Amanda Ferreira de Lima

Ações de $\mathbb{Z}_2^r$ fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$

São Carlos
2017

Amanda Ferreira de Lima

Ações de $\mathbb{Z}_2^r$ fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher

São Carlos
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado da candidata Amanda Ferreira de Lima, realizada em 07/03/2017:

Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher
UFSCar

Prof. Dr. Luiz Roberto Hartmann Junior
UFSCar

Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto
USP

Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi
UNESP

Profa. Dra. Denise de Mattos
USP

Aos meus pais,
Amadeu e Neide,
dedico.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por sempre olhar por mim.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro.

Ao Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher, pelo problema proposto para este trabalho, por toda dedicação dispensada durante minha orientação, pelos conhecimentos transmitidos e por toda disponibilidade e dedicação que sempre teve ao esclarecer minhas dúvidas, tanto as relacionadas à pesquisa quanto as demais.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar, pelos conhecimentos transmitidos durante as disciplinas do doutorado.

À banca avaliadora, por ter aceitado o convite.

Aos meus pais Amadeu e Neide, que sempre apoiaram e incentivaram meus estudos, por todos os conselhos, todo amor e carinho.

À minha irmã Carolina, por sempre ser minha amiga, me apoiar, aconselhar, e também por todos os momentos divertidos que passamos juntas.

Ao meu noivo Matheus, por todo carinho e apoio, paciência e cuidado. Por comemorar comigo os dias alegres e por me dar segurança nos dias difíceis, tornado-os bem melhores.

À minha família, pela torcida dispensada em todos os momentos. Em especial à minha tia Adélia, em memória, que sempre torceu e rezou para que tudo desse certo.

Às minhas amigas Ana Maria e Rafaella, por todo incentivo, carinho e pelos ótimos momentos que dividimos durante estes anos de doutorado.

Aos amigos da UFSCar e do ICMC-USP, especialmente Daiane, Carlos, Ronaldo, Marcos e Pedro, pela ótima convivência durante estes anos e por toda troca de conhecimentos, indispensáveis para a minha formação como doutora.

Enfim, à todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para que esse sonho se tornasse realidade!

"Pedras no caminho?
Guardo todas, um dia vou construir um castelo..."

(Fernando Pessoa)

Resumo

A classificação, a menos de cobordismo equivariante, das involuções suaves (M, T) que possuem um determinado conjunto de pontos fixos F, é um problema clássico na teoria de cobordismo. Esta classificação vem sendo estudada para vários casos de F, dos quais destacamos:

Em [6] e [26], P. E. Conner, E. E. Floyd e R. E. Stong realizaram a classificação para o caso em que F é um espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$, para todo natural n. D. C. Royster estabeleceu em [24] a classificação de involuções fixando uma união $\mathbb{R}P^m \cup \mathbb{R}P^n$, para naturais m, n, com exceção dos casos em que m e n são ambos pares e positivos. Em [17], R. Oliveira, P. L. Q. Pergher e A. Ramos classificaram as involuções que fixam esta união de dois espaços projetivos reais para o caso em que $m = 2$ e n é par. O caso geral em que m e n são ambos pares e positivos permanece em aberto. Em [21], P. L. Q. Pergher e A. Ramos generalizaram os trabalhos de P. E. Conner, E. E. Floyd, R. E. Stong e D. C. Royster, realizando a classificação das involuções que fixam um espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$ ou um espaço projetivo quaterniônico $\mathbb{H}P^n$, para todo natural n, e estudando o problema quando F é uma união de dois espaços projetivos complexos $\mathbb{C}P^m \cup \mathbb{C}P^n$ ou de dois espaços projetivos quaterniônicos $\mathbb{H}P^m \cup \mathbb{H}P^n$, com exceção dos casos em que m e n são ambos pares positivos. Neste caso específico, P. L. Q. Pergher e A. Ramos estabeleceram esta classificação para o caso em que m é uma potência de 2 e n é par. Com exceção deste caso particular, o caso geral em que m e n são ambos pares e positivos permanece em aberto.

O objetivo deste trabalho é obter a classificação em pauta quando o conjunto de pontos fixos é a união de um espaço projetivo real com um espaço projetivo complexo, $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, para quaisquer j e k, incluindo portanto o caso até então em aberto com j e k pares quaisquer. Além disso, estendemos a classificação para $\mathbb{Z}_2^r$-ações no caso em que ambas as dimensões são pares e positivas.

Abstract

The classification up to equivariant cobordism of smooth involutios (M,T) having fixed set F is a classical problem in cobordism theory. This classification has been studied for several cases of F, of which we highlight the following:

For $F = \mathbb{R}P^j$, the j-dimensional real projective space, the classification was established by P. E. Conner, E. E. Floyd and R. E. Stong in [6] and [26]. In [24], D. C. Royster studied this problem with $F = \mathbb{R}P^j \cup \mathbb{R}P^k$, for naturals numbers j and k, except when j and k are both even and greater than zero. R. Oliveira, P. L. Q. Pergher and A. Ramos established the classification for $F = \mathbb{R}P^j \cup \mathbb{R}P^k$ where $j = 2$ and k is even in [17]. The general case where j and k are both even and greater than zero is still open. For $F = \mathbb{C}P^j$ and $F = \mathbb{H}P^j$, where $\mathbb{C}P^j$ and $\mathbb{H}P^j$ are the corresponding complex and quaternionic projective spaces, the classification was established by P. L. Q. Pergher and A. Ramos in [21]. They also established the classification for $F = \mathbb{C}P^j \cup \mathbb{C}P^k$ and $F = \mathbb{H}P^j \cup \mathbb{H}P^k$, except when j and k are both even and greater than zero, but they resolved this problem for the particular case $j = 2^t$ and k even. As in the real case, also for complex and quaternionic projective spaces, the general case where j and k are both even and greater than zero is still open.

In this work we deal with the classification, up to equivariant cobordism, of the pairs (M,T) for which the fixed point set is $F = \mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, including the "hard"case where j and k are both even and greater than zero. We also extend the classification for $\mathbb{Z}_2^r$-actions in the case that both dimensions are even.

Sumário

Introdução

Suponha um par (M, Φ), onde M é uma variedade fechada e suave (C^∞) e Φ é uma ação suave do grupo $\mathbb{Z}_2^k$ em M. Aqui, $\mathbb{Z}_2^k$ é considerado como o grupo gerado por k involuções suaves e comutantes $T_1, T_2, ..., T_k$. Então, na literatura, é bem conhecido o fato de que o conjunto de pontos fixos de Φ, F, é uma união disjunta e finita de subvariedades suaves e fechadas de M (ver [13]). Se $\eta \to F$ é o fibrado normal de F em M, então η decompõe-se sob Φ em uma soma de Whitney de subfibrados nos quais $\mathbb{Z}_2^k$ atua como uma de suas representações reais, não triviais e irredutíveis, as quais são todas unidimensionais e podem ser descritas por homomorfismos $\rho : \mathbb{Z}_2^k \to \mathbb{Z}_2 = \{+1, -1\}$ sobrejetores: $\mathbb{Z}_2^k$ atua nos reais de tal sorte que $g \in \mathbb{Z}_2^k$ atua como multiplicação por $\rho(g)$. Em outras palavras,

$$\eta = \bigoplus_{\rho} \varepsilon_\rho \quad ,$$

onde ε_ρ é o subfibrado de η no qual $\mathbb{Z}_2^k$ atua nas fibras como ρ; isto é, onde cada T_j atua como multiplicação por $\rho(T_j)$, e onde a soma exclui o homomorfismo trivial $1 \in Hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2)$. Alternativamente, ε_ρ é o fibrado normal de F no conjunto de pontos fixos F_ρ do subgrupo $kernel(\rho)$ atuando em M. Escrevendo $\mathcal{P} = Hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$, nós definimos o fixed-data de (M, Φ) como sendo o objeto $(F; \{\varepsilon_\rho\}_{\rho \in \mathcal{P}})$, ou seja, o conjunto de pontos fixos F e uma lista de $2^k - 1$ fibrados vetoriais sobre F indexados por $\mathcal{P}$.

Neste contexto, uma questão natural é a classificação, a menos de cobordismo equivariante, dos pares (M, Φ) com alguma condição sobre o *fixed-data* de Φ. Em particular, para uma dada e pré-fixada F, tal questão refere-se à classificação dos pares (M, Φ) para os quais o conjunto de pontos fixos é F. Este é um problema bem estabelecido na literatura, e foi iniciado em 1964 com os resultados de Pierre Conner e Edwin Floyd de [6], com $F = S^n \cup \{pto\}$ e $k = 1$, $F=$ um espaço projetivo real n-dimensional, $\mathbb{R}P^n$, com $k = 1$ e n ímpar, e $F =$ um conjunto finito de pontos isolados e k qualquer. Tais resultados foram obtidos com o uso da Teoria de Cobordismo Equivariante, introduzida em [6], que estendeu a famosa Teoria de Cobordismo de 1954 de René Thom (a qual proporcionou a ele a Medalha Fields em 1958).

Levando em conta o manancial técnico desta teoria, para ser plausível de ser atacado, este tipo de problema requer o conhecimento prévio da K-teoria real de F ou, mais especificamente, o conhecimento de todas as classes de Stiefel-Whitney (ou classes características) de fibrados vetoriais sobre F. Este é o caso dos espaços projetivos real, complexo e quaterniônico n-dimensionais, $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{H}P^n$. Para unificar a notação, escrevamos $\mathbb{K}_d P^n$ para o espaços projetivos n-dimensionais reais ($d = 1$), complexos ($d = 2$) e quaterniônicos ($d = 4$), com dimensão real dn. De fato, se $\alpha_d \in H^d(\mathbb{K}_d P^n, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ é o elemento não nulo, então a K-teoria real de $\mathbb{K}_d P^n$ pode ser assim descrita: se η é um fibrado vetorial arbitrário sobre $\mathbb{K}_d P^n$, existe um natural $p \geq 0$ de tal sorte que a classe de Stiefel-Whitney de η é dada por $W(\eta) = (1+\alpha_d)^p$.

Portanto o caso $F =$ uma união disjunta e finita de espaços projetivos tem, na literatura, uma história intensa e ainda longe de ser encerrada, iniciada, como acima mencionado, com o caso $F = \mathbb{R}P^n$, onde $k = 1$ e n é ímpar, de [6]. Neste caso, P. Conner e E. Floyd provaram que (M, Φ) borda equivariantemente, e com os mesmos argumentos é possível provar este resultado referente ao caso $k = 1$ para $F = \mathbb{K}_d P^n$, $d = 2$ e 4 (n ímpar).

Posteriormente, em [26], Robert E. Stong solucionou o caso $F = \mathbb{R}P^n$ com n par e $k = 1$, mostrando neste caso que (M, Φ) é equivariantemente cobordante à involução $(\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^n, twist)$, onde *twist* leva (x, y) em (y, x). O mesmo tipo de resultado é válido para $F = \mathbb{K}_d P^n$, $d = 2$ e 4, e provas para tais casos (semelhantes às usadas no caso real) podem ser encontradas em [10]. Em [3], Frank L. Capobianco resolveu o caso $F = \mathbb{R}P^n$ e $k > 1$ para todo $n \geq 1$, e citou em seu artigo [3] que os mesmos argumentos funcionavam para $d = 2$ e 4. Isto fecha o caso F conexo (one component case).

O caso em que F possui duas componentes (two components case) foi iniciado com o trabalho de D. C. Royster [24], onde uma classificação parcial foi obtida para o caso $F = \mathbb{R}P^n \cup \mathbb{R}P^m$ e $k = 1$, deixando em aberto apenas os casos nos quais m e n são pares e maiores que zero (isto é, D. C. Royster resolveu também o caso $F = \mathbb{R}P^n \cup \mathbb{R}P^0 = \mathbb{R}P^n \cup \{pto\}$ para todo $n \geq 1$). Entre seus resultados, D. C. Royster provou que, se n e m são ímpares, então (M, Φ) borda equivariantemente. O mesmo é válido para os espaços projetivos complexos e quaterniônicos, e provas podem ser encontradas em [9]. Continuando com o caso de duas componentes e $k = 1$, em [21] e [17] Pedro L. Q. Pergher, Adriana Ramos e Rogério de Oliveira obtiveram as versões complexas e quaterniônicas dos resultados de D. C. Royster não cobertos por [9] (m e n ímpares). Especificamente, eles resolveram os casos $F = \mathbb{K}_d P^n \cup \mathbb{K}_d P^m$ para $d = 2$ e 4, onde $m \geq 0$ é par e $n \geq 1$ é ímpar, e onde $m = 0$ e $n \geq 2$ é par. Em adição, eles resolveram o caso particular do problema deixado em aberto por D. C. Royster, dado por $F = \mathbb{R}P^n \cup \mathbb{R}P^m$, onde $m = 2^s$, n é par e $n \geq 2^{s+1}$, o qual inclui o caso $F = \mathbb{R}P^2 \cup \mathbb{R}P^m$, $m \geq 4$ par, o qual tinha sido provado em [17]. Também as versões complexas e quaterniônicas desses casos foram obtidas em [21]. Ainda referente ao caso $k = 1$, se o número de componentes de F é maior que 2, o único caso conhecido é o Bruce Torrence - Dou Huo teorema de [8]: se F é uma união arbitrária de espaços projetivos reais de dimensão ímpar, então (M, Φ) borda equivariantemente.

Em resumo, nós temos o caso F conexo completamente resolvido e, com exceção dos casos $(m, n) = (par, par)$, $m, n > 0$ e $m \neq 2^s$, $n \neq 2^s$, o caso onde F possui duas componentes resolvido para $k = 1$. Então coloca-se o projeto de considerar o caso onde F possui duas componentes para $k > 1$. Nesta direção, nós citamos os resultados de P. Pergher de [20] ($F = \mathbb{R}P^n \cup \{pto\}$, n ímpar e $k > 1$), [19] ($F = \mathbb{R}P^n \cup \{pto\}$, n par e $k = 2$) e [18] ($F = \mathbb{R}P^n \cup \{pto\}$, n par e $k > 1$). Também nós temos os resultados de P. Pergher, A. Ramos e R. Oliveira, obtidos por juntar [17], [21] e [15] ($F = \mathbb{K}_d P^n \cup \mathbb{K}_d P^m$, $d = 1, 2$ e 4, $n > 0$ par e $m = 2^s$, e $k > 1$). Os métodos utilizados nestes artigos ([20], [19], [18], [21], [17] e [15]) não são adequados para os casos onde $m > 0$, $n > 0$ e $(m, n) \neq (par, par)$. Nesta direção, recentemente em [2], P. Pergher, Allan E. R. de Andrade e Sérgio T. Ura introduziram uma nova técnica e provaram os seguintes resultados, os quais estenderam para $k > 1$ os mesmos tipos de resultados já conhecidos para $k = 1$: *(i)* Se (M, Φ) é uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$, $k > 1$, com conjunto de pontos fixos $F = \mathbb{R}P^{n_1} \cup \mathbb{R}P^{n_2} \cup ... \cup \mathbb{R}P^{n_j}$, onde $j \geq 2$, cada n_i é ímpar e $n_i \neq n_t$ se $i \neq t$, então (M, Φ) borda equivariantemente. *(ii)* Se (M, Φ) é uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$, $k > 1$, com conjunto de pontos fixos $F = \mathbb{K}_d P^n \cup \mathbb{K}_d P^m$, onde $d = 1, 2$ e 4 e n e m são ímpares, então (M, Φ) borda equivariantemente.

Nesta tese, nossa contribuição será situada no contexto mais geral onde F possui duas componentes de espaços projetivos segundo anéis diferentes, $F = \mathbb{K}_d P^n \cup \mathbb{K}_e P^m$, $d \neq e$.

Primeiramente, salientamos que ainda não existem trabalhos publicados na literatura com esse enfoque, embora vários tais tipos de resultados foram obtidos por P. Pergher em conjunto com alguns de seus colaboradores (A. Ramos, A. E. R. de Andrade e S. T. Ura), sendo que tais resultados estão sendo redigidos na forma de artigos a serem submetidos para publicação. Dessa forma, para situar nossa contribuição, explicaremos quais são tais resultados, mas os mesmos não constarão da bibliografia por não estarem ainda submetidos. Inicialmente, em colaboração com P. Pergher, Adriana Ramos atacou e resolveu os casos onde $F = \mathbb{K}_dP^n \cup \mathbb{K}_eP^m$, $d \neq e$, (*n,m*)=(*ímpar,ímpar*) e (*n,m*)=(*ímpar,par*), com $k = 1$. Uma parte do caso (*n,m*)=(*par,par*) e $k = 1$ foi também solucionada, mas os métodos empregados por P. Pergher e A. Ramos não foram adequados para resolver esse caso por completo, o qual permaneceu desde então em aberto. Em suas teses de doutorado [28] e [1], Sérgio T. Ura e Allan E. R. de Andrade, tendo como suporte os trabalhos de P. Pergher e A. Ramos atrás mencionados e com novas técnicas, estenderam os resultados citados (*n,m*)=(*ímpar,ímpar*) e (*n,m*)=(*ímpar,par*), com $k = 1$, para o caso em que $k = 2$. Também na tese de Allan E. R. de Andrade consta a solução do caso $F = \mathbb{K}_dP^n \cup \mathbb{K}_dP^m$ (anéis iguais), onde (*n,m*)=(*ímpar,ímpar*) e (*n,m*)=(*ímpar,par*), para $k > 1$.

Enfatizamos então que, até o momento, tanto no caso de anéis iguais ($d = e$) quanto no caso de anéis diferentes ($d \neq e$), o caso $(n, m) = (par, par) \neq (0, 0)$ só possui algumas soluções parciais. Escreva $W = (1+\alpha_d)^p$ e $W = (1+\beta_e)^q$ para as classes de Stiefel-Whitney dos fibrados normais. Nossa contribuição será introduzir uma abordagem diferente daquela empregada por P. Pergher e A. Ramos, onde, diferentemente de concentrar energia nas paridades de n e m (que obviamente também são levadas em conta), o foco será concentrar energia nos possíveis valores das variáveis n e p, sendo que as variáveis m e q vão sendo dependentes de n e p. Dessa forma e em linhas gerais, nossa técnica conduzirá de forma paulatina os valores das variáveis n e p aos valores prévios de n e p que ocorrem nos modelos de involuções descritos a *priori*, com tal tipo de conjunto de pontos fixos, de tal sorte que as paridades de m e n, embora óbviamente sejam levadas em conta, ocupam papel secundário no processo.

Em outras palavras, nossa técnica não divide a discussão nos casos (*n,m*)=(*ímpar,ímpar*), (*n,m*)=(*ímpar,par*) e (*n,m*)=(*par,par*), os quais vão sendo paulatinamente cobertos através do afunilamento das variáveis n e p. Por causa disso, nosso método não permite atacar separadamente apenas os casos em aberto relativos ao caso (*n,m*)=(*par,par*). Em compensação, a eficiência do nosso método permite elucidar todos os casos de (n, m), incluindo o *hard case* $(n, m) = (par, par)$, até então em aberto. Ou seja, no que se refere ao caso $k = 1$, nossa contribuição consiste em solucionar por completo o caso em aberto (*n,m*)=(*par,par*), e apresentar uma nova abordagem para os casos já solucionados por P. Pergher e A. Ramos, concernentes aos casos (*n,m*)=(*ímpar,ímpar*) e (*n,m*)=(*ímpar,par*). Em adição, nossa contribuição também contemplará a solução do caso (*n,m*)=(*par,par*), $n \neq m$ e $k > 1$; isso será obtido com a junção do caso $k = 1$ por nós resolvido com as técnicas de P. Pergher e Rogério de Oliveira de [15]. Finalmente, salientamos que, como será visto em nosso trabalho, entre os modelos apresentados relativos ao caso $k = 1$, alguns são originais e demandaram algum trabalho técnico para serem consolidados (outros já eram conhecidos). Também salientamos que existe algo de promissor em nossa abordagem no que se refere a atacar os casos ainda em aberto relativos ao caso (*n,m*)=(*par,par*).

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos ferramentas e resultados, presentes na literatura, necessários para o desenvolvimento dos capítulos posteriores desta tese. Discutiremos noções básicas da teoria de bordismo equivariante, desenvolvida por *Conner* e *Floyd* em [6]. Também, estabeleceremos algumas notações que serão utilizadas no estudo desenvolvido nos capítulos seguintes.

Admitiremos que o leitor tenha noções sobre topologia diferencial, homologia, cohomologia, teoria de fibrados e classes de *Stiefel-Whitney*.

Denotaremos por $H_n(X)$ e $H^n(X)$ os n-ésimos módulos de homologia e cohomologia, respectivamente, de um espaço topológico X, com coeficientes no corpo $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$, dos inteiros módulo 2.

Ao mencionarmos variedades, aplicações entre variedades e ações sobre variedades, ficará subentendido que as variedades, as aplicações e as ações são diferenciáveis de classe C^∞. Além disso, duas variedades difeomorfas serão tratadas como iguais neste trabalho.

Utilizaremos $\eta^k \to X$ para denotar um k-fibrado vetorial, com fibra $\mathbb{R}^k$, sobre um espaço X. Os k-fibrados triviais serão denotados por $\mathbb{R}^k \to X$. Diremos que um fibrado é nulo, e denotaremos por $0 \to X$, se a fibra sobre cada componente de X for o espaço vetorial trivial $\{0\}$.

Dado um fibrado vetorial $\eta^k \to X$ sobre X paracompacto, denotaremos por

$$W(\eta^k) = 1 + w_1(\eta^k) + w_2(\eta^k) + \cdots + w_k(\eta^k)$$

a classe total de *Stiefel-Whitney* de η^k. Para cada $i = 0, 1, \cdots, k$, $w_i(\eta^k) \in H^i(X)$ é a i-ésima classe de *Stiefel-Whitney* de η^k.

Usaremos $[M^n]_2$ para denotar a única classe de homologia não nula de $H_n(M^n)$, chamada de *classe fundamental de homologia módulo 2* da variedade M^n. Para cada $\nu \in H^n(M^n)$, denotaremos por $\nu[M^n]_2 \in \mathbb{Z}_2$, o valor de ν em $[M^n]_2$, chamado de *índice de Kronecker* (aqui, estamos supondo M^n conexa).

Quando não houver citação, os detalhes omitidos podem ser encontrados em [6].

1.1 Bordismo de Variedades

Dada uma variedade m-dimensional W^m compacta com bordo, sabemos que o bordo ∂W^m de W^m é uma variedade $(m-1)$-dimensional *fechada*, isto é, compacta e sem bordo.

Definição 1.1.1 *Uma variedade fechada n-dimensional M^n* borda *se existe uma variedade $(n+1)$-dimensional W^{n+1} compacta com bordo tal que $\partial W^{n+1} = M^n$. Duas variedades fechadas M^n e N^n são* cobordantes *(ou* bordantes*) se a união disjunta $M^n \cup N^n$ borda.*

Para cada n, a relação de cobordismo dada pela definição acima é uma relação de equivalência no conjunto das variedades fechadas n-dimensionais. A classe de equivalência de uma variedade fechada n-dimensional M^n é chamada de *classe de cobordismo de M^n* e denotada por $[M^n]$. Denotamos por $\mathcal{N}_n$ o conjunto das classes de cobordismo das variedades fechadas n-dimensionais.

Existe uma operação bem definida entre os elementos de $\mathcal{N}_n$, dada por $[M^n] + [N^n] = [M^n \cup N^n]$ (união disjunta). Esta operação provê a $\mathcal{N}_n$ uma estrutura de grupo abeliano, com a propriedade de que todo elemento possui ordem 2. Dessa forma $\mathcal{N}_n$ tem estrutura de $\mathbb{Z}_2$-módulo, cujo elemento neutro é a classe de cobordismo das variedades fechadas n-dimensionais que bordam. $\mathcal{N}_n$ é denominado *grupo de bordismo não-orientado n-dimensional de Thom*.

Denotamos por $\mathcal{N}_*$ a soma direta $\displaystyle\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_n$. O produto cartesiano de variedades induz uma operação de produto em $\mathcal{N}_*$, que nos elementos homogêneos é dada por $[M^m]\cdot[N^n] = [M^m \times N^n]$. Com esta operação $\mathcal{N}_*$ possui estrutura de anel graduado comutativo com unidade e, assim, $\mathcal{N}_*$ é denominado *anel de bordismo não-orientado de Thom*. A unidade deste anel é a classe de cobordismo das variedades 0-dimensionais formadas por um número ímpar de pontos.

Dada uma variedade fechada n-dimensional M^n, definimos a *classe de Stiefel-Whitney* (ou *classe característica*) de M^n como sendo a classe total de *Stiefel-Whitney* do fibrado tangente $TM^n \to M^n$ de M^n, e denotamos por

$$W(M^n) = 1 + w_1(M^n) + \cdots + w_n(M^n).$$

Definição 1.1.2 *Seja M^n uma variedade fechada e considere sua classe de Stiefel-Whitney $W(M^n) = 1 + w_1(M^n) + \cdots + w_n(M^n)$. Dados $i_1, i_2, \cdots, i_s$ naturais tais que $i_1 + i_2 + \cdots + i_s = n$, o monômio (via produto cup) $w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n)\cdots w_{i_s}(M^n)$ é um elemento de $H^n(M^n)$. O valor*

$$w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n)\cdots w_{i_s}(M^n)[M^n]_2 \in \mathbb{Z}_2$$

é chamado número característico *(ou* número de *Stiefel-Whitney) de M^n associado ao monômio $w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n)\cdots w_{i_s}(M^n)$.*

Dessa forma, associada a uma variedade fechada M^n, existe uma família de inteiros módulo 2 obtida ao considerarmos todos os possíveis monômios $w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n)\cdots w_{i_s}(M^n)$ em $H^n(M^n)$.

Dizemos que duas variedades fechadas M^n e N^n *possuem os mesmos números característicos* se

$$w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n)\cdots w_{i_s}(M^n)[M^n]_2 = w_{i_1}(N^n)w_{i_2}(N^n)\cdots w_{i_s}(N^n)[M^n]_2,$$

para cada partição $i_1 + i_2 + \cdots + i_s = n$.

O teorema a seguir relaciona números característicos e os elementos de $\mathcal{N}_*$.

Teorema 1.1.1 ***(Teorema de Thom)*** *Uma variedade fechada M^n borda se, e somente se, todos os números característicos de M^n são nulos.*

Demonstração: Ver [27]. ■

Exemplo 1.1.1 *Consideremos o espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$. Usando o Teorema de Thom acima, a estrutura multiplicativa do anel de cohomologia $H^*(\mathbb{R}P^n)$ e o fato de que $W(\mathbb{R}P^n) = (1+\alpha)^{n+1}$, onde $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^n)$ é o gerador de $H^*(\mathbb{R}P^n)$, pode-se verificar que $\mathbb{R}P^n$ borda se, e somente se, n é ímpar.*

Exemplo 1.1.2 *Do mesmo modo que no exemplo anterior, mas usando o fato de que $W(\mathbb{C}P^n) = (1+\beta)^{n+1}$, onde $\beta \in H^2(\mathbb{C}P^n)$ é o gerador de $H^*(\mathbb{C}P^n)$, pode-se verificar que $\mathbb{C}P^n$ borda se, e somente se, n é ímpar.*

Corolário 1.1.1 *Duas variedades fechadas M^n e N^n são cobordantes se, e somente se, possuem os mesmos números característicos.* ■

Dessa forma, um elemento de $\mathcal{N}_*$ é completamente caracterizado pelos números característicos de qualquer um de seus representantes.

Teorema 1.1.2 *$\mathcal{N}_*$ é uma álgebra polinomial graduada sobre $\mathbb{Z}_2$ com um gerador em cada dimensão $0 \leq n \neq 2^j - 1$.*

Demonstração: Ver [27]. ■

A estrutura de $\mathcal{N}_*$ é então determinada pelo teorema acima.

Para cada n par, *Thom* demonstrou que uma possibilidade de gerador é a classe de bordismo de $\mathbb{R}P^n$. Em [7], *Dold* apresentou representantes para os geradores no caso em que n é ímpar, que são variedades do tipo $\frac{S^i \times \mathbb{C}P^k}{(s,z)\ (-s,\bar{z})}$, com i e k apropriados, denominadas variedades de *Dold*, e denotadas por $P(i,k)$. Geometricamente, isto significa que toda variedade fechada que não borda, é cobordante a uma união disjunta de variedades, cada uma delas sendo um produto cartesiano envolvendo espaços projetivos reais pares e variedades de *Dold*. Por exemplo, qualquer variedade de dimensão 4 que não borda, ou é cobordante a $\mathbb{R}P^4$, ou é cobordante a $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$, ou é cobordante a $\mathbb{R}P^4 \cup (\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2)$.

1.2 Bordismo Singular

Definição 1.2.1 *Seja X um espaço topológico. Uma* variedade singular *em X é um par (M^n, f) constituído por uma variedade fechada M^n e uma função contínua $f : M^n \to X$.*

Definição 1.2.2 *Dizemos que uma variedade singular* (M^n, f) *em* X borda *se existem uma variedade* W^{n+1} *compacta com bordo e uma função contínua* $F : W^{n+1} \to X$ *tais que* $\partial W^{n+1} = M$ *e* $F|_{M^n} = f$. *Dizemos que duas variedades singulares em* X, (M^n, f) *e* (N^n, g), *são* cobordantes *(ou* bordantes*), se a união disjunta* $(M^n \cup N^n, f \cup g)$ *borda, onde a união disjunta* $f \cup g$ *é definida pelas restrições* $(f \cup g)|_{M^n} = f$ *e* $(f \cup g)|_{N^n} = g$.

Fixado um espaço topológico X, para cada n a relação de cobordismo dada pela definição acima é uma relação de equivalência no conjunto das variedades singulares n-dimensionais em X. A classe de equivalência de uma variedade singular n-dimensional (M^n, f) em X é chamada de *classe de cobordismo da variedade singular* (M^n, f) em X, e denotada por $[M^n, f]$. Denotamos por $\mathcal{N}_n(X)$ o conjunto das classes de cobordismo das variedades singulares n-dimensionais em X.

Existe uma operação bem definida entre os elementos de $\mathcal{N}_n(X)$, dada por $[M^n, f]+[N^n, g] = [M^n \cup N^n, f \cup g]$ (união disjunta). Esta operação provê a $\mathcal{N}_n(X)$ uma estrutura de grupo abeliano, denominado *grupo de bordismo n-dimensional não-orientado de X*. O elemento neutro deste grupo é a classe de cobordismo das variedades singulares (M^n, f) em X tais que M^n borda e f é constante.

Denotamos por $\mathcal{N}_*(X)$ a soma direta $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_n(X)$, chamada de *grupo de bordismo não-orientado de X*. Com a operação $\mathcal{N}_* \times \mathcal{N}_*(X) \to \mathcal{N}_*(X)$ dada por $[V^m] \cdot [M^n, f] = [V^m \times M^n, g]$, onde $g(x, y) = f(y)$, $\mathcal{N}_*(X)$ adquire uma estrutura de $\mathcal{N}_*$-módulo graduado. Note que $\mathcal{N}_*(\{ponto\})$ e $\mathcal{N}_*$ são $\mathcal{N}_*$-isomorfos.

A definição a seguir estende naturalmente o conceito de números característicos de variedades fechadas para variedades singulares.

Definição 1.2.3 *Seja* (M^n, f) *uma variedade singular em* X *e considere a classe de Stiefel-Whitney de* M^n, $W(M^n) = 1 + w_1(M^n) + \cdots + w_n(M^n)$. *Para cada natural* $m \leq n$, *cada* $h \in H^m(X)$ *e cada partição* $i_1, i_2, \cdots, i_s$ *de naturais tais que* $i_1 + i_2 + \cdots + i_s = n - m$, *o monômio (via produto cup)* $w_{i_1}(M^n) w_{i_2}(M^n) \cdots w_{i_s}(M^n) f^*(h)$ *é um elemento de* $H^n(M^n)$, *onde* $f^* : H^n(X) \to H^n(M^n)$ *é o homomorfismo induzido em cohomologia por* $f : M^n \to X$. *O valor*

$$w_{i_1}(M^n) w_{i_2}(M^n) \cdots w_{i_s}(M^n) f^*(h)[M^m]_2 \in \mathbb{Z}_2$$

é chamado número característico *(ou* número de *Stiefel-Whitney) de* (M^n, f) *associado ao monômio* $w_{i_1}(M^n) w_{i_2}(M^n) \cdots w_{i_s}(M^n) f^*(h)$.

Note que, se tomarmos $h = 1 \in H^0(X)$, os números característicos de (M^n, f) obtidos por esta escolha de h corresponderão exatamente aos números característicos de M^n.

O teorema a seguir mostra que a classe de cobordismo de (M^n, f) é completamente determinada pelos seus números característicos, desde que X satisfaça certa condição.

Teorema 1.2.1 ***(Teorema de Conner-Floyd)*** *Seja* X *um CW-complexo finito em cada dimensão. Uma variedade singular* (M^n, f) *em* X *borda se, e somente se, todos os seus números característicos são nulos.*

Demonstração: Ver [5], p. 56, 17.3. ■

Corolário 1.2.1 *Seja X um CW-complexo finito em cada dimensão. Duas variedades singulares em X são cobordantes se, e somente se, possuem os mesmos números característicos.*

■

1.3 Bordismo de Fibrados

Definição 1.3.1 *Dizemos que um k-fibrado vetorial $\eta^k \to M^n$ sobre uma variedade fechada M^n* borda, *se existe um k-fibrado vetorial $\zeta^k \to W^{n+1}$ sobre uma variedade W^{n+1} compacta com bordo, tal que $\partial W^{n+1} = M^n$ e $\zeta^k|_{M^n} = \eta^k$. Dois k-fibrados vetoriais $\eta^k \to M^n$ e $\gamma^k \to N^n$ são* cobordantes *se a união disjunta $(\eta^k \to M^n) \cup (\gamma^k \to N^n)$ borda.*

A relação de cobordismo dada pela definição acima é uma relação de equivalência na coleção dos k-fibrados vetoriais sobre variedades fechadas n-dimensionais. A classe de equivalência de um k-fibrado vetorial $\eta^k \to M^n$ é chamada de *classe de cobordismo de* $\eta^k \to M^n$ e denotada por $[\eta^k \to M^n]$, ou simplesmente por $[\eta^k]$.

Fixados k e n, considere $\mathcal{N}_n(BO(k))$ o conjunto das classes de cobordismo das variedades singulares n-dimensionais em $BO(k)$, onde $BO(k)$ é o espaço universal classificante para fibrados vetoriais k-dimensionais. Existe uma bijeção natural entre o conjunto das classes $[\eta^k \to M^n]$ e $\mathcal{N}_n(BO(k))$, definida da seguinte maneira:

$i)$ Dado $[M^n, f]$ em $\mathcal{N}_n(BO(k))$, associe a classe de cobordismo do *pullback* $f!(\nu^k) \to M^n$, onde $\nu^k \to BO(k)$ denota o fibrado universal k-dimensional.

$ii)$ Dada uma classe de cobordismo $[\eta^k \to M^n]$, associe $[M^n, f]$, onde f é uma função classificante para η^k, a qual sabemos ser única a menos de homotopia.

Dessa forma, podemos ver os elementos do $\mathcal{N}_*$-módulo $\mathcal{N}_*(BO(k))$ como classes de cobordismo de k-fibrados vetoriais. Com esta identificação, as operações em $\mathcal{N}_*(BO(k))$ são dadas por:

$[\eta^k \to M^n] + [\gamma^k \to N^n] = [(\eta^k \to M^n) \cup (\gamma^k \to N^n)]$ (união disjunta), e

$[V^m] \cdot [\eta^k \to M^n] = [p_2!(\eta^k) \to V^m \times M^n]$, onde $p_2 : V^m \times M^n \to M^n$ é a projeção na segunda coordenada.

O elemento neutro de $\mathcal{N}_n(BO(k))$ é a classe dos k-fibrados triviais sobre variedades n-dimensionais que bordam.

Fixemos agora uma classe $[\eta^k \to M^n]$ identificada com o elemento $[M^n, f]$ de $\mathcal{N}_n(BO(k))$. Considere a classe de *Stiefel-Whitney* de M^n, $W(M^n) = 1 + w_1(M^n) + \cdots + w_n(M^n)$. Pelo Corolário 1.2.1, a classe de cobordismo de (M^n, f) é totalmente determinada pelos seus números característicos, os quais têm a forma

$$w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n)\cdots w_{i_s}(M^n)f^*(h)[M^n]_2 \in \mathbb{Z}_2,$$

com $h \in H^m(BO(k))$ e $w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n)\cdots w_{i_s}(M^n) \in H^{n-m}(M^n)$. Ocorre que o anel $H^*(BO(k))$ é a álgebra polinomial $\mathbb{Z}_2[w_1(\nu^k), w_2(\nu^k), \cdots, w_k(\nu^k)]$, onde $\nu^k \to BO(k)$ é o k-fibrado universal. Ou seja, cada $h \in H^m(BO(k))$ pode ser escrito da forma $h = \sum w_{j_1}(\nu^k)w_{j_2}(\nu^k)\cdots w_{j_r}(\nu^k)$. Agora, lembrando que $f!(\nu^k) = \eta^k$, temos:

$$f^*(w_{j_1}(\nu^k)w_{j_2}(\nu^k)\cdots w_{j_r}(\nu^k)) = w_{j_1}(\eta^k)w_{j_2}(\eta^k)\cdots w_{j_r}(\eta^k),$$

para cada monômio básico $w_{j_1}(\nu^k)w_{j_2}(\nu^k)\cdots w_{j_r}(\nu^k)$ em $H^m(BO(k))$. Assim, concluímos que os números da forma

$$w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n)\cdots w_{i_s}(M^n)w_{j_1}(\eta^k)w_{j_2}(\eta^k)\cdots w_{j_r}(\eta^k)[M^n]_2 \in \mathbb{Z}_2,$$

com $i_1+i_2+\cdots+i_s+j_1+j_2+\cdots+j_r = n$, caracterizam a classe de cobordismo de $\eta^k \to M^n$.

