

Jadder Bismarck de Sousa Cruz

Coloração de Arestas em Grafos Split-Comparabilidade

Sorocaba, SP

2 de maio de 2017

Jadder Bismarck de Sousa Cruz

Coloração de Arestas em Grafos Split-Comparabilidade

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação (PPGCCS) da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação. Área de concentração: Teoria Aplicada à Computação.

Universidade Federal de São Carlos – UFSCar

Centro de Ciências em Gestão e Tecnologia – CCGT

Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação – PPGCCS

Orientadora: Cândida Nunes da Silva

Coorientadora: Sheila Morais de Almeida

Sorocaba, SP

2 de maio de 2017

Sousa Cruz, Jadder Bismarck de

Coloração de Arestas em Grafos Split-Comparabilidade / Jadder Bismarck
de Sousa Cruz. -- 2017.
62 f. : 30 cm.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal de São Carlos, campus
Sorocaba, Sorocaba

Orientador: Cândida Nunes da Silva

Banca examinadora: Márcia Rosana Cerioli, José de Oliveira Guimarães

Bibliografia

1. Teoria dos Grafos. 2. Coloração de Arestas. 3. Problema da
Classificação. I. Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III.
Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).

DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências em Gestão e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Jadder Bismarck de Sousa Cruz, realizada em 02/05/2017:

Cândida Nunes da Silva

Profa. Dra. Cândida Nunes da Silva
UFSCar

Márcia Rosana Cerioli

Profa. Dra. Márcia Rosana Cerioli
UFRJ

José de Oliveira Guimarães

Prof. Dr. José de Oliveira Guimarães
UFSCar

*Dedico este trabalho
aos meus pais.*

Agradecimentos

Primeiramente eu agradeço a Deus por ter me dado capacidade para desenvolver esse trabalho, depois aos meus pais, Claudionor e Edmara, por me apoiarem sempre em tudo.

Gostaria de agradecer às minhas orientadoras, Cândida e Sheila. À Cândida agradeço por sempre me manter na linha e principalmente por sempre me questionar, me fazendo duvidar de tudo que eu pensava que já sabia, mas muitas vezes não estava totalmente correto. À Sheila eu agradeço por trazer a experiência em coloração, alavancando o processo que foi essa pesquisa. Ainda as duas eu agradeço por sempre estarem me guiando, sem vocês eu jamais teria conseguido fazer este trabalho.

Agradeço aos meus familiares Edna, Marcos, Edneia, Cardoso, Irene, Timóteo, Raquece, Lucas, Kelvin e primos por me apoiarem de muitas maneiras possíveis.

Agradeço aos meus amigos Jonas, Ariana, Almir, Bárbara, Jéssica, Vidlyn, Aline, Thais, Lintheane, Élide, Juliana, Iune, Daniele, Rodrigo, Liliane e Maira que estiveram presentes em todos os momentos me dando apoio de diversas formas, desde um papo no meio da madrugada até acudir durante uma doença.

Agradeço à Capes pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento desse trabalho, através do qual foi possível me manter durante esses meses de mestrado.

*“[...] mas a excelência do conhecimento é
que a sabedoria dá vida ao seu possuidor.”
(Bíblia, Salomão)*

Resumo

Dado um grafo simples e não direcionado $G = (V, E)$, uma *coloração de arestas* é uma função que atribui cores às arestas do grafo tal que todas as arestas que incidem em um mesmo vértice têm cores distintas. O índice cromático é o número mínimo de cores para obter uma coloração própria das arestas de um grafo. Um limite inferior para o índice cromático é, claramente, o grau do vértice de maior grau, denotado por $\Delta(G)$. Em 1964, Vizing provou que o índice cromático ou é $\Delta(G)$ ou $\Delta(G) + 1$, surgindo assim o *Problema da Classificação*, que consiste em determinar se o índice cromático é $\Delta(G)$ (*Classe 1*) ou $\Delta(G) + 1$ (*Classe 2*).

Seja n o número de vértices de um grafo G e m seu número de arestas. Dizemos que um grafo é *sobrecarregado* se $m > \frac{(n-1)}{2}\Delta(G)$. Um grafo é *subgrafo-sobrecarregado* se tem um subgrafo de mesmo grau máximo que é sobrecarregado. É sabido que se um grafo é sobrecarregado ou subgrafo-sobrecarregado ele é necessariamente Classe 2. A *Conjectura Overfull* é uma famosa conjectura de coloração de arestas e diz que um grafo com $\Delta(G) > \frac{n}{3}$ é Classe 2 se e somente se é subgrafo-sobrecarregado. Neste trabalho provamos a Conjectura *Overfull* para uma classe de grafos, a classe dos grafos split-comparabilidade. Até este momento a Conjectura *Overfull* estava aberta para esta classe.

Palavras-chaves: coloração de arestas, índice cromático, Problema da Classificação, grafos split, grafos comparabilidade.

Abstract

Let $G = (V, E)$ be a simple and undirected graph. An *edge-coloring* is an assignment of colors to the edges of the graph such that any two adjacent edges receive different colors. The *chromatic index* of a graph G is the smallest number of colors such that G has an edge-coloring. Clearly, a lower bound for the chromatic index is the degree of the vertex of higher degree, denoted by $\Delta(G)$. In 1964, Vizing proved that chromatic index is $\Delta(G)$ or $\Delta(G) + 1$. The *Classification Problem* is to determine if the chromatic index is $\Delta(G)$ (*Class 1*) or if it is $\Delta(G) + 1$ (*Class 2*).

Let n be number of vertices of a graph G and let m be its number of edges. We say G is *overfull* if $m > \frac{(n-1)}{2}\Delta(G)$. Every overfull graph is Class 2. A graph is *subgraph-overfull* if it has a subgraph with same maximum degree and it is overfull. It is well-known that every overfull and subgraph-overfull graph is Class 2. The *Overfull Conjecture* asserts that every graph with $\Delta(G) > \frac{n}{3}$ is Class 2 if and only if it is subgraph-overfull. In this work we prove the Overfull Conjecture to a particular class of graphs, known as split-comparability graphs. The Overfull Conjecture was open to this class.

Key-words: edge coloring, chromatic index, Classification Problem, split graphs, comparability graphs.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Convertendo regiões do mapa em vértices.	22
Figura 2 – Grafo de Petersen.	23
Figura 3 – Grafo com uma 3-coloração de arestas.	23
Figura 4 – Grafo de Petersen sem um vértice.	25
Figura 5 – Grafo bipartido.	27
Figura 6 – Grafo completo.	29
Figura 7 – Quadrados latinos.	30
Figura 8 – Grafo com vértice universal.	31
Figura 9 – Exemplo da estrutura de um leque.	33
Figura 10 – Exemplo de grafo split.	37
Figura 11 – Estrutura de um grafo split-comparabilidade.	41
Figura 12 – Estrutura de um grafo split-permutação.	42
Figura 13 – Subgrafos proibidos.	43
Figura 14 – Exemplo de grafo saturado Classe 1.	44
Figura 15 – Exemplo de grafo split-comparabilidade para a demonstração.	46
Figura 16 – Exemplo da construção de G_l	46
Figura 17 – Exemplo com as arestas de Grupo 1, Grupo 2 e Grupo 3.	47
Figura 18 – Exemplo com as arestas de Grupo 4.	47

Lista de símbolos

$V(G)$	Vértices do grafo G
$E(G)$	Arestas do grafo G
n	Número de vértices
m	Número de arestas
$d(v)$	Grau do vértice v
$d_G(v)$	Grau do vértice v no grafo G
$\Delta(G)$	Grau máximo do grafo G
$\chi'(G)$	Índice cromático do grafo G
\overline{G}	Complemento do grafo G
$G[X]$	Subgrafo induzido do grafo G pelo conjunto de vértices, ou arestas, X
K_n	Grafo completo com n vértices
$G[X, Y]$	Grafo bipartido com partição X e Y
$\delta(S)$	Corte de S
$N(v)$	Vizinhança do vértice v
$N[v]$	Vizinhança fechada do vértice v
$N(X)$	Vizinhança do conjunto de vértices X
$N[X]$	Vizinhança fechada do conjunto de vértices X
Λ_G	Núcleo do grafo G
K_G	Seminúcleo do grafo G
Q	Clique de um grafo split
S	Conjunto independente de um grafo split
B	Subgrafo bipartido de um grafo split
d_Q	Grau máximo dos vértices de Q em B

d_S	Grau máximo dos vértices de S em B
$\ell(v)$	Conjunto de todas as cores que sobram em v
$\langle f \dots l \rangle$	Leque
u_i^+	Vértice seguinte a u_i em uma sequência de vértices
u_i^-	Vértice anterior a u_i em uma sequência de vértices
$M = [m_{i,j}]$	Quadrado latino
$\mathcal{S}(n, k)$	Diagrama de cor sufixo de um quadrado latino
$\mathcal{D}(n, k)$	Sufixo aumentado de $\mathcal{S}(n, k)$

Sumário

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	Um Breve Histórico	21
1.2	Coloração de Arestas e o Problema da Classificação	23
1.3	Este trabalho	26
2	RESULTADOS NA LITERATURA	27
2.1	Grafos Bipartidos	27
2.2	Grafos Completos	29
2.3	Grafos com Vértice Universal	31
2.4	Colorações Equilibradas	32
2.5	Recoloração de Vizing e Seminúcleos	33
2.6	Grafos Split	37
3	GRAFOS SPLIT-COMPARABILIDADE	41
3.1	Definição e Caracterização	41
3.2	Coloração de Arestas de Grafos Split-Comparabilidade	44
3.3	Conjectura Overfull nos Grafos Split-Comparabilidade	48
	Conclusão	51
	Referências	53
	APÊNDICE A – GRAFOS COM VÉRTICE UNIVERSAL	55
	Índice	61

1 Introdução

Dividiremos nossa introdução em três seções. Na primeira seção apresentaremos, de uma forma resumida e informal, a história da coloração de arestas, que tem início no Problema das 4-cores. Na seção seguinte apresentaremos as definições técnicas necessárias para a compreensão formal do problema, bem como um importante teorema e uma famosa conjectura relacionada que motivou este trabalho. E na última seção apresentamos o objeto principal de estudo deste trabalho e a estrutura do mesmo.

1.1 Um Breve Histórico

O estudo de coloração em grafos surgiu com o *Problema das 4-cores*. Este problema foi registrado por escrito pela primeira vez em 23 de outubro 1852 em uma carta de Augustus De Morgan para William Rowan Hamilton, sendo proposto por Francis Guthrie. Nessa carta, De Morgan diz que um estudante dele, no caso Frederick Guthrie (irmão do Francis), perguntou a ele por que é possível colorir as regiões de qualquer mapa de forma que regiões que dividem fronteira têm cores distintas, utilizando não mais que quatro cores. Por muito tempo se acreditou que o primeiro registro público do famoso problema teria sido em 1860 (MORGAN, 1860). Contudo em uma publicação recente, Brendan McKay (MCKAY, 2013) mostrou que o problema já havia aparecido em uma publicação anterior, em 10 de junho de 1854 (“F.G”, 1854). Esta publicação é uma carta com autoria atribuída a apenas “F.G”, não sendo possível identificar o autor, porém especula-se que seja Frederick Guthrie ou Francis Guthrie.

Por aparentar ser um problema simples ele atraiu a atenção de muitos matemáticos durante muitos anos. Entretanto, esse problema só foi resolvido em 1977 (APPEL; HAKEN, 1977), muito tempo depois. Esta primeira solução consistiu de uma prova muito complicada, dependendo de muitos casos. Em 1997 (ROBERTSON et al., 1997) uma prova mais simples foi publicada, porém ainda dependia de muitos casos. Contudo, antes disso houveram diversas provas erradas que por algum tempo foram creditadas como certas. Uma delas foi a de Alfred Bray Kempe (KEMPE, 1879), que apesar de estar incorreta trouxe à tona diversas contribuições importantes para o estudo de problemas de coloração. Uma das contribuições foi a modelagem, transformando as regiões do mapa em vértices, como ilustrado pela Figura 1, passando assim a permitir olhar para o problema como um problema de coloração de vértices em grafos e não mais de regiões de mapas. O erro na prova de Kempe só foi descoberto em 1890, por Heawood (HEAWOOD, 1890). Ele mostrou que apesar de errada, a técnica de prova apresentada por Kempe poderia ser usada para mostrar de forma simples que cinco cores são suficientes para colorir qualquer mapa, tendo

assim provado o *Teorema das 5-cores*.

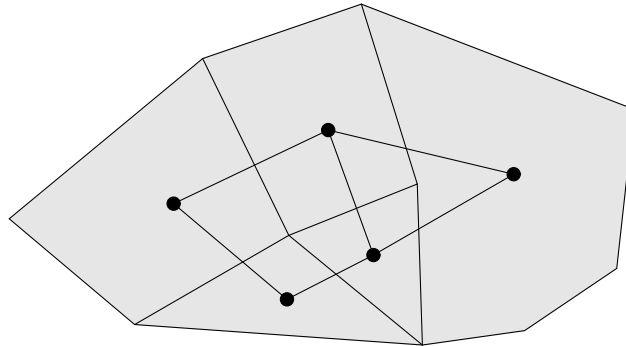


Figura 1: Convertendo regiões do mapa em vértices.

Durante o período que se acreditou que a prova de Kempe estava correta, Peter Guthrie Tait criou uma interessante modelagem para o problema. Nessa modelagem se utilizava apenas mapas cúbicos, que são mapas em que cada ponto de intersecção das linhas que delimitam as regiões tem exatamente três linhas. Ele mostrou que todo mapa pode ser transformado em um mapa cúbico e a ideia era colorir as linhas do mapa, utilizando no máximo 3 cores. Tait (TAIT, 1880) provou que se isso fosse possível para todo mapa, o Teorema das 4-cores estaria provado, iniciando assim o estudo da coloração de arestas. Além disso, Tait sabia que todo mapa cúbico que tinha um *circuito Hamiltoniano*, isto é, uma curva fechada passando exatamente uma vez por cada ponto de intersecção do mapa e no máximo uma vez por cada linha, podia ter suas linhas coloridas usando no máximo três cores. Como Tait ainda acreditava que todo mapa cúbico sempre admitiria um tal circuito Hamiltoniano, pensava ter provado o famoso teorema mostrando que para mapas cúbicos colorir suas linhas com no máximo três cores ou regiões com no máximo quatro cores. Porém, Tait estava enganado, fato que só se tornou evidente mais de meio século depois, em 1946, quando William Thomas Tutte (TUTTE, 1946) apresentou um mapa cúbico com 46 pontos de intersecção que não tem circuito Hamiltoniano.

Assim como a demonstração de Kempe, a de Tait, apesar de incorreta, trouxe à tona técnicas e observações sobre problemas de coloração que se mostraram muito importantes para o estudo deste tópico. Inspirou, por exemplo, o estudo do problema de coloração de arestas em grafos, independentemente de poder ser desenhado como um mapa planar ou ser um grafo cúbico. Inspirou inclusive Julius Petersen (PETERSEN, 1891) a construir logo no ano seguinte, 1891, o primeiro exemplo de grafo cúbico, não passível de ser desenhado no plano, sem circuito Hamiltoniano e cujas linhas não podem ser coloridas com no máximo 3 cores. Este grafo tornou-se muito famoso posteriormente, ficando conhecido como grafo de Petersen, ilustrado na Figura 2.

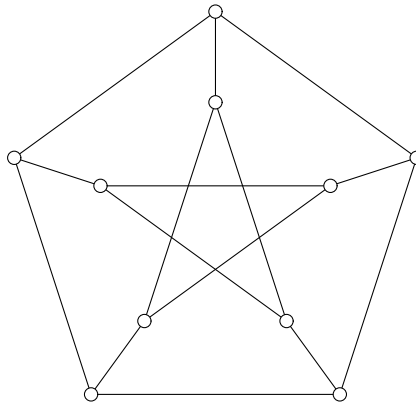


Figura 2: Grafo de Petersen.

