

**ANÁLISE DA APLICAÇÃO DE MODELOS DE OTIMIZAÇÃO LINEAR NA  
SOLUÇÃO DE PROBLEMAS REAIS DE DIMENSIONAMENTO DE LOTES E  
SEQUENCIAMENTO DA PRODUÇÃO DE BEBIDAS**

*Víctor Mario Noble Ramos*

Sorocaba  
novembro de 2017

**ANÁLISE DA APLICAÇÃO DE MODELOS DE OTIMIZAÇÃO LINEAR NA  
SOLUÇÃO DE PROBLEMAS REAIS DE DIMENSIONAMENTO DE LOTES E  
SEQUENCIAMENTO DA PRODUÇÃO DE BEBIDAS**

*Víctor Mario Noble Ramos*

**Orientadora:** Profa. Dra. Deisemara Ferreira

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção.

Sorocaba  
novembro de 2017



Noble Ramos, Víctor Mario

Análise da aplicação de modelos de otimização linear na solução de problemas de dimensionamento de lotes e sequenciamento da produção de bebidas. / Víctor Mario Noble Ramos. -- 2017.

205 f. : 30 cm.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba

Orientador: Deisemara Ferreira

Banca examinadora: Reinaldo Morábito Neto, Bernardo Sobrinho Simões de Almada Lobo, Deisemara Ferreira

Bibliografia

1. Dimensionamento e sequenciamento da produção. 2. Modelo matemático. 3. Bebidas não alcoólicas. I. Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).

DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

## VICTOR MARIO NOBLE RAMOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção do Centro de Ciências em Gestão e Tecnologia da Universidade Federal de São Carlos para obtenção do título de mestre em Engenharia de Produção, Área de Concentração: Gestão de Operações.

Sorocaba, 24 de novembro de 2017.

Orientador (a):



Prof. (a). Dr. (a). Deisemara Ferreira  
UFSCar/DFQM

Examinadores (as):



Prof. (a). Dr. (a). Reinaldo Morabito Neto  
UFSCar/DEP

Certifico que a sessão de defesa foi realizada com a participação à distância do membro Profa. Dra. Bernardo Sobrinho Simões de Almada Lobo (Universidade do Porto/FEUP) e, depois das arguições e deliberações realizadas, o participante à distância está de acordo com o conteúdo do parecer da comissão examinadora redigido no relatório de defesa de Dissertação de Victor Mario Noble Ramos.



Prof. (a). Dr. (a). Deisemara Ferreira  
Presidente da Comissão Examinadora  
UFSCar/DFQM

*Aos meus amados pais, Pía Antonia e Víctor Manuel,  
ao meu amor María,  
ao meu querido pequeno irmão, José Carlos,  
e á minha avó Felicia.*

*Vocês são meu maior impulso, a vocês dedico este sonho alcançado.*

## AGRADECIMENTOS

---

A Deus por esta oportunidade maravilhosa, por cuidar de mim enquanto estive longe de casa, por me dar as forças necessárias durante todo este tempo, por me ter permitido chegar até onde estou e ser o que eu sou, pelas coisas boas e também pelas más.

Aos meus pais Pía Antonia e Víctor Manuel e a minha avó Felicia del Carmen, pelo apoio, pelo amor e por todos esses valores inculcados desde criança.

À minha namorada e amiga María Beatriz, pelo amor, companhia, compreensão e apoio incondicionais em todo este tempo a pesar das adversidades. Obrigado por sempre estar aí.

Aos meus irmãos Yadine, Wilson, Yaleidis e o pequeno grande José, pelo incondicional apoio na distância.

À minha família toda, primos e tios pelo carinho e apoio constante em qualquer dificuldade.

Aos meus amigos Aldair Álvarez e Alfredo Moreno e aos meus professores Jorge López e Luis Mercado, pela amizade, colaboração e motivação, sem a sua ajuda isto não tivera sido possível.

A todos os colegas do Grupo de Pesquisa em Operações e Logística (GPOL) da UFSCar - Sorocaba pela ajuda nas ocasiões necessárias.

À minha orientadora, a Profa. Dra. Deisemara Ferreira, pelos conselhos e orientações em toda esta pesquisa.

Agradeço também à Erica Kushihara Akim por tudo o suporte e a disposição para me ajudar em questões administrativas em todos os momentos do mestrado.

Ao professor Dr. Claudio Toledo, pelo fornecimento dos seus dados e o material do modelo SITLSP.

Aos professores José Geraldo Vidal Vieira e sua esposa Rosane Nunes de Faria pela amizade, os conselhos e o apoio.

Ao pessoal da república Casa da Mãe Joana, pela companhia e amizade neste tempo.

Agradeço também a todos os amigos e funcionários da UFSCar - Sorocaba, que de alguma forma contribuíram no anonimato para a elaboração deste trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro, sem o qual esta pesquisa não teria sido possível.

*"Si crees que puedes, o que no puedes; en los  
dos casos tienes la razón"*

*Henry Ford*

## RESUMO

---

Nesta dissertação de mestrado é pesquisado o problema geral integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes da produção de bebidas não alcoólicas com sincronia entre os estágios e janelas de tempo de operação para programação de manutenções preventivas. O problema é caracterizado por ter dois estágios sincronizados e dependentes entre si. As máquinas do primeiro estágio (tanques) podem suprir ao mesmo tempo várias linhas de envase no segundo estágio, onde são envasados os itens finais. Existem tempos e custos de *setup* dependentes da sequência de produção.

A revisão da literatura relacionada indica que modelos existentes referem-se, em geral, a casos particulares do problema geral aqui tratado, sendo que os casos mais comuns são a dedicação de tanques à linhas, e desconsideração da perecibilidade dos xaropes e da possibilidade de programar manutenções preventivas.

Foi proposto um modelo matemático para o problema geral, denominado SMMRPM, e aplicado em diversas instâncias a fim de mostrar a aderência e a flexibilidade do modelo para representar casos práticos que podem ser achados na realidade. Para o caso da dedicação de tanques a linhas, o modelo foi comparado com o modelo dedicado F1 (FERREIRA *et al.*, 2012).

Os resultados indicam que o modelo SMMRPM é flexível e aderente para representar cenários práticos em que outros modelos não são aplicáveis, por exemplo a possibilidade de programar manutenções preventivas e consideração da perecibilidade são diferenciais da proposta. Nos planos obtidos foi mostrada a importância da inclusão destas considerações que afetam significativamente os planos produtivos. No caso da dedicação, comparado com o modelo dedicado, a formulação SMMRPM consegue planos de produção, em média, 52.63% menos custosos que o F1.

**Palavras-chave:** Planejamento da produção, Dimensionamento e sequenciamento de lotes, Bebidas não alcoólicas, Programação inteira mista, Janelas de Tempo de Operação, Programação de Manutenções .

## ABSTRACT

---

This dissertation addresses the general integrated lot sizing and scheduling problem for non-alcoholic beverage production with synchronization between stages and operating time windows for scheduling preventive maintenances. The problem is characterized by having two interdependent synchronized stages. In the first stage, machines (tanks) can supply several filling lines at the same time in the second stage, where the final items are packed. Production sequence-dependent times and costs exist.

The review of the related literature indicates that existing models refer, generally, to particular cases of the general problem addressed here, the most common cases are the dedication of tanks to the lines, and disregarding the perishability of syrups and the possibility of scheduling preventive maintenances.

A mathematical model for the general problem, called SMMRPM, has been proposed and applied in several instances to show the adherence and flexibility of the model to represent practical cases that can be found in reality. For the case of the dedication of tanks to lines, the model was compared with the dedicated model F1 (FERREIRA *et al.*, 2012).

The results indicate that the SMMRPM model is flexible and adherent to represent practical scenarios in which other models are not applicable, for example the possibility of scheduling preventive maintenance and consideration of perishability are differential of the proposal. In the plans obtained, it was shown that it is important to include these considerations that significantly affect the productive plans. In the case of dedication, compared to the dedicated model, the formulation SMMRPM achieves production plans, on average, 52.63 % less costly than F1.

**Key words:** Production Planning and Control, Lot Sizing and Scheduling, Non-alcoholic Beverages, Mixed Integer Programming, Operating Time Windows, Maintenance Programming.

## LISTA DE FIGURAS

---

1.1	Dados de produção e consumo de bebidas não alcoólicas no Brasil . . . . .	19
2.1	Resumo do processo de produção de bebidas. . . . .	25
2.2	Processo de fabricação de bebidas não alcoólicas. . . . .	27
2.3	Ilustração de janelas de tempo e disponibilidade do maquinário. . . . .	29
2.4	Plano para ilustrar o problema de pesquisa. . . . .	30
3.1	Classificação por modelos base e evolução temporal dos modelos PPPB. . . . .	44
3.2	Sumário dos achados dos modelos de de dimensionamento e sequenciamento para bebidas. . . . .	52
4.1	Alocação do modelo SMMRPM na evolução dos modelos PPPB. . . . .	59
4.2	Situação atual da linha $W$ , conectada ao tanque / enchimento $(P, 2)$ . . . . .	63
4.3	Possíveis conexões predecessoras de $(W, P, 2)$ . . . . .	63
4.4	Possíveis conexões sucessoras de $(W, P, 2)$ . . . . .	64
4.5	Trocas permitidas e não permitidas pela construção da variável $\gamma_{ii' tlmon' o'}$ . . . . .	70
4.6	Plano de produção alternativo ao da Figura 4.5. . . . .	71
4.7	Subsequência desconectada em um mesmo tanque. . . . .	76
4.8	Ilustração de uma subsequência conectada em um mesmo tanque. . . . .	77
4.9	Ilustração <i>subtour</i> conectado a partir de enchimentos de diferentes tanques. . . . .	77
4.10	Sequência desconectada formada por enchimentos de diferentes tanques. . . . .	78
4.11	Troca entre itens com período imediatamente anterior não ocioso. . . . .	81
4.12	Troca entre itens com ociosidade entre períodos. . . . .	82
4.13	Exemplar para ilustrar o funcionamento conjunto das restrições (4.11) e (4.12). . . . .	83
4.14	Limitações do tempo disponível pela janela de tempo ou pela disponibilidade $K_{lt}^{II}$ . . . . .	85
4.15	Plano de produção ilustrativo para FL1. . . . .	95
5.1	Plano de produção ótimo para instância FL1, obtido com o modelo SMMRPM. . . . .	101
5.2	Plano de produção para instância FL2, obtido com o modelo SMMRPM . . . . .	104
5.3	Plano de produção ótimo para instância FL3, obtido com o modelo SMMRPM. . . . .	107



5.4	Plano de produção ótimo para instância FL4, obtido com o modelo SMMRPM. . .	109
5.5	Plano de produção ótimo para instância FL5, obtido com o modelo SMMRPM. . .	111
5.6	Plano de produção para instância FL6, obtido com o modelo SMMRPM. . . . .	113
5.7	Plano de produção ótimo para instância FL7, obtido com o modelo SMMRPM. . .	116
5.8	Plano de produção para instância FL8 obtido com o modelo SMMRPM. . . . .	119
5.9	Plano de produção para instância FL9, obtido com o modelo SMMRPM. . . . .	121
5.10	Plano de produção para instância FL10, obtido com o modelo SMMRPM. . . . .	123
5.11	Desagregação dos custos da função objetivo de cada modelo para instância E1. . .	127
5.12	Custos de estoque por período na instância E1 para cada modelo. . . . .	128
5.13	Plano ótimo de produção para a instância E1 obtido pelo modelo F1. . . . .	128
5.14	Plano ótimo de produção para a instância E1 obtido do modelo SMMRPM. . . . .	129
5.15	Comparação dos valores das funções objetivo dos modelos F1 e SMMRPM para as instâncias E. . . . .	130
5.16	Plano ótimo de produção para a instância E15 obtido pelo modelo F1. . . . .	135
5.17	Convergência dos limitantes para a instância FL1 do modelo SMMRPM . . . . .	137
5.18	Convergência dos limitantes para a instância E1 do modelo SMMRPM . . . . .	139
5.19	Tempos totais e obtenção do ótimo em instâncias E - modelo SMMRPM . . . . .	140
B.1	Comparação das trocas nos modelos SITLSP e SMMRPM . . . . .	165
B.2	Plano de produção obtido do modelo SITLSP versão original para a instância ME2.	172
B.3	Plano de produção obtido do modelo SITLSP2 para instância ME2. . . . .	173
B.4	Plano de produção para instância ME2 - Modelo SMMRPM versão modificada . .	175

## LISTA DE TABELAS

---

3.1	Critérios mais usados para classificar modelos L&S. . . . .	37
3.2	Modelos PPPB. . . . .	42
3.3	Classificação por critérios operacionais e composição da função objetivo dos modelos PPPB . . . . .	46
3.4	Comparação dos modelos PPPB segundo características específicas do processo de produção de bebidas . . . . .	50
3.5	Fonte: Elaboração própria. . . . .	50
3.6	Métodos de solução e origem das instâncias usadas nos modelos PPPB da literatura	54
4.1	Expressões para o cálculo do número de variáveis para qualquer instância do SMMRPM. . . . .	92
4.2	Expressões para o cálculo do número de restrições para qualquer instância do SMMRPM. . . . .	93
4.3	Volumes de produção do plano mostrado para a instância IP1. . . . .	95
5.1	Produção total por item e período (unidades), do plano da Figura 5.1. . . . .	102
5.2	Estoques por item e período, do plano da Figura 5.1. . . . .	102
5.3	Produção total por item e período (unidades), do plano da Figura 5.2. . . . .	104
5.4	Estoques finais por item e período, do plano da Figura 5.2. . . . .	105
5.5	Produção total por item e período (unidades), do plano da Figura 5.3. . . . .	107
5.6	Estoques finais por item e período, do plano da Figura 5.3. . . . .	108
5.7	Produção total por item e período (unidades), do plano da Figura 5.4. . . . .	110
5.8	Estoques finais por item e período, do plano da Figura 5.4. . . . .	110
5.9	Produção total por item e período (unidades), do plano da Figura 5.5. . . . .	112
5.10	Estoques finais por item e período, do plano da Figura 5.5. . . . .	112
5.11	Produção total por item e período (unidades), do plano da Figura 5.6. . . . .	114
5.12	Estoques finais por item e período, do plano da Figura 5.6. . . . .	114
5.13	Produção total por item e período (unidades), do plano da Figura 5.7. . . . .	116
5.14	Estoques finais por item e período, do plano da Figura 5.7. . . . .	117

5.15	Produção total por item e período (unidades), do plano da Figura 5.8. . . . .	119
5.16	Estoques finais por item e período, do plano da Figura 5.8. . . . .	120
5.17	Produção total por item e período (unidades), do plano da Figura 5.9. . . . .	121
5.18	Estoques finais por item e período, do plano da Figura 5.9. . . . .	122
5.19	Produção total por item e período (unidades), do plano da Figura 5.10. . . . .	123
5.20	Estoques finais por item e período, do plano da Figura 5.10. . . . .	124
5.21	Comparação entre funções objetivo obtidas dos modelos F1 e SMMRPM desagregadas por componentes de custo para as instâncias E. . . . .	133
5.22	Número de variáveis das instâncias utilizadas no modelo SMMRPM. . . . .	136
5.23	Informações do desempenho em instâncias FL . . . . .	138
B.1	Diferenças entre as considerações dos modelos SITLSP e SMMRPM. . . . .	162
C.1	Demandas em unidades de itens finais por período. . . . .	177
C.2	Quantidade de xarope utilizada por unidade de item final (L). . . . .	178
C.3	Disponibilidade de tempo de operação das linhas por período (min). . . . .	178
C.4	Tempos de produção unitários por linha (min). . . . .	178
C.5	Tempos de troca (min) no tanque 1. . . . .	178
C.6	Tempos de troca entre itens finais (min). . . . .	179
C.7	Custos de atraso, estoque e estoques iniciais por item/período. . . . .	179
C.8	Custos de troca (\$) no tanque 1. . . . .	179
C.9	Custos de troca (\$) na linha 1. . . . .	180
D.1	Demandas em unidades de itens finais por período. . . . .	181
D.2	Quantidade de xarope utilizada por unidade de item final (L). . . . .	181
D.3	Tempos de produção unitários por linha (min). . . . .	182
D.4	Tempos de troca (min) nos tanques 1 e 2. . . . .	182
D.5	Tempos de troca (min) nas linhas 1 e 2. . . . .	182
D.6	Custos de atraso, estoque e estoques iniciais por item/período. . . . .	182
D.7	Custos de troca (\$) nas linhas. . . . .	183
E.1	Demandas em unidades de itens finais por período. . . . .	184
E.2	Quantidade de xarope utilizada por unidade de item final (L). . . . .	185
E.3	Tempos de produção unitários por linha (ut). . . . .	185
E.4	Tempos de troca (ut) nos tanques 1 e 2. . . . .	185
E.5	Tempos de troca (ut) nas linhas. . . . .	186
E.6	Custos de troca (\$) nos tanques. . . . .	186

E.7 Custos de troca (\$) nas linhas. . . . .	186
E.8 Custo (\$) unitário de produção de xaropes nos tanques. . . . .	187
E.9 Custo unitário de produção (\$) de itens por linhas. . . . .	187

## LISTA DE ABREVIATURAS

---

**ATSP** *Asymmetric Traveller Salesman Problem* (Problema do caixeiro viajante assimétrico).

**CAPES** Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior.

**CIP** Clean In Place.

**CLSD** *Capacitated Lot Sizing and Scheduling Problem with sequence dependent setups* (Problema de dimensionamento e sequenciamento capacitado com *setups* dependentes da sequência).

**CLSP** *Capacitated Lot Sizing Problem* (Problema de dimensionamento de lotes capacitado).

**GLSP** *General Lot Sizing and Scheduling Problem* (Problema geral de dimensionamento e sequenciamento de lotes).

**L&S** Problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes.

**MILP** Programação Linear Inteira Mista.

**MTZ** Miller, Tucker e Zemlin.

**PCP** Planejamento e Controle da Produção.

**PGIDSLPB** Problema Geral Integrado de Dimensionamento e Sequenciamento de Lotes da Produção de Bebidas.

**PPPB** Problema do planejamento/programação da produção de bebidas.

**F&O** Heurística(s) *Fix-and-Optimize*.

**R&F** Heurística(s) *Relax-and-Fix*.

**SITLSP** *Synchronized and Integrated Two-level Lot Sizing and Scheduling Problem*.

**SMMRPM** Modelo de múltiplas máquinas e recursos sincronizados com manutenções preventivas (*Synchrhonized muti machines and resources model with preventive maintenances*).

## SUMÁRIO

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>19</b>
1.1	Objetivos e justificativa . . . . .	22
1.2	Metodologia . . . . .	23
1.3	Organização do trabalho . . . . .	23
<b>2</b>	<b>O processo geral de fabricação de bebidas e definição do problema de pesquisa</b>	<b>25</b>
<b>3</b>	<b>Revisão da literatura</b>	<b>33</b>
3.1	O problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes . . . . .	33
3.2	O problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes na produção de bebidas	39
3.2.1	Evolução dos modelos de otimização linear para o PPPB . . . . .	43
3.2.2	Comparação de modelos PPPB mediante critérios de classificação operacionais gerais . . . . .	45
3.2.3	Comparação segundo características específicas da produção de bebidas . . . . .	49
3.2.4	Métodos de solução para os modelos PPPB . . . . .	53
3.3	Considerações Finais . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Proposta de modelagem</b>	<b>57</b>
4.1	Notação matemática . . . . .	59
4.2	Modelo de múltiplas máquinas e recursos sincronizados com manutenções preventivas ( <i>Synchrhonized muti machines and resources model with preventive maintenances</i> ) (SMMRPM) . . . . .	73
4.3	Instância ilustrativa . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Análise da aplicação do SMMRPM para solução de situações práticas</b>	<b>97</b>
5.1	Casos analisados e instâncias utilizadas . . . . .	97
5.2	Caso de referência: instância FL1 . . . . .	100
5.3	Impacto da precibilidade no plano de produção . . . . .	103
5.4	Influência das janelas de tempo e disponibilidade de operação. . . . .	106

5.5	Impacto na solução da consideração de: perecibilidade, janelas de tempo e disponibilidade reduzida . . . . .	113
5.6	Influência dos custos de troca no plano de produção . . . . .	115
5.7	Variação do número de tanques . . . . .	118
5.8	Dedicação de linhas a tanques e comparação com modelo F1 Ferreira <i>et al.</i> (2012) .	125
5.8.1	Resultados comparativos gerais . . . . .	130
5.9	Discussão sobre o desempenho computacional do modelo . . . . .	135
5.10	Conclusões . . . . .	141
<b>6</b>	<b>Conclusões e trabalhos futuros</b>	<b>143</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>152</b>
	<b>Apêndice A Formulação do modelo SMMRPM</b>	<b>153</b>
	<b>Apêndice B Comparação com o modelo SITLSP</b>	<b>162</b>
B.1	Diferenças entre os modelos SITLSP e SMMRPM . . . . .	162
B.1.1	Perecibilidade . . . . .	163
B.1.2	Possibilidade de dedicação de tanques a linhas . . . . .	163
B.1.3	Estoques intermediários de xarope . . . . .	163
B.1.4	Otimização de quantidade de xarope produzida . . . . .	164
B.1.5	<i>Setup crossover</i> . . . . .	164
B.1.6	Permissão de atraso da produção em todos os períodos . . . . .	165
B.1.7	Janelas de tempo de operação . . . . .	165
B.1.8	Custos e penalizações na função objetivo . . . . .	165
B.2	Análises sobre a comparação e aplicação dos dois modelos . . . . .	166
B.2.1	Modificações e considerações necessárias para conciliar diferenças . . . . .	167
B.3	Aplicação dos modelos na instancia ME2 . . . . .	171
B.4	Conclusões . . . . .	175
	<b>Apêndice C Dados da instância FL1</b>	<b>177</b>
	<b>Apêndice D Dados da instância E1</b>	<b>181</b>
	<b>Apêndice E Dados da instância ME2</b>	<b>184</b>
	<b>Anexos</b>	<b>188</b>

<b>Anexo I</b>	<b>Formulações matemáticas dos modelos base clássicos</b>	<b>189</b>
I.1	Modelo CLSP . . . . .	189
I.2	Modelo GLSP . . . . .	190
I.3	Modelo CLSD . . . . .	191
<b>Anexo II</b>	<b>Modelo F1</b>	<b>194</b>
<b>Anexo III</b>	<b>Modelo SITLSP de Toledo <i>et al.</i> (2015)</b>	<b>198</b>

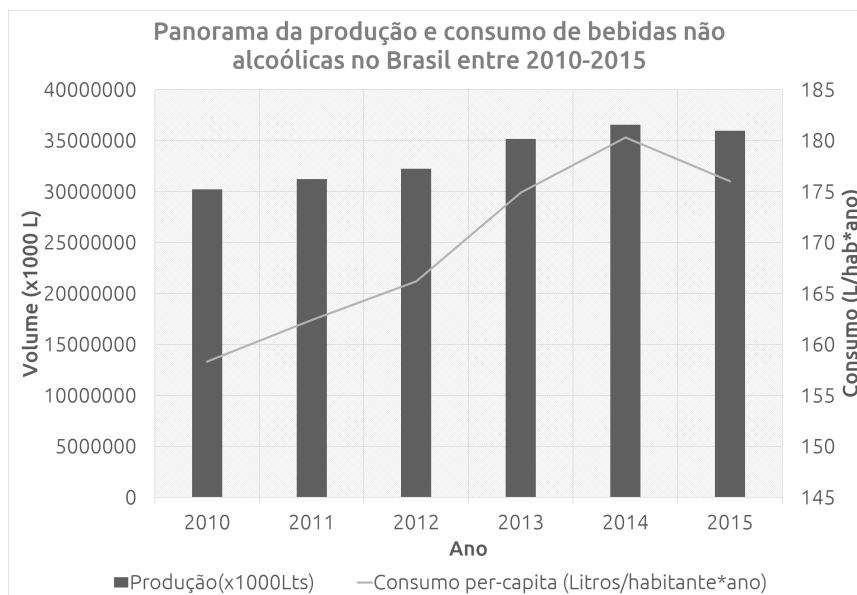


## INTRODUÇÃO

A indústria de bebidas não alcoólicas tem se consolidado nos últimos 100 anos como uma indústria de grande importância no mundo. Somente no caso das bebidas carbonatadas não alcoólicas, mundialmente é registrado um faturamento acima de US \$ 262 bilhões e uma geração de mais de 495 milhões de empregos com mais de 13.900 empresas trabalhando no setor (IBISWorld, 2016).

No Brasil o panorama não é diferente, sendo um dos maiores mercados de refrigerantes do mundo, o consumo per capita de bebidas não alcoólicas em 2015 foi de 176L/habitante×ano no país, com uma produção de mais 35 mil milhões de litros (ABIR, 2016). A Figura 1.1 apresenta graficamente o volume de produção e o consumo per capita de bebidas não alcoólicas desde o ano 2010 até 2015.

FIGURA 1.1: Dados de produção e consumo de bebidas não alcoólicas no Brasil



Criado a partir dos dados de ABIR (2016)

Nesse setor, a competitividade das empresas depende da resposta às tendências do mercado. Isto pode envolver o investimento em inovação e tecnologia e/ou uso eficiente dos recursos produtivos.

Nesse sentido, o planejamento e controle da produção (PCP) na indústria de bebidas desempenha um papel fundamental. Um PCP adequado permite otimizar o uso dos recursos produtivos e executar planos de produção que satisfaçam as demandas dentro dos prazos permitidos.

No entanto, existem desafios que dificultam esse planejamento, os quais têm relação com as características do mercado e do setor, tais como grande variedade de itens, sazonalidade e alta

variabilidade nas quantidades demandadas entre os produtos; assim como outras dificuldades referentes ao processo produtivo como a existência de restrições de recursos disponíveis (maquinário, tempo disponível, insumos), necessidade de preparos e limpezas das máquinas para produção de cada lote de produto, o que em geral depende da sequência de produção, perecibilidade da matéria-prima, programação de manutenções, entre outros fatores.

Contudo, apesar da importância do PCP na indústria de bebidas e a quantidade de fatores envolvidos nas decisões inerentes ao PCP, o que se observa ao visitar fábricas no Brasil e na Colômbia, é que esse planejamento ainda é em grande parte, executado manualmente, sobretudo no nível operacional como no caso da programação da produção, dependendo geralmente de alguns poucos funcionários e muitas vezes baseado na experiência do gerente de produção. Isto resulta em planos de produção, embora factíveis, sub-ótimos e subjetivos. Pode ser útil então para o gerente de produção contar com ferramentas de apoio à decisão que padronizem, automatizem e suportem o processo de tomada de decisão.

No planejamento/programação da produção de bebidas (PPPB) e outros processos produtivos similares, as decisões envolvidas se focam principalmente em dois aspectos: o dimensionamento de lotes e o sequenciamento da produção. O primeiro é referente ao que e quanto produzir, e o segundo se refere à programação desses lotes, isto é, quando e em que ordem produzi-los.

Existe um *trade off* entre as decisões de dimensionamento e as decisões de sequenciamento. Decisões que minimizem os custos referentes ao sequenciamento podem levar à diminuição do número de trocas de produto, mas podem gerar altos níveis de estoques. Por outro lado, priorizar o dimensionamento dos lotes de produtos pode reduzir estoques mas elevar o número de trocas de produtos.

Este *trade off* só pode ser adequadamente avaliado quando as decisões são tomadas de forma simultânea, ou seja, integradas (FERREIRA *et al.*, 2012). Logo, a integração das decisões de dimensionamento e sequenciamento pode ajudar na elaboração de melhores planos de produção, otimizando o uso dos recursos e equilibrando as decisões para obter o melhor resultado com o menor custo possível. Obviamente isso favorece, portanto, a competitividade da organização em geral.

Nesse trabalho, estuda-se o problema geral integrado de dimensionamento de lotes e sequenciamento da produção. Isto é feito no contexto específico do processo produtivo de bebidas não alcoólicas. Porém, este estudo pode ser estendido a outros processos produtivos semelhantes.

O processo produtivo de bebidas não alcoólicas consiste, principalmente, em dois estágios produtivos dependentes entre si e que devem ser sincronizados. Cada estágio está composto por múltiplas máquinas (tanques para o primeiro estágio e linhas de envase para o segundo) com capacidades limitadas, que produzem diferentes xaropes(sabores) e itens(bebida pronta,

embalada e etiquetada). Sendo que os xaropes são perecíveis e podem ficar um tempo limitado disponíveis para envase nas linhas. As máquinas demandam manutenções preventivas que podem demorar de 2 minutos até meia hora (REIS DO NASCIMENTO, 2014), assim, existe também uma consideração de intervalos de tempo para manutenção do maquinário na programação da produção. Os tempos e custos de preparação delas depende da sequência de produção escolhida. O tempo de troca pode variar de 30 minutos até 4 horas. Mais detalhes do processo produtivo são explicados no Capítulo 2.

A programação da produção do processo de produção de bebidas envolve as decisões de definir em cada máquina de cada estágio quanto e em que sequência cada xarope (estágio I) e item final (estágio II) será produzido. Além disso é necessário definir de qual máquina (tanque) do primeiro estágio as máquinas (linhas de envase) do segundo estágio receberão a matéria prima, sendo que elas só podem receber matéria prima de um único tanque, mas estes podem abastecer mais de uma linha. As capacidades das máquinas são limitadas em ambos estágios. O tempo disponível para produção no período também é limitado. É necessário executar manutenções nessas máquinas durante o período e ainda o tempo de permanência dos xaropes nos tanques é limitado. Os tempos/custos de troca entre xaropes nos tanques e itens nas linhas é dependente da sequência de produção.

A comunidade científica tem desenvolvido, nos últimos 20 anos, um número grande de trabalhos que propõem modelos matemáticos para lidar com as decisões integradas de dimensionamento de lotes e sequenciamento da produção. Existem numerosas aplicações desses modelos em diversos tipos de processos de produção, inclusive para bebidas.

Observa-se na revisão de literatura que quase a maioria dos modelos existentes para este problema correspondem a subproblemas ou casos particulares (como a dedicação de tanques a linhas, estabelecimento de sequências pré-definidas, desconsideração da sincronia, entre outras) de um problema mais geral, o problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes da produção de bebidas. Consequentemente, esses modelos não são aplicáveis em todos os contextos produtivos diretamente e as suas adaptações podem não ser triviais.

Assim, neste trabalho propõe-se um modelo de otimização linear inteira mista para lidar com as decisões de programação da produção de bebidas no caso mais geral, isto é, tanques não dedicados que podem suprir a mais de uma linha simultaneamente e inclusão de janelas de tempo para programação de manutenções preventivas. Embora, o foco de estudo deste trabalho sejam as decisões de dimensionamento e sequenciamento de lotes em processos de produção de bebidas não alcoólicas, o modelo proposto pode ser estendido a outros processos com características similares ao já mencionado. Estas características são detalhadas no Capítulo 2 onde se explica a dinâmica e particularidades dos processos de fabricação de bebidas.

## 1.1 Objetivos e justificativa

Como evidenciado na revisão de literatura (veja mais detalhes no Capítulo 3), a maioria dos modelos existentes para problemas de planejamento/programação da produção de bebidas representam, casos particulares do problema geral de dimensionamento e sequenciamento da produção de bebidas (PGIDSLPB). As adaptações desses modelos para tipos de processos produtivos específicos podem não ser triviais, representando uma dificuldade adicional para o decisor.

O objetivo principal desse trabalho é estudar e propor um modelo matemático que represente o problema geral, e seja tratável computacionalmente. Especificamente, este trabalho pode colaborar na redução de custos e tempos de preparo, agilizar e sistematizar a programação da produção e permitir simulações com diferentes conjuntos de dados (previsões de demandas, limitações de capacidade, número variado de máquinas, programação de manutenções do maquinário).

Em visitas a empresas no Brasil e na Colômbia, e por meio da revisão de literatura, foi observado que ainda não existem sistemas que automatizem a tomada de decisões envolvidas na programação da produção.

Uma justificativa do presente trabalho é colaborar para o desenvolvimento de sistemas gerais de apoio à decisão baseados em modelos matemáticos para o dimensionamento de lotes e a programação da produção para o setor de bebidas e para outros processos similares de dois estágios, como fundição em areia, recipientes de vidro, grãos eletro-fundidos, entre outros. Também este trabalho contribui para a literatura científica, analisando o estado-da-arte das pesquisas na área e propondo um modelo que inclui características ainda não tratadas de forma integrada nos trabalhos existentes na literatura, como o caso de janelas de tempo para produção a fim de considerar as manutenções do maquinário de cada estágio e/ou a perecibilidade da matéria prima.

As principais motivações de usar modelagem matemática são:

- os modelos matemáticos avaliam de forma mais efetiva o *trade off* entre os problemas que foram integrados;
- modelar matematicamente o problema permite a validação e comparação com outros métodos, como heurísticas;
- a tecnologia tem avançado e cada vez mais permite desenvolver e resolver modelos mais difíceis, p. ex. instâncias de pequeno porte no trabalho de Ferreira *et al.* (2012) foram resolvidas por uma máquina de 2 Gb de memória RAM com o *solver* CPLEX 11.0 em média

em 4.6 s; hoje, estas instâncias podem ser resolvidas por uma máquina de 16 Gb e *solver* CPLEX 12.6 com um tempo médio de 0.13 s,

- ajuda a definir o que é importante de ser considerado para representar de forma realista o problema.

## 1.2 Metodologia

Este trabalho pode ser caracterizado como uma pesquisa axiomática normativa (MORABITO; PUREZA, 2010; BERTRAND; FRANSOO, 2002), pois estuda-se um modelo que pode contribuir com estratégias, políticas e direções que pretendem melhorar os resultados disponíveis na literatura sobre o problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes de dois estágios sincronizados e ao mesmo tempo que se ajusta às observações e ações deste sistema real.

Como primeiro passo, foi feita uma revisão de literatura sobre os problemas integrados de dimensionamento e sequenciamento da produção em diversos tipos de processos industriais que se ajustem ao perfil deste enfoque.

Uma vez entendidas as particularidades dos processos de produção, foi aplicada a metodologia de pesquisa baseada em modelagem matemática (MORABITO; PUREZA, 2010), que envolve a definição do problema, modelagem matemática, validação dos modelos propostos, pesquisa de métodos de solução, experimentação computacional das abordagens, análise das soluções em situações simuladas e encontradas na prática.

Os dados utilizados para experimentação, são principalmente tomados da literatura ou baseados em dados da literatura, dos trabalhos de Ferreira *et al.* (2012) e Toledo *et al.* (2015).

Cabe salientar que nessa pesquisa não foi obtido acesso à programação das fábricas visitadas portanto, as comparações e experimentos aqui citados são feitos com base na literatura científica pesquisada e a experimentação própria.

Para facilitar o processamento dos dados e a interação deles com os modelos, foram usados os *softwares*: AMPL v.20130226 (FOURER; GAY; KERNIGHAN, 2003) para programação do modelo, e o pacote de otimização CPLEX 12.6 (ILOG IBM, 1988) para solução das instâncias, sendo utilizado um computador com 16 Gb de memória RAM e um processador Intel Core i7 com frequência de 3.6 GHz.

## 1.3 Organização do trabalho

Essa dissertação está organizada da seguinte maneira: no Capítulo 2 é descrito o processo geral de fabricação de bebidas. Uma revisão da literatura que visa apresentar o estado-da-arte

das pesquisas sobre o problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes em geral e aplicações é dada no Capítulo 3.

A seguir, no Capítulo 4 é apresentada a proposta de modelagem do problema, o modelo SMMRPM.

No capítulo 5 é analisada a aplicação do modelo proposto em várias situações práticas que podem ser encontradas em diferentes plantas de produção e é apresentada uma comparação com um modelo da literatura (modelo F1 (FERREIRA *et al.*, 2012)), que é um caso particular do problema estudado.

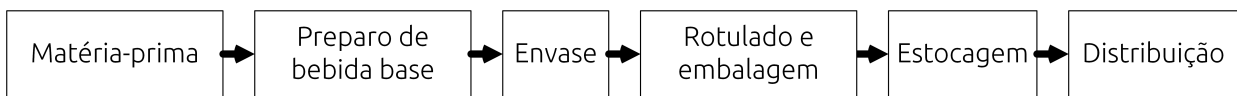
Por fim temos as conclusões e perspectivas de pesquisas futuras no capítulo 6, a lista de referências bibliográficas, apêndices e anexos.

## O PROCESSO GERAL DE FABRICAÇÃO DE BEBIDAS E DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE PESQUISA

**N**ESTE capítulo é apresentada a descrição do processo geral de produção de bebidas não alcoólicas e resalta suas principais características. Também é apresentado o problema de pesquisa e seus principais considerações.

As bebidas não alcoólicas são do tipo refrigerantes, sucos, chás, energéticos, iogurtes, entre outras. A produção de cada uma pode envolver alguma particularidade, como necessidade de pasteurização, maturação em tanques, etc. Porém, o processo de produção em geral, envolve as etapas de preparo da matéria prima em tanques, finalização da base da bebida, envase, embalagem e estoque para posterior distribuição. O fluxo do processo é esquematizado na Figura 2.1. Este processo é caracterizado por ter dois estágios de produção bem diferenciados: o preparo e o envase da bebida. Esses estágios são dependentes entre si e devem ser sincronizados.

FIGURA 2.1: Resumo do processo de produção de bebidas.



Fonte: Elaboração própria.

O processo de fabricação de bebidas não alcoólicas pode ser caracterizado como um processo de dois estágios de produção dependentes entre si. O primeiro estágio de produção corresponde aos tanques de preparo dos xaropes (sabor da bebida) a serem utilizados na fabricação das bebidas, e inclui, entre outras atividades, a limpeza dos tanques e a medição e mistura dos ingredientes necessários. Esses tanques podem diferir em capacidade.

Em geral, os tanques podem alimentar simultaneamente uma ou mais linhas de produção (sempre que essas linhas estejam produzindo itens do mesmo sabor).

O segundo estágio do processo, é definido por linhas de envase de diferentes capacidades de processamento. Uma linha realiza as atividades de lavagem dos vasilhames, envase, etiquetamento para posterior embalagem e estoque. Neste estágio, as linhas podem ser alimentadas apenas por um tanque de cada vez, ainda que outros tanques estejam disponíveis. Geralmente existem controles de qualidade no meio e no fim do envase na linha para garantir que não sejam levados para estoque produtos fora das especificações, como não enchidos no nível correto ou vasilhames em mal estado (FERREIRA *et al.*, 2012).

Na Figura 2.2, mostra-se um esquema geral do processo de produção de bebidas. Note que

o tanque 1 está alimentando a linha 1 e o tanque  $m$  está alimentando simultaneamente as linhas  $l$  e  $l'$ . Cabe lembrar que um tanque só estará disponível para preparar um novo lote de xarope quando estiver vazio e quando as linhas que ele supre tenham terminado a produção. No exemplo da Figura 2.2, o tanque  $M$  estará pronto para preparar um novo lote de xarope uma vez que a linha  $l$  tenha terminado sua produção, o tanque 1 só estará livre ao se desconectarem as linhas 1 e 2 e o tanque  $m$  só estará livre ao se desconectarem as linhas  $l$  e  $l'$ . Pode existir o caso em que um dos tanques esteja preparado mas não ativo, isso ocorre se, após o preparo do xarope, nenhuma linha estiver livre para ser conectada a ele, como é o caso do tanque 2. Nesta situação, o tanque com o xarope preparado espera até alguma linha estar pronta para envasar o lote.

Porém, há um limite máximo de tempo que um xarope pronto pode ser utilizado para fabricar um item final, pois, os xaropes são perecíveis.

A cada troca de sabor são necessárias operações para preparar o xarope no tanque (*setup*), o que implica em tempos/custos de troca positivos. A preparação do xarope envolve um CIP (*Clean In Place*), ou seja, a limpeza dos tanques e tubulações, e posteriormente a mistura de ingredientes que formam o xarope. Obviamente o tanque deve estar totalmente vazio antes de qualquer preparação. Nas linhas, também a cada troca de sabor ou tipo de embalagem é necessária uma limpeza e/ou ajustes técnicos que demandam um tempo considerável (que pode variar de 30 min até 4 horas). Trocas entre itens iguais nas linhas têm tempos/custos de troca nulos, no entanto, no tanque estes tempos/custos são positivos pois a limpeza e o esvaziamento do tanque é obrigatório.

Neste tipo de processo produtivo, os tempos/custos de preparo dependem da sequência de produção escolhida nos dois estágios. Um exemplo simples deste fenômeno é o caso de dois tipos de bebidas: a bebida normal -A- (com açúcar) e as de bebidas *light* -B-; ao produzir a sequência A-B; preparar os tanques e as linhas para fazerem as bebidas de tipo *light* depois de terem produzido uma bebida normal, tomaria mais tempo (4 horas) do que se a sequência fosse a inversa, ou seja B-A (aproximadamente 40 min), devido à limpeza do açúcar (FERREIRA, 2006).

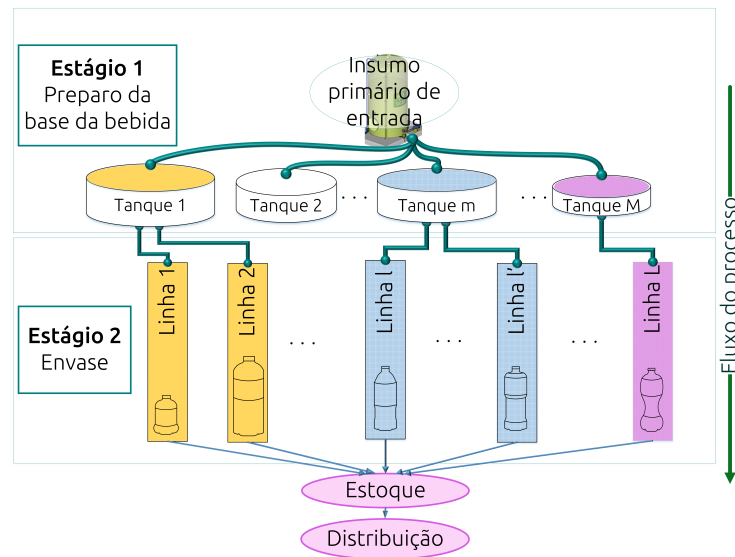
Para garantir a homogeneidade no líquido deve-se assegurar que é preparada uma quantidade mínima de xarope no tanque. Há um lote máximo no tanque que é sua capacidade em litros. Demandas altas podem requerer o preparo de vários lotes de xarope devido a sua limitação de capacidade (no presente texto usaremos também a palavra enchimento para nos referir aos lotes do tanque), nestes casos o preparo também envolve CIP e mistura de ingredientes.

Diferente do que ocorre nos tanques, nas linhas, não há, a princípio um limite máximo para produção de um lote. Assim, não há necessidade de trocas entre lotes de itens iguais. O que pode ocorrer é a troca da conexão da linha para outro tanque com o mesmo sabor anteriormente produzido, em virtude do lote atual de xarope ter acabado. No entanto, nesses casos as trocas



são rápidas e os tempos de trocas nas linhas, considerados nulos.

FIGURA 2.2: Processo de fabricação de bebidas não alcoólicas.



Fonte: Inspirado em Ferreira *et al.* (2012).

A partir de um lote de xarope em um tanque, uma linha conectada pode produzir lotes de itens diferentes do mesmo sabor. Nesse trabalho, conforme explicado, devido a que não há lote máximo de envase de um item na linha, não são permitidos múltiplos lotes de um mesmo item dentro da mesma conexão tanque / enchimento. No entanto, se for necessária a produção daquele item para satisfazer a demanda, é permitido repetir a produção do item, sempre que ele seja envasado em uma outra conexão distinta. Assim, o tempo da conexão da linha no tanque para cada lote de item final terá um único início e único fim naquela conexão.

Uma linha só pode começar o envase se o xarope está pronto no tanque que vai alimentá-la. Caso contrário, ela deve esperar o xarope estar pronto. De forma similar, ainda que um tanque esteja pronto, somente poderá enviar xarope para começar sua utilização quando as linhas estiverem prontas, caso nenhuma linha esteja preparada para envase o tanque deve esperar até uma linha estar pronta. Isso é o que se denomina sincronia entre os estágios. Obviamente essas esperas afetam a produção a medida que consomem a capacidade disponível. Por isso os dois estágios devem ser sincronizados no momento de programação da produção e não *a posteriori*.

Uma linha de envase é composta por diferentes máquinas, tais como lavadora dos vasilhames, esteira transportadora, sensores de controle de qualidade, injetora da bebida, rotuladora, envolvedora e paletizadora. No caso do tanque também existem diversos filtros, sensores e componentes individuais susceptíveis de calibração e ajustes preventivos. Todas essas máquinas demandam constantemente manutenções. Durante as visitas às fábricas, por exemplo, várias máquinas estavam paradas para manutenção. Pode-se fazer a manutenção individual de tais

componentes de forma separada, dividindo a manutenção em pequenas manutenções individuais de cada máquina. Estas manutenções, podem envolver calibrações, ajustes e trocas de pequenas peças e sensores. Dependendo do tipo de componente, tais manutenções preventivas tomam em média, desde 2 minutos até 30 minutos (REIS DO NASCIMENTO, 2014).

Embora as manutenções possam ser realizadas fora do período de produção (fins de semana, por exemplo), isso exige a contratação de horas extras, tendo em vista que nas fábricas de bebidas, tais manutenções são feitas pelos mesmos funcionários de chão de fábrica que cuidam do maquinário durante a produção. Além disso, em épocas de alta demanda de bebida, como no verão, o período de produção das fábricas se estende até o domingo. Conseqüentemente há mais necessidade de manutenções nas máquinas durante o período de produção.

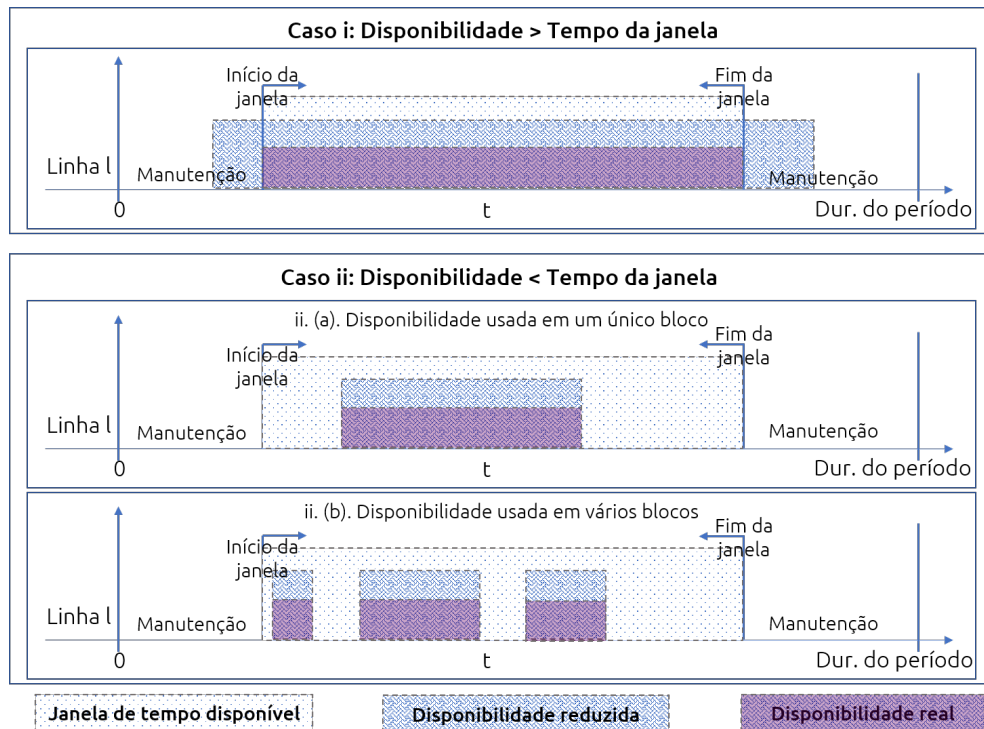
Vale observar que as manutenções são essenciais, especialmente em casos de produção que envolvem xaropes muito perecíveis. Uma quebra de máquina poderia implicar em descarte de todo o xarope preparado e na realização de um novo preparo da linha e tanque após o concerto respectivo. Tendo isso em vista, incluir os tempos para manutenção de linhas e tanques significa otimizar ainda mais o uso dos recursos e conseqüentemente contribuir para a competitividade da empresa.

Pode se considerar sem perda de generalidade que as manutenções preventivas mais demoradas (desmontar máquinas, etc.) serão realizadas no início e fim do período. Dessa forma as linhas e tanques poderão ser utilizadas durante uma janela de tempo no período. Além disso, manutenções mais rápidas (troca de pequenas peças, calibração de sensores, etc.) podem ser realizadas a qualquer momento durante a janela de tempo, ou seja, a linha tem uma disponibilidade de uso para produção (tempo de troca mais tempo de envase) menor que a janela de tempo, o que gera um tempo ocioso na linha que será utilizado para essas manutenções rápidas. As manutenções não alteram o tempo de troca entre os itens, isto é, ainda que o tempo ocioso entre a troca de dois itens seja aproveitado para manutenção, o tempo de trocas será o mesmo que se não tivesse ocorrido a manutenção.

Logo, as janelas de tempo modelam as manutenções maiores, que são programadas no início e fim do período. As manutenções pequenas podem ser modeladas como uma redução da disponibilidade. Existe também uma duração do período que afeta os dois estágios produtivos, esta duração do período também a operação do maquinário. As janelas de tempo, e a disponibilidade reduzida do maquinário são menores que o intervalo definido pela duração do período. Então podem se diferenciar 2 casos que são ilustrados mediante a Figura 2.3. Primeiro, se a disponibilidade reduzida supera o tempo limitado dentro da janela de tempo de operação, então a disponibilidade real será limitada pela janela de tempo. Por outro lado, se a disponibilidade reduzida for menor que a janela, deverá se decidir qual será a utilização desse tempo disponível,

seja em um único bloco de produção ou vários blocos.

FIGURA 2.3: Ilustração de janelas de tempo e disponibilidade do maquinário.



Fonte: Elaboração própria.

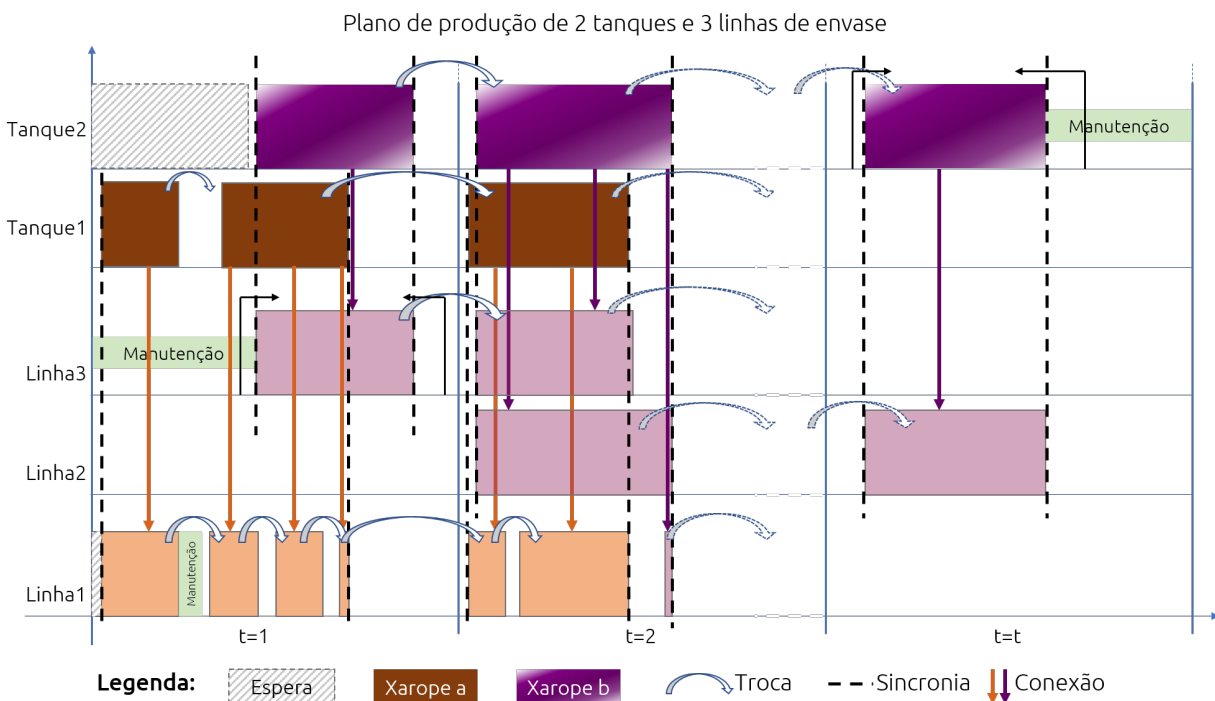
O início e fim da janela são determinados pelo tomador de decisão. Da mesma forma a disponibilidade reduzida do maquinário dependerá da parcela do tempo total disponível que se pressuponha para manutenções pequenas. Como consequência embora as manutenções preventivas estejam contempladas

É assim, como o problema abordado nesse trabalho é o problema geral integrado de dimensionamento de lotes e sequenciamento da produção de bebidas (PGIDSLPB) com dois estágios sincronizados e manutenções preventivas. O PGIDSLPB consiste em:

- Alocação dos itens a serem produzidos em cada linha/período.
- Quantidade a ser produzida/estocada/atrasada de cada item em cada período.
- Sequência de produção dos itens em cada linha/período.
- A conexão de cada linha para envasar cada item final nos lotes de xarope/tanques cada um dos períodos.
- Alocação de xaropes para cada tanque/enchimento.
- Quantidade de xarope para envasar os itens das linhas.
- Sequência de produção de xaropes por tanque/período.
- Determinação dos momentos em que linhas e tanques estão disponíveis para eventuais manutenções dentro da janela de tempo disponível.

Na Figura 2.4 são ilustradas as decisões que são esperadas do problema aqui descrito. A figura apresenta um plano mestre onde há dois tanques suprindo 3 linhas de produção. Os retângulos representam lotes de produção cujas quantidades devem ser determinadas. As setas verticais dirigidas para embaixo representam as conexões das linhas aos tanques para cada lote de item, tais conexões devem ser determinadas na programação. As setas curvadas representam trocas. As trocas definem o sequenciamento em cada máquina e o tempo da troca depende dos xaropes/itens envolvidos nela. As setas de tipo  $\uparrow$  e  $\downarrow$  definem, respectivamente, o início e fim da janela de tempo para operação (neste caso do tanque 2 e a linha 3).

FIGURA 2.4: Plano para ilustrar o problema de pesquisa.



Fonte: Elaboração própria.

Note que os lotes devem estar sincronizados (as linhas pontilhadas salientam dita sincronia), e ela deve ser garantida na programação da produção assim como o respeito das janelas e disponibilidades de tempo para operação. Como mencionado, as manutenções de maior duração são incluídas no início/fim do período antes e/ou depois do início/fim da janela de operação. Manutenções pequenas como a indicada entre os dois primeiros lotes na linha 1 podem ser realizadas na ociosidade entre lotes.

Existem variações do PGIDSLPB, que conservam as características principais do processo aqui descrito, mas possuem outras características específicas adicionais. Como exemplos, temos: os sucos a base de frutas onde existem tanques extra para pasteurização chamados de tanques pulmões (que fazem parte do preparo da base da bebida no primeiro estágio) e lim-

pezas periódicas nos tanques por regulamentações; e o caso dos iogurtes, onde existem tempos de fermentação e pasteurização, que podem ser vistos também como parte do *setup* do primeiro estágio. O processo de produção da cerveja é outro processo similar ao apresentado nesse capítulo, no entanto, nele os longos tempos de maturação (desde muitos dias até alguns meses) fazem com que existam tanques de repouso e estoques intermediários no processo.

As variações mencionadas acima são características específicas desses processos particulares e não são consideradas no problema geral estudado aqui. No entanto, acredita-se que adaptações possam ser feitas para modelar tais características específicas.

Em resumo, o processo geral de produção de bebidas não alcoólicas, abordado nessa dissertação, possui os seguintes pressupostos:

- O horizonte de planejamento está dividido em períodos limitados de tempo.
- Há uma duração do período que limita de forma global e em primeira instância a operação dos dois estágios produtivos.
- A demanda é determinística, por período e atendida no fim de cada período.
- Estoques e atrasos de itens finais são permitidos e ocorrem no fim dos períodos.
- Há custos de estoques e atrasos por unidade de item.
- O processo de produção é composto por dois estágios de produção sincronizados e dependentes entre si.
- Existem tempos/custos de *setup* dependentes da sequência de produção nos dois estágios.
- 
- Podem ser definidas janelas de tempo de operação tanto em tanques como em linhas para um ou vários períodos, respeitando a duração máxima do período.
- Se não forem definidas janelas para o maquinário, a operação deles estará limitada pela duração do período.
- Os tanques do primeiro estágio suprem uma ou várias linhas de envase no segundo estágio de forma simultânea.
- Os tanques possuem capacidades limitadas e diferentes entre si. A capacidade do tanque é medida em litros de xarope.
- Por motivos de modelagem, cada tanque pode ser enchido com xarope um número limitado de vezes no período definido *a priori*. Este número deve ser estimado com base no número de xaropes, a capacidade dos tanques e as demandas de xarope para envase dos itens finais.
- Um lote de xarope pode variar entre os limites mínimo e máximo do tanque.

- Os xaropes são perecíveis, não podendo permanecer mais do que um tempo determinado no tanque.
- A partir dos xaropes preparados no primeiro estágio podem ser produzidos vários itens no segundo estágio.
- Há uma disponibilidade de tempo limitada do tanque para produção de xarope. Nesse tempo devem ser considerados tanto as trocas (CIP e preparo de xarope) quanto o tempo de conexão do tanque nas linhas.
- Deve existir sincronia entre os dois estágios; se o tanque estiver pronto e nenhuma linha estiver preparada para receber xarope, haverá uma espera do tanque; por outro lado, se uma linha estiver pronta e o tanque/xarope que será conectado não está preparado, haverá uma espera da linha pelo tanque.
- Os xaropes são mantidos no tanque durante o envase nas linhas e o tanque se mantém ocupado enquanto alguma linha estiver conectada a ele envasando bebida.
- As linhas podem produzir vários itens em uma mesma conexão tanque/enchimento sempre que eles tenham o mesmo sabor.
- A capacidade das linhas se define pela velocidade de envase de cada item. A velocidade de envase de um item pode variar de uma linha para outra.
- Cada item somente utiliza um tipo de xarope (sabor).
- Para uma mesma conexão tanque/enchimento, não há dois lotes do mesmo item na linha, ou seja, não há troca em uma linha de um item para ele mesmo em uma conexão.
- A disponibilidade de uso da linha dentro do período e/ou da janela de tempo é limitada.
- Manutenções preventivas podem ser realizadas fora ou dentro da janela de operação no período, aproveitando os tempos de ociosidade dentro da janela.
- Cabe salientar que decisões de manutenção são definidas a priori e fazem parte dos dados de entrada, ou seja, não são integradas.

A seguir se apresenta uma revisão da literatura para evidenciar o estado-da-arte para o problema estudado nessa pesquisa.

REVISÃO DA LITERATURA

---

**N**ESTE capítulo é apresentada uma revisão de literatura do problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes, em inglês *integrated lot-sizing and scheduling problems* (ou simplesmente L&S). Ela pretende apresentar a evolução das diferentes abordagens de modelagem do problema L&S, com foco principal nas aplicações no contexto da indústria de bebidas, indicando assim o estado-da-arte em relação à proposta de modelos matemáticos para o problema geral de dimensionamento e sequenciamento de lotes de bebidas. Outro objetivo do capítulo é identificar “lacunas” da literatura científica sobre o assunto, e indicar as perspectivas que deram origem ao presente trabalho e trabalhos futuros.

A revisão é abordada então de duas perspectivas, primeiro de maneira mais breve, a perspectiva geral do dimensionamento e sequenciamento de lotes na literatura científica (seção 3.1) e em seguida, de forma mais detalhada, na seção 3.2, é abordado o problema L&S na indústria de bebidas tratado via modelos de otimização linear inteira mista.

### 3.1 O problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes

Essa primeira parte da revisão bibliográfica foi realizada a partir dos artigos mais citados sobre o dimensionamento e sequenciamento de lotes nas bases de dados *Google scholar*, *Scopus* e *Web of Science* a busca foi realizada com os termos ‘*lot sizing*’ AND ‘*scheduling*’. Além disso buscou-se referências a outros trabalhos relevantes relacionados nos artigos selecionados (principalmente revisões tais como (ALMADA-LOBO *et al.*, 2015; COPIL *et al.*, 2016; KARIMI; FATEMI GHOMI; WILSON, 2003; DÍAZ-MADROÑERO; MULA; PEIDRO, 2014)), especialmente em trabalhos com características parecidas ao problema tratado nessa pesquisa.

Tendo em vista a inserção da programação da manutenção no problema, também foram procurados trabalhos referentes à programação da manutenção. Os termos “Manutenção” e “Planejamento da manutenção” foram utilizados na busca.

Os modelos integrados de dimensionamento de lotes e sequenciamento da produção podem ser vistos como problemas de dimensionamento de lotes que incluem variáveis e restrições de sequenciamento.

Os modelos de dimensionamento, embora sejam de grande aplicabilidade, limitam-se a medir as quantidades (dimensionamento) dos lotes a serem produzidos, não ajudando na tomada de decisão de definir a sequência de produção desses lotes dimensionados.

Como mencionado no Capítulo 1, quando as decisões de dimensionamento e de sequenciamento são tomadas de forma independente, pode-se perder oportunidades de obter planos de produção mais otimizados e incorrer no desperdício de recursos.

Logo, a inclusão do sequenciamento nos modelos de dimensionamento está motivada, principalmente pelos seguintes aspectos: otimalidade e factibilidade (GUIMARÃES *et al.*, 2015). O ponto de vista da **otimalidade**, contribui para a criação de planos de produção mais eficientes com respeito ao custo em comparação com estratégias que consideram as decisões de dimensionamento e sequenciamento separadamente, uma vez que atinge de forma integral o *trade-off* entre estes dois tipos de decisão. O ponto de vista da **factibilidade** contribui com a obtenção de planos de produção factíveis, uma vez que a não inclusão do sequenciamento, na prática, poderia implicar em não considerar tempos de *setup* dependentes da sequência e conduzir infactibilidade por violação de capacidade.

O desenvolvimento de modelos de dimensionamento e sequenciamento de lotes tem sua base em modelos clássicos da literatura. Novos modelos surgem, a medida que se integram novas características para dar aderência à modelagem de situações reais.

Segundo a literatura pesquisada, a maioria dos modelos L&S atuais se baseiam em três modelos clássicos da literatura: o CLSP, GLSP e CLSD, esse último pode ser visto como uma adaptação do CLSP para incluir decisões de sequenciamento e custos de *setup* dependentes da sequência. De modo específico, é possível analisar esses modelos nas seguintes questões:

- i.* **Escalas de discretização do horizonte de planejamento:** refere-se ao tratamento da divisão do tempo do horizonte de planejamento, sendo usada uma divisão por períodos simplesmente, ou além da divisão por períodos, uma divisão em microperíodos, os quais podem ser de tamanho variável ou fixo.
- ii.* **Existência de sequenciamento** Refere-se à consideração do sequenciamento em conjunto com o dimensionamento (integração dos dois tipos de decisão). O dimensionamento é um fator comum em todos os modelos clássicos para a programação da produção citados nesse trabalho.
- iii.* **Setup dependente/independente da sequência.**
- iv.* **Quantidade de itens permitida por intervalo de tempo:** dependendo da escala usada e do enfoque da modelagem, podem ser permitidos um ou vários itens em um período (ou microperíodo) de tempo. Assim, os modelos são classificados como de tipo *Small Bucket*, que permitem a produção de somente um item por intervalo de tempo, e como *Big Bucket* os que permitem a produção de mais de um item por período.



- v. **Vantagens/desvantagens estruturais:** Refere-se a vantagens/desvantagens que a modelagem oferece em relação às dimensões do modelo (número de variáveis, restrições, entre outras).

A seguir se apresentam as principais características de cada um dos modelos clássicos, segundo os critérios mencionados. Os modelos se apresentam na ordem cronológica de publicação partindo do mais antigo para o mais recente. Para uma maior compreensão destas abordagens clássicas, o leitor pode conferir os trabalhos de Drexl e Kimms (1997) para o CLSP e GLSP, (artigo seminal do GLSP), e Karimi, Fatemi Ghomi e Wilson (2003) para o CLSP e a variação CLSD. No Anexo I estão apresentadas as formulações matemáticas desses modelos.

### **CLSP (DREXL; KIMMS, 1997; KARIMI; FATEMI GHOMI; WILSON, 2003)**

- i. O horizonte de planejamento é finito e discretizado em períodos de duração semelhante.
- ii. A ênfase deste modelo é o dimensionamento dos lotes. Não se considera sequenciamento dos itens dentro de cada período.
- iii. Como consequência da desconsideração do sequenciamento, não se aplica o critério de considerar *setups* dependentes da sequência.
- iv. É um modelo do tipo *Big Bucket* (DREXL; KIMMS, 1997), pois vários itens podem ser feitos dentro do período.
- v. Embora seja a abordagem base que gera menos variáveis e restrições dentre as três apresentadas, este modelo é insuficiente para resolver o problema de sequenciamento.

### **GLSP (FLEISCHMANN; MEYR, 1997; DREXL; KIMMS, 1997)**

- i. O horizonte de planejamento é dividido em períodos e estes em microperíodos. Os períodos possuem tamanho igual entre eles. Um período contém vários microperíodos de duração fixa ou variável, e só pode ser produzido um item por microperíodo. O número de microperíodos é definido a priori. Devem ser gerados microperíodos suficientes para não limitar o número de lotes de cada período.
- ii. Considera sequenciamento dos lotes, o qual é gerado pela ordem natural dos microperíodos, uma vez que apenas um item pode ser produzido por microperíodo.
- iii. É possível considerar *setups* dependentes da sequência de produção mediante da adição de restrições para controle de trocas que utilizam variáveis de estado de *setup*.
- iv. É um modelo *Small Bucket* na escala dos microperíodos, pois é permitida a produção de apenas um item por microperíodo. No entanto, é um modelo do tipo *Big Bucket* na escala dos períodos pois em cada período pode haver a produção de vários itens.

- v. A vantagem mais evidente é que o sequenciamento é dado pela ordem natural dos microperíodos. Com isso adicionalmente garante-se que não existam subsequências de produção desconectadas que tornem o problema infactível. No entanto, essa abordagem gera um número elevado de variáveis e restrições, uma vez que estas são indexadas nos itens, períodos e microperíodos.

### **CLSD (HAASE, 1996; KARIMI; FATEMI GHOMI; WILSON, 2003)**

- i. O horizonte de planejamento é discretizado em períodos de duração semelhante.
- ii. Diferentemente do CLSP (HAASE, 1996; DREXL; KIMMS, 1997; KARIMI; FATEMI GHOMI; WILSON, 2003), este modelo considera o sequenciamento dentro de cada período. No entanto, o sequenciamento gerado precisa de restrições de eliminação de *subtour* (ALMADA-LOBO *et al.*, 2015). Por ser baseado na formulação do caixeiro viajante (ATSP, sigla em inglês).
- iii. Parecido com o GLSP, neste modelo é possível considerar *setups* dependentes da sequência de produção.
- iv. Similar ao CLSP, este modelo é *Big Bucket* pois vários itens podem ser produzidos dentro do mesmo período.
- v. Este modelo gera menos variáveis e restrições quando comparado com o GLSP. Uma vez que as variáveis são indexadas apenas por períodos.

Alguns trabalhos, por exemplo Toso, Morabito e Clark (2008), Menezes, Clark e Almada-Lobo (2011) e (FERREIRA *et al.*, 2012), compararam formulações para o mesmo problema utilizando diferentes modelos base para cada formulação (concretamente GLSP e CLSD). Os resultados nesses trabalhos demonstraram a maior eficiência dos modelos baseados no CLSD, o que tem motivado pesquisas com este tipo de formulação matemática, especialmente nos últimos 10 anos.

Nos últimos trinta anos o estudo dos modelos matemáticos de dimensionamento de lotes, de sequenciamento da produção e os modelos integrados tem ganhado grande importância na literatura científica. Isto é motivado conforme mencionado anteriormente, pela qualidade das soluções em relação às soluções de modelos não integrados, pela facilidade de suas aplicações práticas, pela evolução dos sistemas de processamento de informação, tanto no nível de *hardware* quanto de *software*, que dão suporte à solução de modelos mais complexos e pelo desafio teórico que envolve estas problemas em relação à solução de instâncias de grande porte em tempos computacionais plausíveis. O número de artigos de revisão de literatura relacionados com esta temática reflete a relevância do problema estudado, revisões relevantes são: Bahl, Ritzman e Gupta (1987), Drexel e Kimms (1997), Staggemeier e Clark (2001), Karimi, Fatemi Ghomi e Wil-

son (2003), Suerie (2005), Jans e Degraeve (2006), Méndez *et al.* (2006), Zhu e Wilhelm (2006), Amorim *et al.* (2013), Copil *et al.* (2016). Essas revisões apresentam as vantagens e desvantagens dos diferentes enfoques de modelagem e técnicas de solução existentes, também direcionam os pesquisadores em possíveis novas aplicações e extensões do tópico.