Definição 1.3.2 *Seja $\eta \to M^n$ um k-fibrado vetorial sobre uma variedade fechada n-dimensional M^n. O valor*

$$w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n)\cdots w_{i_s}(M^n)w_{j_1}(\eta^k)w_{j_2}(\eta^k)\cdots w_{j_r}(\eta^k)[M^n]_2 \in \mathbb{Z}_2,$$

com $i_1+i_2+\cdots+i_s+j_1+j_2+\cdots+j_r = n$, é chamado número característico *(ou* número de Stiefel-Whitney*) de $\eta \to M^n$, associado ao monômio $w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n)\cdots w_{i_s}(M^n)w_{j_1}(\eta^k)w_{j_2}(\eta^k)\cdots w_{j_r}(\eta^k)$.*

1.4 Bordismo de Ações

Definição 1.4.1 *Sejam G um grupo de Lie compacto e M^n uma variedade. Uma* ação suave *ϕ de G em M^n, que será denotada por (M^n,ϕ), é uma aplicação suave $\phi : G\times M^n \to M^n$ tal que:*
i) *$\phi(e,m) = m$, para todo $m \in M^n$, onde e é o elemento neutro de G;*
ii) *$\phi(g_1,\phi(g_2,m)) = \phi(g_1g_2,m)$, para todos $g_1,g_2 \in G$ e $m \in M^n$.*
Uma ação é livre *se $\phi(g,m) = m \Rightarrow g = e$, para todo $m \in M^n$.*

Como as definições de bordismo de ações e de ações livres diferem somente pelo fato de considerarmos ações sem restrição no primeiro caso, e apenas ações livres no segundo, apresentaremos as definições simultaneamente. Todas as ações consideradas serão assumidas serem suaves, como já mencionamos no início do capítulo.

Definição 1.4.2 *Dizemos que uma ação (livre) (M^n,ϕ)* borda equivariantemente*, se existem uma variedade compacta W^{n+1} com bordo e uma ação (livre) $\Phi : G\times W^{n+1} \to W^{n+1}$ tais que $\partial W^{n+1} = M^n$ e $\Phi|_{M^n} = \phi$. Dizemos que duas ações (livres) (M^n,ϕ) e (N^n,ψ) são* equivariantemente cobordantes *se a união disjunta $(M^n\cup N^n,\phi\cup\psi)$ borda equivariantemente.*

A relação de bordismo de ações (livres) dada pela definição acima é uma relação de equivalência no conjunto das ações (livres) (M^n,ϕ). A classe de equivalência de uma ação qualquer (M^n,ϕ) é denotada por $[M^n,\phi]$. Denotamos por $\mathcal{I}_n(G)$ o conjunto das classes de cobordismo das ações de G sobre variedades fechadas n-dimensionais, e por $\mathcal{N}_n(G)$ o conjunto das classes de cobordismo das ações livres de G sobre variedades fechadas n-dimensionais.

Existe uma operação bem definida entre os elementos de $\mathcal{I}_n(G)$, dada por $[M^n,\phi]+[N^n,\psi] = [M^n\cup N^n,\phi\cup\psi]$ (união disjunta). Esta operação provê a $\mathcal{I}_n(G)$ uma estrutura de grupo abeliano, denominado *grupo de G-bordismo irrestrito n-dimensional*. O elemento neutro deste grupo é a classe de cobordismo $[M^n,\phi]$ das G-ações (M^n,ϕ) que bordam equivariantemente (por exemplo, tome M^n uma variedade que borda e $\phi : G\times M^n \to M^n$ dada por $\phi(g,x) = x$). Denotamos por $\mathcal{I}_*(G)$ a soma $\displaystyle\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{I}_n(G)$ e chamamos de *grupo de G-bordismo irrestrito*.

De maneira análoga, a operação entre ações livres dada por $[M^n, \phi] + [N^n, \psi] = [M^n \cup N^n, \phi \cup \psi]$ (união disjunta), provê a $\mathcal{N}_n(G)$ uma estrutura de grupo abeliano, denominado *grupo de G-bordismo principal n-dimensional.* Denotamos por $\mathcal{N}_*(G)$ a soma $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_n(G)$ e chamamos de *grupo de G-bordismo principal.*

Existe uma estrutura de $\mathcal{N}_*$-módulo graduado em $\mathcal{I}_*(G)$ (analogamente em $\mathcal{N}_*(G)$), dada pela operação $[V^m] \cdot [M^n, \phi] = [M^n \times V^n, \psi]$, onde $\psi : G \times (M^n \times V^n) \to (M^n \times V^n)$ é dada por $\psi(g, (m, v)) = (\phi(g, m), v)$.

Agora, vamos analisar com mais detalhes o caso particular em que $G = \mathbb{Z}_2$, o qual será usado neste trabalho. Denotaremos por Id a aplicação identidade do espaço que estiver em questão no momento.

Definição 1.4.3 *Uma* involução suave T *sobre uma variedade fechada* M^n*, denotada por* (M^n, T)*, é uma aplicação suave* $T : M^n \to M^n$ *tal que* $T \circ T = Id$.

Notemos que uma involução suave T sobre uma variedade fechada M^n define uma ação suave ϕ de $\mathbb{Z}_2$ em M^n, pois podemos identificar o grupo formado por Id e T com a operação de composição, com o grupo $\mathbb{Z}_2$. Assim, (M^n, ϕ) é uma $\mathbb{Z}_2$-ação tal que $\phi(\overline{0}, m) = \phi(Id, m) = m$ e $\phi(\overline{1}, m) = \phi(T, m) = T(m)$, para todo $m \in M^n$. Dessa forma, classes de $\mathbb{Z}_2$-bordismo são *classes de bordismo de involuções suaves.* Por conveniência, utilizaremos a notação $[M^n, T] \in \mathcal{I}_n(\mathbb{Z}_2)$ ao invés de $[M^n, \phi]$. De maneira análoga, utilizaremos a notação $[M^n, T] \in \mathcal{N}_n(\mathbb{Z}_2)$, onde T é uma involução suave sem pontos fixos, ao invés de $[M^n, \phi]$, onde ϕ é livre.

A partir de agora, admitiremos tacitamente que todas as involuções serão suaves.

Com esta identificação acima, podemos reescrever a definição de bordismo de uma $\mathbb{Z}_2$-ação da seguinte maneira:

Definição 1.4.4 *Dizemos que uma involução suave* (M^n, T) borda*, se existem uma variedade compacta* W^{n+1} *e uma involução suave* S *sobre* W^{n+1}*, tais que* $\partial W^{n+1} = M^n$ *e* $S|_{M^n} = T$*. Duas involuções suaves* (M^n, T) *e* (N^n, T') *são* cobordantes *se a união disjunta* $(M^n \cup N^n, T \cup T')$ *borda.*

Dada uma involução (M^n, T), o conjunto $F = \{x \in M^n : T(x) = x\}$ é chamado de *conjunto de pontos fixos da involução* T.

Dada uma G-ação qualquer (M^n, ϕ), a teoria de grupos de *Lie* garante que o conjunto de pontos fixos de ϕ, $F|_\phi = \{x \in M^n : \phi(g, x) = x, \forall g \in G\}$, é uma união disjunta e finita de subvariedades fechadas de M^n (ver [13]). Em particular, o resultado é válido para o conjunto de pontos fixos de uma involução.

Por outro lado, dados um grupo de *Lie* G compacto e uma união F disjunta e finita de variedades fechadas, é natural questionarmos sobre as classes de cobordismo equivariante das involuções que possuem F como conjunto de pontos fixos. Neste contexto se encontra o principal objetivo desta tese, que é o estudo da questão acima no caso específico em que $F = \mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, ou seja, o estudo sobre quais são as classes de ações de $\mathbb{Z}_2^k$ que possuem a união disjunta $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$ como conjunto de pontos fixos, conforme vimos na introdução deste trabalho. Conforme dito também na introdução, $\mathbb{Z}_2^k$ será considerado como o grupo gerado por k involuções comutantes $T_1, T_2, ..., T_k$.

1.5 Sequência de Conner-Floyd

Seja (M^n, T) uma involução sem pontos fixos sobre uma variedade fechada n-dimensional M^n. Então o espaço de óbitas M^n/T também é uma variedade fechada n-dimensional.

Definição 1.5.1 *Definimos o* fibrado linha canônico associado a T *como sendo o fibrado* $\lambda \to M^n/T$ *com espaço total dado pelo espaço quociente* $\lambda = \dfrac{M^n \times \mathbb{R}}{(m,r) \sim (T(m), -r)}$, *e com projeção* $[(m,r)] \mapsto [m]$.

Exemplo 1.5.1 *O fibrado linha canônico* $\xi^1 \to \mathbb{R}P^n$ *é o fibrado linha associado à involução antipodal* (S^n, A) *na esfera* S^n.

A correspondência $[M^n, T] \mapsto [\lambda \to M^n/T]$ independe dos representantes das classes de cobordismo e induz um isomorfismo de $\mathcal{N}_*$-módulos entre $\mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2)$ e $\mathcal{N}_*(BO(1))$ (Ver [5], pag. 71). Em particular, o que caracteriza a classe de cobordismo de uma involução sem pontos fixos (M^n, T) em $\mathcal{N}_n(\mathbb{Z}_2)$ são os números característicos do fibrado linha associado $\lambda \to M^n/T$, chamados de *números de involução* de (M^n, T).

Se (M^n, T) é uma involução que possui conjunto de pontos fixos não-vazio, então M/T pode não ser uma variedade fechada (por exemplo, se $M = S^1 \subset \mathbb{R}^2$ e T é a reflexão em uma coordenada, então M/T é o disco D^1). Assim, não é possível caracterizar a classe de cobordismo irrestrito de tais involuções utilizando números de involução, como é feito com involuções sem pontos fixos. Uma ferramenta algébrica utilizada para caracterizar as classes de cobordismo de $\mathcal{I}_*(\mathbb{Z}_2)$ é obtida da Sequência de *Conner-Floyd*, que veremos a seguir.

A partir de um fibrado vetorial dado, podemos construir um fibrado linha canônico como definido acima, da seguinte maneira:

Seja $\eta^k \to V^n$ um k-fibrado vetorial, $k \geq 1$, sobre uma variedade fechada n-dimensional V^n. Como o grupo de η^k é o grupo ortogonal $O(k)$, podemos considerar o *fibrado em esferas* associado a η^k, $S(\eta^k) \to V^n$, com fibra S^{k-1} e cujo espaço total $S(\eta^k)$ é uma variedade fechada $(n+k-1)$-dimensional. Definimos $A : S(\eta^k) \to S(\eta^k)$ como sendo a involução, sem pontos fixos, que atua como a antipodal em cada fibra. Chamamos a involução $(S(\eta^k), A)$ de *fibrado involução* associado a η^k.

A projeção do fibrado η^k induz uma projeção no quociente $\mathbb{R}P(\eta^k) = S(\eta^k)/A$ de forma que $\mathbb{R}P(\eta^k) \to V^n$ é um fibrado, com fibra $\mathbb{R}P^{k-1}$, e cujo espaço total $\mathbb{R}P(\eta^k)$ é uma variedade fechada $(n+k-1)$-dimensional. Este fibrado é chamado de *fibrado projetivo* associado a η^k.

Definição 1.5.2 *Seja* $\eta^k \to V^n$ *um* k*-fibrado vetorial,* $k \geq 1$*, sobre uma variedade fechada* n*-dimensional* V^n*. Definimos o* fibrado linha associado a η^k, $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta^k)$, *como sendo o fibrado linha canônico associado à involução* $(S(\eta^k), A)$.

Consideremos agora uma involução $T : M^n \to M^n$ sobre uma variedade fechada n-dimensional M^n. Lembremos que, conforme observamos na Seção 1.4, (M^n, T) representa um elemento de $\mathcal{I}_n(\mathbb{Z}_2)$. Como o conjunto de pontos fixos de T, $F = \{x \in M^n : T(x) = x\}$, é uma união disjunta e finita de subvariedades fechadas de M^n, podemos escrever $F = \bigcup_{j=0}^{n} F^j$, onde cada F^j é a união (eventualmente vazia) das componentes j-dimensionais de F.

Definição 1.5.3 *Seja* $(\eta \to F) = \bigcup_{j=0}^{n}(\eta^{n-j} \to F^j)$ *o fibrado normal de* F *em* M^n. *Dizemos que* $\eta \to F$ *é o fixed-data de* (M^n, T) *ou, simplesmente, dizemos que* (M^n, T) fixa $\eta \to F$.

Exemplo 1.5.2 *Dada uma variedade fechada* M^n *arbitrária, o fibrado tangente a* M^n, $TM^n \to M^n$, *pode ser realizado como o fixed-data de uma involução. De fato, a involução* $twist : M^n \times M^n \to M^n \times M^n$ *dada por* $twist(x, y) = (y, x)$, $\forall (x, y) \in M^n \times M^n$, *tem como conjunto de pontos fixos a diagonal* $\Delta = \{(x, x) : x \in M^n\}$, *ou seja, uma cópia de* M^n. *Temos que o fibrado normal de* Δ *em* $M^n \times M^n$ *é equivalente ao fibrado tangente* $TM^n \to M^n$.

Lembremos que, de acordo com identificação apresentada na Seção 1.3, cada fibrado $\eta^{n-j} \to F^j$ representa um elemento de $\mathcal{N}_j(BO(n-j))$ (se $F^j = \emptyset$, convenciona-se que $[\eta^{n-j} \to F^j] = 0$).

Consideremos o $\mathbb{Z}_2$-módulo

$$\mathcal{M}_n = \bigoplus_{j=0}^{n} \mathcal{N}_j(BO(n-j)),$$

a aplicação

$$j_* : \mathcal{I}_n(\mathbb{Z}_2) \to \mathcal{M}_n,$$

dada por $j_*[M^n, T] = \sum_{j=0}^{n}[\eta^{n-j} \to F^j]$, onde $\bigcup_{j=0}^{n}(\eta^{n-j} \to F^j)$ é o *fixed-data* da involução (M^n, T); e a aplicação

$$\partial : \mathcal{M}_n \to \mathcal{N}_{n-1}(BO(1)),$$

que a cada $[\eta \to F] = \sum_{j=0}^{n}[\eta^{n-j} \to F^j] \in \mathcal{M}^n$ associa $[\lambda \to \mathbb{R}P(\eta)] = \sum_{j=0}^{n}[\lambda \to \mathbb{R}P(\eta^{n-j})] \in \mathcal{N}_{n-1}(BO(1))$, onde $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta^{n-j})$ denota o fibrado linha associado a $\eta^{n-j} \to F^j$ (para o caso em que $j = n$, $\partial : \mathcal{N}_n(BO(0)) \to \mathcal{N}_{n-1}(BO(1))$ é o homomorfismo nulo).

Conner e *Floyd* mostraram que tais aplicações estão bem definidas, que são homomorfismos e que compõem uma sequência exata curta.

Teorema 1.5.1 ***(Sequência de Conner e Floyd)*** *Para cada* n, *a sequência de* $\mathbb{Z}_2$*-módulos*

$$0 \to \mathcal{I}_n(\mathbb{Z}_2) \stackrel{j_*}{\to} \mathcal{M}_n \stackrel{\partial}{\to} \mathcal{N}_{n-1}(BO(1)) \to 0$$

é exata. Mais ainda, $\partial|_{\mathcal{N}_{n-1}(BO(1))}$ *é o homomorfismo identidade.*

Prova: Ver [5], p. 88, 25.2. ■

Veremos agora algumas consequências do Teorema 1.5.1.

Exemplo 1.5.3 *Se* (M^n, T) *é uma involução sem pontos fixos então* $[M^n, T] = 0$ *em* $\mathcal{I}_n(\mathbb{Z}_2)$, *pois* $j_*[M^n, T] = 0$. *Este fato também pode ser visto geometricamente: façamos* $M^n \times [0, 1]$ *e identifiquemos* $(m, 0)$ *com* $(T(m), 0)$, *para cada* $m \in M^n$. *Denotemos por* $\sim$ *esta identificação. Em* $\frac{M^n \times [0,1]}{\sim}$, *definamos a involução* $\overline{T}([m, n]) = [T(m), n]$. *Então* $\frac{M^n \times [0,1]}{\sim}$ *é uma variedade com bordo, equipada com a involução* $\overline{T}$, *e seu bordo é* $M^n \times \{1\} \cong M^n$ *equipado com* T.

Exemplo 1.5.4 *Se* (M^n, T) *é uma involução cujo conjunto de pontos fixos é uma variedade* F^n *de mesma dimensão, então* F^n *é a união das componentes conexas de* M^n *em que* T *atua como identidade. Além disso, em* $M^n \backslash F^n$*,* T *atua sem pontos fixos. Assim,* $[M^n, T] = [F^n, T] + [M^n \backslash F^n, T] = [F^n, Id]$*.*

Exemplo 1.5.5 *Seja* (M^n, T) *involução com conjunto de pontos fixos* $F = \bigcup_{j=0}^{n} F^j$*. Se* F *não borda (ou seja, existe* j *tal que* $F^j \neq \emptyset$ *não borda) então* (M^n, T) *não borda equivariantemente, pois* $j_*[M^n, T]$ *é necessariamente não nulo.*

Exemplo 1.5.6 *Não existe involução* (M^n, T) *em uma variedade n-dimensional* M^n*, com* $n \geq 1$*, fixando exatamente 1 ponto. De fato, se existisse tal involução teríamos* $j_*[M^n, T] = [\mathbb{R}^n \to \{pto\}]$*. Observe que o fibrado linha associado a* $\mathbb{R}^n \to \{pt\}$ *é o fibrado linha canônico* $\xi^1 \to \mathbb{R}P^{n-1}$ *sobre* $\mathbb{R}P^{n-1}$*. Logo, teríamos* $\partial j_*[M^n, T] = [\xi^1 \to \mathbb{R}P^{n-1}] \neq 0$ *(conforme veremos na Proposição 1.6.2), o que contraria a exatidão da Sequência de Conner e Floyd.*

Corolário 1.5.1 *Duas involuções* (M^n, T) *e* (V^n, S) *são equivariantemente cobordantes se, e somente se, seus fixed-data* $\eta \to F_T$ *e* $\gamma \to F_S$ *são cobordantes. Equivalentemente, duas involuções* (M^n, T) *e* (V^n, S) *são equivariantemente cobordantes se, e somente se, seus fixed-data possuem os mesmos números característicos.* ■

Em outras palavras, o corolário acima nos diz que a classe de cobordismo de uma involução arbitrária é determinada, via o homomorfismo j_*, pela classe de cobordismo do seu *fixed-data*.

Considere um fibrado qualquer $\eta \to F = \bigcup_{j=0}^{n} (\eta^{n-j} \to F^j)$. Se $[\eta \to F] \in \mathcal{M}_n$ está no núcleo de ∂, então $[\eta \to F] = j_*[M^n, T]$, para alguma involução (M^n, T). Em outras palavras, se $\partial[\eta \to F] = 0$, então η é cobordante a um fibrado que pode ser realizado como um *fixed-data*. Na verdade, a demonstração do Teorema 1.5.1 diz algo mais forte: o próprio η pode ser realizado como o *fixed-data* de uma involução. Dessa forma temos que um fibrado cobordante a um *fixed-data* é também um *fixed-data*. Obtemos assim o seguinte resultado:

Corolário 1.5.2 *Um fibrado*

$$\eta \to F = \bigcup_{j=0}^{n} (\eta^{n-j} \to F^j)$$

é um fixed-data se, e somente se, $\partial[\eta \to F] = 0$*. Equivalentemente,*

$$\eta \to F = \bigcup_{j=0}^{n} (\eta^{n-j} \to F^j)$$

é um fixed-data se, e somente se, todos os números característicos do fibrado linha

$$\lambda \to \mathbb{R}P(\eta) = \bigcup_{j=0}^{n} (\lambda \to \mathbb{R}P(\eta^{n-j}))$$

são nulos. ■

Exemplo 1.5.7 *Seja* $\eta \to F = \bigcup_{j=0}^{n}(\eta^{n-j} \to F^j)$ *um fibrado que borda (ou seja, cada* $\eta^{n-j} \to F^j$ *borda). Então* $\partial[\eta \to F] = 0$ *e, portanto, existe uma involução* (M^n, T) *cujo fixed-data é* $\eta \to F$ *(neste caso* (M^n, T) *borda equivariantemente).*

Podemos reescrever o Corolário 1.5.2 de maneira mais explícita, utilizando a definição de número característico de um fibrado. Dessa forma temos o resultado a seguir. Em todo este trabalho, a primeira classe de *Stiefel-Whitney* de qualquer fibrado linha associado a um determinado fibrado será denotada pela letra c.

Corolário 1.5.3 *Um fibrado*

$$\eta \to F = \bigcup_{j=0}^{n}(\eta^{n-j} \to F^j)$$

é um fixed-data se, e somente se,

$$\sum_{j=0}^{n-1} w_{i_1}(\mathbb{R}P(\eta^{n-j})) \cdots w_{i_s}(\mathbb{R}P(\eta^{n-j}))c^t[\mathbb{R}P(\eta^{n-j})]_2 = 0 \in \mathbb{Z}_2,$$

para toda partição $i_1 + \cdots i_s + t = n - 1$. ■

Observação 1.5.1 *Os corolários acima são de essencial importância para a classificação que será feita nos próximos capítulos. De fato, pelo Corolário 1.5.2, uma união de duas componentes*

$$\begin{array}{ccc} \eta^{n-j} & & \eta^{n-k} \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ F^j & & F^k \end{array}$$

pode ser realizada como o fixed-data de alguma involução suave (M^n, T)*, a menos cobordismo equivariante, se, e somente se, a união dos fibrados linha associados aos fibrados normais*

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 & & \lambda_2 \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P(\eta^{n-j}) & & \mathbb{R}P(\eta^{n-k}) \end{array}$$

borda, ou seja, se, e somente se, os fibrados $\lambda_1 \to \mathbb{R}P(\eta^{n-j})$ *e* $\lambda_2 \to \mathbb{R}P(\eta^{n-k})$ *são cobordantes. Assim, supondo que uma união de duas variedades fechadas* $F^j \cup F^k$ *é o conjunto de pontos fixos de uma involução suave* (M^n, T)*, podemos trabalhar com equações envolvendo os números característicos dos fibrados linha associados aos fibrados projetivos correspondentes aos seus respectivos fibrados normais, a fim de obter alguma informação relevante sobre* (M^n, T)*. Esta técnica é o ponto de partida para obtermos a classificação das involuções que fixam, a menos de cobordismo equivariante, a união dos espaços projetivos real e complexo* $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$*.*
Para calcularmos os números característicos dos fibrados linha associados aos fibrados normais, precisamos saber como obter as classes características dos espaços $\mathbb{R}P(\eta)$*. Isto é obtido através do seguinte teorema:*

Teorema 1.5.2 ***(Teorema de Borel-Hirzebruch)*** *Sejam* $\eta^k \to M$ *um fibrado vetorial sobre variedade fechada, e* c *a classe característica do fibrado linha* $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta^k)$ *associado a* η^k*. Então*

$H^*(\mathbb{R}P(\eta^k))$ é um $H^*(M)$-módulo livre graduado, com base $1, c, c^2, \cdots, c^{k-1}$, e a classe total de Stiefel-Whitney de $\mathbb{R}P(\eta^k)$ é dada por

$$W(\mathbb{R}P(\eta^k)) = W(M) \cdot \left((1+c)^k + w_1(\eta^k)(1+c)^{k-1} + w_2(\eta^k)(1+c)^{k-2} + \cdots + w_k(\eta^k)\right).$$

Além disso,

$$c^k + w_1(\eta^k)c^{k-1} + w_2(\eta^k)c^{k-2} + \cdots + w_k(\eta^k) = 0.$$

Prova: Ver [5], p. 75, 21.3. ■

Observação 1.5.2 *Supondo que uma união de duas variedades fechadas $F^j \cup F^k$ é o conjunto de pontos fixos de uma involução suave (M^n, T), vimos na Observação 1.5.1 que podemos trabalhar com equações envolvendo os números característicos dos fibrados linha associados aos fibrados projetivos correspondentes aos seus respectivos fibrados normais, a fim de obter alguma informação relevante sobre (M^n, T), e sabemos que para obtermos tais números característicos, precisamos calcular as classes características das variedades $\mathbb{R}P(\eta^{n-j})$ e $\mathbb{R}P(\eta^{n-k})$. Para o cálculo destas classes características, vimos no teorema acima que precisamos conhecer as classes características das variedades F^j e F^k, e as classes características dos fibrados $\eta^{n-j} \to F^j$ e $\eta^{n-k} \to F^k$, o que em geral não é uma tarefa fácil, já que estes são fibrados genéricos sobre as variedades F^j e F^k. Mas, no caso específico estudado nesta tese, $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, veremos na próxima seção que fibrados genéricos sobre $\mathbb{R}P^j$ e $\mathbb{C}P^k$ são estávelmente equivalentes a fibrados com classes características conhecidas, e assim sabemos calcular suas classes características.*

A seguir, temos um último corolário do Teorema 1.5.1, importante para os estudos feitos nos próximos capítulos.

Corolário 1.5.4 *Seja $\eta^1 \to V^n$ um fibrado vetorial de dimensão 1 sobre uma variedade fechada V^n, o qual é um fixed-data. Então $\eta^1 \to V^n$ borda como fibrado e, portanto, V^n borda como variedade.*

Prova: Como $\partial([\eta^1 \to V^n]) = [\eta^1 \to V^n]$, segue o resultado. ■

1.6 Os Espaços $\mathbb{R}P^n$ e $\mathbb{C}P^m$

Nesta seção enunciaremos alguns fatos muito conhecidos sobre os espaços projetivos $\mathbb{R}P^n$ e $\mathbb{C}P^m$. A principal referência utilizada é [12].

O *espaço projetivo real n-dimensional* $\mathbb{R}P^n$ é uma variedade fechada e conexa, de dimensão real n, que pode ser vista como sendo o espaço quociente

$$\mathbb{R}P^n = \frac{\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}}{\sim} = \{[x]; x \in \mathbb{R}^{n+1},\ x \neq 0\},$$

onde a relação de equivalência $\sim$ é dada por: $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, $x \sim y$ se, e somente se, $x = a \cdot y$, para algum $a \in \mathbb{R}$.

Por sua vez, o *espaço projetivo complexo m-dimensional* $\mathbb{C}P^m$ é uma variedade fechada e conexa, de dimensão real $2m$. De maneira análoga à $\mathbb{R}P^n$, esta variedade pode ser vista como sendo o espaço quociente

$$\mathbb{C}P^m = \frac{\mathbb{C}^{m+1} - \{0\}}{\sim} = \{[x]; x \in \mathbb{C}^{m+1},\ x \neq 0\},$$

onde a relação de equivalência $\sim$ é dada por: $x, y \in \mathbb{C}^{m+1} - \{0\}$, $x \sim y$ se, e somente se, $x = a \cdot y$, para algum $a \in \mathbb{C}$.

Em relação aos grupos de cohomologia destes espaços, é sabido que

$$H^k(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, \text{ para } k = 0, 1, ..., n \\ 0, \text{ para } k > n \end{cases},$$

e

$$H^k(\mathbb{C}P^m) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, \text{ para } k = 0, 2, 4, 6, ..., 2m \\ 0, \text{ para } k \neq 2i,\ i = 0, ..., m \end{cases}.$$

Já em relação às classes de *Stiefel-Whitney*, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.6.1 *As classes de Stiefel-Whitney dos espaços projetivos $\mathbb{R}P^n$ e $\mathbb{C}P^m$ são dadas, respectivamente, por*

$$W(\mathbb{R}P^n) = (1 + \alpha)^{n+1} \text{ e } W(\mathbb{C}P^m) = (1 + \beta)^{m+1},$$

onde $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^n)$ é o gerador de $H^*(\mathbb{R}P^n)$ e $\beta \in H^2(\mathbb{C}P^m)$ é o gerador de $H^*(\mathbb{C}P^m)$.

Demonstração: Ver [12]. ■

Vimos nos exemplos 1.1.1 e 1.1.2 que $\mathbb{R}P^n$ borda se, e somente se, n é ímpar, e que $\mathbb{C}P^m$ borda se, e somente se, m é ímpar.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um fibrado linha canônico sobre $\mathbb{R}P^n$, $\xi^1 \to \mathbb{R}P^n$, associado à involução antipodal A sobre S^n, segundo a definição 1.5.1. Também, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe um fibrado linha canônico sobre $\mathbb{C}P^m$, $\xi^2 \to \mathbb{C}P^m$, de forma que este fibrado possui dimensão complexa 1 e dimensão real 2, e cujo espaço total é dado por $\xi^2 = \{([x], y); [x] \in \mathbb{C}P^m \text{ e } y \in [x]\}$. De fato, para cada $x \in \mathbb{C}P^m$, o conjunto $\{y \in [x]\}$ é uma cópia do plano complexo $\mathbb{C}$.

Proposição 1.6.2 *As classes totais de Stiefel-Whitney dos fibrados $\xi^1 \to \mathbb{R}P^n$ e $\xi^2 \to \mathbb{C}P^m$ são dadas, respectivamente, por*

$$W(\xi^1) = 1 + \alpha \text{ e } W(\xi^2) = 1 + \beta,$$

onde $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^n)$ é o gerador de $H^*(\mathbb{R}P^n)$ e $\beta \in H^2(\mathbb{C}P^m)$ é o gerador de $H^*(\mathbb{C}P^m)$.

Demonstração: Ver [12]. ■

Exemplo 1.6.1 *Se $T\mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^n$ é o fibrado tangente a $\mathbb{R}P^n$ e $T\mathbb{C}P^m \to \mathbb{C}P^m$ é o fibrado tangente a $\mathbb{C}P^m$, então segue das proposições acima que $T\mathbb{R}P^n \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}P^n$ é cobordante à $(n+1)\xi^1 \to \mathbb{R}P^n$ e $T\mathbb{C}P^m \oplus \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}P^m$ é cobordante a $(m+1)\xi^2 \to \mathbb{C}P^m$.*

Observação 1.6.1 *Pela estrutura dos anéis de Grothendieck sobre os espaços $\mathbb{R}P^n$ e $\mathbb{C}P^m$, todo fibrado $\eta \to \mathbb{R}P^n$ é* estavelmente equivalente *(isto é, equivalente a menos de somas de Whitney de cópias de fibrados triviais) a uma soma de Whitney de cópias do fibrado linha canônico sobre $\mathbb{R}P^n$, $p\xi^1 \to \mathbb{R}P^n$, $p \geq 0$, e assim sua classe é $W(\eta) = W(p\xi^1) = (1+\alpha)^p$. Da mesma forma, todo fibrado $\gamma \to \mathbb{C}P^m$ é estavelmente equivalente a uma soma de Whitney de cópias do fibrado linha canônico sobre $\mathbb{C}P^m$, $q\xi^2 \to \mathbb{C}P^m$, $q \geq 0$, e assim sua classe é $W(\gamma) = W(q\xi^2) = (1+\beta)^q$. Deste modo, podemos caracterizar o fixed-data de uma involução (M^m, T) cujo conjunto de pontos fixos é a união disjunta $\mathbb{R}P^n \cup \mathbb{C}P^m$ apenas por especificar quem são os números naturais p e q. Este fato foi brevemente mencionado na introdução e, para mais informações, vide [12].*

Lema 1.6.1 *Sejam $\eta \to \mathbb{R}P^n$ um fibrado vetorial sobre o espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$ e $\gamma \to \mathbb{C}P^m$ um fibrado vetorial sobre o espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^m$, com $W(\eta) = (1+\alpha)^p$ e $W(\gamma) = (1+\beta)^q$. Então:*
i) *$\eta \to \mathbb{R}P^n$ borda como fibrado se, e somente se, n é ímpar e p é par.*
ii) *$\gamma \to \mathbb{C}P^m$ borda como fibrado se, e somente se, m é ímpar e q é par.*

Prova: Vamos provar o item ***i)***, e o item ***ii)*** pode-se provar de maneira análoga.

Suponhamos primeiramente que $\eta \to \mathbb{R}P^n$ borda como fibrado. Assim, em particular, $\mathbb{R}P^n$ borda como variedade e, pelo exemplo 1.1.1, n é ímpar. Temos que

$$W(\eta) = (1+\alpha)^p = \sum_{i=0}^{p} \begin{pmatrix} p \\ i \end{pmatrix} \alpha^i.$$

Se p é ímpar, $w_1(\eta) = \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} \alpha = p\alpha = \alpha$, e assim $w_1^n[\mathbb{R}P^n]_2 = \alpha^n[\mathbb{R}P^n]_2$ é um número característico não nulo de $\eta \to \mathbb{R}P^n$, o que contraria a hipótese de que este fibrado borda. Logo p é par.

Suponhamos agora que j é ímpar e p é par. Então $\mathbb{R}P^n$ borda como variedade, pelo exemplo 1.1.1, e $p = 2t$, para algum $t \in \mathbb{N}$. Desta forma,

$$W(\eta) = (1+\alpha)^p = (1+\alpha)^{2t} = (1+\alpha^2)^t = \sum_{i=0}^{t} \begin{pmatrix} t \\ i \end{pmatrix} \alpha^{2i}.$$

Observemos que, como só existem potências pares de α na soma acima, então a i-ésima classe $w_i(\eta)$ é nula, para todo i ímpar. Lembremos que os números característicos de $\eta \to \mathbb{R}P^n$ são da forma

$$w_{i_1}(\eta) \cdot ... \cdot w_{i_s}(\eta) \cdot w_{j_1}(\mathbb{R}P^n) \cdot ... \cdot w_{j_r}(\mathbb{R}P^n)[\mathbb{R}P^n]_2,$$

com $i_1 + ... + i_s + j_1 + ... + j_r = n$.

Como $\mathbb{R}P^n$ borda, toda classe $w_j(\mathbb{R}P^n)$ é nula, e então os números característicos possivelmente não nulos de $\eta \to \mathbb{R}P^n$ são da forma $w_{i_1}(\eta) \cdot ... \cdot w_{i_s}(\eta)[\mathbb{R}P^n]_2$, com $i_1 + ... + i_s = n$. Mas n é ímpar, então estes números característicos contém ao menos um dos fatores $w_{i_{s_0}}(\eta)$ com i_{s_0} ímpar. Portanto, todo número característico de $\eta \to \mathbb{R}P^n$ é nulo. Logo, este fibrado borda. ■

Corolário 1.6.1 *A soma de Whitney $(j+1)\xi^1 \to \mathbb{R}P^j$ borda se, e somente se, j é ímpar.*

1.7 Ferramentas para o cálculo de Classes Características

Seja (M^n, T) uma involução e considere seu *fixed-data*, $\eta \to F = \bigcup_{j=0}^{n} (\eta^{n-j} \to F^j)$. Pelo Corolário 1.5.3 sabemos que, para cada partição $i_1 + \cdots + i_s + t = n-1$,

$$\sum_{j=0}^{m} w_{i_1}(\mathbb{R}P(\eta^{n-j})) \cdots w_{i_s}(\mathbb{R}P(\eta^{n-j}))c^t[\mathbb{R}P(\eta^{n-j})]_2 = 0 \in \mathbb{Z}_2,$$

ou ainda,

$$\sum_{j=0}^{m} p(c, w(\mathbb{R}P(\eta^{n-j}))[\mathbb{R}P(\eta^{n-j})]_2 = 0 \in \mathbb{Z}_2,$$

para cada $p(c, w(\mathbb{R}P(\eta^{n-j}))$ polinômio homogêneo de grau $n-1$ nas classes $w_{i's}(\mathbb{R}P(\eta)$ e c.

Logo, um procedimento razoável em busca de novas informações sobre η, é utilizar as igualdades acima para polinômios adequados. Deste modo, pode-se obter pistas sobre a classificação pretendida, ou eliminar possibilidades.

Apresentamos a seguir recursos que podem conduzir a equações convenientes ou facilitar o cálculo de tais equações.

1.7.1 Multiplicação por potências inteiras de (1+c)

Observação 1.7.1 *Seja X um espaço topológico arbitrário. A coleção de todos os elementos da forma*

$$w = 1 + w_1 + w_2 + \cdots \in H^*(X),$$

em que $w_i \in H^i(X)$ e o termo de grau zero é $1 \in H^0(X)$, é um grupo comutativo com a operação dada pelo produto cup (ver [12]). Dado um elemento $w = 1 + w_1 + w_2 + \cdots$, o seu inverso (ou dual)

$$\frac{1}{w} = \overline{w} = 1 + \overline{w}_1 + \overline{w}_2 + \overline{w}_3 \cdots,$$

caracterizado pela relação $w\overline{w} = 1 \in H^*(X)$, pode ser construído indutivamente pelo algoritmo

$$\overline{w}_0 = 1;\ \overline{w}_n = \sum_{i=1}^{n} w_i \overline{w}_{n-i}.$$

Consideremos agora um *fixed-data* $\eta \to F = \bigcup_{j=0}^{m} (\eta^{n-j} \to F^j)$, $n > m$.

O inverso multiplicativo de $1 + c$ em $H^*(\mathbb{R}P(\eta))$ é dado por

$$\overline{1+c} = \frac{1}{1+c} = 1 + c + c^2 + \cdots + c^{n-1},$$

lembrando que $c^t = 0$ se $t > n-1$, pois $\mathbb{R}P(\eta) = \bigcup_{j=0}^{m} \mathbb{R}P(\eta^{n-j})$ é uma variedade fechada $(n-1)$-dimensional.

