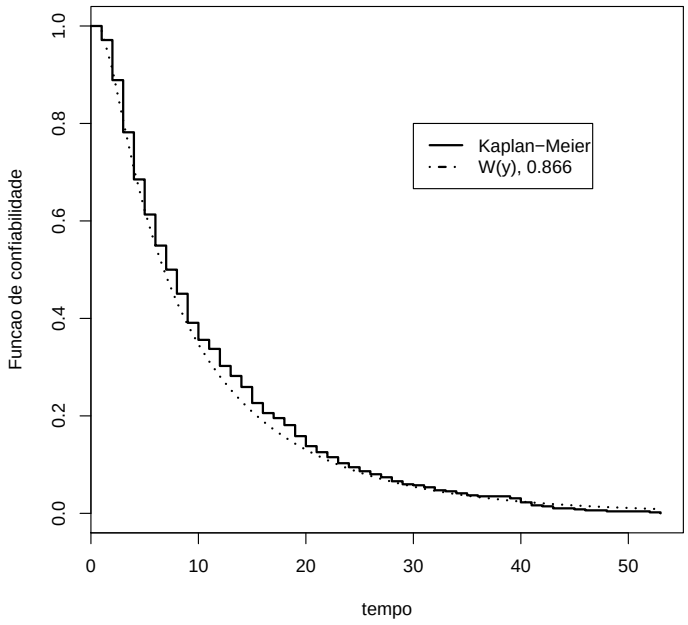

Figura 6.6: Comparando a função do tempo restante da distribuição MINGBS e a função do tempo restante estimada.

Na Tabela 6.14, mostramos as estimativas de $\widehat{E}(Y_{max})$ e $\widehat{E}(Y_{min})$, referentes as distribuições MAXGBS e MINGBS, respectivamente. Observamos que as estimativas estão próximas, isto, ocorre devido ao fato dos dados não apresentrarem grande variabilidade.

Tabela 6.14: As estimativas de $\widehat{E}(Y_{max})$ e $\widehat{E}(Y_{min})$ em segundos.

MAXGBS	**MINGBS**
$\widehat{E}(Y_{max})$	$\widehat{E}(Y_{min})$
0,878	0,987

Na Tabela 6.15, apresentamos as taxas de ocupação dos modelos de fila M/MAXGBS/1 e M/MINGBS/1, respectivamente. Podemos observar que as taxas de ocupação de ambas simulações são menores que um, mostrando o equilíbrio dos sistemas.

Tabela 6.15: Taxas de ocupação dos modelos de fila M/MAXGBS/1 e M/MINGBS/1.

M/MAXGBS/1	**M/MINGBS/1**
0,761	0,855

Na Tabela 6.16 comparamos as medidas de desempenho dos modelos de fila M/MAXGBS/1, M/MINGBS/1 e M/M/1. Observamos que as medidas de desempenho dos modelos propostos são menores quando comparadas com o modelo de fila M/M/1. O modelo M/MINGBS/1 apresenta as menores quantidades.

Tabela 6.16: Medidas de desempenho dos modelos de fila M/MAXGBS/1, M/MINGBS/1 e M/M/1.

	M/MAXGBS/1	**M/MINGBS/1**	**M/M/1**	
	0,867	0,866	0,867	0,866
L_q	0,0079	0,00089	5,650	5,597
W_q	0,0097	0,0011	7,060	6,821
L	0,888	0,800	7,06	6,463
W	0,8897	0,811	8,825	7,786

Usamos os valores dos critérios AIC e BIC para selecionar o melhor modelo. Na Tabela 6.17 mostramos estes valores. Observamos que o modelo MINGBS possui os menores indices nos critérios AIC e BIC. Assim, é o modelo que melhor se adequa aos dados.

Tabela 6.17: Valores dos critérios AIC e BIC

Modelos	**AIC**	**BIC**
M/MAXGBS/1	-96.45	-94.73
M/MINGBS/1	-97.93	-95.90
M/MAXGE/1	- 88,50	- 81,90
M/MINGE/1	-94,30	- 92,80
M/M/1	110,2	109,2

6.4 Considerações finais

Neste capítulo, apresentamos os modelos M/MAXCOMPBS/1 e M/MINCOMPBS/1, para o máximo e o mínimo tempos de serviço, respectivamente. Estes modelos apresentam as mesmas características dos modelos descritos nos Capítulos 4 e 5, diferenciando-se

apenas em relação as distribuições de serviço, neste caso, as distribuições MAXCOMPBS e MINCOMPBS.