Do ponto de vista da classificação, observa-se que os autores utilizam diferentes critérios de agrupamento para os modelos de dimensionamento e sequenciamento de lotes, a Tabela 3.1 resume os mais utilizados.

TABELA 3.1: Critérios mais usados para classificar modelos L&S.

Nome do critério	Classificação
Horizonte de planejamento	Finito
	Infinito
	Mono-período
	Multi-período
Itens por período/microperíodo	<i>Big Bucket</i> (vários itens)
	<i>Small Bucket</i> (somente um item)
Número de níveis	Mono-nível
	Multi-nível
Número de produtos	Mono-item
	Multi-item
Natureza da demanda	Estática
	Dinâmica
	Determinística
	Estocástica
Estrutura dos <i>setups</i>	Dependentes da sequência
	Independentes da sequência
Número de recursos	Mono-máquina
	Multi-máquina

Inspirado em (KARIMI; FATEMI GHOMI; WILSON, 2003; SUERIE, 2005).

Naturalmente, todos os modelos integrados de dimensionamento e sequenciamento são multi-item, e a maioria multi-período, desenhados para múltiplas máquinas, com restrições de capacidade e uma demanda determinística que muda de acordo com o período de tempo.

Outras aplicações de modelos L&S são as encontradas em: indústria de produção e embalagens de iogurte (MARINELLI; NENNI; SFORZA, 2007), indústria de fundições (ARAUJO; ARENALES; CLARK, 2008), grãos eletro-fundidos (LUCHE; MORABITO, 2005; LUCHE; MORABITO; PUREZA, 2009), recipientes de vidro (ALMADA-LOBO; OLIVEIRA; CARRAVILLA,

2008), operações de fundição em areia (HANS; VELDE, 2011) e indústria de embalagens de polpa moldada de papel (MARTÍNEZ; TOSO; MORABITO, 2016), entre outros.

Outros trabalhos também consideram características interessantes relacionadas com o problema tratado nessa pesquisa como existência de dois estágios, sincronia entre maquinários, programação de manutenções preventivas, etc. Almeder e Almada-Lobo (2011) propõem dois modelos baseados, respectivamente nos modelos clássicos CLSP e GLSP para tratar um problema onde um recurso deve ser sincronizado com múltiplas máquinas. Os melhores resultados foram obtidos com a formulação baseada no CLSP.

O trabalho de (TRANSCHEL *et al.*, 2011) apresenta 3 modelos baseados no GLSP com variáveis de medição de tempos contínuos que permitem fazer a sincronia entre dois estágios e o sequenciamento em ambientes produtivos com essa característica. Também o trabalho de (CAMARGO; TOLEDO; ALMADA-LOBO, 2012) apresenta 3 modelos para processos de dois estágios baseados em escalas de tempo. O melhor resultado foi obtido usando uma abordagem híbrida que mistura a discretização dos lotes com variáveis de tempo contínuo para medir o início e o fim de cada lote.

Vale a pena salientar que nesta dissertação, utiliza-se uma estratégia de variáveis e restrições de tempo contínuo, baseada no trabalho de (ALMEDER; ALMADA-LOBO, 2011) que garante a sincronia entre os dois estágios de produção. Esta escala de tempo adiciona flexibilidade ao modelo, permitindo delimitar janelas de tempo de operação dos maquinários envolvidos, como será explicado no Capítulo 4, permitindo assim, também programar eventuais manutenções em linhas e tanques.

Um trabalho com um enfoque parecido é o estudo de Ramezani, Saidi-Mehrabad e Fattahi (2013) apresenta modelo que integra decisões de dimensionamento de lotes, estoques e contempla restrições de disponibilidade dos recursos para programação das manutenções, em um ambiente multi-produto, com múltiplas máquinas alinhadas tipo *flow shop*. Como trata-se de uma única linha de produção, as máquinas são utilizadas sequencialmente passando os itens de uma para a outra que vem depois. Nesse trabalho, o sequenciamento dos itens em cada máquina é feito utilizando variáveis de tempo contínuo para cada lote, são estabelecidos limites de operação para as linhas, há consideração de custos de *setup* dependentes da sequência de produção, e são considerados estoques intermediários de itens entre cada máquina da linha de produção.

Observam-se na literatura outros enfoques para abordar a manutenção, tais como modelos não lineares (LIU; WANG; PENG, 2015; LIU; WANG; PENG, 2017; DELLAGI; CHELBI; TRABELSI, 2017), controle estatístico combinado com metodologias de construção heurística de planos de manutenção (OHUNAKIN; LERAMO, 2012; REIS DO NASCIMENTO, 2014), algoritmos iterativos para o sequenciamento da produção e manutenções preventivas (SORTRAKUL; NA-

CHTMANN; CASSADY, 2005) (neste trabalho não é feito dimensionamento), e formulações MIP (FITOUHI; NOURELFATH, 2012; RAMEZANIAN; SAIDI-MEHRABAD; FATTAHI, 2013; LIU; WANG; PENG, 2017).

Cabe salientar também que a integração do planejamento da produção com a manutenção preventiva no mesmo modelo é recente na literatura (YALAOUI; CHAABI; YALAOUI, 2014). Também vale a pena dizer que os trabalhos de Ohunakin e Leramo (2012) e Reis do Nascimento (2014) tratam apenas da programação da manutenção sem considerações de dimensionamento e/ou sequenciamento da produção.

A respeito dos métodos de solução, nota-se que o uso de métodos de solução aproximados é usual devido à alta complexidade dos problemas L&S e os *gaps* altos obtidos mediante o uso de técnicas exatas.

Dentre as técnicas exatas mais usadas estão métodos de enumeração implícita e de planos de corte tais como *branch-and-bound*, planos de corte e a combinação dos dois (*branch-and-cut/cut-and-branch*), geralmente pré-programados nos pacotes de otimização comerciais. No entanto, estas técnicas na sua maioria são custosas computacionalmente devido à ampla região factível que devem explorar pela natureza combinatorial dos problemas L&S.

Por outro lado, os métodos aproximados, ainda que não garantam soluções ótimas oferecem boas soluções em tempos computacionais plausíveis. Entre esses métodos podemos encontrar algumas técnicas de programação matemática tais como as heurísticas de decomposição, utilizadas por alguns trabalhos como Ferreira, Morabito e Rangel (2008), Toso, Morabito e Clark (2009), Ferreira *et al.* (2012), Sel e Bilgen (2014) entre outros. Neste grupo de técnicas, também encontram-se as metaheurísticas que podem ser de dois tipos: os algoritmos de busca local e os algoritmos evolutivos. Alguns trabalhos misturam os dois enfoques dando origem aos chamados algoritmos meméticos (MOSCATO; COTTA, 2007). Alguns dos trabalhos na linha das metaheurísticas são: Torabi, Fatemi Ghomi e Karimi (2006), Toledo *et al.* (2012), Hung, Shih e Chen (1999), Toledo *et al.* (2013).

## **3.2 O problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes na produção de bebidas**

De forma resumida, o problema geral da programação da produção de bebidas (PPPB) tais como refrigerantes, cerveja, sucos a base de frutas, envolve dois estágios produtivos (Xaroparia e envase) dependentes um do outro. Cada estágio pode ter múltiplas máquinas. No estágio da xaroparia, cada máquina (tanque), pode suprir uma ou várias das linhas de envase do segundo estágio. Existem custos e tempos de trocas de itens nos dois estágios que dependem da sequência

de produção e os estágios devem estar sincronizados. Na programação da produção espera-se então definir as quantidades (níveis de produção, estoque e atraso) e o sequenciamento dos lotes, as conexões das linhas e tanques de onde serão produzidos, o ideal é que sejam programadas também as manutenções das máquinas para não haver desperdício de recursos.

Na literatura são consideradas variações do problema de programação da produção de bebidas, ou devido a alguma particularidade do tipo de processo, ou alguma simplificação que representa uma fábrica em específico. Nessa seção são discutidos os trabalhos selecionados que pesquisam o tema.

Apesar de existirem diversas revisões de literatura sobre o problema de dimensionamento de lotes e sequenciamento da produção, até onde foi pesquisado na literatura científica nesta dissertação, não há uma revisão de literatura que apresente um histórico e análise da relação entre os modelos já desenvolvidos para modelar o processo de fabricação de bebidas geral, que estabeleça o estado da arte das pesquisas sob o ponto de vista de sua aplicabilidade. Assim, as motivações para essa revisão são as seguintes.

- Existe uma linha diferenciada de modelos para tratar o problema de programação da produção de bebidas. Estes modelos contam com características especiais, tais como presença de dois estágios produtivos, sincronia entre estágios, perecibilidade da matéria-prima, entre outras; as quais, não têm sido exploradas nas revisões da literatura dos modelos L&S.
- Os critérios de classificação para modelos L&S mais usados na literatura, citados na Tabela 3.1, não são suficientes para agregar e classificar os modelos L&S para bebidas a respeito de suas características específicas, o que causa uma dificuldade adicional ao decisor na escolha do modelo que se ajuste melhor às características de um processo em particular.
- Contribuir com a literatura científica com uma revisão bibliográfica que apresente um histórico e que estabeleça o estado da arte dessas pesquisas sob o ponto de vista de aplicabilidade para o processo de fabricação de bebidas geral explicado na seção 2.

Assim as principais contribuições desta revisão são:

- estabelecer uma discussão sobre os modelos, focada nas características particulares do processo de produção explicadas no Capítulo 2;
- definir características comuns nos modelos que tratam do problema do planejamento / programação da produção de bebidas (PPPB);
- colaborar para tomada de decisão de qual modelo se ajusta mais às características de um processo produtivo de bebidas em particular;
- evidenciar a evolução dos enfoques de modelagem matemática ao longo do tempo e a aderência deles à realidade, e por fim,

- identificar questões interessantes que possam servir para direcionar pesquisas futuras.

Para realizar a revisão de literatura a respeito do problema de planejamento da produção de bebidas, foram utilizadas as bases de dados: *Scopus*, *Web of Science* e *Google Scholar*. A busca foi realizada em três idiomas diferentes: espanhol, inglês e português, ajustando a busca no título, resumo e palavras-chave.

A busca possui três componentes de palavras-chave com suas respectivas traduções para espanhol e inglês para as buscas realizadas nessas línguas. O primeiro componente da busca refere-se à programação da produção; para ele usaram-se as palavras-chave “Planejamento da produção”, “Programação da produção” e “Dimensionamento e sequenciamento de lotes”. O segundo componente especifica a indústria de bebidas, para isto especificou-se a palavra-chave “Bebidas” conectada com a estrutura lógica AND ao componente anterior. Também foram pesquisadas as palavras “Cerveja”, “Sucos”, “Iogurte” e “Refrigerantes”, para incluírem os trabalhos que foram desenvolvidos especificamente para esses tipos de bebidas mas que não contém a palavra “Bebidas” como palavra chave. Por último, para direcionar a busca a artigos com modelagens matemáticas, procuraram-se as palavras-chave “Programação linear inteira mista” ou “Modelo matemático”. Também conectada com a estrutura lógica AND ao componente anterior.

Foram escolhidos os artigos com o acesso à versão completa disponibilizada pela CAPES com enfoque em modelos matemáticos de otimização linear inteira mista. Também foram consideradas as teses de doutorado de (TOLEDO, 2005; FERREIRA, 2006) e (BALDO, 2014). Após a eliminação das duplicatas na busca realizada, foram revisados todos os resumos desses artigos para escolha dos realmente relevantes para esta revisão. Depois de todos os filtros, foram selecionados 30 trabalhos que juntos compõem 36 modelos matemáticos. As bebidas tratadas nesse conjunto de artigos incluem refrigerantes, cerveja, sucos a base de fruta, iogurte entre outras.

A maioria dos resultados encontrados estão no idioma inglês (73.33%), em segundo lugar ficou a língua portuguesa (23.33%). Em espanhol foi encontrado somente um artigo (3.33%), com uma modelagem simples, baseada em teoria de restrições.

A Tabela 3.2 apresenta os modelos encontrados nos artigos selecionados, na segunda coluna estão os nomes de cada modelo, seguido da sigla que resume o nome do modelo e que é usada a partir daqui neste trabalho para se referir àquela abordagem. Na terceira coluna, apresentam-se referências bibliográficas em que estes modelos aparecem. Note que eles estão em ordem cronológica e que em alguns trabalhos há mais de um modelo. A quarta coluna descreve o tipo de bebida para a qual foram originalmente desenvolvidos. Na coluna 4 se apresenta o modelo base principal da formulação.

TABELA 3.2: Modelos PPPB.

#	Modelo	Trabalho (s)	Tipo de bebida	Modelo base
1	<i>Canned liquid planning</i> - CLP	(CLARK, 2003)	Bebidas enlatadas	CLSP
2	<i>Model with day bounds</i> - MDB	(LÜTKE ENTRUP <i>et al.</i> , 2005)	Iogurte	CLSP
3	<i>Model with setup conservation</i> - MCS	(LÜTKE ENTRUP <i>et al.</i> , 2005)	Iogurte	CLSP
4	<i>Position-based Model</i> - PBM	(LÜTKE ENTRUP <i>et al.</i> , 2005)	Iogurte	CLSP
5	<i>Synchronized and integrated two stage lot scheduling problem</i> - SITLSP	(TOLEDO, 2005; TOLEDO; KIMMS; MORABITO, 2006; TOLEDO <i>et al.</i> , 2007; TOLEDO <i>et al.</i> , 2009; TOLEDO <i>et al.</i> , 2012; TOLEDO <i>et al.</i> , 2015)	Não alcoólicas em geral	GLSP
6	Problema dois estágios multi-máquinas não sincronizado - DEMM - NS	(FERREIRA, 2006)	Bebidas carbonatadas	GLSP
7	<i>Two stages multi machines problem</i> - DEMM / P2SMM	(FERREIRA, 2006; FERREIRA; MORABITO; RANGEL, 2008; FERREIRA; MORABITO; RANGEL, 2009; TOLEDO <i>et al.</i> , 2014)	Bebidas carbonatadas	GLSP
8	Problema dois estágios monomáquina - DEMMaq	(FERREIRA, 2006)	Bebidas carbonatadas	GLSP
9	Problema mono estágio multimáquina - MEMM	(FERREIRA, 2006)	Bebidas carbonatadas	GLSP
10	<i>Multi-commodity aggregate production planning</i> - MCAP	(CHRISTOU; LAGODIMOS; LYCOPOULOU, 2007)	Bebidas em geral	CLSP
11	<i>Doğanis-Sarımveis Optimal Scheduling in Yogurt Production Model</i> - DSOSYP	(DOĞANIS; SARIMVEIS, 2007)	Iogurte	CLSD
12	<i>Block planning model</i> - BPM	(GÜNTHER, 2008)	Bebidas em geral	GLSP
13	<i>One-stage one-machine problem</i> - P1S1M	(FERREIRA; MORABITO; RANGEL, 2008; FERREIRA; MORABITO; RANGEL, 2010)	Bebidas carbonatadas	GLSP
14	<i>Optimal Production Scheduling and Lot-Sizing in Dairy Plants Model</i> - OPSLSD	(KOPANOS; PUIGJANER; GEORGIADIS, 2010)	Iogurte	CLSD
15	<i>One-stage one-machine traveler salesman based problem with Miller Tucker Zenlim constraints</i> - P1S1MTS / LSMTZ	(DEFALQUE; RANGEL; FERREIRA, 2011; MALDONADO; RANGEL; FERREIRA, 2014)	Bebidas carbonatadas	CLSD
16	<i>Long-term production planning problem</i> - LT3P	(GUIMARÃES; KLABJAN; ALMADA-LOBO, 2012)	Bebidas em geral	CLSP
17	<i>Single stage GLSP based model 1</i> - R1	(FERREIRA <i>et al.</i> , 2012; FERREIRA; ALMADA-LOBO; MORABITO, 2013)	Bebidas carbonatadas	GLSP
18	<i>Single stage GLSP based model 2</i> - R2	(FERREIRA <i>et al.</i> , 2012; FERREIRA; ALMADA-LOBO; MORABITO, 2013)	Bebidas carbonatadas	GLSP
19	<i>Single stage CLSD/TSP based model 1</i> - F1	(FERREIRA <i>et al.</i> , 2012)	Bebidas carbonatadas	CLSD
20	<i>Single stage CLSD/TSP based model 2</i> - F2	(FERREIRA <i>et al.</i> , 2012)	Bebidas carbonatadas	CLSD
21	<i>Plan óptimo de producción</i> - POP	(ORTIZ; CAICEDO, 2012)	Bebidas carbonatadas	CLSP
22	<i>Lot-scheduling with multi commodity flow constraints</i> - LSMCF	(MALDONADO; RANGEL; FERREIRA, 2014)	Bebidas carbonatadas	CLSD
23	<i>Lot-scheduling with Dantzig, Fulkerson and Johnson constraints</i> - LSDFJ	(MALDONADO; RANGEL; FERREIRA, 2014)	Bebidas carbonatadas	CLSD
24	Modelo para um tanque M linhas baseado no GLSP - T1LM	(BALDO, 2014)	Cerveja	GLSP
25	Modelo para O tanques M linhas baseado no GLSP - TOLM-GLSP	(BALDO, 2014; BALDO <i>et al.</i> , 2014; BALDO <i>et al.</i> , 2017)	Cerveja	GLSP
26	Modelo para O tanques M linhas baseado no SLP - TOLM-SPL	(BALDO, 2014; BALDO <i>et al.</i> , 2017)	Cerveja	CLSP
27	Modelo para O tanques M linhas baseado no CLSD com restrições Miller Tucker Zenlim - TOLM-CLSD.MTZ	(BALDO, 2014; BALDO <i>et al.</i> , 2017)	Cerveja	CLSD
28	Modelo para O tanques M linhas baseado no CLSD com restrições baseadas em (ALMADA-LOBO <i>et al.</i> , 2007) - TOLM-CLSD.W	(BALDO, 2014; BALDO <i>et al.</i> , 2017)	Cerveja	CLSD
29	<i>Production Distribution Problem</i> - PDP	(SEL; BILGEN, 2014)	Bebidas carbonatadas	CLSP
30	<i>Block Planning with Continuous representation of Time Model</i> - BPCTM	(GÜNTHER, 2014)	Bebidas carbonatadas	CLSD
31	<i>Multi-stage Production Planning in the Dairy Industry Model</i> - MSPPD	(BILGEN; DOGAN, 2015)	Iogurte	CLSP
32	Modelo de dimensionamento e sequenciamento de lotes para sucos maximizando o benefício por produto - P. Model Ia	(PAGLIARUSSI; MORABITO; SANTOS, 2016)	Sucos à base de frutas	GLSP
33	Modelo de dimensionamento e sequenciamento de lotes para sucos minimizando custos de setup, estoque e atrasos - P. Model Ib	(PAGLIARUSSI; MORABITO; SANTOS, 2016)	Sucos à base de frutas	GLSP
34	Modelo de dimensionamento para sucos minimizando custos de setup, estoque e atrasos - P. Model II	(PAGLIARUSSI; MORABITO; SANTOS, 2016)	Sucos à base de frutas	CLSP
35	<i>Sequence oriented formulation for Tactical production planning</i> - $\Pi_{SO}$	(WEI <i>et al.</i> , 2017)	Bebidas em geral	CLSP
36	<i>Product oriented formulation for Tactical production planning</i> - $\Pi_{PO}$	(WEI <i>et al.</i> , 2017)	Bebidas em geral	CLSD

Fonte: Elaboração própria.



A respeito dos trabalhos com programação da manutenção no processo de produção de bebidas, foram encontrados somente dois trabalhos aplicados. O trabalho de Reis do Nascimento (2014) é uma dissertação de mestrado onde é realizado um plano de manutenção de forma heurística, baseado nos conceitos e a metodologia da manutenção centrada na confiabilidade (RCM, sigla em inglês). Este trabalho não integra decisões de planejamento e controle da produção e somente foi abordada uma única linha de envase em uma fábrica particular de refrigerantes do sul do Brasil.

Por outro lado, temos o trabalho de (OHUNAKIN; LERAMO, 2012) que estuda o desempenho da produção de uma planta de bebidas, examinando as perdas de velocidade, taxa de defeitos e paradas por falhas na linha de produção. O trabalho propõe um plano de manutenção baseado na técnica *Total Productive Maintenance* (TPM), incrementando o indicador de Efetividade Média do Equipamento (OEE, sigla em inglês) em 50%.

Como mencionado na seção 3.1, o trabalho mais próximo com considerações de restrições de disponibilidade de tempo do maquinário, trata de um problema de um sistema de produção de tipo *flow shop* onde há uma única linha de produção composta por múltiplas máquinas. Os itens passam de uma máquina a outra em sequência contínua, não há tanques que supram à linha de produção e nem a matéria prima, nem os itens são considerados perecíveis.

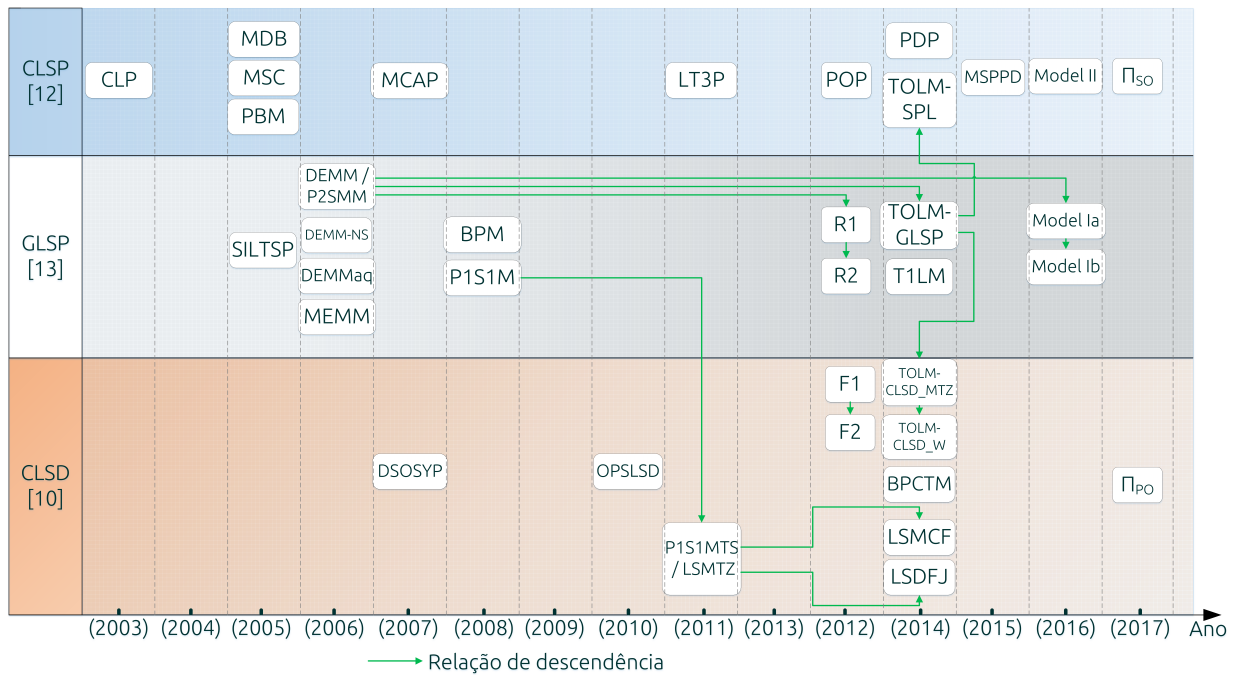
Dadas as diferenças substanciais dos problemas tratados nos trabalhos (OHUNAKIN; LERAMO, 2012; REIS DO NASCIMENTO, 2014; RAMEZANIAN; SAIDI-MEHRABAD; FATTAHI, 2013) com o problema de pesquisa desta dissertação, eles não são considerados nas análises realizadas daqui para frente.

### **3.2.1 Evolução dos modelos de otimização linear para o PPPB**

A partir do estudo da seção 3.2.2, foram classificados e agrupados os modelos de programação da produção de bebidas em relação aos modelos base CLSP, GLSP e CLSD, conforme apresentado na Tabela 3.2. Essa classificação é representada na Figura 3.1 que apresenta de maneira sistemática a evolução temporal das abordagens analisadas e as relações de “descendência” entre as diferentes abordagens de modelos para bebidas. Por exemplo, as formulações R1 (FERREIRA *et al.*, 2012; FERREIRA; ALMADA-LOBO; MORABITO, 2013), TOLM-GLSP (BALDO, 2014; BALDO *et al.*, 2014) e Model Ia (PAGLIARUSSI; MORABITO; SANTOS, 2016), segundo os autores que as propuseram, foram inspiradas em uma formulação em comum, o modelo DEMM/P2SMM (FERREIRA, 2006; FERREIRA; MORABITO; RANGEL, 2009). A seta que sai desse último modelo para os três mencionados simboliza essa relação. O número entre colchetes [] abaixo dos modelos base faz referência à quantidade de modelos dentro da categoria e os números entre os parênteses () no eixo horizontal são o ano da publicação do primeiro trabalho

que contém os modelos nesse grupo.

FIGURA 3.1: Classificação por modelos base e evolução temporal dos modelos PPPB.



Pela Figura 3.1 é possível observar que os modelos GLSP e CLSP tem sido até agora os modelos base mais utilizados para desenvolver novas formulações com 13 modelos para o GLSP, 12 modelos para o CLSP e no caso do CLSD 11 modelos.

A utilização da abordagem CLSD é mais recente. A motivação da utilização desse modelo é desenvolver formulações mais compactas com relação ao número de variáveis e restrições quando compararmos com o modelo GLSP. No entanto, como mencionado na seção 3.1 os modelos baseados nessa formulação requerem estratégias que eliminem a formação de *subtours* desconectados, uma vez que são baseados no ATSP.

Observou-se nos trabalhos analisados que as restrições mais utilizadas para eliminação destes *subtours* desconectados, são as baseadas na proposta de Miller, Tucker e Zemlin (ou restrições MTZ) (MILLER; TUCKER; ZEMLIN, 1960). Formulações baseadas no CLSD com este tipo de restrição obtiveram menores tempos de solução que com outras restrições baseadas no problema ATSP (MALDONADO; RANGEL; FERREIRA, 2014; GUIMARÃES; KLABJAN; ALMADA-LOBO, 2014).

Outra alternativa utilizada em 4 modelos estudados (MDB, MSC, PBM e OPSLSD) para o controle do sequenciamento é o uso da medida de tempo contínuo dos tamanhos do lote no modelo. Esta estratégia consiste em utilizar variáveis contínuas que indicam o instante de início e fim de cada lote produzido. A subtração destes instantes dão o tempo total de produção do

lote. Assim, se garante que o sequenciamento esteja sob uma linha temporal única onde não se permite sobrepor os lotes nem programá-los fora da sequência principal.

### **3.2.2 Comparação de modelos PPPB mediante critérios de classificação operacionais gerais**

Foram analisadas algumas características comumente utilizadas para classificar os modelos L&S (veja Tabela 3.1) a fim de indicar diferenças e similaridades entre os modelos Problema do planejamento/programação da produção de bebidas (PPPB). Elas estão organizadas na Tabela 3.3.

Na primeira coluna da Tabela 3.3 estão os modelos PPPB estudados neste trabalho, as linhas numeradas correspondem às mesmas da Tabela 3.2. Na coluna 2 está a sigla do nome do modelo, na coluna 3 o nível hierárquico das decisões suportadas pelos modelos. Nas 5 colunas seguintes da Tabela 3.3 são apresentadas as características de tipo operacional anteriormente apresentadas na Tabela 3.1: a existência ou não de sequenciamento, número de estágios da modelagem, consideração de múltiplas máquinas e a dependência ou independência dos custos e tempos de *setups* da sequência de produção. Os critérios número de itens e de períodos não são considerados por serem aspectos comuns em todas os modelos citados. O símbolo "✓" significa que o modelo conta com a característica, e o símbolo "×" significa que a característica não está presente no modelo. O símbolo "\*" significa que apesar destas formulações serem consideradas monoestágio por seus autores, elas estão modelando os dois estágios produtivos.

Outro aspecto importante para se analisar é a estrutura e composição da função objetivo das formulações, assim, na coluna 8 da tabela é apresentado o critério de otimização da função objetivo para cada formulação, os custos mais comuns nas colunas 9-12 e outros tipos de custos e penalidades consideradas na coluna 13.

TABELA 3.3: Classificação por critérios operacionais e composição da função objetivo dos modelos PPPB

#	Modelo	Hierq.	Seq.	MMaq.	#Est.	StDp.	Composição da função objetivo					Outros termos da FO
							Critério FO	Custos				
							Atraso	Estoq.	Setup/troca - Linhas	Setup/troca - Tanque		
1	CLP	T.O.	✓	×	2	×	Min	Sim	Sim	Não	Não	Não
2	MDB	T.O.	✓	✓	2	✓	Max	Não	Não	Sim, setup	Não	Lucro por venda, custo de produção, custo por utilização dos recursos, custo por perda de material em cada limpeza, custo por horas extra.
3	MCS	T.O.	✓	✓	2	✓	Max	Não	Não	Sim, setup	Não	Lucro por venda, custo de produção, custo utilização dos recursos, custo por perda de material em limpezas, custo por horas extra, custo por não conservação do setup.
4	PBM	T.O.	✓	✓	2	✓	Max	Não	Não	Sim, setup	Não	Lucro por venda, custo de produção, custo por tempo de utilização dos recursos, custo por perda de material em cada limpeza, custo por horas extra, custo por não conservação do setup.
5	SITLSP	T.O.	✓	✓	2	✓	Min	Não	Sim	Sim, troca	Sim, troca	Custo de produção nos dois estágios, custo de estoque intermediário de xaropes
6	DEMM-NS	T.O.	✓	✓	2	✓	Min	Sim	Sim	Sim, troca	Sim, troca	Não
7	DEMM/P2SMM	T.O.	✓	✓	2	✓	Min	Sim	Sim	Sim, troca	Sim, troca	Não
8	DEMMaq	T.O.	✓	×	2	✓	Min	Sim	Sim	Sim, troca	Sim, troca	Não
9	MEMM	T.O.	✓	✓	2*	✓	Min	Sim	Sim	Sim, troca	Não	Não
10	MCAP	M.H.	×	✓	1	×	Min	Sim	Não	Sim, setup	Não	Custo de produção de item 'fantasma'
11	DSOSYP	T.O.	✓	×	1	✓	Min	Não	Sim	Sim, setup	Não	Custo de produção e custo de limpeza periódica
12	BPM	T.O.	✓	✓	1	×	Min	Não	Sim	Sim, setup por blocos e lotes.	Não	Custo de produção e limpeza adicional.
13	P1S1M	T.O.	✓	×	2*	✓	Min	Sim	Sim	Sim, troca	Não	Não
15	OPSLSD	T.O.	✓	×	2	✓	Min	Não	Sim	Sim, setup	Sim, setup e troca	Custos por tempo de operação em linhas
14	P1S1MTS/ LSMTZ	T.O.	✓	✓	2	✓	Min	Sim	Sim	Sim, troca	Não	Não
16	LT3P	E.T.	×	✓	1	×	Min	Não	Sim	Sim, setup	Não	Custo de transferência de produtos, custo de produção, custo de horas extra.
17	R1	T.O.	✓	✓	2*	✓	Min	Sim	Sim	————Máximo entre linhas e tanques————	————Máximo entre linhas e tanques————	Não
18	R2	T.O.	✓	✓	2*	✓	Min	Sim	Sim	————Máximo entre linhas e tanques————	————Máximo entre linhas e tanques————	Não
19	F1	T.O.	✓	✓	2*	✓	Min	Sim	Sim	————Máximo entre linhas e tanques————	————Máximo entre linhas e tanques————	Não
20	F2	T.O.	✓	✓	2*	✓	Min	Sim	Sim	————Máximo entre linhas e tanques————	————Máximo entre linhas e tanques————	Não
21	POP	T.O.	×	×	1	×	Min	Não	Não	Não	Não	Custo de produção
22	LSMCF	T.O.	✓	×	2*	✓	Min	Sim	Sim	————Máximo entre linhas e tanques————	————Máximo entre linhas e tanques————	Não
23	LSDFJ	T.O.	✓	×	2*	✓	Min	Sim	Sim	————Máximo entre linhas e tanques————	————Máximo entre linhas e tanques————	Não
24	TILM	T.O.	✓	✓	2	✓	Min	Sim	Sim	Sim	Não	Não
25	TOLM-GLSP	T.O.	✓	✓	2	✓	Min	Sim	Sim	Sim	Não	Não
26	TOLM-SPL	T.O.	✓	✓	2	✓	Min	Sim	Sim	Sim	Não	Não
27	TOLM-CLSD.MTZ	T.O.	✓	✓	2	✓	Min	Sim	Sim	Sim	Não	Não
28	TOLM-CLSD.W	T.O.	✓	✓	2	✓	Min	Sim	Sim	Sim	Não	Não
29	PDP	E.T.	×	✓	1	×	Min	Sim	Sim	Sim	Não	Custo de produção e custo de sistema.
30	BPCTM	T.O.	✓	×	1	×	Min	Não	Não	Não	Não	Minimização do <i>Makespan</i> .
31	MSPPD	T.O.	×	✓	2+	✓	Max	Não	Sim	Não	Não	Lucro por produto vendido, custo de utilização dos recursos e custo por perda de vendas.
32	Model Ia	T.O.	✓	✓	1	×	Max	Não	Não	Não	Não	Lucro por produto
33	Model Ib	T.O.	✓	✓	1	×	Min	Sim	Sim	Sim	Não	Não
34	Model II	T.O.	×	✓	1	×	Min	Sim	Sim	Sim	Não	Não
35	II <sub>SO</sub>	E.T.	✓	✓	2	✓	Min	Sim	Sim	Custo de sequência pré-definida escolhida	Custo de transporte, de venda perdida e de troca de tipo de processo na linha	
36	II <sub>PO</sub>	E.T.	✓	✓	2	✓	Min	Sim	Sim	Sim	Não	Custo de transporte, de venda perdida e de troca de tipo de processo na linha

#Est.: Número de estágios; Seq.: Sequenciamento; MMaq.: Múltiplas máquinas; StDp.: setup dependente da sequência; Hierq.: Hierarquia das decisões; T.O.: Tático-operacional; E.T.: Estratégico-tático; M.H.: Multi-hierárquico; 2+: Múlti-estágio (mais de dois)

Fonte: Elaboração própria.

Como evidenciado em capítulos anteriores, as decisões do problema são de nível operacional. Logo, como esperado, a maioria dos modelos encontrados nesse trabalho abordam decisões deste nível de hierarquia. Apenas dois modelos (LT3P e PDP) são focados na modelagem de decisões estratégico táticas. No nível estratégico, para o modelo LT3P “o planejamento avalia o investimento em capacidade instalada para equilibrar a capacidade com a demanda em um período de 12-18 meses”; para o modelo PDP as decisões incluem dimensionamento da frota para transporte e roteamento. Ambos modelos também incluem decisões de distribuição e no caso do modelo LT3P se considera transferência de produto entre plantas (GUIMARÃES; KLABJAN; ALMADA-LOBO, 2012; SEL; BILGEN, 2014). O modelo multi-hierárquico (MCAP), determina o dimensionamento de lotes agregados em três escalas de tempo: meses, semanas e dias; e também integra decisões de distribuição (CHRISTOU; LAGODIMOS; LYCOPOULOU, 2007).

Observe que somente os modelos (MCAP, LT3P, POP, PDP, MSPPD e Model II) não abordam decisões de sequenciamento. Dentre eles, os modelos LT3P e o PDP tratam decisões de nível estratégico-tático no planejamento da produção e integrando-as com decisões de distribuição. Segundo seus autores, o propósito é estabelecer planos de produção em um horizonte de planejamento de médio prazo (um ano no caso do modelo LT3P). Como o sequenciamento dos itens e xaropes pertence ao nível operacional, é razoável sua desconsideração no nível estratégico. No caso dos outros trabalhos com modelos que tratam decisões de nível operacional e que desconsideram a integração do sequenciamento dos lotes, o que se observa é que eles supõem que o sequenciamento é feito via sequências pré-estabelecidas de itens, ou entre famílias de itens. Cabe salientar que, analisando em conjunto a Figura 3.1 com a Tabela 3.3, observa-se que as abordagens baseadas no CLSP são, em geral, usadas somente para dimensionar os lotes, conforme discutido na seção 3.1.

Como discutido no Capítulo 1, por não integrar o sequenciamento, a eficiência dos planos de produção obtidos usando essas abordagens depende muito da combinação das sequências pré-estabelecidas com o dimensionamento dos lotes. Veja que, como esperado, os modelos que desconsideram o sequenciamento (MCAP, LT3P, POP, PDP, MSPPD e Model II) também não consideram tempos/custos de troca dependentes da sequência.

Dos modelos que integram o sequenciamento com o dimensionamento, pode-se observar que 5 deles, (DSOSYP, BPM, BPCTM, P.Model Ia e P.Model Ib), somente consideram um estágio produtivo e que 9 modelos (CLP, DEMMaq, DSOSYP, P1S1M, P1S1MTS/LSMTZ, POP, LSMCF e LSDFJ) não consideram a existência de múltiplas máquinas. Estes 12 modelos tratam as linhas de produção e os tanques como se fossem uma única máquina. Dessa forma o segundo estágio é considerado de forma implícita. Restrições próprias da xaroparia tais como lote mínimo e máximo são calculadas em forma de item final para serem adaptadas às linhas de envase.

Esse pressuposto implica que cada tanque deve estar dedicado à linha e, portanto, devem existir pelo menos a mesma quantidade de tanques e linhas de envase. Tendo em vista que essas suposições podem não ser válidas para todos os ambientes produtivos, elas podem ser consideradas simplificações do problema mais geral apresentado no Capítulo 2, embora elas sejam baseadas em casos reais.

Para os modelos estudados, o critério de otimização mais comum é a minimização dos custos totais. Eles são frequentemente compostos pelos custos associados ao *setup*, estoque, atraso e troca de itens. Encontra-se também, funções objetivos que consideram custos de produção, horas extras, ou outras penalizações, como nos casos dos modelos MDB, MCS, PBM, e MCAP onde há penalizações por exemplo por perda de material em cada limpeza, perda do estado de *setup* nas linhas, ou o modelo SITLSP que apresenta custo por produção e estoques intermediários de xarope no primeiro estágio.

Uma justificativa da escolha comum de custos de trocas/*setup*, estoques e atraso é o *trade off* entre otimizar o dimensionamento e o sequenciamento. Para avaliar melhor este *trade off*, nos modelos, é considerado em geral os custos envolvidos no dimensionamento como estoque e atraso; e os do sequenciamento como custos de preparo ou trocas. Tendo em vista que a qualidade do atendimento da demanda também está implícita na redução principalmente dos atrasos, a minimização desses custos implica em aumento de lucros.

Ainda que os recursos nos dois estágios tenham restrições de capacidade (CCR)<sup>1</sup> e, portanto, seja importante gerenciar bem o sequenciamento nos dois estágios; a consideração de um único estágio nos modelos (MEMM, MCAP, DSOSYP, BPM, P1S1M, OPLSLSD, P1SMTS/LSMTZ, LT3P, R1, R2, F1, F2, POP, LSMCF, LSDFJ, PDP, P.Model Ia, P.Model Ib e P.Model II), precisa que os custos de troca refiram-se unicamente ao segundo estágio de produção. Isso porque nesses trabalhos linhas e tanques são dedicados, logo o sequenciamento de um depende do sequenciamento do outro e, portanto, considerar esse custo nos dois estágios supervalorizaria os custos de troca sobre o dimensionamento.

No caso dos modelos P1S1M, P1SMTS/LSMTZ, R1, R2, F1 e F2, se tomam como custo/tempo de troca o maior valor entre os dois estágios. Nesse caso, como consequência direta desse tipo de consideração é a garantia da sincronia entre eles uma vez que as esperas do tanque ou linha estão contempladas nesse valor de tempo.

Tendo em vista a comparação que irá a ser apresentada na seção 5.8 para o caso da consideração de estágios dedicados, dentre os modelos R1, R2, F1 e F2 cabe destacar o modelo F1. Ele foi comparado com as abordagens R1, R2 e F2 obtendo os melhores tempos médios de obtenção da

---

<sup>1</sup>Recurso com restrição de capacidade (*Capacity-Constrained Resource - CCR*) é aquele cuja utilização é próxima da capacidade e pode ser um gargalo se não for programado corretamente (CHASE; JACOBS; AQUILANO, 2009)

solução ótima (4.6 s) de um grupo de instâncias de pequeno porte, enquanto os outros modelos obtiveram os tempos 190 s (R1), 91.9 s (R2) e 145.3 s (F2) (FERREIRA *et al.*, 2012). Para instâncias maiores, seu desempenho também foi destacável obtendo junto com um algoritmo de *patching* os melhores resultados nas funções objetivo dentro do tempo limite de 4 horas.

Os resultados favorecem ainda mais o desempenho do modelo F1, considerando que os modelos R1 e R2 foram comparados como o modelo P2SMM no trabalho de (FERREIRA; ALMADA-LOBO; MORABITO, 2013). Os tempos do modelo R2 são os melhores desse estudo, com uma média de 91.9 s para o mesmo grupo de instâncias E. Os experimentos foram realizados em ambos trabalhos (FERREIRA *et al.*, 2012) e (FERREIRA; ALMADA-LOBO; MORABITO, 2013) em um computador com processador Intel Pentium 4 @ 3 GHz com 2 Gb de memória RAM.

Foi observado que as melhoras no desempenho do modelo F1 se devem à estrutura matemática (veja o Anexo II), baseada no modelo CLSD. Este enfoque permitiu reduzir consideravelmente o número de variáveis a respeito dos modelos R1 e R2, que utilizam uma formulação baseada no GLSP.

Por último, os modelos  $\Pi_{SO}$  e  $\Pi_{PO}$  (WEI *et al.*, 2017) são recentes na literatura. Eles abordam um problema similar ao tratado nesta pesquisa de dois estágios sincronizados. No entanto, tais modelos diferem do problema tratado nessa pesquisa, pois consideram a existência de vários tipos de processos realizados nas linhas que implicam em uma penalidade por troca de tais tipos de processo. Nesse aspecto eles são mais gerais do que o problema tratado aqui. No entanto, nos modelos  $\Pi_{SO}$  e  $\Pi_{PO}$ , existe uma dedicação das linhas aos tanques e não é possível para uma linha trocar para outro tanque diferente dedicado a ela. Nesse sentido a proposta desta dissertação é mais geral. Estes dois modelos também integram decisões de distribuição.

A seguir é feita uma comparação dos modelos, baseada em considerações mais específicas da produção de bebidas.

### **3.2.3 Comparação segundo características específicas da produção de bebidas**

Como já mencionado, o processo geral de produção de bebidas possui características operacionais específicas que o diferenciam de outros processos produtivos. Os pesquisadores, baseados em observações dos processos reais, têm representado estas características nos modelos de otimização linear desenhados para esses processos. As principais características que diferenciam este processo de outros e que foram observadas nesta pesquisa são a existência de dois estágios de produção onde os tanques no primeiro estágio podem suprir simultaneamente várias linhas de produção no segundo estágio; essa característica será chamada aqui de "Múltiplas conexões em tanques", a necessidade de sincronia entre os estágios e a perecibilidade da matéria prima.

Conforme discutido no Capítulo 2 existem outros processos produtivos de bebidas com ca-

racterísticas adicionais que, por serem muito específicas, não são incluídas no problema geral. Este é o caso dos sucos à base de frutas, por exemplo, onde existem limpezas periódicas nos tanques e linhas; o processo de cerveja onde existem tempos de maturação das bebidas e o processo de iogurtes onde existe a fermentação e tanques para pasteurização. Os modelos matemáticos propostos para esses tipos de bebidas incluem esses aspectos mencionados. No entanto, por não serem aplicáveis para todos os processos produtivos de bebidas, essas particularidades não foram incluídas como critério de classificação desta seção.

Na Tabela 3.4 estão indicados se os modelos tratados nessa seção apresentam as características: na coluna 2 "múltiplas conexões em tanques", na coluna 3, "sincronia entre estágios" e na coluna 4 "Percibilidade". O símbolo  $\checkmark$  significa que a característica é modelada, e  $\times$  o caso contrário. As linhas marcadas com hífen '-' correspondem àqueles modelos que abordam somente um estágio de produção e, portanto, não se aplicam as análises de "Múltiplas conexões em tanques" e "sincronia entre estágios".

TABELA 3.4: Comparação dos modelos PPPB segundo características específicas do processo de produção de bebidas

#	Modelo	Múltiplas conexões em tanques	Sincronia entre estágios	Percibilidade
1	CLP	$\times$	$\times$	$\checkmark$
2	MDB	$\times$	$\times$	$\checkmark$
3	MCS	$\times$	$\times$	$\checkmark$
4	PBM	$\times$	$\times$	$\checkmark$
5	SITLSP	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$
6	DEMM-NS	$\times$	$\times$	$\times$
7	DEMM/ P2SMM	$\times$	$\checkmark$	$\times$
8	DEMMaq	$\times$	$\checkmark$	$\times$
9	MEMM	$\times$	$\times$	$\times$
10	MCAP	-	-	$\checkmark$
11	DSOSYP	-	-	$\times$
12	BPM	-	-	$\times$
13	P1S1M	$\times$	$\times$	$\times$
14	OPSLSD	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$
15	P1S1MTS/ LSMTZ	$\times$	$\times$	$\times$
16	LT3P	-	-	$\times$
17	R1	$\times$	$\checkmark$	$\times$
18	R2	$\times$	$\checkmark$	$\times$
19	F1	$\times$	$\checkmark$	$\times$
20	F2	$\times$	$\checkmark$	$\times$
21	POP	-	-	$\times$
22	LSMCF	$\times$	$\times$	$\times$
23	LSDFJ	$\times$	$\times$	$\times$
24	T1LM	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$
25	TOLM-GLSP	$\times$	$\checkmark$	$\times$
26	TOLM-SPL	$\times$	$\checkmark$	$\times$
27	TOLM-CLSD.MTZ	$\times$	$\checkmark$	$\times$
28	TOLM-CLSD.W	$\times$	$\checkmark$	$\times$
29	PDP	-	-	$\times$
30	BPCTM	-	-	$\times$ 31
MSPPD	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$	
32	Model Ia	-	-	$\times$
33	Model Ib	-	-	$\times$
34	Model II	-	-	$\times$
35	$\Pi_{SO}$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$
36	$\Pi_{PO}$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$

TABELA 3.5: Fonte: Elaboração própria.

Os únicos modelos que permitem múltiplas linhas conectadas nos tanques são os modelos SITLSP, T1LM, MSPPD,  $\Pi_{SO}$  e  $\Pi_{PO}$ . Deles os únicos modelos que não dedicam linhas de produção a tanques são o SITLSP e o MSPPD. Eles tratam, respectivamente, do processo de produção de bebidas carbonatadas e iogurtes. Cabe salientar que somente o modelo MSPPD considera percibilidade.

O modelo SITLSP aborda um problema parecido ao tratado nessa pesquisa. No entanto com diferenças que fazem com que os modelos não sejam diretamente comparáveis. Neste modelo



é utilizada uma divisão do horizonte de planejamento em três escalas de tempo: períodos, *slots* e microperíodos. A escala dos microperíodos é utilizada para sincronizar os dois estágios. São permitidas as múltiplas conexões em tanques e uma linha pode trocar de tanque em qualquer instante do horizonte de planejamento. Este modelo é o único que permite tal consideração dentro da população de modelos estudada, igual que o modelo proposto nessa dissertação.

No entanto, o modelo não considera perecibilidade e incluí-la pode não ser trivial devido à natureza da formulação. Neste modelo, são considerados também características como estoques intermediários de xarope e ainda é permitido que um xarope preparado em um período seja ainda utilizado em períodos posteriores. Por último, no modelo SITLSP é permitido o *setup crossover* que é permitir que o *setup* de um período possa ser parcialmente adiantado. Estes aspectos fazem com que o problema que é abordado nesse trabalho seja diferente substancialmente do tratado nesta pesquisa. No entanto, uma comparação parcial entre formulação SITLSP e a abordagem apresentada nesta dissertação, é feita analisando os aspectos a modificar nos dois problemas com mais detalhes no apêndice B.

O modelo T1LM desenhado para o processo de fabricação de cervejas, considera somente um tanque e múltiplas linhas conectadas à ele. Como é obvio há uma dedicação das linhas no tanque. Esta suposição se enquadra na característica mencionada anteriormente de um tanque suprir várias linhas de uma única vez e, é mais tratável computacionalmente. Este modelo não considera perecibilidade da matéria prima já que essa característica é prescindível no processo de fabricação da cerveja.

O modelo MSPPD não faz sincronia entre os estágios de produção nem a sequência em que devem ser produzidos os lotes dimensionados. Assim pode-se gerar planos infactíveis, tendo em vista o impacto da sincronia na capacidade da planta como foi explicado no Capítulo 2. Deste modo, aplicar um plano de produção obtido por esse modelo pode ainda ser um desafio para o tomador de decisões, pois deve estabelecer essas conexões e a sequência de produção, o que pode exigir tanto esforço quanto elaborar um plano de produção manualmente. Este modelo também inclui decisões de distribuição.

Nos modelos  $\Pi_{SO}$  e  $\Pi_{PO}$  embora sejam permitidas as múltiplas conexões em tanques, eles consideram dedicação das linhas a seus respectivos tanques. Ou seja, um tanque pode suprir várias linhas ao mesmo tempo, mas estas linhas estão fixamente conectadas a dito tanque e ainda que outro estiver disponível não podem trocar para esse outro. Graças a essa dedicação garante-se a sincronia entre o tanque e as linhas dedicadas a ele. A adaptação para tirar essa limitação destes modelos não é trivial e implicaria em mudar as restrições, adicionando novas equações e variáveis. Estes modelos não consideram perecibilidade e integram decisões de distribuição.

Com respeito à sincronia entre os estágios produtivos, observou-se que não existe uma es-

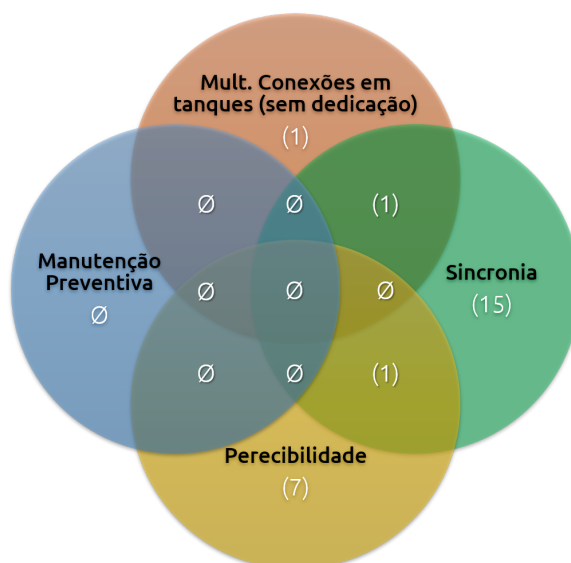
estratégia padrão aplicável para abordar essa questão. Algumas formulações consideram essa sincronia dedicando tanques a linhas e nos parâmetros, tomando o maior tempo de preparo entre os dois estágios como no caso dos modelos R1, R2, F1, F2. O modelo SITLSP utiliza uma escala de tempo de microperíodos para realizar a sincronia.

Por último, note que a maioria dos modelos não considera na formulação matemática a perecibilidade das matérias-primas. Esta característica é importante para a maioria dos processos de bebidas, e pode limitar os tempos de envase dos lotes das linhas uma vez que o xarope não pode permanecer indefinidamente no tanque. Este aspecto é estudado mais em detalhe no Capítulo 5. No entanto, apesar da importância da perecibilidade, esta característica é negligenciada na formulação dos modelos. Comumente é tomada como suposição, que a permanência máxima da matéria prima nos tanques, é suficiente para produzir os lotes de itens finais e não afetará a qualidade do produto.

Contudo, diante de um cenário com um xarope muito perecível, esses planos podem apresentar infactibilidade. Isto porque se as linhas não puderem envasar o xarope, ou por estarem em manutenção, ocupadas com outros itens ou em processo de preparo, o xarope pronto pode se oxidar até o fim de seu envase.

A Figura 3.2 resume os *insights* mais importantes em termos das características que são evidenciadas nos modelos estudados. Cada círculo representa o conjunto de modelos que considera a característica correspondente a quantidade de modelos que consideram dita característica aparece em parênteses.

FIGURA 3.2: Sumário dos achados dos modelos de dimensionamento e sequenciamento para bebidas.



Fonte: Elaboração própria.

Veja que não há modelos de dimensionamento e sequenciamento que considerem as manutenções

preventivas. Por outro lado dentre os 5 modelos que permitem as múltiplas conexões em tanques, somente o modelo SITLSP permite às linhas trocar de tanque; ou seja nos outros modelos há dedicação das linhas aos tanques. O modelo SITLSP também considera a sincronia entre os estágios. No entanto, como mencionado, este modelo não considera a perecibilidade. Por outro lado a perecibilidade é considerada em 7 formulações, das quais 1 considera sincronia. No entanto não há formulações que considerem a sincronia, perecibilidade e múltiplas conexões ao mesmo tempo.

Conclui-se, tendo em conta as tabelas 3.3 e 3.4 que exceptuando o modelo SITLSP, os modelos matemáticos existentes para a programação da produção de bebidas são casos particulares do problema geral e suas adaptações podem não ser triviais. Inserir as modificações nas soluções obtidas *a posteriori* pode ser tão difícil quanto definir a programação da produção manualmente. Também existem considerações no modelo SITLSP como os estoques intermediários, o que faz com que sua aplicabilidade na prática seja limitada sob as considerações do problema tratado nesta dissertação.

### **3.2.4 Métodos de solução para os modelos PPPB**

Apesar do desenvolvimento de sistemas informatizados com maiores capacidades de processamento terem facilitado a aplicação de técnicas de solução exatas para modelos complexos, os modelos revisados nesse trabalho ainda apresentam dificuldades para serem resolvidos até otimalidade por pacotes comerciais de otimização para instâncias de tamanhos realistas.

Segundo observado neste trabalho a inclusão do sequenciamento pode aumentar a complexidade dos modelos e, portanto, afetar diretamente no desempenho de métodos de solução, sobretudo o desempenho de métodos exatos. A causa mais provável deste efeito é o aumento do espaço de soluções devido à natureza combinatorial das decisões de sequenciamento.

O aumento da dificuldade pode estar relacionado à complexidade computacional dos modelos base. Por exemplo, o modelo CLSP, apresenta complexidade NP-difícil (BITRAN; YANASSE, 1982). Usando a teoria de redutibilidade de Turing (para mais detalhes, veja-se Cormen, Leiserson e Rivest (1990), De Resende e Stolfi (1994), Garey e Johnson (1979), pode-se demonstrar que os modelos baseados nos modelos básicos (como é o caso dos modelos base CLSD e GLSP, que estão baseados por sua vez no CLSP) e que possuem características adicionais, têm no mínimo a complexidade daqueles que podem ser redutíveis a essas estruturas mais complexas. Em outras palavras, existe uma transferência de cotas mínimas de complexidade entre os problemas. Assim para os modelos tratados nesse trabalho é possível dizer que eles são, pelo menos, tão difíceis quanto os modelos base mencionados, ou seja, a complexidade deles é no mínimo NP-difícil como as dos modelos base em que eles se baseiam.

Assim, embora sejam testados métodos exatos na solução de instâncias reais de grande porte, já é esperado que esses métodos não tenham bom desempenho computacional dependendo do tamanho da instância. Logo, comumente, depois de aplicar métodos exatos, geralmente são aplicados métodos de solução específicos que aproveitem as particularidades do(s) modelo(s) em questão. Estes métodos são em geral heurísticas, ou métodos híbridos que combinam métodos exatos com aproximados.

A Tabela 3.6 apresenta os métodos de solução usados em cada trabalho e também uma indicação do tipo de dados testados, reais ou gerados aleatoriamente.

TABELA 3.6: Métodos de solução e origem das instâncias usadas nos modelos PPPB da literatura

#	Modelo	Métodos de solução	Tipo de dados testados
1	CLP	Branch-and-cut, Heurísticas híbridas com busca local.	Instâncias reais
2	MDB	<i>Branch-and-cut</i>	Baseados em dados reais
3	MCS	<i>Branch-and-cut</i>	Baseados em dados reais
4	PBM	<i>Branch-and-cut</i>	Baseados em dados reais
5	SITLSP	Algoritmo Genético, Heurísticas de decomposição, <i>Branch-and-cut</i>	Instâncias reais
6	DEMM-NS	Heurísticas de decomposição, <i>Branch-and-cut</i>	Instâncias reais
7	DEMM / P2SMM	Heurísticas de decomposição, Algoritmo Memético	Instâncias reais
8	DEMMaq	Heurísticas de decomposição, <i>Branch-and-cut</i>	Instâncias reais
9	MEMM	Heurísticas de decomposição, <i>Branch-and-cut</i>	Instâncias reais
10	MCAP	Heurística de decomposição em duas fases.	Baseados em dados reais
11	DSOSYP	<i>Branch-and-cut</i>	Instâncias reais
12	BPM	<b>Não resolvido no artigo</b>	-
13	P1S1M	Heurísticas de decomposição, <i>Branch-and-cut</i>	Instâncias reais e geradas
14	P1S1MTS / LSMTZ	<i>Branch-and-cut</i>	Instâncias reais e geradas
15	OPSLSD	<i>Branch-and-cut</i>	Instâncias reais
16	LT3P	Metaheurística VNS, Heurística de decomposição	Baseados em dados reais
17	R1	Heurísticas de decomposição, <i>Branch-and-cut</i>	Instâncias reais
18	R2	Heurísticas de decomposição, <i>Branch-and-cut</i>	Instâncias reais
19	F1	Heurísticas de decomposição, <i>Branch-and-cut</i>	Instâncias reais
20	F2	Heurísticas de decomposição, <i>Branch-and-cut</i>	Instâncias reais
21	POP	<i>Branch-and-cut</i>	Instâncias reais
22	LSMCF	<i>Branch-and-cut</i>	Baseados em dados reais
23	LSDFJ	<i>Branch-and-cut</i> , <i>Cutting planes</i>	Baseados em dados reais
24	T1LM	<i>Branch-and-cut</i>	Instâncias reais
25	TOLM-GLSP	Heurísticas de decomposição, <i>Branch-and-cut</i>	Instâncias reais
26	TOLM-SPL	<i>Branch-and-cut</i>	Instâncias reais
27	TOLM-CLSD.MTZ	<i>Branch-and-cut</i>	Instâncias reais
28	TOLM-CLSD.W	<i>Branch-and-cut</i>	Instâncias reais
29	PDP	Heurísticas de decomposição, <i>Branch-and-cut</i>	Baseados em dados reais
30	BPCTM	<i>Branch-and-cut</i>	Baseados em dados reais
31	MSPPD	<i>Branch-and-cut</i>	Instâncias reais
32	Model Ia	<i>Branch-and-cut</i>	Instâncias reais
33	Model Ib	<i>Branch-and-cut</i>	Instâncias reais
34	Model II	<i>Branch-and-cut</i>	Instâncias reais
35	II <sub>SO</sub>	Heurísticas de decomposição, <i>Branch-and-cut</i>	Baseados em dados reais
36	II <sub>PO</sub>	Heurísticas de decomposição, <i>Branch-and-cut</i>	Baseados em dados reais

Fonte: Elaboração própria

A maioria das abordagens, como era esperado, por tratar situações reais, utilizam dados de instâncias reais ou gerados a partir delas.

Na Tabela 3.6 é possível ver que todos os autores tentam resolver os modelos inicialmente utilizando pacotes de otimização. Os trabalhos de Ferreira, Morabito e Rangel (2008), Ferreira, Morabito e Rangel (2009) e Pagliarussi, Morabito e Santos (2016) ainda exploram essa ferramenta aplicando variações dos métodos pré-programadas nos pacotes de otimização, tais como ligar/desligar/adicionar planos de corte e uso de heurísticas pré-programadas. No trabalho de (PAGLIARUSSI; MORABITO; SANTOS, 2016) essas variações forneceram resultados promissores e métodos mais específicos não foram propostos.

Por outro lado, nos trabalhos de (TOLEDO, 2005; FERREIRA, 2006; FERREIRA; MORABITO; RANGEL, 2009; BALDO, 2014; WEI *et al.*, 2017), o *solver* não fornece bons resultados e métodos aproximados foram propostos. Os mais utilizados são as heurísticas de tipo *relax-and-fix* (R&F)

e *fix-and-optimize* (F&O), ou metaheurísticas de busca local ou evolutivas, com elas se consegue reduzir os *gaps* de otimalidade e/ou os tempos computacionais.

Observam-se também os trabalhos de Clark (2003) e Toledo *et al.* (2014), onde se apresentam algoritmos híbridos que misturam a programação matemática com a busca inteligente de soluções na região factível (heurísticas e metaheurísticas).

Conclui-se que devido à alta complexidade do problema e a dificuldade de resolvê-lo utilizando técnicas exatas, os métodos aproximados são técnicas de solução com um bom desempenho e amplamente utilizadas. O enfoque mais usado é o das heurísticas de decomposição baseadas em programação matemática, tais como as de tipo R&F e F&O cujas vantagens como flexibilidade tenha favorecido seu uso.

### 3.3 Considerações Finais

Nessa revisão estudou-se o problema integrado de dimensionamento e sequenciamento da produção para indústrias de bebidas. A revisão foi abordada a partir de duas perspectivas: o dimensionamento e sequenciamento em geral e o dimensionamento e sequenciamento da produção de bebidas. Foram lidos 30 trabalhos aplicados a esse processo produtivo com 36 modelos MILP para o problema.

O que se observa na literatura científica sobre a programação da produção de bebidas é a modelagem de problemas, ainda que baseados em processos observados na prática, que resultam em simplificações de um problema mais geral. No entanto, não é trivial criar um sistema que permita abordar todos os tipos de bebidas. A abordagem mais próxima nesse propósito é o SITLSP, porém esse modelo é altamente complexo e intratável via métodos exatos para instâncias reais e ainda necessita de modificações para considerar características como a perecibilidade e janelas de operação para programação de manutenções preventivas.

Os casos particulares estudados do problema geral são resultado da observação de casos reais. Muitos trabalhos adotam essas simplificações com o intuito de reduzir, sem perda de generalidade, a complexidade do problema real para conseguir resolvê-lo mediante formulações matemáticas de menor complexidade. As simplificações mais usuais são: dedicação de tanque à linha, não consideração de perecibilidade da bebida base, agregação de linhas, consideração de sequências de produção pré-estabelecidas, agregação de produtos em famílias e desconsideração da disponibilidade para manutenção do maquinário.

Sendo que a simplificação mais recorrente, como observado na Tabela 3.2 e na Tabela 3.4, é a dedicação dos tanques às linhas de produção em conjunto com a desconsideração de que um tanque possa suprir várias linhas, ou seja, um tanque só pode suprir uma linha por vez, e não

inclusão de possíveis paradas para manutenção em linhas e tanques. Note que a simplificação da dedicação implica que a planta deve ter pelo menos número igual de tanques e linhas de produção, o que não acontece na realidade de muitas empresas.

Outra observação importante é a ampla utilização de técnicas de solução aproximadas, devido à complexidade dos modelos em geral. Apesar dos métodos de solução exatas serem também utilizados; o desenvolvimento de métodos específicos como heurísticas de decomposição e o uso de algoritmos híbridos é uma direção de pesquisa que merece ser mais estudada, no sentido de que a maioria dos trabalhos apresentam melhoras significativas na tratabilidade dos problemas, pois retornam boas soluções nos tempos empregados, quando comparadas com os métodos exatos e ainda aproveitam a estrutura do modelo matemático.

A presente revisão de literatura sugere que ainda é interessante realizar pesquisas que tratem do problema geral de programação da produção de bebidas, isto também vem justificado pela tendência observada das empresas de descentralizar a produção em diversas plantas de envase, para reduzir custos e *lead times* de distribuição, o qual exige ferramentas de apoio à decisão aderentes a esses diversos ambientes produtivos e que brindem uma maior flexibilidade ao tomador de decisões.

Tendo em vista as análises e conclusões da revisão bibliográfica, a proposta deste trabalho é do desenvolvimento de um modelo que permita tratar o problema geral de dimensionamento e sequenciamento da produção de bebidas, isto é, considerar além das características usuais como multi-item, período, máquinas, etc., a percibibilidade do xarope e múltiplas de conexões em tanques de linhas não dedicadas. Um diferencial do modelo proposto em relação a todos os outros modelos PPPB da literatura científica é a consideração de janelas de tempo de operação e disponibilidades de tempo controladas em ambos estágios produtivos, o que permite programar paradas para, por exemplo, manutenções nos dois estágios produtivos.

No capítulo 5 são mostradas as vantagens da proposta, levantando discussões interessantes sobre a flexibilidade do modelo proposto. O modelo também é comparado com outro modelo da literatura científica, o modelo F1 mencionado acima.

Ainda no apêndice B é feita uma discussão limitada e parcial sobre a comparação da formulação proposta com o modelo SITLSP da literatura já que, como mencionado, trata um problema próximo ao desta pesquisa. No entanto, devido a que os trabalhos representam problemas diferentes, análises mais aprofundadas sobre esta comparação podem ser objeto de pesquisas futuras.

## PROPOSTA DE MODELAGEM

**E**STE trabalho apresenta um novo modelo MILP que representa e visa resolver o problema geral da programação da produção de bebidas. A modelagem proposta é denominada Modelo de múltiplas máquinas e recursos sincronizados com manutenções preventivas (*Synchrhonized muti machines and resources model with preventive maintenances*)(SMMRPM). A proposta conta com uma estrutura do horizonte de planejamento discretizado em períodos. Cada período é finito com capacidade limitada pelo tempo. Conforme discutido no Capítulo 1, a proposta contempla as seguintes suposições do problema:

- A demanda, estoques e atrasos é por item final e ocorre ao final de cada período.
- Cada tipo de sabor ou xarope (os termos são usados indistintamente) define uma família de itens.
- Um item final é uma bebida com um tipo de sabor e vasilhame determinados. Bebidas com o mesmo sabor mas com vasilhames diferentes são então itens diferentes.
- Há tanques no estágio I. Cada tanque pode alimentar várias (ou todas) as linhas de produção simultaneamente.
- Por motivos de modelagem, um tanque pode ser enchido um número máximo de vezes no período  $t$ . Esse número de enchimentos é predefinido e denominado  $|O_t|$ .
- O tempo de preparo do xarope não depende da quantidade preparada.
- O tempo de preparo no tanque inclui o tempo de limpeza mais o tempo de fazer o xarope.
- O tempo de preparo nos tanques e nas linhas depende da sequência.
- No início de cada período é necessária uma limpeza do tanque, esta depende do estado de *setup* do período anterior.
- Todos os tanques têm capacidade limitada mínima e máxima em litros de xarope e que podem variar de um tanque para outro.
- A partir de um mesmo lote de xarope no tanque, é permitido produzir lotes de diferentes itens finais nas linhas (estágio II), sempre que os itens envolvidos sejam do mesmo sabor, ou seja, apenas vasilhames diferentes.
- No estágio II há linhas de envase. Cada linha de produção só pode estar conectada, ou seja receber xarope, de apenas um tanque por vez e só se estiver preparada para envasar bebida daquele sabor.
- A disponibilidade de tempo de uma linha não necessariamente é a mesma do período.
- Cada linha possui as mesmas etapas de produção do item final (lavagem dos vasilhames, envasado, rotulado, etc.) porém elas possuem diferentes velocidades de produção.

- Uma linha pode trocar de tanque quando finalizar a produção de um lote de item se ela não está dedicada exclusivamente a esse tanque.
- Para contabilizar corretamente os tempos contínuos, sem perda de generalidade, não é permitido produzir mais de um lote do mesmo item a partir de uma única conexão com tanque. Isto implica que é possível que a linha faça vários lotes do mesmo item, porém, necessariamente ela deve ser conectada a um diferente enchimento / tanque.
- Vários lotes do mesmo item podem ser produzidos, sempre que eles sejam de conexões tanque / enchimento distintas.
- A operação de tanques e linhas está limitada por janelas de tempo de operação em cada período. Isto permite programar com antecedência manutenções preventivas que demandem mais tempo no período.
- Há uma disponibilidade de tempo de operação limitada nas linhas, o modelo determinará a utilização desse tempo disponível dentro da janela de tempo de operação.
- A diferença entre o tempo da janela de tempo de operação com o tempo disponível para operação, pode ser utilizada para manutenções preventivas rápidas.