Mais geralmente, para qualquer inteiro d, $(1+c)^d$ pode ser escrito na forma

$$(1+c)^d = 1 + a_1 c + a_2 c^2 + \cdots + a_{n-1} c^{n-1},$$

para certos $a_i \in \{0,1\}$. Assim, fixando um inteiro d qualquer,

$$(1+c)^d \cdot W(\mathbb{R}P(\eta)) = (1 + a_1 c + \cdots + a_{n-1} c^{n-1})(1 + w_1(\mathbb{R}P(\eta)) + \cdots + w_{n-1}(\mathbb{R}P(\eta)))$$

é tal que sua parte homogênea de grau i é um polinômio homogêneo de grau i nas classes $w_{j's}(\mathbb{R}P(\eta))$ e c. Logo, escrevendo

$$(1+c)^d \cdot W(\mathbb{R}P(\eta^{n-j})) = 1 + w_{j,1} + w_{j,2} + \cdots + w_{j,n-1},$$

com $w_{j,i} \in H^i(\mathbb{R}P(\eta^{n-j}))$, temos que

$$\sum_{j=0}^{m} w_{j,i_1} w_{j,i_2} \cdots w_{j,i_s} c^t [\mathbb{R}P(\eta^{n-j})]_2 = 0,$$

para cada partição $i_1 + i_2 + \cdots + i_s + t = n-1$.

A discussão acima fornece então a técnica de efetuar multiplicações por potências inteiras de $1+c$, positivas ou negativas, para obter equações com números característicos. Esta técnica foi bastante explorada por *Pergher* e *Stong*, em [22], através das chamadas classes $W[r]$. A idéia central é que cada parte homogênea de $W(\mathbb{R}P(\eta))$ pode ser algebricamente complicada, e a multiplicação por potências de $1+c$ pode dar origem a partes homogêneas mais simples.

1.7.2 Fórmula de *Conner*

Seja $\eta^k \to M^n$ um fibrado vetorial (de dimensão $k \geq 1$) sobre uma variedade fechada e conexa M^n. Denotemos $W(\eta^k) = 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_k$. No Teorema de *Borel-Hirzebruch* 1.5.2 vimos que $H^*(\mathbb{R}P(\eta^k))$ é um $H^*(M^n)$-módulo livre graduado, com base $\{1, c, c^2, \cdots, c^{k-1}\}$, onde c é a classe característica do fibrado linha associado a η^k, sujeita à relação $c^k = v_1 c^{k-1} + v_2 c^{k-2} + \cdots + v_k$.

Notemos que $a_n c^{k-1} = 0$ se, e somente se, $a_n = 0$, para $a_n \in H^n(M^n)$. Logo, como $H^n(M^n)$ e $H^{n+k-1}(\mathbb{R}P(\eta^k))$ são isomorfos a $\mathbb{Z}_2$, temos $a_n[M^n]_2 = a_n c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)]_2$, para todo $a_n \in H^n(M^n)$.

Se $a_s \in H^s(M^n)$, com $n < s \leq n+k-1$, então $a_s c^{n-s+k-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)]_2 = 0$, já que $a_s = 0$.

Agora, para calcular $a_s c^{n-s+k-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)]_2$ no caso em que $0 \leq s < n$, utilizaremos a seguinte ferramenta:

Teorema 1.7.1 ***(Fórmula de Conner)*** *Para cada a_s pertencente a $H^s(M^n)$, onde $0 \leq s \leq n$, temos*

$$a_s c^{n-s+k-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)]_2 = a_s \overline{v}_{n-s}[M^n]_2,$$

onde $\overline{v}_i$ denota o termo homogêneo de grau i do inverso de $W(\eta^k)$, $\overline{W(\eta^k)} = \frac{1}{W(\eta^k)} = 1 + \overline{v}_1 + \cdots + \overline{v}_n$.

Prova: Ver [4]. ■

Utilizando a Fórmula de *Conner* demonstraremos o seguinte resultado, muito utilizado para facilitar cálculos envolvendo classes características, realizados nos próximos capítulos.

Proposição 1.7.1 *Sejam $\eta^k \to M^n$ um fibrado vetorial sobre uma variedade fechada M^n, $k \geq 1$, e $p(c,a)$ uma polinomial da forma*

$$p(c,a) = \sum_{s \geq 0} a_s c^{n+k-1-s},$$

onde cada a_s é um elemento de $H^s(M^n)$ e c é a primeira classe característica do fibrado linha associado a η^k. Então,

$$p(c,a)[\mathbb{R}P(\eta^k)]_2 = p(1,a)\overline{W(\eta^k)}[M^n]_2,$$

onde $\overline{W(\eta^k)}$ é o inverso de $W(\eta^k)$, e $p(1,a)$ é a polinomial obtida por trocar c por 1 em $p(c,a)$.

Prova: Denotemos $\overline{W(\eta^k)} = 1 + \overline{v}_1 + \cdots + \overline{v}_n$.

Observemos que $p(c,a)$ é uma soma de termos homogêneos da forma $a_s c^{n+k-1-s}$, com dimensão $n+k-1$, que é a dimensão da variedade $\mathbb{R}P(\eta^k)$. Por sua vez, a polinomial $p(1,a)$ é uma soma de termos da forma a_s, de maneira que cada a_s está em correspondência com o termo $a_s c^{n+k-1-s}$ de $p(c,a)$.

Para mostrar que $p(c,a)[\mathbb{R}P(\eta^k)]_2 = p(1,a)\overline{W(\eta^k)}[M^n]_2$, vamos mostrar a igualdade em cada termo, ou seja, vamos mostrar que

$$a_s c^{n+k-1-s}[\mathbb{R}P(\eta^k)]_2 = a_s\overline{W(\eta^k)}[M^n]_2, \ \forall s \geq 0. \tag{1.1}$$

Dividiremos esta demonstração em 3 casos:

i) $s > n$

Neste caso, como $a_s \in H^s(M^n) \simeq \{0\}$, então ambos os membros da equação (1.1) são zero, e assim segue a igualdade.

ii) $s = n$

Aplicando a Fórmula de *Conner* no primeiro membro da equação (1.1), obtemos

$$a_n c^{n+k-1-n}[\mathbb{R}P(\eta^k)]_2 = a_n[M^n]_2.$$

Agora, no segundo membro, temos

$$a_n(1 + \overline{v}_1 + \cdots + \overline{v}_n)[M^n]_2 = a_n[M^n]_2 + a_n\overline{v}_1[M^n]_2 + \cdots + a_n\overline{v}_n[M^n]_2 = a_n[M^n]_2,$$

uma vez que $a_n\overline{v}_i \in H^{n+i}(M^n) \simeq \{0\}$, $\forall i > 0$.

Portanto, comparando os membros da equação, obtemos a igualdade.

iii) $0 \leq s < n$

Como feito no caso anterior, aplicando a Fórmula de *Conner* no primeiro membro da equação (1.1), obtemos

$$a_s c^{n+k-1-s}[\mathbb{R}P(\eta^k)]_2 = a_s\overline{v}_{n-s}[M^n]_2.$$

Por outro lado, no segundo membro, temos

$$a_s(1 + \overline{v}_1 + \cdots + \overline{v}_n)[M^n]_2 = a_s[M^n]_2 + a_s\overline{v}_1[M^n]_2 + \cdots + a_s\overline{v}_n[M^n]_2 = a_s\overline{v}_{n-s}[M^n]_2,$$

já que $a_s\overline{v}_i[M^n]_2 = 0$ por convenção, se $0 \leq s+i < n$ (e assim $0 \leq i < n-s$), e $a_s\overline{v}_i \in H^{s+i}(M^n) \simeq \{0\}$, se $s+i > n$ (e assim $i > n-s$). Novamente, comparando ambos os membros da equação, obtemos a igualdade. ■

1.7.3 Quadrados de *Steenrod*

As operações cohomológicas Sq^i, conhecidas como *quadrados de Steenrod*, são completamente caracterizadas pelas quatro propriedades a seguir:

Sejam X e Y espaços topológicos arbitrários.

(1) Para cada n e cada i inteiros não negativos,

$$Sq^i : H^n(X) \to H^{n+i}(X)$$

define um homomorfismo aditivo.

(2) (Naturalidade) Se $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua, então o diagrama

$$\begin{tikzcd} H^n(Y) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "Sq^i"'] & H^n(X) \arrow[d, "Sq^i"] \\ H^{n+i}(Y) \arrow[r, "f^*"'] & H^{n+i}(X) \end{tikzcd}$$

é comutativo.

(3) Se $a \in H^n(X)$ então $Sq^0(a) = a$, $Sq^n(a) = a^2$ e $Sq^i(a) = 0$, para todo $i > n$.

(4) (Fórmula de *Cartan*) Se a e b são elementos homogêneos de $H^*(X)$ e ab denota o produto *cup* entre a e b, então vale a identidade

$$Sq^i(ab) = \sum_{j=0}^{i} Sq^j(a)Sq^{i-j}(b).$$

Em relação às classes características de um fibrado vetorial, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.7.2 ***(Fórmula de Wu)*** *Se $\eta^k \to X$ é um fibrado vetorial sobre um espaço X paracompacto, e $W(\eta^k) = 1 + w_1 + \cdots + w_k$ denota a classe de Stiefel-Whitney de η^k, então*

$$Sq^i(w_j) = \sum_{t=0}^{i} \binom{j-i-1+t}{t} w_{i-t}w_{j+t},$$

para $i < j$.

Prova: Ver [12]. ■

A Fórmula de *Wu* acima é um recurso técnico adicional no que se refere às técnicas computacionais em discussão. De fato, consideremos um *fixed-data* $\eta \to F = \bigcup_{j=0}^{m}(\eta^{n-j} \to F^j)$ e vejamos como aplicar as operações Sq^i para obter equações envolvendo números característicos do fibrado linha $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta)$.

Seja $p(c, w(\mathbb{R}P(\eta)))$ um polinômio homogêneo qualquer, de grau $t \leq n-1$, nas classes $w_{i's}(\mathbb{R}P(\eta))$ e c. Aplicando as fórmulas de *Cartan* e *Wu*, e lembrando que cada Sq^j é um homomorfismo aditivo, vemos que $Sq^{n-1-t}(p(c, w(\mathbb{R}P(\eta))))$ é também um polinômio homogêneo, agora de grau $n-1$, nas classes $w_{i's}(\mathbb{R}P(\eta))$ e c. Assim, concluímos que

$$\sum_{j=0}^{m} Sq^{n-1-t}(p(c, w(\mathbb{R}P(\eta))))[\mathbb{R}P(\eta^{n-j})]_2 = 0.$$

Os quadrados de *Steenrod* possibilitam mostrar que certos elementos simples de $H^*(\mathbb{R}P(\eta))$ são de fato polinômios nas classes $w_{i's}(\mathbb{R}P(\eta))$ e c, o que poderia ser extremamente difícil mostrar diretamente.

1.8 Secções e o Operador Γ

A soma de *Whitney* de um fibrado $\eta \to F = \bigcup_{j=0}^{n}(\eta^{n-j} \to F^j)$ com o k-fibrado trivial $\mathbb{R}^k \to F$ é denotada por $\eta \oplus \mathbb{R}^k \to F = \bigcup_{j=0}^{n}(\eta^{n-j} \oplus \mathbb{R}^k \to F^j)$. Neste caso, dizemos que o fibrado $\eta \oplus \mathbb{R}^k$ possui k *secções*.

Nesta seção apresentaremos resultados que nos permitirão obter um *fixed-data* adicionando ou removendo secções de um outro *fixed-data*. Neste contexto, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.8.1 (Teorema das Secções) *Se $\eta \oplus \mathbb{R} \to F$ é o fixed-data de uma involução, então $\eta \to F$ também pode ser realizado como fixed-data de alguma involução.*

Prova: Ver [5], p. 85, 24.3. ∎

Seja (M^n, T) uma involução sobre uma variedade fechada n-dimensional M^n, e consideremos o círculo S^1. Sobre o produto cartesiano $S^1 \times M^n$, consideremos o seguinte par de involuções comutantes:

$$T_1(z, x) = (\overline{z}, x); \qquad T_2(z, x) = (-z, T(x)),$$

onde $\overline{z}$ significa o conjugado complexo de z.

Como T_2 é livre de pontos fixos, o quociente

$$V^{n+1} = \frac{S^1 \times M^n}{T_2}$$

é ainda uma variedade fechada.

Além disso, como T_1 e T_2 são comutantes, em V^{n+1} existe uma involução T_0 induzida por T_1.

Definimos o *operador* Γ como sendo o $\mathcal{N}_*$-homomorfismo de grau $+1$, $\Gamma : \mathcal{I}_*(\mathbb{Z}_2) \to \mathcal{I}_{*+1}(\mathbb{Z}_2)$, dado por $\Gamma[M^n, T] = [V^{n+1}, T_0]$.

O teorema seguinte mostra que a classe de cobordismo de (V^{n+1}, T_0) depende somente da classe de cobordismo de (M^n, T).

Teorema 1.8.2 *Se $\eta \to F$ é o fixed-data da involução (M^n, T), então o fixed-data de $\Gamma(M^n, T) = (V^{n+1}, T_0)$ é a união disjunta*

$$\begin{array}{ccc} \eta \oplus \mathbb{R} & & \mathbb{R} \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ F & & M^n \end{array}.$$

Prova: Ver [5], p. 90, 25.3. ■

1.9 Característica de *Euler* módulo 2

Seja X um CW-complexo finito.

Definição 1.9.1 *A* característica de *Euler* módulo 2 de *X é definida como sendo o número*

$$\overline{\chi(X)} = \sum dim H_i(X) \ (mod\ 2) = \sum dim H^i(X) \ (mod\ 2) \in \mathbb{Z}_2.$$

Observação 1.9.1 *Se M^n é uma variedade fechada de dimensão n ímpar, segue da dualidade de Poincaré que $\overline{\chi(M^n)} = 0$.*

A característica de *Euler* módulo 2 é um invariante de bordismo. Este fato decorre do Corolário 1.1.1 juntamente com o seguinte resultado:

Teorema 1.9.1 *Seja M^n uma variedade fechada. Então $\overline{\chi(M^n)}$ coincide com o número característico $w_n(M^n)[M^n]_2$.*
Prova: Ver [12], p. 130, 11.12. ■

Exemplo 1.9.1 *Se n é par, então*

$$w_n(\mathbb{R}P^n) = \begin{pmatrix} n+1 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha^n = \alpha^n,$$

onde α é o gerador de $H^*(\mathbb{R}P^n)$. Logo, pelo teorema anterior, $\overline{\chi(\mathbb{R}P^n)} = \alpha^n[\mathbb{R}P^n]_2 = 1$.

Destacamos os seguintes resultados no contexto de involuções e conjuntos de pontos fixos:

Teorema 1.9.2 *Seja (M^n, T) uma involução sobre uma variedade fechada M^n, com conjunto de pontos fixos $F = \bigcup_{j=0}^{n} F^j$. Então*

$$\overline{\chi(M^n)} = \overline{\chi(F)} = \sum_{j=0}^{n} \overline{\chi(F^j)}.$$

Prova: Ver [5], p. 99, 28.2. ■

Teorema 1.9.3 *Seja (M^{2n}, T) uma involução sobre uma variedade fechada M^{2n}, com fixed-data*

$$\eta \to F = \bigcup_{j=0}^{2n-1} (\eta^{2n-j} \to F^j).$$

Se $\overline{\chi(M^{2n})} = 1$, então existe $n \leq j < 2n$ tal que $w_{2n-j}(\eta^{2n-j}) \neq 0 \in H^{2n-j}(F^j)$.
Prova: Ver [5], p. 100, 28.3. ■

1.10 Expansão Diádica e o Teorema de *Lucas*

Definição 1.10.1 *Seja p um número primo. Dado um número natural n, definimos sua* expansão p-ádica *escrevendo n na forma*

$$n = n_k p^k + n_{k-1} p^{k-1} + \cdots + n_1 p + n_0, \text{ onde } 0 \le n_i \le p-1, \ i = 0, \cdots, k.$$

Por exemplo, a expansão 3-ádica do número 50 é dada por $50 = 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 3 + 2$, e a expansão 2-ádica do número 15 é dada por $15 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1$.

A expansão 2-ádica, ou *expansão diádica*, será uma ferramenta muito utilizada no estudo feito nos próximos capítulos. Dado um número natural n, sua expansão diádica é dada por

$$n = n_k 2^k + n_{k-1} 2^{k-1} + \cdots + n_1 2 + n_0, \text{ onde cada } n_i = 0 \text{ ou } 1,$$

que é equivalente a escrever n como uma soma de potências distintas de 2. Se $n_i = 1$, para algum $0 \le i \le k$, dizemos que 2^i *aparece na expansão diádica de n.*

Exemplo 1.10.1 *Dado um número natural t, a expansão diádica do número $2^t - 1$ é dada por*

$$2^t - 1 = 2^{t-1} + 2^{t-2} + \cdots + 2 + 1.$$

De fato,

$$2^{t-1}+2^{t-2}+\cdots+2^2+2+1+1 = 2^{t-1}+2^{t-2}+\cdots+2^2+2^2 = 2^{t-1}+2^{t-2}+\cdots+2^3+2^3 = \cdots = 2^t.$$

Exemplo 1.10.2 *Dados dois naturais a e b tais que $a > b$, temos que*

$$\begin{aligned} 2^a - 2^b &= 2^b 2^{a-b} - 2^b = 2^b(2^{a-b} - 1) = 2^b(2^{a-b-1} + 2^{a-b-2} + \cdots + 1) \\ &= 2^{a-1} + 2^{a-2} + \cdots + 2^{b+1} + 2^b. \end{aligned}$$

Teorema 1.10.1 ***(Teorema de* Lucas*)*** *Seja p um número primo, e tomemos a e b em suas expansões p-ádicas:*

$$\begin{aligned} a &= a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \cdots + a_1 p + a_0, \text{ onde } 0 \le a_i \le p-1, \ i = 0, \cdots, k, \\ b &= b_k p^k + b_{k-1} p^{k-1} + \cdots + b_1 p + b_0, \text{ onde } 0 \le b_i \le p-1, \ i = 0, \cdots, k. \end{aligned}$$

Então,

$$\binom{a}{b} = \binom{a_0}{b_0}\binom{a_1}{b_1}\cdots\binom{a_{k-1}}{b_{k-1}}\binom{a_k}{b_k} \ (mod\ p),$$

seguindo a convenção $\binom{a}{b} = 0$ *sempre que $a < b$.*

Prova: Ver [11]. ■

Observemos que $\binom{0}{0} = \binom{1}{0}\binom{1}{1} = 1 \ (mod\ 2)$ e $\binom{0}{1} = 0 \ (mod\ 2)$.

Dessa forma, em relação à expansão diádica, o Teorema de *Lucas* quer dizer que, dados dois naturais a e b, então $\binom{a}{b} = 1 \ (mod\ 2)$ *se, e somente se, toda potência de 2 que aparece na* *expansão diádica de b também aparece na de a*, ou seja, a expansão diádica de b *está contida* na expansão diádica de a. Em vários cálculos envolvendo números característicos, é importante determinar a paridade de coeficientes binomiais e, assim, o Teorema de *Lucas* é extremamente útil neste contexto.

Definição 1.10.2 *Seja n um número natural e consideremos sua expansão diádica*

$$n = a_0 1 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + \cdots + a_t 2^t, \text{ com } a_i \in \{0, 1\}, \ \forall\ 0 \leq i \leq t.$$

Definimos o número natural $\rho(n)$ como sendo a quantidade de elementos não-nulos a_i da expansão diádica de n $(0 \leq \rho(n) \leq t - 1)$.

Exemplo 1.10.3 *Dado um número natural t, temos que $\rho(2^t) = 1$ e $\rho(2^t - 1) = t$.*

1.11 Bordismo de Ações de $\mathbb{Z}_2^k$

Nesta seção vamos apresentar particularidades sobre o bordismo de ações de $\mathbb{Z}_2^k$. Detalhes e demonstrações podem ser encontrados em [14], p. 29-45.

Na Seção 1.4 vimos a definição de bordismo de uma ação suave (M^n, ϕ) de um grupo de *Lie* G sobre uma variedade fechada M^n. Vimos também que toda ação do grupo $\mathbb{Z}_2$ sobre uma variedade fechada M^n pode ser identificada com uma involução T sobre M^n, denotada por (M^n, T), determinando assim o conceito de bordismo de involuções.

Por uma questão de notação, nesta seção vamos considerar $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$, onde 1 é o elemento nulo e -1 é o não-nulo.

Consideremos o grupo $\mathbb{Z}_2^k = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2$ (k-vezes) e (M^n, ϕ) uma ação do grupo $\mathbb{Z}_2^k$, ou uma $\mathbb{Z}_2^k$-*ação*, sobre uma variedade fechada M^n. Dada uma coleção ordenada $T_1, T_2 \cdots, T_k$ de involuções diferenciáveis comutantes definidas em M^n, considere o grupo gerado por estas involuções, $G =< T_1, \cdots, T_k >$, com a operação de composição $\circ$. Existe um isomorfismo natural entre $\mathbb{Z}_2^k$ e G, associando cada involução T_i com o elemento $(1, \cdots, 1, -1, 1 \cdots, 1)$ (i-ésima coordenada não nula) de $\mathbb{Z}_2^k$. Desta forma, uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$ pode ser entendida como uma coleção ordenada $T_1, T_2 \cdots, T_k$ de involuções diferenciáveis comutantes definidas em M^n, de acordo com a introdução. Denotaremos uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação sobre M^n por $(M^n; T_1, T_2, \cdots, T_k)$.

Observação 1.11.1 *Se $\sigma : G \to G$ é um automorfismo então $(M^n, \phi) = (M^n; T_1, T_2, \cdots, T_k)$ e $(M^n, \psi) = (M^n; \sigma T_1, \sigma T_2, \cdots, \sigma T_k)$ são ações diferentes. Assim, quando damos uma ação $(M^n; T_1, T_2, \cdots, T_k)$ estamos dando também uma base ordenada $(T_1, T_2, \cdots, T_k)$ para G, que significa associar cada elemento $T_i \in G$ com o elemento $(1, \cdots, 1, -1, 1 \cdots, 1) \in \mathbb{Z}_2^k$ (i-ésima coordenada não nula), como vimos acima.*

Queremos estudar o *fixed-data* de uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação. Na introdução, este conceito foi citado, embora de forma mais concisa. Daremos agora detalhes mais apurados sobre o mesmo, com o objetivo de facilitar a compreensão dos resultados por nós obtidos.

Para isso, precisamos primeiramente introduzir a noção de lista de fibrados.

Definição 1.11.1 *Uma* lista de fibrados $(M^n; \eta_1, \cdots, \eta_s)$ *é um objeto constituído por uma variedade n-dimensional M^n e s fibrados vetoriais ordenados sobre M^n, com dimensões $r_1, \cdots, r_s$.*

Definição 1.11.2 *Dizemos que uma lista de fibrados* $(M^n; \eta_1, \cdots, \eta_s)$ borda simultaneamente *se existem uma variedade* $(n+1)$*-dimensional* W^{n+1} *compacta com bordo, e fibrados vetoriais* $\zeta_1, \cdots, \zeta_s$ *sobre* W^{n+1} *tais que* $\partial W^{n+1} = M^n$ *e* $\zeta_i|M = \eta_i$*, para cada* $1 \leq i \leq s$*. Dadas duas listas* $(M^n; \eta_1, \cdots, \eta_s)$ *e* $(N^n; \nu_1, \cdots, \nu_s)$*, dizemos que elas são* simultaneamente cobordantes (bordantes) *se a união disjunta* $(M^n \cup N^n; \eta_1 \cup \nu_1, \cdots, \eta_s \cup \nu_s)$ *borda simultaneamente.*

Observemos que a definição acima implica que, se duas listas $(M^n; \eta_1, \cdots, \eta_s)$ e $(N^n; \nu_1, \cdots, \nu_s)$ são simultaneamente cobordantes, então $\eta_i \to M^n$ é cobordante a $\nu_i \to N^n$, para todo i. Mas se $\eta_i \to M^n$ é cobordante a $\nu_i \to N^n$, para todo i, não é necessariamente verdade que ocorra o bordismo simultâneo. Isso porque, na definição acima, todos os fibrados ζ_i estão sobre a mesma base W, e o bordismo entre cada fibrado separadamente poderia usar uma base diferente para cada i.

Notemos também que o cobordismo simultâneo entre duas listas implica que os fibrados totais obtidos pelas somas de *Whitney* $\eta_1 \oplus \cdots \oplus \eta_s \to M$ e $\nu_1 \oplus \cdots \oplus \nu_s \to N$ são cobordantes como fibrados. Mas a recíproca não é verdadeira, como podemos ver no exemplo a seguir:

Exemplo 1.11.1 *Seja* $\lambda^1 \to S^1$ *o fibrado linha canônico. Então pode-se mostrar facilmente, através de cálculos de números característicos, que* $\lambda^1 \oplus \lambda^1 \to S^1$ *é cobordante a* $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \to S^1$*, apesar de no caso não haver cobordismo simultâneo, já que* $\lambda^1 \to S^1$ *não é cobordante a* $\mathbb{R} \to S^1$*.*

Para cada n, a relação de cobordismo simultâneo é uma relação de equivalência no conjunto das listas de fibrados sobre variedades fechadas n-dimensionais. A classe de equivalência de uma lista de fibrados $(M^n; \eta_1, \cdots, \eta_s)$ é chamada de *classe de cobordismo simultâneo* de $(M^n; \eta_1, \cdots, \eta_s)$, e denotada por $[M^n; \eta_1, \cdots, \eta_s]$. Denotamos por $\mathcal{N}_{n;r_1,r_2,\cdots,r_s}$ o conjunto das classes de cobordismo simultâneo de listas de s fibrados ordenados, com dimensões $r_1, r_2, \cdots, r_s$, sobre variedades fechadas n-dimensionais, e por $\mathcal{N}_{*;r_1,r_2,\cdots,r_s} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_{n;r_1,r_2,\cdots,r_s}$, o conjunto das classes de cobordismo simultâneo de listas de s fibrados ordenados, com dimensões $r_1, r_2, \cdots, r_s$, sobre qualquer variedade.

A associação

$$[M^n; \eta_1, \cdots, \eta_s] \longleftrightarrow [M^n, (f_1, \cdots, f_s)],$$

onde cada função coordenada $f_i : M^n \to BO(r_i)$ é uma função classificante para o fibrado $\eta_i \to M^n$, induz uma bijeção entre $\mathcal{N}_{*;r_1,r_2,\cdots,r_s}$ e $\mathcal{N}_*(BO(r_1) \times BO(r_2) \times \cdots \times BO(r_s))$. Esta bijeção permite introduzir uma estrutura de grupo abeliano a cada $\mathcal{N}_{n;r_1,r_2,\cdots,r_s}$, com a operação

$$[M^n; \eta_1, \cdots, \eta_s] + [N^n; \nu_1, \cdots, \nu_s] = [M^n \cup N^n; \eta_1 \cup \nu_1, \cdots, \eta_s \cup \nu_s],$$

união disjunta, e uma estrutura de $\mathcal{N}_*$-módulo a $\mathcal{N}_{*;r_1,r_2,\cdots,r_s}$, com a operação

$$[V^m] \cdot [M^n; \eta_1, \cdots, \eta_s] = [V^m \times M^n; p_2!(\eta_1), \cdots, p_2!(\eta_s)],$$

onde $p_2 : V^m \times M^n \to M^n$ é a projeção na segunda coordenada.

Como vimos no Teorema 1.2.1, uma classe $[M^n, f]$ é totalmente determinada pelos números característicos de (M^n, f). Assim, uma classe $[M^n; \eta_1, \cdots, \eta_s]$ também será totalmente determinada pelos números característicos, através da associação feita anteriormente. De acordo com a associação acima, temos o seguinte teorema:

Teorema 1.11.1 *Seja* $(M^n;\eta_1,\cdots,\eta_s)$ *uma lista de fibrados sobre a variedade fechada* M^n, *com* $W(M^n)=1+w_1+\cdots+w_n$ *e* $W(\eta_i)=1+v_1^i+\cdots+v_{r_s}^i$, *para cada* $1\leq i\leq s$. *Os* números característicos *de* $(M^n;\eta_1,\cdots,\eta_s)$ *são números da forma*

$$w_{i_1}w_{i_2}\cdots w_{i_t}v^1_{j_{1_1}}v^1_{j_{1_2}}\cdots v^1_{j_{1_l}}\cdots v^s_{j_{s_1}}v^s_{j_{s_2}}\cdots v^s_{j_{s_k}}[M^n]_2\in\mathbb{Z}_2,$$

com $\Sigma i_p+\Sigma j_{1_p}+\cdots+\Sigma j_{s_p}=n$.

Prova: Basta observar o efeito da induzida em cohomologia da aplicação $f_1\times f_2\times\cdots\times f_s$. ■

Observemos que os números caracteríticos de cada fibrado η_i estão entre os números característicos de $(M^n;\eta_1,\cdots,\eta_s)$. Dessa forma, bordismo simultâneo implica no bordismo de cada fibrado componente da lista, como já foi dito anteriormente. Informalmente falando, os números característicos de uma lista de fibrados são provenientes de produtos arbitrários envolvendo classes tangenciais de M^n e classes características dos componentes da lista.

Agora, vamos desenvolver o conceito de *fixed-data* de uma ação do grupo $\mathbb{Z}_2^k$ em uma variedade fechada.

Consideremos uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$, $(M^n,\phi)=(M^n;T_1,T_2,\cdots,T_k)$. Sejam F_{T_i} o conjunto de pontos fixos da involução T_i sobre M^n, para cada $i=1,\cdots,k$, e F_ϕ o conjunto de pontos fixos da $\mathbb{Z}_2^k$-ação ϕ sobre M^n, ou seja, $F_\phi=\bigcap_{i=1}^k F_{T_i}$. Dado um ponto $x\in F_\phi$ fixado temos a sua derivada em x, para cada T_i, que define uma transformação linear $T_i'(x):T_xM\to T_xM$, onde T_xM é o espaço tangente a M^n em x. O que ocorre é que o fibrado normal η de F_ϕ em M^n se decompõe em uma soma direta

$$\eta\cong\bigoplus_{j=1}^{2^k-1}\varepsilon_{A_j},$$

de 2^k-1 subfibrados ε_{A_j}, A_j varrendo todas as sequências $(a_1,a_2,\cdots,a_k)$, $a_i=\pm1$, exceto $(1,1,\cdots,1)$, e onde cada ε_{A_j} é caracterizado como sendo o subfibrado de η no qual cada T_i' atua como a_i. Este fato motiva a seguinte definição:

Definição 1.11.3 *Dada uma ação de* $\mathbb{Z}_2^k$, $(M^n,\phi)=(M^n;T_1,T_2,\cdots,T_k)$, *definimos o seu fixed-data como sendo a lista de fibrados* $(F_\phi,\varepsilon_{A_1},\varepsilon_{A_2},\cdots,\varepsilon_{A_{2^k-1}})$, *onde* A_j *percorre todas as* 2^k *sequências* $(a_1,a_2,\cdots,a_k)$, $a_i=\pm1$, *exceto* $(1,1,\cdots,1)$, *e as sequências são indexadas da seguinte maneira: para cada inteiro* $0\leq j\leq 2^k-1$, *seja* $B_j=b_1b_2\cdots b_k$ *a representação binária de* j *com* k *algarismos. Então* $A_j=(a_1,a_2,\cdots,a_k)$, *sendo* $a_i=(-1)^{b_i}$.

Observação 1.11.2 *A definição acima está de acordo com a introdução, onde os subfibrados do fixed-data foram indexados pelos homomorfismos não triviais* $\rho:\mathbb{Z}_2^k\to\mathbb{Z}_2$. *De fato, dado um tal* ρ, *ele gera a lista* $(\rho(T_1),...,\rho(T_k))$, *e dada uma tal lista* $(a_1,...,a_k)$, *obtemos o homomorfismo não trivial* $\rho:\mathbb{Z}_2^k\to\mathbb{Z}_2$ *dado por* $\rho(T_i)=(-1)^{a_i}$, $i=1,2,...,k$.

O teorema abaixo, decorrente de [25] e citado na introdução, mostra a conexão entre os conceitos de bordismo de $\mathbb{Z}_2^k$-ações e bordismo simultâneo de uma lista de fibrados.

Teorema 1.11.2 *Duas* $\mathbb{Z}_2^k$-*ações são bordantes se, e somente se, seus fixed-data forem simultaneamente bordantes.* ■

Corolário 1.11.1 *Se* (M^n,ϕ) *é uma* $\mathbb{Z}_2^k$-*ação tal que* $F_\phi=\emptyset$ *então* (M^n,ϕ) *borda.* ■

1.11.1 $\mathbb{Z}_2^k$-ações especiais

Agora, vamos apresentar a construção de algumas $\mathbb{Z}_2^k$-ações especiais em variedades que, em geral, são obtidas de uma involução a partir de um processo iterativo. Mais detalhes podem ser encontrados em [14], p. 29-45.

Definição 1.11.4 *Dada uma variedade M, definimos a* involução *twist sobre $M \times M$ por $twist(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$. Então $(M \times M; twist)$ é uma $\mathbb{Z}_2$-ação, chamada de $\mathbb{Z}_2$-*ação *twist.*

Teorema 1.11.3 *O fixed-data da $\mathbb{Z}_2$-ação twist é (Δ, TM), onde Δ é a diagonal de $M \times M$, difeomorfa a M, e TM é o fibrado tangente a M.*

Prova: Ver [14], p. 40. ∎

Definição 1.11.5 *Seja M uma variedade. Definiremos indutivamente uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação sobre $M^{2^k} = M \times \cdots \times M$ (2^k-cópias), chamada de $\mathbb{Z}_2^k$-*ação *twist.*

- *Para $k = 1$, é a $\mathbb{Z}_2$-ação twist.*
- *Para $k = 2$, $(M \times M \times M \times M; T_1, T_2)$, onde $T_1 = twist \times twist$ e T_2 é dada por $T_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3, x_4, x_1, x_2)$, é a $\mathbb{Z}_2^2$-ação twist sobre $M^4 = (M \times M) \times (M \times M)$.*
- *Suponhamos definida recursivamente a $\mathbb{Z}_2^{k-1}$-ação twist $(M^{2^{k-1}}; T_1, \cdots, T_{k-1})$.*
- *Observando que $M^{2^k} = M^{2^{k-1}} \times M^{2^{k-1}}$, definimos $T_i' : M^{2^{k-1}} \times M^{2^{k-1}} \to M^{2^{k-1}} \times M^{2^{k-1}}$, para $1 \leq i \leq k-1$, por $T_i' = T_i \times T_i$, e $T_k' : M^{2^{k-1}} \times M^{2^{k-1}} \to M^{2^{k-1}} \times M^{2^{k-1}}$ por $T_k'(x, y) = (y, x)$. Então $(M^{2^k}; T_1', \cdots, T_k')$ é a $\mathbb{Z}_2^k$-ação twist sobre M^{2^k}, por definição.*

Teorema 1.11.4 *O fixed-data da $\mathbb{Z}_2^k$-ação twist definida acima é $(M, TM, \cdots, TM)$ ($2^k - 1$ cópias de TM).*

Prova: Ver [14], p. 42. ∎

Introduziremos agora outra ação de $\mathbb{Z}_2^k$, que é construída a partir de uma involução dada.

