



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

JULIANO SQUARSONE DI SIERVO

**APLICAÇÃO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR NA SELEÇÃO DE CARTEIRAS DE
INVESTIMENTO**

Sorocaba

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

**APLICAÇÃO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR NA SELEÇÃO DE CARTEIRAS DE
INVESTIMENTO**

Juliano Squarone Di Siervo

Orientadora: Profa. Dra. Silvia Maria Simões de Carvalho

Sorocaba

2017

APLICAÇÃO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR NA SELEÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do título de mestre sob orientação da Professora Doutora Silvia Maria Simões de Carvalho.

Sorocaba

2017




UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

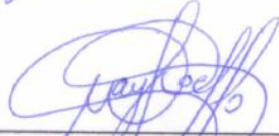
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

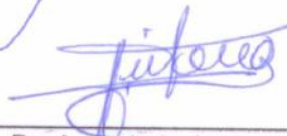
Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Juliano Squarzone Di Siervo, realizada em 29/09/2017:



Profa. Dra. Silvia Maria Simões de Carvalho
UFSCar



Prof. Dr. Mayk Vieira Coelho
UNIFAL



Prof. Dr. Antonio Luis Venezuela
UFSCar

Dedico este trabalho aos meus pais, que sempre tiveram como prioridade minha educação. Este é o fruto do esforço de vocês. Também à minha esposa pelo incentivo, palavras de otimismo e pelas orações. Dedico a meu amado filho e torço que este sirva de exemplo à sua vida. Dedico a Nossa Senhora da Estrada, agradecendo por sua consoladora intercessão nesta etapa.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus pelas graças recebidas durante as etapas deste mestrado. Foram muitos os percalços, dificuldades e “quase desistência”, superadas com a força e a luz do Divino Espírito Santo.

A minha amada e agraciada família que foram suporte nesta jornada. Sua paciência em minha ausência, sua compreensão em momentos de estudo e pesquisa, seu carinho quando achava que não seria possível, sua esperança pela finalização e mérito. Sem vocês, com certeza nada disso seria possível.

A minha amada esposa, minha razão e meu coração. Seu carinho nas dificuldades, sua resistência em momentos tortuosos, sua paciência no cansaço e na fadiga, seu amor na celebração das etapas vencidas. Passar o mestrado ao seu lado foi, mais que vitória pessoal e profissional, vitória em casal.

Ao meu amado filho, que nasceu durante o mestrado e soube, mesmo que pequenino, entender e aceitar a ausência do “papai que te ama muito”.

Aos meus amigos que, sempre que precisei, estiveram lá e me ajudaram a chegar até aqui, sejam em estudos conjuntos, ensaios de apresentação, pesquisas etc.

Aos meus professores do Programa de Mestrado da UFSCar – Sorocaba – que me possibilitaram crescimento incomensurável. Pela didática e facilidade em falar em público, através de várias devolutivas de pais e alunos, sempre soube que fazia bem meu papel como professor. Hoje, posso dizer sem sombra de dúvidas, que sou bom matemático e que minha veia de pesquisador se aflorou.

A minha orientadora, Professora Doutora Silvia Maria Simões de Carvalho, que desde a primeira vista, na apresentação do Programa, tinha “certeza” que seria a minha orientadora. Sua dedicação, paciência, proximidade, assiduidade e compromisso são exemplos para mim enquanto professor e, sem você, não chegaria até aqui com tanta satisfação e certeza de dever cumprido.

Aos professores convidados que compuseram a banca de apresentação, pelo carinho ao ler meu trabalho, pelo profissionalismo em apontar sugestões que só tem a agregar, pela disponibilidade em avaliar e me ajudar a crescer ainda mais.

Enfim, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, estiveram presentes nesta etapa. Minha vitória é nossa vitória, pois sem vocês, nada disso seria possível!

“Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes.”

(Isaac Newton)

RESUMO

Nessa dissertação é mostrada a aplicabilidade da Teoria Moderna de Portfolio de Harry M. Markowitz, aliada a Pesquisa Operacional, na diversificação de ações em uma carteira de investimento, minimizando risco total do portfólio com um dado retorno esperado. Então, utiliza-se a Programação Linear para modelar a variância da carteira e o Método Simplex para determinar a carteira ótima. Em uma segunda etapa utiliza-se a Programação Quadrática para modelar a variância da carteira e implementa-se o modelo no software MATLAB. Diante desses resultados, discutem-se quais as vantagens e relevâncias desses resultados.

Palavras chave: Programação Linear. Método Simplex. Teoria Moderna de Portfolio de Markowitz.

ABSTRACT

It is shown in this dissertation the applicability of Harry M. Markowitz's Modern Theory, allied to Operation Research, in the diversification of actions in an investment portfolio, minimizing its total risk in a given expected feedback. So, Linear Programming is used in order to model the portfolio's variance, and the Simplex Method to determine the optimized portfolio. In a second step, Quadract Programming is used in order to model the portfolio's variance and the model is implemented in the software MATLAB. Based on the results, their relevance and advantages are discussed.

Key-words: Linear Programming. Simplex Method. Harry M. Markowitz's Modern Theory.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Ilustração de um Problema de Programação Linear e sua solução ótima	29
Figura 2 - Ilustração de um Problema de Programação Linear e sua solução ótima	30
Figura 3 - Ilustração de um Problema de Programação Linear com infinitas soluções ótimas	31
Figura 4 - Ilustração de um Problema de Programação Linear e região factível vazia	32
Figura 5 - Ilustração da região viável e da reta z do Problema de Programação Linear de maximização	33
Figura 6 - Ilustração do deslocamento da reta z na direção do vetor gradiente	34
Figura 7 - Ilustração da região viável e da reta z do Problema de Programação Linear de minimização	35
Figura 8 - Ilustração do deslocamento da reta z na direção contrária ao vetor gradiente	36
Figura 9 - Ilustração de uma distribuição normal de probabilidades	74
Figura 10 - Ilustração de uma distribuição normal de probabilidades dos possíveis retornos esperados, com desvio padrão dito alto	78
Figura 11 - Ilustração de uma distribuição normal de probabilidades dos possíveis retornos esperados, com desvio padrão dito baixo	79
Figura 12 - Gráfico das possíveis combinações dos ativos A e B, que formam as diferentes carteiras de investimento, e a fronteira eficiente para este portfolio	83
Figura 13 - Gráfico da influencia da correlação entre os ativos A e B no efeito de diversificação no portfolio e na fronteira eficiente.....	84
Figura 14 - Gráfico da linha de mercado de capitais e portfolio de mercado	85
Figura 15 - Janela de Covariância do Software MS Excel	87
Figura 16 - Janela de Parâmetros do Solver, do Software MS Excel	90
Figura 17 - Janela de Resultados do Solver, do Software MS Excel	92

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Organização do problema no formato Tableau	52
Tabela 2 - Tableau anterior ao pivoteamento	53
Tabela 3 - Tableau posterior ao pivoteamento	54
Tabela 4 - Forma padrão para o problema primal (a esquerda) e seu problema dual (a direita)	61
Tabela 5 - Forma padrão para o problema primal (a esquerda) e seu problema dual (a direita), em forma matricial	62
Tabela 6 - Dados iniciais e variação de cada ativo em 10 períodos distintos	86
Tabela 7 - Retorno esperado $E(R)$ para cada ativo e distribuição de investimento igualitária para cada ativo	87
Tabela 8 - Matriz de covariância entre os pares de ativos que comporão a carteira de investimento	87
Tabela 9 - Resultados do retorno esperado $E(R_{port})$ e o risco $Var(R_{port})$ do portfolio	88
Tabela 10 - Resultados dos percentuais de investimento ótimos W_i^* do retorno esperado E (R_{port}).....	91
Tabela 11 - Resultados do retorno esperado ótimo $E(R_{port})^*$ e o risco ótimo $Var(R_{port})^*$ do portfolio	91
Tabela 12 - Quadro comparativo dos percentuais de investimento ótimos W_i^* do portfolio .	91
Tabela 13 - Impacto do relaxamento das restrições sobre a função objetivo	92
Tabela 14 - Impacto do relaxamento das restrições sobre a função objetivo	93

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	12
1. BREVE HISTÓRICO.....	14
1.1 – Breve histórico da Pesquisa Operacional.....	14
1.2– Breve histórico da Programação Linear.....	16
2. O PROBLEMA DE PESQUISA OPERACIONAL E O PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR	19
3. PROGRAMAÇÃO LINEAR	24
3.1 – Formas de um problema de Programação Linear	25
3.2 – Notação Matricial	27
3.3 – Solução Ótima através do Método Gráfico de Problemas de Programação Linear.....	28
3.3.1 – Tipos diferentes de gráficos de solução de problemas de Programação Linear....	30
3.3.2 – Exemplos.....	32
3.4 – Soluções Básicas.....	37
3.5 – Teorema Fundamental da Programação Linear.....	40
4. O MÉTODO SIMPLEX.....	44
4.1– Pivoteamento	45
4.2– Pontos Extremos Adjacentes	47
4.2.1 – Determinação de que variável sairá da base.....	48
4.3– Determinação da solução factível ótima	49
4.4– O Método Simplex como Tableau	51
4.5– Pivoteamento no tableau	52
4.6 – Problemas de Programação Quadrática	55
4.7 – Exemplos	55
5. TEORIA DA DUALIDADE	61
5.1– Relação com o Método Simplex	64
5.2 – Análise de Sensibilidade	66
6. O PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO DO INVESTIMENTO DE CAPITAL.....	68
6.1 – Breve Histórico do Problema de Maximização do Investimento de Capital.....	68
6.2 – Conceitos Básicos para a Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz.....	70
6.2.1 – Definições e conceitos em finanças	71
6.2.2 – Tópicos de Estatística Básica	72

6.3 – A Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz.....	74
6.3.1– Aversão ao risco	75
6.3.2 – Cálculo da taxa esperada de retorno para uma carteira de investimentos.....	76
6.3.3 – Variância e Desvio Padrão para um ativo em uma carteira de investimentos	77
6.3.4 – Covariância e correlação dos retornos esperados de ativos numa carteira de investimentos.....	79
6.3.5 – Variância de uma carteira de investimentos.....	80
6.3.6 – Teoria de Portfolio de Markowitz: Fronteira Eficiente	82
7. APLICAÇÃO DA PROGRAMAÇÃO LINEAR NA SELEÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTO	86
CONCLUSÃO.....	94
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	95
ANEXOS	99
ANEXO A – MODELO DE PROGRAMAÇÃO UTILIZADO NO MATLAB	100

INTRODUÇÃO

O conceito de Otimização é estudado pelo homem desde muito tempo e está ligado a ideia de alocar recursos escassos entre atividades competitivas, da melhor maneira possível, a fim de se atingir ao objetivo esperado.

Desde seu surgimento, credita-se a ela o aumento da produtividade econômica em diversos países, através de processos e modelos que têm grande impacto na melhoria da eficiência das organizações, e é aqui que entra a matemática.

A fim de se encontrar processos, ferramentas e modelos que permitam tomar decisões baseadas em lógica (e não na intuição), a matemática cada vez mais auxilia esse procedimento. Uma das formas encontradas é a Programação Linear.

A Programação Linear utiliza-se de modelos matemáticos, fazendo uso de funções e equações lineares, para planejar atividades que permitam se chegar ao resultado ótimo.

Em 1947, na busca de métodos para solucionar problemas de Programação Linear, George Dantzig desenvolveu o Método Simplex. Nos dias de hoje, esse processo é considerado extremamente eficiente e usado rotineiramente para solucionar problemas de grande porte, com utilizações de computadores. Sua grande aceitação deve-se a sua capacidade de se alcançar soluções num tempo cabível e na sua forma simples de proceder.

Dentre os inúmeros problemas de Programação Linear que podem ser resolvidos através do Simplex, a otimização de carteiras de investimentos vem ganhando área nos últimos tempos, com a adesão de investidores à utilização de técnicas científicas que visam aprimorar suas decisões.

Em 1952, Harry M. Markowitz publicou seu estudo sobre teoria moderna de finanças, o *Portfolio Selection*, considerado o primeiro trabalho a modelar matematicamente a ideia de diversificação de investimento, buscando a maximização do retorno esperado do portfolio na minimização do impacto do risco, levando-o a, em 1990, receber o Prêmio Nobel de Economia.

O objetivo dessa dissertação é mostrar a aplicabilidade da Teoria Moderna de Portfolio de Markowitz, aliada a Programação Linear, na diversificação de ações em uma carteira de investimento, minimizando o risco da carteira para se atingir um retorno esperado mínimo.

No capítulo 1 é feito um breve relato sobre a história da Pesquisa Operacional e da Programação Linear. Nele é descrito o contexto histórico de seu surgimento e trás a evolução

desses conceitos até os dias atuais, através dos trabalhos de seus personagens mais importantes.

No capítulo 2 são descritos os problemas de Pesquisa Operacional e de Programação Linear. Aqui são tratadas suas definições e tipos, bem como os passos para se modelar um problema.

Dentre os principais tipos de problemas de Pesquisa Operacional estão os de Programação Linear. Sua definição, seus tipos e forma matricial estão presentes no capítulo 3.

Os modelos matemáticos de Programação Linear são determinados pela maximização ou minimização da função objetivo, sujeito a equações lineares, sendo possível encontrar sua solução pelo método gráfico, quando possuem até três dimensões, discutido no capítulo 4.

No capítulo 5, aborda-se que em problemas reais, com muitas variáveis e restrições, não é possível buscar as soluções através da representação gráfica da situação. Desse modo define-se o que é Solução Básica e Solução Básica Factível e, através do Teorema da Equivalência de Pontos Extremos e Soluções Básicas é demonstrada a relação entre os pontos extremos da região factível e as soluções básicas factíveis.

Para casos de duas ou três variáveis de decisão, pode – se usar o método gráfico para se resolver problemas de Programação Linear. Já em problemas reais com mais variáveis faz-se necessário encontrar uma metodologia capaz de resolver tais problemas, de forma eficiente. Entre várias outras se tem o Método Simplex, definido e demonstrado no capítulo 6.

No capítulo 7, verifica-se que todo problema de Programação Linear tem associado a si outro problema de Programação Linear, chamado de dual e em situações que a quantidade de cálculos realizados no Simplex é grande, pode-se reduzi-lo substituindo o modelo primal pelo modelo dual.

No capítulo 8, é feito um breve histórico da maximização do investimento de capital, trazendo desde o surgimento do comercio, baseado em trocas de produtos, até os dias de hoje, com a economia virtual. Apresenta também a evolução da Matemática Financeira até o surgimento da Teoria Moderna de Portfolios de Harry M. Markowitz.

Os conceitos estatísticos básicos para essa teoria, bem como as definições e termos em finanças, para se entendê-la, estão presentes no capítulo 9.

O capítulo 10 trás o desenvolvimento da Teoria Moderna de Portfolios de Markowitz, o capítulo 11 descreve uma aplicação da Programação Linear na seleção de carteiras de investimento, com base em 5 ativos e as Conclusões são trazidas posteriormente.

1. BREVE HISTÓRICO

1.1 – Breve histórico da Pesquisa Operacional

O termo Pesquisa Operacional vem do inglês *operational research*, e foi utilizado pela primeira vez nos primórdios da Segunda Guerra Mundial. Em razão do empreendimento da guerra, houve escassez de recursos em diversas atividades militares. Assim, foi necessário determinar a melhor utilização desses recursos e sua alocação eficiente. Então, os comandos militares britânico e norte – americano convocaram pesquisadores para resolver estes problemas de forma científica. Dessa forma, foi solicitada a realização de pesquisas sobre operações militares [1].

O surgimento da expressão Pesquisa Operacional foi atribuído ao superintendente inglês A. P. Rowe que, na Inglaterra, em 1934, durante a segunda guerra mundial, coordenava equipes para examinar a eficiência de técnicas de operações com radares. Tais grupos de cientistas foram liderados pelo grupo do físico inglês Blackett [2].

Blackett chefiou um grupo de matemáticos, físicos e engenheiros com o objetivo de estudar os problemas de estratégias e táticas associadas à defesa do território, avaliando e reposicionando os radares para vigiar os espaços terrestre e aéreo [2]. Esta equipe ficou conhecida como Círculo de Blackett. E a convocação deste grupo marcou a primeira atividade formal de Pesquisa Operacional [3].

O uso dessa nova ferramenta, o radar, possibilitou grandes vitórias para o lado dos aliados, como na vitória da Batalha aérea nos céus da Grã-Bretanha, na Batalha do Atlântico Norte, administrando operações antissubmarinos e de comboio, e na Campanha Britânica do Pacífico [1].

Após o fim da Segunda Guerra, a Pesquisa Operacional evoluiu rapidamente, onde equipes de analistas operacionais começaram a se expandir na Grã-Bretanha, Canadá, Austrália e Estados Unidos, dando continuidade as pesquisas operacionais, mas nesse momento, a operações não militares [5].

Ainda com enfoque militar, os Estados Unidos foram os responsáveis pela propagação da Pesquisa Operacional no ocidente. Isso se deve a equipe de cientistas coordenada pelo economista Marshall Wood e pelo matemático George Dantzig que, em 1947, implantaram o projeto SCOOP (Scientific Computation of Optimal Programs), no Pentágono, com o objetivo de apoiar decisões de operações na força aérea americana [2].

Durante esse projeto, Dantzig desenvolveu, testou e formalizou o Método Simplex para resolver problemas de Otimização Linear (Programação Linear), com base nos trabalhos de Kantorovich [1] que, em 1939, formula um problema de Programação Linear em seu “Métodos Matemáticos de Organização e Planejamento da Produção”, mas não apresentou um algoritmo de resolução [4].

A partir da década de 50 os setores públicos e privados demonstraram grande interesse na Pesquisa Operacional, aplicando este conhecimento em diversos setores, como mineração, metalurgia, construção civil e militar, têxtil, farmacêutico, bancário, transportes, coleta de lixo, transporte e polícia. Desde então, outros ramos industriais, financeiros, produção e logística vem aplicando tais conhecimentos, incluindo indústrias de alimentos, automóveis, aviação, computadores, eletrônica, metalurgia, mineração, mísseis, móveis, papel, petróleo, telecomunicações, transportes, bancos, seguradoras, hospitais, bibliotecas, sistemas judiciais, agencias de turismo, energia, esportes, transito, governamentais etc [2].

São dois os fatores que possibilitaram o desenvolvimento da Pesquisa Operacional. Em primeiro lugar, destaca-se a forte concorrência no período pós-guerra, levando as empresas a uma notória melhoria na gestão e planejamento empresarial. Outro destaque cabe à evolução computacional e nas telecomunicações, acarretando na facilidade de se resolver uma grande gama de problemas reais, sendo esses cada vez mais complexos [3].

Em 1952, foi fundada a sociedade científica americana de Pesquisa Operacional (ORSA – *Operations Research Society of America*), onde o foco de trabalho dos cientistas americanos estava voltado em modelos e métodos matemáticos com ênfase em diversos temas, como teorias de estoques, substituições de equipamentos, teorias de filas, programação de tarefas em máquinas, teoria dos jogos, fluxos em redes e otimização linear.

Em 1953, foi criada a sociedade inglesa de Pesquisa Operacional (ORS – *Operations Research Society*), onde cientistas ingleses tinham como foco de trabalho estudos de caso ou problemas específicos. Também neste mesmo ano foi fundado, nos Estados Unidos, a TIMS – *The Institute of Management Sciences*.

Em 1957 foi realizada a primeira conferência internacional de Pesquisa Operacional, onde se destaca essa diferença de foco entre os cientistas operacionais ingleses e americanos.

No Brasil, a Pesquisa Operacional foi se instalando aos poucos, vindo primeiramente às Universidades, como na Escola Politécnica da USP, no curso de Engenharia de Produção (1957), e no ITA no curso de mesmo nome, em 1959. Esse curso, tanto na USP quanto no

ITA, foi contemplado com as seguintes disciplinas, relacionadas à Pesquisa Operacional: Programação Linear, Teoria dos Jogos, Simulação, Teoria de Filas e Estatística.

Na década de 60, a Pesquisa Operacional entra nas Universidades, em cursos de pós-graduação. Mas, a partir da década de 70, era contemplada em cursos de graduação [2]. Nesse período, com a atuação de vários professores no setor privado, teve início uma leve parceria entre Universidade e Indústria, possibilitando à Pesquisa Operacional resolver alguns problemas reais. O primeiro grupo de dessa ideia no Brasil, voltado a empresas, foi estabelecido na Petrobrás, em 1965 [5].

Em 1968, a Pesquisa Operacional inicia-se, de fato, no Brasil, num grande simpósio, realizado no ITA em São José dos Campos. Logo após é fundada a SOBRAPO (Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional) [2].

Diante de várias definições, pode-se dizer que a Pesquisa Operacional, é a “arte de aplicar técnicas de modelagem a problemas de decisão por meio de métodos matemáticos e estatísticos, buscando encontrar uma solução ótima de maneira sistêmica”, levando em consideração a interação com o ambiente, na modelagem de um problema [6].

A Pesquisa Operacional possui várias partes, sendo a Programação Linear um dos ramos mais desenvolvidos e utilizados. Onde se caracteriza por utilizar métodos de cálculo baseado na execução repetida de operações relativamente simples, beneficiando-se do advento do computador [4].

A seguir, apresenta-se um breve histórico sobre a Programação Linear.

1.2– Breve histórico da Programação Linear

A Pesquisa Operacional, consolidada a partir da Segunda Guerra Mundial, vem estruturar processos e, a partir da modelagem matemática, encontrar, de maneira sistêmica, a melhor solução. Nesta perspectiva, caracterizado por utilizar procedimentos de cálculos baseados na execução repetida de operações relativamente simples, beneficiando-se do advento do computador, surge a Programação Linear [4].

Para se encontrar a solução de problemas modelados através da Programação Linear, Dantzig desenvolve, com base nos trabalhos de Kantorovich, o Método Simplex. Este método se constitui de um algoritmo de resolução de problemas de Programação Linear, sendo o primeiro a reconhecer que um programa de planejamento poderia ser expresso por um sistema

de inequações lineares e sendo o primeiro a apresentar, na forma de expressão matemática explícita, um critério para a seleção do melhor plano, a função objetivo [6].

Além dos trabalhos de Kantorovich, outros dois desenvolvimentos, ambos do início do século XX, estimularam o crescimento da Programação Linear. O primeiro ocorreu com John von Newman, que publicou em 1928 o “Teorema Central da Teoria dos Jogos” onde a composição jogos–economia estimulou um maior interesse em Programação Linear e, em 1944, publicou “*Theory of Games and Economic Behavior*”, onde formula um modelo de Programação Linear dinâmica. Já o segundo ocorreu com Leontief, em 1936, onde em seu artigo “*Quantitative input and output Relations in the Economics Systems of the United States*”, ele apresenta um modelo matricial linear que posteriormente veio a ser utilizado na forma de problema de Programação Linear [4].

Em 1949, T. C. Koopmans organizou a célebre conferência *Cowles Commission for Research in Economics*, sobre Programação Linear. A partir desta conferência surgiram publicações com o nome *Cowles Commission Monograph* e, no volume XIII, foi publicado o trabalho de Dantzig. [3] Koopmans sugere o termo Programação Linear a Dantzig [2]. Com a publicação do método, a Programação Linear tornou–se a primeira técnica explícita e, até hoje, é a técnica fundamental das Pesquisas Operacionais.

Em 1951, H. W. Khun e A. W. Tucker apresentam o trabalho “*Non Linear Programming*” no “*Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*”, que estendem os resultados de Lagrange aos sistemas de inequações. Este constitui o marco fundamental na Programação Linear. Tucker também obteve os primeiros resultados no desenvolvimento da teoria de dualidade.

Ainda em 1951, Dorfman publicou o seu “*Theory of Firm*”, onde expressou através de Programação Linear a teoria econômica da empresa em condições de concorrência perfeita e em monopólio.

Já em 1952, ocorreu a primeira solução bem sucedida de um problema de Programação Linear de grande porte, com o auxílio do computador do National Bureau of Standards, utilizando uma matriz quadrada de ordem 100. [3]

Nesta época, havia várias dificuldades para se resolver um problema de Programação Linear: encontrar uma solução básica inicial, que posteriormente reconheceu–se que era o mesmo que encontrar uma solução ótima de um problema de Programação Linear auxiliar; resolver problemas que envolviam degeneração, tema muito discutido em várias publicações na época; reduzir a área de memória e o número de operações aritméticas sem causar

limitações de uso, onde com o “Método Simplex Revisado”, Dantzig e Orchard – Hays facilitam a implementação computacional do Método Simplex.

Em 1955, a parametrização do vetor de recursos e dos coeficientes da função objetivo tornam-se extensões importantes do problema, amplamente usadas em 1957.

A partir de 1957, usam-se as técnicas de inversão de matrizes introdução de um algoritmo dual e, com o desenvolvimento de programas computacionais, as técnicas de álgebra foram cada vez mais consideradas e melhoradas.

Em 1958, Dorfman, Samuelson e Solow publicaram “Linear Programming and Economics Analysis”, onde se fez uma aplicação de Programação Linear em Economia, fazendo com que estas aplicações se tornassem parte integrante do desenvolvimento da Economia desde então.