As decisões modeladas pela formulação SMMRPM são:

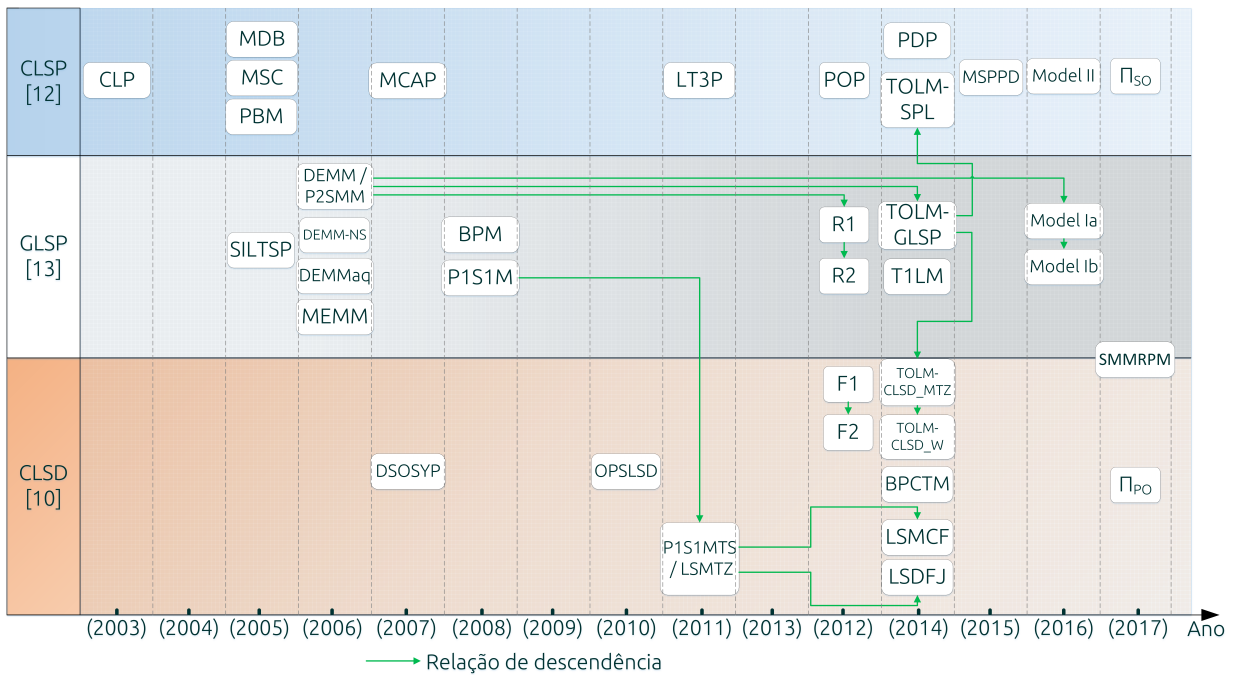
- Alocação dos itens a serem produzidos em cada linha/período.
- Quantidade a ser produzida/estocada/atrasada de cada item em cada período.
- Sequência de produção dos itens em cada linha/período.
- A conexão de cada linha para envasar cada item final nos lotes de xarope/tanques cada um dos períodos.
- Alocação de xaropes para cada tanque/enchimento.
- Quantidade de xarope para envasar os itens das linhas.
- Sequência de produção de xaropes por tanque/período.
- Determinação dos momentos em que linhas e tanques estão disponíveis para eventuais manutenções.

O modelo matemático está baseado no modelo CLSD (HAASE, 1996) e GLSP (FLEISCHMANN; MEYR, 1997). O sequenciamento das linhas é baseado no CLSD e é conseguido utilizando restrições de balanço de fluxo de *setup* e restrições de eliminação de *subtours* desconectados do tipo MTZ (MILLER; TUCKER; ZEMLIN, 1960). Para os tanques é utilizado um sistema parecido ao dos microperíodos do GLSP, esse conjunto dos 'microperíodos' aqui é chamado de conjunto de enchimentos (simbolizado por *O*). Para sincronizar as conexões de cada lote de item nas linhas com os tanques/enchimentos e fazer o devido sequenciamento, são utilizadas variáveis contínuas que representam o tempo decorrido no período na conexão (ALMEDER; ALMADA-LOBO, 2011).



Na Figura 3.1, o modelo SMMRPM estaria classificado entre as duas abordagens GLSP e CLSD como é apresentado na Figura 4.1. Isto porque a que o modelo proposto possui características das duas formulações clássicas mencionadas. No primeiro estágio, o número de vezes que pode ser utilizado o tanque dentro do período (chamado de conjunto de enchimentos) foi modelado de forma parecida a como funciona o conjunto de microperíodos do modelo clássico GLSP. No entanto, no estágio das linhas de envase a estrutura definida pelas restrições se baseia no modelo CLSD para controle do sequenciamento.

FIGURA 4.1: Alocação do modelo SMMRPM na evolução dos modelos PPPB.



Fonte: Elaboração própria.

A seguir é apresentada a notação que será utilizada para apresentar a proposta de modelagem SMMRPM..

#### 4.1 Notação matemática

A estrutura do modelo SMMRPM está composta pelos índices, conjuntos, parâmetros e variáveis introduzidos a seguir. A notação apresentada é similar a outras encontradas na literatura sobre produção de bebidas. Isto é intencional, e tem o objetivo de facilitar a associação da estrutura do modelo às estruturas presentes em outros modelos similares. O modelo apresenta a seguinte notação:

## Conjuntos

Os conjuntos do modelo SMMRPM podem ser classificados em dois grupos: os conjuntos primários e os conjuntos secundários. Os conjuntos primários, compreendem os conjuntos dos itens finais, xaropes, linhas, tanques, enchimentos máximos desses tanques e períodos. Os conjuntos secundários, são definidos como aqueles conjuntos que dependem ou que estão indexados portanto, nos elementos pertencentes aos conjuntos primários. Os conjuntos secundários provêm de relações entre os elementos dos conjuntos primários e servem também para garantir certas restrições inerentes à natureza do problema, como por exemplo o xarope que é usado para fazer cada produto, restrições de linhas que não podem ser conectadas a certo(s) tanque(s), linhas especializadas em produtos ou famílias de produtos específicos, entre outros. Estes conjuntos, primários e secundários, são apresentados a seguir:

### Conjuntos primários

Estes conjuntos são:

$N_I$ : Conjunto de produtos finais.

$L$ : Conjunto de linhas de produção (segundo estágio).

$N_J$ : Conjunto de xaropes (matéria prima para os produtos finais).

$M$ : Conjunto de tanques (primeiro estágio).

$T$ : Conjunto de períodos que compõem o horizonte de planejamento.

$O$ : Conjunto de enchimentos possíveis para cada tanque, no horizonte de planejamento.

Cabe ressaltar que os elementos deste conjunto não implicam o uso do tanque para cada possível enchimento, simplesmente estabelecem o número de vezes que o tanque pode ser utilizado, seja total ou parcialmente cheio por vez. Outros trabalhos na literatura chamam este conjunto de microperíodos.

### Índices

Considere os seguintes índices que percorrem os elementos dos conjuntos primários:

$i, i' \in N_I$ : Produtos finais;  $l \in L$ : Linhas de produção;

$j, j' \in N_J$ : Xaropes;  $m, m' \in M$ : Tanques;

$o, o' \in O$ : Enchimentos;  $t \in T$ : Períodos (uma unidade de tempo).

### Conjuntos secundários

Os conjuntos secundários partem das relações diretas entre os elementos dos conjuntos primários. A seguir eles são explicados detalhadamente:

**Conjuntos**  $O_t \subset O$  : Cada conjunto  $O_t$  contém os possíveis enchimentos de tanque dentro do período  $t$ . A união de todos os conjuntos  $O_t$  é o conjunto  $O$ .

**Conjuntos**  $\delta_l \subset N_I$  : As linhas de envase possuem velocidades distintas e produzem diferentes conjuntos de itens. Assim, o conjunto  $\delta_l$  contém os produtos finais que podem ser feitos pela linha  $l \in L$ .

**Conjuntos**  $\rho_i \subset L$  : O conjunto  $\rho_i$  contém as linhas que podem produzir o produto final  $i \in N_I$ , pode se dizer que é o equivalente do conjunto  $\delta_l$  visto acima, mas do ponto de vista dos itens.

**Conjuntos**  $\theta_m \subset N_J$  : Estes conjuntos referem-se aos xaropes que podem ser feitos no tanque  $m \in M$ .

**Conjuntos**  $\zeta_j \subset M$  : Este conjunto refere-se aos tanques que podem fazer o xarope  $j$ .

**Conjuntos**  $\sigma_m \subset L$  : Estes conjuntos relacionam os dois estágios do processo produtivo. Estabelecem quais são as linhas que podem se conectar a um determinado tanque  $m$ .

**Conjuntos**  $\phi_l \subset M$  : Agora, indexados no conjunto de linhas  $L$ , estes conjuntos são os tanques que podem ser conectados à linha  $l$ .

**Conjuntos**  $\omega_j \subset N_I$  : Como mencionado no capítulo 2, a partir de um xarope determinado podem ser feitos vários produtos finais. O conjunto  $\omega_j$  contém os produtos feitos a partir do xarope (sabor)  $j$ .

Cabe ressaltar que um produto final só usa um xarope determinado, ou seja um item final não pode ser feito a partir da mistura de dois xaropes distintos; deste modo, os conjuntos  $\omega_j$  são disjuntos; isto é:

$$\omega_j \cap \omega_{j'} = \emptyset, \forall j \neq j', \cup_{j \in N_J} \omega_j = N_I.$$

**Conjuntos**  $\eta_i \subset N_J$  : O conjunto  $\eta_i$  é um conjunto unitário. O único elemento desse conjunto é o xarope (sabor) utilizado para produzir o item  $i$ . Este elemento é chamado  $J_i$  e é utilizado como parâmetro mais á frente . Isto é:

$$\eta_i := \{J_i\}, \quad \forall i \in N_I.$$

Além disso,

$$\cup_{i \in N_I} \eta_i = N_J.$$

**Conjuntos**  $\Lambda^P(i', l, m, o)$  e  $\Lambda^S(i', l, m, o) \subset M \times O$ : Estes conjuntos definem as possíveis conexões 'predecessoras' ( $\Lambda^P(i', l, m, o)$ ) e conexões 'sucessoras' ( $\Lambda^S(i', l, m, o)$ ), de uma conexão atual de tanque  $m$  e enchimento  $o$  ( $m, o$ ) em uma linha  $l \in \sigma_m$  para uma conexão ( $m', o'$ ), quando há uma troca de conexão que envolve o item  $i'$  como predecessor ou sucessor, ou seja ele será produzido a partir da conexão ( $m', o'$ ).

Estes conjuntos são necessários para garantir as condições que devem cumprir os ( $m' o'$ ) para

poderem ser realizadas essas trocas de conexão linha-tanque: Primeiro, o tanque sucessor ou predecessor ( $m'$ ) deve poder se conectar à linha  $l$ , isto é  $m' \in \phi_l$ . Deve também ser capaz de produzir o xarope que será utilizado para produção do item  $i'$  ( $J_i$ ), isto é  $m' \in \zeta_{(J_i)}$ .

A respeito dos  $o'$  predecessores/sucessores, a utilização destes enchimentos têm uma ordem implícita, pois o  $o$ -ésimo enchimento não pode ser usado em um tanque sem que antes tenha sido usado o enchimento anterior ( $o - 1$ )-ésimo daquele tanque. Assim, se a próxima conexão da linha é no mesmo tanque ( $m' = m$ ), está implícito que os enchimentos anteriores são todos  $o' < o$  e os sucessores  $o' > o$ .

Assim, cada conjunto estabelece dois possíveis casos a serem observados entre a conexão da linha-tanque:

- i. **A linha troca para um tanque diferente.** Nesse caso o enchimento predecessor (sucessor) da conexão atual, pode ser qualquer um dos enchimentos do novo tanque. Desde que ele esteja disponível naquele momento (determinado pelo modelo).
- ii. **A linha mantém-se conectada no mesmo tanque.** Nesse caso o enchimento predecessor da conexão atual será anterior ao atual, e o sucessor deve ser posterior ao atual.

O conjunto  $\Lambda^P(i', l, m, o)$  estabelece as configurações tanques/enchimentos ( $m', o'$ ) que são os predecessores da configuração atual ( $m, o$ ): se o tanque predecessor for diferente do tanque conectado, o enchimento predecessor  $o'$  pode ser qualquer um do tanque  $m'$ ; contudo, se o tanque predecessor for o mesmo atual ( $m' = m$ ), o enchimento predecessor deve ser necessariamente anterior ao atual ( $o' < o$ ), ou seja trocou para um outro enchimento do mesmo tanque. Obviamente o tanque  $m'$  deve ser capaz de produzir o xarope para produzir o item  $i'$ .

Em notação matemática, para cada linha  $l \in L$  temos:

$$\Lambda^P(i', l, m, o) = \{(m', o') | m' \in \phi_l \cap \zeta_{(J_{i'})}, o' \in O : m' \neq m \vee (m' = m \wedge o' < o)\}$$

Analogamente, o conjunto de enchimentos sucessores  $\Lambda^S(i', l, m, o)$  estabelece que: se a linha for mantida no mesmo tanque, ou seja se  $m' = m$ , então o enchimento sucessor  $o'$  deve ser necessariamente posterior ao atual ( $o' > o$ ). Se o tanque sucessor for diferente ( $m' \neq m$ ), na configuração seguinte, o enchimento sucessor pode ser qualquer enchimento desse outro tanque. Sempre conservando a condição de que o tanque  $m'$  possa ser capaz de fabricar o xarope requerido.

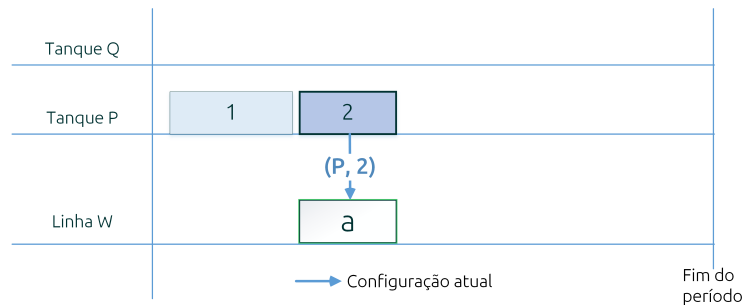
Matematicamente, para cada linha  $l \in L$  o conjunto de sucessores é:

$$\Lambda^S(i', l, m, o) = \{(m', o') | m' \in \phi_l \cap \zeta_{(J_{i'})}, o' \in O : m' \neq m \vee (m' = m \wedge o' > o)\}.$$

Note que a única diferença entre os conjuntos  $\Lambda^P(i', l, m, o)$  e  $\Lambda^S(i', l, m, o)$  está em diferenciar que quando a linha se mantém conectada ao mesmo tanque ( $m' = m$ ), então os enchimentos  $o'$  devem ser anteriores para  $\Lambda^P(i', l, m, o)$ , e posteriores para  $\Lambda^S(i', l, m, o)$ .

Para entender melhor os conjuntos  $\Lambda^P(i', l, m, o)$  e  $\Lambda^S(i', l, m, o)$ , considere uma linha  $W$  que está conectada a um tanque  $P$  no enchimento 2 desse tanque produzindo o item  $a$ . Considere também que o item  $b$  está envolvido na troca de conexão da linha  $W$ , ou seja, há uma configuração  $(i', l, m, o) = (b, W, P, 2)$ . Considere também que além do tanque  $P$ , existe um tanque  $Q$  e são permitidos 3 enchimentos para cada tanque e qualquer um dos tanques pode fabricar qualquer xarope. A Figura 4.2 apresenta essa situação. Veja que os únicos enchimentos realizados de fato são os lotes  $(P, 2)$ , que corresponde à conexão atual de  $W$ , o que implica que  $(P, 1)$  já deve ter sido utilizado para que possa ser utilizado  $(P, 2)$ .

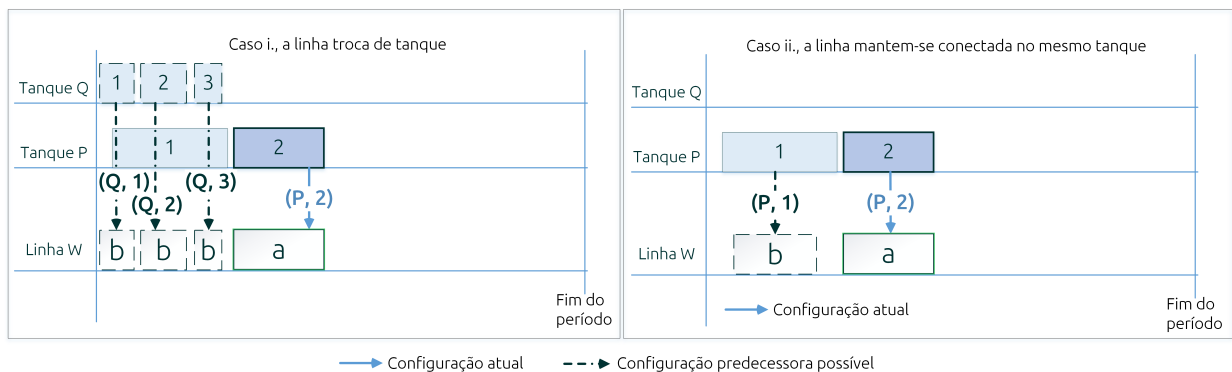
FIGURA 4.2: Situação atual da linha  $W$ , conectada ao tanque / enchimento  $(P, 2)$ .



Fonte: Elaboração própria.

A partir da configuração mostrada na Figura 4.2 e tendo em vista os casos i e ii. apresentados anteriormente, a Figura 4.3 apresenta as possíveis conexões predecessoras de  $(b, W, P, 2)$  para os dois casos mencionados acima. Os pontilhados representam possibilidades de predecessores. A figura está dividida para os casos i. e ii.

FIGURA 4.3: Possíveis conexões predecessoras de  $(W, P, 2)$ .



Fonte: Elaboração própria.

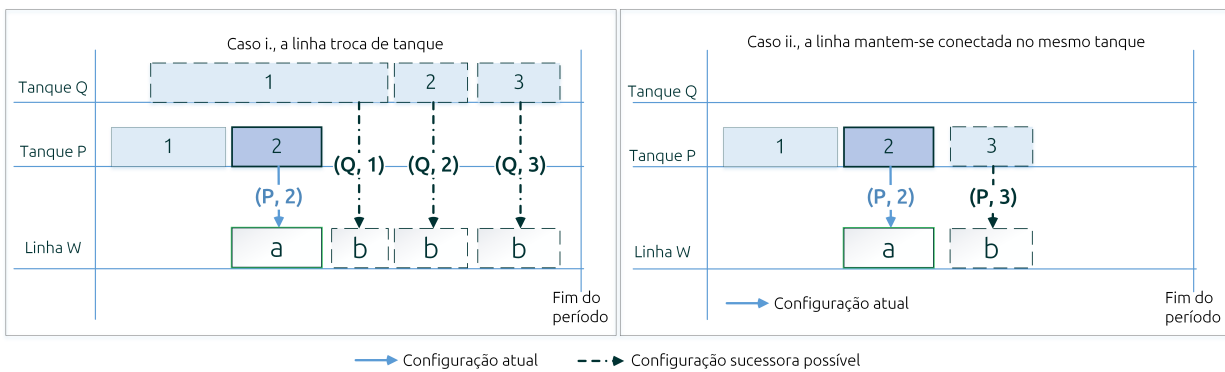
Veja que no caso i. como conexão predecessora pode se usar qualquer enchimento de  $Q$  ( $(Q,1), (Q,2), (Q,3)$ ), tendo em vista que  $Q$  pode se conectar a  $W$  e também pode fabricar o xarope de  $b$  ( $Q \in \phi_l \cap \zeta_{(J_b)}$ ). Esses enchimentos seguem uma ordem de utilização, a qual será garantida pelas restrições (4.31) do modelo matemático apresentado mais à frente.

No caso ii. somente a conexão  $(P,1)$  está disponível como conexão predecessora, pois  $o' = 1$  é o único enchimento que satisfaz a condição de  $o' < o$  e  $P$  também pode fabricar o xarope de  $b$  ( $P \in \phi_l \cap \zeta_{(J_b)}$ ).

Note que os enchimentos podem ser de tamanhos diferentes uma vez que dependem da quantidade de xarope necessária para envasar todos os itens de todas as linhas que estarão conectadas a ele.

A Figura 4.4 apresenta as possíveis conexões sucessoras de  $(b, W, P, 2)$ . Os pontilhados representam possibilidades de sucessores. A figura também está dividida para os casos i. e ii.

FIGURA 4.4: Possíveis conexões sucessoras de  $(W, P, 2)$ .



Fonte: Elaboração própria.

Semelhante ao conjunto de predecessores, no caso i., como conexão seguinte pode se usar qualquer enchimento de  $Q$ , no caso ii. somente está disponível a conexão  $(P,3)$ . Note que um enchimento pode começar inclusive antes da conexão da linha, já que ele pode ter sido, ou estar sendo usado por outra(s) linha(s).

Assim, no exemplo dado, os respectivos conjuntos de enchimentos predecessores e sucessores da configuração atual  $(b, W, P, 2)$ , são:

Predecessores possíveis em relação a  $(b, W, P, 2)$ :

$$\Lambda^P(b, W, P, 2) = \{(P, 1), (Q, 1), (Q, 2), (Q, 3)\}.$$

Sucessores possíveis em relação a  $(b, W, P, 2)$ :

$$\Lambda^S(b, W, P, 2) = \{(P, 3), (Q, 1), (Q, 2), (Q, 3)\}.$$

Como se vê, se o tanque for diferente ( $P \neq Q$ ), o enchimento não é relevante dado que qualquer enchimento desse outro tanque pode ser predecessor ou sucessor da conexão atual.

**Conjuntos**  $\Xi^P(i, l, m, o)$  e  $\Xi^S(i, l, m, o) \subset N_I \times M \times O$

Quando conectada em um mesmo enchimento de um determinado tanque, uma linha pode produzir vários itens repetindo em seguida essa mesma conexão, como se ela não tivesse se desconectado do tanque / enchimento ao passar pelo preparo de troca de itens. Para esse evento diremos que a linha se mantém conectada.

As linhas não possuem restrições de tamanho máximo de lote (há apenas capacidade limitada da janela de tempo disponível, então não é necessário que existam dois lotes do mesmo item  $i$  na linha nesse enchimento. Portanto, não são permitidas as trocas de  $i$  para  $i$  para um mesmo tanque / enchimento.

A partir das razões anteriores são construídos os conjuntos  $\Xi^P(i, l, m, o)$  e  $\Xi^S(i, l, m, o)$  definem os produtos predecessores e sucessores de uma configuração atual. Eles são similares a os conjuntos  $\Lambda^P(l, m, o)$  e  $\Lambda^S(l, m, o)$ , mas se referem aos itens. Para cada configuração atual  $(i, l, m, o)$ , onde  $i \in \omega_j$  se define uma tripla  $(i', m', o')$  que definirá as possibilidades de predecessores no caso de  $\Xi^P(i, l, m, o)$  e sucessores, no caso de  $\Xi^S(i, l, m, o)$ .

Dada uma configuração de uma linha  $l \in L$  para um item  $i \in \delta_l \cap \omega_j$ , na conexão tanque / enchimento  $(m, o)$ , após finalizar o envase do item  $i$ , podem ocorrer três situações a serem observadas a partir do envase do item  $i$ :

- i. **A linha troca de tanque.** A linha será desconectada de  $m$  e logo conectada em um tanque diferente ( $m' \neq m$ ), logo poderá usar qualquer enchimento do outro tanque e consequentemente qualquer sabor. O modelo matemático garantirá que no caso da linha já ter sido conectada nesse outro novo tanque, ele usará enchimentos sucessores.
- ii. **A linha troca de enchimento no mesmo tanque.** A linha será reconectada no mesmo tanque ( $m' = m$ ) mas mudará de enchimento, podendo ser do mesmo sabor de xarope ou não. Obviamente o enchimento é posterior ao atual, também garantido no modelo. Note que a linha deve esperar a troca de xaropes no tanque.
- iii. **A linha "mantém" a conexão  $(m, o)$ .** A linha manterá a conexão ao tanque  $m$  ( $m' = m$ ) no mesmo enchimento  $o' = o$ , logo o item a ser preparado deve usar o mesmo xarope ( $J_{i'} = J_i$ ).

Veja que nos casos i. e ii. devido a uma possível troca de xarope, o item predecessor (sucessor) não é restrito. No entanto, quando a conexão  $(m, o)$  é mantida ( $m' = m \vee o' = o$ ), como mencionado, o item predecessor (sucessor) deve ser diferente de  $i$  e usar o mesmo xarope.

Os conjuntos estão explicitados matematicamente a seguir:

Para os possíveis predecessores:

$$\Xi^P(i, l, m, o) := \{(i', m', o') \mid i' \in \delta_l, m' \in \phi_l \cap \zeta_{(J_{i'})}, o' \in O : \\ \underbrace{m' \neq m}_{i.} \vee \underbrace{(m' = m \wedge o' < o)}_{ii.} \vee \underbrace{(m' = m \wedge o' = o \wedge i' \neq i \wedge J_{i'} = J_i)}_{iii.}\}.$$

Para os possíveis sucessores:

$$\Xi^S(i, l, m, o) := \{(i', m', o') \mid i' \in \delta_l, m' \in \phi_l \cap \zeta_{(J_{i'})}, o' \in O : \\ \underbrace{m' \neq m}_{i.} \vee \underbrace{(m' = m \wedge o' > o)}_{ii.} \vee \underbrace{(m' = m \wedge o' = o \wedge i' \neq i \wedge J_{i'} = J_i)}_{iii.}\}.$$

Para ilustrar as situações que descrevem os conjuntos  $\Xi^P(i, l, m, o)$  e  $\Xi^S(i, l, m, o)$ , tomemos o exemplo da linha  $W$  da situação apresentada anteriormente (Figura 4.2) que se encontrava conectada no enchimento  $(m, o) = (P, 2)$ , e haviam dois tanques  $P$  e  $Q$  com a possibilidade de 3 enchimentos cada.

Adicionalmente, defina duas famílias de produtos, o item  $a$  feito com um xarope  $A$  ( $a \in \omega_A$ ) e os itens  $b$  e  $c$ , feitos com um xarope  $B$  ( $b, c \in \omega_B$ ). Considere que a linha conectada ao enchimento  $(P, 2)$ , atualmente está configurada para o item  $c$  ( $i = c$ ). Assim, a configuração do item atual para a linha  $W$  corresponde a  $(i, l, m, o) = (c, W, P, 2)$ . Logo a partir desta configuração teremos que:

- i. Se a linha trocar do tanque  $P$  para o tanque  $Q$  ( $P \neq Q$ ), o enchimento predecessor (sucessor) pode ser qualquer um do tanque  $Q$  ( $(Q, 1), (Q, 2), (Q, 3)$ ). Assim, no enchimento anterior (seguinte), o xarope pode ser trocado por outro ou não, e portanto, o item seguinte não tem relação com o item da configuração atual, ou seja pode ser qualquer um dos itens possíveis  $(a, b, c)$ . Isto origina as configurações:

Antecessores:

$$\{(a, Q, 1), (b, Q, 1), (c, Q, 1), (a, Q, 2), (b, Q, 2), (c, Q, 2), (a, Q, 3), (b, Q, 3), (c, Q, 3)\};$$

Sucessores:

$$\{(a, Q, 1), (b, Q, 1), (c, Q, 1), (a, Q, 2), (b, Q, 2), (c, Q, 2), (a, Q, 3), (b, Q, 3), (c, Q, 3)\}.$$

- ii. A linha  $W$  continua conectada ao mesmo tanque ( $m' = m$ ) mas com um enchimento diferente. No caso do conjunto de possíveis antecessores, esse enchimento tem que ser anterior ( $o' < o$ ), e no caso do conjunto de sucessores, terá que ser posterior ( $o' > o$ ). O xarope



preparado nesse outro enchimento pode ser qualquer um, incluindo o mesmo e portanto os itens envolvidos na troca também não estão restritos, podendo ser qualquer um  $(a, b, c)$ . Isto da origem às seguintes possíveis configurações:

Antecessores:

$$\{(a, P, 1), (b, P, 1), (c, P, 1)\}.$$

Sucessores:

$$\{(a, P, 3), (b, P, 3), (c, P, 3)\}.$$

- iii. Por último, temos o caso em que se mantém a conexão no mesmo tanque / enchimento no exemplo  $(P, 2)$ . Neste caso, são permitidas apenas trocas para itens do mesmo sabor que o item  $c$ . O único item do mesmo sabor que o item  $c$  é o item  $b$ , logo a única troca permitida dentro da conexão  $(P, 2)$  é para o item  $b$ , logo temos as seguintes possíveis configurações:

Antecessores:

$$\{(b, P, 2)\}.$$

Sucessores:

$$\{(b, P, 2)\}.$$

Assim, os conjuntos completos  $\Xi$ , compostos pela união dos conjuntos de cada caso para o nosso exemplo são:

Para as possíveis configurações antecessoras temos:

$$\Xi^P(c, W, P, 2) = \underbrace{\{(a, Q, 1), (b, Q, 1), (c, Q, 1), (a, Q, 2), (b, Q, 2), (c, Q, 2), (a, Q, 3), (b, Q, 3), (c, Q, 3)\}}_i, \\ \underbrace{\{(a, P, 1), (b, P, 1), (c, P, 1)\}}_{ii}, \underbrace{\{(b, P, 2)\}}_{iii}$$

Para as possíveis configurações sucessoras temos:

$$\Xi^S(c, W, P, 2) = \underbrace{\{(a, Q, 1), (b, Q, 1), (c, Q, 1), (a, Q, 2), (b, Q, 2), (c, Q, 2), (a, Q, 3), (b, Q, 3), (c, Q, 3)\}}_i, \\ \underbrace{\{(a, P, 3), (b, P, 3), (c, P, 3)\}}_{ii}, \underbrace{\{(b, P, 2)\}}_{iii}$$

Veja que a diferença entre  $\Xi^P(c, W, P, 2)$  e  $\Xi^S(c, W, P, 2)$  está nos elementos que descrevem a situação *ii.*, dado que, da mesma forma ocorreu que nos conjuntos  $\Lambda^P(l, m, o)$  e  $\Lambda^S(l, m, o)$  os enchimentos predecessores ou sucessores só são restritos quando ocorreu no mesmo tanque.

A construção dos conjuntos  $\Lambda$  e  $\Xi$  ajuda a estabelecer uma diferenciação entre as trocas das

linhas. Nos conjuntos  $\Lambda$ , o importante é observar a conexão com o tanque / enchimento. No caso dos conjuntos  $\Xi$  o importante é analisar as trocas de itens mas isso pode ser feito somente se for conhecido qual tanque / enchimento abastece o lote desse item  $i$ . Essa diferenciação será necessária para diversas variáveis e restrições que são apresentadas na seção 4.2.

Cabe salientar que graças à indexação de variáveis e restrições relacionadas a trocas nas linhas mediante os conjuntos  $\Lambda$  e  $\Xi$  é evitada a geração de variáveis e restrições desnecessárias, dado que eles permitem eliminar *a priori* casos indesejáveis, como trocas e conexões não permitidas. Por exemplo, quando se deve desconsiderar um tanque como sucessor por ele não poder armazenar o tipo de xarope requerido pelo item envolvido na troca.

## Parâmetros

Os parâmetros utilizados no modelo SMMRPM são semelhantes aos encontrados em outros modelos da literatura (CLARK, 2003; TOLEDO *et al.*, 2007; FERREIRA; MORABITO; RANGEL, 2009; FERREIRA *et al.*, 2012; DEFALQUE; RANGEL; FERREIRA, 2011; MALDONADO; RANGEL; FERREIRA, 2014). Os parâmetros são:

- $a_{ii}^{ll}$ : Tempo de produção unitário do produto final  $i$  na linha  $l$  (min).
- $b_{i'i'}^{ll}$ : Tempo de troca do item  $i$  ao item  $i'$  na linha  $l$  (min).
- $b_{jj'm}^l$ : Tempo de troca do xarope  $j$  para o xarope  $j'$  no tanque  $m$  (min).
- $d_{it}$ : Demanda do produto final  $i$  no final do período  $t$  (und).
- $g_i$ : Penalidade por unidade atrasada do item  $i$  (\$).
- $h_i$ : Custo unitário de estoque do item  $i$  (\$).
- $I_{i0}^+$ : Estoque inicial do produto  $i$  (und).
- $J_i$ : Xarope usado para o produto  $i$ .
- $First_t$ : Primeiro enchimento possível no período  $t$ .
- $Last_t$ : Último enchimento possível no período  $t$ .
- $Dur_t$ : Duração do período  $t$  (min).
- $K_{it}^{ll}$ : Capacidade da linha  $l$  no período  $t$  (min).
- $Start_{it}^{ll}$ : Momento de início da janela de tempo para operação da linha  $l$  no período  $t$  (min).
- $End_{it}^{ll}$ : Fim da janela de tempo operação da linha  $l$  no período  $t$  (min).
- $K_{mt}^l$ : Capacidade do tanque  $m$  para cada enchimento no período  $t$  (L).
- $Start_{mt}^l$ : Momento de início da janela de tempo de operação do tanque  $m$  no período  $t$ .
- $End_{mt}^l$ : Fim da janela de tempo da operação do tanque  $m$  no período  $t$ .
- $p_j^l$ : Máxima duração do xarope  $j$  em qualquer tanque (min).
- $q_{jm}^l$ : Tamanho do lote mínimo do xarope  $j$  no tanque  $m$  (L).
- $r_{ij}$ : Quantidade do xarope  $j$  usada para fabricar uma unidade do item  $i$  (L).

- $s_{ii'l}^{II}$ : Custo de troca do item  $i$  para  $i'$  na linha  $l$  (\$).
- $s_{jj'm}^I$ : Custo de troca do xarope  $j$  ao xarope  $j'$  no tanque  $m$  (\$).
- $Y_{j0mO}$ : Estado de preparo do tanque  $m$  para o último xarope  $j$  que foi usado (1 se foi usado, 0 caso contrário).

#### Considerações sobre as janelas de tempo:

- Os parâmetros  $Start_{it}^{II}$  e  $End_{it}^{II}$  definem a janela de tempo de operação da linha  $l$ .
- O parâmetro  $End_{it}^{II}$  deve ser sempre maior que  $Start_{it}^{II}$  para evitar uma janela negativa.
- Os parâmetros  $Start_{mt}^I$  e  $End_{mt}^I$  definem a janela de tempo de operação do tanque  $m$ .
- Parecido ao caso das linhas,  $End_{mt}^I \geq Start_{mt}^I$  para evitar uma janela negativa nos tanques.
- O parâmetro  $Dur_t$  define um limite de tempo global que afeta os dois estágios.
- O fim de qualquer janela é quando máximo o fim do período  $Dur_t$  (ou seja  $Dur.t \geq End_{mt}^I$  e  $Dur.t \geq End_{it}^{II}$ ).
- A disponibilidade de tempo do maquinário também é quando máximo  $Dur_t$ .
- Se não forem especificados os momentos de início  $Start^I$  e  $Start^{II}$ , tais parâmetros deverão tomar como valor *default* o minuto 0 (início do período).
- Se não forem especificados os finais das janelas  $End^I$  e  $End^{II}$ , tais parâmetros deverão tomar como valor *default* o fim do período  $Dur_t$ .
- Embora, a utilização do tempo disponível dentro da janela de tempo é uma decisão do modelo. Os parâmetros relativos às janelas de tempo de operação e/ou a disponibilidade de tempo são dados de entrada da formulação. O tomador de decisão deverá determinar *a priori* estes valores e, portanto, elas não fazem parte das decisões do modelo proposto.

#### Variáveis de decisão

A proposta de modelagem contempla as decisões de dimensionar e alocar os lotes dos diferentes itens e xaropes nas linhas e tanques respectivamente, assim como estoques e atrasos para os diferentes itens, determinar o sequenciamento no programa de produção nos dois estágios envolvidos além de levar em conta a sincronia entre eles. Para isto se faz uso das variáveis introduzidas a seguir. Elas são apresentadas começando pelo nome da variável, seguida do domínio e, abaixo a explicação do significado de cada uma delas.

$$\alpha_{itlmo} \in \{0,1\} \quad \forall i \in \delta_l, t \in T, l \in L, m \in \phi_l \cap \zeta_{(j_i)}, o \in O_t.$$

$\alpha_{itlmo}$  é 1 se  $i$  é o **primeiro** item fabricado no período  $t$  na linha  $l$ , quando conectada ao tanque / enchimento  $mo$ , 0 caso contrário.

$$\beta_{itlmo} \in \{0,1\} \quad \forall i \in \delta_l, t \in T, l \in L, m \in \phi_l \cap \zeta_{(j_i)}, o \in O_t.$$

$\beta_{itlmo}$  é 1 se  $i$  é o **último** item fabricado no período  $t$  na linha  $l$ , quando conectada ao tanque / enchimento  $mo$ , 0 caso contrário.

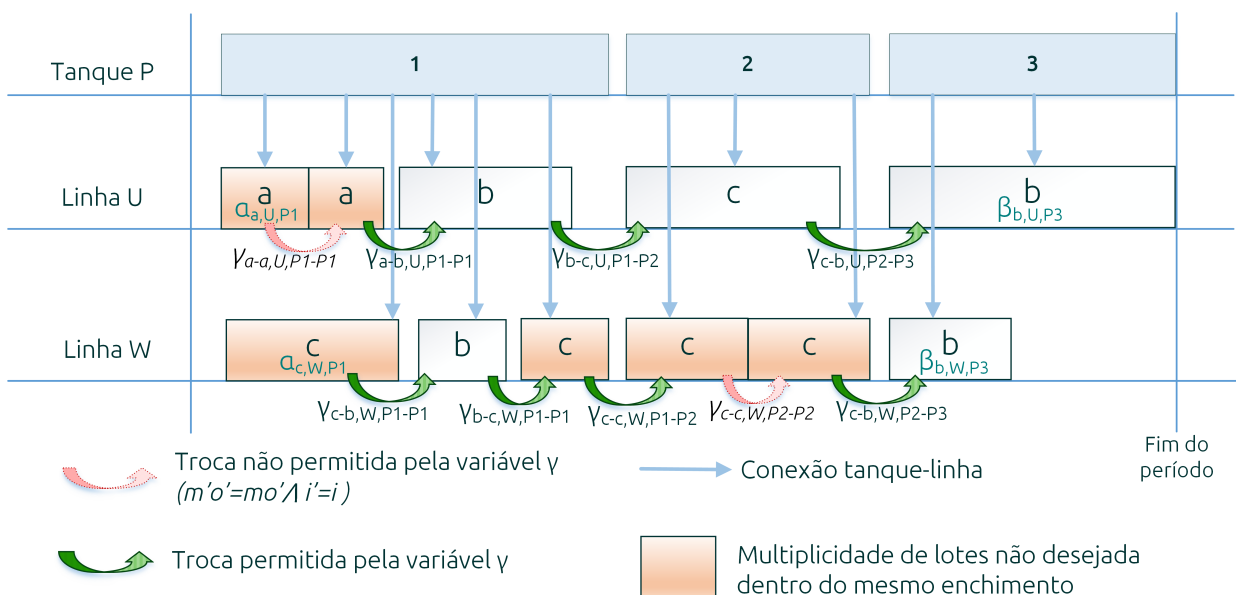
$$\gamma_{ii'tlmom'o'} \in \{0,1\} \quad \forall i \in \delta_l, t \in T, l \in L, m \in \phi_l \cap \zeta_{(j_i)}, o \in O_t, (i', m', o') \in \Xi^S(i, l, m, o).$$

$\gamma_{ii'tlmom'o'}$  é 1 se há a troca do item  $i$  para  $i'$  na linha  $l$  quando se muda de  $mo$  para  $m'o'$  dentro do período  $t$ , 0 caso contrário.

Veja que a construção da variável  $\gamma_{ii'tlmom'o'}$  evita que trocas desnecessárias sejam feitas devido à utilização do conjunto de sucessores da configuração  $(i, l, m, o)$  ( $(i', m', o') \in \Xi^S(i, l, m, o)$ ).

Para ilustrar melhor a ideia, veja a Figura 4.5 que apresenta duas linhas de produção  $U$  e  $W$  que compartilham um único tanque  $P$  com três possíveis enchimentos 1, 2 e 3 em um determinado período  $t$  fixo (o índice  $t$  é omitido no exemplo). Considere três itens distintos e do mesmo sabor  $j$ :  $a, b$  e  $c \in \omega_j$ . Na conexão da linha  $U$  no primeiro enchimento do tanque  $P$ , são envasados três lotes, respectivamente dos itens  $a, a$  e  $b$ . No caso da linha  $W$  são produzidos os lotes de  $c, b$  e  $c$ . Para o segundo enchimento tem um lote do item  $c$  na linha  $U$  e dois lotes de  $c$  na linha  $W$ . Para o terceiro enchimento, encontramos um lote do item  $b$  sendo envasado para cada linha.

FIGURA 4.5: Trocas permitidas e não permitidas pela construção da variável  $\gamma_{ii'tlmom'o'}$ .



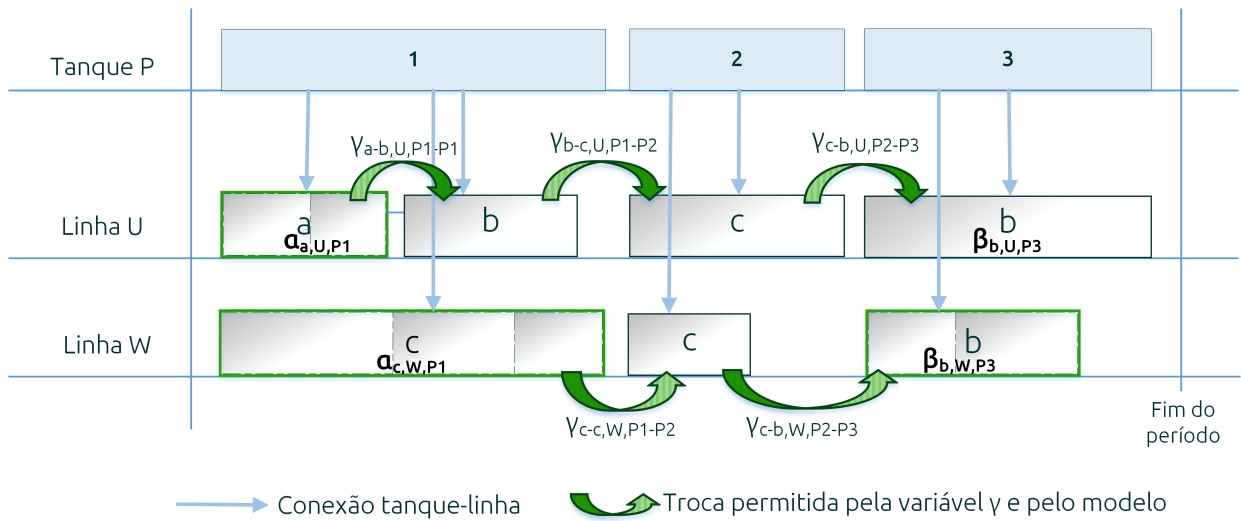
Fonte: Elaboração própria.

Conforme discutido no Capítulo 2, não são necessárias trocas de itens iguais na mesma linha dentro de um mesmo tanque / enchimento. Logo a troca de  $a$  para  $a$  na linha  $U$  na conexão  $P1$  pode ser descartada. Isto é impedido na presente proposta de modelagem não gerando variáveis de troca para esta situação. Porém poderia ocorrer a situação da linha  $W$  onde há dois lotes do mesmo item  $c$  intercalados com um lote do item  $b$ .

Note que apesar de as trocas de  $c$  para  $b$  e de  $b$  para  $c$  serem permitidas pela construção da variável  $\gamma$ , isto é, de existirem as variáveis  $\gamma_{c-b,W,P1-P1}$  e  $\gamma_{b-c,W,P1-P1}$ , elas não são necessárias, uma vez que os tempos de troca satisfazem a desigualdade triangular. Isto é evitado mediante a utilização das restrições (4.4), (4.22) e (4.7) apresentadas mais à frente.

Usando este princípio, um plano de produção equivalente ao anterior, é apresentado na Figura 4.6. O tracejado entre os lotes apenas ilustra os tamanhos dos lotes da figura anterior 4.5. Note que esse plano reorganiza e melhora a programação da produção da Figura 4.5, agregando os lotes do mesmo item e diminuindo o número de trocas com os mesmos níveis de estoque ao final do período. O plano apresentado, cumpre os pressupostos do modelo e otimiza o uso dos recursos envolvidos e é, portanto, mais conveniente.

FIGURA 4.6: Plano de produção alternativo ao da Figura 4.5.



Fonte: Elaboração própria.

Veja na Figura 4.6 que apenas um único lote por enchimento de um mesmo item e o número total de trocas é reduzido de 9 para 4. A produção total do período é a mesma e o tempo de trocas foi reduzido. Note que graças à redução do número de trocas e o tempo relacionado com essa redução, menos capacidade do período é usada.

$$\hat{\gamma}_{i'i'l} \in [0,1] \quad \forall i, i' \in \delta_l, t \in T, l \in L.$$

$\hat{\gamma}_{i'l't}$  assume o valor 1 se existe troca de  $i$  para  $i'$  na linha  $l$  no início do período  $t$ . Ela controla as trocas dos itens  $i$  e  $i'$  entre os períodos  $t - 1$  e  $t$  em uma determinada linha. Mesmo sendo definida como contínua dentro do intervalo  $[0, 1]$ , sua presença na função objetivo e com as restrições (4.11) e (4.12) permitem esta relaxação restringindo-as aos valores 0 ou 1.

$$I_{it}^+ \geq 0 \quad \forall i \in N_I, t \in T.$$

Quantidade de estoque em unidades do item  $i$  ao final do período  $t$ .

$$I_{it}^- \geq 0 \quad \forall i \in N_I, t \in T.$$

Quantidade de atraso em unidades do item  $i$  ao final do período  $t$ .

$$\mu_{tlmo}^s \geq 0 \quad \forall t \in T, l \in L, m \in \phi_l, o \in O_t.$$

Início do enchimento  $o$  no tanque  $m$  na linha  $l$  (em minutos) no período  $t$ .

$$\mu_{tlmo}^e \geq 0 \quad \forall t \in T, l \in L, m \in \phi_l, o \in O_t.$$

Final do enchimento  $o$  no tanque  $m$  linha  $l$  (em minutos) no período  $t$ .

$$\hat{\mu}_{tmo}^s \geq 0 \quad \forall t \in T, m \in M, o \in O_t.$$

Início do enchimento  $o$  do tanque  $m$  (em minutos) no período  $t$ .

$$\hat{\mu}_{tmo}^e \geq 0 \quad \forall t \in T, m \in M, o \in O_t.$$

Final do enchimento  $o$  do tanque  $m$  (em minutos) no período  $t$ .

$$V_{itlmo} \geq 0 \quad i \in \delta_l, t \in T, l \in L, m \in \phi_l \cap \zeta_{(j_i)}, o \in O_t.$$

Esta variável auxiliar é necessária para restrições de eliminação de *subtours* desconectados (4.7).

$$X_{itlmo} \geq 0 \quad \forall i \in \delta_l, t \in T, l \in L, m \in \phi_l \cap \zeta_{(j_i)}, o \in O_t.$$

Quantidade produzida do item  $i$  no período  $t$  na linha  $l$ , usando o enchimento  $o$  do tanque  $m$ .

$$Y_{j_tmo} \in \{0, 1\} \quad \forall j \in \theta_m, t \in T, m \in M, o \in O_t.$$

Esta variável binária controla o estado de *setup* do tanque / enchimento  $mo$  para o xarope  $j$

no período  $t$ . Assume valor 1 se o tanque / enchimento  $mo$  está preparado para o xarope  $j$  no período  $t$ , 0 caso contrário.

$$Z_{jj'tmo} \in [0,1] \quad \forall j, j' \in \theta_m, t \in T, m \in M, o \in O_t.$$

Esta variável representa a troca do xarope  $j$  para  $j'$  quando se utilizar o tanque / enchimento  $mo$ . É de natureza binária ainda que esteja definida no intervalo  $[0, 1]$  pela sua inclusão na função objetivo e as restrições (4.24) - (4.27).

Introduzidas todas as variáveis, a seguir será explicada a proposta de modelagem, fazendo uso da notação, os conjuntos, parâmetros e variáveis já explicados.

## 4.2 Modelo de múltiplas máquinas e recursos sincronizados com manutenções preventivas (*Synchronized muti machines and resources model with preventive maintenances*) (SMMRPM)

### Função objetivo

A função objetivo (4.1) minimiza custos de estoque ( $\sum h \cdot I^+$ ), custos de atraso ( $\sum g \cdot I^-$ ), custos de trocas de xarope nos tanques ( $\sum s^I \cdot Z$ ) e custos de trocas de itens no início do período ( $\sum s^{II} \cdot \hat{\gamma}$ ) e dentro de cada período ( $\sum s^{II} \cdot \gamma$ ).

$$\begin{aligned} v(F) = \min & \sum_{i \in N_I} \sum_{t \in T} h_i \cdot I_{it}^+ + \sum_{i \in N_I} \sum_{t \in T} g_i \cdot I_{it}^- + \sum_{t \in T} \sum_{m \in M} \sum_{o \in O_t} \sum_{j, j' \in \theta_m} s_{jj'm}^I \cdot Z_{jj'tmo} \\ & + \sum_{t \in T} \sum_{l \in L} \sum_{i, i' \in \delta_l} s_{ii'l}^{II} \cdot \hat{\gamma}_{ii'tl} + \sum_{t \in T} \sum_{l \in L} \sum_{i \in \delta_l} \sum_{m \in \phi_l \cap \zeta_{(j_i)}} \sum_{o \in O_t} \sum_{(i', m', o') \in \Xi^S(i, l, m, o)} s_{ii'l}^{II} \cdot \gamma_{ii'tlmom'o'} \end{aligned} \quad (4.1)$$

### Restrições

A seguir são apresentadas em detalhes as restrições da modelagem proposta. Elas estão organizadas em dois grupos: restrições relacionadas às linhas de envase e restrições relacionadas aos tanques.

### Restrições para as linhas de envase

Para as linhas temos as seguintes restrições:

### Restrições de balanço de fluxo de estoques

$$I_{i(t-1)}^+ + I_{it}^- + \sum_{l \in \rho_i} \sum_{m \in \phi_l \cap \zeta_{(j_i)}} \sum_{o \in O_t} X_{itlmo} = d_{it} + I_{it}^+ + I_{i(t-1)}^- \quad \forall i \in N_L, t \in T \quad (4.2)$$

Estas restrições são clássicas da literatura e controlam o balanceamento da produção, estoque e atraso para o atendimento da demanda de cada período.

### Restrições para sequenciamento em linhas

Para garantir o sequenciamento correto da produção dos itens finais, utilizam-se as restrições (4.3) - (4.7), apresentadas a seguir:

$$\sum_{i \in \delta_l} \sum_{m \in \phi_l \cap \zeta_{(j_i)}} \sum_{o \in O_t} \alpha_{itlmo} \leq 1 \quad \forall l \in L, t \in T \quad (4.3)$$

Para qualquer linha, em cada período, no máximo um primeiro item é configurado, o que é garantido pelas restrições (4.3).

$$\alpha_{itlmo} + \sum_{(i', m', o') \in \Xi^P(i, l, m, o)} \gamma_{i'itlm'o'mo} = \sum_{(i', m', o') \in \Xi^S(i, l, m, o)} \gamma_{ii'tlmom'o'} + \beta_{itlmo} \quad (4.4)$$

$$\forall l \in L, t \in T, i \in \delta_l, m \in \phi_l \cap \zeta_{(j_i)}, o \in O_t$$

As restrições (4.4) estabelecem o fluxo de estados de preparação das linhas em cada período. Estas restrições estabelecem um sequenciamento dos itens.

Considere uma linha  $l$  em um período  $t$  conectada no tanque /enchimento  $mo$ , para envasar o item  $i$ . Ou o item é o primeiro que está preparado ( $\alpha_{itlmo}$ ), ou ocorreu uma troca na linha de uma terna  $(i', m', o')$  para ele em  $(i, m, o)$ . Esta troca, conforme explicado na seção 4.1 deve ser de algum dos possíveis predecessores de  $(i, l, m, o)$ . De forma similar o lado direito garante que, se o item  $i$  é envasado, ou haverá uma troca dele  $(i, m, o)$  para alguém  $(i', m', o')$  ou ele será o último do período nessa linha ( $\beta_{itlmo}$ ).

#### *Desigualdades Válidas*

A partir das restrições (4.4) podem se obter duas *desigualdades válidas* apresentadas a seguir:



Primeiro, se somarmos as restrições (4.4) em  $(m, o)$ , obter-se-ia (4.5):

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \phi_l \cap \zeta(J_i)} \sum_{o \in O_t} \alpha_{itlmo} + \sum_{m \in \phi_l \cap \zeta(J_i)} \sum_{o \in O_t} \sum_{(i', m', o') \in \Xi^P(i, l, m, o)} \gamma_{i'itlm'o'mo} = \\ \sum_{m \in \phi_l \cap \zeta(J_i)} \sum_{o \in O_t} \sum_{(i', m', o') \in \Xi^S(i, l, m, o)} \gamma_{ii'tlmom'o'} + \sum_{m \in \phi_l \cap \zeta(J_i)} \sum_{o \in O_t} \beta_{itlmo} \end{aligned} \quad \forall l \in L, t \in T, i \in \delta_l \quad (4.5)$$

Que iguala o número de trocas para um produto  $i$  com o número de trocas a partir desse item  $i$  para um outro produto.

Em segundo lugar, se somarmos em  $i$  obtém-se a desigualdade válida (4.6):

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \delta_l | J_i \in \theta_m} \alpha_{itlmo} + \sum_{i \in \delta_l | J_i \in \theta_m} \sum_{(i', m', o') \in \Xi^P(i, l, m, o)} \gamma_{i'itlm'o'mo} = \\ \sum_{i \in \delta_l | J_i \in \theta_m} \sum_{(i', m', o') \in \Xi^S(i, l, m, o)} \gamma_{ii'tlmom'o'} + \sum_{i \in \delta_l | J_i \in \theta_m} \beta_{itlmo} \end{aligned} \quad \forall l \in L, t \in T, m \in \phi_l, o \in O_t \quad (4.6)$$

Que representa o balanço de fluxo para os enchimentos nos tanques  $(m, o)$  usados pela linha  $l$ , igualando os *setups* de qualquer tanque / enchimento para  $(m, o)$  com os *setups* a partir de  $(m, o)$  para qualquer tanque / enchimento  $(m', o')$ .

### **Restrições de eliminação de subtours desconectadas**

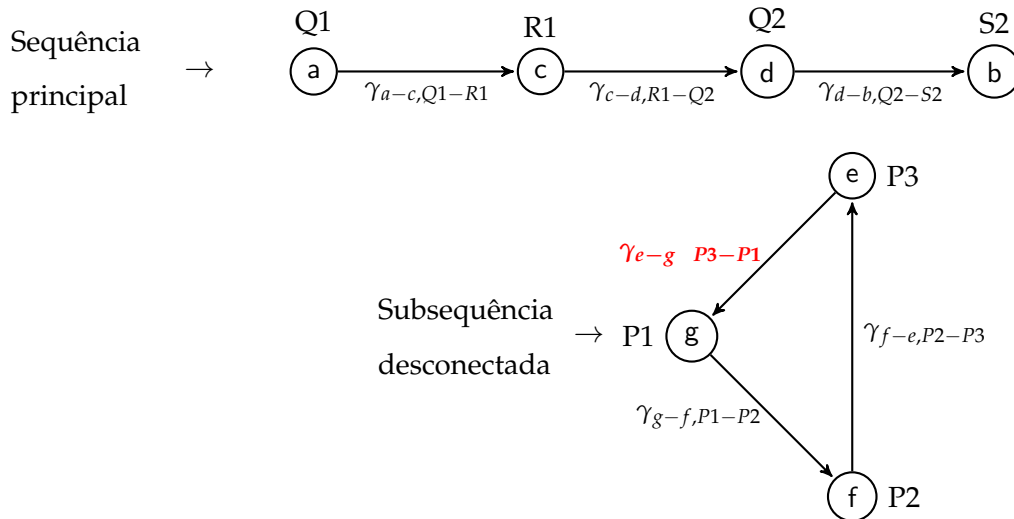
Observe que o fluxo estabelecido pelas restrições (4.4) fornecem um sequenciamento da produção a partir do primeiro item preparado. No entanto, outras sequências não ligadas a  $\alpha_{itlmo}$  podem ocorrer, ou seja, podem ocorrer *subtours* conectados/desconectados.

Temos dois casos de subsequências que devem ser impedidas ou eliminadas *a priori* pela modelagem:

- i. Subtours no mesmo tanque:* O primeiro caso acontece quando uma linha se mantém conectada a um tanque / enchimento e, após utilizar o enchimento, ela utiliza outros enchimentos sucessivos e depois tenta voltar para o enchimento anterior. Veja as figuras 4.7 e 4.8. Na Figura 4.7 se ilustra a sequência de produção para uma linha em um período, onde há uma sequência desconectada. O símbolo (i) representa o item, e o par letra-número próximo ao símbolo, representa respectivamente o tanque e enchimento conectado para produzir dito

item. Por exemplo,  $Q1$  (a) é o envase do item  $a$  que recebe xarope do tanque  $Q$  no enchimento 1. Nessa figura, os lotes são feitos a partir de enchimentos de um mesmo tanque  $P$ . Tendo em vista que  $l$  e  $t$  são fixos a variável para contar a troca é  $\gamma_{i-i',mo-m'o'}$ .

FIGURA 4.7: Subsequência desconectada em um mesmo tanque.



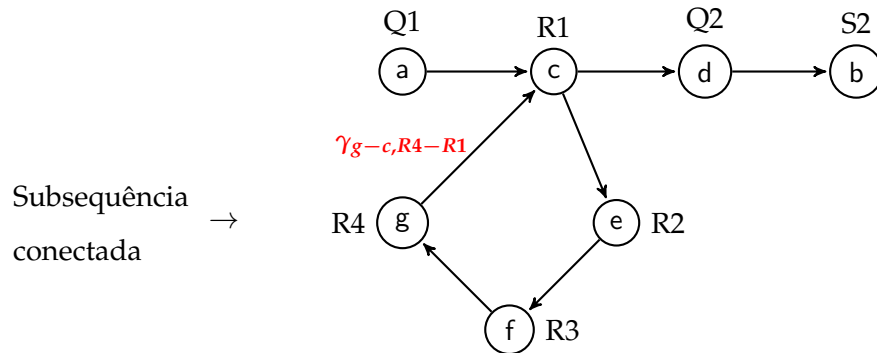
Fonte: Elaboração própria.

A sequência principal de produção (notação: produto(tanque-enchimento)), é composta pela sequência  $a(Q1)-c(P2)-d(Q2)-b(S2)$ , enquanto a sequência desconectada ilustrada é  $g(P1)-f(P2)-e(P3)-g(P1)$ .

Porém este caso, é evitado a priori, eliminado pela construção da variável  $\gamma_{i-i',tlmom'o'}$ . Isto, porque para que ele fosse possível e satisfizesse as restrições (4.4) de balanço de fluxo de *setup*, teria que existir a troca  $\gamma_{e-g,P3-P1}$  (Veja na Figura 4.7 em negrito), a qual não é possível pois o enchimento  $P3$ , não pode anteceder o enchimento  $P1$ .

De forma análoga as subsequências conectadas no mesmo tanque como as da Figura 4.8 são evitadas. Nesse caso ela é  $c(R1)-e(R2)-f(R3)-g(R4)-c(R1)$ .

FIGURA 4.8: Ilustração de uma subsequência conectada em um mesmo tanque.



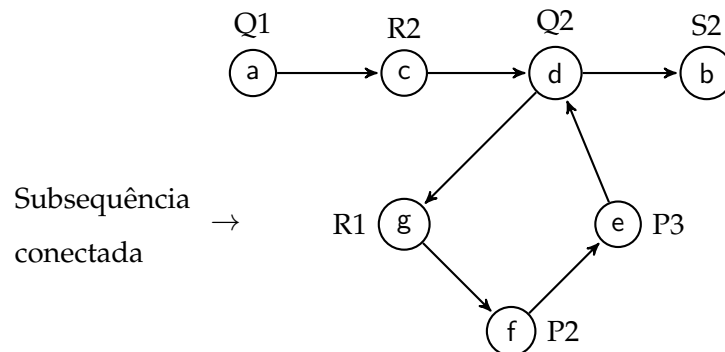
Fonte: Elaboração própria.

Novamente a construção da variável  $\gamma$  não permite que exista a troca  $\gamma_{g-c, R4-R1}$ , e portanto, a subsequência conectada mostrada não pode ocorrer.

Note que, como consequência da construção da variável  $\gamma$  são evitadas todas as subsequências que tentem voltar em enchimentos anteriormente utilizados como as mostradas acima.

- ii. **Subtours de tanques/enchimentos diferentes:** No segundo caso a linha é completamente desconectada do tanque / enchimento  $(m, o)$  e, após utilizar outros tanques/enchimentos, ela tenta voltar para o enchimento  $(m, o)$  para produzir o mesmo item. Veja a Figura 4.9 onde se mostra uma subsequência conectada, e a Figura 4.10, onde se apresenta uma subsequência desconectada. Nesses casos ainda que a subsequência seja ilegal (não se pode usar um enchimento já utilizado), a construção da variável  $\gamma$  permitiria as trocas para essas subsequências, assim como as restrições de fluxo de *setup* (4.4) seriam satisfeitas, como se verá embaixo. Consequentemente, é necessário evitar ou eliminar a formação delas.

FIGURA 4.9: Ilustração *subtour* conectado a partir de enchimentos de diferentes tanques.



Fonte: Elaboração própria.

Para a Figura 4.9 veja como é satisfeito o fluxo de *setups* em uma subsequência conectada.

Considere a restrição de fluxo de *setup* (Eq.(4.4)) com  $l$  e  $t$  fixos e a sequência conectada mostrada acima. Avaliando o valor que cada termo assume para  $i(mo)$  na restrição temos:

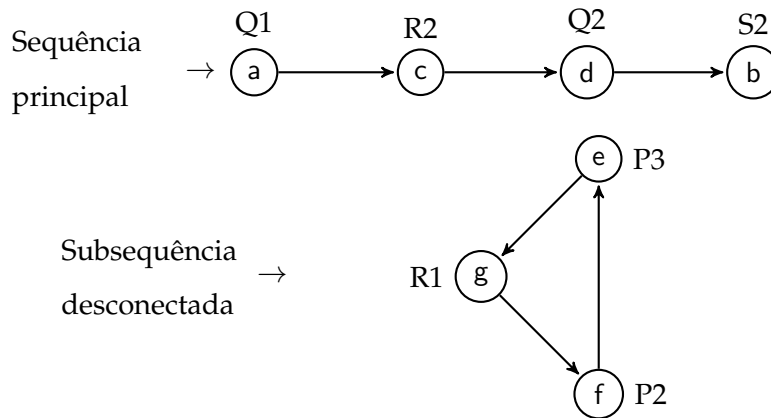
$$i(mo) = \alpha_{itlmo} + \sum_{\substack{i' \in \delta_l \\ (m'o') \in \Xi(l,m,o)}} \gamma_{i'itlm'o'mo} = \sum_{\substack{i' \in \delta_l \\ (m'o') \in \Lambda(l,m,o)}} \gamma_{i'itlmom'o'} + \beta_{itlmo}$$

$a(Q1)$	1	+	0	=	1	+	0	✓
$c(R2)$	0	+	1	=	1	+	0	✓
$d(Q2)$	0	+	2	=	2	+	0	✓
$b(S2)$	0	+	1	=	0	+	1	✓
$g(R1)$	0	+	1	=	1	+	0	✓
$f(P2)$	0	+	1	=	1	+	0	✓
$e(P3)$	0	+	1	=	1	+	0	✓

Veja que a subsequência conectada satisfaz as restrições de fluxo de *setup*.

Isto também pode ocorrer com uma subsequência desconectada. A Figura 4.10 apresenta uma subsequência desconectada.

FIGURA 4.10: Sequência desconectada formada por enchementos de diferentes tanques.



Fonte: Elaboração própria.

Veamos as restrições de fluxo de *setup* para este caso:

Fluxo de *setup* sequência principal:

$$\begin{array}{rcccccccc}
 i(mo) & \alpha_{itlmo} & + & \sum_{\substack{i' \in \delta_l \\ (m'o') \in \Xi(l,m,o)}} \gamma_{i'tlm'o'mo} & = & \sum_{\substack{i' \in \delta_l \\ (m'o') \in \Lambda(l,m,o)}} \gamma_{ii'tlmom'o'} & + & \beta_{itlmo} \\
 a(Q1) & 1 & + & 0 & = & 1 & + & 0 \quad \checkmark \\
 c(R2) & 0 & + & 1 & = & 1 & + & 0 \quad \checkmark \\
 d(Q2) & 0 & + & 1 & = & 1 & + & 0 \quad \checkmark \\
 b(S2) & 0 & + & 1 & = & 0 & + & 1 \quad \checkmark
 \end{array}$$

Fluxo de *setup* na subsequência desconectada:

$$\begin{array}{rcccccccc}
 i(mo) & \alpha_{itlmo} & + & \sum_{\substack{i' \in \delta_l \\ (m'o') \in \Xi(l,m,o)}} \gamma_{i'tlm'o'mo} & = & \sum_{\substack{i' \in \delta_l \\ (m'o') \in \Lambda(l,m,o)}} \gamma_{ii'tlmom'o'} & + & \beta_{itlmo} \\
 g(R1) & 0 & + & 1 & = & 1 & + & 0 \quad \checkmark \\
 f(P2) & 0 & + & 1 & = & 1 & + & 0 \quad \checkmark \\
 e(P3) & 0 & + & 1 & = & 1 & + & 0 \quad \checkmark
 \end{array}$$

Assim, conserva-se também o fluxo de *setup* para as trocas existentes na subsequência desconectada.

Como mostrado, as trocas que formam o *subtour* conectado ou desconectado provenientes de diferentes tanques, são permitidas pela variável  $\gamma$  e também satisfazem as restrições (4.4). Assim, são necessárias as restrições (4.7) para eliminá-las.

Elas se baseiam nas clássicas restrições MTZ (Veja (MILLER; TUCKER; ZEMLIN, 1960; GUIMARÃES; KLABJAN; ALMADA-LOBO, 2014)), e são apresentadas a seguir:

$$\begin{aligned}
 V_{itlmo} + |\delta_l| \cdot \gamma_{ii'tlmom'o'} - (|\delta_l| - 1) &\leq V_{i'tlm'o'} \\
 \forall l \in L, t \in T, i \in \delta_l, m \in \phi_l \cap \zeta_{(J_i)}, o \in O_t, (i', m', o') &\in \Xi^S(i, l, m, o)
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Estas restrições estabelecem uma ligação das trocas da sequência na linha  $l$  no período  $t$ . Elas impedem que qualquer lote que tenha sido usado previamente volte a ser usado. A variável  $V_{itlmo}$  indica a posição do item  $i$  na sequência de produção.

No exemplo da Figura 4.10 temos 7 itens, logo  $|\delta_l| = 7$ . Note que nenhum dos três lotes da subsequência desconectada ( $g(R2), f(P2), e(P3)$ ) é o primeiro item do período, portanto, são nulas as variáveis:  $\alpha_{g,R2} = \alpha_{f,P2} = \alpha_{e,P3} = 0$ . Por outro lado temos as trocas  $\gamma_{g-f,R2-P2} = 1$ ,  $\gamma_{f-e,P2-P3} = 1$  e  $\gamma_{e-g,P3-R2} = 1$ . Ao substituir estes valores nas restrições (4.7) teremos:

$$\begin{array}{lcl}
\text{Eq.(4.7)} & V_{itlmo} + |\delta_l| \cdot \gamma_{i'itlmom'o'} - (|\delta_l| - 1) & \leq V_{i'tlm'o'} \\
\text{troca } g(R2)\text{-}f(P2) & V_{g,R2} + 7 \cdot 1 - (7 - 1) & \leq V_{f,P2} \\
& \implies & V_{g,R2} \leq V_{f,P2} \quad \textcircled{\text{i.}} \\
\\
\text{troca } f(P2)\text{-}e(P3) & V_{f,P2} + 7 \cdot 1 - (7 - 1) & \leq V_{e,P3} \\
& \implies & V_{f,P2} \leq V_{e,P3} \quad \textcircled{\text{ii.}} \\
\\
\text{troca } e(P3)\text{-}g(R2) & V_{e,P3} + 7 \cdot 1 - (7 - 1) & \leq V_{g,R2} \\
& \implies & V_{e,P3} \leq V_{g,R2} \quad \textcircled{\text{iii.}}
\end{array}$$

A partir de  $\textcircled{\text{i.}}$ ,  $\textcircled{\text{ii.}}$  e  $\textcircled{\text{iii.}}$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}
V_{g,R2} + 1 \leq V_{f,P2} \leq V_{f,P2} + 1 \leq V_{e,P3} \leq V_{e,P3} + 1 \leq V_{g,R2} \\
\implies V_{g,R2} + 1 \leq V_{g,R2}, \quad \rightarrow\leftarrow.
\end{aligned}$$

Como  $V_{g,R2} \geq 0$  isso é impossível, ocasionando uma contradição ( $\rightarrow\leftarrow$ ). Assim, ao tentar voltar em um enchimento que já foi utilizado, as restrições 4.7 são violadas e, portanto, é descartada a subsequência.

### Restrições de *setup* de produção nas linhas

$$a_{il}^{II} \cdot X_{itlmo} \leq K_{lt}^{II} \cdot \left( \alpha_{itlmo} + \sum_{(i',m',o') \in \Xi^P(i,l,m,o)} \gamma_{i'itlm'o'mo} \right) \quad (4.8)$$

$$\forall l \in L, t \in T, i \in \delta_l, m \in \phi_l \cap \zeta_{(J_i)}, o \in O_t$$

As restrições (4.8) estabelecem que só tenha produção de um item, se existir preparo para ele na linha, ou seja, se o item é o primeiro ( $\alpha_{itlmo} = 1$ ) ou teve troca de algum outro para ele ( $\gamma_{i'itlm'o'mo} = 1$ ).