1.2 Coloração de Arestas e o Problema da Classificação

Na escrita dessa dissertação fizemos um esforço para colocar todas as definições e tornar o trabalho autocontido, contudo alguns termos bem conhecidos tiveram sua definição omitida, como grafo, grafo simples, grafo não direcionado e outros. Se for o caso do leitor não conhecer esses termos, recomendamos o livro de Bondy e Murty ([BONDY; MURTY, 2008](#)) como referência. Durante todo esse trabalho consideramos $G = (V(G), E(G))$ um grafo não direcionado, conexo e simples a menos que seja explicitamente dito que não é o caso.

Denotamos por n e m o número de vértices em $V(G)$ e de arestas em $E(G)$, respectivamente. Uma *coloração de arestas* de um grafo G é uma função $c : E(G) \rightarrow C$, que associa as arestas de um grafo aos elementos de um conjunto C , que são chamados de *cores*. Tipicamente as cores são representadas por números inteiros. Uma coloração de arestas é dita uma *coloração própria* se, para quaisquer duas arestas e e f adjacentes, as cores a elas atribuídas, $c(e)$ e $c(f)$, são distintas. A coloração mostrada na Figura 3 é uma coloração própria. Neste texto, serão tratadas apenas colorações próprias, devido a isso

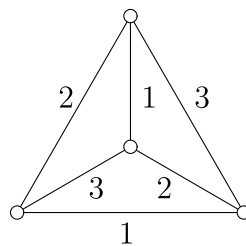


Figura 3: Grafo com uma 3-coloração de arestas.

este termo será omitido. Uma k -coloração de arestas é uma coloração de arestas tal que $|C| = k$, ou seja, no máximo k cores são utilizadas. O *índice cromático* de um grafo G ,

denotado por $\chi'(G)$, é o menor k para o qual G tem uma k -coloração de arestas. Seja G um grafo com as arestas coloridas e $v \in V(G)$. Se a cor $c_i \in C$ colore uma aresta incidente em v , dizemos que c_i *incide* em v . Se a cor $c_i \in C$ não colore nenhuma aresta incidente em v , dizemos que c_i *sobra* em v . Dada uma coloração C , denotamos por $\ell(v)$ o conjunto de todas as cores de C que sobram em v . Seja G um grafo, o *grau* de um vértice $v \in V(G)$, denotado por $d_G(v)$, é o número de arestas que incidem em v . Caso não haja ambiguidade denotaremos apenas $d(v)$. O *grau máximo* de um grafo G , denotado por $\Delta(G)$, é o grau do vértice de maior grau de G . Dado que todas as arestas incidentes em um mesmo vértice são duas a duas adjacentes, um limite inferior para $\chi'(G)$ é $\Delta(G)$. Em 1965, Vizing ([VIZING, 1965](#)) mostrou que há também um limite superior para $\chi'(G)$, como enunciado no teorema a seguir:

Teorema 1.1 (Teorema de Vizing ([VIZING, 1965](#))) *Seja G um grafo simples, então*

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

A partir do Teorema de Vizing surgiu o *Problema da Classificação*, que é o principal problema de coloração de arestas. O Problema da Classificação consiste em decidir para um dado grafo G se $\chi'(G) = \Delta(G)$ ou $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$. Dizemos que G é *Classe 1* quando $\chi'(G) = \Delta(G)$ e que G é *Classe 2* caso contrário. O Problema da Classificação é um dos famosos problemas \mathcal{NP} -Completos ([HOLYER, 1981](#)), porém, para algumas classes de grafos é sabido que ele tem solução polinomial. No Capítulo 2 algumas dessas classes serão apresentadas com mais detalhes.

Um *emparelhamento* é um conjunto de arestas duas a duas não adjacentes. Se M é um emparelhamento, dizemos que os extremos de arestas pertencentes a M estão *emparelhados* por M , e os vértices incidentes em arestas de M são *cobertos* por M . Um *emparelhamento máximo* de G é um emparelhamento que cobre a maior quantidade possível de vértices de G e um *emparelhamento perfeito* de G é um emparelhamento que cobre todos os vértices de G . Uma *classe de cor* em uma coloração de arestas é o conjunto de arestas coloridas com a mesma cor. Cada classe de cor é, portanto, um emparelhamento. Essa observação nos permite identificar uma característica que força um grafo a ser Classe 2, conforme detalhamos a seguir.

Um grafo G é dito *sobrecarregado* se n é ímpar e $m > \frac{1}{2}\Delta(G)(n - 1)$. De forma geral, como o conjunto de arestas de uma dada cor sempre é um emparelhamento, teremos no máximo $\frac{n}{2}$ arestas de uma mesma cor. No caso em que n é ímpar, esse máximo é $\frac{n-1}{2}$. Assim, se um grafo é sobrecarregado, este tem mais arestas do que é possível colorir com $\Delta(G)$ cores, e necessariamente será Classe 2. Nem todo grafo Classe 2 é sobrecarregado. Por exemplo, os *snarks*, que são grafos cúbicos sem 3-coloração de arestas,

não são sobrecarregados por terem sempre n par. A Figura 2 mostra o grafo de Petersen, o primeiro snark descoberto, também o mais famoso, que é um exemplo de grafo Classe 2, porém não sobrecarregado.

Um grafo G é *subgrafo-sobrecarregado* se possui um subgrafo H com $\Delta(G) = \Delta(H)$ e H é sobrecarregado. Claramente todos os grafos que são subgrafo-sobrecarregados são Classe 2. Apesar de todo grafo subgrafo-sobrecarregado ser Classe 2, existem grafos Classe 2 que não são subgrafo-sobrecarregados. O menor exemplo é o grafo P^* , apresentado na Figura 4, o qual foi obtido a partir do grafo de Petersen pela remoção de um de seus vértices, não é subgrafo-sobrecarregado e é Classe 2 (ALMEIDA, 2012).

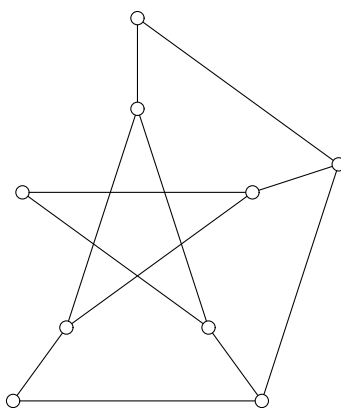


Figura 4: Grafo de Petersen sem um vértice.

Seja G um grafo e $v \in V(G)$. A *vizinhança* de v , denotada por $N(v)$, é conjunto dos vértices adjacentes a v (ou *vizinhos* de v). A *vizinhança fechada* de v , denotada por $N[v]$, é o conjunto $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. De forma análoga, dado um conjunto de vértices $X \subseteq V(G)$, a *vizinhança* de X , denotada por $N(X)$, é a união das vizinhanças $N(v)$, para todo $v \in X$ e a *vizinhança fechada* de X , denotada por $N[X]$, é o conjunto $N[X] = N(X) \cup X$. O *subgrafo induzido* por X , denotado por $G[X]$, é o grafo construído a partir de G da seguinte forma: $V(G[X]) = X$ e $E(G[X])$ é o conjunto de todas as arestas (u, v) de $E(G)$ tais que u e v pertencem a X . Similarmente, seja $A \subseteq E(G)$, o subgrafo de G induzido por A , denotado por $G[A]$ é o grafo construído da seguinte forma: $E(G[A]) = A$ e $V(G[A])$ é o conjunto dos vértices de $V(G)$ em que incide alguma aresta pertencente a A . Um grafo G é *vizinhança-sobrecarregado* se, para algum vértice $v \in V(G)$ com grau $\Delta(G)$, $G[N[v]]$ é sobrecarregado.

A partir da observação de que todo grafo subgrafo-sobrecarregado é Classe 2, Chetwynd e Hilton propuseram a conjectura apresentada a seguir.

Conjectura 1.2 (Conjectura Overfull (CHETWYND; HILTON, 1986)) *Um grafo G com $\Delta(G) > \frac{n}{3}$ é Classe 2 se, e somente se, é subgrafo-sobrecarregado.*

É possível verificar se um grafo é subgrafo-sobrecarregado em tempo polinomial (PADBERG; RAO, 1982). Logo, se esta conjectura for verdadeira, conseguiremos determinar em tempo polinomial se um grafo com $\Delta(G) > \frac{n}{3}$ é Classe 1 ou Classe 2.

Sabemos que a Conjectura Overfull é verdadeira para algumas classes importantes de grafos como os grafos completos e bipartidos. Os grafos completos são sobrecarregados se, e somente se, têm n ímpar; e os grafos bipartidos nunca são sobrecarregados. Alguns outros exemplos de classes de grafos para as quais a Conjectura Overfull já está provada são os grafos com vértice universal (PLANTHOLT, 1981) e os grafos multipartidos completos (HOFFMAN; RODGER, 1992).

1.3 Este trabalho

Um grafo G é um *grafo split* se admite uma partição de seus vértices em dois conjuntos, uma clique e um conjunto independente. Uma *orientação transitiva* das arestas é uma orientação das arestas do grafo tal que se existe um caminho orientado entre dois vértices então existe uma aresta orientada entre eles no mesmo sentido do caminho. Um grafo G é um *grafo comparabilidade* se ele admite uma orientação transitiva das suas arestas. Um *grafo split-comparabilidade* é um grafo split que admite uma orientação transitiva de suas arestas. A principal contribuição desta dissertação é a demonstração da Conjectura Overfull para os grafos split-comparabilidade, para os quais ela ainda estava em aberto.

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma. No Capítulo 2 apresentamos alguns resultados da literatura, alguns deles são muito conhecidos, já outros bastante recentes. Estes resultados são os quais nos apoiamos para elaboração de nossa pesquisa. No Capítulo 3 apresentamos a definição e caracterização dos grafos split-comparabilidade e o resultado obtido neste trabalho.

2 Resultados na Literatura

As mais famosas classes de grafos para as quais o Problema da Classificação têm algoritmo polinomial são a classe dos grafos bipartidos e a dos grafos completos. Neste capítulo vamos apresentar esses e alguns outros resultados nos quais nosso trabalho é fundamentado.

2.1 Grafos Bipartidos

Um grafo G é um *grafo bipartido* se o seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos (X e Y), de forma que todas as arestas incidem em um vértice de X e um vértice de Y , ou seja, nenhuma aresta incide em dois vértices do mesmo conjunto. A Figura 5 mostra um grafo bipartido. Denotamos um grafo bipartido G com bipartição (X, Y) por $G[X, Y]$.

É sabido que todo grafo bipartido é Classe 1 e nesta seção vamos apresentar a demonstração desse fato. Um teorema importante sobre grafos bipartidos que utilizamos é o Teorema de Hall, enunciado a seguir. Uma demonstração desse teorema pode ser encontrada no livro *Graph Theory* (BONDY; MURTY, 2008).

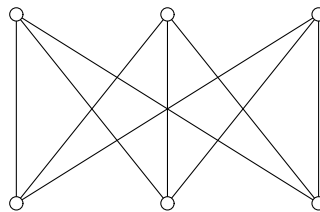


Figura 5: Grafo bipartido.

Teorema 2.1 (Teorema de Hall (HALL, 1935)) *Um grafo bipartido $G[X, Y]$ contém um emparelhamento perfeito que cobre os vértices de X se, e somente se, $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq X$.*

Um grafo G é dito *k -regular* se, para qualquer $v \in V(G)$, $d(v) = k$. Seja $S \subset V(G)$, chamamos de *corte* de S , denotado por $\delta(S)$, o conjunto de arestas que têm precisamente um extremo em S . O Teorema de Hall é utilizado para demonstrar o seguinte teorema, também bem conhecido.

Teorema 2.2 (SCHRIJVER, 1998). *Se G é um grafo bipartido k -regular com $k \geq 1$, então G tem um emparelhamento perfeito.*

Demonstração. Seja $G[X, Y]$ um grafo bipartido e $S \subseteq X$. Então o corte de S contém todas as arestas incidentes a vértices de S . Como G é k -regular, cada vértice contribui com exatamente k arestas para o corte, logo:

$$|\delta(S)| = k|S|. \quad (2.1)$$

Além disso, as arestas do corte de $N(S)$ incluem as arestas no corte de S , isto é:

$$\delta(S) \subseteq \delta(N(S)). \quad (2.2)$$

Como $N(S) \subseteq Y$ e G é k -regular então:

$$|\delta(N(S))| = k|N(S)|. \quad (2.3)$$

Das fórmulas (2.1), (2.2) e (2.3) concluímos que:

$$k|N(S)| = |\delta(N(S))| \geq |\delta(S)| = k|S|.$$

Portanto, $k|N(S)| \geq k|S|$ e como $k \geq 1$:

$$|N(S)| \geq |S|.$$

Esse argumento vale para qualquer $S \subseteq X$. Assim, pelo Teorema 2.1, G tem um emparelhamento perfeito. ■

O conhecimento do Teorema 2.2 viabiliza uma demonstração bastante simples do Teorema 2.3, também bem conhecido, que afirma que é possível particionar as arestas de um grafo bipartido k -regular em k emparelhamentos perfeitos. O fato que todo grafo bipartido é Classe 1 está intimamente ligado à existência dessa partição, conforme será apresentado em seguida.

Teorema 2.3 *Se G é um grafo bipartido k -regular, para $k \geq 1$, então G tem k emparelhamentos perfeitos disjuntos.*

Demonstração. Vamos provar por indução em k . No caso base temos $k = 1$, e o conjunto de arestas do grafo bipartido forma um emparelhamento perfeito. Seja $G[X, Y]$ um grafo k -regular. Pelo Lema 2.2 temos que G tem um emparelhamento perfeito, digamos M . Seja G' o grafo obtido a partir de G após a remoção das arestas pertencentes a M . O grafo G' é bipartido e $(k - 1)$ -regular. Logo, por hipótese de indução, G' tem $k - 1$ emparelhamentos perfeitos disjuntos. Nenhum destes $k - 1$ emparelhamentos perfeitos contém arestas de M , portanto, juntamente com M , temos k emparelhamentos perfeitos disjuntos em G . ■

Corolário 2.4 *Se G é um grafo bipartido k -regular então G é Classe 1.*

Demonstração. Seja G um grafo bipartido k -regular. Pelo Teorema 2.3, G tem k emparelhamentos perfeitos disjuntos. Se atribuímos uma cor distinta a cada um dos k emparelhamentos perfeitos disjuntos, obteremos uma k -coloração das arestas de G . Como $\Delta(G) = k$, então G é Classe 1. ■

Com base nesse conhecimento podemos então resolver o Problema da Classificação para os grafos bipartidos. A primeira demonstração deste teorema foi apresentada por König (KÖNIG, 1916). A demonstração aqui apresentada é baseada na encontrada em (SCHRIJVER, 1998) e considera grafos não simples, com arestas paralelas.

Teorema 2.5 (KÖNIG, 1916) *Todo grafo bipartido é Classe 1.*

Demonstração. Seja $G[X, Y]$ um grafo bipartido. Vamos construir um grafo bipartido regular $G'[X', Y']$ que tenha G como subgrafo. Para cada vértice $v \in V(G)$, temos dois vértices em $V(G')$, denotados por v e v' . Adicionamos as arestas (v, w) e (v', w') em $E(G')$ se existe uma aresta (v, w) em $E(G)$. Por último adicionamos, para cada vértice v de $V(G)$, $\Delta(G) - d(v)$ arestas (v, v') em $E(G')$ para tornar G' um grafo $\Delta(G)$ -regular. Note que G' é bipartido, com X' contendo os vértices de X e as cópias dos vértices de Y , e Y' contendo os vértices de Y e as cópias dos vértices de X . Pelo Corolário 2.4, G' é Classe 1. Como G é subgrafo de G' e $\Delta(G) = \Delta(G')$, então G é Classe 1. ■

2.2 Grafos Completos

Um grafo G é um *grafo completo* se é simples e seus vértices são dois a dois adjacentes. Logo, $d(v) = n - 1$ para todo $v \in V(G)$. Denotamos um grafo completo de n vértices por K_n . A Figura 6 apresenta um K_5 .

