UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

GUSTAVO GOMES PRATA

DETERMINANTES

São Carlos - SP
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

GUSTAVO GOMES PRATA

DETERMINANTES

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre.

Orientação: Prof. Dr. Ivo Machado da Costa

São Carlos - SP
2016

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P912d

Prata, Gustavo Gomes
Determinantes / Gustavo Gomes Prata. -- São Carlos : UFSCar, 2016.
169 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2016.

1. Função Determinante. 2. Aplicações. 3. História da Matemática. I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Gustavo Gomes Prata, realizada em 04/10/2016:

Prof. Dr. Ivo Machado da Costa
UFSCar

Prof. Dr. José Luciano Santinho Lima
IFSP

Prof. Dr. Luis Antonio Carvalho dos Santos
UFSCar

Aos meus pais José Pedro e Maria Aparecida, à minha irmã Fabíola e à minha esposa Sandra.

“Julgo possível relacionar qualquer fórmula à determinantes.”

Arthur Cayley

AGRADECIMENTOS

À Deus, pelo dom da vida e por me permitir chegar até aqui, sempre me direcionando, fortalecendo e me ajudando a romper obstáculos e superar limites.

À minha família, pelo apoio sempre incondicional e por acreditarem que seria possível.

Ao meu orientador, professor Ivo Machado da Costa, pela atenção, paciência e disponibilidade ao longo destes últimos meses. Pelos tantos dias e tardes sacrificados por minha causa. Pelo conhecimento que colocou ao meu alcance e por ter tornado-se, para mim, referência e exemplo de ser humano e de educador, que fizeram a diferença e que levarei comigo aonde for, por toda a vida.

Muito Obrigado!

RESUMO

O presente trabalho busca fornecer subsídios ao professor de Matemática da Educação Básica, no que se refere ao tema Determinantes. A partir de uma base teórica consistente, o conceito de Determinante é construído e suas principais propriedades são deduzidas. Posteriormente, são apresentadas algumas de suas aplicações, passíveis de serem exploradas no Ensino Médio, vinculadas ao contexto histórico na qual foram desenvolvidas, buscando tornar a aprendizagem de Determinantes mais significativa.

Desse modo, o capítulo 1 apresenta conceitos básicos de Álgebra Linear, que são pré-requisitos para a definição e o estudo da Função Determinante, bem como de suas propriedades, que são desenvolvidas no capítulo 2. O capítulo 3, por sua vez, promove conexões de Determinantes com outros conceitos matemáticos de nível médio relativos à própria Álgebra Linear e às Geometrias Analítica e Euclidiana, cada qual com uma introdução histórica específica.

Palavras-chave: Função Determinante; Aplicações; História da Matemática.

ABSTRACT

This paper wants to provide subsidies to the Mathematics teacher of Basic Education, regarding to Determinants. From a consistent theoretical basis, it builds the concept of Determinant and deducts its main properties. Subsequently, it presents some of its applications, which can be explored in High School, linked to the historical context in which they were developed, aiming to make learning of Determinants more significant.

Thereby, the Chapter 1 presents basic concepts of Linear Algebra, which are prerequisites for the definition and study of the Determinant Function, as well as of its properties, which are developed in Chapter 2. Chapter 3, on the other hand, promotes connections of Determinants with other middle-level mathematical concepts related to the own Linear Algebra and Analytic and Euclidean Geometry, each one with a specific historical introduction.

Keywords: Determinant Function; Applications; History of Mathematics.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

A aprendizagem matemática na Educação Básica tem se mostrado ineficiente. Na prática, observa-se o crescente desinteresse e distanciamento dos alunos com relação à Matemática em boa parte das salas de aula brasileiras.

A esse respeito, Silva (2013, p. 8) aponta para a dificuldade de compreensão dos conteúdos das grades curriculares do Ensino Fundamental e Médio, especialmente da Álgebra.

Contudo, não pretendemos, com este trabalho, discutir questões filosóficas no âmbito da aprendizagem humana, que emanam de uma série de teorias e vertentes pedagógicas, cujas ideologias enraízam-se nos currículos vigentes e nas tendências educacionais afloradas no âmbito acadêmico, tampouco apresentar uma sequência didática ou uma metodologia de ensino referente a abordagem de determinantes na Educação Básica. Esta obra versa, especificamente, sobre Determinantes, em seus vieses teórico e histórico, buscando relacioná-lo a outros conceitos matemáticos, no nível da Educação Básica.

O objetivo é oferecer um conhecimento sólido e estruturado sobre Determinantes para o professor de Matemática da Educação Básica, para que este, independente de sua filosofia e/ou postura pedagógica, encontre, neste compêndio, um aporte significativo de informações e conteúdos técnicos sobre o tema, para sua própria qualificação. Evidentemente, que este professor poderá, em um momento posterior, adaptar e reestruturar os conceitos aqui abordados, e aplicá-los à seus alunos e, neste caso, naturalmente, haverá a modelagem do conteúdo, conforme o perfil pedagógico do educador.

Diante disso, ressaltamos que este trabalho não é passível de aplicação direta no ensino médio, ele destina-se ao professor, o qual poderá tomá-lo como subsídio para o enriquecimento de sua atuação pedagógica junto aos aprendizes, de modo a tornar a teoria de Determinantes mais significativa, sob o ponto de vista do aluno.

Neste aspecto, Alves (2013, p.50) aponta para a necessidade de o professor

> "[...] ter condições de analisar o conteúdo de maneira global, ter conhecimento de sua forma mais abstrata [...] para ser capaz de contextualizar e problematizar situações que estimulem a produção de significados em seus alunos."(ALVES, 2013, p. 50)

É fato que o autor deste trabalho atua na área de Educação Corporativa e não tem experiência de sala de aula na Educação Básica. Diante disso, e com a finalidade de embasar adequadamente suas colocações e justificar a construção deste compêndio, valeu-se de literatura específica, a saber, Mathias (s/d), Silva (2013), Alves (2013) e Prezotti (2014), além de sua própria experiência pedagógica oriunda de outra área.

Após esta análise, tornou-se evidente que a apropriação de novos conhecimentos através da mera definição, conceituação, demonstração e operacionalização pode não ocorrer plenamente, fazendo-se necessária alguma conexão com os conhecimentos prévios, realidade, cultura e preferências do aprendiz.

Além disso, a aprendizagem efetiva acontece na medida da motivação do aluno em aprender, e tal motivação está relacionada à significação, pelo aprendiz, do que será estudado.

Desse modo, o professor da Educação Básica precisa desenvolver estratégias de abordagens dos conteúdos curriculares, alinhadas aos seus objetivos de aprendizagem e levando em consideração que a ciência em geral, na perspectiva da Matemática Humanista, conforme Mathias (s/d), tem razão de existir na medida em que presta-se, sob qualquer aspecto, ao ser humano, sua essência e necessidades e por essa razão, merece ser ensinada e aprendida.

Neste contexto, Silva (2013, p 10) destaca o viés abstrato dado, especificamente, aos conteúdos relacionados à Álgebra Linear no Ensino Médio, descrevendo a "limitação" do ensino da Álgebra de modo geral. Segundo ele, a raíz deste problema está no "não favorecimento da produção de significados para o que está sendo estudado". (SILVA, 2013, p. 10).

Prezotti (2014, p. 13), por sua vez, vê como problemático a definição despida de significado de Determinantes como um simples valor numérico associado à matrizes quadradas, o qual, segundo ele, é consenso entre os autores de livros didáticos do Ensino Médio.

Por outro lado, grande parte do conhecimento matemático disponível atualmente desenvolveu-se ao longo da história, fruto da ação e do pensamento humano e das suas relações com o mundo físico, buscando, a priori, satisfazer necessidades humanas. Portanto, parece natural que o aluno tenha que vivenciar esse conhecimento, antes de abstraí-lo.

Neste contexto, de acordo com Brasil (2000, p. 44), os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), publicados pelo Ministério da Educação, estabelecem claramente que o currículo do Ensino Médio deve garantir o estudo aprofundado de conteúdos relacionados à Álgebra, porém não isolados de outros conceitos, tampouco desvinculados de problemas e dos aspectos sócio-históricos que estão na origem desses temas, levando o aluno à apropriar-se da linguagem simbólica e da capacidade de análise e descrição de modelos abstratos.

A Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, por sua vez, conforme São Paulo (2012, p. 66), insere o conceito de Determinante no currículo da 2^a série do Ensino Médio.

Essas considerações motivam a realização dessa pesquisa, que busca fornecer ao professor do Ensino Médio, subsídios conceituais e históricos que possibilitem o adequado entendimento do tema em questão, bem como favoreçam reflexões e análises sobre sua própria postura pedagógica ao ensinar Determinantes na Educação Básica, especialmente no que diz respeito à significação do tema e sua adequação ao perfil cognitivo dos alunos.

O fato é que Determinantes surgiram do estudo de sistemas lineares e, com o passar do tempo, ganharam importância e aplicabilidade em diversas áreas do saber humano. Diante disso, este trabalho busca evidenciar essa aplicabilidade e suas relações com aspectos históricos do desenvolvimento dessa teoria, em um nível coerente com o currículo do Ensino médio.

Os objetivos desse trabalho, entretanto, transcendem a compilação de resultados teóricos e históricos referentes ao conceito de Determinante, tornando-o mais didático e agradável aos professores, mais que isso, busca instigar reflexões nos leitores educadores, a respeito de suas práticas pedagógicas e das possibilidades [a partir do adequado conhecimento teórico e histórico dos conceitos e da premissa de que a Matemática é uma ciência "humana", criada e desenvolvida para os seres humanos], de aproximar os conteúdos curriculares dos alunos e gerar aprendizagem, na essência do ato de educar.

Capítulo 1

Conceitos Básicos em Álgebra Linear

O estudo de Determinantes, mais especificamente das Funções Determinantes, requer conceitos básicos de Álgebra [em especial Álgebra Linear], que serão expostos nesse capítulo. Esses conceitos serão fundamentais para o pleno entendimento da definição de Determinante, que é desenvolvida no capítulo 2.

Ressaltamos que nem todo o conteúdo explícito neste capítulo é conhecido e de convívio dos aprendizes e até mesmo de professores que tem contato ou lidam com Determinantes, porém entendemos ser fundamental que o professor absorva-o, pelas razões citadas anteriormente.

As seções deste capítulo foram baseadas em: HOFFMAN et al (1971) e PELLEGRINI (2015).

1.1 Sistemas Algébricos

Sistemas Algébricos, também conhecidos como "Estruturas Algébricas", podem ser um conjunto [ou mais de um conjunto] munido [ou munidos] de operações algébricas e que satisfazem um certo número de propriedades. Por exemplo, o conjunto dos números reais munido das operações usuais de soma e multiplicação $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ e o conjunto das matrizes com as operações de soma de matrizes e multiplicação por escalar (M, +, $\cdot$) são exemplos de Estruturas Algébricas e recebem nomes especiais conforme definidos nesta seção.

Definição 1.1.1 (Operação Binária). *Uma Operação Binária, ou simplesmente, uma operação sobre um conjunto A ou uma operação em A é o nome dado à qualquer função $* : A \times A \to A$.*

A imagem de um par $(x, y) \in A \times A$ por meio da função $*$, geralmente indicada por $*(x, y)$, será denotada neste trabalho por $x * y$, e leia-se "x operado com y".

A seguir são definidas algumas estruturas algébricas importantes para o estudo de Determinantes:

1.1.1 Grupos

Definição 1.1.2 (Grupo). *Dizemos que o par $(G, *)$ constituído de um conjunto G, munido de uma operação $*$, tem uma estrutura de grupo se, e somente se, são válidas as seguintes propriedades:*

(G1) (Associativa): $x * (y * z) = (x * y) * z$, $\forall\, (x, y, z) \in G^3$;

(G2) [Elemento Neutro]: $\exists\ e \in G \mid x * e = x = e * x$; $\forall\, x \in G$;

(G3) [Elemento Simétrico]: Dado $a \in G$, $\exists$ um $a' \in G \mid a * a' = e = a' * a$.

Definição 1.1.3 (Grupo Comutativo ou Abeliano). *Seja* $(G, *)$ *um grupo. Dizemos que* G *é um grupo comutativo ou abeliano se vale a propriedade:*

(G4) [Comutativa] $x * y = y * x$, $\forall\, (x, y) \in G^2$.

O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, munidos da operação de adição, constituem exemplos clássicos de estrutura de grupo abeliano.

Observação: A partir de agora serão utilizadas, neste capítulo, as nomenclaturas "Adição" e "Multiplicação" com suas respectivas notações $+$ e $\cdot$ para denotar operações em geral, deixando claro que tais representações não estão necessariamente vinculadas às usuais operações de soma e multiplicação, bem como denotaremos por 0 e 1 seus respectivos elementos neutros, também não necessariamente vinculados aos elementos neutros das referidas operações usuais de soma e multiplicação.

1.1.2 Anéis

Definição 1.1.4 (Anel). *Seja* A *um conjunto munido de duas operações, uma adição* $+$ *e uma multiplicação* $\cdot$. *Dizemos que a terna* $(A,+,\cdot)$ *é um anel, ou que possui uma estrutura de anel, se valem as propriedades:*

(A1) (Associativa): $x + (y + z) = (x + y) + z$, $\forall\, (x, y, z) \in A^3$;

(A2) [Elemento Neutro]: $\exists\ e \in G \mid x + e = x = e + x$; $\forall\, x \in A$;

(A3) [Elemento Simétrico]: Dado $a \in A$, $\exists$ *um* $a' \in A \mid a + a' = e = a' + a$.

(A4) [Comutativa] $x + y = y + x$, $\forall\, (x, y) \in A^2$.

(M1) [A multiplicação é associativa]: $(xy)z = x(yz)$, $\forall\, (x, y, z) \in A^3$;

(D) [A multiplicação é distributiva à direita e à esquerda em relação à adição]:

$$x(y+z) = (xy) + (xz),\ \forall\, (x,y,z) \in A^3$$

$$(y+z)x = (yx) + (zx),\ \forall\, (x,y,z) \in A^3$$

Definição 1.1.5 (Anel com elemento unidade). *Seja (A,+,·) um anel. Dizemos que esse anel é um anel com elemento unidade se vale a propriedade:*

(M2) [Elemento neutro da multiplicação]: $\exists\ 1$ *em* A *tal que* $1.x = x = x.1$, $\forall\, x \in A$.

Definição 1.1.6 (Anel Comutativo). *Seja (A,+,·) um anel. Dizemos que esse anel é um anel comutativo se vale a propriedade:*

(M4) [Comutativa da multiplicação]: $xy = yx,\ \forall\, (x,y) \in A^2$.

O conjunto dos números inteiros pares, munido das operações usuais de adição e multiplicação é um anel comutativo, porém sem elemento unidade.

Definição 1.1.7 (Anel Comutativo com Elemento Unidade). *Seja (A,+,·) um anel. Dizemos que (A,+,·) é um anel comutativo com elemento unidade, se for um anel comutativo e com elemento unidade.*

O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$*, o conjunto dos números racionais* $\mathbb{Q}$ *e o conjunto dos números reais* $\mathbb{R}$*, munidos das operações de adição e multiplicação, constituem exemplos clássicos de estrutura de anel comutativo com elemento unidade.*

Definição 1.1.8 (Corpo). *Seja* K *um conjunto munido de duas operações, uma adição, + e uma multiplicação ·. Dizemos que a terna (K, +, ·) tem uma estrutura de corpo [comutativo] se (K, +, ·) for um anel comutativo com elemento unidade e satisfizer a seguinte propriedade:*

(M3) $:\ \forall\, x \in K, x \neq 0, \exists\, x^{-1} \in K \mid xx^{-1} = x^{-1}x = 1$

Nessas condições, o elemento indicado por x^{-1} *é denominado inverso multiplicativo do elemento* x.

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, munido das operações usuais de adição e multiplicação, é um exemplo de corpo.

1.1.3 Espaço Vetorial

Definição 1.1.9 (Espaço Vetorial)**.** *Seja E um conjunto não vazio, $(K, +, \cdot)$ um corpo. Suponhamos que sobre E estejam definidas uma operação de adição $\oplus$ e uma lei de composição externa $\odot$, isto é:*

$\oplus : E \times E \longmapsto E$, *que associa cada par* $(x, y) \in E \times E$, *o elemento* $x \oplus y \in E$.

$\odot : E \times K \longmapsto E$, *que associa a cada par* (α, x), $\alpha \in K \quad e \quad x \in E$, *um elemento* $\alpha \odot x \in E$

Dizemos que E tem uma estrutura de espaço vetorial sobre K, ou que E é um K-espaço vetorial, se, e somente se, $(E, K, \oplus, \odot)$ satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $(E, \oplus)$ *é um grupo comutativo.*

(b) Propriedade associativa da operação $\cdot$, de K em relação à multiplicação escalar $\odot$:

$(\alpha \cdot \beta) \odot x = \alpha \odot (\beta \odot x)\ \forall\ (\alpha, \beta) \in K^2, \quad e\ \forall\, x \in E;$

(c) Propriedade distributiva da multiplicação escalar $\odot$ em relação às operações $+$, de K e $\oplus$, de E: $(\alpha+\beta)\odot x = (\alpha\odot x)\oplus(\beta\odot x), \forall\, (\alpha, \beta) \in K^2$, $x \in E$;

(d) Propriedade distributiva da multiplicação escalar $\odot$ em relação à operação $\oplus$, de E: $\alpha \odot (x \oplus y) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y), \forall (x, y) \in E^2, \alpha \in K;$

(e) Elemento neutro da multiplicação escalar $\odot$: $1 \odot x = x, \forall\ x \in E$;

Daqui para frente, os elementos de E e K serão denominados, respectivamente, vetores e escalares e o conjunto K denominado corpo dos escalares do espaço vetorial E.

Além disso, a fim de tornar a notação mais concisa, os símbolos $+$ e $\cdot$ representarão, tanto as operações de adição e multiplicação de K quanto as operações de adição em E e multiplicação escalar, ficando sua diferenciação à cargo do contexto no qual tais símbolos forem utilizados. Ademais, como estarão fixadas as operações de adição em E e a multiplicação escalar, será suprimida a referência à tais operações e será mencionado, apenas, que E é um espaço vetorial sobre o corpo K.

Por exemplo, o conjunto $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n);\ x_1, x_2, \cdots x_n \in \mathbb{R}\}$, $n \in \mathbb{N}$, tem estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, munido da operação $+$ e da lei de composição externa $\cdot$, definidas a seguir:

$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$, tal que, $\forall\ (x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, tem-se $(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$, tal que, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, tem-se $\alpha \cdot (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n) \in \mathbb{R}^n$

1.2 Dependência Linear

Definição 1.2.1 (Combinação Linear)**.** *Seja E espaço vetorial sobre um corpo de escalares K e $x_1, x_2, \cdots, x_n, y \in E$. Dizemos que o vetor y é combinação linear dos vetores $x_1, x_2, \cdots, x_n$, se existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$, tais que:*

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$$

Definição 1.2.2 (Dependência Linear). *Seja E espaço vetorial sobre um corpo K, $x_1, x_2, \cdots, x_n \in E$ uma família finita de vetores de E. Dizemos que os vetores $x_1, x_2, ..., x_n$ são linearmente dependentes (LD) se, e somente se, a equação linear (nas variáveis α_1, ..., $\alpha_n \in K$):*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0 \tag{1.1}$$

admite pelo menos uma solução não nula, isto é, existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, nem todos nulos, tais que valha 1.1.

Definição 1.2.3 (Independência Linear). *Seja E espaço vetorial sobre um corpo K, $x_1, x_2, \cdots, x_n \in E$. Dizemos que os vetores $x_1, x_2, ..., x_n$ são linearmente independentes (LI) se, e somente se, a equação linear:*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0$$

admite uma única solução, denominada solução trivial, isto é, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

1.3 Conjuntos Geradores e Bases

Definição 1.3.1 (Conjunto gerador). *Seja E um espaço vetorial e G um subconjunto de E. Dizemos que G é gerador do espaço vetorial E ou que E é um espaço vetorial gerado por G, se qualquer vetor de E pode ser expresso como combinação linear (finita) dos vetores de G .*

Definição 1.3.2 (Base). *Seja E um espaço vetorial e B um subconjunto de E. Se todo subconjunto finito de B for LI e B for gerador de E, dizemos que B é uma base de E.*

Definição 1.3.3 (Espaço vetorial de dimensão finita). *Seja E um espaço vetorial. Se B for uma base finita de E diremos que E é um espaço vetorial de dimensão finita.*

Definição 1.3.4 (Coordenadas)**.** *Seja $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ uma base de um espaço vetorial de dimensão finita E, K o corpo de escalares de E e $x \in E$. Nestas condições, em decorrência da definição de base de um espaço vetorial e da definição de dependência linear, segue que existe uma única sequência $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ de escalares de K tais que:*

$$x = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots \alpha_n b_n$$

Nessas condições, os coeficientes α_i, $1 \leq i \leq n$, [que são únicos] serão chamados coordenadas do vetor x na base B.

Denota-se a sequência $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ por $[x]_B$.

Teorema 1.3.1. *Seja E um espaço vetorial sobre um corpo K, $G = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ um conjunto gerador de E e $I = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ um conjunto LI em E. Nestas condições, $n \leq m$.*

Demonstração.
Suponhamos, por absurdo, que $n > m$.

Como G gera E, segue que:

$$y_1 = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m$$

com pelo menos um dos escalares $\alpha_i \neq 0$, $1 \leq i \leq m$.

Suponhamos $\alpha_k \neq 0$, $1 \leq k \leq m$. Desse modo, afirmamos que o conjunto $\{x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_m, y_1\}$ é gerador de E.

De fato, se $z \in E$, então:

$$\begin{aligned} z =& \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m \\ =& \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_{k-1} x_{k-1} + \beta_k A + \beta_{k+1} x_{k+1} + \cdots + \beta_m x_m. \end{aligned}$$

com

$$A = \left(\frac{y_1 - \alpha_1 x_1 - \cdots - \alpha_{k-1} x_{k-1} - \alpha_{k+1} x_{k+1} - \cdots - \alpha_m x_m}{\alpha_k} \right)$$

Assim,

$$z = \gamma_1 x_1 + \cdots + \gamma_{k-1} x_{k-1} + \gamma_k y_1 + \gamma_{k+1} x_{k+1} + \cdots + \gamma_m x_m$$

o que garante a afirmação.

Analogamente,

$$y_2 = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m$$

com pelo menos um dos escalares $\lambda_j \neq 0$, $1 \leq j \leq m$.

Suponhamos $\lambda_s \neq 0$, $1 \leq s \leq m$.

Nestas condições, o conjunto
$\{x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_{s-1}, x_{s+1}, \cdots, x_m, y_1, y_2\}$ é gerador de E, pelos argumentos acima.

Repetindo-se este procedimento, sucessivamente, temos que o conjunto $\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ é gerador de E.

Portanto, o elemento $y_{m+1} \in I$ pode ser escrito como:

$$y_{m+1} = \varphi_1 y_1 + \cdots + \varphi_m y_m$$

com pelo menos um dos escalares $\varphi_r \neq 0$, $1 \leq r \leq m$.

No entanto, este fato contraria a hipótese de que o conjunto I é LI. $\square$

A seguir, enunciamos, sem demonstração, o Teorema da Invariância.

Teorema 1.3.2 (Teorema da Invariância). *Todas as bases de um espaço vetorial de dimensão finita E tem a mesma cardinalidade.*

Definição 1.3.5 (Dimensão de um espaço vetorial). *Em um espaço vetorial de dimensão finita todas as bases tem a mesma quantidade de elementos conforme o teorema acima. Essa quantidade comum à todas as bases será chamada de dimensão do espaço vetorial E.*

1.4 Transformações Lineares

Definição 1.4.1 (Transformação Linear). *Sejam V e W espaços vetoriais sobre um mesmo corpo de escalares K e T uma função de V em W. Dizemos que T é uma transformação linear de V em W ou que T é um homomorfismo de espaço vetorial e de V em W, se:*

(a) $T(x + y) = T(x) + T(y)$

(b) $T(\alpha.x) = \alpha.T(x)$

$$\forall\, x, y \in V \ \ e\, \forall\, \alpha \in K$$

Observações:

Toda transformação linear de um espaço vetorial U sobre si mesmo ($T : U \longrightarrow U$), será denominada operador linear (ou endomorfismo de U).

O conjunto de todas transformações lineares $T : V \longrightarrow W$ será denotado por $H(V, W)$ ou $L(V, W)$

1.5 Matrizes

Definição 1.5.1 (Matriz). *Seja K um corpo e m e n números naturais não nulos. Denomina-se matriz (retangular) de ordem $m \times n$, sobre K, toda função $A : \{1, 2, \cdots, m\} \times \{1, 2, \cdots, n\} \longrightarrow K$. Geralmente denotamos $A(i, j)$ por: $A(i, j) = a_{ij}$, onde $a_{ij} \in K$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, e também indicamos A por:*

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Uma matriz retangular também pode ser representada por uma tabela retangular de m linhas e n colunas, na qual cada a_{ij} é representado na posição correspondente à i - ésima linha e j - ésima coluna, onde ij denomina-se índice do elemento a na matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Se m = n, a matriz A, de ordem $m \times n$, denomina-se matriz quadrada de ordem $n \times n$.

Ao longo deste trabalho, suprimiremos o termo "quadrada", indicando apenas que se trata de uma matriz de ordem $n \times n$, ou até mesmo matriz de ordem n, subentendendo-se assim que a mesma seja quadrada e de ordem $n \times n$.

Em uma matriz quadrada de ordem $n \times n$, o subconjunto representado pelos elementos a_{ij}, nos quais $i = j$, denomina-se diagonal principal e o subconjunto dos elementos a_{ij}, nos quais $i + j = n + 1$, denomina-se diagonal secundária.

Definição 1.5.2 (Matriz Triangular)**.** *Seja uma matriz A, de ordem $n \times n$, sobre um corpo K. Se, todos os elementos $a_{ij} \in A$, tais que, $j > i$ [resp: $i > j$] são todos nulos, A recebe o nome de matriz triangular superior [resp: inferior].*

Definição 1.5.3 (Matriz Transposta)**.** *Seja K um corpo e $A : \{1, 2, \cdots, m\} \times \{1, 2, \cdots, n\} \longrightarrow K$ uma matriz de ordem $m \times n$, sobre K. Denomina-se matriz transposta de A à matriz $B : \{1, 2, \cdots, n\} \times \{1, 2, \cdots, m\} \longrightarrow K$, tal que $B(j, i) = A(i, j)$.*

Nessas condições, a matriz B é denotada por A^t.

Pela definição acima, é imediato que $(A^t)^t = A$.

Definição 1.5.4 (submatriz). *Seja K um corpo e A uma matriz de ordem $m \times n$, sobre K. Escolhendo-se r linhas e s colunas, respectivamente, entre as m linhas e n colunas de A, $0 \leq r \leq m$, $0 \leq s \leq n$, definimos uma submatriz de ordem $r \times s$, extraída de A, como sendo a matriz B, cujos elementos são aqueles que encontram-se na intersecção de cada linha com cada coluna dentre as r linhas e as s colunas escolhidas e positivamente ordenadas.*

Definição 1.5.5 (Soma de Matrizes). *Seja K um corpo. Dadas duas matrizes A e B, de ordem $m \times n$, sobre K, a soma $+$ de A e B, indicada por $A + B$ será uma matriz de ordem $m \times n$ definida por:*

$$(a + b)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Definição 1.5.6 (Produto de Matrizes). *Seja K um corpo. Dadas as matrizes A, de ordem $m \times r$ e B, de ordem $r \times n$, sobre K, definimos o produto de A por B, nessa ordem, como sendo a matriz indicada por $A \cdot B$, de ordem $m \times n$, tal que:*

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}$$

Definição 1.5.7 (Multiplicação escalar). *Seja K um corpo. Dada uma matriz A, de ordem $m \times n$, sobre K e $\alpha \in K$, definimos a multiplicação do escalar α pela matriz A, e indicamos por $\alpha.A$, a matriz de ordem $m \times n$:*

$$(\alpha.A)_{ij} = \alpha.a_{ij}$$

Definição 1.5.8 (Matriz Identidade). *Seja K um corpo e A uma matriz de ordem $n \times n$, sobre K. Denomina-se matriz identidade de ordem $n \times n$, sobre K, e denota-se por I_n, à matriz tal que:*

$$I_n \, A = A \, I_n = A$$

Definição 1.5.9 (Matriz Inversa)**.** *Seja K um corpo e A uma matriz de ordem $n \times n$, sobre K. Se existir a matriz B, de ordem $n \times n$, sobre K, tal que:*

$$AB = I_n = BA$$

diz-se que A é invertível (ou inversível) ou que A possui inverso sobre K.

No caso da matriz B existir, vamos denotá-la por A^{-1} e denominá-la matriz inversa de A, sobre K.

A definição de matriz inversa, acima, segue a noção de inverso multiplicativo já definido na Seção 1.1 para determinadas estruturas algébricas. Diante disso, o produto de uma matriz A, de ordem $n \times n$, pela sua inversa resulta no elemento unidade do conjunto das matrizes quadradas de ordem $n \times n$, que corresponde à matriz identidade de ordem $n \times n$.