O lado direito das restrições (4.8) limita o tamanho do lote em relação à capacidade máxima da linha em um período ( $K_{lt}^{II}t/a_{il}^{II}$ ).

## Restrições de limite de tempo disponível de operação das linhas

$$\sum_{i \in \delta_l} \sum_{m \in \phi_l \cap \zeta_{(j_i)}} \sum_{o \in O_t} a_{il}^{II} \cdot X_{itlmo} + \sum_{i, i' \in \delta_l} b_{i'i'l}^{II} \cdot \hat{\gamma}_{i'i'tl} + \sum_{i \in \delta_l} \sum_{m \in \phi_l \cap \zeta_{(j_i)}} \sum_{o \in O_t} \sum_{(i', m', o') \in \Xi^S(i, l, m, o)} b_{i'i'l}^{II} \cdot \gamma_{i'i'tlmom'o'} \leq K_{lt}^{II} \quad \forall l \in L, t \in T \quad (4.9)$$

As restrições 4.9 asseguram que a disponibilidade de tempo da linha (capacidade) seja respeitada, tal disponibilidade inclui tanto o tempo total de produção quanto os tempos gastos em trocas. O tempo disponível da linha pode ser restrito ainda mais por uma janela de tempo (se houver) de curta duração, isto será visto mais para frente.

### 4.2.0.1 Restrições de trocas entre períodos nas linhas

#### Restrições de máximo de trocas entre períodos para cada linha

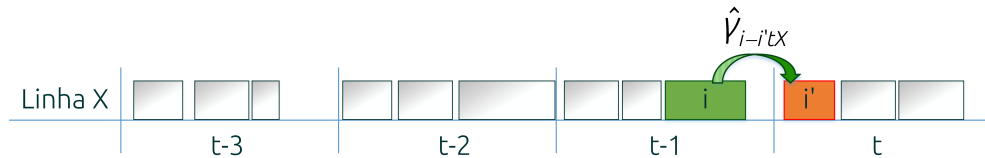
$$\sum_{i' \in \delta_l} \sum_{i \in \delta_l} \hat{\gamma}_{i'i'tl} \leq 1 \quad \forall l \in L, t \in T \quad (4.10)$$

Entre períodos, é permitida apenas uma troca de itens para cada linha de envase. Isto é garantido pelas restrições (4.10).

#### Restrições de trocas entre períodos consecutivos $t - 1$ e $t$

A Figura 4.11 apresenta as trocas controladas pelas restrições (4.11) entre períodos consecutivos  $t - 1$  e  $t$ .

FIGURA 4.11: Troca entre itens com período imediatamente anterior não ocioso.



Fonte: Elaboração própria.

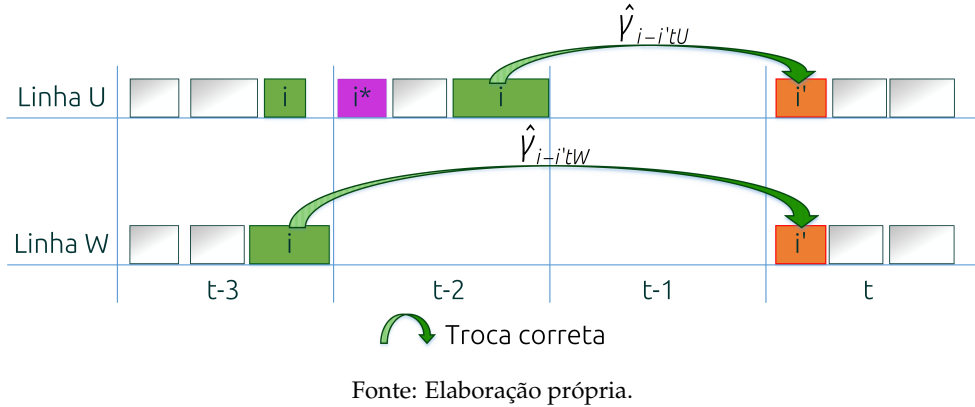
$$\hat{\gamma}_{i'i'tl} \geq \sum_{m' \in \phi_l \cap \zeta_{(j_{i'})}} \sum_{o' \in O_{(t-1)}} \beta_{i'(t-1)lm'o'} + \sum_{m \in \phi_l \cap \zeta_{(j_i)}} \sum_{o \in O_t} \alpha_{itlmo} - 1 \quad \forall l \in L, t \in T, i \in \delta_l, i' \in \delta_l \quad (4.11)$$

As restrições (4.11) estabelecem que se o item  $i$  foi o último a ser preparado em  $t - 1$  ( $\sum \beta_{i(t-1)lmo}$ ) e o item  $i'$  é o primeiro em  $t$  ( $\sum \alpha_{i'tlmo}$ ), então há troca de  $i'$  para  $i$  no início de  $t$  ( $\hat{\gamma}_{i'tl} = 1$ ). Os somatórios em  $(m', o') / (m, o)$  são necessários pois não se sabe qual é o último enchimento em  $t - 1$  nem o primeiro enchimento em  $t$  respectivamente.

### Restrições de trocas entre períodos não consecutivos

Quando há ociosidade na linha em algum período, é necessário avaliar os outros períodos para estabelecer de fato o último item configurado nela. Na Figura 4.12 estão representadas duas linhas onde existe ociosidade em períodos anteriores a  $t$ . Na linha  $U$  existem um período intermediário ocioso e na linha  $W$  dois. Note que na linha  $U$  o item  $i$  é o último em dois períodos diferentes e também é o último configurado antes do item  $i'$ .

FIGURA 4.12: Troca entre itens com ociosidade entre períodos.



Para contar a troca corretamente deve se estabelecer qual é o último item configurado antes do item atual fazendo uma busca em todos os períodos anteriores. Isto é feito com as restrições (4.12).

$$\hat{\gamma}_{i'tl} \geq \beta_{i'(t-\tau)lm'o'} + \alpha_{itlmo} - 1 - \sum_{i'' \in \delta_l} \sum_{\tau'=(t-\tau+1)}^{t-1} \sum_{m'' \in \phi_l \cap \zeta_{(J_i)}} \sum_{o'' \in O_{t'}} \alpha_{i''\tau'lm''o''}$$

$$\forall l \in L, t \in T | t > 1, \tau = 2, \dots, t, i, i' \in \delta_l, m \in \delta_l \cap \zeta_{(J_i)}, m' \in \phi_l \cap \zeta_{(J_i)}, o \in O_t, o' \in O_{(t-\tau)}$$

(4.12)

O raciocínio de operação das restrições (4.12) é similar com o da restrições (4.11). Comparando os valores de  $\alpha_{i'tlmo}$  no período atual e  $\beta_{i(t-\tau)lmo}$  para todos os períodos anteriores  $t - \tau$  para  $(\tau = 2, 3, \dots, t)$ .

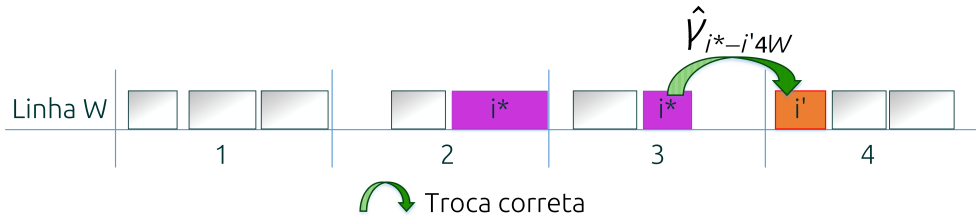
Os somatórios no termo  $\sum_{i'' \in \delta_l} \sum_{\tau'=(t-\tau+1)}^{t-1} \sum_{m'' \in \phi_l} \sum_{o'' \in O_{t'}} \alpha_{i''\tau'lm''o''}$  procuram na linha  $l$  todos os  $\alpha$  nos períodos entre  $t - \tau$  e  $t - 1$  na linha  $l$ . Ainda que o item  $i$  seja o último de algum período  $t - \tau$



anterior ( $\beta_{i(t-\tau)lmo}=1$ )), se existir algum  $\alpha = 1$  entre  $t - \tau$  e  $t - 1$ , significa que o item  $i$  não é o último antes do item  $i'$ , assim o termo inativa a restrição. Adicionalmente as restrições (4.12) evitam que a troca no início do período seja contada, erroneamente, duas vezes para a mesma dupla de produtos.

Examinemos o funcionamento conjunto das restrições (4.11) e (4.12) a seguir. Na Figura 4.13 apresenta-se o plano de produção para quatro períodos para uma linha  $W$ . No período 4 o primeiro item preparado é  $i'$ , o item  $i^*$  é o último configurado na linha nos períodos 2 e 3.

FIGURA 4.13: Exemplos para ilustrar o funcionamento conjunto das restrições (4.11) e (4.12).



Fonte: Elaboração própria.

Note que a troca é então de  $i^*$  para  $i'$  no período 4 ( $\hat{\gamma}_{i^*i'4W} = 1$ ). Analisando as restrições (4.11) e (4.12) temos:

Primeiro, examina-se o período imediatamente anterior,  $t - 1$  com as restrições (4.11):

$$Eq.(4.11) \quad \hat{\gamma}_{i^*i'tl} \geq \alpha_{i'tlmo} + \beta_{i^*(t-1)lmo} - 1$$

$$\hat{\gamma}_{i^*i'4W} \geq 1 + 1 - 1 \implies \hat{\gamma}_{i^*i'4W} \geq 1, \implies \hat{\gamma}_{i^*i'4W} = 1 \checkmark$$

Se ativa a restrição e contabiliza-se a troca  $\hat{\gamma}_{i^*i'tl}$ .

Note que o item  $i^*$  também é o último também no período 2, no entanto, as restrições (4.12) devem estar inativas para os outros períodos anteriores  $t - \tau$  e assim não contar trocas a mais. De fato:

$$Eq.(4.12) \quad \hat{\gamma}_{i^*i'tl} \geq \alpha_{i'tlmo} + \beta_{i^*(t-\tau)lmo} - 1 - \sum_{\tau'} \sum_{i''} \sum_{(m',o')} \alpha_{i''\tau'lm'o'}$$

$$\tau = 2, \quad t - \tau = 2 \quad \hat{\gamma}_{i^*i'4W} \geq 1 + 1 - 1 - 1 \implies \hat{\gamma}_{i^*i'4W} \geq 0$$

$$\tau = 3, \quad t - \tau = 1 \quad \hat{\gamma}_{i^*i'4W} \geq 1 + 0 - 1 - 2 \implies \hat{\gamma}_{i^*i'4W} \geq -2$$

Assim, efetivamente contabilizou-se a troca entre o produto  $i^*$  e  $i$  apenas no período correto.

### Restrições de medição do tempo da conexão $(m, o)$ na linha

As restrições (4.13) - (4.16) restringem os tempos em que uma linha de envase específica pode operar e as relações entre os inícios e finais das conexões.

$$\sum_{i',i \in \delta_l} \left( \max(0, Start_{it}^{II}) + b_{i'il}^{II} \right) \cdot \hat{\gamma}_{i'itl} + K_{it}^{II} \cdot \left( \sum_{i \in \delta_l | J_i \in \theta_m} \alpha_{itlmo} - 1 \right) \leq \mu_{itlmo}^s \quad \forall l \in L, t \in T, m \in \phi_l, o \in O_t \quad (4.13)$$

As restrições (4.13) estabelecem o início do primeiro lote da linha no período. Este início só pode ocorrer depois do momento  $Start_{it}^{II}$  (que dá início à janela de operação da linha) mais o tempo da troca inicial determinado pela variável  $\hat{\gamma}_{i'itl}$ . A variável  $\alpha_{itlmo}$  é utilizada para saber qual tanque / enchimento é o primeiro utilizado e determinar corretamente a variável  $\mu_{itlmo}^s$ .

No caso do valor de  $\alpha$  ser 0, a restrição sempre estará inativa. Se  $\alpha \geq 1$ , então  $\mu_{itlmo}^s \geq \sum_{i',i \in \delta_l} b_{i'i}^{II} \cdot \hat{\gamma}_{i'itl}$

$$\sum_{i \in \delta_l | J_i \in \theta_m} a_{il}^{II} \cdot X_{itlmo} + \sum_{i,i' \in \delta_l | J_i \in \theta_m \wedge J_{i'} = J_i \wedge i \neq i'} b_{ii'l}^{II} \cdot \gamma_{ii'tlmomo} \leq \mu_{itlmo}^e - \mu_{itlmo}^s \quad \forall l \in L, t \in T, m \in \phi_l, o \in O_t \quad (4.14)$$

O tempo de conexão de uma linha a um tanque / enchimento é determinado pela produção (variáveis  $X_{itlmo}$ ) e pelas trocas **dentro** desse enchimento (variáveis  $\gamma_{ii'tlmomo}$ ) enquanto a linha estiver conectada nesse tanque / enchimento. O conjunto de equações (4.14) estabelecem que a duração da conexão da linha ao enchimento  $mo$  é pelo menos o tempo de envase dos itens mais os tempos de troca na linha durante a conexão  $(m, o)$ .

$$\mu_{itlmo}^e + \sum_{i,i' \in \delta_l | J_i \in \theta_m \wedge J_{i'} \in \theta_{m'}} b_{ii'l}^{II} \cdot \gamma_{ii'tlmom'o'} + K_{it}^{II} \cdot \left( \sum_{i,i' \in \delta_l | J_i \in \theta_m \wedge J_{i'} \in \theta_{m'}} \gamma_{ii'tlmom'o'} - 1 \right) \leq \mu_{itlm'o'}^s \quad \forall l \in L, t \in T, m \in \phi_l, o \in O_t, m' \in \phi_l, o' \in O_t | (m' \neq m) \vee (m' = m \wedge o' > o) \quad (4.15)$$

Antes de uma nova conexão começar, tem que esperar o preparo da linha. As restrições (4.15) estabelecem que o início de uma conexão de uma linha a um determinado enchimento  $(m', o')$  somente pode ocorrer depois de ter-se terminado a conexão anterior  $(m', o')$  mais o tempo de troca  $(\sum b_{i'i}^{II} \cdot \gamma_{ii'tlmom'o'})$ . A parcela  $K_{it}^{II} \cdot \left( \sum_{i,i' \in \delta_l | J_i \in \theta_m \wedge J_{i'} \in \theta_{m'}} \gamma_{ii'tlmom'o'} - 1 \right)$  inativa a restrição sempre que não tenha uma troca  $\gamma_{ii'tlmom'o'}$  que o evite. Quando  $\gamma_{ii'tlmom'o'} \geq 1$  então  $\mu_{itlm'o'}^s \geq \mu_{itlmo}^e + \sum_{i,i' \in \delta_l} b_{i'i}^{II} \cdot \gamma_{ii'tlmom'o'}$ .

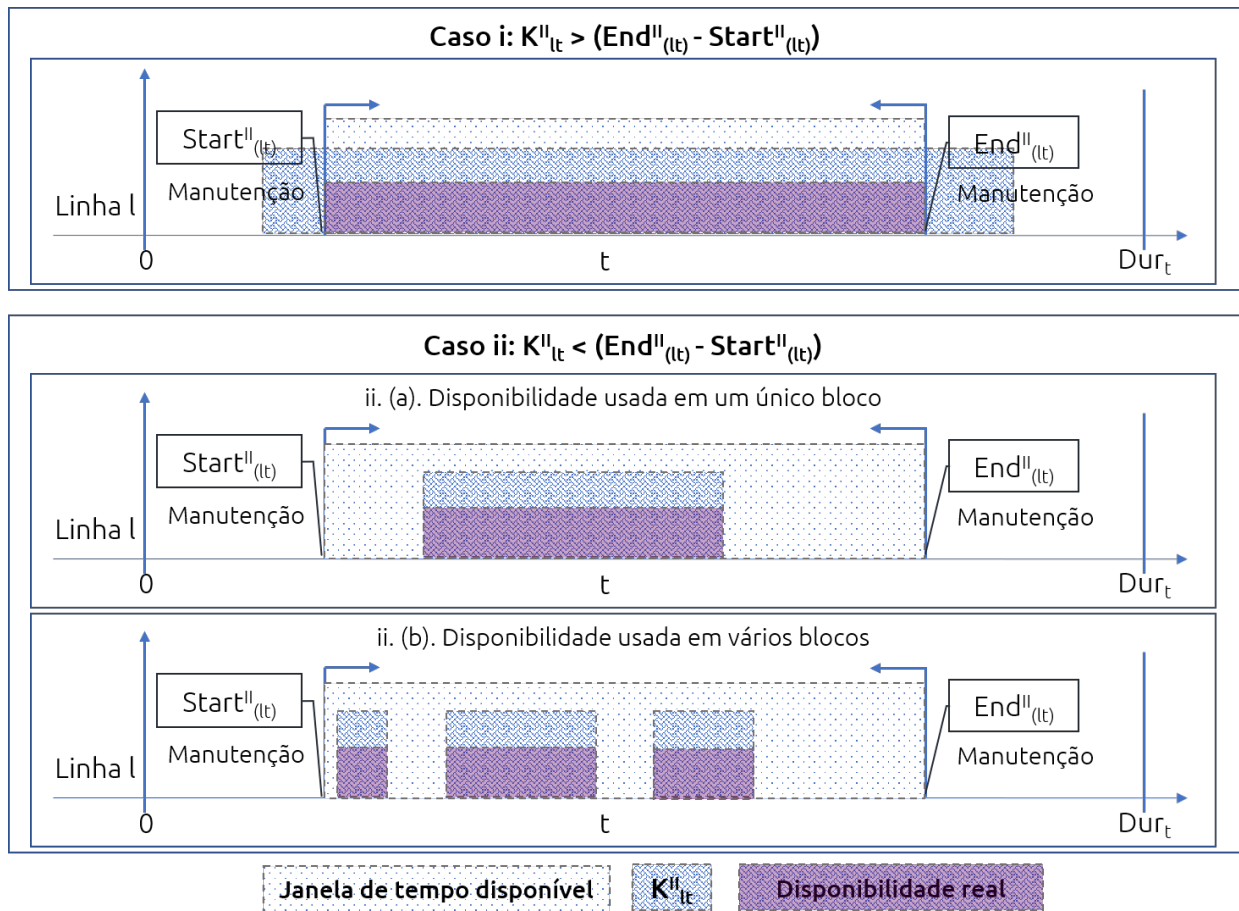
$$\mu_{itlmo}^e \leq \min(End_{it}^{II}, Dur_t) \quad \forall l \in L, t \in T, m \in \phi_l, o \in O_t \quad (4.16)$$

Por último, as restrições 4.16 limitam a duração de todas as conexões no máximo quando acabar a janela de tempo disponível.

A disponibilidade de tempo de uma linha de envase em concreto além de estar limitada pelo parâmetro  $K_{lt}^{II}$  (restrições (4.9)); também está limitada ao tempo disponível da janela de tempo.

Na Figura 4.14 se apresentam os dois casos de limitações no tempo disponível para uma linha  $l$ . Na figura são ilustradas 4 tipos de regiões que representam tempos (veja a legenda embaixo da Figura). Primeiro está a duração do período que está no eixo X de 0 até  $Dur_t$ , também aparece a janela de tempo fixada para a linha, limitada pelas setas  $\rightarrow$  e  $\leftarrow$  e representada pela cor indicada. Com uma outra cor um tom mais escuro está representado o tempo indicado pelo parâmetro  $K_{lt}^{II}$  e por último, no retângulo mais baixo e cor mais escura o tempo realmente disponível para operação da linha.

FIGURA 4.14: Limitações do tempo disponível pela janela de tempo ou pela disponibilidade  $K_{lt}^{II}$ .



Fonte: Elaboração própria.

No primeiro caso, como parâmetro  $K_{lt}^{II}$  é maior que a janela de tempo, o tempo disponível real para operação da linha está limitado pela duração da janela a  $End_{lt}^{II} - Start_{lt}^{II}$  em minutos.

No segundo caso, o tempo disponível  $K_{lt}^{II}$  cabe dentro da janela de tempo. Neste segundo caso

este tempo disponível pode ser utilizado em um único lote de produção ou produzindo vários lotes.  $K_{ll}^I$  é a soma de todos os possíveis lotes e trocas dentro da janela de tempo disponível (restrições (4.9)). No tempo restante da janela, manutenções mais rápidas podem ser executadas.

A utilização dessa disponibilidade real será determinada pelo modelo. Assim, apesar de uma linha ter disponibilidade real em um ou vários períodos, o modelo poderia determinar não utilizar a linha em determinado período, por exemplo, para otimizar trocas.

## Restrições para os tanques de preparo de xarope

### Restrições de capacidade (tanques) e homogeneidade do xarope

$$\sum_{l \in \sigma_m} \sum_{i \in \omega_j \cap \delta_l} r_{ij} \cdot X_{itlmo} \geq q_{jm}^I \cdot \sum_{j' \in \theta_m} Z_{j'jtm} \quad \forall m \in M, t \in T, j \in \theta_m, o \in O_t \quad (4.17)$$

$$\sum_{l \in \sigma_m} \sum_{i \in \omega_j \cap \delta_l} r_{ij} \cdot X_{itlmo} \leq K_{mt}^I \cdot \sum_{j' \in \theta_m} Z_{j'jtm} \quad \forall m \in M, t \in T, j \in \theta_m, o \in O_t \quad (4.18)$$

Com as restrições (4.17) e (4.18) se controlam os tamanhos mínimos e máximos do xarope produzido em determinado tanque enchimento  $m, o$ . Para isso se restringe a produção de todos os itens em todas as linhas conectadas nesse tanque / enchimento. Veja que como limitação para o lote máximo é tomada toda a capacidade do tanque.

Os somatórios  $\sum_{j' \in \theta_m} Z_{j'jtm}$  são utilizadas ao invés das variáveis  $Y_{jtm}$  pois as variáveis  $Y_{jtm}$  podem estar ativas ainda que não tenha produção do xarope  $j$ . Isto é por causa das restrições de conservação do *setup* (4.19) - (4.21), as quais fazem com que hajam variáveis  $Y$  ativas que indiquem a informação de qual foi o último sabor de xarope e marcar corretamente as trocas nos tanques.

### Restrições de conservação de estado de *setup* entre enchimentos nos tanques

$$\sum_{j \in \theta_m} Y_{jtm} \leq 1 \quad \forall m \in M, t \in T, o \in O_t \quad (4.19)$$

Para garantir que no máximo um xarope seja configurado por vez em cada tanque / enchimento são usadas as restrições (4.19).

A variável  $Y_{jtm}$  indica o estado de preparo do tanque / enchimento  $(m, o)$  para o xarope  $j$ . Se o enchimento anterior do tanque  $(m, o - 1)$ , não foi usado, isto é, foi conectado a nenhuma linha, deve-se assegurar que  $Y_{jtm} = Y_{jtm-1}$  conservando o *setup* do tanque entre os períodos. As restrições (4.20) e (4.21) garantem essa condição.

$$Y_{jtm_o} \geq Y_{jtm_{(o-1)}} - \left( \sum_{l \in \sigma_m} \sum_{i \in \delta_l | j_i \in \theta_m} \sum_{(i', m', o') \in \Xi^P(i, l, m, o)} \gamma_{i'itlm'o'm_o} + \sum_{l \in \sigma_m} \sum_{i \in \delta_l | j_i \in \theta_m} \alpha_{itlmo} \right) \quad (4.20)$$

$$\forall m \in M, t \in T, j \in \theta_m, o \in O_t | o > First_t$$

$$Y_{jtm, First_t} \geq Y_{j(t-1)m, Last_{(t-1)}} - \left( \sum_{l \in \sigma_m} \sum_{i \in \delta_l | j_i \in \theta_m} \sum_{(i', m', o') \in \Xi^P(i, l, m, First_t)} \gamma_{i'itlm'o'm, First_t} + \sum_{l \in \sigma_m} \sum_{i \in \delta_l | j_i \in \theta_m} \alpha_{itlm, First_t} \right) \quad (4.21)$$

$$\forall m \in M, t \in T, j \in \theta_m$$

As restrições (4.20) estabelecem a conservação do estado de *setup* do tanque dentro de cada período  $t$ , enquanto as restrições (4.21) estabelecem essa conservação entre os períodos, ou seja, entre o último enchimento de  $t - 1$  ( $Last_{(t-1)}$ ) e o primeiro enchimento de  $t$  ( $First_t$ ).

Os somatórios nas variáveis  $\gamma$  e  $\alpha$  checam todas os estados de *setup* para todos os itens  $i \in \delta_l$ , em todas as linhas  $l \in \sigma_m$  conectadas no tanque / enchimento  $(m, o)$ .

Assim, o termo negativo  $(\sum \gamma + \sum \alpha)$ , presente em ambas restrições, significa que nas linhas existe preparo para algum item devido às restrições (4.4), então o respectivo xarope para eles deve ser preparado no tanque / enchimento  $(m, o)$ . Assim, o estado de *setup* do tanque / enchimento  $(m, o)$  pode ou não mudar para outro xarope e a variável  $Y_{jtm_o}$  não deve necessariamente tomar o valor do enchimento anterior, portanto, o termo inativa as restrições. O valor de  $Y_{jtm_o}$  é atribuído mediante as restrições (4.22) para o devido xarope.

A forma de operação destes dois conjuntos de restrições é idêntica: se não ocorre produção de nenhum item no tanque / enchimento  $(m, o)$ , então o termo  $(\sum \gamma + \sum \alpha)$  é zero e existe transferência do estado de *setup* entre os enchimentos  $(o - 1)$  e  $o$ . No entanto, se existir produção em alguma linha de algum item na conexão tanque / enchimento  $(m, o)$ , algum  $\alpha$  ou  $\gamma$  será 1 e a restrição será inativa.

### Restrições de ligação entre xarope e itens (determinação do xarope a ser preparado)

As seguintes restrições (4.22) conectam os estados de preparo das linhas ao estado de preparo do tanque ao qual elas estão conectadas.

$$|\sigma_m| \cdot Y_{jtm_o} \geq \sum_{l \in \sigma_m} \sum_{i \in \omega_j \cap \delta_l} \alpha_{itlmo} + \sum_{l \in \sigma_m} \sum_{i' \in \delta_l} \sum_{i \in \omega_j \cap \delta_l} \sum_{(m', o') \in \Lambda^P(i', l, m, o)} \gamma_{i'itlm'o'm_o} \quad (4.22)$$

$$\forall m \in M, t \in T, j \in \theta_m, o \in O_t$$

Note que se não existir *setup* no tanque para um determinado xarope ( $Y_{jtm_o} = 0$ ), não pode ocorrer a troca na linha  $l$  para os produtos que utilizam esse xarope ( $i \in \omega_j \cap \delta_l$ ) na linha  $l$  ( $\alpha_{itlmo} = \gamma_{i'itlm'o'm_o} = 0$ ). Se houver *setup* para o xarope  $j$ , então poderá ocorrer, ou não, troca na linha para algum produto  $i$  que utilize esse xarope. Matematicamente:

$$Y_{jtm_o} = 0 \rightarrow \alpha_{itlmo} = 0 \wedge \gamma_{i'itlm'o'm_o} = 0 | \forall j, i \in \omega_j \cap \delta_l.$$

Adicionalmente, esta restrição implica que se houver um item  $i$  que tenha que ser fabricado a partir do xarope  $j$  e que esteja configurado na linha  $l$  no enchimento ( $mo$ ), no período  $t$ , o xarope  $j$  deve estar preparado no tanque para esse mesmo enchimento, isto é:

$$\alpha_{itlmo} = 1 \vee \gamma_{i'itlm'o'm_o} = 1 \rightarrow Y_{jtm_o} = 1 | \forall j, i \in \omega_j \cap \delta_l.$$

### Restrições de troca de xarope nos tanques

As restrições (4.23) - (4.27) controlam as trocas nos tanques no início de um determinado enchimento. Dado que as variáveis  $Y_{jtm_o}$  representam apenas o estado de *setup* do tanque / enchimento e não a utilização dele para envasar bebida, no caso em que o xarope do enchimento seguinte seja o mesmo que o xarope atual ( $Y_{jtm(o-1)} = Y_{jtm_o}$ ), deve-se distinguir, se realmente foi usado o xarope e deve se preparar um outro lote do mesmo sabor  $j$  ( $\implies Z_{jjtmo} = 1$ ), ou caso não tenha sido usado simplesmente houve uma transferência do estado de *setup* e, portanto, a troca não deve ser contada ( $Z_{jjtmo} = 0$ ). Assim, com as restrições (4.24) e (4.25) se controla a troca, se houver, entre xaropes **diferentes** nos tanques no início de cada enchimento. As restrições (4.26) e (4.27), por outro lado, controlam as trocas para xaropes **iguais**.

$$\sum_{j' \in \theta_m} \sum_{j \in \theta_m} Z_{j'jtm_o} \leq 1 \quad \forall m \in M, t \in T, o \in O_t \quad (4.23)$$

Para evitar que existam duas trocas simultâneas de xarope em um tanque para o mesmo enchimento, são estabelecidas as restrições(4.23).

$$Z_{j'jtm_o} \geq Y_{jtm(o-1)} + Y_{j'tm_o} - 1 \quad (4.24)$$

$$\forall m \in M, t \in T, j, j' \in \theta_m | j \neq j', o \in O_t | o > First_t$$

As restrições (4.24) controlam as trocas de xaropes **diferentes** entre enchimentos nos tanques, dentro do mesmo período  $t$ .

$$Z_{jj'tm,First_t} \geq Y_{j,(t-1)m,Last_{t-1}} + Y_{j'tm,First_t} - 1 \quad (4.25)$$

$$\forall m \in M, t \in T, j, j' \in \theta_m | j \neq j'$$

As restrições (4.25), controlam as trocas de xaropes **diferentes** entre dois períodos distintos.

$$|\sigma_m| \cdot Z_{j'tmo} \geq |\sigma_m| \cdot Y_{jtm(o-1)} + \sum_{l \in \sigma_m} \sum_{i' \in \delta_l} \sum_{i \in \delta_l \cap \omega_j} \sum_{(m',o') \in \Lambda^P(i',l,m,o)} \gamma_{i'itlm'o'mo} + \sum_{l \in \sigma_m} \sum_{i \in \delta_l \cap \omega_j} \alpha_{itlmo} - |\sigma_m| \quad (4.26)$$

$$\forall m \in M, t \in T, j \in \theta_m, o \in O_t | o > First_t$$

$$|\sigma_m| \cdot Z_{j'tm,First_t} \geq |\sigma_m| \cdot Y_{j't-1m,Last_{t-1}} + \sum_{l \in \sigma_m} \sum_{i' \in \delta_l} \sum_{i \in \delta_l \cap \omega_j} \sum_{(m',o') \in \Lambda^P(i',l,m,First_t)} \gamma_{i'itlm'o'm,First_t} + \sum_{l \in \sigma_m} \sum_{i \in \delta_l \cap \omega_j} \alpha_{itlm,First_t} - |\sigma_m|$$

$$\forall m \in M, t \in T, j \in \theta_m \quad (4.27)$$

As restrições (4.26) controlam as trocas de xaropes **iguais** entre enchimentos nos tanques, dentro do mesmo período  $t$ . Enquanto as restrições (4.27), controlam as trocas de xaropes **iguais** entre dois períodos distintos.

Os somatórios  $\sum \gamma$  e  $\sum \alpha$  presentes em ambas restrições são utilizados de forma análoga às restrições (4.20) e (4.21) para estabelecer se tem preparo em qualquer linha ( $l \in \sigma_m$ ) conectada em  $m, o$  para qualquer item que use o xarope  $j$  ( $i \in \delta_l \cap \omega_j$ ).

Note que podem haver vários  $\alpha$  e  $\gamma$  iguais a 1 (várias linhas usando aquele tanque / enchimento). Para evitar que a restrição se ative por causa disso é usado termo negativo  $|\sigma_m|$ . Veja que ele se cancela sempre que  $Y_{j'tmo} = 1$ , o que implica que  $|\sigma_m| \cdot Z \geq \sum \gamma + \sum \alpha$ . Se houver utilização do xarope então  $\sum \gamma + \sum \alpha \geq 1$  para algum (ou alguns)  $i \in \delta_l \cap \omega_j$ , então  $Z_{j'tmo} \geq 1$

A escolha do valor  $|\sigma_m|$  é por que no máximo  $|\sigma_m|$  linhas poderão se conectar naquele tanque / enchimento ( $m, o$ ) que corresponde ao máximo dos somatórios  $\sum \gamma + \sum \alpha$  ( $\sum \gamma + \sum \alpha \leq |\sigma_m|$ ). Note que o valor escolhido poderia ser qualquer  $\geq |\sigma_m|$ .

Em resumo, a troca entre xaropes **iguais** somente será contada quando, no enchimento anterior existiu preparo do xarope  $j$  ( $Y_{j'tm(o-1)} = 1$ ) e que no enchimento atual exista utilização do xarope  $j$  em qualquer das linhas ( $l \in \sigma_m$ ) para qualquer produto final ( $i \in \delta_l \cap \omega_j$ ) que o utilize ( $\implies \sum \gamma \geq 1$  ou  $\sum \alpha \geq 1$ ). Quando isto não ocorre, as restrições serão inativadas pelo termo  $|\sigma_m|$ .

## Restrições de controle de medição de tempos em tanques

O controle da medição dos tempos nos tanques é assegurado pelas restrições (4.28) - (4.32), apresentadas a seguir.

$$\sum_{j,j' \in \theta_m} Z_{jj'tmo} \leq \sum_{j,j' \in \theta_m} Z_{jj'tm,(o-1)} \quad \forall m \in M, t \in T, o \in O_t | o > First_t \quad (4.28)$$

As restrições clássicas (4.28) realizam a ordenação da utilização dos enchimentos dos tanques com fins de realizar uma correta medição dos tempos contínuos dentro do período.

$$\sum_{j,j' \in \theta_m} \left( \max(0, Start_{mt}^I) + b_{jj'm}^I \right) \cdot Z_{jj'tm,First_t} \leq \hat{\mu}_{tm,First_t}^s \quad \forall m \in M, t \in T \quad (4.29)$$

As restrições (4.29) controlam que o primeiro enchimento de cada tanque. Ele não pode ser iniciado antes do xarope ser preparado ( $Z_{jj'tmo} = 1 \implies \hat{\mu}_{tm,First_t}^s \geq b_{jj'm}^I$ ). Obviamente se deve respeitar o momento de início da janela de tempo de operação do tanque ( $Start_{mt}^I$ ). Note a semelhança destas restrições com as restrições (4.29).

$$\hat{\mu}_{tmo}^s \leq \hat{\mu}_{tmo}^e \quad \forall m \in M, t \in T, o \in O_t \quad (4.30)$$

O tempo de finalização de um lote de xarope deve ser obviamente superior ao tempo de início (4.30).

$$\hat{\mu}_{tm(o-1)}^e + \sum_{j,j' \in \theta_m} b_{jj'm}^I \cdot Z_{jj'tmo} \leq \hat{\mu}_{tmo}^s \quad \forall m \in M, t \in T, o \in O_t | o > First_t \quad (4.31)$$

As equações (4.31) asseguram que o início do próximo enchimento de um tanque somente pode começar após finalizado o enchimento anterior desse mesmo tanque mais o tempo necessário para a troca.

$$\hat{\mu}_{tm,Last_t}^e \leq \min(End_{mt}^I, Dur_t) \quad \forall m \in M, t \in T \quad (4.32)$$

As equações (4.32) garantem que o último lote de xarope preparado termine, no máximo, no fim da janela de tempo estabelecida no tanque (se houver).

Cabe lembrar que se não se especifica um momento inicial e final da janela em nenhum dos estágios, os parâmetros de início das janelas ( $Start^I$  e  $Start^{II}$ ) devem ter valor 0 e os parâmetros de finalização  $End^I$  e  $End^{II}$  devem tomar o valor da duração do período  $Dur_t$ .



### Restrições de perecibilidade

Com as restrições (4.33) evita-se a perecibilidade do xarope. Elas asseguram que o tempo de permanência do xarope no tanque / enchimento, não exceda o limite de tempo permitido ( $p_j^I$ ).

$$\hat{\mu}_{tmo}^e - \hat{\mu}_{tmo}^s \leq \sum_{j \in \theta_m} p_j^I \cdot Y_{jtmo} \quad \forall m \in M, t \in T, o \in O_t \quad (4.33)$$

### Restrições de ligação dos tempos nos dois estágios

Os tempos iniciais e finais de um enchimento são determinados pelos tempos iniciais e finais das conexões deles nas diferentes linhas. Essas relações são modeladas pelas restrições (4.34) e (4.35).

$$\hat{\mu}_{tmo}^s + K_{lt}^{II} \cdot \left( \sum_{i, i' \in \delta_l | J_i \in \theta_m} \sum_{(m', o') \in \Lambda^P(i', l, m, o)} \gamma_{i'itlm'o'mo} + \sum_{i \in \delta_l | J_i \in \theta_m} \alpha_{itlmo} - 1 \right) \leq \mu_{tmo}^s \quad \forall l \in L, t \in T, m \in \phi_l, o \in O_t \quad (4.34)$$

O conjunto de restrições (4.34) estabelece a sincronia entre os dois estágios no início de cada enchimento de tanque, estabelecendo que as linhas podem começar a produção somente se o tanque conectado está pronto, ou seja, após o início do lote no tanque.

Novamente, a parcela  $K_{lt}^{II} \cdot \left( \sum_{i, i' \in \delta_l | J_i \in \theta_m} \sum_{(m', o') \in \Lambda^P(i', l, m, o)} \gamma_{i'itlm'o'mo} + \sum_{i \in \delta_l | J_i \in \theta_m} \alpha_{itlmo} - 1 \right)$  funciona como ativador da restrição, de forma parecida às restrições (4.15) e (4.13), obrigando a iniciar somente as variáveis correspondentes àquelas linhas que utilizam o enchimento considerado.

$$\mu_{tmo}^e \leq \hat{\mu}_{tmo}^e \quad \forall l \in L, t \in T, m \in \phi_l, o \in O_t \quad (4.35)$$

Estas restrições estabelecem que o tanque deve permanecer conectado às linhas conectadas nele, até que a última linha termine o envase.

O domínio das variáveis é repetido a seguir.

$$\alpha_{itlmo}, \beta_{itlmo}, \gamma_{i'itlmom'o'}, Y_{jtmo} \in \{0, 1\} \quad (4.36)$$

$$I_{it}^+, I_{it}^-, \mu_{tmo}^s, \mu_{tmo}^e, \hat{\mu}_{tmo}^s, \hat{\mu}_{tmo}^e, V_{itlmo}, X_{itlmo} \geq 0, \quad (4.37)$$

$$\hat{\gamma}_{i'itl}, Z_{jj'tmo} \in [0, 1] \quad (4.38)$$

Note que, embora, as variáveis  $\hat{\gamma}_{i'itl}$  e  $Z_{jj'tmo}$  assumam apenas valores 0 ou 1; no seu domínio,

elas são relaxadas ao intervalo real  $[0,1]$ . A razão é que a função objetivo (4.1) e às equações (4.11)-(4.12) e (4.24)-(4.27) respectivamente, restringem as variáveis mencionadas, as quais tomarão os valores extremos desse intervalo, ou seja, 0 ou 1.

Também vale a pena salientar que as restrições (4.22), (4.34) e (4.35) são as responsáveis pela ligação entre os dois estágios de produção.

Para ajudar o leitor a ter uma visão de todo o modelo, no apêndice A é apresentada a formulação matemática da proposta.

A respeito do número de variáveis e restrições, é possível calcular estas quantidades mediante as cardinalidades dos conjuntos primários e secundários apresentados no início da seção 4.2.

Na Tabela 4.1 estão as expressões para cálculo do número de variáveis. Na primeira coluna aparece o tipo de variável, sendo 3 as categorias: binárias (fila **B**), reais positivas não restritas (fila **R+**) e reais positivas restritas (fila **R+ restr.**).

**TABELA 4.1:** Expressões para o cálculo do número de variáveis para qualquer instância do SMMRPM.

Tipo	Variáveis	Quantidade
<b>B</b>	$\alpha_{itlmo}, \beta_{itlmo},$ $\gamma_{iitlmo}, \gamma_{iitlmo}, Y_{jtmo}$	$ T  \left[ 2 L  \sum_{l \in L} \sum_{i \in \delta_l} \sum_{t \in T}  \delta_l   \phi_l \cap \zeta_{(l_i)}   O_t  +  M  \sum_{m \in M} \sum_{t \in T}  \theta_m   O_t  \right.$ $\left. +  L  \sum_{l \in L} \sum_{i \in \delta_l} \sum_{m \in \phi_l \cap \zeta_{(l_i)}} \sum_{t \in T} \sum_{o \in O_t}  \delta_l   \phi_l \cap \zeta_{(l_i)}   \Xi^s(i, l, m, o)   O_t  \right]$
<b>R+</b>	$I_{it}^+, I_{it}^-, \mu_{itmo}^s, \mu_{itmo}^e,$ $\hat{\mu}_{itmo}^s, \hat{\mu}_{itmo}^e, V_{itmo}, X_{itmo}$	$ T  \cdot \left[ 2 N_i  + 2 L  \cdot \sum_{l \in L} \sum_{t \in T}  \phi_l   O_t  + 2 M  \cdot \sum_{t \in T}  O_t  + 2 L  \cdot \sum_{l \in L} \sum_{i \in \delta_l} \sum_{t \in T}  \delta_l   \phi_l \cap \zeta_{(l_i)}   O_t  \right]$
<b>R+Restr.</b>	$\hat{\gamma}_{iitl}, Z_{jijtmo}$	$ T  \cdot \left[  L  \cdot \sum_{l \in L}  \delta_l ^2 +  M  \cdot \sum_{m \in M} \sum_{t \in T}  \theta_m ^2  O_t  \right]$

Fonte: Elaboração própria.

A Tabela 4.2 apresenta expressões para o cálculo do número de restrições, na primeira coluna é dado o grupo das restrições, a restrição é dada na segunda coluna (**Res.**) e a expressão para o cálculo do número de restrições de cada tipo é apresentado na terceira coluna.

TABELA 4.2: Expressões para o cálculo do número de restrições para qualquer instância do SMMRPM.

Grupo	Res. Quantidade
Balanco de fluxo de estoque	(4.2) $ T  N_I $
Sequenciamento em linhas	(4.3) $ T  L $
	(4.4) $ T  L  \sum_{l \in L} \sum_{i \in \delta_l} \sum_{t \in T}  \delta_l   \phi_l \cap \zeta_{(J_i)}   O_t $
	(4.7) $ T  L  \sum_{l \in L} \sum_{i \in \delta_l} \sum_{m \in \phi_l \cap \zeta_{(J_i)}} \sum_{t \in T} \sum_{o \in O_t}  \delta_l   \phi_l \cap \zeta_{(J_i)}   \Xi^S(i, l, m, o)   O_t $
Setup de produção nas linhas	(4.8) $ T  L  \sum_{l \in L} \sum_{i \in \delta_l} \sum_{t \in T}  \delta_l   \phi_l \cap \zeta_{(J_i)}   O_t $
Limite de tempo disponível de operação linhas	(4.9) $ T  L $
Trocas entre períodos nas linhas	(4.10) $ T  L $
	(4.11) $ T  \sum_{l \in L}  \delta_l ^2$
	(4.12) $( T  - 1)( T  - 2) L  \sum_{l \in L} \sum_{i, i' \in \delta_l} \sum_{t \in T} \sum_{\tau=2}^t  \delta_l ^2  \phi_l \cap \zeta_{(J_i)}   \phi_l \cap \zeta_{(J_{i'})}   O_t   O_{t-\tau} $
Medição do tempo da conexão na linha	(4.13) $ T  L  \sum_{l \in L} \sum_{t \in T}  \phi_l   O_t $
	(4.14) $ T  L  \sum_{l \in L} \sum_{t \in T}  \phi_l   O_t $
	(4.15) $ T  L  \sum_{l \in L} \sum_{t \in T}  \phi_l ^2  O_t ^2$
	(4.16) $ T  L  \sum_{l \in L} \sum_{t \in T}  \phi_l   O_t $
Lote mínimo e capacidade do tanque	(4.17) $ T  M  \sum_{m \in M} \sum_{t \in T}  \theta_m   O_t $
	(4.18) $ T  M  \sum_{m \in M} \sum_{t \in T}  \theta_m   O_t $
Conservação de estado de setup	(4.19) $ T  M  \sum_{t \in T}  O_t $
	(4.20) $ T  M  \sum_{m \in M} \sum_{t \in T}  \theta_m  ( O_t  - 1)$
	(4.21) $ T  M  \sum_{m \in M}  \theta_m $
Ligação entre xarope e itens	(4.22) $ T  M  \sum_{m \in M} \sum_{t \in T}  \theta_m   O_t $
Trocas de xarope nos tanques	(4.23) $ T  M  \sum_{t \in T}  O_t $
	(4.24) $ T  M  \sum_{m \in M} \sum_{t \in T}  \theta_m  ( \theta_m  - 1)  O_t  ( O_t  - 1)$
	(4.25) $ T  M  \sum_{m \in M}  \theta_m  ( \theta_m  - 1)$
	(4.26) $ T  M  \sum_{m \in M} \sum_{t \in T}  \theta_m  ( O_t  - 1)$
	(4.27) $ T  M  \sum_{m \in M}  \theta_m $
Medição de tempos em tanques	(4.29) $ T  M $
	(4.30) $ T  M  \sum_{t \in T}  O_t $
	(4.31) $ T  M  \sum_{t \in T} ( O_t  - 1)$
	(4.32) $ T  M $
Perecibilidade	(4.33) $ T  M  \sum_{t \in T}  O_t $
Ligação dos tempos nos dois estágios	(4.34) $ T  L  \sum_{l \in L} \sum_{t \in T}  \phi_l   O_t $
	(4.35) $ T  L  \sum_{l \in L} \sum_{t \in T}  \phi_l   O_t $

Fonte: Elaboração própria.

A seguir são explicadas de forma ilustrativa mediante uma instância pequena, as variáveis do modelo SMMRPM e sua colocação para elaboração de planos de produção.

### 4.3 Instância ilustrativa

A seguir é apresentada uma instância ilustrativa, denominada instância FL1, para ilustrar as variáveis e o plano de produção ótimo obtido do modelo SMMRPM. O exemplo conta com 7 itens finais ( $|N_I| = 7$ ) feitos em 3 linhas de produção ( $|L| = 3$ ), a partir de 2 xaropes diferentes ( $|N_J| = 2$ ), podendo ser preparados em 1 tanque de ( $|M| = 1$ ), podem ser feitos 2 enchimentos para o tanque por período ( $O_t$ ), com 3 períodos ( $|T| = 3$ ), ou seja, um total global de 6 enchimentos possíveis no horizonte de planejamento ( $|O| = 6$ ).

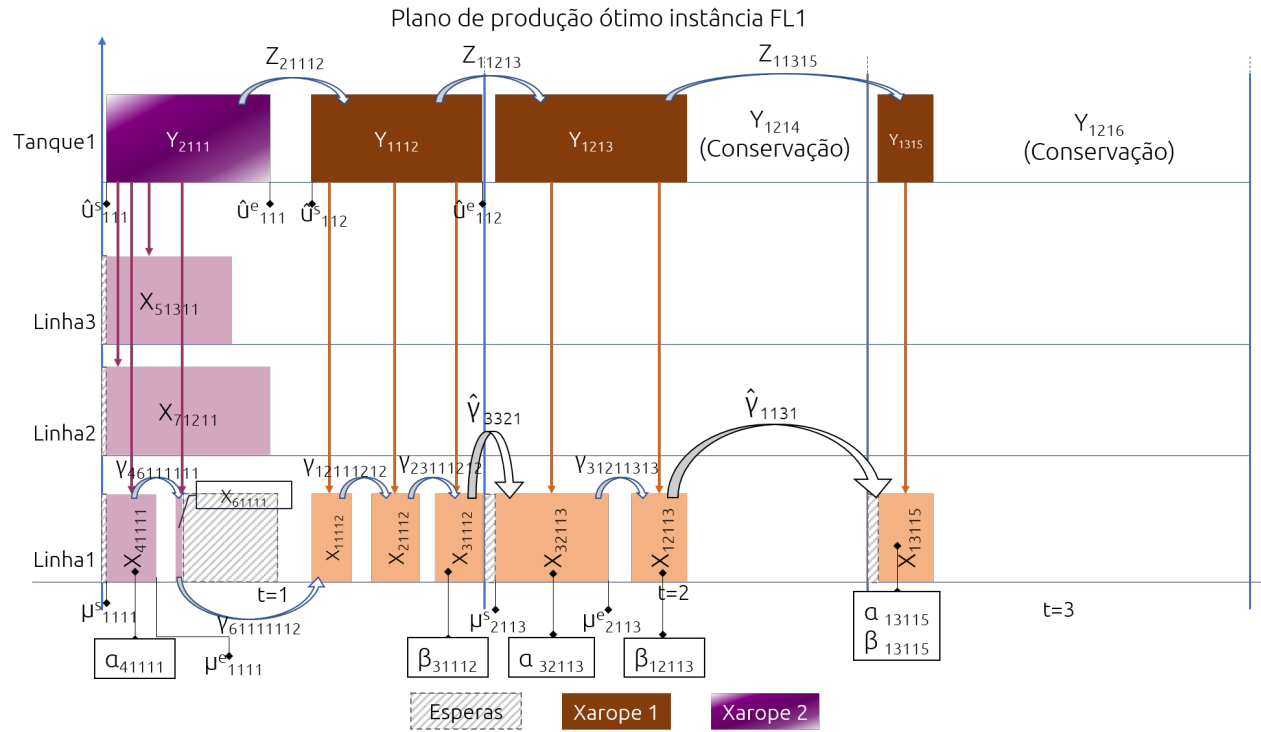
A partir do xarope 1 podem ser feitos os itens 1, 2 e 3 ( $\omega_1 = \{1, 2, 3\}$ ), e a partir do xarope 2, os itens 4, 5, 6 e 7 ( $\omega_2 = \{4, 5, 6, 7\}$ ).

Qualquer das 3 linhas pode se conectar a qualquer tanque ( $\sigma_1 = \{1, 2, 3\}$ ). Também, qualquer linha pode envasar qualquer um dos 4 itens ( $\delta_1 = (\text{itens})\{1, 2, 3, 4\}$ ) e o tanque pode armazenar qualquer dos dois xaropes ( $\theta_1 = (\text{xaropes})\{1, 2\}$ ).

A capacidade do tanque é 10000 L, a duração do período ( $Dur_t$ ) é 3000 min e a disponibilidade das linhas 2 e 3 está limitada a 1440 min durante o primeiro período. Não há limitações de janelas de tempo em nenhum dos estágios produtivos, ou seja,  $Start^I = Start^{II} = 0$  e  $End^I = End^{II} = Dur_t$ . Os outros parâmetros encontram-se no apêndice C, onde são apresentados os dados da instância aqui relatada.

A Figura 4.15 apresenta um plano de produção possível para este exemplo. No eixo horizontal aparecem os dois períodos e no eixo vertical as linhas 1, 2 e 3 e o tanque. Cada retângulo das linhas indica a produção de um lote. Cada um dos retângulos do tanque indica o xarope que está sendo preparado ou o estado de *setup* conservado quando o lote não foi utilizado, nesse caso o retângulo não tem recheio.

FIGURA 4.15: Plano de produção ilustrativo para FL1.



Fonte: Elaboração própria.

TABELA 4.3: Volumes de produção do plano mostrado para a instância IP1.

Lote	Produção	Lote	Produção	Lote	Produção	Lote	Produção
X <sub>11112</sub>	10577.00	X <sub>41111</sub>	6482.00	X <sub>51311</sub>	985.00	X <sub>13115</sub>	14638.00
X <sub>21112</sub>	12603.00	X <sub>61111</sub>	2186.00	X <sub>12113</sub>	14596.00		
X <sub>31112</sub>	6298.00	X <sub>71211</sub>	1284.00	X <sub>32113</sub>	14797.00		

Fonte: Elaboração própria.

Nesse plano são apresentadas algumas das variáveis da solução final, por exemplo, os valores  $\alpha_{itlmo}$  ativos, isto é, cujo valor é 1, e que representam as configurações no início de cada período para cada linha. Note que existe somente um  $\alpha = 1$  para cada linha em cada período conforme às restrições (4.3). Se apresentam as trocas entre os produtos para as linhas dentro do período ( $\gamma_{ii'tlmom'o'}$ ) e entre períodos ( $\hat{\gamma}_{ii'tl}$ ), e as trocas entre os xaropes para os tanques ( $Z_{jj'tmo}$ ). A quantidade a ser produzida está dada pela variável  $X_{itlmo}$ . Estas quantidades são apresentadas na tabela 4.3. Nos tanques, a quantidade de xarope produzida depende das variáveis  $X$  e, se o xarope está configurado nesse enchimento nesse tanque ou não (denotado pela variável de estado de *setup*  $Y_{jtmo}$ ). Os termos  $\hat{\mu}_{tmo}^s$  e  $\hat{\mu}_{tmo}^e$  marcam os tempos inicial e final respectivamente do enchimento  $mo$  no período  $t$  e os termos  $\mu_{ltmo}^s$  e  $\mu_{ltmo}^e$ , os tempos inicial e final na linha que usa o enchimento  $mo$  no período  $t$ .

No exemplar, a sequência de produção da primeira linha 1 (L 1) para o primeiro período é: primeiro, produzir 10577 unidades do produto 4 conectada ao tanque no seu primeiro enchimento ( $mo$ ) = 11. A variável  $\alpha_{i=4,t=1,l=1,m=1,o=1} = 1$  indica que esse é o primeiro lote da linha. Logo é feita uma troca para o produto 6 mantendo a conexão ao mesmo tanque / enchimento (11); a variável ( $\gamma_{i=4,i'=6,t=1,l=1,m=1,o=1,m'=1,o'=1}$ ) indica essa troca. A quantidade produzida desse item é 62.5 unidades. Logo, é feita uma troca para o produto 1 no enchimento 2 do tanque indicada pela variável ( $\gamma_{i=6,i'=1,t=1,l=1,m=1,o=1,m'=1,o'=2}$ ) (nova conexão). O lote é de 10577 unidades ( $X_{11112} = 10577$ ). Logo são feitos com essa mesma conexão (12), em sequência os itens 2 ( $X_{21112} = 12603$ ) e 3 ( $X_{31112} = 6298$ ), trocas ( $\gamma_{12111212}$ ) e ( $\gamma_{23111212}$ ) respectivamente.

O lote do item 3 é o último da linha 1 no período 1. A variável  $\beta_{i=3,t=1,l=1,m=1,o=2}$  registra esse último lote. Para continuar com a produção do próximo período se configura o primeiro lote  $\alpha_{32113}$  que corresponde ao produto 3, e a troca do último produto do período anterior para esse produto ( $\hat{\gamma}_{i=3,i'=3,t=2,l=1}$ ). No segundo período são produzidas 14797 unidades do item 3 quando a linha está conectada ao enchimento 3 do tanque ( $X_{32113} = 14797$ ) e 14596 unidades do item 1 na mesma conexão ( $X_{12113} = 14596$ ), com uma única troca dentro do período (sendo ela do item 3 para o item 1 ( $\gamma_{31211313} = 1$ )). O item 1 é o último do período, portanto a variável  $\beta_{12113} = 1$ , registrando tal evento.

Nos tanques as variáveis  $Y_{jtmo}$  indicam o estado de *setup* do xarope  $j$ . Esse estado de *setup* é conservado se não se preparar nenhum xarope no enchimento, tal é o caso das variáveis  $Y_{1214}$  e  $Y_{1216}$  (lembra as restrições (4.20) e (4.21)). As trocas entre xaropes no início de cada enchimento são estabelecidas pelas variáveis  $Z_{jj'tmo}$  note que quando existe conservação do estado de *setup* sem usar o xarope, a troca não é contabilizada. As variáveis  $\hat{\mu}_{tmo}^s$  e  $\hat{\mu}_{tmo}^e$  indicam o início e final, respectivamente, do lote  $mo$ . Note que em todos os casos o tanque permanece disponível até a última linha conectada terminar a produção.

## ANÁLISE DA APLICAÇÃO DO SMMRPM PARA SOLUÇÃO DE SITUAÇÕES PRÁTICAS

---

**A** fim de mostrar o potencial de aplicação e a flexibilidade do modelo proposto em variadas situações práticas, neste capítulo são detalhadas as programações da produção de instâncias que representam diferentes plantas de produção.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: primeiro são descritos os cenários estudados e as instâncias utilizadas para cada, depois (seções 5.2-5.7) são apresentados e analisados os planos de produção para cada situação de acordo com a instância analisada. Depois, é analisado o caso da dedicação dos tanques às linhas (seção 5.8) e também é apresentada uma análise comparativa do modelo proposto com o modelo F1 utilizando as instâncias E (FERREIRA *et al.*, 2012). Finalmente se expõem questões sobre o desempenho computacional do modelo, com as instâncias utilizadas na seção 5.9.

### 5.1 Casos analisados e instâncias utilizadas

O potencial do modelo para representar diversos contextos práticos, será analisado mediante a solução de instâncias que representam tais cenários. Os casos abordados são (em ordem):

- i. Existência de um único tanque suprindo todas as linhas, algumas linhas com disponibilidade de tempo para operação reduzida (parâmetro  $K_{it}^{II}$ ) (Instância de referência para geração das demais FL).
- ii. Existência de um xarope altamente perecível.
- iii. Limitações nas janelas de tempo disponível para produção em ambos estágios.
- iv. Mistura das situações descritas acima: perecibilidade, janelas de tempo e disponibilidade reduzida de algumas linhas.
- v. Redução dos custos de trocas em ambos estágios para priorização do dimensionamento sobre o sequenciamento.
- vi. Caso dois tanques com capacidades iguais.
- vii. Caso dois tanques com capacidades diferentes.
- viii. Dedicção de tanques à linhas de envase.

Para os casos i. - v. devido à falta de dados disponíveis foram geradas instâncias para representá-los. Este grupo de instâncias, denominado instâncias FL, foram baseadas nos dados das instâncias I (FERREIRA *et al.*, 2012), provenientes de dados reais.

No caso da dedicação de linhas a tanques, foram utilizadas as instâncias E (FERREIRA *et al.*, 2012) da literatura, também baseadas em dados reais.

De forma resumida, as instâncias estudadas são:

- Instância de referência (FL1): Um único tanque de 10000L, 2 linhas de produção, 3 períodos com capacidade de 3000 minutos, 7 itens, 2 sabores, linhas 2 e 3 com disponibilidade reduzida no primeiro período (os dados da instância FL1 podem ser conferidos no Apêndice C). Não há janelas de tempo nesta instância. A perecibilidade dos dois sabores é de 36 horas.
- Perecibilidade (FL2): Igual que instância FL1, com a perecibilidade do xarope 1 reduzida para 800 minutos (13.33h).
- Janelas de tempo de operação:
  - FL3: Instância FL1 com início da operação da linha 2 no minuto 1000 para o primeiro período.
  - FL4: Instância FL1 com início da operação da linha 2 no minuto 200 e fim no minuto 1200 para o primeiro período.
  - FL5: Instância FL1 com início da operação do tanque no minuto 800 e fim no minuto 2800 para o primeiro período.
- Disponibilidade de tempo de operação reduzida, perecibilidade e janelas de tempo (FL6): Instância FL1 com a perecibilidade do xarope 1 reduzida para 800 minutos (13.33h), início da operação do tanque no minuto 500 e fim no minuto 2800 para o primeiro período, início de operação da linha no minuto 800 e fim no minuto 1800 para o primeiro período.
- Priorização do dimensionamento (FL7): Instância FL1 com custos de troca nos dois estágios reduzidos (dividindo cada custo pelo maior de todos em cada estágio, o maior custo passou a ser \$ 1 e os outros frações da unidade, antes o maior das linhas era de \$ 600 e dos tanques \$ 730).
- Dois tanques:
  - (FL8): Instância FL1, o tanque de 10000 L foi substituído por dois tanques de 5000 cada.
  - (FL9): Instância FL8, a capacidade dos tanques agora é de 7000 L para o tanque 1 e 3000L para o tanque 2.



- (FL10): Instância FL9, com início da operação do tanque 1 no minuto 500 e fim no minuto 2800 para o primeiro período, início de operação da linha no minuto 800 e fim no minuto 1800 para o primeiro período e limite de perecibilidade do xarope 1 de 800 min(13.3h).
- Linhas dedicadas a tanques (instâncias E (FERREIRA *et al.*, 2012)):
  - (E1-E7): 2 tanques e 2 linhas de produção, 3 períodos com 2400 min de capacidade cada, 4 itens, 2 sabores. Não se consideram custos de troca no primeiro estágio (os dados da instância E1 podem ser conferidos no Apêndice D).
  - (E8-E14): Instâncias E1-E7, com capacidade dos períodos reduzida para 300 min.
  - (E15-E28): Consideram custos de troca entre itens iguais e o tempo de trocar o xarope 1 para ele mesmo foi mudado de 0 para 180 min:
    - \* (E15-E21) com capacidades reduzidas para 300 min (similares a (E8-E14)).
    - \* (E22-E28) com capacidades normais similares às instâncias (E1-E7).

Os testes computacionais foram realizados em uma máquina com 16 Gb de memória RAM e um processador Intel Core i7 a 3.6 GHz. Foi usada a linguagem de programação algébrica AMPL (FOURER; GAY; KERNIGHAN, 2003) para facilitar a interação entre o modelo, os dados e o *solver*. Para resolver as instâncias está sendo utilizado o pacote de otimização CPLEX (ILOG IBM, 1988).

Uma análise do desempenho computacional do modelo com as instâncias utilizadas pode ser consultada na seção 5.9 onde também são apresentados os tempos gastos e os *gaps* finais de cada instância.

A seguir são analisadas as respostas do modelo proposto para cada uma das situações práticas expostas acima. Lembrando que, no caso das instâncias com os tanques dedicados às linhas de envase (instâncias E), é feita também uma análise comparativa com o modelo F1 (FERREIRA *et al.*, 2012).

Cabe salientar que também foi feita uma comparação entre o modelo SMMRPM e o modelo SITLSP no apêndice B. No entanto, a pesar das modificações feitas em cada formulação, tal comparação não foi completamente possível devido às diferenças aprofundadas entre as formulações e os problemas tratados por ambos modelos. Análises mais detalhadas e demoradas devem ser feitas para adequar ambos modelos e poder realizar a comparação de tal forma que ambas formulações representem o mesmo problema.

## 5.2 Caso de referência: instância FL1

A instância FL1 será utilizada nessa seção como referência para comparação entre diferentes situações práticas. Nesta instância é discutido o impacto de haver um único tanque suprindo várias linhas de produção.

A instância FL1 possui 7 itens que estão agrupados em duas (2) famílias de sabores, com o sabor 1 são feitos os itens 1, 2 e 3, e com o xarope 2, são feitos os itens 4, 5, 6 e 7. A demanda dos itens, os tempos de troca, custos de estoque e atraso, os tempos de produção foram baseados na instância I1 do trabalho de Ferreira *et al.* (2012).

Os custos de troca nos dois estágios são proporcionais aos respectivos tempos de troca (tempo de troca  $\times$  \$ 2).

A capacidade do tanque é 10000 L e pode suprir qualquer uma das três linhas de produção da planta. O tanque pode armazenar qualquer um dos dois sabores e qualquer linha também pode envasar qualquer um dos 7 itens. São permitidos dois enchimentos ( $|O_t| = 2 \forall t \in T$ ). O lote mínimo de qualquer xarope corresponde a um oitavo da capacidade total do tanque, ou seja, 1125 L.

Apenas para as linhas 2 e 3 no primeiro período a disponibilidade é reduzida para 1440 min ( $K_{21}^{II} = K_{31}^{II} = 1440$ ). O tempo restante do período 1 dessas linhas pode ser utilizado para manutenção. No resto dos períodos, e para a linha 1, o tempo disponível é em geral, 3000 minutos ( $Dur_t = K_{1t}^{II} = 3000 \forall t \in T$ ,  $K_{2t}^{II} = K_{3t}^{II} = 3000 \forall t \in T | t > 1$ ),

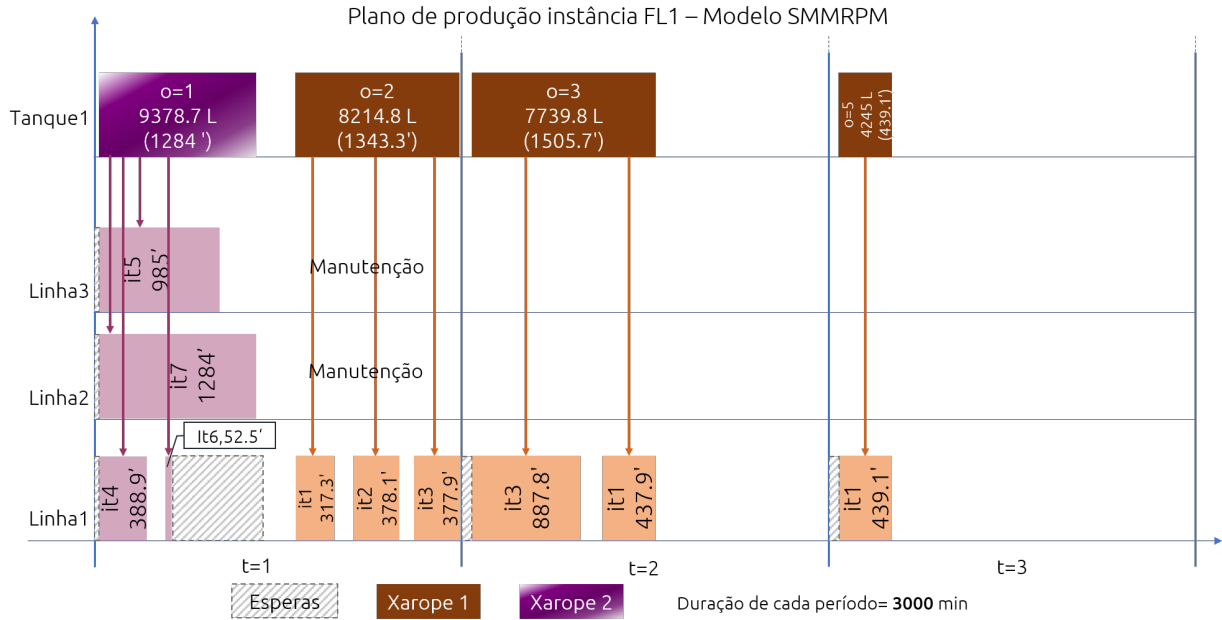
Nesta instância não foi definida janela de tempo de operação para nenhum tanque/linha em nenhum período, logo o intervalo de operação de todas as linhas e o tanque começa no minuto 0 e acaba no minuto 3000. Os outros dados da instância podem ser consultados no Apêndice C.

O plano ótimo obtido mediante o modelo SMMRPM para a instância FL1 (tempo de solução 64.66s) está apresentado na Figura 5.1. Cada retângulo no estágio do tanque representa um lote de xarope. Dentro do quadro se apresenta o enchimento  $o$  que foi utilizado para aquele lote, a quantidade de xarope produzido em litros e a duração do xarope no tanque para esse lote em minutos. Nas linhas cada quadro simboliza também um lote, a informação mostrada indica o tipo de item e o tempo de produção gasto para esse lote em minutos, caso estas informações não caibam dentro do retângulo, elas são apresentadas em um retângulo fora, ligado ao retângulo da representação do lote mediante uma linha, por exemplo, veja o lote de item 6 da linha 1 no primeiro período com uma duração de 52.5 minutos. As esperas de linhas e tanques estão salientadas com um retângulo hachurado.

Como os lotes da Figura 5.1 estão dados em unidades de tempo, lotes pequenos em tempo podem significar grandes quantidades dependendo da velocidade da linha. Por exemplo, o lote

do item 4 corresponde a 6482 unidades produzidas no entanto, o lote do item 7, aparentemente maior, representa somente uma quantidade produzida de apenas 1284 unidades.

FIGURA 5.1: Plano de produção ótimo para instância FL1, obtido com o modelo SMMRPM.



Fonte: Elaboração própria.

O custo total do plano é \$ 3126.22 desagregado em: custo de estoques de \$ 326.22, custo por trocas no tanque de \$ 1060.00 e custo por trocas nas linhas de 1740.00. Note que as linhas 2 e 3 não geram custo por trocas, uma vez que o custo de trocas entre itens iguais é zero e adicionalmente elas são utilizadas somente uma vez para um único item em todo o horizonte de planejamento.

No primeiro enchimento utilizado do tanque do primeiro período é quase atingida a capacidade (93.79%) e aproveitada para realizar toda a produção do xarope 2, para satisfazer toda a demanda dos itens 4, 5, 6 e 7. Como é natural o excesso de produção dos itens finais foi convertido em estoque que é utilizado para satisfazer a demanda dos períodos futuros. Pode-se conferir as quantidades produzidas de cada item em cada período na Tabela 5.1 e as quantidades de estoques de cada item em cada período na Tabela 5.2. Na primeira coluna das tabelas 5.1 e 5.2 são apresentados os 7 itens, e nas colunas seguintes as produções e estoques individuais totais por período respectivamente. O atraso da produção para este plano é 0 em todos os períodos.

O segundo enchimento do período 1 também foi bastante aproveitada com a produção de 8214.8 L de xarope 1, que correspondem a 82,15% da capacidade do tanque de 10000 L.

TABELA 5.1: Produção total por item e período (unidades), do plano da Figura 5.1.