Mostramos as propriedades dos modelos, tais como as expressões para as funções de densidade das distribuições obtidas e seus momentos, as distribuições de equilíbrio do número de usuários no sistema e do tempo de espera na fila. Usamos o método de máxima verossimilhança para a estimação dos parâmetros dos modelos. Para ilustrar os modelos propostos usamos dados simulados e dados reais de fluxo de tráfego. Os resultados das simulações e dos dados reais motraram que os modelos propostos são adequados para descreverem sistemas com grande intensidade de tráfego.

Capítulo 7

Conclusões e propostas futuras

A motivação deste trabalho surgiu a partir do estudo da distribuição Conway-Maxwell-Poisson (Conway and Maxwell, 1961), denotada por COMP, em razão de sua ampla versatilidade, e, principalmente, sua aplicação na teoria das filas, para modelar servidores de centrais de serviço, na ocorrência de disparidade entre eles. Estas características nos permitiram estender o seu uso para a construção de novas distribuições para os tempos de serviço, e tendo como objetivo principal a modelagem do máximo e do mínimo tempos de serviço, sendo que o número de usuários no sistema e o número total de servidores são desconhecidos.

Estas novas distribuições surgiram a partir da composição da distribuição COMP truncada no ponto zero, com uma distribuição geral para o máximo e o mínimo tempos de serviço, as quais denominamos de distribuições MAXCOMPG e MINCOMPG, respectivamente.

As distribuições MAXCOMPG e MINCOMPG têm um parâmetro de pressão, que quantifica a pressão exercida sobre o servidor na ocorrência do aumento de fluxo de usuários. Estudamos três variações deste parâmetro. Quando o parâmetro de pressão assume o valor zero, a taxa de serviço é independente do estado do sistema. Quando o parâmetro de pressão assume o valor um, a taxa de serviço aumenta proporcionalmente ao aumento do fluxo de usuários. Quando o parâmetro de pressão tende a infinito, a taxa de serviço aumenta ainda mais e o serviço torna-se extremamente rápido.

A partir destas variações do parâmetro de pressão novas distribuições foram ob-

tidas para o máximo e o mínimo tempos de serviço, e que foram denominadas por: distribuições MAXGG e MINGG, distribuições MAXPG e MINPG e distribuições MAXBG e MINBG.

Selecionamos três distribuições gerais que são: exponencial, Weibull e Birnbaum Saunders. Como consequência novas distribuições foram encontradas, e denominadas por, distribuições MAXCOMPE e MINCOMPE, distribuições MAXCOMPW e MINCOMPW e distribuições MAXCOMPBS e MINCOMPBS. Além disso, com as variações do parâmetro de pressão outros modelos surgiram para cada uma das distribuições citadas.

Com o estudo destas distribuições de serviço surgem novos modelos de fila denominados de M/MAXCOMPG/1 e M/MINCOMPG/1, com chegada segundo um processo de Poisson, distribuições de serviço MAXCOMPG e MINCOMPG para o máximo e o mínimo tempos de serviço, respectivamente, disciplina da fila FIFO, capacidade do sistema infinita. Os modelos também possuem um número desconhecido de servidores dispostos em paralelos, mas apenas um servidor é observado, isto é, aquele que oferece o máximo ou o mínimo tempo de serviço entre todos os servidores. Estes modelos são casos particulares do modelo de fila M/G/1. Assim sendo, as distribuições de equilíbrio para o número de usuários no sistema e o tempo de espera na fila foram fornecidas, e isto foi feito para todas as distribuições de serviço apresentadas neste trabalho.

Os modelos de fila propostos se apresentam bastante realistas em comparação com os modelos de fila propostos na literatura, pois são capazes de capturar as variações do sistema devido ao aumento do fluxo de usuários nele.

Concluímos que os modelos apresentados neste trabalho têm grande potencial de aplicação na teoria das filas, e a construção de novas distribuições para os tempos de serviços surge como uma linha promissora de pesquisa.

Como continuação deste trabalho, propomos os seguintes tópicos:

- Um modelo geral para a distribuição de serviço usando a distribuição Poisson ponderada.
- Incluir os períodos ociosos nos modelos.
- Estudo de simulação para os modelos com o relaxamento da distribuição exponen-

cial.

