UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

GILBERTO ALVES BARBOSA FILHO

A ABORDAGEM DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS APLICADOS AO CONTEÚDO DE FUNÇÕES: UMA EXPERIÊNCIA COM GRUPOS DE ESTUDOS DO ENSINO MÉDIO

SÃO CARLOS

2017

GILBERTO ALVES BARBOSA FILHO

A ABORDAGEM DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS APLICADOS AO CONTEÚDO DE FUNÇÕES: UMA EXPERIÊNCIA COM GRUPOS DE ESTUDOS DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas, junto ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

Orientador: Prof. Dr. Renato José de Moura

SÃO CARLOS

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Gilberto Alves Barbosa Filho, realizada em 17/02/2017:

Prof. Dr. Renato José de Moura
UFSCar

Profa. Dra. Denise de Mattos
USP

Adriana Ramos.

Profa. Dra. Adriana Ramos
UFSCar

Dedico este trabalho à minha esposa e aos meus filhos por todo amor, renúncia, paciência, companheirismo e inspiração.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado a oportunidade da vida e pela incessante presença junto a mim.

Aos meus pais por serem instrumentos de Deus para concretizarem o dom de minha vida e por todo amor e educação que me deram e aos meus sogros por todo amor e apoio incondicional e ilimitado.

Ao meu irmão por ser também meu amigo e à minha cunhada por todo carinho para conosco.

A minha amada esposa Sueli e aos meus amados filhos Ana Júlia e José Eduardo por fazerem com que tudo em minha vida tenha ainda mais sentido, inclusive o Mestrado.

Aos meus colegas que sempre me apoiaram na caminhada deste curso, em especial agradeço ao amigo Deivid e as amigas: Paula, Patrícia, Aparecida Patrícia, Alessandra e Ana Lígia por toda a aceitação e dedicação.

Ao meu amigo Robson e à minha amiga Débora pela grande amizade e pelas inúmeras vezes que me ajudaram.

Aos meus amigos Júnior, Cláudia, Renan, Antônio Marcos, Lenice, Fernando, Andreia e Alessandra por estarem sempre prontos para minhas urgências.

Aos meus gestores, aos meus amigos professores e aos meus queridos alunos sem os quais este trabalho não seria possível.

Aos meus professores e, em especial, ao meu orientador, o professor Doutor Renato José de Moura pela amizade, pela dedicação, pela competência e por ter acreditado em mim desde o começo, e à sua esposa Evelise pela amizade e por todo apoio nos momentos de trabalho.

Loucura é querer resultados diferentes fazendo tudo exatamente igual!

Albert Einstein

Embora ninguém possa voltar atrás e fazer um novo começo, qualquer um pode começar agora e fazer um novo fim.

Chico Xavier

RESUMO

Este projeto de pesquisa se refere a uma experiência aplicada a grupos de estudos para estudantes do ensino médio com o objetivo de proporcionar-lhes um aprimoramento dos conteúdos de Matemática, bem como um aperfeiçoamento na prática de seus estudos, utilizando-se para isso a abordagem proposta e sistematizada por George Pólya, que é o método de resolução de problemas em Matemática. Foram selecionados alguns tópicos envolvendo funções e explorados, através da resolução de problemas, a linguagem matemática, discussões coletivas e aplicações. As ações implantadas neste projeto visam também aprimorar a prática docente, proporcionada pela metodologia, a ser desenvolvida em outros momentos na sala de aula, como uma importante ferramenta de ensino.

Palavras-chave: resolução de problemas matemáticos, ensino de funções.

ABSTRACT

This research project refers to an experience applied to study groups for high school students in order to provide them with an improvement of Mathematics contents, as well as an improvement in the practice of their studies, using the approach proposed and systematized by George Pólya, which is the method of solving problems in Mathematics. Some topics involving functions were explored, through problem solving, mathematical language, collective discussions and applications. The actions implemented in this project also aim to improve the teaching practice, provided by the methodology, to be developed at other times in the classroom, as an important teaching tool.

Keywords: mathematical problem solving, teaching functions.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO, OBJETIVOS E JUSTIFICATIVA

Professor, quando o senhor corrige o problema na lousa, ou nos ajuda a fazer, eu consigo entender perfeitamente, mas se eu me vejo sozinha, frente a frente com o problema, eu não consigo encontrar o caminho que devo seguir para resolvê-lo. Como eu devo proceder para sanar esta dificuldade?

Esta pergunta simples, porém, direta, clara e fundamental para o desenvolvimento da prática docente, em particular de Matemática, foi direcionada a mim por uma aluna do terceiro ano do ensino médio no ano de 2015, em uma das escolas que leciono. Provavelmente, esta pergunta é feita à totalidade dos professores de Matemática em algum momento e possivelmente é a realidade para boa parte dos estudantes.

A importância que dei a tal questionamento se deve ao fato de que em 2013 procurei implantar algumas ações e práticas destinadas à melhoria do desempenho de meus estudantes. Partindo de algumas observações, conclui inicialmente, e de maneira equivocada, que a dificuldade em resolver problemas matemáticos de meus alunos, ao longo de meu tempo como docente, estava em parte ligada ao fato de que os alunos não sabiam interpretar o enunciado de um problema matemático de forma correta, sendo necessário o desenvolvimento de uma habilidade de leitura. “Afinal, aprender Matemática também significa desenvolver a capacidade de expressão na leitura e na escrita, ao lado das habilidades de cálculo”, conforme São Paulo (2014d, p. 11).

Supomos que tais conclusões sejam recorrentes pois em Smole e Diniz (2001, p. 69) observa-se que “é comum os professores acreditarem que as dificuldades apresentadas por seus alunos em ler e interpretar um problema ou exercício de matemática estão associadas à pouca habilidade que eles têm para leitura”.

Ainda, em mesmo autor e página, é apresentado que “também é comum a concepção de que, se o aluno tivesse mais fluência na leitura nas aulas de língua materna, consequentemente ele seria um melhor leitor nas aulas de matemática".

Confrontando minhas alunas e meus alunos a este respeito, percebi que a maioria era de bons leitores. Então por que tinham dificuldades em interpretar os enunciados dos problemas? Apresentando tal questão a diversos colegas professores veio uma resposta que fez muito sentido, de que os alunos necessitavam ter domínio de uma linguagem voltada para a Matemática. Podemos encontrar na literatura referências que suportam tal necessidade:

> Há uma especificidade, uma característica própria na escrita matemática que faz dela uma combinação de sinais, letras e palavras que se organizam segundo certas regras para expressar ideias.
> Além dos termos e sinais específicos, existe na linguagem matemática uma organização de escrita nem sempre similar àquela que encontramos nos textos de língua materna, o que exige um processo particular de leitura. (SMOLE; DINIZ, 2001, p. 70).

Sendo assim, em 2013, decidi proporcionar-lhes uma leitura voltada para uma linguagem matemática, pois uma das habilidades a ser desenvolvida em Matemática é ler e interpretar textos de Matemática (BRASIL, 1999, p. 259).

Iniciei então um projeto de leitura com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e alunos do 1º, 2º e 3º ano do ensino médio, utilizando-me do livro O homem que calculava, do professor Júlio César de Mello e Souza, com pseudônimo de Malba Tahan, apresentando para os estudantes trabalhos presentes na internet sobre o livro acima citado, desenvolvidos por outros estudantes com o objetivo de motivá-los a leitura do mesmo. Na sequência, solicitei que escolhessem um dos problemas apresentados no livro e desenvolvessem em grupo uma apresentação sobre o mesmo. Os estudantes se mostraram muito criativos neste momento, fazendo apresentações em forma de dramatização, de filmes e exposições orais utilizando-se de slides.

Já em 2014, dando continuidade no projeto, dividi o livro em três partes, solicitando a leitura de cada uma delas durante quatro meses do ano letivo, sendo dedicado um período das aulas para análise e socialização dos problemas apresentados e sendo aplicada uma avaliação escrita (Apêndice A) ao final de cada período sobre o conteúdo que fora lido e desenvolvido. Nesta etapa, também houve uma grande participação dos estudantes haja vista apresentarem-se muito interessados durante os momentos de discussão sobre os problemas.

Fazendo uma análise sobre os resultados alcançados através desta experiência, inferi inicialmente que o projeto havia atingido totalmente o seu objetivo, pois houve um grande envolvimento dos estudantes que relataram serem positivas as contribuições destas ações na resolução de problemas matemáticos. Com isso busquei ações pedagógicas para desenvolver nos anos seguintes esta leitura com meus estudantes seja analisando, conjuntamente, os enunciados dos problemas ressaltando o significado de palavras importantes para o encaminhamento de uma correta resolução, seja apresentando outros livros em sala de aula, selecionando parte do livro e fazendo uma leitura compartilhada do trecho selecionado seguida de um debate, sempre buscando textos voltados para a Matemática ou com informações necessárias ao aprimoramento da prática do estudo.

Entretanto ao voltarmos à questão mencionada no início deste texto, e ao refletir intensamente sobre ela, foi possível perceber que apenas a implantação de ações pedagógicas para o desenvolvimento da linguagem matemática não tinha sido suficiente para que meus alunos pudessem desenvolver melhor suas habilidades e competências relacionadas ao estudo de Matemática, ou seja, minha inferência inicial estava em certo grau errada. Seriam necessárias outras ações pedagógicas, principalmente voltadas à resolução de problemas.

Aliado a esta necessidade, há um fator adicional e muito importante que está ligado a esta proposta de pesquisa, que exploraremos adiante, que é o público ao qual destinaremos aplicá-la inicialmente, com o objetivo de testar a metodologia, aprimorar a prática docente e, posteriormente, usá-la em sala de aula como ferramenta importante para auxiliar os alunos na resolução de problemas. Esperamos justificar, em parte, a escolha inicial deste público através de uma atividade que tenho desenvolvido de maneira voluntária por influência de um filme que assisti a muitos anos.

Inspirado em fatos reais, o filme O preço do desafio (O PREÇO..., 1988) narra parte da trajetória, enquanto professor, do boliviano Jaime A. Escalante. Este filme apresenta a história de um grupo de estudantes de uma escola de uma grande cidade norte americana, liderado pelo professor Escalante. Esses alunos se dedicaram aos estudos de Cálculo em momentos extraclasses a fim de alcançarem êxito em uma avaliação externa e ganharem créditos para adentrar no ensino superior nos Estados Unidos da América e, ao final, conseguiram atingir seus objetivos.

Como não se tratava de uma experiência em sala de aula, os alunos não foram “julgados” em momento algum pelos seus desempenhos nas atividades desenvolvidas e, segundo Piazzi (2013b, p. 40), um dos motivos do sucesso do professor Escalante e de seu grupo de estudantes foi que “Toda vez que o professor aplicava uma verificação de aprendizado (simulado), ela era encarada pelos alunos como uma oportunidade para corrigir falhas, evidenciar e eliminar dúvidas, e não como um instrumento de avaliação e certificação”.

Quando tive contato com este filme ainda não era professor. Mas como me marcou muito, quando passei a lecionar, em muitas ocasiões apresentava-o aos meus alunos e solicitava-os a desenvolverem alguma redação sobre ele. Meu objetivo era que os alunos percebessem a necessidade de superação de suas dificuldades através de um esforço extraclasse. Em 2010, esta necessidade surgiu por parte de alguns alunos que desejavam concorrer a uma vaga em um curso técnico. Coloquei-me à disposição deles e criamos um grupo de estudos para este fim, ou seja, a história deste filme finalmente fez sentido para nós. O resultado obtido foi muito satisfatório. Desde então adotei a prática de se trabalhar extraclasse com grupos de estudos em Matemática.

Ao longo destes anos havia ainda a inquietação de encontrar maneiras eficientes de trabalhar com eles, e principalmente com meus alunos em sala de aula, pois embora os resultados fossem sempre satisfatórios, nossos alunos demandam outros momentos e outras formas de aprendizagem, seja em sala de aula, seja no grupo de estudos. Neste último, os modelos que eles têm em sala de aula não esperam encontrar fora dela, e isso ficava claro ao longo dos encontros.

Foi através da questão formulada em 2015 e a necessidade de encontrar uma metodologia adequada aos propósitos de dinamismo, questionamentos e resoluções de problemas em classe e no grupo de estudos, que a metodologia proposta por Pólya (2006; 2017), resumida e sistematizada em Dante (2000), entre outros, veio de encontro aos nossos propósitos. Decidimos assim aplicá-la de alguma forma ao grupo de estudos formado naquele ano.

Ressalto que, neste momento, não havia ainda uma proposta de pesquisa sistematizada para se trabalhar com meus alunos, seja no grupo ou em sala de aula. Assim, após apresentarmos um breve histórico sobre os professores George Pólya e Luiz Roberto Dante, adotamos a Sequência de Pólya proposta por Dante (2000), ver no ANEXO A. Tal sequência fora apresentada ao grupo através da resolução em conjunto de alguns problemas que foram previamente selecionados. A partir deste momento, as sugestões e indagações da lista foram exploradas ao longo dos encontros com o grupo de estudos através da resolução de listas de problemas presentes em vestibulares diversos que foram resolvidos seguindo tais sugestões e indagações.

Ao encerrar a série de encontros, foi possível constatar que os estudantes que participaram do grupo em 2015 aproveitaram muito os momentos vivenciados, relatando sentimentos de superação de dificuldades, rompimento de limites, mudança de visão da matemática (para melhor), elevação do raciocínio, prazer na convivência com o grupo, aquisição de novos conhecimentos, melhora no rendimento, descontração e mais interesse. Entre os muitos relatos havia uma constatação importante que Pólya (2006, p.3) aponta:

> A experiência mostra que as indagações e sugestões da nossa lista, se usadas de modo adequado, muito frequentemente ajudam o estudante. Elas têm em comum duas características: bom senso e generalidade. Como se originam no bom senso comum, muitas vezes surgem naturalmente. Elas bem poderiam ter ocorrido ao próprio aluno. Por serem genéricas, auxiliam discretamente: apenas indicam a direção geral, deixando muito para o estudante fazer.

Ou seja, alguns alunos relataram que utilizavam a Sequência de maneira intuitiva. Além disso, todos acharam os procedimentos úteis, pois segundo os estudantes, ficava mais fácil identificar por onde começar; trazia uma sensação de confiança e de segurança para desenvolver a resolução do problema e ajudava na escolha das estratégias a serem utilizadas.

Considerando-se então que os resultados foram muito positivos, aliado ao desejo de encontrar uma sistematização para se trabalhar em resolução de problemas, e também levando em conta um pensamento recorrente entre os integrantes do grupo de estudos de 2015; de que era importante que a lista de Pólya fosse divulgada para os demais estudantes, que sistematizamos uma proposta de pesquisa baseada no Método de Resolução de Problemas de Pólya (2006), em conjunto com Dante (2000), objetivando confrontar os resultados alcançados anteriormente em um novo grupo de estudos, com o desejo de aprimorá-la para ser aplicada também em sala de aula. Este trabalho de pesquisa buscou explorar inicialmente um conteúdo matemático único, sendo que a escolha foi funções, explorando os seus conceitos gerais e também conceitos referentes à função afim, função quadrática, função exponencial e função logarítmica.

Esta proposta de pesquisa resultou no presente trabalho que tem o seu desenvolvimento da seguinte maneira:

No capítulo 2, apresentamos um pouco da história do professor aplicador, da escola escolhida para a aplicação, bem como do grupo junto ao qual o trabalho foi desenvolvido.

No capítulo 3, exploramos os fundamentos teóricos que pautaram o desenvolvimento desta pesquisa.

No capítulo 4, está o desenvolvimento da proposta de aplicação através de um planejamento a ser seguido.

No capítulo 5, descrevemos os momentos das aplicações das etapas propostas no capítulo 4 e apresentamos uma discussão a respeito dos resultados obtidos.

Finalizamos este trabalho no capítulo 6, através de algumas considerações finais a respeito do projeto desenvolvido, da experiência em aplica-lo e também a respeito da minha prática enquanto docente.

Ao final, está exposto nos Apêndices e no Anexo o material desenvolvido que poderá servir como sugestão de aplicação futura para outros professores, além das listas de problemas que foram utilizadas durante o processo de investigação e de trabalho ao qual nos propusemos.

2 APRESENTAÇÕES

2.1 Sobre o Professor

Nasci em 1970, graduei-me em Administração de Empresas no Centro de Ensino Superior de São Carlos em 1997, mas desde antes da graduação pensava em ser professor até que, em 2001 busquei um Programa Especial de Formação Pedagógica de Docentes, em 2002 prestei o meu primeiro concurso para professor e, a partir de 2003, iniciei minha carreira.

Desde então, venho buscando o aprimoramento da prática docente, através da análise dos erros, de muito estudo, da troca de experiências com colegas de profissão e da participação em diversos cursos de formação continuada. Nesse sentido, o curso do Mestrado foi a experiência mais impactante em minha vida profissional como professor por diversos aspectos, mas principalmente, pelas dificuldades que encontrei**,** pois me lembrando delas eu busco entender melhor meus alunos e os seus desafios frente ao aprendizado da Matemática.

2.2 Sobre a Escola de Aplicação

O local de desenvolvimento das atividades previstas para os encontros foi uma escola da rede pública estadual paulista, localizada na cidade de Brotas-SP. Em 2016, essa escola tinha um total de 831 alunos matriculados, sendo 386 alunos no Ensino Fundamental II e 445 alunos no Ensino Médio, distribuídos em 27 turmas durante os três turnos do dia. As turmas para as quais foi oferecida a oportunidade de participarem dos encontros totalizavam 72 alunos.

2.3 Sobre o Grupo de Aplicação

O presente projeto foi desenvolvido com um grupo de estudantes matriculados na escola citada anteriormente, constituído por jovens que, em 2016, cursavam o Ensino Médio sendo que a maioria deles estava no 3º ano. Estes jovens, ao serem convidados para participar do projeto, demonstraram-se muito interessados em melhorar os seus conhecimentos em Matemática. Durante o período de realização dos encontros contamos com a presença de 25 estudantes no total.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Como apontado inicialmente, o presente trabalho está pautado na metodologia proposta por George Pólya explicitada em seu livro “A arte de resolver problemas – um novo aspecto do método matemático”. Além desta referência, que consideramos principal ao nosso propósito, referimos o artigo “Dez mandamentos para professores”, também de autoria do professor George Pólya. Algumas considerações apresentadas em outras obras também servirão de embasamento para nosso trabalho.

3.1 A Importância da Resolução de Problemas

Há na literatura um conjunto expressivo de levantamentos, como se observa em Krulik e Reys (2003) e nas referências lá indicadas, apontando a importância e a necessidade do desenvolvimento das competências e habilidades de nossos alunos para a resolução de problemas. Observa-se também que:

> [...] no tocante à capacidade de sintetizar, de tomar decisões a partir dos elementos disponíveis, a Matemática assume um papel preponderante. Suas situações-problema são mais nítidas do que as de outras matérias, favorecendo o exercício do movimento argumentar/decidir ou diagnosticar/propor. Em outras palavras, aprende-se a resolver problemas primariamente na Matemática e secundariamente nas outras disciplinas. (SÃO PAULO, 2012, p. 32).

> Na Universidade de Pittsburgh, contudo, cientistas mostraram que o estudante versado na resolução de problemas se sai melhor em testes vestibulares. Além disso, ele se sai melhor na vida. (TOZETTO, 2013, p.47).

Desenvolver estratégias que possibilitem aos alunos o melhor aprendizado possível nesta direção é tarefa fundamental:

> Não somente em Matemática, mas até particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas mas

> compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem auto-confiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (BRASIL, 1999, p. 266).

É fato que na disciplina de Matemática, quando um professor propõe questões ou situações problemas, ele espera que os estudantes sejam capazes de resolvê-las, pois:

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas. (BRASIL, 2017, p.112).

Entretanto ao longo dos últimos anos

> [...] sabemos do fracasso dos alunos quando propomos a análise de situações onde devem ser relacionados dados ou fatos diversos ou quando é necessária a tomada de decisão entre diferentes e possíveis caminhos de resolução. Nesse caso, percebemos que, mesmo quando possuem informações e conceitos, os alunos não os mobilizam, não os combinam eficientemente, desanimam, esperam a explicação do professor, não se permitem tentar, errar, não confiam em suas próprias formas de pensar. Na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido. (BRASIL, 2017, P.113)

Katherine Merseth, diretora do Programa de Formação de Professores na Universidade Harvard, ao ser questionada sobre o que as crianças deveriam aprender, e como aprender em matemática, diz:

> Elas precisam saber como resolver problemas, e não como memorizar fórmulas em aulas em que pouco põem o racicínio lógico em ação. Um desincentivo comum à exploração dos números nas escolas é o desprezo pela intuição matemática do aluno. Quando ele trilha o próprio caminho para solucionar uma questão, e não o caminho esperado pelo professor, frequentemente se considera que errou, mesmo tendo chegado à resposta certa. Como ocorre em outras disciplinas, os educadores ainda demonstram estar aferrados a um tempo em que o estudante ficava passivo e calado diante de uma lousa. Não entenderam que está mais do que na hora de colocá-lo no banco do motorista. (WEINBERG, 2016, p. 11-15).

Neste sentido, a importância de utilizar metodologias mais eficientes para auxiliar alunos a adquirirem competências e habilidades para a resolução de problemas é papel fundamental do professor. Dentre estas estratégias, a Metodologia proposta por George Pólya, que está contida na obra A arte de resolver problemas (PÓLYA, 2006), ou ainda em Didática da resolução de problemas de matemática (DANTE, 2000), entre outros pesquisadores de renome internacional, tem tido relevantes resultados, como se observa na literatura.

Procuramos na sequência apontar aquilo que consideramos embasar a nossa pesquisa através da Metodologia de Resolução de Problemas.

3.2 Apresentando o Professor George Pólya

George Pólya (1887-1985), natural de Budapest, foi um importante matemático de sua área de pesquisa, publicando trabalhos relevantes em áreas como Combinatória e Probabilidade. Entretanto, Pólya tornou-se uma importante referência no ensino de Matemática publicando trabalhos voltados para este fim. No artigo de Pólya (2017, p. 2), Elon Lages Lima faz uma apresentação elegante deste grande matemático, a qual citamos:

> George Pólya (1887 + 98 = 1985) nasceu em Budapest, Hungria, foi professor em Zurich de 1914 a 1940 e depois em Stanford, Estados Unidos, onde se aposentou em 1953, mas continuou ativo até praticamente sua morte, quase centenário. Pólya foi co-autor de um notável livro, escrito juntamente com seu compatriota Gabor Szegö, intitulado "Aufgaben und Lehrsãtze aus der Analysis" (Berlim, 1924)

> depois traduzido para o inglês com o título "Problems and Theorems in Analysis" (Berlim, 1972). Neste texto, em dois alentados volumes, os autores mostram como o ensino da Análise Matemática pode ser gradativamente desenvolvido, dos fundamentos até algumas fronteiras do conhecimento, através de uma judiciosa sequência de exercícios e problemas, alguns dotados de suprema elegância.
> Pólya escreveu outros livros e inúmeros artigos originais, que lhe deram sólida reputação em Análise Clássica, Combinatória e Probabilidades. Suas obras completas, em 4 volumes, foram publicadas em 1984 pela MIT Press. Nos últimos quarenta anos de sua longa carreira, passou a interessar-se pelo ensino da Matemática, dedicando-se quase inteiramente ao estudo das questões referentes à transmissão do conhecimento matemático. A esse respeito escreveu muitos artigos e alguns livros extraordinários, como "How to Solve It" (traduzido para o português como "A Arte de Resolver Problemas"), "Mathematics and Plausible Reasoning" (Princeton Univ. Press, 1954) e "Mathematical Discovery" (2 vols., Wiley, 1962 e 1965).

3.3 A Metodologia de George Pólya

Pólya (2006, p. 99) explica que a sua obra A arte de resolver problemas é uma tentativa de reviver o estudo da heurística que, segundo Aulete (2008, p. 536) é definida como o “Conjunto de métodos empregados para chegar-se à invenção, à descoberta ou à resolução de problemas”.

A leitura da obra de George Pólya nos indicou que a aplicação dos procedimentos sugeridos pelo autor poderia vir ao encontro de nossa busca: uma ferramenta para contribuir com a resolução de problemas matemáticos, pois identificamos desde o início que seus conceitos, apesar de terem sido apresentados há muitos anos, continuam atuais, o que nos faz entender porque ainda hoje sua leitura é recomendada por muitos professores, conforme menciona Tozetto (2013, p. 46).

Assim, identificamos que a aplicação dessa ferramenta pelos professores em sala de aula se apresenta como um dos caminhos no desenvolvimento das competências e habilidades necessárias aos alunos para a resolução de problemas matemáticos, conforme requisitos dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 1999, p. 259), que são:

- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
- Formular hipóteses e prever resultados.
- Selecionar estratégias de resolução de problemas.
- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
- Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
- Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Por esse motivo, supomos que o conteúdo do livro A arte de resolver problemas, poderia contribuir para atingir o objetivo determinado, que era o de vivenciar uma nova proposta para o desenvolvimento de competências e habilidades necessárias à resolução de problemas matemáticos, possibilitando aos alunos que ampliassem o interesse pela Matemática.

Sendo a obra do professor George Pólya voltada para a resolução de problemas, julgamos ser necessário definirmos e classificarmos os problemas que abordamos nesse projeto.

3.3.1 Tipos de Problemas

Dante (2000, p. 10) conceitua um problema matemático como “qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la.”

Pólya (2006) classifica os problemas em três tipos: problemas rotineiros, problemas de determinação e problemas de demonstração.

Segundo Pólya (2006, p.144), “Os "problemas de determinação” são mais importantes na Matemática elementar; e os “problemas de demonstração” o são na Matemática superior.” Portanto, estes últimos não serão objetos de estudo em nosso trabalho.

3.3.1.1 Problemas de determinação

Os problemas de determinação têm como objetivo encontrar a incógnita. Suas partes principais são: a própria incógnita, os dados e a condicionante, conforme explica Pólya (2006, p.142-143).

Em sua obra, Pólya (2006, p.6-7), exemplifica um problema de determinação seguido por um diálogo inicial hipotético entre o professor e seus alunos visando a resolução do mesmo, conforme citamos abaixo:

> Calcular a diagonal de um paralelepípedo retângulo do qual são conhecidos o comprimento, a largura e a altura.[...]
> O diálogo entre o professor e seus alunos pode principiar da seguinte maneira:
> - *Qual é a incógnita?*
> - O comprimento da diagonal de um paralelepípedo.
> - *Quais são os dados?*
> - O comprimento, a largura e a altura do paralelepípedo.
> - *Adote uma notação adequada. Qual a letra que deve denotar a incógnita?*
> - *x*
> - *Quais as letras que escolheria para o comprimento, a largura e a altura?*
> - *a*, *b*, e *c*
> - *Qual é a condicionante que relaciona a, b, e c com x?*
> - *x* é a diagonal do paralelepípedo, no qual *a*, *b*, e *c* são, respectivamente, o comprimento, a largura e a altura.
> - *Trata-se de um problema razoável? Ou seja, a condicionante é suficiente para determinar a incógnita?*
> - Sim, ele é razoável. Se conhecermos *a*, *b*, e *c*, conheceremos o paralelepípedo. Se o paralelepípedo ficar determinado, a sua diagonal também o ficará.