Itens	Período		
	1	2	3
1	10577.00	14596.00	14638.00
2	12603.00	0.00	0.00
3	6298.00	14797.00	0.00
4	6482.00	0.00	0.00
5	985.00	0.00	0.00
6	2186.00	0.00	0.00
7	1284.00	0.00	0.00

Fonte: Elaboração própria.

TABELA 5.2: Estoques por item e período, do plano da Figura 5.1.

Itens	Período		
	1	2	3
1	0.00	0.00	0.00
2	10047.00	5020.00	0.00
3	0.00	7329.00	0.00
4	4000.00	4000.00	0.00
5	1567.00	773.00	0.00
6	4460.00	2288.00	0.00
7	1560.00	800.00	0.00

Fonte: Elaboração própria.

Apenas no período 1 são utilizadas as linhas 2 e 3, que envasam com essa primeira conexão os item 7 e 5 respectivamente.

Pode ser observado que trocar os lotes dos itens 5 e 7 entre as linhas 2 e 3 não altera o custo. Em outras palavras, fabricar o lote do item 5 na linha 2 e o lote do item 7 na linha 3 descreveria um plano alternativo equivalente ao descrito na Figura 5.1, uma vez que as velocidades dessas linhas são idênticas.

Veja que no plano obtido, o tempo para as possíveis manutenções das linhas 2 e 3 foi programado no fim do período 1, para aproveitá-las no esvaziamento do lote de xarope 2, que é feito precisamente no início do período. Limitando a janela de operação da(s) linha(s) ou do(s) tanque(s) pode-se obrigar à manutenção ocorrer em momentos específicos dentro do período, como se verá mais para frente.

No resto do horizonte de planejamento são fabricados somente itens de sabor 1, e é utilizada apenas a linha 1 para tal fim. Esta 'pseudo dedicação' do tanque para uma única linha, tem sua explicação na minimização do custo de trocas, os quais são significativamente altos em comparação com os outros parâmetros de custo. A linha 2 somente produz o item 7, e a linha 3 o item 5, nos dois casos uma única vez em todo o horizonte de planejamento, e daí não é gerado

nenhum custo de troca nessas linhas.

Segundo o plano obtido, é mais barato produzir todos os itens de sabor 2 e gerar estoque de cada um deles para satisfazer a demanda no resto do horizonte de planejamento (custo de estoque \$ 112 (item 4) + \$18.02 (item 5) + \$ 20.44 (item 6) + \$ 21.24 (item 7) = \$ 171.7), que gerar a troca do xarope 1 para o 2 em períodos posteriores no tanque (custo \$ 640). Novamente este comportamento pode dever-se principalmente à minimização do custo de trocas no tanque.

Aumentar o número de sabores/itens, com um único tanque para suprir todas as linhas poderia implicar em esperas por parte de todas as linhas. Isto também irá depender, obviamente, dos tempos de preparo dos xaropes e a velocidade para o envase dos itens.

A respeito da sincronia, veja como o plano obtido do modelo SMMRPM respeita os tempos de preparo das linhas e do tanque. Por exemplo, no primeiro lote do primeiro período 1, existe uma espera de 40 min em todas as linhas para o tanque ficar pronto. Nos períodos 2 e 3, também se repetem estas esperas no início de cada período já que o tanque demora mais para ser preparado que a linha 1 que é a única utilizada nesses períodos.

Existe uma espera da linha 1 de 742.6 min, antes dela começar o preparo do lote de item 1. Esta espera ocorre pois o tanque está ocupado nesse tempo suprindo as linhas 2 e 3 que são mais lentas que a linha 1. Note também que o preparo da linha poderia ser adiantado e a espera estar depois do tempo de preparo da linha, isto não afeta o plano de produção já que nas linhas não existe precibilidade.

### 5.3 Impacto da precibilidade no plano de produção

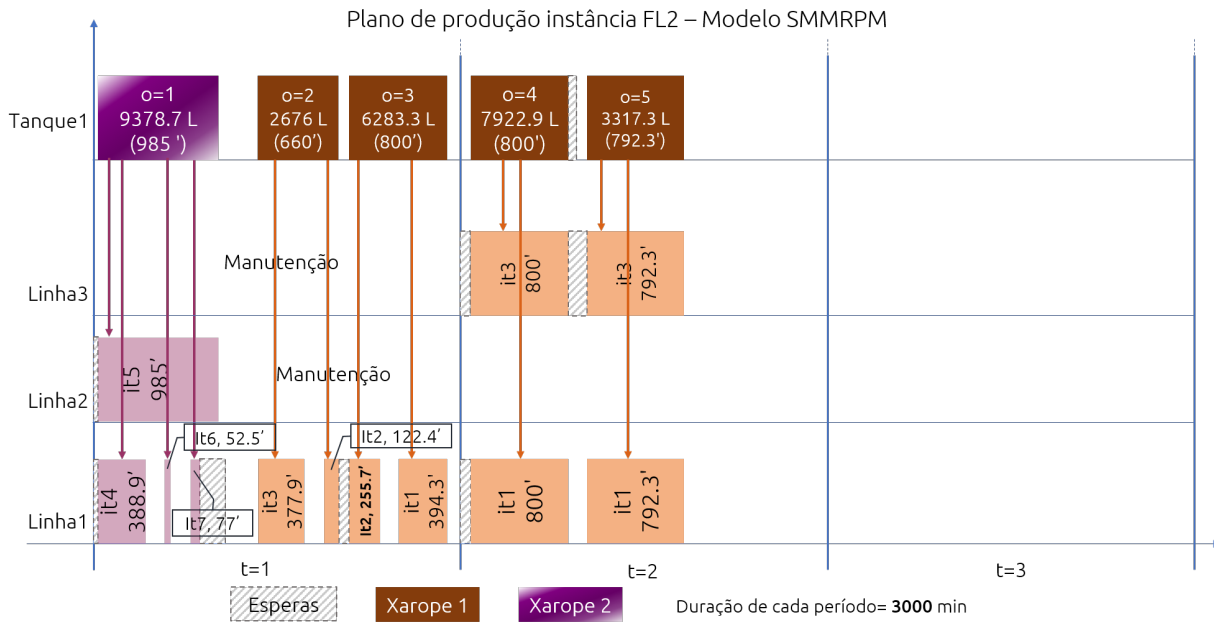
No plano descrito na Figura 5.1, os xaropes eram pouco precíveis, podendo ficar nos tanques até 36, então não afetaram o plano produtivo, uma vez que os tempos dos lotes de xarope não ultrapassaram 1600 minutos em nenhum dos casos. No entanto, se existisse um sabor mais precível, a precibilidade poderia afetar o plano produtivo. A instância FL2 reflete a situação na que o xarope 1 é altamente precível. Os dados utilizados na instância FL2 são os mesmos dados da instância FL7, com exceção da precibilidade do xarope 1, que foi reduzida para 800 minutos (13,33h). Diante de uma eventual queda no tamanho dos lotes de xarope 1, o número de enchimentos permitidos foi aumentado para 3.

Um plano obtido para esta instância é apresentado na Figura 5.2, cabe salientar que não foi obtida prova de otimalidade para esta instância no tempo limite de 1 h. O *gap* de otimalidade deste plano é de 22.56 %, porém não há atrasos de produção.

A Figura 5.2 segue o mesmo padrão da Figura 5.1, bem como todas as figuras e tabelas que apresentam planos de produção para as instâncias FL. As produções de cada item por período

são apresentadas na Tabela 5.3 e os estoques totais por item e período na Tabela 5.4. Estas tabelas seguem o padrão das Tabelas 5.1 e 5.2 respectivamente.

FIGURA 5.2: Plano de produção para instância FL2, obtido com o modelo SMMRPM



Fonte: Elaboração própria.

TABELA 5.3: Produção total por item e período (unidades), do plano da Figura 5.2.

Itens	Período		
	1	2	3
1	13144.33	26666.67	0.00
2	12603.00	0.00	0.00
3	6298.00	14797.00	0.00
4	6482.00	0.00	0.00
5	985.00	0.00	0.00
6	2186.00	0.00	0.00
7	1284.00	0.00	0.00

Fonte: Elaboração própria.

TABELA 5.4: Estoques finais por item e período, do plano da Figura 5.2.

Itens	Período		
	1	2	3
1	2567.33	14638.00	0.00
2	10047.00	5020.00	0.00
3	0.00	7329.00	0.00
4	4000.00	4000.00	0.00
5	1567.00	773.00	0.00
6	4460.00	2288.00	0.00
7	1560.00	800.00	0.00

Fonte: Elaboração própria.

Como esperado, é necessária a utilização do terceiro enchimento do tanque o que ocasiona um maior número de trocas, tanto no tanque quanto nas linhas. Isto impacta diretamente nos custos na função objetivo, o custo total deste plano é \$ 3756.66 (aumento de 20.17% em relação ao plano de FL1), sendo \$ 446.66 correspondentes a custos totais de estoque, \$ 1230.00 por custos de trocas no tanque e \$ 2080.00 de custo por trocas nas linhas. Neste plano não existe atraso na produção em nenhum período.

Por causa da perecibilidade foram preparados dois lotes do xarope 1 no período 1. Cada um dos lotes ficou ocupado por 660' e 800' respectivamente. no plano de produção da instância FL1 o tanque ficou ocupado com o xarope suprindo as linhas por 1343.3', ou seja, neste plano após 800' a linha estaria envasando um xarope vencido. Outra mudança importante está no segundo período onde foi necessário preparar a linha 3 para envasar o item 3 a fim de consumir, juntamente com a linha 1 o xarope 1 em até 800'. Isso mostra como negligenciar a perecibilidade implica em mudanças grandes no plano de produção.

Lembre-se que na instância FL1, a linha 3 era utilizada para toda a produção do item 5, agora houve uma reprogramação desse lote para a linha 2 que possui a mesma velocidade que a linha 3. Na linha 2 também foi reprogramado o lote de item 7, que passou para a linha 1. Cabe lembrar que graças a que a linha 1 é mais rápida que as linhas 2 e 3, ainda que a quantidade produzida do item 7 seja a mesma, ele é envasado em um menor tempo na linha 1, 77 minutos.

Diferente do plano da instância FL1, no plano da instância FL2 não existe produção no período 3, isto ocorre para evitar mais custos por troca no tanque e nas linhas, lembrando o peso destes custos na função objetivo. Para dar uma ideia destas dimensões, considere por exemplo, o maior custo de estoque corresponde ao item 4 (\$ 0.014 / unidade) em comparação o menor custo de troca entre xaropes, correspondente à troca do sabor 2 para ele mesmo (\$ 80), ou seja, realizar a troca mais barata é aproximadamente 5714 vezes mais caro que estocar uma unidade do item com custo de estoque maior.

O tempo restrito de utilização dos tanques para envase do xarope 1 mostra como o modelo matemático consegue balancear o uso dos recursos em cada estágio e fornecer bons planos de produção factíveis.

Um teste posterior desta instância sem limite de tempo deu o ótimo em 14739.51 s (4 horas e 5 minutos aproximadamente). Na solução ótima a linha 3 é dedicada também ao o item 3 e aproveitada inclusive partir do primeiro período. A linha 2 é utilizada para produção do item 7 e o lote de item 5 passa para a linha 1. A linha 1 no plano ótimo produz a sequência de itens 4, 6 e 5 (enchimento 1), em seguida o item 1 (enchimento 2) e os itens 2 e 3 (enchimento 3). Os volumes de produção de todos os itens são os mesmos (o dimensionamento permanece igual) em todos os períodos. O plano de produção nos períodos 2 e 3 permanece igual ao apresentado na Figura 5.2. Esta nova programação reduz o custo de trocas em \$ 100; o valor da função objetivo ótima é \$ 3656.66.

## 5.4 Influência das janelas de tempo e disponibilidade de operação.

Uma das características diferenciadoras do modelo SMMRPM de outros da literatura é permitir graças ao uso da escala a limitação da janela de tempo de operação de uma linha ou tanque. Como explicado no capítulo 4 os intervalos  $[Start_{mt}^I, End_{mt}^I]$  e  $[Start_{lt}^{II}, End_{lt}^{II}]$  para tanques e linhas respectivamente, definem essas janelas de tempo de operação do maquinário dentro do período. Limitações nessas janelas e na disponibilidade de tempo dos recursos são analisados nessa seção.

### Instância FL3

Nessa instância foi inserida uma janela de tempo para a utilização da linha 2 que então só poderá ser utilizada após o minuto do período 1 até o fim do período (min 3000), o que dá uma janela disponível de 2000 minutos. O resto dos parâmetros são iguais à instância FL1.

Nas próximas instâncias (FL3-FL5) a precibilidade dos xaropes foi restaurada para 36 horas, mas analisaremos o impacto de janelas de tempo de produção dentro dos períodos. A disponibilidade de tempo das linhas é a mesma que na instância FL1, sendo 3000 minutos para a linha 1 em todos os períodos. Para as linhas 2 e 3 a disponibilidade é de 1440 minutos no primeiro período e 3000 para os períodos 2 e 3.

Dado que a disponibilidade para produzir (e fazer trocas) da linha 2 é de 1440 minutos no primeiro período, o modelo determinará em que instante do intervalo utilizar a linha 2 a partir do minuto 1000. Cabe lembrar que se a janela fosse mais restrita que a disponibilidade, ela é quem limitaria o tempo disponível para produção (e trocas). Este caso será abordado pela instância FL4.

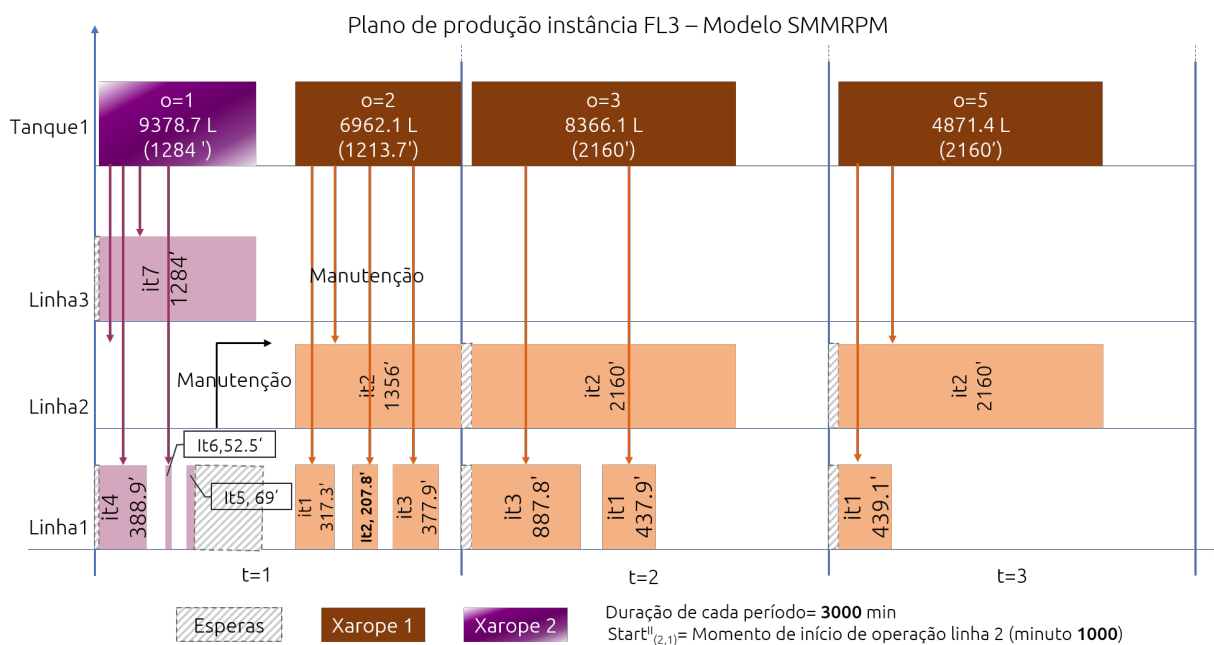


As considerações anteriores também são válidas para o estágio dos tanques caso houvessem janelas de tempo para eles operarem.

O plano ótimo resultante da instância FL3 (tempo de solução 87.5s) pode ser conferido na Figura 5.3. Desta vez se indica com a flecha de tipo  $\vec{r}$  o momento de início da janela de tempo de operação da linha 2 para o período 1 ( $Start_{2,1}^{II} = 1000$  min).

As quantidades produzidas e estocadas de cada item em cada período são as apresentadas nas Tabelas 5.5 e 5.6 respectivamente, de forma similar às tabelas 5.1 e 5.2.

FIGURA 5.3: Plano de produção ótimo para instância FL3, obtido com o modelo SMMRPM.



Fonte: Elaboração própria.

TABELA 5.5: Produção total por item e período (unidades), do plano da Figura 5.3.

Itens	Período		
	1	2	3
1	10577.00	14596.00	14638.00
2	8283.00	2160.00	2160.00
3	6298.00	14797.00	0.00
4	6482.00	0.00	0.00
5	985.00	0.00	0.00
6	2186.00	0.00	0.00
7	1284.00	0.00	0.00

Fonte: Elaboração própria.

TABELA 5.6: Estoques finais por item e período, do plano da Figura 5.3.

Itens	Período		
	1	2	3
1	0.00	0.00	0.00
2	5727.00	2860.00	0.00
3	0.00	7329.00	0.00
4	4000.00	4000.00	0.00
5	1567.00	773.00	0.00
6	4460.00	2288.00	0.00
7	1560.00	800.00	0.00

Fonte: Elaboração própria.

O custo total deste plano de produção é \$ 3294.35 composto por \$ 287.35 de custo de estoque, \$ 1060.00 de custo de trocas no tanque e \$ 1980.00 de custo de trocas nas linhas. A demanda é satisfeita em todos os períodos sem atrasos.

No plano obtido a linha 2 é dedicada ao item 2 nos três períodos. Antes, no plano da instância de referência (instância FL1, Figura 5.1) a linha 2 era utilizada para fabricação do item 7 de sabor 2. O lote do item 7 foi reprogramado para a linha 3, a qual anteriormente envasava o item 5, e o lote do item 5, foi passado para a linha 1, os tempos são menores na linha 1 mas as quantidades são as mesmas.

A janela da linha 2 é a partir do minuto 1000 o que forçou a que se sincronize a linha com o segundo lote do tanque pois eles coincidem em tempo e em sabor utilizados pela linha 2. A disponibilidade de tempo da linha 2 para o primeiro período é de 1440 minutos, com o lote de 1234 minutos do item 2 mais os 0 min de troca para essa linha, tal limite é respeitado, a eventual manutenção desta linha deverá ser feita no início do período 1. Nos períodos 2 e 3 o tempo de envase dos lotes da linha 2 respeitaram os 2160 min máximos de perecibilidade de 36 horas do xarope, A linha 1 funciona em paralelo ajudando no enase dos itens 1 (período 2 e 3) e item 3 (período 2). Cabe salientar que como consequência disto, existe uma ociosidade da linha 1 nesses períodos que finaliza suas produções muito mais rápido que a linha 2.

Devido à dedicação da linha 2 para envase do item 2, dado que o modelo define a primeira troca do item 2 pra ele mesmo e o custo de troca entre itens iguais nas linhas é zero (0) para estas instâncias, não é gerado nenhum custo pela linha 2 igual que no plano de referência (instância FL1), onde a produção das linhas 2 e 3 não geram custos por troca.

Se fixarmos a um momento de finalização da operação da linha, o plano é afetado de forma similar. Isto é analisado na instância FL4 a seguir.

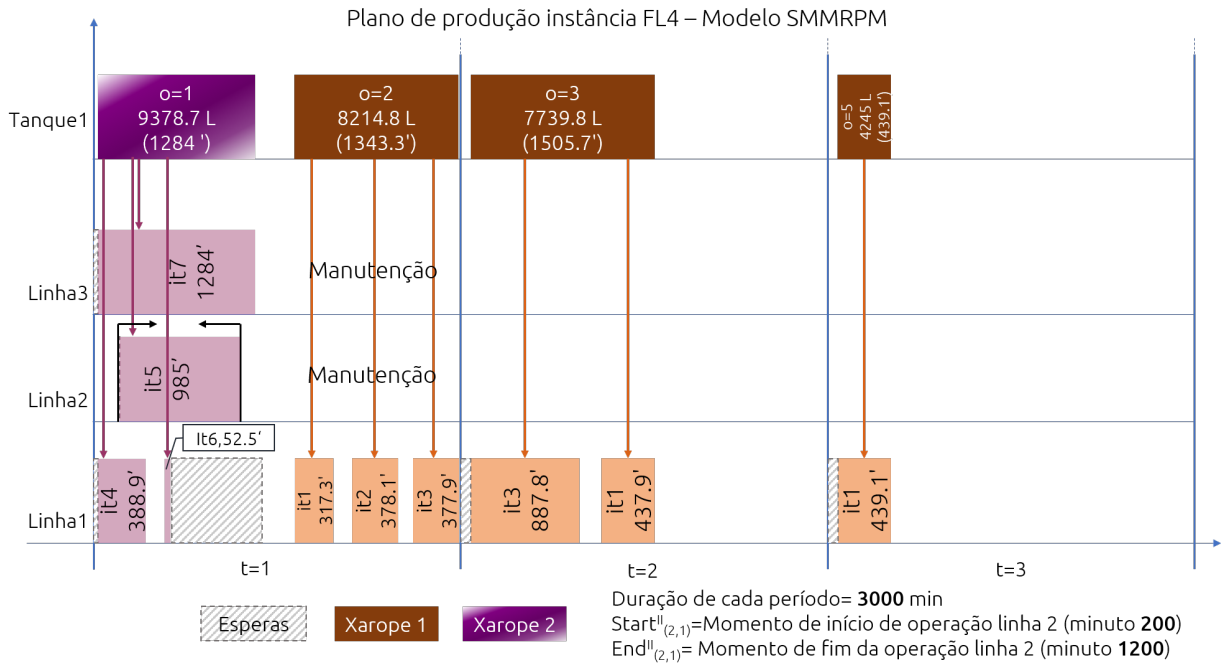
## Instância FL4

A instância FL4 possui os mesmos parâmetros da instância FL1, porém o início de operação da linha 2 foi fixado no minuto 200, e a finalização no minuto 1200. Conforme mencionado no Capítulo 4, apesar da disponibilidade em tempo da linha 2 ser de 1440 minutos no período 1, como a janela de tempo é [200,1200] há 1000 minutos disponíveis para envase (e trocas). A utilização da linha nesse intervalo será determinada pelo modelo.

O plano de produção ótimo para a instância FL4 (tempo de solução 74.9s) é apresentado na Figura 5.4. Além de apresentar o momento de início da janela de tempo com a seta  $\uparrow$  ( $Start_{2,1}^I$ ), também é apresentado o momento de finalização da janela ( $End_{2,1}^I$ ) mediante a seta  $\downarrow$ .

As produções totais e os estoques para cada item e período estão nas tabelas 5.7 e 5.8.

FIGURA 5.4: Plano de produção ótimo para instância FL4, obtido com o modelo SMMRPM.



Fonte: Elaboração própria.

TABELA 5.7: Produção total por item e período (unidades), do plano da Figura 5.4.

Itens	Período		
	1	2	3
1	10577.00	14596.00	14638.00
2	12603.00	0.00	0.00
3	6298.00	14797.00	0.00
4	6482.00	0.00	0.00
5	985.00	0.00	0.00
6	2186.00	0.00	0.00
7	1284.00	0.00	0.00

Fonte: Elaboração própria.

TABELA 5.8: Estoques finais por item e período, do plano da Figura 5.4.

Itens	Período		
	1	2	3
1	0.00	0.00	0.00
2	10047.00	5020.00	0.00
3	0.00	7329.00	0.00
4	4000.00	4000.00	0.00
5	1567.00	773.00	0.00
6	4460.00	2288.00	0.00
7	1560.00	800.00	0.00

Fonte: Elaboração própria.

O custo deste plano de produção é o mesmo da instância de referência FL1 (\$ 3126.22), \$ 326.22 correspondem a custo de estoques, \$ 1060.00 custo por trocas no tanque e 1740.00 custo por trocas nas linhas. Novamente, as linhas 2 e 3 não geram custo por trocas, pois são utilizadas somente uma vez para um único item em todo o horizonte de planejamento.

A fim de respeitar a janela de tempo os lotes dos itens 5 e 7 foram invertidos de linha de envase. O lote do item 5 (985 min) coube na janela, restados dos 1000 min da janela, ainda há uma folga de apenas 15 min. Esses 15 minutos poderiam ser adiantados, eliminando a espera da linha e deixando a ociosidade para o fim da janela de tempo. Como tempos de espera não são penalizados na função objetivo, as duas opções têm o mesmo custo.

O restante do plano de produção não foi afetado pela imposição dessa janela de tempo.

### Instância FL5

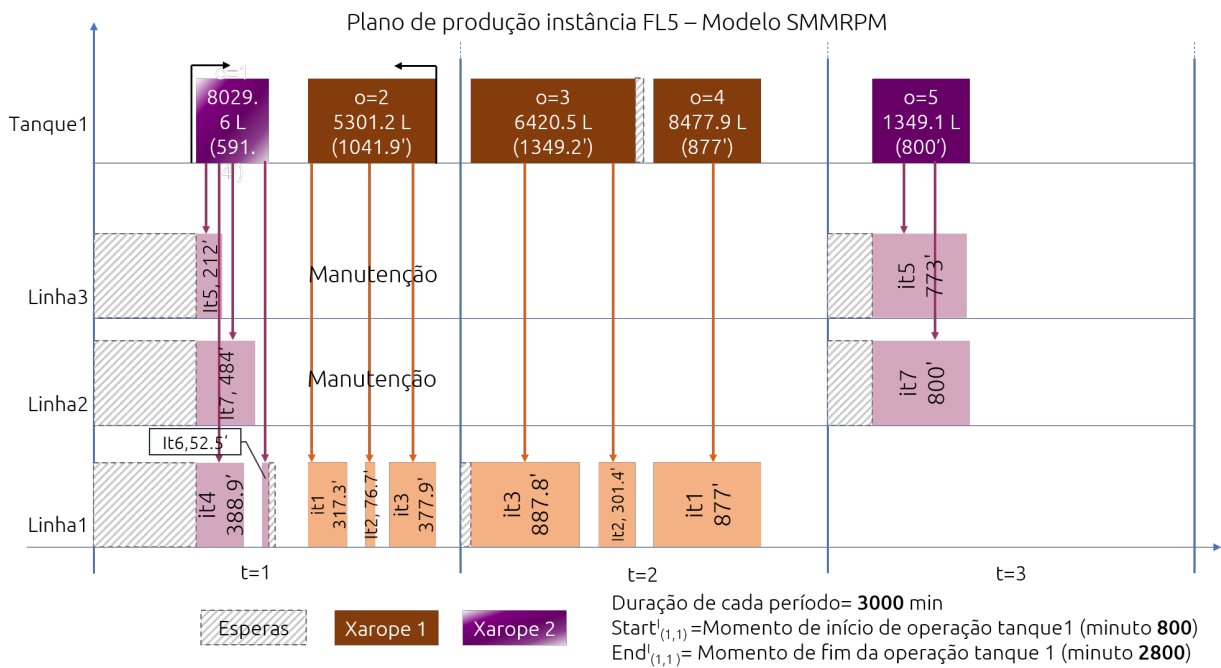
Considere a instância FL5, baseada na instância FL1 mas com uma janela de tempo de operação no tanque, sendo ela no intervalo [800, 2800]. Isto define uma disponibilidade do tanque em tempo de 2000 minutos. Os outros parâmetros da instância FL1 não foram modificados.

Dado que existe um único tanque, ele irá impor uma janela de tempo de operação para todas as linhas pois estará disponível somente no intervalo [800, 2800] devido à sincronia de estágios. Note que ainda que a disponibilidade da linha 1 no primeiro período seja de 3000 minutos ela não poderá utilizar toda essa disponibilidade para produção já que ela estará sujeita à disponibilidade ditada pelo tanque. Nas linhas 2 e 3 no primeiro período não existe tal restrição uma vez que a disponibilidade de tempo de operação delas é 1440 minutos, inferior à janela de tempo do tanque.

O plano resultante ótimo para esta instância FL5 (tempo de solução 1566.8s) é apresentado na Figura 5.5, ela segue o padrão das figuras anteriores. Novamente a janela de tempo se indica entre as setas  $\overrightarrow{r}$  e  $\overleftarrow{r}$  que indicam os momentos  $Start_{1,1}^I$  e  $End_{1,1}^I$ , respectivamente.

Assim como feito anteriormente, as produções dos itens para cada período são apresentadas nas tabelas 5.9 e 5.10 respectivamente.

FIGURA 5.5: Plano de produção ótimo para instância FL5, obtido com o modelo SMMRPM.



Fonte: Elaboração própria.

TABELA 5.9: Produção total por item e período (unidades), do plano da Figura 5.5.

Itens	Período		
	1	2	3
1	10577.00	29234.00	0.00
2	2556.00	10047.00	0.00
3	6298.00	14797.00	0.00
4	6482.00	0.00	0.00
5	212.00	0.00	773.00
6	2186.00	0.00	0.00
7	484.00	0.00	800.00

Fonte: Elaboração própria.

TABELA 5.10: Estoques finais por item e período, do plano da Figura 5.5.

Itens	Período		
	1	2	3
1	0.00	14638.00	0.00
2	0.00	5020.00	0.00
3	0.00	7329.00	0.00
4	4000.00	4000.00	0.00
5	794.00	0.00	0.00
6	4460.00	2288.00	0.00
7	760.00	0.00	0.00

Fonte: Elaboração própria.

O custo total deste plano de produção é \$ 4133.19 onde \$ 343.19 são de custo total de estoque, \$ 1790.00 de custo total de trocas nos tanques e \$ 2000.00 de custo total de trocas nas linhas. Neste plano de produção também não há atrasos da produção em nenhum dos períodos.

No período 1 apenas o dimensionamento dos lotes das linhas 2 e 3 foram alterados. Elas continuam dedicadas aos itens 5 e 7, no entanto, devido à redução na disponibilidade do tanque no período 1 o atendimento da demanda total dos 3 períodos desses itens, que anteriormente era feito com a produção do primeiro período foi alterada; é produzida uma quantidade para satisfazer a demanda do primeiro período e estoque do restante para satisfazer a demanda do segundo período. A demanda do terceiro período é satisfeita com produção desse mesmo período.

A linha 1 no primeiro período esvazia também os lotes de itens do xarope 2 do tanque (itens 4 e 6). Logo, a partir da conexão (1,2) para frente, ela é dedicada para itens do sabor 1, que são produzidos no primeiro e segundo períodos. O item 2 que antes não era produzido no período 2 passou a ser produzido enquanto o item 1 devia ser produzido no período 3 e é todo produzido no período 2. Isto porque nos enchimentos do período 2 estão ocupados com o xarope 1 enquanto no período 3 com o xarope 2 para abastecer as linhas 2 e 3.

Como visto, a janela de tempo permite limitar a operação de tanques e linhas a um intervalo

de tempo específico, o que causa variadas alterações importantes no plano de produção. O modelo SMMRPM se adapta em tais situações achando planos de produção factíveis respeitando tais considerações.

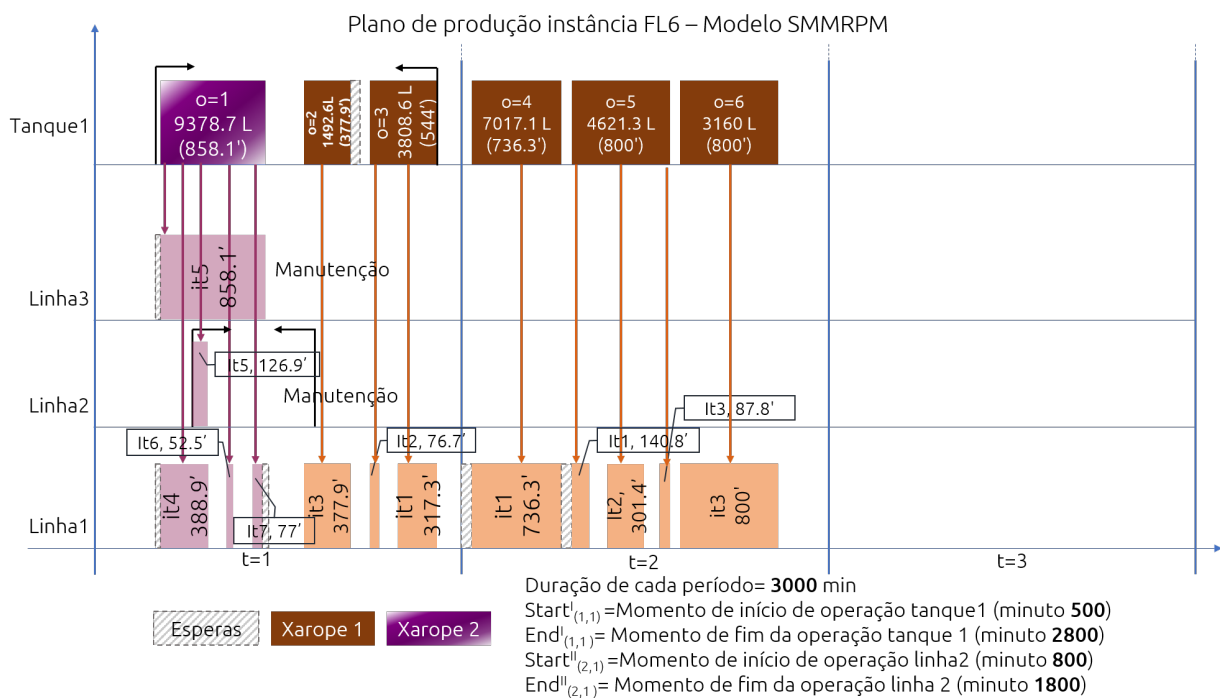
## 5.5 Impacto na solução da consideração de: precibilidade, janelas de tempo e disponibilidade reduzida

Para analisar o impacto conjunto de considerar: janelas de tempo de operação em tanques e linhas, existência de um xarope altamente precível, e uma disponibilidade reduzida de utilização das máquinas; foi criada a instância FL6. Esta instância é similar à instância FL1 com as alterações: janelas de tempo de operação no tanque e na linha 2 no primeiro período, respectivamente, nos intervalos [500,2800] e [800-1800]; precibilidade do xarope 1 estabelecida em 800 minutos no máximo de permanência no tanque e disponibilidade em tempo. Devido à janela de tempo, a disponibilidade de produção da linha 2 é restrita para 1000 minutos.

Um plano obtido para esta instância pode ser observado na Figura 5.6. Para este plano não foi obtida prova de otimalidade e o *gap* de otimalidade é de 31.68 % dentro do limite de tempo de 1 h.

As quantidades produzidas e estocadas em cada período estão nas tabelas 5.11 e 5.12 respectivamente. Estas tabelas também seguem o padrão das tabelas anteriores.

FIGURA 5.6: Plano de produção para instância FL6, obtido com o modelo SMMRPM.



Fonte: Elaboração própria.

TABELA 5.11: Produção total por item e período (unidades), do plano da Figura 5.6.

Itens	Período		
	1	2	3
1	10577.00	29234.00	0.00
2	2556.00	10047.00	0.00
3	6298.00	14797.00	0.00
4	6482.00	0.00	0.00
5	985.00	0.00	0.00
6	2186.00	0.00	0.00
7	1284.00	0.00	0.00

Fonte: Elaboração própria.

TABELA 5.12: Estoques finais por item e período, do plano da Figura 5.6.

Itens	Período		
	1	2	3
1	0.00	14638.00	0.00
2	0.00	5020.00	0.00
3	0.00	7329.00	0.00
4	4000.00	4000.00	0.00
5	1567.00	773.00	0.00
6	4460.00	2288.00	0.00
7	1560.00	800.00	0.00

Fonte: Elaboração própria.

A função objetivo deste plano tem um custo total de \$ 4088.41 distribuídos em: custos de estoque \$ 368.41, custos de trocas nos tanques \$ 1400.00, e custos de trocas nas linhas \$ 2320.00. Não existem atrasos neste plano de produção.

O modelo tenta aproveitar a linha 1 que é a mais rápida. Antes ela produzia os itens (na ordem de sequência) 4, 6, 1, 2 e 3 e passou a produzir o item 7 (na sequência 4, 6, 7, 1, 2 e 3). Isso porque na linha 2 passou a ser produzido o restante da do item 5 que não coube na linha 3 por causa da janela de tempo do tanque. Os itens 4, 5, 6 e 7 são produzidos no enchimento 1.

No segundo e terceiro enchimentos do tanque no primeiro período são produzidos os itens 3, 2 e 1, todos são envasados na linha 1 por ela ser veloz. Para envasá-los a partir das outras linhas, qualquer lote demoraria mais que o tempo permitido de perecibilidade. o mesmo ocorre no segundo período.

A janela de tempo da linha 2 também é respeitada e aproveitada para ajudar à linha 3 para fazer a produção do item 5. Veja que as linhas 2 e 3 não são mais utilizadas nos outros períodos do horizonte de planejamento, o que faz como que o custo de trocas destas linhas seja 0.

No período 1, na linha 3 o modelo determina que a manutenção seja no fim do período. No entanto, veja a linha 2, na que a utilização da janela de tempo faz com que a manutenção possa



ser programada *a priori*, de forma que a linha operasse dentro dos limites estabelecidos.

Tendo em vista que no segundo e terceiro períodos não existem janelas de tempo e que o único limitante de tempo para os lotes é a perecibilidade do xarope. No segundo período são fabricados lotes 5 e 6 de sabor 1, que atingem o limite máximo da perecibilidade (800 min), como ocorreu na instância FL2. No terceiro período não existe produção e assim são evitadas trocas em ambos estágios.

## 5.6 Influência dos custos de troca no plano de produção

Foi evidenciado que o alto custo de trocas em ambos estágios de produção implicam em priorizar da minimização das decisões de sequenciamento em relação ao dimensionamento. A fim de avaliar melhor o *trade off* entre o dimensionamento e sequenciamento foi criada a instância FL7 onde os custos por trocas em ambos estágios foram diminuídos substancialmente. Eles continuam proporcionais aos tempos de troca, e são calculados a partir deles pelas fórmulas:

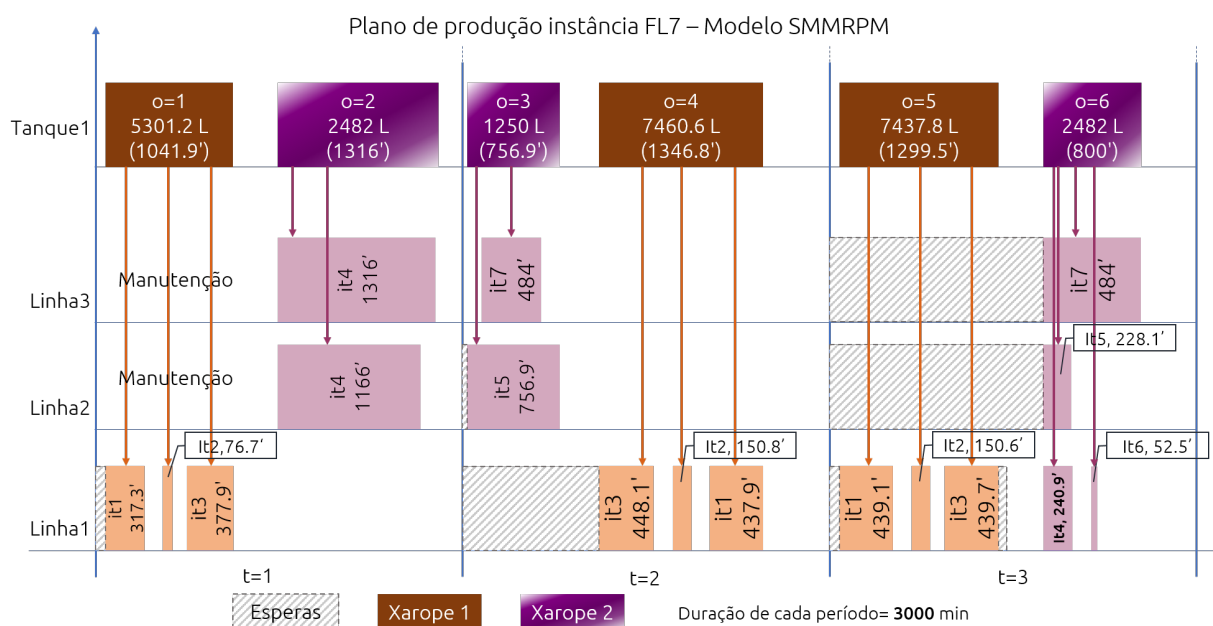
$$s_{jj'm}^I = b_{jj'm}^I / \max(b_{jj'm}^I) \quad \forall m \in M, j, j' \in \theta_m \text{ para os tanques, e}$$

$$s_{ii'l}^II = b_{ii'l}^II / \max(b_{ii'l}^II) \quad \forall l \in L, i, i' \in \delta_l \text{ para as linhas.}$$

Os outros parâmetros são os mesmos da instância FL1. Desta forma o maior custo de troca é 1 e a proporcionalidade dos custos a respeito dos tempos é mantida.

O plano de produção ótimo para esta instância pode ser conferido na Figura 5.7 (tempo de solução 230.3s).

FIGURA 5.7: Plano de produção ótimo para instância FL7, obtido com o modelo SMMRPM.



Fonte: Elaboração própria.

As tabelas 5.13 e 5.14 apresentam informações da produção por item e período e estoques por item e período respectivamente.

TABELA 5.13: Produção total por item e período (unidades), do plano da Figura 5.7.

Itens	Período		
	1	2	3
1	10577.00	14596.00	14638.00
2	2556.00	5027.00	5020.00
3	6298.00	7468.00	7329.00
4	2482.00	0.00	4000.00
5	0.00	756.86	228.14
6	0.00	0.00	2186.00
7	0.00	484.00	800.00

Fonte: Elaboração própria.

TABELA 5.14: Estoques finais por item e período, do plano da Figura 5.7.

Itens	Período		
	1	2	3
1	0.00	0.00	0.00
2	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00	0.00
4	0.00	0.00	0.00
5	582.00	544.86	0.00
6	2274.00	102.00	0.00
7	276.00	0.00	0.00

Fonte: Elaboração própria.

Como esperado, o custo total de estoque diminuiu consideravelmente de \$ 326.23 na instância FL1 para somente \$ 17.50 na instância FL7 e a instância reflete um aumento no número de trocas graças ao menor peso delas na função objetivo.

Veja que para esta instância há produção de quase todos os itens em todos os períodos. Os itens 5, 6 e 7 não são produzidos no primeiro período por causa do estoque inicial que é suficiente e sobra para atender a demanda do primeiro período dos itens 5 e 7, e do primeiro e segundo períodos no caso do item 6. Observe que também não existe produção desses itens nesses períodos.

A pseudo-dedicação de linhas a certos tipos de itens é mantida e as trocas entre itens do mesmo sabor nas linhas, e xaropes do mesmo tipo entre períodos também. Isto otimiza o tempo dessas trocas. Em consequência da dedicação das linhas 2 e 3 a itens do sabor 2 existem esperas no início dos períodos 1 e 3 dessas linhas pelo tanque que está ocupado como xarope 1. Isto também acontece com a linha 1 que no segundo período está dedicada a itens do sabor 1 pois o tanque, no primeiro enchimento desse período está ocupado com o sabor 2.

No último período, são produzidos todos os itens. Neste período para otimizar o tempo é feita a única troca entre itens de sabor distinto na linha 1 (do item 3 para o item 4), para ela ajudar no esvaziamento rápido do lote  $o = 6$  de sabor 2 e produzir a demanda desses itens nesse período.

Pode se concluir então que o modelo avalia de maneira correta o *trade off* existente entre as decisões relativas ao dimensionamento e as decisões de sequenciamento. Também pode se dizer, comparando os planos das figuras 5.1 e 5.7 que existe uma influência importante dos valores dos custos na definição da programação da produção. Logo a otimização realizada utilizando o modelo SMMRPM e outros da literatura, também irá depender de uma boa estimativa dos custos envolvidos no processo produtivo.

## 5.7 Variação do número de tanques

A seguir é estudado o caso de dois tanques em paralelo substituindo o papel do tanque único da instância FL1. Eles irão suprir qualquer uma das linhas de produção do segundo estágio.

### Instância FL8

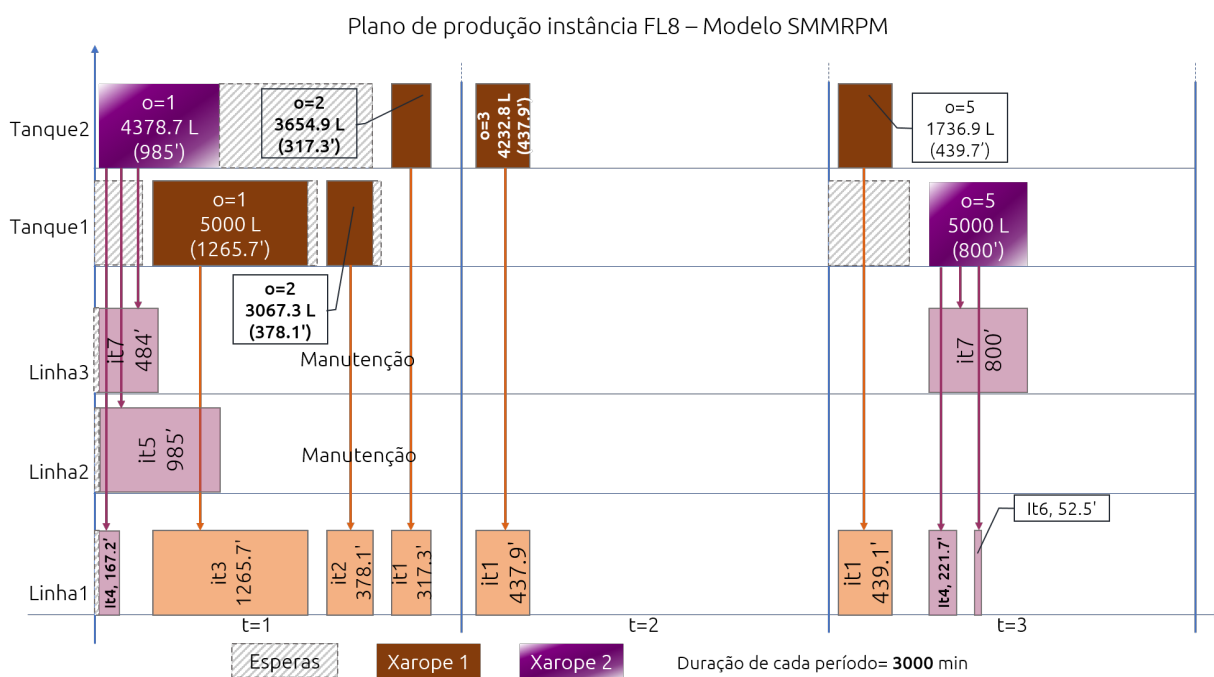
Considere primeiro a instância FL8 que utiliza os dados da instância FL1 mas foi incluído mais um tanque no primeiro estágio. Cada um dos tanque possui uma capacidade equivalente à metade da capacidade do único tanque da instância FL1, ou seja 5000 L cada. Os lotes mínimos para todos os xaropes continuam sendo um oitavo da capacidade do tanque, ou seja, eles também foram reduzidos para 625 L.

Cabe lembrar que na instância de referência e na presente instância FL8 não existem janelas de tempo de operação para nenhum dos estágios em nenhum dos períodos e que a capacidade das linhas 2 e 3 é reduzida no primeiro período para 1440 min.

Um plano de produção factível obtido do modelo SMMRPM para esta instância é apresentado na Figura 5.8.

O plano da Figura 5.8 não é o plano ótimo, apresenta um *gap* de otimalidade de 62.05% em um tempo limite de 1h devido principalmente à lenta convergência do limitante inferior. Na seção 5.9 serão levantadas questões mais detalhadas sobre o desempenho do modelo para todas as instâncias testadas nesse capítulo.

FIGURA 5.8: Plano de produção para instância FL8 obtido com o modelo SMMRPM.



Fonte: Elaboração própria.

Também são apresentadas as quantidades produzidas e estocadas de cada item em cada período nas tabelas 5.15 e 5.15.

TABELA 5.15: Produção total por item e período (unidades), do plano da Figura 5.8.

Itens	Período		
	1	2	3
1	10577.00	14596.00	14638.00
2	12603.00	0.00	0.00
3	21095.00	0.00	0.00
4	2786.46	0.00	3695.54
5	985.00	0.00	0.00
6	0.00	0.00	2186.00
7	484.00	0.00	800.00

Fonte: Elaboração própria.

TABELA 5.16: Estoques finais por item e período, do plano da Figura 5.8.

Itens	Período		
	1	2	3
1	0.00	0.00	0.00
2	10047.00	5020.00	0.00
3	14797.00	7329.00	0.00
4	304.46	304.46	0.00
5	1567.00	773.00	0.00
6	2274.00	102.00	0.00
7	760.00	0.00	0.00

Fonte: Elaboração própria.

O custo total desse plano de produção é de \$ 3718.41, sendo \$ 328.41 de custo de estoques, \$ 1330.00 de custo de trocas nos tanques e \$ 2060.00 de custo de trocas nas linhas.

Com mais disponibilidade no estágio I a linha 1, mais veloz, pode ser melhor aproveitada. As linhas 2 e 3 somente são utilizadas no primeiro período para produção dos itens 5 e 7.

Note que, comparado com o plano da instância FL1, neste plano a capacidade do tanque não é suficiente para adiantar toda a produção do item 7, logo a produção desse item é dividida na linha 3 nos períodos 1 e 3. A produção do primeiro período mais o estoque inicial são suficientes para suprir a demanda do item no segundo período.

Similar à instância FL1, nessa instância a dedicação das linhas 2 e 3 aos itens 5 e 7 faz com que o custo de troca nelas seja 0.

Observe que em geral, existe uma folga no uso dos dois tanques. O único lote que aproveitou o lote máximo foi o tanque 1 no enchimento  $o = 1$  que atingiu os 5000 L, esse também foi o lote mais demorado com uma duração de 265.7 minutos envase pelas linhas. A respeito do tempo, nenhum lote atingiu o limite da perecibilidade.

Nas linhas existe uma tendência de utilização da linha mais rápida (linha 1) em todos os períodos. Ocasionalmente uma ociosidade das linhas 2 e 3 com fins de minimizar o custo de trocas.

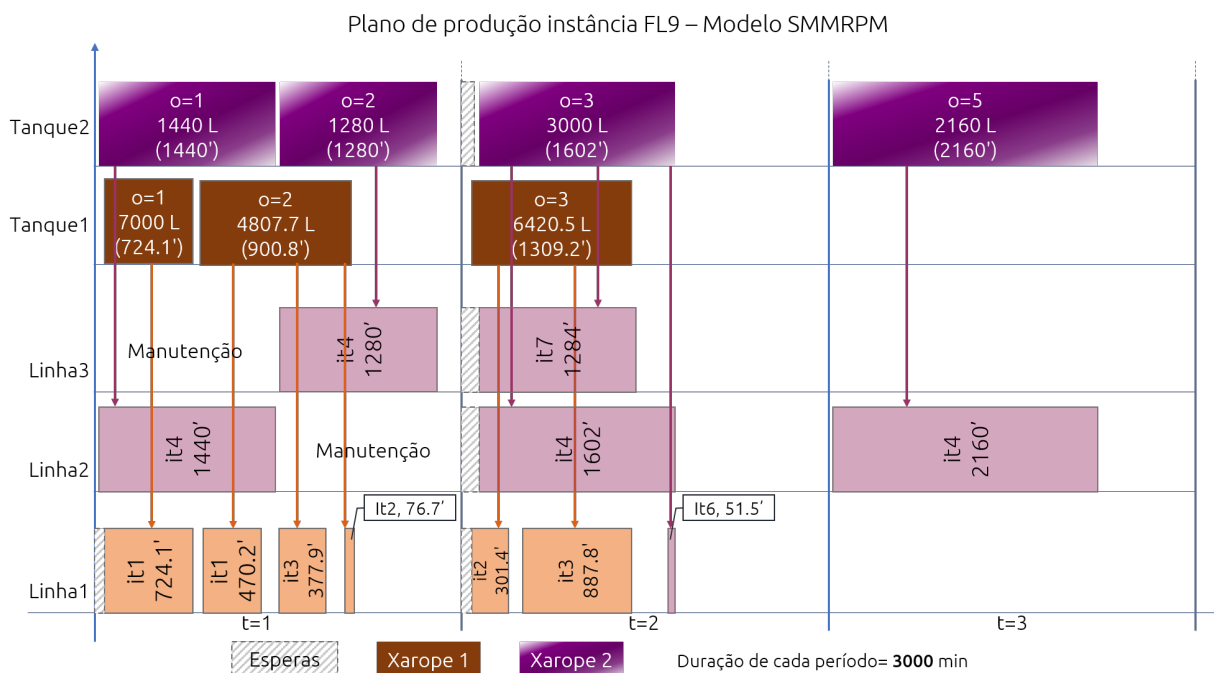
### Instância FL9

Agora considere a instância FL9, que possui dois tanques mas com capacidades diferentes. A capacidade do tanque 1 foi de 7000 L e a capacidade do tanque 2 é 3000 L. Os lotes mínimos são 875 L para o tanque 1 e 375 L para o tanque 2. O resto dos parâmetros da instância FL8 não foram modificados.

Um plano factível para esta instância é apresentado na Figura 5.9.

Este plano possui um *gap* de otimalidade de 62.26 % dentro do limite de tempo estabelecido em 1h.

FIGURA 5.9: Plano de produção para instância FL9, obtido com o modelo SMMRPM.



Fonte: Elaboração própria.

Também são apresentadas as quantidades produzidas e estocadas de cada item em cada período nas tabelas 5.17 e 5.17.

TABELA 5.17: Produção total por item e período (unidades), do plano da Figura 5.9.

Itens	Período		
	1	2	3
1	39811.00	0.00	0.00
2	2556.00	10047.00	0.00
3	6298.00	14797.00	0.00
4	2720.00	1602.00	2160.00
5	0.00	985.00	0.00
6	0.00	2144.49	0.00
7	0.00	1284.00	0.00

Fonte: Elaboração própria.

TABELA 5.18: Estoques finais por item e período, do plano da Figura 5.9.

Itens	Período		
	1	2	3
1	29234.00	14638.00	0.00
2	0.00	5020.00	0.00
3	0.00	7329.00	0.00
4	238.00	1840.00	0.00
5	582.00	773.00	0.00
6	2274.00	2246.49	0.00
7	276.00	800.00	0.00

Fonte: Elaboração própria.

Este plano de produção possui um custo total de \$ 3478.02, \$ 465.01 de custo de estoque, \$ 910.00 de custo de trocas em tanques, \$ 2020 de custo de trocas nas linhas e um custo de atraso de \$ 41.51 correspondente a atrasar a produção de 41.51 unidades do item 6 no último período.

Nessa solução cada tanque foi dedicado a um sabor específico. Como esperado, o tanque de maior capacidade (tanque 1) para o xarope de maior demanda (xarope 1) foi dedicado e o tanque 2 foi dedicado para o xarope 2. Também observa-se uma dedicação das linhas 2 e 3 para itens de sabor 2. No caso da linha 2, esta dedicação é exclusiva para o item 4.

Veja que o tempo de envase dos lotes do tanque 2, como esperado, demoram mais do que os lotes do tanque 1, isto por que ele está conectado às linhas mais lentas a maior parte do tempo .

Nessa solução, no tanque 2, período 3 ainda sobram 840 L de capacidade disponíveis, que são suficientes para 1647 unidades de item 6. O tempo de envase por unidade do item 6 é 1 min na linha 3, logo um lote de 41.51 unidades na linha 3 poderia ser produzido tanto por capacidade como por tempo. No entanto, o custo de trocar na linha 3 do item 7 para o item 6 é \$ 320 que é maior que \$ 41.51 (custo de atrasar essas 41.51 unidades). Isso sugere que tal vez na solução ótima hajam pequenos atrasos também uma vez que os custos de troca são muito altos comparado à esses pequenos lotes atrasados.

A linha mais rápida(linha 1) é dedicada ao tanque de maior capacidade(tanque 1), deixando o tanque menor suprindo as linhas de menor velocidade. Isto faz sentido pois dedicar os tanques maiores a linhas rápidas diminui o tempo de esvaziamento do tanque, aumentando assim as quantidades de xarope preparadas nele.

### Instância FL10

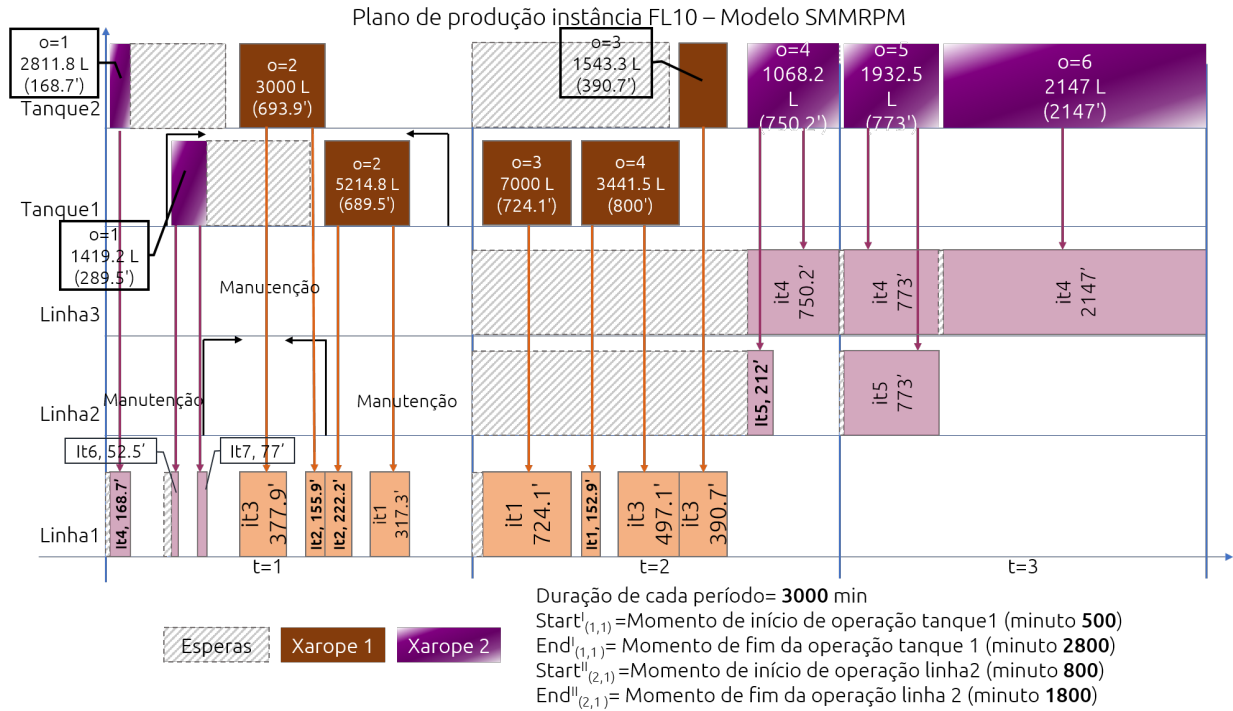
Por último considere a instância FL10 com as seguintes características: dois tanques com capacidades diferentes(7000 L para o tanque 1 e 3000 L para o tanque 2), perecibilidade do xarope 1 de 800 minutos e janelas de tempo de operação no primeiro período em ambos estágios, sendo



elas [500, 2800] para o tanque 1 e [800, 1800] para a linha 2. Os outros dados são os mesmos da instância FL9.

Para esta instância, um plano de produção factível é apresentado na Figura 5.10. As quantidades produzidas e estocadas de cada item em cada período são apresentadas nas tabelas 5.19 e 5.19 respectivamente.

FIGURA 5.10: Plano de produção para instância FL10, obtido com o modelo SMMRPM.



Fonte: Elaboração própria.

TABELA 5.19: Produção total por item e período (unidades), do plano da Figura 5.10.

Itens	Período		
	1	2	3
1	10577.00	29234.00	0.00
2	12603.00	0.00	0.00
3	6298.00	14797.00	0.00
4	2811.84	750.16	2920.00
5	0.00	212.00	773.00
6	2186.00	0.00	0.00
7	1284.00	0.00	0.00

Fonte: Elaboração própria.

TABELA 5.20: Estoques finais por item e período, do plano da Figura 5.10.

Itens	Período		
	1	2	3
1	0.00	14638.00	0.00
2	10047.00	5020.00	0.00
3	0.00	7329.00	0.00
4	329.84	1080.00	0.00
5	582.00	0.00	0.00
6	4460.00	2288.00	0.00
7	1560.00	800.00	0.00

Fonte: Elaboração própria.

O plano da Figura 5.10 possui um *gap* de 65.42 % em 3600 s (1h).

Neste plano de produção não existe atraso em nenhum período. O custo total é de \$ 4044.13 divididos em \$ 324.13 de custo de estoques, \$1640.00 de custo de trocas nos tanques e \$2080.00 de custo de trocas nas linhas.

Como esperado, nessa instância o fato de haver uma janela de tempo no tanque 1 faz com que o tanque 2 seja utilizado antes para encasar itens na linha 1.

A utilização destas linhas parece seguir o padrão dos planos de instâncias anteriores, dedicando as linhas 2 e 3 para certo tipo de itens, a saber os itens 5 e 4 respectivamente. A utilização da linha 1 para fazer a variedade dos outros itens é repetida nesse plano de produção. No primeiro período é a única linha utilizada e os tanques vão se intercalando para suprir o xarope necessário havendo poucas esperas da linha. Isto ocasiona um aproveitamento dessa linha no primeiro período de 82.8 %.

Primeiro, ela é aproveitada para fazer parte da produção do item 4 no primeiro enchimento do tanque 2, para produção dos itens 6 e 7 se utiliza o tanque 1, em seguida muda para o tanque 2 enchimento 2 que já está com o xarope 1 preparado, logo muda de novo para o tanque 1 enchimento 2 que já está pronto com outro lote de xarope 1 para completar a produção do item 2 e o lote 1. Observe que não há tempo de troca da conexão (2,2) para (1,2) pois a troca do item 2 para ele mesmo na linha é nula e a conexão (1,2) já estava preparada. No segundo período pode se perceber um tipo de programação similar. No entanto, desta vez, ela unicamente produz apenas itens do sabor 1. As produções dos itens de sabor 2 é realizada nas linhas 2 e 3.

Veja que no primeiro período, como esperado, as trocas entre itens do mesmo sabor são agrupadas na linha 1. Temos assim um 'bloco' dos itens 4, 6 e 7 e outro dos itens 3, 2 e 1 nessa ordem. O item 5 não é fabricado no primeiro período devido ao estoque inicial ser suficiente para suprir a demanda.

A sincronia é respeitada e todos os lotes de xarope 1 não ultrapassam os 800 min de limite de

percebibilidade.

A partir dos resultados acima, concluímos que, apesar de alguns planos de produção não serem ótimos, o modelo SMMRPM consegue representar bem as situações estudadas até o momento. A seguir é abordada a situação de número igual de tanques e linhas com dedicação (cada tanque dedicado a cada linha), e a comparação do modelo proposto com uma abordagem da literatura, específica para esta variante do problema, o modelo F1 (FERREIRA *et al.*, 2012).

## **5.8 Dedicação de linhas a tanques e comparação com modelo F1 Ferreira *et al.* (2012)**

Um dos objetivos do presente trabalho é avaliar as vantagens do modelo SMMRPM em relação a essas propostas de modelos mais restritas. Nessa seção é feita uma comparação entre a solução do modelo F1 (FERREIRA *et al.*, 2012) e do modelo SMMRPM. As instâncias E foram utilizadas nessa análise de desempenho de modelos.

Primeiro são analisados os pressupostos e considerações do problema com tanques dedicados às linhas para que seja feita uma comparação adequada dos dois modelos. Em seguida a instância E1 é resolvida com os dois modelos e os planos de produção são comparados. Depois é feita a comparação dos resultados dos dois modelos para as instâncias E em geral.

### **Adequações e considerações para comparação dos modelos F1 e SMMRPM**

O modelo F1 aborda um caso particular do modelo SMMRPM uma vez que a dedicação de tanques a linhas pode ser modelada pela formulação SMMRPM, modificando os conjuntos  $\sigma_m$  e  $\rho_l$  para que cada tanque abasteça apenas uma linha. O sequenciamento está discriminado para os dois estágios tendo variáveis de trocas para os tanques e para as linhas. Outra similaridade está no vetor gradiente das funções objetivo, que apontam em direções similares, pois os modelos possuem as mesmas parcelas de custo.

As decisões definidas pelo modelo F1 também são as mesmas do modelo SMMRPM, tais como o sequenciamento dos itens, o tamanho dos lotes, as quantidades a serem estocadas e/ou atrasadas de cada item, etc. No entanto, o modelo SMMRPM possui ainda considerações adicionais, tais como a percebibilidade dos xaropes e o controle das janelas de tempo de produção para eventuais programações da manutenção do maquinário.

Logo, estes dois modelos embora similares, guardam características diferentes em alguns aspectos mencionados a seguir, e que foram modificados para que a comparação entre eles fosse possível.

- i. O modelo F1 não considera perecibilidade, logo a perecibilidade no modelo SMMRPM foi estabelecida como sendo maior que a capacidade dos períodos em todas as instâncias testadas.
- ii. O modelo F1 não possui janelas de tempo então, não foram especificadas janelas de tempo em nenhuma instância para o modelo SMMRPM.
- iii. Foi necessário adicionar no modelo SMMRPM o parâmetro de demanda futura de cada item  $i$  no fim do horizonte de planejamento ( $Dfutura_i$ ) junto com as restrições de estoque de segurança (5.1) e demanda futura (5.2) uma vez que elas estão presentes no modelo F1.

$$I_{i,(t-1)}^+ \geq d_{it} \quad \forall i \in \delta_l, t \in T | t > 1 \quad (5.1)$$

$$I_{i,|T|}^+ \geq Dfutura_i \quad \forall i \in \delta_l \quad (5.2)$$

- iv. O modelo F1 não possui a limitação do número de enchimentos no tanque uma vez que o número de lotes necessários no primeiro estágio é decisão do modelo. Na formulação SMMRPM é necessário estimar este número máximo de lotes de xarope. Dado que são dois sabores e 4 itens, este número de enchimentos foi estabelecido em 6 enchimentos por tanque/período. Este número é suficiente dada a capacidade dos tanques (12000 L em todas as instâncias) e a demanda dos itens.

A fim de garantir a validade da comparação foram realizados testes, fixando as variáveis de produção e estoques da solução ótima do modelo F1 no modelo SMMRPM para cada instância. O modelo SMMRPM resolvido pelo CPLEX conseguiu achar a mesma solução que o F1.

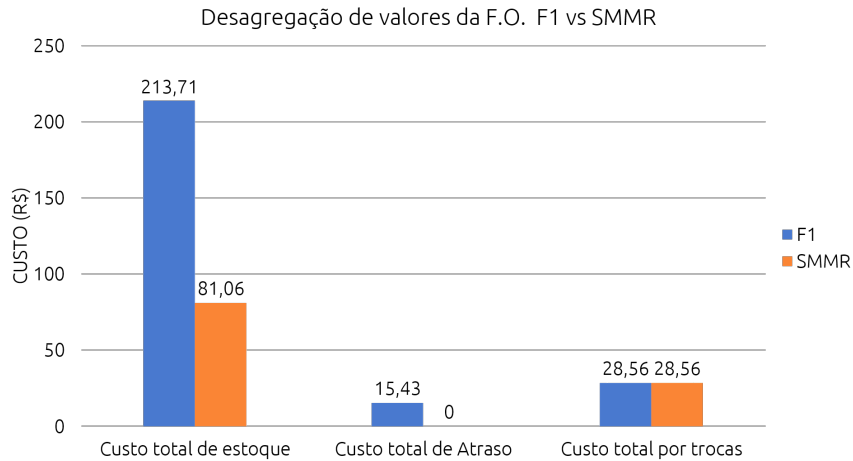
### **Instância E1**

Esta instância possui 2 tanques dedicados a duas linhas de produção, um horizonte de planejamento de 3 períodos e 4 itens distribuídos em 2 sabores. Os dados dessa instância podem ser consultados no apêndice D

A instância E1 foi resolvida até otimalidade pelos dois modelos F1 e SMMRPM. O tempo de solução do modelo F1 foi de 0.49 s, enquanto do modelo SMMRPM foi de 39.92 s. Em termos do custo total o modelo F1 obteve o valor de 257.7 e o modelo SMMRPM de 109.62. Ou seja a solução do SMMRPM reduziu de maneira significativa o custo total do modelo F1, a redução foi de 57,46%.

A Figura 5.11 apresenta cada parcela do custo total da função objetivo de cada modelo para a instância E1. Pode se observar que as diferenças nos componentes dos custos estão no custo de estoque e custo de atraso, sendo estes menores na solução obtida do modelo SMMRPM.