Klee e Minty, em 1972, mostraram através de um exemplo que o algoritmo simplex pode apresentar um crescimento exponencial no tempo de computação. [3] Klee e Minty demonstram que por um programa linear cuja região de viabilidade é uma perturbação do hipercubo unitário e para o qual o algoritmo simplex seria obrigado a percorrer todos os 2^n vértices para encontrar o ótimo. [6]

Na busca de um método que tivesse um crescimento polinomial no tempo de computação, através do trabalho de Kachian em 1979, e Karmarkar em 1984, surge o algoritmo de pontos interiores, utilizado frequentemente em problemas de grande porte [4].

Muitos problemas de ordem prática, principalmente nas áreas de manufatura, transporte, construção, telecomunicação, planejamento financeiro, economia, entre outras, são descritos necessariamente através de funções lineares. Assim, a Programação Linear se constitui de um planejamento de atividades para se encontrar um resultado ótimo, atingindo o objetivo da melhor maneira possível [1].

No capítulo 2, será descrito o problema de Pesquisa Operacional e o problema de Programação Linear.

2. O PROBLEMA DE PESQUISA OPERACIONAL E O PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Os problemas tratados em Pesquisa Operacional têm como objetivo maximizar ou minimizar quantidades, podendo ser formulados nas mais diversas áreas, como nos negócios (indústria, economia e administração), em problemas físicos (velocidade e distância percorrida), retorno de investimento, planejamento governamental (bem estar social), entre outros [7].

É importante salientar que com o avanço a tecnologia e da computação, o tamanho dos problemas de Pesquisa Operacional tem aumentado cada vez mais.

Nos dias de hoje pode-se classificar os problemas de Pesquisa Operacional em três classes [7]:

- Problemas de pequena escala – possuem em média cinco ou menos incógnitas e restrições e podem ser resolvidos manualmente ou por meio de um software não muito sofisticado;
- Problemas de escala intermediária – possuem em média de cinco a cem (ou até mesmo mil) incógnitas e restrições e podem ser resolvidos por meio de um software com programação matemática básica, em um computador pessoal;
- Problemas de grande escala – possuem milhares ou até milhões de incógnitas e restrições e podem ser resolvidos com softwares sofisticados, instalados em computadores mais potentes.

Os passos a seguir vêm sintetizar as fases usuais do estudo em Pesquisa Operacional, na elaboração e resolução de problemas reais e sua execução [1]:

1- Formular o problema a partir de uma coleta de dados

Inicialmente os problemas surgem de forma vaga e imprecisa, exigindo do pesquisador operacional a capacidade de sistematizar, selecionar e organizar ideias, a fim de definir um enunciado preciso, referente ao problema.

Nesse enunciado, é necessário conter a definição do objetivo, sendo esse o mais específico possível.

Para formular tal enunciado faz-se necessário uma coleta de dados, buscando informações relevantes sobre o problema. Essas informações vêm para auxiliar o

entendimento sobre o problema e para fornecer o caminho de construção do modelo matemático, que será formulado no próximo passo.

2- Construção do modelo matemático

Uma vez construído o enunciado do problema, devemos reescrevê-lo de forma conveniente para analisá-lo. Então escreveremos um modelo da situação estudada.

Define-se modelo como uma representação simplificada da realidade [5]. Dentre os vários tipos de modelos que existem, como as maquetes, os organogramas, os matemáticos, entre outros, a Pesquisa Operacional faz uso deste último. Assim, utiliza-se a escrita matemática, com símbolos e números, para escrever o modelo que representa o objeto de estudo.

O modelo matemático de um problema é representado através de expressões matemáticas e de um sistema de equações, que descrevem a essência do caso em análise.

Dessa forma, assumindo que todas as variáveis de interesse podem ser quantificadas [8], ou seja, se tivermos n variáveis quantificáveis, elas serão representadas na forma de variáveis de decisão (incógnitas cujos valores serão encontrados da solução do modelo), podemos relacionar essas variáveis para escrever uma função que represente o objetivo a ser alcançado, isto é, a função objetivo do modelo.

Todas as restrições que podem ocorrer com os valores das variáveis de decisão são escritas através de um sistema de equações e/ou de inequações. São as restrições do modelo. Os coeficientes das equações / inequações da restrição recebem o nome de parâmetro.

Determinar os valores apropriados para cada parâmetro é algo criterioso e desafiador. Sendo assim, uma coleta de dados minuciosa e bem feita é fundamental para a estimativa desses valores.

Um modelo matemático, em Pesquisa Operacional, assume basicamente o seguinte formato [8]:

$$z = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; y_1, y_2, y_3, \dots, y_n),$$

onde

z é a função objetivo;

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ é um sistema de variáveis sujeitas ao controle;

$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ é um sistema de variáveis não sujeitas ao controle;

São vários os fatores que mostram como é vantajoso um modelo, em vista de uma descrição verbal, para representar um problema. Primeiramente facilita na interpretação do

problema, uma vez que o modelo apresenta o problema de forma amplamente concisa, fazendo com que a compreensão geral do problema seja facilitada. Nisso, importantes relacionamentos de causa–efeito podem ser percebidos, indicando os dados que são realmente importantes na análise. Em segundo lugar, o modelo facilita o tratamento do problema, pois proporciona uma análise global, inter–relacionando todas as variáveis de forma simultânea. E sua forma matemática possibilita o uso de técnicas matemáticas e a implementação de softwares para a análise do mesmo [1].

Dentre os vários tipos de problemas matemáticos, como a Programação Linear, os Problemas sem Restrição e os Problemas Limitados (estes dois últimos são Programações Não Lineares) [7], um tipo particularmente importante são os problemas de Programação Linear, onde tanto a função objetivo quanto ao sistema de equações e/ou inequações das restrições são escritos em termos de funções (equações ou inequações) lineares [4].

Sua importância vem da facilidade encontrada para modelar uma série de problemas reais, exigindo esforço menor, em comparação com os problemas não lineares. Sua matemática apresenta–se de forma mais amena, sua teoria é vasta, dando boa sustentação e suporte, e a computação é mais simples para a implementação [7]. Também existem muitos algoritmos de Programação Linear já definidos, para vários tipos de problemas, mostrando sua popularidade na modelagem, já que são na maioria das vezes menos difíceis de definir. Como exemplos temos os problemas de misturas (gerar novos produtos, com características desejadas, combinando diversos materiais obtidos na natureza), problemas de transporte, transbordo e designação (transporte ou distribuição de produtos ao mercado consumidor, a partir dos meios de produção), problemas de planejamento da produção, problemas de programação de projetos (determinação da ordem de realização de um conjunto de atividades), problemas de gestão financeira (como o fluxo de caixa) [9], problemas de meio ambiente (como o controle da poluição), problemas de corte e empacotamento (como minimização de perda de material), entre outros [2].

3- Determinação de uma solução a partir do modelo

O próximo passo consiste em, a partir do modelo matemático, desenvolver um método para encontrar soluções para o problema onde, na maioria das vezes utiliza–se um software de auxílio (como por exemplo, o Solver do Excel, o LINDO, o CPLEX – para problemas de Programação Linear e Não Linear, o PROMODEL – para simulações e o ARENA) e um dos

vários métodos matemáticos disponíveis (como por exemplo, o Método Simplex, a Teoria de Grafos e a Teoria das Filas) [1] e [5].

Um tema importante a se refletir é que tipo de solução está se encontrado: uma solução ótima ou uma solução “melhor possível para o modelo”. Entende-se que o modelo formulado para o problema é uma representação ideal da realidade, mas não uma representação que a reflete perfeitamente. Dessa forma, a solução encontrada, dita ótima, provavelmente é a melhor solução possível, uma vez que é necessário realizar uma análise de pós-otimalidade (análise feita após se encontrar a solução ótima) para se verificar os impactos e as consequências ao se implementar tal solução [1] e [8].

Para se realizar a análise de pós-otimalidade, geralmente utilizam-se as planilhas, pelas facilidades em acesso e interatividade, onde se verificam as consequências à solução ótima a partir de mudanças no modelo. É válido realizar tais testes para compreender o comportamento do modelo em diferentes contextos e comprovar sua real validade [1].

4- Teste do modelo e aprimoramento, se necessário.

Uma vez construído o modelo matemático e encontrado sua solução ótima, invariavelmente este pode conter falhas, uma vez que fatores ou inter-relacionamentos relevantes não foram considerados totalmente no problema e alguns parâmetros podem não ter sido estimados adequadamente. Isso se mostra comum, dado a dificuldade de se conversar e de se compreender todos os aspectos e detalhes que possui um problema de Pesquisa Operacional. Sendo assim, o modelo e sua solução ótima devem ser demasiadamente testados, para se encontrar o maior número de falhas possível. Este processo é conhecido como validação do modelo [1], [5] e [8].

Alguns procedimentos podem ser adotados para a validação do modelo, como reexaminar a formulação do problema, desde a concepção do enunciado até a confecção do modelo matemático, bem como verificar se todas as expressões matemáticas estão corretamente dimensionadas. Também se podem observar sutilezas na solução obtida a partir de do apontamento dos erros procurados [8].

5- Preparação para a aplicação do modelo

Terminada a fase de testes e se validando o modelo e a solução ótima, isto é, a melhor solução possível para o problema, faz-se necessário preparar o ambiente para sua implementação.

Caso o modelo venha a ser usado repetida e continuamente, é importante se tomar alguns cuidados. Isso permitirá que eventuais mudanças não interfiram na rodagem do modelo. Deve-se instalar um sistema bem fundamentado, com o modelo, o método para se encontrar a solução desejada, a análise de pós-otimalidade e os procedimentos gerenciais para a implementação [1] e [8].

Esse sistema geralmente é executado em computadores e é auxiliado por outros sistemas de informação e bancos de dados, a fim atualizar e monitorar o modelo cada vez que ele for usado. Também pode ser usado um sistema de apoio a decisão, com relatórios gerenciais, cujo objetivo é obter informações para tomada de decisão [1].

A medida que as condições iniciais, que geraram o enunciado e o modelo do problema sofrerem mudanças ao longo do tempo, o processo deve ser atualizado, pois a validade da solução encontrada terminará assim que o modelo expirar sua validade. Isso é comum em casos reais. Portanto a implementação do modelo deve ser mantida sob controle [8].

6- Implementação da solução ótima

Esta é a última fase do estudo em Pesquisa Operacional, onde se executa a solução final. Nesta fase obtêm-se os resultados de todo o estudo, colhendo seus benefícios.

Para uma implementação correta e a diminuição da probabilidade de falhas na execução do modelo, a equipe que trabalhou no estudo deve ter grande participação nesse momento. Esse ato garante que em eventuais falhas, uma ação corretiva possa ocorrer mais facilmente.

Faz-se importante uma boa organização dos documentos, visto que o uso do computador para a aquisição dos resultados pode gerar certas dúvidas na hora da implementação [1], [5] e [8].

3. PROGRAMAÇÃO LINEAR

O século XX foi um período muito importante na história recente da humanidade, que contou com grandes avanços científicos, dentre os quais um dos mais significativos foi o desenvolvimento da Programação Linear. Destacam-se, entre os fatos que comprovam a afirmação, que a Programação Linear preservou milhares, e até mesmo milhões de dólares de muitas indústrias em vários países. Também são muitos os artigos científicos produzidos desde então, destinados ao tema, contendo importantes aplicações, principalmente na parte de computação científica [1 e 3], como o problema da dieta (minimizar o custo de uma dieta diária, satisfazendo índices nutricionais), o problema do transporte (minimizar o custo total do transporte que atende centros distribuidores a partir de centros fornecedores), o problema da fabricação (alocação eficiente de recursos para a produção de produtos), o problema do armazenamento (comprar e vender o estoque de um produto, a fim de maximizar o lucro ao longo de um período de tempo) [7], entre outros.

Um problema de Programação Linear tem por meta maximizar ou minimizar quantidades, através da alocação de recursos, de forma a satisfazer um objetivo estabelecido. Isso quer dizer que, dentre várias atividades que competem entre si por recursos disponíveis, quer-se determinar o quanto será consumido por cada uma para que o objetivo seja atingido, da melhor forma possível [4 e 5]. Para isso são feitos modelos matemáticos, representados por funções lineares, maximizando ou minimizando a função objetivo (função linear que representa o objetivo a ser atingido), de acordo com as restrições do modelo (igualdades e/ou desigualdades lineares que expressam as condições do problema) [1, 4 e 7], com as constantes, ou parâmetros, e as variáveis de decisão do tipo não-negativo, a fim de determinar a melhor combinação de valores que as variáveis podem assumir (solução ótima para a função objetivo) [3].

Matematicamente temos [1, 3, 4 e 7]:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar (ou Minimizar)} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{Sujeito a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ & \dots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0. \end{array}$$

Nesse caso,

- z é o valor da medida global, ou seja, o valor ótimo função objetivo;
- x_j ($1 \leq j \leq n$) é um número real a ser determinado, chamado de variável de decisão, que representa o nível de atividade j , ou seja, é o melhor valor possível alocado para a atividade x_j ;
- c_j ($1 \leq j \leq n$) é uma constante real fixa, chamada de coeficiente da função objetivo.
- b_i ($1 \leq i \leq m$) é uma constante real fixa, chamada de termo independente, representando a quantidade do recurso i disponível para a atividade j ;
- a_{ij} é uma constante real fixa, chamada de coeficientes técnicos, que representa a quantidade do recurso i consumido por unidade de atividade j .

3.1 – Formas de um problema de Programação Linear

As formas de um problema de Programação Linear podem ser [4, 5 e 10]:

- Forma geral: consiste na maximização ou minimização da função objetivo, onde todas as restrições são do tipo menor ou igual, maior ou igual ou simplesmente igual, e as variáveis de decisão são do tipo não-negativo ou não positivo.

Matematicamente tem-se

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar (ou Minimizar)} & Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{Sujeito a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \{ \leq \text{ ou } \geq \text{ ou } = \} b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \{ \leq \text{ ou } \geq \text{ ou } = \} b_2 \\ & \dots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \{ \leq \text{ ou } \geq \text{ ou } = \} b_m \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \{ \leq \text{ ou } \geq \} 0 \end{array}$$

- Forma canônica: consiste na maximização da função objetivo, onde todas as restrições são do tipo menor ou igual, e as variáveis de decisão são do tipo não-negativo.

Matematicamente tem-se

$$\begin{array}{ll}
\text{Maximizar} & Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
\text{Sujeito a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
& \dots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
& x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0
\end{array}$$

- Forma padrão: consiste na maximização da função objetivo, onde todas as restrições são do tipo igual, e as variáveis de decisão são do tipo não-negativo.

Matematicamente tem-se

$$\begin{array}{ll}
\text{Maximizar} & Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
\text{Sujeito a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \dots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0
\end{array}$$

Pode-se deixar qualquer tipo de problema de Programação Linear na forma padrão. Assim, faz-se necessário converter as restrições de desigualdades em restrições de igualdades, equivalentes as primeiras, através da introdução de uma variável de folga ou de excesso. Após esse procedimento, tem-se um novo modelo do problema de Programação Linear, equivalente ao modelo original, mas de forma aumentada, pois o modelo original foi aumentado de algumas variáveis de folga ou de excesso [1 e 5].

Dessa forma, a desigualdade na restrição $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$ será convertida numa igualdade adicionando-se uma variável x_{n+1} , variável de folga, e obtém-se uma nova restrição, equivalente a anterior: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$, com $x_{n+1} > 0$.

Analogamente, a desigualdade na restrição $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$ será convertida numa igualdade subtraindo-se uma variável x_{n+1} , variável de excesso, e obtém-se uma nova restrição, equivalente a anterior: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1$, com $x_{n+1} > 0$ [10].

Com o auxílio de operações algébricas elementares, um problema de minimização pode ser transformado num problema de maximização multiplicando-se por (-1) o valor da função objetivo. Em outras palavras, Máximo de $Z = -$ Mínimo de Z , ou ainda [10],

$$\text{Máximo } \sum_{j=1}^n c_j x_j = -\text{Mínimo } \sum_{j=1}^n (-c)_j x_j.$$

3.2 – Notação Matricial

Um problema linear pode ser escrito em notação matricial, da seguinte forma [2 e 9]:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) = c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Os vetores c e $b \in \mathbb{R}^m$ e a matriz $Ax \in \mathbb{R}^{m \times n}$, com $x_{n \times 1}$, $c^T_{n \times 1}$ e $b_{m \times 1}$. Assim, os vetores tem o seguinte formato:

$$c^T = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Já a matriz $A_{m \times n}$ dos coeficientes ou matriz tecnológica tem a seguinte representação genérica:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Resolver esse problema linear nada mais é que encontrar o vetor x , tal que $x \in \mathbb{R}^n$.

Ainda este problema pode ser escrito na seguinte notação [9]:

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar} \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{Sujeito a} \quad \sum_{j=1}^n a_j x_j = b \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, n. \end{array}$$

3.3 – Solução Ótima através do Método Gráfico de Problemas de Programação Linear

Os modelos matemáticos que envolvem a Programação Linear são determinados pela maximização ou minimização da função objetivo, representada por uma função linear, e as igualdades e/ou desigualdades que compõe as restrições do modelo, são generalizadas do seguinte modo, formando um sistema linear:

- i. $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$;
- ii. $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$;
- iii. $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$.

Tanto os sistemas de equações como os sistemas de inequações lineares podem ser classificados em impossível, possível e determinado ou possível e indeterminado e assim serem resolvidos pelo método gráfico. Uma vez que as restrições do modelo de um problema de Programação Linear representa um desses sistemas, é possível resolvê-lo utilizando a mesma técnica [10].

De maneira prática, os problemas de Programação Linear apresentam muitas variáveis e restrições, não sendo possível empregar o método gráfico para se encontrar as soluções desejadas. No entanto, em problemas de pequeno porte com duas, ou até três variáveis de decisão, esse procedimento pode ser empregado [1 e 9].

Para efeito de estudo, a utilização desse método propicia a demonstração de conceitos importantes em Programação Linear como região factível, solução factível, valor ótimo da função objetivo e solução ótima do modelo [9].

Os passos a seguir permitem empregar o método gráfico em problemas de Programação Linear de pequeno porte [3]:

- Representar cada restrição de maneira geométrica, como uma reta ou uma região;
- Marcar os pontos de intersecção entre as retas ou regiões e verificar o polígono que representa as soluções possíveis;
- Representar a função objetivo de maneira geométrica, através de uma reta;
- Encontrar o vetor gradiente, que fornece a direção de maior crescimento da função objetivo;
- Deslocar a reta representada pela função objetivo, paralelamente a si, na direção oposta ao vetor gradiente (em casos de minimização de z), até encontrar o ponto ótimo.

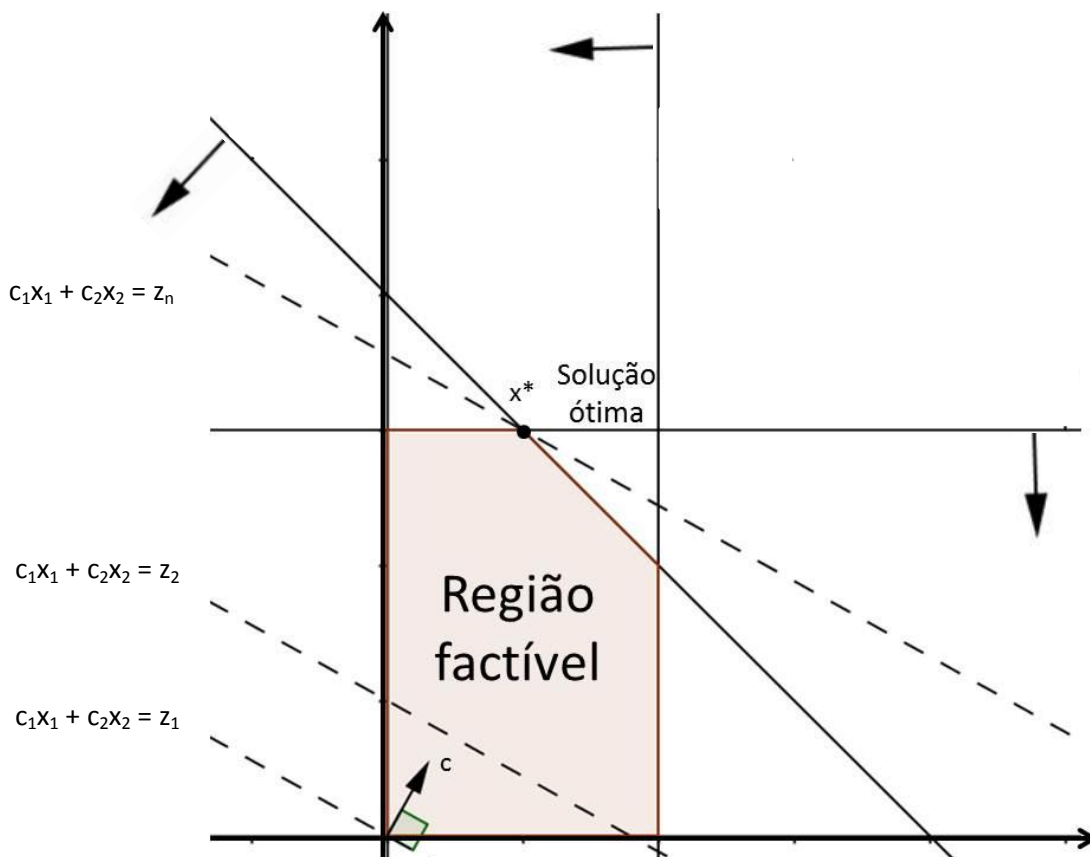
Assim, verifica-se a resolução de problemas de Programação Linear através do método gráfico, a partir dos exemplos a seguir.

Considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && z = c^T x \\ &\text{Sujeito a} && Ax = b \\ &&& x \geq 0. \end{aligned}$$

Pode-se perceber que a região factível consiste de todos os vetores de x que satisfaçam $Ax = b$, com $x \geq 0$. Dentre todos esses pontos, quer-se encontrar um ponto que represente o valor ótimo, aquele que maximiza z . Esse ponto tem o mesmo valor da função objetivo z , satisfazendo a equação $z = c^T x$, isto é, $\sum_{j=1}^n c_j x_j = z$. No problema proposto, o objetivo é maximizar a função, então a reta que representa $\sum_{j=1}^n c_j x_j = z$ deve se deslocar paralelamente a si na direção do vetor gradiente, até encontrar o ponto ótimo. Essa direção é c . Logo, essa reta é movida na direção de c tanto quanto possível, até encontrar os pontos da região factível [9].

Figura 1: Ilustração de um Problema de Programação Linear e sua solução ótima.



Fonte: Arenales et al, pag 58, adaptação pelo Autor.

Pela Figura 1, percebe-se que o ponto ótimo para x é atingido na reta $c_1x_1 + c_2x_2 = z_n$ e $z_n = z^*$, onde $z^* = c_1x_1^* + c_2x_2^*$. Percebe-se também, que a reta não pode mais ser movida na direção de $c = (c_1, c_2)$, pois isso faria com que se levasse a pontos fora da região factível.

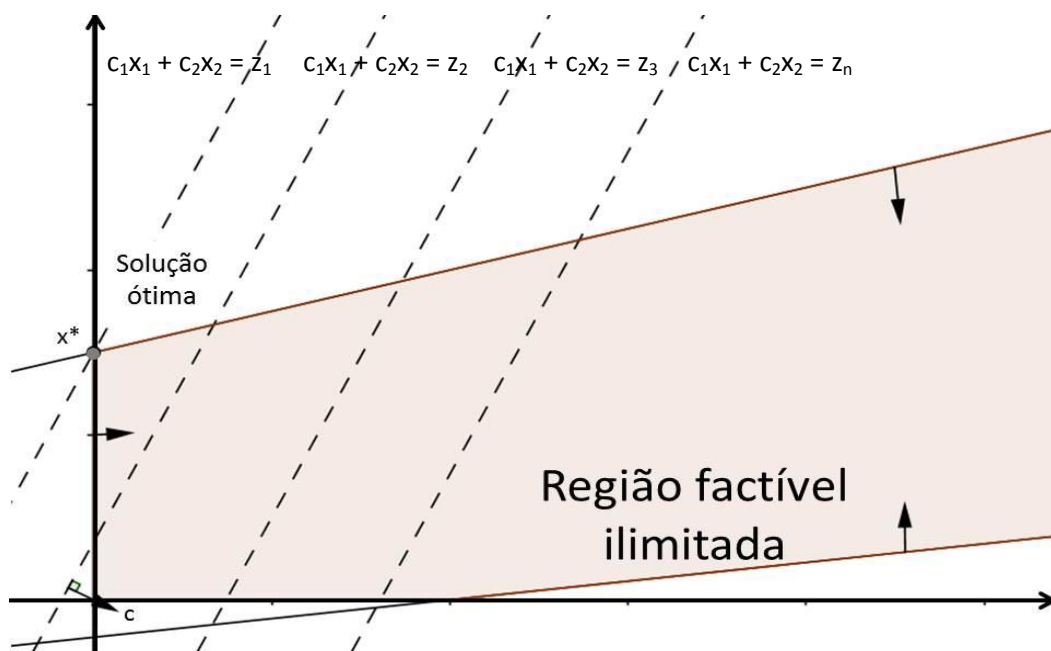
Analogamente, em problemas de minimização, a reta $z = c^T x$ deve ser movida na direção de $-c$, ou seja, na direção oposta ao vetor gradiente, tanto quanto possível, mantendo-se sempre na região factível [3 e 9].

Percebe-se também que o ponto ótimo x^* é um dos cinco vértices do polígono que forma a região factível limitada. Esses pontos são chamados de pontos extremos. Então, graficamente a solução será um dos vértices do polígono que forma essa região [9].