Definição 1.11.6 *Seja (M, T) uma involução com fixed-data $\eta \to F$. Vamos definir uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação sobre $M^{2^{k-1}}$, a partir de T, a qual vamos denotar por $\Gamma_k^k(M, T)$. Recursivamente,*

- $\Gamma_1^1(M, T) = (M; T)$
- *Suponhamos definida $\Gamma_{k-1}^{k-1}(M, T) = (M^{2^{k-2}}; T_1, \cdots, T_{k-1})$.*
- *Observando que $M^{2^{k-1}} = M^{2^{k-2}} \times M^{2^{k-2}}$, sejam $T_i' : M^{2^{k-2}} \times M^{2^{k-2}} \to M^{2^{k-2}} \times M^{2^{k-2}}$ dadas por $T_i' = T_i \times T_i$, para $1 \leq i \leq k-1$, e $T_k' : M^{2^{k-2}} \times M^{2^{k-2}} \to M^{2^{k-2}} \times M^{2^{k-2}}$ dada por $T_k'(x, y) = (y, x)$. Definimos $\Gamma_k^k(M, T) = (M^{2^{k-1}}; T_1', \cdots, T_k')$.*

Podemos observar que $\Gamma_k^k(M, T) = (M^{2^{k-1}}; T \times \cdots \times T\ (2^{k-1} - vezes), \mathbb{Z}_2^{k-1} - twist)$. Em relação ao *fixed-data* desta ação, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.11.5 *O fixed-data da $\mathbb{Z}_2^k$-ação $\Gamma_k^k(M,T)$ definida acima é $(F, \varepsilon_{A_1}, \cdots, \varepsilon_{A_{2^k-1}})$, onde A_j percorre todas as sequências $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ com $a_i = \pm 1$, exceto $(1, 1, \cdots, 1)$ (conforme a definição 1.11.3), de modo que os fibrados ε_{A_j} têm a seguinte descrição: para cada representação $A_j = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$, temos:*

i) *Se $a_1 = -1$ (temos 2^{k-1} representações deste tipo), então $\varepsilon_{A_j} = \eta$, onde $\eta \to F$ é o fixed-data de (M,T).*

ii) *Se $a_1 = 1$ (temos $2^{k-1} - 1$ representações deste tipo), então $\varepsilon_{A_j} = TF$, onde $TF \to F$ é o fibrado tangente a F.*

Prova: Ver [14], p. 43. ■

Teorema 1.11.6 *Seja $(M,\phi) = (M; T_1, \cdots, T_k)$ uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação com fixed-data $(F_\phi, \varepsilon_{A_1}, \cdots, \varepsilon_{A_{2^k-1}})$. Então o fixed-data da $\mathbb{Z}_2^{k+1}$-ação $(M,\psi) = (M; T_1, \cdots, T_k, Id)$, onde Id é a involução identidade, é $(F_\psi, \varepsilon_{B_1}, \cdots, \varepsilon_{B_{2^{k+1}-1}}) = (F_\phi, \varepsilon_{A_1}, 0, \varepsilon_{A_2}, 0, \cdots, \varepsilon_{A_{2^k-1}}, 0, 0)$ (2^k fibrados nulos acrescentados aos $2^k - 1$ fibrados do fixed-data de ϕ), ou seja, se $B_i = (A_i, -1)$ ou $B_i = (1, 1, \cdots, 1, -1)$ então ε_{B_i} é o fibrado nulo, enquanto que se $B_i = (A_i, 1)$ então $\varepsilon_{B_i} = \varepsilon_{A_i}$.*

Prova: Ver [14], p. 44. ■

Aplicando o teorema anterior repetidas vezes, temos o seguinte resultado:

Corolário 1.11.2 *Seja $(M,\phi) = (M; T_1, \cdots, T_k)$ uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação com fixed-data $(F_\phi, \varepsilon_{A_1}, \cdots, \varepsilon_{A_{2^k-1}})$. Então o fixed-data da $\mathbb{Z}_2^{k+s}$-ação $(M,\psi) = (M; T_1, \cdots, T_k, Id, \cdots, Id)$, onde foram acrescentadas s identidades, é $(F_\psi, \varepsilon_{B_1}, \cdots, \varepsilon_{B_{2^{k+s}-1}}) = (F_\phi, \varepsilon_{A_1}, 0, \cdots, 0, \varepsilon_{A_2}, 0, \cdots, 0, \varepsilon_{A_{2^k-1}}, 0, \cdots, 0, 0)$ ($2^s - 1$ fibrados nulos acrescentados ao lado de cada ε_{A_i} e mais o fibrado nulo $\varepsilon_{(1,1,\cdots,1,-1)}$, totalizando $(2^k-1)(2^s-1)+1$ fibrados nulos acrescentados ao fixed-data de ϕ), ou seja, se $B_i = (A_i, b_{k+1}, \cdots, b_{k+s})$, com $b_{k+i} = -1$ para algum $1 \leq i \leq s$ ou $B_i = (1, 1, \cdots, 1, -1)$ então ε_{B_i} é o fibrado nulo, enquanto que se $B_i = (A_i, 1, 1, \cdots, 1)$, então $\varepsilon_{B_i} = \varepsilon_{A_i}$.*

Podemos observar que, se $A_j = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$ e, para algum i, tivermos $a_i = -1$ e $T_i = Id$, então ε_{A_j} é o fibrado nulo.

Aplicando o corolário acima às $\mathbb{Z}_2^k$-ações definidas anteriormente, obtemos novas ações:

Definição 1.11.7 *Dados uma involução (M,T) com fixed-data $\eta \to F$ e um inteiro $1 \leq t \leq k$ definimos a $\mathbb{Z}_2^k$-ação $\Gamma_t^k(M,T)$ sobre $M^{2^{t-1}}$ da seguinte forma: se $\Gamma_t^t(M,T) = (M^{2^{t-1}}; T_1, \cdots, T_t)$, fazemos $\Gamma_t^k(M,T) = (M^{2^{t-1}}; T_1, \cdots, T_t, Id, \cdots, Id)$ ($k-t$ identidades acrescentadas à Γ_t^t).*

Pelo Teorema 1.11.6 e Corolário 1.11.2, concluímos o seguinte resultado:

Teorema 1.11.7 *O fixed-data de $\Gamma_t^k(M,T)$ tem a seguinte descrição: para cada representação $A_j = (a_1, \cdots, a_k)$ conforme a definição 1.11.3, lembrando que $T_1 = T \times \cdots \times T$, temos:*

i) *Se $a_i = 1$ para $i > t$ e se $a_1 = -1$ (temos 2^{t-1} representações deste tipo) então $\varepsilon_{A_j} = \eta$.*

ii) *Se $a_i = 1$ para $i > t$ e se $a_1 = 1$ (temos $2^{t-1} - 1$ representações deste tipo) então $\varepsilon_{A_j} = TF$.*

iii) *Se $a_i = -1$ para algum $i > t$ (temos $2^k - 2^t$ representações deste tipo) então $\varepsilon_{A_j} = 0$.*

1.11.2 $\mathbb{Z}_2^k$-ações sobre variedades que possuem a propriedade $\mathcal{H}$

Vamos descrever agora um resultado obtido por P. L. Q. Perger e R. Oliveira em [15], que permite conhecer todas as $\mathbb{Z}_2^k$-ações existentes sobre uma união de duas variedades fechadas, a menos de cobordismo equivariante, desde que estas variedades possuam uma certa propriedade, chamada *propriedade* $\mathcal{H}$. Tal propriedade foi introduzida por P. L. Q. Perger e R. Oliveira em [16].

Definição 1.11.8 ***(Propriedade*** $\mathcal{H}$***)*** *Seja F^n uma variedade fechada n-dimensional. Dizemos que F^n possui a* propriedade $\mathcal{H}$ *se vale o seguinte: se N^m é uma variedade fechada m-dimensional com $m > n$, e $T : N^m \to N^m$ é uma involução cujo conjunto de pontos fixos é igual a F^n, então $m = 2n$.*

São exemplos de variedades com a propriedade $\mathcal{H}$: os espaços projetivos real, complexo e quaterniônico com dimensão par, $\mathbb{R}P^{2n}$, $\mathbb{C}P^{2n}$ e $\mathbb{H}P^{2n}$, a soma conexa de duas cópias de $\mathbb{R}P^{2n}$, $\mathbb{R}P^{2n}\#\mathbb{R}P^{2n}$, a soma conexa de qualquer número de cópias de $S^n \times S^n$, onde S^n é a esfera n-dimensional, e n não é uma potência de 2, qualquer variedade bidimensional que não borda e qualquer variedade 4-dimensional cujo grupo fundamental é zero.

Dada uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação $(M,\phi) = (M; T_1, \cdots, T_k)$, podemos obter uma coleção de novas $\mathbb{Z}_2^k$-ações, da seguinte maneira: primeiramente, cada automorfismo $\sigma : \mathbb{Z}_2^k \to \mathbb{Z}_2^k$ fornece uma nova $\mathbb{Z}_2^k$-ação, dada por $\sigma(M,\phi) = (M; \sigma T_1, \cdots, \sigma T_k)$, como vimos na Observação 1.11.1. Em seguida, P. L. Q. Pergher provou em [18] que, se (M,ϕ) possui *fixed-data* $(F, \varepsilon_{A_1}, \cdots, \varepsilon_{A_{2^k-1}})$ e um dos seus fibrados componentes ε_{A_j} é isomorfo a uma soma de *Whitney* $\varepsilon'_{A_j} \oplus \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R} \to F$ é o fibrado linha trivial, então existe uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação (N,ψ) cujo *fixed-data* é $(F, \mu_{A_1}, \cdots, \mu_{A_{2^k-1}})$, onde $\mu_{A_i} = \varepsilon_{A_i}$, para todo $i \neq j$, e $\mu_{A_j} = \varepsilon'_{A_j}$. Em outras palavras, a partir do *fixed-data* de uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação, podemos obter novo *fixed-data* de $\mathbb{Z}_2^k$-ações através do processo de remoção de secções.

Desta forma, dada uma involução (M,T), podemos obter uma coleção de $\mathbb{Z}_2^k$-ações por aplicar as operações $\sigma\Gamma_t^k(M,T)$, para cada $1 \leq t \leq k$ e para cada $\sigma \in Aut(\mathbb{Z}_2^k)$, onde as $\mathbb{Z}_2^k$-ações $\Gamma_t^k(M,T)$ são as definidas na Seção 1.11.1, e em seguida por remover as possíveis secções dos resultantes fibrados componentes do *fixed-data*.

O que ocorre é que, se (M,T) e (N,S) são involuções equivariantemente cobordantes, então as ações obtidas por remover as mesmas secções de $\sigma\Gamma_t^k(M,T)$ e $\sigma\Gamma_t^k(N,S)$ são $\mathbb{Z}_2^k$-cobordantes, e a recíproca também é verdadeira. Além disso, se (M,T) fixa F, então toda $\mathbb{Z}_2^k$-ação obtida como acima fixa F.

Agora, dada uma variedade fechada F, denotemos por $\mathcal{A}_1(F)$ a coleção de todas as classes de cobordismo de involuções $[M,T]$, contendo um representante que fixa F. Fixado $k > 1$, obtemos então a coleção $\mathcal{A}_k(F)$, formada pelas classes de cobordismo de ações de $\mathbb{Z}_2^k$ obtidas a partir de $\mathcal{A}_1(F)$ via o procedimento acima. Ou seja, para cada $[M,T] \in \mathcal{A}_1(F)$, obtemos a família de classes de cobordismo de ações de $\mathbb{Z}_2^k$,

$$\{[\sigma\Gamma_t^k(M,T)],\ 1 \leq t \leq k,\ \sigma \in Aut(\mathbb{Z}_2^k)\},$$

e a seguir a família (eventualmente maior, no mínimo igual) obtida a partir desta, removendo paulatinamente todas as secções dos *fixed-data*. Pode ser que esta família não seja a coleção completa de classes de cobordismo de $\mathbb{Z}_2^k$-ações fixando F. Caso ela seja, F é dita satisfazer a *propriedade* $\mathcal{P}_k(F)$, conceito que foi introduzido por P. L. Q. Pergher e R. Oliveira em [15]. Ou seja, dada F, $\mathcal{P}_k(F)$ é ou não válida. Em [15], P. L. Q. Pergher e R. Oliveira provaram o seguinte teorema:

Teorema 1.11.8 *Se $F = K \cup L$ é uma união disjunta de duas variedades que satisfazem a propriedade $\mathcal{H}$, com $dim(K) \neq dim(L)$, então $\mathcal{P}_k(F)$ é válida.*

No último capítulo desta tese, utilizaremos o teorema acima para classificar, a menos de cobordismo equivariante, as $\mathbb{Z}_2^k$-ações que fixam a união dos espaços projetivos real e complexo, $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, com j e k ambos pares e positivos, e $j \neq 2k$.

Capítulo

2

Modelos de Involuções Fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$

O principal objetivo desta tese é classificar, a menos de cobordismo equivariante, as ações de $\mathbb{Z}_2^k$ que possuem a união $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$ como conjunto de pontos fixos. Para $k = 1$, esse problema será resolvido em todos os casos. Para $k > 1$, usando o caso $k = 1$ e técnicas de [15], o problema será resolvido para j e k pares, com $j \neq 2k$. Neste sentido, alguns modelos de involuções com o *fixed-data* em questão, encontrados em nosso trabalho, são bem conhecidos. Mas alguns são novos modelos. Neste capítulo, exibiremos alguns modelos bem conhecidos utilizados em nossa classificação, apresentaremos dois novos modelos de involuções fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, especificamente as involuções $\Gamma(\mathbb{C}P^k, \text{conjugação})$ e uma união de duas involuções fixando $\{pto\} \cup \mathbb{R}P^j$ e $\{pto\} \cup \mathbb{C}P^k$, e mostraremos que estes dois últimos modelos são efetivamente novos.

2.1 Alguns Modelos Conhecidos

Nesta seção, exibiremos alguns modelos, presentes na literatura, de involuções fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, para específicos j e k, que participarão da classificação pretendida.

Seja (M^m, T) uma involução suave com *fixed-data*

$$\begin{array}{ccc} \eta^{m-j} & & \gamma^{m-2k} \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^j & & \mathbb{C}P^k \end{array}.$$

Pela Observação 1.6.1 podemos considerar que, a menos de cobordismo, o *fixed-data* de (M^m, T) é

$$\begin{array}{ccc} p\xi^1 \oplus \mathbb{R}^{m-j-p} & & q\xi^2 \oplus \mathbb{R}^{m-2k-2q} \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^j & & \mathbb{C}P^k \end{array},$$

e assim, $W(\eta^{m-j}) = (1+\alpha)^p$, para algum natural p, onde $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^j, \mathbb{Z}_2)$ é o gerador de $H^*(\mathbb{R}P^j, \mathbb{Z}_2)$, e $W(\gamma^{m-2k}) = (1+\beta)^q$, para algum natural q, onde $\beta \in H^2(\mathbb{C}P^k, \mathbb{Z}_2)$ é o gerador de $H^*(\mathbb{C}P^k, \mathbb{Z}_2)$.

Exemplo 2.1.1 *Se um dos fibrados componentes do fixed-data de (M^m, T) borda então, pela Sequência de Conner-Floyd, (M^m, T) é cobordante a uma involução que fixa apenas um dos espaços projetivos, e este caso é bem conhecido.*

O caso em que (M^m, T) fixa um espaço projetivo real $\mathbb{R}P^j$ foi estudado por P. E. Conner, E. E. Floyd em [6], e R. E. Stong em [26]. Eles provaram que, se j é ímpar, (M^m, T) borda equivariantemente, ou seja, seu *fixed-data* borda. Nesse caso, qualquer codimensão é realizada; em particular, para cada $t = 0, 1, 2, ...$, $\mathbb{R}^t \to \mathbb{R}P^j$ é o *fixed-data* de uma involução (N^{j+t}, S). Se j é par, uma involução fixando $\mathbb{R}P^j$ ou é cobordante à involução $(\mathbb{R}P^j, \text{identidade})$ (neste caso $m = j$), ou é cobordante a $(\mathbb{R}P^j \times \mathbb{R}P^j, twist)$ (neste caso $m = 2j$), onde $twist : \mathbb{R}P^j \times \mathbb{R}P^j \to \mathbb{R}P^j \times \mathbb{R}P^j$ é a involução $twist(x, y) = (y, x)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}P^j \times \mathbb{R}P^j$, vista na definição 1.11.4.

A. Ramos, sob orientação de P. L. Q. Pergher, classificou em [23] o caso em que (M^m, T) fixa um espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^k$. Se k é ímpar, (M^m, T) borda equivariantemente, ou seja, seu *fixed-data* borda. Nesse caso, qualquer codimensão é realizada; em particular, para cada $l = 0, 1, 2, ...$, $\mathbb{R}^l \to \mathbb{C}P^k$ é o *fixed-data* de uma involução (V^{2k+l}, S'). Se k é par, uma involução fixando $\mathbb{C}P^k$ ou é cobordante à involução $(\mathbb{C}P^k, \text{identidade})$ (neste caso $m = 2k$), ou é cobordante a $(\mathbb{C}P^k \times \mathbb{C}P^k, twist)$ (neste caso $m = 4k$), onde $twist : \mathbb{C}P^k \times \mathbb{C}P^k \to \mathbb{C}P^k \times \mathbb{C}P^k$ é definida por $twist(x, y) = (y, x)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{C}P^k \times \mathbb{C}P^k$.

Vimos no Lema 1.6.1 que $\eta^{m-j} \to \mathbb{R}P^j$ borda se, e somente se, j é ímpar e p é par, e que $\gamma^{m-2k} \to \mathbb{C}P^k$ borda se, e somente se, k é ímpar e q é par.

Logo, se j é ímpar e p é par, temos os seguintes casos:

- Se k é ímpar, (M^m, T) é cobordante a (V^{2k+l}, S'), para cada $l = 0, 1, 2, ...$
- Se k é par, ou (M^m, T) é cobordante a $(\mathbb{C}P^k, \text{identidade})$ (neste caso $m = 2k$), ou é cobordante a $(\mathbb{C}P^k \times \mathbb{C}P^k, twist)$ (neste caso $m = 4k$).

E se k é ímpar e q é par, temos as seguintes possibilidades:

- Se j é ímpar, (M^m, T) é cobordante a (N^{j+t}, S), para cada $t = 0, 1, 2, ...$
- Se j é par, ou (M^m, T) é cobordante a $(\mathbb{R}P^j, \text{identidade})$ (neste caso $m = j$), ou é cobordante a $(\mathbb{R}P^j \times \mathbb{R}P^j, twist)$ (neste caso $m = 2j$).

Exemplo 2.1.2 *Se (M^m, T) é cobordante a união de duas involuções (M_0^m, T_0), com fixed-data $\eta^{m-j} \to \mathbb{R}P^j$, e (M_1^m, T_1), com fixed-data $\gamma^{m-2k} \to \mathbb{C}P^k$, então (M^m, T) é cobordante a $(M_0^m \cup M_1^m, T_0 \cup T_1)$, que é bem conhecida.*

Primeiramente, suponhamos que j é par. Neste caso, vimos no exemplo anterior que (M_0^m, T_0) ou é cobordante a $(\mathbb{R}P^j, \text{identidade})$ (neste caso $m = j$) ou é cobordante a $(\mathbb{R}P^j \times \mathbb{R}P^j, twist)$ (neste caso $m = 2j$).

Se $m = j$, então (M_0^m, T_0) é cobordante a $(\mathbb{R}P^j, \text{identidade})$ e temos as seguintes possibilidades:

- j é múltiplo de 4. Neste caso, se $k = j/2$ então k é par e (M_1^m, T_1) é cobordante a $(\mathbb{C}P^{\frac{j}{2}}, \text{identidade})$, o que nos fornece o modelo para (M^j, T)

$$(\mathbb{R}P^j, \text{identidade}) \cup (\mathbb{C}P^{\frac{j}{2}}, \text{identidade}).$$

- j é múltiplo de 8. Neste caso, se $k = j/4$ então k é par e (M_1^m, T_1) é cobordante a $(\mathbb{C}P^{\frac{j}{4}} \times \mathbb{C}P^{\frac{j}{4}}, twist)$, o que nos fornece o modelo para (M^j, T)

$$(\mathbb{R}P^j, \text{identidade}) \cup (\mathbb{C}P^{\frac{j}{4}} \times \mathbb{C}P^{\frac{j}{4}}, twist).$$

- Se k é ímpar, para cada $t = 0, 1, 2, ...,$ $\mathbb{R}^t \to \mathbb{C}P^k$ é o *fixed-data* de uma involução (N^{2k+t}, S'). Assim, se $2k < j$, tomamos $t = j - 2k$ e temos que $\mathbb{R}^t \to \mathbb{C}P^k$ é o *fixed-data* de uma involução (N^j, S), o que nos fornece o seguinte modelo para (M^j, T)

$$(\mathbb{R}P^j, \text{identidade}) \cup (N^j, S).$$

Se $m = 2j$, então (M_0^m, T_0) é cobordante a $(\mathbb{R}P^j \times \mathbb{R}P^j, twist)$ e temos as seguintes possibilidades:

- Se $j = k$ então k é par e (M_1^{2j}, T_1) é cobordante a $(\mathbb{C}P^j, \text{identidade})$, o que os fornece o modelo para (M^{2j}, T)

$$(\mathbb{R}P^j \times \mathbb{R}P^j, twist) \cup (\mathbb{C}P^j, \text{identidade}).$$

- j é múltiplo de 4. Neste caso, se $k = j/2$, k é par e (M_1^{2j}, T_1) é cobordante a $(\mathbb{C}P^{\frac{j}{2}} \times \mathbb{C}P^{\frac{j}{2}}, twist)$, o que nos fornece o modelo para (M^{2j}, T)

$$(\mathbb{R}P^j \times \mathbb{R}P^j, twist) \cup (\mathbb{C}P^{\frac{j}{2}} \times \mathbb{C}P^{\frac{j}{2}}, twist).$$

- Se k é ímpar, para cada $t = 0, 1, 2, ...,$ $\mathbb{R}^t \to \mathbb{C}P^k$ é o *fixed-data* de uma involução (N^{2k+t}, S). Assim, se $2k < 2j$, tomamos $t = 2j - 2k$ e temos que $\mathbb{R}^t \to \mathbb{C}P^k$ é o *fixed-data* de uma involução (N^{2j}, S), o que nos fornece o seguinte modelo para (M^{2j}, T)

$$(\mathbb{R}P^j \times \mathbb{R}P^j, twist) \cup (N^{2j}, S).$$

Suponhamos agora que j é ímpar. Pela discussão feita no exemplo anterior, $\mathbb{R}P^j$ borda. Assim, para cada $l = 0, 1, 2, ...,$ $\mathbb{R}^l \to \mathbb{R}P^j$ é o *fixed-data* de uma involução (V^{j+l}, S) (se $l = 0$ então a involução é $(\mathbb{R}P^j, \text{identidade})$), e estas são as únicas possibilidades para involuções fixando $\mathbb{R}P^j$, com j ímpar. Assim, para cada l dado, temos as seguintes possibilidades:

- $j + l$ par. Neste caso, se $k = (j + l)/2$, (M_1^{j+l}, T_1) é cobordante a $(\mathbb{C}P^{\frac{j+l}{2}}, \text{identidade})$, o que nos fornece o modelo para (M^{j+l}, T)

$$(V^{j+l}, S) \cup (\mathbb{C}P^{\frac{j+l}{2}}, \text{identidade}).$$

- $j + l$ múltiplo de 8. Neste caso, se $k = (j + l)/4$ então k é par e (M_1^{j+l}, T_1) é cobordante a $(\mathbb{C}P^{\frac{j+l}{4}} \times \mathbb{C}P^{\frac{j+l}{4}}, twist)$, o que nos fornece o seguinte modelo para (M^{j+l}, T)

$$(V^{j+l}, S) \cup (\mathbb{C}P^{\frac{j+l}{4}} \times \mathbb{C}P^{\frac{j+l}{4}}, twist).$$

- Se k é ímpar, para cada $t = 0, 1, 2, ...$, $\mathbb{R}^t \to \mathbb{C}P^k$ é o *fixed-data* de uma involução (N^{2k+t}, S'). Assim, se $2k < j + l$, tomamos $t = j + l - 2k$ e temos que $\mathbb{R}^t \to \mathbb{C}P^k$ é o *fixed-data* de uma involução (N^{j+l}, S'), o que nos fornece o seguinte modelo para (M^{j+l}, T)
$$(V^{j+l}, S) \cup (N^{j+l}, S').$$

Exemplo 2.1.3 *Se $j = 0$ ou $k = 0$, então (M^m, T) é uma involução fixando $\{pto\} \cup \mathbb{R}P^j$, ou $\{pto\} \cup \mathbb{C}P^k$, e este caso é bem conhecido.*

Em [24], D. C. Royster determinou as classes de cobordismo das involuções que fixam uma união disjunta de espaços projetivos reais $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{R}P^n$, para naturais j e n, com exceção do caso em que j e n são ambos pares e positivos (este caso continua em aberto). Royster determinou, em particular, esta classificação para o caso em que $n = 0$, ou seja, a classificação das classes de bordismo das involuções que fixam uma união $\{pto\} \cup \mathbb{R}P^j$. Esta classificação determinou que, se (M^m, T) é uma involução com o conjunto de pontos fixos em questão, então (M^m, T) é cobordante a involução $\Gamma^{m-j-1}(\mathbb{R}P^{j+1}, T_0)$, onde $T_0[x_0, x_1, \cdots, x_{j+1}] = [-x_0, x_1, \cdots, x_{j+1}]$, para todo elemento $[x_0, x_1, \cdots, x_{j+1}]$ de $\mathbb{R}P^{j+1}$. P. L. Q. Pergher e R. E. Stong provaram em [22] que tais involuções existem para

$$j + 1 \leq m \leq \begin{cases} j + 3, & \text{se } a = 1 \\ j + 2^a & \text{se } a = 0 \text{ ou } a > 1 \end{cases},$$

onde escrevemos $j = 2^a(2b + 1)$, para naturais a e b. Além disso, esta classificação determinou que, neste caso, $p = 1$.

P. L. Q. Pergher e A. Ramos, em [21], generalizaram o trabalho feito por Royster, estudando a classificação das classes de cobordismo das involuções fixando uma união disjunta de espaços projetivos complexos $\mathbb{C}P^k \cup \mathbb{C}P^n$, ou quaterniônicos $\mathbb{H}P^k \cup \mathbb{H}P^n$, para naturais k e n, com exceção do caso em que k e n são ambos pares e positivos (este caso também continua em aberto). Em particular, eles determinaram que, se (M^m, T) é uma involução fixando $\{pto\} \cup \mathbb{C}P^k$, então (M^m, T) é cobordante a involução $\Gamma^{m-2k-2}(\mathbb{C}P^{k+1}, T_1)$, onde $T_1[y_0, y_1, \cdots, y_{k+1}] = [-y_0, y_1, \cdots, y_{k+1}]$, para todo elemento $[y_0, y_1, \cdots, y_{k+1}]$ de $\mathbb{C}P^{k+1}$, e tais involuções existem para

$$2k + 2 \leq m \leq \begin{cases} 2k + 6, & \text{se } c = 1 \\ 2k + 2^{c+1} & \text{se } c = 0 \text{ ou } c > 1 \end{cases},$$

onde escrevemos $k = 2^c(2d + 1)$, para naturais c e d. Esta classificação determinou também que, neste caso, $q = 1$.

Caso uma involução seja equivariantemente cobordante a uma das involuções descritas nessa seção, diremos que a mesma é do **tipo I**.

2.2 A Involução $\Gamma(\mathbb{C}P^k, \text{conjugação})$

Seja $k \in \mathbb{N}$ par. Sobre o espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^k$, considere a involução *conjugação* que, a cada elemento $[(z_1, ..., z_{k+1})] \in \mathbb{C}P^k$, associa o elemento $[(\overline{z_1}, ..., \overline{z_{k+1}})] \in \mathbb{C}P^k$, onde $\overline{z_i}$ é o conjugado de $z_i \in \mathbb{C}$, $\forall i = 1, 2, ..., k+1$. É conhecido o fato de que $(\mathbb{C}P^k, \text{conjugação})$ é uma involução fixando $\mathbb{R}P^k$ com fibrado normal $T\mathbb{R}P^k$ igual ao fibrado tangente de $\mathbb{R}P^k$. (Ver [5], p. 79)

Então, involução $\Gamma(\mathbb{C}P^k, \text{conjugação})$ é uma involução de dimensão $m = 2k+1$, cujo *fixed-data* é dado por

$$\begin{array}{ccc} T\mathbb{R}P^k \oplus \mathbb{R} & & \mathbb{R} \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^k & & \mathbb{C}P^k \end{array},$$

conforme vimos na Seção 1.8, onde $\mathbb{R} \to \mathbb{R}P^k$ e $\mathbb{R} \to \mathbb{C}P^k$ são os 1-fibrados vetoriais triviais sobre $\mathbb{R}P^k$ e $\mathbb{C}P^k$. No exemplo 1.6.1 vimos que $T\mathbb{R}P^k \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}P^k$ é equivariantemente cobordante à soma de Whitney $(k+1)\xi^1 \to \mathbb{R}P^k$, onde $\xi^1 \to \mathbb{R}P^k$ é o fibrado linha canônico sobre $\mathbb{R}P^k$.

Ou seja, sob o aspecto da Observação 1.6.1, a involução $\Gamma(\mathbb{C}P^k, \text{conjugação})$ fixa $\mathbb{R}P^k \cup \mathbb{C}P^k$ com $p = k+1$ e $q = 0$.

A variedade subjacente a $\Gamma(\mathbb{C}P^k, \text{conjugação})$ é a variedade de *Dold*

$$P(1,k) = \frac{S^1 \times \mathbb{C}P^k}{(\text{Antipodal, Conjugação})}.$$

Proposição 2.2.1 *A variedade de Dold $P(1,k)$ não borda se k é par.*

Prova: Sabemos que $P(1,k)$ é uma variedade fechada $(2k+1)$-dimensional, cujo anel de cohomologia $H^*(P(1,k), \mathbb{Z}_2)$ é uma álgebra polinomial sobre $\mathbb{Z}_2$, gerada pelos elementos $c \in H^1(P(1,k), \mathbb{Z}_2)$ e $d \in H^2(P(1,k), \mathbb{Z}_2)$, truncada pelas relações $c^2 = 0$ e $d^{k+1} = 0$.

A classe característica de $P(1,k)$ é $W(P(1,k)) = (1+c) \cdot (1+c+d)^{k+1}$. (Ver [29])

Chamando $k = 2t$, $t \geq 1$, façamos os cálculos desta classe característica:

$$\begin{aligned} W(P(1,k)) &= (1+c)(1+c+d)(1+c+d)^k = (1+c)(1+c+d)(1+c+d)^{2t} \\ &= (1+d+cd)(1+c^2+d^2)^t = (1+d+cd)(1+d^2)^t \\ &= 1+d+cd+ \text{ termos de grau } \geq 4. \end{aligned}$$

Assim, $w_2 = d$ e $w_3 = c \cdot d$, e portanto,

$$w_3 \cdot w_2^{k-1}[P(1,k)]_2 = c \cdot d \cdot d^{k-1}[P(1,k)]_2 = c \cdot d^k [P(1,k)]_2 = 1,$$

pois $c \cdot d^k$ é o gerador de $H^{2k+1}(P(1,k), \mathbb{Z}_2)$.

Logo $P(1,k)$ não borda. ■

Observação 2.2.1 *Podemos fazer a mesma construção com k ímpar mas, neste caso, ambas as componentes fixas da involução bordam, e este seria um dos casos conhecidos, citados na seção anterior. De fato, se k é ímpar, então $(k+1)\xi^1 \to \mathbb{R}P^k$ borda, pelo Corolário 1.6.1 e $\mathbb{C}P^k$ borda como variedade, pela Proposição 1.1.2, o que implica claramente que o fibrado $\mathbb{R} \to \mathbb{C}P^k$ borda.*

Observação 2.2.2 *Como $P(1,k)$ não borda, então a iteração $\Gamma^{m-2k}(\mathbb{C}P^k, \textit{conjugação})$ só é possível para $m = 2k+1$, ou seja, só é possível aplicar Γ uma vez sobre $(\mathbb{C}P^k, \textit{conjugação})$ a fim de obter uma involução que tenha como conjunto de pontos fixos a união $\mathbb{R}P^k \cup \mathbb{C}P^k$, com k par, $p = k+1$ e $q = 0$.*

A involução $\Gamma(\mathbb{C}P^k, \text{conjugação})$ é a única involução, a menos de cobordismo, que fixa $\mathbb{R}P^k \cup \mathbb{C}P^k$, com $p = k+1$, $q = 0$ e k par. É o que mostraremos no seguinte resultado:

Teorema 2.2.1 *Se (M^m, T) é uma involução sobre a variedade fechada M^m que possui fixed-data $\mathbb{R}P^k \cup \mathbb{C}P^k$ com $p = k+1$, $q = 0$ e k par, então (M^m, T) é cobordante a $\Gamma(\mathbb{C}P^k, \textit{conjugação})$.*

Prova: Podemos escrever $m = 2k + r$, com $r \geq 1$. Assim o *fixed-data* desta involução é, a menos de cobordismo, igual a

$$\begin{array}{ccc} (k+1)\xi^1 \oplus \mathbb{R}^{r-1} & & \mathbb{R}^r \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^k & & \mathbb{C}P^k \end{array} . \tag{2.1}$$

Queremos mostrar que $r = 1$ pois, neste caso, (M^{2k+1}, T) possui *fixed-data* cobordante a

$$\begin{array}{ccc} (k+1)\xi^1 & & \mathbb{R} \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^k & & \mathbb{C}P^k \end{array} ,$$

e, desta forma, (M^{2k+1}, T) possui *fixed-data* cobordante ao *fixed-data* de $\Gamma(\mathbb{C}P^k, \text{conjugação})$, como vimos anteriormente. Logo, pela Sequência de Conner-Floyd, (M^{2k+1}, T) e $\Gamma(\mathbb{C}P^k, \text{conjugação})$ são cobordantes, como queremos.

Suponhamos então $r \geq 2$. O Teorema das Secções (1.8.1) nos diz que, após removermos $r-2$ secções de (2.1), a união

$$\begin{array}{ccc} (k+1)\xi^1 \oplus \mathbb{R} & & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^k & & \mathbb{C}P^k \end{array}$$

é, a menos de cobordismo, o *fixed-data* de alguma involução (V^{2k+2}, S).

Sabemos que a variedade subjacente a $\Gamma(\mathbb{C}P^k, \text{conjugação})$ é a variedade de *Dold* $P(1,k)$, a qual não borda pela Proposição 2.2.1, visto que k é par. Portanto, $\Gamma(\Gamma(\mathbb{C}P^k, \text{conjugação}))$ é uma involução com *fixed-data*

$$\begin{array}{ccccc} (k+1)\xi^1 \oplus \mathbb{R} & & \mathbb{R}^2 & & \mathbb{R} \\ \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^k & & \mathbb{C}P^k & & P(1,k) \end{array} .$$

Desta forma, $(V^{2k+2}, S) \cup \Gamma(\Gamma(\mathbb{C}P^k, \text{conjugação}))$ é uma involução que possui *fixed-data* cobordante a $\mathbb{R} \to P(1,k)$, o que implica, pela Sequência de Conner-Floyd, que $\mathbb{R} \to P(1,k)$ é o *fixed-data* de alguma involução. Assim, $P(1,k)$ borda como variedade (Corolário 1.5.4), o que contradiz a Proposição 2.2.1.

Portanto $r = 1$. ■

Caso uma involução seja equivariantemente cobordante à involução $\Gamma(\mathbb{C}P^k, \text{conjugação})$, k par, diremos que a mesma é do **tipo II**.

2.3 Uma união de duas involuções fixando $\{pto\} \cup \mathbb{R}P^j$ e $\{pto\} \cup \mathbb{C}P^k$

Sejam (M_0^m, T_0) e (M_1^m, T_1) duas involuções suaves fixando $\{pto\} \cup \mathbb{R}P^j$ e $\{pto\} \cup \mathbb{C}P^k$, respectivamente. Assim,

$$j + 1 \leq m \leq \begin{cases} j+3, & \text{se } a = 1 \\ j + 2^a, & \text{se } a \neq 1 \end{cases},$$

e

$$2k + 2 \leq m \leq \begin{cases} 2k+6, & \text{se } c = 1 \\ 2k + 2^{c+1}, & \text{se } c \neq 1 \end{cases},$$

onde $j = 2^a(2b+1)$ e $k = 2^c(2d+1)$, conforme citado no exemplo 2.1.3. Vimos que o os *fixed-data* destas involuções são cobordantes a, respectivamente,

$$\begin{array}{ccc} \xi^1 \oplus \mathbb{R}^{m-j-1} & & \mathbb{R}^m \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^j & & \{pto\} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} \xi^2 \oplus \mathbb{R}^{m-2k-2} & & \mathbb{R}^m \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{C}P^k & & \{pto\} \end{array}.$$

A união $(M_0^m \cup M_1^m, T_0 \cup T_1)$ é cobordante a uma involução (M^m, T) fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, com $p = q = 1$. De fato, como o fibrado $\mathbb{R}^m \to \{pto\}$ é componente de ambos os *fixed-data* de (M_0^m, T_0) e (M_1^m, T_1), então sua união borda e, pela Sequência de *Conner-Floyd*, $(M_0^m \cup M_1^m, T_0 \cup T_1)$ é cobordante a uma involução com *fixed-data*

$$\begin{array}{ccc} \xi^1 \oplus \mathbb{R}^{m-j-1} & & \xi^2 \oplus \mathbb{R}^{m-2k-2} \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^j & & \mathbb{C}P^k \end{array}.$$

Observemos que existe uma coleção de possíveis dimensões que uma variedade que fixa $\{pto\} \cup \mathbb{R}P^j$ pode ter, conforme vimos no exemplo 2.1.3. Chamemos esta coleção de números naturais de *range* de $\mathbb{R}P^j$. Mais especificamente, o *range* de $\mathbb{R}P^j$ é o conjunto dos $m \in \mathbb{N}$ tais que

$$j + 1 \leq m \leq \begin{cases} j+3, & \text{se } a = 1 \\ j + 2^a, & \text{se } a \neq 1 \end{cases}.$$

Da mesma forma temos o *range* de $\mathbb{C}P^k$, que é a coleção dos números naturais m tais que

$$2k + 2 \leq m \leq \begin{cases} 2k+6, & \text{se } c = 1 \\ 2k + 2^{c+1}, & \text{se } c \neq 1 \end{cases}.$$

Da discussão acima obtemos o seguinte resultado:

Proposição 2.3.1 *Para cada m pertencente a ambos os ranges de $\mathbb{R}P^j$ e $\mathbb{C}P^k$, existe uma involução suave (M^m, T) que fixa $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, com $p = q = 1$.* ■

Observação 2.3.1 *É claro que existem valores de j e k tais que os respectivos ranges tem intersecção vazia. Por exemplo, se $j = 4$, o range de $\mathbb{R}P^j$ é $5 \leq m \leq 8$, e se $k = 6$, o range de $\mathbb{C}P^k$ é $14 \leq m \leq 16$. Entretanto, se $k = 3$, o range de $\mathbb{C}P^k$ é $m = 8$, e portanto existe uma involução (M^8, T) fixando $\mathbb{R}P^4 \cup \mathbb{C}P^3$ do tipo acima.*

Por outro lado, seja (M^m, T) uma involução suave fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, com $p = q = 1$.