3.3.1.2 Problemas rotineiros

Pólya (2006, p. 142) explica que "De modo geral, um problema será rotineiro se ele puder ser solucionado pela substituição de dados específicos no problema genérico resolvido antes, ou pelo seguimento passo a passo, de algum exemplo muito batido."

Como exemplo, o autor cita que um problema que consiste em resolver a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$, tendo sido ensinada e exemplificada ao aluno a resolução da forma geral pode ser considerado rotineiro.

Muitas vezes, para o entendimento de um conceito matemático, utiliza-se de problemas rotineiros que, conforme Pólya (2006, p. 142), podem fazer-se necessários, porém o seu uso exclusivo é indesculpável, pois o professor não pode perder suas oportunidades preenchendo o tempo que lhe for concedido exercitando seus alunos em operações rotineiras, aniquilando os seus interesses pela Matemática e tolhendo os seus desenvolvimentos intelectuais (PÓLYA, 2006, p. v).

Esse raciocínio mostra-se atualíssimo quando comparamos com afirmações de nossos dias, como observamos em:

> Isso não significa que os exercícios do tipo "calcule...", "resolva..." devam ser eliminados, pois eles cumprem a função do aprendizado de técnicas e propriedades, mas de forma alguma são suficientes para preparar os alunos tanto para que possam continuar aprendendo, como para que construam visões de mundo abrangentes ou, ainda, para que se realizem no mundo social ou do trabalho. (BRASIL, 2017, p. 113).

Sendo assim, sempre que nos referirmos no texto à palavra problema, estamos assumindo se tratar de problema de determinação e para a palavra exercício assumimos que se refere à problema rotineiro.

3.3.2 Ações a Serem Consideradas

Dentro do escopo deste trabalho consideramos que algumas ações são importantes para o método de resolução de problemas proposto por Pólya. Estas ações se referem a resoluções de problemas de forma individual e coletiva; revisão de conteúdo; atos dos professores e o que consideramos principal, e merece destaque, uma estratégia sistematizada envolvendo formulação de questões e sugestões, sendo isso o que Pólya denomina de “a nossa lista.” Descrevemos na sequência estas ações.

3.3.2.1 Resoluções de problemas de forma individual e coletiva

Segundo Pólya (2006, p. 4), aprende-se a solucionar problemas, resolvendo-os e imitando o que as outras pessoas fazem ao resolver os seus e, nesse sentido, cabe ao professor, se assim o desejar, desenvolver esta capacidade em seus alunos proporcionando-lhes muitas oportunidades de praticar e de imitar a maneira de resolvê-los.

Levando-se em conta esta observação relevante, decidimos integrar estes recursos como parte das atividades a serem desenvolvidas pelos estudantes através de listas de problemas a serem resolvidas individualmente e posteriormente discutidas de maneira coletiva e participativa.

Neste momento é muito importante que o professor seja um indagador ao invés de um “respondedor”. Em Pólya (2017) o autor denomina como nono mandamento a proposta de que devemos deixar que os alunos dessem palpites e que descubram por si próprios as resoluções e como décimo mandamento é sugerido que os professores, devem indicar caminhos os quais devem ser realmente adotados se forem aceitos pelos estudantes e não os impor.

3.3.2.2 Revisão de conteúdos

Entendemos que a revisão de conteúdos se constitua em um momento importante por ser fundamental ao estudante ter conhecimento dos conceitos matemáticos necessários para a resolução do problema a que se dedica. Pólya

(2006, p. 55), posteriormente ao citar como exemplo um problema cuja incógnita é o ponto de interseção de uma reta dada com uma parábola da qual são dados o foco e a diretriz escreve que:

> Se conhecermos o nome "parábola” e tivermos uma vaga ideia da forma da curva, porém se nada mais sobre ela sabemos, o nosso conhecimento será evidentemente insuficiente para resolver o problema proposto como exemplo ou qualquer outro problema sério relativo à parábola. (PÓLYA, 2006, p. 57-58).

Acreditamos que a utilização de exercícios para revisarmos conceitos e propriedades seja adequada, porém, dada a importância da contextualização dos conhecimentos, com relação à revisão de conceitos, tal questão não fora descuidada, em acordo com o PCN+:

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (BRASIL, 2017, p.111).

3.3.2.3 Atos dos professores

No que diz respeito ao trabalho do professor, também não se deve descuidar da necessidade de se conhecer o assunto a que se refere o problema. Em Pólya (2017) é sugerido aos professores, que tenham interesse por sua matéria e que a conheça, caso contrário o professor não será capaz de ensinar aos alunos de maneira adequada. Ainda nesse sentido Pólya (2006, p.153) coloca que “A primeira regra de ensino é saber o que se deve ensinar. A segunda é saber um pouco mais do que aquilo que se deve ensinar”.

Outro ponto destacado por Pólya (2006, p. 153), é que “um professor de Matemática deverá saber algo de Matemática e que aquele que desejar incutir em seus alunos a correta atitiude mental para com os problemas deverá ter, ele próprio, adquirido essa atitude".

Ainda sobre ações dos professores, citamos o terceiro "mandamento para professores", que segundo Pólya (2017), é "Procure ler o semblante dos seus alunos; procure enxergar suas expectativas e suas dificuldades; ponha-se no lugar deles". Ser um professor empático promove uma maior humanização na relação professor-aluno. Quanto mais clara for esta intenção, maior será a produtividade do trabalho.

Em Pólya (2017) o quarto "mandamento" indica a importância de a aprendizagem ser ativa e o quinto "mandamento" preconiza dar aos alunos *Know-how* e não apenas informações, fazendo o autor concluir que "a maneira como você ensina pode ser mais importante nas aulas de Matemática do que aquilo que você ensina".

O autor ainda sugere (PÓLYA, 2006, p. v) que a curiosidade dos alunos deva ser estimulada, apresentando-lhes problemas compatíveis com os seus conhecimentos e, o professor deve auxiliar os alunos a resolvê-los com perguntas estimulantes objetivando despertar-lhes o gosto pelo raciocínio independente, dando-lhes certos meios para solucionar os problemas de maneira adequada.

3.3.2.4 A "nossa lista"

A "nossa lista" mencionada por Pólya no texto abaixo é composta por uma sequência de indagações e sugestões que, de acordo com o autor, se seguidas constituem-se em poderosa ferramenta na resolução de problemas matemáticos por ser "de fato, uma relação de operações mentais típicas e úteis na resolução de problemas; as indagações e sugestões nela relacionadas indicam tais operações", (PÓLYA, 2006, p. 100).

> Quando o professor tenciona desenvolver nos seus alunos as operações mentais correspondentes às indagações e sugestões da

> nossa lista, ele as apresenta tantas vezes quanto o puder fazer com naturalidade. Além disso, quando o professor resolve um problema em aula, deve dramatizar um pouco as suas ideias e fazer a si próprio as mesmas indagações que utiliza para ajudar os alunos. Graças a esta orientação, o estudante acabará por descobrir o uso correto das indagações e sugestões e, ao fazê-lo, adquirirá algo mais importante do que o simples conhecimento de um fato matemático qualquer. (PÓLYA, 2006, p. 4).

A sequência de Pólya divide-se em quatro fases de trabalho que resumimos da seguinte forma:

a) Compreensão do problema

Nesta fase deve-se buscar entender o problema de maneira clara e completa, identificando qual é a incógnita, quais são os dados e quais as condições que ligam os dados à incógnita. Se necessário e/ou possível e/ou viável podem ser utilizados recursos como desenhos, esquemas ou diagramas e, para nortear a busca da solução correta, pode-se estimar uma resposta, se possível.

b) Estabelecimento de um plano

Após o entendimento do problema, o próximo passo é estabelecer o seu plano de resolução. Segundo Pólya (2006, p. 7), “temos um plano quando conhecemos, pelo menos de modo geral, quais as contas, os cálculos ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita”. Ainda segundo Pólya (2006, p. 7) conceber um plano é a principal realização na resolução de um problema. Nesta fase, lembrar-se de conceitos matemáticos e/ou de um problema semelhante é muito relevante para alcançar o sucesso.

c) Execução do plano

Segundo Pólya (2006, p. 10) a partir do momento que temos um plano estabelecido, executá-lo se torna tarefa mais fácil sendo que, nessa fase, o mais importante é ter paciência.

d) Retrospecto ou Verificação

Esta fase, muitas vezes negligenciada, tem importantes finalidades. Uma delas é verificar se não houve nenhum erro durante a execução do plano e a outra é de ter novamente contato com o problema resolvido. Esta ação pode trazer grandes benefícios ao solucionador de problemas, pois estudos indicam que devemos estudar um pouco todo dia, ou seja, devemos estudar aquilo que vivenciamos hoje, no mesmo dia (PIAZZI, 2013a, p. 48). Ao fazermos o retrospecto da resolução do problema, no mesmo dia em que o resolvemos, conseguiremos aprender como resolver problemas relacionados com o raciocínio empregado naquela resolução. Essa teoria vem ao encontro do que sugeriu Pólya (2006, p. 12) quando relata que muitos alunos, ao chegarem à solução do problema, fecham os livros e seguem adiante, em outros conteúdos, mas na verdade, deveriam fazer um retrospecto da resolução completa podendo assim aperfeiçoar suas habilidades em resolver problemas.

Pólya sugere que a sua lista deva ser resumida nas suas etapas para melhor assimilação pelos estudantes como se observa:

> A lista deve ser curta, para que as questões possam ser frequentemente repetidas, sem artificialismo e em condições diferentes. Desse modo, é provável que elas sejam finalmente assimiladas pelo estudante e contribuam para o desenvolvimento de um *hábito mental.* (PÓLYA, 2006, p. 17).

Assim o professor Luiz Roberto Dante (2000, p. 29, grifo do autor), resumiu-a e sistematizou-a da seguinte forma:

> **Compreender o problema**
>
> a) O que se pede no problema?
> b) Quais são os dados e as condições do problema?
> c) É possível fazer uma figura, um esquema ou um diagrama?
> d) É possível estimar a resposta?

Elaborar um plano

a) Qual é o seu plano para resolver o problema?
b) Que estratégia você tentará desenvolver?
c) Você se lembra de um problema semelhante que pode ajudá-lo a resolver este?
d) Tente organizar os dados em tabelas e gráficos.
e) Tente resolver o problema por partes.

Executar o plano

a) Execute o plano elaborado, verificando-o passo a passo.
b) Efetue todos os cálculos indicados no plano.
c) Execute todas as estratégias pensadas, obtendo várias maneiras de resolver o mesmo problema.

Fazer o retrospecto ou verificação

a) Examine se a solução obtida está correta.
b) Existe outra maneira de resolver o problema?
c) É possível usar o método empregado para resolver problemas semelhantes?

Sendo assim, sempre que nos referirmos no texto à Sequência de Pólya estamos assumindo se tratar dos questionamentos e sugestões resumidos e sistematizados pelo professor Luiz Roberto Dante.

O sucesso do aprendizado dos estudantes da resolução de problemas utilizando-se da Sequência de Pólya está ligado também à postura do professor na condução dos questionamentos e sugestões da Sequência durante o desenvolvimento das resoluções de problemas propostos.

Uma das posturas que deve ser adotada é:

> Busque, no problema que está abordando, aspectos que possam ser úteis nos problemas que virão – procure descobrir o modelo geral que está por trás da presente situação concreta. (PÓLYA, 2017, p.4)
>
> Quando você apresentar a solução de um problema *enfatize* convenientemente os *aspectos instrutivos* da solução. Um aspecto é instrutivo se merece imitação; isto é, se puder ser usado não somente na solução do presente problema, mas também na solução de outros problemas – quanto mais puder ser usado, mais instrutivo. (PÓLYA, 2017, p.7)

Outro cuidado que se deve tomar é com o que Pólya (2006, p.17) chamou de *método de questionar do professor* que não deve ser rígido, mas que essencialmente, deve começar por perguntas ou sugestões genéricas da Sequência de Pólya e depois, se necessário, chegar gradualmente a outras perguntas ou sugestões mais específicas, num movimento de ir e vir constante.

Outro fator importante a ser considerado diz respeito à educação da vontade do aluno:

> Ensinar a resolver problemas é educar a vontade. Na resolução de problemas que, para ele, não são muito fáceis, o estudante aprende a perseverar a despeito de insucessos, a apreciar pequenos progressos, a esperar pela ideia essencial e a concentrar todo o seu potencial quando esta aparecer. Se o estudante não tiver, na escola, a oportunidade de se familiarizar com as diversas emoções que surgem na luta pela solução, a sua educação matemática terá falhado no ponto mais vital. (PÓLYA, 2006, p. 131).

Ainda com relação a esse aspecto, uma ilustração adequada faz-se utilizando, a título de exemplo, uma cena do filme em O preço... (1988) quando o professor Escalante expressa a seus alunos a necessidade de ter garra e vontade para atingir os objetivos que temos como meta. Aliás, o título desse filme em espanhol é “Con Ganas de Triunfar” que, traduzido para o português significa Com Vontade de Vencer.

3.4 A Escolha do Tema Funções

O Currículo do Estado de São Paulo para Matemática e suas tecnologias tem seus conteúdos disciplinares de Matemática organizados em três grandes blocos temáticos: Números, Geometria e Relações e essa proposta de ensino e aprendizagem contempla que sempre o conteúdo de um bloco seja abordado com a participação dos outros dois blocos, conforme mencionado em São Paulo (2012, p. 38-39).

Dentro do bloco temático Relações, os conceitos relacionados a Funções estão presentes em diversas situações de aprendizagem em quase todo o

Material de Apoio ao Currículo do Estado de São Paulo – Matemática – Ensino Médio, como podemos observar em partes extraídas da seção “*conteúdos básicos do volume”*, presentes no Caderno do professor, citadas abaixo:

> Além dos conteúdos citados, este Caderno também faz uma retomada da noção de função, que traduz uma relação de interdependência entre duas grandezas, explorando-se especialmente as funções de 1º grau e de 2º grau, bem como suas aplicações em diferentes contextos. (SÃO PAULO, 2014a, p. 7)

> As potências já foram apresentadas aos alunos no Ensino Fundamental (na 5ª. série/ 6º ano, as primeiras noções; na 7ª. série/8º ano, as potências com expoentes inteiros; na 8ª série/ 9º ano, os expoentes racionais e reais). Trata-se, agora, de consolidar seu significado, sintetizando os fatos conhecidos na apresentação da função exponencial, com destaque para sua forma peculiar de crescimento ou decrescimento. (SÃO PAULO, 2014b, p. 8)

> A Trigonometria apresenta a importante característica de estabelecer ligação entre o eixo “Geometria e medidas” e o eixo “Número e funções”.
> O estudo da Trigonometria, ao relacionar esses eixos, permite que sejam associadas entre si relevantes ideias matemáticas. No caso de Geometria e medidas, o elemento norteador de todo o trabalho é a **proporcionalidade**, ao passo que os conceitos pertinentes ao segundo eixo, Números e funções, envolvem a ideia fundamental da **periodicidade** de determinados fenômenos, e a possibilidade de modelá-los, isto é, representá-los por intermédio de uma equação matemática. (SÃO PAULO, 2014c, p. 6, grifo do autor)

> Na Unidade 8 são apresentadas as equações da elipse, da hipérbole e da parábola, em posições convenientes em relação aos eixos de coordenadas, de modo a simplificar os cálculos. Uma extensão de tal estudo, conduzindo a equações mais gerais, pode ser dispensada ou adiada para o momento em que serão tratadas as funções (volume 2). (SÃO PAULO, 2014d, p. 8)

> O conteúdo básico das quatro primeiras Situações de Aprendizagem deste Caderno é a ideia de função, que é a tradução, em linguagem matemática, da relação de interdependência entre duas ou mais grandezas. Tal ideia já foi apresentada aos alunos anteriormente em diversas situações e seria interessante uma breve retomada de tais ocorrências por parte do professor, antes de iniciar os trabalhos deste volume. (SÃO PAULO, 2014e, p. 8)

Assim, aliado ao fato de que, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 1999, p. 255-257), em se tratando da questão da contextualização e da interdisciplinaridade, Funções é um exemplo de tema que permite tal abordagem, estabelecendo conexões entre conceitos matemáticos e também de outras áreas de conhecimento, este trabalho de pesquisa buscou explorar inicialmente o tema Funções.

4 PLANEJAMENTO DAS ATIVIDADES

Apresentamos a seguir o planejamento inicial da sequência de atividades e ações programadas para o desenvolvimento de nosso projeto. Conforme Ensinar... (2016), observamos que estamos conscientes da imensa importância dessa etapa de nosso trabalho, pois traçamos as metas articuladas às estratégias, ajustando-as às possibilidades reais que esperamos nos sejam apresentadas. Observamos ainda que não esperamos trabalhar apenas com estudantes ideais, cônscios da necessidade de identificarmos seus conhecimentos prévios assim como suas dificuldades e necessidades, acolhendo-os e podendo agir de maneira significativa para cada participante, assim.

O desenvolvimento dessa sequência didática foi planejado para ser aplicado em cinco etapas, que são constituídas de atividades voltadas para o público destinado a este projeto, que é um grupo de estudos de alunos visando aprimorar seus conhecimentos do Ensino Básico em Matemática, mas poderá ser adaptado em outras situações. Tais atividades são compostas de listas de problemas, resoluções e discussões das mesmas e a busca de estratégias para resolver problemas diversos. Cada encontro aqui se constitui de 2 horas de atividades. Além disso, as listas de problemas procuram seguir a orientação de Pólya:

> Se o professor desejar experimentar, em aula, o método aqui proposto, deverá, evidentemente, proceder com cautela. [...] Deverá preparar cuidadosamente os exemplos que pretende discutir, considerando também abordagens diversas. Deverá, ainda, começar por algumas tentativas e descobrir gradualmente como lhe será possível aplicar o método, como os estudantes o recebem e quanto tempo isso lhe tomará. (PÓLYA, 2006, p. 17).

O planejamento do trabalho contemplou a apresentação de cinco listas cada uma com dez problemas apresentados em provas anteriores do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), pois o Currículo do Estado de São Paulo para Matemática e suas tecnologias adotou que as competências a serem aprendidas deveriam ser aquelas que foram formuladas no referencial teórico do ENEM (1998 apud SÃO PAULO, 2012, p. 18). Além disso, a maioria dos estudantes que participaram da aplicação deste projeto tinha como objetivo fazer a prova do ENEM ao final de 2016 e, acrescenta-se também o fato de ser a lista de indagações apropriada a problemas de determinação (PÓLYA, 2006, p. 101).

Os encontros aconteceram em uma sala de aula equipada com quadro branco. Foram utilizados um aparelho data show e uma caixa de som conectada a um computador. Além disso, os alunos receberam materiais impressos para os registros necessários durante os encontros de acordo com o planejado previamente.

Os momentos de discussão sobre conceitos matemáticos ou de resolução conjunta dos problemas propostos nas listas de problemas foram desenvolvidos com os estudantes sentados em U, pois assim procedendo, objetivamos "desenvolver a segurança, promover a educação participativa, melhorar a concentração, diminuir conflitos em sala de aula, diminuir conversas paralelas". (CURY, 2003, p. 123), salientando que "sentar em forma de U ou em círculo aquieta o pensamento, melhora a concentração, diminui a ansiedade dos alunos. O clima da classe fica agradável e a interação social dá um grande salto" (Ibid., p. 125).

Passamos então à descrição das etapas, conforme planejadas inicialmente.

4.1 Etapa 1 – Diagnósticos de Habilidades e Competências e Revisão de Conteúdo (Funções)

Esta etapa será composta de:

a) Apresentação de uma lista com problemas sobre o assunto escolhido (Funções) que deverão ser resolvidos, descritas as resoluções em duas colunas, uma de maneira objetiva e outra de maneira explicativa da estratégia de resolução, respectivamente e, posteriormente, deverá ser entregue ao professor. Duração: 1 encontro

b) Análise das habilidades e competências dos alunos para a resolução de problemas envolvendo o assunto escolhido.

c) Resolução e discussão dos problemas com os alunos. Para tanto, será oferecido material similar à lista proposta, para utilização durante a discussão das resoluções e que poderá ser levado para casa, constituindo-se assim em material de estudo. Duração: 1 ou 2 encontros

d) Revisão do conceito de funções com algumas aplicações de Funções Afim, Quadráticas, Exponenciais e Logarítmicas. Os alunos receberão material impresso para o desenvolvimento desta atividade e poderão levá-lo, constituindo-se em material de estudo. Duração: 3 encontros

No desenvolvimento desta primeira etapa, ao apresentarmos a lista com os problemas objetivamos entender a maneira de raciocinar e os procedimentos utilizados pelos alunos na resolução de problemas matemáticos sobre o assunto escolhido, identificando o nível de conhecimento do assunto bem como as habilidades e competências mínimas necessárias para resolvê-los.

Quando propomos a resolução e discussão conjuntas dos problemas apresentados, objetivamos fazer uma análise dos erros apresentados, ao mesmo tempo em que iniciaremos uma revisão dos conceitos, sempre adotando uma postura indagadora compatível com as orientações de Pólya visando auxiliar no desenvolvimento dos procedimentos necessários para a resolução de problemas. Assim, buscaremos adotar uma postura pedagógica indagadora baseada nas sugestões de Pólya, sem mencioná-las explicitamente, tornando-se um agente mediador e facilitador, explorando os conhecimentos prévios dos alunos e motivando-os a sistematizar as resoluções. Citamos algumas sugestões de questões a serem formuladas durante as resoluções nesta etapa e também nas seguintes:

- Vamos ler o enunciado do problema buscando entender o que o problema traz como questionamento.
- Quais são as informações (hipóteses) necessárias para a sua resolução?

- Sabendo o questionamento do problema e as informações, qual é a estratégia que você usaria para resolvê-lo?
- Será que a resposta está correta?
- Alguém respondeu de outra maneira? Qual maneira foi mais fácil de resolver?

Ao propormos uma revisão dos conceitos envolvendo o assunto escolhido (Funções) objetivamos excluir de nossa investigação a eventual falta destes conceitos para que, na próxima etapa, possamos prosseguir com a nossa proposta. Segundo o Currículo do Estado de São Paulo para Matemática e suas tecnologias, temos que:

> De fato, diante de um aluno que desconhece conteúdos específicos, por mais simples que sejam tais conteúdos, o professor não enfrenta problemas sérios: quanto mais simples for o conteúdo desconhecido mais improdutivo será reclamar da sua ausência, mais eficaz será ensinar imediatamente tal conteúdo. Desde que, naturalmente, o aluno em questão queira sabê-lo. (SÃO PAULO, 2012, p. 46).

Essa revisão deverá ser desenvolvida utilizando-se de situações que objetivem contextualizar as situações propostas, pois “[...] nada que puder incutir o interesse pela Matemática nos estudantes deverá ser omitido.” (Pólya, 2006, p. 129).

4.2 Etapa 2 – Verificação de Alterações nos Desempenhos

A organização das atividades e ações desta etapa será:

a) Apresentação de uma nova lista com problemas sobre o assunto escolhido (Funções) que deverão ser resolvidos e, posteriormente, ser entregue ao professor. Duração: 1 encontro

b) Resolução e discussão dos problemas com os estudantes. Para tanto, será oferecido material similar à lista proposta, para utilização durante a discussão das resoluções e que poderá ser levado para casa, constituindo-se assim em material de estudo. Duração: 1 ou 2 encontros

No desenvolvimento desta segunda etapa, ao apresentarmos uma nova lista com problemas sobre o mesmo assunto escolhido como tema dos problemas da primeira lista, objetivamos verificar se a revisão dos conceitos e o início do desenvolvimento de procedimentos sugeridos por Pólya acarretarão alguma diferença no aprendizado do assunto escolhido.

Ao propormos a resolução e discussão dos problemas em conjunto com os alunos objetivamos reforçar os conceitos e procedimentos abordados até o momento.

4.3 Etapa 3 – Resolução de Problemas (Funções) Utilizando a Sequência de Pólya

Esta etapa será composta pelo seguinte conjunto de atividades:

a) Apresentação aos estudantes de maneira clara e resumida os procedimentos idealizados por Pólya e resumidos por Dante (2000), que denominamos de Sequência de Pólya (ANEXO A) e, através da aplicação em alguns problemas previamente selecionados (APÊNDICE H), analisaremos e refletiremos com os estudantes as fases propostas pela Sequência de Pólya para a resolução de problemas, entendendo-as e vivenciando as vantagens (ou desvantagens) em sua utilização para tal finalidade. Duração: 1 encontro

b) Apresentação de uma nova lista com problemas sobre o assunto escolhido (Funções) para a resolução utilizando-se de material impresso com a Sequência de Pólya, solicitando aos estudantes que resolvam os problemas seguindo as sugestões propostas na Sequência e, posteriormente, entreguem ao professor. Duração: 1 encontro

c) Resolução e discussão dos problemas com os estudantes, correlacionando as resoluções dos problemas com a Sequência de Pólya. Para tanto, será oferecido material similar à lista proposta, para utilização durante a discussão das resoluções e que poderá ser levado para casa, constituindo-se assim em material de estudo. Duração: 1 encontro

Iniciaremos esta etapa expondo uma breve biografia do professor George Pólya e suas contribuições ao ensino de Matemática através da sistematização de posturas adequadas em sala de aula, visando a aprendizagem dos alunos, e da utilização de indagações objetivas durante o processo de resolução de problemas. Neste momento, também destacaremos o trabalho do professor Luiz Roberto Dante em seu livro Didática da Resolução de Problemas de Matemática (DANTE, 2000).

Ao apresentarmos a Sequência de Pólya, objetivamos sistematizar os procedimentos abordados até o momento durante as etapas precedentes.

Ao propormos a resolução de nova lista de problemas sobre o assunto escolhido desejamos identificar o progresso dos estudantes ao utilizarem de forma explícita os conceitos sugeridos pelos autores.

Quando propomos a resolução e discussão dos problemas em conjunto com os alunos, fazendo correlações à Sequência de Pólya, buscamos reforçar ainda mais os procedimentos desenvolvidos.

4.4 Etapa 4 - Resolução de Problemas (Diversos Conteúdos) Utilizando a Sequência de Pólya

Para esta etapa selecionamos as ações a seguir:

a) Apresentação de uma nova lista com problemas sobre outros assuntos de Matemática, como Trigonometria, Geometria Plana, Geometria Espacial, Geometria Analítica, Estatística, Probabilidade, entre outros (não necessariamente envolvendo o assunto escolhido inicialmente) para a resolução, utilizando-se de material impresso com a Sequência de Pólya, solicitando aos estudantes que abordem os problemas seguindo as sugestões propostas na Sequência, resolvam os problemas e, posteriormente, entreguem ao professor. Duração: 1 encontro.

b) Resolução e discussão dos problemas com os alunos fazendo constantes referências para a Sequência. Para tanto, será oferecido material similar à lista proposta, para utilização durante a discussão das resoluções e que poderá ser levado para casa, constituindo-se assim em material de estudo Duração: 1 encontro.