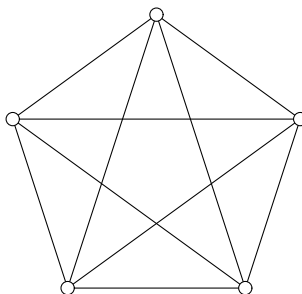


Figura 6: Grafo completo.

Um *quadrado latino* de ordem k é uma matriz $k \times k$ preenchida com elementos do conjunto $\{0, 1, 2, \dots, k - 1\}$ de forma que um elemento não se repita na mesma linha ou

coluna. Um quadrado latino $M = [m_{i,j}]$ é dito *comutativo* se $m_{i,j} = m_{j,i}$ para todo i e j tal que $0 \leq i, j \leq k - 1$. Utilizaremos um quadrado latino definido da seguinte forma:

$$m_{i,j} \equiv i + j \pmod{k}.$$

Note que este quadrado latino é comutativo. Quando todos os elementos da diagonal principal são distintos, dizemos que o quadrado latino é *idempotente*. O quadrado latino definido é idempotente quando k é ímpar. Para k par, sabe-se que não existe quadrado latino idempotente (CHEN; FU; KO, 1995). A Figura 7 apresenta alguns exemplos de quadrados latinos, os três comutativos foram construídos conforme a definição.

0	1	2	3	4
1	2	3	4	0
2	3	4	0	1
3	4	0	1	2
4	0	1	2	3

Comutativo e idempotente.

0	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	0
2	3	4	5	0	1
3	4	5	0	1	2
4	5	0	1	2	3
5	0	1	2	3	4

Comutativo, mas não idempotente.

0	1	2	3
1	2	3	0
2	3	0	1
3	2	1	0

Comutativo, mas não idempotente.

0	2	4	1	3
4	1	3	0	2
3	0	2	4	1
2	4	1	3	0
1	3	0	2	4

Idempotente, mas não comutativo.

Figura 7: Quadrados latinos.

Teorema 2.6 (FIORINI; WILSON, 1977) *Um grafo completo K_n é Classe 1 se, e somente se, n é par.*

Demonstração. Seja K_n um grafo completo com n ímpar. Vamos definir um quadrado latino M de ordem n como descrito anteriormente. Rotulamos os vértices $V(K_n) = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ e colorimos a aresta (v_i, v_j) com a cor $m_{i,j}$, $0 \leq i, j \leq n - 1$ e $i \neq j$. Como M é comutativo, $m_{i,j} = m_{j,i}$. Logo, não há ambiguidade na escolha da cor de (v_i, v_j) . Como em cada linha dois números (no caso, cores) não se repetem, então em um mesmo vértice não incidem duas arestas da mesma cor. Note que todo grafo completo com número ímpar de vértices é sobrecarregado. Logo, $\chi'(K_n) = \Delta(K_n) + 1$, que no caso de um grafo completo é n . Como foram utilizadas n cores nessa coloração descrita, esta é uma coloração ótima. Já quando n é par utilizamos um quadrado latino M de ordem $n - 1$ definido da mesma forma. Rotulamos os vértices da mesma maneira e colorimos as arestas (v_i, v_j) com a cor $m_{i,j}$, com $0 \leq i, j \leq n - 2$ e $i \neq j$. Note que as arestas incidentes em v_{n-1} não foram

coloridas. Para as arestas (v_i, v_{n-1}) , utilizamos a cor $m_{i,i}$, para cada $0 \leq i \leq n-2$. Como n é par, o quadrado latino terá ordem ímpar e, como dito anteriormente, nesse caso os elementos da diagonal principal não se repetem. Assim, temos uma coloração utilizando $n-1 = \Delta(K_n)$ cores, logo K_n é Classe 1 quando n é par. ■

2.3 Grafos com Vértice Universal

Um *vértice universal* de um grafo G é um vértice adjacente a todos os demais vértices do grafo, ou seja, tem grau $n-1$. Na Figura 8, o vértice v é um vértice universal. Em 1981, Plantholt (PLANTHOLT, 1981) resolveu o Problema da Classificação para todos os grafos com vértice universal, mostrando que são precisamente os sobrecarregados que são Classe 2.

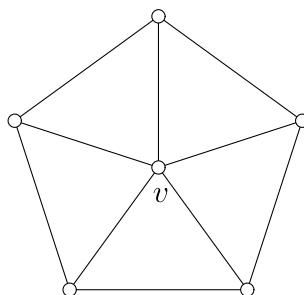


Figura 8: Grafo com vértice universal.

Teorema 2.7 (PLANTHOLT, 1981) *Todo grafo com vértice universal é Classe 2 se, e somente se, é sobrecarregado.*

A prova deste teorema encontrada no artigo citado foi estudada em detalhes durante o Trabalho de Conclusão de Curso de graduação do autor desta dissertação. Essa demonstração de Plantholt para grafos com vértice universal é muito elegante e toda baseada em encontrar subgrafos bipartidos e completos do grafo com vértice universal para poder utilizar os poucos resultados conhecidos sobre o problema até então. Podemos dizer que o estudo da demonstração de Plantholt foi fundamental para o sucesso deste trabalho pois serviu tanto para o amadurecimento quanto para inspiração. Se observado com atenção há semelhanças na estrutura da demonstração de Plantholt para grafos com vértice universal e na demonstração para grafos split-comparabilidade que apresentamos na Seção 3.2 no sentido em que também procuramos utilizar vários resultados importantes conhecidos até o momento para grafos split de forma a encontrar um subgrafo com muitas arestas e com as propriedades certas que nos permitem determinar seu índice cromático

e estender a coloração das arestas para o grafo original minimizando o número de cores necessárias.

Entendemos portanto que a demonstração do Teorema 3.9, principal contribuição desta dissertação, torna-se mais interessante quando analisada em contraste com a demonstração de Plantholt do Teorema 2.7. Uma versão completa e detalhada, em português, da demonstração do Teorema 2.7 é apresentada no Trabalho de Conclusão de Curso de graduação do autor desta dissertação (CRUZ, 2014). Essa versão foi escrita com o cuidado de usar terminologia mais moderna e homogênea, buscando ser mais didática que a versão do artigo original ao detalhar partes mais difíceis de entender. Com objetivo de viabilizar o contraste das demonstrações de forma mais simples e tornar este trabalho autocontido, optamos por reproduzir na íntegra no Apêndice A desta dissertação a demonstração apresentada em (CRUZ, 2014).

2.4 Colorações Equilibradas

Dizemos que uma k -coloração de arestas é uma k -coloração equilibrada se as cardinalidades de quaisquer duas classes de cor diferem em no máximo 1. Enunciamos a seguir um antigo teorema de Folkman e Fulkerson (FOLKMAN; FULKERSON, 1966) sobre colorações equilibradas.

Teorema 2.8 (FOLKMAN; FULKERSON, 1969) *Seja G um grafo qualquer. Se G tem uma k -coloração de arestas, então G tem uma k -coloração de arestas equilibrada.*

Este teorema e sua demonstração podem ser encontrados no artigo de Folkman e Fulkerson, mas vamos seguir dando uma ideia da demonstração. Seja G um grafo com as arestas coloridas de forma não equilibrada. Sejam c_1 e c_2 cores tais que as cardinalidades dessas classes diferem em pelo menos 2, e a cardinalidade da classe de cor de c_1 é maior que a da classe de cor de c_2 . Sejam M_1 e M_2 os emparelhamentos de G formados pelas arestas coloridas com as cores c_1 e c_2 , respectivamente. A união dos emparelhamentos M_1 e M_2 tem como componentes conexas ciclos pares e caminhos. Como $|M_1| > |M_2|$ então existe pelo menos um caminho ímpar que começa e termina em uma aresta de cor c_1 , vamos chamá-lo de P . Invertamos as cores do caminho P , dessa maneira diminuindo uma aresta na cor c_1 e aumentando uma aresta de cor c_2 . Note que, ao inverter as cores do caminho a coloração continua sendo própria. Folkman e Fulkerson garantem em sua demonstração que é possível repetir esse processo um número finito de vezes até se obter finalmente uma coloração equilibrada.

2.5 Recoloração de Vizing e Seminúcleos

Nesta seção inicialmente vamos mostrar uma forma alternativa do Teorema de Vizing, diferente da apresentada no Teorema 1.1, e uma demonstração para ela. Esta demonstração é baseada no artigo de Misra e Gries (MISRA; GRIES, 1992), no qual são considerados *grafos parcialmente coloridos* nas arestas, isto é, grafos em que algumas arestas podem não ter ainda sido coloridas. A técnica utilizada nessa demonstração é chamada de *Recoloração de Vizing*, e tem por objetivo estender a coloração de arestas de um grafo parcialmente colorido para incluir uma aresta ainda não colorida. Quando certas propriedades são satisfeitas, é possível estender a coloração sem utilizar nova cor. Para explicar em mais detalhes a técnica precisamos definir o conceito de leque, o que é feito a seguir.

Seja (u_1, u_2, \dots, u_n) uma sequência de vértices. Denotamos por u_i^+ o vértice seguinte a u_i na sequência, isto é, u_{i+1} . Analogamente, denotamos por u_i^- o vértice anterior a u_i na sequência, isto é, u_{i-1} . Um *leque* $\langle f \dots l \rangle$ em um grafo parcialmente colorido é uma sequência não vazia de vértices vizinhos de um vértice x tal que a aresta (x, f) não está colorida e para qualquer $u \in \langle f \dots l \rangle$, com $u \neq l$, a cor da aresta (x, u^+) sobra em u , conforme ilustrado na Figura 9. As linhas tracejadas na figura representam cores que sobram nos respectivos vértices. Caso existam cores sobrando em x e l , estas são denotadas por c e d , respectivamente.

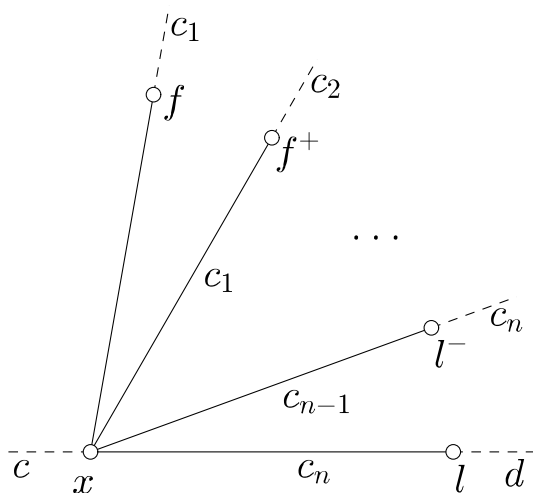


Figura 9: Exemplo da estrutura de um leque.

Considere um grafo $G = (V, E)$ parcialmente colorido com k cores, onde a aresta (v_1, v_2) não está colorida. Existem duas situações em que é trivial saber como estender a coloração à aresta (v_1, v_2) , as quais são explicitadas nas proposições a seguir.

Proposição 2.9 *Se nenhuma das k cores sobra em v_1 ou em v_2 , então são necessárias no mínimo $k + 1$ cores para estender a coloração a (v_1, v_2) .*

Demonstração. Suponha que exista uma aresta sem cor (v_1, v_2) . Sem perda de generalidade, suponha que em v_1 não sobre nenhuma das k cores. Então $d(v_1) > k$. Logo, não é possível colorir as arestas incidentes em v_1 com k cores sem que existam arestas adjacentes com a mesma cor. ■

Proposição 2.10 *Se uma mesma cor dentre as k cores sobra em ambos v_1 e v_2 , então são necessárias no máximo k cores para estender a coloração a (v_1, v_2) .*

Demonstração. Se em v_1 e em v_2 sobra a mesma cor dentre as k cores, digamos c , basta colorir a aresta (v_1, v_2) com a cor c . ■

Podemos então supor que existe pelo menos uma cor sobrando em ambos v_1 e v_2 e que estas são distintas. Se além dessas condições for válido também que todos os vizinhos de algum desses dois vértices, v_1 ou v_2 , tenham pelo menos uma cor sobrando, então é possível estender a coloração para a aresta (v_1, v_2) usando as mesmas k cores. Essa afirmação é enunciada no Lema 2.12 e o procedimento por trás da demonstração do lema é o que é chamado de Recoloração de Vizing. A *Recoloração de Vizing* é feita a partir de um vértice x que contenha um leque $\langle f \dots l \rangle$. Existindo o leque, podemos fazer um procedimento conhecido como *rotação do leque* $\langle f \dots y \rangle$, onde y é algum vértice da sequência do leque original em que sobra a mesma cor de x , digamos d . A rotação do leque $\langle f \dots y \rangle$ consiste em estender a coloração com k cores a (x, f) de forma que (x, u^-) receba a cor de (x, u) para todo vértice u anterior a y na sequência e (x, y) receba a cor d . A seguinte proposição garante que sempre é possível fazer a rotação do leque quando essas condições são satisfeitas.

Proposição 2.11 (*MISRA; GRIES, 1992*) *Seja um leque $\langle f \dots l \rangle$ e $y \in \langle f^+ \dots l \rangle$ um vértice tal que em x e y sobra a mesma cor d . Então podemos fazer a rotação do leque $\langle f \dots y \rangle$.*

Demonstração. A prova segue por indução em i , a posição de y em $\langle f^+ \dots l \rangle$. No caso base, $i = 1$, temos $y = f^+$; atribuindo a cor d para (x, f^+) , podemos em seguida atribuir a cor de (x, f^+) , digamos c_1 , a (x, f) . Podemos então supor que $i > 1$. Se atribuirmos a cor d que sobra em ambos x e y para a aresta (x, y) a cor originalmente atribuída a (x, y) , digamos c_i , passa a sobrar em ambos x e y^- . Assim, por hipótese de indução, conseguimos estender a coloração a (x, f) da forma desejada. ■

Lema 2.12 (*MISRA; GRIES, 1992*) *Se sobra pelo menos uma cor em v_1 e pelo menos uma cor em v_2 , e em todos os vizinhos de v_1 sobra pelo menos uma cor, então são necessárias no máximo k cores para estender a coloração a (v_1, v_2) .*

Demonstração. Inicialmente, vamos criar um leque a partir de v_1 conforme definido anteriormente, onde $x = v_1$ e $f = v_2$. Vamos chamar de c a cor que sobra em x e d a cor que sobra em l . Assim, temos dois casos, ou a cor d sobra em x ou a cor d já aparece em uma aresta no leque. Se a cor d sobra em x pela Proposição 2.11 podemos estender a coloração para a aresta (x, f) .