Assim, seu *fixed-data* é cobordante a

$$\begin{array}{ccc} \xi^1 \oplus \mathbb{R}^{m-j-1} & & \xi^2 \oplus \mathbb{R}^{m-2k-2} \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^j & & \mathbb{C}P^k \end{array}, \tag{2.2}$$

onde $\xi^1 \to \mathbb{R}P^j$ e $\xi^2 \to \mathbb{C}P^k$ são os fibrados linha canônicos real e complexo, respectivamente. Desta forma, $m \geq j+1$ e $m \geq 2k+2$.

Seja $m_0 = max\{j+1, 2k+2\}$. O Teorema das Secções 1.8.1 implica que, após removermos $m - m_0$ secções de (2.2), existe uma involução (M^{m_0}, T_0) que possui *fixed-data* cobordante a

$$\begin{array}{ccc} \xi^1 \oplus \mathbb{R}^{m_0-j-1} & & \xi^2 \oplus \mathbb{R}^{m_0-2k-2} \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^j & & \mathbb{C}P^k \end{array}.$$

Proposição 2.3.2 *A involução (M^m, T) é cobordante a involução $\Gamma^{m-m_0}(M^{m_0}, T_0)$.*

Prova: Consideremos a involução $\Gamma(M^{m_0}, T_0)$. Conforme vimos na Seção 1.8, esta involução tem como *fixed-data*

$$\begin{array}{ccccc} \xi^1 \oplus \mathbb{R}^{m_0+1-j-1} & & \xi^2 \oplus \mathbb{R}^{m_0+1-2k-2} & & \mathbb{R} \\ \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^j & & \mathbb{C}P^k & & M^{m_0} \end{array}.$$

Queremos mostrar que M^{m_0} borda pois, se isto acontecer, poderemos aplicar Γ novamente na involução resultante.

Mostremos então que M^{m_0} borda. De fato, pelo Teorema das Secções 1.8.1, após removermos $m - m_0 - 1$ secções de (2.2), existe uma involução (M^{m_0+1}, S) cujo *fixed-data* é cobordante a

$$\begin{array}{ccc} \xi^1 \oplus \mathbb{R}^{m_0+1-j-1} & & \xi^2 \oplus \mathbb{R}^{m_0+1-2k-2} \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^j & & \mathbb{C}P^k \end{array}.$$

Dessa forma, $\Gamma(M^{m_0}, T_0) \cup (M^{m_0+1}, S)$ é uma involução fixando, a menos de cobordismo, $\mathbb{R} \to M^{m_0}$, já que $\xi^1 \oplus \mathbb{R}^{m_0+1-j-1} \to \mathbb{R}P^j$ e $\xi^2 \oplus \mathbb{R}^{m_0+1-2k-2} \to \mathbb{C}P^k$ são componentes dos *fixed-data* de ambas involuções. Portanto, pelo Corolário 1.5.4, M^{m_0} borda.

Mostramos então que $\Gamma(M^{m_0}, T_0)$ fixa, a menos de cobordismo,

$$\begin{array}{ccc} \xi^1 \oplus \mathbb{R}^{m_0+1-j-1} & & \xi^2 \oplus \mathbb{R}^{m_0+1-2k-2} \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^j & & \mathbb{C}P^k \end{array}.$$

Podemos repetir o mesmo raciocínio para $\Gamma^2(M^{m_0}, T_0)$, $\Gamma^3(M^{m_0}, T_0)$, até $\Gamma^{m-m_0}(M^{m_0}, T_0)$ e, desta forma, podemos mostrar que $\Gamma^{m-m_0}(M^{m_0}, T_0)$ e (M^m, T) possuem o mesmo *fixed-data*,

$$\begin{array}{ccc} \xi^1 \oplus \mathbb{R}^{m-j-1} & & \xi^2 \oplus \mathbb{R}^{m-2k-2} \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^j & & \mathbb{C}P^k \end{array},$$

a menos de cobordismo.

Logo, pela Sequência de *Conner-Floyd*, $\Gamma^{m-m_0}(M^{m_0}, T_0)$ e (M^m, T) são cobordantes. ∎

Observação 2.3.2 *Se (M^m, T) é uma involução fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, com $p = q = 1$, então m pertence ao range de $\mathbb{R}P^j$ se, e somente se, pertence ao range de $\mathbb{C}P^k$.*

De fato, suponhamos primeiramente que m está no range de $\mathbb{R}P^j$. Então existe uma involução (N^m, S) cujo fixed-data é

$$\begin{array}{ccc} \eta^{m-j} & & \mathbb{R}^m \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^j & & \{pto\} \end{array},$$

com $W(\eta^{m-j}) = 1 + \alpha$. Como $p = 1$, o fibrado $\eta^{m-j} \to \mathbb{R}P^j$ é, a menos de cobordismo, componente de ambos os fixed-data de (M^m, T) e (N^m, S). Dessa forma, $(M^m, T) \cup (N^m, S)$ é uma involução fixando, a menos de cobordismo, a união $\{pto\} \cup \mathbb{C}P^k$. Portanto, m pertence ao range de $\mathbb{C}P^k$. A recíproca é análoga.

Sendo assim, concluímos que: se (M^m, T) é uma involução fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, com $p = q = 1$, então, pela Proposição 2.3.2, (M^m, T) é cobordante a $\Gamma^{m-m_0}(M^{m_0}, T_0)$. Se m está nos *ranges* de $\mathbb{R}P^j$ e $\mathbb{C}P^k$ então, pela Proposição 2.3.1, esta involução é cobordante a união de uma involução fixando $\{pto\} \cup \mathbb{R}P^j$ com uma involução fixando $\{pto\} \cup \mathbb{C}P^k$, que são bem conhecidas, vistas no exemplo 2.1.3. A questão que nos resta é analisar a possibilidade de existência de uma tal involução quando m não pertence aos *ranges* de $\mathbb{R}P^j$ e $\mathbb{C}P^k$.

Suponhamos então que m não pertença aos *ranges* em pauta.

Seja m' o máximo entre os valores máximos dos *ranges* de $\mathbb{R}P^j$ e $\mathbb{C}P^k$. Pela Observação 2.3.2, m_0 pertence a ambos os *ranges* de $\mathbb{R}P^j$ e $\mathbb{C}P^k$. Como $m \geq m_0$ então, para que m não pertença aos *ranges* de $\mathbb{R}P^j$ e $\mathbb{C}P^k$, devemos ter $m > m'$.

Pelo Teorema das Secções 1.8.1, após removermos $m - m' - 1$ secções de (2.2), existe uma involução $(M^{m'+1}, S')$ que fixa $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, com $p = q = 1$.

Da mesma forma, após removermos $m - m'$ secções de (2.2), existe uma involução $(M^{m'}, T')$ fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, com $p = q = 1$. Consideremos a involução $\Gamma(M^{m'}, T')$, cujo *fixed-data* é $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, com $p = q = 1$, unido a $M^{m'}$, com fibrado trivial unidimensional.

Como $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, com $p = q = 1$, é componente do *fixed-data* de ambas as involuções $\Gamma(M^{m'}, T')$ e $(M^{m'+1}, S')$, então a união $\Gamma(M^{m'}, T') \cup (M^{m'+1}, S')$ é cobordante a uma involução que fixa $M^{m'}$, com fibrado normal trivial unidimensional. Logo, pelo Corolário 1.5.4, $M^{m'}$ borda.

Desta forma, se mostrarmos que $M^{m'}$ não borda, então não pode existir tal involução (M^m, T) fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, com $p = q = 1$ e $m > m'$.

Para isso, vamos demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 2.3.1 *Sejam $(M_0^{m'}, S_0)$ e $(M_1^{m'}, S_1)$ involuções suaves fixando $\{pto\} \cup \mathbb{R}P^j$ e $\{pto\} \cup \mathbb{C}P^k$, respectivamente, onde m' é o máximo entre os valores máximos dos ranges de $\mathbb{R}P^j$ e $\mathbb{C}P^k$. Então a involução $\Gamma((M_0^{m'}, S_0) \cup (M_1^{m'}, S_1))$ não é cobordante a uma involução fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, com $p = q = 1$.*

Observação 2.3.3 *Segue do teorema anterior que $M^{m'}$ não borda, como queríamos. De fato, como m' pertence a pelo menos um dos ranges de $\mathbb{R}P^j$ e $\mathbb{C}P^k$, e $(M^{m'}, T')$ é uma involução fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, com $p = q = 1$, então, pela Observação 2.3.2, m' pertence* *a ambos os ranges de $\mathbb{R}P^j$ e $\mathbb{C}P^k$. Pela Proposição 2.3.1, $(M^{m'}, T')$ é cobordante a uma união $(M_0^{m'}, S_0) \cup (M_1^{m'}, S_1)$, onde $(M_0^{m'}, S_0)$ fixa $\{pto\} \cup \mathbb{R}P^j$ e $(M_1^{m'}, S_1)$ fixa $\{pto\} \cup \mathbb{C}P^k$. Note que $\Gamma((M_0^{m'}, S_0) \cup (M_1^{m'}, S_1))$ possui fixed-data cobordante a $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, com $p = q = 1$, unido a $\mathbb{R} \to M^{m'}$. Assim, se $M^{m'}$ borda então, pela Sequência de Conner-Floyd 1.5.1, $\Gamma((M_0^{m'}, S_0) \cup (M_1^{m'}, S_1))$ é cobordante a uma involução fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, com $p = q = 1$, o que contraria o teorema anterior.*

Vamos apresentar agora, alguns resultados mais técnicos, que serão utilizados para provar o Teorema 2.3.1.

Lema 2.3.1 *Seja N^m uma variedade, com $W(N^m) = 1 + w_1 + \cdots + w_m$. Escrevamos $W(N^m \times N^m) = (1 + w_1 + \cdots + w_m) \times (1 + w_1 + \cdots + w_m) := 1 + W_1 + \cdots + W_{2m}$. Então:*

$$W_2^m[N^m \times N^m]_2 = w_1^m[N^m]_2.$$

Prova: Vamos mostrar que

$$W_2^m[N^m \times N^m]_2 = (w_1^m \times w_1^m)[N^m \times N^m]_2 = w_1^m[N^m]_2 \cdot w_1^m[N^m]_2,$$

pois, se esta igualdade é verdeira, temos que $W_2^m[N^m \times N^m]_2 = 0$ se, e somente se, $w_1^m[N^m]_2 = 0$, e assim obtemos

$$W_2^m[N^m \times N^m]_2 = w_1^m[N^m]_2.$$

Temos $W_2 = 1 \times w_2 + w_2 \times 1 + w_1 \times w_1$. Então W_2^m será uma somatória de termos, cada qual obtido por uma escolha de x-vezes $1 \times w_2$, y-vezes $w_2 \times 1$ e z-vezes $w_1 \times w_1$, onde os termos em princípio não descartáveis serão tais que $2x + 2y + 2z = 2m$, ou seja, $x + y + z = m$.

Com essa escolha, o termo proveniente será $w_2^y \cdot w_1^z \times w_2^x \cdot w_1^z$.

Para este termo não ser descartável, devemos ter $2y + z = 2x + z = m$, o que implica que $x = y$ e $z = m - 2x$. Portanto, o termo se torna $w_2^x \cdot w_1^{m-2x} \times w_2^x \cdot w_1^{m-2x}$, com $0 \leq x \leq m/2$.

Afirmamos que o único termo sobrevivente é para $x = 0$, o que dará o termo $w_1^m \times w_1^m$, provando o lema.

De fato, suponha $x \geq 1$. Para a escolha de x-vezes $1 \times w_2$, temos $\begin{pmatrix} m \\ x \end{pmatrix}$ possibilidades. Uma vez fixada uma tal possibilidade, para a escolha de x-vezes o termo $w_2 \times 1$, teremos $\begin{pmatrix} m-x \\ x \end{pmatrix}$ possibilidades. Assim, teremos $\begin{pmatrix} m \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m-x \\ x \end{pmatrix}$ monômios provenientes da escolha simultânea de x-vezes $1 \times w_2$ e x-vezes $w_2 \times 1$.

Dessa forma, se $\begin{pmatrix} m \\ x \end{pmatrix} \equiv 0 \ (mod\ 2)$, o termo é zero. Se $\begin{pmatrix} m \\ x \end{pmatrix} \equiv 1 \ (mod\ 2)$, pelo Teorema de *Lucas* 1.10.1, a partição diádica de x está contida na partição diádica de m, e portando $m - x$ não conterá a partição diádica de x, implicando que $\begin{pmatrix} m-x \\ x \end{pmatrix} \equiv 0 \ (mod\ 2)$.

Segue que os termos obtidos com $x \geq 1$ não sobrevivem, como queríamos demonstrar. ■

A fim de provar o Teorema 2.3.1, vamos investigar a respeito das classes de cobordismo das involuções (N^n, S) fixando $\{pto\} \cup \mathbb{R}P^j$, onde $n = \begin{cases} j+3, & \text{se } a = 1 \\ j + 2^a, & \text{se } a \neq 1 \end{cases}$ é máximo, com $j = 2^a(2b+1)$.

Proposição 2.3.3 *Se (N^n, S) fixa $\{pto\} \cup \mathbb{R}P^j$, com n maximal, então a involução $(N^n \times N^n, S \times S)$ é cobordante a uma involução fixando $\{pto\} \cup \mathbb{C}P^j$, e $2n$ é a dimensão maximal das involuções que fixam $\{pto\} \cup \mathbb{C}P^j$.*

Prova: Consideremos o *fixed-data* de (N^n, S),

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & & \xi^1 \oplus \mathbb{R}^{n-j-1} \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \{pto\} & & \mathbb{R}P^j \end{array}.$$

Assim, o *fixed-data* de $(N^n \times N^n, S \times S)$ é

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & & (\xi^1 \oplus \mathbb{R}^{n-j-1}) \times (\xi^1 \oplus \mathbb{R}^{n-j-1}) & & \mathbb{R}^n \times (\xi^1 \oplus \mathbb{R}^{n-j-1}) & & (\xi^1 \oplus \mathbb{R}^{n-j-1}) \times \mathbb{R}^n \\ \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow & \cup & \downarrow \\ \{pto\} & & \mathbb{R}P^j \times \mathbb{R}P^j & & \{pto\} \times \mathbb{R}P^j & & \mathbb{R}P^j \times \{pto\} \end{array}.$$

É conhecido o fato de que o fibrado $(\xi^1 \oplus \mathbb{R}^{n-j-1}) \times (\xi^1 \oplus \mathbb{R}^{n-j-1}) \to \mathbb{R}P^j \times \mathbb{R}P^j$ é cobordante ao fibrado $\xi^2 \oplus \mathbb{R}^{2(n-j-1)} \to \mathbb{C}P^j$, com $q = 1$ (pois, via cálculo de números característicos, prova-se que $\xi^1 \times \xi^1 \to \mathbb{R}P^j \times \mathbb{R}P^j$ é cobordante a $\xi^2 \to \mathbb{C}P^j$). Além disso, como os dois últimos fibrados componentes do *fixed-data* de $(N^n \times N^n, S \times S)$ são cobordantes (mais ainda, equivalentes), então sua união borda.

Logo, $(N^n \times N^n, S \times S)$ é uma involução fixando, a menos de cobordismo, $\{pto\} \cup \mathbb{C}P^j$, com $q = 1$, que já conhecemos e sabemos que sua dimensão maximal é $2j + 6 = 2(j + 3) = 2n$, se $a = 1$, ou $2j + 2^{a+1} = 2(j + 2^a) = 2n$, se $a \neq 1$, onde $j = 2^a(2b + 1)$. ∎

Proposição 2.3.4 *Seja (M^n, T) uma involução suave fixando $\eta \to F$. Então o fibrado projetivo associado a $\eta \oplus \mathbb{R} \to M^n$, $\mathbb{R}P(\eta \oplus \mathbb{R})$, é uma variedade fechada n-dimensional e $[M^n] = [\mathbb{R}P(\eta \oplus \mathbb{R})]$ em $\mathcal{N}_n$.*

Prova: Ver [5], p. 78, 22.2. ∎

Lema 2.3.2 ***i)*** *Seja $\eta^r \to \mathbb{R}P^j$ um fibrado vetorial sobre o espaço projetivo real $\mathbb{R}P^j$, e consideremos sua classse de Stiefel-Whitney $W(\eta^r) = (1 + \alpha)^p$, $p \geq 0$, onde $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^j, \mathbb{Z}_2)$ é o gerador do anel de cohomologia de $\mathbb{R}P^j$. Se c é a primeira classe característica do fibrado linha associado a η^r, e $p(c, \alpha)$ é uma polinomial da forma*

$$p(c, \alpha) = \sum_{i \geq 0} \alpha^i c^{j+r-1-i},$$

então

$$p(c, \alpha)[\mathbb{R}P(\eta^r)]_2 = \frac{p(1, \alpha)}{(1 + \alpha)^p}[\mathbb{R}P^j]_2 = \text{coeficiente de } \alpha^j \text{ em } \frac{p(1, \alpha)}{(1 + \alpha)^p},$$

onde $p(1, \alpha)$ é a polinomial obtida por trocar c por 1 em $p(c, \alpha)$.
ii) *Seja $\gamma^r \to \mathbb{C}P^k$ um fibrado vetorial sobre o espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^k$, e consideremos sua classse de Stiefel-Whitney $W(\gamma^r) = (1 + \beta)^q$, $q \geq 0$, onde $\beta \in H^2(\mathbb{C}P^k, \mathbb{Z}_2)$ é o gerador do anel de cohomologia de $\mathbb{C}P^k$. Se d é a primeira classe característica do fibrado linha associado*

a γ^r, e $p(d,\beta)$ é uma polinomial da forma

$$p(d,\beta) = \sum_{i \geq 0} \beta^i d^{2k+r-1-2i},$$

então

$$p(d,\beta)[\mathbb{R}P(\gamma^r)]_2 = \frac{p(1,\beta)}{(1+\beta)^p}[\mathbb{C}P^k]_2 = \textit{coeficiente de } \beta^k \textit{ em } \frac{p(1,\beta)}{(1+\beta)^q},$$

onde $p(1,\beta)$ é a polinomial obtida por trocar d por 1 em $p(d,\beta)$.

Prova: Segue da Proposição 1.7.1 aplicada aos espaços projetivos $\mathbb{R}P^j$ e $\mathbb{C}P^k$. ■

Analisemos as possibilidades para $j = 2^a(2b+1)$:

Caso 1: Se $j = 2^a(2b+1) = 2b+1$, com $a = 0$, então j é ímpar, $n = j+1$ e N^n é cobordante a $\mathbb{R}P^{j+1}$, como vimos no exemplo 2.1.3. É conhecido o fato de que esta variedade é indecomponível em $\mathcal{N}_*$, por ser cobordante a um espaço projetivo de dimensão par, e vimos na Seção 1.6 que seu número característico $w_1^n[\mathbb{R}P^{j+1}]_2$ é não nulo, já que $j+1$ é par.

Caso 2: Se $j = 2^a(2b+1) = 2(2b+1)$, com $a = 1$, então $n = j+3$ e N^n é indecomponível em $\mathcal{N}_*$. Além disso, pela Proposição 2.3.4, $[N^{j+3}] = [\mathbb{R}P(\xi^1 \oplus \mathbb{R}^3)] + [\mathbb{R}P^{j+3}]$.

Como

$$W(\mathbb{R}P(\xi^1 \oplus \mathbb{R}^3)) = (1+\alpha)^{j+1}((1+c)^4 + (1+c)^3\alpha) = (1+\alpha)^{j+1}(1+\alpha+c\alpha+c^2\alpha),$$

então $w_1(\mathbb{R}P(\xi^1 \oplus \mathbb{R}^3)) = \alpha + \binom{j+1}{1}\alpha = \alpha + \alpha = 0$, já que $j+1$ é ímpar. Além disso, vimos na Seção 1.6 que $w_1(\mathbb{R}P^{j+3}) = 0$, pois $j+3$ é ímpar. Portanto,

$$w_1^n[N^{j+3}]_2 = w_1^n[\mathbb{R}P(\xi^1 \oplus \mathbb{R}^3)]_2 + w_1^n[\mathbb{R}P^{j+3}]_2 = 0.$$

Caso 3: Se $j = 2^a(2b+1)$, com $a > 1$, então $n = j + 2^a = 2^{a+1}(b+1)$. Pela Proposição 2.3.4, N^n é cobordante a $\mathbb{R}P(\xi^1 \oplus \mathbb{R}^{n-j}) \cup \mathbb{R}P^n$. Calculemos as classes de *Stiefel-Whitney* de $\mathbb{R}P(\xi^1 \oplus \mathbb{R}^{n-j})$ e $\mathbb{R}P^n$:

$$\begin{array}{rcl} W(\mathbb{R}P(\xi^1 \oplus \mathbb{R}^{n-j})) & = & (1+\alpha)^{j+1}((1+c)^{n-j+1} + (1+c)^{n-j}\alpha) \\ & = & (1+\alpha)^j(1+\alpha)(1+c)^{n-j}(1+c+\alpha) \\ & = & (1+\alpha)^{2^a(2b+1)}(1+\alpha)(1+c)^{2^a}(1+c+\alpha) \\ & = & (1+\alpha)(1+c+\alpha)(1+\alpha^{2^a})^{2b+1}(1+c^{2^a}) \end{array}.$$

$$\begin{array}{rcl} W(\mathbb{R}P^n) & = & (1+c)^{n+1} \\ & = & (1+c)(1+c)^n \\ & = & (1+c)(1+c)^{2^{a+1}(b+1)} \\ & = & (1+c)(1+c^{2^{a+1}})^{(b+1)} \end{array}.$$

Assim, $w_1(\mathbb{R}P(\xi^1 \oplus \mathbb{R}^{n-j})) = w_1(\mathbb{R}P^n) = c$, $w_2(\mathbb{R}P(\xi^1 \oplus \mathbb{R}^{n-j})) = \alpha(c+\alpha)$ e $w_2(\mathbb{R}P^n) = 0$.

Utilizando o Lema 2.3.2, obtemos

$$w_1^n[N^n]_2 = c^n[\mathbb{R}P(\xi^1 \oplus \mathbb{R}^{n-j})]_2 + c^n[\mathbb{R}P^n]_2 = \left(\text{coeficiente de } \alpha^j \text{ em } \frac{1}{1+\alpha}\right) + 1 = 1 + 1 = 0,$$

e,

$$\begin{aligned} w_2^{\frac{n}{2}}[N^n]_2 &= (\alpha(c+\alpha))^{\frac{n}{2}}[\mathbb{R}P(\xi^1 \oplus \mathbb{R}^{n-j})]_2 = \text{coeficiente de } \alpha^j \text{ em } \frac{\alpha^{2^a(b+1)}(1+\alpha)^{2^a(b+1)}}{1+\alpha} \\ &= \binom{2^a(b+1)-1}{j-2^a(b+1)} = \binom{2^ab+2^a-1}{2^ab} \end{aligned}$$

Como

$$2^ab + 2^a - 1 = 2^ab + 2^{a-1} + 2^{a-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 1,$$

então, pelo Teorema de *Lucas*, temos que $w_2^{\frac{n}{2}}[N^n]_2 \neq 0$.

Agora temos subsídios suficientes para provar o Teorema 2.3.1.

Prova do Teorema 2.3.1:

Pelo enunciado do teorema, $(M_0^{m'}, S_0)$ e $(M_1^{m'}, S_1)$ são involuções suaves fixando $\{pto\} \cup \mathbb{R}P^j$ e $\{pto\} \cup \mathbb{C}P^k$, respectivamente, onde m' é o máximo dos *ranges* de $\mathbb{R}P^j$ e $\mathbb{C}P^k$, e queremos provar que a involução $\Gamma((M_0^{m'}, S_0) \cup (M_1^{m'}, S_1))$ não é cobordante a uma involução fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, com $p = q = 1$.

Para isto, vamos provar que $M_0^{m'}$ não é cobordante a $M_1^{m'}$ pois, desta forma, a união $M_0^{m'} \cup M_1^{m'}$, que é componente do conjunto de pontos fixos de $\Gamma((M_0^{m'}, T_0) \cup (M_1^{m'}, T_1))$, não borda, o que demonstra o teorema.

Suponhamos que $M_0^{m'}$ seja cobordante a $M_1^{m'}$. Escrevamos $j = 2^a(2b+1)$ e $k = 2^c(2d+1)$. Como $M_1^{m'}$ possui dimensão maximal fixando $\{pto\} \cup \mathbb{C}P^k$, então

$$m' = \begin{cases} 2k+6, & \text{se } c = 1 \\ 2k + 2^{c+1}, & \text{se } c \neq 1 \end{cases}$$

é par. Se $a = 1$, então $m' = j + 3 = 2(2b+1) + 3$ é ímpar, o que é uma contradição. Portanto $a \neq 1$.

Pela Proposição 2.3.3, $(M_1^{m'}, T_1)$ é cobordante a $(P^{\frac{m'}{2}} \times P^{\frac{m'}{2}}, S \times S)$, onde $(P^{\frac{m'}{2}}, S)$ é uma involução fixando $\{pto\} \cup \mathbb{R}P^k$, e $m'/2$ é a dimensão máxima das involuções que fixam $\{pto\} \cup \mathbb{R}P^k$. Assim, $M_1^{m'}$ é decomponível e, pelo caso 1 visto anteriormente, $a \neq 0$.

Portanto $a > 1$, e assim j é par.

Pelo caso 3, temos $w_2^{\frac{m'}{2}}[M_0^{m'}]_2 \neq 0$. Além disso, segue do Lema 2.3.1 que

$$0 \neq w_2^{\frac{m'}{2}}[M_1^{m'}]_2 = w_1^{\frac{m'}{2}}[P^{\frac{m'}{2}}]_2,$$

e assim, pelos casos 1, 2 e 3, k é ímpar.

Portanto, pelo Teorema 1.9.2, pelo exemplo 1.9.1 e pela Observação 1.9.1, temos

$$\overline{\chi(M_0^{m'})} = \overline{\chi(\{pto\})} + \overline{\chi(\mathbb{R}P^j)} = (1+1)\ (mod\ 2) = 0,$$

e

$$\overline{\chi(M_1^{m'})} = \overline{\chi(\{pto\})} + \overline{\chi(\mathbb{C}P^k)} = (1+0)(mod\ 2) = 1,$$

o que contraria a hipótese de que $M_0^{m'}$ e $M_1^{m'}$ são cobordantes, já que a característica de *Euler* módulo 2 é um invariante de bordismo.

Portanto, $M_0^{m'}$ e $M_1^{m'}$ não são cobordantes, como queríamos demonstrar. ■

Dessa forma, concluímos que toda involução (M^m, T) fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, com $p = q = 1$, é uma união de uma involução fixando $\{pto\} \cup \mathbb{R}P^j$ com uma involução fixando $\{pto\} \cup \mathbb{C}P^k$, a menos de cobordismo equivariante.

Caso uma involução seja equivariantemente cobordante a uma tal involução, diremos que a mesma é do **tipo III**.

Capítulo

3

Classificação das Involuções Fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$

Neste capítulo, realizaremos a classificação, a menos de cobordismo equivariante, das involuções que fixam $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$. Faremos uso das ferramentas descritas no primeiro capítulo desta tese para mostrar que toda tal involução é equivariantemente cobordante a um dos modelos descritos no segundo capítulo (tipos I, II ou III).

3.1 Introdução

Seja (M^m, T) uma involução suave sobre uma variedade fechada M^m, que fixa $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$. Denotemos o *fixed-data* de (M^m, T) por

$$\begin{array}{ccc} \eta^{m-j} & & \gamma^{m-2k} \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^j & & \mathbb{C}P^k \end{array}, \tag{3.1}$$

com $W(\eta^{m-j}) = (1+\alpha)^p$ e $W(\gamma^{m-2k}) = (1+\beta)^q$, onde $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^j, \mathbb{Z}_2)$ é o gerador de $H^*(\mathbb{R}P^j, \mathbb{Z}_2)$ e $\beta \in H^2(\mathbb{C}P^k, \mathbb{Z}_2)$ é o gerador de $H^*(\mathbb{C}P^k, \mathbb{Z}_2)$, conforme vimos na Observação 1.6.1.

Pela Sequência de *Conner-Floyd*, a união dos fibrados linha associados aos fibrados η^{m-j} e γ^{m-2k} (definição 1.5.2), denotada por

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 & & \lambda_2 \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P(\eta^{m-j}) & & \mathbb{R}P(\gamma^{m-2k}) \end{array}, \tag{3.2}$$

borda. Logo estes fibrados são cobordantes. Isto implica que os números característicos correspondentes destes fibrados são iguais. Assim, trabalharemos com equações especiais envolvendo tais números característicos para obtermos as informações desejadas.

Pelo Teorema de *Borel-Hirzebruch* 1.5.2, as classes características dos espaços $\mathbb{R}P(\eta^{m-j})$ e $\mathbb{R}P(\gamma^{m-2k})$ são dadas, respectivamente, por

$$W(\mathbb{R}P(\eta^{m-j})) = (1+\alpha)^{j+1}\left((1+c)^{m-j} + (1+c)^{m-j-1}p\alpha + \cdots (1+c)^{m-j-p}\alpha^p\right),$$

e

$$W(\mathbb{R}P(\gamma^{m-2k})) = (1+\beta)^{k+1}\left((1+c)^{m-2k} + (1+c)^{m-2k-2}q\beta + \cdots + (1+c)^{m-2k-2q}\beta^q\right),$$

onde c denota tanto a classe de $\lambda_1 \to \mathbb{R}P(\eta^{m-j})$ quanto a classe de $\lambda_2 \to \mathbb{R}P(\gamma^{m-2k})$, por simplicidade de notação.

Dado r inteiro, vamos definir as classes $W[r]$ sobre $\mathbb{R}P(\eta^{m-j})$ e $\mathbb{R}P(\gamma^{m-2k})$, conforme vimos na Seção 1.7.1, por

$$W[r](\mathbb{R}P(\eta^{m-j})) = \frac{1}{(1+c)^{m-j-r}} W(\mathbb{R}P(\eta^{m-j})),$$

e

$$W[r](\mathbb{R}P(\gamma^{m-2k})) = \frac{1}{(1+c)^{m-j-r}} W(\mathbb{R}P(\gamma^{m-2k})).$$

Desta forma, as classes $W[r]$ sobre $\mathbb{R}P(\eta^{m-j})$ e $\mathbb{R}P(\gamma^{m-2k})$ são dadas, respectivamente, por

$$W[r](\mathbb{R}P(\eta^{m-j})) = (1+\alpha)^{j+1}\left((1+c)^r + p\alpha(1+c)^{r-1} + \cdots\right), \tag{3.3}$$

e

$$W[r](\mathbb{R}P(\gamma^{m-2k})) = (1+\beta)^{k+1}\left((1+c)^{j+r-2k} + q\beta(1+c)^{j+r-2k-2} + \cdots\right). \tag{3.4}$$

Nossa classificação será dividida em três casos:

- O caso j ímpar e p ímpar
- O caso j par e p par
- O caso j par e p ímpar

Se j é ímpar e p é par, então o fibrado $\eta^{m-j} \to \mathbb{R}P^j$ borda e, com visto na Seção 2.1, a involução é do tipo I. Portanto nossa discussão se resume aos três casos acima.

3.2 O caso j ímpar e p ímpar

A resolução deste caso é obtida com o uso das classes $W[0](\mathbb{R}P(\eta^{m-j}))$ e $W[0](\mathbb{R}P(\gamma^{m-2k}))$. De (3.3) e (3.4), obtemos:

$$\begin{aligned}
W[0](\mathbb{R}P(\eta^{m-j})) &= (1+\alpha)^{j+1}\left(1 + \frac{p\alpha}{1+c} + \binom{p}{2}\frac{\alpha^2}{(1+c)^2} + \cdots\right) \\
&= \left(1 + (j+1)\alpha + \binom{j+1}{2}\alpha^2 + \cdots + \binom{j+1}{j}\alpha^j\right) \cdot \\
&\quad \left(1 + p\alpha(1+c+c^2+\cdots) + \text{termos com grau} \geq 2\right),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} W[0](\mathbb{R}P(\gamma^{m-2k})) &= (1+\beta)^{k+1}\left((1+c)^{j-2k}+q\beta(1+c)^{j-2k-2}+\cdots\right) \\ &= (1+(k+1)\beta+\text{termos com grau}\geq 2)\cdot \\ &\quad\ (1+(j-2k)c+\text{termos com grau}\geq 2)\,. \end{aligned}$$

Assim,

$$w[0]_1=\begin{cases} (j+1)\alpha+p\alpha=\alpha, & \text{sobre } \mathbb{R}P^j \\ (j-2k)c=c, & \text{sobre } \mathbb{C}P^k \end{cases}.$$

Como $m\geq 1$, temos o número característico

$$w[0]_1^j c^{m-1-j}=\begin{cases} \alpha^j c^{m-1-j}, & \text{sobre } \mathbb{R}P^j \\ c^{m-1}, & \text{sobre } \mathbb{C}P^k \end{cases}.$$

Dessa forma, obtemos a equação

$$1=\alpha^j c^{m-1-j}[\mathbb{R}P(\eta^{m-j})]_2=c^{m-1}[\mathbb{R}P(\gamma^{m-2k})]_2. \tag{3.5}$$

Suponhamos $m>j+1$. Assim, $m\geq j+2$ e temos o número característico

$$w[0]_1^{j+1}c^{m-1-(j+1)}=\begin{cases} \alpha^{j+1}c^{m-1-(j+1)}=0, & \text{sobre } \mathbb{R}P^j \\ c^{m-1}, & \text{sobre } \mathbb{C}P^k \end{cases},$$

de onde obtemos

$$0=\alpha^{j+1}c^{m-1-(j+1)}[\mathbb{R}P(\eta^{m-j})]_2=c^{m-1}[\mathbb{R}P(\gamma^{m-2k})]_2,$$

o que contraria a equação obtida anteriormente. Portanto, $m=j+1$. Assim, η^{m-j} é um fibrado linha sobre $\mathbb{R}P^j$, com $W(\eta^{m-j})=(1+\alpha)^p=1+p\alpha=1+\alpha$, pois p é ímpar. Logo, $p=1$.

Consideremos a involução $(\mathbb{R}P^{j+1},T_0)$, onde $T_0[x_0,x_1,\cdots,x_{j+1}]=[-x_0,x_1,\cdots,x_{j+1}]$. Sabemos que esta involução fixa $\{pto\}\cup\mathbb{R}P^j$, com fibrado normal sobre $\mathbb{R}P^j$ tendo $W=1+\alpha$. Assim, este fibrado normal sobre $\mathbb{R}P^j$ é cobordante a $\eta^{m-j}\to\mathbb{R}P^j$. Desta forma, a união $(M^m,T)\cup(\mathbb{R}P^{j+1},T_0)$ é cobordante a uma involução que fixa $\{pto\}\cup\mathbb{C}P^k$, com fibrado normal a $\mathbb{C}P^k$ cobordante a γ^{m-2k}, por cancelar duas cópias de $\mathbb{R}P^j$ com mesmo fibrado normal, e com $W(\gamma^{m-2k})=(1+\beta)^q$. Da classificação obtida por *P. L. Q. Pergher* e *A. Ramos* em [21], concluimos que $q=1$, e portanto a involução é do tipo III.

3.3 O caso j par e p par

Analogamente ao que foi feito no caso anterior, de (3.3) e (3.4), obtemos

$$w[0]_1=\begin{cases} (j+1)\alpha+p\alpha=\alpha, & \text{sobre } \mathbb{R}P^j \\ (j-2k)c=0, & \text{sobre } \mathbb{C}P^k \end{cases}.$$

Como $m\geq j+1$, temos o número de *Whitney*

$$w[0]_1^j c^{m-1-j}=\begin{cases} \alpha^j c^{m-1-j}, & \text{sobre } \mathbb{R}P^j \\ 0, & \text{sobre } \mathbb{C}P^k \end{cases}.$$

Assim,

$$0 = w[0]_1^j c^{m-1-j}[\mathbb{R}P(\gamma^{m-2k})]_2 = \alpha^j c^{m-1-j}[\mathbb{R}P(\eta^{m-j})]_2 = 1,$$

o que é um absurdo.

Portanto, não temos involuções fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, com j par e p par, e este caso está excluído.

3.4 O caso j par e p ímpar

Seja $s \in \mathbb{N}$ o menor natural tal que $j < 2^{s+1}$. Como j é par, temos que $2^s \leq j < 2^{s+1}$.

Se $p \geq 2^{s+1}$ então, como p é ímpar, temos $p > 2^{s+1}$. Assim, $p = t + 2^{s+1}$, para algum t ímpar, com $0 < t < 2^{s+1}$ (pois $j < 2^{s+1}$). Dessa forma,

$$(1+\alpha)^p = (1+\alpha)^t(1+\alpha)^{2^{s+1}} = (1+\alpha)^t(1+\alpha^{2^{s+1}}) = (1+\alpha)^t,$$

e, neste caso, seguiríamos trabalhando com t ao invés de p. Portanto, podemos assumir que $p < 2^{s+1}$.

Observação 3.4.1 *Se $m = j+1$, então (M^m, T) é uma involução do tipo III. De fato, se $m = j+1$, então η^{m-j} é um fibrado linha sobre $\mathbb{R}P^j$ e, como p é ímpar, $W(\eta^{m-j}) = (1+\alpha)^p = 1 + p\alpha$, e assim $p = 1$. Então $(M^m, T) \cup (\mathbb{R}P^{j+1}, T_0)$ é cobordante a uma involução fixando $\{pto\} \cup \mathbb{C}P^k$, e assim $q = 1$. Logo, (M^m, T) é cobordante a uma involução do tipo III.*

Portanto, podemos assumir que $m > j+1$.