3.3.1 – Tipos diferentes de gráficos de solução de problemas de Programação Linear

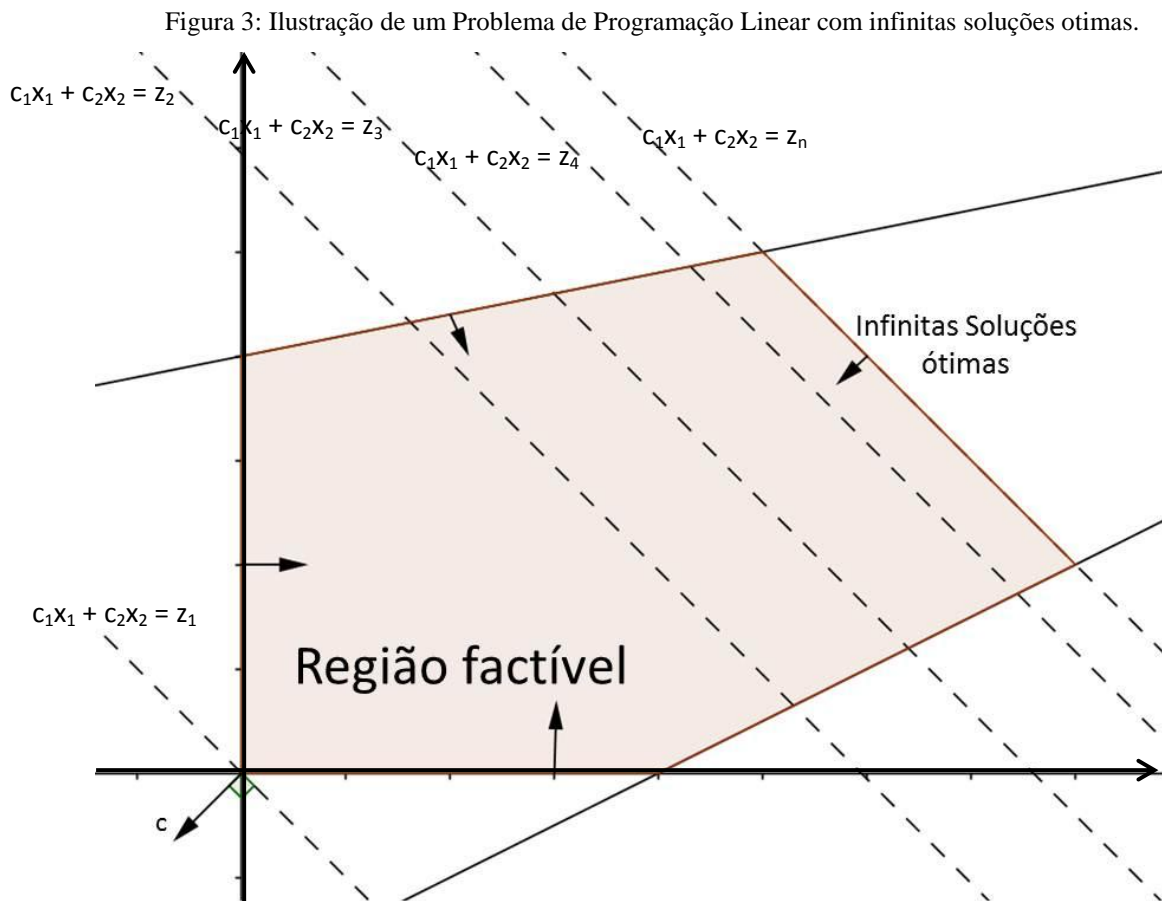
Um problema de Programa Linear, onde a região factível é ilimitada, pode ter solução ótima e única. Nesse caso a solução também estará no vértice da região factível. Como a Figura 2 representa um exemplo de minimização de z , então o deslocamento das retas paralelas a que representa a função objetivo segue na direção oposta ao vetor gradiente c , até encontrar o ponto ótimo [2, 9 e 10].

Figura 2: Ilustração de um Problema de Programação Linear e sua solução ótima.



Fonte: Arenales et al, pag 63, adaptação pelo Autor.

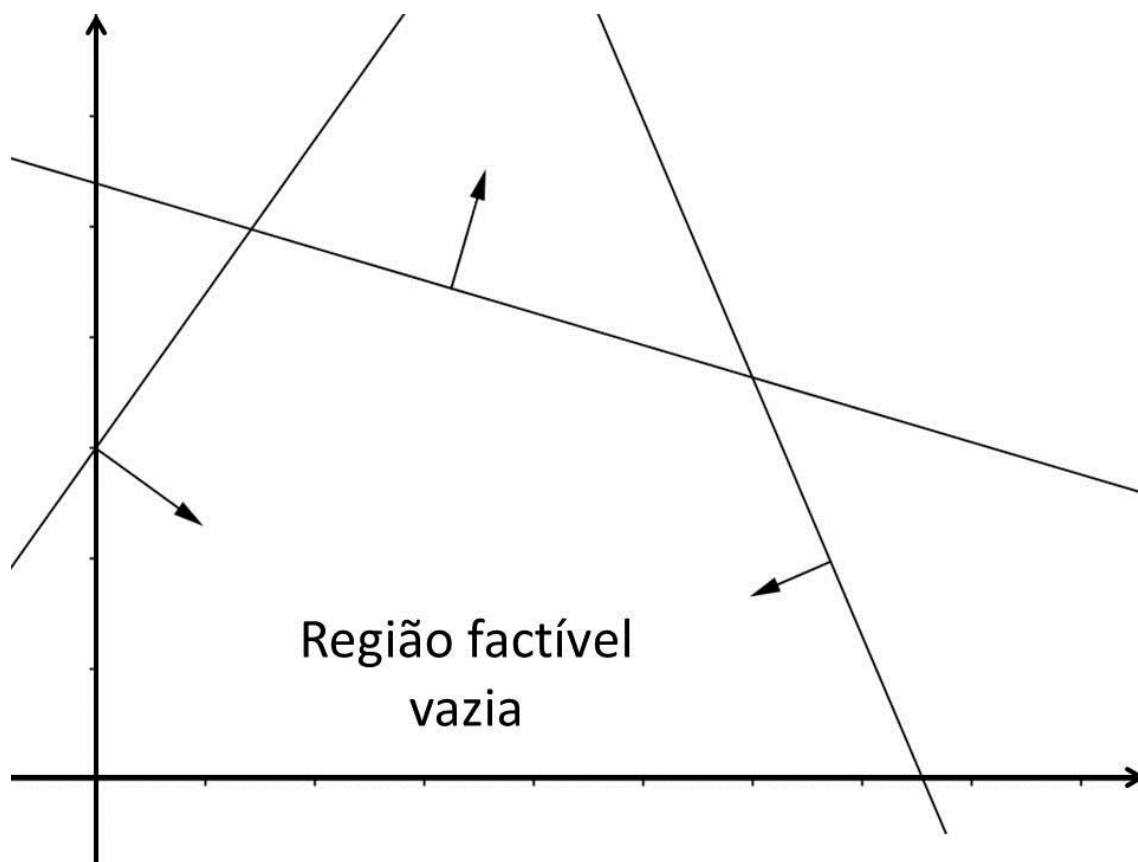
Um problema de Programação Linear onde a região factível é limitada pode ter solução ótima e não única. Nesse caso há no mínimo uma solução ótima no vértice da região factível. A Figura 3 representa um exemplo de minimização de z , com o deslocamento das retas paralelas a que representa a função objetivo na direção oposta ao vetor gradiente c , até encontrar o conjunto limitado de soluções ótimas [2, 9 e 10].



Fonte: Arenales et al, pag 64, adaptação pelo Autor.

Um problema de Programação Linear, onde a região factível é vazia, é classificado como infactível. Como as restrições são conflitantes, não existe região factível e tão pouco solução ótima, exemplificado graficamente pela Figura 4 [2, 9 e 10].

Figura 4: Ilustração de um Problema de Programação Linear e região factível vazia.



Fonte: Arenalese et al, pag 65, adaptação pelo Autor.

Portanto, nota-se que um problema de Programação Linear pode conter região factível ou não. Se a região factível for limitada, então a solução ótima poderá ser única. Nesse caso, há sempre uma solução ótima no vértice do polígono que forma a região. Caso a região factível for ilimitada, então poderá haver solução ótima em um dos pontos extremos ou múltiplas soluções factíveis [10].

3.3.2 – Exemplos

Os Problemas de Programação Linear de pequeno porte, com até três dimensões, podem ser resolvidos graficamente, conforme os exemplos a seguir [2].

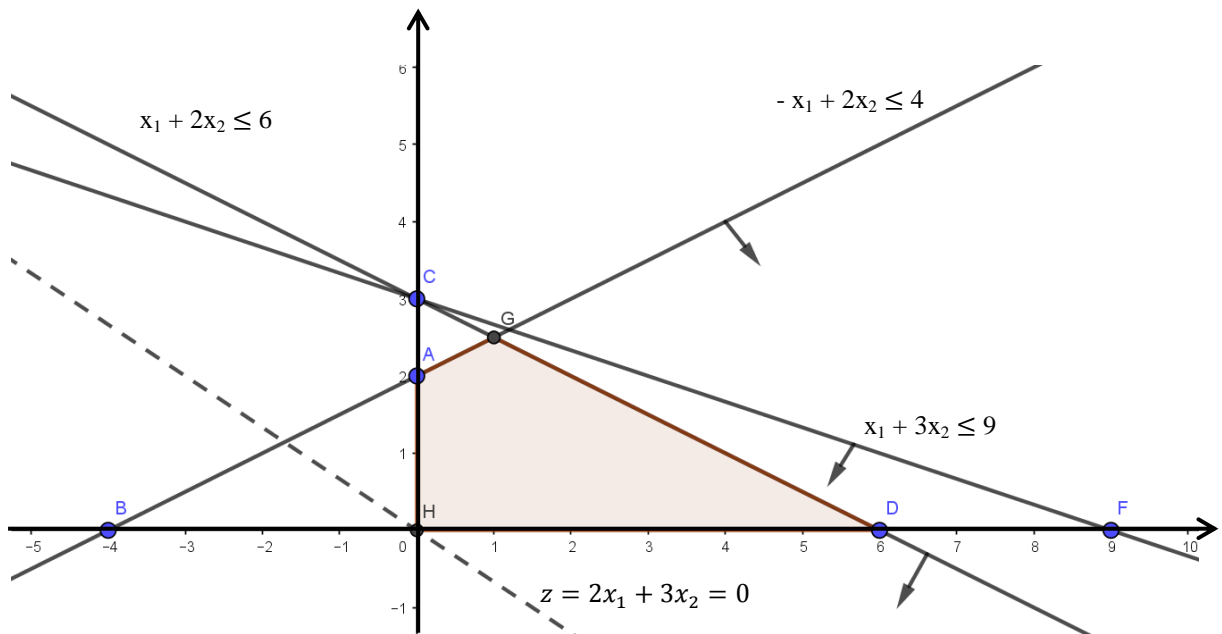
Exemplo 1 – Problema de maximização

Determinar graficamente a solução ótima do Problema de Programação Linear

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Sujeito a} \quad & -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ & x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Primeiramente, constrói-se o sistema cartesiano de eixos ortogonais x_1 X x_2 para determinar os valores de x_1 e x_2 que satisfazem as equações de restrição. Todos os pontos aceitáveis (x_1, x_2) localizam-se no primeiro quadrante em consequência das restrições de não negatividade. As restrições $-x_1 + 2x_2 \leq 4$, $x_1 + 2x_2 \leq 6$ e $x_1 + 3x_2 \leq 9$ estabelecem que (x_1, x_2) encontra-se abaixo ou sob si mesma. Dessa forma, determina-se o polígono AHDC formado pela intersecção das regiões factíveis, onde todos os pontos pertencentes ao interior e a fronteira dessa região satisfazem as restrições do problema. Também se constrói a reta $z = 2x_1 + 3x_2$.

Figura 5: Ilustração da região viável e da reta z do Problema de Programação Linear de maximização.



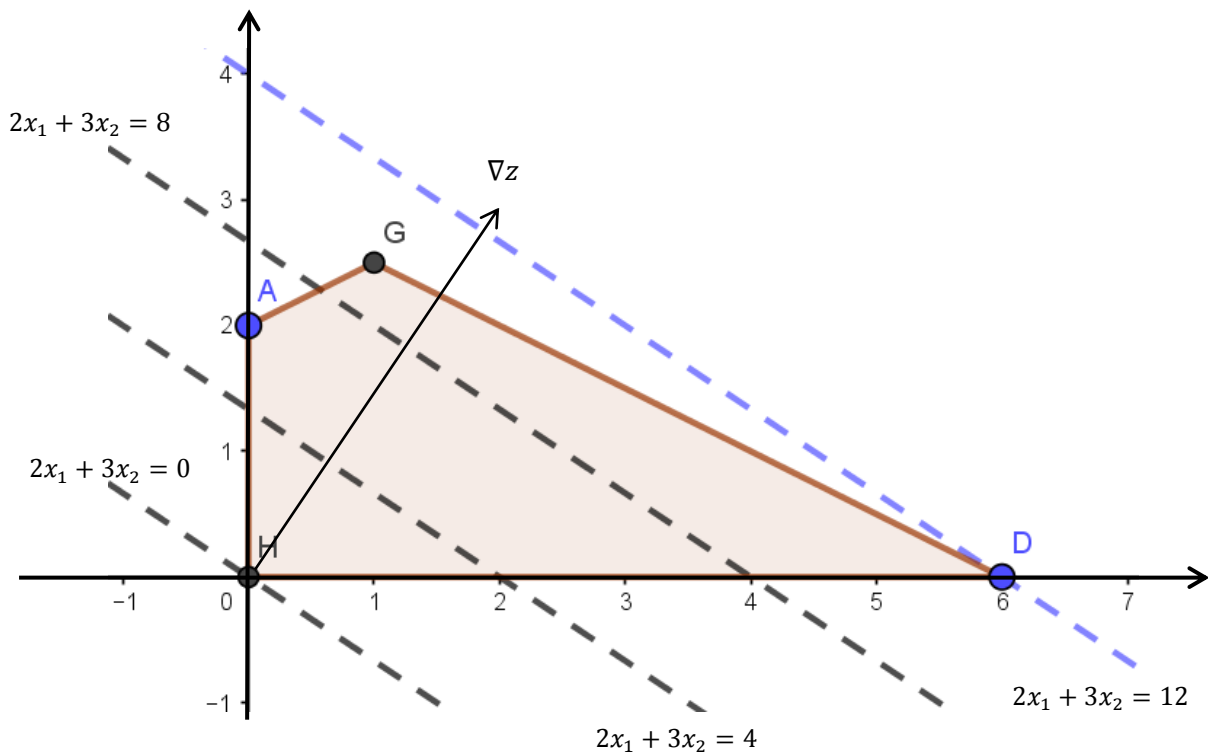
Fonte: Autor.

A Figura 5 ilustra o gráfico da situação proposta, indicando a região sombreada como o conjunto das soluções factíveis, isto é, dos pontos que satisfazem todas as restrições. Também está presente a reta da função objetivo $2x_1 + 3x_2 = 0$.

Para se determinar um ponto que maximiza o valor de $z = 2x_1 + 3x_2$, chamado de ponto ótimo, calcula-se ∇z , o vetor gradiente de z , tal que $\nabla z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2} \right) = (c_1, c_2) = (2, 3)$, e desloca-se a reta $2x_1 + 3x_2 = 0$, de nível zero $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / 2x_1 + 3x_2 = z_0\}$, no sentido e perpendicularmente ao gradiente de z , até encontrar o(s) último(s) ponto(s) de contato com a região factível.

A ilustração deste processo é mostrada pela Figura 6. Assim, conclui-se que o último ponto encontrado é o ponto $D = (6, 0)$, intersecção das retas $x_1 = 0$ e $x_1 + 2x_2 = 6$. O valor da função objetivo neste ponto é dado por $z = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 0 = 12 + 0 = 12$.

Figura 6: Ilustração do deslocamento da reta z na direção do vetor gradiente.



Fonte: Autor.

Neste caso tem-se que o problema tem solução factível ótima única $x^* = (6, 0)$ e valor ótimo da função objetivo $z^* = 12$.

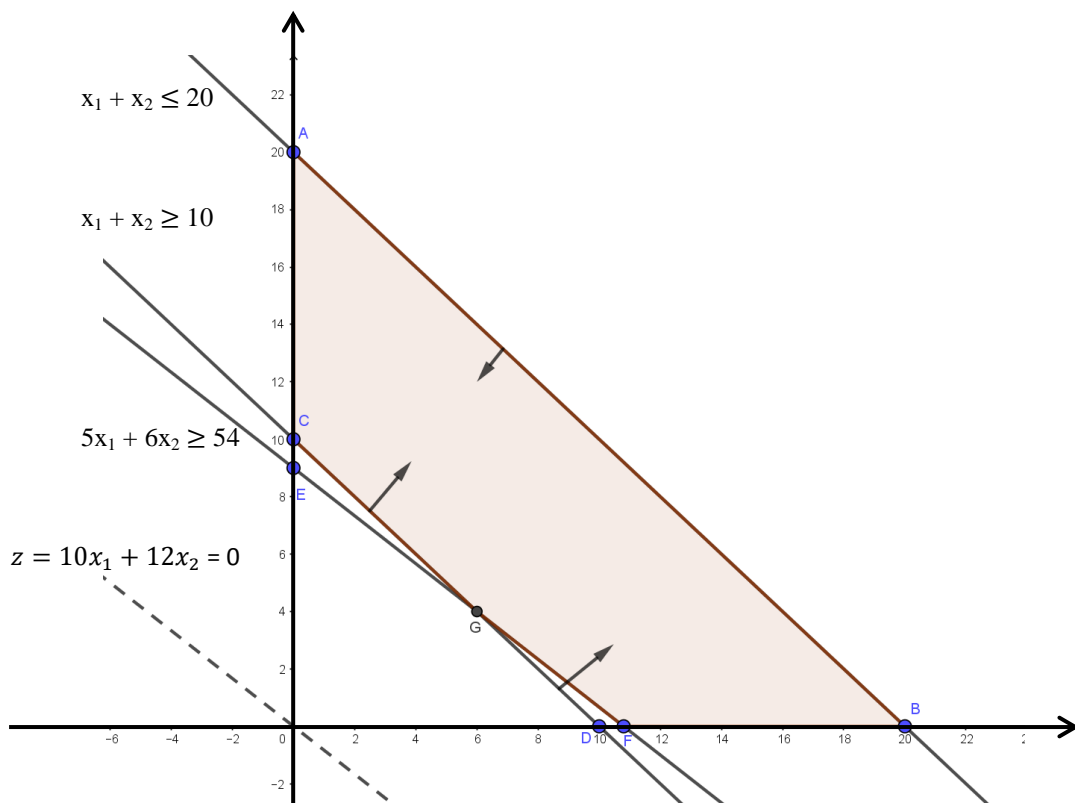
Exemplo 2 – Problema de minimização

Determinar graficamente a solução ótima do Problema de Programação Linear

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & z = 10x_1 + 12x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 \leq 20 \\ & x_1 + x_2 \geq 10 \\ & 5x_1 + 6x_2 \geq 54 \\ & x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0 \end{array}$$

No sistema cartesiano de eixos ortogonais x_1 X x_2 , determinam-se os valores de x_1 e x_2 que satisfaçam as equações de restrição. Todos os pontos (x_1, x_2) localizam-se no primeiro quadrante em decorrência das restrições de não negatividade. A restrição $x_1 + x_2 \leq 20$ estabelece que (x_1, x_2) encontra-se abaixo ou sob si mesma. As restrições $x_1 + x_2 \geq 10$ e $5x_1 + 6x_2 \geq 54$ estabelecem que (x_1, x_2) encontra-se acima ou sob si mesma. Dessa forma, determina-se o polígono ABFGC formado pela intersecção das regiões factíveis, onde todos os pontos que pertencem ao interior e a fronteira dessa região satisfazem as restrições do problema. Também se constrói a reta $z = 10x_1 + 12x_2$.

Figura 7: Ilustração da região viável e da reta z do Problema de Programação Linear de minimização.



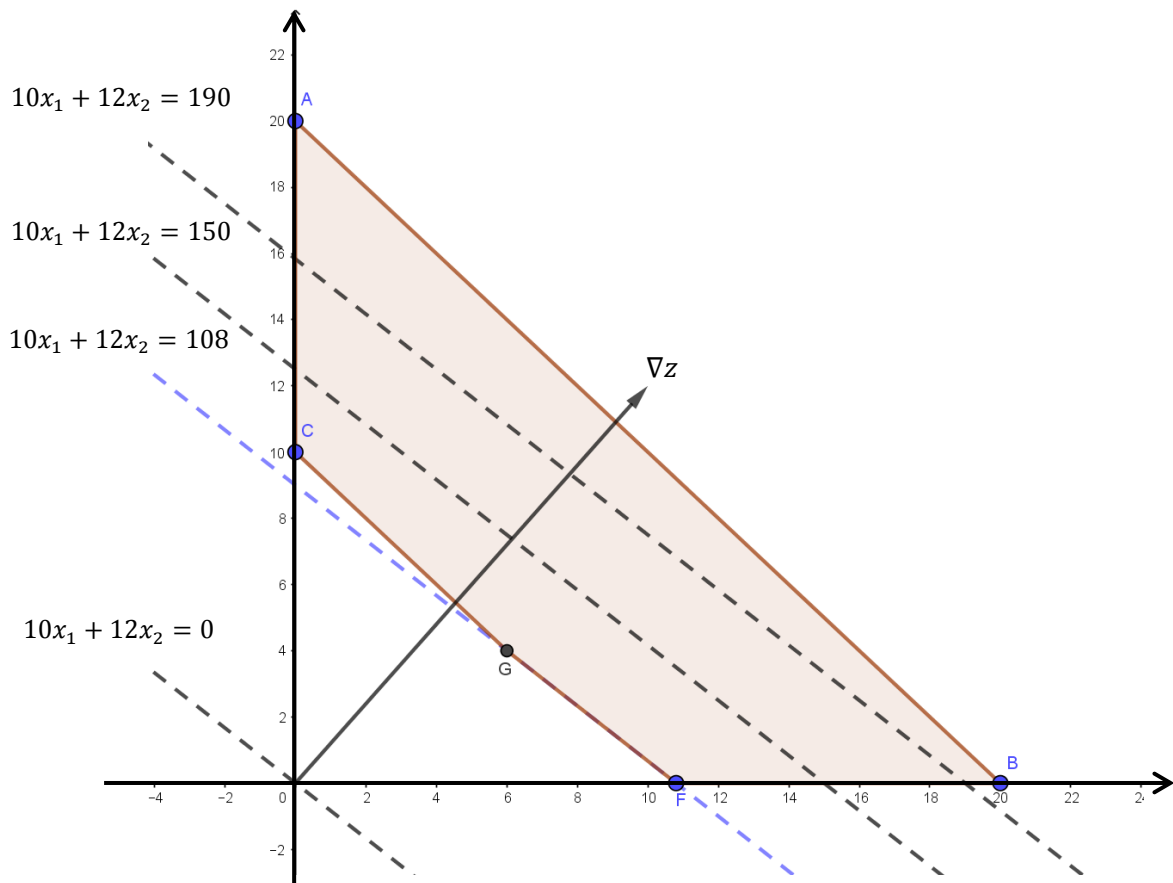
Fonte: Autor.

A Figura 7 ilustra o gráfico da situação proposta, indicando a região sombreada como o conjunto das soluções factíveis, isto é, dos pontos que satisfazem todas as restrições. Também está presente a reta da função objetivo $10x_1 + 12x_2 = 0$.

Para se determinar um ponto que minimize o valor de $z = 10x_1 + 12x_2$, chamado de ponto ótimo, calcula-se $\nabla z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}\right) = (c_1, c_2) = (10, 12)$, o vetor gradiente de z , e desloca-se a reta $10x_1 + 12x_2 = 0$, de nível zero $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / 10x_1 + 12x_2 = z_0\}$, no sentido contrário e perpendicularmente ao gradiente de z , até encontrar o(s) primeiro(s) ponto(s) de contato com a região factível.

A ilustração deste processo é mostrada pela Figura 8. Assim, conclui-se que o primeiro ponto encontrado é o ponto $G = (6, 4)$, intersecção das retas $x_1 + x_2 \leq 20$ e $x_1 + x_2 \geq 10$. O valor da função objetivo neste ponto é $z = 10 \cdot 6 + 12 \cdot 4 = 60 + 48 = 108$.

Figura 8: Ilustração do deslocamento da reta z na direção contrária ao vetor gradiente.



Fonte: Autor.

Neste caso tem-se que o problema tem solução factível ótima única $x^* = (6, 4)$ e valor ótimo da função objetivo $z^* = 108$.

3.4 – Soluções Básicas

Ao se resolver problemas de pequeno porte de Programação Linear, com até três dimensões, pelo método gráfico, percebe-se que uma solução ótima está em um dos vértices do polígono que forma a região factível.

Entretanto, em problemas reais que possuem muitas variáveis e restrições, não é possível fazer a representação gráfica da situação. Contudo, pode-se partir do modelo gráfico para encontrar a solução ótima sem o auxílio de uma figura.