- Construção de um modelo aleatório para um sistema com capacidade finita.
- Estudo da superdispersão e subdispersão.
- Incluir prioridades nos usuários.
- Modelos de serviço com fases.
- Estudo do impacto da dependência nos sistemas propostos.

Referências

Adan, I. J. and Kulkarni, V. (2003). Single-server queue with markov-dependent inter-arrival and service times. *Queueing Systems*, 45(2):113–134.

Armero, C. and Bayarri, M. (1994). Bayesian prediction in m/m/1 queues. *Queueing Systems*, 15(1-4):401–417.

Barth, W., Manitz, M., and Raik, S. (2010). Analysis of two-level support systems with time-dependent overflow a banking application. *Production and Operations Management*, 19(6):757–768.

Bekker, R., Borst, S., Boxma, O., and Kella, O. (2004). Queues with workload-dependent arrival and service rates. *Queueing Systems*, 46(3):537–556.

Bekker, R., G, K., Nielsen, B., and Bang, T. (2011). Queues with waiting time dependent service. *Queueing Systems*, 68(1):61–78.

Birnbaum, Z. and Saunders, S. C. (1969). A new family of life distributions. *Journal of Applied Probability*, pages 319–327.

Boxma, O. and Vlasiou, M. (2007). On queues with service and interarrival times depending on waiting times. *Queueing Systems*, 56(3):121–132.

Bozdogan, H. (1987). Model selection and akaike's information criterion (aic): The general theory and its analytical extensions. *Psychometrika*, 52(3):345–370.

Brockmeyer, E., Halstrm, H., Jensen, A., and Erlang, A. K. (1948). The life and works of ak erlang.

Civelek, I., Biller, B., and Scheller-Wolf, A. (2009). The impact of dependence on queueing systems.

Conway, R. W. and Maxwell, W. L. (1961). A queueing model with state dependence services rates. *The Journal of Industrial Engineering*, XII(2):132–136.

Cordeiro, G. M., Rodrigues, J., and de Castro, M. (2012). The exponential com-poisson distribution. *Statistical Papers*, pages 1–12.

Cruz, F. and Smith, J. M. (2007). Approximate analysis of m/g/c/c state-dependent queueing networks. *Computers & Operations Research*, 34(8):2332–2344.

Cruz, F. R., Van Woensel, T., Smith, J. M., and Lieckens, K. (2010). On the system optimum of traffic assignment in m/g/c/c state-dependent queueing networks. *European Journal of Operational Research*, 201(1):183–193.

Feldmann, A. and Whitt, W. (1998). Fitting mixtures of exponentials to long-tail distributions to analyze network performance models. *Performance evaluation*, 31(3):245–279.

Fierro, R., Leiva, V., Ruggeri, F., and Sanhueza, A. (2013). On a birnbaum–saunders distribution arising from a non-homogeneous poisson process. *Statistics & Probability Letters*, 83(4):1233–1239.

Gross, D. and Harris, C. (1998). *Fundamentals of queueing theory (Series in probability & statistics)*. Boston: Wiley.

Iyer, S. and Manjunath, D. (2006). Queues with dependency between interarrival and service times using mixtures of bivariates. *Stochastic models*, 22(1):3–20.

Jongbloed, G. and Koole, G. (2001). Managing uncertainty in call centres using poisson mixtures. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 17(4):307–318.

Kendall, D. G. (1953). Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded markov chain. *The Annals of Mathematical Statistics*, pages 338–354.

Kokonendji, C. C., Mizere, D., and Balakrishnan, N. (2008). Connections of the poisson weight function to overdispersion and underdispersion. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 138(5):1287–1296.

Koole, G., Nuyens, M., and Righter, R. (2005). The effect of service time variability on maximum queue lengths in queues. *Journal of applied probability*, pages 883–891.

Lee, J. and Kim, J. (2006). A workload-dependent m/g/1 queue under a two-stage service policy. *Operations research letters*, 34(5):531–538.

Little, J. D. (1961). A proof for the queuing formula: $l = \lambda w$. *Operations Research*, 9(3):383–387.

Marin, C. V., Drury, C. G., Batta, R., and Lin, L. (2007). Server adaptation in an airport security system queue. *OR Insight*, 20(4):22–31.

McShane, B., Adrian, M., Bradlow, E. T., and Fader, P. S. (2008). Count models based on weibull interarrival times. *Journal of Business & Economic Statistics*, 26(3).

Minka, T. P., Shmueli, G., Kadane, J. B., Borle, S., and Boatwright, P. (2003). Computing with the com-poisson distribution. *Pittsburgh, PA: Department of Statistics, Carnegie Mellon University*.