Por exemplo, dada a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Pois,

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Definição 1.5.10 (Matrizes Semelhantes)**.** *Seja K um corpo e A e B matrizes de ordem $n \times n$, sobre K. Diz-se que A e B são semelhantes, se existir uma matriz M, invertível e de ordem $n \times n$, sobre K, tal que:*

$$A = M^{-1}BM \tag{1.2}$$

Por exemplo, as matrizes $A = \begin{bmatrix} 9 & 32 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são semelhantes, pois existe a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, tal que valha 1.2, isto é:

$$\begin{bmatrix} 9 & 32 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Teorema 1.5.1 (Distributividade da Multiplicação em relação à Adição)**.** *Seja K um corpo. Dadas as matrizes A e D, de ordem $m \times n$, B e C, de ordem $n \times r$, todas sobre K, tem-se:*

$$A(B + C) = AB + AC \text{ e } (A + D)C = AC + DC$$

Demonstração.
Faremos a prova em duas partes:

(1) A(B + C) = AB + AC

Seja F = B + C. Logo,

$$f_{kj} = b_{kj} + c_{kj} \tag{1.3}$$

Assim,

$$(a(b+c))_{ij} = (af)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} f_{kj} \tag{1.4}$$

Substituindo 1.3 em 1.4, tem-se:

$$(a(b+c))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj})$$

$$(a(b+c))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} \tag{1.5}$$

Por outro lado:

$$(ab+ac)_{ij} = ab_{ij} + ac_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} \tag{1.6}$$

Como 1.5 = 1.6, segue que:

$$(a(b+c))_{ij} = (ab+ac)_{ij}$$

Portanto,

$$A(B+C) = AB + BC$$

(2) (A + D)C = AC + DC

Seja G = A + D. Logo,

$$g_{ik} = a_{ik} + d_{ik} \tag{1.7}$$

Assim,

$$((a+d)c)_{ij} = (gc)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} g_{ik}c_{kj} \tag{1.8}$$

Substituindo 1.7 em 1.8, tem-se:

$$((a+d)c)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + d_{ik})c_{kj}$$

Isto é,

$$((a+d)c)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} d_{ik}c_{kj} \tag{1.9}$$

Por outro lado:

$$(ac+dc)_{ij} = ac_{ij} + dc_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} d_{ik}c_{kj} \tag{1.10}$$

Como 1.9 = 1.10, segue que:

$$((a+d)c)_{ij} = (ac+dc)_{ij}$$

Portanto,

$$(A+D)C = AC + DC$$

$\square$

Teorema 1.5.2 (Associatividade da Operação de Multiplicação)**.** *Seja K um corpo. Dadas as matrizes A, de ordem $m \times n$, B, de ordem $n \times r$ e C, de ordem $r \times t$, sobre K, tem-se:*

$$A(BC) = (AB)C$$

Demonstração.
Seja D = BC. Logo:

$$d_{kj} = \sum_{s=1}^{r} b_{ks}c_{sj} \tag{1.11}$$

Ou seja:

$$a(bc)_{ij} = (ad)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}d_{kj} \tag{1.12}$$

Substituindo 1.11 em 1.12, segue que:

$$a(bc)_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{r} a_{ik}b_{ks}c_{sj} \tag{1.13}$$

Agora, seja E = AB. Logo:

$$e_{is} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ks} \tag{1.14}$$

Ou seja:

$$(ab)c_{ij} = (ec)_{ij} = \sum_{s=1}^{r} e_{is} c_{sj} \tag{1.15}$$

Substituindo 1.14 em 1.15, segue que:

$$(ab)c_{ij} = \sum_{s=1}^{r} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ks} c_{sj}$$

Assim,

$$(ab)c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{r} a_{ik} b_{ks} c_{sj} \tag{1.16}$$

Como 1.13 = 1.16, segue que:

$$a(bc)_{ij} = (ab)c_{ij}$$

.

Portanto:

$$A(BC) = (AB)C$$

□

Teorema 1.5.3. *Seja K um corpo e $A = M_n(K)$ o conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem $n \times n$, e sobre o corpo K. Definimos sobre A duas operações, a saber, uma adição de matrizes e uma multiplicação de matrizes. Afirmamos que $(A, +, .)$ tem uma estrutura de anel com elemento unidade. Alem disso A, munido das operações de adição [de matrizes] e multiplicação escalar [para matrizes] tem uma estrutura de K-espaço vetorial, que passará a denominar-se espaço vetorial das matrizes de ordem $n \times n$, sobre K.*

Não vamos demonstrar esse teorema por tratar-se de uma demonstração canônica, a qual segue de perto o que fora feito anteriormente com relação as propriedades associativa e distributiva.

Lema 1.5.4. *Seja K um corpo, A uma matriz de ordem $m \times n$ e B uma matriz de ordem $n \times r$, sobre K. Tem-se:*

$$(AB)^t = B^t A^t$$

Demonstração.
Sejam as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}$$

Daí,

$$(AB)^t = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} \right)^t$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1r} + a_{12}b_{2r} + \cdots + a_{1n}b_{nr} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mn}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{1r} + a_{m2}b_{2r} + \cdots + a_{mn}b_{nr} \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mn}b_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{1r} + a_{12}b_{2r} + \cdots + a_{1n}b_{nr} & \cdots & a_{m1}b_{1r} + a_{m2}b_{2r} + \cdots + a_{mn}b_{nr} \end{bmatrix}$$

Devido à comutatividade da operação de multiplicação de K:

$$(AB)^t = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{21}a_{12} + \cdots + b_{n1}a_{1n} & \cdots & b_{11}a_{m1} + b_{21}a_{m2} + \cdots + b_{n1}a_{mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1r}a_{11} + b_{2r}a_{12} + \cdots + b_{nr}a_{1n} & \cdots & b_{1r}a_{m1} + b_{2r}a_{m2} + \cdots + b_{nr}a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1r} & b_{2r} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= B^t A^t$$

$\square$

Lema 1.5.5. *Seja K um corpo e A uma matriz de ordem $n \times n$, sobre K. Se existir a matriz A^{-1}, inversa de A, tal inversa é única.*

Demonstração.
Supondo que A possua duas inversas, sobre K, sendo elas, A^{-1} e B.

Lembremos que, por hipótese: $A^{-1}.A = I_n = A.A^{-1}$ e $A.B = I_n = B.A$

Donde segue que:

$$A^{-1} = A^{-1}.I_n = A^{-1}.(AB) = (A^{-1}.A).B = I_n.B = B$$

$\square$

Capítulo 2

Determinantes

Os objetivos deste capítulo são: caracterizar a função determinante [de modo único], deduzir algumas de suas propriedades e estabelecer métodos para o seu cálculo.

O processo de caracterização da função determinante pode seguir vários caminhos. Preferimos o que vem a seguir pela maior viabilidade de fundamentação das afirmações feitas, de acordo com o objetivo do trabalho de fornecer subsídios para uma compreensão mais sólida e fundamentada do assunto pelo professor.

2.1 Determinante e Função Determinante

O objetivo desta seção é definir a função determinante como uma transformação n-linear, portanto:

Definição 2.1.1 (Transformação n-linear)**.** *Sejam $V_1, V_2, \cdots, V_n$ e W espaços vetoriais sobre um mesmo corpo de escalares K. Dizemos que uma função $T : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$ é uma transformação n-linear se, e somente se, T for linear em cada variável, isto é,*

(1)

$$T(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i + y_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) = T(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) + \\ + T(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$$

(2) $T(x_1, \cdots, x_{i-1}, \alpha x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) = \alpha T(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$

onde x_i, y_i *pertencem à* V_i*.*

Denotaremos por $Ln(V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n, W)$*, o conjunto de todas as transformações n-lineares de* $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$*, com valores em* W*.*

Sobre $Ln(V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n, W)$, consideraremos as operações usuais de adição e multiplicação escalar, definidas por:

$(F + G)(x) = F(x) + G(x)$

$(\alpha.F)(x) = \alpha.F(x)$
onde, aqui, $x = (x_1, \cdots, x_n) \in V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$, $\alpha \in K$ e $F \in Ln$, $G \in Ln$.

Apenas citaremos, sem demonstração, que:

Teorema 2.1.1. *O conjunto* $Ln(V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n, W)$*, munido destas duas "operações", tem uma estrutura de espaço vetorial sobre o corpo* K*.*

Portanto, como consequência:

Corolário 2.1.2. *Uma combinação linear de funções n-lineares ainda é n-linear.*

Versaremos, agora, sobre a construção de uma função $D : M_n(K) \longrightarrow K$, onde $M_n(K)$ representa o espaço vetorial das matrizes de ordem $n \times n$, sobre o corpo de escalares K.

A fim de atingir nossos propósitos, exigiremos que a função D seja uma função n-linear, de modo que o espaço vetorial $M_n(K)$ deve ser encarado como um produto cartesiano de n espaços vetoriais.

Lembremos que existe um isomorfismo natural entre o espaço vetorial $M_n(K)$ e o espaço vetorial $K^n \times K^n \times K^n \times \cdots \times K^n$.

Portanto, adotaremos a seguinte convenção: se A é uma matriz de ordem $n \times n$ e se $a_1, a_2, \cdots, a_n$ representam as linhas de A, então, sempre que conveniente, consideraremos A como uma n-upla $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, cuja representação gráfica poderá ser tanto horizontal quanto vertical e na qual cada elemento a_i, $i = 1 \cdots n$, representa a i-ésima linha de A, isto é, $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$, de modo que:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

onde $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \in K^n$ corresponde à i-ésima linha de A.

Desse modo, A passa a ser reescrita como uma n-upla de n-uplas, isto é, cada elemento da n-upla corresponde a uma n-upla composta pelos elementos de determinada linha de A.

Além disso, a partir de agora, nos restringiremos aos corpos K, nos quais $1 + 1 \neq 0$.

Definição 2.1.2 (Função Determinante)**.** *Seja K um corpo e $M_n(K)$ o espaço vetorial sobre K de todas as matrizes de ordem $n \times n$. Uma função $D : M_n(K) \longrightarrow K$, é denominada função determinante se, e somente se:*

(a) D é uma transformação n-linear como função das linhas da matriz, isto é, D é linear em cada uma de suas variáveis;

(b) O valor de D é zero, sempre que duas de suas coordenadas [duas linhas da matriz] forem iguais;

(c) Se I_n é a matriz identidade de ordem $n \times n$, tem-se:
$D(I_n) = D(e_1, e_2, \cdots, e_n) = 1$.

A imagem da matriz A via a função determinante é usualmente chamada de determinante da matriz A.

Definição 2.1.3 (Função n-linear Alternada)**.** *Sejam, K um corpo, V e W espaços vetoriais sobre K. Uma função n-linear $T : V \times V \times \cdots \times V \longrightarrow W$ é denominada alternada se, e somente se:*

$$T(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n) = -T(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$$

Qualquer que seja $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in V \times V \cdots \times V$ e quaisquer que seja o par (i, j) satisfazendo: $1 \leq i < j \leq n$.

isto é, a imagem, por meio de T, de uma n-upla, é igual ao oposto dessa imagem, se permutarmos dois elementos de ordens distintas nessa n-upla, mantendo-se os demais elementos fixos.

De agora em diante, trabalharemos com aplicações n-lineares alternadas sobre matrizes de ordem $n \times n$.

Teorema 2.1.3. *Sejam, K um corpo, V e W espaços vetoriais sobre K e uma função n-linear $T : V \times V \times \cdots \times V \longrightarrow W$. Se $T(x) = 0$, para toda n-upla $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, tal que $x_i = x_j$, para qualquer par (i, j), com $1 \leq i \neq j \leq n$, então, necessariamente, T é alternada. Além disso, $T(x) = 0$ se o conjunto das coordenadas de x, isto é, o conjunto $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ for LD.*

Demonstração.

(a) Provemos que T é alternada.

Segue da hipótese que;

$T(x_1, \cdots, x_i + x_j, \cdots, x_i + x_j, \cdots, x_n) = 0$

Entretanto, como T é n-linear, segue que:

$$\begin{aligned}
0 &= T(x_1, \cdots, x_i + x_j, \cdots, x_i + x_j, \cdots, x_n) = \\
&= T(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_i + x_j, \cdots, x_n) + \\
&\quad T(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i + x_j, \cdots, x_n) = \\
&= T(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_i, \cdots, x_n) + T(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n) + \\
&\quad T(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n) + T(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_j, \cdots, x_n) \\
&= T(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n) + T(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n)
\end{aligned}$$

Pois, $T(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_i, \cdots, x_n) = T(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_j, \cdots, x_n) = 0$ por hipótese.

Portanto,

$$T(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n) = -T(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$$

Logo D é alternada.

(b) Provemos que $T(x) = 0$, sempre que o conjunto das coordenadas do vetor x constituir um conjunto LD.

Seja $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in V^n$ e suponhamos que $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ sejam LD, ou seja, que existem $c_1, c_2, \cdots, c_n \in K$, não todos nulos, tais que:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n = 0$$

Logo, existe algum índice i, tal que:

$$c_i x_i = -(c_1 x_1 + \cdots + c_{i-1} x_{i-1} + c_{i+1} x_{i+1} + \cdots + c_n x_n)$$

com $c_i \neq 0$.

Portanto podemos escrever:

$$x_i = \alpha_1.x_1 + \cdots + \alpha_{i-1}x_{i-1} + \alpha_{i+1}x_{i+1} + \cdots + \alpha_n x_n$$

onde $\alpha_j = \dfrac{-c_j}{c_i}$.

Logo:

$$\begin{aligned} T(x) =& T(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \\ & T(x_1, \cdots, x_{i-1}, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{i-1}x_{i-1} + c_{i+1}x_{i+1} + \\ & \cdots + \alpha_n x_n, x_{i+1}, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

Como, por hipótese, D é n-linear:

$$\begin{aligned} T(x) =& T(x_1, \cdots, x_{i-1}, \alpha_1 x_1, x_{i+1}, \cdots, x_n) + \\ & T(x_1, \cdots, x_{i-1}, \alpha_2 x_2, x_{i+1}, \cdots, x_n) + \\ & \vdots \\ & T(x_1, \cdots, x_{i-1}, \alpha_{i-1} x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n) + \\ & T(x_1, \cdots, x_{i-1}, \alpha_{i+1} x_{i+1}, x_{i+1}, \cdots, x_n) + \\ & \vdots \\ & T(x_1, \cdots, x_{i-1}, \alpha_n x_n, x_{i+1}, \cdots, x_n) \\ =& \alpha_1 D(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_1, x_{i+1}, \cdots, x_n) + \\ & \alpha_2 D(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_2, x_{i+1}, \cdots, x_n) + \\ & \vdots \\ & \alpha_{i-1} D(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n) + \\ & \alpha_{i+1} D(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+1}, \cdots, x_n) + \\ & \vdots \\ & c_n D(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \cdots, x_n) \\ =& 0 \end{aligned}$$

Pois, cada parcela acima possui um $x_r = x_s$, para algum par (r, s), com $1 \leq r \neq s \leq n$, e portanto, por hipótese, todas são nulas e assim $T(x) = 0$.

$\square$

Corolário 2.1.4. *A função determinante é alternada*

Temos, agora, condições de redefinir a função determinante. Faremos isto a seguir:

Definição 2.1.4 (Função Determinante)**.** *Seja K um corpo e $M_n(K)$ o espaço vetorial sobre K de todas as matrizes de ordem $n \times n$. Uma função $D : M_n(K) \longrightarrow K$, é denominada função determinante se, e somente se:*

(a) D é uma transformação n-linear como função das linhas da matriz, isto é, D é linear em cada uma de suas variáveis;

(b) D é uma função alternada;

(c) Se I_n é a matriz identidade de ordem $n \times n$, tem-se: $D(I_n) = D(e_1, e_2, \cdots, e_n) = 1$.

2.2 Existência da função determinante

Nesta seção, vamos construir indutivamente a "função determinante", cujo o domínio é o espaço vetorial $M_n(K)$. Desse modo, para cada número natural não nulo n, teremos uma função determinante sobre $M_n(K)$, que será construída a partir da existência de uma função determinante sobre $M_{(n-1)}(K)$, $n \geq 2$.

Exemplo 2.2.1. *Construção da função determinante sobre o espaço vetorial $M_1(K)$.*

O espaço vetorial $M_1(K)$ é trivialmente isomorfo ao espaço vetorial K, considerado como espaço vetorial sobre si mesmo. Toda função linear sobre K, $D : K \to K$, é claramente da forma: $D(a) = D(a.1) = a.D(I)$, $a \in K$.

Portanto, para que D seja uma função determinante sobre $M_1(K)$, necessariamente tem-se:

$$D(A) = D(a_{11}) = D(a_{11} \cdot I_1)$$

onde I_1 é a matriz identidade de ordem 1×1.

Como, por hipótese, D é linear e $D(I_1) = 1$, segue que:

$$D(A) = a_{11}D(I_1) = a_{11}$$

Portanto, para matrizes A, de ordem 1×1, sendo $A = [a_{11}]$, tem-se $D(A) = a_{11}$

Observemos que essa função é linear, alternada, pois, não contraria a definição de alternada e o fato de $D(I_1) = 1$ nos garante a unicidade de D.

Exemplo 2.2.2. *Construção da função determinante sobre o espaço vetorial $M_2(K)$.*

Seja I_2 a matriz identidade de ordem 2×2, com linhas e_1 e e_2 e A a matriz de ordem 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
D(A) &= D(a_1, a_2) \\
&= D(a_{11}e_1 + a_{12}e_2, a_{21}e_1 + a_{22}e_2)
\end{aligned}$$

Usando a bilinearidade de D, temos:

$$\begin{aligned}
D(A) &= a_{11}D(e_1, a_{21}e_1 + a_{22}e_2) + D(a_{12}e_2, a_{21}e_1 + a_{22}e_2) \\
&= a_{11}a_{21}D(e_1, e_1) + a_{11}D(e_1, a_{22}e_2) + D(a_{12}e_2, a_{21}e_1 + a_{22}e_2) \\
&= a_{11}a_{21}D(e_1, e_1) + a_{11}a_{22}D(e_1, e_2) + D(a_{12}e_2, a_{21}e_1 + a_{22}e_2) \\
&= a_{11}a_{21}D(e_1, e_1) + a_{11}a_{22}D(e_1, e_2) + a_{12}D(e_2, a_{21}e_1 + a_{22}e_2) \\
&= a_{11}a_{21}D(e_1, e_1) + a_{11}a_{22}D(e_1, e_2) + a_{12}a_{21}D(e_2, e_1) + a_{12}D(e_2, a_{22}e_2) \\
&= a_{11}a_{21}D(e_1, e_1) + a_{11}a_{22}D(e_1, e_2) + a_{12}a_{21}D(e_2, e_1) + a_{12}a_{22}D(e_2, e_2)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Desse modo, D(A) fica univocamente determinada pelos escalares:

$$D(e_1, e_1), D(e_1, e_2), D(e_2, e_1), D(e_2, e_2)$$

Considerando-se, agora, que D é alternada, temos:

$$D(e_1, e_1) = D(e_2, e_2) = 0$$

pois as linhas são iguais e ainda:

$$D(e_2, e_1) = -D(e_1, e_2)$$

Finalmente, pela última propriedade que define determinante, temos que:

$$D(e_1, e_2) = D(I_2) = 1$$

Portanto, substituindo tais escalares em 2.1, obtém-se a função:

$$D(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{2.2}$$

que, por construção, é a única função determinante sobre $M_2(K)$.

A fim de atingirmos o objetivo desta seção vamos, convenientemente, introduzir a seguinte notação:

Definição 2.2.1. *Seja A uma matriz de ordem $n \times n$, sobre um corpo K, $n > 1$. Denota-se por $A(i|j)$, à submatriz de ordem $(n-1) \times (n-1)$, obtida de A, suprimindo-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna da matriz A. O deteminante da matriz $A(i|j)$ é denotado por $D[A(i|j)]$.*

Consideremos agora as funções: $E_1 : M_2(K) \to K$ e $E_2 : M_2(K) \to K$, definidas por:

$$E_1(A) = \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+1} a_{i1} D[A(i|1)]$$

$$E_2(A) = \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+2} a_{i2} D[A(i|2)]$$

Valendo-se da definição 2.2.1, temos:

$$E_1(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$E_2(A) = -a_{12}a_{21} + a_{22}a_{11}$$

Donde segue que: $D(A) = E_1(A) = E_2(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, logo $E_1(A)$ e $E_2(A)$ são outras formas de se definir a única função determinante sobre matrizes de ordem 2×2, sobre K.

Diremos que E_1 (resp(E_2)) é a função determinante desenvolvida através da primeira coluna (resp: segunda coluna).

Exemplo 2.2.3. *Construção da função determinante sobre o espaço vetorial $M_3(K)$.*

Seja $A \in M_3(K)$, uma matriz de ordem 3×3, então:

$$\begin{aligned}
D(A) &= D(a_1, a_2, a_3)\\
&= D(a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3, a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3, a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3)
\end{aligned}$$

Como D é trilinear, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
D(A) &= D(a_1, a_2, a_3) =\\
&= D(a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3, a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3, a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3)\\
&= a_{11}D(e_1, a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3, a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3) +\\
&+ a_{12}D(e_2, a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3, a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3) +\\
&+ a_{13}D(e_3, a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3, a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3) =\\
&= a_{11}a_{21}D(e_1, e_1, a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3) +\\
&+ a_{11}a_{22}D(e_1, e_2, a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3) +\\
&+ a_{11}a_{23}D(e_1, e_3, a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3) +\\
&+ a_{12}D(e_2, a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3, a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3) +\\
&+ a_{13}D(e_3, a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3, a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3) =\\
&= a_{11}a_{21}D(e_1, e_1, a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3) +\\
&+ a_{11}a_{22}D(e_1, e_2, a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3) +\\
&+ a_{11}a_{23}D(e_1, e_3, a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3) +\\
&+ a_{12}a_{21}(D(e_2, e_1, a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3) +\\
&+ a_{12}a_{22}(D(e_2, e_2, a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3) +\\
&+ a_{12}a_{23}(D(e_2, e_3, a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3) +\\
&+ a_{13}D(e_3, a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3, a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}a_{21}D(e_1, e_1, a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3)+\\
&+ a_{11}a_{22}D(e_1, e_2, a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3)+\\
&+ a_{11}a_{23}D(e_1, e_3, a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3)+\\
&+ a_{12}a_{21}D(e_2, e_1, a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3)+\\
&+ a_{12}a_{22}D(e_2, e_2, a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3)+\\
&+ a_{12}a_{23}D(e_2, e_3, a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3)+\\
&+ a_{13}a_{21}D(e_3, e_1, a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3)+\\
&+ a_{13}a_{22}D(e_3, e_2, a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3)+\\
&+ a_{13}a_{23}D(e_3, e_3, a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3) =\\
&= a_{11}a_{21}a_{31}D(e_1, e_1, e_1) + a_{11}a_{21}a_{32}D(e_1, e_1, e_2) + a_{11}a_{21}a_{33}D(e_1, e_1, e_3)+\\
&+ a_{11}a_{22}a_{31}D(e_1, e_2, e_1) + a_{11}a_{22}a_{32}D(e_1, e_2, e_2) + a_{11}a_{22}a_{33}D(e_1, e_2, e_3)+\\
&+ a_{11}a_{23}a_{31}D(e_1, e_3, e_1) + a_{11}a_{23}a_{32}D(e_1, e_3, e_2) + a_{11}a_{23}a_{33}D(e_1, e_3, e_3)+\\
&+ a_{12}a_{21}a_{31}D(e_2, e_1, e_1) + a_{12}a_{21}a_{32}D(e_2, e_1, e_2) + a_{12}a_{21}a_{33}D(e_2, e_1, e_3)+\\
&+ a_{12}a_{22}a_{31}D(e_2, e_2, e_1) + a_{12}a_{22}a_{32}D(e_2, e_2, e_2) + a_{12}a_{22}a_{33}D(e_2, e_2, e_3)+\\
&+ a_{12}a_{23}a_{31}D(e_2, e_3, e_1) + a_{12}a_{23}a_{32}D(e_2, e_3, e_2) + a_{12}a_{23}a_{33}D(e_2, e_3, e_3)+\\
&+ a_{13}a_{21}a_{31}D(e_3, e_1, e_1) + a_{13}a_{21}a_{32}D(e_3, e_1, e_2) + a_{13}a_{21}a_{33}D(e_3, e_1, e_3)+\\
&+ a_{13}a_{22}a_{31}D(e_3, e_2, e_1) + a_{13}a_{22}a_{32}D(e_3, e_2, e_2) + a_{13}a_{22}a_{33}D(e_3, e_2, e_3)+\\
&+ a_{13}a_{23}a_{31}D(e_3, e_3, e_1) + a_{13}a_{23}a_{32}D(e_3, e_3, e_2) + a_{13}a_{23}a_{33}D(e_3, e_3, e_3)
\end{aligned}
$$

Considerando que D é alternada, inicialmente, excluíremos todas as parcelas nas quais D possui duas variáveis iguais, as quais são nulas, logo:

$$
\begin{aligned}
D(A) = {}& a_{11}a_{22}a_{33}D(e_1, e_2, e_3) + a_{11}a_{23}a_{32}D(e_1, e_3, e_2) + a_{12}b_{21}a_{33}D(e_2, e_1, e_3)+\\
& a_{12}a_{23}a_{31}D(e_2, e_3, e_1) + a_{13}a_{21}a_{32}D(e_3, e_1, e_2) + a_{13}a_{22}a_{31}D(e_3, e_2, e_1)
\end{aligned}
$$

Como, por hipótese, D é alternada e $D(I_3) = D(e_1, e_2, e_3) = 1$, temos:

$$
\begin{aligned}
D(e_1, e_3, e_2) &= \ \ 1 \\
D(e_1, e_3, e_2) &= -D(e_1, e_2, e_3) = -1 \\
D(e_2, e_1, e_3) &= -D(e_1, e_2, e_3) = -1 \\
D(e_2, e_3, e_1) &= -D(e_2, e_1, e_3) = D(e_1, e_2, e_3) = \ \ 1 \\
D(e_3, e_1, e_2) &= -D(e_1, e_3, e_2) = D(e_1, e_2, e_3) = \ \ 1 \\
D(e_3, e_2, e_1) &= -D(e_2, e_3, e_1) = D(e_2, e_1, e_3) = -D(e_1, e_2, e_3) = -1
\end{aligned}
$$

E assim,

$$D(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Devido às propriedades de K, segue que:

$$D(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

Assim, por construção, D é a única função determinante sobre matrizes de ordem 3×3.

De forma análoga ao caso $n = 2$, consideremos as funções:

$$E_j : M_3(K) \to K, \qquad j = 1, 2, 3$$

Assim definidas:

$$E_j(A) = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_{ij} D[A(i|j)]$$

ou seja,

$$E_1(A) = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_{i1} D[A(i|1)]$$

$$E_2(A) = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+2} a_{i2} D[A(i|2)]$$

$$E_3(A) = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+3} a_{i3} D[A(i|3)]$$

Temos:

$$E_1(A) = \quad a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

$$E_2(A) = -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}b_{23}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}b_{31}) - a_{32}(a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23})$$

$$E_3(A) = \quad a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

É imediato que $D(A) = E_1(A) = E_2(A) = E_3(A)$ e, portanto, E_1, E_2 e E_3 são, na verdade, a mesma função determinante sobre matrizes de ordem 3×3, sobre K, apenas representada sob formas diferentes.

Até esse momento, construímos a única função determinante para o espaço vetorial $M_n(K)$, para $n = 1, n = 2$ e $n = 3$.

Além disso, ressaltamos que a função determinante sobre $M_2(K)$ coincide com as funções E_j, $j = 1, 2$ assim definidas:

$$E_j(A) = \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+j} a_{ij} D[A(i|j)]$$

para $j = 1$ e $j = 2$.

O mesmo ocorrendo para a função determinante sobre o espaço vetorial $M_3(K)$, de modo que:

$$D(A) = E_j(A) = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+j} a_{ij} D[A(i|j)]$$

para $j = 1$, $j = 2$ e $j = 3$.

Embora extremamente trabalhoso, a execução dos procedimentos acima, para matrizes A, de ordem $n \times n$, $n \geq 4$, sugere que a função determinante $D(A)$ pode ser expressa, de forma recorrente, pela fórmula abaixo:

$$D(A) = E_j(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D[A(i|j)]$$

para $1 \leq j \leq n$.

Cabe aqui uma observação referente à notação. Convenientemente utilizamos a notação acima afim de tornar o texto menos sobrecarregado, entretanto, rigorosamente, a notação formal de nossa conjectura é:

$$D_n(A) = E_j(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{n-1}[A(i|j)]$$

para $1 \leq j \leq n$.

A rigor, D_n é a notação para a função determinante sobre o espaço vetorial $M_n(K)$, enquanto que D_{n-1} é a notação para a função determinante sobre o espaço vetorial $M_{n-1}(K)$.

O teorema a seguir encerra a seção, estabelecendo a existência da função determinante sobre o espaço vetorial $M_n(K)$.

Teorema 2.2.1 (Existência da função determinante)**.** *Seja K um corpo e n um número natural, $n \geq 1$. Existe a função determinante sobre o espaço vetorial $M_n(K)$.*

Demonstração por indução sobre n.

O Exemplo 2.2.1 estabelece a existência e unicidade da função determinante para $n = 1$.

Os exemplos 2.2.2 e 2.2.3 estabelecem, respectivamente, a existência e unicidade da função determinante para o caso $n = 2, 3$ e ainda permitem-nos ver que, para $n = 2$:

$$D(A) = E_j(A) = \sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+j}a_{ij}D[A(i|j)]$$

para $j = 1$ e $j = 2$.

e para $n = 3$:

$$D(A) = E_j(A) = \sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+j}a_{ij}D[A(i|j)]$$

para $j = 1, 2, 3$.

Suponhamos, por hipótese, que exista a função determinante $D(A)$, sobre o espaço vetorial $M_n(K)$.

Provaremos a existência de uma função determinante sobre o espaço vetorial $M_{n+1}(K)$.

Consideremos a função $E_j : M_{n+1}(K) \to K, \quad j = 1, ..., n + 1$, definida por:

$$E_j(A) = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+j}a_{ij}D[A(i|j)]$$

onde $1 \leq j \leq n + 1$

Como definido anteriormente, o termo $D[A(i|j)]$ é o determinante da submatriz $A(i|j)$ de ordem $n \times n$, extraído da matriz A , de ordem $n+1 \times n+1$, excluíndo-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A. Sua existência é assegurada pela hipótese da indução, assim, a função $E_j(B)$ está bem definida.