O objetivo desta quarta etapa, ao apresentarmos uma lista com problemas diversos de Matemática, será identificar se os alunos assimilaram os conceitos da Sequência de Pólya e a sua contribuição na aplicação dos procedimentos em outros assuntos de Matemática. Esperamos que os alunos tenham uma maior compreensão dos problemas apresentados e que o desempenho seja superior ao observado até o momento em atividades similares.

No processo de resolução e discussão dos problemas em conjunto com os alunos, fazendo constantes referências à proposta de Pólya, buscamos reforçar, mais uma vez, os procedimentos desenvolvidos para concluirmos nossa investigação na próxima etapa.

4.5 Etapa 5 – Assimilação e Prática da Utilização da Sequência de Pólya

Finalizaremos o nosso planejamento com as seguintes ações:

a) Apresentação de uma nova lista com problemas variados sem a Sequência de Pólya impressa que deverão ser resolvidos e posteriormente deverá ser entregue ao professor. Duração: 1 encontro

b) Avaliação do desempenho dos alunos sobre as etapas aplicadas. Duração: 1 encontro.

No desenvolvimento desta quinta etapa, ao apresentarmos uma lista com problemas variados sem o material impresso com a Sequência de Pólya objetivamos identificar o nível da melhora do desempenho dos estudantes perante a utilização implícita dos conceitos sugeridos pelos autores verificando se os estudantes incorporarão em seus raciocínios a Sequência de Pólya e se poderão utilizá-la com êxito.

Quando propomos uma avaliação dos alunos sobre o desenvolvimento do projeto objetivamos obter informações necessárias à futura implantação do mesmo em novas oportunidades, assim como eventuais ajustes que sejam necessários para concretizar tal objetivo.

5 A APLICAÇÃO DO PROJETO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Nesse capítulo, fazemos um relato do desenvolvimento das etapas propostas nesse projeto em conjunto com os resultados obtidos. Ressalta-se que houve alteração no planejamento devido a percepções do professor sobre a oportunidade de obtenção de novas informações para análise dos resultados. Além disso, foi realizada uma análise do questionário (APÊNDICE B) respondido pelos estudantes ao final das etapas do projeto.

Em 02 de agosto de 2016, os alunos do 3º ano A e do 3º ano B de uma escola da rede pública paulista de ensino na cidade de Brotas-SP foram convidados a constituir e participar de um grupo de estudos de Matemática. Explicamos a eles o objetivo de trabalho do grupo de estudos a ser iniciado em 09 de agosto de 2016, que seria buscar aumentar o máximo possível o interesse dos alunos pela Matemática através da experimentação da proposta de trabalho para resolução de problemas apresentada pelo professor George Pólya e com término previsto para 25 de outubro de 2016. Os encontros aconteceriam todas as terças-feiras das 19h30 às 21h30 e participariam dos mesmos apenas os alunos que apresentassem a autorização dos pais ou responsáveis (APÊNDICE I).

Na sequência faremos a descrição dos encontros bem como a análise acima citada.

5.1 Etapa 1 - Diagnósticos de Habilidades e Competências e Revisão de Conteúdo (Funções)

Encontro 1 - Em 09/08/2016, foi apresentada para o grupo a proposta de desenvolvimento de trabalho para os encontros, deixando claro que não teríamos aulas tradicionais, mas sim um espaço para discussões e reflexões com o objetivo de construirmos conhecimentos matemáticos.

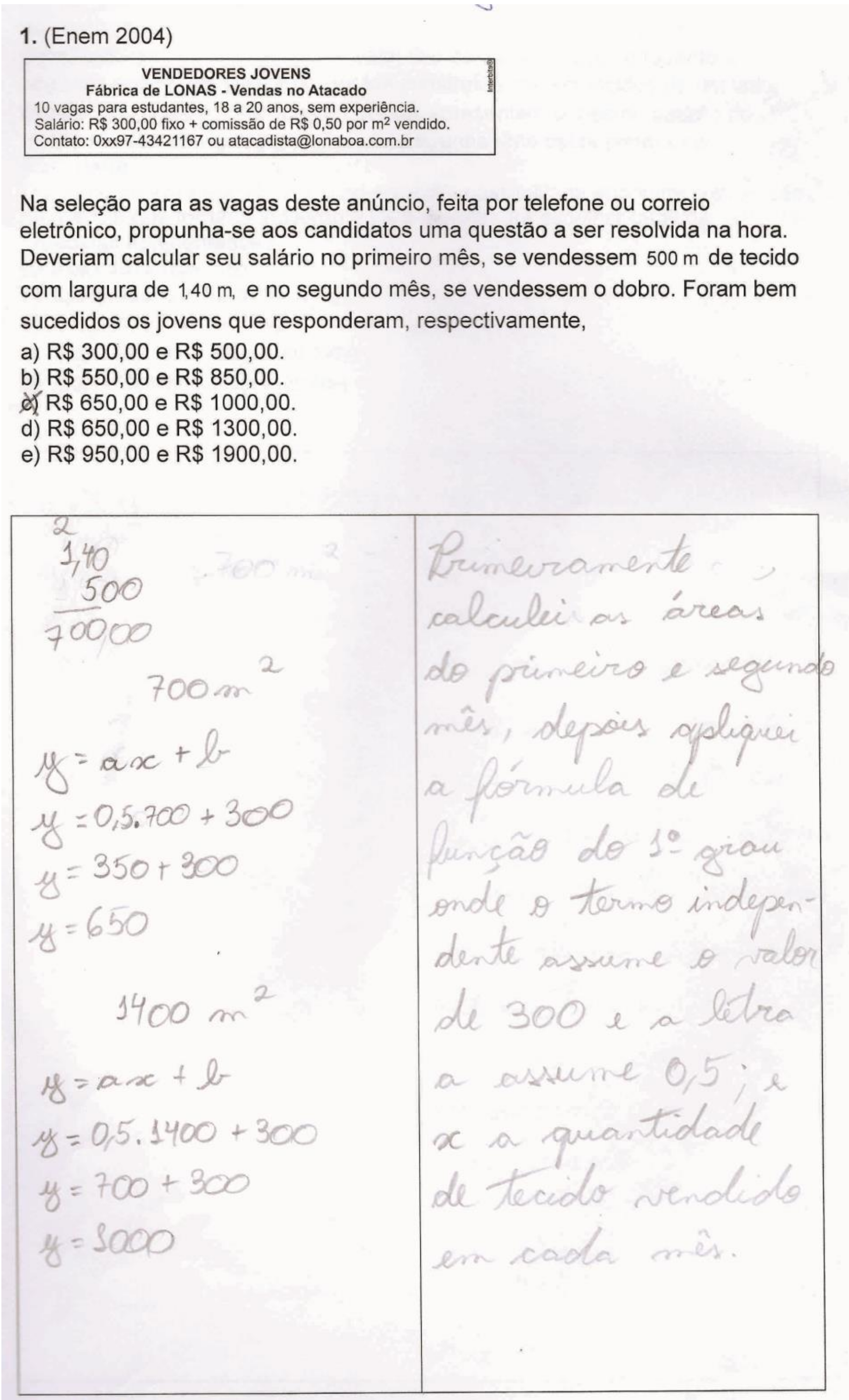
Apresentada a proposta e esclarecidas as dúvidas iniciamos as atividades com uma lista de problemas (APÊNDICE C) que contemplavam o conteúdo Funções. A proposta foi desenvolver dez problemas individualmente, registrando-se as resoluções em uma coluna de respostas e a linha de raciocínio dos alunos transcrita por eles na segunda coluna. As resoluções não tiveram intervenção do professor.

Foto 1 – Alunos resolvendo individualmente problemas da Lista 1

Foto 2 – Alunos resolvendo individualmente problemas da Lista 1

Ao analisarmos os resultados da resolução individual desta lista de problemas observamos que 7% dos alunos já apresentavam, com frequência, uma linha de raciocínio que lhes proporcionava uma situação de êxito na resolução dos problemas (Figura 1), enquanto 53% dos alunos procediam de forma a não conseguirem resolver os problemas propostos, essencialmente, por falta de conhecimentos matemáticos (Figura 2), e 40% dos alunos não obtinha sucesso em suas resoluções, essencialmente, pelo não entendimento do enunciado (Figura 3). Outro fator presente que impedia os alunos de alcançarem o sucesso, porém com menos incidência, foi a falta de verificação dos resultados alcançados (Figura 4).

Figura 1 – Problema resolvido corretamente



1. (Enem 2004)

VENDEDORES JOVENS
Fábrica de LONAS - Vendas no Atacado
10 vagas para estudantes, 18 a 20 anos, sem experiência.
Salário: R$ 300,00 fixo + comissão de R$ 0,50 por m² vendido.
Contato: 0xx97-43421167 ou atacadista@lonaboa.com.br

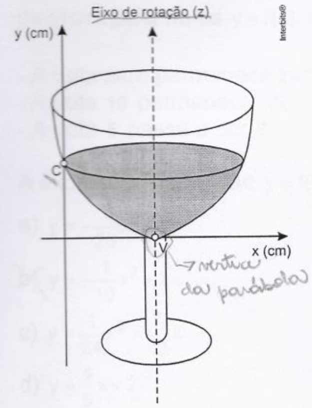
Na seleção para as vagas deste anúncio, feita por telefone ou correio eletrônico, propunha-se aos candidatos uma questão a ser resolvida na hora. Deveriam calcular seu salário no primeiro mês, se vendessem 500 m de tecido com largura de 1,40 m, e no segundo mês, se vendessem o dobro. Foram bem sucedidos os jovens que responderam, respectivamente,

a) R$ 300,00 e R$ 500,00.
b) R$ 550,00 e R$ 850,00.
c) R$ 650,00 e R$ 1000,00.
d) R$ 650,00 e R$ 1300,00.
e) R$ 950,00 e R$ 1900,00.

$1,40 \times 500 = 70000$ $700\,m^2$ $y = ax + b$ $y = 0,5.700 + 300$ $y = 350 + 300$ $y = 650$ $1400\,m^2$ $y = ax + b$ $y = 0,5.1400 + 300$ $y = 700 + 300$ $y = 1000$	Primeiramente, calculei as áreas do primeiro e segundo mês, depois apliquei a fórmula de função do 1º grau onde o termo indepen-dente assume o valor de 300 e a letra a assume 0,5; e x a quantidade de tecido vendido em cada mês.

Figura 2 – Falta de conhecimento de conceitos matemáticos

7. (Enem 2013) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.



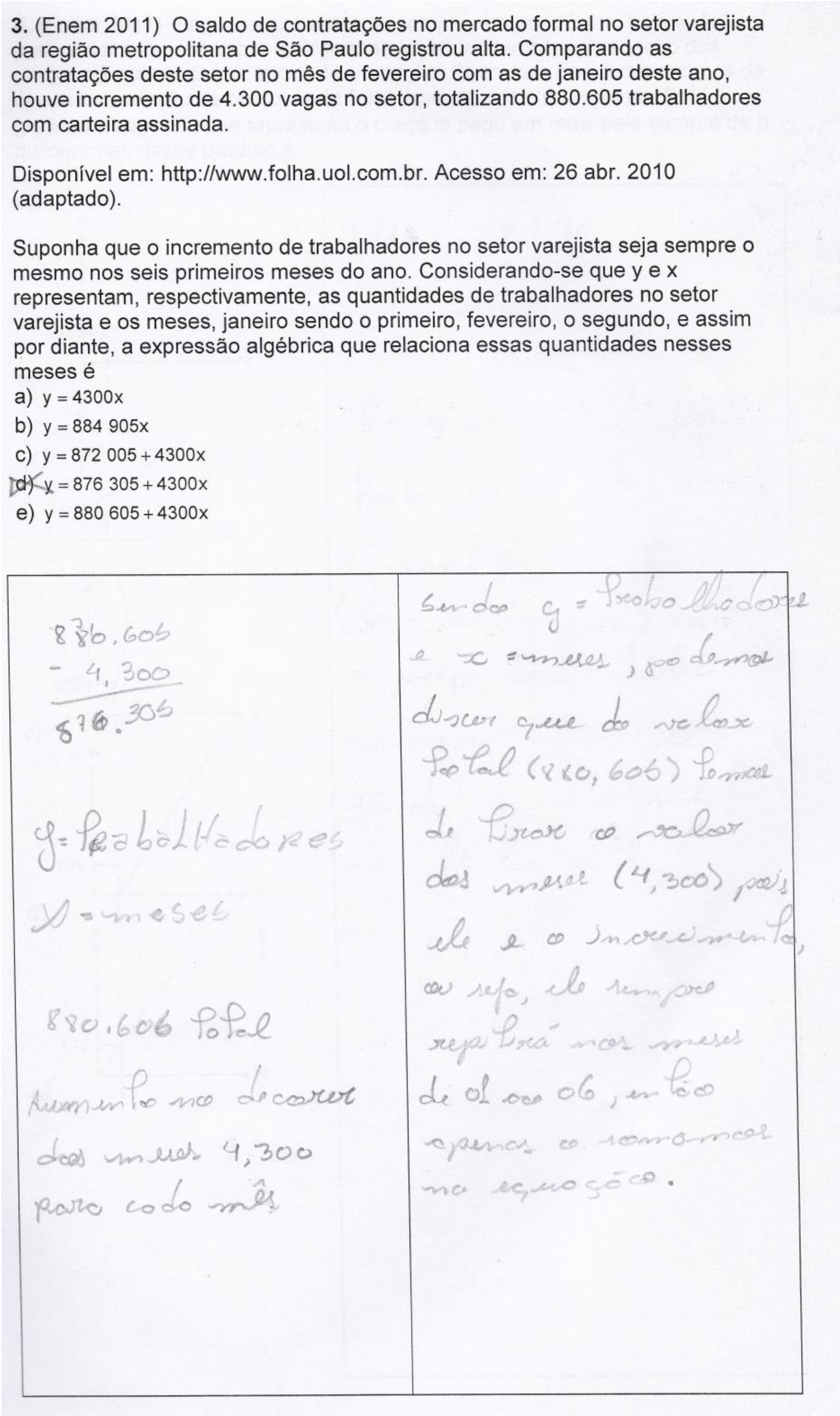
A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x.

Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é

a) 1.
b) 2.
c) 4.
d) 5.
e) 6.

$f(1) = \frac{3}{2} \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 1$ $f(1) = \frac{3}{2} \cdot 1^2 - 5$	Não sei qual conta usar e nem o que fazer, tentei fazer pelo resultado mas também não saberia encontra-lo.

Figura 3 – Equívoco na interpretação do enunciado



3. (Enem 2011) O saldo de contratações no mercado formal no setor varejista da região metropolitana de São Paulo registrou alta. Comparando as contratações deste setor no mês de fevereiro com as de janeiro deste ano, houve incremento de 4.300 vagas no setor, totalizando 880.605 trabalhadores com carteira assinada.

Disponível em: http://www.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

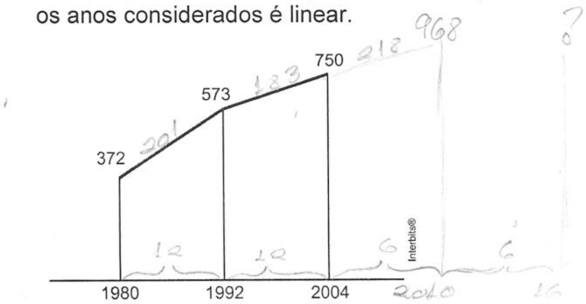
Suponha que o incremento de trabalhadores no setor varejista seja sempre o mesmo nos seis primeiros meses do ano. Considerando-se que y e x representam, respectivamente, as quantidades de trabalhadores no setor varejista e os meses, janeiro sendo o primeiro, fevereiro, o segundo, e assim por diante, a expressão algébrica que relaciona essas quantidades nesses meses é

a) $y = 4300x$
b) $y = 884\ 905x$
c) $y = 872\ 005 + 4300x$
d) $y = 876\ 305 + 4300x$
e) $y = 880\ 605 + 4300x$

880.605 − 4,300 876.305 y = trabalhadores X = meses 880.606 total Aumento no decorrer dos meses 4,300 para cada mês	Sendo y = trabalhadores e x = meses, podemos dizer que do valor total (880,606) temos de tirar o valor dos meses (4,300), pois ele é o incremento, ou seja, ele sempre repetirá nos meses de 01 ao 06, então apenas o somamos na equação.

Figura 4 – Provável erro por falta de verificação do resultado alcançado

5. (Enem 2010) O gráfico mostra o número de favelas no município do Rio de Janeiro entre 1980 e 2004, considerando que a variação nesse número entre os anos considerados é linear.



Favela Tem Memória. *Época*. Nº 621, 12 abr. 2010 (adaptado).

Se o padrão na variação do período 2004/2010 se mantiver nos próximos 6 anos, e sabendo que o número de favelas em 2010 e 968, então o número de favelas em 2016 será

a) menor que 1150.
b) 218 unidades maior que em 2004.
c) maior que 1150 e menor que 1200.
d) 177 unidades maior que em 2010.
e) maior que 1200.

1992 − 1980 = 012 2004 − 1992 = 012 573 − 372 = 201 750 − 573 = 183 968 − 750 = 218 750 + 218 = 968 968 + 218 = 1186 1186 − 968 = 218	Se o valor de variação de 2004/2010 mantiver-se o mesmo (218); podemos somalo com o valor de 2010 (968) que dará o resultado de 1186, que se encontra na alternativa A (menor que 1150), a única que se encaixa no resultado estipulado para 2016.

Nesta primeira lista, composta de dez problemas sobre conceitos envolvendo Funções Afim, Quadrática, Exponencial e Logarítmica, o rendimento dos estudantes foi de 32% de acertos.

Na análise do Questionário dos Alunos (questão 05 – APÊNDICE B), ao serem questionados sobre quais dificuldades sentiram ao resolver os problemas apresentados na primeira lista podemos identificar que a maioria dos estudantes que vivenciaram essa etapa sentiu algum tipo de dificuldade para realizar os problemas propostos que, em resumo, foram: esquecimento dos conceitos matemáticos necessários e dificuldade em interpretar o enunciado e identificar o caminho que deveria ser seguido. O que corrobora a percepção do professor frente aos erros encontrados ou a não realização das questões.

Encontro 2 - Em 16/08/2016, foi feita uma revisão sobre a definição de Funções, com a apresentação de alguns vídeos do Telecurso 2000, objetivando contextualizar os conceitos através da apresentação de muitos exemplos sobre Funções no cotidiano, sendo os assuntos abordados de forma direta, pois estávamos trabalhando com estudantes que queriam aprender. Neste momento mudamos o planejamento inicial e inserimos as correções da Lista 1 (APÊNDICE C) com os nove primeiros problemas, pois envolviam os conteúdos de função afim, função quadrática, função exponencial e gráficos de função.

Foto 3 – Revisão de conceitos (Funções)

Durante a correção dos problemas, foi tomado o cuidado de partir do raciocínio dos estudantes e das sugestões dos mesmos para concluir o resultado, valorizando todos os caminhos (raciocínios) tomados, buscando mostrar que chegavam ao mesmo resultado, quando resolvidos de maneiras diferentes, porém corretas.

Foi deixado para um próximo encontro a resolução do décimo problema, já que envolvia Função Logarítmica e foi apresentada a proposta da realização de uma revisão sobre esse assunto.

Foto 4 – Revisão de conceitos (Funções)

Encontro 3 - No encontro de 23/08/2016 foi feita uma revisão sobre Logaritmos e suas propriedades. Para tanto foi elaborada uma sequência didática do conteúdo e a partir daí, explorados a definição de Logaritmos e suas propriedades, exemplificando e desenvolvendo exercícios com a participação dos estudantes, que foi bastante positiva fazendo muitas perguntas, e esclarecendo dúvidas. Foi proposto para que os estudantes desenvolvessem alguns exercícios em casa, para que fossem corrigidos no próximo encontro e as dúvidas que porventura surgissem fossem esclarecidas. Esta também foi uma modificação do planejamento inicial, pois neste encontro os alunos demonstraram dificuldades e isso demandou um novo encontro sobre o assunto.

Encontro 04 – Em 30/08/2016 retomamos com uma breve revisão sobre Logaritmos e então efetuamos a correção de alguns exercícios deixados no encontro anterior com esclarecimento de dúvidas. Dando continuidade às atividades, apresentamos as propriedades operatórias, exemplificando-as e desenvolvendo exercícios. Novamente houve uma modificação no planejamento: necessitou a demanda de mais um encontro para a discussão do último problema da Lista 1 (APÊNDICE C) e para o término da revisão sobre funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica.

Ao serem questionados sobre a contribuição dos momentos que tivemos quando desenvolvemos um trabalho teórico sobre Funções a partir da resolução da primeira lista, procurando contextualizar através de vídeo aulas do Telecurso 2000, utilizando material didático sobre logaritmos e utilizando-se de jogos virtuais, pude identificar que todos os estudantes participantes entenderam que houve uma contribuição, pois segundo seus relatos, as vídeo-aulas foram importantes para a contextualização dos conceitos envolvendo funções; as explicações foram importantes para sanar dúvidas e aprofundar conhecimentos; foi uma forma diferenciada, dinâmica e divertida de aprendizado, saindo da rotina “lousa e caderno” chamando mais a atenção e ajudando a relembrar os conceitos.

Encontro 05 – Começaram as atividades de 06/09/2016 sendo corrigido o último problema da primeira lista, em que aplicamos algumas propriedades de Logaritmo para chegarmos ao resultado pedido e esclarecendo dúvidas sobre o enunciado do problema (Fotos 5 e 6).

Foto 5 – Resolução coletiva de um problema envolvendo logaritmos

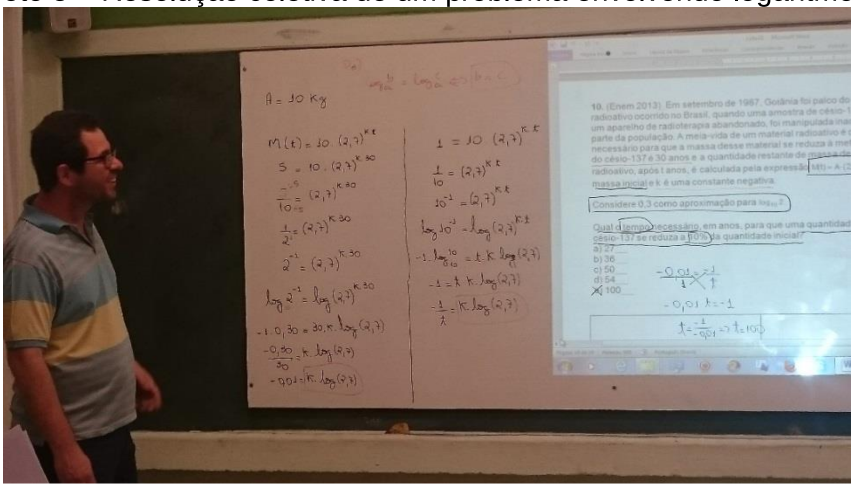


Foto 6 – Resolução coletiva de um problema envolvendo logaritmos

Finalizamos este encontro e também esta etapa, apresentando uma nova revisão das Funções Afim, Quadrática e Exponencial, utilizando-se de jogos virtuais do CD-ROM Matemática nas Olimpíadas (MATEMÁTICA..., s.d.). Os estudantes gostaram da atividade e tiveram boa participação, respondendo às perguntas que apareciam nos jogos. (Fotos 7 e 8).

Foto 7 – Revisão através de jogos virtuais

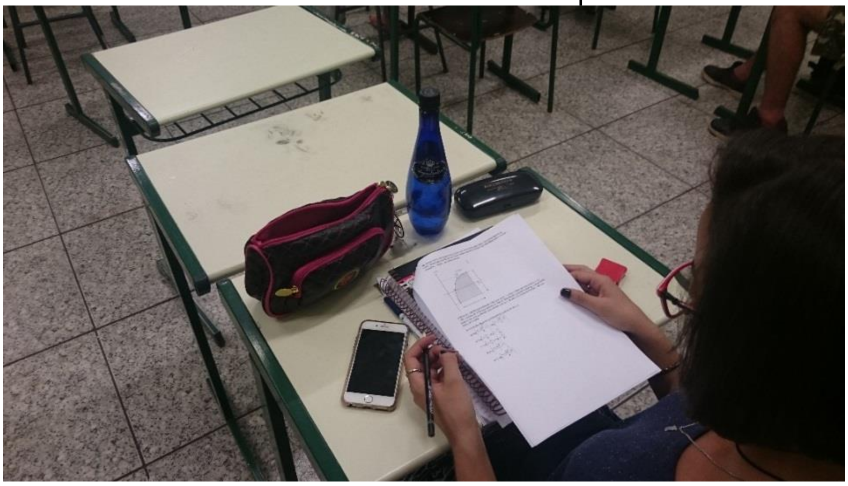
Foto 8 – Revisão através de jogos virtuais

5.2 Etapa 2 – Identificação dos Resultados

Encontro 06 – Em 13/09/2016 foi proposta uma segunda lista com dez problemas do ENEM contemplando o conteúdo sobre Funções (APÊNDICE D).