Paulino, C. D. M., Turkman, M. A. A., and Murteira, B. (2003). *Estatística bayesiana*.

Pinsky, M. and Karlin, S. (2010). *An introduction to stochastic modeling*. Academic press.

Prado, S. M., Louzada, F., Rinaldi, J. G., and Viola, M. L. L. (2015). A distribution for service model.

Ramsay, C. M. (2007). Exact waiting time and queue size distributions for equilibrium m/g/1 queues with pareto service. *Queueing Systems*, 57(4):147–155.

Rigby, R. and Stasinopoulos, D. (2005). Generalized additive models for location, scale and shape. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, 54(3):507–554.

Rodrigues, J., de Castro, M., Cancho, V. G., and Balakrishnan, N. (2009). Com–poisson cure rate survival models and an application to a cutaneous melanoma data. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139(10):3605–3611.

Schmidli, H. et al. (1999). Compound sums and subexponentiality. *Bernoulli*, 5(6):999–1012.

Seetha, L. and Muvattupuzha, K. (2012). Some generalizations of poisson processes. *Journal of statistical theory and applications*, 11(3):225–235.

Shmueli, G., Minka, T. P., Kadane, J. B., Borle, S., and Boatwright, P. (2004). A useful distribution for fitting discrete data: revival of the conway-maxwell-poisson distribution. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, 54(1):127–142.

Singh, C. J., Jain, M., and Kumar, B. (2012). Analysis of m/g/1 queueing model with state dependent arrival and vacation. *Journal of Industrial Engineering International*, 8(1):1–8.

Tezcan, T. (2012). Asymptotically optimal control of many-server heterogeneous service systems with h_ {2}ˆ{*} service times. *Queueing Systems*, 71(4):445–467.

Van Houdt, B., Lenin, R., and Blondia, C. (2003). Delay distribution of (im) patient customers in a discrete time d-map/ph/1 queue with age-dependent service times. *Queueing systems*, 45(1):59–73.

Whitt, W. (1989). Planning queueing simulations. *Management Science*, 35(11):1341–1366.

Whitt, W. (1990). Queues with service times and interarrival times depending linearly and randomly upon waiting times. *Queueing Systems*, 6(1):335–351.

Wolff, R. W. (1989). *Stochastic modeling and the theory of queues*, volume 14. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ.

Apêndice

.1 Distribuição Conway-Maxwell-Poisson

Neste Apêndice, mostramos a construção da distribuição Conway-Maxwell-Poisson para uma melhor compreensão dos modelos propostos neste trabalho, pois é a partir dela que surge o mecanismo de ajuste destes modelos.

A distribuição Conway-Maxwell-Poisson surgiu com o objetivo de estudar as centrais de serviço com a mesma rigidez de modelos de filas. Sabemos que cada servidor destas centrais possuem a mesma capacidade de serviço, mas com pequenas variações entre entre os servidores em relação à taxa de serviço. A disparidade entre os servidores gera muitas vezes um desequilíbrio, que pode ser severo a ponto de deixar alguns deles ociosos e outros com longas filas.

As centrais podem ser estudadas como sendo um sistema com taxa de serviço dependente do estado do sistema, no qual o servidor altera a taxa de serviço quando ocorre um aumento na carga de trabalho, e, assim, diminui o acúmulo de serviço e a formação de longas filas. A taxa de serviço para tais sistemas é dada por:

$$\mu_m = m^{\phi}\mu, \tag{1}$$

em que m é o número de usuários no sistema, μ_m é a taxa média de serviço quando o sistema possui m usuários no sistema, $1/\mu$ é a média do tempo de serviço quando há apenas um usuário no sistema e ϕ é o parâmetro de pressão que indica o grau, em que a taxa de serviço é afetada pelo estado do sistema (Conway and Maxwell (1961)).

Com a variação do parâmetro de pressão ϕ, a taxa de serviço também varia, por exemplo, se ϕ assume o valor zero, $\phi = 0$, a taxa de serviço independe do estado do sistema. Para valores $\phi \geq 1$, a taxa de serviço aumenta proporcionalmente ao aumento

do fluxo de número de ususáriso no sistema. Para vlores menores que zero, $\phi < 0$, o servidor diminui a taxa de serviço com a diminuição do fluxo de usuários.