A seguir, vamos provar que a função E_j satisfaz as propriedades da definição de função determinante.

(a) Afirmamos que E_j, para cada j fixo, é uma função $(n+1)$-linear sobre o espaço das matrizes de ordem $n+1 \times n+1$. Para tanto, buscaremos descrever E_j como uma soma de funções $(n+1)$-lineares.

Com efeito, seja a função: $E_{ij} : M_{n+1}(K) \to K$, definida por:

$$E_{ij}(A) = a_{ij}.D[A(i|j)]$$

Por hipótese da indução, D é uma função determinante sobre o espaço vetorial $M_n(K)$, logo, por definição, D é uma função n-linear sobre tal espaço. Além disso, $D[A(i|j)]$ independe da i-ésima linha de A [e também da j-ésima coluna de A]. Como a matriz A é de ordem $n+1 \times n+1$, segue que D é função n-linear das linhas da matriz A, exceto a i-ésima, que varia de 1 a $n+1$.

A princípio, isto acarreta que E_{ij} é linear como função das linhas de A, exceto a i-ésima.

Entretanto, E_{ij} é também linear como função da i-ésima linha, uma vez que a contribuição dessa linha se dá apenas pelo produto [linear] de um único elemento da mesma, ou seja, do fator a_{ij}.

Como $E_j = \sum_{i=1}^{n+1} E_{ij}$ segue-se que E_j é uma função $(n+1)$-linear.

(b) $E_j(I_{(n+1)}) = 1$

Seja $I_{(n+1)}$ a matriz identidade de ordem $(n+1)\times(n+1)$, com linhas $e_i = (e_{i1}, e_{i2}, \cdots, e_{ik}, \cdots, e_{i(n+1)}) \in K^{(n+1)}$ e $I_{(n+1)}(i|j)$ a matriz identidade de ordem $n \times n$, na qual foram excluídas a i-ésima linha e a j-ésima coluna.

Como $e_{ik} = 0$, se $k \neq i$ e $e_{ii} = 1$, temos:

$$E_j(I_{(n+1)}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{(i+j)} e_{ij} D[I_{(n+1)}(i|j)] = e_{ii} D[(I_{n+1}(i|i))] = D(I_n) = 1$$

(c) $E_j(A) = 0$, sempre que duas linhas de A forem iguais. Isto é equivalente a dizer que E_j é alternada.

De fato, sejam $a_1, a_2, \cdots, a_{(n+1)}$ as linhas de A.

Consideremos a_r e a_s, duas linhas de A tais que $r < s$ e $a_r = a_s$.

Se $i \neq r$ ou $i \neq s$, a matriz $A(i|j)$ tem duas linhas iguais, logo, pela hipótese de indução, $D[A(i|j)] = 0$.

Assim, os termos $D[A(i|j)]$ do desenvolvimento de $E_j(A)$, que eventualmente possam ser não nulos, são aqueles para os quais $i = r$ e $i = s$, isto é, os termos $D[A(r|j)]$ e $D[A(s|j)]$, visto que, nestes casos, e só nestes casos, a matriz $A(i|j)$ pode não ter linhas iguais.

Portanto,

$$E_j(A) = (-1)^{r+j} a_{rj} D[A(r|j)] + (-1)^{s+j} a_{sj} D[A(s|j)]$$

Seja $m = s - r$, temos:

$$\begin{aligned} E_j(A) &= (-1)^{r+j} a_{rj} D[A(r|j)] + (-1)^{m+r+j} a_{rj} D[A(s|j)] = \\ &= (-1)^{r+j} a_{rj} D[A(r|j)] + (-1)^{r+j} (-1)^m a_{rj} D[A(s|j)] \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução e pelo teorema 2.1.4, segue que $D[A(i|j)]$ é alternada, portanto $D[A(r|j)] = (-1)^{m-1} D[A(s|j)]$, visto que as matrizes $A(r|j)$ e $A(s|j)$ possuem as mesmas linhas, e uma é obtida da outra através de $m - 1$ trocas de posição entre linhas adjacentes.

Assim,

$$\begin{aligned} E_j(A) &= (-1)^{r+j} a_{rj} D[A(r|j)] + (-1)^{r+j} (-1)^m (-1)^{m-1} a_{rj} D[A(r|j)] \\ &= (-1)^{r+j} a_{rj} D[A(r|j)] + (-1)^{r+j} (-1)^{2m-1} a_{rj} D[A(r|j)] \\ &= (-1)^{r+j} a_{rj} D[A(r|j)] - (-1)^{r+j} a_{rj} D[A(r|j)] = 0 \end{aligned}$$

Portanto, E_j é uma função determinante sobre o espaço vetorial $M_{n+1}(K)$.

Como a existência de uma função determinante sobre o espaço vetorial $M_n(K)$, implica na existência de uma função determinante sobre o espaço vetorial $M_{n+1}(K)$, segue, pelo princípio da Indução Finita, que existe uma função determinante sobre o espaço vetorial $M_n(K)$, para qualquer número natural $n \geq 1$. $\square$

Além de provar a existência da função determinante sobre o espaço vetorial $M_n(K)$, $n \geq 1$, o Teorema 2.2.1 fornece uma fórmula para o cálculo de um determinante de matrizes A, de ordem $n \times n$, em função de um determinante de uma de suas submatrizes de ordem $n - 1 \times n - 1$, sendo $n \geq 2$, a saber:

$$E_j(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D[A(i|j)]$$

qualquer que seja $1 \leq j \leq n$.

Dizemos que esta é a forma de se calcular um determinante de uma matriz quadrada, por uma determinada coluna [fixada].

Na próxima seção, demonstraremos que $E_1(A) = E_2(A) = \cdots = E_j(A)$, em decorrência da unicidade da função determinante.

Além disso, mostraremos que o determinante de uma matriz quadrada coincide com o determinante de sua transposta e, portanto, ao invés do índice da soma ser o índice das linhas, poderemos fazer a soma através do índice das colunas, o que nos permitirá calcularmos o determinante por uma determinada linha [fixada].

Observação: O determinante de uma matriz A, de ordem $n \times n$, também pode ser denotado por:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2.3 Unicidade da função determinante

Até o presente momento estudamos e refizemos a demonstração da existência de uma função determinante e, em princípio, construímos n funções determinantes sobre o espaço vetorial $M_n(K)$, onde K é um corpo de escalares no qual $1+1 \neq 0$.

Agora objetivamos provar a unicidade dessa função e, para tanto, escolhemos desenvolver o assunto a partir da definição da função determinante e a partir do fato de sabermos que ela existe.

Desse modo, vamos mostrar que existe apenas uma única função $D : M_n(K) \to K$ definida sobre o K - espaço vetorial das matrizes de ordem $n \times n$, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. A função D é n-linear, vista como função das linhas de uma matriz,
2. A função D é alternada,
3. $D(I_n) = 1$.

Vamos indicar por $e_1, e_2, \cdots, e_n$ as linhas da matriz identidade I_n, cujo conjunto delas constitui a base canônica do K - espaço vetorial K^n, onde K é um corpo tal que $1+1 \neq 0$. Desse modo, qualquer linha a_i de uma matriz A, de ordem $n \times n$, vista como um vetor de K^n, pode ser escrito nesta base da seguinte forma:

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Isto é,

$$D(A) = D(a_1, a_2, \cdots, a_n) = D\left(\sum_{k_1=1}^{n} a_{1k_1} e_{k_1}, \sum_{k_2=1}^{n} a_{2k_2} e_{k_2}, \cdots, \sum_{k_n=1}^{n} a_{nk_n} e_{k_n}\right)$$

Em decorrência do fato de D ser n-linear, temos:

$$D(A) = \sum_{1 \leq k_1, k_2, \cdots, k_n \leq n} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n} D(e_{k_1}, e_{k_2}, \cdots, e_{k_n}) \tag{2.3}$$

A expressão acima corresponde a uma soma de exatamente n^n parcelas. Esse número n^n corresponde à cardinalidade do conjunto $\{1, 2, 3, \cdots, n\}^n$, onde a n-upla de índices $(k_1, k_2, k_3, \cdots, k_n)$ deve percorrer. Entretanto, aquelas [parcelas] nas quais $k_i = k_j$, para pelo menos dois índices i e j, tais que $1 \leq i \neq j \leq n$, serão todas nulas, visto que $D(e_{k_1}, e_{k_2}, \cdots, e_{k_n}) = 0$ sempre que $e_{k_i} = e_{k_j}$, decorrência do fato de D ser alternada.

Desse modo, eliminando as parcelas evidentemente nulas, a função D fica determinada pelas somas de parcelas nas quais $k_i \neq k_j$, isto é, pelas n-uplas de índices da forma $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$, sem repetição dos mesmos, mas isto é o mesmo que dizer que a n-upla $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ é precisamente uma permutação dos n elementos do conjunto $J_n = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$.

Portanto, cada n-upla $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ "significativa" que compõe a função D, corresponde exatamente à uma única permutação $\sigma \in S_n$, onde S_n corresponde ao conjunto de todas as permutações dos elementos de J_n, ou seja: $(k_1, k_2, \cdots, k_n) = (\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n))$, para alguma permutação $\sigma \in S_n$

Portanto:

$$D(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{(1,\sigma(1))} a_{(2,\sigma(2))} \cdots a_{(n,\sigma(n))} D(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \cdots, e_{\sigma(n)}) \tag{2.4}$$

Esse somatório lê-se: "somatório quando σ percorre o conjunto S_n" e é composto por exatamente $n!$ parcelas.

Desse modo, para concluírmos a unicidade da função determinante, precisamos mostrar que o "coeficiente" $D(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \cdots, e_{\sigma(n)})$ é univocamente determinado.

A esta altura, a prova da unicidade pode ser considerada simples caso o leitor tenha certa familiaridade com permutações. Considerando que o conhecimento sobre permutações no nível do qual precisamos não seja tão comum, optamos por fazer uma descrição mais detalhada, apresentada no apêndice A.

No referido apêndice, definimos a paridade e o sinal (sgn) de uma permutação e provamos que o mesmo está bem definido.

Além disso, verificamos que o número de transposições necessárias para transformar a permutação σ na identidade, mediante a operação de composição, tem a mesma paridade que o número de transposições usadas na decomposição de σ como um produto de transposições.

Estes elementos, juntamente com o fato de que a função D é n-linear e alternada, permite-nos concluir que:

$$D(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \cdots, e_{\sigma(n)}) = sgn(\sigma)D(e_1, e_2, \cdots, e_n)$$

Logo, a expressão em 2.4 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} D(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} a_{(1,\sigma(1))}a_{(2,\sigma(2))} \cdots a_{(n,\sigma(n))} D(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \cdots, e_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} a_{(1,\sigma(1))}a_{(2,\sigma(2))} \cdots a_{(n,\sigma(n))} sgn(\sigma) D(e_1, e_2, \cdots, e_n) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{(1,\sigma(1))}a_{(2,\sigma(2))} \cdots a_{(n,\sigma(n))} D(I_n) \end{aligned}$$

Como $D(I_n) = 1$, obtemos:

$$D(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{(1,\sigma(1))}a_{(2,\sigma(2))} \cdots a_{(n,\sigma(n))} \tag{2.5}$$

como sendo a única função determinante sobre matrizes $n \times n$, sobre um corpo K.

De agora em diante, com a garantia da unicidade, passaremos a denotar a função determinante $D(A)$ por $det(A)$.

Desse modo, temos:

$$det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{(1,\sigma(1))} a_{(2,\sigma(2))} \cdots a_{(n,\sigma(n))} = E_j(A) \qquad (2.6)$$

onde,

$$E_j(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det[A(i|j)] \qquad (2.7)$$

para $1 \leq j \leq n$.

Além disso, se D é uma função arbitrária, n-linear e alternada, sobre matrizes $n \times n$, sobre K, tem-se:

$$D(A) = det(A) D(I_n) \qquad (2.8)$$

2.4 Propriedades adicionais da função determinante

Nesta seção, vamos enunciar e demonstrar algumas propriedades adicionais dos determinantes, as quais julgamos importantes em face de suas aplicações.

Definição 2.4.1. *Seja K um corpo, A uma matriz de ordem $n \times n$, sobre K e a_{ij} um elemento qualquer de A. O elemento $(-1)^{i+j} det[A(i|j)]$, pertencente à K, é denominado cofator do elemento a_{ij} e será denotado por c_{ij}.*

De forma coerente com a definição acima, a expressão em 2.7 é denominada "desenvolvimento do determinante de A pelos cofatores da j-ésima coluna" e será expressa por:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} c_{ij} \qquad (2.9)$$

Definição 2.4.2. *Seja K um corpo e A uma matriz de ordem $n \times n$, sobre K. Chama-se matriz dos cofatores de A e denota-se $(cofA)$, à matriz à seguir:*

$$(cofA) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

onde c_{ij} são os cofatores dos respectivos elementos a_{ij}, de A.

Teorema 2.4.1. *Seja K um corpo, A uma matriz de ordem $n \times n$, sobre K e A^t a matriz transposta de A. tem-se:*

$$det(A^t) = det(A)$$

Demonstração.
Pela definição de matriz transposta, segue que:

Se $A^t = B$ então $b_{ji} = a_{ij}$.

Assim,

$$\begin{aligned} det(A^t) = det(B) &= \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) b_{(1,\sigma(1))} b_{(2,\sigma(2))} \cdots b_{(n,\sigma(n))} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{(\sigma(1),1)} a_{(\sigma(2),2)} \cdots a_{(\sigma(n),n)} \\ &= \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} sgn(\sigma^{-1}) a_{(1,\sigma^{-1}(1))} a_{(2,\sigma^{-1}(2))} \cdots a_{(n,\sigma^{-1}(n))} \\ &= det(A) \end{aligned}$$

Justificando: de acordo com o lema A.11, segue que $sgn(\sigma) = sgn(\sigma^{-1})$, além disso, para cada $1 \leq i \leq n$, existe um único $1 \leq j \leq n$ tal que $(\sigma(i), i)) = (j, \sigma^{-1}(j))$, consequentemente, $a_{(\sigma(i),i)} = a_{(j,\sigma^{-1}(j))}$. $\square$

O Teorema 2.4.1 garante que as propriedades e resultados da função determinante deduzidos à partir das linhas de uma matriz quadrada, são válidos também relacionados às colunas.

Teorema 2.4.2. *Seja K um corpo e A uma matriz triangular, [superior ou inferior], de ordem $n \times n$, sobre K, então $det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$, isto é, o determinante de A corresponde ao produto dos elementos da diagonal principal.*

Demonstração.
Seja A uma matriz triangular inferior:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Calculando o determinante, através da expressão 2.7, na qual $j = 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} det(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} D[A(i|1)] \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Novamente, valendo-se da mesma fórmula, tal que $j = 1$:

$$det(A) = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Repetindo-se o procedimento, n vezes, segue o resultado:

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

Agora, seja:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Tem-se:

$$det(B) = det(B^t) = b_{11}b_{22}b_{33}\cdots b_{nn}$$

Pelo que acabamos de mostrar. □

Teorema 2.4.3. *Seja K um corpo, A uma matriz de ordem $n \times n$, sobre K. Se A possuir, ou duas linhas iguais, ou duas colunas iguais, então $det(A) = 0$.*

Demonstração.
Consequência imediata da definição de função determinante e do fato que $det(A) = det(A^t)$.
. □

Teorema 2.4.4. *[Teorema de Jacobi] Seja K um corpo, A e B matrizes de ordem $n \times n$, sobre K. Se B é obtida de A, somando-se a uma linha qualquer da matriz A, uma combinação linear das demais linhas de A, então:*

$$det(A) = det(B)$$

Demonstração.
Sejam $a_1, a_2, \cdots, a_n$ as linhas de A. Seja $1 \leq i \leq n$ um índice fixado e $c_j \in K, \quad 1 \leq j \leq n, \quad j \neq i.$

Por hipótese, as linhas da matriz B são:

$$a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, c_1a_1 + \cdots + c_{i-1}a_{i-1} + a_i + c_{i+1}a_{i+1} + \cdots + c_na_n, a_{i+1}, \cdots, a_n$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} det(B) = det(&a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, c_1a_1 + \cdots + c_{i-1}a_{i-1} + \\ &+ a_i + c_{i+1}a_{i+1} + \cdots + c_na_n, a_{i+1}, \cdots, a_n) \end{aligned}$$

Como det é uma função n-linear, tem-se:

$$\begin{aligned} det(B) = &\, c_1det(a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, a_1, a_{i+1}, \cdots, a_n) + \\ &+ c_2det(a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, a_2, a_{i+1}, \cdots, a_n) + \\ &\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ &+ c_{i-1}det(a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_n) + \\ &+ det(a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \cdots, a_n) + \\ &+ c_{i+1}det(a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_{i+1}, \cdots, a_n) + \\ &\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ &+ c_ndet(a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, a_n, a_{i+1}, \cdots, a_n) \end{aligned}$$

Uma vez que a função determinante é alternada, $n-1$ dessas parcelas são nulas, visto que nelas há linhas repetidas, logo, excluíndo-se essas parcelas, segue que:

$$det(B) = det(a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \cdots, a_n) = det(A)$$

□

Além disso, pelo Teorema 2.4.1, segue que o determinante de uma matriz quadrada A não se altera, quando é somada a uma coluna qualquer de A, uma combinação linear das demais colunas de A.

No próximo teorema destacamos o fato de que o determinante de uma matriz quadrada pode, eventualmente, ser calculado por determinantes de "blocos". Vejamos:

Teorema 2.4.5. *Seja a matriz M, de ordem $r+s \times r+s$, tal que:*

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

onde A é uma matriz $r \times r$, C é uma matriz $s \times s$, B é uma matriz $r \times s$ e 0 é a matriz nula $s \times r$, todas sobre um corpo K.
Nessas condições, tem-se:

$$det(M) = det(A)det(C)$$

Demonstração.
Seja a matriz:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & b_{1r+1} & b_{1r+2} & \cdots & b_{1r+s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & b_{2r+1} & b_{2r+2} & \cdots & b_{2r+s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & b_{rr+1} & b_{rr+2} & \cdots & b_{rr+s} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{r+1r+1} & c_{r+1r+2} & \cdots & c_{r+1r+s} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{r+2r+1} & c_{r+2r+2} & \cdots & c_{r+2r+s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{r+sr+1} & c_{r+sr+2} & \cdots & c_{r+sr+s} \end{bmatrix}$$

A fim de facilitar a visualização, identificaremos os "blocos" por meio de linhas inseridas na matriz M, conforme segue:

$$M = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & b_{1r+1} & b_{1r+2} & \cdots & b_{1r+s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & b_{2r+1} & b_{2r+2} & \cdots & b_{2r+s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & b_{rr+1} & b_{rr+2} & \cdots & b_{rr+s} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{r+1r+1} & c_{r+1r+2} & \cdots & c_{r+1r+s} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{r+2r+1} & c_{r+2r+2} & \cdots & c_{r+2r+s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{r+sr+1} & c_{r+sr+2} & \cdots & c_{r+sr+s} \end{array}\right]$$

Agora, seja a função D, tal que:

$$D(A, B, C) = det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Fixando as matrizes A e B em 2.10, vamos conservar a notação, porém vamos considerar D como função da matriz C. Temos:

$$D(C) = det(\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \cdots, \alpha_{r+s})$$

Atenção especial deve ser dada ao significado da notação acima: O segundo membro é a função determinante em 2.10. As primeiras r linhas estão fixadas e $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \cdots, \alpha_{r+s}$ são as linhas de M, as quais dependem única e exclusivamente da matriz C.

É evidente, a partir da definição da função determinante, que D é s-linear e alternada como função das linhas de C.

Nessas condições, conforme 2.8, segue que:

$$D(C) = det(C)D(I)$$

E como as matrizes A e B estão fixas:

$$D(A, B, C) = det(C)D(A, B, I)$$

onde I é a matriz identidade $s \times s$.

Além disso, subtraindo-se das linhas de B, combinações lineares das linhas de I, escolhidas de forma conveniente, obtém-se, pelo Teorema 2.4.4:

$$D(A, B, I) = D(A, 0, I),$$

Por outro lado, como as matrizes 0 e I são constantes, repetindo-se procedimentos análogos, segue-se que $D(A, 0, I)$ é r-linear e alternada como função das linhas de A, visto que, por definição:

$$D(A, 0, I) = det \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Logo:

$$D(A, 0, I) = det(A)D(I, 0, I)$$

Contudo,

$$D(I, 0, I) = det \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

que, por definição, corresponde ao determinante da matriz identidade de ordem $r + s \times r + s$, cujo valor é 1.

Portanto:

$$\begin{aligned} D(A, B, C) &= det(C)D(A, B, I) \\ &= det(C)D(A, 0, I) \\ &= det(C)det(A) \\ &= det(A)det(C) \end{aligned}$$

$\square$

Corolário 2.4.6. *Seja a matriz M', de ordem $r + s \times r + s$, tal que:*

$$M' = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix}$$

onde A é uma matriz $r \times r$, C é uma matriz $s \times s$, 0 é uma matriz $r \times s$ e B é a matriz nula $s \times r$, todas sobre um corpo K.
Nessas condições, tem-se:

$$det(M') = det(A)det(C)$$

Demonstração.

$$det(M') = det(M'^t) = \begin{vmatrix} A^t & B^t \\ 0^t & C^t \end{vmatrix} = det(A^t)det(C^t) = det(A).det(C)$$

□

Por exemplo, seja a matriz M a seguir:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Conforme as notações acima, identifiquemos as matrizes A e C, em M. Temos:

$$M = \left[\begin{array}{ccc|cc} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & 2 & 3 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & 5 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & 4 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{5} & \mathbf{1} \end{array}\right]$$

Pelo Teorema 2.4.5, temos que:

$$det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = (-4) \cdot (-7) = \mathbf{28}$$

Teorema 2.4.7. *Sejam K um corpo, A uma matriz de ordem* $j_1 + j_2 + \cdots + j_n \times j_1 + j_2 + \cdots + j_n$ *constituída de submatrizes* A_i, $1 \leq i \leq n$, *de ordem* $j_i \times j_i$, *de elementos de K, expressa da seguinte forma:*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix}$$

onde cada 0 *representa uma matriz [eventualmente retangular] nula.*

Nessas condições, tem-se:

$$det(A) = det(A_1)det(A_2)\cdots det(A_n)$$

Demonstração.
Seja a função D, tal que:

$$D(A_1, A_2, \cdots, A_n) = det \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix}$$

Fixando-se as matrizes $A_2, A_3, \cdots, A_n$, segue que D é j_1-linear e alternada como função das linhas de A_1, visto que *det* é j_1-linear e alternada como função das linhas de A.

Nessas condições, por 2.8, tem-se:

$$D(A_1, A_2, \cdots, A_n) = det(A_1)D(I_{j_1}, A_2, \cdots, A_n)$$

onde I_{j_1} é a matriz identidade de ordem $j_1 \times j_1$.

Entretanto,

$$D(I_{j_1}, A_2, \cdots, A_n) = det \begin{bmatrix} I_{j_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix}$$

E, fixando agora as matrizes $A_3, \cdots, A_n$, segue que D é j_2-linear e alternada como função das linhas de A_2, visto que det é j_2-linear e alternada como função das linhas de A.

Novamente, por 2.8, tem-se:

$$D(I_{j_1}, A_2, \cdots, A_n) = det(A_2)D(I_{j_1}, I_{j_2}, \cdots, A_n)$$

Procedendo de forma análoga para todas as matrizes A_i, obtém-se:

$$D(A_1, A_2, \cdots, A_n) = det(A_1)det(A_2)\cdots det(A_n)D(I_{j_1}, I_{j_2}, \cdots, I_{j_n})$$

Mas, por definição,

$$D(I_{j_1}, I_{j_2}, \cdots, I_{j_n}) = det \begin{bmatrix} I_{j_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_{j_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I_{j_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I_{j_n} \end{bmatrix} = 1$$

Portanto,
$$det(A) = det(A_1)det(A_2)\cdots det(A_n)$$

$\square$

Por exemplo, seja a matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Identificando as matrizes A_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, temos:

$$A = \left[\begin{array}{cc|ccc|cc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{array}\right]$$

De modo que: $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

Assim, pelo Teorema 2.4.7, temos que:

$$det(A) = det(A_1) \cdot det(A_2) \cdot det(A_3)$$

Isto é,

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 31 \cdot 6 = \mathbf{-558}$$

Teorema 2.4.8 (Teorema de Binet)**.** *Seja K um corpo e A e B matrizes de ordem $n \times n$, sobre K, tem-se:*

$$det(AB) = det(A)det(B)$$

Demonstração.
Sejam as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$AB = C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Considerando a matriz D, tal que:

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

As matrizes A e B estão dispostas convenientemente na matriz D, conforme identificado abaixo:

$$D = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}} & \boldsymbol{a_{n2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline -1 & 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{b_{11}} & \boldsymbol{b_{12}} & \cdots & \boldsymbol{b_{1n}} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & \boldsymbol{b_{21}} & \boldsymbol{b_{22}} & \cdots & \boldsymbol{b_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \boldsymbol{b_{n1}} & \boldsymbol{b_{n2}} & \cdots & \boldsymbol{b_{nn}} \end{array}\right]$$

Assim, pelo Teorema 2.4.5, segue que $det(D) = det(A)det(B)$.

Agora, somando-se à coluna de ordem $(n+1)$ da matriz D, as n primeiras colunas, multiplicadas respectivamente por $b_{11}, b_{21}, \cdots, b_{n1}$; somando-se também à coluna de ordem $(n+2)$, as n primeiras colunas, agora multiplicadas respectivamente por $b_{12}, b_{22}, \cdots, b_{n2}$; e assim sucessivamente até a coluna $n+n$, obtém-se:

$$D' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Contudo, o Teorema 2.4.4 garante que $det(D) = det(D')$, logo $det(D') = det(A)det(B)$.

Vamos calcular $det(D')$, aplicando, iterativamente, a fórmula do determinante de uma matriz, desenvolvido por determinada linha, isto é:

$$det(D') = \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{i+j} d'_{ij} det[D'(i|j)]$$

Para $i = 2n$, $i = 2n - 1$, $\cdots$, $i = 2n - (n - 1)$, respectivamente, tem-se:

$$\begin{aligned}
det(D') &= [(-1).(-1)^{2n+n}][(-1)(-1)^{(2n-1)+(n-1)}].\cdots[(-1)(-1)^{(n+1)+1}]det(C) \\
&= (-1)^{3n+1}(-1)^{3n-1}(-1)^{3n-3}.\cdots(-1)^{n+3}det(C) \\
&= (-1)^{3n+1}(-1)^{3n-1}(-1)^{3n-3}.\cdots(-1)^{3n+3-2n}det(C) \\
&= (-1)^{\frac{(3n+1+n+3)n}{2}}det(C) \\
&= (-1)^{\frac{(4n+4)n}{2}}det(C) \\
&= (-1)^{2n(n+1)}det(C)
\end{aligned}$$

Como $2n(n + 1)$ é um número par, segue que:

$$det(D') = det(C)$$

Portanto,

$$det(A)det(B) = det(C) = det(AB)$$

$\square$

Por exemplo, dada a matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 37 & 19 & 13 \\ 27 & 12 & 13 \end{bmatrix}$$

Temos que $C = A \cdot B$, para $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Portanto, pelo Teorema de Binet, temos:

$$det(C) = det(A \cdot B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-4) \cdot 133 = \mathbf{-532}$$

Teorema 2.4.9. *Seja K um corpo, A uma matriz de ordem $n \times n$, sobre K e $k \in K$. Tem-se:*

$$det(k \cdot A) = k^n \cdot det(A)$$

Demonstração.
Este resultado é consequência da n-linearidade da função determinante, de modo que, se $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são as linhas de A, tem-se:

$$\begin{aligned} det(k \cdot A) =& det(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n) \\ =& k^n \cdot det(a_1, a_2, \cdots, a_n) \\ =& k^n \cdot det(A) \end{aligned}$$

□

Como exemplo, seja a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$A = 2 \cdot C$$

para $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ \frac{3}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Assim,

$$det(A) = det(2 \cdot C) = 2^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ \frac{3}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-6) = \mathbf{-48}$$

2.5 Cálculo de determinantes

O cálculo do determinante de matrizes é um processo muito trabalhoso, se executado manualmente. E essa dificuldade aumenta, na medida em que se eleva a ordem das matrizes das quais se deseja calcular o determinante.

Nesta seção, apresentaremos uma regra para o cálculo do determinantes de matrizes de ordem 3×3, chamada Regra de Sarrus, bem como enunciaremos o Teorema de Laplace, que possibilita o cálculo do determinante para matrizes de ordem $n \times n$, $n \geq 2$.

Além disso, descreveremos a Regra de Chió e o Método de Houel. Ambos são procedimentos que, aplicados iteradamente, possibilitam o cálculo de determinantes para matrizes quadradas de ordem $n \times n$, $n > 2$, baseado no Teorema de Laplace e nas propriedades descritas nas seções anteriores.

Por fim, apresentaremos dois aplicativos de acesso gratuito, entre muitos disponíveis na internet, que possibilitam o cálculo de determinantes, inclusive de ordens mais elevadas, em segundos.