Sabe-se que a região factível é formada pela intersecção das regiões formadas pelas restrições do modelo de Programação Linear. O lugar geométrico em que ao menos uma variável, seja de decisão, de folga ou de excesso, se anula é a fronteira da região. Então, pode-se dizer que para algum $x_j = 0$, com $j = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, a solução está na fronteira da região factível.

Assim, como o vértice da região factível é a intersecção de duas retas que representam as restrições do problema, duas variáveis se anulam. Desse modo, para se obter a solução para o sistema $Ax = b$, com m equações, n variáveis ($n > m$) e $n - m$ variáveis independentes, podemos estimar quaisquer valores às variáveis independentes. Assumindo que as $n - m$ variáveis independentes sejam zero, obtém-se um novo sistema $m \times m$, com as m variáveis restantes, e com algum método de solução de sistemas lineares pode-se determinar os valores das variáveis remanescentes. Tem-se uma solução bem determinada se a matriz do sistema $m \times m$ for invertível [2 e 9].

Isso quer dizer que se a matriz $A_{m \times n}$ tem posto completo por linhas, com notação posto $(A) = m$, implica que o número de equações é menor ou igual ao número de variáveis. Então, para o caso de:

- $m = n$: o sistema $Ax = b$ tem solução única;
- $n > m$: o sistema $Ax = b$ tem infinitas soluções e, considerando-se como zero as $n - m$ variáveis, encontra-se a solução única do sistema.

Observa-se que valores diferentes de zero também podem ser atribuídos às variáveis independentes. Nesse caso, as diferentes soluções encontradas não são vértice da região factível. Também não é garantido que fixando quaisquer duas variáveis independentes em zero se encontre a solução factível, uma vez que não se pode garantir as condições de não-negatividade [2].

Dessa forma, obtém-se as seguintes definições [2, 9]:

Definição 3.4.1 (partição básica): o sistema $Ax = b$ pode ser reescrito em notação matricial da seguinte forma:

$$A = [B \ N], \text{ onde}$$

- $B_{m \times m}$ é uma matriz invertível, formada por m colunas da matriz original, chamada de matriz básica;
- $N_{m \times (n-m)}$ é formada pelas $n - m$ colunas restantes de A , chamada de matriz não básica.

Define-se como partição básica a partição da matriz A , tal que $A = [B \ N]$.

O vetor x também sofre uma partição. Para

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$$

denomina-se:

- $x = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \dots \\ x_{B_m} \end{bmatrix}$ como o vetor das variáveis básicas;
- $x = \begin{bmatrix} x_{N_1} \\ x_{N_2} \\ \dots \\ x_{N_m} \end{bmatrix}$ como o vetor das variáveis não básicas.

Definição 3.4.2 (solução básica): Tem-se por

$$x: \begin{cases} x_B = B^{-1}b \\ x_N = 0 \end{cases}$$

a solução obtida para a partição básica $A = [B \ N]$, quando se fixa em zero as $n - m$ variáveis de x_N . Define-se x como solução básica.

Denomina-se por solução básica factível se todas as variáveis básicas são não negativas, ou seja, $x_B = B^{-1}b \geq 0$. Graficamente são representadas pelos vértices da região factível.

Já, se todas as variáveis básicas são positivas, ou seja, $x_B = B^{-1}b > 0$, diz-se que a solução básica factível é não degenerada.

Assim, a partir das duas definições, tem-se: para o sistema

$$Ax = b,$$

ao considerar uma partição básica $A = [B \ N]$, podemos reescrevê-lo em notação matricial

$$[B \ N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \Leftrightarrow B \cdot x_B + N \cdot x_N = b,$$

em que as matrizes B e N são formadas por colunas da matriz A e x_B e x_N são vetores correspondentes as variáveis.

Fixando-se $x_N = 0$, o sistema restante é $B \cdot x_B = b$ e assim tem-se a solução genérica $x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N$.

Em geral, o número de soluções básicas factíveis é menor ou igual a $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ e corresponde ao número de pontos extremos da região factível [7].

O Teorema a seguir demonstra a relação entre os pontos extremos da região factível e as soluções básicas factíveis [2, 7 e 9].

Teorema 3.4.1 (Equivalência de pontos extremos e soluções básicas): Seja S a região factível, tal que $S = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } Ax = b, x \geq 0\}$. Um ponto $x \in S$ se e somente se x for uma solução básica factível.

Demonstração:

Supõe-se que $x = \{x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0\}$ é solução básica factível para o sistema $Ax = b$. Então é verdadeira a igualdade

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_m a_m = b,$$

em que $\{a_1, \dots, a_m\}$ são as m colunas linearmente independentes de A . Supõe-se também que x pode ser expresso como uma combinação convexa de dois outros pontos y e z de K , tal que $K = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } Ax = b \text{ e } x \geq 0\}$, onde $x = \alpha y + (1 - \alpha)z$, $0 < \alpha < 1$, $y \neq z$. Como todas as componentes de x , y , z são não negativas e $0 < \alpha < 1$, conclui-se que as $(n - m)$ componentes de y e z são zero. Portanto, em particular, tem-se

$$y_1 a_1 + y_2 a_2 + \dots + y_m a_m = b \text{ e } z_1 a_1 + z_2 a_2 + \dots + z_m a_m = b.$$

Se os vetores $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ são linearmente independentes, então conclui-se que $x = y = z$ e x é um ponto extremo de K .

Reciprocamente, assume-se que x é um ponto extremo de K . Admite-se que as componentes não nulas de x são as primeiras k componentes. Então,

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_k a_k = b$$

com $x_i > 0$ e $i = \{1, 2, \dots, k\}$. Para mostrar que x é solução básica factível deve-se mostrar que os vetores a_1, a_2, \dots, a_k são linearmente independentes.

A prova será feita por redução ao absurdo.

Supõe-se que a_1, a_2, \dots, a_k sejam linearmente independentes. Então existe uma combinação linear não trivial, que é nula, onde

$$y_1 a_1 + y_2 a_2 + \dots + y_k a_k = 0.$$

Definindo-se o vetor $y = (y_1, y_2, \dots, y_k, 0, 0, \dots, 0)$ e sendo $x_i > 0$, com $1 < i < k$, é possível escolher ε , tal que

$$x + \varepsilon y \geq 0 \text{ e } x - \varepsilon y \geq 0.$$

Tem-se então

$$x = \frac{1}{2}(x + \varepsilon y) + \frac{1}{2}(x - \varepsilon y),$$

o que expressa x como uma combinação convexa de dois vetores distintos de K . Isso é absurdo, pois x é ponto extremo K , por hipótese. Logo, a_1, a_2, \dots, a_k são linearmente independentes e x é solução básica factível. \square

3.5 – Teorema Fundamental da Programação Linear

Para casos de duas ou três variáveis de decisão, pode-se usar o método gráfico para se resolver problemas de Programação Linear. Uma vez que na maioria dos problemas reais, com mais variáveis, esse método se torna impraticável, faz-se necessário encontrar uma metodologia capaz de resolver tais problemas de forma eficiente. Entre várias outras se tem o Método Simplex [11].

De maneira simplificada, esse método inicia com uma solução básica factível e pesquisa em outras soluções básicas factíveis a solução ótima [2,7].

Considerando-se um problema de Programação Linear na forma padrão

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{array}$$

uma solução factível atinge o valor mínimo da função objetivo, sujeita a restrições, é chamada solução factível ótima. Se esta solução é básica, é dita solução básica factível ótima.

Com isso, pode-se enunciar e provar o Teorema Fundamental da Programação Linear [7].

Teorema 6.1 (Teorema Fundamental da Programação Linear): *Dada uma função linear na forma padrão onde A é uma matriz ($m \times n$) de posto m ,*

- 1. se existe uma solução factível, então existe uma solução básica factível;*
- 2. se existe uma solução factível ótima, então existe uma solução básica factível ótima.*

Demonstração do item 1: Denota-se por $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ os vetores das colunas da matriz A . Supondo que $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ é uma solução factível. Então, em termos da coluna A , esta solução satisfaz a seguinte igualdade:

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = b$$

Supõe-se agora que exatamente p das variáveis x_i são maiores que zero e por conveniência são, também, as p primeiras variáveis. Logo, é possível reescrever a igualdade acima da seguinte forma:

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_p a_p = b$$

Agora há dois casos a serem considerados. Precisa-se verificar se o conjunto dos vetores $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ é linearmente independente ou linearmente dependente. Então,

- caso 1: Supõe-se que o conjunto de vetores $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ seja linearmente independentes. Desse modo, $p \leq m$. Se $p = m$, a solução é básica e a prova está finalizada. Se $p < m$, assumindo que o posto $(A) = m$, selecionam-se os $m - p$ vetores dos restantes $n - p$ vetores restantes, assim teremos m vetores linearmente independentes. Atribuindo o valor de zero às $p - m$ variáveis, teremos então uma solução viável básica degenerada.
- caso 2: Supõe-se que o conjunto de vetores $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ são linearmente dependentes. Então, há uma combinação linear não trivial destes vetores que é zero. Assim, existem as constantes $\{y_1, y_2, \dots, y_p\}$, no mínimo uma delas pode ser considerada positiva, tal que

$$y_1 a_1 + y_2 a_2 + \dots + y_p a_p = 0$$

Multiplicando-se esta equação por um escalar ε , tem-se:

$$\varepsilon (y_1 a_1 + y_2 a_2 + \dots + y_p a_p) = 0;$$

e subtraindo-a de $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_p a_p = b$, obtém-se:

$$(x_1 - \varepsilon y_1) a_1 + (x_2 - \varepsilon y_2) a_2 + \dots + (x_p - \varepsilon y_p) a_p = b$$

A equação acima é verificada verdadeira para todo e qualquer ε , e para cada ε as componentes $(x_i - \varepsilon y_i)$ correspondem a uma solução da equação, embora possa se violar a restrição $(x_i - \varepsilon y_i) \geq 0$. Denotando-se $y = (y_1, y_2, \dots, y_p, 0, 0, \dots, 0)$, vemos que para qualquer ε , $x - \varepsilon y$ é solução da equação.

Para $\varepsilon = 0$, tem-se como solução uma solução básica factível. Se ε é aumentado a partir de zero, as componentes podem aumentar, diminuir ou permanecem constantes, dependendo se os valores correspondentes y_i são positivos, negativos ou zero. Assumamos que pelo menos um dos valores de y_i é positiva, então pelo menos uma das componente irá diminuir, enquanto ε irá aumentar. Aumentando ε até que uma das componentes seja zero, tem-se

$$\varepsilon = \min \{x_i/y_i; y_i > 0\}.$$

Para ε com esse valor, a solução é

$$x - \varepsilon y,$$

solução factível e tem no máximo $p - 1$ variáveis positivas. Repetindo este processo se necessário, pode-se eliminar variáveis positivas até encontrar uma solução factível com colunas correspondentes linearmente independentes. Isso equivale ao caso 1.

Demonstração do item 2: Supõe-se que $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ seja uma solução factível básica e, assim como a demonstração do item 1, supõe-se que existam exatamente p variáveis

positivas $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$. Novamente, há dois casos; no caso 1, correspondente a independência linear, é exatamente o mesmo de antes.

Já no caso 2, a demonstração segue como a anterior, mas deve ser demonstrado que, para todo e qualquer ε na solução $(x - \varepsilon y)$, a solução é ótima. Para isso, observe que o valor da solução $(x - \varepsilon y)$ é

$$c^T x - \varepsilon c^T y.$$

Para ε muito pequeno, $x - \varepsilon y$ é solução factível para $\varepsilon < 0$ ou $\varepsilon > 0$. Pode-se concluir que $c^T x = 0$, pois se $c^T y \neq 0$, um valor muito pequeno de ε , com sinal apropriado, poderia ser determinado a fim de fazer $c^T x - c^T y$ menor do que o $c^T x$, mantendo a. Isso violaria a hipótese de que x é solução ótima. Portanto, $c^T y = 0$.

Tendo estabelecido que a nova menor solução factível com um número menor de variáveis positivas ótimas, o restante da prova é análogo como escrito no item i.

Este teorema reduz a tarefa de se pesquisar soluções básicas factíveis nos problemas de Programação Linear. Assim, o teorema fundamental produz uma solução óbvia, mas finita. Expandindo-se essa técnica, utilizada nesta demonstração, bem como o enunciado do Teorema Fundamental, deriva-se a técnica do Método Simplex, descrito no próximo capítulo.

4. O MÉTODO SIMPLEX

Em 1951, George Dantzig publicou o primeiro método eficiente para se solucionar problemas de Programação Linear, o Método Simplex. Geometricamente, esse método consiste em andar de ponto extremo a ponto extremo da região factível, até encontrar o valor ótimo para função objetivo. Essa ideia se torna possível uma vez que, quando a região factível é não vazia, esta possui um número positivo e finito de pontos extremos. Além disso, pelo Teorema Fundamental da Programação Linear, caso o problema de Programação Linear apresente solução básica factível ótima, esta poderá ser encontrada em ao menos um dos pontos extremos. Essas ideias representam a base lógica do Método Simplex [1, 3, 6].

Para ser iniciado, o Método Simplex necessita de uma solução factível básica. Sempre que possível, a origem pode ser a solução factível básica inicial a ser escolhida. Isso se torna plausível quando as variáveis de decisão possuem restrição de não negatividade, e esta se apresenta como solução não infactível. Esse artifício elimina a necessidade de se utilizar procedimentos algébricos para se encontrar a solução factível básica inicial.

Após, o método verifica se a solução inicial é ótima. Em caso afirmativo, o procedimento está concluído. Caso contrário, o método faz a mudança para o ponto extremo adjacente que melhore o valor da função objetivo. O percurso seguido pelo método até se chegar a solução ótima se faz pelos lados do polígono da região factível, isso ocorre, pois em termos computacionais, é mais fácil verificar uma solução em ponto extremo adjacente do que em um ponto extremo qualquer [1, 3].

Por ser iterativo, o Método Simplex repete o procedimento para a nova solução factível básica. Pelo teste de otimalidade, examina-se cada um dos lados da região factível e identifica-se a taxa de crescimento / decrescimento da função objetivo. No caso de maximização (minimização), se for verificado que em qualquer um dos lados obtém-se uma taxa de crescimento (decrescimento) positiva para a função objetivo, implica-se que a solução no ponto extremo adjacente é melhor. Se isso não se verificar, a solução no ponto extremo atual é a melhor.

Assim, o processo é finalizado quando se obtém um ponto extremo tal que os pontos extremos adjacentes a ele verificam valores piores para a função objetivo.

Utilizando a notação matricial, tem-se o problema de Programação Linear na forma padrão [1, 6, 8]:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & z = c^T x \\ \text{Sujeito a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

tal que

$$c^T = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix},$$

e a matriz $A_{m \times n}$ é

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Agora, serão discutidas as bases teóricas do Método Simplex.

4.1– Pivoteamento

O Método Simplex foi desenvolvido a partir de uma profunda análise do sistema de equações lineares que define as restrições e as soluções básicas do problema de Programação Linear.

Para se entender a base teórica do Método Simplex, é essencial que em primeiro lugar se compreenda o processo de pivoteamento de um sistema de equações lineares.

Assim, considere o sistema de equações lineares [7].

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

onde $m \leq n$.

Em notação matricial, pode-se escrever o sistema proposto como $Ax = b$.

Seja o espaço E^n o conjunto de m relações lineares que devem ser resolvidas por um vetor x . Assim, denotando por a_i a linha i da matriz A , pode-se escrever o sistema da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a_1x &= b_1 \\ a_2x &= b_2 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ a_mx &= b_m. \end{aligned}$$

Assumindo que as equações lineares acima são linearmente independentes, pode-se substituir uma equação dada por qualquer múltiplo próprio diferente de zero, operada com qualquer combinação linear das outras equações no sistema. Esse procedimento, no qual múltiplos de equações são adequadamente subtraídas de outra para produzir uma forma triangular ou canônica é conhecida como método da eliminação de Gauss–Jordan. Uma vez que as m primeiras colunas do sistema são linearmente independentes, o sistema pode, depois de uma sequência de multiplicações e subtrações, ser convertido para a forma canônica:

$$\begin{array}{rcccccc} x_1 & & + y_{1,m+1}x_{m+1} & + y_{1,m+2}x_{m+2} & + \cdots & + y_{1,n}x_n & = y_{10} \\ & x_2 & + y_{2,m+1}x_{m+1} & + y_{2,m+2}x_{m+2} & + \cdots & + y_{2,n}x_n & = y_{20} \\ & & \cdot & & & & \cdot \\ & & \cdot & & & & \cdot \\ & & \cdot & & & & \cdot \\ & x_m & + y_{m,m+1}x_{m+1} & + \cdots & & + y_{m,n}x_n & = y_{m0}. \end{array}$$

Na forma canônica do sistema, as variáveis x_1, x_2, \dots, x_m são as variáveis básicas e as variáveis restantes são as não-básicas, tal que o sistema tem uma solução básica do tipo

$$x_1 = y_{10}, x_2 = y_{20}, \dots, x_m = y_{m0} \text{ e } x_{m+1} = 0, \dots, x_n = 0.$$

Também é costumeiro representar, a partir dos coeficientes dos termos, o sistema linear em notação matricial ou em tableau:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & y_{1,m+1} & \cdots & y_{1,n} & y_{10} \\ 0 & 1 & 0 & y_{2,m+1} & \cdots & y_{2,n} & y_{20} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & y_{m,m+1} & \cdots & y_{m,n} & y_{m0}. \end{array}$$

Resolver um sistema de equações lineares por pivoteamento, com o sistema na forma canônica e, supondo-se que uma variável básica se torne não-básica e uma variável não-básica se torne básica, tem-se a nova forma canônica correspondente ao novo conjunto de variáveis básicas.

Seja o sistema na forma canônica:

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & & + y_{1,m+1}x_{m+1} + y_{1,m+2}x_{m+2} + \cdots + y_{1,n}x_n = y_{10} \\
 & x_2 & + y_{2,m+1}x_{m+1} + y_{2,m+2}x_{m+2} + \cdots + y_{2,n}x_n = y_{20} \\
 & & \cdot \\
 & & \cdot \\
 & & \cdot \\
 & x_m & + y_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + y_{m,n}x_n = y_{m0},
 \end{array}$$

substitui-se a variável básica $x_p, 1 \leq p \leq m$, no sistema canônico, pela variável não-básica x_q . Isso pode ser feito se, e somente se, y_{pq} for diferente de zero, pois se dividindo a linha p por y_{pq} para obter um coeficiente para x_q na equação de ordem p e subtraindo múltiplos apropriados da linha p de cada uma das outras linhas a fim de se obter zero como coeficiente de x_q em todas as outras equações. Isso transforma a coluna de ordem q do tableau no valor zero, exceto a variável de ordem p (que é a unidade) e não afeta as colunas das outras variáveis básicas. Indicando os novos coeficientes da forma canônica por y'_{ij} , tem-se:

$$y'_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{pj}}{y_{pq}} y_{iq}, \quad i \neq j$$

$$y'_{ij} = \frac{y_{pj}}{y_{pq}}.$$

As equações descritas acima são as equações de pivô que surgem frequentemente em programação linear.

4.2- Pontos Extremos Adjacentes

Para se resolver o problema de Programação Linear

$$\text{Maximizar } z = c^T x$$

$$\text{Sujeito a } Ax = b$$

$$x \geq 0,$$

necessita-se apenas de soluções básicas factíveis e, resolvendo o sistema $Ax = b$ pelo pivoteamento, pode-se gerar uma nova solução básica substituindo uma variável básica por

uma variável não-básica. Porém, devem-se atender certas condições especiais, a fim de que a operação de pivoteamento mantenha a factibilidade.

Embora não seja possível especificar o par de variáveis que serão trocadas e manter a condição de não negatividade, pode-se especificar qual variável não-básica se tornará básica e vice-versa.

Muitos argumentos em Programação Linear são justificados pela seguinte definição:

Definição 7.1 (Solução não degenerada): cada solução básica factível de $Ax = b$, com $x_B \geq 0$, é solução básica factível não degenerada.

Essa definição é usada durante todo o desenvolvimento do Método Simplex, desde que se substitua as soluções de maneira adequada.

4.2.1 – Determinação de que variável sairá da base

Seja $x = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0)$ a solução básica factível, que pode ser representada na forma:

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_m a_m = b.$$

Considerando a definição de Solução não Degenerada, para $x_i > 0$, tal que $i = \{1, 2, \dots, m\}$ e a_q , $q > m$, representa-se a_q como variável básica,

$$a_q = y_{1q} a_1 + y_{2q} a_2 + \dots + y_{mq} a_m.$$

Multiplicando-se a expressão a_q por $\varepsilon \geq 0$ e subtraindo-a da expressão que representa a solução básica factível acima, tem-se:

$$(x_1 - \varepsilon y_{1q}) a_1 + (x_2 - \varepsilon y_{2q}) a_2 + \dots + (x_m - \varepsilon y_{mq}) a_m + \varepsilon a_q = b.$$

Assim, para qualquer $\varepsilon \geq 0$ o resultado acima escreve b como uma combinação linear de no máximo $(m + 1)$ variáveis. Para $\varepsilon = 0$ tem-se uma solução básica factível. A medida que ε aumenta, os coeficientes de a_q aumentam, e para valores suficientemente pequenos de ε , a expressão tem uma solução factível não-básica. Os coeficientes das outras variáveis irão aumentar ou diminuir linearmente, na mesma proporção em que ε é aumentado. Se qualquer variável não diminuir, igualam-se os valores do primeiro lugar onde um (ou mais) coeficientes desaparecem. Assim,

$$\varepsilon = \min_{(i)} \{x_i/y_{iq} : y_{iq} > 0\}.$$

Neste caso, tem-se uma nova solução básica factível, com o vetor a_q substituindo o vetor a_p onde p corresponde ao índice mínimo na expressão ε . Se consegue-se o mínimo em ε , então a nova solução é degenerada. Desse modo, qualquer uma das variáveis iguais a zero podem ser consideradas para deixar a base.

4.3– Determinação da solução factível ótima

Teorema 7.1 (Melhor solução básica factível): *Dada uma solução factível básica não degenerada, igual a z_0 , supondo-se que para algum j que $c_j - z_j < 0$. Então, existe uma solução factível básica com valor $z < z_0$. Se a coluna a_j puder ser substituída por um vetor na base original para produzir uma nova solução factível básica, esta nova solução terá $z < z_0$. Se a_j não puder ser substituída para produzir uma solução básica factível, então o conjunto solução K de soluções factíveis é não limitado e a função objetivo pode ser arbitrariamente pequena.*

Demonstração

Seja $(x_B, 0) = (y_{10}, y_{20}, \dots, y_{m0}, 0, 0, \dots, 0)$ uma solução básica factível. O tableau abaixo apresenta a matriz identidade nas m primeiras colunas e contém os coeficientes do sistema aumentado de restrições $Ax = b$:

$$\begin{array}{cccccccc}
 a_1 & a_2 & \cdots & a_m & a_{m+1} & \cdots & a_n & b \\
 1 & 0 & & 0 & y_{1,m+1} & \cdots & y_{1,n} & y_{10} \\
 0 & 1 & & 0 & y_{2,m+1} & \cdots & y_{2,n} & y_{20} \\
 \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
 0 & 0 & & 1 & y_{m,m+1} & \cdots & y_{m,n} & y_{m0}
 \end{array}$$

Seja z a função objetivo tal que $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ e z_0 uma solução factível básica tal que $z_0 = c_B^T x_B$, onde $c_B^T = [c_1, c_2, \dots, c_m]$.

Mesmo utilizando-se uma solução básica $(x_B, 0)$ quando se tem um tableau, caso valores arbitrários sejam atribuídos a $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$, através de operações algébricas elementares, os valores das variáveis restantes podem ser encontrados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
x_1 &= y_{10} - \sum_{j=m+1}^n y_{1j}x_j \\
x_2 &= y_{20} - \sum_{j=m+1}^n y_{2j}x_j \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
x_m &= y_{m0} - \sum_{j=m+1}^n y_{mj}x_j.
\end{aligned}$$

Subtraindo-se x_1, x_2, \dots, x_m das igualdades acima e usando que

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

tem-se

$$z = c^T x = z_0 + (c_{m+1} - z_{m+1})x_{m+1} + (c_{m+2} - z_{m+2})x_{m+2} + \dots + (c_n - z_n)x_n,$$

tal que

$$z_j = y_{1j}c_1 + y_{2j}c_2 + \dots + y_{mj}c_m, \text{ com } m + 1 \leq j \leq n,$$

que, para determinar a coluna pivô, tem-se a relação acima.

Assim, seja $x = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0)$ a solução básica factível com valor z_0 e $c_{m+1} - z_{m+1} < 0$. Então, constrói-se uma nova solução factível básica na forma $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m, 0, 0, \dots, 0)$ com $x'_{m+1} > 0$. Substituindo-se em

$$z = c^T x = z_0 + (c_{m+1} - z_{m+1})x_{m+1} + (c_{m+2} - z_{m+2})x_{m+2} + \dots + (c_n - z_n)x_n,$$

tem-se

$$z - z_0 = (c_{m+1} - z_{m+1})x'_{m+1} < 0,$$

e, portanto, $z < z_0$ para qualquer solução. Como quer-se tornar x'_{m+1} tão grande quanto possível e x'_{m+1} é crescente, os outros componentes podem aumentar, permanecem constante ou diminuir. Assim, x'_{m+1} pode crescer até $x'_i = 0$, para $i \leq m$, e assim obtém-se uma nova solução básica factível ou x'_{m+1} pode crescer ilimitadamente se nenhum x'_i for decrescente. \square

Pode-se perceber que se em qualquer etapa $c_j - z_j < 0$ para algum j , é possível fazer x_j positivo e crescente. Agora, quer-se saber se $c_j - z_j \geq 0$ para todo j . Nesse caso, faz-se necessário a condição de Otimalidade.