Neste caso em que j é par e p é ímpar, não obtemos informações relevantes a partir das classes $W[0](\mathbb{R}P(\eta^{m-j}))$ e $W[0](\mathbb{R}P(\gamma^{m-2k}))$, pois $w[0]_1(\mathbb{R}P(\eta^{m-j})) = 0$ e $w[0]_1(\mathbb{R}P(\gamma^{m-2k})) = 0$. Então vamos trabalhar com equações oriundas das classes $W[1](\mathbb{R}P(\eta^{m-j}))$ e $W[1](\mathbb{R}P(\gamma^{m-2k}))$.

A partir de (3.3) e (3.4), obtemos:

$$W[1](\mathbb{R}P(\eta^{m-j})) =$$
$$(1+\alpha)^{j+1}\left((1+c) + p\alpha + \binom{p}{2}\frac{\alpha^2}{(1+c)} + \binom{p}{3}\frac{\alpha^3}{(1+c)^2} + \text{termos com grau} \geq 4\right),$$

e

$$W[1](\mathbb{R}P(\gamma^{m-2k})) = (1+\beta)^{k+1}\left((1+c)^{j+1-2k} + q\beta(1+c)^{j+1-2k-2} + \text{termos com grau} \geq 4\right).$$

Para auxiliar nossos cálculos, temos o seguinte resultado:

Afirmação 3.4.1 *Sejam m e n dois naturais. Se m é ímpar e n é par, então*

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{n+1} \ (mod\ 2).$$

Prova: Como m é ímpar, sua expansão diádica é dada por $m = 1 + 2^{r_1} + 2^{r_2} + \cdots + 2^{r_t}$, onde $1 \leq r_1 < r_2 < \cdots < r_t$. Por outro lado, como n é par, sua expansão diádica é da forma $n = 2^{s_1} + 2^{s_2} + \cdots + 2^{s_l}$, onde $1 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_l$.

Observemos que a expansão diádica de $n+1$ é dada por $n+1 = 1 + 2^{s_1} + 2^{s_2} + \cdots + 2^{s_l}$ e, assim, temos que a expansão diádica de n está contida na expansão diádica de m se, e somente se, a expansão diádica de $n+1$ está contida da expansão diádica de m.

Logo, pelo Teorema de *Lucas* 1.10.1, segue a igualdade. ■

Das equações de $W[1]$ acima e, com o auxílio da afirmação 3.4.1, obtemos

$$w[1]_2 = \begin{cases} \alpha c + \lambda \alpha^2, & \text{sobre } \mathbb{R}P^j \\ (k+1+q)\beta + \binom{j+1-2k}{2} c^2, & \text{sobre } \mathbb{C}P^k \end{cases},$$

e

$$w[1]_3 = \begin{cases} (\lambda+1)\alpha^2 c, & \text{sobre } \mathbb{R}P^j \\ (k+1+q)\beta c + \binom{j+1-2k}{2} c^3, & \text{sobre } \mathbb{C}P^k \end{cases},$$

onde $\lambda = \binom{j+1}{2} + 1 + \binom{p}{2}$ (no caso, 1 é oriundo de $\binom{j+1}{1} p\alpha^2 = \alpha^2$).

Nosso problema agora se divide em casos correspondentes aos parâmetros

$$\binom{j+1-2k}{2}, \ (k+1+q) \text{ e } \lambda.$$

Para facilitar nossos cálculos, utilizaremos o valor de λ dado pelo resultado abaixo.

Proposição 3.4.1 *Com as notações acima, temos a seguinte igualdade:*

$$\lambda = \binom{j+1}{2} + 1 + \binom{p}{2} = \binom{j+1+p}{2}. \tag{3.6}$$

Prova: Para provar que (3.6) é verdadeira, demonstraremos ser válida a igualdade equivalente

$$\binom{j+1}{2} + \binom{p}{2} = \binom{j+1+p}{2} + 1.$$

Primeiramente, suponhamos que ambos $j+1$ e p possuam 2 na sua expansão diádica. Dessa forma, como $j+1$ e p são ímpares, suas expansões diádicas são da forma $j+1 = 1+2+2^{j_1}+2^{j_2}+\cdots+2^{j_t}$, com $1 < j_1 < j_2 < \cdots < j_t$, e $p = 1+2+2^{p_1}+2^{p_2}+\cdots+2^{p_s}$, com $1 < p_1 < p_2 < \cdots < p_s$. Assim,

$$j+1+p = 1+1+2+2+2^{j_1}+2^{p_1}+\cdots(\text{potências } 2^s \text{ com } s \geq 2) = 2+2^2+\cdots(\text{potências } 2^s \text{ com } s \geq 2).$$

Logo, 2 aparece na expansão diádica de $j+1+p$ e, pelo Teorema de *Lucas*, temos

$$\binom{j+1}{2} + \binom{p}{2} = 1+1 = 0 \ (mod\ 2) \text{ e } \binom{j+1+p}{2} + 1 = 1+1 = 0 \ (mod\ 2).$$

Suponhamos agora que ambos $j+1$ e p não possuam 2 na sua expansão diádica. Assim, suas expansões diádicas têm a forma $j+1 = 1+2^{j_1}+2^{j_2}+\cdots+2^{j_t}$, com $1 < j_1 < j_2 < \cdots < j_t$, e $p = 1+2^{p_1}+2^{p_2}+\cdots+2^{p_s}$, com $1 < p_1 < p_2 < \cdots < p_s$. Logo,

$$j+1+p = 1+1+2^{j_1}+2^{p_1}+\cdots(\text{potências } 2^s \text{ com } s \geq 3) = 2+\cdots(\text{potências } 2^s \text{ com } s \geq 3).$$

Dessa forma, 2 aparece na expansão diádica de $j+1+p$ e, pelo Teorema de *Lucas*, temos

$$\binom{j+1}{2}+\binom{p}{2}=0+0=0\ (mod\ 2) \text{ e } \binom{j+1+p}{2}+1=1+1=0\ (mod\ 2).$$

Enfim, analisemos o caso em que ou $j+1$ ou p possua 2 na sua expansão diádica. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $j+1$ possua 2 na sua expansão diádica e p não possua. Dessa forma, suas expansões diádicas têm a forma $j+1=1+2+2^{j_1}+2^{j_2}+\cdots+2^{j_t}$, com $1<j_1<j_2<\cdots<j_t$, e $p=1+2^{p_1}+2^{p_2}+\cdots+2^{p_s}$, com $1<p_1<p_2<\cdots<p_s$. Assim,

$$j+1+p=1+1+2+2^{j_1}+2^{p_1}+\cdots(\text{potências } 2^s \text{ com } s\geq 3)=2^2+\cdots(\text{potências } 2^s \text{ com } s\geq 3).$$

Logo, 2 não aparece na expansão diádica de $j+1+p$ e, pelo Teorema de *Lucas*, temos

$$\binom{j+1}{2}+\binom{p}{2}=1+0=1\ (mod\ 2) \text{ e } \binom{j+1+p}{2}+1=0+1=1\ (mod\ 2).$$

■

Em relação às classes $w[1]_3$ e $w[1]_2$, temos o resultado abaixo.

Proposição 3.4.2 *Em relação ao quadrado de Steenrod $S_q^1 w[1]_2$, temos a seguinte igualdade:*

$$w[1]_3+w[1]_2c=S_q^1w[1]_2=\begin{cases}\alpha c^2+\alpha^2 c, & sobre\ \mathbb{R}P^j\\ 0, & sobre\ \mathbb{C}P^k\end{cases}.$$

Prova: Sobre $\mathbb{R}P^j$, por um lado temos

$$w[1]_3+w[1]_2c=(\lambda+1)\alpha^2c+(\alpha c+\lambda\alpha^2)c=\alpha^2c+\alpha c^2,$$

e, por outro lado, utilizando a Fórmula de *Cartan*, temos

$$\begin{aligned} S_q^1w[1]_2 &= S_q^1(\alpha c+\lambda\alpha^2)=S_q^1(\alpha c)+S_q^1(\lambda\alpha^2)\\ &= S_q^1(\alpha)S_q^0(c)+S_q^0(\alpha)S_q^1(c)+\lambda S_q^1(\alpha^2)\\ &= \alpha^2c+\alpha c^2+\lambda(S_q^1(\alpha)S_q^0(\alpha)+S_q^0(\alpha)S_q^1(\alpha))=\alpha^2c+\alpha c^2. \end{aligned}$$

Agora, sobre $\mathbb{C}P^k$, por um lado temos

$$w[1]_3+w[1]_2c=(k+1+q)\beta c+\binom{j+1-2k}{2}c^3+\left((k+1+q)\beta+\binom{j+1-2k}{2}c^2\right)c=0,$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned} S_q^1w[1]_2 &= S_q^1\left((k+1+q)\beta+\binom{j+1-2k}{2}c^2\right)\\ &= (k+1+q)S_q^1(\beta)+\binom{j+1-2k}{2}S_q^1(c^2). \end{aligned}$$

Pela Fórmula de *Cartan*, $S_q^1(c^2)=S_q^1(c)S_q^0(c)+S_q^0(c)S_q^1(c)=0$.

Como $\beta = w_2(\mathbb{C}P^k)$, utilizando a Fórmula de Wu, temos

$$\begin{aligned} S_q^1 w[1]_2 &= (k+1+q)S_q^1\beta = (k+1+q)\sum_{t=0}^{1}\begin{pmatrix} 2-1-1+t \\ t \end{pmatrix} w_{1-t}(\mathbb{C}P^k)w_{2+t}(\mathbb{C}P^k) \\ &= (k+1+q)\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} w_1(\mathbb{C}P^k)w_2(\mathbb{C}P^k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} w_0(\mathbb{C}P^k)w_3(\mathbb{C}P^k)\right) = 0, \end{aligned}$$

já que, sobre $\mathbb{C}P^k$, $w_1 = 0$ e $w_3 = 0$. ■

A conclusão da nossa classificação será obtida a partir da análise dos dois possíveis casos correspondentes à paridade do parâmetro

$$\lambda = \begin{pmatrix} j+1+p \\ 2 \end{pmatrix}.$$

É o que será feito a seguir:

O caso $\lambda = 0$ $(mod\ 2)$

Para simplificar as notações, a partir de agora escreveremos apenas $\lambda = 0$ ao invés de $\lambda = 0$ $(mod\ 2)$.

Como $\lambda = 0$, utilizando a Proposição 3.4.2 e escrevendo $\beta' = w[1]_2(\mathbb{R}P(\gamma^{m-2k}))$, temos que

$$w[1]_2 = \begin{cases} \alpha c, & \text{sobre } \mathbb{R}P^j \\ \beta', & \text{sobre } \mathbb{C}P^k \end{cases},$$

$$S_q^1 w[1]_2 = \begin{cases} \alpha c^2 + \alpha^2 c, & \text{sobre } \mathbb{R}P^j \\ 0, & \text{sobre } \mathbb{C}P^k \end{cases},$$

e

$$w[1]_3 = \begin{cases} \alpha^2 c, & \text{sobre } \mathbb{R}P^j \\ \beta' c, & \text{sobre } \mathbb{C}P^k \end{cases}.$$

Denotemos $w_3 := w[1]_3 = \begin{cases} \alpha^2 c, & \text{sobre } \mathbb{R}P^j \\ \beta' c, & \text{sobre } \mathbb{C}P^k \end{cases}$.

Queremos mostrar que podemos introduzir classes $w_{2^r+1} = S_q^{2^{r-1}} w_{2^{r-1}+1}$, indutivamente, para $r > 1$, e com

$$w_{2^r+1} = \begin{cases} \alpha^{2^r} c, & \text{sobre } \mathbb{R}P^j \\ \beta'^{2^{r-1}} c, & \text{sobre } \mathbb{C}P^k \end{cases}.$$

Para isso, utilizaremos o seguinte resultado:

Proposição 3.4.3 *Se a é uma classe de cohomologia, então*

$$S_q^i(a^2) = \begin{cases} 0, & \textit{se } i \textit{ é ímpar} \\ (S_q^{\frac{i}{2}}(a))^2, & \textit{se } i \textit{ é par} \end{cases}.$$

Prova: Pela Fórmula de *Cartan*, temos:

$$S_q^i(a^2) = \sum_{t=0}^{i} S_q^{i-t}(a)S_q^t(a).$$

Assim, se i é ímpar,

$$S_q^i(a^2) = S_q^i(a)S_q^0(a) + S_q^{i-1}(a)S_q^1(a) + \cdots + S_q^1(a)S_q^{i-1}(a) + S_q^0(a)S_q^i(a),$$

e todos os termos $S_q^{i-t}(a)S_q^t(a)$ ocorrem aos pares, o que implica que esta soma é nula.

Agora, se i é par,

$$S_q^i(a^2) = S_q^i(a)S_q^0(a) + \cdots + S_q^{\frac{i}{2}}(a)S_q^{\frac{i}{2}}(a) + \cdots + S_q^0(a)S_q^i(a),$$

e, neste caso, todos os termos $S_q^{i-t}(a)S_q^t(a)$ ocorrem aos pares, com exceção do termo $S_q^{\frac{i}{2}}(a)S_q^{\frac{i}{2}}(a) = (S_q^{\frac{i}{2}}(a))^2$.

Portanto a soma é igual a $(S_q^{\frac{i}{2}}(a))^2$. ■

Com este resultado, podemos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3.4.1 *Para cada $r > 1$, temos*

$$w_{2^r+1} = S_q^{2^{r-1}} w_{2^{r-1}+1} = \begin{cases} \alpha^{2^r}c, & \textit{sobre } \mathbb{R}P^j \\ \beta'^{2^{r-1}}c, & \textit{sobre } \mathbb{C}P^k \end{cases}.$$

Prova: Mostremos por indução sobre r. Para $r = 2$, temos

$$\begin{aligned} w_5 = S_q^2 w_3 &= \begin{cases} S_q^2(\alpha^2 c), & \text{sobre } \mathbb{R}P^j \\ S_q^2(\beta' c), & \text{sobre } \mathbb{C}P^k \end{cases} \\ &= \begin{cases} S_q^2(\alpha^2)S_q^0(c) + S_q^0(\alpha^2)S_q^2(c) + S_q^1(\alpha^2)S_q^1(c), & \text{sobre } \mathbb{R}P^j \\ S_q^2(\beta')S_q^0(c) + S_q^0(\beta')S_q^2(c) + S_q^1(\beta')S_q^1(c), & \text{sobre } \mathbb{C}P^k \end{cases}. \end{aligned}$$

Mas $S_q^2(c) = 0$ e, pela proposição anterior, $S_q^1(\alpha^2) = 0$. Também, como visto na Proposição 3.4.2, $S_q^1(\beta') = 0$. Segue que

$$w_5 = \begin{cases} \alpha^{2^2}c, & \text{sobre } \mathbb{R}P^j \\ \beta'^2 c, & \text{sobre } \mathbb{C}P^k \end{cases}.$$

Portanto, para $r = 2$ a propriedade é válida. Suponhamos que a propriedade seja válida para um certo r, ou seja, suponhamos que

$$w_{2^r+1} = \begin{cases} \alpha^{2^r}c, & \text{sobre } \mathbb{R}P^j \\ \beta'^{2^{r-1}}c, & \text{sobre } \mathbb{C}P^k \end{cases}.$$

Mostremos que é válida para $r + 1$. De fato, utilizando a Fórmula de *Cartan*, a proposição anterior e o fato de que $S_q^i(c) = 0$ se $i > 1$, temos

$$\begin{aligned} w_{2^{r+1}+1} &= S_q^{2^r} w_{2^r+1} = S_q^{2^r}(\alpha^{2^r} c) \\ &= S_q^{2^r}(\alpha^{2^r}) S_q^0(c) + S_q^{2^r-1}(\alpha^{2^r}) S_q^1(c) + \cdots \\ &= \alpha^{2^{r+1}} c + S_q^{2^r-1}((\alpha^{2^{r-1}})^2) S_q^1(c) \\ &= \alpha^{2^{r+1}} c, \end{aligned}$$

sobre $\mathbb{R}P^j$, e

$$\begin{aligned} w_{2^{r+1}+1} &= S_q^{2^r} w_{2^r+1} = S_q^{2^r}(\beta'^{2^{r-1}} c) \\ &= S_q^{2^r}(\beta'^{2^{r-1}}) S_q^0(c) + S_q^{2^r-1}(\beta'^{2^{r-1}}) S_q^1(c), \end{aligned}$$

sobre $\mathbb{C}P^k$.

Observemos que β' tem grau 2, então $\beta'^{2^{r-1}}$ tem grau 2^r. Assim,

$$\begin{aligned} w_{2^r+1} &= (\beta'^{2^{r-1}})^2 c + S_q^{2^r-1}(\beta'^{2^{r-1}}) S_q^1(c) \\ &= \beta'^{2^r} c + S_q^{2^r-1}((\beta'^{2^r-2})^2) S_q^1(c) \\ &= \beta'^{2^r} c, \end{aligned}$$

sobre $\mathbb{C}P^k$, o que finaliza esta demonstração. ∎

Agora, podemos considerar as classes

$$w[1]_2^{t-1} S_q^1 w[1]_2 c^{m-1-(2t+1)} = \begin{cases} \alpha^t c^{m-1-t} + \alpha^{t+1} c^{m-1-(t+1)}, & \text{sobre } \mathbb{R}P^j \\ 0, & \text{sobre } \mathbb{C}P^k \end{cases},$$

para $2t + 1 \leq m - 1$, ou seja, $2t \leq m - 2$.

Como $j + 2 \leq m$ (e assim $j \leq m - 2$), podemos considerar, em particular, tais classes para $1 \leq t \leq j/2$.

Temos então

$$w[1]_2^{t-1} S_q^1 w[1]_2 c^{m-1-(2t+1)} [\mathbb{R}P(\eta^{m-j})]_2 = w[1]_2^{t-1} S_q^1 w[1]_2 c^{m-1-(2t+1)} [\mathbb{R}P(\gamma^{m-2k})]_2,$$

de onde obtemos que

$$\begin{aligned} & (\alpha^t c^{m-1-t} + \alpha^{t+1} c^{m-1-(t+1)})[\mathbb{R}P(\eta^{m-j})]_2 = 0 \\ \Rightarrow\ & \alpha^t c^{m-1-t}[\mathbb{R}P(\eta^{m-j})]_2 = \alpha^{t+1} c^{m-1-(t+1)}[\mathbb{R}P(\eta^{m-j})]_2 \\ \Rightarrow\ & \text{coeficiente de } \alpha^j \text{ em } \frac{\alpha^t}{(1+\alpha)^p} = \text{coeficiente de } \alpha^j \text{ em } \frac{\alpha^{t+1}}{(1+\alpha)^p}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

pelo Lema 2.3.2.

Observando que

$$(1+\alpha)^{2^{s+1}-p} = \frac{(1+\alpha)^{2^{s+1}}}{(1+\alpha)^p} = \frac{(1+\alpha^{2^{s+1}})}{(1+\alpha)^p} = \frac{1}{(1+\alpha)^p},$$

já que $j < 2^{s+1}$, e chamando $e = 2^{s+1} - p$, temos

$$\frac{\alpha^t}{(1+\alpha)^p} = \alpha^t(1+\alpha)^e = \alpha^t\left(1 + e\alpha + \binom{e}{2}\alpha^2 + \cdots + \binom{e}{j-1}\alpha^{j-1} + \binom{e}{j}\alpha^j\right),$$

e

$$\frac{\alpha^{t+1}}{(1+\alpha)^p} = \alpha^{t+1}\left(1 + e\alpha + \binom{e}{2}\alpha^2 + \cdots + \binom{e}{j-1}\alpha^{j-1} + \binom{e}{j}\alpha^j\right).$$

Portanto, pela equação (3.7),

$$\binom{e}{j-t} = \binom{e}{j-(t+1)},$$

para todo $1 \leq t \leq j/2$.

Logo,

$$\binom{e}{j-1} = \binom{e}{j-2} = \binom{e}{j-3} = \cdots = \binom{e}{j-j/2} = \binom{e}{j-j/2-1}. \tag{3.8}$$

Observação 3.4.2 *Notemos que $j < 2^{s+1}$ implica que $j/2 < 2^s$, e assim, $j/2 - 1 < 2^s - 1$. O fato $2^s \leq j$ implica que $2^s - 1 < j$ e, se $2^s < j$, temos $2^s - 1 < j - 1$ e $2^s \leq j - 1$. Logo, sempre que tivermos $j/2 - 1 < 2^s \leq j$ e $j/2 - 1 < 2^s - 1 < j$, e se $2^s < j$, então teremos que $j/2 - 1 < 2^s \leq j - 1$ e $j/2 - 1 < 2^s - 1 < j - 1$.*

Agora, vamos dividir o problema em casos dependendo das paridades de $\binom{e}{j}$ e $\binom{e}{j-1}$.

Caso 1: $\binom{e}{j} = \binom{e}{j-1} = 0$.

Neste caso, pela equação (3.8) temos $\binom{e}{a} = 0$, para todo $j/2 - 1 \leq a \leq j$.

Além disso,

$$(1+\alpha)^e = 1 + e\alpha + \cdots + \binom{e}{j/2-2}\alpha^{\frac{j}{2}-2},$$

e, como e é ímpar, a menor potência de α que aparece em $(1+\alpha)^e$ é 1. Assim, $j/2 - 2 \geq 1$, ou seja, $j \geq 6$. Como para $j = 6$ temos $s = 2$, já que $2^s \leq j < 2^{s+1}$, então $s \geq 2$.

Afirmação 3.4.2 *$e < 2^s - 2$.*

Prova: De fato, pela Observação 3.4.2, $j/2 - 1 < 2^s \leq j$. Então, pela hipótese, $\binom{e}{2^s} = 0$ e portanto, pelo Teorema de *Lucas*, 2^s não aparece na expansão diádica de e.

Por hipótese, $p < 2^{s+1}$ e p é ímpar, ou seja, $p \geq 1$. Assim, $0 < e < 2^{s+1}$ e, dessa forma, 2^t com $t \geq s+1$ não aparece na expansão diádica de e.

Como $j/2 - 1 < 2^s - 1 < j$, pela Observação 3.4.2, temos que

$$\binom{e}{2^s - 1} = \binom{e}{1 + 2 + \cdots + 2^{s-1}} = 0.$$

Logo, pelo Teorema de *Lucas*, $1 + 2 + \cdots + 2^{s-1}$ não está contido na expansão diádica de e. Isto significa que, para algum $0 \leq t_0 \leq s-1$, 2^{t_0} não aparece na expansão diádica de e. E, como $p \geq 1$ é ímpar, e é ímpar e assim, 1 aparece na expansão diádica de e. Logo, $t_0 \neq 0$ e assim, $1 \leq t_0 \leq s-1$, o que implica que $1 < 2^{t_0}$.

Dessa maneira, e possui expansão diádica da forma

$$e = 1 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + \cdots + a_{t_0-1} 2^{t_0-1} + a_{t_0+1} 2^{t_0+1} + \cdots + a_{s-1} 2^{s-1},$$

com $a_i \in \{0, 1\}$, para todo $1 \leq i \leq s-1$, $i \neq t_0$.

Temos que

$$2^s - 2 = 2^s - 1 - 1 = 1 + 2 + \cdots + 2^{s-1} - 1 = 2 + 2^2 + \cdots + 2^{s-1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} e &\leq 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{t_0-1} + 2^{t_0+1} + \cdots + 2^{s-1} \\ &< 2 + 2^2 + \cdots + 2^{t_0-1} + 2^{t_0+1} + \cdots + 2^{s-1} \\ &= 2^s - 2. \end{aligned}$$

■

Utilizando a afirmação anterior, obtemos $e \leq 2^s - 3$, o que implica que $p = 2^{s+1} - e \geq 2^{s+1} - (2^s - 3) = 2^s + 3 > 2^s$.

Dessa forma, $2^s < p < 2^{s+1}$ e assim, 2^s está contido na expansão diádica de p. Em particular, como p é ímpar, $1 + 2^s$ está contido na expansão diádica de p. Pelo Teorema de *Lucas*,

$$w_{2^s}(\eta^{m-j}) = \binom{p}{2^s} \alpha^{2^s} \neq 0,$$

já que $2^s \leq j$.

Se $2^s < j$ então, $2^s + 1 \leq j$ e, pelo Teorema de *Lucas*,

$$w_{2^s+1}(\eta^{m-j}) = \binom{p}{2^s+1} \alpha^{2^s+1} \neq 0.$$

Logo,

$$m \geq \begin{cases} j + 2^s, & \text{se } 2^s \leq j \\ j + 2^s + 1, & \text{se } 2^s < j \end{cases}.$$

Como $2^s \leq j < 2^{s+1}$, então j possui expansão diádica da forma

$$j = 2^s + 2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_h}, \text{ com } a > a_1 > a_2 > \cdots > a_h \geq 1,$$

e assim,

$$j - 1 = 2^s + 2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_{h-1}} + (2^{a_h-1} + \cdots + 2 + 1).$$

Observemos que $\rho(j-1) \leq s$. (Ver definição 1.10.2)

Agora, vamos considerar as classes

$$w_{2^s+1} \cdots w_{2^{a_{h-1}}+1} w_{2^{a_h-1}+1} \cdots w_3 w[1]_2 S_q^1 w[1]_2 c^{m-1-(j-1+\rho(j-1)+3)}, \tag{3.9}$$

de forma que, para as potências de 2 acima que são da forma 2^t, com $t > 0$, vamos considerar a classe definida anteriormente w_{2^t+1}; e para 2^0, vamos considerar a classe $w[1]_2$.

Afirmação 3.4.3 $j+2+\rho(j-1) \leq j+2+s \leq \begin{cases} j+2^s-1, & se\ s>2 \\ j+2^s, & se\ s=2 \end{cases} \leq m-1.$

Prova: De fato, claramente vemos que $2+s=2^s$, quando $s=2$.

Mostremos por indução finita que $2+s \leq 2^s$, para $s>2$.

Se $s=3$ então o resultado é válido.

Suponhamos que $2+s \leq 2^s-1 < 2^s$, para $s>3$.

Então, $2+(s+1) < 2^s+1 \leq 2^s+2^s = 2^{s+1}$. ■

A classe (3.9) é igual a:

$$\begin{cases} \alpha^{2^s}c\cdots\alpha^{2^{a_{h-1}}}c\alpha^{2^{a_h}-1}c\cdots\alpha^2c\alpha c(\alpha c^2+\alpha^2c)c^{m-1-(j-1+\rho(j-1)+3)}, & \text{sobre } \mathbb{R}P^j \\ 0, & \text{sobre } \mathbb{C}P^k \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha^{2^s+\cdots+2^{a_{h-1}}+2^{a_h}-1+\cdots+2+1}c^{\rho(j-1)}(\alpha c^2+\alpha^2c)c^{m-1-(j-1+\rho(j-1)+3)}, & \text{sobre } \mathbb{R}P^j \\ 0, & \text{sobre } \mathbb{C}P^k \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha^{j-1}(\alpha c^2+\alpha^2c)c^{m-1-(j+2)}, & \text{sobre } \mathbb{R}P^j \\ 0, & \text{sobre } \mathbb{C}P^k \end{cases}.$$

Então, pelo Lema 2.3.2, temos

$$\begin{aligned} & \text{coeficiente de } \alpha^j \text{ em } \frac{\alpha^{j-1}(\alpha+\alpha^2)}{(1+\alpha)^p} = \text{coeficiente de } \beta^k \text{ em } \frac{0}{(1+\beta)^q} \\ \Rightarrow\ & \text{coeficiente de } \alpha^j \text{ em } \frac{\alpha^j+\alpha^{j+1}}{(1+\alpha)^p} = 0 \\ \Rightarrow\ & \text{coeficiente de } \alpha^j \text{ em } \frac{\alpha^j}{(1+\alpha)^p} = \text{coeficiente de } \alpha^j \text{ em } \frac{\alpha^{j+1}}{(1+\alpha)^p} \\ \Rightarrow\ & 1 = 0, \end{aligned}$$

o que é um absurdo.

Portanto, este caso não ocorre.

<u>**Caso 2:**</u> $\binom{e}{j} = 1 \neq \binom{e}{j-1} = 0.$

Pela equação (3.8), temos $\binom{e}{a} = 0$, para todo $j/2-1 \leq a \leq j-1$. Além disso,

$$(1+\alpha)^e = 1 + e\alpha + \cdots + \binom{e}{j/2-2}\alpha^{j/2-2} + \alpha^j.$$

Se $j > 2^s$ então, pela Observação 3.4.2, $\binom{e}{2^s} = 0$ e, assim,

$$\binom{e}{j} = \binom{e}{2^s+2^{a_1}+\cdots+2^{a_h}} = \binom{e}{2^s}\cdot\binom{e}{2^{a_1}+\cdots+2^{a_h}} = 0,$$

o que contraria a hipótese deste caso. Portanto $j = 2^s$.

Como e é ímpar, então $j/2-2\geq 1$, o que implica que $j\geq 6$ e $s\geq 3$, já que $j=2^s$.

Agora, como $\binom{e}{2^s}=1$ e $\binom{e}{a}=0$, para todo $2^{s-1}-1\leq a\leq 2^s-1$, pelo Teorema de *Lucas*, 2^s está contido na expansão diádica de e e a expansão diádica de a não está contida na expansão diádica de e, para todo $2^{s-1}-1\leq a\leq 2^s-1$.

Logo, a expansão diádica de e é da forma $e=2^s+e'$, com $1\leq e'\leq 2^{s-1}-2$. De fato, como $e<2^{s+1}$, então 2^s é a maior potência de 2 contida na expansão diádica de e. Assim, podemos escrever $e=2^s+a_{s-1}2^{s-1}+\cdots+a_2 2^2+a_1 2+1$, com $a_i\in\{0,1\}$, para todo $1\leq i\leq s-1$. Seja $e'=1+a_1 2+a_2 2^2+\cdots+a_{s-1}2^{s-1}$. Dessa forma, $e=2^s+e'$. Se tivéssemos $2^{s-1}-1\leq e'\leq 2^s-1$, então $\binom{e}{e'}=0$, o que é um absurdo. Portanto, $1\leq e'\leq 2^{s-1}-2$.

Podemos escrever $p=2^{s+1}-(2^s+e')=2^s-e'$, com $2^s-1\geq 2^s-e'=p\geq 2^s-(2^{s-1}-2)=2^{s-1}+2$. Assim, $p\leq j-1<j$, então podemos considerar a classe

$$w_p(\eta^{m-j})=\binom{p}{p}\alpha^p\neq 0.$$

Logo, $m\geq j+p\geq j+2^{s-1}+2$, ou seja, $m-1\geq j+2^{s-1}+1$.

Agora, $j=2^s$, então $j-1=2^{s-1}+2^{s-2}+\cdots+2+1$. Consideremos as classes

$$w_{2^{s-1}+1}w_{2^{s-2}+1}\cdots w_3 w[1]_2 S_q^1 w[1]_2 c^{m-1-(j-1+s+3)},$$

notando que $j-1+s+3=j+2+s\leq j+2^{s-1}+1\leq m-1$, já que $2^{s-1}\geq s+1$, para $s\geq 3$ (pode-se verificar por indução finita).

Esta classe é igual a

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \alpha^{2^{s-1}}c\alpha^{2^{s-2}}c\cdots\alpha^2 c\alpha c(\alpha c^2+\alpha^2 c)c^{m-1-(j-1+s+3)}, & \text{sobre } \mathbb{R}P^j\\ 0, & \text{sobre } \mathbb{C}P^k\end{cases}\\
=&\begin{cases} \alpha^{2^{s-1}+2^{s-2}+2+1}c^{s-1+1}(\alpha c^2+\alpha^2 c)c^{m-1-(j-1+s+3)}, & \text{sobre } \mathbb{R}P^j\\ 0, & \text{sobre } \mathbb{C}P^k\end{cases}\\
=&\begin{cases} \alpha^{j-1}(\alpha c^2+\alpha^2 c)c^{m-1-(j+2)}, & \text{sobre } \mathbb{R}P^j\\ 0, & \text{sobre } \mathbb{C}P^k\end{cases}.
\end{aligned}$$

Então, pelo Lema 2.3.2, temos

$$\begin{aligned}
&\text{coeficiente de } \alpha^j \text{ em } \frac{\alpha^{j-1}(\alpha+\alpha^2)}{(1+\alpha)^p}=\text{coeficiente de } \beta^k \text{ em } \frac{0}{(1+\beta)^q}\\
\Rightarrow\ &\text{coeficiente de } \alpha^j \text{ em } \frac{\alpha^j+\alpha^{j+1}}{(1+\alpha)^p}=0\\
\Rightarrow\ &\text{coeficiente de } \alpha^j \text{ em } \frac{\alpha^j}{(1+\alpha)^p}=\text{coeficiente de } \alpha^j \text{ em } \frac{\alpha^{j+1}}{(1+\alpha)^p}\\
\Rightarrow\ &1=0,
\end{aligned}$$

o que é um absurdo.

Portanto, este caso também não ocorre.

<u>Caso 3:</u> $\binom{e}{j} = \binom{e}{j-1} = 1$.

Da equação (3.8) obtemos que $\binom{e}{a} = 1$, para todo $j/2 - 1 \leq a \leq j$. Além disso,

$$(1+\alpha)^e = 1 + e\alpha + \cdots + \binom{e}{j/2-2}\alpha^{j/2-2} + \alpha^{j/2-1} + \cdots + \alpha^{j-1} + \alpha^j.$$

Pela Observação 3.4.2, temos que $j/2 - 1 < 2^s \leq j$ e $j/2 - 1 < 2^s - 1 < j$, e então $\binom{e}{2^s} = \binom{e}{2^s - 1} = 1$.

Pelo Teorema de *Lucas*, 2^s e $2^s - 1 = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{s-1}$ estão contidos na expansão diádica de e. Portanto, $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{s-1} + 2^s = 2^{s+1} - 1$ está contido na expansão diádica de e, e assim $2^{s+1} - 1 \leq e$.

Por outro lado, como p é ímpar, $p \geq 1$ e assim, $e = 2^{s+1} - p \leq 2^{s+1} - 1$. Logo, $e = 2^{s+1} - 1$ e $p = 1$.

Por hipótese, $\lambda = \binom{j+1+p}{2} = \binom{j+2}{2} = 0$.

Então, pelo Teorema de *Lucas*, 2 não aparece na expansão diádica de $j+2$, e assim 2 deve aparecer na expansão diádica de j. Como j é par, temos então que $j = 2(mod\ 4)$ e portanto, j é da forma $j = 4l + 2$, para algum $l \in \mathbb{N}$.

Para $m \leq j+3$, existem involuções (M'^m, T'^m) fixando, a menos de cobordismo, $\{pto\} \cup \mathbb{R}P^j$. Dessa forma, $(M'^m, T') \cup (M^m, T)$ é cobordante a uma involução (N^m, S) fixando $\{pto\} \cup \mathbb{C}P^k$, onde o fibrado normal a $\mathbb{C}P^k$ em N^m possui classe característica $(1+\beta)^q$, e portanto, $q = 1$. Assim, (M^m, T) é cobordante a uma involução fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, com $p = q = 1$, ou seja, é uma involução do tipo III.

Suponhamos agora $m > j + 3$, ou seja, $m - 1 \geq j + 3$.

Como j é par e $j = 0$ fornece um exemplo do tipo I, então podemos supor $j \geq 2$.

Da mesma forma que foi feito na Seção 3.2, a partir das equações (3.3) e (3.4) obtemos:

$$\begin{aligned} W[0](\mathbb{R}P(\eta^{m-j})) &= (1+\alpha)^{j+1}\left((1+c)^0 + p\alpha(1+c)^{-1} + \binom{p}{2}(1+c)^{-2} + \cdots\right) \\ &= (1+\alpha)^{j+1}\left(1 + \alpha(1 + c + c^2 + c^3 + \cdots)\right) \\ &= \left(1 + \alpha + \binom{j+1}{2}\alpha^2 + \cdots + \binom{j+1}{j}\alpha^j\right)(1 + \alpha + \alpha c + \alpha c^2 + \alpha c^3 + \cdots). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Observação 3.4.3 *Como j é par e 2 aparece na expansão diádica de j, podemos supor que j possui expansão diádica da forma $j = 2 + 2^{x_1} + \cdots + 2^{x_t}$, com $1 < x_1 < \cdots < x_t$. Assim, as expansões diádicas de $j+1$, $j-1$ e $j-2$ são da forma $j+1 = 1 + 2 + 2^{x_1} + \cdots + 2^{x_t}$, $j - 1 = 1 + 2^{x_1} + \cdots + 2^{x_t}$ e $j - 2 = 2^{x_1} + \cdots + 2^{x_t}$, com $1 < x_1 < \cdots < x_t$. Dessa forma podemos ver, através do Teorema de* Lucas, *que*

$$\binom{j+1}{j} = \binom{j+1}{j-1} = \binom{j+1}{j-2} = 1.$$

Voltando ao cálculo das classes, a partir da equação (3.10), obtemos

$$\begin{aligned} w[0]_j(\mathbb{R}P(\eta^{m-j})) &= \alpha c^{j-1} + \alpha^2 c^{j-2} + \binom{j+1}{2}\alpha^3 c^{j-3} + \cdots + \\ &\quad + \binom{j+1}{j-2}\alpha^{j-2}\alpha c + \binom{j+1}{j-1}\alpha^{j-1}\alpha + \binom{j+1}{j}\alpha^j \\ &= \alpha c^{j-1} + \alpha^2 c^{j-2} + \cdots + \binom{j+1}{j-3}\alpha^{j-2}c^2 + \alpha^{j-1}c. \end{aligned}$$

Consideremos as classes características

$$w[0]_j S_q^1 w[1]_2 c^{m-1-(j+3)} =$$
$$= \begin{cases} \left(\alpha c^{j-1} + \alpha^2 c^{j-2} + \cdots + \binom{j+1}{j-3}\alpha^{j-2}c^2 + \alpha^{j-1}c\right)(\alpha c^2 + \alpha^2 c)c^{m-1-(j+3)}, & \text{sobre } \mathbb{R}P^j \\ 0, & \text{sobre } \mathbb{C}P^k \end{cases},$$

observando que $m-1 \geq j+3$.