Regra 2.5.1 (Regra de Sarrus). *Seja K um corpo e A uma matriz de ordem 3×3, sobre K. Temos:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

A regra de Sarrus para o cálculo do determinante da matriz A compõe-se dos seguintes procedimentos:

1. *Reescreve-se a matriz A e à sua direita repetem-se a primeira e a segunda coluna de A, obtendo-se:*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

   Nesta configuração, realiza-se as seguintes operações:

2. *Multiplica-se os elementos da diagonal principal de A e os elementos das duas "diagonais" paralelas à ela, localizadas à sua direita, uma a uma, separadamente, a saber,* $(a_{11}a_{22}a_{33})$, $(a_{12}a_{23}a_{31})$ *e* $(a_{13}a_{21}a_{32})$*;*

3. *Multiplica-se os elementos da diagonal secundária de A e os elementos das duas "diagonais" paralelas à ela, localizadas à sua direita, também uma a uma, separadamente, isto é,* $(a_{12}a_{21}a_{33})$, $(a_{11}a_{23}a_{32})$ *e* $(a_{13}a_{22}a_{31})$*;*

4. *Soma-se os resultados das multiplicações em (2), com os elementos simétricos dos resultados das multiplicações em (3).*

5. *O resultado da soma corresponde ao determinante da matriz A.*

Ou seja,

$$det(A) = (a_{11}a_{22}a_{33})+(a_{12}a_{23}a_{31})+(a_{13}a_{21}a_{32})-(a_{12}a_{21}a_{33})-(a_{11}a_{23}a_{32})-(a_{13}a_{22}a_{31})$$

A seguir, apresentamos um dispositivo prático para representar as operações acima:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Nesta representação, cada produto de elementos indicados por setas contínuas [resp. intermitentes] devem ser somados [resp. subtraídos].

A regra de Sarrus, essencialmente, estabelece uma configuração conveniente para os elementos da matriz A, de modo que se obtenha, de forma prática e intuitiva, todas as permutações $\sigma \in S(3)$. Em outras palavras, a regra de Sarrus nos fornece um método prático para a determinação das parcelas do somatório:

$$det(A) = \sum_{\sigma \in S(3)} a_{(1,\sigma(1))} a_{(2,\sigma(2))} a_{(3,\sigma(3))} det(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)})$$

O sinal de cada permutação é contemplado na regra. Para vermos isto, consideremos as permutações obtidas da diagonal principal de A e das suas paralelas como sendo $\sigma(1) = (1)$, $\sigma(2) = (1,2,3)$ e $\sigma(3) = (1,3,2)$ e as permutações obtidas da diagonal secundária de A e das suas paralelas como sendo $\sigma(4) = (1,2)$, $\sigma(5) = (2,3)$ e $\sigma(6) = (1,3)$.

Notemos que $\sigma(1)$, $\sigma(2)$ e $\sigma(3)$ são permutações pares, já que $\sigma(1)$ é a identidade e as demais se decompõem em duas transposições, entretanto, $\sigma(4)$, $\sigma(5)$ e $\sigma(6)$, são permutações ímpares, pois são transposições, portanto seus sinais são iguais a (-1), o que justifica a substituição dos resultados das multiplicações, nestas permutações, pelos seus respectivos simétricos.

Como exemplo, calcularemos o determinante da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Neste caso, temos:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 6 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 5 \end{array}$$

Isto é,

$$det(A) = 6 + 48 + 105 - 12 - 30 - 84 = \mathbf{33}$$

Obs. A Regra de Sarrus também pode ser executada, reescrevendo-se a matriz A e à sua esquerda, inserindo-se a segunda e a terceira colunas de A, nesta ordem. Neste caso, devem ser consideradas as "diagonais" paralelas posicionadas à esquerda das diagonais principal e secundária.

O Teorema de Laplace, enunciado a seguir, é consequência imediata da unicidade da função determinante e dos Teoremas 2.2.1 e 2.4.1.

Teorema 2.5.2 (Teorema de Laplace)**.** *Seja K um corpo e A uma matriz de ordem $n \times n$, sobre K. O determinante de A coincide com a soma de todos os produtos dos elementos de cada linha (ou coluna) pelo seu respectivo cofator. Mais precisamente, para cada $1 \leq i \leq n$ fixado ou para cada $1 \leq j \leq n$ fixado, temos:*

$$det(A) = L_i(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k} D[A(i|k)] = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{ik}$$

ou

$$det(A) = C_j(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(-1)^{k+j} D[A(k|j)] = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}c_{kj}$$

Regra 2.5.3 (Regra de Chió)**.** *Vamos descrever um processo iterativo para a obtenção do determinante de uma matriz A, de ordem $n \times n$. O que denominamos de Regra de Chió é simplesmente um passo desse processo, o qual, uma vez compreendido nos permitirá prosseguir até encontrarmos o determinante da matriz A.*

Esse passo se descreve da seguinte forma:

1. *Se a matriz A for nula, nada há o que fazer, seu determinante é zero, por motivos óbvios.*

2. *Se a matriz A conter algum elemento não nulo, igual a 1, isto é, algum $a_{rs} = 1$, a ideia é determinar uma matriz B, a partir da matriz A, via o Teorema de Jacobi, tal que todos os elementos da linha r ou da coluna s sejam nulos, com excessão do elemento $a_{rs} = 1$. Assim, $det(A) = (-1)^{r+s}.det[B(r|s)]$, onde $B(r|s)$ é a matriz de ordem $n-1 \times n-1$ obtida de B suprimindo-se a r-ésima linha e a s-ésima coluna de B. Portanto $det(A) = \pm det[B(r|s)]$, dependendo se $r+s$ é par ou ímpar.*

3. *Se a matriz A for não nula, isto é, se existir algum $a_{rs} \neq 0$, então, $A = a_{rs}.C$ e, neste caso, a matriz C, de ordem $n \times n$, possui o elemento $c_{rs} = 1$. Assim, pelo teorema 2.4.9, $det(A) = a_{rs}^n.det(C)$. Neste situação, repete-se o que foi feito no item anterior e obtém-se, $det(A) = a_{rs}^n.(-1)^{r+s}.det[C(r|s)]$.*

Afim de elucidar a regra de Chió, consideremos K um corpo e A uma matriz de ordem $n \times n$, sobre K, de modo que:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Faremos a descrição de um "passo", que caracteriza a regra de Chió, rebaixando a ordem de A em apenas uma unidade e supondo, ainda, que exista um elemento a_{ij} de A, tal que $a_{ij} = 1$.

Neste caso,

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & 1 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Valendo-nos agora do Teorema 2.4.4, realizaremos as seguintes operações sobre as colunas de A, sem alterar o valor do determinante:

1. Fixa-se a j-ésima coluna de A,
2. Adiciona-se à coluna 1, a j-ésima coluna multiplicada por $-a_{i1}$,
3. Adiciona-se à coluna 2, a j-ésima coluna multiplicada por $-a_{i2}$,
4. Adiciona-se à coluna 3, a j-ésima coluna multiplicada por $-a_{i3}$,
5. Executa-se o mesmo procedimento, sucessivamente, à todas as colunas de A, exceto à coluna j.

Obtém-se, assim o determinante:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} - a_{i1} \cdot a_{1j} & a_{12} - a_{i2} \cdot a_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} - a_{in} \cdot a_{1j} \\ a_{21} - a_{i1} \cdot a_{2j} & a_{22} - a_{i2} \cdot a_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} - a_{in} \cdot a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} - a_{i1} \cdot 1 & a_{i2} - a_{i2} \cdot 1 & \cdots & 1 & \cdots & a_{in} - a_{in} \cdot 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - a_{i1} \cdot a_{nj} & a_{n2} - a_{i2} \cdot a_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} - a_{in} \cdot a_{nj} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} - a_{i1} \cdot a_{1j} & a_{12} - a_{i2} \cdot a_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} - a_{in} \cdot a_{1j} \\ a_{21} - a_{i1} \cdot a_{2j} & a_{22} - a_{i2} \cdot a_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} - a_{in} \cdot a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - a_{i1} \cdot a_{nj} & a_{n2} - a_{i2} \cdot a_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} - a_{in} \cdot a_{nj} \end{vmatrix}$$

Agora basta aplicar a Regra de Laplace, desenvolvendo o determinante pelos cofatores da i-ésima linha, obtendo-se:

$det(A) =$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - a_{i1} \cdot a_{1j} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} - a_{in} \cdot a_{1j} \\ a_{21} - a_{i1} \cdot a_{2j} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} - a_{in} \cdot a_{2j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1)1} - a_{i1} \cdot a_{(i-1)j} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} - a_{in} \cdot a_{(i-1)j} \\ a_{(i+1)1} - a_{i1} \cdot a_{(i+1)j} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} - a_{in} \cdot a_{(i+1)j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - a_{i1} \cdot a_{nj} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} - a_{in} \cdot a_{nj} \end{vmatrix}$$

Assim, $det(A)$ passa a ser calculado sobre uma matriz de ordem $n - 1 \times n - 1$.

A título de exemplo, vamos calcular o determinante da matriz A, a seguir, via a Regra de Chió:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Consideraremos o elemento unitário a_{22} e fixaremos a coluna 2. Assim:

$$det(A) = \begin{vmatrix} (3-2\cdot 4) & 2 & (7-2\cdot 3) & (2-2\cdot 2) \\ (4-1\cdot 4) & 1 & (3-1\cdot 3) & (2-1\cdot 2) \\ (2-3\cdot 4) & 3 & (0-3\cdot 3) & (6-3\cdot 2) \\ (4-2\cdot 4) & 2 & (3-2\cdot 3) & (1-2\cdot 2) \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} -5 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & 3 & -9 & 0 \\ -4 & 2 & -3 & -3 \end{vmatrix}$$

Aplicando o método de Laplace, a partir da segunda linha, temos:

$$det(A) = 1^{(2+2)} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 1 & -2 \\ -10 & -9 & 0 \\ -4 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot det(B) \tag{2.11}$$

onde,

$$B = \begin{bmatrix} -5 & 1 & -2 \\ -10 & -9 & 0 \\ -4 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Executando a regra de Chió, agora sobre a matriz B, consideraremos o elemento unitário b_{12} e fixaremos a coluna 2:

$$det(B) = \begin{vmatrix} (-5+1\cdot 5) & 1 & (-2+1\cdot 2) \\ (-10-9\cdot 5) & -9 & (0-9\cdot 2) \\ (-4-3\cdot 5) & -3 & (-3-3\cdot 2) \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -55 & -9 & -18 \\ -19 & -3 & -9 \end{vmatrix}$$

O que, por Laplace, corresponde a:

$$det(B) = (-1)^{(1+2)} \cdot \begin{vmatrix} -55 & -18 \\ -19 & -9 \end{vmatrix} = -1 \cdot det(C) \tag{2.12}$$

Onde,

$$C = \begin{bmatrix} -55 & -18 \\ -19 & -9 \end{bmatrix}$$

Por outro lado,

$$C = (-9)^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{55}{9} & 2 \\ \frac{19}{9} & 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$det(C) = 81 \cdot det(D) \tag{2.13}$$

para

$$D = \begin{bmatrix} \frac{55}{9} & 2 \\ \frac{19}{9} & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando mais uma vez a regra de Chió, agora sobre a matriz D, fixaremos a coluna 2 e consideraremos o elemento unitário d_{22}. Temos:

$$\begin{aligned} det(D) &= \begin{vmatrix} \left(\frac{55}{9} - 2 \cdot \frac{19}{9}\right) & 2 \\ \left(\frac{19}{9} - 1 \cdot \frac{19}{9}\right) & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{17}{9} & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Enfim, aplicando Laplace, temos:

$$det(D) = (-1)^{(2+2)} \cdot \left|\frac{17}{9}\right| = \frac{17}{9} \tag{2.14}$$

Substituindo-se a expressão 2.14 [resp. 2.13, 2.12] em 2.13 [resp. 2.12, 2.11], segue que:

$$det(A) = 1 \cdot (-1) \cdot 81 \cdot \frac{17}{9} = -153$$

Regra 2.5.4 (Método de Houel)**.** *O método de Houel também é um procedimento iterativo para o cálculo de determinantes de matrizes de ordem $n \times n$, $n \geq 2$, estabelecido em $n-1$ etapas, rebaixando a ordem da matriz em uma unidade em cada etapa. Tal método pode ser aplicado à matrizes não nulas, ou seja, matrizes que possuam um elemento $a_{ij} \neq 0$.*

Descreveremos apenas uma etapa do método, visto que as demais etapas são análogas.

Para isso, sejam K um corpo, A uma matriz de ordem $n \times n$, sobre K e suponhamos que o elemento a_{ij} de A é não nulo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Vamos fixar a coluna j e, para todo s, $1 \leq s \leq n$, $s \neq j$, multiplicaremos a coluna j por $-\dfrac{a_{is}}{a_{ij}}$ e somaremos à coluna s. [Tal procedimento não altera o valor do determinante, pelos teoremas 2.4.1 e 2.4.4.] Assim,

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} - a_{1j} \cdot \frac{a_{i1}}{a_{ij}} & a_{12} - a_{1j} \cdot \frac{a_{i2}}{a_{ij}} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} - a_{1j} \cdot \frac{a_{in}}{a_{ij}} \\ a_{21} - a_{2j} \cdot \frac{a_{i1}}{a_{ij}} & a_{22} - a_{2j} \cdot \frac{a_{i2}}{a_{ij}} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} - a_{2j} \cdot \frac{a_{in}}{a_{ij}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} - a_{ij} \cdot \frac{a_{i1}}{a_{ij}} & a_{i2} - a_{ij} \cdot \frac{a_{i2}}{a_{ij}} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} - a_{ij} \cdot \frac{a_{in}}{a_{ij}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - a_{nj} \cdot \frac{a_{i1}}{a_{ij}} & a_{n2} - a_{nj} \cdot \frac{a_{i2}}{a_{ij}} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} - a_{nj} \cdot \frac{a_{in}}{a_{ij}} \end{vmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} - a_{1j} \cdot \frac{a_{i1}}{a_{ij}} & a_{12} - a_{1j} \cdot \frac{a_{i2}}{a_{ij}} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} - a_{1j} \cdot \frac{a_{in}}{a_{ij}} \\ a_{21} - a_{2j} \cdot \frac{a_{i1}}{a_{ij}} & a_{22} - a_{2j} \cdot \frac{a_{i2}}{a_{ij}} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} - a_{2j} \cdot \frac{a_{in}}{a_{ij}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - a_{nj} \cdot \frac{a_{i1}}{a_{ij}} & a_{n2} - a_{nj} \cdot \frac{a_{i2}}{a_{ij}} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} - a_{nj} \cdot \frac{a_{in}}{a_{ij}} \end{vmatrix}$$

det(A) =

$$\left(\frac{1}{a_{ij}^{(n-1)}}\right)\begin{vmatrix} a_{11}\cdot a_{ij}-a_{1j}\cdot a_{i1} & a_{12}\cdot a_{ij}-a_{1j}\cdot a_{i2} & \cdots & a_{1j}\cdot a_{ij} & \cdots & a_{1n}\cdot a_{ij}-a_{1j}\cdot a_{in} \\ a_{21}\cdot a_{ij}-a_{2j}\cdot a_{i1} & a_{22}\cdot a_{ij}-a_{2j}\cdot a_{i2} & \cdots & a_{2j}\cdot a_{ij} & \cdots & a_{2n}\cdot a_{ij}-a_{2j}\cdot a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\cdot a_{ij}-a_{nj}\cdot a_{i1} & a_{n2}\cdot a_{ij}-a_{nj}\cdot a_{i2} & \cdots & a_{nj}\cdot a_{ij} & \cdots & a_{nn}\cdot a_{ij}-a_{nj}\cdot a_{in} \end{vmatrix}$$

Aplicando-se o Teorema de Laplace, obtemos:

det(A) =

$$\left(\frac{(-1)^{(i+j)}}{a_{ij}^{(n-2)}}\right)\cdot\left|\begin{matrix} a_{11}\cdot a_{ij}-a_{1j}\cdot a_{i1} & \cdots & a_{1(j-1)}\cdot a_{ij}-a_{1j}\cdot a_{i(j-1)} \\ a_{21}\cdot a_{ij}-a_{2j}\cdot a_{i1} & \cdots & a_{2(j-1)}\cdot a_{ij}-a_{2j}\cdot a_{i(j-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1)1}\cdot a_{ij}-a_{(i-1)j}\cdot a_{i1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)}\cdot a_{ij}-a_{(i-1)j}\cdot a_{i(j-1)} \\ a_{(i+1)1}\cdot a_{ij}-a_{(i+1)j}\cdot a_{i1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)}\cdot a_{ij}-a_{(i+1)j}\cdot a_{i(j-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\cdot a_{ij}-a_{nj}\cdot a_{i1} & \cdots & a_{n(j-1)}\cdot a_{ij}-a_{nj}\cdot a_{i(j-1)} \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} a_{1(j+1)}\cdot a_{ij}-a_{1j}\cdot a_{i(j+1)} & \cdots & a_{1n}\cdot a_{ij}-a_{1j}\cdot a_{in} \\ a_{2(j+1)}\cdot a_{ij}-a_{2j}\cdot a_{i(j+1)} & \cdots & a_{2n}\cdot a_{ij}-a_{2j}\cdot a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1)(j+1)}\cdot a_{ij}-a_{(i-1)j}\cdot a_{i(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n}\cdot a_{ij}-a_{(i-1)j}\cdot a_{in} \\ a_{(i+1)(j+1)}\cdot a_{ij}-a_{(i+1)j}\cdot a_{i(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n}\cdot a_{ij}-a_{(i+1)j}\cdot a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n(j+1)}\cdot a_{ij}-a_{nj}\cdot a_{i(j+1)} & \cdots & a_{nn}\cdot a_{ij}-a_{nj}\cdot a_{in} \end{matrix}\right|$$

Assim,

det(A) =

$$\left(\frac{(-1)^{(i+j)}}{a_{ij}^{(n-2)}}\right)\cdot$$

$$\begin{vmatrix}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{1(j-1)} & a_{1j} \\ a_{i(j-1)} & a_{ij} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{1(j+1)} & a_{1j} \\ a_{i(j+1)} & a_{ij} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{1j} \\ a_{in} & a_{ij} \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} a_{21} & a_{2j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{2(j-1)} & a_{2j} \\ a_{i(j-1)} & a_{ij} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{2(j+1)} & a_{2j} \\ a_{i(j+1)} & a_{ij} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{2n} & a_{2j} \\ a_{in} & a_{ij} \end{vmatrix} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\begin{vmatrix} a_{(i-1)1} & a_{(i-1)j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)j} \\ a_{i(j-1)} & a_{ij} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{(i-1)(j+1)} & a_{(i-1)j} \\ a_{i(j+1)} & a_{ij} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{(i-1)n} & a_{(i-1)j} \\ a_{in} & a_{ij} \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} a_{(i+1)1} & a_{(i+1)j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)j} \\ a_{i(j-1)} & a_{ij} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{(i+1)(j+1)} & a_{(i+1)j} \\ a_{i(j+1)} & a_{ij} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{(i+1)n} & a_{(i+1)j} \\ a_{in} & a_{ij} \end{vmatrix} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\begin{vmatrix} a_{n1} & a_{nj} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{n(j-1)} & a_{nj} \\ a_{i(j-1)} & a_{ij} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{n(j+1)} & a_{nj} \\ a_{i(j+1)} & a_{ij} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{nn} & a_{nj} \\ a_{in} & a_{ij} \end{vmatrix}
\end{vmatrix}$$

Desse modo, completando-se uma etapa do método de Houel, descrevemos o determinante da matriz A, de ordem $n \times n$, através da expressão abaixo:

$$det(A) = \left(\frac{(-1)^{(i+j)}}{a_{ij}^{(n-2)}}\right) \cdot det(B)$$

onde B é uma matriz de ordem $(n-1) \times (n-1)$, cujos elementos são determinantes de ordem 2, caracterizados acima.

Como exemplo, calcularemos o determinante da matriz A, a seguir, através do método de Houel:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Obs.: Por motivos práticos, os determinantes das matrizes de ordem 2×2 serão calculados, de forma implícita, através da definição, no entanto, tais determinantes poderiam ser calculados, aplicando-se o método de Houel.

Consideraremos o elemento não nulo $a_{43} = 3$ e fixaremos a coluna 3. Aplicando o método de Houel, temos:

$$det(A) = \begin{vmatrix} \left(4 - 3 \cdot \frac{4}{3}\right) & \left(2 - 3 \cdot \frac{3}{3}\right) & 3 & \left(5 - 3 \cdot \frac{2}{3}\right) \\ \left(2 - 5 \cdot \frac{4}{3}\right) & \left(2 - 5 \cdot \frac{3}{3}\right) & 5 & \left(6 - 5 \cdot \frac{2}{3}\right) \\ \left(3 - 0 \cdot \frac{4}{3}\right) & \left(5 - 0 \cdot \frac{3}{3}\right) & 0 & \left(2 - 0 \cdot \frac{2}{3}\right) \\ \left(4 - 3 \cdot \frac{4}{3}\right) & \left(3 - 3 \cdot \frac{3}{3}\right) & 3 & \left(2 - 3 \cdot \frac{2}{3}\right) \end{vmatrix}$$

Calculando-se as expressões na linha 4, obtemos:

$$det(A) = \begin{vmatrix} \left(4 - 3 \cdot \frac{4}{3}\right) & \left(2 - 3 \cdot \frac{3}{3}\right) & 3 & \left(5 - 3 \cdot \frac{2}{3}\right) \\ \left(2 - 5 \cdot \frac{4}{3}\right) & \left(2 - 5 \cdot \frac{3}{3}\right) & 5 & \left(6 - 5 \cdot \frac{2}{3}\right) \\ \left(3 - 0 \cdot \frac{4}{3}\right) & \left(5 - 0 \cdot \frac{3}{3}\right) & 0 & \left(2 - 0 \cdot \frac{2}{3}\right) \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Assim,

$$det(A) = \frac{1}{3^3} \cdot \begin{vmatrix} (4 \cdot 3 - 3 \cdot 4) & (2 \cdot 3 - 3 \cdot 3) & 3 \cdot 3 & (5 \cdot 3 - 3 \cdot 2) \\ (2 \cdot 3 - 5 \cdot 4) & (2 \cdot 3 - 5 \cdot 3) & 5 \cdot 3 & (6 \cdot 3 - 5 \cdot 2) \\ (3 \cdot 3 - 0 \cdot 4) & (5 \cdot 3 - 0 \cdot 3) & 0 \cdot 3 & (2 \cdot 3 - 0 \cdot 2) \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Aplicando Laplace a partir dos cofatores da linha 4, temos:

$$det(A) = \frac{(-1)^{(3+4)}}{3^2} \cdot \begin{vmatrix} (4\cdot 3 - 3\cdot 4) & (2\cdot 3 - 3\cdot 3) & (5\cdot 3 - 3\cdot 2) \\ (2\cdot 3 - 5\cdot 4) & (2\cdot 3 - 5\cdot 3) & (6\cdot 3 - 5\cdot 2) \\ (3\cdot 3 - 0\cdot 4) & (5\cdot 3 - 0\cdot 3) & (2\cdot 3 - 0\cdot 2) \end{vmatrix}$$

ou seja,

$$det(A) = -\frac{1}{9} \cdot \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

Calculando os determinantes das matrizes de ordem 2×2, pela definição, temos:

$$det(A) = -\frac{1}{9} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 & 9 \\ -14 & -9 & 8 \\ 9 & 15 & 6 \end{vmatrix}$$

Isto é,

$$det(A) = -\frac{1}{9} det(B) \tag{2.15}$$

onde,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 9 \\ -14 & -9 & 8 \\ 9 & 15 & 6 \end{bmatrix}$$

Aplicaremos o método de Houel sobre a matriz B, considerando o elemento não nulo $b_{13} = 9$ e fixando a coluna 3. Temos:

$$det(B) = \begin{vmatrix} \left(0 - 9 \cdot \frac{0}{9}\right) & \left(-3 - 9 \cdot \frac{-3}{9}\right) & 9 \\ \left(-14 - 8 \cdot \frac{0}{9}\right) & \left(-9 - 8 \cdot \frac{-3}{9}\right) & 8 \\ \left(9 - 6 \cdot \frac{0}{9}\right) & \left(15 - 6 \cdot \frac{-3}{9}\right) & 6 \end{vmatrix}$$

Calculando-se as expressões na linha 1, temos:

$$det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 9 \\ \left(-14 - 8 \cdot \frac{0}{9}\right) & \left(-9 - 8 \cdot \frac{-3}{9}\right) & 8 \\ \left(9 - 6 \cdot \frac{0}{9}\right) & \left(15 - 6 \cdot \frac{-3}{9}\right) & 6 \end{vmatrix}$$

Assim,

$$det(B) = \frac{1}{9^2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 9 \\ (-14 \cdot 9 - 8 \cdot 0) & (-9 \cdot 9 - 8 \cdot (-3)) & 8 \cdot 9 \\ (9 \cdot 9 - 6 \cdot 0) & (15 \cdot 9 - 6 \cdot (-3)) & 6 \cdot 9 \end{vmatrix}$$

Aplicando Laplace a partir dos cofatores da linha 1, obtemos:

$$det(B) = \frac{(-1)^{(1+3)}}{9} \cdot \begin{vmatrix} (-14 \cdot 9 - 8 \cdot 0) & (-9 \cdot 9 - 8 \cdot (-3)) \\ (9 \cdot 9 - 6 \cdot 0) & (15 \cdot 9 - 6 \cdot (-3)) \end{vmatrix}$$

ou seja,

$$det(B) = \frac{1}{9} \cdot \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} -14 & 8 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -9 & 8 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} \\ & \\ \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 15 & 6 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

Calculando os determinantes das matrizes de ordem 2×2, pela definição, temos:

$$\begin{aligned} det(B) &= \frac{1}{9} \cdot \begin{vmatrix} -126 & -57 \\ 81 & 153 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \cdot (-14661) \\ &= -1629 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Substituindo-se 2.16 em 2.15, segue o resultado:

$$det(A) = -\frac{1}{9} \cdot (-1629) = 181$$

Finalmente, apresentamos dois aplicativos de acesso gratuito para o cálculo de determinantes, disponíveis nos sites: "Matrix Calculator", disponível em: $< https : //matrixcalc.org/pt/det.html >$ e "Calculous", disponível em: $< http : //calculous.com.br/ >$.

"Matrix Calculator"

O site "Matrix Calculator", de origem Russa, contém vários aplicativos, para operações elementares com matrizes, resolução de sistemas lineares, etc. E entre eles a "Calculadora de determinantes", software que apresentaremos a seguir.

A "Calculadora de determinantes" permite a entrada de dados via teclado, através de campos editáveis correspondentes aos elementos de uma matriz de ordem $n \times n$, $n \geq 1$. Após a inserção de dados, pode-se escolher entre vários métodos de resolução, entre eles a Regra de Laplace, através dos cofatores de qualquer linha ou coluna e a Regra de Sarrus, para matrizes de ordem 3×3.

Para cada método escolhido, o cálculo empregado é exibido, bem como o resultado, o que pode tornar o aplicativo extremamente útil no contexto pedagógico.

Abaixo segue a interface da “Calculadora de determinantes”. Em exibição o cálculo do determinante de uma matriz de ordem 3×3, através do Método de Laplace, com desenvolvimento à partir da terceira linha.

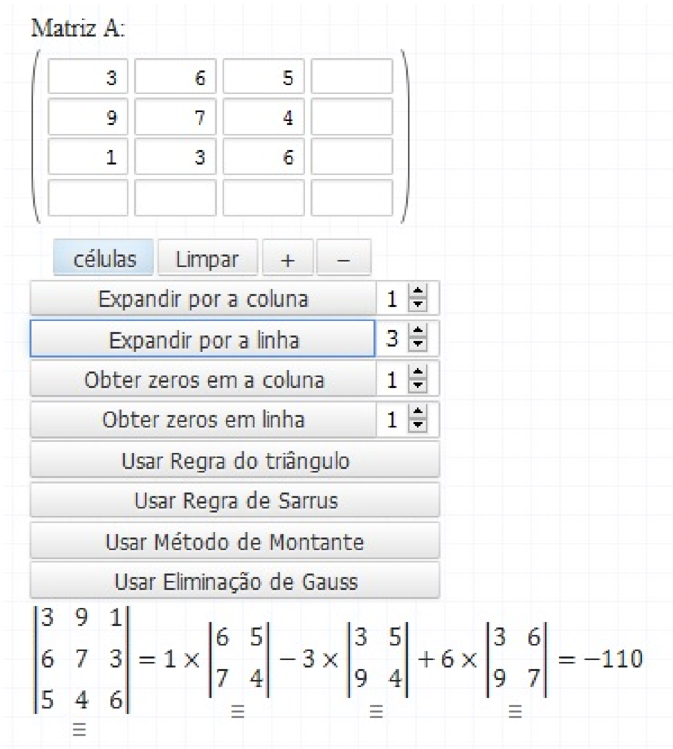

Figura 2.1: Interface do aplicativo “Calculadora de determinantes”.

Calculous

O site “Calculous” também contém uma série de aplicativos envolvendo operações sobre matrizes, determinantes e sistemas lineares. O aplicativo referente ao cálculo de determinantes denomina-se “Determinante”.

A entrada de dados no “Determinante” também dá-se via teclado, permitindo inclusive a inserção de valores decimais. O arranjo matricial é construído através da tecla “espaço” para separação de elementos e “enter” para seguir para uma nova linha. Pode-se calcular determinantes de matrizes de ordem $n \times n$, $n \geq 1$, em segundos.

Não é possível escolher métodos de cálculo, bem como as operações envolvidas não são exibidas ao usuário, apenas a notação usual de determinante (matriz entre barras) e o resultado.

Segue abaixo a interface do aplicativo "Determinante", antes e após a execução do cálculo do determinante de uma matriz de ordem 3×3, a mesma utilizada no cálculo da figura 2.1.