Teorema 7.2 (Condição de Otimalidade): *Se para alguma solução básica factível $c_j - z_j \geq 0$ para todo j , então essa solução é ótima.*

Demonstração

A demonstração decorre imediatamente de

$$z = c^T x = z_0 + (c_{m+1} - z_{m+1})x_{m+1} + (c_{m+2} - z_{m+2})x_{m+2} + \dots + (c_n - z_n)x_n,$$

onde qualquer solução factível básica deve ter $x_i \geq 0$ para todo i , e, portanto, o valor z na função objetivo satisfará $z - z_0 \geq 0$. \square

4.4– O Método Simplex como Tableau

A cada iteração, o próximo conjunto de equações lineares precisa solucionar: $Bx_B = b$, $\omega B = c_B^T$, e $B_{yk} = a_k$. Os procedimentos para resolver e atualizar este sistema nos conduzirá a algoritmos diferentes.

Nesse momento, será descrito o Método Simplex em formato de Tableau [9].

Seja x uma solução básica factível inicial, com base B . Representado o problema de Programação Linear, tem-se:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z \\ \text{Sujeito a} & z - c_B^T x_B - c_N^T x_N = 0 \\ & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B, x_N \geq 0 \end{array}$$

A partir de $Bx_B + Nx_N = b$, tem-se

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b.$$

Multiplicando-se por c_B^T e adicionando-se na função objetivo, tem-se

$$z + 0x_B + (c_B^T B^{-1}N - c_N^T)x_N = c_B^T B^{-1}b.$$

Sabe-se que $x_N = 0$, e pelas duas equações acima tem-se $x_B = B^{-1}b$ e $z = c_B^T B^{-1}b$. Além disso, pode-se representar convenientemente a solução factível básica com a base B no seguinte tableau (quadro), exemplificado na Tabela 1.

Tabela 1: Organização do problema no formato Tableau

	z	x_B	x_N	
x_B	0	1	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
z	1	0	$c_B^T B^{-1}N - c_N^T$	$c_B^T B^{-1}b$

Fonte: Bazaraa et al, p.126

Representa-se por z a variável básica a ser minimizada. A linha objetivo será representada como linha 0 e as linhas restantes como linhas de 1 a m . A coluna do lado direito indicará os valores das variáveis não básicas (incluindo a função objetivo). As variáveis básicas são identificadas na coluna da esquerda.

O tableau em que z e x_B será resolvido em termos de x_N é chamado de forma canônica. Neste tableau não só tem-se o valor da função objetivo $c_B^T B^{-1}b$ e das variáveis básicas $B^{-1}b$ na coluna do lado direito, como também fornece todas as informações de que precisamos para prosseguir com o Método Simplex. Na verdade, a linha de custos apresenta $c_B^T B^{-1}N - c_N^T$, que consiste em $(z_j - c_j)$ das variáveis não-básicas. A linha zero informa se há uma solução ótima (se cada $z_j - c_j \leq 0$), e que a variável não básica irá crescer, caso contrário. Se x_k é crescente, então o vetor $y_k = B^{-1}a_k$, que aparece no tableau nas linhas 1 a m abaixo da variável x_k , ajudará a determinar por quanto x_k pode aumentar. Se $y_k \leq 0$, então x_k pode aumentar indefinidamente e o valor ótimo da função objetivo é ilimitado. Por outro lado, se y_k tem pelo menos um componente positiva, o crescimento em x_k será interrompido por alguma variável básica, que torna-se zero. O teste da razão mínima (que pode ser realizado desde que $B^{-1} = b$ e y_k são ambos possíveis no tableau) determina o valor da variável de bloqueio. Quer-se um esquema que:

- 1- Atualizar as variáveis básicas e seus valores;
- 2- Atualizar os valores das novas variáveis não básicas $(z_j - c_j)$;
- 3- Atualizar as colunas y_j .

4.5- Pivoteamento no tableau

Os procedimentos descritos acima podem ser realizados simultaneamente através do pivoteamento. Se x_k entrar na base e x_B sair da base, então o pivoteamento pode ser iniciado. Para isso, seguem-se os passos:

- 1- Divida a linha r por y_{rk} ;

- 2- Para $i = \{1, \dots, m\}$ e $i \neq r$, atualize a linha i adicionando a ela $-y_{ik}$ vezes a nova linha r ;
- 3- Atualize a linha zero adicionando a ela $(c_k - z_k)$ vezes a linha r . As tabelas 2 e 3 representam, respectivamente, a situação antes e depois da operação de pivoteamento.

Tabela 2: Tableau anterior ao pivoteamento

	Z	x_{B1}	\dots	x_{Br}	\dots	x_{Bm}	\dots	x_j	\dots	x_k	\dots	
Z	1	0	\dots	0	\dots	0	\dots	$z_j - c_j$	\dots	$z_k - c_k$	\dots	$c_B^T \bar{b}$
x_{B1}	0	1	\dots	0	\dots	0	\dots	y_{1j}	\dots	y_{1k}	\dots	\bar{b}_1
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
x_{Br}	0	0	\dots	1	\dots	0	\dots	y_{rj}	\dots	y_{rk}	\dots	\bar{b}_r
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
x_{Bm}	0	0	\dots	0	\dots	1	\dots	y_{mj}	\dots	y_{mk}	\dots	\bar{b}_m

Fonte: Bazaraa et al, p.127.

Ao examinar o pivoteamento aplicado ao tableau, tem-se:

- 1- A variável x_k entrou na base e x_{Br} saiu da base. Isto é registrado no lado esquerdo do tableau, substituindo o x_{Br} pelo x_k . Na iteração seguinte, a nova x_{Br} é agora x_k .
- 2- O lado direito do tableau representa os valores atualizados das variáveis básicas, pois $x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$. As variáveis não básicas possuem os valores iguais à zero.
- 3- Supondo-se que as colunas originais das novas variáveis básicas e não básicas sejam \hat{B} e \hat{N} , respectivamente. Através de uma sequência de operações nas linhas elementares (de acordo com o método da eliminação de Gauss-Jordan e caracterizado pelo pivoteamento nas iterações intermediárias), o tableau inicial torna-se um tableau atualizado, onde \hat{B} substituído por I, matriz identidade. Assim, esse procedimento resulta num novo tableau em que a nova $\hat{B}^{-1}\hat{N}$ abaixo das variáveis não básicas e um conjunto atualizado de $(z_j - c_j)$ para as novas variáveis não básicas, junto com os valores das novas variáveis básicas e da função objetivo.

Tabela 3 : Tableau posterior ao pivoteamento

	Z	x_{B1}	...	x_{Br}	...	x_{Bm}	...	x_j	...	x_k	...	
Z	1	0	...	$\frac{c_k - z_k}{y_{rk}}$...	0	...	$z_j - c_j - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}(z_k - c_k)$...	0	...	$c_B^T \bar{b} - (z_k - c_k) \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$
x_{B1}	0	1	...	$-\frac{y_{1k}}{y_{rk}}$...	0	...	$y_{1j} - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} y_{1k}$...	0	...	$\bar{b}_1 - \frac{y_{1k} \bar{b}_r}{y_{rk}}$
.
.
.
x_{Br}	0	0	...	$\frac{1}{y_{rk}}$...	0	...	$\frac{y_{rj}}{y_{rk}}$...	1	...	$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$
.
.
.
x_{Bm}	0	0	...	$-\frac{y_{mk}}{y_{rk}}$...	1	...	$y_{mj} - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} y_{mk}$...	0	...	$\bar{b}_m - \frac{y_{mk} \bar{b}_r}{y_{rk}}$

Fonte: Bazaraa et al, p.128.

A eficiência do Método Simplex é justificada por sua metodologia simplificada, em que se chega a soluções com alta confiabilidade, num tempo razoável.

Outro fato que vem comprovar sua importância é que, embora o cientista norte americano George Dantzig tenha criado o Método Simplex em 1947, ele continua a se desenvolver. Com o surgimento do método de pontos interiores, em 1970, esperava-se que o Simplex tivesse chegado sua maturidade. Porém, este fato foi grande motivador na pesquisa sobre o método Simplex. Desde o surgimento do método de pontos interiores, estima-se que a eficiência de implementações do Simplex tenha aumentado duas ordens de grandeza [12, 13].

4.6 – Problemas de Programação Quadrática

A Programação Quadrática consiste na minimização de uma função $f(x)$ quadrática sujeita a restrições lineares, sendo uma extensão da Programação Linear.

Um problema de Programação Quadrática pode ser escrito na forma a seguir:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \frac{1}{2}x^T Gx + c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax \leq b \\ & x \geq 0, \end{array}$$

onde G é uma matriz quadrada ($n \times n$) e simétrica e c é um vetor cujas componentes são os coeficientes dos termos lineares na função objetivo. Se $G = 0$, $f(x)$ é linear, verificando que a Programação Linear pode ser vista como um caso particular de programação quadrática.

Na Programação Quadrática, as restrições são definidas por uma matriz A ($m \times n$) e por um vetor m -dimensional b as variáveis de decisão são denotadas pelo vetor coluna n -dimensional x , como na Programação Linear [14].

4.7 – Exemplos

Modelos reais são construídos na notação de problemas de Programação Linear e solucionados através do Simplex com o objetivo de se chegar a resultados satisfatórios de forma eficiente, como nos exemplos que seguem [1].

Exemplo 1 – Problema de maximização

Determinar a solução ótima do Problema de Programação Linear

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{Sujeito a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 100 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 210 \\ & x_1 \leq 80 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ e } x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Em primeiro lugar, reescreve-se o Problema de Programação Linear de forma que a função objetivo z seja uma equação igual a zero, ou seja,

$$\max z - 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0.$$

Também se acrescentam as variáveis de folga de forma que o sistema de inequações de restrição esteja no formato de um sistema de equações. Assim, para a primeira inequação de restrição, se $x_1 + x_2 + x_3 \leq 100$, então basta somar $x_4 \neq 0$, onde $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$.

Logo,

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 100 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100.$$

Para as demais restrições, de maneira análoga, tem-se

$$2x_1 + x_2 \leq 210 \Leftrightarrow 2x_1 + x_2 + x_5 = 210$$

e

$$x_1 \leq 80 \Leftrightarrow x_1 + x_6 = 80.$$

Dessa forma, o Problema de Programação Linear proposto pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z - 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 & & & & & & = & 0 \\ \text{Sujeito a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & & & & & & = & 100 \\ & 2x_1 + x_2 & & & & + x_5 & & = & 210 \\ & x_1 & & & & & + x_6 & = & 80. \end{aligned}$$

Em notação tabular, a linha que representa a função objetivo é representada como linha 0 e as linhas restantes como linhas a partir de 1. As colunas do lado direito indicarão os

valores das variáveis básicas, incluindo a função objetivo. As variáveis não básicas são identificadas nas colunas da esquerda.

z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	b
1	-2	-3	-4	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	100
0	2	1	0	0	1	0	210
0	1	0	0	0	0	1	80

Para aplicar o Método Simplex no tableau, encontra-se a variável que entra na base, identificando na linha zero, o menor valor. Nesse caso, $x_3 = -4$ entrará na base.

z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	b
1	-2	-3	-4	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	100
0	2	1	0	0	1	0	210
0	1	0	0	0	0	1	80

Para a variável x_3 entrar na base, deve-se encontrar a linha de restrição que sairá da base. Para isso, aplica-se o teste da razão mínima, dividindo-se cada termo independente b por cada coeficiente de x_3 , caso exista. Ao identificar a linha de menor quociente positivo, tem-se o elemento pivô, que está no cruzamento da variável que entra na base e na linha que sai da base. No caso, o elemento pivô é 1.

z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	b	
1	-2	-3	-4	0	0	0	0	
0	1	1	1	1	0	0	100	$\frac{100}{1}=100$
0	2	1	0	0	1	0	210	$\neq \frac{210}{0}$
0	1	0	0	0	0	1	80	$\neq \frac{80}{0}$

Uma vez identificado o elemento pivô, é necessário calcular a nova linha pivô, dividindo-se a linha que sai da base pelo elemento pivô. Para cada uma das outras linhas,

atualiza-se seu valor adicionando a elas o oposto de cada coeficiente da variável que sai da base vezes a nova linha pivô, incluindo a linha zero. Segue o novo tableau:

z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	b
1	2	1	0	4	0	0	400
0	1	1	1	1	0	0	100
0	2	1	0	0	1	0	210
0	1	0	0	0	0	1	80

Como a linha zero apresenta valores não negativos, tem-se a solução ótima. Neste caso, assumindo-se as variáveis não básicas $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, o problema tem solução factível ótima única $x_3^* = 100$, $x_5^* = 210$ e $x_6^* = 80$, com o valor ótimo da função objetivo $z^* = 400$.

Exemplo 2 – Problema de minimização

Determinar a solução ótima do Problema de Programação Linear

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z = 4x_1 - 2x_2 \\ \text{Sujeito a} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1 - x_2 \leq 8 \\ & x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Primeiramente a função objetivo será reescrita de tal forma que se tenha uma função objetivo auxiliar e assim obter uma solução inicial. Sabe-se que

$$\text{Mínimo} \sum_{j=1}^n c_j x_j = -\text{Máximo} \sum_{j=1}^n (-c)_j x_j,$$

então

$$\text{Min } z = 4x_1 - 2x_2 \Leftrightarrow \text{Max } -z = -4x_1 + 2x_2.$$

Fazendo a função objetivo z uma equação igual a zero, tem-se

$$\text{Max} \quad -z + 4x_1 - 2x_2 = 0.$$

Agora, acrescentam-se as variáveis de folga de forma que o sistema de inequações de restrição esteja no formato de um sistema de equações. Assim, para a primeira inequação de restrição, se $2x_1 + x_2 \leq 10$, então basta somar $x_3 \neq 0$, onde $2x_1 + x_2 + x_3 = 10$. Logo,

$$2x_1 + x_2 \leq 10 \Leftrightarrow 2x_1 + x_2 + x_3 = 10.$$

Analogamente,

$$x_1 - x_2 \leq 8 \Leftrightarrow x_1 - x_2 + x_4 = 8$$

Dessa forma, o Problema de Programação Linear proposto pode ser reescrito como

$$\begin{array}{rcll} \text{Max} & -z + 4x_1 - 2x_2 & & = 0 \\ \text{Sujeito a} & 2x_1 + x_2 + x_3 & & = 10 \\ & x_1 - x_2 & + x_4 & = 8 \end{array}$$

Em notação tabular, a linha que representa a função objetivo é representada como linha 0 e as linhas restantes como linhas a partir de 1. As colunas do lado direito indicarão os valores das variáveis básicas, incluindo a função objetivo. As variáveis não básicas são identificadas nas colunas da esquerda.

-z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	b
1	4	-2	0	0	0
0	2	1	1	0	10
0	1	-1	0	1	8

Determina-se a variável que entra na base, identificando na linha zero, o menor valor. Nesse caso, $x_2 = -2$ entrará na base.

-z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	b
1	4	-2	0	0	0
0	2	1	1	0	10
0	1	-1	0	1	8

Para a variável x_2 entrar na base, deve-se encontrar a linha de restrição que sairá da base. Para isso, aplica-se o teste da razão mínima, dividindo-se cada termo independente b por cada coeficiente de x_2 , caso exista. Ao identificar a linha de menor quociente positivo, tem-se o elemento pivô, que está no cruzamento da variável que entra na base e na linha que sai da base. No caso, o elemento pivô é 1.

$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	b	
1	4	-2	0	0	0	
0	2	1	1	0	10	$\frac{10}{1} = 10$
0	1	-1	0	1	8	$\frac{8}{-1} = -8$

Uma vez identificado o elemento pivô, é necessário calcular a nova linha pivô, dividindo-se a linha que sai da base pelo elemento pivô. Para cada uma das outras linhas, atualiza-se seu valor adicionando a elas o oposto de cada coeficiente da variável que sai da base vezes a nova linha pivô, incluindo a linha zero. Segue o novo tableau:

$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	8	0	2	0	20
0	2	1	1	0	10
0	3	0	1	1	18

Como a linha zero apresenta valores não negativos, tem-se a solução ótima. Neste caso, assumindo-se as variáveis não básicas $x_1 = x_3 = 0$, o problema tem solução factível ótima única $x_2^* = 10$ e $x_4^* = 18$, com o valor ótimo da função objetivo $z^* = -20$.

5. TEORIA DA DUALIDADE

O conceito de dualidade e suas diversas ramificações são das mais importantes descobertas, desde o início da Programação Linear. Isso se deve ao fato de que todo problema de Programação Linear, chamado primal, tem associado a ele outro problema de Programação Linear, chamado de dual.

Em determinadas situações, a quantidade de cálculos implementados no Método Simplex, para se resolver um problema de Programação Linear, pode ser demasiadamente grande. Essa quantidade pode ser reduzida ao se substituir o modelo primal pelo modelo dual [1, 8].

O modelo dual pode ser formulado, utilizando-se os coeficientes do modelo primal correspondente. Uma vez que o modelo primal está na forma padrão, pode-se escrever o problema dual da seguinte forma [1,4]:

- Se o problema dual estiver na forma de minimização, o problema primal está na forma de maximização;
- Os lados direitos nas restrições no problema dual são os coeficientes na função objetivo do problema primal;
- Os coeficientes da restrição no problema dual são os coeficientes das variáveis de restrição no problema primal.

O esquema abaixo sintetiza as descrições acima, sendo à esquerda o modelo primal e à direita o modelo dual:

Tabela 4: Forma padrão para o problema primal (a esquerda) e seu problema dual (a direita)

Primal	Dual
Maximizar $z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$	Minimizar $w = \sum_{i=1}^m b_i \lambda_i$
Sujeito a $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i,$	Sujeito a $\sum_{i=1}^m a_{ij} \lambda_j \geq c_j,$
para $i = \{1, 2, \dots, m\}$ e $j = \{1, 2, \dots, n\}$	para $i = \{1, 2, \dots, m\}$ e $j = \{1, 2, \dots, n\}$
$x_j \geq 0$	$\lambda_j \geq 0$

Fonte: Hillier et al, p.204

Assim, percebe-se que os elementos da matriz coluna, do lado direito da restrição no modelo primal, fornecem os coeficientes da função objetivo do problema dual; os coeficientes da função objetivo no problema primal fornecem a matriz coluna, do lado direito da restrição

no modelo dual; o sinal das restrições também se altera, ou seja, se o problema primal possui o sistema de equações com sinal de “menor que ou igual a que”, o modelo dual, para seu sistema de restrições, terá o sinal de “maior que ou igual a que”; os coeficientes de uma variável em um dos modelos são os coeficientes para uma equação de restrição no outro modelo; o número de variáveis no problema dual é igual ao número de restrições no problema primal e cada restrição no problema dual corresponde a cada variável no problema primal [1, 4, 8].

A definição de dualidade, através do par de programas primal e dual, em forma matricial é:

Tabela 5: Forma padrão para o problema primal (a esquerda) e seu problema dual (a direita), em forma matricial

Primal		Dual	
Maximizar	$z = c^T x$	Minimizar	$w = \lambda^T b$
Sujeito a	$Ax \geq b$	Sujeito a	$\lambda^T A \leq c^T$
	$x \geq 0$		$\lambda \geq 0$

Fonte: Hillier et al, p.204, adaptado pelo Autor

O quadro comparativo acima destaca que A é uma matriz $m \times n$, sendo b e x vetores colunas de dimensão n , com x como variável do problema de Programação Linear primal. Já c^T é um vetor linha de dimensão n , e λ^T um vetor de linha dimensão m , tal que λ é a variável do problema de Programação Linear dual. Em outras palavras, a matriz de restrições do problema dual é a matriz transposta das restrições do problema primal. A solução ótima primal corresponde a solução ótima dual, ou seja, $z = w$.

Uma vez que os problemas primal e dual estão relacionados, tem-se alguns resultados que auxiliam na busca de soluções em problemas reais [4, 7]:

Teorema 8.1: O dual de um problema dual é o primal.

Demonstração

Seja o problema primal P :

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & z = c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax \geq b \\ & x \geq 0, \end{array}$$

e seu dual D é

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & w = b^T \lambda \\ \text{Sujeito a} & A^T \lambda \leq c^T \\ & \lambda \geq 0. \end{array}$$

Seja \bar{D} o dual deste último problema e \bar{x} as variáveis de \bar{D} . Quer-se mostrar que P é igual a \bar{D} . Então \bar{D} é igual a:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & \bar{z} = c^T \bar{x} \\ \text{Sujeito a} & (A^T)^T \bar{x} \geq (b^T)^T \\ & \bar{x} \geq 0. \end{array}$$

Logo,

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & \bar{z} = c^T \bar{x} \\ \text{Sujeito a} & A \bar{x} \geq b \\ & \bar{x} \geq 0. \end{array}$$

Este último problema \bar{D} é o problema primal P . Segue que $P = \bar{D}$. \square

Lema 8.1 (Lema da Dualidade Fraca): Se x e λ são viáveis para os problemas de Programação Linear, na forma padrão,

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & z = c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax \geq b \\ & x \geq 0, \end{array}$$

e seu correspondente dual

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & w = \lambda^T b \\ \text{Sujeito a} & \lambda^T A \leq c^T \\ & \lambda \geq 0, \end{array}$$

respectivamente, então $c^T x \geq \lambda^T b$.

Demonstração.

Tem-se que

$$\lambda^T b = \lambda^T A x \leq c^T x. \quad \square$$

A última desigualdade é válida para $x \geq 0$ e $\lambda^T A \leq c^T$.

Este lema mostra que uma solução factível para qualquer um dos problemas produz um limite sobre a solução factível do outro problema. Os valores associados ao primal são

todos maiores do que os valores associados ao dual, ou seja, se o problema primal busca o valor mínimo.

Teorema 8.2 (Teorema da Dualidade da Programação Linear): Se um dos problemas

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & z = c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax \geq b \\ & x \geq 0, \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & w = \lambda^T b \\ \text{Sujeito a} & \lambda^T A \leq c^T \\ & \lambda \geq 0 \end{array}$$

tiver a função objetivo limitada e uma solução ótima, então o mesmo acontece para o outro problema, ou seja, $z^* = w^*$, para z^* e w^* valores ótimos para $c^T x$ e $\lambda^T b$, respectivamente. Se qualquer um dos problemas tiver a função objetivo ilimitada, o outro problema não possui uma solução factível.

Sua demonstração pode ser encontrada em [7, 9].

5.1– Relação com o Método Simplex

Anteriormente, foi enunciado o Teorema da Dualidade e referenciado onde buscar sua demonstração. Agora, o mesmo será provado utilizando-se as características do Método Simplex. Dessa forma, obtém-se como resultado que, uma vez que o problema primal é resolvido pelo Método Simplex, uma solução para o dual é obtida prontamente.

Seja o problema de Programação Linear na forma padrão

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z = c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Tem-se a solução ótima factível básica $x = (x_B, 0)$ com a base B. Quer-se determinar uma solução para o problema dual

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & w = \lambda^T b \\ \text{Sujeito a} & \lambda^T A \leq c^T \\ & \lambda \geq 0, \end{array}$$

em termos de B.

Pode-se particionar a matriz A como $A = [B, D]$. Como a solução básica factível $x_B = B^{-1}b$ é ótima, o custo relativo do vetor r , para cada componente, deve ser não-negativo. Pelo Método Simplex Revisado, tem-se

$$r_D^T = c_D^T - c_B^T B^{-1}D,$$

e sendo r_D não - negativo em cada componente, tem-se

$$c_B^T B^{-1}D \leq c_D^T.$$

Agora se define $\lambda^T = c_B^T B^{-1}$. Quer-se mostrar que a escolha de λ soluciona o problema dual. Então,

$$\lambda^T A = [\lambda^T B, \lambda^T D] = [c_B^T, c_B^T B^{-1}D] \leq [c_B^T, c_D^T] = c^T$$

Assim,

$$\lambda^T A \leq c^T,$$

com λ sendo solução factível para a dupla.

Por outro lado,

$$\lambda^T b = c_B^T B^{-1}b = c_B^T x_B,$$

e, portanto, o valor da função objetivo dual é igual ao valor da função objetivo do problema primal. Isso, tendo em conta o lema da dualidade fraca, estabelece a otimalidade de λ para o dual. A discussão acima produz uma alternativa da parte principal do teorema de dualidade:

O problema de Programação Linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z = c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array}$$

tem uma solução ótima factível básica correspondente à base B . Se o vector λ satisfaz $\lambda^T b = c_B^T B^{-1}b$, então é a solução ótima para o problema dual

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & w = \lambda^T b \\ \text{Sujeito a} & \lambda^T A \leq c^T \\ & \lambda \geq 0. \end{array}$$

Os valores ótimos de ambos os problemas são iguais.