**FIGURA 5.11:** Desagregação dos custos da função objetivo de cada modelo para instância E1.



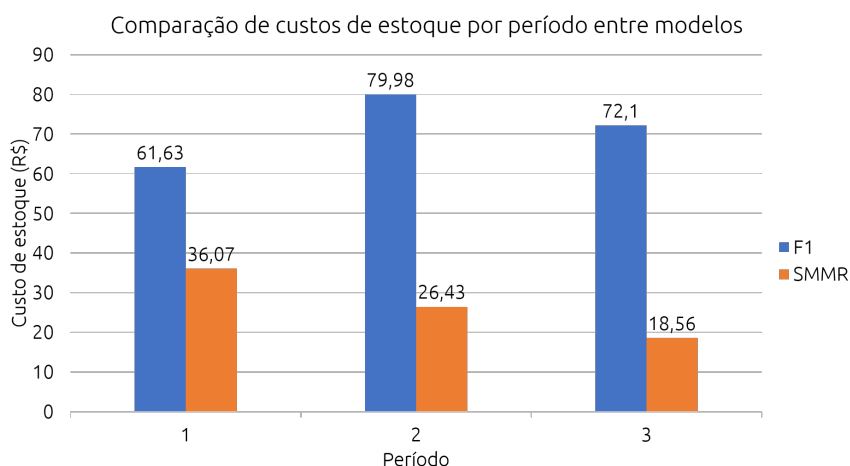
Fonte: Elaboração própria

O custo total por trocas se manteve igual nos dois modelos. Isto porque apesar do sequenciamento ser diferente nos planos de produção obtidos, os custos de trocas nas linhas foram os mesmos. Lembrando que a instância E1, objeto desta análise, não considera custos de troca no primeiro estágio de produção. Se fossem considerados custos de troca no primeiro estágio, provavelmente existiria uma diferença nestas parcelas. Veja também que o modelo SMMRPM permitiu satisfazer a demanda totalmente e sem atrasos diferentemente do modelo F1, onde encontramos um custo de atraso de R\$15.43. Mais à frente será analisada a razão desse atraso.

Veja que a maior diferença está nos custos de estoque (62.07% de diminuição), seguida dos custos de atraso (100% de diminuição). Os custos de troca são os mesmos nas duas soluções.

Para avaliar melhor os custos de estoque, eles estão separados por período na Figura 5.12. Pode-se observar que estes custos de estoque são sempre altos em cada período quando comparados com o modelo SMMRPM.

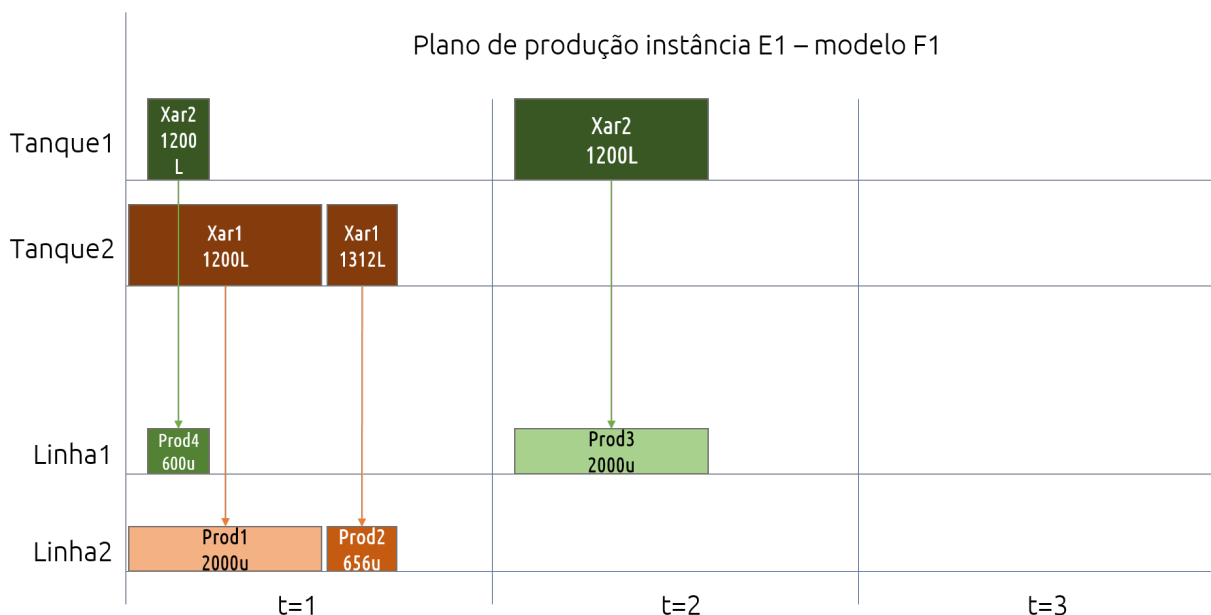
**FIGURA 5.12:** Custos de estoque por período na instância E1 para cada modelo.



Fonte: Elaboração própria

Vejam os a programação da produção para entender melhor por que os custos de estoque são tão altos no F1. Considere a Figura 5.13 apresenta o plano de produção ótimo resultante utilizando o modelo F1 para a instância E1. As divisões superiores correspondem aos tanques 1 e 2 e as inferiores às linhas 1 e 2. As setas representam as conexões tanque / enchimento das linhas.

**FIGURA 5.13:** Plano ótimo de produção para a instância E1 obtido pelo modelo F1.



Fonte: Elaboração própria

Os lotes nos tanques devem ser todos no mínimo de 1200 L. Como cada tanque/enchimento são dedicados às linhas, elas devem envasar o lote todo mesmo não havendo demanda para ele. No caso da instância E1 o lote mínimo no primeiro estágio é de 1200 litros, que dependendo

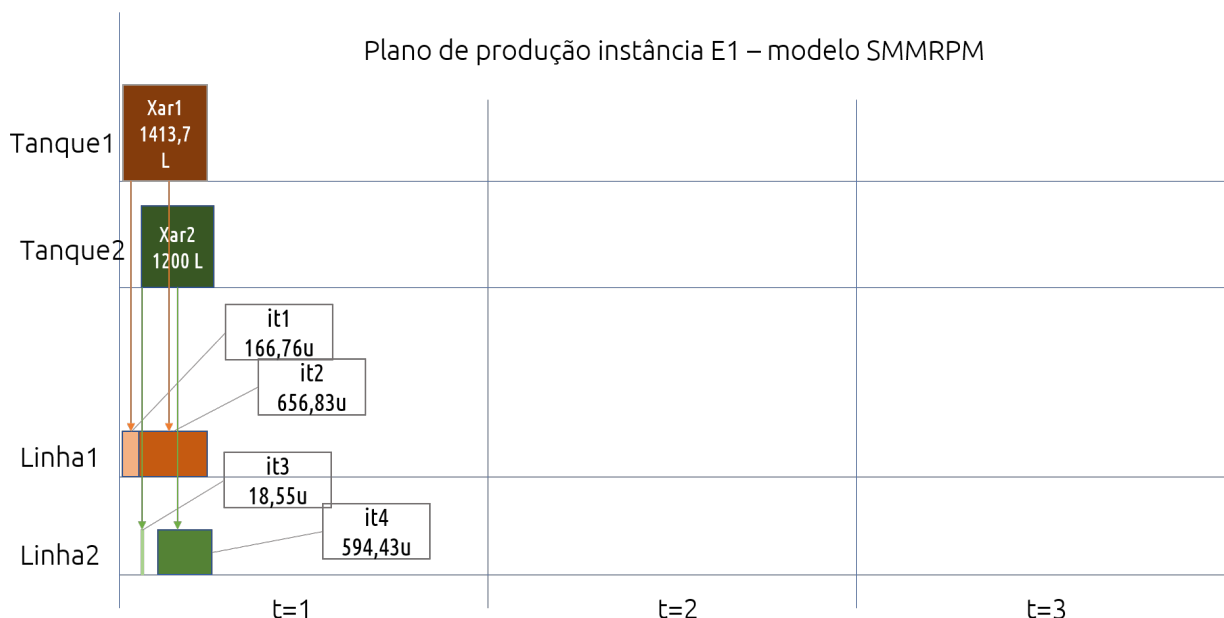
do item representa a produção de 600 unidades até 2000 unidades. Tendo em vista que a demanda maior (correspondente ao item 2) não ultrapassa as 290 unidades em cada período, a programação obtida ocasiona altos níveis de estoque associados. Veja que apesar das grandes quantidades produzidas há um atraso do item 3 no período 1 de 1.1 unidades (custo deste atraso \$15.43). O custo de troca para produzir o lote mínimo necessário para suprir esse atraso é \$ 21.42, que é maior que o custo de atraso. Somado a isto, dado que o modelo F1 precisa de envasar todo o lote mínimo do xarope para qualquer item; a produção do item 3 implicaria em envasar um lote de 1200 L de xarope 2 que corresponde a 2000 unidades, gerando um estoque de  $2000 - 1.1 = 1998.9$  unidades no primeiro período, ou seja, um custo adicional de \$ 27.98. Logo, o custo total para não atrasar ( \$ 49.4 = \$ 21.42 da troca + \$ 27.98 do estoque gerado) é maior que o custo de atraso (\$15.43).

Como consequência dos estoques elevados não foi produzido nenhum item no período 3.

Pode se concluir que o tamanho do lote mínimo influi significativamente nos planos gerados pelo modelo F1, logo os tamanhos dos lotes mínimos devem ser calculados com cuidado para não gerar um excesso de estoque.

Considere o plano de produção obtido pelo modelo SMMRPM, que é apresentado na Figura 5.14, ela segue o mesmo padrão da Figura 5.13.

FIGURA 5.14: Plano ótimo de produção para a instância E1 obtido do modelo SMMRPM.



Fonte: Elaboração própria

Toda a produção se centra no primeiro período e que existe somente um lote de xarope para cada tanque. No plano de produção da Figura 5.14, para produzir os itens 1 e 2 na linha 1 é utilizado um único lote do xarope 1 de 1413.7 L no tanque 1, e para os itens 3 e 4 envasados na

linha 2, um único lote do xarope 2 de 1200L no tanque 2.

As linhas dedicadas produzem os itens do mesmo sabor na mesma conexão tanque / enchimento, ou seja, o lote mínimo do tanque é utilizado no envase de vários itens e não de um único item, permitindo assim, a produção de lotes menores nas linhas mas ainda respeitando a restrição de lote mínimo de xarope.

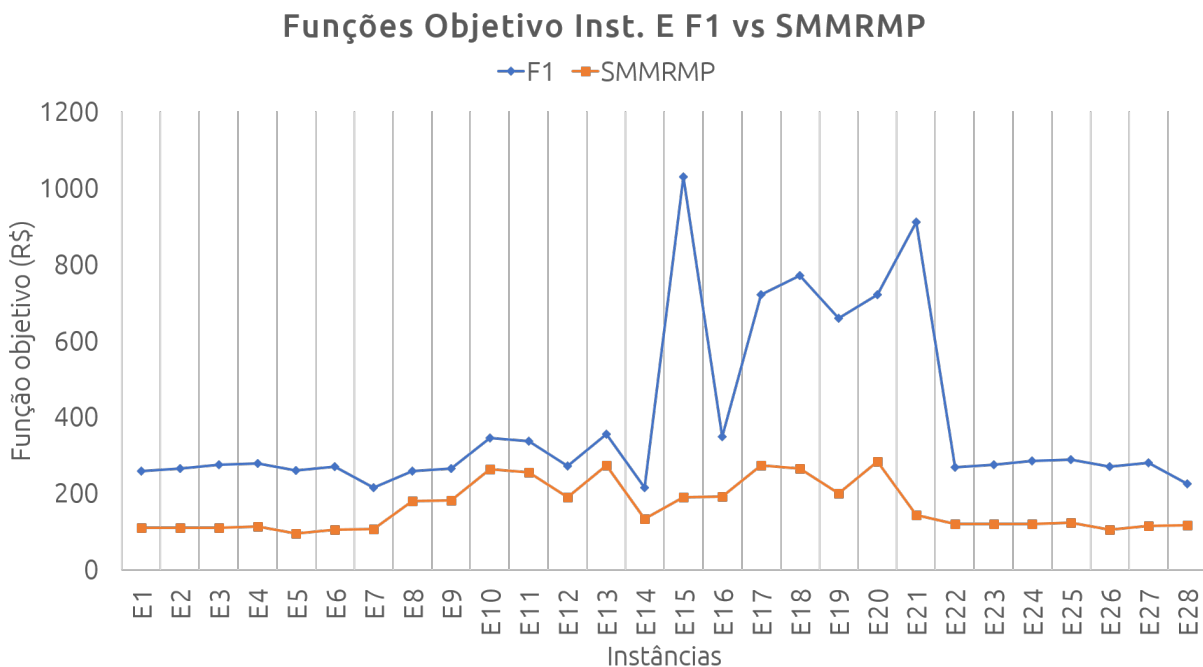
A ausência de produção nos períodos 2 e 3 se deve ao custo de estoque ser mais baixo que o custo de troca, é menos custoso produzir toda a demanda no primeiro período e estocar que realizar trocas para produzir.

### 5.8.1 Resultados comparativos gerais

Analisando os resultados gerados a partir das outras instâncias do grupo E se observou um comportamento similar ao observado no plano de produção da instância E1.

Os planos obtidos pelo modelo SMMRPM são menos custosos em todas as instâncias analisadas. A Figura 5.15 o custo total obtido em cada uma das instâncias para os dois modelos matemáticos. No eixo horizontal estão as instâncias e no eixo vertical os valores dos custos totais das funções objetivo.

FIGURA 5.15: Comparação dos valores das funções objetivo dos modelos F1 e SMMRPM para as instâncias E.



Fonte: Elaboração própria

A Tabela 5.21 apresenta, para cada uma das 28 instâncias E, os valores do custo de estoque dos modelos F1 e SMMRPM nas colunas 2 e 3 respectivamente, a diferença entre os dois valores



( $c.\text{estoqueSMMRPM} - c.\text{estoqueF1}$ ) na coluna 4 e a variação em porcentagem dessa diferença ( $\text{diferença}/c.\text{estoque F1}$ ) na coluna 5. Os custos de atraso para F1 e SMMRPM estão nas colunas 6 e 7 respectivamente, com as diferenças calculadas na coluna 8 e a variação em porcentagem na coluna 9. Os custos de troca são apresentados, nas colunas 10 e 11 para o F1 e SMMRPM respectivamente, a diferença entre esses custos está na coluna 12 e a variação na coluna 13. Por último é apresentado o custo total da função objetivo para F1 na coluna 14 e para SMMRPM na coluna 15. As diferenças estão na coluna 16 e a variação em porcentagem, na coluna 17. No fim da tabela são apresentadas as médias das diferenças e variações em porcentagem tanto para os componentes de custos quanto para o valor da função objetivo.



TABELA 5.21: Comparação entre funções objetivo obtidas dos modelos F1 e SMMRPM desagregadas por componentes de custo para as instâncias E.

Inst.	Custo de estoque				Custo de atraso				Custo de trocas				Total FO			
	F1	SMMRPM	Diferença	Varição	F1	SMMRPM	Diferença	Varição	F1	SMMRPM	Diferença	Varição	F1	SMMRPM	Diferença	Varição
E1	213.71	81.06	-132.65	-62.07%	15.43	0	-15.43	-100.00%	28.56	28.56	0	0.00%	257.701	109.623	-148.078	-57.46%
E2	219.57	81.5	-138.07	-62.88%	16.2	0	-16.2	-100.00%	28.56	28.56	0	0.00%	264.333	110.066	-154.267	-58.36%
E3	246.71	81.43	-165.28	-66.99%	0	0	0	0.00%	28.56	28.56	0	0.00%	275.277	109.989	-165.288	-60.04%
E4	249.62	84.61	-165.01	-66.10%	0	0	0	0.00%	28.56	28.56	0	0.00%	278.18	113.172	-165.008	-59.32%
E5	232.37	67.01	-165.36	-71.16%	0	0	0	0.00%	28.56	28.56	0	0.00%	260.935	95.5688	-165.3662	-63.37%
E6	242.29	77.01	-165.28	-68.22%	0	0	0	0.00%	28.56	28.56	0	0.00%	270.857	105.574	-165.283	-61.02%
E7	186.72	77.53	-109.19	-58.48%	0	0	0	0.00%	28.56	28.56	0	0.00%	215.283	106.091	-109.192	-50.72%
E8	213.71	136.71	-77	-36.03%	15.43	15.43	0	0.00%	28.56	28.56	0	0.00%	257.701	180.705	-76.996	-29.88%
E9	219.57	137.27	-82.3	-37.48%	16.2	16.2	0	0.00%	28.56	28.56	0	0.00%	264.333	182.027	-82.306	-31.14%
E10	218.81	137.07	-81.74	-37.36%	98	98	0	0.00%	28.56	28.56	0	0.00%	345.375	263.632	-81.743	-23.67%
E11	221.7	140.25	-81.45	-36.74%	85.76	85.76	0	0.00%	28.56	28.56	0	0.00%	336.03	254.579	-81.451	-24.24%
E12	204.41	122.71	-81.7	-39.97%	39.48	39.48	0	0.00%	28.56	28.56	0	0.00%	272.455	190.753	-81.702	-29.99%
E13	214.41	132.67	-81.74	-38.12%	111.4	111.4	0	0.00%	28.56	28.56	0	0.00%	354.366	272.63	-81.736	-23.07%
E14	186.72	105.38	-81.34	-43.56%	0	0	0	0.00%	28.56	28.56	0	0.00%	215.283	133.943	-81.34	-37.78%
E15	186.5	136.71	-49.79	-26.70%	803.03	15.43	-787.6	-98.08%	38.56	38.56	0	0.00%	1028.09	190.705	-837.385	-81.45%
E16	191.67	137.27	-54.4	-28.38%	117.5	16.2	-101.3	-86.21%	38.56	38.56	0	0.00%	347.739	192.027	-155.712	-44.78%
E17	191.2	137.07	-54.13	-28.31%	490.62	98	-392.62	-80.03%	38.56	38.56	0	0.00%	720.384	273.632	-446.752	-62.02%
E18	194.16	140.25	-53.91	-27.77%	538.19	85.76	-452.43	-84.07%	38.56	38.56	0	0.00%	770.906	264.579	-506.327	-65.68%
E19	176.82	122.71	-54.11	-30.60%	442.76	39.48	-403.28	-91.08%	38.56	38.56	0	0.00%	658.142	200.753	-457.389	-69.50%
E20	186.79	132.67	-54.12	-28.97%	494.35	111.4	-382.95	-77.47%	38.56	38.56	0	0.00%	719.705	282.63	-437.075	-60.73%
E21	159.43	105.38	-54.05	-33.90%	712.6	0	-712.6	-100.00%	38.56	38.56	0	0.00%	910.595	143.943	-766.652	-84.19%
E22	213.71	81.06	-132.65	-62.07%	15.43	0	-15.43	-100.00%	38.56	38.56	0	0.00%	267.701	119.623	-148.078	-55.31%
E23	219.57	81.5	-138.07	-62.88%	16.2	0	-16.2	-100.00%	38.56	38.56	0	0.00%	274.333	120.066	-154.267	-56.23%
E24	246.71	81.43	-165.28	-66.99%	0	0	0	0.00%	38.56	38.56	0	0.00%	285.277	119.989	-165.288	-57.94%
E25	249.62	84.61	-165.01	-66.10%	0	0	0	0.00%	38.56	38.56	0	0.00%	288.18	123.172	-165.008	-57.26%
E26	232.37	67.01	-165.36	-71.16%	0	0	0	0.00%	38.56	38.56	0	0.00%	270.935	105.569	-165.366	-61.04%
E27	242.29	77.01	-165.28	-68.22%	0	0	0	0.00%	38.56	38.56	0	0.00%	280.857	115.574	-165.283	-58.85%
E28	186.72	77.53	-109.19	-58.48%	0	0	0	0.00%	38.56	38.56	0	0.00%	225.283	116.091	-109.192	-48.47%
<b>Médias</b>			<b>-107.981</b>	<b>-49.49%</b>			<b>-117.716</b>	<b>-36.32%</b>			<b>0</b>	<b>0</b>			<b>-225.69751</b>	<b>-52.63%</b>

Fonte: Elaboração própria

Veja que o modelo SMMRPM melhora a função objetivo em todos os casos apresentados, em média a redução do custo total é de 52.63%. Esta melhoria está diretamente ligada aos custos de estoque, e, em menor proporção aos custos de atraso na satisfação da demanda.

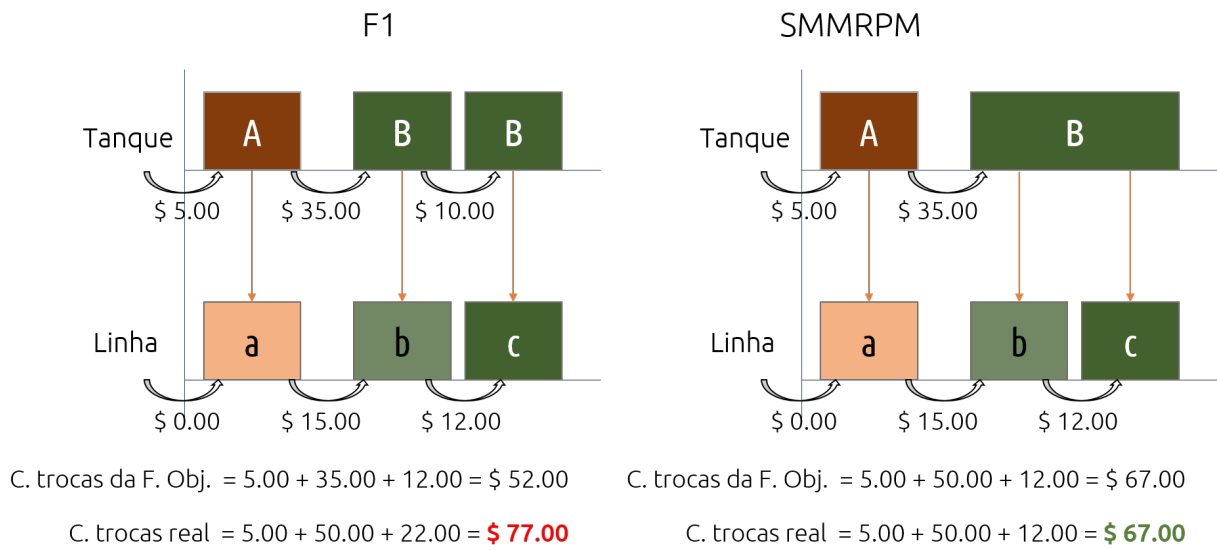
Os custos devidos às trocas mantêm-se iguais para as instâncias em todas as instâncias do grupo E. Nas instâncias E15-E28 há um aumento de \$10 no custo de trocas. Isto é porque nas instâncias E1-E14 o custo de trocas entre itens iguais é \$ 0.00, entanto que nas instâncias E15-E28 é de \$ 5.00 para qualquer item. Logo, nas instâncias E1-E14, as trocas no início do sequenciamento de cada linha, que são entre itens iguais já que são as mais baratas (determinado pelo modelo) não são penalizadas e sim são penalizadas nas instâncias E15-E28 \$ 5.00 adicionais para cada linha.

Foi observado que o modelo F1 por considerar somente o custo maior dentre os dois estágios pode obter um custo de trocas aparentemente menor que o modelo SMMRPM. Assim esse componente da função objetivo não pode ser comparado diretamente sem uma análise mais aprofundada e individual dos planos de produção obtidos do modelo F1 para cada uma dessas instâncias para determinar quais são as trocas envolvidas em cada estágio e fazer o posterior cálculo. Tal análise deve detalhar quais foram as trocas que aconteceram em cada estágio produtivo para calcular os custos reais de trocas.

Por exemplo, considere três itens: item  $a$  de sabor  $A$  e os itens  $b$  e  $c$  de sabor  $B$ . Suponha que a trocas mais baratas são nas sequencias  $a - b - c$  (itens) e  $A - B$  (xaropes) e que estas trocas custam para o estágio das linhas \$15.00 (troca  $a - b$ ), \$ 12.00 (troca  $b - c$ ), e para o estágio dos tanques \$ 35.00 (troca  $A - B$ ), as trocas entre itens iguais custam \$ 0.00 e entre xaropes iguais \$ 10.00. A Figura 5.16 apresenta as diferenças entre como seria feito o sequenciamento nos dois modelos. As setas curvadas indicam as trocas e cada retângulo indica um lote.

FIGURA 5.16: Plano ótimo de produção para a instância E15 obtido pelo modelo F1.

### Diferenças no sequenciamento dos modelos F1 e SMMRPM



Fonte: Elaboração própria

O modelo F1, fará o sequenciamento  $a - b - c$  na linha e  $A - B - B$  no tanque, pois pela dedicação precisa-se de um lote mínimo completo para produzir qualquer item individual. As trocas no início do período são entre itens e xaropes iguais. Como indicado na figura, na primeira troca na linha há um custo de \$ 0.00 e no tanque de \$ 5.00, a função objetivo do F1 tomará o maior, ou seja \$ 5.00. Logo na segunda troca há custos de \$15.00 (troca  $a - b$  na linha) e \$ 35.00 (troca  $A - B$  no tanque), o modelo tomará o custo de \$ 35.00 e por último o F1 tomará o custo da troca  $b - c$  de \$ 12.00 e ignorará o custo de \$ 10.00 da troca  $B - B$  do tanque, obtendo finalmente uma função objetivo de \$ 52.00. No entanto, o custo de trocas real é \$ 72.00 pelos custos ignorados de \$ 15.00 da troca  $a - b$  e \$ 10.00 da troca  $B - B$ .

O modelo SMMRPM considera os custos de trocas de ambos estágios simultaneamente e ainda consegue aproveitar um mesmo lote de  $B$  para produzir os dois itens  $b$  e  $c$  poupando a troca  $B - B$  no tanque. Com isso consegue diminuir o custo de trocas em \$ 10.00.

Podemos concluir que a formulação proposta é mais flexível que abordagens dedicadas da literatura pois consegue além de modelar o caso particular da dedicação, vantagens como a agregação de itens e produção de lotes de menor tamanho, permitindo diminuir o custo total.

## 5.9 Discussão sobre o desempenho computacional do modelo

A seguir são feitas análises sobre o desempenho computacional do modelo proposto. Cabe lembrar que os experimentos foram realizados utilizando um computador de 16Gb de RAM

e um processador Intel Core i7 @3.6 GHz e solver CPLEX versão 12.6 e que foram utilizadas as instâncias FL1-FL10 (baseadas nas instâncias I (FERREIRA *et al.*, 2012)) e as instâncias E do trabalho de Ferreira *et al.* (2012) tais instâncias foram discutidas na seção 5.1. O *gap* considerado como ótimo desde os parâmetros é o comumente utilizado na literatura, correspondente a 1% da diferença entre os limitantes superior e inferior

As instâncias mencionadas podem se classificar em 5 grupos , tendo em vista o número de variáveis. A Tabela 5.22 apresenta informações do número de variáveis dos grupos de instâncias mencionados. Na primeira coluna aparece o grupo de instâncias e na segunda as instâncias que o compõem sendo estes: grupo 1 conformado pelas instâncias FL1, FL3, FL4, FL5 e FL7, grupo 2 instâncias E1-E28, , grupo 3 instâncias FL2, FL6, grupo 4 instâncias FL8-FL10 e grupo 5 instâncias I1-I15. Na coluna 3 o número de variáveis binárias, na coluna 4 se apresenta o número de variáveis reais, na coluna 4 o total de variáveis e na coluna 5 o número de restrições. Lembrando que o modelo SMMRPM não possui variáveis inteiras. Nas colunas 7-11 são apresentadas as cardinalidades dos conjuntos de itens, xaropes, linhas, tanques, períodos e enchimentos permitidos para cada período.

A Tabela 5.22 está organizada com base no número de viáveis binárias de forma crescente.

TABELA 5.22: Número de variáveis das instâncias utilizadas no modelo SMMRPM.

Gr.	Inst.	V. Binárias	V. Reais	Total	Restrições	$ N_I $	$ N_J $	$ L $	$ M $	$ T $	$ O_t , \forall t \in T$
1	FL1, FL3-FL5, FL7	112,302	17,673	129,975	121,222	7	2	3	1	3	2
2	E1-E28	235,440	8,640	244,080	247,687	4	2	2	2	3	6
3	FL2, FL6	365,769	25,827	391,596	382681	7	2	3	1	3	3
4	FL8-FL10	1'306,512	34,125	1'340,637	1410352	7	2	3	2	3	2
5	I1-I15	1,780'711,200	763,512	1,781'474,712	1,783'353,146	23	18	2	2	3	25

Fonte: Elaboração própria

A maioria de variáveis binárias são para modelar as trocas entre itens e dado que todas as variáveis estão indexadas em  $mo$ , também era esperado que ao aumentar o número de enchimentos e itens o número de variáveis binárias crescesse. Por exemplo, as diferenças nas instâncias FL2 e FL6 das instancias FL1, FL3, FL4, FL5 e FL7 é que o número de enchimentos foi aumentado de 2 por período para 3 por período. Lembre que as instâncias do grupo 1 possuem um único tanque abastecendo às 3 linhas de produção.

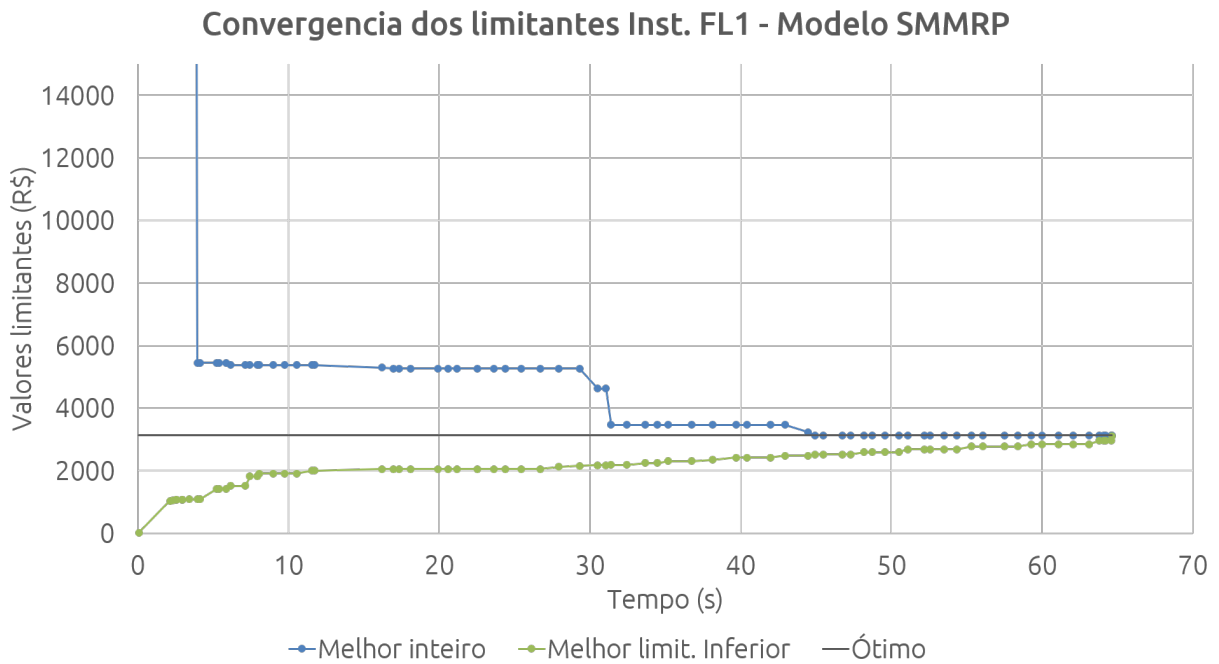
A seguir é analisado o comportamento do modelo a respeito do desempenho computacional. Foram realizados testes com as instâncias I para o modelo SMMRPM com limite de tempo de uma hora. Os planos obtidos apresentaram um *gap* médio de 99.99%. As soluções retornadas possuem valores de custo total alto maiores a  $1.23963 \times 10^7$  isto porque a solução trivial é atrasar toda a demanda. Tendo em vista esses resultados, valores dessas soluções não serão explicitados.

## Resultados das instâncias FL

Foi analisada a convergência dos limitantes superiores e inferiores da instância FL1. Para isto foram tomados os valores do melhor limitante superior e o melhor limitante inferior.

A convergência dos limitantes da instância FL1 pode ser observada na Figura 5.17. No eixo horizontal aparece o tempo transcorrido e no eixo vertical os valores dos limitantes.

FIGURA 5.17: Convergência dos limitantes para a instância FL1 do modelo SMMRPM



Fonte: Elaboração própria

Veja também a Figura 5.18 que apresenta a convergência da instância E1. Esta Figura segue o padrão de apresentação da Figura 5.17, no eixo horizontal está o tempo transcorrido em segundos e no eixo vertical está o valor dos limitantes e da função objetivo ótima.

Pela figura 5.17 pode se ver que o limitante inferior converge de maneira lenta. A solução ótima foi obtida em 45.06 segundos, o gap nesse momento foi de 19.41 %. No entanto, a prova de otimalidade foi obtida em 64.66 segundos. O *solver* demora todo esse tempo explorando a árvore *branch-and-cut* procurando diminuir o *gap* de otimalidade.

As análises de todas as instâncias FL, para observar de forma mais geral o desempenho do modelo SMMRPM são abordadas a seguir.

Como mencionado anteriormente, para algumas das instâncias FL, não se conseguiu o plano ótimo a saber instâncias FL2, FL 6, e FL8-FL10.

Na Tabela 5.23 são detalhadas as informações da solução das instâncias FL. Na primeira coluna aparecem as instâncias. Na segunda coluna está o tempo da prova de otimalidade (ou o

tempo limite caso não ter prova de otimalidade), na terceira coluna está *gap* no fim desse tempo. O tempo de obtenção da solução ótima está na coluna 4 e na coluna 5 o *gap* o instante da convergência. Nas instâncias que atingiram o limite de tempo e não chegaram no ótimo aparece o hífen '-'. Por último são apresentados nas colunas 6 e 7 respectivamente os valores dos limitantes superior e inferior no instante quando o ótimo foi encontrado. Nos casos onde foi achado o ótimo, obviamente, o limitante superior coincide com o valor da função objetivo.

TABELA 5.23: Informações do desempenho em instâncias FL

	Grupo	Inst.	TÓtimo(s)	Gap convr. %	LSup (\$)	LInf (\$)	TPrvOtim(s)	Gap final (%)
1		FL1	45.06	19.41	3126.227	2519.449	64.658	0.998
		FL3	66.72	9.01	3327.347	3027.635	87.483	1.000
		FL4	76.23	7.48	3126.227	2892.357	79.928	0.994
		FL5	209.89	23.6	4133.189	3156.231	1566.738	1.000
		FL7	196.36	2.34	26.312	25.697	230.339	1.000
3		FL2	-	-	3756.664	2863.562	3600.000	22.562
		FL6	-	-	4088.411	2790.257	3600.000	31.676
4		FL8	-	-	3718.409	1409.639	3600.000	62.024
		FL9	-	-	3478.019	1310.462	3600.000	62.263
		FL10	-	-	4093.448	71.498	3600.000	65.418

Fonte: Elaboração própria.

As instâncias FL2 e FL6 pertencem ao grupo 3, veja que elas igual que as instâncias do grupo 1 possuem um único tanque suprindo as 3 linhas de produção. A única diferença nos conjuntos destas instâncias foi que o número de enchimentos permitidos por período ( $|O_t|$ ) foi aumentado de 2 para 3. Como mostrado na 5.22 isto aumentou significativamente o número de variáveis.

As instâncias do grupo 1 foram as únicas em ser resolvidas até otimalidade dentro do tempo de uma hora. As instâncias do grupo 3 não conseguiram o ótimo mas os *gaps* não foram muito altos. Note que nas instâncias do grupo 1 o ótimo foi achado quando o *gap* era (em média) 12.37%. Como se verá mais para frente isto não é exclusivo destas instâncias, nas instâncias E aconteceu algo similar.

Veja que na instância FL7 a solução ótima foi achada quando o *gap* era de 2.34 %. Os limitantes desta instância são mais baixos porque nela foram diminuídos os custos de troca o que priorizou o dimensionamento.

Esta piora foi maior ainda quando é o número de tanques o que é modificado. Veja que nas instâncias FL8-FL10 foi atingido o tempo limite e ainda existe um *gap* médio de 62,54 %. No entanto, veja que o limitante superior não é tão ruim comparado com os resultados do grupo 1



(tirando FL7). Isto indica que a solução é uma boa solução apesar dela não ser ótima.

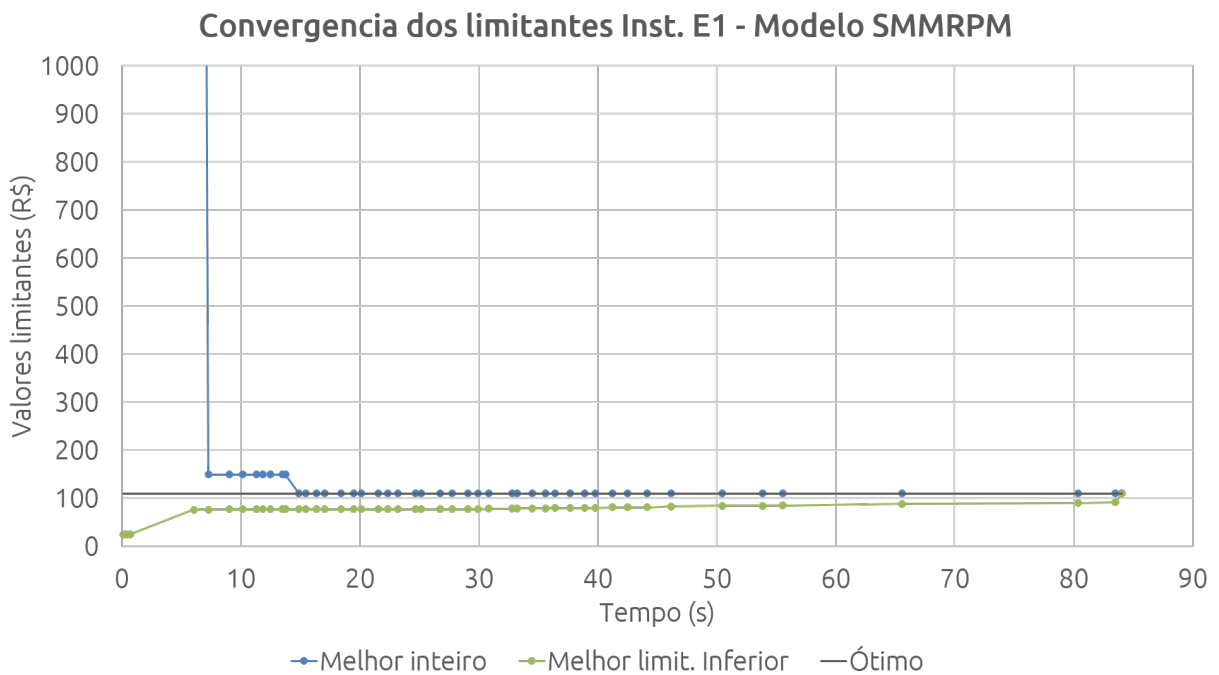
Após os testes foram feitos testes adicionais com as instâncias dos grupos 3 e 4 sem limitar o tempo. Como mencionado na seção 5.3 o ótimo para a instância FL2 foi achado em 4 horas e 5 minutos aproximadamente, a diferença entre a solução ótima e a obtida em uma hora foi de \$ 100.00. A solução ótima da instância FL6 foi obtida em 25 horas com 26 minutos aproximadamente a diferença de custo com a solução obtida em uma hora foi de \$ 0.00, ou seja a solução encontrada em uma hora é um plano equivalente à solução ótima. Para as instâncias do grupo 4, em todos os casos foi estourada a memória do computador depois de 154688.807 s (42.96 h) para a instância FL8, 9691.089 s (2.69h) para FL9 e 166640.658 s (46.28 h) para FL10.

## Resultados das instâncias E

Para o grupo 2 de instâncias (instâncias E) o desempenho foi melhor, todas as instâncias deste grupo foram resolvidas até otimalidade.

Foi analisada a convergência da instância E1 de forma parecida à instância FL1. Na Figura 5.18 é apresentada a evolução da convergência dos limitantes superior e inferior.

FIGURA 5.18: Convergência dos limitantes para a instância E1 do modelo SMMRPM



Fonte: Elaboração própria

Pode se observar que para a instância E1 a convergência é ainda mais rápida do que para a instância FL1. Veja que a melhor solução factível inteira (solução ótima nesse caso) é encontrada nos primeiros 6.78 segundos o *gap* nesse momento era de 29.97 %, mas a prova de otimalidade é

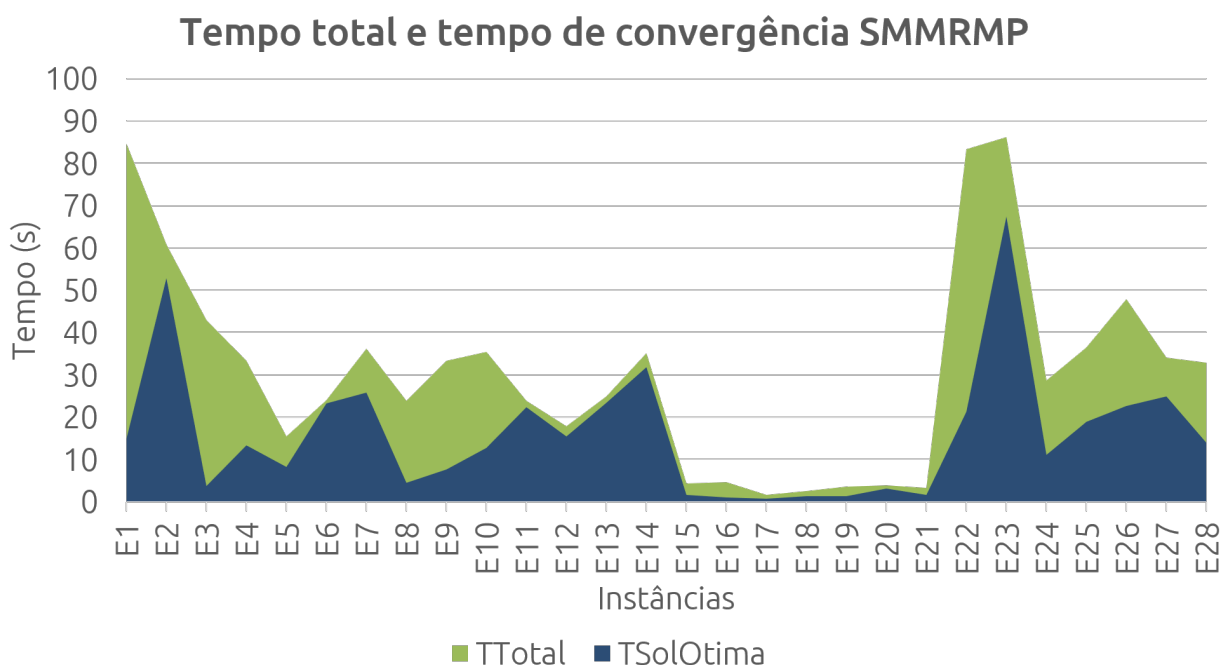
obtida em 32.921 s.

Isso sugere novamente que o modelo consegue obter boas soluções em pouco tempo, embora tenha dificuldades em relação ao limitante inferior.

Comparando esta instância com os resultados do modelo F1 o tempo de solução do modelo SMMRPM é maior, de fato o tempo total gasto com o modelo SMMRPM foi 84.62 s enquanto que o tempo do F1 foi de apenas 0.138 s, uma diferença de 99.83%.

Para as outras instâncias deste grupo, na Figura 5.19 pode se ver a comparação dos tempos totais até a prova de otimalidade, e de os tempos de obtenção do ótimo. No eixo horizontal estão as instâncias E1-E28 e no eixo vertical os tempos em segundos. A cor mais clara representa o tempo total, e a cor mais escura a porção desse tempo até achar uma solução ótima.

FIGURA 5.19: Tempos totais e obtenção do ótimo em instâncias E - modelo SMMRPM



Fonte: Elaboração própria

Note que os tempos em geral não ultrapassaram os 87 segundos. O maior tempo corresponde à instância E23 com 86.22 s e a instância mais rápida foi a instância E17 com um tempo de 1.68 s.

O tempo médio de execução das instâncias E foi de 30.88 segundos. Em comparação com o modelo da literatura F1, os tempos utilizando essa formulação foram em média de 0.13 s.

O tempo médio de obtenção da solução ótima foi de 16.1 s, ou seja, em média o ótimo foi obtido na metade do tempo de resolução (mais exatamente 52.13 % do tempo total) nas instâncias E em geral. A instância que convergiu mais rapidamente foi a E17 conseguindo o ótimo em 0.72 s. a mais demorada foi E2, obtendo a solução ótima em 54.81 s.

Em média, os *gaps* no momento de obtenção do ótimo foram, de 31.95 %. O ótimo com maior

*gap* no momento de sua obtenção foi encontrado na instância E3. Nessa instância o ótimo foi encontrado em 3.8 segundos e tinha um *gap* nesse momento de 84.77% a prova de otimalidade da solução foi obtida em 42.88 segundos. Na instância mais demorada E23 o ótimo foi encontrado depois de 67.4 segundos com um *gap* do 36.22 %.

Estes resultados e os resultados das instâncias FL e E em sugerem que o alto tempo gasto para obter a prova de otimalidade é devido à lenta convergência do limitante inferior.

Métodos de solução que explorem como melhorar esse limitante podem ser uma boa alternativa para melhorar o desempenho do modelo em pesquisas futuras.

## 5.10 Conclusões

Neste capítulo foi aplicado o modelo SMMRPM para solução de situações práticas de diferentes cenários tais como existência de um único tanque para todas as linhas, substituição desse tanque por dois tanques com menor capacidade, existência de um xarope muito precível, limitações nas capacidades de tanques e linhas, disponibilidade de tempo de produção restrita, janelas de tempos para produção em ambos estágios e existência de dedicação linha-tanque. Para esse último caso também foi realizada uma comparação com o modelo F1 (FERREIRA *et al.*, 2012) que representa essa situação particular. Para tal comparação foram feitos alguns pressupostos e modificações no modelo proposto.

Observando as instâncias FL1-FL10, pode se concluir que em situações com um tanque com capacidade de suprir todas as linhas pode se diminuir o custo de trocas nesse estágio fazendo lotes grandes de xarope e agrupando lotes de itens do mesmo sabor nas linhas conectadas a ele. Linhas de envase mais rápidas, obviamente, serão mais utilizadas

Por outro lado, uma desvantagem deste enfoque é que, se existir alguma parada do tanque, todas as linhas de envase param sua produção por falta de matéria prima.

Pode se observar que ter mais tanques nem sempre é tão mais vantajoso se eles são de capacidade reduzida. Isto porque, por sua capacidade menor, os lotes de xarope se esgotam mais rápido e novos lotes devem ser preparados o que gera custos e tempos por trocas nesse estágio.

Quanto à precibilidade (instâncias FL2, FL6 e FL10), ela influi significativamente nos planos de produção, limitando as quantidades que podem ser feitas tanto em tanques como em linhas e gerando a necessidade de mais preparos. Isto é observado especialmente quando há linhas muito lentas na planta produtiva.

Também observou-se como o modelo avalia corretamente o *trade off* entre as decisões de dimensionamento e sequenciamento (instância FL7). Como mencionado, um bom plano produtivo irá depender da estimação correta dos custos inerentes a tais decisões e à importância de um ou

outro para o decisor naquele momento.

Nas instâncias dedicadas (instâncias E), pode se observar que apesar de ser resolvido em um tempo maior, o modelo proposto consegue planos de produção bem menos custosos que os modelos dedicados da literatura. Isto foi evidenciado com uma redução do custo total de 52.63% em média para essas instâncias.

Em resumo, pode se dizer que o modelo SMMRPM, apresentado nesta dissertação de mestrado é um modelo versátil que representa de forma aderente cenários que podem ser encontrados na realidade onde são necessárias considerações que são negligenciadas pela maioria de modelos existentes na literatura, como mostrado no capítulo 3 tais como a perecibilidade, a existência de múltiplas conexões nos tanques, entre outras já explicadas.

Do ponto de vista do desempenho computacional, o aumento de número de tanques impactou significativamente no desempenho do modelo, que não obteve provas de otimalidade para nenhuma das instâncias FL8-FL10.

Foi observada uma lenta convergência do limitante inferior em todas as instâncias testadas e com isso a lenta diminuição dos *gaps*. Apesar desse aspecto, os testes indicam que o modelo consegue bons planos de produção em tempos consideravelmente menores ao tempo da prova de otimalidade.

Em instâncias de grande porte o modelo não conseguiu encontrar soluções diferentes à solução trivial, que é atrasar toda a demanda do horizonte de planejamento não produzindo item nenhum, no tempo de 1 hora. Os *gaps* destas soluções foram altos (em média do 99.9%).

Para trabalhos futuros podem ser exploradas técnicas que permitam diminuir o tempo gasto para resolver as instâncias e aplicar o modelo em instâncias de tamanho maior.

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

---

**N**A presente dissertação de mestrado foi estudado o problema integrado de dimensionamento de lotes e sequenciamento da produção de bebidas não alcoólicas de dois estágios sincronizados com manutenções preventivas. No processo produtivo o primeiro estágio, está composto por tanques, os quais suprem de matéria prima (xarope) às linhas de envase do segundo estágio. O xarope é perecível e existem custos e tempos de *setup* dependentes da sequência de produção.

Este estudo propôs um modelo de otimização linear inteira (modelo SMMRPM) baseado nos modelos clássicos CLSD e GLSP com restrições e variáveis de tempos contínuos para garantir a sincronia. Um diferencial do modelo a respeito de outros da literatura é a consideração da perecibilidade da matéria e janelas de tempo de operação nos dois estágios produtivos, o que permite programar manutenções preventivas em linhas e tanques.

Instâncias baseadas em dados reais obtidos da literatura científica foram utilizados nos testes computacionais.

O modelo foi testado em diversos cenários de situações práticas que representam diferentes tipos de plantas de produção, para observar a influência de aspectos como a perecibilidade da matéria prima, janelas de tempo, variação do número de tanques, priorização do dimensionamento sobre o sequenciamento e a dedicação de tanques a linhas, nos planos de produção obtidos.

Os resultados mostraram que de fato o modelo é aderente e a flexível para representar diversas tipos de plantas de produção que podem ser encontradas na realidade.

Baseado nos resultados, pode se concluir que características como a perecibilidade dos xaropes e a programação de manutenções preventivas podem afetar de forma significativa os planos de produção, e conseqüentemente, os custos, de tal forma que se forem negligenciados no momento da programação da produção, o plano pode ser ineficaz.

Para o cenário da dedicação de tanques a linhas foi realizada uma comparação do modelo com outra formulação da literatura, o modelo F1 (FERREIRA *et al.*, 2012). Os resultados mostraram que o modelo proposto consegue gerar planos de produção, em média, 52.63% menos custosos que os modelos dedicados, isto porque no modelo SMMRPM os tanques podem suprir várias linhas de produção o que gera um melhor aproveitamento deste recurso.

No apêndice B também foi levantada uma comparação parcial entre o modelo SMMRPM e o modelo SITLSP, que é o trabalho mais próximo ao apresentado nessa dissertação. No entanto, a comparação não foi totalmente possível por diferenças profundas nos problemas tratados que

precisam de um estudo mais detalhado das mudanças que devem ser feitas em cada formulação para poder compará-las. Para trabalhos futuros se propõe estudar melhor tais modificações e realizar a comparação de forma mais precisa.

A respeito do desempenho computacional foi observado que o modelo retorna boas soluções em tempos razoáveis para instâncias de pequeno e meio porte, porém, possui um tempo computacional alto devido a uma lenta convergência do limitante inferior. Para trabalhos futuros pode ser interessante estudar métodos para obtenção de melhores limitantes inferiores e propor técnicas de solução aproximadas que ajudem a diminuir o tempo computacional gasto e fazer com que o modelo possa ser aplicado para instâncias de maior tamanho.

Outro enfoque interessante para pesquisas futuras pode ser a análise do comportamento do modelo frente a outros critérios de otimização e diferentes composições da função objetivo, para incluir penalidades como custo de produção, lucro por venda ou penalidades relacionadas aos tempos dos lotes e conexões.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- ALMADA-LOBO, B.; CLARK, A.; GUIMARÃES, L.; FIGUEIRA, G.; AMORIM, P. Industrial Insights Into Lot Sizing and Scheduling Modeling. *Pesquisa Operacional*, v. 35, n. 3, p. 439–464, 2015. ISSN 1678-5142. Disponível em: [http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0101-74382015000300439&lng=en&nrm](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0101-74382015000300439&lng=en&nrm).
- ALMADA-LOBO, B.; KLABJAN, D.; CARRAVILLA, M. A.; OLIVEIRA, J. F. Single machine multi-product capacitated lot sizing with sequence-dependent setups. *International Journal of Production Research*, v. 45, n. September 2014, p. 4873–4894, 2007. ISSN 0020-7543.
- ALMADA-LOBO, B.; OLIVEIRA, J. F.; CARRAVILLA, M. A. Production planning and scheduling in the glass container industry: A VNS approach. *International Journal of Production Economics*, v. 114, n. 1, p. 363–375, 2008. ISSN 09255273.
- ALMEDER, C.; ALMADA-LOBO, B. Synchronisation of scarce resources for a parallel machine lotsizing problem. *International Journal of Production Research*, v. 49, n. 24, p. 7315–7335, 2011. ISSN 0020-7543.
- AMORIM, P.; PINTO-VARELA, T.; ALMADA-LOBO, B.; BARBÓSA-PÓVOA a.P.F.D. Comparing models for lot-sizing and scheduling of single-stage continuous processes: Operations research and process systems engineering approaches. *Computers & Chemical Engineering*, Elsevier Ltd, v. 52, p. 177–192, 2013. ISSN 00981354. Disponível em: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0098135413000239>.
- ARAUJO, S. A. de; ARENALES, M. N.; CLARK, A. R. Lot sizing and furnace scheduling in small foundries. *Computers and Operations Research*, v. 35, n. 3, p. 916–932, 2008. ISSN 03050548.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS INDÚSTRIAS DE REFRIGERANTES E DE BEBIDAS NÃO ALCÓOLICAS. *Dados de todas as bebidas não alcoólicas*. 2016. Disponível em: <http://abir.org.br/o-setor/dados/x-todas-as-bebidas-nao-alcoolicas/>.
- BAHL, H. C.; RITZMAN, L. P.; GUPTA, J. N. D. OR Practice — Determining Lot Sizes and Resource Requirements : A Review. *Operations Research*, v. 35, n. 3, p. 329–345, 1987.
- BALDO, T. *O problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes no processo de fabricação da cerveja: modelos e métodos de solução*. 147 p. Tese (Doutorado) — Universidad de São Paulo, 2014.
- BALDO, T. A.; MORABITO, R.; SANTOS, M. O.; GUIMARÃES, L. Alternative Mathematical Models and Solution Approaches for Lot-Sizing and Scheduling Problems in the Brewery Industry: Analyzing Two Different Situations. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2017, 2017. ISSN 15635147.
- BALDO, T. A.; SANTOS, M. O.; ALMADA-LOBO, B.; MORABITO, R. An optimization approach for the lot sizing and scheduling problem in the brewery industry. *Computers and Industrial Engineering*, Elsevier Ltd, v. 72, n. 1, p. 58–71, 2014. ISSN 03608352. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cie.2014.02.008>.

- BELO-FILHO, M. A.; TOLEDO, F. M.; ALMADA-LOBO, B. Models for capacitated lot-sizing problem with backlogging, setup carryover and crossover. *Journal of the Operational Research Society*, v. 65, n. 11, p. 1735–1747, 2014. ISSN 0160-5682. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1057/jors.2013.131>).
- BERTRAND, J. W. M.; FRANSOO, J. C. Operations management research methodologies using quantitative modeling. *International Journal of Operations & Production Management*, v. 22, n. 2, p. 241–264, 2002. ISSN 0144-3577. Disponível em: <http://www.emeraldinsight.com/doi/abs/10.1108/01443570210414338>).
- BILGEN, B.; DOGAN, K. Multistage Production Planning in the Dairy Industry: A Mixed-Integer Programming Approach. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, p. acs.iecr.5b02247, 2015. ISSN 0888-5885. Disponível em: <http://pubs.acs.org/doi/10.1021/acs.iecr.5b02247>).
- BITRAN, G. R.; YANASSE, H. H. Computational Complexity of the Capacitated Lot Size Problem. *Management Science*, v. 28, n. 10, p. 1174–1186, 1982. ISSN 0025-1909.
- CAMARGO, V. C. B.; TOLEDO, F. M. B.; ALMADA-LOBO, B. Three time-based scale formulations for the two-stage lot sizing and scheduling in process industries. *Journal of the Operational Research Society*, Nature Publishing Group, v. 63, n. 11, p. 1613–1630, 2012. ISSN 0160-5682. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1057/jors.2011.159>).
- CHASE, R. B.; JACOBS, R. F.; AQUILANO, N. J. *Administración de operaciones, producción y cadena de suministros*. 12. ed. [S.l.]: Mc Graw Hill, 2009. 800 p. ISBN 9789701070277.
- CHRISTOU, I.; LAGODIMOS, A.; LYCOPOULOU, D. Hierarchical production planning for multi-product lines in the beverage industry. *Production Planning & Control*, v. 8, n. 5, p. 367–76, 2007.
- CLARK, A. R. Hybrid heuristics for planning lot setups and sizes. *Computers & Industrial Engineering*, v. 45, n. 4, p. 545–562, 2003. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360835203000731>).
- COPIL, K.; WÖRBELAUER, M.; MEYR, H.; TEMPELMEIER, H. Simultaneous lotsizing and scheduling problems: a classification and review of models. *OR Spectrum*, Springer Berlin Heidelberg, 2016. ISSN 0171-6468. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/s00291-015-0429-4>).
- CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L. *Introduction to algorithms*. 1. ed. New York: Mc Graw Hill, 1990. 1028 p.
- De Resende, P.; STOLFI, J. *Fundamentos de Geometria Computacional*. 1. ed. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 1994. 208 p.
- DEFALQUE, C.; RANGEL, S.; FERREIRA, D. Usando o ATSP na Modelagem do Problema Integrado de Produção de Bebidas. *TEMA - Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, v. 12, n. 3, p. 195–209, 2011. ISSN 16771966. Disponível em: <http://sbmac.org.br/tema/seer/index.php/tema/article/view/548>).
- DELLAGI, S.; CHELBI, A.; TRABELSI, W. Joint integrated production-maintenance policy with production plan smoothing through production rate control. *Journal of Manufacturing Systems*, v. 42, p. 262–270, 2017. ISSN 02786125.
- DÍAZ-MADROÑERO, M.; MULA, J.; PEIDRO, D. A review of discrete-time optimization models for tactical production planning. *International Journal of Production Research*, v. 52, n. 17, p. 5171–5205, 2014. ISSN 0020-7543. Disponível em: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00207543.2014.899721>).



DOGANIS, P.; SARIMVEIS, H. Optimal scheduling in a yogurt production line based on mixed integer linear programming. *Journal of Food Engineering*, v. 80, n. 2, p. 445–453, 2007. ISSN 02608774.

DREXL, a.; KIMMS, a. Lot sizing and scheduling - Survey and extensions. *European Journal of Operational Research*, v. 99, n. 2, p. 221–235, 1997. ISSN 03772217.

FERREIRA, D. *Abordagens para o Problema Integrado de Dimensionamento e Sequenciamento de Lotes da Produção de Bebidas*. 247 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de São Carlos, 2006.

FERREIRA, D.; ALMADA-LOBO, B.; MORABITO, R. Formulações monoestágio para o problema de programação da produção de bebidas dois estágios com sincronia. *Produção*, v. 23, n. 1, p. 107–119, 2013. ISSN 0103-6513. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/S0103-65132011005000068>.

FERREIRA, D.; CLARK, A. R.; ALMADA-LOBO, B.; MORABITO, R. Single-stage formulations for synchronised two-stage lot sizing and scheduling in soft drink production. *International Journal of Production Economics*, Elsevier, v. 136, n. 2, p. 255–265, 2012. ISSN 09255273. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijpe.2011.11.028>.

FERREIRA, D.; MORABITO, R.; RANGEL, S. Um modelo de otimização inteira mista e heurísticas relax and fix para a programação da produção de fábricas de refrigerantes de pequeno porte. *Produção*, v. 18, n. 1, p. 76–88, 2008. ISSN 0103-6513.

FERREIRA, D.; MORABITO, R.; RANGEL, S. Solution approaches for the soft drink integrated production lot sizing and scheduling problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier B.V., v. 196, n. 2, p. 697–706, 2009. ISSN 03772217. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2008.03.035>.

FERREIRA, D.; MORABITO, R.; RANGEL, S. Relax and fix heuristics to solve one-stage one-machine lot-scheduling models for small-scale soft drink plants. *Computers and Operations Research*, Elsevier, v. 37, n. 4, p. 684–691, 2010. ISSN 03050548.

FITOUHI, M. C.; NOURELFATH, M. Integrating noncyclical preventive maintenance scheduling and production planning for a single machine. *International Journal of Production Economics*, Elsevier, v. 136, n. 2, p. 344–351, 2012. ISSN 09255273. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijpe.2011.12.021>.

FLEISCHMANN, B.; MEYR, H. The general lotsizing and scheduling problem. *OR Spektrum*, v. 19, n. 1, p. 11–21, 1997. ISSN 0171-6468.

FOURER, R.; GAY, D. M.; KERNIGHAN, B. W. *AMPL*. Albuquerque, NM, USA: Duxbury Press, 2003. 540 p.

GAREY, M. R.; JONHSON, D. S. *Computers and Intractability: A guide to the theory of NP-Completeness*. 1. ed. New York: W. H. Freeman and Company, 1979. 339 p. ISBN 0-7167-1044-7.

GUIMARÃES, L.; FIGUEIRA, G.; AMORIM, P.; ALMADA-LOBO, B. Modelling Lot Sizing and Scheduling in Practice. In: *Operations Research and Big Data*. 15. ed. Lisboa: Springer, 2015. v. 15, cap. 9, p. 67–77. ISBN 978-3-319-24152-4. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-24154-8>.

GUIMARÃES, L.; KLABJAN, D.; ALMADA-LOBO, B. Annual production budget in the beverage industry. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, v. 25, n. 2, p. 229–241, 2012. ISSN 09521976.

- GUIMARÃES, L.; KLABJAN, D.; ALMADA-LOBO, B. Modeling lotsizing and scheduling problems with sequence dependent setups. *European Journal of Operational Research*, v. 239, n. 3, p. 644–662, 2014. ISSN 03772217.
- GÜNTHER, H. O. The Block Planning Approach: A Case Study Application from the Beverage Industry. In: *2008 IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 359–363. ISBN 9781424426300.
- GÜNTHER, H.-O. The block planning approach for continuous time-based dynamic lot sizing and scheduling. *Business Research*, v. 7, n. 1, p. 51–76, 2014. ISSN 2198-3402. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/s40685-014-0003-y>.
- HAASE, K. Capacitated lot-sizing with sequence dependent setup costs. *OR Spektrum*, v. 18, n. 1, p. 51–59, 1996. ISSN 0171-6468.
- HANS, E.; VELDE, S. van de. The lot sizing and scheduling of sand casting operations. *International Journal of Production Research*, v. 49, n. 9, p. 2481–2499, 2011. ISSN 0020-7543. Disponível em: <http://www.informaworld.com/openurl?genre=article&doi=10.1080/00207543.2010.532913&magic=crossref||D404A21C5BB053405B1A640AFF>.
- HUNG, Y.-F.; SHIH, C.-C.; CHEN, C.-P. Evolutionary algorithms for production planning problems with setup decisions. *Journal of the Operational Research Society*, v. 50, n. 8, p. 857–866, 1999. ISSN 0160-5682.
- IBISWorld, R. S. *Global Soft Drink & Bottled Water Manufacturing: Market Research Report*. 2016. Disponível em: <http://www.ibisworld.com/industry/global/global-soft-drink-bottled-water-manufacturing.html>.
- ILOG IBM. *IBM ILOG CPLEX*. 1988.
- JANS, R.; DEGRAEVE, Z. Modeling Industrial Lot Sizing Problems: A Review. *International Journal of Production Research*, v. 46, n. 06, p. 1619–1643, 2006.
- KARIMI, B.; FATEMI GHOMI, S.; WILSON, J. The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. *Omega*, v. 31, n. 5, p. 365–378, 2003. ISSN 03050483. Disponível em: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0305048303000598>.
- KOPANOS, G. M.; PUIGJANER, L.; GEORGIADIS, M. C. Optimal production scheduling and lot-sizing in dairy plants: The yogurt production line. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, v. 49, n. 2, p. 701–718, 2010. ISSN 08885885.
- LIU, X.; WANG, W.; PENG, R. An integrated production, inventory and preventive maintenance model for a multi-product production system. *Reliability Engineering and System Safety*, Elsevier, v. 137, p. 76–86, 2015. ISSN 09518320. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.res.2015.01.002>.
- LIU, X.; WANG, W.; PENG, R. An integrated preventive maintenance and production planning model with sequence-dependent setup costs and times. *Quality and Reliability Engineering International*, n. July, p. 1–11, 2017. ISSN 07488017. Disponível em: <http://doi.wiley.com/10.1002/qre.2202>.
- LUCHE, J. R.; MORABITO, R. Otimização Na Programação Da Produção De Grãos Eletrofundidos : Um Estudo De Caso. *Gestão & Produção*, v. 12, n. 1, p. 135–149, 2005. ISSN 0104-530X.

- LUCHE, J. R. D.; MORABITO, R.; PUREZA, V. Combining Process Selection and Lot Sizing Models for Production Scheduling of Electrofused Grains. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, v. 26, n. 03, p. 421–443, 2009. ISSN 0217-5959. Disponível em: <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217595909002286>).
- LÜTKE ENTRUP, M.; GÜNTHER, H.-O.; Van Beek, P.; GRUNOW, M.; SEILER, T. Mixed-Integer Linear Programming approaches to shelf-life-integrated planning and scheduling in yoghurt production. *International Journal of Production Research*, v. 43, n. 23, p. 5071–5100, 2005. ISSN 0020-7543. Disponível em: <http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-30844436140&partnerID=tZOtx>).
- MALDONADO, M.; RANGEL, S.; FERREIRA, D. A study of different subsequence elimination strategies for the soft drink production planning. *Journal of Applied Research and Technology*, Elsevier, v. 12, n. 4, p. 631–641, 2014. ISSN 16656423. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/S1665-6423\(14\)70080-X](http://dx.doi.org/10.1016/S1665-6423(14)70080-X)).
- MARINELLI, F.; NENNI, M. E.; SFORZA, A. Capacitated lot sizing and scheduling with parallel machines and shared buffers: A case study in a packaging company. *Annals of Operations Research*, v. 150, n. 1, p. 177–192, 2007. ISSN 02545330.
- MARTÍNEZ, K. Y.; TOSO, E. A.; MORABITO, R. Production planning in the molded pulp packaging industry. *Computers & Industrial Engineering*, n. May, 2016. ISSN 03608352. Disponível em: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0360835216301656>).
- MÉNDEZ, C. a.; CERDÁ, J.; GROSSMANN, I. E.; HARJUNKOSKI, I.; FAHL, M. State-of-the-art review of optimization methods for short-term scheduling of batch processes. *Computers and Chemical Engineering*, v. 30, p. 913–946, 2006. ISSN 00981354.
- MENEZES, A. A.; CLARK, A.; ALMADA-LOBO, B. Capacitated lot-sizing and scheduling with sequence-dependent, period-overlapping and non-triangular setups. *Journal of Scheduling*, v. 14, n. 2, p. 209–219, 2011. ISSN 10946136.
- MILLER, C. E.; TUCKER, a. W.; ZEMLIN, R. a. Integer Programming Formulation of Traveling Salesman Problems. *Journal of the ACM*, v. 7, n. 4, p. 326–329, 1960. ISSN 00045411.
- MORABITO, R.; PUREZA, V. Modelagem e Simulação. In: MIGUEL, P. A. C. (Ed.). *Metodologia de pesquisa em Engenharia de Produção e Gestão de Operações*. 2a. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010. cap. 8, p. 165–194.
- MOSCATO, P.; COTTA, C. Una introducción a los algoritmos meméticos. *Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial*, v. 11, n. 36, 2007. ISSN 11373601.
- OHUNAKIN, O. S.; LERAMO, R. O. Total productive maintenance implementation in a beverage industry: A case study. *Journal of Engineering and Applied Sciences*, v. 7, n. 2, p. 128–133, 2012. ISSN 1816949X.
- ORTIZ, V.; CAICEDO, A. Plan óptimo de producción en una planta embotelladora de gaseosas. *Revista Ingeniería Industrial - Universidad del BIOBIO*, v. 11, n. 1, p. 69–82, 2012. Disponível em: <http://revistas.ubiobio.cl/index.php/RI/article/download/36/36>).
- PAGLIARUSSI, M.; MORABITO, R.; SANTOS, M. O. Optimizing the production scheduling of fruit juice beverages using mixed integer programming models. *Gestão & Produção*, In press, 2016.
- RAMEZANIAN, R.; SAIDI-MEHRABAD, M.; FATTAHI, P. MIP formulation and heuristics for multi-stage capacitated lot-sizing and scheduling problem with availability constraints. *Journal of Manufacturing Systems*, The Society of Manufacturing Engineers, v. 32, n. 2, p. 392–401, 2013. ISSN 02786125. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmsy.2013.01.002>).