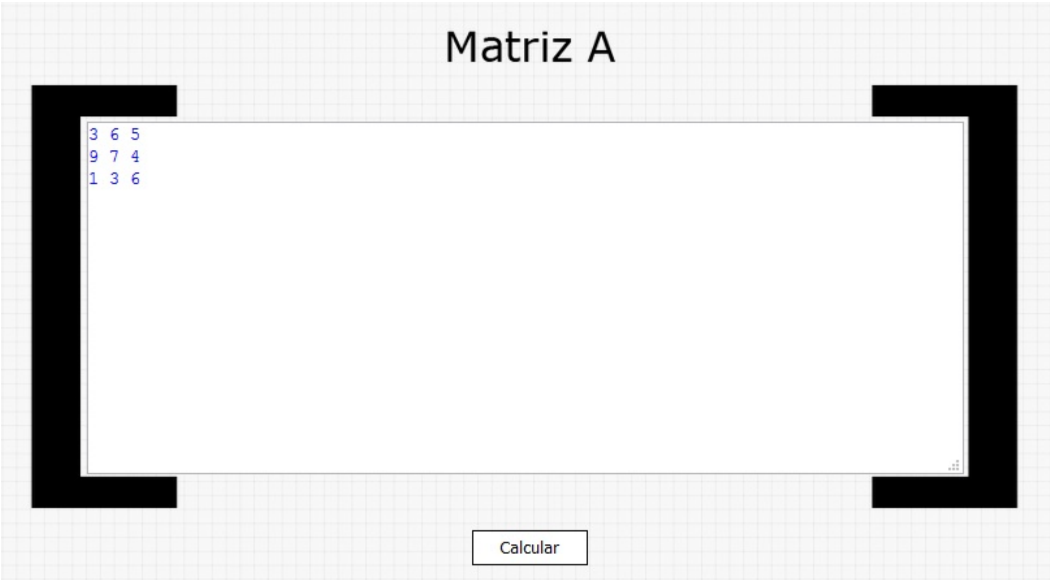

Figura 2.2: Inserção de dados no aplicativo "Determinante".

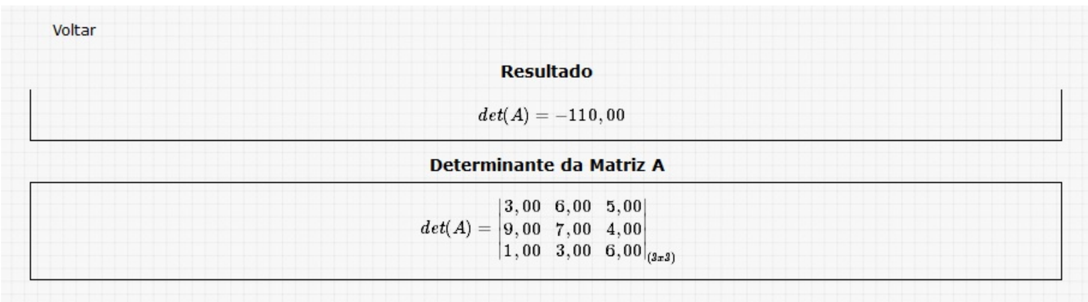

Figura 2.3: Resultado apresentado pelo aplicativo "Determinante".

Capítulo 3

Aplicações da função determinante

O presente capítulo é dedicado ao estudo de algumas, dentre as várias aplicações da função determinante nas diversas áreas do saber humano e dentro da própria Matemática, favorecendo a abordagem de outros conceitos, relacionados à Geometria e à própria Álgebra.

Segundo Kline (1972, p. 795), determinantes, assim como matrizes, são essencialmente formas de linguagem compactas, que possibilitam um tratamento adequado de conceitos matemáticos e, portanto, tornam-se significativas e úteis enquanto ferramentas que nos permitem descrever, de forma mais simples e prática, conceitos abstratos ou fenômenos físicos.

Sendo assim, o conceito de determinante passa, a partir de agora, a ser tratado de forma significativa, baseado nos conceitos e propriedades deduzidas nos capítulos anteriores e estruturado de modo que, em cada tópico, há uma introdução histórica, visando identificar as raízes e as razões que motivaram o desenvolvimento de cada aplicação abordada. Tudo isso com o objetivo de fornecer subsídios ao professor de Matemática da Educação Básica, que possibilite uma abordagem mais contextualizada e efetiva do referido tema para esse nível de ensino, de modo que faça sentido para o aluno, porém sem perder de vista a base conceitual que sustenta a teoria.

3.1 O determinante no cálculo de matrizes inversas.

Nosso objetivo, nesta seção, é descrever um método para o cálculo da inversa [caso exista] de matrizes de ordem $n \times n$, sobre um corpo de escalares K.

Introdução histórica

Historicamente, o interesse pelo estudo de matrizes foi posterior ao desenvolvimento da teoria de determinantes. Kline, (1972, p. 804), ressalta que a teoria de determinantes começou a ser estruturada e formalizada, como a conhecemos hoje, a partir da segunda metade do século XVIII. [Veremos nas próximas seções, que determinantes já eram conhecidos e utilizados desde o século XVII, porém, sem uma sistematização adequada e com certa diversidade de notações].

A partir de meados do século XVIII, portanto, determinantes passam a representar, matematicamente, um valor numérico relacionado a um arranjo de números, com propriedades especiais, tal como conhecemos atualmente.

Neste período, entretanto, não há índícios sequer da menção à palavra matriz. Kline, (1972, p. 804), afirma que a palavra matriz foi utilizada pela primeira vez pelo matemático inglês James Joseph Sylvester em sua obra "The collected mathematical papers of James Joseph Sylvester", de 1850, para mencionar um arranjo retangular de números, como uma entidade independente, sem vínculo com determinantes, como ocorria até então.

Diante disso, muitas propriedades básicas das matrizes foram estabelecidas a partir do conhecimento já consolidado sobre determinantes, como é o caso da definição e de métodos para obtenção de matrizes inversas.

Neste aspecto, conforme Kline (1972, p. 804), o matemático britânico Arthur Cayley, em 1855, publicou um artigo em um periódico alemão especializado em Matemática pura e aplicada, no qual afirma, de acordo com as notações de Kline (1972, p. 807), que a inversa da matriz:

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

é dada por:

$$\frac{1}{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} \delta_a\nabla, & \delta_{a'}\nabla, & \delta_{a''}\nabla \\ \delta_b\nabla, & \delta_{b'}\nabla, & \delta_{b''}\nabla \\ \delta_c\nabla, & \delta_{c'}\nabla, & \delta_{c''}\nabla \end{pmatrix}$$

onde ∇ é o determinante e $\delta_x\nabla$ é o cofator do elemento x, na matriz inicial.

Neste mesmo artigo, Cayley denomina de matriz unidade, e denota por I, o produto de uma matriz pela sua inversa e afirma que, quando $\nabla = 0$, a matriz é indeterminada, e não admite inversa. [A matriz indeterminada de Cayley corresponde à matriz singular, em terminologia moderna].

Vamos agora à dedução do método para o cálculo da inversa [caso exista] de matrizes de ordem $n \times n$, baseado em determinantes. Iniciemos com a definição à seguir:

Definição 3.1.1. *Seja K um corpo, A uma matriz de ordem $n \times n$, sobre K. Denomina-se matriz adjunta clássica e denota-se por $(adjA)$, à matriz transposta dos cofatores de A. Ou seja:*

$$(adjA) = (cofA)^t$$

Pela definição de matriz transposta, os elementos da matriz adjunta clássica de uma matriz A, denotados por $(adjA)_{ij}$, podem ser expressos como segue:

$$(adjA)_{ij} = c_{ji} = (-1)^{i+j} det[A(j|i)]$$

Teorema 3.1.1. *Seja K um corpo, A uma matriz de ordem $n \times n$, sobre K e I_n a matriz identidade de ordem $n \times n$. Tem-se:*

$$(adjA).A = det(A)I = A.(adjA)$$

Demonstração.
Seja $[(adjA)A]_{ij}$ os elementos da matriz $(adjA)A$, produto das matrizes $(adjA)$ e A, cujos elementos são $(adjA)_{ij}$ e a_{ij}, respectivamente. Por definição, tem-se:

$$\begin{aligned}
[(adjA)A]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} (adjA)_{ik} a_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_{ki} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} c_{ki}
\end{aligned}$$

Afirmamos que, se $i \neq j$, então:

$$[(adjA)A]_{ij} = 0 \tag{3.1}$$

De fato.

$$[(adjA)A]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} c_{ki} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{kj} det[A(k|i)] = 0 \tag{3.2}$$

pois, trata-se do determinante de uma matriz obtida da matriz na qual a i-ésima coluna coincide com a j-ésima coluna.

Obs. A afirmação em 3.1 equivale a dizer que, "em uma matriz A, de ordem $n \times n$, sobre um corpo K, a soma dos produtos dos elementos de uma linha (resp. coluna) de A pelos cofatores dos elementos correspondentes de outra linha (resp. coluna) de A é nula".

Este resultado é conhecido, no contexto da Algebra Linear, como Teorema de Cauchy.

No caso $i = j$, temos:

$$[(adjA)A]_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}c_{ki} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+i}a_{ki}det[A(k|i)] = det(A) \tag{3.3}$$

Portanto [de forma análoga] podemos afirmar:

$$(adjA).A = det(A)I = A.(adjA) \tag{3.4}$$

$\square$

Teorema 3.1.2. *Seja K um corpo e A uma matriz de ordem* $n \times n$*, sobre K. Nestas condições, A é inversível, se, e somente se,* $det(A) \neq 0$*. Ainda, se A for inversível, temos:*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adjA \tag{3.5}$$

Demonstração.
Suponhamos que a matriz A seja inversível. Nestas condições, existe uma única matriz, que indicaremos por A^{-1}, a qual satisfaz:

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$$

$$1 = det(I_n) = det(AA^{-1}) = det(A^{-1}A)$$

Segue, do Teorema de Binet [Teorema (2.4.8)], que:

$$det(A).det(A^{-1}) = 1$$

Portanto, $det(A) \neq 0$.

Reciprocamente, suponhamos que $det(A) \neq 0$.

Rescrevendo a igualdade [3.4],

$$(adjA).A = det(A)I_n = A.(adjA) \tag{3.6}$$

logo:

$$[\frac{1}{det(A)}(adjA)].A = I_n = A.[\frac{1}{det(A)}(adjA)] \tag{3.7}$$

Por unicidade da inversa, segue-se que A tem inversa e vale:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(adjA) \tag{3.8}$$

□

Como exemplo, determinaremos a matriz A^{-1}, inversa da matriz A, abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Temos $det(A) = -5$, além disso:

$$(adjA) = \begin{bmatrix} 2 & -11 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 8 & -5 \end{bmatrix}$$

Assim, pelo teorema 3.1.2, segue que:

$$A^{-1} = -\frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -11 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 8 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{11}{5} & -1 \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{8}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

3.2 Resolução de sistemas lineares

Contexto histórico geral

O estudo de sistemas de equações foi a principal motivação para o desenvolvimento da teoria de determinantes ao longo da história.

Segundo Eves (2011, p. 444), os primeiros indícios desta relação são atribuídos ao matemático japonês Seki Kõwa, no século XVII. Kõwa deparou-se com Determinantes, ao buscar soluções para Sistemas Lineares, através do método da eliminação, que consiste na obtenção de uma matriz triangular superior, chamada Matriz Resultante.

Tal método foi atribuído posteriormente ao matemático alemão Carl Friedrick Gauss (1777 - 1855), atualmente conhecido como Método do Escalonamento.

Entretanto, ainda segundo Eves (2011, p. 444), o início da formalização da teoria de determinantes deve-se ao matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz, por volta do ano 1693.

Muir (1905, p. 6) ressalta, desse período, a troca de correspondências entre Leibniz e o matemático francês Guillaume François Antoine, mais conhecido como Marquês de L'Hospital. Em uma dessas correspondências, Leibniz menciona a utilização de números no lugar de letras para a identificação de coeficientes em um sistema de equações lineares, o qual L'Hospital responde com certa desconfiança.

De qualquer modo, a partir de então, os coeficientes dos sistemas lineares passaram a ser analisados a partir de arranjos tabulares e agregaram índices em sua notação, o que séculos depois, passou a ser denominado "Matriz dos coeficientes" de um sistema linear.

De fato, e conforme mencionamos na seção anterior, cronologicamente, o estudo de determinantes precede o desenvolvimento da teoria das matrizes. Kline (1972, p. 805) reafirma este aspecto, e menciona o matemático britânico Arthur Cayley, um dos primeiros a publicar uma série de artigos sobre teoria das matrizes, em meados do século XIX. Segundo Kline, Cayley deixou claro que as matrizes tornaram-se objetos de seu estudo, enquanto forma conveniente de se expressar os coeficientes de um sistema linear, de modo a facilitar sua resolução.

Já no século XVIII, vários matemáticos deixaram suas contribuições no desenvolvimento da teoria de determinantes, enquanto dedicavam-se também ao estudo de Sistemas Lineares. Entre eles estão o francês Étienne Bézout, os suíços Gabriel Cramer e Leonard Euler e o Inglês Isaac Newton.

De acordo com Kline (1972, p. 607), o início do século XVIII traz consigo o problema de se determinar soluções de sistemas de equações polinomiais, no conjunto dos números complexos.

Esta motivação levou ao desenvolvimento de determinantes especiais [chamados resultantes], que, por serem aplicados à polinômios no corpo dos números complexos, fogem ao escopo deste trabalho.

Kline salienta que Newton e Euler foram os precursores no desenvolvimento deste tema, tratando-o em suas respectivas obras "Arithmética Universalis", de 1720 e "Introductio in analysin infinitorum", de 1748.

Posteriormente, já na segunda metade do século XVIII, o estudo de sistemas de equações polinomiais e de resultantes ganharam nova motivação, relacionada à resolução de sistemas de equações polinomiais em duas variáveis, o que, geometricamente, representa estabelecer condições de existência e calcular intersecções entre curvas algébricas. Euler, em 1764 e Bezout, em 1779, publicaram resultados a esse respeito.

3.2.1 O determinante na resolução de sistemas lineares de n equações e n incógnitas. Regra de Cramer

Introdução histórica

Segundo Muir (1905, p. 12), Cramer publica o método que leva o seu nome, para resolução de sistemas lineares de n equações a n incógnitas, em sua obra "Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques", de 1750. No apêndice da obra, Cramer explicita a regra para sistemas lineares de uma, duas e três incógnitas e, posteriormente, a generaliza para sistemas de n equações e n incógnitas.

Kline (1972, p. 606), por sua vez, ressalta que a regra de Cramer, para sistemas de equações lineares em duas, três e quatro incógnitas já havia sido elaborada pelo matemático escocês Colin Maclaurin, provavelmente em 1729 e publicada postumamente em sua obra "Treatise of Algebra", de 1748, porém tal regra somente veio a ganhar destaque com a publicação de Cramer, devido a clareza e eficiência da notação utilizada por este.

Bézout, por sua vez, em 1779, publica a obra "Théorie Générale des Equations Algébriques", na qual constam importantes resultados relacionados à sistemas de equações, entre eles, o método de resolução de um sistema de três equações a três incógnitas, muito similar ao método de Cramer, e que podia ser generalizado para n equações a n incógnitas.

A seguir, vamos descrever a técnica de resolução de sistemas lineares de n equações a n variáveis, conhecida como "Regra de Cramer", a qual é uma aplicação direta de determinante e suas propriedades.

Consideremos o sistema [linear de n equações à n variáveis e com coeficientes em um dado corpo K]:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Esse sistema pode ser matricialmente representado por $AX = B$, onde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

são matrizes respectivamente de ordem $n \times n$, $n \times 1$ e $n \times 1$, sobre K.

Durante a descrição desta técnica, faremos uso do determinante de matrizes da forma:

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Observe que a matriz A_j é a matriz obtida da matriz A, onde substituímos a sua j-ésima coluna pela [única] coluna da matriz B.

Como $AX = B$, segue que:

$$(adjA)AX = (adjA)B$$

Mas, pelo teorema 3.1.1, temos:

$$(adjA)A = det(A)I$$

Logo,

$$det(A)IX = (adjA)B$$

Mas $IX = X$, portanto:

$$det(A)X = (adjA)B$$

Pela definição do produto de matrizes, segue que:

$$det(A)x_j = \sum_{i=1}^{n} b_i(adjA)_{ji}$$

que, de acordo com a definição 3.1.1, pode ser reescrito como:

$$det(A)x_j = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} b_i det[A(i|j)]$$

mas, o segundo membro da igualdade acima é exatamente o determinante da matriz A_j, isto é:

$$det(A)x_j = det(A_j)$$

Agora, se $det(A) \neq 0$, então podemos escrever:

$$x_j = \frac{det(A_j)}{det(A)}, \forall\, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

Por ser baseada em funções determinantes, a regra de Cramer garante que, se $det(A) \neq 0$, o sistema linear em questão possui solução única em K.

3.2.2 O uso da Regra de Cramer nos casos n=2 e n=3

Para sistemas lineares em que o número "n" de equações é o mesmo que o número de incógnitas e essa quantidade não é grande, por exemplo, nos casos $n = 2$ ou $n = 3$, e o objetivo seja resolver o sistema sem uso de software, isto é, deseja-se resolver "manualmente", acreditamos que a "Regra de Cramer" seja bastante eficiente. É óbvio que a técnica de escalonamento também tem seu grande mérito, mas isto pode ser assunto para outro momento. À guisa de aplicação, vamos analisar o caso $n = 2$.

Seja o sistema de equações:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

no qual os elementos a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22} são os coeficientes, x e y as incógnitas e b_1 e b_2 os termos independentes das equações, todos pertencentes à um corpo K.

Dado esse sistema desejamos resolvê-lo. Resolver esse sistema significa determinar todos os pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, que satisfaçam as duas equações simultaneamente.

Sabemos que, no ensino médio, geralmente o aluno aprende a resolver [algebricamente] esse sistema, ou pelo **método de adição**, ou pelo **método de comparação** ou, ainda, pelo **método de substituição**. O método que iremos focar será o método de adição. Esse método, generalizado abaixo, é a conhecida "Regra de Cramer" desenvolvida, passo a passo.

Usando adequadamente o "método de adição" no sistema (I) acima, obtemos:

$$\begin{cases} [a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}]x = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\ [a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}]y = a_{11}b_2 - b_1a_{21} \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

O que fizemos acima foi, no caso da primeira equação, explicitar a incógnita x e "eliminar" a variável y. Em outras palavras, encontramos um outro sistema "mais simples", onde toda solução de (I) é solução desse novo sistema. [Observe que não dissemos que são equivalentes].

Para isso, multiplicamos a primeira equação em (I) por a_{22} [coeficiente de y na segunda equação em (I)] e multiplicamos a segunda equação em (I) por $-a_{12}$. [a_{12} é coeficiente de y também, na primeira equação de (I)].

Depois disso, somamos, ou seja, a primeira equação em (II) é uma combinação linear das equações de (I), onde os escalares são devidamente escolhidos.

Analogamente para a segunda equação acima, "eliminamos" a variável x e ficamos só com y. Diretamente seria aplicar a regra de Cramer, só que preferimos fazê-la passo a passo.

A equação (II), reescrita de outra forma, é:

$$\begin{cases} det(A)\, x = det(A_1) \\ det(A)\, y = det(A_2) \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}$$

Agora, se $det(A) \neq 0$, teremos:

$$x = \frac{det(A_1)}{det(A)}, \qquad y = \frac{det(A_2)}{det(A)}$$

Cabe aqui uma observação: cada equação do sistema (II) é uma combinação linear das equações do sistema (I), portanto, toda solução do sistema (I) é necessariamente uma solução do sistema (II), mas, nem toda solução do sistema (II) é uma solução do sistema (I), se o $det(A) = 0$.

Agora no caso $n = 3$ o sistema será:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \qquad \text{(IV)}$$

Não vale a pena o esforço físico para transformarmos o sistema (IV), passo a passo, como feito no caso $n = 2$, pois isso implicaria em construírmos muitas combinações lineares das equações acima, com coeficientes devidamente escolhidos, entretanto, antecipamos o resultado final que será:

$$\begin{cases} det(A)\, x = det(A_1) \\ det(A)\, y = det(A_2) \\ det(A)\, z = det(A_3) \end{cases} \qquad \text{(V)}$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \qquad A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{12} & a_{13} \\ b_3 & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{11} & b_2 & a_{13} \\ a_{11} & b_3 & a_{13} \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{11} & a_{12} & b_2 \\ a_{11} & a_{12} & b_3 \end{bmatrix}$$

Finalmente, caso $det(A) \neq 0$, a solução do sistema é dada por:

$$x = \frac{det(A_1)}{det(A)}, \qquad y = \frac{det(A_2)}{det(A)}, \qquad z = \frac{det(A_3)}{det(A)}$$

Como exemplo, utilizaremos a regra de Cramer para determinar as soluções do sistema linear de três equações e três incógnitas, com coeficientes em $\mathbb{R}$, descrito abaixo:

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 1 \\ 3 + y + 5z = 3 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

Conforme as notações acima, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

De modo que: $det(A) = -15$, $det(A_1) = -7$, $det(A_2) = 1$ e $det(A_3) = -5$.

Como $det(A) \neq 0$, aplicando a regra de Cramer, temos:

$$x = \frac{det(A_1)}{det(A)} = \frac{7}{15}, \quad y = \frac{det(A_2)}{det(A)} = -\frac{1}{15}, \quad \text{e } z = \frac{det(A_3)}{det(A)} = \frac{1}{3}.$$

Assim, $\left(\frac{7}{15}, -\frac{1}{15}, \frac{1}{3}\right) \in \mathbb{R}^3$ é a única solução do referido sistema.

Vale ressaltar, entretanto, que a regra de Cramer, embora elegante do ponto de vista matemático, torna-se extensa e trabalhosa para valores de n relativamente grandes, visto que são necessários os cálculos de $n + 1$ determinantes de matrizes de ordem $n \times n$. Diante disso, outros métodos, como o escalonamento, são mais práticos e oportunos para a resolução de sistemas de n equações e n incógnitas, para nós, neste momento, fora de objetivo, visto que estamos focados em aplicações nas quais a função determinante se revele útil e relevante.

3.2.3 O determinante na classificação de sistemas lineares de m equações e n incógnitas

Nesta subseção, vamos discutir a resolubilidade de sistemas lineares de m equações e n incógnitas, associada ao conceito de determinante.

Posteriormente, faremos uma abordagem geométrica da resolução de sistemas lineares de 2 equações e 2 incógnitas, 2 equações e 3 incógnitas e, finalmente, 3 equações e 3 incógnitas. Tal abordagem busca favorecer a aplicação de determinantes no contexto da resolução de sistemas de equações lineares no Ensino Médio, atrelado à visualização geométrica.

Para atingirmos esse objetivo, vamos nos reportar à alguns conceitos oriundos da Álgebra Linear, que nos permitirão enunciar e demonstrar um teorema fundamental para a análise da existência de solução de sistemas lineares não necessariamente homogêneo e de m equações e n incógnitas, muito conhecido - o chamado "Teorema de Rouche Capelli".

Porém, antes de tudo, vamos à:

Introdução histórica

Teoremas importantes relacionados à classificação de sistemas lineares de m equações e n incógnitas e à determinação de suas soluções surgiram no século XIX.

Segundo Kline (1972, p. 803), foi o matemático irlandês Henry John Stephen Smith (1823 - 1883) quem introduziu a idéia de "matriz completa" e "matriz incompleta" do sistema [em linguagem atual], que definiremos neste tópico, para a discussão da existência e quantidade de soluções desses sistemas. [Vale ressaltar que a linguagem deste período não fazia referência à matrizes, visto que este conceito era ainda incipiente, como citado nas seções anteriores. Os textos da época referiam-se às matrizes completa e incompleta do sistema como "arranjos ordenados" completo e incompleto, respectivamente.] (KLINE, 1972, p. 803. Tradução nossa)

Kline (1972, p. 803) destaca a obra "An Elementary Theory of Determinants", de 1867, de autoria do célebre britânico Charles Lutwidge Dodgson, mais conhecido como Lewis Carroll (1832 - 1898), a qual apresenta resultados gerais sobre sistemas lineares de m equações e n incógnitas, com $m > n$, $m < n$ e $m = n$.

Outros matemáticos, entre eles o francês Eugène Rouché (1832 - 1910), o italiano Alfredo Capelli (1855-1910), o alemão Leopold Kronecker (1823 - 1891), bem como o próprio Arthur Cayley também deixaram contribuições significativas nesta área. Aos dois primeiros, inclusive, é atribuido o teorema principal desta subseção, denominado "Teorema de Rouché-Capelli".

Diante disso, Kline (1972, p. 803) menciona o enunciado do Teorema de Rouché-Capelli, em linguagem da época: "Para um sistema não homogêneo de m equações e n incógnitas admitir soluções, é necessário e suficiente que a maior ordem de um "menor" não nulo, tanto do arranjo ordenado completo, quanto incompleto, seja a mesma."

Observação: "Menor", em linguagem atual, corresponde, ao mesmo tempo, à uma submatriz B, quadrada, extraída de uma matriz A, qualquer, bem como ao respectivo valor do determinante da submatriz B. (LACAZ NETTO, 1944, p. 8)

Vamos agora aos conceitos de Álgebra Linear, necessários aos propósitos desta subseção.

Observação 3.2.1. *Dada uma matrix A, de ordem $m \times n$ e dado $0 \leq r \leq m$ e $0 \leq s \leq n$, podemos construir $C_r^m \times C_s^n$ submatrizes da matriz A, de ordem $r \times s$.*

Definição 3.2.1. *(Característica de uma matriz)*

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Denominamos de característica de A ao único número natural k, $\quad 0 \leq k \leq min\{m, n\}$, tendo as seguintes propriedades:

1. *$k = 0$, se $A = 0$, isto é, se a matriz A for a matriz nula.*

2. Se a matriz A for não nula, então existe uma submatriz quadrada, B_k, de ordem k, $\quad 1 \leq k \leq min\{m, n\}$, da matriz A, tal que $\det(B_k) \neq 0$.

3. Qualquer submatriz quadrada B, de A, de ordem estritamente maior que k, caso exista, tem determinante igual a 0.

Observação 3.2.2. *Por definição, a característica de uma matriz A é um número natural maior ou igual a 0 e menor ou igual ao mínimo entre o número de linhas e número de colunas da matriz A.*

Observação 3.2.3. *A característica de uma matriz A é igual à característica de A^t, transposta de A.*

Observação 3.2.4. *Se uma matriz B for obtida da matriz A, permutando-se a ordem das linhas e/ou das colunas, então ambas tem a mesma característica, em decorrência da definição de determinante.*

Observação 3.2.5. *Se uma matriz B for obtida da matriz A, eliminando-se da matriz A todas as linhas que forem combinações lineares de linhas restantes da matriz A e também eliminando-se todas as colunas que forem combinações lineares das colunas restantes da matriz A, então ambas tem a mesma característica.*

Definição 3.2.2. *(Orlamento ordem 1)*

Seja A uma matriz , B e C submatrizes de ordem $p \times p$ e $p+1 \times p+1$, respectivamente, da matriz A. Dizemos que a submatriz C é um orlamento de ordem 1 da submatriz B, se B for a submatriz de C formada pelas primeiras p linhas e pelas primeiras p colunas da matriz C.

Teorema 3.2.1 (Teorema de Kronecker)**.** *Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. A matriz A tem característica p se, e somente se, existe uma submatriz B_p, de ordem $p \times p$, tal que $\det(B_p) \neq 0$ e tal que qualquer orlamento C de ordem 1 de B_p tem determinante igual a zero.*

Demonstração.

Seja a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

($\Rightarrow$) É imediato, pela definição de característica, isto é, como A, por hipótese, tem característica p, então existe uma submatriz B_p, de ordem $p \times p$, tal que $\det(B_p) \neq 0$ e, além disso, toda submatriz quadrada C, extraída de A, de ordem estritamente maior que p, [caso exista], tem determinante nulo, por definição de característica, o que inclui os orlamentos de ordem 1 de B_p.

($\Leftarrow$) **Reciprocamente**, suponhamos que exista uma submatriz B_p, de ordem $p \times p$, extraída de A, tal que $\det(B_p) \neq 0$ e tal que qualquer orlamento C de ordem 1 de B_p tem determinante igual a zero. Vamos provar que a matriz A tem característica p.

Pela Observação 3.2.4, não há perda de generalidade em supor que B_p é constituída pelos elementos de intersecção das p primeiras linhas e das p primeiras colunas da matriz A. Assim:

$$det(B_p) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0$$

Consideremos agora as submatrizes C_s abaixo, de ordem $(p+1)\times(p+1)$, extraídas de A:

$$C_s = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} & a_{ps} \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rp} & a_{rs} \end{bmatrix}$$

para $s = 1, 2, \cdots, n$ e um valor de r fixado, $r \in \{p+1, p+2, \cdots, m\}$

Neste caso, $det(C_s) = 0$, para todos os valores possíveis de r e s.

De fato, se $s = 1, 2, \cdots, p$, $det(C_s) = 0$, pois C_s possui duas colunas iguais.

Caso $s = p+1, p+2, \cdots, n$, as submatrizes C_s são orlamentos de ordem 1 de B_p para todo $r \in \{p+1, p+2, \cdots, m\}$, logo, por hipótese $det(C_s) = 0$.

Desenvolvendo tais determinantes pela última coluna [via o método de Laplace], obtemos:

$$a_{1s}c_{1s} + a_{2s}c_{2s} + \cdots + a_{rs}det(B_p) = 0$$

Como $det(B_p) \neq 0$, por hipótese, segue que:

$$a_{rs} = \lambda_1 a_{1s} + \lambda_2 a_{2s} + \cdots + \lambda_p a_{ps}$$

para $\lambda_i = \dfrac{c_{is}}{det(B_p)}$, $1 \leq i \leq p$.