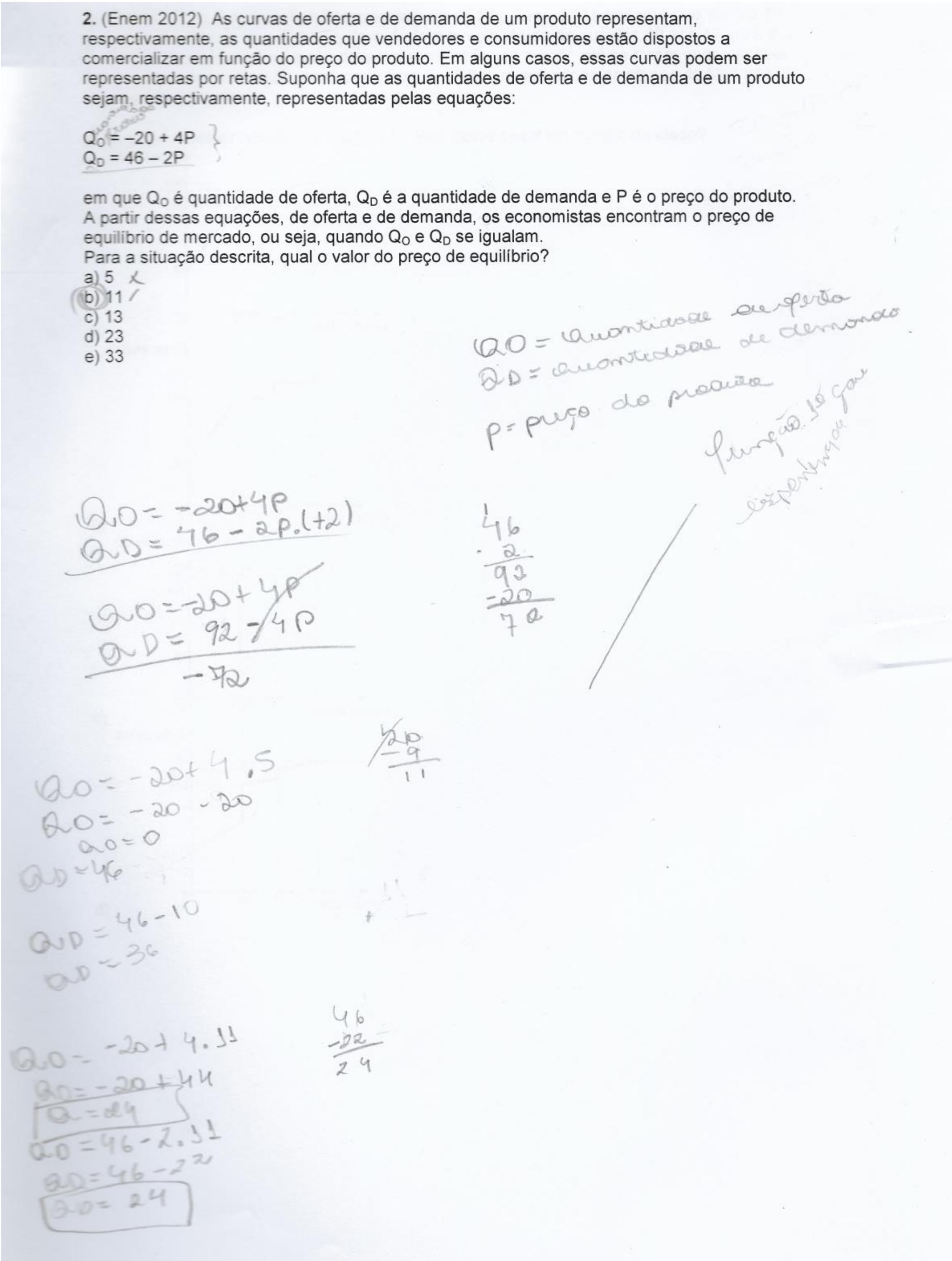
Foto 9 – Aluno resolvendo individualmente problemas da Lista 2

Foto 10 – Aluna resolvendo individualmente problemas da Lista 2



A segunda lista, composta de dez problemas sobre os conceitos de Funções assim como na primeira lista, foi apresentada na sequência e os estudantes que desenvolveram os problemas chegaram a aproximadamente 33% de acertos. O desempenho dos alunos nessa lista foi apenas um pouco melhor do que na primeira lista, porém podemos destacar algumas resoluções (Figuras 5 e 6) que apresentam a ideia do estabelecimento e a execução de um plano o que consideramos um avanço.

Figura 5 – Resolução que evidencia estabelecimento e execução de um plano



2. (Enem 2012) As curvas de oferta e de demanda de um produto representam, respectivamente, as quantidades que vendedores e consumidores estão dispostos a comercializar em função do preço do produto. Em alguns casos, essas curvas podem ser representadas por retas. Suponha que as quantidades de oferta e de demanda de um produto sejam, respectivamente, representadas pelas equações:

$Q_O = -20 + 4P$
$Q_D = 46 - 2P$

em que Q_O é quantidade de oferta, Q_D é a quantidade de demanda e P é o preço do produto.
A partir dessas equações, de oferta e de demanda, os economistas encontram o preço de equilíbrio de mercado, ou seja, quando Q_O e Q_D se igualam.
Para a situação descrita, qual o valor do preço de equilíbrio?
a) 5
b) 11
c) 13
d) 23
e) 33

QO = quantidade de oferta
QD = quantidade de demanda
P = preço do produto

QO = -20+4P
QD = 46 - 2P.(+2)

QO = -20 + 4P
QD = 92 - 4P

-72

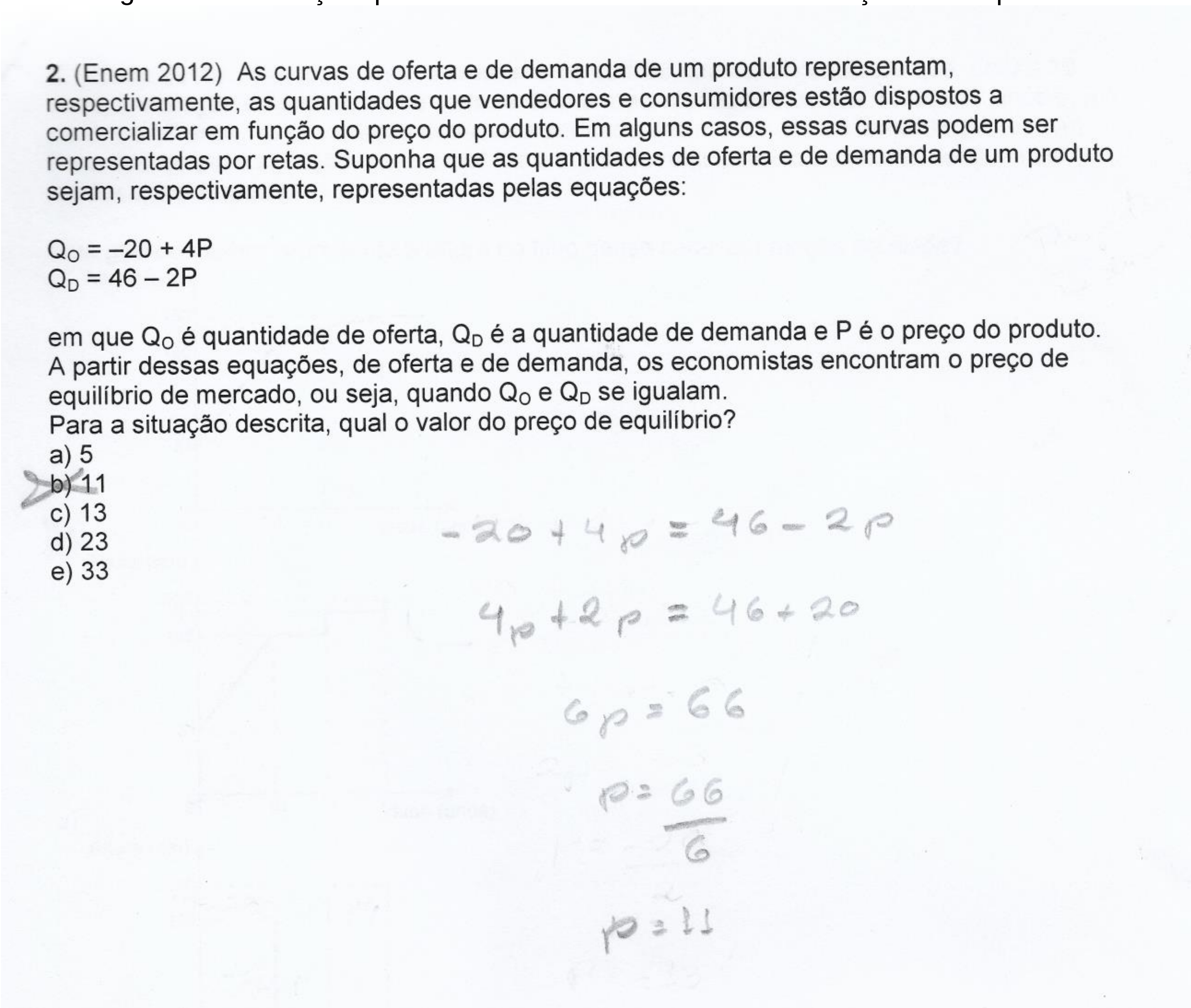
46
· 2
92
-20
72

QO = -20 + 4 . 5
QO = -20 - 20
QO = 0
QD = 46
QD = 46 - 10
QD = 36

QO = -20 + 4 . 11
QO = -20 + 44
$\boxed{Q = 24}$
QD = 46 - 2 . 11
QD = 46 - 22
$\boxed{QD = 24}$

46
-22
24

Figura 6 - Resolução que evidencia estabelecimento e execução de um plano



2. (Enem 2012) As curvas de oferta e de demanda de um produto representam, respectivamente, as quantidades que vendedores e consumidores estão dispostos a comercializar em função do preço do produto. Em alguns casos, essas curvas podem ser representadas por retas. Suponha que as quantidades de oferta e de demanda de um produto sejam, respectivamente, representadas pelas equações:

$Q_O = -20 + 4P$
$Q_D = 46 - 2P$

em que Q_O é quantidade de oferta, Q_D é a quantidade de demanda e P é o preço do produto. A partir dessas equações, de oferta e de demanda, os economistas encontram o preço de equilíbrio de mercado, ou seja, quando Q_O e Q_D se igualam.
Para a situação descrita, qual o valor do preço de equilíbrio?

a) 5
b) 11
c) 13
d) 23
e) 33

$-20 + 4p = 46 - 2p$

$4p + 2p = 46 + 20$

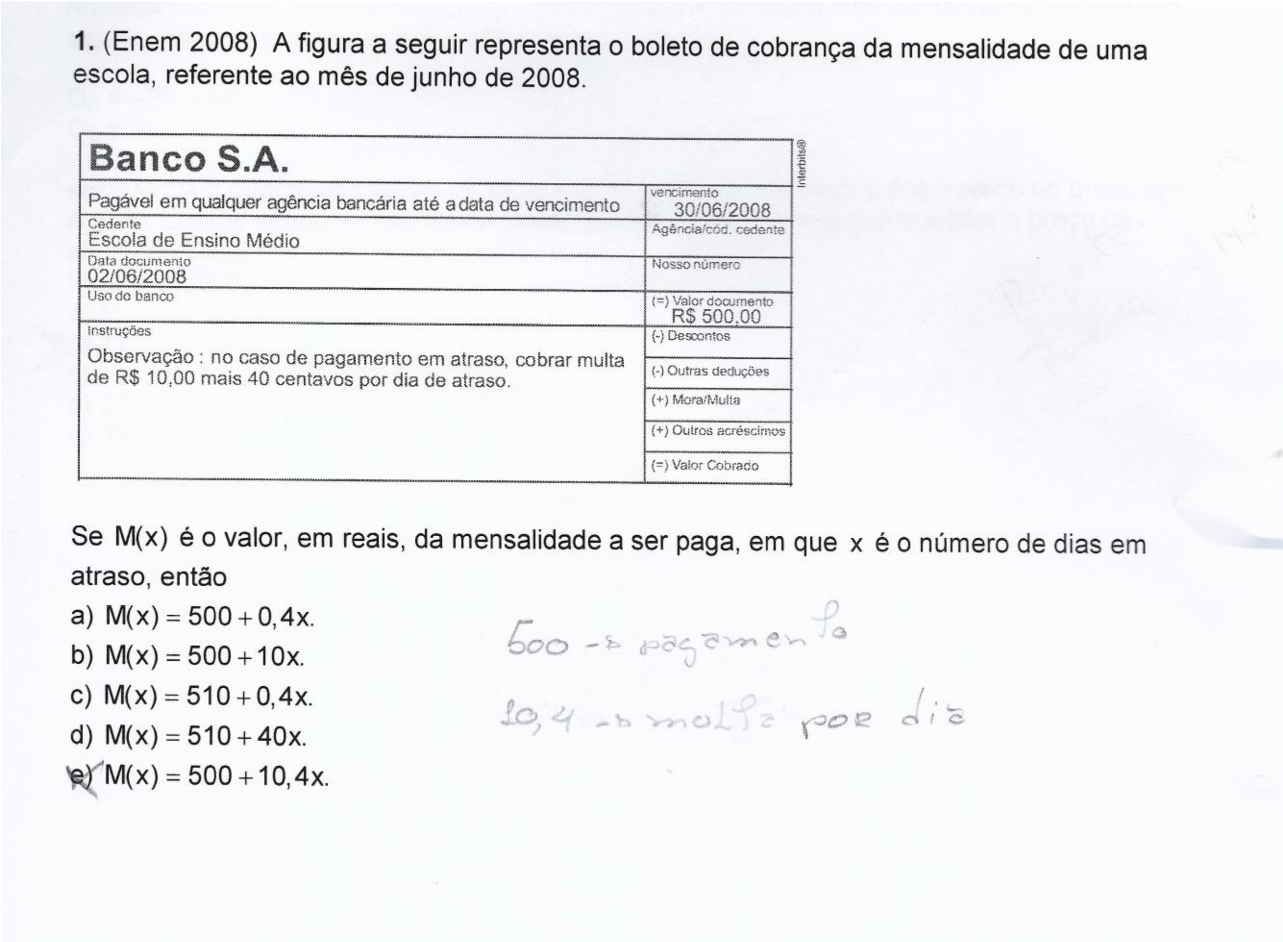
$6p = 66$

$p = \frac{66}{6}$

$p = 11$

Ao serem questionados (questão 7 – APÊNDICE B) sobre quais foram as dificuldades encontradas ao resolver os problemas da segunda lista pudemos identificar que todos os estudantes que vivenciaram essa etapa tiveram algum tipo de dificuldade para realizar os problemas propostos, porém segundo relatos desses estudantes, apesar do rendimento ter sido apenas um pouco superior ao rendimento da primeira, 33% consideraram que as dificuldades foram menores devido ao estudo desenvolvido imediatamente antes da apresentação dessa lista. Outros 42%, classificaram que as maiores dificuldades se referiram à interpretação do enunciado e identificação do caminho que deveria ser seguido (Figura 7), já que os conceitos matemáticos necessários haviam sido revisados, porém 25% dos participantes ainda relataram dificuldades em resolver problemas relacionados aos conceitos de logaritmos (Figura 8).

Figura 7 - Resolução que evidencia má interpretação do enunciado



1. (Enem 2008) A figura a seguir representa o boleto de cobrança da mensalidade de uma escola, referente ao mês de junho de 2008.

Banco S.A.	
Pagável em qualquer agência bancária até a data de vencimento	vencimento 30/06/2008
Cedente Escola de Ensino Médio	Agência/cód. cedente
Data documento 02/06/2008	Nosso número
Uso do banco	(=) Valor documento R$ 500,00
Instruções Observação : no caso de pagamento em atraso, cobrar multa de R$ 10,00 mais 40 centavos por dia de atraso.	(-) Descontos
	(-) Outras deduções
	(+) Mora/Multa
	(+) Outros acréscimos
	(=) Valor Cobrado

Se $M(x)$ é o valor, em reais, da mensalidade a ser paga, em que x é o número de dias em atraso, então

a) $M(x) = 500 + 0,4x$.

b) $M(x) = 500 + 10x$.

c) $M(x) = 510 + 0,4x$.

d) $M(x) = 510 + 40x$.

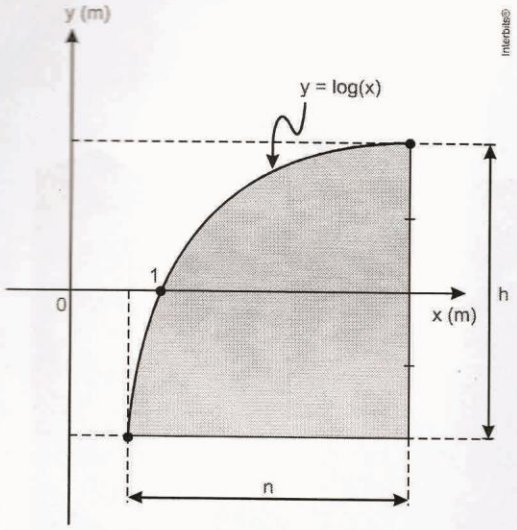
e) $M(x) = 500 + 10,4x$.

500 → pagamento

10,4 → multa por dia

Figura 8 – Aplicação equivocada dos conceitos envolvendo logaritmos

10. (Enem 2015) Um engenheiro projetou um automóvel cujos vidros das portas dianteiras foram desenhados de forma que suas bordas superiores fossem representadas pela curva de equação $y = \log(x)$, conforme a figura.



A forma do vidro foi concebida de modo que o eixo x sempre divida ao meio a altura h do vidro e a base do vidro seja paralela ao eixo x. Obedecendo a essas condições, o engenheiro determinou uma expressão que fornece a altura h do vidro em função da medida n de sua base, em metros.

A expressão algébrica que determina a altura do vidro é

a) $\log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right) - \log\left(\frac{n-\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

b) $\log\left(1+\frac{n}{2}\right) - \log\left(1-\frac{n}{2}\right)$

c) $\log\left(1+\frac{n}{2}\right) + \log\left(1-\frac{n}{2}\right)$

d) $\log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

e) $2\log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right) = 2\log\left[\frac{n+n+2}{2}\right] = 2\log\left[\frac{2n+2}{2}\right]$

$\frac{2n+2}{2} = 1$

$2n+2 = 2$

$n+2 = 1$

$n = -1$

a altura do vidro será sempre o dobro de x

Encontro 07 – Em 20/09/2016, foram resolvidos coletivamente os problemas da lista do encontro anterior. Novamente foram discutidos vários caminhos e várias soluções para o mesmo problema. Infelizmente o tempo não foi suficiente e ficou para o próximo encontro a resolução e discussão do décimo problema.

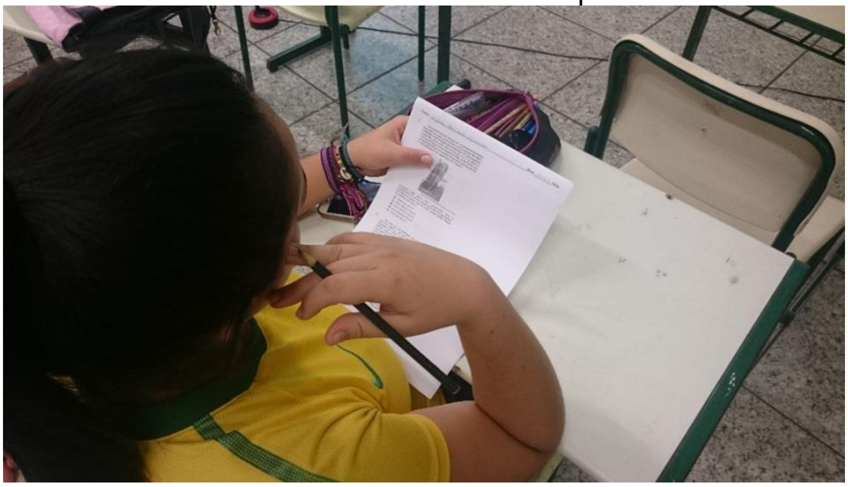
Foto 11 – Resolução coletiva dos problemas da Lista 2

Foto 12 – Resolução coletiva dos problemas da Lista 2

Encontro 08 – Iniciamos o encontro de 27/09/2016 com a resolução do décimo problema da segunda lista. Após a resolução do último problema, os alunos foram apresentados a uma nova Lista 3 (APÊNDICE E) envolvendo problemas de conteúdos diversos de Matemática.

Foto 13 – Aluno resolvendo individualmente problemas da Lista 3

Foto 14 – Aluna resolvendo individualmente problemas da Lista 3

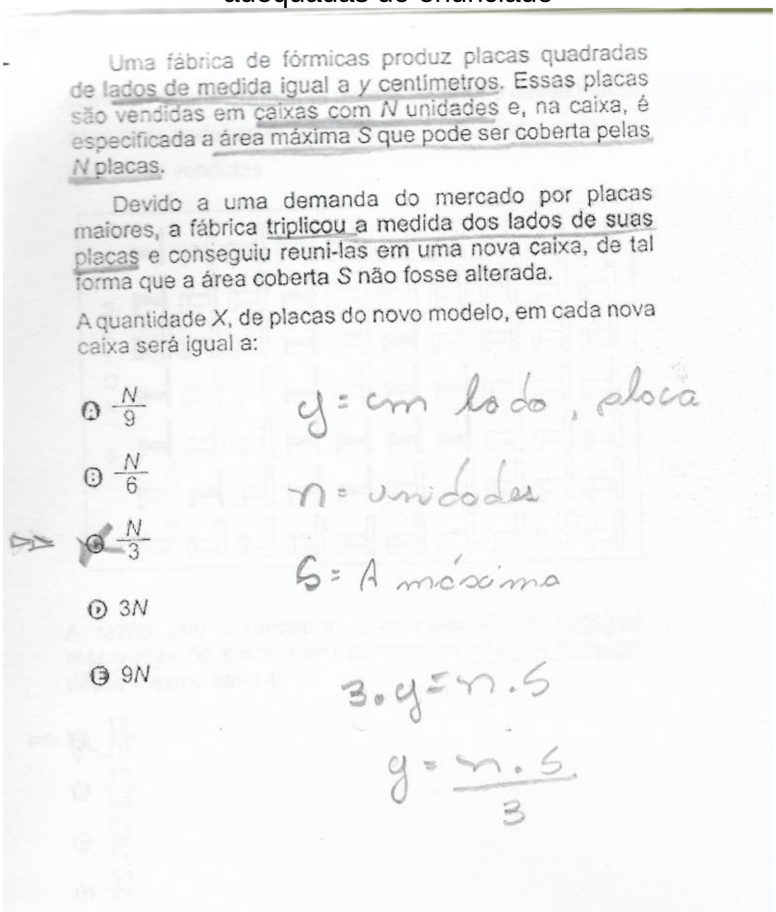


Neste ponto apontamos uma mudança significativa no planejamento inicial. Neste encontro haveria, conforme o planejamento, a exposição da Sequência de Pólya, objeto principal deste projeto, com o início da Etapa 03. Entretanto, durante as resoluções e discussões dos problemas anteriores sempre usamos uma postura voltada para esta Sequência (de forma implícita), de maneira que resolvemos preparar outro conjunto de problemas de conteúdos diversos, Lista 3 (APÊNDICE E), objetivando promover uma comparação no desempenho dos alunos ao apresentarmos problemas desta mesma natureza, em conjunto com problemas envolvendo o conceito de Funções, com a Sequência de Pólya de maneira explícita na etapa seguinte, pois assim, consideramos que teríamos mais recursos para analisar tais desempenhos. Com isso terminamos esta etapa e a resolução e discussão destes problemas foi planejada para ser feita na etapa seguinte, após a apresentação do objeto do projeto, que é a sistematização de resolução de problemas por Pólya.

Decidimos assim unificar as Etapas 03 e 04, e a resolução e discussão da Lista 3 de problemas foi desenvolvida utilizando-se a Sequência de Pólya com o objetivo de vivenciar mais momentos de aprendizagem valendo-se de tais procedimentos de forma explícita, conforme discussões mais adiante.

Ao analisarmos o desempenho dos alunos nesta nova lista composta de dez problemas sobre conceitos matemáticos diversos, observamos que o rendimento dos estudantes foi 40% de acertos, apontando um aumento em relação aos resultados anteriores. Além disso, observamos também que na resolução individual dos mesmos houve uma maior incidência da ação em grifar partes do enunciado (Figura 9) e algumas estratégias que não estavam sendo adotadas anteriormente, o que acreditamos ser para um melhor entendimento do enunciado.

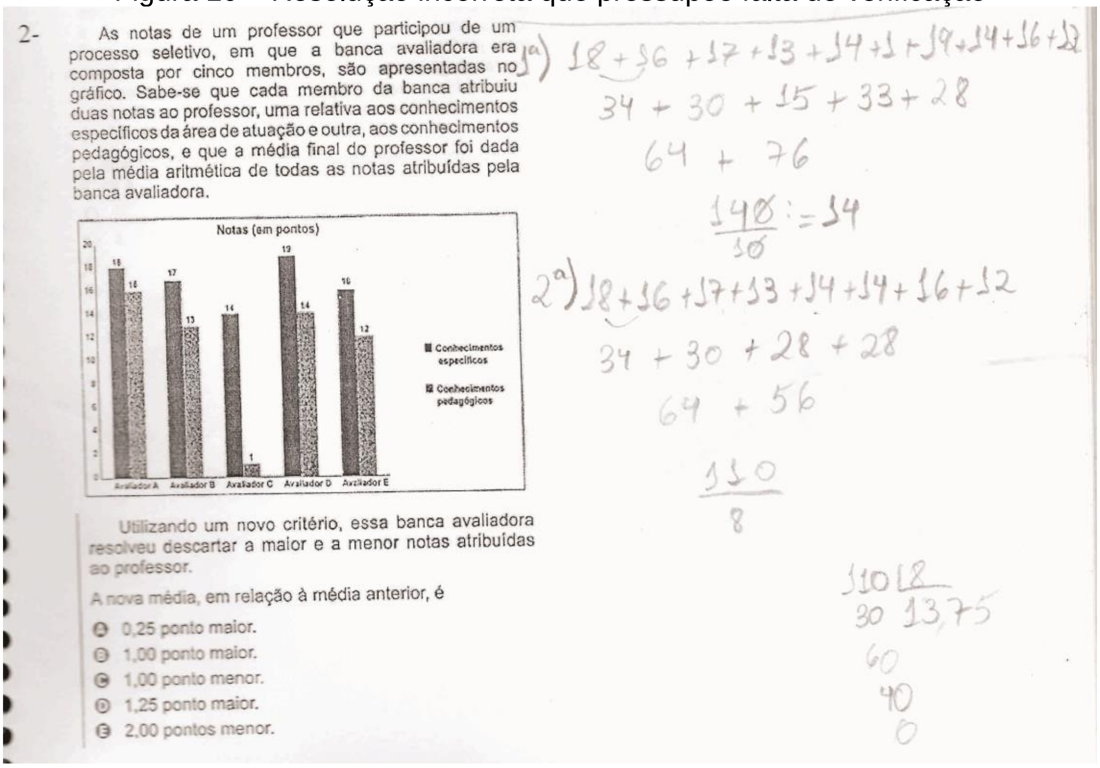
Figura 9 – Resolução incorreta, mas evidenciando um cuidado em selecionar informações adequadas do enunciado



Este resultado nos remete a outra análise: a nossa postura enquanto professor, que durante as discussões e resoluções coletivas das duas primeiras listas buscou intermediar o processo de resolução dos problemas através de questionamentos baseados na lista proposta por George Pólya, pode ter influenciado de forma positiva na maneira dos estudantes resolverem os problemas. Ou seja, a percepção que tivemos em fazer a alteração no planejamento acima nos parece estar adequada.

Outro fato observado foi que a falta de verificação ao final da resolução do problema ainda faz com que alguns alunos não cheguem ao resultado correto, como podemos observar na Figura 10.

Figura 10 – Resolução incorreta que pressupõe falta de verificação



5.3 Etapas 3 e 4 – Utilização da Sequência de Pólya na Resolução de Problemas

Conforme observamos anteriormente houve uma modificação na sequência de abordagem deste projeto. Descrevemos abaixo as aplicações e suas análises.

Encontro 09 – No dia 04/10/2016 fizemos a apresentação do trabalho de George Pólya. Inicialmente apresentamos um breve histórico sobre o autor e sobre o livro A Arte de Resolver Problemas. Logo após, deu-se início ao entendimento do método de Pólya aplicando-o em uma atividade prática de resolução de problemas (APÊNDICE H) e, passo a passo, fomos resolvendo os problemas buscando uma melhor compreensão dos estudantes. Neste momento fizemos mais uma alteração no planejamento inicial ao tomarmos a iniciativa de repetirmos a mesma exposição para um novo conjunto de estudantes no período da manhã do dia 10/10/2016, com o objetivo de compartilhar estes importantes conhecimentos com um número maior de pessoas.