Se a cor d já aparece em uma aresta no leque, chamaremos de w o vértice onde a aresta de cor d incide. Vamos considerar a aresta (x, w) , de cor d . Seja P o maior caminho que alterna entre arestas de cor d e c e contém (x, w) , este caminho existe e tem tamanho pelo menos 2. Note que, como c sobra em x , P será de fato um caminho e não um ciclo. Agora iremos inverter as cores do caminho P ; onde era c passamos para d e onde era d passamos para c . Caso o caminho P não termine no vértice l , então a cor d estará sobrando tanto em x como em l e, pela Proposição 2.11, podemos estender a coloração para a aresta (x, f) . Entretanto, o caminho P pode terminar em l , fazendo assim com que a cor d deixe de sobrar em l . Nesse caso, note que a cor d sobra em w^- . Se $w^- \neq f$, então pela Proposição 2.11 aplicada ao leque $\langle f \dots w^- \rangle$ é possível estender a coloração para a aresta (x, f) . Se $w^- = f$, pela Proposição 2.10 também é possível estender a coloração para a aresta (x, f) . ■

Com base nesse lema é possível provar o Teorema de Vizing de forma bem compacta, conforme mostrado a seguir:

Teorema 2.13 (Teorema de Vizing II (VIZING, 1965)) *As arestas de um grafo com grau máximo menor que k podem ser coloridas utilizando k cores.*

Demonstração. Seja $G = (V, E)$ um grafo qualquer e $k > \Delta(G)$ o número de cores disponíveis. Seja G^i um subgrafo do grafo G com i arestas, $i \leq m$ e para $i = m$, $G^i = G$. Vamos provar que G pode ser colorido com k cores por indução em i . Como caso base consideramos $i = 1$, que podemos trivialmente colorir qualquer subgrafo G^1 com $k > \Delta(G)$ cores. Vamos supor, por hipótese de indução, que todo G^i pode ser colorido com k cores. Vamos adicionar a G^i a aresta (u, v) , obtendo assim um subgrafo G^{i+1} . Como $k > \Delta(G)$, então em u, v e todos os vizinhos de u sobra pelo menos uma cor, pelo Lema 2.12 podemos estender a coloração para a aresta (u, v) utilizando as mesmas k cores. ■

O *núcleo* de um grafo G , denotado por Λ_G , é o conjunto dos vértices de grau $\Delta(G)$. O *seminúcleo* de um grafo G é o subgrafo induzido por Λ_G e sua vizinhança aberta; denotamos o seminúcleo de G por K_G . Chamamos de $\Delta(G)$ -*vértice* a qualquer vértice de

G que tenha grau igual a $\Delta(G)$ e, quando não houver ambiguidade, denotamos apenas Δ -vértice.

Lema 2.14 (*MACHADO; FIGUEIREDO, 2010*) *Seja $G = (V, E)$ um grafo Classe 1 e seja $(u, v) \notin E$ tal que u não é adjacente a um $\Delta(G)$ -vértice. Então $G' = (V, E \cup (u, v))$ é Classe 1.*

Demonstração. Se u ou v forem $\Delta(G)$ -vértices então $\Delta(G') = \Delta(G) + 1$ e podemos colorir esta aresta com uma nova cor e G' será Classe 1 ainda assim. Se u e v não forem $\Delta(G)$ -vértices então temos pelo menos uma cor sobra em cada um deles, assim como em cada vizinho de u . Pelo Lema 2.12, podemos utilizar a Recoloração de Vizing criando um leque a partir de u para colorir a aresta (u, v) . Portanto, G' é Classe 1. ■

Sejam G_1 e G_2 grafos. O grafo G é a união de G_1 e G_2 se $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$, $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$.

Proposição 2.15 (*MACHADO; FIGUEIREDO, 2010*) *Seja $G = G_1 \cup G_2$ a união do grafo $G_1 = (V, E_1)$ e do grafo $G_2 = (V, E_2)$ tal que $\Delta(G) = \Delta(G_1)$ e G_1 é Classe 1. Se $\Lambda_G = \Lambda_{G_1}$ e nenhuma aresta de E_2 tem ambos os extremos em $N[\Lambda_{G_1}]$, então G é Classe 1.*

Demonstração. Rotulemos as arestas de E_2 como $(u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k)$, onde o vértice $u_i \notin N[\Lambda_{G_1}]$, para $1 \leq i \leq k$. Seja $G^0 = G_1$ e $G^i = (V, E_1 \cup \{(u_1, v_1), \dots, (u_i, v_i)\})$, para $1 \leq i \leq k$, ou seja, G^i pode ser obtido a partir de G^{i-1} adicionando a aresta (u_i, v_i) .

Vamos provar que G é Classe 1 por indução em i . O caso base é $G^0 = G_1$, o qual é Classe 1, por hipótese. Vamos supor, por hipótese de indução, que G^i é Classe 1. O vértice $u_{i+1} \notin N[\Lambda_{G_1}]$, ou seja, não é um $\Delta(G)$ -vértice e não é adjacente a um $\Delta(G)$ -vértice. Pelo Lema 2.14, $G^i \cup (u_{i+1}, v_{i+1}) = G^{i+1}$ é Classe 1. ■

Teorema 2.16 (*MACHADO; FIGUEIREDO, 2010*) *Seja G um grafo e K_G o seminúcleo de G , $\chi'(G) = \chi'(K_G)$.*

Demonstração. Se K_G for Classe 2, como K_G é um subgrafo de G e $\Delta(K_G) = \Delta(G)$, então G tem de ser Classe 2 obrigatoriamente. Podemos então supor que K_G seja Classe 1. Seja G' o grafo obtido de G a partir da exclusão das arestas de K_G . Nenhuma aresta de G' têm ambos os extremos em $N[\Lambda_G]$, pois todas as arestas que têm ambos extremos em $N[\Lambda_G]$ pertencem a K_G . Então, pela Proposição 2.15, considerando $G_1 = K_G$ e $G_2 = G'$, podemos concluir que G é Classe 1. Portanto, $\chi'(G) = \chi'(K_G)$ em ambos os casos. ■

2.6 Grafos Split

Uma *clique* é um conjunto de vértices que são dois a dois adjacentes, ou seja, um conjunto de vértices cujo subgrafo induzido é completo. Uma clique Q é uma *clique maximal* em um grafo G se não existe em G nenhuma outra clique maior que Q que contenha todos os vértices de Q . Um *conjunto independente* é um conjunto de vértices que são dois a dois não adjacentes, ou seja, um conjunto de vértices cujo subgrafo induzido é vazio, ou seja, não tem nenhuma aresta.

Um grafo G é um *grafo split* se admite uma partição de seus vértices em dois conjuntos Q e S tais que Q é uma clique e S é um conjunto independente. A Figura 10 mostra um exemplo de um grafo split. Os subgrafos induzidos por Q e S são denotados respectivamente por $G[Q]$ e $G[S]$. Neste trabalho, Q é considerado maximal. Chamamos de B o subgrafo bipartido induzido pelas arestas que têm um extremo em Q e um extremo em S .

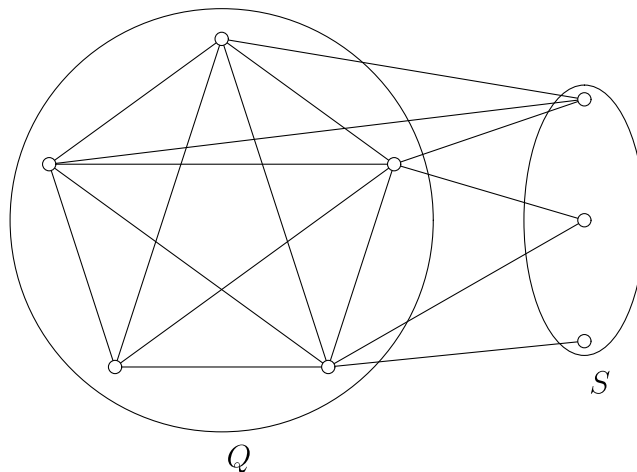


Figura 10: Exemplo de grafo split.

Denotamos por d_Q o grau máximo dos vértices de Q em B e d_S o grau máximo dos vértices de S em B . Uma observação interessante é que todo vértice de grau $\Delta(G)$ sempre pertence a Q . Isto acontece pois, como a clique é maximal, o maior grau possível de S é $|Q| - 1$, enquanto qualquer vértice de Q tem grau no mínimo $|Q| - 1$ e qualquer vértice $v \in Q$ que é adjacente a algum vértice de S tem $d(v) > |Q| - 1$, e como o grafo é conexo então todo vértice de S é adjacente a pelo menos algum vértice de Q .

Seja C um ciclo de um grafo G , uma aresta (v_1, v_2) é uma *corda* no ciclo C se v_1 e v_2 pertencem ao ciclo mas não são consecutivos. Um grafo é dito *cordal* se todo ciclo de comprimento maior do que 3 tem uma corda. Sobre grafos cordais temos a seguinte conjectura.

Conjectura 2.17 (*FIGUEIREDO; MEIDANIS; MELLO, 2000*) *Todo grafo cordal Classe 2 é vizinhança-sobrecarregado.*

Os grafos split são uma subclasse dos grafos cordais. Portanto, se for possível responder afirmativamente a conjectura para grafos split, esta seria uma importante evidência da validade para o caso geral de cordais. Figueiredo, Meidanis e Mello (*FIGUEIREDO; MEIDANIS; MELLO, 2000*) provaram que para os grafos split as classes subgrafo-sobrecarregado e vizinhança-sobrecarregado são equivalentes. Com isto, esta conjectura, dentro da classe dos grafos split, é equivalente à Conjectura Overfull.

O Problema da Classificação permanece em aberto na classe dos grafos split, contudo já existem alguns resultados parciais, os dois mais conhecidos deles são descritos pelo Teorema 2.19 e pelo Teorema 2.20. Antes disso vamos ver a seguinte proposição.

Proposição 2.18 (*PLANTHOLT, 1981*) *Seja G um grafo completo com n ímpar. Então, existe uma coloração de arestas em G com $\Delta(G) + 1$ cores tal que, para quaisquer dois vértices distintos u e v em $V(G)$, as listas $\ell(u)$ e $\ell(v)$ são unitárias e distintas.*

A Proposição 2.18 pode ser verificada ao se aplicar a coloração apresentada na prova do Teorema 2.6 ao grafo completo K_n com n ímpar. A Proposição 2.18, o Teorema 2.5 e o Teorema 2.6 permitem a prova do seguinte resultado parcial do Problema da Classificação em grafos split.

Teorema 2.19 (*CHEN; FU; KO, 1995*) *Seja G um grafo split. Se $d_Q \geq d_S$, então G é Classe 1.*

Demonstração. A demonstração desse teorema segue em dois casos:

Caso 1: $|Q|$ par.

Pelo Teorema 2.6 podemos colorir $G[Q]$ utilizando $\Delta(G[Q])$ cores. Pelo Teorema 2.5 podemos colorir B utilizando d_Q cores. Sendo assim, colorimos G com $\Delta(G[Q]) + d_Q = \Delta(G)$ cores, logo G é Classe 1.

Caso 2: $|Q|$ ímpar.

Pelo Teorema 2.6 precisamos de $\Delta(G[Q]) + 1$ cores para colorir as arestas de $G[Q]$. Entretanto, pela Proposição 2.18, sabemos que cada vértice $v \in Q$ não utiliza uma das $\Delta(G[Q]) + 1$ cores, ou seja, $|\ell(v)| = 1$. Pelo Teorema 2.5, para colorir as arestas de B , precisamos de $\Delta(B) = d_Q$ cores. Considere as arestas de B coloridas com as cores $1, 2, \dots, d_Q$. Para toda aresta (u, v) pertencente a B e à classe de cor d_Q , onde $u \in S$ e $v \in Q$, trocamos d_Q pela cor em $\ell(v)$, não havendo mais necessidade de usar essa cor. Como

as cores que sobram nos vértices de Q são duas a duas distintas, esta é uma coloração de arestas própria. Utilizamos então $\Delta(G[Q]) + 1 + d_Q - 1 = \Delta(G)$ cores; logo G é Classe 1. ■

Outro resultado parcial muito importante para a classe dos grafos split é o apresentado no teorema a seguir.

Teorema 2.20 (*CHEN; FU; KO, 1995*) *Seja G um grafo split. Se $\Delta(G)$ é ímpar, então G é Classe 1.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada no artigo referenciado e foi omitida aqui devido ao seu caráter longo e de difícil compreensão e também por não ser diretamente importante para os resultados. No entanto, apresentaremos a seguir uma série de conceitos e lemas utilizados na demonstração do Teorema 2.20, com o objetivo de apresentar a demonstração do Teorema 2.25, bastante importante para este trabalho e cuja demonstração utiliza técnica semelhante.

Um *vetor de cor* é uma sequência de cores distintas. Um *diagrama de cor* é uma sequência de vetores de cor. Dado diagrama de cor $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$ denotamos o vetor de cor $C_i = [c_{i,1}, \dots, c_{i,d_i}]$, de tamanho d_i . O diagrama de cor \mathcal{C} é dito um *diagrama de cor monotônico* se a cor $c_{i,j}$ ocorre no máximo $d_i - j$ vezes em C_1, \dots, C_{i-1} para todo $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq d_i$.

Lema 2.21 (*CHEN; FU; KO, 1995*) *Seja $B = [X, Y]$ um grafo bipartido e $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_{|X|}\}$ um diagrama de cor monotônico com $d_i \geq d(x_i)$, para todo $x_i \in X$. O grafo B pode ser colorido com as cores do diagrama \mathcal{C} .*

Um vetor de cor $C = [c_0, \dots, c_k]$ é *sufixo* de um vetor de cor $R = [r_0, \dots, r_l]$ se $c_i = r_{l-k+i}$ para todo i com $0 \leq i \leq k$. Um diagrama de cor $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$ é sufixo de um diagrama de cor $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_l\}$ se C_i é sufixo de R_i para todo $i \leq k$.

Lema 2.22 (*CHEN; FU; KO, 1995*) *Se um diagrama de cor \mathcal{C} é monotônico então qualquer sufixo de \mathcal{C} também é monotônico.*

Seja $M = [m_{i,j}]$ um quadrado latino de ordem k preenchido conforme definido na Seção 2.2. Seja n um número inteiro com $1 \leq n < k$. Definimos o diagrama de cor $\mathcal{S}(n, k)$ como o sufixo de M a partir da coluna n , $\mathcal{S}(n, k) = (C_0, C_1, \dots, C_{n-1})$ e $C_i = (m_{i,n}, m_{i,n+1}, \dots, m_{i,k})$, com $0 \leq i < n$. Definimos o diagrama de cor $\mathcal{D}(n, k)$ como o sufixo aumentado do diagrama $\mathcal{S}(n, k)$ tal que $\mathcal{D}(n, k) = (D_0, D_1, \dots, D_{n-1})$, onde $D_i = C_i$ para $0 \leq i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ e D_i é a concatenação de $(m_{i,i})$ com C_i para $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq i < n$. Sobre $\mathcal{D}(n, k)$ temos o seguinte lema.

Lema 2.23 (ALMEIDA, 2012) *O diagrama de cor $\mathcal{D}(n, k)$ é monotônico, para n par, $0 \leq n < k$.*

Para o próximo resultado parcial para os grafos split ainda precisamos do seguinte lema.

Lema 2.24 (ALMEIDA, 2012) *Se $G = [Q_G, S_G]$ é um grafo split, então G é subgrafo de um grafo split $H = [Q_H, S_H]$ tal que $\Delta(G) = \Delta(H)$, $Q_G = Q_H$, todos os vértices de Q_H são Δ -vértices e $\chi'(G) = \chi'(H)$.*

Considerando o Lema 2.24, para provar que G é Classe 1, é suficiente exibir uma coloração de arestas de H com $\Delta(H)$ cores, ou seja, mostrar que H é Classe 1. Portanto, vamos considerar um supergrafo de G nas condições do Lema 2.24.

Teorema 2.25 (ALMEIDA, 2012) *Seja $H = [Q, S]$ um grafo split. Se existe um vértice $v \in S$ com $|Q|/2 \leq d(v) \leq \Delta(H)/2$ então H é Classe 1.*

Demonstração. Se $\Delta(H)$ for ímpar então, pelo Teorema 2.20, H é Classe 1. Podemos então vamos supor que $\Delta(H)$ é par. Seja v um vértice de S tal que $|Q|/2 \leq d(v) \leq \Delta(H)/2$. Rotulamos $S = \{s_0, s_1, \dots, s_{|S|-1}\}$ de forma que v seja o primeiro vértice de S , ou seja, $v = s_0$. Seja $H_1 = B[Q \cup \{v\}]$ e $H_2 = B[Q \cup \{s_1, \dots, s_{|S|-1}\}]$. Rotulamos $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_{|Q|-1}\}$ de forma que os vértices vizinhos de v sejam os primeiros de Q .