Os processos de chegadas e atendimentos ocorrem aleatoriamente no tempo e, as probabilidades não dependem nem do tempo t, nem do estado, no qual se encontra o sistema.

As seguintes suposições são necessárias na obtenção das probabilidades de estado:

1. Os tempos de serviço seguem uma distribuição exponencial com média dependente do estado do sistema dada pela expressão (1).

2. As chegadas ocorrem de forma aleatória e os tempos entre as chegadas seguem uma distribuição exponencial com média λ.

3. A disciplina da fila é FIFO (first-in-first-out).

Logo

$$\begin{aligned} p_{m,m+1}(t+\Delta) &= P[M(t+\Delta(t)) = m+1/M(t) = m] \\ &= \lambda\Delta(t)(1 - m^{\phi}\mu\Delta(t)) + o(\Delta(t)) \\ &= \lambda\Delta(t) + o(\Delta(t)), \end{aligned}$$

na qual $o(\Delta(t))$=$P[$ mais de m usuários no sistema, logo temos

$$\begin{aligned} p_{m,m}(t+\Delta) &= (1 - \lambda\Delta(t) - m^{\phi}\mu\Delta(t))p_m(t) + \lambda\Delta(t)p_{m-1}(t) \\ &+ (m+1)^{\phi}\mu\Delta(t)p_{m+1}(t) + o(\Delta(t)) \;\; m = 1, 2, 3\cdots, \end{aligned}$$

e

$$p_{0,0}(t+\Delta) = (1 - \lambda\Delta(t))p_{0,0}(t) + o(\Delta(t)).$$

A partir de um estado m, o processo só pode ir para os estados vizinhos $(m+1)$ ou $(m-1)$. Quando um processo tem esse comportamento ele é chamado de processo de nascimento e morte (Pinsky and Karlin (2010)). Usando o teorema das probabilidades totais é possível calcular a probabilidade que no instante t o sistema tenha m usuários,

isto é, $p_m(t) = P[M(t) = m]$, assim temos que

$$\begin{aligned} p_m(t+\Delta(t)) &= \sum_{i=0}^{\infty} P[M(t+\Delta(t)) = m / M(t) = i] P[M(t) = i] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} p_i(t) p_{i,m} \Delta(t) \\ &= p_{m-1}(t)\lambda\Delta(t) + p_m(t)(1 - (\lambda + m^{\phi}\mu)\Delta(t)) \\ &+ p_{m+1}(t) m^{\phi}\mu\Delta(t) + O(\Delta(t)), \quad m \geq 1 \end{aligned}$$

e

$$p_0(t+\Delta(t)) = p_0(t)(1 - \lambda\Delta(t)) + p_1(t)\mu\Delta(t).$$

Fazendo o limite para $\Delta(t) \to 0$, temos

$$\begin{cases} \dfrac{dp_m(t)}{dt} = -(\lambda - m^{\phi}\mu)p_m(t) + m^{\phi}\mu p_{m+1}(t) + \lambda p_{m-1}(t) & \text{se} \quad m \geq 1, \\ \\ \dfrac{p_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) & \text{se} \quad m = 0. \end{cases}$$

As equações acima são conhecidas como equações diferenciais avançadas e retrogradas. Elas permitem, em princípio, calcular as probabilidade de estado $p_m(t)$, caso seja conhecido as condições iniciais do sistema, ou seja, a distribuição $M(0)$, que é quantidade de usuários no início do processo. A resolução analítica, destas equações diferenciais, é geralmente complexa e às vezes impossível, e, neste caso, é necessário trabalhar com o sistema em equilíbrio.

Um sistema está em equilíbrio quando,

$$\lim_{t\to\infty} p_m(t) = p_m.$$

O limite acima existe e é independente do estado inicial do processo, consequentemente,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{dp_m(t)}{dt} = 0$$

Supondo que o sistema esteja em equilíbrio é possível reescrever as equações acima

como um sistema de equações lineares homogêneas, que são dadas por

$$\begin{cases} -(\lambda + m^{\phi}\mu)p_m + \lambda p_{m-1} + (m+1)^{\phi}\mu p_{m+1} = 0 & \text{se} \quad n \geq 1, \\ -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 & \text{se} \quad m = 0. \end{cases}$$

Temos que $\rho = \lambda/mu$, e o sistema de equações descritas anteriormente são escritas da seguinte forma

$$\begin{cases} p_{m+1} = (\rho+1)p_0 - \rho p_{m-1}, & \text{se} \quad m \geq 1, \\ p_1 = \rho p_0, & \text{se} \quad m = 0. \end{cases}$$