Foto 15 – Apresentação da Sequência de Pólya

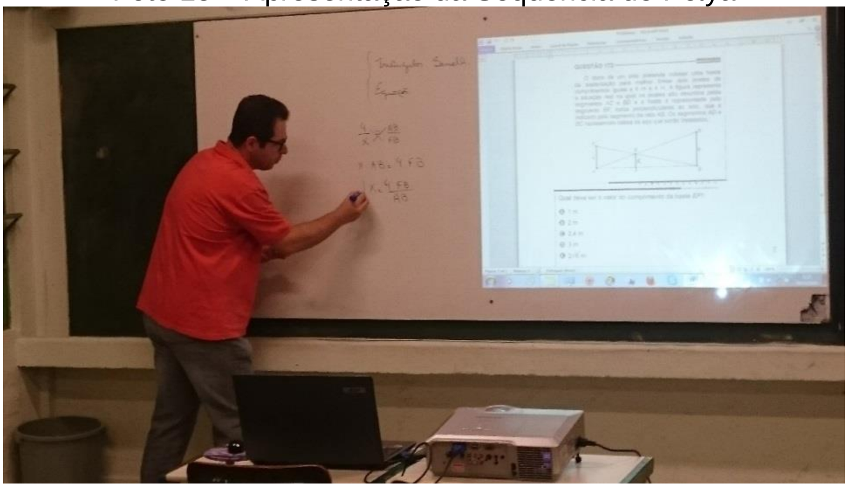


Foto 16 – Apresentação da Sequência de Pólya

Encontro 10 – Neste novo encontro de 10/10/2016 repetimos as mesmas atividades do encontro anterior a fim de apresentar o trabalho de George Pólya para um número maior de estudantes.

Foto 17 – Apresentação da Sequência de Pólya

.

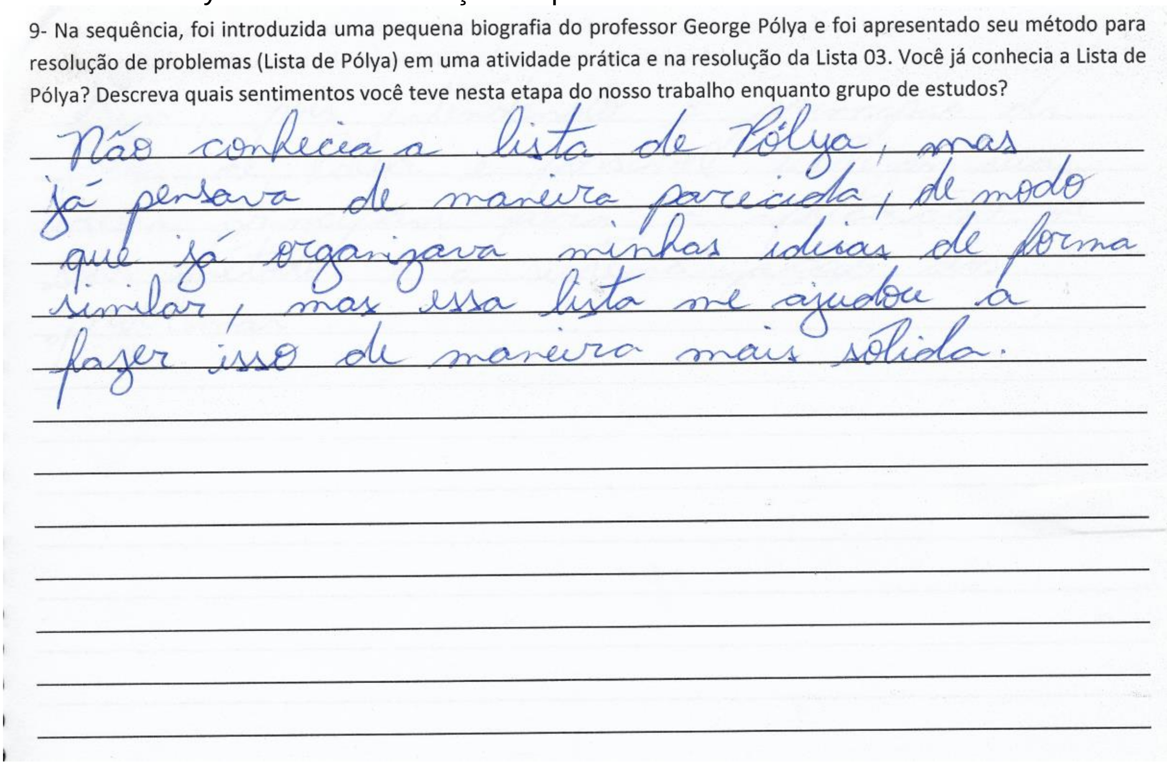
Foto 18 – Apresentação da Sequência de Pólya

Ao serem questionados se já conheciam a lista de Pólya, os estudantes relataram que não a conheciam. No questionário dos estudantes (questão 9 – APÊNDICE B) observamos que das declarações que mais nos chamaram a atenção sobre a Lista de Pólya, 5,5% estão no sentido da necessidade de autocontrole para seguir os passos propostos por Pólya, pois necessita de "calma" durante a sua execução; 28% destacam uma maior facilidade de interpretação do enunciado do problema sem deixar passar despercebido algum detalhe importante; 5,5% apontam o sentimento de esperança em ter um material de apoio para resolução de problemas; 11% consideram que a lista apresenta-se como um caminho para resolver problemas; 5,5% indicam que a utilização da lista ajuda a identificar que existem vários caminhos para a resolução de um determinado problema. Um apontamento interessante e que nos chamou a atenção foi o seguinte relato: revela-se um bom processo, mas de execução um pouco demorada. Ou seja, para este aluno o objetivo seria encontrar uma maneira de se resolver os problemas de maneira imediata. Acreditamos que a assimilação e constante prática do método proposto por Pólya seria sim uma maneira rápida e eficiente, mas isso viria com o tempo de cada estudante.

Outro relato que nos chamou a atenção foi o estudante concluir que poderia utilizar-se da lista de Pólya para resolver problemas que também não sejam de Matemática. Esse raciocínio vai em direção com o encontrado em (PÓLYA, 2006, p. 2) "O nosso problema pode ser algébrico ou geométrico, matemático ou não, um problema científico importante ou um mero enigma. Não há diferença, as indagações fazem sentido e podem auxiliar-nos a resolver o problema.”

Ainda no questionário dos estudantes podemos ressaltar também algumas outras observações. Dentre estes relatos citamos (Figura 11) o de um estudante participante do grupo de estudos que foi medalhista da OBMEP.

Figura 11 – Relato de aluno que apresentava hábitos mentais similares ao proposto por Pólya durante a resolução de problemas matemáticos



9- Na sequência, foi introduzida uma pequena biografia do professor George Pólya e foi apresentado seu método para resolução de problemas (Lista de Pólya) em uma atividade prática e na resolução da Lista 03. Você já conhecia a Lista de Pólya? Descreva quais sentimentos você teve nesta etapa do nosso trabalho enquanto grupo de estudos?

Não conhecia a lista de Pólya, mas já pensava de maneira parecida, de modo que já organizava minhas idéias de forma similar, mas essa lista me ajudou a fazer isso de maneira mais sólida.

Tal relato também havia sido observado por alguns alunos no grupo de 2015, mencionado anteriormente.

Encontro 11 – Em 11/10/2016, ao longo da resolução coletiva dos problemas da terceira lista procuramos utilizar os procedimentos sugeridos pela Sequência de Pólya. Esse encontro foi muito produtivo, com os estudantes aproveitando o momento de discussão, com uma postura bastante participativa e respondendo de maneira eficiente às perguntas mencionadas na Etapa 01 de nosso planejamento inicial, que antes da apresentação da Sequência de Pólya eram expostas de forma implícita e que, a partir desse momento, foram exibidas explicitamente, fazendo ainda mais sentido a sua utilização como sugestão de procedimentos na resolução de problemas de matemática.

Foto 19 – Resolução coletiva utilizando a Sequência de Pólya

Foto 20 – Resolução coletiva utilizando a Sequência de Pólya

Esses fatos, ocorridos nos últimos encontros, nos proporcionaram a sensação de estarmos caminhando na direção correta, ou seja, a Sequência de Pólya poderia materializar-se em uma contribuição para que os estudantes pudessem resolver problemas de matemática de uma maneira mais objetiva.

Encontro 12 – Em 18/10/2016 foram apresentados os problemas da Lista 4 (APÊNDICE F) para serem resolvidos seguindo a Sequência de Pólya. Tal Sequência foi apresentada de forma impressa em conjunto com a lista para que o estudante se orientasse no momento da resolução do problema. A lista foi composta por cinco problemas envolvendo conceitos de Funções e outros cinco problemas de conteúdos matemáticos diversos.

Foto 21 – Aluna resolvendo individualmente problemas da lista 4

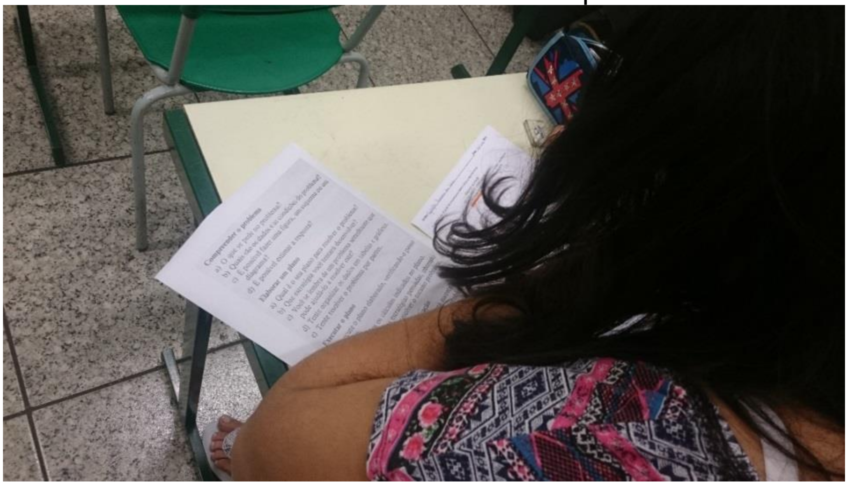
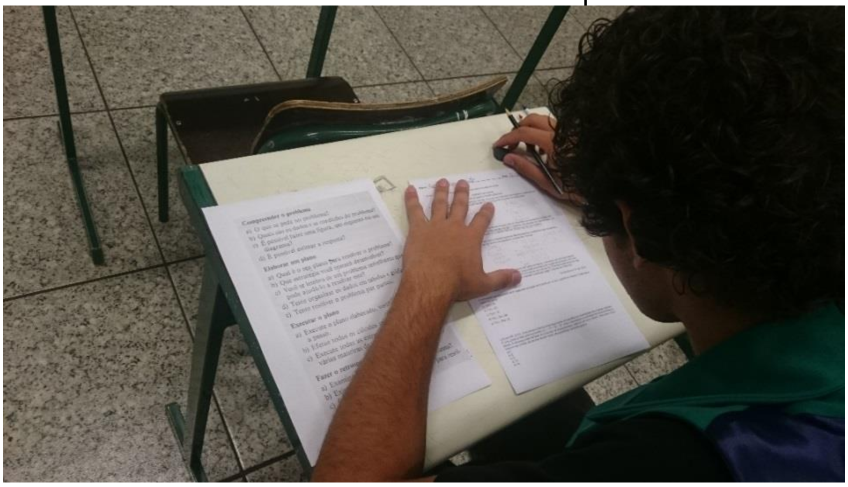
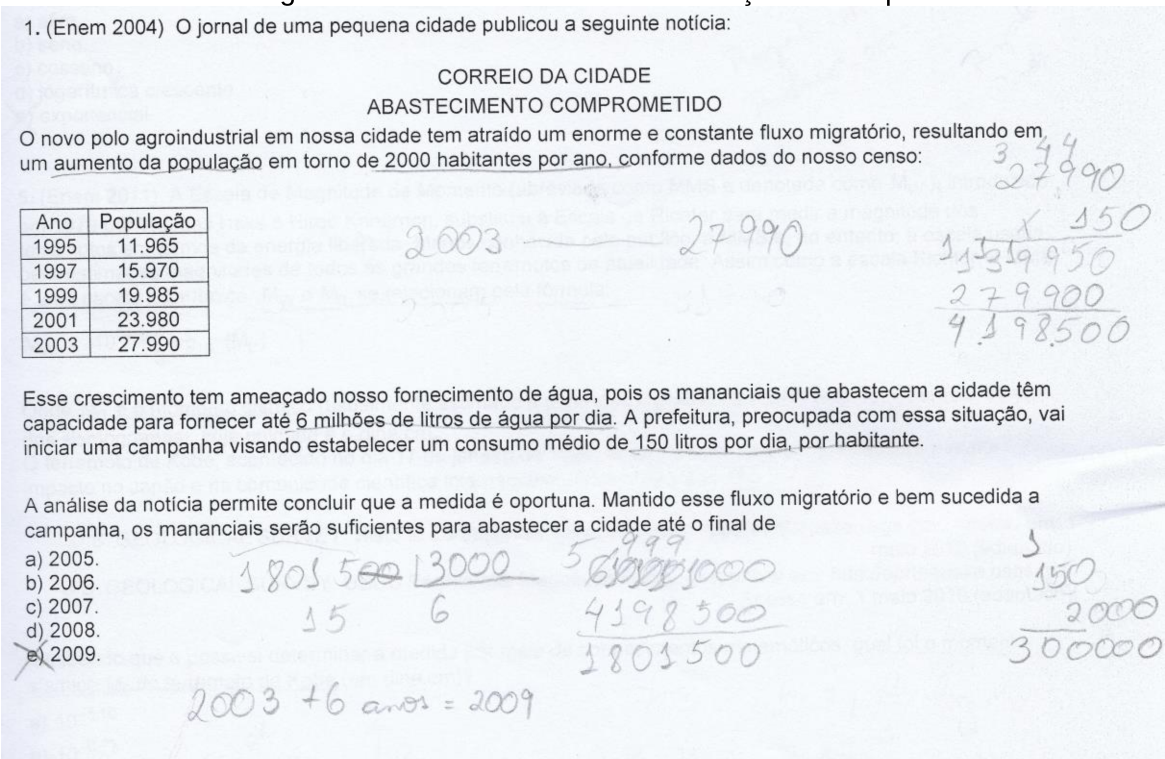


Foto 22 – Aluno resolvendo individualmente problemas da lista 4



Ao analisarmos as resoluções desta lista de problemas, alguns fatores merecem destaque, entre eles a ação de estabelecer e executar um plano concebido (Figura 12) e a utilização de conhecimentos matemáticos específicos para a resolução de alguns problemas (Figura 13).

Figura 12 – Estabelecimento e execução de um plano



1. (Enem 2004) O jornal de uma pequena cidade publicou a seguinte notícia:

CORREIO DA CIDADE

ABASTECIMENTO COMPROMETIDO

O novo polo agroindustrial em nossa cidade tem atraído um enorme e constante fluxo migratório, resultando em um aumento da população em torno de 2000 habitantes por ano, conforme dados do nosso censo:

Ano	População
1995	11.965
1997	15.970
1999	19.985
2001	23.980
2003	27.990

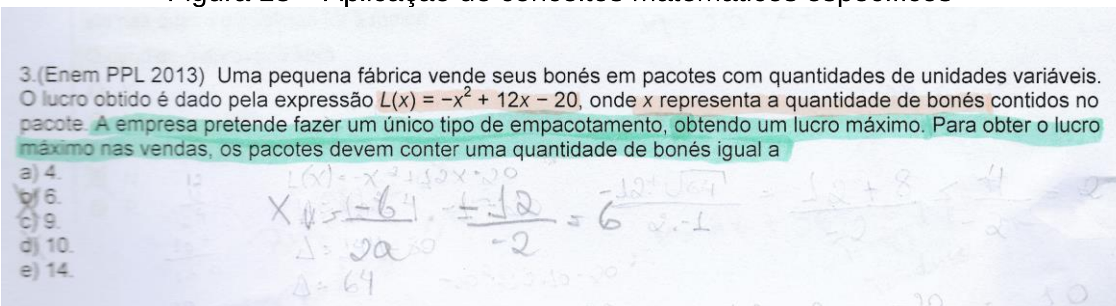
Esse crescimento tem ameaçado nosso fornecimento de água, pois os mananciais que abastecem a cidade têm capacidade para fornecer até 6 milhões de litros de água por dia. A prefeitura, preocupada com essa situação, vai iniciar uma campanha visando estabelecer um consumo médio de 150 litros por dia, por habitante.

A análise da notícia permite concluir que a medida é oportuna. Mantido esse fluxo migratório e bem sucedida a campanha, os mananciais serão suficientes para abastecer a cidade até o final de

a) 2005.
b) 2006.
c) 2007.
d) 2008.
e) 2009.

2003 +6 anos = 2009

Figura 13 – Aplicação de conceitos matemáticos específicos



3.(Enem PPL 2013) Uma pequena fábrica vende seus bonés em pacotes com quantidades de unidades variáveis. O lucro obtido é dado pela expressão $L(x) = -x^2 + 12x - 20$, onde x representa a quantidade de bonés contidos no pacote. A empresa pretende fazer um único tipo de empacotamento, obtendo um lucro máximo. Para obter o lucro máximo nas vendas, os pacotes devem conter uma quantidade de bonés igual a

a) 4.
b) 6.
c) 9.
d) 10.
e) 14.

Nesta lista, dividida em cinco problemas sobre conceitos de Funções e cinco problemas sobre conteúdos matemáticos diversos, os resultados foram de aproximadamente 49% de acertos nos problemas sobre Funções e 61% de acertos nos problemas sobre conteúdos matemáticos diversos. Se levarmos em consideração o rendimento em relação aos dez problemas apresentados, teremos um resultado de aproximadamente 55% de acertos. Levando-se em conta ainda estes dados em separado, houve também um aumento no desempenho em relação às listas 1 e 2 e a lista 3, respectivamente (APÊNDICES C, D e E). Este resultado aponta para uma melhora significativa no rendimento dos estudantes após a utilização da Sequência de Pólya.

No Questionário dos Estudantes (questão 10 – APÊNDICE B) quando abordados sobre a contribuição da lista de Pólya para a resolução dos problemas desta lista, todos os estudantes relataram que a Sequência de Pólya contribuiu em algum grau (uns mais (71%), outros menos (29%)), pois 44% dos estudantes concluíram que a utilização da lista ajudou a sequenciar as ações diante de um problema de Matemática poupando tempo na resolução; 14% identificaram que a utilização da lista ajudou a ter mais objetividade durante a resolução; 14% expuseram que ajudou na compreensão e na escolha do melhor caminho a ser seguido; 14% assinalaram que a utilização da Lista fez pensar mais, tendo melhor análise, sendo mais detalhista e auxiliando na organização da resolução do problema e 14% não especificaram o tipo de contribuição apresentada.

5.4 Etapa 5 – Assimilando e colocando em prática a Sequência.

Finalizamos a aplicação das atividades planejadas em um último encontro. Lembramos que o planejamento desta etapa consistia em 2 encontros, sendo um deles de avaliação dos estudantes, o que não é o objetivo para este grupo de estudos, mas que poderá ser utilizada caso algum outro professor decida pela sequência sugerida.

Encontro 13 – No encontro de 25/10/2016 entregamos a última lista com problemas de assuntos matemáticos diversos (APÊNDICE G) para que os estudantes resolvessem tendo em mente os procedimentos propostos por Pólya, já que o material impresso com a Sequência de Pólya não estaria presente. O objetivo era que os estudantes estivessem motivados a usarem as indagações da Sequência de Pólya mentalmente, conforme apontado em Pólya (2006, p. 102).

Além disso, entregamos ao final do encontro o Questionário dos Estudantes (APÊNDICE B) contendo um conjunto de questões para que os estudantes pudessem compartilhar suas experiências e opiniões a respeito do projeto. Como houve uma ausência de alguns alunos, em outro momento entregamos o mesmo questionário a eles. Salientamos que todos os 25 estudantes do grupo responderam e entregaram o Questionário.

Foto 23 – Aluna resolvendo individualmente problemas da Lista 5

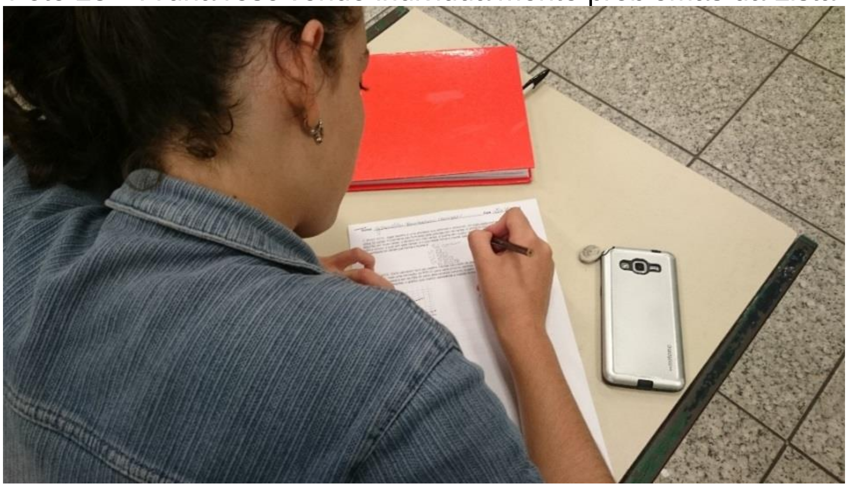
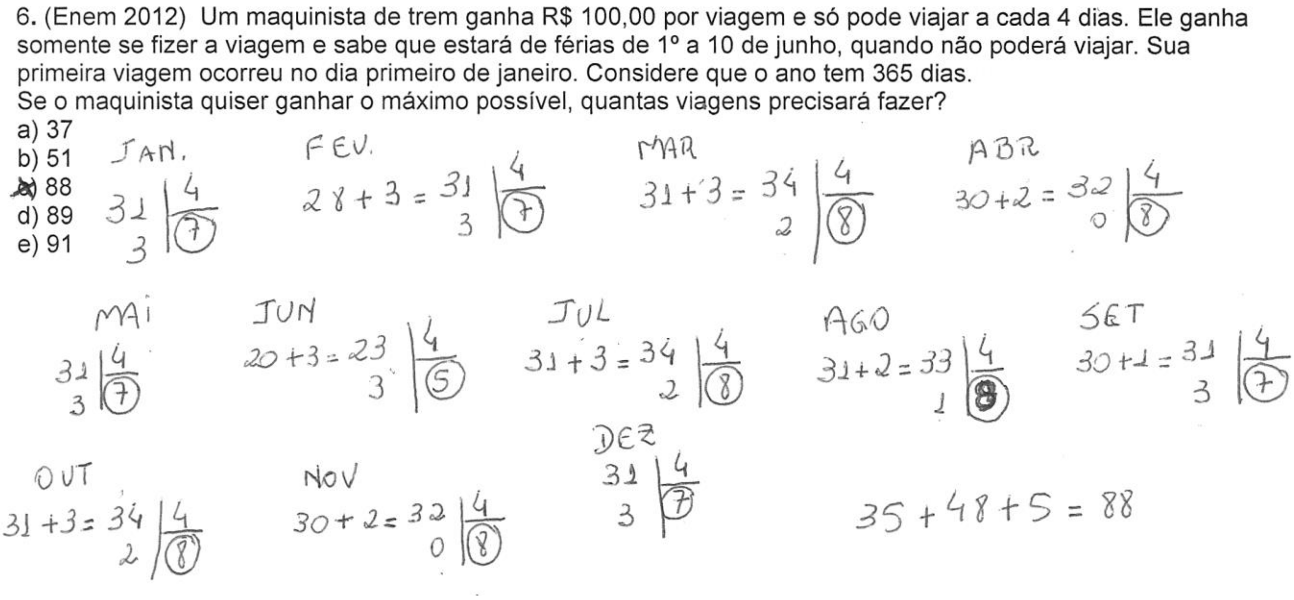


Foto 24 – Aluno resolvendo individualmente problemas da Lista 5

Nesta quinta lista, com dez problemas sobre conteúdos diversos os estudantes obtiveram um rendimento de 56% de acertos o que novamente caracteriza um aumento em relação ao desempenho dos estudantes no início dos trabalhos.

No desenvolvimento dos problemas dessa lista, além dos relatos anteriores, destacamos a utilização de caminhos diferentes daqueles que pensamos na resolução de um problema (Figuras 14 e 15).