Construímos um quadrado latino $M = [m_{i,j}]$ de ordem $\Delta(H)$, utilizando a mesma fórmula adotada anteriormente: a célula $m_{i,j}$ tem valor $i + j \pmod{\Delta(H)}$. Para colorir as arestas de $H[Q]$ utilizamos a cor $m_{i,j}$ para a aresta (q_i, q_j) , $0 \leq i, j < |Q|$. Para colorir as demais arestas de H_1 usamos a cor $m_{i,i}$ na aresta (q_i, v) , $0 \leq i < |Q|$. Os vizinhos de v são consecutivos e os $d(v)$ primeiros vértices segundo a rotulação de Q , sendo que $d(v) \leq \Delta(H)/2$. Como todo quadrado latino de ordem par k tem cores distintas nas diagonais $m_{i,i}$ quando $i \leq k/2$, então todas as arestas incidentes em v têm cores distintas duas a duas.

Só falta colorir as arestas de H_2 . Vamos construir um diagrama de cor $\mathcal{C} = (C_0, C_1, \dots, C_{|Q|-1})$ da seguinte forma, $C_i = [m_{i,|Q|}, m_{i,|Q|+1}, \dots, m_{i,\Delta(H)-1}]$ para $0 \leq i < d(v)$ e $C_i = [m_{i,i}, m_{i,|Q|}, m_{i,|Q|+1}, \dots, m_{i,\Delta(H)-1}]$ para $d(v) \leq i < |Q|$. Podemos notar que como $d(v) \geq |Q|/2$, \mathcal{C} é um sufixo do diagrama de cores $\mathcal{D}(|Q|, \Delta(H))$, o qual é monotônico, pelo Lema 2.23. Logo, pelo Lema 2.22, \mathcal{C} também é monotônico. Como nos primeiros $d(v)$ vértices de Q incide uma aresta a menos que os demais em H_2 , pelo Lema 2.21, H_2 pode ser colorido com as cores de \mathcal{C} . Com isso colorimos totalmente H utilizando as $\Delta(H)$ cores. ■

3 Grafos Split-Comparabilidade

3.1 Definição e Caracterização

Uma *orientação transitiva* de um grafo G é uma orientação de arestas tal que, se existe um caminho orientado de um vértice v_1 para um vértice v_2 , então existe uma aresta orientada (v_1, v_2) . Um grafo é chamado de *grafo comparabilidade* se ele admite uma orientação transitiva. O *complemento* de G , denotado por \overline{G} , é um grafo tal que $V(\overline{G}) = V(G)$ e $E(\overline{G}) = \{(u, v) : \{u, v\} \subseteq V(G) \wedge (u, v) \notin E(G)\}$. Um grafo G é um *grafo co-comparabilidade* se \overline{G} é um grafo comparabilidade. Um grafo é dito *grafo permutação* se ele pode ser representado de certa forma como uma permutação de n elementos, não vou entrar em detalhes pois também pode ser definido como aqueles que é comparabilidade e co-comparabilidade (ORTIZ; VILLANUEVA, 2010). Apresentamos agora caracterizações das classes dos grafos split-comparabilidade e dos grafos split-permutação:

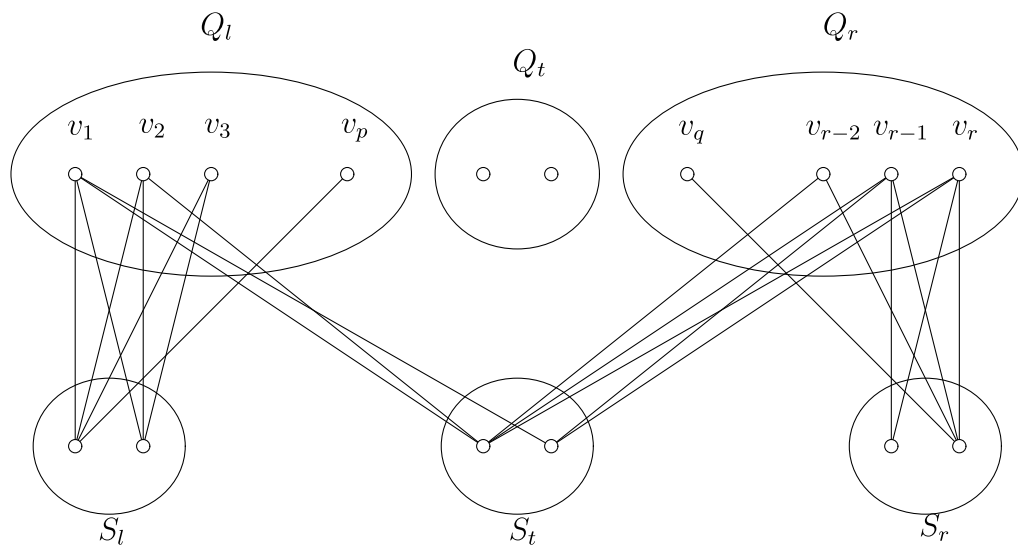


Figura 11: Estrutura de um grafo split-comparabilidade.

Lema 3.1 (ORTIZ; VILLANUEVA, 1996) *Um grafo split $G = (S \cup Q, E)$ é um grafo comparabilidade se, e somente se, Q pode ser ordenado $v_1 < v_2 < \dots < v_r$ e particionado em três subconjuntos disjuntos (possivelmente vazios) $Q_l = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, $Q_r = \{v_q, v_{q+1}, \dots, v_r\}$ e $Q_t = Q \setminus (Q_l \cup Q_r)$ tal que, para qualquer $s \in S$, $N(s)$ tem uma das seguintes formas:*

$$i) \{v_1, \dots, v_i\}, i \leq p;$$

- ii) $\{v_j, \dots, v_r\}$, $q \leq j \leq r$;
- iii) $\{v_1, \dots, v_i\} \cup \{v_j, \dots, v_r\}$, $i \leq p$ e $q \leq j \leq r$.

Os conjuntos de vértices de S que têm vizinhança da forma i , ii e iii são denotados por S_l , S_r e S_t , respectivamente. Neste trabalho consideramos, sem perda de generalidade, que $p = |N(S_l)|$ e $|N(S_r)| = r - q + 1$, ou seja, todo vértice em Q com grau 0 em B pertence a Q_t . A Figura 11 apresenta a estrutura de um grafo split-comparabilidade, sendo que para uma melhor visualização foram omitidas as arestas com ambos os extremos em Q .

Lema 3.2 (ORTIZ; VILLANUEVA, 2010) *Um grafo split-comparabilidade $G = (S \cup Q, E)$ é um grafo permutação se, e somente se, S pode ser particionado em S_1 e S_2 de forma que cada um desses subconjuntos possa ser ordenado tal que $s_i < s_j$ se $N(s_i) \subseteq N(s_j)$ para $s_i, s_j \in S_1$ ou $s_i, s_j \in S_2$.*

A Figura 12 apresenta a estrutura de um grafo split-permutação. Novamente as arestas com ambos os extremos em Q foram omitidas.

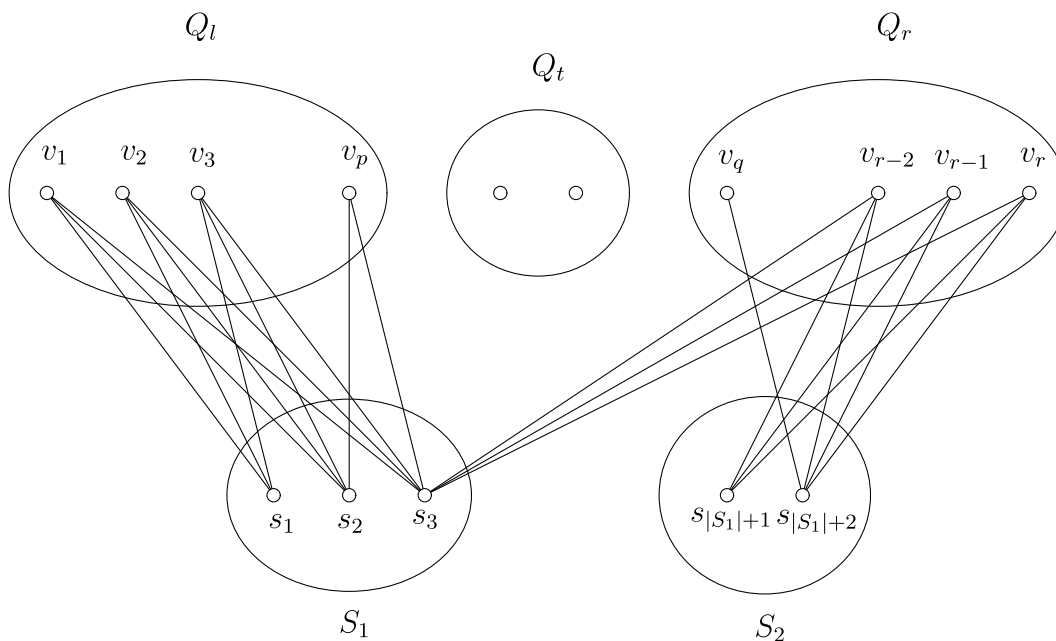


Figura 12: Estrutura de um grafo split-permutação.

Também é possível caracterizar as classes dos grafos split-comparabilidade e split-permutação através de subgrafos proibidos, conforme os lemas a seguir e a Figura 13.

Lema 3.3 (ORTIZ; VILLANUEVA, 2010) *Um grafo G é um grafo split-comparabilidade se não contém nenhum subgrafo induzido isomorfo a algum dos grafos da família $F_1 = \{G_1, \overline{G_1}, \overline{G_3}, 2K_2, C_4, C_5\}$.*

Lema 3.4 (ORTIZ; VILLANUEVA, 2010) *Um grafo G é um grafo split-permutação se não contém nenhum subgrafo induzido isomorfo a algum dos grafos da família $F_2 = F_1 \cup \{G_3\}$.*

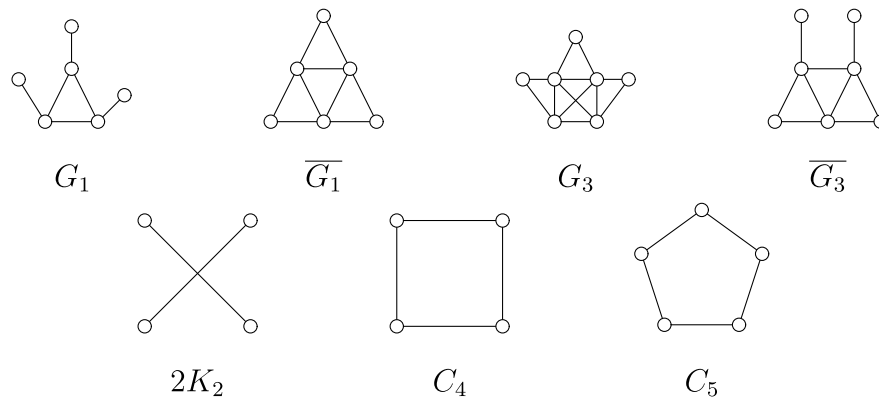


Figura 13: Subgrafos proibidos.

A proposta original deste trabalho era tentar resolver o problema da classificação para os grafos split-permutação. Começamos nossa investigação trabalhando com a subclasse dos grafos split-comparabilidade com S_t vazio, a qual é também uma subclasse de grafos split-permutação. Conseguimos resolver o problema para essa subclasse e percebemos que era muito simples estender o resultado para a classe dos grafos split-comparabilidade.

Com base na caracterização dos grafos split-comparabilidade apresentada no Lema 3.1 podemos fazer as seguintes observações, que podem ser aplicadas analogamente a Q_r e S_r .

Proposição 3.5 *Existe pelo menos um vértice de Q_l que é adjacente a todos os vértices de S_l e S_t .*

Demonstração. Por definição $Q_l = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ e a vizinhança de cada vértice de S_l é definida como $\{v_1, \dots, v_i\}$ com $i \leq p$. Sendo assim, todos os vértices de S_l são adjacentes pelo menos ao vértice v_1 . A vizinhança de cada vértice de S_t é definida como $\{v_1, \dots, v_i\} \cup \{v_j, \dots, v_r\}$, com $i \leq p$ e $q \leq j \leq r$. Logo, todos os vértices de S_l e S_t são adjacentes pelo menos ao vértice v_1 . ■

Corolário 3.6 *O subgrafo induzido por $Q \cup S_l \cup S_t$ tem vértice universal.*

Demonstração. Como Q é uma clique v_1 é vizinho de todos os demais vértices de Q . Pela Proposição 3.5 sabemos que v_1 é adjacente a todos os vértices de $S_l \cup S_t$. Logo v_1 é um vértice universal em $G[Q \cup S_l \cup S_t]$. ■

Proposição 3.7 *Existe pelo menos um vértice de S_l que é vizinho de todos os vértices de Q_l .*

Demonstração. Por definição $Q_l = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ e a vizinhança de cada vértice de S_l é definida como $\{v_1, \dots, v_i\}$ com $i \leq p$. Sendo que, pela escolha de p , existe um vértice $v \in S_l$ tal que $N(v) = \{v_1, \dots, v_p\}$, ou seja, é vizinho de todos os vértices de Q_l . ■

3.2 Coloração de Arestas de Grafos Split-Comparabilidade

Dizemos que um grafo G é *saturado* se n é ímpar e $m = \frac{1}{2}\Delta(G)(n-1)$, ou seja, se ele tem o número máximo de arestas sem ser sobrecarregado. Antes de apresentarmos nosso principal resultado precisamos da seguinte proposição. O grafo apresentado na Figura 14 é saturado, sendo que tem $n = 7$, $\Delta(G) = 6$ e $m = 18$, e pelo Teorema 2.7 ele é Classe 1.

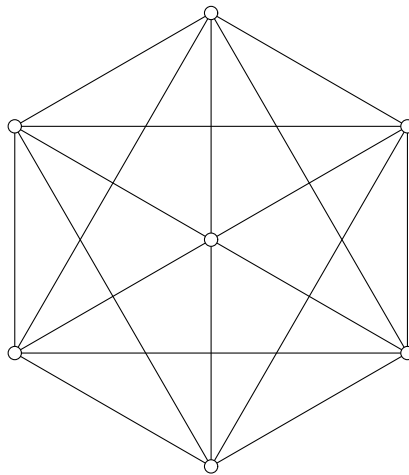


Figura 14: Exemplo de grafo saturado Classe 1.

Proposição 3.8 *Seja G um grafo saturado. Então, em qualquer coloração equilibrada de G com $\Delta(G)$ cores, cada cor sobra em exatamente um vértice.*

Demonstração. Observe que G tem $\Delta(G)(n-1)/2$ arestas. Logo, em qualquer coloração equilibrada de G com $\Delta(G)$ cores cada classe de cor tem $\Delta(G)(n-1)/(2\Delta(G)) = (n-1)/2$ arestas. Observe que um emparelhamento máximo tem no máximo $(n-1)/2$ arestas, uma vez que n é ímpar. Portanto, existem $n-1$ vértices onde incide uma aresta de cor c , para cada cor c . Logo, cada cor sobra em exatamente um vértice de G . ■

Agora vamos para o principal resultado deste trabalho.

Teorema 3.9 *Um grafo split-comparabilidade é Classe 1 se, e somente se, não é vizinhança-sobrecarregado.*

Demonstração. Seja G um grafo split-comparabilidade. Se G for vizinhança-sobrecarregado, então G é Classe 2. Logo, podemos supor que G não é vizinhança-sobrecarregado. Se G tem $\Delta(G)$ ímpar então, pelo Teorema 2.20, G é Classe 1. Portanto, podemos considerar apenas o caso em que $\Delta(G)$ é par.