Usamos o método interativo para obter as probabilidades de estado, logo temos

$$p_m = \frac{\rho^m}{(m!)^{\phi}} p_0. \tag{2}$$

Como p_m é uma função de probabilidade da variável aleatória $M(t)$, tal que $\sum_{m=0}^{\infty} p_m = 1$, desta forma temos

$$p_0 \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho^m}{(m!)^{\phi}} \right] = 1,$$

e

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho^m}{(m!)^{\phi}}}.$$

A distribuição de probabilidade do número de usuários no sistema com estado dependente da taxa de serviço é dada por

$$p_m = p_0 \frac{\rho^m}{(m!)^{\phi}} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^j}{(j!)^{\phi}}} \frac{\rho^m}{(m!)^{\phi}}. \tag{3}$$

A Equação (3) é chamada de distribuição Conway-Maxwell-Poisson, denotada por COMP. Esta distribuição ficou esquecida por muito tempo e ressurgiu em 2000 com Mika et al,2003, que a renomeou da forma como a conhecemos e a reescreveu da seguinte maneira

$$\begin{aligned} p_m(M; \rho, \phi) &= p_0 \frac{\rho^m}{(m!)^{\phi}} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^j}{(j!)^{\phi}}} \frac{\rho^m}{(m!)^{\phi}} \\ &= \frac{1}{Z(\rho, \phi)} \frac{\rho^m}{(m!)^{\phi}}, \end{aligned} \tag{4}$$

na qual $Z(\rho,\phi)=p_0$ é a constante normalizadora, $\rho<1$ é a intensidade de tráfego. A distribuição COMP não é definida em $\rho\geq 1$ com $\phi=0$. Esta distribuição pode ser vista como uma distribuição híbrida, pois para $\phi=0$ temos a distribuição geométrica, para $\phi=1$, obtemos a distribuição Poisson, e para $\phi=\infty$, a distribuição Bernoulli. A distribuição COMP possui superdispersão quando $\phi\in[0,1)$ e subdispersão para $\phi\in(1,\infty]$.

.2 Truncamento da série

Neste apêndice mostramos o truncamento da soma dada nos r-ésimos momentos dos modelos apresentados neste trabalho. Para facilitar a compreensão mostraremos somente o truncamento do modelo MAXCOMPE.

O r-ésimo momento $E(Y^r_{max})$ é dado por

$$E(Y^r)=\frac{\lambda^{-r}\Gamma(r+1)\rho}{[Z(\rho,\phi)-1]}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\rho^{m-1}}{(m!)^{\phi}}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}\frac{1}{(1+k)^{r+1}}.$$

Temos que o limitante superior é dado por

$$\underbrace{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\rho^{m-1}}{(m!)^{\phi}}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}\frac{1}{(1+k)^{r}}}_{\tau}<\sum_{m=1}^{\infty}m\frac{\rho^{m-1}}{(m!)^{\phi}}.$$

A série τ possui limitante superior dado pela série $\sum_{m=1}^{\infty}m\frac{\rho^{m-1}}{(m!)^{\phi}}$. Em Minka et al. (2003) mostra que está série é convergente

$$\lim_{m\to\infty}m\frac{\rho^{m}}{(m!)^{\phi}}=0.$$

então a série τ é convergente.

Portanto, é possível truncar a série τ no ν-ésimo termo tal que

$$\sum_{m=1}^{\nu}\frac{m\rho^{m-1}}{(m!)^{\phi}}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}\frac{1}{(1+k)^{r+1}}+\sum_{m=\nu+1}^{\infty}\frac{m\rho^{m-1}}{(m!)^{\phi}}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}\frac{1}{(1+k)^{r+1}},$$

where

$$R_{\nu}=\sum_{m=\nu+1}^{\infty}\frac{m\rho^{m-1}}{(m!)^{\phi}}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}\frac{1}{(1+k)^{r+1}}.$$

na qual R_{ν} é o erro absoluto truncado.

O limitante superior é obtido baseado na série $\rho^m/(m!)^\phi$, $m = 1, 2, \ldots$ que decresce mais rápido que a série geométrica. Sendo assi, existe $0 < \varepsilon_\nu < 1$ para todo $\mu > \nu$, tal que $\rho/(m+1)^\phi < \varepsilon_\nu$. Portanto, $R_\nu < \varepsilon_\nu$ é o menor erro absoluto.