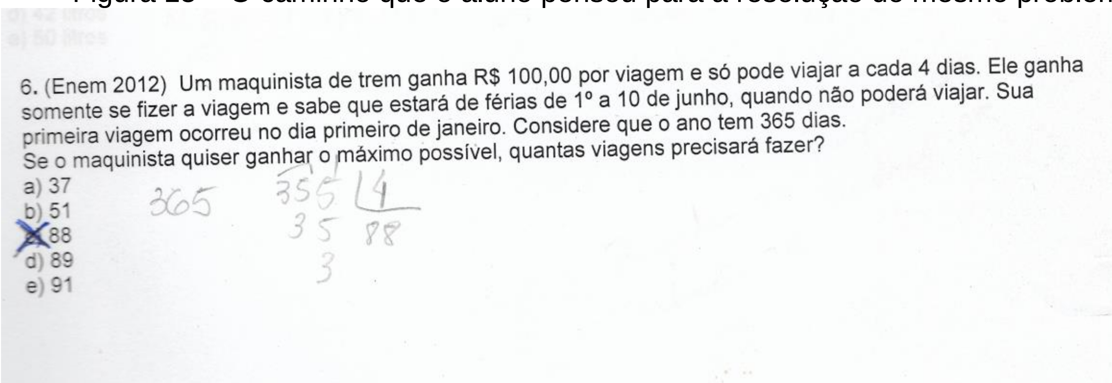
Figura 14 – O caminho que pensamos para a resolução deste problema



6. (Enem 2012) Um maquinista de trem ganha R$ 100,00 por viagem e só pode viajar a cada 4 dias. Ele ganha somente se fizer a viagem e sabe que estará de férias de 1º a 10 de junho, quando não poderá viajar. Sua primeira viagem ocorreu no dia primeiro de janeiro. Considere que o ano tem 365 dias.
Se o maquinista quiser ganhar o máximo possível, quantas viagens precisará fazer?

a) 37
b) 51
c) 88
d) 89
e) 91

Figura 15 – O caminho que o aluno pensou para a resolução do mesmo problema



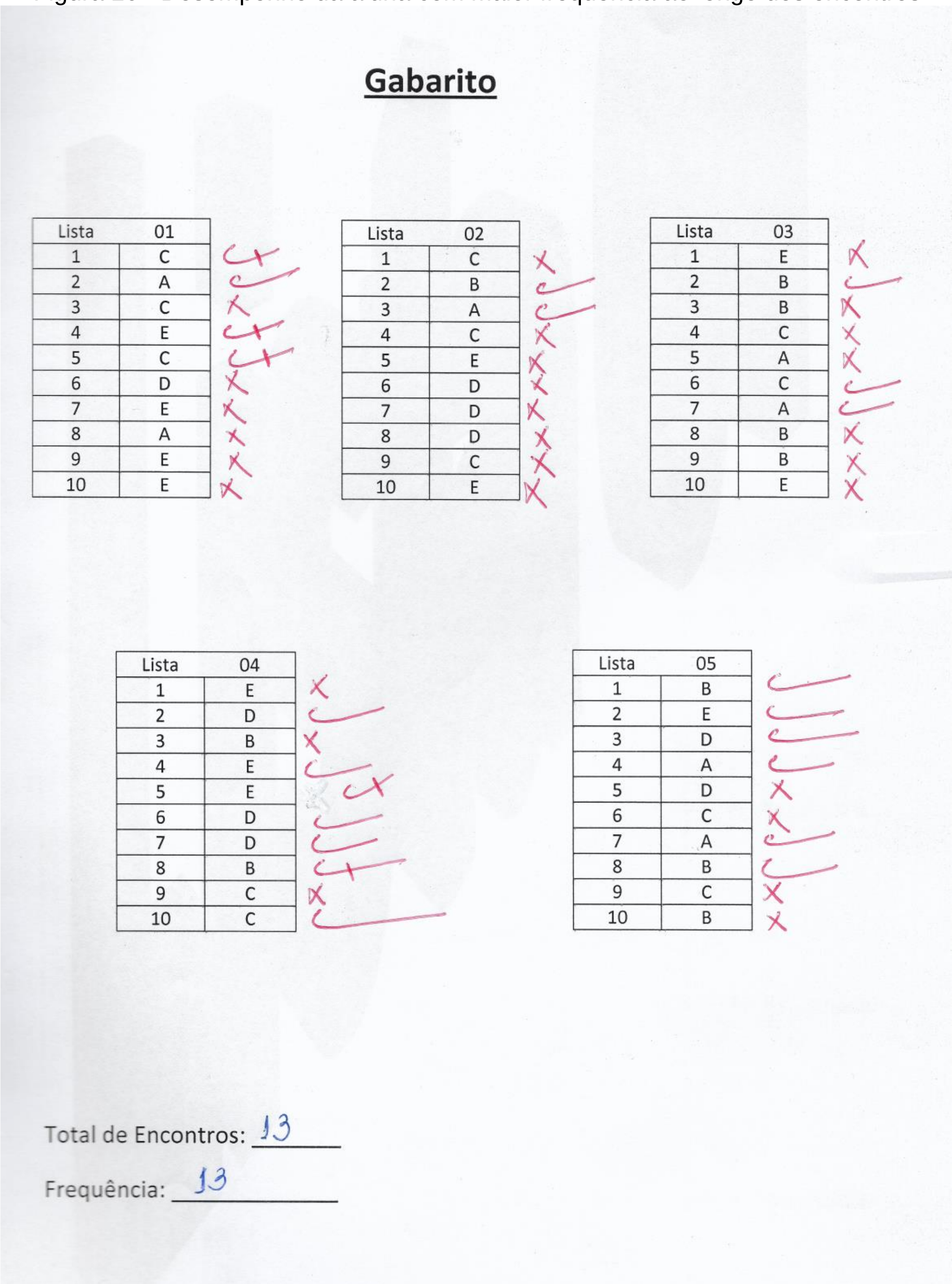
6. (Enem 2012) Um maquinista de trem ganha R$ 100,00 por viagem e só pode viajar a cada 4 dias. Ele ganha somente se fizer a viagem e sabe que estará de férias de 1º a 10 de junho, quando não poderá viajar. Sua primeira viagem ocorreu no dia primeiro de janeiro. Considere que o ano tem 365 dias.
Se o maquinista quiser ganhar o máximo possível, quantas viagens precisará fazer?

a) 37
b) 51
c) 88
d) 89
e) 91

Ao analisarmos o Questionário dos Estudantes (questão 11 – APÊNDICE B), observamos que 78% responderam que utilizaram a Sequência de Pólya de alguma forma na resolução desta última lista.

Finalizamos esta Sequência de Etapas destacando a melhora no rendimento de diversos estudantes, a postura na resolução desta última lista e a participação ativa nos momentos de resolução e discussão, o que nos leva ao entendimento que a Sequência de Pólya pôde ser implantada de maneira bastante satisfatória neste grupo de estudos.

Figura 16 - Desempenho da aluna com maior frequência ao longo dos encontros



Gabarito

Lista	01
1	C
2	A
3	C
4	E
5	C
6	D
7	E
8	A
9	E
10	E

Lista	02
1	C
2	B
3	A
4	C
5	E
6	D
7	D
8	D
9	C
10	E

Lista	03
1	E
2	B
3	B
4	C
5	A
6	C
7	A
8	B
9	B
10	E

Lista	04
1	E
2	D
3	B
4	E
5	E
6	D
7	D
8	B
9	C
10	C

Lista	05
1	B
2	E
3	D
4	A
5	D
6	C
7	A
8	B
9	C
10	B

Total de Encontros: 13

Frequência: 13

5.5 Análises do Questionário dos Estudantes

Durante a apresentação das seções anteriores tivemos a oportunidade de apresentar alguns dados referentes a certas questões objetivas formuladas aos estudantes. Nesta seção tentaremos mostrar algumas outras opiniões apresentadas por eles em algumas outras questões que consideramos fundamentais ao projeto.

Durante todos os anos em que foram organizados, os grupos de estudos apresentaram algumas características comuns. Uma delas é que o número de participantes que termina no último encontro é bem menor do que o número de participantes que iniciou. Em 2016, aconteceu algo parecido. Os motivos que levaram os estudantes do grupo de estudos de 2016 a deixar de participar dos encontros, segundo relatado por eles foram: compromissos familiares; imprevistos diversos; compromissos profissionais e acadêmicos; cansaço; incompatibilidade do horário dos encontros; muitas dificuldades em resolver os problemas propostos; falta de persistência e tratamento de saúde.

Levando-se em conta que um momento pedagógico é uma atividade humana, e que o ser humano possui emoções e sentimentos que devem ser considerados para o êxito desta atividade, como podemos observar em um capítulo do livro A arte de resolver problemas abordando os temas Persistência, Esperança e Sucesso (PÓLYA, 2006, p. 130-131), acreditamos ser importante identificar quais os sentimentos presentes nos estudantes durante os encontros desse grupo de estudos.

De acordo com os relatos, os sentimentos vivenciados foram de tristeza por não conseguir resolver algum problema, mas também de felicidade por conseguir resolvê-lo; satisfação; dúvidas; alegria em estudar Matemática; sentimento de confusão sem saber o que estava fazendo ali; sentimento de ser produtivo e de sair melhor a cada encontro; perda do interesse por não ser simpatizante da matéria e posterior arrependimento por não ter persistido; no começo estar assustada com as fórmulas utilizadas na resolução dos problemas, mas depois identificar que era fácil e sentir-se bem; sentimento de agradecimento pela oportunidade; sentimento de acolhimento e conforto por saber que não era a única a ter dificuldades em Matemática; felicidade em aprender; aumentar o gosto pela Matemática; felicidade em relembrar alguns conceitos matemáticos já estudados; sentimento de ser capaz de aprender Matemática com vontade, esforço e dedicação; liberdade em perguntar e tirar dúvidas.

Um ponto positivo no desenvolvimento do trabalho, na visão dos participantes foi o fato dos encontros do grupo de estudos apresentarem-se como momentos de aprendizado em que os estudantes não eram julgados por uma nota.

Outros pontos positivos elencados pelos estudantes foram: a satisfação em entender os problemas; a oportunidade de mostrar o seu modo de resolver e pensar sobre os problemas; a paciência, a atenção e a dedicação nas ações pedagógicas; a organização dos encontros; incentivo a estudar Matemática; métodos de ensino eficientes; estar entre amigos; o modo como eram corrigidos os problemas propostos sempre com a participação da turma proporcionando ambiente de cooperação propício para o desenvolvimento da criatividade dos participantes; respeito, silêncio, interesse e atenção durante o desenvolvimento das atividades; empolgação por estudar em grupo.

Os pontos que poderiam ser melhorados no desenvolvimento deste trabalho apontados pelos estudantes participantes foram o tempo que deveria ser maior ou os encontros deveriam acontecer mais vezes por semana, porém muitos estudantes acharam que o tempo de duração dos encontros era excessivo; apresentação de algumas técnicas para melhorar o foco e a concentração dos estudantes, além de ajudar na memorização; interação entre os participantes.

Ao serem questionados sobre se participariam novamente do projeto, todos os participantes responderam que sim e fizeram considerações bastante positivas.

De acordo com os relatos dados pelos estudantes participantes, foi possível observar a ocorrência maior de sentimentos bons e pontos positivos referentes aos encontros, então concluímos que foi muito válido o seu desenvolvimento e sugerimos que os pontos positivos sejam mantidos e fortalecidos; sugerimos também que os pontos que precisam ser melhorados, segundo os estudantes participantes, sejam analisados e sejam implantadas ações que visem torna-los virtuosos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como já relatei anteriormente neste texto, a experiência durante a vivência das atividades propostas para o Mestrado foram as mais impactantes em minha carreira docente. O fator principal foi a possibilidade de reflexões voltadas para um melhor entendimento dos sentimentos dos alunos diante dos momentos de aprendizagem da Matemática.

Nesse sentido, lembro-me de minhas dificuldades diante dos conteúdos abordados no curso e do pensamento, naqueles momentos, direcionados para meus alunos que em sala de aulas eu conseguia ler em seus semblantes um pedido de ajuda silencioso por estar com grandes dificuldades para entender a matéria. Então, intimamente eu era levado a fazer propósitos de ajudá-los de forma mais intensa quando surgisse esta oportunidade. Estas reflexões me levaram a ter mais condições de realmente escutar, por exemplo, a pergunta de minha aluna que motivou este trabalho de investigação.

Ainda no sentido de empatia com meus alunos, lembro-me de que constantemente é preciso incentivá-los a acreditarem em seus potenciais, pois, por exemplo, para realizarem o sonho de começar um curso superior existe a necessidade de "passar no vestibular" que, muitas vezes, exige enfrentar uma concorrência muito grande para conseguir a vaga e, nesse caso, demanda-se muito esforço para não desistir. Isso vale para outras situações que todos enfrentamos na vida. Em uma cena do filme O preço do desafio (O PREÇO...,1988) o professor Escalante, constata que um de seus alunos não participaria do grupo de estudos, pois decidira parar de estudar para trabalhar, por entender que naquele momento era essa a melhor opção. Então, o professor Escalante o fez entender de um modo prático que, naquela situação, o estudante estava buscando atalhos e fugindo da dedicação que deveria ter aos estudos para alcançar o objetivo proposto ao grupo.

Estas reflexões me levaram também a não desistir do curso de Mestrado quando encontrei dificuldades e decepções que experimentei durante a sua realização para que, entre outros propósitos e objetivos, meu discurso seja respaldado em ações. Além disso, Pólya também não descuida desse aspecto no texto de seu livro e escreveu:

> Seria um engano supor que a resolução de problemas seja puramente uma “questão intelectual”: persistência e emoções desempenham, nesse caso, um papel importante. Fraqueza de vontade e aquiescência por comodismo para fazer um pouquinho podem bastar para um problema rotineiro na sala de aulas. Mas, para resolver um problema científico sério, é necessária uma força de vontade capaz de sobreviver a anos de trabalho e decepções amargas.
> 1. A persistência flutua entre esperança e desespero, entre satisfação e decepção. É fácil prosseguir quando se pensa que a solução se encontra na primeira esquina, mas é difícil perseverar quando não se vê uma saída para a dificuldade. Exultamos quando a nossa previsão se confirma. Ficamos desalentados quando o caminho que vimos seguindo com certa confiança é repentinamente bloqueado e, aí, a nossa persistência fraqueja. (PÓLYA, 2006, p. 130).

Outra reflexão que muito me marcou, sem dúvida, foi *o desejo de melhorar cada vez mais a minha habilidade em perguntar ao invés de dar respostas,* estudando maneiras de motivar os alunos a participarem dos momentos de questionamentos e desenvolver neles a autonomia através de uma ação protagonista.

Diante destas considerações, dos resultados apresentados, do exposto pelos estudantes participantes deste projeto e pelas percepções e sentimentos que tive durante a sua realização, estou intimamente convicto que o trabalho desenvolvido com estes grupos de estudantes (2015 e 2016) foi uma experiência marcante e renovadora para mim, enquanto profissional da área educacional. Tenho certeza que aprendi muito mais do que ensinei. Foram momentos desafiadores constantes que me proporcionaram um grande crescimento enquanto professor e ser humano, e pretendo dar continuidade com este projeto para turmas posteriores também, por acreditar que esse tipo de trabalho tem uma contribuição que vai além do desenvolvimento de competências e habilidades para resolver problemas matemáticos, e:

> Com mais pessoas estudando, além de um diploma de nível superior, as características cognitivas e afetivas são cada vez mais valorizadas, como as capacidades de resolver problemas, trabalhar

> em grupo, continuar aprendendo e agir de modo cooperativo, pertinente em situações complexas. (SÃO PAULO, 2012, p. 8).

Estou consciente de que apenas o uso da metodologia de resolução de problemas proposta por Pólya não bastará para o sucesso dos estudantes em resolver problemas. São necessárias outras ações que foram pensadas e experimentadas com resultados altamente positivos, mas particularmente entendo que a partir de agora, passo a ter mais uma ferramenta de trabalho pedagógico que poderei utilizar para também refletir junto aos meus alunos.

Assim, entendo que o trabalho constante com a heurística de Pólya constitui uma ferramenta que aliada a outras ações pedagógicas pode contribuir no desenvolvimento de competências e habilidades para a resolução de problemas matemáticos, bem como o trabalho com grupos de estudos apresenta-se como um momento privilegiado de aprendizagem tanto para os estudantes como para o professor, proporcionando um aumento na autoestima de todos.

Espero, sinceramente, que tenha sido proveitoso também para os estudantes que participaram de maneira muito comprometida e dedicada. Eles merecem muito e, aproveitando o momento deixo para eles os meus agradecimentos.

Espero, também, que possa contribuir com outros professores de Matemática compartilhando esta experiência. Conforme um dos aprendizados que tive com os estudantes participantes destes grupos de estudos, separarei algumas aulas para vivenciar a aplicação prática da lista de Pólya na resolução de problemas durante as aulas regulares do ano letivo, a começar em 2017.

Durante o processo, lembrei-me da frase atribuída a Albert Einstein “Loucura é querer resultados diferentes fazendo tudo exatamente igual”. Foi a mudança causada pela inquietação produzida por uma simples pergunta, citada na introdução deste texto, que me levou à busca de novos caminhos.

A partir do desenvolvimento deste trabalho, pude constatar que a proposta de George Pólya vai muito além de um simples roteiro de perguntas a serem utilizadas para a resolução de problemas. Pude constatar o que o professor Elon Lages Lima concluiu certa feita:

> O trabalho de Pólya sobre o ensino da Matemática é maravilhoso simplesmente porque não propõe truques, fórmulas miraculosas, ou muito menos pomposas teorias pseudo-psicológicas. (PÓLYA, 2017, p. 2-3).

Assim, finalizo este trabalho expondo algumas metas que estabeleci para a minha caminhada enquanto docente, ilustrada pelo texto citado abaixo:

> Para ser um bom professor de Matemática, você tem que vibrar com a sua matéria, conhecer bem o que vai ensinar, ter um bom relacionamento com os alunos para entender os problemas deles e dar a esses alunos a oportunidade de (pelo menos algumas vezes) descobrir as coisas por si mesmos. Deve ainda entender que "know-how" é mais importante do que informação. [...] E, para treinar professores a fim de que possam cumprir sua tarefa, o melhor a fazer é praticar com eles a arte de resolver problemas. (PÓLYA, 2017, p. 3).

REFERÊNCIAS

AULETE, C. **Dicionário Caldas Aulete da Língua Portuguesa.** 2. ed. Porto Alegre, RS: Lexikon, 2008. 1022p.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** ensino médio. 1. ed. Brasília, DF: Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999. 360p.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **PCN+ ensino médio:** orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, [s.d.]. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 7 jan. 2017.

CURY, A. J. **Pais brilhantes, professores fascinantes**. 16. ed. Rio de Janeiro: Sextante, 2003. 171p.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática**. 12. ed. São Paulo: Ática, 2000. 176p.

ENSINAR bem é... saber planejar. [S.l.]: Associação Nova Escola, c2016. Disponível em: <http://acervo.novaescola.org.br/planejamento-e-avaliacao/planejamento/ensinar-bem-saber-planejar-424802.shtml>. Acesso em: 4 jun. 2016.

KRULIK, S.; REYS, R. E. **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 2003. 345p.

MATEMÁTICA nas olimpíadas: conceitos matemáticos aplicados aos jogos olímpicos. [S.l.]:SOmatemática, [s.d.].1 CD-ROM.

O PREÇO do desafio. Direção: Ramon Menendez. Produção: Tom Musca. Intérpretes: Edward James Olmos, Lou Diamond Phillips, Rosana de Soto, Andy Garcia e outros. Roteiro: Ramon Menendez e Tom Musca. Música: Craig Safan. Estados Unidos da América: American Pl, 1988. Arquivo eletrônico (103 min), son., color.

PIAZZI, P. **Aprendendo Inteligência**. 2. ed. São Paulo: ALEPH, 2013a. 140p.

PIAZZI, P. **Ensinando Inteligência**. 1. ed. São Paulo: ALEPH, 2013b. 197p.

PÓLYA, G. **A arte de resolver problemas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2006. 203p.

PÓLYA, G. Dez mandamentos para professores. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, v.10, p. 2-10, 1987. Disponível em: <http://www.ifg.edu.br/matematica/images/donwloads/documentos/mandamentos.pdf>. Acesso em: 9 jan. 2017.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Caderno do professor:** Matemática, Ensino Médio - 1a. série - volume 1. São Paulo, 2014a. 112p.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Caderno do professor:** Matemática, Ensino Médio - 1a. série - volume 2. São Paulo, 2014b. 120p.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Caderno do professor:** Matemática, Ensino Médio - 2a. série - volume 1. São Paulo, 2014c. 112p.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Caderno do professor:** Matemática, Ensino Médio - 3a. série - volume 1. São Paulo, 2014d. 112p.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Caderno do professor:** Matemática, Ensino Médio - 3a. série - volume 2. São Paulo, 2014e. 112p.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo:** Matemática e suas tecnologias. São Paulo, 2012. 72p.

SMOLE, K. C. S; DINIZ, M. I. S. V. Ler e aprender matemática. In: SMOLE, K. C. S; DINIZ, M. I. S. V. (Orgs.). **Ler, escrever e resolver problemas:** habilidades básicas para aprender matemática. 1. ed. Porto Alegre, RS: Artmed, 2001. 203p.

TOZETTO, C. Entenda, planeje, aja, confira. **Cálculo – matemática para todos**, São Paulo, n. 28, p. 42-47, maio 2013.

WEINBERG, M. A escola que funciona. **Veja**, São Paulo, n.2469, p.11-15, mar. 2016.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

BATISTA, V. N. **Uma proposta metodológica para o ensino das funções trigonométricas.** 2015. 189 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), Sorocaba, 2015

FONTES, F. A. M. **Aprendizagem de funções por meio da modelagem matemática: um estudo do comportamento de um composto químico**. 2014. 79 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), Sorocaba, 2014.

HRISTOV SOBRINHO, D. **O ensino de funções trigonométricas através da resolução de problemas**. 2015. 115 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), Sorocaba, 2015.

OLIVEIRA, B. H. **Matemática financeira no ensino médio**: uma proposta metodológica de ensino. 2015. 137 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), Sorocaba, 2015.

TAHAN, Malba. **O homem que calculava**. 1. ed. Rio de Janeiro: Record, 2015. 285p.

ZEQUIM, K. C. **A resolução de problemas, a modelagem matemática e o desenvolvimento de habilidades matemáticas em alunos do 7º ano do ensino fundamental**. 2014. 106 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), Sorocaba, 2014.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Exemplo de avaliação aplicada durante a segunda etapa do projeto de leitura do livro O homem que calculava

Objetivo: Verificar se os (as) alunos (as) leram e compreenderam o conteúdo dos capítulos 25 ao 34 do livro O Homem que Calculava.

1- Qual é o título do livro? (Vale 0,5 ponto)

2- Qual é o pseudônimo do autor do livro? (Vale 0,5 ponto)

3- Como é o nome do personagem principal do livro? (Vale 0,5 ponto)

4- Qual é o nome da filha do Cheique que o calculista Beremiz Samir ensina matemática? (Vale 0,5 ponto)

5- O homem que calculava participou de um torneio onde foi arguido por quantos matemáticos? (Vale 0,5 ponto)

a) Dois
b) Cinco
c) Seis
d) Sete

6- Qual foi o presente dado por Telassim para Beremiz? (Vale 0,5 ponto)

a) um anel
b) um turbante
c) um tapete
d) uma almofada

7- Quantas indicações sobre o alcorão o primeiro sábio solicitou para Beremiz apresentar? (Vale 0,5 ponto)

a) 10
b) 15
c) 16
d) 18

8- Quantas vezes o nome de Jesus é citado no alcorão? (Vale 0,5 ponto)

a) 19
b) 21
c) 36
d) 204

9- Qual foi o matemático célebre que dirigiu a biblioteca de Alexandria? (Vale 0,5 ponto)

a) Pitágoras
b) Platão
c) Erastóstenes
d) Aristóteles

10- Além de matemático, o personagem questionado na pergunta anterior era também: (Vale 0,5 ponto)

a) poeta
b) astrônomo
c) atleta
d) todas as alternativas anteriores

11- A regra: “Para calcular-se a raiz quadrada de um número de quatro algarismos, divide-se esse número por um ponto, em duas classes, com dois algarismos cada uma, somando-se as classes assim formadas. A soma obtida será a raiz quadrada do número dado.”, é correta? (Vale 0,5 ponto)

(   ) Sim   (   ) Não

12- Qual é a multiplicação famosa, apontada na história, multiplicação que todos os homens cultos conhecem, e na qual só figura um fator? (Vale 0,5 ponto)

a) multiplicação das ovelhas
b) multiplicação do vinho
c) multiplicação dos pães
d) multiplicação dos dinares

13- Nas fábulas contadas por Beremiz nas quais aparecem uma divisão de 3 por 3 indicada, mas não efetuada, e outra de 3 por 2 indicada e efetuada sem deixar resto, aparecem três personagens principais, são eles: (vale 0,5 ponto)

a) ovelha, porco e coelho
b) canário, porco e ovelha
c) leão, tigre e chacal
d) ovelha, leão e chacal

14- Qual foi o príncipe que conseguiu vencer a prova dos cinco discos e casou-se com a linda Dahizé? (Vale 0,5 ponto)

a) Cassim
b) Aradim
c) Benefir
d) Camozã

15- Descreva, com a maior quantidade possível de detalhes, como foi resolvido o problema dos cinco discos. (Vale 1 ponto)

16- Descreva, com a maior quantidade possível de detalhes, como foi resolvido o problema da pérola mais leve. (Vale 1 ponto)

17- Descreva, com a maior quantidade possível de detalhes, como foi resolvido o problema das escravas de olhos pretos e olhos azuis. (Vale 1 ponto)

APÊNDICE B – Questionário elaborado para avaliação das etapas

Nome: ____

1- O que o (a) levou a querer participar deste grupo de estudos?

2- Você esteve na maioria dos encontros? Se não, porque deixou de vir?

3- Descreva quais sentimentos você teve no decorrer dos encontros do grupo de estudos? O que você considera que foi positivo e o que você considera que precisa ser melhorado?

4- Sabendo como ocorreram os encontros, se hoje fosse 09/08/2016 você participaria desse grupo de estudos? Porque?

5- No início dos trabalhos desse grupo de estudos foi apresentada uma lista de problemas sobre Funções. Você sentiu dificuldades para resolvê-los (algum ou todos)? Se sim, descreva como foram essas dificuldades?

6- Nós desenvolvemos um trabalho teórico sobre Funções a partir da resolução da Lista 01, procurando contextualizar através de vídeo aulas do Telecurso 2000, utilizando material didático sobre logaritmos e utilizando-se de jogos virtuais. Este trabalho contribuiu para o seu aprendizado sobre este assunto? Se sim, de qual maneira?

7- Na sequência, foi apresentada uma segunda lista de problemas sobre Funções. Você sentiu dificuldades para resolvê-los (algum ou todos)? Se sim, descreva como foram estas dificuldades.

8- Ato contínuo, foi apresentada uma terceira lista de problemas sobre conteúdos diversos. Você sentiu dificuldades para resolvê-los (algum ou todos)? Se sim, descreva como foram estas dificuldades.

9- Na sequência, foi introduzida uma pequena biografia do professor George Pólya e foi apresentado seu método para resolução de problemas (Lista de Pólya) em uma atividade prática e na resolução da Lista 03. Você já conhecia a Lista de Pólya? Descreva quais sentimentos você teve nesta etapa do nosso trabalho enquanto grupo de estudos?

10- Após, foi apresentada uma nova lista com a sugestão da utilização da Lista de Pólya. Para você, a Lista de Pólya contribuiu de alguma maneira para a resolução desses problemas? Se sim, como?

11- Na sequência, foi apresentada uma nova lista sem a utilização explícita do uso da Lista de Pólya. Você acredita que tenha a utilizado mesmo assim, de forma intuitiva? Descreva esta experiência.

12- Considerando os mais variados problemas, existe algum (uns) item (ns) da Lista de Pólya que você julga mais relevante para a resolução de um problema. Se sim, qual (is)?

13- Considerando os mais variados problemas, existe algum (uns) item (ns) da Lista de Pólya que você julga pouco relevante para a resolução de um problema. Se sim, qual (is)?

14- Para o sucesso do aprendizado na resolução de problemas, em sua opinião, qual deve ser o papel do professor? E qual deve ser o papel dos pais? E qual deve ser o papel dos alunos?

APÊNDICE C – Lista de problemas sobre Funções[1]

Nome: ______________________________________**Data** _____/_____/**2016**

1. (Enem 2004)

VENDEDORES JOVENS
Fábrica de LONAS - Vendas no Atacado
10 vagas para estudantes, 18 a 20 anos, sem experiência.
Salário: R$ 300,00 fixo + comissão de R$ 0,50 por m^2 vendido.
Contato: 0xx97-43421167 ou atacadista@lonaboa.com.br
Interbits®

Na seleção para as vagas deste anúncio, feita por telefone ou correio eletrônico, propunha-se aos candidatos uma questão a ser resolvida na hora. Deveriam calcular seu salário no primeiro mês, se vendessem $500\,m$ de tecido com largura de $1,40\,m$, e no segundo mês, se vendessem o dobro. Foram bem-sucedidos os jovens que responderam, respectivamente,

a) R$ 300,00 e R$ 500,00.
b) R$ 550,00 e R$ 850,00.
c) R$ 650,00 e R$ 1000,00.
d) R$ 650,00 e R$ 1300,00.
e) R$ 950,00 e R$ 1900,00.

[1] Problemas extraídos do site acessado apenas através de assinatura: SUPER Professor. Disponível em:<https://www.sprweb.com.br> Acesso em: ago. 2016.