- REIS DO NASCIMENTO, J. C. *Plano de manutenção baseada nos preceitos da Manutenção Centrada em Confiabilidade em um processo de produção de refrigerantes*. 84 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2014.
- SEL, Ç.; BILGEN, B. Hybrid simulation and MIP based heuristic algorithm for the production and distribution planning in the soft drink industry. *Journal of Manufacturing Systems*, v. 33, n. 3, p. 385–399, 2014. ISSN 02786125 (ISSN). Disponível em: <http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-84902155830&partnerID=40&md5=734ec12726291ad45853dae5ea>.
- SORTRAKUL, N.; NACHTMANN, H. L.; CASSADY, C. R. Genetic algorithms for integrated preventive maintenance planning and production scheduling for a single machine. *Computers in Industry*, v. 56, n. 2, p. 161–168, 2005. ISSN 01663615.
- STAGGEMEIER, A. T.; CLARK, A. R. A survey of lot-sizing and scheduling models. *23rd Symposium of the Brazilian Operational Research Society (SOBRAPO)*, p. 8, 2001. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.103.3723>.
- SUERIE, C. Basic Models in Lot-Sizing. *Time Continuity in Discrete Time Models: New Approaches for Production Planning in Process Industries*, n. 1995, p. 7–29, 2005.
- TOLEDO, C.; FRANÇA, P.; MORABITO, R.; KIMMS, a. Multi-population genetic algorithm to solve the synchronized and integrated two-level lot sizing and scheduling problem. *International Journal of Production Research*, v. 47, n. 11, p. 3097–3119, 2009. ISSN 0020-7543.
- TOLEDO, C.; KIMMS, A.; MORABITO, R. A Mathematical Model for the Synchronized and Integrated Two-Level Lot Sizing and Scheduling Problem. *Journal of Operational Research Society*, p. 1–23, 2006.
- TOLEDO, C. F.; Da Silva Arantes, M.; De Oliveira, R. R. R.; ALMADA-LOBO, B. Glass container production scheduling through hybrid multi-population based evolutionary algorithm. *Applied Soft Computing Journal*, Elsevier B.V., v. 13, n. 3, p. 1352–1364, 2013. ISSN 15684946. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.asoc.2012.03.074>.
- TOLEDO, C. F. M. *Problema Conjunto de Dimensionamento de Lotes e Programação da Produção*. 3277–3288 p. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 2005.
- TOLEDO, C. F. M.; ARANTES, M. S.; FRANÇA, P. M.; MORABITO, R. A memetic framework for solving the lot sizing and scheduling problem in soft drink plants. *Variants of Evolutionary Algorithms for Real-World Applications*, v. 9783642234, p. 59–93, 2012.
- TOLEDO, C. F. M.; FRANÇA, P. M.; MORABITO, R.; KIMMS, A. Um modelo de otimização para o problema integrado de dimensionamento de lotes e programação da produção em fábricas de refrigerantes. *Pesquisa Operacional*, v. 27, n. 1, p. 155–186, 2007. ISSN 0101-7438.
- TOLEDO, C. F. M.; KIMMS, A.; FRANÇA, P. M.; MORABITO, R. The Synchronized and Integrated Two-Level Lot Sizing and Scheduling Problem: Evaluating the Generalized Mathematical Model. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2015, n. 2009, p. 1–18, 2015. ISSN 1024-123X. Disponível em: <http://www.hindawi.com/journals/mpe/2015/182781/>.
- TOLEDO, C. F. M.; OLIVEIRA, L. de; de Freitas Pereira, R.; FRANÇA, P. M.; MORABITO, R. A genetic algorithm/mathematical programming approach to solve a two-level soft drink production problem. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 48, p. 40–52, 2014. ISSN 03050548. Disponível em: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0305054814000471>.
- TORABI, S. a.; FATEMI GHOMI, S. M. T.; KARIMI, B. A hybrid genetic algorithm for the finite horizon economic lot and delivery scheduling in supply chains. *European Journal of Operational Research*, v. 173, n. 1, p. 173–189, 2006. ISSN 03772217.

TOSO, E.; MORABITO, R.; CLARK, A. Combinação de abordagens GLSP e ATSP para o problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes de produção de suplementos para nutrição animal. *Pesquisa Operacional*, v. 28, n. 3, p. 423–450, 2008. ISSN 0101-7438. Disponível em: [http://www.scielo.br/scielo.php/script\\_sci\\_serial/pid\\_0101-7438/Ing\\_en/nrm\\_iso](http://www.scielo.br/scielo.php/script_sci_serial/pid_0101-7438/Ing_en/nrm_iso).

TOSO, E. a. V.; MORABITO, R.; CLARK, A. R. Lot sizing and sequencing optimisation at an animal-feed plant. *Computers and Industrial Engineering*, Elsevier Ltd, v. 57, n. 3, p. 813–821, 2009. ISSN 03608352. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cie.2009.02.011>.

TRANSCHEL, S.; MINNER, S.; KALLRATH, J.; LÖHNDORF, N.; EBERHARD, U. A hybrid general lot-sizing and scheduling formulation for a production process with a two-stage product structure. *International Journal of Production Research*, v. 49, n. 9, p. 2463–2480, 2011. ISSN 0020-7543.

WEI, W.; GUIMARÃES, L.; AMORIM, P.; ALMADA-LOBO, B. Tactical production and distribution planning with dependency issues on the production process. *Omega (United Kingdom)*, Elsevier, v. 67, p. 99–114, 2017. ISSN 03050483. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.omega.2016.04.004>.

YALAOUI, A.; CHAABI, K.; YALAOUI, F. Integrated production planning and preventive maintenance in deteriorating production systems. *Information Sciences*, Elsevier Inc., v. 278, p. 841–861, 2014. ISSN 00200255. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ins.2014.03.097>.

ZHU, X.; WILHELM, W. E. Scheduling and lot sizing with sequence-dependent setup: A literature review. *IIE Transactions*, v. 38, n. 11, p. 987–1007, 2006. ISSN 0740-817X.

# Apêndices

## FORMULAÇÃO DO MODELO SMMRPM

---

**E**STE apêndice apresenta, de maneira sucinta, a formulação matemática do modelo Modelo de múltiplas máquinas e recursos sincronizados com manutenções preventivas (*Synchronised multi machines and resources model with preventive maintenances*) (SMMRPM). Para maiores detalhes do funcionamento das restrições, e do modelo em geral, veja o Capítulo 4 desta dissertação.

### Índices

$i, i' = 1, \dots,  N_I  :$	Produtos finais	$l = 1, \dots,  L  :$	Linhas de produção
$j, j' = 1, \dots,  N_J  :$	Xaropes	$m, m' = 1, \dots,  M  :$	Tanques
$o, o' = 1, \dots,  O  :$	Enchimentos	$t = 1, \dots,  T  :$	Períodos (uma unidade de tempo)

### Conjuntos

#### Conjuntos primários

- $N_I$ : Conjunto de produtos finais.
- $L$ : Conjunto de linhas de produção (segundo estágio).
- $N_J$ : Conjunto de xaropes (matéria prima para os produtos finais).
- $M$ : Conjunto de tanques (primeiro estágio).
- $T$ : Conjunto de períodos que compõem o horizonte de planejamento.
- $O$ : Conjunto de enchimentos possíveis para cada tanque, no h. de planejamento.

#### Conjuntos secundários

- $O_t$ : Conjunto dos enchimentos que são possíveis dentro de um período  $t$  determinado.
- $\delta_l$ : Conjunto de produtos finais que podem ser feitos pela máquina  $l$ .
- $\rho_i$ : Conjunto das linhas que podem produzir o produto final  $i$ .
- $\theta_m$ : Conjunto dos xaropes que podem ser feitos pelo tanque  $m$ .
- $\zeta_j$ : Conjunto dos tanques que podem fazer o xarope  $j$ .
- $\sigma_m$ : Conjunto das linhas que podem se conectar a um determinado tanque  $m$ .
- $\phi_l$ : Conjunto dos tanques que podem ser conectados à linha  $l$ .
- $\omega_j$ : Conjunto dos produtos finais feitos a partir do xarope  $j$ .

$\eta_i$ : O único elemento desse conjunto é o xarope (sabor( $J_i$ )) utilizado para produzir o item  $i$ :

$$\eta_i := \{J_i\}, \quad \forall i \in N_l$$

$\Lambda^P(i', l, m, o)$ : Conjunto das possíveis conexões **antecessoras** de uma linha  $l$  configurada na conexão atual  $(m, o)$ :

$$\Lambda^P(i', l, m, o) = \{(m', o') | m' \in \phi_l \cap \zeta_{(J_{i'})}, o' \in O : m' \neq m \vee (m' = m \wedge o' < o)\}$$

$\Lambda^S(i', l, m, o)$ : Conjunto das possíveis conexões **sucessoras** de uma linha  $l$  configurada na conexão atual  $(m, o)$ :

$$\Lambda^S(i', l, m, o) = \{(m', o') | m' \in \phi_l \cap \zeta_{(J_{i'})}, o' \in O : m' \neq m \vee (m' = m \wedge o' > o)\}.$$

$\Xi^P(i, l, m, o)$ : Conjunto das possíveis configurações de produto **predecessoras** da configuração atual para o item  $i$  em uma linha  $l$  conectada atualmente à  $(m, o)$ :

$$\Xi^P(i, l, m, o) = \{(i', m', o') | i' \in \delta_l, m' \in \phi_l \cap \zeta_{(J_{i'})}, o' \in O : \\ m' \neq m \vee (m' = m \wedge o' < o) \vee (m' = m \wedge o' = o \wedge i' \neq i \wedge J_{i'} = J_i)\}$$

$\Xi^S(i, l, m, o)$ : Conjunto das possíveis configurações de produto **sucessoras** da configuração atual para o item  $i$  em uma linha  $l$  conectada atualmente à  $(m, o)$ :

$$\Xi^S(i, l, m, o) = \{(i', m', o') | i' \in \delta_l, m' \in \phi_l \cap \zeta_{(J_{i'})}, o' \in O : \\ m' \neq m \vee (m' = m \wedge o' > o) \vee (m' = m \wedge o' = o \wedge i' \neq i \wedge J_{i'} = J_i)\}.$$

## Parâmetros

- $a_{il}^{II}$ : Tempo de produção unitário do produto final  $i$  na linha  $l$  (min).
- $b_{i'l}^{II}$ : Tempo de troca do item  $i$  ao item  $i'$  na linha  $l$  (min).
- $b_{jj'm}^I$ : Tempo de troca do xarope  $j$  ao xarope  $j'$  no tanque  $m$  (min).
- $d_{it}$ : Demanda do produto final  $i$  ao final do período  $t$  (und).
- $g_i$ : Penalidade por unidade atrasada do item  $i$  (\$).
- $h_i$ : Custo unitário de estoque do item  $i$  (\$).
- $I_{i0}^+$ : Estoque inicial do produto  $i$  (und).
- $J_i$ : Xarope usado para o produto  $i$ .
- $First_t$ : Primeiro enchimento possível no período  $t$ .



- $Last_t$ : Último enchimento possível no período  $t$ .
- $Dur_t$ : Duração do período  $t$  (min).
- $K_{lt}^{II}$ : Capacidade da linha  $l$  no período  $t$  (min).
- $Start_{lt}^{II}$ : Minuto de início da operação da linha  $l$  no período  $t$ .
- $End_{lt}^{II}$ : Minuto de finalização da operação da linha  $l$  no período  $t$ .
- $K_{mt}^I$ : Capacidade do tanque  $m$  para cada enchimento no período  $t$  (L).
- $Start_{mt}^I$ : Minuto de início da operação do tanque  $m$  no período  $t$ .
- $End_{mt}^I$ : Minuto de finalização da operação do tanque  $m$  no período  $t$ .
- $p_j^I$ : Máxima duração do xarope  $j$  em qual quer tanque (min).
- $q_{jm}^I$ : Tamanho de lote mínimo do xarope  $j$  no tanque  $m$  (L).
- $r_{ij}$ : Quantidade do xarope  $j$  usada para fabricar uma unidade do item  $i$  (L).
- $s_{ii'}^{II}$ : Custo de troca do item  $i$  para  $i'$  na linha  $l$  (\$).
- $s_{jj'm}^I$ : Custo de troca do xarope  $j$  ao xarope  $j'$  no tanque  $m$  (\$).
- $Y_{j0mO}$ : Estado de preparo do tanque  $m$  para o último xarope  $j$  que foi usado (1 se foi usado, 0 caso contrário).

## Variáveis

$$\checkmark \alpha_{itlmo} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \delta_l, t \in T, l \in L, m \in \phi_l \cap \zeta_{(j_i)}, o \in O_t$$

Variável binária que é 1 se  $i$  é o **primeiro** item fabricado no período  $t$  na linha  $l$ , quando conectada ao enchimento e  $mo$ , 0 caso contrário.

$$\checkmark \beta_{itlmo} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \delta_l, t \in T, l \in L, m \in \phi_l \cap \zeta_{(j_i)}, o \in O_t$$

Variável binária que é 1 se  $i$  é o **último** item fabricado no período  $t$  na linha  $l$ , quando conectada ao enchimento e  $mo$ , 0 caso contrário.

$$\checkmark \gamma_{ii'tlmm'o'} \in \{0, 1\}$$

$$\forall i \in \delta_l, t \in T, l \in L, m \in \phi_l \cap \zeta_{(j_i)}, o \in O_t, (i', m', o') \in \Xi^S(i, l, m, o)$$

Variável binária que é 1 se existir troca do item  $i$  para  $i'$  na linha  $l$ , no período  $t$ , quando ela conectada troca do enchimento  $mo$ , para o enchimento  $m'o'$ , 0 caso contrário.

$$\checkmark \hat{\gamma}_{ii'tl} \in [0, 1] \quad \forall i, i' \in \delta_l, t \in T, l \in L$$

Variável binária que é 1 se existe troca de  $i$  para  $i'$  na linha  $l$  ao princípio do período  $t$

$$\checkmark I_{it}^+ \geq 0 \quad \forall i \in N_l, t \in T$$

Estoque em unidades do item  $i$  ao final do período  $t$ .

$$\checkmark I_{it}^- \geq 0 \quad \forall i \in N_l, t \in T$$

Atraso em unidades do item  $i$  ao final do período  $t$ .

$$\checkmark \mu_{itlmo}^S \geq 0 \quad \forall t \in T, l \in L, m \in \phi_l, o \in O_t$$

Tempo de **início** do enchimento  $mo$  na linha  $l$  (em períodos) no período  $t$ .

$$\checkmark \mu_{itlmo}^e \geq 0 \quad \forall t \in T, l \in L, m \in \phi_l, o \in O_t$$

Tempo de **finalização** do enchimento  $mo$  na linha  $l$  (em períodos) no período  $t$ .

$$\checkmark \hat{\mu}_{tmo}^s \geq 0 \quad \forall t \in T, m \in M, o \in O_t$$

Tempo de **início** do enchimento  $o$  do tanque  $m$  (em períodos) no período  $t$ .

$$\checkmark \hat{\mu}_{tmo}^e \geq 0 \quad \forall t \in T, m \in M, o \in O_t$$

Tempo de **finalização** do enchimento  $o$  do tanque  $m$  (em períodos) no período  $t$ .

$$\checkmark V_{itlmo} \geq 0 \quad i \in \delta_l, t \in T, l \in L, m \in \phi_l \cap \zeta_{(j_i)}, o \in O_t$$

Esta variável auxiliar permite a eliminação de *subtours* desconectados.

$$\checkmark X_{itlmo} \geq 0 \quad \forall i \in \delta_l, t \in T, l \in L, m \in \phi_l \cap \zeta_{(j_i)}, o \in O_t$$

Quantidade produzida em unidades do item  $i$  no período  $t$  na linha  $l$ , usando o enchimento  $o$  do tanque  $m$ .

$$\checkmark Y_{jtm} \geq 0 \quad \forall j \in \theta_m, t \in T, m \in M, o \in O_t$$

Esta variável binária serve para fazer seguimento do estado de *setup* do tanque  $m$  para o xarope  $j$ . É igual a 1 se o xarope  $j$  é o último armazenado tanque  $m$  no enchimento  $o$ , no período  $t$ , 0 caso contrário.

$$\checkmark Z_{jj'tmo} \in [0, 1] \quad \forall j, j' \in \theta_m, t \in T, m \in M, o \in O_t$$

Esta variável binária será 1 quando existir a troca do xarope  $j$  para o xarope  $j'$  no tanque  $m$  ao princípio do enchimento  $o$ , no período  $t$ .

## Modelo

### F. O.

$$\begin{aligned} v(F) = \min & \sum_{i \in N_1} \sum_{t \in T} h_i \cdot I_{it}^+ + \sum_{i \in N_1} \sum_{t \in T} g_i \cdot I_{it}^- + \sum_{t \in T} \sum_{m \in M} \sum_{o \in O_t} \sum_{j, j' \in \theta_m} s_{jj'm}^I \cdot Z_{jj'tmo} \\ & + \sum_{t \in T} \sum_{l \in L} \sum_{i, i' \in \delta_l} s_{ii'l}^{II} \cdot \hat{\gamma}_{ii'tl} + \sum_{t \in T} \sum_{l \in L} \sum_{i \in \delta_l} \sum_{m \in \phi_l \cap \zeta_{(j_i)}} \sum_{o \in O_t} \sum_{(i', m', o') \in \Xi^S(i, l, m, o)} s_{ii'l}^{II} \cdot \gamma_{ii'tlmom'o'} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

## Restrições

### Restrições em linhas

#### Restrições de balanço de fluxo de estoques

$$I_{i(t-1)}^+ + I_{it}^- + \sum_{l \in \rho_i} \sum_{m \in \phi_l \cap \zeta_{(J_i)}} \sum_{o \in O_t} X_{itlmo} = d_{it} + I_{it}^+ + I_{i(t-1)}^- \quad \forall i \in N_I, t \in T \quad (\text{A.2})$$

#### Restrições de sequenciamento em dentro dos períodos

$$\sum_{i \in \delta_l} \sum_{m \in \phi_l \cap \zeta_{(J_i)}} \sum_{o \in O_t} \alpha_{itlmo} \leq 1 \quad \forall l \in L, t \in T \quad (\text{A.3})$$

$$\alpha_{itlmo} + \sum_{(i', m', o') \in \Xi^P(i, l, m, o)} \gamma_{i'itlm'o'mo} = \sum_{(i', m', o') \in \Xi^S(i, l, m, o)} \gamma_{i'itlmom'o'} + \beta_{itlmo} \quad (\text{A.4})$$
$$\forall l \in L, t \in T, i \in \delta_l, m \in \phi_l \cap \zeta_{(J_i)}, o \in O_t$$

$$V_{itlmo} + |\delta_l| \cdot \gamma_{i'itlmom'o'} - (|\delta_l| - 1) \leq V_{i'itlm'o'} \quad (\text{A.5})$$
$$\forall l \in L, t \in T, i \in \delta_l, m \in \phi_l \cap \zeta_{(J_i)}, o \in O_t, (i', m', o') \in \Xi^S(i, l, m, o)$$

#### Restrições de *setup* de produção nas linhas

$$a_{il}^{II} \cdot X_{itlmo} \leq K_{lt}^{II} \cdot \left( \alpha_{itlmo} + \sum_{(i', m', o') \in \Xi^P(i, l, m, o)} \gamma_{i'itlm'o'mo} \right) \quad (\text{A.6})$$
$$\forall l \in L, t \in T, i \in \delta_l, m \in \phi_l \cap \zeta_{(J_i)}, o \in O_t$$

#### Restrições de limite de tempo disponível nas linhas

$$\sum_{i \in \delta_l} \sum_{m \in \phi_l \cap \zeta_{(J_i)}} \sum_{o \in O_t} a_{il}^{II} \cdot X_{itlmo} + \sum_{i, i' \in \delta_l} b_{i'i'l}^{II} \cdot \hat{\gamma}_{i'i'tl} + \sum_{i \in \delta_l} \sum_{m \in \phi_l \cap \zeta_{(J_i)}} \sum_{o \in O_t} \sum_{(i', m', o') \in \Xi^S(i, l, m, o)} b_{i'i'l}^{II} \cdot \gamma_{i'itlmom'o'} \leq K_{lt}^{II} \quad (\text{A.7})$$
$$\forall l \in L, t \in T$$

### Restrições de trocas de itens entre períodos nas linhas

$$\sum_{i' \in \delta_l} \sum_{i \in \delta_l} \hat{\gamma}_{i'itl} \leq 1 \quad \forall l \in L, t \in T \quad (\text{A.8})$$

$$\hat{\gamma}_{i'itl} \geq \sum_{m' \in \phi_l \cap \zeta_{(J_{i'})}} \sum_{o' \in O_{(t-1)}} \beta_{i'(t-1)lm'o'} + \sum_{m \in \phi_l \cap \zeta_{(J_i)}} \sum_{o \in O_t} \alpha_{itlmo} - 1 \quad (\text{A.9})$$

$$\forall l \in L, t \in T, i \in \delta_l, i' \in \delta_l$$

$$\hat{\gamma}_{i'itl} \geq \beta_{i'(t-\tau)lm'o'} + \alpha_{itlmo} - 1 - \sum_{i'' \in \delta_l} \sum_{\tau=(t-\tau+1)}^{t-1} \sum_{m'' \in \phi_l \cap \zeta_{(J_{i''})}} \sum_{o'' \in O_{t'}} \alpha_{i''\tau'lm''o''} \quad (\text{A.10})$$

$$\forall l \in L, t \in T | t > 1, \tau = 2, \dots, t, i, i' \in \delta_l, m \in \delta_l \cap \zeta_{(J_i)}, m' \in \phi_l \cap \zeta_{(J_{i'})}, o \in O_t, o' \in O_{(t-\tau)}$$

### Restrições de medição do tempo da conexão na linha

$$\sum_{i', i \in \delta_l} \left( \max(0, Start_{lt}^{II}) + b_{i'il}^{II} \right) \cdot \hat{\gamma}_{i'itl} + K_{lt}^{II} \cdot \left( \sum_{i \in \delta_l | J_i \in \theta_m} \alpha_{itlmo} - 1 \right) \leq \mu_{t'lmo}^s \quad \forall l \in L, t \in T, m \in \phi_l, o \in O_t \quad (\text{A.11})$$

$$\sum_{i \in \delta_l | J_i \in \theta_m} a_{il}^{II} \cdot X_{itlmo} + \sum_{i, i' \in \delta_l | J_i \in \theta_m \wedge J_{i'} = J_l \wedge i \neq i'} b_{i'i'l}^{II} \cdot \gamma_{ii'tlmo} \leq \mu_{t'lmo}^e - \mu_{t'lmo}^s \quad \forall l \in L, t \in T, m \in \phi_l, o \in O_t \quad (\text{A.12})$$

$$\mu_{t'lmo}^e + \sum_{i, i' \in \delta_l | J_i \in \theta_m \wedge J_{i'} \in \theta_{m'}} b_{i'i'l}^{II} \cdot \gamma_{ii'tlmom'o'} + K_{lt}^{II} \cdot \left( \sum_{i, i' \in \delta_l | J_i \in \theta_m \wedge J_{i'} \in \theta_{m'}} \gamma_{ii'tlmom'o'} - 1 \right) \leq \mu_{t'lm'o'}^s \quad (\text{A.13})$$

$$\forall l \in L, t \in T, m \in \phi_l, o \in O_t, m' \in \phi_l, o' \in O_t | (m' \neq m) \vee (m' = m \wedge o' > o)$$

$$\mu_{t'lmo}^e \leq \min(End_{lt}^{II}, Dur_t) \quad \forall l \in L, t \in T, m \in \phi_l, o \in O_t \quad (\text{A.14})$$

**Restrições de tamanho de lote, controle da capacidade e homogeneidade do xarope**

$$\sum_{l \in \sigma_m} \sum_{i \in \omega_j \cap \delta_l} r_{ij} \cdot X_{itlmo} \geq q_{jm}^l \cdot \sum_{j' \in \theta_m} Z_{j'jtm} \quad \forall m \in M, t \in T, j \in \theta_m, o \in O_t \quad (\text{A.15})$$

$$\sum_{l \in \sigma_m} \sum_{i \in \omega_j \cap \delta_l} r_{ij} \cdot X_{itlmo} \leq K_{mt}^l \cdot \sum_{j' \in \theta_m} Z_{j'jtm} \quad \forall m \in M, t \in T, j \in \theta_m, o \in O_t \quad (\text{A.16})$$

**Restrições de conservação de estado de *setup* entre enchimentos nos tanques**

$$\sum_{j \in \theta_m} Y_{jtm} \leq 1 \quad \forall m \in M, t \in T, o \in O_t \quad (\text{A.17})$$

$$Y_{jtm} \geq Y_{jtm(o-1)} - \left( \sum_{l \in \sigma_m} \sum_{i \in \delta_l | j_i \in \theta_m} \sum_{(i', m', o') \in \Xi^P(i, l, m, o)} \gamma_{i'itlm'o'mo} + \sum_{l \in \sigma_m} \sum_{i \in \delta_l | j_i \in \theta_m} \alpha_{itlmo} \right) \quad (\text{A.18})$$

$\forall m \in M, t \in T, j \in \theta_m, o \in O_t | o > First_t$

$$Y_{jtm, First_t} \geq Y_{j(t-1)m, Last_{(t-1)}} - \left( \sum_{l \in \sigma_m} \sum_{i \in \delta_l | j_i \in \theta_m} \sum_{(i', m', o') \in \Xi^P(i, l, m, First_t)} \gamma_{i'itlm'o'm, First_t} + \sum_{l \in \sigma_m} \sum_{i \in \delta_l | j_i \in \theta_m} \alpha_{itlm, First_t} \right) \quad (\text{A.19})$$

$\forall m \in M, t \in T, j \in \theta_m$

**Restrições de ligação entre xarope e itens (determinação do xarope a ser preparado)**

$$|\sigma_m| \cdot Y_{jtm} \geq \sum_{l \in \sigma_m} \sum_{i \in \omega_j \cap \delta_l} \alpha_{itlmo} + \sum_{l \in \sigma_m} \sum_{i' \in \delta_l} \sum_{i \in \omega_j \cap \delta_l} \sum_{(m', o') \in \Lambda^P(i', l, m, o)} \gamma_{i'itlm'o'mo} \quad (\text{A.20})$$

$\forall m \in M, t \in T, j \in \theta_m, o \in O_t$

**Restrições de troca de xarope nos tanques**

$$\sum_{j' \in \theta_m} \sum_{j \in \theta_m} Z_{j'jtm} \leq 1 \quad \forall m \in M, t \in T, o \in O_t \quad (\text{A.21})$$

$$Z_{jj'tmo} \geq Y_{jtm(o-1)} + Y_{j'tmo} - 1 \quad (\text{A.22})$$

$$\forall m \in M, t \in T, j, j' \in \theta_m | j \neq j', o \in O_t | o > First_t$$

$$Z_{jj'tm, First_t} \geq Y_{j,(t-1)m, Last_{t-1}} + Y_{j'tm, First_t} - 1 \quad (\text{A.23})$$

$$\forall m \in M, t \in T, j, j' \in \theta_m | j \neq j'$$

$$|\sigma_m| \cdot Z_{jj'tmo} \geq |\sigma_m| \cdot Y_{jtm(o-1)} + \sum_{l \in \sigma_m} \sum_{i' \in \delta_l} \sum_{i \in \delta_l \cap \omega_j} \sum_{(m', o') \in \Lambda^P(i', l, m, o)} \gamma_{i'itlm'o'mo} + \sum_{l \in \sigma_m} \sum_{i \in \delta_l \cap \omega_j} \alpha_{itlmo} - |\sigma_m| \quad (\text{A.24})$$

$$\forall m \in M, t \in T, j \in \theta_m, o \in O_t | o > First_t$$

$$|\sigma_m| \cdot Z_{jj'tm, First_t} \geq |\sigma_m| \cdot Y_{j_{t-1}m, Last_{t-1}} + \sum_{l \in \sigma_m} \sum_{i' \in \delta_l} \sum_{i \in \delta_l \cap \omega_j} \sum_{(m', o') \in \Lambda^P(i', l, m, First_t)} \gamma_{i'itlm'o'm, First_t} + \sum_{l \in \sigma_m} \sum_{i \in \delta_l \cap \omega_j} \alpha_{itlm, First_t} - |\sigma_m| \quad (\text{A.25})$$

$$\forall m \in M, t \in T, j \in \theta_m$$

### Restrições de controle de medição de tempos dos lotes em tanques

$$\sum_{j, j' \in \theta_m} Z_{jj'tmo} \leq \sum_{j, j' \in \theta_m} Z_{jj'tm, (o-1)} \quad \forall m \in M, t \in T, o \in O_t | o > First_t \quad (\text{A.26})$$

$$\sum_{j, j' \in \theta_m} \left( \max(0, Start_{mt}^l) + b_{jj'm}^l \right) \cdot Z_{jj'tm, First_t} \leq \hat{\mu}_{tm, First_t}^s \quad \forall m \in M, t \in T \quad (\text{A.27})$$

$$\hat{\mu}_{tmo}^s \leq \hat{\mu}_{tmo}^e \quad \forall m \in M, t \in T, o \in O_t \quad (\text{A.28})$$

$$\hat{\mu}_{tm(o-1)}^e + \sum_{j, j' \in \theta_m} b_{jj'm}^l \cdot Z_{jj'tmo} \leq \hat{\mu}_{tmo}^s \quad \forall m \in M, t \in T, o \in O_t | o > First_t \quad (\text{A.29})$$

$$\hat{\mu}_{tm, Last_t}^e \leq \min(End_{mt}^l, Dur_t) \quad \forall m \in M, t \in T \quad (\text{A.30})$$

### Restrições de perecibilidade

$$\hat{\mu}_{tmo}^e - \hat{\mu}_{tmo}^s \leq \sum_{j \in \theta_m} p_j^I \cdot Y_{jtmo} \quad \forall m \in M, t \in T, o \in O_t \quad (\text{A.31})$$

### Restrições de ligação dos tempos de conexão dos dois estágios

$$\hat{\mu}_{tmo}^s + K_{lt}^{II} \cdot \left( \sum_{i, i' \in \delta_l | j_i \in \theta_m} \sum_{(m', o') \in \Lambda^p(i', l, m, o)} \gamma_{i'itlm'o'mo} + \sum_{i \in \delta_l | j_i \in \theta_m} \alpha_{itlmo} - 1 \right) \leq \mu_{tmo}^s$$

$$\forall l \in L, t \in T, m \in \phi_l, o \in O_t \quad (\text{A.32})$$

$$\mu_{tmo}^e \leq \hat{\mu}_{tmo}^e \quad \forall l \in L, t \in T, m \in \phi_l, o \in O_t \quad (\text{A.33})$$

## COMPARAÇÃO COM O MODELO SITLSP

**E**M Toledo (2005) é tratado um problema similar ao problema tratado na presente dissertação. Trata-se do processo de produção de bebidas carbonatadas com dois estágios, múltiplas máquinas em ambos estágios, vários itens e períodos. No entanto, alguns pressupostos foram tratados matematicamente e outros negligenciados. Nesse capítulo será apresentada uma discussão sobre as diferenças entre os pressupostos considerados em cada trabalho. Instâncias obtidas da literatura (TOLEDO *et al.*, 2015) foram utilizadas para se proceder com uma comparação entre os planejamentos da produção das formulações SMMRPM e SITLSP.

A formulação matemática original do modelo SITLSP (TOLEDO *et al.*, 2015) pode ser consultada no Anexo III.

### B.1 Diferenças entre os modelos SITLSP e SMMRPM

Para facilitar o entendimento das diferenças entre os problemas e os modelos considerados nos dois trabalhos, considere a Tabela B.1. Na primeira coluna estão descritas as possíveis considerações e características de um problema real de programação da produção de bebidas. Nas duas colunas seguintes está indicado, com o símbolo ✓, se os modelos SITLSP e o modelo SMMRPM, respectivamente, consideram o pressuposto daquela linha da Tabela B.1, e com o × se representa que o modelo não conta com tal característica. Por exemplo, na linha da precibilidade, o modelo SMMRPM o considera explicitamente, enquanto o modelo SITLSP não.

TABELA B.1: Diferenças entre as considerações dos modelos SITLSP e SMMRPM.

Característica	SITLSP	SMMRPM
Precibilidade	×	✓
Possibilidade de dedicação de tanques a linhas	×	✓
Estoques intermediários de xarope	✓	×
Otimização de quantidade de xarope produzida	✓	×
<i>Setup crossover</i>	✓	×
Permissão de atraso da produção em todos os períodos	×	✓
Lote de xarope utilizado em diferentes períodos	✓	×

Fonte: Elaboração própria.

A seguir são explicadas com mais detalhe, cada uma destas diferenças, as quais representam



não somente diferenças nas formulações mas nos problemas abordados em cada trabalho.

### **B.1.1 Percibilidade**

A primeira diferença entre os dois trabalhos, é que no caso de Toledo (2005), Toledo *et al.* (2015), não é considerada explicitamente a percibilidade do xarope. Esta característica é muito importante e tem impacto significativo na programação da produção como visto no Capítulo 5.

A desconsideração da percibilidade faz com que em ambientes onde esta restrição é prioritária, tal modelo não possa ser utilizado diretamente sem adaptações na sua formulação matemática.

### **B.1.2 Possibilidade de dedicação de tanques a linhas**

Foi observado também que o modelo SITLSP considera como pressuposto que qualquer linha pode se conectar a qualquer tanque. No entanto, em casos onde há linhas dedicadas a tanques específicos, seja por questões técnicas ou de exigências da planta de produção, o modelo SITLSP não é diretamente aplicável por não diferenciar os conjuntos de tanques aos quais as linhas podem se conectar.

No caso do modelo SMMRPM estas considerações são controladas utilizando os conjuntos secundários  $\sigma_m$  e  $\phi_l$ .

### **B.1.3 Estoques intermediários de xarope**

Outra diferença importante entre as formulações SITLSP e SMMRPM, é que no SITLSP existem estoques intermediários de xarope nos tanques (variáveis  $\bar{I}_{jk\tau}$ ). Os estoques intermediários no fim de cada período estão penalizados na função objetivo (III.1) e são balanceados mediante as restrições (III.62) - (III.65).

Cabe salientar que, embora, em situações onde existe o estoque intermediário no tanque, deve-se respeitar o limite de tempo que esse xarope pode estar no tanque, ou seja, a percibilidade.

No modelo SMMRPM não são considerados estes estoques intermediários explicitamente. No entanto, quando em uma linha se realiza uma troca de itens utilizando o mesmo lote de xarope (o que é chamado de troca na mesma conexão), existe uma espera do tanque pela linha que é portanto, um estoque intermediário implícito permitido dentro do período.

Além disso, no modelo SMMRPM é controlado o tempo máximo de uso dos lotes de xarope, ou seja, se controla que os eventuais estoques intermediários respeitem a percibilidade permitida, uma vez que a medição do tempo de cada lote no tanque inclui todo o tempo de produção na(s) linha(s) e os tempos de suas trocas na conexão.

#### B.1.4 Otimização de quantidade de xarope produzida

No modelo SITLSP há variáveis para controle das quantidades produzidas no primeiro estágio (variáveis  $\bar{q}_{jkst}$ ). Estas variáveis, assim como os estoques intermediários, estão penalizadas na função objetivo e são balanceadas com as variáveis  $\bar{I}_{jk\tau}$  por meio das restrições (III.65).

No modelo SMMRPM, a medição das quantidades de xarope e estoques intermediários não são decisões diretas do modelo, ou seja, não existem variáveis específicas para medi-las. Alternativamente, as restrições (4.17) e (4.18) são utilizadas para garantir que o xarope que deve ser produzido seja suficiente atender todas as linhas que requeiram xarope de determinado tanque/enchimento. O parâmetro  $r_{ij}$  transforma a quantidade de  $X_{itlmo}$  unidades do item  $i$  em  $r_{ij} \cdot X_{itlmo}$  litros do xarope  $j$  necessários para esse lote.

Resumindo, na resposta final do modelo, os volumes de xarope produzidos e as quantidades de estoque intermediário podem ser calculados *a posteriori*.

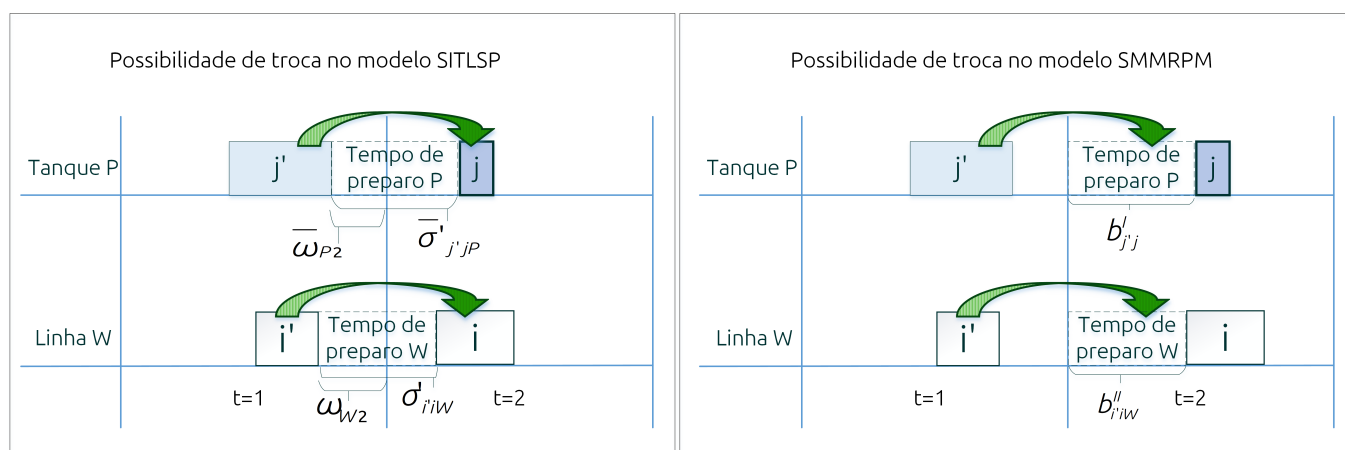
#### B.1.5 Setup crossover

Outro aspecto importante que difere entre o problema deste trabalho e o problema de Toledo (2005), Toledo *et al.* (2015) está na forma como são realizadas as trocas em períodos consecutivos. No modelo proposto por (TOLEDO, 2005), o primeiro *setup* do período  $t$ , em qualquer um dos dois estágios, pode ser inicializado inclusive no período anterior, depois de finalizar o último lote de  $t - 1$ . Esta característica é chamada na literatura como *setup crossover* (BELO-FILHO; TOLEDO; ALMADA-LOBO, 2014).

No SMMRPM, o preparo de uma linha ou tanque em um período determinado é realizado dentro do período, inclusive para o primeiro lote da linha ou tanque em um período determinado, em outras palavras esse *setup crossover* não existe no SMMRPM.

A Figura B.1 ilustra a diferença entre a forma como são considerados os tempos de trocas nos dois modelos. Na Figura B.1 é apresentado o caso de uma troca em cada estágio, para cada modelo. As trocas são realizadas, na linha W entre os itens  $i'$  e  $i$ . E no tanque P do xarope  $j'$  para  $j$ . Para facilitar o entendimento, a figura é uma simplificação onde não se apresentam conexões, nem a escala dos microperíodos do SITLSP. Os tempos de troca são equivalentes entre os modelos, ou seja, o tempo de troca na linha P  $\sigma'_{i'iP}$  no modelo SITLSP (a) é equivalente ao tempo de troca  $b_{i'iP}^{II}$  do modelo SMMRPM.

FIGURA B.1: Comparação das trocas nos modelos SITLSP e SMMRPM



Fonte: Inspirado em Toledo *et al.* (2015)

No caso do modelo SITLSP se sobrar tempo ocioso no final do período anterior ( $t - 1$ ), (representado pelas variáveis  $\omega_{it}$  no caso das linhas e  $\bar{\omega}_{kt}$  para os tanques), esses tempos podem ser destinados para começar o preparo do primeiro lote do período  $t$  na linha ou no tanque fazendo com que a capacidade de tempo do período seja melhor aproveitada. No caso do modelo SMMRPM, o preparo tanto das linhas quanto nos tanques pode ocorrer somente dentro do período  $t$ .

### B.1.6 Permissão de atraso da produção em todos os períodos

Como dito no Capítulo 4, no modelo SMMRPM é permitido o atraso da produção em qualquer período. Segundo Wei *et al.* (2017), esta característica permite planos de produção mais flexíveis, "permitindo agrupar ainda mais as demandas e melhorando a utilização das capacidades das máquinas".

Na formulação SITLSP o atraso é permitido somente no primeiro período e ele é altamente penalizado na função objetivo mediante o uso de um parâmetro de tipo *BigM*.

### B.1.7 Janelas de tempo de operação

No modelo SMMRPM são estabelecidas janelas de tempo para operação tanto dos tanques como das linhas para manutenções preventivas. Na formulação SITLSP não são consideradas restrições nem variáveis para esta consideração.

### B.1.8 Custos e penalizações na função objetivo

As funções objetivo das formulações diferem nos seguintes custos: o modelo SITLSP (equação(III.1) no Anexo III) conta com 7 termos de custo, sendo eles custos de troca nas linhas, custos de esto-

que de itens finais, custo de produção nas linhas, custos de troca nos tanques, custo de estoque intermediário no tanque no fim de cada período, custo de produção nos tanques e custo por não atendimento da demanda (somente permitido no primeiro período). No modelo SMMRPM os custos da função objetivo são: custo de estoque, custo de atraso, custo de trocas nas linhas e custos de trocas nos tanques.

Note que o modelo SMMRPM não há custos de produção (em nenhum dos estágios), nem custos de estoque intermediário e o custo de atraso da produção pode ocorrer em qualquer período.

Além das diferenças apresentadas acima, que se referem a decisões e restrições consideradas nos modelos e que, portanto, diferenciam os dois problemas tratados há diferenças nas estratégias de modelagem matemática desses problemas.

A formulação SITLSP é um modelo baseado principalmente no GLSP e combina estruturas presentes no CLSP. O modelo apresenta uma divisão do horizonte de planejamento em 3 escalas: macro-períodos (ou apenas períodos), os microperíodos e os *slots*. Os macroperíodos ( $T$ ) discretizam a demanda e indexam os estoques e produção. Cada período é dividido também em um número fixo de lotes ou *slots* permitidos para os tanques ( $\bar{S}$ ) e para as linhas ( $S$ ). O número de *slots* dos tanques e linhas não são necessariamente iguais. Por último, os macro-períodos se dividem também em um número fixo de micro-períodos ( $T^m$ ) de capacidade fixa ( $C^m$ ).

Para o caso do modelo SMMRPM são utilizadas duas escalas de tempo sendo estas, os períodos ( $T$  em ambos os casos) e a divisão por lotes nos tanques, que no modelo proposto é chamada de número de enchimentos permitidos ((SITLSP)  $\rightarrow \bar{S} \equiv O \leftarrow$  (SMMRPM)). No caso do modelo SMMRPM, não é necessária a existência da escala dos micro-períodos pois a sincronia é garantida mediante as variáveis de medição de tempos ( $\mu$ ) e as restrições de controle dos tempos das conexões.

Outra diferença importante está nas estratégias para sincronizar os estágios produtivos. O modelo SITLSP utiliza a escala dos microperíodos e vários conjuntos de restrições que utilizam variáveis de *setup* para sincronizar os tanques com as linhas. No modelo SMMRPM são utilizadas variáveis e restrições controlam os tempos contínuos de cada conexão nas linhas/ lotes nos tanques (a estratégia está baseada no trabalho de (ALMEDER; ALMADA-LOBO, 2011)).

## B.2 Análises sobre a comparação e aplicação dos dois modelos

Pode se deduzir, a partir das diferenças pontuadas acima, que não somente os modelos SITLSP e SMMRPM são diferentes, mas também possuem diferenças essenciais em suas hipóteses.

Essas diferenças fazem com que as soluções os modelos SITLSP e SMMRPM não sejam di-

retamente comparáveis. Para poder comparar as soluções das duas formulações são necessárias alterações de algumas hipóteses ou considerar supostos adicionais.

Como um dos objetivos deste capítulo é comparar as duas formulações que representam problemas similares, na própria seção é feita uma discussão sobre as mudanças que devem ser realizadas em uma ou outra para comparação de suas soluções.

Essas alterações envolvem desconsiderar algumas hipóteses ou incluir outras que implicam em grandes mudanças em algum dos modelos ou incluir hipóteses. As mudanças aqui mencionadas são sugeridas com o intuito de modificar o mais minimamente possível ambas formulações evitando criar novas variáveis e restrições nos modelos.

## **B.2.1 Modificações e considerações necessárias para conciliar diferenças**

### **Percibilidade**

Para conciliar este pressuposto entre as duas formulações, a melhor alternativa é relaxar a restrição da percibilidade no modelo SMMRPM (como foi feito para a comparação com o modelo F1). Incluir esta consideração na formulação SITLSP não é trivial devido a que implica a criação de novas restrições para controle do início e fim dos lotes nos tanques, além de ser necessário adicionar o parâmetro de limite de percibilidade nos dados das instâncias SITLSP.

Esta modificação pode ser feita, colocando nas instâncias do SMMRPM, um valor alto de tempo de permanência do xarope no tanque, de tal forma que a percibilidade não afete na comparação.

### **Possibilidade de dedicação de tanques a linhas**

Como mencionado, no modelo SITLSP não é possível modelar a dedicação de tanques a linhas de forma imediata. Uma solução que para esta questão e que não afeta a estrutura do modelo SITLSP é criar, produtos e sabores fictícios, de tal forma que os conjuntos de linhas e tanques que possam fabricar esses itens e sabores fictícios ( $L_j$  e  $\bar{L}_j$  respectivamente), estejam relacionados um a um. Por exemplo se uma linha  $L1$  necessariamente tem que estar dedicada a um tanque  $Tk1$ , poderiam criar-se o item fictício  $a$  e o sabor fictício  $A$ , de tal forma que  $L_a = \{L1\}$  e  $\bar{L}_A = \{Tk1\}$ . Desta forma se garante que o tanque somente possa ser conectado à linha. Esta solução

Outra opção seria criar novos conjuntos no modelo SITLSP, que estabeleçam a relação desejada entre as conexões que são permitidas entre os dois estágios. Este enfoque implica em avaliações adicionais sobre as mudanças relacionadas à indexação das restrições e variáveis a respeito desses novos conjuntos ou componentes de controle. Para a comparação entre as soluções

do dois modelos, as instâncias não possuem dedicação tanque-linha. Este caso pode ser abordado diretamente nos dois modelos sem modificá-los.

### **Estoques intermediários de xarope**

Esta característica é uma das decisões retornadas pelo modelo SITLSP, conseqüentemente envolve variáveis e restrições elaboradas para controlar tais quantidades de estoques intermediários. Estes estoques intermediários ocorrem entre microperíodos e também são permitidos entre períodos pagando uma penalidade na função objetivo.

Dado que, como explicado anteriormente, o controle destes estoques intermediários dentro do período está implícito no modelo SMMRPM devido ao controle dos tempos dos lotes dos tanques e conexões das linhas; para efeitos desta comparação este aspecto foi ignorado, e os custos por estes estoques intermediários zerados no modelo SITLSP, para observar as esperas dos tanques pelas linhas como se verá mais para frente.

Cabe salientar novamente, que nos processos reais observados, por questões técnicas, como explicado no Capítulo 2, para elaborar cada novo lote de xarope é necessário que o tanque esteja completamente vazio, mesmo que o novo lote seja do mesmo sabor do anterior. Isto implica que não pode existir sobra de xarope entre dois lotes diferentes. Portanto, é desejável produzir quantidades exatas de xarope para evitar desperdício de matéria prima.

### **Otimização de quantidade de xarope produzida**

Conforme pontuado na seção B.1.4, diferente do modelo SITLSP, no modelo SMMRPM não há variáveis específicas para modelar quantidades produzidas de xarope no primeiro estágio. Porém esse volume pode ser calculado após otimização com os resultados da soma das quantidades requeridas pelas linhas, não sendo necessário proceder com a adição de novas variáveis e restrições no modelo SMMRPM.

Assim, dada a ausência de variáveis e restrições para o modelo SMMRPM, destinadas para fazer a medição das quantidades mencionadas, e à dificuldade de mudar toda a formulação para incluir esses valores na análise comparativa; conclui-se que o melhor é obviar esse aspecto na comparação.

### ***Setup crossover***

A consideração do *setup crossover* em um modelo matemático, até onde se sabe, não pode ser feita sem variáveis e restrições específicas para tal fim. No caso da formulação SITLSP, tirar esta característica significa em remover as variáveis  $\omega_{lt}$  e  $\bar{\omega}_{kt}$ , e modificar um grande número de restrições, mudando a estrutura do modelo de forma significativa.

Para o modelo SMMRPM significa a criação de novas variáveis e restrições para medir os tempos restantes do período anterior e controlar as trocas.

Nos computacionais realizados observou-se que em geral não ocorre nenhum *setup crossover* nas soluções finais da formulação SITSLSP. Assim, esta consideração não afetou a comparação entre os dois modelos.

### **Permissão de atraso da produção em todos os períodos**

Para incluir atraso na formulação SITLSP em todos os períodos, seria necessária a criação de novas variáveis indexadas para cada período; também seria necessário modificar as restrições de balanço de fluxo de estoques para períodos posteriores ao primeiro  $t > 1$  (eq. (III.6)).

Portanto, optou-se por adaptar o modelo SMMRPM para permitir atraso somente no primeiro período. Esta modificação não é simples, bastando modificar as variáveis de atraso existentes ( $I_{it}^-$ ) e as restrições de balanço de fluxo de estoques (4.2).

### **Janelas de tempo de operação**

Este pressuposto foi relaxado no modelo SMMRPM devido a desconsideração de janelas de tempo de operação no modelo SITLSP. Não há janelas de tempo de operação em nenhum tanque/linha, logo o início e fim das janelas de todas as linhas e tanques correspondem, respectivamente, com o início e fim do período.

### **Mudanças nas funções objetivo**

Para que as funções objetivo dos modelos sejam comparáveis é necessário realizar que ambas tenham os mesmo termos.

No caso dos custos de produção, inexistentes no modelo SMMRPM seria necessário incluir a parcela referente ao custo de produção nas linhas, isto é incluir o parâmetro custo unitário de produção do item  $i$  na linha  $l$  ( $cp_{il}$ ) na formulação. E na função objetivo incluir a parcela de custo  $\sum cp_{il} \cdot X_{itlmo}$ .

No entanto, incluir custos de produção de xarope no primeiro estágio (tanques) no SMMRPM não é trivial, pois não existem variáveis destinadas para produção de xarope. Uma alternativa é tirar essa parcela de custo da função objetivo do SITLSP.

Remover os custos de produção no primeiro estágio não afeta, o funcionamento das restrições relacionadas. Os volumes produzidos no primeiro estágio para um determinado lote  $s$  são atribuídos somando em todos os microperíodos as produções de xarope individuais por microperíodo ( $\bar{q}_{jks\tau}$ ), pertencentes a esse lote  $s$  (eq. (III.40)). As produções por microperíodo,  $\bar{q}_{jks\tau}$ , são balanceadas, também por igualdades. Isto é feito para cada microperíodo (equações (III.64)).

O raciocínio seguido é parecido ao que ocorre com as equações de balanço de fluxo de estoque de itens finais ((III.5) - (III.6)).

O mesmo ocorre com o custos de estoque intermediário. Para incluir estoques intermediários na função objetivo do SMMRPM, seria necessário criar novas variáveis e conjuntos de restrições que medissem essas quantidades. Tendo em vista que os estoques intermediários no modelo SITLSP são medidos mediante as restrições (III.64), de balanceamento de níveis de estoque intermediário, e as restrições (III.65) que asseguram que o estoque de xarope seja suficiente para produção no microperíodo seguinte, não há perdas ao zerar esses valores na função objetivo da formulação SITLSP, para tornar equivalentes as funções objetivo dos modelos.

### Resumo das mudanças nos modelos

Em resumo, as mudanças sugeridas nas formulações para que elas sejam comparáveis são:

Para o modelo SITLSP:

- Zerar a parcela de custos de produção de xarope na função objetivoP.
- Zerar a parcela de custos de estoque intermediário.

O modelo SITLSP com estas alterações será denominado SITLSP2.

Para a formulação SMMRPM:

- Relaxar a consideração da precibilidade considerando um tempo de precibilidade alto.
- Adicionar o parâmetro 'custo unitário de produção' para cada item  $i$ , em cada linha  $l$  ( $cp_{il}$ ) nos dados.
- Incluir uma nova parcela de custos de produção em linhas na função objetivo.
- Considerar atraso somente no primeiro período. O atraso passou a ser permitido apenas no primeiro período e, portanto, as variáveis não mais indexadas nos períodos ( $I_{it}^- \rightarrow I_i^-$ ) e existem somente nas equações de balanço de fluxo de estoques do primeiro período. Estas variáveis são fortemente penalizadas na função objetivo mediante o parâmetro  $bigM$  presente no modelo SITLSP.
- Não há janelas de tempo para nenhum tanque/linha em nenhum período.

A nova função objetivo é apresentada a seguir (equação B.1).



$$\begin{aligned}
v(F) = \min & \sum_{i \in N_I} \sum_{t \in T} h_i \cdot I_{it}^+ + M \sum_{i \in N_I} I_i^- + \sum_{t \in T} \sum_{m \in M} \sum_{o \in O_t} \sum_{j, j' \in \theta_m} s_{jj'}^I \cdot Z_{jj'tmo} + \sum_{t \in T} \sum_{l \in L} \sum_{i, i' \in \delta_l} s_{ii'}^{II} \cdot \hat{\gamma}_{ii'tl} \\
& + \sum_{t \in T} \sum_{l \in L} \sum_{i \in \delta_l} \sum_{m \in \phi_l \cap \zeta_{l_i}} \sum_{o \in O_t} \sum_{(i', m', o') \in \Xi^S(i, l, m, o)} s_{ii'}^{II} \cdot \gamma_{ii'tlmom'o'} + \sum_{t \in T} \sum_{l \in L} \sum_{i \in \delta_l} \sum_{m \in \phi_l \cap \zeta_{l_i}} \sum_{o \in O_t} cp_{il} \cdot X_{itlmo}
\end{aligned} \tag{B.1}$$

O modelo SMMRPM com estas alterações será denominado SMMRPM2.

Na seção a seguir são analisadas as aplicações dos modelos na solução de uma instância obtida de Toledo *et al.* (2015).

### B.3 Aplicação dos modelos na instancia ME2

Conforme mencionado acima, foi obtida uma instância do trabalho de Toledo *et al.* (2015), denominada ME2. As versão original do modelo SITLSP e as versões alteradas (SITLSP2 e SMMRPM2 respectivamente) foram utilizadas para resolvê-la.

A instância possui as seguintes características: dois tanques e duas linhas de envase não dedicadas (qualquer linha pode se conectar em qualquer tanque), 2 xaropes, 4 itens, O xarope 1 serve para elaborar os produtos 1, 3 e 4 e o xarope 2 produz o item 2. Existem as seguintes restrições em tanques e linhas:

- O tanque 1 pode fabricar apenas o xarope 2.
- O tanque 2 pode fabricar apenas o xarope 1.
- A linha 1 pode envasar os itens 1, 2 e 3.
- A linha 2 pode envasar qualquer item (1, 2, 3 e 4).

Mais dados da instância ME2, tais como custos e tempos de troca, custos de estoque, estoques iniciais, etc., podem ser consultados no Anexo E.

#### Aplicação do modelo SITLSP

A fim de verificar o impacto das mudanças no modelo SITLSP a instância ME2 foi resolvida até otimalidade, utilizando tanto o modelo SITLSP original quanto a SITLSP2.

#### Aplicação do SITLSP - Versão original

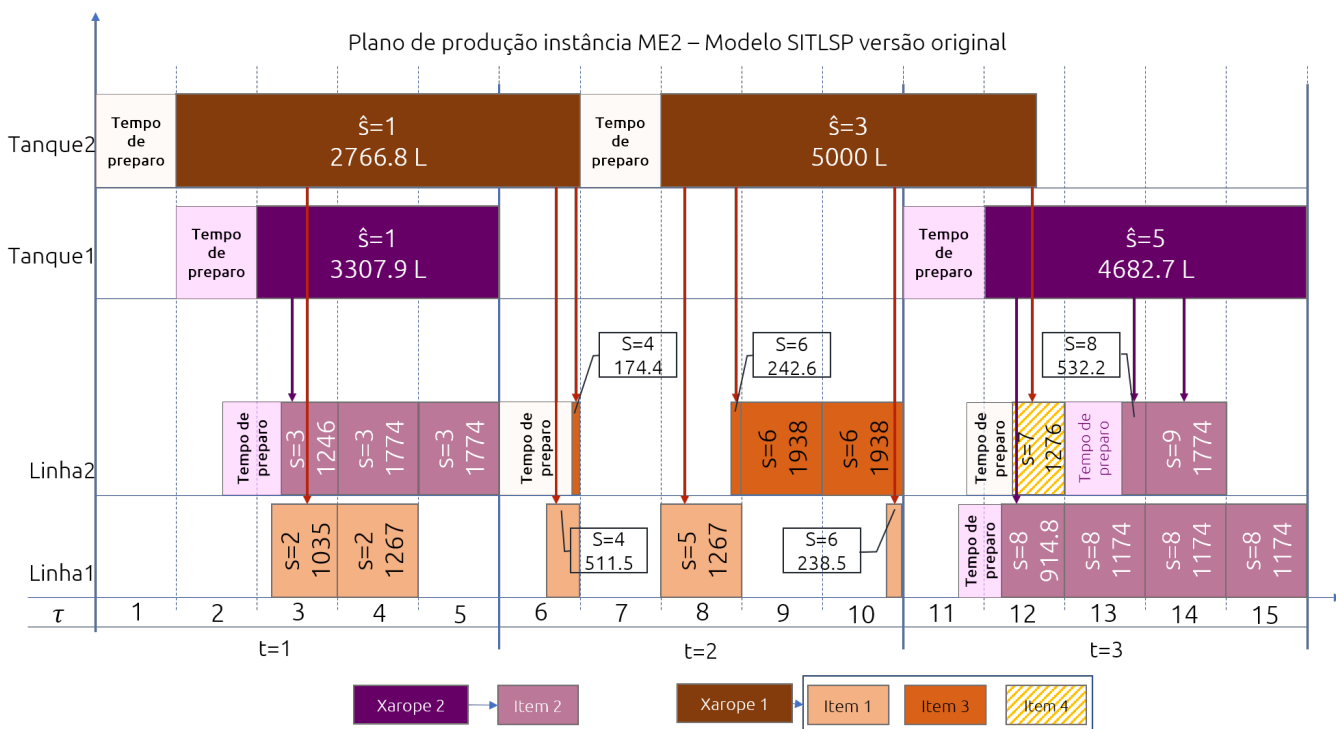
O plano de produção obtido pela formulação SITLSP original é apresentado na Figura B.2. Cada retângulo no primeiro estágio representa um lote de xarope no tempo. O tamanho dele

representa o tempo que o xarope permanece no tanque no microperíodo. A quantidade em litros é indicada dentro do retângulo; a legenda  $\bar{s} = 3$ , indica que o lote é o terceiro do tanque e que foram produzidos 5000 L de xarope no tempo de preparo. As setas que unem os dois estágios fazem referência às conexões que estão suprindo às linhas naquele momento.

No segundo estágio, a produção nas linhas é discriminada para cada microperíodo  $\tau$ . A letra  $s$  em cada quadro nas linhas, também representa o lote ao qual pertence a produção do microperíodo. O número embaixo da legenda do lote  $s$ , indica a quantidade produzida em unidades nesse microperíodo. Assim, por exemplo, podem existir várias produções por microperíodo, pertencentes a um mesmo lote  $s$ . Este é o caso dos dois primeiros quadros da linha 1 com produções de 1035 no microperíodo 3, e 1267 no microperíodo 4 ambos do lote  $s = 2$ .

Cabe salientar que no modelo as produções por microperíodo são alocadas no final de cada microperíodo, como pode ser visto nos lotes  $s = 4$  e  $s = 6$  da linha 1 nos microperíodos 6 e 10 respectivamente.

FIGURA B.2: Plano de produção obtido do modelo SITLSP versão original para a instância ME2.



Fonte: Elaboração própria.

Observando a Figura B.2 vê-se que o modelo SITLSP permite que a produção nos tanques em um determinado período pode ser utilizada inclusive em períodos seguintes. Veja o tanque 2, lotes  $\bar{s} = 1$  e  $\bar{s} = 3$ .

Pode se observar também que embora O *setup crossover* seja permitido no SITLSP, ele não foi

aproveitado no plano obtido.

Há vários tempos ociosos no plano descrito pela Figura B.2. Por exemplo a ociosidade de 1.81 microperíodos, existente entre os lotes 5 e 6 da linha 1 no segundo período, ainda que a troca entre os lotes seja entre itens iguais e o tempo gasto para trocar seja nulo.

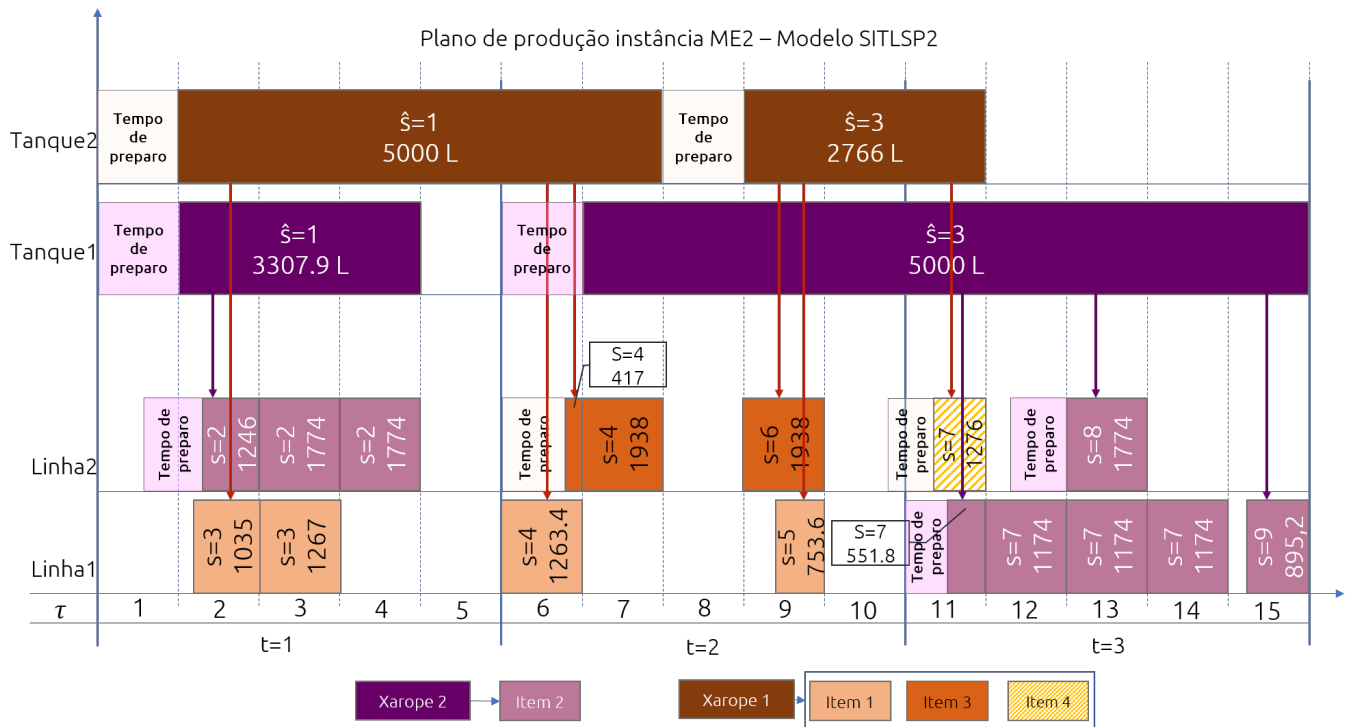
Obviamente, este resultado também tem a ver com a capacidade folgada dos períodos na instância. Isto ocorre, porque essa ociosidade não é penalizada na função objetivo e além disso também não há restrições que as evitem.

### Instância ME2 com SITLSP2

A instância ME2 foi resolvida com o modelo SITLSP2. Cabe lembrar que para os experimentos foi utilizado um computador com 16 Gb de RAM, processador i7 @3.6 GHz e os softwares AMPL + CPLEX 12.6. O tempo limite estabelecido foi de uma hora.

O plano ótimo de produção é apresentado na Figura B.3. Esta figura segue o mesmo padrão da Figura B.2.

FIGURA B.3: Plano de produção obtido do modelo SITLSP2 para instância ME2.



Fonte: Elaboração própria.

Na Figura B.3 pode se ver que, no estágio dos tanques, assim como no plano do modelo sem modificações da Figura B.2, os lotes produzidos nos tanques são utilizados em mais de um período. Por exemplo, veja que o xarope do tanque 1, que é utilizado no período 3 pelas linhas 1 e 2, foi produzido bem no início do período 2 e o tanque 2, utilizado no período 2 pelas linhas 1

e 2, cujo xarope foi produzido no início do período 1.

Também cabe notar que existe um pequeno aumento na quantidade de xarope medida pelas variáveis  $\bar{q}$  no tanque 1 de 7990,6 L do xarope 2 no total para 8307,9 L. No entanto, essa diferença não foi aproveitada nas linhas já que os volumes de produção delas se mantiveram os mesmos. Isto implica que se o plano da Figura B.3 for implementado haveria um desperdício de xarope no primeiro estágio no final do horizonte de planejamento. O lote que causa este desbalanço é o lote  $\bar{s} = 3$ , com uma produção de 5000 L de xarope 2. Este lote, foi preparado no período 2, mas é utilizado no período 3. No plano da Figura B.2, o xarope 2 utilizado no terceiro período é produzido nesse mesmo período e em uma quantidade menor, trata-se do lote  $\bar{s} = 5$ , com uma produção de 4682,7 L.

Cabe ressaltar que, similar ao SMMRPM os volumes de xarope também poderiam ser calculados a partir dos valores das quantidades produzidas nas linhas. Tomando esse valor, em ambos planos não há excesso de produção do xarope 2 já que a demanda de xarope 2 calculada a partir dos lotes do segundo estágio é em ambos casos 7990,6 L.

No nível das linhas, a sequência de trocas nos dois planos analisados são as mesmas. A distribuição dos lotes nos microperíodos é um pouco diferente, mas as quantidades produzidas no total mantiveram-se para cada item em cada período analisado. Não foi gerado atraso na produção nem estoques de itens finais.

Por último, note que neste plano de produção existe *setup crossover*, do período 2 para o período 3 na linha 2. O tempo de preparo adiantado corresponde a  $\omega_{23} = 0,2038$  microperíodos. No entanto, também é obvio na figura que a capacidade do período é suficiente para que o *setup* completo seja feito no mesmo período 3. Como o *setup crossover* não está penalizado na função objetivo, esses dois casos são equivalentes.

Note também que há ociosidade entre lotes de itens iguais, lotes  $s = 4$  e  $s = 5$  da linha 1 e os lotes  $s = 4$  e  $s = 6$  da linha 2 no plano obtido.

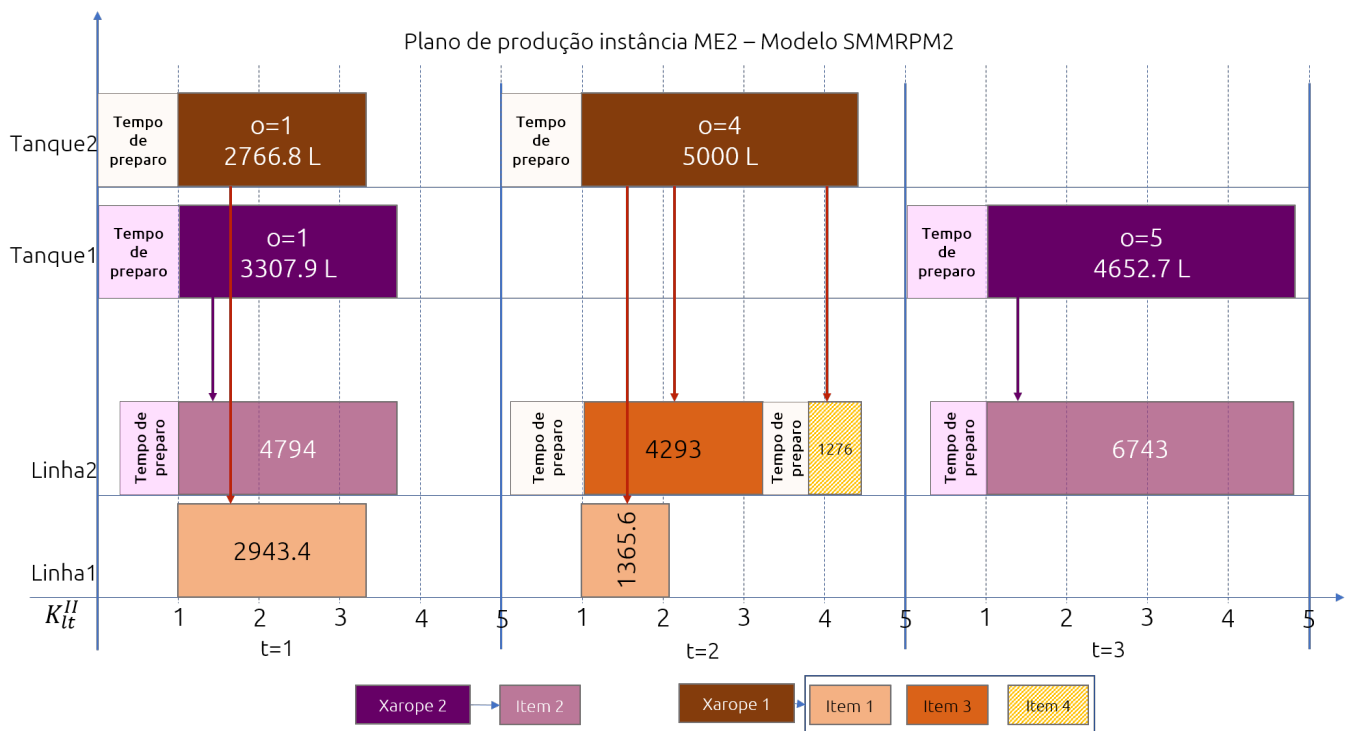
### **Instância ME2 com modelo SMMRPM2**

A programação da produção obtida pode ser observado na Figura B.4. Cada retângulo representa um lote. No primeiro estágio se especifica dentro do retângulo a quem enchimento o pertence o lote e seu volume em litros. Para os lotes das linhas somente se especifica a quantidade produzida. As setas, indicam as conexões dos tanques que suprem o xarope necessário para a produção.