Agora, atenta-se para uma discussão de como a solução do dual pode ser obtida diretamente do final do tableau do problema primal, utilizando-se o Método Simplex. Supõe-se que incorporado na matriz A está uma matriz de identidade de ordem m . Esse será o caso

se, por exemplo, m variáveis de folga são empregadas para converter as desigualdades em igualdades, deixando o problema na forma padrão. Então o final tableau da matriz B^{-1} aparece onde a matriz identidade apareceu no início. Além disso, na última linha os componentes correspondentes a matriz de identidade será $c_I^T - c_B^T B^{-1}$, onde c_I é o vetor dos coeficientes do custo das variáveis, que correspondem as colunas da matriz de identidade original. Assim, subtraindo estes coeficientes de custo dos elementos correspondentes na última linha, o oposto da solução $\lambda^T = c_B^T B^{-1}$ para o problema dual é obtido. Em particular, se, como é o caso com variáveis de folga, $c_I = 0$, então os elementos da última linha em B^{-1} são iguais aos componentes negativos da solução para o problema dual.

5.2 – Análise de Sensibilidade

Um trabalho de Pesquisa Operacional consiste geralmente em investigar o problema a ser resolvido através de uma coleta de dados e formular seu enunciado, para em seguida, construir o modelo matemático e determinar sua solução ótima. A seguir, realizam-se os testes e aprimoramentos, caso necessário. É nesta parte que se executa a Análise de Sensibilidade.

Na formulação de um modelo Programação Linear, pressupõe-se que todos os parâmetros a_{ij} , b_i e c_j são constantes conhecidas, estimados através de uma previsão de condições futuras, por meio de uma coleta e análise de dados.

Executar a análise de sensibilidade consiste em, ao realizarem-se mudanças nos valores dos parâmetros a_{ij} , b_i e c_j do modelo, investigar o efeito que essas mudanças acarretam à solução ótima. Dessa forma, um dos seus principais objetivos é o de identificar os parâmetros cujos valores não podem ser alterados sem alterar a solução ótima, chamados de parâmetros sensíveis.

Vale ressaltar que, ao se modificar os valores dos parâmetros no problema primal, também se modificam os valores correspondentes no problema dual [1].

Os passos a seguir vêm sintetizar o procedimento para executar a Análise de Sensibilidade [1]:

- 1– Revisar o modelo, fazendo as alterações desejadas;
- 2– Revisar a tabela final do Método Simplex;
- 3– Converter a tabela final do Método Simplex para uma forma apropriada, a fim de identificar e avaliar a solução básica atual, aplicando a eliminação gaussiana.

4– Realizar o teste de factibilidade, verificando se os valores de todas variáveis básicas na coluna do lado direito da tabela simplex são não–negativos.

5– Realizar o teste de otimalidade, verificando se se todos os coeficientes das variáveis não–básicas na linha *zero* da tabela simplex são não–negativos.

Por fim, para finalizar o trabalho de Pesquisa Operacional, faz–se a preparação para a aplicação do modelo e a implementação da solução ótima.

6. O PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO DO INVESTIMENTO DE CAPITAL

6.1 – Breve Histórico do Problema de Maximização do Investimento de Capital

No início da civilização, o ser humano vivia em pequenas tribos e sua subsistência era baseada em produtos retirados diretamente da natureza. A evolução da sociedade e o surgimento das cidades ocasionaram a aparição de atividades culturais, artesanais e bens de produção para sustento próprio. Esse novo modelo de vida, aliado a desigual repartição dos produtos naturais, originaram o surgimento das trocas comerciais.

O escambo é tido como o primeiro tipo de troca comercial e se caracteriza pela permuta direta de produtos e mercadorias, como matérias primas e artefatos de necessidade.

Com a intensificação das práticas comerciais e o intercâmbio entre as sociedades, o escambo, nos moldes praticados até então, tornou-se rapidamente um empecilho. Houve a necessidade de um sistema estável de equivalências com unidades e padrões fixos. A Grécia pré-helênica teve o boi e as ilhas do Pacífico tiveram colares de pérolas ou de conchas e, posteriormente, faixas de tecido como unidades de escambo.

Com a iminente dificuldade em realizar as transações comerciais através do escambo e o desenvolvimento do comércio, os metais desempenharam um papel cada vez maior nas tratativas de compra e venda. Seu uso se dava através da pesagem das mercadorias e da relação peso-padrão com o metal, e a padronização pelo metal fez com que as mercadorias passassem a ser trocadas em função de seu “preço justo” [15].

As moedas metálicas surgiram na Lídia há aproximadamente três mil anos, caracterizando o surgimento do primeiro sistema de mercados livres e abertos, determinando a primeira revolução monetária da história. Tal acontecimento permitiu a criação de um sistema cultural totalmente novo, originando o modelo de vida das civilizações clássicas do Mediterrâneo.

A ideia das moedas metálicas propagou-se mundo afora até que, no período da Renascença, os bancos italianos desenvolveram o papel moeda e o sistema nacional de bancos, constituindo a segunda revolução monetária. Essa medida extinguiu o feudalismo e modificou a base do poder econômico, passando de posse de terras para posse de títulos, ações e corporações.

Essa última mudança proporcionou o surgimento do modelo econômico atual, o capitalismo. A partir do início do século XXI, iniciou-se a terceira revolução monetária, com a aparição do dinheiro eletrônico e da economia virtual.

A evolução tecnológica transformou o dinheiro em impulsos eletrônicos invisíveis, tornando-os mais eficientes nas transações comerciais e no registro de números e informações, além de ser livre do espaço, do tempo, do controle de governos e corporações. Essa nova realidade possibilitou ao dinheiro eletrônico oferecer ao usuário a escolha da cifra a ser trabalhada como dólar, euros, real, marcos, ienes ou qualquer outra combinação de moedas [16].

Entretanto, o que verdadeiramente importa não é o dinheiro em si, seja de qual forma ele se apresente, mas as mercadorias e serviços que se pode comprar e, através do poder de compra, usufruir de todos os benefícios da sociedade moderna. Dessa forma, surge a necessidade de se ter um capital para girar os recursos, enquadrando a situação financeira à realidade econômica e ao mercado financeiro [17].

Com a necessidade de se encontrar lógica e raciocínio em meio as incertezas do mercado financeiro, surgem diversos trabalhos acadêmicos relacionados a finanças e a matemática financeira.

O primeiro trabalho notável nesta área foi conferido a Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier, nascido em 1 de março de 1870, em Le Havre, França. Bachelier, supervisionado por Henri Poincaré, apresentou na Sorbonne sua tese de doutorado intitulada *Theorie de Speculation*, que posteriormente foi publicada numa das mais influentes revista científicas da França, a *Annales scientiques del'Ecole Normale Superieure*.

A *Theorie de Speculation* trás o movimento *browniano* como um modelo das flutuações dos preços das ações, que durante muito tempo, foi usado como base dos arquétipos em matemática financeira [18].

A grandeza de seu trabalho dedicou ao dia 29 de março de 1900, data da sua defesa em Sorbonne, o dia do nascimento da Matemática Financeira. Bachelier foi intitulado como o pai da Matemática Financeira [17, 18].

O reconhecimento do trabalho de Bachelier ocorreu cinquenta anos após sua publicação, quando Jimmy Savage o recomenda a seus amigos economistas, através de cartões postais. Um dos endereçados foi Paul Samuelson, que relatou que a tese de Bachelier trazia as ferramentas matemáticas necessárias (movimento *browniano*, processos de Markov e equação do calor) para a implantação de seu programa econômico [18].

Em 1952, Harry M. Markowitz publicou no *The Journal of Finance* seu estudo sobre teoria moderna de finanças, intitulado *Portfolio Selection*. Este foi considerado a maior contribuição no entendimento dos mercados financeiros e tomadas de decisão, que protagonizou o nascimento da economia moderna [16, 19].

O *Portfolio Selection* foi o primeiro trabalho a formalizar matematicamente a ideia de diversificação de investimento, buscando a maximização do retorno do portfolio esperado, minimizando o impacto do risco [21].

Após a publicação de seu artigo, Markowitz começou a desenvolver modelos de otimização, programação linear e algoritmos, trabalhando para a RAND Corporation.

Em 1954, Markowitz defendeu seu doutorado e, no final dos anos cinquenta, publicou seu livro cujo título é o mesmo de sua tese, *Portfolio Selection*. O texto do livro contém toda a sua teoria sobre modelos de carteiras de investimento.

Em 1990, ele recebeu o Prêmio Nobel de Economia, com Merton Miller e William Sharpe, por suas contribuições para a análise das carteiras e métodos de finanças corporativas de investimento [22].

A teoria moderna de portfólios, nos dias de hoje, indica ao investidor o modo como o investimento pode ser realizado, minimizando o risco ou maximizando o retorno. Aplicando este conceito numa carteira de investimento diversificada, observa-se vantagem dos investimentos na maximização entre risco e retorno e não em investimentos no ativo de maior retorno [16, 20]

6.2 – Conceitos Básicos para a Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz

A Teoria moderna de portfólios de Harry M. Markowitz sugere que os investimentos devem considerar simultaneamente o risco e o retorno numa alocação de fundos, através da diversificação de investimentos, de maneira a minimizar o risco e maximizar o retorno.

Dessa forma, faz-se necessário a apresentação de alguns conceitos em finanças e estatística básica para o entendimento da Teoria Moderna de Portfolios e sua posterior aplicação.

6.2.1 – Definições e conceitos em finanças

Alguns preceitos básicos em finanças e economia devem ser bem conceituados, a fim de se entender a Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz [22, 23].

Inicialmente tem-se o conceito de investimento, definido pelo compromisso que o investidor faz, utilizando-se do dinheiro que não está usufruindo, a fim de que este aumente ao longo do tempo. O investimento ocorre para que o investidor possa consumir posteriormente bens de valor maiores do que o investido inicialmente. De certo, a taxa de retorno deve compensar o tempo, a alíquota esperada de inflação e a incerteza do retorno. Cabe ao investidor selecionar os investimentos que lhe proporcionará as taxas de retorno desejadas.

Ao investir, adia-se o consumo atual para agregar ao capital inicial certa quantia para que se possa consumir mais no futuro. Essa quantia esperada é o retorno sobre um investimento, definido como a mudança de valor, resultante desse investimento. Essa valorização (ou desvalorização) do capital investido pode acontecer devido à entrada (ou saída) de dinheiro, como juros (ou dividendos), causando uma mudança no preço do ativo.

Para ocorrer o investimento que vise maior taxa de retorno, deve fazer uso do portfólio de investimento, definido por um grupo de ativos (aplicações de recursos) que pode conter ações, títulos ou imóveis. Então, deve-se calcular a taxa média de retorno para este portfólio, num determinado período de tempo.

Markowitz, em seu *Portfolio Selection*, aconselha a diversificação do investimento. Define-se diversificação como a divisão do capital a ser investido em diversos tipos de ativos. Isso faz com que o risco de perda seja reduzido.

Como o mercado financeiro é cheio de incertezas, é necessário se trabalhar com medidas risco. O risco é a incerteza de que um investimento ganhará a taxa de retorno esperada. Dessa forma, quanto maior a taxa de retorno, maior é o risco do investimento.

O risco pode ser classificado em dois tipos. O risco diversificável é o que atinge diretamente alguns investimentos ou algumas empresas devido a imprevistos ou decisões mal tomadas. Este pode afetar apenas alguns ativos do portfólio, preservando a rentabilidade de outros. Já o risco não-diversificável é o risco de mercado, que põe em baixa não somente algumas aplicações, mas o mercado como um todo. Se o mercado está em baixa, todos os investimentos tendem a acompanhar a baixa.

O risco e a taxa esperada de retorno do investimento estão diretamente ligados, fazendo com que o retorno tenha um valor ótimo no portfólio de investimento.

Por fim, a volatilidade é a variação do preço das ações em um determinado período de tempo. O conceito estatístico que mede a volatilidade é o desvio-padrão, onde quanto maior é a variação do retorno do ativo, maior é o desvio-padrão. Verifica-se então o maior o risco.

6.2.2 – Tópicos de Estatística Básica

O modelo de análise de risco-retorno de Markowitz, utilizado na escolha da melhor carteira de investimentos, está baseado em quatro grandes conceitos estatísticos: média, variância, desvio-padrão, covariância e correlação, descritos abaixo [24, 25].

- Média: é uma medida de tendência central, pois os dados analisados “tendem a se agrupar em torno dos valores centrais” da distribuição. É representada pelo quociente entre soma de todos os valores x_i de uma amostra, igualmente prováveis, pelo número N de termos que esta amostra possui. Algebricamente, a média μ é:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}.$$

- Variância: é uma medida de dispersão ou variabilidade, já que mede a diversificação das variáveis em torno da média. É representada pela média aritmética dos quadrados dos desvios em relação a média. Define-se como *desvio em relação a média* a diferença entre cada x_i de uma amostra e a média μ . Algebricamente, a variância σ^2 é:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}.$$

Sob o ponto de vista prático, a utilização da variância se mostra inconveniente, pois é calculada a partir dos quadrados dos desvios, ou seja, em relação a variável em questão é um número em unidades quadradas. Dessa forma, pela estatística descritiva, faz-se uso geralmente do desvio padrão.

- Desvio padrão: é uma medida de dispersão ou variabilidade que, diferentemente da variância, possui unidades lineares em relação a média. É

representado pela raiz quadrada positiva da variância. Algebricamente, o desvio padrão σ é:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}}.$$

- **Covariância:** é uma medida descritiva de dependência linear entre variáveis aleatórias, isto é, verifica como duas variáveis se modificam simultaneamente. Sejam duas variáveis aleatórias x e y , com valores esperados μ_x e μ_y . A medida de associação entre elas é o produto destas em torno da média, numa amostra com N termos. Algebricamente, a covariância σ_{xy} é:

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{N}.$$

A covariância é interpretada da seguinte forma: caso $\sigma_{xy} > 0$, diz-se que a associação linear entre as variáveis x e y é positiva, ou seja, se os valores de x aumentam, os de y também aumentarão. Se $\sigma_{xy} < 0$, diz-se que a associação linear entre as variáveis x e y é negativa, ou seja, se os valores de x aumentam, os de y diminuirão.

- **Correlação:** é uma medida utilizada para medir o grau de dependência linear entre duas variáveis. Algebricamente, a correlação ρ_{xy} é:

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

A correlação é interpretada da seguinte forma: Se a correlação $\rho_{xy} = +1$, diz-se que a correlação linear é positiva perfeita, ou seja, a distribuição dos dados forma uma reta crescente; se a correlação $\rho_{xy} = -1$, diz-se que a correlação linear é negativa perfeita, ou seja, a distribuição dos dados forma uma reta decrescente; se $\rho_{xy} = 0$, diz-se que não há correlação linear entre as variáveis; se $0 < \rho_{xy} < 1$ diz-se que a correlação linear é positiva, variando de fraca (o valor de ρ_{xy} é próximo a zero) a forte (o valor de ρ_{xy} é próximo a 1).

A média e o desvio padrão de uma distribuição de dados podem se relacionar através da distribuição normal de probabilidades (também chamada de curva normal, distribuição de Gauss ou curva gaussiana), utilizada em pesquisas socioeconômicas, entre outras.

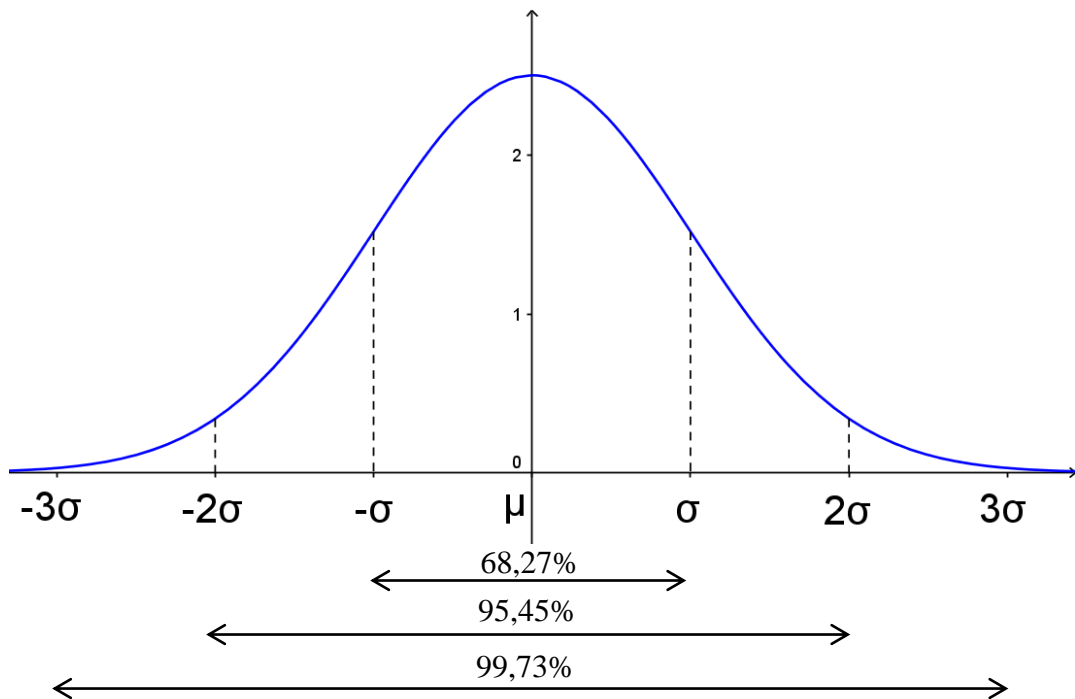
A equação que a define é [25]

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}},$$

com $\pi = 3,14159 \dots$ e o número neperiano $e = 2,71828 \dots$

Sua representação gráfica é uma curva no formato de sino, simétrica ao redor da média, sendo o desvio padrão a unidade de medida do eixo horizontal. Ela possui como característica ser assintótica em relação ao eixo das abscissas e sua área total, limitada pelo eixo horizontal e pela curva, é igual a 1 [26].

Figura 9: Ilustração de uma distribuição normal de probabilidades.



Fonte: SPIEGEL, Murray R. et al, p.187, adaptado pelo Autor.

O gráfico da curva normal indica as áreas entre $-\sigma$ e σ , -2σ e 2σ e -3σ e 3σ , equivalentes a 0,6827, 0,9545 e 0,9973, respectivamente.

6.3 – A Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz

A Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz é considerada um dos principais avanços no campo das finanças nas últimas décadas, pois através dela foi possível perceber que um ótimo portfólio de investimentos não é simplesmente uma combinação de bons títulos

individuais, onde cada um deles tem características desejáveis de risco-retorno, como feito até a década de 1960.

Um portfólio de investimentos (ou carteira de investimentos) é definido como um conjunto de ativos financeiros a se investir, e, na sua originalidade, deve se incluir todos os tipos de negócios e retornos, não somente os de segurança de mercado, como casa e carro, mas também os de menor negociação, como moedas, obras de arte, antiguidades, mobiliário etc. Isso se deve ao fato de que não só os retornos inseridos no portfólio devem ser considerados, mas o retorno de todas as interações possíveis de investimento, a fim de se obter a maximização do lucro ou a minimização do risco de perda de capital.

A seleção dos ativos que comporão o portfólio deve ser feita com base na relação risco-retorno e, para auxiliar esse processo, modelos de otimização vem sendo desenvolvidos, de modo a quantificar os níveis de risco e retorno de investimentos.

Antes de apresentar a Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz e a Fronteira Eficiente, faz-se necessário esclarecer alguns pressupostos gerais, utilizados na teoria, como a aversão ao risco, taxa esperada de retorno, variância e desvio padrão do retorno esperado e covariância e correlação do retorno esperado [16, 22].

6.3.1– Aversão ao risco

Define-se risco, no contexto das finanças, como a incerteza de ganho futuro ou a probabilidade da ocorrência de adversidades. Entretanto, a antipatia ao risco também ocorre no cotidiano das pessoas [27].

A aversão ao risco está diretamente ligada ao valor dos bens envolvidos. Se um grande valor estiver em risco, como carro, casa, vida, saúde e dinheiro, apresenta-se a aversão ao risco. Quando se envolvem bens de pequeno valor, como loterias e máquinas caça-níqueis, mesmo apresentando-se risco alto de perda, o simples prazer pela excitação faz com que algumas pessoas apostem em um possível retorno.

Os investidores se comportam da mesma forma no mercado financeiro. Quando se dispõe de grandes somas em dinheiro, existe forte aversão ao risco, ao se desenvolver um portfólio de investimento [20, 22].

6.3.2 – Cálculo da taxa esperada de retorno para uma carteira de investimentos

O retorno esperado para um investimento é determinado pelo montante ganho por unidade monetária investida.

Numa carteira de investimentos com dois ativos A e B, seja $P_{A(0)}$ o preço atual do ativo A e $P_{A(1)}$ o preço esperado num certo período de tempo para A. A variação absoluta \bar{P}_A do preço de A é

$$\bar{P}_A = P_{A(1)} - P_{A(0)}.$$

Para obter o ganho real esperado para o investimento deve-se considerar o preço investido do ativo e o seu ganho absoluto, dado em percentual. Então, o lucro percentual esperado L_A para o investimento A é

$$L_A = \frac{\bar{P}_A}{P_{A(0)}}.$$

Para essa carteira de investimentos, seja L_B o lucro percentual esperado para B, \bar{P}_B a variação do preço de B e $P_{B(0)}$ o preço atual de B, onde

$$L_B = \frac{\bar{P}_B}{P_{B(0)}}.$$

Se o risco entre A e B for exatamente o mesmo e $L_A > L_B$, então é melhor se investir em A. Analogamente, se o risco entre A e B for exatamente o mesmo e $L_A < L_B$, então é melhor se investir em B.

Uma vez calculados os valores dos retornos individuais esperados L_A e L_B e assumindo que as probabilidades de ocorrer os retornos esperados para os mesmos são p_A e p_B , respectivamente, a taxa de retorno esperada $E(R)$ desses investimentos é a média ponderada dos retornos individuais, tendo como ponderadores a probabilidade de ocorrência dos retornos. Algebricamente tem-se

$$E(R) = p_A L_A + p_B L_B.$$

Cada um dos retornos dos ativos que compõe um portfólio de investimentos são considerados como variáveis aleatórias, uma vez que os mesmos não possuem valores definidos, pois os investimentos ocorrem sob condições de incerteza. Dessa forma, o retorno só pode ser mensurado efetivamente após o término do prazo de investimento. Considerando um portfólio com n ativos, o retorno esperado $E(R)$ é [21]

$$E(R) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot L_i.$$

Já a taxa esperada de retorno para a carteira de investimento $E(R_{port})$ com n ativos é calculada pela média ponderada das taxas esperadas de retorno para cada investimento na carteira, em que os pesos são as proporções do valor total para o investimento. Algebricamente tem-se

$$E(R_{port}) = \sum_{i=1}^n W_i \cdot E(R_i),$$

com W_i o percentual do portfólio no ativo i e $E(R_i)$ a taxa de retorno esperada no ativo i [20, 22].

6.3.3 – Variância e Desvio Padrão para um ativo em uma carteira de investimentos

O risco e o retorno de um investimento estão intimamente ligados. De maneira geral, se o investimento tem um alto retorno esperado, a tendência é que o risco seja alto da mesma forma. Desse modo, ao analisar os ativos para se criar uma carteira de investimentos, não se deve focar apenas nos retornos esperados [27].

Sabe-se que se o risco entre dois investimentos forem iguais, deve-se investir naquele de maior retorno esperado. Entretanto, entre dois investimentos com mesmo retorno esperado, é grande a possibilidade de se ter diferentes graus de risco. Então é importante verificar como todos os possíveis retornos se comportam ao redor do retorno médio, onde quanto maior a variabilidade, maior o risco [28].

Dessa forma, as medidas de risco utilizadas são a variância e o desvio padrão dos retornos do investimento. Algebricamente, a variância σ^2 e o desvio padrão σ das possíveis

taxas de retorno R_i , a partir da taxa de retorno esperada $E(R_i)$, numa carteira com n ativos, são [23]:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n [R_i - E(R_i)]^2 \cdot p_i$$

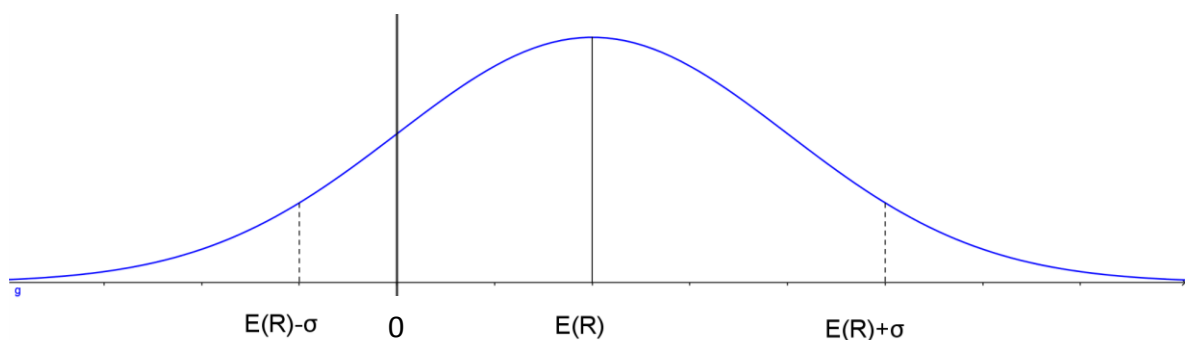
e

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n [R_i - E(R_i)]^2 \cdot p_i}$$

A importância do desvio padrão do retorno esperado para decidir qual ativo irá compor a carteira se deve ao fato de que, um investimento pode ter infinitos valores de retorno e seguir uma distribuição normal de probabilidades [17].