2. (Enem 2011) O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso, foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou R$ 100.000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 350.000,00, enquanto a segunda cobrou R$ 120.000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 150.000,00. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada.
Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas?

a) $100n + 350 = 120n + 150$
b) $100n + 150 = 120n + 350$
c) $100(n + 350) = 120(n + 150)$
d) $100(n + 350.000) = 120(n + 150.000)$
e) $350(n + 100.000) = 150(n + 120.000)$

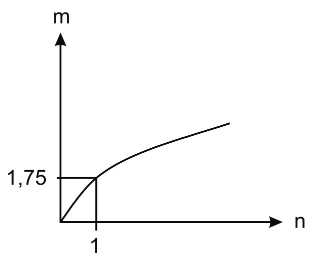
3. (Enem 2011) O saldo de contratações no mercado formal no setor varejista da região metropolitana de São Paulo registrou alta. Comparando as contratações deste setor no mês de fevereiro com as de janeiro deste ano, houve incremento de 4.300 vagas no setor, totalizando 880.605 trabalhadores com carteira assinada.

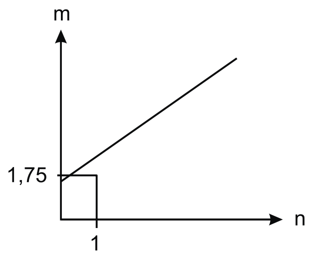
Disponível em: http://www.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

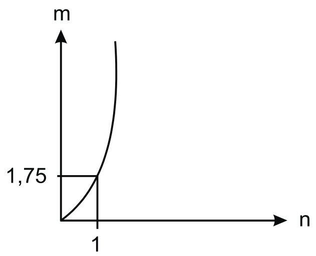
Suponha que o incremento de trabalhadores no setor varejista seja sempre o mesmo nos seis primeiros meses do ano. Considerando-se que y e x representam, respectivamente, as quantidades de trabalhadores no setor varejista e os meses, janeiro sendo o primeiro, fevereiro, o segundo, e assim por diante, a expressão algébrica que relaciona essas quantidades nesses meses é

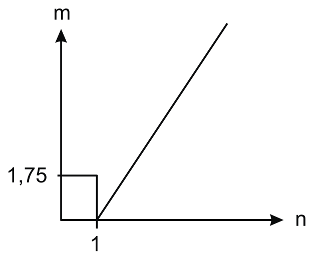
a) $y = 4300x$
b) $y = 884\ 905x$
c) $y = 872\ 005 + 4300x$
d) $y = 876\ 305 + 4300x$
e) $y = 880\ 605 + 4300x$

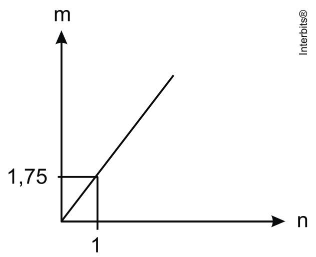
4. (Enem 2011) As frutas que antes se compravam por dúzias, hoje em dia, podem ser compradas por quilogramas, existindo também a variação dos preços de acordo com a época de produção. Considere que, independente da época ou variação de preço, certa fruta custa R$ 1,75 o quilograma. Dos gráficos a seguir, o que representa o preço *m* pago em reais pela compra de *n* quilogramas desse produto é

a) 

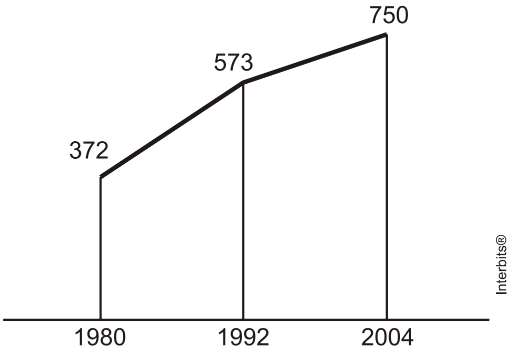
b) 

c) 

d) 

e) 

5. (Enem 2010) O gráfico mostra o número de favelas no município do Rio de Janeiro entre 1980 e 2004, considerando que a variação nesse número entre os anos considerados é linear.



Favela Tem Memória. *Época*. Nº 621, 12 abr. 2010 (adaptado).

Se o padrão na variação do período 2004/2010 se mantiver nos próximos 6 anos, e sabendo que o número de favelas em 2010 e 968, então o número de favelas em 2016 será

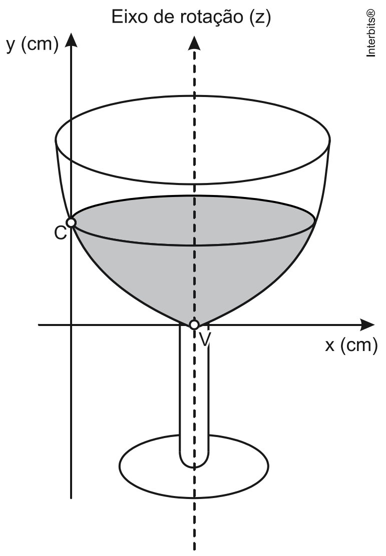
a) menor que 1150.
b) 218 unidades maior que em 2004.
c) maior que 1150 e menor que 1200.
d) 177 unidades maior que em 2010.
e) maior que 1200.

6. (Enem 2015) Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura (°C)	**Classificação**
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como
a) muito baixa.
b) baixa.
c) média.
d) alta.
e) muito alta.

7. (Enem 2013) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C,$ onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x.

Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é
a) 1.
b) 2.
c) 4.
d) 5.
e) 6.

8. (Enem 2014) Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial $f,$ de grau menor que $3,$ para alterar as notas x da prova para notas $y = f(x),$ da seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece $10.$
- A nota 5 passa a ser $6.$

A expressão da função $y = f(x)$ a ser utilizada pelo professor é

a) $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x.$

b) $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x.$

c) $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x.$

d) $y = \frac{4}{5}x + 2.$

e) $y = x.$

9. (Enem PPL 2015) O sindicato de trabalhadores de uma empresa sugere que o piso salarial da classe seja de R$ 1.800,00, propondo um aumento percentual fixo por cada ano dedicado ao trabalho. A expressão que corresponde à proposta salarial (s), em função do tempo de serviço (t), em anos, é $s(t) = 1.800 \cdot (1{,}03)^t$.

De acordo com a proposta do sindicato, o salário de um profissional dessa empresa com 2 anos de tempo de tempo de serviço será, em reais,

a) 7.416,00.
b) 3.819,24.
c) 3.709,62.
d) 3.708,00.
e) 1909,62.

10. (Enem 2013) Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k é uma constante negativa.

Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$.

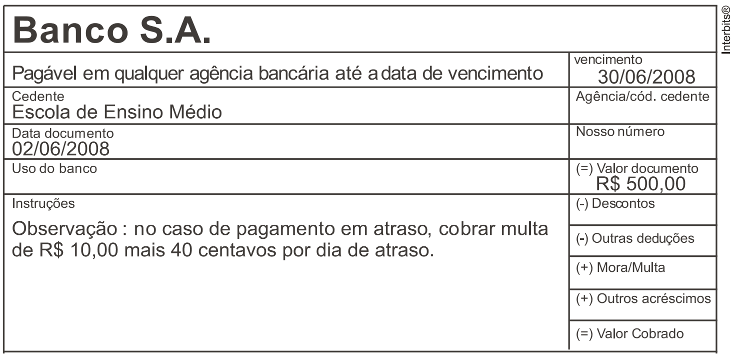
Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

a) 27
b) 36
c) 50
d) 54
e) 100

APÊNDICE D – Lista para identificação de resultados[2]

Nome: ______________________________________Data _____/_____/2016

1. (Enem 2008) A figura a seguir representa o boleto de cobrança da mensalidade de uma escola, referente ao mês de junho de 2008.



Banco S.A.	
Pagável em qualquer agência bancária até a data de vencimento	vencimento 30/06/2008
Cedente Escola de Ensino Médio	Agência/cód. cedente
Data documento 02/06/2008	Nosso número
Uso do banco	(=) Valor documento R$ 500,00
Instruções Observação : no caso de pagamento em atraso, cobrar multa de R$ 10,00 mais 40 centavos por dia de atraso.	(-) Descontos
	(-) Outras deduções
	(+) Mora/Multa
	(+) Outros acréscimos
	(=) Valor Cobrado

Se $M(x)$ é o valor, em reais, da mensalidade a ser paga, em que x é o número de dias em atraso, então

a) $M(x) = 500 + 0,4x.$
b) $M(x) = 500 + 10x.$
c) $M(x) = 510 + 0,4x.$
d) $M(x) = 510 + 40x.$
e) $M(x) = 500 + 10,4x.$

2. (Enem 2012) As curvas de oferta e de demanda de um produto representam, respectivamente, as quantidades que vendedores e consumidores estão dispostos a comercializar em função do preço do produto. Em alguns casos, essas curvas podem ser representadas por retas. Suponha que as quantidades de oferta e de demanda de um produto sejam, respectivamente, representadas pelas equações:

$Q_O = -20 + 4P$
$Q_D = 46 - 2P$

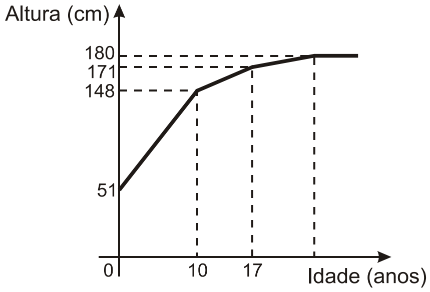
em que Q_O é quantidade de oferta, Q_D é a quantidade de demanda e P é o preço do produto.
A partir dessas equações, de oferta e de demanda, os economistas encontram o preço de equilíbrio de mercado, ou seja, quando Q_O e Q_D se igualam.
Para a situação descrita, qual o valor do preço de equilíbrio?
a) 5
b) 11
c) 13
d) 23
e) 33

[2] Problemas extraídos do site acessado apenas através de assinatura: SUPER Professor. Disponível em:<https://www.sprweb.com.br> Acesso em: ago. 2016.

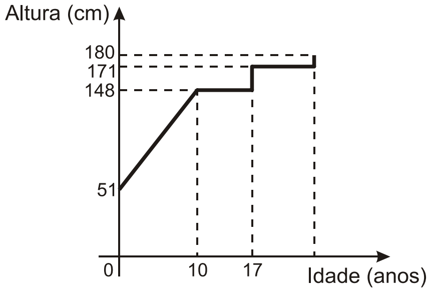
3. (Enem 2010) Acompanhando o crescimento do filho, um casal constatou que, de 0 a 10 anos, a variação da sua altura se dava de forma mais rápida do que dos 10 aos 17 anos e, a partir de 17 anos, essa variação passava a ser cada vez menor, até se tornar imperceptível. Para ilustrar essa situação, esse casal fez um gráfico relacionando as alturas do filho nas idades consideradas.

Que gráfico melhor representa a altura do filho desse casal em função da idade?

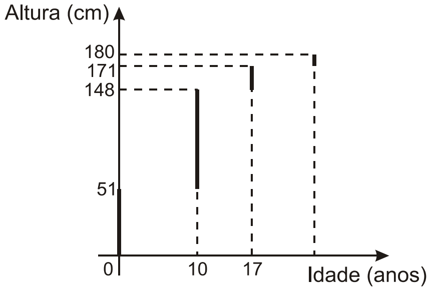
a)



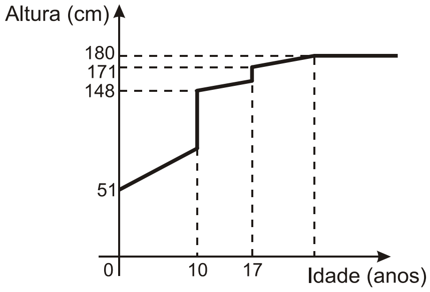
b)



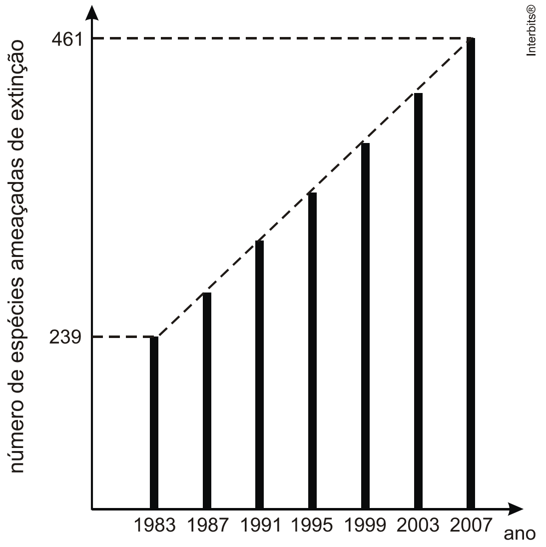
c)



d)



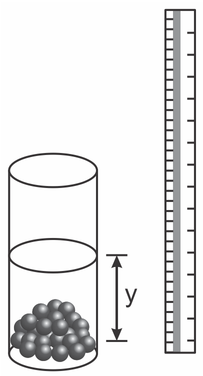
4. (Enem 2007) O gráfico a seguir, obtido a partir de dados do Ministério do Meio Ambiente, mostra o crescimento do número de espécies da fauna brasileira ameaçadas de extinção.



Se mantida, pelos próximos anos, a tendência de crescimento mostrada no gráfico, o número de espécies ameaçadas de extinção em 2011 será igual a

a) 465.
b) 493.
c) 498.
d) 538.
e) 699.

5. (Enem 2009) Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.



O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

número de bolas (x)	nível da água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Disponível em: www.penta.ufrgs.br. Acesso em: 13 jan. 2009 (adaptado).

Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (y) em função do número de bolas (x)?

a) $y = 30x$.
b) $y = 25x + 20,2$.
c) $y = 1,27x$.
d) $y = 0,7x$.
e) $y = 0,07x + 6$.

6. (Enem 2013) A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento (t = 0) e varia de acordo com a expressão $T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$, com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39°.

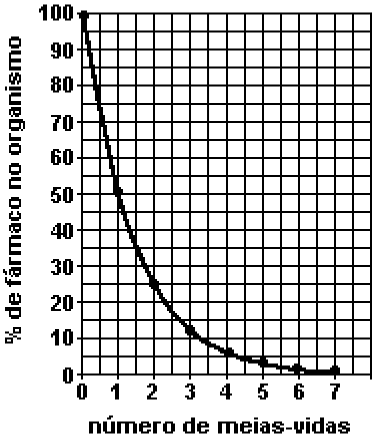
Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?
a) 19,0
b) 19,8
c) 20,0
d) 38,0
e) 39,0

7. (Enem 2009) Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros.

Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em R$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona V e x é

a) $V = 10.000 + 50x - x^2$.
b) $V = 10.000 + 50x + x^2$.
c) $V = 15.000 - 50x - x^2$.
d) $V = 15.000 + 50x - x^2$.
e) $V = 15.000 - 50x + x^2$.

8. (Enem 2007) A duração do efeito de alguns fármacos está relacionada à sua meia-vida, tempo necessário para que a quantidade original do fármaco no organismo se reduza à metade. A cada intervalo de tempo correspondente a uma meia-vida, a quantidade de fármaco existente no organismo no final do intervalo é igual à 50% da quantidade no início desse intervalo.



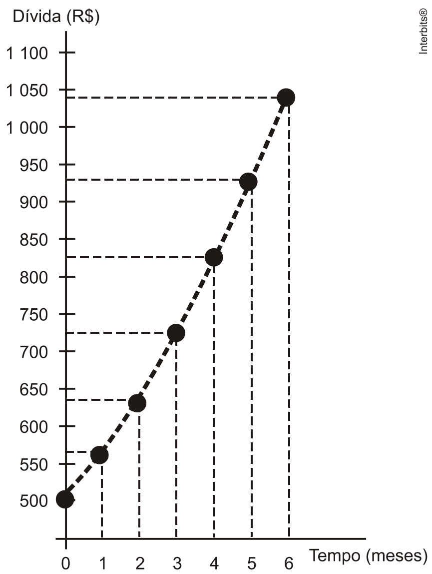
O gráfico anterior representa, de forma genérica, o que acontece com a quantidade de fármaco no organismo humano ao longo do tempo.

F. D. Fuchs e Cher l. Wannma. **Farmacologia Clínica**.
Rio de Janeiro: Guanabara Koogan,1992, p. 40.

A meia-vida do antibiótico amoxicilina é de 1 hora. Assim, se uma dose desse antibiótico for injetada às $12\,\text{h}$ em um paciente, o percentual dessa dose que restará em seu organismo às $13\,\text{h}\,30\,\text{min}$ será aproximadamente de

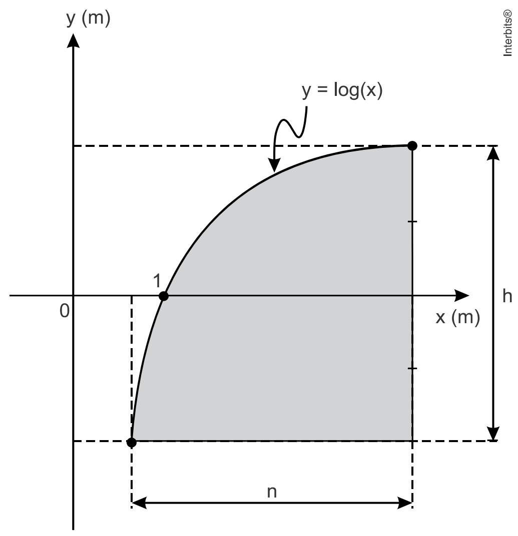
a) 10%.
b) 15%.
c) 25%.
d) 35%.
e) 50%.

9. (Enem PPL 2013) Um trabalhador possui um cartão de crédito que, em determinado mês, apresenta o saldo devedor a pagar no vencimento do cartão, mas não contém parcelamentos a acrescentar em futuras faturas. Nesse mesmo mês, o trabalhador é demitido. Durante o período de desemprego, o trabalhador deixa de utilizar o cartão de crédito e também não tem como pagar as faturas, nem a atual nem as próximas, mesmo sabendo que, a cada mês, incidirão taxas de juros e encargos por conta do não pagamento da dívida. Ao conseguir um novo emprego, já completados 6 meses de não pagamento das faturas, o trabalhador procura renegociar sua dívida. O gráfico mostra a evolução do saldo devedor.



Com base no gráfico, podemos constatar que o saldo devedor inicial, a parcela mensal de juros e a taxa de juros são
a) R$ 500,00; constante e inferior a 10% ao mês.
b) R$ 560,00; variável e inferior a 10% ao mês.
c) R$ 500,00; variável e superior a 10% ao mês.
d) R$ 560,00; constante e superior a 10% ao mês.
e) R$ 500,00; variável e inferior a 10% ao mês.

10. (Enem 2015) Um engenheiro projetou um automóvel cujos vidros das portas dianteiras foram desenhados de forma que suas bordas superiores fossem representadas pela curva de equação $y = \log(x)$, conforme a figura.



A forma do vidro foi concebida de modo que o eixo x sempre divida ao meio a altura h do vidro e a base do vidro seja paralela ao eixo x. Obedecendo a essas condições, o engenheiro determinou uma expressão que fornece a altura h do vidro em função da medida n de sua base, em metros.

A expressão algébrica que determina a altura do vidro é

a) $\log\left(\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)-\log\left(\dfrac{n-\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

b) $\log\left(1+\dfrac{n}{2}\right)-\log\left(1-\dfrac{n}{2}\right)$

c) $\log\left(1+\dfrac{n}{2}\right)+\log\left(1-\dfrac{n}{2}\right)$

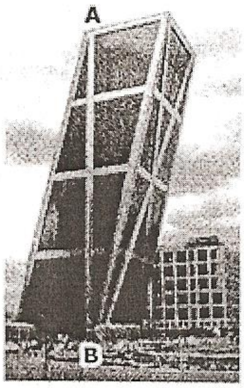
d) $\log\left(\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

e) $2\log\left(\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

APÊNDICE E – Lista com problemas sobre conteúdos matemáticos diversos[3]

Nome: ____ Data ____/_____/2016

1- As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento AB). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.



Disponível em: www.flickr.com. Acesso em: 27 mar. 2012.

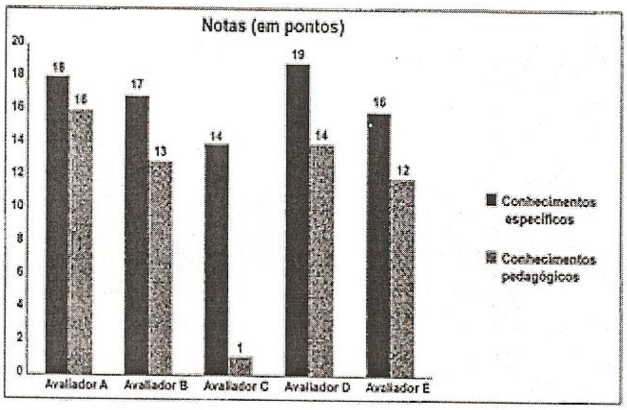
Utilizando 0,26 como valor aproximado para a tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço

- Ⓐ menor que 100 m^2.
- Ⓑ entre 100 m^2 e 300 m^2.
- Ⓒ entre 300 m^2 e 500 m^2.
- Ⓓ entre 500 m^2 e 700 m^2.
- Ⓔ maior que 700 m^2.

---

[3] Lista elaborada com questões disponíveis no portal: INFOENEM. Disponível em:<http://www.infoenem.com.br> Acesso em: fev. 2014.

2- As notas de um professor que participou de um processo seletivo, em que a banca avaliadora era composta por cinco membros, são apresentadas no gráfico. Sabe-se que cada membro da banca atribuiu duas notas ao professor, uma relativa aos conhecimentos específicos da área de atuação e outra, aos conhecimentos pedagógicos, e que a média final do professor foi dada pela média aritmética de todas as notas atribuídas pela banca avaliadora.



Utilizando um novo critério, essa banca avaliadora resolveu descartar a maior e a menor notas atribuídas ao professor.

A nova média, em relação à média anterior, é

Ⓐ 0,25 ponto maior.
Ⓑ 1,00 ponto maior.
Ⓒ 1,00 ponto menor.
Ⓓ 1,25 ponto maior.
Ⓔ 2,00 pontos menor.

3- Cinco empresas de gêneros alimentícios encontram-se à venda. Um empresário, almejando ampliar os seus investimentos, deseja comprar uma dessas empresas. Para escolher qual delas irá comprar, analisa o lucro (em milhões de reais) de cada uma delas, em função de seus tempos (em anos) de existência, decidindo comprar a empresa que apresente o maior lucro médio anual.

O quadro apresenta o lucro (em milhões de reais) acumulado ao longo do tempo (em anos) de existência de cada empresa.

Empresa	Lucro (em milhões de reais)	Tempo (em anos)
F	24	3,0
G	24	2,0
H	25	2,5
M	15	1,5
P	9	1,5

O empresário decidiu comprar a empresa

A) F.
B) G.
C) H.
D) M.
E) P.

4- Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para 900 m^3. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de 500 m^3, cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente.

A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a

A) 2.
B) 4.
C) 5.
D) 8.
E) 9.

5- Uma fábrica de fórmicas produz placas quadradas de lados de medida igual a y centímetros. Essas placas são vendidas em caixas com N unidades e, na caixa, é especificada a área máxima S que pode ser coberta pelas N placas.

Devido a uma demanda do mercado por placas maiores, a fábrica triplicou a medida dos lados de suas placas e conseguiu reuni-las em uma nova caixa, de tal forma que a área coberta S não fosse alterada.

A quantidade X, de placas do novo modelo, em cada nova caixa será igual a:

(A) $\frac{N}{9}$

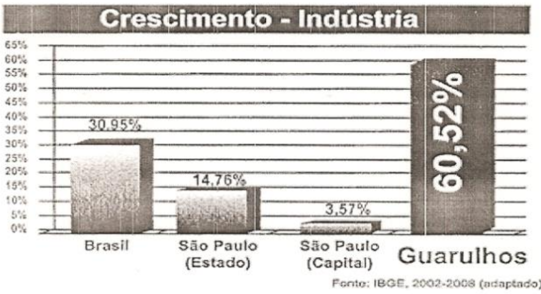
(B) $\frac{N}{6}$

(C) $\frac{N}{3}$

(D) $3N$

(E) $9N$

6- A cidade de Guarulhos (SP) tem o 8º PIB municipal do Brasil, além do maior aeroporto da América do Sul. Em proporção, possui a economia que mais cresce em indústrias, conforme mostra o gráfico.



Fonte: IBGE, 2002-2008 (adaptado).

Analisando os dados percentuais do gráfico, qual a diferença entre o maior e o menor centro em crescimento no polo das indústrias?

(A) 75,28

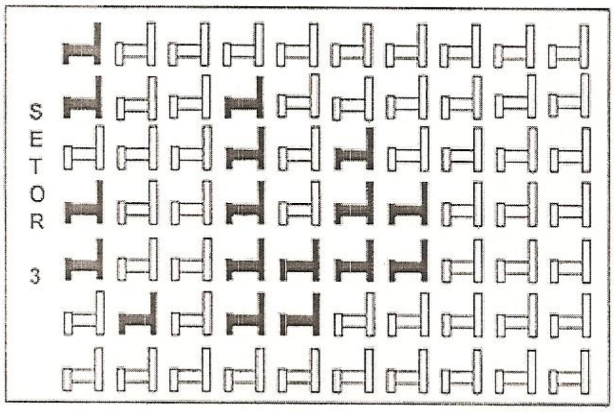
(B) 64,09

(C) 56,95

(D) 45,76

(E) 30,07

7- Em um certo teatro, as poltronas são divididas em setores. A figura apresenta a vista do setor 3 desse teatro, no qual as cadeiras escuras estão reservadas e as claras não foram vendidas.



A razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é

A) $\frac{17}{70}$

B) $\frac{17}{53}$

C) $\frac{53}{70}$

D) $\frac{53}{17}$

E) $\frac{70}{17}$

8- O contribuinte que vende mais de R$ 20 mil de ações em Bolsa de Valores em um mês deverá pagar Imposto de Renda. O pagamento para a Receita Federal consistirá em 15% do lucro obtido com a venda das ações.

Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Um contribuinte que vende por R$ 34 mil um lote de ações que custou R$ 26 mil terá de pagar de Imposto de Renda à Receita Federal o valor de

A) R$ 900,00.

B) R$ 1 200,00.

C) R$ 2 100,00.

D) R$ 3 900,00.

E) R$ 5 100,00.

9- Para se construir um contrapiso, é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com 14 m^3 de concreto.

Qual é o volume de cimento, em m^3, na carga de concreto trazido pela betoneira?

Ⓐ 1,75
Ⓑ 2,00
Ⓒ 2,33
Ⓓ 4,00
Ⓔ 8,00

10- Durante uma aula de Matemática, o professor sugere aos alunos que seja fixado um sistema de coordenadas cartesianas (x, y) e representa na lousa a descrição de cinco conjuntos algébricos, I, II, III, IV e V, como se segue:

I — é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$;

II — é a parábola de equação $y = -x^2 - 1$, com x variando de -1 a 1;

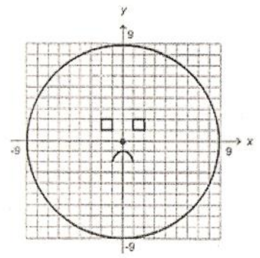
III — é o quadrado formado pelos vértices $(-2, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, 2)$ e $(-2, 2)$;

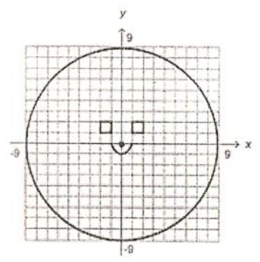
IV — é o quadrado formado pelos vértices $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$ e $(1, 2)$;

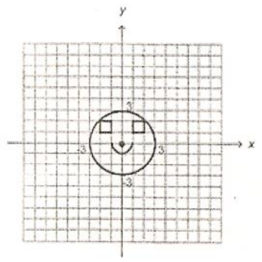
V — é o ponto $(0, 0)$.