Desse modo, para $s = 1, 2, \cdots, n$, obtemos:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{r1} & = & \lambda_1 a_{11} & + & \lambda_2 a_{21} & + & \cdots & + & \lambda_p a_{p1} \\ a_{r2} & = & \lambda_1 a_{12} & + & \lambda_2 a_{22} & + & \cdots & + & \lambda_p a_{p2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{rp} & = & \lambda_1 a_{1p} & + & \lambda_2 a_{2p} & + & \cdots & + & \lambda_p a_{pp} \\ a_{rn} & = & \lambda_1 a_{1n} & + & \lambda_2 a_{2n} & + & \cdots & + & \lambda_p a_{pn} \end{array}$$

isto é, todas as linhas de ordem r da matriz A, $(r = p+1, p+2, \cdots, m)$, são combinações lineares das p primeiras linhas de A, segundo os coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$, podendo, pela Observação 3.2.5, serem desprezadas, sem que a característica da matriz A seja alterada.

Em outras palavras, a matriz A possui a mesma característica de uma matriz M, com exatamente p linhas [que correspondem às p primeiras linhas de A]. Logo, pela Observação 3.2.2, a característica da matriz A assume, no máximo, o valor p. Como, por hipótese, $\det(B_p) \neq 0$ e B_p é uma submatriz de A, de ordem $p \times p$, segue que a matriz A tem característica p.

□

Definição 3.2.3 (Classificação de sistemas lineares de m equações e n incógnitas quanto ao número de soluções)**.** *Um sistema linear pode ser classificado como* **possível***, quando admite solução e* **impossível***, quando não admite solução. Se o sistema for possível, então o mesmo será denominado* **determinado***, se admitir uma única solução e* **indeterminado***, se admitir mais de uma solução.*

Representaremos um sistema linear de m equações e n incógnitas da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases}$$

cujos coeficientes, incógnitas e escalares pertencem à um corpo K. Para analisarmos esse sistema quanto à sua quantidade de soluções, serão necessárias as definições a seguir:

Definição 3.2.4 (Matriz completa do sistema). *Denominamos matriz completa do sistema acima, à matriz de ordem $m \times (n+1)$, formada pelos coeficientes e pelos termos independentes do sistema, cada coluna ordenada pela ordem do grau de cada monômio que aparece em cada linha e finalmente, inclui-se o termo independente, e cada linha ordenada pela ordem das equações.*

Definição 3.2.5 (Matriz incompleta do sistema). *Denominamos matriz incompleta do sistema à submatriz de ordem $m \times n$, obtida da matriz completa, pela eliminação da última coluna formada pelos termos independentes de cada equação.*

Finalmente, enunciaremos o Teorema de Rouché-Capelli, o qual nos permitirá relacionar a possibilidade de resolução de um sistema linear com a característica das matrizes completa e incompleta do sistema.

Teorema 3.2.2 (Teorema de Rouché-Capelli). *Seja um sistema linear de m equações e n incógnitas, cujos coeficientes, incógnitas e escalares pertencem à um corpo K. Se p corresponde à característica da matriz incompleta do sistema e q corresponde à característica da matriz completa do sistema, então:*
O sistema é possível se, e somente se, $p = q$.

Demonstração.

($\Rightarrow$) É imediato.

Supondo que o sistema seja possível, isto é, que admite pelo menos uma solução, então a coluna dos termos independentes é uma combinação linear das colunas da matriz incompleta do sistema.

Neste caso, de acordo com a Observação 3.2.5, para o cálculo de q, podemos desconsiderar a última coluna [dos termos independentes] da matriz completa, mas, isto equivale a afirmar que a característica da matriz completa coincide com a característica da matriz incompleta, isto é, $q = p$.

($\Leftarrow$)

Reciprocamente, suponhamos que $q = p$. Vamos mostrar que o sistema abaixo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

É possível, isto é, admite pelo menos uma solução.

Por hipótese temos: p=q. Logo, podemos extrair da matriz **incompleta**, uma submatriz D_p, de ordem $p \times p$, com determinante diferente de zero, e tal que qualquer orlamento de ordem 1 dessa submatriz, caso exista, terá determinante nulo.

[Quaisquer destes orlamentos de ordem 1 são, obviamente, submatrizes da matriz **completa**.]

Não há perda de generalidade, [decorrência das observações anteriormente feitas], em supor que essa submatriz seja constituida pelos elementos das p primeiras linhas e as p primeiras colunas da matriz incompleta.

Temos, portanto:

$$det(D_p) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0$$

Além disso, na hipótese de $p < m$, sejam as submatrizes B_r, orlamentos de ordem 1 de D_p que contém a coluna dos termos independentes do sistema.

Temos:

$$det(B_r) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} & b_p \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rp} & b_r \end{vmatrix} = 0$$

para $r = p+1, p+2, \cdots, m$.

O determinante acima calculado via última coluna, nos dá:

$$b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_p\alpha_p + b_r det(D_p) = 0 \tag{3.9}$$

Como $det(D_p) \neq 0$, podemos escrever:

$$b_r = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \cdots + b_p\beta_p \tag{3.10}$$

onde, $\beta_i = -\dfrac{\alpha_i}{det(D_p)}$, para $i = 1, 2, \cdots, p$.

Portanto, concluímos que b_r é combinação linear de $b_1, b_2, \cdots, b_p$, segundo os coeficientes $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p$.

Provaremos agora, que o primeiro membro de qualquer equação de ordem r, [$r = p+1, \cdots, r = m$], [caso exista], do sistema, também é combinação linear dos primeiros membros das p primeiras equações, segundo os mesmos coeficientes $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p$ e concluíremos, com isso, que qualquer equação de ordem r [$r = p+1, \cdots, m$] do sistema, [caso exista], é combinação linear das p primeiras equações, **segundo os mesmos coeficientes** $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p$.

Para tanto, consideremos as submatrizes:

$$A_s = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} & a_{ps} \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rp} & a_{rs} \end{bmatrix}$$

para $s = 1, 2, \cdots, n$ e fixemos um valor para $r \in \{p+1, p+2, \cdots, m\}$.

Sabemos, de análise anterior, que $det(A_s)$, para $s \in \{1, 2, \cdots, n\}$, é sempre nulo e todos compartilham as mesmas p primeiras colunas.

Multipliquemos agora, a última coluna de cada matriz A_i por um escalar x_i [variável x_i do sistema], para $i = 1, 2, \cdots, n$, [mantendo assim a nulidade dos determinantes] e, posteriormente, vamos somá-las.

Devido à n-linearidade da função determinante, tal soma resulta que seu determinante é nulo, isto é:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} & (a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n) \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rp} & (a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n) \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante acima através da última coluna, obtemos:

$$\begin{aligned} &(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)\alpha_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n)\alpha_2 + \cdots + \\ &+ (a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n)\alpha_p + (a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n)D_p = 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

[Em 3.9 e 3.11, os coeficientes α_i, $(i = 1, 2, \cdots, p)$ são os mesmos, visto que os determinantes em ambas as equações, compartilham as mesmas p primeiras colunas.]

E, portanto, temos:

$$\begin{aligned}(a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n) =& \beta_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) + \\ &+\beta_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) + \\ &\vdots \\ &+\beta_p(a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n)\end{aligned}$$

onde os coeficientes β_i, $(i = 1, 2, \cdots, p)$ são os mesmos coeficientes da equação em 3.10.

Provamos assim, que as equações de ordem r, $[r = p + 1, \cdots, m]$, [caso existam], do sistema, são combinações lineares das p primeiras equações do sistema.

Provaremos, enfim, que o sistema admite solução.

Consideremos apenas as p primeiras equações do sistema, cujos coeficientes aparecem em D_p e desprezemos as demais equações, caso existam.

Teremos, assim, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 - a_{1(p+1)}x_{(p+1)} - \cdots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 - a_{2(p+1)}x_{(p+1)} - \cdots - a_{2n}x_n \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \ddots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pp}x_p = b_p - a_{p(p+1)}x_{(p+1)} - \cdots - a_{pn}x_n \end{cases}$$

Como $det(D_p) \neq 0$, a família a $n - p$ parâmetros $x_{p+1}, x_{p+2}, \cdots, x_n$, de sistemas acima, é tal que cada sistema se torna possível e determinado, [por Cramer], podendo ser calculado em função dos parâmetros $x_{p+1}, x_{p+2}, \cdots, x_n$, que estão no segundo membro, [caso existam].

Como, na hipótese de $p = q$, provamos que qualquer equação de ordem r, $[r = p+1, \cdots, m]$, [caso exista], do sistema é combinação linear das p primeiras equações do sistema, segue que toda solução do sistema composto pelas p primeiras equações, é também solução das demais equações do sistema original, que eventualmente tenham sido desprezadas, portanto, o sistema é possível.

□

Corolário 3.2.3. *Seja um sistema linear de m equações e n incógnitas, no qual os coeficientes e termos independentes pertencem a um corpo K. Seja p a característica da matriz incompleta do sistema e q a característica da matriz completa do sistema. O sistema é impossível se, e somente se, $p \neq q$.*

Observação 3.2.6. *Se $p = q = n$, então o sistema é possível e determinado.*

Observação 3.2.7. *Se $p = q < n$, então o sistema é possível e indeterminado. Indeterminado significa que o sistema tem mais de uma solução. A bem da verdade, há uma família de soluções dependentes de $n-p$ parâmetros [chamado grau de liberdade do sistema]. Esses $n-p$ parâmetros são, eventualmente, chamados de variáveis livres, enquanto que as outras variáveis passam a ser chamadas de variáveis dependentes [das variáveis livres].*

Vamos agora aplicar o teorema de Rouché-Capelli na classificação de alguns sistemas lineares abordados no Ensino Médio, visualizando-os geometricamente, através dos exemplos a seguir. Nestes exemplos, denominaremos M_c e M_i às matrizes completa e incompleta do sistema, respectivamente, e p_c e p_i suas respectivas características.

Exemplo 3.2.1. *Seja o sistema linear de duas equações e duas incógnitas:*

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$$

Temos:

$$M_c = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } M_i = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Notemos que $p_c = p_i = n = 2$, *portanto o sistema é possível e determinado. De fato, geometricamente, o sistema representa duas retas concorrentes no plano, que possuem um único ponto em comum, o ponto* $P = (1,1)$ *que é a solução do sistema, conforme representado na figura abaixo.*

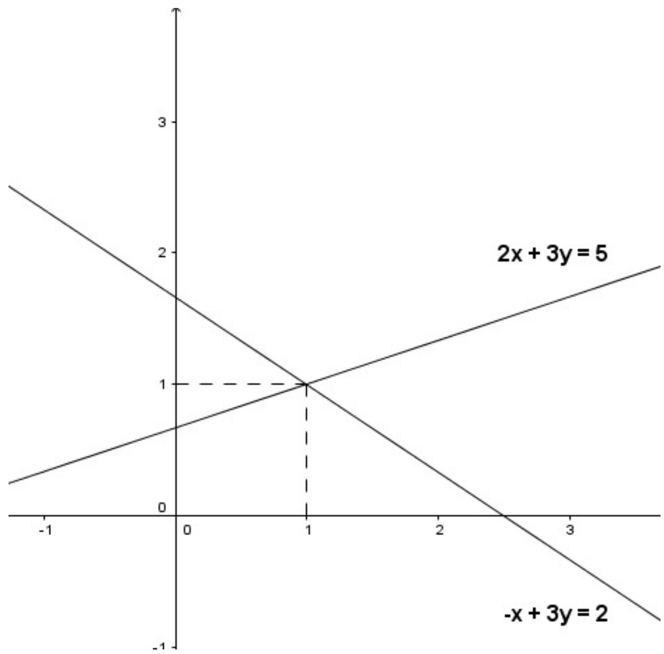

Figura 3.1: Representação geométrica de um sistema de duas equações e duas incógnitas.

Exemplo 3.2.2. *Seja o sistema linear de duas equações e três incógnitas:*

$$\begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ -2x + 4y - 2z = -5 \end{cases}$$

Neste caso, temos:

$$M_c = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 & -5 \end{bmatrix} \text{ e } M_i = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Notemos que qualquer submatriz de M_i, de ordem 2×2 possui determinante nulo, portanto $p_i = 1$.

Por outro lado, M_c possui submatrizes de ordem 2×2 cujo determinante é não nulo, por exemplo, a submatriz $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$. Temos que $det(B) = -7$, logo $p_c = 2$.

Como $p_i = 1 \neq 2 = p_c$, segue, pelo teorema de Rouché-Capelli, que o sistema é impossível.

De fato, analisando geometricamente, vemos que o sistema representa dois planos paralelos no espaço, sem pontos em comum, como mostra a figura 3.2:

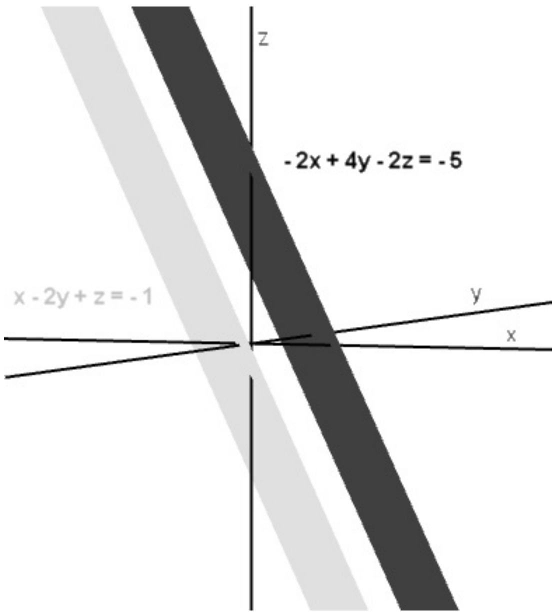

Figura 3.2: Representação geométrica de um sistema impossível de duas equações e três incógnitas.

Exemplo 3.2.3. *Seja o sistema linear de três equações e três incógnitas:*

$$\begin{cases} -2x - 2y - 4z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + y + z = -2 \end{cases}$$

Temos:

$$M_c = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } M_i = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Consideremos a submatriz B, de ordem 2×2, comum à M_c e M_i, tal que:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Temos que $det(B) = -1 \neq 0$.

Além disso, orlando a submatriz B com a linha e as colunas de M_c que não figuram em B, obteremos matrizes de ordem 3×3, cujas duas primeiras linhas são múltiplas entre si, portanto seus determinantes são nulos. Desse modo, pelo teorema de kronecker, segue que $p_c = 2$.

Da mesma forma, orlando a submatriz B com a linha e a coluna de M_i que não figuram em B, obteremos a própria matriz M_i, cujo determinante é nulo. Portanto, pelo teorema de kronecker, $p_i = 2$.

Desse modo, temos $p_c = p_i = 2 < 3 = n$, logo, pelo teorema de Rouché-Capelli, o sistema é possível e indeterminado.

Sabemos, da Geometria Analítica, que o sistema em questão representa, geometricamente, três planos em $\mathbb{R}^3$ e, para que o sistema seja possível e indeterminado, há três possibilidades para as posições relativas entre estes três planos no espaço:

1. *Os três planos são coincidentes,*

2. *Dois dos planos são coincidentes e o terceiro os intersecta ao longo de uma reta,*

3. *Os três planos são distintos e se intersectam ao longo de uma reta.*

A intenção, neste momento, é determinar a posição relativa entre estes 3 planos. Para isso, vamos analisar as posições relativas entre os planos, dois a dois.

Sejam $\pi : -2x - 2y - 4z = 0$, $\gamma : x + y + 2z = 0$ *e* $\lambda : x + y + z = -2$.

(I) Posição relativa entre π *e* γ*:*

Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} -2x - 2y - 4z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Temos, neste caso:

$$M_c = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } M_i = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para determinarmos p_c *e* p_i*, basta notarmos que, em ambas as matrizes, as linhas são múltiplas entre si, portanto qualquer submatriz, de ordem* 2×2*, extraída de* M_c *e de* M_i *terá determinante nulo.*

Assim, sabemos que $p_c = p_i = 1 < 3 = n$*, de modo que, pelo teorema de Rouché-Capelli, o sistema é possível e indeterminado e, neste caso, ou os planos são coincidentes ou se intersectam ao longo de uma reta.*

Como o grau de liberdade do sistema é 2, segue que a intersecção é um plano, logo π *e* γ *são coincidentes.*

(II) Posição relativa entre π e λ:

Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} -2x - 2y - 4z = 0 \\ x + y + z = -2 \end{cases}$$

Temos, neste caso:

$$M_c = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } M_i = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A característica, em ambas as matrizes, corresponde a 2, já que a matriz $C = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é submatriz de ambas e possui determinante não nulo, portanto, $p_c = p_i = 2 < 3 = n$ e o sistema é possível e indeterminado.

Como o grau de liberdade do sistema é 1 neste caso, a intersecção entre os planos corresponde à pontos de uma reta e os planos π e λ intersectam-se ao longo de uma reta.

(III) Posição relativa entre γ e λ:

Como π e γ são coincidentes e λ intersecta π ao longo de uma reta, segue que λ também intersecta γ ao longo da mesma reta, e portanto, temos a configuração de π e γ coincidentes e λ os intersectando ao longo de uma reta, confome representados na figura 3.3:

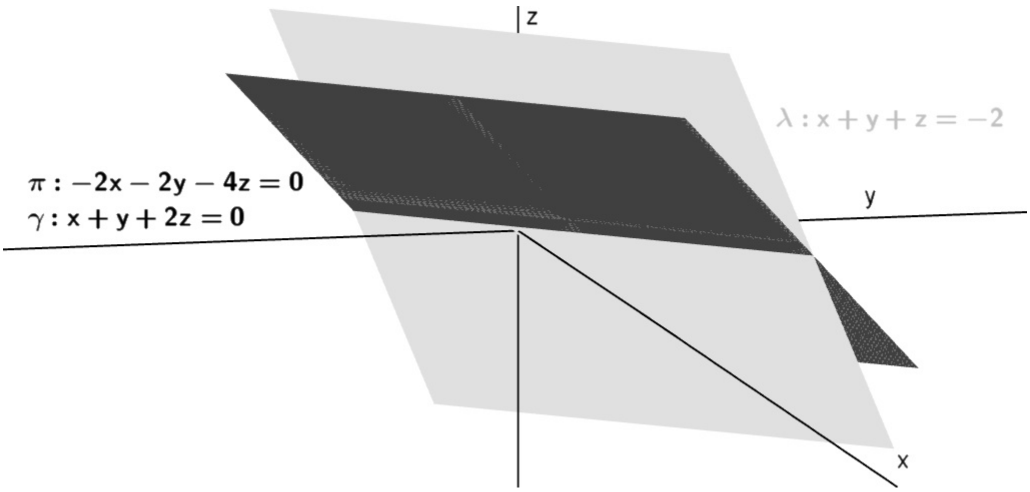

Figura 3.3: Representação geométrica de um sistema possível e indeterminado de três equações e três incógnitas.

Nas próximas seções, apresentaremos aplicações de determinantes relacionadas à geometria plana e espacial em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

3.3 O uso de determinante na verificação da condição de alinhamento de três pontos no plano.

Nesta seção, buscaremos estabelecer, através de determinantes, uma condição necessária e suficiente para que três pontos do plano estejam alinhados. Iniciemos com um pouco de história.

Introdução histórica

A relação entre Geometria e Álgebra é antiga. Eves (2011, p. 60), ressalta o forte caráter algébrico da geometria babilônica, por volta do ano 2000 a.C.

Já no século XIX, o matemático britânico Arthur Cayley foi prodigioso em apresentar resultados geométricos através de ferramentas algébricas.

Segundo Boyer (2004, p. 258), Cayley priorizou o componente estético de suas produções matemáticas e, sobretudo, sentia prazer em resolver problemas elementares relacionados à pontos, linhas e planos de maneiras diferenciadas e elegantes. E a teoria de determinantes proporcionou-lhe um excelente meio de atingir este propósito.

Começemos, assim, pela condição de alinhamento de três pontos em $\mathbb{R}^2$, na linguagem de determinantes.

Uma condição necessária e suficiente para que três pontos do plano estejam alinhados é a nulidade do determinante da matriz de ordem 3 cujas linhas (ou colunas) são compostas pelas coordenadas dos pontos no plano seguida do número 1, isto é,

Afirmação 3.3.1. *Dados os pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$, pertencentes à $\mathbb{R}^2$. Afirmamos que estes pontos estão alinhados, [isto é, pertencem a uma mesma reta] se, e somente se:*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

De fato, consideremos, inicialmente, os vetores $\vec{u} = (a_1, b_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2)$, em $\mathbb{R}^2$. Estes vetores são paralelos [ou Linearmente Dependentes] se, e somente se, um for múltiplo do outro, isto é, se $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ ou $\vec{v} = \alpha\vec{u}$, para algum escalar $\alpha \in \mathbb{R}$.

Desse modo, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores paralelos, a matriz A, de ordem 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

cuja primeira linha é constituída pelas coordenadas do vetor $\vec{u}$ e a segunda linha é constituída pelas coordenadas do vetor $\vec{v}$ possui característica no máximo igual a 1, visto que o determinante de A é nulo, [já que uma linha é múltipla da outra]. Em particular, se quaisquer dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem não nulos, a característica da matriz A assume valor exatamente igual a 1.

Consequentemente, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não paralelos [ou Linearmente Independentes] se, e somente se, a característica da matriz A for igual a 2.

Consideremos agora os pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$, em $\mathbb{R}^2$. A, B e C são colineares se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ forem paralelos, isto é, se a matriz B:

$$B = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}$$

possuir característica menor ou igual a 1.

O que, pela definição de característica, equivale a dizer que:

$$det(B) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

Desse modo,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

Por exemplo, os pontos $A = (2, 5)$, $B = (1, 3)$ e $C = (4, 9)$, pertencentes à $\mathbb{R}^2$ são colineares, visto que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3.4 O uso do determinante na obtenção da equação geral de retas que passam por dois pontos dados e distintos.

Introdução histórica

Como descrito nos tópicos anteriores, o trabalho de Cayley é extremamente rico no sentido de relacionar geometria com a álgebra, especialmente com a teoria de determinantes.

Segundo Boyer (2004, p. 258), Cayley baseia-se em resultados atribuidos ao matemático francês Gaspard Monge, considerado um dos precursores do desenvolvimento da Geometria Descritiva, para descrever diversos entes geométricos através da linguagem algébrica. Entre eles está a equação de uma reta que contém dois pontos dados por meio de um determinante de ordem 3.

Nesta seção, buscaremos deduzir esta equação, com nossa linguagem e com o apoio de conceitos de geometria analítica.

Afirmação 3.4.1. *Sejam $M = (a_1, b_1)$ e $N = (a_2, b_2)$ pontos distintos e pertencentes à $\mathbb{R}^2$. A única reta em $\mathbb{R}^2$ que passa pelos pontos M e N coincide com o conjunto de todos os pontos $P = (x, y)$ do $\mathbb{R}^2$ que satisfazem a equação:*

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.12}$$

Desenvolvendo este determinante pela primeira linha, obtemos a equação da reta expressa em sua forma geral $Ax + By + C = 0$, onde:

$A = \begin{vmatrix} b_1 & 1 \\ b_2 & 1 \end{vmatrix}$, $B = -\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \end{vmatrix}$ e $C = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

Com efeito:

Por definição, uma reta que passa pelos pontos A e B é o conjunto de todos os pontos $P \in \mathbb{R}^2$, tais que os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AB}$ sejam múltiplos, isto é, $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$, ou $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AP}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Desse modo, a reta r que passa pelos pontos $M = (a_1, b_1)$ e $N = (a_2, b_2)$, distintos, é o conjunto de todos os pontos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, tais que os vetores $\overrightarrow{MP} = (x - a_1, y - b_1)$ e $\overrightarrow{MN} = (a_2 - a_1, a_2 - a_1)$ são múltiplos entre si.

O que equivale, pela seção anterior, à:

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - b_1 \\ a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \end{vmatrix} = 0$$

Isto é,

$$0 = \begin{vmatrix} x - a_1 & y - b_1 \\ a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - a_1 & y - b_1 & 0 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 - a_1 & b_2 - b_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Assim,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

é a equação da única reta que contém os pontos M, N e P, que pode ser expressa por:

$$Ax + By + C = 0$$

onde: $A = \begin{vmatrix} b_1 & 1 \\ b_2 & 1 \end{vmatrix}$, $B = -\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \end{vmatrix}$ e $C = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

Por exemplo, a equação da reta que contém os pontos $A = (2, 5)$ e $B = (1, 3)$, pertencentes à $\mathbb{R}^2$, pode ser expressa por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

que é equivalente à equação na forma geral: $2x - y + 1 = 0$, obtida desenvolvendo-se o determinante acima pelos cofatores da primeira linha.

3.5 O determinante no cálculo da área de triângulos e paralelogramos.

Nosso objetivo é expressar a área de triângulos e paralelogramos conhecendo-se as coordenadas de seus vértices. Esse problema será resolvido apenas no plano e no espaço, isto é, apenas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Introdução histórica

Eves (2011, p. 60) caracteriza a relação entre Álgebra e Geometria na matemática babilônica, no período compreendido entre 2000 a.C e 1600 a.C. Nesta época, já havia certa familiaridade com área de triângulos, trapézios e paralelogramos e uma vasta gama de problemas geométricos que eram essencialmente problemas de Álgebra não triviais. Entre estes problemas, haviam aqueles que conduziam a sistemas de equações, nos quais, segundo Santos (2007, p. 8), os babilônios utilizavam palavras no lugar de símbolos, tais como comprimento, largura e profundidade para as atuais incógnitas x, y e z.

Boyer (2004, p. 258), por sua vez, destaca a contribuição de Cayley, o qual estabelece a fórmula para o cálculo da área de um triângulo através de um determinante de ordem 3, como abordado nesta seção.

Para atingirmos os objetivos desta seção, optamos por fazer uso de algumas definições e observações pertinentes a Geometria Analítica:

Definição 3.5.1 (Produto Vetorial)**.** *Dados os vetores* $\overrightarrow{u} = (a_1, b_1, c_1)$ *e* $\overrightarrow{v} = (a_2, b_2, c_2)$*, em* $\mathbb{R}^3$*, o produto vetorial de* $\overrightarrow{u}$ *por* $\overrightarrow{v}$ *é o vetor* $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$*, tal que:*

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3}$$

onde $\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0)$*,* $\overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0)$ *e* $\overrightarrow{e_3} = (0, 0, 1)$*.*

Observemos que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ pode ser obtido através do "determinante simbólico" da matriz de ordem 3×3, cujos elementos da primeira linha são os vetores $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ e $\overrightarrow{e_3}$ e os elementos da segunda [resp. terceira] linhas são as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u}$ [resp. $\overrightarrow{v}$], calculado via os elementos da primeira linha.

Definição 3.5.2 (Norma de um vetor)**.** *Sejam os pontos A e B em* $\mathbb{R}^3$ *e o vetor* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$*. À distância entre os pontos A e B, denominamos norma ou comprimento de* $\overrightarrow{u}$ *e denotamos por* $||\overrightarrow{u}||$*.*

Observação 3.5.1. *Dados os vetores* $\overrightarrow{u} = (a_1, b_1, c_1)$ *e* $\overrightarrow{v} = (a_2, b_2, c_2)$*, em* $\mathbb{R}^3$*, a norma do produto vetorial* $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ *pode ser expressa por:*

$$||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{u}|| \cdot ||\overrightarrow{v}|| \cdot sen\ \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

Observação 3.5.2. *Estamos, agora, em condições de descrever as áreas de paralelogramos e triângulos em* $\mathbb{R}^2$ *e* $\mathbb{R}^3$*, conforme desejamos. Buscaremos relacionar a norma do produto vetorial de dois vetores não paralelos em* $\mathbb{R}^3$ *como sendo a área de um paralelogramo "gerado" por esses dois vetores.*

Inicialmente vamos determinar a área de um paralelogramo em $\mathbb{R}^2$ gerado por 3 pontos não colineares $P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2),\ R = (x_3, y_3)$. Vamos considerar o espaço $\mathbb{R}^2$ como sub-espaço de $\mathbb{R}^3$, de modo que $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 |\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$.

Afirmação 3.5.1. *Consideremos o paralelogramo, gerado pelos pontos não colineares $P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2),\ R = (x_3, y_3)$. A área desse paralelogramo pode ser obtida por:*

$$S_p = \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|$$

De fato, tomemos os referidos pontos em $\mathbb{R}^3$, ou seja, vamos considerar: $P = (x_1, y_1, 0), Q = (x_2, y_2, 0),\ R = (x_3, y_3, 0)$. Sejam: $\vec{u} = Q - P = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0)$ e $\vec{v} = R - P = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, 0)$, conforme a figura abaixo:

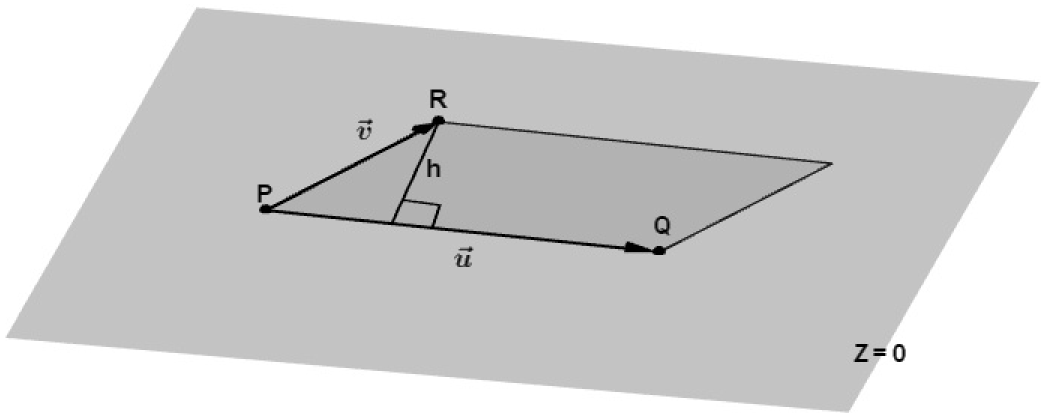

Figura 3.4: Área de paralelogramos no plano.