Assim, dada a curva normal de probabilidades, o desvio padrão pode indicar alta dispersão ou baixa dispersão. Para dois ativos com mesma taxa esperada de retorno, onde um deles apresenta desvio padrão de alta dispersão e o outro de baixa dispersão, a curva normal do primeiro é mais alongada, diferentemente do segundo. Uma vez que a distribuição normal de probabilidades tem por característica que 68% do retorno esperado está entre $E(R) - \sigma$ e $E(R) + \sigma$, tem-se:

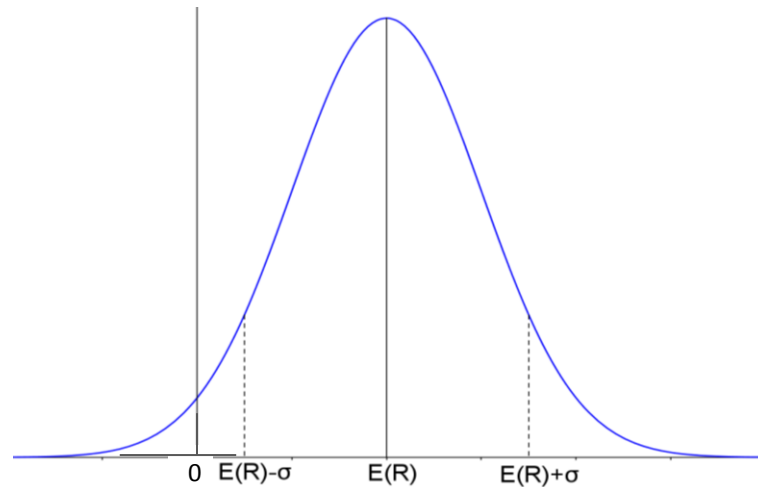
Figura 10: Ilustração de uma distribuição normal de probabilidades dos possíveis retornos esperados, com desvio padrão dito alto.



Fonte: Autor

Como a distribuição está muito dispersa, indicando um desvio padrão elevado, o retorno zero está dentro da margem de 68% e uma pequena parte de retorno negativo (abaixo de zero) também faz parte desse intervalo, aumentando a possibilidade de se ter o retorno esperado negativo.

Figura 11: Ilustração de uma distribuição normal de probabilidades dos possíveis retornos esperados, com desvio padrão dito baixo.



Fonte: Autor

Já com a distribuição pouco dispersa, indica-se baixo desvio padrão, onde o retorno zero está fora da margem de 68%, implicando que a possibilidade de um retorno negativo é inferior a 16%.

É possível reduzir o desvio padrão do retorno esperado, isto é, o risco de um investimento, quando o mesmo é feito sobre um portfolio com diferentes ativos. Isso se dá pelo efeito de diversificação, que é a diminuição na volatilidade de um investimento por combinar diferentes tipos de ativos, explicado pela covariância e correlação entre eles [29].

6.3.4 – Covariância e correlação dos retornos esperados de ativos numa carteira de investimentos

A covariância é uma medida estatística que afere a força de relação entre duas variáveis ao longo de um determinado tempo.

Para dois ativos, A e B, a covariância das taxas de retorno é definida pelo produto do desvio em relação a taxa média de retorno de cada um dos ativos no mesmo período de tempo. Algebricamente tem-se [23]

$$Cov_{A,B} = E\{[R_A - E(R_A)][R_B - E(R_B)]\}.$$

A covariância das taxas de retorno dos ativos A e B será positiva, $Cov_{A,B} > 0$, quando os sinais dos desvios a média de ambos os ativos forem iguais, isto é, ambas as expectativas

de retorno estarão acima ou abaixo da taxa média. Isso significa que as taxas de retorno para os dois investimentos tendem a se comportar da mesma forma no mesmo intervalo de tempo.

Em contrapartida, a covariância das taxas de retorno dos mesmos ativos será negativa, $Cov_{A,B} < 0$, se os sinais dos desvios a média de ambos os investimentos forem diferentes, ou seja, enquanto para um dos ativos espera-se um retorno acima da média, para o outro espera-se um retorno abaixo da taxa média. Constitui-se então que as taxas de retorno para dois ativos tendem a se mover em direções opostas num mesmo intervalo de tempo [28].

O valor numérico da covariância não permite maiores especificidades, uma vez que ela é afetada pela variabilidade dos dados. Desse modo, faz-se necessário utilizar a correlação, uma medida que leva em consideração a padronização dos desvios das taxas de retorno em relação a média, definida pelo quociente da covariância das taxas de retorno pelo produto dos seus respectivos desvios padrões. Algebricamente, o coeficiente de correlação $r_{A,B}$ dos retornos de dois ativos A e B é

$$r_{A,B} = \frac{Cov_{A,B}}{\sigma_A \sigma_B}.$$

Os valores do coeficiente de correlação entre os ativos variam entre -1 e 1 , ou seja, $-1 \leq r_{A,B} \leq 1$. Uma correlação é dita perfeitamente positiva se $r_{A,B} = 1$, constituindo um comportamento linear entre os retornos esperados para os dois ativos. Já o valor $r_{A,B} = -1$ indica um comportamento negativamente perfeito entre os dois ativos, estabelecendo que quando a taxa de retorno de um dos ativos está acima de sua taxa média, o outro ativo possui o retorno abaixo de sua taxa média, movimentando-se em direções completamente opostas.

É possível que os retornos dos ativos não estejam estatisticamente correlacionados. Nesse caso, tem-se $r_{A,B} = 0$ [22, 27].

6.3.5 – Variância de uma carteira de investimentos

Assumindo que cada investidor tem uma atitude perante o risco, Markowitz considerou que a satisfação do investidor ocorre na maximização da relação risco – retorno e não somente ao se investir no ativo de maior retorno. Dessa forma, para a carteira de investimentos composta pelos ativos A e B , o retorno esperado $E(R_{port})$ para essa carteira é [20, 22]

$$E(R_{port}) = W_A E(R_A) + W_B E(R_B),$$

em que com W_A e W_B são constantes numéricas que representam os percentuais investidos no portfólio para os ativos A e B, respectivamente, e $E(R_A)$ e $E(R_B)$ são duas variáveis aleatórias que representam as taxas de retorno esperada para os ativos A e B, nessa ordem.

Para se mensurar o risco de investimento para esse mesmo portfólio calcula-se a variância dos retornos $Var(R_{port})$ da seguinte forma:

$$Var(R_{port}) = Var(W_A R_A + W_B R_B).$$

Sabe-se que R_A e R_B são variáveis aleatórias e W_A e W_B são constantes numéricas. Logo, quer-se calcular a variância da combinação linear de duas variáveis aleatórias. Aplicando a definição e as propriedades da variância, tem-se [20, 29]:

$$\begin{aligned} Var(R_{port}) &= Var(W_A R_A + W_B R_B). \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (W_A R_{Ai} + W_B R_{Bi})^2 - [E(R_A) + E(R_B)]^2. \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_A^2 R_{Ai}^2 + 2 W_A R_{Ai} W_B R_{Bi} + W_B^2 R_{Bi}^2 - E(R_A)^2 - 2E(R_A)E(R_B) - E(R_B)^2. \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_A^2 [R_{Ai}^2 - E(R_A)^2] + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_B^2 [R_{Bi}^2 - E(R_B)^2] + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n W_A W_B [(R_{Ai} R_{Bi} - E(R_A)E(R_B))]. \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_A^2 [R_{Ai}^2 - E(R_A)^2] + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_B^2 [R_{Bi}^2 - E(R_B)^2] + 2W_A W_B \frac{\sum_{i=1}^n [(R_{Ai} R_{Bi} - E(R_A)E(R_B))]}{n}. \end{aligned}$$

Como,

$$Var_A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [R_{Ai}^2 - E(R_A)^2],$$

$$Var_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [R_{Bi}^2 - E(R_B)^2]$$

e

$$Cov_{AB} = \frac{\sum_{i=1}^n [(R_{Ai} R_{Bi} - E(R_A)E(R_B))]}{n},$$

então,

$$Var(R_{port}) = W_A^2 \sigma_A^2 + W_B^2 \sigma_B^2 + 2W_A W_B Cov_{A,B}.$$

O efeito de diversificação em um portfólio se dá pelo nível de correlação entre os ativos que compõe a carteira de investimento. Assim, quanto menor a covariância entre os

ativos, maior será o efeito de diversificação e, conseqüentemente, menor o risco. Recorrendo-se ao modelo de correlação entre ativos de uma carteira de investimentos, composta por A e B, tem-se:

$$r_{A,B} = Corr_{A,B} = \frac{Cov_{A,B}}{\sigma_A \sigma_B} \Leftrightarrow Cov_{A,B} = Corr_{A,B} \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B$$

Substituindo a expressão da $Cov_{A,B}$ na expressão da $Var(R_{port})$, tem-se:

$$Var(R_{port}) = W_A^2 \sigma_A^2 + W_B^2 \sigma_B^2 + 2W_A W_B \cdot Corr_{A,B} \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B$$

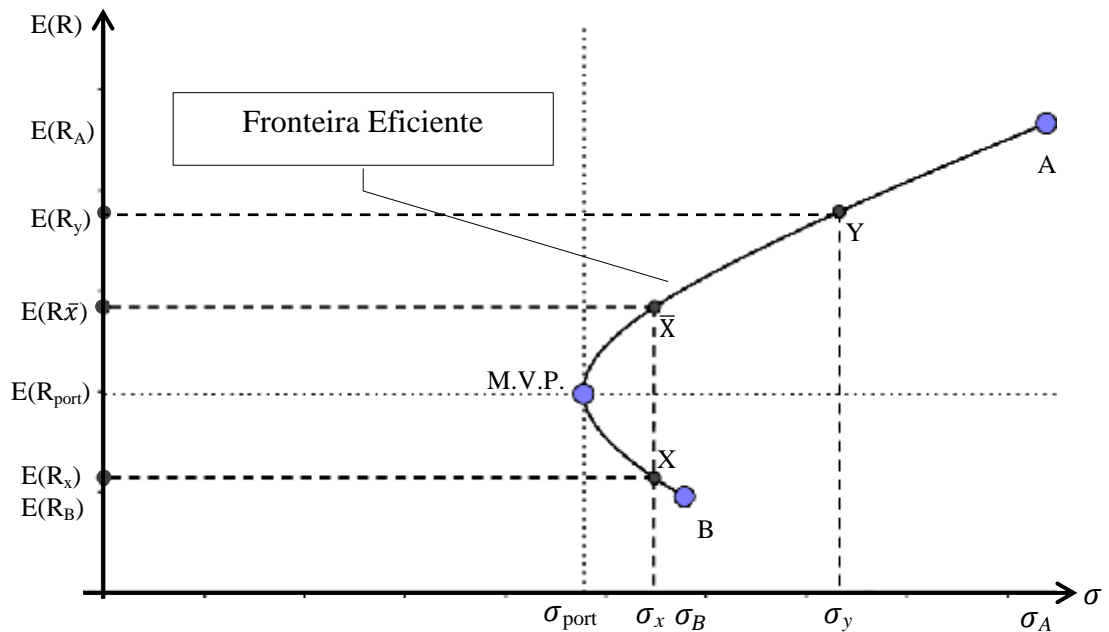
Analisando a fórmula acima, percebe-se que quanto menor a correlação, menor a variância do portfólio, e conseqüentemente, menor o desvio padrão (risco). Uma vez que $-1 \leq Corr_{A,B} \leq 1$, ao combinar-se duas ações num mesmo portfólio, o risco do investimento será reduzido desde que a correlação entre eles seja inferior a 1 e o portfólio terá efeito de diversificação máximo se a correlação entre os ativos for igual a -1 [21].

6.3.6 – Teoria de Portfólio de Markowitz: Fronteira Eficiente

A partir da carteira composta pelos ativos A e B, é possível combiná-los, variando o percentual investido em cada um deles e mantendo-se constante o coeficiente de correlação, para formar outros portfólios de investimento.

Assim, investindo-se W_A em A e W_B em B (com $W_B = 1 - W_A$), com o retorno esperado $E(R_A)$ e o desvio padrão σ_A para o ativo A, retorno esperado $E(R_B)$ e o desvio padrão σ_B para o ativo B e assumindo que a $Corr_{A,B} = 0$ (conseqüentemente $Cov_{A,B} = 0$), onde $E(R_A) > E(R_B)$ e $\sigma_A > \sigma_B$, é possível calcular a taxa esperada de retorno $E(R_{port})$ e o desvio padrão σ_{port} para o portfólio. As possíveis combinações que formam as novas carteiras estão representadas pelo plano cartesiano a seguir, com $E(R)$ o eixo das ordenadas e σ o eixo das abscissas.

Figura 12: Gráfico das possíveis combinações dos ativos A e B, que formam as diferentes carteiras de investimento, e a fronteira eficiente para este portfólio.



Fonte: Reilly et al, p.229, adaptado pelo Autor.

Analisando a Figura 12, percebe-se que se investindo em qualquer portfólio entre B e M.V.P. não se tem bons investimentos, pois estes oferecem o mesmo risco com diferentes retornos. Por exemplo, as carteiras X e \bar{X} possuem risco σ_x e taxas esperadas de retorno $E(R_x)$ e $E(R_{\bar{x}})$ respectivamente, onde $E(R_{\bar{x}}) > E(R_x)$. Em contrapartida, têm-se bons investimentos nos portfólios entre M.V.P. e A, pois não há qualquer investimento alternativo que tenha o mesmo risco com maior retorno. Estes últimos portfólios são chamados de portfólios eficientes e o conjunto dos portfólios eficientes forma a fronteira eficiente. A carteira que possui a menor variância possível é o M.V.P. (Minimum Variance Portfolio) e todos os portfólios posteriores são ditos eficientes, com a exceção do ativo com maior retorno [16, 22].

Um portfólio é dito eficiente quando nenhum outro portfólio oferece maior retorno esperado para o mesmo (ou menor) risco. Da mesma forma, um portfólio é eficiente quando nenhum outro portfólio oferece o menor risco com o mesmo (ou maior) retorno esperado [20, 22].

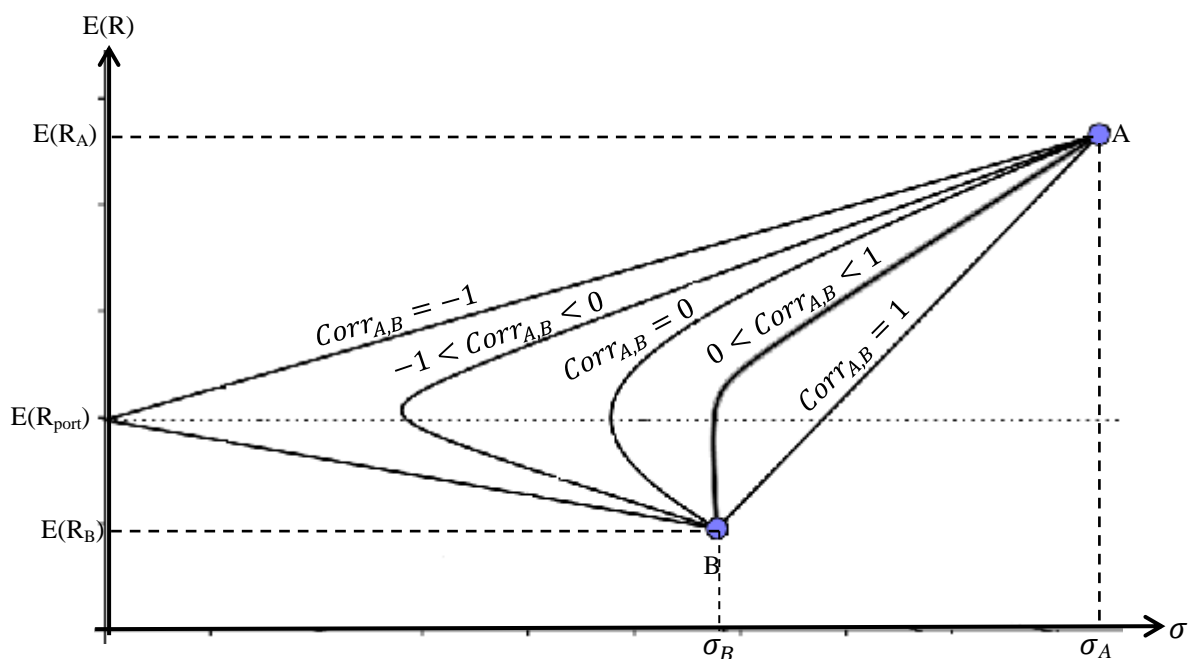
Todo portfólio que possui a correlação, entre seus ativos, diferente de 1 é afetado pelo efeito de diversificação. Isso mostra íntima relação entre o efeito de diversificação e a correlação entre seus ativos, em termos da forma da fronteira eficiente. Também, a correlação

não afeta o retorno esperado, mas o risco do portfólio, onde quanto menor a correlação, menor o desvio padrão do portfólio.

Assim, para a carteira com os ativos A e B, com o mesmo investimento (peso) em cada ativo e variando-se a correlação entre eles, tem-se que se a $Corr_{A,B} = -1$, o gráfico da fronteira eficiente entre eles são duas retas, com intersecção no eixo do $E(R_{port})$ e, conseqüentemente, risco zero. Se $0 < Corr_{A,B} < 1$ a curva situa-se à direita do gráfico de $Corr_{A,B} = 0$, enquanto que para $-1 < Corr_{A,B} < 0$ o gráfico situa-se a esquerda. Finalizando, se $Corr_{A,B} = 1$, não há efeito de diversificação, pois não há para o mesmo retorno esperado um risco inferior em outro portfólio. Desse modo, o desvio padrão do portfólio será uma combinação linear entre os ativos A e B, fazendo com que a fronteira eficiente seja representada por uma reta [23].

A Figura 13 ilustra a situação.

Figura 13: Gráfico da influencia da correlação entre os ativos A e B no efeito de diversificação no portfólio e na fronteira eficiente.



Fonte: Reilly et al, p.226, adaptado pelo Autor.

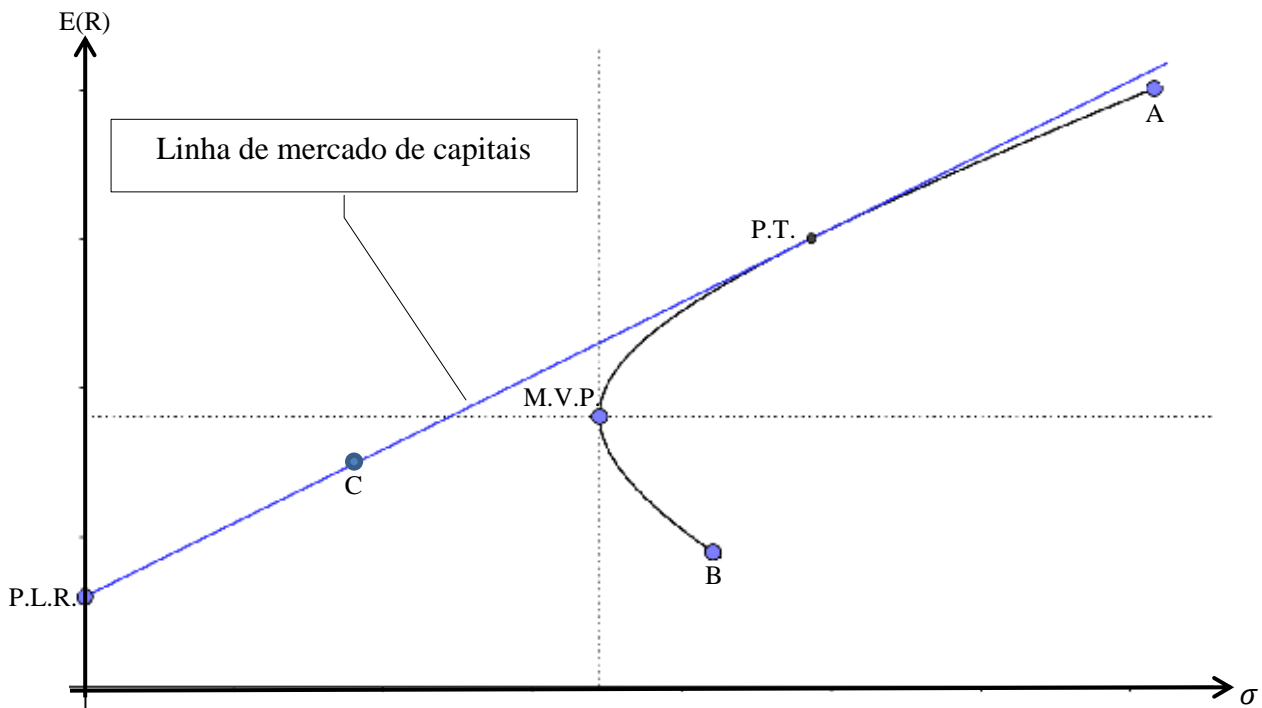
Os investimentos com $Corr_{A,B} = -1$ e, conseqüentemente, $\sigma = 0$ são livres de risco, denotados por P.L.R. (Portfólio Livre de Risco), situando-se no eixo do retorno esperado no plano cartesiano. É interessante verificar que existe enorme ganho ao se combinar um P.L.R. com a carteira composta por ativos de risco.

Montando-se um portfólio que combina um P.L.R. com a carteira de ativos de risco A e B, sua fronteira eficiente será uma reta, chamada de linha de mercado de capitais, e quanto

maior a inclinação da linha de mercado de capitais, melhor são as combinações entre o risco e o retorno esperado para esta carteira de investimentos.

Chama-se P.T. ou portfolio tangente (ou portfolio de mercado ou portfolio de risco eficiente) a carteira situada no ponto de tangência entre a fronteira eficiente e a linha de mercado. Isso se dá porque a melhor reta que combina o P.L.R. com a carteira de ativos de risco A e B é a reta que tangencia a fronteira eficiente. Até então, qualquer portfolio era dito eficiente se pertencesse à fronteira eficiente. Entretanto, combinando o P.L.R. com uma carteira de ativos de risco, o único portfolio eficiente é o portfolio tangente, ilustrado na Figura 14 [17].

Figura 14: Gráfico da linha de mercado de capitais e portfolio de mercado.



Fonte: SOARES, Vanessa de Carvalho Alves et al, p.13, adaptado pelo Autor.

7. APLICAÇÃO DA PROGRAMAÇÃO LINEAR NA SELEÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTO

“Seja uma carteira de ações com base em cinco ativos diferentes. Deseja-se saber qual é a melhor combinação de ações que minimiza o risco de acordo com um retorno esperado de 9%” [31].

Uma das formas de se resolver o problema acima, muito comum em finanças e no mercado de ações, faz-se uso da Pesquisa Operacional e da Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz.

Para se resolver o problema, já com seu enunciado precisamente formulado, faz-se uso da Estatística para se encontrar os parâmetros necessários para seu modelo matemático.

Assim, sejam as ações das empresas Petrobrás, Eletrobrás, Bradesco, Vale do Rio Doce e CEMIG e seu histórico fictício de dados, durante 10 meses:

Tabela 6: Dados iniciais e variação de cada ativo em 10 períodos distintos.

Período	Petrobrás	Eletrobrás	Bradesco	Vale do Rio Doce	CEMIG
1	10,00%	15,00%	12,00%	18,00%	5,00%
2	12,00%	17,00%	13,00%	16,00%	8,00%
3	8,00%	4,00%	9,00%	3,00%	10,00%
4	7,00%	-8,00%	7,00%	4,00%	9,00%
5	9,00%	15,00%	9,00%	8,00%	5,00%
6	7,00%	22,00%	11,00%	10,00%	4,00%
7	8,00%	3,00%	9,00%	-3,00%	4,00%
8	6,00%	-14,00%	6,00%	15,00%	6,00%
9	9,00%	2,00%	8,00%	20,00%	8,00%
10	11,00%	15,00%	10,00%	16,00%	10,00%

Fonte: Gonçalves Júnior et al, p.7, adaptado pelo Autor.

Para se calcular o retorno esperado, as variâncias e covariâncias a partir de um histórico de dados de cada ativo, utilizou-se o software de planilhas eletrônicas MS Excel.

Inicialmente, calcula-se o retorno esperado $E(R)$ para cada ativo através da média aritmética ponderada, com distribuição equivalente de percentuais de investimento, pois ainda não estão otimizados. Os ponderadores são os percentuais de investimentos.

A Tabela 7 apresenta retorno esperado E (R).

Tabela 7: Retorno esperado E (R) para cada ativo e distribuição de investimento igualitária para cada ativo.

	Petrobrás	Eletróbrás	Bradesco	Vale do Rio Doce	CEMIG	TOTAL
Carteira	20%	20%	20%	20%	20%	100%
E (Rport)	1,74%	1,42%	1,88%	2,14%	1,38%	8,56%

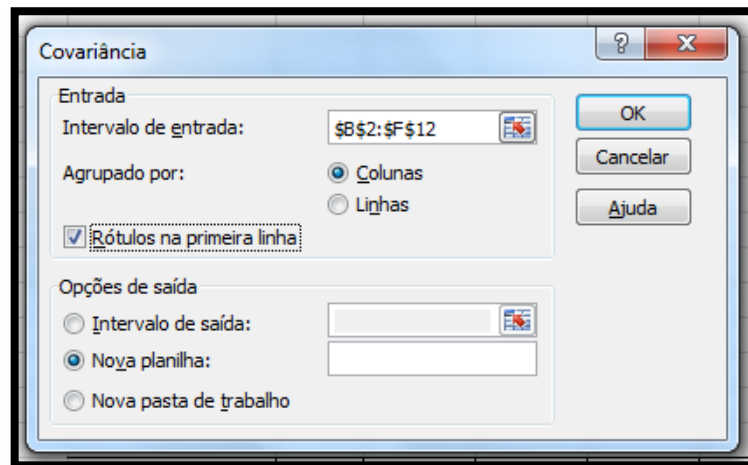
Fonte: Autor.