Dessa forma, pelo Lema 2.3.2, temos

$$\begin{aligned} &\text{coeficiente de } \alpha^j \text{ em } \left(\alpha + \alpha^2 + \cdots + \binom{j+1}{j-3}\alpha^{j-2} + \alpha^{j-1}\right)\frac{(\alpha+\alpha^2)}{(1+\alpha)} = \\ &= \text{coeficiente de } \beta^k \text{ em } \frac{0}{(1+\beta)^q} \\ \Rightarrow\ &\text{coeficiente de } \alpha^j \text{ em } \left(\alpha + \alpha^2 + \cdots + \binom{j+1}{j-3}\alpha^{j-2} + \alpha^{j-1}\right)\alpha\frac{(1+\alpha)}{(1+\alpha)} = 0 \\ \Rightarrow\ &\text{coeficiente de } \alpha^j \text{ em } \alpha\left(\alpha + \alpha^2 + \cdots + \binom{j+1}{j-3}\alpha^{j-2} + \alpha^{j-1}\right) = 0 \\ \Rightarrow\ &1 = 0, \end{aligned}$$

o que é um absurdo.

Portanto, as involuções neste caso são do tipo III, como mencionado.

Caso 4: $\binom{e}{j} = 0 \neq 1 = \binom{e}{j-1}$.

Pela equação 3.8, temos que $\binom{e}{a} = 1$, para todo $j/2 - 1 \leq a \leq j-1$. Além disso,

$$(1+\alpha)^e = 1 + e\alpha + \cdots + \binom{e}{j/2-2}\alpha^{j/2-2} + \alpha^{j/2-1} + \cdots + \alpha^{j-1}.$$

Suponhamos $j > 2^s$. Pela Observação 3.4.2, temos $j/2-1 < 2^s \leq j-1$ e $j/2-1 < 2^s - 1 < j-1$. Logo $\binom{e}{2^s} = \binom{e}{2^s-1} = 1$.

Pelo Teorema de *Lucas*, 2^s e $2^s - 1 = 1 + 2 + \cdots + 2^{s-1}$ estão contidos na expansão diádica de e e, portanto, $2^{s+1} - 1 = 1 + 2 + \cdots + 2^s$ está contido na expansão diádica de e. Assim, $2^{s+1} - 1 \leq e$.

Por outro lado, como p é ímpar, $p \geq 1$, e assim $e = 2^{s+1} - p \leq 2^{s+1} - 1$.

Portanto, $e = 2^{s+1} - 1$ e, como $2^s < j < 2^{s+1}$, a expansão diádica de j está contida na expansão diádica de $2^{s+1} - 1 = e$. Logo, $\begin{pmatrix} e \\ j \end{pmatrix} = 1$, o que é uma contradição.

Dessa forma, $j = 2^s$ e, pela hipótese, $\begin{pmatrix} e \\ 2^s \end{pmatrix} = 0$ e $\begin{pmatrix} e \\ 2^s - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ 1 + 2 + \cdots + 2^{s-1} \end{pmatrix} = 1$.

Pelo Teorema de *Lucas*, 2^s não está contido na expansão diádica de e e $1+2+\cdots+2^{s-1}$ está contido na expansão diádica de e. Como $e < 2^{s+1}$ temos então que $e = 1+2+\cdots+2^{s-1} = 2^s - 1$.

Assim, $p = 2^{s+1} - e = 2^s + 1$. Daí,

$$\lambda = \begin{pmatrix} j+1+p \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^s + 1 + 2^s + 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{s+1} + 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \ (mod\ 2),$$

pois $j = 2^s$ é par e assim $s > 0$. Mas isto contraria nossa hipótese inicial.

Logo, este caso não ocorre.

Desta forma completamos a classificação para o caso em que $\lambda = \begin{pmatrix} j+1+p \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \ (mod\ 2)$.

O caso $\lambda = 1\ (mod\ 2)$

Assumindo $\lambda = 1\ (mod\ 2)$, temos que

$$w[1]_2 = \begin{cases} \alpha c + \alpha^2, & \text{sobre } \mathbb{R}P^j \\ \beta', & \text{sobre } \mathbb{C}P^k \end{cases},$$

e

$$S_q^1 w[1]_2 = \begin{cases} \alpha c^2 + \alpha^2 c, & \text{sobre } \mathbb{R}P^j \\ 0, & \text{sobre } \mathbb{C}P^k \end{cases},$$

onde $\beta' = \begin{pmatrix} j+1-2k \\ 2 \end{pmatrix} c^2 + (k+1+q)\beta$.

Podemos formar as classes

$$w[1]_2^t c^{m-1-2t} = \begin{cases} (\alpha c + \alpha^2)^t c^{m-1-2t}, & \text{sobre } \mathbb{R}P^j \\ \beta'^t c^{m-1-2t}, & \text{sobre } \mathbb{C}P^k \end{cases}, \tag{3.11}$$

para $0 \le 2t \le m-1$, e

$$w[1]_2^{t-1} S_q^1 w[1]_2 c^{m-1-(2t+1)} = \begin{cases} (\alpha c + \alpha^2)^t c^{m-1-2t}, & \text{sobre } \mathbb{R}P^j \\ 0, & \text{sobre } \mathbb{C}P^k \end{cases}, \tag{3.12}$$

para $1 \le 2t \le m-2$.

Observemos que, pelo Lema 2.3.2, o valor de $(\alpha c + \alpha^2)^t c^{m-1-2t}$ sobre $\mathbb{R}P^j$ é o coeficiente de α^j em $\frac{\alpha^t(1+\alpha)^t}{(1+\alpha)^p}$. Fazendo,

$$\frac{\alpha^t(1+\alpha)^t}{(1+\alpha)^p} = \alpha^t(1+\alpha)^t(1+\alpha)^{2^{s+1}-p} = \alpha^t(1+\alpha)^{t+2^{s+1}-p},$$

temos que o coeficiente de α^j em $\alpha^t(1+\alpha)^{t+2^{s+1}-p}$ é

$$\binom{t+2^{s+1}-p}{j-t} = \binom{2^{s+1}-1-(p-1-t)}{j-t}.$$

Dessa forma, da equação oriunda das classes de (3.12), obtemos que

$$\binom{2^{s+1}-1-(p-1-t)}{j-t} = 0, \tag{3.13}$$

para todo $1 \leq 2t \leq m-2$.

Agora, vamos dividir a classificação em dois casos: o caso $p=1$ e o caso $p>1$.

Caso $p=1$**:** Neste caso, temos

$$\lambda = \binom{j+1+p}{2} = \binom{j+2}{2} = 1 \ (mod\ 2),$$

o que implica que 2 aparece na expansão diádica de $j+2$, e assim 2 não aparece na expansão diádica de j. Logo, $j = 0\ (mod\ 4)$, e assim, j é da forma $j = 2^a(2b+1)$, com $a \geq 2$.

Para $m \leq 2^a(2b+1)+2^a = 2^{a+1}(b+1)$, existem involuções (M'^m, T') fixando $\{pto\} \cup \mathbb{R}P^j$, com $p=1$, e a união $(M^m,T) \cup (M'^m,T')$ é cobordante a uma involução fixando $\{pto\} \cup \mathbb{C}P^k$, com $q=1$. Portanto, (M^m,T) é uma involução fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, com $p=q=1$. Logo, é uma involução do tipo III.

Então, suponhamos que $m > 2^{a+1}(b+1)$. Assim, $m \geq 2^{a+1}(b+1)+1$.

Suponhamos primeiramente que $m > 2^{a+1}(b+1)+1$, ou seja, $m \geq 2^{a+1}(b+1)+2$.

Observação 3.4.4 *Notemos que, como $p=1$, então o valor de $(\alpha c+\alpha^2)^t c^{m-1-2t}$ sobre $\mathbb{R}P^j$ é o coeficiente de α^j em*

$$\frac{(\alpha+\alpha^2)^t}{(1+\alpha)} = \alpha^t\frac{(1+\alpha)^t}{(1+\alpha)} = \alpha^t(1+\alpha)^{t-1},$$

que é igual a

$$\binom{t-1}{j-t}.$$

Desta forma, da equação oriunda de (3.12), temos que $\binom{t-1}{j-t} = 0$, para todo $1 \leq 2t \leq m-2$.

Em particular, observe que

$$1 \leq 2^{a+1}(b+1) = 2^{a+1}(b+1)+2-2 \leq m-2.$$

Assim, para $t = 2^a(b+1)$, temos que

$$\begin{aligned} 0 = \binom{t-1}{j-t} &= \binom{2^a(b+1)-1}{2^a(2b+1)-2^a(b+1)} = \binom{2^ab+2^a-1}{2^{a+1}b+2^a-2^ab-2^a} = \\ &= \binom{2^ab+2^{a-1}+2^{a-2}+\cdots+2+1}{2^ab} = 1, \end{aligned}$$

pois, se $b = 0$, então é trivial e, se $b \geq 1$, independentemente de como seja a expansão diádica de b, a sua possível menor potência de 2 será $2^0 = 1$ e, assim, a menor potência de 2 que pode aparecer na expansão diádica de $2^a b$ é $2^a \cdot 1 = 2^a$, e portanto, a expansão diádica do número de baixo da combinação está contida na expansão diádica do número de cima.

Mas isto é um absurdo. Logo, $m = 2^{a+1}(b+1)+1$ (e portanto ímpar).

Como $m = 2^{a+1}(b+1)+1 \geq 2k+1$, então $2^a(b+1) \geq k$. Assim, para

$$t = \frac{m-1}{2} = \frac{2^{a+1}(b+1)+1-1}{2} = 2^a(b+1) \geq k,$$

usando a equação oriunda de (3.11) temos que o valor de $\beta'^t c^{m-1-2t}$ aplicado a $[\mathbb{R}P(\gamma^{m-2k})]_2$ é igual ao valor de $(\alpha c+\alpha^2)^t c^{m-1-2t}$ aplicado a $[\mathbb{R}P(\eta^{m-j})]_2$ que, por sua vez, é igual ao valor do coeficiente de α^j em $\frac{(\alpha+\alpha^2)^t}{(1+\alpha)}$. Portanto, pela Observação 3.4.4, o valor de $\beta'^t c^{m-1-2t}$ aplicado a $[\mathbb{R}P(\gamma^{m-2k})]_2$ é igual a

$$\binom{t-1}{j-1} = \binom{2^a(b+1)-1}{2^a(2b+1)-2^a(b+1)} = \binom{2^a b + 2^{a-1} + 2^{a-2} + \cdots + 2 + 1}{2^a b} = 1.$$

Agora, como m é ímpar, pela Observação 1.9.1 temos $\overline{\chi(M^m)} = 0$. Vimos no exemplo 1.9.1 que, como j é par, $\overline{\chi(\mathbb{R}P^j)} = 1$. Logo, $\overline{\chi(\mathbb{C}P^k)} = 1$ e, portanto, k é par.

Queremos mostrar que

$$\binom{j+1-2k}{2} = 0 \ (mod\ 2).$$

Para isto, precisaremos do seguinte resultado:

Lema 3.4.1 *Sejam a e b dois naturais tais que a é ímpar, b é par e $a > b$. Se 2 não aparece nas expansões diádicas de a e de b, então 2 não aparece na expansão diádica de $a - b$.*

Prova: Seja c a parte comum entre as expansões diádicas de a e b. Dessa forma, c pode ser diferente zero se as expansões diádicas de a e b possuem uma parte comum, ou igual a zero se não possuem. Portanto, podemos supor que as expansões diádicas de a e b, depois da eliminação da parte comum, são da forma

$$\begin{aligned} a - c &= 2^{r_1} + 2^{r_2} + \cdots + 2^{r_t} + 1, \\ b - c &= 2^{s_1} + 2^{s_2} + \cdots + 2^{s_l}, \end{aligned}$$

onde $r_1 > r_2 > \cdots > r_t > 1$, $s_1 > s_2 > \cdots > s_l > 1$, $r_1 > s_1$ pois $a > b$, e $\{r_1, r_2, \cdots, r_t\} \cap \{s_1, s_2, \cdots, s_l\} = \emptyset$.

Primeiramente, como $r_1 > s_1$, então $2^{r_1} > 2^{s_1}$, e assim, pelo exemplo 1.10.2,

$$\begin{aligned} a - b &= (a-c) - (b-c) \\ &= (2^{r_1} + 2^{r_2} + \cdots + 2^{r_t} + 1) - (2^{s_1} + 2^{s_2} + \cdots + 2^{s_l}) \\ &= 2^{r_1} - 2^{s_1} + (2^{r_2} + 2^{r_3} + \cdots + 2^{r_t} + 1) - (2^{s_2} + 2^{s_3} + \cdots + 2^{s_l}) \\ &= 2^{r_1-1} + 2^{r_1-2} + \cdots + 2^{s_1} - (2^{s_2} + 2^{s_3} + \cdots + 2^{s_l}) + (2^{r_2} + 2^{r_3} + \cdots + 2^{r_t} + 1). \end{aligned}$$

Em seguida, como $s_1 > s_2$, então $2^{s_1} > 2^{s_2}$, e assim, pelo exemplo 1.10.2,

$$\begin{array}{rcl} a-b & = & (2^{r_1-1}+2^{r_1-2}+\cdots+2^{s_1+1})+2^{s_1}-2^{s_2}-(2^{s_3}+\cdots+2^{s_l})+(2^{r_2}+\cdots+2^{r_t}+1) \\ & = & (2^{r_1-1}+2^{r_1-2}+\cdots+2^{s_1+1})+2^{s_1-1}+2^{s_1-2}+\cdots+2^{s_2}- \\ & - & (2^{s_3}+\cdots+2^{s_l})+(2^{r_2}+\cdots+2^{r_t}+1). \end{array}$$

Dessa forma, como $s_2 > s_3 > \cdots > s_l$, continuando o processo fazendo $2^{s_{i-1}} - 2^{s_i} = 2^{s_{i-1}-1} + \cdots + 2^{s_i}$ até $2^{s_{l-1}} - 2^{s_l}$, obtemos

$$\begin{array}{rcl} a-b & = & (2^{r_2}+\cdots+2^{r_t}+1)+(2^{r_1-1}+\cdots+2^{s_1+1})+(2^{s_1-1}+\cdots+2^{s_2+1})+ \\ & + & (2^{s_2-1}+\cdots+2^{s_3+1})+\cdots+(2^{s_{l-1}-1}+\cdots+2^{s_l}). \end{array}$$

Nesta soma podem aparecer potências de 2 repetidas, mas isto resulta numa potência de 2 com expoente maior do que o expoente das duas parcelas provenientes. Desta forma, a possível menor potência de 2, diferente de 1, que aparece na expansão diádica de $a-b$ é o mínimo entre 2^{r_t} e 2^{s_l}. Como r_t e s_l são maiores que 1, seque que 2 não aparece na expansão diádica de $a-b$. ■

Afirmação 3.4.4 $\begin{pmatrix} j+1-2k \\ 2 \end{pmatrix} = 0\ (mod\ 2).$

Prova: De fato, se $j+1-2k < 2$, então é imediato. Suponhamos então que $j+1-2k \geq 2$, ou seja, $j+1 \geq 2k+2$, o que implica que $j+1 > 2k$. Neste caso, temos que $j+1$ é ímpar, $2k$ é par e, como $j = 0\ (mod\ 4)$ e k é par, então 2 não aparece nas expansões diádicas de $j+1$ e $2k$, a demonstração segue do Lema 3.4.1 associada ao Teorema de *Lucas*. ■

Segue da afirmação anterior que

$$\beta' = (k+1+q)\beta + \begin{pmatrix} j+1-2k \\ 2 \end{pmatrix} c^2 = (k+1+q)\beta.$$

Logo, ainda utilizando $t = 2^a(b+1)$, pelo Lema 2.3.2, temos

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & \beta' c^{m-1-2t}[\mathbb{R}P(\gamma^{m-2k})]_2 \\ & = & (k+1+q)\beta^t c^{m-1-2t}[\mathbb{R}P(\gamma^{m-2k})]_2 \\ & = & \text{coeficiente de } \beta^k \text{ em } (k+1+q)\dfrac{\beta^t}{(1+\beta)^q} \\ & = & \text{coeficiente de } \beta^k \text{ em } (k+1+q)\beta^t(1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^k)^q. \end{array}$$

Desta forma, temos que $k+1+q$ e o valor do coeficiente de β^k em $(k+1+q)\beta^t(1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^k)^q$ são ambos congruentes a 1 módulo 2.

Agora, $k+1+q = 1\ (mod\ 2)$ implica que $k+q = 0\ (mod\ 2)$, ou seja, $k = q\ (mod\ 2)$. Logo, q é par.

Por outro lado, observemos que, se $t > k$, então o coeficiente de β^k em $\beta^t(1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^k)^q$ é zero, o que é uma contradição. Assim, $k = t$. Portanto, $k = 2^a(b+1)$.

Temos então $m = 2^{a+1}(b+1)+1$ e $k = 2^a(b+1)$, o que implica que γ^{m-2k} é um fibrado vetorial de dimensão $m-2k = 1$. Logo, $q \leq 1$ e, como q é par, então $q = 0$.

Utilizando $t = 0$ nas classes (3.11), obtemos as classes

$$w[1]_2^0 c^{m-1} = \begin{cases} c^{m-1}, & \text{sobre } \mathbb{R}P^j \\ c^{m-1}, & \text{sobre } \mathbb{C}P^k \end{cases},$$

e assim, pelo Lema 2.3.2, temos

$$\text{coeficiente de } \alpha^j \text{ em } \frac{1}{(1+\alpha)^1} = \text{coeficiente de } \beta^k \text{ em } \frac{1}{(1+\beta)^0} \Rightarrow 1 = 0,$$

o que é um absurdo.

Portanto, para $p = 1$, todas as involuções são do tipo III.

Caso $p > 1$: Seja d a parte comum das expansões diádicas de j e $p-1$. Lembremos que $2^s \leq j < 2^{s+1}$, e assim $p - 1 < 2^{s+1} - 1$.

Se $d = 0$, como 2^s aparece na expansão diádica de j, então 2^s não aparece na expansão diádica de $p-1$, e assim $p - 1 < 2^s$.

Seja 2^l a maior potência de 2 que aparece na expansão diádica de $p-1$. Então,

$$0 < 2^l \leq 2^{s-1} \leq \frac{j}{2} \Rightarrow 2 \cdot 2^l \leq j \leq m-2,$$

já que $m \geq j+2$. Assim, podemos utilizar $t = 2^l$ no cálculo das classes (3.12).

Afirmação 3.4.5 *$j - 2^l$ e $p - 1 - 2^l$ possuem expansões diádicas disjuntas.*

Prova: De fato, podemos supor que as expansões diádicas de j e $p-1$ são da forma

$$\begin{aligned} j &= 2^{x_1} + 2^{x_2} + \cdots + 2^{x_u} + 2^s, \text{ onde } 1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_u < s, \\ p-1 &= 2^{y_1} + 2^{y_2} + \cdots + 2^{y_v} + 2^l, \text{ onde } 1 \leq y_1 < y_2 < \cdots < y_v < l, \end{aligned}$$

já que j e $p-1$ são pares e $2^s \leq j < 2^{s+1}$.

Assim, como $2^l < 2^s$ pois $p - 1 < 2^s$, temos

$$\begin{aligned} & p - 1 - 2^l = 2^{y_1} + 2^{y_2} + \cdots + 2^{y_v}, \text{ e} \\ & j - 2^l = 2^{x_1} + \cdots + 2^{x_u} + 2^s - 2^l = 2^{x_1} + \cdots + 2^{x_u} + 2^{s-1} + 2^{s-2} + \cdots + +2^{l+1} + 2^l. \end{aligned}$$

Observemos que $\{2^{y_1}, \cdots, 2^{y_v}\} \cap \{2^{x_1}, \cdots, 2^{x_u}\} = \emptyset$, já que $d = 0$ e $\{2^{y_1}, \cdots, 2^{y_v}\} \cap \{2^l, \cdots, 2^{s-1}\} = \emptyset$, pois o primeiro conjunto possui potências de 2 estritamente menores do que as potências de 2 do segundo conjunto.

Logo, $j - 2^l$ e $p - 1 - 2^l$ possuem expansões diádicas disjuntas. ■

Observemos que $2^{s+1} - 1 = 2^s + 2^{s-1} + \cdots + 2 + 1$ e, assim, sua expansão diádica contém as expansões diádicas de $j - 2^l$ e $p - 1 - 2^l$, já que $p - 1 < 2^s$ e $2^s \leq j < 2^{s+1}$. Logo, pela afirmação anterior e pelo Teorema de *Lucas*,

$$\binom{2^{s+1} - 1 - (p - 1 - 2^l)}{j - 2^l} \neq 0,$$

o que contraria a equação (3.13).

Portanto, $d > 0$.

Como j é par, sua expansão diádica não contém 1. Como d é uma parte da expansão diádica de j, então $d \leq j$ e a expansão diádica de d não contém 1, ou seja, d é par.

Se $d < j$ então $d \leq j - 2$. Assim,

$$w_d(\eta^{m-j}) = \left(\begin{array}{c} p \\ d \end{array} \right) \alpha^d \neq 0,$$

já que o fato de $p - 1$ ser par e d ser parte da expansão diádica de $p - 1$ implica que d é parte da expansão diádica de p.

Dessa forma, $m \geq j + d \geq d + 2 + d = 2d + 2$, e $(m - 2)/2 \geq d > 0$. Assim, tomando $t = d$ no cálculo das classes (3.12), temos

$$0 = \left(\begin{array}{c} 2^{s+1} - 1 - (p - 1 - d) \\ j - d \end{array} \right) = 1,$$

pois $p - 1 - d$ e $j - d$ possuem expansões diádicas disjuntas, e estas expansões estão ambas contidas em $2^{s+1} - 1 = 2^s + 2^{s-1} + \cdots + 2^s + 1$.

Mas isto é um absurdo. Portanto $d = j$.

Logo, j é parte da expansão diádica de $p-1$, o que implica que $j \leq p-1$, ou seja, $j+1 \leq p$.

Como $p - 1$ é par, então j também é parte da expansão diádica de p. Assim,

$$w_j(\eta^{m-j}) = \left(\begin{array}{c} p \\ j \end{array} \right) \alpha^j \neq 0,$$

e portanto, $m \geq 2j$.

Suponhamos $p > j + 1$. Temos que p e j possuem expansões diádicas da forma

$$\begin{array}{rcl} j & = & 2^s + \cdots + 2^x, \text{ com } 2^x < \cdots < 2^s, \\ p & = & 2^s + \cdots + 2^x + 2^y + p', \text{ com } p' < 2^y \text{ e } p' < 2^x < \cdots < 2^s, \end{array}$$

onde 2^y é a maior potência de 2 que aparece na expansão diádica de p mas não aparece na expansão diádica de j.

Observemos que $y > 0$, pois $p \geq j+2$, p' é ímpar já que p é ímpar, e $y < s$ pois 2^s é a maior potência de 2 que aparece na expansão diádica de p, já que $p < 2^{s+1}$. Dessa forma, $2^y < j$.

Como

$$0 < j - 2^y \leq j - 2 = \frac{2j - 4}{2} \leq \frac{m - 4}{2} < \frac{m - 2}{2},$$

podemos utilizar $t = j - 2^y$ no cálculo das classes (3.12).

Afirmação 3.4.6 *$j - t$ e $p - 1 - t$ possuem expansões diádicas disjuntas.*

Prova: De fato, temos que $j - t = 2^y$ e $p - 1 - t = p - 1 - j + 2^y = 2^{y+1} + p' - 1$. Como p' é ímpar e $p' < 2^y$, então a expansão diádica de p' é da forma

$$p' = 2^{x_1} + \cdots + 2^{x_l} + 1, \text{ com } y > x_1 > \cdots > x_l \geq 1.$$

Assim,

$$p - 1 - t = 2^{y+1} + 2^{x_1} + \cdots + 2^{x_l}, \text{ com } y < y + 1 \text{ e } y > x_1 > \cdots > x_l.$$

Dessa forma, 2^y não aparece na expansão diádica de $p-1-t$ e, portanto, $j-t$ e $p-1-t$ possuem expansões diádicas disjuntas. ■

Como $2^{s+1}-1$ contém ambas as expansões diádicas de $j-t$ e $p-1-t$, já que $2^s \leq j < 2^{s+1}$, então a afirmação anterior e o Teorema de *Lucas* implicam que

$$\binom{2^{s+1}-1-(p-1-t)}{j-t} \neq 0,$$

o que contraria a equação (3.13).

Logo, $p = j+1$.

Suponhamos $m = 2j$. Neste caso, $(M^m, T) \cup (\mathbb{R}P^j \times \mathbb{R}P^j, twist)$ é cobordante a uma involução (M'^m, T') fixando $\mathbb{C}P^k$ e, assim, (M^m, T) é cobordante a $(\mathbb{R}P^j \times \mathbb{R}P^j, twist) \cup (M'^m, T')$. Logo, (M^m, T) é uma involução do tipo I.

Suponhamos agora $m > 2j$, ou seja, $m \geq 2j+1$. Se $m > 2j+1$, ou seja, $m \geq 2j+2$, então $0 < j \leq (m-2)/2$. Daí, para $t = j$ no cálculo das classes (3.12), temos

$$\binom{2^{s+1}-1-(p-1-t)}{j-t} = \binom{2^{s+1}-1}{0} \neq 0,$$

o que contraria a equação (3.13).

Logo, $m = 2j+1$.

Agora, $m = 2j+1 \geq 2k+1$ implica que $j \geq k$.

Considerando as classes (3.11) para $t \geq 1$, temos

$$\begin{aligned}
\beta'^t c^{m-1-2t}[\mathbb{R}P(\gamma^{m-2k})]_2 &= (\alpha c + \alpha^2) c^{m-1-2t}[\mathbb{R}P(\gamma^{m-2k})]_2 \\
&= \binom{2^{s+1}-1-(p-1-t)}{j-t} \\
&= \binom{2^{s+1}-1-(j-t)}{j-t} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{se } 1 \leq t < j \\ 1, & \text{se } t = j \end{cases}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\beta'^t c^{m-1-2t}[\mathbb{R}P(\gamma^{m-2k})]_2 &= \left(\binom{j+1-2k}{2} c^2 + (k+1+q)\beta \right)^t c^{m-1-2t}[\mathbb{R}P(\gamma^{m-2k})]_2 \\
&= \text{coeficiente de } \beta^k \text{ em } \frac{1}{(1+\beta)^q} \left(\binom{j+1-2k}{2} + (k+1+q)\beta \right)^t.
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\begin{aligned}
\text{coeficiente de } \beta^k \text{ em } \frac{1}{(1+\beta)^q} \left(\binom{j+1-2k}{2} + (k+1+q)\beta \right)^t = \\
= \begin{cases} 0, & \text{se } 1 \leq t < j \\ 1, & \text{se } t = j \end{cases}. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Suponhamos $(k+1+q) = 0\ (mod\ 2)$. Então, pela equação (3.14) temos

$$\frac{1}{(1+\beta)^q}\left(\begin{array}{c} j+1-2k \\ 2 \end{array}\right)^t = \frac{1}{(1+\beta)^q}\left(\begin{array}{c} j+1-2k \\ 2 \end{array}\right) = 0, \text{ para } t < j,$$

e,

$$\frac{1}{(1+\beta)^q}\left(\begin{array}{c} j+1-2k \\ 2 \end{array}\right) = 1, \text{ para } t = 1.$$

Mas, $\frac{1}{(1+\beta)^q}\left(\begin{array}{c} j+1-2k \\ 2 \end{array}\right)$ não depende de t, o que implica que $0 = 1$, absurdo.

Logo, $(k+1+q) = 1\ (mod\ 2)$.

Temos $m = 2j+1$ é ímpar, então $\overline{\chi(M)} = 0$, pela Observação 1.9.1. Assim, como $\overline{\chi(\mathbb{R}P^j)} = 1$ já que j é par (exemplo 1.9.1), devemos ter $\overline{\chi(\mathbb{C}P^k)} = 1$. Logo, k é par.

Dessa forma, como $(k+1+q) = 1\ (mod\ 2)$ e k é par, então q é par.

Suponhamos $\left(\begin{array}{c} j+1-2k \\ 2 \end{array}\right) = 0\ (mod\ 2)$. Então, pela equação (3.14), temos

$$\text{coeficiente de } \beta^k \text{ em } \frac{\beta^t}{(1+\beta)^q} = \begin{cases} 0, & \text{se } 1 \leq t < j \\ 1, & \text{se } t = j \end{cases}.$$

Se $k < j$ então, para $t = j$, temos

$$1 = \text{coeficiente de } \beta^k \text{ em } \frac{\beta^j}{(1+\beta)^q} = 0,$$

o que é um absurdo.

Logo, $k = j$ e, assim, γ^{m-2k} é um fibrado vetorial de dimensão $m - 2k = 2j - 1 - 2j = 1$.

Dessa forma, $W(\gamma^{m-2k}) = 1$ e, portanto, $q = 0$.

Concluímos então que $k = j$ e $q = 0$. Queremos chegar a esta mesma conclusão no caso em que $\left(\begin{array}{c} j+1-2k \\ 2 \end{array}\right) = 1\ (mod\ 2)$.

Suponhamos então que $\left(\begin{array}{c} j+1-2k \\ 2 \end{array}\right) = 1\ (mod\ 2)$. Pela equação (3.14), temos

$$\text{coeficiente de } \beta^k \text{ em } \frac{(1+\beta)^t}{(1+\beta)^q} = \begin{cases} 0, & \text{se } 1 \leq t < j \\ 1, & \text{se } t = j \end{cases}. \tag{3.15}$$

Denotemos $\frac{1}{(1+\beta)^q} = 1 + a_1\beta + a_2\beta^2 + \cdots + a_k\beta^k$, onde cada $a_i \in \{0, 1\}$. Tomando $t = 1$ na equação (3.15), obtemos

$$\begin{aligned} & \text{coeficiente de } \beta^k \text{ em } \frac{1+\beta}{(1+\beta)^q} = 0 \\ \Rightarrow\ & \text{coeficiente de } \beta^k \text{ em } (1+\beta)(1 + a_1\beta + a_2\beta^2 + \cdots + a_k\beta^k) = 0 \\ \Rightarrow\ & a_k + a_{k-1} = 0 \\ \Rightarrow\ & a_k = a_{k-1}. \end{aligned}$$

Suponhamos indutivamente que, para $1 \leq t-1 \leq k-2$, seja válido que $a_k = a_{k-1} = \cdots = a_{k-(t-1)}$. Dado $1 \leq t \leq k-1$, mostremos que $a_k = a_{k-t}$. De fato, pela equação (3.15), temos

$$
\begin{aligned}
&\text{coeficiente de } \beta^k \text{ em } (1+\beta)^t(1+a_1\beta+\cdots+a_k\beta^k)=0\\
\Rightarrow\ &\text{coeficiente de } \beta^k \text{ em } \left(1+\binom{t}{1}\beta+\binom{t}{2}\beta^2+\cdots+\binom{t}{t-2}\beta^{t-2}+\binom{t}{t-1}\beta^{t-1}+\beta^t\right)\cdot\\
&\cdot(1+a_1\beta+a_2\beta^2+\cdots+a_{k-2}\beta^{k-2}+a_{k-1}\beta^{k-1}+a_k\beta^k)=0\\
\Rightarrow\ &a_k+\binom{t}{1}a_{k-1}+\binom{t}{2}a_{k-2}+\cdots+\binom{t}{t-2}a_{k-(t-2)}+\binom{t}{t-1}a_{k-(t-1)}+a_{k-t}=0\\
\Rightarrow\ &a_k+\binom{t}{1}a_k+\binom{t}{2}a_k+\cdots+\binom{t}{t-2}a_k+\binom{t}{t-1}a_k+a_{k-t}=0\\
\Rightarrow\ &a_k+\left(\binom{t}{1}+\binom{t}{2}+\cdots+\binom{t}{t-2}+\binom{t}{t-1}\right)a_k+a_{k-t}=0.
\end{aligned}
$$

Afirmação 3.4.7 *Dado $t \geq 1$, temos*

$$\binom{t}{1}+\binom{t}{2}+\cdots+\binom{t}{t-2}+\binom{t}{t-1}=0\ (mod\ 2).$$

Prova: De fato, se t é ímpar, então $t-1$ é par. Assim, a soma em questão é composta por um número par de parcelas e, para cada número binomial $\binom{t}{i}$ que aparece na soma, aparece também seu número binomial complementar $\binom{t}{t-i}$.

Se t é par, $t-1$ é ímpar e assim, a soma é composta por um número ímpar de parcelas. Assim, para cada número número binomial que aparece na soma, aparece também seu número binomial complementar, com exceção do número binomial $\binom{t}{t/2}$, que aparece "sozinho".

Como

$$\binom{t}{i}=\frac{t!}{i!(t-i)!}=\binom{t}{t-i},$$

então dois números binomiais complementares são iguais, e assim sua soma é nula $(mod\ 2)$.

Logo, a soma em questão é igual a zero $(mod\ 2)$ se t é ímpar, e igual a $\binom{t}{t/2}$ $(mod\ 2)$ se t é par.

Agora, suponhamos que t é par e sua expansão diádica é da forma $t=2^{x_1}+2^{x_2}+\cdots+2^{x_l}$, com $1 \leq x_1 < \cdots < x_l$. Então $t/2 = 2^{x_1-1}+2^{x_2-1}+\cdots+2^{x_l-1}$ e, a menor potência de 2 que aparece na expansão diádica de $t/2$ é 2^{x_1-1}, que não aparece na expansão diádica de t. Portanto, pelo Teorema de *Lucas*, $\binom{t}{t/2}=0\ (mod\ 2)$, o que conclui a demonstração. ■

Pela afirmação,

$$
\begin{aligned}
&a_k+\left(\binom{t}{1}+\binom{t}{2}+\cdots+\binom{t}{t-2}+\binom{t}{t-1}\right)a_k+a_{k-t}=0\\
\Rightarrow\ &a_k+a_{k-t}=0\\
\Rightarrow\ &a_k=a_{k-t}.
\end{aligned}
$$

Portanto, mostramos por indução sobre t que $a_k = a_{k-t}$, para todo $1 \leq t \leq k-1$. Logo, $a_k = a_{k-1} = \cdots = a_2 = a_1$, com $a_k \in \{0,1\}$.

Suponhamos $a_k = 1$. Então,

$$\frac{1}{(1+\beta)^q} = 1 + a_1\beta + \cdots + a_k\beta^k = 1 + \beta + \cdots + \beta^k = \frac{1}{1+\beta},$$

o que implica que $q = 1$. Mas isto é uma contradição, pois q é par.

Logo $a_k = 0$ e, assim,

$$\frac{1}{(1+\beta)^q} = 1 + a_1\beta + \cdots + a_k\beta^k = 1,$$

o que implica que $q = 0$. Dessa forma, pela equação (3.15), temos

$$\text{coeficiente de } \beta^k \text{ em } (1+\beta)^t = \begin{cases} 0, & \text{se } 1 \leq t < j \\ 1, & \text{se } t = j \end{cases}.$$

Suponhamos $k < j$. Então, para $t = k$, temos

$$\begin{aligned} & \text{coeficiente de } \beta^k \text{ em } (1+\beta)^k = 0 \\ \Rightarrow\ & \text{coeficiente de } \beta^k \text{ em } 1 + \binom{k}{1}\beta + \cdots + \binom{k}{k-1}\beta^{k-1} + \beta^k = 0 \\ \Rightarrow\ & 1 = 0, \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Assim, $k = j$.

Logo, $k = j$ e $q = 0$. Desta forma, (M^{2k+1}, T) é uma involução que fixa $\mathbb{R}P^k \cup \mathbb{C}P^k$, com k par, $p = k+1$ e $q = 0$. Portanto, (M^{2k+1}, T) é uma involução do tipo II.

3.5 Conclusão

A partir do estudo desenvolvido neste capítulo, obtivemos a seguinte classificação:

Seja (M^m, T) uma involução suave sobre uma variedade fechada M^m, com conjunto de pontos fixos igual à união dos espaços projetivos $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$. Consideremos o *fixed-data* de (M^m, T)

$$\begin{array}{ccc} \eta^{m-j} & & \gamma^{m-2k} \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^j & & \mathbb{C}P^k \end{array},$$

com $W(\eta^{m-j}) = (1+\alpha)^p$ e $W(\gamma^{m-2k}) = (1+\beta)^q$.

Se $j = 0$ ou $k = 0$, então (M^m, T) é uma involução do tipo I.

Se $j = m$ ou $k = m/2$, então (M^m, T) é também uma involução do tipo I.

Se j é ímpar e p é par, então (M^m, T) é, novamente, uma involução do tipo I.

Se j é ímpar e p é ímpar, então (M^m, T) é uma involução do tipo III.

Se j é par e p é par, então não há involuções fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$ neste caso.

Agora, se j é par e p é ímpar, então temos dois casos dependendo do parâmetro $\lambda = \binom{j+1+p}{2}$: se $\lambda = 0 \ (mod\ 2)$, então (M^m, T) é uma involução do tipo III. Se

$\lambda = 1$ $(mod\ 2)$ então, se $p = 1$, (M^m, T) é uma involução do tipo III, e se $p > 1$, temos 3 possibilidades: $m < 2j$ (então não há involuções fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$ neste caso), $m = 2j$ ((M^m, T) é uma involução do tipo I) ou $m > 2j$ ((M^m, T) é uma involução do tipo II).