Assim, a área S_p do paralelogramo pode ser obtida pela expressão:

$$S_p = ||\vec{u}|| \cdot h$$
$$S_p = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot sen\ \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

O que, pela Observação 3.5.1, corresponde a:

$$S_p = ||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}||$$

Mas,

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3}$$

Portanto:

$$S_p = ||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = \left\| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right\| = \left\| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right\|$$

Por exemplo, a área S_p do paralelogramo em $\mathbb{R}^2$, gerado pelos pontos não colineares $P = (1, 2)$, $Q = (5, 2)$ e $R = (4, 6)$ corresponde à:

$$S_p = \left\| \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} \right\| = |16| = 16$$

Passemos à área S_t de um triângulo em $\mathbb{R}^2$:

Corolário 3.5.1. *Consideremos o triângulo PQR, não degenerado, e de vértices: $P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2)$ e $R = (x_3, y_3)$. Nestas condições, a área S_t desse triângulo pode ser obtida por:*

$$S_t = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right\|$$

O que é decorrência do fato que o triângulo pode ser visto como sendo a "metade" de um paralelogramo.

Agora vejamos a mesma situação em $\mathbb{R}^3$.

Afirmação 3.5.2. *Consideremos, em $\mathbb{R}^3$, o paralelogramo gerado pelos 3 pontos não colineares $P = (x_1, y_1, z_1), Q = (x_2, y_2, z_2)$ e $R = (x_3, y_3, z_3)$, conforme a figura abaixo:*

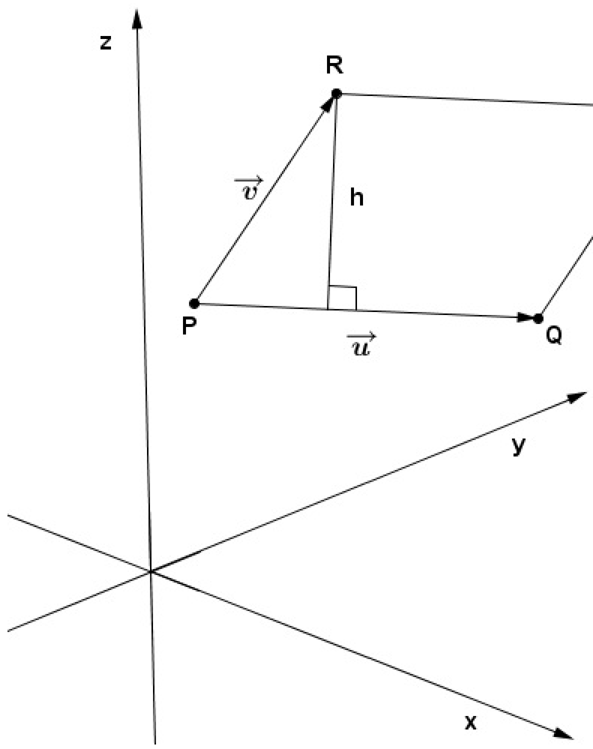

Figura 3.5: Área de paralelogramos no espaço.

A área S_p desse paralelogramo pode ser obtida por:

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2}$$

De fato, consideremos os vetores $\vec{u} = Q - P = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ $\vec{v} = R - P = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$

Sabemos, das discussões anteriores, que a referida área é dada por $||\vec{u} \wedge \vec{v}||$.

Além disso:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3} =$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3}$$

De modo que:

$$S_p = ||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2}$$

Como exemplo, calcularemos a área S_p do paralelogramo em $\mathbb{R}^3$, gerado pelos pontos não colineares $P = (2, 2, 1)$, $Q = (-2, -1, 1)$ e $R = \left(1, \dfrac{5}{4}, 3\right)$.

De acordo com a afirmação 3.5.2, temos:

$$\begin{aligned} S_p &= \sqrt{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{5}{4} & 3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & \frac{5}{4} & 1 \end{vmatrix}^2} \\ &= \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2 + 0} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10 \end{aligned}$$

Além disso:

Corolário 3.5.2. *Consideremos em* $\mathbb{R}^3$ *o triângulo* PQR*, não degenerado, cujos vértices são:* $P = (x_1, y_1, z_1), Q = (x_2, y_2, z_2)$ *e* $R = (x_3, y_3, z_3)$*. Nestas condições, a área* S_t *desse triângulo pode ser obtida por:*

$$S_t = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2}$$

Que é decorrência do fato que o triângulo pode ser visto como sendo a "metade" de um paralelogramo.

3.6 O uso de determinante para determinação da equação de um plano no espaço passando por três pontos não colinares.

Nosso objetivo é expressar através de determinantes a equação de um plano em $\mathbb{R}^3$ que passe por 3 pontos não colineares. Mas antes, abordaremos este tema historicamente.

Introdução histórica

Boyer (2004, p. 258) afirma que equações de planos em $\mathbb{R}^3$ também foram objetos de estudo de Cayley, o qual traduziu-as para a linguagem de determinantes. Assim como faremos aqui, Cayley descreve a equação de um plano que contém três pontos dados através de um determinante de ordem 4 e vai além, busca generalizar este resultado para n dimensões, valendo-se de determinantes de ordem $n + 1$.

Neste sentido, Boyer ressalta o desejo de Cayley em buscar a generalização em seus resultados. Segundo o próprio Cayley, "[...] a noção que é realmente fundamental, subjacente e que permeia toda a análise moderna e a geometria, é a de magnitude imaginária na análise e a de espaço imaginário em geometria." (BOYER, 2004, p. 259. Tradução nossa)

Em função do propósito desta seção, enunciaremos a seguir, uma condição necessária e suficiente para que dois vetores em $\mathbb{R}^3$ sejam múltiplos.

Por definição, dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^3$, dizemos que um é múltiplo do outro, ou que ambos são paralelos, ou ainda que são linearmente dependentes se, e somente se, existir algum escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que, ou $\vec{u} = \alpha\vec{v}$, ou $\vec{v} = \alpha\vec{u}$.

Torna-se simples verificar que, se $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ são dois vetores em R^3, então eles são paralelos se, e somente se, a característica da matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

cuja primeira linha é constituída pelas coordenadas do vetor $\vec{u}$ e a segunda linha é constituida pelas coordenadas do vetor $\vec{v}$ é no máximo 1. Se um dos vetores for não nulo então os mesmos serão paralelos se a característica da matriz A for exatamente igual a 1.

Analogamente $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos [também chamados linearmente independentes] se, e somente se, a característica da matriz A acima for exatamente 2.

Conforme descrito no capítulo anterior, afirmar que a característica da matriz A é no máximo 1 é equivalente a afirmar que o determinante de todas as submatrizes quadradas de ordem 2×2, extraídas da matriz A tem determinante igual a zero, isto é:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

Agora, sejam $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ e $C = (x_3, y_3, z_3)$, três pontos quaisquer em $\mathbb{R}^3$. Dizemos que estes 3 pontos do $\mathbb{R}^3$ são colineares se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ e $\overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ são paralelos. Isto significa dizer que a característica da matriz:

$$M = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix}$$

é menor ou igual a 1, isto é,

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Mas isto significa que:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Portanto, uma condição necessária e suficiente para que três pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ e $C = (x_3, y_3, z_3)$ em $\mathbb{R}^3$ sejam colineares é que:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Por definição, três vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$, $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$ do $\mathbb{R}^3$ moram em um plano, ou, em outras palavras, são linearmente dependentes, se, e somente se, um deles for uma combinação linear dos outros dois, isto é, existam números reais α e β, tais que, ou $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$, ou $\vec{v} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{w}$ ou $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, o que signifca que a matriz:

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

tem característica no máximo 2, pois, uma de suas linhas acaba sendo uma combinação linear das outras linhas. Em outras palavras:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Finalmente, se os três vetores, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ pertencerem a um plano e pelo menos dois deles não forem paralelos, então a característica da matriz M é exatamente igual a 2.

Por definição, denominamos de plano em $\mathbb{R}^3$, passando por um ponto P e gerado por dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não paralelos, o conjunto de todos os pontos $X \in \mathbb{R}^3$, tais que o vetor $\overrightarrow{PX}$ seja uma combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, em outras palavras, que os três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\overrightarrow{PX}$ estejam nesse mesmo plano.

Agora estamos em condições de descrevermos a equação de um plano que passa por três pontos não colineares de $\mathbb{R}^3$.

Sejam $A = (a_1, b_1, c_1)$, $B = (a_2, b_2, c_2)$ $C = (a_3, b_3, c_3)$, três pontos não colineares de $\mathbb{R}^3$. O plano em R^3 que passa por esses três pontos é constituído de todos os pontos $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tais que os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AX} = (x - a_1, y - b_1, z - c_1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (a_2 - a_1, b_2 - b_1, c_2 - c_1)$, $\vec{w} = \overrightarrow{AC} = (a_3 - a_1, b_3 - b_1, c_3 - c_1)$, morem nesse plano, ou seja:

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 & z-c_1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1 \end{vmatrix} = 0$$

Essa é exatamente a equação do único plano que passa pelos pontos A, B, C, que pode ser também escrita da seguinte forma:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

A Justificativa é simples, bastando ver que:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 & z-c_1 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 & 0 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 & z-c_1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1 \end{vmatrix} = 0$$

Esta equação pode ser escrita na forma cartesiana a seguir:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

onde:

$$A = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & 1 \\ b_2 & c_2 & 1 \\ b_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ b_3-b_1 & c_3-c_1 \end{vmatrix}$$

$$B = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2-a_1 & c_2-c_1 \\ a_3-a_1 & c_3-c_1 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix}$$

$$D = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Por exemplo, a equação do plano π que contém os pontos $A = (1, -1, 3)$, $B = (4, 0, 1)$ e $C = (2, 1, 3)$, possui equação:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante acima pelos cofatores da primeira linha, reescrevemos a equação do plano π em sua forma cartesiana, isto é:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \cdot x - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot z - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

que corresponde à equação:

$$4x - 2y + 5z - 21 = 0$$

3.7 O determinante no cálculo do volume de paralelepípedos e tetraedros em $\mathbb{R}^3$.

Estamos em $\mathbb{R}^3$ e nosso objetivo é expressar o volume do paralelepípedo e do tetraedro via determinantes. Antes, porém, faremos a introdução histórica.

Introdução histórica

Como dissemos anteriormente, e conforme Eves (2011, p. 61), problemas geométricos babilônios, que datam de aproximadamente 1600 a.C, eram essencialmente, problemas de Álgebra. Como exemplo, Eves menciona a existência, em uma tablete de Argila deste período, de um problema que diz respeito a volumes de troncos de pirâmide, cuja resolução envolve um sistema de equações do tipo:

$$z(x^2 + y^2) = A,\ z = ay + b$$

Já na segunda metade do século XVIII, o matemático italiano Joseph Louis Lagrange apresenta vários resultados relacionados, com destaque para o artigo publicado em um periódico da Universidade de Berlim, intitulado "Nouvelle solution du problème du mouvement de rotaiton d'un corps de figure quelquonq qui n'est animé par aucune force accélératrice", de 1773, no qual, segundo Muir (1905, p. 34), utiliza o determinante para expressar o sêxtuplo do volume de uma pirâmide triangular.

Nas notações de lagrange, $(xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - xz'y'' - yx'z'' - zy'x'')$ corresponde a seis vezes o volume de uma pirâmide triangular, cujos vértices são representados como coordenadas em um sistema cartesiano ortogonal, a saber: $(0, 0, 0)$, (x, y, z), (x', y', z') e (x'', y'', z'').

De acordo com Boyer (2004, p. 258), o volume de tetraedros, via determinantes, também foi objeto de estudo do britânico Cayley, em meados do século XIX. Além disso, uma série de resultados similares foram atribuídos, tanto à Cayley, quanto ao matemático alemão Ludwig Otto Hesse. Ambos, segundo Boyer, efetivamente utilizaram determinantes em Geometria, bem como em análise.

Faremos, neste momento, menção à alguns conceitos de Geometria Analítica, necessários aos propósitos desta seção:

(1) Dados os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ em $\mathbb{R}^3$, não nulos e não múltiplos entre si, o vetor $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, chamado produto vetorial dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ [nesta ordem] é ortogonal aos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

(2) Dados um ponto $P = (x_o, y_o, z_o)$, em $\mathbb{R}^3$ e um plano π, tal que:

$$\pi : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

cuja equação cartesiana corresponde a $Ax + By + Cz + D = 0$, com:

$A = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$, $B = -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ e

$D = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

A distância $d(P, \pi)$, do ponto P ao plano π, é dada por:

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_o + By_o + Cz_o + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

(3) Dados os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ em $\mathbb{R}^3$, o número real $|\vec{u} \times \vec{v}|$, tal que $|\vec{u} \times \vec{v}| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot |\cos(\varphi)|$, onde φ é o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é denominado produto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$.

(4) O volume de um paralelepípedo em $\mathbb{R}^3$, que tem como arestas principais $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ é dado pelo valor absoluto do produto misto: $\vec{w} \times \vec{u} \wedge \vec{v}$, onde aqui, neste produto, o símbolo $\times$ representa produto escalar e o símbolo $\wedge$ representa produto vetorial.

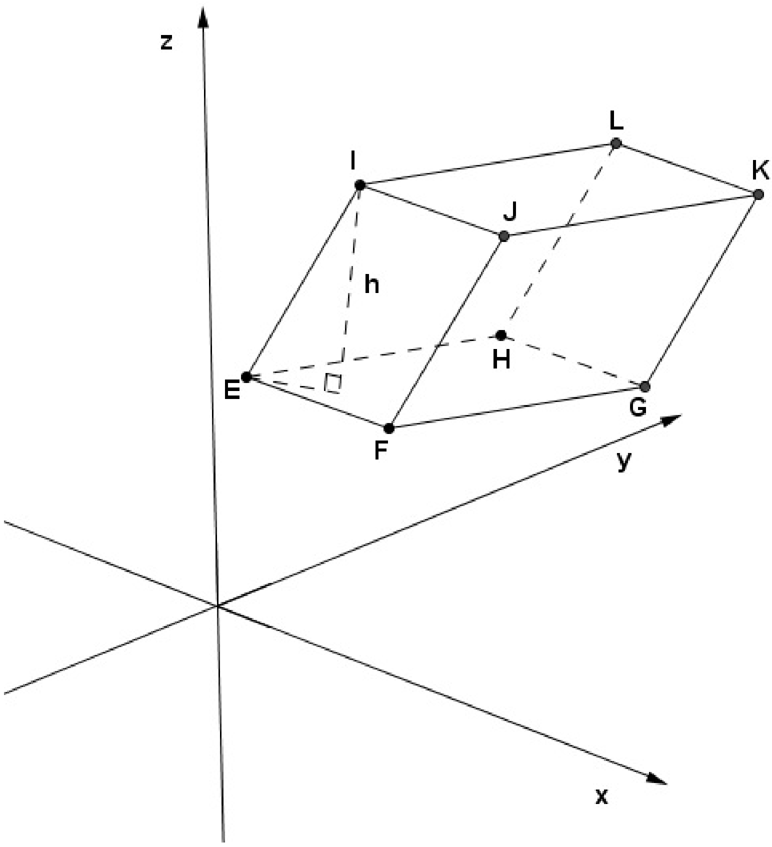

Figura 3.6: Volume de paralelepípedos no espaço.

Nosso objetivo é expressar o volume de um paralelepípedo gerado por 4 pontos não coplanares, em função das coordenadas desses pontos, expressas na base canônica. Consideremos o paralelepípedo gerado pelos 4 pontos $E = (x_1, y_1, z_1)$, $F = (x_2, y_2, z_2)$, $H = (x_3, y_3, z_3)$ e $I = (x_4, y_4, z_4)$ em $\mathbb{R}^3$, não coplanares. Sejam $\overrightarrow{u} = \overline{EF} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{v} = \overline{EH} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ e $\overrightarrow{w} = \overline{EI} = (x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1)$ suas três arestas "principais" conforme a figura acima.

Desse modo, retomando a representação simbólica do produto vetorial $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, estabelecida na seção 3.5 e considerando os itens (1), (2), (3) e (4) acima, temos que, se π é o plano que contém a face $EFGH$ e $d(I, \pi)$ é a distância do ponto I ao plano π, então:

$$d(I,\pi) = \frac{\left| \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} x_4 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} y_4 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} z_4 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2}}$$

Desse modo, o volume V_p do paralelepípedo gerado pelos 4 pontos E, F, H e I, conforme a figura acima, é dado por:

$$V_p = |\vec{w} \times (\vec{u} \wedge \vec{v})| = ||(\vec{u} \wedge \vec{v})||.||w||.|\cos(\varphi)| = ||(\vec{u} \wedge \vec{v})|| \cdot d(I,\pi)$$

onde φ é o ângulo entre o vetor $\vec{w}$ e o vetor $(\vec{u} \wedge \vec{v})$, o produto $||w|| \cdot |\cos(\varphi)|$ é exatamente a altura do paralelepípedo, que na verdade é a distância $d(I,\pi)$ do ponto I até o plano π. Portanto,

$$V_p = \left| \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} x_4 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} y_4 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} z_4 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \right|$$

Que pode ser reescrito da seguinte forma:

$$V_p = \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \right|$$

À título de exemplo, calcularemos o volume V_p do paralelepípedo gerado pelos pontos não coplanares $A = (2,2,1)$, $B = (-2,-1,1)$, $C = \left(1, \dfrac{5}{4}, 3\right)$ e $D = (4,5,2)$.

Temos:

$$V_p = \left\| \begin{array}{cccc} 2 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{5}{4} & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \end{array} \right\| = |-12| = 12$$

De forma análoga, mas, lembrando-se que a área do triângulo de vértices M, N, O é metade da área do paralelogramo, cujas arestas principais sejam dadas pelo vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e que o volume do tetraedro é igual a um terço do volume de um prisma triangular, cuja base corresponda à uma das faces do tetraedro e cuja altura corresponda à altura do tetraedro, relativa à mesma face, estabelecemos a fórmula para o cálculo do volume (V_t), de um tetraedro em $\mathbb{R}^3$.

De fato, seja o tetraedro $MNOP$, representado na figura a seguir, cujos vértices são os pontos $M = (x_1, y_1, z_1)$, $N = (x_2, y_2, z_2)$, $O = (x_3, y_3, z_3)$ e $P = (x_4, y_4, z_4)$, não colineares em $\mathbb{R}^3$. Sem perda de generalidade, consideremos sua base como sendo o triângulo MNO, de área S_t e contido em um plano π.

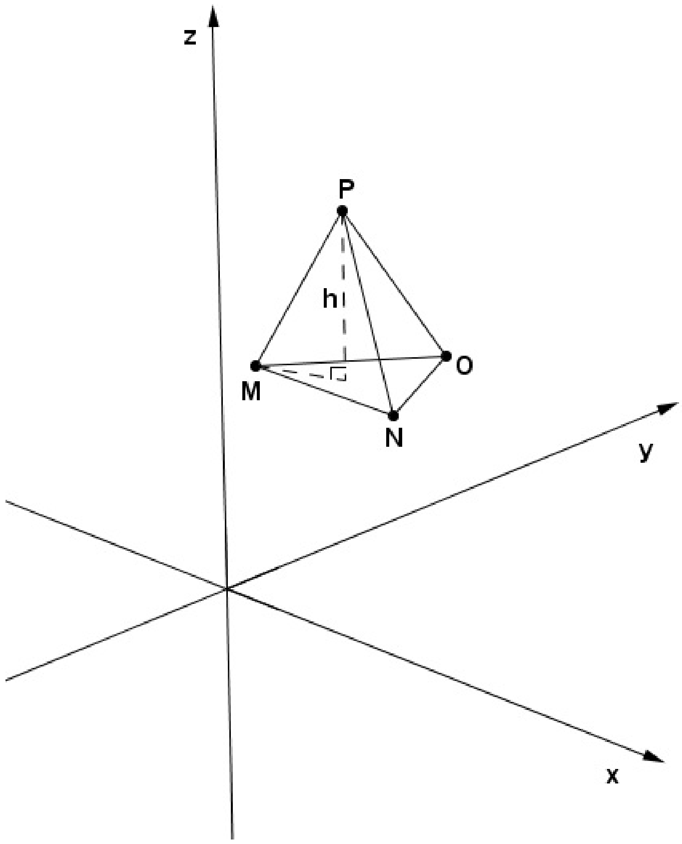

Figura 3.7: Volume de tetraedros no espaço.

Neste caso, temos:

$$
\begin{aligned}
V_T =& \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot ||(\vec{u} \wedge \vec{v})|| \cdot d(P, \pi) \\
=& \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{array}{cccc} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{array} \right\|
\end{aligned}
$$

3.8 O uso do determinante na obtenção da equação da circunferência que passa por três pontos dados e distintos.

O objetivo desta seção é expressar, via determinantes, a equação da circunferência que contém três pontos distintos em $\mathbb{R}^2$. Antes de mais nada, faremos uma breve análise histórica.

Introdução histórica

Por volta do século XVIII, a teoria de determinantes ganhou aplicabilidade no estudo de cônicas, tendo em Cramer e Bezout seus principais contribuintes.

Segundo Muir (1905, p. 12) e Kline (1972, p. 606), a relação entre cônicas e determinantes foi incialmente estabelecida por Cramer, ao associar a determinação dos coeficientes de equações de cônicas à resolução de sistemas de equações lineares.

Neste aspecto, em sua obra "Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques", de 1750, Cramer provou que uma equação, de grau n, de uma curva, fica completamente determinada quando pelo menos $\dfrac{n(n+3)}{2}$ pontos da curva são conhecidos e à título de ilustração, descreve a equação cônica $A + By + Cx + Dy^2 + Exy + x^2 = 0$, de grau 2, cujas incógnitas A, B, C, D e E podem ser determinadas através de um sistema linear de 5 equações e 5 incógnitas, cuja resolução é apresentada no apêndice da obra.

Prosseguimos com o propósito desta seção, afirmando que:

Afirmação 3.8.1. *A equação da circunferência que contém os pontos* $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ *e* $R = (x_3, y_3)$, *não colineares, em* $\mathbb{R}^2$, *é dada por:*

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.13}$$

De fato, desenvolvendo o determinante pela primeira linha, obtemos:

$$A(x^2 + y^2) - Bx + Cy - D = 0 \tag{3.14}$$

onde,

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2 + y_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3 + y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2 + y_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3 + y_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ e}$$

$$D = \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2 + y_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3 + y_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Observemos que $A \neq 0$, já que $|A|$ representa a área do triângulo PQR, que não é degenerado, visto que os pontos PQR não são colineares, por hipótese.

Desse modo, afirmamos que a equação 3.14 é uma equação de circunferência.

Com efeito, a equação 3.14, após completar quadrados, é equivalente a:

$$\left(x - \frac{B}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{2A}\right)^2 = \frac{B^2 - C^2 + 4AD}{4A^2}$$

Portanto, precisamos justificar que $\dfrac{B^2 - C^2 + 4AD}{4A^2} > 0$.

Que o segundo membro é maior ou igual a zero, é decorrência do fato de que os pontos P, Q e R satisfazem a equação. Agora, se o segundo membro da equação fosse nulo, então a equação teria uma única solução e claramente, vemos que a mesma tem, no mínimo, 3 soluções distintas.

Que cada ponto P, Q e R satisfaz a equação, é decorrência do fato de termos duas linhas iguais na matriz [3.13], quando se substituem as variáveis pelas coordenadas dos referidos pontos e isto implica que o determinante é nulo e, portanto, tais pontos satisfazem a equação.

Como exemplo, determinaremos a equação da circunferência que contém os pontos não colineares $P = (1, 2)$, $Q = (7, 0)$ e $R = (5, -2)$.

Pela Afirmação 3.8.1, tal equação é dada por:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 1^2 + 2^2 & 1 & 2 & 1 \\ 7^2 + 0^2 & 7 & 0 & 1 \\ 5^2 + (-2)^2 & 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou seja,

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 49 & 7 & 0 & 1 \\ 29 & 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Agora, desenvolvendo o determinante acima pela primeira linha, temos:

$$(-16)(x^2 + y^2) + 128x + 32y - 112 = 0$$

Dividindo-se a equação por (-16), obtemos:

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y = -7$$

Agrupando-se convenientemente os termos e somando-se (16+1) à ambos os membros da equação, temos:

$$\begin{aligned} & x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = -7 + 16 + 1 \\ \Rightarrow & (x-4)^2 + (y-1)^2 = 10 \end{aligned}$$

que corresponde à equação reduzida da circunferência em questão.

Encerramos este capítulo ressaltando a vasta gama de aplicações de determinantes, envolvidas nas diversas áreas do conhecimento humano, que, pelo peso de nossos propósitos, ficaram de fora destas páginas, como a teoria da eliminação, transformação de coordenadas, mudança de variáveis em integrais múltiplas, soluções de sistemas de equações diferenciais, redução de formas quadráticas, códigos corretores de erros, para citar algumas.

Além disso, estendendo-se os conceitos de determinantes e matrizes para ordens infinitas, de acordo com Kline (1972, p. 811), é possível envolvê-los na determinação de coeficientes de séries de Fourier, na solução de equações diferenciais ordinárias e até no estudo de equações integrais.

De fato, pode-se estabelecer uma série de conexões entre determinantes e o Cálculo Diferencial e Integral. Neste sentido, Boyer (2004, p. 260) destaca o trabalho do alemão Ludwig Otto Hesse, que consolidou o conceito de discriminante de funções em n variáveis para a classificação de seus pontos críticos, o qual nada mais é do que o determinante de uma matriz quadrada denominada Matriz Hessiana, cujos elementos são derivadas parciais de segunda ordem da referida função.

Podemos vislumbrar, contudo, o poder da teoria de determinantes e matrizes para o desenvolvimento da matemática e da física avançada em nossos dias. A esse respeito, Kline (1972, p. 812), cita uma frase do físico e matemático escocês Peter Guthrie Tait (1831 - 1901), com relação ao trabalho de Cayley no que diz respeito à teoria dos determinantes e matrizes: “Cayley está forjando as armas para as futuras gerações de físicos.”(KLINE, 1972, p. 812. Tradução nossa).

Conclusão

Este trabalho traduz um grande esforço em estudar o intrincado assunto "determinante", de forma clara e devidamente fundamentada. Neste contexto, nosso objetivo é o professor. Obviamente há material para ser lapidado e apresentado aos estudantes, porém, sem deixar de lado o rigor matemático envolvido em sua estrutura.

Diante disso, procuramos delinear, ao longo deste trabalho, uma sequência lógica e suficientemente robusta de conceitos, estabelecendo uma base consistente para a abordagem do tema, de acordo com o nível a que nos propusemos, voltado para a formação do professor do Ensino Médio.

É evidente que muitos conteúdos que abordamos aqui não são passíveis de serem ensinados aos alunos da Educação Básica. Não foi esta a intenção como deixamos claro, nas páginas iniciais. Este trabalho foi pensado e escrito para o professor.

Este sim, necessariamente, deve apropriar-se, no mínimo, dos conceitos aqui descritos, para que a sua atuação em sala de aula, na abordagem de determinantes, seja eficiente.

O intuito não é capacitar o professor para ser um calculador de determinantes, tampouco que ele produza calculadores de determinantes em suas salas de aula. Para isto existem bons softwares, que realizam estas operações em segundos, como os dois citados aqui. Nesse sentido, a "Calculadora de determinantes" ainda permite a escolha do método de cálculo, entre vários disponíveis e exibe as operações realizadas em cada método, podendo também ser útil no contexto pedagógico.

O professor precisa ter em mente, que não é suficiente conhecer algumas regras e procedimentos relacionados à determinantes, suas propriedades e métodos de cálculo, e fazer com que seus alunos memorizem-nas.

Buscamos, todavia, com este trabalho, apresentar significação, coerência, justificativas, enfim, razões para se ensinar e aprender determinantes atualmente. Um educador precisa levar em consideração estes princípios, e internalizá-los, pois só assim terá condições de promover aprendizagem significativa em seus alunos.

E neste sentido, buscamos relacionar teoria, aplicações e história no estudo de determinantes, fornecendo ao professor subsídios para que, primeiro, ele próprio conheça razoavelmente o que está ensinando e identifique razões para ensinar tal conteúdo aos seus alunos. Daí, fazendo sentido para o professor, uma abordagem mais significativa tende a acontecer naturalmente.

É certo que houveram desafios, especialmente no capítulo 3, das aplicações. O desafio de apresentar a aplicabilidade do conceito, envolvida em conteúdos presentes no currículo do Ensino Médio, com o rigor com o qual nos propusemos, custou-nos algumas restrições e frustrações, indicando que, o ato de tornar um conteúdo acessível ao aluno, independente do nível no qual esteja, não é tarefa simples, como muitos presumem e evidenciando o imenso abismo que existe entre a transmissão de um conteúdo e a sua significação, sob o ponto de vista do aluno.

Não obstante, ficou evidente, no desenvolvimento deste trabalho, e ressaltado ao final do capítulo 3, a importância da teoria de determinantes para o desenvolvimento da matemática e da física avançada na atualidade, um dos fatores que justificam a sua aprendizagem nas salas de aula.

Do ponto de vista didático, a abordagem histórica e as aplicações apresentadas no capítulo 3 não deixam dúvidas de que a aprendizagem de determinantes pode ser significativa e mais próxima da realidade do aluno. Longe de esgotar o assunto, este capítulo objetiva promover pesquisas mais aprofundadas e direcionadas, dentre as várias faces do conceito, para atender expectativas de aprendizagem diferenciadas.

Ainda no âmbito didático, não podemos deixar de referenciar a figura dos matemáticos Arthur Cayley e Otto Hesse, pela variedade de relações que promoveram entre determinantes e outras áreas do conhecimento. Cayley, como pode ser observado no capítulo 3, estabeleceu uma série de aplicações para determinantes, especialmente na Geometria. Hesse, por sua vez, ganha destaque internacional por uma aplicação de determinantes ao Cálculo Diferencial e Integral. O trabalho desses homens, suas preocupações com a estética e o rigor matemáticos, em meados do século XIX, nos permitem hoje, apresentar determinantes de uma forma mais significativa e agradável, evidenciando a beleza e a magnitude da matemática e buscando novas formas de fazê-la e aprendê-la.