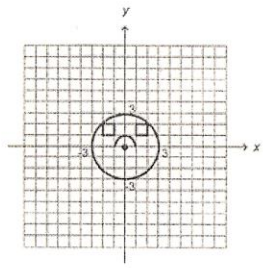
A seguir, o professor representa corretamente os cinco conjuntos sobre uma mesma malha quadriculada, composta de quadrados com lados medindo uma unidade de comprimento, cada, obtendo uma figura.

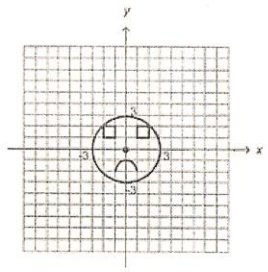
Qual destas figuras foi desenhada pelo professor?

Ⓐ 

Ⓑ 

Ⓒ 

Ⓓ 

Ⓔ 

APÊNDICE F – Lista com a Sequência de Pólya impressa[4]

Nome: ______________________________________Data ____/_____/2016

1**.** (Enem 2004) O jornal de uma pequena cidade publicou a seguinte notícia:

CORREIO DA CIDADE

ABASTECIMENTO COMPROMETIDO

O novo polo agroindustrial em nossa cidade tem atraído um enorme e constante fluxo migratório, resultando em um aumento da população em torno de 2000 habitantes por ano, conforme dados do nosso censo:

Ano	População
1995	11.965
1997	15.970
1999	19.985
2001	23.980
2003	27.990

Esse crescimento tem ameaçado nosso fornecimento de água, pois os mananciais que abastecem a cidade têm capacidade para fornecer até 6 milhões de litros de água por dia. A prefeitura, preocupada com essa situação, vai iniciar uma campanha visando estabelecer um consumo médio de 150 litros por dia, por habitante.

A análise da notícia permite concluir que a medida é oportuna. Mantido esse fluxo migratório e bem-sucedida a campanha, os mananciais serão suficientes para abastecer a cidade até o final de

a) 2005.
b) 2006.
c) 2007.
d) 2008.
e) 2009.

2. (Enem 2ª aplicação 2010) Em fevereiro, o governo da Cidade do México, metrópole com uma das maiores frotas de automóveis do mundo, passou a oferecer à população bicicletas como opção de transporte. Por uma anuidade de 24 dólares, os usuários têm direito a 30 minutos de uso livre por dia. O ciclista pode retirar em uma estação e devolver em qualquer outra e, se quiser estender a pedalada, paga 3 dólares por hora extra.

Revista Exame. 21 abr. 2010.

A expressão que relaciona o valor f pago pela utilização da bicicleta por um ano, quando se utilizam *x* horas extras nesse período é

a) $f(x)=3x$
b) $f(x)=24$
c) $f(x)=27$
d) $f(x)=3x+24$
e) $f(x)=24x+3$

---

[4] Problemas extraídos do site acessado apenas através de assinatura: SUPER Professor. Disponível em:<https://www.sprweb.com.br> Acesso em: out. 2016.
Algumas questões foram extraídas da prova do ENEM 2014, segundo dia, caderno 5, amarelo, disponível em: www.vestibulandoweb.com.br/enem/prova-enem-amarela-2014-2dia.pdf. Acesso em: jun. 2015.

3.(Enem PPL 2013) Uma pequena fábrica vende seus bonés em pacotes com quantidades de unidades variáveis. O lucro obtido é dado pela expressão $L(x) = -x^2 + 12x - 20$, onde x representa a quantidade de bonés contidos no pacote. A empresa pretende fazer um único tipo de empacotamento, obtendo um lucro máximo. Para obter o lucro máximo nas vendas, os pacotes devem conter uma quantidade de bonés igual a
a) 4.
b) 6.
c) 9.
d) 10.
e) 14.

4. (Enem PPL 2013) Em um experimento, uma cultura de bactérias tem sua população reduzida pela metade a cada hora, devido à ação de um agente bactericida.
Neste experimento, o número de bactérias em função do tempo pode ser modelado por uma função do tipo
a) afim.
b) seno.
c) cosseno.
d) logarítmica crescente.
e) exponencial.

5. (Enem 2011) A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_W), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_W e M_0 se relacionam pela fórmula:

$$M_W = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log_{10}(M_0)$$

Onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina.cm.
O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_W = 7{,}3$.

U.S. GEOLOGICAL SURVEY, Historic Earthquakes. Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).
U.S. GEOLOGICAL SURVEY. USGS Earthquake Magnitude Policy. Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em dina.cm)?
a) $10^{-5{,}10}$
b) $10^{-0{,}73}$
c) $10^{12{,}00}$
d) $10^{21{,}65}$
e) $10^{27{,}00}$

6- Os candidatos K, L, M, N e P estão disputando uma única vaga de emprego em uma empresa e fizeram provas de português, matemática, direito e informática. A tabela apresenta as notas obtidas pelos cinco candidatos.

Candidatos	Português	Matemática	Direito	Informática
K	33	33	33	34
L	32	39	33	34
M	35	35	36	34
N	24	37	40	35
P	36	16	26	41

Segundo o edital de seleção, o candidato aprovado será aquele para o qual a mediana das notas obtidas por ele nas quatro disciplinas for a maior.

O candidato aprovado será

Ⓐ K.

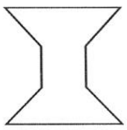
Ⓑ L.

Ⓒ M.

Ⓓ N.

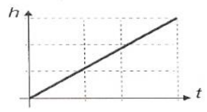
Ⓔ P.

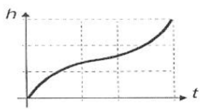
7- Para comemorar o aniversário de uma cidade, um artista projetou uma escultura transparente e oca, cujo formato foi inspirado em uma ampulheta. Ela é formada por três partes de mesma altura: duas são troncos de cone iguais e a outra é um cilindro. A figura é a vista frontal dessa escultura.

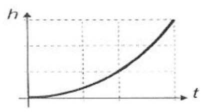


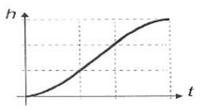
No topo da escultura foi ligada uma torneira que verte água, para dentro dela, com vazão constante.

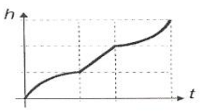
O gráfico que expressa a altura (h) da água na escultura em função do tempo (t) decorrido é

Ⓐ 

Ⓑ 

Ⓒ 

Ⓓ 

Ⓔ 

8- Um *show* especial de Natal teve 45 000 ingressos vendidos. Esse evento ocorrerá em um estádio de futebol que disponibilizará 5 portões de entrada, com 4 catracas eletrônicas por portão. Em cada uma dessas catracas, passará uma única pessoa a cada 2 segundos. O público foi igualmente dividido pela quantidade de portões e catracas, indicados no ingresso para o *show*, para a efetiva entrada no estádio. Suponha que todos aqueles que compraram ingressos irão ao *show* e que todos passarão pelos portões e catracas eletrônicas indicados.

Qual é o tempo mínimo para que todos passem pelas catracas?

(A) 1 hora.

(B) 1 hora e 15 minutos.

(C) 5 horas.

(D) 6 horas.

(E) 6 horas e 15 minutos.

9- Durante uma epidemia de uma gripe viral, o secretário de saúde de um município comprou 16 galões de álcool em gel, com 4 litros de capacidade cada um, para distribuir igualmente em recipientes para 10 escolas públicas do município. O fornecedor dispõe à venda diversos tipos de recipientes, com suas respectivas capacidades listadas:

- Recipiente I: 0,125 litro
- Recipiente II: 0,250 litro
- Recipiente III: 0,320 litro
- Recipiente IV: 0,500 litro
- Recipiente V: 0,800 litro

O secretário de saúde comprará recipientes de um mesmo tipo, de modo a instalar 20 deles em cada escola, abastecidos com álcool em gel na sua capacidade máxima, de forma a utilizar todo o gel dos galões de uma só vez.

Que tipo de recipiente o secretário de saúde deve comprar?

(A) I

(B) II

(C) III

(D) IV

(E) V

10- Os incas desenvolveram uma maneira de registrar quantidades e representar números utilizando um sistema de numeração decimal posicional: um conjunto de cordas com nós denominado *quipus*. O *quipus* era feito de uma corda matriz, ou principal (mais grossa que as demais), na qual eram penduradas outras cordas, mais finas, de diferentes tamanhos e cores (cordas pendentes). De acordo com a sua posição, os nós significavam unidades, dezenas, centenas e milhares. Na Figura 1, o *quipus* representa o número decimal 2 453. Para representar o "zero" em qualquer posição, não se coloca nenhum nó.

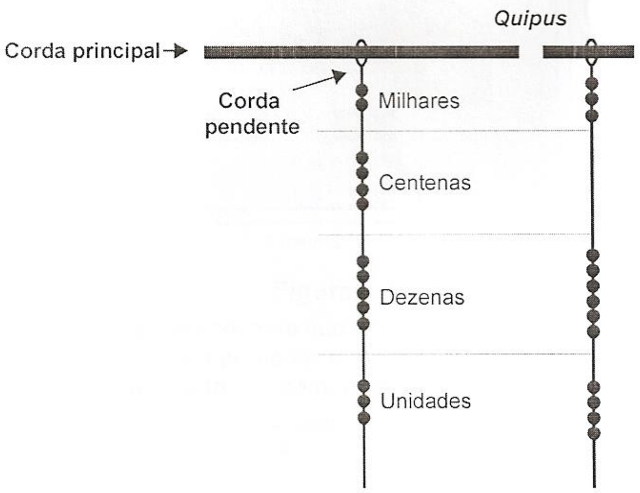


Figura 1 Figura 2

Disponível em: www.culturaperuana.com.br. Acesso em: 13 dez. 2012.

O número da representação do *quipus* da Figura 2, em base decimal, é

(A) 364.
(B) 463.
(C) 3 064.
(D) 3 640.
(E) 4 603.

Compreender o problema

a) O que se pede no problema?
b) Quais são os dados e as condições do problema?
c) É possível fazer uma figura, um esquema ou um diagrama?
d) É possível estimar a resposta?

Elaborar um plano

a) Qual é o seu plano para resolver o problema?
b) Que estratégia você tentará desenvolver?
c) Você se lembra de um problema semelhante que pode ajudá-lo a resolver este?
d) Tente organizar os dados em tabelas e gráficos.
e) Tente resolver o problema por partes.

Executar o plano

a) Execute o plano elaborado, verificando-o passo a passo.
b) Efetue todos os cálculos indicados no plano.
c) Execute todas as estratégias pensadas, obtendo várias maneiras de resolver o mesmo problema.

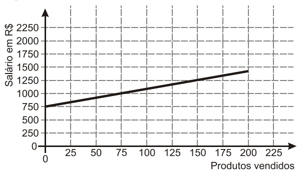
Fazer o retrospecto ou verificação

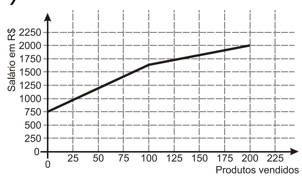
a) Examine se a solução obtida está correta.
b) Existe outra maneira de resolver o problema?
c) É possível usar o método empregado para resolver problemas semelhantes?

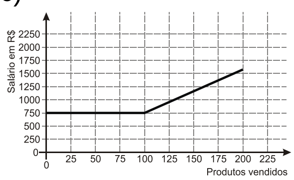
APÊNDICE G – Lista sem a Sequência de Pólya impressa[5]

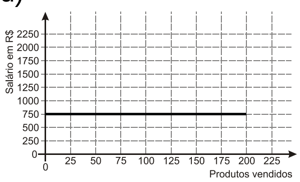
Nome: _______________________________________Data _____/_____/2016

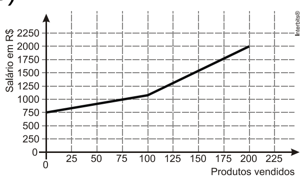
1**.** (Enem 2012) Jogar baralho é uma atividade que estimula o raciocínio. Um jogo tradicional é a Paciência, que utiliza 52 cartas. Inicialmente são formadas sete colunas com as cartas. A primeira coluna tem uma carta, a segunda tem duas cartas, a terceira tem três cartas, a quarta tem quatro cartas, e assim sucessivamente até a sétima coluna, a qual tem sete cartas, e o que sobra forma o monte, que são as cartas não utilizadas nas colunas.
A quantidade de cartas que forma o monte é
a) 21.
b) 24.
c) 26.
d) 28.
e) 31.

2**.** (Enem 2012) Certo vendedor tem seu salário mensal calculado da seguinte maneira: ele ganha um valor fixo de R$750,00, mais uma comissão de R$3,00 para cada produto vendido. Caso ele venda mais de 100 produtos, sua comissão passa a ser de R$9,00 para cada produto vendido, a partir do 101º produto vendido.
Com essas informações, o gráfico que melhor representa a relação entre salário e o número de produtos vendidos é
a)


b)


c)


d)


e)


---

[5] Problemas extraídos do site acessado apenas através de assinatura: SUPER Professor. Disponível em:<https://www.sprweb.com.br> Acesso em: out. 2016.

3. (Enem 2012) Nos *shopping centers* costumam existir parques com vários brinquedos e jogos. Os usuários colocam créditos em um cartão, que são descontados por cada período de tempo de uso dos jogos. Dependendo da pontuação da criança no jogo, ela recebe um certo número de tíquetes para trocar por produtos nas lojas dos parques.
Suponha que o período de uso de um brinquedo em certo *shopping* custa R$ 3,00 e que uma bicicleta custa 9 200 tíquetes.
Para uma criança que recebe 20 tíquetes por período de tempo que joga, o valor, em reais, gasto com créditos para obter a quantidade de tíquetes para trocar pela bicicleta é
a) 153.
b) 460.
c) 1218.
d) 1380.
e) 3066.

4. (Enem 2012) Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas.
Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então a massa corporal dele é de
a) 12 kg.
b) 16 kg.
c) 24 kg.
d) 36 kg.
e) 75 kg.

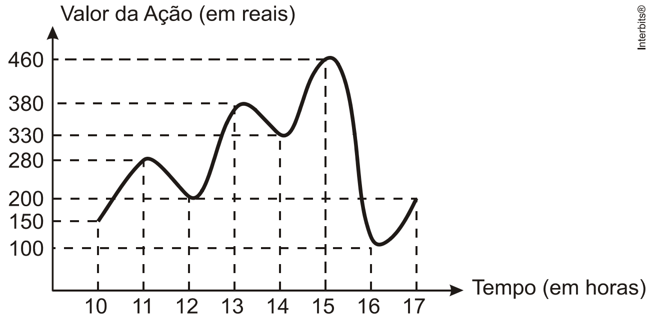
5. (Enem 2012) A capacidade mínima, em BTU/h, de um aparelho de ar-condicionado, para ambientes sem exposição ao sol, pode ser determinada da seguinte forma:

• 600 BTU/h por m^2, considerando-se ate duas pessoas no ambiente;
• para cada pessoa adicional nesse ambiente, acrescentar 600 BTU/h;
• acrescentar mais 600 BTU/h para cada equipamento eletrônico em funcionamento no ambiente.

Será instalado um aparelho de ar-condicionado em uma sala sem exposição ao sol, de dimensões 4 m x 5 m, em que permaneçam quatro pessoas e possua um aparelho de televisão em funcionamento.
A capacidade mínima, em BTU/h, desse aparelho de ar-condicionado deve ser
a) 12 000.
b) 12 600.
c) 13 200.
d) 13 800.
e) 15 000.

6. (Enem 2012) Um maquinista de trem ganha R$ 100,00 por viagem e só pode viajar a cada 4 dias. Ele ganha somente se fizer a viagem e sabe que estará de férias de 1º a 10 de junho, quando não poderá viajar. Sua primeira viagem ocorreu no dia primeiro de janeiro. Considere que o ano tem 365 dias.
Se o maquinista quiser ganhar o máximo possível, quantas viagens precisará fazer?
a) 37
b) 51
c) 88
d) 89
e) 91

7. (Enem 2012) O gráfico fornece os valores das ações da empresa *XPN*, no período das 10 às 17 horas, num dia em que elas oscilaram acentuadamente em curtos intervalos de tempo.



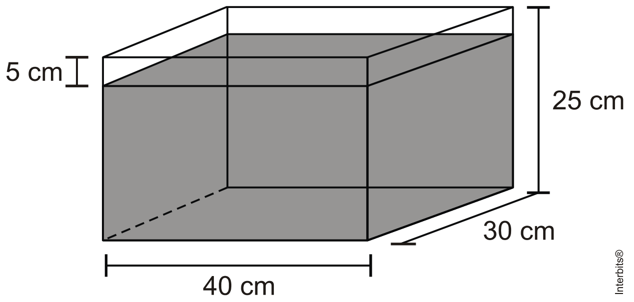
Neste dia, cinco investidores compraram e venderam o mesmo volume de ações, porém em horários diferentes, de acordo com a seguinte tabela.

Investidor	Hora da Compra	Hora da Venda
1	10:00	15:00
2	10:00	17:00
3	13:00	15:00
4	15:00	16:00
5	16:00	17:00

Com relação ao capital adquirido na compra e venda das ações, qual investidor fez o melhor negócio?
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

8. (Enem 2012) Há, em virtude da demanda crescente de economia de água, equipamentos e utensílios como, por exemplo, as bacias sanitárias ecológicas, que utilizam 6 litros de água por descarga em vez dos 15 litros utilizados por bacias sanitárias não ecológicas, conforme dados da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT).
Qual será a economia diária de água obtida por meio da substituição de uma bacia sanitária não ecológica, que gasta cerca de 60 litros por dia com a descarga, por uma bacia sanitária ecológica?
a) 24 litros
b) 36 litros
c) 40 litros
d) 42 litros
e) 50 litros

9. (Enem 2012) Alguns objetos, durante a sua fabricação, necessitam passar por um processo de resfriamento. Para que isso ocorra, uma fábrica utiliza um tanque de resfriamento, como mostrado na figura.



O que aconteceria com o nível da água se colocássemos no tanque um objeto cujo volume fosse de 2 400 cm^3?

a) O nível subiria 0,2 cm, fazendo a água ficar com 20,2 cm de altura.
b) O nível subiria 1 cm, fazendo a água ficar com 21 cm de altura.
c) O nível subiria 2 cm, fazendo a água ficar com 22 cm de altura.
d) O nível subiria 8 cm, fazendo a água transbordar.
e) O nível subiria 20 cm, fazendo a água transbordar.

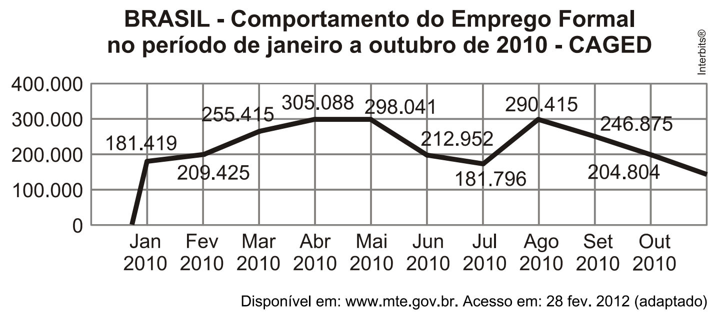
10**.** (Enem 2012) José, Carlos e Paulo devem transportar em suas bicicletas uma certa quantidade de laranjas. Decidiram dividir o trajeto a ser percorrido em duas partes, sendo que ao final da primeira parte eles redistribuiriam a quantidade de laranjas que cada um carregava dependendo do cansaço de cada um. Na primeira parte do trajeto, José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção $6 : 5 : 4,$ respectivamente. Na segunda parte do trajeto, José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção $4 : 4 : 2,$ respectivamente.

Sabendo-se que um deles levou 50 laranjas a mais no segundo trajeto, qual a quantidade de laranjas que José, Carlos e Paulo, nessa ordem, transportaram na segunda parte do trajeto?

a) 600, 550, 350
b) 300, 300, 150
c) 300, 250, 200
d) 200, 200, 100
e) 100, 100, 50

APÊNDICE H – Lista de apresentação da Sequência de Pólya[6]

(Enem 2012) O gráfico apresenta o comportamento de emprego formal surgido, segundo o CAGED, no período de janeiro de 2010 a outubro de 2010.

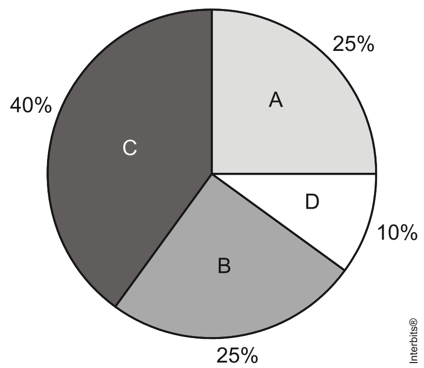


Disponível em: www.mte.gov.br. Acesso em: 28 fev. 2012 (adaptado)

Com base no gráfico, o valor da parte inteira da mediana dos empregos formais surgidos no período é

a) 212 952.
b) 229 913.
c) 240 621.
d) 255 496.
e) 298 041.

(Enem 2013) Foi realizado um levantamento nos 200 hotéis de uma cidade, no qual foram anotados os valores, em reais, das diárias para um quarto padrão de casal e a quantidade de hotéis para cada valor da diária. Os valores das diárias foram: A = R\$200,00; B = R\$300,00; C = R\$400,00 e D = R\$600,00. No gráfico, as áreas representam as quantidades de hotéis pesquisados, em porcentagem, para cada valor da diária.

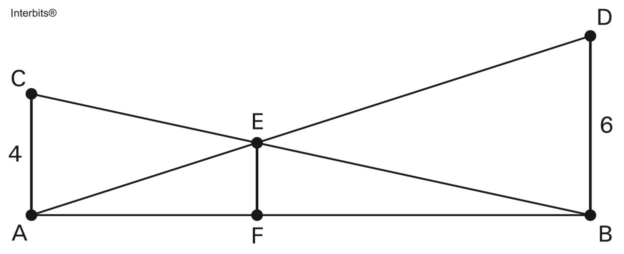


O valor mediano da diária, em reais, para o quarto padrão de casal nessa cidade, é

a) 300,00.
b) 345,00.
c) 350,00.
d) 375,00.
e) 400,00.

[6] Problemas extraídos do site acessado apenas através de assinatura: SUPER Professor. Disponível em:<https://www.sprweb.com.br> Acesso em: out. 2016.

(Enem 2013) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6m e 4m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.



Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?

a) $1\,m$

b) $2\,m$

c) $2{,}4\,m$

d) $3\,m$

e) $2\sqrt{6}\,m$

APÊNDICE I – Autorização de participação do aluno

Brotas – SP, 09 de agosto de 2016.

Eu, ____, portador(a) da Cédula de Identidade (RG) número _________________, AUTORIZO meu(minha) filho(a) ____, portador(a) da Cédula de Identidade (RG) número _________________________ e regularmente matriculado(a) no Ensino Médio da E. E. Professora “Dinah Lúcia Balestrero” de Brotas-SP, a participar das atividades didáticas do Projeto de Pesquisa de Mestrado, do Professor de Matemática Gilberto Alves Barbosa Filho desta escola, projeto este sendo desenvolvido no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, da Universidade Federal de São Carlos, Campus São Carlos, sob a orientação do Professor Doutor Renato José de Moura, do Departamento de Matemática daquela instituição.

Os alunos devidamente autorizados participarão das atividades que terão por objetivo desenvolver, analisar e avaliar uma estratégia para o processo de ensino e aprendizagem da matemática, a qual envolverá a busca de uma proposta que contribua na resolução de problemas matemáticos.

As atividades didáticas deste projeto ocorrerão durante encontros às terças-feiras em uma sala de aula da escola durante os meses de agosto, setembro e outubro do corrente ano.

____

Assinatura do Pai / Mãe ou responsável

____

Professor Gilberto Alves Barbosa Filho

Obrigado, desde já, pela autorização e colaboração!

APÊNDICE J – Autorização de aplicação de pesquisa

Brotas – SP, 09 de agosto de 2016.

Eu, Professor de Matemática Gilberto Alves Barbosa Filho, portador da Cédula de Identidade RG 18.715.623-2, venho através desta, solicitar AUTORIZAÇÃO da Direção da E. E. Professora “Dinah Lúcia Balestrero”, de Brotas/SP, para aplicar, junto aos alunos do ensino médio, previamente autorizados por seus Pais, as atividades didáticas de meu Projeto de Pesquisa, em nível de Mestrado, que vem sendo desenvolvido dentro do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, da Universidade Federal de São Carlos, Campus São Carlos, sob a orientação do Professor Doutor Renato José de Moura, do Departamento de Matemática daquela instituição.

Este Projeto de Pesquisa tem por objetivo desenvolver, analisar e avaliar uma estratégia para o processo de ensino e aprendizagem da matemática, a qual envolverá a busca de uma proposta que contribua na resolução de problemas matemáticos.

As atividades didáticas deste projeto ocorrerão durante encontros às terças-feiras em uma sala de aula da escola durante os meses de agosto, setembro e outubro do corrente ano.

Agradecendo desde já a colaboração e autorização a ser dada coloco-me à disposição para qualquer esclarecimento que se faça necessário.

Atenciosamente,

____

Professor Gilberto Alves Barbosa Filho

AUTORIZO A APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES DIDÁTICAS, DO PROJETO DE PESQUISA DE MESTRADO, DO PROFESSOR GILBERTO ALVES BARBOSA FILHO, NOS TERMOS ACIMA DESCRITOS.

____

Profa. Jussara Catóia Barbosa dos Santos

Diretora da E. E. Professora Dinah Lúcia Balestrero

ANEXO

ANEXO A – Sequência de Pólya

Compreender o problema

a) O que se pede no problema?
b) Quais são os dados e as condições do problema?
c) É possível fazer uma figura, um esquema ou um diagrama?
d) É possível estimar a resposta?

Elaborar um plano

a) Qual é o seu plano para resolver o problema?
b) Que estratégia você tentará desenvolver?
c) Você se lembra de um problema semelhante que pode ajudá-lo a resolver este?
d) Tente organizar os dados em tabelas e gráficos.
e) Tente resolver o problema por partes.

Executar o plano

a) Execute o plano elaborado, verificando-o passo a passo.
b) Efetue todos os cálculos indicados no plano.
c) Execute todas as estratégias pensadas, obtendo várias maneiras de resolver o mesmo problema.

Fazer o retrospecto ou verificação

a) Examine se a solução obtida está correta.
b) Existe outra maneira de resolver o problema?
c) É possível usar o método empregado para resolver problemas semelhantes?

(Dante, 2000, p. 29)