Para se medir a força de relação entre cada ação, determina-se a matriz de covariância entre os pares de ativos. Ela é gerada clicando-se em DADOS – ANÁLISE DE DADOS – COVARIÂNCIA.

Figura 15 ilustra a Janela que se abre. Preencher:

- Intervalo de entrada: selecionar o histórico de dados;
- Clicar em “Rótulos na primeira linha”

Figura 15: Janela de Covariância do Software MS Excel.



Fonte: Autor

A Tabela 8 indica a Matriz de covariâncias entre os pares de ativos que compõem a carteira de investimentos.

Tabela 8: Matriz de covariância entre os pares de ativos que compõem a carteira de investimento.

	Petrobrás	Eletróbrás	Bradesco	Vale do Rio Doce	CEMIG
Petrobrás	0,03%				
Eletróbrás	0,12%	1,23%			
Bradesco	0,03%	0,20%	0,04%		
Vale do Rio Doce	0,06%	0,16%	0,04%	0,51%	
CEMIG	0,01%	-0,05%	-0,01%	0,02%	0,05%

Fonte: Autor.

Para determinar o retorno esperado da carteira $E(R_{port})$ e o risco da carteira $Var(R_{port})$ faz-se uso das seguintes fórmulas, respectivamente,

$$E(R_{port}) = \sum_{i=1}^5 E(R_i) \cdot W_i$$

e

$$V(R_{port}) = \sum_{i=1}^5 W_i \left(\sum_{j=1}^5 W_j \cdot \sigma_{i,j} \right),$$

e são apresentados na Tabela 9:

Tabela 9: Resultados do retorno esperado $E(R_{port})$ e o risco $Var(R_{port})$ do portfólio.

	Petrobrás	Eletróbrás	Bradesco	Vale do Rio Doce	CEMIG	TOTAL
Var (Rport)	0,01%	0,07%	0,01%	0,03%	0,00%	0,12%
E (Rport)	1,74%	1,42%	1,88%	2,14%	1,38%	8,56%

Fonte: Autor.

Dessa forma, é possível construir o modelo matemático para a situação.

Antes de modelar matematicamente o problema, deve-se determinar a medida de efetividade do objetivo, as variáveis controladas, os fatores não controlados e suas relações.

Para o problema em questão, tem-se [32]:

- A variância da carteira $Var(R_{port})$ é a medida de efetividade do objetivo e será expressa em porcentagem;
- As participações individuais de cada ativo W_i são as variáveis controladas;
- Todas as relações entre esses fatores e os objetivos são determinadas pela Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz.

Em problemas de Pesquisa Operacional devem-se definir quais as variáveis de decisão, as equações de restrição e a função objetivo.

Neste caso, como se deseja saber a composição da carteira que minimiza o risco do portfólio, as variáveis de decisão são as participações individuais W_i , ou seja, o percentual de investimento em cada ativo.

As equações de restrição desse problema são:

- A soma das participações individuais W_i deve ser igual a 100%. Logo

$$W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 = 1.$$

- O retorno esperado para o portfólio $E(R_{port})$ deve ser maior ou igual a 9%. Pela Tabela 9, tem-se

$$1,74 W_1 + 1,42 W_2 + 1,88 W_3 + 2,14 W_4 + 1,38 W_5 \geq 0,09.$$

- O percentual de investimento em cada ativo W_i deve ser maior ou igual a zero. Então,

$$W_i \geq 0.$$

A finalidade desse problema é determinar o percentual de investimento W_i em cada ativo a fim de se reduzir o risco. Portanto, a função objetivo é a minimização da variância da carteira $Var(R_{port})$. Nesse caso, o problema é de Programação Quadrática. Assim, tem-se

$$\text{Minimizar } z = W^T C_{i,j} W.$$

Então, o modelo matemático para o Problema de Programação Quadrática é:

$$\text{Minimizar } z = W^T \cdot C_{i,j} \cdot W$$

$$\text{Sujeito a } W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 = 1$$

$$1,74 W_1 + 1,42 W_2 + 1,88 W_3 + 2,14 W_4 +$$

$$1,38 W_5 \geq 0,09$$

$$W_i \geq 0,$$

onde $C_{i,j}$ é a matriz de covariância.

A fim de se determinar uma solução factível para o modelo, serão calculados os percentuais ótimos de investimento com o auxílio de dois softwares diferentes, MATLAB e MS Excel, e comparar as soluções encontradas.

Usando-se o software MATLAB e a ferramenta quadprog, chega-se aos resultados:

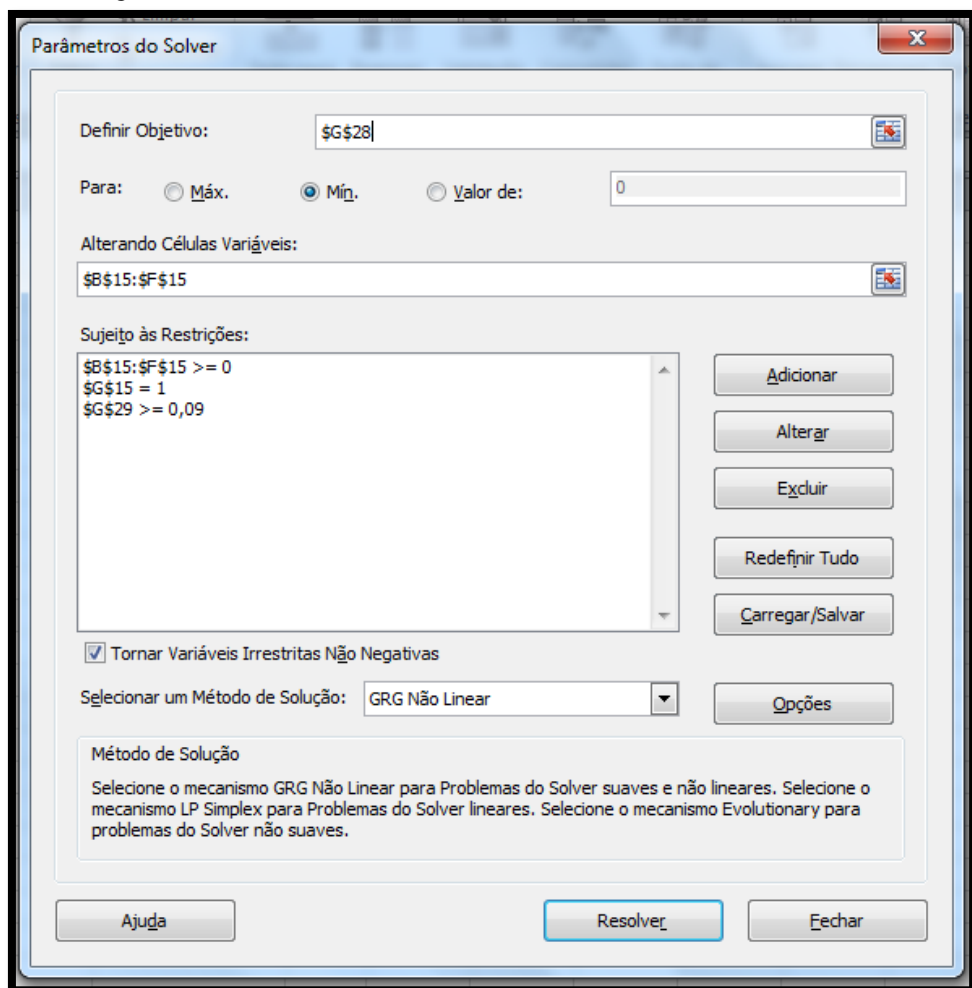
$$X = \begin{matrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.7755 \\ 0.0161 \\ 0.2084 \end{matrix}$$

Pelo *quadprog* tem-se que a carteira ótima de investimento é composta de 77,55% no Bradesco, 1,61% no Vale do Rio Doce e 20,84% no CEMIG e espera-se um retorno esperado para o portfólio de, no mínimo, 9%, com x equivalente a W .

Pelo *Solver* do MS Excel, localizado em DADOS - SOLVER, ilustrado pela Figura 16, tem-se:

- Selecionar a célula que representa a somatória da Variância, no campo “Definir Objetivo”;
- O problema é de minimização;
- Definir como células variáveis os percentuais de investimento, inicialmente distribuídos igualmente;
- Selecionar as células que representam as restrições e colocar suas condições, em “Sujeito às Restrições”;
- Como o problema é de Programação Quadrática, selecionar GRG Não Linear, em “Método de Solução”;
- Clicar em Resolver.

Figura 16: Janela de Parâmetros do Solver, do Software MS Excel.



Fonte: Autor

Através do *Solver*, têm-se os seguintes resultados:

Tabela 10: Resultados dos percentuais de investimento ótimos W_i^* do retorno esperado $E(R_{port})$.

	Petrobrás	Eletróbrás	Bradesco	Vale do Rio Doce	CEMIG	TOTAL
Carteira*	0,14%	0,00%	79,64%	2,80%	17,42%	100%
Retorno esperado*	0,01%	0,00%	7,49%	0,30%	1,20%	9%

Fonte: Autor.

Pela Tabela 10, tem-se que a carteira ótima de investimento é composta de 79,64% no Bradesco, 2,80% no Vale do Rio Doce e 17,42% no CEMIG.

Conseguiu-se aumentar o retorno esperado $E(R_{port})$ da carteira, de 8,56% para 9% e diminuir o risco do portfólio, de 0,12% para 0,03%, conforme Tabela 11.

Tabela 11: Resultados do retorno esperado ótimo $E(R_{port})^*$ e o risco ótimo $Var(R_{port})^*$ do portfólio.

	Petrobrás	Eletróbrás	Bradesco	Vale do Rio Doce	CEMIG	TOTAL
Variância	0,00%	0,00%	0,03%	0,00%	0,00%	0,03%
Retorno	0,01%	0,00%	7,49%	0,30%	1,20%	9,00%

Fonte: Autor.

Comparando-se os resultados obtidos através dos dois softwares, percebe-se uma pequena diferença, conforme a Tabela 12. Uma das justificativas é que, apesar de o problema ser de Programação Quadrática, o Excel lineariza a função objetivo e utiliza o algoritmo Simplex para resolvê-la. Entretanto, utilizar programas específicos de Programação Linear e Programação Quadrática, como o MATLAB, encontram-se resultados mais confiáveis, principalmente para problemas de grande porte. Também, a capacidade de processamento de dados do computador utilizado na busca de solução influencia diretamente nas soluções obtidas.

Tabela 12: Quadro comparativo dos percentuais de investimento ótimos W_i^* do portfólio.

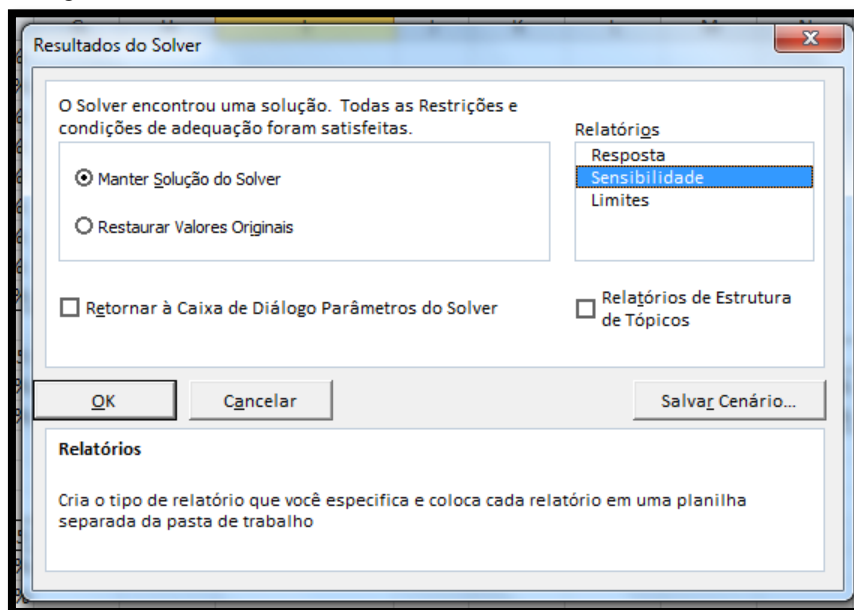
Ativo	Solução	
	MATLAB	Solver do Excel
Petrobrás	0%	0,14%
Eletróbrás	0%	0%
Bradesco	77,55%	79,64%
Vale do Rio Doce	1,61%	2,80%
CEMIG	20,84%	17,42%

Fonte: Autor.

Para executar o teste do modelo e aprimoramento, faz-se uso da Análise de Sensibilidade.

Uma das maneiras de se efetuar a Análise de Sensibilidade é utilizando-se o MS Excel, a partir da tela de confirmação do Solver. Após clicar em “Resolver”, em ”Parâmetros do Solver”, abre-se a janela “Resultados do Solver”. Do lado direito dessa janela, encontra-se a opção “Relatórios – Sensibilidade”. Seleciona-se essa opção e clica-se em OK, conforme Figura 17. Dessa forma obtém-se a Análise de Sensibilidade.

Figura 17: Janela de Resultados do Solver, do Software MS Excel.



Fonte: Autor.

A Tabela 13 apresenta o resultado obtido no Gradiente Reduzido. No caso, o mesmo se refere ao grau de impacto que uma unidade adicional de cada ativo tem sob a função objetivo. O valor de 0,30% encontrado no ativo Eletrobrás demonstra que, caso estivesse disponível, uma unidade da ação da Eletrobrás, diminuiria o risco da carteira em 0,30%. Os outros ativos possuem o valor do Gradiente Reduzido igual à zero, pois, nenhum deles melhoraria a função objetivo.

Tabela 13: Impacto do relaxamento das restrições sobre a função objetivo.

Nome	Valor Final	Gradiente Reduzido
Petrobrás	0,14%	0,00%
Eletrobrás	0,00%	0,30%
Bradesco	79,64%	0,00%
Vale do Rio Doce	2,80%	0,00%
CEMIG	17,42%	0,00%

Fonte: Autor.

A Tabela 14 apresenta os resultados do Multiplicador Lagrange. Este indicador apresenta a possibilidade de relaxamento das restrições em uma unidade para a diminuição da variância. Assim, caso seu limite superior de $E (R_{port})$ fosse acrescido de uma unidade (10%) seria possível diminuir a variância em 2,35%. No caso de W_i , tem-se um limite mínimo exigido, ou seja, diferente do percentual do $E (R_{port})$, deve-se atender a um limite inferior. Dessa forma, o limite é reduzido em uma unidade do seu total (99%), assim, haveria uma aumentaria de 0,15% do risco. Isso quer dizer que, caso fosse acrescida uma unidade no total (101%), a variância mínima seria penalizada em 0,15%.

Tabela 14: Impacto do relaxamento das restrições sobre a função objetivo.

Carteira	Valor Final	Multiplicador Lagrange
W_i	100,00%	-0,15%
$E (R_{port})$	9,00%	2,35%

Fonte: Autor.

CONCLUSÃO

O objetivo dessa dissertação é mostrar a aplicabilidade da Teoria Moderna de Portfolio de Markowitz, aliada a Programação Linear, na diversificação de ações em uma carteira de investimento, minimizando o risco da carteira para se atingir um retorno esperado mínimo.

A aplicação da teoria de Programação Linear em Finanças pode ser feita através do software Excel, possibilitando a administradores financeiros fácil acesso, e de software específico, como o MATLAB, na busca de resultados mais confiáveis.

A dissertação demonstrou que é possível conceber uma carteira de investimentos com poucos ativos e que tenha certa rentabilidade esperada.

Este estudo possui relevância significativa quanto às teorias de que se trata. Primeiramente, ao combinar Programação Linear com Finanças, temas atuais e emergentes nos dias de hoje.

Com o surgimento do dinheiro eletrônico e a crescente do mercado de ações, pequenos investidores podem orientar suas aplicações através destas teorias, fazendo com que invistam seu dinheiro com conhecimento científico e não através da sorte ou intuição. Vale ressaltar que a volatilidade do mercado de ações não garante sucesso pleno no investimento a partir deste estudo, mas o mesmo serve de boa orientação.

Em segundo lugar, quanto a implementação do modelo matemático, este trabalho vem mostrar que o uso de softwares, como o Excel e o MATLAB, chaga-se a resultados significativos e auxilia-se na busca e obtenção de resultados.

Vale ressaltar que a aplicação da Teoria de Dualidade mostra-se útil na busca pelo resultado ótimo, onde vários problemas de Programação Linear podem ser resolvidos mais facilmente optando pelo problema dual em relação ao problema primal. A Análise de Sensibilidade, de grande importância na interpretação dos resultados, também sofre influência quanto a dualidade.

Estudos futuros poderão abordar a maximização do retorno esperado em contrapartida à minimização da variância e apontar qual problema de Programação Linear se torna mais relevante, para composição de uma carteira ótima.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] HILLIER, Frederick S and LIEBERMAN, Gerald J. *Introdução à pesquisa operacional*. São Paulo: McGraw–Hill, 2006.
- [2] ARENALES, M.; ARMENTANO, V. A.; MORABITO, R.; YANASSE, H. H. *Pesquisa operacional*. Rio de Janeiro: Campus/Elsevier, 2007.
- [3] RABENSCHLAG, D. R. *Pesquisa Operacional*. Material didático. s/d. Disponível em: < https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/43016806/po_DenisRabenschlag.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1505156745&Signature=wVJmgeY9faRDviK%2B5NnMXXdVRmw%3D&response-contentdisposition=inline%3B%20filename%3DUNIVERSIDADE_FEDERAL_DE_SANTA_MARIA_CENT.pdf> ,UFSM – Rio Grande do Sul, 2005.
- [4] PASSOS, A. N. *Estudos em Programação Linear*. Dissertação de Mestrado. Unicamp – Campinas, 2009.
- [5] MARINS, F. A. S. *Introdução à Pesquisa Operacional*. Material didático. s/d. Disponível em: < https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/35652594/Introducao_a_pesquisa_Operacional__Fernando.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1505156823&Signature=CX0DkdtRlcQ%2FAfiMSTSDGFi%2BE%2Bc%3D&response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DIntroducao_a_Pesquisa_Operacional.pdf> Unesp – Guaratinguetá, 2009.
- [6] PINTO, L. L. and MENEZES, M. A. F. *Implementação de Algoritmos Simplex e Pontos Interiores para Programação Linear*. Estudos, Goiânia, v. 35, n. 2, p. 225–246, mar./abr. 2008.
- [7] LUENBERGER, David G .; YE, Yinyu. *Programação linear e não-linear* . Springer, 2015.

- [8] MONTEVECHI, José Arnaldo Barra. Pesquisa operacional. Material didático. s/d. Disponível em: < http://www.iepg.unifei.edu.br/arnaldo/ensino/pos/mba/po/apostila/Apostila_PO_2013.pdf > Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI), 2013.
- [9] BAZARAA et al (1990) N.S. Bazaraa, J.J. Jarvis & H.D. Sherali (1990) – Linear Programming and Network Flow – New York, John Wiley & Sons, Singapore, 2nd.Ed.
- [10] JÚDICE, J. et al. Programação Linear. Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, Coimbra, 2006.
- [11] CANTAO, Luiza Amalia Pinto; STARK, Felipe Sanches. Programação Linear–PL. Material didático s/d. Disponível em: < <http://www2.sorocaba.unesp.br/professor/luiza/PL/apostila.pdf> > UNESP . Sorocaba.
- [12] CASTRONUOVO, Edgardo Daniel et al. Aplicação de métodos de pontos interiores no fluxo de potência ótimo não-linear com utilização de processamento de alto desempenho. Tese de doutorado. UFSC. Florianópolis, 2001.
- [13] CANTANE, Daniela Renata et al. Contribuição da atualização da decomposição LU no método Simplex. Tese de doutorado. Unicamp. Campinas, 2009.
- [14] Carvalho, S. M. S. (2007). Métodos de pontos interiores aplicados ao problema de pré-despacho de um sistema hidroelétrico com manobras programadas. Technical report, IMECC – UNICAMP. Dissertação de Mestrado
- [15] PITON–GONÇALVES, Jean. A História da Matemática Comercial e Financeira. <http://www.somatematica.com.br/historia/matfinanceira.php>, v. 18, p. 03–09, 2005.
- [16] WEATHERFORD, Jack. A história do dinheiro. São Paulo: Negócio Editora, 1999.
- [17] SOARES, Vanessa de Carvalho Alves et al. Aplicações do problema de otimização de carteiras de investimento. Dissertação de mestrado. Unicamp. Campinas, 2011.

- [18] COURTAULT, Jean–Michel et al. Louis Bachelier on the centenary of *Théorie de la spéculation*. *Mathematical Finance*, v. 10, n. 3, p. 339–353, 2000.
- [19] BACHELIER, Louis. *Teoria da especulação de Louis Bachelier: as origens das finanças modernas*. Princeton University Press, 2011.
- [20] RUBINSTEIN, Mark. Markowitz's "Portfolio Selection": uma retrospectiva de cinquenta anos. *The Journal of finance*, v. 57, n. 3, p. 1041–1045, 2002.
- [21] MACASTROPA, Fabrício Caprio. *A aplicabilidade da moderna teoria de portfólios em títulos de renda fixa internacionais*. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.
- [22] Markowitz Harry M. *Biografias e vidas, 2004–2017*. (21 de Junho de 2017). Recuperado de <https://www.biografiasyvidas.com/biografia/m/markowitz.htm>
- [23] REILLY, Frank K.; BROWN, Keith C. *Análise de investimentos e gerenciamento de portfólio*. South–Western, College Pub, 2002.
- [24] BANCO DO BRASIL S.A. *Como administrar sua carteira de investimentos*. Disponível em < <http://www.bb.com.br/docs/pub/voce/dwn/carteira6.pdf> > Acesso em 26 jun 2017.
- [25] CRESPO, Antônio Arnot. *Estatística fácil. Atual*. São Paulo: Saraiva, 2009.
- [26] SPIEGEL, Murray R.; SCHILLER, John J.; SRINIVASAN, R. *Alu. Probabilidade e Estatística: Coleção Schaum*. Bookman Editora, 2016.
- [27] GONÇALVES JÚNIOR, Cleber; PAMPLONA, Edson de O.; MONTEVECHI, José A. *Seleção de carteiras através do modelo de Markowitz para pequenos investidores (com o uso de planilhas eletrônicas)*. IX SIMPEP–Simpósio de Engenharia de Produção, v. 9, 2002.
- [28] LEVINE, David M; et al. *Estatística: teoria e aplicações*. Rio de Janeiro: LTC, 2000.

[29] RATTINER, Jeffrey H. Equitable Divorce: Creatin a Socialty Niche by knowing the rules, Financial Planning Magazine, New York, jully 2001.

[30] PETERNELLI, Luiz Alexandre. Capítulo 4: Variáveis aleatórias e distribuição de variáveis. Material didático. s /d. Disponível em: <<http://www.dpi.ufv.br/~peternelli/inf162.www.16032004/materiais/CAPITULO4.pdf>>, v. 16032004, 2012.

[31] MOREIRA, Natália Cassia. Teoria de portfólio: composição ótima de uma carteira de investimento. Revista Científica e–Locução, v. 1, n. 4, 2015.

[32] GONÇALVES JÚNIOR, Cleber; PAMPLONA, Edson de O.; MONTEVECHI, José A. Seleção de carteiras através do modelo de Markowitz para pequenos investidores (com o uso de planilhas eletrônicas). IX SIMPEP–Simpósio de Engenharia de Produção, v. 9, 2002.

[33] WAYNE L. Introduction to Mathematical Programming – Applications and Algoritms. Winston Duxbury Press. 1995.

ANEXOS

ANEXO A – MODELO DE PROGRAMAÇÃO UTILIZADO NO MATLAB

```
%Cálculo Fronteira Eficiente
%Leitura Matriz de covariância
matrizcov=[0.03 0.12 0.03 0.06 0.01;0.12 1.23 0.2 0.16 -0.05;0.03 0.2 0.04 0.04 -0.01;0.06
0.16 0.04 0.51 0.02;0.01 -0.05 -0.01 0.02 0.05]/100;

% Vetor retorno médio por ativo
retorno=[8.7;7.10; 9.40; 10.70; 6.9]/100;

%Limite inferior
inf=[0;0;0;0;0];

%matrizcov=(matrizcov)*10000;

%Informações para função quadprog
H=matrizcov/0.5;
%H = matrizcov;
Aeq=[retorno';1 1 1 1 1 ];
retorno_minimo= 0;
n=1;
%x = zeros(5,1);
while retorno_minimo < 0.09
    beq=[retorno_minimo;1];
    [x,fval]=quadprog(H,[],[],[],Aeq,beq,inf)
    x2 = x;
    k=1;
    x = zeros(5,1);
    while k<6
        A(n,k)=x(k);
        k=k+1;
    end

    % A(n,6)=x'*retorno;
    %A(n,7)=x'*matrizcov*x;
    n=n+1;
    retorno_minimo=retorno_minimo+0.001
end
```