Capítulo

4

O caso especial $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$ com j e k pares positivos

No capítulo anterior realizamos a classificação das involuções que fixam $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, a menos de cobordismo equivariante. Conforme visto, esta classificação foi feita quase inteiramente em função da dimensão j do espaço projetivo real e do número inteiro p tal que $W(\eta^{m-j}) = (1+\alpha)^p$, onde $\eta^{m-j} \to \mathbb{R}P^j$ é o fibrado normal a $\mathbb{R}P^j$. Neste capítulo, vamos inicialmente filtrar do material do capítulo anterior, a classificação, a menos de cobordismo equivariante, das involuções que fixam a união $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$ no caso especial em que j e k são ambos pares e positivos, caso específico que permanece em aberto na classificação das involuções fixando outras uniões de espaços projetivos, especificamente $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{R}P^k$, $\mathbb{C}P^j \cup \mathbb{C}P^k$ e $\mathbb{H}P^j \cup \mathbb{H}P^k$. Por fim, vamos apresentar a classificação das ações de $\mathbb{Z}_2^r$ que fixam $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, com j e k ambos pares e positivos, $j \neq 2k$, a menos de cobordismo equivariante, obtida através do Teorema 1.11.8.

4.1 Involuções fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$ com j e k pares e positivos

Seja (M^m, T) uma involução suave sobre uma variedade fechada M^m, com conjunto de pontos fixos igual à união dos espaços projetivos $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$. Consideremos o *fixed-data* de (M^m, T),

$$\begin{array}{ccc} \eta^{m-j} & & \gamma^{m-2k} \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^j & & \mathbb{C}P^k \end{array},$$

com $W(\eta^{m-j}) = (1+\alpha)^p$ e $W(\gamma^{m-2k}) = (1+\beta)^q$. No capítulo anterior, vimos que (M^m, T) é equivariantemente cobordante a uma variedade do tipo I, II ou III. Vejamos quais são as possibilidades para (M^m, T), dentre estes modelos, no caso em que j e k são ambos pares e positivos.

Exemplo 2.1.1: Neste exemplo, uma das componentes fixadas borda como variedade com fibrado normal. Para que isto aconteça, ela deve bordar como variedade e, neste caso, j ou k deve ser ímpar. Logo, tal caso não ocorre.

Exemplo 2.1.2: Neste caso, (M^m, T) é cobordante a $(M_0^m, T_0) \cup (M_1^m, T_1)$, onde (M_0^m, T_0) fixa $\mathbb{R}P^j$ e (M_1^m, T_1) fixa $\mathbb{C}P^k$. Supondo j par, (M_0^m, T_0) é cobordante a $(\mathbb{R}P^j, \text{identidade})$ ou é cobordante a $(\mathbb{R}P^j \times \mathbb{R}P^j, twist)$, e assim $m = j$ ou $m = 2j$.

Se $m = j$, então (M_0^m, T_0) é cobordante a $(\mathbb{R}P^j, \text{identidade})$ e temos as sequintes possibilidades:

- Se j é múltiplo de 4 e $k = j/2$, então k é par e (M_1^m, T_1) é cobordante a $(\mathbb{C}P^{j/2}, \text{identidade})$, e assim (M^m, T) é cobordante a

$$(\mathbb{R}P^j, \text{identidade}) \cup (\mathbb{C}P^{j/2}, \text{identidade}). \tag{4.1}$$

- Se j é múltiplo de 8 e $k = j/4$, então k é par e (M_1^m, T_1) é cobordante a $(\mathbb{C}P^{j/4} \times \mathbb{C}P^{j/4}, twist)$, e assim (M^m, T) é cobordante a

$$(\mathbb{R}P^j, \text{identidade}) \cup (\mathbb{C}P^{j/4} \times \mathbb{C}P^{j/4}, twist). \tag{4.2}$$

Agora, se $m = 2j$, então (M_0^m, T_0) é cobordante a $(\mathbb{R}P^j \times \mathbb{R}P^j, twist)$ e temos as seguintes possibilidades:

- Se $k = j$, então k é par e (M_1^m, T_1) é cobordante a $(\mathbb{C}P^j, \text{identidade})$ e, dessa forma, (M^m, T) é cobordante a

$$(\mathbb{R}P^j \times \mathbb{R}P^j, twist) \cup (\mathbb{C}P^j, \text{identidade}). \tag{4.3}$$

- Se j é múltiplo de 4 e $k = j/2$, então k é par e (M_1^m, T_1) é cobordante a $(\mathbb{C}P^{j/2} \times \mathbb{C}P^{j/2}, twist)$, e assim (M^m, T) é cobordante a

$$(\mathbb{R}P^j \times \mathbb{R}P^j, twist) \cup (\mathbb{C}P^{j/2} \times \mathbb{C}P^{j/2}, twist). \tag{4.4}$$

Estas são as primeiras possibilidades para (M^m, T) com j e k pares e positivos, todas do tipo I.

Exemplo 2.1.3: Neste exemplo, (M^m, T) é uma involução fixando $\{pto\} \cup \mathbb{R}P^j$ ou $\{pto\} \cup \mathbb{C}P^k$, ou seja, $k = 0$ ou $j = 0$. Portanto este não é um caso onde (M^m, T) fixa $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$ com j e k ambos pares e positivos.

Exemplo do tipo II (Seção 2.2): Neste caso, (M^m, T) fixa $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, com $j = k$ par, $p = k + 1$ e $q = 0$. Portanto, para todo $j = k$ par, temos um tal exemplo e, como vimos na Seção 2.2, tal involução é equivariantemente cobordante a

$$\Gamma(\mathbb{C}P^k, \text{conjugação}), \tag{4.5}$$

ou seja, uma involução do tipo II.

Exemplo do tipo III (Seção 2.3): Na Seção 2.3 demonstramos que, se (M^m, T) é uma involução fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$ no caso geral em que j e k são inteiros não negativos, com $p = q = 1$, então m pertence a ambos os *ranges* de $\mathbb{R}P^j$ e $\mathbb{C}P^k$, e (M^m, T) é cobordante a uma união de uma variedade fixando $\{pto\} \cup \mathbb{R}P^j$ e uma variedade fixando $\{pto\} \cup \mathbb{C}P^k$ (que já são conhecidas, vistas no exemplo 2.1.3). Mais especificamente, (M^m, T) é cobordante a

$$\Gamma^{m-j-1}(\mathbb{R}P^{j+1}, T_0) \cup \Gamma^{m-2k-2}(\mathbb{C}P^{k+1}, T_1),$$

onde $T_0[x_0, x_1, ..., x_{j+1}] = [-x_0, x_1, ..., x_{j+1}]$, $T_1[y_0, y_1, ..., y_{k+1}] = [-y_0, y_1, ..., y_{k+1}]$, $\Gamma^{m-j-1}(\mathbb{R}P^{j+1}, T_0)$ é uma involução fixando $\{pto\} \cup \mathbb{R}P^j$ e $\Gamma^{m-2k-2}(\mathbb{C}P^{k+1}, T_1)$ é uma involução fixando $\{pto\} \cup \mathbb{C}P^k$.

Agora analisaremos este modelo de involução quando j e k são ambos pares e positivos, ou seja, supondo que j seja par, queremos saber se existe k par para o qual a intersecção entre o *range* de $\mathbb{R}P^j$ e o *range* de $\mathbb{C}P^k$ é não-vazia.

Recordemos que o *range* de $\mathbb{R}P^j$ é o conjunto dos números inteiros m que satisfazem

$$j + 1 \leq m \leq \begin{cases} j + 3, & \text{se } a = 1 \\ j + 2^a, & \text{se } a > 1 \end{cases},$$

onde $j = 2^a(2b + 1)$, para inteiros a e b.

Do mesmo modo, o *range* de $\mathbb{C}P^k$ é o conjunto dos números inteiros m que satisfazem

$$2k + 2 \leq m \leq \begin{cases} 2k + 6, & \text{se } c = 1 \\ 2k + 2^{c+1}, & \text{se } c > 1 \end{cases},$$

onde $k = 2^c(2d + 1)$, para inteiros c e d.

Para ilustrar e clarear esta discussão, analisaremos inicialmente alguns casos particulares.

Tomemos, por exemplo, $j = 2$. O *range* de $\mathbb{R}P^2$ é $\{m \in \mathbb{Z}; 3 \leq m \leq 5\} = \{3, 4, 5\}$. Notemos que o *range* para $\mathbb{C}P^k$, k par, que possui os menores valores possíveis, é quando $k = 2$. O *range* para $\mathbb{C}P^2$ é $\{m \in \mathbb{Z}; 6 \leq m \leq 10\} = \{6, 7, 8, 9, 10\}$. Observemos que mesmo este sendo o possível *range* de $\mathbb{C}P^k$, com k par, que possui os menores valores, estes valores ainda são maiores que todos os valores do *range* de $\mathbb{R}P^2$. Isso mostra que os *ranges* de $\mathbb{R}P^2$ e $\mathbb{C}P^k$ possuem intersecção vazia, para qualquer k par. Em outras palavras, se $j = 2$ então não há involuções do tipo III fixando $\mathbb{R}P^2 \cup \mathbb{C}P^k$, para qualquer k par.

Suponhamos agora $j = 4$. O *range* de $\mathbb{R}P^4$ é $\{m \in \mathbb{Z}; 5 \leq m \leq 8\} = \{5, 6, 7, 8\}$. Para $k = 2$, vimos acima que o *range* para $\mathbb{C}P^2$ é $\{6, 7, 8, 9, 10\}$. Dessa forma, para cada $m \in \{6, 7, 8\}$ (intersecção entre estes *ranges*), existe uma involução do tipo III fixando $\mathbb{R}P^4 \cup \mathbb{C}P^2$. Mas, se $k = 4$, o *range* para $\mathbb{C}P^4$ é $\{m \in \mathbb{Z}; 10 \leq m \leq 16\} = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$, que possui intersecção vazia com o *range* de $\mathbb{R}P^4$. Isso mostra que, para todo k par, $k \geq 4$, os *ranges* de $\mathbb{R}P^4$ e $\mathbb{C}P^k$ possuem intersecção vazia, ou seja, se $j = 4$, somente $k = 2$ providencia exemplos deste modelo de involução, mais precisamente, providencia 3 exemplos (m=6, 7 ou 8).

Como último exemplo, consideremos $j = 8$. O *range* de $\mathbb{R}P^8$ é $\{m \in \mathbb{Z}; 9 \leq m \leq 16\} = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$. Se $k = 2$, o *range* para $\mathbb{C}P^2$ é $\{6, 7, 8, 9, 10\}$, que possui intersecção não-vazia com o range de $\mathbb{R}P^8$, fornecendo exatamente 2 exemplos de involuções fixando $\mathbb{R}P^8 \cup \mathbb{C}P^2$ do tipo III. Se $k = 4$, o *range* para $\mathbb{C}P^4$ é $\{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$, que possui intersecção não-vazia com o *range* de $\mathbb{R}P^8$, fornecendo exatamente 7 exemplos de involuções fixando $\mathbb{R}P^8 \cup \mathbb{C}P^4$ do tipo III. Se $k = 6$, o *range* para $\mathbb{C}P^6$ é $\{14, 15, 16, 17, 18\}$, que também possui intersecção não-vazia com o *range* de $\mathbb{R}P^8$, fornecendo exatamente 3 exemplos de involuções fixando $\mathbb{R}P^8 \cup \mathbb{C}P^6$ do tipo III. Mas, se $k = 8$, então o *range* para $\mathbb{C}P^8$ é $\{m \in \mathbb{Z}; 18 \leq m \leq 32\}$, que possui intersecção vazia com o *range* de $\mathbb{R}P^8$. Isso mostra que, para todo k par, $k \geq 8$, os *ranges* de $\mathbb{R}P^8$ e $\mathbb{C}P^k$ possuem intersecção vazia. Logo, para $j = 8$, os casos k=2,4 e 6 providenciam exemplos deste modelo de involução, mais especificamente 12 exemplos deste modelo.

Dessa forma podemos concluir que, para um dado j par, $j \geq 4$, existem vários valores de k par de maneira que a intersecção entre os *ranges* de $\mathbb{R}P^j$ e $\mathbb{C}P^k$ seja não-vazia. A proposição abaixo visa mostrar que todo $j \geq 4$ providencia exemplos deste modelo de involução, embora a questão de, dado j par, determinar com precisão todos os k pares que fornecem exemplos, permanecerá em aberto (o que não invalida nossa classificação).

Proposição 4.1.1 *Para todo j par, $j > 2$, existe k par tal que os ranges de $\mathbb{R}P^j$ e $\mathbb{C}P^k$ possuem intersecção não-vazia.*

Prova: Suponhamos j par. Então podemos escrever $j = 2^a(2b+1)$, com $a \geq 1$.

Primeiramente suponhamos que $a = 1$, ou seja, $j = 2(2b+1)$. Como $j > 2$, então $b \geq 1$ ou seja, $2b \geq 2$. Tomemos $k = 2b$. Então k é par e o range para $\mathbb{C}P^{2b}$ é

$$2 \cdot 2b + 2 \leq m \leq \left\{ \begin{array}{ll} 2 \cdot 2b + 6, & \text{se } c = 1 \\ 2 \cdot 2b + 2^{c+1}, & \text{se } c > 1 \end{array} \right. ,$$

onde $2b = 2^c(2d+1)$, para inteiros c e d.

Temos que $2 \cdot 2b + 2 = 2(2b+1) = j$, $2 \cdot 2b + 6 = (2 \cdot 2b + 2) + 4 = j + 4$ e $2 \cdot 2b + 2^{c+1} = (2 \cdot 2b + 2) + 2^{c+1} - 2 = j + 2^{c+1} - 2$, lembrando que $2^{c+1} - 2 \geq 2^{2+1} - 2 = 6$, se $c > 1$. Desta forma, o *range* para $\mathbb{C}P^k$ é

$$j \leq m \leq \left\{ \begin{array}{ll} j + 4, & \text{se } c = 1 \\ j + 2^{c+1} - 2, & \text{se } c > 1 \end{array} \right. ,$$

com $2^{c+1} - 2 \geq 6$, se $c > 1$.

Como neste caso o *range* para $\mathbb{R}P^j$ é

$$j + 1 \leq m \leq j + 3,$$

então a intersecção dos *ranges* de $\mathbb{R}P^j$ e $\mathbb{C}P^k$ é não-vazia, como queríamos.

Suponhamos agora que $a > 1$. Neste caso $a - 1 > 0$ e assim $j/2 = 2^{a-1}(2b+1)$ é par. Tomemos $k = j/2$. O *range* para $\mathbb{C}P^{j/2}$ é

$$2 \cdot \frac{j}{2} + 2 \leq m \leq \left\{ \begin{array}{ll} 2 \cdot \frac{j}{2} + 6, & \text{se } a - 1 = 1 \\ 2 \cdot \frac{j}{2} + 2^{(a-1)+1} - 2, & \text{se } a - 1 > 1 \end{array} \right. ,$$

ou seja,

$$j + 2 \leq m \leq \left\{ \begin{array}{ll} j + 6, & \text{se } a = 2 \\ j + 2^a, & \text{se } a > 2 \end{array} \right. ,$$

lembrando que $2^a \geq 4$ pois $a > 1$.

Como neste caso o *range* para $\mathbb{R}P^j$ é

$$j + 1 \leq m \leq j + 3,$$

então a intersecção dos *ranges* de $\mathbb{R}P^j$ e $\mathbb{C}P^k$ é não-vazia, o que completa nossa prova. ∎

Observação 4.1.1 *Na demonstração da proposição acima podemos observar que, quando* $j = 2(2b+1)$*, ou seja,* $a = 1$*, o range de* $\mathbb{R}P^j$ *está contido no range de* $\mathbb{C}P^k$*, onde* $k = 2b$*, e assim este caso providencia 3 exemplos deste modelo de involução fixando* $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$*.*

Observação 4.1.2 *Ainda no caso em que* $j = 2(2b+1)$*, se tomarmos* $k = 2b+2$*, temos que* k *é par e o menor valor do range de* $\mathbb{C}P^k$ *é*

$$2k + 2 = 2(2b+2) + 2 = 2(2b+1) + 4 = j + 4,$$

que é maior do que o maior valor do range de $\mathbb{R}P^j$*, que é* $j + 3$*. Dessa forma, a intersecção entre os ranges de* $\mathbb{R}P^j$ *e* $\mathbb{C}P^{2b+2}$ *é vazia. Isso mostra que, para todo* $k > 2b$*, o range de* $\mathbb{C}P^k$ *possui intersecção vazia com o range de* $\mathbb{R}P^j$*. Em outras palavras, os únicos exemplos deste modelo, neste caso, são providenciados por* k *pares tais que* $k \leq 2b$*.*

Observação 4.1.3 *Para um* $j > 2$ *fixado,* $j = 2^a(2b+1)$ *par, quanto maior for o valor de* a*, maior será o range de* $\mathbb{R}P^j$ *e, neste caso, existem vários valores de* k *pares que fornecem exemplos deste modelo, como vimos no caso* $j = 8$*.*

Portanto, se j e k são ambos pares e positivos, $j > 2$, e se a intersecção entre os *ranges* de $\mathbb{R}P^j$ e $\mathbb{C}P^k$ é não-vazia então, para todo m pertencente a esta intersecção, a involução

$$\Gamma^{m-j-1}(\mathbb{R}P^{j+1}, T_0) \cup \Gamma^{m-2k-2}(\mathbb{C}P^{k+1}, T_1), \tag{4.6}$$

é uma involução fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, do tipo III.

Desta forma, se (M^m, T) é uma involução fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$ com j e k ambos pares e positivos, então (M^m, T) é cobordante a uma das involuções indicadas nas equações (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), (4.5) ou (4.6). Portanto a classificação, a menos de cobordismo equivariante, das involuções fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$ com j e k ambos pares e positivos, está completa. Avaliamos que a determinação numérica precisa de tais involuções do tipo III, conforme acima discutido, não enriquece ou torna mais relevante a classificação em pauta.

4.2 $\mathbb{Z}_2^r$-ações fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$ com j e k pares e positivos, $j \neq 2k$

Seja (M^m, T) uma involução fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$ com j e k ambos pares e positivos, conforme vimos na seção anterior.

Vimos na Seção 1.11.2 que podemos obter uma coleção de $\mathbb{Z}_2^r$-ações por aplicar as operações $\sigma\Gamma_t^r(M^m, T)$, para cada automorfismo $\sigma : \mathbb{Z}_2^r \to \mathbb{Z}_2^r$ e para cada $1 \leq t \leq r$, onde as $\mathbb{Z}_2^r$-ações $\Gamma_t^r(M^m, T)$ são as definidas na Seção 1.11.1, e em seguida por remover as possíveis secções dos resultantes fibrados componentes do *fixed-data*.

Mais ainda, o Teorema 1.11.8 nos diz que, se $j \neq 2k$, a menos de cobordismo equivariante, estas são todas as possíveis $\mathbb{Z}_2^r$-ações fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$ neste caso, já que $\mathbb{R}P^j$ e $\mathbb{C}P^k$ possuem a propriedade $\mathcal{H}$, pelo fato de j e k serem ambos pares e positivos.

Portanto, juntando o Teorema 1.11.8 com a classificação feita nesta tese, podemos obter, a menos de cobordismo equivariante, todas as $\mathbb{Z}_2^r$-ações fixando $\mathbb{R}P^j \cup \mathbb{C}P^k$, com j e k ambos pares e positivos, e $j \neq 2k$. O caso em que $j = 2k$ permanecerá em aberto.

Para ilustrar tal resultado, vejamos alguns exemplos relativos a tal classificação.

Exemplo 4.2.1 *Consideremos as $\mathbb{Z}_2^2$-ações que fixam $\mathbb{R}P^2 \cup \mathbb{C}P^2$. Pela seção anterior, as únicas involuções, a menos de cobordismo equivariante, que possuem $\mathbb{R}P^2 \cup \mathbb{C}P^2$ como conjunto de pontos fixos são as involuções (4.3) e (4.5), ou seja, são as involuções $(\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2, twist) \cup (\mathbb{C}P^2, identidade)$, com fixed-data*

$$\begin{array}{ccc} \xi^1 \oplus \xi^1 \oplus \xi^1 & & \mathbb{R} \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^2 & & \mathbb{C}P^2 \end{array},$$

onde $\xi^1 \to \mathbb{R}P^2$ é o fibrado linha canônico sobre $\mathbb{R}P^2$ e $\mathbb{R} \to$ é o fibrado linha trivial sobre $\mathbb{C}P^2$, e $\Gamma(\mathbb{C}P^2, conjugação)$ com fixed-data

$$\begin{array}{ccc} T\mathbb{R}P^2 & & 0 \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^2 & & \mathbb{C}P^2 \end{array},$$

onde $T\mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$ é o fibrado tangente a $\mathbb{R}P^2$ e $0 \to \mathbb{C}P^2$ é o fibrado trivial 0-dimensional sobre $\mathbb{C}P^2$.

Denotemos por (M^4, T) a involução $\Gamma(\mathbb{C}P^2, conjugação)$.

De acordo com a Seção 1.11.1, temos então as possíveis $\mathbb{Z}_2^2$-ações:

1. *$\Gamma_1^2((\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2, twist) \cup (\mathbb{C}P^2, identidade)) = (\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2; twist, identidade) \cup (\mathbb{C}P^2; identidade, identidade)$, que é uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação sobre $(\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2) \cup \mathbb{C}P^2$ que tem como fixed-data a lista*
$$(\mathbb{R}P^2; T\mathbb{R}P^2, 0, 0) \cup (\mathbb{C}P^2; 0, 0, 0).$$

2. *$\Gamma_2^2((\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2, twist) \cup (\mathbb{C}P^2, identidade)) = (\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2; twist \times twist, S) \cup (\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2; identidade, twist)$, onde $S(a,b,c,d) = (c,d,a,b)$, para todo $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$, que é uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação sobre $(\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2) \cup (\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2)$, que tem como fixed-data a lista*
$$(\mathbb{R}P^2; T\mathbb{R}P^2, T\mathbb{R}P^2, T\mathbb{R}P^2) \cup (\mathbb{C}P^2; 0, 0, T\mathbb{C}P^2),$$
onde $T\mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$ é o fibrado tangente a $\mathbb{C}P^2$.

3. *$\Gamma_1^2(M^4, T) = (M^4; T, identidade)$, que é uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação sobre M^4 que tem como fixed-data a lista*
$$(\mathbb{R}P^2; \xi^1 \oplus \xi^1 \oplus \xi^1, 0, 0) \cup (\mathbb{C}P^2; \mathbb{R}, 0, 0).$$

4. *$\Gamma_2^2(M^4, T) = (M^4 \times M^4; T \times T, twist)$, que é uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação sobre $M^4 \times M^4$ que tem como fixed-data a lista*
$$(\mathbb{R}P^2; \xi^1 \oplus \xi^1 \oplus \xi^1, \xi^1 \oplus \xi^1 \oplus \xi^1, T\mathbb{R}P^2) \cup (\mathbb{C}P^2; \mathbb{R}, \mathbb{R}, T\mathbb{C}P^2).$$

Portanto, obtivemos 4 modelos de $\mathbb{Z}_2^2$-ações fixando $\mathbb{R}P^2 \cup \mathbb{C}P^2$, obtidas dos argumentos discutidos na Seção 1.11.1. Em nenhum destes casos há secções para serem removidas. Sabemos que existem 6 automorfismos de $\mathbb{Z}_2^2$. Assim, de cada modelo acima, obtemos 6 modelos de $\mathbb{Z}_2^2$-ações fixando $\mathbb{R}P^2 \cup \mathbb{C}P^2$, por aplicar as operações $\sigma\Gamma_t^r(M^m, T)$, onde σ é um automorfismo de $\mathbb{Z}_2^2$, $t = 1, 2$.

Enfatizamos que cada tal automorfismo pode gerar novas ações, porém, em alguns casos, o automorfismo pode não modificar a ação. Por exemplo, tomando o fixed-data $(\mathbb{R}P^2; T\mathbb{R}P^2, 0, 0) \cup (\mathbb{C}P^2; 0, 0, 0)$, se um automorfismo permutar o segundo e o terceiro subfibrado, a ação resultante é a mesma. Ao contrário, se permutar o primeiro e o segundo subfibrado, a ação resultante não é a mesma.

Exemplo 4.2.2 *Vejamos agora o caso $\mathbb{R}P^8 \cup \mathbb{C}P^2$. Pela seção anterior, a involução (4.2) dada por $(\mathbb{R}P^8, identidade) \cup (\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2, twist)$ possui o seguinte fixed-data:*

$$\begin{array}{ccc} 0 & & T\mathbb{C}P^2 \\ \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^8 & & \mathbb{C}P^2 \end{array} .$$

Por outro lado, temos que o range para $\mathbb{R}P^8$ é $\{m \in \mathbb{Z}; 9 \leq m \leq 16\}$ e o range para $\mathbb{C}P^2$ é $\{m \in \mathbb{Z}; 6 \leq m \leq 10\}$. Assim, a intersecção entre os ranges de $\mathbb{R}P^8$ e $\mathbb{C}P^2$ é igual a $\{9, 10\}$. Logo, pelo modelo (4.6) da seção anterior, temos que $\Gamma^1(\mathbb{R}P^8, T_0) \cup \Gamma^3(\mathbb{C}P^2, T_1)$ e $\Gamma^2(\mathbb{R}P^8, T_0) \cup \Gamma^4(\mathbb{C}P^2, T_1)$ possuem fixed-data dados respectivamente por

$$\begin{array}{ccccccc} \xi^1 & & \xi^2 \oplus \mathbb{R}^3 & & \xi^1 \oplus \mathbb{R} & & \xi^2 \oplus \mathbb{R}^4 \\ \downarrow & \cup & \downarrow & e & \downarrow & \cup & \downarrow \\ \mathbb{R}P^8 & & \mathbb{C}P^2 & & \mathbb{R}P^8 & & \mathbb{C}P^2 \end{array} ,$$

onde $\xi^2 \to \mathbb{C}P^2$ é o fibrado linha canônico sobre $\mathbb{C}P^2$, e $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}P^2$ e $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}P^2$ são os fibrados triviais 3 e 4-dimensionais sobre $\mathbb{C}P^2$, respectivamente.

Pela seção anterior, estas são as únicas involuções, a menos de cobordismo equivariante, que possuem $\mathbb{R}P^8 \cup \mathbb{C}P^2$ como conjunto de pontos fixos.

Denotemos por (M^9, T) e (M^{10}, T') as involuções $\Gamma^1(\mathbb{R}P^8, T_0) \cup \Gamma^3(\mathbb{C}P^2, T_1)$ e $\Gamma^2(\mathbb{R}P^8, T_0) \cup \Gamma^4(\mathbb{C}P^2, T_1)$, respectivamente.

De acordo com a Seção 1.11.1, temos que:

1. $\Gamma_1^2((\mathbb{R}P^8, identidade) \cup (\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2, twist)) = (\mathbb{R}P^8; identidade, identidade) \cup (\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2; twist, identidade)$, *que é uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação sobre $\mathbb{R}P^8 \cup (\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2)$ que tem como fixed-data a lista*
$$(\mathbb{R}P^8; 0, 0, 0) \cup (\mathbb{C}P^2; T\mathbb{C}P^2, 0, 0).$$
Neste caso não há secções para serem removidas.

2. $\Gamma_2^2((\mathbb{R}P^8, identidade) \cup (\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2, twist)) = (\mathbb{R}P^8 \times \mathbb{R}P^8; identidade, twist) \cup (\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2; twist \times twist, S)$, *onde $S(a, b, c, d) = (c, d, a, b)$, para todo $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2$, que é uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação sobre $(\mathbb{R}P^8 \times \mathbb{R}P^8) \cup (\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2)$ que tem como fixed-data a lista*
$$(\mathbb{R}P^8; 0, 0, T\mathbb{R}P^8) \cup (\mathbb{C}P^2; T\mathbb{C}P^2, T\mathbb{C}P^2, T\mathbb{C}P^2).$$
Neste caso também não há secções para serem removidas.

3. $\Gamma_1^2(M^9, T) = (M^9; T, identidade)$, *que é uma* $\mathbb{Z}_2^2$*-ação sobre* M^9 *que tem como fixed-data a lista*
$$(\mathbb{R}P^8; \xi^1, 0, 0) \cup (\mathbb{C}P^2; \xi^2 \oplus \mathbb{R}^3, 0, 0).$$
Novamente, não há secções para serem removidas neste caso.

4. $\Gamma_2^2(M^9, T) = (M^9 \times M^9; T \times T, twist)$, *que é uma* $\mathbb{Z}_2^2$*-ação sobre* $M^9 \times M^9$ *que tem como fixed-data a lista*
$$(\mathbb{R}P^8; \xi^1, \xi^1, T\mathbb{R}P^8) \cup (\mathbb{C}P^2; \xi^2 \oplus \mathbb{R}^3, \xi^2 \oplus \mathbb{R}^3, T\mathbb{C}P^2),$$
não havendo secções para remover.

5. $\Gamma_1^2(M^{10}, T') = (M^{10}; T', identidade)$, *que é uma* $\mathbb{Z}_2^2$*-ação sobre* M^{10} *que tem como fixed-data a lista*
$$(\mathbb{R}P^8; \xi^1 \oplus \mathbb{R}, 0, 0) \cup (\mathbb{C}P^2; \xi^2 \oplus \mathbb{R}^4, 0, 0).$$
Através da remoção de uma secção, obtemos mais uma $\mathbb{Z}_2^2$*-ação fixando* $\mathbb{R}P^8 \cup \mathbb{C}P^2$*, cujo fixed-data é*
$$(\mathbb{R}P^8; \xi^1, 0, 0) \cup (\mathbb{C}P^2; \xi^2 \oplus \mathbb{R}^3, 0, 0),$$
o que implica que esta $\mathbb{Z}_2^2$*-ação é cobordante à* $\mathbb{Z}_2^2$*-ação descrita em 3. Portanto, não iremos considerá-la na nossa listagem.*

6. $\Gamma_2^2(M^{10}, T') = (M^{10} \times M^{10}; T' \times T', twist)$, *que é uma* $\mathbb{Z}_2^2$*-ação sobre* $M^{10} \times M^{10}$ *que tem como fixed-data a lista*
$$(\mathbb{R}P^8; \xi^1 \oplus \mathbb{R}, \xi^1 \oplus \mathbb{R}, T\mathbb{R}P^8) \cup (\mathbb{C}P^2; \xi^2 \oplus \mathbb{R}^4, \xi^2 \oplus \mathbb{R}^4, T\mathbb{C}P^2).$$
Através de remoção de duas secções, obtemos mais duas $\mathbb{Z}_2^2$*-ações fixando* $\mathbb{R}P^8 \cup \mathbb{C}P^2$*, cujos fixed-data são, respectivamente,*
$$(\mathbb{R}P^8; \xi^1, \xi^1 \oplus \mathbb{R}, T\mathbb{R}P^8) \cup (\mathbb{C}P^2; \xi^2 \oplus \mathbb{R}^3, \xi^2 \oplus \mathbb{R}^4, T\mathbb{C}P^2)$$
e
$$(\mathbb{R}P^8; \xi^1, \xi^1, T\mathbb{R}P^8) \cup (\mathbb{C}P^2; \xi^2 \oplus \mathbb{R}^3, \xi^2 \oplus \mathbb{R}^3, T\mathbb{C}P^2).$$
Observemos que a $\mathbb{Z}_2^2$*-ação cujo fixed-data é dado por*
$$(\mathbb{R}P^8; \xi^1, \xi^1, T\mathbb{R}P^8) \cup (\mathbb{C}P^2; \xi^2 \oplus \mathbb{R}^3, \xi^2 \oplus \mathbb{R}^3, T\mathbb{C}P^2)$$
é cobordante a $\mathbb{Z}_2^2$*-ação descrita em 4, e assim será descartada da nossa listagem.*

Portanto, obtivemos 6 modelos de $\mathbb{Z}_2^2$*-ações fixando* $\mathbb{R}P^8 \cup \mathbb{C}P^2$ *obtidas das* $\mathbb{Z}_2^r$*-ações* $\Gamma_t^r(M^m, T)$*, definidas na Seção 1.11.1, e mais 1 modelo obtido através da remoção de secção da* $\mathbb{Z}_2^2$*-ação 6, totalizando 7 modelos. Sabemos que existem 6 automorfismos de* $\mathbb{Z}_2^2$*. Aplicando tais automorfismos nas ações acima, obtemos novas ações em alguns casos, e em outros casos a aplicação do automorfismo pode não modificar a ação (como vimos na discussão anterior).*

Referências Bibliográficas

[1] ANDRADE, A. E. R. *Classificação de ações de* $\mathbb{Z}_2^k$ *fixando espaços projetivos relativos a diferentes anéis*. Tese (Doutorado em Matemática), UFSCar, 2013.

[2] ANDRADE, A. E. R.; PERGHER, P. L. Q.; URA, S. T. $\mathbb{Z}_2^k$*-actions fixing the disjoint union of odd dimensional projective spaces*. To appear in Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin.

[3] CAPOBIANCO, F. L. *Stationary points of* $(Z_2)^k$*-actions*. Proc. Amer. Math. Soc. 61, n. 2, 377-380, 1976.

[4] CONNER, P. E. *Diffeomorphisms of period two*. Michigan Math. Journal 10, 341-352, 1963.

[5] CONNER, P. E. *Differentiable periodic maps*. second edition. Springer-Verlag, 1979.

[6] CONNER, P. E.; FLOYD, E. E. *Differentiable periodic maps*. Springer-Verlag, 1964.

[7] DOLD, A. *Erzeugend der Thomshen algebra* $\mathcal{N}$. Math. Z., Vol. 65, 25-35, 1956.

[8] HOU, D.; TORRENCE, B. *Involutions fixing the union of odd-dimensional projective spaces*. Canadian Math. Bull. 37, 66-74, 1994.

[9] JIANG, G. R.; YAN, C. Z. *Involutions fixing the disjoint union of many projective* $2r+1$*-spaces*. Northeast. Math. J. 7, n. 4, 473-479, 1991.

[10] LIU, X. G. *Involutions fixing the disjoint union of copies of* $\mathbb{H}P^n$. J. Jilin Univ. Sci. 40, n. 2, 119-121, 2002.

[11] LUCAS, E. *Théorie des nombres*. 1878; reprint, Librarie Blanchard, Paris, 1961.

[12] MILNOR, J. W.; STASHEFF, J. D. *Characteristic classes*. Princenton University Press, 1974.

[13] MONTGOMERY, D.; ZIPPIN, L. *Topological Transformation Groups*. Interscience Publishers, New York - London, 1955.

[14] OLIVEIRA, R. *Involuções Comutantes Fixando Dois Espaços Projetivos Pares*. Tese (Doutorado em Matemática), UFSCar, 2002.

[15] OLIVEIRA, R; PERGHER, P. L. Q. *Commuting involutions whose fixed point set consists of two sapecial components*. Fundamenta Mathematicae, 201, 241-259, 2008.

[16] OLIVEIRA, R; PERGHER, P. L. Q. *$(\mathbb{Z}_2)^k$-actions with a special fixed point set*. Fund. Math., 186, 97-109, 2005.

[17] OLIVEIRA, R; PERGHER, P. L. Q. ; RAMOS, A. *$\mathbb{Z}_2^k$-Actions fixing $\mathbb{R}P(2) \cup \mathbb{R}P(even)$*. Algebraic and Geometric Topology, Vol. 7, 29-45, 2007.

[18] PERGHER, P. L. Q. *$(\mathbb{Z}_2)^k$-actions whose fixed data has a section*. Trans. Amer. Math. Soc., 353, 175-189, 2001.

[19] PERGHER, P. L. Q. *Bordism of two commuting involutions*. Proc. Amer. Math. Soc. 126, n. 7, 2141-2149, 1998.

[20] PERGHER, P. L. Q. *The union of a connected manifold and a point as fixed set of commuting involutions*. Topology Appl. 69, 71-81, 1996.

[21] PERGHER, P. L. Q.; RAMOS, A. *$(\mathbb{Z}_2^k)$-Actions fixing $K_dP(2^s) \cup K_dP(even)$*. Topology and its Applications, Vol. 156, 629-642, 2009.

[22] PERGHER, P. L. Q.; STONG, R. E. *Involutions fixing $\{point\} \cup F^n$*. Transform. Groups 6, 79-86, 2001.

[23] RAMOS, A. *Involuções Fixando Espaços Projetivos*. Tese (Doutorado em Matemática), UFSCar, 2007.

[24] ROYSTER, D. C. *Involutions fixing the disjoint union of two projective spaces*. Indiana University Mathematics, Journal 29, n.2, 267-276, 1980.

[25] STONG, R. E. *Equivariant Bordism and $(\mathbb{Z}_2)^k$-Actions*. Duke Math. Journal 37, 779-785, 1970.

[26] STONG, R. E. *Involutions fixing projective spaces*. Michigan Math. Journal 13, 445-447, 1966.

[27] THOM, R. *Quelques propriétés globales des variétés differentiables*. Comm. Math. Helv. 28, 18-88, 1954.

[28] URA, S. T. *Duas involuções comutantes fixando certas variedades de Dold e certas uniões de espaços projetivos a anéis diferentes*. Tese (Doutorado em Matemática), UFSCar, 2015.

[29] WALL, C. T. C., *Determination of Cobordism Ring*. Annals of Mathematics, Vol. 72, nº 2, p. 292-311, 1960.

Índice Remissivo