Como neste trabalho consideramos que Q é maximal, os vértices de grau $\Delta(G)$ necessariamente pertencem a Q . Segue da caracterização de grafos split-comparabilidade que os vértices de grau $\Delta(G)$ necessariamente pertencem a Q_l ou Q_r . Se apenas um dos conjuntos Q_l ou Q_r , digamos Q_l , tiver vértice de grau $\Delta(G)$, então, pelo Corolário 3.6 o grafo induzido por $Q \cup S_l \cup S_t$, que é o seminúcleo de G , tem vértice universal. Como G não é vizinhança-sobrecarregado então seu seminúcleo não é sobrecarregado. Pelo Teorema 2.7, como o seminúcleo de G tem vértice universal e não é sobrecarregado, então o seminúcleo é Classe 1. Pelo Teorema 2.16, como o seminúcleo de G é Classe 1, o grafo G também é Classe 1. Logo, podemos considerar apenas o caso em que tanto Q_l quanto Q_r têm vértice com grau $\Delta(G)$. Pela Proposição 3.5, temos que todo vértice de grau máximo de Q_l é adjacente a todos os vértices de $S_l \cup S_t$ e também que todo vértice de grau máximo de Q_r é adjacente a todos os vértices de $S_r \cup S_t$. Como ambos Q_l e Q_r têm vértices de grau $\Delta(G)$, deduzimos que $\Delta(G) = |Q| - 1 + |S_l| + |S_t| = |Q| - 1 + |S_r| + |S_t|$. Portanto $|S_l| = |S_r|$. A Figura 15 mostra um exemplar de grafo split-comparabilidade que satisfaz tais condições.

Pelo Teorema 2.25, se existir um vértice $v \in S$ com $|Q|/2 \leq d(v) \leq \Delta(G)/2$, então G é Classe 1. Podemos então considerar que todo vértice de S ou tem grau menor que $|Q|/2$ ou maior que $\Delta(G)/2$. Por definição, $Q_r \cap Q_l = \emptyset$. Logo, Q_r e Q_l não podem ambos ter cardinalidade maior que $\Delta(G)/2$, já que $\Delta(G) \geq |Q|$. Caso Q_r e Q_l tenham ambos cardinalidade menor que $|Q|/2$, então existe um conjunto de vértices $Q_t \subseteq Q$ não adjacentes a vértices de $S_l \cup S_r$ tal que $|Q_t| + |Q_r| > |Q|/2$. Neste caso, seja $v \in S_r$ um vértice de grau $|Q_r|$ e seja G' o grafo obtido a partir de G pela adição de um número suficiente de arestas entre v e vértices de Q_t de forma que $|Q|/2 \leq d_{G'}(v) \leq \Delta(G)/2$. É fácil ver que $\Delta(G') = \Delta(G)$. Pelo Teorema 2.25, G' é Classe 1. Logo, o grafo G , subgrafo de G' , também é Classe 1. Assim, podemos supor que um dentre Q_r e Q_l deve ter cardinalidade menor que $|Q|/2$ e o outro cardinalidade maior que $\Delta(G)/2$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $|Q_l| > \Delta(G)/2$ e $|Q_r| < |Q|/2$. Em resumo podemos considerar apenas o caso em que $\Delta(G)$ é par, $|S_l| = |S_r|$, $|Q_l| > \Delta(G)/2$ e $|Q_r| < |Q|/2$.

Rotulamos os vértices de Q da mesma forma que no Lema 3.1, ou seja, (v_1, v_2, \dots, v_r) . De forma similar, rotulamos os vértices de S_l como (u_1, u_2, \dots, u_s) e S_r como (w_1, w_2, \dots, w_s) , onde $s = |S_l| = |S_r|$. Por último, rotulamos os vértices de S_t como (x_1, x_2, \dots, x_t) , onde $t = |S_t|$.

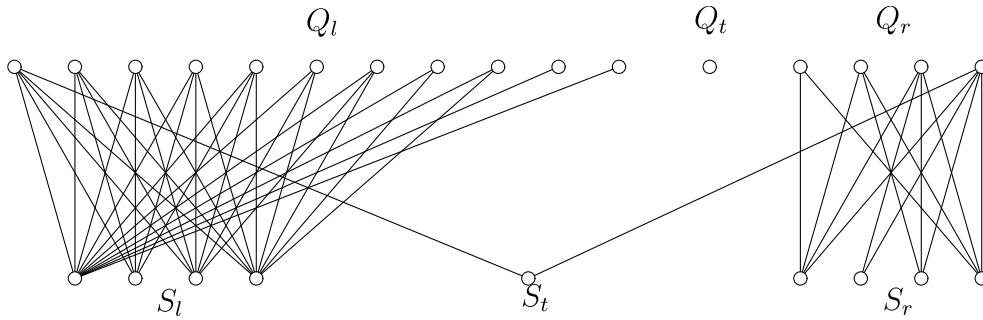


Figura 15: Exemplo de grafo split-comparabilidade para a demonstração.

Seja $v \in Q_l$ um vértice de grau $\Delta(G)$. Para colorir G construiremos um grafo G_l que inicialmente será definido como $G[N[v]]$. Observe que, pela Proposição 3.5, $V(G_l) = Q \cup S_l \cup S_t$. Rotulamos os vértices de G_l com os mesmos rótulos dos vértices correspondentes em G . Vamos agora definir quatro grupos de arestas que podem vir a ser adicionadas ao grafo G_l :

Grupo 1: (u_i, u_j) , $1 \leq i < j \leq s$;

Grupo 2: (u_i, v_j) , $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j < q$ e $(u_i, v_j) \notin E(G)$;

Grupo 3: (x_i, v_j) , $1 \leq i \leq t$, $1 \leq j \leq r$ e $(x_i, v_j) \notin E(G)$;

Grupo 4: (u_i, v_j) , $1 \leq i \leq s$ e $q \leq j \leq r$.

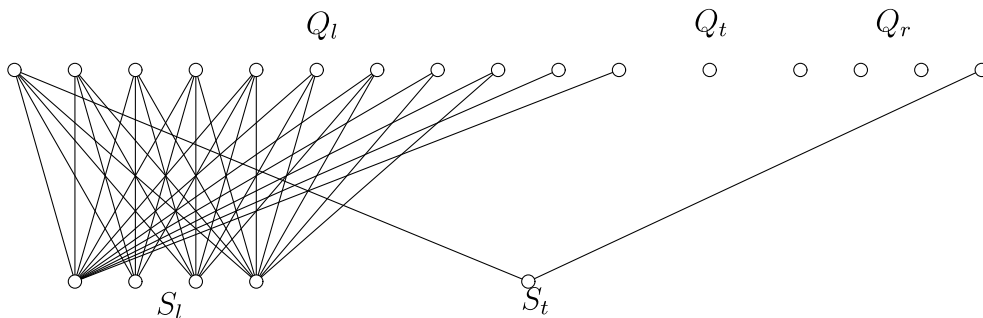


Figura 16: Exemplo da construção de G_l .

Adicionamos a G_l todas as possíveis arestas do Grupo 1, seguidas das arestas do Grupo 2 e Grupo 3 e, por fim, as arestas do Grupo 4, até que G_l fique saturado. A Figura 16 mostra como fica o grafo G_l construído a partir do grafo split-comparabilidade da Figura 15.

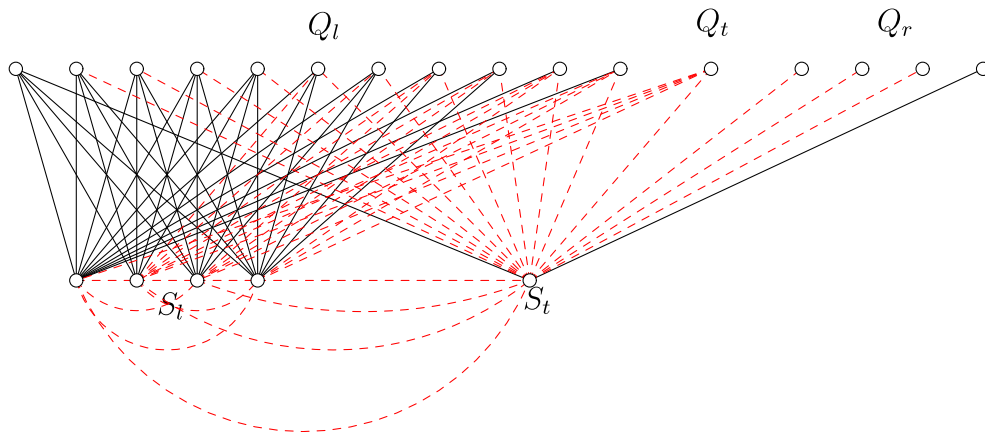


Figura 17: Exemplo com as arestas de Grupo 1, Grupo 2 e Grupo 3.

A cada passo deve-se seguir a ordem crescente de i e só são inseridas arestas incidentes em u_{i+1} após a inserção de todas as arestas possíveis incidentes em u_i , $1 \leq i < s$. A Figura 17 mostra o grafo G_l da Figura 16 com as arestas do Grupo 1, Grupo 2 e Grupo 3 adicionadas, e a Figura 18 mostra o mesmo grafo, agora saturado, com as arestas do Grupo 4 adicionadas. Note que em todas as figuras as arestas com os dois extremos em Q foram omitidas para uma melhor visualização.

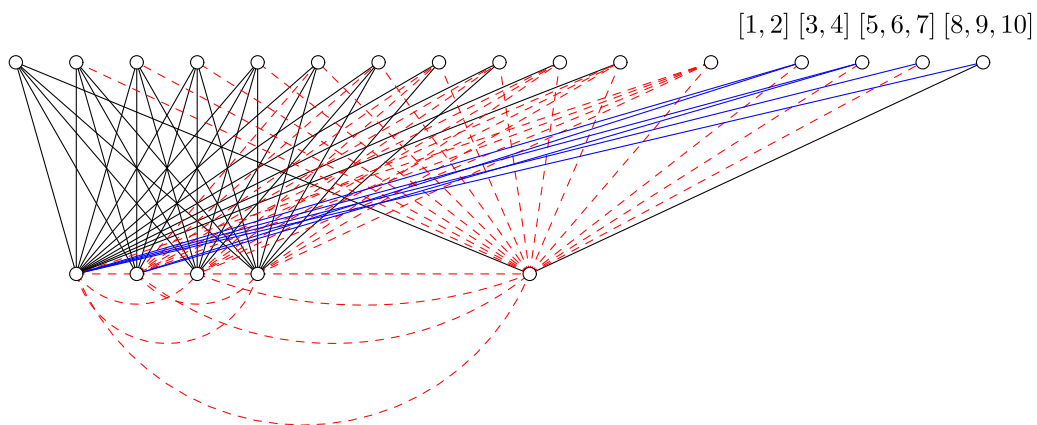


Figura 18: Exemplo com as arestas de Grupo 4.

Como G_l é um grafo com vértice universal e saturado (não sobrecarregado), pelo Teorema 2.7, G_l é Classe 1 e tem uma coloração de arestas com $\Delta(G)$ cores. Pelo Teorema 2.8, G_l tem uma coloração equilibrada com $\Delta(G)$ cores. Seja $C = \{1, 2, \dots, \Delta(G)\}$ um conjunto de cores e $\beta : E(G_l) \rightarrow C$ uma coloração equilibrada das arestas de G_l . Vamos atribuir uma coloração de arestas $\alpha : E(G) \rightarrow C$ para G a partir de β , da seguinte forma:

$$\alpha(v_i, v_j) = \beta(v_i, v_j), \quad 1 \leq i < j \leq r;$$

$$\alpha(v_i, u_j) = \beta(v_i, u_j), \quad 1 \leq i \leq p \text{ e } 1 \leq j \leq s, \text{ se } (v_i, u_j) \in E(G);$$

$$\alpha(v_i, x_j) = \beta(v_i, x_j), 1 \leq i \leq r \text{ e } 1 \leq j \leq t, \text{ se } (v_i, x_j) \in E(G);$$

$$\alpha(v_i, w_j) = \beta(v_i, u_j), q \leq i \leq r \text{ e } 1 \leq j \leq s, \text{ se } (v_i, w_j) \in E(G).$$

Agora, caso existam arestas sem cor em G , tais arestas incidem em vértices de S_r . No restante da prova, vamos atribuir cores para estas arestas.

Considere o conjunto $\{v_q, v_{q+1}, \dots, v_r\}$ em G_l . Faremos um abuso de notação e chamaremos de Q_r este conjunto também em G_l . Pode existir um vértice $u_h \in G_l$ tal que u_h é adjacente a um subconjunto próprio não vazio de Q_r . Observe que, se o vértice u_h existe, o mesmo é único, pela ordem em que as arestas foram inseridas em G_l . Suponha que u_h exista, tendo d vizinhos em Q_r . Como $|Q_r| < |Q|/2 < \Delta(G)/2$ e todo vértice não adjacente a u_h pertence a Q_r , então o grau de u_h em $\overline{G_l}$ é menor que $\Delta(G)/2$. Dado que G_l não é sobrecarregado, existe pelo menos um vértice u_{h+1} não adjacente a vértices de Q_r . Como $|S_l| = |S_r|$, existe pelo menos um vértice w_{h+1} de S_r em G no qual não incidem arestas coloridas. Como a coloração β é equilibrada e G_l é saturado, pela Proposição 3.8, cada cor sobra exatamente uma vez. Seja $\ell(v)$ o conjunto das cores que sobram no vértice v na coloração de arestas β . Podemos observar que $\Delta(G) = d_{G_l}(v_i) + |\ell(v_i)|$, para qualquer vértice $v_i \in Q_r$. Sendo assim, para cada vértice $v_i \in Q_r$ em G , existem cores o suficiente em $\ell(v_i)$ para colorir as arestas incidentes em v_i ainda não coloridas.

Seja C' o conjunto de cores incidentes em w_h na coloração α . Note que $\alpha(v_i, w_h) = \beta(v_i, u_h)$, para $q \leq i < q + d$. Para cada $v \in Q_r$ onde $\ell(v)$ contém uma cor $c \in C'$, se $(v, w_{h+1}) \in E(G)$ defina $\alpha(v, w_{h+1}) = c$, caso contrário remova a cor c de $\ell(v)$. Note que em $\ell(v)$ ainda tem cores o suficiente para colorir as arestas não coloridas incidentes em v , pois se $(v, w_{h+1}) \notin E(G)$ então v não é $\Delta(G)$ -vértice de G . Observe que a coloração α obtida até o momento é própria, pois $w_{h+1} \neq w_h$.

Agora falta colorir algumas arestas (v_i, w_j) , onde $v_i \in Q_r$ e $w_j \in S_r$. Por construção, $\ell(v_i) \cap C' = \emptyset$ e $\ell(v_i) \cap \ell(v_k) = \emptyset$, para quaisquer dois vértices distintos v_i e $v_k \in Q_r$. Assim, podemos atribuir as cores restantes de $\ell(v_i)$ arbitrariamente para as arestas não coloridas incidentes em v_i para obter uma coloração de arestas com $\Delta(G)$ cores para o grafo G . Logo, G é Classe 1. ■

3.3 Conjectura Overfull nos Grafos Split-Comparabilidade

A Conjectura Overfull, que está enunciada neste trabalho como a Conjectura 1.2, foi proposta em 1986 e ainda permanece em aberto. Segundo esta conjectura, um grafo G com $\Delta(G) > \frac{n}{3}$ é Classe 2 se, e somente se, é subgrafo-sobrecarregado. Algumas classes de grafos, como por exemplo os bipartidos, nem sempre tem $\Delta(G) > \frac{n}{3}$ então não se enquadram na hipótese na Conjectura Overfull. Nessa seção vamos provar que a hipótese da Conjectura Overfull é válida para toda a classe dos grafos split-comparabilidade, sendo

assim, pelo Teorema 3.9, a conjectura é válida nesta classe.