No caso do modelo SMMRPM2, diferentemente do modelo SITLSP2, não existe uma escala de microperíodos, mas uma linha temporal contínua com capacidade equivalente aos 5 microperíodos da formulação SITLSP2, para cada um dos períodos  $t$ , e que corresponde também às

capacidades e disponibilidades das linhas por período ( $Dur_t$  e  $K_{lt}^{II}$ ).

FIGURA B.4: Plano de produção para instância ME2 - Modelo SMMRPM versão modificada



Na Figura B.4, os números dentro do retângulos são os volumes produzidos nos tanques que correspondem aos litros de xarope são calculados *a posteriori* com base nas produções nas linhas. Como mencionado as restrições (4.17) e (4.18) são utilizadas para garantir que o xarope seja suficiente para abastecer às linhas.

Este plano permite satisfazer as demandas, sem atraso assim como os outros planos obtidos dos modelos SITLSP e SITLSP2.

No modelo SMMRPM não é permitido nem o *setup crossover*, nem que um lote de xarope produzido em um período, possa ser utilizado no(s) período(s) seguinte(s) para suprir às linhas.

## B.4 Conclusões

De forma geral, vemos que apesar de terem sido feitas mudanças em ambas formulações, os modelos SITLSP e SMMRPM representam diferentes situações práticas. Estas não são facilmente adaptáveis em um ou no outro modelo de tal forma que soluções de ambos modelos sejam comparáveis.

Em particular destacam-se a perecibilidade, que é negligenciada no modelo SITLSP, o *setup crossover* do modelo SITLSP e que não está presente no modelo proposto nesse trabalho, a pos-

sibilidade de utilização de um mesmo lote de xarope em vários períodos diferentes, os estoques intermediários de xarope do modelo SITLSP.

Cabe salientar que dependendo do contexto de aplicação, estes pressupostos podem ser uma limitação para a utilização de um ou outro modelo.

Por exemplo, se considerarmos um período como sendo 5 dias, cada dia um microperíodo, planos obtidos do modelo SITLSP e SITLSP2 poderiam implicar que um xarope que seja preparado no início de um período e utilizado no período seguinte, tenha que estar no tanque por minimamente 5 dias. Tendo em vista que a perecibilidade dos xaropes não ultrapassa os 3 dias, o plano não seria infactível. No entanto, a escala dos períodos for menor, supondo por exemplo um período como um dia dividido em microperíodos de varias horas, talvez seja possível a implementação do plano obtido.

Por outro lado se a capacidade da planta fosse muito reduzida, o *setup crossover* do modelo SITLSP pode ser de utilidade para gerar planos onde os tempos dos preparos possam ser adiantados entre períodos distintos para otimizar um pouco a capacidade.

## DADOS DA INSTÂNCIA FL1

**N**ESTE anexo são apresentados os dados da instância FL1. Esta instância está baseada na instância I1 do trabalho de (FERREIRA *et al.*, 2012).

### Parâmetros:

Número de itens finais: 7, etiquetas  $\rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Número de xaropes : 2, etiquetas  $\rightarrow \{1, 2\}$

Número de linhas: 3, etiquetas  $\rightarrow \{1, 2\}$

Número de tanques: 1, etiquetas  $\rightarrow \{1\}$

Número de períodos : 3, etiquetas  $\rightarrow \{1, 2, 3\}$

Número de enchimentos totais permitidos por tanque, por período: 2

### Famílias de produtos por sabor de xarope:

Xarope 1: itens 1, 2 e 3.

Xarope 2: itens 4, 5, 6 e 7.

### Itens feitos por linha

Linha 1: itens 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

Linha 2: itens 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

### Xaropes feitos por tanque

Tanque 1: xaropes 1 e 2.

Tanque 2: xaropes 1 e 2.

### Demandas de itens finais por período (Tabela C.1)

TABELA C.1: Demandas em unidades de itens finais por período.

Itens	Período		
	1	2	3
1	14649.000	14596.000	14638.000
2	5058.000	5027.000	5020.000
3	7538.000	7468.000	7329.000
4	4000.000	0.000	4000.000
5	811.000	794.000	773.000
6	2086.000	2172.000	2288.000
7	725.000	760.000	800.000

Fonte: Elaboração própria.

### Quantidade de xarope usado por unidade de item final (Tabela C.2)

TABELA C.2: Quantidade de xarope utilizada por unidade de item final (L).

Xarope	Itens						
	1	2	3	4	5	6	7
1	0.290	0.290	0.237	1.000	1.500	0.510	0.237
2	0.290	0.290	0.237	1.000	1.500	0.510	0.237

Fonte: Elaboração própria.

**Duração de cada período: 3000 min.**

**Capacidade do tanque em todos os períodos (também utilizado como lote máximo) ( $Cap_{mt}^I$ ):**  
10000 L.

**Tempo disponível para operação do tanque em todos os períodos ( $K_{mt}^I$ ): 3000 min.**

**Tempo disponível para produção nas linhas ( $K_{li}^{II}$ )(Tabela C.3):**

TABELA C.3: Disponibilidade de tempo de operação das linhas por período (min).

Linha	Período		
	1	2	3
1	3000	3000	3000
2	1440	3000	3000
3	1440	3000	3000

Fonte: Elaboração própria.

**Tamanho de lote mínimo de qualquer xarope no tanque: 1250 L.**

**Tempos unitários de produção dos itens nas linhas (Tabela C.4)**

TABELA C.4: Tempos de produção unitários por linha (min).

Linha	Itens						
	1	2	3	4	5	6	7
1	0.030	0.030	0.060	0.060	0.070	0.024	0.060
2	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
3	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Fonte: Elaboração própria.

**Tempos de troca entre xaropes (Tabelas C.5):**

TABELA C.5: Tempos de troca (min) no tanque 1.

Xaropes	Xaropes	
	1	2
1	85	365
2	320	40

Fonte: Elaboração própria.



### Tempos de troca entre itens finais (em qualquer linha) (Tabela C.6):

TABELA C.6: Tempos de troca entre itens finais (min).

Itens	Itens						
	1	2	3	4	5	6	7
1	0	150	150	300	300	300	300
2	150	0	120	300	300	300	300
3	180	160	0	300	300	300	270
4	270	300	270	0	150	150	160
5	270	300	300	160	0	160	150
6	270	300	300	160	120	0	160
7	300	300	270	160	150	160	0

Fonte: Elaboração própria.

### Custos de atraso, custos de estoque e estoques iniciais por item (Tabela C.7):

TABELA C.7: Custos de atraso, estoque e estoques iniciais por item/período.

Itens	Custos de atraso (um)	Custos de estoque (um)	Estoque inicial (unidades)
1	5.000	0.007	4072.000
2	4.600	0.006	2502.000
3	6.200	0.009	1240.000
4	10.300	0.014	1518.000
5	4.700	0.007	1393.000
6	2.000	0.003	4360.000
7	6.200	0.009	1001.000

Fonte: Elaboração própria.

### Custo de troca entre xaropes no tanque (Tabela C.8):

TABELA C.8: Custos de troca (\$) no tanque 1.

Xaropes	Xaropes	
	1	2
1	170	730
2	640	80

Fonte: Elaboração própria.

### Custo de troca entre itens nas linhas (Tabela C.9):

TABELA C.9: Custos de troca (\$) na linha 1.

Itens	Itens						
	1	2	3	4	5	6	7
1	0	300	300	600	600	600	600
2	300	0	240	600	600	600	600
3	360	320	0	600	600	600	540
4	540	600	540	0	300	300	320
5	540	600	600	320	0	320	300
6	540	600	600	320	240	0	320
7	600	600	540	320	300	320	0

Fonte: Elaboração própria.

## Notas:

- Para esta instância, qualquer linha pode se conectar no tanque (no existe dedicação).
- A perecibilidade de qualquer um dos dois sabores é 36 horas (2160 min).
- No existe janela de operação específica para nenhum dos recursos produtivos.

DADOS DA INSTÂNCIA E1

**A** seguir se apresentam os dados da instância E1 analisada no capítulo 5. Cabe lembrar que esta instância pertence ao grupo de instâncias E do trabalho de Ferreira *et al.* (2012) e que em todas as instâncias desse grupo existe dedicação de tanques a linhas.

**Parâmetros Gerais:**

Número de itens finais: 4, etiquetas  $\rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$

Número de xaropes : 2, etiquetas  $\rightarrow \{1, 2\}$

Número de linhas: 2, etiquetas  $\rightarrow \{1, 2\}$

Número de tanques: 2, etiquetas  $\rightarrow \{1, 2\}$

Número de períodos : 3, etiquetas  $\rightarrow \{1, 2, 3\}$

Número de enchimentos totais permitidos por tanque, por período: 6

**Famílias de produtos por sabor de xarope:**

Xarope 1: itens 1 e 2.

Xarope 2: item 3 e 4.

**Demandas de itens finais por período (Tabela D.1)**

TABELA D.1: Demandas em unidades de itens finais por período.

Itens	Período		
	1	2	3
1	51.0340	54.3500	61.0000
2	253.3000	289.2080	220.1600
3	8.6200	8.5000	9.6000
4	49.5920	60.9000	55.4070

Fonte: Elaboração própria.

**Quantidade de xarope usado por unidade de item final (Tabela D.2)**

TABELA D.2: Quantidade de xarope utilizada por unidade de item final (L).

Xarope	Itens			
	1	2	3	4
1	0.6000	2.0000	0.6000	2.0000
2	0.6000	2.0000	0.6000	2.0000

Fonte: Elaboração própria.

**Capacidade de qualquer tanque (também utilizado como lote máximo): 12000 L.**

Disponibilidade de tempo de produção de qualquer linha: 2400 min.

Tamanho de lote mínimo de qualquer xarope em qualquer tanque: 1200 L.

Tempos unitários de produção dos itens nas linhas (Tabela D.3)

TABELA D.3: Tempos de produção unitários por linha (min).

Linha	Itens			
	1	2	3	4
1	0.0164	0.0180	0.0164	0.0180
2	0.0138	0.0277	0.0138	0.0277

Fonte: Elaboração própria.

Tempos de troca entre xaropes (Tabela D.4):

TABELA D.4: Tempos de troca (min) nos tanques 1 e 2.

Xaropes	xr1	xr2
xr1	0	280
xr2	335	180

Fonte: Elaboração própria.

Tempos de troca entre itens finais (Tabela D.5):

TABELA D.5: Tempos de troca (min) nas linhas 1 e 2.

Itens	1	2	3	4
1	0	60	100	180
2	60	0	100	100
3	155	155	0	120
4	180	155	120	0

Fonte: Elaboração própria.

Custos de atraso, custos de estoque, estoques iniciais e Parâmetro adicional para comparar com  $F1 (D_{futura_i})$ , por item (Tabela D.6):

TABELA D.6: Custos de atraso, estoque e estoques iniciais por item/período.

Itens	Custos de atraso (\$)	Custos de estoque (\$)	Estoque inicial (und)	$D_{futura_i}$ (und)
1	14.0000	0.0140	49.1270	49.5010
2	25.2000	0.0250	326.2390	220.3980
3	14.0000	0.0140	16.0180	7.8500
4	25.2000	0.0250	61.2470	42.5960

Fonte: Elaboração própria.

Custo de troca entre itens nas linhas (Tabela D.7):

**TABELA D.7:** Custos de troca (\$) nas linhas.

Itens	1	2	3	4
1	0.0000	7.1410	33.3230	33.3230
2	7.1410	0.0000	33.3230	33.3230
3	39.8690	42.2490	0.0000	21.4220
4	42.2490	42.2490	21.4220	0.0000

Fonte: Elaboração própria.

## Notas:

- A linha 1 está dedicada ao tanque 1.
- A linha 2 também está dedicada ao tanque 2.
- Qualquer linha pode envasar qualquer item
- Qualquer tanque pode armazenar qualquer xarope.
- Custos de troca entre xaropes em qualquer tanque nulos.
- Para esta instância, qualquer linha pode se conectar em qualquer tanque (não existe dedicação).
- A perecibilidade de qualquer um dos dois sabores é 1080 min.

## DADOS DA INSTÂNCIA ME2

**N**ESTE apêndice são apresentados os dados da instância ME2, utilizada para comparação com o modelo SITLSP. Esta instância faz parte de um grupo de instâncias da literatura, presentes no trabalho de (TOLEDO *et al.*, 2015). Devido à falta de especificações das unidade de tempo nos dados originais do artigo, se utiliza a sigla 'ut' como unidade de tempo.

**Parâmetros Gerais:**

Número de itens finais: 4, etiquetas  $\rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$

Número de xaropes : 2, etiquetas  $\rightarrow \{1, 2\}$

Número de linhas: 2, etiquetas  $\rightarrow \{1, 2\}$

Número de tanques: 2, etiquetas  $\rightarrow \{1, 2\}$

Número de períodos : 3, etiquetas  $\rightarrow \{1, 2, 3\}$

Número de enchimentos totais permitidos por tanque, por período: 2

**Famílias de produtos por sabor de xarope:**

Xarope 1: itens 1, 3 e 4.

Xarope 2: item 2.

**Itens feitos por linha**

Linha 1: itens 1, 2 e 3.

Linha 2: itens 1, 2, 3 e 4.

**Xaropes feitos por tanque**

Tanque 1: xarope 2.

Tanque 2: xarope 1.

**Demandas de itens finais por período (Tabela E.1)**

TABELA E.1: Demandas em unidades de itens finais por período.

Itens	Período		
	1	2	3
1	2302,00	2017,00	0,00
2	4794,00	0,00	6743,00
3	0,00	4293,00	0,00
4	0,00	0,00	1276,00

Fonte: Elaboração própria.

## Quantidade de xarope usado por unidade de item final (Tabela E.2)

TABELA E.2: Quantidade de xarope utilizada por unidade de item final (L).

Xarope	Itens			
	1	2	3	4
1	0,940	0,000	0,700	0,550
2	0,000	0,690	0,000	0,000

Fonte: Elaboração própria.

Capacidade de qualquer tanque (também utilizado como lote máximo): 5000 L.

Capacidade de qualquer linha: 5 ut.

Tamanho de lote mínimo de qualquer xarope em qualquer tanque: 1000 L.

## Parâmetros de tempos:

### Tempos unitários de produção dos itens nas linhas (Tabela E.3)

TABELA E.3: Tempos de produção unitários por linha (ut).

Linha	Itens			
	1	2	3	4
1	$7,8926598263614838 \times 10^{-4}$	$8,517887563884157 \times 10^{-4}$	$6,844626967830253 \times 10^{-4}$	$1,0000000000000000 \times 10^6$
2	$5,385029617662897 \times 10^{-4}$	$5,636978579481398 \times 10^{-4}$	$5,159958720330237 \times 10^{-4}$	$5,045408678102926 \times 10^{-4}$

Fonte: Elaboração própria.

### Tempos de troca entre xaropes (Tabela E.4):

TABELA E.4: Tempos de troca (ut) nos tanques 1 e 2.

Xaropes	Tanque 1		Tanque 2	
	xr1	xr2	xr1	xr2
xr1	0,00	0,00	1,00	0,00
xr2	0,00	1,00	0,00	0,00

Fonte: Elaboração própria.

### Tempos de troca entre itens finais (Tabela E.5):

TABELA E.5: Tempos de troca (ut) nas linhas.

Itens	Linha 1				Linha 2			
	1	2	3	4	1	2	3	4
1	0,00	0,53	0,51	0,00	0,00	0,83	0,54	0,88
2	0,70	0,00	0,59	0,00	0,72	0,00	0,91	0,86
3	0,53	0,77	0,00	0,00	0,67	0,50	0,00	0,56
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,56	0,70	0,85	0,00

Fonte: Elaboração própria.

## Parâmetros de custo

**Custo de atraso de qualquer item (*BigM*):** \$ 900000000,00.

**Custo de estoque de qualquer item:** \$1,00.

**Custo de estoque intermediário de qualquer xarope:** \$1,00.

**Custo de troca entre xaropes nos tanques (Tabela E.6):**

TABELA E.6: Custos de troca (\$) nos tanques.

Xaropes	Tanque 1		Tanque 2	
	xr1	xr2	xr1	xr2
xr1	0,00	0,00	1000,00	0,00
xr2	0,00	1000,00	0,00	0,00

Fonte: Elaboração própria.

**Custo de troca entre itens nas linhas (Tabela E.7):**

TABELA E.7: Custos de troca (\$) nas linhas.

Itens	Linha 1				Linha 2			
	1	2	3	4	1	2	3	4
1	0,00	530,00	510,00	0,00	0,00	830,00	540,00	880,00
2	700,00	0,00	590,00	0,00	720,00	0,00	910,00	860,00
3	530,00	770,00	0,00	0,00	670,00	500,00	0,00	560,00
4	0,00	0,00	0,00	0,00	560,00	700,00	850,00	0,00

Fonte: Elaboração própria.

**Custo de unitário de produção de xaropes (tabela E.8):**



TABELA E.8: Custo (\$) unitário de produção de xaropes nos tanques.

Tanque	Xaropes	
	1	2
1	1000000,0	1,0
2	1,0	1000000,0

Fonte: Elaboração própria.

### Custo de unitário de produção de itens (tabela E.9):

TABELA E.9: Custo unitário de produção (\$) de itens por linhas.

Linha	Itens			
	1	2	3	4
1	1,0	1,0	1,0	1000000,0
2	1,0	1,0	1,0	1,0

Fonte: Elaboração própria.

## Outros parâmetros próprios do SITLSP

**Quantidade de microperíodos:** 5 ut.

**Capacidade de cada microperíodo:** 1 ut.

**Número máximo de lotes por linha:** 9, máximo 3 por período.

**Número máximo de lotes por tanque**(também presente no SMMR): 6, máximo 2 por período.

### Notas:

- Para esta instância, qualquer linha pode se conectar em qualquer tanque (não existe dedicação).
- Não existe estoque inicial de nenhum produto.
- Não existe estoque inicial de nenhum xarope.
- A linha 1 está configurada no início do horizonte de planejamento para o item 1.
- A linha 2 também está configurada no início do horizonte de planejamento para o item 1.
- O tanque 1 está configurado, no início do horizonte de planejamento, para o xarope 2.
- O tanque 2 está configurado, no início do horizonte de planejamento, para o xarope 1.

# Anexos

## FORMULAÇÕES MATEMÁTICAS DOS MODELOS BASE CLÁSSICOS

---

COMO mencionado no Capítulo 3, a maioria dos modelos estudados nesse trabalho se baseiam principalmente em 3 modelos clássicos da literatura: o *Capacitated Lot Sizing Problem* (CLSP), o *General Lot Sizing and Scheduling Problem* (GLSP) e a variante do CLSP que inclui sequenciamento o *Capacitated Lot Sizing Problem with sequence dependent setups* (CLSD).

A seguir são apresentadas as formulações matemáticas destes modelos. As formulações apresentadas são baseadas nos trabalhos de Drexl e Kimms (1997) para o CLSP e o GLSP e (ALMADA-LOBO *et al.*, 2015) para o CLSD. As formulações correspondem a modelos multi-item, multi-período, para uma única máquina.

### I.1 Modelo CLSP

Este modelo não conta com decisões de sequenciamento dos lotes, simplesmente define as quantidades de cada item que devem ser produzidas dentro do período.

As notações usadas para os diferentes modelos foram levemente modificadas para todos os modelos com o fim de fazer associações e comparações entre os modelos. Para o CLSP utiliza-se a seguinte notação:

#### Parâmetros

$N_I$ :	Conjunto de itens.
$T$ :	Conjunto de períodos.
$K_t$ :	Capacidade disponível da máquina no período $t$ .
$d_{it}$ :	Demanda em unidades do item $i$ no período $t$ .
$h_i$ :	Custo de estoque do item $i$ .
$I_{i0}$ :	Estoque inicial do item $i$ .
$a_i$ :	Tempo unitário de produção do item $i$ .
$c_i$ :	Custo de <i>setup</i> do item $i$ .

#### Variáveis

$I_{it}$ :	Estoque em unidades do item $i$ no período $t$ .
$X_{it}$ :	Quantidade produzida em unidades do item $i$ no período $t$ .
$Y_{it}$ :	Variável binária que indica se existe operação de <i>setup</i> para o item $i$ no período $t$ ( $Y_{it} = 1$ ) ou não existe ( $Y_{it} = 0$ ).

#### Formulação matemática

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} h_i I_{it} + \sum_{i \in N_I} \sum_{t \in T} c_i Y_{it} \quad (\text{I.1})$$

$$I_{it-1} + X_{it} = d_{it} + I_{it} \quad \forall t \in T, i \in N_I \quad (\text{I.2})$$

$$a_i X_{it} \leq K_t Y_{it} \quad \forall t \in T, i \in N_I \quad (\text{I.3})$$

$$\sum_{i \in N_I} a_i X_{it} \leq K_t \quad \forall t \in T \quad (\text{I.4})$$

$$X, I \geq 0; Y \in \{0, 1\} \quad (\text{I.5})$$

A função objetivo (I.1) minimiza custos de *setup* e estoque, as restrições (I.2) estabelecem o fluxo de estoques entre os períodos: as restrições (I.3) definem o *setup* e o tamanho máximo para a produção de um item: As restrições (I.4) limitam a capacidade e finalmente, mediante (I.5) se define o domínio das variáveis.

## I.2 Modelo GLSP

Este modelo divide cada período em um numero de microperíodos de duração variável. Em cada microperíodo somente pode ser configurado um item como máximo. Mantêm-se os parâmetros do CLSP e a notação deles também é mantida. Adicionalmente se criam os seguinte conjunto:

$O$ : Conjunto de microperíodos.

$O_t$ : Conjunto de microperíodos pertencentes ao período  $t$ .

**Variáveis** As variáveis utilizadas para o modelo GLSP são as seguintes:

$I_{it}$ : Estoque em unidades do item  $i$  no período  $t$ .

$X_{io}$ : Quantidade produzida em unidades do item  $i$  no microperíodo  $o$ .

$Y_{io}$ : Variável binária que indica se existe operação de *setup* para o item  $i$  no microperíodo  $o$  ( $Y_{io} = 1$ ) ou não existe ( $Y_{io} = 0$ ).

$W_{io}$ : Variável binária que indica se a máquina está configurada para o item  $i$  no microperíodo  $o$  ( $W_{io} = 1$ ) ou não ( $W_{io} = 0$ ).

### Formulação matemática

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} h_i I_{it} + \sum_{i \in N_I} \sum_{o \in O} c_i Y_{io} \quad (\text{I.6})$$

$$I_{it-1} + \sum_{o \in O_t} X_{io} = d_{it} + I_{it} \quad \forall t \in T, i \in N_I \quad (\text{I.7})$$

$$a_i X_{io} \leq K_t W_{io} \quad \forall t \in T, i \in N_I, o \in O_t \quad (\text{I.8})$$

$$\sum_{i \in N_I} \sum_{o \in O_t} a_i X_{io} \leq K_t \quad \forall t \in T \quad (\text{I.9})$$

$$\sum_{i \in N_I} W_{io} \leq 1 \quad \forall o \in O \quad (\text{I.10})$$

$$Y_{io} \geq W_{io} - W_{i(o-1)} \quad \forall i \in N_I, o \in O \quad (\text{I.11})$$

$$I, X, Y \geq 0; \quad W \in \{0, 1\} \quad (\text{I.12})$$

A função objetivo (I.6) minimiza custos de *setup* e estoque, as restrições (I.7) estabelecem o fluxo de estoques entre os períodos: as restrições (I.8) definem o *setup* para a produção de um item e limitam o tamanho máximo dele. As restrições (I.9) limitam a capacidade, as restrições (I.10) garantem somente um estado de preparação da máquina por microperíodo; as restrições (I.11) marcam a operação de *setups* entre os microperíodos e finalmente, mediante (I.12) se define o domínio das variáveis.

### I.3 Modelo CLSD

O modelo CLSD pode ser considerado uma extensão do modelo CLSP para incluir decisões de sequenciamento e *setups* dependentes da sequência de produção (GUIMARÃES *et al.*, 2015). São mantidos os mesmos parâmetros do modelo CLSP e o custo de *setup* é redefinido assim:

#### Parâmetros

$c_{ij}$ : Custo de *setup* pela troca do item  $i$  para o  $j$ .

#### Variáveis

$I_{it}$ : Estoque em unidades do item  $i$  no período  $t$ .

$X_{it}$ : Quantidade produzida em unidades do item  $i$  no período  $t$ .

$Z_{ijt}$ : Variável binária que indica se existe operação de *setup* pela troca do item  $i$  para o item  $j$  no período  $t$  ( $Z_{ijt} = 1$ ) ou não existe ( $Z_{ijt} = 0$ ).

$W_{it}$ : Variável binária que indica se a máquina está configurada para o item  $i$  no período  $t$  ( $W_{it} = 1$ ) ou não ( $W_{it} = 0$ ).

$\alpha_{it}$ : Variável binária que indica se o item  $i$  foi o primeiro configurado na máquina no período  $t$  ( $\alpha_{it} = 1$ ) ou não ( $\alpha_{it} = 0$ ).

$\beta_{it}$ : Variável binária que indica se o item  $i$  foi o último configurado na máquina no período  $t$  ( $\beta_{it} = 1$ ) ou não ( $\beta_{it} = 0$ ).

### Formulação matemática

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} h_i I_{it} + \sum_{i \in N_I} \sum_{t \in T} c_i Z_{ijt} \quad (\text{I.13})$$

$$I_{it-1} + X_{it} = d_{it} + I_{it} \quad \forall t \in T, i \in N_I \quad (\text{I.14})$$

$$a_i X_{it} \leq K_t \left( \sum_{j \in N_I} Z_{jit} + \alpha_{it} \right) \quad \forall t \in T, i \in N_I \quad (\text{I.15})$$

$$\sum_{i \in N_I} a_i X_{it} \leq K_t \quad \forall t \in T \quad (\text{I.16})$$

$$\sum_{i \in N_I} \alpha_{it} \leq 1 \quad \forall t \in T \quad (\text{I.17})$$

$$\sum_{i \in N_I} \beta_{it} \leq 1 \quad \forall t \in T \quad (\text{I.18})$$

$$\alpha_{it} + \sum_{j \in N_I} Z_{jit} = \sum_{j \in N_I} Z_{ijt} + \beta_{it} \quad \forall t \in T \quad (\text{I.19})$$

$$(i, j) : Z_{ijt} > 0 \text{ Não contem subtour desconectados} \quad \forall t \in T \quad (\text{I.20})$$

$$I, X \geq 0; Z, \alpha, \beta \in \{0, 1\} \quad (\text{I.21})$$

A função objetivo (I.13) minimiza custos de *setup* e estoque por trocas entre itens, as restrições (I.14) estabelecem o fluxo de estoques entre os períodos: as restrições (I.15) definem o *setup* para a produção de um item e limitam o tamanho máximo dele. As restrições (I.16) limitam a capacidade, as restrições (I.17) e (I.18) garantem somente um estado de preparação da máquina ao

principio de cada período e ao final respectivamente; as restrições (I.19) marcam o fluxo dos *setups* para cada período. As restrições (I.20) garantem a não formação de *subtours* desconectados. Finalmente, mediante (I.21) se define o domínio das variáveis.

## MODELO F1

---

**N**ESTE anexo é apresentada a formulação matemática do modelo F1 apresentado pelo trabalho de Ferreira *et al.* (2012). Cabe salientar que apenas é mostrada a formulação e uma explicação sucinta dos diferentes parâmetros, variáveis e restrições da forma como é feito no artigo mencionado. Para maiores detalhes do modelo consulte o trabalho (FERREIRA *et al.*, 2012).

### Parâmetros e variáveis

#### Parâmetros:

$J$  é o conjunto de itens.

$\alpha_m$  é o conjunto de itens que podem ser produzidos pela máquina  $m$ .

$T$  conjunto de períodos.

$M$  conjunto de máquinas.

$\lambda_j$  é o conjunto de máquinas que podem fabricar o item  $j$ .

$S(S_t)$  conjunto de subperíodos (de  $t$ ).

$P_t$  primeiro subperíodo do período  $t$ .

$d_{jt}$  Demanda para o item  $j$  no período  $t$ .

$h_j$  Custo de estoque de uma unidade do item  $j$ .

$g_j$  Custo de atraso de uma unidade do item  $j$ .

$b_{kl}^I$  ( $c_{kl}^I$ ) Setup time (custo) de liquido sabor  $k$  a  $l$  (independente do tanque  $m$ ).

$b_{ij}^{II}$  ( $c_{ij}^{II}$ ) Setup time(custo) do item  $i$  ao  $j$  (independente da máquina/linha  $m$ ).

$b_{ij}$  máx.  $\{b_{kl}^I, b_{ij}^{II}\}$ , com xarope  $k=\phi_i$  e xarope  $l=\phi_j$ .

$c_{ij} = c_{kl}^I + c_{ij}^{II}$  Com xarope  $k=\phi_i$  e xarope  $l=\phi_j$ .

$a_{mj}^{II}$  Tempo requerido para produzir uma unidade do item  $j$  na máquina  $m$ .

$K_{mt}^I$  Capacidade do tanque  $m$  no período  $t$ .

$K_{mt}^{II}$  Capacidade da linha  $m$  no período  $t$ .

$r_{jl}$  Quantidade de liquido  $l$  necessário para a produção de uma unidade do item  $j$ .

$q_{lm}^I$  Quantidade mínima necessária do liquido  $l$  no tanque  $m$  (homogeneidade).

$I_{j0}^+$  Estoque inicial do item  $j$ .

$I_{j0}^-$  Atraso inicial do item  $j$ .

$y_{mj0}$  1 se a máquina  $m$  está preparada inicialmente fabricar o produto  $j$ .

$\phi_j$  xarope usado para fabricar o item  $j$ .



$LB_{mj}$  Tamanho de lote mínimo em unidades do item  $j$  na máquina  $m$ .

$Q_{mj}$  Tamanho de lote máximo em unidades do item  $j$  na máquina  $m$ , (derivado da capacidade do tanque).

$UB_{mj}$  Máxima quantidade (máximo lote) de xarope preparado por cada item  $j$ .

### Variáveis:

$I_{jt}^+$  Estoque do item  $j$  no período  $t$ .

$I_{jt}^-$  Atraso do item  $j$  no período  $t$ .

$\eta_{mjt}$  1 se a máquina é preparada para  $j$  ao princípio do período  $t$ , 0 caso contrario.

$\xi_{mjt}$  Número de vezes que a máquina  $m$  está preparada para o produto  $j$  no período  $t$ .

$x_{mjt}$  Quantidade produzida na máquina  $m$  do item  $j$  no subperíodo  $s$ .

$z_{mijt}$  1, Se tem troca na máquina  $m$  do produto  $i$  ao produto  $j$  para todos os  $i$  e  $j \in \alpha_m$  no período  $t$ , 0 caso contrario.

$\eta_{mjt}$  1 se a máquina é preparada para  $j$  ao princípio do período  $t$ , 0 caso contrario.

$\xi_{mjt}$  Número de vezes que a máquina  $m$  está preparada para o produto  $j$  no período  $t$ .

$v_{mit}$  Programação de lote  $i$  na máquina  $m$  no período  $t$ , a maior valor de  $v$ , mais tarde no período  $t$  será programado o lote. (só para modelo F1).

## Formulação matemática

### Função objetivo

$$\begin{aligned} \min z = & \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} (h_j I_{jt}^+ + g_j I_{jt}^-) + \\ & \sum_{m \in M} \sum_{t \in T} \sum_{j \in \alpha_m} c_{jj} \left( \xi_{mjt} - \eta_{mjt} - \sum_{i \in \alpha_m | i \neq j} z_{mijt} \right) + \sum_{m \in M} \sum_{t \in T} \sum_{i, j \in \alpha_m | i \neq j} c_{ij} * z_{mijt} \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

A função objetivo (II.1) minimiza os custos de estoque e de atraso ou backlog representados pela primeira parcela, os custos de preparação, quando tem troca entre produtos do mesmo tipo (segunda parcela) devido a que este modelo considera tempos de preparação (e custos) em todas as trocas entre os itens  $i$  e  $j$  mesmo que estes sejam iguais ( $i = j$ ). A terceira parcela representa os custos de preparação quando tem troca entre produtos diferentes.

## Restrições

S.a.:

$$I_{j,t-1}^+ + \sum_{m \in \lambda_j} x_{mjt} + I_{j,t}^- = I_{j,t-1}^- + I_{j,t}^+ + d_{jt} \quad \forall j, t \quad (\text{II.2})$$

$$\sum_{j \in \alpha_m} a_{mj} * x_{mjt} + \sum_{i, j \in \alpha_m | i \neq j} b_{ij} * z_{mijt} + \sum_{j \in \alpha_m} b_{jj} * \left( \xi_{mjt} - \eta_{mjt} - \sum_{i \in \alpha_m | i \neq j} z_{mijt} \right) \leq K_{mt} \quad \forall m, t \quad (\text{II.3})$$

$$\sum_{j \in \alpha_m} \eta_{mjt} = 1 \quad \forall m, t \quad (\text{II.4})$$

$$\eta_{mjt} + \sum_{i \in \alpha_m} z_{mijt} = \sum_{i \in \alpha_m} z_{mjit} + \eta_{mj,t+1} \quad \forall m, j \in \alpha_m, t \quad (\text{II.5})$$

$$\xi_{mjt} \leq |S_t| \left( \sum_{i \in \alpha_m} z_{mijt} + \eta_{mjt} \right) \quad \forall m, j \in \alpha_m, t \quad (\text{II.6})$$

$$x_{mjt} \leq UB_{mj} (\xi_{mjt} - \eta_{mjt}) \quad \forall m, j \in \alpha_m, t \quad (\text{II.7})$$

$$x_{mjt} \geq LB_{mj} (\xi_{mjt} - \eta_{mjt}) \quad \forall m, j \in \alpha_m, t \quad (\text{II.8})$$

$$\sum_{i \in \alpha_m} z_{mijt} \leq \xi_{mjt} \quad \forall m, j \in \alpha_m, t \quad (\text{II.9})$$

$$v_{mit} + 1 \leq v_{mjt} + |\alpha_m| (1 + \eta_{mit} - z_{mijt}) \quad \forall t, m, i \in \alpha_m, j \in \alpha_m \setminus \{i\} \quad (\text{II.10})$$

$$I_{jt}^+, I_{jt}^- \geq 0 \quad \forall j, t \quad (\text{II.11})$$

$$v_{mit}, x_{mjt} \geq 0; \quad z_{mijt}, \eta_{mjt} \in \{0, 1\}; \quad \xi_{mjt} \in Z^+ \quad \forall m, i, j \in \alpha_m, t \quad (\text{II.12})$$

As restrições (II.2) balanceiam o fluxo de estoques. É uma restrição muito clássica nos modelos de *lot-sizing* e *lot-schedulling*. Por outra parte o conjunto de restrições (II.3) assegura que a capacidade da fábrica não seja violada por uma solução infactível ao somar o total de tempo de produção e preparação para cada uma das máquinas e em cada um dos períodos. As equações (II.4) garantem que uma máquina ao início de um período específico só pode estar preparada por um produto. O conjunto (II.5), estabelece o balance de fluxo que leva a configuração de preparação da máquina ao próximo período. O conjunto de restrições (II.6) define que o número de vezes que uma máquina está preparada para um determinado produto  $\xi_{mjt}$ , não pode exceder um limite  $|S_t|$  que pode ser o número máximo de lotes fabricados. As restrições (II.7) e (II.8) fixam o tamanho máximo e o mínimo respectivamente de lote produzido do produto  $j$  pela máquina  $m$  no período  $t$ . O conjunto (II.9) assegura que para um determinado período, se na máquina  $m$  há troca pelo menos uma vez, então o valor de  $\sum_{i \in \alpha_m} z_{mijt}$  (1 se teve troca para esse produto  $j$ ) é positivo, e portanto,  $\xi_{mjt}$  também tem que ser positivo. Respeito às restrições (II.10) eliminam os

tours desconectados para que não tenham sequencias desconectadas. Finalmente as restrições (II.11) e (II.12) definem o domínio das variáveis.

## MODELO SITLSP DE TOLEDO *et al.* (2015)

---

**N**O presente anexo é apresentada a formulação matemática do modelo SITLSP do trabalho de Toledo *et al.* (2015). Cabe salientar que apenas é mostrada a formulação e a explicação sucinta dos diferentes parâmetros, variáveis e restrições da forma como é feito no artigo mencionado. Para maiores detalhes do modelo consulte os trabalhos (TOLEDO, 2005) ou (TOLEDO *et al.*, 2015).

### Parâmetros e variáveis

#### Parâmetros gerais

$T$ : número de macroperíodos.

$C$ : capacidade (em unidades de tempo) de cada macroperíodo.

$T^m$ : número de microperíodos por macroperíodo.

$C^m$ : capacidade (em unidades de tempo) de cada microperíodo ( $C = T^m \times C^m$ ).

$\varepsilon$ : um número real positivo muito pequeno.

$M$ : um número real positivo muito grande.

#### Parâmetros para ligar a produção de linhas e tanques

$r_{ij}$ : quantidade de xarope  $j$  necessário para produzir uma unidade do item  $i$ .

#### Variáveis de decisão para ligar a produção de linhas e tanques

$q_{kjl\sigma\tau}$ : quantidade produzida do item  $j$  na linha  $l$ , no microperíodo  $\tau$  que pertence ao lote  $s$  e usa xarope do tanque  $k$ .

#### Parâmetros das linhas de envase

$J$ : número de produtos.

$L$ : número de linhas de envase.

$L_j$ : conjunto de linhas onde o item  $j$  pode ser produzido.

$S$ : número máximo de lotes que podem ser produzidos em cada linha por macroperíodo.

$s_{ijl}$ : custo de troca na linha  $l$  do item  $i$  para o item  $j$ .

$h_j$ : custo unitário de estoque do item  $j$ .

$v_{jl}$ : custo unitário de produção do item  $j$  na linha  $l$ .

$p_{jl}$ : tempo unitário de produção do item  $j$  na linha  $l$ .

$x_{j|0} = 1$  se a linha  $l$  está configurada no início do horizonte de planejamento para o item  $j$ .

$\sigma'_{ijl}$ : tempo de troca do item  $i$  para o item  $j$  na linha  $l$ .

$\omega_{l1}$ : tempo de preparo da linha  $l$ , no início do horizonte de planejamento.

$I_{j0}$ : estoque inicial do item  $j$ .

### Variáveis de decisão das linhas

$z_{ijls} = 1$  se existir troca do item  $i$  para o item  $j$  na linha  $l$  no início do lote  $s$ , 0 em caso contrário.

$I_{jt}$ : estoque do item  $j$  no fim do macroperíodo  $t$ .

$q_{jls}$ : quantidade produzida do item  $j$  na linha  $l$  no lote  $s$ .

$x_{jls} = 1$  se o lote  $s$  foi reservado para produzir o item  $j$  na linha  $l$ , 0 em caso contrário.

$u_{ls} = 1$  se é produzida uma quantidade positiva no lote  $s$  da linha  $l$ , 0 em caso contrário.

$\sigma_{ls}$ : tempo de troca na linha  $l$ , no início do lote  $s$ .

$\omega_{lt}$ : tempo de preparo da linha  $l$  para o primeiro lote no macroperíodo  $t$ , programado no final do macroperíodo  $t - 1$ .

$x_{l s \tau}^B = 1$  se o lote  $s$  da linha  $l$  inicia no microperíodo  $\tau$ , 0 caso contrário.

$x_{l s \tau}^E = 1$  se o lote  $s$  da linha  $l$  finaliza no microperíodo  $\tau$ , 0 caso contrário.

$\delta_{ls}$ : tempo do microperíodo do lote  $s$  na linha  $l$  reservado para preparo e tempo ocioso.

$q_j^0$ : atraso do produto  $j$  no início do horizonte de planejamento.

### Parâmetros dos tanques

$\bar{J}$ : número de xaropes.

$\bar{L}$ : número de tanques.

$\bar{L}_j$ : conjunto de tanques onde o xarope  $j$  pode ser produzido.

$\bar{S}$ : número máximo de lotes que podem ser produzidos em cada tanque por macroperíodo.

$\bar{s}_{ijk}$ : custo de troca no tanque  $k$  do xarope  $i$  para o xarope  $j$ .

$\bar{h}_j$ : custo unitário de estoque intermediário do xarope  $j$  (no final de cada macroperíodo).

$\bar{v}_{jk}$ : custo unitário de produção do xarope  $j$  no tanque  $k$ .

$\bar{x}_{jk0} = 1$  se o tanque  $k$  está configurado no início do horizonte de planejamento para o xarope  $j$ .

$\bar{\sigma}'_{ijk}$ : tempo de troca do xarope  $i$  para o xarope  $j$  no tanque  $k$ .

$\bar{\omega}_{k1}$ : tempo de preparo do tanque  $k$ , realizado antes de iniciar o macroperíodo 1.

$\bar{I}_{jk0}$ : estoque inicial do xarope  $j$  no tanque  $k$ .

$\bar{Q}_k$ : quantidade máxima de xarope preparada no tanque  $k$ .

$\underline{Q}_k$ : quantidade mínima de xarope preparada no tanque  $k$ .

## Variáveis de decisão dos tanques

$\bar{z}_{ijks} = 1$  se existir troca do xarope  $i$  para o xarope  $j$  no tanque  $k$  no início do lote  $s$ , 0 em caso contrário.

$\bar{I}_{jk\tau}$ : quantidade do xarope  $j$  no tanque  $k$  no fim microperíodo  $\tau$  (estoque intermediário de xarope).

$\bar{q}_{jks}$ : quantidade total produzida do xarope  $j$  no tanque  $k$  no lote  $s$ .

$\bar{q}_{jks\tau}$ : quantidade produzida do xarope  $j$  no tanque  $k$  para o lote  $s$  no microperíodo  $\tau$ .

$\bar{x}_{jks} = 1$  se o lote  $s$  foi reservado para produzir o xarope  $j$  no tanque  $k$ , 0 em caso contrário.

$\bar{u}_{ks} = 1$  se é produzida uma quantidade positiva no lote  $s$  do tanque  $k$ , 0 em caso contrário.

$\bar{\sigma}_{ks}$ : tempo de preparo no tanque  $k$ , no início do lote  $s$ .

$\bar{\omega}_{kt}$ : tempo de preparo do tanque  $k$  para o primeiro lote no macroperíodo  $t$ , programado no final do macroperíodo  $t - 1$ .

$\bar{x}_{ks\tau}^B = 1$  se o lote  $s$  do tanque  $k$  inicia no microperíodo  $\tau$ , 0 em caso contrário.

$\bar{x}_{ks\tau}^E = 1$  se o lote  $s$  do tanque  $k$  finaliza no microperíodo  $\tau$ , 0 em caso contrário.

## Formulação matemática

### Função objetivo

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^L \sum_{s=1}^{T \cdot S} s_{ijl} z_{ijls} + \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T h_j + \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^L \sum_{s=1}^{T \cdot S} v_{jl} q_{jls} + \sum_{i=1}^{\bar{J}} \sum_{j=1}^{\bar{J}} \sum_{k=1}^{\bar{L}} \sum_{s=1}^{T \cdot \bar{S}} \bar{s}_{ijk} \bar{z}_{ijks} \\ & + \sum_{j=1}^{\bar{J}} \sum_{k=1}^{\bar{L}} \sum_{t=1}^T \bar{h}_j \bar{I}_{jk,t \cdot T^m} + \sum_{j=1}^{\bar{J}} \sum_{k=1}^{\bar{L}} \sum_{s=1}^{T \cdot \bar{S}} \bar{v}_{jk} \bar{q}_{jks} + M \sum_{i=1}^J q_j^0 \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

A função objetivo minimiza custos de troca nas linhas (primeira parcela), custos de estoque de itens finais (segunda parcela), custos de envase de itens finais (terceira parcela), custos por troca de sabor nos tanques (quarta parcela), custos de estoque intermediário de xarope nos tanques no fim de cada período (quinta parcela) e custo por elaboração dos xaropes nos tanques (sexta parcela). A sétima parcela é uma penalidade por atrasar a produção no início do período de planejamento. Segundo o autor, esta parcela foi incluída para facilitar a obtenção de uma solução factível inicial. O valor de  $M$  é um valor muito alto, para que as soluções com atraso sejam bastante penalizadas.

## Restrições

S.a.:

### Restrições usuais nas linhas.

$$x_{jls} = 0 \quad j = 1, \dots, J; l \in 1, \dots, L \setminus L_j; s = 1, \dots, T \cdot S \quad (\text{III.2})$$

$$\sum_{j=1}^J x_{jls} = 1 \quad l = 1, \dots, L; s = 1, \dots, T \cdot S \quad (\text{III.3})$$

$$p_{jl}q_{jls} \leq Cx_{jls} \quad j = 1, \dots, J; l = 1, \dots, L; s = 1, \dots, T \cdot S \quad (\text{III.4})$$

$$I_{j1} = I_{j0} + q_j^0 + \sum_{l=1}^L \sum_{s=1}^S q_{jls} - d_{j1} \quad j = 1, \dots, J \quad (\text{III.5})$$

$$I_{jt} = I_{j,t-1} + \sum_{l=1}^L \sum_{s=(t-1)S+1}^{t \cdot S} q_{jls} - d_{jt} \quad j = 1, \dots, J; t = 1, \dots, T \quad (\text{III.6})$$

$$z_{ijls} \geq x_{jls} + x_{il,s-1} - 1 \quad i, j = 1, \dots, J; l = 1, \dots, L; s = 1, \dots, T \cdot S \quad (\text{III.7})$$

$$\sigma_{ls} = \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J \sigma'_{ijl} z_{ijls} \quad i, j = 1, \dots, J; l = 1, \dots, L; s = 1, \dots, T \cdot S \quad (\text{III.8})$$

$$\omega_{lt} \leq \sigma_{l,(t-1)S+1} \quad l = 1, \dots, L; t = 1, \dots, T \quad (\text{III.9})$$

$$\sum_{s=(t-1)S+1}^{t \cdot S} \left( \sigma_{ls} + \sum_{j=1}^J p_{jl}q_{jls} \right) \leq C + \omega_{lt} \quad l = 1, \dots, L; t = 1, \dots, T \quad (\text{III.10})$$

Se o item  $j$  não pode ser produzido na linha, então  $x_{jls} = 0 \forall s = 1, \dots, T \cdot S$  (III.2). Apenas um único item pode ser produzido em cada lote  $s$  da linha  $l$  (III.3). A capacidade do macroperíodo é limitada para a produção (III.4). As equações (III.5) e (III.6) balanceiam os fluxos de produção e estoques. As restrições (III.7) contam as trocas baseadas enquanto em (III.8) é determinado o tempo da troca  $\sigma_{ls}$  de um determinado lote. É permitido o *setup crossover* entre o fim do período  $(t-1)$  e o início do período  $t$  (III.9). Graças ao *setup crossover* a capacidade do período  $t$  aumenta em  $\omega_{kt}$  (III.10).

### Restrições de tempos dos lotes nas linhas.

$$t \cdot C - \sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} C^m \tau x_{l,t,S,\tau}^E \geq \omega_{l,t+1} \quad l = 1, \dots, L; t = 1, \dots, T-1 \quad (\text{III.11})$$

$$\sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} C^m \tau x_{lS\tau}^E - \sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} C^m \tau x_{l,s-1,\tau}^E \geq \sigma_{ls} + \sum_{j=1}^J p_{jl} q_{jls} \quad (\text{III.12})$$

$$l = 1, \dots, L; t = 1, \dots, T; s = (t-1)S + 1, \dots, T \cdot S$$

$$\sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} C^m \tau x_{l,(t-1)S+1,\tau}^E \geq (t-1)C + \sigma_{l,(t-1)S+1} - \omega_{lt} + \sum_{j=1}^J p_{jl} q_{j,l,(t-1)S+1} \quad (\text{III.13})$$

$$l = 1, \dots, L; t = 1, \dots, T; s = 1, \dots, T \cdot S$$

$$\sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} x_{lS\tau}^E = 1 \quad l = 1, \dots, L; t = 1, \dots, T; s = (t-1)S + 1, \dots, T \cdot S \quad (\text{III.14})$$

$$\sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} x_{lS\tau}^B = 1 \quad l = 1, \dots, L; t = 1, \dots, T; s = (t-1)S + 1, \dots, T \cdot S \quad (\text{III.15})$$

$$\sum_{j=1}^J p_{jl} q_{jls} \leq C u_{ls} \quad l = 1, \dots, L; s = 1, \dots, T \cdot S \quad (\text{III.16})$$

$$\varepsilon u_{ls} \leq \sum_{j=1}^J q_{jls} \quad l = 1, \dots, L; s = 1, \dots, T \cdot S \quad (\text{III.17})$$

$$\sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} \tau x_{lS\tau}^E - \sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} \tau x_{lS\tau}^B \leq T^m u_{ls} \quad (\text{III.18})$$

$$l = 1, \dots, L; t = 1, \dots, T; s = (t-1)S + 1, \dots, T \cdot S$$

$$\sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} \tau x_{lS\tau}^B - \sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} \tau x_{lS\tau}^E \leq u_{ls} \quad (\text{III.19})$$

$$l = 1, \dots, L; t = 1, \dots, T; s = (t-1)S + 1, \dots, T \cdot S$$



$$\sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} \tau x_{ls\tau}^B - \sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} \tau x_{l,s-1,\tau}^E \leq T^m u_{ls} \quad (III.20)$$

$$l = 1, \dots, L; t = 1, \dots, T; s = (t-1)S + 2, \dots, T \cdot S$$

$$\sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} \tau x_{l,(t-1)S+1\tau}^B - ((t-1)T^m + 1) \leq T^m u_{l,(t-1)S+1} \quad l = 1, \dots, L; t = 1, \dots, T \quad (III.21)$$

$$u_{ls} \geq u_{l,s+1} \quad l = 1, \dots, L; t = 1, \dots, T; s = (t-1)S + 1, \dots, T \cdot S - 1 \quad (III.22)$$

$$\varepsilon u_{ls} + \sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} C^m \tau x_{ls\tau}^E - \sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} C^m \tau x_{ls\tau}^B \leq \sum_{j=1}^J p_{jl} q_{jls} \quad (III.23)$$

$$l = 1, \dots, L; t = 1, \dots, T; s = (t-1)S + 1, \dots, T \cdot S$$

$$\sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} C^m \tau x_{ls\tau}^E - \sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} C^m \tau x_{ls\tau}^B \geq \sum_{j=1}^J p_{jl} q_{jls} \quad (III.24)$$

$$l = 1, \dots, L; t = 1, \dots, T; s = (t-1)S + 1, \dots, T \cdot S$$

O valor de  $\omega_{k,t+1}$  é a capacidade restante ociosa no fim do período anterior (III.11). O tempo de início de um lote menos o tempo de finalização do lote anterior, deve ser pelo menos tão grande quanto o tempo de produção do lote correspondente mais o tempo de *setup* necessário (III.12)-(III.13). Há apenas um único início e fim para cada lote no horizonte de planejamento (III.14)-(III.15). As equações (III.16) garantem que pode ocorrer produção na linha se o lote for preparado para ser produzido. Se o lote  $s$  for incluído no programa de produção ( $u_{ls} = 1$ ), as equações (III.16) controlam a produção de uma quantidade mínima de xarope  $\varepsilon$ . Se o lote  $s$  não for efetivamente programado ( $u_{ls} = 0$ ) o início e fim do lote não produzido deve ocorrer no mesmo microperíodo ( $x_{ls\tau}^B = x_{ls\tau}^E$ ) (III.18) - (III.19). Adicionalmente, se o lote  $s$  não for usado, o lote seguinte deve iniciar o mais próximo possível do fim do lote anterior (III.21). Os lotes vazios de um macroperíodo  $t$ , devem ser os últimos do macroperíodo (III.22). O início e fim de um lote são escolhidos de tal forma que o início  $x_{ls\tau}^B$  define o primeiro microperíodo no qual o lote é produzido, e o fim  $x_{ls\tau}^E$  indica o último microperíodo (III.23)-(III.24).

### Restrições para sincronia: Linhas de envase.

$$q_{jls} = \sum_{k=1}^{\bar{L}} \sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} q_{kjl s \tau} \quad l = 1, \dots, L; t = 1, \dots, T; s = (t-1)S + 1, \dots, T \cdot S \quad (\text{III.25})$$

$$\delta_{ls} = \left( \sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} \tau x_{ls\tau}^E - \sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} \tau x_{l,s-1,\tau}^B + 1 \right) C^m - \sum_{j=1}^J p_{jl} q_{jls} \quad (\text{III.26})$$

$l = 1, \dots, L; t = 1, \dots, T; s = (t-1)S + 2, \dots, T \cdot S; \tau = (t-1)T^m + 1, \dots, t \cdot T^m$

$$\sum_{k=1}^{\bar{L}} \sum_{j=1}^J p_{jl} q_{kjl s \tau} \leq C^m - \delta_{ls} + (1 - x_{ls\tau}^B) C^m \quad (\text{III.27})$$

$$l = 1, \dots, L; t = 1, \dots, T; s = (t-1)S + 1, \dots, T \cdot S; \tau = (t-1)T^m + 1, \dots, t \cdot T^m$$

$$\sum_{k=1}^{\bar{L}} \sum_{j=1}^J p_{jl} q_{kjl s \tau} \leq \sum_{\tau'=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} C^m x_{ls\tau'}^E \quad (\text{III.28})$$

$$l = 1, \dots, L; t = 1, \dots, T; s = (t-1)S + 1, \dots, T \cdot S; \tau = (t-1)T^m + 1, \dots, t \cdot T^m$$

$$\sum_{k=1}^{\bar{L}} \sum_{j=1}^J p_{jl} q_{kjl s \tau} \leq \sum_{\tau'=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} C^m x_{ls\tau'}^B \quad (\text{III.29})$$

$$l = 1, \dots, L; t = 1, \dots, T; s = (t-1)S + 1, \dots, T \cdot S; \tau = (t-1)T^m + 1, \dots, t \cdot T^m$$

Para ligar as quantidades produzidas em linhas e tanques são utilizadas as equações (III.25). Se sobrar capacidade dos microperíodos destinados a um lote, o tempo ocioso pode ser usado para *setup* do lote seguinte. O xarope utilizado de um tanque em determinado microperíodo deve respeitar a capacidade  $C^m$  desse microperíodo, isto é feito mediante as restrições (III.28) - (III.29).

### Restrições usuais para tanques.

$$\bar{x}_{jks} = 0 \quad j = 1, \dots, \bar{J}; k \in 1, \dots, \bar{L} \setminus \bar{L}_j; s = 1, \dots, T \cdot \bar{S} \quad (\text{III.30})$$

$$\sum_{j=1}^{\bar{J}} \bar{x}_{jks} = 1 \quad k = 1, \dots, \bar{L}; s = 1, \dots, T \cdot \bar{S} \quad (\text{III.31})$$

$$\bar{q}_{jks} \leq \bar{Q}_k \bar{x}_{jks} \quad j = 1, \dots, \bar{J}; k = 1, \dots, \bar{L}; s = 1, \dots, T \cdot \bar{S} \quad (\text{III.32})$$

$$\bar{q}_{jks} \leq \bar{Q}_k \bar{u}_{ks} \quad j = 1, \dots, \bar{J}; k = 1, \dots, \bar{L}; s = 1, \dots, T \cdot \bar{S} \quad (\text{III.33})$$

$$\sum_{j=1}^{\bar{J}} \bar{q}_{jks} \geq \underline{Q}_k \bar{u}_{ks} \quad j = 1, \dots, \bar{J}; k = 1, \dots, \bar{L}; s = 1, \dots, T \cdot \bar{S} \quad (\text{III.34})$$

$$\bar{z}_{ijks} \geq \bar{x}_{jks} + \bar{x}_{ik,s-1} - 2 + \bar{u}_{ks} \quad i, j = 1, \dots, \bar{J}; k = 1, \dots, \bar{L}; s = 1, \dots, T \cdot \bar{S} \quad (\text{III.35})$$

$$\bar{x}_{jks} - \bar{x}_{jk,s-1} \leq \bar{u}_{ks} \quad j = 1, \dots, \bar{J}; k = 1, \dots, \bar{L}; s = 1, \dots, T \cdot \bar{S} \quad (\text{III.36})$$

$$\bar{\sigma}_{ks} = \sum_{i=1}^{\bar{J}} \sum_{j=1}^{\bar{J}} \bar{\sigma}'_{ijk} \bar{z}_{ijks} \quad i, j = 1, \dots, \bar{J}; k = 1, \dots, \bar{L}; s = 1, \dots, T \cdot \bar{S} \quad (\text{III.37})$$

$$\bar{\omega}_{kt} \leq \bar{\sigma}_{k,(t-1)S+1} \quad k = 1, \dots, \bar{L}; t = 1, \dots, T \quad (\text{III.38})$$

$$\sum_{s=(t-1)S+1}^{t \cdot \bar{S}} \bar{\sigma}_{ks} \leq C + \bar{\omega}_{kt} \quad k = 1, \dots, \bar{L}; t = 1, \dots, T \quad (\text{III.39})$$

Se o xarope  $j$  não puder ser armazenado em um tanque  $k$  específico, então  $\bar{x}_{jks} = 0 \forall s = 1, \dots, T \cdot \bar{S}$  (III.30). Os tanques somente podem armazenar um único sabor por lote (III.31). Os tanques têm capacidade limitada (III.32) e nada pode ser armazenado se o lote não for preparado (III.33). Uma quantidade mínima de xarope deve ser produzida se o lote for programado para produzir (III.34). Trocar a reservação de um lote de um tanque, não necessariamente significa em troca efetiva de xarope no tanque, pois a troca somente é ativada se o tanque for utilizado realmente (III.35) - (III.36). O tempo de troca para um lote  $s$  é calculado mediante as equações (III.37). A primeira troca deve começar no fim do macroperíodo anterior, se sobrou tempo nele (III.38) - (III.39).

**Restrições para tempos dos lotes nos tanques.**

$$\bar{q}_{jks} = \sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} \bar{q}_{jks\tau} \quad j = 1, \dots, \bar{J}; k = 1, \dots, \bar{L}; s = 1, \dots, T \cdot \bar{S} \quad (\text{III.40})$$

$$t \cdot C - \sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} C^m \tau \bar{x}_{k,t \cdot \bar{S}, \tau}^E \geq \bar{\omega}_{k,t+1} \quad k = 1, \dots, \bar{L}; t = 1, \dots, T - 1 \quad (\text{III.41})$$

$$\sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} C^m \tau \bar{x}_{kst}^E - \sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} C^m \tau \bar{x}_{k,s-1,\tau}^E \geq \bar{\sigma}_{ks} \quad (\text{III.42})$$

$$k = 1, \dots, \bar{L}; t = 1, \dots, T; s = (t-1)\bar{S} + 1, \dots, t \cdot \bar{S}$$

$$\sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} C^m \tau \bar{x}_{k,(t-1)\bar{S}+1,\tau}^E \geq (t-1)C + \bar{\sigma}_{k,(t-1)\bar{S}+1} - \bar{\omega}_{kt} \quad (\text{III.43})$$

$$k = 1, \dots, \bar{L}; t = 1, \dots, T$$

$$\sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} \bar{x}_{ks\tau}^E = 1 \quad k = 1, \dots, \bar{L}; t = 1, \dots, T; s = (t-1)\bar{S} + 1, \dots, t \cdot \bar{S} \quad (\text{III.44})$$

$$\sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} \bar{x}_{ks\tau}^B = 1 \quad k = 1, \dots, \bar{L}; t = 1, \dots, T; s = (t-1)\bar{S} + 2, \dots, t \cdot \bar{S} \quad (\text{III.45})$$

$$\sum_{\tau=(t-2)T^m+1}^{t \cdot T^m} \bar{x}_{k,(t-1)\bar{S}+1,\tau}^B = 1 \quad k = 1, \dots, \bar{L}; t = 2, \dots, T \quad (\text{III.46})$$

$$\sum_{\tau=1}^{T^m} \bar{x}_{k1\tau}^B = 1 \quad k = 1, \dots, \bar{L} \quad (\text{III.47})$$

$$\sum_{j=1}^{\bar{J}} \bar{q}_{jks\tau} \leq \bar{Q}_k \bar{x}_{ks\tau}^E \quad (\text{III.48})$$

$$k = 1, \dots, \bar{L}; t = 1, \dots, T; s = (t-1)\bar{S} + 1, \dots, t \cdot \bar{S}; \tau = (t-1)T^m + 1, \dots, t \cdot T^m$$

$$\sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} \tau \bar{x}_{ks\tau}^E - \sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} \tau \bar{x}_{ks\tau}^B \leq T^m \bar{u}_{ks} \quad (\text{III.49})$$

$$k = 1, \dots, \bar{L}; t = 1, \dots, T; s = (t-1)\bar{S} + 2, \dots, t \cdot \bar{S}$$

$$\sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} \tau \bar{x}_{k,(t-1)\bar{S}+1,\tau}^E - \sum_{\tau=(t-2)T^m+1}^{t \cdot T^m} \tau \bar{x}_{k,(t-1)\bar{S}+1,\tau}^B \leq T^m \bar{u}_{k,(t-1)\bar{S}+1} \quad (III.50)$$

$$k = 1, \dots, \bar{L}; t = 2, \dots, T$$

$$\sum_{\tau=1}^{T^m} \tau \bar{x}_{k1\tau}^E - \sum_{\tau=1}^{T^m} \tau \bar{x}_{k1\tau}^B \leq T^m \bar{u}_{k1} \quad k = 1, \dots, \bar{L} \quad (III.51)$$

$$\sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} \tau \bar{x}_{ks\tau}^B - \sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} \tau \bar{x}_{ks\tau}^E \leq \bar{u}_{ks} \quad (III.52)$$

$$k = 1, \dots, \bar{L}; t = 1, \dots, T; s = (t-1)\bar{S} + 2, \dots, t \cdot \bar{S}$$

$$\sum_{\tau=(t-2)T^m+1}^{t \cdot T^m} \tau \bar{x}_{k,(t-1)\bar{S}+1,\tau}^B - \sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} \tau \bar{x}_{k,(t-1)\bar{S}+1,\tau}^E \leq \bar{u}_{k,(t-1)\bar{S}+1} \quad (III.53)$$

$$k = 1, \dots, \bar{L}; t = 2, \dots, T$$

$$\sum_{\tau=1}^{T^m} \tau \bar{x}_{k1\tau}^B - \sum_{\tau=1}^{T^m} \tau \bar{x}_{k1\tau}^E \leq \bar{u}_{k1} \quad k = 1, \dots, \bar{L} \quad (III.54)$$

$$\sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} \tau \bar{x}_{ks\tau}^B - \sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} \tau \bar{x}_{k,s-1,\tau}^E \leq T^m \bar{u}_{ks} \quad (III.55)$$

$$k = 1, \dots, \bar{L}; t = 1, \dots, T; s = (t-1)\bar{S} + 2, \dots, t \cdot \bar{S}$$

$$\sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} \tau \bar{x}_{k,(t-1)\bar{S}+1,\tau}^B - ((t-1)T^m + 1) \leq T^m \bar{u}_{k,(t-1)\bar{S}+1} \quad k = 1, \dots, \bar{L}; t = 2, \dots, T \quad (III.56)$$

$$\sum_{\tau=1}^{T^m} \tau \bar{x}_{k1\tau}^B - 1 \leq T^m \bar{u}_{k1} \quad k = 1, \dots, \bar{L} \quad (III.57)$$

$$\bar{u}_{ks} \geq \bar{u}_{k,s+1} \quad k = 1, \dots, \bar{L}; t = 1, \dots, T; s = (t-1)\bar{S} + 1, \dots, t \cdot \bar{S} - 1 \quad (III.58)$$

$$C^m \bar{u}_{ks} + \sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} C^m \tau \bar{x}_{ks\tau}^E - \sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} C^m \tau \bar{x}_{ks\tau}^B = \bar{\sigma}_{ks} \quad (\text{III.59})$$

$$k = 1, \dots, \bar{L}; t = 1, \dots, T; s = (t-1)\bar{S} + 2, \dots, t \cdot \bar{S}$$

$$C^m \bar{u}_{k,(t-1)\bar{S}+1} + \sum_{\tau=(t-1)T^m+1}^{t \cdot T^m} C^m \tau \bar{x}_{k,(t-1)\bar{S}+1,\tau}^E - \sum_{\tau=(t-2)T^m+1}^{t \cdot T^m} C^m \tau \bar{x}_{k,(t-1)\bar{S}+1,\tau}^B = \bar{\sigma}_{k,(t-1)\bar{S}+1} \quad (\text{III.60})$$

$$k = 1, \dots, \bar{L}; t = 2, \dots, T$$

$$C^m \bar{u}_{k1} + \sum_{\tau=1}^{T^m} C^m \tau \bar{x}_{k1\tau}^E - \sum_{\tau=1}^{T^m} C^m \tau \bar{x}_{k1\tau}^B = \bar{\sigma}_{k1} - \bar{\omega}_{k1} \quad k = 1, \dots, \bar{L} \quad (\text{III.61})$$

$$\sum_{j=1}^{\bar{J}} \bar{I}_{jk,\tau-1} \leq \bar{Q}_k ((1 - \bar{x}_{ks\tau}^B) + (1 - \bar{u}_{ks})) \quad (\text{III.62})$$

$$k = 1, \dots, \bar{L}; t = 1, \dots, T-1; s = (t-1)\bar{S} + 1, \dots, t \cdot \bar{S}; \tau = (t-1)T^m + 1, \dots, t \cdot T^m$$

$$\sum_{j=1}^{\bar{J}} \bar{I}_{jk,\tau-1} \leq \bar{Q}_k ((1 - \bar{x}_{ks\tau}^B) + (1 - \bar{u}_{ks})) \quad (\text{III.63})$$

$$k = 1, \dots, \bar{L}; s = (T-1)\bar{S} + 1, \dots, T \cdot \bar{S}; \tau = (T-1)T^m + 1, \dots, T \cdot T^m$$

A maioria de restrições desse grupo são similares às apresentadas para o estágio das linhas. A quantidade total de xarope de um lote é a soma de todas as quantidades dos microperíodos pertencentes a esse lote (III.40). Os lotes no tanque devem ser programados de tal forma que o tempo de troca esteja dentro da capacidade de tempo entre o fim do lote prévio e o fim do lote sob consideração (III.41) - (III.42). O tempo troca do primeiro lote de um determinado macroperíodo pode iniciar ainda no fim do macroperíodo anterior (III.43). O início e fim de um lote deve ser único (III.44) - (III.47). O xarope de um determinado lote estará disponível apenas terminar o tempo de preparo (III.48). A capacidade de tempo de um possível lote será positiva, se e somente se o lote é programado no tanque (III.49) - (III.54). Os lotes vazios são programados no fim do período (III.55) - (III.57). Sem perda de generalidade, é assumido que o tempo necessário para preparar um xarope é um múltiplo inteiro do microperíodo. Portanto, o início e o fim de um lote devem ser programados para que esta disponibilidade de tempo seja igual ao tempo necessário

para preparar o tanque (III.59) - (III.61). Para controlar se o lote é usado ( $\bar{u}_{ks} = 1$  e  $\bar{x}_{ks\tau}^B = 1$ ), são utilizadas as restrições (III.61) - (III.63).

### Restrições para sincronia: Tanques.

$$\bar{I}_{jk\tau} = \bar{I}_{jk,\tau-1} + \sum_{s=(t-1)\bar{S}+1}^{t\cdot\bar{S}} \bar{q}_{jks\tau} - \sum_{i=1}^J \sum_{l=1}^L \sum_{s=(t-1)S+1}^{t\cdot S} r_{ij} q_{kils\tau} \quad (\text{III.64})$$

$$j = 1, \dots, \bar{J}; k = 1, \dots, \bar{L}; t = 1, \dots, T; \tau = (t-1)T^m + 1, \dots, t \cdot T^m$$

$$\bar{I}_{jk\tau} \geq \sum_{i=1}^J \sum_{l=1}^L \sum_{s=(t-1)S+1}^{t\cdot S} r_{ij} q_{kils,\tau+1} \quad (\text{III.65})$$

$$j = 1, \dots, \bar{J}; k = 1, \dots, \bar{L}; t = 1, \dots, T; \tau = (t-1)T^m + 1, \dots, t \cdot T^m - 1$$

As equações (III.64) balanceiam as quantidades de xarope produzidas e estocadas de xarope para cada microperíodo sujeito às demandas das linhas. Finalmente, as equações (III.65) garantem que a quantidade de xarope estocada em um microperíodo seja suficiente para suprir as demandas de xarope nas linhas para o microperíodo seguinte.