Graças a Cayley, principalmente, pudemos vislumbrar, neste trabalho, o potencial da Geometria em favorecer a aprendizagem de determinantes, pelo nível de significação das aplicações nesta área.

Assim, acreditamos que este trabalho possa auxiliar o professor de Matemática da Educação Básica, fornecendo-lhe uma fundamentação teórica consistente de determinantes, um pouco de sua história e uma série de aplicações, que visa a relacioná-lo à outros temas e conteúdos currículares da Educação Básica, buscando torná-lo, didaticamente, mais atrativo.

E mais que isso, esperamos que este trabalho desperte e promova reflexões e análises, em nós professores, acerca de nossa atuação enquanto educadores, da responsabilidade que temos no processo de aprendizagem e o quanto podemos evoluir na capacidade de tornar conceitos matemáticos acessíveis aos nossos alunos.

Desejamos, sobretudo, que este trabalho inspire outras iniciativas que busquem resgatar o rigor da Matemática aprendida na Educação Básica, que, envolvida em componentes históricos, tecnológicos e práticos, torna-se naturalmente agradável, interessante e prazerosa de ser ensinada e aprendida.

Bibliografia

ALVES, Aretha Fontes. *Álgebra Linear como um Curso de Serviço para a Licenciatura em Matemática: o estudo dos Espaços Vetoriais*. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Juiz de Fora (MG): Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas, 2013, 176 p.

BOYER, Carl B. *History of Analytic Geometry*. New York: Dover Publications, inc, 2004, 291 p.

BRASIL, Ministério da Educação - Secretaria de Educação Média e Tecnológica, *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: 2000, 58 p. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf . Acesso em: 03 de Março de 2016.

CALCULOUS. *Determinante*. Disponível em:
$< http://calculous.com.br/ >$. Acesso em: 06 de Agosto de 2016.

CARVALHO, Sézani Morais Gonçalves de. *Matrizes, Determinantes e Polinômios: Aplicações em códigos corretores de erros, como estratégia motivacional para o ensino de matemática*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Porto Velho: Fundação Universidade Federal de Rondônia - UNIR, 2014, 166 p.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Tradução: Higino H. Domingues. 5^a Edição. Campinas: Editora da Unicamp, 2012, 848 p.

HOFFMAN, K; KUNZE, R. *Álgebra Linear*. Tradução: Adalberto P. Bergamasco. São Paulo: Editora Polígono, 1971, 356 p.

KLINE, Morris. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press, 1972, 1238 p.

LAKAZ NETO, Francisco Antonio. *Fórmas e Equações Lineares*. São Paulo: Editora do Brasil S/A, 1944, 82 p.

MARQUES, Daniel Rodrigues. *Cálculo e aplicações de Determinantes*. Dissertação (Mestrado). Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, 2014, 48 p.

MARTINS, Jamerson Fernando Confort. *Determinantes, propriedades e métodos de condensação*. Dissertação (Mestrado). Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, 2015, 92 p.

MATRIX CALCULATOR. *Calculadora de determinantes*. Disponível em: $<$ *https://matrixcalc.org/pt/det.html* $>$. Acesso em: 05 de Agosto de 2016.

MONTEIRO, L. H. Jacy. *Álgebra Linear*. Volume 1. 4ª Edição. São Paulo: Livraria Nobel, 1969, 256 p.

MOTTA, Carlos Eduardo Mathias. *Uma Proposta Transdisciplinar no Ensino de Matemática para Deficientes Visuais*. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 29 p.

MUIR, Thomas. *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development*. New York: Dover Publications, inc, 1905, 1016 p.

OLIVEIRA, Raphael Fernandes de. *Função determinante*. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática). São Carlos: Universidade Federal de São Carlos, Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia. Departamento de Matemática, 2014, 95 p.

PELLEGRINI, Jerônimo C.. *Álgebra Linear*. Versão 135, 2015, 556 p.

ROTMAN, Joseph J., *An Introduction to the Theory of Groups*. Boston: Allyn and Bacon, 1965.

SANTOS, Robinson Nelson dos. *Uma breve história do desenvolvimento das teorias dos determinantes e matrizes*. Trabalho de Conclusão de Curso. São Carlos: Universidade de São Paulo - USP. Instituto de Matemática e Estatística, 2007, 42 p.

SÃO PAULO - Secretaria da Educação, *Currículo do Estado de São Paulo*. Matemática e suas Tecnologias. 1^a Edição. São Paulo: 2012, 72 p. Disponível em: http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/783.pdf. Acesso em: 03 de Março de 2016.

SILVA, Juliano da. *O Ensino da Álgebra no Ensino Fundamental: Dificuldades e Desafios*. Monografia (Especialização em Ensino de Ciências). Ponta Grossa (PR): Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação, 2013, 38 p.

SÓ MATEMÁTICA. *Retas*. Disponível em: http://somatematica.com.br/emedio/retas/retas4.php Acesso em: 29 de fevereiro de 2016.

PREZOTTI FILHO, Paulo Roberto. *Uma Proposta de Ensino dos Temas Sistemas Lineares e Determinantes*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Vitória (ES): Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas, 2014, 102 p.

APÊNDICE A - Permutações

Faremos uma abordagem, dentro do possível, clara e didática sobre permutações.

Definição A.1 (Permutação)**.** *Seja E um conjunto não vazio, denominamos permutação sobre E, toda função $\sigma : E \longrightarrow E$ que seja bijetora. Caso $\sigma(x) = x, \forall\ x \in E$, σ é denominada permutação identidade e denotada por σ_{id}.*

Definição A.2 (Permutação Inversa)**.** *Seja σ uma permutação. Uma vez que σ é bijetora, existe uma permutação β, tal que $\sigma\beta = \beta\sigma = \sigma_{id}$. Essa permutação β é denominada permutação inversa de σ e a denotaremos σ^{-1}.*

Para atingirmos nossos objetivos, estamos particularmente interessados no caso em que $E = J_n$, onde J_n corresponde ao conjunto finito dos primeiros n números naturais não nulos, ou seja $J_n = \{1, 2, \cdots, n\}$, $n \geq 1$.

Uma permutação $\sigma : J_n \longrightarrow J_n$ será denominada permutação de grau n. Denotaremos o conjunto de todas as permutações σ de grau n por S_n.

Uma vez que composta de funções bijetoras é uma função bijetora, que toda função bijetora é inversível e que sua inversa também é bijetora , que a permutação identidade é uma função bijetora e que a composição de funções é associativa então o conjunto das permutações de grau n, S_n, munido da operação de composição, tem uma estrutura de grupo [não abeliano] se $n \geq 3$ e será denominado grupo simétrico de ordem n.

A imagem de uma permutação σ de ordem n será, por um abuso de notação, denotada por $\sigma(J_n) = (\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n))$.

De certa forma, é comum denotarmos uma permutação $\sigma \in S_n$ da seguinte forma:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Além disso, a cardinalidade de S_n é $n!$ e isto é decorrência do fato de que, para a imagem do elemento 1 temos n possibilidades, para a imagem do 2, uma vez fixada a imagem de 1, temos $(n-1)$ possibilidades e assim prosseguindo, para a escolha da imagem de n haverá apenas uma única possibilidade, o que nos permite inferir que:

$$\#S_n = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!$$

Definição A.3. *Seja $x \in J_n$ e $\sigma \in S_n$. Diremos que σ fixa x ou que x é fixado por σ, se $\sigma(x) = x$. Se $\sigma(x) \neq x$, diremos que σ move x ou que x é movido por σ.*

Definição A.4 (Ciclo)**.** *Seja J_n com $n \geq 2$, $\sigma \in S_n$ e $i_1, i_2, \cdots, i_r$, $1 \leq r \leq n$, números naturais distintos pertencentes à J_n.*

Se $\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \cdots, \sigma(i_{r-1}) = i_r, \sigma(i_r) = i_1$ e, além disso, σ fixa os demais elementos de J_n, então diremos que σ é um r-ciclo ou um ciclo de comprimento r.

Denotaremos um r-ciclo σ por $(i_1\, i_2\, \cdots\, i_r)$.

Estendemos a definição de ciclo para a permutação identidade, afirmando que a identidade é um ciclo de comprimento 1 e denotando por (i), onde i pode ser qualquer número pertencente a J_n. De modo geral, utilizaremos a notação (1).

Definição A.5. *Seja J_n e $\sigma, \mu \in S_n$. Dizemos que σ e μ são permutações disjuntas se, para todo $x \in J_n$, tem-se:*

$$\sigma(x) \neq x \Rightarrow \mu(x) = x$$

e

$$\mu(x) = x \Rightarrow \sigma(x) \neq x$$

Um conjunto de n permutações é chamado disjunto se quaisquer duas permutações distintas desse conjunto forem disjuntas.

Se duas permutações são disjuntas, então elas comutam sob a operação de composição.

Definição A.6 (Relação de Equivalência)**.** *Seja E um conjunto não vazio. Uma relação de equivalência sobre E é um subconjunto $R \subset E \times E$, que satisfaz as seguintes propriedades:*

(E1) (Propriedade Reflexiva): Para todo $x \in E$, tem-se $(x, x) \in R$,

(E2) (Propriedade Simétrica): Se $(x, y) \in R$, então $(y, x) \in R$,

(E3) (Propriedade Transitiva): Se $(x, y) \in R$ e $(y, w) \in R$, então $(x, w) \in R$.

Nessas condições, se $(x, y) \in R$, diremos que x é equivalente a y módulo R e denotaremos por $x \equiv y(modR)$.

Definição A.7 (Classes de equivalência)**.** *Seja E um conjunto e R uma relação de equivalência sobre E. Para todo $a \in E$, o conjunto:*

$$\overline{a} = \{x \in E \mid x \equiv a\ (modR)\}$$

é denominado classe de equivalência módulo R determinada pelo elemento a, que, por sua vez, denomina-se representante da classe de equivalência $\overline{a}$.

Teorema A.1. *Seja E um conjunto não vazio, R uma relação de equivalência sobre E e x e y dois elementos de E. As seguintes condições são equivalentes:*

1. $x \equiv y(modR)$;
2. $x \in \overline{y}$;
3. $y \in \overline{x}$;
4. $\overline{x} = \overline{y}$

Demonstração.
De fato:
(1) $\Rightarrow$ (2), pela definição de classe de equivalência.
(2) $\Rightarrow$ (3). De (2), segue que $x \equiv y(modR)$ que, pela simetria, corresponde a $y \equiv x(modR)$, logo $y \in \overline{x}$.
(3) $\Rightarrow$ (4). De (3), segue que $y \equiv x(modR)$. Seja $a \in E$. Pelas propriedades simétrica e transitiva, temos que $a \equiv x(modR) \Leftrightarrow a \equiv y(modR)$, portanto, $\overline{x} = \overline{y}$.
(4) $\Rightarrow$ (1). Como $x \in \overline{x}$ segue, de (4), que $x \in \overline{y}$ e, portanto, $x \equiv y(modR)$. $\square$

Toda classe de equivalência é sempre um conjunto não vazio, decorrência da relação ser reflexiva. Além disso, pelo teorema acima, duas classes de equivalência são sempre iguais ou disjuntas e a reunião de todas as classes de equivalência nos dá todo o conjunto E.

Ainda, toda relação de equivalência sobre um conjunto E, determina sobre E uma partição de E, isto é, determina um subconjunto do conjunto das partes de E [denominado conjunto quociente de E pela relação de equivalência, muitas vezes denotado por E/R), o qual possui três propriedades: Cada elemento de E/R é não vazio; dois elementos quaisquer de E/R, ou são iguais, ou são disjuntos e, finalmente, a reunião de todos os elementos de E/R corresponde ao próprio conjunto E.

Definição A.8. *Seja J_n e $\sigma \in S_n$. Definimos a relação R_σ sobre o conjunto J_n e induzida pela permutação σ, por:*

$$(x, y) \in R_\sigma \Leftrightarrow \exists\ k\ \in \mathbb{Z} \mid \sigma^k(x) = y$$

Teorema A.2. *R_σ é uma relação de equivalência sobre J_n*

Demonstração.

1. (Propriedade reflexiva): $\forall\, x \in J_n$, tem-se $\sigma^0(x) = x$, logo $(x, x) \in R_\sigma$.

2. (Propriedade simétrica): Seja $(x, y) \in R_\sigma$. Temos $\sigma(x) = y$ e $\sigma^{-1}(y) = x$, portanto $(y, x) \in R_\sigma$, para $k = -1$.

3. (Propriedade transitiva): Sejam $(x, y), (y, w) \in R_\sigma$. Desse modo, existem $m, n \in \mathbb{Z}$, tal que $\sigma^m(x) = y$ e $\sigma^n(y) = w$. Logo $\sigma^{m+n}(x) = w$ e $(x, w) \in R_\sigma$.

□

Definição A.9. *As classes de equivalência determinadas pela relação de equivalência R_σ em J_n são chamadas órbitas de σ.*

Baseado na definição acima, se $x \in J_n$ e $\sigma \in S_n$, a órbita de σ determinada pelo elemento x é o conjunto $\{\sigma^k(x), k \in \mathbb{Z}\}$, o qual é determinado por sucessivas aplicações de σ ao elemento x.

Além disso, no contexto de órbitas, dizer que σ fixa x, significa afirmar que a órbita de σ determinada pelo elemento x é o conjunto unitário $\{x\}$.

Podemos dizer também que uma permutação $\sigma \neq \sigma_{id}$ é um r-ciclo $[\, r \geq 2]$ se, e somente se, compõe-se de apenas uma órbita com mais de um elemento, isto é, possui apenas uma órbita não trivial, com exatamente r elementos.

Lema A.3. *Seja J_n e $\sigma \in S_n$. Nestas condições, J_n pode ser particionado em subconjuntos disjuntos $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$, tais que, para todo $i = 1, 2, \cdots, m$, tem-se $\sigma(Y_i) = Y_i$, de modo que cada σ_i, $1 \leq i \leq m$, definida por $\sigma_i(x) = \sigma(x), se \quad x \in Y_i, \quad e \quad \sigma_i(x) = x, \quad se \quad x \in J_n - Y_i$ é um ciclo de comprimento $\#Y_i$. Além disso, $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_m$ e essa composição independe da ordem.*

Demonstração.
Sejam $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ as órbitas de σ. Como as órbitas são classes de equivalência, segue, pelo Teorema A.1, que são disjuntas. Além disso, pela definição de órbita, segue que, para todo $i = 1, 2, \cdots, m$, $\sigma(Y_i) = Y_i$, de modo que cada σ_i é um ciclo cujo comprimento é igual a $\#Y_i$. Obviamente $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_m$ e a composição independe da ordem, uma vez que os ciclos são disjuntos. $\square$

Lema A.4. *Seja J_n o conjunto dos números naturais $\{1, 2, \cdots, n\}$ e σ, β r-ciclos , $r \geq 2$, pertencentes à S_n. Seja $a \in J_n$, tal que σ e β movem a e $\sigma^k(a) = \beta^k(a)$, para todo inteiro k, então $\sigma = \beta$.*

Demonstração.
Vamos denotar $a = i_1$, logo $\sigma = (i_1\ i_2\ \cdots\ i_r)$ onde $\sigma(i_1) = i_2, \cdots, \sigma(i_{r-1}) = i_r$. Segue da hipótese que $\beta = (i_1\ i_2\ \cdots\ i_r)$ onde $\beta(i_1) = i_2, \cdots, \beta(i_{r-1}) = i_r$. Donde segue que $\sigma = \beta$.

Cabe salientar, entretanto, que ao mencionarmos, no enunciado do lema, que σ e β são r-ciclos, à priori, não significa que ambos sejam de mesmo comprimento. A igualdade de comprimento desses ciclos é consequência da hipótese de que $\sigma^k(a) = \beta^k(a)$, para todo inteiro k. $\square$

Teorema A.5. *Seja $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq (1)$. Então σ é um produto de ciclos disjuntos de comprimento maior ou igual a 2, e esta fatoração é única, a menos da ordem.*

Demonstração.
Sejam $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ as órbitas não unitárias de σ. Seguindo as notações do Lema A.3, σ_i, $1 \leq i \leq m$, definida por $\sigma_i(x) = \sigma(x)$, se $x \in Y_i$, e $\sigma_i(x) = x$, se $x \in J_n - Y_i$, é um ciclo de comprimento $\#Y_i$. Além disso, essa família de ciclos $\sigma_i \in S_n$ é uma família disjunta, uma vez que os conjuntos Y_i, $1 \leq i \leq m$ são disjuntos, logo, como já dito anteriormente, $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m$.

Provaremos agora sua unicidade:

Seja $\sigma = \beta_1\beta_2\cdots\beta_m = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_r$, onde $\beta_1\beta_2\cdots\beta_m$ e $\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_r$ são fatorações de σ em ciclos disjuntos de comprimento maior ou igual a 2. Dado $x \in J_n$, suponhamos que σ mova x. Neste caso, exatamente um único fator β_i e um único fator γ_j, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq r$, movem x. Como são ciclos disjuntos, podemos comutá-los convenientemente, de modo que β_1 e γ_1 movam x. Assim, para todo inteiro k, temos:

$$\sigma^k(x) = \beta_1^k(x) = \gamma_1^k(x)$$

Entretanto, pelo Lema A.4, um ciclo fica completamente determinado pela sua potência, quando aplicado a qualquer elemento que move. Portanto $\beta_1 = \gamma_1$. Estendendo este procedimento a todos os elementos movidos por σ, segue que $m = r$ e que cada β_i é igual a algum γ_j, $\forall\, i, j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m$. □

Definição A.10. *Denominamos um ciclo de comprimento 2 de transposição.*

Teorema A.6. *Toda permutação $\sigma \in S_n$ é um produto de transposições.*

Demonstração.
Baseado no Teorema A.5, basta escrever todo ciclo de comprimento maior ou igual a 2, fator de σ, como um produto de transposições. Isto pode ser feito com base no seguinte fato:

$$(1 \quad 2\cdots r) = (1 \quad r)(1 \quad r-1)\cdots(1 \quad 2)$$

ou se preferir:

$$(i_1 \quad i_2\cdots i_r) = (i_1 \quad i_r)(i_1 \quad i_{r-1})\cdots(i_1 \quad i_2)$$

Convém salientar que nesta decomposição de um r-ciclo em produto de transposições, a ordem é fundamental. □

Desse modo, toda permutação pode ser escrita como um produto (não comutativo) de transposições. Vejamos este exemplo:

$$(1 \quad 2 \quad 3) = (1 \quad 3)(1 \quad 2) \neq (1 \quad 2)(1 \quad 3)$$

Além disso, tal fatoração não é única, visto que:

$(1 \quad 2 \quad 3) = (1 \quad 3)(1 \quad 2) = (2 \quad 3)(1 \quad 3) = (1 \quad 3)(4 \quad 2)(1 \quad 2)(1 \quad 4) =$

$(1 \quad 3)(4 \quad 2)(1 \quad 2)(1 \quad 4)(2 \quad 3)(2 \quad 3)$

Provaremos a seguir que todas as fatorações de uma permutação σ em transposições possuem uma característica em comum: a quantidade de fatores é sempre par ou sempre ímpar.

Definição A.11. *Sejam J_n, $\sigma \in S_n$ e g a função polinomial em n variáveis definida por:*

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{j>i}(x_j - x_i)$$

Definiremos o polinômio em n variáveis a seguir:

$$g_\sigma = \prod_{j>i}(x_{\sigma(j)} - x_{\sigma(i)})$$

Dizemos que σ é par, se $g_\sigma = g$ e que σ é ímpar, se $g_\sigma = -g$

Notemos que na função g definida acima, a condição $j > i$ garante que todo par de inteiros distintos pertencentes à J_n irá compor uma subtração em exatamente um fator de g.

Além disso, como σ é uma permutação, g_σ também possui essa característica, ou seja, todo par de inteiros distintos pertencentes à J_n compõe uma subtração em exatamente um fator de g_σ.

Desse modo, os fatores de g e g_σ são iguais, a menos de seus sinais e, consequentemente, $g_\sigma = \pm g$.

Por outro lado, se σ e β pertencem à S_n, temos:

$$g_{(\sigma\beta)} = \prod_{j>i}(x_{(\sigma\beta)(j)} - x_{(\sigma\beta)(i)}) = (g_\beta)_\sigma$$

Daí concluímos que, se σ e β são ambos pares ou ambos ímpares, então $\sigma\beta$ é par, entretanto, se uma das permutações é par e a outra é ímpar, então $\sigma\beta$ é ímpar. Isso nos permite dizer que o subconjunto de S_n, constituído por todas as permutações pares, é fechado em relação a operação de composição e mais que isso, constitui um subgrupo de S_n denominado:

Definição A.12 (Grupo Alternado). *Denominamos o conjunto de todas as permutações pares pertencentes à S_n, de grupo alternado de grau n e denotamos por A_n.*

Teorema A.7 (Primeiro Teorema do Isomorfismo). *Sejam $(G, *)$ e (H, ∇) dois grupos, f um homomorfismo de $(G, *)$ em (H, ∇) e N o kernel de f. Nestas condições, afirmamos que N é um subgrupo normal de $(G, *)$ e o grupo quociente G/N é isomorfo ao subgrupo $Im(f)$. Particularmente, se f for um epimorfismo, então G/N é isomorfo ao grupo (H, ∇).*

Teorema A.8 (Teorema de Lagrange). *Sejam $(G, *)$ um grupo finito e H um subgrupo de G. Nestas condições, temos:*

$$|G| = [G : H].|H|$$

Onde $|G|$ é a ordem do grupo G, isto é, o número de elementos de G e $[G : H]$, conhecido como índice de H em G, representa o número de classes laterais à esquerda [ou à direita] determinada por H sobre G.

Esses dois teoremas e suas respectivas demonstrações, bem como as definições dos conceitos empregados podem ser encontrados em qualquer livro sobre Teoria dos Grupos.

Algumas observações:

Observação A.1. *Vamos admitir nas considerações abaixo que* $n \geq 2$.

Observação A.2. *Vamos considerar o primeiro teorema do isomorfismo nas seguintes condições:* $G = S_n$, $* = \circ$, $H = \{-1, 1\}$, $\nabla = \cdot$ *e* $\varphi : S_n \longrightarrow \{-1, 1\}$ *definida por:* $\varphi(\sigma) = 1$, *se* σ *for par e* $\varphi(\sigma) = -1$, *se* σ *for ímpar.*

Observação A.3. $\varphi(\sigma \circ \tau) = \varphi(\sigma).\varphi(\tau)$. *Decorrência do fato de que composta de permutações pares é par e composta de uma permutação par com uma permutação ímpar é ímpar.*

Observação A.4. φ *é um homomorfismo entre o grupo simétrico* $(G = S_n, \circ)$ *e o grupo multiplicativo* $(H = \{-1, 1\}, \cdot)$.

Observação A.5. $N = ker(\varphi)) = A_n$, *isto é, o kernel do homomorfismo acima, que corresponde ao subgrupo do grupo* $(S_n, \circ)$ *constituído de todas as permutações que são levadas em 1, [ou seja, as permutações pares], é exatamente o grupo alternado* A_n.

Observação A.6. *O homomorfismo* φ *é na verdade um epimorfismo, isto é,* φ *é sobrejetora, uma vez que a permutação identidade é par e a transposição* $(1\ 2)$ *é ímpar.*

Observação A.7. *Logo, pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo enunciado acima, o grupo quociente* G/A_n *é isomorfo a* $(H = \{-1, 1\}, \cdot)$ *e portanto é um grupo de ordem 2 [isto é, o índice de* A_n *sobre* S_n, *denotado por*$[S_n : A_n]$ *é 2] o que traduz, mais uma vez, que* A_n *é normal [já sabíamos isto por outra via] e portanto, pelo Teorema de Lagrange, temos que* $\#A_n = \dfrac{n!}{2}$, *de modo que a quantidade de permutações pares é a mesma quantidade de permutações ímpares.*

Finalmente, vamos mostrar que se decompusermos uma permutação em um produto de transposições, apesar do número de ”fatores” não ser univocamente determinado, podemos afirmar que esse número é sempre par, se a permutação for par, ou sempre ímpar, se a permutação for ímpar.

Teorema A.9. *$\sigma \in S_n$ é par se, e somente se, σ é um produto de um número par de transposições; σ é ímpar se, e somente se, σ é um produto de um número ímpar de transposições.*

Demonstração.
Pela definição de paridade, (Definição A.11), sabemos que a particular transposição (1 2) é ímpar.

De fato, seja $\sigma = (1\ 2)$. De outro modo, vamos denotar σ da seguinte maneira:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

Temos:

$$\begin{aligned} g_\sigma &= \prod_{j>i}(x_{\sigma(j)} - x_{\sigma(i)}) = \\ &= (1-2)(3-2)(4-2)\cdots(n-2)(3-1)(4-1)(5-1)\cdots \\ &\cdots(n-1)(4-3)(5-3)\cdots(n-3)\cdots(n-(n-1)) \end{aligned} \tag{3.15}$$

para $n \geq 2$.

Agora, considerando a função polinomial: $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{j>i}(x_j - x_i)$, temos, para $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= \\ &= (2-1)(3-1)(4-1)\cdots(n-1)(3-2)(4-2)(5-2)\cdots \\ &\cdots(n-2)(4-3)(5-3)\cdots(n-3)\cdots(n-(n-1)) \end{aligned} \tag{3.16}$$

Analisando os produtórios em 3.15 e 3.16, vemos que ambos possuem os mesmos fatores, à excessão do primeiro [fator]. Assim, podemos escrever:

$$g_\sigma = (1-2)\cdot\alpha = -\alpha = -(1\cdot\alpha) = -g$$

Portanto $\sigma = (1\ 2)$ é ímpar.

Provaremos agora que qualquer transposição $\tau = (i\ j)$ é ímpar.

Suponhamos, por absurdo, que τ seja par, isto é, $\tau \in A_n$. Como $A_n \lhd S_n$, isto é, A_n é um subgrupo normal de S_n, então todo conjugado de $\tau = (i\ j)$ também está em A_n. Notemos que $(1\ 2)$ é o conjugado de $\tau = (i\ j)$, pois, $(1\ 2) = \gamma \circ (i\ j) \circ \gamma^{-1}$, onde $\gamma = (i\ 1) \circ (j\ 2)$, se $i > j$ e $\gamma = (j\ 2) \circ (i\ 1)$, se $j > i$. Isto contradiz o fato que $(1\ 2)$ é ímpar. Na verdade, esse cálculo é consequência de um teorema mais geral, o qual garante que: "Duas permutações σ e τ são conjugadas se, e somente se, elas têm a mesma estrutura cíclica".

Suponhamos que $\sigma \in S_n$ e que $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_m$, onde cada τ_i é uma transposição. Uma vez que φ é um homomorfismo, temos:

$$\varphi(\sigma) = \varphi(\tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_3 \cdots \circ \tau_m) = \varphi(\tau_1) \circ \varphi(\tau_2) \circ \varphi(\tau_3) \circ \cdots \varphi(\tau_m) = (-1)^m$$

Como, por definição, σ é par se, e somente se, $\varphi(\sigma) = 1$ e σ é ímpar se, e somente se, $\varphi(\sigma) = -1$, temos que σ é par se, e somente se, m é par e σ é ímpar se, e somente se, m é ímpar. □

Corolário A.10. *Se $\sigma \in S_n$ então o número de fatores que ocorrem em qualquer fatoração de σ num produto de transposições é sempre par ou é sempre ímpar.*

Demonstração.
Decorrência do fato que uma permutação não pode ser par e ímpar simultaneamente. □

Definição A.13. *Seja $\sigma \in S_n$ e φ o epimorfismo descrito na Observação A.3. O valor de $\varphi(\sigma)$ é denominado sinal da permutação σ e denotado por $sgn(\sigma)$.*

Lema A.11. *Se σ é uma permutação, então $sgn(\sigma) = sgn(\sigma^{-1})$*

Demonstração.
Pela Definição A.2, temos que $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \sigma_{id}$. Por outro lado, a Definição A.11 estabelece que σ_{id} é uma permutação par, logo, as composições $\sigma\sigma^{-1}$ e $\sigma^{-1}\sigma$ são ambas pares e, portanto, σ e σ^{-1} são ambas pares ou ambas ímpares. □

De acordo com as notações do Teorema A.9, para determinarmos se uma dada permutação σ é par ou ímpar, basta determinarmos o valor de m, ou seja, o número de transposições nas quais σ se decompõe.

Em termos práticos, o sinal de uma permutação $\sigma \in S_n$ também pode ser obtido identificando-se, para todo par (i, j), $1 \leq i < j \leq n$, aqueles nos quais $\sigma(i) > \sigma(j)$. Se a quantidade desses pares for um número par, σ é par, caso contrário, σ é ímpar.

Exemplo A.1. *Dada a permutação:*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos determinar o sinal de σ.

Reescrevendo σ como um produto de ciclos disjuntos de comprimento maior do que ou igual a 2, temos:

$$\sigma = (1\ 2\ 4\ 6)(3\ 5)$$

Reescrevendo o ciclo $(1\ 2\ 4\ 6)$ como um produto de transposições, temos:

$$\sigma = (1\ 6)(1\ 4)(1\ 2)(3\ 5)$$

Assim, $m = 4$ e σ é par.

De outro modo, temos que os pares (i, j), tais que $1 \leq i < j \leq 6$ são:

$$(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5)$$

$$(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)$$

Basta determinarmos, entre esses pares, aqueles nos quais $\sigma(i) > \sigma(j)$.

São eles: $(1,6),(2,5),(2,6),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)$

Portanto, σ é par, como já constatado anteriormente.