Proposição 3.10 *Se G é um grafo split-comparabilidade, então $\Delta(G) > n/3$.*

Demonstração. Seja G um grafo split-comparabilidade. Podemos assumir que Q e S são não vazios, então $n \geq 2$. Se $|Q| = 1$, G tem um vértice universal então $\Delta(G) = n - 1$ e $\Delta(G) > n/3$ quando $n \geq 2$. Podemos assumir que $|Q| \geq 2$. Ajuste a notação, se necessário, de forma que $|S_l| \geq |S_r|$. Pela Proposição 3.5, v_1 é adjacente a todos os vértices de S_l e S_t , então $d_Q = |S_l| + |S_t|$. Como $\Delta(G) = |Q| - 1 + d_Q$, podemos deduzir que $\Delta(G) = |Q| - 1 + |S_l| + |S_t| = |Q| + |S| - |S_r| - 1 = n - |S_r| - 1$.

Suponha por absurdo que $\Delta(G) \leq n/3$, ou seja, $\Delta(G) - n/3 \leq 0$. Logo, $\Delta(G) - n/3 = n - |S_r| - 1 - n/3 = 2n/3 - 1 - |S_r| \leq 0$. Disso podemos concluir que $|S_r| \geq 2n/3 - 1$. Como $|S_l| \geq |S_r|$, então $|S_l| + |S_r| \geq 4n/3 - 2 > n - 2$. Em outras palavras, se $\Delta(G) \leq n/3$, com $|Q| \geq 2$, isso implica que $n = |Q| + |S| > 2 + n - 2$, uma contradição. ■

Como pela Proposição 3.10 todos os grafos split-comparabilidade têm $\Delta(G) > n/3$, pelo Teorema 3.9 um grafo split-comparabilidade é Classe 2 se e somente se for vizinhança-sobrecarregado. Considerando que Figueiredo, Meidanis e Mello (FIGUEIREDO; MEIDANIS; MELLO, 2000) mostraram que para grafos split ser vizinhança-sobrecarregado é equivalente a ser subgrafo-sobrecarregado, então a Conjectura Overfull é válida na classe dos grafos split-comparabilidade.

Conclusão

Nesse trabalho apresentamos duas conjecturas. A Conjectura 1.2, que é a Conjectura Overfull e é uma conjectura mais geral da coloração de arestas, e a Conjectura 2.17, que é uma conjectura restrita aos grafos cordais. Note que a Conjectura Overfull fala em ser Classe 2 quando o grafo é subgrafo-sobrecarregado, enquanto a conjectura para os cordais fala em vizinhança-sobrecarregado. Porém, como citado anteriormente, segundo (FIGUEIREDO; MEIDANIS; MELLO, 2000) um grafo split é subgrafo-sobrecarregado se, e somente se, é vizinhança-sobrecarregado. Como, pela Proposição 3.10, os grafos split-comparabilidade satisfazem a hipótese da Conjectura Overfull e os grafos split são cordais, então o Teorema 3.9 provê uma solução para ambas as conjecturas na classe dos grafos split-comparabilidade.

É possível verificar se um grafo é vizinhança-sobrecarregado em tempo polinomial, sendo assim, é possível resolver o Problema da Classificação para grafos split-comparabilidade em tempo polinomial.

Publicações

O resumo intitulado “*Edge Coloring in Split-Comparability Graphs*” foi publicado e apresentado no evento *VII Latin American Workshop on Cliques in Graphs* que se deu na cidade de La Plata na Argentina entre 8 e 11 de novembro de 2016 (CRUZ; SILVA; ALMEIDA, 2016).

Submissões

O artigo intitulado “*The Overfull Conjecture on Split-Comparability Graphs*” foi submetido para o periódico *Information Processing Letters* em agosto de 2016 e encontra-se em revisão até a presente data.

Trabalhos Futuros

Uma corda xy em um ciclo par C é uma *corda ímpar* se a distância no ciclo C entre x e y é ímpar. Um grafo é *fortemente cordal* se é cordal e todo ciclo par de tamanho pelo menos 6 tem uma corda ímpar. O vértice v é chamado de *simplicial* se $N(v)$ é uma clique. A ordem v_1, \dots, v_n é uma *ordem de eliminação perfeita* se para todo i , v_i é simplicial em $G[v_1 \dots v_i]$. Uma outra definição de grafo cordal diferente da já apresentada neste trabalho é de que um grafo é cordal se, e somente se, tem uma ordem de eliminação perfeita. Uma

ordem de eliminação perfeita é uma ordem de eliminação fortemente perfeita se para quaisquer i, j, k e l com $i < j$ e $k < l$, se $(v_i, v_k), (v_i, v_l)$ e (v_j, v_k) são arestas, então (v_j, v_l) também é uma aresta. Assim como os grafos cordais, os grafos fortemente cordais podem ser definidos como aqueles que têm uma ordem de eliminação fortemente perfeita. Os grafos split-comparabilidade são uma subclasse dos grafos split fortemente cordais.

Uma possível continuação desse trabalho seria tentar encontrar uma caracterização para os grafos split fortemente cordais de forma que possa vir a ser possível aplicar a técnica da demonstração do Teorema 3.9 para esta classe.

Referências

- ALMEIDA, S. M. *Coloração de Arestas em Grafos Split*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 3 2012. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 40.
- APPEL, K.; HAKEN, W. Every planar map is four colorable. part i: Discharging. *Illinois Journal of Mathematics*, University of Illinois at Urbana-Champaign, Department of Mathematics, v. 21, n. 3, p. 429–490, 1977. Citado na página 21.
- BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. *Graph Theory*. New York: Springer, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 27.
- CHEN, B.; FU, H.; KO, M. Total chromatic number and chromatic index of split graphs. *J. Combin. Math. Combin. Comput*, v. 17, p. 137–146, 1995. Citado 3 vezes nas páginas 30, 38 e 39.
- CHETWYND, A. G.; HILTON, A. J. W. Star multigraphs with three vertices of maximum degree. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v. 100, p. 303–317, 1986. Citado na página 25.
- CRUZ, J. B. de S. *Coloração de Arestas e Cografos*. Trabalho de Graduação, UFSCar - Campus Sorocaba. 2014. Citado na página 32.
- CRUZ, J. B. de S.; SILVA, C. N. da; ALMEIDA, S. M. de. Edge coloring in split-comparability graphs. In: *VII Latin American Workshop on Cliques in Graphs*. La Plata, Argentina: Universidad Nacional de La Plata, 2016. p. 29. Disponível em <http://www.mate.unlp.edu.ar/~liliana/lawclique_2016/prolist.pdf>. Citado na página 51.
- “F.G”. Tinting maps. *The Athenaeum*, v. 1389, p. 726, 1854. Citado na página 21.
- FIGUEIREDO, C. M. H. de; MEIDANIS, J.; MELLO, C. P. de. Local conditions for edge-coloring. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, Citeseer, v. 32, p. 79–92, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 38, 49 e 51.
- FIORINI, S.; WILSON, R. J. *Edge-colourings of graphs*. London: Pitman Publishing, 1977. Citado na página 30.
- FOLKMAN, J.; FULKERSON, D. R. *Edge colorings in bipartite graphs*. DTIC Document, 1966. Citado na página 32.
- FOLKMAN, J.; FULKERSON, D. R. Edge colorings in bipartite graphs. *Combinational Mathematics and Its Applications*. University of North Carolina Press, p. 561–577, 1969. Citado na página 32.
- HALL, P. On representatives of subsets. *J. London Math. Soc*, v. 10, n. 1, p. 26–30, 1935. Citado na página 27.
- HEAWOOD, P. J. Map colour theorem. *Quart. J. Pure Appl. Math.*, v. 24, p. 332–338, 1890. Citado na página 21.

- HOFFMAN, D. G.; RODGER, C. A. The chromatic index of complete multipartite graphs. *Journal of Graph Theory*, v. 16, p. 159–163, 1992. Citado na página 26.
- HOLYER, I. The NP-completeness of edge-coloring. *SIAM Journal on Computing*, v. 10, p. 718–720, 1981. Citado na página 24.
- KEMPE, A. B. On the geographical problem of the four colours. *American Journal of Mathematics*, v. 2, n. 3, p. 193–200, 1879. Citado na página 21.
- KÖNIG, D. Über Graphen und ihre anwendung auf determinantentheorie und mengenlehre. *Mathematische Annalen*, v. 77, p. 453–465, 1916. Citado na página 29.
- MACHADO, R. C. S.; FIGUEIREDO, C. M. H. de. Decompositions for edge-coloring join graphs and cobipartite graphs. *Discrete Applied Mathematics*, v. 158, p. 1336–1342, 2010. Citado na página 36.
- MCKAY, B. D. A note on the history of the four-colour conjecture. *Journal of Graph Theory*, v. 72, n. 3, p. 361–363, 2013. Citado na página 21.
- MISRA, J.; GRIES, D. A constructive proof of Vizing’s theorem. *Information Processing Letters*, v. 41, n. 3, p. 131–133, 1992. Citado 3 vezes nas páginas 33, 34 e 35.
- MORGAN, A. D. Review of the philosophy of discovery. *The Athenaeum*, v. 1694, p. 501–503, 1860. Citado na página 21.
- ORTIZ, C.; VILLANUEVA, M. On split-comparability graphs. In: *II ALIO-EURO Workshop on Pratical Combinatorial Optimization*. Valparaiso: Chile, 1996. p. 91–105. Citado na página 41.
- ORTIZ, C.; VILLANUEVA, M. Threshold dimension of split-permutation graphs. *The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, v. 75, p. 117–127, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 41, 42 e 43.
- PADBERG, M.; RAO, M. R. Odd minimum cut-sets and b-matchings. *Mathematics of Operation Research*, v. 17(1), p. 67–80, 1982. Citado na página 26.
- PETERSEN, J. Die theorie der regulären graphs. *Acta Mathematica*, v. 15, n. 1, p. 193–220, 1891. Citado na página 22.
- PLANTHOLT, M. J. The chromatic index of graphs with a spanning star. *Journal of Graph Theory*, v. 5, p. 45–53, 1981. Citado 4 vezes nas páginas 26, 31, 38 e 57.
- ROBERTSON, N. et al. The four-colour theorem. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, Elsevier, v. 70, n. 1, p. 2–44, 1997. Citado na página 21.
- SCHRIJVER, A. Bipartite edge coloring in $O(\Delta m)$ time. *SIAM Journal on Computing*, SIAM, v. 28, n. 3, p. 841–846, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 29.
- TAIT, P. G. Remarks on the colouring of maps. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, v. 10, n. 729, p. 501–503, 1880. Citado na página 22.
- TUTTE, W. T. On hamiltonian circuits. *Journal of the London Mathematical Society*, Oxford University Press, v. 1, n. 2, p. 98–101, 1946. Citado na página 22.
- VIZING, V. G. Critical graphs with a given chromatic class. *Method Diskretnogo Analiza*, v. 5, p. 9–17, 1965. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 35.

APÊNDICE A – Grafos com Vértice Universal

Teorema A.1 *Todo grafo com vértice universal é Classe 2 se, e somente se, é sobrecarregado.*

Demonstração. Seja G um grafo com vértice universal. Então G é subgrafo do K_n e $\Delta(G) = \Delta(K_n)$. Se n é par, temos pelo Teorema 2.6 que K_n é Classe 1, logo G também é Classe 1. Já no caso de n ser ímpar é um pouco mais complicado. Como n é ímpar, definiremos n como $2s + 1$; sendo assim, $\Delta(G) = 2s$. Para que G seja sobrecarregado deve valer a seguinte inequação:

$$\begin{aligned} m &> \frac{1}{2}2s(2s + 1 - 1) \\ m &> \frac{1}{2}4s^2 \\ m &> 2s^2. \end{aligned}$$

Portanto, se o número de arestas de G for maior que $2s^2$, G é Classe 2. Basta então demonstrarmos que os grafos com no máximo $2s^2$ arestas são Classe 1. Na verdade, basta demonstrarmos que os grafos com precisamente $2s^2$ arestas são Classe 1, pois os demais necessariamente são subgrafos destes e, portanto, também são Classe 1.

Caso 1: s é ímpar.

Denotamos por $\bar{d}(v_i)$ o grau do vértice v_i em \bar{G} . Seja $A = \{v_1, \dots, v_a\}$ o conjunto dos vértices com grau pelo menos 2 em \bar{G} . Como $\bar{d}(v_i) \geq 2$, para $1 \leq i \leq a$, então $\sum_{i=1}^a \bar{d}(v_i) \geq 2a$. Logo os vértices de A incidem em no mínimo a arestas distintas de \bar{G} . Como um grafo completo com $2s + 1$ vértices tem $2s^2 + s$ arestas e estamos considerando grafos com $2s^2$ arestas, então \bar{G} tem exatas s arestas, logo $a \leq s$. Podemos então definir um superconjunto $L = \{v_1, \dots, v_a, v_{a+1}, \dots, v_{s+1}\}$ de A tal que toda aresta de \bar{G} seja incidente a pelo menos um vértice de L . Como $A \subset L$, todos os vértices de $V(G) - L$ têm grau no máximo 1 em \bar{G} . Seja $R = \{w_1, \dots, w_s\}$ o conjunto dos vértices que não pertencem a L .

Agora definiremos o grafo B , que será um subgrafo bipartido gerador de G . Dois vértices são adjacentes em B se, e somente se, eles são adjacentes em G e um pertence a L e o outro a R . Sendo assim B é um subgrafo do $K_{s+1,s}$ e $\Delta(B) \leq s + 1$. Note que todos os vértices com grau $s + 1$ pertencem a R . Seja $J \subset R$ o conjunto dos vértices de B com grau $s + 1$. Sem perda de generalidade, assumimos $J = \{w_1, \dots, w_j\}$.

Seja X o subgrafo induzido por L , Y o subgrafo induzido por R , e $Z = X \cup Y$. Note que $Z = G - E(B)$. Concluimos então que:

1. X é subgrafo de K_{s+1} e, como s é ímpar, então $\chi'(X) \leq s$ pelo Teorema 2.6.
2. Y é K_s pois toda aresta de \overline{G} incide em L . Logo, $\chi'(Y) = s$, também pelo Teorema 2.6.
3. J é precisamente o conjunto dos vértices universais de G .
4. X e Y são disjuntos.

Sendo assim, Z pode ser colorido com s cores. Como B é bipartido, pelo Teorema 2.5, $\chi'(B) \leq s + 1$. Observe que se J fosse vazio então $\chi'(B) = s$, mas como estamos lidando com grafos com vértice universal então J não é vazio. Nosso objetivo agora é retirar j arestas de B , uma incidente em cada vértice de J e colocar tais arestas em Z sem aumentar o $\chi'(Z)$. Após essas operações, teremos $\chi'(B) = \chi'(Z) = s$ e, como $G = Z \cup B$ e Z e B serão aresta-disjuntos, claramente $\chi'(G) = 2s$, concluindo a demonstração de que G é Classe 1. Vamos agora mostrar como selecionar as j arestas a serem removidas de B e adicionadas a Z .

O grafo bipartido B é subgrafo de $K_{s+1,s}$ onde L é a parte com $s + 1$ vértices e R é a parte com s vértices. Então, as arestas de \overline{G} são dadas por $E(K_{s+1,s} - E(B)) \cup E(\overline{X})$. Como $\overline{d}(w_i) \leq 1$ para $i = 1, \dots, s$, com igualdade apenas para os vértices não pertencentes a J , então, $K_{s+1,s} - E(B)$ contém exatamente $s - j$ arestas. Devido a isso, \overline{X} contém exatamente j arestas. Como X é subgrafo de K_{s+1} , que tem uma coloração com s cores, pelo Teorema 2.8 existe uma s -coloração equilibrada de X . Ou seja, existe uma sequência $H = (h_1, \dots, h_s)$ onde cada elemento é a cardinalidade de uma classe de cor desta coloração e

$$h_i = \begin{cases} (s + 1)/2 & i = 1, \dots, s - j \\ (s - 1)/2 & i = s - j + 1, \dots, s. \end{cases}$$

Existem j cores, denotadas por c_1, c_2, \dots, c_j que são atribuídas a somente $(s - 1)/2$ arestas. Assim, para $i = 1, \dots, j$, as arestas de cor c_i não incidem em precisamente 2 vértices de X , digamos u_{i1} e u_{i2} . Pela Proposição 2.18, Y tem uma s -coloração em que cada cor não incide em exatamente 1 vértice. Ajustaremos a notação de forma que as s cores utilizadas em Y sejam as mesmas s cores utilizadas em X e w_i seja o vértice em que não incide a cor c_i , para $i = 1, \dots, j$. Agora adicionamos a Z as arestas $u_{i1}w_i$, para $i = 1, \dots, j$, e as colorimos com as cores c_1, \dots, c_j respectivamente. Note que esta adição de arestas não altera $\chi'(Z)$. Em seguida removemos as j arestas correspondentes de B . Estas arestas estão garantidamente em B pois todos os vértices w_1, \dots, w_j têm grau $s + 1$ em B , sendo portanto adjacentes a todos os vértices de L , e $u_{i1} \in L$ por definição. Agora temos $\Delta(B) = s$ o que, pelo Teorema 2.5, implica que $\chi'(B) = s$. Como G é dado pela união de B e Z então temos $\chi'(G) = 2s$.

Caso 2: s é par

Para a prova deste caso usaremos a mesma ideia do caso anterior, de forma que G seja a união de dois grafos, cada um com índice cromático igual a s . A demonstração será por indução em s , mas antes precisaremos do seguinte lema.

Lema A.2 *Seja G' um grafo qualquer com $2s + 1$ vértices, s par, e exatamente s arestas. Uma das duas condições a seguir é satisfeita:*

(I) *existe um conjunto L de $s + 1$ vértices de G' tal que o subgrafo de G' induzido por L tem pelo menos $s/2$ arestas, qualquer vértice de grau maior que 1 em G' é um elemento de L e todas as arestas de G' são incidentes em algum vértice de L ;*

(II) *existe um conjunto L de $s + 1$ vértices de G' tal que o subgrafo de G' induzido por L tem exatamente $s/2$ arestas e qualquer vértice de grau maior que 1 em G' é um elemento de L .*

A demonstração deste lema pode ser encontrada em (PLANTHOLT, 1981) e será omitida aqui para não se estender ainda mais esta demonstração. Como o grafo G tem $2s + 1$ vértices e precisamente $2s^2$ arestas, seu complemento \overline{G} tem exatamente s arestas. Estamos no caso em que s é par, portanto \overline{G} satisfaz uma das condições do Lema A.2. Separamos a demonstração em dois subcasos, de acordo com qual das condições é satisfeita.

Caso 2.1: *Existe um conjunto L de $s + 1$ vértices de \overline{G} tal que o subgrafo de \overline{G} induzido por L tem pelo menos $s/2$ arestas, qualquer vértice de grau maior que 1 em \overline{G} é um elemento de L e todas as arestas de \overline{G} são incidentes em algum vértice de L .*

Seja R o conjunto dos demais s vértices de G não pertencentes a L , digamos $R = \{w_1, \dots, w_s\}$. Seja X o subgrafo de G induzido por L e Y o subgrafo de G induzido por R . Assim como na demonstração do Caso 1, definiremos B como um subgrafo bipartido gerador de G com as arestas (v_t, w_r) , $1 \leq t \leq s + 1$, $1 \leq r \leq s$, se (v_t, w_r) é uma aresta de G . Novamente, definimos o grafo Z como $X \cup Y$. Como $Y = K_s$ e s é par, $\chi'(Y) = s - 1$. Já o grafo X pode ser obtido a partir de K_{s+1} pela remoção de pelo menos $s/2$ arestas. Então, se X tiver um vértice universal, por hipótese de indução, $\chi'(X) = s$. Caso contrário, $\Delta(X) < s$ e $\chi'(X) \leq s$. Em ambos os casos, $\chi'(X) \leq s$. Portanto, o índice cromático de Z , dado pela união disjunta de X e Y , é no máximo s .

O grafo B é bipartido e $\Delta(B) \leq s + 1$. Se $\Delta(B) < s + 1$ então $\chi'(B) = s$. Como G é a união de Z e B e ambos os subgrafos podem ser coloridos com conjuntos distintos de s cores então G pode ser colorido com $2s$ cores e é Classe 1. Podemos supor então que $\Delta(B) = s + 1$ e $\chi'(B) = s + 1$. Agora, seja j o número de vértices com grau $s + 1$ em B ; tal conjunto de vértices será denotado por $J = \{w_1, \dots, w_j\}$. Certamente, $J \subset R$ e a todo vértice de $R - J$ incide precisamente uma das s arestas de \overline{G} . Como pelo menos $s/2$ arestas têm ambos os extremos em X , o conjunto $R - J$ tem no máximo $s/2$ arestas

e $s/2 \leq j \leq s$. Novamente, removeremos j arestas de B , uma incidente a cada vértice pertencente a J , e as colocaremos em Z sem que o seu índice cromático fique maior do que s .

Primeiro note que X pode ser obtido de K_{s+1} pela remoção de j arestas, já que G pode ser obtido de K_{2s+1} pela remoção de s arestas, Y pode ser obtido de K_s e B pode ser obtido de $K_{s+1,s}$ pela remoção de $s - j$ arestas. Conforme já foi argumentado, $\chi'(X) \leq s$. Assim, pelo Teorema 2.8, existe uma s -coloração de arestas equilibrada de X com a cardinalidade das classes de cor dada pela sequência $H = (h_1, \dots, h_s)$. Seja i o número de classes de cor com $s/2$ arestas. Se $j = s/2$, então X é saturado e $i = s$. Logo, o número de classes de cor de menor cardinalidade é $(j - s/2)$. Então, vamos considerar que $h_i = s/2$ para $i \leq s - (j - s/2)$ e $h_i = s/2 - 1$ para as demais classes de cor. Seja $k = s - (j - s/2)$. Então as respectivas classes de cor C_1, \dots, C_k não incidem em precisamente um vértice de X cada, enquanto as classes de cor C_{k+1}, \dots, C_s não incidem em precisamente três vértices de X .

Agora consideremos o grafo $Y = K_s$. Como Y tem uma coloração com s cores então, pelo Teorema 2.8, Y tem uma coloração equilibrada com s cores, ou seja, existe uma sequência (t_1, \dots, t_s) onde $t_i = s/2$ para $i \leq s/2$ e $t_i = s/2 - 1$ para os demais e cada elemento dessa sequência representa a cardinalidade de uma classe de cor da coloração de Y . Note que, como esta é uma s -coloração de Y e $\Delta(Y) = s - 1$, em cada vértice há exatamente uma cor não atribuída a nenhuma de suas arestas incidentes. Por outro lado, $s/2$ cores incidem em todos os vértices de Y enquanto as $s/2$ cores restantes não incidem em precisamente 2 vértices de Y . Tomando as mesmas s cores que usamos na coloração de X , vamos ajustar a notação de forma que as cores C_i , para $i = 1, \dots, s/2$ incidam em todos os vértices e as demais não incidam em precisamente dois vértices cada. Além disso, pela simetria de K_s , podemos ajustar a notação de forma que aos vértices w_1 e w_2 não incida a cor C_{k+1} , a w_3 e w_4 não incida a cor C_{k+2} , e assim por diante até w_{2j-s-1} e w_{2j-s} aos quais não incide a cor C_s , enquanto aos outros $s - j$ vértices de R não incidem as cores $C_{s/2+1}, \dots, C_k$, respectivamente.

Finalmente, podemos agora adicionar j arestas em Z de forma que cada vértice w_1, \dots, w_j em Y seja adjacente a um vértice de X ao qual não incida a mesma cor não incidente em w_i , permitindo assim que a aresta adicionada seja colorida com essa cor. Note que, apesar da cor não incidente aos vértice w_1 e w_2 ser a mesma, estes podem ser ligados a vértices distintos de X , pois C_{k+1} não incide em três vértices de X , por construção. Assim, conseguimos adicionar as j arestas em Z mantendo seu índice cromático em no máximo s . Agora removemos essas j arestas de B , tornando $\Delta(B) = s$ e, conseqüentemente, $\chi'(B) = s$. Como G é a união de B e Z , grafos aresta-disjuntos, então $\chi'(G) = 2s$ e G é Classe 1 nesse caso.

Caso 2.2: Existe em \overline{G} um conjunto de $s + 1$ vértices $L = \{v_1, \dots, v_{s+1}\}$ tal que o

subgrafo induzido por L tem exatamente $s/2$ arestas e qualquer vértice de \overline{G} não pertencente a L tem grau no máximo 1 em \overline{G} .

Definimos os grafos R , X , Y , B e Z e o valor j da mesma maneira que na demonstração anterior. Novamente, a ideia é obter s -colorações de X e Y (e conseqüentemente Z) e encontrar j arestas que podem ser removidas de B permitindo assim a diminuição do índice cromático de B para s , e que ao serem adicionadas a Z não aumentam o índice cromático s de Z .

Uma vez que B pode ser obtido de $K_{s+1,s}$ pela remoção de $s - j$ arestas e X pode ser obtido de K_{s+1} pela remoção de $s/2$ arestas e Y pode ser obtido de K_s pela remoção de $j - s/2$ arestas. Pela hipótese do caso, todo vértice de R tem grau no máximo 1 em \overline{G} . Logo, todas as $j - s/2$ arestas de \overline{Y} têm extremos distintos duas a duas e são, em conjunto, incidentes a exatamente $2j - s$ vértices de Y . Como todos esses vértices têm grau $s + 1$ em B , podemos ajustar a notação de forma que esses vértices sejam w_1, \dots, w_{2j-s} .

Dado que X pode ser obtido de K_{s+1} pela remoção de $s/2$ arestas, então $\chi'(X) \leq s$ pois ou $\Delta(X) < s$, ou $\Delta(X) = s$ e X satisfaz a hipótese de indução. Sejam C_1, \dots, C_s as cores utilizadas em uma s -coloração equilibrada de X . Note que cada cor não incide em exatamente um vértice em X , pois cada classe de cor tem precisamente $s/2$ arestas. Agora considere uma s -coloração equilibrada de Y , que usa as mesmas s cores da coloração de X . Nessa coloração, j das cores não incidem em exatamente dois vértices de Y e cada uma das outras $s - j$ cores incidem em todos os vértices de Y . Ajuste a notação de forma que as cores C_1, \dots, C_j não incidam em dois vértices de Y cada. Lembre que o grau em Y de w_i é igual a $s - 2$ para $i \leq 2j - s$ e $s - 1$ para os demais vértices. Assim, exatamente duas cores não incidem nos vértices w_1, \dots, w_{2j-s} , enquanto exatamente uma cor não incide nos vértices w_{2j-s+1}, \dots, w_s . Associaremos cada w_i de Y a um conjunto W_i formado pelo conjunto de uma ou duas cores não incidentes em w_i . Os $2(s - j)$ conjuntos W_{2j-s+1}, \dots, W_s têm um elemento cada. Vamos parear esses conjuntos em $s - j$ pares de conjuntos unitários e tomar, para cada par, a união dos conjuntos unitários de cores. Como resultado temos um conjunto de $s - j$ conjuntos de cores, cada um de cardinalidade um ou dois, dependendo se os conjuntos unitários pareados eram iguais ou diferentes. Considere agora o conjunto $U = \{U_1, \dots, U_j\}$ cujos elementos são conjuntos de cores tais que $U_i = W_i$ para $i = 1, \dots, 2j - s$ e os demais elementos U_i para $i = 2j - s + 1, \dots, j$ são os $s - j$ conjuntos de cores obtidos após o pareamento.

Considere inicialmente o caso em que os conjuntos U_i para $i = 2j - s + 1, \dots, j$ são todos de cardinalidade 2. Seja $H = [P, Q]$ o grafo bipartido com ambos P e Q de cardinalidade j e tal que: cada vértice de P representa uma das j cores que não incidem em precisamente dois vértices de Y ; cada vértice de Q representa um conjunto de cores de U ; existe aresta (p, q) em H se a cor representada por $p \in P$ pertence ao conjunto representado por $q \in Q$. Então, H é um grafo bipartido regular de grau 2, pois estamos

supondo que todo conjunto de U tem duas cores e cada cor representada em P pertence a exatamente dois conjuntos de U . Então, pelo Lema 2.2, H tem um emparelhamento perfeito. No caso restante, quando U tem um ou mais conjuntos unitários, o grafo H é construído de forma semelhante, com a diferença que cada vértice $q \in Q$ que representa um conjunto unitário deve ser ligado por um par de arestas paralelas à única cor do conjunto, de forma que H também seja regular de grau 2 nesse caso, garantindo a existência de emparelhamento perfeito. Em qualquer dos casos, conseguimos obter uma bijeção f entre as cores de P e um subconjunto de vértices de Y de forma que cada vértice do subconjunto é mapeado pela bijeção a uma cor não incidente nele na s -coloração de Y . Certamente os vértices w_1, \dots, w_{2j-s} pertencem a esse subconjunto pois, por construção, W_1, \dots, W_{2j-s} são todos conjuntos de cardinalidade 2. Podemos fazer um ajuste de notação de forma que w_{2j-s+1}, \dots, w_j sejam os demais vértices desse subconjunto.

Para terminar, é preciso lembrar que já havíamos obtido uma s -coloração de X em que cada uma das s cores não incide em precisamente um vértice de X . Podemos então adicionar a Z uma aresta ligando cada vértice w_i ao vértice de X em que não incide a mesma cor associada a w_i pela bijeção f , para $i = 1, \dots, j$. Claramente, o índice cromático de Z , dado por s , é mantido. Ao removermos essas arestas de B , temos $\Delta(B) = s$ e, portanto, $\chi'(B) = s$. Como G é a união disjunta de B e Z , logo $\chi'(G) = 2s$ e G é Classe 1. ■

Índice

- Δ -vértice, 36
- $\Delta(G)$ -vértice, 35
- k -coloração equilibrada, 32

- Classe 1, 24
- Classe 2, 24
- classe de cor, 24
- clique, 37
- clique maximal, 37
- cobertos, 24
- coloração de arestas, 23
- coloração própria, 23
- complemento, 41
- comutativo, 30
- conjunto independente, 37
- corda, 37
- corda ímpar, 51
- cores, 23
- corte, 27

- $\mathcal{D}(n, k)$, 39
- diagrama de cor, 39
- diagrama de cor monotônico, 39

- emparelhados, 24
- emparelhamento, 24
- emparelhamento máximo, 24
- emparelhamento perfeito, 24

- fortemente cordal, 51

- grafo bipartido, 27
- grafo co-comparabilidade, 41
- grafo comparabilidade, 26, 41
- grafo completo, 29
- grafo permutação, 41
- grafo split, 26, 37
- grafo split-comparabilidade, 26

- grafos parcialmente coloridos, 33
- grau, 24
- grau máximo, 24

- idempotente, 30
- incide, 24
- índice cromático, 23

- k -coloração de arestas, 23
- k -regular, 27

- leque, 33

- núcleo, 35

- ordem de eliminação perfeita, 51
- orientação transitiva, 26, 41

- Problema da Classificação, 24
- Problema das 4-cores, 21

- quadrado latino, 29

- Recoloração de Vizing, 33, 34
- rotação do leque, 34

- $\mathcal{S}(n, k)$, 39
- saturado, 44
- seminúcleo, 35
- simplicial, 51
- sobra, 24
- sobrecarregado, 24
- subgrafo induzido, 25
- subgrafo-sobrecarregado, 25
- sufixo, 39

- Teorema das 5-cores, 22

- união, 36

- vértice universal, 31

vetor de cor, [39](#)

vizinhança, [25](#)

vizinhança fechada, [25](#)

vizinhança-sobrecarregado, [25](#)

vizinhos, [25](#)